Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Estabilidad y dinámica en materiales granulares : comportamiento aislado y colectivo de granos

Aguirre, María Alejandra

2001

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Aguirre, María Alejandra. (2001). Estabilidad y dinámica en materiales granulares : comportamiento aislado y colectivo de granos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3387_Aguirre.pdf

Cita tipo Chicago:
Aguirre, María Alejandra. "Estabilidad y dinámica en materiales granulares : comportamiento aislado y colectivo de granos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2001.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3387_Aguirre.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

"Estabilidad y dinámica en materiales granulares: comportamiento aislado y colectivo de granos"

por María Alejandra Aguirre

Directora de Tesis: Dra. Adriana Calvo, Universidad de Buenos Aires, Argentina.

Codirectora de Tesis: Dra. Irene Ippolito, Université de Rennes I, Francia.

Lugar de trabajo: Grupo de Medios Porosos, Departamento de Física, Facultad de Ingeniería.

Trabajo para optar por el Título de Doctor en Ciencias Físicas
Agosto 2001

№ 3387

Resumen

Se estudia el comportamiento de un flujo de granos sobre la pendiente de un apilamiento. El trabajo se divide en dos partes:

1) Movimiento de una esfera sobre un lecho granular

Se analiza el movimiento individual de un grano aislado sobre un lecho rugoso fijo. Dicha interacción se modeló experimentalmente a través del movimiento de una esfera de diámetro D sobre un lecho inclinado constituido por granos de diámetro medio $d < D$. Según el valor del ángulo de inclinación de la superficie respecto de la horizontal, se pueden observar tres regímenes de movimiento diferentes: desacelerado, con velocidad constante y acelerado.

Los resultados experimentales permitieron comprender en mayor detalle los mecanismos involucrados en la disipación de la energía que una esfera gana en su descenso por un plano inclinado. Estos mecanismos permiten a su vez comprender el régimen desacelerado que se observa a ángulos de inclinación pequeños.

En la región de velocidad constante donde la fuerza que actúa sobre la partícula es de tipo viscosa, se determinan mediante técnicas de sonido y video, la frecuencia de choque de la esfera móvil con las bolitas de vidrio de la superficie a fin de comprender la forma en que dicha esfera disipa energía por colisiones. Se observa como varía esta fuente de disipación en función del ángulo de inclinación.

2) Estabilidad y dinámica en empaquetamientos granulares

Se estudia el proceso de avalancha donde existe una interacción colectiva entre los granos. Un empaquetamiento de esferas monodispersas colocadas en una caja cerrada con humedad controlada se inclina suavemente hasta que el sistema se desestabiliza dando lugar a una avalancha. Dicho proceso se caracteriza mediante la masa desalojada y dos ángulos característicos:

máximo ángulo de estabilidad: es el que forma la superficie libre del empaquetamiento con la horizontal cuando el sistema se desestabiliza y comienza la avalancha.

- ángulo de reposo: es el que forma la superficie libre del empaquetamiento con la horizontal cuando la avalancha concluye.

Se analizó la influencia de la cantidad de capas granulares (N), la humedad relativa ambiente, la fracción de compactación inicial y el tamaño del empaquetamiento en la variación de estos ángulos críticos y de la masa de la avalancha.

Se encuentra que para empaquetamientos con un número de capas mayor que un cierto valor crítico N_c, el proceso de avalanchas sólo afecta a las N_c capas superficiales y tanto los ángulos críticos como la masa desplazada, son independientes de N.

Finalmente se verifica la relación que para sistemas abiertos existe entre el ángulo de reposo y el denominado ángulo neutro donde un flujo de granos (avalancha) no produce erosión ni sedimentación sobre la superficie de un empaquetamiento granular.

Palabras Claves: Medios granulares, Flujo granular, Avalancha.

Stability and dynamics of granular material: isolated and collective behavior of grains.

Abstract

The behavior of a flow of grains over the slope of a granular packing is studied. This work is presented in two parts:

1) Motion of a sphere over a granular bed.

Individual motion of an isolated grain over a granular bed is studied. This interaction is experimentally modeled by means of the motion of a sphere of diameter D over an inclined bed constituted of grains with mean diameter d < D. According to the slope of the granular surface, three different regimes are observed: decelerated, constant velocity and accelerated motions.

Experimental results lead to understand in detail the energy dissipation mechanisms involved when a sphere gains energy rolling down an inclined rough plane. This mechanisms also allow us to understand the decelerated motion that occurs at low inclination angles.

In the constant velocity regime where there is a viscous dissipative force acting over the sphere its collision frequency with the grains that constitute the bed is determined using acoustic and video techniques. This helps to understand the way in which the sphere dissipates energy by collisions. The variation of this dissipative source with the inclination angle of the granular bed is studied.

2) Stability and dynamics in granular packings.

The avalanche process where there is collective interaction between grains is studied. A monodisperse glass sphere packing under controlled humidity is slowly inclined until the system loose its stability and an avalanche takes place. This process is characterized by the avalanche mass and two characteristics angles:

- Maximum angle of stability: the angle between the packing free surface and the horizontal at which the system looses its stability and when the avalanche begins.
- Angle of repose: the angle between the packing free surface and the horizontal when the avalanche ends.

The influence of the number of granular layers (N), relative humidity, initial packing fraction and packing size on the critical angles and the avalanche mass is analyzed.

It is found that for packing with more than a certain critical number of layers N_c, the avalanche process only involves the N_c superficial layers and both the critical angles and the avalanche mass are independent on N.

Finally, for open systems, the relation between the angle of repose and the neutral angle where a granular flow (avalanche) produces no erosion nor sedimentation over the granular packing surface is verified.

Keywords: Granular media, Granular flow, Avalanche.

Indice

Introducción **I**

Primera Parte: Movimiento de una esfera sobre un lecho granular

Capítulo I: Antecedentes **7**

I.1. Algunos trabajos relevantes 7
A. Jan et al (1992) *7*
B. Riguidel, Hansen y Bideau (1994) *8*
C. Aguirre et al (1996) *10*

Capítulo II: Régimen A **15**

II.1. Descripción de las experiencias 15

II.2. Procedimiento experimental 18
A. Determinación de la distancia recorrida L_t *18*
B. Registro de las trayectorias *18*

II.3. Resultados experimentales 19
A. Distancia recorrida para bajos valores de energía cinética inicial *19*
B. Distancia recorrida para alta energía cinética inicial: Transición A-B *24*
C. Modelo físico *28*
D. Simulación numérica *33*

II.4. Resumen 35

Capítulo III: Régimen B **37**

III.1. Estudios preliminares 37

III.2. Puesta a punto del procedimiento experimental 39
A. Superficie rugosa *39*
B. Técnica acústica: Adquisición de la señal e identificación de choques *40*
C. Registro de las trayectorias *46*

III.3. Resultados 46
A. Caracterización de los distintos regímenes *46*
B. Frecuencia de choque 48
C. Frecuencia espacial de choques *56*
D. Mecanismos de disipación *61*

III.4. Resumen 64

Segunda Parte: Dinámica y estabilidad en empaquetamientos granulares.

Capítulo I: Antecedentes **67**

I.1. Flujo de material granular 67
I.2. Avalanchas 70

Capítulo II: Proceso de avalancha **80**

II.1. Dispositivo y procedimiento experimental 80

II.2. Observaciones experimentales 86

II.3. Resultados experimentales 91
II.3.1. Determinación de θ_M y δ en un sistema con un número fijo de capas 91
II.3.2. Influencia del número de capas 97

II.4. Resumen 105

Capítulo III: Angulos característicos **106**

III.1. Influencia de la humedad 106
III.2. Influencia de la fracción de compactación inicial 108
III.3. Influencia del tamaño del empaquetamiento 113
III.3.1. Procedimiento experimental 114
III.3.2. Resultados experimentales 115
III.4. Determinación del ángulo neutro 120
III.4.1. Dispositivo y técnica experimental 121
III.4.2. Resultados 123
III.5. Resumen 125

Conclusiones generales **127**

Bibliografía **130**

Agradecimientos **134**

Introducción

Por el ápice abierto el cono inverso
Deja caer la cautelosa arena.
Oro gradual que se desprende y llena
El cóncavo cristal de su universo.

Hay un agrado en observar la arcana
Arena que resbala y que declina
Y, a punto de caer, se arremolina
Con una prisa que es del todo humana.

Jorge Luis Borges
"El reloj de arena"
(El Hacedor)

Introducción

Se denomina material granular a todo aquel material compuesto por una fase sólida no consolidada, los granos, rodeada por una fase fluida que puede ser líquida o gaseosa. En este último caso estos materiales se conocen como medios granulares secos.

Los primeros trabajos sobre materiales granulares datan de fines del siglo XVIII y principios del siglo XIX:

Charles de Coulomb [Coulomb] describe numerosas observaciones experimentales sobre el equilibrio de apilamientos granulares, la estabilidad de edificaciones de piedra y otras construcciones, dando origen a las conocidas leyes de Coulomb sobre el rozamiento sólido – sólido y su extensión a materiales granulares.

- Michael Faraday [Faraday] fue el primero en preguntarse sobre el papel que juega el aire en la formación de un apilamiento granular. Su interrogante no ha sido plenamente contestado hasta estos días.

A fines del siglo XIX aparecen los trabajos de O. Reynolds [Reynolds] quien introduce el concepto de dilatancia y comenta la existencia de ángulos críticos en un apilamiento, tema aún hoy de gran actualidad que ha dado lugar a un número creciente de publicaciones en el área.

Cabe resaltar que el 80% [Duran 97] de la materia conocida se encuentra en forma de granos: carbón, arena, grava, cereales, sal y otros. También algunos polvos son considerados granulares siempre y cuando sus constituyentes sean suficientemente grandes (mayor que 1μ) como para despreciar la agitación térmica.

Por lo tanto, muchas industrias deben lidiar con materiales granulares, entre ellas podemos mencionar: la farmacéutica, la de la construcción, la minera, la química, la agropecuaria, la alimenticia. A nivel mundial el tratamiento de materiales granulares consume aproximadamente el 10% de los recursos energéticos del planeta y ocupan el segundo lugar en importancia después del agua [Duran 97]. Puede verse entonces, que la comprensión de los materiales granulares tanto en situación estática como en condiciones dinámicas trae aparejado un gran impacto económico.

Las industrias mencionadas deben controlar diversos procesos relacionados a esta materia no consolidada (manipulación, transporte y almacenamiento) en los que son

habituales problemas tales como la separación o segregación de granos según sus distintas propiedades físicas (tamaño, geometría, densidad, etc) lo que dificulta la obtención de mezclas homogéneas. Otro problema que aparece durante la manipulación de material granular es la formación de arcos o bóvedas que bloquean u obstruyen el flujo a la salida de un dispositivo, por ejemplo, de un silo.

También a otra escala, el estudio del movimiento de este tipo de material es de gran importancia. Diversos procesos geológicos como por ejemplo, desplazamiento de placas tectónicas, avalanchas, aludes, formación y movimiento de dunas, se han comenzado a estudiar con las técnicas aplicadas al estudio de la dinámica granular.

De manera general, los medios granulares pueden presentar comportamientos muy disímiles, en algunos casos semejante al de un líquido, en otros al de un gas o al de un sólido.

Al igual que los líquidos, estos materiales fluyen y tienden a adquirir la forma del recipiente que los contiene. Sin embargo, a diferencia de la presión hidrostática, la presión en la base de un recipiente lo suficientemente alto, es independiente de la altura que alcancen los granos ya que el peso de éstos es reorientado hacia las paredes del recipiente por medio de la red de contactos. Si el material granular es sometido a vibraciones periódicas pueden aparecer rollos de convección [Faraday] aunque éstos presentan diferencias importantes respecto de los rollos convectivos en líquidos [Savage 88, Evesque 89, Clément 92].

Por otro lado, el flujo de material granular poco denso resulta dominado por las colisiones entre granos dando lugar a un comportamiento de tipo gaseoso. Aunque en estos sistemas con granos de tamaño superior a 100μ y velocidades del orden del cm/s la agitación térmica no juega ningún rol, igualmente es posible definir una temperatura granular del orden de los 10^{11}K. Sin embargo, no es posible aplicar la teoría cinética a los gases granulares ya que éstos difieren esencialmente de los gases moleculares en el tamaño de sus constituyentes así como también en que las colisiones son inelásticas. El carácter disipativo de las colisiones permite encontrar aglomerados de granos sin necesidad de fuerzas atractivas.

Finalmente, los granos confinados en un recipiente pueden forman estructuras compactas muy estables, denominadas arcos o bóvedas capaces de sustentar grandes pesos y de encerrar espacios sin granos.

Todavía no se ha podido cuantificar plenamente todos los mecanismos y parámetros que determinan la transición de un comportamiento a otro. Entre los factores a estudiar están:

- las interacciones disipativas entre los granos
- la historia del empaquetamiento, en particular la formación del mismo que da lugar a diferentes estados de compactación inicial del sistema.
- las interacciones de los granos con el fluido circundante (despreciables en el caso de ser aire).

Los objetivos de la presente tesis son:

1) Determinar el tipo de interacciones disipativas que existen entre los granos y comprender el papel que juegan las colisiones entre ellos en los distintos tipos de flujo de un material granular. Para ello se estudia experimentalmente el comportamiento aislado de una esfera moviéndose sobre un lecho granular inclinado.

2) Poner de manifiesto alguno de los diversos factores que influyen en el equilibrio y en la dinámica de empaquetamientos granulares donde los efectos colectivos entre los granos son relevantes. Para ello se diseñaron experiencias en las que se estudia el proceso de avalancha que se produce cuando un empaquetamiento granular es inclinado progresivamente.

Por lo tanto, el trabajo está dividido en dos partes. La primera de ellas está dedicada a investigar los mecanismos de disipación de energía cuando un grano aislado se mueve sobre una superficie rugosa.

En el capítulo I se presentan los estudios previos -experimentales, numéricos y teóricos- más relevantes.

En los capítulos II y III se explican en detalle las experiencias realizadas a fin de comprender estos mecanismos, se discuten y analizan los resultados obtenidos.

En la segunda parte de la tesis se estudia la dinámica y estabilidad de un empaquetamiento granular y los diversos factores que influyen sobre las mismas.

En el capítulo I se detallan los antecedentes más relevantes.

El proceso de avalancha se describe en el capítulo II y en él también se estudia la influencia de la cantidad de capas de material granular en la estabilidad del empaquetamiento de granos.

En el capítulo III se determina la influencia de la humedad ambiente, de la fracción de compactación inicial y del tamaño del empaquetamiento sobre los ángulos que caracterizan la estabilidad de los sistemas.

Finalmente se extraen conclusiones generales.

Movimiento de una esfera sobre un lecho granular

Mecanismos de disipación de energía

La arena de los ciclos es la misma
E infinita es la historia de la arena;
Así, bajo tus dichas o tus penas,
La invulnerable eternidad se abisma.

No se detiene nunca la caída.
Yo me desangro, no el cristal. El rito
De decantar la arena es infinito
Y con la arena se nos va la vida.

Jorge Luis Borges
"El reloj de arena"
(El Hacedor)

Capítulo I

Antecedentes

A fin de comprender las propiedades de un flujo granular en vista a estudiar las interacciones entre granos, se han realizado diferentes trabajos destinados a investigar el movimiento de un grano aislado sobre la superficie de un apilamiento de granos. Para ello se ha modelizado la situación reemplazando la superficie del apilamiento por una superficie plana constituida de granos (2D) o por una línea de granos (1D).

I. 1. Algunos trabajos relevantes

A. Jan et al (1992).

Con el objetivo de comprender la importancia relativa de los distintos tipos de fuerzas que actúan en el desplazamiento de un medio granular Jan *et al.* [Jan 92] estudiaron el movimiento unidimensional de una esfera en un canal inclinado en cuyo fondo dispusieron bolitas ordenadas del mismo material y radio (r) que la esfera móvil. Utilizaron tres materiales diferentes e independientemente del tamaño y densidad de las bolitas, encontraron tres regímenes de movimiento según el ángulo de inclinación del canal, θ:

-Régimen A: movimiento desacelerado para $\theta \leq 11°$.

-Régimen B: movimiento a velocidad constante para $11° < \theta < 21°$.

-Régimen C: movimiento acelerado para $\theta \geq 21°$.

Jan *et al* propusieron además, una descripción teórica del régimen B con la que encuentran una relación de la velocidad constante a la que se mueve la esfera (v) con los parámetros experimentales. Consideran dos colisiones sucesivas suponiendo que el grano se desplaza aproximadamente una distancia 2r, medida entre los centros de dos bolitas vecinas. En este caso, el balance de energía que tiene en cuenta la variación en la

energía potencial y la energía perdida por colisión y por fricción con el plano, se puede expresar de la siguiente manera:

$$m\, g\, 2r\, \mathrm{sen}(\theta) = k\, m\, v^2 + \mu\, m\, g\, 2r \cos(\theta) \qquad (1.1)$$

donde m es la masa de la bolita, g la aceleración de la gravedad, k el coeficiente de colisión relacionado al coeficiente de restitución y μ el coeficiente de fricción. Tanto k como μ fueron determinados empíricamente y encontraron que a medida que la pendiente disminuye también lo hace la fuerza debida a las colisiones mientras que aumenta la debida al rozamiento.

Posteriormente Ristow *et al.* [Ristow 94] variaron la relación de tamaño de la bolita en movimiento (R) y de las que conforman el lecho fijo (r) y verificaron experimental y numéricamente que la expresión 1.1 sólo es válida para $1 < R/r < 2$.

B. Riguidel, Hansen y Bideau (1994).

Riguidel *et al.* [Riguidel 94] estudian la segregación de partículas por tamaño, provocada por flujo superficial. Este efecto se observa en apilamientos granulares, por ejemplo en pilas de cereales, arena o en montañas: los granos o rocas más grandes están ubicados en la base.

El flujo en la superficie de una pila de arena es un complicado fenómeno colectivo se hace difícil diferenciar los granos que forman la pila de los que están en movimiento en su superficie. Riguidel *et al.* proponen un modelo en el que simplifican el problema estudiando el fenómeno de segregación debido solo a la interacción entre cada grano y la superficie rugosa sobre la que se mueve, eliminando las interacciones entre los granos en movimiento. El trabajo consiste en estudiar el movimiento de una esfera de acero de radio R sobre una superficie rugosa inclinada un ángulo θ respecto de la horizontal. La superficie se obtiene pegando esferas de vidrio de radio medio r, sobre un plano y la rugosidad relativa del sistema se define como $1/\phi = r/R$.

Observan también tres regímenes de movimiento distintos: acelerado, desacelerado y de velocidad v constante, según sean los valores de los parámetros θ y ϕ y también

proponen que el flujo está determinado por un balance entre la energía ganada por acción del campo gravitatorio y la energía perdida debido a colisiones y por fricción.

En el régimen de velocidad constante, la partícula sigue, sobre el plano inclinado, una trayectoria zigzagueante similar a un "random walk" dirigido.

Para modelar el movimiento de la partícula utilizan una ecuación tipo Langevin, despreciando el efecto de la fricción:

$$m_* \ddot{l} + \eta(l, \vec{x})(\dot{l}/r) = m\, g\, \mathrm{sen}(\theta) \cos(\sigma(l, \vec{x})) \qquad (1.2)$$

donde $\vec{x}(t)$ y $l(t)$ son las posición de la bolita y la longitud recorrida al tiempo t, m es su masa, m_* la masa dinámica efectiva considerando el movimiento de rotación y $\eta(\dot{l}, r)$ es el término de ruido que indica el momento perdido por choques, en la dirección del movimiento. $\eta(\dot{l}, r)$ presenta fluctuaciones espaciales no correlacionadas alrededor de un valor medio no nulo y depende del desorden local de la superficie (por lo tanto, de $\vec{x}$) y de la intensidad de los choques, es decir de la velocidad local ($\dot{l}$) de la bolita. Dado que r es la distancia típica entre choques, $\dot{l}/r$ indica la frecuencia de los mismos. Para modelar los cambios aleatorios en la dirección de movimiento de la bolita, que producen variaciones en la proyección de la fuerza gravitatoria en dicha dirección, se agrega otro término de ruido: $\sigma(\dot{l}, t)$. Suponiendo que la dirección de la partícula varía poco, $\sigma(\dot{l}, t)$ es pequeño y $\cos(\sigma(\dot{l}, t)) \approx 1$.

Dado que en su recorrido la partícula sólo pasa una vez por cada punto de la trayectoria, es posible cambiar las dependencias $(\dot{l}, \vec{x})$ por dependencias en $(\dot{l}, t)$.

Para el régimen de velocidad constante, promediando en el tiempo se obtiene: $\langle \dot{l} \rangle = v$ y por lo tanto $\dot{l} = v + \delta$ con $\langle \delta \rangle = 0$. Suponiendo $\eta = \langle \eta \rangle + \Delta\eta$ e introduciendo una función aleatoria $\gamma(t)$ con $\Delta\gamma$ función no correlacionada en el tiempo, tal que $\langle \eta \rangle = m \langle \gamma \rangle \phi^a v^b$ y $\Delta\eta = m \langle \gamma \rangle \phi^c v^b$ (con exponentes a, b y c desconocidos) se puede reescribir la ecuación (1.2) a primer orden. Promediando estadísticamente sobre los ruidos posibles se obtiene:

$$v\phi^a = \frac{r\, g}{\langle \gamma \rangle v^b} \mathrm{sen}(\theta) \qquad (1.3)$$

Los valores de a y b se obtuvieron con los datos experimentales resultando b = 0 y a = -3/2, lo que indica que la fuerza sobre la partícula es de tipo viscoso. El mecanismo que lleva a una fuerza de este tipo todavía no se conoce.

Riguidel *et al.* también estudian numérica (2D) y experimentalmente, el umbral de estabilidad θ_s que define la estabilidad de un grano sobre una superficie rugosa inclinada. Este ángulo depende del desorden de la superficie y de la rugosidad relativa $1/\phi$ del sistema. Encuentran θ_s a través de la siguiente experiencia: colocan una cierta cantidad de esferas sobre el plano en posición horizontal de forma que cada una de las esferas se encuentra en equilibrio estable en una cavidad formada por tres de los granos (pequeñas esferas de vidrio) que constituyen la superficie rugosa. Las esferas tienen velocidad inicial nula y desde esta situación levantan suavemente el plano, incrementando θ progresivamente. Miden los ángulos para los cuales cada una de las esferas comienza a descender sobre el plano. Se repite el experimento hasta obtener 300 valores de θ. Obtienen que la distribución de estos ángulos de equilibrio es gaussiana y su valor medio define θ_s. Encuentran que tanto los valores experimentales como los numéricos pueden ser ajustados con una ley de potencia $\theta_s \propto \phi^{-0.8}$.

C. Aguirre et al (1996)

Los trabajos realizados en el Grupo de Medios Porosos de la Facultad de Ingeniería de la Universidad de Buenos Aires (FIUBA) [Aguirre 96, Aguirre 97] complementan y amplían los trabajos de Riguidel *et al.*

El resultado central de las experiencias previas [Riguidel 94, Aguirre 96, Aguirre 97] realizadas en el dispositivo descripto, es que el movimiento de descenso de una esfera sobre un plano inclinado rugoso presenta tres regímenes delimitados por los valores de los siguientes parámetros:

- El ángulo de inclinación de la superficie rugosa: θ
- La rugosidad del sistema: $1/\phi = r/R$
- El tamaño de los granos (r) que constituyen el lecho rugoso.

En todas las experiencias se mantiene r constante y se varía solo R, lo que produce una variación en ϕ.

Se encuentra un primer régimen (régimen A) donde la esfera desciende con movimiento desacelerado hasta quedar atrapada en alguna rugosidad de la superficie. Este comportamiento ocurre para todo θ y valores pequeños de ϕ ($R < 2r$) o para todo ϕ y pequeños valores de θ ($\theta \leq 2°$).

Por el contrario, para grandes valores de θ y de ϕ se observa que la esfera desciende con movimiento acelerado y dando saltos. Este régimen se denomina C.

Para valores intermedios de θ o ϕ se encuentra el régimen B en el cual la energía cinética ganada en el descenso se disipa a través de las sucesivas colisiones que la esfera sufre con el lecho rugoso y, en consecuencia, la esfera desciende con velocidad constante en la dirección de máxima pendiente, la cual es independiente de la velocidad inicial. Este régimen también fue analizado en detalle por Samson *et al* [Samson 97b] obteniendo resultados acordes a los nuestros.

Un análisis detallado de estos regímenes y de las variables que influyen en la ocurrencia de los mismos puede encontrarse en un trabajo realizado previamente [Aguirre 96, Aguirre 97]. Realizamos a continuación un resumen de los resultados más importantes, dado que parte del presente trabajo está motivado en la necesidad de comprender los mecanismos de disipación de energía.

Se utilizaron esferas rodantes de tres materiales distintos (acero, vidrio y plástico) y superficies rugosas con granos de distinta regularidad (esferas de vidrio y granos de arena) que dan lugar a seis diferentes sistemas superficie rugosa - esfera rodante.

En la figura 2.1 se muestran los diagramas correspondientes a los seis casos antes mencionados donde puede verse para qué valores del par (θ, ϕ) se encuentra cada régimen y se interpolaron las líneas de transición correspondientes.

Se encontró que para los seis sistemas, la línea de transición A-B, sigue una dependencia del tipo ley de potencia: $\theta_{A\text{-}B} = \theta_{0i}\, \phi^{-1.33}$ donde el factor θ_{0i} caracteriza a la superficie y el exponente tiene una incerteza del 3.75% (±0.05). En cambio, la línea B-C resulta bien descripta por una variación exponencial que depende sólo del material de la esfera rodante: $\theta_{B\text{-}C} = \theta_0^i + K^i \exp(-A^i\, \phi)$, el valor de θ_0^i varía entre 0.3° y 3.6°, obteniendo valores mayores para los sistemas de base de arena, K^i y A^i varían con el material de las esferas rodantes.

Para los seis sistemas mencionados, se midió también el umbral de estabilidad θ_S. Se encontró que θ_S depende de la rugosidad del sistema $1/\phi$ y de la regularidad de los granos que constituyen el lecho fijo. Se obtuvo una ley de potencia $\theta_S = \theta_0\, \phi^{\alpha}$, donde

α = -0.6 ± 0.1 es independiente del material de la esfera rodante y de la regularidad de los granos del lecho mientras que θ_0 depende del tipo de lecho utilizado (θ_0^{arena} = 43° ± 1°, θ_0^{vidrio} = 34° ± 1°). La unicidad del exponente α indica que la homogeneidad y compacidad de las dos superficies utilizadas es semejante, es decir una distribución similar de tamaños de cavidades en ambas superficies. La mayor irregularidad de los granos de arena del lecho imponen un mayor ángulo θ_s para desestabilizar a un grano (esfera) sobre dicho lecho.

Se verificó también que para todos los sistemas, en el régimen B (de velocidad constante), actúa una fuerza disipativa de tipo viscoso, lo que se pone de manifiesto en que la velocidad media en dicho régimen es lineal con sen(θ). También se encontró que dicha velocidad verifica una ley de potencia en ϕ tanto para los sistemas con base de arena o de esferas de vidrio. Se obtuvo: $\langle V^{arena} \rangle$ = 1 cm/s + 5.5 cm/s $\phi^{1.31}$senθ y $\langle V^{vidrio} \rangle$ = 2.2 cm/s + 5.5 cm/s $\phi^{1.44}$senθ. En el caso de la superficie de arena el exponente 1.31 y la constante 1.0cm/s se obtuvieron con una incerteza de ±0.01 y ±0.4cm/s respectivamente. Para la otra superficie (vidrio) el exponente 1.44 y la constante 2.2cm/s se obtuvieron con una incerteza de ± 0.02 y ±0.4cm/s respectivamente. Para ambas superficie el coeficiente 5.5 cm/s se obtuvo con una incerteza de aproximadamente el 9%.

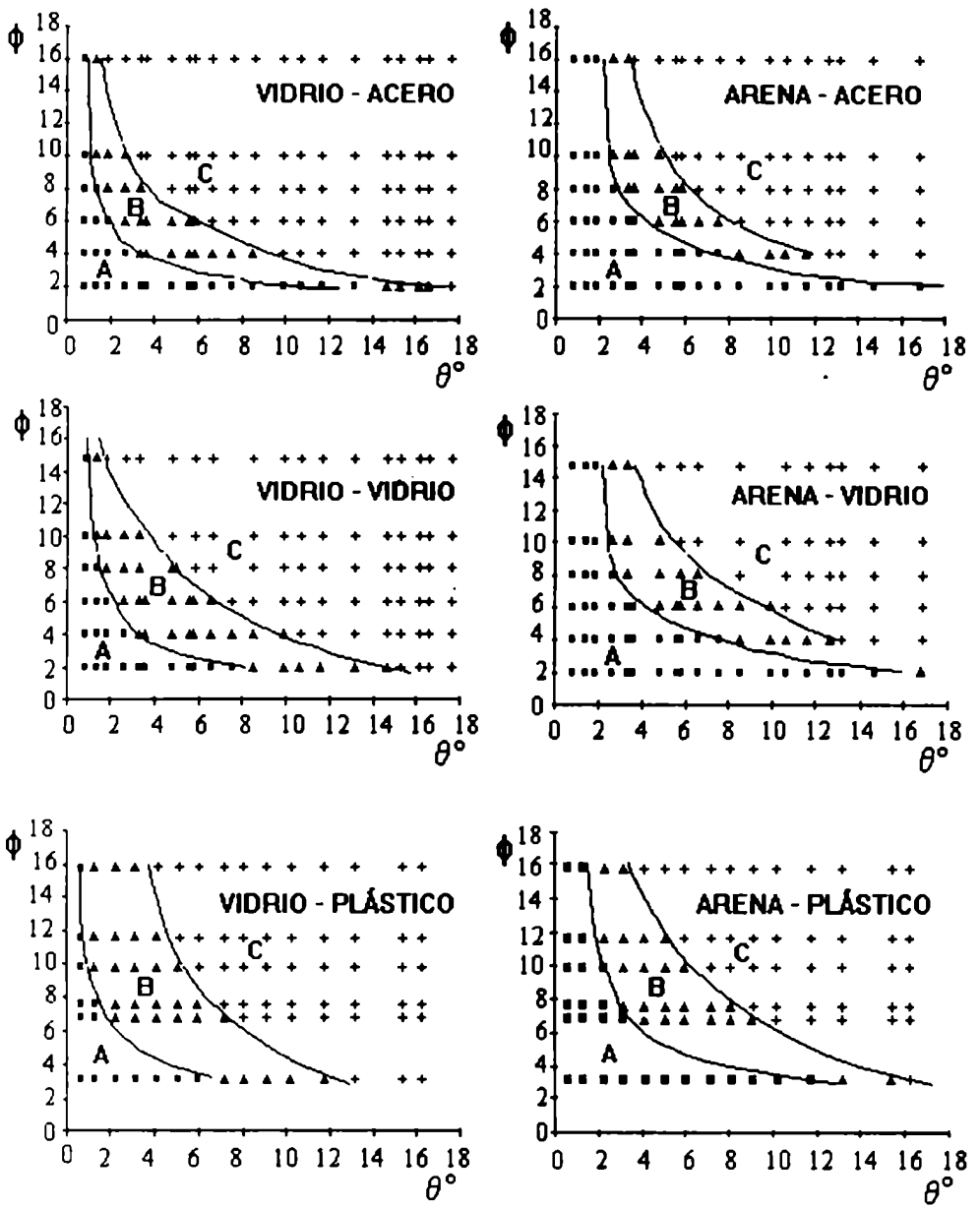

Figura I.1: Diagrama de fases correspondientes a los distintos sistemas (superficie rugosa - esfera rodante).

Los mecanismos básicos de disipación que dan lugar a los tres regímenes son: el entrampamiento y rozamiento con el lecho rugoso subyacente y la interacción entre los granos. Un primer análisis permite concluir que en el régimen A la disipación de energía predomina frente a la acción del campo gravitatorio determinando el entrampamiento de la esfera rodante mientras que en el régimen B la acción gravitatoria logra compensar la disipación de energía produciendo un movimiento estacionario (velocidad constante).

Sin embargo, es importante estudiar en detalle estos mecanismos y caracterizar la importancia de ellos tanto en el régimen A como en el B.

Este es uno de los objetivos de esta tesis, en los capítulos siguientes presentamos una descripción de las experiencias realizadas en los mencionados regímenes, así como también los resultados obtenidos y el análisis de los mismos.

Capítulo II

Régimen A

Para comprender el comportamiento de un flujo de granos sobre la pendiente de un apilamiento se comenzó estudiando la interacción de un solo grano con su entorno granular. Dicha interacción se modeló experimentalmente a través del movimiento de una esfera de diámetro D sobre un lecho inclinado constituido por granos de diámetro medio *d*.

El dispositivo experimental es similar al utilizado en trabajos previos [Riguidel 94, Aguirre 96, Aguirre 97]. Consiste en un tablero de madera aglomerada (152cm x 82cm) cubierto con un vidrio liso (tipo float) sobre el que se apoya una superficie rugosa. Un extremo del tablero pivotea sobre un eje transversal fijo a una mesa rígida que sostiene todo el dispositivo, y el otro puede ser elevado mediante un soporte con cremallera accionado mediante una manivela.

II.1. Descripción de las experiencias

A fin de investigar el fenómeno de entrampamiento que caracteriza al régimen desacelerado se estudió en forma estadística la distancia que recorre la esfera antes de quedar atrapada en las concavidades de la superficie rugosa, variando la velocidad con la que ingresa en la superficie.

Los parámetros de control en estas experiencias son: el ángulo de inclinación del plano (θ), el diámetro de las esferas en movimiento (D) y la energía cinética (E_{ki}) que las esferas tienen al comenzar su movimiento sobre la superficie rugosa.

El dispositivo experimental es similar al mencionado anteriormente. A continuación se detallan algunas especificaciones y modificaciones.

La superficie rugosa consiste en una monocapa de granos de arena adheridos sobre una superficie plástica autoadherente de 125cm x 85cm. Los granos fueron tamizados

de manera tal que su diámetro medio varía entre 0.4mm y 0.5mm. En la figura 2.1 puede verse una porción de dicha superficie. A fin de caracterizar la superficie se determinó la fracción de superficie ocupada, C, para ello se estudiaron diferentes porciones de la superficie con un cámara de video y realizando una determinación estadística del área (proyectada) ocupada por los granos. Se encontró $C = 0.82 \pm 0.05$. El error en la estimación de C se debe principalmente a la geometría irregular de los granos de arena lo que conlleva una dispersión del 6%.

Sobre esta superficie se estudió el desplazamiento de esferas de acero de diferentes diámetros. Se investigó el intervalo $1.6\text{mm} \leq D \leq 10.3\text{mm}$, es decir: $3.2 \leq \phi \leq 20.6$.

Podría extraerse del diagrama de fases presentado en el capítulo I (figura 1.1), el intervalo de ángulos correspondientes al régimen desacelerado (régimen A), sin embargo dicho diagrama fue obtenido con esferas lanzadas con velocidad inicial nula ($E_{ki} = 0$). Por ese motivo, fue necesario primero establecer la influencia de la energía cinética con la que las esferas llegan a la superficie rugosa sobre el intervalo de ángulos correspondientes al régimen A. Los ángulos de inclinación del plano se determinaron a partir de su tangente. Se promedian ocho valores de la tangente, obtenida como $(h_2-h_1)/x$ (ver figura 2.2) para ocho posiciones distintas. El error en θ resultó del 0.5%.

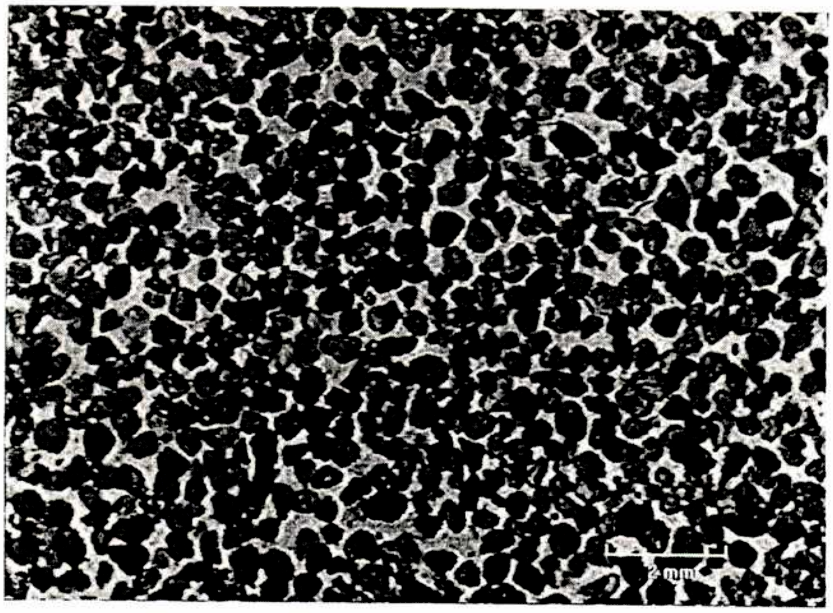

Figura 2.1: Fotografía de una porción de la superficie de arena utilizada. Como referencia la línea blanca en la región inferior derecha tiene 2mm de largo.

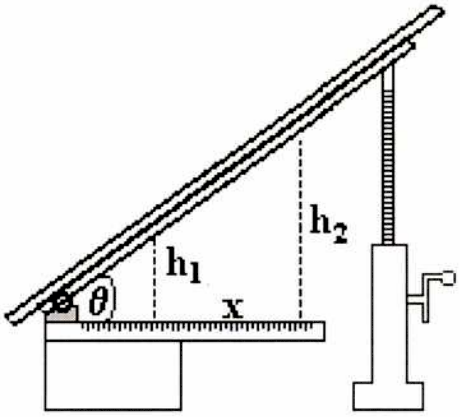

Figura 2.2: Esquema de vista lateral del plano. Visualización del método de determinación de los ángulos de inclinación, $tg(\theta) = (h_2-h_1)/x$.

Para controlar la energía cinética inicial de las esferas se coloca en la parte superior del plano una hoja delgada de acetato, lisa y graduada en forma perpendicular a la dirección de mayor pendiente. De esta forma, sabiendo el ángulo de inclinación del plano y la distancia recorrida (X_i) sobre la superficie lisa (Figura 2.3) es posible calcular la energía cinética inicial de la esfera al entrar en contacto con la superficie rugosa ($E_{ki} \propto X_i$ sen (θ)). El menor valor de X_i es igual al radio de la menor esfera de acero utilizada (X_i = 1,6mm) y corresponde a la menor energía cinética inicial ($E_{ki} \cong 0$).

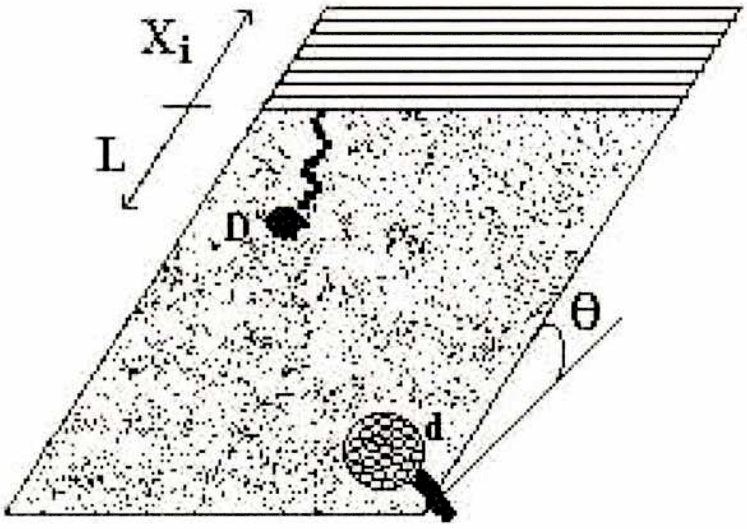

Figura 2.3: Esquema del dispositivo experimental utilizado.

II. 2. Procedimiento experimental

A. Determinación de la distancia recorrida L_i

Se fija el ángulo de inclinación del plano y un dado diámetro de esferas de acero. Evitando que se toquen entre sí, se colocan 20 esferas de acero del diámetro elegido sobre una de las graduaciones de la hoja lisa (X_i) y se las sostiene en esa posición con ayuda de una barrera. Se eleva la barrera y las esferas se mueven sobre la hoja lisa, acelerándose a lo largo de la distancia X_i y entrando a la superficie rugosa con una energía cinética E_{ki}. Dado que el ángulo de inclinación corresponde al régimen A, las esferas se detienen al recorrer una cierta distancia L_i, (medida en la dirección de máxima pendiente), la que se determina con una incerteza de 1mm. El subíndice en L_i indica el número de bolita medida. El procedimiento se repite 35 veces para obtener suficiente estadística (700 datos). Se repite el mismo número de experiencias para distintos valores de los parámetros de control: E_{ki}, D, θ.

B. Registro de las trayectorias

Se registra en video la trayectoria de la esfera y las imágenes se digitalizan y analizan con el objetivo de establecer la velocidad de descenso de la bolita y estudiar la dispersión de las trayectorias.

Se colocó una cámara de video CCD Sony blanco y negro sobre un riel colocado 120cm por encima de la mesa rígida que sostiene la superficie. Se consiguió tomar una imagen casi completa del plano con un objetivo de distancia focal f = 8mm y apertura máxima f / 1.3mm.

Una trayectoria típica dura unos 4 segundos y se registró con una resolución de 15 cuadros por segundo.

Se utilizaron programas de adquisición Adobe Capture y VidEdit de Microsoft que permiten adquirir las imágenes directamente desde la cinta de video, digitalizándolas y separándolas cuadro por cuadro. Luego se tratan con una macro realizada para el programa Optimas que permite ubicar la posición de la esfera cuadro por cuadro.

II. 3. Resultados experimentales

A. Distancia recorrida para bajos valores de energía cinética inicial

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en las experiencias en las que las esferas se ubicaron en el menor valor posible de X_i (aproximadamente 1.5mm), esto es, cuando alcanzan la superficie rugosa con energía cinética practicamente nula.

Bajo esta condición y con el procedimiento descripto en el punto anterior se barrió un amplio rango de parámetros: $1.6\text{mm} \leq D \leq 10.3\text{mm}$ ($3.2 \leq \phi \leq 20.6$) y $1.5° \leq \theta \leq 12.5°$.

En la figura 2.5 se observan distribuciones de la distancia recorrida por una esfera de diámetro D = 2mm ($\phi = 4$) para dos valores de inclinación del plano: $\theta = 3.5°$ (figura 2.4a) y $\theta = 5°$ (figura 2.4b). Se observa que, en ambos casos, las distribuciones decaen para valores grandes de L_i, sin embargo, dicho decaimiento es más pronunciado para valores de θ menores.

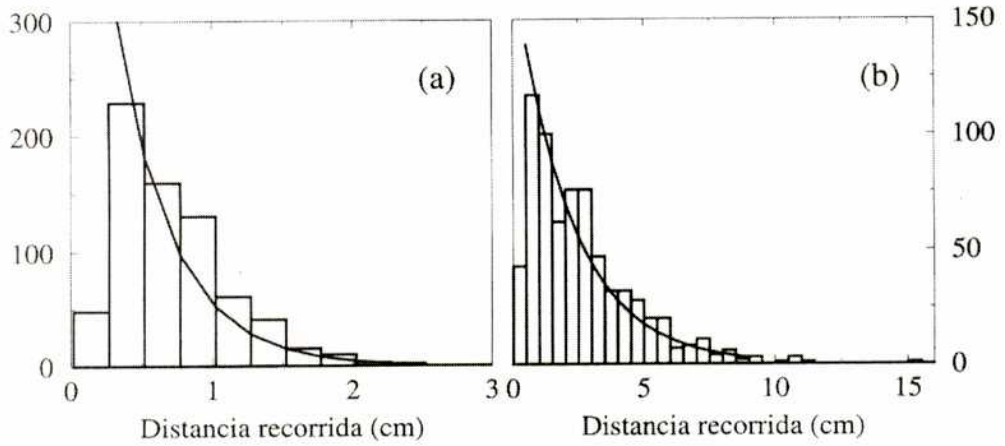

Figura 2. 4: Distribución de la distancia recorrida por la esfera antes de detenerse para D = 2mm ($\phi = 4$) con a) $\theta = 3.5°$ y b) $\theta = 5°$, $E_{ki} \approx 0$.

El mismo comportamiento se obtuvo para todos los valores de ϕ estudiados. En todos los casos se encuentra que la distribución sigue una ley exponencial de la forma:

$$N = N_o \exp(-\alpha L) \qquad (2.1)$$

Este comportamiento fue observado anteriormente por Riguidel *et al* [Riguidel 94] investigando valores de (θ, ϕ) pertenecientes al régimen B aunque cercanos a la transición entre los regímenes A y B donde se observa que la esfera desciende a velocidad constante (régimen B) y súbitamente queda entrampada sobre la superficie (régimen A) después de recorrer una gran porción del plano. Riguidel *et al* ajustaron sus resultados utilizando la siguiente variación de α con θ:

$$\alpha = \exp(-K\, \phi^3\, \mathrm{sen}^2\theta) \qquad (2.2)$$

donde K es una constante.

Para verificar y completar este resultado, se realizó un estudio detallado de la variación de α con θ en el régimen A. A modo de ejemplo, en la figura 2.5 se muestra esta variación para $\phi = 4$ aunque para todos los valores de ϕ investigados se obtuvo el mismo comportamiento. Se observa una variación lineal con pendiente negativa muy pronunciada para valores de θ menores a los 4° y una transición a un comportamiento decreciente suave que tiende a cero, para valores mayores a los 5°. Se comprobó que esta última parte puede ajustarse con la ecuación 2.2, pero que dicha ecuación no puede ajustar valores menores a 4°. Además, se verificó que para $\theta > 5°$, la esfera desciende con velocidad constante hasta quedar atrapada.

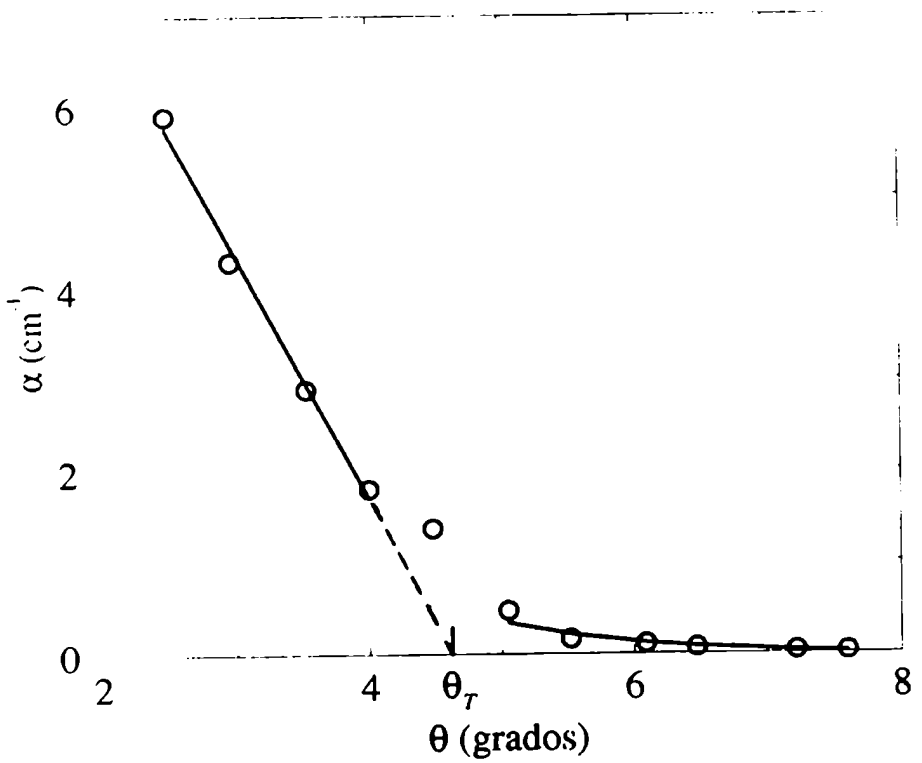

Figura 2. 5: Exponente α que caracteriza el decrecimiento exponencial de las distribuciones de las distancias de entrampamiento en función de θ para ϕ = 4.

Lo anterior muestra que en 4° ocurre un cambio en el tipo de entrampamiento. Para valores altos de θ, la esfera se mueve con velocidad constante siguiendo las irregularidades de la superficie y eventualmente puede quedar atrapada solo en defectos muy pronunciados distribuidos aleatoriamente. Para pequeñas inclinaciones en cambio, la esfera se detiene sistemáticamente debido a la pérdida de energía en su trayectoria sobre la rugosidad aparente a la que está sujeta durante su movimiento sobre la superficie rugosa.

Para encontrar el ángulo en que desaparece el mecanismo de entrampamiento característico del régimen A, buscamos la intersección de la línea recta en la figura 2.5 con el eje de abscisas ($\alpha = 0$). Para los parámetros utilizados en la figura 2.5, el ángulo de transición es $\theta_T = 4.6°$ y coincide con el ángulo θ_{AB} correspondiente a la transición entre los regímenes A y B encontrados en trabajos previos [Aguirre 97].

En dichos trabajos se definió como régimen B a los pares (θ, ϕ) para los cuales más del 50% de las esferas estudiadas no solo presentan un movimiento con velocidad media constante sino que también son capaces de recorrer todo el plano sin detenerse. Sin

embargo, para esferas de diámetros D pequeños, fue especialmente complicado definir la transición θ_{AB}, debido a la dificultad para medir la velocidad media y verificar su constancia dado que cerca de la transición la mayoría de las esferas no podía recorrer una distancia apreciable sin detenerse.

Se determinó el valor de θ_T para todo el rango de ϕ estudiado ($3.2 \leq \phi \leq 20.6$) y para grandes valores de ϕ se encontró una buena concordancia con los θ_{AB} determinados previamente, mientras que para valores menores de ϕ hubo pequeñas diferencias, que pueden ser justificadas teniendo en cuenta la dificultad mencionada en la determinación de θ_{AB}.

La transición progresiva entre los dos regímenes indica que en dicha zona ambos tipos de entrampamiento son igualmente importantes y pone de manifiesto que la transición no es de primer orden.

La distribución de distancias recorridas y los ajustes exponenciales ya habían sido predecidos usando un modelo estocástico 2D [Batrouni 96] que se obtiene simplificando la geometría de las colisiones y las propiedades de disipación en las ecuaciones de movimiento de Newton. Dicho modelo es demasiado simplificado (por ejemplo, desprecia la rotación de las esferas) y no puede reproducir cuantitativamente la curva $\alpha(\theta)$ aunque sí reproduce su forma y dependencia funcional.

Como forma alternativa para definir θ_T, definimos L^*, como el valor de L tal que el 50% de las esferas liberadas quedan atrapadas en la superficie rugosa a distancias menores que L^*. Es decir que L^* es la media de la distribución de distancia recorridas. Teniendo en cuenta la tendencia exponencial de las distribuciones (ecuación 2.1) podemos escribir a L^* como:

$$L^* = |\ln(0.5)|/\alpha \qquad (2.3)$$

Dada la relación lineal que se observa para $\alpha(\theta)$ en el régimen A (figura 2.5), α puede escribirse como: $\alpha = -a\,\theta + b$ y de la definición de θ_T, $\alpha(\theta_T) = 0$, se puede ver que en un entorno de θ_T: $\alpha = a\,(\theta - \theta_T)$ y por lo tanto $L^* \propto |\theta - \theta_T|^{-1}$, lo que muestra que L^* diverge cuando θ tiende a θ_T, es decir una transición de fase con exponente 1.

Para verificar el comportamiento anterior medimos L^* para las distribuciones correspondientes a diferentes pares (θ, ϕ). En la figura 2.6 se muestra la variación de L^*

con θ para D = 10.3mm (ϕ = 20.6), D = 3mm (ϕ = 6) y D = 1.6mm (ϕ = 3.2). Se ve que a medida que θ crece, L* aumenta observándose un comportamiento divergente cuando θ se acerca al valor que hemos denominado θ_T o ángulo de transición. Esta situación es clara para D = 10.3mm y D = 3mm, el entrampamiento característico del régimen A ha desaparecido y más del 50% de las esferas recorre todo el plano sin detenerse. Pueden determinarse así, los ángulos correspondientes a la transición del régimen A al B: $\theta_{AB}^{D=10.3mm} = 2.5°$ y $\theta_{AB}^{D=3mm} = 4.4°$.

Para D = 1.6mm en cambio, se observa la tendencia creciente de L* aunque la limitación que impone la longitud del plano (152 cm) no permite evaluar el ángulo de transición.

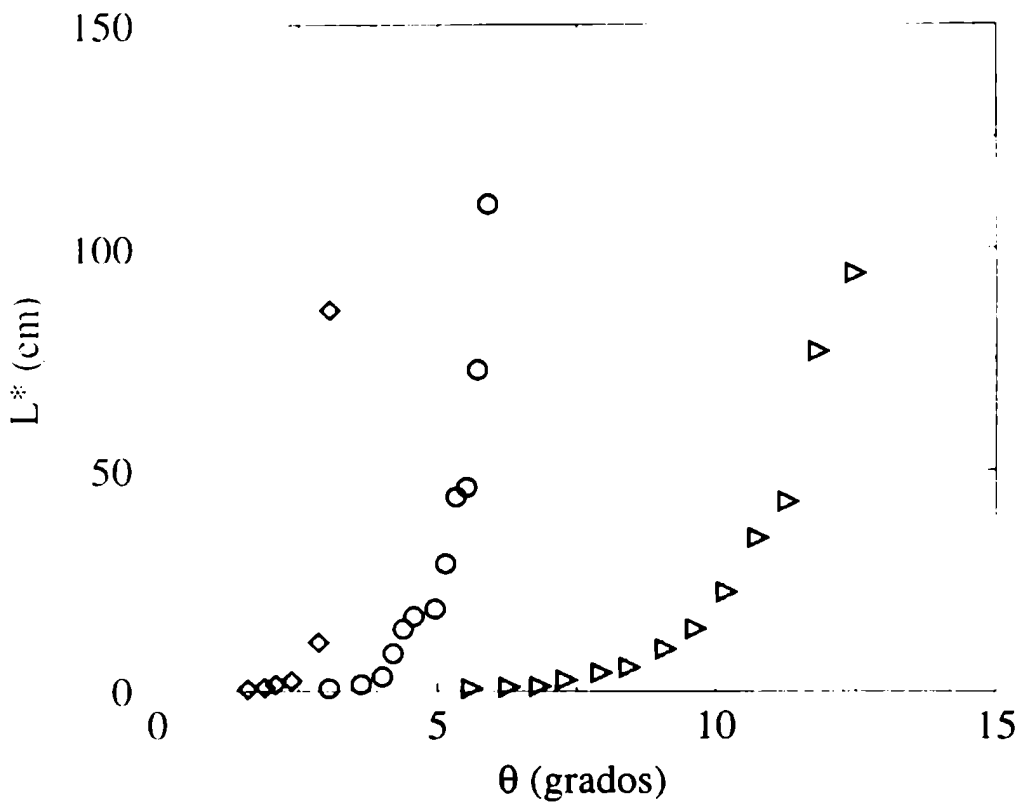

Figura 2.6: L en función de θ para (◊) D = 10.3mm (ϕ = 20.6), (o) D= 3mm (ϕ = 6), (▷) D = 1.6mm (ϕ = 3.2).*

B. Distancia recorrida para alta energía cinética inicial: Transición A-B

Como se dijo, el objetivo de estas experiencias es investigar la dinámica de esferas que alcanzan la superficie rugosa con una alta energía cinética y compararla con los resultados expuestos en la sección anterior, de manera de discernir si en ambos casos intervienen los mismos mecanismos disipativos. Un primer paso es entonces, determinar si la transición entre los regímenes A y B ocurre al mismo ángulo de inclinación. Esto es, analizar la influencia de la energía cinética inicial sobre la línea de transición A-B. Dicha transición, como se mencionó en la sección anterior, se puede caracterizar con la distancia L*.

Se estudió entonces, la variación de L* con θ para un total de 100 esferas de diámetro D = 3mm (ϕ = 6). Se investigaron diez valores de θ comprendidos en el intervalo [3.05°, 5.89°] de forma de asegurar un cambio en el régimen de movimiento (figura 2.7). Se trabajó con dos valores de X_i: X_i = 0.3cm y X_i = 20cm, lo que dio lugar a dos rangos bien diferenciados en la velocidad inicial. Para X_i = 0.3cm, la velocidad inicial, V_i, oscila entre 5.4 ± 0.7cm/s y 7.5 ± 1cm/s mientras que con X_i = 20cm los valores de la velocidad inicial resultan entre 37.8 ± 0.7cm/s y 53 ± 1cm/s.

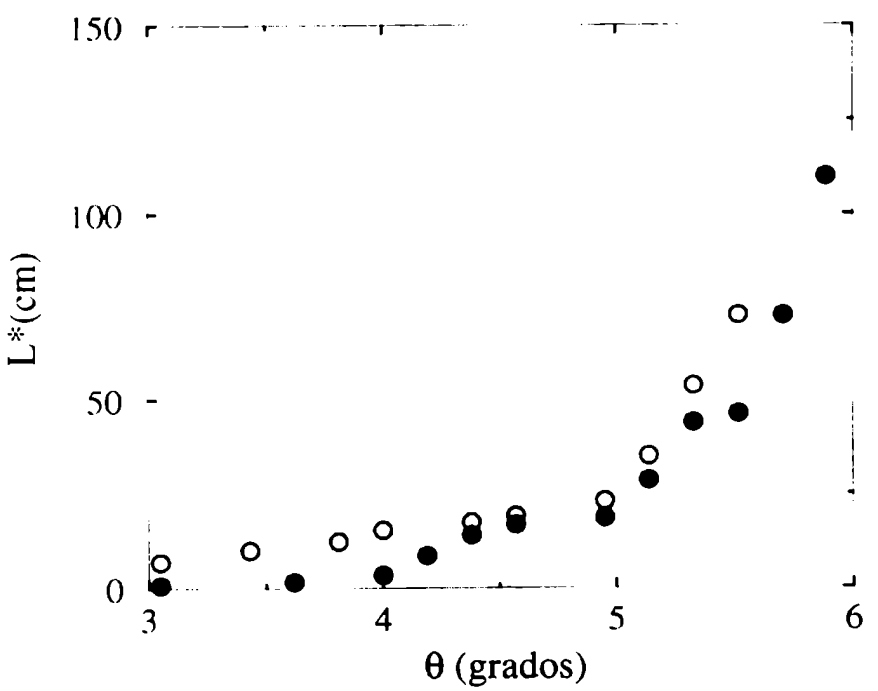

Figura 2.7: Distancia media L en función de θ para ϕ = 6 y X_i = 0.3cm (•) y X_i = 20cm (o).*

En la figura 2.7 se muestran los resultados. Puede observarse que la transición A-B ocurre al mismo ángulo para ambas curvas independientemente de la energía cinética inicial, esto concuerda con observaciones previas realizadas para el régimen B donde el intervalo de valores de θ correspondientes al régimen de velocidad constante es independiente de la velocidad inicial [Batrouni 96, Dippel 96, Dippel 97].

Sin embargo, la energía cinética inicial influye en la distancia recorrida, como se verá a continuación.

Una vez comprobado que la extensión angular del régimen A es independiente de la energía cinética inicial, se determinó, para diferentes condiciones paramétricas, la distancia recorrida por las esferas antes de detenerse.

Se obtuvieron las distribuciones de distancias recorridas para diferentes valores de θ y ϕ, con θ correspondiente al régimen A y para $0.5\text{cm} \leq X_i \leq 18.5\text{cm}$. A modo de ejemplo, en la figura 2.8 se muestra el resultado para $\theta = 2°$, $\phi = 20.6$ y en la figura 2.9, para $\theta = 2°$, $\phi = 6$. En ambos casos se comparan las distribuciones obtenidas para cuatro valores de la energía cinética inicial.

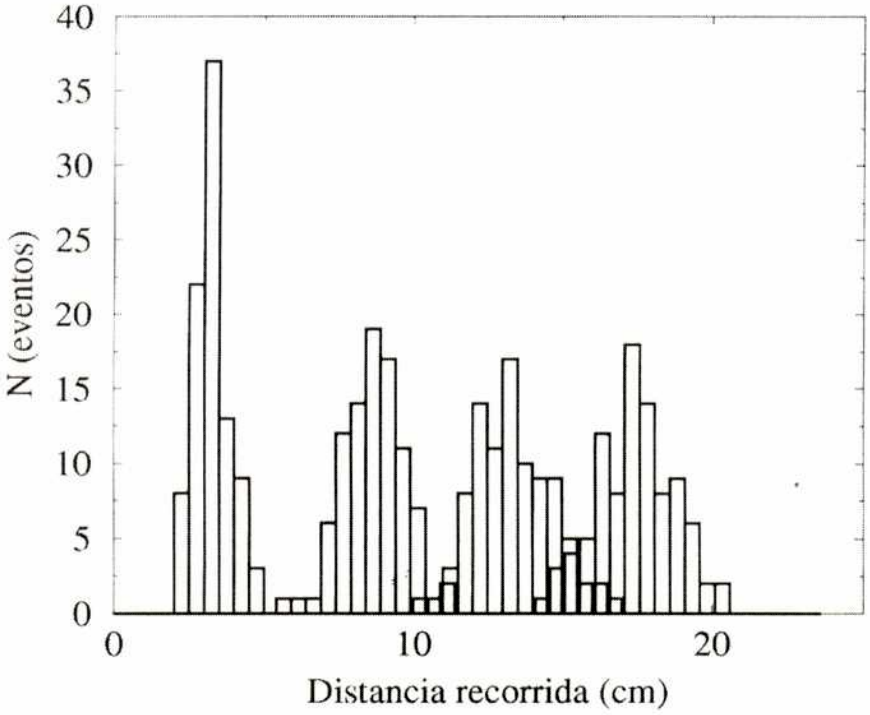

Figura 2.8: Distribución de distancias recorridas para $\theta = 2°$, $D = 10.3\text{mm}$ ($\phi = 20.6$) y diferentes valores de energía cinética inicial $E_{ki} \propto X_i$. De izquierda a derecha $X_i = 0.5, 4.5, 10.5$ y 16.5cm.

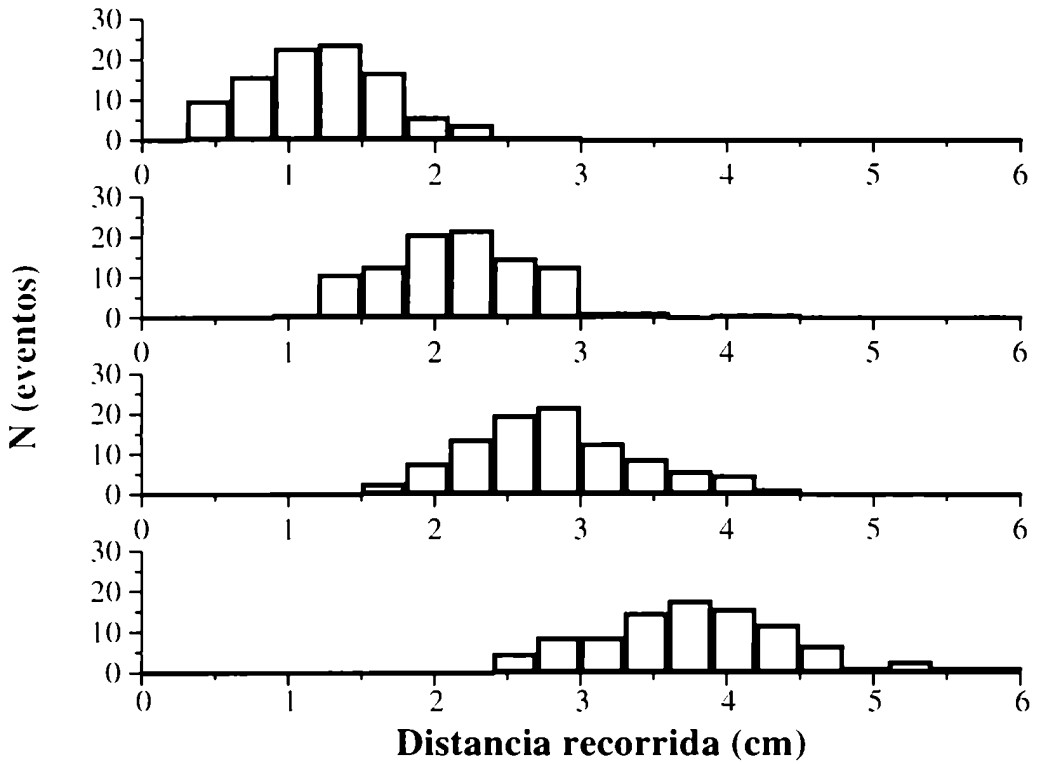

Figura 2.9: Distribución de distancias recorridas para $\theta = 2°$, $D = 3mm$ ($\phi = 6$) y diferentes valores de energía cinética inicial $E_{ki} \propto X_i$. De arriba hacia abajo $X_i = 0.5$, 6.5, 10.5 y 18.5cm.

La primera observación es que las distribuciones son cualitativamente iguales, esto , presentan aproximadamente la misma dispersión alrededor de su valor medio. Sin embargo, el valor medio aumenta notablemente con la velocidad inicial, lo que hace que se desplacen en el eje x, ordenándose según el valor de ésta.

Este hecho pone de manifiesto una clara observación experimental: todas las esferas liberadas con la misma velocidad inicial recorren aproximadamente la misma distancia ($\propto E_{ki}$) y luego quedan atrapadas en un rango de unos pocos centímetros. Por ejemplo, todas las esferas de 10.3mm de diámetro liberadas desde $X_i = 16.5$cm, recorren al menos 15cm sin quedar atrapadas y todas ellas se detienen entre los 15 y 20cm, con un máximo en 18cm (ver figura 2.8).

Este resultado nos lleva a postular que la esfera no puede quedar atrapada al menos que su velocidad sea menor que un cierto valor crítico al cual llega después de haber

disipado parte de su energía a lo largo de un determinado recorrido sobre la superficie rugosa.

Para comprobar esta hipótesis se registraron en video las trayectorias de las esferas y mediante un tratamiento de imágenes se evaluó el valor crítico antes mencionado. En una primera serie de experiencias se fijaron θ y ϕ en los valores $\theta = 2°$ y $\phi = 12$ y se investigaron diferentes valores de energía cinética inicial: $0.5\text{cm} \leq X_i \leq 18.5\text{cm}$. Se midió la velocidad de cada esfera registrando 15 cuadros por segundo por lo que el valor umbral está sobrestimado. Se encontró que, independientemente de su velocidad inicial, las esferas no quedan atrapadas a menos que su velocidad sea inferior a 3cm/s.

Se realizó el mismo experimento con $\theta = 2.85°$ y $\phi = 12$ y se obtuvo que esta velocidad umbral es de 6.5cm/s. Dada la incerteza en la medida estos valores son aproximados, pero sí podemos afirmar que las esferas se desaceleran y solo se detienen cuando su velocidad alcanza un valor umbral.

Teniendo en cuenta la simetría de las distribuciones y que las mismas no son demasiadas dispersas, el valor medio de la distancia recorrida, <L>, es una buena variable para estudiar la energía perdida. En la figura 2.10 se muestra <L> en función de X_i para $\theta = 2°$ y dos valores de ϕ.

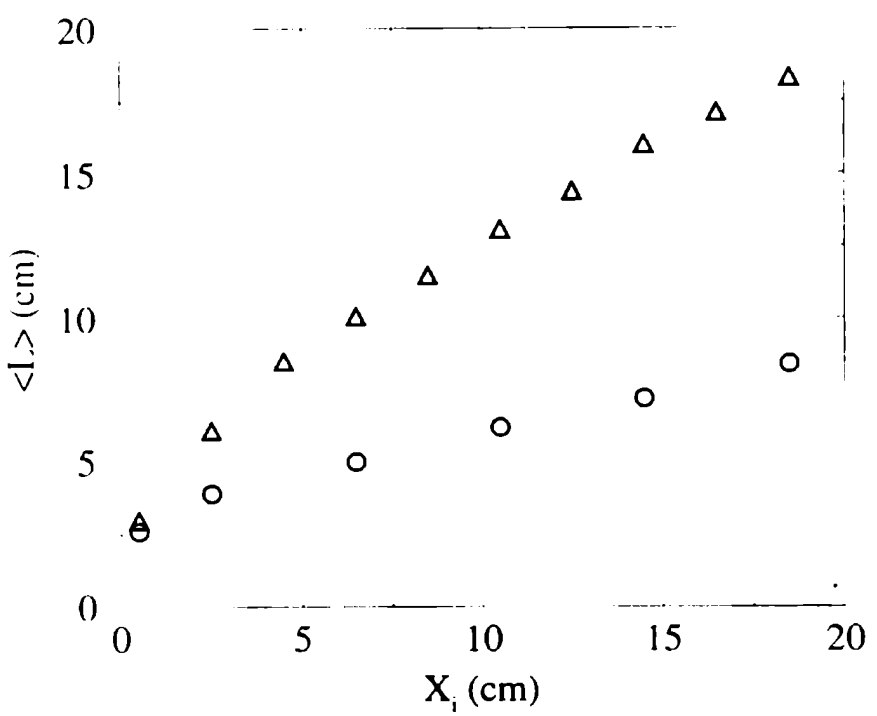

Figura 2.10: <L> en función de X_i para $\theta = 2°$, $\phi = 20.6$ (Δ) y $\phi = 9.4$ (o).

Queda claro que, para ambos casos, la distancia promedio recorrida aumenta con la energía cinética inicial. Si además se recuerda que para $X_i \approx 0$ la distancia promedio <L> es prácticamente nula, se observa que <L> presenta un crecimiento no lineal para valores de X_i por debajo de un valor umbral y un comportamiento lineal por encima de dicho valor. Por ejemplo, cuando $\phi = 20.6$, la dependencia es lineal para $X_i > 10$cm mientras que para $X_i \leq 10$cm, el incremento de <L> responde a otra ley. En el caso de $\phi = 9.4$ el valor umbral es $X_i = 2$cm.

La presencia de dos comportamientos indica la existencia de dos mecanismos de disipación, es decir sugiere un cambio en la naturaleza de las fuerzas de fricción.

Hasta el momento no se han podido caracterizar totalmente estas fuerzas. Sin embargo, en trabajos previos [Riguidel 94, Aguirre 97, Henrique 97, Batrouni 96] dedicados al análisis experimental, teórico y numérico del régimen B, concluyen que solo son posibles tres tipos de fuerzas de fricción: $F= K_1$, $F=K_2 V$, $F=K_3 V^2$, donde K_1, K_2, K_3 son constantes.

C. Modelo físico

Basándonos en los resultados recién descriptos proponemos que la dinámica de una esfera que se mueve sobre una superficie rugosa levemente inclinada está sujeta a dos tipos de fuerzas de fricción, dependiendo esencialmente de la velocidad con que comienza el movimiento

Además hacemos las siguientes hipótesis:

- que es posible definir la función velocidad $V(x)$ para todas las esferas, donde x es la distancia recorrida

- que la esfera puede quedar atrapada solo si su velocidad V es menor a un cierto valor umbral V_{min}, función de D, d y θ. Esto es, que $V(x=L) \leq V_{min}$ donde L es la distancia que recorre hasta quedar atrapada.

- que una esfera debe recorrer siempre una distancia λ_{01} sobre la superficie rugosa para disminuir su velocidad desde V_0 hasta V_1, independientemente de cual haya sido su velocidad inicial V_i.

Supongamos ahora que una esfera comienza un movimiento sobre la superficie rugosa con velocidad $V_0 > V_{min}$ y una segunda esfera lo hace con V_1,

tal que $V_{min} < V_I < V_0$. De acuerdo a las hipótesis asumidas, la segunda esfera recorrerá una distancia L_I y se detendrá. Por su parte, la primera deberá recorrer una distancia λ_{0I} para disminuir su velocidad de V_0 a V_I y luego recorrerá una distancia L_I para disminuirla de V_I a V_{min}. Entonces $L_0 = L_I + \lambda_{0I}$. Dado que todas las magnitudes de interés están sujetas a fluctuaciones, la cantidades que se introducen en el modelo son promedios estadísticos y por lo tanto se cumple la siguiente relación:

$$\langle L_0 \rangle = \langle L_I \rangle + \langle \lambda_{0I} \rangle \tag{2.4}$$

Diferenciando la ecuación 2.4 con respecto a V^2, es decir respecto de X_i, se obtiene:

$$\frac{\partial \langle \lambda(V) \rangle}{\partial V^2} = -\frac{\partial \langle L(V) \rangle}{\partial V^2} \tag{2.5}$$

El término de la derecha de la ecuación 2.5 puede evaluarse de los resultados experimentales presentados en la sección anterior. Se observó que para energías cinéticas altas L (V) varía linealmente con V^2 con lo que $\frac{\partial V^2}{\partial \langle \lambda(V) \rangle} = \text{constante}$.

Es decir, el gradiente de energía, o lo que es lo mismo, la fuerza resultante, es constante: $F = -m\ K$, donde m es la masa de la esfera y $-K$ es la desaceleración constante que experimenta. Dicha fuerza, F, puede ser evaluada a través de las mediciones experimentales de $\langle L(E_{ki}) \rangle$. Debido a que la fuerza impulsora $m\ g\ sen(\theta)$ actuante sobre la esfera es constante se concluye que también lo será la fuerza de fricción: $F_f = m\ K' = m\ (g\ sen(\theta) + K)$.

También se observó en la sección anterior que el mecanismo de disipación es distinto para bajos valores de energía cinética inicial, obteniéndose una relación lineal entre $\langle L(V) \rangle$ y V que implica que sobre la esfera actúa una fuerza resultante proporcional a la velocidad, es decir de tipo viscoso: $F = m\ g\ sen(\theta) - F_f = -m\ a\ V$, siendo a una constante de proporcionalidad que caracteriza la desaceleración viscosa. Teniendo en cuenta lo anterior podemos suponer una fuerza de fricción $F_f = F_f^v + F_f^c$, donde $F_f^v = m\ a\ V$ es una fuerza de fricción de tipo viscoso (proporcional a la velocidad) y $F_f^c = m\ K^c$, es una fuerza disipativa constante, donde $K^c \cong g\ sen(\theta)$. Es

decir que para bajos valores de energía cinética inicial, podemos suponer que actúa una fuerza de fricción de tipo viscoso, similar a la encontrada en el régimen B.

Completamos el modelo proponiendo que para cada par (θ, D) existe una velocidad límite V_l para la cual ocurre el cambio de mecanismo disipativo. Es decir, mientras la esfera de diámetro D se mueve sobre la superficie rugosa inclinada un ángulo θ con velocidad V superior a $V_l(\theta, D)$ sufre una fuerza de fricción constante, cuando la velocidad toma valores entre $V_l(\theta, D)$ y $V_{min}(\theta, D)$, la fuerza será una superposición de una fuerza de tipo viscoso ($F_l = m\, a\, V$) y una fuerza de fricción constante, por último, cuando la velocidad es menor que $V_{min}(\theta, D)$ la esfera queda entrampada.

Para verificar las suposiciones anteriores, se calcularon las distancias recorridas que predice el modelo anterior y se compararon con las obtenidas en forma experimental. La distancia recorrida por las esferas liberadas con velocidad $V < V_l$ es:

$$< L(V) >= \frac{V}{a}\left(1 - \frac{V_{min}}{V}\right) \tag{2.6}$$

y en el caso $V > V_l$:

$$< L(V) >= \frac{1}{2K}\left(V^2 - V_l^2\right) + \frac{V_l}{a}\left(1 - \frac{V_{min}}{V_l}\right) \tag{2.7}$$

Se obtiene un sistema de dos ecuaciones con cuatro parámetros: V_{min}, V_l, a (que caracteriza la fuerza de fricción viscosa) y K (que permitirá obtener K´ que caracteriza la fuerza de fricción constante). El valor de K se obtiene del ajuste de la parte lineal de las curvas <L> en función de V_i^2. Puede observarse que la pendiente obtenida depende del valor de D y por lo tanto K es función de D.

Los parámetros a y V_{min} pueden determinarse ajustando la parte no lineal de las mismas curvas. Esta región corresponde a valores pequeños de X_i y la distancia de entrampamiento es casi la misma, independientemente de D, por lo tanto y dado que solo se tienen suficientes datos para D = 10.3mm se realizó el ajuste de a y V_{min} con esos datos, obteniendo $a = 2.12\ s^{-1}$ y $V_{min} \cong 0$. Cabe recordar que V_{min} se midió experimentalmente (sección II.3.B) obteniéndose V_{min} = 3cm/s.

Finalmente el valor V_l se obtuvo teniendo en cuenta el término constante de la ecuación 2.7:

$$b = -\frac{V_l^2}{2K} + \frac{V_l}{a}\left(1 - \frac{V_{min}}{V_l}\right) \tag{2.8}$$

Para cada valor de D, b está dado por la ordenada al origen de los ajustes lineales de <L> en función de V_i^2. La ecuación 2.8 tiene dos soluciones para V_l (D), de las cuales solo tiene sentido físico la menor que indica un cambio desde una situación más disipativa a una de menor disipación como se observa experimentalmente.

En la figura 2.11 se grafica <L> en función de la velocidad inicial V_i (no de V_i^2) para $\theta = 2°$ y seis valores de D, las líneas llenas son los valores obtenidos con las ecuaciones 2.6 y 2.7 y los símbolos corresponden a datos experimentales y se aprecia un excelente acuerdo entre ambos.

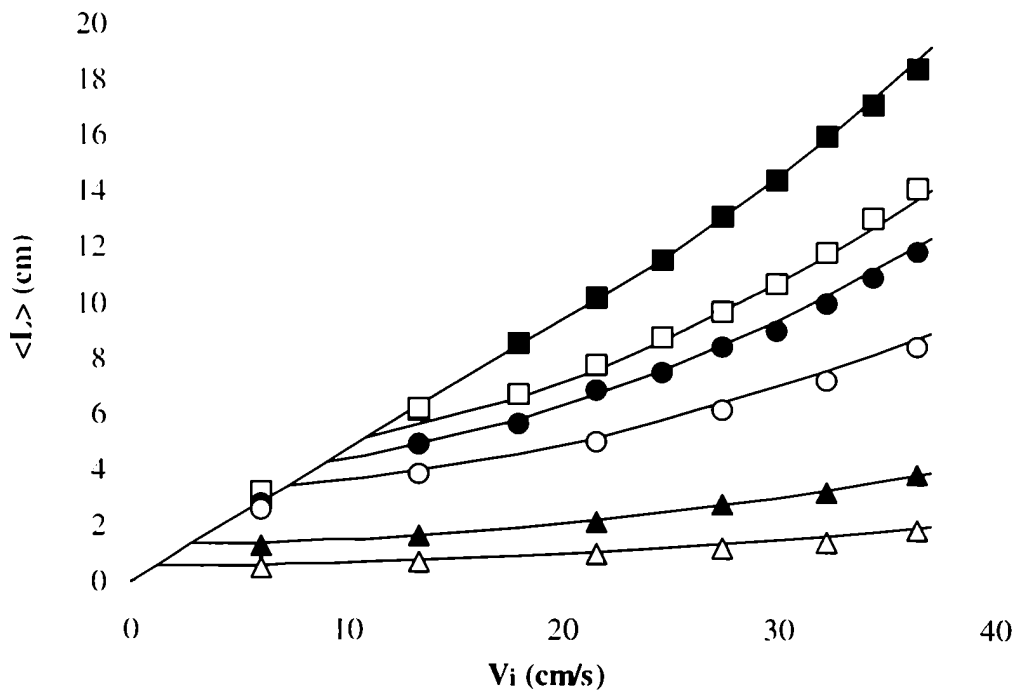

Figura 2.11: <L> en función de V_i en unidades arbitrarias para $\theta = 2°$. D = 10.3mm (■), D = 7.1mm (□), D = 6.3mm (●), D = 4.7mm (O), D = 3mm (▲) y D = 2mm (Δ).

Debe tenerse en cuenta que dado que a y V^* se supusieron constante para todo D, solo se utilizaron dos parámetros para ajustar los datos correspondientes a todos los valores de D. En la Tabla I, se listan los valores de estos parámetros para cada D investigado.

Tabla I. Valores de los diferentes parámetros para $\theta = 2°$.

D (mm)	2	3	4.7	6.3	7.1	10.3
K (m s^{-2})	4.9	2.6	1.2	0.8	0.7	0.5
$K'=F_f/m$ (m s^{-2})	5.3	2.9	1.6	1.2	1.1	0.9
V_f (cm s^{-1})	1.2	2.8	7.3	9.1	10.8	20.7

Se ve que para valores crecientes de D, los valores de K varían entre 500cm s^{-2} y 50cm s^{-2} mientras que los de V_f lo hacen entre 1cm/s y 21 cm/s. Asimismo, el máximo valor de la desaceleración viscosa ($a\ V_f$), correspondiente al mayor V_f es de alrededor de 0.6cm s^{-2}.

Por ejemplo, una esfera con D=10.3mm que empieza su movimiento con V_i = 50cm/s, sufre una desaceleración constante de 50cm s^{-2} a lo largo de unos 21cm hasta alcanzar una velocidad de V_f = 20.7cm/s. En ese momento, abruptamente la fuerza comienza a ser de tipo viscoso y la desaceleración decrece hasta 8.14cm s^{-2}, la velocidad sigue decreciendo, y por lo tanto también disminuye la fuerza de fricción, hasta que luego de recorrer unos 9.8cm alcanza la velocidad V_{min} y la esfera queda atrapada.

Este comportamiento, ligado a la existencia de dos tipos de fuerzas de fricción, puede explicarse físicamente. Cuando una esfera se lanza con una velocidad inicial grande, su colisión con la superficie rugosa produce una serie de saltos de considerable alcance. El tiempo de vuelo, Δt, durante este salto balístico queda determinado por la velocidad normal a la superficie V_n ($\Delta t \propto V_n$) y por lo tanto la frecuencia de colisión, f, es proporcional a V_n^{-1} ($f \propto \Delta t^{-1}$). En cada colisión la esfera pierde una cantidad de movimiento, ΔP_c, proporcional a V_n ($\Delta P_c \propto V_n$) debido a que el coeficiente de restitución es menor que uno. Por lo tanto, la cantidad de movimiento perdida por unidad de tiempo, $F = \Delta P_c/\Delta t = \Delta P_c\, f$,es constante, es decir se obtiene una fuerza de fricción constante. Un estudio teórico [Valance 98] encuentra un resultado similar para

una esfera descendiendo sobre una línea rugosa (caso unidimensional) aunque cabe resaltar que dicho estudio corresponde al régimen C.

Cuando la velocidad inicial es menor, la esfera realiza un movimiento combinado sobre la superficie rugosa: realiza saltos de menor alcance y rueda explorando la rugosidad de la superficie. En este caso, es más complicado describir el tiempo de vuelo [Batrouni 96] pero se encuentra que la disipación es de tipo viscoso como la que caracteriza al régimen B. Sin embargo, la diferencia es que en el régimen A, la energía que gana la esfera en su descenso no es suficiente para compensar la energía perdida y eventualmente la esfera queda entrampada.

De esta manera, V_l aparece como una velocidad límite mínima por encima de la cual la esfera tiene la capacidad de realizar saltos de gran alcance sobre los granos de la superficie. A mayor D y cuanto más rasantes son los ángulos de impacto, más velocidad se necesita para rebotar sobre los granos (Tabla 1).

D. Simulación numérica

Los resultados recién presentados, motivaron la realización de un trabajo numérico [Dippel 97, Henrique 98] que analiza el movimiento de una esfera sobre un plano rugoso inclinado. La simulación numérica se obtiene con dinámica molecular para una esfera blanda. Las fuerzas de interacción entre granos se modelan, en la dirección normal, con una fuerza elástica lineal (resorte) con una amortiguación lineal, donde la pérdida de velocidad normal se describe a través de un coeficiente de restitución normal constante $e_n = - V_n^f / V_n^i$ que relaciona las velocidades normales antes (V_n^i) y después (V_n^f) de una colisión. En cuanto a la dirección tangencial, la fuerza de interacción es una amortiguación lineal con un umbral en el límite de la fricción de Coulomb $\mu \, | F_n |$.

Como se verá (sección III.4.B), este modelo numérico consigue explicar, al menos cualitativamente, la existencia de una fuerza de fricción de tipo viscoso para el régimen B y lo hemos aplicado para analizar el comportamiento de las magnitudes estudiadas experimentalmente en el régimen A que se detallarán a continuación.

En primer lugar, se aplicó la simulación numérica para calcular la variación con la energía cinética inicial del valor medio de la distancia recorrida por la esfera de

D = 5mm, bajando sobre un plano rugoso inclinado un ángulo θ = 1°. Se usó un coeficiente de restitución normal e_n = 0.6 y un coeficiente de fricción μ = 0.13.

Como se observa en la figura 2.12, para altos valores de velocidad inicial, V_i, se encuentra un comportamiento lineal de <L> con V_i tal como se encontró experimentalmente. También es claro que para valores bajos de V_i la dependencia no es lineal.

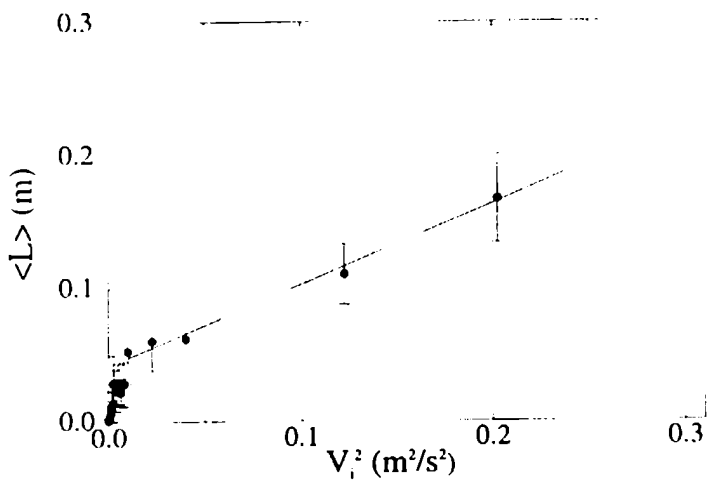

Figura 2.12: Resultados para <L> en función de la velocidad inicial V_i^2 obtenidos con la simulación numérica para D = 5mm y θ = 1°. El valor promedio de L se obtuvo sobre un total de 60 experimentos para cada valor de V_i.

Por otra parte, se verificó que la esfera recorre una gran porción del plano realizando saltos sucesivos: al principio los saltos son de mayor alcance, luego el alcance disminuye. Por último se obtuvo que la frecuencia de colisiones se estabiliza y comienza a ser regular [Henrique98], observándose un comportamiento similar al que ha sido observado en el régimen B por Dippel *et al* [Dippel 96, Dippel 97] donde la esfera realiza pequeños saltos que llevan a que la componente normal de la velocidad se anule y la esfera comience a rodar.

Finalmente, se encontró que la velocidad para la cual la distancia entre colisiones comienza a ser inferior al diámetro medio de los granos coincide aproximadamente con el valor V_l encontrado experimentalmente.

II. 4. Resumen

Los resultados experimentales y su constatación numérica permitieron comprender en mayor detalle los mecanismos involucrados en la disipación de la energía que una esfera gana en su descenso por un plano inclinado. Estos mecanismos permiten a su vez comprender el régimen desacelerado que se observa a ángulos de inclinación pequeños.

Se propuso un modelo, basado en hipótesis extraídas de la observación experimental y así se concluyó que una esfera que comienza el descenso con alta velocidad inicial, rebotará sobre la superficie rugosa y experimentará una fuerza de fricción constante hasta que su velocidad disminuya hasta el valor umbral V_l. En ese momento y repentinamente, la fuerza de fricción se transforma en una fuerza de tipo viscoso, similar a la que se observa en el régimen B.

La aparición de estos dos mecanismos de disipación o equivalentemente, de dos fuerzas de fricción distintas se debe a la diferente naturaleza de las colisiones cuando la velocidad es mayor o menor a V_l.

Finalmente, cuando la velocidad desciende por debajo de un valor mínimo (en principio independiente de la velocidad inicial), la esfera se detiene súbitamente. La geometría de la superficie rugosa es un factor muy importante en dicho entrampamiento. En el régimen A, el exponente α que caracteriza la distribución exponencial de la distancia recorrida por la esfera antes de detenerse, disminuye linealmente al aumentar la inclinación del plano y se anula al alcanzar el valor θ_T, límite con el régimen B donde la esfera se mueve a velocidad constante ya que se ve sometida a la acción de una fuerza disipativa de tipo viscoso. En este régimen la esfera podría aún detenerse si encontrase defectos importantes en la geometría de la superficie y se encuentra un exponente α que decae exponencialmente con el ángulos de inclinación.

El hecho de que en ambos regímenes la fricción sea de tipo viscoso antes de que ocurra el entrampamiento indica que la diferencia entre ambos regímenes A y B no es de origen dinámico sino debida a dos diferentes tipos de entrampamiento.

La divergencia en θ_T de la media de la distribución L^* indica la transición entre los regímenes A y B. Esta transición es independiente de la velocidad inicial aunque el valor de L^* no lo sea.

Las simulaciones numéricas permiten entrar en el detalle microscópico del movimiento y confirmaron tanto nuestros resultados experimentales como el análisis

realizado. Dicho análisis nos llevó a conclusiones no tan evidentes: experimentalmente es casi imposible observar a la esfera saltar por encima de los granos de la superficie rugosa, teniendo en cuenta que el diámetro medio de los granos es de 0.45mm y la pequeña altura de los saltos, sin embargo se consiguió tomar una foto (Figura 2.13) de la esfera rebotando sobre la superficie habiéndole entregando una gran velocidad inicial (tangencial) que le permitió un vuelo de mayor alcance.

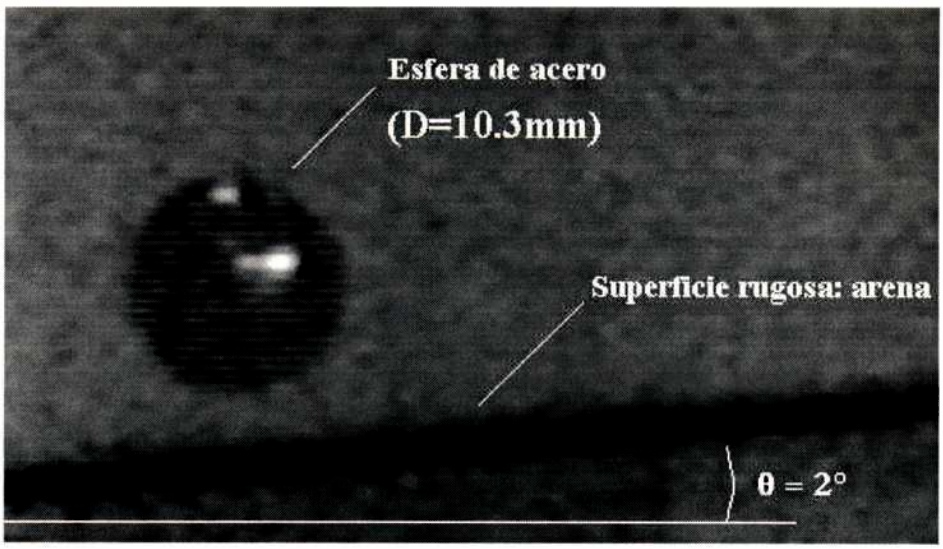

Figura 2.13: Esfera con velocidad inicial grande saltando sobre la superficie rugosa.

Capítulo III

Régimen B

En la zona B también se estudiaron en mayor detalle los mecanismos de disipación de energía que se oponen a la acción gravitatoria dando lugar a este régimen donde la esfera adquiere una velocidad constante [Riguidel 94, Aguirre 97]. Como surge del capítulo anterior una esfera de diámetro D descendiendo por un plano rugoso inclinado un ángulo θ, está sometida a dos tipos de fuerza de fricción según sea su velocidad:

a) Constante para velocidades superiores a una velocidad límite V_l (θ,D).

b) Viscosa para velocidades menores a V_l (θ,D).

Para una esfera de diámetro D, el régimen B aparecerá a ángulos de inclinación mayores que los correspondientes al régimen A y por lo tanto la esfera, con o sin velocidad inicial alcanzará velocidades mayores que en el régimen desacelerado.

Suponiendo que en este régimen la esfera rueda sin deslizar explorando las rugosidades del plano, la interacción colisional parece predominar sobre la fricción. Para verificar está hipótesis y estudiar la influencia de las colisiones se diseñó un sistema que permite detectar y analizar el ruido producido por los choques de la esfera sobre los granos de la superficie.

III.1. Estudios preliminares

Para estudiar las colisiones en el régimen B, se registró la señal acústica producida por una esfera moviéndose sobre un plano inclinado rugoso. Dicha señal se obtuvo con un micrófono pegado debajo de la superficie, conectado a una tarjeta de adquisición de datos.

Para analizar la factibilidad de la técnica se realizaron algunas experiencias preliminares [Henrique 97] sobre la superficie constituida por granos de arena ($0.4 < d < 0.5$mm) descripta en el capítulo II, las que permitieron determinar fácilmente

si el movimiento de la esfera correspondía al régimen A, B o C ya que cada situación presentaba espectros de sonido muy diferentes. Un análisis más detallado se verá en la sección III.3.

Un resultado importante fue que en el régimen B de velocidad constante, se registraron choques a intervalos regulares de tiempo. Esto abrió la posibilidad de definir una frecuencia media de choque y estudiar su dependencia con el ángulo de inclinación θ. Para complementar esta información resultaba necesario e importante intentar ubicar la posición espacial de los choques y determinar la velocidad de la esfera mediante la filmación de su trayectoria. Se vió entonces, la conveniencia de aumentar el tamaño de grano de la superficie rugosa y de la esfera móvil para obtener una mejor resolución del evento filmado.

Se construyó una superficie de bolitas de vidrio de diámetro medio d = 5mm y se consiguió un mayor contraste entre el fondo rugoso y la esfera móvil. Sin embargo, surgió el problema de que las superficies de papel autoadherente no eran capaces de sustentar rígidamente las bolitas de mayor tamaño, por lo que, para un estudio preliminar, la superficie rugosa se construyó sobre una superficie de vidrio con las esferas adheridas con una resina marca Poxipol de secado rápido. Este proceso resultó adecuado en cuanto a la rigidez de la superficie pero impuso una limitación: el lecho rugoso debió construirse sobre una superficie mucho menor (30cm x 25cm) para poder homogeneizar la distribución de bolitas antes del fraguado de la resina. La limitación mencionada, superable con una resina de fraguado más lento, no fue considerada relevante para esta primer etapa destinada a determinar los alcances y posibilidades de la técnica acústica.

Se realizaron diversas pruebas sobre esta superficie y aunque los granos eran 10 veces más grandes que los de arena, no fue posible determinar la ubicación espacial del choque con la precisión buscada. En cambio, si se consiguió un seguimiento adecuado de la trayectoria de la esfera y gracias al mayor tamaño de la esfera móvil y las bolitas del lecho se obtuvieron señales acústicas donde los choques tenían una intensidad mayor.

Para analizar la señal, se desarrolló un programa en Matlab [Henrique 97] que luego se optimizó (III.2.B). La idea básica del programa es la siguiente: se aisla el espectro correspondiente a un choque, se normaliza con su valor máximo y se utiliza de patrón para la ubicación de los choques restantes. Se normaliza todo el espectro

registrado durante el descenso de la esfera y se lo compara con el patrón del choque, las partes del espectro que coinciden con el patrón con un error menor al 10% se consideran colisiones.

Para tener en cuenta la deformación de la señal debida a la distancia variable entre el lugar del choque y la posición del micrófono, el programa realiza durante el análisis un ajuste del patrón consistente en que el patrón de cada nueva colisión se registra y se promedia con el de la colisión previa y este patrón promedio se toma como referencia para buscar la siguiente colisión.

Las experiencias realizadas con esta técnica dieron resultados promisorios aunque se concluyó que para el estudio definitivo era necesario construir una superficie rugosa de dimensiones mayores por lo que se buscó un adherente de fraguado más lento y que además no distorsionase la señal acústica. Por otro lado, como se mencionó antes, aunque este lecho rugoso facilitó la detección del choque, ya que la intensidad de la señal aumentaba, no se mejoró la suficiente localización espacial de los choques. Por ese motivo se eligió para la superficie definitiva un grano de diámetro mayor que los de arena pero menor que 5mm. Las características del sistema definitivo se detallan a continuación.

III.2. Puesta a punto del procedimiento experimental

A. Superficie rugosa

La superficie rugosa se obtuvo pegando esferas de vidrio (figura 3.1) de diámetro: $d = 2.6 \pm 0.1$ mm sobre una superficie plana de vidrio de 100cm x 60cm y 5mm de espesor. El pegamento del papel autoadherente no resultó ser lo suficientemente potente para fijar a la misma las bolitas por lo que se realizó un estudio [Eguía 97] de diversos pegamentos de forma de utilizar aquel que cumpliese los siguientes requisitos:

- Permitiese un esparcimiento uniforme
- Tuviese un fraguado lo suficientemente lento para poder armar la superficie
- Fijase firmemente las bolitas a la superficie
- No amortiguase la señal acústica

Finalmente el pegamento utilizado fue una resina epoxi Araldit GY 507 y endurecedor HY 2964 con el cual fue posible construir una superficie rugosa isótropa,

homogénea y desordenada y con una fracción de compactación de C = 0.7 ± 0.1, valor calculado con el método expuesto en la sección II.1. La homogeneidad y planitud de la superficie obtenida se verificaron estudiando la dispersión lateral de las trayectorias de 1200 esferas en el régimen B. Desde la posición central superior del plano inclinado un ángulo θ = 2.8°, se lanzó 20 veces un grupo de 60 esferas de acero de 7.1mm de diámetro y se recogieron en un colector de 31 celdas colocado en la base del plano. Se contó la cantidad de esferas en cada celda y se realizó un histograma que se ajustó bien con una función gaussiana (de centro 0.5cm y ancho 8.55cm). El buen ajuste con una función gaussiana cuyo centro coincide con el punto desde donde se lanzaron las esferas (ubicado en 0cm) indica una distribución homogénea de la rugosidad del plano ya que traduce el grado de homogeneidad de las fluctuaciones generadas por la rugosidad mencionada. Los mejores registros acústicos se obtuvieron para esferas de vidrio y es por ello que se analizó el movimiento de una esfera de vidrio de diámetro D = 15.5 ± 0.1 mm y masa m = 4.88 ± 0.01 g, la rugosidad del sistema se mantuvo fija en $1/\phi = d/D = 0.17$. Los ángulos de inclinación θ corresponden al régimen de velocidad constante que en este caso se encuentra entre 1,5° y 4°. Dichos ángulos se obtuvieron de igual manera que en la sección II.1.

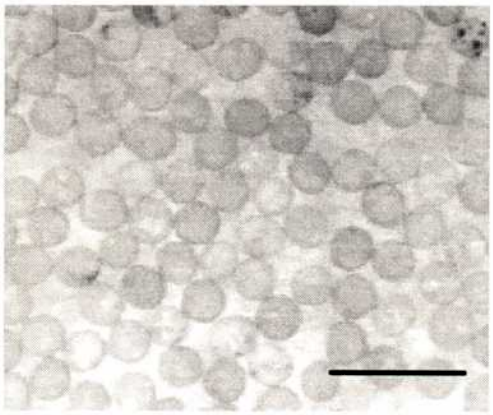

Figura 3. 1: Fotografía de una porción de la superficie rugosa constituida por esferas de vidrio. Como referencia la línea en la región inferior derecha tiene 1 cm de largo. Se observa que las bolitas son sólo aproximadamente esféricas.

B. Técnica acústica: Adquisición de la señal e identificación de choques

La señal acústica producida por la esfera moviéndose sobre el plano inclinado rugoso se obtuvo con un micrófono pegado debajo de la superficie (figura 3.2) y

conectado a una tarjeta de adquisición de datos (Keithley 1402) que hace de interfase entre un osciloscopio y una PC y permite la adquisición y digitalización de la señal acústica. Las características más importantes de la tarjeta son:

- resolución de 12 bits en amplitud (1 en 4096).
- resolución temporal máxima de 100 kHz
- lectura con un error máximo del 0.02%

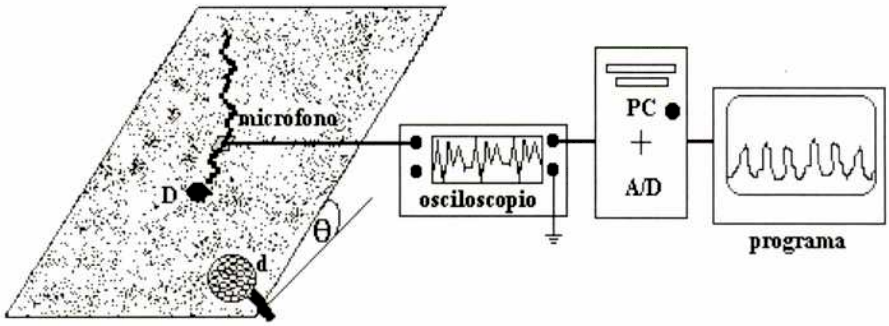

Figura 3.2: Esquema del dispositivo experimental

El programa de control de la tarjeta permite ajustar la ganancia, la cantidad de adquisiciones y la velocidad de adquisición. La cantidad de adquisiciones está limitada a la capacidad del buffer (24000) lo que resultó suficiente para registrar una porción significativa del movimiento. La velocidad se ajustó teniendo en cuenta que el movimiento de la esfera dura entre 4 y 6 segundos según sea el ángulo de inclinación. En la mayoría de los casos el intervalo de medición fue de 4.7 segundos que da una frecuencia de muestreo cercana a los 5kHz.

La señal se monitorea y amplifica con un osciloscopio lo que evita la utilización de un amplificador adicional por lo que el micrófono piezoeléctrico se conecta directamente al mismo. El micrófono piezoeléctrico de contacto usado es del tipo que se utiliza para amplificar el sonido de instrumentos musicales. Se hizo un estudio detallado de sus propiedades a fin de determinar la capacidad para resolver dos pulsos acústicos próximos [Eguía 97], en particular:

- respuesta en frecuencia: resonancias
- respuesta a un pulso: resolución de un choque
- respuesta frente a choques reales

Se obtuvo que el micrófono podía resolver bien pulsos de 2ms y que un espectro de Fourier de los mismos presentó picos que no coincidieron con las frecuencias de resonancia del piezoeléctrico. En cuanto a la respuesta a choques reales se observó que dependía de la superficie rugosa utilizada y motivó la búsqueda de una superficie óptima como se detalló en la sección A de este capítulo.

Para analizar la señal se elaboró un programa en Matlab que permitió discriminar el ruido y detectar las colisiones de la esfera con los granos que constituyen la superficie

Se determinó que en un radio de 50cm alrededor del micrófono la amplitud de los choques resultaba superior al ruido de fondo de origen ambiental, al de línea y al del instrumental electrónico. El ruido proveniente de la línea, que en un espectro de Fourier se observa como picos en múltiplos de 50Hz, puede filtrarse digitalmente y mejorando la conexión a tierra se obtiene un ruido de amplitud menor a 1mV pico a pico mientras que un choque típico tiene una amplitud de 50mV. Las señales también resultaban ruidosas debido a que la superficie de vidrio aumentaba la reverberación (ringing).

Para individualizar los choques y luego determinar el intervalo de tiempo entre los mismos es necesario eliminar parte de las oscilaciones de la respuesta del micrófono. En la figura 3.3 se visualiza el método utilizado que consiste de los siguientes tres pasos:

1) En la señal medida: amplitud en función del tiempo, m(t), se individualizó la señal originada por la esfera, s(t), independientemente de la deformación sufrida debido a la respuesta propia del micrófono piezoeléctrico, p(t); es decir, se realizó la desconvolución de ambas señales.

Dado que $m(t) = s(t) \otimes p(t)$ donde $\otimes$ denota el producto de convolución y teniendo en cuenta el teorema de la convolución que establece que la transformada rápida de Fourier (FFT) de la señal m(t) es: FFT(m) = FFT(s) FFT(p), se puede obtener s(t) realizando la antitransformada de FFT(m)/FFT(p). La señal m(t) se mide mientras la esfera desciende y p(t) se estima estudiando la deformación que sufre una señal conocida (por ejemplo un pulso) al ser detectada por el piezoeléctrico.

2) Se suavizó la señal elevando al cuadrado la señal desconvolucionada s(t) y se obtuvo una nueva serie donde a cada dato de la señal desconvolucionada se lo reemplaza por el promedio de *n* valores adyacentes al mismo.

3) Se filtró la señal realizando la transformada rápida de Fourier de la señal suavizada, se filtran las altas frecuencias eliminando aquellas que están sobre cierto valor denominado frecuencia de corte.

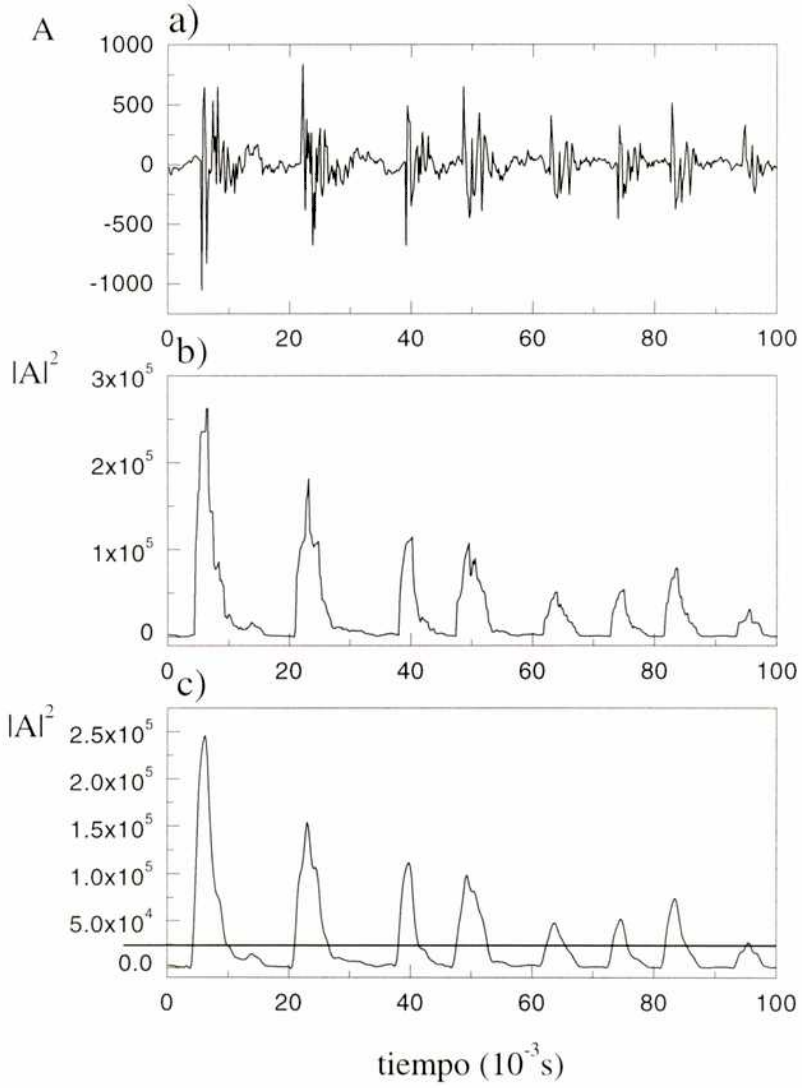

Figura 3.3: Tratamiento de la señal acústica previo a la detección de choques. a) señal adquirida(amplitud A). b) la señal desconvolucionada, elevada al cuadrado y promediada sobre n valores adyacentes (n = 5). c) la misma señal filtrada mediante FFT eliminando las frecuencias superiores a 450Hz, es decir 0.18 veces la frecuencia de Nyquist (f_n), la máxima frecuencia resoluble de una serie temporal discreta ($f_n = 1/2\Delta t$).

Con la señal ya tratada, fue más sencillo individualizar los choques que entonces presentaron un perfil semejante aunque de amplitudes distintas. Se determinó un valor umbral de amplitud ε, debajo del cual quedó el ruido de fondo y por encima del cual se

encuentran los choques más significativos, es decir aquellos que disipan mayor cantidad de energía. Algunos choques de baja amplitud pudieron haber sido apantallados por el ruido de fondo aunque se supuso que en el régimen B no podían ser demasiados. El valor umbral se eligió contando la cantidad de eventos que aparecen con una dada intensidad, es decir se realizó un histograma de las amplitudes del cuadrado de la señal y se tomó ε como el punto donde la derivada del logaritmo del número de eventos cambia apreciablemente su valor, es decir cuando el ruido de fondo deja de ser significativo (figura 3.4). Igualmente resulta difícil definir ε con precisión por lo que se determina un cierto rango.

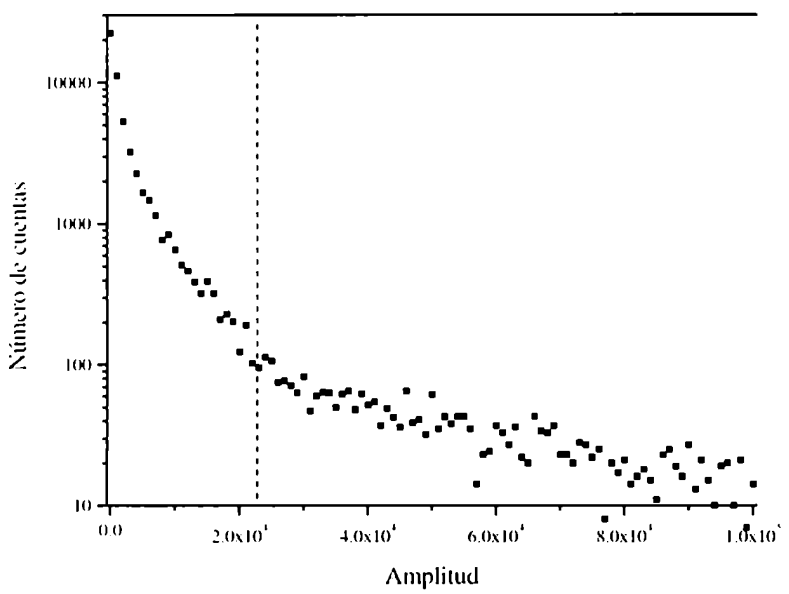

Figura 3.4: Histograma de las amplitudes de la señal al cuadrado en escala semilogarítmica. Para amplitudes mayores que 2.5 10^4 se observa un decrecimiento aproximadamente lineal y para amplitudes menores el número de cuentas crece abruptamente debido al ruido.

Para automatizar la localización de un choque se desarrolló un programa en Matlab que realiza la siguiente rutina:

1) Lee la señal de un archivo, elimina la componente continua, eleva al cuadrado su amplitud y normaliza con la distancia al micrófono.

2) Promedia entre los n valores adyacentes, filtra en el espacio de frecuencias y elimina las mayores que una determinada frecuencia de corte, f_c.

3) Determina el nivel de ruido (ε) y recorre la señal localizando los máximos que superen dicho nivel. Una vez localizado un máximo, donde se supone que ocurre el

choque (figura 3.5), para evitar contar dos veces el mismo, salta δ lugares correspondientes al ancho típico de un choque.

4) Registra en un archivo la ubicación temporal de los choques y realiza un histograma del intervalo de tiempo entre choques.

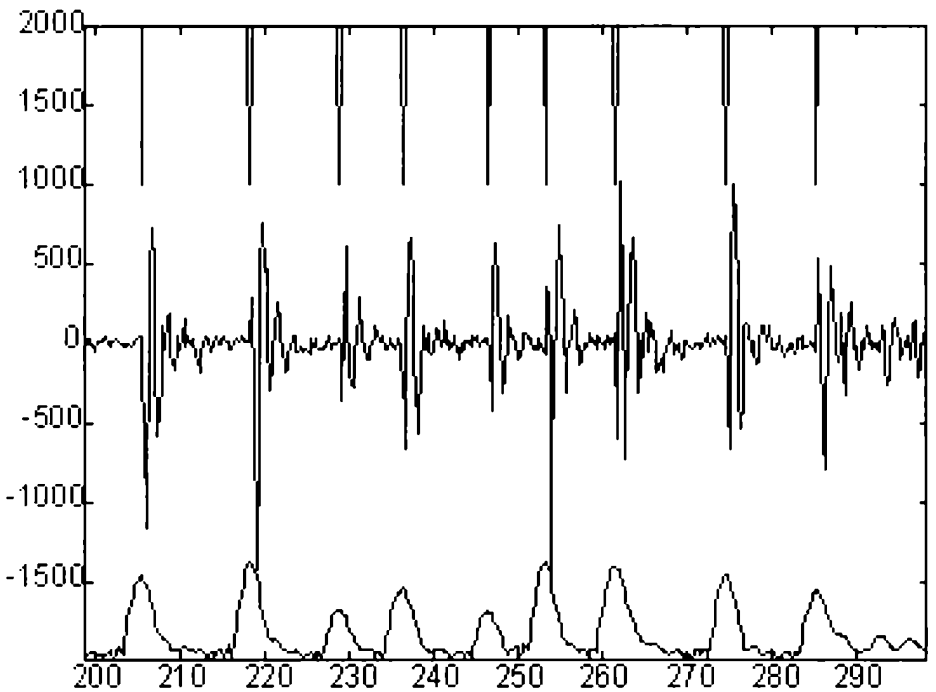

Figura 3.5: Salida típica del programa: La señal adquirida (centro) es elevada al cuadrado, promediada y filtrada (abajo) luego se detectan los máximos que coinciden con los choques (arriba). La escala del eje abscisa está en milisegundos y la escala vertical es arbitraria.

El programa puede analizar sucesivamente un conjunto de señales y el proceso es controlado por cuatro parámetros n, f_c, ε y δ. Los valores óptimos de dichos parámetros resultaron ser:

- n = 5, fue suficiente para eliminar la reverberación y no perder amplitud en los máximos.

f_c = 0.18 f_n, suaviza la señal, eliminando máximos locales que pudiesen confundirse con choques pero sin llegar a eliminar los picos de colisión.

- ε se determinó para cada experimento, como se explicó más arriba (figura 3.4), a fin de que el ruido de fondo quedase por debajo de ε.

- δ varía según el ángulo de inclinación utilizado, para θ pequeño se tomó un valor menor a fin de poder resolver los choques de baja amplitud. Se utilizó δ = 2ms para $\theta \leq 2°$ y δ = 4ms para $\theta > 2°$.

C. Registro de las trayectorias

También se registró en video la trayectoria de la esfera y dicha señal se analizó con un programa que digitaliza las imágenes en la cinta de video. Con un tratamiento de imágenes se determinó la velocidad de descenso de la bolita.

Como se comentó en la sección II.2, se colocó una cámara de video CCD Sony blanco y negro sobre un riel colocado 120cm por encima de la mesa rígida que sostiene la superficie. La cámara se inclinaba a fin de que siempre estuviese paralela a la superficie rugosa Se consiguió tomar una imagen casi completa del plano con un objetivo de distancia focal f = 8mm y apertura máxima f / 1.3mm.

La trayectoria se registró con una resolución de 25 cuadros por segundo lo que, dado que una trayectoria típica dura unos 4 segundos, no hace posible identificar los choques por este método pero permite obtener la velocidad de la esfera y estudiar la dispersión de las trayectorias.

El programa de adquisición es el Adobe Capture y VidEdit de Microsoft y permite adquirir la imagen directamente desde la cinta de video, la digitaliza y la separa cuadro por cuadro. El programa de tratamientos de imágenes es el Optimas y permite ubicar la posición de la esfera cuadro por cuadro.

III.3. Resultados

A. Caracterización de los distintos regímenes

En las figuras 3.6, 3.7 y 3.8 pueden observarse las señales acústicas registradas durante el descenso de una esfera de D = 15.5mm (ϕ = 6.0 ± 0.3) sobre una superficie inclinada a tres ángulos diferentes correspondientes a los regímenes A (θ = 1.5°), B (θ = 2.7°) y C (θ = 3.6°) respectivamente.

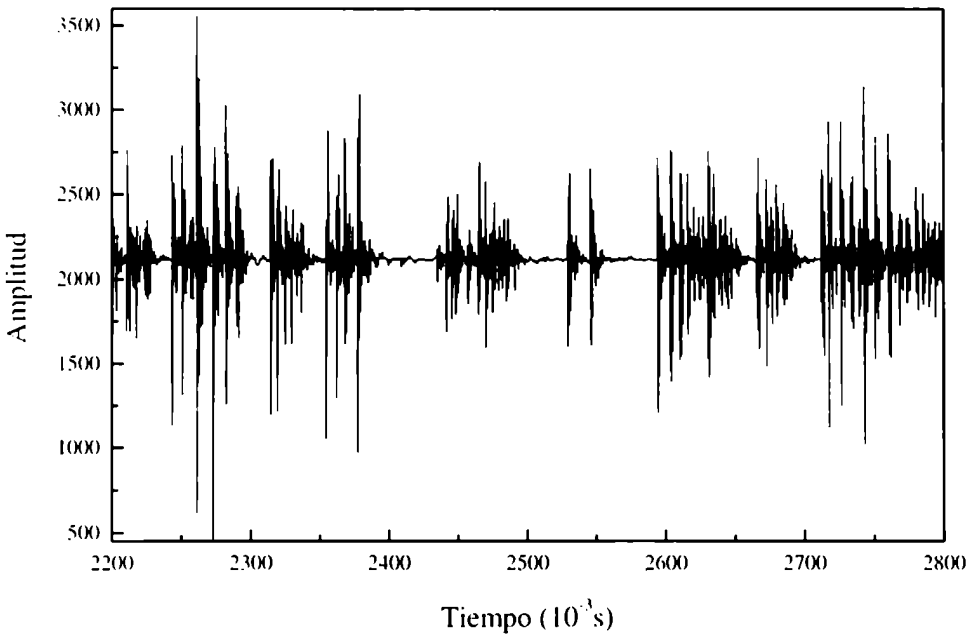

Figura 3.6: Señal acústica adquirida para ϕ = 6 y θ = 1.5°, ángulo perteneciente al régimen A y cercano a la transición con el régimen B.

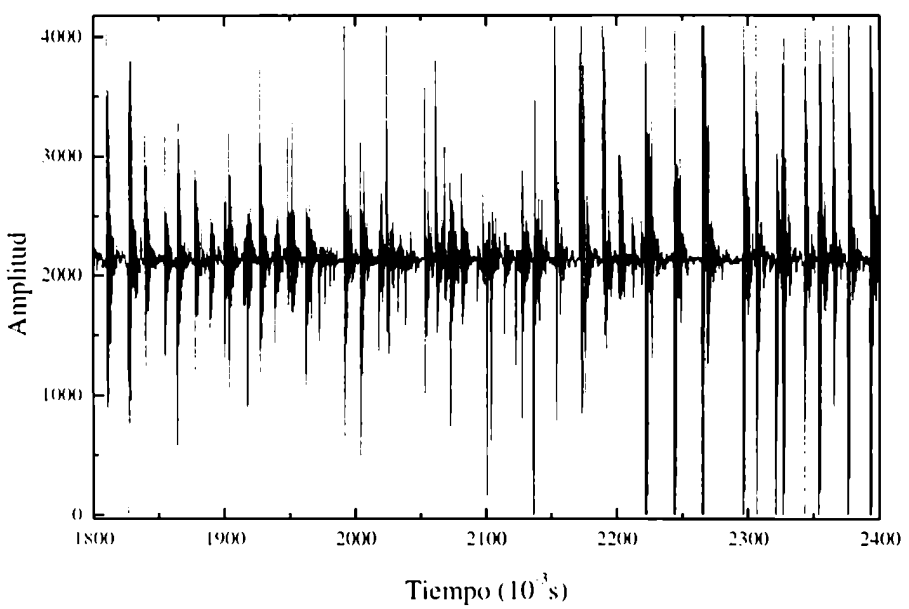

Figura 3.7: Señal acústica adquirida para ϕ = 6 y θ = 2.7°, ángulo perteneciente al régimen B.

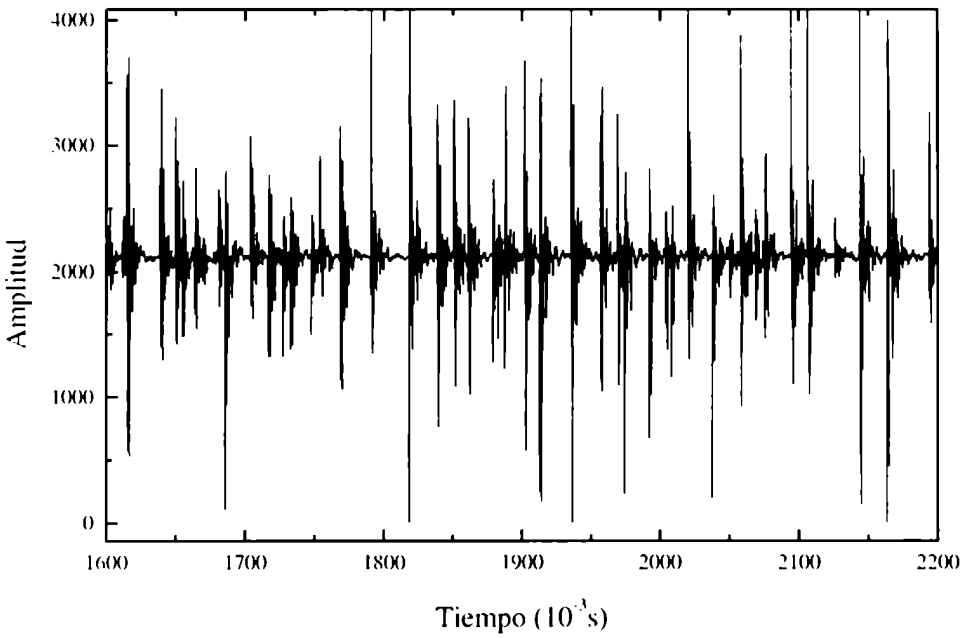

Figura 3.8: Señal acústica adquirida para ϕ = 6 y θ = 3.6°, ángulo perteneciente al régimen C y cercano a la transición con el régimen B.

Estos espectros demuestran que la técnica acústica permite discernir el régimen de movimiento en el que se mueve la esfera ya que muestran aspectos diferentes.

En la señal correspondiente al régimen A se observan choques de amplitud decreciente consistente con lo observado estudiando las distancias recorridas en la sección II.1.

Puede verse en la señal correspondiente al régimen B (figura 3.7) una serie de pulsos de gran amplitud separados a intervalos de tiempo regulares del orden de 10 milisegundos.

En cuanto a la señal correspondiente al régimen acelerado C se observa que los choques están más espaciados, es decir que la frecuencia de choque disminuye. Sin embargo la amplitud sigue siendo importante.

B. Frecuencia de choque

En el régimen B se estudió el movimiento de una esfera de diámetro D = 15.5mm (ϕ = 6.0 ± 0.3). Estudiando las trayectorias registradas en video para diversos valores de

θ se detectaron los ángulos para los que se observa una velocidad contante en la dirección de máxima pendiente.

Además, se determinó el ángulo de transición entre los regímenes A y B, θ_{AB}, mediante el método descripto anteriormente en la sección II.3.A. Por ambas técnicas se obtuvo que $\theta_{AB} = 1.7° \pm 0.2°$.

El límite entre el régimen B y el C se determinó a través del análisis de las imágenes de las trayectorias y resultó $\theta_{BC} = 3.7° \pm 0.2°$.

Se aplicó entonces, la técnica acústica en el intervalo angular $1.5° < \theta < 4°$.

Se observó que en este intervalo, correspondiente al régimen de velocidad constante, el número acumulado de choques en función del tiempo presenta una dependencia lineal. Tomando una regresión lineal de estos datos puede obtenerse una estimación de la frecuencia media de colisiones.

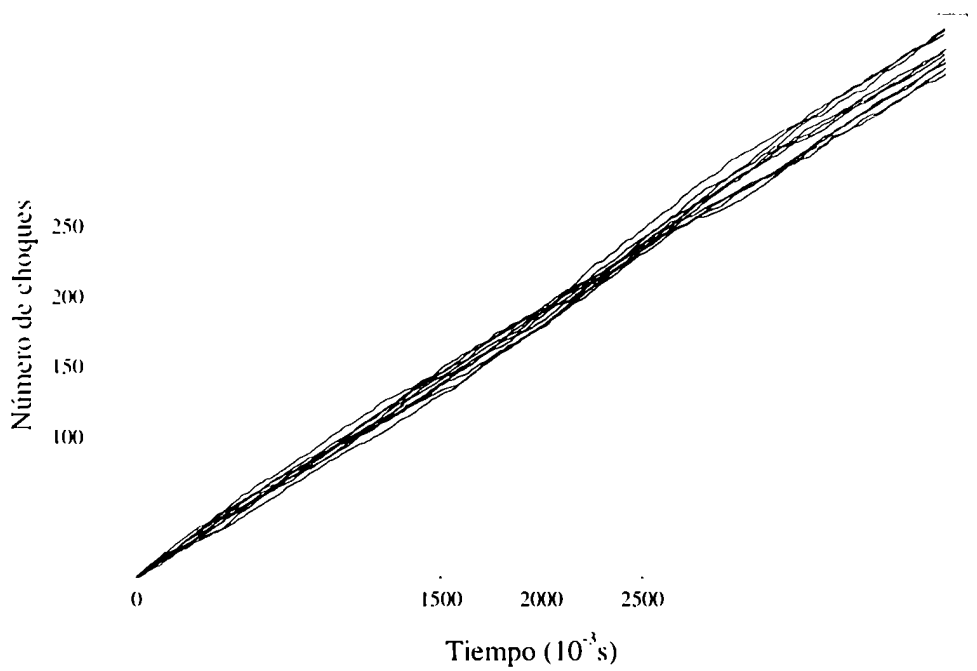

Figura 3.9: Número de colisiones acumulados en función del tiempo para 10 experiencias idénticas con $\phi = 6$ y $\theta = 2.7°$.

Estas frecuencias medias se promedian sobre 10 valores obtenidos de registros acústicos hechos al mismo ángulo, así se obtiene para dicho ángulo un valor medio de frecuencia de choques f_t.

En la figura 3.9 se muestra, a modo de ejemplo, el número de colisiones acumuladas en función del tiempo para experiencias realizadas con un ángulo de inclinación de $\theta = 2.7°$.

En la mayoría de los casos el ajuste lineal del número de colisiones acumuladas en función del tiempo es excelente (factor de correlación de 0.999) con la sola excepción de los ángulos menores que 2° para los que la relación lineal no es tan buena y para los que se obtiene una mayor dispersión entre los 10 valores de la frecuencia promedio. Sin duda, esto ocurre debido a que estos ángulos pertenecen a la zona de transición con el régimen desacelerado.

En la figura 3.10 se presentan los resultados del promedio de la frecuencia de choque para 21 valores diferentes del ángulo de inclinación.

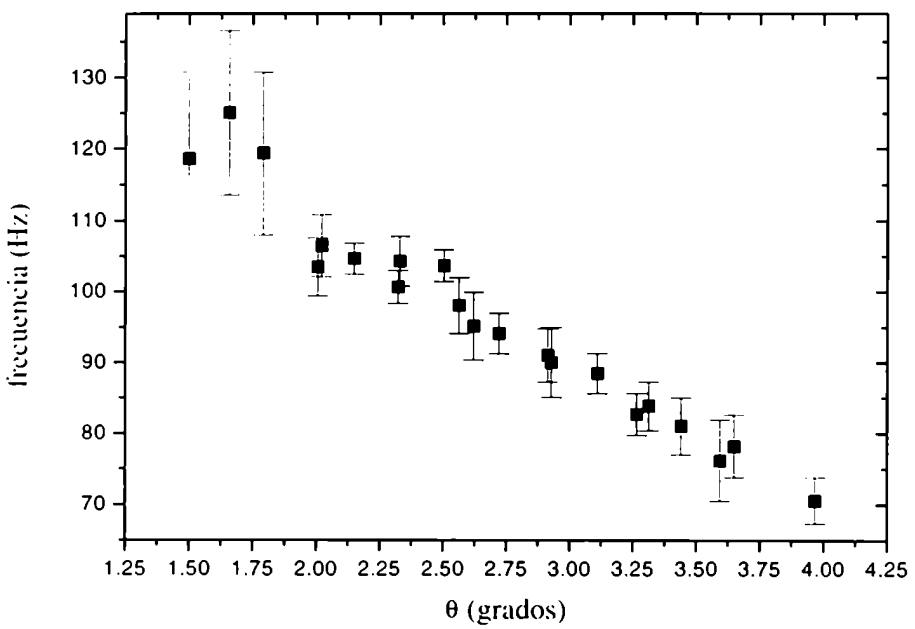

Figura 3.10: Frecuencia promedio en función del ángulo de inclinación para $\phi = 6$.

En este gráfico pueden distinguirse tres zonas:

- Para $\theta < 2°$ se observa una alta frecuencia promedio así como también una gran dispersión para cada medida.

- Para $2° < \theta < 2.5°$ se observa una frecuencia promedio menor con una menor dispersión y una muy débil o casi nula dependencia con el ángulo.

– Para $\theta > 2.5°$ la frecuencia promedio decrece monótonamente con el ángulo con un comportamiento aproximadamente lineal con θ, esta tendencia también se observó en simulaciones numéricas [Dippel 97].

En cuanto al histograma del tiempo entre choques, para ángulos pequeños se observa un pico angosto con un máximo en 6 milisegundos y mientras el ángulo aumenta el pico se mueve a valores mayores y se ensancha dando una distribución más dispersa entre 5 y 20 milisegundos para ángulos cerca del límite con el régimen acelerado. Los valores medios obtenidos de estas distribuciones están en concordancia con los valores promedios obtenidos de las regresiones lineales (figura 3.10) y entran dentro del intervalo de error de estos últimos (figuras 3.11, 3.12, 3.13).

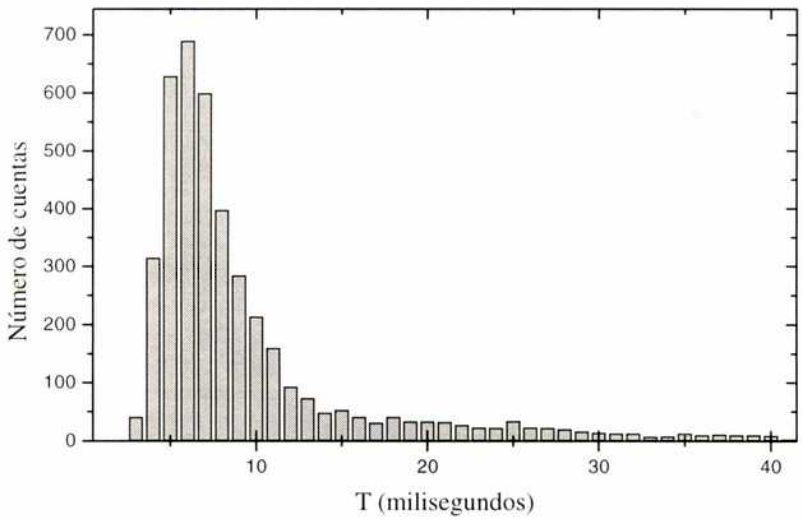

Figura 3.11: Histograma del intervalo de tiempo entre choques para $\phi = 6$ y $\theta = 1.7°$.

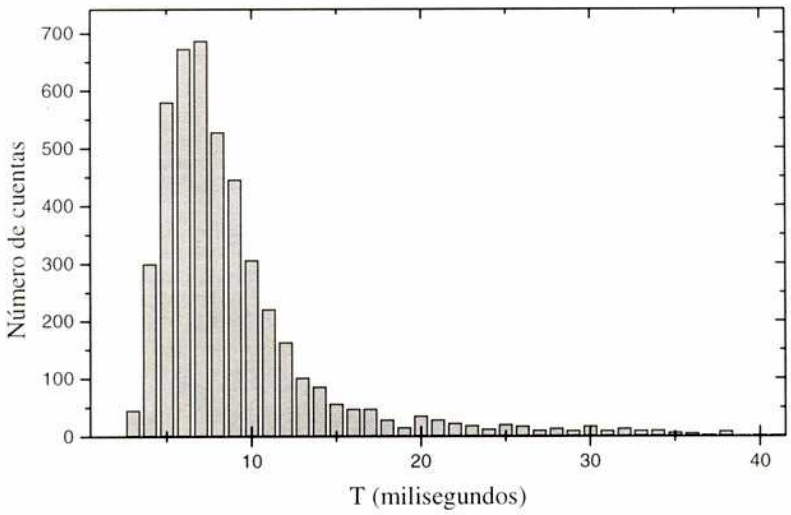

Figura 3.12: Histograma del intervalo de tiempo entre choques para $\phi = 6$ y $\theta = 2°$.

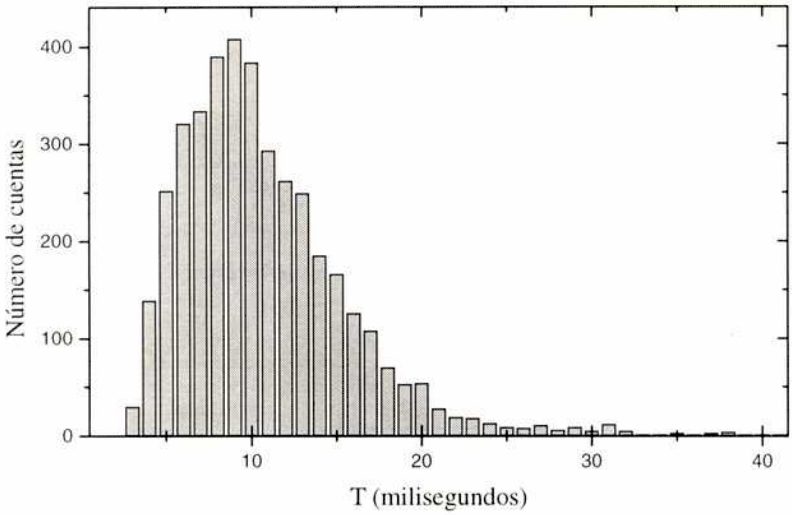

Figura 3.13: Histograma del intervalo de tiempo entre choques para $\phi = 6$ y $\theta = 2.7°$.

Los histogramas presentan perfiles semejantes y, debido a la frecuencia de corte elegida y al ancho supuesto de los pulsos, no es posible detectar tiempos entre colisiones menores a los 3ms.

Se sabe que la velocidad media crece con el seno del ángulo de inclinación θ [Riguidel 94, Aguirre 97], lo que hace suponer que cuando θ aumenta, el tiempo entre colisiones debe disminuir y la frecuencia aumentar. Resulta sorprendente observar un

comportamiento opuesto: la frecuencia media de colisiones decrece cuando el ángulo de inclinación de la superficie rugosa se hace más pronunciado.

Dos posibles factores pueden explicar este comportamiento:

Uno de ellos es la cantidad de veces que la esfera choca con el mismo grano. Con la técnica acústica se observa que para pendientes suaves de la superficie rugosa, la esfera sufre una serie de choques sucesivos de amplitud decreciente lo que sugiere que puede estar rebotando varias veces sobre el mismo grano o dentro del mismo valle de una rugosidad. Este fenómeno deja de observarse cuando se aumenta el ángulo y podría explicar la alta frecuencia de choques cuando la pendiente es pequeña. Por otro lado el valor de esta alta frecuencia es muy sensible a los cambios de ancho (δ) determinados para cada choque y a la amplitud mínima (ε) estimada por el programa utilizado en el análisis.

El segundo factor que puede explicar la disminución de f_t con θ para $\theta > 2.5°$ es que la esfera salte sobre la superficie realizando una trayectoria balística que pasa sobre uno o varios granos. De esta manera tendría menos choques pero de mayor intensidad. De hecho, este comportamiento fue observado en experiencias numéricas [Dippel 97] que simulan el régimen B al aumentar el ángulo de inclinación de la superficie.

Los dos argumentos esgrimidos no son contradictorios sino complementarios, es probable que para valores pequeños de θ predomine el primer efecto: la esfera colisiona más de una vez con cada grano; en la zona central del régimen de velocidad constante y lejos de las zonas de transición ambos factores pueden competir mientras que la presencia de trayectorias balísticas será más relevante para ángulos grandes. Finalmente, cuando la esfera está en el régimen acelerado los saltos son cada vez más importantes. Estos interesantes resultados cualitativos pueden contrastarse con los resultados numéricos ya mencionados [Dippel 97] en el intento de acercarnos a una mejor comprensión del mecanismo de colisión.

Dippel *et al* estudiaron la distribución de tiempos entre colisiones (δt) para distintos ángulos y distintos valores del coeficiente restitución. Para un coeficiente de restitución de 0.8, coincidente con el medido por nosotros [Aguirre 97] para esferas de vidrio, obtuvieron histogramas similares a los presentados aquí si se tiene en cuenta que los choques muy cercanos y de pequeña amplitud no pueden ser detectados por la técnica acústica.

Lógicamente, el modelo numérico permite distinguir cada choque. En particular, es posible diferenciar si la colisión se produce con ángulo de contacto $\gamma < 0$ o $\gamma > 0$ (figura 3.14), es decir en la zona superior (pendiente arriba) o inferior (pendiente abajo), respectivamente, del grano fijo a la superficie. Específicamente, el ángulo de contacto se define como el ángulo sustentado entre la dirección perpendicular a la superficie rugosa y la recta que pasa por el punto de contacto entre la esfera y un dado grano de la superficie conectando sus centros.

Así obtienen histogramas de δt para ambos tipos de choques y significativamente nuestros histogramas experimentales para ángulos pequeños (figura 3.11) coinciden con los de Dippel *et al* correspondientes a choques en el lado inferior de un grano ($\gamma > 0$) mientras que los obtenidos para ángulo mayores (figura 3.13) son similares a los histogramas numéricos asociados a colisiones producidas en el lado superior de un grano.

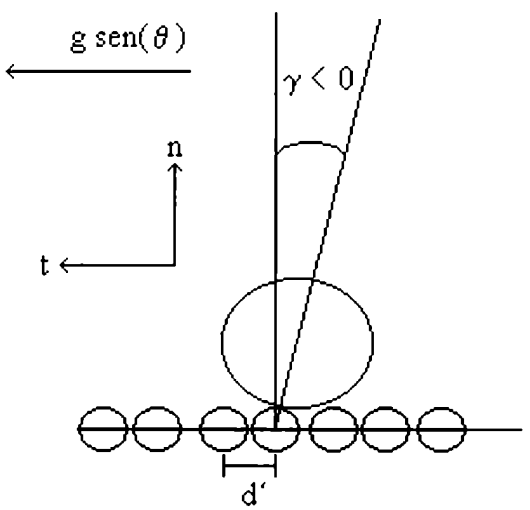

Figura 3.14: Esquema de la geometría utilizada por el modelo numérico donde se ha graficado una colisión con $\gamma < 0$ entre la esfera móvil (en blanco) y una de las esferas de menor radio (en gris) que constituyen el lecho rugoso.

Por otra parte, en el trabajo de Dippel pueden observarse los mismos desplazamientos y ensanchamientos de las distribuciones a medida que aumenta θ, indicando una frecuencia decreciente con θ.

Nuestros resultados entonces, nos inducen a adherir al mecanismo que Dippel *et al* proponen para explicar porque la esfera desciende a velocidad constante, mecanismo

que se comprende mejor teniendo en cuenta la información a la que solo se accede numéricamente, como por ejemplo la distribución de ángulos de impacto, γ, de cada colisión de la esfera sobre los granos de la superficie rugosa.

Dado que la esfera rueda sin deslizar la componente tangencial de la velocidad de la esfera no es relevante para un balance de energía y Dippel *et al* atribuyen el régimen estacionario (régimen B) a un balance entre la energía ganada y disipada que se da debido a la fuerte correlación existente entre:

- el ángulo de impacto de cada colisión con el tiempo entre colisiones (durante el cual la esfera gana energía potencial)

- el ángulo de impacto de cada colisión con la velocidad normal de impacto (que determina la pérdida de energía).

Debe tenerse en cuenta que en estas simulaciones las colisiones que ocurren en:

- la parte superior del grano ($\gamma < 0$) transfieren velocidad V_x (en la dirección de máxima pendiente) a V_z (velocidad en la dirección perpendicular al plano rugoso y a V_x), es decir que la colisión lleva a la esfera a apartarse de la superficie rugosa y como se mencionó estos "saltos" predominan a ángulos grandes.

- la parte inferior del grano ($\gamma > 0$) transfieren velocidad V_z a V_x, es decir que la colisión tiende a llevar a la esfera hacia la superficie rugosa y como se mencionó estas colisiones "rasantes" predominan a ángulos pequeños.

Como la componente tangencial no juega ningún rol en la disipación de energía, la cantidad de energía disipada dependerá solo de la velocidad normal y de la cantidad de colisiones sobre cada grano por lo que resulta interesante conocer la variación de la componente normal de la esfera cuando la misma sobrepasa cada grano de la superficie. Dicha variación es fácil de obtener numéricamente a través de la relación V_n^f / V_n^i donde V_n^f es la velocidad normal después de la última colisión sobre un grano y V_n^i es la velocidad antes de la primer colisión con el mismo grano. Ellos observan que en el 7% de los casos, la esfera ha perdido totalmente su velocidad normal mientras sobrepasaba un grano ($V_n^f \cong 0$).

Con todos lo datos obtenidos Dippel *et al* establecen el siguiente mecanismo de disipación: la esfera no se mueve sobre el plano saltando en forma aleatoria sino que al llegar a un dado grano colisiona varias veces con él de forma de ajustar la dirección de su velocidad a la dirección paralela a la superficie, de esta forma comienza a rodar pendiente abajo. Sin embargo esta dirección no puede ser mantenida por mucho tiempo

ya que la esfera colisionará con otro grano, lo que le producirá una nueva disminución en su velocidad: al abandonar un grano, la dirección normal local de la esfera cambia a tangencial y el primer choque sobre una próxima bolita del plano absorberá parte la velocidad tangencial y aumentará la velocidad normal que deberá disiparse por múltiples colisiones. Se establece así, un mecanismo de regulación que permite mantener la velocidad constante. Como se mencionó, a pesar que para un coeficiente de restitución tan alto, Dippel *et al* encuentra que no toda la energía ganada se disipa por colisiones en cada bolita que sobrepasa, sin embargo el mecanismo de regulación funcionará con tal que en algunas bolitas (7%) la componente normal de la velocidad de anule.

También, el modelo numérico muestra que la cantidad de colisiones realizadas por la esfera está determinada por el coeficiente de restitución normal. Para ángulos mayores se observa que la esfera realiza vuelos balísticos pasando por encima de varios granos antes de colisionar con la superficie. Algunos resultados encontrados en otras simulaciones y experimentos bidimensionales (sobre una línea rugosa) [Dippel 96, Ristow 94] muestran que a velocidades mayores, donde la esfera se separa más de la superficie, domina la componente normal y los saltos son de mayor alcance y por lo tanto se observa una disminución de la frecuencia de colisión a medida que aumenta el ángulo de inclinación del plano. Es decir que parecería que el régimen estacionario se da por una competencia de efectos entre las trayectorias paralelas a la línea o superficie rugosa y las trayectorias balísticas: las trayectorias paralelas dan lugar a muchas colisiones y los vuelos originan pocos choques.

C. Frecuencia espacial de choques

En lo que sigue se mostrará que una combinación de la técnica acústica con el análisis de imágenes de la trayectoria de la esfera, permiten extraer más información acerca de la dinámica de la esfera y en particular, verificar la hipótesis de las múltiples colisiones sobre un mismo grano. En primer lugar, se midió para ángulos entre 2° y 4°, lejos de las zonas de transición, la velocidad de la esfera a lo largo de su trayectoria, V_L, esto es, se determinó la longitud real recorrida y el tiempo insumido. También se determinó la velocidad media en la dirección de máxima pendiente, V. Se estudió la

variación de ambas velocidades con el tiempo y el ángulo de inclinación y se verificó una vez más [Riguidel 94, Aguirre 97, Samson 97] que son constantes en el tiempo y que crecen linealmente con el sen(θ), lo que lleva a que la fuera disipativa en el régimen B es de tipo viscoso.

Se encontró que las velocidades medias en la dirección de máxima pendiente son de aproximadamente 10cm/s para ángulos cerca de la zona de transición A-B y de 18cm/s cerca de la zona de transición B-C y que dichos valores son menores a la velocidad a lo largo de la trayectoria donde los valores encontrados estuvieron entre 12cm/s (transición A-B) y 21cm/s (transición B-C). Estas velocidades son similares a las encontradas en el trabajo de simulación numérica antes mencionado.

También se observó (figura 3.15), en concordancia con otros trabajos experimentales [Samson 97], que las trayectorias correspondientes a ángulos menores presentaban una mayor dispersión lateral.

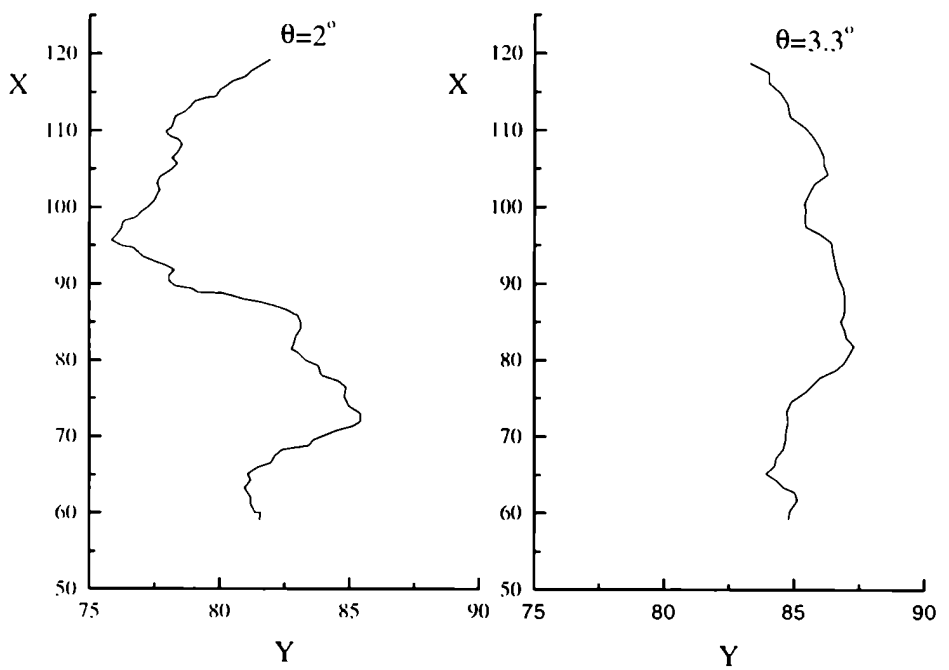

Figura 3.15: Trayectorias para dos ángulos θ = 2° cercano a la transición A-B y θ = 3.3° cercano a la transición B-C.

A continuación, combinando los datos obtenidos de las imágenes de video y de la señal acústica, se calcula la frecuencia media de choques por unidad de longitud $f_l = \frac{\partial N}{\partial L}$ de la siguiente forma:

a) Para un dado valor del ángulo de inclinación se conoce la velocidad V_L a lo largo de la trayectoria, por lo que se puede determinar el tiempo T* que la esfera tarda en recorrer una dada longitud. En la figura 3.16 se muestra la variación de T* con θ para una longitud total L = 40cm.

b) Interpolando los datos del número de choques acumulados en función del tiempo obtenidos de la señal acústica se encuentran, para cada valor de T*, la cantidad de choques que realiza la esfera durante ese tiempo, es decir sobre una trayectoria de longitud L. En la figura 3.17 se muestra el caso de L = 40cm, obtenido interpolando gráficos como los presentados en la figura 3.9.

c) Se repite el cálculo para diferentes valores de L y para cada ángulo de inclinación. En la figura 3.18 se ve la variación del número de choques realizado por la esfera en función de sen (θ) para distintos valores de L. Se observa que en todos los casos se obtiene un decrecimiento lineal y que la pendiente de las rectas disminuye con L.

En la figuras 3.19 se grafica en número de choques en función de la longitud recorrida por la esfera para 7 valores del ángulo de inclinación. Nuevamente, el decrecimiento es lineal y la pendiente decrece con al ángulo.

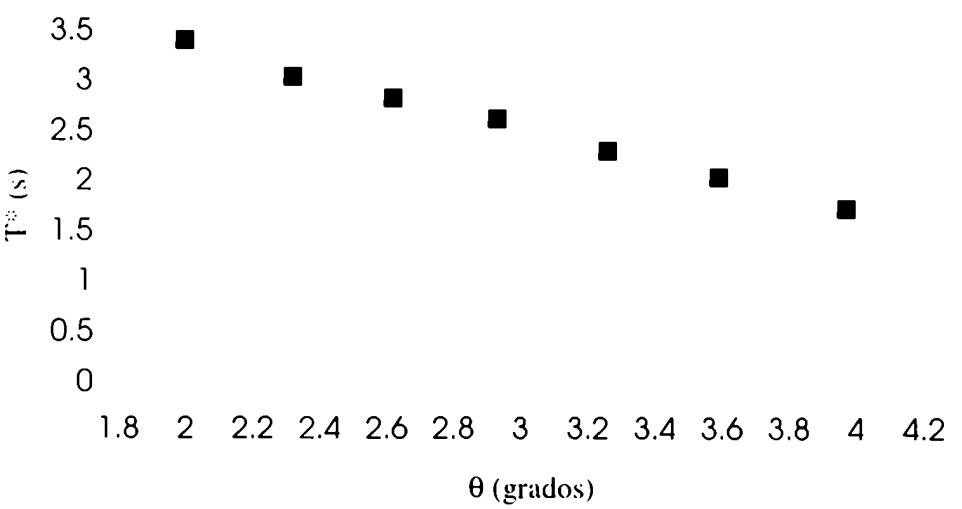

Figura 3.16: Tiempo que la esfera tarda en bajar una longitud L = 40 cm en función del ángulo de inclinación.

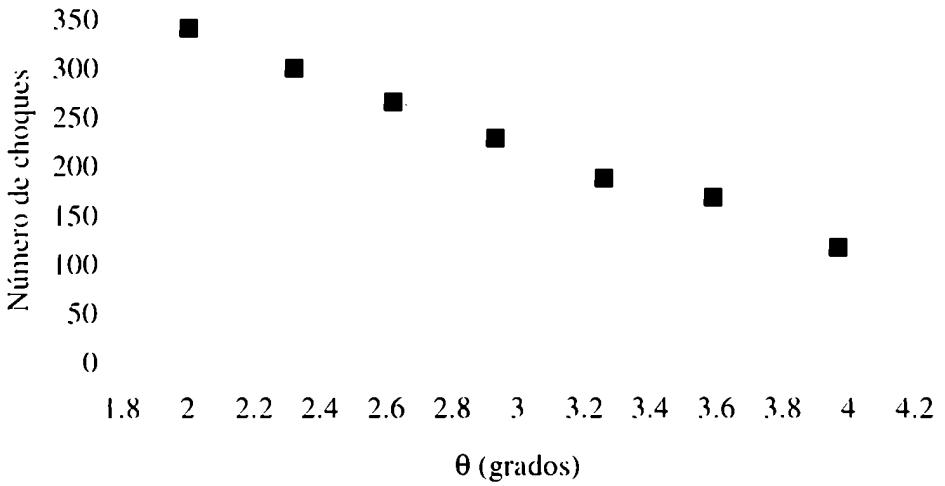

Figura 3.17: Número de choques que sufre la esfera a lo largo de L = 40 cm, en función del ángulo de inclinación.

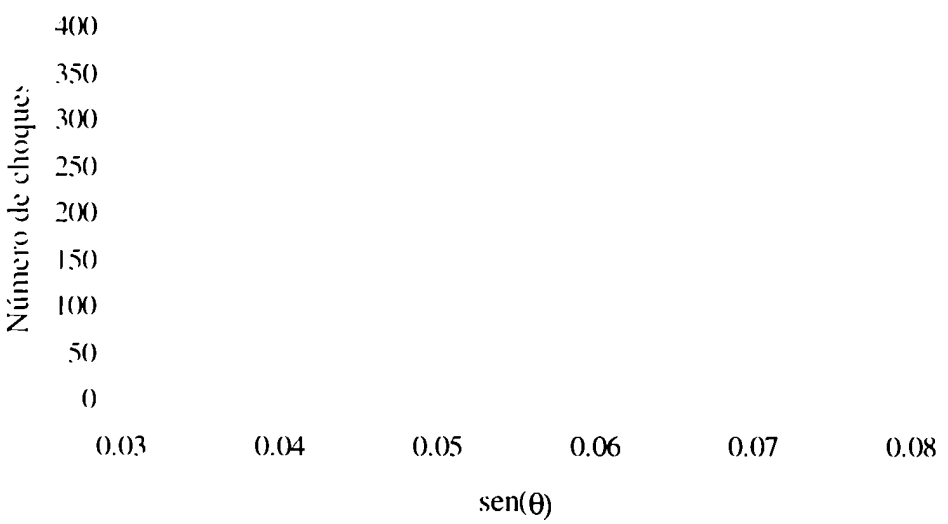

Figura 3.18: Número de choques que sufre la esfera en función del ángulo de inclinación para diferentes longitudes de la trayectoria, (◊) L = 10cm, (□) L = 20cm, (Δ) L = 30cm, (o) L = 40cm.

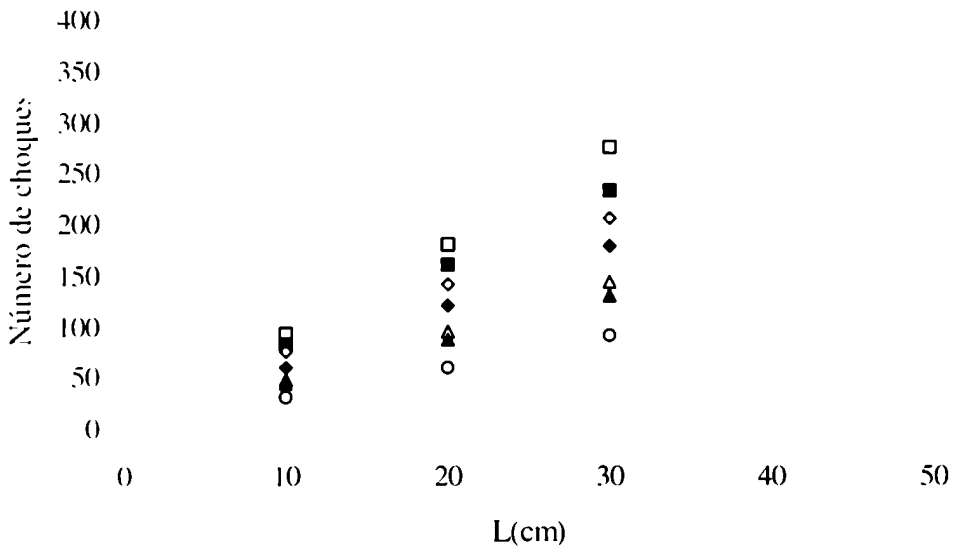

Figura 3.19: Para cada valor de θ se encuentra un incremento lineal del número de choques con la longitud de la trayectoria L, (□) θ = 2°, (■) θ = 2.3°, (◊) θ = 2.6°, (♦) θ = 3°, (Δ) θ = 3.3°, (▲) θ = 3.6°, (o) θ = 4°.

A partir de las pendientes de los ajustes lineales de los datos de la figura 3.19 es posible determinar, para cada ángulo de inclinación, la frecuencia espacial f_L, esto es, la cantidad de choques por cm que sufre la esfera según sea el ángulo de inclinación de la superficie.

En la figura 3.20 se puede ver que f_L es una función decreciente del ángulo de inclinación y que presenta un buen ajuste lineal con sen(θ).

De esta manera, con la técnica acústica obtenemos $f_t(\theta)$ (número de choques por segundo) y con la combinación de estos datos y los extraídos de las imágenes, determinamos $f_L(\theta)$ (número de choques por centímetro). Nótese que las inversas de f_t y f_L determinan parámetros macroscópicos importantes: los intervalos de tiempo y espacio entre colisiones sucesivas: $\delta\tau = 1/f_t$ y $\delta\lambda = 1/f_L$.

De hecho, la figura 3.20 muestra que para ángulos pequeños (límite con el régimen A) $f_t \cong 9s^{-1}$ y $\delta\lambda \cong 0.1$cm, lo que significa que se produce una colisión por mm recorrido. Si recordamos que el diámetro de los granos que constituyen el plano rugoso es $d = 2.6 \pm 0.1$ mm, concluimos que, efectivamente, la esfera choca más de una vez con cada grano.

Por el contrario, para ángulos grandes (límite con el régimen C) encontramos $f_c \cong 3s^{-1}$ y $\delta\lambda \cong 0.3cm$ confirmando que en esta región angular, la esfera realiza una trayectoria balística "salteando" algunos granos de la superficie.

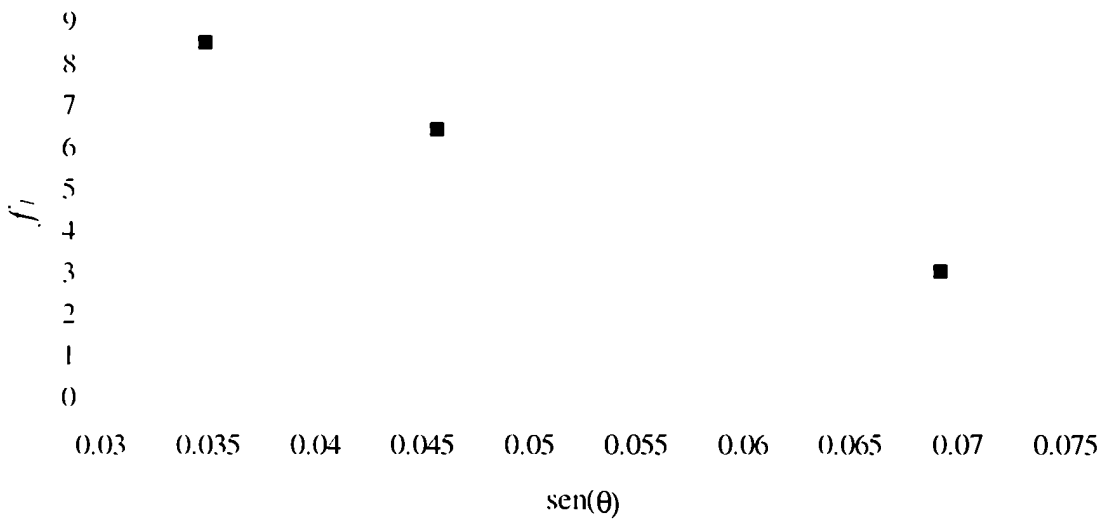

Figura 3.20: Número de choques por unidad de longitud en función del ángulo de inclinación, se observa un comportamiento decreciente a medida que el ángulo aumenta.

D. Mecanismos de disipación

Es evidente que en el régimen de velocidad constante, la esfera debe disipar a lo largo de su trayectoria toda la energía potencial ganada (ΔE_p). Esta energía es mayor cuando el ángulo aumenta, pero hemos visto que en ese caso, la esfera realiza menos cantidad de choques, por lo tanto, debe perder en cada uno mayor energía para mantener el estado estacionario.

Para un dado ángulo de inclinación θ, ΔE_p debe ser igual al trabajo realizado por la fuerza disipativa F a lo largo del recorrido:

$$\Delta E_p = \int m\, g\, \mathrm{sen}\theta\, dx = \int F\, dL \qquad (3.1)$$

donde x indica la dirección de máxima pendiente sobre el plano.

F puede escribirse como: $F = \frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dN}\frac{dN}{dt}$ donde P es el impulso y N el número de choques. Como $\frac{dP}{dN}$ y $\frac{dN}{dt}$ varían con θ y con $V_L(\theta)$, entonces para un valor fijo de θ, $\frac{dP}{dN}$ y $\frac{dN}{dt}$ permanecen constantes e iguales a $\frac{\Delta P}{\Delta N}$ y f_t respectivamente. Por lo tanto, para un dado ángulo de inclinación, $F = \frac{\Delta P}{\Delta t} = \frac{\Delta P}{\Delta N} f_t$ y teniendo en cuenta la ecuación 3.1 se obtiene:

$$m\, g\, \mathrm{sen}\theta\, \Delta x = \frac{\Delta P}{\Delta N} f_t\, \Delta L \qquad (3.2)$$

Teniendo en cuenta que para un valor fijo de θ, V_l permanece contante, puede dividirse la ecuación 3.2 por el intervalo de tiempo Δt que tarda la esfera en recorrer ΔL, obteniendo:

$$\frac{\Delta P}{\Delta N} = \frac{\mathrm{sen}(\theta) V_l}{V_L f_t}\, m\, g \qquad (3.3)$$

Esta expresión confirma que como habíamos previsto, la pérdida de impulso por choque aumenta cuando θ crece.

En la figura 3.21 se representa el lado derecho de la ecuación 3.3, evaluado con los datos experimentales, en función de sen(θ) y se verifica el crecimiento lineal.

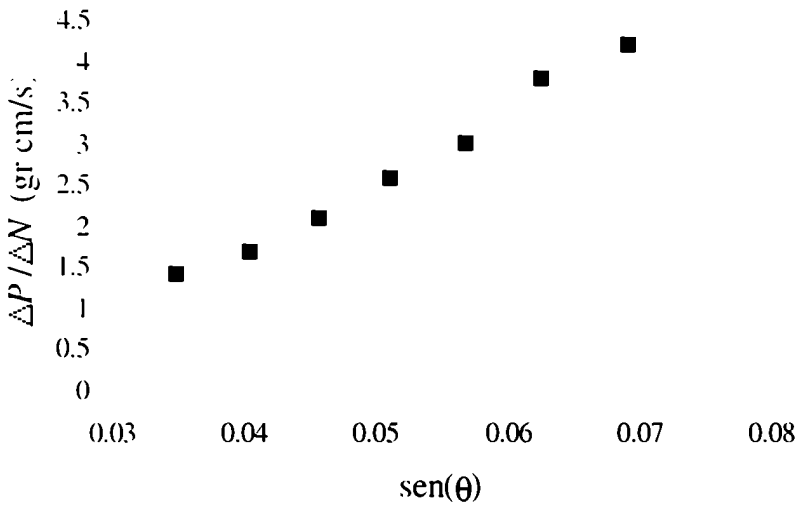

Figura 3.21: Variación del impulso por choque en función del ángulo de inclinación.

Efectivamente, en el régimen B, a medida que el ángulo aumenta y la frecuencia de choque decrece, la esfera debe perder mayor impulso en cada colisión para mantenerse con velocidad constante.

Por otra parte, volviendo a la expresión de la fuerza, $F = \frac{\Delta P}{\Delta N} f_t$, podemos cuantificar el valor de la fuerza disipativa actuante:

$$F = m\, g\, \mathrm{sen}(\theta)\, V_x(\theta) / V_L(\theta) \qquad (3.4)$$

función lineal creciente con el sen(θ) tal como se ve en la figura 3.22 en la que se representa el término derecho de la ecuación 3.4.

Teniendo en cuenta que todos los resultados previos [Riguidel 94, Aguirre 97, Samson 97] así como los presentados en este trabajo indican que tanto $V_x = \Delta x/\Delta t$ como $V_L = \Delta L/\Delta t$ varían linealmente con sen(θ), queda confirmado el carácter viscoso de la fuerza disipativa.

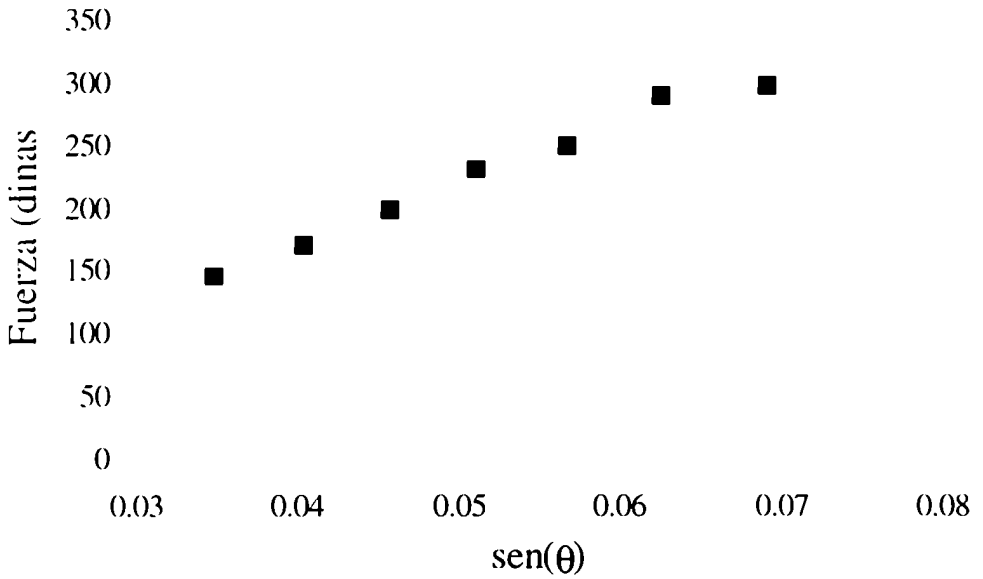

Figura 3.22: Fuerza disipativa en función de sen(θ), en este régimen se verifica la presencia de una fuerza disipativa de tipo viscoso.

III.4. Resumen

La puesta punto de una técnica acústica, combinada con análisis de imágenes de la trayectoria de una esfera descendiendo por un plano inclinado rugoso permitió:

1) Identificar fácilmente el régimen de movimiento.

2) Determinar, en el régimen de velocidad constante, la frecuencia temporal de choques y su dependencia con el ángulo de inclinación θ: a mayor ángulo mayor cantidad de choques por segundo.

Se proponen dos mecanismos complementarios que explican ese comportamiento:

- a bajos ángulos: la esfera realiza colisiones múltiples sobre cada grano.

- altos ángulos: la esfera realiza trayectorias balísticas de alcance proporcional a θ.

Se contrastan y complementan los resultados comparándolos con simulaciones

3) Determinar, en el régimen de velocidad constante, la frecuencia espacial de choques y su variación decreciente con θ. Con esto se confirma la hipótesis de que para

ángulos pequeños se producen múltiples colisiones y que ángulos mayores existen trayectorias balísticas.

4) Determinar V_x, V_L constantes con x y así cuantificar $\frac{\Delta P}{\Delta N}$ y la fuerza disipativa confirmando que se trata de una fuerza de tipo viscoso.

5) Teniendo en cuenta las hipótesis del modelo numérico y la buena concordancia de los datos experimentales con el mismo, se verifica que el régimen B es netamente colisional, es decir, la disipación de energía por fricción es despreciable frente a la gran disipación provocada por las choques.

Estabilidad y dinámica en empaquetamientos granulares

Avalanchas

Have you ever seen an ant trapped in a sand pit? The pit is build by an ant lion, an insect that sits on the rim of the pit and watches his victim struggle futilely to crawl out. But the pit is constructed with slopes at just the right angle, so that the sand particles lose their cohesion, break, and send the ant tumbling back to the bottom. The ant lion waits until his prey is overcome with exhaustion; then he kills.

I knew what the ant felt like.

I was rolling, then flattened out on my stomach, trying to find a handhold with my fingers. But volcanic ash is worse than sand. There is no cohesion. Your fingers slide through as if the ash were water.

The .44 Magnum clapped again, the slugs digging deep into ash. One bullet sent a geyser of dust into my eyes, blinding me. I choked, sucking more into my lungs. At 17000 feet I was having enough trouble breathing as it was. But all my troubles seemed to be coming to an end.

I was really falling now. The whole slope of ash disintegrated. Rocks started falling, little ones first, building up to boulders. Suddenly I was tossed up in a cartwheel, trying to protect my head with my arms. The sound of tons of ash and rock breaking loose was deafening. I fell through air, landing on my back. I groped up until I felt solid stone and wedged myself into it. I has bounced off a stone shelf. I knew then that I had a chance for survival if I could only cling to the overhang of the shelf. And if the shelf didn't slip.

Nick Carter
"The devil's dozen"

Capítulo I

Antecedentes

Completando el análisis ya realizado acerca del movimiento aislado de un grano sobre un lecho rugoso, en esta segunda parte de la tesis se estudiarán los efectos colectivos sobre la estabilidad de un apilamiento de granos en vista a comprender el fenómeno de avalancha.

I.1. Flujo de material granular

Para poner en movimiento un empaquetamiento de granos es necesario suministrar energía al sistema en forma continua y de intensidad suficiente como para compensar las pérdidas ocasionadas principalmente por fricción, debidas al rozamiento sólido. El concepto de **rozamiento sólido**, introducido por Coulomb [Coulomb], permite explicar la estabilidad en una superficie granular inclinada. Coulomb define un coeficiente medio de rozamiento sólido μ, que representa la interacción entre dos capas granulares adyacentes y obtiene que $\mu = \mathrm{tg}\varphi$ donde φ es el ángulo de rozamiento sólido capa-capa. Este ángulo φ depende solo de factores geométricos (desorden y condiciones de contorno) y no del rozamiento sólido entre los granos. Denominando T y N a las componentes tangencial y normal de la reacción de la pila sobre los granos en la capa superior, se encuentra que el apilamiento es estable para $T > \mu N$.

Dado el tamaño de los constituyentes, la energía necesaria para poner en movimiento a un sistema granular no puede ser térmica sino mecánica. Una posibilidad es someter el sistema a vibraciones, aunque lo más habitual es que los granos se pongan en movimiento tomando energía del campo gravitatorio. La fuerza gravitatoria también permite que el sistema se dilate para luego fluir. El proceso de **dilatancia**, descripto por primera vez por Reynolds [Reynolds], permite comprender el flujo de medios granulares. Este concepto surge de que en los empaquetamientos, los granos quedan

encastrados unos en otros y por lo tanto no pueden fluir o cambiar de posición a menos que el medio granular pueda dilatarse. Este fenómeno depende de la densidad del apilamiento y de la geometría de los granos.

Reynolds también estudió la influencia de las propiedades mecánicas de los granos sobre el coeficiente de rozamiento sólido. Su experimento consistió en inclinar una caja con arena hasta que el sistema se desestabiliza al alcanzar un ángulo crítico, denominado ángulo máximo de estabilidad, θ_M. Mientras el ángulo de la pendiente de la pila es inferior a θ_M la arena no puede dilatarse y por lo tanto los granos no se mueven debido a que quedan atrapados en sus propios pozos y a la fuerza de rozamiento que ejercen unos sobre otros. Cuanto mayor es el encastre entre los granos mayor es el valor de θ_M necesario para desbloquearlos.

Entre los trabajos realizados durante el siglo XX sobre el movimiento de medios granulares, cabe mencionar aquellos realizados por Bagnold en 1954 y 1966 [Bagnold 54, Bagnold 66] en los que se estudia el cizallamiento entre granos esféricos de cera suspendidos en un fluido. En cuanto al comportamiento de medios granulares secos, los trabajos más relevantes son los de Savage [Savage 79, 84 y 89], el de Lun *et al.* [Lun 84], Lun y Savage [Lun 87], Jenkins y Savage [Jenkins 83], Jenkins y Richman [Jenkins 86] y Haff [Haff 83]. En particular, estos últimos estudios distinguen dos regímenes extremos de movimiento: uno rápido dominado por colisiones entre partículas y con las paredes y otro lento dominado por la fuerza de rozamiento debido al contacto prolongado entre granos.

Sin embargo, en fenómenos naturales (por ejemplo en avalanchas) pueden observarse flujos granulares en los que coexisten ambos tipos de regímenes. Esto motivó distintos modelos teóricos y numéricos que tienen en cuenta tanto el rozamiento como la colisión entre granos, así como otras situaciones más complicadas como el flujo en presencia de un obstáculo o a través de una abertura.

Entre éstos, uno de los más importantes es el de Johnson y Jackson [Johnson 87] en el que se desarrolla un modelo que combina los resultados experimentales macroscópicos relacionados a las fuerzas de rozamiento y una aproximación microscópica utilizando la teoría cinética para describir las colisiones.

Esta teoría híbrida describe un régimen intermedio entre los regímenes extremos y aplicada al cizallamiento de un medio granular contenido entre dos placas, muestra la presencia de zonas que participan del movimiento y otras que no lo hacen, característica

esencial del flujo granular. Sin embargo, el modelo no permite acceder a la escala del grano, lo que podría agregar información importante.

El estudio de flujos tridimensionales no es un problema sencillo ya que es difícil observar el interior del flujo sin alterarlo. Es por ello que se realizaron muchas experiencias y simulaciones numéricas en sistemas bidimensionales que brindan elementos importantes a pesar de que en este tipo de geometrías el comportamiento del medio granular está fuertemente influenciado por las paredes.

Entre los estudios en sistemas bidimensionales cabe destacar el realizado por Thomas Drake en 1990 [Drake 90] en el que se analiza el flujo de esferas de plástico entre las paredes de un canal de fondo rugoso, de 3,7 m de largo, 0,5 m de profundidad y sólo 6,7 mm de espesor por lo que el movimiento de las esferas resulta esencialmente bidimensional, excepto por la rotación 3D de las mismas. El flujo se generó colocando entre 15.000 y 30.000 esferas en un embudo que alimenta una bandeja lisa inclinada en la cual se organizan las esferas en una sola capa ante de caer verticalmente al canal. Dicho flujo se controló bloqueando porciones de la capa en la bandeja.

Las características del movimiento dependen del ángulo de inclinación del canal, del caudal y de la rugosidad del fondo. Observado lateralmente el flujo presenta dos regiones:

a) Región inferior, cercana al fondo del canal, en la que los movimientos son gobernados por el rozamiento. Esta región puede subdividirse en una zona cuasi-estática muy próxima al lecho del canal y otra encima en la que los granos se desplazan lentamente, en bloques paralelos al fondo.

b) Región superior en la que predomina el efecto de las colisiones y puede ser subdividida en tres zonas: una zona inferior en la que los granos se deslizan unos sobre otros, una superior en la que los granos saltan realizando largas trayectorias curvas y una región intermedia de movimientos muy caóticos, con trayectorias aleatorias semejantes a las de un gas denso.

Por otra parte, las fuerzas se transmiten de forma distinta en cada zona: en la zona de fricción intervienen los contactos prolongados mientras que en la zona de colisión el flujo se debe a los choques entre las partículas.

En el punto siguiente se describirán los trabajos más relevantes relacionados a la aparición de la avalancha y a su dinámica.

I.2. Avalanchas

Bak, Tang and Wiesenfeld (BTW) [Bak 87, Bak 88] relacionaron la inestabilidad del flujo en la superficie de un apilamiento de arena (avalancha) a un fenómeno de criticalidad auto-organizada. Dicho fenómeno consiste en que la dinámica en la superficie de arena hace evolucionar al sistema hacia un único estado crítico: el ángulo del apilamiento disminuye hasta que las avalanchas se detienen cuando alcanzan un cierto ángulo denominado ángulo de reposo θ_r.

Partiendo de este modelo, predijeron un comportamiento del tipo leyes de escala tanto para el tamaño de las avalanchas como para la frecuencia de aparición de las mismas.

Las características de los sistemas críticos autorganizados, han sido estudiados modelando los apilamientos con autómatas celulares, es decir con sistemas compuestos por unidades que siguen leyes sencillas [Kadanoff 89].

Sin embargo, distintas experiencias [Jaeger 89] demuestran que los sistemas granulares no siempre responden a las leyes de la criticalidad autoorganizada, aunque pueden hacerlo en circunstancias particulares [Held 90, Nerone 2000b].

Por el contrario, se encuentra que el equilibrio del empaquetamiento no depende de un sólo ángulo crítico sino de al menos dos ángulos entre los que la pendiente del sistema oscila: cuando ésta excede un cierto valor, denominado ángulo de máxima estabilidad, θ_M, las capas superficiales se desestabilizan dando lugar a una avalancha. La avalancha lleva al sistema a una pendiente menor donde el flujo cesa y el sistema se estabiliza, dicha pendiente está caracterizada por el denominado ángulo de reposo, θ_r. Se observa entonces que el comportamiento del sistema depende de la historia del mismo: un sistema con pendiente θ tal que $\theta_r < \theta < \theta_M$, será estable si θ está creciendo y será inestable si dicha pendiente θ, se obtuvo quitando granos con una avalancha.

Las experiencias más relevantes que muestran este comportamiento pueden separarse en tres grupos:

1) Experiencias en un tambor horizontal bidimensional, parcialmente lleno de material granular y girando a baja velocidad [Jaeger 89, Jaeger 92, Evesque 89, Evesque 91, Cantelaube 95a, Caponeri 95].

2) Experiencias en una caja rectangular repleta con granos, la cual se inclina progresivamente respecto de la horizontal [Bretz 92, Evesque 93, Evesque 93b, Pouliquen 96].

3) Experiencias en apilamientos cónicos de material granular [Held 90, Rosendahl 93].

Describimos a continuación los resultados más importantes:

a) Jaeger *et al* y Evesque *et al* [Jaeger 89, Jaeger 92, Evesque 89, Evesque 91] encuentran que la superficie libre del medio granular forma un ángulo $\theta(t)$ con la horizontal, observándose que para ángulos menores o ligeramente superiores a θ_r no ocurren deslizamientos en la superficie libre. Recién se observa que comienzan las avalanchas para un ángulo θ_M superior a θ_r (en aproximadamente 2° para arena). Estas avalanchas hacen decrecer el ángulo hasta θ_r.

b) Cantelaube *et al* [Cantelaube 95a, Cantelaube 95b] realizan un estudio experimental y numérico (simulaciones con dinámica molecular) de la superficie de un medio granular confinado en un tambor bidimensional (sistema cerrado) al que llenan parcialmente de discos o pentágonos. Obtienen la estabilidad de los sistemas determinando el máximo ángulo de estabilidad θ_M, y el ángulo de reposo, θ_r.

Los autores encuentran dos tipos de movimientos: grandes avalanchas y pequeños eventos que reorganizan la superficie libre entre dos avalanchas sucesivas.

El tamaño de los pequeños reacomodamientos sigue una distribución tipo ley de potencia como en el caso tridimensional [Bretz 92] y los eventos mayores (avalanchas) presentan un tamaño y duración medios bien definidos.

Por otro lado, se observó que las condiciones de equilibrio se ven fuertemente influenciadas por la forma de las partículas. Los sistemas compuestos por pentágonos resultan más estables ($\theta_M^{pentágonos} \cong 45°$) que los sistemas compuestos por discos ($\theta_M^{discos} \cong 33°$) debido a la geometría de los contactos.

c) Caponeri *et al* [Caponeri 95] también reportan experiencias en un tambor rotante semi lleno de granos monodispersos obteniendo cuatro regímenes de avalanchas

según sea la velocidad de rotación del tambor. Para bajas velocidades observan avalanchas con una amplia distribución de tamaños (duración del evento) y de tiempo entre avalanchas sucesivas, a medida que aumenta la velocidad observan una transición suave a un régimen periódico donde todas las avalanchas presentan la misma duración y aumentando aún más la velocidad se produce una transición a un régimen de flujo continuo donde el lecho presenta una pendiente constante. Los autores proponen un modelo simple basado en una analogía con un movimiento del tipo stick-slip que ajusta muy bien sus resultados.

d) Bretz *et al*, Evesque *et al* y Pouliquen *et al* [Bretz 92, Evesque 93, Pouliquen 96] realizan experiencias en una geometría distinta al tambor rotante que permite estudiar el flujo en forma tridimensional. Presentan resultados comparables a los del tambor rotante ya que aquí también son necesarios dos ángulos distintos θ_r y θ_M para definir la estabilidad del apilamiento.

En particular, Bretz *et al* [Bretz 92] realizan experimentos inclinando lentamente (0.22°/min) una caja repleta de esferas de 2mm de diámetro.

Observan que cada 10min – 13min la superficie libre del empaquetamiento evoluciona desde el máximo ángulo de estabilidad ($\theta_M \cong 28°$) hasta el ángulo de reposo ($\theta_r \cong 25°$).

También se filma y registra la superficie libre del empaquetamiento y mediante un tratamiento de imágenes se estudian, por primera vez, los reacomodamientos que ocurren en la superficie libre antes de desencadenarse la avalancha.

Encuentran que la distribución de tamaños de los reacomodamientos es una ley de potencia con exponente igual a –2.134, como también lo es la cantidad de estos eventos en función del tiempo o ángulo reducido,$(\theta_M - \theta) / (\theta_M - \theta_r)$, con un exponente igual a –1, lo que demuestra que el máximo ángulo de estabilidad se comporta como un punto crítico.

Cabe aclarar que este experimento se centra en la detección y análisis de reacomodamientos en la superficie del empaquetamiento y no profundiza en el estudio de los factores que puedan afectar la estabilidad del sistema, es decir a los ángulos críticos θ_M y θ_r, como la altura y el largo del empaquetamiento o la humedad ambiente.

e) **Held et al** [Held 90] realizan experiencias en apilamientos cónicos de arena construidos sobre el plato circular de una balanza.

Sobre la cima de la pila se dejan caer uno a uno granos de arena, registrándose el peso del apilamiento con la balanza que es capaz de detectar fluctuaciones en masa equivalentes a un grano. Midieron las fluctuaciones en la masa del apilamiento producida cuando la arena cae fuera del plato para apilamientos cónicos construidos sobre platos de 1, 2 y 4cm de diámetro. En estos casos, obtuvieron resultados acordes a la teoría de criticalidad auto-organizada: observaron avalanchas en un amplio rango de tamaños y la función de distribución del tamaño de la avalancha sigue una ley de potencia con exponente 1.98. Sin embargo, cuando realizaron experiencias con un plato de mayor diámetro (8cm) el apilamiento produjo principalmente grandes avalanchas que producían una variación abrupta en la pendiente del apilamiento, apartándose de la teoría de criticalidad auto-organizada y presentando dos ángulos críticos.

Respecto a los modelos teóricos destinados a describir el flujo en la superficie de un apilamiento granular podemos destacar los siguientes:

a) **Jaeger *et al.*** [Jaeger 90], en un estudio más completo sobre el rozamiento proponen que la fuerza de fricción a la que está sometido un grano, de diámetro medio d, moviéndose sobre una superficie compuesta de otros granos se obtiene de un balance entre una fuerza que favorece el movimiento (gravitatoria) y las fuerzas disipativas que se oponen a él:

$$m\langle a\rangle = \sigma - F \qquad (1.1)$$

donde m es la masa del grano, <a> su aceleración, σ es la fuerza causante del movimiento (m g senθ) y F incluye todas las fuerzas disipativas a la que es sometido: rozamientos y colisiones inelásticas (figura 1.1).

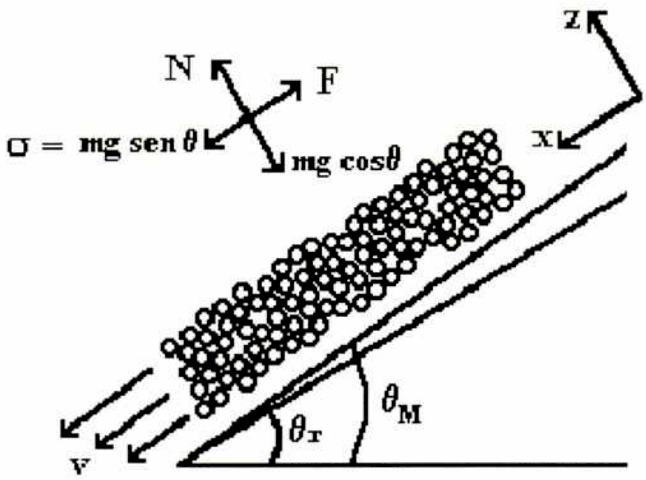

Figura 1.1: Esquema del flujo de granos, mostrando el perfil de velocidad y los ángulos de máxima estabilidad θ_M y de reposo θ_r.

En estado estacionario <a> = 0 y por lo tanto σ = F. Suponiendo que los efectos de borde son despreciables, las propiedades del flujo solo dependen de su profundidad z. La fuerza F se determinó como el valor medio de la variación de la energía total E con x, distancia recorrida en la dirección del movimiento:

$$F = \langle \frac{dE}{dx} \rangle \tag{1.2}$$

Obtienen la variación de energía total suponiendo que la pérdida de energía cinética se realiza a través de las colisiones y la pérdida de energía potencial E_p se debe a que el grano cae en las depresiones (de tamaño medio d) de la capa sobre la que se desliza. También consideran, que el grano perderá poca energía potencial si se desplaza a velocidad altas (su coordenada z disminuyó levemente al cruzar un pozo) mientras que si se desplaza a poca velocidad el grano siempre caerá en un pozo independientemente de su velocidad.

Con las anteriores consideraciones y la relación 1.2 obtienen que la fuerza disipativa total es:

$$F = \frac{\alpha}{1 + \alpha_1 V^2} + \beta V^2 \tag{1.3}$$

donde α, α_1 y β son constantes que describen la geometría de las partículas y la energía perdida durante las colisiones. Para altas velocidades $F \propto V^2$ y para bajas velocidades se llega a un régimen de fricción sólida, es decir F constante. Entre estos dos regímenes se interpola ajustando los parámetros con los datos experimentales y es común obtener que F presenta un mínimo en $V = V_0$, tal como se muestra en la figura 1.2:

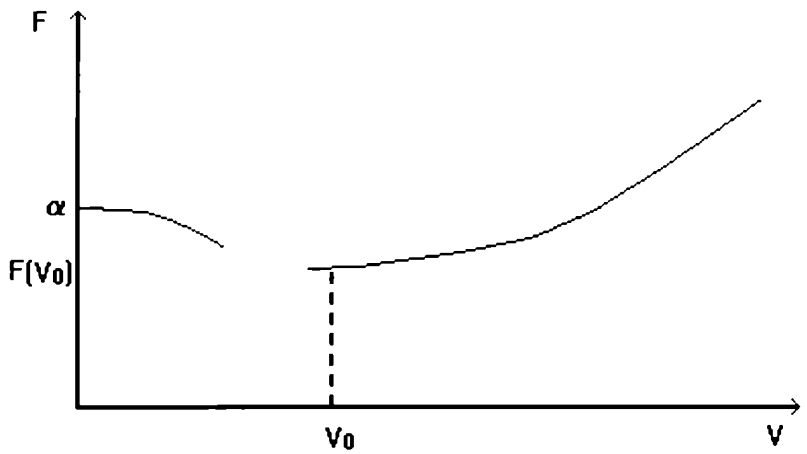

Figura 1.2: Esquema típico de la variación de la fuerza de rozamiento F con la velocidad.

Esta variación de la fuerza disipativa con la velocidad conduce a situaciones diferentes según sea el valor de la fuerza impulsora σ.

En la experiencia del tambor rotante semilleno con un medio granular, por ejemplo, la dependencia de F con V encontrada por Jaeger *et al.*, explica la existencia de los dos ángulos de estabilidad θ_r y θ_M. La superficie libre de los granos está inicialmente horizontal ($\theta = 0$). Cuando el tambor gira, aumenta θ y por consiguiente aumenta σ. Los granos no se mueven mientras $\sigma < F(V_0)$. Si $F(V_0) < \sigma < \alpha$ algunos granos pueden moverse, pero sólo para $\sigma \geq \alpha$ se produce el movimiento colectivo: θ alcanzó el valor θ_M. Como resultado de la avalancha producida, θ disminuye, por consiguiente disminuye σ hasta alcanzar nuevamente el valor $F(V_0)$, punto en el que cesa el movimiento en masa, lo que define el ángulo θ_r.

b) Bouchaud *et al.* [Bouchaud 95a y b] propusieron un modelo teórico, conocido como modelo BCRE, para el flujo en la superficie de un apilamiento granular. Dicho

modelo propone una separación entre una fase móvil y otra inmóvil. La dinámica de ambas fases está descripta por un conjunto de ecuaciones acopladas que relaciona la densidad de granos móviles R(x,t) y la altura local h(x,t) de la fase inmóvil, siendo t el tiempo y x una coordenada espacial paralela a la base del apilamiento. El modelo propone que la fase móvil está gobernada por una ecuación convección – difusión de la siguiente forma:

$$\partial_t R(x,t) = -\partial_x(vR) + \partial_x(D\partial_x R) + \Gamma(R,h) \qquad (1.4)$$

donde R dx es la cantidad de granos que se mueven entre x y x+dx, v es la velocidad de los granos móviles pendiente abajo y D el coeficiente de dispersión constante que tiene en cuenta las fluctuaciones en la velocidad. Por otro lado, Γ da cuenta de la conversión de granos inmóviles a móviles y viceversa y debe cumplir las siguientes propiedades:

a) Un grano inmóvil solo puede comenzar su movimiento si es desplazado por un grano en movimiento.

b) La pendiente local del apilamiento $-\partial_x h$ debe exceder un valor crítico θ_r (asociado al ángulo de reposo) para que el desplazamiento sea efectivo. Por simplicidad, toman $\theta_r = 0$ obteniendo valores de $\partial_x h$ pequeños, es decir que tanto pendientes como ángulos son equivalentes. También definen un apilamiento que aumenta su altura a medida que disminuye x, es decir que $\partial_x h > 0$ corresponde a una pendiente menor a la crítica.

c) Si $\partial_x h > 0$ los granos quedan entrampados en la superficie pasando a la fase inmóvil con una rapidez proporcional a R

d) Si $\partial_x h = \theta_r = 0$ pero $\partial_x^2 h \neq 0$, entonces la convección tiende a reducir la curvatura local de la superficie, llenado espacios vacíos y erosionando protuberancias con una rapidez proporcional a R.

La expresión más simple que sintetiza la cuatro propiedades mencionadas es la siguiente relación bilineal:

$$\Gamma(h,R) = -R\left[\gamma\partial_x h + \kappa\partial_x^2 h\right] \qquad (1.4)$$

con γ y $\kappa > 0$. Teniendo en cuenta que h(x,t) describe la fase inmóvil, por conservación debe cumplirse la siguiente expresión:

$$\partial_t h(x,t) = -\Gamma(R,h) \qquad (1.5)$$

Dado que Γ es lineal en R, en ausencia de una fase móvil, la superficie queda congelada en un estado metaestable y no puede reacomodarse. Una perturbación evolucionará pendiente arriba durante un corto período de tiempo, se dispersará según el término que contiene κ en la ecuación (1.9) y luego, al detenerse los granos móviles, la superficie quedará inmovilizada en un nuevo estado. Una propiedad del modelo es la convección pendiente arriba.

Las ecuaciones anteriores fueron estudiadas analítica y numéricamente para varias situaciones.

Si en un apilamiento en una situación metaestable, $\partial_t h = -\theta_0 < 0$, se forma un pulso de granos móviles en la posición x, aparecen dos efectos contrarios:

1) los granos se mueven (convección) en forma dispersiva pendiente abajo,

2) el número de granos móviles cercanos de la posición x aumenta ya que los granos originalmente móviles desplazan a los orginalmente inmóviles.

Combinando ambos efectos se observa la aparición del llamado ángulo de Bagnold o máximo ángulo de estabilidad, θ_M, (distinto del ángulo de reposo θ_r) por encima del cual el perfil pendiente arriba de la perturbación es inestable a pequeñas perturbaciones, es decir:

- Si $\theta_0 > \theta_M$: predomina el segundo efecto y se produce una avalancha

- Si $\theta_0 < \theta_M$: la perturbación desaparece rápidamente por convección dejando un perfil estático.

Numéricamente se encuentra que $\theta_M \cong 20\ v^2/D\ \gamma$ y que para $\theta_0 > \theta_M$ el sistema relaja completamente al ángulo de reposo mientras que si $\theta_0 < \theta_M$ el sistema relaja a una pendiente metaestable.

Puede observarse que sin dispersión (D = 0), no existe límite para la zona metaestable, es decir cualquier perturbación rápidamente será removida por convección y no afectará al perfil pendiente arriba de donde comenzó.

Este modelo resulta de gran interés debido a su sencillez para tratar un problema tan complejo como es el del movimiento colectivo de granos. Sin embargo, no tiene en cuenta la evolución del sistema en ausencia de una perturbación inicial ya que no contempla posibles movimientos de granos aislados en situación local inestable.

Aunque proponen introducir este efecto con un término de ruido el comportamiento por debajo y por encima de θ_M será igual al ya descripto.

Por otro lado, solo considera variables superficiales por lo que no tiene en cuenta efectos de largo alcance debidos al campo de esfuerzos dentro el apilamiento, los que pueden ser importantes en algunas situaciones.

c) de Gennes *et al* [de Gennes 95] modifican el modelo BCRE, descripto en la sección anterior, despreciando el término difusivo y proponiendo que la tasa de erosión o sedimentación (según sea el signo de la pendiente) es independiente de la densidad de la fase móvil, R. Para ello introducen un ángulo en el cual la erosión compensa la sedimentación. Dicho ángulo, llamado ángulo neutro, θ_n, está definido en forma unívoca a diferencia de otros ángulos característicos como los ángulos θ_M y θ_r, ángulos de reposo y de máxima estabilidad respectivamente, que dependen de la geometría del reservorio:

- En un recipiente abierto donde el material granular puede ser desalojado fuera del mismo encuentran que $\theta_r = \theta_n$.

- En un recipiente cerrado donde el material móvil provino de una cuña de ángulo δ, encuentran que $\theta_r = \theta_n - \delta = \theta_M - 2\delta$, es decir $\theta_r < \theta_n$.

Teniendo en cuenta el ángulo neutro θ_n, la velocidad media de flujo v y la velocidad de desplazamiento de una perturbación, v_{arriba}, que es contraria a la dirección del flujo, el conjunto de ecuaciones que describen la dinámica del apilamiento es:

$$\partial_t R(x,t) = v\partial_x R - \partial_t h \qquad (1.6)$$

$$\partial_t h(x,t) = v_{arriba}(\theta_n - \theta) \qquad (1.7)$$

Este modelo encuentra un espesor característico, ξ, para la capa de granos móviles. Dicha longitud caracteriza el tamaño de los caminos que describen las fuerzas en el apilamiento, por lo que depende, entre otros factores, de la forma de los granos y la fuerza de fricción. Se encuentra que ξ varía aproximadamente entre 5 y 10 diámetros de granos.

La limitación del modelo reside en la descripción determinista que realiza del desencadenamiento de la avalancha: automáticamente en un ángulo θ_M se desliza la

superficie libre dando lugar a la avalancha. Este efecto no se observará experimentalmente.

Posteriormente, Boutreux *et al* [Boutreux 98] adaptan este modelo a fin de estudiar avalanchas de muchas capas y encuentran que las tasas de erosión y sedimentación son independientes de R solo para el caso en que la altura de granos móviles sea mucho mayor que 5 veces el diámetro medio de un grano.

El resumen presentado muestra la carencia de experiencias sistemáticas dirigidas a comprender el fenómeno de avalanchas. Este es el objetivo de esta segunda parte de la tesis.

Capítulo II

Proceso de avalancha

Como se mencionó en el Capítulo I, se ha comprobado experimentalmente [Jaeger 89, Jaeger 92, Evesque 89, Evesque 91, Bretz 92, Evesque 93, Cantelaube 95a, Cantelaube 95b] que el equilibrio de un apilamiento de granos aparece vinculado a por lo menos dos ángulos:

a) Máximo ángulo de estabilidad: ángulo de inclinación en el que se desencadena la avalancha.

b) Ángulo de reposo: ángulo que forma la superficie libre y la horizontal cuando la avalancha se detiene.

Cabe destacar que de las referencias mencionadas solo en las experiencias realizadas en un tambor semilleno de material granular, que rota a velocidad constante [Jaeger 89, Jaeger 92, Evsque 89, Cantelaube 95a, Cantelaube 95b] se investigó sistemáticamente la variación de éstos ángulos con distintos parámetros del sistema.

El objetivo de esta parte del trabajo es, entonces, contribuir a la comprensión de los efectos colectivos en el equilibrio de un apilamiento granular pero en una geometría diferente: una caja de sección rectangular se llena al ras con granos y se inclina lentamente. La experiencia concluye cuando, producto de una avalancha, ha sido desalojada de la caja una masa del orden de la masa total del sistema. Es decir, se estudia el proceso de avalancha que se produce en un sistema abierto.

A diferencia de las experiencias realizadas por otros autores [Bretz 92, Evesque 93, Pouliquen 96] en esta misma geometría que se centran en aspectos específicos del proceso, este trabajo está dirigido a estudiarlo exhaustivamente.

En particular, se investigan la masa desalojada por la avalancha (M) y los ángulos que caracterizan al proceso: aquél al que la avalancha se desencadena (θ_M) y el que forma la superficie libre una vez que ésta concluye (θ_r). Se estudia la influencia que tiene sobre dichos parámetros la altura del empaquetamiento.

A continuación (sección II.1) se describe la técnica experimental implementada para estudiar el proceso de avalancha, el cual es explicado en detalle la sección II.2

junto con otras importantes observaciones experimentales. En la sección II.3 se presentan los resultados obtenidos y se analizan los ángulos característicos y la masa desalojada por la avalancha tanto para un número fijo de capas como la variación de sus valores medios con la cantidad de capas del empaquetamiento. Finalmente se presenta un resumen de los principales resultados encontrados (sección II.4).

II.1. Dispositivo y procedimiento experimental

La primera serie de experiencias se realizó llenando de esferas de vidrio una caja de largo L = (32.0 ± 0.2)cm, ancho W = (25.0 ± 0.2)cm y profundidad, *h*, variable. La caja, de acrílico transparente, permite observar los movimientos, tanto superficiales como laterales, del apilamiento granular.

Se obtuvo un empaquetamiento desordenado colocando en la caja una base rugosa constituida por esferas de vidrio de diámetro medio *d* = (2.2 ± 0.2)mm, pegadas a una superficie de vidrio. Las mismas esferas se utilizaron para formar el medio granular.

Teniendo en cuenta el diámetro y la densidad de una esfera y el área del sistema, se calculó la cantidad de masa necesaria para obtener sobre una superficie lisa, una monocapa desordenada de granos (esferas) con una fracción de empaquetamiento C_1 = 0.7 [Riguidel 94c, Samson 97b]; dicho valor resultó m = (230±1)g. Para construir un sistema de N capas se vierte en la caja, de una sola vez, una masa M_T = mN.

En primer lugar, se verificó experimentalmente el incremento lineal de *h*, altura del sistema, con el número de capas N. Para ello se realizaron 5 determinaciones de *h* para cada valor de N y se obtuvo:

$$h = \alpha \frac{M_T}{m} + \beta = \alpha N + \beta \qquad (2.1)$$

con β = (0.68 ± 0.02)mm y α = (1.78 ± 0.02)mm, valor cercano a $\frac{\sqrt{3}}{2} d$, correspondiente a una red hexagonal densamente compacta (HCP) [Ashcroft y Mermin]. Esta relación es válida para N ≥ 2, para N = 1 el lecho rugoso "adsorbe" parte

del material granular del empaquetamiento. La ecuación 2.1 permite calcular la fracción de compactación del empaquetamiento como:

$$C = \frac{V_{vidrio}}{V_{total}} = \frac{m}{\rho LW(\alpha + \beta / N)} \qquad (2.2)$$

donde ρ es la densidad del vidrio. Esta se determinó a través del volumen desplazado al sumergir una masa conocida de esferas en un líquido y se obtuvo $\rho = (2.5 \pm 0.1) g/cm^3$. Entonces, C aumenta con N alcanzando un valor asintótico $C = \frac{m}{\rho LW\alpha} = 0.64 \pm 0.02$

De ahora en adelante, se notará con C, al valor de la fracción de compactación asintótico.

Nótese que para N = 4, β es un orden de magnitud menor que αN por lo tanto para $N \geq 4$ la ecuación 2.1 puede aproximarse por:

$$h = \alpha N \qquad (2.3)$$

La caja se fija sobre una plataforma plana que pivotea en uno de sus extremos mientras que el extremo opuesto puede ser elevado lentamente mediante un hilo de acero que se enrolla sobre un eje controlado por un motor de velocidad variable. El motor y el eje están sujetos a un riel amurado un metro por encima de la plataforma (figura 2.1).

Para conservar la condición de borde elegida y simultáneamente variar la altura del sistema, el lado de la caja más cercano al extremo fijo de la plataforma es removible y de altura variable. Llamamos a este lado barra de contención (figura 2.1). Su altura, h_c, se elige de forma que el borde superior coincida aproximadamente con el centro de las esferas de la última capa, tal como se esquematiza en la figura 2.2 (a). De esta forma, la barra no detiene la avalancha, como ocurriría si fuera algo más alta, ni la avalancha se desencadena siempre en la zona cercana a la barra, como ocurre cuando ésta es más baja. En este último caso, la superficie libre del empaquetamiento no es inicialmente plana sino que en la región cercana a la barra presenta una pendiente que coincide con el ángulo de reposo (figura 2.2 (b))

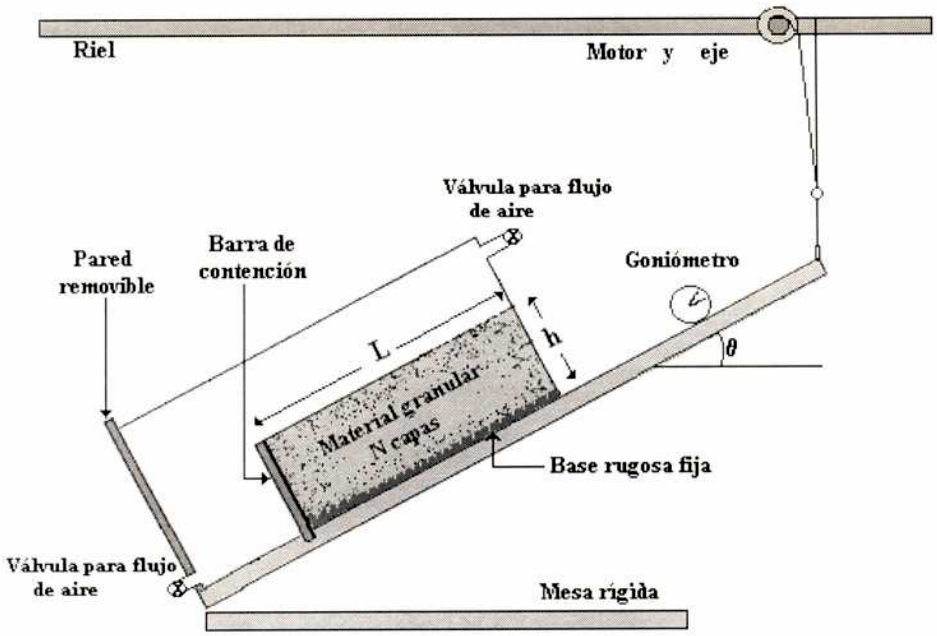

Figura 2.1: Esquema de la vista lateral del dispositivo experimental.

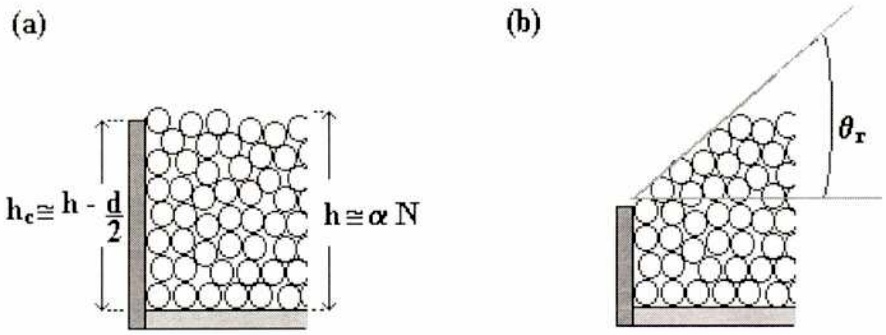

Figura 2.2: Esquema de la vista lateral del empaquetamiento con una barra de contención (a) de altura correcta (b) de altura menor.

Puede preverse que la humedad ambiente tendrá importancia en el desarrollo del experimento. Para humedad relativa mayor que el 60% el medio quedará cohesionado por fuerzas capilares y para valores menores al 45% el resultado será el mismo debido a las fuerzas electrostáticas que pueden llegar a ser del orden del peso de un grano [Duran 97] si el grano es muy liviano. Por lo tanto, las experiencias se realizaron bajo una atmósfera de humedad relativa controlada, RH = (50± 2)%.

En la sección III.1 se presentan los resultados de experiencias realizadas a humedad ambiente alta (70%). Allí se verifica el carácter cohesivo de la humedad y se analiza su influencia sobre los ángulos característicos.

Para mantener la humedad a un valor constante del 50%, la caja con material granular está incluida en una caja más grande (figura 2.1) también de acrílico transparente y que se cierra herméticamente con una tapa de vidrio. Se hace circular un flujo suave de aire proveniente de un balón (figura 2.3) parcialmente lleno con agua destilada e inmerso en un baño térmico de forma tal que el agua se encuentra en equilibrio con su vapor a una temperatura T menor que la temperatura ambiente, T_{amb}. El aire saturado en agua emergente del balón circula por varios metros de manguera antes de ser inyectado en la caja que contiene el empaquetamiento granular, en dicho recorrido la temperatura del aire habrá aumentado hasta T_{amb}. Es decir, al llegar a la caja el aire ya no estará saturado en agua debido a que la presión de saturación crece con la temperatura. La fracción de agua en el aire, o humedad relativa, está dada por la relación entre las presiones de saturación a ambas temperaturas. Aunque la presión de saturación no solo depende de la temperatura sino también de la presión ambiente, es posible controlar la humedad relativa controlando la temperatura del balón T, y de esta forma, se obtiene un flujo de aire que al llegar al empaquetamiento provoca una humedad ambiente del 50%.

La humedad dentro de la caja se mide por medio de un termohigrómetro con una incerteza del 4%.

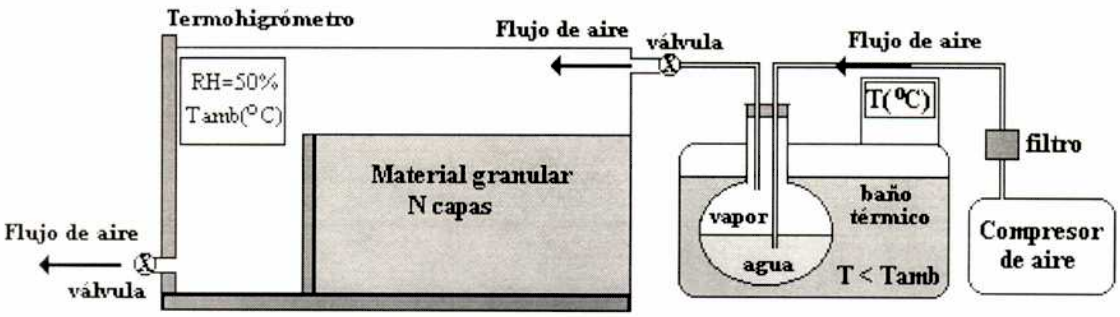

Figura 2.3: Esquema del mecanismo de control de humedad.

Una vez alcanzado el valor deseado de humedad relativa, la caja se inclina a una velocidad de 5° por minuto desde 0° a 20°, unos cuantos grados antes que se desencadene la avalancha. Luego la velocidad angular se disminuye a 1° por minuto hasta alcanzar el máximo ángulo de estabilidad θ_M, en el que la avalancha se desencadena. En ese momento se apaga el motor y la experiencia concluye.

Como se ve en la figura 2.1, el dispositivo fue diseñado de manera tal que los granos desalojados de la caja durante la avalancha caen en la cámara adjunta. Una vez concluida la experiencia, se extrae la pared removible de la caja exterior, se determina por peso, la masa desplazada y se miden los ángulos característicos.

La masa de la avalancha, M, se midió con una balanza electrónica con un error de 0.1g y el ángulo θ_M con un goniómetro fijo al plano y una incerteza de 4 minutos. El ángulo de reposo se determinó midiendo el ángulo δ (figura 2.4) entre el plano y la superficie libre final: $\theta_r = \theta_M - \delta$.

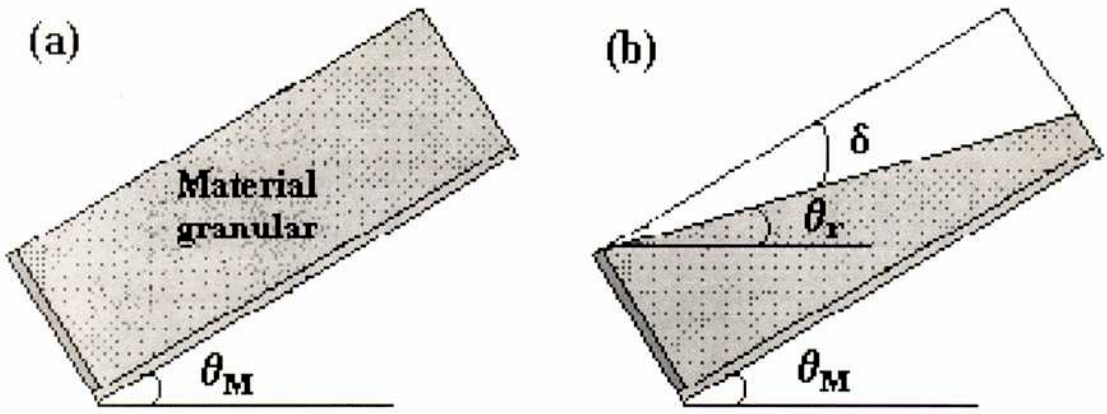

Figura 2.4: Esquema de los ángulos característicos de un empaquetamiento granular. (a) Configuración justo antes de comenzar la avalancha. (b) Configuración al terminar la avalancha para empaquetamientos con muchas capas. La cuña de ángulo δ (zona blanca) corresponde a la masa desalojada por la avalancha.

Cuando el sistema tiene más de 10 capas ($N > 10$), el ángulo δ puede determinarse de tres formas:

a) Se disminuye el ángulo de inclinación del plano hasta que la superficie libre (después de la avalancha) quede horizontal lo que se determina con un nivel. En esta condición el ángulo de inclinación del plano coincide con δ, y se mide directamente con el goniómetro.

b) Se filma lateralmente el perfil final y se calcula la pendiente del mismo a través de las imágenes.

c) Teniendo en cuenta la geometría final, se ve que $\tan(\delta) \propto M$.

Los métodos a) y b) son más directos por lo que en estas experiencias, δ se obtuvo como promedio de ambos resultados.

Para sistemas con menos de 10 capas ($N \leq 10$), δ no queda determinado ya que, como se verá en la sección II.3.1.B, la superficie final del empaquetamiento no es plana. En este caso se determinó un $\delta_{efectivo}$ suponiendo que la masa retenida en la caja ocupa una cuña de ángulo $\delta_{efectivo}$ cuyo vértice se encuentra en la parte superior de la barra de contención. Se profundizará sobre este punto en la sección II.3.1.B.

La cantidad de capas, N, se varió entre 1 y 34. Fijando un valor de N se realizaron 10 experiencias idénticas y se determinan los valores medios $\langle M \rangle$, $\langle \theta_M \rangle$, $\langle \delta \rangle$ y $\langle \theta_r \rangle$.

II.2. Observaciones experimentales

En esta sección describiremos los principales fenómenos experimentales observados sistemáticamente durante las experiencias ya que su análisis ayuda a comprender algunas características del proceso de avalancha.

Un primer hecho importante es que la avalancha no es el primer evento dinámico que se observa al inclinar la caja. Por el contrario, casi inmediatamente después de iniciar la experiencia comienzan a producirse movimientos súbitos y de corta duración de grupos de granos ubicados en la superficie libre: en un determinado momento algunos granos se mueven a sitios vecinos y luego quedan en reposo. Este comportamiento puede compararse con el observado por Bretz *et al.* [Bretz 92]. Estos eventos, a los que denominamos reacomodamientos, pueden, a su vez, ser divididos en dos tipos según su tamaño:

a) Pequeños reacomodamientos: Ocurren durante toda la experiencia, afectan menos del 4% de los granos de la capa superficial del apilamiento y su tamaño sigue una distribución exponencial con exponente igual a -1.5 similar al encontrado en otros estudios [Lauritsen 96, Amaral 96].

b) Grandes reacomodamientos: Afectan entre el 4% y el 100% de los granos de la capa superficial. Ocurren solo para ángulos de inclinación mayores que el ángulo de reposo y a intervalos regulares, $\Delta\theta$. Su tamaño crece exponencialmente con θ.

El análisis detallado de estos reacomodamientos fue realizado en paralelo con este trabajo [Nerone 2000, Nerone 2000b] por lo que aquí solo mencionaremos algunas conclusiones que muestran su relación con el proceso de avalancha.

La aparición de pequeños reacomodamientos depende solo de la rugosidad de la superficie libre y no de las características en volumen del medio granular. Esto es, su número y tamaño no está vinculado al proceso de avalancha.

Por el contrario y a pesar de ser un fenómeno superficial, los grandes reacomodamientos no dependen de la rugosidad de la superficie y sí de la fracción de compactación y del número de capas del sistema, es decir, de parámetros volumétricos. Incluso, la avalancha ocurre a un intervalo angular, $\Delta\theta$ (igual al que separa cada gran reacomodamiento) después del último evento de este tipo.

Estos elementos junto a otras determinaciones experimentales [Nerone 2000, Nerone 2000b], llevan a concluir que la avalancha no es más que un gran reacomodamiento de magnitud tal que logra desestabilizar las capas inferiores. Por este motivo se ha denominado "precursores" a los grandes reacomodamientos ya que parecen constituir un "anuncio" de la avalancha. Un estudio exhaustivo de la dependencia con el número de capas del sistema de la frecuencia y de la cantidad de precursores previos a la avalancha, permitiría prever el evento catastrófico.

Pasamos ahora a describir las observaciones experimentales correspondientes específicamente, al proceso de avalancha.

Según la altura del empaquetamiento se observaron tres comportamientos:

a) Avalanchas en empaquetamientos de pocas capas ($N \leq 10$):

- La avalancha puede desencadenarse en cualquier posición de la superficie libre y luego extenderse hasta afectar la totalidad de la misma.

- Los granos pueden interactuar con la base rugosa fija lo que da lugar a un flujo errático (bouncing flow) similar a lo que ocurre en un gas.

La avalancha involucra a todas las capas del empaquetamiento. Esto es, observa que se ponen en movimiento esferas pertenecientes a todas las capas.

- Una vez que la avalancha se detiene, la masa retenida cerca de la barra de contención forma una cuña que no se extiende a toda la caja y parte de las esferas quedan atrapadas en la rugosidad del lecho fijo. Un esquema del perfil típico para estos sistemas se muestran en la figura 2.5. En este caso δ no queda definido y no puede ser medido directamente con el goniómetro. Sin embargo, puede estimarse un ángulo efectivo $\delta_{efectivo}$ usando la masa de la avalancha tal como se verá en la sección II.3.1.B.

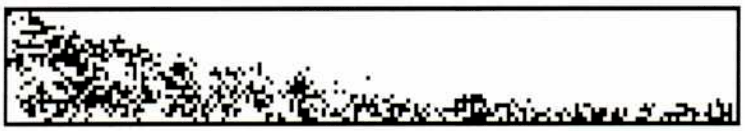

Figura 2.5: Vista lateral de un empaquetamiento con menos de 10 capas (N < 10).

b) Avalanchas en empaquetamientos con $10 < N < N_c$:

- La avalancha también involucra a esferas pertenecientes a todas las capas y se desencadena en cualquier lugar de la superficie libre. Inicialmente algunos granos superficiales comienzan a moverse (precursor) y rápidamente desestabilizan a otros granos vecinos, obteniéndose un mecanismo de amplificación de la perturbación inicial que da lugar a la avalancha. Según en qué posición de la superficie libre comience la avalancha, se observan dos tipos de procesos de amplificación de la perturbación:

• Si comienza cerca de la parte superior de la superficie libre los granos ruedan hacia abajo y se produce una onda desestabilizadora que se propaga hacia la parte inferior hasta alcanzar la barra de contención.

• Si la avalancha comienza en la parte media o inferior de la superficie libre, los granos también ruedan hacia abajo pero simultáneamente puede observarse una onda desestabilizadora propagándose hacia la parte superior del apilamiento.

- La superficie libre queda plana y la masa retenida forma una cuña de ángulo $\pi/2 - \delta$ que no ocupa toda la caja, tal como se muestra en la figura 2.6.

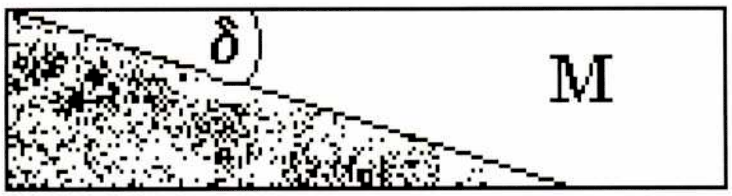

Figura 2.6: Vista lateral de un empaquetamiento con 12 capas ($10 \leq N < N_c$).

c) Avalanchas en empaquetamientos con $N \geq N_c$:

- En estos apilamientos ***no*** todas las capas son afectadas por la avalancha: solo se ponen en movimiento los granos pertenecientes a un cierto número de capas superficiales. Es decir, independientemente de la cantidad de capas del sistema, un número constante de capas superficiales contribuyen al proceso de avalancha. Este número crítico de capas se llamará N_c. En todas las experiencias descriptas en este capítulo se encontró $N_c \cong 13$.

- Es interesante describir la dinámica del proceso. Este comienza en la superficie libre e inmediatamente la perturbación alcanza la segunda capa y así sucesivamente se van poniendo en movimiento las capas inmediatamente inferiores hasta alcanzar aproximadamente la quinta capa. En ese momento, la primer capa ya ha fluido fuera del sistema y aunque la perturbación sigue afectando al empaquetamiento en forma continua, también en forma continua la capa superficial es expulsada del sistema. De esta forma, siempre puede observarse una banda móvil de aproximadamente 5 capas. Cuando la perturbación ya ha afectado las primeras 13 capas el movimiento cesa y la avalancha concluye. Remarcamos que esta observación verifica la predicción realizada por de Gennes *et al* (Capítulo I).

- Concluida la avalancha, la superficie libre final queda plana y se extiende sobre toda el área de la caja dejando un volumen vacío que es una cuña casi perfecta de ángulo δ. En la figura 2.7 se puede observar la vista lateral de la superficie libre luego del proceso de avalancha.

Reiteramos que durante la avalancha, se mueven ***solo*** las esferas que originariamente ocupaban el volumen delimitado por las líneas blancas. Sin embargo, solo la mitad de ese volumen es desalojado de la caja.

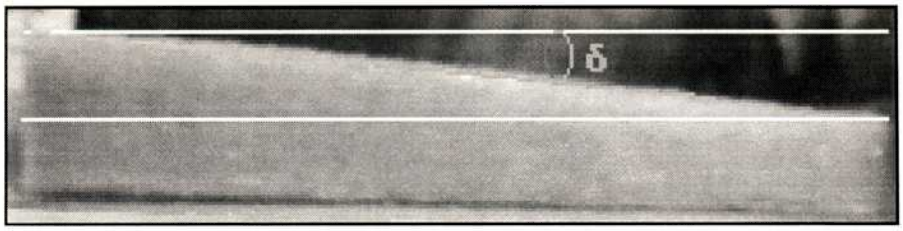

Figura 2.7: Vista lateral de un empaquetamiento de 30 capas al finalizar la avalancha.

- Se comprobó que cualquiera sea N, siempre que $N > N_c$, las avalanchas se desencadenan, en valor medio, a un ángulo de inclinación θ_M constante, concluyen con la superficie libre formando con la horizontal un ángulo θ_r constante y desalojan una masa constante. En síntesis, para $N > N_c$, la estabilidad del sistema y la dinámica del proceso son, en valor medio, independientes del número de capas.

En las secciones subsiguientes se desarrollará exhaustivamente este punto, solo adelantaremos aquí que los valores de $<\theta_M>$ y $<\theta_r>$ obtenidos son $<\theta_M> = 26.0° \pm 0.2°$ y $<\theta_r> = 21.2° \pm 0.4°$. Se investigó la estabilidad del empaquetamiento entre θ_r y θ_M ya que trabajos previos [Bouchaud 95a, Bouchaud 95b] predicen que esta zona es metaestable. Para ello se realizó la siguiente experiencia. El plano se elevó a velocidad constante, parando el motor cada 5° para $\theta < \theta_r$ y cada 1° para $\theta > \theta_r$. En cada ocasión el sistema fue sometido a una perturbación débil y a otra fuerte: se dejaron caer sobre el plano que sustenta el empaquetamiento bloques de dos pesos distintos desde una altura constante. Independientemente de la intensidad de la perturbación, se observaron tres comportamientos diferentes:

1) Para $\theta < \theta_r \cong 21°$ la perturbación externa ocasionó la aparición de pequeños reacomodamientos.

2) Para $\theta_r < \theta < 24.5°$, la perturbación externa desencadena grandes reacomodamientos pero éstos no evolucionan hacia una avalancha.

3) Para $24.5° < \theta < \theta_M \cong 26°$ la perturbación externa produce grandes reacomodamientos que generan una avalancha, es decir, que solo en este reducido rango de ángulos de inclinación, el sistema es metaestable.

II.3. Resultados experimentales

II.3.1. Determinación de θ_M y δ en un sistema con un número fijo de capas

Para un empaquetamiento con un número fijo de capas N se realizaron varias experiencias bajo idénticas condiciones. En cada experiencia se midió la masa de la avalancha, M, el máximo ángulo de estabilidad, θ_M, y el ángulo δ o $\delta_{efectivo}$ (según la cantidad de capas). Diez experiencias idénticas resultaron ser suficientes para una buena determinación de estos parámetros.

Como se dijo, después de la avalancha se observaron tres posibles perfiles del sistema según fuese la altura del mismo (figuras 2.5 a 2.7) que se repiten en la figura 2.8 (a) - (c). En uno de los casos, $N < 10$ (figura 2.8 (a)), no es posible medir el ángulo δ. Por este motivo, separaremos en dos la presentación de los resultados. En la sección que sigue se describen los correspondientes a empaquetamientos con $N \geq 10$ e inmediatamente los correspondientes a empaquetamientos con $N < 10$.

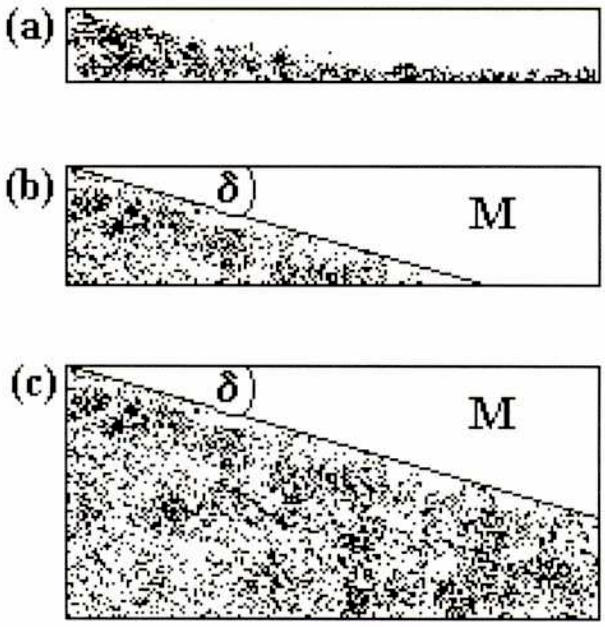

Figura 2.8: Esquema del perfil del empaquetamiento después de la avalancha en (a) sistema con $N < 10$ capas; (b) sistema con $10 \leq N < N_c$; (c) sistema con $N \geq N_c$.

A. Empaquetamiento con N ≥ 10

La figura 2.9 muestra los resultados de las 10 mediciones realizadas en un empaquetamiento de 20 capas. Se grafica el ángulo θ_M en función de la masa de la avalancha.

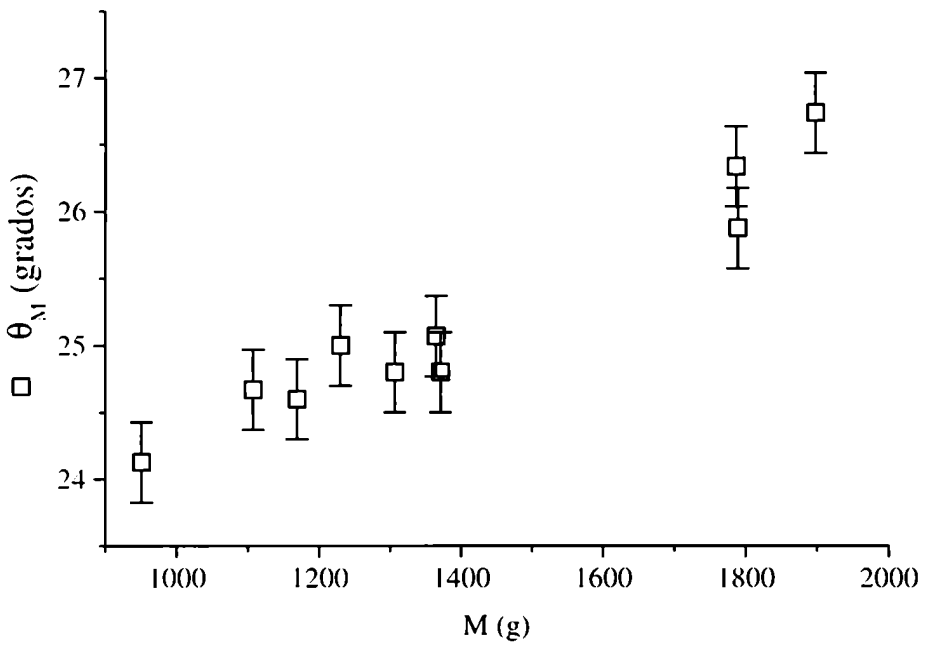

Figura 2.9: Máximo ángulo de estabilidad en función de la masa desalojada para un empaquetamiento de 20 capas.

Se observa que no todas las avalanchas comienzan exactamente en el mismo ángulo θ_M sino que el valor de θ_M fluctúa dentro de un rango de aproximadamente 3° ($24° < \theta_M < 27°$) y que la masa de las avalanchas correspondientes también presenta fluctuaciones (900g < M< 1900g).

Pouliquen y Evesque [Pouliquen 96, Evesque 93] atribuyen la dispersión de θ_M a la fracción de empaquetamiento inicial del sistema. Esta dependencia se corroborará en las experiencias presentadas en el capítulo siguiente (III.2).

Sin embargo es claro en el gráfico, que cuanto mayor es el ángulo al que se produce una avalancha, mayor es la masa que desaloja.

En la figura 2.10 hemos superpuesto al gráfico anterior los valores experimentales del ángulo δ para cada avalancha. Se ve que δ también fluctúa en un rango de aproximadamente 3° (1.5° < δ < 4.5°) presentando, al igual que θ_M, una fuerte correlación con la masa de cada avalancha.

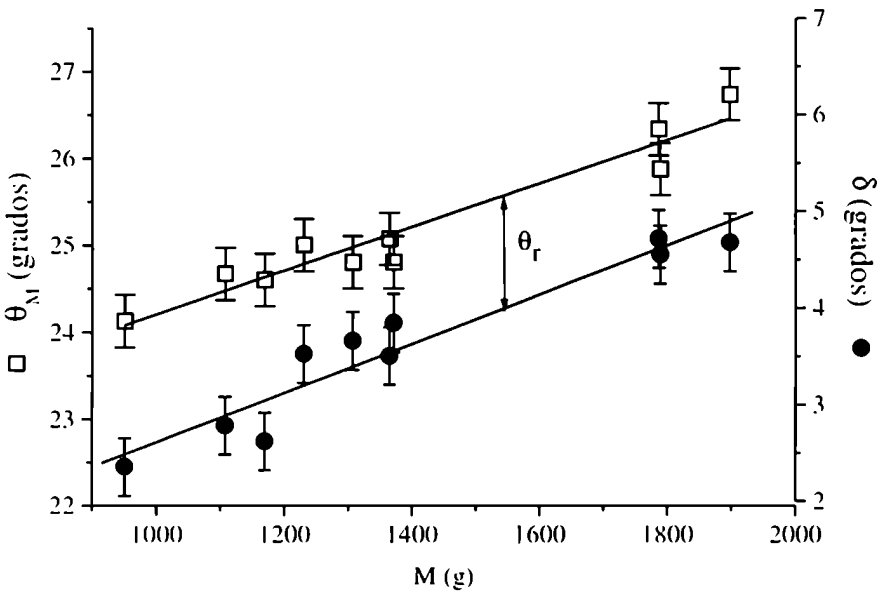

Figura 2.10: Ángulos característicos en función de la masa desalojada para un empaquetamiento de 20 capas.

La dependencia entre δ y M podía esperarse ya que ambas variables representan el tamaño de la avalancha. En particular, para N > Nc (figura 2.8 (c)) y teniendo en cuenta la ecuación 2.3 y que el número de capas desalojadas (M/m) es la mitad del número crítico de capas (N_c), se cumple que:

$$tan(\delta) \approx \delta = \frac{2\alpha}{mL} M \qquad (2.4)$$

donde α = (1.78 ± 0.02)mm es el factor de proporcionalidad entre la altura del empaquetamiento, *h*, y la cantidad de capas N, m = (230 ± 1)g es la masa de una capa y L = (320 ± 2)mm es la longitud de la caja. Los valores mencionados dan un factor de proporcionalidad para la ecuación 2.4 igual a (48.4 10^{-3} ± 0.9 10^{-3}) kg^{-1} mientras que la

pendiente obtenida por la regresión lineal en la figura 2.10 es igual a ($52\ 10^{-3} \pm 5\ 10^{-3}$) kg^{-1}. El mismo acuerdo se encontró para todos los sistemas con $N \geq 10$.

Sin embargo, no era evidente el comportamiento lineal de θ_M con respecto a la masa de la avalancha, M, que se observa en la figura 2.10 en la que también se comprueba que ambas rectas tienen aproximadamente la misma pendiente. Teniendo en cuenta que $\theta_r = \theta_M - \delta$, vemos que para todas las avalanchas de este sistema, θ_r es aproximadamente constante: $\theta_r \cong 21°$, e igual a la diferencia entre ambas rectas.

Esto es, una vez que el proceso de avalancha comienza en algún ángulo θ_M, el proceso desplaza fuera del empaquetamiento una cantidad variable de masa, M, tal que al finalizar, la superficie libre siempre forma el mismo ángulo θ_r con la horizontal, independientemente de los valores de θ_M y M.

El mismo comportamiento se obtiene para todos los empaquetamientos con $N \geq 10$ estudiados. Es decir, θ_r parece ser, efectivamente, un parámetro intrínseco del empaquetamiento granular tal como se reporta en la literatura [Grasselli 97].

B. Empaquetamiento con N < 10

También se estudió la variación de θ_M con M en un sistema con un número de capas $N < 10$. En la figura 2.11 pueden observarse los resultados de 10 experiencias idénticas realizadas con un empaquetamiento de 6 capas. En este caso, también se observa una fluctuación de 3° en el valor de θ_M mientras que la masa varía entre 786g y 1070g. Aunque esta vez la dependencia con M no es lineal, sigue cumpliéndose que cuanto mayor es el ángulo al que se produce la avalancha, mayor es la masa que desaloja.

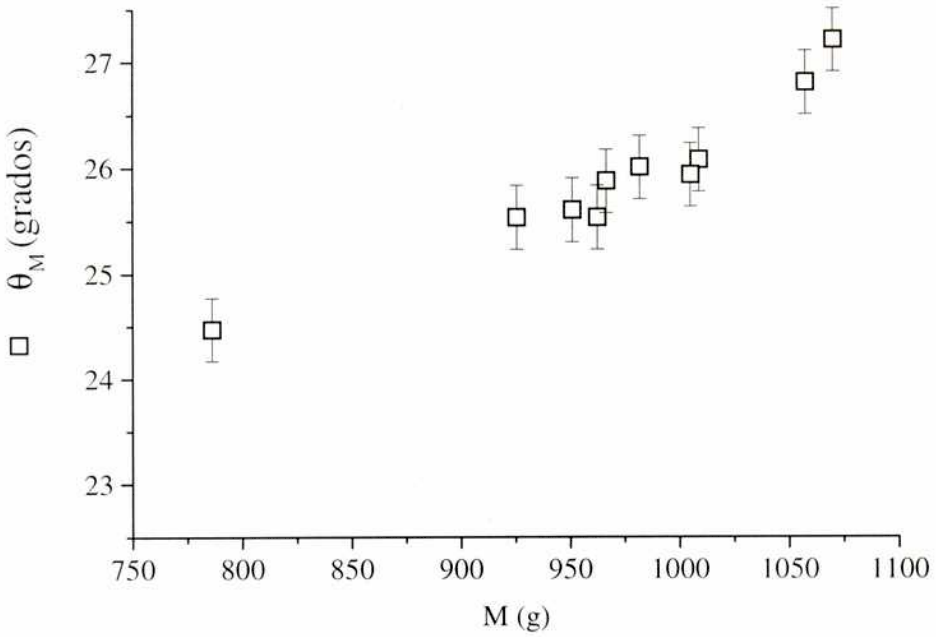

Figura 2.11: Máximo ángulo de estabilidad en función de la masa desalojada para un empaquetamiento de 6 capas.

En cuanto al ángulo δ, recordemos que para empaquetamientos con menos de 10 capas la masa retenida en la caja después de la avalancha presenta un perfil como el que se muestra en la figura 2.12(a) y no es posible medir δ experimentalmente. Sin embargo, sí es posible relacionar la masa desalojada por la avalancha, M, con un ángulo $\delta_{efectivo}$ que se define suponiendo que toda la masa retenida en la caja forma una cuña de ángulo ($\pi/2$ - $\delta_{efectivo}$), tal como se esquematiza en la figura 2.12(b). Esto es, se supone que sobre el lecho rugoso no quedan esferas entrampadas.

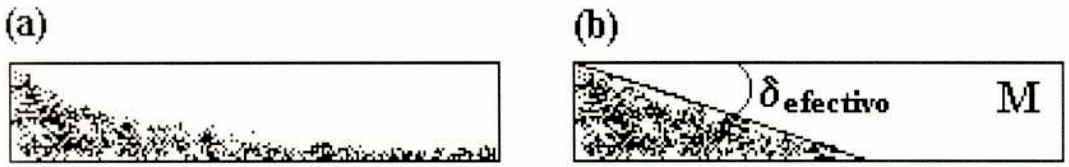

Figura 2.12: (a) esquema de la configuración real; (b) esquema de la configuración utilizada para calcular $\delta_{efectivo}$.

Con sencillas consideraciones geométricas y utilizando la ecuación 2.3 se llega a:

$$tg(\delta_{efectivo}) \approx \delta_{efectivo} = \frac{\alpha m}{2L} \frac{N^2}{(mN - M)} \tag{2.5}$$

En la figura 2.13 se muestran los datos presentados en el gráfico 2.11 y se superpone, con línea punteada, la dependencia de $\delta_{efectivo}$ con M obtenida de la ecuación 2.5 para un sistema de 6 capas. Se ve que la tendencia de esta curva es muy similar a la que presentan los datos experimentales $\theta_M(M)$. De hecho, la línea llena corresponde al mejor ajuste de estos datos y se observa que la diferencia entre ambas curvas es prácticamente constante. Nótese que sigue cumpliéndose que $\theta_r^{efectivo} = \theta_M - \delta_{efectivo}$ (figura 2.14) por lo que la diferencia entre las curvas es $\theta_r^{efectivo} \cong 22.75°$ para un empaquetamiento de 6 capas.

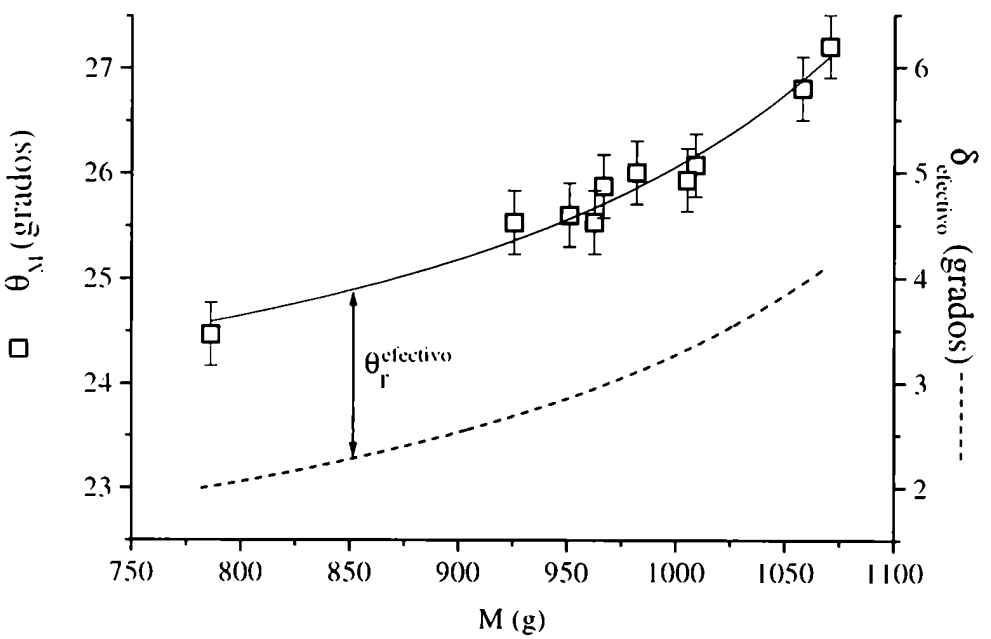

Figura 2.13: Ángulos característicos en función de la masa desalojada para un empaquetamiento de 6 capas.

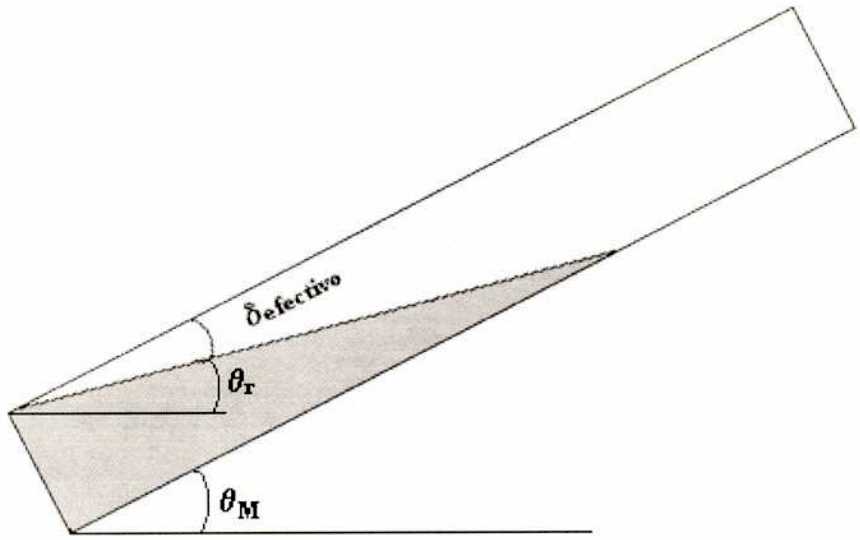

Figura 2.14: Esquema de los ángulos característicos de un empaquetamiento granular con N < 10.

Hasta ahora hemos demostrado que θ_r permanece aproximadamente constante en todas las experiencias realizadas con un empaquetamiento con N constante, sea N mayor o menor que 10. En la sección II.3.2.C presentamos como varía este valor constante de θ_r con el número de capas del sistema.

II.3.2. Influencia del número de capas

Como hemos visto, el ángulo de máxima estabilidad θ_M, el ángulo δ y la masa desalojada por la avalancha M no toman valores únicos, aún para medios con el mismo número de capas y compactados con idéntica técnica experimental. Por consiguiente, para estudiar la variación de estos parámetros característicos del sistema con su altura (o número de capas), debemos adoptar un criterio para seleccionar el valor que les asignaremos para un dado número de capas. Resulta razonable tomar como valores característicos de los parámetros θ_M, δ y M de un sistema de N capas, al promedio de los 10 valores obtenidos en las experiencias realizadas con ese sistema.

En lo que sigue, entonces, se presenta la variación de $\langle\theta_M\rangle$, $\langle\delta\rangle$, $\langle\theta_r\rangle = \langle\theta_M - \delta\rangle$ y $\langle M\rangle$ con el número de capas del sistema.

A. Masa media de la avalancha: <M>

En la figura 2.15 se grafica la variación del valor medio de la masa desalojada durante la avalancha, <M>, con el número de capas del empaquetamiento N.

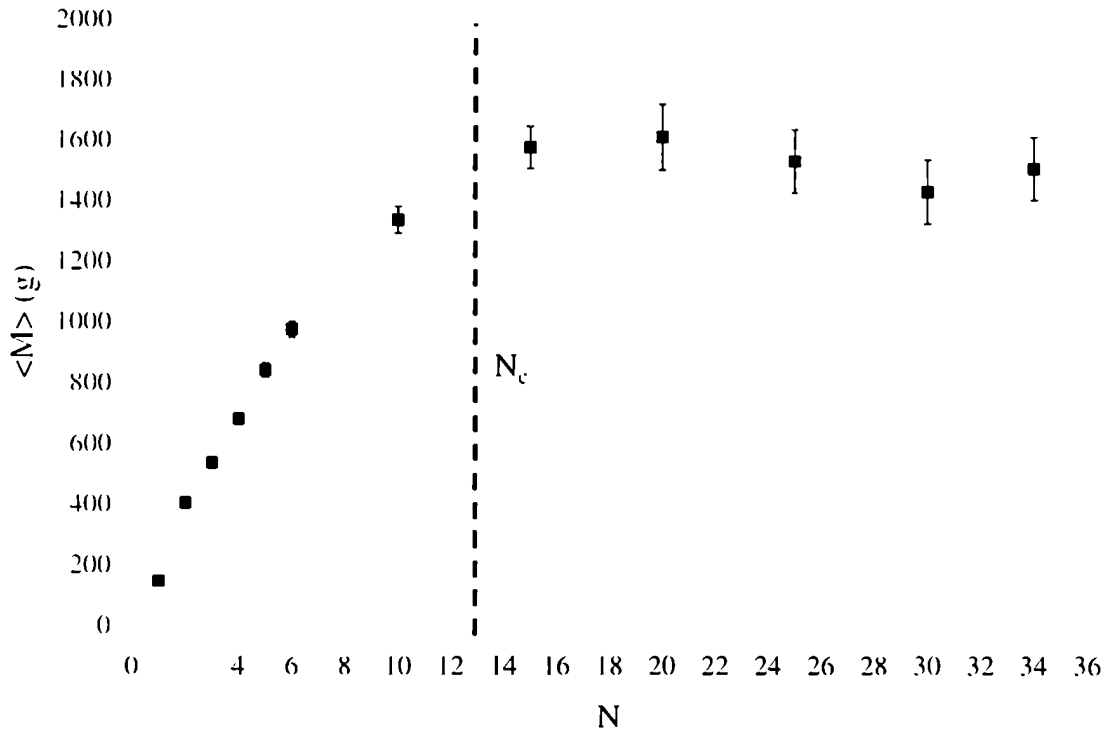

Figura 2.15: Promedio de la masa desalojada por la avalancha en función de la cantidad de capas del empaquetamiento, N.

Se comprueba que el número crítico de capas, $N_c \cong 13$, separa dos comportamientos distintos:

a) Hasta $N \approx N_c$, la masa promedio de la avalancha aumenta con el número de capas.

b) Para $N > N_c$, la masa de la avalancha permanece aproximadamente constante $\langle M \rangle = (1524 \pm 70)$ g.

Recordemos que para $N > N_c$ la superficie libre es plana y la masa desalojada deja un volumen vacío en forma de cuña de ángulo $\langle \delta \rangle$. De esta forma, N_c puede calcularse teniendo en cuenta que la masa desalojada estuvo contenida en la mitad del paralelepípedo formado por estas N_c capas:

$$M = \frac{1}{2} m N_c \tag{2.6}$$

Tomando el valor asintótico experimental de <M> y recordando que la masa de una capa es m = 230 g, se obtiene $N_c = 13 \pm 1$, valor coincidente con el límite ente las dos regiones del gráfico 2.15 y con lo observado experimentalmente: para $13 \leq N \leq 34$: durante la avalancha solo se mueven esferas pertenecientes a las 13 capas más cercanas a la superficie libre.

B. Máximo ángulo de estabilidad

En la figura 2.16 se grafica la variación del valor medio del máximo ángulo de estabilidad, $\langle\theta_M\rangle$ con el número de capas del sistema.

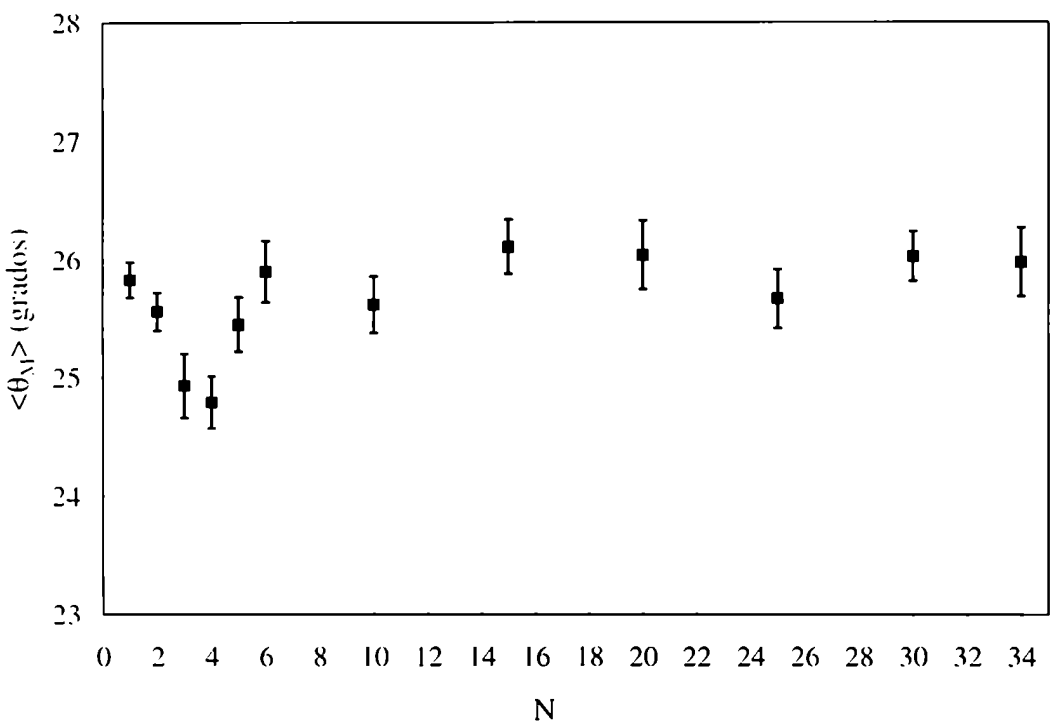

Figura 2.16: Valor medio del máximo ángulo de estabilidad, $\langle\theta_M\rangle$, en función del número de capas.

Se ve que el valor medio del máximo ángulo de estabilidad presenta tres regímenes según la cantidad de capas del sistema. Cuando N aumenta desde 1 hasta 4 el

empaquetamiento es cada vez más inestable: $<\theta_M>$ disminuye con N. Este hecho puede relacionarse a la dilatancia del empaquetamiento, para sistemas con muy pocas capas, el vínculo con la base rugosa fija impide la dilatancia produciendo sistemas más estables. A medida que aumenta la cantidad de capas, la intensidad de este vínculo disminuye y los granos en las capas superiores, más alejadas del lecho rugoso fijo, pueden desplazarse más fácilmente. Sin embargo, cuando la cantidad de capas aumenta, el sistema se compacta (ecuación 2.2), lo que produce un aumento de la estabilidad como se menciona en trabajos previos [Evesque 93, Nagel 92] y se demostrará en el capítulo siguiente. Se produce así una competencia entre un factor estabilizador (el aumento en la fracción de compactación) y un factor desestabilizador (el alejamiento del lecho rugoso fijo) que da lugar al siguiente régimen.

Aproximadamente entre 4 y 6 capas la estabilidad del sistema aumenta con N debido a la preponderancia del factor estabilizador antes mencionado: los sistemas con mayor cantidad de capas son más compactos y por lo tanto más estables.

Finalmente, la fracción de compactación alcanza un valor asintótico lo que da lugar al siguiente régimen. Para sistemas con más de 6 capas la influencia del lecho fijo rugoso se pierde completamente y la estabilidad del empaquetamiento parece influenciada solo por la fracción de compactación: $<\theta_M>$ no varía con N y alcanza un valor constante $<\theta_M> = 26.0° \pm 0.2°$.

Similares resultados obtuvieron Pouliquen *et al* [Pouliquen 96] quienes realizaron experiencias de avalanchas con empaquetamientos bidimensionales (cilindros de aluminio) y tridimensionales (esferas de vidrio y molienda de cáscara de nuez). Los sistemas se construyeron sobre una base rugosa constituida por el mismo tipo de grano que el utilizado en el empaquetamiento. En particular, en las experiencias tridimensionales, trabajan con sistemas con $N < 16$ y encuentran que, independientemente de la forma del grano, la estabilidad es mayor para empaquetamientos con pocas capas ($N < 8$). Al igual que en el presente trabajo, atribuyen este hecho a la influencia del lecho rugoso.

C. Ángulo <δ>

Recordemos que δ es el ángulo que forma la superficie libre del empaquetamiento con su base una vez concluida la avalancha. En la figura 2.16 se muestra la variación del ángulo <δ> con la cantidad de capas del empaquetamiento. Como se mencionó en la sección II.3.1.B, para empaquetamientos con menos de 10 capas ($N \leq 10$), δ no está definido y en estos casos se calculó el ángulo $\delta_{efectivo}$, que se obtiene suponiendo que después de la avalancha la masa retenida en el sistema se acumula cerca de la barra de contención formando una cuña de ángulo ($\pi/2 - \delta_{efectivo}$).

Se ve que para $N \leq 10$, <δ> aumenta con N mientras que, para $N > 10$, <δ> alcanza un valor aproximadamente constante: $\langle\delta\rangle = 4.7° \pm 0.5°$.

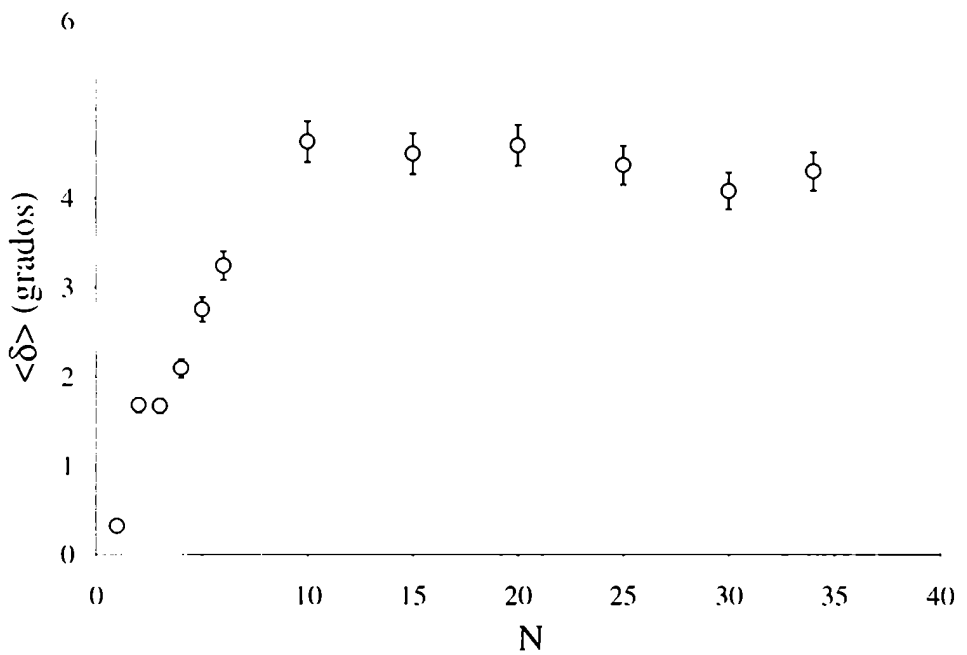

Figura 2.16: Valor medio del ángulo entre la superficie libre y al base del empaquetamiento en función de la cantidad de capas. Para $N \leq 10$ se grafica $\langle\delta_{efectivo}\rangle$.

Esta variación, junto a la dependencia de <M> con N recién presentada, reflejan cabalmente las observaciones experimentales acerca del perfil que adopta la masa retenida en la caja a posteriori de la avalancha. En la figura 2.17 se esquematiza la evolución de dicho perfil cuando N aumenta: hasta N = 10 tanto <M> como <δ>

aumentan con N, para $10 \leq N \leq N_c = 13$ <M> continua aumentando mientras <d> se hace constante y para $N > N_c = 13$ ambos permanecen constantes.

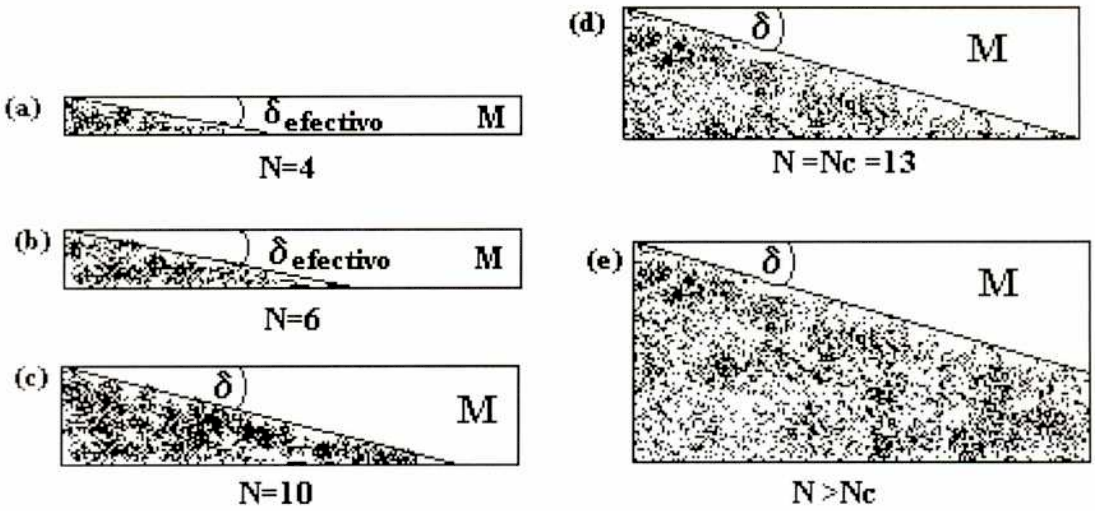

Figura 2.17: Esquema de la evolución del ángulo <δ> con el número de capas N: (a) N = 4, (b) N = 6, (c) N = 10, (d) N = N_c = 13, (d) N>N_c.

D. Ángulo de reposo

En cuanto al valor medio del ángulo de reposo, ya vimos que, independientemente de la cantidad de capas del empaquetamiento, puede obtenerse como $<\theta_r> = <\theta_M - \delta>$ para $N > 10$ o como $<\theta_r^{efectivo}> = <\theta_M - \delta_{efectivo}>$ para $N \leq 10$.

En la figura 2.17 se superponen los datos experimentales de $<\theta_M>$ y <δ> en función de N y en la figura 2.18 se muestra la variación de $<\theta_r>$ con N, obtenida de los resultados anteriores.

Se observa que a medida que la altura del empaquetamiento aumenta hasta aproximadamente 10 capas, $<\theta_r>$, es decir $<\theta_r^{efectivo}>$, decrece. Luego, para $N > 10$, $<\theta_r>$ permanece aproximadamente constante oscilando alrededor de 21.2° ± 0.4°. Nótese que el error estadístico de $<\theta_r>$ es menor que la suma de los errores estadísticos de $<\theta_M>$ y de < δ>. Esto refuerza la idea de que $<\theta_r>$ constituye un parámetro característico del medio granular: independientemente del número de capas del sistema (para $N > 10$) y de las características precisas de una experiencia en particular, que

harán variar θ_M y δ en un rango de aproximadamente ±1.5°, el valor de θ_r permanece constante.

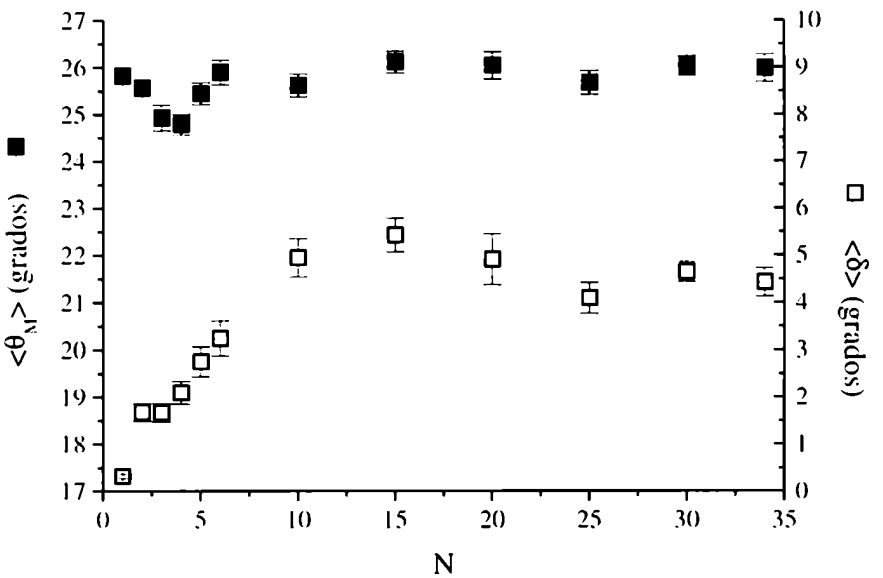

Figura 2.17: Valor medio de los ángulos característicos $<\theta_M>$ (■) y $<\delta>$ (□) en función de la cantidad de capas.

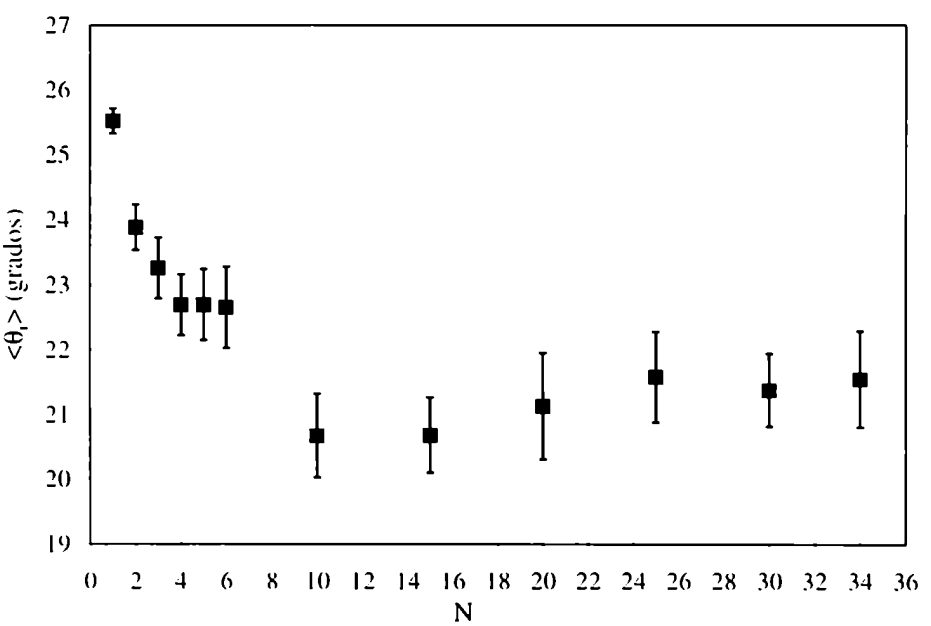

Figura 2.18: Valor medio del ángulo de reposo en función de la cantidad de capas. Para $N \leq 10$ se grafica $<\theta_r^{efectivo}>$.

El resultado para $N < 10$ concuerda cualitativamente con lo obtenido por Pouliquen [Pouliquen 96], para una situación experimental diferente: se impone un flujo constante de material granular sobre un plano rugoso inclinado un ángulo $\theta > \theta_M$ y se disminuye θ hasta que el flujo se detiene. Los autores estudian la variación de este ángulo de reposo con el caudal (o número de capas que fluyen sobre el plano rugoso) y también encuentran que decrece desde aproximadamente 26° hasta 23° a medida que N aumenta desde $N = 3$ hasta $N = 12$ capas.

Comparando las curvas de $<\theta_M>$ y $<\theta_r>$ en función de N, es interesante observar que mientras $<\theta_M>$ presenta un mínimo debido a la competencia entre la influencia de la base rugosa fija y la de la fracción de compactación, el ángulo $<\theta_r>$ decrece monótonamente hasta alcanzar un valor asintótico para empaquetamientos con $N > 10$. Es decir, que a medida que N aumenta, la influencia del lecho fijo disminuye hasta hacerse despreciable para sistemas con $N > 10$. Estos sistemas, al moverse, evolucionan hasta un único ángulo, $<\theta_r>$.

E. Ángulo estático

A fin de caracterizar la estabilidad de un empaquetamiento granular en forma sencilla, Albert *et al* [Albert 97] proponen ignorar la influencia de la interacción colectiva de los granos y tomar como válido el criterio de estabilidad de un solo grano sobre una superficie granular fija. Dicho criterio caracteriza la estabilidad a través del denominado ángulo estático, θ_s, definido como el ángulo de inclinación de una superficie rugosa fija en el cual una esfera depositada sobre ésta, pierde su equilibrio.

Se midió θ_s colocando una hilera de esferas sobre la base rugosa fija y luego aumentando lentamente el ángulo de inclinación del plano. Se registran los ángulos (θ_s) en el que cada esfera se desestabiliza. Se encontró un valor promedio $<\theta_s> = 35° \pm 7°$, valor significativamente mayor a cualquier ángulo $\theta_M(N)$ a los que los empaquetamientos estudiados se hayan desestabilizado. Se llega a la importante conclusión de que el criterio de estabilidad definido por Albert *et al* [Albert 97] no es válido y que la estabilidad de todo el apilamiento no depende solo de uno de sus componentes (un grano), sino que debe tenerse en cuenta el efecto colectivo de los mismos en la pérdida de equilibrio.

II.4. Resumen

Se resumen a continuación los resultados más importantes reseñados en este capítulo:

1) Se comprobó que el proceso de avalancha depende fuertemente de la altura del empaquetamiento:

a) La dinámica de la avalancha evoluciona de dos formas diferentes según el empaquetamiento tenga pocas o muchas capas. Para sistemas con pocas capas los granos fluyen rebotando y realizando trayectorias balísticas mientras que para sistemas con muchas capas se observa un flujo reptante de granos. Entre ambos regímenes se observa una zona de transición.

b) Existe una altura o una cantidad de capas N_c que separa dos regímenes distintos. Para $N < N_c$, todos los granos participan del proceso y el ángulo de inclinación al que éste se desencadena así como la masa que desaloja varían con N. Para $N > N_c$, en cambio, solo se ven involucradas en el movimiento las esferas pertenecientes a las primeras N_c capas y ni el máximo ángulo de estabilidad ni la masa desalojada varían con el número de capas.

2) Se mostró que una vez puesto en movimiento un sistema con un número fijo de capas, evoluciona hacia un ángulo de reposo único y que para ello desplaza una cantidad de masa compatible con el ángulo al que se desestabilizó.

Este ángulo de reposo disminuye con el número de capas hasta N = 10. A partir de allí su valor medio se mantiene constante y en todos los casos con un error estadístico pequeño en comparación con los que presentan los otros parámetros del sistema.

Capítulo III

Ángulos característicos

En el capítulo anterior vimos que en sistemas de muchas capas, la avalancha desaloja del empaquetamiento la masa contenida en una cuña de ángulo δ e igual a la masa de la mitad de las N_c capas involucradas en el proceso. También mostramos que el proceso de avalancha es controlado por el máximo ángulo de estabilidad y por el ángulo de reposo, ángulos que caracterizan el sistema.

En este capítulo se presentan las experiencias realizadas con el fin de determinar la influencia de diversos factores sobre el ángulo de reposo como así también de aquellos que pueden retardar la aparición de la avalancha estabilizando el sistema.

III.1. Influencia de la humedad

En la literatura pueden encontrarse algunos trabajos dedicados a estudiar la influencia de la humedad sobre los materiales granulares. Fraysse [Fraysse 97] estudió el efecto colectivo de puentes líquidos condensados entre granos sobre las tensiones de corte en materiales granulares. Un medio granular compuesto por esferas de vidrio de 200μm de diámetro es sometido a la acción de paletas que rotan a velocidad constante: al principio el torque aumenta elásticamente (linealmente) con el ángulo de rotación (deformación), luego el material se deforma plásticamente hasta alcanzar un torque máximo y finalmente el valor de éste cae abruptamente hasta un valor estacionario. La tensión de corte se calcula teniendo en cuenta que la misma está relacionada con el torque máximo [Nguyen y Boger 83] y dicho valor máximo aumenta a medida que se incrementa el nivel de humedad del medio granular. Es de suponer que esta tensión de corte, asociada a la dilatancia, influirá sobre los ángulos característicos de un apilamiento granular.

Un estudio realizado sobre esferas de poliestireno de 0.8mm de diámetro muestra un aumento del ángulo de reposo del medio granular cuando éste se embebe con

cantidades crecientes de líquido (aceite) que producen sobre los granos un recubrimiento cuyo espesor varía entre 0 y 28nm [Albert 97].

A pesar de que nuestros granos son de diámetro mayor a los utilizados en los estudios mencionados, es de esperar que se produzca condensación de agua en la micro-rugosidad de la superficie de cada esfera y que se formen puentes líquidos entre los granos que cohesionen el sistema.

Para poner en evidencia la importancia de realizar las experiencias en una atmósfera de humedad controlada, éstas se repitieron en una caja abierta obteniéndose un valor de humedad relativa entre 67 % y 74 %.

Para cada valor de N se realizaron 10 experiencias idénticas y se calculó el valor medio del máximo ángulo de estabilidad.

En la figura 3.1 se muestra la variación de $<\theta_M>$ con N para $1 \leq N \leq 20$ y RH = (70±4)% y se superponen los datos correspondientes a RH = (50 ± 2)% (cuadrados blancos).

Se ve que ambos conjuntos de datos muestran el mismo comportamiento cualitativo, sin embargo, se observa una importante diferencia en la estabilidad del sistema. El empaquetamiento con mayor humedad relativa se desestabiliza a ángulos mayores $< \theta_M >_{70\%} = 27.0° \pm 0.4°$ mientras que $<\theta_M>_{50\%} = 26.0° \pm 0.2°$. De esta manera se corrobora el efecto cohesivo de la humedad.

También se observó que para empaquetamientos con más de 10 capas, el ángulo δ es el mismo, independientemente de la humedad: $<\delta>_{70\%} = 4.6° \pm 0.6°$ y $<\delta>_{50\%} = 4.7° \pm 0.5°$. De lo anterior se concluye que el ángulo de reposo se ve influenciado por la humedad relativa: $<\theta_r>_{70\%} = 22.6° \pm 0.6°$ y $<\theta_r>_{50\%} = 21.2° \pm 0.4°$.

Este resultado es coherente con la idea de que el ángulo de reposo caracteriza al medio granular: trabajar con un medio húmedo es equivalente a, por ejemplo, cambiar la geometría de los granos y modificar así la interacción relativa entre los mismos.

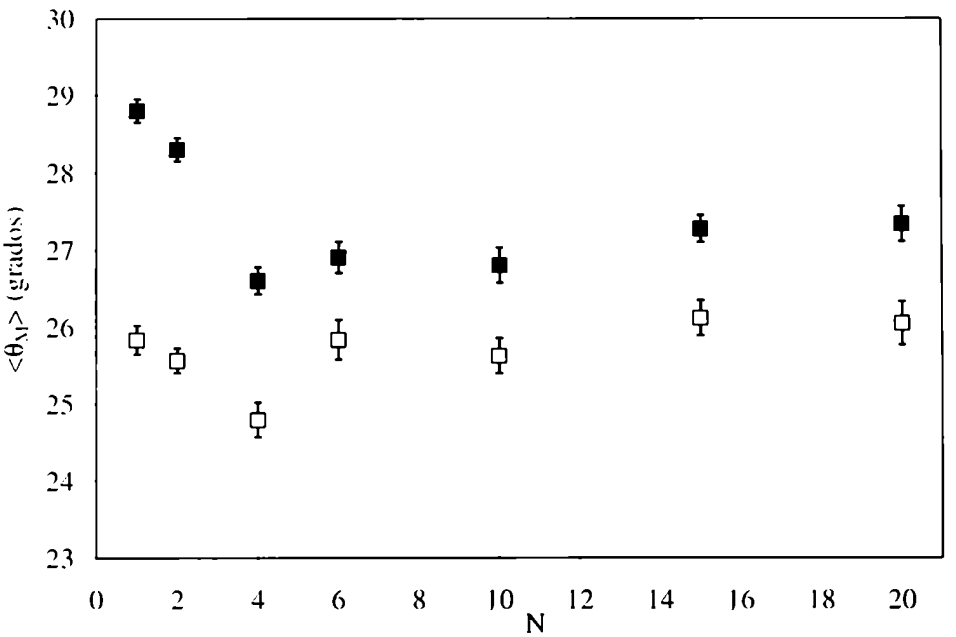

Figura 3.1: Máximo ángulo de estabilidad en función de la cantidad de capas para dos valores de humedad ambiente: RH = 70% (■) y RH =50% (□).

Cabe mencionar que la condensación y la formación de puentes comienzan inmediatamente después de construido el empaquetamiento y que ambos procesos aumentan a medida que transcurre el tiempo [Bocquet 98], es decir que el sistema se cohesionará cada vez más. Por lo tanto, para obtener resultados repetitivos es necesario mantener constante el tiempo entre la preparación del empaquetamiento y la realización de la experiencia.

III.2. Influencia de la fracción de compactación inicial

Como se vió en la sección II.3, para un empaquetamiento dado, el máximo ángulo de estabilidad no es único sino que presenta una dispersión de aproximadamente 3° Según algunos trabajos previos [Pouliquen 96, Evesque 93] dicha dispersión podría atribuirse a diferentes valores iniciales de la fracción de compactación del empaquetamiento.

Para verificar y cuantificar esta dependencia se realizaron experiencias en sistemas de 20 capas (en los que δ puede medirse en forma directa) con distinta fracción de compactación.

Esta puede cambiarse levemente variando la técnica de llenado de la caja. Recordamos que los resultados presentados hasta ahora corresponden a empaquetamientos que llamaremos compactos y que todos se construyeron de igual forma: se coloca la barra de contención de altura adecuada al número de capas que se desea (ecuación 2.1) y luego se vierte de una sola vez una masa total de granos $M_T = m\ N$ dentro de la caja, finalmente se alisa la superficie con una espátula; así, siguiendo un único procedimiento, la fracción de compactación resulta $C = 0.64 \pm 0.02$ (sección II.1).

Para obtener empaquetamientos menos compactos, que llamaremos "poco compactos", se llenó la caja capa por capa y luego de volcar cada capa se sometió al sistema a una suave oscilación vertical. De esta forma se obtuvieron sistemas con una fracción de compactación $C = 0.62 \pm 0.02$.

Por el contrario, para lograr empaquetamientos "muy compactos", cada vez que se pone una capa de material en la caja se presiona uniformemente la superficie libre con una lámina acrílica de igual área que la caja. Este procedimiento permitió obtener sistemas con $C = 0.67 \pm 0.02$.

En la figura 3.1 puede observarse la variación de los ángulos θ_M y δ con la masa de la avalancha para todos los sistemas de 20 capas, aquellos construidos de la forma habitual, ya presentados en la figura 2.9, y los que acabamos de definir como muy compactos y poco compactos.

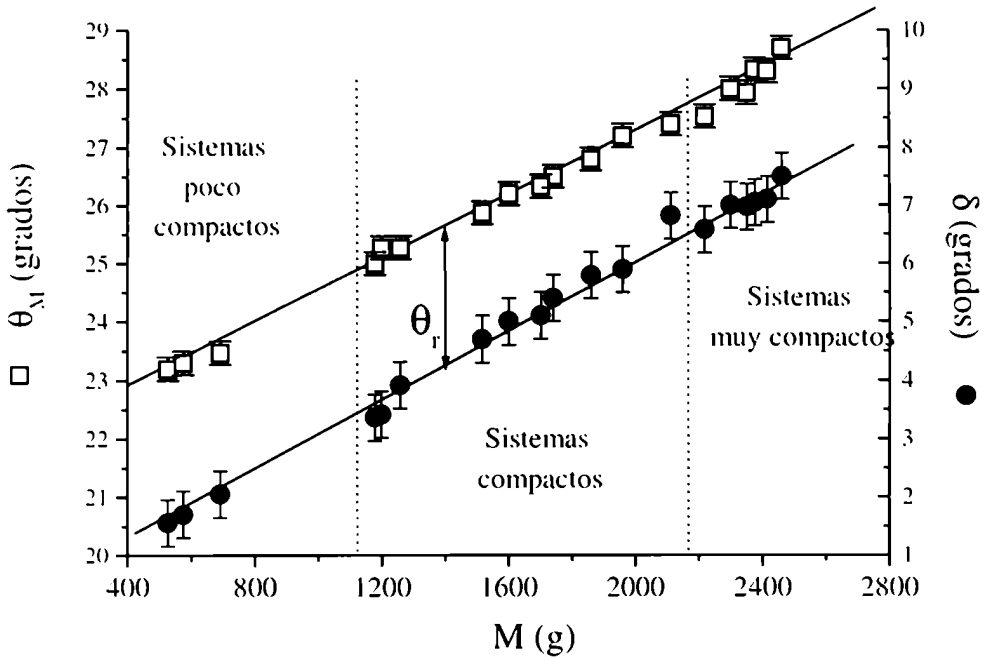

Figura 3.1: Ángulos característicos en función de la masa de la avalancha para sistemas de 20 capas.

Puede observarse que los nuevos datos se alinean perfectamente con los anteriores de manera tal que cuanto más compacto es el empaquetamiento, más estable resulta; esto es, mayor es el ángulo de inclinación al que se produce la avalancha. Además, una vez desencadenada ésta, los sistemas más compactos desplazan una masa mayor, tal que de lugar a un único ángulo de reposo, independiente de las condiciones iniciales.

Se confirma así que la estabilidad del sistema y la masa desplazada por la avalancha dependen de la fracción de compactación pero el ángulo de reposo es independiente de ésta constituyendo una característica intrínseca del medio granular.

Esta conclusión nos llevó a tomar ciertos recaudos ante un hecho fortuito. Al comenzar una nueva serie de experiencias (que se describen en la sección siguiente) fue necesario utilizar una nueva partida de esferas ya que las pérdidas ocasionales producidas durante las experiencias anteriormente presentadas habían disminuido la cantidad de esferas disponibles de la primera partida. Por precaución y teniendo en cuenta el efecto de la fracción de compactación inicial en los ángulos θ_M y δ, ésta se calculó nuevamente con las nuevas esferas siguiendo la técnica habitual para preparar sistemas compactos. Curiosamente y a pesar de tratarse de esferas del mismo diámetro medio, de igual origen (marca Assistent) y adquiridas al mismo proveedor, se obtuvo

que la altura del empaquetamiento crece linealmente con el número de capas con una pendiente $\alpha = 1.93 \pm 0.02$, lo que da una fracción de compactación $C = 0.59 \pm 0.02$, es decir sistemas aún menos compactos que los "poco compactos" obtenidos con las esferas de la primera partida. Para investigar el origen de esta diferencia, se determinó la distribución de tamaños de las esferas de ambas partidas. Para ello, se adquirieron imágenes de una muestra de 200 granos provenientes de cada partida y se procesaron las mismas suponiendo primero que poseen cierta excentricidad, es decir, que se ajustó el área proyectada con una elipse y se determinaron los ejes mayor y menor de cada grano. En segundo lugar, se ajustó el área proyectada con un círculo, lo que permitió obtener el diámetro medio de cada grano.

La distribución de tamaños se muestra en forma porcentual en las figuras 3.2, 3.3 y 3.4.

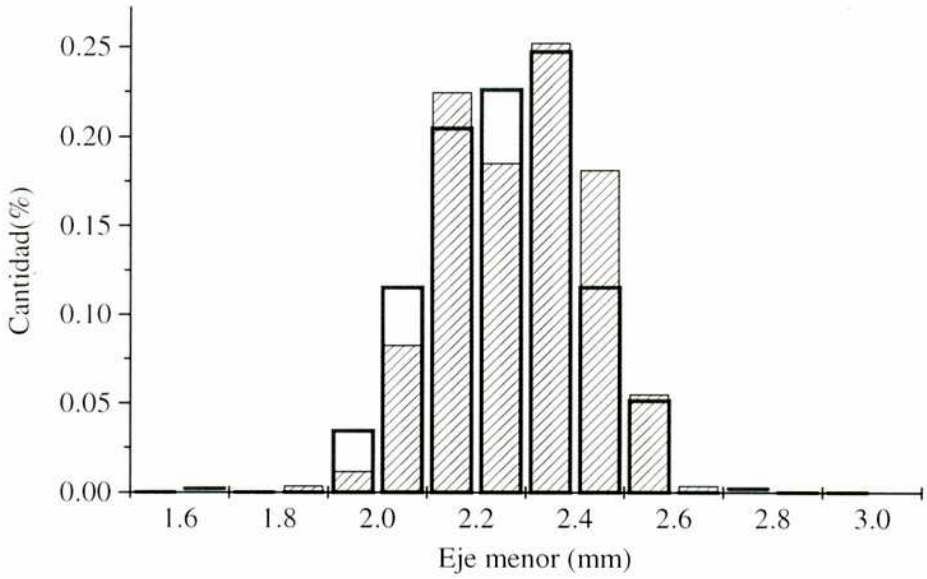

Figura 3.2: Distribución del valor del eje menor correspondiente al material granular utilizado. Primer partida: histograma liso; segunda partida: histograma rayado.

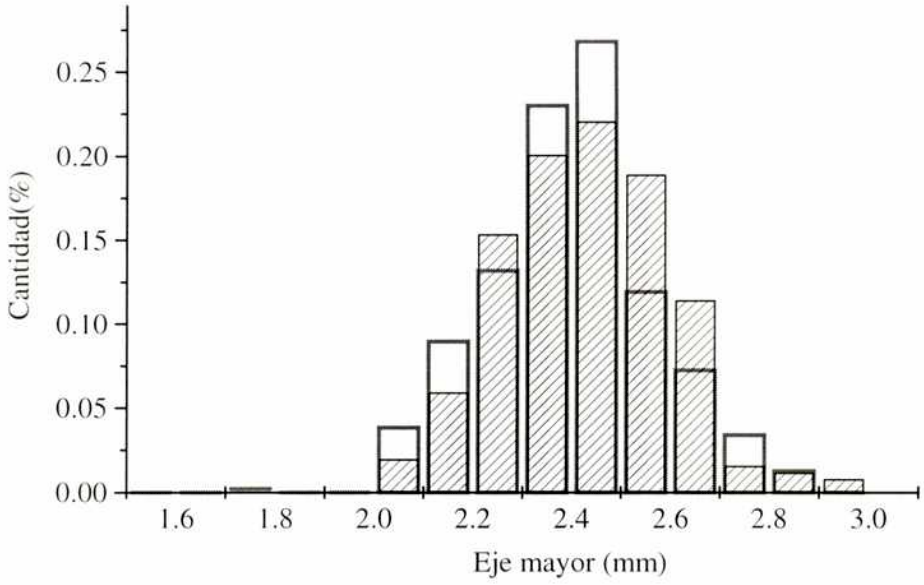

Figura 3.3: Distribución del valor del eje mayor correspondiente al material granular utilizado. Primer partida: histograma liso; segunda partida: histograma rayado.

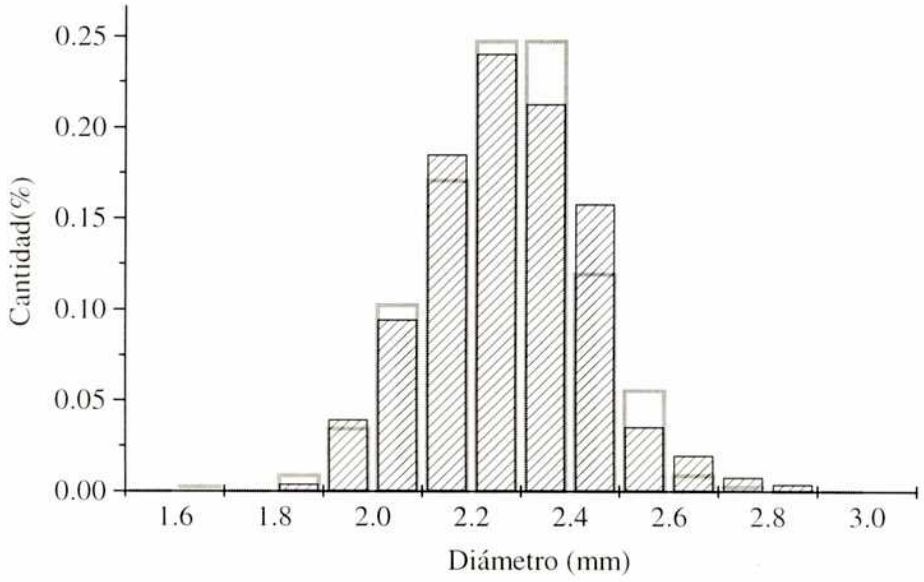

Figura 3.4: Distribución del diámetro de los granos, d, obtenido mediante el área proyectada por los mismos, suponiendo que son esféricos. Primer partida: histograma liso; segunda partida: histograma rayado.

La distribución de diámetros de los granos que se muestra en la figura 3.4 no permite distinguir diferencias apreciables entre ambas partidas de esferas. Puede observarse que el valor medio de la distribución se encuentra en los dos casos en d = 2.2mm. Sin embargo, tanto en la figura 3.2 como en la 3.3 se verifica que un porcentaje mayor de los granos provenientes de la primer partida presentan menores valores de eje mayor y de eje menor, lo que explica que los empaquetamientos resulten más compactos.

Teniendo en cuenta que con la nueva partida de esferas se obtienen empaquetamientos menos compactos fue preciso caracterizar nuevamente el sistema. Para ello se estudió nuevamente $<M>$, $<\theta_M>$, $<\delta>$ y $<\theta_r>$ en función de N y se observó en todos los casos el mismo comportamiento cualitativo. En particular, el ángulo de reposo, cuando puede definirse ($N > 10$), también resulta constante e independiente de la altura del sistema. Los valores asintóticos encontrados en este caso son: $<\theta_M> = 25.0° \pm 0.5°$, $<\delta> = 5.0° \pm 0.5°$, $<\theta_r> = 20.0° \pm 0.5°$ y $<M> = 1240g \pm 130g$. Puede observarse que teniendo en cuenta la incerteza de la medición, el valor de $<\delta>$ es igual al obtenido en las experiencias realizadas con la primera partida de material granular; sin embargo, el valor de $<M>$ difiere notablemente debido a que ahora un mismo volumen contiene menos cantidad de granos ya que el sistema es menos compacto.

Recordemos que para $N > N_c$, durante la avalancha se ponen en movimiento solo las esferas pertenecientes a las N_c capas superficiales y que solo la mitad de ellas son desalojadas de la caja. Por lo tanto, con esta nueva partida de esferas, el valor de N_c también cambiará ya que (ecuación 2.6): $N_c = 2^{\frac{<M>}{m}} = 11 \pm 1$.

III.3. Influencia del tamaño del empaquetamiento

En las secciones anteriores mostramos que la estabilidad de un empaquetamiento granular aumenta con la humedad relativa en la que se encuentra el mismo y con la fracción de compactación inicial .

En esta sección se presentan las experiencias dedicadas a investigar la influencia de la longitud del empaquetamiento en los parámetros característicos.

En particular, hemos visto que el valor asintótico de la masa desplazada por la avalancha o lo que es lo mismo el valor de N_c no es un parámetro intrínseco del medio granular. Por el contrario:

$$N_c = \frac{L}{\alpha} tg(< \delta >) \qquad (3.1)$$

donde L es la longitud del empaquetamiento. El objetivo de esta sección es entonces variar L e investigar de qué forma varían N_c, δ y θ_M.

III.3.1. Procedimiento experimental

Para estudiar la influencia de la longitud del empaquetamiento en los ángulos característicos y en el valor de N_c, se repitieron todas las condiciones de las experiencias descriptas en el capítulo II a excepción del tamaño de la caja y se utilizó la nueva partida de esferas.

Para facilitar la manipulación de la caja y adecuarnos a la cantidad de material granular disponible, se vió la necesidad de reducir el ancho de la caja a W = 12.5cm, la mitad del utilizado previamente. Para comprobar que está reducción no cambiase el comportamiento del empaquetamiento se redujo el ancho de la caja de W = 25cm a la mitad mediante una pared interior y se repitió la determinación de la fracción de compactación y las experiencias para valores de $N > N_c$.

Efectivamente, los resultados obtenidos con la caja de 12,5cm x 32 cm reproducen, dentro del error, los presentados en la sección III.2 correspondientes a una caja de 25cm x 32cm con la misma partida de esferas: $<\theta_M> = 25.0° \pm 0.5°$, $<\delta> = 4.5° \pm 0.5°$, $<\theta_1> = 20.5° \pm 0.5°$ y $<M> = 600g \pm 65g$ (mitad de la masas reportada en III.2 ya que el área se reduce a la mitad).

Se procedió entonces a construir una caja de acrílico de W = 12.5cm y L = 64cm en la que pudiesen regularse diferentes largos. Cabe resaltar que esta caja difiere de la construida dividiendo en dos la caja de 25cm en que la barra de contención, al ser más corta, presenta una estructura más rígida lo que podría llegar a alterar levemente la distribución de tensiones y por lo tanto el umbral de estabilidad θ_M.

Se realizaron experiencias con tres diferentes largos:

a) L = 32cm, con este valor de L el área, A, de la caja se reduce a la mitad por lo que la masa de una capa también debe reducirse a la mitad (m=115g) para conservar la compacidad superficial de la base rugosa en el valor C = 0.7.

b) L = 48.4cm. En este caso para obtener una monocapa con C = 0.7 se necesita una masa de esferas m = 174g

c) L = 64cm y en consecuencia, la misma área A que el sistema usado en el capítulo anterior, por lo tanto una capa con C = 0.7 tiene una masa m = 230g.

El resto de las condiciones experimentales se mantuvieron inalteradas. En la base de la caja se colocó una superficie rugosa constituída por las mismas esferas. Los empaquetamientos se construyeron con la técnica descripta en la sección II.1: de una vez se vierte en la caja la masa de esferas de vidrio seleccionada, equivalente a una cantidad predeterminada de capas. Se varió N entre 2 y 30 capas. Las experiencias se realizaron bajo una atmósfera controlada: 50% de humedad relativa.

III.3.2. Resultados experimentales

En todas las experiencias con N constante se observó un comportamiento idéntico al ya descripto: una vez que la avalancha comienza en el ángulo θ_M, el proceso evoluciona desplazando fuera del sistema una cierta cantidad de masa M tal que la superficie libre final adquiere siempre el mismo ángulo de reposo θ_r, independientemente de θ_M y de M los que presentan leves variaciones debidos a diferentes fracciones de empaquetamientos iniciales. Es decir, nuevamente aparece θ_r como un parámetro intrínseco del empaquetamiento.

Una vez concluida la avalancha, también se repiten las características geométricas del perfil del empaquetamiento. Para sistemas con pocas capas la superficie final no presenta un perfil bien definido y el ángulo δ no puede medirse. Por el contrario, para empaquetamientos con más de 10 capas, la superficie libre final es plana presentando un

perfil bien definido en forma de cuña cuyo ángulo δ se midió directamente con un goniómetro.

Se realizaron 10 experiencias idénticas para cada valor de N y luego se obtuvieron los valores medios de M, θ_M y δ y con estos últimos se calculó $<\theta_r>$. Finalmente, se investigó la variación de estos valores medios con el número de capas del sistema.

Se verificó que, para los tres sistemas, la dependencia de $<M>$, $<\theta_M>$, $<\delta>$ y $<\theta_r>$ con N es igual a la descripta en el capítulo II. En $<\theta_M>$ se observaron los tres regímenes debidos a efectos de dilatancia originados en la presencia del lecho rugoso fijo y en el aumento de la fracción de compactación al variar la cantidad de capas.

En todos los casos se observó que aproximadamente 10 capas son suficientes para que el sistema se libere de la influencia del lecho rugoso fijo. También se encontró que para $N > 10$ $<\theta_M>$ alcanza un valor constante independiente de N.

A su vez $<\delta>$ aumenta con N hasta $N = 10$ y luego permanece constante. Por su parte $<\theta_r> = <\theta_M - \delta>$ disminuye entre $N = 1$ y $N = 10$ alcanzando luego un valor asintótico.

En la Tabla I se presentan los valores medios asintóticos de θ_M, δ y θ_r obtenidos para cada una de las longitudes estudiadas. Se ve que ninguno de ellos varía con la longitud del sistema. Sin embargo, se observa una leve disminución de $<\theta_M>$ y $<\delta>$ con respecto a los valores obtenidos para la caja ancha dividida al medio (sección III.2). Esta discrepancia solo puede atribuirse a la mayor rigidez de la barra de contención lo que justifica la disminución del umbral de estabilidad θ_M. Sin embargo, una vez que la avalancha se desencadena en $<\theta_M> \cong 23.7°$ el sistema evoluciona hacia un ángulo $<\delta> \cong 3.4°$ lo que determina un ángulo de reposo $<\theta_r> \cong 20°$, idéntico al encontrado para esta nueva partida de esferas en las experiencias reportadas en la sección anterior. Una vez más se confirma que el ángulo de reposo es un parámetro intrínseco del medio granular mientras que $<\theta_M>$ y $<\delta>$ dependen de las condiciones de borde y de compactación.

Tabla I. *Promedios de los ángulos característicos para sistemas de distintas longitudes.*

Sistema	L (cm)	$<\theta_M>$	$<\delta>$	$<\theta_r>$
I	32	23.7°±0.5°	3.3°±0.6°	20.4°±0.1°
II	48.4	23.7°±0.2°	3.5°±0.3°	20.1°±0.2°
III	64	23.7°±0.3°	3.1°±0.3°	20.4°±0.1°

En cuanto a la variación con N del valor medio de la masa desalojada por la avalancha, en todos los sistemas se observó que <M> aumenta con N hasta $N = N_c$ y luego permanece constante en un valor $<M_{asintótico}>$ que permite calcular N_c: $<M_{asintótico}> = m\, N_c/2$.

En la Tabla II se resumen los valores de $<M_{asintótico}>$ y N_c para los tres sistemas estudiados. Se ve que $<M_{asintótico}>$ (y en consecuencia N_c) aumenta con L. La figura 3.5 permite explicar el origen de este crecimiento vinculado al valor constante obtenido para $<\delta>$.

Tabla II. *Valores medios de $M_{asintótico}$ y δ obtenidos por medición directa y calculados usando el valor de $<M_{asintótico}>$, valor de N_c.*

Sistema	L (cm)	$M_{asintótico}$	N_c	$<\delta>_{medido}$	$<\delta>_{calculado}$
I	32	590±70	10±1	3.3°±0.6°	3.5°±0.5°
II	48.4	1130±150	13±1	3.5°±0.3°	3.0°±0.5°
III	64	1998±74	17±1	3.1°±0.3°	3.0°±0.2°

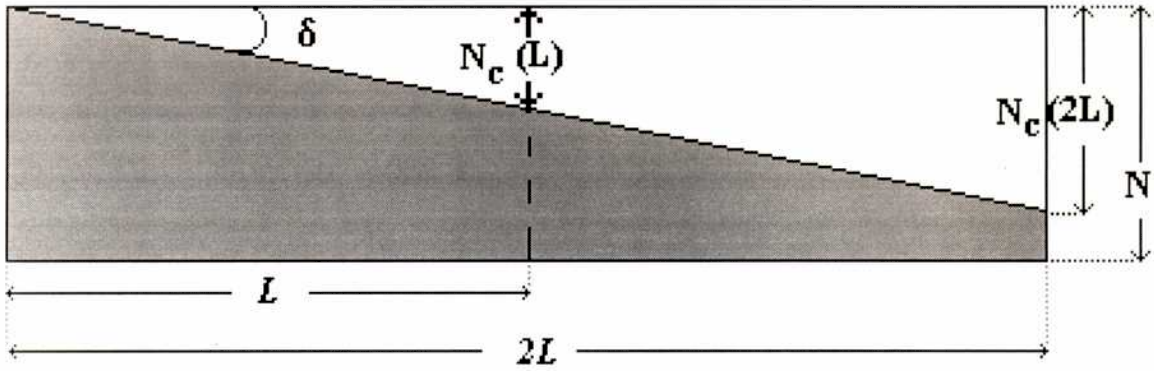

Figura 3.5: Visualización del número de capas (N_c) afectado por la avalancha. Para dos sistemas con N fijo e igual área, δ es aproximadamente igual en ambos empaquetamientos pero la cantidad de capas superficiales involucradas en M son distintas.

Efectivamente, tg(<δ>) también puede evaluarse de la siguiente forma:

$$\mathrm{tg}(<\delta>) = \frac{h_c}{L} = \frac{\alpha N_c}{L} = \frac{2\alpha < M_{asintótico} >}{mL} \tag{3.2}$$

En la Tabla II, se comparan los valores de <δ> experimentales (Tabla I) con los obtenidos mediante la ecuación 3.2 (con $\alpha = 1.93 \pm 0.02$mm) y se observa una buena concordancia.

Una forma práctica de normalizar los resultados obtenidos para empaquetamientos de distintos tamaños es la que se muestra en la figura 3.6 en la que se grafica la fracción de masa desalojada *F* en función de N/N_c. La fracción *F* se define como el cociente entre la masa desalojada por la avalancha <M> y la masa inicial total, M_T, del empaquetamiento de N capas.

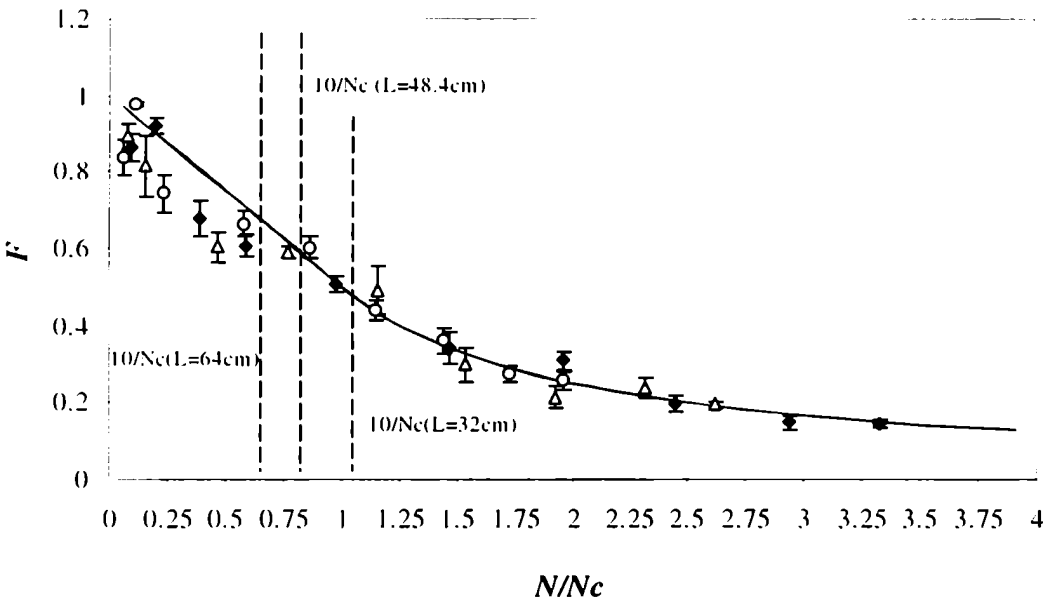

Figura 3.6. Fracción de masa de la avalancha en función de N/N_c para los tres sistemas L=32 cm (♦), L=48.4cm (Δ) y L=64cm (O). La línea llena representa la función dada por las ecuaciones 3.3 ($N > N_c$) y 3.4 ($10<N<N_c$). Las líneas verticales indican el límite de validez de la ecuación 3.4 para cada sistema: $10/N_c$(L=32cm) = 1; $10/N_c$(L=48.4cm) = 0.77, $10/N_c$(L=64cm)= 0.58.

Se observa que el conjunto de datos cae sobre una única curva y presenta un comportamiento decreciente reflejando el hecho experimental de que cualquiera sea el sistema, la masa desalojada por la avalancha tiende a un valor constante, esto es, *F* tiende a cero.

Por otra parte, la dependencia de F con N/N_c puede estimarse geométricamente teniendo en cuenta que $M_T = mN$ y que para $N/N_c > 1$, $<M> = M_{asintótico} = \frac{mN_c}{2}$ se obtiene:

$$F = \frac{< M_{asintótico} >}{M_1} = \frac{1}{2}\frac{N_c}{N} \qquad \text{para } N/N_c > 1 \qquad (3.3)$$

Además, hemos visto que en todos los sistemas el valor de <δ> es constante para $N \geq 10$.

Por lo tanto, también es posible estimar geométricamente la masa desalojada para $10 \leq N < N_c$ en cuyo caso el perfil típico es le que se muestra en la figura 2.8b y $tg(<\delta>) = \frac{\alpha N_c}{L} = \frac{\alpha N}{L'}$ donde L' es la longitud de la cuña que forma la masa retenida en la caja. Por lo tanto:

$$F = \frac{<M>}{M_T} = \frac{1}{NL}\left(\frac{NL'}{2} + N(L - L')\right) = 1 - \frac{1}{2}\frac{N}{N_c} \qquad \text{para } 10/N_c < N/N_c < 1 \qquad (3.4)$$

En la figura 3.6 se ha superpuesto a los datos experimentales, la función dada por 3.3 y 3.4 y se ve que el acuerdo es excelente para $N/N_c > 1$ y bueno para $N/N_c > 10/N_c$. Como N_c varía de un sistema a otro, el límite $10/N_c$ no es único. En el gráfico se ha señalado este límite para cada una de las longitudes estudiadas: $10/N_c$ (L=32cm) = 1; $10/N_c$ (L=48.4cm) = 0.77, $10/N_c$ (L=64cm) = 0.58.

Como era de suponer los puntos experimentales no pueden ser ajustados con la ecuación 3.4 para $N < 10$ ya que <δ> varía con N y por lo tanto la expresión no es válida. De hecho, que los datos experimentales caigan por debajo del ajuste indica que la base rugosa influye en la dinámica del sistema produciendo una mayor retención de masa y, por lo tanto, una menor fracción de masa desalojada.

III.4. Ángulo neutro

Hasta ahora hemos caracterizado el proceso de avalancha en nuestra configuración experimental por medio del máximo ángulo de estabilidad, θ_M, al que espontáneamente se desencadena la avalancha y del ángulo de reposo, θ_r, que presenta el empaquetamiento después de concluida esta última.

Sin embargo y tal como se mencionó en el Capítulo I, de Gennes *et al* [de Gennes 95] al modificar el modelo BCRE definen un ángulo de inclinación de un apilamiento granular, al que denominan ángulo neutro θ_n, para el cual la erosión y la sedimentación provocadas por una avalancha se compensan. Según los autores, dicho ángulo está definido en forma unívoca a diferencia de θ_M y θ_r los que dependen de la geometría del

reservorio. Muestran que $\theta_n = \theta_r$ si el recipiente es abierto y el material granular puede ser desalojado fuera del mismo como ocurre en pilas o en avalanchas en cajas. En cambio, si el recipiente es cerrado como es el caso del tambor rotante, encuentran que θ_n debe ser mayor que θ_r. Sin embargo, hasta nuestro conocimiento no existen trabajos experimentales que hayan verificado estas predicciones teóricas. Por lo tanto, en esta sección se presentan los resultados de experiencias específicamente diseñadas con ese objetivo: determinar el ángulo neutro y comparar su valor con el ángulo de reposo.

III.4.1. Dispositivo y técnica experimental

La idea básica de la experiencia es la siguiente. Se impone un flujo de granos sobre la superficie del apilamiento inclinado un ángulo θ menor al máximo ángulo de estabilidad y se determina si dicho flujo arrastra consigo parte del material del apilamiento (erosión) o por el contrario, si parte de los granos originalmente pertenecientes al flujo quedan depositados sobre el empaquetamiento (sedimentación). Se varía θ y se repite la medida.

Se utilizó la caja de 12,5cm de ancho y 64cm de largo a la que se le agregó una segunda pared removible tal como se indica en la figura 3.7a. Se utilizaron apilamientos de 20 capas (M_T = 4600g) idénticos a los descriptos en la sección III.3. En el depósito limitado por la pared removible se coloca una masa $M_{móvil}$ de las mismas esferas que constituyen el apilamiento. Se inclina el plano un ángulo menor que $\theta_M = 23.7° \pm 0.3°$ para evitar que se produzca una avalancha. Se cierra la caja y se lleva la humedad relativa de todo el sistema al 50%. Una vez logrado esto, se destapa la caja y rápidamente se retiran ambas paredes móviles. El material contenido en el depósito fluye sobre la superficie del apilamiento y cae en un recipiente (figura 3.7b).

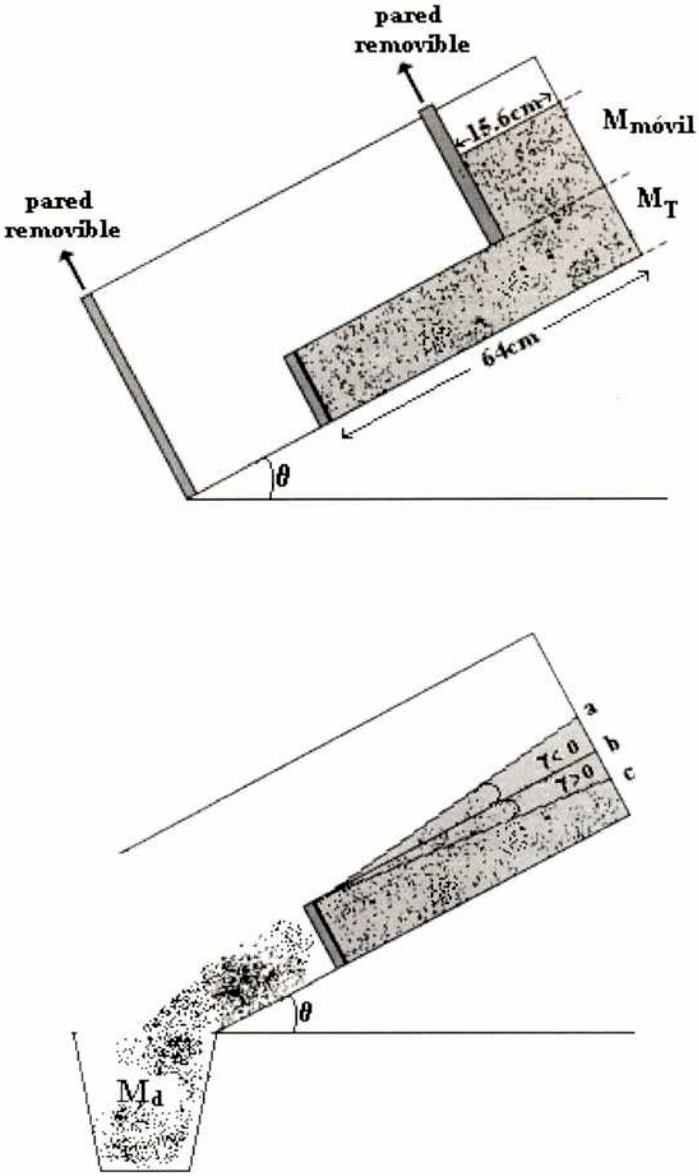

Figura 3.7: arriba: esquema del dispositivo experimental utilizado; abajo: esquema de las tres posibles configuraciones finales, a) Se produce sedimentación sobre la superficie del apilamiento ($\gamma < 0$), b) La sedimentación y la erosión se compensan ($\gamma = 0$), c) El apilamiento se erosiona ($\gamma > 0$).

Esta técnica permite determinar, de dos formas independientes, si durante el proceso se produjo erosión o sedimentación. Por un lado se mide la masa desalojada (M_d) que queda en el recipiente. Si $M_d > M_{móvil}$, el flujo provocó erosión; si $M_d < M_{móvil}$, parte del material contenido inicialmente en el depósito quedó sedimentado en el lecho y si los dos fenómenos se compensan $M_d = M_{móvil}$ y $\theta = \theta_n$.

Por otra parte, con el goniómetro se mide el ángulo γ que forma la superficie libre del apilamiento respecto a su posición original (ver figura 3.7b). Si $\gamma < 0$, hubo sedimentación, si $\gamma > 0$, se produjo erosión y si $\gamma = 0$, $\theta = \theta_n$.

Para asegurar que los resultados no dependieran de la masa contenida en el depósito, se realizaron experiencias utilizando dos valores: $M_{móvil}$ = 1150g y $M_{móvil}$ = 2300g equivalentes a 5 y 10 capas del apilamiento, respectivamente.

III.4.2. Resultados

Determinación de θ_n por medio de la masa desalojada

Se cuantificó la acumulación o erosión de material granular en el apilamiento calculando el número de capas retenidas sobre la superficie o desalojadas del sistema. Esta cantidad de capas de más o de menos con la que queda el sistema una vez concluido el proceso se define como $\Delta N = (M_{móvil} - M_d)/m$, donde m = 230g es la masa de una capa. Es decir que habrá sedimentación si $\Delta N > 0$ y habrá erosión si $\Delta N < 0$, cuando $\Delta N = 0$ la sedimentación y la erosión se balancean y el ángulo de inclinación del plano θ será igual al ángulo neutro θ_n.

Se estudió entonces la variación de ΔN con el ángulo de inclinación para los valores de $M_{móvil}$ mencionados. Los resultados se muestran en la figura 3.8.

En las primeras experiencias se varió θ entre 14° y 23°. Rápidamente se observó que el rango significativo depende de $M_{móvil}$. Efectivamente, cuando $M_{móvil}$ = 1150g (5 capas) los resultados de ΔN para $\theta < 19°$ carecen de interés ya que, en ese caso, todas las capas que conforman el flujo granular quedan retenidas. Lo mismo ocurre para $\theta < 18°$ cuando $M_{móvil}$ = 2300g (10 capas).

En el otro extremo del rango de variación de θ, 23° es el valor límite que se puede inclinar el empaquetamiento ya que para ángulos mayores se está cerca del ángulo donde la avalancha ocurre espontáneamente (θ_M). Además, los primeros resultados indicaron que el valor de θ para el cual ΔN estaba próximo a cero era muy cercano a 21°. Por lo tanto, en las siguientes experiencias se varió θ solo entre 19° y 23°.

Se observa en la figura 3.8 que los datos correspondientes a $19° \leq \theta \leq 23°$ caen sobre una recta que corta el eje de abscisas en $\theta = 21.0° \pm 0.3°$. Este es entonces, el valor de θ_n y se ve que es razonablemente próximo al valor del ángulo de reposo obtenido en la sección III.3.2 a partir de las experiencias de avalanchas producidas exclusivamente por gravedad: $\theta_r = 20.4° \pm 0.1°$ (Tabla I).

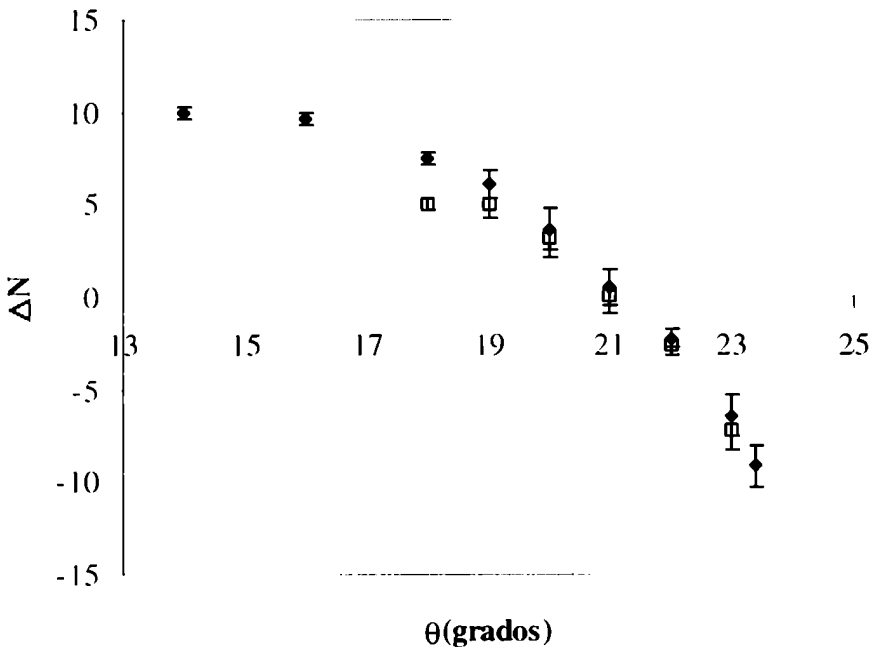

Figura 3.8: Número de capas del reservorio, retenidas o expelidas del sistema en función del ángulo de inclinación, □: $M_{móvil}$ *= 1150g (5 capas) y* ◆: $M_{móvil}$ *= 2300g (10 capas).*

Determinación de θ_n por medio del ángulo γ.

En cada una de las experiencias recién descriptas se midió el ángulo γ al concluir el proceso.

En la figura 3.9 se grafica la dependencia de γ con θ. Se observa que los valores de γ correspondientes al rango significativo de θ muestran una variación cuadrática y que para $\theta = 20.7° \pm 0.3°$, $\gamma \approx 0$, es decir que no hubo erosión ni sedimentación. Este valor coincide con el obtenido mediante la masa desalojada y de nuevo se comprueba que dentro del error estadístico los ángulos de reposo y neutro coinciden.

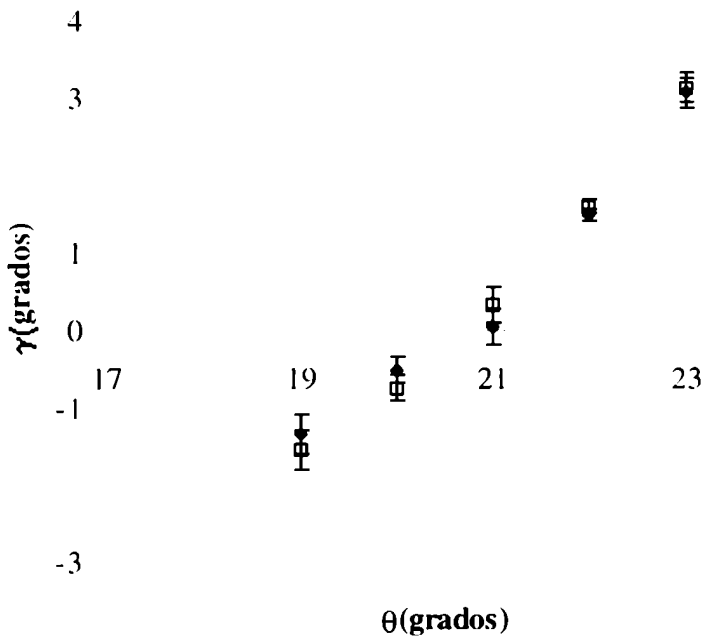

Figura 3.9: Ángulo γ para cada ángulo de inclinación, □: $M_{móvil}$ = *1150g (5 capas) y* ◆: $M_{móvil}$ = *2300g (10 capas).*

III.5. Resumen

Se resumen a continuación los resultados más importantes presentados en este capítulo:

1) Se mostró que la humedad genera cohesión entre los granos provocando el aumento de la estabilidad del sistema y también del ángulo de reposo del medio granular

2) Se comprobó que la fracción de compactación del sistema influye en su estabilidad y en la masa desalojada por la avalancha pero no en el ángulo de reposo.

3) Se demostró que el número crítico de capas que intervienen en la avalancha así como la masa desalojada por ésta varían con la longitud del sistema y se explicó esta

variación mostrando que la masa desalojada puede considerarse igual a la contenida en una cuña de ángulo δ, ancho W y largo L.

4) Se diseñó una técnica original para determinar experimentalmente el ángulo neutro del sistema y se verificó que en esta geometría, se cumple la predicción teórica que establece que éste debe ser igual al ángulo de reposo.

Conclusiones Generales

A pesar de los obstáculos sigo adelante, me motiva repetir ese instante en que la realidad atraviesa abruptamente el tedio, vence la intuición y me sorprende con una sencillez que algunos creerán intrascendente. Me provoca un asombro que algunos creerán injustificado y hasta falto de cordura pero sin embargo me deslumbra como a un niño, me hace sospechar el infinito, me entusiasma a seguir y a esperar, ojalá que no eternamente.

*Mientras algunos escudriñaban un papel o una serie de comandos, yo buscaba preguntándome si era posible que extremos tan opuestos se encontrasen: **allí** veo que la esfera salta y se acelera en su descenso y **aquí** veo que baja lentamente, se frena y finalmente se detiene.*

***Acá**, **allá**... tan distintos, tan opuestos y sin embargo veo que se encuentran y se tocan porque ¡salta!, ¡salta!, ¡no parece posible! pero ¡**aquí** también salta!... y se detiene.*

María Alejandra Aguirre

Conclusiones generales

Entendemos que los objetivos planteados para este trabajo han sido cumplidos.

✦ Se diseñaron técnicas experimentales, en su mayor parte originales, que permitieron investigar los mecanismos involucrados en la disipación de la energía que una esfera gana en su descenso por un plano rugoso inclinado.

✦ El análisis de los resultados obtenidos permitió proponer un modelo que describe las distintas fuerzas disipativas a las que se ve sujeta la esfera en el régimen desacelerado según sea su velocidad y la inclinación del plano. Si la velocidad es alta, experimentará una fuerza de fricción constante hasta que su velocidad disminuya por debajo de un valor umbral; en ese momento, la fuerza pasa a ser viscosa.

También fue posible comprender la causa de los diferentes regímenes de movimiento y verificar que la diferencia no es de origen dinámico sino debida a entrampamientos distintos.

✦ Finalmente se consiguió confirmar experimentalmente la hipótesis propuesta de que en el régimen de velocidad constante existen distintos mecanismos de choque (múltiples colisiones en cada grano o trayectorias balísticas) que siempre dan como resultado una fuerza de tipo viscoso, siendo despreciable la pérdida de energía por fricción.

✦ Mediante técnicas experimentales sencillas se investigó exhaustivamente el proceso de avalancha que se produce cuando se inclina un empaquetamiento granular en una geometría muy poco explorada previamente.

✦ Se mostró que tanto el umbral de estabilidad del sistema como la dinámica del proceso dependen fuertemente de la profundidad del empaquetamiento. Por debajo de una altura crítica todos los granos se ponen en movimiento, sus trayectorias son balísticas, la masa desalojada aumenta con el número de capas, el ángulo de reposo disminuye y el umbral de estabilidad es sensible tanto a la influencia del lecho rugoso como a la fracción de compactación. Por encima de esa altura, en cambio, solo una banda superior de granos, compuesta por un número constante de capas, "repta" durante la avalancha, la masa desalojada es aproximadamente la mitad de esa banda, cualquiera

sea la profundidad del sistema y la superficie libre final del lecho granular forma un ángulo constante con la horizontal. Esta propiedad del ángulo de reposo se impone frente a las oscilaciones estadísticas del umbral de estabilidad y de la fracción de compactación del sistema: si la avalancha se desencadena a un ángulo de inclinación menor desalojará menos masa; si el sistema es más compacto la masa desalojada aumentará; en todos los casos al ángulo de reposo permanece constante.

✦ Se comprobó que éste ángulo es característico del medio granular: no varía frente a cambios de la geometría ni de la fracción de compactación como si lo hacen los restantes parámetros y sí se ve influenciado por la variación de humedad ambiente que modifica la interacción entre granos. Finalmente se determinó experimentalmente que en nuestro sistema, el ángulo de reposo coincide con el ángulo de inclinación que debe tener la superficie libre de un lecho granular para que permanezca inalterado ante el paso de una avalancha. Este último punto constituye un aporte importante: se prueba que por dos mecanismos físicos diferentes el sistema evoluciona hacia un único ángulo. Sin embargo, es necesario profundizar esta línea ya que no es evidente que la coincidencia persista en sistemas abiertos con otras condiciones de borde como por ejemplo, en pilas de arena.

Por último, las dos partes en que se ha dividido este trabajo muestran que el análisis de los fenómenos presentes en el movimiento de un grano aislado brinda importante información sobre los procesos colectivos pero que ésta no es suficiente ya que las interacciones entre granos juega un rol fundamental.

María Alejandra Aguirre

Dra. ADRIANA L. CALVO
GRUPO DE MEDIOS POROSOS
FACULTAD DE INGENIERIA - U.B.A.

Bibliografía

[Aguirre 2000a] M. A. Aguirre, N. Nerone, A. Calvo, I. Ippolito, D. Bideau. Phys. Rev. E **62**, 738 (2000).

[Aguirre 2000b] M. A. Aguirre, A. Calvo, I. Ippolito. Materials Research Society (MRS) Spring Meeting Proceedings (2000).

[Aguirre 96] M. A. Aguirre. *Movimiento de una partícula sobre una superficie inclinada rugosa*. Tesis de Licenciatura, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (1996).

[Aguirre 97] A. Aguirre, I. Ippolito, A. Calvo, C. Henrique, D. Bideau. Powder Tech. **92**, 75 (1997).

[Albert 97] R. Albert, I. Albert, D. Hornbaker, P. Schiffer, A.L. Barabasi. Phys. Rev. E **56**, R6271 (1997).

[Amaral 96] L. Amaral, K. Lauritsen. Phys. Rev. E **54**, 4512-4515 (1996).

[Ashcroft y Mermin] N.W. Ashcroft, N. D. Mermin. *Solid State Physics*. Saunders College Publishing, editado por Harcourt Brace Jovanovich College. (1976) pag 77.

[Bagnold 54] R. A. Bagnold. Proc. R. Soc. London Ser A 225, 49 (1954).

[Bagnold 66] R. A. Bagnold. Proc. R. Soc. London Ser A 295, 219 (1966).

[Bak 87] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld. Phys. Rev. Lett. **59**, 381 (1987).

[Bak 88] P. Bak, C. Tang, K. Wiesenfeld. Phys. Rev. A. **38**, 364 (1988).

[Batrouni 96] G. Batrouni, S. Dippel, L. Samson. Phys. Rev. E **53**, 6496 (1996).

[Bocquet 98] L. Bocquet, E. Charlaix, S. Ciliberto, J. Crassous. Nature **396**, 735 (1998).

[Bouchaud 95a] J.P. Bouchaud, M.E. Cates, J.R. Prakash, S.F. Edwards. J. Phys. Y France **4**, 1383 (1995).

[Bouchaud 95b] J.P. Bouchaud, M.E. Cates, P. Claudin. J. Phys. J France **5**, 639 (1995).

[Boutreux 98] T. Boutreux, E. Raphael, P.G. de Gennes. Phys. Rev. E 58, 4692 (1998).

[Bretz 92] M. Bretz, J.B. Cunningham, P.L. Kurczynski, F. Nori. Phys. Rev. Lett. **69**, 2431 (1992).

[Cantelaube 95a] F. Cantelaube, Y. Limon-Duparcmeur, D. Bideau, G. Ristow. J. Phys. I France **5**, 585 (1995).

[Cantelaube 95b] F. Cantelaube. *Ecoulements granulaires dans un tambor à deux dimensions, Ségrégation.* Tesis doctoral. Universidad de Rennes I, 1995.

[Caponeri 95] M. Caponeri, S. Douady, S. Fauve and C. Laroche, en *Mobile Particulate Systems* Eds E. Guazzelli and L. Oger, Nato Asi Series (Kluwer Academic Publishers, 1995).

[Clement 92] E. Clement, J. Durand, J. Rajchenbach. Phys Rev Lett **69**, 1189 (1992).

[Coulomb] C. A. Coulomb. Acad. R. Sci. Mem. Math. Phys. **7**, 343 (1773).

[de Gennes 95] P.G. de Gennes. C. R. Acad. Sci. Paris 321-IIb, 501 (1995).

[Dippel 96] S. Dippel, G. Batrouni, D. Wolf. Phys. Rev. E **54**, 6845 (1996).

[Dippel 97] S. Dippel, G. Batrouni, D. Wolf. Phys. Rev. E **56**, 3645 (1997).

[Drake 90] T. G. Drake. J. Of Geophysical Research, **95**, 8681 (1990).

[Duran 97] J. Duran. *Sables, poudres et grains* (Eyrolles Sciences, France, 1997).

[Eguía 97] M. Eguía. *Implementación de una técnica de sonido para el estudio del movimiento de una esfera sobre una superficie inclinada rugosa.* Informe final de Laboratorio 6 y 7. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (1997).

[Evesque 89] P. Evesque, J. Rajchenbach. Phys Rev Lett **62**, 44 (1989).

[Evesque 91] P. Evesque. Phys Rev A **43**, 2720 (1991).

[Evesque 93] P. Evesque, D. Fargeix, P. Habib, M.P. Luong, P. Porion. Phys. Rev. E **47**, 2326-2332 (1993).

[Evesque 93b] P. Evesque, P. Porion. Pour la Science **187**, 54 (1993).

[Faraday] M. Faraday. Philos Trans. Roy. Soc. London **52**, 299 (1831).

[Fraysse 97] L. Samson, I. Ippolito, S. Dippel y G. G. Batrouni en *Powders & Grains 97*, editado por R. P. Behringer y J. T. Jenkins (Rotterdam, 1997).

[Grasselli 97] Y. Grasselli and H. J. Herrmann. Physica A **246**, 301-313 (1997).

[Haff 83] P. K. Haff. J. Fluid. Mech. **134**, 401-430 (1983).

[Held 90] G. A. Held, D. H. Solina, D. T. Keane, W. J. Haag, P. M. Horn, G. Greinstein. Phys Rev. Lett. **65**, 1120 (1990).

[Henrique 97] C. Henrique, M. A.Aguirre, A. Calvo, I. Ippolito, D. Bideau. Powder Tech. **94**, 85 (1997).

[Henrique 98] C. Henrique, M. A. Aguirre, A. Calvo, I. Ippolito, S. Dippel, G. G. Batrouni, D.Bideau. Phys. Rev. E **57 (4)**, 4743 (1998).

[Henrique 99] C. Henrique. *Diffusion et mélange dans un milieu granulaire modèle à deux dimensions*. Tesis doctoral. Universidad de Rennes 1, 1999.

[Jaeger 89] H. M. Jaeger, C - H. Liu, S.R. Nagel. Phys Rev. Lett. **62**, 40 (1989).

[Jaeger 90] H. M. Jaeger, C - H. Liu, S.R. Nagel. Europhys. Lett. **11 (7)**, 619-624 (1990).

[Jaeger 92] H. M. Jaeger, S.R. Nagel. Science **255**, 1523 (1992).

[Jan 92] C. D. Jan, H. W. Shen, C. H. Ling, C. L. Chen. Proc. Of the 9th Conf. On Eng. Mech. College Station (Texas), 768 (1992).

[Jenkins 83] J. T. Jenkins, S. B. Savage. J. Fluid Mech. **130**, 1045 (1983).

[Jenkins 86] J. T. Jenkins, M. W. Richman. J. Fluid Mech. **171**, 53-69 (1986).

[Johnson 87] P. C. Johnson, R. J. Jackson. J. Fluid Mech. **176**, 67-93 (1987).

[Kadanoff 89] L.P. Kadanoff. Phys Rev. A **39**, 6524 (1989).

[Lauritsen 96] K. Lauritsen, S. Zapperi, H. Stanley. Phys. Rev. E **54**, 2483-2488 (1996).

[Lun 84] C. K. K. Lun, S. B. Savage, D. J. Jeffrey, N. Chepurniy. J. Fluid Mech. **140**, 223 (1984).

[Lun 87] C. K. K. Lun, S. B. Savage. J. Appl. Mech. **54**, 47 (1987).

[Nagel 92] S. R. Nagel. Rev. of Modern Physics **64**, 321 (1992).

[Nerone 2000] N. Nerone, M. A. Aguirre, A. Calvo, I. Ippolito, D. Bideau. Physica A, **283**, 218 (2000).

[Nerone 2000b] N. Nerone, S. Gabbanelli. Workshop of the Consortium of the Americas on Interdisciplinary Science on Sparsely Connected Systems: Porous and Granular Materials (2000). Granular Matter (2001).

[Pouliquen 96] O. Pouliquen, N. Renault. J. Phys. II France 6, 923-935 (1996).

[Reynolds] O. Reynolds. Philos Mag. Ser. **5 (50)**, 469 (1885).

[Riguidel 94 b] F.-X. Riguidel, R. Julien, G. H. Ristow, A. Hansen, D. Bideau. J. Phys. I (France) **4**, 261 (1994).

[Riguidel 94 c] F. -X. Riguidel, Tesis doctoral, Université de Rennes I (1994).

[Riguidel 94] F.X. Riguidel, A. Hansen, D. Bideau. Europhys. Lett. **28**, 13 (1994).

[Ristow 94] G. H. Ristow, F. X. Riguidel, D. Bideau. J. Phys I **4**, 1161 (1994).

[Rosendahl 93] J. Rosendahl, M. Vekic, J. Kelly. Phys. Rev. E **47**, 1401 (1993).

[Samson 97] L. Samson, I. Ippolito, S. Dippel, G. G. Batrouni, en *Powders & Grains 97*, editado por R. P. Behringer y J. T. Jenkins (Rotterdam, 1997).

[Samson 97b] L. Samson. *Analyse de l'écoulement d'un grain dans des systèmes désordonnés bi – et tridimensionnels*. Tesis doctoral. Universidad de Rennes 1, Francia, (1997).

[Savage 79] S. B. Savage. J. Fluid Mech. **92**, 53 (1979).

[Savage 84] S. B. Savage. Adv. Appl. Mech. **24**, 289 (1984).

[Savage 88] S. B. Savage. J. Fluid Mech. **194**, 457 (1988).

[Savage 89] S. B. Savage. Theoretical and Applied Mechanics. Eds. P. Germain, M. Piau, D. Caillerie, (1989) 241.

[Valance 98] A. Valance, D. Bideau. Phys. Rev. E **57**, (1998).

Agradecimientos

Entonces el Rey dirá "¡Vengan los bendecidos por mi Padre! Tomen posesión del Reino que ha sido preparado para ustedes desde el principio del mundo. Porque tuve hambre y ustedes me alimentaron; tuve sed y me dieron de beber. Pasé como forastero y ustedes me recibieron en su casa. Anduve sin ropa y me vistieron. Estaba enfermo y fueron a visitarme. Estuve en la cárcel y me fueron a ".

Entonces los buenos preguntarán "Señor ¿cuándo te vimos hambriento y te dimos de comer, sediento y te dimos de beber, o forastero y te recibimos, o sin ropa y te vestimos? ¿Cuándo te vimos enfermo o en la cárcel y te fuimos a ver?.

El Rey responderá "En verdad les digo que, cuando lo hicieron con alguno de estos más pequeños que son mis hermanos, lo hicieron conmigo".

Nuevo Testamento
Mateo 25, 34-40.

Agradecimientos

Quisiera agradecer a quienes me han ayudado a andar este camino, haciendo posible que esta Tesis haya empezado y ahora haya concluido:

- a la Dra. Marta Rosen por darme la oportunidad de trabajar en el Grupo de Medios Porosos y por sus consejos profesionales, en especial en esta última etapa.

- a la Dra. Adriana Calvo, tal vez sea difícil que en estas pocas palabras pueda expresar lo que su apoyo significó para mi, sin su tiempo y dedicación este trabajo no sería lo que es. En especial le agradezco por las discusiones "granulares", que ayudaron a pulir y organizar las ideas que se presentan en esta tesis y por supuesto por los puntos, las comas, los acentos, las frases aclaratorias, etc...

- a la Dra. Irene Ippolito quien con su experiencia enriqueció el contenido de las discusiones y de este escrito.

- a Christian Henrique, Manuel Eguía y Nicolás Nerone sin cuyo trabajo esta tesis no sería posible.

- al Dr. Daniel Bideau por compartir sus ideas y recibirme cordialmente en el Groupe Matière Condensée et Matériaux.

- a todos los que forman y han formado parte del Grupo de Medios Porosos (GMP): a Ricardo Chertcoff por los softwares, los antivirus y sus graciosas ironías, a Delia Barrera por estar siempre y en todo, a Germán Drazer por los ajustes y los papers, a Fernando Varela López por sus respuestas a todo, a Susana Gabbanelli, Silvia Obernauer y Luciana Bruno por su buena predisposición a darme una mano cuando se las pedí, a Norma Temprano por la buena onda, a Cecilia Wolluschek y Daniela Cirigliano por los cafecitos y las charlas, a Verónica D´Angelo y Christian Romano por soportar pacientemente mi desorden en esta última etapa.

En especial agradezco a Alejandro D´Onofrio que me animó a entrar al GMP, a Marcelo Piva que, con su entusiasmo contagioso, me impulsa a permanecer y a continuar, a Gerardo Callegari por escucharme y siempre darme su apoyo y a su mujer Victoria Cirilo por tanto buenos momentos compartidos, a Mario Cachile y Andrea Ureña por las charlas "nocturnas" y las cenas "reparadoras".

También quiero agradecerles a quienes desde otro lugar, no menos importante, me han acompañado dándome seguridad, esperanza o por animarme a seguir adelante o a levantarme siempre que he tropezado a: Victoria Cremaschi, Andrea Ureña, María Eugenia Chiaradio, María de la Paz Argüello, Eleonora Osorio, Liliana Guerra, "mis amigos del barrio", Carolina Wessel y Felicitas Argüello.

A los que han estado en la última etapa de la tesis: a Claudia Matteo y a las chicas del Departamento de Graduados.

Finalmente agradezco a aquellos que han estado desde los primeros instantes de mi vida y a quienes también dedico esta Tesis con todo lo que significa para mi haber llegado hasta aquí: a Dios y a mi Familia, en especial a mis Padres por su generosidad en darme no solo mi vida sino la de mis hermanos, por la educación y por todas sus renuncias para que mi vida fuera mejor; en síntesis por su amor incondicional.