Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Fórmulas explícitas para el cálculo de resultantes y aplicaciones

D'Andrea, Carlos Antonio

2001

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
D'Andrea, Carlos Antonio. (2001). Fórmulas explícitas para el cálculo de resultantes y aplicaciones. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3363_DAndrea.pdf

Cita tipo Chicago:
D'Andrea, Carlos Antonio. "Fórmulas explícitas para el cálculo de resultantes y aplicaciones". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2001.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3363_DAndrea.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Fórmulas Explícitas para el Cálculo de Resultantes y Aplicaciones

por: Carlos D'Andrea

Directora de Tesis: Dra. Alicia Dickenstein

Lugar de Trabajo: Departamento de Matemática, FCEyN, UBA

№ 3363

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Matemáticas
Marzo 2001

A la **OMA**

S. Ite, missa est.
M. Deo grátias.

la Misa

Et pourtant, le résultant ne méritait ni
cet excès d'honneur, ni cette indignité...

J.P. Jouanolou

''It's funny; cause at the rate
I'm goin when I'm thirty
I'll be the only person
in the nursin home flirting...''

Eminem

Agradecimientos

En primer lugar, deseo expresar mi profundo agradecimiento hacia Alicia Dickenstein.

Mi formación matemática tuvo además el aporte y la influencia de muchas personas, con quienes tuve el privilegio de colaborar o discutir: A. Alamrani, M. Almeida, C. Blanco, L. Busé, M. Chardin, D. Cox, F. Cukierman, L. D'Alfonso, P. De Nápoli, M. Elkhadi, I. Z. Emiris, J. Fernández Bonder, M. Graña, P. Haramburu, J. Heintz, G. Jerónimo, B. Haas, T. Krick, F. Krongold, G. Massaccesi, B. Mourrain, P. Popescu-Pampu, J. Sabia, M. Sombra, P. Solernó y B. Sturmfels.

Agradezco a todas las personas del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la UBA, por haber contribuido a crear un ambiente favorable para mi trabajo. También agradezco al personal del Mathematical Sciences Research Institute, Berkeley, Estados Unidos, del INRIA de Sophia-Antipolis, Francia y del Instituto Joseph Fourier, de Grenoble, Francia, por su hospitalidad durante estadías que he realizado.

Esta tesis ha sido parcialmente financiada por FOMEC a través de una beca doctoral, y por la Universidad de Buenos Aires y la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica a través de distintos subsidios de investigación.

Quiero agradecer a todas las personas que, desde la cotidianeidad, me acompañaron a lo largo de estos años:

- A mi familia: mamá, papá, Ana, Nico, Francisco, María Isabel y tía Felisa, por su amor, comprensión y apoyo incondicional (aunque nunca supieron exactamente qué es lo que hago [1]).
- A mis amigos, por el apoyo, la compañía, y los muchos (y varias veces vanos) intentos de hacerme recordar que soy una persona.
- A profesores, graduados y alumnos de esta facultad, por las interesantes enseñanzas y la sana camaradería compartida.

Todos ellos han contribuido positivamente a la realización de este trabajo.

Por último (pero no por ello menos importante), quiero expresar mi más profunda gratitud y admiración hacia esa comunidad maravillosa de docentes, padres, alumnos y ex-alumnos que a lo largo y a lo ancho del país hacen funcionar la Olimpíada Matemática Argentina. Ellos son los principales culpables de que yo esté escribiendo esta memoria, y a todos ellos está dedicada esta tesis.

Fórmulas Explícitas para el Cálculo de Resultantes y Aplicaciones

Resumen

Presentamos fórmulas para calcular resultantes ralas como cociente de dos determinantes, que extienden a las fórmulas de Macaulay clásicas. En el caso homogéneo, presentamos fórmulas a la Macaulay más compactas. Mostramos además que estas fórmulas explicitan el único morfismo no trivial de un complejo cuyo determinante es la resultante. Además, se exploran las extensiones a resultantes ralas en dos variables.
Como aplicaciones, se obtiene una familia de operadores de proyección aplicando perturbaciones a resultantes ralas, que proveen de un método general para calcular todas las raíces aisladas de sistemas polinomiales, aún ante la presencia de componentes de dimensión positiva. También, se estudia la validez de la implicitación de superficies racionales por el método de superficies móviles, mostrando relaciones entre resultantes y algunos determinantes que se usan en la formulación del método, y consiguiendo extenderlo al case de superficies no propiamente parametrizadas, en ausencia de puntos base.

Palabras clave: resultante, fórmulas de Macaulay, determinante de un complejo, resultante rala, operadores de proyección, implicitación, método de superficies móviles, puntos base.

Explicit Formulations for the Computation of Resultants and Applications

Abstract

We present formulas for computing sparse resultants as a quotient of two determinants, which extend the classical Macaulay formulas. In the homogeneous case, we present compact Macaulay style formulas. We show that these latter make explicit the unique non trivial morphism of a complex whose determinant equals the resultant. We also explore the extensions of these formulas to bivariate sparse resultants.
As applications, we obtain a family of projection operators applying perturbations on sparse resultants, which yield a general method for computing all isolated roots of polynomial systems, even in the presence of excess components or other degenerate inputs.
In addition, we study the validity of the implicitization of rational surfaces by the method of moving surfaces, give some relationships among resultants and some determinants arising in the formulation of that method, and extend it to the case of not properly parametrised surfaces without base points.

Keywords: resultant, Macaulay formulas, determinant of a complex, sparse resultant, projection operator, implicitization, method of moving surfaces, base points.

Introducción

Uno de los problemas principales tanto en el álgebra computacional como en la geometría algebraica efectiva es el problema de eliminación de variables en sistemas de polinomios. Un ejemplo típico de esta situación se presenta cuando uno "triangula" un sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array}\right. \tag{1}$$

para llevarlo a un sistema equivalente a (1), pero de la forma

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & & + & A_{1n}x_n & = & B_1 \\ & & A_{22}x_2 & + & & + & A_{2n}x_n & = & B_2 \\ & & & & & & \vdots & & \end{array}\right. \tag{2}$$

que, obviamente, es más fácil de resolver. Aquí, lo que se hace es tratar de "eliminar" una variable por cada ecuación que aparece. En eso consiste la teoría de la eliminación: en eliminar una o más variables de un sistema de ecuaciones polinomiales, reduciendo el problema dado a uno equivalente pero con menos variables en juego.

Por ejemplo, si estamos interesados en resolver

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 + a_1x + a_2x^2 & = & 0 \\ b_0 + b_1x + b_2x^2 & = & 0, \end{array}\right. \tag{3}$$

con $a_2 \neq 0 \neq b_2$, podemos eliminar la variable x de las ecuaciones y obtener la "triangulación "

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 + a_1x + a_2x^2 & = & 0 \\ a_0^2b_2^2 - a_0a_1b_1b_2 - 2a_0a_2b_0b_2 + a_0a_2b_1^2 + a_1^2b_0b_2 - a_1a_2b_0b_1 + a_2^2b_0^2 & = & 0. \end{array}\right.$$

La expresión que aparece en la segunda fila del sistema triangulado se llama la resultante de (3). Se anula si y solamente si ese sistema tiene una solución compleja.

La misma idea se puede usar para eliminar x en un sistema de dos ecuaciones genéricas:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n & = & 0 \\ b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m & = & 0, \end{array}\right.$$

pero los cálculos que hay que realizar para "triangular" el sistema son considerables.
El problema se complica aún más cuándo uno intenta buscar condiciones sobre un sistema de varios polinomios en varias variables. De manera informal, dado un sistema de $n+1$ polinomios en n variables

$$\begin{cases} f_0(x_1,\cdots,x_n) &= 0 \\ f_1(x_1,\cdots,x_n) &= 0 \\ & \vdots \\ f_n(x_1,\cdots,x_n) &= 0, \end{cases} \tag{4}$$

la "resultante" de $f_0,\cdots,f_n$ será justamente la condición en los coeficientes de los polinomios f_i para que el sistema (4) tenga una solución.

La teoría de la eliminación estudia técnicas y algoritmos para eliminar variables de un conjunto de ecuaciones polinomiales. La resultante esencialmente elimina n variables de un conjunto de $n+1$ polinomios. Ella forma parte de una familia de operadores que se llaman de "proyección" ya que, geométricamente, proyectan una variedad de soluciones en un espacio de cierta dimensión, sobre uno de dimensión menor.

Un problema central en la teoría de la eliminación y el propósito de esta memoria es encontrar fórmulas explícitas y relativamente fáciles de calcular para resultantes. Asimismo tratamos otros problemas relacionados, como el uso de resultantes en los problemas de implicitación, y el cálculo de operadores de proyección.

En lo que sigue, haremos una introducción a los problemas que consideramos, junto con un resumen de los resultados presentados en esta memoria.

0.1 Fórmulas para Resultantes Clásicas

Dados n polinomios homogéneos en n variables $f_1,\ldots,f_n$ con coeficientes en un cuerpo k y grados $d_1,\ldots,d_n$ respectivamente, la resultante $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1,\ldots,f_n)$ es un polinomio irreducible en los coeficientes de $f_1,\ldots,f_n$, que se anula si y solamente si $f_1,\ldots,f_n$ tiene una raíz en común en el espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}$ a valores en la clausura algebraica de k.

El estudio de resultantes se remonta a matemáticos clásicos como Sylvester, Cayley, Macaulay and Dixon. Su uso como herramienta computacional para eliminación de variables, así como para el estudio de temas de complejidad de solución de sistemas polinomiales en la última década, ha renovado el interés en encontrar fórmulas explícitas para su cálculo (cf. [AS, Can1, Can2, EM, KPS, Laz, Ren, Roj]).

La complejidad intrínseca del problema de la eliminación de variables (que incluye el cálculo de resultantes) ha sido estudiada en [HM], quienes han señalado el carácter intrínsecamente exponencial del problema, independientemente del tipo de estructura de datos utilizada.

Por una fórmula determinal queremos significar una matriz cuyas entradas sean polinomiales en los coeficientes de $f_1,\ldots,f_n$ y cuyo determinante sea igual a $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1,\ldots,f_n)$. Como estamos interesados en poder calcular la resultante a partir de estas fórmulas, queda

implícito que los coeficientes de estas matrices se deben poder calcular algorítmicamente a partir de los coeficientes de $f_1, \ldots, f_n$, y que todas las entradas no nulas de la matriz deben tener grado estrictamente menor al grado de la resultante.

En el caso en que $d_1 = d_2 = \cdots = d_n$, todas las fórmulas determinantales no triviales conocidas fueron descriptas por Weyman y Zelevinsky en [WZ]. Esta lista es muy reducida: si $d \geq 2$ denota el valor común de los d_i, se tiene que hay fórmulas determinantales para todo d sólo en el caso de formas binarias (dadas por las bien conocidas matrices de Sylvester), y en tres y cuatro variables. Cuando $n = 5$, los únicos posibles valores para d son 2 y 3; finalmente, para $n = 6$, sólo hay fórmula determinal para el caso $d = 2$. Encontramos restricciones similares para $n, d_1, \ldots, d_n$ generales (ver el lema 3.2).

Por otro lado, dados $d_1, \ldots, d_n$, llamaremos a $t_n := \sum_{i=1}^{n}(d_i - 1)$ "el grado crítico". Las fórmulas clásicas de Macaulay [Mac1] permiten calcular $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n)$ como un cociente explícito de dos determinantes. Estas fórmulas involucran una matriz de tamaño mayor o igual que el número de monomios en n variables de grado $t_n + 1$, y una submatriz de ella.

El trabajo de Macaulay ha sido reescrito y mejorado por Jouanolou en [Jou2], donde se presenta una fórmula a la Macaulay para la resultante (es decir, como el cociente entre el determinante de una matriz y un menor de la misma matriz). El tamaño de la matriz es exactamente el número de monomios en n variables de grado t_n (cf. [Jou2], Corollaire 3.9.7.7). En el mismo trabajo, Jouanolou construye para cualquier grado $t \geq 0$, una matriz cuadrada M_t de tamaño $\binom{t+n-1}{n-1} + i(t_n - t)$ cuyo determinante es un múltiplo no trivial de $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n)$ (ver el apartado 3.11.19.7 de [Jou2]), donde $i(t_n - t)$ denota la dimensión del $k-$espacio vectorial de elementos de grado $t_n - t$ que pertenecen al ideal generado por una sucesión regular de n polinomios de grados $d_1, \ldots, d_n$ respectivamente.

Uno de los resultados que conseguimos en esta memoria, en el capítulo 1, es una descripción explícita del factor extraño de la formulación de Jouanolou, es decir del polinomio $\det(M_t)/\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n)$, que nuevamente resulta ser el determinante de una submatriz $\mathbb{E}_t$ de M_t, para cada t. Esto nos permite demostrar nuevas fórmulas a la Macaulay para la resultante

$$\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n) = \frac{\det(M_t)}{\det(\mathbb{E}_t)} \tag{5}$$

en el teorema 1.10. Cuando $t > t_n$, el teorema recupera las fórmulas clásicas de Macaulay. Si $t \leq t_n$, el tamaño de la matriz M_t es considerablemente menor. En el apartado 1.3 presentamos estimaciones para este tamaño.

Las ideas que usamos para obtener estos resultados son esencialmente las ideas originales de Macaulay que aparecen en [Mac1], y que fueron reutilizadas por Jouanolou en [Jou2]. También utilizamos el trabajo de Chardin sobre subresultantes homogéneas que aparece en [Cha2, Cha3], donde se introduce una fórmula a la Macaulay para calcular subresultantes.

En el capítulo 3, se muestra que los determinantes de matrices de la forma M_t son en realidad menores maximales no nulos de una matriz de tamaño más grande que corresponde a uno de los morfismos en un complejo de tipo Koszul que en general tiene varios términos no nulos y cuyo determinante es $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n)$ (teorema 3.1). Estos complejos son

considerados en [WZ] y en [GKZ2] en el caso en que todos los grados son iguales, y se construyen a partir de la sucesión espectral asociada a un "twisting" del complejo de Koszul a nivel de haces.

La contribución que hemos hecho en este caso es dar expresiones explícitas para los morfismos de este tipo de complejos, en términos del bezoutiano asociado a $f_1, \ldots, f_n$ para aquellos valores de t que se encuentran por debajo del grado crítico, de esta manera, contribuyendo de manera parcial al problema formulado por Weyman y Zelevinsky en [WZ] (ver también [GKZ2], 13.1.C). En el caso en que $t_n - \min\{d_i\} < t < t_n$, recuperamos resultados que aparecen en [Jou2], que generalizan la fórmula de Sylvester para tres cuádricas en tres variables.

En el capítulo 5 mostramos cómo varias fórmulas clásicas se pueden obtener como casos especiales de las fórmulas determinantales que presentamos aquí. Esto puede verse como una extensión de los resultados ilustrados en [GKZ2] y [WZ]. También mostramos que las fórmulas de Dixon para calcular la resultante "afín", cuya extensión se estudia en [EM], pueden considerarse como parte de estas fórmulas.

Todos los resultados mencionados en este apartado fueron realizados en colaboración con Alicia Dickenstein, y están contenidos en [DD].

0.2 Fórmulas a la Macaulay para Resultantes Ralas

Sean $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ conjuntos finitos de $\mathbb{Z}^n$. Consideremos la familia de polinomios

$$f_i\,(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{a \in \mathcal{A}_i} c_{i,a}\, x^a \quad (i = 0, \ldots, n)\,.$$

La resultante rala $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ es un polinomio irreducible en los coeficientes de $f_0, \ldots, f_n$, que se anula siempre y cuando estos polinomios tengan una raíz en común en una compactificación apropiada del espacio afín asociada a la familia de soportes, que viene a sustituir el rol que tenía el espacio proyectivo en la versión clásica.

La resultante rala hizo su aparición en la matemática muy recientemente, en el estudio de lugares singulares de funciones hipergeométricas ([GKZ1, GKZ2]). Este objeto generaliza a la resultante clásica como se puede ver en el apartado 2.2.4.

El primer método efectivo para calcular $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}$ fue propuesto por Sturmfels en [Stu1]. Más adelante, en [CE1, CE2], Canny y Emiris construyeron generalizaciones de las matrices clásicas de tipo Sylvester que aparecen en (1.7). Estas matrices son cuadradas, con determinante no nulo y múltiplo de $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$. Esta construcción fue mejorada por Sturmfels en [Stu2], y de hecho se muestra en [CE2] que se pueden aplicar estas fórmulas generales al caso homogéneo, y recuperar las fórmulas clásicas de Macaulay que hemos citado en el apartado anterior.

Una de las cosas que quedaron sin ser estudiadas en el caso general, es la descripción precisa del factor extraño que aparece al hacer el cociente

$$\frac{\det(\text{matriz de Sylvester})}{\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)}.$$

Durante algún tiempo se conjeturó que debía ser algún menor de la matriz de Sylvester, pero nunca se pudo encontrar una prueba de ello.

Al respecto, en el capítulo 7 de [CLO], se puede leer:
However, as of this writing, it is not known if a sparse analog of the third bullet exists - there is no known systematic way of writing $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}$, *or more generally* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}_0,\ldots,\mathcal{A}_n}(f_0, \ldots, f_n)$ *as a quotient of two determinants.*

Y más adelante, dentro del mismo capítulo, se encuentra:

One of the major unsolved problems concerning sparse resultants is whether they can be represented as a quotient of two determinants. In the multipolynomial case, this is true by Theorem (4.9) of Chapter 3. Does this have a sparse analog? Nobody knows!

Siempre refiriéndose al mismo tema, en el apartado VIII de la introducción de [GKZ2] se encuentra la siguiente frase:

Macaulay made another intriguing contribution to the theory by giving an ingenious refinement of the Cayley method [Mac1]. It would be interesting to put his approach in the general framework of this book.

Sturmfels también se refiere a este tema varias veces en sus trabajos. En [Stu2], al final del Corolario 3.1, dice:

It is an important open problem to find a more explicit formula for $P_{\omega,\delta}$ [2] *in the general case. Does there exist such a formula in terms of some smaller resultants?*

También en la tesis de doctorado de Ioannis Z. Emiris, y en algunos trabajos suyos con otras personas (ver por ejemplo [CE1, CE2, DE1, EM]) se encuentran referencias sobre el tema. La sección 3.1.4 de [Emi1] comienza así:

A natural step is to establish a formula for the sparse resultant as the quotient of two determinants, in the fashion of Macaulay.

Aquí hay que hacer notar que la construcción de Canny y Emiris tenía un "candidato" a factor extraño (ver por ejemplo la conjetura 3.1.19 de [Emi1]), que parecía funcionar en casi todos los casos, pero nunca pudo probarse su veracidad en general.

El resultado central de esta memoria (y también la motivación inicial del autor) es una respuesta positiva a esta pregunta. En el capítulo 2, presentamos una generalización de las fórmulas clásicas de Macaulay en el siguiente sentido: damos un algoritmo que produce matrices de tipo Sylvester generalizadas, cuyos determinantes son múltiplos no nulos de $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$, y mostramos que el factor extraño es nuevamente el determinante de una submatriz que puede ser descripta explícitamente.

[2] $P_{\omega,\delta}$ es el factor extraño

En el apartado 2.2 se trata con polinomios "generalizadamente no mixtos", que pueden ser considerados como la primera generalización del caso clásico. El teorema 2.12 es el resultado principal de esa sección, que dice nuevamente que

$$\det(\text{matriz de Sylvester}) = \mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n) \det(\text{cierto menor de la matriz})$$

cuando la familia de polinomios es generalizadamente no mixta. En la sección siguiente (apartado 2.3), tratamos el caso más general, y en ese sentido, el teorema 2.29 se puede considerar como una generalización del anterior, y además una extensión del teorema clásico de Macaulay, como se ve en el apartado 2.2.4.

Los resultados obtenidos en el capítulo 2 se encuentran en [D2].

0.3 Fórmulas Involucrando el Jacobiano

Una vez generalizadas las matrices de Macaulay al caso ralo, el paso siguiente es generalizar las matrices dadas por Jouanolou en [Jou2] para obtener matrices más pequeñas cuyo determinante sea un múltiplo no trivial de $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$. El obstáculo principal radica en la no existencia de un "bezoutiano ralo". Sin embargo, existe una versión generalizada de "grado crítico" y de jacobiano que fue dada por Cox en [Cox1], y subsecuentemente estudiada en [CCD, CD, CDS2].

En este último trabajo, Cattani, Dickenstein y Sturmfels mostraron que la resultante rala se puede obtener como el determinante de un complejo similar a los que aparecen en el capítulo 3 y en "grado crítico". Más aún, la resultante rala se puede calcular como el máximo común divisor de los menores maximales del último morfismo en este complejo.

Nuestra contribución en esta dirección reside en un algoritmo que calcula un menor maximal no nulo de este morfismo, y que además tiene el mismo grado que la resultante en los coeficientes de alguno de los polinomios. En el capítulo 4 abordamos el caso de sistemas de 3 polinomios en 2 variables generalizadamente no mixtos. Esperamos que el método sea generalizable a dimensión arbitraria.

El algoritmo que se describe a lo largo de este capítulo permite construir matrices más pequeñas que las de Canny y Emiris, casi 100% de tipo Sylvester, y el resultado principal en esta dirección es el teorema 4.18, que establece que los determinantes de estas matrices son múltiplos no triviales de la resultante rala. No se sabe aún si el factor extraño en este caso es nuevamente un menor de las matrices que aquí se proponen.

Los resultados del capítulo 4 fueron realizados en colaboración con Ioannis Z. Emiris, y están contenidos en [DE2].

0.4 Aplicaciones

Los dos últimos capítulos de esta memoria se ocupan de algunas aplicaciones de la resultante multidimensional.

0.4.1 Resultantes y Superficies Móviles (capítulo 6)

Dados cuatro polinomios en dos variables $x_1(s,t)$, $x_2(s,t)$, $x_3(s,t)$ y $x_4(s,t)$, si $x_4 \neq 0$ las ecuaciones

$$X_1 = \frac{x_1(s,t)}{x_4(s,t)}, \quad X_2 = \frac{x_2(s,t)}{x_4(s,t)}, \quad X_3 = \frac{x_3(s,t)}{x_4(s,t)}, \tag{6}$$

definen una parametrización de una superficie racional.

El problema de la implicitación consiste en encontrar otro polinomio $F(X_1, X_2, X_3)$ tal que $F(X) = 0$ sea la ecuación de la menor superficie algebraica que contenga a (6).

Un método clásico para encontrar esta ecuación implícita es eliminar las variables s y t calculando la resultante de los polinomios

$$x_1(s,t) - X_1\, x_4(s,t), \quad x_2(s,t) - X_2\, x_4(s,t), \quad x_3(s,t) - X_3\, x_4(s,t). \tag{7}$$

El problema es cuál resultante tomar. Podemos, por ejemplo, considerar los polinomios x_i con grado menor o igual que n, y tomar la resultante clásica. Este caso se suele llamar *triangular.*

Una situación muy distinta se presenta si, por ejemplo, consideramos los polinomios x_i con grado menor o igual que m en s, y menor o igual que n en t. Aquí podríamos usar la *resultante bihomogénea.* Este caso se llama *caso de producto tensorial*, y la anulación de esta resultante significa que el sistema tiene una solución en $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$.

En los dos casos mencionados, la resultante de (7) calcula la ecuación implícita de la superficie (en realidad calcula una potencia de ella) en ausencia de *puntos base*, es decir cuando no hay un punto (s_0, t_0) en el espacio proyectivo correspondiente ($\mathbb{P}^2$ para el caso triangular, o $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ para el otro) tal que

$$x_1(s_0,t_0) = x_2(s_0,t_0) = x_3(s_0,t_0) = x_4(s_0,t_0) = 0.$$

En [SC], Sederberg y Chen introdujeron una nueva técnica para calcular la ecuación implícita de (6) que se llama *el método de las cuádricas móviles.* La ventaja de este método es que usa determinantes de matrices más pequeñas que las que se usan en los métodos clásicos, y además pareciera funcionar incluso en la presencia de puntos base.

Un análisis detallado de esta técnica está dado en [CGZ], donde se establecen condiciones suficientes para la validez de la implicitación por el método de cuádricas móviles para los dos casos mencionados anteriormente: el del producto tensorial y el triangular. En ese trabajo, se demuestra que el método funciona en la ausencia de puntos base, y cuando la superficie está propiamente parametrizada, es decir cuando la parametrización es genéricamente inyectiva. En el trabajo [CGZ], los autores conjeturaron algunas relaciones entre las matrices de coeficientes de planos móviles y cuádricas móviles (definiciones de estos objetos se encontrarán en el capítulo 6)(Conjeturas 6.1 y 6.2 de [CGZ]). La intuición que había detrás de esta conjetura era una relación similar válida en el caso planar (ver por ejemplo, [ZCG]).

En esta memoria presentamos una relación general entre las matrices de coeficientes de planos móviles y superficies móviles de cualquier grado. Como caso particular, cuando

el grado es 2, proveemos una demostración de estas conjeturas en los teoremas 6.10 y 6.17. Además, en los apartados 6.3 y 6.4.1 demostramos que el método de las superficies móviles funciona incluso cuando la superficie no está propiamente parametrizada.

Las técnicas que aquí se usan son bastante elementales: se factoriza el determinante de la matriz de coeficientes de superficies móviles como producto de matrices más simples. Esto, junto con la formulación de la resultante como el determinante de un complejo de Koszul (ver [GKZ2] y el capítulo 3 de esta memoria), nos permite obtener los resultados antes mencionados. En particular, damos demostraciones alternativas de los teoremas 4.1 y 5.1 de [CGZ]. Adaptando estas técnicas al caso planar, también se pueden producir demostraciones alternativas de relaciones similares que se dan en [SGD] y en [ZCG].

Los resultados del capítulo 6, están contenidos en [D1].

0.4.2 Cálculo de operadores de Proyección Ralos (capítulo 7)

Supongamos tener $n+1$ polinomios en $n+m$ variables de la forma siguiente:

$$f_i\left(y_1,\ldots,y_m,x_1,\ldots,x_n\right),\ i=0,\cdots,n. \tag{8}$$

Podemos pensar las variables y_i como parámetros, y eliminar $x_1,\cdots,x_n$ a través de una apropiada resultante rala $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0,\ldots,f_n)$, o del determinante de la matriz que da un múltiplo no nulo de la resultante. Ambas operaciones determinan un *operador de proyección* de un espacio $n+m$-dimensional a uno de dimensión m. Este operador de proyección puede ser idénticamente cero debido a varias razones:

- la resultante puede ser idénticamente cero debido a que los polinomios de (8) no son genéricos, usualmente debido a que los coeficientes de los f_i pueden depender de menos parámetros,
- la resultante rala se puede anular idénticamente debido a que n de esos polinomios forman un sistema que tienen infinitas soluciones en la compactificación asociada, formando componentes excesivas,
- También puede ocurrir que la resultante rala sea no nula, pero que el determinante de la matriz resultante sea idénticamente cero debido a la anulación del factor extraño.

Este último punto ha sido estudiado en [CE2], aunque los métodos que se proveen allí requieren de significativos cálculos adicionales. Canny, en [Can2] pudo dar una respuesta efectiva a los tres problemas en el caso clásico a través del *polinomio característico generalizado*, o GCP. Hay un trabajo de Rojas en el contexto ralo ([Roj]), pero también requiere de bastantes cálculos auxiliares.
Nosotros estudiamos el caso ralo haciendo una generalización eficiente del GCP de Canny. Lo que presentamos es un simple esquema de perturbación que se basa en el algoritmo de levantamiento de polítopos (este algoritmo se usa en [CE1, CE2] para calcular las matrices a la Sylvester cuyo determinante es un múltiplo no trivial de $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0,\ldots,f_n)$), y

que nos permite perturbar muy pocos coeficientes para producir operadores de proyección ralos, definidos por un determinante y tales que, si los coeficientes se especializan, estos operadores no son idénticamente cero pero se anulan sobre las raíces de las componentes propias de la variedad, incluyendo todas las raíces aisladas. Hay que destacar que las perturbaciones realizadas respetan la estructura rala de los polinomios de tal manera que la cantidad de términos de cada polinomio no se incrementa, y la complejidad del algoritmo sigue siendo esencialmente la misma.

El capítulo 7 contiene los aportes que hemos hecho sobre este tema. El teorema 7.4 nos permite concentrarnos luego en las matrices a la Sylvester para calcular la resultante, y construir a partir de ellas operadores de proyección ralos en el apartado 7.2.

Los resultados de este capítulo están contenidos en [DE1]

Parte I

FÓRMULAS

Capítulo 1

Fórmulas a la Macaulay para Resultantes Homogéneas

1.1 Preliminares

En esta sección, vamos a trabajar con la resultante clásica, homogénea o densa, tal como aparece en [Mac1, Mac2, vdW, Jou1, Jou2, CLO, GKZ2]. Se dará una definición de ella, y fórmulas para su cálculo efectivo.
Sean $d_1, \ldots, d_n$ enteros positivos. A cada $n-$upla $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$ tal que $|\alpha| = d_i$, le asociamos una indeterminada $c_{i,\alpha}$, $i = 1, \ldots, n$.
Sea A el anillo factorial $A := \mathbb{Z}[a_{\alpha_i}]$, y sean $x_1, \ldots, x_n$ indeterminadas sobre A. Consideremos la familia de *polinomios genéricos:*

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{|\alpha|=d_i} c_{i,\alpha} x^\alpha \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{1.1}$$

Teorema 1.1 *[Mac1, Mac2, vdW, Jou1, CLO, GKZ2] Fijados $d_1, \ldots, d_n$, existe un único polinomio $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n} \in A$ que tiene las siguientes propiedades:*

1. *Si $\tilde{f}_1(x), \ldots, \tilde{f}_n(x)$ son polinomios homogéneos de grados $d_1, \ldots, d_n$ respectivamente, con coeficientes en un cuerpo cualquiera k, entonces las ecuaciones*

$$\tilde{f}_i(x) = 0 \quad i = 1, \ldots, n$$

tienen una solución no trivial en la clausura algebraica de k si y solamente si $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n) = 0$. Aquí, $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(\tilde{f}_i)$ debe entenderse como el polinomio $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}$ especializado en los coeficientes de la familia $\{\tilde{f}_i(x)\}_{1\le i\le n}$, o sea, bajo la especialización

$$\begin{array}{ccc} A & \to & k \\ c_{i,\alpha} & \mapsto & \text{coeficiente de } x^\alpha \text{ de } \tilde{f}_i(x). \end{array}$$

2. $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n}) = 1$.

3. $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}$ *es irreducible, incluso como elemento de* $A\otimes\overline{k}$, *donde* $\overline{k}$ *denota la clausura algebraica de* k.

Algunas propiedas del polinomio $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}$ están enumeradas en el siguiente

Teorema 1.2 *[CLO, Jou1, GKZ2]*

1. *Fijado* $j \in \{1,\ldots,n\}$, $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}$ *es homogéneo en las variables* $c_{j,\alpha}$, $|\alpha| = d_j$, *de grado* $d_1\ldots d_{j-1}d_{j+1}\ldots d_n$. *El grado total de* $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}$ *es*

$$\sum_{j=1}^{n} d_1\ldots d_{j-1}d_{j+1}\ldots d_n.$$

2. *Si* $1 \le i < j \le n$, *entonces*

$$\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1,\ldots,f_i,\ldots,f_j,\ldots,f_n) = (-1)^{d_1\ldots d_n}\mathrm{Res}_{d_1,\ldots d_j,\ldots d_i\ldots,d_n}(f_1,\ldots,f_j,\ldots,f_i,\ldots,f_n).$$

3. *Si* $\tilde{f}_j = \tilde{f}'_j\tilde{f''}j$ *es un producto de polinomios homogéneos de grados* d'_j *y* d''_j, *entonces*

$$\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(\tilde{f}_1,\ldots,\ldots,\tilde{f}_j,\ldots,\tilde{f}_n) = \mathrm{Res}_{d_1,\ldots d'_j,\ldots,d_n}(\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}_j,\ldots,\tilde{f}_n)\mathrm{Res}_{d_1,\ldots d''_j,\ldots,d_n}(\tilde{f}_1,\ldots,\tilde{f}''_j,\ldots,\tilde{f}_n).$$

En lo que sigue, vamos a dar algoritmos para calcular la resultante, generalizando la idea dada por Macaulay en [Mac1].
Con S_u denotaremos el A-módulo libre generado por los monomios en $A[x]$ de grado u. Si $u < 0$, definimos $S_u := 0$. También definimos los submódulos libres $E^{t,j} \subseteq S^{t,j} \subseteq S_{t-d_j}$, para todo $j = 1,\ldots,n$:

$$S^{t,j} := \langle x^\gamma, |\gamma| = t - d_j, \gamma_1 < d_1,\ldots,\gamma_{j-1} < d_{j-1}\rangle \tag{1.2}$$

$$E^{t,j} := \left\langle x^\gamma \in S^{t,j}, \text{existe } i \neq j : \gamma_i \ge d_i\right\rangle. \tag{1.3}$$

Notar que $E^{t,n} = 0$, y $S^{t,1} = S_{t-d_1}$ $\forall t \in \mathbb{N}_0$.
Sea $j_u : S_u \to (S_u)^*$ el isomorfismo asociado con las bases monomiales en S_u, y denotaremos con $T_\gamma := j_u(x^\gamma)$ los elementos en la base dual.

Convención 1.3 *Todos los módulos que estamos considerando tienen una base monomial, o una base dual a la base de monomios. Supondremos que todas estas bases tienen un orden prefijado. Esto nos permitirá definir matrices "en las bases monomiales" sin ambigüedad.*

Convención 1.4 *A lo largo de todo este trabajo, las matrices que representen transformaciones lineales serán indexadas de tal forma que las filas estarán en correspondencia con los elementos de la base del dominio, tal como en [Mac1].*

Sea $t_n := (d_1 - 1) + \ldots + (d_n - 1)$ el *grado crítico.* Introduzcamos otro conjunto de n variables $y_1, \ldots, y_n$, y para cada par (i, j), $1 \leq i, j \leq n$, definamos $\Delta_{ij}(x, y)$ como el cociente incremental

$$\frac{f_i(y_1, \ldots, y_{j-1}, x_j, \ldots, x_n) - f_i(y_1, \ldots, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n)}{x_j - y_j}. \tag{1.4}$$

Notar que $f_i(x) - f_i(y) = \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij}(x, y)(x_j - y_j)$. El determinante

$$\Delta(x, y) := \det(\Delta_{ij}(x, y))_{1 \leq i,j \leq n} = \sum_{|\gamma| \leq t_n} \Delta_\gamma(x) . y^\gamma. \tag{1.5}$$

es un representante del *bezoutiano* asociado con la familia (1.1) (cf. [BCRS], [Kun], y [Jou2] donde aparecen con el nombre de "Formes de Morley"). Es un polinomio homogéneo en $A[x, y]$ de grado total t_n.
Sea $\psi_{1,t}$ la transformación A-lineal

$$\begin{array}{rccc} \psi_{1,t} : & S^*_{t_n - t} & \to & S_t \\ & T_\gamma & \mapsto & \Delta_\gamma(x), \end{array} \tag{1.6}$$

donde $\Delta_\gamma(x)$ es el polinomio definido en (1.5). Sea Δ_t la matriz de $\psi_{1,t}$ en las bases monomiales.

Consideremos también la transformación lineal de tipo *Sylvester:*

$$\begin{array}{rccccccc} \psi_{2,t} : & S^{t,1} & \oplus & & \oplus & S^{t,n} & \to & S_t \\ & (g_1 & , & & , & g_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^{n} g_i f_i, \end{array} \tag{1.7}$$

y denotemos con D_t su matriz en las bases monomiales. Como es usual, $\psi^*_{2,t_n - t}$ denotará la transformación dual de (1.7) en grado $t_n - t$.
Notemos también con

$$\Psi_t : (S_{t_n - t})^* \oplus \left(S^{t,1} \oplus \cdots \oplus S^{t,n}\right) \to S_t \oplus \left(S^{t_n - t,1} \oplus \cdots \oplus S^{t_n - t,n}\right)^* \tag{1.8}$$

al morfismo de A-módulos definido por

$$(T, g) \mapsto (\psi_{1,t}(T) + \psi_{2,t}(g), \psi^*_{2,t_n - t}(T)), \tag{1.9}$$

y llamemos M_t a la matriz de Ψ_t en las bases monomiales.
Llamaremos E_t a la submatriz de M_t cuyas filas están indexadas por los monomios en $E^{t,1} \cup \ldots \cup E^{t,n-1}$, y cuyas columnas están indexadas por los monomios x^γ que pertenecen a S_t para los cuales existen dos índices diferentes i, j tales que

$$\gamma_i \geq d_i, \gamma_j \geq d_j.$$

Hechas estas elecciones, no es dificil ver que M_t y E_t (esta última cuando exista) son matrices cuadradas.

Observación 1.5 *Observar que E_t es en realidad una submatriz de D_t. De hecho, E_t es la submatriz cuadrada llamada $\mathcal{E}(t)$ en [Cha3], y cuyo determinante es denominado $\Delta(n,t)$ en el Teorema 6 de [Mac1].*

Para cada entero t, denotaremos con $i(t)$ a la dimensión del $k-$espacio vectorial formado por los elementos de grado t del ideal generado por una sucesión regular de n polinomios con grados $d_1, \ldots, d_n$. Es conocido que $i(t)$ es independiente del cuerpo k, y de la sucesión regular. Definimos también

$$\rho(t) := \binom{t+n-1}{n-1} + i(t_n - t). \tag{1.10}$$

Lema 1.6 *M_t es una matriz cuadrada de tamaño $\rho(t)$.*

Demostración. La asignación que envía un monomio x^m de $S^{t,i}$ en $x_i^{d_i} x^m$ produce una inyección de la unión de las bases monomiales de los $S^{t,i}$ en los monomios de grado t que son divisibles por algún $x_i^{d_i}$. Es fácil ver que la cardinalidad del conjunto de monomios de grado t que no están en la imagen de esta asignación es precisamente $H_d(t)$, donde $H_d(t)$ denota la dimensión de la parte de grado t del cociente del anillo de polinomios sobre k por el ideal generado por una sucesión regular de polinomos homogéneos de grados $d_1, \ldots, d_n$ (cf. [Jou2], 3.9.2). Es más, usando la asignación $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \mapsto (d_1 - 1 - \gamma_1, \ldots, d_n - 1 - \gamma_n)$, se sigue que

$$H_d(t) = H_d(t_n - t). \tag{1.11}$$

Se puede calcular explícitamente la función de Hilbert usando la siguiente fórmula (cf. [Mac1], section 2):

$$\frac{\prod_{i=1}^{n}\left(1 - Y^{d_i}\right)}{(1-Y)^n} = \sum_{t=0}^{\infty} H_d(t).Y^t. \tag{1.12}$$

Entonces se tiene la siguiente relación de rangos:

$$\operatorname{rk}\left(S^{t,1} \oplus \cdots \oplus S^{t,n}\right) = \operatorname{rk} S_t - H_d(t).$$

Similarmente, se tiene que

$$\operatorname{rk}\left(S^{t_n-t,1} \oplus \cdots \oplus S^{t_n-t,n}\right)^* = \operatorname{rk}\left(S_{t_n-t}\right)^* - H_d(t_n - t).$$

De aqui se sigue que M_t es una matriz cuadrada de tamaño

$$\operatorname{rk} S_t - H_d(t_n - t) + \operatorname{rk} S_{t_n-t}.$$

Como $i(t_n - t) = \operatorname{rk} S_{t_n-t} - H_d(t_n - t)$, el tamaño de M_t es igual a

$$\operatorname{rk} S_t + i(t_n - t) = \rho(t).$$

□

Observación 1.7 *Ordenando convenientemente las bases monomiales, M_t es la matriz que aparece en [Jou2], 3.11.19.7. En ella se puede reconocer la siguiente estructura:*

$$\begin{bmatrix} \Delta_t & {}^tD_{t_n-t} \\ D_t & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.13}$$

Observación 1.8 *Dado que $\psi_{2,t} = 0$ si y solamente si $t < \min\{d_i\}$, se tiene que $\Psi_t = \psi_{2,t} + \psi_{1,t}$ si $t > t_n - \min\{d_i\}$, y $\Psi_t = \psi_{2,t}$ si $t > t_n$.*

Finalmente, denotaremos con $\mathbb{E}_t$ la submatriz cuadrada de M_t formada como sigue:

$$\mathbb{E}_t = \begin{bmatrix} * & {}^tE_{t_n-t} \\ E_t & 0 \end{bmatrix}. \tag{1.14}$$

Está claro por su definición que $\det(\mathbb{E}_t) = \pm \det(E_t)\det(E_{t_n-t})$.

Observación 1.9 *Dualizando la transformación (1.9) se tiene que, ordenando convenientemente sus filas y columnas, y permutando el orden de las variables $x_1, \cdots, x_n$,*

$${}^tM_t = M_{t_n-t} \quad y \quad {}^t\mathbb{E}_t = \mathbb{E}_{t_n-t}.$$

1.2 Fórmulas a la Macaulay Generalizadas

La transformación $\psi_{2,t}$ definida en (1.7), se puede extender a la suma directa de los $k-$espacios vectoriales de polinomios homogéneos de grados $t-d_1, \ldots, t-d_n$, de la manera siguiente:

$$\begin{array}{ccccccc} S_{t-d_1} & \oplus & & \oplus & S_{t-d_n} & \to & S_t \\ (g_1 & , & & , & g_n) & \mapsto & \sum_{i=1}^n g_i f_i. \end{array} \tag{1.15}$$

También la transformación ψ_{2,t_n-t} se puede extender a la suma directa de los $k-$espacios vectoriales de polinomios homogéneos de grados $t_n - t - d_1, \ldots, t_n - t - d_n$, obteniéndose el siguiente morfismo:

$$(S_{t_n-t})^* \oplus (S_{t-d_1} \oplus \cdots \oplus S_{t-d_n}) \xrightarrow{\tilde{\Psi}_t} S_t \oplus (S_{t_n-t-d_1} \oplus \cdots \oplus S_{t_n-t-d_n})^*. \tag{1.16}$$

Luego, la matriz M_t de la transformación Ψ_t definida en (1.8), se puede ver como una elección de una submatriz cuadrada de la matriz de $\tilde{\Psi}_t$ en las bases monomiales. Enseguida veremos que, de hecho, su determinante es un menor no nulo de tamaño máximo.
La siguiente proposición será útil en lo que sigue:

Proposición 1.1 *Sea M'_t una matriz cuadrada con coeficientes en A tal que*

$$M'_t := \begin{bmatrix} \Delta_t & F_t \\ {}^tF_{t_n-t} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

donde F_t tiene $i(t)$ filas y corresponde a una restricción de la transformación (1.15. Lo mismo vale para F_{t_n-t} en grado $t_n - t$. Entonces, $\det(M'_t)$ es un múltiplo (eventualmente cero) de $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n)$.

Demostración. Sean $N := \sum_{i=1}^{n} \#\{\alpha_i \in \mathbb{N}^n : |\alpha_i| = d_i\}$, y k un cuerpo algebraicamente cerrado. Dado $a = (a_{\alpha_i})_{|\alpha_i|=d_i,\ i=1,\dots,n} \in k^N$, denotaremos la especialización de $f_1, \dots, f_n$ en a por $f_1(a)(x), \dots, f_n(a)(x) \in k[X]$.
Debido a la irreducibilidad de $\mathrm{Res}_{d_1,\dots,d_n}(f_1, \dots, f_n)$, la proposición estará probada si mostramos que, para todo $a \in k^N$ tal que el sistema de ecuaciones

$$f_1(a)(x) = 0, \dots, f_n(a)(x) = 0$$

tienen una solución no trivial en k^n, el determinante de la matriz especializada $M_t'(a)$ es igual a 0.
Supongamos que $(p_1, \dots, p_n)$ es una solución no trivial. Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $p_1 \neq 0$. Como las columnas de $M_t'(a)$ están indexadas por todos los monomios de grado t además de otros monomios, una de ellas está asociada a x_1^t. Reemplacemos todos los elementos de esa columna como sigue:

1. si el elemento pertenece a una fila indexada por un monomio x^γ, $|\gamma| = t_n - t$, reemplazarlo con $\Delta_\gamma(x)$;

2. si pertenece a una fila indexada por un monomio $x^\gamma \in S_{t-d_i}$, reemplazarlo por $x^\gamma f_i(a)$.

No es difícil ver que, el determinante de la matriz modificada es igual a $x_1^t \det(M_t'(a))$. Especializando $x_i \mapsto p_i$, se tiene que el determinante de la matriz modificada será igual a cero si y solo si $\det(M_t'(a)) = 0$.
Para probar esto último, mostraremos que la submatriz de tamaño $(i(t)+1) \times \binom{n+t-1}{n-1}$ siguiente tiene rango menor o igual que $i(t)$:

$$\begin{bmatrix} \Delta_{\gamma_1}(p) & \dots & \Delta_{\gamma_k}(p) \\ & F_t(a) & \end{bmatrix}.$$

Una vez probado esto, junto con una expansión de Laplace del determinante de la matriz modificada, obtendremos nuestro resultado.
Si el bloque $[{}^t F_t(a)]$ tiene rango menor que $i(t)$, la afirmación es verdadera trivialmente. Supongamos que este no es el caso, entonces se tiene que la familia

$$\{x^\gamma f_i(a)(x),\ x^\gamma \in S_{t-d_i}\}$$

es una base de $\langle f_1(a)(x), \dots, f_n(a)(x)\rangle \cap S_t$, y la afirmación será demostrada, si vemos que el polinomio $\sum_{|\gamma|=t} \Delta_\gamma(p) x^\gamma$ pertenece al ideal $\langle f_1(a)(x), \dots, f_n(a)(x)\rangle$.
Debido a (1.4) y (1.5), se tiene que

$$(x_1 - y_1)\,\Delta(x,y) \in \langle f_1(a)(x), \dots, f_n(a)(x),\ f_1(a)(y), \dots, f_n(a)(y)\rangle. \tag{1.18}$$

Especializamos $y_i \mapsto p_i$, entonces (1.18) se lee como sigue:

$$(x_1 - p_1) \sum_{j=0}^{t_n} \left(\sum_{|\gamma|=j} \Delta_\gamma(p)\, x^\gamma \right) \in \langle f_1(a)(x), \dots, f_n(a)(x)\rangle.$$

Como el ideal generado por $\{f_i(x)\}$ es un ideal graduado, y dado que $p_1 \neq 0$, se tiene que $\sum_{|\gamma|=j} \Delta_\gamma(p)\, X^\gamma \in \langle f_1(a)(X), \ldots, f_n(a)(X)\rangle$ para todo j. □

Antes de enunciar el próximo teorema, estableceremos la siguiente convención: si la matriz $\mathbb{E}_t$ está indexada por el conjunto vacío, definimos $\det(\mathbb{E}_t) = 1$.

Teorema 1.10 *Para todo $t \geq 0$, $\det(M_t) \neq 0$ y $\det(\mathbb{E}_t) \neq 0$. Además, se tiene la siguiente fórmula a la Macaulay :*

$$\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n) = \pm \frac{\det(M_t)}{\det(\mathbb{E}_t)}.$$

Para la prueba del Teorema 1.10, necesitaremos el siguiente lema auxiliar. Sean D_t y E_t las matrices definidas en la sección anterior.

Lema 1.11 *Sea $t \geq 0$, y Λ un anillo que contiene a A. Supongamos tener una matriz cuadrada M con coeficientes en Λ que tiene la siguiente estructura:*

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 \\ D_t & 0 \end{bmatrix},$$

donde M_1, M_2 son matrices rectangulares. Entonces, existe un elemento $m \in \Lambda$ tal que

$$\det(M) = m \,.\, \det(E_t)$$

Demostración. D_t es cuadrada si y solamente si $t > t_n$. (cf. [Mac1], Section 3). En este caso,

$$\det(M) = \pm \det(M_2) \det(D_t);$$

Debido a la fórmula de Macaulay (cf. [Mac1], Theorem 5), se tiene que el miembro derecho es igual a

$$\pm \det(M_2) \det(E_t) \mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n),$$

con lo cual el resultado se sigue fácilmente en este caso.
Supongamos ahora que $0 \leq t \leq t_n$. Entonces, D_t tiene $i(t)$ filas y $i(t) + H_d(t)$ columnas, y existe una biyección entre la familia $\mathcal{F}$ de $H_d(t)$ monomios de grado t, y los menores maximales $m_{\mathcal{F}}$ de D_t. Explícitamente, $m_{\mathcal{F}}$ es el determinante de la submatriz cuadrada formada por todas las columnas indexadas por monomios no pertenecientes a $\mathcal{F}$.
Se puede verificar que $m_{\mathcal{F}}$ es el determinando denotado con $\phi^*_{\mathcal{F}}$ en [Cha3], para calcular la *subresultante* asociada con la familia $\{x^\gamma\}_{\gamma \in \mathcal{F}}$.
Usando la fórmula a la Macaulay para subresultantes (cf. [Cha3]), se tiene que

$$m_{\mathcal{F}} = \pm \det(E_t).\Delta^t_{\mathcal{F}},$$

donde $\Delta^t_{\mathcal{F}}$ es la subresultante asociada con la familia $\mathcal{F}$. Es un elemento de A que se anula bajo una especialización $f_1(a)(x), \ldots, f_n(a)(x)$ si y solamente si la familia $\{x^\gamma\}_{\gamma \in \mathcal{F}}$

no es una base del $k-$espacio vectorial formado por la parte de grado t del cociente $k[X_1,\ldots,X_n]/\langle f_1(a)(X),\ldots,f_n(a)(X)\rangle$ (cf. [Cha2]).
Sea $m^c_{\mathcal{F}}$ el menor complementario de $m_{\mathcal{F}}$ en M (o sea, el determinante de la submatriz cuadrada de M formado evitando todas las filas y columnas indexadas por elementos de $m_{\mathcal{F}}$). Haciendo una expansión de Laplace del determinante de M, se tiene que

$$\det(M) = \sum_{\mathcal{F}} s_{\mathcal{F}} \cdot m_{\mathcal{F}} \cdot m^c_{\mathcal{F}} = \det(E_t)\left(\sum_{\mathcal{F}} s_{\mathcal{F}} \cdot m^c_{\mathcal{F}} \cdot \Delta^t_{\mathcal{F}}\right)$$

con $s_{\mathcal{F}} = \pm 1$. Haciendo $m := \sum_{\mathcal{F}} s_{\mathcal{F}} \cdot m^c_{\mathcal{F}} \cdot \Delta^t_{\mathcal{F}} \in \Lambda$, conseguimos el resultado esperado. □

A continuación, daremos la demostración del Teorema 1.10.
Demostración. En [Mac1] está demostrado que $\det(E_t) \neq 0$, $\forall t \geq 0$. Esto implica que $\det(\mathbb{E}_t) \neq 0$. Para probar que $\det(\mathbb{E}_t) = \det(E_t)\det(E_{t_n-t})$ divide a $\det(M_t)$, usaremos el siguiente argumento: consideremos el anillo $B := \mathbb{Z}[b_{\alpha_i}]_{|\alpha_i|=d_i, i=1,\ldots,n}$, donde b_{α_i} son nuevas variables, y los polinomios

$$f_{b,i} := \sum_{|\alpha_i|=d_i} b_{\alpha_i} X^{\alpha_i} \quad \in B[X_1,\ldots,X_n].$$

Sea $D^b_{t_n-t}$ la matriz de la transformación lineal ψ^b_{2,t_n-t} determinada por la fórmula (1.7) pero usando la sucesión $f_{b,1},\ldots,f_{b,n}$ en lugar de $f_1,\ldots,f_n$. Hacemos $\Lambda := \mathbb{Z}[a_{\alpha_i}, b_{\alpha_i}]$, y consideremos la matriz $M(a,b)$ con coeficientes en Λ dada por

$$M(a,b) = \begin{bmatrix} \Delta_t & {}^{\mathrm{t}}D^b_{t_n-t} \\ D_t & 0 \end{bmatrix}.$$

Claramente se ve que $M(a,a) = M_t$, y por el Lema 1.11, tenemos que $\det(E_t)$ divide a $\det(M(a,b))$ en Λ. Trasponiendo $M(a,b)$ y usando un argumento simétrico, por el mismo lema se puede concluir que $\det\left(E^b_{t_n-t}\right)$ divide a $\det(M(a,b))$ en Λ, donde $E^b_{t_n-t}$ tiene el significado obvio.
Como el anillo Λ es un dominio de factorización única, y los elementos $\det(E_t)$ y $\det(E^b_{t_n-t})$ no tienen factores comunes no triviales en Λ porque dependen de diferentes conjuntos de variables, entonces tenemos que

$$\det(M(a,b)) = P(a,b)\,\det(E_t)\,\det(E^b_{t_n-t})$$

para algún $P \in \Lambda$.
Ahora, especialicemos $b_{\alpha_i} \mapsto a_{\alpha_i}$. El hecho de que $\det(M_t)$ es un múltiplo de la resultante ha sido probado en la Proposición 1.1 (ver también [Jou2], Proposition 3.11.19.21) para $0 \leq t \leq t_n$, y en [Mac1] para $t > t_n$. Por otro lado, como $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1,\ldots,f_n)$ es irreducible y depende de *todos* los coeficientes de $f_1,\ldots,f_n$, mientras que tanto $\det(E_t)$ como $\det(E_{t_n-t})$ no dependen de los coeficientes de f_n, podemos concluir que $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1,\ldots,f_n)$ divide a $p(a,a)$. Es más, el próximo lema 1.12 muestra que ambos polinomios tienen el mismo grado. Luego, su cociente es un número racional λ. Se puede ver que este número es igual a ± 1, considerando la especialización $X_1^{d_1},\ldots,X_n^{d_n}$. □

Lema 1.12 *Para cada $i = 1, \ldots, n$, $grado_{(a_{\alpha_i})}(M_t)$, el grado del determinante de M_t en los coeficientes de f_i es igual a*

$$\begin{array}{rccccc} & grado_{(a_{\alpha_i})}(\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1,\ldots,f_n)) & + & grado_{(a_{\alpha_i})}(E_t) & + & grado_{(a_{\alpha_i})}(E_{t_n-t}) \\ = & d_1\ldots d_{i-1}\, d_{i+1}\ldots d_n & + & grado_{(a_{\alpha_i})}(E_t) & + & grado_{(a_{\alpha_i})}(E_{t_n-t}). \end{array}$$

Demostración. Llamemos $J_u(i) := \{x^\gamma \in S_u, \gamma_i \geq d_i,\ \gamma_j < d_j \forall j \neq i\}$, donde u toma los valores t y $t_n - t$. De las definiciones de $\psi_{2,t}$ y E_t, se sigue fácilmente que, si δ_t es un menor maximal de D_t,

$$\mathrm{grado}_{(a_{\alpha_i})}(\delta_t) - \mathrm{grado}_{(a_{\alpha_i})}(E_t) = \#J_t(i).$$

Haciendo una expansión de Laplace del determinante, se puede ver que $\det(M_t)$ se escribe como

$$\det(M_t) = \sum_{\delta_t, \delta_{t_n-t}} s_\delta \cdot m_\delta \cdot \delta_t \cdot \delta_{t_n-t}$$

donde $s_\delta = \pm 1$, δ_{t_n-t} es un menor maximal de ${}^tD_{t_n-t}$ y m_δ es un menor de tamaño $H_d(t)$ de la matriz Δ_t. Como cada coeficiente de Δ_t tiene grado 1 en los coeficientes de algún f_i, el lema quedará probado, si mostramos que

$$\#J_t(i) + \#J_{t_n-t}(i) + H_d(t) = d_1\ldots d_{i-1}.\, d_{i+1}\ldots d_n. \tag{1.19}$$

Tal como fue observado en la prueba del Lema 1.6, $H_d(t)$ se puede calcular como el cardinal del siguiente conjunto:

$$H_{d,t} := \{x^\gamma \in S_t,\ \gamma_j < d_j \forall j\}, \tag{1.20}$$

y $d_1\ldots d_{i-1}.\, d_{i+1}\ldots d_n$ es el cardinal de

$$\Gamma_i := \{x_1^{\gamma_1}\ldots x_{i-1}^{\gamma_{i-1}} x_{i+1}^{\gamma_{i+1}}\ldots x_n^{\gamma_n}\ ,\ \gamma_j < d_j \forall j\}.$$

Para probar (1.19), alcanza con exhibir una biyección entre Γ_i y la unión disjunta

$$J_t(i) \bigcup J_{t_n-t}(i) \bigcup H_{d,t}.$$

En realidad, los conjuntos $J_t(i)$ y $J_{t_n-t}(i)$ y $H_{d,t}$ son disjuntos dos a dos, excepto cuando $t = t_n - t$. Pero lo que sigue muestra que la biyección está bien definida, aún en ese caso. Sea $x^{\overline{\gamma}} \in \Gamma_i$, $\overline{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, \gamma_{i+1}, \ldots, \gamma_n)$ con $\gamma_j < d_j \forall j \neq i$. Si $|\overline{\gamma}| \leq t$, entonces hay un único γ_i tal que $\gamma := (\gamma_1, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{N}_0^n$ verifica: $|\gamma| = t$. Si $\gamma_i < d_i$, entonces asignamos a $x^{\overline{\gamma}}$ el monomio $x^\gamma \in H_{d,t}$. Si no fuera asi, le asignamos $x^\gamma \in J_t(i)$.
Si $|\overline{\gamma}| > t$, sea $\overline{\gamma}^*$ el multiíndice

$$(d_1 - 1 - \gamma_1, \ldots, d_{i-1} - 1 - \gamma_{i-1}, d_{i+1} - 1 - \gamma_{i+1}, \ldots, d_n - 1 - \gamma_n).$$

Entonces, $|\overline{\gamma}^*| < t_n - t$, y existe un único γ_i tal que el multiíndice γ definido por

$$(d_1 - 1 - \gamma_1, \ldots, d_{i-1} - 1 - \gamma_{i-1}, \gamma_i, d_{i+1} - 1 - \gamma_{i+1}, \ldots, d_n - 1 - \gamma_n)$$

tiene grado $t_n - t$. Podemos entonces asignar a $x^{\overline{\gamma}}$ el monomio $x^{\gamma} \in J_{t_n-t}(i)$ siempre y cuando $\gamma_i \geq d_i$. Supongamos que esto último no ocurre, esto implicaría que el monomio con exponente

$$\gamma^* := (\gamma_1, \ldots, \gamma_{i-1}, d_i - 1 - \gamma_i, \gamma_{i+1}, \ldots, d_n)$$

tendría grado t contradiciendo el hecho de que $|\overline{\gamma}| > t$.
Con estas reglas, es bastante sencillo verificar que se obtiene la biyección deseada. □

Cambiando el orden de la sucesión $(f_1, \ldots, f_n)$, y aplicando nuevamente el Teorema (1.10), se puede deducir el siguiente

Corolario 1.13 $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n) = mcd\{$*menores maximales de* $\tilde{\Psi}_t\}$.

1.3 Estimación del tamaño de M_t

En la sección anterior hemos construido, para cada entero $t \geq 0$, una matriz M_t de tamaño $\rho(t)$, cuyo determinante es un múltiplo no trivial de $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n)$, y cuyo factor extraño es un menor de este determinante. En esta sección estudiaremos cuál es la matriz de menor tamaño que se puede conseguir.
Podemos escribir a ρ como

$$\rho(t) = \binom{n+t-1}{n-1} + \binom{n+t_n-t-1}{n-1} - H_d(t_n - t).$$

Claramente, $\binom{n+t-1}{n-1} + \binom{n+t_n-t-1}{n-1}$ es la restricción de un polinomio $\phi(t)$ en una variable real t. Este polinomio es simétrico con respecto a $\frac{t_n}{2}$ (o sea, $\phi(\frac{t_n}{2} + t) = \phi(\frac{t_n}{2} - t)$ para todo t). Es más, ϕ alcanza su mínimo en el intervalo $[0, t_n]$, en el punto $t = \frac{t_n}{2}$. Dado que

$$\rho(t) = \phi(t) - H_d(t) = \phi(t_n - t) - H_d(t_n - t) = \rho(t_n - t), \tag{1.21}$$

para estudiar el comportamiento de ρ, necesitamos entender cómo varía $H_d(t)$ respecto de t.
Notaremos con $[x]$ a la parte entera del número real x. Notar que cuando t_n es impar, $\rho([\frac{t_n}{2}]) = \rho([\frac{t_n}{2}] + 1)$.

Proposición 1.2 *$H_d(t)$ es una función decreciente sobre los puntos enteros del intervalo* $[0, [\frac{t_n}{2}]]$.

Demostración. Vamos a probar este resultado haciendo inducción sobre n. Si $n = 1$, la afirmación es evidente dado que $t_1 = d - 1$ y $H_d(t) = 1, \forall t = 0, \ldots, d-1$. Supongamos entonces que la afirmación es verdadera para n variables, y hagamos

$$\begin{aligned} \overline{d} &:= (d_1, \ldots, d_{n+1}) \in \mathbb{N}_0^{n+1}, \\ d &:= (d_1, \ldots, d_n). \end{aligned}$$

Sea $t < t+1 \leq \left[\frac{t_{n+1}}{2}\right]$. Queremos ver que $\varphi(t) := H_{\overline{d}}(t+1) - H_{\overline{d}}(t)$ es no negativa. Teniendo en cuenta la expresión (1.20) se tiene que, para todo $t \in \mathbb{N}_0$, $H_{\overline{d}}(t)$ es igual a la cardinalidad del conjunto

$$\{\gamma \in \mathbb{N}_0^{n+1} : \ |\gamma| = t,\ 0 \leq \gamma_i \leq d_i - 1,\ i = 1, \ldots, n+1\}.$$

Luego, se puede calcular de la siguiente manera:

$$\sum_{j=0}^{d_{n+1}-1} \#\{\overline{\gamma} \in \mathbb{N}_0^n : \ |\overline{\gamma}| = t - j,\ 0 \leq \overline{\gamma}_i \leq d_i - 1,\ i = 1, \ldots, n\},$$

lo cual da la igualdad $H_{\overline{d}}(t) = \sum_{j=0}^{d_{n+1}-1} H_d(t-j)$. De aquí se sigue que

$$\varphi(t) = H_d(t+1) - H_d(t+1-d_{n+1}).$$

Si $t+1 \leq \left[\frac{t_n}{2}\right]$, deducimos que $\varphi(t) \geq 0$ por la hipótesis inductiva. Supongamos entonces que

$$\left[\frac{t_n}{2}\right] < t+1 \leq \left[\frac{t_{n+1}}{2}\right].$$

Como $H_d(t+1) = H_d(t_n - (t+1)) = H_d(t_n - t - 1)$, es suficiente verificar lo siguiente

$$\begin{aligned} t_n - t - 1 &\geq t + 1 - d_{n+1} \\ t_n - t - 1 &\leq \left[\tfrac{t_n}{2}\right], \end{aligned}$$

lo cual es inmediato. Luego, el resultado se sigue nuevamente usando la hipótesis inductiva. □

Corolario 1.14 *El tamaño de la matriz M_t es minimal sobre $\mathbb{N}_0$ cuando $t = \left[\frac{t_n}{2}\right]$.*

Demostración. La función $\rho(t)$ mide el tamaño de esta matriz. Por (1.21), esta función tiene un mínimo absoluto en el punto $\left[\frac{t_n}{2}\right]$ sobre los puntos enteros de $[0, t_n]$. Esto vale dado que ϕ allí alcanza su máximo, y H_d el mínimo. Si $t > t_n$, tenemos que $\rho(t) = \binom{n+t-1}{n-1}$. Para t en este rango, se puede ver fácilmente que

$$\rho(t_n) = \binom{n+t_n-1}{n-1} - 1 < \rho(t).$$

Luego, $\rho(t) > \rho(t_n) \geq \rho\left(\left[\frac{t_n}{2}\right]\right)$. □

Sean $p := \sum_{i=1}^n d_i/n$ el promedio de los grados, y $q := \frac{p+1}{2p}$. Notar que excepto en el caso lineal, que ocurre cuando todos los d_i son iguales a 1, se tiene que $p > 1$ y $q < 1$.

Proposición 1.3 *Supongamos $p > 1$. El cociente entre los tamaños de la menor matriz M_t y la matriz de Macaulay clásica M_{t_n+1} se puede acotar por*

$$\frac{\rho([t_n/2])}{\rho(t_n+1)} \leq 2\,q^{n-1}.$$

Demostración. Notar que, cuando t_n es par, $t_n - [t_n/2] = [t_n/2]$ y cuando t_n es impar, $t_n - [t_n/2] = [t_n/2] + 1$. En ambos casos,

$$\begin{aligned}\frac{\rho([t_n/2])}{\rho(t_n+1)} &\leq \frac{2\binom{n+[t_n/2]}{n-1}}{\binom{n+t_n}{n-1}} = 2\,\frac{([t_n/2]+n)\dots([t_n/2]+2)}{(t_n+n)\dots(t_n+2)} = \\ &= 2\left(\frac{[t_n/2]+n}{t_n+n}\right)\left(\frac{[t_n/2]+n-1}{t_n+n-1}\right)\dots\left(\frac{[t_n/2]+2}{t_n+2}\right) \leq \\ &\leq 2\left(\frac{[t_n/2]+n}{t_n+n}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

Como $t_n = np - n$, se tiene que

$$\frac{[t_n/2]+n}{t_n+n} \leq \frac{\frac{np}{2}+\frac{n}{2}}{np} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2p} = q,$$

que es lo que se quería probar. □

1.4 Bezoutianos y Residuos

En esta sección vamos a explorar relaciones duales entre bezoutianos y residuos multidimensionales. Esto nos permitirá probar una especie de recíproco del Teorema 1.1, que nos dirá que, para una familia especializada $\{f_1(a)(x), \dots, f_n(a)(x)\} \subset k[x]$ tal que $\mathrm{Res}_{d_1,\dots,d_n}(f_1(a)(x), \dots, f_n(a)(x)) \neq 0$, hay una matriz cuadrada M_t' del tipo (1.17), tal que $\det(M_t'(a)) \neq 0$. Detalles y demostraciones acerca de esta teoría pueden encontrarse en [BCRS, CDS1, Tsi, Kun].

Supongamos que $\mathrm{Res}_{d_1,\dots,d_n}(f_1(a)(x), \dots, f_n(a)(x)) \neq 0$. Esto implica que la variedad algebraica definida por $\{f_i(a)(x) = 0\} \subset k^n$ consiste del único punto $\mathbf{0} \in k^n$. Entonces, a cada polinomio $h \in k[x]$, se le puede asociar el residuo en $\mathbf{0} \in k^n$ de la $n-$forma meromorfa:

$$\omega := \frac{h(y)dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n}{f_1(a)(y)\dots f_n(a)(y)}.$$

Esto define un operador $k-$lineal de $k[Y]$ en k :

$$h \mapsto R_0(h) := \mathrm{res}_0\left(\frac{h(y)dy_1 \wedge \dots \wedge dy_n}{f_1(a)(y)\dots f_n(a)(y)}\right).$$

Usando la fórmula de Weil, junto con la equivalencia entre los criterios de pertenencia local y global a ideales de funciones analíticas (cf. [CDS1, Wei]), se tienen los siguientes resultados de dualidad:

1. $h(x) = R_0(h(y)\,\Delta(x,y))$ en el anillo cociente $k[x]/I(a)$.

2. $h \in I(a)$ si y solamente si $R_0(f\,h) = 0$, para todo $f \in k[x]$.

3. Si h es un polinomio homogéneo de grado t, $t \neq t_n$, entonces $R_0(h) = 0$.

Aplicando estas propiedades a la situación que estamos estudiando, tenemos que, para cada $h(x) \in k[x]$ de grado t,

$$h(x) = R_0\left(h(y)\sum_{|\gamma|\leq t_n}\Delta_\gamma(x)y^\gamma\right) = R_0\left(h(y)\sum_{|\gamma|=t_n-t}\Delta_\gamma(x)y^\gamma\right) =$$

$$= \sum_{|\gamma|=t_n-t} R_0\left(h(y)\,y^\gamma\right)\Delta_\gamma(x).$$

De aquí se deduce inmediatamente la siguiente afirmación:
La familia $\{\Delta_\gamma(x)\}_{|\gamma|=t_n-t}$, *(resp.* $|\gamma| = t$ *) genera la parte graduada del cociente en grado* t *(resp.* $t_n - t$*).*
Recordemos también que el bezoutiano es un objeto bien definido en el cociente de $k[x,y]$ por el ideal $\langle f_1(a)(x),\ldots,f_n(a)(x),\ f_1(a)(y),\ldots,f_n(a)(y)\rangle$, es decir que, para cada familia de polinomios $p_i(x,y)$, $q_i(x,y) \in k[x,y]$ $i = 1,\ldots,n$, si hacemos

$$\tilde{\Delta}(x,y) := \Delta(x,y) + \sum_{i=1}^{n} p_i(x,y)\,f_i(a)(x) + q_i(x,y)\,f_i(a)(y), \tag{1.22}$$

usando los resultados de dualidad mencionados anteriormente, se tiene que el polinomio $\tilde{\Delta}(x,y)$ tiene las mismas propiedades que $\Delta(x,y)$.
Ahora podemos enunciar el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.15 *Si* $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1(a)(x),\ldots,f_n(a)(x)) \neq 0$, *existe una matriz cuadrada* M'_t *como en (1.17) tal que* $\det(M'_t(a)) \neq 0$.

Demostración. El hecho de que $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1(a)(x),\ldots,f_n(a)(x))$ no sea cero, implica que $f_1(a)(x),\ldots,f_n(a)(x)$ es una sucesión regular en $k[x]$. Luego, las dimensiones de las partes graduadas del cociente $k[X]/I(a)$ en grados t y $t_n - t$ son $i(t)$ e $i(t_n - t)$ respectivamente. Podemos elegir entonces bloques F_t y F_{t_n-t} como en (1.17) de tal manera que $F_t(a)$ y $F_{t_n-t}(a)$ tengan rango máximo. Supongamos win pérdida de generalidad que los bloques F_t y F_{t_n-t} son de la forma $\begin{bmatrix} Q_t \\ R_t \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} Q_{t_n-t} \\ R_{t_n-t} \end{bmatrix}$ respectivamente, donde $Q_t(a)$ y $Q_{t_n-t}(a)$ son matrices cuadradas inversibles de tamaño máximo. Vamos a probar que, con esta elección de menores, la matriz $M'_t(a)$ es inversible.
Nuestra matriz especializada será de la forma siguiente:

$$M'_t(a) = \begin{bmatrix} \Delta_t & Q_t(a) \\ & R_t(a) \\ {}^tQ_{t_n-t}(a) \ {}^tR_{t_n-t}(a) & 0 \end{bmatrix}.$$

Aplicando operaciones lineales en las filas y columnas de $M'_t(a)$, podemos transformarla de la manera siguiente:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & Q_t(a) \\ 0 & \tilde{\Delta}_t & R_t(a) \\ {}^tQ_{t_n-t}(a) & {}^tR_{t_n-t}(a) & 0 \end{bmatrix},$$

donde el bloque $[\tilde{\Delta}_t]$ es cuadrado y de tamaño $H_d(t)$.
Pero es fácil verificar que $\tilde{\Delta}_t$ corresponde a las coordenadas en grado t de otro bezoutiano $\tilde{\Delta}(x,y)$ (en el sentido de (1.22)). Esto ocurre puesto que cada operación lineal aplicada a $M_t'(a)$, cuando se la aplica al bloque Δ_t, puede interpretarse como una combinación polinomial de $f_i(a)(x)$ y $f_i(a)(y)$ aplicada al bezoutiano $\Delta(x,y)$.
Usando el hecho de que $\{\tilde{\Delta}_\gamma(x)\}_{|\gamma|=t}$ genera el cociente en grado $t_n - t$, se tiene que

$$\det\begin{pmatrix} 0 & \tilde{\Delta}_t \\ {}^tQ_{t_n-t}(a) & {}^tR_{t_n-t}(a) \end{pmatrix} \neq 0.$$

De aqui, el resultado se sigue fácilmente. □

1.5 Ejemplos

Sean $n = 3$, y $(d_1, d_2, d_3) = (1,1,2)$. Tomemos como polinomios genéricos a

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 \\ f_2 &= b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 \\ f_3 &= c_1x_1^2 + c_2x_2^2 + c_3x_3^2 + c_4x_1x_2 + c_5x_1x_3 + c_6x_2x_3 \end{aligned}$$

En este caso, $t_3 = 1$. La matrix clásica de Macaulay (en nuestra notación, M_2) es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & a_2 & a_3 & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & a_1 & 0 & a_3 \\ 0 & 0 & a_3 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & b_2 & 0 & b_1 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & b_3 & 0 & b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & c_5 & c_6 \end{pmatrix}$$

Su determinante es igual a $-a_1 Res_{1,1,2}$. Aquí puede verificarse fácilmente que el factor extraño $\mathbb{E}$ es la submatriz de tamaño 1×1 formada por el elemento $(2,4)$ de la matriz.
Por otro lado, si tomamos $t = 0$, podemos exhibir una fórmula determinantal para $\pm Res_{1,1,2}$. En efecto, el determinante de

$$M_0 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ \Delta_{(1,0,0)} & \Delta_{(0,1,0)} & \Delta_{(0,0,1)} \end{pmatrix},$$

es igual a $Res_{1,1,2}$. Aquí, los Δ_γ son los coeficientes del bezoutiano (1.5). Más precisamente, se tiene

$$\begin{aligned} \Delta_{(1,0,0)} &= a_1b_2c_5 - a_1b_3c_4 - b_1a_2c_5 + b_1a_3c_4 + c_1a_2b_3 - c_1a_3b_2 \\ \Delta_{(0,1,0)} &= a_1b_2c_6 - a_1b_3c_2 - b_1a_2c_6 + b_1a_3c_2 \\ \Delta_{(0,0,1)} &= a_1b_2c_3 - b_1a_2c_3 \end{aligned}$$

Tomemos ahora $n = 4$, y $(d_1, d_2, d_3, d_4) = (1, 1, 2, 3)$. El grado crítico es, en este caso, 3. La matriz clásica de Macaulay, M_4, tiene tamaño 35×35. Como el grado de $\mathrm{Res}_{1,1,2,3}$ es igual a 17, sabemos que su factor extraño debe ser una submatriz de tamaño 18×18. Veremos más adelante que una de las matrices de menor tamaño posible entre las M_i es M_1, de 12×12 :

$$M_1 = \begin{pmatrix} \Delta^1_{(2,0,0,0)} & \Delta^2_{(2,0,0,0)} & \Delta^3_{(2,0,0,0)} & \Delta^4_{(2,0,0,0)} & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\ \Delta^1_{(0,2,0,0)} & \Delta^2_{(0,2,0,0)} & \Delta^3_{(0,2,0,0)} & \Delta^4_{(0,2,0,0)} & 0 & a_2 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & c_2 \\ \Delta^1_{(0,0,2,0)} & \Delta^2_{(0,0,2,0)} & \Delta^3_{(0,0,2,0)} & \Delta^4_{(0,0,2,0)} & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & b_3 & 0 & c_3 \\ \Delta^1_{(0,0,0,2)} & \Delta^2_{(0,0,0,2)} & \Delta^3_{(0,0,0,2)} & \Delta^4_{(0,0,0,2)} & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & b_4 & c_4 \\ \Delta^1_{(1,1,0,0)} & \Delta^2_{(1,1,0,0)} & \Delta^3_{(1,1,0,0)} & \Delta^4_{(1,1,0,0)} & a_2 & a_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & c_5 \\ \Delta^1_{(1,0,1,0)} & \Delta^2_{(1,0,1,0)} & \Delta^3_{(1,0,1,0)} & \Delta^4_{(1,0,1,0)} & a_3 & 0 & a_1 & 0 & 0 & b_1 & 0 & c_6 \\ \Delta^1_{(1,0,0,1)} & \Delta^2_{(1,0,0,1)} & \Delta^3_{(1,0,0,1)} & \Delta^4_{(1,0,0,1)} & a_4 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & b_1 & c_7 \\ \Delta^1_{(0,1,1,0)} & \Delta^2_{(0,1,1,0)} & \Delta^3_{(0,1,1,0)} & \Delta^4_{(0,1,1,0)} & 0 & a_3 & a_2 & 0 & b_3 & b_2 & 0 & c_8 \\ \Delta^1_{(0,1,0,1)} & \Delta^2_{(0,1,0,1)} & \Delta^3_{(0,1,0,1)} & \Delta^4_{(0,1,0,1)} & 0 & a_4 & 0 & a_2 & b_4 & 0 & b_2 & c_9 \\ \Delta^1_{(0,0,1,1)} & \Delta^2_{(0,0,1,1)} & \Delta^3_{(0,0,1,1)} & \Delta^4_{(0,0,1,1)} & 0 & 0 & a_4 & a_3 & 0 & b_4 & b_3 & c_{10} \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

donde

$$\begin{aligned} f_1 &= a_1X_1 + a_2X_2 + a_3X_3 + a_4X_4 \\ f_2 &= b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 \\ f_3 &= c_1X_1^2 + c_2X_2^2 + c_3X_3^2 + c_4X_4^2 + c_5X_1X_2 + c_6X_1X_3 \\ &\quad + c_7X_1X_4 + c_8X_2X_3 + c_9X_2X_4 + c_{10}X_3X_4, \end{aligned}$$

y f_4 es un polinomio genérico de grado 3 en cuatro variables. Además, para cada γ, $|\gamma| = 2$, escribimos

$$\Delta_\gamma(X) = \sum_{j=1}^{4} \Delta^j_\gamma X_j,$$

El determinante de esta matriz es $\pm a_1 \mathrm{Res}_{1,1,2,3}$, y el factor extraño es la submatriz de tamaño 1×1 obtenida tomando el elemento en la quinta fila, sexta columna.

1.6 Algunas Fórmulas más Generales

1.6.1 Fórmula de Macaulay Generalizada

Siguiendo las ideas originales de Macaulay, se puede ver que hay cierta flexibilidad en la elección de las bases monomiales que definen los conjuntos $S^{t,i}$ para obtener otros menores maximales no nulos de $\tilde{\Psi}_t$, es decir, diferentes matrices cuadradas M'_t cuyos determinantes serán múltiplos no nulos de $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n)$ con diferentes factores extraños $\det(E'_t), \det(E'_{t_n-t})$, para submatrices cuadradas E'_t, E'_{t_n-t} de M'_t. Además de la

elección obvia que se consigue permutando los índices en las variables $x_1, \ldots, x_n$, otras elecciones se pueden hacer como sigue.
Para cada $i = 1, \ldots, n$, hagamos $\hat{d}_i := (d_1, \ldots, d_{i-1}, d_{i+1}, \ldots, d_n)$ y definamos $H_{\hat{d}_i}(t)$ para cada entero no negativo t usando la siguiente igualdad:

$$\frac{\prod_{j \neq i}\left(1 - Y^{d_j}\right)}{(1-Y)^{n-1}} = \sum_{t=0}^{\infty} H_{\hat{d}_i}(t).Y^t.$$

Hagamos tambien, para cada $t \in \mathbb{N}_0$,

$$\Lambda_t := \{X^\gamma \in S_t : \ \gamma_j < d_j, \, j = 1, \ldots, n\}.$$

Proposición 1.4 *Sea M'_t una submatriz cuadrada de la matriz de $\tilde{\Psi}_t$ en las bases monomiales, de tal manera que el tamaño de M'_t es $\rho(t)$. Denotemos sus bloques como en (1.17). Supongamos que, para cada $i = 1, \ldots, n$, el bloque F_t tiene exactamente $H_{\hat{d}_i}(t - d_i)$ de sus filas correspondientes a f_i* [1] *en común con la matriz D_t definida en(1.7) y, además, el bloque $F_{t_n - t}$ comparte exactamente $H_{\hat{d}_i}(t_n - t - d_i)$ filas correspondientes a f_i con $D_{t_n - t}$. Entonces, si $\det(M'_t)$ no es idénticamente cero, $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n)$ se puede calcular como el cociente $\frac{\det(M'_t)}{\det(\mathbb{E}'_t)}$, donde $\mathbb{E}'_t$ es una matriz que se forma uniendo dos submatrices E'_t de F_t y $E'_{t_n - t}$ de $F_{t_n - t}$. E'_t (resp. $E'_{t_n - t}$) se obtiene omitiendo las filas en común con D_t (resp. $D_{t_n - t}$) y las columnas indexadas por todos los monomios comunes en D_t (resp. $D_{t_n - t}$) y todos los monomios en Λ_t (resp. $\Lambda_{t_n - t}$).*

Demostración. Esta situación está considerada en [Mac1](Section 6*a*). Allí se prueba que, si F'_t (resp. $F'_{t_n - t}$) denota la submatriz formada omitiendo en F_t (resp. $F_{t_n - t}$) las columnas indexadas por todos los monomios en Λ_t (resp. $\Lambda_{t_n - t}$), y $\det(F'_t) \neq 0$ (resp. $\det(F'_{t_n - t}) \neq 0$), entonces la subresultante asociada con la familia $\{x^\gamma, \gamma \in \Lambda_t\}$ (resp. $\Lambda_{t_n - t}$) se puede calcular como el cociente $\frac{\det(F'_t)}{\det(E'_t)}$ (resp. $\frac{\det(F'_{t_n - t})}{\det(E'_{t_n - t})}$) En particular, E'_t y $E'_{t_n - t}$ son submatrices de determinante no nulo.
Se puede usar entonces la misma idea que aparece en [Cha2],[Cha3] para calcular la subresultante como un cociente de determinantes, observando que la subresultante es en realidad el determinante de un complejo de Koszul, y que el factor extraño no depende de la familia de monomios cuya subresultante se desea calcular.
Por todo esto, podemos concluir que todo menor maximal de F_t (resp. $F_{t_n - t}$) es un múltiplo de E'_t (resp. $E'_{t_n - t}$). Luego, existe una versión similar del Lema (1.11) con F_t en lugar de D_t y E'_t en lugar de E_t. La proposición queda demostrada, ya que también se tiene una versión similar del Teorema (1.10). □

1.6.2 Polinomio Característico Generalizado

Dado un sistema de polinomios no homogéneos en $n - 1$ variables $\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n$ con grados respectivos $d_1, \ldots, d_n$, agregando una n–ésima variable, podemos homogeneizar estos polinomios y considerar la resultante asociada con sus respectivas homogeneizaciones

[1] que una fila sea correspondiente a f_i quiere decir que, en esa columna, los únicos elementos no nulos que pueden aparecer son coeficientes de f_i

$f_1, \ldots, f_n$. Sin embargo, esta resultante puede anularse idénticamente debido a que la familia $f_1, \ldots, f_n$ puede tener ceros en el infinito del espacio proyectivo $\mathbb{P}^{n-1}$ aún cuando no haya raíces afines comunes al sistema

$$\tilde{f}_1, = \ldots = \tilde{f}_n = 0.$$

En este caso, podemos extender la construcción realizada por Canny en [Can2] del *polinomio característico generalizado*(PCG) para la matriz de clásica de Macaulay, M_{t_n+1}, a matrices M_t para cualquier entero no negativo t. De hecho, cuando especializamos f_i en $x_i^{d_i}$ para todo $i = 1, \ldots, n$,

$$\Delta(x, y) = \sum_{j_1=0}^{d_1-1} \cdots \sum_{j_n=0}^{d_n-1} x_1^{d_1-1-j_1} \cdots x_n^{d_n-1-j_n} \; y_1^{j_1} \cdots y_n^{j_n},$$

y M_t tiene una única entrada no nula en cada fila y cada columna que es igual a 1, así que $\det(M_t) = \pm 1$. Si ordenamos las columnas de M_t de tal manera que bajo esta especialización sea la matriz identidad, definimos el polinomio $C_t(s)$ como

$$C_t(s) := \frac{\text{Charpoly } (M_t)(s)}{\text{Charpoly } (\mathbb{E}_t)(s)},$$

donde Charpoly significa *polinomio característico.*
Por la observación previa, tenemos que

$$C_t(s) = \text{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1 - s\; x_1^{d_1}, \ldots, f_n - s\; x_1^{d_n}).$$

Es más, esto implica que $C_t(s)$ coincide con el PCG de Canny, $C(s)$, pero para su cálculo hemos usado matrices de menor tamaño. Las consideraciones hechas por Canny acerca de cómo calcular más eficientemente el PCG también pueden aplicarse a este caso.
Cerramos esta sección recordando el Teorema 3.2 de [Can2] que explica por qué esta noción es útil.

Teorema 1.16 *(Canny) Supongamos*

$$\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_n \in k[u_1, \ldots, u_m][X_1, \ldots, X_{n-1}]$$

y sea W una componente de dimensión $m-1$ del conjunto de ceros comunes de $f_1, \ldots, f_n$ en $k^m \times \mathbb{P}^{n-1}$. Entonces, $C_t(s) \in k[u_1, \ldots, u_m][s]$. Escribiendo

$$C_t(s) = \sum_{j=\ell}^{r} C_t^j(u_1, \ldots, u_m) t^j,$$

con $r = \sum_{i=1}^{n} d_1 \ldots d_{i-1} \cdot d_i \ldots d_n$ y $C_t^\ell(u_1, \ldots, u_m) \neq 0$ el coeficiente de menor grado, se tiene que, dado $w \in k^m \times \mathbb{P}^{n-1}$, sea $\pi_u(w)$ su proyección sobre k^m. Entonces, $C_t^\ell(\pi_u(w)) = 0$ para todo $w \in W$.

Capítulo 2

Fórmulas a la Macaulay para Resultantes Ralas

2.1 Preliminares

Comenzaremos este capítulo revisando algunas definiciones y propiedades de polítopos convexos y resultantes ralas . Más detalles y demostraciones pueden encontrarse en [CLO, EM, GKZ2, Roj, Stu1, Stu2].
Sean $\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n$ conjuntos finitos del lattice $\mathbb{Z}^n$. Hagamos $m_i := \#(\mathcal{A}_i)$, $m := \sum_{i=0}^n m_i$ y $Q_i := conv(\mathcal{A}_i)$, $i = 0, \ldots, n$. Por $conv(\cdot)$ entenderemos "cápsula convexa" en el espacio euclídeo $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} := \mathcal{L} \otimes \mathbb{R} \subset \mathbb{R}^n$, siendo $\mathcal{L}$ el lattice afín generado por $\sum_{i=0}^n \mathcal{A}_i$.
Para cualquier subconjunto $J \subset \{0, 1, \ldots, n\}$, consideremos el lattice afín generado por $\sum_{j \in J} \mathcal{A}_j$, y sea $rk(J)$ el rango de este lattice. Para cada $a \in \mathcal{A}_i$, introduciremos un parámetro $c_{i,a}$. Consideremos la familia de *polinomios genéricos:*

$$f_i(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{a \in \mathcal{A}_i} c_{i,a}\, x^a \quad (i = 0, \ldots, n). \tag{2.1}$$

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo algebraicamente cerrado. El vector de coeficientes $(c_{i,a})_{a \in \mathcal{A}_i}$ de una tal familia define un punto en el producto de espacios proyectivos sobre $\mathbb{K}$, $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_0-1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_n-1}$. Denotaremos con Z al subconjunto de aquellos sistemas de la forma (2.1) que tienen una solución en $(\mathbb{K}^*)^n$, donde $\mathbb{K}^*$ denota el toro $\mathbb{K} \setminus \{0\}$. Con $\overline{Z}$ denotaremos la clausura Zariski de Z en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_0-1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_n-1}$.

Teorema 2.1 *[GKZ2, Stu2] La variedad proyectiva $\overline{Z}$ es irreducible y está definida sobre $\mathbb{Q}$. Su codimensión en $\mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_0-1} \times \ldots \times \mathbb{P}_{\mathbb{K}}^{m_n-1}$ es igual a*

$$\max\{\#(I) - rk(I)\},$$

donde I toma valores sobres todos los subconjuntos de $\{0, 1, \ldots, n\}$. La codimensión de $\overline{Z}$ es 1 si y solamente si hay una única familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i \in I}$ tal que

1. $rk(I) = \#(I) - 1$,

2. $rk(J) \geq \#(J)$, *para cada subconjunto propio* J *de* I.

Definición 2.2 *[Stu2] Si* I *satisface las condiciones* 1 *y* 2 *dadas en el teorema previo, entonces la familia* $\{A_i\}_{i\in I}$ *se dice esencial .*

Notar que si cada Q_i es $n-$dimensional, es de fácil verificación el hecho de que el único conjunto que satisface las condiciones 1 y 2 es $I = \{0, 1, \ldots, n\}$, así que en este caso, $\overline{Z}$ tiene codimensión 1.
La *resultante rala mixta* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ se define como sigue:

- si $codim(\overline{Z}) = 1$, entonces $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ es el único polinomio irreducible (salvo signo) en $\mathbb{Z}[c_{i,a}]$ que se anula sobre $\overline{Z}$.

- Si $codim(\overline{Z}) \geq 2$, entonces $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ se define como el polinomio constante 1.

Teorema 2.3 *[PS, Stu2] Si la familia de soportes* $\{\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n\}$ *es esencial, entonces para cada* $i = 0, \ldots, n$, *el grado de* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ *en los coeficientes de* f_i *es igual al volumen mixto normalizado*

$$\mathcal{MV}(Q_0, \ldots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \ldots, Q_n) :=$$

$$\frac{\sum_{J\subset\{0,\ldots,i-1,i+1,\ldots,n\}}(-1)^{\#(J)} vol\left(\sum_{j\in J} Q_j\right)}{vol(\mathcal{P})},$$

donde $vol(\cdot)$ *quiere decir volumen euclídeo en el espacio vectorial real* $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$, *y* $\mathcal{P}$ *es un paralelepípedo fundamental con vértices en el lattice* $\mathcal{L}$. *Más en general, si existe un único subconjunto* $\{\mathcal{A}_i\}_{i\in i}$ *que es esencial, la resultante rala mixta coincide con la resultante de la familia* $\{f_i : \ i \in I\}$, *respecto del lattice* $\sum_{i\in I} \mathcal{A}_i$.

Ejemplo 2.4 *Tomemos* $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \{(0,0), (0,1)\,(1,0)\,(1,1)\}$, *y consideremos los polinomios*

$$\begin{aligned} f_0 &= c_{0,(0,0)} + c_{0,(1,0)}x_1 + c_{0,(0,1)}x_2 + c_{0,(1,1)}x_1\,x_2, \\ f_1 &= c_{1,(0,0)} + c_{1,(1,0)}x_1 + c_{1,(0,1)}x_2 + c_{1,(1,1)}x_1\,x_2, \\ f_2 &= c_{2,(0,0)} + c_{2,(1,0)}x_1 + c_{2,(0,1)}x_2 + c_{2,(1,1)}x_1\,x_2. \end{aligned}$$

Aquí, los polítopos de Newton Q_0, Q_1, Q_2 *son iguales entre sí, e iguales al cuadrado unitario* $C := [0,1] \times [0,1]$, *cuyos vértices son precisamente los puntos del soporte común. Se tiene, entonces,*

$$grado_{\text{coeficientes de } f_i}\left(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, f_1, f_2)\right) = \mathcal{MV}(C, C) = 2, \ i = 0, 1, 2.$$

En este caso, la resultante rala se puede calcular usando una fórmula determinantal presentada por Dixon en [Dix]:

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, f_1, f_2) = \det \begin{pmatrix} c_{0,(0,0)} & c_{0,(1,0)} & c_{0,(0,1)} & c_{0,(1,1)} & 0 & 0 \\ c_{1,(0,0)} & c_{1,(1,0)} & c_{1,(0,1)} & c_{1,(1,1)} & 0 & 0 \\ c_{2,(0,0)} & c_{2,(1,0)} & c_{2,(0,1)} & c_{2,(1,1)} & 0 & 0 \\ 0 & c_{0,(0,0)} & 0 & c_{0,(0,1)} & c_{0,(1,0)} & c_{0,(1,1)} \\ 0 & c_{1,(0,0)} & 0 & c_{1,(0,1)} & c_{1,(1,0)} & c_{1,(1,1)} \\ 0 & c_{2,(0,0)} & 0 & c_{2,(0,1)} & c_{2,(1,0)} & c_{2,(1,1)} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.5 *Tomemos ahora*

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0 &= \{(0,0),\ (2,2),\ (1,3)\}, \\ \mathcal{A}_1 &= \{(0,0),\ (2,0),\ (1,2)\}, \\ \mathcal{A}_2 &= \{(3,0),\ (1,1)\}, \end{aligned}$$

y consideremos la familia de polinomios

$$\begin{aligned} f_0 &= a_1 + a_2 x_1^2\, x_2^2 + a_3 x_1\, x_2^3, \\ f_1 &= b_1 + b_2 x_1^2 + b_3 x_1\, x_2^2, \\ f_2 &= c_1 x_1^3 + c_2 x_1\, x_2. \end{aligned}$$

Usando la fórmula dada por el Teorema 2.3, se tiene que

$$\mathcal{MV}(Q_0, Q_1) = 7, \mathcal{MV}(Q_0, Q_2) = 7,\ \mathcal{MV}(Q_1, Q_2) = 5.$$

En este caso, la resultante rala es

$$\begin{aligned} & a_1^5 b_3^7 c_1^6 c_2 + 3a_1^4 a_2 b_2^2 b_3^5 c_1^4 c_2^3 + 3a_1^3 a_2^2 b_2^4 b_3^3 c_z^2 c_2^5 - 13a_1^3 a_2 a_3 b_1^2 b_2 b_3^4 c_1^5 c_2^2 - 7a_1^3 a_3^2 b_1 b_2^3 b_3^3 c_1^4 c_2^3 \\ & +6a_1^2 a_2^3 b_1^3 b_2 b_3^3 c_1^4 c_2^3 + a_1^2 a_2^3 b_2^6 b_3 c_2^7 - a_1^2 a_2^2 a_3 b_1^2 b_2^3 c_1^3 c_2^4 + 5a_1^2 a_2 a_3^2 b_1^4 b_3^3 c_1^6 c_2 - a_1^2 a_2 a_3^2 b_1 b_2^5 b_3 c_1^2 c_2^5 \\ & +14a_1^2 a_3^3 b_1^3 b_2^2 b_3^2 c_1^5 c_2^2 + a_1^2 a_3^3 b_2^7 c_1 c_2^6 - 2a_1 a_2^4 b_1^3 b_2^3 b_3 c_1^2 c_2^5 - 5a_1 a_2^3 a_3 b_1^5 b_2^2 c_1^5 c_2^2 + a_2^5 b_1^6 b_3 c_1^4 c_2^3 \\ & +2a_1 a_2^2 a_3^2 b_1^4 b_2^2 b_3 c_1^4 c_2^3 - 2a_1 a_2 a_3^3 b_1^3 b_2^4 c_1^3 c_2^4 - 7a_1 a_3^4 b_1^5 b_2 b_3 c_1^6 c_2 + a_2^2 a_3^3 b_1^6 b_2 c_1^5 c_2^2 + a_3^5 b_1^7 c_1^7 \end{aligned}$$

Veremos más adelante, en el apartado 2.2.4, que la resultante de polinomios homogéneos presentada en el capítulo anterior puede ser interpretada como una resultante rala.

Definiremos las *caras* de un polítopo $Q \subset \mathcal{L}_{\mathbb{R}} \subset \mathbb{R}^n$, como sigue: sea v un vector de $\mathbb{R}^n$. Hagamos

$$m_Q(v) := \min_{q \in Q}\{\langle q, v\rangle\},$$

y llamemos

$$Q_v := Q \cap \{m \in \mathbb{R}^n :\ \langle m, v\rangle = m_Q(v)\}$$

la cara de Q determinada por v. El vector v se llamará un *vector normal interior* de Q_v. Si $\dim(Q_v) = n - 1$, entonces Q_v se llamará *facet.*

2.2 Fórmulas a la Macaulay para polinomios generalizadamente no mixtos

En esta sección, construiremos matrices a la Macaulay para el caso en el que todos los polítopos Q_i son múltiplos enteros de un polítopo fijo P, es decir cuando existen números enteros positivos k_0, $k_1, \ldots, k_n$ tales que

$$Q_i = conv(\mathcal{A}_i) = k_i P, \ i = 0, \ldots, n.$$

Este caso aparece en [CDS2], en el contexto de la geometría de variedades tóricas. Familias de polinomios con esta propiedad, se pueden identificar con elementos "homogéneos" en el anillo de coordenadas de una variedad tórica proyectiva (en el sentido de [Cox2]), con "grados" $\alpha_0, \ldots, \alpha_n$, donde cada α_i es un divisor $\mathbb{Q}-$amplio (ver [Ful]). Vamos a llamarlos *polinomios generalizadamente no mixtos* porque, como caso particular, contienen a las familias de polinomios no mixtos, que son aquellos para los cuales todos los soportes $\mathcal{A}_i$ coinciden.
Las matrices que se construirán aquí generalizarán las matrices M_t, con $t > t_n$ dadas en el capítulo anterior, que en realidad fueron construidas por primera vez por Macaulay en [Mac1]. En la nueva terminología, el caso homogéneo tratado en el capítulo anterior es en el que todos los conjuntos $\mathcal{A}_i$ son múltiplos del simplex fundamental

$$S_n := \{(q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{R}^n : \ 0 \leq q_i \leq 1, \ \sum_{i=1}^{n} q_i \leq 1\}.$$

Advertencia: Es necesario tener en consideración los soportes, dado que la resultante rala depende directamente de la familia de soportes $(\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$, y está claro que diferentes soportes pueden dar los mismos polítopos $Q_0, \ldots, Q_n$ (see [Stu2]).

Observación 2.6 *Es fácil ver que, en el caso de polinomios generalizadamente no mixtos, debido al Teorema 2.1, para que la resultante no sea constantemente* 1, *el polítopo P debe ser $n-$dimensional. También, está claro que, en este caso, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$.*

Dados $\lambda \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ y un $\delta \in \mathbb{Q}^n$ genérico en el sentido de [CE1, CE2, Stu2], nuestro algoritmo producirá una matriz de tipo Sylvester $\mathbb{M}$ cuyas filas y columnas estarán indexadas por los puntos enteros de

$$\mathcal{E} := ((k_0 + k_1 + \ldots + k_n + \lambda)P + \delta) \cap \mathcal{L}, \tag{2.2}$$

y cuyo determinante será un múltiplo no nulo de la resultante rala. Identificaremos además el factor extraño $\det(\mathbb{M})/\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ como un menor de este determinante.
Tal como en [Mac1], el algoritmo será recursivo sobre la dimensión del polítopo P, y en sus pasos intermedios usará la técnica de subdivisión mixta de Canny y Emiris presentada en [CE1, CE2, Stu2], y que se detalla en la sección 7.1.2 de esta memoria.

2.2.1 Construcción de la Matriz $\mathbb{M}$.

Dados λ y δ como antes, hagamos $Q := \lambda P$. Sea $V(Q) \subset \mathbb{Q}^n$ el conjunto de vértices de Q. Observar que estos puntos no necesariamente tienen todas sus coordenadas enteras. Elijamos un vértice $\mathbf{b_0} \in \mathcal{A}_0$, y consideremos las siguientes funciones de levantamiento:

$$\begin{array}{lccll} \omega_0: & \mathcal{A}_0 & \to & \mathbb{R} & \\ & \mathbf{b_0} & \mapsto & 1 & \\ & b & \mapsto & 0 & \text{si } b \neq \mathbf{b_0} \\ & & & & \\ \omega_i: & \mathcal{A}_i & \to & \mathbb{R} & \\ & b & \mapsto & 0 & \forall b \in \mathcal{A}_i, \quad i = 1, \ldots, n \\ & & & & \\ \omega: & V(Q) & \to & \mathbb{R} & \\ & b & \mapsto & 0 & \forall b \in V(Q). \end{array} \tag{2.3}$$

Definimos

$$\Omega := \left(\omega_i(b)_{b \in \mathcal{A}_i,\, i=0,1,\ldots,n},\ \omega(b)_{b \in V(Q)}\ \right) \in \mathbb{R}^{m+\#V(Q)}$$

y consideramos los polítopos levantados en $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{array}{rcl} Q_{i,\Omega} & := & conv\{(a, \omega_i(a)) : a \in \mathcal{A}_i\} \\ Q_\Omega & := & conv\{(b, \omega(b)) : b \in V(Q)\}. \end{array}$$

Al proyectar las caras superiores (es decir aquellas que tienen vector normal interior con última coordenada negativa) de los $Q_{i,\Omega}$ (resp. Q_Ω) obtenemos una *descomposición coherente mixta* $\Delta_{i,\Omega}$ (resp. Δ_Ω) de los polítopos Q_i (resp. Q).
Similarmente, al proyectar las caras superiores de la suma de Minkowski

$$Q_{0,\Omega} + Q_{1,\Omega} + \ldots + Q_{n,\Omega} + Q_\Omega,$$

obtenemos una descomposición coherente mixta de

$$\mathcal{Q} := Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_n + Q. \tag{2.4}$$

Cada celda en esta descomposición es de la forma

$$F = F_0 + F_1 + \ldots + F_n + F,$$

donde F_i (resp. F) es una celda en $\Delta_{i,\Omega}$, (resp. Δ_Ω).
Dado que las funciones de levantamiento que usamos en (2.3) son esencialmente triviales, se pueden reconocer las siguientes celdas en $\Delta_{1,\Omega}, \ldots, \Delta_{n,\Omega}, \Delta_\Omega$:

- Los polítopos $Q_1, \ldots, Q_n, Q$, que son la proyección de las caras determinada por el vector $(0, -1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$;
- Para cada $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, las caras $Q_{1_v}, \ldots, Q_{n_v}, Q_v$, que son la proyección de las caras de los polítopos $Q_i \times 0$, $i = 1, \cdots, n$ y $Q \times 0$ determinadas por los vectores (v, α), donde α es un número negativo cualquiera .

Sobre $\Delta_{0,\Omega}$ se tiene lo siguiente: la proyección de la cara correspondiente a $(0,-1)$ es el conjunto formado por el único elemento $\{\mathbf{b_0}\}$. Por otro lado, es fácil de verificar que toda celda de dimensión n en la descomposición es la cápsula convexa de $\mathbf{b_0}$ y una facet de Q_0 que no contiene a este punto. La llamaremos $F_{0,v}$, donde v denota la normal interior entera primitiva correspondiente a la facet.
Luego, podemos caracterizar todas las celdas maximales (de dimensión n) en la descomposición de $\mathcal{Q}$ como sigue:

- $\{\mathbf{b_0}\} + Q_1 + \ldots + Q_n + Q$. Esta celda se dirá *primaria* .
- $F_{0,v} + Q_{1_v} + \ldots + Q_{n_v} + Q_v$, para algunos $v \in \mathbb{R}^n$. Éstas serán llamadas celdas *secundarias*, y estarán asociadas a vectores $v \in \mathbb{R}^n$ no nulos .

El próximo Lema será útil para lo que sigue después:

Lema 2.7 *Supongamos que* $\dim(F_{0,v}) = n$. *Entonces, para todo* $q \in \mathbb{Q}$, *si*

$$F_{0,v} \cap \{m \in \mathcal{L}_{\mathbb{R}} : \ \langle m, v\rangle = q\} \neq \emptyset,$$

existe un $\lambda_q \in \mathbb{Q}_{\geq 0}$ *tal que esa intersección es un polítopo congruente con* $\lambda_q P_v$.

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\mathbf{b_0} = 0$, entonces $F_{0,v}$ será la cápsula convexa del origen de $\mathcal{L}_{\mathbb{R}}$ y un conjunto finito de puntos que llamaremos $\{v_1, \ldots, v_M\}$, todos ellos cumpliendo la propiedad siguiente: $\langle v_i, v\rangle = \lambda_v < 0$, o sea, perteneciendo a un hiperplano que no pasa por el origen.
La intersección de $F_{0,v}$ con un hiperplano paralelo a P_v será distinta de vacío si y solamente si $\lambda_v \leq q \leq 0$. Si esto ocurre, esa intersección será la cápsula convexa de

$$\{\frac{q}{\lambda_v} v_1, \ldots, \frac{q}{\lambda_v} v_M\},$$

que es igual a $\frac{q}{\lambda_v} Q_{0_v} = \frac{q}{\lambda_v} k_0 P_v$. $\square$

La matriz de Sylvester que vamos a construir tendrá en cuenta si los puntos están en un desplazamiento infinitesimal de la celda primaria o no. La primer suposición que haremos sobre δ es que todos los puntos de $(\mathcal{Q} + \delta) \cap \mathcal{L}$ pertenezcan al interior del trasladado en δ de alguna celda maximal (primaria o secundaria)

Puntos en la Celda Primaria Trasladada.

Procederemos como en [CE1, CE2, Stu2]: elegimos funciones de levantamiento genéricas $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_n, \tilde{\omega}$ con dominios en $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, $V(Q)$ respectivamente, de manera tal que, al proyectar las caras del revestimiento superior del polítopo levantado en $\mathbb{R}^{n+1}$, se produzca una *descomposición coherente mixta estricta* de la suma de Minkowski

$$Q_1 + \ldots + Q_n + Q.$$

Esto implica que cada celda $n-$dimensional $\mathcal{F}$ en la descomposición se escribe como

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n + F,$$

donde F_i es una celda de $\Delta_{i,\tilde{\omega}}$, F es una celda de $\Delta_{\tilde{\omega}}$ y

$$n = \dim(F_1) + \ldots + \dim(F_n) + \dim(F).$$

Como consecuencia, se tiene que al menos una de estas dimensiones es igual a 0.
El *contenido de fila* de un punto $p \in (\{\mathbf{b_0}\} + Q_1 + \ldots + Q_n + Q + \delta) \cap \mathcal{L}$ será un par (i, a) definido como sigue:

- si $p - \delta - \mathbf{b_0}$ está en una celda que se escribe como $\mathcal{F} = F_1 + \ldots + F_n + F$, y $\dim(F_j) = 0$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$, i será el mayor índice tal que $\dim(F_i) = 0$, y a el único punto de la celda F_i (o sea $F_i = \{a\}$).
- Si $\dim(F_j) > 0 \, \forall j$, (o sea $\dim(F) = 0$), entonces $i := 0$ y $a := \mathbf{b_0}$.

Diremos que la celda $\mathcal{F}$ es *mixta de tipo* 0 si la última condición se cumple; de otro modo, se llamará *no mixta.*

Observación 2.8 *Los conceptos de* contenido de fila *(row content),* celdas mixtas y no mixtas *(mixed and non-mixed cells) definidos previamente, se usan con un significado bastante diferente en [CE1, CE2, Stu2]. Veremos algunas relaciones entre ambos conceptos en el Ejemplo 2.23.*

Ahora procederemos a definir los elementos de la matriz $\mathbb{M}$ que se encuentren en las filas indexadas por aquellos puntos p en el conjunto

$$(\{\mathbf{b_0}\} + Q_1 + \ldots + Q_n + Q + \delta) \cap \mathcal{L}$$

como sigue: cualquiera sea $p' \in \mathcal{E}$, el elemento de $\mathbb{M}$ indexado por (p, p') será igual al coeficiente de $x^{p'}$ en la expansión del polinomio $x^{p-a} f_i(x)$ donde (i, a) es el contenido de fila de p.

Puntos en las Celdas Secundarias Trasladadas.

Sea $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathcal{F}_v = F_{0,v} + Q_{1_v} + \ldots + Q_{n_v} + Q_v \tag{2.5}$$

es una celda maximal en la descomposición de $\mathcal{Q}$. Esto implica lo siguiente:

- $\dim(P_v) = n - 1$, $Q_v = \lambda P_v$, and $Q_{i_v} = k_i P_v$, $i = 0, 1, \ldots, n$.
- $\dim(F_{0,v}) = n$.

Intersecando $F_{0,v} + \delta$ con hiperplanos paralelos a P_v, y usando el Lema 2.7, se puede ver fácilmente que $(\mathcal{F}_v + \delta) \cap \mathcal{L}$ se puede escribir como una unión disjunta de conjuntos del tipo

$$\left(\tilde{\lambda} P_v + k_1 P_v + \ldots + k_n P_v + \lambda P_v + \delta\right) \cap \mathcal{L}, \ \tilde{\lambda} \in \mathbb{Q}_{\geq 0}. \tag{2.6}$$

Aquí es donde interviene el paso recursivo: escribimos (2.6) como

$$(k_1 P_v + \ldots + k_n P_v + \lambda_v P_v + \delta) \cap \mathcal{L}, \ \lambda_v \in \mathbb{Q}_{\geq 0} \tag{2.7}$$

y consideramos la familia de polinomios asociada a la v-facet

$$f_{i_v}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{a \in Q_{i_v} \cap \mathcal{A}_i} c_{i,a} x^a \ (i = 1, \ldots, n). \tag{2.8}$$

Como v es un vector entero primitivo, existe una base de $\mathbb{Z}^n$ como $\mathbb{Z}$-módulo de la forma $\{v, v_2, \cdots, v_n\}$. Consideramos la transformación $\mathbb{Z}$-lineal e inversible:

$$\begin{array}{rccc} \xi : & \mathbb{Z}^n & \to & \mathbb{Z}^n \\ & \alpha v + \sum_{i \geq 2} \alpha_i v_i & \mapsto & (\alpha, \alpha_2, \cdots, \alpha_n). \end{array} \tag{2.9}$$

Aplicando esta transformación a los soportes, se puede ver a la familia (2.8) como un conjunto de n polinomios en $n-1$ variables con soporte en un lattice de dimensión $n-1$. Es más, debido al hecho de que $Q_{i_v} = k_i P_v$, tiene dimensión exactamente $n-1$, es inmediato verificar que la familia $\{Q_{i_v} \cap \mathcal{A}_i\}_{i=1,\ldots,n}$. es esencial, lo cual implica que la resultante rala de los polinomios (2.8) no es constantemente 1. La denotaremos como

$$\mathrm{Res}_v(f_{1_v}, \ldots, f_{n_v}). \tag{2.10}$$

Como ahora estamos en una dimensión menos, podremos usar la hipótesis inductiva con un poco de cuidado: si llamamos $\mathcal{L}_v \subset \mathcal{L}$ al lattice ortogonal a v, y $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_{1_v} + \cdots + \mathcal{A}_{n_v}}$ al sublattice de $\mathcal{L}_v$ generado por $\mathcal{A}_{1_v} + \cdots + \mathcal{A}_{n_v}$, entonces se tendrá que, para cada $\lambda_v \geq 0$, hay $[\mathcal{L}_v : \mathcal{L}_{\mathcal{A}_{1_v} + \cdots + \mathcal{A}_{n_v}}]$ matrices cuadradas de la forma $\mathbb{M}_{v,\lambda_v}$ indexadas por los puntos de (2.7) cuyos determinantes son múltiplos no triviales de (2.10), y cada una de ellas tiene el mismo grado que $\mathrm{Res}_v(f_{1_v}, \ldots, f_{n_v})$ en los coeficientes de f_{1_v} (f_{1_v} hará el papel que tenía f_0 en el paso anterior).

Tal como ocurre en la celda primaria , cada una de estas matrices tendrá en la fila correspondiente a un punto p, las coordenadas en la base de monomios de la expansión de $x^{p-a} f_{i_v}(x)$ para algún par (a, i). Para definir los elementos que irán en la fila indexada por p de la matriz $\mathbb{M}$ procederemos como antes, el lugar indexado por (p, p') lo ocupará el coeficiente de $x^{p'}$ del polinomio $x^{p-a} f_i(x)$.

Como estamos usando una construcción recursiva, resta verificar que, en el caso $n = 1$, este procedimiento construye una matriz de tipo Sylvester para dos polinomios en una variable ([Syl, Mac1]), lo cual es inmediato (ver el Ejemplo 2.20). Si los soportes generan el lattice afín $\mathbb{Z}$, la matriz estará indexada por un conjunto de monomios del tipo

$$\{x_1^a, x_1^{a+1}, \ldots, x_1^{a+s}\} \ a \in \mathbb{Z}, s \in \mathbb{N}.$$

Observación 2.9 *Observar que, en cada paso de la recursión, necesitaremos imponer más condiciones sobre δ para garantizar que todos los puntos enteros de $\mathcal{E}$ se encuentren en el interior de las celdas trasladadas (de cualquier dimensión). Está claro que esto ocurre para un δ genérico.*

Observación 2.10 *Sea d_v el "v-diámetro" de la celda $\mathcal{F}_v$ que se define como sigue:*

$$d_v := \max_{m\in\mathcal{F}_v}\langle m, v\rangle - \min_{m\in\mathcal{F}_v}\langle m, v\rangle. \tag{2.11}$$

Se puede verificar inmediatamente que, el número de matrices del tipo $\mathbb{M}_{v,\lambda_v}$ es exactamente $d_v\,[\mathcal{L}_v : \mathcal{L}_{\mathcal{A}_{1v}+\cdots+\mathcal{A}_{nv}}]$. Además, debido al hecho que $F_1, F_2, \ldots, F_n, F$ son facets asociadas a v, la diferencia (2.11) se puede calcular también como

$$\max_{m\in F_0}\langle m, v\rangle - \min_{m\in F_0}\langle m, v\rangle. \tag{2.12}$$

Observación 2.11 *En cada paso de la recursión, los puntos que se encuentran en las celdas secundarias trasladadas del paso previo se distribuyen en nuevas celdas primarias o secundarias de una dimensión menos. La nueva celda primaria se subdivide nuevamente en celdas mixtas y no mixtas, y así sucesivamente.*
Tendremos en cuenta esta información, que nos servirá para decir que un punto estará en una celda mixta de tipo i, si pertenece al trasladado de una celda mixta de dimensión $n-i$. Con esta convención, se tiene inmediatamente que, si un punto está en una celda mixta de tipo i, entonces los elementos no nulos de la fila de $\mathbb{M}$ indexada por este punto son coeficientes de f_i.
También está claro que, al final de la recursión, todo punto de $\mathcal{E}$ tiene asociado un contenido de fila.

2.2.2 Formula a la Macaulay Generalizada.

Antes de enunciar el resultado central de esta sección, notemos que $\det(\mathbb{M})$ está bien definido salvo signo, dado que no hemos fijado ningún orden entre los elementos de $\mathcal{E}$. De la misma manera, $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ está bien definida salvo signo, así que las relaciones que aparecerán entre estos objetos van a ser siempre "módulo signo".

Teorema 2.12 *La matriz $\mathbb{M}$ es una matriz de tipo Sylvester genéricamente no singular. Además, se tiene la siguiente fórmula a la Macaulay:*

$$\det(\mathbb{M}) = \mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)\,\det(\mathbb{E}),$$

donde $\mathbb{E}$ es la submatriz cuadrada de $\mathbb{M}$ formada omitiendo todas las filas y columnas indexadas por puntos que se encuentren en celdas mixtas.

Observación 2.13 *Por definición, se tiene que* $\mathbb{E}$ *no contiene coeficientes de* f_0*, así que como un corolario inmediato del Teorema 2.12, se tiene que* $\det(\mathbb{M})$ *tiene el mismo grado que* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ *en los coeficientes de* f_0*. Reemplazando el papel de* f_0 *por el de cualquier otro* f_i*,* $i = 1, \ldots, n$*, conseguiremos también una fórmula para calcular* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ *como el máximo común divisior de los determinantes de* $n+1$ *matrices (al respecto, ver [CE1, CE2, EM]).*

Demostración. Antes que nada, probaremos que, dado un punto $p \in \mathcal{E}$, si p' pertenece al soporte de $x^{p-a} f_i$, (donde (i, a) es el contenido de fila de p) entonces p' debe ser también un punto de $\mathcal{E}$. Esto dará como resultado que $\mathbb{M}$ es una matriz de tipo Sylvester.
Veamos las distintas posibilidades que se presentan:

- Si el punto pertenece a la celda primaria trasladada, el mismo argumento dado en [CE1, CE2] (y usado en [Stu2]) se aplica a esta situación.

- Si el punto pertenece al trasladado de una celda secundaria, digamos $\mathcal{F}_v$, debido a (2.5), el polinomio $x^{p-a} f_{i_v}$ tiene su soporte contenido en

$$F_{0,v} + Q_{1_v} + \ldots + Q_{n_v} + Q_v + \delta.$$

  Esto, sumado al hecho de que, en las celdas secundarias, i es siempre mayor que 0, implica que

$$x^{p-a} f_i \subset F_{0,v} + Q_{1_v} + \ldots + Q_{i-1_v} + Q_i + Q_{i+1_v} + \ldots Q_{n_v} + Q_v + \delta$$

  y este último es un subconjunto de $\mathcal{Q} + \delta$. De aquí se sigue inmediatamente la afirmación.

Una vez que tenemos que $\mathbb{M}$ es una matriz de tipo Sylvester, el hecho de que la resultante rala $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ divide a $\det(\mathbb{M})$ sale usando el siguiente argumento, que es el que se da en [CE1, CE2], y que repetiremos aquí para conveniencia del lector:

Proposición 2.14 *Sean* $\mathbb{V}_1$ *y* $\mathbb{V}_2$ *dos* $\mathbb{Z}[c_{i,a}]$*-módulos libres con bases de monomios de Laurent* $\{x^{\gamma_1}, x^{\gamma_2}, \cdots, x^{\gamma_s}\}$ $\{x^{\gamma'_1}, x^{\gamma'_2}, \cdots, x^{\gamma'_s}\}$ *respectivamente, y* $\phi : \mathbb{V}_1 \to \mathbb{V}_2$ *un morfismo tal que* $x^{\gamma_i} \mapsto p_i(x) f_{\sigma_i}(x) \in \mathbb{V}_2$*, donde* $p_i(x)$ *es un polinomio, y* $\sigma_i \in \{0, 1, \cdots, n\}$*. Entonces, el determinante de* ϕ *respecto de las bases monomiales es un múltiplo de* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \cdots, f_n)$ *(eventualmente cero).*

Demostración. Alcanza con ver que cada vez que los polinomios $f_0, \cdots, f_n$ son especializados de tal manera que su resultante se anula, entonces ϕ considerada como transformación k-lineal, no es sobreyectiva.
Supongamos que $\tilde{f}_0(x), \cdots, \tilde{f}_n(x) \in k[x]$ tienen un cero común ψ en el toro $\overline{k}^{*n}$. Si ϕ, fuera sobreyectiva, ciertamente se tendría una escritura del tipo

$$x^{\gamma'_1} = A_0(x) f_0(x) + \cdots + A_n(x) f_n(x).$$

Especializando ahora ψ en x, se tiene $\psi^{\gamma_1} = 0$, una contradicción. Debido a que la resultante es la ecuación que define la clausura de la variedad en el espacio de coeficientes de todos los polinomios que tienen un cero común en el toro, esto prueba el enunciado. □

En nuestro caso, tenemos $\mathbb{V}_1 = \mathbb{V}_2 = \langle x^p, p \in \mathbb{E}\rangle$, y el morfismo ϕ manda x^p en $x^{p-a} f_i(x)$, donde (i, a) es el contenido de fila de p. Las observaciones anteriores garantizan que la imagen de ϕ está contenida en $\mathbb{V}_2$.

En lo que sigue, consideraremos $\det(\mathbb{M})$ como un polinomio en $\mathbb{Z}[c_{i,a}]$ y probaremos que no es idénticamente cero, mostrando que su término más alto con respecto a algún orden monomial es no nulo. Para ser más explícitos, veremos que, dado el vector

$$\overline{\omega} := (\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^m, \tag{2.13}$$

donde los ω_i fueron definidos en (2.3),

$$init_{\overline{\omega}}(\det(\mathbb{M})) \neq 0. \tag{2.14}$$

Aquí,

$$init_{\overline{\omega}}(\sum c_\alpha a^\alpha) := \sum_{\langle \overline{\omega}, \alpha_0\rangle = \max\langle \overline{\omega}, \alpha\rangle} c_{\alpha_0} a^{\alpha_0}.$$

se llama la "forma inicial" de $\sum c_\alpha a^\alpha$. Al escribir $\det(\mathbb{M})$ como un polinomio en $c_{0,\mathbf{b}_0}$ con coeficientes en $\mathbb{Z}[c_{i,a} \setminus \{c_{0,\mathbf{b}_0}\}]$, se tiene que el término de grado más alto de este polinomio es (2.14).

Debido al papel especial que f_0 ha tenido en la construcción de esta matriz, tendremos que el número de puntos enteros que se encuentren en el interior de alguna celda mixta de tipo 0 trasladada, es igual a $M_0 := \mathcal{MV}(Q_1, \ldots, Q_n)$ que es precisamente el grado de $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ en los coeficientes de f_0 ([HS, CE1, CE2, Stu2]). Luego, se tiene que

$$\text{grado}_{\text{coeficientes de } f_0}(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)) = \text{grado}_{\text{coeficientes de } f_0}(\det(\mathbb{M})).$$

Esto, sumado a la manera particular en la que hemos levantado los polítopos (solo levantando el punto $\mathbf{b}_0$), implica que

$$\frac{\det(\mathbb{M})}{\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)} = \frac{init_{\overline{\omega}}(\det(\mathbb{M}))}{init_{\overline{\omega}}(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n))}$$

$$= \frac{\text{coeficiente de } c_{0,\mathbf{b}_0}^{M_0} \text{ en } \det(\mathbb{M})}{\text{coeficiente de } c_{0,\mathbf{b}_0}^{M_0} \text{ en } \mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)}.$$

Para demostrar el teorema, procederemos como en [Mac1], mostrando que el numerador de esta última fracción es no nulo, y que el cociente es $\det(\mathbb{E})$. La demostración será nuevamente por inducción sobre n.

El caso inicial ($n = 1$) está completamente contenido en las fórmulas clásicas dadas en [Mac1]. En el caso general, para calcular $init_{\overline{\omega}}(\det(\mathbb{M}))$, procederemos como en [CE1,

CE2, Stu2]: introducimos un parámetro t de deformación, y reemplazamos la familia de polinomios (2.1) por:

$$f_{i,\omega} := \sum_{a\in\mathcal{A}_i} c_{i,a}\, t^{\omega_i(a)} x^a, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{2.15}$$

y consideremos la matriz modificada $\mathbb{M}\left(c_{i,a}\, t^{\omega_i(a)}\right)$.

Observación 2.15 *En realidad, debido a que los ω_i son todos cero excepto uno de ellos, se tiene que,*

$$\begin{array}{rcll} f_{0,\omega} & = & c_{0,\mathbf{b}_0}\, t\, x^{\mathbf{b}_0} + \sum_{a\in\mathcal{A}_i\setminus\{\mathbf{b}_0\}} c_{i,a} x^a, & \\ f_{i,\omega} & = & f_i & i \geq 1. \end{array}$$

Luego, $init_{\overline{\omega}}(\det(\mathbb{M}))$ será el coeficiente principal del determinante de la matriz $\mathbb{M}(c_{i,a}\, t^{\omega_i(a)})$ pensada como polinomio en t.

Cualquiera sea $p \in \mathcal{E}$, sea $h(p)$ el mayor número racional tal que

$$(p - \delta, h(p)) \in \mathcal{Q}_\Omega = Q_{0,\Omega} + Q_{1,\Omega} + \ldots + Q_{n,\Omega} + Q_\Omega.$$

Las siguientes observaciones serán útiles más adelante:

Lema 2.16 *La función h verifica lo siguiente:*

1. $0 < h(p) \leq 1$, *para todo* $p \in \mathcal{E}$.
2. $h(p) = 1$ *si y solamente si* $p - \delta$ *pertenece a la celda primaria .*
3. *Si* $p-\delta$ *y* $q-\delta$ *pertenecen ambos a la misma celda secundaria, digamos* $\mathcal{F}_v$, *entonces*

$$h(p) = h(q) \iff \langle p, v\rangle = \langle q, v\rangle.$$

4. *Si* $p \in (\mathcal{F}_v + \delta) \cap \mathcal{L}$, *su contenido de fila es* (i, a), *y* $v' \neq \lambda v$, $\lambda > 0$, *entonces*

$$((p - \delta - a, h(p)) + (Q_{i,\Omega} \times \{0\})) \cap \mathcal{Q}_{\Omega(v,l')} = \emptyset, \ \forall\, l' \in \mathbb{R}_{<0}; \tag{2.16}$$

donde $\mathcal{Q}_{\Omega(v,l')} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *es la cara de* $\mathcal{Q}_\Omega$ *determinada por* (v, l').

Demostración del Lema: Las dos primeras afirmaciones son evidentes. La tercera de ellas es consecuencia del hecho siguiente: $\mathcal{F}_v$ es la proyección de $\mathcal{Q}_{\Omega(v,l)}$, donde l es un número real negativo fijo. Además,

$$p - \delta,\ q - \delta \in \mathcal{F}_v \iff (p - \delta, h(p)), (q - \delta, h(q)) \in \mathcal{Q}_{\Omega(v,l)}.$$

Luego,

$$\langle (p - \delta, h(p)), (v, l)\rangle = \langle (q - \delta, h(q)), (v, l)\rangle,$$

y de aquí se tiene fácilmente la tercer afirmación.

Por último, notemos con $l \in \mathbb{R}_{<0}$ el número real tal que la facet $\mathcal{Q}_{\Omega(v,l)}$ se proyecta biyectivamente sobre $\mathcal{F}_v$. Debido a las condiciones de genericidad impuestas sobre δ, se tiene que el punto $p_\Omega := (p - \delta, h(p))$ debe pertenecer al interior relativo de $\mathcal{Q}_{\Omega(v,l)}$. Si $v' = \lambda\, v$, y $l' = \lambda\, l$, con $\lambda \leq 0$, es implicaría que $l' \notin \mathbb{R}_{<0}$, lo cual está fuera de las hipótesis, así que podemos suponer sin pérdida de generalidad que (v', l') no es paralelo a (v, l). Entonces, se puede desplazar el punto p_Ω dentro de la facet $\mathcal{Q}_{\Omega(v,l)}$, en la dirección de la proyección ortogonal del vector $-(v', l')$ sobre el hiperplano $\{\langle x, (v, l)\rangle = 0\}$. Pero el argumento de convexidad dado en [CE1, CE2] implica que para *todo* punto q_Ω que se encuentre en la facet $\mathcal{Q}_{\Omega(v,l)}$, debe ocurrir que

$$q_\Omega - (a, 0) + Q_{i,\Omega} \times \{0\} \subset \mathcal{Q}_\Omega.$$

Luego, si (2.16) no fuera cierto, los puntos en común con la facet $\mathcal{Q}_{\Omega(v,l')}$, después de este desplazamiento, ya no pertenecerán a $\mathcal{Q}_\Omega$, lo cual es imposible.
□

Ahora, usaremos el mismo argumento de convexidad dado en [CE1, CE2, Stu2] de la manera siguiente: para cada $p \in \mathcal{E}$, multiplicaremos todos los elementos la fila correspondiente a p por $t^{h(p)-\omega_i(a)}$, donde -como es usual- (i, a) denota el contenido de fila de p. Llamemos a la matriz que se obtiene de esta manera $\mathbb{M}'(t)$. No es difícil ver que el coeficiente principal de $\det(\mathbb{M}'(t))$ es $init_{\overline{\omega}}(\det(\mathbb{M}))$.

Proposición 2.1 *Sean $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_N = 1$ los distintos valores que toma $h(p)$ al variar p entre los puntos de $\mathcal{E}$. Entonces, el coeficiente principal de* $\det(\mathbb{M}'(t))$ *(como polinomio en t) se factoriza como*

$$\prod_{j=1}^{N} \det\left(\mathbb{M}_j\right), \tag{2.17}$$

donde $\mathbb{M}_j$ es la submatriz cuadrada de $\mathbb{M}$ construida eligiendo todas las filas y columnas indexadas por aquellos puntos p tales que $h(p) = \gamma_j$.
Este producto también se puede factorizar como sigue:

$$\det(\mathbb{M}_N) \prod_{\mathcal{F}_v} \left(\det(\mathbb{M}_v^1) \ldots \det(\mathbb{M}_v^{d_v})\right), \tag{2.18}$$

donde la productoria se toma sobre todas las celdas secundarias $\mathcal{F}_v$, y las $\mathbb{M}_v^i$ son matrices del tipo $\mathbb{M}_{v,\lambda_v}$ definidas en el apartado 2.2.1, es decir, una matriz de tipo Sylvester para calcular la resultante rala asociada a los polinomios (2.8).

Demostración de la Proposición: Para calcular el término de grado más alto en t de $\det(\mathbb{M}'(t))$, dejaremos en cada columna todos los elementos que tengan la mayor potencia de t que aparezca en esa columna, y reemplazaremos por 0 todos los elementos que no tengan esa potencia. Llamaremos a esta matriz $mod(\mathbb{M}'(t))$. Si el determinante de esta matriz no es cero, será lo que estamos buscando.

Para comenzar, se tiene que, en $\mathbb{M}'(t)$, la mayor potencia de t que puede aparecer en la columna indexada por p' es exactamente $h(p')$. Luego, en $mod(\mathbb{M}'(t))$, en aquellas columnas indexadas por aquellos p' para los cuales $h(p') = \gamma_1$ no pueden haber elementos no nulos en aquellas filas indexadas por puntos p tales que $h(p) \neq \gamma_1$, si no se tendría $h(p) > \gamma_1$, con lo cual, la potencia de t que aparece en el lugar (p, p') de la matriz sería estrictamente más grande que γ_1, lo cual es imposible.
Esto implica que $mod(\mathbb{M}'(t))$, después de dividirla por alguna potencia de t y reordenar sus filas y columnas de tal manera que los puntos p' para los cuales $h(p') = \gamma_1$ se encuentren en primer lugar, tiene la siguiente estructura:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{M}_1 & A \\ 0 & B \end{pmatrix}. \tag{2.19}$$

Repitiendo este argumento recursivamente, se tiene que, ordenando convenientemente sus filas y columnas, la estructura de $mod(\mathbb{M}'(t))$ es triangular tal como sigue:

$$\begin{pmatrix} \mathbb{M}_1 & * & * \\ 0 & \mathbb{M}_2 & * \\ \vdots & \vdots & * \\ 0 & 0 & \mathbb{M}_N \end{pmatrix},$$

con lo cual se tiene la primer parte de la proposición.
Para demostrar (2.18), fijemos $j < N$. Entonces, los puntos p para los cuales $h(p) = \gamma_j < 1$, se encuentran en celdas secundarias trasladadas. Las denotaremos con $\mathcal{F}_{v_1} + \delta, \ldots \mathcal{F}_{v_M} + \delta$. Ordenamos las filas y columnas de $\mathbb{M}_j$ de tal manera que los puntos de $\mathcal{F}_{v_1} + \delta$ aparezcan primero, los puntos de $\mathcal{F}_{v_2} + \delta$ inmediatamente después, y así sucesivamente.
En primer lugar, mostraremos que:

$$\mathbb{M}_j = \begin{pmatrix} \mathbb{M}_{(j,v_1)} & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{M}_{(j,v_2)} & 0 \\ \vdots & \vdots & \\ 0 & 0 & \mathbb{M}_{(j,v_M)} \end{pmatrix},$$

donde $\mathbb{M}_{(j,v_k)}$ denota la submatriz de $\mathbb{M}_j$ cuyas filas y columnas están indexadas por puntos pertenecientes a la celda $\mathcal{F}_{v_k} + \delta$.
Para probar esto, consideremos la familia deformada (2.15). En $\mathbb{R}^{n+1}$ se tiene la relación siguiente:

$$supp\left(t^{h(p)-\omega_i(a)} x^{p-a} f_{i,\omega}\right) = (p-a, h(p) - \omega_i(a)) + \mathcal{Q}_{i,\Omega} \subset \mathcal{Q}_\Omega + (\delta, 0)$$

donde (i, a) es el contenido de fila de p. Además, el punto

$$(p-a, h(p) - \omega_i(a)) = (p-a, h(p))$$

pertenece a la facet del polítopo trasladado $\mathcal{Q}_\Omega + (\delta, 0)$ determinado por un vector normal interior del tipo (v_k, l), $l \in \mathbb{R}_{<0}$.

Debido al último item del lema anterior, no puede haber coeficientes no nulos en la expansión del polinomio

$$t^{h(p)-\omega_i(a)}x^{p-a}f_{i,\omega} \tag{2.20}$$

cuyo multigrado en (x,t) esté en contacto con el borde de $\mathcal{Q}_\Omega + (\delta, 0)$ a menos que correspondan a puntos que se encuentren en la facet determinada por (v_k, l). Esto implica que, si el punto (q,s) es un exponente que aparece en la expansión de (2.20) y q no pertenece a la celda secundaria desplazada $\mathcal{F}_{v_k} + \delta$, entonces (q,s) debe ser un punto interior de $\mathcal{Q}_\Omega + (\delta, 0)$, y esto implica que $s < h(q)$.
Luego, debido a la observación hecha al principio de esta demostración, se tiene que el elemento que ocupa el lugar (p,q) en $mod(\mathbb{M}'(t))$ es cero. Esto da la estructura de $\mathbb{M}_j$ que habíamos anunciado.
Ahora, recordando la Observación 2.10 y usando el tercer ítem del Lema 2.16, se ve que $\mathbb{M}_{(j,v_k)}$ es en realidad una matriz del tipo $\mathbb{M}_{v_k,\lambda_{v_k}}$. Es más, todas las matrices de este tipo aparecen en la productoria, y de aquí el resultado sale directamente. □

Ahora retornamos a la demostración del teorema. La hipótesis inductiva nos dice que $\det(\mathbb{M}_v^i) \neq 0$, $\forall v$, i, y usando el levantamiento realizado en la celda primaria con las funciones $\tilde{\omega}_1, \ldots \tilde{\omega}_n, \tilde{\omega}$, (ver apartado 2.2.1), se tiene que $\det(\mathbb{M}_N) \neq 0$. Es más,

$$\det(\mathbb{M}_N) = c_{0,\mathbf{b_0}}^{M_0} \det(\mathbb{E}_N) \neq 0, \tag{2.21}$$

donde $\mathbb{E}_N$ es la submatriz de $\mathbb{M}_N$ formada por aquellas filas y columnas indexadas por puntos pertenecientes a celdas no mixtas (see [CE1, CE2]). Esto prueba que $\det(\mathbb{M}) \neq 0$. Usando nuevamente hipótesis inductiva, tenemos que cada $\det(\mathbb{M}_v^i)$ se factoriza como $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_{1v}, \ldots, f_{nv})$ por un menor $\det(\mathbb{E}_v^i)$ formado eligiendo filas y columnas no mixtas en $\mathbb{M}_v^i$. Entonces, se tiene

$$init_{\overline{\omega}} \det(\mathbb{M}) = c_{0,\mathbf{b_0}}^{M_0} \det(\mathbb{E}_N) \prod_{\mathcal{F}_v} (\mathrm{Res}(f_{1v}, \ldots, f_{nv}))^{d_v} \prod_{\mathcal{F}_v} \prod_i \det(\mathbb{E}_v^i). \tag{2.22}$$

Eligiendo todas las filas y columnas de $\mathbb{M}$ indexadas por puntos pertenecientes a celdas no mixtas, se puede hacer una versión similar de la Proposición 2.1 para la matriz $\mathbb{E}$ en lugar de $\mathbb{M}$, y se tendrá que $\mathbb{E}$ también tiene una estructura de bloques que nos permitirá escribir su determinante de la manera siguiente:

$$\det(\mathbb{E}) = \det(\mathbb{E}_N) \prod_{\mathcal{F}_v} \prod_i \det(\mathbb{E}_v^i). \tag{2.23}$$

Para completar la demostración del teorema, deberemos mostrar que

$$init_{\overline{\omega}}(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)) = c_{0,\mathbf{b_0}}^{M_0} \prod_{\mathcal{F}_v} (\mathrm{Res}_v(f_{1v}, \ldots, f_{nv}))^{d_v}.$$

Para ello, usaremos el Teorema 4.1 de [Stu2], que nos dice que

$$init_{\overline{\omega}}(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)) = \pm \prod_{\tilde{\mathcal{F}}} (\mathrm{Res}_{\tilde{\mathcal{F}}}(f_0|_{F_0}, \ldots, f_n|_{F_n}))^{d_{\tilde{\mathcal{F}}}},$$

donde $\tilde{\mathcal{F}}$ varía sobre todas las facets de la descomposición coherente mixta dada por $\overline{\omega}$ en la suma de Minkowski

$$\tilde{Q} := Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_n.$$

Explícitamente, tenemos que

$$\tilde{\mathcal{F}} = F_0 + \ldots + F_n$$

con $F_i = conv(\mathcal{A}'_i)$, $\mathcal{A}'_i \subset \mathcal{A}_i$,

$$f_i|_{F_i} := \sum_{a \in \mathcal{A}'_i} c_{i,a}\, x^a,$$

$\mathrm{Res}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ denota la resultante rala asociada a la familia de soportes $(\mathcal{A}'_0, \ldots, \mathcal{A}'_n)$, y $d_{\tilde{\mathcal{F}}}$ es igual al único entero tal que $(\mathrm{Res}_{\tilde{\mathcal{F}}}(f_0|_{F_0}, \ldots, f_n|_{F_n}))^{d_{\tilde{\mathcal{F}}}}$ tiene grado total

$$\sum_{l=0}^{n} \mathcal{MV}(F_0, \ldots, F_{l-1}, F_{l+1}, \ldots, F_n).$$

Usando las mismas observaciones que en el apartado 2.2.1, se encontrará que la descomposición inducida por $\tilde{\omega}$ sobre $\tilde{Q}$ es similar a la que induce sobre $\mathcal{Q}$. Para ser más precisos, obtendremos una gran celda primaria de la forma $\mathbf{b_0} + Q_1 + \ldots + Q_n$, y para cada v tal que $\mathcal{F}_v$ sea una celda secundaria de $\mathcal{Q}$, habrá una celda secundaria $\tilde{\mathcal{F}}_v$ en $\tilde{Q}$. Es más, toda celda maximal en $\tilde{Q}$ es de este tipo.
Para la celda primaria de $\tilde{Q}$, tendremos que

$$\begin{array}{rcll} f_0|_{F_0} & = & c_{0,\mathbf{b_0}}\, x^{\mathbf{b_0}}, & \\ f_i|_{F_i} & = & f_i & i = 1, \ldots, n, \end{array}$$

lo cual implica que el único conjunto esencial en la familia de soportes $(\mathcal{A}'_0, \ldots, \mathcal{A}'_n)$ es el formado por el único elemento $\{\mathbf{b_0}\}$, así que, en este caso, $\mathrm{Res}_{\tilde{\mathcal{F}}}(f_0|_{F_0}, \ldots, f_n|_{F_n}) = c_{0,\mathbf{b_0}}$.
Un cálculo explícito nos dice además que $d_{\tilde{\mathcal{F}}} = \mathcal{MV}(Q_1, \ldots, Q_n) = M_0$.
Tomemos ahora un vector v tal que $\tilde{\mathcal{F}}_v$ sea una celda de dimensión máxima. Esto dice que $f_0|_{F_0}$ tiene un soporte $n-$dimensional, y que

$$f_i|_{F_i} = f_{i_v} \quad i = 1, \ldots, n.$$

Luego, en este caso, el único conjunto esencial es $\{\mathcal{A}_i \cap Q_{i_v}\}_{i=1,\ldots,n}$, y

$$\mathrm{Res}_{\tilde{\mathcal{F}}_v}(f_0|_{F_0}, \ldots, f_n|_{F_n}) = \mathrm{Res}_v(f_{1_v}, \ldots, f_{n_v}).$$

Sólo queda por probar que $d_{\tilde{\mathcal{F}}_v}$ y d_v coinciden. Observemos que

$$\mathcal{MV}(F_1, \ldots, F_n) = \mathcal{MV}(Q_{1_v}, \ldots, Q_{n_v}) = 0$$

debido al hecho de que los soportes están en un hiperplano, luego la suma de Minkowski de cualquier subconjunto de $\{F_1, \ldots, F_n\}$ no puede tener volumen n-dimensional positivo.

Para calcular los otros números incolucrados en la definición de $d_{\tilde{\mathcal{F}}_v}$, vamos a usar la relación recursiva que satisface el volumen mixto ([Ber, CLO]):

$$\mathcal{MV}_n(F_0, F_1, \ldots, F_{l-1}, F_{l+1}, \ldots, F_n) = \sum_{v'} a_{F_0}(v')\, \mathcal{MV}'_{n-1}((F_1)_{v'}, (F_{l-1})_{v'}, (F_{l+1})_{v'}, \ldots, (F_n)_{v'}),$$

donde la suma se toma sobre todos los vectores v' tales que $P_{v'}$ es una facet. Aquí, $\mathcal{MV}'_{n-1}((F_i)_{v'})$ denota el volumen mixto normalizado con respecto al hiperplano $\mathcal{L}_{v'} \subset \mathcal{L}$ ortogonal a v', y

$$a_{F_0}(v') := -\min_{m \in F_0} \langle m, v' \rangle.$$

Como se tenía que $F_i = Q_{i_v}$, resulta que

$$\mathcal{MV}'_{n-1}((F_1)_{v'}, (F_{l-1})_{v'}, (F_{l+1})_{v'}, \ldots, (F_n)_{v'}) = 0,$$

a menos que $v' = v$ o $v' = -v$. Luego,

$$\mathcal{MV}_n(F_0, F_1, \ldots, F_{l-1}, F_l, \ldots, F_n) = (a_{F_0}(v) + a_{F_0}(-v))\, \mathcal{MV}'_{n-1}((F_1)_v, (F_{l-1})_v, (F_{l+1})_v \ldots, (F_n)_v)$$

y, debido a que

$$\text{grado}(\text{Res}_v) = \frac{1}{[\mathcal{L}_v : \mathcal{L}_{\mathcal{A}_{1v}+\cdots+\mathcal{A}_{nv}}]} \sum_{l=1}^{n} \mathcal{MV}'_{n-1}((F_1)_v, (F_{l-1})_v, (F_{l+1})_v \ldots, (F_n)_v),$$

obtenemos que

$$d_{\tilde{\mathcal{F}}_v} = (a_{F_0}(v) + a_{F_0}(-v))\, [\mathcal{L}_v : \mathcal{L}_{\mathcal{A}_{1v}+\cdots+\mathcal{A}_{nv}}], \tag{2.24}$$

y esto es exactamente lo que hemos calculado en la observación 2.10. □

Corolario 2.17 *Cualquiera sea $i = 0, 1, \ldots, n$, el número de puntos que se encuentran en el trasladado de una celda mixta de tipo i es exactamente $\mathcal{MV}(Q_0, \ldots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \ldots, Q_n)$.*

Demostración. Se tienen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \text{grado}_{\text{coeficientes de } f_i}(\det(\mathbb{E})) &= \#\{\text{puntos no mixtos de tipo } i\}, \\ \text{grado}_{\text{coeficientes de } f_i}(\det(\mathbb{M})) &= \#\{\text{puntos no mixtos de tipo } i\} \\ &\quad + \#\{\text{puntos mixtos de tipo } i\}. \end{aligned}$$

□

Observación 2.18 *Al comenzar el algoritmo, pedimos que $\mathbf{b}_0$ sea un vértice de $\mathcal{A}_0$, pero esta condición no es esencial sino que minimiza el número de celdas secundarias. Como una consecuencia inmediata, tenemos que*
Si la familia $\{f_i\}_{i=0,\ldots,n}$ es esencial, entonces cualquier coeficiente genérico $c_{i,a}$ aparece en $\text{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ con potencia más alta igual a $\mathcal{MV}(Q_0, \ldots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \ldots, Q_n)$.

Observación 2.19 *Hemos usado el algoritmo de levantamiento de Canny y Emiris en las celdas primarias para garantizar la construcción de matrices con determinante no nulo, y con el mismo grado que la resultante en los coeficientes de algún f_i. Se puede ver que el teorema principal vale si uno garantiza un método que le permita construir recursivamente matrices de tipo Sylvester cuyo determinante no sea idénticamente cero, y que tenga el mismo grado que la resultante rala en los coeficientes de algún f_i. Esto fue notado por Macaulay en el caso homogéneo (ver [Mac1], section 6a y apartado 1.6 de esta memoria).*

2.2.3 Ejemplos

Ejemplo 2.20 (El Caso Unidimensional) *Hagamos*

$$\mathcal{A}_0 := \{0, 2, 4\}, \ \mathcal{A}_1 := \{4, 8\}.$$

Aquí, el lattice afín $\mathcal{L}$ es igual a $2\,\mathbb{Z}$, y el polítopo P es el segmento unitario $[0, 1]$. Hagamos $\lambda := \frac{5}{2}$, $\delta := \frac{1}{3}$, y $\mathbf{b_0} := 0$. Entonces, haciendo cuentas, se tiene:

- $\mathcal{E} = [4 + \frac{1}{3}, 14 + \frac{5}{6}] \cap 2\,\mathbb{Z} = \{6, 8, 10, 12, 14\}$;
- *los puntos que se encuentran en la celda primaria trasladada son* $6, 8$ *y* 10; *los otros puntos pertenecen a la (única) celda secundaria trasladada.*
- *Hay una única manera de llenar las filas de la matriz $\mathbb{M}$ que están indexadas por puntos que se encuentran en la celda secundaria desplazada. En este caso, tenemos que*

$$\begin{array}{lcll} x^{12} & \mapsto & x^4 f_1 & \textit{(mixta)} \\ x^{14} & \mapsto & x^6 f_1 & \textit{(mixta).} \end{array}$$

- *Si bien hay infinitas funciones de levantamiento $\tilde{\omega}_1$, $\tilde{\omega}$ sobre $\mathcal{A}_1$ y $V(Q) = \{0, \frac{5}{2}\}$, no pueden producir más que dos tipos de descomposición coherente mixta estricta del segmento*

$$[4, 8 + \frac{5}{2}] = Q_1 + Q.$$

Explicitaremos los dos casos:

1.

$$\begin{array}{lcll} x^6 & \mapsto & x^6 f_0 & \textit{(mixta)} \\ x^8 & \mapsto & x^8 f_0 & \textit{(mixta)} \\ x^{10} & \mapsto & x^2 f_1 & \textit{(no mixta),} \end{array}$$

que corresponde a los levantamientos que producen la misma partición que

$$\begin{array}{lcl} \tilde{\omega}_1(4, 8) & = & (0, 1) \\ \tilde{\omega}(0, \frac{5}{2}) & = & (0, 0); \end{array}$$

2.

$$\begin{array}{rcll} x^6 & \mapsto & x^2 f_1 & \textit{(no mixta)} \\ x^8 & \mapsto & x^6 f_0 & \textit{(mixta)} \\ x^{10} & \mapsto & x^8 f_0 & \textit{(mixta)}, \end{array}$$

que corresponde a los levantamientos que producen la mismo partición que

$$\begin{array}{rcl} \tilde{\omega}_1(4,8) & = & (0,0) \\ \tilde{\omega}(0,\frac{5}{2}) & = & (0,1). \end{array}$$

Observar que ambos casos dan esencialmente la misma matriz. La única diferencia es que las filas están indexadas con puntos distintos. Tomando

$$\begin{array}{rcl} f_0 & = & a + bx_1^2 + cx_1^4, \\ f_1 & = & dx_1^4 + ex_1^8, \end{array} \tag{2.25}$$

obtenemos la siguiente matriz

$$\mathbb{M} := \begin{pmatrix} a & b & c & 0 & 0 \\ 0 & a & b & c & 0 \\ 0 & d & e & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & e \end{pmatrix}.$$

La submatriz $\mathbb{E}$ *aquí consiste de la matriz* 1×1 *formada por el elemento* e *que aparece en la fila y columna* 3 *de* $\mathbb{M}$. *Expandiendo* $\det(\mathbb{M})$ *por la última columna, se tiene que*

$$\det(\mathbb{M}) = e \begin{pmatrix} a & b & c & 0 \\ 0 & a & b & c \\ 0 & d & e & 0 \\ 0 & 0 & d & e \end{pmatrix},$$

y entonces se puede ver fácilmente que el determinante de la matriz que quedó en el lado derecho de la igualdad corresponde con una resultante de Sylvester clásica para dos polinomios en una variable, que en este caso es la resultante del sistema (2.25).

Observación 2.21 *Esta situación ocurrirá para cualquier sistema de dos polinomios en una variable, cualquier* λ, $\mathbf{b_0}$ *y cualquier* δ *genérico. El algoritmo producirá siempre la misma matriz de tipo Sylvester dada por Macaulay en [Mac1].*

Ejemplo 2.22 *Vamos a calcular la resultante del sistema dado en el ejemplo 2.4. Tomemos* $\lambda := 1$, *así que* Q *será el cuadrado unitario. Elegiremos como vértice* $\mathbf{b_0}$ *al punto* $(0,0)$. *En este caso,* $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^2$, *la celda primaria es igual a* 3 *veces* $[0,1] \times [0,1]$, *y hay dos celdas secundarias asociadas a los vectores normales interiores* $(-1,0)$ *y* $(0,-1)$.

Hacemos $\delta := (\frac{2}{3}, \frac{1}{2})$ *y obtenemos que* $\mathcal{E}$ *consiste de* 16 *puntos, nueve de ellos en el trasladado de la celda primaria . Explícitamente, tenemos que*

$$\mathcal{E} = \{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 : \ 1 \leq a, b \leq 4\}.$$

En este caso, los polinomios facets $\{f_{1_v}, f_{2_v}\}$ *se pueden considerar (después de un cambio lineal de coordenadas) como polinomios en una variable, las filas correspondientes a puntos pertenecientes a celdas secundarias trasladadas pueden completarse a la Sylvester, como en el ejemplo anterior. Para determinar las entradas de las filas indexadas por puntos en la celda primaria , usaremos las siguientes funciones de levantamiento sobre los conjuntos (ordenados)*
$\mathcal{A}_i = V(Q) = \{(0,0), (1,0)\,(0,1)\,(1,1)\}$:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= (0,1,1,2)\,; \\ \tilde{\omega}_2 &= (0,0,7,7)\,; \\ \tilde{\omega} &= (0,14,0,14)\,. \end{aligned}$$

Observemos que las funciones de levantamiento son restricciones de funciones lineales sobre $\mathbb{R}^2$. *Usando cualquier algoritmo que calcule cápsulas convexas, como el que se presenta en [Emi4], podremos construir la matriz* $\mathbb{M}$, *que tendrá las siguientes características:*

fila	coeficientes de	celda	tipo
x_1x_2	$x_1x_2\,f_1$	*primaria*	*no mixta*
$x_1^2x_2$	$x_1^2x_2\,f_0$	*primaria*	*mixta*
$x_1^3x_2$	$x_1^2x_2\,f_1$	*primaria*	*no mixta*
$x_1x_2^2$	$x_1x_2\,f_2$	*primaria*	*no mixta*
$x_1^2x_2^2$	$x_1^2x_2\,f_2$	*primaria*	*no mixta*
$x_1^3x_2^2$	$x_1^3x_2^2\,f_0$	*primaria*	*mixta*
$x_1x_2^3$	$x_1x_2^2\,f_2$	*primaria*	*no mixta*
$x_1^2x_2^3$	$x_1x_2^2\,f_2$	*primaria*	*no mixta*
$x_1^3x_2^3$	$x_1^2x_2^2\,f_1$	*primaria*	*no mixta*
$x_1^4x_2^3$	$x_1^3x_2^2\,f_1$	$(-1,0)$ – *secundaria*	*mixta*
$x_1^4x_2^2$	$x_1^3x_2^2\,f_2$	$(-1,0)$ – *secundaria*	*no mixta*
$x_1^4x_2$	$x_1^3x_2\,f_2$	$(-1,0)$ – *secundaria*	*mixta*
$x_1x_2^4$	$x_1x_2^3\,f_2$	$(0,-1)$ – *secundaria*	*mixta*
$x_1^2x_2^4$	$x_1^2x_2^3\,f_2$	$(0,-1)$ – *secundaria*	*no mixta*
$x_1^3x_2^4$	$x_1^3x_2^3\,f_2$	$(0,-1)$ – *secundaria*	*no mixta*
$x_1^4x_2^4$	$x_1^3x_2^3\,f_1$	$(0,-1)$ – *secundaria*	*mixta*

Luego, escribiendo $f_i = a_i + b_ix_1 + c_ix_2 + d_ix_1x_2$ *y ordenando los monomios como en la*

tabla, obtendremos que

$$\mathbb{M} = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & 0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_0 & b_0 & 0 & c_0 & d_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 & 0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_2 & b_2 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & c_0 & d_0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & 0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & c_1 & d_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & c_2 & d_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

y

$$\mathbb{E} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & b_2 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & b_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & c_2 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & c_2 \end{pmatrix}.$$

Con la ayuda de Maple, se puede chequear que

$$\det(\mathbb{M}) = \pm \mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_0, f_1, f_n) \det(\mathbb{E}),$$

y que $\det(\mathbb{E})$ *se factoriza como*

$$-c_2^3(-c_1a_2 + a_1c_2)b_2(c_1d_2 - d_1c_2)(-b_2c_1 + b_1c_2).$$

Tambien podemos verificar en este ejemplo, que el término principal de $\det(\mathbb{M})$ *como*

polinomio en a_0 es el determinante de esta matriz:

$$\begin{pmatrix}
a_1 & b_1 & 0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_1 & b_1 & 0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
a_2 & b_2 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & a_2 & b_2 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & b_2 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & b_1 & 0 & c_1 & d_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_1 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_2 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & d_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & d_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & d_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & d_1
\end{pmatrix}, \tag{2.26}$$

y podemos reconocer en esta matriz la estructura de bloques que establece la Proposición 2.1. Explícitamente, tenemos un bloque de 9×9 correspondiente a la celda primaria, y dos bloques asociados a las celdas secundarias, de tamaños 3×3 y 4×4 respectivamente. Calculando el determinante de (2.26), obtendremos:

$$-a_0^2 c_2^3(-c_1a_2 + a_1c_2)b_2(-c_2d_1 + d_2c_1)^2(b_1d_2 - b_2d_1)(c_2b_1 - c_1b_2),$$

y podemos verificar fácilmente que

$$\det(\mathbb{E}) = c_2^3(-c_1a_2 + a_1c_2)b_2(-c_2d_1 + d_2c_1)(c_2b_1 - c_1b_2),$$

y

$$\begin{aligned}
\mathrm{Res}_{(0,-1)}(c_1x_2 + d_1x_1x_2, c_2x_2 + d_2x_1x_2) &= (-c_2d_1 + d_2c_1), \\
\mathrm{Res}_{(-1,0)}(b_1x_1 + d_1x_1x_2, b_2x_2 + d_2x_1x_2) &= (b_1d_2 - b_2d_1)
\end{aligned}$$

como esperábamos.

Ejemplo 2.23 *Queremos calcular la resultante rala de la familia*

$$\begin{aligned}
f_0 &= a_1 + a_2x_1 + a_3x_2, \\
f_1 &= b_1 + b_2x_1 + b_3x_2 + b_4x_1^2 + b_5x_1x_2 + b_6x_2^2, \\
f_2 &= c_1 + c_2x_1 + c_3x_2 + c_4x_1^2 + c_5x_1x_2 + c_6x_2^2 + \\
&\quad + c_7x_1^3 + c_8x_1^2x_2 + c_9x_1x_2^2 + c_{10}x_2^3.
\end{aligned} \tag{2.27}$$

Aquí, $\mathcal{A}_i = \{(a,b) \in \mathbb{N}_0^2 : a + b \leq i + 1\}$, $i = 0, 1, 2$, el lattice $\mathcal{E}$ es $\mathbb{Z}^2$ y los polítopos Q_i son múltiplos enteros del simplex unitario S_2. La resultante rala coincide con la resultante

homogénea del capítulo anterior aplicada a las homogeneizaciones de los f_i (ver [CLO, Mac1]).

Para calcular esta resultante, hacemos $Q := 0$ y $\mathbf{b_0} := (0,0)$. La celda primaria es igual a $5\,S_2$, y hay una única celda secundaria, asociada al vector $(-1,-1)$.

Haciendo $\delta := (\epsilon, \epsilon)$, con $1 >> \epsilon > 0$, tendremos que $\mathcal{E}$ tiene 15 elementos, diez de ellos en la celda primaria trasladada. Para producir la descomposición estricta, usaremos las siguientes funciones de levantamiento definidas sobre los vértices de Q_i, $i = 1,2$ ordenados como sigue: $\{(0,0), (k,0), (0,k)\}$ con $k = 2,3$, y extendidos al resto de los puntos del soporte por linealidad:

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_1 &= (1,0,1) \\ \tilde{\omega}_2 &= (1,1,0). \end{aligned}$$

En este caso, el valor de $\tilde{\omega}$, la función de levantamiento sobre el único vértice de Q, no afecta a la subdivisión. Como en el ejemplo previo, la celda secundaria se llenará a la Sylvester.

La siguiente tabla muestra cómo está conformada la matriz $\mathbb{M}$:

fila	coeficientes de	celda	tipo
$x_1x_2^3$	$x_1x_2\,f_1$	*primaria*	*no mixta*
$x_1x_2^4$	$x_1x_2^2\,f_1$	*primaria*	*no mixta*
$x_1^2x_2^3$	$x_1^2x_2\,f_1$	*primaria*	*no mixta*
$x_1^4x_2$	$x_1x_2\,f_2$	*primaria*	*no mixta*
$x_1^5x_2$	$x_1^2x_2\,f_2$	$(-1,-1)$ – *secundaria*	*mixta*
$x_1x_2^5$	$x_1x_2^3\,f_1$	$(-1,-1)$ – *secundaria*	*mixta*
$x_1^2x_2^4$	$x_1^2x_2^2\,f_1$	$(-1,-1)$ – *secundaria*	*mixta*
$x_1^3x_2^3$	$x_1^3x_2\,f_1$	$(-1,-1)$ – *secundaria*	*mixta*
$x_1^4x_2^2$	$x_1x_2^2\,f_2$	$(-1,-1)$ – *secundaria*	*mixta*
x_1x_2	$x_1x_2\,f_0$	*primaria*	*mixta*
$x_1x_2^2$	$x_1x_2^2\,f_0$	*primaria*	*mixta*
$x_1^2x_2$	$x_1^2x_2\,f_0$	*primaria*	*mixta*
$x_1^3x_2$	$x_1^3x_2\,f_0$	*primaria*	*mixta*
$x_1^3x_2^2$	$x_1^3x_2^2\,f_0$	*primaria*	*mixta*
$x_1^2x_2^2$	$x_1^2x_2^2\,f_0$	*primaria*	*mixta*

Indexada con el orden de la tabla, obtenemos que $\mathbb{M}$ *es igual a*

$$\begin{pmatrix}
b_6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_3 & b_2 & b_5 & b_4 & 0 \\
b_3 & b_6 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_4 \\
0 & 0 & b_6 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_3 & b_2 & b_5 \\
c_6 & c_{10} & c_9 & c_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_3 & c_2 & c_5 & c_4 & c_8 \\
0 & 0 & c_6 & c_4 & c_7 & 0 & c_{10} & c_9 & c_8 & 0 & 0 & c_1 & c_3 & c_2 & c_5 \\
b_1 & b_3 & b_2 & 0 & 0 & b_6 & b_5 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & b_6 & b_5 & b_4 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & b_2 \\
0 & 0 & 0 & b_2 & b_4 & 0 & 0 & b_6 & b_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_3 \\
c_3 & c_6 & c_5 & 0 & 0 & c_{10} & c_9 & c_8 & c_7 & 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_4 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & 0 \\
a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 & a_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 \\
0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & a_2
\end{pmatrix}.$$

En este caso, el factor extraño $\det(\mathbb{E})$ *es el determinante de la submatriz formada eligiendo las primeras cuatro filas y columnas de* $\mathbb{M}$*, y cuyo determinante es igual a*

$$b_6\,(c_7\,b_6^2 - b_4\,b_6\,c_9 + b_4\,b_5\,c_{10}).$$

Observemos que los puntos pertenecientes a celdas no mixtas trasladadas provienen en este ejemplo exclusivamente de la celda primaria , asi que no hay una estructura de bloques significante en esta matriz.

Curiosidad: La matriz construida en este ejemplo es exactamente la misma que construyeron Canny y Emiris en la última sección de [CE2] (ver también la sección 3.1.4 de [Emi1]) para mostrar que, en los algoritmos que ellos produjeron, el factor extraño no siempre es el determinante del menor formado eligiendo todas las filas y columnas indexadas por puntos pertenecientes a celdas no mixtas. Por supuesto, ellos trabajan con otra definición de celdas mixtas y no mixtas.
Para explicitar un poco más, el algoritmo de Canny y Emiris no es recursivo. En este ejemplo ellos producen esta misma matriz aplicando un levantamiento a los polítopos Q_0, Q_1 y Q_2 usando las siguientes funciones lineales: $l_0 := 10^4x_1 + 10^3x_2$, $l_1 := 10^5x_1$ y $l_2 := 10^2x_1 + 10x_2$. Tomando la tapa inferior de los polítopos levantados $(Q_i, l_i(Q_i))$, se tiene una descomposición coherente mixta estricta de la suma de Minkowski $Q_0+Q_1+Q_2$. Usando el mismo δ de este ejemplo, se tiene la misma matriz, pero los puntos que se encuentran en las celdas no mixtas desplazadas están en correspondencia con los monomios

$$\{x_1x_2^3, x_1x_2^4, x_1^2x_2^3, x_1^5x_2\},$$

y el determinante de la matriz cuyas filas y columnas están indexadas por estos puntos es $b_6^3\,c_7$.

2.2.4 Una Revisión de las Fórmulas Clásicas de Macaulay

En este apartado veremos cómo las fórmulas dadas por Macaulay en [Mac1] se pueden recuperar usando los métodos expuestos en este capítulo. Vamos a adoptar una notación más parecida a la del trabajo original de Macaulay, así que nuestro marco general será el de n polinomios genéricos en $n-1$ variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$ de grados totales menores o iguales $m_1, \ldots, m_n$ respectivamente. En el lenguaje de los soportes, esto quiere decir que los $\mathcal{A}_i$ son múltiplos enteros del simplex unitario S_{n-1}. Denotaremos a los polinomios como C_1, $C_2, \ldots,$ C_n. Entonces, se tendrá:

$$supp(C_i) = m_i\, S_{n-1}.$$

Observación 2.24 *En realidad, en el trabajo de Macaulay se trabajaba con n polinomios homogéneos en n variables y se daban fórmulas para calcular su resultante homogénea, pero la resultante homogénea de estos polinomios coincide con la resultante rala de los C_i tal como la definimos en el apartado 2.1.*

Observación 2.25 *Haciendo $t_n = (m_1-1)+(m_2-1)+\ldots+(m_n-1)$ y usando el algoritmo de Canny y Emiris, es también posible construir la matriz clásica de Macaulay M_t para $t = t_n + 1$. Es más, el factor extraño de la formulación de Macaulay es exactamente el menor formado usando todas las filas y columnas indexadas por puntos pertenecientes a celdas no mixtas trasladadas conseguidas con el algoritmo de Canny y Emiris (ver [CE2] y [Emi1]).*

En la sección 3 de [Mac1], para cada $t \geq 0$, Macaulay construye una matriz de tipo Sylvester cuyo determinante denota como $D(n,t)$. Las filas y columnas de la matriz de Macaulay están indexadas por los monomios de grado total menor o igual que t. Además, para $t > t_n$, se tiene que $D(n,t)$ es un múltiplo no trivial de $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(C_1, \ldots, C_n)$, que en ese trabajo recibe el nombre de $R(n,t)$.
Al igual que la nuestra, la construcción de Macaulay es recursiva, en el siguiente sentido: sea ν el vector normal interior $(-1,-1,\ldots,-1)$; entonces se tiene que:

$$C_{1_\nu}, C_{2_\nu}, \ldots, C_{n-1_\nu}. \tag{2.28}$$

es un sistema de $n-1$ polinomios homogéneos en las variables $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Haciendo x_{n-1} igual a 1, se puede pensar a estos polinomios como un sistema en una variable menos con soporte en

$$m_1\, S_{n-2}, m_2\, S_{n-2}, \ldots,\ m_{n-1}\, S_{n-2}.$$

Luego, $D(n-1,j)$ será el determinante de la matriz de Macaulay hecha con las mismas reglas que $D(n,j)$, pero en $n-2$ variables, usando los polinomios (2.28).
En la sección 5 de [Mac1], encontramos el siguiente teorema:

$$\frac{D(n,t)}{R(n,t)} = \prod_{j=0}^{m_n-1} \frac{D(n-1,t-j)}{R(n-1,t-j)} \prod_{k=1}^{t-m_n} D(n-1,k), \tag{2.29}$$

que es la piedra angular del resultado principal de la sección 6, que dice que $R(n,t)$ se puede calcular como el cociente de $D(n,t)$ por el menor obtenido omitiendo las filas y columnas correspondientes a los monomios *reducidos* en todas las variables.
En ese trabajo, un monomio $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \ldots, x_{n-1}^{\alpha_{n-1}}$ se dice reducido si existe un único índice $i \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $x_i^{m_i}$ divide a $x^\alpha x_n^{j-|\alpha|}$.
Macaulay también dio una estructura recursiva para el factor extraño (con su notación, $\Delta(n,t)$) como sigue:

$$\Delta(n,t) = \prod_{j=0}^{m_n-1} \Delta(n-1, t-j) \prod_{k=1}^{t-m_n} D(n-1,k) \tag{2.30}$$

(ver sección 6 de [Mac1]).
Vamos a ver esta construcción a la luz de los resultados presentados en este capítulo. Para ello, debemos tomar algunas precauciones ya que el determinante de la matriz de Macaulay tiene el mismo grado que la resultante en los coeficientes de C_n, así que deberemos modificar nuestro algoritmo de tal manera que el lugar de f_0 lo ocupará aquí C_n; similarmente, el lugar de f_1 lo ocupará C_{n-1}, y así sucesivamente.
El polítopo P en este caso será el simplex unitario S_{n-1}. Dado $t > t_n$, para definir Q, hacemos $\lambda := t - t_n - 1$. Luego, $\mathcal{Q}$ será igual a

$$(m_1 + \ldots + m_n + \lambda)S_{n-1} = \{(m_1, \ldots, m_{n-1}) \in \mathbb{R}^{n-1} : \ 0 \leq m_i \leq t + n - 1\},$$

y $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^{n-1}$. Tomando $\delta = (\epsilon, \ldots, \epsilon)$, con $1 >> \epsilon > 0$, obtenemos que

$$\mathcal{E} = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1} : \ 1 \leq \alpha_i, \ \sum_i \alpha_i \leq t + n - 1\}.$$

Haciendo

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \to & \{\beta \in \mathbb{N}_0^{n-1} : \sum \beta_i \leq t\} \\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) & \mapsto & (\alpha_1 - 1, \ldots, \alpha_{n-1} - 1), \end{array} \tag{2.31}$$

obtenemos una biyección entre los puntos de nuestro soporte y los monomios usados por Macaulay para construir su matriz. Elegimos $\mathbf{b_0} = (0, \ldots, 0)$, y es fácil ver que tendremos una única celda secundaria, que estará asociada con el vector ν, y cuyo ν–diámetro es exactamente m_n.
Usando funciones de levantamiento $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_{n-1}, \tilde{\omega}$ tales como las que se proponen en la sección 8 de [CE2], y tomando luego el revestimiento (superior o inferior), se puede obtener una descomposición estricta de la celda primaria de tal manera que los puntos que se encuentren en las celdas n–mixtas desplazadas estén en correspondencia biyectiva con los monomios reducidos que son divisibles por $x_n^{m_n}$. Funciones de levantamiento con propiedades similares pueden ser usadas en las etapas recursivas.
Comparando las ecuaciones (2.30) y (2.23), se tiene que

$$\prod_{j=0}^{m_n-1} \Delta(n-1, t-j) = \prod_{\mathcal{F}_v} \prod_i \det(\mathbb{E}_v^i).$$

Luego,

$$\det(\mathbb{E}_N) = \prod_{k=1}^{t-m_n} D(n-1,k).$$

2.3 Fórmulas a la Macaulay el Caso General

En esta sección, vamos a lidiar con el caso más general de todos, que es asumir que la familia $\{\mathcal{A}_i\}_{0\leq i\leq n}$ es esencial, sin ninguna otra condición adicional sobre los soportes. Observar que esta hipótesis implica que $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_1,\ldots,f_n)$ es no trivial.
Como antes, hacemos

$$Q_i = conv(\mathcal{A}_i), \quad i = 0,\ldots,n,$$

y

$$\mathcal{Q} := Q_0 + \ldots + Q_n.$$

Se tiene entonces que, como la familia de soportes es esencial, el polítopo $\mathcal{Q}$ debe ser n-dimensional. También, está claro que, en este caso, $\mathcal{L}_{\mathbb{R}} = \mathbb{R}^n$.
Para dar más generalidad a nuestro algoritmo, consideremos un polítopo Q con vértices en $\mathbb{Q}^n$, arbitrario.
Fijamos nuevamente un $\delta \in \mathbb{Q}^n$ genérico en un sentido que precisaremos enseguida. Como en la sección anterior, nuestro algoritmo producirá una matriz de tipo Sylvester $\mathbb{M}$ cuyas filas y columnas estarán indexadas por los puntos enteros de

$$\mathcal{E} := (Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_n + Q + \delta) \cap \mathcal{L}, \tag{2.32}$$

y cuyo determinante será un múltiplo no nulo de la resultante rala. Identificaremos además el factor extraño $\det(\mathbb{M})/\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0,\ldots,f_n)$ como un menor de este determinante.
Como antes, el algoritmo será recursivo sobre la dimensión del polítopo $\mathcal{Q}$, y en sus pasos intermedios usará la técnica de subdivisión mixta de Canny y Emiris (ver [CE1, CE2, Stu2]).

2.3.1 Construcción de la Matriz $\mathbb{M}$.

Dados Q y δ como antes, sea $V(Q) \subset \mathbb{Q}^n$ el conjunto de vértices de Q.
Elijamos un vértice $\mathbf{b_0} \in \mathcal{A}_0$, y consideremos las siguientes funciones de levantamiento:

$$\begin{array}{lccll}
\omega_0: & \mathcal{A}_0 & \to & \mathbb{R} & \\
 & \mathbf{b_0} & \mapsto & 1 & \\
 & b & \mapsto & 0 & \text{si } b \neq \mathbf{b_0} \\
 & & & & \\
\omega_i: & \mathcal{A}_i & \to & \mathbb{R} & \\
 & b & \mapsto & 0 & \forall b \in \mathcal{A}_i, \quad i = 1,\ldots,n \\
 & & & & \\
\omega: & V(Q) & \to & \mathbb{R} & \\
 & b & \mapsto & 0 & \forall b \in V(Q).
\end{array} \tag{2.33}$$

Definimos

$$\Omega := \left(\omega_i(b)_{b\in\mathcal{A}_i,\, i=0,1,\ldots,n},\ \omega(b)_{b\in V(Q)}\ \right) \in \mathbb{R}^{m+\#V(Q)}$$

y consideramos los polítopos levantados en $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\begin{aligned} Q_{i,\Omega} &:= conv\{(a,\omega_i(a)) : a \in \mathcal{A}_i\} \\ Q_\Omega &:= conv\{(b,\omega(b)) : b \in V(Q)\}. \end{aligned}$$

Al proyectar las caras superiores (es decir aquellas que tienen vector normal interior con última coordenada negativa) de los $Q_{i,\Omega}$ (resp. Q_Ω) obtenemos una *descomposición coherente mixta* $\Delta_{i,\Omega}$ (resp. Δ_Ω) de los polítopos Q_i (resp. Q).
Similarmente, al proyectar las caras superiores de la suma de Minkowski

$$Q_{0,\Omega} + Q_{1,\Omega} + \ldots + Q_{n,\Omega} + Q_\Omega,$$

obtenemos una descomposición coherente mixta de

$$\mathcal{Q} := Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_n + Q. \tag{2.34}$$

Cada celda en esta descomposición es de la forma

$$F = F_0 + F_1 + \ldots + F_n + F,$$

donde F_i (resp. F) es una celda en $\Delta_{i,\Omega}$, (resp. Δ_Ω).
Dado que las funciones de levantamiento que usamos en (2.3) son esencialmente triviales, se pueden reconocer las siguientes celdas en $\Delta_{1,\Omega},\ldots,\Delta_{n,\Omega},\Delta_\Omega$:

- Los polítopos $Q_1,\ldots,Q_n,Q$, que son la proyección de las caras determinadas por el vector $(0,-1) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$;
- Para cada $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, las caras $Q_{1_v},\ldots,Q_{n_v},Q_v$, que son la proyección de las caras de $\mathcal{Q}_\Omega$ determinadas por los vectores (v,α), donde α es un número negativo.

Sobre $\Delta_{0,\Omega}$ se tiene lo siguiente: la proyección de la cara correspondiente a $(0,-1)$ es el conjunto formado por el único elemento $\{\mathbf{b_0}\}$. Por otro lado, es fácil de verificar que, cualquiera sea $k \geq 0$, toda celda de dimensión k en la descomposición es, o bien una cara de dimensión k que contiene a $\{\mathbf{b_0}\}$, o bien la cápsula convexa entre $\mathbf{b_0}$ y una cara de Q_0 de dimensión $k-1$ que no contiene a este punto. La llamaremos $F_{0,v}$, donde v denota alguna normal interior entera primitiva correspondiente a esa cara.
Luego, todas las celdas de la descomposición de $\mathcal{Q}$ son como sigue:

- $\{\mathbf{b_0}\} + Q_1 + \ldots + Q_n + Q$. Esta celda se dirá *primaria* . Observar que siempre tiene dimensión n debido a que la familia $\{\mathcal{A}_i\}_{i=0,1,\cdots,n}$ es esencial.
- $F_{0,v} + Q_{1_v} + \ldots + Q_{n_v} + Q_v$, para algunos $v \in \mathbb{R}^n$. Aquellas que tengan dimensión máxima, serán llamadas celdas *secundarias*, y estarán asociadas a vectores $v \in \mathbb{R}^n$ no nulos .

Tal como en la sección anterior, la matriz de Sylvester que vamos a construir tendrá en cuenta si los puntos están en un desplazamiento infinitesimal de la celda primaria o no. La primer suposición que haremos sobre δ es que todos los puntos de $(\mathcal{Q}+\delta)\cap\mathcal{L}$ pertenezcan al interior del trasladado en δ de alguna celda maximal (primaria o secundaria)

Puntos en la Celda Primaria Trasladada.

Procederemos exactamente como en la sección anterior: elegimos funciones de levantamiento genéricas $\tilde{\omega}_1, \ldots, \tilde{\omega}_n, \tilde{\omega}$ con dominios en $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$, $V(Q)$ respectivamente, de manera tal que produzcan una *descomposición coherente mixta estricta* de la suma de Minkowski

$$Q_1 + \ldots + Q_n + Q$$

tomando su revestimiento superior. Esto implica que cada celda $n-$dimensional $\mathcal{F}$ en la descomposición se escribe como

$$F_1 + F_2 + \ldots + F_n + F,$$

donde F_i es una celda de $\Delta_{i,\tilde{\omega}}$, F es una celda de $\Delta_{\tilde{\omega}}$ y

$$n = \dim(F_1) + \ldots + \dim(F_n) + \dim(F).$$

Como consecuencia, se tiene que al menos una de estas dimensiones es igual a 0.
El *contenido de fila* de un punto $p \in (\{\mathbf{b_0}\} + Q_1 + \ldots + Q_n + Q + \delta) \cap \mathcal{L}$ será un par (i, a) definido como sigue:

- si $p - \delta - \mathbf{b_0}$ está en una celda que se escribe como $\mathcal{F} = F_1 + \ldots + F_n + F$, y $\dim(F_j) = 0$ para algún $j \in \{1, \ldots, n\}$, i será el mayor índice tal que $\dim(F_i) = 0$, y a el único punto de la celda F_i (o sea $F_i = \{a\}$).
- Si $\dim(F_j) > 0 \, \forall j$, (o sea $\dim(F) = 0$), entonces $i := 0$ y $a := \mathbf{b_0}$.

Diremos que la celda $\mathcal{F}$ es *mixta de tipo* 0 si la última condición se cumple; de otro modo, se llamará *no mixta.*
Ahora procederemos a definir los elementos de la matriz $\mathbb{M}$ que se encuentren en las filas indexadas por aquellos puntos p que se encuentren en

$$(\{\mathbf{b_0}\} + Q_1 + \ldots + Q_n + Q + \delta) \cap \mathcal{L}$$

como sigue: cualquiera sea $p' \in \mathcal{E}$, el elemento de $\mathbb{M}$ indexado por (p, p') será igual al coeficiente de $x^{p'}$ en la expansión del polinomio $x^{p-a} f_i(x)$ donde (i, a) es el contenido de fila de p.

Puntos en las Celdas Secundarias Trasladadas.

Aquí aparece la parte diferente, y deberemos usar el paso recursivo. Sea $v \in \mathbb{R}^n$ tal que

$$\mathcal{F}_v = F_{0,v} + Q_{1v} + \ldots + Q_{nv} + Q_v \tag{2.35}$$

es una celda maximal en la descomposición de $\mathcal{Q}$. Consideramos la familia de polinomios asociada a la v-facet

$$f_{i_v}(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{a \in Q_{i_v} \cap \mathcal{A}_i} c_{i,a} \, x^a \; (i = 1, \ldots, n). \tag{2.36}$$

Después de un cambio de coordenadas como en (2.9), esta familia se puede tratar como un conjunto de n polinomios en $n-1$ variables con soporte en un lattice de dimensión $n-1$. Lo que no puede afirmarse es que la familia de soportes

$$\{Q_{i_v} \cap \mathcal{A}_i\}_{1 \leq i \leq n} \tag{2.37}$$

sea esencial, pero seguro que existe una subfamilia de índices $1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n$, tal que $\{Q_{i_{j_v}} \cap \mathcal{A}_{i_j}\}$ es esencial. Tampoco podemos afirmar que sea el único subconjunto esencial dentro de la familia (2.37) (esta información será necesaria más adelante), pero podemos suponer sin pérdida de generalidad que hay una subfamilia esencial que es minimal respecto de la inclusión, y es la siguiente:

$$\{Q_{i_v} \cap \mathcal{A}_i\}_{1 \leq i \leq k}. \tag{2.38}$$

Esto dice que la resultante rala de los polinomios $f_{1_v}, f_{2_v}, \cdots, f_{k_v}$ respecto de la familia de soportes (2.38) es distinta de uno. La notaremos como

$$\mathrm{Res}_v(f_{1_v}, \ldots, f_{k_v}). \tag{2.39}$$

Entonces, la suma

$$Q_{1_v} + Q_{2_v} + \cdots + Q_{k_v} \tag{2.40}$$

está contenida en una variedad lineal de codimensión $n-k+1$ y, al igual que en la sección anterior, se puede ver que al intersecar

$$(F_{0,v} + Q_{1_v} + \ldots + Q_{n_v} + Q_v + \delta) \cap \mathcal{L}$$

con variedades paralelas a (2.40), este conjunto se puede escribir como una unión disjunta de familias del tipo

$$\left(Q_{1_v} + \ldots + Q_{k_v} + \tilde{Q}_v + \delta\right) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{A}_{1_v} + \cdots + \mathcal{A}_{n_v}}. \tag{2.41}$$

donde $\tilde{Q}_v$ es un polítopo con vértices en $\mathbb{Q}^n$, contenido en un hiperplano paralelo a (2.40). Consideramos la familia

$$\{f_{i_v}(x_1, \ldots, x_n)\}_{1 \leq i \leq k}. \tag{2.42}$$

Ahora que bajamos la dimensión, podemos usar la hipótesis inductiva y construir, para cada subfamilia (2.41), una matriz cuadrada $\mathbb{M}_{v,\tilde{Q}}$ indexada por todos los puntos de (2.41) cuyo determinante será un múltiplo no trivial de la resultante en (2.39), y con el mismo grado que $\mathrm{Res}_v(f_{1_v}, \ldots, f_{k_v})$ en los coeficientes de f_{1_v}.

Tal como ocurre en la celda primaria, cada una de estas matrices tendrá en la fila correspondiente a un punto p, las coordenadas en la base de monomios de la expansión de $x^{p-a} f_{i_v}(x)$ para algún par (a, i). Para definir los elementos que irán en la fila indexada por p de la matriz $\mathbb{M}$ procederemos como antes, el lugar indexado (p, p') lo ocupará el coeficiente de $x^{p'}$ del polinomio $x^{p-a} f_i(x)$.

El procedimiento para decidir cuándo un punto estará en una celda mixta o no, también es diferente en este caso, en parte debido a que hemos elegido un polítopo Q cualquiera.

Definición 2.26 *Diremos que un vector v es "admisible" si hay una única subfamilia esencial dentro de* (2.37).

Retomemos la notación del Teorema 4.1 de [Stu2] que ya hemos visto en la demostración del teorema 2.12. Se tiene:

$$init_{\overline{\omega}}(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0,\ldots,f_n)) = \pm\prod_{\tilde{\mathcal{F}}}(\mathrm{Res}_{\tilde{\mathcal{F}}}(f_0|_{F_0},\ldots,f_n|_{F_n}))^{d_{\tilde{\mathcal{F}}}},$$

donde $\tilde{\mathcal{F}}$ varía sobre todas las facets de la descomposición coherente mixta dada por $\overline{\omega}$ en

$$\tilde{Q} := Q_0 + Q_1 + \ldots + Q_n.$$

Como antes, aquí también se tiene

$$\begin{array}{l}\overline{\omega} := (\omega_0,\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \mathbb{R}^m\\ \tilde{\mathcal{F}} = F_0 + \ldots + F_n,\\ F_i = conv(\mathcal{A}'_i),\ \mathcal{A}'_i \subset \mathcal{A}_i,\\ f_i|_{F_i} := \sum_{a\in\mathcal{A}'_i} c_{i,a}\, x^a,\end{array}$$

y $\mathrm{Res}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ denota la resultante rala asociada a la familia de soportes $(\mathcal{A}'_0,\ldots,\mathcal{A}'_n)$, y $d_{\tilde{\mathcal{F}}}$ es igual al único entero tal que $(\mathrm{Res}_{\tilde{\mathcal{F}}}(f_0|_{F_0},\ldots,f_n|_{F_n}))^{d_{\tilde{\mathcal{F}}}}$ tiene grado total

$$\sum_{l=0}^{n}\mathcal{MV}(F_0,\ldots,F_{l-1},F_{l+1},\ldots,F_n).$$

Observación 2.27 *Observar que* $\mathrm{Res}_{\tilde{\mathcal{F}}} \neq 1$ *si y solamente si* $\tilde{\mathcal{F}}$ *está asociada a un vector v admisible.*

En esta situación, podemos "elegir" los puntos mixtos como sigue:

- Si el vector v no es admisible, entonces *todos* los puntos de $(\mathcal{F}_v + \delta) \cap \mathcal{L}$ serán no mixtos.
- Si el vector v es admisible, entonces elegimos $d_{\tilde{\mathcal{F}}_v}$ de las matrices $\mathbb{M}_{v,\tilde{Q}}$ que se consiguen al partir la celda $\mathcal{F}_v + \delta$ en conjuntos de la forma (2.41). Veremos enseguida, en la proposición 2.28, que esto es siempre posible.
  - Si un punto pertenece a una de las $d_{\tilde{\mathcal{F}}_v}$ matrices $\mathbb{M}_{v,\tilde{Q}}$, y era "mixto" en esa matriz, entonces será mixto en la matriz $\mathbb{M}$.
  - Los otros puntos de $\mathbb{M}$ serán "no mixtos".

Nuevamente, es fácil ver que el caso $n = 1$, no es otra cosa que un "reencuentro" con las matrices clásicas de Sylvester ([Syl, Mac1]).

Proposición 2.28 *Si v es admisible, el número de conjuntos (2.41) que se forman al partir la celda $\mathcal{F}_v + \delta$ es mayor o igual que $d_{\tilde{\mathcal{F}}_v}$.*

Demostración de la Proposición: Por un lado, se tiene que (Teorema 4.1 de [Stu2]):

$$init_{\overline{\omega}}(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0,\ldots,f_n)) = \pm \prod_{\tilde{\mathcal{F}}} (\mathrm{Res}_{\tilde{\mathcal{F}}}(f_0|_{F_0},\ldots,f_n|_{F_n}))^{d_{\tilde{\mathcal{F}}}}.$$

Por el otro, $init_{\overline{\omega}}(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0,\ldots,f_n))$ es en realidad la resultante $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}$ aplicada a la familia

$$c_{0,\mathbf{b_0}}x^{\mathbf{b_0}}, f_1, \cdots, f_n.$$

Para obtener una fórmula más útil de $d_{\tilde{\mathcal{F}}_{v_1}}$, usamos la fórmula [1] dada por Minimair para calcular $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(c_{0,\mathbf{b_0}}x^{\mathbf{b_0}}, f_1, \cdots, f_n)$ (cf. Theorem 1 de [Min]), que en la situación en la que nos encontramos se lee así:

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(c_{0,\mathbf{b_0}}x^{\mathbf{b_0}}, f_1, \cdots, f_n) = c_{0,\mathbf{b_0}}^{M_0} \prod_{v} \mathrm{Res}_{\mathcal{A}_{1v},\cdots,\mathcal{A}_{nv}}(f_{1v},\cdots,f_{nv})^{e_v},$$

donde el producto se toma sobre todos los vectores normales interiores primitivos de las facets del polítopo de Newton de $\mathcal{A}_1 + \cdots + \mathcal{A}_n$, y

$$e_v = (a_{F_0}(v) + a_{F_0}(-v))\ [\mathcal{L}_v : \mathcal{L}_{\mathcal{A}_{1v}+\cdots+\mathcal{A}_{nv}}]\, \mathbf{e}'_{\mathbf{v}}, \tag{2.43}$$

donde

- F_0 es la cápsula convexa de $\{\mathbf{b_0}\} \cup \mathcal{A}_{0v}$,
- a_{F_0} tiene el mismo significado que en la demostración del teorema 2.12,
- $\mathcal{L}_v$ es el sublattice de $\mathcal{L}$ ortogonal a v,
- $[A : B]$ denota el índice del lattice B respecto del lattice A,
- $\mathcal{L}_C$ es el lattice afín generado por el conjunto C,
- en el caso en que exista una única subfamilia esencial $\{A_{i_1},\cdots A_{i_m}\}$ de $\{\mathcal{A}_{1v},\cdots,\mathcal{A}_{nv}\}$, $\mathbf{e}'_{\mathbf{v}}$ se define como sigue:
  - Hacemos $\mathcal{L}_{\mathcal{A}_{1v}+\cdots+\mathcal{A}_{nv}} = \mathcal{L}_{A_{i_1}+\cdots+A_{i_m}} \oplus \mathcal{L}'$. Sea π la proyección sobre el segundo factor.
  - $\mathbf{e}'_{\mathbf{v}} = \mathcal{MV}\left(\pi(Q_{iv})\right)_{i\notin\{i_1,\cdots,i_m\}}$, donde $\mathcal{MV}(\cdot)$ denota el volumen mixto normalizado a $\mathcal{L}'$.

Ahora pasemos a la demostración de la proposición. Podemos suponer sin perder generalidad que $Q = 0$, ya que agregar un polítopo a la suma no puede hacer decrecer la cantidad de conjuntos de la forma (2.41) en $\mathcal{F}_v + \delta$. También supongamos s.p.g. que la única familia esencial es $\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_m$.

[1] Observar que estamos dentro de las hipótesis de la fórmula de Minimair dado que, como $\mathcal{A}_0,\cdots,\mathcal{A}_n$ es esencial, entonces el único subconjunto esencial de la familia $\{\mathbf{b_0}\},\mathcal{A}_1,\cdots,\mathcal{A}_n$ es $\{\mathbf{b_0}\}$.

Tomemos v admisible. Está claro que entonces e_v y $d_{\mathcal{F}_v}$ coinciden. Siguiendo la construcción de la matriz $\mathbb{M}$ para el caso generalizadamente no mixto, se tiene que $(\mathcal{F}_v + \delta) \cap \mathcal{L}$ se escribe como una unión disjunta de $(a_{F_0}(v) + a_{F_0}(-v))\,[\mathcal{L}_v : \mathcal{L}_{\mathcal{A}_{1_v}+\cdots+\mathcal{A}_{n_v}}]$ conjuntos de la forma

$$(Q_{1_v} + \cdots + Q_{n_v} + Q_v) \cap \mathcal{L}_{\mathcal{A}_{1_v}+\cdots+\mathcal{A}_{n_v}},$$

donde Q_v es un polítopo con vértices racionales y paralelo a $\mathcal{L}_v$. De cada una de estas particiones se pueden obtener tantos conjuntos de la forma (2.41) como puntos enteros hayan en $\pi(Q_{m+1_v}) + \cdots + \pi(Q_{n_v}) + \pi(Q_v)$. Esta cantidad es siempre mayor o igual que la cantidad de puntos enteros que hay en $\pi(Q_{m+1_v}) + \cdots + \pi(Q_{n_v})$, y este número es siempre mayor o igual que $\mathbf{e}'_v$. Esto completa la demostración. □

2.3.2 Formula a la Macaulay Generalizada

El que sigue puede considerarse como el resultado central de este capítulo, y una extensión del teorema 2.12:

Teorema 2.29 *La matriz $\mathbb{M}$ es una matriz de tipo Sylvester genéricamente no singular. Además, se tiene la siguiente fórmula a la Macaulay:*

$$\det(\mathbb{M}) = \mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n) \det(\mathbb{E}),$$

donde $\mathbb{E}$ es la submatriz cuadrada de $\mathbb{M}$ formada omitiendo todas las filas y columnas indexadas por puntos que se encuentren en celdas mixtas.

Es fácil ver que que $\mathbb{E}$ no contiene coeficientes de f_0, así que como corolario inmediato se tiene que $\det(\mathbb{M})$ tiene el mismo grado que $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ en los coeficientes de f_0. Reemplazando el papel de f_0 por el de cualquier otro f_i, conseguiremos también una fórmula para calcular $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ como el máximo común divisor de los determinantes de $n+1$ matrices resultantes.

Demostración. La misma demostración que se hizo en la prueba del teorema 2.12 se puede aplicar a esta situación para ver que $\mathbb{M}$ es una matriz de Sylvester. De ahí se tiene inmediatamente que $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ divide a $\det(\mathbb{M})$ usando el argumento usual dado en la proposición 2.14.
Tal como antes, probaremos que $\det(\mathbb{M})$ no es idénticamente cero mostrando que su término más alto con respecto a $\overline{\omega}$ es no nulo.
Es fácil verificar que en este caso también se tiene

$$\mathrm{grado}_{\text{coeficientes de } f_0}(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)) = \mathrm{grado}_{\text{coeficientes de } f_0}(\det(\mathbb{M})).$$

Luego,

$$\frac{\det(\mathbb{M})}{\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)} = \frac{init_{\overline{\omega}}(\det(\mathbb{M}))}{init_{\overline{\omega}}(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n))}$$

$$= \frac{\text{coeficiente de } c_{0,\mathbf{b}_0}^{M_0} \text{ en } \det(\mathbb{M})}{\text{coeficiente de } c_{0,\mathbf{b}_0}^{M_0} \text{ en } \mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0,\ldots,f_n)}.$$

Veremos que el numerador de esta última fracción es no nulo, y que el cociente es $\det(\mathbb{E})$, haciendo inducción en n. El caso inicial ya fue cubierto en la sección anterior. Supongamos $n > 1$, e introduzcamos nuevamente un parámetro t de deformación como antes:

$$\begin{array}{lcll} f_{0,\omega} & = & c_{0,\mathbf{b}_0}\, t\, x^{\mathbf{b}_0} + \sum_{a\in\mathcal{A}_i\setminus\{\mathbf{b}_0\}} c_{i,a}x^a, & \\ f_{i,\omega} & = & f_i & i \geq 1. \end{array}$$

Consideramos la matriz modificada $\mathbb{M}\left(c_{i,a}\, t^{\omega_i(a)}\right)$. Para $p \in \mathcal{E}$, sea $h(p)$ el mayor número racional tal que

$$(p-\delta, h(p)) \in \mathcal{Q}_\Omega = Q_{0,\Omega} + Q_{1,\Omega} + \ldots + Q_{n,\Omega} + Q_\Omega.$$

Para cada $p \in \mathcal{E}$, multiplicaremos todos los elementos la fila correspondiente a p por $t^{h(p)-\omega_i(a)}$, donde -como es usual- (i,a) denota el contenido de fila de p. Llamemos a la matriz que se obtiene de esta manera $\mathbb{M}'(t)$. No es difícil ver que el coeficiente principal de $\det(\mathbb{M}'(t))$ es $init_{\overline{\omega}}(\det(\mathbb{M}))$.
Los siguientes enunciados se demuestran mutatis mutandis los de la sección anterior:

Lema 2.30 *La función h verifica lo siguiente:*

1. $0 < h(p) \leq 1$, *para todo* $p \in \mathcal{E}$.
2. $h(p) = 1$ *si y solamente si* $p-\delta$ *pertenece a la celda primaria .*
3. *Si* $p-\delta$ *y* $q-\delta$ *pertenecen ambos a la misma celda secundaria, digamos* $\mathcal{F}_v$, *entonces*
$$h(p) = h(q) \iff \langle p, v\rangle = \langle q, v\rangle.$$
4. *Si* $p \in (\mathcal{F}_v + \delta) \cap \mathcal{L}$, *su contenido de fila es* (i,a), *y* $v' \neq \lambda v$, $\lambda > 0$, *entonces*
$$((p-\delta-a, h(p)) + (Q_{i,\Omega} \times \{0\})) \cap \mathcal{Q}_{\Omega(v,l')} = \emptyset, \ \forall\, l' \in \mathbb{R}_{<0}; \tag{2.44}$$
donde $\mathcal{Q}_{\Omega(v,l')} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ *es la cara de* $\mathcal{Q}_\Omega$ *determinada por* (v,l').

Proposición 2.2 *Sean* $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_N = 1$ *los distintos valores que toma* $h(p)$ *al variar* p *entre los puntos de* $\mathcal{E}$. *Entonces, el coeficiente principal de* $\det(\mathbb{M}'(t))$ *(como polinomio en* t*) se factoriza como*

$$\prod_{j=1}^{N} \det\left(\mathbb{M}_j\right), \tag{2.45}$$

donde $\mathbb{M}_j$ *es la submatriz cuadrada de* $\mathbb{M}$ *construida eligiendo todas las filas y columnas indexadas por aquellos puntos* p *tales que* $h(p) = \gamma_j$.
Este producto también se puede factorizar como sigue:

$$\det(\mathbb{M}_N) \prod_{\mathcal{F}_v} \left(\det(\mathbb{M}_v^1)\ldots\det(\mathbb{M}_v^{d_v})\right), \tag{2.46}$$

donde

1. *la productoria se toma sobre todas las celdas secundarias* $\mathcal{F}_v$,

2. d_v *es el número de conjuntos de la forma (2.41) que hay (para cada* v*),*

3. *las* $\mathbb{M}_v^i$ *son matrices del tipo* $\mathbb{M}_{v,\tilde{Q}}$ *definidas después de* (2.42),

Retornando a la demostración del teorema, por la hipótesis inductiva, $\det(\mathbb{M}_v^i) \neq 0$, $\forall v$, i y, por la misma razón de antes,

$$\det(\mathbb{M}_N) = c_{0,\mathbf{b}_0}^{M_0} \det(\mathbb{E}_N) \neq 0$$

donde $\mathbb{E}_N$ es la submatriz de $\mathbb{M}_N$ formada por aquellas filas y columnas indexadas por puntos pertenecientes a celdas no mixtas. Esto dice que $\det(\mathbb{M}) \neq 0$, y que

$$init_{\overline{\omega}} \det(\mathbb{M}) = c_{0,\mathbf{b}_0}^{M_0} \det(\mathbb{E}_N) \prod_{\mathcal{F}_{v_1}} \left(\det(\mathbb{M}_{v_1}^1) \ldots \det(\mathbb{M}_{v_1}^{d_{v_1}})\right) \prod_{\mathcal{F}_{v_2}} \left(\det(\mathbb{M}_{v_2}^1) \ldots \det(\mathbb{M}_{v_2}^{d_{v_2}})\right), \tag{2.47}$$

donde $\mathcal{F}_{v_1}$ varía sobre las celdas secundarias asociadas a vectores v_1 admisibles, y $\mathcal{F}_{v_2}$ sobre las celdas asociadas a los vectores v_2 que no lo son.
Ahora, eligiendo todas las filas y columnas de $\mathbb{M}$ indexadas por puntos pertenecientes a celdas no mixtas, se puede hacer una versión similar de la proposición 2.1 para la matriz $\mathbb{E}$ en lugar de $\mathbb{M}$, y se tendrá que $\mathbb{E}$ también tiene una estructura de bloques que nos permitirá escribir su determinante de la manera siguiente:

$$\det(\mathbb{E}) = \det(\mathbb{E}_N) \prod_{\mathcal{F}_{v_1}} \prod_{i=1}^{d_{\mathcal{F}_{v_1}}} \det(\mathbb{E}_{v_1}^i), \prod_{i > d_{\mathcal{F}_{v_1}}} \det(\mathbb{M}_{v_1}^i) \prod_{\mathcal{F}_{v_2}} \prod_i \det(\mathbb{M}_{v_2}^i) \tag{2.48}$$

y de aquí se concluye fácilmente la demostración del teorema, usando la proposición 2.28. □

Corolario 2.31 *Cualquiera sea* $i = 0, 1, \ldots, n$, *el número de puntos que se encuentran en el trasladado de una celda mixta de tipo* i *es exactamente* $\mathcal{MV}(Q_0, \ldots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \ldots, Q_n)$.

Corolario 2.32 *Si la familia* $\{f_i\}_{i=0,\ldots,n}$ *es esencial, entonces cualquier coeficiente* $c_{i,a}$ *aparece en* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \ldots, f_n)$ *con potencia más alta igual a* $\mathcal{MV}(Q_0, \ldots, Q_{i-1}, Q_{i+1}, \ldots, Q_n)$.

Observación 2.33 *Aquí también vale lo comentado en la observación 2.19: el teorema principal vale si uno garantiza un método que le permita construir recursivamente matrices de tipo Sylvester con determinante no nulo y el mismo grado que la resultante rala en los coeficientes de algún* f_i.

2.3.3 Ejemplos

Ejemplo 2.34 *Calcularemos la resultante del ejemplo 2.5, tomando* $\mathbf{b_0} = (0,0)$, $Q = 0$ *y* $\delta = (0, \frac{1}{3})$. *Los polígonos* Q_i *son la cápsula convexa de los* $\mathcal{A}_i$ *dados en el ejemplo, y* $\mathcal{L} = \mathbb{Z}^2$.
La celda primaria será $Q_1 + Q_2$, *y tendremos cuatro celdas secundarias:*

vector asociado	tipo
$(2,-1)$	*2-mixta*
$(-1,-2)$	*1-mixta*
$(-1,-1)$	*no mixta*
$(-3,-1)$	*2-mixta.*

(2.49)

Para subdividir la celda primaria , hacemos $\tilde{\omega}_1 = (0,0,0)$ *y* $\tilde{\omega}_2 = (1,1)$. *Esta subdivisión produce dos celdas: una copia de* Q_1, *y la única celda 0-mixta de la subdivisión. El conjunto* $\mathbb{E}$ *en este caso tiene* 23 *elementos, y asociaremos la única celda no mixta de* (2.49) *con* f_2. *Con la ayuda de* MAPLE *calculamos la matriz* $\mathbb{M}$:

$$\begin{bmatrix}
c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_2 & 0 \\
0 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 \\
b_2 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & b_2 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & b_2 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2
\end{bmatrix}.$$

Su determinante es igual a $c_1^4 \operatorname{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, f_1, f_2)$. *Aquí, el factor extraño es el primer menor principal de tamaño* 4×4.

Ejemplo 2.35 *Calculemos la resultante del mismo sistema dado en el ejemplo anterior, pero esta vez tomaremos* Q *como el cuadrado unitario* $[0,1] \times [0,1]$, *y* $\delta = (\epsilon, \frac{1}{3})$, *con*

$0 < \epsilon << \frac{1}{3}$. *El punto inicial* $\mathbf{b}_0$ *seguirá siendo* $(0,0)$. *La celda primaria ahora será igual a* $Q_1 + Q_2 + Q$, *y esta vez tendremos* 6 *celdas secundarias:*

vector asociado	tipo
$(2,-1)$	*2-mixta*
$(0,-1)$	*no mixta*
$(-1,-2)$	*1-mixta*
$(-1,-1)$	*no mixta*
$(-3,-1)$	*2-mixta*
$(-1,0)$	*no mixta.*

Observar que las nuevas celdas secundarias están asociadas a vectores normales interiores de Q *que no definen ninguna facet en* $Q_0 + Q_1 + Q_2$. *Subdivimos la celda primaria usando*

$$\begin{array}{lll} \tilde{\omega}_1(0,0) = 1, & \tilde{\omega}_1(1,2) = 1, & \tilde{\omega}_1(2,0) = 0, \\ \tilde{\omega}_2(1,1) = 1, & \tilde{\omega}_2(3,0) = 0, & \\ \tilde{\omega}(0,0) = 8, & \tilde{\omega}(1,0) = 4, & \tilde{\omega}(0,1) = 4, \quad \tilde{\omega}(1,1) = 0. \end{array}$$

Si asociamos las celdas secundarias no mixtas con f_1, *la matriz* $\mathbb{M}$ *es de* 36×36, *su determinante es igual a* $c_1^3 b_3^9 c_2^3 b_2^2$ *veces la resultante. La submatriz* $\mathbb{E}$ *es la siguiente:*

$$\begin{bmatrix}
b_2 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3
\end{bmatrix}.$$

Su determinante es el factor extraño, como era de esperarse.

Ejemplo 2.36 *Vamos a ver en este ejemplo que la desigualdad establecida por la proposición 2.28 puede ser estricta. Consideremos la siguiente familia esencial:*

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{A}_0 & = & \{(0,0);(1,0);(0,1);(1,1)\} \\ \mathcal{A}_1 & = & \{(0,0);(1,1)\} \\ \mathcal{A}_2 & = & \{((1,0);(0,1)\}. \end{array}$$

Notaremos a los polinomios genéricos con esos soportes como

$$\begin{aligned} f_0 &= a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy \\ f_1 &= b_1x + b_2y \\ f_2 &= c_1 + c_2xy. \end{aligned}$$

Tomaremos $\mathbf{b_0} = (0,0)$, $\delta = (\epsilon, \frac{1}{3})$, *con* $0 < \epsilon << \frac{1}{3}$, *y* Q *como el triángulo de vértices* $(0,0)$, $(1,0)$ *y* $(1,1)$.
Entonces, se tiene lo siguiente:

- *La celda primaria es* $Q_1 + Q_2 + Q$;
- *Hay cinco celdas secundarias, asociadas a* $(1,-1)$, $(0,-1)$, $(-1,-1)$, $(-1,0)$ *y* $(-1,1)$.
- *Se tiene que* $\left(\mathcal{F}_{(1,-1)} + \delta\right) \cap \mathbb{Z}^2$ *consiste de dos puntos, mientras que un cálculo explícito dice que* $d_{\tilde{\mathcal{F}}_{(1,-1)}} = 1$.

En este caso, $\left(\mathcal{F}_{(1,-1)} + \delta\right) \cap \mathbb{Z}^2$ *"se parte" en dos celdas, cada una de ellas contiene un punto, y puede ser elegida como mixta. Si tomamos las funciones* $\tilde{\omega}_i$, $i = 1,2$ *constantemente iguales a* 2, *y* $\tilde{\omega}$ *constantemente igual a* 0 *y aplicamos el algoritmo dado en el apartado 2.3.1, se obtendrá la siguiente matriz de* 13×13 :

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 \\ b_2 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_2 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 \\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 \\ a_4 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & a_4 & 0 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_1 \end{bmatrix}.$$

Hemos ordenado las filas y columnas de $\mathbb{M}$ *de tal manera que los monomios que se encuentran en* $\left(\mathcal{F}_{(1,-1)} + \delta\right) \cap \mathbb{Z}^2$ *indexan las filas y columnas* 7 *y* 8. *Los otros puntos no mixtos indexan las primeras seis filas y columnas de la matriz.*
El determinante de $\mathbb{M}$ *es igual a*

$$b_2\, c_2^2\, b_1^4\, \mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, f_1, f_2)$$

y es fácil verificar que, en este caso, $b_2c_2^2b_1^4$ *se puede obtener o bien tomando el menor principal de* 7×7, *o bien calculando el menor indexado por los seis primeros monomios junto con el que ocupa la posición ocho.*

Capítulo 3

La Resultante Homogénea como el Determinante de un Complejo

En este capítulo volveremos a considerar una familia de n polinomios homogéneos en n variables $f_1, \ldots, f_n$, genéricos y de grados $d_1, \cdots, d_n$ respectivamente, tal como en (1.1). Consideraremos además complejos de Weyman, como los que aparecen en [WZ, GKZ2], y haremos explícitos los morfismos en estos complejos, los cual nos darán expresiones polinomiales para la resultante homogénea via fórmulas determinantales en los casos que se describirán en el Lema 3.2.
Vamos a considerar un complejo que es un "acoplamiento" entre el complejo de Koszul $\mathbf{K}^\bullet(t; f_1, \ldots, f_n)$ asociado con $f_1, \ldots, f_n$ en grado t y el dual del complejo de Koszul $\mathbf{K}^\bullet(t_n - t, f_1, \ldots, f_n)^*$ asociado con $f_1, \ldots, f_n$ en grado $t_n - t$. Este complejo proviene de una sucesión espectral derivada del complejo de Koszul de haces en $\mathbb{P}^{n-1}$ asociado con $f_1, \ldots, f_n$ tensorizado con $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{n-1}}(t)$. Haremos explícito en términos del bezoutiano el morfismo de conexión ∂_0 (ver (1.9) debajo) producido por obstrucciones cohomológicas. De hecho, la única contribución no trivial está dada en términos del morfismo $\psi_{1,\ell}$ definido en (1.6).
Para ser más precisos, con $\mathbf{K}^\bullet(t; f_1, \ldots, f_n)$ denotaremos el complejo

$$\{0 \longrightarrow K(t)^{-n} \xrightarrow{\delta_{-(n-1)}} \ldots \xrightarrow{\delta_{-1}} K(t)^{-1} \xrightarrow{\delta_0} K(t)^0\}, \tag{3.1}$$

donde

$$K(t)^{-j} = \bigoplus_{i_1 < \ldots < i_j} S_{t-d_{i_1}-\ldots-d_{i_j}}$$

y δ_{-j} son los morfismos de Koszul usuales.
Similarmente, sea $\mathbf{K}^\bullet(t_n - t; f_1, \ldots, f_n)^*$ el complejo

$$\{K(t_n - t)^0 \xrightarrow{\delta_0^*} K(t_n - t)^1 \xrightarrow{\delta_1^*} \ldots \xrightarrow{\delta_n^*} K(t_n - t)^n\}, \tag{3.2}$$

donde

$$K(t_n - t)^j = \bigoplus_{i_1 < \ldots < i_j} S^*_{t_n - t - d_{i_1} - \ldots - d_{i_j}}$$

y δ_j^* son los duales de los morfismos de Koszul usuales. Notar que, de hecho, $K(t_n - t)^n = 0$ para todo $t \geq 0$.
Definimos entonces $\mathbf{C}^\bullet(t; f_1, \ldots, f_n)$ como el siguiente complejo doble:

$$\{0 \longrightarrow C^{-n} \xrightarrow{\partial_{-(n-1)}} \ldots \xrightarrow{\partial_{-1}} C^{-1} \xrightarrow{\partial_0} C^0 \xrightarrow{\partial_1} \ldots \xrightarrow{\partial_{n-1}} C^{n-1} \longrightarrow 0\}, \tag{3.3}$$

donde

$$\begin{array}{lcll} C^{-j} & = & K(t)^{-j}, & j = 2, \ldots, n \\ C^j & = & K(t_n - t)^{j+1}, & j = 1, \ldots, n-1 \\ C^{-1} & = & K(t_n - t)^0 \oplus K(t)^{-1} & \\ C^0 & = & K(t)^0 \oplus K(t_n - t)^1 & \end{array} \tag{3.4}$$

y los morfismos están definidos por

$$\begin{array}{lcll} \partial_{-j} & = & \delta_{-j}, & j = 2, \ldots, n-1 \\ \partial_j & = & \delta_j^*, & j = 2, \ldots, n-1 \\ \partial_{-1} & = & 0 \oplus \delta_{-1} & \\ \partial_0 & = & (\psi_{1,t} + \delta_0) \oplus \delta_0^* & \\ \partial_1 & = & 0 + \delta_1^* & \end{array} \tag{3.5}$$

Más precisamente, $\partial_0(T, (g_1, \ldots, g_n)) = (\psi_{1,t}(T) + \delta_0(g_1, \ldots, g_n), \delta_0^*(T))$ y $\partial_1(h, (T_1, \ldots, T_n)) = \delta_1^*(T_1, \ldots, T_n)$. Observar que ∂_0 es precisamente la transformación $\tilde{\Psi}_t$ definida en (1.16).
Para cualquier especialización de los coeficientes en (3.3), obtenemos un complejo de k-espacios vectoriales. Sea D el determinante del complejo de A-módulos (3.3) con respecto a las bases de monomios de los A-módulos C^ℓ (la definición de determinante de un complejo puede verse con toda generalidad en [GKZ2], Appendix A]. Un caso particular es explicado con más detalle en el apartado 6.2.2 de esta memoria). Este determinante es un elemento del cuerpo de fracciones de A.
El próximo enunciado, es el resultado principal de este capítulo.

Teorema 3.1 *El complejo (3.3) es genéricamente exacto, y para cada especialización de los coeficientes, será exacto si y solamente si la resultante no se anula. Para cada entero positivo t se tiene que*

$$D = \mathrm{Res}_{d_1, \ldots, d_n}(f_1, \ldots, f_n). \tag{3.6}$$

Más aún, D es igual al máximo común divisor de todos los menores maximales de la matriz que representa el morfismo de A-módulos ∂_0 en las bases monomiales.

Demostración. El hecho de que $\mathrm{Res}_{d_1, \ldots, d_n}(f_1, \ldots, f_n)$ es el máximo común divisor de todos los menores maximales de la matriz que representa ∂_0 ha sido probado en el corolario 1.13. Para $t > t_n$, obtenemos el complejo de Koszul en grado t, y luego el complejo especializado en el punto $a \in k^N$ es exacto si y solamente si $f_1(a), \ldots, f_n(a)$ es una sucesión regular, es decir si y solamente si la resultante no se anula. El hecho de que el determinante de este complejo es la resultante es una idea de Cayley, que ha sido debidamente demostrado en [De], [GKZ2] y [Cha1].

Supongamos $0 \leq t \leq t_n$. Como $\delta_0 \circ \delta_{-1} = \delta_1^* \circ \delta_0^* = 0$, es fácil ver que (3.3) es un complejo. Para cualquier elección de polinomios homogéneos$f_1(a), \ldots, f_n(a) \in k[x]$ de grados $d_1, \ldots, d_n$ respectivamente, tal que su resultante no se anule, los complejos de Koszul especializados (3.1) y (3.2) serán exactos. Denotaremos módulos y morfismos especializados como $K(t)^1(a), \delta_0(a)$, etc.
Luego, $\dim \mathrm{Im}(\delta_0(a))$ es igual a $i(t) = \dim < f_1(a), \ldots, f_n(a) >_t$. Similarmente, se tiene que $\dim(\ker(\delta_0^*(a)) = i(t_n - t)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \dim \ker(\partial_0(a)) \geq \dim \mathrm{Im}(\partial_{-1}(a)) = \dim \mathrm{Im}(\delta_{-1}(a)) = \\ = \dim \ker(\delta_0(a)) = \dim K(t)^{-1}(a) - i(t). \end{aligned}$$

Por otro lado, debido al Teorema (1.15), hay una matriz cuadrada $M_t'(a)$ de tamaño $\rho(t)$, que es no singular. Esto se corresponde con la elección de un menor de $\partial_0(a)$, e implica que

$$\begin{aligned} \dim \ker(\partial_0(a)) \leq \dim C^{-1}(a) - \rho(t) = \\ = \dim K(t)^{-1}(a) + \dim K(t_n - t)^0(a) - \rho(t) = \\ = \mathrm{Im} K(t)^{-1}(a) + \dim S_{t_n - t}(a) - \rho(t) = \\ = \dim K(t)^{-1}(a) - i(t). \end{aligned}$$

Así que $\dim \mathrm{Im}(\partial_{-1}(a)) = \dim Ker(\partial_0(a))$ y el complejo es exacto a nivel -1.
De una manera similar, se puede verificar que el complejo es exacto a nivel 0, y se obtiene que (3.3) es exacto.
Recíprocamente, supongamos que $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1(a), \ldots, f_n(a)) = 0$. Entonces, aún cuando los complejos especializados (3.1) y (3.2) fueran exactos, la Proposición (1.1) nos dice que no hay posibilidad alguna de encontrar un menor maximal no nulo de $\partial_0(a)$, así que (3.3) no puede ser exacto.
Para calcular el determinante del complejo, haremos elecciones adecuadas de subconjuntos de monomios en cada término del complejo, comenzando con los índices que definen M_t y extendiéndonos tanto hacia la derecha como hacia la izquierda. Se tendrá entonces que

$$D = \frac{\det M_t}{p_1 \cdot p_2},$$

donde p_1 (resp. p_2) es un producto alternado de menores de los morfismos que aparecen a la izquierda (resp. a la derecha).
Tomando en cuenta (3.1) y (3.2), se sigue de [Cha3] that

$$p_1 = \det(E_t),\ p_2 = \det(E_{t_n - t})$$

y, por el Teorema 1.10, tendremos que

$$D = \mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n) \frac{\det(\mathbb{E}_t)}{\det(E_t)\det(E_{t_n - t})} = \mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n),$$

lo cual implica (3.6), como se quería demostrar.
□

Caracterizaremos ahora aquellas $n+1$-uplas $n, d_1, \ldots, d_n$ para las cuales se obtiene una fórmula determinantal.

Lema 3.2 *Supongamos $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$. El determinante del complejo resultante provee una fórmula determinantal para $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n)$ si y solamente si la siguiente inecuación se verifica*

$$d_3 + \ldots + d_n - n < d_1 + d_2 - 1. \tag{3.7}$$

Es más, cuando (3.7) ocurre, hay una fórmula determinantal dada por el complejo resultante para cada t tal que

$$d_3 + \ldots + d_n - n < t < d_1 + d_2. \tag{3.8}$$

Observación 3.3 *Cuando todos los d_i son iguales a d, (3.7) queda*

$$(n-2)d < 2d + n - 1,$$

lo cual ocurre para cualquier d si $n \leq 4$, para $d = 1, 2, 3$ si $n = 5$, para $d = 1, 2$ si $n = 6$, y nunca ocurre si $n > 7$ a menos que $d = 1$.

Demostración. El determinante del complejo resultante provee una fórmula determinantal para $\mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n)$ precisamente cuando $C^{-2} = C_1 = 0$. Esto es equivalente a las inecuaciones

$$t < d_1 + d_2$$

y

$$t_n - t = d_1 + \ldots d_n - n - t < d_1 + d_2,$$

de las cuales el lema se demuestra fácilmente. Hemos hecho decrecer la expresión de la derecha de (3.7) en una unidad para permitir que un número natural t satisfaga (3.8). □

Corolario 3.4 *Para todo $n \geq 7$ el complejo provee una fórmula determinantal solamente cuando $d_1 = d_2 = d_3 = 1$ y $n - 3 \leq d_4 + \ldots + d_n < n$, lo cual fuerza a que todos los d_i sean 1 o, a lo más, todos ellos iguales a 1 excepto uno o dos iguales a 2, o todos iguales a 1 excepto uno igual a 3.*

La prueba del corolario es inmediata de la inecuación (3.7). Es interesante notar que, si una fórmula determinantal para $n, d_1, \cdots, d_n$ existe, tendremos una fórmula determinantal para $t = [t_n/2]$, como muestra el próximo corolario.

Proposición 3.1 *Si $(d_1, \cdots, d_n)$ cumple con las hipótesis del lema 3.2, entonces*

$$\det\left(M_{[t_n/2]}\right) = \pm \mathrm{Res}_{d_1,\ldots,d_n}(f_1, \ldots, f_n).$$

Demostración. Para probar que $M_{[t_n/2]}$ es determinantal, tendremos que chequear que

$$d_3 + \ldots + d_n - n < \left[\frac{t_n}{2}\right] < d_1 + d_2. \tag{3.9}$$

Debido al Lema 3.2, como hay una fórmula determinantal, entonces se verifica la inecuación (3.7), y de allí es inmediato verificar que

$$d_3 + \ldots + d_n - n < \frac{t_n}{2} < d_1 + d_2.$$

Para ver que también se tiene (3.9), alcanza con chequear que

$$d_3 + \ldots + d_n - n + 1/2 \neq \frac{t_n}{2} = \frac{d_1 + \ldots + d_n - n}{2}.$$

Pero si las dos primeras expresiones fueran iguales, se tendría $d_3 + \ldots + d_n = d_1 + d_2 + n - 1$, lo cual es una contradicción. □

En la tabla siguiente, hemos calculado algunos valores de $\rho\left(\left[\frac{t_n}{2}\right]\right)$ y $\rho(t_n + 1)$ (el tamaño de las matrices clásicas de Macaulay) para distintos valores de n, $d_1, \ldots, d_n$.

n	$(d_1, \ldots, d_n)$	$\rho\left(\left[\frac{t_n}{2}\right]\right)$	$\rho(t_n + 1)$
2	$(10, 70)$	70	80
2	$(150, 200)$	200	350
3	$(1, 1, 2)$	3	6
3	$(1, 2, 5)$	14	28
3	$(2, 2, 6)$	21	45
4	$(1, 1, 2, 3))$	12	35
4	$(2, 2, 5, 5)$	94	364
4	$(2, 3, 4, 5)$	90	364
5	$(4, 4, 4, 4, 4)$	670	4845
7	$(2, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$	2373	38760
10	$(3, 3, \ldots, 3)$	175803	14307150
20	$(2, 2, \ldots, 2)$	39875264	131282408400

De todos modos, hay que notar que cuanto menor es la matriz M_t, mayor es el número de coeficientes del bezoutiano que tiene entre sus entradas.

Capítulo 4

Fórmulas Jacobianas para calcular la Resultante (n=2)

En este capítulo vamos a exhibir fórmulas para calcular la resultante al estilo de Canny y Emiris (es decir, matrices cuadradas cuyo determinante es un múltiplo no nulo de la resultante y que tiene el grado correcto en los coeficientes de algún f_i), usando la formulación jacobiana dada en [CDS2]. Allí, ellos consideran sistemas generalizadamente no mixtos, y definen matrices cuyo determinante es un múltiplo de la resultante, y que son casi de tipo Sylvester, con la excepción de una fila que contiene las coordenadas del jacobiano tórico.
Este trabajo está hecho para el caso en que $n = 2$, es decir cuando hay tres polígonos en el plano. Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$, donde $\mathcal{A}_i \subset \mathbb{Z}^2$ es un conjunto finito, y además, $conv(\mathcal{A}_i) = k_i P$, siendo P un polígono con vértices en $\mathbb{Z}^2$, y k_i un entero positivo. Consideremos el siguiente sistema de polinomios de Laurent genéricos en las variables $x = (x_1, x_2)$:

$$f_i(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}_i} c_{ia}\, x^a, \quad c_{ia} \neq 0, \quad i = 0, 1, 2,$$

Sea $Q_i = k_i\, P$ el polígono de Newton de f_i. Supondremos que P tiene área positiva, y que la unión de los $\mathcal{A}_i$ genera afinmente al lattice $\mathbb{Z}^2$.
Queremos calcular la resultante rala $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, f_1, f_2)$. Para ello, vamos a construir una matriz usando el algoritmo de la subdivisión mixta de Canny y Emiris (cf. [CE2]), que perturba la suma de Minkowski $Q = Q_0 + Q_1 + Q_2$ agregándole δ y asociando a cada punto entero en $\mathcal{E} = (Q + \delta) \cap \mathbb{Z}^2$ un monomio múltiplo de algún f_i. Modificando un poco este algoritmo, produciremos un menor maximal del complejo que se describe en [CDS2] para calcular la resultante. Esta matriz estará indexada por los puntos enteros del interior del polígono Q.

4.1 Jacobianos Tóricos y Resultantes

En esta sección revisaremos, para el caso de 3 polinomios en dos variables, algunos resultados que aparecen en [CDS2] en un contexto más general. Sea $\mathcal{F} := int(Q) \cap \mathbb{Z}^2$,

$Q_{-i} := \sum_{j \neq i} Q_j, i = 0, 1, 2$ y $\mathcal{F}_i := int(Q_{-i}) \cap \mathbb{Z}^2$, donde $int(\cdot)$ quiere decir "interior" respecto de la topología euclídea.

Proposición 4.1 [CDS2, prop. 1.2] *Consideremos el sistema $f = (f_0, f_1, f_2)$ con los soportes cumpliendo $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2$, de cardinal $|\mathcal{A}_0|$. El jacobiano tórico del sistema tiene soporte en $\mathcal{F}$ y es igual a*

$$J(f) := \det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ x_1 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ x_2 \frac{\partial f_0}{\partial x_2} & x_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & x_2 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}.$$

Cuando $Q_i = k_i P$, el jacobiano tórico se construye en [CDS2] via una P-homogenización. Para evitar ese proceso, presentamos el siguiente algoritmo válido en general (es decir, para n arbitrario):

- Sea P un polítopo $n-$dimensional con vértices en $\mathbb{Z}^n$, dado por las siguientes ecuaciones:
$$P := \{m \in \mathbb{R}^n : \langle m, \eta_i \rangle \geq -b_i, \ i = 1, \cdots, s\},$$
donde los vectores η_i son los vectores normales interiores primitivos relativos a las facets de P.

- Sean $k_0, k_1, \cdots, k_n$ enteros positivos, y
$$\mathcal{A}_i = k_i \, P \cap \mathbb{Z}^n.$$

- Sean f_0, f_1, $\cdots$, f_n polinomios genéricos tales que $supp(f_i) = \mathcal{A}_i$, es decir
$$f_i = \sum_{a \in \mathcal{A}_i} c_{i,a} \, x^a.$$

- Requerimos que P sea un polítopo simplicial (siempre ocurre si $n = 2$.)[1]

<u>Algoritmo:</u>

1. Elegir un vértice $p \in P$. Debido al hecho de que P es simplicial, se tendrá que hay n facets cuya intersección es el vértice p. Supongamos sin pérdida de generalidad que las normales interiores a estas facets son $\eta_1, \cdots, \eta_n$. Denotaremos a las facets como $F_1, \cdots, F_n$ respectivamente.

2. Para cada $i = 0, 1, \cdots, n$, y cada $j = 1, \cdots, n-1$, hacer:
$$\mathcal{A}_i^j := \left(\left(\cap_{t=1}^{j} k_i F_t \right) \setminus k_i F_{j+1} \right) \cap \mathbb{Z}^n. \tag{4.1}$$
Además, sea $\mathcal{A}_i^n := \{k_i \, p\}$. Observar que $\mathcal{A}_i^j \subset k_i \, F_j, \forall j$ y, si $j \neq j'$, $\mathcal{A}_i^j \cap \mathcal{A}_i^{j'} = \emptyset$.

[1] En realidad, alcanza con que P tenga un vértice simplicial, como se ve en el algoritmo.

3. Sea $f_i^j := \sum_{a\in\mathcal{A}_i^j} c_{i,a}x^a$.

4. Calcular

$$\Delta_0(x) := \det\begin{pmatrix} f_0 & f_1 & & f_n \\ f_0^1 & f_1^1 & & f_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_0^n & f_1^n & & f_n^n \end{pmatrix}.$$

Proposición 4.2 *$\Delta_0(x)$ tiene su soporte contenido en $\mathcal{F}$, es decir en*

$$((k_0+k_1+\cdots+k_n)P)^\circ \cap \mathbb{Z}^n,$$

y corresponde salvo signo a una restricción al toro del polinomio homogéneo Δ_σ, tal como se lo define en el Teorema 1 de [CD]. En este contexto, σ es el cono dual de dimensión n cuyas aristas son los "rayos" $\eta_1,\cdots,\eta_n$.

Observación 4.1 *En realidad, el polinomio Δ_σ está bien definido módulo el ideal homogéneo $\langle F_0,F_1,\cdots,F_n\rangle$, donde F_i denota la $P-$homogeneización de los f_i, así que lo que estamos calculando es en realidad un representante de esta clase. Por otro lado, no es cierto que Δ_σ sea igual al jacobiano tórico J, pero es bien sabido que*

$$\pm\left(\prod_{j=0}^n k_j\right) n!\, vol(P)\Delta_\sigma = J \quad mod\langle F_0,F_1,\cdots,F_n\rangle$$

(cf. [CD, DD]). Así que el polinomio Δ_σ tiene las mismas propiedades dualizantes que J.

Demostración. Está claro que Δ_0 tiene su soporte contenido en

$$Q := ((k_0+k_1+\cdots+k_n)P)\cap\mathbb{Z}^n.$$

Para ver que su soporte es disjunto con el borde de la suma de Minkowski, sea $\nu\in\mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, y consideremos el $\nu-$borde de Q. Si queremos "alcanzar" el ν-borde en una suma de la forma

$$p_0+p_1+\ldots,+p_n,\ p_i\in k_iP,$$

todo p_i debe pertenecer al ν-borde de k_iP. Pero es fácil ver que, para *cualquier* $\nu\neq 0$, hay un $j\in\{1,2,\cdots,n\}$ tal que $\mathcal{A}_i^j$ es disjunto del $\nu-$borde de k_iP.
Para probar la segunda parte de la afirmación, sea $f_i^* := f_i - \sum_{j=1}^n f_i^j$. Claramente

$$\Delta_0(x) = \det\begin{pmatrix} f_0^* & f_1^* & & f_n^* \\ f_0^1 & f_1^1 & & f_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ f_0^n & f_1^n & & f_n^n \end{pmatrix}.$$

Comparemos este determinante con la construcción del elemento Δ_σ de [CD]: por medio de una homogeneización tórica, introducimos nuevas variables $X_1, \ldots, X_s$, y traducimos los polinomios f_i a polinomios F_i que se pueden escribir de la manera siguiente:[2]

$$F_i = A_{0i} \prod_{j>n} X_i + \sum_{j=1}^{n} A_{ij} X_j.$$

Entonces, $\Delta_\sigma = \det(A_{ij})_{0 \leq i,j \leq n}$.
Para $j = 1, \ldots, n$ si un monomio X^α aparece en la expansión de F_i, y es un múltiplo de X_j, entonces su deshomogeneización no pertenece al η_j−borde del polítopo $k_i P$, que es igual a $k_i F_j$. Volviendo a nuestra descomposición

$$f_i = f_i^* + f_i^1 + \ldots, + f_i^n,$$

tenemos que

1. Cada f_i^* tiene soporte disjunto con $k_i F_1$;
2. Cualquiera sea $j = 1, \ldots, n-1$, f_i^j tiene su soporte disjunto con $k_i F_{j+1}$;
3. $f_i^n = c_{i,k_i p} x^{k_i p}$ tiene su soporte disjunto con cualquier facet distinta de las n primeras.

Esto, sumado al hecho de que la homogeneización tórica preserva la estructura de los monomios (es decir, manda un monomio en las coordenadas x en un monomio en las coordenadas X, y que esta transformación es inyectiva), demuestra el resultado. □

Ejemplo 4.2 *Consideremos*

$$\begin{aligned} f_0 &= a_0 + b_0 x_1 + c_0 x_2 + d_0 x_1 x_2 \\ f_1 &= a_1 + b_1 x_1 + c_1 x_2 + d_1 x_1 x_2 \\ f_2 &= a_2 + b_2 x_1 + c_2 x_2 + d_2 x_1 x_2. \end{aligned}$$

Aquí estamos en el caso $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \mathcal{A}_2 = \{(0,0),(1,0),(0,1),(1,1)\}$, $k_0 = k_1 = k_2 = 1$, *y el jacobiano tórico se puede calcular como*

$$\det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ x_1 \frac{\partial f_0}{\partial x_1} & x_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_1} \\ x_2 \frac{\partial f_0}{\partial x_2} & x_2 \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & x_1 \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \end{pmatrix},$$

que es igual a

$$\det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ b_0 x_1 + d_0 x_1 x_2 & b_1 x_1 + d_1 x_1 x_2 & b_2 x_1 + d_2 x_1 x_2 \\ c_0 x_2 + d_0 x_1 x_2 & c_1 x_2 + d_1 x_1 x_2 & c_2 x_2 + d_2 x_1 x_2 \end{pmatrix}.$$

[2]está claro que esta manera de escribirlos no es única.

Elegimos $b = (0,0)$ *y* $\eta_1 = (0,1)$, $\eta_2 = (1,0)$. *Entonces, tenemos que*

$$A_i^1 = (1,0)\, A_i^2 = (0,0),\ i = 0,1,2,$$

y el algoritmo calcula

$$\det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ b_0 x_1 & b_1 x_1 & b_2 x_1 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{pmatrix}$$

que tiene un soporte más pequeño.

4.2 El caso $n = 2$.

Cuando $n = 2$, el algoritmo se convierte en la siguiente receta:

- Elegir un vértice $p \in P$, obviamente habrá dos lados cuya intersección es igual a p. Sean e_1 y e_2 esos lados.
- Para $i = 0,1,2$, notamos con $\mathcal{A}_i^1$ el conjunto de puntos enteros que se encuentran en $k_i\, e_1$, con excepción de $k_i p$. $\mathcal{A}_i^2$ será igual a $\{k_i p\}$.

Definición 4.3 *Llamaremos a*

$$G(f) := \det \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 \\ f_0^1 & f_1^1 & f_2^1 \\ f_0^2 & f_1^2 & f_2^2 \end{pmatrix}$$

el jacobiano tórico discreto.

Debido a la proposición 4.2, se tiene que $G(f)$ es una restricción al toro de Δ_σ, donde σ es el cono de dimensión 2 generado por las normales interiores a e_1 y e_2.
La fila especial de nuestra matriz contendrá entre sus coeficientes la expansión monomial de $G(f)$. De hecho, el soporte de $G(f)$ es estrictamente más chico que $\mathcal{F}$.
Sean $S_{\mathcal{F}_i}$ el $\mathbb{Z}[c]$-módulo libre generado por los monomios $\{x^a,\ a \in \mathcal{F}_i\}$, y S_{Q_i} el módulo libre generado por los monomios que se encuentran en $int(Q_i) \cap \mathbb{Z}^2$. Consideremos el siguiente complejo de Koszul de módulos:

$$0 \to S_{Q_0} \oplus S_{Q_1} \oplus S_{Q_2} \xrightarrow{\psi} S_{\mathcal{F}_0} \oplus S_{\mathcal{F}_1} \oplus S_{\mathcal{F}_2} \oplus \mathbb{Z}[c] \xrightarrow{\phi} S_{\mathcal{F}} \to 0, \tag{4.2}$$

donde

$$\psi\,(p_0, p_1, p_2) = (p_1\, f_2 + p_2\, f_1, p_0\, f_2 - p_2\, f_0, -p_0\, f_1 - p_1\, f_0, 0)\,,$$

y

$$\phi\,(g_0, g_1, g_2, \lambda) = g_0\, f_0 + g_1\, f_1 + g_2\, f_2 + \lambda\, J(f).$$

Se puede verificar fácilmente que ϕ está bien definida, pero no siempre es genéricamente biyectiva.

Proposición 4.3 [CDS2, Prop. 2.1 & Thm. 2.2] *El complejo (4.2) es genéricamente exacto, y después de una especialización de los coeficientes en un cuerpo k seguirá siendo exacto (como complejo de k- espacios vectoriales), si y solamente si* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, f_1, f_2) \neq 0$. *En consecuencia, ϕ es genéricamente suryectiva, y todo menor maximal de la matriz que representa a ϕ en las bases monomiales es un múltiplo de la resultante rala. Debida a las condiciones impuestas sobre los soportes, se tiene que* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, f_1, f_2)$ *es el máximo común divisor de estos menores maximales.*

El objetivo aquí será construir un menor maximal no nulo de la matriz de ϕ en las bases monomiales sin calcular todo el complejo. Esto nos permitirá obtener un múltiplo no trivial de la resultante. La técnica que vamos a usar producirá un determinante con el mismo grado en los coeficientes de f_0 que la resultante. Reemplazando el índice 0 por los otros dos índices $i = 1, 2$, tendremos una manera inmediata de obtener $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}$ como el mcd de a lo más 3 determinantes, lo cual es un avance respecto de la construcción de [CDS2] que obtiene la resultante como el mcd de tantos determinantes como menores maximales de la matriz de ϕ.
La proposición nos dice que la matriz de ϕ siempre tiene al menos tantas filas como columnas.

4.3 Construcción de la Matriz Resultante

Vamos a usar funciones de levantamiento sobre los vértices de los polígonos tal como en la sección anterior. Sean $V_i \subset \mathbb{Q}^2$ el conjunto de vértices de Q_i, y $\omega = (\omega_0, \omega_1, \omega_2)$ la función de levantamiento, con $\omega_i \in \mathbb{Q}^{m_i}$, donde m_i es el cardinal de V_i, es decir la cantidad de vértices de Q_i. Todo punto $a \in V_i$ se levanta a $a_{\omega_i} = (a, \omega_i(a)) \in \mathbb{Q}^3$, que lo denotaremos simplemente a_ω. Consideremos los polígonos levantados $Q_{i,\omega}$, la cápsula convexa de a_{ω_i}, $a \in V_i$, y su suma de Minkowski

$$Q_\omega := Q_{0,\omega} + Q_{1,\omega} + Q_{2,\omega} \subset \mathbb{R}^3.$$

Tomando el revestimiento inferior de Q_ω, obtenemos una descomposición poliédrica mixta coherente Δ_ω de la suma de Minkowski $Q := Q_0 + Q_1 + Q_2$, a través de la proyección $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ de Q_ω: Si el vector ω es suficientemente genérico ([Stu2, CE2]), entonces la subdivisión es *estricta,* es decir, cada facet en el revestimiento inferior es de la forma

$$\begin{aligned} F_\omega = F_{0,\omega} + F_{1,\omega} + F_{2,\omega} \ : \\ \dim(F_{0,\omega}) + \dim(F_{1,\omega}) + \dim(F_{2,\omega}) = 2, \end{aligned} \tag{4.3}$$

donde $F_{i,\omega}$ es una cara de $Q_{i,\omega}$. La proyección de $F_{i,\omega}$ en Q_i define un polígono F_i en el plano con vértices en V_i (eventualmente un segmento o un punto). Si solamente consideramos este polígono, el levantamiento de F_i a $F_{i,\omega}$ resulta lineal.
Por una cuestión de dimensión, si la descomposición es estricta, uno de los sumandos de (4.3) debe ser de dimensión cero. Es más, esa suma al ser evaluada en un punto $p_\omega \in F_\omega$, minimiza la función de levantamiento de cualquier suma de 3 puntos en $Q_{i,\omega}$

cuyo resultado sea igual a p_ω; por eso se la llama a veces *suma óptima*. La celda F (la proyección de F_ω), se llamará *mixta de tipo i* o *i-mixta* si $\dim F_i = 0$, $\dim F_j = 1$, $j \neq i$. Sea Δ_ω la subdivisión de Q inducida por el revestimiento inferior de la suma de Minkowski levantada.
Procediendo como en [CE2], elegiremos un vector pequeño $\delta \in \mathbb{Q}^2$ y consideraremos $\mathbb{Z}^2 \cap (\delta + Q)$. Vamos a definir la *preimagen* de cada punto en este último conjunto como el punto que se encuentra en la misma vertical, justo en la intersección con el revestimiento inferior de la suma de Minkowski de los polígonos levantados, despues de trasladarlos usando el vector δ. Este vector debería ser lo suficientemente pequeño de tal manera que todo punto entero perturbado de Q se desplace a alguna de las celdas maximales que limiten con este punto. Asumamos que δ es suficientemente genérico, y que no es paralelo a ningún lado de Q. Esto nos permitirá calcular $\mathcal{F}$, el interior de la suma de Minkowski de los polígonos, como $\mathbb{Z}^2 \cap (\delta + Q) \cap (-\delta + Q)$.

Definición 4.4 *El contenido de fila* $\mathrm{RC}(F)$ *de una celda de* Δ_ω *es un par* (i, a) *que satisface: si* $F_\omega = F_{0,\omega} + F_{1,\omega} + F_{2,\omega}$ *es la única facet sobre el revestimiento inferior de* Q_ω *que se proyecta sobre* F, *entonces* i *es el índice más grande tal que* $\dim(F_i) = 0$, $F_i = \{a\}$. *También definimos el contenido de fila de los puntos* $p \in \mathcal{F} : p \in F + \delta$ *de la manera siguiente:* $\mathrm{RC}(p) = \mathrm{RC}(F)$.

Las filas y columnas de la matriz que vamos a construir estarán indexadas por puntos enteros, tal como en [CE2].

4.4 Algoritmo de Levantamiento

En el resto de este capítulo supondremos que los polígonos de Newton son idénticos, pero es fácil ver que los argumentos valen trivialmente para múltiplos de un polígono fijo.

- Elegir el vector $\delta \in \mathbb{Q}^2$ suficientemente genérico y pequeño, con los requerimientos especificados antes, y un vértice b tal que que el segmento $(b, b+\delta)$ esté estrictamente contenido en todos los Q_i.

Tanto Q_1 como Q_2 serán partidos en varias celdas cada uno. Los lados extremales en la dirección de δ (que son aquellos cuya normal exterior forma un ángulo positivo con δ) conformarán el *δ-borde*. Denotaremos a los lados del δ-borde como $e_1, \ldots, e_g$ siguiendo el sentido de las agujas del reloj, aquí g es el número de tales lados. Una celda de Q_1 incluirá unicamente a e_1 entre esos lados, y se denotará C_0; las otras celdas de Q_1 que involucren el δ-borde se denotarán C_i e incluirán los lados e_i, e_{i+1}, donde $i \geq 2$ es un número par. La última celda incluirá los lados e_{g-1}, e_g o solamente e_g dependiendo de si g es impar o par. En total, se tendrán $\lceil (g+1)/2 \rceil$ celdas C_i en Q_1.
Cada celda de Q_2 que incluye a los lados e_i, e_{i+1} se denota C_i, donde ahora i es impar, mientras que la última puede puede incluir o no e_g dependiendo de si g es impar o no. En total, hay $\lceil g/2 \rceil$ celdas C_i en Q_2. Llamaremos a_i a los vértices de los lados pertenecientes al δ-borde, donde $i = 1, \ldots, g$. Los lados e_i son los segmentos a_{i-1}, a_i. Casi todas las celdas C_i excepto quizá C_0 y C_g forman un cuadrilátero con vértices b, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}.

Lema 4.5 *Los vértices en el δ-borde de $Q_1 + Q_2$ (resp. Q) son de la forma $2a_i\,(3a_i)$. Cualquier otro punto sobre el δ-borde de la forma $a_i + a_j$ $(a_l + a_i + a_j)$ debe satisfacer $\{i,j\} = \{\rho, \rho+1\}$ $(\{l,i,j\} = \{\rho,\rho+1\})$, para algún $\rho \in \mathbb{N}$.*

Antes de presentar el algoritmo de levantamiento, veamos primero la intuición que hay detrás de él. Primero, queremos que Q_0 se levante mucho más "empinadamente" que los otros polígonos, de manera tal que siempre contribuya con b a la suma optimal del revestimiento inferior, tal como se hace en [Emi3]. Los polígonos Q_1 y Q_2 serán partidos en al menos $g+1$ celdas, cada una de ellas levantada linealmente, definiendo un levantamiento sobre los vértices b, a_{i-1}, a_i, para $i = 1, \ldots g$.

- Para Q_1, Q_2 y cualquier valor de $i \geq 0$, definimos

$$\begin{gathered} \omega_1(b) := \omega_2(b) := 0,\ \omega_1(a_{2i+1}) := \omega_2(a_{2i}) := 1, \\ \omega_1(a_0) := 2,\ \ \omega_\gamma(a_g) := 2, \end{gathered} \tag{4.4}$$

  donde $\gamma = (g \bmod 2)+1$. Los a_i vértices de Q_1, Q_2 que no se mencionan en la fórmula anterior, son levantados linealmente respecto de la celda en la que se encuentran.

  Notaremos con b_0 (resp. b_g) a cualquier vértice que pueda haber entre b y a_0 (resp. a_g) y que no sea extremal en la dirección de δ. Si $\gamma' = (\gamma \bmod 2) + 1$, entonces levantaremos todos los vértices de la forma b_0 (resp. b_g) de Q_2 (resp. $Q_{\gamma'}$) a una celda C_1' (resp. C_g'). Lo haremos dando valores muy altos a estos vértices, de una manera a ser precisada en la demostración del lema 4.11.

Notar que los vértices b_0 (resp. b_g) de Q_1 (resp. Q_γ) pertenecen a C_0 (resp. C_g). El borde de la celda C_1' (resp. C_g') incluye a b y a a_0 (resp. a_g). A los lados de Q_1, Q_2 que sean bordes de celdas y que contengan al vértice b los llamaremos b-lados.

Lema 4.6 *$\omega_1(a_{2i}) > 1$ y $\omega_2(a_{2i+1}) > 1$ para todos los posibles valores $i \geq 0$. Además, existen (y son únicas) celdas C_i, C_{i+1} en Q_1, Q_2 respectivamente, tal que ϵ, la pendiente de δ, se encuentra entre las pendientes de los b-lados que definen cada celda.*

Demostración. La primer afirmación sale por convexidad y por la definición del levantamiento . Lo segundo sale por el primer paso del algoritmo delineado en esta sección. □

Definición 4.7 *A las celdas de Q_1, Q_2 que contienen a $b+\delta$, las notaremos como C_{k_1}, C_{k_2}, respectivamente.*

Notar que $|k_1 - k_2| = 1$.

- Para Q_0, definimos el levantamiento ω_0 de la siguiente manera:

$$\omega_0(b) = -M, \qquad \omega_0(a_k) = M,$$

donde $M \gg 1$ es suficientemente grande (se puede tener una estimación determinística acerca de cuan grande debe ser M si uno sigue con cuidado la demostración del lema 4.14) y a_k es el vértice del δ-borde de Q_0 más cercano a la semirrecta $b+\rho\delta$, $\rho > 0$. Claramente, $k \in \{k_1, k_2\}$. Si el número de vértices de Q_0 es considerable, ω_0 define 2 celdas, limitadas por el segmento $(b, \omega_0(b)), (a_k\omega_0(a_k))$ y la condición de que los vectores normales interiores, al proyectarse con $\mathbb{R}^2$, minimicen el producto interno sobre los polígonos Q_i exactamente en los puntos a_{k_1} y a_{k_2} respectivamente.

Para construir estas normales se puede, por ejemplo, marcar un punto c dentro del polígono Q_i tal que su proyección ortogonal sobre (a_{k_1}, a_{k_2}) y sus dos lados adyacentes caiga sobre los lados respectivos. Entonces, se pueden tomar como normales interiores $(c - a_{k_1}, \lambda_1)$ y $(c - a_{k_2}, \lambda_2)$, con $\lambda_i > 0$.

Lema 4.8 [Emi3] *La función de levantamiento ω_0 garantiza que, si* $\mathrm{RC}(p) = (0, p_0)$, *entonces $p_0 = b$.*

Debido a la definición de ω, la subdivisión poliédrica inducida sobre Q_1 (resp. Q_2) contiene al menos las celdas C_0, $C_2, \ldots$ (C_1, $C_3 \ldots$). En lo que sigue, normalizaremos los vectores 3-dimensionales que son normales interiores de alguna cara, fijando su última coordenada igual a 1.

Definición 4.9 *Sea $V_{i,\omega} \in \mathbb{R}^3$ el vector normal interior normalizado correspondiente a la celda levantada $C_{i,\omega}$ en $Q_{1,\omega}$ (resp. $Q_{2,\omega}$) si i es par (resp. impar).*

Sea $V_{i,\omega} = (v_1, v_2, 1)$, entonces, si $\lambda := \omega_1(a_i) > 1$ por ejemplo, se tendrá que

$$\begin{bmatrix} a_{i-1} - b & 1 \\ a_i - b & \lambda \\ a_{i+1} - b & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.5}$$

donde las entradas de la izquierda de la matriz son vectores de tamaño 1×2. En la sección siguiente, escribiremos las sumas con el orden que indica el polígono al cual el sumando pertenece, donde el sumando que ocupa el lugar i viene de Q_i, $i = 0, 1, 2$ o $i = 1, 2$ dependiendo del contexto.

4.5 Subdivisión Mixta

En esta sección estableceremos las propiedades del levantamiento que hemos definido en la sección anterior, y veremos que es apropiada para el fin que nos hemos propuesto.

Lema 4.10 *La subdivisión Δ_ω contiene celdas que no son mixtas, cada una de ellas es copia de uno de los C_i, donde $i = 1, \ldots, g-1$, sobre el δ-borde de $b + Q_1 + Q_2$.*

Demostración. Supongamos sin pérdida de generalidad que i es un número par en el intervalo $1, \ldots, g-1$ (el caso para números impares en este intervalo es similar). En el δ-borde de Q_j, $\omega_j(a_{i+p}) \geq 1$ y vale la igualdad si y solamente si p es impar (resp. par), $j = 1$ (resp. $j = 2$) y $\omega_1(a_{i+1}) = \omega_2(a_i) = \omega_1(a_{i-1}) = 1$, $\omega_1(a_i) := \lambda$, $\omega_2(a_{i+1}), \omega_2(a_{i-1}) > 1$, por el lema 4.6. Como los puntos $a_{i-1} + a_i$, $a_i + a_i$ y $a_{i+1} + a_i$ pertenecen al δ-borde de $Q_1 + Q_2$, ellos deben ser la suma de dos puntos del δ-borde de Q_j, $j = 1, 2$. En el revestimiento inferior $L(Q_{1,\omega} + Q_{2,\omega})$, la menor altura que pueden tener estos puntos es

$$\begin{aligned} \omega_1(a_{i-1}) + \omega_2(a_i) &= 1 + 1, \\ \omega_1(a_i) + \omega_2(a_i) &= \lambda + 1, \\ \omega_1(a_{i+1}) + \omega_2(a_i) &= 1 + 1; \end{aligned}$$

lo cual implica que los puntos

$$(b + a_{i-1} + a_i, -M + 2)\,,\ (b + a_i + a_i, -M + 1 + \lambda)\,,\ (b + a_{i+1} + a_i, -M + 2)$$

pertenecen a $L(Q_\omega)$, donde la notación $(\cdot, \cdot)$ indica un vector de $\mathbb{Q}^3$, con primer componente igual a un vector de $\mathbb{Q}^2$. Al ser multiplicados por el vector $V_{i,\omega}$ de (4.5), los 3 puntos dan el mismo valor, que es el producto interno $\langle (2b + a_i, -M + 1), V_{i,\omega} \rangle$. De aquí podemos deducir que estos puntos se encuentran en un plano con normal $V_{i,\omega}$, y que su cápsula convexa se proyecta sobre $b + C_i + a_i$.
Todavía debemos ver que la celda levantada es una facet de $L(Q_\omega)$, es decir que minimiza el producto interno contra $V_{i,\omega}$ sobre el conjunto de todos los vértices de $b_{\omega_0} + Q_{1,\omega} + Q_{2,\omega}$. Entre todos los vértices del levantamiento de Q_1, este producto interno se minimiza en los vértices del levantamiento de C_i por definición, así que solo resta probar la siguiente afirmación:

$$\langle (a_i, 1), V_{i,\omega} \rangle < \langle (a', \omega_2(a')), V_{i,\omega} \rangle \quad \forall a' \in V_2 \setminus \{a_i\},$$

donde hemos hecho $(b, 0) = (0, 0, 0)$, sin pérdida de generalidad. Sea $V_{i,\omega} = (v_1, v_2, 1) = (v, 1)$, entonces (4.5) se transforma en

$$\langle a_{i-1}, v \rangle + 1 = \langle a_{i+1}, v \rangle + 1 = \langle a_i, v \rangle + \lambda = 0.$$

Luego,

$$\begin{aligned} \langle a_{i-1}, v \rangle + \omega_2(a_{i-1}) &> 0, \\ \langle a_{i+1}, v \rangle + \omega_2(a_{i+1}) &> 0, \\ \langle (a_i, 1), V_{i,\omega} \rangle = \langle a_i, v \rangle + 1 &< 0. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Si $a' = b = (0, 0)$ o $a' \in \{a_{i-1}, a_{i+1}\}$ la afirmación es trivial, debido a (4.6). Definamos los semiespacios abiertos $\mathcal{H}^+ := \{x \in \mathbb{Q}^3 : \langle x, V_{i,\omega} \rangle > 0\}$ y $\mathcal{H}^- := \{x \in \mathbb{Q}^3 : \langle x, V_{i,\omega} \rangle < 0\}$, que son disjuntos y convexos. También consideremos el cono $F := \{r(a_{i-1}, \omega_2(a_{i-1})) + s(a_{i+1}, \omega_2(a_{i+1})),\ r, s > 0\}$, que está completamente contenido en $\mathcal{H}^+$ por (4.6). Supongamos que $(a', \omega(a'))$ pertenece a $\mathcal{H}^-$ para $a' \in V_2 \setminus \{b, a_i, a_{i-1}, a_{i+1}\}$. Como $(a_i, 1) \in \mathcal{H}^-$ by (4.6), entonces el segmento S de $(a', \omega_2(a')), (a_i, 1)$ debe estar totalmente contenido en $\mathcal{H}^-$. Para obtener una contradicción, debemos verificar que $S \cap F \neq \emptyset$. Esto se alcanza considerando que F divide $Q_{2,\omega}$ en dos poliedros convexos. El poliedro "de abajo"

contiene $a_{i,\omega}$, mientras que el "de arriba" contiene a' por convexidad. De hecho, la convexidad implica que a' se encuentra entre los hiperplanos determinados por $b_\omega, a_{i,\omega}, a_{i-1,\omega}$ (el levantamiento de C_{i-1}) y $b_\omega, a_{i,\omega}, a_{i+1,\omega}$ (el levantamiento de C_{i+1}), luego S intersecta el triángulo definido por $b_\omega, a_{i-1,\omega}, a_{i+1,\omega}$. □

Lema 4.11 *La subdivisión Δ_ω contiene celdas no mixtas, que son copias de cada C_i para $i = 0, g$, sobre el δ-borde de $b + Q_1 + Q_2$.*

Demostración. Analizaremos el caso $i = 0$ porque $i = g$ se puede tratar de manera similar. Sea $\omega_1(a_0) := \lambda_0 = 2$. Por definición 4.9, $V_{0,\omega} = (v, 1)$ con $v \in \mathbb{Q}^2$ normal a $C_{0,\omega}$, luego, $\forall a' \in (V_1 \cap C_0) \setminus \{b, a_0, a_1\}$,

$$\begin{bmatrix} a_0 - b & \lambda_0 \\ a_1 - b & 1 \\ a' - b & \omega_1(a') \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.7}$$

Entonces es suficiente con probar la siguiente afirmación:

$$\langle (a_0, 1), V_{0,\omega} \rangle < \langle (a', \omega_2(a')), V_{0,\omega} \rangle, \quad \forall a' \in V_2 \setminus \{a_0\}.$$

Sin pérdida de generalidad, hagamos $b = 0$ y consideremos la posibilidad de que un vértice $a' = b_0 \in V_2 \cap C_1'$ exista entre b y a_0. Recordar que b_0 se definió en la sección 4.4. Usando el hecho de que $b_0 \in V_1 \cap C_0$, se puede calcular $\omega_1(b_0)$ usando (4.7). Entonces, la afirmación se reduce a

$$-\lambda_0 + 1 < -\omega_1(b_0) + \omega_2(b_0) \Leftrightarrow \omega_2(b_0) > \omega_1(b_0) - \lambda_0 + 1 = \omega_1(b_0) - 1.$$

Esto ocurre para $\omega_2(b_0)$ suficientemente grande. □
Para una mayor facilidad en la exposición, en lo que sigue supondremos que $\delta \in \mathbb{Q}^2_{>0}$ con coordenadas $\delta_1 \gg \delta_2$ que cumplan $\epsilon = \frac{\delta_2}{\delta_1} \in (0, 1)$.

Lema 4.12 *Hay un único punto* $\mathbf{p}$ *tal que* $\mathrm{RC}(\mathbf{p}) = (0, b)$ *sobre el borde de $b + Q_1 + Q_2$.*

Demostración. Todos los puntos del δ-borde de $b+Q_1+Q_2$ son desplazados dentro de una copia de alguna celda C_i a menos que se encuentren justo en la intersección de dos de tales celdas, o sea en $C_i \cap C_{i+1}$, $i \in \{0, \ldots, g-1\}$. Los puntos para los cuales ocurre esto son del tipo $b+a_{i+1}+a_i$. Vamos a distinguir tres casos. Llamaremos a las pendientes de los b-lados de la celda C_i como $\sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}$, los de la celda C_{i+1} serán σ_i, σ_{i+2}, y por las hipótesis sobre δ inmediatamente antes del enunciado de este lema, vale que $\sigma_{i-1} > \sigma_i > \sigma_{i+1} > \sigma_{i+2}$.

1. $\sigma_i > \epsilon > \sigma_{i+1}$: El punto se encuentra entre las dos celdas que denominamos C_{k_1} y C_{k_2}. Este es el punto $\mathbf{p}$ que estamos buscando.

2. $\epsilon > \sigma_i$: las dos pendientes de C_{i+1} son menores que ϵ y $b+a_{i+1}+a_i-\delta \in b+a_{i+1}+C_{i+1}$ ya que $a_i - \delta \in C_{i+1}$;

3. $\sigma_{i+1} > \epsilon$: las dos pendientes de C_i son mayores que ϵ, luego $b+a_{i+1}+a_i-\delta \in b+C_i+a_i$ ya que $a_{i+1} - \delta \in C_i$;

La misma discusión se puede hacer con los puntos $a_0 + a_0, a_g + a_g$, obteniendo resultados análogos. Si hubiera puntos de la forma b_0 o b_g (definidos en la sección 4.4), entonces $b_0 + a_0$ y $b_g + a_g$ (o $a_g + b_g$) serín puntos del borde de $b + Q_1 + Q_2$ pero no pertenecientes al δ-borde. □

Juntando toda la información que tienen los lemas anteriores, se tiene el siguiente

Teorema 4.13 *La descomposición Δ_ω contiene celdas no mixtas que son copias de cada C_i sobre el δ-borde de $b+Q_1+Q_2$. Además, existe un único punto* **p** *tal que* $\mathrm{RC}(p) = (0, b)$ *sobre el δ-borde de $b + Q_1 + Q_2$.*

Lema 4.14 *La descomposición Δ_ω contiene, sobre el δ-borde de Q, dos celdas no mixtas que son copias de las celdas de dimensión máxima de Q_0. Cada una de estas celdas contiene los vértices $3a_{k_1}$ y $3a_{k_2}$. El resto de las celdas que cubre a $Q \setminus (b + Q_1 + Q_2)$ son mixtas de tipo 1 o 2.*

Demostración. Que hay dos celdas no mixtas del tamaño de las celdas de Q_0 sale por la manera especial en que hemos levantado Q_0. De ahí también se desprende el hecho de que los puntos $3a_{k_i}$ son vértices de estas celdas, $k = 1, 2$.
La última parte sale notando que las celdas mixtas de tipo 1 y 2 deben estar contenidas en $Q \setminus (b + Q_1 + Q_2)$, ya que cualquier celda de $b + Q_1 + Q_2$ es de la forma $b + F_1 + F_2$, luego no puede ser mixta de tipo $i > 0$. Por otro lado, el área cubierta por celdas mixttas de tipo i es igual a $\mathcal{MV}(Q_j, Q_k)$, $j \neq i \neq k$, y se tiene que

$$vol\,(Q \setminus (Q_1 + Q_2)) = \mathcal{MV}(Q_0, Q_1) + \mathcal{MV}(Q_0, Q_2) + vol(Q_0).$$

□

Lema 4.15 *Supongamos que $p \in \mathcal{F}$ es tal que p se encuentre en la celda $F_0 + F_1 + F_2 + \delta$, y $\dim(F_0) = 0$, y p no es el punto* **p** *del teorema 4.13. Si* $\mathrm{RC}(p) = (i, a)$ *entonces* $(p - a + Q_i) \cap \mathbb{Z}^2 \subset \mathcal{F}$.

Demostración. Supongamos primero que existe $i > 0$ tal que F_i es un punto. Debido a cómo levantamos Q_0, se tiene que $F_0 = b$, luego $F_0 + F_1 + F_2 = b + p_i + F_j$, donde p_i es un vértice del polígono Q_i $(i \neq j)$, y $\mathrm{RC}(p) = (i, p_i)$. Así que

$$p \in F_0+F_1+F_2+\delta \subset b+p_i+Q_j+\delta \Rightarrow p-p_i+Q_i \subset b+Q_1+Q_2+\delta \subset int(Q_0+Q_1+Q_2).$$

La última contención sale debido a que $b+\delta \in int(Q_0)$ (uno de los requerimientos pedidos en la sección 4.4).
Supongamos ahora que p se encuentra en una celda mixta de tipo 0, o sea que $\mathrm{RC}(p) = (0, b)$. Debido al teorema 4.13, solo debemos tener en cuenta los puntos enteros que se encuentren en $p \in int(b + Q_1 + Q_2) = b + int(Q_1 + Q_2)$. Pero ahi vale lo siguiente:

$$p - b + Q_0 \subset b + int(Q_1 + Q_2) - b + Q_0,$$

y el conjunto de la derecha es igual a $Q_0 + int(Q_1 + Q_2) = int(Q_0 + Q_1 + Q_2)$. □

Lema 4.16 *Cualquiera sea $p \in \mathcal{F}$, con excepción del único punto* $\mathbf{p}$ *del teorema 4.13, si p pertenece a la celda $F_0 + F_1 + F_2 + \delta$, con* $\dim(F_0) > 0$, *y* $\mathrm{RC}(p) = (i, a)$, *entonces* $(p - a + Q_i) \cap \mathbb{Z}^2 \subset \mathcal{F}$.

Demostración. Notar que siendo p un punto con coordenadas enteras, debido al hecho de que δ es suficientemente pequeño, debe cumplirse que $p \in F_0 + F_1 + F_2$ (posiblemente p sea un punto del $\delta-$borde de esta celda).
Afirmamos que $F_1 + F_2$ *está contenido en el borde de* $Q_1 + Q_2$. Esto ocurre por el hecho de haber levantado suficientemente el polítopo Q_0. Supongamos sin pérdida de generalidad que $RC(p) = (2, \tilde{a})$. Luego, $p = p_0 + p_1 + \tilde{a}$, donde $p_i \in Q_i$. Si no fuera cierto que $(p - \tilde{a} + Q_2) \cap \mathbb{Z}^2$ está contenido en $\mathcal{F}$, entonces esa traslación de Q_2 debe intersecar el δ-borde de Q ya que ciertamente está contenido en $\mathcal{E}$ (ver, por ejemplo, [CE2]). Sea h un punto en esa intersección, entonces

$$\exists p_2 \in Q_2 \,:\, h = p - \tilde{a} + p_2 = (p_0 + p_1 + \tilde{a}) - \tilde{a} + p_2 = p_0 + p_1 + p_2.$$

Notar que $h \in \mathcal{E} \setminus \mathcal{F}$ implica que h es un punto en algún segmento de la forma $(3a_j, 3a_{j+1})$, para algún j.
Ahora afirmamos que *cada p_i debe pertenecer al segmento* (a_j, a_{j+1}), con lo cual se obtiene que tanto F_0 como F_1 intersecan el δ-borde de Q_0 y Q_1 respectivamente.
Si F_0 fuera alguna de las celdas de dimensión 2, digamos la que contiene a_{k_1}, entonces por el lema 4.14, $F_1 = F_2 = a_i$, donde $i \in \{k_1, k_2\}$. Pero entonces la segunda afirmación que hemos hecho a lo largo de esta demostración implica que $p_0 \in \{a_{i-1}, a_i, a_{i+1}\}$ con lo cual $p \notin \mathcal{F}$, una contradicción. Supongamos ahora que F_0 tiene dimensión 1. Como F_2 es un punto, entonces F_1 tiene que tener dimensión 1, y no ser paralelo a F_0 (es decir, que la celda $F_0 + F_1 + F_2 + \delta$ es 2-mixta). Pero entonces se tendrá que $F_1 = (a_j, a_{j+1})$ y $\tilde{a} \in \{a_j, a_{j+1}\}$ (de otro modo, $F_1 + F_2$ no estaría contenido en el borde de $Q_1 + Q_2$ como establece la primer afirmación). Siendo además p_0 un punto del segmento (a_j, a_{j+1}), se concluye nuevamente que p pertenece al borde de Q, lo cual es una contradicción. □
Juntando todos estos lemas, ahora tenemos el siguiente resultado, que nos permitirá construir la matriz resultante.

Teorema 4.17 *Cualquiera sea $p \in \mathcal{F} \setminus \{\mathbf{p}\}$, si* $\mathrm{RC}(p) = (i, a)$ *entonces*

$$(p - a + Q_i) \cap \mathbb{Z}^2 \subset \mathcal{F}.$$

Construiremos ahora la matriz $\mathbb{M}$, de tamaño $|\mathcal{F}| \times |\mathcal{F}|$, cuyas filas y columnas estarán indexadas por los puntos $p \in \mathcal{F}$, tal como en el capítulo 2.

- Si $p \in \mathcal{F} \setminus \{\mathbf{p}\}$ entonces, cualquiera sea $p' \in \mathcal{F}$, el elemento de $\mathbb{M}$ indexado por (p, p') será igual al coeficiente de $x^{p'}$ en la expansión del polinomio $x^{p-a} f_i(x)$ donde $\mathrm{RC}(p) = (i, a)$.

- El elemento $(\mathbf{p}, p')$ será igual al coeficiente de $x^{p'}$ del jacobiano tórico dicreto $G(f)$ definido en la proposición 4.3.

Ahora podemos enunciar el resultado principal de este capítulo.

Teorema 4.18

$$\det(\mathbb{M}) = \mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, f_1, f_2)\, p_{\mathbf{M}},$$

donde $p_{\mathbf{M}}$ no depende de los coeficientes de f_0.

Demostración. El teorema 4.17 nos dice que $\mathbb{M}$ es en realidad un menor de la matriz asociada a la última flecha del complejo 4.2. El hecho de que el determinante de $\mathbb{M}$ es un múltiplo de la resultante se sigue de [CDS2]. Como además este determinante tiene el mismo grado que la resultante en los coeficientes de f_0 (esto sale de ver que el número de filas donde aparecen términos que involucran a f_0 es exactamente $\mathcal{MV}(Q_1, Q_2)$, que es el grado de la resultante en los coeficientes de este polinomio).
Para ver que el determinante no es idénticamente cero, usaremos el mismo argumento de convexidad dado [CE1, CE2, Stu2] especializando previamente algunos coeficientes a cero, y usando la estructura de $G(f)$ con un poco de cuidado. Para ello, conviene observar primero que $G(f)$ está bien definido módulo el ideal homogéneo, así que alcanza con ver que el determinante es distinto de cero para una elección específica de $G(f)$. Para hacer esta elección, escribimos $\mathbf{p} = b + a_i + a_{i+1}$, esto sale del lemma 4.12. Tomamos entonces: $\mathcal{A}_i^1 := e_i \setminus \{a_i\}$ y $\mathcal{A}_i^2 := \{a_i\}$, y con estos soportes calculamos $G(f)$.
Sea $V(P)$ el conjunto de vértices del polígono P. Se tiene que $V(P) \subset \mathcal{A}_i$, $i = 0, 1, 2$. Hacemos la siguiente especialización:

$$\begin{array}{rcl} \tilde{f}_0 & := & c_{0b}x^b \\ \tilde{f}_1 & := & \sum_{a\in V(P)} c_{1a}x^a \\ \tilde{f}_2 & := & \sum_{a\in V(P)} c_{2a}x^a. \end{array}$$

Bajo esta especialización, se tiene que $G(\tilde{f}) = c_{0b}c_{i_1a_i}c_{i_2a_{i+1}}x^{\mathbf{p}}$. Llamando $\mathbb{M}'(\tilde{f})$ a la matriz que resulta de eliminar las filas y columnas indexadas por $\mathbf{p}$ en $\mathbb{M}(\tilde{f})$, se tiene que $init_{-\omega}(\det(\mathbb{M}(\tilde{f})))$ será igual a $c_{0b}c_{i_1a_i}c_{i_2a_{i+1}}$ por el producto de los elementos que se encuentran en la diagonal de $\mathbb{M}'(\tilde{f})$, que son siempre coeficientes que corresponden a los vértices de P si el polinomio a cuyo soporte contribuyen es f_1 o f_2, o bien es c_{0b} (ver [CE1, CE2]). En todos los casos, son distintos de cero. Por lo tanto, $init_{-\omega}(\det(\mathbb{M}(\tilde{f})))$ no es cero, luego $\det(\mathbb{M}) \neq 0$, que es lo que se quería demostrar □

Corolario 4.19 *El factor extraño $p_{\mathbf{M}}$ es un polinomio de contenido* 1.

Demostración. La demostración del teorema anterior nos dice que

$$init_{-\omega}(\det(\mathbb{M}(\tilde{f}))) = \pm c_{0b}^{\mathcal{MV}(Q_1,Q_2)} \prod_{i>0} c_{ia}^{\alpha_{ia}}.$$

Por otro lado, se tiene que

$$init_{-\omega}(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(\tilde{f}_0, \tilde{f}_1), \tilde{f}_2) = \pm c_{0b}^{\mathcal{MV}(Q_1,Q_2)} \prod_{i>0} c_{ia}^{\alpha'_{ia}}$$

con $0 \leq \alpha'_{ia} \leq \alpha_{ia}$. Esto puede verse, por ejemplo, construyendo la matriz de Canny y Emiris para este caso, con esta elección de ω y δ, y usando los resultados de [Stu2]. Calculando $init_{-\omega}(p_{\mathbf{M}}(\tilde{f}))$, se sigue el resultado fácilmente. □

4.6 Ejemplos

Ejemplo 4.20 *Vamos a calcular la resultante de la familia de polinomios dada en el ejemplo 2.4. Se tiene*

$$\begin{aligned} f_0 &= c_{0,(0,0)} + c_{0,(1,0)}x_1 + c_{0,(0,1)}x_2 + c_{0,(1,1)}x_1\,x_2, \\ f_1 &= c_{1,(0,0)} + c_{1,(1,0)}x_1 + c_{1,(0,1)}x_2 + c_{1,(1,1)}x_1\,x_2, \\ f_2 &= c_{2,(0,0)} + c_{2,(1,0)}x_1 + c_{2,(0,1)}x_2 + c_{2,(1,1)}x_1\,x_2. \end{aligned}$$

Tomamos $\delta = (\epsilon, \epsilon - \epsilon_0)$, *con* $0 < \epsilon_0 << \epsilon$, *y* $b = (0,0)$. *El levantamiento (4.4) produce una partición de* Q_1 *en dos triángulos cuyo lado común es el segmento* $(0,0)(1,1)$; *el otro cuadrado,* Q_2, *no se divide bajo el levantamiento.*

En este ejemplo no importa cuál será el levantamiento que se dé a Q_0 *ya que no hay puntos enteros fuera de* $b + Q_1 + Q_2 + \delta$. *El conjunto* $\mathcal{F}$ *consiste de los puntos*

$$\{(1,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2)\}.$$

Si escribimos $G(f) = \Delta_{(1,1)}x_1x_2 + \Delta_{(1,2)}x_1x_2^2 + \Delta_{(2,1)}x_1^2x_2 + \Delta_{(2,2)}x_1^2x_2^2$, *resulta*

$$\mathbb{M} = \begin{bmatrix} c_{0,(0,0)} & c_{0,(1,0)} & c_{0,(0,1)} & c_{0,(1,1)} \\ \Delta_{(1,1)} & \Delta_{(1,2)} & \Delta_{(2,1)} & \Delta_{(2,2)} \\ c_{2,(0,0)} & c_{2,(1,0)} & c_{2,(0,1)} & c_{2,(1,1)} \\ c_{1,(0,0)} & c_{1,(1,0)} & c_{1,(0,1)} & c_{1,(1,1)} \end{bmatrix},$$

y $\det(\mathbb{M}) = \pm\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, f_1, f_2)$.

Ejemplo 4.21 *Queremos calcular la resultante del sistema*

$$\begin{aligned} f_0 &= a_0 + a_1x_1 + a_2y_2 + a_3x_1^2x_2 + a_4x_1^2x_2^2 + a_5x_1x_2^2 \\ f_1 &= b_0 + b_1x_1 + b_2y_2 + b_3x_1^2x_2 + b_4x_1^2x_2^2 + b_5x_1x_2^2 \\ f_2 &= c_0 + c_1x_1 + c_2y_2 + c_3x_1^2x_2 + c_4x_1^2x_2^2 + c_5x_1x_2^2. \end{aligned}$$

En este caso, el polígono de Newton de cada polinomio es la cápsula convexa de los puntos

$$(0,0),\ (1,0),\ (0,1),\ (1,2),\ (2,1),\ (2,2).$$

El interior de la suma de Minkowski tiene 19 *puntos enteros. Tomando* $\delta = (\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$,

$b = (0,0)$ *y* $\omega_0(1,0) = \omega_0(0,1) = 1$, *se tiene que* $\mathbb{M}$ *es igual a*

$$\begin{bmatrix}
b_4 & b_5 & 0 & b_3 & 0 & b_0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & b_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & b_4 & b_5 & 0 & b_3 & b_1 & 0 & b_2 & 0 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_4 & c_5 & 0 & c_3 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & 0 & 0 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & b_4 & b_5 & b_2 & 0 & 0 & 0 & b_3 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & b_5 & 0 & 0 & 0 & b_3 & b_2 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_5 & 0 & b_3 & 0 & b_2 & 0 & b_1 & b_0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & c_5 & 0 & 0 & 0 & c_3 & c_2 & 0 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 & b_4 & b_5 & b_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_1 & b_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_3 & c_4 & c_5 & c_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_4 & c_5 & c_2 & 0 & 0 & 0 & c_3 & 0 & 0 & c_1 & c_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
* & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * & * \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 & c_3 & 0 & c_2 & 0 & c_1 & c_0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & c_4 & 0 & c_3 & 0 & c_2 & 0 & c_1 & c_0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & a_4 & a_5 & a_2 & 0 & 0 & 0 & a_3 & 0 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_2 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_3 & a_4 & a_5 & a_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_4 & b_5 & 0 & 0 & b_2 & 0 & 0 & b_0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & a_3 & 0 & a_2 & 0 & a_1 & a_0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_5 & 0 & a_3 & 0 & a_2 & 0 & a_1 & a_0
\end{bmatrix}.$$

*En la fila de * van los coeficientes del jacobiano (o el jacobiano discreto). Calculando con* MAPLE, *obtenemos que*

$$\det(\mathbb{M}) = b_4(-c_5 b_4 + b_5 c_4)\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, f_1, f_2).$$

Capítulo 5

Fórmulas clásicas vistas en este contexto

5.1 Polinomios en una Variable

Sean $f_1(x) = \sum_{j=0}^{d_1} a_j x^j$ y $f_2(x) = \sum_{j=0}^{d_2} b_j x^j$ polinomios genéricos en una variable (o sus homogeneizados en dos variables) de grados $d_1 \leq d_2$. En este caso, la inecuación (3.8) se verifica para todo $t = 0, \ldots, d_1 + d_2 - 1$ y tendremos una fórmula determinantal para todo t entre 0 y $t_n + 1$. Aquí, $t_2 = d_1 + d_2 - 2$. Cuando $t = d_1 + d_2 - 1 = t_2 + 1$ recuperamos la fórmula de Sylvester clásica.
Supongamos ahora $d_1 = d_2 = d$, y escribimos

$$\frac{f_1(x)f_2(y) - f_1(y)f_2(x)}{x - y} = \sum_{i,j=0}^{d} c_{ij} x^i y^j.$$

Entonces, la fórmula de *Bézout* clásica para la resultante entre f_1 y f_2 dice que

$$\mathrm{Res}_{d,d}(f_1, f_2) = \det(c_{ij}).$$

Es fácil ver que podemos obtener precisamente esta formulación si tomamos $t = d - 1$. Para otros valores de t, obtendremos fórmulas que interpolan entre Sylvester y Bézout, como en [GKZ2], Ch.12, aún en el caso $d_1 \neq d_2$. Se puede verificar inmediatamente que la menor de todas estas matrices tiene tamaño d_2.
Supongamos, por ejemplo, que $d_1 = 1, d_2 = 2$. En este caso, $[t_2/2] = [1/2] = 0$, y M_0 es una matriz de 2×2 que representa una transformación entre S_1^* y $S_0 \oplus S_0^*$, cuyo determinante es igual a la resultante

$$\mathrm{Res}_{1,2}(f_1, f_2) = a_1^2 b_0 - a_0 a_1 b_1 + b_2 a_0^2.$$

Si escribimos $f_1(x) = 0x^2 + a_1 x + a_0$ y usamos la fórmula de Bézout clásica para $d = 2$, también obtendremos una matriz de 2×2, pero cuyo determinante será igual a $b_2 \cdot \mathrm{Res}_{1,2}(f_1, f_2)$. El exponente 1 en b_2 es precisamente la diferencia $d_2 - d_1$.

5.2 Fórmulas de Sylvester para tres Cuádricas

Supongamos $n = 3$, y $d_1 = d_2 = d_3 = 2$. Sea J el jacobiano de los polinomios f_1, f_2, f_3. Una fórmula muy bonita debida a Sylvester dice que $\mathrm{Res}_{2,2,2}(f_1, f_2, f_3)$ se puede obtener como la $1/512$ parte del determinante de la matriz de tamaño 6×6 cuyas columnas están indexadas por los monomios en 3 variables de grado 2 y en cuyas filas se encuentran las expansiones, en esta base monomial, de $f_1, f_2, f_3, \frac{\partial J}{\partial x_1}, \frac{\partial J}{\partial x_2}$ y $\frac{\partial J}{\partial x_3}$ (ver [CLO] y las referencias que se citan allí).
En este caso, $[t_3/2] = [3/2] = 1$, y debido al Lema 3.2, tenemos una fórmula determinantal en este grado, dado que $2 - 3 < 1 < 4$. De las ecuaciones de Euler

$$2f_i(x) = \sum_{j=1}^{3} x_j \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j},$$

podemos escribir

$$\begin{aligned} 2\left(f_i(x) - f_i(y)\right) &= \textstyle\sum_{j=1}^{3} \left(x_j \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - y_j \frac{\partial f_i(y)}{\partial y_j} \right) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{3} (x_j - y_j) \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} + y_j \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} - \frac{\partial f_i(y)}{\partial y_j} \right) \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{3} \left((x_j - y_j) \frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} + y_j \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_j \partial x_l} (x_l - y_l) \right). \end{aligned}$$

Debido a (1.22), podemos calcular el bezoutiano usando

$$\Delta_{ij}(x, y) := \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f_i(x)}{\partial x_j} + \sum_{l=1}^{3} \frac{\partial^2 f_i(x)}{\partial x_l \partial x_j} y_l \right).$$

Con esta formulación, no es difícil ver que se puede recuperar la fórmula de Sylvester en la igualdad $\mathrm{Res}_{2,2,2}(f_1, f_2, f_3) = \det M_1$.

5.3 Formulaciones con el Jacobiano

Podemos reemplazar Δ_0 por J en la fórmula de Macaulay (Theorem 1.10) para $t = t_n$, y tendremos el siguiente resultado:

Teorema 5.1 *Consideremos la submatriz $\tilde{M}_{t_n}$ que se extrae de la matriz de δ_0 en las bases monomiales, eligiendo las mismas filas y columnas que M_{t_n}. Entonces, $\det(\tilde{M}_{t_n}) \neq 0$, y se tiene la siguiente fórmula a la Macaulay:*

$$d_1 \dots d_n \, \mathrm{Res}_{d_1,\dots,d_n}(f_1, \dots, f_n) = \frac{\det(M_{t_n})}{\det(E_{t_n})}.$$

5.4 Fórmulas de Dixon

En esta sección revisaremos las fórmulas clásicas formuladas por Dixon para calcular la resultante de tres polinomios afines en dos variables de grado d. Haremos un cambio en la notación: los polinomios genéricos a considerar (que tienen monomios de grados a lo más d en dos variables (x_1, x_2)) se denotarán con f_1, f_2, f_3 y denotaremos con F_1, F_2, F_3 sus respectivas homogeneizaciones en tres variables (con variable de homogeneización x_3). Dixon (cf. [Dix]) propuso la siguiente fórmula determinantal para calcular la resultante $\mathrm{Res}_{d,d,d}(f_1, f_2, f_3) = \mathrm{Res}_{d,d,d}(F_1, F_2, F_3)$:
Sea $\mathrm{Bez}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ el polinomio obtenido al dividir por $(x_1 - y_1)(x_2 - y_2)$ el siguiente determinante :

$$\det \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) & f_2(x_1, x_2) & f_3(x_1, x_2) \\ f_1(y_1, x_2) & f_2(y_1, x_2) & f_3(y_1, x_2) \\ f_1(y_1, y_2) & f_2(y_1, y_2) & f_3(y_1, y_2). \end{pmatrix}$$

Notar que, haciendo operaciones en las filas de la matriz, se tiene que $\mathrm{Bez}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ es igual al determinante de la matriz

$$\det \begin{pmatrix} \Delta_{11} & \Delta_{21} & \Delta_{31} \\ \Delta_{12} & \Delta_{22} & \Delta_{32} \\ f_1(y_1, y_2) & f_2(y_1, y_2) & f_3(y_1, y_2), \end{pmatrix}$$

donde los elementos Δ_{ij} se definen como en (1.4). Escribimos

$$\mathrm{Bez}(x_1, x_2, y_1, y_2) = \sum_{|\beta| \leq 2d-2} B_\beta(x_1, x_2) y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2}.$$

Hacemos $A := \mathbb{Z}[a]$, donde a denota una indeterminada por cada coeficiente de f_1, f_2, f_3. Sea S el módulo libre sobre A con base $\mathcal{B}$ dada por todos los monomios en dos variables de grado menor o igual que $d-2$, que tiene un isomorfismo obvio con el A-módulo libre S' con base $\mathcal{B}'$ dada por todos los monomios en tres variables de grado igual a $d-2$. La base de monomios del espacio de polinomios en dos variables de grado menor o igual que $2d-2$ se denotará $\mathcal{C}$.
Sea M la matriz cuadrada de tamaño $2d^2 - d$ cuyas columnas están indexadas por $\mathcal{C}$ y cuyas filas contienen, consecutivamente, la expansión en la base $\mathcal{C}$ de $m \cdot f_1$, de $m \cdot f_2$, y de $m \cdot f_3$, donde m varía en los tres casos sobre la base $\mathcal{B}$, y finalmente, la expansión en la base $\mathcal{C}$ de todos los elementos B_β, $|\beta| \leq d-1$. La fórmula de Dixon dice que

$$\mathrm{Res}_{d,d,d}(f_1, f_2, f_3) = \pm \det M.$$

En este caso, $d_1 = d_2 = d_3 = d$ y $n = 3$, así que (3.7) vale, y por (3.8) se tiene que hay una fórmula determinantal para cada t tal que $d-3 < t < 2d$. Una posibilidad es tomar $t = 2d-2$. Luego, $t_3 - t = d-1 < d$, lo cual implica que $< F_1, F_2, F_3 >_{t_3-t} = 0$. Además, $t - d = d-2 < d$ y, por lo tanto, $S^{t,i} = S'$, para todo $i = 1, 2, 3$.
Sea $\Delta(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \sum_{|\gamma| \leq 3d-3} \Delta_\gamma(x) y^\gamma$ el bezoutiano asociado con los polinomios homogéneos F_1, F_2, F_3. Sabemos que $\mathrm{Res}_{d,d,d}(F_1, F_2, F_3) = \pm \det M_{2d-2}$. En este caso,

M_{2d-2} es una matriz cuadrada del mismo tamaño que M, y es obvio que sus primeras $3d(d-1)/2$ primeras filas coinciden (si las columnas están ordenadas convenientemente). De acuerdo con (1.6), las últimas $(d+1)d/2$ filas de M_{d-2} contienen la expansión en la base $\mathcal{B}'$ de todos los elementos Δ_γ, $|\gamma| = d-1$.

Proposición 5.1 *La matriz "afín" M y la matriz "homogénea" M_{2d-2} coinciden.*

Demostración. Denotemos con $P(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t)$ al polinomio homogéneo de grado $3d-2$ en 6 variables que se obtiene al dividir por $(x_1-y_1)(x_2-y_2)$ el siguiente determinante

$$\det \begin{pmatrix} \Delta_{1,1}(F) & \Delta_{2,1}(F) & \Delta_{3,1}(F) \\ \Delta_{1,2}(F) & \Delta_{2,2}(F) & \Delta_{3,2}(F) \\ F_1(y_1, y_2, t) & F_2(y_1, y_2, t) & F_3(y_1, y_2, t) \end{pmatrix},$$

donde

$$\Delta_{i,1}(F) := F_i(x_1, x_2, x_3) - F_i(y_1, x_2, x_3),\ i = 1, 2, 3$$

y

$$\Delta_{i,2}(F) := F_i(y_1, x_2, x_3) - F_i(y_1, y_2, x_3),\ i = 1, 2, 3.$$

Como

$$(x_3 - y_3)\Delta(x, y) = P(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, x_3) - P(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3), \tag{5.1}$$

y estamos buscando elementos de $\mathrm{Bez}(x_1, x_2, y_1, y_2)$ con grado menor o igual que $d-1$ en las variables y_1, y_2, al ser $\deg_y(P(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)) \geq d$ se tiene que, combinando la igualdad dada en (5.1), para cada $1 \leq j \leq d-1$:

$$x_3 \sum_{|\gamma|=j} \Delta_\gamma(x) y^\gamma - y_3 \sum_{|\gamma|=j-1} \Delta_\gamma(x) y^\gamma \tag{5.2}$$

es igual a la parte de grado j en las variables y_i de $P(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, x_3)$ que, como no depende de y_3, resulta ser igual a

$$x_3 \sum_{\gamma_1+\gamma_2=j} \Delta_{(\gamma_1,\gamma_2,0)}(x) y_1^{\gamma_1} y_2^{\gamma_2}, \tag{5.3}$$

Luego, el coeficiente de $y_1^{\gamma_1} y_2^{\gamma_2}$ de $P(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3)$ será

$$x_3 \Delta_{(\gamma_1,\gamma_2,0)}(x_1, x_2, x_3). \tag{5.4}$$

Además, usando recursivamente (5.2) se tiene que, para cada par de enteros no negativos $\gamma, \tilde{\gamma}$ tal que $\gamma = \tilde{\gamma} + (0, 0, k), |\gamma| = j$:

$$x_3^k \Delta_\gamma(x) = \Delta_{\tilde{\gamma}}(x). \tag{5.5}$$

Por otro lado, desarrollando el determinante que define a P por la tercer fila, se observa que $\deg_{y_1,y_2,t}(P(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t)) \geq d$. Escribiendo

$$P(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, t) = \sum_{\beta_0+\beta_1+\beta_2 \leq 3d-2} c_{\beta_0,\beta_1,\beta_2}(x_1, x_2, x_3) t^{\beta_0} y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2}$$

se tendrá que, si $\beta_1 + \beta_2 \leq d - 1$, entonces $c_{\beta_0,\beta_1,\beta_2} \neq 0$ implica $\beta_0 \geq d - \beta_1 - \beta_2$. Fijamos $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ tal que $|\beta| \leq d - 1$, y consideramos

$$\begin{aligned} &\textstyle\sum_{\beta_0 \geq 0} c_{\beta_0,\beta_1,\beta_2}(x_1, x_2, x_3) t^{\beta_0} = t^{d-\beta_1-\beta_2} \sum_{\beta_0 \geq 0} c_{\beta_0,\beta_1,\beta_2}(x_1, x_2, x_3) t^{\beta_0+\beta_1+\beta_2-d} = \\ &= t^{d-\beta_1-\beta_2} P_\beta(x_1, x_2, x_3, t). \end{aligned} \tag{5.6}$$

De las propiedades de P, se deducen las siguientes:

- $P_\beta(x_1, x_2, x_3, t)$ es homogéneo de grado $2d - 2$;
- $P_\beta(x_1, x_2, x_3, 0) \neq 0$;
- $P_\beta(x_1, x_2, 1, 1) = B_\beta(x_1, x_2)$.

Todo esto dice que $P_\beta(x_1, x_2, x_3, x_3)$ es la homogeneización de $B_\beta(x_1, x_2)$ a grado $2d - 2$. Hacemos $t = x_3$ en (5.6), y comparamos con (5.4). Queda la siguiente igualdad:

$$x_3 \Delta_{(\beta_1,\beta_2,0)}(x_1, x_2, x_3) = x_3^{d-\beta_1-\beta_2} P_\beta(x_1, x_2, x_3, x_3),$$

y usando (5.5) se concluye la demostración. □

Parte II

APLICACIONES

Capítulo 6

Implicitación de Curvas y Superficies Racionales

En este capítulo, vamos a demostrar algunas relaciones entre la resultante y los menores maximales que aparecen en la formulación del método de las superficies móviles, obteniendo como consecuencia demostraciones alternativas a las de [CGZ]. Además, se extenderá la validez del método al caso de superficies impropiamente parametrizadas.

6.1 Superficies Móviles

Comenzaremos revisando algunas nociones básicas que son usadas en el "método de cónicas y cuádricas móviles" que fue formulado en [CGZ, SC, ZCG].
Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Una d-superficie es una ecuación implícita homogénea en las variables X_1, X_2, X_3 y X_4 de grado d :

$$\sum_{|\gamma|=d} c_\gamma X^\gamma = 0, \ c_\gamma \in \mathbb{K}.$$

Una d-superficie móvil de bigrado (σ_1, σ_2) es una familia de d-superficies parametrizadas por s, u, t y v como sigue:

$$\sum_{i=0}^{\sigma_1} \sum_{j=0}^{\sigma_2} \left(\sum_{|\gamma|=d} A_\gamma^{ij} X^\gamma \right) s^i \, u^{\sigma_1 - i} \, t^j \, v^{\sigma_2 - j} = 0, \ A_\gamma^{ij} \in \mathbb{K}. \tag{6.1}$$

Para cada valor fijo de los parámetros, la ecuación (6.1) es una ecuación implícita de grado d en $\mathbb{K}^3$.
De manera similar de define una d-superficie móvil de grado σ como:

$$\sum_{i+j \leq \sigma} \left(\sum_{|\gamma|=d} A_\gamma^{ij} X^\gamma \right) s^i \, t^j \, u^{\sigma - i - j} = 0, \ A_\gamma^{ij} \in \mathbb{K}. \tag{6.2}$$

En ambos casos, una 1-superficie móvil se llamará "plano móvil". Si $d = 2$, se llamará "cuádrica móvil" ([CGZ]).
Dada una familia de cuatro polinomios bihomogéneos (resp. homogéneos) $x_i(s,u;v,t)$ (resp. $x_i(s,t,u)$) de bigrado (m,n) (resp. grado n) con coeficientes en $\mathbb{K}$, la d-superficie móvil 6.1) (resp.(6.2)) se dice que *sigue* a la superficie racional $\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right)$ si

$$\sum_{i=0}^{\sigma_1}\sum_{j=0}^{\sigma_2}\left(\sum_{|\gamma|=d} A_\gamma^{ij} x^\gamma\right) s^i\, u^{\sigma_1-i}\, t^j\, v^{\sigma_2-j} = 0$$

resp.

$$\sum_{i+j\leq\sigma}\left(\sum_{|\gamma|=d} A_\gamma^{ij} x^\gamma\right) s^i\, t^j\, u^{\sigma-i-j} = 0.$$

Para calcular el $\mathbb{K}$-espacio vectorial de las d-superficies móviles de un bigrado (resp. grado) fijo que siguen a la superficie racional, igualamos a cero los coeficientes de los monomios $s^\alpha\, u^{\sigma_1-\alpha}\, t^\beta\, v^{\sigma_2-\beta}$ (resp. $s^\alpha\, t^\beta\, u^{\sigma-\alpha-\beta}$) que aparecen en la ecuación implícita, y resolvemos el sistema lineal de ecuaciones en las indeterminadas $\{A_\gamma^{ij}\}$.

Ejemplo 6.1 *Consideremos la siguiente familia de polinomios homogéneos:*

$$\begin{aligned} x_1 &= s^3 \\ x_2 &= t^3, \\ x_3 &= u^3, \\ x_4 &= s^3 + t^3 + u^3. \end{aligned} \tag{6.3}$$

La superficie paramétrica que ellos definen está contenida en el hiperplano

$$X_1 + X_2 + X_3 - X_4 = 0$$

que es un plano móvil de grado 0. *Notar que existe un plano móvil de grado cero si y solamente si la superficie está contenida en un plano. En este caso, éste es el único plano que contiene a (6.3), así que es el único elemento de una base del espacio de planos móviles de grado* 0.
La siguiente es una familia de generadores del espacio de las cuádricas móviles de grado cero:

$$\begin{aligned} X_1\,(X_1 + X_2 + X_3 - X_4) &= 0, \\ X_2\,(X_1 + X_2 + X_3 - X_4) &= 0, \\ X_3\,(X_1 + X_2 + X_3 - X_4) &= 0, \\ X_4\,(X_1 + X_2 + X_3 - X_4) &= 0. \end{aligned}$$

Ejemplo 6.2

Este ejemplo aparece en [CGZ]. Hagamos

$$\begin{aligned} x_1 &= s\,t + u\,v, \\ x_2 &= s\,v, \\ x_3 &= u\,t, \\ x_4 &= s\,v + u\,t + u\,v, \end{aligned}$$

y $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$. *Una base del espacio de los planos móviles de bigrado* $(1,1)$ *que siguen la superficie paramétrica está dado por :*

$$\begin{aligned} (X_4 - X_1 - X_2 - X_3)\,u\,v + s\,v\,X_3 &= 0, \\ (X_4 - X_1 - 2\,X_2 - X_3)\,u\,v + s\,v(X_4 - X_2) &= 0. \end{aligned}$$

Con la ayuda de MAPLE, *hemos encontrado la siguiente base de* 24 *cuádricas móviles con el mismo bigrado.*

$$\begin{aligned} X_1\,X_4\,u\,v - X_1^2\,s\,v - X_1^2\,u\,v - X_1^2\,u\,t + X_1\,X_2\,s\,t + \\ + X_1\,X_3\,s\,t + X_1\,X_3\,s\,v &= 0, \\ X_2\,X_3\,u\,v - X_1\,X_3\,s\,v + X_2\,X_3\,s\,t &= 0, \\ X_2\,X_4\,u\,v - X_1\,X_4\,s\,v + X_2\,X_4\,s\,t &= 0, \\ X_3\,X_4\,u\,v - X_1^2\,u\,t - X_1\,X_3\,u\,t - X_2\,X_4\,s\,t + 3\,X_2\,X_3\,s\,t - \\ -2X_1\,X_3\,s\,v + +X_1\,X_3\,s\,t + X_3\,X_4\,s\,v + X_2^2\,s\,t + X_3^2\,s\,t &= 0, \\ X_2^2\,u\,t - X_2\,X_4\,s\,t + X_2\,X_3\,s\,t + X_2^2\,s\,t &= 0, \\ X_3^2\,u\,t - X_2\,X_3\,s\,t + X_1\,X_3\,s\,v - 2\,X_3^2\,s\,t + X_3\,X_4\,s\,v - \\ -X_1\,X_3\,s\,u\,t + 2\,X_1\,X_3\,u\,t + X_1^2\,u\,t - X_4^2\,u\,t &= 0, \\ X_1\,X_2\,u\,t - X_1\,X_3\,s &= 0, \\ X_1\,X_4\,u\,t - X_1\,X_3\,s\,v + X_1\,X_3\,s\,t - X_1\,X_3\,u\,t - X_1^2\,u\,t &= 0, \\ X_2\,X_3\,u\,t + X_2\,X_4\,s\,t - 2\,X_2\,X_3\,s\,u\,t + X_1\,X_3\,s\,v - \\ -X_2^2\,s\,t - X_3\,X_4\,s\,v &= 0, \\ X_2\,X_4\,u\,t - X_3\,X_4\,s\,v &= 0, \\ X_3\,X_4\,u\,t - X_4^2\,u\,t + X_1^2\,u\,t + X_1\,X_3\,u\,t - X_1\,X_3\,s\,t - \\ -X_2^2\,s\,t - X_3^2\,s\,t + 2\,X_1\,X_3\,s\,v - 3\,X_2\,X_3\,s\,t + X_2\,X_4\,s\,t &= 0, \\ X_2^2\,s\,v - X_1^2\,s\,v + X_1\,X_4\,s\,v - X_2\,X_4\,s\,v + X_1\,X_2\,s\,t - \\ -2\,X_2^2\,s\,t - X_1\,X_3\,s\,v - X_2\,X_3\,s\,t + X_2\,X_4\,s\,t &= 0, \\ X_3^2\,s\,v + X_2\,X_4\,s\,t - 2\,X_2\,X_3\,s\,t + X_1\,X_3\,s\,v - X_2^2\,s\,t - \\ -X_3\,X_4\,s\,v &= 0, \\ X_4^2\,s\,v - X_1\,X_4\,s\,v - X_2\,X_4\,s\,v - X_3\,X_4\,s\,v + X_2\,X_4\,s\,t &= 0, \\ X_1\,X_2\,s\,v + X_1^2\,s\,v - X_1\,X_4\,s\,v - X_1\,X_2\,s\,t + X_1\,X_3\,s\,v &= 0, \\ X_2\,X_3\,s\,v - X_2\,X_4\,s\,t + X_2\,X_3\,s\,t + X_2^2\,s\,t &= 0, \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
X_4^2\,s\,t - 3\,X_2\,X_3\,s\,t + X_1\,X_3\,s\,v - X_3^2\,s\,t - X_2^2\,s\,t - & \\
-2\,X_3\,X_4\,s\,v &= 0,\\
X_1\,X_4\,s\,t - X_1\,X_3\,s\,v - X_1\,X_3\,s\,t - X_1\,X_2\,s\,t &= 0,\\
X_3\,X_4\,s\,t - X_3\,X_4\,s\,v - X_2^2\,s\,t - X_3^2\,s\,t + X_1\,X_3\,s\,v - & \\
-3\,X_2\,X_3\,s\,t + X_2\,X_4\,s\,t &= 0,\\
X_2^2\,u\,v + X_1^2\,s\,v - X_1\,X_4\,s\,v - X_1\,X_2\,s\,t + X_1\,X_3\,s\,v + & \\
+X_2^2\,s\,t &= 0,\\
X_3^2\,u\,v + X_3^2\,s\,t - X_1\,X_3\,u\,t &= 0,\\
X_4^2\,u\,v - X_1^2\,u\,v - X_1^2\,s\,v - X_1\,X_4\,s\,v - 2\,X_1^2\,u\,t - & \\
-X_1\,X_3\,u\,t + X_1\,X_2\,s\,t + 2\,X_1\,X_3\,s\,t + 2\,X_3\,X_4\,s\,v + X_2^2\,s\,t + & \\
+X_3^2\,s\,t - X_1\,X_3\,s\,v + 3\,X_2\,X_3\,s\,t &= 0,\\
X_1\,X_2\,u\,v - X_1^2\,s\,v + X_1\,X_2\,s\,t &= 0,\\
X_1\,X_3 - X_1^2\,u\,t + X_1\,X_3\,s\,t &= 0.
\end{aligned}
$$

6.2 El Caso Bihomogéneo

6.2.1 Notación

Sean x_1, x_2, x_3 y x_4 cuatro polinomios bihomogéneos genéricos en dos variables de bigrado (m,n), es decir

$$x_i\,(s,u;t,v) = \sum_{j=0}^{m}\sum_{k=0}^{n} c_{jk}^{i}\; s^j\,u^{m-j}\,t^k\,v^{n-k} \qquad i = 1,\ldots,4.$$

Definimos $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(c_{jk}^i)$, y notamos con $S_{k,l}$ al espacio de polinomios de bigrado (k,l) con coeficientes en $\mathbb{K}$.
Sea ϕ la transformación $\mathbb{K}$-lineal:

$$\begin{array}{rccl}
\phi: & {S_{m-1,n-1}}^4 & \to & S_{2m-1,2n-1}\\
 & (p_1,p_2,p_3,p_4) & \mapsto & \sum_{i=1}^{4} p_i\,x_i.
\end{array} \tag{6.4}$$

Para ser consistentes con la notación de [CGZ], notaremos con MP a la traspuesta [1] de la matriz de ϕ en las bases monomiales. Es una matriz cuadrada, de tamaño $4mn$.

Observación 6.3 *Con las definiciones establecidas en la sección anterior, no es difícil de ver que MP es la matriz de coeficientes del sistema lineal generado por los planos móviles de bigrado $(m-1,n-1)$ que siguen a la superficie racional dada por $\left(\frac{x_1}{x_4},\frac{x_2}{x_4},\frac{x_3}{x_4}\right)$.*

[1] Debido a la Convención 1.4, para mantener una coherencia con [CGZ], la mayoría de las matrices en este capítulo serán las traspuestas de las matrices asociadas a una transformación lineal.

Sea d un entero positivo, y hagamos

$$\Gamma := \{\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}{}^4 : |\gamma| = d\}.$$

Consideremos la transformación lineal

$$\Psi^d : S_{m-1,n-1}{}^{\Gamma} \to S_{(d+1)m-1,(d+1)n-1}$$

que a cada familia $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ le asigna el polinomio

$$\sum_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma x^\gamma. \tag{6.5}$$

Sea MQ^d la traspuesta de la matriz de Ψ^d en las bases monomiales También definimos

$$\Gamma_0 := \{\gamma \in \mathbb{Z}_{\geq 0}{}^4 : \ |\gamma| = d, \ \gamma_4 \leq 1\}.$$

Su cardinal es $(d+1)^2$. Consideramos la transformación ψ^d, la restricción de Ψ^d a $S_{m-1,n-1}{}^{\Gamma_0}$. Denotamos con MS^d la traspuesta de la matriz de ψ^d en las bases monomiales. Es una matriz cuadrada de tamaño $(d+1)^2mn$.

Observación 6.4 *Si $d = 1$, entonces $\psi^d = \phi$ y $MS^1 = MP$. Para $d = 2$, las matrices MQ^2 y MS^2 se llaman MQ y MQ_w respectivamente en [CGZ].*

Observación 6.5 *Es inmediato verificar que MS^d es un menor maximal de MQ^d. Es más, $\ker(MQ^d)$ es el $\mathbb{K}$ espacio vectorial de las d-superficies móviles de bigrado $(m-1, n-1)$ que siguen a la superficie racional.*

Consideremos el subconjunto Γ_1 de Γ_0 definido por los γ para los cuales se verifica que $\gamma_1 = 0$. Sea

$$\rho^d : S_{m-1,n-1}{}^{\Gamma_1} \oplus S_{dm-1,dn-1} \to S_{(d+1)m-1,(d+1)n-1} \tag{6.6}$$

la transformación lineal que envía el par $((p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma_1}, q)$ en

$$\sum_{\gamma\in\Gamma_1} p_\gamma x^\gamma + q\, x_1. \tag{6.7}$$

Denotaremos con MT^d a la traspuesta de la matriz de ρ^d en las bases monomiales. Es una matriz cuadrada del mismo tamaño que MS^d.

6.2.2 Cálculo de Resultantes usando Complejos de Koszul

Revisaremos brevemente el algoritmo para calcular el determinante de una sucesión exacta corta de espacios vectoriales ([GKZ2], Appendix A), ya que será necesario en lo que sigue. Consideremos el siguiente complejo exacto:

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{d_0} B \xrightarrow{d_1} C \longrightarrow 0. \tag{6.8}$$

Sean $\{a_1, \ldots, a_p\}$, $\{b_1, \ldots, b_q\}$, $\{c_1, \ldots, c_r\}$ bases en A, B, C respectivamente $(p+r=q)$. En este caso, el determinante del complejo con respecto a estas bases es igual al coeficiente de proporcionalidad

$$\frac{b_1 \wedge \ldots \wedge b_q}{d_0(a_1) \wedge \ldots \wedge d_0(a_p) \wedge \widehat{c_1} \wedge \ldots \wedge \widehat{c_r}} \tag{6.9}$$

donde $\widehat{c_1}, \ldots \widehat{c_r} \in B$ satisfacen: $d_1(\widehat{c_i}) = c_i$.
Se puede calcular explícitamente (6.9) de la manera siguiente:

1. Calcular las matrices D_0 y D_1, traspuestas de las matrices asociadas a las transformaciones lineales d_0 y d_1 respectivamente, en las bases dadas.

2. Sea $\overline{D_1}$ la submatriz de D_1 que se forma eligiendo todas las filas (son r) y las primeras r columnas. Denotemos con $\overline{D_0}$ a la submatriz de D_0 formada por las últimas p filas y todas las columnas (que también son p).

3. Se tiene que $\det(\overline{D_0}) \neq 0 \iff \det(\overline{D_1}) \neq 0$ ([GKZ2]). Si este es el caso, entonces

$$\det(\text{complejo}) = \frac{\det(\overline{D_1})}{\det(\overline{D_0})} \tag{6.10}$$

4. Si $\det(\overline{D_0}) = \det(\overline{D_1}) = 0$, entonces otro menor maximal se puede elegir en D_0 como sigue: sea $I = \{i_1, \ldots, i_r\}$ un subconjunto ordenado de r enteros elegidos dentro del conjunto $\{1, \ldots, q\}$. Sea $\overline{D_{0,I}}$, (resp. $\overline{D_{1,I}}$) la submatriz de D_0 (resp. D_1) obtenida eligiendo todas las columnas (resp. filas) y las filas (resp. columnas) indexadas por $\{1, \ldots, q\} \setminus I$ (resp. I).

   Cambiemos el orden en la base de B de tal manera que los últimos r elementos sean los indexados por I. Usando la Proposición 9 de [[GKZ2], Appendix 10] se tiene que

$$\det(\overline{D_{0,I}}) \,.\, \det(\text{complejo}) = (-1)^{\sigma} \,.\, \det(\overline{D_{1,I}}), \tag{6.11}$$

   donde σ es la paridad de la permutación

$$\{i_1, \ldots, i_r, 1, 2, \ldots, i_1 - 1, i_1 + 1, \ldots, i_r - 1, i_r + 1, \ldots, q\}.$$

Recordemos la definición de $\mathrm{Res}_{m,n}(f_1, f_2, f_3)$, la resultante bihomogénea de tres polinomios genéricos de bigrado (m, n) ([Dix, GKZ2]): es un polinomio irreducible en los coeficientes de los f_i que se anula al especializar los coeficientes en un cuerpo k si y solamente si el sistema especializado $f_i = 0$ tiene una solución en in $\mathbb{P}^1_{\overline{k}} \times \mathbb{P}^1_{\overline{k}}$. Aquí, $\overline{k}$ denota la clausura algebraica de k.
El determinante de un complejo puede servirnos para calcular potencias de $\mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3)$ de la manera siguiente: consideremos el siguiente complejo de $\mathbb{K}$-espacios vectoriales:

$$\begin{aligned} 0 \longrightarrow {S_{m-1,n-1}}^2 \oplus S_{(d-1)m-1,(d-1)n-1} \xrightarrow{\psi_0} {S_{dm-1,dn-1}}^2 \oplus S_{2m-1,2n-1} \xrightarrow{\psi_1} \\ \longrightarrow S_{(d+1)m-1,(d+1)n-1} \to 0, \end{aligned} \tag{6.12}$$

donde ψ_1 y ψ_0 son los morfismos de Koszul

$$\psi_1(p,q,r) := p\,x_1 + q\,x_2 + r\,x_3^{d-1}; \tag{6.13}$$

$$\psi_0\,(p,q,r) := \left(q\,x_3^{d-1} + r\,x_2, p\,x_3^{d-1} - r\,x_1, -p\,x_2 - q\,x_1\right). \tag{6.14}$$

Proposición 6.1 *El complejo* (6.12) *es exacto, y si los coeficientes son especializados en un cuerpo k, continuará siendo exacto (como un complejo de k-espacios vectoriales) si y solamente si la resultante bihomogénea de los polinomios especializados no se anula. El determinante del complejo con respecto a las bases monomiales es igual a* $\pm\mathrm{Res}_{m,n}(x_1,x_2,x_3)^{d-1}$.

Demostración. Tomemos un polinomio $y_3(s,u;t,v)$ que sea bihomogéneo genérico y de bigrado $((d-1)m,(d-1)n)$ y modifiquemos el complejo reemplazando x_3^{d-1} por y_3 en (6.13) y (6.14).
Debido a que ahora los polinomios x_1, x_2 e y_3 son bihomogéneos, pero ya no tienen el mismo grado, no se puede calcular la resultante bihomogéneo entre ellos. Pero se puede calcular la *resultante mixta* asociada a la familia (x_1,x_2,y_3) (ver [GKZ2], Chapter 3). Es un polinomio irreducible en los coeficientes de x_1,x_2,y_3 que se anula bajo una especialización de estos si y solamente si los polinomios especializados tienen una raíz en $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1$.
Para calcular esta resultante, podemos aplicar el método de Cayley que se describe en el Capítulo 3 de [GKZ2]. Sea $\mathcal{F}(d_1,d_2)$ el fibrado lineal sobre $X := \mathbb{P}^1_{\overline{k}}\times\mathbb{P}^1_{\overline{k}}$ cuyas secciones son funciones homogéneas de grado d_1 en las coordenadas $(s:u)$ y de grado d_2 en las coordenadas $(t:v)$ sobre cada $\mathbb{P}^1_{\overline{k}}$.
Hacemos $\mathcal{L}_1=\mathcal{L}_2=\mathcal{F}(m,n)$ y $\mathcal{L}_3=\mathcal{F}((d-1)m,(d-1)n)$. Cada $\mathcal{L}_i$ es muy amplio, y podemos considerar polinomios de bigrado (m,n) con coeficientes en $\overline{k}$ como elementos de $H^0(X,\mathcal{L}_i)$, $i=1,2$, y polinomios de bigrado $((d-1)m,(d-1)n)$ como pertenecientes a $H^0(X,\mathcal{L}_3)$.
Se tiene entonces que cada especialización de (x_1,x_2,y_3) define una sección s del fibrado $E := \mathcal{L}_1\oplus\mathcal{L}_2\oplus\mathcal{L}_3$. Si hacemos $\mathcal{M} := \mathcal{F}((d+1)m-1,(d+1)n-1)$, y consideramos el complejo $C^\bullet_-(\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2,\mathcal{L}_3|\mathcal{M})$ que se define en el Capítulo 3 de [GKZ2], se puede ver que lo que se tiene es en realidad el complejo modificado (6.12). Es más, con esa elección de $\mathcal{M}$, el complejo resulta estable (es decir, no tiene cohomología no trivial para grado mayor que cero), así que valen para este complejo la Proposición 4.1 y el Teorema 4.2 del Capítulo 3 de [GKZ2], con lo cual, resulta que el complejo será exacto si y solamente si la resultante mixta de los polinomios especializados (x_1,x_2,y_3) es no nula. Además, se tiene que el determinante del complejo con respecto a las bases monomiales es igual a $\pm\mathrm{Res}(x_1,x_2,y_3)$.
Para recuperar el complejo original, especializamos y_3 en x_3^{d-1}. Teniendo en cuenta que la anulación del determinante de un complejo significa que deja de ser exacto ([GKZ2], Appendix A), esto implica que el determinante de (6.12) debe ser una potencia de $\mathrm{Res}_{m,n}(x_1,x_2,x_3)$.

Comparando los grados de la resultante bihomogénea y de la resultante mixta en los coeficientes de x_3 e y_3 respectivamente (ver [CLO, GKZ2]), tendremos que el determinante del complejo (6.12) será igual a

$$\pm\mathrm{Res}(x_1, x_2, y_3)|_{y_3=x_3^{d-1}} = \pm\mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3)^{d-1}.$$

□

Usando la receta dada más arriba, podemos calcular $\pm\mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3)^{d-1}$ con el siguiente algoritmo:

1. Calcular las matrices correspondientes a los mapas lineales ψ_0 y ψ_1 con respecto a las bases monomiales;

2. Elegir un menor no nulo maximal $m_{1,I}$ en la traspuesta de la matriz correspondiente a ψ_1, donde I es un conjunto de $(d+1)^2mn$ columnas correspondientes a vectores en la base monomial de $\oplus_{i=1}^2 S_{dm-1,dn-1} \oplus S_{2m-1,2n-1}$.

3. Calcular $m_{0,I}$, el menor maximal en la traspuesta de la matriz que representa ψ_0, que consiste de todas las filas **no** indexadas por I.

4. Se tiene que $m_{0,I} \neq 0$. Calcular $\frac{m_{1,I}}{m_{0,I}}$. Este cociente es igual al determinante del complejo, o sea la potencia $(d-1)$ de la resultante.

Observación 6.6 *Cualquiera sea el conjunto de índices I, se tiene la siguiente igualdad:*

$$m_{1,I} = \pm\mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3)^{d-1}\, m_{0,I}. \tag{6.15}$$

Observación 6.7 *Recordemos que la resultante está definida salvo signo. Por convención, estableceremos que*

$$\det(\textit{complejo}) = \mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3)^{d-1}.$$

Luego, usando (6.11), la fórmula (6.15) dice que:

$$m_{1,I} = (-1)^{\sigma}\,\mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3)^{d-1}\, m_{0,I}. \tag{6.16}$$

6.2.3 La Relación entre $\det(MS^d)$ y $\det(MP)$

Para probar el resultado principal de esta sección, necesitaremos el próximo lema auxiliar.

Lema 6.8

$$\pm\det(MT^d) = \det(MP)^d\,\mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3)^{d(d-1)/2}.$$

Demostración. La prueba será haciendo inducción en d. Para $d = 1$, está claro que ρ^1 y ϕ coinciden, así que el resultado es inmediato.
Supongamos entonces que $d \geq 2$. El morfismo ρ^d puede factorizarse como sigue:

$$S_{m-1,n-1}{}^{\Gamma_1} \oplus S_{dm-1,dn-1} \xrightarrow{\psi_2} S_{dm-1,dn-1}{}^2 \oplus S_{2m-1,2n-1} \xrightarrow{\psi_1} S_{(d+1)m-1,(d+1)n-1} \tag{6.17}$$

donde ψ_1 es el morfismo definido en (6.12) y

$$\psi_2\left(p_\gamma, q\right) = \left(q, \sum_{\gamma_2 \geq 1} p_\gamma x_2^{\gamma_2 - 1} x_3^{\gamma_3} x_4^{\gamma_4}, p_{(0,0,d,0)} x_3 + p_{(0,0,d-1,1)} x_4\right). \tag{6.18}$$

Denotemos con M_i a la traspuesta de la matriz asociada a ψ_i en las bases monomiales, $i = 1, 2$. Estas no son matrices cuadradas (sus tamaños son $(d+1)^2 mn \times (2d^2+4)mn$ y $(2d^2+4)mn \times (d+1)^2 mn$ respectivamente), pero aplicando la fórmula de Cauchy-Binet (ver por ejemplo [HJ]), se tiene la siguiente relación entre sus menores maximales y $\det(MT^d)$:

$$\det(MT^d) = \sum_I \det(M_{1,I}) \det(M_{2,I}), \tag{6.19}$$

donde la suma se realiza sobre todas las familias de números naturales

$$I = (i_1, \ldots, i_{(d+1)^2 mn})$$

que verifican $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_{(d+1)^2 mn} \leq (2d^2+4)mn$, y $M_{1,I}$ (resp. $M_{2,I}$) es la submatriz cuadrada de M_1 (resp. M_2) que se forma eligiendo las $(d+1)^2 mn$ columnas (resp. filas) indexadas por I.

Observación 6.9 *Notar que M_1 es la traspuesta de la matriz asociada a ψ_1 en las bases monomiales y, para cada I, con la notación del algoritmo descripto en la sección anterior se tiene que* $\det(M_{1,I}) = m_{1,I}$.

Usando la observación 6.6 y la fórmula (6.19), se tiene

$$\det(MT^d) = (\mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3))^{d-1} \sum_I (-1)^\sigma \det(M_{2,I})\, m_{0,I}. \tag{6.20}$$

Un cálculo explícito de la matriz de M_2 nos dice que tiene la siguiente estructura:

$$M_2 = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & 0 & 0 \\ 0 & B_1 & 0 \\ 0 & 0 & B_2 \end{bmatrix}, \tag{6.21}$$

donde B_1 y B_2 tienen tamaños $d^2 mn \times \frac{d(d+1)}{2} mn$ y $4mn \times 2mn$ respectivamente, e $\mathbb{I}$ denota la matriz identidad de tamaño $d^2 mn$.

Sea M_0 la traspuesta de la matriz asociada a ψ_0. Esta matriz tiene $(2d^2+4)mn$ filas y $((d-1)^2+2)mn$ columnas. Consideremos $M := [M_2, M_0]$, será cuadrada, con la siguiente estructura:

$$M = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \mathbb{I} & 0 & 0 & 0 & q\,x_3^{d-1} & r\,x_2 \\ 0 & B_1 & 0 & p\,x_3^{d-1} & 0 & -r\,x_1 \\ 0 & 0 & B_2 & -p\,x_2 & -q\,x_1 & 0 \end{array}\right]; \tag{6.22}$$

donde $\left[p\,x_3^{d-1}\right]$ denota la traspuesta de la matriz asociada a la transformación lineal $S_{m-1,n-1} \to S_{dm-1,dn-1}$ que a cada p le asigna $p\,x_3^{d-1}$, y los otros bloques tienen el mismo significado.
Se puede chequear que $[B_2, -p\,x_2, -q\,x_1]$ es una matriz cuadrada. Es más,

$$\det([Q, -p\,x_2, -q\,x_1]) = \pm\det(MP).$$

De la misma manera, se tiene que

$$\det([B_1, -r\,x_1]) = \pm\det(MT^{d-1}).$$

Luego, el determinante de M es igual a $\pm\det(MT^{d-1})\det(MP)$, y usando la hipótesis inductiva, se tiene la siguiente igualdad:

$$\det(M) = \pm\left(\mathrm{Res}_{m,n}(x_1,x_2,x_3)\right)^{(d-1)(d-2)/2}\det(MP)^d. \tag{6.23}$$

Este determinante también se puede calcular como una suma de productos de menores maximales de M_2 por sus menores complementarios en M. Esto es exactamente la suma que aparece en (6.20), es decir

$$\det(M) = \sum_I (-1)^\sigma \det(M_{2,I})\, m_{0,I}. \tag{6.24}$$

Reemplazando (6.23) en (6.20), se concluye con la demostración. □

Teorema 6.10

$$\pm\det(MS^d) = \det(MP)^{(d+1)d/2}\,\mathrm{Res}_{m,n}(x_1,x_2,x_3)^{(d+1)d(d-1)/6}.$$

Demostración. Como en el Lema, la demostración será haciendo inducción sobre d. Para $d=1$, se tiene que $\psi^1 = \phi$, así así que el enunciado es inmediato.
Tomemos entonces $d \geq 2$, y factoricemos ψ^d como sigue:

$$S_{m-1,n-1}{}^{\Gamma_0} \xrightarrow{\widetilde{\psi}_2} (S_{dm-1,dn-1})^2 \oplus S_{2m-1,2n-1} \xrightarrow{\psi_1} S_{(d+1)m-1,(d+1)n-1} \tag{6.25}$$

donde

$$\widetilde{\psi}_2(p_\gamma) = \left(\sum_{\gamma_1\geq 1} p_\gamma x^\gamma, \sum_{\gamma\in\Gamma_1,\gamma_2\geq 1} p_\gamma x^\gamma, p_{(0,0,d,0)}x_3 + p_{(0,0,d-1,1)}x_4\right). \tag{6.26}$$

Sea $\widetilde{M_2}$ la traspuesta de la matriz asociada a $\widetilde{\psi_2}$ en las bases monomiales. La fórmula de Cauchy-Binet nos da la siguiente expresión:

$$\det(MS^d) = \sum_I \det(M_{1,I}) \det(\widetilde{M_{2,I}}), \tag{6.27}$$

donde, al igual que antes, el conjunto de índices I varía sobre todas las familias de enteros $(i_1, \ldots, i_{(d+1)^2mn})$ que verifican $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_{(d+1)^2mn} \leq (2d^2+4)mn$, y $M_{1,I}$ (resp. $\widetilde{M_{2,I}}$) tienen el mismo significado que en (6.19).
Procediendo de una manera similar a la demostración del Lema, se tiene

$$\det(MS^d) = (\mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3))^{d-1} \sum_I (-1)^\sigma \det(\widetilde{M_{2,I}})\, m_{0,I}. \tag{6.28}$$

Si ahora juntamos $\widetilde{M_2}$ con la matriz M_0, obtendremos una matriz cuadrada con la siguiente estructura:

$$\widetilde{M} := \left[\begin{array}{ccc|ccc} MS^{d-1} & 0 & 0 & 0 & q\,x_3^{d-1} & r\,x_2 \\ 0 & B_1 & 0 & p\,x_3^{d-1} & 0 & -r\,x_1 \\ 0 & 0 & B_2 & -p\,x_2 & -q\,x_1 & 0 \end{array}\right]. \tag{6.29}$$

Aquí, B_1 y B_2 son exactamente los mismos bloques que aparecen en (6.21), y ahora se tiene que el bloque $[P, r\,x_1]$ es la matriz MT^{d-1}.
Usando la hipótesis inductiva y el Lema previo, se tienen las siguientes igualdades:

$$\det(\widetilde{M}) = \pm \det(MS^{d-1}) \det(MT^{d-1}) \det(MP) =$$
$$= \pm\, (\mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3))^{(d-1)(d-2)(d+3)/6} \det(MP)^{d(d+1)/2}.$$

Por otro lado, calculando el determinante de $\widetilde{M}$ como suma de productos de menores maximales de $\widetilde{M_2}$ por los menores complementarios en $\widetilde{M}$, aparece la sumatoria de (6.28). Reemplazándola con el último display, se concluye la demostración. □

Corolario 6.11 (Conjetura (6.1) de [CGZ])

$$\det(MS^2) = \det(MP)^3\, \mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3).$$

Corolario 6.12 (Demostración general del Teorema 4.1 de [CGZ])
Dados cuatro polinomios bihomogéneos $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ y $\tilde{x}_4$ de bigrado (m,n) y coeficientes en $\mathbb{C}$. Si $\mathrm{Res}_{m,n}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \neq 0$, entonces $\det(\tilde{MS^d}) = 0$ implica $\det(\tilde{MP}) = 0$.

Con $\tilde{M}$ queremos notar a la matriz M especializada en los coeficientes de $\tilde{x}_i$. En el lenguaje de las superficies móviles, el Teorema 6.10 se lee de la manera siguiente:
Si $\mathrm{Res}_{m,n}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \neq 0$, y no hay planos móviles de bigrado $(m-1, n-1)$ que siguen a la superficie racional, entonces el $\mathbb{C}$-espacio vectorial de d-superficies de bigrado $(m-1, n-1)$ que siguen a la superficie racional tiene dimensión igual a $\frac{(d+1)d(d-1)}{6}\, m\, n$.

6.3 La Validez del Método de Cuádricas Móviles si la Superficie no está Propiamente Parametrizada

En esta sección, vamos a discutir la validez del método de implicitación usando cuádricas móviles sin puntos base, sin requerimientos adicionales sobre la parametrización de la superficie. El resultado principal será una extensión del Teorema 4.2 de [CGZ], lo cual nos permitirá extender la validez del método al caso en el cual la parametrización no es genéricamente uno a uno. Como vamos a trabajar con cuádricas, especializaremos el d de la sección en 2, y como siempre $\mathbb{K}$ será $\mathbb{Q}(c^i_{jk})$. Si $\det(MS^2) \neq 0$, entonces $\ker(MQ^2)$ tiene dimensión mn. Supongamos sin pérdida de generalidad que $MQ^2 = [MS^2, R]$, donde R es una submatriz de MQ^2 de tamaño $9mn \times mn$.
En [CGZ] (Demostración del Teorema 4.2), se considera una base muy particular del núcleo de MQ^2 (es decir, una matriz T de tamaño $10mn \times mn$ tal que $MQ^2 \cdot T = 0$) que tiene la forma siguiente:

$$T := \begin{bmatrix} \bar{T} \\ \mathbb{I} \end{bmatrix};$$

aquí, $\mathbb{I}$ es la matriz identidad de orden mn.
Si resolvemos la ecuación lineal $MQ \cdot T = 0$, obtendremos

$$T = \begin{bmatrix} -MS^{2^{-1}} \cdot R \\ \mathbb{I} \end{bmatrix}.$$

La matriz T tiene sus filas indexadas por los monomios

$$s^i\, t^j x^\gamma,\ 0 \leq i \leq m-1,\ 0 \leq j \leq n-1, |\gamma| = 2,$$

y las últimas mn filas corresponden a los monomios

$$s^i\, t^j x_4^2,\ 0 \leq i \leq m-1,\ 0 \leq j \leq n-1.$$

Consideremos $\mathbb{T}$, la matriz que resulta de reordenar las filas de T ordenando los monomios que indexan sus filas de la manera siguiente:

$$\begin{array}{c} x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_4^2,\ x_1\,x_2,\ x_1\,x_3,\ x_1\,x_4,\ x_2\,x_3,\ x_2\,x_4,\ x_3\,x_4, \\ s\,(x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_4^2,\ x_1\,x_2,\ x_1\,x_3,\ x_1\,x_4,\ x_2\,x_3,\ x_2\,x_4,\ x_3\,x_4), \\ s\,t\,(x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_4^2,\ x_1\,x_2,\ x_1\,x_3,\ x_1\,x_4,\ x_2\,x_3,\ x_2\,x_4,\ x_3\,x_4), \\ s\,t^2\,(x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_4^2,\ x_1\,x_2,\ x_1\,x_3,\ x_1\,x_4,\ x_2\,x_3,\ x_2\,x_4,\ x_3\,x_4), \\ s\,t^3\,(x_1^2,\ x_2^2,\ x_3^2,\ x_4^2,\ x_1\,x_2,\ x_1\,x_3,\ x_1\,x_4,\ x_2\,x_3,\ x_2\,x_4,\ x_3\,x_4), \end{array} \tag{6.30}$$

La tercer fila de $\mathbb{T}$, por ejemplo, está indexada por el monomio x_3^2; la fila número once está indexada por $s\,x_1^2$.
Sean X_1, X_2, X_3 y X_4 indeterminadas sobre $\mathbb{K}$. Consideremos el siguiente vector en $\mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4]^{10}$:

$$C := \left(X_1^2,\ X_2^2,\ X_3^2,\ X_4^2,\ X_1\,X_2,\ X_1\,X_3,\ X_1\,X_4,\ X_2\,X_3,\ X_2\,X_4,\ X_3\,X_4\right). \tag{6.31}$$

Sea $M \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4]^{mn \times 10mn}$ la matriz que se define como sigue:

$$M := \begin{bmatrix} C & C & C & & C \\ 0 & C & C & & C \\ 0 & 0 & C & & C \\ & & & \cdots & \\ 0 & 0 & 0 & & C \end{bmatrix}.$$

Recordemos la construcción hecha en la demostración del Teorema 4.2 de [CGZ] para calcular la ecuación implícita de la superficie paramétrica: cada columna $T_{\alpha,\beta}$ de $\mathbb{T}$ contiene las coordenadas en la base monomial de una cuádrica móvil de bigrado (m, n) que sigue a la superficie. Definimos $T_{\alpha,\beta}$ como sigue:

$$T_{\alpha,\beta} = \sum_{i \leq m-1,\ j \leq n-1} T_{i,j}^{\alpha,\beta}\, s^i\, t^j,$$

donde

$$T_{i,j}^{\alpha,\beta} = \sum_{|\gamma|=2} a_{i,j}^{\gamma} x^{\gamma}.$$

Hacemos $\widetilde{T}_{i,j}^{\alpha,\beta} := \sum_{|\gamma|=2} a_{i,j}^{\gamma} X^{\gamma}$, y consideramos la matriz cuadrada

$$\widetilde{T} := \left[T_{i,j}^{\alpha,\beta}\right] \in \mathbb{K}[X_1, X_2, X_3, X_4]^{mn \times mn},$$

donde sus filas están indexadas por (i, j) y sus columnas por (α, β).

Observación 6.13 *$\widetilde{T}$ es la matriz que se llama M en la demostración del Teorema 4.2 de [CGZ].*

Proposición 6.2 $\det\left(\widetilde{T}\right) = \pm \det\left(M \cdot \mathbb{T}\right)$.

Demostración. Sea $\mathcal{R} := M \cdot \mathbb{T}$. Calculando explícitamente la última fila de $M \cdot \mathbb{T}$, debido al orden que impusimos a las filas de $\mathbb{T}$ en (6.30), se obtiene:

$$\left[\widetilde{T}_{m-1,n-1}^{\alpha,\beta}\right]_{\alpha,\beta},$$

que coincide exactamente con una de las filas en $\widetilde{T}$.
De la misma manera, se puede verificar que la fila anteúltima de $\mathcal{R}$ es la siguiente

$$\left[\widetilde{T}_{m-1,n-2}^{\alpha,\beta} + \widetilde{T}_{m-1,n-1}^{\alpha,\beta}\right]_{\alpha,\beta},$$

así que, substrayendo de ella la última fila, se obtiene otra fila de $\widetilde{T}$.
Una situación similar ocurre en todas las filas. Esto implica que la matriz $\mathcal{R}$ se puede transformar en la matriz $\widetilde{T}$ aplicando operaciones en sus filas que no cambian el determinante. □

La siguiente Proposición será útil en lo que sigue.

Proposición 6.3 *Sea*

$$P(X_1, X_2, X_3) := \mathrm{Res}_{m,n}\,(x_1 - X_1\,x_4, x_2 - X_2\,x_4, x_3 - X_3\,x_4)$$

Entonces, $P(X)$ es un polinomio irreducible en $\mathbb{K}[X_1, X_2, X_3]$ y su grado en las variables X_i es igual a mn.

Demostración. El hecho de que el grado de P en X_i es mn se puede verificar fácilmente con la matriz de Dixon ([Dix]).
Sea $\mathbf{Z} := \mathbb{Z}[c^i_{jk}, X_1, X_2, X_3]$. Supongamos que $P = A(c, X)\,.\,B(c, X)$, donde $A, B \in \mathbf{Z}$. El polinomio P es homogéneo en las variables c^i_{ij}, lo cual implica que tanto A como B deben serlo.
Especializando $X_i \mapsto 0$, se tendrá que

$$\mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3) = A(c, 0)\,.\,B(c, 0).$$

Pero el miembro de la izquierda es irreducible, así que alguno de los factores debe tener grado 0 en las variables c^i_{jk}, supongamos s.p.g. que es B. Entonces se tiene la siguiente factorización

$$P = A(c, X)\,.\,B(X),$$

donde $B \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3]$. Pero si $\mathrm{grado}_X B \geq 1$, entonces la variedad $(B = 0) \neq \emptyset$ en $\mathbb{C}^3$. Por otro lado, es conocido el hecho de que, para una familia de polinomios bihomogéneos $\tilde{x}_i(s, u; t, v)$ que no tienen puntos base, la ecuación

$$\mathrm{Res}_{m,n}\,(\tilde{x}_1 - X_1\,\tilde{x}_4, \tilde{x}_2 - X_2\,\tilde{x}_4, \tilde{x}_3 - X_3\,\tilde{x}_4) = 0$$

es una potencia de la ecuación implícita de la superficie racional definida por $\left(\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_4}, \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_4}, \frac{\tilde{x}_3}{\tilde{x}_4}\right)$ (ver, por ejemplo, el comentario al final del Ejemplo 3 de [CGZ]). Si B tuviera un conjunto de ceros no vacío, querría decir que *toda* superficie paramétrica racional de bigrado (m, n) sin puntos base pasa por los ceros de B, lo cual es claramente imposible. □

Corolario 6.14 *Sea $P^h(X_1, X_2, X_3, X_4)$ el homogeneizado de P en grado mn. Entonces, P^h es irreducible en $\mathbb{Z}[c^i_{jk}, X_1, X_2, X_3, X_4]$.*

Ahora podemos presentar el resultado principal de esta sección:

Teorema 6.15

$$\det(M \cdot \mathbb{T}) = \frac{P^h}{\mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3)}.$$

Demostración. Comenzaremos demostrando que el cociente entre $\det(M \cdot \mathbb{T})$ y P^h es un elemento de $\mathbb{K}$. Notar que hay un entero positivo z tal que

$$\mathcal{R}' := \det(MS)^z\,.\,\det(M \cdot \mathbb{T}) \in \mathbb{Z}[c^i_{jk}, X_1, X_2, X_3, X_4]$$

(esto se debe al hecho de que en la construcción de $\mathbb{T}$ se necesita la inversa MS.)

Hacemos $\mathcal{R}'' := \det(MS).\mathcal{R}'$. Tanto $\mathcal{R}''$ como P^h son homogéneos en X, y del mismo grado, mn, así que alcanzará con ver que uno de ellos es un múltiplo del otro.
Supongamos que las variables han sido especializadas:

$$\left(c^i_{jk}, X\right) \mapsto \left(\tilde{c}^i_{jk}, \widetilde{X}\right)$$

con las siguientes condiciones:

1. $\det(\widetilde{MS}) \neq 0$, donde $\widetilde{MS}$ es la matriz MS bajo la especialización $c \mapsto \tilde{c}$.
2. $P^h(\tilde{c}^i_{jk}, \widetilde{X})$ se anula.

Esto quiere decir que el punto proyectivo $\left(\widetilde{X}_1 : \widetilde{X}_2 : \widetilde{X}_3 : \widetilde{X}_4\right)$ pertenece a la superficie racional definida por $\left(\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_4}, \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_4}, \frac{\tilde{x}_3}{\tilde{x}_4}\right)$.
Usando que$\widetilde{MS} \neq 0$ se puede aplicar la demostración del Teorema 4.2 de [CGZ], y resulta que, si $\left(\widetilde{X}_1 : \widetilde{X}_2 : \widetilde{X}_3 : \widetilde{X}_4\right)$ pertenece a la superficie racional, el determinante de $\widetilde{T}$ se anula. La proposición 6.2 implica que, en consecuencia, $\mathcal{R}''$ debe anularse. Luego,

$$\left(P^h = 0\right) \subset \left(\mathcal{R}'' = 0\right) \quad \text{si } \det(MS) \neq 0.$$

Si $\det(MS) = 0$, la inclusión se da trivialmente. Entonces, usando el Nullstellensatz de Hilbert, se puede concluir que una potencia de $\mathcal{R}''$ debe ser un múltiplo de P^h. Como P^h es irreducible, $\mathcal{R}''$ debe ser un múltiplo de P^h, así que

$$\det(M \cdot \mathbb{T}) = c\,.\,P^h,$$

con $c \in \mathbb{K}$ como se había afirmado al principio.
Para calcular c, hacemos la siguiente sustitución:

$$X_1,\ X_2,\ X_3 \mapsto 0, \quad X_4 \mapsto 1.$$

Entonces, se tendrá que

$$\begin{array}{rcl} P^h & \mapsto & \mathrm{Res}_{m,n}(x_1, x_2, x_3) \\ \widetilde{T} & \mapsto & \mathbb{I}_{mn} \end{array}$$

si las columnas de $\widetilde{T}$ están ordenadas convenientemente (ver la demostración del Teorema 4.2 de [CGZ]). Luego, c es igual a $\pm\frac{1}{\mathrm{Res}_{m,n}(x_1,x_2,x_3)}$ □

Corolario 6.16 *Dada la familia de polinomios $\tilde{x}_i(s,u;t,v) \in \mathbb{C}[s,u,t,v]$, $1 \leq i \leq 4$, bihomogéneos de bigrado (m,n). Supongamos que la superficie*

$$\left(\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_4}, \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_4}, \frac{\tilde{x}_3}{\tilde{x}_4}\right)$$

no tiene puntos base, y que no hay planos móviles de bigrado $(m-1, n-1)$ que siguen a la superficie. Entonces, el método de cuádricas móviles calcula una potencia de la ecuación implícita de la superficie.

Demostración. Se puede suponer sin pérdida de generalidad que $\mathrm{Res}_{m,n}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \neq 0$ (cf. [CGZ]). El método calcula en realidad $\det(\widetilde{T}) = \pm \det(M \cdot \mathbb{T})$ que es igual a una constante no nula por $\tilde{P}^h$, debido al Teorema 6.10. Pero $\tilde{P}^h$ se anula si y solamente el punto proyectivo (X_1, X_2, X_3, X_4) pertenece a la superficie implícita. Esto, junto con el hecho de que la ecuación implícita de una superficie paramétrica es siempre irreducible, completa la demostración. □

6.4 El Caso homogéneo

Para el caso homogéneo, se tienen resultados similares. Ya que los enunciados formales son esencialmente los mismos, vamos a usar la misma notación que en la Sección 6.2 esperando que esto no cause confusión al lector.
Sean

$$x_i\,(s,t,u) = \sum_{j+k\leq n} c^i_{jk}\; s^j\, t^k\, u^{n-j-k} \qquad i = 1, \ldots, 4$$

cuatro polinomios genéricos en tres variables, homogéneos de grado n.
Hacemos, tal como antes, $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(c^i_{jk})$, y sea S_l el espacio de polinomios homogéneos en tres variables de grado l, con coeficientes en $\mathbb{K}$.
Consideremos ahora

$$\begin{array}{rccc} \phi: & {S_{n-1}}^4 & \to & S_{2n-1} \\ & (p_1, p_2, p_3, p_4) & \mapsto & \sum_{i=1}^4 p_i\, x_i, \end{array} \tag{6.32}$$

y sea MP la traspuesta de la matriz asociada a ϕ en las bases monomiales.
Esta matriz tiene tamaño $(2n^2+n) \times (2n^2+2n)$. Para obtener una submatriz cuadrada de ella, sea $\mathcal{I} \subset \{(j,k) : j+k \leq n\}$ donde $|\mathcal{I}| = n$. Definimos $MP_{\mathcal{I}}$ sacando las n columnas de MP que corresponden a

$$s^i\, t^j\, u^{n-i-j}\, x_4, \;\; (i,j) \in \mathcal{I}.$$

Como en la Sección 6.2, $MP_{\mathcal{I}}$ es una submatriz cuadrada maximal de la matriz de coeficientes de un sistema de planos móviles de grado $n-1$ que siguen a la superficie racional.
Sean Γ y Γ_0 como antes, y consideremos las transformaciones

$$\Psi^d : {S_{n-1}}^{\Gamma} \to S_{(d+1)n-1}$$

que asigna a cada $(p_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ la expresión $\sum_{\gamma\in\Gamma} p_\gamma x^\gamma$, y

$$\psi^d : {S_{n-1}}^{\Gamma_0} \to S_{(d+1)n-1},$$

su restricción. Sean MQ^d y MS^d las traspuestas de las matrices asociadas a Ψ^d y ψ^d en las bases monomiales, respectivamente. MS^d tiene tamaño $\frac{((d+1)n+1)(d+1)n}{2} \times \frac{(d+1)^2 n(n+1)}{2}$. Para obtener una submatriz cuadrada de ella, removemos todas las columnas correspondientes a $s^i\, t^j\, u^{n-i-j}\, x^\gamma$, $(i,j) \in \mathcal{I}$, $\gamma_4 = 1$, y definimos $MS^d_{\mathcal{I}}$ como la submatriz remanente, asociada a la transformación lineal

$$\psi^d_{\mathcal{I}} : S^{\Gamma_0\setminus\Gamma_4}_{n-1,\mathcal{I}} \oplus {S_{n-1}}^{\Gamma_4} \to S_{(d+1)n-1} \tag{6.33}$$

donde $S_{n-1,\mathcal{I}}$ es el $\mathbb{K}$-espacio vectorial generado por por los monomios cuyos exponentes no pertenecen a $\mathcal{I}$, y Γ_4 es el conjunto de todos los multiíndices $\gamma \in \Gamma_0$ tales que $\gamma_4 = 0$. También se puede considerar a $MS_{\mathcal{I}}^d$ como una submatriz cuadrada maximal de una matriz de coeficientes de d-superficies móviles de grado $n-1$ que siguen a la superficie racional. Sea $\mathrm{Res}_{n,n,n}(f_1, f_2, f_3)$, la resultante homogénea asociada con una terna de polinomios genéricos de grado n (ver el primer capítulo). En esta situación, se tiene un resultado similar al de la sección anterior:

Teorema 6.17

$$\det(MS_{\mathcal{I}}^d) = \pm \det(MP_{\mathcal{I}})^{(d+1)d(d-1)/6} \left(\mathrm{Res}_n(x_1, x_2, x_3)\right)^{(d+1)d/2}.$$

Demostración. La demostración sale aplicando mutatis mutandis la construcción hecha en la Sección 6.2. Consideremos el siguiente complejo de Koszul:

$$0 \longrightarrow {S_{n-1}}^2 \oplus S_{(d-1)n-1} \xrightarrow{\psi_0} {S_{dn-1}}^2 \oplus S_{2n-1} \xrightarrow{\psi_1} S_{(d+1)n-1} \longrightarrow 0. \tag{6.34}$$

Aquí, ψ_1 y ψ_0 se definen con (6.13) y (6.14) respectivamente. Se tendrá una versión similar a la Proposición 6.1, aplicando la misma técnica usada allí para relacionar el determinante de un complejo con la resultante (en este caso homogénea) ([Cha1, De]).

Proposición 6.4 *El complejo (6.34) es exacto, y bajo una especialización de los coeficientes $\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, $\tilde{x}_3$ seguirá siendo exacto si y solamente si* $\mathrm{Res}_{n,n,n}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \neq 0$. *El determinante del complejo respecto de las bases monomiales es igual a* $\pm\mathrm{Res}_{n,n,n}(x_1, x_2, x_3)^{d-1}$.

Se puede factorizar $\psi_{\mathcal{I}}^d$ como sigue:

$$S_{n-1,\mathcal{I}}^{\Gamma_0 \setminus \Gamma_4} \oplus {S_{n-1}}^{\Gamma_4} \xrightarrow{\tilde{\psi}_2} {S_{dn-1}}^2 \oplus S_{2n-1} \xrightarrow{\psi_1} S_{(d+1)n-1}, \tag{6.35}$$

donde $\tilde{\psi}_2$ se define como en (6.26).
Para aplicar aquí la demostración del Teorema (6.10), se necesita una versión "homogénea" del Lema (6.8). Sea

$$\rho^d : {S_{n-1}}^{\Gamma_1} \oplus S_{dn-1} \to S_{(d+1)n-1}$$

la transformación lineal definida como en (6.7), y sea $MT_{\mathcal{I}}^d$ la traspuesta de la matriz asociada a la restricción de ρ^d a

$$\left(S_{n-1,\mathcal{I}}^{\Gamma_1 \setminus \Gamma_4} \oplus {S_{n-1}}^{\Gamma_1 \cap \Gamma_4}\right) \oplus S_{dn-1}$$

en las bases monomiales. Es una matriz cuadrada del mismo tamaño que $MS_{\mathcal{I}}^d$. Se tiene entonces la siguiente igualdad:

Lema 6.18

$$\pm \det(MT_{\mathcal{I}}^d) = \det(MP_{\mathcal{I}})^d \, \mathrm{Res}_{n,n,n}(x_1, x_2, x_3)^{d(d-1)/2}.$$

Ahora sí, la misma demostración que se hizo para el Teorema (6.10) en el caso bihomogéneo, se puede aplicar al caso homogéneo, y se tiene el resultado esperado. □

Corolario 6.19 (Conjectura (6.2) de [CGZ])

$$\det(MS_{\mathcal{I}}^2) = \det(MP_{\mathcal{I}})^3 \operatorname{Res}_{n,n,n}(x_1, x_2, x_3).$$

Corolario 6.20 (Versión General del Teorema 5.1 de [CGZ])
Si $\operatorname{Res}_{n,n,n}(x_1, x_2, x_3) \neq 0$, *entonces* $\det(MS_{\mathcal{I}}^d) = 0$ *implica* $\det(MP_{\mathcal{I}}) = 0$.

El Teorema 6.17 tiene la siguiente interpretación en el lenguaje de las superficies móviles: *Si* $\operatorname{Res}_{n,n,n}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3) \neq 0$, *y hay exactamente* n *planos móviles de grado* $n-1$ *linealmente independientes que siguen a la superficie racional, entonces el* $\mathbb{C}$*-espacio vectorial de* d*-superficies móviles de grado* $n-1$ *que siguen a la superficie racional, tiene dimensión igual a* $\frac{n(d+1)d(dn+d+5-n)}{12}$.
Demostración. El hecho de que hayan n planos móviles linealmente independientes de grado $n-1$ implica que MP tiene rango máximo. El Lema 5.2 de [CGZ] dice que existe un conjunto de índices $\mathcal{I}$, $|\mathcal{I}| = n$, para el cual $MP_{\mathcal{I}}$ es una matriz no singular. □

6.4.1 El Método de Cuádricas Móviles cuando la Superficie no está Propiamente Parametrizada

En este apartado, veremos que resultados análogos a la Sección 6.3 se pueden dar en el caso homogéneo. El resultado principal será una generalización del Teorema 5.2 de [CGZ], que extiende la validez del método al caso en que la parametrización no es genéricamente uno a uno.
Esta generalización no sale directamente aplicando las mismas herramientas que en el caso bihomogéneo ya que, a diferencia de ese caso, aquí el método combina planos móviles con cuádricas móviles.
Como antes, haremos $d = 2$, y supongamos que $\mathcal{I}$ está fijo. Si $\det(MS_{\mathcal{I}}^2) \neq 0$, el núcleo de MQ^2, es decir, el espacio de cuádricas móviles que siguen a la superficie, tendrá dimensión igual a $\frac{n^2+7n}{2}$.
Tal como en la Sección 6.3, supongamos que $MQ^2 = [MS_{\mathcal{I}}^2, R_{\mathcal{I}}]$, donde $R_{\mathcal{I}}$ tiene $\frac{n(n+1)}{2}+3n$ columnas.
En la demostración del Teorema 5.2 de [CGZ], se eligen $(n^2-n)/2$ vectores linealmente independiente de una base del núcleo de MQ^2 considerando una matriz T de tamaño $(5n+5n^2) \times (n^2-n)/2$ tal que $MQ^2 \cdot T = 0$ con la siguiente estructura:

$$T := \begin{bmatrix} \bar{T} \\ 0 \\ \mathbb{I} \end{bmatrix}.$$

Aquí, 0 es un bloque de $4n$ filas indexado por los monomios $s^i\, t^j\, x_i^a x_4^b$, $(i,j) \in \mathcal{I}$, $b \geq 1$, e $\mathbb{I}$ denota la matriz identidad de tamaño $(n^2-n)/2$, indexada por $s^i\, t^j\, x_4^2$ $(i,j) \notin \mathcal{I}$.
Con esta estructura, se puede chequear que

$$T = \begin{bmatrix} -MS_{\mathcal{I}}^{2^{-1}} \cdot \widetilde{R_{\mathcal{I}}} \\ 0 \\ \mathbb{I} \end{bmatrix},$$

donde $\widetilde{R_{\mathcal{I}}}$ denota un bloque de $R_{\mathcal{I}}$.
Debido al Teorema 6.17, el hecho de que $\det(MS_{\mathcal{I}}^2) \neq 0$ implica que $MP_{\mathcal{I}}^2$ es una matriz no singular, así que se pueden encontrar $n-1$ planos móviles que siguen a la superficie, linealmente independientes, al resolver el sistema $MP \cdot T' = 0$, donde $MP = [MP_{\mathcal{I}}\,,\, R']$ y

$$T' = \begin{bmatrix} -MP_{\mathcal{I}}^{-1} \cdot \widetilde{R}' \\ \mathbb{I} \end{bmatrix}.$$

Tal como en la sección anterior, sea $\mathbb{T}$ la matriz que se construye reordenando las filas de T con el orden definido en (6.30).
Consideremos además el siguiente orden:

$$\begin{gathered} x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4, \\ s\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\,, \\ s\,t\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\,, \\ s\,t^2\,(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)\,, \end{gathered}$$

y sea $\mathbb{T}'$ la matriz que se consigue reordenando las filas de T' con ese orden.
Sean $C \in \mathbb{Z}\,[X_1, X_2, X_3, X_4]^{10}$ el vector definido en (6.31), y $C' := (X_1, X_2, X_3, X_4)$.
Consideremos además las matrices $M \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4]^{n(n+1)/2 \times 10n(n+1)/2}$ y $M' \in \mathbb{Z}[X_1, X_2, X_3, X_4]^{n(n+1)/2 \times 4n(n+1)/2}$ definidas como sigue:

$$M := \begin{bmatrix} C & C & C & & C \\ 0 & C & C & & C \\ 0 & 0 & C & & C \\ & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & C \end{bmatrix},$$

$$M' := \begin{bmatrix} C' & C' & & C' \\ 0 & C' & & C' \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & & C' \end{bmatrix}.$$

Sea $\widetilde{T}$ la matriz cuadrada de tamaño $n(n+1)/2$ construida en la demostración del Teorema 5.2 de [CGZ] recolectando todos los coeficientes de estos planos móviles y cuádricas móviles. La siguiente Proposición se puede demostrar con las mismas argumentaciones hechas en la Proposición 6.2:

Proposición 6.5

$$\det\left(\widetilde{T}\right) = \pm \det\left([M \cdot \mathbb{T}\,,\ M' \cdot \mathbb{T}']\right).$$

Análogamente, se pueden formular y probar versiones homogéneas de la Proposición 6.3, el Corolario 6.14 y el Teorema 6.15. Esto conduce a la siguiente proposición:

Proposición 6.6 *Supongamos que la superficie*

$$\left(\frac{\tilde{x}_1}{\tilde{x}_4}, \frac{\tilde{x}_2}{\tilde{x}_4}, \frac{\tilde{x}_3}{\tilde{x}_4}\right)$$

no tiene puntos base, y que hay exactamente n planos móviles de grado $n-1$ que la siguen. Entonces, el método de cuádricas móviles calcula una potencia de la ecuación implícita de la superficie.

Capítulo 7

Cálculo de Operadores de Proyección

7.1 Operadores de Proyección Ralos

7.1.1 Perturbaciones Lineales

Sea $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n)$, donde $\mathcal{A}_i \subset \mathbb{Z}^n$ es un conjunto finito. Supondremos que la unión de estos conjuntos genera el lattice afín $\mathbb{Z}^n$. Consideramos un sistema de polinomios de Laurent genéricos en n variables $x = (x_1, \ldots, x_n)$ de la manera siguiente:

$$f_i(x) = \sum_{a \in \mathcal{A}_i} c_{ia}\, x^a, \quad c_{ia} \neq 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n, \tag{7.1}$$

Supongamos que tenemos una familia $p := (p_0(x) \ldots, p_n(x))$ de polinomios de Laurent tales que $\mathrm{supp}(p_i) \subset \mathcal{A}_i$, y

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(p_0, \ldots, p_n) \neq 0.$$

Definición 7.1 *El polinomio característico generalizado tórico asociado con la familia $(p_0, \ldots, p_n)$ (p-GCP) es:*

$$C_p(t) := \mathrm{Res}_{\mathcal{A}}\left(f_0 - t.p_0, \ldots, f_n - t.p_n\right)$$

Proposición 7.1 *$C_p(t)$ es un polinomio en t de grado $r :=$ grado$(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, \cdots f_n))$ (en particular, no es idénticamente cero). Su coeficiente principal es $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(p_0, \ldots, p_n)$.*

Demostración. Debido a las homogeneidades de la resultante rala, se tiene que

$$\begin{aligned} C_p(t) &= \mathrm{Res}_{\mathcal{A}}\left(t(\tfrac{1}{t} f_0 - p_0), \ldots, t(\tfrac{1}{t} f_n - p_n)\right) \\ &= t^r \mathrm{Res}_{\mathcal{A}}\left(\tfrac{1}{t} f_0 - p_0, \ldots, \tfrac{1}{t} f_n - p_n\right). \end{aligned}$$

Para verificar que

$$\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}\left(\frac{1}{t} f_0 - p_0, \ldots, \frac{1}{t} f_n - p_n\right) \neq 0,$$

hacemos $y := \frac{1}{t}$, y se tiene que $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}\left(y.f_0 - p_0, \ldots, y.f_n - p_n\right) \neq 0$ porque al evaluar en $y = 0$, se obtiene $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(p_0, \ldots, p_n) \neq 0$. Este es precisamente el coeficiente de t^r del polinomio $C_p(t)$. $\square$

Ejemplo 7.2 *Cuando* $\mathcal{A}_i = \{x \in \mathbb{N}^n : x_1 + \ldots + x_n \leq d_n\}$, *si hacemos* $p_0 = 1$ *y* $p_i := x_i^{d_i}$, $i = 1, \ldots, n$. *Entonces,* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(1, x_1^{d_1}, \ldots, x_n^{d_n}) = 1$, *y* $C_p(t)$ *es el polinomio característico generalizado construido en [Can2].*

La u-resultante del sistema $f_1, \ldots, f_n$ es la resultante de estos polinomios respecto de sus soportes, junto con $f_0 := u_0 + u_1 x_1 + \cdots + u_n x_n$, donde $u_0, u_1, \ldots, u_n$ son parámetros y $\mathcal{A}_0 = \{0, e_1, \ldots, e_n\}$. Esta técnica reduce el problema de encontrar las soluciones del sistema formado por las n ecuaciones a la factorización de un determinante [CLO, KL]. En esta situación, podemos relajar significantemente el requerimiento original de que $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(p_0, \ldots, p_n) \neq 0$:

Proposición 7.2 *Consideremos la construcción de la u-resultante. Supongamos que* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, p_1, \ldots, p_n) \neq 0$. *Si hacemos* $p_0 := 0$ *en la Definición 7.1, entonces* $C_p(t)$ *resulta ser un polinomio* t *de grado grado*$(\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_1, \ldots, f_n)) - \mathrm{MV}(f_1, \ldots, f_n)$ *(en particular no es idénticamente cero). Su coeficiente principal es* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, p_1, \ldots, p_n)$.

Demostración. La demostración de la Proposición 7.1 se puede adaptar a este caso, donde al hacer $y := 0$ hay que considerar $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, p_1, \ldots, p_n)$, que será no nulo a menos que los parámetros u_i se especialicen de tal manera que el sistema $f_0 = p_1 = \cdots = p_n = 0$ tenga una solución. □

Ejemplo 7.3 *Elijamos* $p_1, \ldots, p_n$ *con soporte en la familia* $(\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n)$, *hacemos* $p_0 := 0$ *y* $f_0 := \sum_{a \in \mathcal{A}_0} u_a\, x^a$, *donde los* $\{u_a\}$ *son parámetros. Mutatis mutandis la demostración de la proposición previa, se tiene que* $C_p(t) \not\equiv 0$ *si* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_0, p_1, \ldots, p_n) \neq 0$ *(cf. [Main Thm 2.4(1)]Roj). Cuando el sistema* $p_i = 0$ *tiene finitas soluciones en la compactificación tórica dada por sus soportes, el polinomio* $C_p(t)$ *se llama Toric Generalized Characteristic Polynomial en [Roj].*

El próximo teorema establece la propiedad principal de polinomios de la forma $C_p(t)$, y nos permite considerarlos como una generalización del clásico GCP cuyas propiedades están caracterizadas en el teorema 1.16. Comenzamos con $n+1$ polinomios $f_i(y_1, \ldots, y_m, x_1, \ldots, x_n)$ con soporte (vistos como polinomios en $\mathbb{Z}[y_1, \cdots, y_m]\left[x_1^{\pm 1}, \ldots, x_n^{\pm 1}\right]$) contenido en $\mathcal{A}_i$. Sea Z el conjunto algebraico $V(f_0, \ldots, f_n) \subset \mathbb{C}^m \times \mathcal{T}$. Aquí, $\mathcal{T}$ es la variedad tórica asociada a la suma de Minkowski de los polítopos de Newton respectivos. Como $\mathcal{T}$ es la clausura de una parametrización monomial en un espacio proyectivo $\mathbb{P}^N$ para algún $N \in \mathbb{N}$ [GKZ2], podemos suponer sin pérdida de generalidad que Z es una variedad algebraica en $\mathbb{C}^m \times \mathbb{P}^N$.

Teorema 7.4 *Sea* W *una componente propia de* Z, *es decir que la dimensión de* W *es* $m-1$. *Sea* $C_p(y_1, \ldots, y_m)(t)$ *el p-GCP de la definición 7.1. Ordenando* $C_p(t)$ *en potencias de* t, *sea* $C_{p,k}(y_1, \ldots, y_m)$ *su coeficiente de menor grado en* t *distinto de cero, donde* k *es el exponente de* t *que acompaña a* $C_{p,k}$. *Denotamos la proyección sobre las coordenadas* y_i *con* $\pi_y : \mathbb{C}^m \times \mathcal{T} \to \mathbb{C}^m$. *Entonces* $C_{p,k}(\pi_y(s)) = 0$, *para todo* $s \in W$.

Demostración. Hagamos $\widehat{f_i} := f_i - t.p_i$, donde t es un nuevo parámetro. Consideremos $Z' := V(\widehat{f_0}, \ldots, \widehat{f_n}) \subset \mathbb{C}^{m+1} \times \mathcal{T}$. Dado que $\widehat{f_i}$ y f_i son idénticos cuando $t = 0$, la intersección de Z' con la hipersuperficie $t = 0$ es exactamente $Z \times \{0\}$.
Debido a las hipótesis hechas sobre la sucesión de soportes $\{\mathcal{A}_0, \ldots, \mathcal{A}_n\}$ al comienzo, la variedad tórica $\mathcal{T}$ tiene dimensión exactamente n (cf. [Stu2]), y usando la inmersión de $\mathcal{T}$ en $\mathbb{P}^N$, se tendrá una versión tórica del lema de la dimensión ([Mum, cor. 3.14] o [Can2, lem. 3.1]). Esto implica que cada componente de Z' tendrá dimensión al menos m, o sea que la componente W' que contiene a $W \times \{0\}$ debe ser de dimensión al menos m.
Todo punto de W' tiene un entorno m-dimensional cuya intersección con $\{t = 0\}$ es $(m-1)$-dimensional, así que para cada $s \in W \times \{0\}$ hay una sucesión $(s_j) \subset W' \backslash (W \times \{0\})$ que converge a s. Sea π_t la proyección sobre la coordenada t. Se tendrá $\pi_t(s_j)^k \neq 0$ porque hemos elegido nuestros s_j con última coordenada distinta de cero. Entonces, $C_p(\pi_y(q))(\pi_t(q)) = 0$ para cualquier punto $q \in Z'$, y por lo tanto $C_p(\pi_y(s_j))(\pi_t(s_j)) = 0$ para todo j. Dividiendo este polinomio por $\pi_t(s_j)^k$, obtendremos

$$C_{p,k}(\pi_y(s_j)) + \sum_{i>k} (\pi_t(s_j))^{i-k} C_{p,i}(\pi_y(s_j)) = 0.$$

$C_{p,i}$ es un polinomio en las coordenadas de s_j, es decir una función continua de ellas, y se anula para cualquier $s_j \to s$. Luego, también es cero en s. Dado que $\pi_t(s) = 0$, la suma para $i > k$ se anula, y el teorema queda demostrado. □

Definición 7.5 *El coeficiente $C_{p,k}$ de grado mínimo en t de el p-GCP $C_p(t)$ dado en la definición 7.1 se llama* operador de proyección. *Es un polinomio no nulo en los parámetros y (en general los coeficientes del polinomio), que se anula cuando hay una solución del sistema especializado (7.1) en alguna componente propia.*

7.1.2 Subdivisiones Mixtas y Sistemas con Resultante no Nula

Revisaremos aquí el método de las subdivisiones mixtas para calcular la resultante rala como un determinante. Esta discusión nos permitirá construir una familia de polinomios ralos $(p_0, \ldots, p_n)$ con resultante no nula.
Sea $m_i := \#(\mathcal{A}_i)$, y hagamos $m := \sum_{i=0}^n m_i$. Para cada $\omega := (\omega_0, \ldots, \omega_n) \in \mathbb{R}^m$, $\omega_i \in \mathbb{R}^{m_i}$, $init_\omega(\mathrm{Res}_\mathcal{A})$, el *término inicial* de $\mathrm{Res}_\mathcal{A}(f_1, \ldots, f_n)$ es un polinomio en los coeficientes de $f_1, \ldots, f_n$ (en general, un monomio) [Stu2]. Elegimos un vector $\omega := (\omega_0, \ldots, \omega_n)$, en el cual cada $\omega_i : \mathcal{A}_i \to \mathbb{Q}$, $i = 0, \ldots, n$. Imponemos sobre ω la siguiente condición:

$$\omega_i(a) > 0 \text{ para todo } a \in \mathcal{A}_i,\ i = 0, \ldots, n, \tag{7.2}$$

y supongamos, tal como en [CE2], que ω_i es la restricción de una función afín (en la mayoría de los casos supondremos que es lineal).
Consideramos los *polítopos levantados* $Q_{i,\omega}$, que son la cápsula convexa de

$$\{(a, \omega_i(a)) : a \in \mathcal{A}_i\} \subset \mathbb{R}^{n+1},$$

junto con su suma de Minkowski $Q_\omega := Q_{0,\omega} + \ldots + Q_{n,\omega}$. Tomando el revestimiento superior de Q_ω, obtenemos una descomposición poliédrica coherente Δ_ω de la suma de Minkowski $Q := Q_0 + \ldots + Q_n$ usando la proyección natural $\mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$ de Q_ω. Es más, esta proyección, restringida al revestimiento superior de Q_ω, se transforma en una biyección. Supongamos que nuestro ω es suficientemente genérico ([CE2, Stu2, Emi3]), entonces tenemos una descomposición coherente mixta estricta, es decir que cada facet del revestimiento superior es de la forma

$$F_\omega = F_{0,\omega} + \ldots + F_{n,\omega} \tag{7.3}$$

donde $F_{i,\omega}$ es una cara de $Q_{i,\omega}$ y $n = \dim(F_0) + \ldots + \dim(F_n)$. Esto implica que al menos un sumando tiene dimensión cero, o sea que es un vértice. La celda F, (la proyección de F_ω) se dice *mixta de tipo i* o *i-mixta* si $\dim F_i = 0$, y $\dim F_j > 0$, $j \neq i$. Vamos a usar la construcción matricial que se basa en la subdivisión mixta que induce Δ_ω. Procediendo como en [CE2], fijamos un vector $\delta \in \mathbb{Q}^n$, y hacemos $\mathcal{E} := \mathbb{Z}^n \cap (\delta + Q)$. Trabajaremos con la siguiente

Definición 7.6 *El* contenido de fila *$RC(F) = (i, a)$ de una celda F de Δ_ω será un par (i, a) que satisface: si $F_\omega = F_{0,\omega} + \ldots + F_{n,\omega}$ es la facet del revestimiento superior de Q_ω que se proyecta sobre F, sea i el mayor índice para el cual* $\dim(F_i) = 0$, $F_i = \{a\}$. *Definimos además el contenido de fila de los puntos $p \in F : p + \delta \in \mathcal{E}$ como $RC(p) = \mathrm{RC}(F)$.*

Para $i = 0, \ldots, n$, hacemos:

$$\mathcal{B}_i := \{a \in \mathcal{A}_i : \mathrm{RC}(p) = (i, a),\ p \in \mathcal{E}\}.$$

Ahora definiremos una familia de polinomios con resultante no nula.

Definición 7.7 *Sea $\lambda \in \mathbb{C}^*$ un parámetro. Hacemos*

$$p_{\lambda,i} := \sum_{a \in \mathcal{B}_i} \lambda^{\omega_i(a)} x^a.$$

La próxima proposición nos asegura que $p_\lambda := (p_{\lambda,0}, \ldots, p_{\lambda,n})$ tiene resultante no nula para casi todo λ.

Proposición 7.3 *Para todo $\lambda \in \mathbb{C}^*$, excepto finitos valores, se tiene que* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(p_\lambda) \neq 0$.

Demostración. La forma inicial de $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(f_1, \ldots, f_n)$ con respecto a ω es igual al monomio

$$\pm \prod_{i=0}^{n} \prod_{F\, i\text{-mixta}} c_{ia_F}^{vol(F)}$$

donde $F = F_0 + \ldots + \{a_F\} + \ldots + F_n$ y *vol* denota volumen euclídeo [Stu2, thm 2.1].

Expandiendo $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(\sum_{a\in\mathcal{B}_i}\lambda^{\omega_i(a)}x^a)$ como polinomio en λ y usando la condición (7.2), se puede verificar fácilmanente que su coeficiente principal es ± 1, con exponente

$$\sum_{i=0}^{n}\sum_{i-\mathrm{mixed}F}\omega_i(a_F)\,vol(F)>0$$

luego, $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(p_\lambda)$ es un polinomio no nulo en λ así que fuera de su conjunto (finito) de raíces, $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(p_\lambda)\neq 0$. □
Hay una condición determinística que garantiza la validez de un λ dado, que es calcular la resultante de p_λ.

7.2 Construcción de la Matriz Resultante

En esta sección mostraremos métodos eficientes para calcular el GCP como determinante (no nulo) de matrices resultantes.
Por ejemplo, construyamos la matriz cuadrada $\mathcal{M}_{\omega,\delta}:=(m_{p,p'})_{p,p'\in\mathcal{E}}$ donde $m_{p,p'}=c_{ia'}$ si $\mathrm{RC}(p)=(i,a)$ y $p-a+a'=p'$. El determinante de esta matriz es genéricamente un múltiplo no nulo de $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}$ [CE2]. Su grado en los coeficientes de f_i será igual al número de filas que contienen los coeficientes de este polinomio. Por la manera en que hemos definido la función $\mathrm{RC}(\cdot)$, tendremos que el grado del determinante en los coeficientes de f_0 es $\mathrm{grado}_{f_0}\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}=\mathrm{MV}(f_1,\ldots,f_n)$.

Teorema 7.8 *Sea $p_{\lambda,i}$ tal como en la definición 7.7. Entonces, para cualquier familia $f_0,\ldots,f_n\in\mathbb{C}[x_1,x_1^{-1},\cdots,x_n,x_n^{-1}]$ y casi cualquier $\lambda\in\mathbb{C}^*$, se tiene que*

$$\det\mathcal{M}_{\omega,\delta}\left(f_0-t.p_{\lambda,0},f_1-t.p_{\lambda,1},\ldots,f_n-t.p_{\lambda,n}\right)$$

es un polinomio en t de grado $\#\mathcal{E}$ (en particular no nulo). Este determinante es igual a $C_{p_\lambda}(t)$ multiplicado por un polinomio en t que no depende de los coeficientes de f_0 ni de $p_{\lambda,0}$, donde $C_{p_\lambda}(t)$ es el p_λ-GCP.

Demostración. Cualquiera sea el punto $q\in Q$, sea q_ω su única preimagen en el revestimiento superior de Q_ω. Denotamos con $h(q)\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ la distancia (o altura) entre q_ω y q. Para cualquier vértice $a\in Q_i$, $h(a)=\omega_i(a)$. Tomamos la fila indexada por p en la matriz $\mathcal{M}_{\omega,\delta}=(m_{p,q})_{p,q\in\mathcal{E}}$, donde $\mathrm{RC}(p)=(i,a)$, sea $\theta(p):=h(p)-h(a)$ y definamos

$$\mathcal{M}_\theta:=(m^\theta_{p,q})_{p,q\in\mathcal{E}},$$

donde $m^\theta_{p,q}:=m_{p,q}\left(f_i-t.p_{\lambda,i}\right)\lambda^{\theta(p)}$. Afirmamos que para cada columna q de $\mathcal{M}_\theta$, la mayor potencia de λ que multiplica a t aparece en el elemento de la diagonal. Por construcción, asumiendo $\mathrm{RC}(q)=(j,b)$,

$$m^\theta_{qq}=c_{jb}\lambda^{\theta(q)}-t\lambda^{\omega_j(b)+\theta(q)}$$

luego, la potencia de λ que multiplica a t tiene exponente igual a $h(q)$. Consideremos otro elemento de la misma columna, digamos m^θ_{pq} en la fila indexada por p, donde suponemos

$\mathrm{RC}(p) = (i, a)$: es de la forma $c_{ia'}\lambda^{\theta(p)} + t\lambda^{\omega_j(a')+\theta(p)}$ o simplemente $c_{ia'}\lambda^{\theta(p)}$. Este último no depende de t así que nos concentraremos en el anterior: su grado en λ es igual a $h(a') + h(p) - h(a)$, donde $a' + p - a = q$. Luego q_ω y $a'_\omega + p_\omega - a_\omega$ están en la misma vertical en $\mathbb{R}^{n+1}$, pero solamente q_ω puede estar en el revestimiento superior de Q_ω por [CE2, lem. 5.5]. Luego, $h(q) > h(a') + h(p) - h(a)$ y nuestra afirmación está demostrada. Es ahora claro que el producto de los términos principales de los coeficientes de la diagonal de $\mathcal{M}_\theta$ tiene grado $\sum_{p\in\mathcal{E}} h(p)$ en λ, grado $\#\mathcal{E}$ en t, y coeficiente ± 1. Es más, si $\mathrm{RC}(p) = (i, a)$, $\det \mathcal{M}_\theta(\lambda) = \det \mathcal{M}_{\omega,\delta}(\lambda) \prod_{p\in\mathcal{E}} \lambda^{h(p)-\omega_i(a)}$ lo que demuestra la primer parte del teorema.
Debido a [CE2, CLO, Emi3], $\det(\mathcal{M}_{\omega,\delta})$ es un múltiplo no nulo de la resultante rala, y contiene el mismo número de filas indexadas por f_0 que la resultante. La segunda afirmación del teorema se demuestra observando que, para todos los valores de λ fuera de un conjunto finito, $C_{p_\lambda}(t) \neq 0$ por las proposiciones 7.3 y 7.1. □
Cuando $f_0 = u_0 + u_1x_1 + \cdots + u_nx_n$ con todos los u_i indeterminados, cualquier perturbación se puede "absorber" con estas indeterminadas haciendo $u_i \mapsto u_i - t\lambda^{\omega_0(a_i)}$ para el correspondiente a_i. Esto demuestra lo siguiente:

Corolario 7.9 *En el caso de la u-resultante de $(f_1, \ldots, f_n)$, f_0 se puede tomar sin perturbar, y el teorema previo vale mutatis mutandis.*

Una construcción obvia de p_λ consiste en tomar valores aleatorios de $\lambda \in \mathbb{C}^*$. Es posible evitar valores aleatorios reemplazando $t \cdot p_{\lambda,i}$ en la perturbación en lugar de $p_{t,i}$, si todas las potencias de λ son positivas. El problema es que, al reemplazar el valor λ por el parámetro de perturbación t, esta construcción hace crecer, en general, el grado de la perturbación en la matriz resultante, y la complejidad del cálculo del polinomio.

Corolario 7.10 *Si alguna pequeña probabilidad de error es aceptable, entonces los polinomios $p_{\lambda,i}$ no tienen que depender de λ y sus coeficientes se pueden tomar completamente aleatorios. La probabilidad de que esta elección sea incorrecta es igual a la probabilidad de que el vector de coeficientes se encuentre en la superficie definida por la anulación del determinante de la matriz de perturbación.*

Sea ϕ el coeficiente de grado más bajo en t de $\det \mathcal{M}_{\omega,\delta}(t)$. Entonces ϕ es un múltiplo de $C_{p,k}$. Es un polinomio en las indeterminadas u_i en el caso de la u-resultante. Por otro lado, si hemos "ocultado" alguna variable x_i en el espacio de coeficientes (tal como en [CLO, Emi3]), ϕ es un polinomio en x_i. Recordar que la variedad del sistema f tiene dimensión positiva si y solamente la resultante se anula idénticamente. Debido al teorema 7.4, se tiene que:

Corolario 7.11 *El grado de ϕ en la variable oculta o, en el caso de la u-resultante, en cada indeterminada x_i, acota el número de raíces aisladas del sistema especializado.*

Podemos delinear entonces el siguiente algoritmo:

1. Construir una matriz resultante usando cualquier algoritmo de los dados en [CE2, Emi3], o en el capítulo 2 de esta memoria. Si el determinante no es cero, entonces no hay necesidad de proceder con una perturbación.

2. Construir los conjuntos $\mathcal{B}_i$ y definir los polinomios p_λ con coeficientes que son o bien aleatorios (cor. 7.10), o determinísticos.

3. Calcular la matriz perturbada y el coeficiente de grado más bajo ϕ de este determinante. Por el corolario 7.11, el grado de ϕ en cualquier u_i o en la variable oculta x_i acota el número de raíces aislada

4. En el caso de la u-resultante, la factorización de $\phi(u)$ contiene todas las raíces aisladas. De otro modo, si hemos ocultado x_i, el conjunto de ceros de $\phi(x_i)$ contiene las coordenadas i-ésimas de todas las raíces aisladas

Observación 7.12 *Si usamos el algoritmo dado en el capítulo 2 de esta memoria para construir la matriz de Sylvester cuyo determinante es múltiplo de la resultante, entonces se puede verificar fácilmente que el p-GCP se puede calcular como un cociente de determinantes. En otras palabras, el factor extraño en* $\det \mathcal{M}_{\omega,\delta}(f_i - t.p_{\lambda,i})$ *es el determinante de la submatriz* $\mathcal{M}^{nm}_{\omega,\delta}(f_i - t.p_{\lambda,i})$ *formada eligiendo aquellas filas y columnas indexadas por puntos que se encuentren en celdas no mixtas. Esto se puede usar para facilitar el cálculo de la resultante rala de un sistema particular cuando el determinante de la matriz* $\mathcal{M}_{\omega,\delta}$ *es idénticamente cero, calculando el primer coeficiente no nulo del p-GCP, tal como en [Can2].*

7.3 Código y Experimentos

La perturbación ha sido implementada en MAPLE por Ioannis Emiris, y se puede encontrar en la siguiente dirección:

`www.inria.fr/saga/emiris/soft_alg.html`

Debajo reportamos aplicaciones específicas.

Ejemplo 7.13 *Consideremos el sistema que aparece en* [Stu2, exam. 2.1]*:*

$$\begin{aligned} f_0 &= \alpha_1 + \alpha_2 x_1^2\, x_2^2 + \alpha_3 x_1\, x_2^3, \\ f_1 &= \beta_1 + \beta_2 x_1^2 + \beta_3 x_1\, x_2^2, \\ f_2 &= \gamma_1 x_1^3 + \gamma_2 x_1\, x_2. \end{aligned}$$

Hacemos $\delta := (0, -1/3)$, *y usamos las siguientes funciones de levantamiento afín:*

$$\begin{aligned} \omega_1(a,b) &= -a/2 - b/4 + 1, \\ \omega_2(a,b) &= 3a - 5b + 7, \\ \omega_3(a,b) &= 0; \end{aligned}$$

esto produce

$$\begin{aligned} p_{\lambda,0} &= \lambda + x_1 x_2^3, \\ p_{\lambda,1} &= \lambda^{13} x_1^2, \\ p_{\lambda,2} &= x_1^3 + x_1 x_2. \end{aligned}$$

Un cálculo explícito muestra que $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(p_\lambda) = \pm\lambda^{93}$. *Si tomamos* $p_{\lambda,1} = x_1^2$, *tendríamos* $\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(p_\lambda) = \pm\lambda^2$. *Está claro que* $\lambda = 1$ *es una buena elección, y produce una buena perturbación. También podríamos haber evitado usar* λ *y, en lugar de ello, perturbar con* $t^2 + tx_1 x_2^3$, tx_1^2, $tx_1^3 + tx_1 x_2$.
Consideremos ahora la especialización

$$\alpha_1 = \beta_3 = -2,\ \alpha_2 = \alpha_3 = \gamma_1 = -\gamma_2 = 1,\ \beta_1 = u,\ \beta_2 = 2 - u.$$

El determinante $\det \mathcal{M}(t)$ *es un múltiplo escalar de la resultante del sistema perturbado. Calculando explícitamente la resultante, se ve que el coeficiente constante es cero, y podemos concluir que para todo* u, *la resultante se anulará, así que la variedad de ceros del sistema tiene dimensión positiva. De hecho, contiene la recta* $(1, 1, u) \simeq \mathbb{C}$. *El coeficiente lineal* $\phi(u)$ *tiene la información de las* 6 *proyecciones de las raíces aisladas del sistema sobre el eje* u.

Ejemplo 7.14 *Consideremos el sistema que aparece en [CE2]:*

$$\begin{aligned} f_0 &= c_{11} + c_{12}x_1 x_2 + c_{13}x_1^2 x_2 + c_{14}x_1, \\ f_1 &= c_{21}x_2 + c_{22}x_1^2 x_2^2 + c_{23}x_1^2 x_2 + c_{24}x_1, \\ f_2 &= c_{31} + c_{32}x_2 + c_{33}x_1 x_2 + c_{34}x_1. \end{aligned}$$

Haciendo $\delta := (-3/8, -1/8)$, $L \geq l^2 > l \gg 0$, *y usando las siguientes funciones de levantamiento:*

$$\begin{aligned} \omega_0 &= (L - l)x_1 + (L - l^2)x_2, \\ \omega_1 &= (L + l^2)x_1 + (L + 1)x_2, \\ \omega_2 &= (L - 1)x_1 + (L + l)x_2, \end{aligned}$$

tendremos que

$$\begin{aligned} p_{\lambda,0} &= 1, \\ p_{\lambda,1} &= \lambda^{4L+2l^2+2}x_1^2 x_2^2 + \lambda^{3L+2l^2+1}x_1^2 x_2, \\ p_{\lambda,2} &= \lambda^{L+l}x_2 + \lambda^{2L+l-1}x_1 x_2 + \lambda^{L-1}x_1; \end{aligned}$$

y

$$\pm\mathrm{Res}_{\mathcal{A}}(p_\lambda) = \lambda^{16L+3l^2+2} - 2\lambda^{17L+4l^2+l+2} + \lambda^{18L+5l^2+2l}.$$

Observar que $\lambda = 1$ *es un cero de este polinomio, así que hay que tomar algún otro valor, por ejemplo* $\lambda = 1/b$ *donde* b *es un entero par. Por supuesto que cualquier valor aleatorio sería válido con muy alta probabilidad.*
En el caso especial

$$\begin{aligned} f_0 &= 1 + x_1 x_2 + x_1^2 x_2 + x_1, \\ f_2 &= 1 + x_2 + x_1 x_2 + x_1, \end{aligned}$$

la resultante se anula idénticamente debido a que la variedad $V(f_0, f_1)$ *tiene dimensión positiva (está formada por la unión del punto aislado* $(1,-1)$ *y la recta* $\{-1\} \times \mathbb{C}$*). Con* $L = 10$ *y* $l = 3$*, se tiene que el coeficiente de* t^2 *en el determinante perturbado es*

$$\phi = -(c_{22}c_{23})(c_{24} - c_{21} + c_{22} - c_{23})(c_{24} + c_{21} - c_{22} + c_{23}),$$

y podemos recuperar en los últimos dos factores el valor de f_1 *en el cero aislado* $(1,-1)$ *y el punto* $(-1,-1)$ *en la componente de dimensión positiva.*

Ejemplo 7.15 *Este ejemplo es considerado en* [Roj, sect. 3.2]. *Al sistema*

$$\begin{aligned} 1 + 2x - 2x^2y - 5xy + x^2 + 3x^3y &= 0, \\ 2 + 6x - 6x^2y - 11xy + 4x^2 + 5x^3y &= 0, \end{aligned}$$

le agregamos $f_0 := u_1x + u_2y + u_0$*, que no necesita ser perturbado por el corolario 7.9. Usamos la función* `spares` *para construir una matriz de* 16×16 *llamada* `Mut` *en los parámetros* u_0, u_1, u_2, t*. El número de filas por polinomio es, respectivamente,* $4, 6, 6$*, mientras que los volúmenes mixtos de los subsistemas* 2×2 *son todos iguales a* 4*.*

```
Mut := spares ([f0,f1,f2], [x,y]):
Dut := det(Mut):                # in u0,u1,u2,t
degree (Dut,t);                 # 12
ldg := ldegree(Dut,t);          # 1
phi := primpart(coeff(Dut,t,ldg)):
factor(phi);
```

Para algunos ω *y* δ*, hemos usado*

$$\begin{aligned} p_{\lambda,1} &:= -3x^2 + x^3y, \\ p_{\lambda,2} &:= 2 + 5x^2. \end{aligned}$$

El determinante perturbado tiene grado en t *igual a* 12*, y el primer coeficiente no nulo tiene grado* 1*.* $\phi(u_i)$ *produce dos factores, correspondientes a las soluciones aisladas* $(1/7, 7/4)$ *y* $(1,1)$*:*

$$(49\,u_2 + 4\,u_1 + 28\,u_0)\,(u_2 + u_1 + u_0)\,.$$

Otros dos factores dan puntos sobre la recta $\{-1\} \times \mathbb{C}$ *de soluciones, pero los puntos específicos son muy sensibles a la elección de* ω *y* δ*. Por ejemplo, una tal elección produce:*

$$(-u_0 + u_1)\,(27\,u_2 + 40\,u_1 - 40\,u_0)\,.$$

En su trabajo, Rojas obtiene una matriz de tamaño 17×17 *cuyo determinante tiene grado 8 y de tal manera que el término de menor grado es nuevamente lineal en* t*, aunque distinto del nuestro.*

Ejemplo 7.16 *En la implementación del algoritmo "roadmap" de Canny para el problema del movimiento del robot (cf. [HP]), hay que tratar con varios sistemas degenerados. Examinemos un sistema de* 3×3 *donde, ocultando* x_3*, obtenemos polinomios densos de grados* $3, 2, 1$*:*

$$\begin{aligned}
f_0 &= 54{x_1}^3 - 21.6{x_1}^2x_2 - 69.12x_1{x_2}^2 + 41.472{x_2}^3 + (50.625 + 75.45x_3)\,{x_1}^2 + \\
&\quad + (-92.25 + 32.88x_3)\,x_1x_2 + (-74.592x_3 + 41.4)\,{x_2}^2 + \\
&\quad + (131.25 + 19.04{x_3}^2 - 168x_3)x_1 + (-405 + 25.728{x_3}^2 + 126.4x_3)\,x_2 + \\
&\quad + (-108.8\,{x_3}^2 + 3.75\,x_3 + 234.375), \\
f_1 &= -37.725\,{x_1}^2 - 16.44\,x_1x_2 + 37.296\,{x_2}^2 + (-38.08x_3 + 84)\,x_1 + \\
&\quad + (-63.2 - 51.456x_3)\,x_2 + (2.304{x_3}^2 + 217.6x_3 - 301.875), \\
f_2 &= 15\,x_1 - 12\,x_2 + 16\,x_3.
\end{aligned}$$

Nuestra función **spares** *produce una perturbación óptima a una matriz singular de tamaño* 14×14 *cuyas entradas son polinomios en* x_3*. En este caso,* $\det \mathcal{M}_{\omega,\delta}(t)$ *es de grado* 14 *y el coeficiente de menor grado tiene grado* 2*, lo cual provee una cota para el número de soluciones afines. En este caso, la cota de Bézout y la de Bernstein coinciden y son iguales a* 6*. Nosotros obtenemos*

$$\phi(x_3) = \left(x_3 - \frac{1434}{625}\right)\left(x_3 - \frac{12815703325}{21336}\right),$$

la primer solución corresponde a la única solución aislada del sistema, mientras que la segunda es espúrea.

Bibliografía

[AS] W. Auzinger y H.J.Stetter. *An Elimination Algorithm for the Computation of all Zeros of a System of Multivariate Polynomial Equations.* En Proc. Intern. Conf. on Numerical Math., Intern. Series of Numerical Math., **86**, pages 12–30. Birkhäuser Verlag, Basel, 1988.

[BCRS] E. Becker, J. Cardinal, M. Roy y Z. Szafraniec. *Multivariate Bezoutians, Kronecker symbol and Eisenbud-Levine formula.* En Algorithms in Algebraic Geometry and Applications, L. González- Vega and T. Recio, eds., Prog. in Math., vol 143, Birkhäuser, Basel, 1996, 79–104.

[Bez] E. Bézout. *Théorie Générale des Équations Algébriques.* Paris, 1779.

[Ber] D. N. Bernstein.*The Number of Roots of a System of Equations.* Functional Anal. Appl. **9** (1975), 183–185.

[BP] D. Bini y V.Y. Pan. *Polynomial and Matrix Computations, volume 1: Fundamental Algorithms.* Birkhäuser, Boston, 1994.

[Can1] J.F. Canny. *The Complexity of Robot Motion Planning.* M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1988.

[Can2] J.F. Canny. *Generalised Characteristic Polynomials.* J. Symbolic Computation, 9: 241–250, 1990.

[CE1] J. F. Canny e I. Z. Emiris. *An Efficient Algorithm for the Sparse Mixed Resultant.* En Cohen, G., Mora, T. y Moreno, O., eds, Proc. Int. Symp. on Appl. Algebra, Algebraic Algorithms and Error-Corr. Codes, Puerto Rico, LNCS 263, (1993), 89–104. Berlin, Springer Verlag.

[CE2] J. F. Canny e I. Z. Emiris. *A Subdivision-based Algorithm for the Sparse Resultant.* J. ACM, 47(3):417–451, May 2000.

[CP] J. Canny y P. Pedersen. *An algorithm for the Newton resultant.* Tech. Report 1394, Comp. Science Dept., Cornell Univ., 1993.

[CCD] E. Cattani, D. Cox y A. Dickenstein. *Residues in Toric Varieties.* Compositio Mathematica **108**: 35–76, 1997.

[CD] E. Cattani y A. Dickenstein. *A global view of residues in the torus.* J. Pure Applied Algebra, 117 & 118:119–144, 1997.

[CDS1] E. Cattani, A. Dickenstein y B. Sturmfels. *Computing Multidimensional Residues.* Progress in Mathematics, Vol.143, Birkhäuser Verlag, 1996.

[CDS2] E. Cattani, A. Dickenstein y B. Sturmfels. *Residues and Resultants.* Journal of Math. Sciences, the University of Tokyo **5** (1998), 119–148.

[Cay] A. Cayley. *On the Theory of Elimination.* Cambridge and Dublin Math. J. **3** (1848), 116–120.

[Cha1] M. Chardin. *The Resultant via a Koszul Complex.* En F. Eyssette y A. Galligo, editors, Computational Algebraic Geometry, volume 109 of Progress in Mathematics, 29–39. Birkhäuser, Boston, 1993.

[Cha2] M. Chardin. *Multivariate Subresultants.* J. Pure and Appl. Alg., **101** (1995). 129–138.

[Cha3] M. Chardin. *Formules à la Macaulay pour les Sous-Résultants en Plusieurs Variables.* C. R. Acad. Sci. Paris, **t. 319**, Série I (1994), 433–436.

[Cox1] D. Cox. *Toric Residues.* Arkiv für Matematik **34** (1996), 73–96.

[Cox2] D. Cox. *The Homogeneous Coordinate Ring of a Toric Variety.* J.Algebr.Geom.,**4,** 17–50 (1995).

[CGZ] D. Cox, R. Goldman y M. Zhang. *On the Validity of Implicitization by Moving Quadrics for Rational Surfaces with No Base Points.* Journal of Symbolic Computation (2000) **29**, 419–440.

[CLO] D. Cox, J. Little y D. O'Shea. *Using Algebraic Geometry.* Graduate Texts in Mathematics **185**. Springer-Verlag, New York, 1998.

[D1] C. D'Andrea. *Resultants and Moving Surfaces.* Por aparecer en el Journal of Symbolic Computation.

[D2] C. D'Andrea. *Macaulay Style Formulas for the Sparse Resultant.* Manuscrito.

[DD] C. D'Andrea y A. Dickenstein. *Explicit Formulas for the Multivariate Resultant.* Por aparecer en el Journal of Pure and Applied Algebra.

[DE1] C. D'Andrea y I. Z. Emiris *Computing Sparse Projection Operators.* Manuscrito.

[DE2] C. D'Andrea yI. Z. Emiris *Compact Resultant Matrices of Bivariate Polynomials.* Manuscrito.

[De] M. Demazure. *Une Définition Constructive du Résultant.* Notes Informelles de Calcul Formel **2**, Prepublication du Centre de Mathématiques de l' École Polytechnique, 1984.

[Dix] A. L. Dixon. *The Eliminant of Three Quantics in two Independent Variables.* Proc. London Math. Soc. **6** (1908), 49–69.

[Emi1] I. Z. Emiris. *Sparse Elimination and Applications in Kinematics.* Ph.D. Thesis, University of California at Berkeley, 1994.

[EC] I. Z. Emiris y J. F. Canny *Efficient Incremental Algorithms for the Sparse Resultant and the Mixed Volume.* Journal of Symbolic Computation, **20** (1995), 117–149.

[Emi3] I.Z. Emiris. On the complexity of sparse elimination. J. Complexity, 12:134–166, 1996.

[Emi4] I. Z. Emiris. *A Complete Implementation for Computing General Dimensional Convex Hulls* . Intern. J. Computational Geometry & Applications, Special Issue on Geometric Software, n.2, vol. 223–253, 1998.

[EM] I. .Z. Emiris y B. Mourrain. *Matrices in Elimination Theory.* J. Symbolic Computation **28**, No. 1/2 (1999), 3–44.

[Ful] W. Fulton. *Introduction to Toric Varieties,* number 131, Annals of Mathematics. Princeton, NJ, Princeton University Press (1993).

[GKZ1] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov y A. V. Zelevinski. *Discriminants of polynomials in several variables and triangulations of Newton polytopes.* Leningrad Math. J., 2(**3**), (1991), 449–505.

[GKZ2] I. M. Gelfand, M. M. Kapranov y A. V. Zelevinski. *Discriminants, Resultants and Multidimensional Determinants*, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin, 1994.

[HM] J. Heintz y J. Morgenstern. *On the Intrinsec Complexity of Elimination Theory*, Journal of Complexity **9** (1993),471–498.

[HP] H. Hirukawa y Y. Papegay. *Motion Planning of Objects in Contact by the Silhouette Algorithm.* En Proc. IEEE Intern. Conf. Robotics & Automation, San Francisco, May 2000.

[HJ] R. Horn y C. Johnson*Matrix Analysis.* Cambridge University Press,1985.

[HS] B. Huber y B. Sturmfels. *A Polyhedral Method for Solving Sparse Polynomial Systems.* Math. Comput., **64** 1542–1555.

[Jou1] J. P. Jouanolou. *Le Formalisme du Résultant.* Advances in Mathematics **90** (1991), 117–263.

[Jou2] J. P. Jouanolou. *Formes d'inertie et Résultant: un Formulaire.* Advances in Mathematics **126** (1997), 119–250.

[KSZ] M. Kapranov, B. Sturmfels y A. Zelevinsky. *Chow Polytopes and General Resultants.* Duke Mathematical Journal, Vol. 67, No. 1, 189–217, 1992

[KS] D. Kapur y T. Saxena. *Sparsity considerations in Dixon resultants.* En Proc.STOC, pp.184–191,1996.

[KL] D. Kapur y Y.N. Lakshman. *Elimination methods: An introduction.* En B. Donald, D. Kapur, and J. Mundy, eds., Symbolic and Numerical Computation for Artificial Intelligence, págs 45–88. Academic Press, 1992.

[KG] W. Keller-Gehrig. *Fast algorithms for the characteristic polynomial.* Theor. Comp. Sci., 36:309–317, 1985.

[KPS] T.Krick, L.M. Pardo y M. Sombra. *Sharp Estimates for the Arithmetic Nullstellensatz.* Por aparecer en Duke Mathematical Journal.

[Kun] E. Kunz. *Kähler Differentials.* Advanced lectures in Mathematics, Friedr. Vieweg and Sohn, 1986.

[Laz] D. Lazard. *Résolution des Systèmes d' Équations Algebriques.* Theor. Comp. Science, **15:** 77–110, 1981.

[Mac1] F. Macaulay. *Some Formulae in Elimination.* Proc. London Math. Soc. 1 **33**, 3–27, 1902.

[Mac2] F. Macaulay. *The Algebraic Theory of Modular Systems.*Cambridge, Cambridge University Press, 1916.

[Man] D. Manocha. *Algebraic and Numeric Techniques for Modeling and Robotics.* PhD thesis, Comp. Science Division, UC Berkeley, 1992.

[MC] D. Manocha y J. F. Canny. *Algorithm for Implicitizing Rational Parametric Surfaces.* Computer Aided Geometric Design, vol. 9, 25–50, 1992.

[Min] M. Minimair *Sparse Resultant under Vanishing Coefficients.* Manuscrito, 2001. Disponible en `http://www4.ncsu.edu:8030/ mminima`.

[Mum] D. Mumford. *Algebraic Geometry I, Complex Projective Varieties.* Springer-Verlag, Berlin, 1976.

[PS] P. Pedersen y B. Sturmfels. *Product Formulas for Resultants and Chow Forms.* Mathematische Zeitschrift, **214** (1993), 377–396.

[Ren] J. Renegar. *On the Computational Complexity of the First-order Theory of the Reals, Parts I, II, III.* J. Symbolic Computacion, **13**(3): 255–352, 1992

[Roj] J.M.Rojas. *Solving Degenerate Sparse Polynomial Systems Faster.* J. Symbolic Computation (1999) **28,** 155–186

[SC] T. W. Sederberg y F. Chen. *Implicitization Using Moving Curves and Surfaces.* Proceedings of SIGGRAPH 1995, 301–308.

[SGD] T. W. Sederberg, R. Goldman y H. Du. *Implicitizing Rational Curves by the Method of Moving Algebraic Surfaces.* Journal of Symbolic Computation, 23, 153–175.

[Stu1] B. Sturmfels. *Sparse Elimination Theory.* En D. Eisenbud and L. Robbiano, editors, Computation Algebraic Geometry and Commutative Algebra, Proceedings, Cortona, June 1991. Cambridge University Press.

[Stu2] B. Sturmfels. *On The Newton Polytope of the Resultant.* Journal of Algebraic Combinatorics, **3** (1994), 207–236.

[Stu3] B. Sturmfels. *Introduction to Resultants.* En Applications of Computational Algebraic Geometry, San Diego, January 1997.

[SZ] B. Sturmfels y A. Zelevinsky. *Multigraded Resultants of Sylvester Type.* J. of Algebra, **163**(1): 115–127, 1994.

[Syl] J. J. Sylvester. *On a Theory of Syzygetic Relations of Two Rational Integral Functions, Comprising an Application to the Theory of Sturm's Functions, and that of the Greatest Algebraic Common Measure.* Philosophical Trans., **143** (1853), 407–548.

[Tsi] A.K.Tsikh. *Multidimensional Residues and their Applications.* Translations of Mathematical Monographs 103. American Mathematical Society, 1992.

[vdW] B. L. van der Waerden. *Modern Algebra.* 3rd edn. New York, F. Ungar Publishing Co., 1950.

[Wei] A. Weil. *L'intégrale de Cauchy et les Fonctions de Plusieurs Variables.* Math. Ann. 111 (1935), 178–182.

[WZ] J. Weyman y A. Zelevinsky. *Determinantal formulas for multigraded resultants.* J. Algebraic Geometry **3** (1994), 569–597.

[ZCG] M. Zhang, E. Chionh y R. Goldman. *On a Relationship Between the Moving Line and Moving Conic Coefficient Matrices.* Computer Aided Geometric Design 16 (1999), 517–527.

[ZG] M. Zhang y R.N. Goldman. *Rectangular corner cutting and Sylvester $\mathcal{A}$-resultants.* En Proc. ACM ISSAC, pp. 301–308, 2000.

BIBLIOGRAFÍA

Índice General

Introducción **1**
0.1 Fórmulas para Resultantes Clásicas 2
0.2 Fórmulas a la Macaulay para Resultantes Ralas 4
0.3 Fórmulas Involucrando el Jacobiano 6
0.4 Aplicaciones 6
0.4.1 Resultantes y Superficies Móviles (capítulo 6) 7
0.4.2 Cálculo de operadores de Proyección Ralos (capítulo 7) 8

I FÓRMULAS **11**

1 Fórmulas a la Macaulay (caso Homogéneo) **13**
1.1 Preliminares 13
1.2 Fórmulas a la Macaulay Generalizadas 17
1.3 Estimación del tamaño de M_t 22
1.4 Bezoutianos y Residuos 24
1.5 Ejemplos 26
1.6 Algunas Fórmulas más Generales 27
1.6.1 Fórmula de Macaulay Generalizada 27
1.6.2 Polinomio Característico Generalizado 28

2 Fórmulas a la Macaulay (caso ralo) **31**
2.1 Preliminares 31
2.2 Polinomios Generalizadamente no Mixtos . 34
2.2.1 Construcción de la Matriz $\mathbb{M}$. 35
2.2.2 Formula a la Macaulay Generalizada. 39
2.2.3 Ejemplos 48
2.2.4 Una Revisión de las Fórmulas Clásicas de Macaulay . . . 55
2.3 Fórmulas a la Macaulay el Caso General 57
2.3.1 Construcción de la Matriz $\mathbb{M}$. 57
2.3.2 Formula a la Macaulay Generalizada 63
2.3.3 Ejemplos 66

3 Resultantes y Determinantes de Complejos **69**

4 Fórmulas Jacobianas **75**
4.1 Jacobianos Tóricos y Resultantes 75
4.2 El caso $n = 2$. 79
4.3 Construcción de la Matriz Resultante 80
4.4 Algoritmo de Levantamiento 81
4.5 Subdivisión Mixta 83
4.6 Ejemplos 89

5 Fórmulas Clásicas **91**
5.1 Polinomios en una Variable 91
5.2 Fórmulas de Sylvester para tres Cuádricas 92
5.3 Formulaciones con el Jacobiano 92
5.4 Fórmulas de Dixon 93

II APLICACIONES **97**

6 Implicitación de Curvas y Superficies Racionales **99**
6.1 Superficies Móviles 99
6.2 El Caso Bihomogéneo . 102
6.2.1 Notación 102
6.2.2 Cálculo de Resultantes usando Complejos de Koszul 103
6.2.3 La Relación entre $\det(MS^d)$ y $\det(MP)$ 106
6.3 Cuádricas Móviles y Parametrización de Superficies . . 110
6.4 El Caso homogéneo 114
6.4.1 El Método de Cuádricas Móviles cuando la Superficie no está Propiamente Parametrizada . 116

7 Cálculo de Operadores de Proyección **119**
7.1 Operadores de Proyección Ralos . . 119
7.1.1 Perturbaciones Lineales 119
7.1.2 Subdivisiones Mixtas y Sistemas con Resultante no Nula 121
7.2 Construcción de la Matriz Resultante 123
7.3 Código y Experimentos 125

Índice de Materias

p-GCP, 119–121, 125
v-facet, 38, 59
v–diámetro, 39

admisible, 61, 63, 65
aleatorio, 124–126
algoritmo, 2, 5, 6, 8, 9, 14, 34, 47–50, 54–57, 68, 75, 76, 79, 81, 82, 103, 106, 107, 124, 125, 128
anillo cociente, 24–26

Bézout, 91, 128
base dual, 14
bases monomiales, 14–17, 27, 28, 40, 70, 80, 92, 102, 103, 105–107, 109, 114, 115
bezoutiano, 4, 6, 15, 24–26, 69, 73, 92, 93
bigrado, 99–105, 109, 111–113

cálculo, 2, 8, 29, 46, 68, 103, 107, 124–126
cálculo efectivo, 13
cápsula convexa, 31, 36, 50, 58, 62, 66, 80, 84, 89, 121
cara, 33, 35, 36, 42, 58, 64, 80, 83, 122
Cayley, 2, 5, 70, 105
celda mixta, 37, 39, 41, 47, 54, 56, 59, 60, 63, 65, 66, 68, 81, 86, 87, 122
celda no mixta, 37, 39, 45, 54, 55, 59, 65–67, 85, 86, 125
celda primaria, 36, 38–40, 42, 45, 46, 48–50, 52–54, 56, 58–60, 64, 66–68
celda secundaria, 36, 37, 39, 40, 42–50, 52, 53, 56, 58, 59, 64–68
Charpoly, 29
clausura algebraica, 2, 13, 14, 104
clausura Zariski, 31
coeficiente, 13, 17, 19–21, 26, 28, 29, 31, 32, 37–43, 45, 47, 48, 56, 59, 60, 63–65, 70, 73, 75, 79, 80, 87, 88, 90, 93, 94, 100, 102, 104–106, 109, 114, 115, 117, 119–121, 123–128
complejo, v, 3, 4, 6, 69–72, 75, 80, 88, 103–106, 115
complejo de Koszul, 3, 4, 8, 28, 69–71, 79, 103, 115
componentes excesivas, 8
computacional, álgebra, 1
contenido de fila, 37, 39–44, 59, 64, 81, 122
convexidad, 43, 82, 85, 88
convexo, polítopo, 31
criterio local-global, 24
cuádricas móviles, 7, 99–101, 110, 113, 116–118
cuerpo algebraicamente cerrado, 18, 31

deformación, 42, 64
descomposición coherente, 122
descomposición coherente mixta, 35, 46, 48, 58, 61, 80, 122
descomposición coherente mixta estricta, 36, 48, 54, 59, 122
determinístico, 83, 123, 125
determinantal, fórmula, 3, 4, 26, 33, 69, 72, 73, 91–93
determinante, v, 2–9, 15–22, 26–28, 34, 38, 40, 42, 43, 45, 48, 49, 52, 54–57, 60, 63, 65–68, 75, 78, 80, 88, 91–94, 108, 109, 111, 113, 115, 120, 121, 123–127
determinante de un complejo, v, 6, 8, 28, 69–72, 104–106, 115

Dixon, 2, 4, 33, 93
dualidad, 24, 25

ecuación, 1, 2, 7, 13, 18, 41, 56, 76, 92, 99, 100, 110, 112, 120
ecuación implícita, 7, 99, 100, 111–114, 118
eliminación, 1, 2
Euler, 92

facet, 33, 36, 39, 43–47, 50, 61, 62, 67, 76, 78, 80, 81, 84, 122
tilde no, 5
factor extraño, 3, 5, 6, 8, 22, 26–28, 34, 54–57, 66, 67, 88, 125
familia esencial, 32, 38, 46, 47, 57, 60–62, 65, 67
forma inicial, 41–43, 45, 61–65, 88, 121, 122
forma meromorfa, 24
funciones analíticas, 24

grado, 13–29, 32, 34, 38, 40, 41, 43, 46, 48, 55, 56, 60, 61, 63, 65, 69–71, 75, 80, 88, 91–95, 99, 100, 105, 106, 112–116, 118–121, 123–125, 127, 128
grado crítico, 3, 4, 6, 15, 27

hiperplano, 36, 38, 43, 46, 47, 60, 85, 100

ideal, 3, 16, 18, 19, 24, 25, 77, 88
implicitación, v, 2, 7, 110
independencia lineal, 116, 117
inecuación, 72, 73, 91
interior relativo, 43
irreducible, 14, 20, 31, 32, 104, 105, 112–114
isomorfismo, 3, 6, 14, 93

jacobiano, 6, 75–79, 87, 90, 92
jacobiano tórico, 75–78
jacobiano tórico discreto, 79, 87, 90

lattice, 31, 32, 38, 48, 52, 60, 62, 75, 119
levantamiento, 35, 36, 45, 48–50, 53, 54, 56–59, 80–85, 89, 125, 126

Macaulay, v, 2–6, 13, 14, 17, 19, 23, 26, 27, 29, 31, 34, 39, 48, 49, 55–57, 63, 73, 92
Macaulay, fórmulas clásicas de, v, 3–5, 41
Macaulay, matriz clásica de, 41
Macaulay, matriz clásica de, 4, 23, 26, 27, 29, 61, 73
matriz, 2–9, 14–29, 34, 36–45, 48–50, 52–61, 63–68, 70, 71, 73, 75, 79–81, 83, 87, 88, 91–94, 102–104, 106–117, 122–125, 127, 128, 138
matriz identidad, 29, 107, 110, 117
menor (de una matriz), 3, 5, 6, 17, 19–22, 25, 27–29, 34, 45, 54–57, 66, 68, 70, 71, 73, 75, 80, 84, 85, 88, 99, 103, 104, 106–109
Minkowski, 35, 36, 46, 54, 58, 59, 77, 80, 81, 89, 120, 122
monomio reducido, 56
morfismo, v, 4, 15, 17, 40, 41, 69–71, 105, 107
multigrado, 45

Newton, polígono de, 75, 80, 81, 89
Newton, polítopo de, 32, 62, 120

operador de proyección, v, 2, 8, 9, 119, 121

parámetro, 31, 42, 64, 99, 120–122, 124, 127
paralelepípedo fundamental, 32
parte graduada, 25
PCG, 29
pendiente, 82, 85, 86
perturbaciones, v, 9, 119
planos móviles, 7, 100–102, 109, 113, 114, 116–118
polígono, 66, 75, 80–83, 86, 88, 89
polítopo, 8, 31–36, 41, 44, 48, 52, 54, 56–58, 60, 62, 63, 76, 78, 87, 120, 121

polinomio, v, 1–4, 6–9, 13–18, 20, 22, 24–29, 31–34, 37, 38, 40–43, 45, 49, 50, 52, 55, 59, 60, 64, 68, 69, 71, 75–78, 87–89, 91–94, 100, 102–105, 109, 112–115, 119–128
polinomio bihomogéneo, 100, 102, 105, 109, 112, 113, 116
polinomio característico, 29
polinomio característico generalizado, 8, 28, 29, 120
polinomio característico generalizado tórico, 119
polinomio de Laurent, 40, 75, 119
polinomio especializado, 13, 40
polinomio genérico, 8, 13, 26, 27, 31, 34, 39, 55, 68, 69, 75, 76, 91, 93, 102, 104, 105, 114, 115, 119, 122
polinomio homogéneo, 2, 13–17, 24, 28, 33, 34, 55, 69, 71, 77, 93–95, 100, 112–114, 116
preimagen, 81, 123
proyección, v, 29, 35, 36, 42, 43, 58, 62, 80, 81, 83, 120–122, 126
proyectivo, espacio, 29, 31, 120
proyectivo, punto, 113, 114
puntos base, v, 7, 110, 112, 113, 118

raíz o cero, v, 2, 4, 9, 29, 105, 123–126
residuo, 24
resultante, 14
resultante bihomogénea, 7, 104–106
resultante homogénea, 3, 4, 7, 13, 49, 53, 55, 69, 115, 118
resultante rala, v, 4, 6, 8, 9, 31, 33, 34, 38, 40, 43, 46, 48, 52, 55, 57, 60, 61, 65, 75, 80, 119, 121, 124, 125
resultante rala mixta, 32

semiespacio, 84
subdivisión mixta, 34, 57, 75, 83, 121, 122
subdivisión poliédrica, 53, 66, 80, 81, 83, 85
submatriz, 3, 5, 15–20, 26–28, 39, 43–45, 49, 54, 63–65, 67, 92, 104, 107, 110, 114, 115, 125
subresultante, 3, 19, 28
sucesión regular, 3, 16, 25, 70
suma de Minkowski, 35, 36, 46, 54, 58, 59, 75, 77, 80, 81, 89, 120, 122
superficies móviles, v, 7, 8, 99, 100, 103, 109, 116
superficies propiamente parametrizadas, v, 7, 8, 99
superficies racionales, v, 7, 100, 102, 103, 109, 112–116
Sylvester, 2–6, 8, 9, 34, 36, 38–40, 43, 48–50, 53, 55, 57, 58, 61, 63, 65, 75, 91, 92, 125

triangulación, 1, 2, 44

vértice, 32, 35, 47, 49, 53, 57, 60, 63, 68, 75, 76, 79–86, 88, 122, 123
variedad algebraica, 2, 9, 24, 41, 60, 112, 120, 124, 126, 127
variedad proyectiva, 31
variedad tórica, 34, 120, 121
vector normal, 33, 35, 36, 44, 49, 55, 58, 62, 67, 76, 81, 83–85
volumen euclídeo, 32, 122
volumen mixto, 32, 47, 62
volumen mixto normalizado, 32, 47, 62

Weil, fórmula de, 24