

## Tesis de Posgrado

# Evolución temporal de la dinámica asociada a series electroencefalográficas

Mairal, María Liliana

2001

Tesis presentada para obtener el grado de Magister de la Universidad de Buenos Aires en el área de Física Médica de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Mairal, María Liliana. (2001). Evolución temporal de la dinámica asociada a series electroencefalográficas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_3325\\_Mairal.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3325_Mairal.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Mairal, María Liliana. "Evolución temporal de la dinámica asociada a series electroencefalográficas". Tesis de Magister. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2001. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_3325\\_Mairal.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3325_Mairal.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*  
*Universidad de Buenos Aires*

Tesis de Maestría en Física Médica

**Evolución Temporal de la Dinámica**  
**Asociada a Series**  
**Electroencefalográficas**

*Lic. María Liliana Mairal*

Director: *Dr. Osvaldo A. Rosso*

Marzo de 2001

Nº 33254

A Pedro, mi padre,  
con quien me hubiese gustado compartir  
la realización de este trabajo.

A Ignacio, mi hijo,  
a quien intentaré en el futuro transmitirle  
la importancia de esta tesis para mí.

## RESUMEN

La interpretación clínica de los registros EEG intenta establecer una relación entre los rasgos patológicos (sintomatología clínica) con el reconocimiento de patrones (“patterns”) determinados, a través de la inspección visual. Si bien este análisis tradicional es muy útil, la inspección visual de un registro EEG es una práctica subjetiva y de difícil sistematización. Con el objetivo de superar estos inconvenientes, el análisis cuantitativo EEG (qEEG) introduce medidas que reflejan las características de la actividad eléctrica cerebral, como así también las de su dinámica asociada. Recientemente algunos grupos de investigadores han reportado resultados, acerca de la caracterización de la evolución temporal de la dinámica asociada a registros EEG de pacientes epilépticos, utilizando cuantificadores basados en técnicas métricas de la dinámica no-lineal. Ellos analizaron el registro EEG durante el inicio de la crisis epiléptica y también la actividad de base (pre y post-ictal), siguiendo la evolución temporal de la complejidad de la señal, asociada con la dimensión de correlación,  $D_2$ , y el grado de caoticidad dado por el mayor exponente de Lyapunov,  $\Lambda_{max}$ . Uno de los principales hallazgos reportados fue la disminución observada en estos dos cuantificadores durante el estadio ictal. Esto sugiere la existencia, al inicio de la crisis, de una transición en el comportamiento dinámico de la red neuronal desde un sistema complejo a uno más simple. Más aún, algunos investigadores reportan un decrecimiento significativo de los cuantificadores mencionados minutos antes del inicio mismo del ataque, generando la hipótesis de que el mismo podría ser predicho. La aplicación de las técnicas métricas de la dinámica no-lineal a un conjunto de datos experimentales exige como requisito básico la estacionariedad de la serie de tiempo que representa. La serie temporal, a su vez, debe ser representativa de un atractor único y estable. Asimismo, la evaluación de la  $D_2$  y el  $\Lambda_{max}$  requieren registros con un elevado número de datos significativos, puesto que se definen como propiedades asintóticas de dicho atractor. Se pueden caracterizar diferentes estados a través de las medidas estáticas de  $D_2$  y  $\Lambda_{max}$  en porciones seleccionadas de la actividad cerebral (series de tiempo EEG) que satisfagan las hipótesis matemáticas requeridas. Sin embargo, estos invariantes métricos requieren la computación previa de ciertos parámetros y además se degradan rápidamente con el ruido aditivo, dando muchas veces vagos resultados. Desafortunadamente, no se puede asumir la existencia de un atractor estable cuando tratamos con registros de larga duración de la actividad de la masa neuronal, por consiguiente, no se pueden inferir en forma directa conclusiones acerca de las características de su dinámica. A fin de caracterizar la dinámica, es posible relajar el requisito de estacionariedad de la serie temporal e introducir dos cuantificadores: la *dimensionalidad* y la *caoticidad*. De este modo, computando sus valores en ventanas temporales deslizantes se podría acceder a la dinámica asociada a la señal EEG. Estos nuevos cuantificadores esencialmente están definidos del mismo modo que la  $D_2$  y el  $\Lambda_{max}$ , pero no son equivalentes, ya que violan el requisito matemático básico de estacionariedad de la serie temporal dada. Otra posibilidad para abordar el estudio cuantitativo de una señal EEG es por medio del análisis tiempo-frecuencia, basado en la Transformada Wavelet Discreta Ortogonal (ODWT). En este método no es necesario el cumplimiento del requisito de estacionariedad de la señal y solo se trabaja con la respuesta mensurable del

sistema, es decir, la serie temporal misma. Tomando entonces como herramienta básica la Transformada Wavelet de la señal EEG, definimos dos cuantificadores: la *Energía Wavelet Relativa* (RWE) y la *Entropía Wavelet Total* (SWT). La RWE brinda información acerca de la energía relativa asociada con las diferentes bandas de frecuencias presentes en el EEG y su correspondiente grado de importancia. La SWT da una medida del grado de orden/desorden presente en una serie de tiempo, y en consecuencia, si se la evalúa a lo largo de todo el intervalo temporal del registro EEG, proveerá información importante que se puede relacionar con cambios en la dinámica subyacente. Los resultados provistos por la SWT son independientes de la energía de la señal y por otra parte, de su definición se desprende que, es una magnitud libre de parámetros y del requisito de estacionariedad de la serie temporal. En este trabajo de tesis se comparan los resultados obtenidos a partir de cuantificadores basados en las técnicas métricas de la dinámica no-lineal y en el análisis wavelet (en particular a través de la *Caoticidad* y la *Entropía Wavelet Total*) para señales EEG de pacientes epilépticos, provistas por electrodos profundos y de superficie. El objetivo de esta comparación es elegir la técnica más adecuada para una posible aplicación de la misma en la detección automática de cambios en la dinámica de la señal. En este sentido, se intenta determinar de las dos técnicas analizadas la que presenta mayores ventajas, tanto en su implementación como en su interpretación.

## ABSTRACT

The clinical interpretation of EEG attempts to link pathological features (clinical symptomatology) with the visual inspection and pattern recognition of the EEG. Although this traditional analysis is quite useful, the visual inspection of the EEG is subjective and hardly allows any systematization. In order to overcome this, quantitative EEG (qEEG) analysis introduces objective measures reflecting the characteristics of the brain activity as well as the associated dynamics. Recently, several results have been reported about the characterization of the temporal evolution of the EEG associated dynamics by some research groups. They used quantifiers based on metric techniques of nonlinear dynamics applied to EEG epileptic records. Following the temporal evolution of the signal complexity, associated with the measurement of the correlation dimension  $D_2$ , and the chaoticness degree, throughout the largest Lyapunov exponent,  $\Lambda_{max}$ ; they not only analyzed the EEG during the seizure onset but also the background neuronal activity (pre- and post-ictal). The main findings from these reports were a reduction of these two quantifiers during the ictal stage, suggesting that a transition takes place at the seizure onset in the dynamical behavior of the neural network from a complex behavior to a simpler one. Furthermore, some researchers reported a significant decrease of these quantifiers a few minutes before the seizure-onset raising the hypothesis that epileptic seizure could be predicted. The basic requirement for applying the nonlinear dynamics metric tools to experimental data is the stationarity of the time series. This means that the time series is representative of a unique and stable attractor. The evaluation of  $D_2$  and  $\Lambda_{max}$  requires long time recordings, because they are defined as asymptotic properties of the attractor. Applying static measurements of  $D_2$  and  $\Lambda_{max}$  to selected portions of brain electrical activity (EEG time series), which satisfy all the mathematical hypothesis, different states could be characterized. These metric invariants require the computation of some previous parameters and also degrade rapidly with additive noise, giving many times vague results. Unfortunately, for long recordings of neural mass activity we can not assume a stable attractor and, therefore we can not come straightforward conclusions concerning dynamic characterization. Moreover when one is interested in state transitions that are not strictly defined, it is possible to relax the stationarity requirement. In these cases we can introduce two quantifiers: the *dimensionality* and the *chaoticity*. Computing their values in slide time windows the EEG associated dynamics could be accessed. They are formally defined as  $D_2$  and  $\Lambda_{max}$ , but they are not equivalent, because they violate the basic mathematical hypothesis of stationarity. Another kind of qEEG methods is based on time-frequency analysis, like the Wavelet Transform for example. This method only uses the data set, that means the time series. It is not necessary to assume any mathematical hypothesis. Then, taking as a basic element the Orthogonal Discrete Wavelet Transform (ODWT). of the EEG signal, we define two quantifiers: the *Relative Wavelet Energy* (RWE) and the *Total Wavelet Entropy* (TWS). The RWE give information about the relative energy associated with the different frequency bands present in the EEG and their corresponding degree of importance. The TWS is a measure of the order/disorder degree in the EEG signal. Furthermore, it gives information in relation with the changes in its underlying dynamical process. The TWS is independent of the signal energy and parameter free. Furthermore, it is

not necessary the stationarity requirement for computing the TWS of the EEG time series. In this work we compare the results based on the two different methods mentioned above. Firstly, we apply metric techniques of non-linear dynamic defining the *Chaoticity* and then the wavelet analysis through the *Total Wavelet Entropy*. These two quantifiers were computed in EEG signals of epileptic patients provided by depth and scalp electrodes. This study tries to determine the better method in order to detect changes in the EEG signals, from the point of view of its interpretation and implementation. Finally, the main goal of this comparison is to select a suitable technique to a possible application in automatic detection of changes in the underlying dynamic of the EEG time series.

# Índice General

<b>1</b>	<b>Introducción General</b>	<b>1</b>
1.1	Actividad Cerebral y EEG . . . . .	1
1.2	EEG Cuantitativo . . . . .	2
1.3	Análisis Frecuencial y Tiempo-Frecuencia . . . . .	3
1.4	Análisis con Técnicas de Dinámica No-Lineal . . . . .	5
1.5	Objetivos y Organización de la Tesis	7
<b>2</b>	<b>Sistemas Dinámicos No-Lineales</b>	<b>8</b>
2.1	Introducción . . . . .	8
2.2	Sistemas Dinámicos . . . . .	11
2.3	Atractores . . . . .	12
2.4	Atractores Extraños Caóticos	13
2.5	Exponentes de Lyapunov . . . . .	14
2.6	Dimensiones Generalizadas . . . . .	17
2.7	Series Temporales . . . . .	18
2.8	Estacionariedad . . . . .	18
2.9	Reconstrucción del Atractor . . . . .	19
2.10	Elección del Tiempo de Retardo . . . . .	21
2.11	Elección de la Dimensión de Embedding Mínima . . . . .	22
2.12	Cálculo de la Dimensión de Correlación ( $D_2$ ) para Series Temporales . . . . .	24
2.13	Evaluación del Máximo Exponente de Lyapunov ( $\Lambda_{max}$ ) para Series Temporales . . . . .	26
2.14	Limitaciones al Cálculo de $D_2$ y $\Lambda_{max}$ para Series Temporales	29
2.15	Caoticidad . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Análisis Tiempo – Frecuencia</b>	<b>43</b>
3.1	Introducción . . . . .	43
3.2	Transformada de Fourier y Transformada de Fourier con Ventana	44
3.3	Transformada de Gabor	46
3.4	Transformada Wavelet . . . . .	47
3.5	Transformada Wavelet Continua . . . . .	50
3.6	Transformada Wavelet Discreta . . . . .	52
3.7	Análisis en Resolución Múltiple . . . . .	54
3.8	Análisis Wavelet de series temporales 1-D . . . . .	61
3.9	Análisis Wavelet de Series Temporales: Separación de Señales . . . . .	62
3.10	Análisis Wavelet de Series Temporales: Energía y Entropía Wavelet . . . . .	64

<b>4</b>	<b>Aplicaciones a Registros EEG</b>	<b>71</b>
4.1	Series Temporales EEG . . . . .	71
4.2	Series EEG y Epilepsia . . . . .	73
4.3	Epilepsia . . . . .	74
4.4	Señal EEG I — EEG de electrodos profundos	75
4.5	Análisis de la Señal EEG I — Estático . . . . .	76
4.6	Análisis de la Señal EEG I — Dinámico . . . . .	79
4.7	Señal EEG II — EEG de electrodos en superficie	82
4.8	Señal EEG II — Artificios y Método de Filtrado . . . . .	83
4.9	Análisis de la Señal EEG II — Estático . . . . .	85
4.10	Análisis de la Señal II — Dinámico . . . . .	86
<b>5</b>	<b>Conclusiones</b>	<b>108</b>

# Índice de Figuras

2.1	RETRATO DE FASES PARA EL CAMPO VECTORIAL QUE PRESENTA UN PUNTO FIJO EN C. LAS TRAYECTORIAS QUE PARTEN CERCANAS AL PUNTO A (EN PARTICULAR LA QUE SE MUESTRA EN LA FIGURA) CONVERGEN EN FORMA ESPIRAL HACIA EL PUNTO CRÍTICO C. LA APROXIMACIÓN A ESTE PUNTO ES EN FORMA ASINTÓTICA, CAYENDO LENTAMENTE CADA VEZ MÁS CERCA DEL MISMO. . . . .	32
2.2	RETRATO DE FASES PARA UN CAMPO VECTORIAL PLANO CON UN CICLO LÍMITE C. B REPRESENTA A UN PUNTO EN EL CICLO LÍMITE. LA TRAYECTORIA QUE SE INICIA EN EL PUNTO B ES CERRADA Y SIGUE GIRANDO UNA Y OTRA VEZ SOBRE LA CURVA C. TAMBIÉN SE MUESTRA EN LA FIGURA UNA TRAYECTORIA QUE SE INICIA EN EL PUNTO A. LA MISMA CONVERGE EN FORMA ESPIRAL ALREDEDOR DEL CICLO LÍMITE ACERCÁNDOSE MÁS Y MÁS AL MISMO A MEDIDA QUE TRANSCURRE EL TIEMPO. . . . .	33
2.3	LAS TRAYECTORIAS QUE SE INICIAN EN EL PUNTO A Y SUS CERCANÍAS, EVOLUCIONAN EN FORMA SOLENOIDAL ENTORNO AL TORO. A MEDIDA QUE EL TIEMPO AVANZA, LAS TRAYECTORIAS EVOLUCIONAN CADA VEZ MÁS CERCA AL TORO. . . . .	34
2.4	REPRESENTACIÓN 3-D DEL ATRACTOR DE LORENZ. LA ÓRBITA QUE DEFINE EL ATRACTOR ( $N = 20000$ ) HA SIDO OBTENIDA INTEGRANDO LAS CORRESPONDIENTES ECUACIONES CON UN RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN Y PASO AJUSTABLE, SIENDO EL PASO DE INTEGRACIÓN DE $\Delta t = 0.01$ Y LOS PARÁMETROS DEL SISTEMA: $\sigma = 16.0$ , $R = 45.92$ Y $b = 4.0$ . LOS PRIMEROS 5000 PUNTOS FUERON DESCARTADOS, EN ORDEN DE ELIMINAR LOS TRANSITORIOS. . . . .	35
2.5	VARIABLE $X(t)$ PARA EL SISTEMA DE LORENZ. LA ÓRBITA DE LA SERIE TEMPORAL HA SIDO OBTENIDA INTEGRANDO LAS CORRESPONDIENTES ECUACIONES CON UN RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN Y PASO AJUSTABLE, SIENDO EL PASO DE INTEGRACIÓN DE $\Delta t = 0.01$ Y LOS PARÁMETROS DEL SISTEMA: $\sigma = 16.0$ , $R = 45.92$ Y $b = 4.0$ . LOS PRIMEROS 5000 PUNTOS FUERON DESCARTADOS, PARA ELIMINAR LOS TRANSITORIOS. EL NÚMERO TOTAL DE PUNTOS PARA ESTA SERIE TEMPORAL ES $N = 20000$ (VER FIG. 2.4), POR CLARIDAD SOLO SE HAN GRAFICADO UNA PORCIÓN DE LOS MISMOS. . . . .	36
2.6	RECONSTRUCCIÓN BIDIMENSIONAL DEL ATRACTOR CORRESPONDIENTE AL SISTEMA DE LORENZ, A TRAVÉS DEL MÉTODO DE TIEMPOS DE RETARDO Y A PARTIR DE LA SERIE UNIDIMENSIONAL CORRESPONDIENTE A LA VARIABLE $X(t)$ : A) $\tau = 1 \cdot \Delta t$ , B) $\tau = 20 \cdot \Delta t$ , C) $\tau = 6 \cdot \Delta t$ . EL TIEMPO DE MUESTRO PARA LA SERIE TEMPORAL ES $\Delta t = 0.01$ Y EL NÚMERO DE DATOS DE LA MISMA $N = 20000$ (VER FIG. 2.5).	37

2.7 DESPLAZAMIENTO PROMEDIO  $\langle S_D \rangle$  EN FUNCIÓN DEL TIEMPO DE RETARDO (EN UNIDADES DE  $\Delta t$ , TIEMPO DE MUESTREO) PARA  $X(t)$  DEL SISTEMA DE LORENZ. LAS DIFERENTES CURVAS REPRESENTAN LOS VALORES OBTENIDOS CONSIDERANDO DIMENSIONES DE EMBEDDING DE  $D = 5, 6, 7$  Y  $8$ . EL VALOR PARA EL TIEMPO DE RETARDO ÓPTIMO  $\tau^* = 6 \cdot \Delta t$  ES REPRESENTADO POR LA LÍNEA SEGMENTADA VERTICAL. EL NÚMERO DE DATOS PARA ESTA SERIE TEMPORAL ES  $N = 20000$  Y  $\Delta t = 0.01$  ES EL TIEMPO DE MUESTREO DE LAS MISMA (VER FIG. 2.5). . . . . 38

2.8 PORCENTAJE DE FALSOS PRÓXIMOS VECINOS COMO FUNCIÓN DE LA DIMENSIÓN DE EMBEDDING PARA LA SERIE TEMPORAL  $X(t)$  DEL SISTEMA DE LORENZ. PARA LA EVALUACIÓN DEL  $FNN\%$  SE UTILIZÓ EL TIEMPO DE RETARDO ÓPTIMO  $\tau^* = 6 \cdot \Delta t$  (VER FIG. 2.7). EL NÚMERO DE DATOS PARA ESTA SERIE TEMPORAL ES  $N = 20000$  Y  $\Delta t = 0.01$  ES EL TIEMPO DE MUESTREO DE LAS MISMA (VER FIG. 2.5). . . . . 39

2.9 A) DEPENDENCIA DEL LOGARITMO NATURAL DE LA INTEGRAL DE CORRELACIÓN  $\ln[C(r)]$  VS  $\ln(r)$  PARA  $X(t)$  DEL SISTEMA DE LORENZ. LAS DISTINTAS CURVAS REPRESENTAN LOS RESULTADOS OBTENIDOS PARA DIMENSIONES DE EMBEDDING DE  $D = 5, 6, 7, 8$  Y TIEMPO DE RETARDO ÓPTIMO  $\tau^* = 6 \cdot \Delta t$ . EL NÚMERO DE DATOS PARA ESTA SERIE TEMPORAL ES  $N = 20000$  Y  $\Delta t = 0.01$  EL TIEMPO DE MUESTREO DE LAS MISMA (VER FIG. 2.5). B) GRÁFICO DE LAS PENDIENTES (DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN  $D_2$ ) DE LAS CURVAS REPRESENTADAS EN EL PANEL SUPERIOR. ESTAS PENDIENTES FUERON EVALUADAS NUMERICAMENTE. UN CLARO PLATEAU (REGION DE ESCALA) PUEDE OBSERVARSE PARA  $0.25 \leq \ln(r) \leq 1.0$  PARA DIMENSIONES DE EMBEDDING CRECIENTES. EL VALOR PARA LA DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN PROMEDIADA SOBRE TODAS LAS  $D$  OBTENIDA FUE  $\langle D_2 \rangle = 2.073$ . . . . . 40

2.10 DIAGRAMA DE LA EVOLUCIÓN Y PROCEDIMIENTO DE REEMPLAZO UTILIZADO PARA LA DETERMINACIÓN DEL MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV, PARA UN SEGMENTO DE DATOS. . . . . 41

2.11 CONVERGENCIA DEL MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV  $\Lambda_{max}$  CON EL PROCESO DE ITERACIÓN (TIEMPOS DE EVOLUCIÓN  $\Delta T$ ) EN EL MÉTODO MODIFICADO DE WOLF PARA SERIES TEMPORALES, PARA LA SERIE  $X(t)$  DEL SISTEMA DE LORENZ. EL NÚMERO DE DATOS PARA ESTA SERIE TEMPORAL ES  $N = 20000$  Y  $\Delta t = 0.01$  EL TIEMPO DE MUESTREO DE LAS MISMA (VER FIG. 2.5). LA LÍNEA DE PUNTOS, REPRESENTA EL VALOR  $\Lambda_{max} = 2.19$  AL CUAL CONVERGE EL PROCESO ITERATIVO. . . . 42

3.1 FUNCIÓN WAVELET SPLINE CÚBICA  $\psi$  UTILIZADA EN ESTE TRABAJO. . . . . 68

3.2 AMPLITUD Y FASE DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER PARA LA FUNCIÓN WAVELET SPLINE CÚBICA  $\psi$  (VER FIG. 3.1). . . . . 69

3.3 DISTRIBUCIONES (PROBABILIDAD) DE ENERGÍA WAVELET RELATIVA (RWE) CORRESPONDIENTES A 5 NIVELES WAVELET DE RESOLUCIÓN ( $j = -5, \dots, -1$ ). DISTRIBUCIÓN A:  $\{p_j\} = \{0.05, 0.10, 0.30, 0.35, 0.20\}$ ; B:  $\{p_j\} = \{0.03, 0.12, 0.33, 0.38, 0.14\}$ ; C:  $\{p_j\} = \{0.03, 0.10, 0.12, 0.70, 0.05\}$ . LOS VALORES DE LA ENTROPÍA WAVELET TOTAL PARA ESTAS DISTRIBUCIONES SON  $S_{WT}(A) = 1.430$ ,  $S_{WT}(B) = 1.368$  Y  $S_{WT}(C) = 0.989$ . TOMANDO LA DISTRIBUCIÓN A COMO REFERENCIA, LA ENTROPÍA WAVELET RELATIVA PARA LAS OTRAS DOS DISTRIBUCIONES SON  $S_{WT}(B|A) = 0.019$  Y  $S_{WT}(C|A) = 0.291$ . . . . . 70

4.1 REGISTRO DE LA SEÑAL EEG CORRESPONDIENTE A UN CONTACTO EN LA REGION EPILEPTOGENICA EN EL HIPOCAMPO IZQUIERDO. ATAQUE EPILÉPTICO (*Serie EEG I*). LA FRECUENCIA DE MUESTREO DEL REGISTRO ES  $\omega_s = 256$  Hz. LA CRISIS EPILÉPTICA SE INICIA A LOS 10 SEG Y FINALIZA A LOS 54 SEG. . . . . 91

4.2 DESPLAZAMIENTO PROMEDIO  $\langle S_D \rangle$  VERSUS EL TIEMPO DE RETARDO  $\tau^*$  PARA LA *Serie EEG I* (FIG. 4.1), SEGMENTO 36 - 44 *seg*. LAS CURVAS CORRESPONDEN A DIMENSIONES DE EMBEDDING DE  $D_e = 11$  (LÍNEA SÓLIDA),  $D_e = 12$  (LÍNEA DE PUNTOS),  $D_e = 13$  (LÍNEA DE PUNTO Y RAYA) Y  $D_e = 14$  (LÍNEA SEGMENTADA). EL VALOR ÓPTIMO DEL TIEMPO DE RETARDO  $\tau^* = \tau \cdot t_s = 0.0156$  *seg* SE REMARCÓ CON LA LÍNEA VERTICAL SEGMENTADA. . . . . 92

4.3 PORCENTAJE DE FALSOS PRÓXIMOS VECINOS COMO FUNCIÓN DE LA DIMENSIÓN DE EMBEDDING PARA LA *Serie EEG I* (FIG. 4.1) SEGMENTO 36 - 44 *seg* EVALUADA CON EL TIEMPO DE RETARDO ÓPTIMO  $\tau^* = 0.0156$  *seg*. . . . . 93

4.4 PROYECCIÓN BIDIMENSIONAL DEL REtrato DE FASES CORRESPONDIENTE A LA *Serie EEG I* (FIG. 4.1) SEGMENTOS: a) 0 - 7 *seg* (PRE - CRISIS); b) 21 - 29 *seg* Y c) 29 - 37 *seg* (PLENO DESARROLLO DE LA CRISIS); d) 36 - 44 *seg* Y e) 44 - 52 *seg* (FIN DE LA CRISIS).  $\tau^*$  ES EL TIEMPO DE RETARDO EMPLEADO. . . . . 94

4.5 GRÁFICO DEL LOGARITMO DE LA INTEGRAL DE CORRELACIÓN  $\ln[ C(\tau) ]$  VERSUS  $\ln(\tau)$  PARA LA *Serie EEG I* (FIG. 4.1) SEGMENTO 36 - 44 *seg* CON TIEMPO DE RETARDO  $\tau^* = 0.0156$  *seg* Y DIMENSIONES DE EMBEDDING ENTRE  $D_e = 10$  Y 14. LA TANGENTE DE ESTAS CURVAS PARA  $3.5 \leq \ln(\tau) \leq 5.5$  DA LA DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN  $D_2$ . . . . . 95

4.6 CONVERGENCIA DEL MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV  $\Lambda_{max}$  CON EL PROCESO DE ITERACIÓN (TIEMPOS DE EVOLUCIÓN  $\Delta T$ ) DEL MÉTODO MODIFICADO DE WOLF PARA SERIES TEMPORALES, PARA LA *Serie EEG I* (FIG. 4.1) SEGMENTO 36 - 44 *seg* CON TIEMPO DE RETARDO  $\tau^* = 0.0156$  *seg* Y DIMENSIONES DE EMBEDDING DESDE  $D_e = 11$  A 13. . . . . 96

4.7 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA CAOTICIDAD EN VENTANAS DESLIZANTES DE LONGITUD  $L = 2560$  *datos*  $\equiv 10$  *seg* Y CON UNA SUPERPOSICIÓN (OVERLAPPING)  $\delta = 256$  *datos*  $\equiv 1$  *seg* PARA LA *Serie EEG I* (FIG. 4.1). DEPENDENCIA CON LOS PARÁMETROS NECESARIOS PARA SU CÓMPUTO. . . . . 97

4.8 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA CAOTICIDAD EN VENTANAS DESLIZANTES DE LONGITUD  $L = 2560$  *datos*  $\equiv 10$  *seg* Y CON UN SUPERPOSICIÓN (OVERLAPPING)  $\delta = 256$  *datos*  $\equiv 1$  *seg* PARA LA *Serie EEG I* (FIG. 4.1), CON  $ievol = 2$ ,  $\tau^* = 4 \cdot t_s$  Y  $D = 10$ . . . . . 98

4.9 ENERGÍA WAVELET RELATIVA (ENERGÍA POR BANDA NORMALIZADA A LA ENERGÍA TOTAL), PARA LAS BANDAS DE FRECUENCIAS WAVELET DESDE  $B_3$  A  $B_8$  (VER TAB. 4.2) CORRESPONDIENTES A LA *Serie EEG I*, SEÑAL GRAFICADA EN FIG. 4.1, EN FUNCIÓN DEL TIEMPO. LAS CONTRIBUCIÓN DE LA BANDA DE FRECUENCIA  $B_1$  ES CONSIDERADA NULA EN EL PRESENTE TRABAJO. LA EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA ENERGÍA WAVELET RELATIVA PARA LA BANDA  $B_2$  NO HA SIDO GRAFICADA, POR SER SU CONTRIBUCIÓN MUY CERCANA A CERO EN TODO EL INTERVALO TEMPORAL. . . . . 99

4.10 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA ENTROPÍA WAVELET TOTAL PARA LA *Serie EEG I* (FIG. 4.1). LA CONTRIBUCIÓN DE LA BANDA DE FRECUENCIA  $B_1$  (TAB. 4.2) ES CONSIDERADA NULA EN EL PRESENTE TRABAJO. . . . . 100

4.11 SEÑAL EEG DE SUPERFICIE CORRESPONDIENTE A UN ELECTRODO EN POSICIÓN C4 DE UN ATAQUE EPILÉPTICO TÓNICO-CLÓNICO (*Serie EEG II*). LA FRECUENCIA DE MUESTREO DEL REGISTRO ES  $\omega_s = 102.4$  Hz. LA CRISIS SE INICIA A LOS 80 SEG, LA FASE TÓNICA A LOS 90 SEG Y LA FASE CLÓNICA A LOS 125 SEG. LA CRISIS FINALIZA A LOS 154 SEG. . . . . 101

4.12 *Serie EEG I* SUAVIZADA. SEÑAL REPRESENTADA EN LA FIG. 4.11 SIN LAS CONTRIBUCIONES DE LAS BANDAS WAVELET DE FRECUENCIA  $B_1$  Y  $B_2$  (VER TAB. 4.4). . . . 102

4.13 PORCENTAJE DE FALSOS PRÓXIMOS VECINOS COMO UNA FUNCIÓN DE LA DIMENSIÓN DE EMBEDDING PARA LA *Serie EEG I* (FIG. 4.11) Y LA SEÑAL LIBRE DE RUIDO (FILTRADA), SIN LAS CONTRIBUCIONES DE LAS BANDAS WAVELET DE FRECUENCIA  $B_1$  Y  $B_2$  (FIG. 4.12), CORRESPONDIENTE AL ESTADO CLÓNICO (90–120 *seg*) EVALUADO CON EL TIEMPO DE RETARDO ÓPTIMO  $\tau^* = 3 \cdot t_s$ . . . . . 103

4.14 PROYECCIÓN EN DOS DIMENSIONES DEL RETRATO DE FASES CORRESPONDIENTE A LOS SIGUIENTES SEGMENTOS DE LA SERIE TEMPORAL ORIGINAL *Serie EEG II* (*Serie EEG II* FILTRADA) GRAFICADA EN LA FIG. 4.11 (FIG. 4.12): a) (d) PRE-ATAQUE 50–80 *seg*; b) (e) ESTADO TÓNICO 90–120 *seg*; c) (f) ESTADO CLÓNICO 120–150 *seg*.  $\tau^*$  ES EL TIEMPO DE RETARDO ÓPTIMO EMPLEADO Y CORRESPONDE A LA SEÑAL FILTRADA. . . . . 104

4.15 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA CAOTICIDAD EN VENTANAS DESLIZANTES DE LONGITUD  $L = 2560$  *datos*  $\equiv 25$  *seg* Y CON UN OVERLAPPING  $\delta = 256$  *datos*  $\equiv 2.5$  *seg* PARA LA *Serie EEG II* FILTRADA (FIG. 4.12), CON  $ievol = 2$ ,  $\tau^* = 4 \cdot t_s$  Y  $D_e = 10$ . 105

4.16 ENERGÍA WAVELET RELATIVA (ENERGÍA POR BANDA NORMALIZADA A LA ENERGÍA TOTAL). LAS CONTRIBUCIONES DE LAS BANDAS WAVELET DE FRECUENCIA  $B_1$  Y  $B_2$  SON CONSIDERADAS COMO NULAS, CON LO CUAL LA EVOLUCIÓN TEMPORAL OBTENIDA PUEDE ASOCIARSE CON LA *Serie EEG II* FILTRADA MOSTRADA EN LA FIG. 4.12. 106

4.17 EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA ENTROPÍA WAVELET TOTAL PARA LA *Serie EEG II* ORIGINAL (FIG. 4.11) Y FILTRADA (FIG. 4.12). EN EL CASO DE LA SEÑAL FILTRADA, LAS CONTRIBUCIONES DE LAS BANDAS DE FRECUENCIA  $B_1$  Y  $B_2$  (TAB. 4.4) SON CONSIDERADAS NULAS. 107

# Índice de Tablas

4.1	VALOR ÓPTIMO DEL TIEMPO DE RETARDO $\tau^*$ (EN <i>seg</i> ), DIMENSIÓN DE EMBEDDING MÍNIMA $D^{(min)}$ , TAMAÑO APROXIMADO DEL ATRACTOR $R_A$ , RADIO UMBRAL $R_T$ , PORCENTAJE DE FALSOS PRÓXIMOS VECINOS $\%FNN$ , DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN $D_2$ , Y MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV $\Lambda_{max}$ PARA LOS SEGMENTOS DE 8 <i>seg</i> ( $N = 2048$ <i>datos</i> ) DE LA Señal EEG I (VER FIG. 4.1). . . . .	77
4.2	BANDAS DE FRECUENCIAS (EN Hz) ASOCIADAS CON LOS DIFERENTES NIVELES DE RESOLUCIÓN WAVELET ( $j$ ) UTILIZADOS EN EL ANÁLISIS DE LA SEÑAL EEG I DE ACUERDO A LA FRECUENCIA DE MUESTREO $\omega_s = 256$ Hz. LAS BANDAS TRADICIONALES EEG CORRESPONDEN A LAS SIGUIENTES FRECUENCIAS: $\delta : 0.5 - 3.5$ Hz; $\theta : 3.5 - 7.5$ Hz; $\alpha : 7.5 - 12.5$ Hz; $\beta : 12.5 - 30$ Hz Y $\gamma : 30 - 70$ Hz. . . . .	79
4.3	VALOR ÓPTIMO DEL TIEMPO DE RETARDO $\tau^*$ (EN <i>seg</i> ), DIMENSIÓN DE EMBEDDING MÍNIMA $D^{(min)}$ , TAMAÑO APROXIMADO DEL ATRACTOR $R_A$ , RADIO UMBRAL $R_T$ , PORCENTAJE DE FALSOS PRÓXIMOS VECINOS $\%FNN$ , DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN $D_2$ , Y MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV $\Lambda_{max}$ PARA LOS SEGMENTOS DE 30 <i>seg</i> ( $N = 3072$ <i>datos</i> ) DE LA Serie EEG II FILTRADA (SEE FIG. 4.12) . . . . .	85
4.4	BANDAS DE FRECUENCIAS (EN Hz) ASOCIADAS CON LOS DIFERENTES NIVELES DE RESOLUCIÓN WAVELET ( $j$ ) UTILIZADOS EN EL ANÁLISIS DE LA SEÑAL EEG II DE ACUERDO A LA FRECUENCIA DE MUESTREO $\omega_s = 102.4$ Hz. LAS BANDAS TRADICIONALES EEG CORRESPONDEN A LAS SIGUIENTES FRECUENCIAS: $\delta : 0.5 - 3.5$ Hz; $\theta : 3.5 - 7.5$ Hz; $\alpha : 7.5 - 12.5$ Hz; $\beta : 12.5 - 30$ Hz Y $\gamma : 30 - 70$ Hz. . . . .	86

# Capítulo 1

## Introducción General

### 1.1 Actividad Cerebral y EEG

La actividad de las neuronas, unidades funcionales del sistema nervioso, se manifiesta como un fenómeno eléctrico. Este es el resultado de las corrientes iónicas generadas a través de la membrana plasmática de la neurona, a partir de las diferencias de potencial existentes entre el cuerpo de la misma y el espacio extracelular. Hace ya un siglo se estableció que el cerebro de los mamíferos genera esta señal eléctrica, si bien pequeña, mensurable. El electroencefalograma (EEG) es el método de diagnóstico clínico, que permite registrar esta pequeña señal, detectando la actividad eléctrica resultante de un gran conjunto de neuronas. Esta actividad se puede medir a través de electrodos colocados estratégicamente en la superficie de la cabeza (“scalp EEG” o simplemente “EEG”) e incluso sobre o dentro de distintas zonas del cerebro (“CoEEG” y “sEEG” respectivamente). Para el EEG de superficie normalmente se utiliza una distribución standard de 20 electrodos que registran en forma simultánea la actividad eléctrica de las zonas correspondientes del cerebro. La señal se encuentra en el rango de los micro-voltios y debe ser amplificada varios órdenes de magnitud. Al respecto, Layne, Mayer-Kress y Holzfuss [1] enfatizan que el EEG es una señal débil en un mar de ruido; razón por la cual es importante no subestimar el emplazamiento de los electrodos e inspeccionar los artificios (eventos contaminantes) durante el protocolo de registro. Es interesante destacar que, a menudo artificios pronunciados se originan por ligeros movimientos de los electrodos y por contracción de los músculos ubicados debajo de éstos.

Desde sus inicios el EEG toma un lugar de preponderancia en la clínica médica, ya que se trata de un estudio no invasivo (“scalp EEG”), repetible a voluntad y de bajo costo. En el análisis de las señales EEG se pretendió desde un principio medir con exactitud el contenido espectral de la actividad electroencefalográfica, dada las influencias que tenían factores tales como la glucemia, el nivel de hormonas, la edad, ciertos medicamentos, etc., sobre las frecuencias de las series temporales de los registros EEG. Sin embargo, hasta tiempos recientes este análisis se ha basado principalmente en la inspección visual del registro. Es decir, la calidad del diagnóstico ha dependido de la habilidad para interpretarlo y la experiencia del especialista. La interpretación clínica del EEG ha intentado relacionar los rasgos patológicos (sintomatología clínica) con el

reconocimiento de patrones del EEG, a través de la inspección visual. Si bien el análisis tradicional ha sido útil, la inspección visual del EEG es subjetiva y de difícil sistematización [2]. A fin de sortear estos inconvenientes, el análisis cuantitativo del EEG (qEEG) introduce mediciones objetivas que reflejan las características de la actividad cerebral tanto como su dinámica asociada. Sin embargo, se debe subrayar que estos métodos no han sido desarrollados para substituir el análisis visual tradicional del EEG sino, más bien, para complementarlo.

## 1.2 EEG Cuantitativo

El cumplimiento del concepto de ergodicidad en una serie temporal requiere básicamente la estacionariedad de la misma y es la suposición más comunmente utilizada en gran parte de los métodos tradicionales de análisis de señales o series temporales experimentales. La serie de tiempo EEG cumple con este requerimiento solo para intervalos muy limitados de tiempo y frecuentemente la variación de la señal en el tiempo es de interés primordial. Justamente éste es el caso para la identificación del establecimiento del ataque epiléptico asociado a un foco, entre otros.

El procesamiento de la información por parte del cerebro está reflejado en los cambios dinámicos de la actividad eléctrica en términos de tiempo, frecuencia y espacio. Se deduce entonces que, el estudio de este proceso requiere métodos que puedan describir la variación cualitativa de la señal en tiempo y frecuencia. Recientemente se introdujeron métodos qEEG que comparten características comunes. Tomando como punto de partida las mediciones experimentales ellos evalúan distintos tipos de cuantificadores. Uno de los rasgos más importantes es que en general los cuantificadores están relacionados con propiedades físicas; de este modo su interpretación y la implicancia de los resultados obtenidos pueden resultar más fáciles y directos. Para comprender la dinámica asociada a la serie de tiempo EEG se puede estudiar la evolución durante el intervalo de registro de los cuantificadores asociados y analizar los resultados de su comportamiento bajo diferentes patologías y enfermedades.

En la caracterización de la evolución temporal de la dinámica asociada al EEG, recientemente algunos grupos han reportado resultados muy interesantes usando cuantificadores basados en mediciones de dinámica no lineal, aplicadas a series temporales EEG epilépticas provistas por electrodos profundos y corticales. Se analizaron los EEG durante el establecimiento del ataque y los EEG de base (pre y post ictal), siguiendo la evolución temporal de la *Complejidad* asociada a la señal (análisis de la dimensión de correlación  $D_2$ ) [3, 4] y el grado de *Caoticidad* de la misma (a través del mayor exponente de Lyapunov,  $\Lambda_{max}$ ) [5, 6, 7]. El hallazgo más importante que surge de estos informes es la reducción de estos dos cuantificadores durante el ataque, sugiriendo que cuando se establece la crisis se produce una transición en la dinámica de la red neuronal desde un comportamiento más complejo a uno más simple [8]. Además algunos grupos han registrado una disminución significativa de estos cuantificadores unos pocos minutos antes del establecimiento del ataque generando la hipótesis de poder predecir el mismo

[4, 5, 6].

La estacionariedad de la serie de tiempo en estudio (serie de datos experimentales dada) es el requisito básico para la aplicación del análisis métrico de la dinámica no-lineal (Teoría del Caos). A su vez esta propiedad de la serie sugiere que la misma es representativa de un atractor único y estable. También para la evaluación de  $D_2$  y  $\Lambda_{max}$ , definidos como propiedades asintóticas del atractor se requieren, en general, registros de larga duración. Aplicando las mediciones estáticas de  $D_2$  y  $\Lambda_{max}$ , seleccionando porciones de la actividad eléctrica cerebral (series de tiempo EEG) que satisfagan todas las hipótesis matemáticas requeridas, se pueden caracterizar diferentes estados [9, 10, 11, 12, 13, 14]. Estos invariantes métricos requieren la computación previa de algunos parámetros y por otra parte, se degradan rápidamente con el ruido adicional dando muchas veces vagos resultados [78, 16].

Otro grupo de métodos qEEG son aquellos basados en el análisis tiempo-frecuencia. Recientemente fueron introducidas dos técnicas diferentes de qEEG que permiten el análisis de la serie de tiempo en el dominio tiempo-frecuencia. La primera está basada en la Transformada de Gabor (GT) [11, 17, 18, 19, 20] y la segunda en la Transformada Wavelet Discreta Ortogonal (ODWT) [18, 21, 22, 23, 24, 25]. La GT es equivalente a la Transformada Wavelet con una ventana fija. Estos métodos, especialmente la ODWT, no necesitan de suposiciones acerca de la estacionariedad (en este caso no hay necesidad de reconstruir ningún atractor del sistema dinámico) y trabajan solo con su respuesta medible, esto es la serie de tiempo. Tomando como un elemento básico la Transformada Wavelet de la señal EEG, se pueden definir dos cuantificadores: la *Energía Wavelet Relativa* (RWE) y la *Entropía Wavelet Total* (SWT). La RWE provee información acerca de la energía relativa asociada con las diferentes bandas de frecuencia presentes en la serie de datos experimentales (registro EEG) y su correspondiente grado de importancia. Por otra parte, la SWT da una medida del grado de orden/desorden asociado con la señal. Si se evalúan, entonces, estos dos cuantificadores en todo el intervalo de tiempo del registro EEG se podrá inferir, en principio, información útil relacionada con la dinámica subyacente.

### 1.3 Análisis Frecuencial y Tiempo-Frecuencia

El advenimiento de la computadora posibilitó el empleo de métodos cuantitativos, siendo la Transformada Rápida de Fourier (FFT) la más empleada en el análisis clínico en la actualidad. Ha sido a través del matemático N. Wiener, entre otros, que el “análisis armónico generalizado” pudo proveer las herramientas matemáticas necesarias para penetrar en la misteriosa relación entre las series temporales EEG y el funcionamiento del cerebro. No obstante, el progreso a lo largo de esta línea ha sido lento, y el entendimiento e interpretación de los EEGs permanecen un tanto oscuros. Después de más de 100 años sólo se pueden determinar correlaciones intermitentes entre la actividad del cerebro y lo que se encuentra en los registros de EEG. Aún no hay una taxonomía de los “patrones” (patterns) del EEG que pueda establecer una correspondencia de éstos con la actividad

cerebral.

Si bien esta técnica ha permitido la separación de los varios ritmos involucrados en la actividad cerebral, la aplicación de la FFT como método de análisis no solo asume la estacionariedad de la señal sino que además presenta dos importantes desventajas: *a)* no brinda información acerca de la evolución temporal de las frecuencias involucradas y *b)* no es capaz de detectar eventos aislados o transitorios de la señal, elementos éstos esenciales para el diagnóstico.

Una manera de sortear este problema es multiplicar las funciones de referencia de la FFT por funciones ventana (usualmente se utilizan ventanas rectangulares). De este modo se obtiene la Transformada de Fourier con Ventana (TFV). La TFV se puede pensar entonces como una Transformada de Fourier (TF) que es calculada repetidamente a partir del desplazamiento de la ventana, de tal modo que al desplazar la misma a lo largo de toda la señal se obtiene el cambio de la información frecuencial con el tiempo. Para evitar el problema de la aparición de frecuencias espúreas al utilizar una ventana rectangular Gabor propuso, en principio, utilizar una ventana gaussiana [26]. La gaussiana es real y simétrica y por otra parte su aplicación permite a la transformada minimizar el “principio de incerteza” [27]. Dado que la TF de una gaussiana es otra gaussiana, se evita entonces la introducción de frecuencias espúreas y se obtiene una óptima resolución de la señal en el plano tiempo-frecuencia.

Posteriormente se definió la Transformada de Gabor Generalizada (TGG), que del mismo modo permite localizar la información tanto en frecuencia como en tiempo. Las dos características de mayor interés para el caso que nos ocupa de la TGG son: *a)* al igual que en el análisis de Fourier, la descomposición de la señal se realiza en términos de la base armónica de senos y cosenos; *b)* la ventana temporal utilizada es de ancho fijo, limitando así el tamaño de las estructuras que pueden ser resueltas. Es decir, la TGG analiza toda la serie en estudio con la misma resolución y no discrimina el tiempo propio de cada fenómeno presente en la misma.

Como alternativa, en los últimos años creció el interés por un nuevo tipo de transformación entre los dominios frecuencial y temporal: la Transformada Wavelet [27, 28, 29, 30, 31]. A diferencia de la TF trabaja con funciones cuya representación espectral es similar a paquetes de onda (conjunto de frecuencias monocromáticas en torno de una principal), localizados temporalmente y constituidos por varias frecuencias. Las llamadas “wavelets” u “ondelettes” son la representación en el espacio temporal de dichos paquetes. Su principal característica es que toda una familia de wavelets (que además pueden constituir una base ortonormal del espacio de Hilbert) se obtiene a partir de dilataciones y translaciones de una wavelet principal, llamada wavelet madre. Este tipo de análisis tiempo-escala permite medir el contenido local de frecuencias de una señal y su aparición temporal. En la transformación wavelet el estudio frecuencial se hace con distintas magnificaciones para cada banda de frecuencias, es decir, a diferentes resoluciones (escalas) [32, 33].

Se puede pensar la transformación wavelet como un microscopio matemático, con

aumento graduable y con posibilidad de cambiarlo de posición sobre la serie (dilatando y trasladando la función wavelet madre). El rendimiento de la óptica queda determinado por la elección de la wavelet madre analizante. En el caso de usar conjuntos de wavelets que forman bases, podemos entonces relacionar la suma de los cuadrados de los coeficientes wavelet con la energía del sistema para cada banda de frecuencias, encontrando así una primera relación de los coeficientes con la física (aunque en forma indirecta) y definir también una entropía al estilo “Shannon” de la señal [21, 34, 35], la cual nos dará información de la dinámica asociada al fenómeno en estudio.

## 1.4 Análisis con Técnicas de Dinámica No-Lineal

Para entender la dinámica neuronal subyacente, en la última década se ha puesto mucho esfuerzo en estudiar los comportamientos dinámicos asociados a los ritmos presentes en el registro EEG, empleando en particular técnicas métricas de la dinámica no-lineal. Los sistemas no-lineales en general y los caóticos en particular pueden exhibir un comportamiento complejo, aparentemente aleatorio y sin embargo esconder un orden subyacente.

Una señal típica de EEG se parece a una serie temporal estocástica con contribuciones a lo largo de todo el espectro que aparecen con fases al azar. Estas señales aperiódicas cambian en el transcurso del día y en el sueño. La dinámica no-lineal reinterpreta las series temporales como un objeto geométrico multidimensional generado por un proceso dinámico determinístico que no necesariamente es una superposición de oscilaciones periódicas. Si las dinámicas son reducibles a leyes determinísticas, el retrato de fases del sistema converge hacia un subconjunto acotado del espacio de fases. Este subconjunto invariante es el atractor. Luego, las trayectorias en el espacio de fases reconstruidas a partir de los datos pueden ser confinadas de manera de delimitar dicho atractor.

Meyer-Kress y Layne [36] utilizaron la técnica de reconstrucción en las series temporales de EEG para obtener los retratos de fases de las mismas. Dichos retratos sugieren atractores caóticos (atractores que presentan sensibilidad a la variación de las condiciones iniciales) con trayectorias divergentes, y por lo tanto, las series temporales EEG parecen ser “no estacionarias”. Esto significa que las características promedio de la serie temporal definida sobre algún intervalo cambia para otro. A partir de estos resultados Layne y sus colaboradores concluyen que las series EEG son no estacionarias y de alta dimensionalidad, en cuyo caso los conceptos de “atractor” y de “dimensión fractal” no serían aplicables, debido a que éstas son propiedades asintóticas o estacionarias de un sistema dinámico. Babloyantz y Destexhe [37] puntualizan el hecho de que esta no estacionariedad es estrictamente cierta para estados de vigilia y que puede encontrarse en registros EEG de personas dormidas y de pacientes con ciertas patologías. Estos autores [10] usaron una serie EEG de un paciente bajo un ataque epiléptico del tipo “petit mal” para demostrar el cambio drástico en el atractor caótico neuronal usando la técnica de reconstrucción del espacio de fases.

Por otro lado, Grassberger y Procaccia [38, 39] desarrollaron una técnica que permite discernir, entre varias elecciones, el tipo de atractor sobre el cual existe la dinámica. Para un conjunto de datos esta metodología se basa en la caracterización del mismo por medio de la dimensión de correlación o dimensión. Mayer-Kress y Layne [36] introducen el término *dimensionalidad* o parámetro de complejidad para enfatizar la precaución en la aplicación de la técnica anteriormente mencionada al caso de los datos EEG. Estos autores encuentran que el error en la dimensión es del mismo orden que la dimensión misma, y dicho efecto parece incrementarse con la “dimensión de embedding”. Por otro lado, Babloyantz y Destexhe [37] observaron alta dimensión en series EEG para pacientes despiertos u otros en sueño REM y cuestionan el hecho de que la variación en la dimensión, dada por el método de Grassberger-Procaccia, pueda tener algún sentido para estos grandes valores.

Los resultados mencionados precedentemente llevan al replanteo de la idea de utilizar la dimensión de correlación de Grassberger-Procaccia para caracterizar las series temporales EEG. Sin embargo, la elección del algoritmo determina el error intrínseco asociado al cálculo de la dimensión de correlación. El pesimismo manifestado por Mayer-Kress y Layne en cuanto a la utilización de este cuantificador no es compartido por un vasto espectro de la comunidad de especialistas en dinámica no-lineal, pero sus reservas han servido para estimular un número de alternativas y algoritmos más eficientes para evaluar esta dimensión.

Más allá de todo cuestionamiento, los resultados del procesamiento de los datos sugieren fuertemente la existencia de atractores caóticos determinantes de la dinámica de la actividad cerebral subyacente observada en las señales EEG. Esta interpretación de los datos está validada por la existencia de modelos matemáticos que pueden reproducir el comportamiento observado. Un ejemplo de esto es el modelo desarrollado por Freeman [40] para describir la dinámica del sistema olfatorio y el rol que tendría el caos en el proceso de aprendizaje y reconocimiento de los diferentes olores. El mismo autor [41] indujo una forma de ataque epiléptico en la corteza prepiriforme de gatos, ratas y conejos. Estos ataques se asemejan bastante a variaciones psicomotoras o “petit mal” en humanos. Su modelo dinámico le permitió proponer un mecanismo neuronal para los ataques y estudiar la estructura del atractor caótico en la transición entre un estado normal y un estado de crisis. Dicha transición es una consecuencia directa de la naturaleza determinista de la actividad cerebral, que distingue la actividad normal de la observada durante un ataque de epilepsia por un cambio abrupto en la dimensionalidad del atractor.

Recientemente, uno de los resultados más concluyentes que se han obtenido está relacionado con el grado relativo del orden en la actividad eléctrica de la corteza cerebral humana en pacientes epilépticos, personas normales ocupadas en varias actividades y durante el sueño. Más aún, varios grupos de investigación proponen la utilización de cuantificadores basados en técnicas métricas de dinámica no-lineal, para la identificación de precursores de crisis epilépticas, que podrían de esta forma ser prevenidas.

## 1.5 Objetivos y Organización de la Tesis

Una cuantificación sistemática del EEG no fue llevada a cabo hasta que, muy recientemente, la incorporación de las computadoras permitió instrumentar metodologías complejas, tendientes a eliminar los aspectos subjetivos del observador. En los últimos años este recurso metodológico ha permitido obtener datos objetivos para la evaluación de las funciones cognitivas en individuos normales y con ciertas patologías. Es así como, en la actualidad, la interpretación de las señales bioeléctricas por métodos cuantitativos se aplica con significativas ventajas sobre el EEG convencional. Estos métodos son utilizados no sólo para propósitos de investigación, sino también en la práctica clínica, en una variedad de cuadros neurológicos y psiquiátricos, así como en algunos aspectos relacionados con la evaluación de fármacos.

En el presente trabajo se aplicarán dos técnicas diferentes para el estudio cuantitativo de las señales EEG. Por un lado, se aplicarán las técnicas métricas de la dinámica no-lineal y por el otro, el análisis tiempo-frecuencia basado en la transformada wavelet. Se compararán la evolución de dos cuantificadores: la *Caoticidad* (parámetro definido de igual modo que el máximo exponente de Lyapunov, sin tener en cuenta el requisito de estacionariedad de la serie) en función del tiempo y la *Entropía Wavelet Total* para señales EEG de pacientes epilépticos. Se analizarán las dos técnicas y se evaluarán sus ventajas y desventajas tanto en su implementación como en su interpretación, para el caso de señales EEG provenientes de electrodos profundos y de superficie. El objetivo de esta comparación es elegir la técnica más adecuada para la detección automática de cambios en la dinámica de la señal.

En los capítulos 2 y 3 se describen las bases matemáticas de ambas técnicas, mientras que en el capítulo 4 se realiza la aplicación de las mismas a las series EEG estudiadas. En el capítulo 5 finalmente se desarrollan las conclusiones y se detallan las posibles aplicaciones de la técnica elegida. Las figuras han sido colocadas a continuación del correspondiente capítulo; mientras que las referencias se listan al final del trabajo.

# Capítulo 2

## Sistemas Dinámicos No-Lineales

### 2.1 Introducción

Las primeras investigaciones matemáticas acerca de los fenómenos no lineales pueden encontrarse ya en 1890, cuando Henri Poincaré estudió la estabilidad del sistema solar. Él se preguntó acerca del movimiento de los planetas en sus órbitas y la posibilidad de desviarse de las mismas e incluso chocar con el sol. Poincaré no encontró respuesta a sus preguntas pero creó un nuevo método analítico, la geometría de la dinámica cuyas ideas más desarrolladas son el objeto en la actualidad de la llamada topología.

Otros investigadores siguieron a Poincaré en estos primeros pasos. El matemático Andrey Kolmogorov realizó avances básicos con respecto a las características de irregularidad de la dinámica no-lineal. Por los años 60, el matemático americano Stephen Smale ya había formulado una clasificación de todos los comportamientos dinámicos típicos. El caos como ejemplo de dinámica no-lineal tomó así lugar como un fenómeno natural, completamente a la par con los ciclos periódicos de comportamiento regular. Ya en 1952 Huxley y Hodgkin [42], habían relacionado la dinámica de membranas celulares excitables con un sistema de ecuaciones diferenciales no-lineales. A continuación siguieron las aplicaciones prácticas del concepto de caos como fenómeno natural. Los matemáticos europeos David Ruelle y Floris Takens, sugirieron en 1970, que el flujo turbulento podría ser un ejemplo de la dinámica del caos. Paralelamente, el caos comenzó a ganar la atención en las ciencias. Científicos experimentales como los físicos americanos Harry Swinney y Jerry Golub y el francés Albert Libchaber, mostraron que Ruelle y Takens estaban parcialmente en lo cierto. El caos ocurre en flujos turbulentos pero no precisamente del modo sugerido por ellos.

Si definimos un proceso o sistema lineal como aquel cuya respuesta a un estímulo es proporcional al mismo, todo comportamiento que se aparte de éste definirá entonces a un sistema no-lineal. La linealidad con sus características asociadas (unicidad de las soluciones, principio de superposición, etc.) es la excepción más que la regla en los sistemas naturales. Si bien éstos pueden estudiarse en la aproximación lineal, esta forma de análisis no permite ahondar en los efectos más complejos que caracterizan a los sistemas naturales.

Por otra parte, la principal máxima de la ciencia es su habilidad para relacionar causa y efecto. Sobre la base de las leyes de la gravitación, por ejemplo, eventos astronómicos tales como los eclipses y la aparición de cometas se pueden predecir con una anticipación de miles de años. Otros fenómenos naturales, sin embargo, parecen mucho más difíciles de predecir. Si bien los movimientos de la atmósfera, por ejemplo, obedecen a leyes de la física del mismo modo que en el caso del movimiento de los planetas, la predicción del clima es aún problemática. Los científicos pueden predecir las mareas en meses y hasta años y sin embargo los pronósticos meteorológicos resultan erróneos en el orden de pocos días y a veces de horas. Los dos sistemas en cuestión son totalmente diferentes, si bien se trata en ambos casos de sistemas complejos. En realidad las mareas se perciben como mucho más simples a pesar de que dependen de muchas variables, porque se pueden predecir fácilmente. Es decir, las mareas son un fenómeno de orden, mientras que el clima no lo es, sus variables interactúan de una manera irregular y no predecible. En otras palabras el clima es un fenómeno caótico no-lineal.

Resulta una aparente paradoja que el caos sea determinístico. En principio, el futuro está completamente determinado por el pasado, pero en la práctica pequeñas incertezas, errores de medición incluidos en los cálculos, son amplificados de tal modo que si bien el comportamiento del sistema es predecible a corto plazo es impredecible después de un cierto tiempo. Alrededor de 1960, Ed Lorenz [43] descubrió este comportamiento en los modelos utilizados para pronósticos numéricos del clima y fue el primero en describir el fenómeno utilizando la expresión "efecto mariposa". Su descripción del caos determinístico es la siguiente: el caos ocurre cuando la propagación del error, visto como una señal en un proceso temporal, crece en la misma proporción o escala que la señal original. Las leyes de la naturaleza y en este sentido el determinismo, no excluyen el caos. En otras palabras, el determinismo y la predictibilidad no son equivalentes.

Resultan sorprendentes los descubrimientos recientes de comportamiento caótico en sistemas mucho más simples que el clima como el iterador cuadrático,

$$x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n).$$

Más aún, caos y orden (principio de causalidad) pueden ser observados en yuxtaposición en el mismo sistema. Tanto el desorden como el orden pueden estar presentes en los comportamientos no-lineales. Incluso en los sistemas dinámicos más complejos pueden coexistir ambos comportamientos alternándose uno y otro a través de cambios abruptos llamados bifurcaciones. La reacción Belousov-Zhabotinsky constituye el ejemplo más difundido en las reacciones químicas, donde estos cambios abruptos aparecen a través de diferencias en la coloración debido a cambios en la concentración de los reactivos.

Los sistemas no-lineales en general y los caóticos en particular pueden presentar un comportamiento complejo aparentemente aleatorio, que sin embargo guardan un orden subyacente. Puede haber una progresión lineal de los errores que caracterizan a un sistema determinístico el cual es gobernado por el principio de causalidad, mientras que en el mismo sistema puede haber una progresión exponencial de errores (efecto mariposa), indicando que el principio de causalidad se quebrantó. En otras palabras, una de las

lecciones que surgen de la teoría del caos es que la validez del principio de causalidad está limitada por el principio de incerteza en un extremo y la inestabilidad intrínseca de las propiedades de las leyes naturales subyacentes en otro [44].

En este sentido, la necesidad de extraer información física interesante acerca de la dinámica de los sistemas físicos observados, cuando éstos están operando en un régimen caótico, ha sido la motivación para que los físicos desarrollaran nuevas herramientas de análisis. El salto en el desarrollo de esas herramientas en los años 80 y 90 y el reconocimiento de dicha necesidad establecida por Poincaré y otros, 80 años antes, quizás se deba a la ausencia de un adecuado desarrollo computacional para analizar la dinámica no-lineal subyacente en los sistemas caóticos.

El caos comprende una clase de señales intermedias entre el movimiento sinusoidal regular o cuasi periódico y el comportamiento estocástico impredecible. En el pasado se las interpretó como una forma de “ruido” ya que las herramientas de análisis utilizadas fueron las de los procesos lineales. El análisis de Fourier fue la principal de tales herramientas, la cual precisamente extrae de la serie temporal observada  $S(t)$  su composición en senos y cosenos. En realidad para un analista que aplica Fourier el caos es algo más que ruido. Es decir, resulta espectralmente un continuo de banda-ancha pero con varios picos a frecuencias determinadas, que implican una determinada estructura en el espacio de las fases. Esto significa que hay numerosas aplicaciones potenciales en ingeniería para aquellas fuentes de series temporales caóticas, las cuales pueden tomar ventajas de esta estructura para predecir y controlar dichas fuentes. Una serie temporal ruidosa será aquella que responde a un comportamiento aleatorio (estocástico), mientras que una serie caótica será la que responde a un sistema determinístico no lineal.

Mucho del caos como ciencia está conectado con la noción de sensible dependencia sobre las condiciones iniciales. Técnicamente, términos científicos como “caótico” definen aquellos movimientos complicados no-aleatorios que exhiben un rápido crecimiento de los errores que, más allá del determinismo perfecto, inhibe toda habilidad para realizar predicciones precisas a largo término. Sensibilidad o sensible dependencia sobre las condiciones iniciales implica que todo intervalo de valores iniciales arbitrariamente pequeño será magnificado por el proceso de iteración o evolución temporal.

Las otras dos características inherentes a la dinámica del caos son la propiedad de “mixing” y la presencia de puntos periódicos densos. Mixing informalmente se podría definir como la posibilidad de ir desde cualquier lugar a todo lugar. Dicho de otro modo, para dos intervalos abiertos cualesquiera  $\mathcal{I}$  y  $\mathcal{J}$  (los cuales pueden ser arbitrariamente pequeños, pero de longitud diferente de cero) se pueden encontrar valores iniciales en  $\mathcal{I}$  que cuando son iterados llevarán eventualmente a puntos pertenecientes al intervalo  $\mathcal{J}$ . Por otra parte, si comenzamos a iterar el sistema en un punto periódico solo serán recorridos algunos intervalos y a su vez en forma reiterada. Teóricamente se pueden encontrar infinidad de puntos de este tipo en cada intervalo. Más allá de las propiedades de sensibilidad y mixing, la existencia de puntos periódicos densos en todo subintervalo dado se ve como una condición necesaria para el caos.

Podemos decir entonces que el caos ocurre como una característica de las órbitas que surgen de reglas de evolución no-lineal, las cuales son sistemas de ecuaciones diferenciales con tres o más grados de libertad (sistemas continuos) o mapas temporales discretos invertibles (sistemas discretos) con dos o más grados de libertad. El requerimiento de un tamaño mínimo del espacio de las fases para la ocurrencia de caos es geométrico. Para ecuaciones diferenciales en el plano es bien conocido que a largo plazo solo los puntos fijos (soluciones temporalmente independientes) o ciclos límites (órbitas periódicas) son posibles. Como una clase de señal  $S(t)$  observable, el caos yace lógicamente entre: *i*) el bien estudiado dominio de las señales predictibles, regulares o cuasi-periódicas y *ii*) las señales totalmente irregulares estocásticas conocidas como “ruido”, las cuales son completamente impredecibles. Es decir, el caos es irregular en el tiempo y apenas predecible y la existencia de caos en un sistema significa que a medida que el tiempo avanza, un pequeño error aleatorio crece rápidamente (exponencialmente) y puede alterar completamente la solución.

## 2.2 Sistemas Dinámicos

Un sistema dinámico se puede pensar como un conjunto de ecuaciones que dan la evolución temporal del estado de un sistema a partir del conocimiento de su historia previa. Las ecuaciones apropiadas para describir un dado problema pueden plantearse a partir del conocimiento preciso acerca de todos los elementos que componen el sistema en estudio y el tipo de interacciones existentes entre estos elementos.

En lenguaje matemático, un sistema dinámico será descrito por un sistema de  $k$ -ecuaciones diferenciales ordinarias independientes de primer orden de la forma:

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) , \quad (2.1)$$

donde  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t), x_2(t), \dots, x_k(t))$  es el vector estado que caracteriza completamente el sistema al tiempo  $t$ ;  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (F_1(\mathbf{x}), F_2(\mathbf{x}), \dots, F_k(\mathbf{x}))$  es el campo vectorial que a cada  $d\mathbf{x}_i(t)/dt$  le hace corresponder una función  $F_i(\mathbf{x}(t))$ . Bajo condiciones generales sobre la forma de las ecuaciones se mantienen las propiedades de existencia y unicidad de las soluciones. Luego la ecuación (2.1) representa un sistema dinámico, ya que dado un estado inicial  $\mathbf{x}(0)$  podemos en principio resolver las ecuaciones (2.1) para determinar en forma unívoca la trayectoria  $\mathbf{x}(t)$  para todo tiempo posterior. En este caso la variable temporal es continua, sin embargo la dinámica de un sistema puede expresarse también a través de una variable temporal discreta.

En el caso discreto la evolución estará definida por una ecuación iterativa o mapa. Es decir, por una ecuación de la forma:

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{G}(\mathbf{x}_n) , \quad (2.2)$$

donde  $n$  es entero y es la variable temporal discreta. Nuevamente  $\mathbf{x}_n$  es el vector estado de dimensión  $k$  y  $\mathbf{G}(\mathbf{x})$  el campo vectorial  $k$ -dimensional que mapea al estado  $\mathbf{x}_n$  hacia

el próximo estado  $\mathbf{x}_{n+1}$ . Cuando se conocen condiciones iniciales apropiadas y las ecuaciones se pueden resolver (ya sea analítica o numéricamente), las soluciones describirán el comportamiento del sistema en función del tiempo.

También es posible conocer el comportamiento global de un sistema trazando la evolución de su vector estado  $\mathbf{x}(t)$  en un espacio  $k$ -dimensional, el llamado espacio de estados o espacio de fases. En el caso continuo la evolución temporal del sistema estará representada por una curva en este espacio de fases denominada trayectoria  $J_t(\mathbf{x})$  mientras que en el caso discreto se obtiene una secuencia de puntos que usualmente se denomina órbita  $j_n(\mathbf{x})$ .

## 2.3 Atractores

Teniendo en cuenta que el espacio de las fases define todos los estados posibles del sistema dinámico en estudio, cada estado del mismo puede ser completamente representado por un punto en este espacio. Los sistemas dinámicos en los que estamos interesados en el presente trabajo, son sistemas no conservativos que pueden presentar comportamiento caótico. Estos sistemas cuando evolucionan con el tiempo no preservan sus volúmenes en el espacio de las fases, es decir no cumplen con el teorema de Liouville [45]. En particular la presencia de caos indica que los volúmenes se contraen al menos en algunas direcciones del espacio de las fases. Estos sistemas disipativos que presentan contracción están comúnmente caracterizados por la presencia de *atractores*.

En particular si se considera una región apropiada del espacio de las fases, sucederá que si se toman condiciones iniciales en esa región, ellas evolucionarán de manera que sus órbitas convergerán hacia una región acotada del espacio de fases llamada atractor. El conjunto de condiciones iniciales que converge hacia un atractor particular se denomina cuenca de atracción para el atractor dado y es utilizado para visualizar el mismo. Se puede entonces pensar al atractor como el conjunto de las órbitas (o trayectorias) que representan el comportamiento del sistema en estado estacionario, es decir, el comportamiento asintótico del sistema a medida que  $t \rightarrow \infty$ , y a la cuenca de atracción como el conjunto de condiciones iniciales cuya órbita evolutiva cae hacia el atractor.

Sin embargo existen limitaciones a tales representaciones del sistema. Las trayectorias no deben auto-intersectarse y las diferentes trayectorias originadas en diferentes condiciones iniciales no deben superponerse u ocupar el mismo espacio. De lo expuesto surge que un punto en el espacio de las fases que representa el estado del sistema reúne toda la información acerca del mismo, incluyendo su historia pasada y futura a la vez, la cual es única en un sistema determinístico. Por otra parte, es posible que un problema no-lineal sea multiestable, es decir, que presente varias soluciones en coexistencia. En ese caso es posible también la coexistencia de varios atractores en el espacio de fases, cada uno con su cuenca de atracción asociada [46, 47, 48].

En la práctica, para obtener una idea gráfica del atractor asociado a un sistema no-

lineal del cual se conocen sus ecuaciones, es suficiente elegir al azar una sola condición inicial de la cuenca de atracción y computar su órbita subsecuente; después de suficientes iteraciones la órbita nos mostrará la forma del atractor. Eligiendo de la cuenca de atracción una condición inicial diferente no cambiará el resultado final, siempre que se ignoren los primeros puntos (es decir, el transitorio), los cuales son necesarios para llevar a la órbita suficientemente cerca del atractor. Ejemplos de atractores son: los puntos fijos (equilibrio), Fig. 2.1; ciclos límites (comportamiento periódico), Fig. 2.2;  $K$ -toros (comportamiento cuasiperiódico, con  $K$  frecuencias), Fig. 2.3; y atractores extraños, Fig. 2.4. El punto, la curva cerrada, el  $K$ -toro son conjuntos de dimensiones enteras (0, 1 y  $K$  respectivamente), en muchos otros casos el conjunto de atracción tiene dimensión no entera y se denominan fractales, los cuales de ser atractores se denominan extraños. La existencia de un atractor extraño fue mostrada por primera vez en el ámbito de la física por Lorentz en 1963 [43].

## 2.4 Atractores Extraños Caóticos

Recordando la definición de sistema dinámico determinístico como aquel perfectamente predecible a partir del conocimiento preciso de sus condiciones iniciales, debemos ahondar en el concepto de predictibilidad y diferenciar su alcance a corto y largo plazo. Es claro que si se conocen las ecuaciones que gobiernan la evolución del sistema, en principio estas pueden ser resueltas para predecir el comportamiento futuro del mismo. Pero cuando estas ecuaciones no se conocen y se sospecha que el sistema en estudio es determinístico, para hacer predicciones es necesario descubrir la relación entre pasado y futuro a partir de los valores de las series temporales medidas sobre el sistema. Existen métodos matemáticos que permiten hacer predicciones a corto plazo usando información basada solamente en valores pasados. En la práctica entonces, un sistema determinístico siempre es predecible a corto plazo, pero que también lo sea a largo plazo dependerá de la sensibilidad del sistema a una pequeña variación en las condiciones iniciales.

Se puede decir que el movimiento sobre un atractor es caótico si este presenta una sensible dependencia en las condiciones iniciales. Supongamos tener una órbita del atractor cuya condición inicial es  $\mathbf{x}(0)$ . Desplacemos la condición inicial por una distancia infinitesimal  $\delta\mathbf{x}(0)$  tal que  $\mathbf{x}'(0) = \mathbf{x}(0) + \delta\mathbf{x}(0)$  y examinemos las trayectorias (u órbitas) generadas por una y otra condición inicial. Si se observa que el desplazamiento inicial entre las dos órbitas  $\delta\mathbf{x}(0)$  crece con el tiempo en forma exponencial diremos que el atractor en estudio es caótico. A esta propiedad de los atractores caóticos se la define como sensible dependencia sobre las condiciones iniciales.

Más aún, en la práctica la condición inicial del sistema nunca puede ser especificada exactamente. Si las condiciones iniciales difieren una de otra en una cantidad menor que  $\delta\mathbf{x}(0)$  las trayectorias (u órbitas) serán indistinguibles. Sin embargo, transcurrido el tiempo divergen y se vuelven no correlacionadas. Es decir, no importa con que precisión se conozcan las condiciones iniciales, el comportamiento a largo plazo de un sistema caótico no podrá ser predicho. Esta característica es lo que se conoce como sensibilidad

a las condiciones iniciales. Más precisamente, la existencia de caos implica que hay una orientación de  $\delta\mathbf{x}(0)$  tal que:

$$\Lambda \equiv \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{\|\delta\mathbf{x}(t)\|}{\|\delta\mathbf{x}(0)\|} > 0. \quad (2.3)$$

La cantidad  $\Lambda$  se denomina exponente de Lyapunov.

Como consecuencia de la impredictibilidad a largo plazo, las series temporales provenientes de sistemas caóticos aparecen irregulares y desordenadas. Sin embargo, el caos definitivamente no es (aunque así lo sugiera su nombre) un completo desorden: es desorden en un sistema dinámico determinístico, el cual siempre es predecible a corto plazo. El exponente de Lyapunov antes definido representa la velocidad con que se apartan dos trayectorias (u órbitas), originadas en condiciones iniciales cercanas en la cuenca de atracción. De esta manera el exponente de Lyapunov describe el grado de caoticidad del atractor.

La extrañeza del atractor está relacionada con su dimensión no entera y con su estructura autosimilar. Se dice que una estructura es autosimilar si puede ser descompuesta en partes arbitrariamente pequeñas, cada una de las cuales es réplica de la estructura total. Cada una de estas pequeñas partes se deben obtener aplicando a la estructura original transformaciones de similaridad. Podemos visualizar estas transformaciones viendo el resultado de obtener reducciones sucesivas en una fotocopidora, con un factor de escala dado. Los factores de escala ( $x$ ) y las longitudes ( $y$ ) involucradas deben estar relacionadas por una ley de potencia de la forma:

$$y = C \cdot x^D, \quad (2.4)$$

donde  $D$  es alguna dimensión de la estructura. Mientras que en cualquier estructura autosimilar el factor de escala  $C$  puede ser arbitrario, una estructura será fractal solo si  $x$  toma ciertos valores característicos, trayendo como consecuencia que las dimensiones  $D$  sean no enteras.

Resumiendo, los sistemas dinámicos caóticos responden a un sistema de ecuaciones no lineales fuertemente sensibles a las condiciones iniciales. Generan series temporales irregulares semejantes a las de un sistema estocástico, pero se diferencian de éstos justamente por responder a un proceso determinístico, que es siempre predecible al menos a corto plazo. Por otro lado, el diagrama de fases de los sistemas caóticos disipativos presenta, generalmente, atractores del tipo extraño y caótico, es decir, de dimensión no entera y estructura autosimilar.

## 2.5 Exponentes de Lyapunov

Dos de las propiedades distintivas de los atractores son, el hecho de que un atractor atrae hacia sí a las trayectorias (u órbitas) que se originaron a partir de condiciones

iniciales correspondientes a la cuenca de atracción y la divergencia de las trayectorias (u órbitas) que pasan por puntos cercanos, debido a la sensibilidad a las condiciones iniciales. Una medida de la atracción y repulsión local esta dada por los llamados exponentes de Lyapunov. Los atractores tienen una cantidad de exponentes de Lyapunov igual al número de grados de libertad del sistema, es decir uno por cada dirección en el espacio de las fases. En particular, la divergencia de dos trayectorias (u órbitas) cercanas puede ser caracterizada, en valor medio, por el mayor exponente de Lyapunov, que notaremos con  $\lambda_1$  o equivalentemente por  $\Lambda_{max}$  [49].

En general se define un atractor caótico por la condición de que exista divergencia neta al menos en una dirección en el espacio de las fases. Es decir la condición:

$$\lambda_1 > 0, \quad (2.5)$$

formaliza la noción de sensible dependencia sobre las condiciones iniciales. En general, los  $\lambda_i$ , con  $i > 2$  para atractores caóticos pueden ser positivos o negativos. Si:

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_j > 0 > \lambda_{j+1} > \lambda_{j+2} > \dots > \lambda_k; \quad (2.6)$$

existen  $j$  direcciones de estiramiento y  $k - j$  direcciones de contracción del sistema.

Considerando una pequeña esfera  $n$ -dimensional de condiciones iniciales, a medida que el tiempo transcurre, ésta evoluciona hacia un elipsoide cuyos ejes principales se expanden (o se contraen) a velocidades caracterizadas por los exponentes de Lyapunov. La razón entre la longitud de estos ejes respecto de su longitud inicial será proporcional a  $e^{\lambda_i t}$ . Así  $\lambda_1$  corresponde al eje que más rápido se expande y  $\lambda_k$  al que más rápidamente se contrae.

Un exponente de Lyapunov positivo da cuenta acerca de la inestabilidad local del sistema en una dirección particular, y es suficiente para determinar la presencia de caos. Para establecer la existencia de un atractor, la dinámica del sistema debe ser globalmente disipativa. Por lo tanto, aún cuando puedan existir varios exponentes de Lyapunov positivos, la suma sobre todo el espectro de exponentes deber ser negativa, es decir:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i < 0. \quad (2.7)$$

La suma de todos los exponentes da cuenta del cambio medio que sufre un elemento de volumen en su evolución dentro del atractor. Todo atractor necesariamente posee al menos un exponente negativo, el cual implica contracción en la dirección dada. Los exponentes nulos hablan de errores que se preservan en la dirección dada y en general estas direcciones son las tangentes a las trayectorias. Pero la aparición de al menos un exponente positivo implica divergencia de trayectorias (u órbitas) cercanas (en determinada dirección) y puede tomarse como un definición formal de un atractor caótico. El grado de caoticidad del atractor es medido y expresado por los exponentes de Lyapunov mayores que cero, los cuales implican expansión en el espacio de fases a lo largo de

ciertas direcciones. Sin embargo, en general la divergencia de dos trayectorias u órbitas cercanas se medirá solo con el mayor exponente de Lyapunov.

Ejemplificaremos lo anteriormente descrito mediante el sistema dinámico conocido como “sistema de Lorenz”. Las ecuaciones que definen el sistema dinámico, estudiado por primera vez por Lorenz [43] son:

$$\begin{aligned}\frac{dX}{dt} &= \sigma \cdot (Y - X) \\ \frac{dY}{dt} &= X \cdot (R - Z) - Y \\ \frac{dZ}{dt} &= X \cdot Y - b \cdot Z ,\end{aligned}\tag{2.8}$$

donde  $\sigma$ ,  $R$  y  $b$  son parámetros del sistema. En la figura 2.4 se representa el atractor obtenido para este sistema dinámico, y para valores de los parámetros  $\sigma = 16.0$ ,  $R = 45.92$  y  $b = 4.0$ , dado por la unión de los puntos  $(X, Y, Z)$  que definen una trayectoria ( $N = 20000$ ). Este atractor se ha obtenido integrando el sistema de ecuaciones (2.8), con un Runge-Kutta de cuarto orden y paso ajustable, siendo el paso de integración de  $\tau_s = 0.01$ . Se parte de una condición inicial arbitraria y los primeros 5000 puntos se descartan, por considerar que corresponden al transitorio.

Para el atractor de Lorenz, el espectro de exponentes de Lyapunov es:  $\lambda_1 = 2.16$ ,  $\lambda_2 = 0$  y  $\lambda_3 = -32.4$  [50]. Notemos que los signos de los 3 exponentes de Lyapunov son  $(+, 0, -)$ , tal que  $|\lambda_3| > |\lambda_1|$  a fin de cumplir con la condición (2.7).

A modo de resumen podemos decir que:

- Hay tantos exponentes de Lyapunov como dimensiones tenga el sistema en el espacio de representación.
- Los exponentes son independientes de la elección de coordenadas.
- La suma de todos los exponentes caracteriza qué tan rápido cambia el volumen generalizado.
- En un sistema disipativo la suma siempre es negativa.
- Un atractor es caótico si tiene al menos un exponente de Lyapunov positivo.
- Las propiedades dinámicas de las trayectorias (u órbitas) de un atractor están dadas por su grado de caoticidad expresadas a través del mayor exponente de Lyapunov.

## 2.6 Dimensiones Generalizadas

La dimensión por otra parte, da una medida estadística de la geometría de la nube de puntos en el atractor, y está relacionada además con el número de variables independientes necesarias para especificar el estado del sistema. Cuanto más elevada sea la dimensión, más complejo será el sistema. En este sentido, la dimensión da una medida de la extrañeza del atractor.

En el caso de puntos fijos y ciclos límites es fácil establecer su dimensión. El primero corresponde a un estado estacionario representado por un solo punto en el espacio de las fases, con lo cual su dimensión es cero. El segundo está representado por una curva cerrada y tiene dimensión uno. En los atractores extraños no resulta tan trivial la determinación de su dimensión, ya que dejan de ser objetos euclídeos en el sentido que su dimensión es no entera. Esta propiedad no solo se puede observar en los atractores sino también en otros conjuntos matemáticos que no responden a un tratamiento matemático euclídeo de su dimensión (conjunto de Cantor, curva de Koch, etc.). Mandelbrot [51] fue quien por primera vez llamó fractales a los conjuntos de dimensión no entera. Mientras que en el contexto de la dinámica no lineal los atractores con propiedades fractales reciben el nombre de atractores extraños (nombre introducido por Ruelle y Takens en 1971 [52]).

Rényi [53] fue quien introdujo todo un espectro de dimensiones para caracterizar las distintas estructuras geométricas, llamadas dimensiones generalizadas  $D_q$  dependientes del índice continuo  $q$ :

$$D_q = \frac{1}{q-1} \cdot \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(\sum_i p_i^q)}{\ln(\epsilon)} \right] \quad \text{si } q \neq 1, \quad (2.9)$$

$$D_1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \frac{\ln(\sum_i p_i)}{\ln(\epsilon)} \right] \quad \text{si } q = 1. \quad (2.10)$$

Se supone al atractor (sumergido en un espacio de dimensión  $E$ ) cubierto por cubos de dimensión  $E$  y lado  $\epsilon$ , mientras que  $p_i$  es la medida de la proporción de atractor en el cubo  $i$ , sumándose sobre todos los cubos ocupados.

Si bien  $D_q$  está definida para todo  $q$  real, en la práctica solo se utilizan las siguientes:  $D_0$ , *dimensión de capacidad (o estadística)*;  $D_1$ , *dimensión de información*;  $D_2$ , *dimensión de correlación*. Una propiedad de las  $D_q$  es que generalmente decrecen con  $q$ , siendo  $D_2$  la más fácil de calcular y por lo tanto la más utilizada. Grassberger y Procaccia [38, 39] introdujeron el cálculo de una dimensión de correlación  $D_c$  mostrando que es equivalente al cálculo de  $D_2$  pero mucho más simple. Por esta razón la  $D_c$  es la que típicamente se calcula para caracterizar a los atractores.

## 2.7 Series Temporales

Al abordar el estudio teórico de los procesos naturales de los que en general se desconocen las reglas que los gobiernan, se cuenta solo con un número limitado de mediciones (serie temporal) de una cantidad escalar observada, con los artificios y errores de medición asociados correspondientes. Esta serie temporal es función del estado del sistema y en principio se podría extraer toda la información necesaria para determinar la dinámica subyacente.

En el caso de sistemas dinámicos que responden a un comportamiento lineal, la serie se caracteriza por un número finito de frecuencias propias que dan una idea de los grados de libertad del sistema. Como ya hemos descrito anteriormente los sistemas caóticos se caracterizan por presentar un espectro de frecuencias de banda ancha, continuo y sin picos definidos, similar en este sentido al de una serie estocástica. Esta característica hizo difícil la distinción entre una señal estocástica y una caótica. Esta incapacidad para el análisis promovió el desarrollo de nuevas técnicas para describir la evolución dinámica de los sistemas no lineales y poder así caracterizar la evolución temporal de sus trayectorias (u órbitas). Se puede demostrar que, a partir de la medición de la evolución temporal de una única variable se puede acceder a la evolución de todas las variables necesarias para describir la dinámica del sistema en estudio. Es posible reconstruir el atractor del sistema dinámico bajo análisis a partir de la señal unidimensional registrada. Utilizando esta metodología (reconstrucción del atractor) es posible caracterizar al atractor a través del cálculo de dimensiones y de exponentes de Lyapunov, entre otros parámetros.

El análisis de una serie temporal por medio de las técnicas métricas de la dinámica no-lineal requiere que la serie sea estacionaria, ya que de otra manera no tendría sentido evaluar parámetros que la caractericen si la dinámica asociada con la señal estuviese cambiando con el tiempo. Es decir, se requiere que la serie temporal sea representativa de un único atractor y además que éste sea estable en el tiempo. Entendemos por estacionaria a una serie cuyas propiedades estadísticas se mantienen invariantes en el tiempo. En los procesos naturales y en particular en el caso de series biomédicas y fisiológicas, las series temporales que los describen distan de ser estacionarias. Habitualmente se soslaya este inconveniente flexibilizando el requerimiento de estacionariedad de la serie dada. Por ejemplo, se divide la serie en subintervalos convenientes que puedan ser considerados estacionarios o cuasi-estacionarios, aplicando criterios menos restrictivos.

## 2.8 Estacionariedad

Si la distribución de probabilidad asociada con la serie  $S(t)$  dada de mediciones es normal o gaussiana, se la puede caracterizar completamente por su media  $m$  y su varianza  $\sigma^2$ . Si se tiene entonces una distribución normal multivariada, la existencia de una media y varianza fija es suficiente para asegurar la estacionariedad del proceso gaussiano.

Llamaremos entonces estacionariedad débil de orden  $n$  al requerimiento que permita considerar a la serie o parte de ella como cuasi-estacionaria si los momentos hasta el orden  $n$  se mantienen suficientemente constantes en el tiempo. Se puede probar que si se cumple la estacionariedad a orden 2 y además la serie muestra una distribución de probabilidad gaussiana entonces la estacionariedad completa está asegurada [54].

Se describe a continuación un procedimiento basado en este criterio de estacionariedad débil, para determinar si una serie temporal o porciones de la misma, pueden considerarse como estacionarias [55]:

1. Se divide la serie total en segmentos de tamaño fijo (“bins”), lo suficientemente grandes como para poder realizar en cada uno cálculos estadísticos confiables.
2. En cada segmento se evalúa la media y la varianza.
3. Luego se buscan los segmentos consecutivos en los que estas cantidades no varíen en forma significativa. Cada conjunto de segmentos define un intervalo. Cuantitativamente, se pide que en cada segmento, las fluctuaciones en el parámetro  $P$ , donde  $P$  representa a la media  $m$  o a la varianza  $\sigma^2$ , sea tal que  $|\delta P| \leq \sigma_P^2$ , donde  $\sigma_P^2$  es la varianza del parámetro  $P$  en el intervalo estudiado.
4. Para cada intervalo que cumpla con los puntos anteriores se construye el histograma correspondiente para verificar si la distribución es normal o no. En caso de serlo, el intervalo podrá considerarse completamente estacionario. Caso contrario, se lo considerará cuasi-estacionario de orden 2.

## 2.9 Reconstrucción del Atractor

La respuesta a la pregunta de cómo ir desde las observaciones escalares del tipo  $s(k) = s(t_0 + k \cdot \tau_s)$  (en que  $t_0$  representa el tiempo de referencia y  $\tau_s$  el tiempo de muestreo) al espacio de fases multivariado está contenida en el teorema geométrico llamado el teorema de “embedding” atribuido a Takens y Mañé [56, 57]. Supongamos que tenemos un sistema dinámico  $\mathbf{x}(n) \rightarrow \mathbf{x}(n+1) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(n))$  donde  $\mathbf{x}(t)$  es un vector multidimensional en el espacio de fases. El teorema nos dice que si podemos observar solo una cantidad escalar  $h(\bullet)$  de algún vector función de las variables dinámicas  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(n))$ , luego la estructura geométrica de la dinámica multivariada puede ser “desplegada” desde ese conjunto de medidas escalares  $h(\mathbf{g}(\mathbf{x}(n)))$  en un espacio construido de nuevos vectores con componentes consistentes de  $h(\bullet)$  aplicado a potencias de  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(n))$ . Estos vectores:

$$\mathbf{y}(n) = [ h(\mathbf{x}(n)), h(\mathbf{g}^{T_1}(\mathbf{x}(n))), h(\mathbf{g}^{T_2}(\mathbf{x}(n))), \dots, h(\mathbf{g}^{T_{D-1}}(\mathbf{x}(n))) ] , \quad (2.11)$$

definen el movimiento en el espacio Euclidiano  $D$ -dimensional. Con una condición casi general de suavidad sobre las funciones  $h(\bullet)$  y  $\mathbf{g}(x)$  [58], se puede demostrar que si  $D$

es suficientemente grande, luego muchas propiedades importantes de las señal multi-variada desconocida, como fuente del caos observado, se reproducen en el nuevo espacio de vectores  $\mathbf{y}(n)$ . En particular se demuestra que el orden secuencial de los puntos  $\mathbf{y}(n) \rightarrow \mathbf{y}(n+1)$ , comunmente llamada la evolución en el tiempo, sigue el de la dinámica desconocida  $\mathbf{x}(n) \rightarrow \mathbf{x}(n+1)$ . Este punto es crítico en todo lo que sigue. El comportamiento determinístico de la fuente subyacente de observaciones,  $\mathbf{x}(n) \rightarrow \mathbf{x}(n+1)$ , asegura el comportamiento determinístico de las representación substituta  $\mathbf{y}(n) \rightarrow \mathbf{y}(n+1)$ . Nótese que la dimensión entera del espacio original no necesariamente debe ser la misma dimensión entera en el espacio reconstruido. El vector  $\mathbf{y}(n)$  se diseña para asegurar que los errores en el orden secuencial, los cuales podrían ocurrir durante la proyección de la evolución en el espacio original  $\mathbf{x}(n)$  al espacio escalar  $h(\mathbf{g}(\mathbf{x}(n)))$ , son neutralizados.

Para implementar el teorema general, toda elección de funciones suaves para  $h(\bullet)$  y  $\mathbf{g}(x)$  es posible [59]. En la práctica la elección se hace de modo tal que esta sea fácilmente utilizable a partir de los datos observados. Así pues, usamos para la función escalar general  $h(\bullet)$  la variable escalar observada  $s(n)$ ,

$$h(\mathbf{x}(n)) = s(n) \quad (2.12)$$

y para la función general  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(n))$  se elige la operación que lleva a algún vector inicial  $\mathbf{x}$  a aquel vector un tiempo de retardo  $\tau_s$  posterior de modo que la potencia  $T_k$ -ésima de  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(n))$  es

$$\mathbf{g}^{T_k}(\mathbf{x}(n)) = \mathbf{x}(n + T_k) = \mathbf{x}(t_0 + (n + T_k) \cdot \tau_s), \quad (2.13)$$

luego las componentes del  $\mathbf{y}(n)$  toman la forma

$$\mathbf{y}(n) = [ s(n), s(n + T_1), s(n + T_2), \dots, s(n + T_{D-1}) ]. \quad (2.14)$$

Si hacemos una elección aún más útil  $T_k = k \cdot T$ , esto es, tiempos de retardo múltiplos enteros de un tiempo de retardo común  $T$ , luego los vectores datos  $\mathbf{y}(n)$  son

$$\mathbf{y}(n) = [ s(n), s(n + T), s(n + 2 \cdot T), \dots, s(n + (D - 1) \cdot T) ], \quad (2.15)$$

formados simplemente por tiempos de retardo de las observaciones a tiempo  $n \cdot \tau_s$ .

Estos  $\mathbf{y}(n)$  reemplazan los datos escalares medidos  $s(n)$  con datos vectoriales en un espacio euclidiano  $D$ -dimensional, en el cual los aspectos invariantes de la secuencia de puntos  $\mathbf{x}(n)$  son capturados sin pérdida de información acerca de las propiedades del sistema original. El nuevo espacio está relacionado con el espacio original de los  $\mathbf{x}(n)$  por medio de transformaciones diferenciables suaves. La suavidad es esencial para permitir la demostración de que todos los invariantes de movimiento son vistos en el espacio reconstruido de tiempos de retardo con los datos  $\mathbf{y}(n)$  de igual modo que si fueran evaluados en el espacio original. Esto significa que se puede trabajar en el espacio "reconstruido" con el método de tiempos de retardo y aprender esencialmente tanto como podríamos sobre el sistema fuente de nuestra observaciones, como si fuéramos capaces de realizar nuestros cálculos directamente en el "verdadero" espacio dado por  $\mathbf{x}(n)$ .

La dimensión en el espacio reconstruido con el método de los tiempos de retardo no necesariamente será la misma que la del espacio original de los  $\mathbf{x}(n)$ . Reconstruir por el método de tiempos de retardo cuando los datos están muestreados con el mismo tiempo  $\tau_s$  es muy simple. El tiempo de retardo  $\tau = T \cdot \tau_s$  a utilizar y la dimensión  $D$  a ser usada serán las claves de la reconstrucción. El teorema de embedding es geométrico y orienta acerca de cual es el número “suficiente” de componentes del vector  $\mathbf{y}(n)$  requerido para asegurar la correcta cercanía de los puntos. Sin embargo, no da información sobre cual debería ser el número de componentes independientes de los vectores  $\mathbf{x}(n)$ .

Según el teorema de Takens, si se elige una dimensión de embedding tal que  $D > 2D_2 + 1$ , donde  $D_2$  es la dimensión de correlación del atractor, el mapeo será uno a uno (cabe aclarar que la condición anterior es suficiente pero no necesaria). Esto significa que cada punto del atractor reconstruido le corresponde uno y solo un punto en el atractor original. Es decir, el atractor reconstruido es una representación verdadera del original (aunque no idéntica) y no solo una imagen.

## 2.10 Elección del Tiempo de Retardo

Si bien, en principio la elección del tiempo de retardo y la dimensión de embedding es arbitraria e independiente, en la práctica se debe llegar a una relación de compromiso entre ellos y por lo tanto no resultan totalmente independientes uno de otro. La primera limitación está dada por la elección de un  $\tau = T \cdot \tau_s$  muy pequeño de modo tal que las componentes de los vectores de embedding serán muy cercanas y al graficarlas mostrarán un atractor reconstruido comprimido a lo largo de la diagonal principal del espacio de fases de dimensión propuesta (efecto de *redundancia*). Si por el contrario,  $\tau$  es muy grande entonces habrá muy poca correlación entre las componentes de los vectores de embedding. Las órbitas en el atractor reconstruido aparecerán visitando todo el espacio de fases (efecto de *irrelevancia*) siendo muy difícil detectar alguna estructura. Estos efectos se acentúan si se trabaja con series temporales finitas y con ruido.

Los efectos mencionados (redundancia e irrelevancia) son ejemplificados mediante la reconstrucción del atractor de Lorenz a partir de la señal  $X(t)$  (ver Fig. 2.5, generada a partir de las ecuaciones 2.8). En la Fig. 2.6.a se ejemplifica el efecto obtenido sobre el atractor reconstruido cuando se elige un  $\tau$  pequeño (efecto de redundancia); mientras que en la Fig. 2.6.b se observa el resultado de la elección de un  $\tau$  grande (efecto de irrelevancia). Finalmente, en la Fig. 2.6.c se puede ver el atractor reconstruido para  $\tau$  óptimo.

Recientemente Rosenstein y colaboradores propusieron un método geométrico para la elección del mejor tiempo de retardo basado en la óptima relación de compromiso entre redundancia e irrelevancia [60]. Su método se basa en la medición del desplazamiento promedio  $\langle S_D \rangle$ , de los vectores de embedding en la dimensión  $D$ , desde sus locaciones originales sobre la línea identidad (diagonal principal en el espacio D-dimensional). Ellos

evaluaron  $\langle S_D \rangle$  como una función de  $\tau$  por:

$$\langle S_D(\tau) \rangle = \frac{1}{M} \sum_{k=1}^M \| \mathbf{y}^\tau(k) - \mathbf{y}^0(k) \|, \quad (2.16)$$

donde los supraíndices denotan el tiempo de retardo entre componentes de embedding sucesivas,  $M$  es el número de vectores para la correspondiente dimensión de embedding  $D$  y  $\| \cdot \|$  denota la norma Euclídea en dicho espacio de embedding.  $\langle S_D \rangle$  cuantifica la disminución del error por redundancia y el incremento del error por irrelevancia con el aumento de  $\tau$ . Siguiendo el criterio dado por Rosenstein *et al.*, elegimos el mejor tiempo de retardo como el punto donde la pendiente de la curva dada por la ec. (2.16) decrece menos del 40% por primera vez.

En la Fig. 2.7 se muestra el desplazamiento promedio  $\langle S_D \rangle$  en función del tiempo de retardo (en unidades de  $\Delta t$ , tiempo de muestreo) para  $x(t)$  del sistema de Lorenz. Las diferentes curvas representan los valores obtenidos considerando dimensiones de embedding de  $D = 5, 6, 7$  y  $8$ . El valor para el tiempo de retardo óptimo en este caso resultó  $\tau^* = 6 \cdot \Delta t$ .

## 2.11 Elección de la Dimensión de Embedding Mínima

En el cálculo de los invariantes métricos utilizando las técnicas de embedding es necesario conservar la topología del atractor verdadero, para lo cual habrá que embeberlo en un espacio de dimensión tal que las órbitas reconstruidas no se crucen. Cuando se logra esto estamos en presencia del atractor desplegado (“unfolding”) en todo el espacio, es decir, se han eliminado los autocruces que surgen cuando se lo proyecta en un espacio de menor dimensión que la propia. El resultado topológico general que obtuvieron Takens y Mañé [56, 57] da una condición suficiente aunque no necesaria para la dimensión de embedding en la que el atractor queda totalmente desplegado:  $D > 2D_2 + 1$ . Esta relación permitiría dar una estimación para la dimensión de embedding pero en la práctica la dimensión  $D_2$  del atractor verdadero en principio es desconocida.

La dimensión de embedding mínima,  $D^{min}$  es la menor dimensión en la que se puede embeber al atractor tal que quede completamente desplegado. En este trabajo se estimará la  $D^{min}$  empleando el método introducido por H. Abarbanel y colaboradores en 1992 [46, 47, 61], el cual está basado en la estimación de los falsos próximos vecinos (FNN) y en consideraciones puramente geométricas. Este método se basa en la idea de que el atractor es un objeto compacto en el espacio de fases y que por lo tanto los puntos de una órbita del atractor tendrán vecinos en este espacio de fases. Si se embebe al atractor en un espacio de menor dimensión que la propia se obtendrá una proyección del mismo y por lo tanto muchos puntos que son vecinos cercanos en esa proyección no lo serán necesariamente en el atractor verdadero. Estos son los llamados falsos próximos

vecinos (“false nearest neighbor”), ya que simplemente aparecen cerca uno de otro debido a que la estructura geométrica del atractor fue proyectada en un espacio de menor dimensión, y no debido a la dinámica. La idea principal es evaluar el porcentaje de FNN con dimensiones de embedding crecientes hasta que el porcentaje de falsos vecinos sea nulo o caiga por debajo de un valor considerado aceptable.

En dimensión  $D$  cada vector  $\mathbf{y}(k)$  tendrá un vecino más cercano  $\mathbf{y}^{NN}(k)$ , en el sentido de la distancia euclídea entre ambos es mínima. Sea  $R_D(i)$  la distancia entre ellos

$$\begin{aligned} R_D^2(k) &= \|\mathbf{y}(k) - \mathbf{y}^{NN}(k)\|^2 \\ &= \sum_{k=0}^{D-1} [s(k + j \cdot \tau) - s^{NN}(k + j \cdot \tau)]^2, \end{aligned} \quad (2.17)$$

por lo cual en dimensión  $D + 1$ , la distancia entre estos puntos será:

$$R_{D+1}^2(k) = R_D^2(k) + [s(k + D \cdot \tau) - s^{NN}(k + D \cdot \tau)]^2. \quad (2.18)$$

Si  $R_{D+1}$  es grande, entonces puede pensarse que ambos vectores en realidad estaban cerca (en dimensión  $D$ ) solo debido a que se proyectó al atractor desde una dimensión mayor y no debido a la dinámica. Luego, al incrementar  $D$  a  $D + 1$  estos puntos fueron apartados.

Para decidir cuando dos puntos son falsos vecinos hay que considerar algún límite  $R_L$ . Luego diremos que si dos puntos próximos vecinos cumplen con

$$\frac{|s(k + D \tau) - s^{NN}(k + D \tau)|}{R_D(k)} > R_L, \quad (2.19)$$

son considerados falsos próximos vecinos. Puede mostrarse, en la práctica, que para valores de  $R_L$  entre 10 y 50, el número de falsos próximos vecinos (FNN) identificados es aproximadamente constante. Esto sugiere que puede tomarse como criterio aceptable la condición  $10 \leq R_L \leq 50$ .

Si se aplica el criterio anterior a datos de un generador de números random (alta dimensionalidad), el conjunto de observaciones puede ser “embebido” en una pequeña dimensión. Si se aumenta el número de puntos analizados, la dimensión de embedding aparente aumenta. El problema es que cuando se trata de poblar uniformemente (como el “ruido” trata de hacer) un objeto en  $D$  dimensiones con un número fijo de puntos, los mismos deben apartarse más y más a medida que  $D$  aumenta, puesto que la mayor parte del volumen del objeto se encuentra a grandes distancias. Si disponemos de un número infinito de datos, no debería haber problemas, pero con cantidades finitas eventualmente todos los puntos tienen “vecinos próximos” que no se apartan mucho a medida que la dimensión aumenta. Dado que esto sucede, hay puntos que estarán próximos pero no significa que estarán realmente cerca en el atractor, entendiendo por cerca una distancia dada por el tamaño aproximado del mismo,  $R_A$ . Entonces, si el vecino más próximo a  $\mathbf{y}(k)$  no está cerca, tendremos  $R_D(k) \approx R_A$ , luego la distancia  $R_{D+1}(k)$  será aproximadamente  $2 R_D(k)$ . Esto significa que distantes, pero próximos, los vecinos serán

separados hacia los extremos del atractor cuando estén desplegados unos de otros, si se trata de falsos próximos vecinos. Abarbanel y colaboradores [46, 47, 61] sugirieron, entonces, un segundo criterio para calcular los FNN cuando las series experimentales están contaminadas con ruido y tienen pocos datos. Según este criterio, el vector  $\mathbf{y}(k)$  y su vecino más cercano  $\mathbf{y}^{NN}(k)$  son falsos próximos vecinos si:

$$\frac{R_{D+1}(k)}{R_A} \geq 2, \quad (2.20)$$

donde  $R_A$  es el radio del atractor, el cual puede evaluarse, por ejemplo, usando la desviación standard del conjunto de datos. De este modo, podemos decir que dos puntos son FNN si se cumple alguno de los dos criterios anteriores.

La dimensión de embedding mínima puede elegirse como aquella para la cual el porcentaje de falsos vecinos cumpla que  $\text{FNN}\% \leq 1\%$ , para ambos criterios simultáneamente, considerando entonces que en esta dimensión  $D^{\min}$  el atractor queda suficientemente desplegado. En la Fig. 2.8 se muestra el porcentaje de falsos próximos vecinos en función de la dimensión de embedding, satisfaciendo ambos criterios simultáneamente, para la serie  $X(t)$  del sistema de Lorenz. Se utilizó el tiempo de retardo óptimo calculado en la sección previa (ver Fig. 2.7). La estimación del porcentaje de FNN también puede usarse para chequear si la medición del sistema dinámico en estudio está contaminada con ruido o artificios. Cuando la contaminación es baja, el porcentaje residual de FNN puede tomarse como un indicador el nivel de ruido en la serie temporal medida.

## 2.12 Cálculo de la Dimensión de Correlación ( $D_2$ ) para Series Temporales

Se sabe que una serie estocástica presenta una dimensión infinita, por otra parte una serie irregular que proviene de un sistema determinístico caótico tiene una dimensión finita. Grassberger y Procaccia [38, 39] introdujeron la dimensión de correlación  $D_c$  para caracterizar la complejidad del sistema o lo que es equivalente, para obtener un límite inferior en el número de variables necesarias para modelar el sistema en estudio.

La determinación de la dimensión, solo a partir de los datos experimentales tomados de un proceso dinámico irregular, permite en principio distinguir si el aparente comportamiento azaroso del sistema puede atribuirse a la existencia de un atractor extraño o a un comportamiento estocástico. Sin embargo, si la dimensión calculada resulta finita pero elevada, el sistema estará presentando tal grado de complejidad que entonces justifique su descripción en términos aleatorios.

Si un atractor es caótico, debido a que trayectorias cercanas se separan exponencialmente con el tiempo, se espera que los pares de puntos  $\mathbf{y}(i)$  e  $\mathbf{y}(k)$  con  $i \neq k$  estén dinámicamente no correlacionados. Sin embargo, aún cuando estos puntos puedan parecer esencialmente como distribuidos en forma aleatoria, todos ellos pertenecen a un

mismo atractor y por lo tanto están correlacionados en el espacio de fases.

La medición de la dimensión de un objeto presume que el mismo es de estructura autosimilar. Esto significa que el objeto en diferentes escalas presentará la misma estructura. Pero, si alcanzamos longitudes de escala de un orden más allá del tamaño del atractor, la autosimilaridad se pierde. El punto principal es que la longitud de escala crítica, en la cual se viola la autosimilaridad, depende de los detalles de la reconstrucción del atractor. Por otra parte, la cantidad de datos experimentales es restringida y además normalmente éstos están contaminados con "ruido". Es decir, la autosimilaridad se rompe para longitudes de escala del orden de la distancia promedio de los puntos datos en el espacio de fases reconstruido o para longitudes de escala proporcionales al nivel de ruido.

Los algoritmos para el cálculo de la dimensión de correlación asumen la estacionariedad de la serie temporal y son sensibles a las contaminación por ruido de la señal en estudio. En particular, el algoritmo de Grassberger y Procaccia, utilizando una estimación previa de la dimensión de embedding  $D$ , define la  $D_c$  examinando las propiedades de escala de la integral de correlación  $C(r, D)$  del atractor reconstruido. Para una dimensión de embedding  $D$  dada, la integral de correlación es aproximada por:

$$C(r, D) = \frac{2}{M(M-1)} \sum_{i \neq k}^M H(r - \|y(i) - y(k)\|), \quad (2.21)$$

donde  $H(r)$  es la función escalón de Heavyside y  $M$  es el número total de vectores reconstruidos. De este modo,  $C(r, D)$  puede interpretarse como la fracción de pares de puntos cuya distancia mutua es menor o igual a una distancia  $r$  de referencia. Se supone que  $C(r, D)$  sigue una ley de potencia (autosimilaridad) de la forma:

$$C(r, D) \approx r^{D_c}$$

y por lo tanto

$$D_c = \lim_{r \rightarrow 0} \lim_{D \rightarrow \infty} \frac{\ln[C(r, D)]}{\ln[r]}. \quad (2.22)$$

Los mismos autores mostraron que la dimensión de correlación  $D_c$  es equivalente a la dimensión  $D_2$ , calculada a partir de la ecuación (2.9) para  $q = 2$

En la práctica no es posible tomar ninguno de los límites de la ec. (2.9); la existencia de un atractor se infiere cuando en el gráfico  $\ln[C(r, D_e)]$  versus  $\ln[r]$  se observa una región a  $r$  pequeños en donde es posible ajustar una recta, cuya pendiente dará una estimación para  $D_c$ . Esto es equivalente a que en un gráfico  $\ln[D_c(r, D_e)]$  vs.  $\ln[r]$  se observe un "plateau" a  $r$  pequeños. La extensión del plateau se interpreta como una evidencia de la existencia de una región de escala autosimilar (de alguna dimensión), y la convergencia de la pendiente con dimensiones de embedding crecientes indica la reconstrucción topológica de un único atractor. Si la dimensión es no entera y mayor que 2, puede tomarse como evidencia de que se está en presencia de un atractor extraño

caótico (aunque no concluyente en cuanto a lo de caótico). En la práctica se realizan varios gráficos para diferentes dimensiones de embedding y se verifica la convergencia de las pendientes a  $r$  pequeños, para diferentes  $D > D^{min}$ .

## 2.13 Evaluación del Máximo Exponente de Lyapunov ( $\Lambda_{max}$ ) para Series Temporales

Los exponentes de Lyapunov dan una medida cuantitativa del caos en un sistema dinámico, a través de la velocidad media de la divergencia de las trayectorias vecinas en el atractor que representa a dicho sistema. Luego para determinar si un atractor es caótico, sin el conocimiento exacto de las ecuaciones que gobiernan el sistema dinámico en estudio, se puede computar el mayor exponente de Lyapunov a partir de los datos experimentales (serie temporal dada).

Wolf y colaboradores [50] han diseñado un método por medio del cual se pueden estimar los exponentes de Lyapunov a partir del atractor reconstruido. Este algoritmo está inspirado en la técnica desarrollada independientemente por Bennetin y colaboradores [62], y por Shimada y Nagashima [63], para la determinación del espectro completo a partir de un conjunto de ecuaciones diferenciales (ODE).

La aproximación utilizada, para el caso de ODE, se apoya en la definición de los exponentes de Lyapunov a partir de la evolución a largo plazo de los ejes de una esfera infinitesimal en el espacio de las fases. Estos ejes se definen a partir de condiciones iniciales cuyas separaciones son tan pequeñas como las limitaciones computacionales lo permitan, siguiendo su evolución temporal a través de las ecuaciones no lineales de movimiento.

Una de las dificultades que se presenta en esta aproximación es que, en un sistema caótico no se puede garantizar la condición de pequeña separación para tiempos del orden de cientos de períodos orbitales, necesaria para la convergencia del espectro. Este problema se puede evitar trabajando en el espacio de fases más el espacio tangente aproximado. Se define una trayectoria de referencia (centro de la esfera) por la acción de las ecuaciones no-lineales de movimiento sobre alguna condición inicial. Luego, las trayectorias de los puntos sobre la superficie de la esfera quedan definidos por la acción de las ecuaciones linealizadas de movimiento sobre puntos infinitesimalmente separados de la trayectoria de referencia. En particular, los ejes principales se definen por la evolución a través de las ecuaciones linealizadas de un marco de vectores inicialmente ortonormales y solidario con la trayectoria de referencia.

Para implementar este procedimiento, se crea la trayectoria de referencia integrando el sistema de ecuaciones no lineales de movimiento para alguna condición inicial, una vez que los transitorios han desaparecido. Simultáneamente se integran las ecuaciones linealizadas de movimiento para  $n$  condiciones iniciales diferentes, definidas por un mar-

co de orientación arbitraria de vectores ortonormales.

Nótese que cada vector divergerá en magnitud, pero en el caso en que el sistema sea caótico existirá una singularidad adicional. Cada vector tiende a alinearse en la dirección de más rápido crecimiento. Debido a la precisión finita en los cálculos en las computadoras, este colapso conlleva a una dirección común, causando de esta forma que las orientaciones en el espacio tangente de todos los vectores que constituirían el marco de referencia sean indistinguibles. Estos dos problemas son resueltos haciendo uso, en forma repetida, del proceso de reortonormalización de Gram-Schmidt (GSR).

Esta aproximación no es directamente aplicable a datos experimentales, puesto que los datos sobre el sistema linealizado no están disponibles. Wolf y colaboradores, para el caso de series temporales, proponen trabajar en un atractor reconstruido, examinando la divergencia orbital sobre longitudes de escala que sean siempre tan pequeñas como sea posible, usando un procedimiento de GSR aproximado en el espacio de fases reconstruido.

Supondremos que el sistema en estudio tiene al menos un exponente de Lyapunov positivo que denotaremos con  $\Lambda_{max}$ . Para estimar  $\Lambda_{max}$  se monitorea la evolución a largo plazo de un par de órbitas cercanas. Nótese que el atractor reconstruido, si bien definido por una trayectoria singular, puede proveer puntos que podrían considerarse sobre distintas trayectorias. Se eligen puntos cuya separación temporal en la serie de tiempo original sea al menos un período orbital medio, puesto que un par de puntos con una separación temporal menor está caracterizado por un exponente de Lyapunov igual a cero. Estos dos puntos pueden ser considerados para definir el estado que corresponde inicialmente al eje principal, siempre que su separación espacial sea pequeña. Cuando su separación se vuelve grande se realiza el procedimiento de GSR sobre el vector que ellos definen (normalización de un único vector), lo cual implicará reemplazar el punto sobre la órbita cercana con un punto más cercano al punto sobre la órbita de referencia, en la misma dirección del vector original. Con una cantidad finita de datos, no se puede esperar encontrar un punto de reemplazo que esté exactamente a lo largo de la línea que contiene al segmento especificado en el espacio de fases reconstruido, pero se puede buscar un punto que esté lo más cercano posible. En efecto, a través de un simple procedimiento de reemplazo, que procura preservar la orientación y minimiza el tamaño de los vectores de reemplazo, se monitorea el comportamiento a largo plazo de un vector que define el eje principal.

Teniendo en cuenta estas consideraciones Wolf y colaboradores [50] proponen evaluar  $\Lambda_{max}$  por medio de la siguiente expresión:

$$\Lambda_{max} = \frac{1}{N_a \Delta t} \sum_{i=1}^{N_a} \log_2 \frac{\| \delta \mathbf{y}_{i,j}(\Delta t) \|}{\| \delta \mathbf{y}_{i,j}(0) \|}, \quad (2.23)$$

donde

$$\| \delta \mathbf{y}_{i,j}(0) \| = \mathbf{y}(i) - \mathbf{y}(j), \quad (2.24)$$

$$\| \delta \mathbf{y}_{i,j}(\Delta t) \| = \mathbf{y}(i + \Delta t) - \mathbf{y}(j + \Delta t) , \quad (2.25)$$

con  $i = 1, \dots, N_a$  y  $j = 1, \dots, N$ .  $\Delta t$  es la evolución temporal para  $\delta \mathbf{y}_{i,j}(0)$  y  $N_a = N/\Delta t$ , en que  $N$  es el número de datos de la serie temporal. Si  $\Delta t$  está dado en segundos, entonces  $\Lambda_{max}$  estará dado en *bit/seg*. En la expresión anterior  $\mathbf{y}(i)$  es un vector en la trayectoria de referencia mientras que  $\mathbf{y}(j)$  es un vector adyacente, elegido apropiadamente, a  $\mathbf{y}(i)$  en el espacio de fases. Luego  $\delta \mathbf{y}_{i,j}(0)$  es una perturbación de la órbita de referencia al tiempo  $i$  siendo  $\mathbf{y}_{i,j}(\Delta t)$  la evolución de  $\delta \mathbf{y}_{i,j}(0)$  después de un tiempo  $\Delta t$ . En la Fig. 2.10 se presenta un diagrama esquemático de la evolución y el procedimiento de reemplazo, anteriormente descripto, para la determinación del máximo exponente de Lyapunov, para un segmento de datos.

En el presente trabajo seguiremos las modificaciones al método de Wolf introducidas por Iasemedis y Sackellares [5, 6], para el procedimiento de búsqueda de un vector de reemplazo, en cada punto de la trayectoria de referencia a la perturbación evolucionada  $\delta \mathbf{y}_{i,j}(\Delta t)$ . Puesto que el  $\Lambda_{max}$  debe ser una estimación confiable del mayor exponente de Lyapunov, el vector reemplazo  $\mathbf{y}(j)$  debería ser espacialmente cercano a  $\mathbf{y}(i)$ , en el espacio de las fases, con respecto a la magnitud y ángulo de desviación; pero al mismo tiempo no debe ser temporalmente muy cercano a  $\mathbf{y}(i)$ . Estos dos argumentos precedentes se pueden expresar matemáticamente por medio de las siguientes condiciones:

$$0 \leq | \langle \delta \mathbf{y}_{i,j}(0) , \delta \mathbf{y}_{i-1,j-1}(0) \rangle | < \theta_{i,j}^{(0)} , \quad (2.26)$$

$$B \cdot \Delta_i^{max} \leq \| \delta \mathbf{y}_{i,j}(0) \| \leq C \cdot \Delta_i^{max} , \quad (2.27)$$

$$|i - j| > (D_e - 1) \cdot \tau \quad (2.28)$$

donde

$$\Delta_i^{max} = \text{Max}_j \| \delta \mathbf{y}_{i,j}(0) \| , \quad j \neq i \quad \text{y} \quad \tau < |j - i| < (D_e - 1) \cdot \tau . \quad (2.29)$$

En las expresiones precedentes  $\Delta_i^{max}$  es la máxima distancia global entre dos vectores cualesquiera en el espacio de fases y  $\langle \mathbf{e}, \mathbf{f} \rangle$  denota la separación angular de dos vectores  $\mathbf{e}$  y  $\mathbf{f}$  en el espacio de fases. En el proceso de búsqueda de  $\mathbf{y}(j)$  se comienza con un ángulo inicial  $\theta_{i,j}^{(0)} = 0.1 \text{ rad}$ . En caso de que no sea posible encontrar el vector reemplazo  $\mathbf{y}(j)$  que satisfaga las ecuaciones (2.26) a (2.28) se duplica el valor de  $\theta_{i,j}^{(0)}$  y así siguiendo hasta un valor máximo  $\theta^{max} = \pi \text{ rad}$ . El parámetro  $C$  comienza con un valor de 0.1 y se incrementa con pasos de 0.1 hasta alcanzar el máximo valor de 0.5 de modo tal de encontrar el vector reemplazo  $\mathbf{y}(j)$  que satisfaga las ecuaciones (2.26) a (2.28). El parámetro  $B$  debe ser más pequeño que  $C$  y es elegido considerando la posibilidad de que los datos estén contaminados con ruido. El parámetro  $B$  representa la distancia por debajo de la cual la estimación de  $\Lambda_{max}$  es posiblemente inexacta (en este trabajo utilizaremos  $B = 0.05$ ).

Por consiguiente los parámetros necesarios para la estimación de  $\Lambda_{max}$  son: la dimensión de embedding  $D$  y el tiempo de retardo  $\tau$  para la reconstrucción del atractor en el espacio de fases, el número de datos  $N$  de la serie temporal y el tiempo de evolución  $\Delta t$ . Para la reconstrucción del atractor utilizaremos el método de los tiempos de retardo. Con respecto al tiempo de evolución  $\Delta t$  es altamente dependiente del problema particular en estudio. En nuestro caso elegimos  $1/\Delta t = \hat{f}/2$ , donde  $\hat{f}$  es la frecuencia dominante observada en los datos.

Se aplicó el método previamente descrito al ejemplo de la señal  $X(t)$  de Lorenz. Se graficó en la Fig. 2.11 la convergencia del máximo exponente de Lyapunov, en línea puntos se muestra el valor al cual converge el proceso iterativo,  $\Lambda_{max} = 2.19$ . Para su cómputo se eligieron  $\tau^* = 6 \cdot \Delta t$  y  $D = 6$ .

## 2.14 Limitaciones al Cálculo de $D_2$ y $\Lambda_{max}$ para Series Temporales

Uno de los principales problemas encontrados en el cálculo de las dimensiones y los exponentes de Lyapunov, utilizando el embedding de las series de tiempo experimentales, es el número de datos disponibles. Eckman y Ruelle [64] establecieron la relación entre el tamaño del conjunto de datos y las limitaciones fundamentales para la estimación de dimensiones y exponentes de Lyapunov a partir de series temporales. En particular, ellos mostraron que el algoritmo de Grassberger y Procaccia no producirá dimensiones confiables mayores que

$$D_2^{max} = 2 \frac{\ln(N)}{\ln(1/\rho)}, \quad (2.30)$$

con  $\rho = r/(2R_D) \ll 1$ .

Aquí  $r$  es el radio de la esfera conteniendo los vecinos más cercanos, para el cual ocurre el plateau,  $R_D$  es el radio del atractor reconstruido, y  $N$  es el tamaño del conjunto de datos. Para el exponente de Lyapunov ellos dicen que el número de puntos necesarios para su estimación es aproximadamente el cuadrado del número necesario para estimar la dimensión. En particular el número mínimo será:

$$N_{min} \gg \left[ \frac{1}{\rho} \right]^{D_2} \quad (2.31)$$

Este último criterio es muy difícil de satisfacer en la práctica o cuando se está trabajando con series de tiempo experimentales. Entonces en los casos para los cuales los requerimientos para las series de tiempo registradas están más allá de nuestro alcance, esto es sólo cuando el conjunto de datos disponibles no es suficiente, será necesario verificar la convergencia de los valores de los exponentes de Lyapunov a medida que el número de puntos aumenta.

## 2.15 Caoticidad

Tal como mencionáramos en la sec. 1.5 nuestro objetivo es caracterizar la evolución dinámica asociada a una serie de tiempo EEG. Esto podría hacerse evaluando de un modo continuo una variable dinámica como el máximo exponente de Lyapunov. Con este propósito en mente, podríamos dividir la serie de tiempo dada en porciones temporales de  $L$  datos de longitud, calcular en cada intervalo el máximo exponente de Lyapunov con la ec. (2.23) y asignar el valor obtenido al inicio de la ventana temporal. Por supuesto, para que el cálculo de  $\Lambda_{max}$  tenga sentido físico debemos asegurar que en cada ventana temporal la serie de tiempo es estacionaria.

Conforme lo expresado en la Sec. 2.8, los términos no-estacionarios o variantes en el tiempo implican que las propiedades características de una serie de tiempo, tales como el valor medio, la varianza y su espectro característico, cambian con el tiempo. Las pruebas estadísticas aplicadas a datos EEG han revelado una gran variedad de resultados dependientes de las condiciones dadas, encontrándose intervalos de tiempo durante el cual la serie EEG es estacionaria que varían desde algunos segundos hasta varios minutos [2, 65]. Sin embargo, desde el punto de vista práctico, que un mismo segmento de datos EEG sea considerado estacionario o no, depende del problema en cuestión, del tipo de análisis que se está realizando y de los parámetros utilizados para caracterizar los datos.

Debido al gran número de datos de las series EEG necesarios para un tratamiento métrico no-lineal (es decir, satisfaciendo todas las hipótesis matemáticas) resulta casi imposible, en la práctica, cumplir con el criterio de estacionariedad de la serie dada. Consecuentemente, si la serie de tiempo es no-estacionaria, los algoritmos métricos no deben ser utilizados. En otras palabras las magnitudes calculadas via este procedimiento arrojarán resultados erróneos.

Luego, resulta poco claro por cuanto tiempo el cerebro se mantendrá en un estado que podría resultar en una señal EEG estacionaria gobernada por un atractor. En consecuencia, la series de tiempo EEG no son capaces de permanecer estacionarias a lo largo de suficientes intervalos de modo tal de proveer la cantidad de datos necesarios para estimación confiable de  $\Lambda_{max}$  como función del tiempo.

Teniendo en cuenta lo anterior y a fin de caracterizar la evolución dinámica de una serie no estacionaria como la EEG, se puede introducir un nuevo parámetro al que llamaremos *Caoticidad*, formalmente definido del mismo modo que el máximo exponente de Lyapunov, pero para el cual se han removido los requerimientos de estacionariedad de la serie dada [5, 6, 7]. Conforme a lo expuesto en la Sec. 2.14, el cálculo de la *Caoticidad* requerirá la evaluación previa de los parámetros: tiempo de retardo,  $\tau$  y dimensión de embedding,  $D$ ; como así también de la elección del tiempo de evolución. Puesto que nuestro objetivo es evaluar la evolución temporal de la *Caoticidad* asociada a una serie temporal EEG, a través de su cómputo en ventanas temporales deslizantes sobre la misma, debemos dar un criterio para la elección de los parámetros antes mencionados.

El valor de los parámetros necesarios para la reconstrucción del atractor ( $\tau$  y  $D$ )

asociado a cada ventana temporal, se consideraron iguales para todas las ventanas, y su valor fue elegido de modo tal de obtener una buena reconstrucción del atractor tanto en la fase ictal como pre-ictal. Para la elección del tiempo de evolución, podemos seguir un criterio similar, o evaluar el mismo en forma adaptativa a cada intervalo a partir de propiedades específicas del mismo. En el primer caso, el valor para el tiempo de evolución se fija como una fracción de la frecuencia principal presente en el primer intervalo temporal correspondiente a la etapa pre-ictal ( $IEVOL = 0$ ), y dicho valor se utiliza en todas las ventanas temporales posteriores. Para el caso adaptativo, su valor se fija también como una fracción de la frecuencia característica del intervalo en análisis. Esta frecuencia se evalúa como; *a*) la frecuencia correspondiente a la máxima contribución en el espectro evaluado en la ventana temporal ( $IEVOL = 1$ ); *b*) la frecuencia media pesada del espectro correspondiente a la ventana temporal ( $IEVOL = 2$ ).

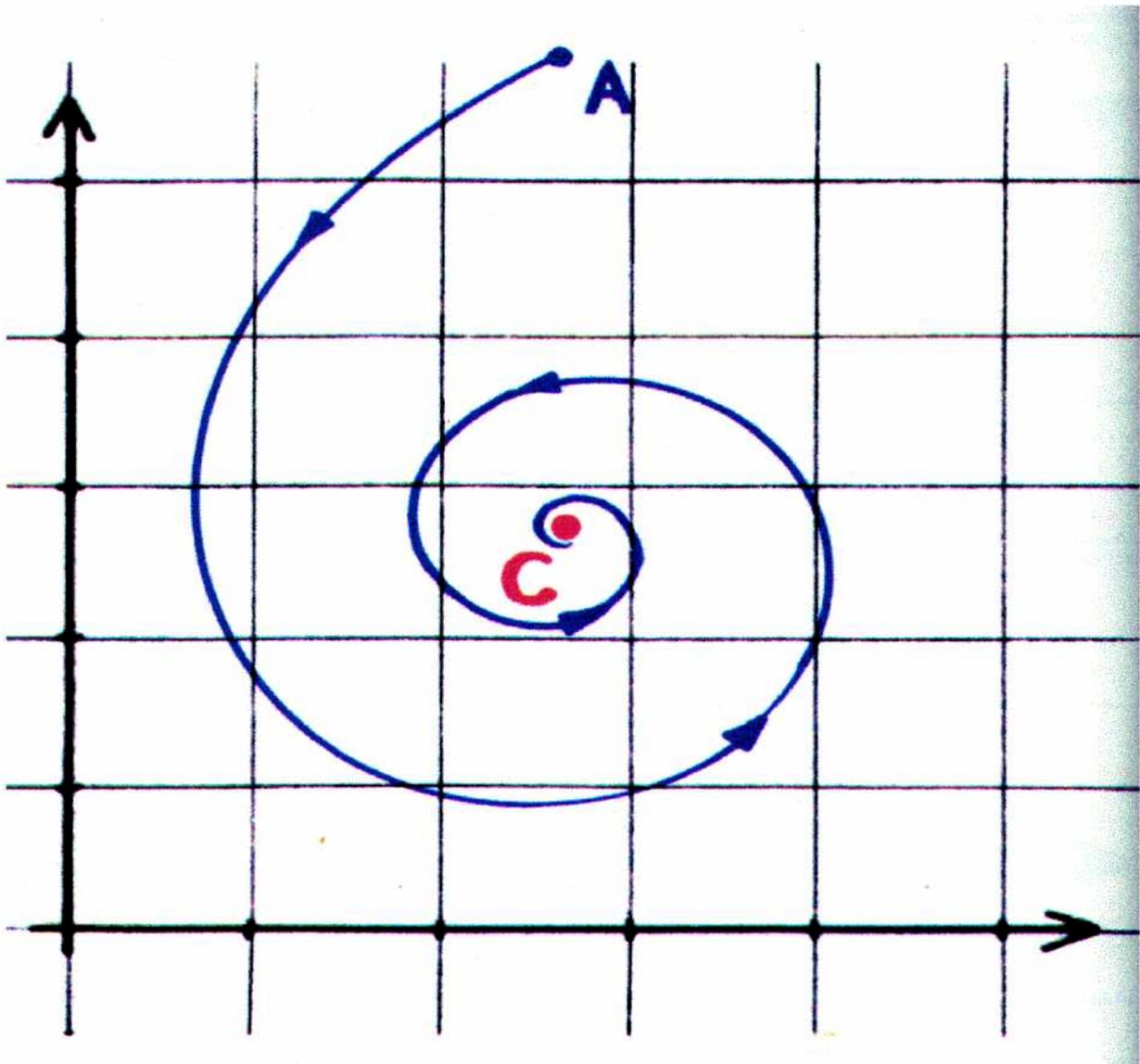


Figura 2.1: Retrato de fases para el campo vectorial que presenta un punto fijo en **C**. Las trayectorias que parten cercanas al punto **A** (en particular la que se muestra en la figura) convergen en forma espiral hacia el punto crítico **C**. La aproximación a este punto es en forma asintótica, cayendo lentamente cada vez más cerca del mismo.

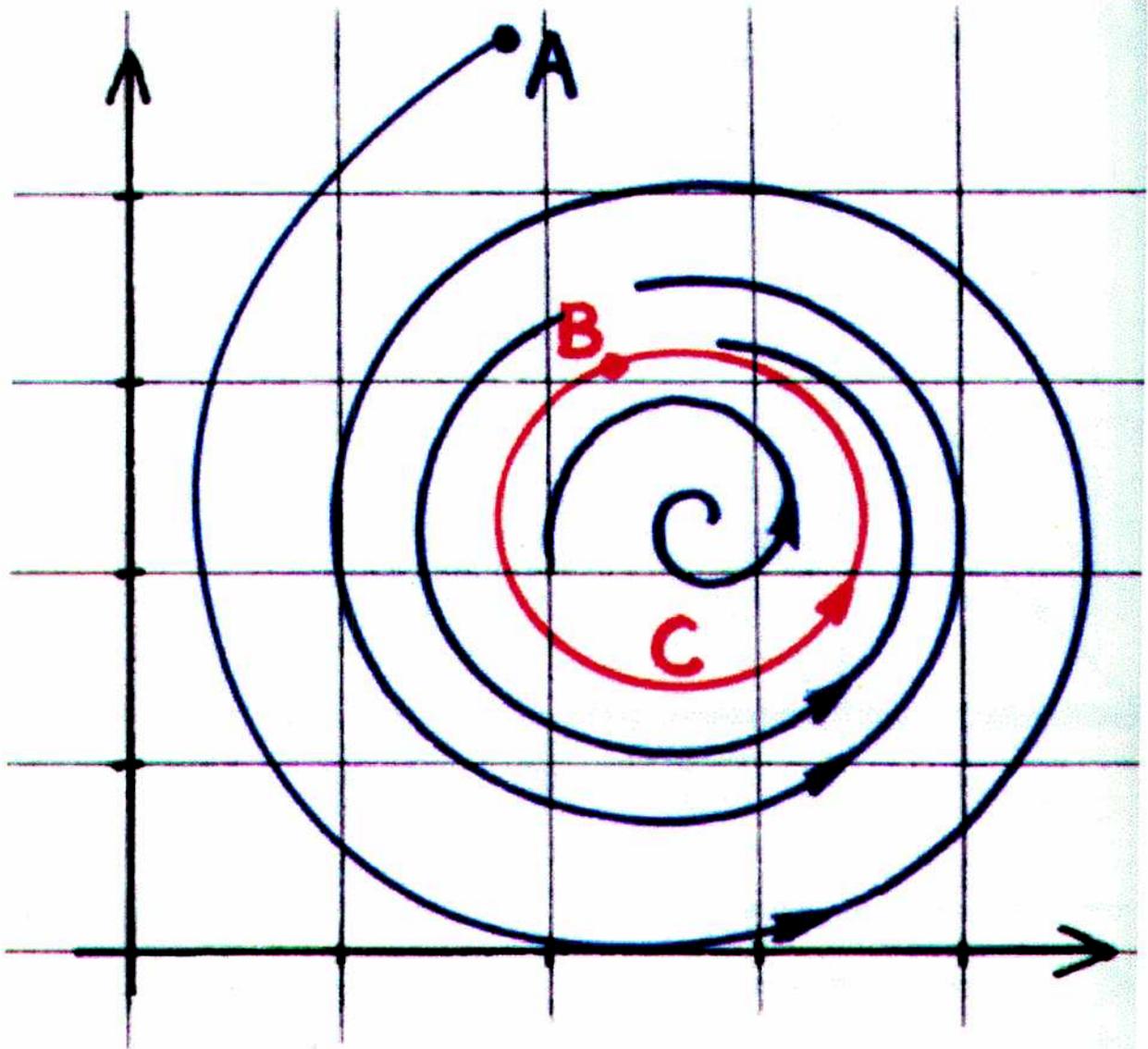


Figura 2.2: RETRATO DE FASES PARA UN CAMPO VECTORIAL PLANO CON UN CICLO LÍMITE  $C$ .  $B$  REPRESENTA A UN PUNTO EN EL CICLO LÍMITE. LA TRAYECTORIA QUE SE INICIA EN EL PUNTO  $B$  ES CERRADA Y SIGUE GIRANDO UNA Y OTRA VEZ SOBRE LA CURVA  $C$ . TAMBIÉN SE MUESTRA EN LA FIGURA UNA TRAYECTORIA QUE SE INICIA EN EL PUNTO  $A$ . LA MISMA CONVERGE EN FORMA ESPIRAL ALREDEDOR DEL CICLO LÍMITE ACERCÁNDOSE MÁS Y MÁS AL MISMO A MEDIDA QUE TRANSCURRE EL TIEMPO.

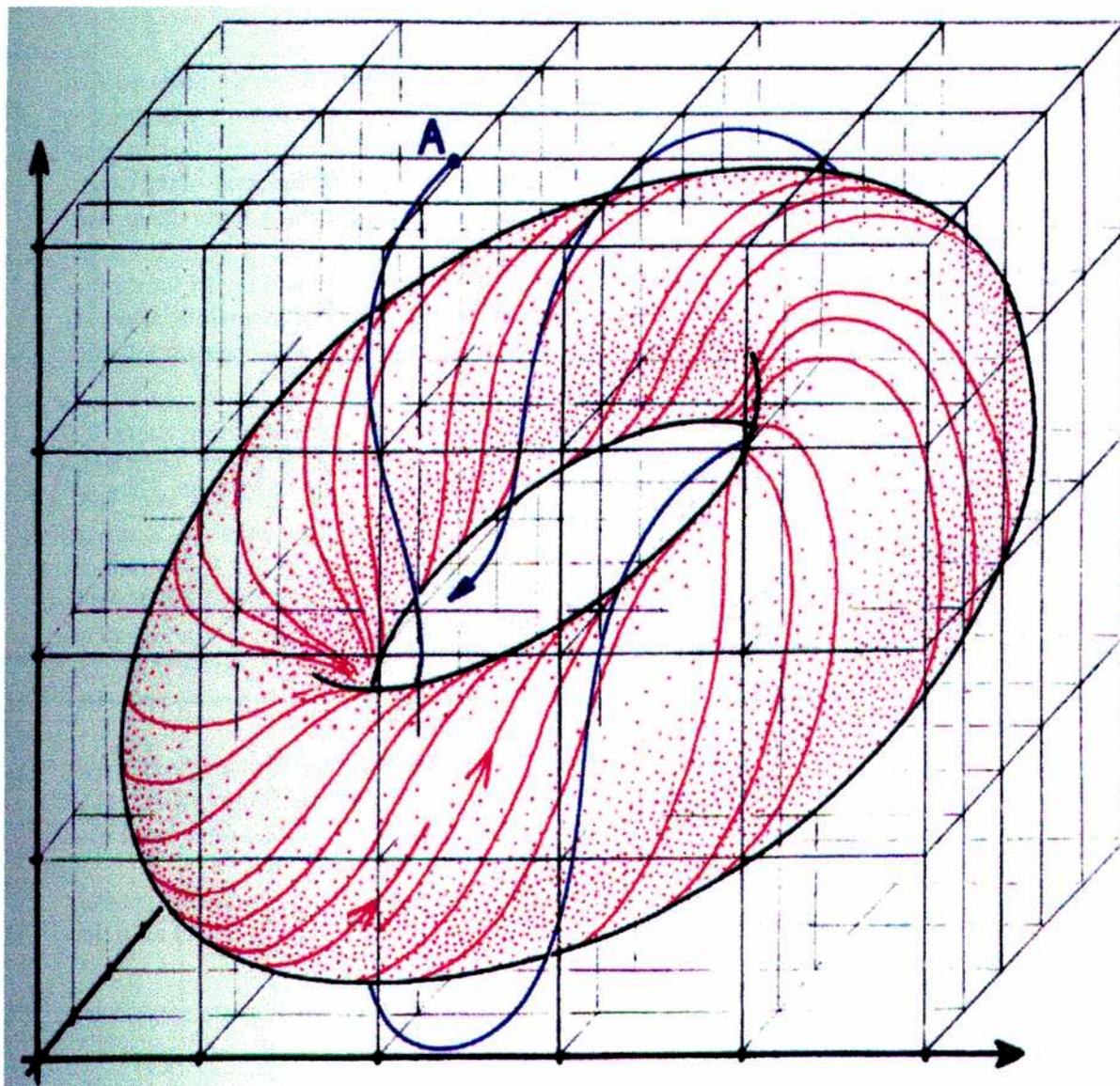


Figura 2.3: Las trayectorias que se inician en el punto **A** y sus cercanías, evolucionan en forma solenooidal entorno al toro. A medida que el tiempo avanza, las trayectorias evolucionan cada vez más cerca al toro.

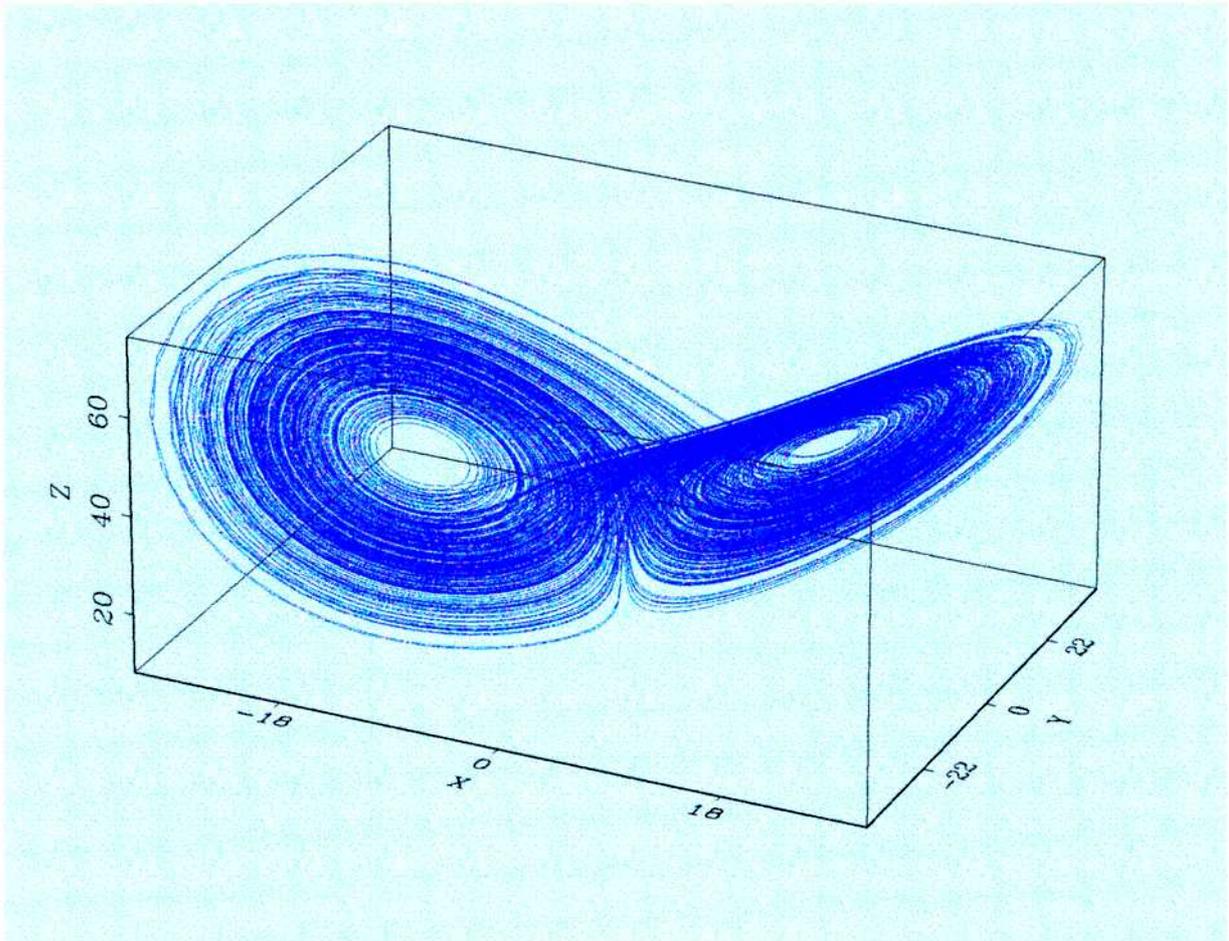


Figura 2.4: REPRESENTACIÓN 3-D DEL ATRACTOR DE LORENZ. LA ÓRBITA QUE DEFINE EL ATRACTOR ( $N = 20000$ ) HA SIDO OBTENIDA INTEGRANDO LAS CORRESPONDIENTES ECUACIONES CON UN RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN Y PASO AJUSTABLE, SIENDO EL PASO DE INTEGRACIÓN DE  $\Delta t = 0.01$  Y LOS PARÁMETROS DEL SISTEMA:  $\sigma = 16.0$ ,  $R = 45.92$  Y  $b = 4.0$ . LOS PRIMEROS 5000 PUNTOS FUERON DESCARTADOS, EN ORDEN DE ELIMINAR LOS TRANSITORIOS.

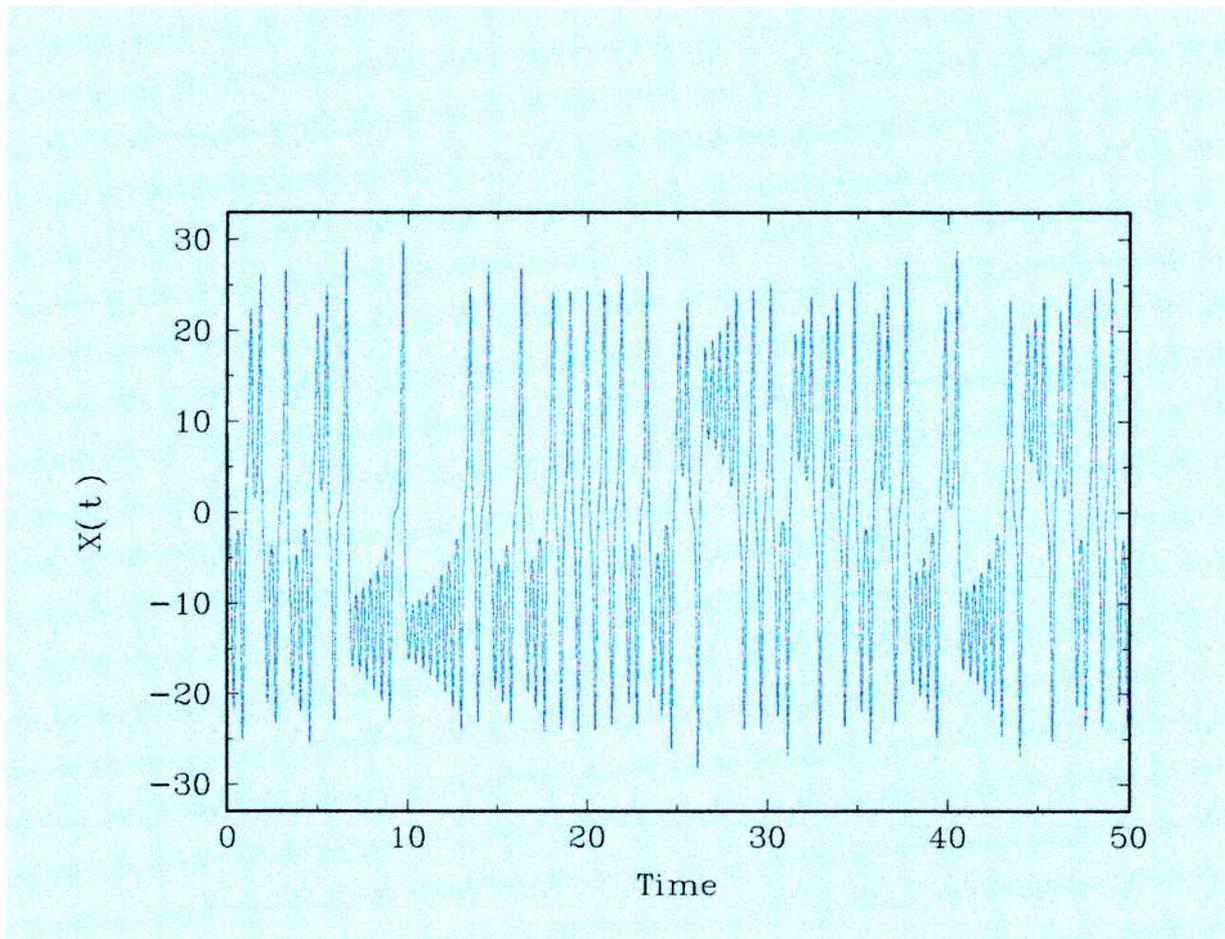


Figura 2.5: VARIABLE  $X(t)$  PARA EL SISTEMA DE LORENZ. LA ÓRBITA DE LA SERIE TEMPORAL HA SIDO OBTENIDA INTEGRANDO LAS CORRESPONDIENTES ECUACIONES CON UN RUNGE-KUTTA DE CUARTO ORDEN Y PASO AJUSTABLE, SIENDO EL PASO DE INTEGRACIÓN DE  $\Delta t = 0.01$  Y LOS PARÁMETROS DEL SISTEMA:  $\sigma = 16.0$ ,  $R = 45.92$  Y  $b = 4.0$ . LOS PRIMEROS 5000 PUNTOS FUERON DESCARTADOS, PARA ELIMINAR LOS TRANSITORIOS. EL NÚMERO TOTAL DE PUNTOS PARA ESTA SERIE TEMPORAL ES  $N = 20000$  (VER FIG. 2.4), POR CLARIDAD SOLO SE HAN GRAFICADO UNA PORCIÓN DE LOS MISMOS.

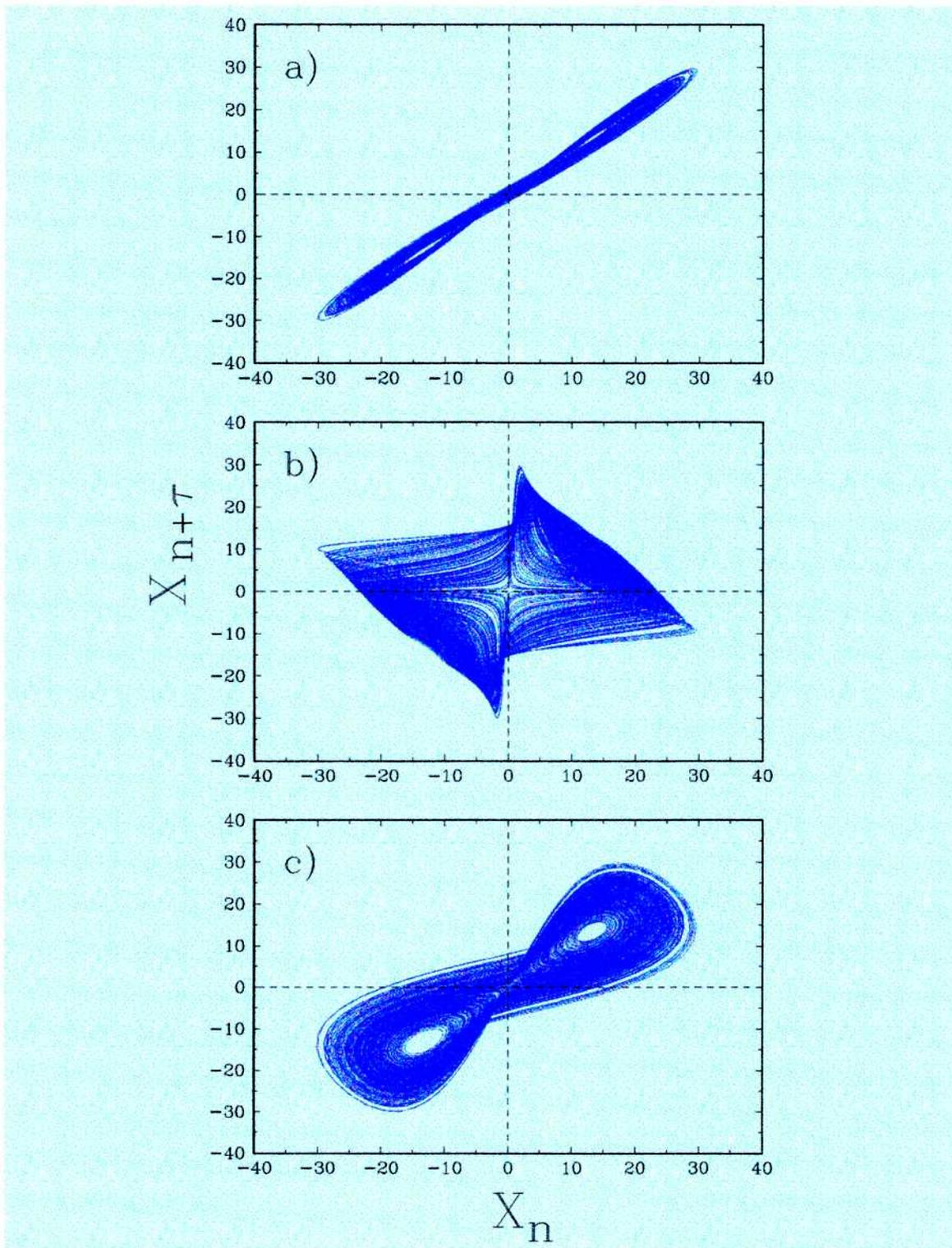


Figura 2.6: RECONSTRUCCIÓN BIDIMENSIONAL DEL ATRACTOR CORRESPONDIENTE AL SISTEMA DE LORENZ, A TRAVÉS DEL MÉTODO DE TIEMPOS DE RETARDO Y A PARTIR DE LA SERIE UNIDIMENSIONAL CORRESPONDIENTE A LA VARIABLE  $X(t)$ : A)  $\tau = 1 \cdot \Delta t$ , B)  $\tau = 20 \cdot \Delta t$ , C)  $\tau = 6 \cdot \Delta t$ . EL TIEMPO DE MUESTRO PARA LA SERIE TEMPORAL ES  $\Delta t = 0.01$  Y EL NÚMERO DE DATOS DE LA MISMA  $N = 20000$  (VER FIG. 2.5).

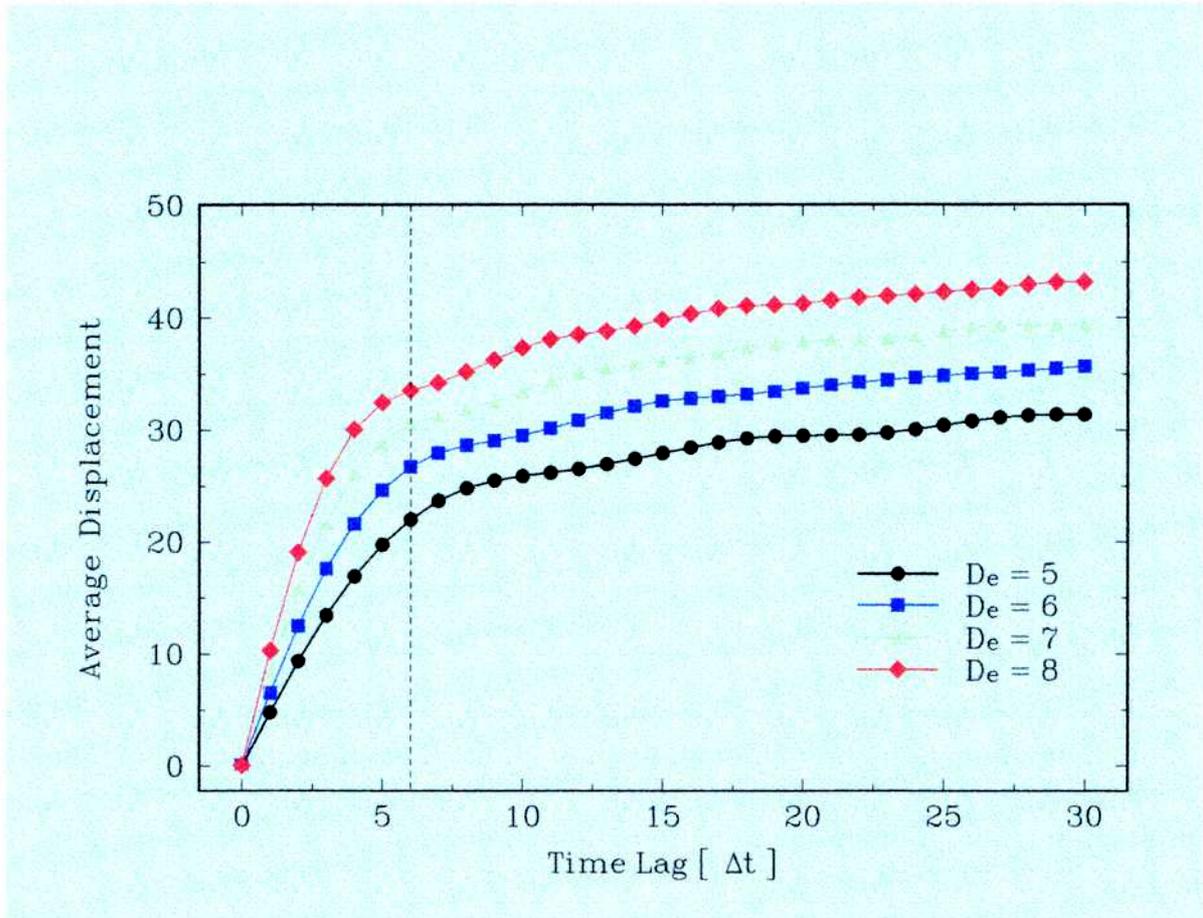


Figura 2.7: DESPLAZAMIENTO PROMEDIO  $\langle S_D \rangle$  EN FUNCIÓN DEL TIEMPO DE RETARDO (EN UNIDADES DE  $\Delta t$ , TIEMPO DE MUESTREO) PARA  $X(t)$  DEL SISTEMA DE LORENZ. LAS DIFERENTES CURVAS REPRESENTAN LOS VALORES OBTENIDOS CONSIDERANDO DIMENSIONES DE EMBEDDING DE  $D = 5, 6, 7$  Y  $8$ . EL VALOR PARA EL TIEMPO DE RETARDO ÓPTIMO  $\tau^* = 6 \cdot \Delta t$  ES REPRESENTADO POR LA LÍNEA SEGMENTADA VERTICAL. EL NÚMERO DE DATOS PARA ESTA SERIE TEMPORAL ES  $N = 20000$  Y  $\Delta t = 0.01$  ES EL TIEMPO DE MUESTREO DE LAS MISMA (VER FIG. 2.5).

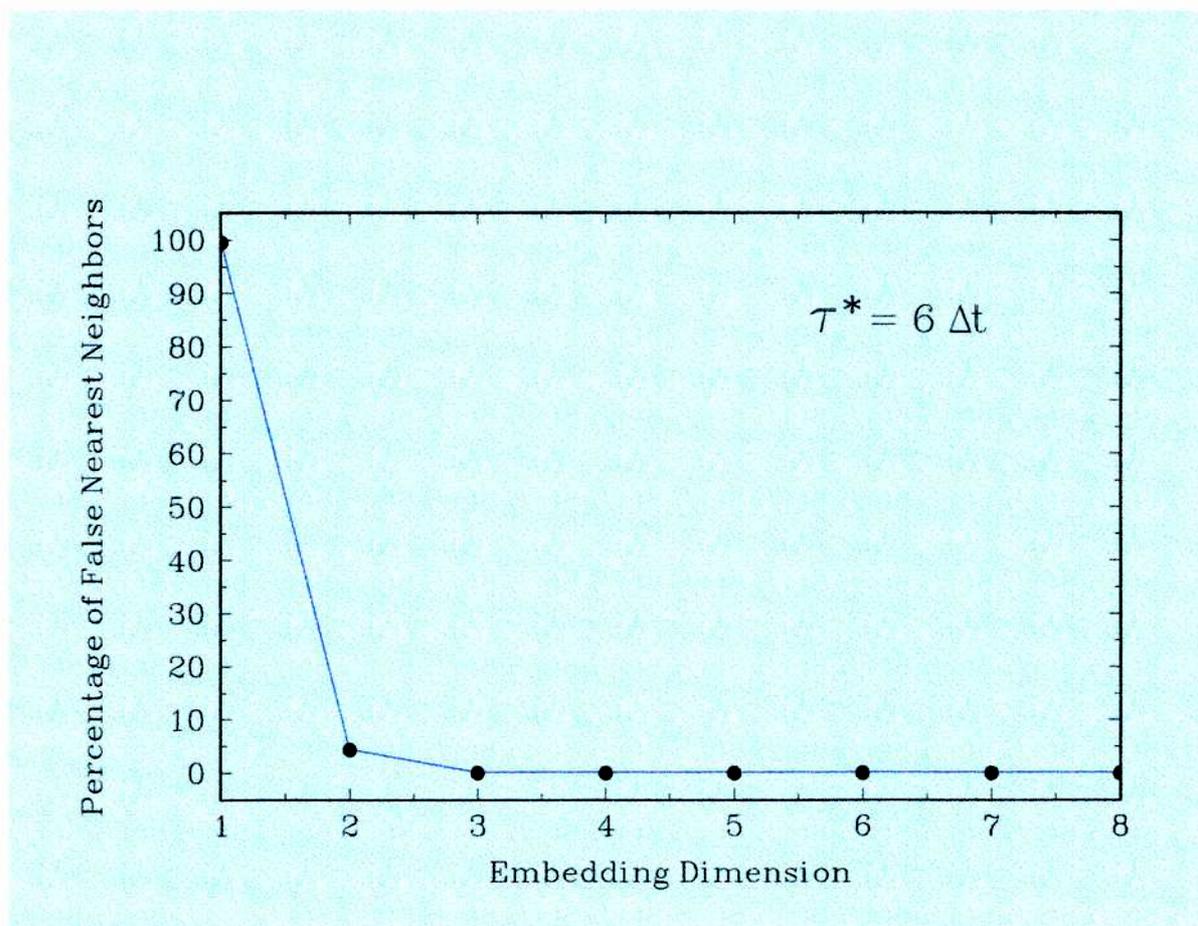


Figura 2.8: PORCENTAJE DE FALSOS PRÓXIMOS VECINOS COMO FUNCIÓN DE LA DIMENSIÓN DE EMBEDDING PARA LA SERIE TEMPORAL  $X(t)$  DEL SISTEMA DE LORENZ. PARA LA EVALUACIÓN DEL  $FNN\%$  SE UTILIZÓ EL TIEMPO DE RETARDO ÓPTIMO  $\tau^* = 6 \cdot \Delta t$  (VER FIG. 2.7). EL NÚMERO DE DATOS PARA ESTA SERIE TEMPORAL ES  $N = 20000$  Y  $\Delta t = 0.01$  ES EL TIEMPO DE MUESTREO DE LAS MISMA (VER FIG. 2.5).

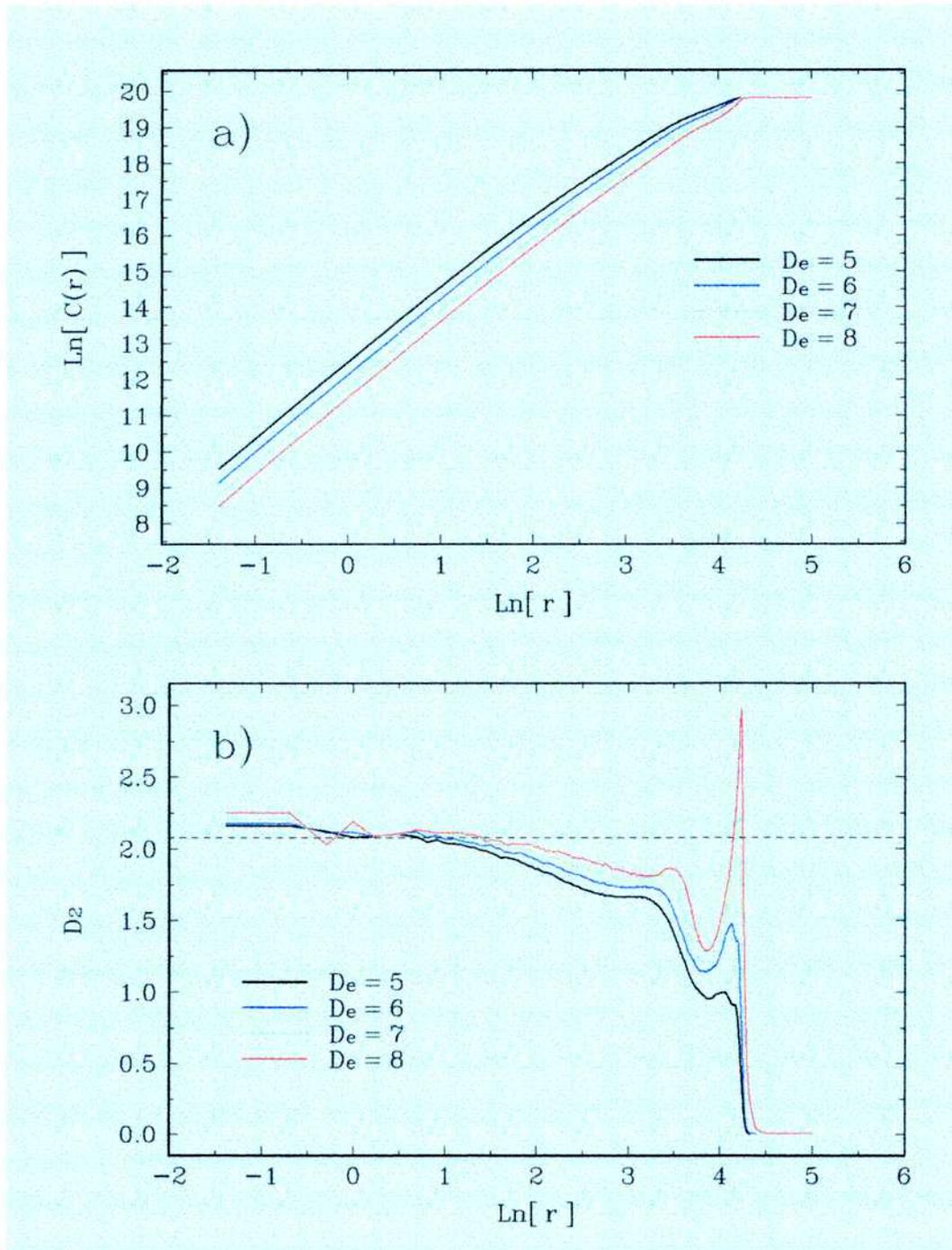


Figura 2.9: A) DEPENDENCIA DEL LOGARITMO NATURAL DE LA INTEGRAL DE CORRELACIÓN  $\text{Ln}[C(r)]$  VS  $\text{Ln}(r)$  PARA  $X(t)$  DEL SISTEMA DE LORENZ. LAS DISTINTAS CURVAS REPRESENTAN LOS RESULTADOS OBTENIDOS PARA DIMENSIONES DE EMBEDDING DE  $D = 5, 6, 7, 8$  Y TIEMPO DE RETARDO ÓPTIMO  $\tau^* = 6 \cdot \Delta t$ . EL NÚMERO DE DATOS PARA ESTA SERIE TEMPORAL ES  $N = 20000$  Y  $\Delta t = 0.01$  EL TIEMPO DE MUESTREO DE LAS MISMA (VER FIG. 2.5). B) GRÁFICO DE LAS PENDIENTES (DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN  $D_2$ ) DE LAS CURVAS REPRESENTADAS EN EL PANEL SUPERIOR. ESTAS PENDIENTES FUERON EVALUADAS NUMERICAMENTE. UN CLARO PLATEAU (REGION DE ESCALA) PUEDE OBSERVARSE PARA  $0.25 \leq \text{Ln}(r) \leq 1.0$  PARA DIMENSIONES DE EMBEDDING CRECIENTES. EL VALOR PARA LA DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN PROMEDIADA SOBRE TODAS LAS  $D$  OBTENIDA FUE  $\langle D_2 \rangle = 2.073$ .

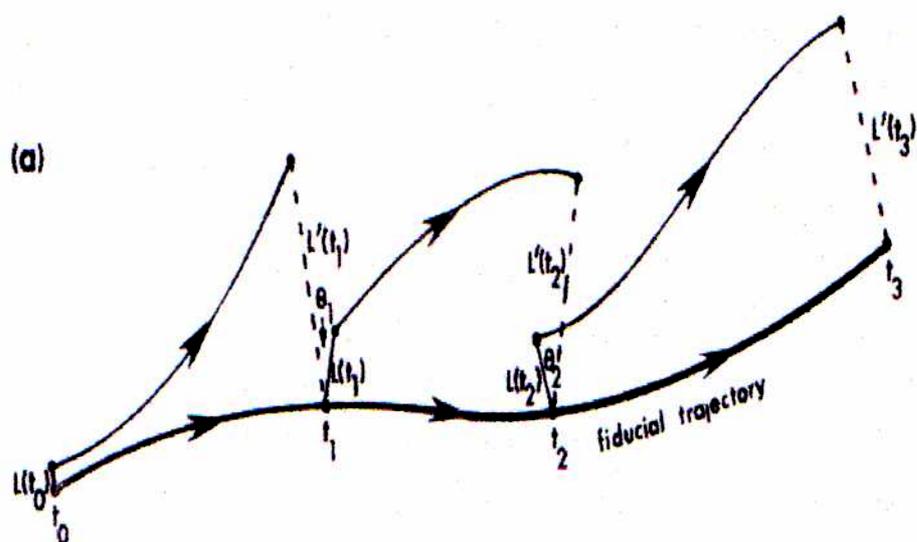


Figura 2.10: DIAGRAMA DE LA EVOLUCIÓN Y PROCEDIMIENTO DE REEMPLAZO UTILIZADO PARA LA DETERMINACIÓN DEL MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV, PARA UN SEGMENTO DE DATOS.

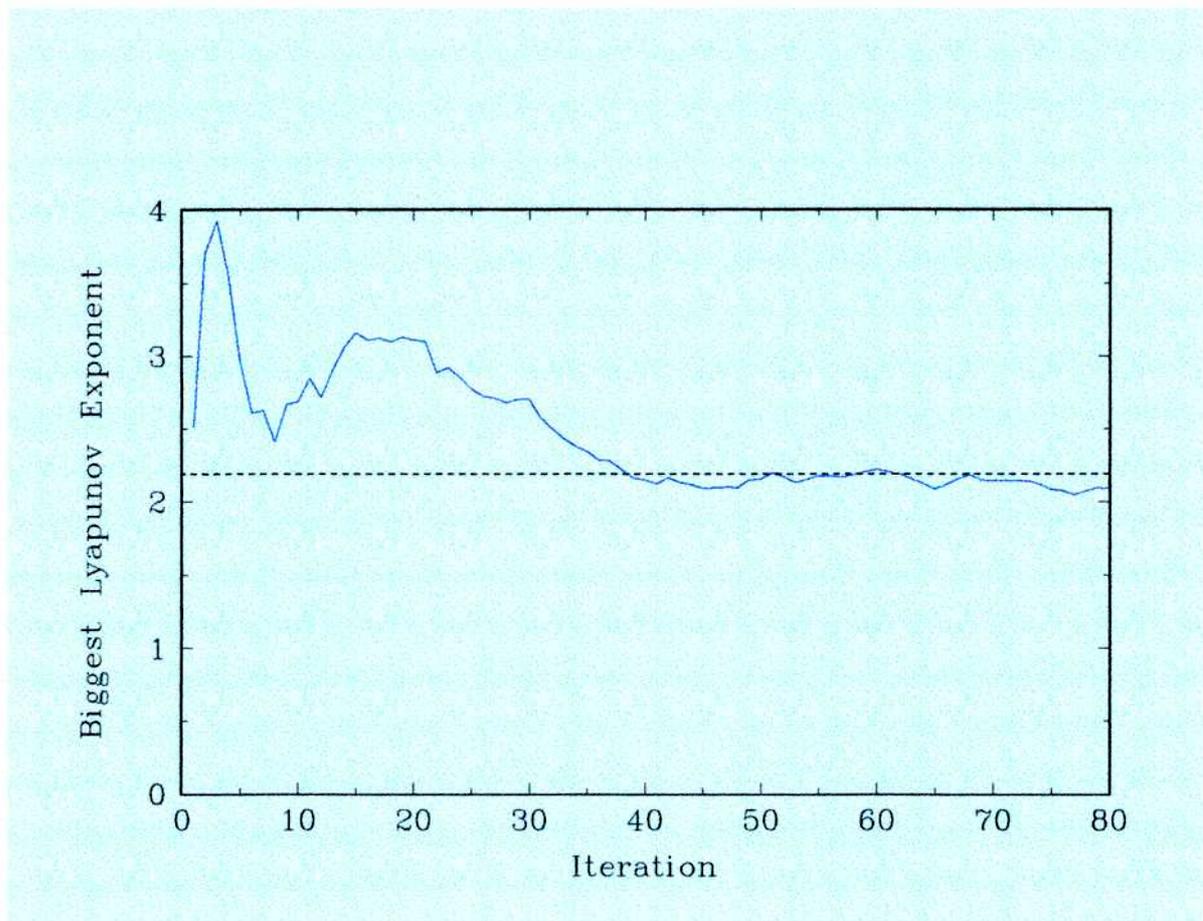


Figura 2.11: CONVERGENCIA DEL MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV  $\Lambda_{max}$  CON EL PROCESO DE ITERACIÓN (TIEMPOS DE EVOLUCIÓN  $\Delta T$ ) EN EL MÉTODO MODIFICADO DE WOLF PARA SERIES TEMPORALES, PARA LA SERIE  $X(t)$  DEL SISTEMA DE LORENZ. EL NÚMERO DE DATOS PARA ESTA SERIE TEMPORAL ES  $N = 20000$  Y  $\Delta t = 0.01$  EL TIEMPO DE MUESTREO DE LAS MISMA (VER FIG. 2.5). LA LÍNEA DE PUNTOS, REPRESENTA EL VALOR  $\Lambda_{max} = 2.19$  AL CUAL CONVERGE EL PROCESO ITERATIVO.

# Capítulo 3

## Análisis Tiempo – Frecuencia

### 3.1 Introducción

Generalmente al abordar el análisis de un sistema realizamos un conjunto de mediciones  $\{m_k; k = 1, \dots, M\}$  sobre el mismo, para obtener información de alguna cantidad física de interés que frecuentemente es función del tiempo,  $f(t)$ . Es importante que el proceso de medición no sólo sea simple, eficaz y de costo mínimo, sino también que sea planificado de modo tal de extraer la mayor información posible acerca del sistema en estudio. Claramente la elección de las mediciones a realizar, su tipo y número dependen de la información que se desea extraer de la función  $f(t)$ .

Un método para obtener información del sistema a partir de la función  $f(t)$  es la comparación con un conjunto de funciones conocidas  $\mathcal{Q} = \{\varphi_q; q \in \Lambda\}$  donde  $\Lambda$  es algún conjunto de índices. Esta comparación se puede realizar a través del producto interno

$$m_q = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \varphi_q^*(t) dt, \quad (3.1)$$

donde  $\varphi_q^*$  denota el complejo conjugado de  $\varphi_q$ .

La función  $f(t)$  puede pertenecer a una clase  $\mathcal{C}$  de funciones. En este trabajo se considerarán funciones de energía finita, con lo cual  $\mathcal{C} \in L^2(\mathcal{R})$ , donde  $L^2(\mathcal{R})$  es el espacio de dimensión infinita de funciones de cuadrado integrable con la norma usual en  $L^2$ , de modo tal que

$$\|f\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 dt < \infty. \quad (3.2)$$

Si el conjunto de funciones  $\mathcal{Q}$  es lo suficientemente grande para distinguir entre funciones de alguna clase fija  $\mathcal{C}$ , se puede decir que  $m_q$  (vista como una función de la variable  $q$ ) es una *transformación* de  $f(t)$ . La razón para llamar a  $m_q$  “una transformación de  $f(t)$ ” es que toda la información de  $f(t)$  es capturada por las mediciones  $m_q$  y nada de ella se pierde. Luego, visto como una función de la variable independiente  $q \in \Lambda$ ,  $m_q$  definida por la ec. (3.1) es simplemente una transformación de  $f(t)$ .

Usando notación de operadores se puede escribir  $m_q = (T_Q f)(q)$ . La transformación inversa es la reconstrucción de  $f(t)$  a partir de los coeficientes  $m_q$  y se escribe como  $f(t) = (T_Q^{-1} m_q)(t)$ . Esta última expresión puede verse como una *representación* o *expansión* de  $f(t)$ .

El conjunto  $Q$  de funciones de referencia deber ser necesariamente infinito para asegurar que cualquier función  $f \in \mathcal{C}$  pueda ser reconstruída a partir de los coeficientes  $m_q$ , con  $q \in \Lambda$ . Si el conjunto  $Q$  resulta ser una base para  $\mathcal{C}$  entonces la reconstrucción de  $f(t)$  a partir de los coeficientes  $m_q$  es única. En general, para una clase  $\mathcal{C}$  arbitraria de señales hay muchas transformaciones y varias representaciones posibles. El problema de cuáles funciones elegir y qué espacio utilizar depende a menudo del problema en estudio. Sin embargo muchas aplicaciones comparten dos necesidades computacionales básicas, a saber:

- Algoritmos simples para poder evaluar la transformada y su inversa.
- Estabilidad y robustez de los algoritmos. Es decir, que pequeños errores en los datos sólo produzcan pequeños errores en la transformada.

En el caso discreto, se tendrá que una secuencia  $S = \{s_k\}$  es de energía finita si  $\{s_k\} \in l^2$ , donde  $l^2$  es el espacio de las secuencias (funciones discretas) de cuadrado sumable. Luego para calcular los coeficientes  $m_q$  se utiliza una versión discretizada de la ecuación (3.1).

### 3.2 Transformada de Fourier y Transformada de Fourier con Ventana

Una manera de obtener algoritmos simples es utilizar un conjunto  $Q$  de funciones que tengan una estructura simple. Para las señales de energía finita,  $Q = L^2(\mathcal{R})$ , por ejemplo, la Transformada de Fourier (TF) utiliza como conjunto base a

$$Q = \{ \varphi_\omega(t) = e^{i\omega t} ; \omega \in \mathcal{R} \}, \quad (3.3)$$

el cual consiste de todas las dilataciones (o reducciones) por un factor  $\omega$  de una única función periódica  $e^{it}$ . Luego, la transformada de Fourier  $\hat{f}(\omega)$  de una función  $f(t)$  está dada entonces por el producto interno

$$\hat{f}(\omega) = \langle f(t), \varphi_\omega(t) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt. \quad (3.4)$$

Y la Transformada de Fourier Inversa esta dada por

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \quad (3.5)$$

En estos casos no hay inconvenientes para establecer la estabilidad y robustez de los algoritmos. Sin embargo en la práctica, por lo general, esta transformación no puede

ser evaluada en forma exacta, razón por la cual se utiliza una versión discreta de la misma. Por otra parte, es común que la función a analizar esté dada por valores discretos (mediciones) a intervalos regulares. Así pues, en este último caso, se puede estimar la TF de una función dada por un número finito de puntos muestreados a través de la Transformada Discreta de Fourier (TDF) y el número de operaciones necesarias para su cómputo es del orden  $\mathcal{O}(N^2)$ , en que  $N$  es el número de datos. En la actualidad existen algoritmos computacionales mucho más rápidos para el cómputo de la TDF. En particular el conocido como la Transformada Rápida de Fourier (FFT), el cual requiere que el número de datos  $N$  sea una potencia entera de 2 y su complejidad numérica es  $\mathcal{O}(N \log_2 N)$ .

La transformada de Fourier es una herramienta excelente para separar una función  $f(t)$  o una secuencia  $\{s_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$  en sus componentes frecuenciales. Por ejemplo, un “burst” de frecuencia  $\omega_0$  en  $f(t)$ , mostrará una gran componente en  $\omega_0$  en la transformada de Fourier  $\hat{f}(\omega)$ . Es decir, se pueden detectar o localizar exactamente las frecuencias en  $f(t)$ . Esta propiedad de localización de frecuencias es una de las características sobresalientes de la transformada de Fourier. Sin embargo, una desventaja es que no hay modo de deducir el principio y fin de un “burst” de frecuencias por medio de la inspección de  $\hat{f}(\omega)$ . Más aún, una transición abrupta (discontinuidad) o una singularidad en  $f(t)$  no puede ser capturada o reflejada en una forma simple por  $\hat{f}(\omega)$ . De hecho, la información acerca del tiempo (o localización) de los eventos que ocurren en  $f(t)$  están expandidos a todas las componentes de  $\hat{f}(\omega)$  (específicamente en las fases) y es por esta razón entonces que se dice que la transformada de Fourier no está localizada en el tiempo (o espacio).

La falta de localización en el tiempo de la transformada de Fourier se debe a que las funciones de prueba utilizadas  $e^{i\omega t}$  son periódicas, y no están localizadas en alguna  $t$ -región particular. Esta es la razón por la cual la transformada de Fourier no resulta apropiada para analizar señales no estacionarias. Una manera de sortear este problema es multiplicar a las funciones  $e^{i\omega t}$  por funciones ventana  $\{g(t - b), b \in \mathcal{R}\}$  obteniendo en esta forma el nuevo conjunto

$$\mathcal{Q} = \{ \varphi_{(\omega, b)}(t) = g(t - b) e^{i\omega t} ; (\omega, b) \in \mathcal{R}^2 \} . \quad (3.6)$$

De este modo se obtiene la Transformada de Fourier con Ventana (TFV), que para la función  $f(t)$  estará dada por

$$(T_g f)(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g(t - b) e^{-i\omega t} dt . \quad (3.7)$$

La función  $g(t)$  debe elegirse en forma tal que presente un decrecimiento rápido para valores grandes de  $t$ . Por ejemplo, una función rectangular  $g(t) = 1, \forall |x| < 1/2$  y  $g(t) = 0, \forall |x| \geq 1/2$ , que es la que mejor discrimina dos picos cercanos. La desventaja de esta ventana es que los bordes abruptos introducen frecuencias espúreas, en particular en las altas frecuencias (ripple), no deseadas en la transformada.

En esta forma, la componente frecuencial de una función  $f(t)$  a la frecuencia  $\omega = \omega_0$  y al tiempo  $t = t_0$ , es capturada por el valor  $(T_g f)(\omega_0, t_0)$ . En la práctica se puede

pensar la TFV como una TF con una ventana temporal  $g(t)$  sobre un pequeño intervalo centrado en  $t = b$ , tal que al desplazar esta ventana a lo largo de toda la señal se obtiene la variación de la información frecuencial en el tiempo. Esto es lo que permite localizar la información que da la señal tanto en frecuencia como en tiempo, resultando de gran utilidad en el estudio de señales no-estacionarias.

Así pues, se ha obtenido la deseada  $t$ -localización, pero al precio de una transformación más complicada. Nótese que, mientras la transformada de Fourier es no redundante, la TFV es redundante y mapea una función de una variable  $t$  en una función de dos variables  $(\omega, b)$ . Esto incrementa la complejidad computacional de los algoritmos involucrados en la aplicación de la transformada y su inversa. Otra desventaja de la TFV es que el tamaño de las ventanas  $g(t - b)$  es fijo. Como consecuencia, la resolución de la TFV estará limitada por la dificultad de distinguir entre eventos sucesivos separados por una distancia menor que el ancho de la ventana.

### 3.3 Transformada de Gabor

Para evitar el problema de la aparición de frecuencias espúreas al utilizar una ventana rectangular, Gabor propuso originalmente usar una ventana gaussiana del tipo  $g_D(t) \equiv e^{-t^2/2D^2}$ , donde  $D$  es el ancho de la gaussiana [26]. De esta manera, la transformada de Gabor es similar a la TFV con ventana cuadrada pero, puesto que la Transformada de Fourier de una gaussiana es otra gaussiana, se evita la introducción de frecuencias espúreas en el análisis. Por otro lado la propiedad de la función gaussiana es que, respecto de otras funciones, presenta un área mínima en el plano tiempo-frecuencia, y esto proporciona una óptima localización de la señal a analizar en dicho espacio [26, 27, 66]. Teniendo en cuenta la ecuación (3.7), la Transformada de Gabor de una función  $f(t)$ , que se denotará por  $(\mathbf{G}_D f)(\omega, b)$  se define por:

$$(\mathbf{G}_D f)(\omega, b) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_D(t - b) e^{-i\omega t} dt, \quad (3.8)$$

donde  $g_D(t - b)$  es la ventana temporal gaussiana centrada en  $b$  y ancho fijo  $D$ .

Para reducir la complejidad de los algoritmos es conveniente muestrear las variables  $\omega$  y  $b$  sobre una grilla discreta. Se define la Transformada de Gabor Generalizada (TGG) eligiendo como valores de referencia a las variables discretas, a  $\omega_m = m \cdot \omega_0$ ,  $b_n = n \cdot b_0$ , con  $m, n \in \mathcal{Z}$ . Esta transformada,  $(\mathbf{G}_D f)(m, n)$ , usa como funciones de referencia al conjunto

$$\mathcal{Q} = \{ g_{m,n}(t) = g(t - n \cdot b_0) e^{i m \omega_0 t}; (m, n) \in \mathcal{Z}^2 \}, \quad (3.9)$$

y está definida por:

$$(\mathbf{G}_D f)(m, n) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) g_D(t - b_n) e^{-i\omega_m t} dt. \quad (3.10)$$

Bajo condiciones apropiadas sobre  $g(t)$ , la reconstrucción es estable y se puede realizar aplicando la expresión (a menos de algún factor de normalización)

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{(m,n) \in \mathcal{Z}^2} (\mathbf{G}_D f)(m, n) g_{m,n}(t) \\ &= \sum_{(m,n) \in \mathcal{Z}^2} \langle f(t), g_{m,n}(t) \rangle g_{m,n}(t). \end{aligned} \quad (3.11)$$

Esta expresión puede interpretarse como una descomposición discreta de la función  $f(t)$  en términos de las funciones  $g_{m,n}(t)$ .

Como en el caso de la TFV, la ventana que utiliza la transformada de Gabor es de ancho fijo, limitando así también el tamaño de las estructuras a ser resueltas. Es decir, no puede distinguir eventos sucesivos que estén separados por distancias más pequeñas que el ancho  $D$  de la ventana móvil.

### 3.4 Transformada Wavelet

Al abordar el estudio de una onda neuroeléctrica, registrada en un EEG con arreglos de múltiples electrodos, se debe tener en cuenta que su contenido frecuencial varía en el curso del tiempo y a lo largo de diferentes sitios sobre la superficie ósea. En este sentido, el rasgo característico de tal conjunto de datos es su no estacionariedad en tiempo y espacio. Más aún, los componentes y eventos que interesan desde el punto de vista médico tienden a ser transitorios (localizados en el tiempo), predominantes sobre ciertas regiones específicas de la superficie craneana (localizados en el espacio), y restringidos a determinados rangos en las frecuencias temporal y espacial (localizados en escala).

La transformada wavelet es una herramienta que corta datos o funciones u operadores en sus diferentes componentes frecuenciales, y luego estudia cada componente con una resolución que se corresponde con su escala. Es decir, el análisis en el plano tiempo (espacio)–escala se completa con una idea básica y de fundamental importancia para abordar el estudio de señales no estacionarias, como los EEGs: analizar de acuerdo a escala.

En el análisis wavelet la escala que se utiliza para “mirar” el conjunto de datos juega un rol esencial. Los algoritmos wavelets procesan los datos a diferentes escalas o resoluciones. Esto significa que, si se “mira” una señal con una gran “ventana” se pueden notar características gruesas. En cambio, utilizando una pequeña “ventana” se evidencian rasgos más finos, de detalle. Es posible expresar esta característica diciendo que el análisis wavelet permite ver, ambos, el bosque y los árboles que lo componen.

La principal ventaja del análisis wavelet es que permite la descomposición exacta de ondas neuroeléctricas en un conjunto de ondas llamadas funciones de detalle. Estas funciones de detalle pueden aislar todas las escalas de la estructura de la onda, desde el

mayor al más pequeño patrón de variación en tiempo y espacio, que esté disponible en el conjunto de datos, EEG. Entonces, el análisis wavelet provee un control flexible sobre la resolución con la cual se pueden localizar los componentes y eventos neuroeléctricos en tiempo, espacio y escala. Este control sobre la resolución se traslada directamente en un aumento potencial del análisis estadístico y una sustancial mejora en las técnicas de procesamiento digital para detectar y aislar eventos experimentales y clínicos tales como espigas epileptogénicas, componentes ERP funcionales y ritmos neuroeléctricos funcionales.

A continuación se describen las características de las wavelets y su dependencia con el tiempo, ya que es el plano de interés para estudiar las señales que nos ocupan. El dominio temporal de las wavelets es simplemente el de las funciones de tiempo de amplitud oscilante. De hecho las wavelets deben satisfacer ciertas condiciones, una wavelet debe tener:

- amplitud media igual a cero (o lo que es lo mismo  $\hat{\psi}(0) = 0$ , lo cual implica que  $\psi$  debe oscilar);
- energía finita en todo el dominio temporal;
- relativamente poca energía de más baja frecuencia comparada con su energía en las frecuencias más altas.

A diferencia del análisis de Fourier, que utiliza ondas senos y cosenos localizadas en frecuencia pero extendidas infinitamente en el tiempo, las wavelets están relativamente localizadas en tiempo y frecuencia. Ellas tienen grandes amplitudes fluctuantes durante un restringido período de tiempo y tienen muy baja amplitud o cero fuera de este dominio temporal. Además, las wavelets son de bandas limitadas, es decir, están compuestas no por una, sino por un rango relativamente limitado de varias frecuencias.

Las operaciones de translación y de cambio de escala son básicas en la representación wavelet. El conjunto de todas las wavelets “escaleadas” y trasladadas a partir de la misma forma wavelet básica (wavelet madre) forma una familia wavelet. Hay un número infinito de wavelets en una familia wavelet puesto que hay, en principio, un número infinito de escalas y translaciones temporales para toda wavelet.

Las representaciones wavelet proveen medidas precisas de cuando y en qué grado ocurren los eventos transitorios y componentes en una onda neuroeléctrica y cuando y cómo, el contenido frecuencial de dicha onda cambia en el tiempo. Además una vez computada, la representación wavelet de una onda neuroeléctrica es invertible, es decir que, se puede reconstruir la forma de onda original a partir del conjunto de coeficientes que captan toda la información temporal y frecuencial de la onda. Esto lleva a importantes aplicaciones para este tipo de señales: filtrado del ruido, pre-procesamiento de datos, compresión de ondas, detección de transitorios y espigas, detección de componentes y potenciales de eventos relacionados (ERP) y análisis tiempo-escala. Las aplicaciones enumeradas están sustentadas básicamente en la posibilidad de las wavelets de analizar

la estructura de la onda neuroeléctrica en toda las escalas contenidas en el conjunto de datos experimentales. En el caso de las ondas EEG las técnicas de análisis tradicionales están sesgadas hacia la medición de estructuras de gran escala (bajas frecuencias).

Tal como se vió previamente, la TF separa la onda en una serie de componentes frecuenciales que pueden ser sumadas en la proporción correcta para reconstruir la forma de onda original. Por consiguiente la TF desconoce toda información temporal, tratando las ondas como si fueran estacionarias. La TFV introduce la posibilidad de ver la variación temporal dependiente en la estructura a distintas escalas por medio de una ventana computada a lo largo de toda la estructura de la onda. Sin embargo, puesto que la ventana es de ancho fijo una buena resolución temporal (espacial) significará pérdida de resolución en frecuencia y viceversa. Esto significa que dada una TFV detectará la estructura temporal variante de una forma de onda a solo una escala temporal.

El análisis wavelet, en cambio, posee la habilidad de optimizar el ancho de la ventana de sus funciones analizantes sobre todo el rango de escalas contenidas en la onda neuroeléctrica. Esto significa que ambas estructuras, de gran y pequeña escala, pueden ser resueltas en un protocolo de análisis eficiente y singular.

A gran escala (bajas frecuencias), la wavelet se alinea con el comienzo de la onda neuroeléctrica y se computa la correlación de la forma de la wavelet con la forma de la onda en esa posición. Esta correlación, conocida como un coeficiente wavelet, mide cuánto de la wavelet a esa escala y posición está incluida en la onda. La misma wavelet es trasladada una cierta cantidad a una posición posterior en el tiempo, brindando una porción levemente diferente de la onda neuroeléctrica a “vista” de la wavelet y así computar un nuevo coeficiente wavelet. Este proceso continúa hasta cubrir todas las translaciones posibles de la wavelet sobre la onda, de manera tal de agotar toda la gran escala y computar todos los coeficientes correspondientes. Normalmente, se computa un coeficiente wavelet de amplitud positiva si coinciden las polaridades; en cambio será negativo si la polaridad está invertida. Por otra parte, si la coincidencia en las formas es pobre el coeficiente será pequeño o cero.

A pequeña escala, el proceso de definición de los coeficientes wavelet es similar. La única diferencia es que la wavelet se contrae en el tiempo para brindar un diferente rango de fluctuaciones de la onda a la “vista” de la wavelet. En este caso la polaridad de las formas se invierten de manera tal que cuando la wavelet es positiva la sección de onda que cubre es de amplitud negativa.

La secuencia de coeficientes wavelets en cada escala representadas en función de la translación en el tiempo generalmente revela dónde ocurren, en aquellas escalas, los distintos eventos del EEG. El éxito analítico de la transformada wavelet al respecto, es que los coeficientes wavelet cuantifican los patrones locales de variación de cada escala separadamente. Estos coeficientes pueden ser evaluados estadísticamente, con respecto a diseños experimentales específicos, a través de métodos standard de pruebas de significancia como técnicas de regresión y análisis de varianza, para aislar el comportamiento de onda funcionalmente significativo en cada escala.

Resumiendo, cuando las wavelets son utilizadas para descomponer una onda neuroeléctrica en pequeñas porciones del espacio tiempo-frecuencia, ajustan su propia ventana en cada escala. En la WT standard, esto significa que el tiempo de resolución mejorará a medida que la escala de análisis sea menor. Esto permite que la WT actúe como un microscopio matemático, focalizando sobre la estructura de pequeña escala para detectar eventos cercanos en tiempo y aumentando el foco en la estructura de gran escala (bajas frecuencias) para observar globalmente el patrón de onda. EL tamaño efectivo variable de la ventana proveen a la WT de la única ventaja frente a la TFV y la TGG. A diferencia de la WT estas transformadas como ya se indicó, utilizan tamaños fijos de ventanas, es decir descomponen toda la estructura (altas y bajas frecuencias) con la misma resolución temporal.

En principio, en un análisis wavelet completo de una onda EEG se deberían usar un número infinito de escalas y posiciones temporales. Esto resultaría en un número infinito de coeficientes wavelet que juntos representarían completamente la onda. Afortunadamente no es necesario computar tal cantidad de coeficientes wavelet para describir una onda neuroeléctrica. Existen varias maneras de computar en la práctica una WT de una serie de datos neuroeléctricos. Dos de los métodos principales son: por computación numérica de la transformada wavelet continua y por la utilización de filtros especialmente diseñados para generar una transformada wavelet discreta altamente eficiente, conocido como análisis en resolución múltiple.

### 3.5 Transformada Wavelet Continua

La transformada wavelet (TW) ofrece una gran libertad en la elección de las funciones de referencia en las cuales se descompone la señal [31, 27, 66]. El conjunto  $\mathcal{Q}$  de estas funciones de referencia también puede ser generado a partir de una única función  $\psi(t)$ , a través de dilataciones (o reducciones) de la misma, pero que a diferencia de la base armónica de Fourier,  $\psi(t)$  no será periódica. Por otra parte, las wavelets son en sí mismas funciones ventana de tamaño variable.

Usualmente a la función  $\psi(t)$  se la denomina *wavelet madre*. A partir de ella se generan las otras wavelets,  $\psi_{a,b}(t)$  con  $a \in \mathcal{R}^+$  y  $b \in \mathcal{R}$ , pertenecientes a la familia a través de dos operaciones claves: *translación en el tiempo* y *cambio de escala*. Si  $a$  y  $b \in \mathcal{Z}$  estas propiedades se pueden ejemplificar por:

- Translación en el tiempo,  $\psi(t) \rightarrow \psi(t-1), \psi(t-2), \dots, \psi(t-b), \dots$
- Cambio de escala,  $\psi(t) \rightarrow \psi(2t), \psi(3t), \dots, \psi(t/a), \dots$

La combinación de translaciones y cambios de escala produce entonces toda una familia de wavelets,  $\psi((t-b)/a) \equiv \psi_{a,b}(t)$  generadas a partir de una única función madre  $\psi(t)$ . Tomando  $\|\psi(t)\| = 1$ , con  $\|\cdot\|$  la norma usual en  $L^2$ , se define la familia de

wavelets (normalizada) del siguiente modo;

$$\psi_{a,b}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) \quad (3.12)$$

la cual se obtiene trasladando y dilatando (o contrayendo) a la función  $\psi(t)$ . Esto es lo que dará lugar al llamado análisis en resolución múltiple, el cual permite obtener resultados que superan en general a los brindados por Gabor. En este sentido, la TW adapta su ventana temporal a las circunstancias, dilatando el tiempo para poder observar las bajas frecuencias y contrayéndolo para detectar las altas.

Si se usan como funciones de referencia

$$\mathcal{Q} = \{ \psi_{a,b}(t) = a^{-1/2} \psi((t-b)/a); (a,b) \in (0, \infty) \times \mathcal{R} \}, \quad (3.13)$$

y dada una señal  $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$ , la Transformada Wavelet Continua (TWC) se define por

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(a,b) &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{|a|}} \langle f(t), \psi_{a,b}(t) \rangle \end{aligned} \quad (3.14)$$

en que  $\psi_{a,b}(t) = \psi((t-b)/a)$  y  $\langle \bullet, \bullet \rangle$  es el producto interno en  $L^2(\mathcal{R})$ .

La función wavelet madre  $\psi(t) \in L^2(\mathcal{R})$  debe cumplir las siguientes condiciones: *a)* estar bien localizada en el tiempo y *b)* ser una función oscilante. La primera condición determina que la función debe caer rápidamente a cero cuando  $|t| \rightarrow \infty$ . La segunda sugiere que la  $\psi(t)$  vibra como una onda (tipo seno o coseno), pero puesto que está localizada la convierte en una wavelet. Matemáticamente se pide entonces que el valor medio resulte nulo:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) dt = 0. \quad (3.15)$$

Esto marca una diferencia respecto a la TFW, ya que en ella las funciones oscilantes (seno y coseno) son acotadas en el tiempo por la ventana, mientras que la wavelet lleva en sí misma las oscilaciones y los intervalos de tiempo en los que actúa. La condición (3.15) se desprende de una condición más general conocida como condición de admisibilidad:

$$C_\psi = 2\pi \int_0^{+\infty} \frac{|\widehat{\psi}(\omega)|^2}{|\omega|} d\omega < \infty \quad (3.16)$$

y  $\widehat{\psi}(0) = 0$  para que  $C_\psi$  tenga un valor finito. La cual permite recuperar a  $f(t)$  a partir de su transformada  $(W_\psi f)(a,b)$  mediante la fórmula:

$$f(t) = \frac{1}{C_\psi} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^\infty (W_\psi f)(a,b) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) db da, \quad (3.17)$$

que puede verse como la Transformada Wavelet continua Inversa de la función  $f(t)$ . Como el factor de escala  $a$  es proporcional a la inversa de la frecuencia  $\omega$ , el valor de  $(W_\psi f)(a_0, b_0)$  proporciona el contenido frecuencial de  $f(t)$  en el intervalo de frecuencias centrado en  $\omega_0 = a_0^{-1}$  y en el intervalo de tiempo centrado entorno a  $b_0$ .

### 3.6 Transformada Wavelet Discreta

La transformada wavelet continua mapea una función  $f(t)$  de una variable independiente  $t$ , en una función  $(W_\psi f)(a, b)$  de dos variables independientes  $a$  y  $b$ . Desde un punto de vista computacional esta transformación no es eficiente y resulta innecesariamente redundante para muchos propósitos prácticos. Si bien la TWC tiene algunas ventajas, hay muchas aplicaciones donde es deseable un análisis wavelet más eficiente y simple computacionalmente. Tal análisis, conocido como transformada wavelet discreta (TWD), fue introducido por Mallat en 1989 [33]. La aplicación TWD resulta en una representación wavelet no-redundante y altamente eficiente que puede ser implementada, por ejemplo, con un simple esquema recursivo de filtros. Su eficiencia radica en que, a diferencia de la TWC que produce miles de coeficientes para una simple onda neuroeléctrica, la TWD produce solo tantos coeficientes como muestras hay en la serie de datos u onda original (es decir, 256 coeficientes para una onda representada por 256 muestras).

Es posible para las wavelets,  $\psi$ , cumplir con la propiedad de ortogonalidad en el espacio asociado  $L^2(\mathcal{R})$ . Esto significa que un subconjunto de una dada familia wavelet puede ser elegido de modo tal que ninguna de las wavelets escaleadas y trasladadas en el subconjunto correlaciona con alguna otra. Tal subconjunto se dice forma una base ortogonal para representar funciones reales tales como las ondas neuroeléctricas.

El primer paso hacia la TWD es la discretización de los parámetros a través del muestreo de la TWC en una grilla bidimensional. Una elección natural es  $a = a_0^m$  con  $m \in \mathcal{Z}$ , en que  $a_0 \neq 1$  es el paso fijo de la dilatación. Por conveniencia se elige  $a_0 > 1$ , aunque esto no es necesario ya que para la potencia  $m$  se pueden tomar tanto valores positivos como negativos. Para  $m = 0$ , es conveniente discretizar el parámetro  $b$  de las traslaciones por múltiplos (positivos o negativos) de un valor fijo  $b_0$ , el cual arbitrariamente se fija como  $b_0 > 0$ . El valor  $b_0$  se elige de modo tal que  $\psi(t - n \cdot b_0)$  "cubra" todo el rango de variación de  $t$  (eje  $t$ ). Para  $m \neq 0$  el ancho de  $a_0^{m/2} \psi(a_0^m \cdot t)$  es  $a_0^m$  veces el ancho de  $\psi(t)$ , con lo cual si se elige  $b = n \cdot b_0 \cdot a_0^m$  se asegura que la wavelet discretizada al nivel  $m$  "cubre" todo el eje en la misma forma que  $\psi(t - n \cdot b_0)$  lo hace. La apropiada elección de los valores  $a_0$  y  $b_0$  depende, por supuesto, de la elección de la wavelet madre  $\psi$ .

Luego si se elige  $a = a_0^m$  y  $b = n \cdot b_0 \cdot a_0^m$  con  $n, m \in \mathcal{Z}$  y  $a_0 > 1$ ,  $b_0 > 0$  fijos. Entonces el conjunto de funciones  $\psi_{m,n}$  dado por

$$\mathcal{Q} = \{ \psi_{m,n}(t) = a_0^{-m/2} \psi(a_0^{-m} \cdot t - n \cdot b_0); (m, n) \in \mathcal{Z}^2; a_0 > 1, b_0 > 0 \} \quad (3.18)$$

define la transformada wavelet discreta (TWD) para la señal de energía finita  $f(t) \in L^2(\mathcal{R})$  a través del producto interno normalizado

$$\begin{aligned} (W_\psi f)(m, n) &= \frac{1}{\sqrt{a_0^m}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*(a_0^{-m} \cdot t - n \cdot b_0) dt \\ &= \langle f(t), \psi_{m,n}(t) \rangle . \end{aligned} \quad (3.19)$$

Resulta ahora de interés preguntarse si:

- Los coeficientes  $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$  de la wavelet discreta caracterizan en forma completa a  $f$  ?. Es decir, en una forma más restrictiva, se puede reconstruir  $f$  en una forma numérica estable a partir de los coeficientes  $\langle f, \psi_{m,n} \rangle$  ?.
- Puede cualquier función  $f$  ser descripta como una superposición de los “ladrillos de construcción básicos”  $\psi_{m,n}$  ?. Puede escribirse un algoritmo fácil para encontrar los coeficientes de tal superposición ?.

En el presente trabajo, se utilizará la discretización diádica, es decir se fijan  $a_0 = 2$  y  $b_0 = 1$ . Luego el ancho de la wavelet  $\psi_{m,n}(t)$  es  $2^m$  veces el ancho de la wavelet madre  $\psi(t)$  y por lo tanto, su frecuencia será  $2^m$  veces menor. Por otra parte, la elección de la discretización del parámetro  $b$  por  $b_{m,n}$  es tal que, pasos pequeños se correlacionan con wavelets estrechas (altas frecuencias) y pasos grandes con wavelets más anchas (frecuencias bajas). Dicho de otro modo, las escalas pequeñas están correlacionadas con altas frecuencias y viceversa. Luego, para esta elección de los parámetros  $a_0 = 2$  y  $b_0 = 1$ , la ec. (3.19) define la Transformada Wavelet Diádica Discreta (TWDD),

$$(W_\psi f)(m, n) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^*(2^{-m} \cdot t - n) dt . \quad (3.20)$$

Siendo  $\psi$  una función wavelet admisible (cumple con la condición de admisibilidad dada por la ec. (3.16)) y para elecciones particulares de ésta,  $\psi_{m,n} = 2^{-m/2} \psi(2^{-m/2} \cdot t - n)$ , es posible responder en forma afirmativa a las dos preguntas anteriores. Las respuestas a estas preguntas están dadas por el análisis en resolución múltiple, que será descripto en la siguiente sección.

En particular y para las funciones wavelet utilizadas en este trabajo,  $\psi(t)$  es admisible y además constituyen una base ortonormal en  $L^2(\mathcal{R})$ , luego la transformada wavelet diádica discreta puede ser invertida y lo que se obtiene es la reconstrucción estable:

$$f(t) = \sum_{(m,n) \in \mathcal{Z}^2} c_{m,n} \psi_{m,n}(t) , \quad (3.21)$$

donde  $c_{m,n} = \langle f, \psi_{m,n} \rangle$  son los coeficientes wavelet asociados de la TWDD dados por la ec. (3.20).

### 3.7 Análisis en Resolución Múltiple

El análisis en resolución múltiple de  $L^2(\mathcal{R})$  consiste de una secuencia de sucesivos espacios de aproximación  $V_j$  con  $j \in \mathcal{Z}$ . Luego  $j$  representa los sucesivos niveles de aproximación y  $V_j$  el correspondiente subespacio cerrado asociado. Más precisamente los subespacios cerrados  $V_j$  satisfacen las siguientes propiedades

$$\cdots V_2 \subset V_1 \subset V_0 \subset V_{-1} \subset V_{-2} \subset \cdots \quad (3.22)$$

con

$$V_{-\infty} = \text{Clausura}_{L^2(\mathcal{R})} \left[ \bigcup_{j \in \mathcal{Z}} V_j \right] = L^2(\mathcal{R}), \quad (3.23)$$

$$V_{\infty} = \bigcap_{j \in \mathcal{Z}} V_j = \{0\}. \quad (3.24)$$

En este trabajo se seguirá la notación dada por Daubechies [31], luego el orden de los subespacios anillados implica que, cuanto más negativo es el índice, mayor es el espacio.

Si denotamos por  $P_j$  al operador proyección en el espacio  $V_j$ , luego (3.23) asegura que

$$\lim_{j \rightarrow -\infty} P_j f = f \quad \forall f \in L^2(\mathcal{R}). \quad (3.25)$$

Existen muchos espacios anillados que satisfacen las ecuaciones (3.22) y (3.23) que no tienen ninguna relación con la “resolución múltiple”. La propiedad de resolución múltiple es una consecuencia del requerimiento adicional

$$f(x) \in V_j \iff f(2^j x) \in V_0, \quad (3.26)$$

lo cual implica que todos los espacios son versiones escaleadas del espacio central  $V_0$ .

Otra propiedad que se requiere para el análisis de resolución múltiple es

$$f(x) \in V_0 \implies f(x - n) \in V_0 \quad \forall n \in \mathcal{Z}, \quad (3.27)$$

que expresa la invarianza de  $V_0$  bajo una traslación entera. Además la ec. (3.26) implica que si  $f \in V_j$ , luego  $f(x - 2^j n) \in V_j, \forall n \in \mathcal{Z}$ .

Finalmente se requiere que exista una función  $\phi \in V_0$ ,

$$\phi_{j,n}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - n) \quad \forall j, n \in \mathcal{Z}$$

tal que

$$\{\phi_{0,n}; n \in \mathcal{Z}\} \text{ es una base ortonormal de } V_0. \quad (3.28)$$

La condición anterior conjuntamente con (3.26) implican que  $\{\phi_{j,n}; n \in \mathcal{Z}\}$  es una base ortonormal de  $V_j$  para todo  $j \in \mathcal{Z}$ . Este último requerimiento, expresado por ec. (3.28), puede parecer un tanto más “restrictivo” que los anteriores, sin embargo puede relajarse considerablemente [31, 27, 66].

El dogma básico del análisis de resolución múltiple es: siempre que una colección de subespacios cerrados satisface las ecuaciones (3.22) a (3.28), luego existe una base wavelet ortonormal  $\{\psi_{j,k}; j, k \in \mathcal{Z}\}$  de  $L^2(\mathcal{R})$  con  $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2} \phi(2^{-j}x - k)$ , tal que para toda  $f \in L^2(\mathcal{R})$

$$P_{j-1} f = P_j f + \sum_{k \in \mathcal{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}, \quad (3.29)$$

donde  $P_j$  es el operador proyección ortogonal en el espacio  $V_j$ .

Sea  $W_j$  con  $j \in \mathcal{Z}$ , el complemento ortonormal de  $V_j$  en  $V_{j-1}$ . Luego se tendrá

$$V_{j-1} = V_j \oplus W_j \quad \forall j \in \mathcal{Z} \quad (3.30)$$

y

$$W_j \perp V_{j'} \quad \forall j \neq j' \in \mathcal{Z} \quad (3.31)$$

donde  $\oplus$  simboliza la suma directa entre ambos espacios y  $\perp$  indica que son perpendiculares (ortogonales). Si  $j > j'$ , la ec. (3.31) implica que  $W_{j'} \subset V_j \perp W_j$ . Luego se sigue que para todo  $j < J$

$$V_j = V_J \bigoplus_{k=0}^{J-j-1} W_{J-k} \quad (3.32)$$

donde todos los subespacios involucrados son ortogonales. En virtud de (3.23) y (3.24), esta última expresión implica que

$$L^2(\mathcal{R}) = \bigoplus_{j \in \mathcal{Z}} W_j, \quad (3.33)$$

lo cual representa la decomposición de  $L^2(\mathcal{R})$  en subespacios mutuamente ortogonales  $W_j$ . Además, los espacios  $W_j$  heredan la propiedad de escala (ec. (3.26)) de  $V_j$ , es decir

$$f(x) \in W_j \iff f(2^j x) \in W_0. \quad (3.34)$$

La ec. (3.29) es equivalente a decir que para  $j$  fijo,  $\{\psi_{j,k}; k \in \mathcal{Z}\}$  constituye una base ortonormal para  $W_j$ . Debido a lo expresado por (3.33) y las ecuaciones (3.23), (3.24), esto último automáticamente implica que la entera colección  $\{\psi_{j,k}; k \in \mathcal{Z}\}$  es una base ortonormal para  $L^2(\mathcal{R})$ . Por otro lado, la ec. (3.34) asegura que si  $\{\psi_{0,k}; k \in \mathcal{Z}\}$  es una base ortonormal para  $W_0$ , luego  $\{\psi_{j,k}; k \in \mathcal{Z}\}$  será además una base ortonormal para  $W_j$ , para algún  $j \in \mathcal{Z}$ . Luego la tarea se reduce a encontrar  $\psi(x) \in W_0$  tal que  $\psi(x - k)$  constituya una base ortonormal para  $W_0$ .

Resumiendo, dado un análisis en resolución múltiple de  $L^2(\mathcal{R})$ , se puede construir la wavelet básica  $\psi$  tal que  $\{\psi_{j,k}; k \in \mathcal{Z}\}$  es una base ortogonal para  $W_j$ ,  $\forall j \in \mathcal{Z}$ , y  $\{\psi_{j,k}; k \in \mathcal{Z}\}$  es una base ortonormal de  $L^2$ , donde  $\psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k) \forall j, k \in \mathcal{Z}$ . Esto es demostrado por el siguiente teorema [31, 27].

**TEOREMA:**

Si una secuencia de espacios cerrados  $\{V_j\}_{j \in \mathcal{Z}}$  de  $L^2(\mathcal{R})$  satisface las siguientes propiedades:

- $V_j \subset V_{j-1} \quad \forall j \in \mathcal{Z}$   
(Propiedad de anillado);
- $V_{-\infty} = \text{Clausura}_{L^2(\mathcal{R})} \left[ \bigcup_{j \in \mathcal{Z}} V_j \right] = L^2(\mathcal{R})$   
(Densidad de la unión en  $L^2(\mathcal{R})$ );
- $V_{\infty} = \bigcap_{j \in \mathcal{Z}} V_j = \{0\}$ ;
- $f(x) \in V_j \iff f(2^j x) \in V_0$   
(Propiedad de escala);
- $f(x) \in V_0 \implies f(x - n) \in V_0 \quad \forall n \in \mathcal{Z}$   
(Invarianza bajo traslaciones enteras);
- $\exists \phi \in V_0$  tal que es una base ortonormal de  $V_0$ , donde  $\phi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\phi(2^{-j}x - k) \quad \forall j, k \in \mathcal{Z}$   
(Existencia de la función de escala);

entonces, la secuencia  $\{V_j\}_{j \in \mathcal{Z}}$ , es una aproximación en resolución múltiple de  $L^2(\mathcal{R})$ .

Luego,

$$\exists \phi \in L^2(\mathcal{R}) \quad \text{tal que} \quad \{ \psi_{j,k} : \psi_{j,k}(x) = 2^{-j/2}\psi(2^{-j}x - k) \forall j, k \in \mathcal{Z} \}$$

es una base ortonormal de  $L^2(\mathcal{R})$  tal que

$$P_{j-1} = P_j + \sum_{k \in \mathcal{Z}} \langle \bullet, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \quad \forall j \in \mathcal{Z}.$$

Una posibilidad para la construcción de la wavelet  $\psi$  es:

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{i\xi/2} m_0^*(\xi/2 + \pi) \hat{\phi}(\xi/2) \quad (3.35)$$

en que

$$m_0(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{in\xi} \quad (3.36)$$

con

$$h_n = \langle \phi, \phi_{-1,n} \rangle \quad (3.37)$$

y

$$\sum_{n \in \mathcal{Z}} |h_n|^2 = 1; \quad (3.38)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} \psi &= \sum_n (-1)^{n-1} h_{-n-1}^* \phi_{-1,n} \\ \psi(x) &= \sqrt{2} \sum_n (-1)^{n-1} h_{-n-1}^* \phi(2x-n) \end{aligned} \quad (3.39)$$

con la convergencia de la última serie en el sentido usual en  $L^2$ .

Nótese que  $\psi$  no está determinada en forma unívoca por los anillados del análisis en resolución múltiple y del requerimiento dado por la ec. (3.35). Si  $\psi$  cumple con (3.35), luego también lo hará cualquier función  $\psi^\#$  de la forma

$$\widehat{\psi}^\#(\xi) = \rho(\xi) \widehat{\psi}(\xi) \quad (3.40)$$

con  $\rho$ ,  $2\pi$ -periódica y  $\|\rho(\xi)\| = 1$ . En particular, se puede elegir  $\rho(\xi) = \rho_0 e^{i m \cdot \xi}$  con  $m \in \mathcal{Z}$  y  $|\rho_0| = 1$ , la cual corresponde a un cambio de fase y a una translación  $m$  para  $\psi$ . Utilizando esta libertad para definir  $\psi$  (en lugar de (3.39)) por

$$\psi = \sum_n g_n \phi_{-1,n} \quad \text{con} \quad g_n = (-1)^n h_{-n+1}^*. \quad (3.41)$$

El análisis de resolución múltiple conduce naturalmente a un esquema jerárquico y rápido para el cálculo de los coeficientes wavelet de una dada función. Supóngase que la secuencia  $\{ \langle f, \phi_{j,k} \rangle \}_{k \in \mathcal{Z}}$  para  $f \in L^2(\mathcal{R})$  y para algún  $j \in \mathcal{Z}$ , fue calculada o ha sido dada. Mediante un cambio de unidades de escala (reescalando  $f$ ) se puede asumir  $j = 0$ , es decir que

$$\langle f, \phi_{j,k} \rangle \mapsto \langle f, \phi_{0,k} \rangle \quad \forall k \in \mathcal{Z}.$$

Luego la secuencia de coeficientes wavelets  $\{ \langle f, \psi_{j,k} \rangle \}_{k \in \mathcal{Z}} \forall j \geq 1$  puede ser evaluada.

Primeramente, por ec. (3.41) se tenía

$$\psi = \sum_n g_n \phi_{-1,n},$$

donde  $g_n = \langle \psi, \phi_{-1,n} \rangle = (-1)^n h_{-n+1}$ . Luego

$$\begin{aligned} \psi_{j,k} &= 2^{-j/2} \psi(2^{-j}x - k) = \\ &= 2^{-j/2} \sum_{n \in \mathcal{Z}} g_n 2^{1/2} \phi(2^{-j+1}x - 2k - n) = \\ &= \sum_{n \in \mathcal{Z}} g_n \phi_{j-1, 2k+n}(x) = \\ &= \sum_{n \in \mathcal{Z}} g_{n-2k} \phi_{j-1,n}(x), \end{aligned} \quad (3.42)$$

por lo tanto

$$\langle f, \psi_{1,k} \rangle = \sum_{n \in \mathcal{Z}} g_{n-2k}^* \langle f, \phi_{0,n} \rangle \quad \forall n \in \mathcal{Z}. \quad (3.43)$$

En otras palabras, la secuencia  $\{\langle f, \psi_{1,k} \rangle\}_{n \in \mathcal{Z}}$  se obtiene a partir de la convolución de la secuencia  $\{\langle f, \phi_{0,k} \rangle\}_{n \in \mathcal{Z}}$  con la secuencia  $\mathbf{g}^* = \{g_{-n}^*\}_{n \in \mathcal{Z}}$  y reteniendo solo los elementos con índice par en la secuencia resultante.

En forma similar se tiene que

$$\forall j \in \mathcal{Z} \quad \langle f, \psi_{j,k} \rangle = \sum_{n \in \mathcal{Z}} g_{n-2k}^* \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \quad \forall n \in \mathcal{Z}, \quad (3.44)$$

Es decir, por ejemplo, si la secuencia  $\{\langle f, \phi_{j-1,k} \rangle\}_{n \in \mathcal{Z}}$  se conoce, luego la secuencia  $\{\langle f, \psi_{j,k} \rangle\}_{n \in \mathcal{Z}}$  se obtiene por la convolución de la secuencia  $\{\langle f, \phi_{j-1,k} \rangle\}_{n \in \mathcal{Z}}$  con la secuencia  $\mathbf{g}^* = \{g_{-n}^*\}_{n \in \mathcal{Z}}$  y reteniendo solo los elementos con índice par en la secuencia resultante. Más aún, puesto que

$$\begin{aligned} \phi_{j,k}(x) &= 2^{-j} \phi(2^{-j}x - k) = \\ &= \sum_{n \in \mathcal{Z}} h_{n-2k} \phi_{j-1,n}(x) \quad \forall j, k \in \mathcal{Z} \end{aligned} \quad (3.45)$$

se tiene que

$$\forall j \in \mathcal{Z} \quad \langle f, \phi_{j,k} \rangle = \sum_{n \in \mathcal{Z}} h_{n-2k}^* \langle f, \phi_{j-1,n} \rangle \quad \forall n \in \mathcal{Z}. \quad (3.46)$$

Las ecuaciones (3.44) y (3.46) dan origen al siguiente procedimiento para obtener los coeficientes wavelet: a partir de la secuencia de muestreo original  $\{\langle f, \phi_{0,n} \rangle\}_{n \in \mathcal{Z}}$ , se calculan  $\{\langle f, \psi_{1,k} \rangle\}_{j,k \in \mathcal{Z}}$  por medio de (3.44) y  $\{\langle f, \phi_{1,k} \rangle\}_{j,k \in \mathcal{Z}}$  a través de (3.46). Luego se pueden utilizar nuevamente las ecuaciones (3.44) y (3.46) para calcular  $\{\langle f, \psi_{2,k} \rangle\}_{j,k \in \mathcal{Z}}$  y  $\{\langle f, \phi_{2,k} \rangle\}_{j,k \in \mathcal{Z}}$  a partir de  $\{\langle f, \phi_{1,k} \rangle\}_{j,k \in \mathcal{Z}}$ ; etc. Es decir aplicamos el siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccccc} \{\langle f, \phi_{0,n} \rangle\}_{n \in \mathcal{Z}} & \longrightarrow & \{\langle f, \phi_{1,n} \rangle\}_{n \in \mathcal{Z}} & \longrightarrow & \{\langle f, \phi_{j-1,n} \rangle\}_{n \in \mathcal{Z}} & \longrightarrow \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \\ \{\langle f, \psi_{1,n} \rangle\}_{n \in \mathcal{Z}} & & \{\langle f, \psi_{2,n} \rangle\}_{n \in \mathcal{Z}} & & \{\langle f, \psi_{j,n} \rangle\}_{n \in \mathcal{Z}} & \end{array}$$

Luego, si se denotan por

$$d_k^j = \langle f, \phi_{j,k} \rangle \quad (3.47)$$

a los coeficientes de escala y por

$$c_k^j = \langle f, \psi_{j,k} \rangle \quad (3.48)$$

a los *coeficientes wavelet*, entonces las ecuaciones (3.44) y (3.46) se pueden escribir como

$$d_k^j = \sum_{n \in \mathcal{Z}} h_{n-2k}^* d_n^{j-1}, \quad (3.49)$$

$$c_k^j = \sum_{n \in \mathcal{Z}} g_{n-2k}^* d_n^{j-1}. \quad (3.50)$$

Estas a su vez se pueden representar en forma esquemática por

$$d^{j-1} \rightarrow \boxed{H^*} \rightarrow \boxed{2 \downarrow} \rightarrow d^j$$

$$d^{j-1} \rightarrow \boxed{G^*} \rightarrow \boxed{2 \downarrow} \rightarrow c^j$$

Todo el proceso, anteriormente descrito, puede verse como el cálculo de aproximaciones sucesivas, cada vez más gruesas o toscas (“coarser”) de  $f$ , conjuntamente con la diferencia de “información” entre dos niveles sucesivos. En vista de que comenzamos con la escala más refinada de la aproximación de  $f$ , tendremos

$$f^0 = P_0 f \quad (3.51)$$

en que  $P_j$  es la proyección ortogonal de  $L^2(\mathcal{R})$  en  $V_j$ . Similarmente, sea  $Q_j$  la proyección ortogonal de  $L^2(\mathcal{R})$  en  $W_j$ . Luego es posible descomponer

$$f^0 \in V_0 = V_1 \oplus W_1 \quad (3.52)$$

en

$$f^0 = f^1 + \delta^1 \quad (3.53)$$

donde

$$f^1 = P_1 f^0 = P_1 f \quad (3.54)$$

es la siguiente “coarser” aproximación de  $f$  en el análisis en resolución múltiple y

$$\delta^1 = f^0 - f^1 = Q_1 f^0 = Q_1 f \quad (3.55)$$

es lo que se “pierde” en la transición  $f^0 \rightarrow f^1$ . Además, para cada uno de estos espacios  $V_j, W_j$  tenemos bases ortonormales  $\{\phi_{j,k}\}_{k \in \mathcal{Z}}, \{\psi_{j,k}\}_{k \in \mathcal{Z}}$  respectivamente. Luego:

$$f^0 = \sum_{n \in \mathcal{Z}} d_n^0 \phi_{0,n}, \quad (3.56)$$

$$f^1 = \sum_{n \in \mathcal{Z}} d_n^1 \phi_{1,n}, \quad (3.57)$$

$$\delta^1 = \sum_{n \in \mathcal{Z}} c_n^1 \psi_{1,n}. \quad (3.58)$$

Las ecuaciones (3.44) y (3.46) dan el efecto sobre los coeficientes de la transformación ortogonal de la base  $\{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathcal{Z}} \rightarrow \{\phi_{j,k}, \psi_{j,k}\}_{k \in \mathcal{Z}}$  en  $V_0$ , con

$$d_k^1 = \sum_{n \in \mathcal{Z}} h_{n-2k}^* d_n^0, \quad (3.59)$$

$$c_k^1 = \sum_{n \in \mathcal{Z}} g_{n-2k}^* d_n^0. \quad (3.60)$$

Luego, la aproximación

$$f^1 \in V_1 = V_2 \oplus W_2 \quad (3.61)$$

puede ser nuevamente descompuesta en

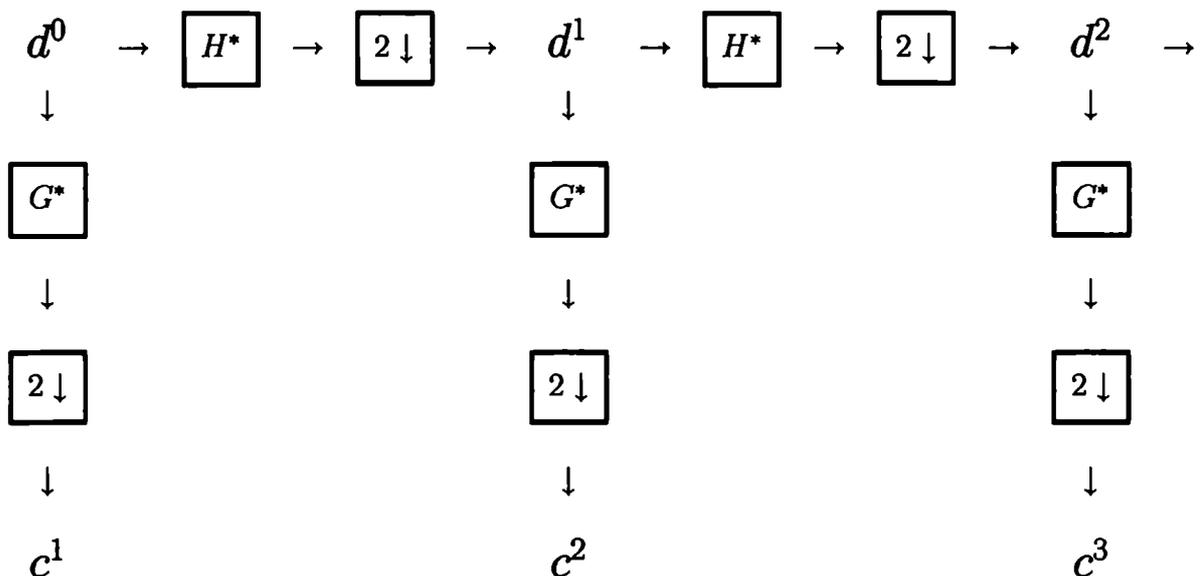
$$f^1 = f^2 + \delta^2 \quad (3.62)$$

con  $f^2 \in V_2$  y  $\delta^2 \in W_2$  y

$$d_k^2 = \sum_{n \in \mathcal{Z}} h_{n-2k}^* d_n^1, \quad (3.63)$$

$$c_k^2 = \sum_{n \in \mathcal{Z}} g_{n-2k}^* d_n^1. \quad (3.64)$$

Así pues, todo el proceso puede ser representado por



En la práctica, el proceso se detiene luego de un número finito de niveles, lo cual quiere decir que se ha re-escrito la información contenida en  $\{\phi_{0,k}\}_{k \in \mathcal{Z}} = c^0$  como  $d^1, d^2, d^3, \dots, d^J$  y una aproximación “coarsed” final  $c^J$ , o sea por  $\{ \langle f, \psi_{j,k} \rangle \}_{k \in \mathcal{Z}, j=1, \dots, J}$  y  $\{ \langle f, \phi_{0,k} \rangle \}_{k \in \mathcal{Z}}$ . Luego

$$\begin{aligned} f &= \sum_{j=1}^J \sum_k c_k^j \psi_{j,k} + f^J \\ &= \sum_{j=1}^J \sum_k c_k^j \psi_{j,k} + \sum_k d_k^J \phi_{J,k} . \end{aligned} \quad (3.65)$$

Si  $J \rightarrow \infty \implies f^J = 0$  en virtud de la propiedad dada por (3.24), obteniendo en esta forma el desarrollo en serie wavelet de  $f$ . Por último, se debe recalcar que el proceso se ha realizado con una sucesión de transformaciones de bases ortonormales, luego la operación inversa es posible y está dada por las matrices adjuntas.

### 3.8 Análisis Wavelet de series temporales 1-D

Los conceptos expresados anteriormente siguen siendo válidos cuando se analiza una señal  $S \in l^2$  de energía finita, obtenida por una sucesión de valores discretos

$$S = \{ s_k; k = 1, \dots, M \} \quad (3.66)$$

de un proceso de medición (serie temporal unidimensional). Es decir, asumimos que la señal de interés está dada en una grilla discreta uniforme, con espaciamiento temporal dado por el tiempo de muestreo  $\Delta t$ .

En el análisis wavelet de la señal discreta  $S \equiv S_0$  se le puede asociar también una sucesión de señales  $S_j$  de resolución cada vez menor a medida que  $j$  aumenta. En el caso discreto entonces, el índice  $j$  solo puede tomar valores  $j \leq \log_2 M$ , con  $M$  número de datos de la serie temporal, pues existe una resolución máxima dada por la serie  $S_0$  o lo que es equivalente, el subespacio que coincide con  $l^2$  que es  $V_0$ .

Entonces, dada la señal  $S = \{s_k\}_{k \in \mathcal{Z}} \in l^2$  se puede escribir su aproximación en el nivel  $j$ ,  $S_j \in V_j$  como combinación lineal de funciones de escala:

$$S_j = \sum_{k=0}^{\infty} \langle S, \phi_{j,k} \rangle \phi_{j,k} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k^j \phi_{j,k} \quad (3.67)$$

en donde,

$$d_k^j = \langle S, \phi_{j,k} \rangle \quad (3.68)$$

son los coeficientes de escala para la serie temporal  $S$ . Los  $S_j$ , para los distintos valores de  $j$ , son las versiones suavizadas de la señal a diferentes niveles de resolución. La diferencia entre dos aproximaciones sucesivas  $S_{j-1}$  y  $S_j$  es lo que se denomina *residual* o *residuo* de la señal. En esta forma, el residuo será la señal que “vive” en el espacio  $W_j$  y por lo tanto se puede escribir como combinación lineal de wavelets:

$$\begin{aligned} S_{j-1} - S_j &= \sum_{k=0}^{\infty} \langle S, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k} \\ r_j &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k^j \psi_{j,k} \end{aligned} \quad (3.69)$$

donde

$$c_k^j = \langle S, \psi_{j,k} \rangle \quad (3.70)$$

son los coeficientes wavelets y la señal original puede luego escribirse como

$$S = \sum_j \sum_{k=0}^{\infty} c_k^j \psi_{j,k} = \sum_j r_j . \quad (3.71)$$

Por otra parte, el mapeo del factor de escala  $a = 2^j$  en la frecuencia  $\omega : a \rightarrow \omega = c2^{-j}$ , permite pensar a  $W_j$  como el espacio que gobierna a la octava  $j$ -ésima en el dominio frecuencial, es decir, pasar de  $2^j$  a  $2^{j+1}$  implica bajar una octava de frecuencias, y desde el punto de vista de los subespacios del análisis en resolución múltiple, implica pasar de la aproximación  $S_j$  a la  $S_{j+1}$ , dejando en el camino al residual  $r_{j+1}$ . El residual del nivel  $j$  está asociado con la banda de frecuencia  $\Delta\omega_j \equiv B_j$ , que se obtiene de la siguiente manera:

$$2^{-(j+1)} \omega_s \leq B_j \leq 2^{-j} \omega_s , \quad (3.72)$$

en que  $\omega_s$  es la frecuencia de muestreo de la señal. De esta manera el análisis wavelet en resolución múltiple permite separar las diferentes bandas de frecuencias involucradas en una señal  $S(t)$ .

En este trabajo se han utilizado funciones spline cúbicas como wavelets madre. Estas funciones son simétricas y combinan una adecuada proporción de suavidad con ventajas numéricas que las hacen las herramientas más recomendables, entre varias alternativas, para representar señales naturales. En la Fig. 3.1 se presenta una función wavelet spline cúbica típica  $\psi$  y la Fig. 3.2 muestra la variación en frecuencia de la amplitud y fase de su transformada de Fourier  $\hat{\psi}$ .

### 3.9 Análisis Wavelet de Series Temporales: Separación de Señales

Las series de tiempo naturales son comúnmente una combinación de comportamientos estocástico (ruido) y caótico. Cuando se intenta abordar el estudio de este tipo de

series, a través de diversos métodos como por ejemplo la dinámica no-lineal, se requiere separar la señal de interés de las señales contaminantes o ruido [46, 47]. Por otra parte, cuando se evalúan los invariantes no-lineales (dimensiones características o exponentes de Lyapunov) el ruido contaminante da resultados espúreos. Los valores obtenidos subestimarán (señales contaminantes con fuertes componentes periódicas o cuasi-periódicas) o sobreestimarán (proceso determinístico de alta dimensionalidad o estocástico) la real complejidad del sistema en estudio. Si el ruido está presente solo en bandas de frecuencias específicas, se pueden implementar procesos de filtrado. Sin embargo, desde el punto de vista de la dinámica no-lineal el proceso de filtrado, podría ser conveniente solo en algunos casos, dependiendo del sistema a ser analizado.

Es importante enfatizar que una señal que no ha sido bien filtrada puede arrojar resultados espúreos, filtrando por ejemplo frecuencias que determinen la verdadera dinámica del sistema. Si bien, filtrado y procesamiento tienen una larga historia en el caso de sistemas lineales, se requieren nuevas técnicas para el análisis de señales generadas por sistemas no-lineales, tales como la actividad eléctrica del cerebro, puesto que los procesos tradicionales de filtrado alteran los invariantes métricos no-lineales [67, 68, 69].

Estos son los puntos principales por los cuales, en el presente trabajo (ver el capítulo 4), se ha utilizado un método de separación de la señal de interés basado en wavelets ortogonales. Se ha tratado de analizar la señal remanente con una modificación mínima de su dinámica asociada. El análisis wavelet es un método que permite, por medio de la introducción de una base apropiada, la caracterización de la señal por la distribución de amplitudes en dicha base. Si se requiere a su vez que las wavelets formen una base ortogonal apropiada, se tendrá la ventaja de que una función arbitraria podrá ser descompuesta en esta base y su decomposición podrá ser invertida [27, 31, 66]. Mallat demostró que en una señal unidimensional el proceso de separación del ruido resulta más eficiente con el método wavelet ortogonal que con el de la transformada de Fourier, ya que las wavelets no cambian la señal original [27]. La principal ventaja del filtrado con wavelets ortonormales es que la morfología de las frecuencias no-filtradas no se ve afectada. Como consecuencia lógica de este hecho, la dinámica asociada a aquellas frecuencias no-filtradas tampoco se modificará.

Así, en aquellos casos en que el filtrado en base a la transformada wavelet pueda ser aplicado se obtendrá una señal más precisa del proceso de interés. Suponiendo, como en el caso de los ataques tónico-clónicos (véase el capítulo siguiente) que estamos interesados en eliminar las señales contaminantes o ruido de alta frecuencia, usando ec. (3.71) al nivel  $j$ , el residuo será una versión suavizada de la señal original, teniendo menos cantidad de frecuencias altas en comparación con el nivel  $j + 1$ . Esta nueva señal tendrá la mitad del número de datos que el nivel previo; por consiguiente, se aplica una interpolación con funciones spline cúbicas a fin de obtener los datos remanentes. Por otro lado, la interpolación con spline cúbicas da una aproximación muy buena y eficiente de la señal física subyacente dada por las muestras experimentales [70]. Este método entonces puede ser utilizado para la separación del ruido en general de la señal original y la señal “limpia” puede obtenerse por sumatoria de las componentes residuales interpoladas, correspondientes a las bandas de frecuencia de interés.

En resumen, el método permite la eliminación de las bandas de frecuencias no deseadas. Debido a la ortogonalidad de las funciones wavelets empleadas se puede asegurar que solamente fueron extraídas las bandas de frecuencias previamente seleccionadas, sin necesidad de asumir la linealidad requerida para realizar el filtrado digital basado en el método tradicional de Fourier.

### 3.10 Análisis Wavelet de Series Temporales: Energía y Entropía Wavelet

Uno de los requerimientos básicos para la aplicación de las herramientas métricas de la dinámica no-lineal (teoría del Caos), es la estacionariedad de la serie temporal bajo análisis. Esto sugiere, a su vez, que la serie represente un atractor único y estable. Por otra parte para la evaluación de la dimensión de correlación  $D_2$  y del máximo exponente de Lyapunov  $\Lambda_{max}$ , puesto que estos cuantificadores son definidos como propiedades asintóticas del atractor, se necesitan registros de significativa duración. Estas condiciones resultan ser restricciones importantes cuando se investigan señales neuroeléctricas como los registros EEG.

Como análisis alternativo surgió la entropía espectral definida a partir del espectro de potencia de Fourier, [71, 72]. La entropía espectral cuantifica el grado de orden/desorden de una señal y es una medida de cuan concentrado o expandido es el espectro de potencia de la misma. Una actividad ordenada, representada por una señal sinusoidal por ejemplo, se manifestará con un pico estrecho en el dominio de frecuencias. Esta concentración del espectro de frecuencias en un solo pico corresponderá a un valor de la entropía bajo. Por otra parte, si se analiza un comportamiento dinámico de actividad totalmente desordenada (generado por un proceso aleatorio o un sistema dinámico caótico), la respuesta será una banda ancha de frecuencias, resultando así con un alto valor de la entropía.

Inouye y colaboradores [73, 74] aplicaron por primera vez la entropía espectral al estudio de señales cerebrales, sin embargo, también en este caso la aplicabilidad del método tiene importantes restricciones. La transformada de Fourier (TF) requiere la periodicidad de la señal y además, no analiza la evolución temporal de los patrones de frecuencia; en consecuencia, la entropía espectral no está definida como una función del tiempo. Estas desventajas pueden ser parcialmente resueltas por el uso de una transformación de Fourier de corto tiempo o transformada de Fourier con ventana (TFV). Powell and Percival [71] definieron un tiempo de evolución de la entropía desde TFV utilizando una ventana Hanning. Con esta aproximación, se aplica la TF a ventanas temporales de unos pocos segundos de duración, de modo tal que los datos son re-definidos con una función apropiada. Luego, la evolución de las frecuencias puede ser seguida y el requisito de estacionariedad parcialmente satisfecho, considerando la señal EEG como casi-estacionaria durante esos segundos. Una limitación crítica aparece, cuando se de-

finen las ventanas de datos, debido al Principio de Incerteza [27, 66]. Si la ventana es muy angosta, la resolución en frecuencia será muy pobre; si la ventana es muy ancha, la localización temporal será menos precisa. Esta limitación resulta importante cuando la señal tiene componentes transitorias localizadas en el tiempo, como es el caso de las series EEG, los registros de potenciales de eventos relacionados (ERP) y potenciales evocados (EP).

Con el objetivo de soslayar las limitaciones especificadas precedentemente, es posible, basándose en la Transformada Wavelet (WT) [21, 34, 35], definir una entropía dependiente del tiempo a partir de la representación en el plano tiempo-frecuencia de la señal. La aplicación de la transformada wavelet discreta ortogonal (ODWT) no requiere la estacionariedad del registro y como único dato de entrada solo se necesita la serie temporal. Así, el tiempo de evolución de los patrones de frecuencias se puede seguir con una óptima resolución tiempo-frecuencia. Luego, la entropía, basada en la WT, da una medida del grado de orden/desorden de la señal y provee además información útil acerca de los cambios dinámicos asociados a ella, con posibilidad de detectarlos y al mismo tiempo cuantificarlos [22, 23, 24, 25].

Puesto que la familia  $\{\psi_{j,k}(t)\}$  es una base *ortonormal* para  $L^2(\mathcal{R})$ , el concepto de energía está ligado con la noción usual derivada de la teoría de Fourier. Luego, si los coeficientes wavelet están dados por  $c_k^j = \langle S, \psi_{j,k} \rangle$ , la energía en cada nivel de resolución  $j = -1, \dots, -N$ , será la energía de la señal residual

$$E_j = \|r_j\|^2 = \sum_k |c_k^j|^2, \quad (3.73)$$

y la energía al tiempo de muestreo  $k$  será

$$E(k) = \sum_{j=-N}^{-1} |c_k^j|^2. \quad (3.74)$$

En consecuencia la energía total podrá ser obtenida por

$$E_{tot} = \|S\|^2 = \sum_{j<0} \sum_k |c_k^j|^2 = \sum_{j<0} E_j. \quad (3.75)$$

Luego, los valores normalizados, los cuales representan la *Energía Wavelet Relativa* (RWE),

$$p_j = E_j / E_{tot} \quad (3.76)$$

para el nivel de resolución  $j = -1, -2, \dots, -N$ , define por escalas la distribución de probabilidad de la energía. Claramente,

$$\sum_{j<0} p_j = 1 \quad (3.77)$$

y, la distribución  $\{p_j\}$  puede ser considerada como una densidad tiempo-escala; que resulta una herramienta adecuada para detectar y caracterizar fenómenos específicos.

La entropía Shannon [75] da un criterio útil para analizar y comparar esta distribución de probabilidad, ya que como se sabe da una medida de la información de toda distribución. Se define entonces la *Entropía Wavelet Total* (SWT) [22, 23, 24, 25] como

$$S_{WT} \equiv S_{WT}(p) = - \sum_{j < 0} p_j \cdot \ln[ p_j ] . \quad (3.78)$$

Una señal periódica monofrecuente (espectro de banda angosto), puede pensarse como representante de un proceso muy ordenado, tendrá una representación wavelet resuelta en un único nivel de resolución. Esto significa que todas las energías wavelet relativas serán prácticamente cero, excepto para el nivel de resolución wavelet que incluye a la frecuencia representativa de la señal. Para este nivel particular, la energía wavelet relativa será casi uno y en consecuencia la entropía wavelet total será cercana a cero o en su defecto tomará un valor muy bajo.

En contraposición se puede pensar en una señal generada por un proceso aleatorio o caótico, como representante de comportamiento muy desordenado. Se espera, en este caso, que sea necesario un número muy grande de frecuencias para representar esta señal (señales con espectro de banda ancha). Este tipo de señales tendrán una representación wavelet con contribuciones significativas en todas las bandas de frecuencias consideradas en su análisis. Más aún, en el caso extremo se podría esperar que todas las contribuciones sean del mismo orden. Consecuentemente, la energía relativa wavelet será casi igual para todos los niveles de resolución y en consecuencia la entropía wavelet tomará su valor máximo. En síntesis, la entropía wavelet total da nueva información acerca de la señal bajo análisis en comparación con la obtenida utilizando análisis de frecuencias y otros métodos standard. De hecho, la SWT es independiente de la amplitud o la energía de la señal.

Supongamos que tenemos dos distribuciones de probabilidad diferentes  $\{p_j\}$  y  $\{q_j\}$ , con  $\sum_j p_j = \sum_j q_j = 1$ . En este caso, estas distribuciones se pueden pensar como representando por escalas la distribución de probabilidad de la energía wavelet para dos segmentos de una señal o para dos señales diferentes. Se define entonces la *Entropía Wavelet Relativa* (SWR) [76, 77] como:

$$S_{WT}(p|q) = \sum_{j < 0} p_j \cdot \ln[ p_j / q_j ] , \quad (3.79)$$

la cual da una medida del grado de similitud entre dos distribuciones de probabilidades. Más precisamente de la distribución  $\{p_j\}$  con respecto a la distribución  $\{q_j\}$  tomada como una distribución de referencia. Nótese que la SWR es positiva y se anula solo si  $p_j \equiv q_j$ .

En la Fig. 3.3 se presentan tres diferentes distribuciones (probabilidades) de energías relativas wavelet correspondientes a cinco niveles de resolución ( $j = -5, \dots, -1$ ). Se puede observar claramente en la figura que **A** y **B** son casi similares y presentan un espectro de banda ancha. Por otra parte, en la distribución **C** se ve una nítida dominancia

del nivel  $j = -2$ . De acuerdo a la descripción previa, se espera para la *Entropía Wavelet Total* la siguiente relación:

$$S_{WT}(\mathbf{A}) \approx S_{WT}(\mathbf{B}) > S_{WT}(\mathbf{C}).$$

Tomando, por ejemplo, la distribución  $\mathbf{A}$  como referencia, se puede esperar que para la *Entropía Wavelet Relativa* :

$$S_{WT}(\mathbf{B}|\mathbf{A}) \simeq 0$$

y

$$S_{WT}(\mathbf{C}|\mathbf{A}) \gg 0.$$

Cuando se utilizan los correspondientes valores numéricos de las distribuciones se obtiene un muy buen acuerdo con las relaciones previamente definidas (ver Fig. 3.3)

Las ecuaciones (3.76) y (3.78) definen cuantificadores basados en transformada wavelet discreta ortogonal (ODWT) muy útiles para el análisis cuantitativo de series EEG (qEEG). A fin de estudiar su evolución temporal, se dividió la señal EEG en ventanas temporales y sin superposición de  $L$  datos de longitud. Para cada intervalo  $i$  ( $i = 1, \dots, N_T$ , con  $N_T = M/L$ ) se evaluó la energía wavelet relativa y la correspondiente entropía wavelet total utilizando (3.76) y (3.78) asignándose el valor obtenido al punto central de la ventana temporal. Dado que se utilizará la decomposición wavelet diádica, al nivel de resolución  $j$  se tendrán la mitad del número de coeficientes wavelet que al nivel anterior, luego la longitud mínima de la ventana temporal será una que incluya al menos un coeficiente wavelet en cada escala.

Formalmente se tendrá que la energía wavelet al nivel de resolución  $j$  para la ventana temporal  $i$  esta dada por

$$E_j^{(i)} = \sum_{k=(i-1) \cdot L+1}^{i \cdot L} |c_k^j|^2 \quad \text{con} \quad i = 1, \dots, N_T. \quad (3.80)$$

Luego la energía wavelet total en esta ventana temporal  $i$  será

$$E_{tot}^{(i)} = \sum_j E_j^{(i)}. \quad (3.81)$$

Definimos así, la evolución temporal de la *Energía Wavelet Relativa* por:

$$p_j^{(i)} = E_j^{(i)} / E_{tot}^{(i)}, \quad (3.82)$$

y para la *Entropía Wavelet Total* y *Relativa* por:

$$S^{(i)} = - \sum_j p_j^{(i)} \cdot \log[ p_j^{(i)} ] \quad (3.83)$$

y

$$S_{WT}^{(i)}(p|q) = \sum_{j<0} p_j^{(i)} \cdot \ln[ p_j^{(i)} / q_j^{(i)} ], \quad (3.84)$$

respectivamente.

### CAPÍTULO 3. ANÁLISIS TIEMPO - FRECUENCIA

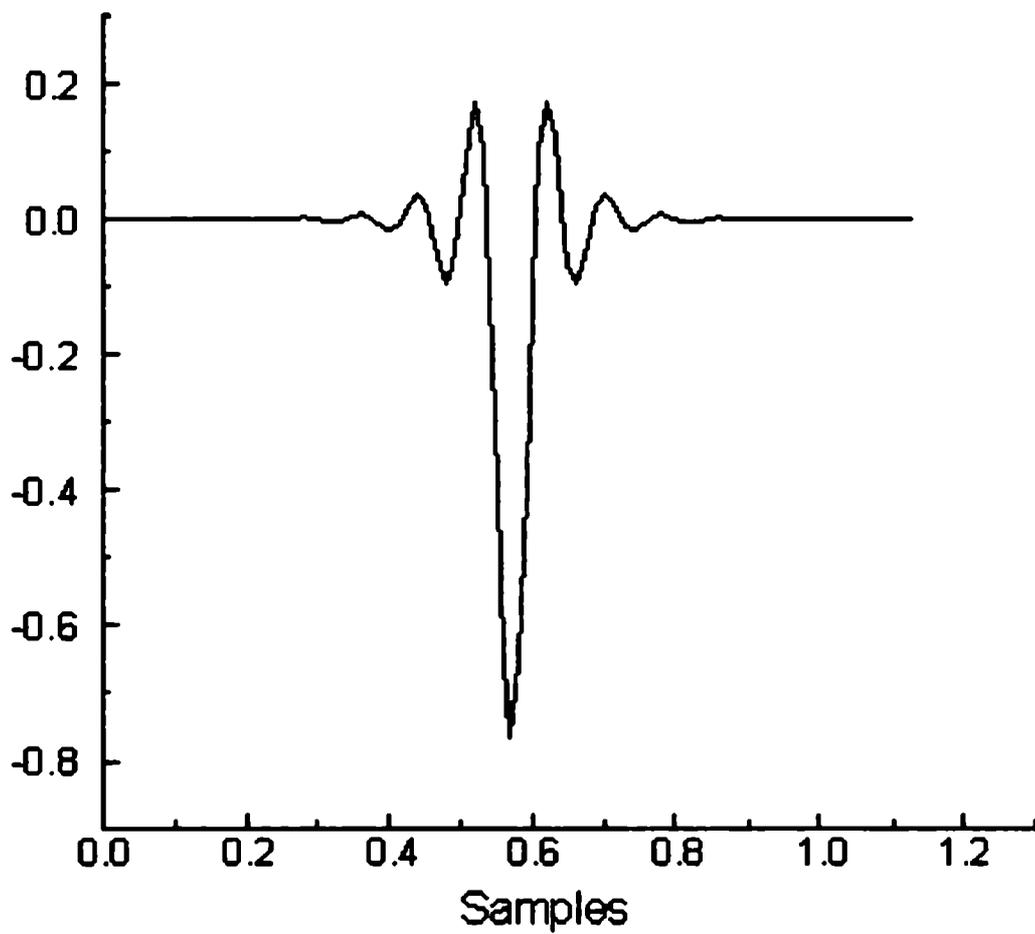


Figura 3.1: FUNCIÓN WAVELET SPLINE CÚBICA  $\psi$  UTILIZADA EN ESTE TRABAJO.

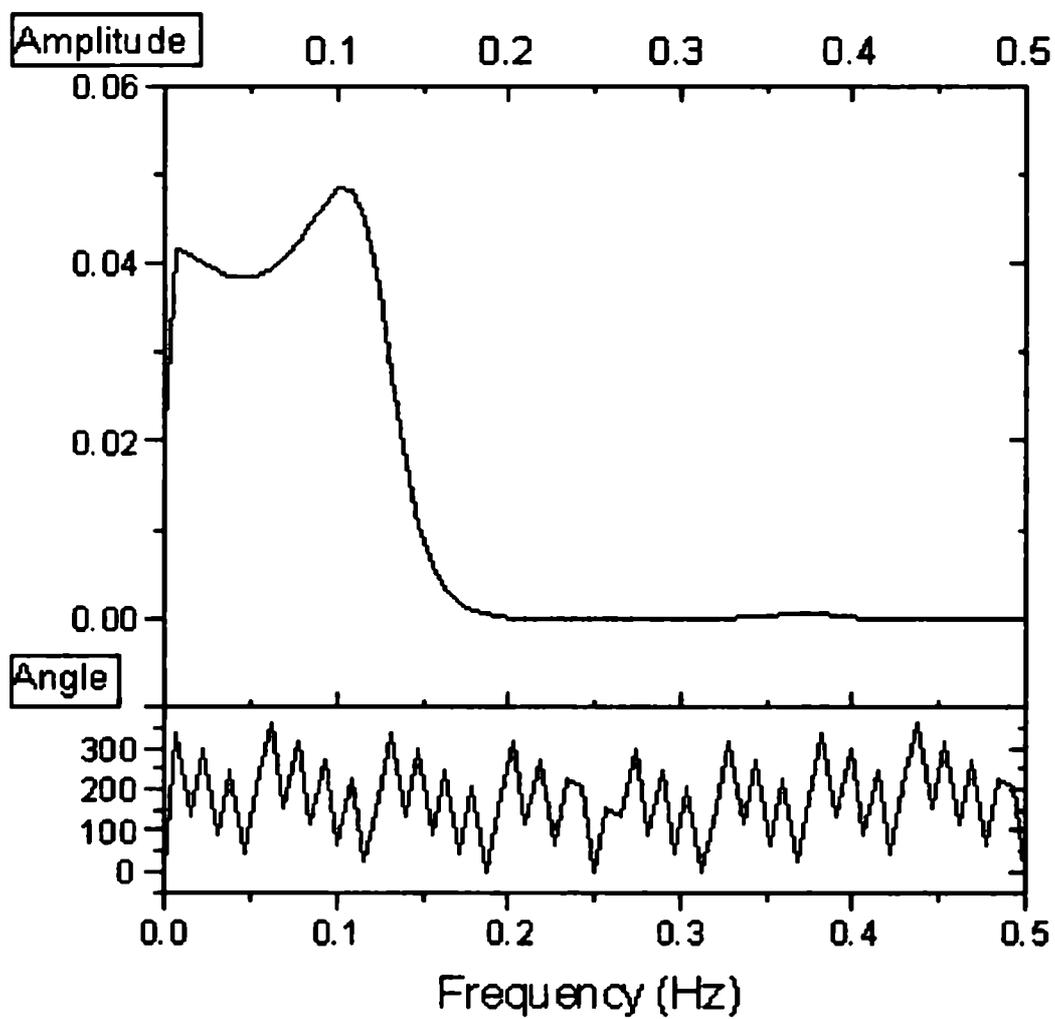


Figura 3.2: AMPLITUD Y FASE DE LA TRANSFORMADA DE FOURIER PARA LA FUNCIÓN WAVELET SPLINE CÚBICA  $\psi$  (VER FIG. 3.1).

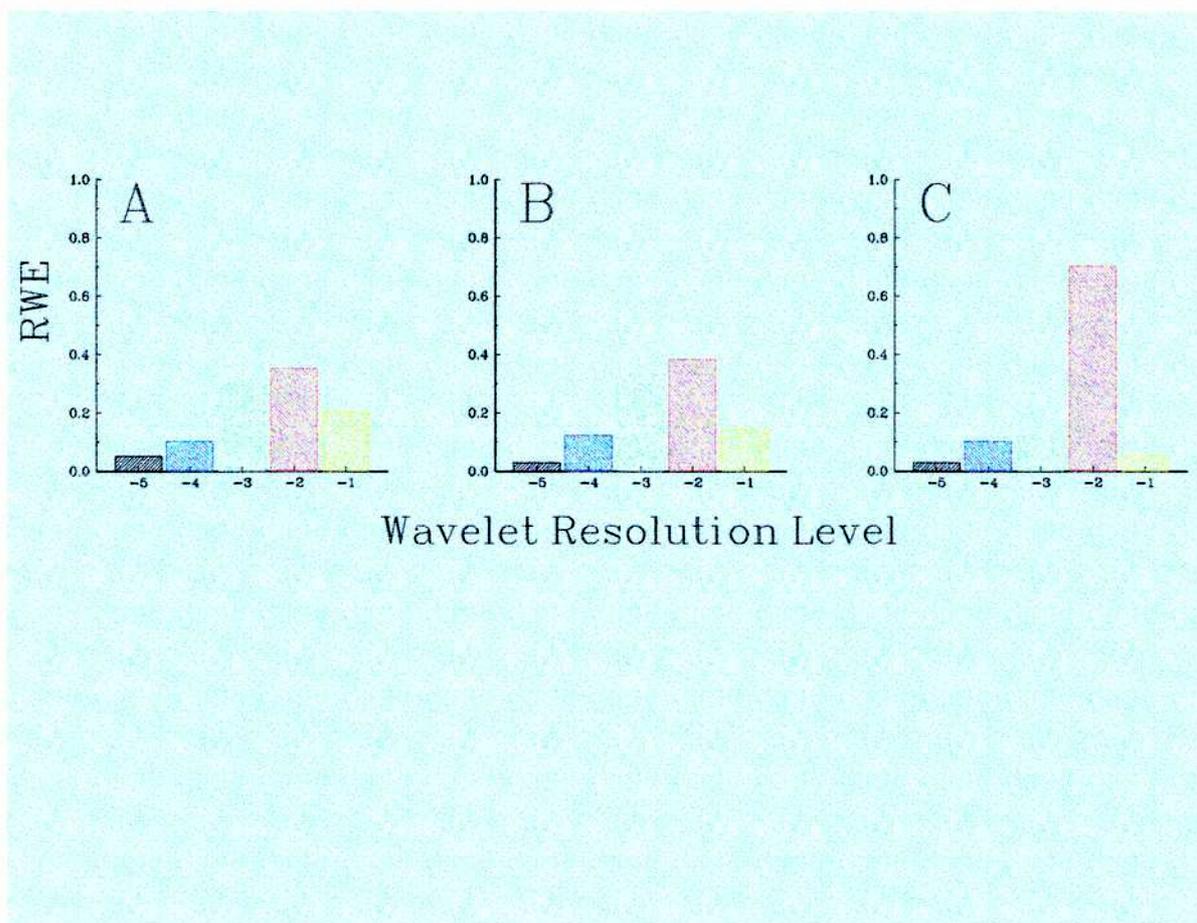


Figura 3.3: DISTRIBUCIONES (PROBABILIDAD) DE ENERGÍA WAVELET RELATIVA (RWE) CORRESPONDIENTES A 5 NIVELES WAVELET DE RESOLUCIÓN ( $j = -5, \dots, -1$ ). DISTRIBUCIÓN **A**:  $\{p_j\} = \{0.05, 0.10, 0.30, 0.35, 0.20\}$ ; **B**:  $\{p_j\} = \{0.03, 0.12, 0.33, 0.38, 0.14\}$ ; **C**:  $\{p_j\} = \{0.03, 0.10, 0.12, 0.70, 0.05\}$ . LOS VALORES DE LA ENTROPÍA WAVELET TOTAL PARA ESTAS DISTRIBUCIONES SON  $S_{WT}(\mathbf{A}) = 1.430$ ,  $S_{WT}(\mathbf{B}) = 1.368$  Y  $S_{WT}(\mathbf{C}) = 0.989$ . TOMANDO LA DISTRIBUCIÓN **A** COMO REFERENCIA, LA ENTROPÍA WAVELET RELATIVA PARA LAS OTRAS DOS DISTRIBUCIONES SON  $S_{WT}(\mathbf{B}|\mathbf{A}) = 0.019$  Y  $S_{WT}(\mathbf{C}|\mathbf{A}) = 0.291$ .

# Capítulo 4

## Aplicaciones a Registros EEG

### 4.1 Series Temporales EEG

El cerebro humano contiene aproximadamente  $10^{10}$  neuronas, unidas entre sí por las llamadas sinapsis que resultan del orden de  $10^{15}$ . Si bien se conoce el funcionamiento de las neuronas aisladamente, poco se sabe sobre su comportamiento en conjunto (redes neuronales). La neurona es la unidad funcional del cerebro, altamente especializada en recibir información y retransmitirla a otras células, nerviosas o musculares. La transmisión se produce a través de la descarga eléctrica originada en las diferencias de potencial entre el cuerpo de la neurona y el espacio extracelular.

La descarga eléctrica de una neurona individual no puede ser registrada en la superficie de la cabeza. En cambio, cuando miles de fibras neuronales se descargan en forma sincrónica, sus potenciales individuales se suman y resultan suficientes para ser registrados en todo el cráneo. Es decir, la intensidad de las ondas cerebrales registradas está determinada por el número de neuronas que descargan en forma sincrónica y no por el nivel total de actividad eléctrica. Si las señales individuales son muy intensas pero no sincrónicas se anulan entre sí y producen solo ondas débiles. Por ejemplo, cuando los ojos están cerrados se produce una descarga sincrónica de muchas neuronas a una frecuencia aproximada de 12 Hz (ondas  $\alpha$ ). Cuando los ojos se abren (aumentando la información que llega al cerebro), la actividad es mayor pero no sincrónica por lo que la amplitud de las señales disminuye notablemente, generando ondas débiles y de frecuencia en general mayor (ondas  $\beta$ ).

El electroencefalograma (EEG) es el registro de estos pequeños potenciales eléctricos, producidos principalmente en las capas corticales más externas del cerebro. La intensidad de las ondas cerebrales medidas sobre la superficie del cuero cabelludo oscila normalmente entre 0 y  $200 \mu\text{V}$  y sus frecuencias varían desde 0.5 a 100 Hz aproximadamente, con una concentración mayor entre 1 y 30 Hz.

En 1875 Caton midió el EEG de pequeños animales, y en 1925 fue Berger quién lo midió en humanos. Con pequeños electrodos colocados estratégicamente se puede obtener el registro simultáneo de la actividad eléctrica de tantas zonas del cerebro como electrodos

se hayan colocado. Este mapeo cerebral se realiza mediante un conversor analógico-digital que procesa la señal proveniente generalmente de 20 electrodos distribuidos uniformemente. Estos electrodos pueden ubicarse sobre el cuero cabelludo ("scalp"), directamente sobre la corteza cerebral ("strip") o dentro del cerebro mismo (electrodos profundos); tratándose en estos últimos dos casos de electrodos intracraneanos. Con respecto a la frecuencia de muestreo, si bien depende del equipo, está limitada superiormente por la capacidad de almacenamiento de datos del mismo. Por otra parte, el límite superior está dado por el criterio de Nyquist: la frecuencia de muestreo debe ser por lo menos el doble de la frecuencia más alta de la señal a registrar, asegurando de esta manera que la misma podrá ser resuelta.

Podemos decir entonces que el EEG humano caracteriza la actividad electrocerebral fenomenológicamente, tomando en consideración la frecuencia, amplitud y morfología de las ondas, su distribución espacial y su patrón de ocurrencia continuo o transitorio. Las características del EEG fluctúan ampliamente con las variaciones de numerosos factores (anatómicos, fisiológicos, bioquímicos y biofísicos). Esto implica un alto nivel de complejidad que imposibilita una extracción completa de toda la información contenida en el registro mediante un simple análisis visual.

El análisis de Fourier de las series temporales EEG ha permitido atribuir significado a un número de intervalos de frecuencia en el espectro de potencia del EEG. Por razones más históricas que clínicas, los ritmos u ondas se clasifican en:

- $\delta$  (1 – 4 Hz), predominan en sueño profundo y enfermedades encefálicas graves. Pueden aparecer específicamente en las zonas independientes de estructuras inferiores del encéfalo (el tálamo por ejemplo).
- $\theta$  (4 – 7 Hz), predominan en situaciones de tensión, desaliento o frustración. También aparecen en muchos trastornos encefálicos asociados al hipocampo.
- $\alpha$  (7 – 14 Hz), se visualizan en prácticamente todos los EEG correspondientes a adultos normales cuando están despiertos y en estado reposado. Aparecen básicamente en las zonas corticales conectadas con el tálamo.
- $\beta$  (14 – 30 Hz), se presentan más frecuentemente en situaciones de tensión.
- $\gamma$  (30 – 70 Hz), aparecen principalmente durante las respuestas asociadas a tareas cognitivas.

Por otra parte, algunas de estas frecuencias son dominantes en los diferentes estados de conciencia. Por ejemplo, durante el sueño desaparecen las ondas  $\alpha$ , mientras que a medida que éste se profundiza aparecen las ondas  $\delta$ . Existe una relación general según la cual la frecuencia promedio del ritmo EEG aumenta de manera progresiva con grados mayores de actividad. Sin embargo, durante la actividad mental normal intensa, las ondas suelen tornarse asincrónicas de modo que el voltaje cae considerablemente, a pesar del aumento de la actividad cortical.

Una señal típica de EEG se parece a una serie temporal estocástica con contribuciones a lo largo de todo el espectro que aparecen con fases al azar. Estas señales aperiódicas cambian en el transcurso del día y clínicamente con el sueño. Debido a su complejidad y probablemente sustentado en la repetición de los métodos tradicionales de análisis, el estudio de las series EEG conlleva al paradigma de que todas las variaciones temporales son separables en vibraciones armónicas y periódicas.

El método clínico tradicional se basa en la inspección visual del registro EEG que depende del reconocimiento de patrones y su asociación con las condiciones normales o patológicas. Los especialistas han aprendido a interpretar las frecuencias, las amplitudes y la morfología del registro EEG y si bien el ojo humano es buen analizador de patrones, hay características que solo un análisis cuantitativo puede develar. Este tipo de análisis comenzó con la aplicación de la Transformada de Fourier. En algunos casos se puede extraer información importante, sin embargo, el análisis Fourier solo es aplicable a series estacionarias en el tiempo.

En los últimos años se ha probado que las neuronas individualmente se comportan de manera no-lineal y que pueden exhibir una dinámica caótica [78, 79], con lo cual es razonable suponer que un gran conjunto de ellas (red neuronal) reflejará el comportamiento de una dinámica no-lineal subyacente [80]. Estos resultados sumados al hecho de que las señales EEG presentan oscilaciones irregulares, tales como las que se pueden encontrar en los sistemas complejos que presentan un atractor caótico, han motivado la aplicación de las técnicas de la dinámica no lineal al análisis de las series EEG. Esta metodología implica el cálculo de dimensiones varias, exponentes de Lyapunov, entropías, etc., a partir de los cuales se puede estimar el número de grados de libertad necesarios para la descripción de la red neuronal y su caracterización dinámica.

## 4.2 Series EEG y Epilepsia

Gran parte del tiempo las ondas cerebrales son irregulares y en el EEG no se puede distinguir ningún patrón general; sin embargo en otras ocasiones aparecen patrones o ritmos definidos. Algunos de ellos son característicos de anomalías funcionales específicas del cerebro, como la epilepsia.

Las señales EEG son no estacionarias y presentan alta dimensionalidad, por lo cual los conceptos de atractor y dimensión fractal no son aplicables, ya que éstas son propiedades asintóticas o estacionarias de un sistema dinámico. Sin embargo, en 1987, Babloyantz y Destexhe [37, 81] reportaron que durante ciertas actividades cerebrales como estadios del sueño o ciertas patologías como la epilepsia, los EEG correspondientes pueden presentar intervalos de cuasi-estacionariedad en los cuales los métodos de la dinámica no lineal pueden aplicarse. Babloyantz y colaboradores encontraron que en general la actividad rítmica  $\beta$  necesita más de 10 grados de libertad para ser descrita y la actividad  $\alpha$  algunos menos (con dimensión de correlación entre 6 y 8) [82]. En los estados de sueño el número de grados de libertad decrece [9] y decrece aún más en estados de coma y de

epilepsias del tipo “Petit Mal” [10], lo cual implica que en estos estados la dinámica de la red neuronal puede ser descripta con solo algunos parámetros.

Por otra parte, J. Pijn y colaboradores [8, 83] también mostraron que durante el desarrollo de un ataque epiléptico de tipo focal, las señales EEG de las áreas cerebrales involucradas progresivamente pasan rápidamente de una dimensión de correlación alta a una más pequeña, indicando la aparición de atractores caóticos. El tratamiento de las series temporales EEG con las técnicas derivadas de la dinámica no lineal ha abierto nuevas posibilidades para el conocimiento de la dinámica cerebral, aunque también es de interés poder cuantificar ciertas características que tengan alguna clase de aplicación clínica.

### 4.3 Epilepsia

La *Epilepsia* es una enfermedad que se conocía ya en la antigua Grecia. Hipócrates la reconoció como originada en el cerebro y la llamó enfermedad sacra. Sin embargo el conocimiento acerca de su etiología avanzó muy lentamente y durante siglos se la asoció a fuerzas mágicas, espíritus demoníacos, etc. Después de siglos de ignorancia y creencias supersticiosas, el tratamiento de la epilepsia entró en la era moderna y recientes avances en el manejo de la enfermedad han producido un crecimiento explosivo acerca del conocimiento de la misma. John Hughlings Jackson, es considerado el padre de la epileptología moderna [84]. En 1861 él definió la *Epilepsia* como una repentina y excesiva descarga proveniente de la materia gris de la corteza cerebral.

Actualmente se define a la *Epilepsia* como un desorden neurológico caracterizado por ataques o cambios bruscos en la actividad de ciertas neuronas que interfieren con el funcionamiento normal de toda la red neuronal, provocando disturbios en las actividades sensorial y motora como así también posibles pérdidas de conciencia. Este grupo de neuronas que ve alterado su funcionamiento puede o no estar circunscripto a una zona bien localizada del cerebro (foco epileptogénico). Durante el ataque epiléptico la red neuronal presenta oscilaciones típicas que normalmente se propagan involucrando otras zonas del cerebro. Estas oscilaciones se observan en el EEG, mostrando formas o patrones característicos de muchos registros de pacientes epilépticos, tales como espigas o puntas, punta-onda, complejos de ondas lentas espigadas, etc.

Existen varias clases de epilepsia, para el presente trabajo es suficiente mencionar las siguientes:

- *Epilepsia Generalizada*, que se caracteriza por descargas neuronales extremas en todas las áreas del encéfalo; se producen descargas sincrónicas de alto voltaje en toda la corteza, incluso en el tálamo y el tallo encefálico. Existen dos variantes, a saber: a) tipo “Grand Mal”, cuando se produce una pérdida de la conciencia y además las descargas en la médula espinal producen convulsiones tónico-clónicas. Este tipo de ataque puede durar desde segundos a 3 o 4 minutos. El patrón de

ondas cerebrales se caracteriza por presentar altas frecuencias de mucha intensidad. b) tipo "Petit Mal", que se caracteriza por 3 a 30 segundos de inconciencia a veces con contracciones musculares (pero sin actividad tónico-clónica), seguidas por la recuperación de la conciencia y reanudación de las actividades previas. A veces éste es el preámbulo de un ataque tipo Grand Mal. El patrón de ondas es un complejo punta-onda que puede registrarse sobre la mayor parte o toda la corteza cerebral.

- *Epilepsia Focal*, involucra una zona específica de la corteza y comúnmente a la porción límbica del encéfalo como el hipocampo, la amígdala y la corteza temporal. En este caso se habla de foco epileptogénico, de modo que se lo puede identificar y con frecuencia se utiliza la remoción quirúrgica para evitar ataques futuros. En general este tipo de *Epilepsia* es consecuencia de alguna lesión orgánica localizada o anomalía funcional (por ejemplo un tumor que comprime un área del encéfalo).

Se supone que el factor principal o al menos uno de los que detiene el ataque después de algunos segundos o minutos, es el fenómeno de fatiga neuronal relacionado con el agotamiento momentáneo de neurotransmisores en las terminales sinápticas debido a las numerosas descargas durante las crisis. En la actualidad los métodos para controlar los ataques epilépticos son del tipo farmacológico y en algunos pocos casos quirúrgicos. Las drogas existentes hasta el momento atacan el mecanismo neurotransmisor, pero aún no existe la droga antiepiléptica ideal que controle los ataques o cure la enfermedad sin producir importantes efectos colaterales. Con respecto a la cirugía se trata del último recurso en aquellas clases de *Epilepsia* focal que no mejoran con la aplicación de fármacos y que atentan seriamente con la calidad de vida del paciente. En estos casos, identificado el foco epileptogénico se procede a su extirpación de ser ésta posible.

#### 4.4 Señal EEG I — EEG de electrodos profundos

Las señales EEG provistas por electrodos profundos analizadas corresponden a actividad eléctrica cerebral durante crisis epilépticas (actividad ictal) y entre crisis (actividad inter-ictal) de pacientes que fueron tratados en forma quirúrgica. La información obtenida ha sido correlacionada con la sintomatología clínica. Para cada paciente la estrategia utilizada para el uso de electrodos profundos se planeó en relación con la organización espacio-temporal de las descargas epilépticas particulares. El uso de electrodos profundos provee registros donde se minimizan la contaminación por ruido y artificios propios de la medición.

La señal EEG I corresponde a una de las series temporales EEG obtenidas de un paciente varón de 21 años, durante 9 horas de registro con 12 electrodos profundos de contactos múltiples. Los mismos tienen 1 mm de espesor y fueron implantados estereotácticamente. Cada electrodo posee entre 5 y 15 contactos cilíndricos de una aleación de níquel-cromo con una longitud de 2 mm y una distancia intercontacto de 1.5 mm. Estos electrodos fueron ubicados en la zona epileptogénica y en las áreas de propagación del cerebro. Cada señal fue amplificada y filtrada, utilizándose un filtro de

1 – 40 Hz. También se utilizó un filtro Butterworth de 4 polos como filtro pasa-bajos, sirviendo de esta forma como esquema anti-aliasing. Luego de 10 bits de conversión A/D los datos del EEG fueron grabados en forma continua en el disco rígido de la computadora del sistema de adquisición con una frecuencia de muestreo de 256 Hz por canal.

De acuerdo con la sintomatología del paciente durante las crisis y al análisis médico visual del registro EEG durante las mismas, éste presentaba un foco epileptogénico en el hemisferio cerebral izquierdo, correspondiente al hipocampo con propagación inmediata al girus cingular y al área motora suplementaria, como así también al área derecha homóloga contralateral. En la Fig. 4.1 se muestra el registro EEG para 64 seg, correspondiente a un electrodo profundo en la región del hipocampo izquierdo (Señal EEG I). De la inspección visual resulta claro que, aproximadamente a los 10 seg comienza el ataque epiléptico que termina alrededor de los 54 seg.

Observando el registro de la señal se pueden identificar diferencias en la actividad cerebral en distintos intervalos:

- 0 – 10 seg, corresponde a baja actividad de base;
- 10 – 12 seg, comienzo del ataque, la actividad aumenta y luego decrece su amplitud;
- 12 – 23 seg, actividad lenta y clónica con aumento de la amplitud;
- 23 – 29 seg, espigas de descarga;
- 29 – 42 seg, espigas y ondas de descarga con frecuencias alrededor de 5 – 6 Hz;
- 42 – 54 seg, múltiples espigas y ondas complejas;
- 54 – 68 seg, final del ataque, actividad muy baja (fatiga neuronal).

## 4.5 Análisis de la Señal EEG I — Estático

Con el objetivo de estudiar los cambios en el comportamiento dinámico de la señal EEG I, se la dividió en intervalos de 8 seg, como sigue:

- 0 – 8 seg, pre-ataque;
- 10 – 18 seg, comienzo del ataque;
- 21 – 29 y 29 – 37 seg, desarrollo pleno del ataque;
- 37 – 44 y 44 – 52 seg, fin del ataque.

Tabla 4.1: VALOR ÓPTIMO DEL TIEMPO DE RETARDO  $\tau^*$  (EN *seg*), DIMENSIÓN DE EMBEDDING MÍNIMA  $D^{(min)}$ , TAMAÑO APROXIMADO DEL ATRACTOR  $R_A$ , RADIO UMBRAL  $R_T$ , PORCENTAJE DE FALSOS PRÓXIMOS VECINOS  $\%FNN$ , DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN  $D_2$ , Y MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV  $\Lambda_{max}$  PARA LOS SEGMENTOS DE 8 *seg* ( $N = 2048$  *datos*) DE LA Señal EEG I (VER FIG. 4.1).

Intervalo EEG	$\tau^*$	$D^{(min)}$	$R_A$	$R_T$	$\%FNN$	$D_2$	$\Lambda_{max}$
0 – 8 <i>seg</i>	0.0195	8	158.654	30	0.000	4.30	3.83
21 – 29 <i>seg</i>	0.0156	13	256.136	30	0.851	2.60	3.62
29 – 37 <i>seg</i>	0.0156	10	247.417	30	0.697	2.50	4.12
36 – 44 <i>seg</i>	0.0156	11	234.087	30	0.499	2.05	3.45
44 – 52 <i>seg</i>	0.0156	13	214.861	30	0.701	2.15	3.75

Como primer paso, se analizó el comportamiento estacionario en cada uno de estos intervalos; aplicando el criterio de estacionariedad débil descrito en el capítulo 2. Se dividió la señal en bins de 512 datos de longitud, de los cuales se utilizaron 4 bins consecutivos. En el segundo intervalo, 10 – 18 *seg*, el criterio de estacionariedad no se satisface ya que la morfología de la señal sufre cambios muy rápidos. El tiempo de retardo y la mínima dimensión de embedding fueron estimados según los métodos introducidos por Rosenstein y col. [60] y Kennel y col. [46, 47, 61], presentados también en el capítulo 2.

En la Fig. 4.2 se muestra el desplazamiento promedio  $\langle S_D \rangle$  como una función del tiempo de retardo, para el intervalo EEG 36 – 44 *seg* para diferentes dimensiones de embedding ( $D = 11, 12, 13, 14$ ). La línea vertical representa el tiempo de retardo óptimo ( $\tau^* = \tau \cdot t_s = 0.0156$  *seg*). En las Figs. 4.3.a y 4.3.b se graficó el porcentaje de falsos próximos vecinos ( $\%FNN$ ) como una función de la dimensión de embedding para el mismo intervalo EEG y para el correspondiente tiempo de retardo óptimo. En la Fig. 4.3 se observa que para dimensiones de embedding mayores que 11 el porcentaje de  $FNN$  es menor que el 1%. En particular, para esta porción de EEG se eligió  $D^{(min)} = 11$  como la óptima dimensión de embedding y su correspondiente porcentaje de  $FNN$  es aproximadamente 0.5 % (ver la Tabla 4.1).

En la Tabla 4.1 se muestran las porciones estacionarias correspondientes a la Señal EEG I, el tiempo de retardo óptimo  $\tau^*$ , la dimensión de embedding mínima,  $D^{(min)}$  y el porcentaje de  $FNN$  asociado. El tamaño correspondiente del atractor  $R_A$  y el radio umbral  $R_T$  utilizado en la evaluación de los  $FNN$ , también se consignan en la misma tabla. En la Fig. 4.4 se muestra la proyección de la señal en dos dimensiones para los intervalos seleccionados (ver Tabla 4.1). A partir de la reconstrucción de los atractores para cada porción de EEG definida, se caracterizaron las mismas según su correspondiente dimensión de correlación  $D_2$  y el máximo exponente de Lyapunov  $\Lambda_{max}$ .

En la Fig. 4.5 se muestra la relación  $\ln[C(r)]$  vs  $\ln(r)$  para diferentes dimensiones de embedding ( $11 \leq D \leq 14$ ) para el intervalo 36 – 44 *seg* de la señal EEG I. Nótese que

entre  $3.5 \leq \ln(r) \leq 5.5$  todas las curvas tienen casi la misma pendiente. En la Fig. 4.6, para la misma porción de la señal, se muestra la convergencia del máximo exponente de Lyapunov  $\Lambda_{max}$  obtenido con el método de Wolf modificado explicado en el capítulo anterior. Para cada conjunto de parámetros  $\{D, \tau\}$ , con el objetivo de obtener una mejor estimación de  $\Lambda_{max}$ , los últimos 5 valores fueron ajustados por mínimos cuadrados a una recta. De esta forma, una buena convergencia en el cálculo de  $\Lambda_{max}$  estará dada por una recta de pendiente nula o casi nula y la ordenada al origen representará el valor de  $\Lambda_{max}$ . En este caso particular, los valores obtenidos fueron 3.24, 3.73 y 3.39 para  $\tau^* = 4 \cdot t_m$  y dimensión de embedding de  $D = 11, 12$  y  $13$  respectivamente. Luego el valor final adoptado para esta porción de señal fue  $\Lambda_{max} = 3.45$  que corresponde al promedio de los valores obtenidos.

El radio del atractor reconstruido en la dimensión  $D$  se puede estimar como la distancia euclidiana promedio de los puntos del atractor al origen. Para la porción de la señal EEG correspondiente al intervalo 36 – 44 seg, este radio resulta  $R_D = 759.478$  con  $D = 11$ . Si se considera el límite superior del plateau en la evaluación de  $D$  como  $\ln(r) \sim 5.0$  se puede estimar  $\rho$ , para esta porción de la serie temporal EEG I, como  $\rho \sim 0.0976$  (parámetro introducido por Eckman y Ruelle para la estimación de la máxima dimensión de correlación compatible con el número de datos,  $D_2^{max}$ , y el correspondiente mínimo número de datos para una evaluación realista del máximo exponente de Lyapunov, ver Sec. 2.14). En consecuencia, la máxima dimensión de correlación que es posible observar con este conjunto de datos es  $D_2^{max} \sim 6$ , y el número de puntos necesarios para la evaluación del exponente de Lyapunov será  $N_{min} \sim 1000$  si se considera  $D_2 \sim 3$ . Un análisis similar se realizó en los otros intervalos considerados en la Tabla 4.1, a fin de chequear la confiabilidad de los resultados obtenidos.

En la Tabla 4.1 se presentan los valores obtenidos de la dimensión de correlación  $D_2$  y el mayor exponente de Lyapunov  $\Lambda_{max}$ , para los diferentes intervalos seleccionados de la señal EEG I. Estos dos parámetros se obtuvieron como promedio de los valores correspondientes a todas las dimensiones de embedding consideradas. Los resultados obtenidos están dentro del rango de valores correspondientes a la actividad de fondo y al ataque epiléptico publicados por distintos autores [85, 86]. De la tabla se infiere que los ataques se caracterizan por la caída de los máximos exponentes de Lyapunov, comparándolos con sus valores antes de la crisis. Estos exponentes son aún positivos señalando la presencia de atractores caóticos. Un comportamiento similar se observa en la dimensión de correlación.

Se puede concluir que el comportamiento dinámico del sistema es similar durante el ataque, desde su inicio hasta su extinción y es bien diferente del correspondiente a la actividad eléctrica de fondo, previa a la crisis. De alguna manera durante la crisis epiléptica hay una transición en el comportamiento dinámico de la red neuronal, desde un sistema complejo a uno más simple. Esto puede llevar a un análisis más profundo de lo que realmente ocurre durante el ataque epiléptico.

Tabla 4.2: BANDAS DE FRECUENCIAS (EN Hz) ASOCIADAS CON LOS DIFERENTES NIVELES DE RESOLUCIÓN WAVELET ( $j$ ) UTILIZADOS EN EL ANÁLISIS DE LA SEÑAL EEG I DE ACUERDO A LA FRECUENCIA DE MUESTREO  $\omega_s = 256$  Hz. LAS BANDAS TRADICIONALES EEG CORRESPONDEN A LAS SIGUIENTES FRECUENCIAS:  $\delta$  : 0.5–3.5 Hz;  $\theta$  : 3.5–7.5 Hz;  $\alpha$  : 7.5–12.5 Hz;  $\beta$  : 12.5–30 Hz Y  $\gamma$  : 30–70 Hz.

Notación	Banda Wavelet			Banda EEG
	$\omega_{min}$	$\omega_{max}$	$j$	
$B_1$	64.0	128.0	-1	—
$B_2$	32.0	64.0	-2	$\gamma$
$B_3$	16.0	32.0	-3	$\beta$
$B_4$	8.0	16.0	-4	$\alpha$
$B_5$	4.0	8.0	-5	$\theta$
$B_6$	2.0	4.0	-6	$\delta$
$B_7$	1.0	2.0	-7	$\delta$
$B_8$	0.5	1.0	-8	$\delta$

## 4.6 Análisis de la Señal EEG I — Dinámico

A fin de estudiar la evolución temporal de la dinámica asociada a la señal EEG I, se evaluó la *Caoticidad* con ventanas temporales de  $L = 2560$  datos correspondientes a 10 seg, con una superposición o solapamiento (overlapping) de  $\delta = 256$  datos  $\equiv 1$  seg. Los parámetros elegidos para la reconstrucción del atractor fueron  $\tau = 4 \cdot t_s$  y  $D = 13$ , tomándose los mismos valores para todas las ventanas.

El criterio para la elección de estos parámetros fue privilegiar la reconstrucción del atractor en la fase pre-ictal y a su vez, obtener simultáneamente una buena reconstrucción en la fase ictal. Según el análisis estático realizado en la sección previa (ver la Tabla 4.1), se tiene  $D^{min} = 8$  para la fase pre-ictal, de manera tal que, si se elige  $D = 13$  para todas las ventanas temporales se tendrá bien definido el atractor antes del ataque. Por otra parte también se vió que, durante la crisis  $D^{min} = 13$ ; esta elección entonces, permitirá evaluar los cambios dinámicos en función del tiempo a partir del momento previo a la crisis, sin perder información de los mismos durante el ataque propiamente dicho. El tiempo de retardo fue fijado en  $\tau^* = 0.0156$  seg para todas las ventanas temporales, siguiendo un criterio similar.

En la Fig. 4.7 se pueden observar la evolución temporal de la *Caoticidad* y su dependencia con los parámetros necesarios para su cómputo: a) el tiempo de evolución, b) el tiempo de retardo y c) la dimensión de embedding. Resulta claro de la figura que la elección del tiempo de evolución debe realizarse en forma independiente para cada ventana en particular, ya que si éste se deja fijo (IEVOL = 0) para todas las ventanas temporales (por ejemplo con el valor correspondiente a la fase pre-ictal) no es posible distinguir en forma evidente los cambios más significativos (inicio y final de la crisis) de

la serie temporal. En la misma figura se observa que el mejor criterio para la elección del tiempo de evolución de esta señal es el correspondiente a  $IEVOL = 1$ . Es decir, en este caso el tiempo de evolución se calcula a partir de la frecuencia correspondiente a la máxima contribución en el espectro de frecuencias evaluado en la ventana temporal. Se infiere también de esta figura que, las variaciones de los valores correspondientes al tiempo de retardo y la dimensión de embedding, si bien detectan los cambios más relevantes en la serie temporal (inicio y final de la crisis), también presentan valores fluctuantes muchos de ellos contrapuestos, lo cual dificulta todo intento de asociarlos a la dinámica del registro EEG, en especial durante la crisis.

En la Fig. 4.8 se graficó la evolución temporal de la *Caoticidad* para los parámetros considerados óptimos en el análisis de este registro EEG. Se puede observar claramente el inicio y el final de la crisis detectados por una disminución abrupta en el valor de la *Caoticidad* en torno a los 10 seg y los 54 seg respectivamente. Nótese que estos decrecimientos no están perfectamente sincronizados con los cambios morfológicos en la señal. Estos desfases se deben a la limitación natural de la superposición de ventanas temporales. En la fase ictal (10 – 54 seg) la *Caoticidad* presenta disminuciones en sus valores que pueden asociarse al inicio de los cambios morfológicos indicados en señal EEG I en estudio (ver Sec. 4.4). Por otra parte, se observan otras caídas que, en algunos casos podrían asociarse a variaciones en el patrón general ya identificado y en consecuencia a cambios en la dinámica. En otros casos, no es evidente la correlación con la morfología de la señal, razón por la cual debería realizarse un estudio más detallado para su interpretación en términos de cambios reales en la dinámica asociada.

Los conceptos de *Energía Wavelet Relativa* y de *Entropía Wavelet Total* introducidos en la sección 3.10, fueron utilizados como alternativa para el estudio de la evolución temporal de la dinámica asociada a las series EEG. Para ello se calculó la evolución en el tiempo de los cuantificadores basados en ODWT, definidos por las ecuaciones 3.76 y 3.78 que resultan muy útiles para realizar un análisis cuantitativo de EEG (qEEG).

En el análisis wavelet de la señal EEG I, se utilizó una wavelet madre spline cúbica y se adoptó un esquema de multiresolución, considerando 8 niveles wavelet. Los límites de las bandas de frecuencias wavelet asociadas a los correspondientes niveles de resolución  $j$  fueron denotados por  $B_j$  con  $|j| = 1, \dots, 8$ . Sus frecuencias límites (acordes con una frecuencia de muestreo de  $\omega_s = 256$  Hz) y su correlación con las bandas de frecuencias tradicionales de EEG se muestran en la Tabla 4.2. Para el cálculo de la evolución temporal de la *Energía Wavelet Relativa* (RWE) y la *Entropía Wavelet Total* (SWT), se dividió la señal en ventanas temporales deslizantes de  $L = 256$  datos  $\equiv 1$  seg sin superposición. Dado que uno de los objetivos de este trabajo es comparar la evolución temporal de la *Caoticidad* con la correspondiente a la *Entropía Wavelet Total*, las ventanas temporales y su superposición fueron elegidos de modo tal que sus muestreos fuesen compatibles. Entonces, fue necesario evaluar la *Caoticidad* con una superposición que permitiera definirla con la misma resolución temporal que la utilizada para la *Entropía Wavelet Total*.

En la Fig. 4.9 se muestra la evolución temporal de la RWE para las bandas wavelet

$B_3$  a  $B_8$  (ver Tabla 4.2) para esta señal EEG I. En este trabajo solo se tendrán en cuenta las bandas de frecuencias tradicionales de los registros EEG, por lo tanto la contribución de la banda  $B_1$  se consideró nula. Nótese que durante el desarrollo de la crisis, las contribuciones correspondientes a las bandas lentas, en particular  $B_7$  y  $B_8$ , presentan valores muy bajos. Este comportamiento también fue observado en las crisis epilépticas del tipo tónico-clónico tal como en la señal que se analizará en la próxima sección (Señal EEG II).

A continuación se describe el comportamiento de la RWE en los intervalos oportunamente definidos (ver Sec. 4.4):

- 0 – 10 seg: durante este intervalo es dominante la actividad lenta ( $\delta$  y  $\theta$ ) correspondiente a las bandas  $B_5$  a  $B_7$ . En particular a partir de los 5 seg la banda  $B_6$  domina hasta los 10 seg, donde cae abruptamente.
- 10 – 12 seg: el inicio de la crisis epiléptica se caracteriza por un fuerte incremento en la actividad rápida ( $\beta$ ), dada por la banda  $B_3$ , superpuesta a un aumento en la actividad lenta ( $\delta$ ) representada por  $B_7$ .
- 12 – 23 seg: la actividad rápida que da inicio al ataque disminuye notablemente en este intervalo al igual que la actividad lenta. La actividad predominante que se observa se alterna entre las bandas  $B_4$  y  $B_5$ .
- 23 – 29 seg: la crisis en este intervalo se desarrolla plenamente. Nuevamente la actividad lenta es muy baja ( $\delta$ ). Las bandas dominante son  $B_4$  ( $\alpha$ ), seguida por  $B_3$  ( $\beta$ ). Esta última actividad se puede asociar a las espigas de descarga.
- 29 – 42 seg: en este intervalo se observan espigas, representadas por la actividad dada por  $B_3$ , y ondas de descarga lentas, dadas por  $B_6$  y  $B_7$ . Todo este comportamiento está inmerso en la actividad dominante dada por las bandas  $B_4$  ( $\alpha$ ) y  $B_5$  ( $\theta$ ).
- 42 – 54 seg: la crisis epiléptica está finalizando. La actividad lenta, banda  $B_6$  ( $\delta$ ), aumenta significativamente a partir de la mitad de este intervalo. Las espigas están caracterizadas por las bandas  $B_4$  ( $\alpha$ ) y  $B_5$  ( $\theta$ ).
- 54 – 68 seg: finalización del ataque caracterizado por un brusco decrecimiento (con contribución prácticamente nulas en este intervalo) en las actividades  $B_3$  a  $B_5$ . La actividad dominante corresponde a las bandas de frecuencias lentas  $B_7$  y  $B_8$  ( $\delta$ ), que se asocia a la fatiga neuronal.

La evolución temporal de la *Entropía Wavelet Total* (SWT) se muestra en la Fig. 4.10. En la misma el inicio de la crisis ( $\sim 10$  seg) está dado por un marcado decrecimiento en la SWT y su finalización ( $\sim 55$  seg) por una abrupta disminución. Asimismo, se puede observar que los valores promedios de la SWT para la etapa post-ictal, son inferiores a los correspondientes a las etapas ictal y pre-ictal. Este último comportamiento resulta acorde con la actividad lenta característica y casi monofrecuente atribuida a la fatiga neuronal. En los primeros 2 seg posteriores al inicio de la crisis se

observa un aumento en los valores de la SWT, que se puede asociar con el incremento de los ritmos rápidos  $B_2$  y  $B_3$  ( $\beta$  y  $\gamma$ ), compatible con un mayor grado de desorden en la señal. Durante la etapa ictal se observan claras disminuciones en los valores de la SWT, aproximadamente a los 12, 23, 34, 38 y 47 seg correspondientes a marcados cambios en la morfología de la señal (ver Fig. 4.1). Al igual que en el caso de la evolución temporal de la *Caoticidad*, se observan otras variaciones en los valores de SWT que podrían asociarse, en la mayoría de los casos, a cambios más detallados en la morfología de la serie temporal bajo análisis y su dinámica asociada.

Es interesante destacar que como se puede observar en las Figs. 4.8 y 4.10 correspondientes a la evolución temporal de la *Caoticidad* y de la *Entropía Wavelet Total*, respectivamente ambos cuantificadores presentan un comportamiento similar. Por lo tanto, se puede inferir que la SWT no solo brinda información acerca del grado de orden/desorden de la señal sino que también nos provee de información inherente a los cambios en la dinámica subyacente. Más aún, para el cálculo de este cuantificador solo se necesita la transformada wavelet de la señal, es decir, la *Entropía Wavelet Total* es libre de parámetros.

## 4.7 Señal EEG II — EEG de electrodos en superficie

La Señal EEG II corresponde a un registro EEG de superficie (scalp) de una crisis epiléptica de tipo tónico-clónica. Este registro está afectado, como ocurre normalmente, por artificios de medición. En general, estas perturbaciones son introducidas por las actividades: oculares (electrooculograma, EOG), musculares (electromiograma, EMG) y del corazón (electrocardiograma, ECG), entre otras [2]. A veces los artificios se presentan durante cortos intervalos de tiempo y con amplitudes muy bajas, de modo tal que pueden ser ignorados en el análisis de la señal. En otras ocasiones, dada su duración y amplitud es casi imposible identificar la parte de la señal que corresponde a la actividad cerebral subyacente. Es decir, todo el registro se encuentra contaminado por artificios y esto hace el análisis del mismo prácticamente imposible. Un ejemplo de este tipo de EEG corresponde a los registros de ataques epilépticos tónico-clónico como el que se muestra en la Fig. 4.11. En estos casos los ataques se extienden entre 40 a 90 seg y se caracterizan por presentar contracciones musculares violentas. Los espasmos tónicos masivos iniciales son reemplazados algunos segundos más tarde por la fase clónica, caracterizada por movimientos flexores violentos y espasmos rítmicos que se suceden hasta la finalización del ataque [2].

Esta señal (Fig. 4.11) corresponde a un paciente varón con un diagnóstico de epilepsia fármaco-resistente y que no presenta ningún otro tipo de anomalía funcional. El estudio clínico del paciente incluyó el análisis visual de registros EEG inter-ictales, estudios cerebrales por imágenes MRI (magnetic resonance image) y SPECTs (single photon emitted computer tomography), como así también tests psicológicos. Las drogas anti-epileptogénicas fueron reducidas gradualmente a fin de inducir los ataques.

La actividad cerebral de este paciente fue registrada usando electrodos de superficie (scalp) y esfenoidales, los cuales fueron aplicados siguiendo el sistema internacional 10 – 20. Las señales fueron digitalizadas a 409.6 Hz a través de un convertidor analógico/digital a 12 bits, utilizando un filtro “antialiasing” de 8 polos pasa-bajos Bessel con una frecuencia de corte de 50 Hz. Luego, las señales fueron filtradas digitalmente con un filtro Butterworth de 1 – 50 Hz de ancho de banda y almacenadas, después de decimar, a 102.4 Hz en el disco rígido de la computadora del sistema de adquisición.

Paralelamente los registros fueron controlados por video para determinar de manera más precisa los diferentes estadios del ataque y una mejor evaluación de los mismos por parte del grupo médico. El análisis posterior de la señal se realizó con la caracterización de los rasgos semiológicos, establecimiento del momento del ataque y definición (en caso que fuera posible) de la fuente anatómica de cada evento. Para cada evento analizado se incluyeron 1 min antes del comienzo del ataque y 2 min para las fases ictal y post-ictal conjuntamente.

En la Fig. 4.11 se presenta el registro EEG analizado correspondiente a un ataque epiléptico tónico-clónico provisto por el electrodo de superficie central derecho (canal C 4). Esta derivación, de todas las registradas, se eligió para su ulterior estudio por presentar la menor cantidad de artificios. Por medio del análisis clínico y la inspección visual, el equipo médico determinó las distintas etapas de la crisis. En este registro la fase pre-ictal está caracterizada por una señal de  $50 \mu V$ . El ataque comienza a los 80 seg con una descarga de ondas lentas superpuestas con ondas rápidas de menor amplitud. Esta descarga duró aproximadamente 9 seg con una amplitud media de  $100 \mu V$ . Luego, el ataque comienza a desarrollarse plenamente, resultando más complicado su análisis debido a la presencia de gran cantidad de artificios provenientes de la actividad muscular. A pesar de las dificultades técnicas es posible establecer el inicio de la fase clónica a los aproximadamente 125 seg y el final de la crisis a los 155 seg, donde hay una caída abrupta en la amplitud de la señal.

## 4.8 Señal EEG II — Artificios y Método de Filtrado

En los ataques epilépticos tónico-clónico, el análisis cuantitativo resulta especialmente problemático ante la presencia de artificios derivados de la actividad muscular, ya que alcanzan amplitudes muy altas [2]. Estas perturbaciones limitan el análisis visual tradicional a los períodos pre y post-ictal; limitando a su vez la aplicación de algunos métodos matemáticos de análisis, como es el caso de los cuantificadores basados en técnicas métricas de dinámica no-lineal.

El análisis de la actividad cerebral durante este tipo de ataques ha sido previamente realizado solo en casos especiales, por ejemplo, en pacientes tratados previamente con curare (un inhibidor de las respuestas musculares) [87] o por eliminación de la actividad muscular de alta frecuencia utilizando filtros tradicionales [88]. Sin embargo, el filtrado tradicional (filtros pasa-banda basados en la Transformada de Fourier) tiene algunas

desventajas. Es casi imposible separar la actividad cerebral de la muscular. Filtrando aquellas frecuencias relacionadas con los artificios provenientes de la actividad electromiográfica, también se ve afectada la morfología de las frecuencias remanentes. De esta manera pueden introducirse oscilaciones espúreas, efectos resonantes (“ringing effects”), etc.

Si bien el procesamiento y filtrado de señales de sistemas lineales tiene una larga historia, en el caso de sistemas no-lineales (tales como la actividad eléctrica cerebral) se requiere de nuevas técnicas que permitan extraer en modo inalterado la información acerca de los invariantes métricos no-lineales [67, 68, 69]. En este trabajo se utilizó la Transformada Wavelet para filtrar aquellas frecuencias fuertemente asociadas con la actividad muscular [13]. El filtrado wavelet de algunas bandas de frecuencia no modifica las contribuciones de las frecuencias remanentes, razón por la cual la dinámica asociada tampoco se ve alterada (ver Sec. 3.9). Esta es la ventaja más importante frente a otros métodos de filtrado o separación de señales, ya que no solo permite “limpiar” la señal sino también analizar la dinámica subyacente.

Recordemos que las representaciones wavelet proveen una medida precisa de cuando y a qué grado ocurren eventos transitorios y componentes en una señal; como así también, cuando y cómo cambia el contenido frecuencial en función del tiempo. Además una vez computada, la representación wavelet de una señal es invertible. La señal original puede ser reconstruida a partir del conjunto de coeficientes wavelet que captan toda la información temporal y frecuencial de la misma. Separar la señal contaminante o filtrar el ruido de la señal de interés, con este método, es simplemente hacer tender a cero o atenuar los coeficientes wavelet asociados con las bandas de frecuencias no deseadas. Luego la señal de interés se reconstruye a partir de los coeficientes wavelet remanentes [27, 31, 89].

La Fig. 4.12 muestra la serie temporal “suavizada”, correspondiente a la señal original mostrada en la Fig. 4.11. Las oscilaciones asociadas a las altas frecuencias  $B_1$  y  $B_2$ , relacionadas con la actividad muscular, fueron removidas. Para recuperar el muestreo original, la señal suavizada, se interpoló con spline cúbicas. Si bien la actividad cerebral de alta frecuencia fue también eliminada con este procedimiento, su contribución durante el desarrollo del ataque epiléptico no es tan relevante como en el caso de las frecuencias bajas y medias [2, 87, 88].

Resumiendo, el filtrado wavelet con spline cúbicas ortogonales resulta un buen método para separar en forma precisa el ruido (actividad muscular) y luego recuperar la señal “limpia”, sumando las componentes residuales interpoladas correspondientes a las bandas de frecuencia de interés. De esta manera, el método permite la eliminación de bandas de frecuencias no deseadas que ocultan otra información o efectos desconocidos. Dada la ortogonalidad de las funciones wavelet empleadas, se puede asegurar que, solo las bandas de frecuencias previamente seleccionadas son las efectivamente removidas. Cabe destacar además que, no es necesario asumir ningún tipo de linealidad como la necesaria para la aplicación del filtrado tradicional basado en Fourier.

Tabla 4.3: VALOR ÓPTIMO DEL TIEMPO DE RETARDO  $\tau^*$  (EN *seg*), DIMENSIÓN DE EMBEDDING MÍNIMA  $D^{(min)}$ , TAMAÑO APROXIMADO DEL ATRACTOR  $R_A$ , RADIO UMBRAL  $R_T$ , PORCENTAJE DE FALSOS PRÓXIMOS VECINOS %*FNN*, DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN  $D_2$ , Y MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV  $\Lambda_{max}$  PARA LOS SEGMENTOS DE 30 *seg* ( $N = 3072$  *datos*) DE LA *Serie EEG II* FILTRADA (SEE FIG. 4.12)

<i>Intervalo EEG</i>	$\tau^*$	$D^{(min)}$	$R_A$	$R_T$	% <i>FNN</i>	$D_2$	$\Lambda_{max}$
50 – 80 <i>seg</i>	0.0293	8	14.178	30	0.135	4.23	3.34
90 – 120 <i>seg</i>	0.0293	6	38.723	30	0.130	4.02	2.79
120 – 150 <i>seg</i>	0.0293	7	119.781	30	0.065	4.09	2.52

## 4.9 Análisis de la Señal EEG II — Estático

Con el propósito de caracterizar la dinámica asociada con esta señal, con posterioridad a la eliminación de los artificios musculares por medio del filtrado wavelet, se la dividió en épocas representativas de 30 *seg* de longitud ( $N = 3072$  *datos*). Los intervalos fueron:

- 50 – 80 *seg*, estado pre-ictal;
- 90 – 120 *seg*, estado tónico;
- 120 – 150 *seg*, al estado clónico.

Para evaluar la estacionariedad de la serie, a cada porción de la misma se le aplicó el criterio descrito en la Sec. 2.8. Dado que se trata de una serie experimental, con un número finito de datos, se evaluó el tiempo de retardo  $\tau$  óptimo para cada época considerada. Con estos tiempos se determinó la dimensión de embedding mínima para cada estadio siguiendo el método de falsos próximos vecinos (*FNN*) introducido por Abarbanel y colaboradores (ver Sec. 2.11). En la Fig. 4.13 se muestra la variación del porcentaje de falsos próximos vecinos (% *FNN*) en función de la dimensión de embedding para el estadio tónico (90 – 120 *seg*), para la señal original y filtrada con un  $\tau^* = 3 \cdot t_s = 0.0293$  *seg*. Nótese el comportamiento creciente del % *FNN* con la dimensión de embedding para la señal original, evidenciando la fuerte contaminación por ruido presente en la misma. Asimismo, al limpiar la señal este comportamiento es eliminado y se puede determinar una dimensión de embedding mínima. Comportamientos similares al descrito se observaron en las otras dos porciones de la serie EEG II consideradas. De este modo se confirmó que la serie original no era adecuada para ser analizada con los métodos métricos de la dinámica no-lineal, sin antes realizar un proceso de limpieza de la misma.

Se consideró que el porcentaje de *FNN*  $\leq 0.5\%$  corresponde a una dimensión de embedding en la cual el atractor se despliega suficientemente y en consecuencia se la definió como la dimensión de embedding mínima. Para las tres porciones definidas en la señal EEG II, estas fueron  $D^{(min)} = 8, 6$  y  $7$  respectivamente. Los correspondientes

Tabla 4.4: BANDAS DE FRECUENCIAS (EN HZ) ASOCIADAS CON LOS DIFERENTES NIVELES DE RESOLUCIÓN WAVELET ( $j$ ) UTILIZADOS EN EL ANÁLISIS DE LA SEÑAL EEG II DE ACUERDO A LA FRECUENCIA DE MUESTREO  $\omega_s = 102.4$  HZ. LAS BANDAS TRADICIONALES EEG CORRESPONDEN A LAS SIGUIENTES FRECUENCIAS:  $\delta$  : 0.5 – 3.5 HZ;  $\theta$  3.5 – 7.5 HZ;  $\alpha$  7.5 – 12.5 HZ;  $\beta$  : 12.5 – 30 HZ Y  $\gamma$  : 30 – 70 HZ.

Notación	Banda Wavelet			Banda EEG
	$\omega_{min}$	$\omega_{max}$	$j$	
$B_1$	25.6	51.2	-1	$\beta, \gamma$
$B_2$	12.8	25.6	-2	$\beta$
$B_3$	6.4	12.8	-3	$\theta, \alpha$
$B_4$	3.2	6.4	-4	$\theta$
$B_5$	1.6	3.2	-5	$\delta$
$B_6$	0.8	1.6	-6	$\delta$

valores para los tiempos de retardo óptimo se detallan en la Tabla 4.3.

En las Figs. 4.14 se presenta la proyección en dos dimensiones de los atractores reconstruidos para la señal original (Fig. 4.14.a-c) y la señal libre de ruido (Fig. 4.14.d-f), para los tres estadios anteriormente mencionados. Nótese que los atractores correspondientes a la pre- crisis, son muy similares, indicando que en este estadio la contribución de las frecuencias altas no es tan importante. Por otro lado, los patrones remanentes sugieren, para la señal filtrada, una dinámica subyacente de baja dimensionalidad para los diferentes estadios del ataque, la cual está completamente apantallada por el ruido en la señal original. Resulta interesante notar que los atractores obtenidos en este caso son similares a aquellos correspondientes a los EEG con electrodos profundos, donde no hay influencia de la actividad muscular (ver Fig. 4.4).

Luego, del proceso de filtrado de la señal original, se evaluaron los diferentes invariantes métricos para los intervalos definidos previamente y los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 4.3. Al igual que en el caso de señales provistas por electrodos profundos, la dimensión de correlación,  $D_2$ , y el mayor exponente de Lyapunov,  $\Lambda_{max}$  presentan valores más bajos al comienzo del ataque y éstos aumentan en los estadios sucesivos del mismo.

## 4.10 Análisis de la Señal II — Dinámico

Una primera caracterización de la dinámica asociada al registro EEG II está dada por la evolución temporal de la *Caoticidad*. A fin de poder evaluar este cuantificador, según fuera señalado precedentemente, fue necesario primero separar el ruido electromiográfico característico de los ataques epilépticos tónico-clónicos [90]. En la Fig. 4.15 se muestra la evolución temporal de la *Caoticidad* correspondiente a la Señal EEG II filtrada.

La *Caoticidad* fue evaluada con ventanas temporales deslizantes de longitud  $L = 2560 \text{ datos} \equiv 25 \text{ seg}$  con una superposición de  $\delta = 256 \text{ datos} \equiv 2.5 \text{ seg}$ . Nuevamente la elección de la superposición en la evaluación de la *Caoticidad* responde a la necesidad de obtener la misma resolución temporal que para el cálculo de la *Entropía Wavelet*. El tiempo de evolución se determinó como una fracción de la frecuencia media pesada, evaluada a partir del espectro de frecuencia en la ventana temporal correspondiente,  $i_{evol} = 2$ . Los parámetros utilizados para la reconstrucción del atractor en todas las ventanas temporales fueron  $\tau = 3 \cdot t_s = 0.0293 \text{ seg}$  y  $D = 9$ , siguiendo los mismos criterios ya enunciados para la Señal EEG I.

En la Fig. 4.15 se observa que la *Caoticidad* presenta una fuerte tendencia a disminuir, si bien con valores oscilantes, entre los 80 y 125 seg. A partir aproximadamente de los 125 seg éstos se estabilizan y luego comienzan a aumentar. En particular, observando la *Caoticidad* para  $t > 80 \text{ seg}$ , se puede decir que sus valores medios son menores en el estadio ictal que pre-ictal, comportamiento similar al observado en el registro EEG I y en acuerdo con los resultados previamente publicados (para un análisis estático) [11, 12, 13]. El grupo médico identificó que a los 80 y 125 seg, se inició el ataque epiléptico y el estadio clónico, respectivamente. Al igual que en el caso previo, se observan otras oscilaciones en la *Caoticidad* que pueden ser asociadas a cambios morfológicos en la señal, pero en algunos su interpretación requiere de un análisis más detallado.

Como se ha mencionado en las secciones precedentes, a través de la Transformada Wavelet de la señal se pueden definir cuantificadores que resultan muy útiles para caracterizar la dinámica asociada a la misma. En este trabajo se calculó la ODWT de la señal EEG II utilizando una wavelet madre spline cúbica adoptándose un esquema de multiresolución. En este análisis wavelet se consideraron 6 niveles,  $|j| = 1, \dots, 6$  y las correspondientes bandas de frecuencias fueron denotadas por  $B_j$  (ver Tabla 4.4). Para el cálculo de la evolución temporal de las *Energías Wavelet Relativas* y la *Entropía Wavelet Total* se consideraron ventanas temporales deslizantes sin superposición de longitud  $L = 256 \text{ datos} = 2.5 \text{ seg}$ . Las contribuciones de las bandas  $B_1$  y  $B_2$ , que contienen los artificios de altas frecuencias relacionados con la actividad muscular, fueron consideradas nulas para el cálculo de los cuantificadores. La evolución temporal para la *Energía Wavelet Relativa* (RWE) y la *Entropía Wavelet Total* (SWT) se muestran en las Figs. 4.16 y 4.17 respectivamente.

Decrecimientos evidentes de la RWE en las bandas de frecuencias  $B_5$  y  $B_6$  (actividad  $\delta$ ) durante el ataque se observan en la Fig. 4.16. Con el objetivo de cuantificar estos cambios, se evaluó la media de la energía wavelet relativa (MRWE) para  $|j| = 5$  y 6 en la fase pre-ictal ( $\langle p_j \rangle_{pre-ictal}$ ) y se las comparó con sus valores medios en las zonas de baja intensidad ("plateau") observados durante la crisis ( $\langle p_j \rangle_{ictal}$ ). El valor de MRWE pre-ictal se definió como el valor medio de RWE en el minuto anterior al ataque, sin considerar las áreas contaminadas por artificios.

En la fase ictal, se definieron los plateau según el siguiente criterio [20]:

- El plateau debe durar al menos 10 seg a fin de evitar las variaciones locales.
- El MRWE del plateau debe ser menor que 0.3 del MRWE correspondiente a la fase pre-ictal:  $\eta^{(j)} = \langle p_j \rangle_{ictal} / \langle p_j \rangle_{pre-ictal} < 0.3$ .
- El error standard del MRWE del plateau debe ser menor que 0.03 de modo tal de confirmar una baja dispersión.

Si bien la elección de este criterio es arbitraria se debe destacar que no se identificó plateau alguno en la fase pre-ictal, indicando fuertemente que la aparición de los plateau en la fase ictal refleja un cambio dinámico más que un fenómeno estadístico.

En la Fig. 4.16 se puede ver que la fase pre-ictal está caracterizada por una señal dominada por ritmos lentos. En esta fase se tiene que  $[p_5 + p_6] \sim 50\%$ . El ataque comienza a los 80 seg con una descarga de ondas lentas superpuestas con un bajo voltaje de actividad rápida. Esta descarga dura aproximadamente 9 seg y produce un notable aumento en las bandas de frecuencias  $B_5$  y  $B_6$  (actividad  $\delta$ ), las cuales alcanzan un 80% de la RWE. A partir de los 90 seg, la actividad de baja frecuencia decrece abruptamente a valores inferiores al 10%, representada en nuestro análisis por las  $p_5$  y  $p_6$ , y las otras bandas (ritmos  $\theta$  y  $\alpha$ ) dominan alternativamente. Se observa también en la misma figura que el inicio de la fase clónica está correlacionado con un aumento en la banda de frecuencia  $B_4$ . Después de 140 seg, cuando las descargas clónicas comienzan a separarse, la actividad  $B_5$  aumenta nuevamente hasta el final del ataque, cuando la actividad de frecuencia  $B_6$  también aumenta rápidamente y ambas bandas son dominantes. Las bandas  $B_5$  y  $B_6$  mantienen este comportamiento en la fase post-ictal que podemos asociar con la fatiga neuronal.

En síntesis podemos concluir que la crisis está dominada por bandas de frecuencias medias  $B_3$  y  $B_4$  (ritmos  $\alpha$  y  $\theta$ ) y consecuentemente con un abrupto decrecimiento de las bandas de frecuencias bajas  $B_5$  y  $B_6$  (actividad  $\delta$ ). Aplicando el criterio enunciado previamente se definió un plateau correspondiente al decrecimiento en actividad de la banda  $B_5$  entre los 115 y 140 seg, con una duración de  $\Delta t^{(5)} = 25$  seg con una muy baja dispersión (0.018) y también muy baja relación de RWE de la fase ictal a la pre-ictal, ( $\eta^{(5)} = 0.048$ ). Del mismo modo para  $B_6$  el plateau se definió entre los 110 y los 147.5 seg, con  $\Delta t^{(6)} = 37.5$  seg, dispersión (0.002) y relación  $\eta^{(6)} = 0.027$ .

La *Entropía Wavelet Total* (SWT), en función del tiempo se muestra en la Fig. 4.17. En esta figura, con línea continua se representa la evolución temporal de la SWT cuando se incluyen todas las bandas de frecuencias y con línea segmentada cuando las contribuciones debidas a las frecuencias altas, correspondientes a la actividad electromiográficas  $B_1$  y  $B_2$ , no son consideradas. Resulta interesante observar los primeros 10 seg posteriores al inicio de la crisis epiléptica. La *Entropía Wavelet Total* aumenta sus valores en este intervalo de tiempo si todas las bandas de frecuencias wavelet son incluidas, respecto de los valores en el estadio pre-ictal. Si las bandas de frecuencias  $B_1$  y  $B_2$  (que contienen principalmente la actividad muscular) no se incluyen, el valor medio de la SWT es comparativamente menor que al inicio del ataque. El comportamiento de la entropía después de iniciada la crisis es compatible con el incremento en el grado de

desorden del sistema inducido por una actividad de alta frecuencia. La superposición de actividades de frecuencias medias y bajas, sin embargo, es la responsable del comportamiento remanente más ordenado.

El comportamiento de SWT después de los 90 seg (en ambos casos, con y sin la inclusión de bandas de alta frecuencias) es indicativo de que el sistema presenta una mayor tendencia al orden. La eliminación de la actividad muscular permite observar mejor esta particularidad. Sin embargo, notemos que la SWT en el último caso, muestra su valor mínimo alrededor de los 125 seg en coincidencia con el inicio de la fase clónica. Luego de este punto la SWT presenta valores en aumento hasta aproximadamente los 155 seg donde, como ya se ha señalado, finaliza la crisis. Los valores de la SWT para el estadio post-ictal son casi constantes y son comparables a los obtenidos en el estadio pre-ictal. En síntesis, se puede asociar un comportamiento más ordenado durante la fase ictal que el observado durante los períodos pre y post-ictales. Este comportamiento es el reflejo de las descargas neuronales hiper-sincrónicas inducido por el foco epiléptico.

A fin de realizar un análisis más exhaustivo, definimos el valor medio de SWT para la fase pre-ictal como el valor medio de SWT en el minuto anterior al comienzo del ataque ( $\langle S_{WT} \rangle_{pre-ictal}$ ), excluyendo aquellas ventanas temporales contaminadas con artificios, de hecho se consideraron los mismos intervalos utilizados para evaluar la RWE en la fase pre-ictal. Así pues para esta fase, se obtuvieron los siguientes valores:  $\langle S_{WT} \rangle_{pre-ictal}^{(|j|=1 \dots 6)} = 1.377$  y  $\langle S_{WT} \rangle_{pre-ictal}^{(|j|=3 \dots 6)} = 1.257$ , cuando todas las bandas de frecuencias son incluidas y cuando no se incluyen las bandas de altas frecuencias, respectivamente. Del mismo modo, en la fase ictal,  $\langle S_{WT} \rangle_{ictal}^{(|j|=1 \dots 6)} = 1.386$  y  $\langle S_{WT} \rangle_{ictal}^{(|j|=3 \dots 6)} = 0.883$ .

Definiendo  $\Delta = \langle S_{WT} \rangle_{ictal} - \langle S_{WT} \rangle_{pre-ictal}$ , podemos resumir los resultados anteriores por  $\Delta \sim 0$  si todas las bandas de frecuencias son incluidas ( $B_1$  a  $B_6$ ) y  $\Delta < 0$  si solo se tiene en cuenta las bandas de frecuencias bajas y medias ( $B_3$  a  $B_6$ ). Este resultado sugiere que la actividad eléctrica cerebral durante el estadio ictal es más ordenada que en el estadio pre-ictal. Se observa mejor esta característica cuando se excluye la actividad electromiográfica (principalmente la asociada a las bandas de frecuencia  $B_1$  y  $B_2$ ). El caso en que  $\Delta \geq 0$  (comportamiento mayormente observado cuando se incluyen todas las bandas) se puede asociar con un aumento significativo del grado de desorden en la señal introducido en el registro EEG por la actividad muscular.

Finalmente podemos destacar que, estos resultados son compatibles con los obtenidos utilizando cuantificadores basados en técnicas métricas de la dinámica no-lineal. El análisis wavelet realizado permite confirmar y extender los resultados del análisis cuantitativo basado en la Transformada de Gabor (GT) realizado sobre registros epilépticos tónico-clónico de superficie [20]. El comportamiento en las RWE obtenido es similar a los hallados por Gastaut y Broughton [87] en pacientes tratados previamente con curare (un inhibidor de la actividad muscular) y por Darcey y Williamson con electrodos profundos. En los primeros segundos después de iniciado el ataque, ellos encontraron un ritmo epiléptico de reclutamiento de 10 Hz que declinaba hacia el final de la crisis. Es importante notar que en este caso, el resultado se obtuvo en un registro EEG de super-

ficie y sin la utilización de curare o algún otro método de filtrado. Asimismo, cambios leves en la definición del plateau no conllevan cambios significativos en los resultados. Similares resultados se obtuvieron cuando se analizaron las señales EEG provistas por otros electrodos diferentes al C4, como así también para registros EEG de otras crisis del mismo paciente y también para otros sujetos que compartían la misma sintomatología [20, 23, 90]. Por último se puede decir que los resultados anteriormente mencionados no dependen de los rasgos característicos de los pacientes (edad, sexo, etc) como así tampoco de las drogas antiepilépticas utilizadas.

Los registros EEG provistos por electrodos profundos pueden pensarse como una medida de “campo cercano” de la actividad eléctrica. Su intensidad corresponde mayoritariamente al resultado de las contribuciones de las neuronas que circundan al electrodo dado. En el mismo sentido, las señales EEG de electrodos de superficie dan una medida de “campo lejano”. El comportamiento registrado corresponde a la actividad eléctrica global resultante de la contribuciones de todas las neuronas del cerebro. Teniendo en cuenta estas características, es de esperar que el análisis de los registros intracranianos refleje en forma más precisa los cambios dinámicos, especialmente cuando el electrodo analizado corresponde a la zona epileptogénica (como en el caso de la señal EEG I analizada). De este modo, los cambios en la dinámica de este marcapasos global estarán representados por las fluctuaciones en la evolución temporal de la *Caoticidad* y la *Entropía Wavelet Total*. Para electrodos de superficie, se espera que la evolución temporal de estos cuantificadores no presente tantas fluctuaciones (como se puede observar en los resultados obtenidos para la señal EEG II analizada). Puesto que se tratan de registros de campo lejano, mucha de la información generada en la zona epileptogénica se perderá por fenómenos de interferencia asociados a la propagación de la misma, que luego será recolectada en el punto de registro.

El hecho de encontrar en los registros intracranianos (registros prácticamente libres de artificios) el mismo comportamiento temporal de los cuantificadores RWE y SWT, que el observado en los registros de superficie, refuerza la idea de que los resultados no son efectos espúreos introducidos por la actividad muscular o por el proceso seguido para su eliminación. Si bien agrupar en bandas de frecuencias implica una pérdida en la resolución frecuencial, las mismas pueden ser más útiles que los picos de frecuencias característicos debido a la relación entre estas bandas y las fuentes y funciones asignadas a las mismas en la dinámica cerebral. En este contexto la RWE permite una rápida interpretación de las variaciones de frecuencias, a lo largo de varios minutos, en una forma más simple y directa que en el análisis visual convencional de los registros EEG. Más aún, la SWT brinda nueva información acerca de estas señales en comparación con la obtenida utilizando el análisis frecuencial u otros métodos tradicionales. De hecho, la SWT es independiente de la amplitud o de la energía de la señal y no necesita el cálculo previo de parámetro alguno para su cómputo.

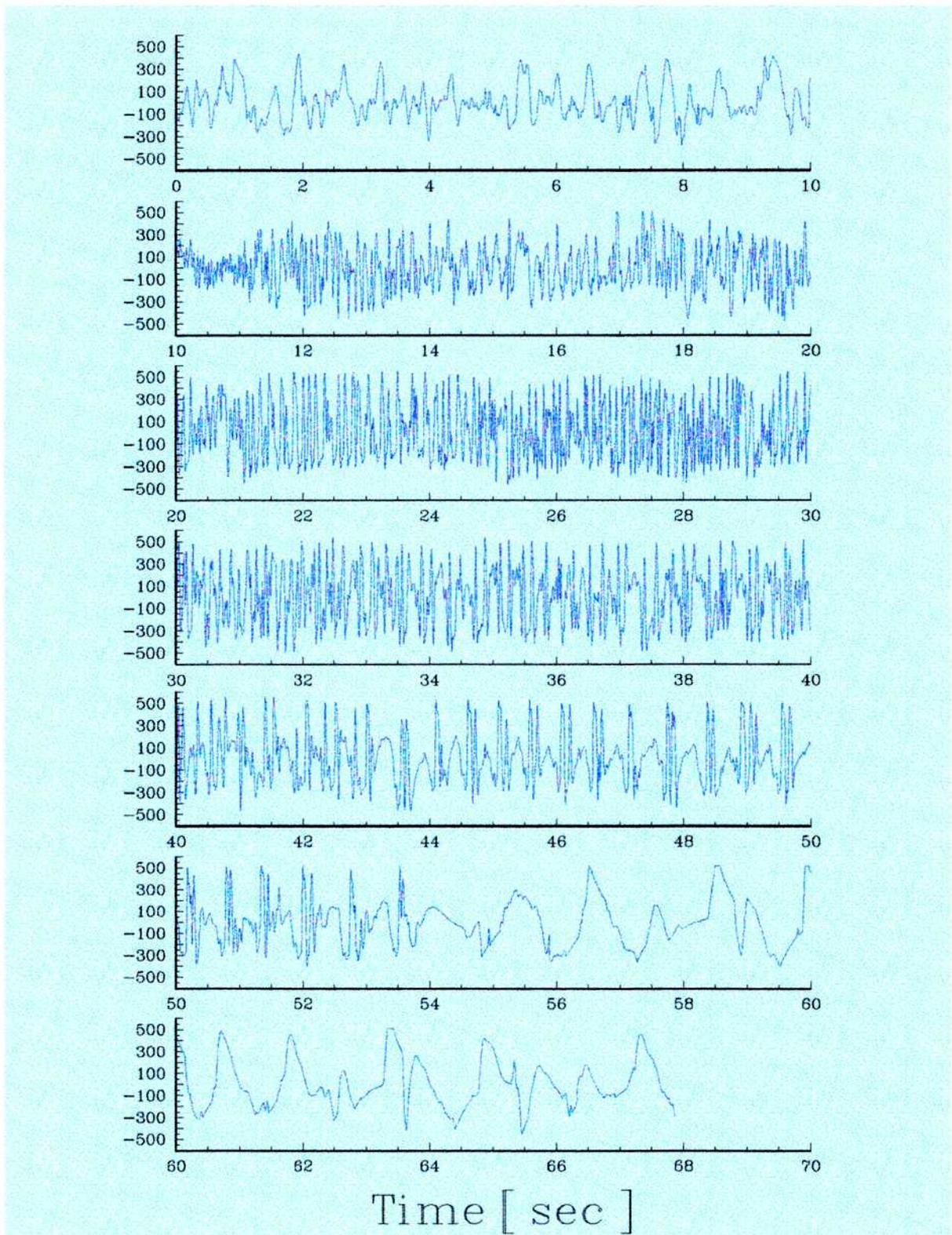


Figura 4.1: REGISTRO DE LA SEÑAL EEG CORRESPONDIENTE A UN CONTACTO EN LA REGION EPILEPTOGÉNICA EN EL HIPOCAMPO IZQUIERDO. ATAQUE EPILÉPTICO (*Serie EEG I*). LA FRECUENCIA DE MUESTREO DEL REGISTRO ES  $\omega_s = 256$  Hz. LA CRISIS EPILÉPTICA SE INICIA A LOS 10 SEG Y FINALIZA A LOS 54 SEG.

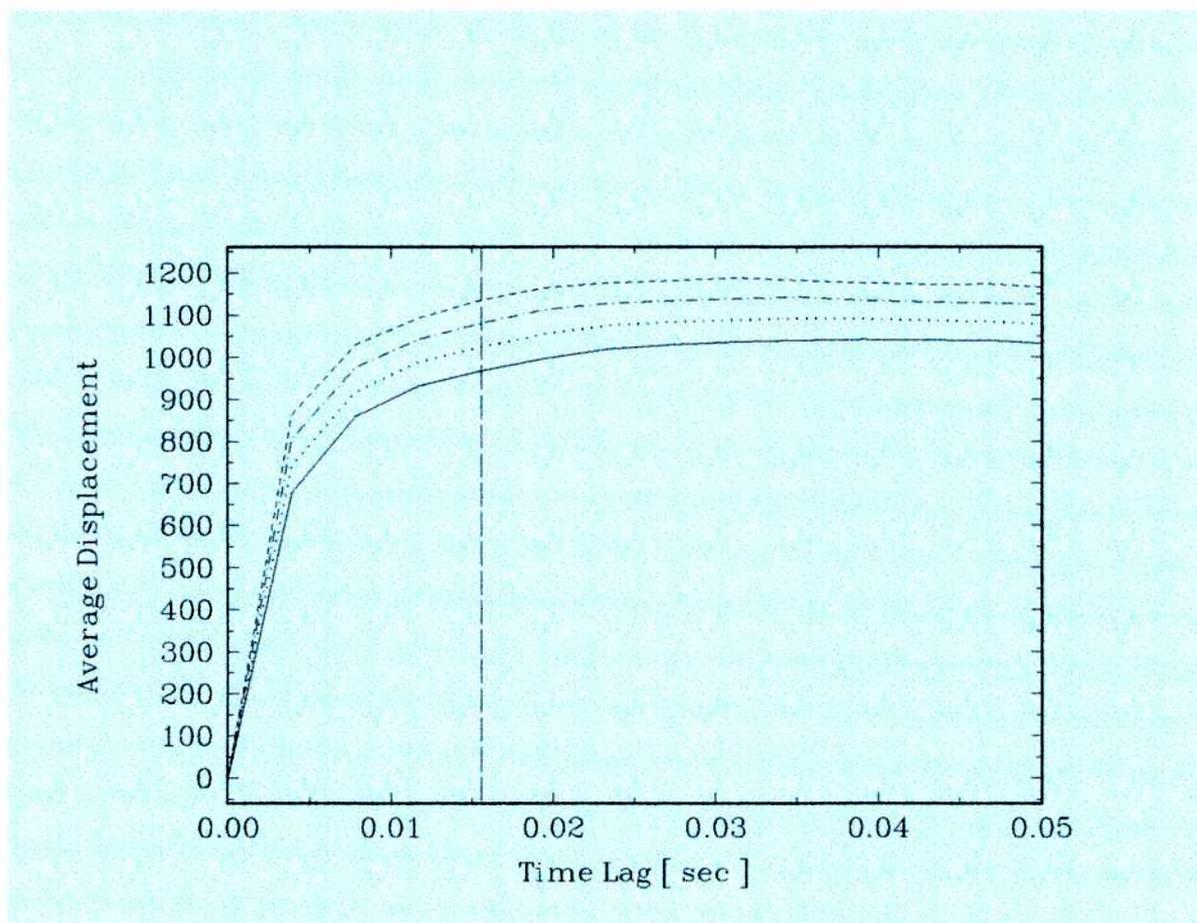


Figura 4.2: DESPLAZAMIENTO PROMEDIO  $\langle S_D \rangle$  VERSUS EL TIEMPO DE RETARDO  $\tau^*$  PARA LA Serie EEG I (FIG. 4.1), SEGMENTO 36 - 44 seg. LAS CURVAS CORRESPONDEN A DIMENSIONES DE EMBEDDING DE  $D_e = 11$  (LÍNEA SÓLIDA),  $D_e = 12$  (LÍNEA DE PUNTOS),  $D_e = 13$  (LÍNEA DE PUNTO Y RAYA) Y  $D_e = 14$  (LÍNEA SEGMENTADA). EL VALOR ÓPTIMO DEL TIEMPO DE RETARDO  $\tau^* = \tau \cdot t_s = 0.0156$  seg SE REMARCÓ CON LA LÍNEA VERTICAL SEGMENTADA.

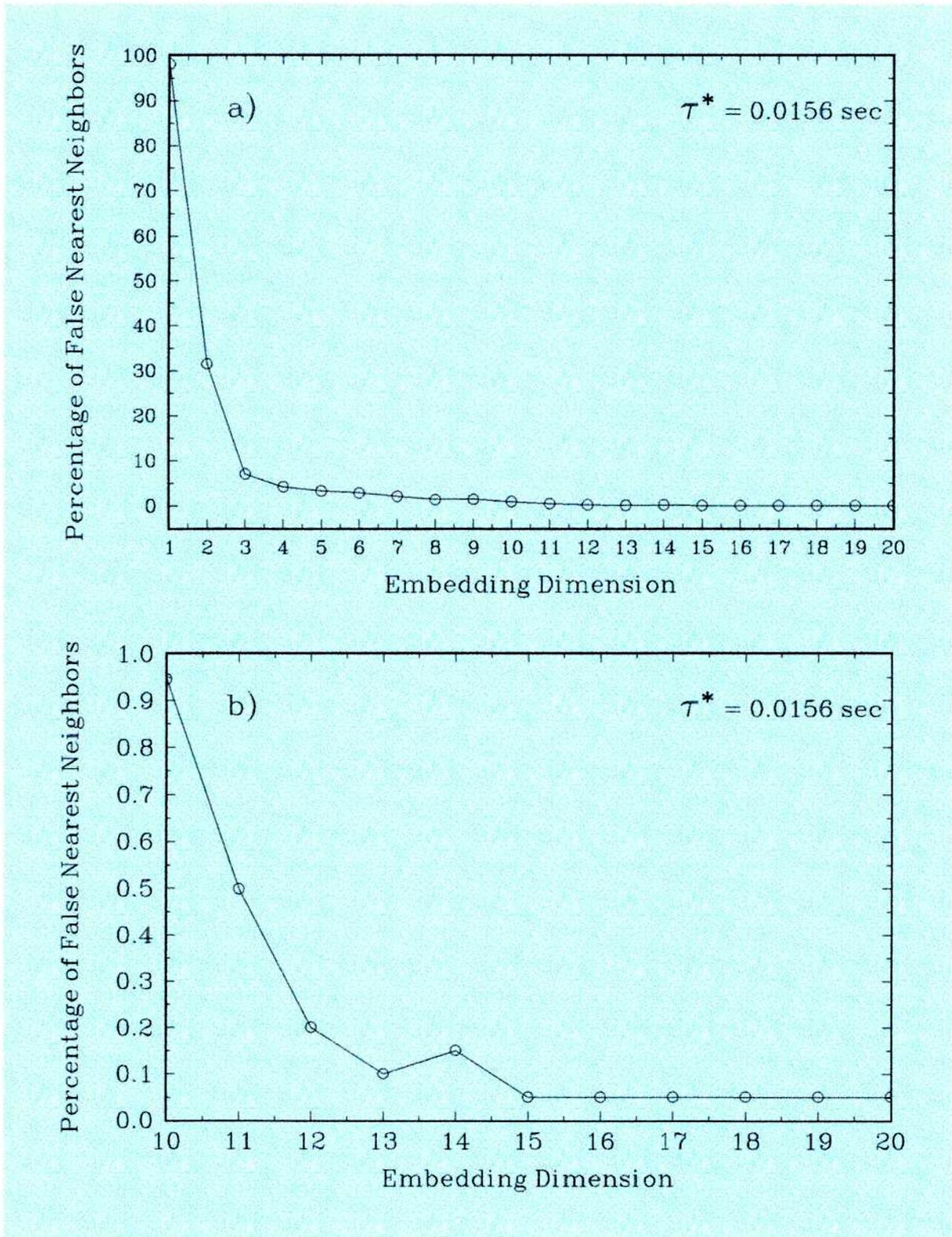


Figura 4.3: PORCENTAJE DE FALSOS PRÓXIMOS VECINOS COMO FUNCIÓN DE LA DIMENSIÓN DE EMBEDDING PARA LA *Serie EEG I* (FIG. 4.1) SEGMENTO 36 - 44 *seg* EVALUADA CON EL TIEMPO DE RETARDO ÓPTIMO  $\tau^* = 0.0156$  *seg*.

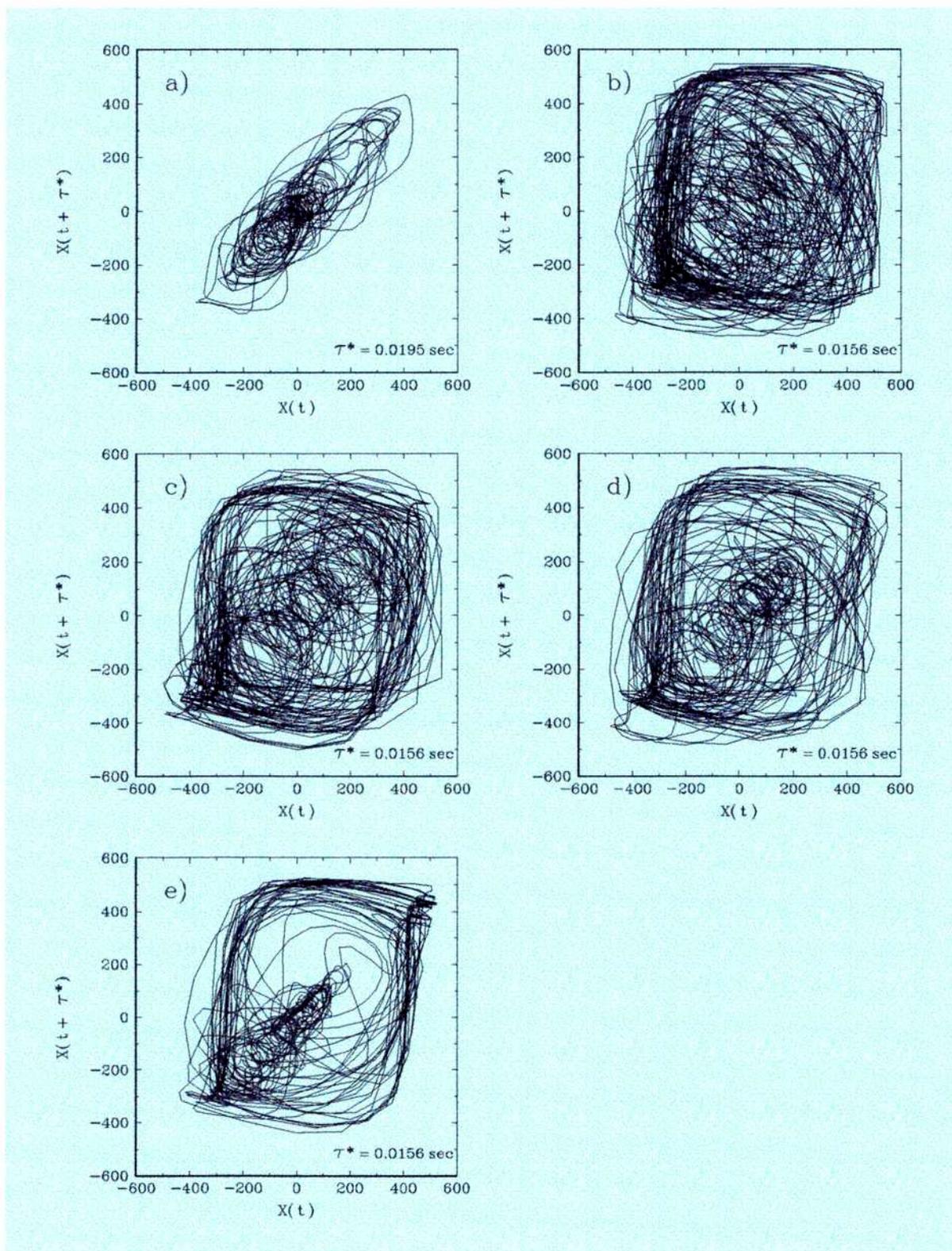


Figura 4.4: PROYECCIÓN BIDIMENSIONAL DEL RETRATO DE FASES CORRESPONDIENTE A LA *Serie EEG I* (FIG. 4.1) SEGMENTOS: a) 0 – 7 seg (PRE - CRISIS); b) 21 – 29 seg Y c) 29 – 37 seg (PLENO DESARROLLO DE LA CRISIS); d) 36 – 44 seg Y e) 44 – 52 seg (FIN DE LA CRISIS).  $\tau^*$  ES EL TIEMPO DE RETARDO EMPLEADO.

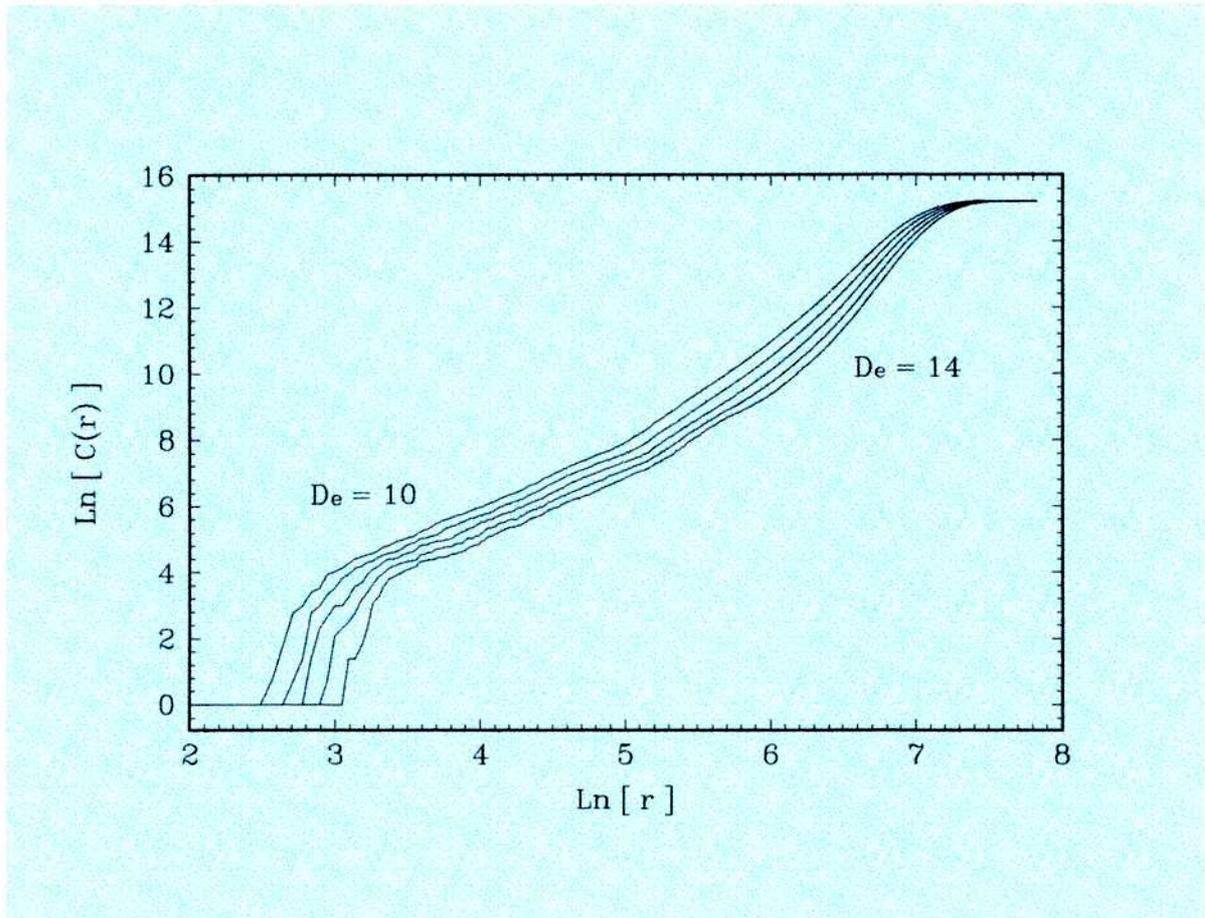


Figura 4.5: GRÁFICO DEL LOGARITMO DE LA INTEGRAL DE CORRELACIÓN  $\ln[ C(r) ]$  VERSUS  $\ln(r)$  PARA LA Serie EEG I (FIG. 4.1) SEGMENTO 36 - 44 seg CON TIEMPO DE RETARDO  $\tau^* = 0.0156$  seg Y DIMENSIONES DE EMBEDDING ENTRE  $D_e = 10$  Y 14. LA TANGENTE DE ESTAS CURVAS PARA  $3.5 \leq \ln(r) \leq 5.5$  DA LA DIMENSIÓN DE CORRELACIÓN  $D_2$ .

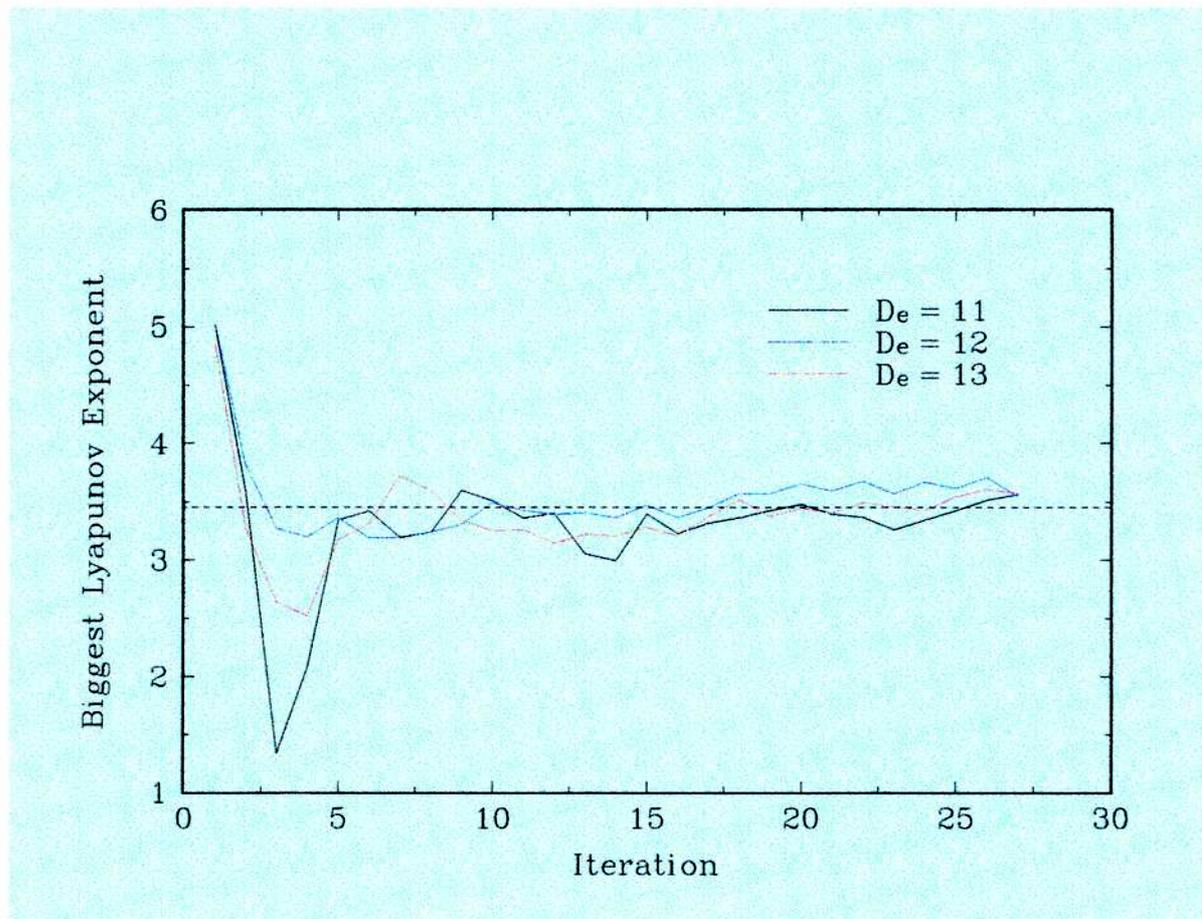


Figura 4.6: CONVERGENCIA DEL MÁXIMO EXPONENTE DE LYAPUNOV  $\Lambda_{max}$  CON EL PROCESO DE ITERACIÓN (TIEMPOS DE EVOLUCIÓN  $\Delta T$ ) DEL MÉTODO MODIFICADO DE WOLF PARA SERIES TEMPORALES, PARA LA Serie EEG I (FIG. 4.1) SEGMENTO 36 - 44 seg CON TIEMPO DE RETARDO  $\tau^* = 0.0156$  seg Y DIMENSIONES DE EMBEDDING DESDE  $D_e = 11$  A 13.

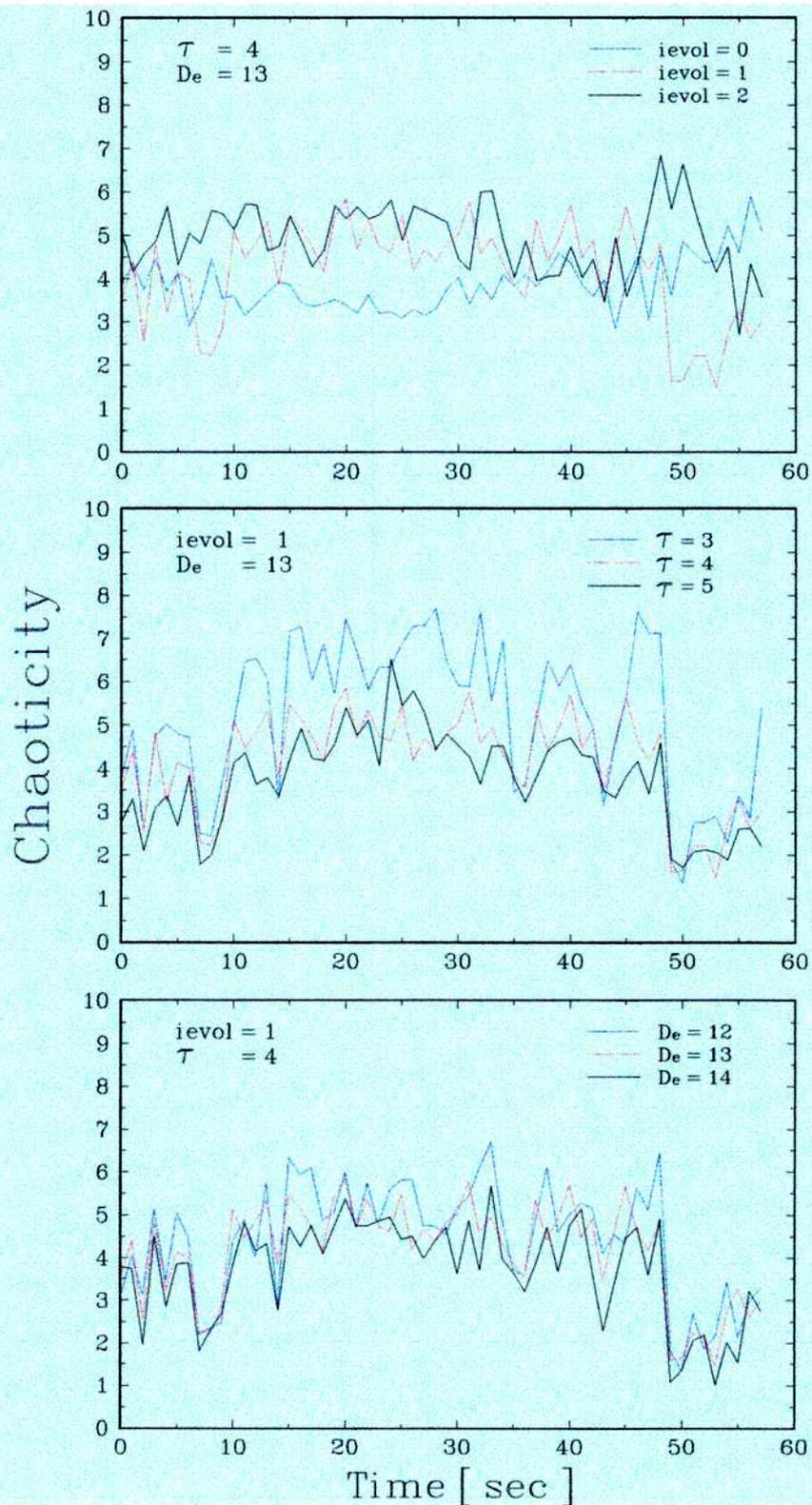


Figura 4.7: EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA CAOTICIDAD EN VENTANAS DESLIZANTES DE LONGITUD  $L = 2560 \text{ datos} \equiv 10 \text{ seg}$  Y CON UNA SUPERPOSICIÓN (OVERLAPPING)  $\delta = 256 \text{ datos} \equiv 1 \text{ seg}$  PARA LA Serie EEG I (FIG. 4.1). DEPENDENCIA CON LOS PARÁMETROS NECESARIOS PARA SU CÓMPUTO.

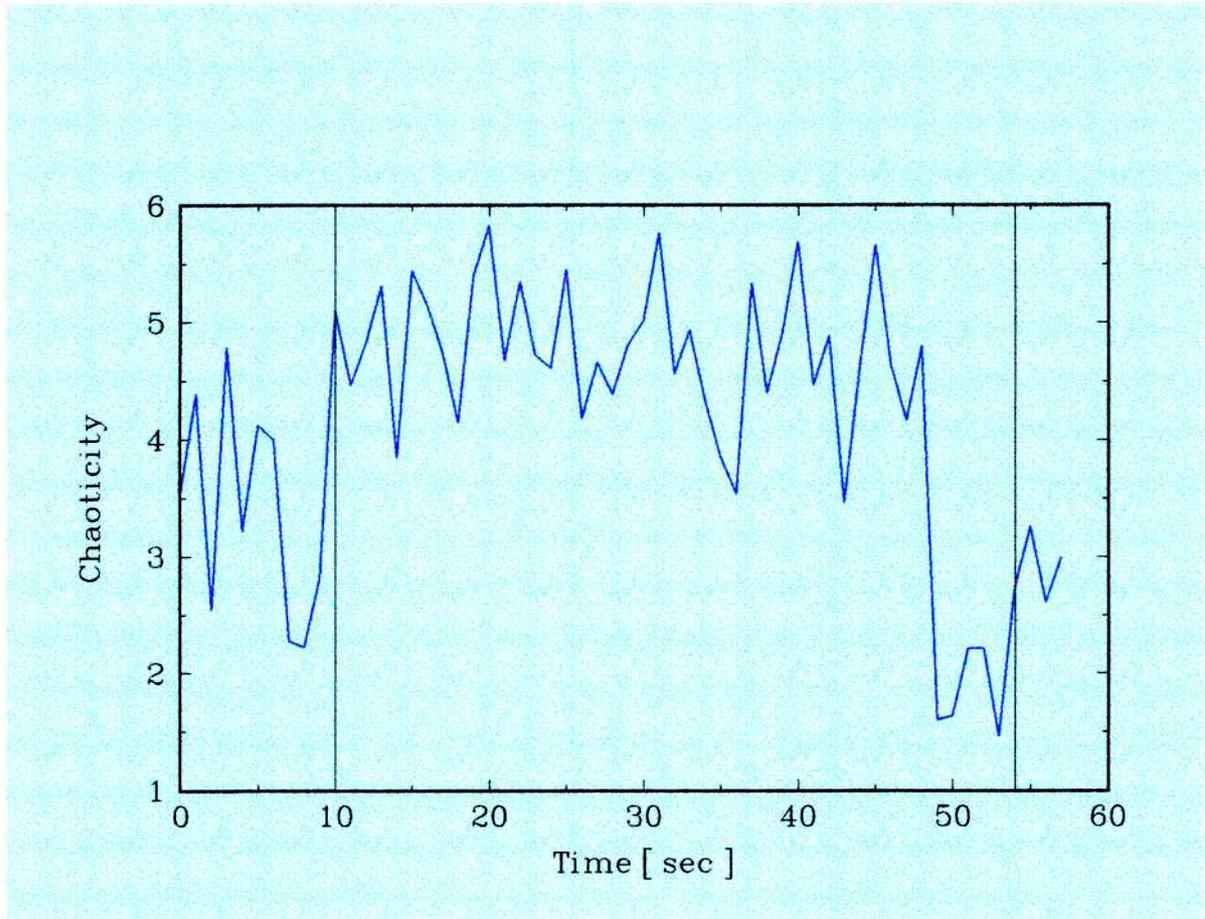


Figura 4.8: EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA CAOTICIDAD EN VENTANAS DESLIZANTES DE LONGITUD  $L = 2560 \text{ datos} \equiv 10 \text{ seg}$  Y CON UN SUPERPOSICIÓN (OVERLAPPING)  $\delta = 256 \text{ datos} \equiv 1 \text{ seg}$  PARA LA Serie EEG I (FIG. 4.1), CON  $\text{ievol} = 2$ ,  $\tau^* = 4 \cdot t_s$  Y  $D = 10$ .

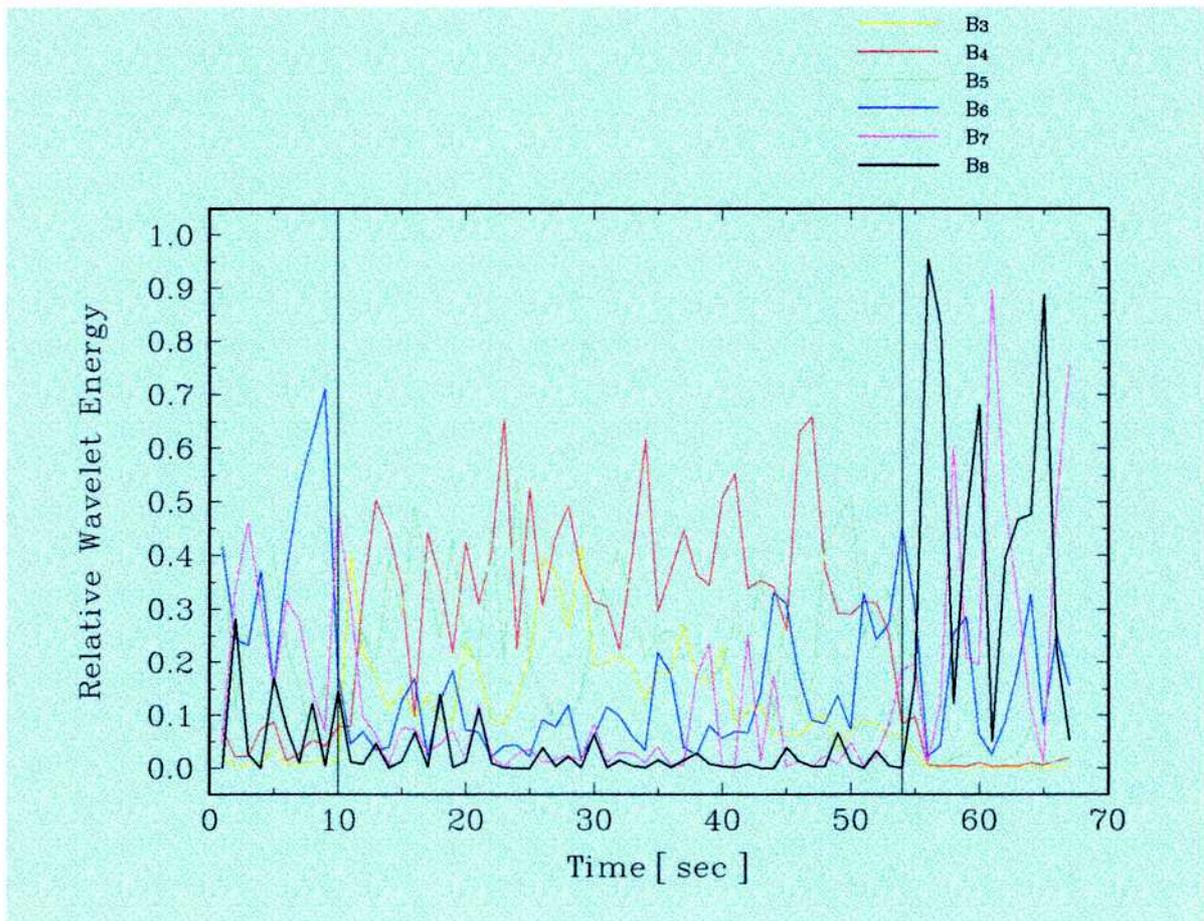
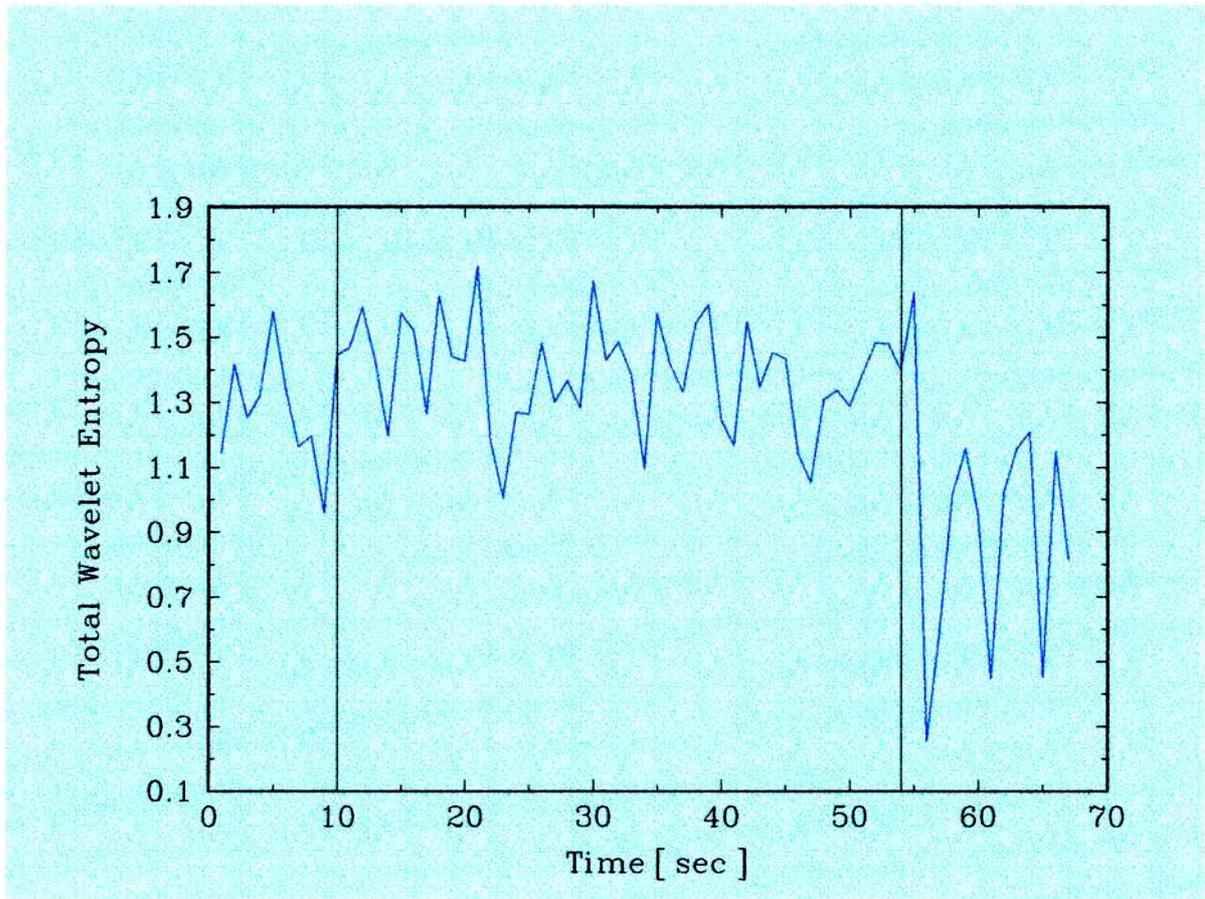


Figura 4.9: ENERGÍA WAVELET RELATIVA (ENERGÍA POR BANDA NORMALIZADA A LA ENERGÍA TOTAL), PARA LAS BANDAS DE FRECUENCIAS WAVELET DESDE  $B_3$  A  $B_8$  (VER TAB. 4.2) CORRESPONDIENTES A LA *Serie EEG I*, SEÑAL GRAFICADA EN FIG. 4.1, EN FUNCIÓN DEL TIEMPO. LAS CONTRIBUCIÓN DE LA BANDA DE FRECUENCIA  $B_1$  ES CONSIDERADA NULA EN EL PRESENTE TRABAJO. LA EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA ENERGÍA WAVELET RELATIVA PARA LA BANDA  $B_2$  NO HA SIDO GRAFICADA, POR SER SU CONTRIBUCIÓN MUY CERCANA A CERO EN TODO EL INTERVALO TEMPORAL.



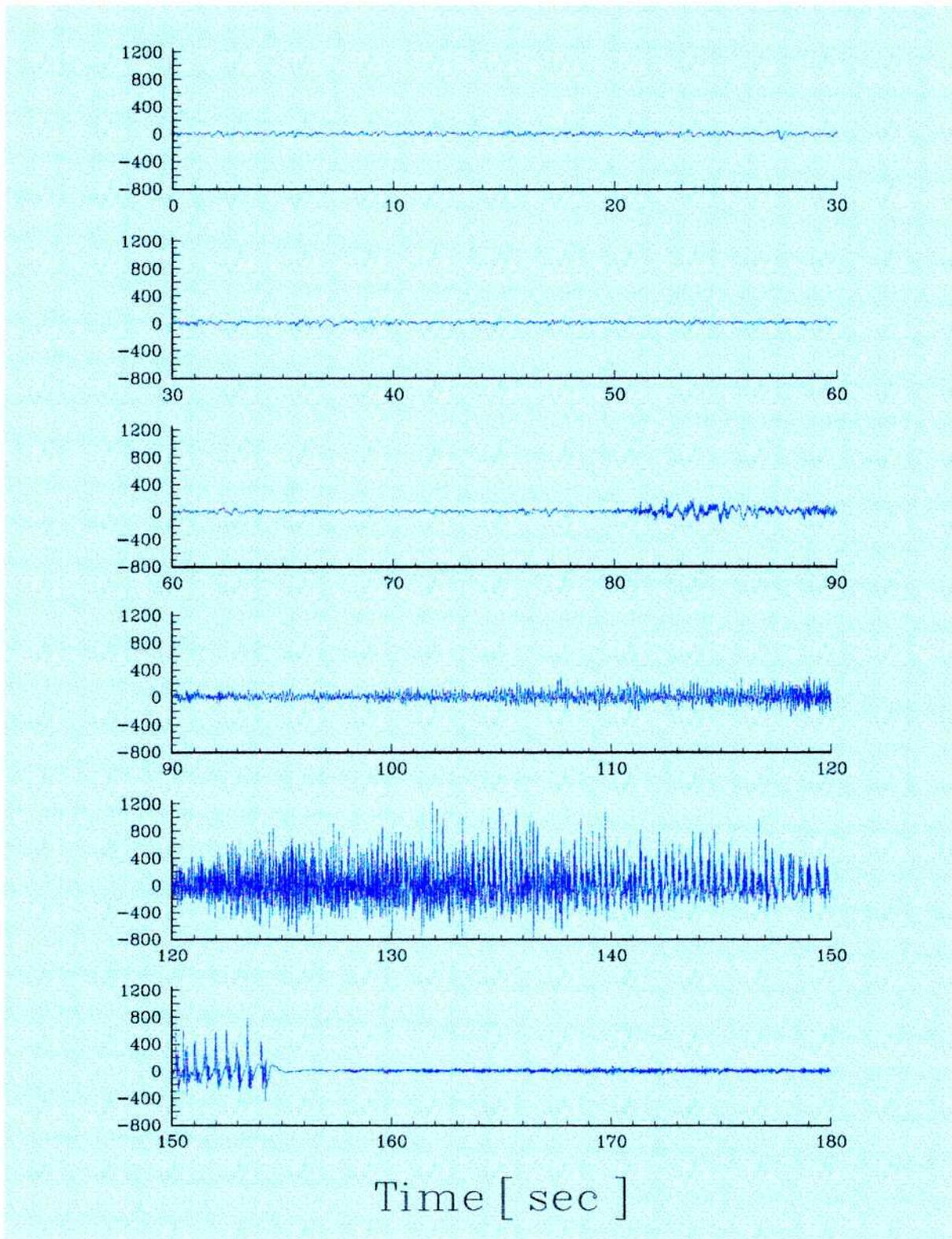


Figura 4.11: SEÑAL EEG DE SUPERFICIE CORRESPONDIENTE A UN ELECTRODO EN POSICIÓN C4 DE UN ATAQUE EPILÉPTICO TÓNICO-CLÓNICO (*Serie EEG II*). LA FRECUENCIA DE MUESTREO DEL REGISTRO ES  $\omega_s = 102.4$  Hz. LA CRISIS SE INICIA A LOS 80 SEG, LA FASE TÓNICA A LOS 90 SEG Y LA FASE CLÓNICA A LOS 125 SEG. LA CRISIS FINALIZA A LOS 154 SEG.

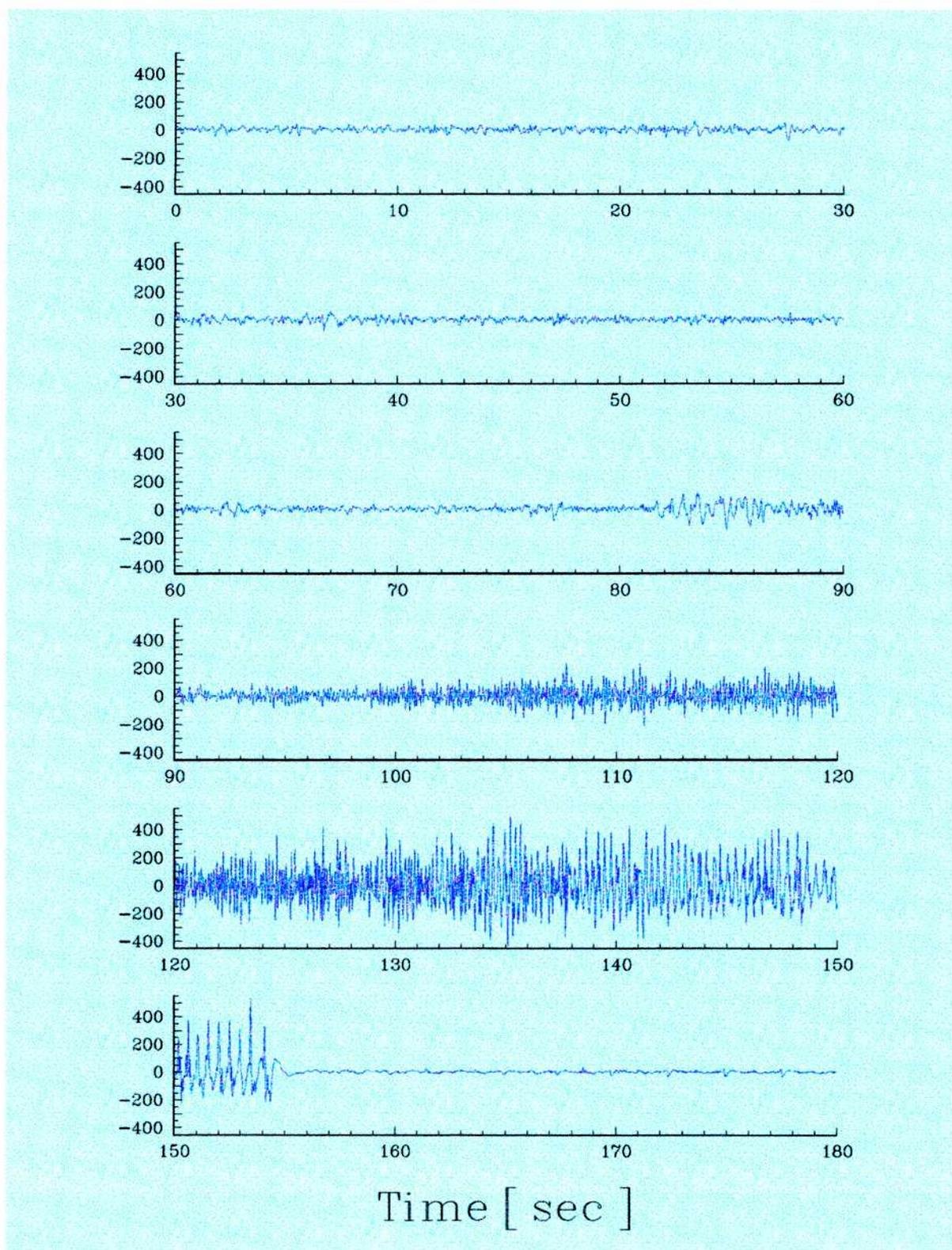


Figura 4.12: Serie EEG I suavizada. Señal representada en la Fig. 4.11 sin las contribuciones de las bandas wavelet de frecuencia  $B_1$  y  $B_2$  (ver Tab. 4.4).

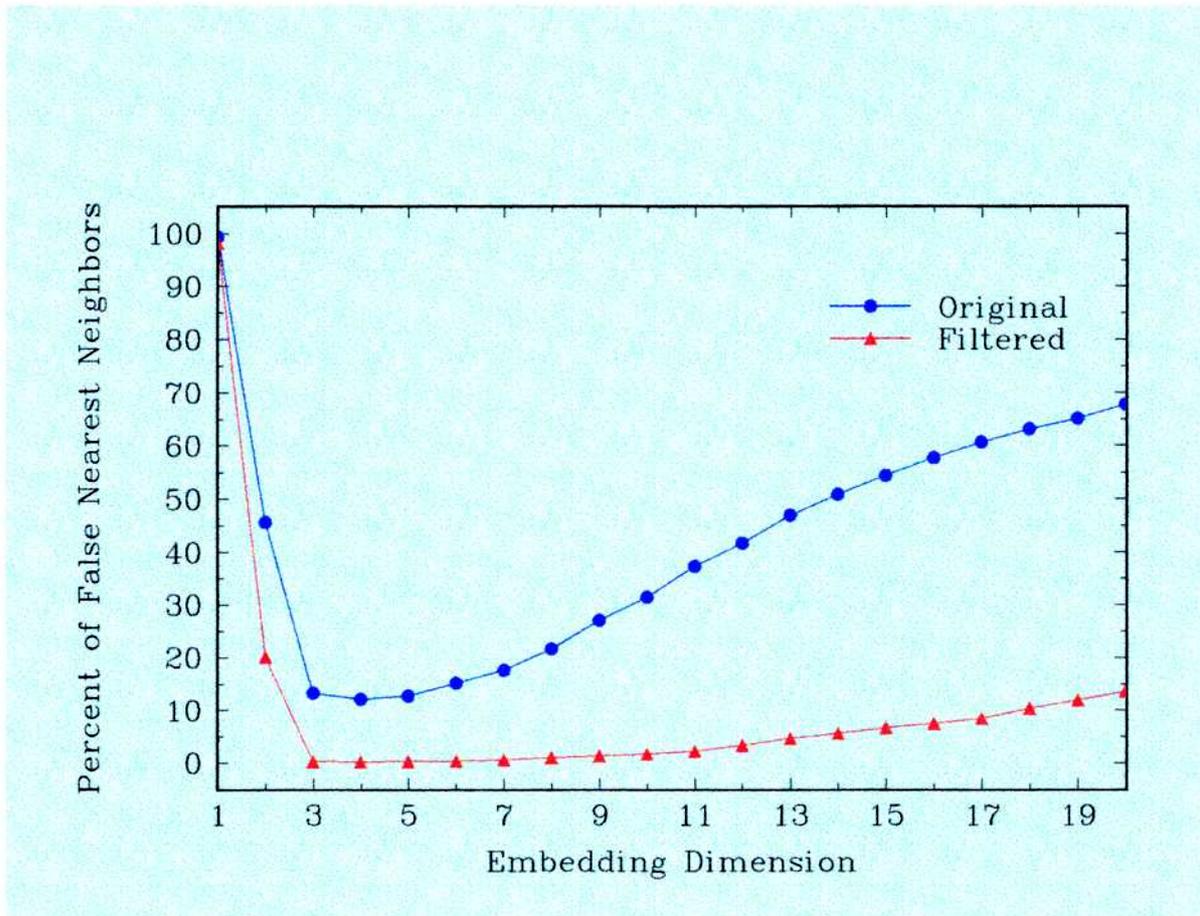


Figura 4.13: PORCENTAJE DE FALSOS PRÓXIMOS VECINOS COMO UNA FUNCIÓN DE LA DIMENSIÓN DE EMBEDDING PARA LA *Serie EEG I* (FIG. 4.11) Y LA SEÑAL LIBRE DE RUIDO (FILTRADA), SIN LAS CONTRIBUCIONES DE LAS BANDAS WAVELET DE FRECUENCIA  $B_1$  Y  $B_2$  (FIG. 4.12), CORRESPONDIENTE AL ESTADO CLÓNICO (90 – 120 *seg*) EVALUADO CON EL TIEMPO DE RETARDO ÓPTIMO  $\tau^* = 3 \cdot t_s$ .

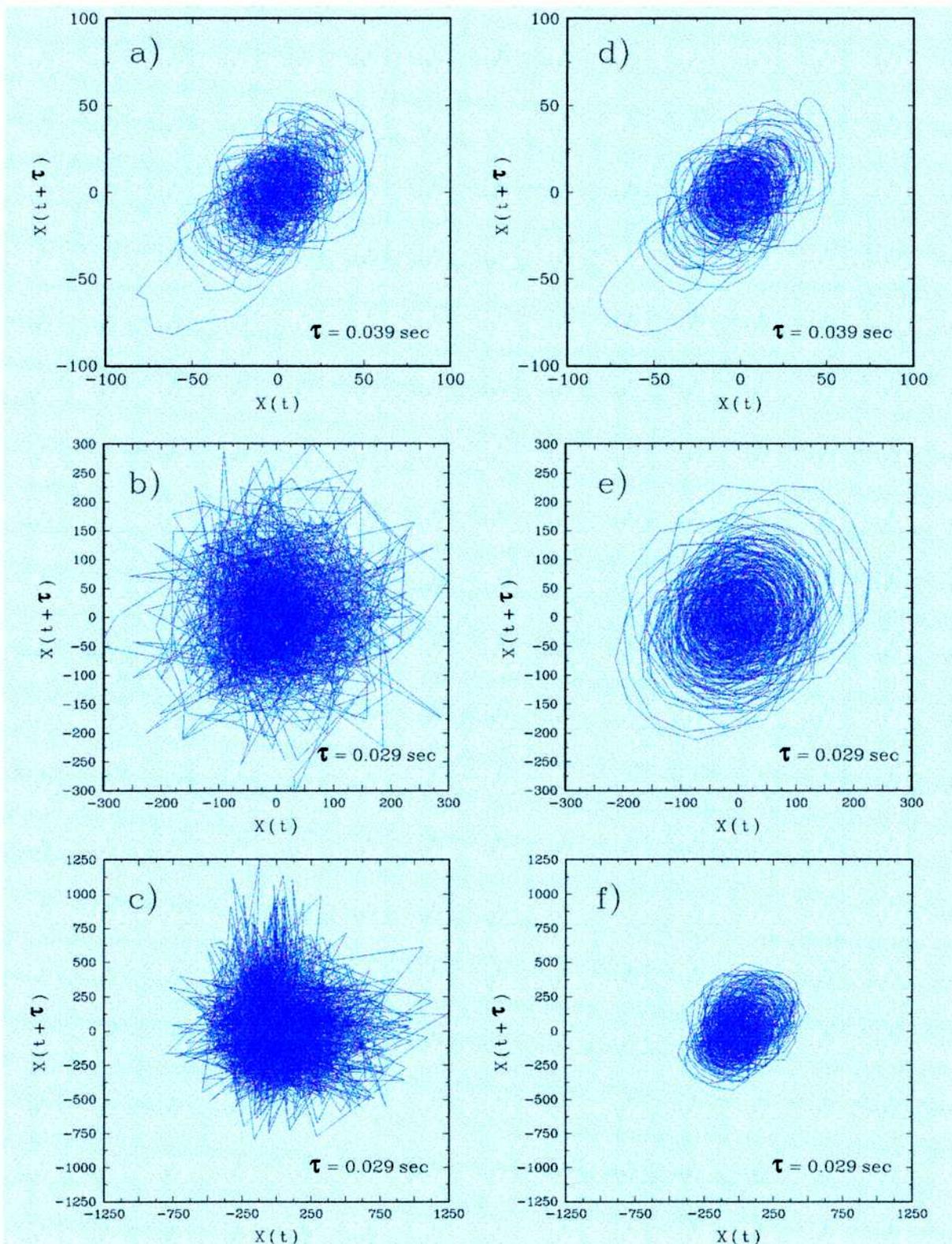


Figura 4.14: PROYECCIÓN EN DOS DIMENSIONES DEL REtrato DE FASES CORRESPONDIENTE A LOS SIGUIENTES SEGMENTOS DE LA SERIE TEMPORAL ORIGINAL *Serie EEG II* (*Serie EEG II FILTRADA*) GRAFICADA EN LA FIG. 4.11 (FIG. 4.12): a) (d) PRE-ATAQUE 50 – 80 seg; b) (e) ESTADO TÓNICO 90–120 seg; c) (f) ESTADO CLÓNICO 120–150 seg.  $\tau^*$  ES EL TIEMPO DE RETARDO ÓPTIMO EMPLEADO Y CORRESPONDE A LA SEÑAL FILTRADA.

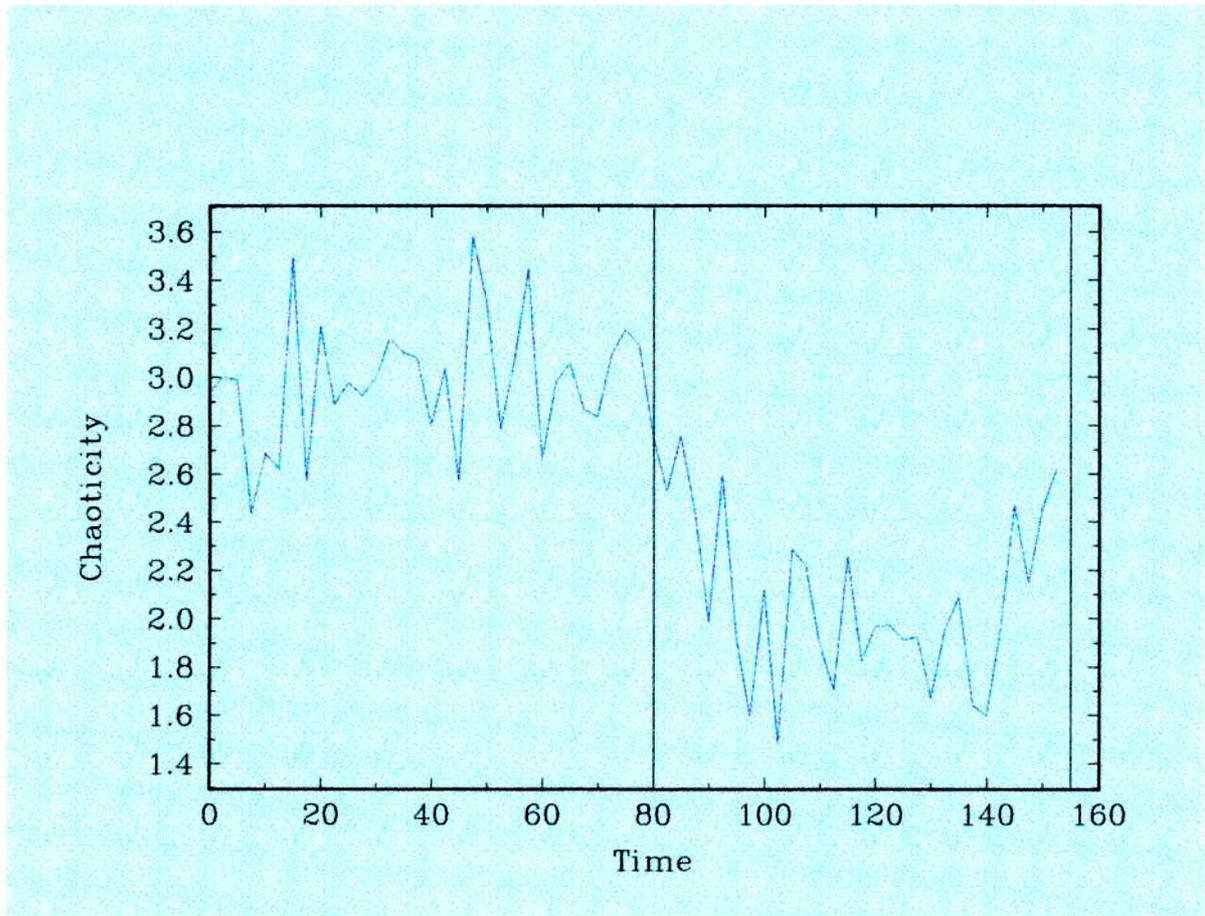


Figura 4.15: EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA CAOTICIDAD EN VENTANAS DESLIZANTES DE LONGITUD  $L = 2560$  datos  $\equiv 25$  seg Y CON UN OVERLAPPING  $\delta = 256$  datos  $\equiv 2.5$  seg PARA LA Serie EEG II FILTRADA (FIG. 4.12), CON  $ievol = 2$ ,  $\tau^* = 4 \cdot t_s$  Y  $D_e = 10$ .

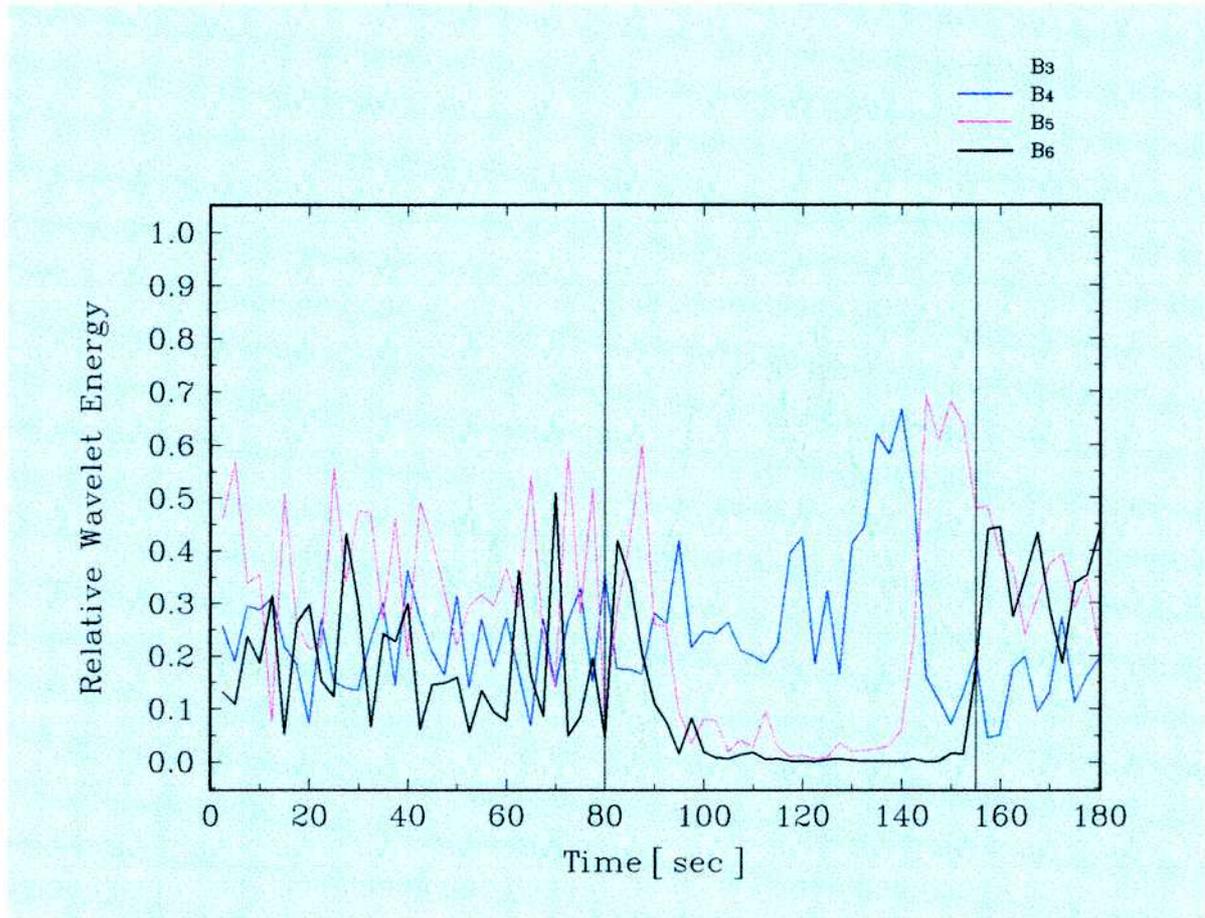


Figura 4.16: ENERGÍA WAVELET RELATIVA (ENERGÍA POR BANDA NORMALIZADA A LA ENERGÍA TOTAL). LAS CONTRIBUCIONES DE LAS BANDAS WAVELET DE FRECUENCIA  $B_1$  Y  $B_2$  SON CONSIDERADAS COMO NULAS, CON LO CUAL LA EVOLUCIÓN TEMPORAL OBTENIDA PUEDE ASOCIARSE CON LA *Serie EEG II* FILTRADA MOSTRADA EN LA FIG. 4.12.

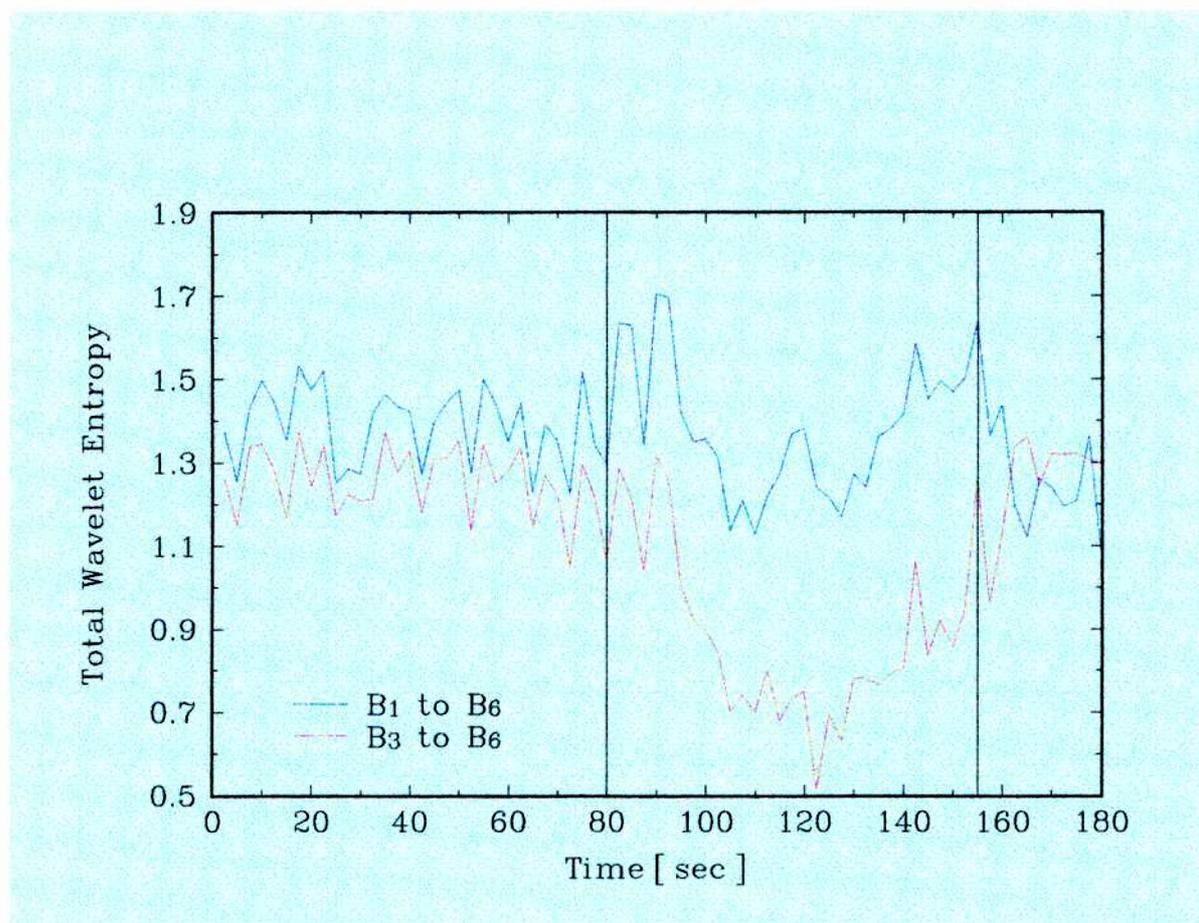


Figura 4.17: EVOLUCIÓN TEMPORAL DE LA ENTROPÍA WAVELET TOTAL PARA LA *Serie EEG II* ORIGINAL (FIG. 4.11) Y FILTRADA (FIG. 4.12). EN EL CASO DE LA SEÑAL FILTRADA, LAS CONTRIBUCIONES DE LAS BANDAS DE FRECUENCIA  $B_1$  Y  $B_2$  (TAB. 4.4) SON CONSIDERADAS NULAS.

# Capítulo 5

## Conclusiones

La primera característica importante que se observa, en las series EEG analizadas, es la disminución significativa de la *Caoticidad* y la *Entropía Wavelet Total* al inicio de las crisis epilépticas y durante las mismas. Este cambio en la dinámica del sistema indica la transición hacia un comportamiento más rítmico y ordenado, compatible con un proceso de sincronización de la actividad neuronal. Se podría pensar esta dinámica como inducida por un hipotético foco epiléptico.

El uso de cuantificadores basados en las herramientas métricas de la dinámica no-lineal y en el análisis tiempo-frecuencia, junto con la historia clínica del paciente y la inspección médica visual del registro EEG, podrían entonces, contribuir a la identificación de la fuente de la crisis epiléptica y una mejor comprensión de su dinámica. Ciertamente, la utilización de estos cuantificadores complementaría la metodología establecida proveyendo información importante acerca de los mecanismos subyacentes.

Por otra parte, la *Entropía Wavelet Total* da nueva información acerca de la señal EEG en comparación con la obtenida a partir de análisis frecuenciales u otro tipo de métodos standard. Resulta un buen parámetro tanto para detectar como así también, cuantificar cambios dinámicos en el comportamiento de un sistema. De su definición surgen características especialmente significativas desde el punto de vista práctico. La *Entropía Wavelet Total* es independiente de la amplitud y la energía de la señal en estudio y, más importante aún, es una magnitud libre de parámetros. Estas características jugarán un papel importante a la hora de complementar la clínica médica con los elementos coadyuvantes del análisis qEEG.

El análisis comparativo realizado ha permitido confirmar resultados previos y a su vez mostrar las ventajas de los cuantificadores elegidos frente a otras magnitudes en el qEEG. De esta comparación se destaca la potencialidad para una aplicación práctica y efectiva del qEEG de la *Entropía Wavelet Total*, frente a la *Caoticidad* y otros cuantificadores derivados de las técnicas métricas de la dinámica no-lineal.

Si la señal bajo análisis es una serie temporal no estacionaria, tal el caso del registro EEG, la *Entropía Wavelet Total* permite detectar cambios en la misma dada la capacidad de localización de la transformada wavelet. Cuando se utilizan las wavelets

para descomponer la serie neuroeléctrica en el espacio tiempo-frecuencia, actúan con su propia ventana en cada escala. Es decir, en la transformada wavelet standard el tiempo de resolución mejora en la medida que la escala de análisis se hace más pequeña. Como ya se dijo, esto permite que la transformada wavelet actúe como un microscopio matemático, enfocando con una estructura de pequeña escala los eventos espaciados cercanos temporalmente y con estructura de gran escala para observar el patrón global de la onda. El tamaño efectivo variable de la ventana temporal (espacial) utilizada por la transformada wavelet es indudablemente la principal ventaja frente a la transformada de Fourier. La entropía espectral a través de la transformada de Fourier, utiliza una ventana temporal de anchura fija para todas las escalas y por consiguiente, generalmente falla en la precisión para resolver estructuras de pequeña escala.

Por otra parte, la no estacionariedad de la señal en estudio, limita la utilización de los invariantes métricos no-lineales debido al tiempo efectivo empleado en la resolución del problema. Ya sea que se trabaje con dimensiones de correlación y exponentes de Lyapunov (cumplidos ciertos criterios restrictivos de estacionariedad) o dimensionalidad y caoticidad (limitaciones estacionarias removidas), los tiempos computacionales utilizados en el análisis wavelet son mucho menores.

Asimismo, cuando se presenta la necesidad de analizar señales contaminadas con artificios de medición, como es el caso de la mayoría de los registros EEG (electrodos superficiales), la transformada wavelet resulta una herramienta de gran utilidad para "limpiar" la señal. La principal ventaja en el proceso de filtrado a través de la transformada wavelet es la capacidad de no modificar la estructura remanente. La señal libre de ruido contaminante permanece inalterada y en consecuencia la dinámica asociada tampoco se modifica.

Resulta evidente también que tanto la *Caoticidad* como la *Entropía Wavelet Total* son cuantificadores sensibles a los cambios globales en el EEG y a su vez ambos son útiles para realizar un rápido scanning en registros largos; en especial las variaciones observadas en la *Entropía Wavelet Total* resultan sincrónicas con los cambios dinámicos establecidos por inspección médica visual. Por otra parte, ambos cuantificadores presentan fluctuaciones que en muchos de los casos analizados no presentan una correlación directa con cambios en la dinámica cerebral asociada y por ende deben ser analizados con mas detalle.

Es importante señalar que la detección de los pequeños cambios en el comportamiento de la señal, precursores del ataque epiléptico, se podría realizar con la *Entropía Wavelet Total*; ya que resulta más confiable puesto que las hipótesis matemáticas que se deben cumplir siempre son satisfechas, y también debido al mejor sincronismo observado en su evolución temporal con respecto a los cambios producidos en la dinámica del sistema.

# Agradecimientos

Quisiera agradecerles a Nidia, Osvaldo y Carlos, el apoyo que me brindaron; sin el cual no hubiese sido posible concluir este trabajo.

Por los datos, quisiera agradecer a: la Dra. Silvia Kochen del Centro Municipal de Epilepsia, Hospital Ramos Mejía, Buenos Aires, Argentina, por los registros EEG con electrodos profundos; y al Dr. Adrian Rabinowicz, Departamento de Neurología y Programa de Epilepsia, del Instituto de Investigaciones Neurológicas Raúl Carrera (FLENI), Buenos Aires, Argentina, por los registros EEG con electrodos de superficie, utilizados en este trabajo.

City Bell, 20 de marzo de 2001.

# Bibliografía

- [1] S. P. Layne, G. Mayer-Kress and J. Holzfuss, *Problems associated with dimensional analysis of electroencephalogram data*. En *Dimension and entropies in chaotic system*, G. Mayer-Kress (Editor). Springer-Verlag, Berlin (1986).
- [2] E. Niedermeyer and F. H. Lopes da Silva. *Electroencephalography, Basic Principles, Clinical Applications, and Related Field*. Urban and Schwarzenberg, Baltimore (1987).
- [3] M. C Casdagli, L. D. Iasemedis, R. S. Savit, R.L. Gilmore, S. N. Roper and J. C. Sackellares, *Non-linearity in invasive EEG recordings from patients with temporal lobe epilepsy*. *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.* 102, pp. 98–105 (1997).
- [4] K. Lehnertz and C. E. Elger, *Can epileptic seizures be predicted?. Evidence from nonlinear time series analysis of brain electrical activity*. *Phys. Rev. Lett.* 80, pp. 5019–5022 (1998).
- [5] L. D. Iasemedis, J. C. Sackellares, H. P. Zaveri, and W. J. Williams, *Phase space topography and Lyapunov exponent of electrocorticograms in partial seizures*. *Brain Topography* 2, pp. 187–201 (1990).
- [6] L. D. Iasemedis and J. C. Sackellares, *The evolution with time of spatial distribution of the largest Lyapunov exponent on the human epileptic cortex*. En *Measuring chaos in human brain*, D. Duke and W. Pritchards (Editores). World Scientific, Singapore, pp. 49–89 (1991).
- [7] Z. J. Kowalik and T. Elbert, *Changes of chaoticness in spontaneous EEG/EMG*. *Integrative Physiological and Behavioral Science* 29, pp. 270–282 (1994).
- [8] J. P. Pijn, J. Neerven, A. Noest, F. Lopes da Silva, *Chaos or noise in EEG signals; dependence on state and brain site*. *Electroencephalography and Clinical Neurophysiology* 79, pp. 371–381 (1991).
- [9] A. Babloyantz, C. Nicolis and J. Salazar, *Evidence for chaotic dynamics of brain activity during the sleep cycle*. *Phys. Lett. A* 111, pp. 152–156 (1985).
- [10] A. Babloyantz and A. Destexhe, *Low dimensional chaos in an instance of epilepsy*. *Proc. Nat. Acad. Sci. USA* 83, pp. 3513–3517 (1986).

- [11] S. Blanco, S. Kochen, R. Quian Quiroga, L. Riquelme, O. A. Rosso and P. Salgado, *Characterization of epileptic EEG time series (I): Gabor Transform and nonlinear dynamics methods*. En *Wavelet Theory and Harmonic Analysis in Applied Sciences*, C. E. D'Atellis and E. M. Fernandez-Berdaguer (Editores). Birkhäuser Publishers, Boston, pp. 179–226 (1997).
- [12] S. Blanco, A. Figliola, S. Kochen, and O. A. Rosso, *Using nonlinear dynamics metrics tools for characterizing brain structures*. *IEEE Eng. Med. and Biol.* 16, pp. 83–92 (1997).
- [13] S. Blanco, J. Creso, A. Figliola, R. Quian Quiroga, and O. A. Rosso, *Nonlinear dynamic analysis of scalp EEG epileptic signals*. En *Instabilities and Nonequilibrium Structures VII*, E. Tirapegui y J. Martinez (Editores). Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (en prensa).
- [14] S. Blanco, A. Figliola, J. Creso, and O. A. Rosso, *Analysis of wavelet filtered tonic-clonic epileptic records*. *IEEE Trans. Biomed. Eng.* (enviado).
- [15] T. Elbert, W. J. Ray, Z. J. Kowalik, J. E. Skinner, K. E. Graf and N. Birbaumer, *Chaos and physiology: deterministic chaos in excitable cell assemblies*. *Physiological Reviews* 74, pp. 1–47 (1994).
- [16] E. Başar, *Brain Function and Oscillations. I: Brain Oscillations, Principles and Approaches*. Springer, Berlin, 1998.
- [17] S. Blanco, R. Quian Quiroga, O. A. Rosso and S. Kochen, *Time-frequency analysis of electroencephalogram series*. *Phys. Rev. E* 51, pp. 2624–2631 (1995).
- [18] S. Blanco, C. D'Attellis, S. Isaacson, O. A. Rosso and R. Sirne, *Time-frequency analysis of electroencephalogram series (II): Gabor and Wavelet Transform*. *Phys. Rev. E* 54, pp. 6661–6672 (1996).
- [19] S. Blanco, S. Kochen, O. A. Rosso and P. Salgado, *Applying time-frequency analysis to seizure EEG activity. A method to help to identify the source of epileptic seizures*. *IEEE Eng. Med. Biol. Mag.* 16, pp. 64–71 (1997).
- [20] R. Quian Quiroga, S. Blanco, O. A. Rosso, H. García and A. Rabinowicz, *Searching for hidden information with Gabor Transform in generalized tonic-clonic seizures*. *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.* 103, pp. 434–439 (1997).
- [21] S. Blanco, A. Figliola, R. Quian Quiroga, O. A. Rosso and E. Serrano, *Time-frequency analysis of electroencephalogram series (III): Wavelet Packets and Information Cost Function*. *Phys. Rev. E* 57, pp. 932–940 (1998).
- [22] O. A. Rosso, R. Quian Quiroga, S. Blanco, A. Figliola, S. and E. Başar, *Wavelet Entropy applied to brain signal analysis*. En *Signal Processing IX, Theories and Applications, Proceedings of EUSIPCO-98*, S. Theodoridis, I. Pitas, A. Stouraitis and N. Kalouptsidis (Editores), Typorama Editions, Patras, pp. 2445–2248 (1998).

- [23] sO. A. Rosso, S. Blanco, A. Figliola, J. Creo and A. Rabinowicz, *Dynamic characterization of tonic-clonic epileptic seizures using Wavelet Entropy*. *Medical & Biol. Eng. & Computing* 37, pp. 1324–1325 (1999).
- [24] R. Quian Quiroga, O. A. Rosso and E. Başar, *Wavelet entropy: a measure of order in evoked potentials*. En *Functional Neuroscience: Evoked Potentials and Magnetic Fields (EEG Suppl. 49)*. C. Barber, G. G. Celesia, I. Hashimoto and R. Kakigi (Editores), Elsevier Science, London, pp. 298–302 (1999).
- [25] O. A. Rosso, S. Blanco, J. Jordanova, V. Kolev, A. Figliola, M. Schürmann, E. Başar, *Wavelet Entropy: a new tool for analysis of short duration brain electrical signals*. *Journal of Neuroscience Methods* 105, pp. 65–75 (2001).
- [26] D. Gabor, *Theory of communications*. *J. Inst. Elec. Eng.* 93, pp. 429–459 (1946).
- [27] S. Mallat, *A Wavelet tour of signal processing*, Academic Press, second edition, San Diego (1999).
- [28] Y. Meyer, *Ondelettes et Operaterus, Tomes I, II, III*. Hermann, Paris (1982).
- [29] Y. Meyer, *Wavelets Algorithms and Applications*. SIAM, Philadelphia (1992).
- [30] D. K. Chui, *An Introduction to Wavelets*. Academic Press Inc., San Diego (1992).
- [31] I. Daubechies. *Ten Lectures on Wavelets*. SIAM, Philadelphia (1992).
- [32] R. R. Coifman, *Adapted multiresolution analysis, Computation, signal processing and operator theory*. Proceeding of the International Congress of Mathematicians, Dioto, Japan, pp. 879–887 (1990).
- [33] S. Mallat, *Multiresolution representations and wavelets*. Grasp. Lab. 153, Univ. of Pennsylvania, Philadelphia (1998).
- [34] E. Serrano, Tesis Doctoral, FCEyN, Universidad de Buenos Aires, 1996.
- [35] A. Figliola and E. Serrano, *Analysis of physiological time series using wavelet transforms*. *IEEE Eng. Med. and Biol.* 16, 74–79 (1997).
- [36] G. Mayer-Kress and S. C. Layne, *Dimensionality of human electroencephalogram*. En *Perspectives in Biological Dynamics and Theoretical Medicine*. S. H. Koslow, A. J. Mandel and M. F. Shlesinger (Editores) *Ann. N. Y. Acad. Sci.* 504 (1987).
- [37] A. Babloyantz and A. Destexhe, *Chaos in neural networks*. En *Proceedings of the IEEE 1st International Conference on Neural Networks*. M. Caudill and C. Butler, Vol. 4, pp. 31–40, San Diego (1987).
- [38] P. Grassberger and I. Procaccia, *Measuring the strangeness of strange attractors*. *Physica D* 9, pp. 189–208 (1983).
- [39] P. Grassberger and I. Procaccia, *On the characterization of strange attractors*. *Phys. Rev. Lett.* 50, pp. 346–349 (1983).

- [40] W. J. Freeman, *Simulation of chaotic EEG patterns with a dynamic model of the olfactory system*. Biol. Cybern. 56, pp. 139–150 (1987).
- [41] W. J. Freeman, *Petit Mal seizures in olfactory bulb and cortex caused by runaway inhibition after exhaustion of excitation*. Brain Res. Rev. 11, pp. 259–284 (1986).
- [42] A. Hodgkin, A. Huxley and B. Katz. *Measurement of current-voltage relations in the membrane of giant axon of Loligo*. J. Physiol. 116, pp. 424–448 (1952).
- [43] E. N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*. J. Atmos. Sci. 20, pp. 130–141 (1963).
- [44] H. O. Peitgen, H. Jürgens, D. Saupe, *Chaos and fractals. New frontiers of Science*. Springer-Verlag, Berlin (1992).
- [45] H. Goldstein, *Classical Mechanics*. Second Edition. Addison-Wesley, New York (1980).
- [46] H. D. I. Abarbanel, R. Brown, J. J. Sidorowich, and L. S. Tsimring, *The analysis of observed chaotic data in physical systems*. Rev. Mod. Phys. 65, pp. 1331–1392 (1993).
- [47] H. D. I. Abarbanel, *The analysis of observed chaotic data*. Springer-Verlag, New York (1995).
- [48] H. Kantz and T. Schreiber, *Nonlinear time series analysis*. Cambridge University Press, Cambridge (1997).
- [49] J. Eckmann and D. Ruelle, *Ergodic theory of chaos and strange attractors*. Rev. Mod. Phys. 57, pp. 617–656 (1991).
- [50] A. Wolf, J. Swift, H. Swinney, J. Vastano. *Determining Lyapunov exponents from time series*. Physica D 16, pp. 285–317 (1985).
- [51] B. B. Mandelbrot, *Fractals: form, chance, and dimension*. Freeman, San Francisco (1977).
- [52] D. Ruelle and F. Takens, *On the nature of turbulence*. Commun. Math. Phys. 20, pp. 167–192 (1971).
- [53] A. Rényi, *Probability theory*. Elsevier North-Holland, Amsterdam (1970).
- [54] G. M. Jenkins and D. Watts, *Spectral analysis and its applications*. Holden-Days, San Francisco (1968).
- [55] S. Blanco, H. Garcia, R. Quian Quiroga, L. Romanelli, and O. A. Rosso, *Stationarity of EEG series*. IEEE Eng. Biol. Mag. 14, pp. 395–399 (1995).
- [56] F. Takens, *Detecting strange attractors in turbulence*. En *Dynamical systems and turbulence, Lecture Notes in Mathematics*. D. Rand and L. S. Young (Editores), pp. 366–381. Springer-Verlag, Heidelberg (1981).

- [57] R. Mañé, *On the dimension of compact invariant set of certain nonlinear maps*. En *Dynamical systems and turbulence, Lecture Notes in Mathematics*. D. Rand and L. S. Young (Editores), pp. 230-242. Springer-Verlag, Heidelberg (1981).
- [58] M. Casadagli, R. Sauer and J. A. Yorke. *Embedology*. J. Stat. Phys. 65, pp. 579–616 (1991).
- [59] G. B. Mindlin, H. G. Solari, M. A. Natiello, R. Gilmore, and X. J. Hou. *Topological analysis of chaotic time series data from the Belousov-Zhabotinskii reaction*. Journal of Nonlinear Science 1, pp. 147–173 (1991).
- [60] M. T. Rosenstein, J. J. Collins and C. J. De Luca, *Reconstruction expansion as a geometry-based framework for choosing proper delay times*. Physica D 73, pp. 82–98 (1994).
- [61] H. Abarbanel, M. Kennel and R. Brown, *Determining embedding dimension for phase-space reconstruction using a geometrical construction*. Phys Rev. A 45, pp. 3403–3411 (1992).
- [62] G. Benettin, L. Galgani, A. Giorgilli and J. M. Strelcyn, *Lyapunov characteristic exponents for smooth dynamical systems and for hamiltonian systems: a method for computing all of them*. Mecanica 15, pp. 9–38 (1980).
- [63] I. Shimada and T. Nagashima, *A numerical approach to ergodic problem of dissipative dynamical system*. Prog. Theor. Phys. 61, pp. 1605–1616 (1979).
- [64] J. Eckmann and D. Ruelle, *Fundamental limitations for estimating dimensions and Lyapunov exponents in dynamical systems*. Physica D 56, pp. 185–187 (1992).
- [65] H. Sugimoto, N. Ischii and N. Suzumura, *Stationarity and normality test for biomedical data*. Comput. Program. Biomed. 7, pp. 293–304 (1977).
- [66] A. Aldroubi and M. Unser, *Wavelet in Medicine and Biology*, CRC Press, Boca Raton (1996).
- [67] F. Mitschke, M. Muller and W. Lange, *Measuring filtered chaotic signal*. Phys Rev. A 37, pp. 4518–4521 (1988).
- [68] F. Mitschake, *A causal filters for chaotic signals*. Phys. Rev. A 41, pp. 1169–1171 (1990).
- [69] J. Theiler and S. Eubank, *Don't bleach chaotic data*. Chaos 3, pp. 771–781 (1993).
- [70] J. J. Shoemberg, *Cardinal spline interpolation*. SIAM, Philadelphia (1993).
- [71] G. E. Powell and I. C. Percival, *A spectral entropy method for distinguishing regular and irregular motion of Hamiltonian systems*. J. Phys. A: Math. Gen. 12, pp. 2053–2071 (1979).
- [72] J. C. Crepeau and L. K Isaacson, *On the spectral entropy behavior of self-organizing processes*. J. Non-Equilib. Thermodyn. 15, pp.115–126 (1990).

- [73] T. Inouye, K. Shinosaki, H. Sakamoto, S. Toi, S. Ukai, A. Iyama, Y. Katzuda and M. Hirano, *Quantification of EEG irregularity by use of the entropy of power spectrum*. *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.* 79, pp. 204–210 (1991).
- [74] T. Inouye, K. Shinosaki, A. Imaya and Y. Matsumoto, *Localization of activated areas and directional EEG patterns during mental arithmetic*. *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.* 86 pp. 224–230 (1993).
- [75] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communications*. *Bell System Technol. J.* 27, pp. 379–423 (1948).
- [76] R. Gray, *Entropy and Information Theory*. Springer, New York. (1990).
- [77] S. Guiasu, *Information Theory with applications*. Mc.Graw-Hill, New York. (1997).
- [78] T. Elbert, W. J. Ray, Z. J. Kowalik, J. E. Skinner, K. E. Graf and N. Birbaumer, *Chaos and Physiology: Deterministic Chaos in Excitable Cell Assemblies*. *Physiol. Rev.* 74, pp. 1–47 (1994).
- [79] E. Kandel, *Small systems of Neurons*. En: *Mind and Behavior*. R. L. Atkinson and R. C. Atkinson (Editores). W. H. Freeman and Co., San Francisco (1979).
- [80] M. Steriade and R. Llinas, *The functional states of the thalamus and the associated neuronal interplay*. *Physiol. Rev.* 68, pp. 649–742 (1988).
- [81] A. Babloyantz, *Some remarks on nonlinear data analysis of physiological time series*. En *Measures of Complexity and Chaos*, N. Abraham, A. Albano, A. Passamante and P. Rapp (Editores). NATO Series B 208, pp. 51–62 (1989).
- [82] D. Gallez, A. Babloyantz, *Predictability of human EEG: a dynamical approach*. *Biol. Cyber.* 64, pp. 381–391 (1991).
- [83] J. P. Pijn, *Quantitative Evaluation of EEG Signals in Epilepsy: Nonlinear Associations. Time Delays and Nonlinear Dynamics*. Ph.D. Thesis, University of Amsterdam (1990).
- [84] S. Chokroverty, *Management of Epilepsy*. Butterworth-Heinemann, Boston (1996).
- [85] E. Başar, *Chaos in Brain Function*. Springer Verlag, Berlin (1990).
- [86] B. J. West *Fractal Physiology and Chaos in Medicine*. *Nonlinear Phenomena in Life Science*, Vol 1. World Scientific, Singapore (1990).
- [87] H. Gastaut and R. Broughton, *Epileptic Seizures*. C. C. Thomas (Editor). Springfield, Illinois (1972).
- [88] J. Gotman, J. R. Ives and P. Gloor, *Frequency content of EEG and EMG at seizure onset: Possibility of removal of EMG artifact by digital filtering*. *Electroenceph. Clin. Neurophysiol.* 52, pp. 626–639 (1981).

- [89] V. J. Samar, A. Bopardikar, R. Rao and K. Swartz, *Wavelet Analysis of Neuroelectric Waveforms: A Conceptual Tutorial*. *Brain and Language* 66, pp. 7–60 (1999).
- [90] O. A. Rosso, S. Blanco y A. Rabinowicz, *Wavelet Analysis of Generalized Tonic-Clonic Epileptic Seizures*. (2000) (sin publicar).