

Tesis de Posgrado

Cuantificación de sistemas con covariancia general

Sforza, Daniel Marcelo

2000

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Sforza, Daniel Marcelo. (2000). Cuantificación de sistemas con covariancia general. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3297_Sforza.pdf

Cita tipo Chicago:

Sforza, Daniel Marcelo. "Cuantificación de sistemas con covariancia general". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2000.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3297_Sforza.pdf

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Cuantificación de Sistemas con Covariancia General

Autor: **Daniel Marcelo Sforza**

Director: **Dr. Rafael Ferraro**

Lugar de trabajo
Grupo de Teorías Cuánticas Relativistas y Gravitación
Instituto de Astronomía y Física del Espacio
Casilla de Correo 67, Sucursal 28, 1428 Buenos Aires, Argentina.

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas

Octubre 2000

legis
3097

No 3297

A Eliana.

Resumen

En esta tesis se estudia la cuantificación de sistemas con covariancia general. En el marco de los formalismos BRST y de cuantificación canónica de Dirac, se estudian modelos de dimensión finita que emulan la estructura de vínculos de la Relatividad General.

Se comienza con el estudio de un sistema sujeto a un vínculo cuadrático en los momentos y un conjunto de vínculos lineales en los momentos (correspondientes respectivamente a los vínculos “super-Hamiltoniano” y de “supermomentos” de Relatividad General). El punto de partida es discernir que las contribuciones no hermíticas de los fantasmas a los vínculos de supermomento pueden leerse en términos del volumen natural inducido por los vínculos sobre las órbitas. Este volumen juega luego un papel fundamental en la construcción del sector cuadrático de la carga BRST nilpotente. A nivel cuántico, la teoría permanece invariante ante transformaciones de escala del vínculo super-Hamiltoniano. En el caso en que el sistema posee un tiempo intrínseco, esta propiedad se traduce en una contribución del potencial al término cinético. En este aspecto el resultado difiere sustancialmente del tratamiento usual, donde la invariancia ante transformaciones de escala se fuerza con la introducción de un acoplamiento con la curvatura. Dicha contribución lejos de ser antinatural, se justifica elegantemente a la luz del principio variacional de Jacobi.

Luego, el tratamiento se extiende al caso de sistemas con tiempo extrínseco. En este caso, dado que la métrica posea un vector de Killing temporal conforme y el potencial se comporte de manera adecuada respecto al mismo, el rol jugado por el potencial en el caso con tiempo intrínseco aquí es tomado por el módulo del vector de Killing de la teoría.

Finalmente, los resultados obtenidos se extienden para un sistema con dos vínculos super-Hamiltonianos. Este paso es sumamente importante ya que la Relatividad General posee una infinidad de tales vínculos, con un álgebra entre ellos no trivial.

Palabras claves: *Sistemas hamiltonianos con vínculos - Covariancia general - Relatividad general - Cosmología cuántica - Formalismo BRST.*

Abstract

In this Thesis it is studied the quantization of generally covariant systems. Finite dimensional models which mimic the constraint structure of Einstein's General Relativity theory are studied in the framework of BRST formalism and Dirac's canonical quantization.

First, it is studied a system featuring a quadratic constraint in the momenta and a set of linear constraints in the momenta (the "super-Hamiltonian" and "supermomentum" constraints of General Relativity respectively). The starting point is to realize that the ghost contributions to the supermomentum constraint operators can be read in terms of the natural volume induced by the constraints in the orbits. This volume plays a fundamental role in the construction of the quadratic sector of the nilpotent BRST charge. It is shown that the quantum theory is invariant under scaling of the super-Hamiltonian constraint. As long as the system has an intrinsic time, this property translates in a contribution of the potential to the kinetic term. In this aspect, the results substantially differ from other works where the scaling invariance is forced by introducing a coupling to the curvature. The contribution of the potential, far from being unnatural, is beautifully justified in light of the Jacobi's principle.

Then, it is shown that the obtained results can be extended to systems with extrinsic time. In this case, if the metric has a conformal temporal Killing vector and the potential exhibits a suitable behavior with respect to it, the role played by the potential in the case of intrinsic time is now played by the norm of the Killing vector.

Finally, the results for the previous cases are extended to a system featuring two super-Hamiltonian constraints. This step is extremely important due to the fact that General Relativity features an infinite number of such constraints satisfying a non trivial algebra among themselves.

Keywords: *Hamiltonian constrained systems - General covariance - General relativity - Quantum cosmology - BRST formalism.*

Índice

Introducción	1
1 Sistemas Hamiltonianos con Vínculos	7
1.1 Formalismo Hamiltoniano para sistemas con vínculos	7
1.2 Cuantificación canónica de sistemas con vínculos	18
2 El Formalismo Canónico de la Gravedad Cuántica	25
2.1 Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General.	27
2.2 Cuantificación canónica.	32
2.3 El tiempo e interpretaciones de Gravedad Cuántica	34
3 El formalismo de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin	39
3.1 El formalismo BRST clásico	40
3.1.1 La construcción del generador BRST	42
3.1.2 Observables, evolución dinámica y simetría BRST	45
3.2 El formalismo BRST cuántico	49
3.2.1 Relación entre la cuantificación BRST y el método de Dirac	51

4	Sistemas con tiempo intrínseco	53
4.1	El modelo: análisis clásico	54
4.1.1	El generador BRST clásico	57
4.2	Cuantificación del sistema.	60
4.2.1	Vínculos supermomentos	60
4.2.2	Vínculo super-Hamiltoniano	64
4.2.3	Operadores de vínculo de Dirac	66
4.2.4	Invariancias y producto interno físico	68
4.3	Epílogo: Principio de mínima acción de Jacobi	71
5	Sistemas con tiempo extrínseco	73
5.1	El modelo: escondiendo el tiempo	74
5.2	El generador BRST clásico y cuántico	77
5.2.1	Cambio de escala del super-Hamiltoniano	78
5.2.2	Producto interno físico	80
6	Sistemas con dos super-Hamiltonianos	83
6.1	Definición del modelo	84
6.2	El generador BRST clásico y cuántico	87
6.2.1	Demostración de $\hat{\Omega}^2 = 0$	89
6.2.2	Transformación unitaria y operadores de vínculo	93
6.2.3	Producto interno físico	96

Conclusiones	99
A Álgebras de Grassmann	103
B Demostración de $\hat{\Omega}^2 = 0$: Modelos con un super-Hamiltoniano	107
Bibliografía	113
Agradecimientos	117

Introducción

Antecedentes existentes sobre el tema

En Física relativista se trabaja a menudo con sistemas descritos por un número de variables que excede el número de grados de libertad del sistema. Los casos más familiares son la partícula relativista (tres grados de libertad), descrita por cuatro coordenadas x^μ , y el campo electromagnético (dos grados de libertad en cada punto del espacio), descrito por un campo cuadvectorial $A_\mu(x)$. De esta manera es posible mantener explícita la covariancia de la teoría. La presencia de variables espurias, que no corresponden a auténticos grados de libertad, implica que un mismo estado físico puede ser descrito por distintos conjuntos de variables, lo cual se refleja en la invariancia de la funcional acción ante un grupo de transformaciones usualmente llamadas “de gauge”. Debido al exceso de variables, las relaciones $p = p(q, \dot{q})$ no pueden ser todas invertidas para expresar las velocidades en función de las coordenadas y los momentos, dando lugar a relaciones de vínculo entre las variables canónicas. Estos vínculos son precisamente los generadores de las transformaciones de simetrías *locales* ante las cuales es invariante la acción (invariancia de gauge).

Al cuantificar este tipo de sistemas, resultaría natural proceder a identificar los grados genuinos de libertad y cuantificar la teoría en ese espacio de fases reducido (método del espacio de fases reducido). Sin embargo, este procedimiento puede conducir a la pérdida de la covariancia y la localidad explícitas de la teoría [Dirac (1955); Lusanna (1995)]. En muchos casos ni siquiera es posible tal identificación o ésta se torna inmanejable. Debido a estos inconvenientes, suele tomarse alguno de los siguientes caminos alternativos:

I) El método de Dirac (1964) que considera a todas las variables dinámicas (las invariantes de gauge y las que no lo son) y las convierte en operadores lineales que actúan en cierto espacio de estados, y selecciona los estados físicos por medio de una condición auxiliar (deben ser aniquilados por los operadores de vínculo).

II) El formalismo BRST [Becchi et al. (1974, 1975, 1976); Tyutin (1975); Henneaux (1985); Henneaux & Teitelboim (1992)] que extiende el espacio de fases mediante el agregado de variables fermiónicas (fantasmas) a nivel de la teoría clásica, incrementando así aún más la redundancia en la descripción del sistema. El nuevo sistema no tiene vínculos y la acción extendida se construye de tal manera que ahora posee una simetría *global* (en general, asociada a la conservación de cierta cantidad, la carga BRST en este caso) en lugar de la simetría local del sistema original. A nivel cuántico, los estados físicos son seleccionados, nuevamente, por medio de una condición auxiliar (deben ser aniquilados por el operador BRST, realización hermítica de la carga BRST).

Es fácil verificar que los tres caminos indicados son equivalentes en el caso de vínculos sencillos. La cuestión de su equivalencia para sistemas arbitrarios es más sutil, y recientemente ha generado un creciente interés [Kuchař (1986); Kuchař & Torre (1989); McMullan & Paterson (1989); Hajiček & Kuchař (1990); Barvisny (1990); Kunstater (1992); Barvisny & Krykhtin (1993); Barvisny (1993); Ferraro et al. (1993)]. En particular, en publicaciones recientes [Kunstater (1992); Ferraro et al. (1993)] se ha estudiado la aplicación de estos métodos a la cuantificación de sistemas con vínculos que son lineales y homogéneos en los momentos. Si bien este caso incluye numerosos ejemplos de interés físico (teorías de Yang-Mills, campos de p-formas, etc.), no incluye el caso de la gravitación pues ésta posee además un vínculo cuadrático en los momentos.

El campo gravitatorio es un sistema covariante ante transformaciones generales de coordenadas (*covariancia general*) y su Hamiltoniano se anula sobre la superficie de vínculo. Esta es una característica típica de los sistemas que poseen invariancia ante reparametrizaciones (sistemas “parametrizados”), esto significa que el parámetro de las trayectorias en el espacio de fases no es el tiempo físico sino que es una magnitud físicamente irrelevante. El Hamiltoniano resulta ser una combinación lineal de cuatro vínculos (en cada punto del espacio); tres de ellos son lineales y homogéneos en los momentos, y el restante es cuadrático en los momentos.

La cuantificación del sistema requiere la búsqueda de un ordenamiento en los operadores de vínculo que preserve el álgebra de los vínculos, reteniendo así la calidad de primera clase que caracteriza a los generadores de las transformaciones de gauge (ausencia de “anomalías” en el álgebra de vínculos). Este es aún un problema abierto [Anderson (1959); Schwinger (1963); DeWitt (1967); Kuchař (1973); Kuchař (1992)] y presenta dos aspectos a resolver: uno asociado a la regularización de los operadores, y el otro es el dificultoso tratamiento que provoca la presencia de funciones de estructura en las relaciones de clausura. Es posible analizar este último aspecto eludiendo la complicación del primero si se estudian modelos de dimensión finita.

Naturaleza del aporte original realizado

El interés del trabajo fue extender el estudio de la cuantificación de sistemas con covariancia general (en particular, modelos en dimensión finita que emulan la estructura de vínculos de la teoría de la Relatividad General) en el marco del formalismo BRST y del formalismo de Dirac. Este tipo de sistemas contienen al menos un vínculo que es cuadrático en los momentos, y hasta la fecha no existían trabajos que hubiesen aplicado los métodos del formalismo BRST en tal caso y lo hayan relacionado con la cuantificación de Dirac.

El estudio de la cuantificación de este tipo de sistemas resulta de sumo interés debido a que su estructura de vínculos y álgebra imitan a la de la gravedad, y por lo tanto pueden dar pautas para su posterior aplicación en Gravedad Cuántica.

El modelo de dimensión finita más simple que captura la estructura del campo gravitatorio, es el de una partícula relativista moviéndose en un espacio-tiempo curvo que posee además grados de libertad espurios [Hajiček & Kuchař (1990)]. Dicho modelo contiene un vínculo cuadrático en los momentos (el “super-Hamiltoniano”) y un conjunto finito de vínculos lineales y homogéneos en los momentos (los “supermomentos”). Se partió del estudio de la cuantificación de este sistema en los marcos del formalismo BRST y de Dirac

(capítulo 4), y luego se extendieron los resultados a casos aún más generales (capítulos 5 y 6).

Como la misma superficie de vínculo puede ser descrita por distintos conjuntos de funciones de vínculos, el método de Dirac tiene sentido sólo si las funciones de onda físicas se transforman frente a un cambio de funciones de vínculo de tal manera que el producto interno físico entre las funciones de onda permanezca invariante. Estas propiedades de transformación, conjuntamente con las transformaciones ante cambio general de coordenadas, define el tipo de objeto geométrico que debe ser la función de onda. Este conocimiento debería conducir a operadores diferenciales naturales para realizar el álgebra de los vínculos, que son los mismos operadores que definirán el conjunto de funciones de onda físicas.

En cambio el formalismo BRST, requiere la ampliación del espacio de fases mediante el agregado de variables fermiónicas (“fantasmas”). El objeto central de la teoría se construye partiendo del conjunto de funciones de vínculo, la “carga BRST”, una función fermiónica que captura toda la información acerca de la invariancia de gauge del sistema original, y que genera una simetría rígida del sistema extendido asociada con la conservación de la propia carga. Para cuantificar el sistema, la carga BRST es promovida a un operador hermítico y nilpotente que define estados cuánticos físicos a través de su cohomología.

La dificultad para realizar la cuantificación de Dirac de sistemas del tipo estudiado, consiste en obtener el ordenamiento adecuado de los operadores de vínculo y de las funciones de estructura de manera tal que se preserve a este nivel el álgebra que satisfacen a nivel clásico (ausencia de anomalías). En el marco del formalismo BRST esta dificultad se traslada a la realización cuántica adecuada de la carga BRST, proceso cuyo éxito no está garantizado (la teoría podría presentar anomalías en el álgebra de los vínculos) y no existe un método general a seguir.

Sin embargo, lo que convierte al formalismo BRST en una herramienta poderosa al cuantificar sistemas con libertad de gauge, es que todas las relaciones que provienen del álgebra de los vínculos quedan capturadas en la carga BRST, por lo tanto si se logra

hallar su realización cuántica hermítica y nilpotente, queda automáticamente garantizado el ordenamiento adecuado de los operadores de vínculo y sus correspondientes funciones de estructura. Otra ventaja del formalismo consiste en la invariancia automática de la cuantificación bajo combinaciones lineales de los vínculos, ya que dichas combinaciones son equivalentes a cambios de coordenadas en el sector fermiónico.

Aprovechando estas cualidades del formalismo, teniendo en cuenta las transformaciones de invariancia de la teoría y considerando seriamente en pie de igualdad a los pares de variables canónicas originales y fermiónicas, y a partir de una reinterpretación de los resultados conocidos para un sistema con vínculos lineales solamente [Ferraro et al. (1993)] resultó factible extenderlos al tipo de sistemas estudiados en esta tesis (es decir, incluyendo además uno o más vínculos cuadráticos).

Hasta la fecha, todos los modelos de dimensión finita en espacio-tiempo curvos que se hallan en la literatura consideran sistemas con un único vínculo hamiltoniano. Sin embargo, la Relatividad General tiene una infinitud de vínculos hamiltonianos, con un álgebra no trivial entre ellos y los vínculos lineales en los momentos. Resultó sumamente importante pues, poder tratar exitosamente el caso de un modelo en dimensión finita pero con más de un vínculo super-Hamiltoniano. La generalización de los resultados que se habían obtenido para los casos con un único vínculo Hamiltoniano resultó natural (capítulo 6).

Al final del trabajo, en un apéndice se demuestra la nilpotencia de la carga BRST cuántica para los casos que exhiben sólo un super-Hamiltoniano. Dicha demostración es central, pero debido a su extensión fue incluida allí para no perder fluidez en la lectura.

Capítulo 1

Sistemas Hamiltonianos con Vínculos

Los sistemas con vínculos son sumamente frecuentes en física. Teorías como el electromagnetismo de Maxwell, la gravitación de Einstein y numerosos sistemas mecánicos que son manifiestamente invariantes ante transformaciones de Lorentz exhiben vínculos que invalidan la aplicación directa del formalismo canónico clásico. Es claro también la importancia de poseer una formulación Hamiltoniana apropiada para sistemas con vínculos si se desea desarrollar un procedimiento válido de cuantificación canónica. El propósito de este capítulo es introducir el tratamiento clásico y cuántico de sistemas con vínculos desarrollado inicialmente por Dirac (1964).

1.1 Formalismo Hamiltoniano para sistemas con vínculos

El movimiento real de un sistema clásico entre dos puntos dados es aquel que hace que la acción

$$S[q^i(t)] = \int L(q^i, \dot{q}^i) dt. \quad (1.1)$$

sea estacionaria.

La solución que hace estacionaria la acción satisface las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, N. \quad (1.2)$$

Estas ecuaciones pueden ser reescritas como

$$\ddot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i} - \dot{q}^k \frac{\partial^2 L}{\partial q^k \partial \dot{q}^i}. \quad (1.3)$$

Luego, puede verse de esta última ecuación que las aceleraciones a un dado tiempo están determinadas unívocamente por las posiciones y velocidades a ese tiempo si y solo si la matriz $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i}$ es inversible, es decir, si el determinante

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^k \partial \dot{q}^i} \right) \quad (1.4)$$

no se anula.

Por otra parte, si dicho determinante se anula, las aceleraciones no estarán determinadas unívocamente por las posiciones y velocidades y la solución de las ecuaciones de movimiento puede contener funciones arbitrarias del tiempo. A nivel Hamiltoniano, esto implicará que las variables canónicas no serán todas independientes.

El punto de partida para el formalismo Hamiltoniano es definir, como es usual, los momentos canónicos

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i} \quad (1.5)$$

con esta definición la Ec. (1.4) equivale a

$$\det \left(\frac{\partial p_i}{\partial \dot{q}^k} \right), \quad (1.6)$$

que nos dice que en el caso en que se anule, las velocidades no pueden obtenerse de forma única a partir de las coordenadas y los momentos. Es decir, la anulación del determinante refleja la existencia de vínculos entre los momentos [Hanson et al. (1976); Sundermeyer (1982); Henneaux & Teitelboim (1992)]. Si el número de grados de libertad del sistema es N , el rango de la matriz es $R < N$, y existe entonces un menor principal de orden R .

Reetiquetando apropiadamente las coordenadas tendremos

$$\det \left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}^r \partial \dot{q}^s} \right) \neq 0 \quad (1.7)$$

para $r, s = 1 \dots R$. Esto significa que las velocidades \dot{q}^r pueden ser despejadas en función de q^i, p_s y \dot{q}^m ($m = R + 1 \dots N$) :

$$\dot{q}^r = \dot{q}^r(q^i, p_s, \dot{q}^m) \quad (1.8)$$

Si reemplazamos las \dot{q}^r en la definición para los restantes momentos p_m tenemos

$$p_m = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^m} = \tilde{p}_m(q^i, \dot{q}^r(q^i, p_s, \dot{q}^n), \dot{q}^n) = p_m(q^i, p_s, \dot{q}^n). \quad (1.9)$$

Ahora bien, p_m no puede depender de las velocidades \dot{q}^n , pues si así fuera se podría despejar al menos una \dot{q}^n en función de las restantes. Pero esto no puede ser, pues que el rango de la matriz sea R implica que no pueden ser despejadas más velocidades. Luego, $p_m = p_m(q^i, p_s)$, o, de manera equivalente, existen funciones ϕ_m tales que

$$\phi_m(q^i, p_i) = 0. \quad (1.10)$$

Estas ecuaciones definen $M = N - R$ vínculos primarios (supondremos que son independientes): nos dicen que sólo las cantidades q^i y p_s pueden elegirse arbitrariamente. Por lo tanto, los vínculos definen una superficie de dimensión $2N - M = N + R$ en el espacio de las fases, que podemos describir con las N coordenadas q^i y los R momentos p_r . Dado un punto sobre esta superficie de vínculo, podemos ver que el punto correspondiente en el espacio de velocidades no está completamente determinado: en las R ecuaciones (1.8) las \dot{q}^m no están determinadas porque, para valores dados de q^i y p_r , no queda definido un punto (q^i, \dot{q}^i) , sino una variedad en la cual las M variables arbitrarias \dot{q}^m juegan el papel de parámetros. Luego, para que la transformación entre coordenadas y velocidades, y coordenadas y momentos sea *biunívoca* sería necesario introducir al menos M parámetros para poder así precisar la localización de \dot{q} en la variedad. Estos parámetros aparecerán como multiplicadores de Lagrange cuando definamos el Hamiltoniano y estudiemos sus propiedades.

El próximo paso en el análisis es entonces, introducir el Hamiltoniano. Para un sistema sin vínculos, el principio variacional $\delta S = 0$ escrito en la forma Hamiltoniana

$$\delta \int (p_i \dot{q}^i - H) dt = 0, \quad (1.11)$$

conduce a las ecuaciones canónicas

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad (1.12)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}, \quad (1.13)$$

la primera de las cuales permite obtener las velocidades en términos de las coordenadas y los momentos, dado que H es una función de q^i y p_i que se obtiene mediante una transformación de Legendre de la lagrangiana. En un sistema con vínculos, en cambio, los momentos no son independientes, sino que su variación debe restringirse a la superficie definida por $\phi_m = 0$. Por lo tanto, ahora se debe encontrar un extremo de la funcional $S = \int (p_i \dot{q}^i - H(q^i, p_i)) dt$ sujeta a las restricciones $\phi_m(q^i, p_i) = 0$, lo cual puede hacerse variando

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (p_i \dot{q}^i - H(q^i, p_i) - u^m \phi_m(q^i, p_i)) dt = 0, \quad (1.14)$$

para variaciones arbitrarias de δq^i , δp_i , δu^m , sujetas solamente a la restricción $\delta q^i(t_1) = \delta q^i(t_2) = 0$. Las nuevas variables u^m son multiplicadores de Lagrange (en principio, arbitrarios) que conducen a los vínculos primarios. Así, las ecuaciones resultantes de este principio variacional son

$$\dot{q}^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} + u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial p_i} \quad (1.15)$$

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i} - u^m \frac{\partial \phi_m}{\partial q^i}. \quad (1.16)$$

$$\phi_m(q, p) = 0 \quad (1.17)$$

Dado un punto sobre la superficie $\phi_m = 0$, podemos utilizar la primera ecuación para obtener la velocidad correspondiente. Las funciones arbitrarias u_m actúan como coordenadas sobre la variedad de velocidades \dot{q}^m , haciendo que la transformación sea ahora biunívoca.

Las ecuaciones de movimiento pueden ser expresadas en términos del formalismo de corchetes de Poisson¹; por ejemplo, para una magnitud física F podemos escribir, en general,

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial F}{\partial p_i} \dot{p}_i \quad (1.18)$$

si F no depende explícitamente del tiempo. A partir de las relaciones (1.15)-(1.16) y la definición de los corchetes de Poisson obtenemos

$$\dot{F} = \{F, H\} + u^m \{F, \phi_m\}. \quad (1.19)$$

Pero, sobre la superficie de vínculo vale la igualdad

$$u^m \{F, \phi_m\} = \{F, u^m \phi_m\} \quad (1.20)$$

ya que

$$\{F, u^m \phi_m\} = u^m \{F, \phi_m\} + \{F, u^m\} \phi_m \quad (1.21)$$

y el último término se anula sobre la superficie $\phi_m = 0$.

Por lo tanto, podemos escribir la igualdad “débil”, es decir, restringida a la superficie de vínculo,

$$\dot{F} \approx \{F, H_T\} \quad (1.22)$$

donde H_T es el *Hamiltoniano Total*

$$H_T = H + u^m \phi_m. \quad (1.23)$$

Examinemos ahora, las consecuencias de las ecuaciones de movimiento. En primer lugar, existen ciertas condiciones de consistencia. Por ejemplo, la evolución del sistema debe preservar los vínculos en el tiempo, es decir que las funciones ϕ_m deben ser siempre nulas. Luego, podemos aplicar la ecuación (1.22) a los vínculos, tomando F como una de las funciones ϕ_m . Esto nos lleva a

$$\dot{\phi}_m = \{\phi_m, H\} + u^{m'} \{\phi_m, \phi_{m'}\} \approx 0. \quad (1.24)$$

¹Para dos funciones arbitrarias de las variables canónicas, $F(q, p)$ y $G(q, p)$, el corchete de Poisson se define como es usual: $\{F, G\} = \frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i}$.

Obtenemos así m condiciones de consistencia, una para cada vínculo. Si descartamos la posibilidad de que las ecuaciones de movimiento sean inconsistentes, las m condiciones (1.24) pueden ser separadas en tres tipos:

1. Un tipo que se satisface idénticamente.
2. Otro tipo que puede dar origen a nuevas ecuaciones de la forma (supondremos que existen K de ellas)

$$\phi_k(q^i, p_i) = 0, \quad k = M + 1, \dots, M + K; \quad (1.25)$$

estas restricciones, que resultan de aplicar las ecuaciones de movimiento, se denominan *vínculos secundarios*.

3. Finalmente, una ecuación de consistencia puede que no se reduzca a ninguno de los dos tipos anteriores, e imponga condiciones sobre las funciones u^m .

Consideremos detalladamente esta última posibilidad; tenemos las ecuaciones

$$\{\phi_j, H\} + u^m \{\phi_j, \phi_m\} \approx 0 \quad (1.26)$$

donde ϕ_j son todos los vínculos, primarios ϕ_m y secundarios ϕ_k (es decir $j = 1, \dots, M + K = J$), dado que todos los vínculos deben ser preservados por la evolución del sistema; su solución general es

$$u^m = U^m + \lambda^a V_a^m \quad (1.27)$$

con $a = 1, \dots, A$, donde los coeficientes λ^a son arbitrarios, las funciones V_a^m son todas las soluciones independientes de las ecuaciones homogéneas

$$V_a^m \{\phi_j, \phi_m\} = 0, \quad (1.28)$$

y U^m son soluciones particulares. Sustituyendo estas expresiones para las u^m en el Hamiltoniano Total de la teoría, Ec. (1.23),

$$H_T = H + U^m \phi_m + \lambda^a V_a^m \phi_m. \quad (1.29)$$

Finalmente, podemos reescribir el Hamiltoniano Total según

$$H_T = H' + \lambda^a \phi_a, \quad (1.30)$$

donde

$$H' = H + U^m \phi_m \quad (1.31)$$

y

$$\phi_a = V_a^m \phi_m. \quad (1.32)$$

Ahora las U^m y V_a^m son funciones determinadas de las variables q^i y p_i (debido a las ecuaciones de consistencia), pero los λ^a son coeficientes totalmente arbitrarios; su número, sin embargo, es menor o igual que el de los coeficientes originales u^m .

Es necesario definir cierta terminología para apreciar las relaciones entre las cantidades que aparecen en el formalismo. Cualquier magnitud que tenga corchete débilmente nulo con todos los vínculos ϕ_j se denomina de *primera clase*. Las magnitudes que no tienen esta propiedad se denominan de *segunda clase*. En general, como los vínculos ϕ_j son las únicas funciones independientes débilmente nulas, para cualquier magnitud R que sea de primera clase su corchete de Poisson $\{R, \phi_j\}$ debe ser estrictamente igual a una combinación lineal de los ϕ_j :

$$\{R, \phi_j\} = r_{jj'} \phi_{j'}. \quad (1.33)$$

Tenemos por la tanto, cuatro tipo diferentes de vínculos. Pueden ser divididos entre los de primera clase y los de segunda clase, que es una propiedad independiente de la división entre primarios y secundarios. En realidad, puede verse que la distinción verdaderamente significativa es la condición de primera o segunda clase (más aún a nivel cuántico como veremos luego). La distinción entre primarios y secundarios es fundamentalmente dependiente de la formulación Lagrangiana original de cual se partió, y pierde significado una vez que se ha avanzado a la formulación Hamiltoniana.

Es importante notar que los ϕ_a definidos por la Ec. (1.32) son de primera clase. En efecto,

$$\{\phi_a, \phi_j\} = \{V_a^m \phi_m, \phi_j\} = V_a^m \{\phi_m, \phi_j\} + \{V_a^m, \phi_j\} \phi_m \approx V_a^m \{\phi_m, \phi_j\}, \quad (1.34)$$

y como las funciones V_a^m son soluciones de las ecuaciones homogéneas (1.28), se tiene

$$\{\phi_a, \phi_j\} \approx 0. \quad (1.35)$$

En forma similar, puede demostrarse que el Hamiltoniano H' definido en la Ec. (1.31) también es de primera clase.

Las funciones ϕ_a , además de ser de primera clase, son vínculos primarios, ya que son combinaciones lineales de los vínculos primarios ϕ_m . Luego, vemos que la situación es tal que el Hamiltoniano Total está expresado como la suma de un Hamiltoniano de primera clase más una combinación lineal de vínculos primarios de primera clase.

Calculemos la evolución de una variable dinámica para analizar el papel de los vínculos primarios ϕ_a . Si la variable dinámica F no depende explícitamente del tiempo, su evolución estará determinada por

$$\dot{F} = \{F, H'\} + \lambda^a \{F, \phi_a\} \quad (1.36)$$

La arbitrariedad en la elección de las funciones λ^a hace que la evolución de la variable F no quede totalmente determinada: para una misma condición inicial $F(t_0) = F_0$, en un instante t posterior a t_0 , F puede tomar diversos valores según la elección que se haga de los coeficientes arbitrarios λ^a . Para ver esto, hallemos el valor de F en un intervalo de tiempo pequeño Δt posterior a t_0

$$F(\Delta t) = F_0 + \dot{F} \Delta t = F_0 + \{F, H'\} \Delta t + \lambda^a \Delta t \{F, \phi_a\}, \quad (1.37)$$

tomemos otro conjunto de valores diferentes λ'^a , que puede dar un valor distinto para $F(\Delta t)$, siendo la diferencia

$$\delta F(\Delta t) = (\lambda^a - \lambda'^a) \Delta t \{F, \phi_a\}. \quad (1.38)$$

Finalmente, podemos reescribir el cambio de $F(\Delta t)$ como

$$\delta_\epsilon F = \epsilon^a \{F, \phi_a\}, \quad (1.39)$$

donde $\epsilon^a = (\lambda^a - \lambda'^a)\Delta t$ es un número arbitrariamente pequeño. Ahora bien, el estado físico de un sistema no puede depender de la elección, arbitraria, de los coeficientes; por lo tanto, ambos valores de la variable $F(\Delta t)$ deben corresponder al mismo estado físico. Vemos entonces, que la transformación infinitesimal generada por la función $\epsilon^a \phi_a$ relaciona descripciones equivalentes de un mismo estado físico. Tal tipo de transformación se denomina de *medida* o *gauge*, y por esto se dice que los vínculos primarios de primera clase ϕ_a son *generadores* de la transformación de gauge.

Los vínculos ϕ_a no son los únicos generadores de transformaciones de gauge; puede probarse que también los vínculos secundarios de primera clase pueden generar transformaciones que no modifiquen el estado físico del sistema [Hanson et al. (1976); Sundermeyer (1982); Henneaux & Teitelboim (1992)]. Si llamamos G_a a todos los vínculos de primera clase, primarios y secundarios, la transformación infinitesimal de gauge más general puede escribirse

$$\delta_\epsilon F = \epsilon^a \{F, G_a\}. \quad (1.40)$$

Como los vínculos G_a son de primera clase verifican que

$$\{G_a, G_b\} = C_{ab}^c G_c \approx 0; \quad (1.41)$$

Si existen, además, vínculos de segunda clase, puede redefinirse el corchete entre dos magnitudes de manera tal que esta ecuación siga siendo válida (*corchete de Dirac*, Dirac (1964); Henneaux & Teitelboim (1992)). De acuerdo con la (1.41), se tiene que $\delta_\epsilon G_a \approx 0$, lo cual indica que las transformaciones de gauge no modifican a las funciones G_a , con lo cual el sistema se mantiene sobre la superficie de vínculo.

Dirac conjeturó que todos los vínculos de primera clase eran generadores de transformaciones de gauge, y propuso por lo tanto, escribir las ecuaciones dinámicas utilizando un

Hamiltoniano extendido que contuviera a todos los vínculos de primera clase

$$H_E = H_T + \lambda^a G_a. \quad (1.42)$$

Sin embargo, hoy se conocen ejemplos en donde no todos los vínculos de primera clase generan invariancias de gauge [Henneaux & Teitelboim (1992)]. A pesar de esto, en los sistemas físicos usuales la conjetura de Dirac se satisface, y es útil mantener la definición del Hamiltoniano extendido.

La descripción de un sistema mediante variables cuya evolución depende de parámetros arbitrarios es, claramente, ambigua y, por lo tanto, insatisfactoria. Es necesario, entonces, definir funciones \mathcal{O} cuya evolución esté libre de ambigüedades, lo cual ocurrirá si su corchete de Poisson con los vínculos es débilmente nulo:

$$\{\mathcal{O}, G_a\} \approx 0. \quad (1.43)$$

Estas funciones se denominan *observables*: son invariantes ante transformaciones de gauge y su evolución está completamente determinada. Si se describe un sistema mediante observables únicamente, los valores iniciales de estos permiten conocer su evolución sin ninguna ambigüedad.

Los conjuntos de puntos del espacio de las fases relacionados por transformaciones de gauge se denominan órbitas; las funciones que llamamos observables tienen el mismo valor a lo largo de los puntos de una órbita y caracterizan así el estado físico del sistema, mientras que las funciones que no son invariantes de gauge contienen información acerca de cuál punto de la órbita se considera, pero esta información es físicamente irrelevante, dado que una transformación de gauge aplicada a un punto del espacio de las fases lo transforma en otro punto del mismo espacio que corresponde al mismo estado físico. Si se considera la evolución de un sistema desde la configuración (q^0, p_0) a dos configuraciones (q^1, p_1) y $(q^{1'}, p_{1'})$ dadas por dos elecciones distintas de los coeficientes λ^a , ambas configuraciones finales corresponden al mismo estado físico pues se encuentran sobre la misma órbita y están, por lo tanto, conectadas por una transformación de gauge.

En principio, siempre es posible eliminar la ambigüedad en la evolución de las variables eligiendo *una* configuración entre todas las configuraciones físicamente equivalentes. Esto se logra seleccionando un único punto de cada órbita mediante la imposición de las llamadas *condiciones de gauge*, es decir, funciones de la forma

$$\chi_b(q^i, p_i, t) = \text{constante} \quad (1.44)$$

que corten una y sólo una vez a cada órbita. Si el número de vínculos independientes G_a es M , la dimensión de cada órbita es también M , pues cada punto se alcanza eligiendo los M parámetros de gauge ϵ^a . Las condiciones de gauge deben definir una variedad de dimensión igual a $2N - M$ (N es el número de coordenadas canónicas) para cortar una vez a cada órbita; por lo tanto, se requieren M condiciones de gauge para seleccionar un representante de cada órbita que identifique el estado del sistema.

La condición de que sólo un punto de cada órbita pertenezca a la variedad definida por las condiciones de gauge significa que una transformación de gauge mueve a un punto sobre una órbita de manera de sacarlo de la superficie dada por $\chi_b = 0$, por lo tanto

$$\delta\chi_b = \epsilon^a \{\chi_b, G_a\} \approx 0 \iff \epsilon^a = 0. \quad (1.45)$$

Esto significa que

$$\det(\{\chi_b, G_a\}) \neq 0, \quad (1.46)$$

(notar que la matriz $(\{\chi_b, G_a\})$ es cuadrada) por lo cual, el conjunto (G_a, χ_b) puede verse como un conjunto de vínculos de segunda clase. Estrictamente, la condición (1.46) asegura la posibilidad de seleccionar un único punto de cada órbita sólo localmente (impide que las órbitas sean tangentes a la superficie $\chi_b = 0$). Sin embargo, no impide que la superficie $\chi_b = 0$ corte más de una vez a alguna órbita, dificultad que se denomina *problema de Gribov*.

1.2 Cuantificación canónica de sistemas con vínculos

Uno de los métodos tradicionales para cuantificar un sistema físico es el denominado como cuantificación canónica. Su aplicación involucra los siguientes pasos:

1. El estado del sistema será descrito por un elemento $|\psi\rangle$ de un espacio de Hilbert \mathcal{H} con producto escalar $\langle\psi|\psi'\rangle$.
2. Los observables corresponden a operadores lineales hermíticos sobre \mathcal{H} . El resultado de una medición es identificado con un autovalor del operador. Esto significa que si $|\psi\rangle$ es desarrollado en términos de autovectores $|a_n\rangle$ de una observable \hat{A} ,

$$\hat{A}|\psi\rangle = a_n|\psi\rangle$$

$$|\psi\rangle = \sum c_n|a_n\rangle,$$

entonces $|c_n|^2$ es la probabilidad de que \hat{A} tome el valor a_n . El valor medio de \hat{A} en el estado $|\psi\rangle$ es $\langle\hat{A}\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle$.

3. La evolución dinámica se obtiene a partir de la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}|\psi\rangle$$

que implica que el valor medio de \hat{A}

$$i\hbar\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{i}{\hbar}\langle(\hat{H}\hat{A} - \hat{A}\hat{H})\rangle$$

que resulta semejante a las ecuaciones clásicas de Hamilton si se reemplaza el corchete de Poisson clásico por el conmutador cuántico $[\hat{A}, \hat{B}] = \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A}$ de los operadores \hat{A} y \hat{B} :

$$\{A, B\} \longrightarrow \frac{i}{\hbar}[\hat{A}, \hat{B}] \quad (1.47)$$

Luego, es necesario que los operadores sean tales que se satisfaga esta correspondencia en algún límite, para reobtener los resultados clásicos. De este modo, se elige

$$[\hat{p}, \hat{q}] = -i\hbar.$$

Sin embargo, existe un problema y es que los observables clásicos no tienen un único operador asociado. Existen ambigüedades de “ordenamiento”. Por ejemplo, el observable p^2q puede asociarse con los operadores $\hat{p}^2\hat{q}$, $\hat{p}\hat{q}\hat{p}$, $\hat{q}\hat{p}^2$, que son diferentes pues \hat{p} y \hat{q} no conmutan (difieren entre sí por términos de orden \hbar).

Más aún, cualquier observable clásico puede escribirse como

$$A(q, p) = A(q, p) + B(q, p)(pq - qp),$$

pero la realización del segundo miembro como operador da

$$\hat{A}(q, p) - i\hbar\hat{B}(q, p) \neq \hat{A}(q, p)$$

De modo que los operadores son conocidos a menos de términos de orden \hbar . Si bien, ciertas condiciones sobre los operadores pueden limitar el ordenamiento (como por ejemplo, el requisito de hermiticidad), en general, las ambigüedades persisten.

Al tratar la cuantificación de sistemas con vínculos, lo primero que uno intentaría sería aislar los verdaderos grados de libertad y aplicar a este sistema “reducido” las reglas de cuantificación canónica (1.)-(3.). Sin embargo, el conocimiento del espacio de fases reducido, que es el subespacio que se obtiene de retener solamente los momentos no afectados a los vínculos y sus variables conjugadas, muchas veces es sólo implícito (a través de las ecuaciones de vínculo), y aún en caso de conocerse explícitamente, el proceso de reducción puede tornarse en la práctica, inmanejable. Mas aún, el proceso de reducción puede llevar a la pérdida de la covariancia y localidad explícitas de la teoría [Dirac (1955); Lusanna (1995)]. Un camino alternativo fue propuesto por Dirac (1964): Supongamos primero que todos los vínculos son de primera clase, entonces el método consiste en resolver la ecuación de Schrödinger

$$i\hbar\frac{d}{dt}|\psi\rangle = \hat{H}'|\psi\rangle \quad (1.48)$$

donde \hat{H}' es el Hamiltoniano de primera clase de la teoría. Luego, se imponen los vínculos como condiciones suplementarias sobre los estados:

$$\hat{G}_a|\psi\rangle = 0 \quad (1.49)$$

Tenemos por lo tanto, tantas condiciones suplementarias como vínculos de primera clase. Debemos ver por lo tanto, que cada una de ellas sea consistente con la otras. Consideremos además de (1.49),

$$\hat{G}_{a'}|\psi \rangle = 0 \quad (1.50)$$

Si multiplicamos (1.49) por $\hat{G}_{a'}$, y (1.50) por \hat{G}_a y restamos ambas ecuaciones, obtenemos

$$[\hat{G}_a, \hat{G}_{a'}]|\psi \rangle = 0 \quad (1.51)$$

Luego, esta nueva condición sobre los estados es necesaria por consistencia. Desearíamos que (1.51) fuese una consecuencia directa de (1.49), de modo que todas las condiciones de consistencia se desprendan de la primera, pero esto significa que se requiere que

$$[\hat{G}_a, \hat{G}_{a'}] = \hat{C}_{aa''} \hat{G}_{a''} \quad (1.52)$$

Si esto se satisface, entonces (1.51) no es una nueva condición sobre el estado.

A nivel clásico, como los vínculos G_a son de primera clase, se cumple que el corchete de Poisson entre dos cualquiera de los G_a es una combinación lineal de todos ellos. Sin embargo, en el análogo cuántico no necesariamente se cumple (1.51) porque en general las funciones de estructura $C_{aa''}^{a''}$ son operadores que no necesariamente están a la izquierda de los operadores de vínculo.

Existe una condición similar de consistencia con la ecuación de Schrödinger. Para que la evolución preserve las condiciones (1.49) debe satisfacerse

$$[\hat{G}_a, \hat{H}]|\psi \rangle = 0, \quad (1.53)$$

lo cual significa que debe cumplirse que

$$[\hat{G}_a, \hat{H}] = \hat{C}_{a0}^{a'} \hat{G}_{a'} \quad (1.54)$$

para que no surja una nueva condición suplementaria. Nuevamente, a nivel clásico el Hamiltoniano es de primera clase, por lo tanto el corchete de Poisson con los vínculos es débilmente nulo (es decir, fuertemente igual a una combinación de los vínculos). Sin

embargo, de nuevo, esto no está garantizado a nivel cuántico, de manera que las operadores de las funciones de estructura queden a la izquierda de los operadores de vínculo. Como vemos, la tarea de lograr una cuantificación consistente no es obra de un mero procedimiento metódico, o en palabras de Dirac (1964) refiriéndose a esta dificultad : “en general, es necesario un poco de suerte para obtener una teoría cuántica precisa”.

El interés principal de este trabajo es mostrar en ciertos modelos de dimensión finita con covariancia general, cómo deben ordenarse los operadores de vínculo y de estructura de modo que se satisfagan las ecuaciones (1.52) y (1.54).

El producto interno físico.

Analicemos cómo deben normalizarse los estados en el método de Dirac. Consideremos primero un sistema de N grados de libertad y con un único vínculo $p_k = 0$. El producto interno entre dos estados ψ_1 y ψ_2 del espacio de Hilbert está dado por

$$\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = \int dq^1 \dots dq^k \dots dq^N \psi_1^*(q^1 \dots q^N) \psi_2(q^1 \dots q^N). \quad (1.55)$$

Si ψ_1 y ψ_2 son estados físicos (es decir que verifican el vínculo, y por lo tanto no dependen de q^k) la integral diverge. Para evitar que esto ocurra debe eliminarse la integración sobre q^k , que corresponde a un grado de libertad no físico, introduciendo una condición de gauge χ y definiendo el *producto interno físico* como

$$(\psi_1 | \psi_2) = \int dq^1 \dots dq^k \dots dq^N \delta(\chi) |[\chi, p_k]| \psi_1^*(q^1 \dots q^N) \psi_2(q^1 \dots q^N), \quad (1.56)$$

donde la condición de gauge χ da a la coordenada q^k , en general, como función de las demás variables, es decir

$$\chi = 0 \iff q^k = q^k(q^1, \dots, q^{k-1}, q^{k+1}, \dots, q^N) \quad (1.57)$$

El jacobiano asegura que el valor de la integral no dependa de la elección de χ :

$$\delta(\chi) |[\chi, p_k]| = \delta(\chi) |\partial\chi/\partial q^k| = \delta(q^k).$$

El producto interno (1.56) es explícitamente igual a

$$(\psi_1|\psi_2) = \int dq^1 \dots dq^{k-1} dq^{k+1} \dots dq^N \psi_1^*(q^1 \dots q^{k-1} q^{k+1} \dots q^N) \psi_2(q^1 \dots q^{k-1} q^{k+1} \dots q^N) \quad (1.58)$$

para los estados físicos, y coincide con el producto escalar en el espacio reducido, es decir, en el subespacio al cual se restringe el movimiento del sistema reducido.

Para el caso en que el sistema exhiba vínculos de primera clase tales que

$$G_a = p_a + \frac{\partial V}{\partial q^a}, \quad (1.59)$$

el producto interno físico puede ser generalizado [Henneaux & Teitelboim (1992)] como

$$(\psi_1|\psi_2) = \int dq^1 \dots dq^N \prod_a \delta(\chi_a) |\det[\chi, p_k]| \psi_1^*(q^1 \dots q^N) \psi_2(q^1 \dots q^N), \quad (1.60)$$

Para que las condiciones de gauge sean buenas deben ser resolubles para q^a , es decir $\chi_a(q^i) = a_{ab}(q^i)(q^b - f^b)$ con $\det a_{ab} \neq 0$ y f^b independiente de q^b .

Para vínculos de forma genérica habrá que insertar un operador $\hat{\mu}(\hat{q}, \hat{p})$ tal que

$$(\psi_1|\psi_2) = \langle \psi_1 | \hat{\mu} | \psi_2 \rangle, \quad (1.61)$$

con $\hat{\mu}$ un operador hermítico singular que elimina la integración sobre las variables que son puro gauge.

Denotando las funciones de onda físicas como

$$\psi_1^*(q) = \langle \psi_1 | q \rangle \quad (1.62)$$

y

$$\psi_2(q) = \langle q | \psi_2 \rangle, \quad (1.63)$$

podemos reescribir el producto interno físico en la forma

$$(\psi_1|\psi_2) = \int dq \langle \psi_1 | q \rangle \hat{\mu} \langle q | \psi_2 \rangle, \quad (1.64)$$

de modo que nos permite definir el operador identidad en el subespacio de estados físicos:

$$\mathbf{1} = \int dq |q \rangle \hat{\mu} \langle q|. \quad (1.65)$$

Y de manera similar, si los vectores $|\Psi_\alpha\rangle$ forman una base del subespacio de estados físicos, tenemos:

$$\mathbf{1} = \sum_{\alpha} |\Psi_\alpha\rangle\langle\Psi_\alpha|; \quad (1.66)$$

los “bras” y “kets” curvos indican que el producto interno debe interpretarse en el sentido de producto físico.

Capítulo 2

El Formalismo Canónico de la Gravedad Cuántica

La teoría de la Relatividad General y la teoría Cuántica representan los dos mayores logros de la física del último siglo. Ambas teorías son consideradas “aplicables universalmente”, es decir que todos los sistemas físicos deben obedecer sus principios. Por lo tanto, por esto y por diversas motivaciones adicionales (ver por ejemplo Isham (1995)), parece esencial combinar estas dos teorías en una única teoría consistente. Sin embargo, a pesar de grandes esfuerzos realizados, aún no existe una teoría definitiva. Esto se debe esencialmente a dificultades de dos tipos: conceptuales y técnicas.

Las dificultades conceptuales más notorias surgen de diferencias substanciales en los fundamentos físicos mismos de cada teoría. Para comenzar, la mecánica cuántica parece reposar excesivamente en conceptos de la mecánica clásica para una teoría que pretende ser más fundamental, y a pesar de la hegemonía de la interpretación de Copenhague, aún se discute cómo debe interpretarse el formalismo para eludir ciertos problemas conceptuales que plantea [Jammer (1966,1974); Blokhintsev (1968); Ballentine (1970,1987); Popper (1985); Sonego (1992); Sforza (1999)]. Por otra parte, independientemente de la

interpretación adoptada para la teoría cuántica, su formalismo le da un rol privilegiado al tiempo como “parámetro de evolución”; mientras que en relatividad general, la acción es invariante ante reparametrizaciones, lo cual significa que las trayectorias del sistema no están parametrizadas por el tiempo sino por un parámetro físicamente irrelevante (de alguna manera, puede decirse que el tiempo físico se halla “escondido” en el formalismo). Esto significa que en la práctica, al carecer de una teoría cuántica que respete esta invariancia, se hallan enormes dificultades al intentar cuantificar si no se ha identificado el tiempo físico de manera unívoca (entre otras propiedades). Esto da lugar al denominado “problema del tiempo” [Isham (1992); Kuchař (1992)].

Entre los numerosos problemas técnicos que surgen, dos son particularmente importantes [Isham (1992); Kuchař (1992)]: La divergencia ultravioleta, que se refiere a la no renormalizabilidad perturbativa de la gravedad cuántica, lo cual sugiere que los operadores de la teoría no están bien definidos; el problema del ordenamiento, que se refiere a la dificultad de realizar como operadores a los vínculos clásicos de modo que respeten el álgebra.

Estas consideraciones podrían indicar que su unificación no consistiría “simplemente” en tratar de armonizar los conceptos de ambas teorías en un esquema coherente. En cambio, sugieren que podemos verlas como límites de una teoría más general correspondiendo a diferentes e incompatibles aproximaciones de la misma. Actualmente, se ve como la candidata más firme para este rol a la teoría de Supercuerdas. La mayor parte del esfuerzo actual se dirige en esta dirección; aunque las esperanzas en este camino no son uniformes en la comunidad científica, debido esencialmente a discrepancias que surgen desde el punto de vista de la física relativista en contraposición a la física de partículas: concepciones diferentes de la interacción gravitatoria, y distinta actitud frente a la necesidad de una formulación independiente del fondo [Rovelli (1998,2000)]. Por lo cual, las investigaciones en el formalismo canónico aún continúan vigorosamente.

En este capítulo aplicaremos el método usual de cuantificación canónica a la relatividad general. Como vimos, un paso previo necesario será expresarla en forma Hamiltoniana.

2.1 Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General.

Las ecuaciones de Einstein pueden ser derivadas de la acción de Einstein-Hilbert

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^4x \sqrt{-g} R + S_m. \quad (2.1)$$

Haciendo las variaciones respecto de $g_{\mu\nu}$, obtenemos

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = 8\pi G T_{\mu\nu}. \quad (2.2)$$

Esta es una ecuación para la geometría, pero una dada geometría está descrita por toda una clase de métricas equivalentes (correspondiendo a diferentes sistemas de coordenadas, como lo permite el principio de covariancia general). Es decir, que al utilizar la métrica $g_{\mu\nu}$ como variables de campo, estamos utilizando variables redundantes. En consecuencia, la Relatividad General tendrá una formulación hamiltoniana con vínculos.

Para expresarla en forma hamiltoniana, comenzamos con una generalización del tiempo. Cortemos el espacio-tiempo por una hipersuperficie espacial arbitraria Σ ,

$$x^\alpha = x^\alpha(x^i), \quad (2.3)$$

donde los índices griegos corren de 0 a 3 y los latinos de 1 a 3. Luego, en cada punto de Σ , tenemos una base formada por tres vectores tangentes $\xi_i^\alpha = \partial_i x^\alpha$ y vector normal unitario n^α tales que

$$n \cdot \xi_i = 0, \quad n^2 = -1. \quad (2.4)$$

Ahora, foliamos el espacio-tiempo deformando en forma continua a Σ . De este modo obtenemos la familia de hipersuperficies parametrizadas en t , $x^\alpha = x^\alpha(x^i, t)$.

Definimos el vector *deformación*:

$$N^\alpha \equiv \partial_t x^\alpha(x^i, t) \quad (2.5)$$

que conecta dos puntos con el mismo rótulo x^i en dos hipersuperficies próximas. Este vector puede descomponerse en la base n^α, ξ_i^α :

$$N^\alpha = Nn^\alpha + N^i \xi_i^\alpha \quad (2.6)$$

Las componentes N y N^i se denominan funciones de *lapso* y *corrimiento*, respectivamente. Su interpretación física surge de escribir en la forma 3+1 o ADM, debida a Arnowitt, Deser & Misner (1962), la métrica del espacio-tiempo:

$$ds^2 = -N^2 dt^2 + g_{ij}(dx^i + N^i dt)(dx^j + N^j dt). \quad (2.7)$$

Se puede imaginar el espacio-tiempo foliado por una familia de hipersuperficies $t = cte$; luego, $N(x)dt$ es el lapso de tiempo propio entre las hipersuperficies superior e inferior. Por otro lado, la función de corrimiento da la correspondencia entre puntos en las dos hipersuperficies; $x^i + dx^i + N^i dt$ en la hipersuperficie inferior corresponde al punto $x^i + dx^i$, $t + dt$ en la superior. Desde este punto de vista, la ecuación (2.7) es sólo una expresión del teorema de Pitágoras.

En el marco de la descomposición ADM, es apropiado hacer un análisis del concepto de curvatura. La curvatura intrínseca a la 3-geometría de una hipersuperficie espacial puede ser definida y calculada de manera análoga al caso de la curvatura cuatridimensional. Pero, ahora podemos introducir el concepto de *curvatura extrínseca* de la 3-geometría. Este concepto carece de significado para una 3-geometría concebida sólo en sí misma. Su existencia depende de que la 3-geometría esté embebida en un espacio-tiempo que la contenga (y estando ambos bien definidos). El tensor de curvatura extrínseca K_{ij} de la hipersuperficie mide la variación de la normal sobre ella a medida que se traslada sobre la misma (de modo que $dn_i = -K_{ij}dx^j$). Su expresión es [Misner et al. (1973)]:

$$K_{ij} = \frac{1}{2N} [N_{i|j} + N_{j|i} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial t}], \quad (2.8)$$

donde la barra vertical indica derivación covariante en la hipersuperficie espacial.

La acción de Einstein-Hilbert, Ec. (2.1), se puede expresar haciendo uso de la descomposición ADM:

$$S = \int L dt = \int dt d^3x \sqrt{{}^{(3)}g} N [K_{ij} K^{ij} - K^2 + {}^{(3)}R] + \text{términos de borde}, \quad (2.9)$$

en la cual suprimimos la acción correspondiente a la materia, para simplificar el análisis que sigue. Además ${}^{(3)}R$ es el escalar de curvatura tridimensional y por simplicidad tomamos que $16\pi G = 1$. A partir de aquí, a menos que se indique lo contrario, g indicará el determinante de la 3-métrica de la hipersuperficie espacial.

Vemos que en la acción escrita en la forma ADM, no aparecen las derivadas respecto del tiempo de N y N^i , luego sus momentos conjugados son

$$\pi = \frac{\delta L}{\delta \dot{N}} = 0, \quad (2.10)$$

$$\pi^i = \frac{\delta L}{\delta \dot{N}^i} = 0. \quad (2.11)$$

Estos son los vínculos primarios.

El momento canónico conjugado a g_{ij} es

$$\pi^{ij} = \frac{\delta L}{\delta \dot{g}_{ij}} = -\sqrt{g}(K^{ij} - g^{ij}K). \quad (2.12)$$

Luego, el Hamiltoniano es

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x (\pi \dot{N} + \pi_i \dot{N}^i + \pi^{ij} \dot{g}_{ij} - L) \\ &= \int d^3x (\pi \dot{N} + \pi_i \dot{N}^i + N\mathcal{H} + N^i \mathcal{H}_i), \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde \mathcal{H} y \mathcal{H}_i están dados por

$$\mathcal{H} = G_{ijkl} \pi^{ij} \pi^{kl} - \sqrt{g} {}^{(3)}R, \quad (2.14)$$

y

$$\mathcal{H}_i = -2\pi^j{}_{|j}. \quad (2.15)$$

Estas cantidades se denominan, respectivamente, *super-Hamiltoniano* y *supermomentos* de la métrica y en donde

$$G_{ijkl} = \frac{1}{2} \sqrt{g} (g_{ik} g_{jl} + g_{il} g_{jk} - g_{ij} g_{kl}) \quad (2.16)$$

es la denominada *supermétrica*.

Finalmente, la acción en forma Hamiltoniana es

$$S = \int dt d^3x (\pi^{ij} \dot{g}_{ij} - N\mathcal{H} - N^i \mathcal{H}_i). \quad (2.17)$$

Compárese esta expresión con la acción Hamiltoniana obtenida en el capítulo anterior, Ec. (1.14). Haciendo la variación respecto de g_{ij} y π^{ij} obtenemos las ecuaciones de Einstein correspondientes a $G_{ij} = 0$. Haciendo la variación respecto de N y de N^i se obtienen las ecuaciones

$$\mathcal{H} = 0, \quad (2.18)$$

$$\mathcal{H}_i = 0, \quad (2.19)$$

que corresponden, respectivamente, a las ecuaciones restantes $G_{00} = 0$ y $G_{0i} = 0$. Estos vínculos también pueden ser obtenidos imponiendo la condición que la derivada temporal de los vínculos primarios se anulen. Esto es esencial para que la estructura de los vínculos de nuestro sistema se mantenga durante la evolución dinámica. Como ya vimos, los vínculos que se obtienen de este modo se denominan secundarios. Estos vínculos son, además, de primera clase; es decir, el corchete de Poisson entre dos cualesquiera de ellos es nulo en la hipersuperficie. Esto asegura independencia de la evolución dinámica en la foliación. Puede calcularse explícitamente que [Hanson et al. (1976); Dirac (1964)]:

$$\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')\} = (g^{ij}(x)\mathcal{H}_i(x) + g^{ij}(x')\mathcal{H}_i(x')) \delta_{,j}(x, x'), \quad (2.20)$$

$$\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}(x')\} = \mathcal{H}(x) \delta_{,i}(x, x'), \quad (2.21)$$

$$\{\mathcal{H}_i(x), \mathcal{H}_j(x')\} = \mathcal{H}_i(x) \delta_{,j}(x, x') + \mathcal{H}_j(x') \delta_{,i}(x, x'), \quad (2.22)$$

Estos vínculos están claramente relacionados con la invariancia de gauge de la teoría. El vínculo (2.18) aparece como consecuencia de la invariancia ante reparametrizaciones temporales, y la Ec.(2.19) es debida a la invariancia ante reparametrizaciones de las coordenadas espaciales en las hipersuperficies. De este modo vemos que el rol de los vínculos es reintroducir en la teoría el principio de covariancia, que había sido violado al haber elegido la forma particular (2.7) de la métrica.

Debemos señalar un punto importante: en los vínculos (2.18) y (2.19) no existe referencia alguna a la hipersuperficie Σ que posee las cantidades geométricas g_{ij} y π^{ij} . Esta hipersuperficie representa un instante de tiempo, por lo tanto el tiempo ha “desaparecido” (al menos explícitamente) del formalismo.

Planteadas estas situaciones, se podría suponer que dada una hipersuperficie, ésta queda especificada por las cantidades g_{ij} y π^{ij} . Podría existir, además, una transformación canónica [Kuchař (1972)]:

$$g_{ij}(x), \pi^{ij}(x) \rightarrow X^A(x), \Pi_A(x), \varrho^r(x), \pi_r(x) \quad (2.23)$$

que separe las cuatro variables $X^A(x)$, $A=0,1,2,3$ que especifican la hipersuperficie de los dos grados de libertad verdaderos del campo gravitatorio $\varrho^r(x)$, $r=1,2$. Luego, se pueden hallar los vínculos (2.18)-(2.19) con respecto a los momentos $\Pi_A(x)$ y reemplazarlos por el conjunto de vínculos equivalentes

$$H_A(x) \equiv \Pi_A(x) + h_A(x; X, \varrho, \pi) = 0. \quad (2.24)$$

Las expresiones $h_A(x)$ representan la densidad de energía y el flujo de energía asociados con las variables gravitacionales ϱ y π a través de la hipersuperficie $X^A(x)$.

En principio, ahora se pueden obtener las leyes dinámicas a partir de los vínculos (2.18)-(2.19) o de (2.24). Sin embargo, no se puede afirmar la existencia de un *tiempo global*, es decir, que se pueda encontrar una variable que siempre crezca a lo largo de cualquier trayectoria dinámica, de modo que toda trayectoria interseque una hipersuperficie de tiempo constante una sola vez. Esto equivaldría a la no existencia de una transformación canónica

(2.23) tal que los vínculos originales (2.18)- (2.19) sean totalmente equivalentes a los nuevos vínculos (2.24). Este problema se denomina *el problema global del tiempo* [Kuchař (1992)].

La “desaparición” del tiempo en este nivel clásico, será la causante del problema del tiempo en Gravedad Cuántica y de sus problemas de interpretación.

2.2 Cuantificación canónica.

Procederemos ahora a aplicar el método de cuantificación canónica de sistemas hamiltonianos con vínculos a la Gravedad [Dirac (1964); DeWitt (1967); Kuchař (1973)].

Comenzamos por convertir la métrica g_{ij} y el momento π^{ij} en operadores que satisfacen las reglas de conmutación:

$$[g_{ij}(x), g_{kl}(x')] = 0, \quad [\pi^{ij}(x), \pi^{kl}(x')] = 0, \quad (2.25)$$

$$[g_{ij}(x), \pi^{kl}(x')] = \frac{i}{2}(\delta_i^k \delta_j^l + \delta_i^l \delta_j^k) \delta(x, x') \quad (2.26)$$

Podemos ahora adoptar una representación particular, la representación de la métrica (en analogía con la representación de posición en mecánica cuántica ordinaria). En esta representación, el funcional de onda se convierte en un funcional de la 3-métrica, y el momento se reemplaza por la derivada variacional con respecto a la 3-métrica

$$\pi^{ij}(x) = -i \frac{\delta}{\delta g_{ij}(x)}. \quad (2.27)$$

El paso siguiente es substituir estos operadores en el super-Hamiltoniano (2.14) y en el supermomento (2.15) e imponer los vínculos como restricciones sobre los estados Ψ del sistema:

$$G_{ijkl}(x) \frac{\delta^2 \Psi}{\delta g_{ij}(x) \delta g_{kl}(x)} - \sqrt{g(x)} R(x) \Psi = 0, \quad (2.28)$$

$$\left[\frac{\delta \Psi}{\delta g_{ij}(x)} \right]_{|j} = 0. \quad (2.29)$$

La ecuación (2.29) (en realidad $3\infty^3$ Ecs.), implica que el funcional de onda Ψ es invariante ante transformaciones de coordenadas en la hipersuperficie espacial. Luego, el funcional de onda depende sólo de la geometría espacial y no de la métrica particular elegida para representarla. El dominio del funcional de onda es el *superespacio*, espacio abstracto de dimensión infinita en el cual cada punto es una 3-geometría [Wheeler (1968)].

La versión cuántica del vínculo super-Hamiltoniano (2.28) es llamada *ecuación de Wheeler-DeWitt*. Es una ecuación variacional, y en realidad son ∞^3 ecuaciones, una para cada punto de la hipersuperficie espacial.

Notemos que si en vez de partir de los vínculos (2.18)-(2.19) lo hacemos del vínculo (2.24), obtenemos en lugar de la ecuación de Wheeler-DeWitt una ecuación funcional de Schrödinger en las variables hipertemporales $X^A(x)$ [Kuchař (1992)]:

$$i \frac{\delta \Psi[X, \varrho]}{\delta X^A(x)} = h_A(x; X, \hat{\varrho}, \hat{\pi}) \Psi[X, \varrho]. \quad (2.30)$$

Esta ecuación, basada en una cierta elección de la variable temporal $X^A(x)$, puede dar una teoría cuántica diferente si se basa en otra elección de la variable temporal. Este problema se denomina *el problema de la elección múltiple*.

La ecuación de Schrödinger automáticamente nos da un producto interno conservado en la variable temporal seleccionada. En cambio, la ecuación de Wheeler-DeWitt, como toda ecuación diferencial funcional de segundo orden, presenta problemas cuando se intenta convertir su espacio de soluciones en un espacio de Hilbert (*problema del espacio de Hilbert*).

La consistencia de los vínculos (2.28)-(2.29), o bien de (2.24), queda establecida si sus conmutadores no generan nuevos vínculos [Dirac (1964); DeWitt (1967)]. Esto estará garantizado toda vez que a nivel cuántico logre hallarse operadores tales que realicen el álgebra (2.20), (2.21) y (2.22) con los operadores de funciones de estructura a la izquierda. Esto restringe el posible ordenamiento de los operadores, pero no lo determina. Vimos que en el caso clásico, los vínculos siempre son consistentes, pero la presencia de la métrica en (2.20) hace terriblemente dificultoso que esto se satisfaga en el caso cuántico. Esta

dificultad, *el problema de ordenamiento de los operadores de vínculo*, es la que estudiaremos en los capítulos posteriores.

2.3 El tiempo e interpretaciones de Gravedad Cuántica

Como hemos mencionado, el problema de ordenamiento, el problema de la elección múltiple y el problema del espacio de Hilbert son las tres mayores dificultades que afronta la Gravedad Cuántica. Estas surgen como consecuencia de no poseer una variable temporal natural a nivel clásico mientras que la teoría cuántica ordinaria se basa en la existencia de un tiempo privilegiado. Este contraste es el que dificulta la interpretación de la teoría.

Muchas han sido las propuestas para interpretar la Gravedad Cuántica. Pero, básicamente existen tres maneras de encarar el problema del tiempo [Kuchař (1992); Isham (1992); Isham (1995)]:

I. Marco del Tiempo Interno. El tiempo está oculto entre las variables canónicas y debe ser identificado antes de la cuantificación. La ecuación en la cual se basa esta interpretación es la ecuación de Schrödinger, no la ecuación de Wheeler-DeWitt. Esta clase de interpretaciones está expuesta al problema de la múltiple elección.

II. Marco de Wheeler-DeWitt. Los vínculos se imponen sobre los estados en la representación de la métrica dando por resultado la ecuación de Wheeler-DeWitt. Se intenta una interpretación dinámica de las soluciones y no se pretende indentificar al tiempo entre las variables métricas. Esta clase de interpretaciones está expuesta al problema del espacio de Hilbert.

III. Marco de la Gravedad Cuántica sin Tiempo. Se basa generalmente (aunque no necesariamente) en la ecuación de Wheeler-DeWitt. Se propone que el tiempo no es necesario para interpretar la Gravedad Cuántica e inclusive, la Mecánica Cuántica en general. El tiempo puede surgir en situaciones particulares, pero aún no siendo así, es posible

una interpretación probabilística. Para una exposición no técnica de investigaciones en esta dirección ver Barbour (2000).

Esta clasificación de las interpretaciones es útil, aún cuando los límites entre las tres clases no son precisos.

En esta tesis, trabajaremos dentro del primer marco mencionado, más específicamente en la Interpretación Interna de Schrödinger. En esta interpretación, se insiste en que el tiempo debe ser identificado entre las variables canónicas antes de efectuar la cuantificación. Ya vimos como obtener la ecuación funcional de Schrödinger que surge de esta visión, Ec. (2.30).

Dado que el problema de la evolución funcional sea resuelto, la ecuación funcional de Schrödinger es autoconsistente y se pueden hallar sus soluciones $\Psi[X, \varrho]$. Al menos formalmente, la integral funcional

$$\langle \Psi | \Psi \rangle \equiv \int D\varrho |\Psi[X, \varrho]|^2, \quad (2.31)$$

que no depende en las variables hipertemporales $X^A(x)$. El producto interno (2.31) convierte al espacio \mathcal{F}_0 de soluciones $\Psi[X, \varrho]$ en un espacio de Hilbert. La estructura del espacio de Hilbert provee la interpretación probabilística usual del sistema cuantificado. En particular, $|\Psi[X, \varrho]|^2 D\varrho$ es interpretado como la probabilidad de hallar los verdaderos grados de libertad gravitacionales $\varrho^r(x)$ en la celda $D\varrho$ sobre la hipersuperficie $X^A = X^A(x)$. Además, el producto interno (2.31) permite la construcción de *observables cuánticos* bien definidos. Cualquier operador

$$\hat{F} = F[X, \hat{\varrho}, \hat{\pi}], \quad (2.32)$$

que es autoadjunto en el producto interno (2.31) es un observable. Las reglas usuales de la teoría cuántica nos dan la probabilidad que, en el estado Ψ , el observable \hat{F} tome el valor F permitido por su espectro, sobre la hipersuperficie $X^A(x)$.

La cuestión básica en este marco interpretativo es cómo seleccionar la variable de tiempo interno. Se han explorado tres opciones:

- *Tiempo Intrínseco*. Se asume que la variable temporal se construye completamente a partir de la métrica intrínseca de la hipersuperficie. Misner (1969) fue uno de los pioneros en hallar un tiempo intrínseco en el caso de modelos cosmológicos homogéneos.

- *Tiempo Extrínseco*. Para identificar la hipersuperficie se necesita, además de su métrica intrínseca, su curvatura extrínseca; es decir, cómo está curvada en el espacio-tiempo que la contiene. Como ejemplos podemos mencionar el tiempo que se construye a partir de la curvatura extrínseca media [York (1972)], y el que se halla en el caso de simetría cilíndrica [Kuchař (1971); Kuchař (1973)].

- *Tiempo Material*. El tiempo no se construye a partir de cantidades geométricas, sino a partir de los campos de materia acoplados a la gravedad. La introducción de materia facilita el manejo de los vínculos que llevan a la ecuación de Schrödinger [Kuchař (1992)].

En esta interpretación surge nuevamente el problema global del tiempo a nivel clásico: puede ocurrir que el sistema de vínculos (2.24) no sea globalmente equivalente al sistema de vínculos (2.18)-(2.19) para cualquier elección de tiempo interno. Esto puede ocurrir si no existe una función de tiempo global en el espacio de fases tal que cada trayectoria clásica intersecte una sola vez toda hipersuperficie de tiempo constante. Este problema se ha estudiado en modelos de sistemas sencillos: un par de osciladores armónicos en un estado estacionario [Hájíček (1990); Schön & Hájíček (1990)] y en modelos cosmológicos homogéneos. Pero, es muy poco lo que se sabe acerca de este problema en la teoría completa.

También aparece el problema de la elección múltiple: si no hay una elección geoméricamente natural todas las elecciones de tiempo son igualmente buenas (o igualmente malas).

Debido a la gran complejidad de la teoría completa, es un procedimiento habitual el “congelar” la mayoría de los grados de libertad de la teoría (en realidad, infinitos) para quedarse con modelos de dimensión finita, son los denominados modelos de *minisuperespacio* [Halliwell (1988)], ejemplos típicos son los modelos usuales de la cosmología. El hecho de trabajar con modelos de dimensión finita, no sólo hace factible el estudio de modelos con las patologías de la teoría completa, sino que también evita otra dificultad, que es la

divergencia ultravioleta de los operadores al cuantificar la teoría. Por estas razones, serán modelos de este tipo los que se estudiarán en esta tesis, más específicamente modelos con tiempo intrínseco y extrínseco.

Capítulo 3

El formalismo de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin

Desde el tratamiento original de Dirac, los sistemas con invariancia de gauge han sido estudiados extensivamente. Un gran avance se produjo con los estudios de Fradkin & Vilkovisky (1975) sobre la formulación covariante de la integral de camino ante la elección del gauge para sistemas con álgebras que no cierran, extendiendo así el trabajo pionero de Fadeev & Popov (1967) para álgebras cerradas. Estos trabajos introdujeron la utilización de variables fermiónicas (es decir, anticonmutantes) denominadas “fantasmas” que aseguraban la unitariedad de la teoría y la independencia de la elección del gauge. Sin embargo, fue el descubrimiento de la simetría de Becchi-Rouet-Stora-Tyutin (BRST) [Becchi et al. (1974, 1975, 1976); Tyutin (1975); Henneaux (1985)] que les dió a los fantasmas un rol prominente. La necesidad de los fantasmas y la simetría que revela su importancia fue establecida primero a nivel cuántico. Más tarde se notó que tenía también lugar, necesariamente y naturalmente, a nivel clásico.

La idea central de la teoría BRST es reemplazar la simetría de gauge original por una supersimetría global que actúa en un espacio de fases extendido apropiadamente. Esta

supersimetría captura la invariancia de gauge original y conduce a una formulación más simple de la teoría.

En este capítulo desarrollaremos los conceptos fundamentales de la formulación BRST, a nivel clásico y cuántico, y mostraremos su relación con la cuantificación canónica de Dirac.

3.1 El formalismo BRST clásico

Comenzaremos por considerar un conjunto $\{G_a(q^i, p_i)\}$ de vínculos de primera clase independientes (sistema irreducible):

$$\{G_a, G_b\} = C_{ab}^c G_c. \quad (3.1)$$

A continuación, el espacio de fases original de la teoría (q^i, p_i) es extendido con pares canónicamente conjugados de fantasmas (η^a, \mathcal{P}_a) (uno por cada vínculo) tales que

$$\{\mathcal{P}_a, \eta^b\} = -\delta_a^b$$

con $\varepsilon(\mathcal{P}_a) = \varepsilon(\eta^a) = \varepsilon_a + 1$, donde $\varepsilon_a \doteq \varepsilon(G_a)$. Es decir, son de paridad de Grassmann¹ opuesta al vínculo correspondiente (por ej., para vínculos bosónicos se agregarán variables fermiónicas). Además, las nuevas variables cumplen que $\eta^{a*} = \eta^a$ y $\mathcal{P}_a^* = (-1)^{\varepsilon_a + 1} \mathcal{P}_a$. Por otra parte, (η^a, \mathcal{P}_a) tienen corchete nulo con cualquiera de las variables canónicas originales (q^i, p_i) .

Se dota al espacio de fases extendido con una estructura adicional, el número de fantasma (*ghost*)

$$gh(q^i) = gh(p_i) = 0, \quad gh(\eta^a) = 1, \quad gh(\mathcal{P}_a) = -1,$$

¹En el Apéndice A pueden encontrarse las definiciones básicas y la notación que involucran al álgebra de Grassmann.

El número de fantasma posee un generador:

$$\mathcal{G} \doteq i \eta^a \mathcal{P}_a, \quad \varepsilon(\mathcal{G}) = 0, \quad \mathcal{G}^* = -\mathcal{G}.$$

En efecto, $\{\eta^a, \mathcal{G}\} = i\eta^a$ $\{\mathcal{P}_a, \mathcal{G}\} = -i\mathcal{P}_a$ (el coeficiente i está puesto para que los autovalores sean reales en mecánica cuántica).

En general, $\{A, \mathcal{G}\} = i gh(A)A$.

El formalismo BRST se basa en el siguiente teorema:

Teorema 3.1: en el espacio de fases extendido existe una cantidad $\Omega = \Omega(q^i, p_j, \eta^a, \mathcal{P}_b)$, el *generador BRST*, tal que:

- $\Omega^* = \Omega \quad gh\Omega = 1 \quad \varepsilon(\Omega) = 1$
- $\Omega = \eta^a G_a +$ (términos de orden superior en los fantasmas)
- $\{\Omega, \Omega\} = 0$ (no trivial, pues Ω es fermiónico).

Ω es único a menos de transformaciones canónicas en el espacio de fases extendido.

Demostración. Siempre es posible escoger (localmente) variables (q, p) tales que los vínculos $F_a = 0$ son abelianos, es decir, $\{F_a, F_b\} = 0$. En tal caso, Ω resulta estrictamente $\Omega = \eta^a F_a$. Nótese que la propiedad de nilpotencia de Ω ($\{\Omega, \Omega\} = 0$), no es mas que otra forma de expresión del carácter abeliano de los vínculos, más adelante veremos que en casos más generales (con vínculos no abelianos, o álgebras abiertas), de todas formas Ω captura en la propiedad de nilpotencia toda el álgebra de los vínculos.

Hagamos ahora, una transformación canónica (que conserva $\{\Omega, \Omega\} = 0$) generada por $\eta^b \varepsilon_b^a(q, p) \mathcal{P}_a$ con $\det \varepsilon_b^a \neq 0$, y ε_b^a es tal que el generador es real y bosónico ($\varepsilon(\varepsilon_b^a) = \varepsilon_a + \varepsilon_b$, $\varepsilon_b^{a*} = (-1)^{\varepsilon_a(\varepsilon_b+1)} \varepsilon_b^a$). Luego,

$$\delta\Omega = \{\Omega, \eta^b \varepsilon_b^a(q, p) \mathcal{P}_a\} = -\{\eta^b \varepsilon_b^a \mathcal{P}_a, \Omega\} = -\{\eta^b \varepsilon_b^a \mathcal{P}_a, \eta^c F_c\} = \eta^b \varepsilon_b^a \mathcal{P}_a + \eta \eta \mathcal{P} \dots + \dots \quad (3.2)$$

Y obtenemos que

$$\Omega = \eta^b (\delta_b^a + \varepsilon_b^a) F_a + \eta \mathcal{P} \dots + \dots \quad (3.3)$$

Nótese que $G_b = (\delta_b^a + \varepsilon_b^a) F_a$ son funciones de vínculo que caracterizan la misma superficie de vínculo que las F_a . El resultado general puede obtenerse a partir del infinitesimal por exponenciación. Si bien esta demostración es sencilla, no provee un método general para la construcción del generador BRST. \square

3.1.1 La construcción del generador BRST

En esta sección describiremos un método general recursivo para la construcción del generador BRST Ω . Su existencia está garantizada a nivel clásico (y como vimos es único a menos de transformaciones canónicas en el espacio de fases extendido).

Sea δ el operador de Koszul-Tate:

$$\delta q = 0 = \delta p, \quad \delta \eta = 0, \quad \delta \mathcal{P}_a = -G_a, \quad (3.4)$$

que satisface $\delta^2=0$. Frente a productos y sumas δ se comporta como una diferenciación impar actuando por derecha:

$$\delta(fg) = f \delta g + (-1)^{\varepsilon_g} \delta f g. \quad (3.5)$$

Se dice que δ es un “diferencial” (pues $\delta^2=0$).

Por otro lado, desarrollemos Ω como:

$$\Omega = \sum_{p \geq 0} \overset{(p)}{\Omega}, \quad \overset{(0)}{\Omega} = \eta^a G_a, \quad (3.6)$$

donde $\overset{(p)}{\Omega}$ tiene la forma genérica:

$$\overset{(p)}{\Omega} = \eta^{b_1} \dots \eta^{b_{p+1}} \overset{(p)}{U}_{b_1 \dots b_{p+1}}^{a_1 \dots a_p}(q, p) \mathcal{P}_{a_1} \dots \mathcal{P}_{a_p}. \quad (3.7)$$

Las funciones $\overset{(p)}{U}$ se llaman funciones de estructura. En particular, los vínculos son las funciones de estructura de orden cero, $\overset{(0)}{U}_a = G_a$, y las de primer orden, $\overset{(1)}{U}_{ab}^c = -\frac{1}{2}(-1)^{\epsilon_a} C_{ba}^c$.

Luego, puede probarse que $\{\Omega, \Omega\} = 0$ es equivalente a que las $\overset{(p)}{\Omega}$ satisfagan:

$$\overset{(p+1)}{\delta\Omega} + \overset{(p)}{D} = 0, \quad (3.8)$$

con

$$\overset{(p)}{D} = \frac{1}{2} \left[\sum_{k=0}^p \{\overset{(k)}{\Omega}, \overset{(p-k)}{\Omega}\}_{orig} + \sum_{k=0}^{p-1} \{\overset{(k+1)}{\Omega}, \overset{(p-k)}{\Omega}\}_{\mathcal{P}, \eta} \right], \quad (3.9)$$

donde $\{, \}_{orig}$ es el corchete en el espacio (q, p) , mientras que $\{, \}_{\mathcal{P}, \eta}$ es el corchete en el espacio (η, \mathcal{P}) .

La ecuación anterior puede ser vista como una herramienta para construir cada $\overset{(p)}{\Omega}$, partiendo del conocido $\overset{(0)}{\Omega}$.

Veamos como resulta el generador BRST para algunos casos simples,

Vínculos abelianos:

El conjunto más simple posible es el de vínculos abelianos,

$$\{G_a, G_b\} = 0. \quad (3.10)$$

En este caso, las funciones de estructura C_{ab}^c se anulan y $\overset{(0)}{\Omega}$ es nilpotente sin necesidad de términos adicionales. Luego, el generador BRST puede ser elegido coincidiendo con $\overset{(0)}{\Omega}$,

$$\Omega = \eta^a G_a, \quad (3.11)$$

Como ya habíamos visto en la demostración del teorema, $\{\Omega, \Omega\} = 0$ no es más que la expresión de la condición abeliana de los vínculos, Ec. (3.10).

Vínculos que cierran de acuerdo a un grupo:

El caso de dificultad creciente al caso abeliano, es el dado por un sistema con transformaciones de gauge que cierran de acuerdo a un grupo. En este caso, los corchetes de

Poisson no se anulan en todo el espacio de fases. En cambio, se tiene que

$$\{G_a, G_b\} = C_{ab}^c G_c, \quad (3.12)$$

donde C_{ab}^c son constantes. La identidad de Jacobi para los corchetes de Poisson implica la siguiente identidad de Jacobi² para las constantes de estructura C_{ab}^c ,

$$C_{ab}^c C_{cd}^e + (-1)^{(\varepsilon_b + \varepsilon_d)\varepsilon_a} C_{bd}^c C_{ca}^e + (-1)^{(\varepsilon_a + \varepsilon_b)\varepsilon_d} C_{da}^c C_{cb}^e = 0. \quad (3.13)$$

Si $C_{ab}^c \neq 0$, $\overset{(0)}{\Omega}$ no es nilpotente por sí solo. Se necesita agregar el término $\overset{(1)}{\Omega}$. Esto es suficiente para que Ω sea nilpotente debido a la identidad de Jacobi (3.13) y a que las C_{ab}^c son constantes. Luego, Ω está dado por

$$\Omega = \eta^a G_a + \frac{1}{2} (-1)^{\varepsilon_a} \eta^a \eta^b C_{ab}^c \mathcal{P}_c. \quad (3.14)$$

La nilpotencia de Ω , $\{\Omega, \Omega\} = 0$, se deduce de (3.12)- (3.13). Y dicha propiedad es de hecho, completamente equivalente a las ecuaciones de estructura (3.12)- (3.13).

En el caso más general de un álgebra abierta, la suma $\overset{(0)}{\Omega} + \overset{(1)}{\Omega}$ puede no ser nilpotente, y en general se requieren términos de orden más alto en Ω . Estos términos de orden superior caracterizan la estructura más complicada del álgebra de gauge. En verdad, las funciones de estructura $\overset{(2)}{U}, \overset{(3)}{U}, \dots$ podrían ser construídas sin haber introducido los fantasmas y sus momentos. Esto puede hacerse a partir de la propiedad de primera clase y explorando sistemáticamente las consecuencias de la identidad de Jacobi.

Sin embargo, es solamente en el espacio de fases extendido que la covariancia canónica de la estructura de un sistema de vínculos de primera clase es manifiesta. Mas aún, es solamente después de haber introducido los fantasmas, que la existencia de funciones de estructura de orden superior revela un contenido algebraico interesante. El uso del formalismo BRST para estudiar la estructura de álgebras abiertas es pues conceptualmente más claro y mucho más económico.

²La versión generalizada de la identidad de Jacobi puede hallarse en el Apéndice A.

Rango de la teoría:

Se dice que un conjunto de vínculos y sus funciones de estructura asociadas es de rango r si todas las funciones de estructura de orden estrictamente mayor que r se anulan. Esto significa que el generador BRST correspondiente contiene a lo sumo r momentos fantasmas \mathcal{P}_a .

Las teorías abelianas son de rango cero. Las teorías basadas en grupos de gauge verdaderos son de rango uno. Rangos mayores que uno generalmente ocurren en teorías con álgebras abiertas.

El concepto de rango no es intrínseco a la superficie de vínculo, sino al conjunto de funciones de vínculo que se usan para describirla (existe ambigüedad en la definición de las funciones de estructura, dado que el conjunto de vínculos puede ser reemplazado por otro equivalente).

Teorema 3.2: Si todas las funciones de estructura de orden k se anulan para $r < k \leq 2r+1$, luego todas las funciones de estructura de orden estrictamente mayor que $2r + 1$ pueden ser elegidas nulas, y el conjunto de funciones de estructura es de rango r .

Demostración. Inspeccionando la Ec. (3.9), se observa que si $\overset{(k)}{\Omega}$ se anula (luego, se anula la función de estructura de orden k ya que es el coeficiente del polinomio en los fantasmas $\overset{(k)}{\Omega}$) para $r < k \leq 2r + 1$ entonces se anula $\overset{(2r+1)}{D}$ y por lo tanto también se anula $\overset{(2r+2)}{\Omega}$ y todos los $\overset{(p)}{\Omega}$ siguientes. Este resultado puede ser útil para la determinación del rango de un sistema de funciones de estructura. \square

3.1.2 Observables, evolución dinámica y simetría BRST

La existencia de Ω con la propiedad $\{\Omega, \Omega\} = 0$ en el espacio de fases extendido, nos permitirá desarrollar una mecánica en el espacio de las fases extendido.

En la teoría original, los observables son funciones $F(q, p)$ que tiene corchetes débilmente nulos con los vínculos de primera clase:

$$\{F, G_a\} \approx 0. \quad (3.15)$$

Esto significa que F' queda determinada a menos de una combinación lineal de los vínculos:

$$F'(q, p) = F(q, p) + k^a(q, p)G_a(q, p) \approx F(q, p) \quad (3.16)$$

y por lo tanto, F' y F deberían considerarse equivalentes.

En el espacio extendido, asignaremos a cada observable $F_0(q, p)$ una cantidad $F(q, p, \eta, \mathcal{P})$ tal que:

$$F(q, p, \eta, \mathcal{P}) \big|_{\eta=0=\mathcal{P}} = F_0(q, p). \quad (3.17)$$

En general, se dirá que $F(q, p, \eta, \mathcal{P})$ es un observable si

$$\{F, \Omega\} = 0, \quad ghF = 0. \quad (3.18)$$

Es decir que $F = F_0(q, p) + \eta^a F_{1a}^b(q, p)\mathcal{P}_b +$ (al menos cuatro fantasmas). Obsérvese que al orden más bajo en los fantasmas se recupera la propiedad (3.15) indicando que la extensión de los observables es adecuada.

Puede verse que si se tiene una función K con $ghK = -1$, entonces $\{K, \Omega\}$ es un observable:

$$(i) \quad \{\{K, \Omega\}, \Omega\} = (-1)^{\epsilon_K} \{\Omega, \{K, \Omega\}\} = \{\Omega, \{\Omega, K\}\} = -(-1)^{\epsilon_K} \{\Omega, \{K, \Omega\}\} \\ \implies \{\{K, \Omega\}, \Omega\} = 0.$$

$$(ii) \quad gh\{K, \Omega\} = ghK + gh\Omega = 0.$$

Veamos a qué observable corresponde en el espacio original. Como $ghK = -1$, debe ser de la forma: $K = -k^a(q, p)\mathcal{P}_a + \eta^a K_a^{bc}(q, p)\mathcal{P}_b\mathcal{P}_c + \dots$ Luego, al orden más bajo en los fantasmas es

$$\{K, \Omega\} \big|_{\eta=0=\mathcal{P}} = k^a G_a. \quad (3.19)$$

Esto significa que la equivalencia apuntada entre los observables del espacio original, puede trasladarse al espacio extendido como una equivalencia entre F y $F' = F + \{K, \Omega\}$, con $\varepsilon_K = \varepsilon_F + 1$. Es necesario que la equivalencia sea cerrada ante adición, multiplicación y corchete, todas estas propiedades se satisfacen con la ayuda de la propiedad $\{\Omega, \Omega\} = 0$.

En particular, el Hamiltoniano canónico es un observable, pues conmuta débilmente con los vínculos para asegurar consistencia dinámica. Luego, existe una extensión BRST del Hamiltoniano que está determinada a menos del término $\{K, \Omega\}$, que al orden más bajo en los fantasmas dá los términos que aparecen en el Hamiltoniano extendido.

Podemos dar entonces ecuaciones dinámicas en el espacio de las fases extendido: para cualquier magnitud $A(q, p, \eta, \mathcal{P})$ sea o no observable, su evolución en el tiempo está dada por

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\}, \quad (3.20)$$

como $ghH = 0$ entonces $ghA(t) = ghA(t = 0)$. En particular, si los fantasmas son inicialmente nulos, continuarán siendo nulos.

La ambigüedad en H (H es equivalente a $H' = H + \{K, \Omega\}$ con $\varepsilon_K = 1$) le agrega a esta ecuación un término $\{A, \{K, \Omega\}\} = -\{K, \{\Omega, A\}\} - \{\Omega, \{A, K\}\}$ (donde se ha usado la identidad de Jacobi en el segundo miembro). Entonces en el caso de un observable F tenemos:

$$\frac{d'F}{dt} = \{F, H'\} = \{F, H\} - \{\Omega, \{F, K\}\} \quad (3.21)$$

es decir que $\frac{d'F}{dt}$ está en la misma clase de equivalencia que $\frac{dF}{dt}$. Además, a orden cero en los fantasmas esta ecuación corresponde a aquella con el Hamiltoniano extendido.

La teoría posee una cantidad conservada: el generador BRST Ω . En efecto,

$$\frac{d\Omega}{dt} = \{\Omega, H\} = 0 \quad (3.22)$$

pues H es un observable. Nótese además que en este caso la ambigüedad en H no agrega ningún término debido a la propiedad $\{\Omega, \Omega\} = 0$.

La existencia de una cantidad conservada *on-shell* es señal de que la teoría posee una simetría global. En efecto, la dinámica puede obtenerse de la acción

$$S[q, p, \eta, \mathcal{P}] = \int dt (\dot{q}^i p_i + \dot{\eta}^a \mathcal{P}_a - H - \{K, \Omega\}). \quad (3.23)$$

Esta acción es invariante frente a la transformación global (con parámetros independientes de t) generada por Ω :

$$\delta f = \{f, \Omega\}, \quad (3.24)$$

la cual es nilpotente: $\delta^2 f = \{\{f, \Omega\}, \Omega\} = 0$ (compárese con la demostración de que $\{K, \Omega\}$ es observable). En efecto,

$$\delta H = \{H, \Omega\} = 0,$$

$$\delta\{K, \Omega\} = \delta^2 K = 0,$$

y el término cinético sólo cambia por un término de superficie pues la transformación es canónica.

Luego, en el espacio de las fases extendido las simetrías locales (de gauge) han sido capturadas por una (super) simetría global generada por Ω : la simetría BRST.

De modo que las trayectorias dinámicas del sistema original pueden ser recuperadas con sólo tomar condiciones iniciales adecuadas: fantasmas inicialmente nulos (ya vimos que en tal caso permanecerán siempre nulos) y (q, p) sobre la superficie de vínculo (recordemos que la evolución dejará al punto sobre la superficie de vínculo). La dinámica de una teoría de gauge puede pensarse como proveniente de la restricción de las condiciones iniciales de un sistema con un número mayor de grados de libertad no vinculados, en el cual las simetrías de gauge han sido reemplazadas por una única simetría global. En la acción de partida, los vínculos surgían al variar los multiplicadores de Lagrange, en cambio la acción BRST no provee ecuaciones de vínculo.

3.2 El formalismo BRST cuántico

La clave del formalismo BRST consiste en que agregando más redundancia (los fantasmas) a un sistema que ya era redundante (porque tenía vínculos) la descripción se vuelve finalmente más transparente y, en algún sentido, las dos redundancias se cancelan entre sí.

Para que las redundancias se cancelen entre sí se debe imponer una condición que seleccionará un subespacio de estados físicos. Esta condición debe ser análoga a la demanda de que los estados físicos sean aniquilados por los generadores de las transformaciones de gauge \hat{G}_a en el formalismo sin fantasmas.

A nivel clásico la invariancia de gauge nos lleva a considerar a los observables F y $F + k^a G_a$ como equivalentes. Esta equivalencia se traduce en BRST como la equivalencia entre los observables BRST F y $F + \{K, \Omega\}$. A nivel cuántico, los observables son operadores lineales que conmutan con $\hat{\Omega}$: $[\hat{F}, \hat{\Omega}] = 0$. \hat{F} y $\hat{F} + [\hat{K}, \hat{\Omega}]$ deberían considerarse equivalentes. Realizamos esta equivalencia exigiendo que

$$\hat{\Omega}\psi_{físico} = 0, \quad (3.25)$$

donde $\hat{\Omega}$, es el operador hermítico asociado del generador BRST clásico en el producto interno

$$\int dq d\eta \psi^*(q, \eta) \varphi(q, \eta), \quad (3.26)$$

donde ψ , φ son superdensidades de peso $\frac{1}{2}$.

Además, la propiedad clásica de nilpotencia también debe satisfacerse a este nivel en la siguiente forma,

$$[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}] = 2\hat{\Omega}^2 = 0.$$

Recordemos que $[,]$ indica el anticonmutador cuando se toma sobre dos operadores ambos fermiónicos. En particular,

$$[\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\eta}^b] = -i\delta_a^b \quad (3.27)$$

significa

$$\hat{\mathcal{P}}_a \hat{\eta}^b - (-1)^{(\epsilon_a+1)(\epsilon_b+1)} \hat{\eta}^b \hat{\mathcal{P}}_a = -i\delta_a^b. \quad (3.28)$$

Si la nilpotencia de $\hat{\Omega}$ ($\hat{\Omega}^2 = 0$) no puede ser alcanzada a través de ningún ordenamiento hermítico, se dice que la teoría presenta anomalías. En este caso la cuantificación no será consistente.

La condición que selecciona los estados físicos tiene las siguientes propiedades:

1. Es lineal, por lo tanto define un subespacio.
2. Los observables BRST conmutan con $\hat{\Omega}$, por lo tanto cuando actúan sobre un estado físico dan por resultado otro estado físico.
3. Los observables triviales $[\hat{K}, \hat{\Omega}]$ tienen elementos de matriz nulos entre estados físicos.

Así como existe una relación de equivalencia entre observables, también se puede establecer una relación de equivalencia entre estados físicos (“libertad de gauge cuántica”). En efecto, la nilpotencia de $\hat{\Omega}$ garantiza que si χ es un estado cuántico cualquiera entonces $\hat{\Omega}\chi$ es un estado físico. Sin embargo, $\hat{\Omega}\chi$ debería ser identificado con cero pues $\hat{\Omega}\chi$ tiene producto interno nulo con cualquier estado físico:

$$(\psi_{físico}, \hat{\Omega}\chi) = (\hat{\Omega}\psi_{físico}, \chi) = 0. \quad (3.29)$$

En particular la aplicación de $[\hat{K}, \hat{\Omega}]$ a un estado físico da

$$[\hat{K}, \hat{\Omega}]\psi_{físico} = \hat{\Omega}\hat{K}\psi_{físico}, \quad (3.30)$$

es decir, un estado que puede ser identificado con cero.

Por lo tanto, la equivalencia

$$\psi_{físico} \sim \psi_{físico} + \hat{\Omega}\chi \quad (3.31)$$

da consistencia a la equivalencia

$$\hat{F} \sim \hat{F} + [\hat{K}, \hat{\Omega}] \quad (3.32)$$

(pues la aplicación de cada uno a un mismo estado físico da por resultado estados físicos equivalentes).

En particular la extensión BRST de los vínculos es

$$\hat{G}_a = i[\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\Omega}]. \quad (3.33)$$

Por lo tanto,

$$\hat{G}_a \psi_{físico} = i(-1)^{(\epsilon_a)} \hat{\Omega} \hat{\mathcal{P}}_a \psi_{físico} \quad (3.34)$$

es un estado que puede ser identificado con cero.

3.2.1 Relación entre la cuantificación BRST y el método de Dirac

Según hemos visto, el operador BRST que extiende a los operadores de vínculo es:

$$\hat{G}_a(\hat{q}, \hat{p}, \hat{\eta}, \hat{\mathcal{P}}) = i[\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\Omega}], \quad (3.35)$$

de modo que el operador de Dirac corresponde al término sin fantasmas en el resultado del conmutador.

Para visualizar esto uno puede reordenar en el $\hat{\Omega}$ hermítico los $\hat{\mathcal{P}}$ de modo que queden a la derecha de los $\hat{\eta}$, teniendo en cuenta que los (anti)-conmutadores no son en general nulos. Luego de aplicar este procedimiento resulta:

$$\hat{\Omega} = \hat{\eta}^a \hat{G}_a(\hat{q}, \hat{p}) + \text{términos con } \hat{\mathcal{P}} \text{ a la derecha.} \quad (3.36)$$

Ahora es evidente que:

$$i[\hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\Omega}] = \hat{G}_a(\hat{q}, \hat{p}) + \text{al menos dos fantasmas.} \quad (3.37)$$

Más aún, de $\hat{\Omega}^2 = 0$ se obtiene que el operador que multiplica a $\hat{\eta}^a$ al cabo del reordenamiento satisface:

$$[\hat{G}_a(\hat{q}, \hat{p}), \hat{G}_b(\hat{q}, \hat{p})] = i\hat{C}_{ab}^c(\hat{q}, \hat{p})\hat{G}_c(\hat{q}, \hat{p}). \quad (3.38)$$

De modo que $\hat{G}_a(\hat{q}, \hat{p})$ es el operador que realiza cuánticamente el álgebra de los vínculos. Es por lo tanto el operador que aniquila los estados físicos de la cuantificación de Dirac.

En general $\hat{G}_a(\hat{q}, \hat{p})$ no va a coincidir con el orden hermítico de $G_a(\hat{q}, \hat{p})$ sino que tomará contribuciones del reordenamiento de los fantasmas que servirán para cancelar anomalías en el álgebra de vínculos. De tal forma que $\hat{G}_a(\hat{q}, \hat{p})$ no resultará hermítico.

Se asume que es posible hallar el operador $\hat{\Omega}$ que satisface las condiciones de nilpotencia y hermiticidad. Sin embargo, a diferencia del caso clásico, no existe a priori ninguna garantía que esto pueda ser realizado a partir de una teoría clásica para la cual $\{\Omega, \Omega\} = 0$, puesto que la cuestión del ordenamiento de los factores resulta crucial. Si la condición $\hat{\Omega}^2 = 0$ no se satisface debido a efectos cuánticos, no todos los grados de libertad de gauge desaparecen del espectro físico y la teoría cuántica es anómala.

Capítulo 4

Sistemas con tiempo intrínseco

Como hemos visto, el campo gravitatorio es un sistema con covariancia general, propiedad que se expresa en la aparición de vínculos: los supermomentos, lineales y homogéneos en los momentos del campo), y el super-Hamiltoniano, cuadrático en los momentos del campo y que exhibe un término “potencial” (la curvatura espacial). La cuantificación de este tipo de sistemas requiere la búsqueda de un ordenamiento para los operadores de vínculo que preserve el álgebra (ausencia de anomalías). Para evitar la regularización de los operadores y poder estudiar el problema en sistemas más simples pero que preserven las características del campo gravitatorio, es usual congelar la mayoría de los grados de libertad, para quedarse finalmente con sistemas de dimensión finita (modelos de “minisuperespacio”). En este espíritu, Hajiček & Kuchař (1990) estudiaron la cuantificación de este tipo de sistemas de dimensión finita en el marco de la cuantificación de Dirac. El modelo propuesto surge por analogía con los vínculos presentados por una partícula relativista en un fondo curvo a la cual se le han agregado grados de libertad espurios.

En el presente capítulo, estudiaremos en el marco del formalismo BRST el sistema propuesto por Hajiček & Kuchař (1990), es decir, un sistema con covariancia general descrito por n pares de variables canónicas (q^i, p_i) sujetas a $m+1$ vínculos de primera clase, donde m

de ellos son lineales y homogéneos en los momentos y el restante es una función cuadrática de los momentos, con una métrica indefinida no degenerada G^{ij} , más un potencial V . Hallaremos el generador BRST clásico y su realización cuántica nilpotente en el caso que el potencial V sea invariante de gauge (es decir, no cambia ante transformaciones generadas por los vínculos lineales). El producto interno físico estará bien definido en el caso que el potencial sea definido positivo. Esta propiedad del potencial significa el sistema bajo estudio no es más que una partícula relativista y determina que el sistema posea un tiempo intrínseco [Ferraro & Sforza (1997); Ferraro & Sforza (2000a)].

4.1 El modelo: análisis clásico

Consideremos un sistema Hamiltoniano descrito por $2n$ variables canónicas (q^i, p_i) , con $i = 1, \dots, n$; sujeto a los vínculos *supermomentos*

$$\mathcal{H}_a = \xi_a^j(q)p_j, \quad a = 1, \dots, m, \quad (4.1)$$

y al vínculo *super-Hamiltoniano*

$$\mathcal{H}_o = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_i p_j + v, \quad (4.2)$$

donde g^{ij} es una métrica indefinida no degenerada y v es un potencial, en principio general (luego impondremos condiciones según el caso).

Supondremos que el sistema de vínculos es de primera clase, es decir que satisfacen:

$$\{\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b\} = C_{ab}^c(q)\mathcal{H}_c, \quad (4.3)$$

$$\{\mathcal{H}_o, \mathcal{H}_a\} = C_{oa}^o(q)\mathcal{H}_o + C_{oa}^b(q,p)\mathcal{H}_b. \quad (4.4)$$

Veamos qué relaciones impone la condición de primera clase. Reemplazando los vínculos (4.1) en (4.3) obtenemos:

$$\xi_b^j \xi_a^i - \xi_a^j \xi_b^i = C_{ab}^c \xi_c^i. \quad (4.5)$$

Reemplazando los vínculos (4.1) y (4.2) en (4.4), tenemos que¹

$$\frac{1}{2}\xi_a^k g_{,k}^{ij} p_i p_j - g^{ik} p_i \xi_{a,k}^j p_j + \xi_a^k v_{,k} = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} \bar{g})^{ij} p_i p_j + \mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} v = C_{oa}^o(q) \mathcal{H}_o + C_{oa}^b \mathcal{H}_b, \quad (4.6)$$

de donde es inmediato que

$$C_{oa}^o(q) v = \mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} v. \quad (4.7)$$

De la Ec. (4.7), vemos que podemos distinguir dos situaciones dependiendo de las propiedades que exhiba el potencial v :

Tipo 1. Es invariante de gauge, es decir $\{v, \mathcal{H}_a\} = 0 = \mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} v, \forall a \implies C_{oa}^o(q) = 0$.

Tipo 2. Es definido positivo, $v > 0$, entonces podemos despejar

$$C_{oa}^o(q) = v^{-1} \mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} v. \quad (4.8)$$

Entonces, tenemos que la Ec. (4.6) nos dará dos condiciones diferentes dependiendo si el potencial es de tipo 1 ó 2. Además teniendo en cuenta que la función de estructura $C_{oa}^o(q)$ forzosamente es lineal y homogénea en los momentos

$$C_{oa}^b = C_{oa}^{bj}(q) p_j, \quad (4.9)$$

tenemos que:

Si v es del tipo 1,

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} \bar{g})^{ij} p_i p_j = C_{oa}^{bj}(q) \xi_b^i p_i p_j. \quad (4.10)$$

O, si v es del tipo 2,

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} \bar{g})^{ij} p_i p_j - \frac{1}{2} v^{-1} \mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} v g^{ij} p_i p_j = C_{oa}^{bj}(q) \xi_b^i p_i p_j. \quad (4.11)$$

¹ $\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a}$ denota la derivada de Lie respecto al campo vectorial $\bar{\xi}_a$, ver por ejemplo Nakahara (1990); Schutz (1980); Misner et al. (1973).

En esta última ecuación podemos definir la métrica

$$g'^{ij} \equiv v^{-1}g^{ij}, \quad (4.12)$$

y entonces obtener

$$\frac{1}{2}(\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a}\bar{g}')^{ij}p_i p_j = v^{-1}C_{oa}^{bj}(q)\xi_b^i p_i p_j. \quad (4.13)$$

Para despejar las funciones de estructura, debemos especificar ciertos objetos geométricos en la variedad. Si llamamos M al espacio de configuración, los vectores $\{\bar{\xi}_a\}$ pertenecen al espacio tangente TM . Si son linealmente independientes forman la base de un subespacio de TM , que llamaremos espacio tangente longitudinal $T_{||}M$. Definimos la base dual en $T_{||}^*M$ como $\{\tilde{E}^a\}$ donde las 1-formas \tilde{E}^a son tales que:

$$\tilde{E}^a(\bar{\xi}_b) = \delta_b^a \quad (4.14)$$

Si desarrollamos cada \tilde{E}^a en la base dual coordenada:

$$\tilde{E}^a = E_j^a dq^j \quad (4.15)$$

entonces la Ec. (4.14) queda $E_j^a \xi_b^j = \delta_b^a$

Luego, usando estas propiedades, podemos despejar de (4.5), las funciones de estructura C_{ab}^c como:

$$C_{ab}^c = E_i^c(\xi_b^j \xi_{a,j}^i - \xi_a^j \xi_{b,j}^i) \quad (4.16)$$

Y según el potencial sea de tipo 1 ó 2, obtenemos de (4.10) o (4.13) respectivamente,

$$C_{oa}^{bj} = \frac{1}{2}E_i^b(\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a}\bar{g}')^{ij} \quad (tipo 1), \quad (4.17)$$

$$C_{oa}^{bj} = \frac{1}{2}vE_i^b(\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a}\bar{g}')^{ij} \quad (tipo 2). \quad (4.18)$$

Si observamos la definición (4.12) y la consideramos al comparar los resultados (4.17) y (4.18), notamos que lo que hicimos implícitamente es un *cambio de escala* en el super-Hamiltoniano con el potencial definido positivo. Es decir, pasamos de un potencial *tipo 1* al *tipo 2* a través de la transformación:

$$\mathcal{H}_o = g^{ij} p_i p_j + 1 \longrightarrow v \mathcal{H}_o = v g^{ij} p_i p_j + v \quad (4.19)$$

Y como resultado las funciones de estructura se transforman de modo acorde

$$C_{oa}^o = 0 \longrightarrow C_{oa}^o = v^{-1} \mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} v \quad (4.20)$$

$$C_{oa}^{bj} = \frac{1}{2} E_i^b (\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} \bar{g})^{ij} \longrightarrow C_{oa}^{bj} = \frac{1}{2} v E_i^b (\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} \bar{g}')^{ij} \quad (4.21)$$

Nótese que el cambio de escala en el super-Hamiltoniano (4.19) es una transformación que deja invariante al sistema: los vínculos \mathcal{H}_o y $v \mathcal{H}_o$ con $v > 0$ son equivalentes. Esta propiedad será explotada al momento de cuantificar el sistema. Comenzaremos con un super-Hamiltoniano con potencial constante² y con una transformación de cambio de escala pasaremos al caso de potenciales definidos positivos. Esta transformación no se realizará a nivel de operadores de vínculo sino al nivel del operador BRST por medio de una transformación unitaria.

4.1.1 El generador BRST clásico

Aplicando el método recursivo explicado en §3.1.1 construiremos el generador BRST clásico Ω para el modelo de la sección anterior en el caso en que el potencial del super-Hamiltoniano es invariante de gauge (tipo 1).

Los primeros términos que contribuyen al generador BRST son

$$\overset{(0)}{\Omega} = \eta^\alpha \mathcal{H}_\alpha, \quad \alpha = (o, a) = 0, 1, \dots, m \quad (4.22)$$

²Caso particular de tipo 1, podríamos considerarlo más general pero no sería claro como definir el producto interno físico que introduciremos más adelante.

y

$${}^{(1)}\Omega = \frac{1}{2}\eta^\alpha\eta^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{P}_\gamma \quad (4.23)$$

Luego, para calcular el término siguiente debemos usar las Ecs. (3.8)-(3.9),

$$\delta\Omega^{(2)} + \overset{(1)}{D} = 0, \quad (4.24)$$

con

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{D} &= \frac{1}{2} \left[2\{\overset{(0)}{\Omega}, \overset{(1)}{\Omega}\}_{\text{orig}} + \{\overset{(1)}{\Omega}, \overset{(1)}{\Omega}\}_{\mathcal{P},\eta} \right] \\ &= \{\eta^\alpha \mathcal{H}_\alpha, \frac{1}{2}\eta^\alpha\eta^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{P}_\gamma\}_{\text{orig}} + \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}\eta^\alpha\eta^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{P}_\gamma, \frac{1}{2}\eta^\alpha\eta^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{P}_\gamma \right\}_{\mathcal{P},\eta}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Luego,

$$\delta\Omega^{(2)} = -\frac{1}{2}\eta^\alpha\eta^\beta\eta^\gamma \left(\{\mathcal{H}_\alpha, C_{\beta\gamma}^\delta\} + C_{\alpha\beta}^\epsilon C_{\gamma\epsilon}^\delta \right) \mathcal{P}_\delta. \quad (4.26)$$

Siendo $\eta^{o2} = 0$, en el paréntesis sólo sobreviven los términos lineales en p , y los independientes de p . Estos últimos se cancelan, pues así ocurre en una teoría con vínculos lineales [Mc Mullan & Paterson (1989); Kunstater (1992); Ferraro et al. (1993)].

Finalmente queda

$$\begin{aligned} \delta\Omega^{(2)} &= -\frac{1}{2}\eta^o\eta^b\eta^c \left(\{\mathcal{H}_o, C_{bc}^d\} + C_{ob}^e C_{ce}^d \right) \mathcal{P}_d \\ &\quad - \frac{1}{2}\eta^a\eta^o\eta^c \left(\{\mathcal{H}_a, C_{oc}^d\} + C_{ao}^e C_{ce}^d \right) \mathcal{P}_d \\ &\quad - \frac{1}{2}\eta^a\eta^b\eta^o \left(\{\mathcal{H}_a, C_{bo}^d\} + C_{ab}^e C_{oe}^d \right) \mathcal{P}_d \end{aligned} \quad (4.27)$$

Redefiniendo índices mudos y permutando obtenemos,

$$\delta\Omega^{(2)} = -\frac{1}{2}\eta^o\eta^b\eta^c \left(\{\mathcal{H}_o, C_{bc}^d\} + C_{bc}^e C_{oe}^d - 2\{\mathcal{H}_b, C_{oc}^d\} + 2C_{ob}^e C_{ce}^d \right) \mathcal{P}_d \quad (4.28)$$

Nótese que la identidad $\delta^2\Omega^{(2)} \equiv 0$ expresa la identidad de Jacobi:

$$\left(\{\mathcal{H}_o, C_{bc}^d\} + C_{bc}^e C_{oe}^d + 2\{C_{o[c}^d, \mathcal{H}_{b]}\} + 2C_{o[b}^e C_{c]e}^d \right) \mathcal{H}_d = 0 \quad (4.29)$$

Pero como los vínculos lineales son independientes, resulta que $\overset{(2)}{\Omega}$ es cerrada:

$$\delta\overset{(2)}{\Omega} = 0.$$

Por lo tanto escogemos

$$\overset{(2)}{\Omega} = 0 \quad (4.30)$$

$\overset{(p)}{\Omega}$ siempre está determinado a menos de una cantidad exacta).

Por el teorema 3.2 bastaría ver que $\overset{(3)}{\Omega} = 0$, para probar que la teoría es de rango 1. Calculemos entonces,

$$\begin{aligned} \overset{(1)}{D} &= \frac{1}{2} \{ \overset{(1)}{\Omega}, \overset{(1)}{\Omega} \}_{orig} \\ &= \frac{1}{8} \{ \eta^\alpha \eta^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{P}_\gamma, \eta^\delta \eta^\epsilon C_{\delta\epsilon}^\sigma \mathcal{P}_\sigma \}_{orig} \\ &= \frac{1}{8} \eta^\alpha \eta^\beta \eta^\delta \eta^\epsilon \mathcal{P}_\gamma \mathcal{P}_\sigma \{ C_{\alpha\beta}^\gamma, C_{\delta\epsilon}^\sigma \}_{orig} \end{aligned} \quad (4.31)$$

Sólo uno de los η puede ser η^o . Habrá entonces cuatro términos iguales:

$$\delta\overset{(3)}{\Omega} = \frac{1}{2} \eta^o \eta^b \eta^d \eta^e \mathcal{P}_c \mathcal{P}_a \{ C_{ob}^c, C_{de}^a \} \quad (4.32)$$

Por lo tanto,

$$0 \equiv \delta^2\overset{(3)}{\Omega} = \frac{1}{2} \eta^o \eta^b \eta^d \eta^e (\mathcal{P}_c(-\mathcal{H}_a) + \mathcal{P}_a \mathcal{H}_c) \{ C_{ob}^c, C_{de}^a \} \quad (4.33)$$

$$\implies \{ C_{o[b}^c, C_{de]}^a \} \mathcal{H}_c - \{ C_{o[b}^a, C_{de]}^c \} \mathcal{H}_c = 0, \quad (4.34)$$

y como los vínculos lineales son linealmente independientes

$$\{ C_{o[b}^{[c}, C_{de]}^{a]} \} = 0. \quad (4.35)$$

Por lo tanto,

$$\delta\overset{(3)}{\Omega} = 0 \implies \overset{(3)}{\Omega} = 0 \quad (4.36)$$

Entonces la teoría es de rango 1. Y el generador BRST clásico para la teoría es

$$\begin{aligned}\Omega &= \eta^\alpha \mathcal{H}_\alpha + \frac{1}{2} \eta^\alpha \eta^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma \mathcal{P}_\gamma \\ &= \eta^o \mathcal{H}_o + \eta^a \mathcal{H}_a + \eta^o \eta^a C_{oa}^b \mathcal{P}_b + \frac{1}{2} \eta^a \eta^b C_{ab}^c \mathcal{P}_c.\end{aligned}\quad (4.37)$$

Recordemos entonces que este resultado es válido para sistemas cuyo vínculo super-Hamiltoniano posea un potencial invariante de gauge (nótese que en (4.37) no aparece C_{oa}^o).

4.2 Cuantificación del sistema.

La cuantificación del sistema en el marco del formalismo BRST requiere que el generador BRST clásico, Ec. (4.37), sea realizado como un operador hermítico y nilpotente. Para el caso de solamente un conjunto de vínculos lineales de primera clase este paso ha sido dado en numerosos trabajos (ver por ej. Ferraro et al. (1993) y referencias allí citadas). Sin embargo, en el caso del modelo presentado, la presencia de un vínculo cuadrático en los momentos complica enormemente el hallazgo de la realización cuántica del generador BRST.

Debido a la dificultad mencionada, comenzaremos por estudiar en detalle el caso en el que sólo existen vínculos supermomentos y luego incluiremos el vínculo super-Hamiltoniano. Las transformaciones de invariancia de la teoría, la reinterpretación geométrica de ciertos resultados y el tratamiento en pie de igualdad de las variables canónicas originales y los fantasmas en este sistema más simple, nos darán la clave para hallar el operador BRST en el caso de sistemas que exhiben además el vínculo super-Hamiltoniano.

4.2.1 Vínculos supermomentos

Para un sistema de m vínculos linealmente independientes

$$\mathcal{H}_a(q^i, p_j) = \xi_a^k(q^i) p_k, \quad a = 1, \dots, m, \quad (4.38)$$

el problema de encontrar un ordenamiento para los operadores de vínculo que satisfaga el álgebra

$$[\hat{\mathcal{H}}_a, \hat{\mathcal{H}}_b] = C_{ab}^c(q) \hat{\mathcal{H}}_c \quad (4.39)$$

es resuelto trivialmente por

$$\hat{\mathcal{H}}_a = f^{\frac{1}{2}} \xi_a^i \hat{p}_i f^{-\frac{1}{2}}, \quad (4.40)$$

donde f es arbitraria. En la cuantificación de Dirac la función f puede ser determinada pidiendo que los operadores de vínculo preserven el carácter geométrico de la función de onda [Hajiček & Kuchař (1990); Mc Mullan & Paterson (1989); Ferraro et al. (1993)]. Dicho carácter geométrico está determinado por la ley de transformación de la función de onda bajo cambios que dejan invariante la teoría a nivel clásico: cambios de coordenadas y combinaciones lineales de los vínculos. La función de onda debería transformarse de manera tal que el producto interno físico permanezca invariante.

Por otra parte, en el marco del formalismo BRST, para cuantificar el sistema extendido se debe realizar el generador BRST para el sistema de primera clase (4.38) (resultado de la sección anterior, Ec. (4.37), debidamente restringido: poniendo $\eta^o = 0$)

$$\Omega^{lineal} = \eta^a \mathcal{H}_a + \frac{1}{2} \eta^a \eta^b C_{ab}^c \mathcal{P}_c, \quad (4.41)$$

como un operador hermítico y nilpotente (de esta forma la teoría estará libre de anomalías, capítulo 3):

$$[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}] = 2\hat{\Omega}^2 = 0. \quad (4.42)$$

Antes de llevar a cabo esto, es sumamente importante considerar en pie de igualdad a las variables canónicas originales y fantasmas (esto simplificará la visualización del ordenamiento buscado cuando se incluya el vínculo super-Hamiltoniano). Adoptemos por lo

tanto, la notación usada en Ferraro et al. (1993):

$$\eta^{c_s} = (q^i, \eta^a), \quad \mathcal{P}_{c_s} = (p_i, P_a), \quad s = -1, 0. \quad (4.43)$$

Luego, Ω^{lineal} puede ser escrito como

$$\Omega^{lineal} = \sum_{s=-1}^0 \Omega^{c_s} \mathcal{P}_{c_s}, \quad (4.44)$$

donde

$$\Omega^{c_s} \equiv (\eta^a \xi_a^i, \frac{1}{2} \eta^a \eta^b C_{ab}^c). \quad (4.45)$$

El ordenamiento

$$\hat{\Omega}^{lineal} = \sum_{s=-1}^0 f^{\frac{1}{2}} \hat{\Omega}^{c_s} \hat{\mathcal{P}}_{c_s} f^{-\frac{1}{2}} \quad (4.46)$$

es nilpotente para cualquier $f(q)$ (es simplemente el resultado clásico $\{\Omega, \Omega\} = 0$) pero f debería ser elegida de manera tal que $\hat{\Omega}^{lineal}$ resulte hermítico. De esta condición, resulta que f debe satisfacer

$$C_{ab}^b = f^{-1} (f \xi_a^i)_{,i}. \quad (4.47)$$

El operador así obtenido $\hat{\Omega}^{lineal}$ es igual al hallado simetrizando la ecuación (4.2.1), es decir $\hat{\Omega}^{lineal} = \frac{1}{2} (\hat{\Omega}^{c_s} \hat{\mathcal{P}}_{c_s} + \hat{\mathcal{P}}_{c_s} \hat{\Omega}^{c_s})$, que es el procedimiento habitual. Esta realización de $\hat{\Omega}^{lineal}$ nos conduce a operadores de vínculo que coinciden con los hallados mediante el método geométrico de Dirac:

$$\hat{\mathcal{H}}_a = f^{\frac{1}{2}} \xi_a^i \hat{p}_i f^{-\frac{1}{2}} = \xi_a^i \hat{p}_i - \frac{i}{2} \xi_{a,i}^i + \frac{i}{2} C_{ab}^b. \quad (4.48)$$

Si bien la ecuación (4.47) es todo lo que uno necesita para establecer $\hat{\Omega}^{lineal}$, no define unívocamente a f . De hecho, el lado derecho no cambia si f es multiplicada por una función invariante de gauge. La siguiente proposición hará más claro el significado geométrico de f en la ecuación (4.47).

Proposición 4.1: Para un conjunto dado de vínculos de primera clase (4.38), sea $\tilde{\alpha}$ el volumen inducido por los vínculos en el espacio de configuración original M :

$$\tilde{\alpha} \equiv \tilde{E}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{E}^m \wedge \tilde{\omega}, \quad (4.49)$$

donde $\{\tilde{E}^a\}$ es la base dual de $\{\vec{\xi}_a\}$ en $T_{||}M$, el espacio tangente longitudinal; y $\tilde{\omega} = \omega(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{n-m}$ es una $n - m$ forma cerrada, siendo las y^r , $n - m$ funciones que son invariantes ante la acción de las transformaciones de gauge generadas por los vínculos lineales,³ es decir, $dy^r(\vec{\xi}_a) = 0 \quad \forall r, a$. $\tilde{\alpha}$ es el volumen inducido por los vínculos en la órbita, multiplicado por un volumen (no elegido) en el espacio “reducido”. Luego,

$$C_{ab}^b = \text{div}_{\tilde{\alpha}} \vec{\xi}_a. \quad (4.50)$$

Demostración. Tomaremos ventaja del hecho que cualquier base puede ser (localmente) abelianizada. Así, probaremos la proposición para una base abeliana, y luego transformaremos ambos lados de la ecuación (4.50) mostrando que permanecen iguales para una base arbitraria de $T_{||}M$.

Sea $\{\vec{\xi}_a^i\}$ una base abeliana en $T_{||}M$, luego el lado izquierdo de la ecuación (4.50) es $C_{ab}^b = 0$. Por otro lado, por definición la divergencia en el volumen $\tilde{\alpha}'$ del campo vectorial $\vec{\xi}_a^i$ es escrita en términos de la derivada exterior de la $(n - 1)$ -forma $\tilde{\alpha}'(\vec{\xi}_a^i)$ [Schutz (1980)]:

$$(\text{div}_{\tilde{\alpha}'} \vec{\xi}_a^i) \tilde{\alpha}' \equiv d[\tilde{\alpha}'(\vec{\xi}_a^i)]. \quad (4.51)$$

El lado derecho de la ecuación (4.50) es además nulo porque $\tilde{\alpha}'(\vec{\xi}_a^i)$ es cerrada. De hecho, las formas \tilde{E}^a son (localmente) exactas, puesto que una base abeliana es una base coordinada. Luego, la ecuación (4.50) resulta verdadera para vínculos abelianos.

Ahora, cambiemos de base

$$\vec{\xi}_a = A_a^b(q) \vec{\xi}_b^i, \quad \tilde{E}^a = A_b^a(q) \tilde{E}^b \quad (4.52)$$

siendo (A_a^b) la matriz inversa de (A_b^a) . Luego,

$$C_{ab}^b = E_i^b (\xi_b^j \xi_{a,j}^i - \xi_a^j \xi_{b,j}^i) = A_c^b (A_{a,j}^c \xi_b^j - A_{b,j}^c \xi_a^j). \quad (4.53)$$

³No denominamos a estas funciones “observables” ya que no serán invariantes ante la acción del vínculo cuadrático que introduciremos en la sección siguiente.

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
d[\tilde{\alpha}(\vec{\xi}_a)] &= d[\det A^{-1} \tilde{\alpha}'(\vec{\xi}_a)] = d[A_a^b \det A^{-1} \tilde{\alpha}'(\vec{\xi}_a^j)] \\
&= \sum_{b=1}^m (-1)^{b-1} (A_a^b \det A^{-1})_{,j} dq^j \wedge \tilde{E}'^1 \wedge \dots \\
&\quad \dots \wedge \tilde{E}'^{b-1} \wedge \tilde{E}'^{b+1} \wedge \dots \wedge \tilde{E}'^m \wedge \tilde{\omega} \\
&= (A_a^b \det A^{-1})_{,j} A_b^c \xi_c^j \tilde{E}'^1 \wedge \dots \wedge \tilde{E}'^m \wedge \tilde{\omega}, \tag{4.54}
\end{aligned}$$

$(\det A^{-1} \equiv \det A_a^b)$, debido a que sólo la componente $dq^j(\vec{\xi}_b^j) = \xi_b^j = A_b^c \xi_c^j$ contribuye.

Por lo tanto,

$$d[\tilde{\alpha}(\vec{\xi}_a)] = A_b^c (A_{a,j}^c \xi_b^j - A_{b,j}^c \xi_a^j) \tilde{\alpha}. \tag{4.55}$$

De este modo, las ecuaciones (4.53) y (4.55) nos dicen ambos lados de la ecuación (4.47) tienen el mismo valor independientemente de cual sea la base de $T_{||}M$. Luego, la proposición resulta demostrada para cualquier conjunto de vínculos de primera clase lineales y homogéneos en los momentos. \square

El resultado de la proposición significa en la ecuación (4.47), f puede ser vista como la componente de $\tilde{\alpha}$ en la base coordenada $\{dq^i\}$:

$$\tilde{\alpha} = f dq^1 \wedge \dots \wedge dq^n. \tag{4.56}$$

En el marco del formalismo BRST, una redefinición de los vínculos como la de la ecuación (4.52) es vista como el cambio de variables $\eta^a \rightarrow \eta'^a = \eta^b A_b^a(q)$. Puesto que la función de onda BRST se comporta como una superdensidad de peso $1/2$ en el espacio (q, η) (de modo de preservar el producto interno invariante), puede concluirse que los factores $f^{\frac{1}{2}}$ y $f^{-\frac{1}{2}}$ en la ecuación (4.46) son exactamente lo que se necesita para que $\hat{\Omega}^{linear} \psi$ se comporte de la misma manera que ψ bajo tal cambio (de hecho, $f \rightarrow f' = \det A f$). Esta propiedad de f debería tenerse en cuenta al momento de cuantificar un sistema con un vínculo cuadrático, ya que podría facilitar la búsqueda del operador $\hat{\Omega}$.

4.2.2 Vínculo super-Hamiltoniano

Como ya se ha adelantado, consideraremos ahora la inclusión de un vínculo cuadrático con un potencial que no se anula. Esta propiedad permitirá factorizar el potencial, y reemplazar al vínculo cuadrático por uno equivalente pero con un potencial constante (o como mencionamos antes, un caso particular de tipo 1: invariante de gauge). Comencemos, por lo tanto por considerar un vínculo Hamiltoniano $\mathcal{H}_o(q^i, p_j)$:

$$\mathcal{H}_o(q^k, p_j) = \frac{1}{2} g^{ij}(q^k) p_i p_j + \lambda, \quad \lambda = \text{constante}, \quad (4.57)$$

siendo g^{ij} una métrica indefinida no degenerada. Más adelante, se introducirá un potencial que no se anula $V = \lambda \vartheta(q)$.

De esta forma tenemos el sistema completo Ecs. (4.1)-(4.2), junto con las condiciones de primera clase, Ecs. (4.3)-(4.4). Según demostramos en §4.1.1, en este caso el generador BRST es, Ec. (4.37),

$$\Omega = \eta^o \mathcal{H}_o + \eta^a \mathcal{H}_a + \eta^o \eta^a c_{oa}^b \mathcal{P}_b + \frac{1}{2} \eta^a \eta^b C_{ab}^c \mathcal{P}_c \equiv \Omega^{cuad} + \Omega^{lineal}, \quad (4.58)$$

donde Ω^{lineal} es el mismo de (4.2.1), y Ω^{cuad} es

$$\Omega^{cuad} = \frac{1}{2} \sum_{r,s=-1}^0 \mathcal{P}_{a_r} \Omega^{a_r b_s} \mathcal{P}_{b_s} + \eta^o \lambda, \quad (4.59)$$

con

$$\Omega^{a_r b_s} \equiv \begin{pmatrix} \eta^o g^{ij} & \eta^o \eta^a c_{oa}^{bi} \\ \eta^o \eta^b c_{ob}^{aj} & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.60)$$

El sistema se cuantifica convirtiendo al generador BRST en el operador hermítico y nilpotente $\hat{\Omega}$:

$$[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}] = [\hat{\Omega}^{cuad}, \hat{\Omega}^{cuad}] + 2[\hat{\Omega}^{cuad}, \hat{\Omega}^{lineal}] + [\hat{\Omega}^{lineal}, \hat{\Omega}^{lineal}] = 0. \quad (4.61)$$

El término $[\hat{\Omega}^{cuad}, \hat{\Omega}^{cuad}]$ se anula trivialmente ya que $\eta^{o2} = 0$ (nótese que Ω no depende de \mathcal{P}_o). El último término se anula porque $\hat{\Omega}^{lineal}$ ya es nilpotente. Luego, sólo debe hallarse un ordenamiento para $\hat{\Omega}^{cuad}$ que satisfaga $[\hat{\Omega}^{cuad}, \hat{\Omega}^{lineal}] = 0$. La estructura de $\hat{\Omega}^{lineal}$ sugiere fuertemente el siguiente ordenamiento hermitico para $\hat{\Omega}^{cuad}$:

$$\hat{\Omega}^{cuad} = \frac{1}{2} \sum_{r,s=-1}^0 f^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_{ar} f \hat{\Omega}^{a_r b_s} \hat{\mathcal{P}}_{bs} f^{-\frac{1}{2}} + \hat{\eta}^o \lambda. \quad (4.62)$$

Efectivamente, por cálculo directo puede probarse que $\hat{\Omega}$ es nilpotente. Esta demostración, que es central en esta tesis, puede hallarse en el Apéndice B.

4.2.3 Operadores de vínculo de Dirac

Ahora identificaremos los operadores de vínculo de Dirac. Hemos visto en la sección §3.2.1 que dichos operadores pueden ser identificados fácilmente si se escribe de manera apropiada el operador $\hat{\Omega}$:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &= \frac{1}{2} \sum_{r,s=-1}^0 f^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_{ar} f \hat{\Omega}^{a_r b_s} \hat{\mathcal{P}}_{bs} f^{-\frac{1}{2}} + \hat{\eta}^o \lambda + \sum_{s=-1}^0 \hat{\Omega}^{c_s} \hat{\mathcal{P}}_c, \\ &= \hat{\eta}^o \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_i g^{ij} f \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_a \hat{\eta}^o \hat{\eta}^c c_{oc}^{aj} f \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{\eta}^o \hat{\eta}^c \hat{p}_i c_{oc}^{ai} f \hat{\mathcal{P}}_a f^{-\frac{1}{2}} + \hat{\eta}^o \lambda + \hat{\eta}^a f^{\frac{1}{2}} \xi_a^i \hat{p}_i f^{-\frac{1}{2}} + \frac{1}{2} \hat{\eta}^a \hat{\eta}^b C_{ab}^c \hat{\mathcal{P}}_c. \end{aligned} \quad (4.63)$$

Los operadores de vínculo del método de Dirac son los coeficientes de los operadores fantasmas en el operador BRST escrito en el ordenamiento $\hat{\eta} - \hat{\mathcal{P}}$, es decir que todos los momentos fantasmas son llevados a la derecha de las variables fantasmas conjugadas usando repetidamente las relaciones de anticonmutación. Obtenemos de este modo:

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &= \hat{\eta}^o \left(\frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_i g^{ij} f \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} + \frac{i}{2} f^{\frac{1}{2}} c_{oa}^{aj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} + \lambda \right) + \hat{\eta}^a f^{\frac{1}{2}} \xi_a^i \hat{p}_i f^{-\frac{1}{2}} + \\ &+ \frac{1}{2} \hat{\eta}^o \hat{\eta}^a (f^{\frac{1}{2}} c_{oa}^{bj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} + f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_j c_{oa}^{bj} f^{\frac{1}{2}}) \hat{\mathcal{P}}_b + \frac{1}{2} \hat{\eta}^a \hat{\eta}^b C_{ab}^c \hat{\mathcal{P}}_c. \end{aligned} \quad (4.64)$$

Luego, el coeficiente de $\hat{\eta}^o$ en la ecuación (4.64) es el operador de vínculo super-Hamiltoniano $\hat{\mathcal{H}}_o$ y los coeficientes de $\hat{\eta}^a$ son los operadores de vínculos supermomentos

$\hat{\mathcal{H}}_a$. El segundo término en $\hat{\mathcal{H}}_o$ es la contribución de los fantasmas al operador de vínculo. Nótese que la hermiticidad de $\hat{\Omega}$ no implica que los operadores de vínculo sean hermíticos. Claramente esta propiedad no es necesaria porque el único autovalor de interés es el cero. En cambio el término no hermítico garantiza que el álgebra de vínculos cierre.

Cambio de escala del super-Hamiltoniano

Hasta ahora hemos tratado con un potencial constante (tipo 1). La introducción de un potencial definido positivo (tipo 2) $\lambda\vartheta(q)$ en el vínculo super-Hamiltoniano, puede hacerse al nivel del operador BRST por medio de la transformación unitaria

$$\hat{\Omega} \rightarrow e^{i\hat{C}} \hat{\Omega} e^{-i\hat{C}}, \quad (4.65)$$

que provee un nuevo operador BRST hermítico y nilpotente. Elijamos, por lo tanto,

$$\hat{C} = \frac{1}{2}[\hat{\eta}^o \ln \vartheta(q) \hat{\mathcal{P}}_o - \hat{\mathcal{P}}_o \ln \vartheta(q) \hat{\eta}^o], \quad \vartheta(q) > 0. \quad (4.66)$$

Así obtenemos,

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} = & \hat{\eta}^o \left(\frac{1}{2} \vartheta^{\frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_i g^{ij} f \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} \vartheta^{\frac{1}{2}} + \frac{i}{2} \vartheta^{\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}} c_{oa}^{aj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} \vartheta^{\frac{1}{2}} + \lambda \vartheta \right) + \hat{\eta}^a \vartheta^{-\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \xi_a^i \hat{p}_i f^{-\frac{1}{2}} \vartheta^{\frac{1}{2}} \\ & + \hat{\eta}^o \hat{\eta}^a \xi_a^i (\ln \vartheta)_{,i} \hat{\mathcal{P}}_o + \frac{1}{2} \hat{\eta}^o \hat{\eta}^a \vartheta^{\frac{1}{2}} (f^{\frac{1}{2}} c_{oa}^{bj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} + f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_j c_{oa}^{bj} f^{\frac{1}{2}}) \vartheta^{\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_b + \frac{1}{2} \hat{\eta}^a \hat{\eta}^b C_{ab}^c \hat{\mathcal{P}}_c. \end{aligned} \quad (4.67)$$

El operador $\hat{\Omega}$ resultante corresponde a un vínculo cuadrático con el cambio de escala $H = \vartheta \mathcal{H}_o$ (luego, $C_{oa}^{bj} = \vartheta c_{oa}^{bj}$). Una vez más, los nuevos operadores de vínculo pueden leerse de la ecuación (4.67):

$$\hat{H} = \frac{1}{2} \vartheta^{\frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_i g^{ij} f \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} \vartheta^{\frac{1}{2}} + \frac{i}{2} \vartheta^{-\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}} C_{oa}^{aj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} \vartheta^{\frac{1}{2}} + \lambda \vartheta, \quad (4.68)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_a = \vartheta^{-\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \xi_a^i \hat{p}_i f^{-\frac{1}{2}} \vartheta^{\frac{1}{2}}, \quad (4.69)$$

con las correspondientes funciones de estructura,

$$\hat{C}_{oa}^o = \xi_a^i (\ln \vartheta)_{,i}, \quad (4.70)$$

$$\hat{C}_{oa}^b = \frac{1}{2} \left(\vartheta^{-\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}} C_{oa}^{bj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} \vartheta^{\frac{1}{2}} + \vartheta^{\frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_j C_{oa}^{bj} f^{\frac{1}{2}} \vartheta^{-\frac{1}{2}} \right), \quad (4.71)$$

$$\hat{C}_{ab}^c = C_{ab}^c. \quad (4.72)$$

Todos los operadores están apropiadamente ordenados de manera que satisfacen el álgebra de vínculos a nivel cuántico libre de anomalías,

$$[\hat{H}, \hat{\mathcal{H}}_a] = \hat{C}_{oa}^o \hat{H} + \hat{C}_{oa}^b(q, p) \hat{\mathcal{H}}_b, \quad (4.73)$$

$$[\hat{\mathcal{H}}_a, \hat{\mathcal{H}}_b] = \hat{C}_{ab}^c(q) \hat{\mathcal{H}}_c. \quad (4.74)$$

El resultado (4.68) dice que el operador asociado con el vínculo de primera clase $H = \frac{1}{2} G^{ij}(q) p_i p_j + V(q)$, con $V(q) > 0 \quad \forall q$, no es el Laplaciano para la métrica G^{ij} más V , sino

$$\hat{H} = \frac{1}{2} V^{\frac{1}{2}} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_i V^{-1} G^{ij} f \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} + \frac{i}{2} V^{-\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}} C_{oa}^{aj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} + V, \quad (4.75)$$

ya que la métrica en el término cinético debe ser $g_{ij} = V G_{ij}$. Por simplicidad usamos un potencial definido positivo, pero debe notarse que, en general, lo que se requiere es que no se anule. Como se ve, el formalismo BRST provee contribuciones de los fantasmas a los operadores de vínculo, que son necesarias para satisfacer el álgebra y preservar el carácter geométrico de la función de onda. La contribución de los fantasmas al operador de vínculo cuadrático es el segundo término en la ecuación (4.75) y lo analizaremos luego. Los operadores de vínculo lineales adquieren dos términos antihermíticos asociados con las trazas de las funciones de estructura:

$$\hat{\mathcal{H}}_a = V^{-\frac{1}{2}} f^{\frac{1}{2}} \xi_a^i \hat{p}_i f^{-\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} = \xi_a^i \hat{p}_i - \frac{i}{2} \xi_{a,i}^i + \frac{i}{2} C_{ab}^b + \frac{i}{2} C_{ao}^o, \quad (4.76)$$

donde $\frac{i}{2} C_{ao}^o = -\frac{i}{2} \xi_a^i (\ln V)_{,i}$. De acuerdo con lo que vimos al principio este capítulo, la restricción sobre el potencial puede ser relajada, debido a que los resultados no cambian si λ , en vez de ser constante, es una función $\lambda(y)$ invariante en órbitas asociadas vínculos lineales (tipo 1). El potencial estaría entonces sólo restringido a factorizar como $V = \vartheta(q) \lambda(y)$, $\vartheta(q) > 0$.⁴ Sin embargo, potenciales que no son definidos positivos hacen menos evidente

⁴Esta factorización permite la existencia de un "gauge físico" globalmente bien definido en Hajiček & Kuchař (1990): $\Omega(q)$ en esa cita puede ser tomado como $\ln \vartheta(q)$ y $\frac{i}{2} C_{ao}^o$ es el allí denominado "cociclo".

la manera de construir el producto interno físico en el espacio de Hilbert físico [Beluardi & Ferraro (1995)]. Luego, el término cinético en el super-Hamiltoniano y los supermomentos son sensibles a la existencia del potencial.

4.2.4 Invariancias y producto interno físico

El operador de vínculo Hamiltoniano (4.75) difiere del hallado en Hajiček & Kuchař (1990), donde es agregado un término de curvatura para retener la invariancia de la teoría ante cambio de escala. De un modo diferente, aquí se consigue la invariancia ante cambios de escala gracias al papel jugado por el potencial en los operadores de vínculo. De hecho, el papel jugado por los factores $f^{\pm\frac{1}{2}}$, $V^{\pm\frac{1}{2}}$ es claro si se presta atención a las transformaciones que deberían dejar invariante la teoría; estas transformaciones son (i) cambios de coordenadas, (ii) combinaciones de vínculos supermomentos, Ec. (4.52), y (iii) cambio de escala del vínculo super-Hamiltoniano ($H \rightarrow e^{\Theta} H$). El producto interno físico de las funciones onda de Dirac,

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int dq \left[\prod_{\chi}^{m+1} \delta(\chi) \right] J \varphi_1^*(q) \varphi_2(q), \quad (4.77)$$

(donde J es el determinante de Faddeev-Popov y χ representa las $m + 1$ condiciones de gauge) debe ser invariante bajo cualquiera de estas transformaciones. De acuerdo al cambio del determinante de Faddeev-Popov bajo (ii) y (iii), el producto interno permanecerá invariante si la función de onda de Dirac cambia de acuerdo a

$$\varphi \rightarrow \varphi' = (\det A)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{\Theta}{2}} \varphi. \quad (4.78)$$

De esta manera, los factores $f^{\pm\frac{1}{2}}$, $V^{\pm\frac{1}{2}}$ en los operadores de vínculo son justamente lo que se necesita para que $\hat{\mathcal{H}}_a \varphi$, $\hat{H} \varphi$, y $\hat{C}_{aa}^b \varphi$ transformen como φ , preservando de esta manera el carácter geométrico de la función de onda de Dirac.

En las Ecs. (4.77)-(4.78) la función de onda es una densidad de peso $\frac{1}{2}$. Si se prefiere ver a la función de onda como invariante bajo las transformaciones relevantes (i)-(iii), se

debería realizar la transformación

$$\varphi \rightarrow \phi = f^{-\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} \varphi, \quad (4.79)$$

$$\hat{O} \rightarrow f^{-\frac{1}{2}} V^{\frac{1}{2}} \hat{O} f^{\frac{1}{2}} V^{-\frac{1}{2}}. \quad (4.80)$$

El producto interno físico correspondiente resulta de la integración del invariante $\phi_1^* \phi_2$ en el volumen invariante $V^{-1} J [\prod \delta(\chi)] \tilde{\alpha}$.

$$(\phi_1, \phi_2) = (\varphi_1, \varphi_2) = \int \tilde{\alpha} V^{-1} J [\prod \delta(\chi)] \phi_1^* \phi_2. \quad (4.81)$$

Reducción del sistema

Puesto que el producto interno (4.77) o (4.81) es invariante ante la transformación (ii), se puede elegir la base coordenada abeliana $\tilde{\xi}_a^i = \partial/\partial Q^a$ ($G'_a = P_a$). De este modo, el volumen se expresa

$$\tilde{\alpha}' = dQ^1 \wedge \dots \wedge dQ^m \wedge \omega(y) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^{n-m}. \quad (4.82)$$

Luego, las ecuaciones de vínculo lineales para la función de onda de Dirac ϕ son

$$\frac{\partial \phi}{\partial Q^a} = 0. \quad (4.83)$$

Estas ecuaciones simplifican notablemente la ecuación de vínculo correspondiente al super-Hamiltoniano que, cuando se escribe en la base coordenada $\{dQ^a, dy^r\}$ [luego $f' = \omega(y)$], se reduce a

$$\left(-\frac{1}{2} V \frac{\partial}{\partial Q^a} V^{-1} G^{ar} \frac{\partial}{\partial y^r} - \frac{1}{2} V \omega(y)^{-1} \frac{\partial}{\partial y^r} \omega(y) V^{-1} G^{rs} \frac{\partial}{\partial y^s} + \frac{1}{2} C_{aa}^{ar} \frac{\partial}{\partial y^r} + V \right) \phi = 0. \quad (4.84)$$

El potencial puede ser factorizado. Luego, teniendo en cuenta las ecuaciones (4.4) y (4.9), se obtiene que $V^{-1} C_{aa}^{br} = c_{aa}^{br} = \partial g^{br} / \partial Q^a$ y $V^{-1} G^{rs} = g^{rs} = g^{rs}(y)$. Entonces,

$$\left(-\frac{1}{2} \omega(y)^{-1} \frac{\partial}{\partial y^r} \omega(y) g^{rs}(y) \frac{\partial}{\partial y^s} + 1 \right) \phi = 0. \quad (4.85)$$

Por lo tanto, la contribución de los fantasmas al super-Hamiltoniano permite el surgimiento del "Laplaciano" en términos de las variables reducidas $\{y^r\}$. Para obtener el Laplaciano

verdadero para la métrica reducida invariante ante cambio de escala $g_{rs}(y)$, se debería elegir $\omega(y)$ como $|\det(g_{rs})|^{1/2}$. Es claro que el formalismo BRST no puede dar un valor para $\omega(y)$, porque $\hat{\Omega}$ es hermítico y nilpotente para cualquier $\omega(y)$.⁵

Para analizar la relación entre la cuantificación en el marco del formalismo de Dirac y la cuantificación en el espacio de fases reducido, elijamos las funciones de fijado de gauge $\chi^a = Q^a$, $\{\chi^a, P_a\} = 0$. Luego, en la ecuación (4.81) se integra en las variables Q^a usando el volumen $\tilde{\alpha}'$ y se obtiene

$$(\phi_1, \phi_2) = \int \tilde{\omega} V^{-1} J_o \delta(\chi^a) \phi_1^*[q^i(Q^a = 0, y^r)] \phi_2[q^i(Q^a = 0, y^r)]. \quad (4.86)$$

Se puede definir una densidad de peso 1/2 ante cambios de las y^r :⁶

$$\begin{aligned} \varphi_R(y) &= \omega(y)^{\frac{1}{2}} V[q^i(Q^a = 0, y^r)]^{-\frac{1}{2}} \phi[q^i(Q^a = 0, y^r)] \\ &= \omega(y)^{\frac{1}{2}} f'[q^i(Q^a = 0, y^r)]^{-\frac{1}{2}} \varphi[q^i(Q^a = 0, y^r)]. \end{aligned} \quad (4.87)$$

Luego,

$$(\phi_1, \phi_2) = (\varphi_{R_1}, \varphi_{R_2}) = \int dy J_o \delta(\chi^a) \varphi_{R_1}^*(y) \varphi_{R_2}(y), \quad (4.88)$$

y φ_R es función de onda de Dirac en un espacio “reducido” donde sólo subsiste el vínculo cuadrático: φ_R está vinculada por la ecuación (4.85) que es satisfecha por $\phi[q^i(Q^a = 0, y^r)]$.

4.3 Epílogo: Principio de mínima acción de Jacobi

El modo en que el potencial entra en el ordenamiento de los operadores de vínculo puede parecer artificial (especialmente en el término cinético del vínculo cuadrático). Sin

⁵Si, por ejemplo, el sistema tiene solamente un vínculo cuadrático \mathcal{H} , luego $\hat{\Omega} = \hat{\eta}\hat{\mathcal{H}}$ sería hermítico y nilpotente para cualquier ordenamiento hermítico de $\hat{\mathcal{H}}$.

⁶La función $\omega^{-1}f'$ juega el papel de μ en Ferraro et al. (1993) y el de \mathcal{M} en Barvinsky & Krykhtin (1993). De hecho, si elegimos usar la base Abelianizada $\vec{\xi}_a$ en $T_{||}M$ que es una base coordenada: $\vec{\xi}_a = \partial/\partial Q^a$ ($G'_a = P_a$), $\vec{E}'^a = dQ^a$. Luego, $\omega^{-1}f'$ es el Jacobiano del cambio de coordenadas $(Q^a, y^r) \rightarrow q^i$.

embargo, viéndolo con cuidado el papel que desempeña resulta completamente natural. Con este fin exponemos a continuación un argumento a nivel clásico sumamente elegante. Los sistemas con covariancia general son invariantes ante cambios del parámetro en la acción funcional. Esto significa que el parámetro es físicamente irrelevante: no es el tiempo. El tiempo puede estar escondido entre las variables dinámicas y , como resultado de ello, el Hamiltoniano está restringido a anularse [Kuchař (1973)]. En este caso el tiempo podría ser identificado como una función $t(q, p)$ en el espacio de fases, que crece monótonamente sobre todas las trayectorias dinámicas. Puesto que el H aquí estudiado es equivalente a un super-Hamiltoniano con un potencial constante, los sistemas a los cuales pueden aplicarse los resultados hallados son aquellos semejantes al caso de una partícula relativista en un espacio tiempo curvo. Luego, el tiempo se halla escondido en el espacio de configuración: es decir se trata de un *tiempo intrínseco* (recordar lo expuesto en §2.3). Esto significa que la trayectoria en el espacio de configuración contiene toda la información sobre el sistema. En mecánica clásica, el principio de Jacobi [Lanczos (1986); Goldstein (1987)] es el principio variacional para obtener las trayectorias en el espacio de configuración, para una energía fija E , sin información alguna sobre la evolución del sistema en el parámetro de la acción funcional. Los caminos son obtenidos cuando se varía la funcional

$$I = \int_{q'}^{q''} \sqrt{2|E - V|G_{ij}dq^i dq^j}. \quad (4.89)$$

En nuestro caso, la energía es cero (por la condición de vínculo), y la ecuación (4.89) tiene la forma de la acción funcional de una partícula relativista de masa unidad en un fondo curvo con métrica $2VG_{ij} = 2g_{ij}$. Los caminos son geodésicas de esta métrica $2g_{ij}$, en vez de G_{ij} . Cuando se fija el gauge como $Q^a = 0$, el principio de Jacobi se reduce a la variación de la funcional

$$I_R = \int_{y'}^{y''} \sqrt{2VG_{rs}dy^r dy^s}, \quad (4.90)$$

dando de esta manera un sustento clásico a la ecuación de vínculo (4.85), donde el Laplaciano es el asociado con la métrica invariante ante cambio de escala $2VG_{rs} = 2g_{rs}(y)$ que aparece en la ecuación (4.90).

Capítulo 5

Sistemas con tiempo extrínseco

Al intentar cuantificar un sistema como la relatividad general, vimos que una de sus características más complicadas es el problema del tiempo (§2.3). En mecánica cuántica, el tiempo es un parámetro absoluto; no está en pie de igualdad con las otras coordenadas que luego se convierten en operadores y observables. En relatividad general, en cambio, el “tiempo” es una mera etiqueta de una hipersuperficie espacial, y las cantidades físicamente relevantes son independientes de dichas etiquetas: ellas son invariantes ante difeomorfismos. La relatividad general es un ejemplo de un sistema parametrizado (un sistema cuya acción es invariante ante cambios del parámetro de integración). Tal tipo de sistemas puede ser obtenido a partir de una acción que no posee invariancia de reparametrización, elevando al tiempo al rango de variable dinámica. De este modo, los grados de libertad originales y el tiempo son funciones de cierto parámetro físicamente irrelevante. El tiempo puede ser variado independientemente de los otros grados de libertad cuando se agrega un vínculo con su correspondiente multiplicador de Lagrange. En este proceso, surge una característica especial: el Hamiltoniano está restringido a anularse.

La mayoría de los esfuerzos dirigidos a cuantificar la relatividad general (o ciertos modelos de minisuperespacio) enfatizan la analogía con la partícula relativista. Es justamente

el tipo de tratamiento que realizamos en el capítulo anterior. Esto se debe a que ambos sistemas poseen vínculos Hamiltonianos \mathcal{H}_0 que son hiperbólicos en los momentos. Si el papel de la masa al cuadrado es interpretado por un potencial definido positivo, luego la analogía es completa en el sentido que el tiempo está escondido en el espacio de configuración [Ferraro & Sforza (1997); Hajiček & Kuchař (1990)]. Más aún, un potencial definido positivo garantiza que la componente temporal del momento nunca es nula sobre la superficie de vínculo. De este modo, el corchete de Poisson $\{q^0, \mathcal{H}_0\}$ nunca se anula, lo cual indica que q^0 evoluciona monótonamente sobre cualquier trayectoria dinámica; esta es la propiedad esencial del tiempo. En este caso, hemos mostrado cómo obtener un ordenamiento consistente de los operadores de vínculo a partir del formalismo BRST [Ferraro & Sforza (1997)].

Desafortunadamente, la analogía no puede ser considerada muy seriamente puesto que el potencial en relatividad general es la curvatura espacial (no necesariamente definida positiva). Esto significa que el tiempo en relatividad general debe ser sugerido por otro modelo mecánico. En este capítulo construiremos un modelo con tiempo extrínseco cuyo potencial no está restringido a ser definido positivo, pero es invariante de gauge (tipo 1) lo cual nos permitirá utilizar los resultados ya obtenidos como punto de partida para su cuantificación en un caso más general [Ferraro & Sforza (1999); Ferraro & Sforza (2000a)].

5.1 El modelo: escondiendo el tiempo

Con el objetivo de hallar un modelo mecánico mejor para la relatividad general, comencemos con un sistema que posee n grados de libertad genuinos con un Hamiltoniano $h = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu + v(q^\mu)$ cuya métrica $g^{\mu\nu}$ es definida positiva.

La dinámica del sistema no cambiará si se agrega una función del tiempo al Hamiltoniano, digamos $-\frac{t^2}{2}$. La acción para dicho sistema es

$$S = \int \left[p_\mu \frac{dq^\mu}{dt} - h(q^\mu, p_\mu) + \frac{t^2}{2} \right] dt, \quad \mu = 1, \dots, n \quad (5.1)$$

El sistema puede ser parametrizado si la variable de integración t es vista como una variable canónica cuyo momento conjugado es (menos) el Hamiltoniano. Esta última condición entra en la acción como un vínculo $\mathcal{H}_o = p_t + h - \frac{t^2}{2}$, y la acción queda expresada como

$$S[q^\mu, p_\mu, t, p_t, N^o] = \int \left[p_t \frac{dt}{d\tau} + p_\mu \frac{dq^\mu}{d\tau} - N^o \left(p_t + h(q^\mu, p_\mu) - \frac{t^2}{2} \right) \right] d\tau \quad (5.2)$$

donde N es multiplicador de Lagrange.

Hasta aquí el vínculo es parabólico en los momentos. Sin embargo, si realizamos la transformación canónica,

$$q^0 = p_t, \quad p_0 = -t \quad (5.3)$$

convierte al vínculo \mathcal{H}_o en una función hiperbólica de los momentos [Beluardi & Ferraro (1995)]:

$$\mathcal{H}_o = q^0 + h - \frac{1}{2}p_0^2 = -\frac{1}{2}p_0^2 + \frac{1}{2}g^{\mu\nu}p_\mu p_\nu + v(q^\mu) + q^0 = \frac{1}{2}\mathcal{G}^{rs}p_r p_s + \mathcal{V}(q^r), \quad (5.4)$$

con $r, s = 0, 1, \dots, n$. Las componentes de la métrica son $\mathcal{G}^{00} = -1$, $\mathcal{G}^{0\nu} = 0$, $\mathcal{G}^{\mu\nu} = g^{\mu\nu}$ y el potencial es $\mathcal{V}(q^i) = v(q^\mu) + q^0$. Luego, \mathcal{G}^{rs} es una métrica Lorentziana, como lo es la supermétrica en el formalismo de Arnowitt-Deser-Misner (ADM) en relatividad general. El vínculo (5.4) describe un sistema parametrizado con tiempo extrínseco (escondido en el espacio de fases), cuyo potencial no es definido positivo.

Para una analogía más completa con relatividad general, los vínculos supermomentos pueden ser introducidos agregando m grados de libertad q^a . Su carácter espurio es expresado por m vínculos lineales y homogéneos en los momentos $\mathcal{H}_a \equiv \xi_a^r p_r$, donde $\vec{\xi}_a$ son m campos vectoriales tangentes a las curvas coordenadas asociadas con las coordenadas q^a . Estos m vínculos \mathcal{H}_a pueden además ser combinados linealmente

$$\mathcal{H}_a \rightarrow \mathcal{H}_{a'} = A_{a'}^a(q) \mathcal{H}_a, \quad \det A \neq 0, \quad (5.5)$$

y obtener un conjunto equivalente de vínculos supermomentos lineales y homogéneos. El conjunto $(\mathcal{H}_o, \mathcal{H}_a)$ es de primera clase.

Finalmente la dinámica del sistema se obtiene variando la acción

$$S[q^i, p_i, N^o, N^a] = \int \left[p_i \frac{dq^i}{d\tau} - N^o \mathcal{H}_o - N^a \mathcal{H}_a \right] d\tau, \quad i = 0, 1, \dots, n + m \quad (5.6)$$

donde N^a son los multiplicadores de Lagrange correspondientes a los vínculos \mathcal{H}_a .

Tal sistema satisface las siguientes condiciones (que pueden ser leídas del vínculo Hamiltoniano, Ec. (5.4)):

$$\frac{\partial \mathcal{G}^{ij}}{\partial q^0} \approx 0 \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial q^0} = 1 \quad (5.8)$$

El símbolo “ \approx ” significa “igualdad débil” (la igualdad está restringida a la subvariedad definida por los vínculos $\mathcal{H}_a \approx 0$) y reemplaza la igualdad ordinaria debido a que la métrica posee un sector no físico que puede depender de q^0 .

La parametrización del sistema, que es aún visible en la ecuación (5.4) debido a la forma espacial del potencial y las componentes de la métrica, puede ser enmascarada por medio de una transformación general de coordenadas. Sin embargo, las propiedades geométricas distintivas del sistema, expresadas por las ecuaciones (5.7),(5.8), pueden ser escritas en forma geométrica (es decir, independiente de las coordenadas) usando derivadas de Lie. De este modo, las ecuaciones (5.4) y (5.7), (5.8) indican que existe un vector de Killing temporal débilmente *unitario* que satisface

$$\mathcal{L}_{\bar{\xi}_0} \mathcal{G} \approx 0, \quad (5.9)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{\xi}_0} \mathcal{V} = 1. \quad (5.10)$$

A diferencia de otros tratamientos donde un vínculo hiperbólico como (5.4) es comparado con el de una partícula relativista, y el parámetro del vector de Killing es visto como el tiempo [Kuchař (1973)], en nuestro enfoque el tiempo ($t = -p_0$) es la variable dinámica *conjugada* al parámetro del vector de Killing [Ferraro & Sforza (1999)].

5.2 El generador BRST clásico y cuántico

Si bien este modelo se ha obtenido a través de un proceso de parametrización, el resultado final desde el punto de vista de los vínculos y las funciones de estructura, debido a que el potencial es invariante de gauge (tipo 1), es enteramente equivalente al del capítulo anterior [Ferraro & Sforza (2000a)]. El hecho de poseer un tiempo de características diferentes al caso anterior sólo influirá en la forma en la cual se define el producto interno físico pero no en el generador BRST. Esto es así, ya que al aplicar el formalismo BRST lo único que interesa es el conjunto de vínculos (de primera clase) en sí y sus funciones de estructura asociadas.

Es decir que podemos explotar esta equivalencia a nivel de vínculos para obtener sin necesidad de cálculo adicional el generador BRST a nivel clásico y cuántico.

La invariancia de gauge del potencial se corresponde con el tipo 1 descrito en §4.1, en ese caso vimos que la función de estructura $C_{oa}^o(q)$ se anula, y el álgebra resultante es la (4.3)-(4.4) con $C_{oa}^o = 0$.

Es decir que el generador BRST clásico será, Ec. (4.37),

$$\Omega = \eta^o \mathcal{H}_o + \eta^a \mathcal{H}_a + \eta^o \eta^a C_{oa}^b \mathcal{P}_b + \frac{1}{2} \eta^a \eta^b C_{ab}^c \mathcal{P}_c. \quad (5.11)$$

Por lo tanto, también tenemos que el operador BRST hermítico y nilpotente, es entonces, Ec. (4.64),

$$\hat{\Omega} = \hat{\eta}^o \mathcal{H}_o + \hat{\eta}^a \mathcal{H}_a + \frac{1}{2} \hat{\eta}^o \hat{\eta}^a (f^{\frac{1}{2}} c_{oa}^{bj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} + f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_j c_{oa}^{bj} f^{\frac{1}{2}}) \hat{\mathcal{P}}_b + \frac{1}{2} \hat{\eta}^a \hat{\eta}^b C_{ab}^c \hat{\mathcal{P}}_c. \quad (5.12)$$

con

$$\hat{\mathcal{H}}_o = \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_i \mathcal{G}^{ij} f \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} + \frac{i}{2} f^{\frac{1}{2}} c_{oa}^{aj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} + \mathcal{V} \quad (5.13)$$

y

$$\hat{\mathcal{H}}_a = f^{\frac{1}{2}} \xi_a^i \hat{p}_i f^{-\frac{1}{2}}, \quad (5.14)$$

donde la función $f = f(q)$ satisface, en forma análoga al caso anterior,

$$C_{ab}^b = f^{-1} (f \xi_a^i)_{,i} = \text{div}_{\vec{a}} \vec{\xi}_a, \quad (5.15)$$

con la excepción que ahora $\tilde{\alpha}$ es el volumen $\tilde{\alpha} \equiv f dq^0 \wedge \dots \wedge dq^{n+m}$.¹

Los operadores de vínculo de Dirac (5.13)-(5.14) fueron obtenidos del generador BRST cuántico, el objeto central del método.

En el capítulo anterior, comenzamos con una métrica pseudo-Riemanniana y un potencial constante (una partícula relativista en un espacio curvo). Dicho sistema tenía la propiedad $c_{0a}^0 = 0$, que facilitaba la búsqueda del generador BRST cuántico. Después de eso, un potencial más general (pero definido positivo) era introducido a través de una transformación unitaria del generador BRST, y c_{0a}^0 surgía como no nula. Este procedimiento nos dió los operadores de vínculo invariantes ante cambio de escala del vínculo super-Hamiltoniano (sin tener que recurrir a un término de curvatura).

En el caso presente, el sistema no es una partícula relativista: el potencial no es constante (ni tampoco definido positivo), y el tiempo no está escondido entre las coordenadas. Sin embargo, c_{0a}^0 es aún nula debido a la invariancia de gauge del potencial. Una vez más, la invariancia ante cambio de escala del vínculo super-Hamiltoniano será introducida a través de una transformación unitaria en el espacio extendido.

5.2.1 Cambio de escala del super-Hamiltoniano

El cambio de escala del vínculo super-Hamiltoniano

$$\mathcal{H}_o \rightarrow H = F \mathcal{H}_o, \quad F > 0 \quad (5.16)$$

¹Nótese que la dimensión del volumen se ha incrementado por la inclusión de “t” al parametrizar. Ahora tenemos que la $(n + m + 1)$ -forma $\tilde{\alpha}$ que resuelve la ecuación (5.15) es un volumen en el espacio de configuración \mathcal{M} : $\tilde{\alpha} \equiv \tilde{E}^1 \wedge \dots \wedge \tilde{E}^m \wedge \tilde{\omega}$, donde $\{\tilde{E}^a\}$ es la base dual de $\{\tilde{\xi}_a\}$ en $T_{||}^* \mathcal{M}$ (el espacio tangente “longitudinal”, y $\tilde{\omega} = \omega(y) dy^0 \wedge \dots \wedge dy^n$ es una n forma cerrada donde las y^r son $n + 1$ funciones que son invariantes ante las transformaciones de gauge generadas por los vínculos lineales ($dy^r(\tilde{\xi}_a) = 0, \forall r, a$). $\tilde{\alpha}$ es el volumen inducido por los vínculos en la órbita, multiplicado por un volumen (no elegido) en el espacio “reducido”.

(luego $\mathcal{G}^{ij} \rightarrow G^{ij} = F \mathcal{G}^{ij}$, $\mathcal{V} \rightarrow V = F \mathcal{V}$) relaja las propiedades geométricas de $\vec{\xi}_0$:

$$|\vec{\xi}_0| = 1 \quad \rightarrow \quad |\vec{\xi}_0| = F^{-\frac{1}{2}} \quad (5.17)$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}_0} \mathcal{G} \approx 0 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}_{\vec{\xi}_0} \mathbf{G} \approx C \mathbf{G} \quad (5.18)$$

$$\mathcal{L}_{\vec{\xi}_0} \mathcal{V} = 1 \quad \rightarrow \quad \mathcal{L}_{\vec{\xi}_0} V = C V + |\vec{\xi}_0|^{-2} \quad (5.19)$$

con $C(q) = \vec{\xi}_0(\ln F) = -2\vec{\xi}_0(\ln|\vec{\xi}_0|)$. Así $\vec{\xi}_0$ se convierte en un vector de Killing débilmente conforme no unitario.

A nivel cuántico, la operación de cambio de escala correspondiente puede ser llevada a cabo realizando la transformación unitaria del operador BRST

$$\hat{\Omega} \rightarrow e^{i\hat{M}} \hat{\Omega} e^{-i\hat{M}}, \quad (5.20)$$

con

$$\hat{M} = [\hat{\mathcal{P}}_o \ln|\vec{\xi}_0| \hat{\eta}^o - \hat{\eta}^o \ln|\vec{\xi}_0| \hat{\mathcal{P}}_o], \quad |\vec{\xi}_0| > 0 \quad (5.21)$$

dando un nuevo operador BRST hermítico y nilpotente,

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} = & \hat{\eta}^o \left(\frac{1}{2} |\vec{\xi}_0|^{-1} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_i \mathcal{G}^{ij} f \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} |\vec{\xi}_0|^{-1} + \frac{i}{2} |\vec{\xi}_0|^{-1} f^{\frac{1}{2}} c_{oa}^{aj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} |\vec{\xi}_0|^{-1} + |\vec{\xi}_0|^{-2} \mathcal{V} \right) \\ & + \hat{\eta}^a |\vec{\xi}_0| f^{\frac{1}{2}} \xi_a^i \hat{p}_i f^{-\frac{1}{2}} |\vec{\xi}_0|^{-1} - 2\hat{\eta}^o \hat{\eta}^a \xi_a^i (\ln|\vec{\xi}_0|)_{,i} \hat{\mathcal{P}}_o \\ & + \frac{1}{2} \hat{\eta}^o \hat{\eta}^a |\vec{\xi}_0|^{-1} (f^{\frac{1}{2}} c_{oa}^{bj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} + f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_j c_{oa}^{bj} f^{\frac{1}{2}}) |\vec{\xi}_0|^{-1} \hat{\mathcal{P}}_b + \frac{1}{2} \hat{\eta}^a \hat{\eta}^b C_{ab}^c \hat{\mathcal{P}}_c, \end{aligned} \quad (5.22)$$

que corresponde a operadores de vínculo que satisfacen la invariancia ante cambio de escala (de modo que $G^{ij} = |\vec{\xi}_0|^{-2} \mathcal{G}^{ij}$, $V = |\vec{\xi}_0|^{-2} \mathcal{V}$, y $C_{oa}^{bj} = |\vec{\xi}_0|^{-2} c_{oa}^{bj}$)

$$\hat{H} = \frac{1}{2} |\vec{\xi}_0|^{-1} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_i |\vec{\xi}_0|^2 G^{ij} f \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} |\vec{\xi}_0|^{-1} + \frac{i}{2} |\vec{\xi}_0| f^{\frac{1}{2}} C_{oa}^{aj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} |\vec{\xi}_0|^{-1} + V, \quad (5.23)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_a = |\vec{\xi}_0| f^{\frac{1}{2}} \xi_a^i \hat{p}_i f^{-\frac{1}{2}} |\vec{\xi}_0|^{-1}, \quad (5.24)$$

con las correspondientes funciones de estructura,

$$\hat{C}_{oa}^o = -2\xi_a^i (\ln|\vec{\xi}_0|)_{,i}, \quad (5.25)$$

$$\hat{C}_{oa}^b = \frac{1}{2} \left(|\bar{\xi}_0| f^{\frac{1}{2}} C_{oa}^{bj} \hat{p}_j f^{-\frac{1}{2}} |\bar{\xi}_0|^{-1} + |\bar{\xi}_0|^{-1} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_j C_{oa}^{bj} f^{\frac{1}{2}} |\bar{\xi}_0| \right), \quad (5.26)$$

$$\hat{C}_{ab}^c = C_{ab}^c, \quad (5.27)$$

tales que preservan el álgebra a nivel cuántico,

$$[\hat{H}, \hat{\mathcal{H}}_a] = \hat{C}_{oa}^o \hat{H} + \hat{C}_{oa}^b(q, p) \hat{\mathcal{H}}_b, \quad (5.28)$$

$$[\hat{\mathcal{H}}_a, \hat{\mathcal{H}}_b] = \hat{C}_{ab}^c(q) \hat{\mathcal{H}}_c. \quad (5.29)$$

5.2.2 Producto interno físico

El proceso de cuantificación no está completo sin un producto interno físico donde los grados de libertad espurios son congelados por medio condiciones de fijado de gauge. Además de las m condiciones de gauge χ^α relacionadas con los grados de libertad espurios, se puede tratar la reparametrización temporal, que está asociada con la inclusión del tiempo entre las variables dinámicas. Esta es una tarea fácil, siempre y cuando se siga el proceso de parametrización expuesto al principio de este capítulo. Al nivel de la ecuación (5.2), es evidente que se puede insertar una función delta, $\delta(t-t_0)$ ($\{t-t_0, \mathcal{H}_o\} = 1$), para regularizar el producto interno, que significa tomar el producto interno a un tiempo dado t_0 ,

$$(\varphi_1, \varphi_2)_{t_0} = \int dt dq \left[\prod_{\chi}^m \delta(\chi) \right] J \delta(t-t_0) \varphi_1^*(t, q^\gamma) \varphi_2(t, q^\gamma), \quad (5.30)$$

donde $\gamma = 1, \dots, n+m$ y J es el determinante de Faddeev-Popov asociado con los vínculos lineales. Luego, a través de una transformación canónica, el tiempo es asociado con los momentos, Ec. (5.3); luego, cambiando a esta representación (transformando Fourier la función de onda) se obtiene el producto interno:

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi} \int dq dq^0 dq'^0 \left[\prod_{\chi}^m \delta(\chi) \right] J e^{-it_0(q^0 - q'^0)} \varphi_1^*(q^0, q^\gamma) \varphi_2(q'^0, q^\gamma). \quad (5.31)$$

Cuando se realiza un cambio de escala del vínculo Hamiltoniano, ecuación (5.16), el producto interno físico debe permanecer invariante. De acuerdo al comportamiento de la

función de onda ante cambio de escala, lo cual es evidente en la estructura de los operadores de vínculo (véase ecuación (5.33) más abajo), la norma (originalmente unitaria) de $\vec{\xi}_0$ debe aparecer en el producto interno físico

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \frac{1}{2\pi} \int dq dq^0 \left[\prod \delta(\chi) \right] J \varphi_1^*(q^0, q^\gamma) |\vec{\xi}_0|^{-1} \int dq'^0 e^{-it_0(q^0 - q'^0)} |\vec{\xi}_0|^{-1} \varphi_2(q'^0, q^\gamma). \quad (5.32)$$

Debería notarse que la integración en la coordenada q'^0 es evaluada a lo largo de las líneas del campo vectorial $\vec{\xi}_0$.

El ordenamiento obtenido, ecuaciones (5.23)-(5.27), satisface como antes, las propiedades de invariancia impuestas a la teoría: (i) cambios de coordenadas, (ii) combinaciones de vínculos supermomentos [Ec. (5.5)], y (iii) cambio de escala del super-Hamiltoniano [Ec. (5.16)]. El producto interno físico invariante de gauge, ecuación (5.32), debe ser invariante ante cualquiera de estas transformaciones. De acuerdo al cambio del determinante de Faddeev-Popov bajo (ii) y (iii), el producto interno permanecerá invariante si la función de onda de Dirac cambia de acuerdo con

$$\varphi \rightarrow \varphi' = (\det A)^{\frac{1}{2}} |\vec{\xi}_0| \varphi. \quad (5.33)$$

Luego, los factores $f^{\pm\frac{1}{2}}$, $|\vec{\xi}_0|^{\pm 1}$ en los operadores de vínculo son justo los necesarios para que $\hat{H}_a \varphi$, $\hat{H} \varphi$, y $\hat{C}_{0a}^b \varphi$ transformen como φ , preservando así el carácter geométrico de la función de onda de Dirac [Ferraro & Sforza (1999)]. Nótese que el rol jugado por el potencial definido positivo en el caso con tiempo intrínseco, ahora es tomado por el módulo del vector de Killing conforme temporal de la teoría.

En lo concerniente a la extensión del tratamiento aquí expuesto al caso de relatividad general, se ha mostrado en [Kuchař (1973)] que en verdad existe un vector de Killing conforme temporal en el superespacio del formalismo ADM. Pero, la cuestión de si satisface la propiedad (5.19) permanece abierta.

Es importante mencionar también que si bien la idea de un tiempo extrínseco no es nueva en relatividad general [York (1972)], su uso en el problema de cuantificación es muy

poco frecuente [Kučař (1971); Kučař et al (1997)]. Como se ha mostrado, el modelo mecánico presentado aquí puede conducir a una mejor comprensión de cómo lograr su implementación.

Capítulo 6

Sistemas con dos super-Hamiltonianos

Los peculiares vínculos de las teorías con covariancia general han sido estudiados, especialmente en lo concerniente a su cuantificación, utilizando ciertos modelos de dimensión finita [Hajiček & Kuchař (1990); Barvinsky (1990,1996); Ferraro & Sforza (1997,1999, 2000a)]. Sin embargo, en todos esos casos los modelos considerados contienen un solo vínculo super-Hamiltoniano, a pesar que la relatividad general contiene una infinidad de vínculos super-Hamiltonianos (uno por cada punto del espacio) con un álgebra no trivial entre ellos y los supermomentos:

$$\{\mathcal{H}(x), \mathcal{H}(x')\} = \mathcal{H}^a(x)\delta_{,a}(x, x') + \mathcal{H}^a(x')\delta_{,a}(x, x'), \quad (6.1)$$

$$\{\mathcal{H}_a(x), \mathcal{H}(x')\} = \mathcal{H}(x)\delta_{,a}(x, x'), \quad (6.2)$$

$$\{\mathcal{H}_a(x), \mathcal{H}_b(x')\} = \mathcal{H}_b(x)\delta_{,a}(x, x') + \mathcal{H}_a(x')\delta_{,b}(x, x'), \quad (6.3)$$

que aseguran que el sistema evolucione de modo consistente satisfaciendo

$$\mathcal{H} = 0, \quad \mathcal{H}_a = 0. \quad (6.4)$$

La cuantificación de dicho sistema requiere la búsqueda de un ordenamiento de factores de modo que los operadores de vínculo preserven el álgebra. Modelos con varios vínculos Hamiltonianos han sido considerados, pero en todos los casos se trata de un conjunto de partículas relativistas en un fondo plano y sin vínculos lineales [Longhi et al (1986,1989); Lusanna (1990)]. Recientemente, Montesinos et al. (1999) propusieron un modelo con tres vínculos, H_1 , H_2 y G en un fondo plano, con un álgebra cerrada que tiene la estructura

$$\{H_1, H_2\} \sim G, \quad \{H_i, G\} \sim H_i, \quad (6.5)$$

que imita parcialmente a (6.1)-(6.3) (al contener un sólo vínculo lineal, no está presente la última relación). Este ha sido un gran paso, aunque lamentablemente, los vínculos propuestos son tan simples que no presentan problemas de ordenamiento, por lo cual no se realiza aporte alguno en la comprensión de uno de los problemas fundamentales de la cuantificación de este tipo de sistemas.

En este capítulo, desarrollaremos y cuantificaremos un modelo de dimensión finita en un fondo curvo que imita completamente el álgebra (6.1)-(6.3) (pero en forma cerrada) y que presenta problemas de ordenamiento no triviales [Ferraro & Sforza (2000b)].

6.1 Definición del modelo

Consideremos un sistema descrito por $4n$ coordenadas canónicas (q^i, p_i) con $i = (i_1, i_2)$ donde $i_1 = 1, \dots, n$ e $i_2 = n + 1, \dots, 2n$, sometido a dos vínculos super-Hamiltonianos

$$\mathcal{H}_1 = \frac{1}{2} g^{i_1 j_1} (q^{k_1}) p_{i_1} p_{j_1} + v_1(q^{k_2}), \quad (6.6)$$

$$\mathcal{H}_2 = \frac{1}{2} g^{i_2 j_2} (q^{k_2}) p_{i_2} p_{j_2} + v_2(q^{k_1}). \quad (6.7)$$

La métrica del super-Hamiltoniano \mathcal{H}_1 depende solamente de las coordenadas q^{i_1} y la métrica del super-Hamiltoniano \mathcal{H}_2 depende solamente de las coordenadas q^{i_2} , ambas son

indefinidas y no degeneradas. Nótese que los potenciales, en cambio tienen una dependencia funcional tal que $v_1 = v_1(q^{i_2})$, es sólo función de las coordenadas q^{i_2} y $v_2 = v_2(q^{i_1})$ lo es sólo de q^{i_1} . El sistema está restringido además por m vínculos supermomentos linealmente independientes

$$\mathcal{H}_a = \xi_a^i p_i, \quad a = 3, \dots, m+2; \quad i = (i_1, i_2) \quad (6.8)$$

donde

$$\xi_a^{i_1} = \xi_a^{i_1}(q^{k_1}), \quad \xi_a^{i_2} = \xi_a^{i_2}(q^{k_2}). \quad (6.9)$$

La forma en que las métricas, los potenciales y los vectores $\vec{\xi}_a$ dependen de las coordenadas q^{i_1} y q^{i_2} tiene por objetivo la obtención de un álgebra de vínculos que imite al álgebra (6.1)-(6.3) de la relatividad general.

Es importante destacar que este sistema representa a dos partículas con interacción, y no es separable en el sentido que no es posible describir el sistema como si fuesen dos partículas libres (separando la descripción de ellas en cada subespacio (q^{i_1}, p_{i_1}) y (q^{i_2}, p_{i_2})). Esto lo hace muy interesante ya que hasta la fecha y hasta donde sabemos, no existían modelos en espacio-tiempo curvo con interacción (toda vez que se introducía más de un super-Hamiltoniano, finalmente se terminaba describiendo un sistema de partículas libres [Kuchař (1986)]).

El sistema de vínculos (6.6), (6.7) y (6.8) será de primera clase siempre que satisfaga las relaciones

$$\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2\} = c_{12}^a \mathcal{H}_a \quad (6.10)$$

$$\{\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_a\} = c_{1a}^1 \mathcal{H}_1 \quad (6.11)$$

$$\{\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_a\} = c_{2a}^2 \mathcal{H}_2 \quad (6.12)$$

$$\{\mathcal{H}_a, \mathcal{H}_b\} = C_{ab}^c \mathcal{H}_c \quad (6.13)$$

Para comenzar, nos restringiremos a álgebras cerradas (las funciones de estructura son constantes). Más adelante, a partir de cambios de escala en los super-Hamiltonianos po-

dremos generalizar los resultados al caso de un álgebra abierta (aunque la estructura del álgebra (6.10)-(6.13) resultará modificada).

Las combinaciones de vínculos que se obtienen como resultado del corchete son tales que respetan rigurosamente el álgebra que encontramos en §2.1 para la relatividad general. Veamos qué condiciones imponen estas ecuaciones. Si reemplazamos explícitamente los vínculos en (6.10) obtenemos

$$g^{i_2 k_2} v_{1, k_2} p_{i_2} - g^{i_1 k_1} v_{2, k_1} p_{i_1} = c_{12}^a (\xi_a^{i_1} p_{i_1} + \xi_a^{i_2} p_{i_2}), \quad (6.14)$$

es decir¹

$$c_{12}^a \xi_a^{i_2} = g^{i_2 k_2} v_{1, k_2} \quad (6.15)$$

y

$$c_{12}^a \xi_a^{i_1} = -g^{i_1 k_1} v_{2, k_1} \quad (6.16)$$

Reemplazando los vínculos en (6.11), obtenemos

$$\frac{1}{2} (g_{, k_1}^{i_1 j_1} \xi_a^{k_1} - 2g^{i_1 k_1} \xi_{a, k_1}^{j_1}) p_{i_1} p_{j_1} + v_{1, k_2} \xi_a^{k_2} = c_{1a}^1 (g^{i_1 j_1} p_{i_1} p_{j_1} + v_1) \quad (6.17)$$

es decir,

$$g_{, k_1}^{i_1 j_1} \xi_a^{k_1} - 2g^{i_1 k_1} \xi_{a, k_1}^{j_1} = c_{1a}^1 g^{i_1 j_1} \quad (6.18)$$

y

$$\xi_a^{k_2} v_{1, k_2} = c_{1a}^1 v_1 \quad (6.19)$$

Expresando estas condiciones en forma geométrica,

$$\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} \bar{g}_1 = c_{1a}^1 \bar{g}_1 \quad (6.20)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} v_1 = c_{1a}^1 v_1 \quad (6.21)$$

En forma totalmente análoga, al reemplazar los vínculos en (6.12), obtenemos

$$\frac{1}{2} (g_{, k_2}^{i_2 j_2} \xi_a^{k_2} - 2g^{i_2 k_2} \xi_{a, k_2}^{j_2}) p_{i_2} p_{j_2} + v_{2, k_1} \xi_a^{k_1} = c_{2a}^2 (g^{i_2 j_2} p_{i_2} p_{j_2} + v_2) \quad (6.22)$$

¹Nótese que las ecuaciones (6.15) y (6.16) no obligan a c_{12}^a a ser constantes; bastaría que se cumpla: $c_{12}^a = {}^{(1)}c_{12}^a(q^{i_1}) - {}^{(2)}c_{12}^a(q^{i_2})$ con ${}^{(1)}c_{12}^a \xi_a^{i_1} = 0$ y ${}^{(2)}c_{12}^a \xi_a^{i_2} = 0$.

de donde

$$g_{,k_2}^{i_2 j_2} \xi_a^{k_2} - 2g^{i_2 k_2} \xi_{a,k_2}^{j_2} = c_{2a}^2 g^{i_2 j_2} \quad (6.23)$$

y

$$\xi_a^{k_1} \nu_{2,k_1} = c_{2a}^2 \nu_2 \quad (6.24)$$

O en forma geométrica,

$$\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} \bar{g}_2 = c_{2a}^2 \bar{g}_2 \quad (6.25)$$

$$\mathcal{L}_{\bar{\xi}_a} \nu_2 = c_{2a}^2 \nu_2 \quad (6.26)$$

Vemos entonces que la condición de primera clase entre los super-Hamiltonianos y los supermomentos corresponde a que estos últimos sean vectores de Killing conformes de las métricas y los potenciales (lo cual es natural, pues la definición de la derivada de Lie está asociada al corchete).

Finalmente si reemplazamos los supermomentos en (6.13), vemos que²

$$(\xi_a^{i_1} \xi_{b,i_1}^{j_1} - \xi_b^{i_1} \xi_{a,i_1}^{j_1}) p_{j_1} + (\xi_a^{i_2} \xi_{b,i_2}^{j_2} - \xi_b^{i_2} \xi_{a,i_2}^{j_2}) p_{j_2} = C_{ab}^c (\xi_c^{i_1} p_{i_1} + \xi_c^{i_2} p_{i_2}). \quad (6.27)$$

6.2 El generador BRST clásico y cuántico

Debido a que el álgebra de vínculos cierra de acuerdo a un grupo (funciones de estructura constantes) el sistema es de rango 1 (como vimos en §3.1.1) y el generador BRST en el espacio de fases debidamente extendido es entonces

$$\Omega = \eta^1 \mathcal{H}_1 + \eta^2 \mathcal{H}_2 + \eta^a \mathcal{H}_a + \eta^1 \eta^2 c_{12}^a \mathcal{P}_a + \eta^1 \eta^a c_{1a}^1 \mathcal{P}_1 + \eta^2 \eta^a c_{2a}^2 \mathcal{P}_2 + \frac{1}{2} \eta^a \eta^b C_{ab}^c \mathcal{P}_c. \quad (6.28)$$

Para hallar el operador $\hat{\Omega}$ hermítico y nilpotente es útil escribir, como hicimos previamente, a Ω con los momentos originales y los fantasmas en pie de igualdad. Ω es además

²La Ec. (6.27) no obliga a que C_{ab}^c sean constantes, sino a que se descompongan según: $C_{ab}^c = {}^{(1)}C_{ab}^c(q^{i_1}) - {}^{(2)}C_{ab}^c(q^{i_2})$ con ${}^{(1)}C_{ab}^c \xi_c^{i_1} = 0$ y ${}^{(2)}C_{ab}^c \xi_c^{i_2} = 0$.

la suma de un término cuadrático en los momentos

$$\Omega^{cuad} = \eta^1 \mathcal{H}_1 + \eta^2 \mathcal{H}_2 \equiv \frac{1}{2} \sum_{r,s=-1}^0 \Omega^{a_r b_s} \mathcal{P}_{a_r} \mathcal{P}_{b_s} + \eta^1 v_1 + \eta^2 v_2 \quad (6.29)$$

más otro lineal en los momentos

$$\Omega^{lineal} = \eta^a \mathcal{H}_a + \eta^1 \eta^2 c_{12}^a \mathcal{P}_a + \eta^1 \eta^a c_{1a}^1 \mathcal{P}_1 + \eta^2 \eta^a c_{2a}^2 \mathcal{P}_2 + \frac{1}{2} \eta^a \eta^b C_{ab}^c \mathcal{P}_c \equiv \sum_{s=-1}^0 \Omega^{c_s} \mathcal{P}_{c_s} \quad (6.30)$$

En general, obtener el operador BRST hermítico nilpotente a partir de su contraparte clásica es un paso muy difícil (e inclusive puede no ser realizable pues a nivel cuántico su mera existencia no está garantizada). Sin embargo, en este caso particular, a pesar que el sistema presenta dos vínculos super-Hamiltonianos, el álgebra es extremadamente simple al ser cerrada. Notemos además que, como antes, podemos comenzar por ordenar la parte lineal de manera que

$$\hat{\Omega}^{lineal} = \sum_{s=-1}^0 f^{\frac{1}{2}} \hat{\Omega}^{c_s} \hat{\mathcal{P}}_{c_s} f^{-\frac{1}{2}} \quad (6.31)$$

sea hermítico (pero en este caso no es nilpotente por sí solo) y donde $f = f(q^i)$ (depende de todas las coordenadas).

La condición de hermiticidad exige que f satisfaga (recordar la Ec.(4.47))

$$C_{a\beta}^\beta = f^{-1} (f \xi_a^i)_{,i}, \quad (6.32)$$

con $\beta = (A, a) = 1, 2, 3, \dots, m+2$. Es decir que ahora $C_{a\beta}^\beta = C_{ab}^b + c_{a1}^1 + c_{a2}^2$.

Es fácil ver además, que de este sector lineal podemos identificar al operador de vínculo de los supermomentos como

$$\hat{\mathcal{H}}_a = f^{\frac{1}{2}} \xi_a^i \hat{p}_i f^{-\frac{1}{2}}. \quad (6.33)$$

La parte cuadrática restante sólo presenta momentos canónicos (a diferencia de los casos anteriores en los que existía un término con una función de estructura lineal multiplicada por un momento fantasma). Considerando los resultados previos (capítulos 4 y 5) proponemos el ordenamiento hermítico:

$$\hat{\Omega}^{cuad} = \frac{1}{2} \sum_{r,s=-1}^0 f^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_{a_r} f \hat{\Omega}^{a_r b_s} \hat{\mathcal{P}}_{b_s} f^{-\frac{1}{2}} + \hat{\eta}^1 v_1 + \hat{\eta}^2 v_2. \quad (6.34)$$

Es decir que los operadores de vínculo de los super-Hamiltonianos serán

$$\hat{\mathcal{H}}_1 = \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_i g^{i_1 j_1} f \hat{p}_{j_1} f^{-\frac{1}{2}} + v_1, \quad (6.35)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_2 = \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_i g^{i_2 j_2} f \hat{p}_{j_2} f^{-\frac{1}{2}} + v_2. \quad (6.36)$$

Finalmente, el operador BRST hermítico propuesto, en el ordenamiento $\hat{\eta} - \hat{\mathcal{P}}$, es entonces:

$$\hat{\Omega} = \hat{\eta}^1 \hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\eta}^2 \hat{\mathcal{H}}_2 + \hat{\eta}^a \hat{\mathcal{H}}_a + \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2 c_{12}^a \hat{\mathcal{P}}_a + \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^a c_{1a}^1 \hat{\mathcal{P}}_1 + \hat{\eta}^2 \hat{\eta}^a c_{2a}^2 \hat{\mathcal{P}}_2 + \frac{1}{2} \hat{\eta}^a \hat{\eta}^b C_{ab}^c \hat{\mathcal{P}}_c. \quad (6.37)$$

Debemos demostrar ahora que este ordenamiento de $\hat{\Omega}$ es nilpotente. Es razonable esperar que surja alguna condición adicional sobre $f(q^i)$, que manifieste la presencia de dos vínculos super-Hamiltonianos. Estudiaremos esto en la próxima sección.

6.2.1 Demostración de $\hat{\Omega}^2 = 0$

La demostración de la nilpotencia de $\hat{\Omega}$ la realizaremos por cálculo explícito. Varios términos en $[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}]$ son nulos trivialmente debido a que las funciones de estructura son constantes o a que aparecen fantasmas al cuadrado:

$$[\hat{\eta}^1 \hat{\mathcal{H}}_1 + \hat{\eta}^2 \hat{\mathcal{H}}_2, \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2 c_{12}^b \hat{\mathcal{P}}_b + \frac{1}{2} \hat{\eta}^a \hat{\eta}^b C_{ab}^c \hat{\mathcal{P}}_c] = 0, \quad (6.38)$$

$$[\hat{\eta}^1 \hat{\mathcal{H}}_1, \hat{\eta}^2 \hat{\eta}^a c_{2a}^2 \hat{\mathcal{P}}_2] = 0, \quad (6.39)$$

$$[\hat{\eta}^2 \hat{\mathcal{H}}_2, \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^a c_{1a}^1 \hat{\mathcal{P}}_1] = 0, \quad (6.40)$$

$$[\hat{\eta}^a \hat{\mathcal{H}}_a, \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^b c_{1b}^1 \hat{\mathcal{P}}_1 + \hat{\eta}^2 \hat{\eta}^a c_{2a}^2 \hat{\mathcal{P}}_2] = 0. \quad (6.41)$$

También es nulo por construcción

$$[\hat{\eta}^a \hat{\mathcal{H}}_a + \frac{1}{2} \hat{\eta}^a \hat{\eta}^b C_{ab}^c \hat{\mathcal{P}}_c, \hat{\eta}^d \hat{\mathcal{H}}_d + \frac{1}{2} \hat{\eta}^d \hat{\eta}^e C_{de}^f \hat{\mathcal{P}}_f] = 0. \quad (6.42)$$

Por lo tanto, debemos calcular los restantes términos no nulos en

$$\begin{aligned}
[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}] &= 2[\hat{\eta}^1 \hat{\mathcal{H}}_1, \hat{\eta}^2 \hat{\mathcal{H}}_2] + 2[\hat{\eta}^1 \hat{\mathcal{H}}_1, \hat{\eta}^a \hat{\mathcal{H}}_a] + 2[\hat{\eta}^2 \hat{\mathcal{H}}_2, \hat{\eta}^a \hat{\mathcal{H}}_a] \\
&+ 2[\hat{\eta}^1 \hat{\mathcal{H}}_1, \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^a c_{1a}^1 \hat{\mathcal{P}}_1] + 2[\hat{\eta}^2 \hat{\mathcal{H}}_2, \hat{\eta}^2 \hat{\eta}^a c_{2a}^2 \hat{\mathcal{P}}_2] + 2[\hat{\eta}^a \hat{\mathcal{H}}_a, \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2 c_{12}^b \hat{\mathcal{P}}_b] \\
&+ 2[\hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2 c_{12}^a \hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^b c_{1b}^1 \hat{\mathcal{P}}_1 + \hat{\eta}^2 \hat{\eta}^b c_{2b}^2 \hat{\mathcal{P}}_2 + \frac{1}{2} \hat{\eta}^b \hat{\eta}^c C_{bc}^d \hat{\mathcal{P}}_d].
\end{aligned} \tag{6.43}$$

Cada uno de ellos contribuye con

$$[\hat{\eta}^1 \hat{\mathcal{H}}_1, \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^a c_{1a}^1 \hat{\mathcal{P}}_1] = -i \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^a c_{1a}^1 \hat{\mathcal{H}}_1, \tag{6.44}$$

$$[\hat{\eta}^2 \hat{\mathcal{H}}_2, \hat{\eta}^2 \hat{\eta}^a c_{2a}^2 \hat{\mathcal{P}}_2] = -i \hat{\eta}^2 \hat{\eta}^a c_{2a}^2 \hat{\mathcal{H}}_2, \tag{6.45}$$

$$[\hat{\eta}^a \hat{\mathcal{H}}_a, \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2 c_{12}^b \hat{\mathcal{P}}_b] = -i \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2 c_{12}^b \hat{\mathcal{H}}_b, \tag{6.46}$$

$$\begin{aligned}
[\hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2 c_{12}^a \hat{\mathcal{P}}_a, \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^b c_{1b}^1 \hat{\mathcal{P}}_1 + \hat{\eta}^2 \hat{\eta}^b c_{2b}^2 \hat{\mathcal{P}}_2 + \frac{1}{2} \hat{\eta}^b \hat{\eta}^c C_{bc}^d \hat{\mathcal{P}}_d] &= \\
&= i \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2 \hat{\eta}^a (c_{12}^c (c_{1a}^1 + c_{2a}^2) - c_{12}^b C_{ba}^c) \hat{\mathcal{P}}_c.
\end{aligned} \tag{6.47}$$

Este último término es efectivamente nulo ya que es la expresión de la identidad de Jacobi:

$$\begin{aligned}
\{ \{ \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \}, \mathcal{H}_a \} + \{ \{ \mathcal{H}_2, \mathcal{H}_a \}, \mathcal{H}_1 \} + \{ \{ \mathcal{H}_a, \mathcal{H}_1 \}, \mathcal{H}_2 \} &= 0 \\
\implies c_{12}^b C_{ba}^c - c_{12}^c (c_{1a}^1 + c_{2a}^2) &= 0.
\end{aligned} \tag{6.48}$$

Finalmente, obtenemos que

$$\begin{aligned}
[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}] &= 2\hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2 ([\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{\mathcal{H}}_2] - i c_{12}^b \hat{\mathcal{H}}_b) \\
&+ 2\hat{\eta}^1 \hat{\eta}^a ([\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{\mathcal{H}}_a] - i c_{1a}^1 \hat{\mathcal{H}}_1) \\
&+ 2\hat{\eta}^2 \hat{\eta}^a ([\hat{\mathcal{H}}_2, \hat{\mathcal{H}}_a] - i c_{2a}^2 \hat{\mathcal{H}}_2)
\end{aligned} \tag{6.49}$$

Es decir que debemos mostrar explícitamente que el ordenamiento propuesto para $\hat{\mathcal{H}}_1$, $\hat{\mathcal{H}}_2$ y $\hat{\mathcal{H}}_A$ satisfacen las condiciones de primera clase a nivel de conmutadores:

$$[\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{\mathcal{H}}_2] \stackrel{?}{=} i c_{12}^a \hat{\mathcal{H}}_a, \tag{6.50}$$

$$[\hat{\mathcal{H}}_A, \hat{\mathcal{H}}_a] \stackrel{?}{=} ic_{Aa}^A \hat{\mathcal{H}}_A \quad A = 1, 2. \quad (6.51)$$

Calculemos entonces:

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{H}}_1, \hat{\mathcal{H}}_2] &= \left[\frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_{i_1} g^{i_1 j_1} f \hat{p}_{j_1} f^{-\frac{1}{2}} + v_1, \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_{i_2} g^{i_2 j_2} f \hat{p}_{j_2} f^{-\frac{1}{2}} + v_2 \right] \\ &= f^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} f^{-1} \hat{p}_{i_1} g^{i_1 j_1} f \hat{p}_{j_1} + v_1, \frac{1}{2} f^{-1} \hat{p}_{i_2} g^{i_2 j_2} f \hat{p}_{j_2} + v_2 \right] f^{-\frac{1}{2}} \\ &= f^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} g^{i_1 j_1} \hat{p}_{i_1} \hat{p}_{j_1} - \frac{i}{2} f^{-1} (g^{i_1 j_1} f)_{,i_1} \hat{p}_{j_1} + v_1, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{2} g^{i_2 j_2} \hat{p}_{i_2} \hat{p}_{j_2} - \frac{i}{2} f^{-1} (g^{i_2 j_2} f)_{,i_2} \hat{p}_{j_2} + v_2 \right] f^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.52)$$

Para satisfacer el álgebra deben anularse necesariamente los términos cuadráticos en los momentos que emergen del cálculo del corchete

$$\left[-\frac{i}{2} f^{-1} (g^{i_1 j_1} f)_{,i_1} \hat{p}_{j_1}, \frac{1}{2} g^{i_2 j_2} \hat{p}_{i_2} \hat{p}_{j_2} \right] = \left[-\frac{i}{2} f^{-1} (g^{i_2 j_2} f)_{,i_2} \hat{p}_{j_2}, \frac{1}{2} g^{i_1 j_1} \hat{p}_{i_1} \hat{p}_{j_1} \right] = 0. \quad (6.53)$$

Vemos entonces que si pedimos como condición adicional sobre $f(q^i)$ que pueda ser factorizable según

$$f(q^i) = f_1(q^{i_1}) f_2(q^{i_2}), \quad (6.54)$$

entonces efectivamente los conmutadores en (6.53) se anularán. Nótese que la condición (6.54) sobre f es elegible en la condición previa (6.32).

Como consecuencia de esta propiedad de f también se anulará

$$\left[-\frac{i}{2} f^{-1} (g^{i_1 j_1} f)_{,i_1} \hat{p}_{j_1}, -\frac{i}{2} f^{-1} (g^{i_2 j_2} f)_{,i_2} \hat{p}_{j_2} \right] = 0. \quad (6.55)$$

Quedan entonces los términos:

$$\left[-\frac{i}{2} f_1^{-1} (g^{i_1 j_1} f_1)_{,i_1} \hat{p}_{j_1}, v_2 \right] = -\frac{1}{2} f_1^{-1} (g^{i_1 j_1} f_1)_{,i_1} v_{2,j_1}, \quad (6.56)$$

$$\left[\frac{i}{2} f_2^{-1} (g^{i_2 j_2} f_2)_{,i_2} \hat{p}_{j_2}, v_1 \right] = \frac{1}{2} f_2^{-1} (g^{i_2 j_2} f_2)_{,i_2} v_{1,j_2}, \quad (6.57)$$

y

$$f^{\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{2} g^{i_1 j_1} \hat{p}_{i_1} \hat{p}_{j_1} + v_1, \frac{1}{2} g^{i_2 j_2} \hat{p}_{i_2} \hat{p}_{j_2} + v_2 \right] f^{-\frac{1}{2}} = ic_{12}^a f^{\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{H}}_a f^{-\frac{1}{2}} - g^{i_1 j_1} v_{2,i_1 j_1} + g^{i_2 j_2} v_{1,i_2 j_2}. \quad (6.58)$$

Donde, en el miembro derecho se utilizó la relación (6.14) del álgebra clásica para poder reconstruir $\hat{\mathcal{H}}_a$.

Finalmente deberíamos mostrar que es posible anular la suma de términos “sobrantes” en las Ecs. (6.56), (6.57) y (6.58):

$$-\frac{1}{2}f_1^{-1}(g^{i_1j_1}f_1)_{,i_1}v_{2,j_1} - g^{i_1j_1}v_{2,i_1j_1} + \frac{1}{2}f_2^{-1}(g^{i_2j_2}f_2)_{,i_2}v_{1,j_2} + g^{i_2j_2}v_{1,i_2j_2} = 0. \quad (6.59)$$

Es decir que deberá cumplirse:

$$-f_1^{-1}(g^{i_1j_1}v_{2,j_1}f_1)_{,i_1} + f_2^{-1}(g^{i_2j_2}v_{1,j_2}f_2)_{,i_2} = 0. \quad (6.60)$$

Como consecuencia de reemplazar las identidades (6.15) y (6.16) en (6.60), se obtiene

$$f_1^{-1}(c_{12}^a \xi_a^{i_1} f_1)_{,i_1} + f_2^{-1}(c_{12}^a \xi_a^{i_2} f_2)_{,i_2} = 0. \quad (6.61)$$

Luego, debería satisfacerse que

$$f_1^{-1}(c_{12}^a \xi_a^{i_1} f_1)_{,i_1} + f_2^{-1}(c_{12}^a \xi_a^{i_2} f_2)_{,i_2} = c_{12}^a f^{-1}(\xi_a^i f)_{,i} = c_{12}^a (C_{ab}^b + c_{a_1}^1 + c_{a_2}^2) = 0. \quad (6.62)$$

Lo que efectivamente se cumple como consecuencia de la identidad de Jacobi: para hacerlo explícito solo debe tomarse la traza en (6.48).

Nos resta aún evaluar (recordar que $A = 1, 2$)

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{H}}_A, \hat{\mathcal{H}}_a] &= \left[\frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_{i_A} g^{i_A j_A} f \hat{p}_{j_A} f^{-\frac{1}{2}} + v_A, f^{\frac{1}{2}} \xi_a^k \hat{p}_k f^{-\frac{1}{2}} \right] = \\ &= \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} (\hat{p}_{i_A} g^{i_A j_A} f \hat{p}_{j_A} \xi_a^k \hat{p}_k - \xi_a^k \hat{p}_k \hat{p}_{i_A} g^{i_A j_A} f \hat{p}_{j_A}) f^{-\frac{1}{2}} + i \xi_a^k v_{A,k} \\ &= \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \left(i \hat{p}_{i_A} (g_{,k_A}^{i_A j_A} \xi_a^{k_A} - 2g^{i_A k_A} \xi_{a,k_A}^{j_A}) \hat{p}_{j_A} + f g^{i_A j_A} ((\xi_a^k (\ln f)_{,k})_{,i_A} + \xi_{a,i_A k}^k) \hat{p}_{j_A} \right) f^{-\frac{1}{2}} \\ &\quad + i \xi_a^k v_{A,k} \end{aligned} \quad (6.63)$$

donde, usando las relaciones (6.18)-(6.19) o (6.23)-(6.24), obtenemos

$$\begin{aligned} [\hat{\mathcal{H}}_A, \hat{\mathcal{H}}_a] &= i c_{Aa}^A \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_{i_A} g^{i_A j_A} f \hat{p}_{j_A} f^{-\frac{1}{2}} + i \xi_a^k v_{A,k} \\ &\quad + \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \left(f g^{i_A j_A} ((\xi_a^k (\ln f)_{,k})_{,i_A} + \xi_{a,i_A k}^k) \hat{p}_{j_A} \right) f^{-\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (6.64)$$

Los dos primeros términos en (6.64) son justamente $ic_{Aa}^{(A)}\hat{\mathcal{H}}_{(A)}$ (no existe suma sobre el índice A). Nos resta ver si el último término se anula.

En efecto,

$$(\xi_a^k(\ln f)_{,k})_{,i_A} + \xi_{a,i_A}^k = (\xi_a^k(\ln f)_{,k} + \xi_{a,k}^k)_{,i_A} = (f^{-1}(\xi_a^k f)_{,k})_{,i_A} = C_{a\beta,i_A}^\beta = 0. \quad (6.65)$$

Lo cual completa la demostración de la nilpotencia de $\hat{\Omega}$. Nótese que la única condición adicional sobre f para la nilpotencia es que $f(q^i) = f_1(q^{i_1})f_2(q^{i_2})$. \square

6.2.2 Transformación unitaria y operadores de vínculo

En los sistemas estudiados previamente (capítulos 4 y 5), vimos que era posible generalizar la forma de los operadores de vínculo y los operadores de funciones de estructura para el caso en que se realizara un cambio de escala del único vínculo super-Hamiltoniano, de manera que el sistema respetara dicha transformación de invariancia. Dichos cambios de escala estaban relacionados o bien con un potencial definido positivo (casos con tiempo intrínseco) o con el módulo de un vector de Killing conforme (casos con tiempo extrínseco). El sistema presentemente bajo estudio, posee dos vínculos super-Hamiltonianos, por lo tanto los operadores de vínculo y de funciones de estructura deberán respetar los dos cambios de escala posibles. Otro punto a tener en cuenta es que los potenciales de los super-Hamiltonianos, hasta ahora no fueron obligados a ser definidos positivos ni a poseer un vector de Killing conforme como sucedía previamente, sino que sólo fueron condicionados a depender de ciertos sectores (excluyentes entre sí) de las coordenadas. Sin embargo, podemos relajar esta condición mediante cambios de escala de los super-Hamiltonianos (si bien al definir el producto interno físico será necesario alguna propiedad adicional sobre ellos, sección §6.2.3).

La manera de realizar a nivel cuántico el cambio de escala de los super-Hamiltonianos $\mathcal{H}_1 \rightarrow e^{F_1(q^i)}\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_2 \rightarrow e^{F_2(q^i)}\mathcal{H}_2$ es mediante la transformación unitaria

$$\hat{\Omega} \rightarrow e^{i\hat{C}} \hat{\Omega} e^{-i\hat{C}}, \quad (6.66)$$

donde

$$\begin{aligned} \hat{C} &= \frac{1}{2}[\hat{\eta}^1 F_1(q^i) \hat{\mathcal{P}}_1 - \hat{\mathcal{P}}_1 F_1(q^i) \hat{\eta}^1 + \hat{\eta}^2 F_2(q^j) \hat{\mathcal{P}}_2 - \hat{\mathcal{P}}_2 F_2(q^j) \hat{\eta}^2] \\ &= \hat{\eta}^1 F_1(q^i) \hat{\mathcal{P}}_1 + \hat{\eta}^2 F_2(q^j) \hat{\mathcal{P}}_2 + \frac{i}{2}F_1(q^i) + \frac{i}{2}F_2(q^i) \\ &= -\hat{\mathcal{P}}_1 F_1(q^i) \hat{\eta}^1 - \hat{\mathcal{P}}_2 F_2(q^j) \hat{\eta}^2 - \frac{i}{2}F_1(q^i) - \frac{i}{2}F_2(q^i), \quad F_{1,2}(q) > 0. \end{aligned} \quad (6.67)$$

que dará un nuevo operador BRST hermitico y nilpotente.

Será útil usar las siguientes identidades ($A = 1, 2$)

$$e^{i\hat{\eta}^A F_A(q^i)} \hat{\mathcal{P}}_A = 1 + i\hat{\eta}^A (e^{F_A(q^i)} - 1) \hat{\mathcal{P}}_A, \quad (6.68)$$

$$e^{i\hat{\mathcal{P}}_A F_A(q^i)} \hat{\eta}^A = 1 + i\hat{\mathcal{P}}_A (e^{F_A(q^i)} - 1) \hat{\eta}^A, \quad (6.69)$$

para calcular explícitamente la Ec. (6.66), de donde obtenemos

$$\begin{aligned} \hat{\Omega} &= \hat{\eta}^1 e^{\frac{F_1-F_2}{2}} \hat{\mathcal{H}}_1 e^{\frac{F_1+F_2}{2}} + \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2 i e^{\frac{F_1+F_2}{2}} [\hat{\mathcal{H}}_1, e^{-F_2}] e^{\frac{F_1+F_2}{2}} \hat{\mathcal{P}}_2 \\ &\quad + \hat{\eta}^2 e^{\frac{F_2-F_1}{2}} \hat{\mathcal{H}}_2 e^{\frac{F_1+F_2}{2}} + \hat{\eta}^2 \hat{\eta}^1 i e^{\frac{F_1+F_2}{2}} [\hat{\mathcal{H}}_2, e^{-F_1}] e^{\frac{F_1+F_2}{2}} \hat{\mathcal{P}}_1 \\ &\quad + \frac{1}{2} \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^2 e^{F_1+F_2} \hat{c}_{12}^a \hat{\mathcal{P}}_a + \hat{\eta}^a e^{-\frac{F_1+F_2}{2}} \hat{\mathcal{H}}_a e^{\frac{F_1+F_2}{2}} \\ &\quad + \hat{\eta}^1 \hat{\eta}^a \left(\hat{c}_{1a}^1 - i e^{\frac{F_1-F_2}{2}} [\hat{\mathcal{H}}_a, e^{-F_1}] e^{\frac{F_1+F_2}{2}} \right) \hat{\mathcal{P}}_1 \\ &\quad + \hat{\eta}^2 \hat{\eta}^a \left(\hat{c}_{1a}^1 - i e^{\frac{-F_1+F_2}{2}} [\hat{\mathcal{H}}_a, e^{-F_2}] e^{\frac{F_1+F_2}{2}} \right) \hat{\mathcal{P}}_2 + \frac{1}{2} \hat{\eta}^a \hat{\eta}^b C_{ab}^c \hat{\mathcal{P}}_c \end{aligned} \quad (6.70)$$

Podemos identificar los operadores de vínculo y las funciones de estructura en la Ec.

(6.70) como

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{F_1-F_2}{2}} f_1^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_{i1} g^{i1j1} f_1 \hat{p}_{j1} f_1^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{F_1+F_2}{2}} + e^{F_1} v_1, \quad (6.71)$$

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{F_2-F_1}{2}} f_2^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_{i2} g^{i2j2} f_2 \hat{p}_{j2} f_2^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{F_1+F_2}{2}} + e^{F_2} v_2, \quad (6.72)$$

$$\hat{\mathcal{H}}_a = e^{-\frac{F_1+F_2}{2}} f^{\frac{1}{2}} \xi_a^i \hat{p}_i f^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{F_1+F_2}{2}}. \quad (6.73)$$

Debería notarse que los operadores de vínculo (6.71)-(6.72) corresponden a los vínculos super-Hamiltonianos con cambio de escala $H_A = e^{F_A} \mathcal{H}_A$, ($G^{iAjA} = e^{F_A} g^{iAjA}$, $V_A = e^{F_A} v_A$), con ($A, B = 1, 2$):

$$\hat{H}_1 = \frac{1}{2} e^{\frac{F_1-F_2}{2}} f_1^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_{i_1} e^{-F_1} G^{i_1 j_1} f_1 \hat{p}_{j_1} f_1^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{F_1+F_2}{2}} + V_1, \quad (6.74)$$

$$\hat{H}_2 = \frac{1}{2} e^{\frac{F_2-F_1}{2}} f_2^{-\frac{1}{2}} \hat{p}_{i_2} e^{-F_2} G^{i_2 j_2} f_2 \hat{p}_{j_2} f_2^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{F_1+F_2}{2}} + V_2, \quad (6.75)$$

con las correspondientes funciones de estructura,

$$\begin{aligned} \hat{C}_{AB}^B &= ie^{\frac{F_1+F_2}{2}} [\hat{\mathcal{H}}_A, e^{-F_B}] e^{\frac{F_1+F_2}{2}} \\ &= \frac{1}{2} e^{\frac{F_A}{2}} f^{-\frac{1}{2}} [\hat{p}_{i_A} f g^{i_A j_A} F_{B, j_A} + F_{B, j_A} f g^{i_A j_A} \hat{p}_{j_A}] f^{-\frac{1}{2}} e^{\frac{F_A}{2}}, \end{aligned} \quad (6.76)$$

$$\hat{C}_{12}^a = e^{\frac{F_1+F_2}{2}} \hat{c}_{12}^a, \quad (6.77)$$

$$\hat{C}_{Aa}^A = \hat{c}_{Aa}^A + \xi_a^i (F_A)_{,i}, \quad (6.78)$$

$$\hat{C}_{ab}^c = \hat{c}_{ab}^c, \quad (6.79)$$

todos los operadores y las funciones de estructura están ordenados de modo que satisfacen

$$[\hat{H}_1, \hat{H}_2] = \hat{C}_{12}^1(q, p) \hat{H}_1 + \hat{C}_{12}^2(q, p) \hat{H}_2 + \hat{C}_{12}^a \hat{\mathcal{H}}_a, \quad (6.80)$$

$$[\hat{H}_A, \hat{\mathcal{H}}_a] = \hat{C}_{Aa}^{(A)} \hat{H}_{(A)}, \quad (6.81)$$

$$[\hat{\mathcal{H}}_a, \hat{\mathcal{H}}_b] = \hat{C}_{ab}^c \hat{\mathcal{H}}_c, \quad (6.82)$$

(no existe suma sobre el índice A). Es decir, el álgebra está libre de anomalías a nivel cuántico. Debe notarse que como resultado de los cambios de escala realizados en los super-Hamiltonianos, en el resultado del primer conmutador aparecen ahora todos los operadores de vínculo, y las funciones de estructura ya no son más constantes (las únicas que permanecen constantes son las asociadas a los conmutadores entre supermomentos).

6.2.3 Producto interno físico

Para completar el proceso de cuantificación debemos definir un producto interno físico. Veamos una vez más el rol de las transformaciones que deberían dejar invariante la teoría; estas transformaciones son (i) cambios de coordenadas, (ii) combinaciones de vínculos supermomentos, y (iii) cambios de escala de los vínculos super-Hamiltonianos ($\mathcal{H}_A \rightarrow e^{F_A} \mathcal{H}_A$). El producto interno físico de las funciones onda de Dirac,

$$(\varphi_1, \varphi_2) = \int dq \left[\prod \delta(\chi) \right] J \varphi_1^*(q) \varphi_2(q), \quad (6.83)$$

(donde J es el determinante de Faddeev-Popov y χ representa las $m + 2$ condiciones de gauge) debe ser invariante bajo cualquiera de estas transformaciones. De acuerdo al cambio del determinante de Faddeev-Popov bajo (ii) y (iii), el producto interno permanecerá invariante si la función de onda de Dirac cambia de acuerdo a

$$\varphi \rightarrow \varphi' = (\det A)^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{F_1 + F_2}{2}} \varphi. \quad (6.84)$$

De esta manera, los factores $f^{\pm \frac{1}{2}}$, $e^{\pm \frac{F_A}{2}}$ en los operadores de vínculo son justamente lo que se necesita para que $\hat{\mathcal{H}}_a \varphi$, $\hat{H}_A \varphi$, y $\hat{C}_{\alpha\beta}^\gamma \varphi$ transformen como φ (las letras griegas pueden tomar cualquier valor entre 1 y $m + 2$), preservando de esta manera el carácter geométrico de la función de onda de Dirac.

En los casos estudiados previamente, los factores de escala estaban asociados o con un potencial definido positivo (tiempo intrínseco) o con el módulo de un vector de Killing conforme (tiempo extrínseco). Hasta aquí no fue necesario hacer suposiciones adicionales sobre los potenciales presentes en los vínculos super-Hamiltonianos. Sin embargo, para poder definir adecuadamente el producto interno físico, es necesario fijar adecuadamente las condiciones de gauge para eliminar la integración sobre las variables espurias. Anteriormente, esto se hizo fijando las m coordenadas a los vínculos supermomentos y teniendo en cuenta el tiempo físico que contenía la teoría, que se correspondía con ciertas características del vínculo super-Hamiltoniano. De este modo, dependiendo de si el sistema tenía

un tiempo intrínseco o extrínseco, se procedía según correspondiera a fijar una condición de gauge adicional. Sin embargo, ahora tenemos, además de los m vínculos supermomentos (sobre los que sabemos cómo fijar la libertad de gauge asociada con ellos), *dos* vínculos super-Hamiltonianos, lo cual implica que debemos tener *dos* condiciones de gauge adicionales. Podemos pensar que una condición de gauge se determinará con el tipo de tiempo que posea el sistema; si por ejemplo, los vínculos super-Hamiltonianos poseen potenciales definidos positivos, entonces el tiempo será intrínseco y los factores que cambian de escala a los super-Hamiltonianos serán los potenciales: $F_A = \ln V_A$ y el producto interno físico y la condición de gauge análogas al caso ya estudiado. En cambio, si el tiempo es extrínseco, los factores de cambio de escala estarán asociados con el módulo de los vectores de Killing conformes de cada super-Hamiltoniano: $F_A = \ln |\vec{\xi}_A|^{-2}$ y el producto interno estará definido análogamente al caso estudiado en esas circunstancias.

Sin embargo, aún nos falta una condición de gauge. Dicha condición debería de alguna forma forzar la equivalencia entre ambos vínculos super-Hamiltonianos, es decir, cada variable espuria asociada a estos vínculos puede ser relacionada con un tiempo, por lo tanto, la condición que parece razonable es que esos tiempos sean el mismo. Es decir que el tipo de condición que proponemos es:

$$\chi = \delta(t_1 - t_2). \quad (6.85)$$

Esta elección de gauge puede ser justificada más rigurosamente dentro del marco del formalismo de tiempo múltiple [Longhi et al (1986,1989); Lusanna (1990)], en el cual es usual este tipo de condición.

De esta forma, en el caso presente podemos tratar tanto el caso de tiempo intrínseco como el de extrínseco. Por supuesto, para ser consistentes con la condición de gauge (6.85), ambos super-Hamiltonianos contendrán el mismo tipo de tiempo. Finalmente, el producto interno quedará completamente regularizado mediante la inclusión de (6.85), junto con las ya conocidas $m + 1$ condiciones de gauge restantes.

Conclusiones

En esta tesis se estudió la cuantificación de sistemas con covariancia general mediante la aplicación del formalismo canónico y del formalismo BRST a modelos de dimensión finita que emulan la estructura de vínculos de la relatividad general. Uno de los aspectos de mayor interés fue encontrar los ordenamientos adecuados de los operadores de vínculo de manera que respeten el álgebra a nivel cuántico (es decir que no se generen nuevos vínculos). La aplicación del formalismo BRST en la obtención de dichos ordenamientos consistentes para los operadores de vínculo de Dirac, ha dado resultados sumamente novedosos con respecto a los tratamientos usuales.

El punto de partida ha sido el estudio de sistemas que contienen varios vínculos supermomentos y un único vínculo super-Hamiltoniano cuyo potencial es invariante de gauge. La principal guía en la búsqueda del ordenamiento adecuado del operador BRST (aquel con el cual resulta hermítico y nilpotente) fueron las transformaciones de invariancia de la teoría: (i) transformación general de coordenadas, (ii) combinación lineal de los supermomentos y (iii) cambios de escala en el super-Hamiltoniano. Si bien este tipo de invariancias habían sido tenidas en cuenta previamente (tanto desde el punto de vista de la cuantificación canónica de Dirac, como por ejemplo en Kuchař (1986), o además mediante el formalismo BRST en Ferraro et al. (1993); Barvinsky (1996); Mc Mullan & Paterson (1989)) en este trabajo se explotó estas propiedades en la búsqueda de un ordenamiento adecuado para la parte cuadrática del generador BRST (asociada con el vínculo super-Hamiltoniano). En especial, el tipo de invariancia (ii) llevó a reconocer que la contribución no hermítica de los fantasmas en los operadores de vínculo supermomentos puede asociarse al volumen natural inducido por estos vínculos en las órbitas. Se mostró que este volumen juega un papel fundamental al ordenar el sector cuadrático del operador BRST nilpotente. El tipo de invariancia (iii) – cambio de escala del vínculo super-Hamiltoniano – también tiene un rol importante en la determinación del ordenamiento, ya que dicha invariancia debe ser respetada por la teoría a nivel cuántico (la cual se expresa mediante una transformación unitaria de la carga BRST).

Si bien la introducción de esta propiedad es independiente del factor de escala en sí, su interpretación física surge a partir de la definición del producto interno físico, lo cual requiere la identificación previa del tiempo físico en la teoría. En el caso de tiempo intrínseco, el factor de escala es el potencial definido positivo. Debido a esto el potencial modifica el término cinético del super-Hamiltoniano, esta característica que parece poco natural es justificada elegantemente mediante la formulación de Jacobi del principio de mínima acción. Una consecuencia totalmente novedosa es que con este tratamiento no se requiere la inclusión de un término de curvatura para lograr la invariancia ante cambios de escala, lo que constituía un procedimiento habitual [ver por ej. Kuchař (1986)]. Una dificultad seria que surge al intentar extrapolar estos resultados a la relatividad general es que el potencial en el super-Hamiltoniano en ese caso es la curvatura espacial, que evidentemente no está restringida a ser definida positiva.

Esto induce la búsqueda de un nuevo modelo mecánico que represente de una manera más acabada a la relatividad general. Esta motivación llevó al desarrollo de un modelo con un tiempo extrínseco mediante un proceso de parametrización. En este caso, los resultados a nivel de ordenamiento de los operadores de vínculo resultan similares, salvo que el rol jugado por el potencial definido positivo en el caso con tiempo intrínseco, ahora es tomado por el módulo del vector de Killing conforme de la teoría. Fue necesario además una nueva definición del producto interno físico de acuerdo al nuevo tiempo que contiene la teoría. Es decir, la inserción que regulariza el producto interno difiere del caso previo, ya que al estar el tiempo asociado con un momento (en vez de una coordenada) involucra un operador integral que realiza una transformación de Fourier. Resulta llamativo que a pesar de que la idea de un tiempo extrínseco en relatividad general no es reciente [York (1972)], no es usual que se lo utilice en el problema de la cuantificación (entre los pocos ejemplos existentes pueden mencionarse a Kuchař (1971); Kuchař et al (1997)). El modelo que hemos desarrollado podría ser de ayuda para comprender como implementar una cuantificación basada en este esquema.

Finalmente, una característica no expresada en ninguno de los sistemas hasta ahora mencionados, es el hecho que la relatividad general contiene una infinidad de vínculos super-Hamiltonianos (uno por cada punto del espacio) con un álgebra de vínculos no trivial entre ellos y los supermomentos. Hasta la fecha, los únicos modelos en dimensión finita con covariancia general con varios vínculos super-Hamiltonianos se formulaban en un fondo plano y no presentaban problemas de ordenamiento [Montesinos et al. (1999); Longhi et al (1986,1989); Lusanna (1990)]. Consideramos pues, sumamente importante, haber logrado resolver un modelo que permitiese estudiar el problema de ordenamiento con más de un vínculo super-Hamiltoniano en espacio-tiempos curvos. La aplicación de los procedimientos desarrollados previamente a este caso resultó natural, y sólo condicionó las características del volumen natural de la teoría a factorizar en sectores excluyentes de las coordenadas. Mediante la transformación de cambio de escala de los super-Hamiltonianos se hallaron los operadores de vínculo que respetan dicha invariancia mediante una transformación unitaria apropiada (procedimiento con el cual el álgebra perdió su carácter de cerrada). Los cambios de escala en este modelo pueden estar asociados tanto a un tiempo intrínseco como a uno extrínseco, dependiendo de las características del potencial. La regularización del producto interno requiere hallar una condición de gauge extra, que resulta en la inserción de una función delta que hace que el producto interno físico esté evaluado a un único tiempo.

De este modo, el problema de ordenamiento de los operadores de vínculo de teorías con covariancia general ha sido estudiado en un amplio espectro de modelos de dimensión finita, con resultados originales que pueden ser un buen indicio de cómo atacar el problema en la relatividad general.

Apéndice A

Álgebras de Grassmann

Un álgebra de Grassmann G_m tiene m generadores η^a que satisfacen

$$\eta^a \eta^b + \eta^b \eta^a = 0 \quad (\text{en particular } \eta^{a2} = 0). \quad (\text{A.1})$$

Decimos que las η^a son *variables fermiónicas* (anticomutan).

G_m es un espacio lineal de 2^m dimensiones, ya que cualquier elemento de G_m debe poder escribirse como combinación lineal (a coeficientes constantes) de: $1, \eta^1, \dots, \eta^m, \eta^1 \eta^2, \dots, \eta^1 \eta^2 \dots \eta^m$, debido a que no puede repetirse un mismo generador en ningún monomio. Un elemento general de G_m será

$$f = f_0 + f_a \eta^a + f_{ab} \eta^a \eta^b + \dots + f_{1\dots m} \eta^1 \dots \eta^m \quad (\text{A.2})$$

donde puede verse que sólo es relevante la parte antisimétrica de los coeficientes.

Si en f sólo aparecen términos con un número par de generadores diremos que f es *bosónico* o que tiene paridad de Grassmann igual a cero: $\varepsilon(f) = 0$. Si sólo aparecen términos con un número impar de generadores diremos que f es *fermiónico* o que tiene paridad de Grassmann igual a uno: $\varepsilon(f) = 1$. En el caso general, f será una suma de un elemento par con uno impar.

Si f_1 y f_2 tienen paridad bien definida entonces: $f_1 f_2 = (-1)^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} f_2 f_1$

Derivación

Saber derivar un elemento de G_m es equivalente a saber derivar un monomio:

$$\frac{\partial}{\partial \eta^a} (\eta^{a_1} \dots \eta^{a_i}) = \delta_a^{a_1} \eta^{a_2} \dots \eta^{a_i} - \delta_a^{a_2} \eta^{a_1} \eta^{a_3} \dots \eta^{a_i} + \dots + (-1)^{i-1} \delta_a^{a_i} \eta^{a_1} \dots \eta^{a_{i-1}} \quad (\text{A.3})$$

De esta forma se define la derivada “left” como

$$\delta f = \delta \eta^a \frac{\partial^L f}{\partial \eta^a} \quad (\text{A.4})$$

Se introduce además la derivada “right” de manera que

$$\delta f = \delta \eta^a \frac{\partial^L f}{\partial \eta^a} = \frac{\partial^R f}{\partial \eta^a} \delta \eta^a \quad (\text{A.5})$$

Ambas derivadas serán iguales sólo para elementos fermiónicos. En general si f tiene paridad bien definida:

$$\frac{\partial^R f}{\partial \eta^a} = -(-1)^{\epsilon(f)} \frac{\partial^L f}{\partial \eta^a} \quad (\text{A.6})$$

Propiedades:

(i) Regla de la cadena

$$\begin{aligned} \frac{df(\eta^a(t))}{dt} &= \frac{d\eta^a}{dt} \frac{\partial f}{\partial \eta^a} \\ \frac{\partial f(\eta^{b'}(\eta^a))}{\partial \eta^a} &= \frac{\partial \eta^{b'}}{\partial \eta^a} \frac{\partial f}{\partial \eta^{b'}} \end{aligned}$$

(ii) Si f_1 y f_2 tienen paridad bien definida

$$\frac{\partial(f_1 f_2)}{\partial \eta^a} = \frac{\partial f_1}{\partial \eta^a} f_2 + (-1)^{\epsilon(f_1)} f_1 \frac{\partial f_2}{\partial \eta^a}$$

(iii)

$$\frac{\partial}{\partial \eta^a} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta^b} \right) = - \frac{\partial}{\partial \eta^b} \left(\frac{\partial f}{\partial \eta^a} \right)$$

Corchetes de Poisson generalizados

A partir del estudio de una mecánica que incluya variables fermiónicas y de su correspondencia con los conmutadores cuánticos, se puede deducir que la estructura de corchetes de Poisson resulta

$$\{F, G\} = \left(\frac{\partial F}{\partial q^i} \frac{\partial G}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial G}{\partial q^i} \right) + (-1)^{\varepsilon_F} \left(\frac{\partial^L F}{\partial \eta^a} \frac{\partial^L G}{\partial \mathcal{P}_a} + \frac{\partial^L F}{\partial \mathcal{P}_a} \frac{\partial^L G}{\partial \eta^a} \right) \quad (\text{A.7})$$

donde (η^a, \mathcal{P}_a) son pares canónicamente conjugados como puede verificarse calculando el corchete entre ellos.

Propiedades:

- $\{F, G\} = -(-1)^{\varepsilon_F \varepsilon_G} \{G, F\}$
- $\{F, G_1 + G_2\} = \{F, G_1\} + \{F, G_2\}$
- $\{F, G_1 G_2\} = \{F, G_1\} G_2 + (-1)^{\varepsilon_F \varepsilon_{G_1}} G_1 \{F, G_2\}$
- $\varepsilon(\{F, G\}) = \varepsilon_F + \varepsilon_G$
- $\{F, G\}^* = -\{G^*, F^*\}$
- $\{\{F_1, F_2\}, F_3\} + (-1)^{\varepsilon_{F_1}(\varepsilon_{F_2} + \varepsilon_{F_3})} \{\{F_2, F_3\}, F_1\} + (-1)^{\varepsilon_{F_3}(\varepsilon_{F_1} + \varepsilon_{F_2})} \{\{F_3, F_1\}, F_2\} = 0.$
(Identidad de Jacobi generalizada).

Apéndice B

Demostración de $\hat{\Omega}^2 = 0$: Modelos con un super-Hamiltoniano

En este apéndice, demostraremos la nilpotencia del operador BRST para el caso de sistemas con un vínculo super-Hamiltoniano cuyo potencial es invariante de gauge (tipo 1) (la demostración para el caso con potencial definido positivo (tipo 2) no es necesaria, pues el operador BRST en ese caso es obtenido a través de una transformación unitaria del primero, preservando por lo tanto la nilpotencia).

Proponiendo los ordenamientos para las partes lineal y cuadrática de $\hat{\Omega} = \hat{\Omega}^{cuad} + \hat{\Omega}^{lineal}$:

$$\hat{\Omega}^{lineal} = \sum_{i=-1}^0 f^{\frac{1}{2}} \hat{\Omega}^{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} f^{-\frac{1}{2}}, \quad (\text{B.1})$$

$$\hat{\Omega}^{cuad} = \frac{1}{2} \sum_{k,j=-1}^0 f^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_{a_k} f \hat{\Omega}^{a_k b_j} \hat{\mathcal{P}}_{b_j} f^{-\frac{1}{2}} + \hat{\eta}^o \lambda, \quad (\text{B.2})$$

queremos demostrar que

$$[\hat{\Omega}, \hat{\Omega}] = [\hat{\Omega}^{cuad}, \hat{\Omega}^{cuad}] + 2[\hat{\Omega}^{cuad}, \hat{\Omega}^{lineal}] + [\hat{\Omega}^{lineal}, \hat{\Omega}^{lineal}] = 0. \quad (\text{B.3})$$

El término $[\hat{\Omega}^{cuad}, \hat{\Omega}^{cuad}]$ se anula trivialmente porque $\eta^{o2} = 0$ (nótese que $\hat{\Omega}$ no depende de $\hat{\mathcal{P}}_o$). El último término es cero porque $\hat{\Omega}^{lineal}$ es efectivamente nilpotente. Por lo tanto, sólo tenemos que demostrar que el ordenamiento propuesto satisface $[\hat{\Omega}^{cuad}, \hat{\Omega}^{lineal}] = 0$.

Para los desarrollos ulteriores es necesario conocer las paridades de los objetos geométricos intervinientes:

$$\varepsilon(\hat{\eta}^{ak}) = k, \quad \varepsilon(\hat{\mathcal{P}}_{b_j}) = j, \quad \varepsilon(\hat{\Omega}^{c_i}) = i \quad (\text{B.4})$$

$$\varepsilon(\hat{\Omega}^{akb_j}) = k + j + 1, \quad \varepsilon\left(\frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{b_j}}\right) = j + i + 1, \quad \varepsilon\left(\frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i b_j}}{\partial \eta^{a_k}}\right) = i + j + k. \quad (\text{B.5})$$

Luego, calculando explícitamente

$$\begin{aligned} [\hat{\Omega}^{cuad}, \hat{\Omega}^{lineal}] &= f^{\frac{1}{2}} \sum_{kj} \frac{1}{2} f^{-1} \hat{\mathcal{P}}_{a_k} \hat{\Omega}^{akb_j} \hat{\mathcal{P}}_{b_j} \sum_i \hat{\Omega}^{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} f^{-\frac{1}{2}} + \\ &+ f^{\frac{1}{2}} \sum_i \hat{\Omega}^{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} \sum_{kj} f^{-1} \hat{\mathcal{P}}_{a_k} f \hat{\Omega}^{akb_j} \hat{\mathcal{P}}_{b_j} f^{-\frac{1}{2}} = f^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{kj} \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{\mathcal{P}}_{a_k} f \hat{\Omega}^{akb_j} \hat{\mathcal{P}}_{b_j}, \sum_i \hat{\Omega}^{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} \right] f^{-\frac{1}{2}} = \\ &= f^{\frac{1}{2}} \left[\sum_{kj} \frac{1}{2} \hat{\Omega}^{akb_j} \hat{\mathcal{P}}_{a_k} \hat{\mathcal{P}}_{b_j} - \frac{i}{2} \sum_{kj} \frac{\partial^L (\ln f)}{\partial \eta^{a_k}} \hat{\Omega}^{akb_j} \hat{\mathcal{P}}_{b_j} - \frac{i}{2} \sum_{kj} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{akb_j}}{\partial \eta^{a_k}}, \sum_i \hat{\Omega}^{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} \right] f^{-\frac{1}{2}} \quad (\text{B.6}) \end{aligned}$$

Desarrollando cada término,

$$\begin{aligned} \left[\sum_{kj} \frac{1}{2} f^{-\frac{1}{2}} \hat{\Omega}^{akb_j} \hat{\mathcal{P}}_{a_k} \hat{\mathcal{P}}_{b_j}, \sum_i \hat{\Omega}^{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} \right] &= \\ &= -\frac{1}{2} \hat{\Omega}^{akb_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{a_k} \partial \eta^{b_j}} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} - \frac{i}{2} (-1)^{j(k+1)} \hat{\Omega}^{akb_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{b_j}} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{a_k} \\ &- \frac{i}{2} (-1)^{j+1} \hat{\Omega}^{akb_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{a_k}} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{a_k} - \frac{i}{2} \hat{\Omega}^{c_i} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{akb_j}}{\partial \eta^{c_i}} \hat{\mathcal{P}}_{a_k} \hat{\mathcal{P}}_{b_j} \quad (\text{B.7}) \end{aligned}$$

$$\left[-\frac{i}{2} \sum_{kj} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{akb_j}}{\partial \eta^{a_k}}, \hat{\Omega}^{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} \right] = -\frac{1}{2} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{akb_j}}{\partial \eta^{a_k}} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{b_j}} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} - \frac{1}{2} \hat{\Omega}^{c_i} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{akb_j}}{\partial \eta^{c_i} \partial \eta^{a_k}} \hat{\mathcal{P}}_{b_j} \quad (\text{B.8})$$

$$\left[-\frac{i}{2} \sum_{kj} \frac{\partial^L (\ln f)}{\partial \eta^{a_k}} \hat{\Omega}^{akb_j} \hat{\mathcal{P}}_{b_j}, \hat{\Omega}^{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} \sum_{ikj} \frac{\partial^L \ln f}{\partial \eta^{a_k}} \hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{b_j}} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} - \frac{1}{2} \sum_{ikj} \hat{\Omega}^{c_i} \frac{\partial^L}{\partial \eta^{c_i}} \left[\frac{\partial^L (\ln f)}{\partial \eta^{a_k}} \hat{\Omega}^{a_k b_j} \right] \hat{\mathcal{P}}_{b_j} \quad (\text{B.9})$$

El desarrollo del conmutador tendrá términos cuadráticos y lineales en los momentos $\hat{\mathcal{P}}_{a_k}$ que deberán anularse por separado. Los términos cuadráticos provienen todos de (B.7):

$$\sum_{ijk} \left[-\frac{i}{2} (-1)^{j(k+1)} \hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{b_j}} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{a_k} - \frac{i}{2} (-1)^{j+1} \hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{a_k}} \hat{\mathcal{P}}_{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{a_k} - \frac{i}{2} \hat{\Omega}^{c_i} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{a_k b_j}}{\partial \eta^{c_i}} \hat{\mathcal{P}}_{a_k} \hat{\mathcal{P}}_{b_j} \right],$$

su anulación está garantizada pues se corresponden exactamente a los que surgen de calcular el corchete clásico $\{\Omega, \Omega\}$, que se anula por construcción. Nótese que los dos primeros términos son iguales; en efecto, como $\Omega^{a_o b_o} = 0$ entonces $(-1)^{jk} \hat{\Omega}^{a_k b_j} = (-1)^{j+k+1} \hat{\Omega}^{a_k b_j}$. Luego, permutando los roles de a_k y b_j (índices mudos) en el primer término:

$$\sum_{ikj} -i \left[(-1)^{j+1} \hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{a_k}} + \frac{1}{2} \hat{\Omega}^{a_k} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i b_j}}{\partial \eta^{a_k}} \right] \hat{\mathcal{P}}_{c_i} \hat{\mathcal{P}}_{b_j} = 0. \quad (\text{B.10})$$

Es decir que debe anularse la parte simétrica (o antisimétrica si $i = j = 0$) del corchete:

$$\sum_k \left[(-1)^{j+1} \hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{a_k}} + (-1)^{i+1} (-1)^{(j+1)(i+1)} \hat{\Omega}^{a_k c_i} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j}}{\partial \eta^{a_k}} + \hat{\Omega}^{a_k} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i b_j}}{\partial \eta^{a_k}} \right] = 0. \quad (\text{B.11})$$

Los términos restantes en (B.7), (B.8) y (B.9) son todos lineales:

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} \sum_{ikj} \left[\hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{a_k} \partial \eta^{b_j}} + \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{a_k b_j}}{\partial \eta^{a_k}} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{b_j}} + \hat{\Omega}^{a_k} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j c_i}}{\partial \eta^{a_k} \partial \eta^{b_j}} + \right. \\ & \left. + \frac{\partial^L \ln f}{\partial \eta^{a_k}} \hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{b_j}} + \hat{\Omega}^{a_k} \frac{\partial^L}{\partial \eta^{a_k}} \left(\frac{\partial^L (\ln f)}{\partial \eta^{b_j}} \hat{\Omega}^{b_j c_i} \right) \right] \hat{\mathcal{P}}_{c_i} \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

Debemos probar que la suma sobre los índices kj es cero. Con este fin, multipliquemos la relación hallada a partir de los términos cuadráticos, Ec. (B.11), por $(-1)^{j+1}$, derivando luego respecto de η^{b_j} y sumando sobre j , obtenemos:

$$\begin{aligned} & \sum_{kj} \left[\frac{\partial^L \hat{\Omega}^{a_k b_j}}{\partial \eta^{b_j}} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{a_k}} + (-1)^{(k+j+1)(j+1)} \hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{b_j} \partial \eta^{a_k}} + (-1)^{(ij+1)} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{a_k c_i}}{\partial \eta^{b_j}} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j}}{\partial \eta^{a_k}} + \right. \\ & \left. + (-1)^{ij+1+(k+i+1)(j+1)} \hat{\Omega}^{a_k c_i} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j}}{\partial \eta^{b_j} \partial \eta^{a_k}} + (-1)^{j+1} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{a_k}}{\partial \eta^{b_j}} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i b_j}}{\partial \eta^{a_k}} + \right. \\ & \left. + (-1)^{(j+1)+k(j+1)} \hat{\Omega}^{a_k} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i b_j}}{\partial \eta^{b_j} \partial \eta^{a_k}} \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Veamos que el tercer y quinto término de esta expresión se cancelan mutuamente. En efecto, permutando a_k con b_j en el tercero:

$$(-1)^{ik+1} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j c_i}}{\partial \eta^{a_k}} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{a_k}}{\partial \eta^{b_j}} = (-1)^{ik+1} (-1)^{(k+j+i)(k+j+1)} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{a_k}}{\partial \eta^{b_j}} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j c_i}}{\partial \eta^{a_k}} = (-1)^j \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{a_k}}{\partial \eta^{b_j}} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i b_j}}{\partial \eta^{a_k}}$$

Permutando a_k con b_j en el resto de los términos, obtenemos:

$$\sum_{kj} \left[\frac{\partial^L \hat{\Omega}^{a_k b_j}}{\partial \eta^{a_k}} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{b_j}} + \hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{a_k} \partial \eta^{b_j}} + (-1)^{i+1} \hat{\Omega}^{a_k c_i} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j}}{\partial \eta^{a_k} \partial \eta^{b_j}} + \hat{\Omega}^{a_k} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i b_j}}{\partial \eta^{a_k} \partial \eta^{b_j}} \right] = 0, \quad (\text{B.14})$$

y vemos que aparecen los tres primeros términos lineales de (B.12), que resultan iguales a:

$$\begin{aligned} - \sum_{kj} (-1)^{i+1} \hat{\Omega}^{a_k c_i} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j}}{\partial \eta^{a_k} \partial \eta^{b_j}} &= - \sum_k (-1)^{i+1} \hat{\Omega}^{a_k c_i} \frac{\partial^L}{\partial \eta^{a_k}} \left(\sum_j \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j}}{\partial \eta^{b_j}} \right) \\ &= \sum_{kj} (-1)^{i+1} \hat{\Omega}^{a_k c_i} \left[\frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j}}{\partial \eta^{a_k}} \frac{\partial^L (\ln f)}{\partial \eta^{b_j}} + \frac{\partial^L (\ln f)}{\partial \eta^{b_j} \partial \eta^{a_k}} \hat{\Omega}^{b_j} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Donde la última igualdad surge de considerar que $\sum_j \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j}}{\partial \eta^{b_j}} = \eta^b (\xi_{b,j}^j - C_{ba}^a)$, y que, según se demostró en §4.1, $C_{ba}^a = f^{-1} (f \xi_b^j)_{,j}$, con lo cual $\sum_j \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j}}{\partial \eta^{b_j}} = \eta^b \xi_b^j (\ln f)_{,j} = \sum_j \hat{\Omega}^{b_j} \frac{\partial^L (\ln f)}{\partial \eta^{b_j}}$.

Además, nótese que debido al factor $\frac{\partial^L (\ln f)}{\partial \eta^{b_j}}$, el único valor que contribuye en la relación (B.15) es $j = -1$. Luego, de la condición (B.11) con $j = -1$ tenemos:

$$\sum_k (-1)^{i+1} \hat{\Omega}^{a_k c_i} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j}}{\partial \eta^{a_k}} = - \sum_k \left[\hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{a_k}} + \hat{\Omega}^{a_k} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i b_j}}{\partial \eta^{a_k}} \right]$$

Finalmente

$$\begin{aligned} \sum_{kj} (-1)^{i+1} \hat{\Omega}^{a_k c_i} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j}}{\partial \eta^{a_k} \partial \eta^{b_j}} \\ = \sum_{kj} \left[\left(\hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{a_k}} + \hat{\Omega}^{a_k} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i b_j}}{\partial \eta^{a_k}} \right) \frac{\partial^L (\ln f)}{\partial \eta^{b_j}} + (-1)^i \hat{\Omega}^{a_k c_i} \frac{\partial^L (\ln f)}{\partial \eta^{b_j} \partial \eta^{a_k}} \hat{\Omega}^{b_j} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.16})$$

Nótese que debido al factor $\frac{\partial^L (\ln f)}{\partial \eta^{b_j} \partial \eta^{a_k}}$, el último término sólo es no nulo si $j = k = -1$. Como último paso, desarrollando y reescribiendo apropiadamente los dos últimos términos lineales de (B.12):

$$\begin{aligned} & \sum_{kj} \left[\frac{\partial^L(\ln f)}{\partial \eta^{a_k}} \hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{b_j}} + \hat{\Omega}^{a_k} \frac{\partial^L}{\partial \eta^{a_k}} \left(\frac{\partial^L(\ln f)}{\partial \eta^{b_j}} \hat{\Omega}^{b_j c_i} \right) \right] \\ &= \sum_{kj} \left[\hat{\Omega}^{a_k b_j} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{c_i}}{\partial \eta^{a_k}} \frac{\partial^L(\ln f)}{\partial \eta^{b_j}} + \hat{\Omega}^{a_k} \frac{\partial^L \hat{\Omega}^{b_j c_i}}{\partial \eta^{a_k}} \frac{\partial^L(\ln f)}{\partial \eta^{b_j}} + (-1)^i \hat{\Omega}^{b_j c_i} \frac{\partial^{L^2}(\ln f)}{\partial \eta^{b_j} \partial \eta^{a_k}} \hat{\Omega}^{a_k} \right] \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

que se cancelan exactamente con (B.16), lo cual completa la demostración de la nilpotencia de $\hat{\Omega}$. □

Bibliografía

- Anderson, J. (1959). Phys. Rev. **114**, 1182.
- Arnowitt R., Deser S. & Misner C. (1962). *The Dynamics of General Relativity*, en Gravitation: An Introduction to Current Research, ed. por Witten, Wiley & Sons, 227.
- Ballentine, L. (1970). Rev. Mod. Phys. **42**, 358. *The Statistical Interpretation of Quantum Mechanics*.
- Ballentine, L. (1987). Am. J. Phys. **55**, 785. *Resource letter IQM-2: Foundations of Quantum Mechanics since the Bell Inequalities*.
- Barbour, J. (2000). *The End of Time*, Oxford University Press.
- Barvinsky, A. O. (1990). Phys. Lett. **B241**, 210.
- Barvinsky, A. O. (1993). Class. Quant. Grav. **10**, 1895.
- Barvinsky, A. O. (1996). gr-qc/9612003.
- Barvinsky, A.O. & Krykhtin, V. (1993). Class. Quant. Grav. **10**, 1957.
- Becchi, C., Rouet, A. & Stora, R. (1974). Phys. Lett. B **52**, 344; (1975) Commun. Math. Phys. **42**, 127; (1976) Ann.Phys.(N.Y.) **98**, 287.
- Beluardi, S. C. & Ferraro, R. (1995). Phys. Rev. D **52**, 1963.
- Blokhintsev, D.I. (1968). *The Philosophy of Quantum Mechanics*, Reidel, Dordrecht.
- DeWitt, B. S. (1967). Phys. Rev **160**, 1113.
- Dirac, P.A.M. (1955). Can. j.Phys. **33**, 650.
- Dirac, P.A.M. (1964). *Lectures on Quantum Mechanics*, Yeshiva University, New York.
- Fadeev, L.D. y Popov, V.N. (1967). Phys. Lett. **25B**, 29.
- Ferraro, R., Henneaux, M. & Puchin, M. (1993). J. Math. Phys. **34**, 2757.
- Ferraro, R. & Sforza, D. M. (1997). Phys. Rev. D **55**, 4785.
- Ferraro, R. & Sforza, D. M. (1999). Phys. Rev. D **59**, 107503.

- Ferraro, R. & Sforza, D. M. (2000a). Nucl. Phys. B (P.S.) **88**, 322.
- Ferraro, R. & Sforza, D. M. (2000b). Será enviado a Phys. Rev. D, en preparación. *Quantization of a generally covariant gauge system with two superhamiltonian constraints*.
- Fradkin, E.S. & Vilkovisky, G.A. (1975). Phys. Lett. **52B** 344.
- Goldstein, H. (1987). *Mecánica clásica*, 2da. edición, Ed. Reverté, Barcelona.
- Hájíček, P. (1990). Class. Quantum Grav. **7**, 871. *Dirac Quantization of Systems with Quadratic Constraints*.
- Hájíček, P. & Kuchař, K. V. (1990). Phys. Rev. **D41**, 1091.
- Halliwell, J. (1988). Phys. Rev. **D38**, 2468. *Derivation of the Wheeler-DeWitt Equation from a Path Integral for Minisuperspace Models*.
- Hanson, A., Regge, T. & Teitelboim, C. (1976). *Constrained Hamiltonian Systems*, Accademia Nazionale dei Lincei, Roma.
- Henneaux, M. (1985). Phys. Rep. **126**, 1.
- Henneaux, M. & Teitelboim, C. (1992). *Quantization of Gauge Systems*, Princeton University Press, Princeton.
- Isham, C.J. (1992). *Canonical Quantum Gravity and the Problem of Time*, gr-qc/9210011.
- Isham, C.J. (1995). *Structural issues in quantum gravity*, gr-qc/9510063.
- Jammer, M. (1966). *The Conceptual Development of Quantum Mechanics*, Mc Graw-Hill, New York.
- Jammer, M. (1974). *The Philosophy of Quantum Mechanics*, Wiley, New York.
- Kuchař, K.V. (1971). Phys Rev. D **4**, 955.
- Kuchař, K.V. (1972). J. Math. Phys. **13**, 768.
- Kuchař, K.V. (1973). En *Relativity, Astrophysics and Cosmology*, ed. W. Israel (Reidel, Dordrecht).
- Kuchař, K.V. (1981). En *Quantum Gravity 2: A Second Oxford Symposium*, edited by C. J. Isham, R. Penrose, and D. W. Sciama (Clarendon, Oxford).
- Kuchař, K.V. (1986). Phys. Rev. **D34**, 3031, 3044.
- Kuchař, K.V. (1992). *Time and Interpretations of Quantum Gravity* en Proc. 4th Canadian Conference on General relativity and relativistic Astrophysics, ed. G. Kunstatter, D. Vincent and J. Williams (Singapore, World Scientific).
- Kuchař, K.V. (1993). *Canonical Quantum Gravity* en Proceedings Thirteenth International Conference on General Relativity and Gravitation, Córdoba, Argentina, 1992, edited by R. J. Gleiser, C. N. Kozameh and O. M. Moreschi (IOP Publishing, Bristol, p. 119.

- Kuchař, K.V. & Torre, C.G. (1989). *J. Math. Phys.* **30**, 1769.
- Kuchař, K.V., Romano, J.D. & Varadajan, M. (1997). *Phys Rev. D* **55**, 795.
- Kunstatler, G. (1992). *Class. Quant. Grav.* **9**, 1469.
- Lanczos, C. (1986). *The Variational Principles of Mechanics*, Dover, New York.
- Longhi, G. & Lusanna, L. (1986). *Phys. Rev. D* **34**, 3707.
- Longhi, G., Lusanna, L. & Pons, J.M. (1989). *J. Math. Phys.* **30**, 1893. *On the many-time formulation of classical particle dynamics.*
- Lusanna, L. (1995). hep-th/9506185.
- Lusanna, L. (1997). *Int. J. Mod. Phys. A* **12**, 1339.
- Mc Mullan, D. & Paterson, J. (1989). *J. Math. Phys.* **30**, 477, 487.
- Misner, C. (1969). *Phys. Rev. Lett.* **22**, 1071; *Phys. Rev.* **186**, 1319, 1328.
- Misner, C. (1972). *Minisuperspace en Magic Without Magic*, ed. por Klauder, Freedman, San Francisco, 441.
- Misner, C., Thorne K. & Wheeler, J.A. (1973). *Gravitation*, Freeman, San Francisco.
- Montesinos, M., Rovelli, C. & Thiemann, T. (1999). *Phys. Rev. D* **60**, 044009. gr-qc/9901073.
- Nakahara, M. (1990). *Geometry, Topology and Physics*, Institute of Physics Publishing, Bristol.
- Popper, K.R. (1985). *Teoría cuántica y el cisma en física*, Ed. Tecnos, Madrid.
- Rovelli, C. (1998). *Strings, Loops and others: a critical survey of the present approaches to quantum gravity*, en Proceedings of GR15 Conference, Poona, India. gr-qc/980302.4
- Rovelli, C. (2000). *Notes for a brief history of quantum gravity*, presentado en 9th Marcel Grossmann Meeting, Roma, Italia. gr-qc/0006061.
- Schön, M. & Hájíček, P. (1990). *Class. Quantum Grav.* **7**, 861. *Topology of Quadratic Super-Hamiltonians.*
- Schutz, B. F. (1980). *Geometrical Methods of Mathematical Physics*, Cambridge University Press, Cambridge, England.
- Schwinger, J. (1963). *Phys. Rev.* **132**, 1317.
- Sforza, D.M. (1999). *Einstein y la teoría cuántica*, en revista Sin Luz, F.C.E.yN.-U.B.A., nº 1.
- Sonego, S. (1992). *Conceptual Foundations of Quantum Mechanics: A Map of the Land*. Preprint Universidad Libre de Bruselas, inédito.
- Sundermeyer, K. (1982). *Constrained Dynamics*, Lecture Notes in Physics **169**, Springer-Verlag, Berlin.


Tyutin, I.V. (1975). *Gauge invariance in field theory and in statistical mechanics in the operator formalism*, Lebedev preprint *FIAN* No.39.

Wheeler, J.A. (1968). *Superspace and the Nature of Quantum Geometrodynamics*, en *Batelle Rencontres*, ed. por B.DeWitt & J.A.Wheeler, Benjamín, 242.

York, J.W. (1972). *Phys. Rev. Lett.* **28**, 1082.



RAFAEL FERRARO



DANIEL N. SFORZA

Agradecimientos

Einstein sostenía que la única sociedad de la cual se enorgullecía de pertenecer era la de “los buscadores de la verdad”; la cual, agregaba, tiene muy pocos miembros en cualquier época. Sin duda alguna, el Dr. Rafael Ferraro es un miembro destacado de ella. Esto unido a sus extraordinarias cualidades humanas e intelectuales, hacen que me sienta sumamente afortunado de ser su discípulo y haber podido desarrollar este trabajo de investigación bajo su dirección.

Esta tesis se vió favorecida por esclarecedoras conversaciones con Marc Henneaux. Como así también por las estadías de trabajo que realice en: Tata Institute of Fundamental Research, Bombay, India, durante diciembre de 1997, en donde debo agradecer la hospitalidad y calidez del Prof. P. Joshi y del Dr. Sanjay Shingan (quien además me posibilitó el acceso a bibliografía de sumo interés); Istituto di Fisica Nucleare, Sezione di Firenze, Italia, durante octubre de 1999, en donde pude mantener provechosas discusiones con el Prof. Luca Lusanna, quien me brindó también valiosa bibliografía.

Este trabajo no hubiese sido posible sin el financiamiento brindado por la Universidad de Buenos Aires y la Fundación Antorchas.

No puedo dejar de mencionar al Dr. Fabian Gaioli, Lic. Marc Thibeault y el Lic. Edgardo García Alvarez, por las interesantes discusiones científicas que mantuvimos y por el excelente clima de trabajo que siempre propiciaron en el IAFE. Tampoco puedo olvidar, en este sentido al Lic. Gerardo Milesi, y a la “nueva generación” de doctorandos, Lic. Gastón Giribet, Lic. Mauricio Leston y Lic. Gabriel Catren.

A mi vida le faltaría color si no fuese por la compañía de un grupo muy especial de amigos: Lic. Claudio Simeone, Lic. Hernán Decicco, Lic. Enzo Speranza, Lic. Daniel Rodríguez Sierra y particularmente Fernando Camelli (por su presencia a pesar de la distancia).

Quiero agradecer muy especialmente al (prácticamente) Dr. Fabio Kalesnik, con quien compartimos ideales, buenos y malos momentos.

A mis amigos: Leonardo Shimizukawa, Fernando Alonso, Adrián y Carina Otero, Santiago Beluardi, por todo lo que puede asociarse con la palabra *amistad*.

A Eliana, por hacer que mis proyectos sean también los suyos, por ayudarme a ser una mejor persona, por todo su *amor*.

