

Tesis de Posgrado

Dispersión de luz por superficies cilíndricas rugosas

Perez Quintián, Luis Fernando

2000

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Perez Quintián, Luis Fernando. (2000). Dispersión de luz por superficies cilíndricas rugosas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3295_PerezQuintian.pdf

Cita tipo Chicago:

Perez Quintián, Luis Fernando. "Dispersión de luz por superficies cilíndricas rugosas". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2000.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3295_PerezQuintian.pdf

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Departamento de Física

Dispersión de Luz por Superficies Cilíndricas Rugosas

por Luis Fernando Perez Quintián

3291

Director de Tesis:
Lugar de Trabajo:

Dra. María Aurora Rebollo
Laboratorio de Aplicaciones Ópticas – Dto. de Física
Facultad de Ingeniería – Universidad de Buenos Aires

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas
Octubre 2000

Agradecimientos

Quiero dejar expresado aquí mi reconocimiento y gratitud a todas las personas que participaron, concientemente algunas y otras no tanto, en que yo pudiera terminar este trabajo:

A Beta (Dra. María A. Rebollo para quienes no han tenido el gusto de conocerla), a quien Dios puso en mi camino, aunque ella todavía no se enteró, por muchas razones, de las que sólo voy a nombrar algunas. Por querer que yo trabaje con ella, por los muchos consejos, por el trabajo compartido (una buena parte le pertenece), por hacer agradables los momentos en el laboratorio y, ante todo, por los sufrimientos, presiones y nervios que tuvo que soportar para que yo pueda seguir trabajando en el laboratorio.

Al Dr. Néstor G. Gaggioli, por estar siempre disponible para intercambiar ideas, libros y equipamiento de laboratorio y por sus invaluable consejos.

Al Ing. Carlos A. Raffo, Decano de la Facultad de Ingeniería, por no mantener nunca una distancia ficticia que algunos suelen confundir con un sinónimo de autoridad.

A Ricardo G. Berlasso, por sufrir junto conmigo algunos tediosos momentos del montaje experimental y de las mediciones.

A Luis Miguel Sánchez Brea, del Departamento de Óptica de la Universidad Complutense de Madrid, que desde lejos colaboró con este trabajo.

A mis padres, afortunadamente, nunca les voy a poder devolver todo lo que les debo, no porque me falte algo sino porque me han dado mucho.

A mi hijita, Juli. Muchos pascos en bicicleta, juegos y guerras de cosquillas que nunca existieron están desparramados entre las ecuaciones de este trabajo. ¿Habrá valido la pena?

A mi esposa, Malu. Sin tu compañía esto no hubiera sido posible. ¡Cómo están ligadas nuestras almas!

A vos Señor, que aunque figures último sabés bien que sos el primero. Gracias porque elegiste ensuciarte para limpiarme para siempre.

“Vanidad de vanidades, dijo el Predicador; vanidad de vanidades, todo es vanidad ¿Qué provecho tiene el hombre de todo su trabajo con que se afana debajo del sol?... di mi corazón a inquirir y buscar con sabiduría sobre todo lo que se hace debajo del cielo (este penoso trabajo dio Dios a los hijos de los hombres, en que se ocupen). Yo miré todas las obras que se hacen debajo del sol; y he aquí, todo ello es vanidad y aflicción de espíritu... Hablé yo con mi corazón, diciendo: He aquí yo me he engrandecido, y he crecido en sabiduría sobre todos los que fueron antes de mí en Jerusalén; y mi corazón ha percibido mucha sabiduría y ciencia. Y di mi corazón a conocer la sabiduría, y la ciencia; y las locuras y los desvaríos conocí al fin que aun esto era aflicción de espíritu. Porque en la mucha sabiduría hay mucha tristeza; y quien añade ciencia, añade dolor. Dije yo también en mi corazón: Ven ahora, te probaré con alegría, y gozarás de bienes. Mas he aquí esto también era vanidad. A la risa dije: Enloqueces; y al placer: ¿De qué sirve esto?... Luego yo consideré todas las cosas que mis manos habían hecho y el duro trabajo con que me había afanado en hacerlas, y he aquí que todo era vanidad y aflicción de espíritu. No había provecho alguno debajo del sol... Entonces aborrecí la vida, porque la obra que se hace debajo del sol me era fastidiosa; pues todo es vanidad y aflicción de espíritu... Vanidad de vanidades, dijo el Predicador; todo es vanidad”.

Salomón, libro de Eclesiastés, La Biblia

“...fuisteis rescatados de vuestra vana manera de vivir, no con cosas corruptibles, como oro o plata, sino con la sangre preciosa de Cristo”

Primera carta de Pedro, La Biblia

Resumen

Este trabajo estudia la dispersión de luz coherente por superficies cilíndricas aleatorias rugosas. Se encara el problema teórico con la teoría escalar de la difracción, en la aproximación de Kirchhoff para obtener el campo sobre la superficie. La superficie se supone un proceso aleatorio con distribución de radios gaussiana y coeficiente de autocorrelación también gaussiana. Se obtienen expresiones analíticas para la distribución angular de la intensidad media dispersada en el campo lejano y para la autocorrelación de intensidades. Se contrastan las predicciones teóricas con resultados experimentales, mostrando una buena coincidencia. Se presenta asimismo el tratamiento del problema de la intensidad media dispersada mediante la óptica geométrica, obteniéndose exactamente el mismo resultado analítico para el caso de rugosidades altas.

Los resultados teóricos y experimentales permiten extender las técnicas habituales de caracterización de superficies aleatorias rugosas planas a esta clase de superficies. Se expone además una nueva técnica de caracterización mediante la medición del tamaño de grano del speckle de la intensidad dispersada por la superficie que no tiene contraparte en el caso de superficies rugosas planas. Se sugiere la manera de extenderla a este tipo de superficies.

Palabras clave: rugosidad, dispersión, superficies cilíndricas, láser, speckle.

Abstract

This work studies the light scattering from cylindrical random rough surfaces. The scalar theory of diffraction, in the Kirchhoff approximation, is used to obtain the field on the surface. The surface is assumed to be a random process with a Gaussian distribution of radii and with an also Gaussian autocorrelation function. Analytical expressions for the angular distribution of the mean scattered intensity and for the autocorrelation of intensities at the far field are obtained. These theoretical expressions are contrasted with experimental results, showing a good agreement. A geometrical treatment for the mean scattered intensity is introduced, providing exactly the same analytical result than the one obtained by the scalar theory, for the high roughness regime.

The theoretical and experimental results allow to extend the usual characterization techniques for plane random rough surfaces to this type of surfaces. A new characterization technique is also introduced, by measuring the speckle size of the scattered intensity from the rough surface that has no counterpart for the case of plane random rough surfaces. The way of extending this new technique to this type of surfaces is suggested.

Keywords: roughness, scattering, cylindrical surfaces, laser, speckle.

Tabla de Contenidos

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introducción | 8 |
| 2 | Descripción Estadística de Superficies Rugosas Aleatorias | 11 |
| 2.1 | Definición de parámetros y funciones | 11 |
| 2.2 | Métodos de medición | 13 |
| 2.2.1 | Métodos mecánicos | 13 |
| 2.2.2 | Métodos ópticos | 14 |
| 3 | Descripción Estadística de la Luz Dispersada por Superficies Rugosas Aleatorias Planas | 16 |
| 3.1 | Estadística de primer orden | 18 |
| 3.1.1 | Estadística de la amplitud compleja | 19 |
| 3.1.2 | Estadística de la intensidad y la fase | 21 |
| 3.2 | Estadística de segundo orden | 23 |
| 3.2.1 | Función de autocorrelación | 23 |
| 3.2.2 | Efecto de la estructura de la superficie sobre el speckle | 26 |
| 4 | Descripción Teórica | 28 |
| 4.1 | Tratamiento Escalar | 29 |
| 4.2 | Tratamiento Geométrico | 38 |
| 5 | Intensidad Media Dispersada | 42 |
| 5.1 | Resultados teóricos | 42 |
| 5.1.1 | Tratamiento Escalar | 42 |

| | | |
|---------------------|--|------------|
| 5.1.2 | Tratamiento Geométrico | 57 |
| 5.2 | Resultados Experimentales | 63 |
| 5.2.1 | Rugosidades Altas | 65 |
| 5.2.2 | Rugosidades Bajas | 70 |
| 6 | Estadística de Segundo Orden del Campo | 74 |
| 6.1 | Resultados Teóricos (Tratamiento Escalar) | 74 |
| 6.1.1 | Rugosidades Altas | 77 |
| 6.1.2 | Rugosidades Bajas | 79 |
| 6.2 | Resultados Experimentales | 81 |
| 6.2.1 | Rugosidades Altas | 83 |
| 6.2.2 | Rugosidades Bajas | 87 |
| 7 | Discusión de Resultados y Conclusiones | 94 |
| Apéndice A | Muestras Cilíndricas Rugosas | 97 |
| Apéndice B | Microscopio de Fuerza Atómica | 104 |
| Apéndice C | Rugosímetro Electromecánico | 106 |
| Apéndice D | Cámara CCD | 107 |
| Apéndice E | Cálculo de Errores | 108 |
| Apéndice F | Extensión de la ecuación (6.25) a superficies rugosas anisótropas | 110 |
| Bibliografía | | 112 |

Capítulo 1

Introducción

El estudio de la dispersión de ondas electromagnéticas por superficies rugosas ha sido objeto de interés durante mucho tiempo, y como resultado de ello se han escrito varios libros y una multitud de publicaciones. El problema de entender hasta qué punto y de qué manera la rugosidad de una superficie afecta el comportamiento de la dispersión de las ondas, es de fundamental interés en diversas áreas de investigación, como en funcionamiento de radares, ultrasonido, física del estado sólido, astronomía, suspensiones en líquidos y en aplicaciones tales como la metrología y los ensayos no destructivos de materiales, entre otros. A pesar del gran número de trabajos de investigación realizados sobre este tema y de la variedad de aplicaciones, muchos aspectos de la dispersión de ondas electromagnéticas por superficies rugosas están aún sin resolver.

Las teorías en cuyo marco se suele describir el fenómeno, se pueden clasificar en dos categorías: las aproximadas o escalares y las más rigurosas, que involucran un tratamiento vectorial. Entre las primeras se puede incluir el tratamiento de Kirchhoff y la teoría de perturbaciones. Las segundas incluyen los métodos variacionales y técnicas de ecuaciones integrales.

Los modelos vectoriales rigurosos han avanzado mucho en su aplicabilidad, a causa del gran avance que ha habido en las técnicas de simulación numérica, particularmente debido a la velocidad de las nuevas computadoras. Tienen la ventaja de poder predecir algunos efectos que de ninguna manera pueden obtenerse con las teorías aproximadas y también tienen la capacidad de determinar los regímenes de validez de las técnicas aproximadas. Las teorías aproximadas, por otra parte tienen la ventaja de dar resultados analíticos en función de los parámetros característicos de la superficie, lo que las hace mucho más adecuadas para describir el comportamiento de la dispersión con la variación de uno o varios parámetros y por lo tanto, más adecuadas para las

aplicaciones tecnológicas de control y caracterización de materiales, sobre todo para técnicas que puedan realizarse en tiempo real, sin la necesidad de realizar cálculos numéricos intermedios.

Sin lugar a dudas, el tratamiento escalar del problema hecho por Beckmann y Spizzichino^[1], es el que se cita más frecuentemente en la bibliografía. En él se utiliza la aproximación escalar de Kirchhoff para resolver el problema de la dispersión de ondas electromagnéticas por superficies planas para los casos de rugosidad aleatoria y rugosidad periódica. El mismo formalismo fue aplicado con éxito más recientemente para el caso de superficies translúcidas^[2-4]. El libro de Bass y Fuks^[5] hace uso de la teoría de perturbaciones (además de la teoría de Kirchhoff) e incluye efectos tales como multiple scattering, sombra y varias escalas de rugosidad. La teoría escalar de dispersión por multicapas ópticas fue derivada primeramente por Eastman^[6] y luego fue extendida por Carniglia^[7].

Entre las teorías vectoriales, más rigurosas que las anteriores, se pueden citar la de Rice^[8], que fue una de las primeras y aplica la teoría de pequeñas perturbaciones a superficies con rugosidades chicas comparadas con la longitud de onda. Elson y Ritchie^[9] presentaron una teoría más general en 1971. En 1977 Toigo, Marvin, Celli y Hill^[10] dieron un tratamiento que incluye el caso en que la longitud de onda es comparable con la rugosidad de la superficie.

Se ha omitido injustamente por cuestiones de espacio una gran cantidad de contribuciones valiosas. Una muy buena colección de trabajos y también una muy buena revisión histórica del tema se puede encontrar en el libro de Bennet^[11]. En el libro de Ogilvy^[12] hay una descripción de las características principales de las teorías escalares y vectoriales y de los métodos numéricos más utilizados hasta 1991.

En cuanto al tratamiento de la dispersión por superficies rugosas aleatorias cilíndricas, hay mucha menor cantidad de bibliografía disponible. La teoría rigurosa da un resultado expresable analíticamente únicamente en el caso de una onda plana incidente sobre un cilindro liso infinito^[13]. La teoría escalar de Kirchhoff ha sido aplicada al caso de cilindros rugosos periódicos (torneados) sólo para incidencia normal^[14], resolviendo numéricamente las integrales involucradas.

El tema es, por lo tanto, de interés doble por las siguientes razones. En primer lugar, académicamente, pues es un problema poco explorado (al conocimiento del autor) en cuanto a las incursiones teóricas y, en segundo lugar, es de interés práctico por su inmediata aplicación tecnológica a los ensayos no destructivos, debido a que la calidad de las superficies cilíndricas es relevante en una amplia gama de usos industriales, que van desde terminaciones para acoplamientos de grandes tuberías hasta finísimos hilos metálicos de alta calidad, como los utilizados en circuitos electrónicos, bobinados magnéticos de alta precisión, air-bags, filtros de alta presión, por ejemplo. Los métodos tradicionales de determinación de calidad de superficies de alambres no se pueden implementar en el proceso de fabricación^[15, 16] y es por eso que varios trabajos recientes apuntan a desarrollar nuevas técnicas de control de calidad^[17-20].

Estas razones constituyen la motivación principal de este estudio y establecen como objetivo principal la obtención de expresiones analíticas que den cuenta de la dependencia de los diversos aspectos de la dispersión de la luz incidente con los parámetros estadísticos que caracterizan a las superficies cilíndricas rugosas aleatorias. Se puede lograr este objetivo, no sólo mediante la aplicación de la teoría escalar de la difracción, sino también utilizando un modelo geométrico de la dispersión, que ha mostrado ser eficiente para describir algunos fenómenos^[21] que en principio se habían atribuido a razones no geométricas.

El presente trabajo está organizado de la siguiente forma: Los capítulos 2 y 3 son de carácter introductorio y se tratan respectivamente y en forma general las diversas características estadísticas de las superficies rugosas y del campo dispersado por ellas. Luego, en el capítulo 4, se aplican la teoría escalar de la difracción y un modelo teórico para describir el campo dispersado por superficies cilíndricas rugosas. Las predicciones de estos dos tratamientos teóricos de la intensidad media dispersada y las experiencias llevadas a cabo para comprobarlas se encuentran en el capítulo 5. La teoría escalar de la difracción es también adecuada para dar cuenta de la estructura granular del campo dispersado y se estudia teórica y experimentalmente en el capítulo 6. Finalmente, en el capítulo 7, se discuten las contribuciones de este trabajo.

Descripción Estadística de Superficies Rugosas Aleatorias

En este capítulo se presentan las definiciones de algunos parámetros que caracterizan a una superficie rugosa que se utilizan en este trabajo y también una breve reseña de algunos métodos para medirlos.

2.1 Definición de parámetros y funciones

La rugosidad de una superficie puede tomar varias formas. A menudo consiste en delgadas rayas en direcciones aleatorias, como resultado de algún pulido; puede tener también una estructura acanalada producida por algún maquinado; o puede tener una estructura granular, entre otras. A pesar de la variedad de formas, se pueden establecer algunos parámetros generales que tendrán mayor o menor utilidad, dependiendo de las características geométricas de la superficie.

Se representará a la superficie mediante la función $h(x, y)$, en donde h es la altura de la superficie en el punto (x, y) y debido a que no es posible conocer esta función en forma exacta, se supondrá que es una función muestral de un proceso aleatorio, descrito en un punto (x, y) por la función densidad de probabilidad $p(h(x, y))$, donde $p(h(x, y))dh$ es la probabilidad de que la altura en el punto (x, y) esté entre h y $h + dh$.

El parámetro más importante y más utilizado en la caracterización de superficies rugosas es σ , la desviación cuadrática media de las alturas, llamado también (debido a su importancia) “rugosidad”. Formalmente, la definición es

$$\sigma = \sqrt{\langle h^2 - \langle h \rangle^2 \rangle} = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} (h^2 - \langle h \rangle^2) p(h) dh.} \quad (2.1)$$

Es habitual suponer que la distribución de alturas es gaussiana

$$p(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{h^2}{2\sigma^2}\right), \quad (2.2)$$

una suposición que no se cumple en muchos casos, como por ejemplo en superficies torneadas. Sin embargo, aquellas superficies con un perfil que es el resultado de un gran número de eventos locales en toda la superficie, debido al teorema central del límite, debe tener una distribución gaussiana. Otra suposición que se hace en general al estudiar la dispersión de luz por superficies rugosas es que las superficies en cuestión son ergódicas, esto es que una superficie muestral es representativa de todo el ensemble que forma el proceso aleatorio. Esto implica que los valores medios de cualquier función de las alturas calculados sobre el ensemble son iguales a los valores medios sobre la superficie. Para el caso de la rugosidad, se tiene que para un proceso ergódico, (2.1) es equivalente a

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{A} \iint_A [h^2(x, y) - \langle h(x, y) \rangle]^2 dx dy}, \quad (2.3)$$

Al caracterizar la superficie, uno hace un relevamiento discreto, de modo que el valor medido de σ se computa mediante

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{j=1}^N [h^2(x_j, y_j) - \langle h(x_j, y_j) \rangle]^2}. \quad (2.4)$$

El llamado coeficiente de autocorrelación de la superficie es también de particular interés, pues da información de la estructura lateral de la superficie, es decir, cómo están correlacionadas las alturas en dos puntos distintos $(x_1, y_1, h(x_1, y_1))$ y $(x_2, y_2, h(x_2, y_2))$ sobre la superficie.

$$\gamma_h(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{\langle [h(x_1, y_1) - \langle h(x_1, y_1) \rangle] [h(x_2, y_2) - \langle h(x_2, y_2) \rangle] \rangle}{\sigma^2}. \quad (2.5)$$

Si la superficie es estacionaria esta función depende sólo de la diferencia de las coordenadas. Si además es isotrópica, dependerá sólo del módulo de la diferencia, esto es $\gamma_h(x_1, y_1, x_2, y_2) = \gamma_h(\tau)$, donde $\tau = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$ es la distancia entre las proyecciones de los dos puntos sobre el plano medio de la superficie. Este coeficiente vale 1 cuando $\tau = 0$ y es usualmente una función decreciente en τ . Las teorías de

dispersión de ondas electromagnéticas por superficies rugosas, a menudo suponen un coeficiente de correlación gaussiano

$$\gamma_h(\tau) = \exp(-\tau^2/l'^2), \quad (2.6)$$

en donde al parámetro l' se lo llama longitud de correlación.

Es posible demostrar que la distribución de pendientes $p(h')$ de una distribución de alturas gaussiana, con coeficiente de correlación gaussiano, es también gaussiana^[22],

$$p(h') = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma'} \exp\left(-\frac{h'^2}{2\sigma'^2}\right), \quad (2.7)$$

con $\sigma' = \sqrt{2}\sigma/l'$.

Por último se definirán dos funciones de utilidad, la función característica de la superficie, que es la transformada de Fourier de la función densidad de probabilidad

$$\chi(s) = \int_{-\infty}^{\infty} p(h) \exp(ish) dh, \quad (2.8)$$

y la función característica bidimensional, que para una superficie isótropa y estac está dada por

$$\chi_2(s_1, s_2, \tau) = \int_{-\infty}^{\infty} p(h_1, h_2, \tau) \exp[i(s_1 h_1 + s_2 h_2)] dh_1 dh_2 \quad (2.9)$$

en donde, por razones de brevedad, h_1 y h_2 representan las alturas en dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) separados por una distancia τ . s_1 y s_2 tiene unidades de frecuencias espaciales.

2.2 Métodos de medición

Los métodos de medición de los parámetros que caracterizan a las superficies rugosas se pueden clasificar en dos grandes grupos: los métodos electromecánicos y los métodos ópticos.

2.2.1 Métodos mecánicos

Los métodos electromecánicos constan de una punta sensora que se desplaza en una

dirección, palpando la superficie en estudio. Transforma las variaciones mecánicas producidas por la superficie en variaciones de tensión eléctrica. Éstas son amplificadas y registradas. Un filtrado adecuado permite separar las imperfecciones de altas y bajas frecuencias, es decir, separa las ondulaciones de la rugosidad.

La precisión es del orden del 10%. Las limitaciones están dadas por

1. El radio de curvatura del extremo de la punta sensora, que provoca un filtrado mecánico pasabajos, recortando las variaciones de alta frecuencia.
2. La zona de evaluación, dado que la medición se realiza sobre una línea de corta longitud $\cong 1 \text{ cm}$.
3. Las características del amplificador y del filtrado utilizado.

El inconveniente principal de este método es el contacto material entre la punta de palpar y la superficie que, dependiendo del material, puede deteriorar la muestra. Una limitación fundamental es que no es posible realizar un relevamiento en superficies curvas pequeñas, como en el caso de superficies de alambres.

Este método es ideal para tener un relevamiento digitalizado de la superficie y a partir de él, calcular casi cualquier propiedad estadística que se requiera.

2.2.2 Métodos ópticos

Los métodos ópticos tienen la ventaja de que no existe contacto entre la superficie a medir y el aparato de medida. Algunos de ellos son

1. Microscopios:

Permiten observar con mucha precisión casi cualquier superficie. Las desventajas son que se requiere habitualmente una preparación especial de la superficie y que la zona relevada es pequeña.

2. Interferómetros:

El método es adecuado para superficies cuya rugosidad es inferior a la longitud de onda empleada y cuya longitud de correlación es grande.

3. Métodos fotométricos:

Están basados en el estudio de la luz difundida y reflejada especularmente por una

superficie rugosa. Se pueden medir rugosidades de hasta $3\mu m$, con muy buena precisión. Para rugosidades grandes se puede medir el cociente σ/T .

4. Métodos de speckles:

Existen numerosos métodos para obtener información de la rugosidad a partir del estudio del speckle. Unos basados en el contraste del speckle, otros en la correlación entre dos figuras de speckle obtenidas con una leve diferencia en las condiciones de iluminación (2 longitudes de onda, 2 ángulos de incidencia). Los métodos de correlación de speckles permiten medir rugosidades entre $1\mu m$ y $30\mu m$ aproximadamente.

Capítulo 3

Descripción Estadística de la Luz Dispersada por Superficies Rugosas Aleatorias Planas

La intención de este capítulo es introducir las características estadísticas elementales de la luz coherente dispersada por superficies rugosas y por supuesto no pretende ser original. Se puede encontrar mucha más información y en más detalle acerca de este tema en libro de Goodman^[23]. Aquí sólo se presentarán aquellas que serán de utilidad en el resto del trabajo, en particular la estadística de segundo orden, que para el caso de una superficie cilíndrica rugosa se analizará con más precisión en el capítulo 6.

La utilización del láser, ya desde su aparición, reveló la existencia de un nuevo fenómeno: los objetos iluminados con luz altamente coherente adquieren una peculiar apariencia granular. La estructura de esta granularidad (ver figura 1) no parece guardar ninguna relación obvia con las propiedades microscópicas del objeto iluminado, sino que tiene una apariencia caótica.

Esta granularidad está asociada a que varias superficies son rugosas en la escala de las longitudes de onda ópticas, como se ha notado en las primeras observaciones de este fenómeno^[24,25]. Cuando se ilumina con luz monocromática, la onda reflejada por la superficie (o transmitida en el caso de materiales translúcidos), consiste en una superposición de contribuciones provenientes de diferentes elementos microscópicos de la superficie (ver figura 2). Las distancias recorridas por estas contribuciones difieren en varias longitudes de onda y, por lo tanto, sus fases en el punto de observación, están distribuidas en forma aleatoria. La interferencia de estas onditas desfasadas pero coherentes da lugar a la figura granular de intensidad que se conoce por su nombre en inglés "speckle". Si se mueve el punto de observación, las distancias recorridas por las distintas componentes dispersadas cambia, y observamos un nuevo valor de

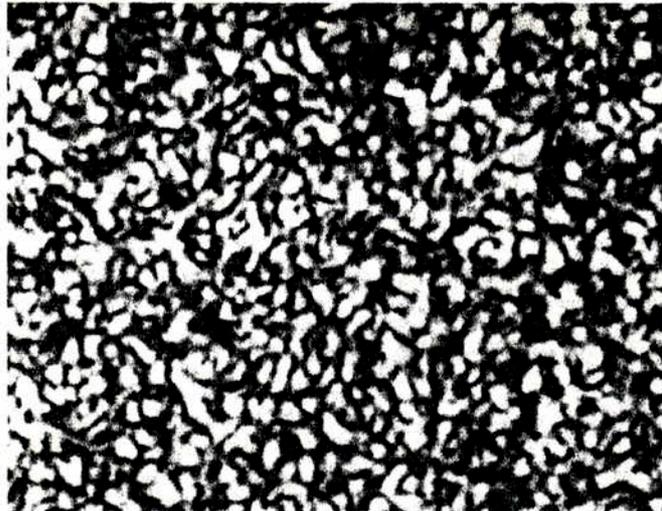


Figura 1: Imagen de luz coherente dispersada por una superficie rugosa. "Speckle".

intensidad distinto del anterior. Por lo tanto la figura de speckle consiste en una multitud de pequeñas manchas brillantes y oscuras (donde la interferencia ha sido altamente constructiva y destructiva respectivamente), además de todos los niveles medios de intensidad.

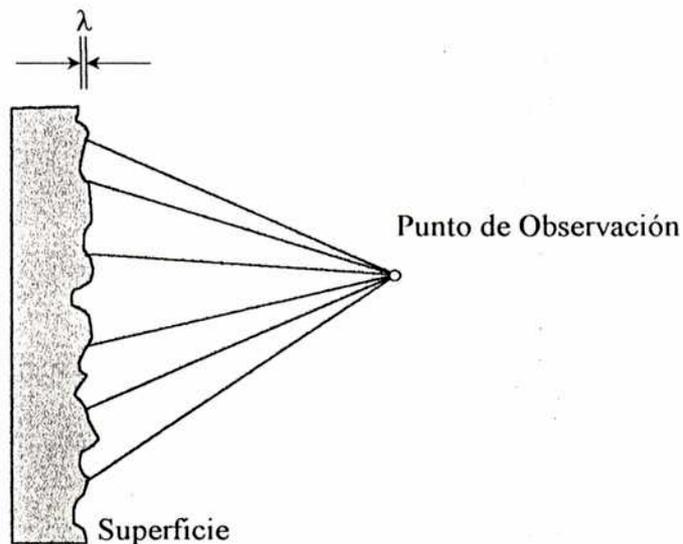


Figura 2: Formación del speckle en una propagación libre

Inicialmente se lo enfrentó como un ruido, un adversario de la holografía, tratando

de reducir sus efectos problemáticos, semejantes al ruido en una señal. Sin embargo, el speckle tiene una categoría especial entre los fenómenos de ruido, porque no es en realidad un ruido, sino información no siempre descada. Hay diversas maneras de hacer algún uso de esta información para obtener conocimiento de muchas propiedades de la superficie iluminada, como la rugosidad, longitud de correlación, deformaciones, desplazamientos, rotaciones, tensiones y vibraciones, entre otras.

En la primer sección se analizará las propiedades estadísticas de primer orden de la intensidad (esto es, en un punto del espacio) y luego las propiedades estadísticas conjuntas en dos puntos (segundo orden). En todos los casos se considerará que las ondas involucradas son monocromáticas y que están polarizadas linealmente.

3.1 Estadística de primer orden

Se llamará $\varepsilon(x, y, z, t) = \varepsilon(\bar{r}, t)$ a la componente del campo eléctrico de la onda electromagnética solución de las ecuaciones de Maxwell en la dirección de polarización en el punto de observación (x, y, z) y en el instante t . Si se trata de una onda monocromática, se puede escribir

$$\varepsilon(x, y, z, t) = E(x, y, z) \exp(-i\omega t), \quad (3.1)$$

donde $\omega/2\pi$ es la frecuencia y $E(x, y, z)$ es una función compleja de la posición

$$E(x, y, z) = |E(x, y, z)| \exp[i\phi(x, y, z)]. \quad (3.2)$$

La intensidad está dada por

$$I(x, y, a) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} |\varepsilon(x, y, z)|^2 dt = |E(x, y, z)|^2. \quad (3.3)$$

Ya sea que la figura de speckle provenga de la propagación a través del espacio libre (como se muestra en la figura 2) o de un sistema formador de imágenes (que no resuelva la estructura de la superficie), la amplitud del campo eléctrico en un punto de observación dado consistirá en una multitud de contribuciones desfasadas provenientes de distintas regiones de la superficie rugosa. Luego, la amplitud $E(x, y, z)$, también

llamada fasor, se puede representar como una suma de contribuciones elementales

$$E(x, y, z) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} a_k(x, y, z) = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} |a_k(x, y, z)| \exp[i\phi_k(x, y, z)]. \quad (3.4)$$

Se busca conocer la estadística (en general, las funciones de densidad de probabilidad) del campo, de la fase y de la intensidad de la figura de speckle en un punto (x, y, z) cualquiera. Este problema es idéntico al problema estadístico clásico del paseo al azar (random walk) en el plano, que ha sido estudiado por más de 100 años^[26]. Se derivarán en esta sección solamente los resultados que sean de utilidad para el resto del trabajo. Para ello, se realizarán las siguientes suposiciones

1. Las amplitudes $a_k(x, y, z)/\sqrt{N}$ y las fases ϕ_k de las contribuciones elementales son estadísticamente independientes entre sí y de las amplitudes y fases de todas las otras contribuciones. Esto implica que las regiones difusoras elementales no están relacionadas entre sí y la intensidad de cada componente (que está asociada a la reflectividad o la transmisividad local del punto de la superficie de donde proviene) no guarda ninguna relación con su fase (que está asociada a la altura del punto de la superficie de donde proviene).
2. Las fases ϕ_k están uniformemente distribuidas en un intervalo de longitud 2π , que significa que la superficie es rugosa comparada con la longitud de onda, de modo que las excursiones de fase de varias veces 2π , producen una distribución uniforme en el intervalo $(-\pi, \pi)$.

Con estas suposiciones, se investigarán las propiedades estadísticas del campo resultante.

3.1.1 Estadística de la amplitud compleja

Se designarán a las partes real e imaginaria del campo resultante del siguiente modo

$$\begin{aligned} E^r(x, y, z) &\equiv \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} |a_k(x, y, z)| \cos[\phi_k(x, y, z)] \\ E^i(x, y, z) &\equiv \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} |a_k(x, y, z)| \sin[\phi_k(x, y, z)]. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Los valores promedios de estas cantidades realizados sobre el ensemble de superficies rugosas son (se omitirá a partir de ahora la expresión explícita de la dependencia espacial)

$$\begin{aligned}\langle E^r \rangle &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} \langle |a_k| \cos(\phi_k) \rangle = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} \langle |a_k| \rangle \langle \cos(\phi_k) \rangle = 0 \\ \langle E^i \rangle &= \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} \langle |a_k| \sin(\phi_k) \rangle = \sum_{k=1}^N \frac{1}{\sqrt{N}} \langle |a_k| \rangle \langle \sin(\phi_k) \rangle = 0,\end{aligned}\quad (3.6)$$

en donde se ha utilizado la primera de las dos hipótesis hechas para promediar separadamente las fases y amplitudes, y la segunda para decir que $\langle \cos(\phi_k) \rangle = \langle \sin(\phi_k) \rangle = 0$. Procediendo de manera similar se puede obtener

$$\begin{aligned}\langle (E^r)^2 \rangle &= \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \langle |a_k| |a_l| \rangle \langle \cos(\phi_k) \cos(\phi_l) \rangle = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \frac{\langle |a_k|^2 \rangle}{2} \\ \langle (E^i)^2 \rangle &= \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \langle |a_k| |a_l| \rangle \langle \sin(\phi_k) \sin(\phi_l) \rangle = \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \frac{\langle |a_k|^2 \rangle}{2} \\ \langle E^r E^i \rangle &= \sum_{l=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \langle |a_k| |a_l| \rangle \langle \sin(\phi_k) \cos(\phi_l) \rangle = 0,\end{aligned}\quad (3.7)$$

en las que se ha utilizado el hecho de que para fases independientes y uniformemente distribuidas en $(-\pi, \pi)$ vale

$$\begin{aligned}\langle \cos(\phi_k) \cos(\phi_l) \rangle &= \langle \sin(\phi_k) \sin(\phi_l) \rangle = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = l \\ 0 & k \neq l \end{cases} \\ \langle \sin(\phi_k) \cos(\phi_l) \rangle &= 0.\end{aligned}\quad (3.8)$$

Se ve entonces que las partes real e imaginaria del campo complejo tienen media cero, varianzas idénticas y no están correlacionadas. Si el número N de contribuciones es suficientemente grande, debido al teorema central del límite, E^r y E^i son en una muy buena aproximación gaussianas. Teniendo en cuenta esto y además (3.6) y (3.7), la función densidad de probabilidad conjunta de las partes real e imaginaria del campo queda totalmente determinada

$$p_{E^r E^i}(E^r, E^i) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left[-\frac{(E^r)^2 + (E^i)^2}{2\sigma^2}\right], \quad (3.9)$$

donde

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N \frac{1}{N} \frac{\langle |a_k|^2 \rangle}{2}. \quad (3.10)$$

Las funciones densidad de probabilidad de este tipo se conocen como gaussianas circulares, ya que los contornos de densidad de probabilidad constante son circunferencias en el plano complejo. De acuerdo a esto, el fasor E se conoce como variable aleatoria compleja circular gaussiana.

3.1.2 Estadística de la intensidad y la fase

En la mayoría de los experimentos que involucren radiación en la región visible del espectro electromagnético, la magnitud que se mide es la intensidad de la onda. Por esta causa, se busca obtener las propiedades estadísticas de la intensidad en una figura de speckle a partir de la estadística del campo. Como resultado de este análisis, se obtendrán también las propiedades estadísticas de la fase.

La intensidad y la fase del campo resultante están relacionadas con las partes real e imaginaria del campo por la transformación

$$\begin{aligned} E^r &= \sqrt{I} \cos \phi \\ E^i &= \sqrt{I} \sin \phi, \end{aligned} \quad (3.11)$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} I &= (E^r)^2 + (E^i)^2 \\ \phi &= \tan^{-1} \left(\frac{E^i}{E^r} \right). \end{aligned} \quad (3.12)$$

Para obtener la función densidad de probabilidad conjunta de I y ϕ , se aplican las técnicas habituales de transformación de variables aleatorias, es decir

$$p_{I\phi}(I, \phi) = p_{E^r E^i}(\sqrt{I} \cos \phi, \sqrt{I} \sin \phi) \|J\|, \quad (3.13)$$

donde $\|J\|$ es el Jacobiano de la transformación

$$\|J\| = \left\| \begin{array}{cc} \frac{\partial E^r}{\partial I} & \frac{\partial E^r}{\partial \phi} \\ \frac{\partial E^i}{\partial I} & \frac{\partial E^i}{\partial \phi} \end{array} \right\| = \frac{1}{2}. \quad (3.14)$$

Por lo tanto se tiene

$$p_{I\phi}(I, \phi) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right) & I \geq 0, -\pi \leq \phi \leq \pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.15)$$

Las funciones densidad de probabilidad marginales se obtienen haciendo

$$p_I(I) = \int_{-\pi}^{\pi} p_{I\phi}(I, \phi) d\phi = \begin{cases} \frac{1}{2\sigma^2} \exp\left(-\frac{I}{2\sigma^2}\right) & I \geq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.16)$$

Del mismo modo, la función densidad marginal de la fase es

$$p_\phi(\phi) = \int_0^{\infty} p_{I\phi}(I, \phi) dI = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & -\pi \leq \phi \leq \pi \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (3.17)$$

Se ve que la intensidad en un punto cualquiera en una figura de speckle polarizado, obedece una estadística exponencial negativa. Además, se nota que se cumple

$$p_{I\phi}(I, \phi) = p_\phi(\phi) p_I(I), \quad (3.18)$$

es decir que la intensidad y la fase son estadísticamente independiente en todo punto. Se puede calcular, ahora que se tiene la distribución, cualquier momento, en particular para la varianza se tiene

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= 2\sigma^2 \\ \langle I^2 \rangle &= 2\langle I \rangle^2 \\ \sigma_I^2 &= \langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2 = \langle I \rangle^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Una medida razonable del contraste del speckle es el cociente

$$C = \frac{\sigma_I}{\langle I \rangle}, \quad (3.20)$$

que para el caso particular que se está considerando (speckle polarizado completamente desarrollado) es siempre igual a 1. Finalmente, la función característica de esta distribución es

$$\chi_I(\omega) = \langle \exp(i\omega I) \rangle = \int_0^{\infty} \exp(i\omega I) p_I(I) dI = \frac{1}{1 - i\omega \langle I \rangle}. \quad (3.21)$$

3.2 Estadística de segundo orden

Se estudiarán ahora las propiedades estadísticas de segundo orden del speckle, esto es el grado de correlación que hay entre las intensidades en dos puntos distintos del espacio.

3.2.1 Función de autocorrelación

Se considerará la propagación en el espacio libre que se mostró en la figura 2, describiremos al plano de la superficie con las coordenadas (ξ, η) y al plano de observación con las coordenadas (x, y) , tal como se muestra en la figura 3. Sobre la superficie rugosa incide un haz monocromático, y la luz dispersada se observa a cierta distancia sin intervención de elementos ópticos. El campo sobre la superficie será descrito por la función $I(\xi, \eta)$, que representa una de sus componentes. La otra componente puede ser tratada en primera aproximación de forma independiente de manera idéntica. El campo $I(x, y)$ observado en un plano paralelo al plano (ξ, η) y a una distancia arbitraria z de él, es el campo de interés.

La función de autocorrelación de intensidades es la cantidad de interés

$$\Gamma_I(x_1, y_1, x_2, y_2) = \langle I(x_1, y_1) I(x_2, y_2) \rangle, \quad (3.22)$$

donde el símbolo $\langle \rangle$ implica como siempre el promedio sobre el ensemble de superficies rugosas. El tamaño de esta función de autocorrelación provee una medida razonable del ancho promedio del speckle. Para calcular esta función dada por (3.22), se supondrá que la superficie es rugosa comparada con la longitud de onda. Como se vio en la primera sección, esto da como resultado que el campo $I(x, y)$ es una variable aleatoria compleja

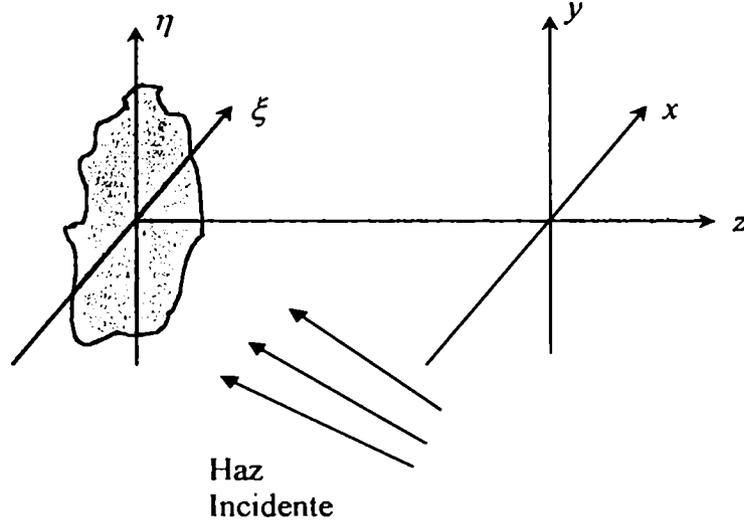


Figura 3: Sistema de coordenadas elegido para representar la geometría de propagación libre del speckle.

circular gaussiana en cada punto (x, y) . Para tales campos, la función de autocorrelación de intensidades puede ser representada en términos de la autocorrelación de los campos de manera sencilla. Esta autocorrelación de los campos será representada con la función

$$\mathbf{J}_E(x_1, y_1, x_2, y_2) = \langle E(x_1, y_1) E^*(x_2, y_2) \rangle, \quad (3.23)$$

y es conocida en la terminología habitual de la teoría de coherencia como intensidad mutua. Para campos circulares gaussianos, la relación entre (3.22) y (3.23) es

$$\Gamma_I(x_1, y_1, x_2, y_2) = \langle I(x_1, y_1) \rangle \langle I(x_2, y_2) \rangle + |\mathbf{J}_E(x_1, y_1, x_2, y_2)|^2. \quad (3.24)$$

Por lo tanto, el problema de calcular Γ_I se reduce a calcular la expresión más sencilla de \mathbf{J}_E dada por (3.23).

Se puede expresar el campo $E(x, y)$ en función del campo $E(\xi, \eta)$ sobre la superficie difusora. La relación está dada, en la aproximación de Fresnel^[27], por

$$E(x, y) = \frac{1}{\lambda z} \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda z} (x^2 + y^2) \right] \iint E(\xi, \eta) \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda z} (\xi^2 + \eta^2) \right] \times \exp \left[\frac{2\pi i}{\lambda z} (x\xi + y\eta) \right] d\xi d\eta, \quad (3.25)$$

de modo que la expresión para la intensidad mutua en el plano de observación es

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_E(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \langle I(x_1, y_1) I^*(x_2, y_2) \rangle = \\
&= \frac{1}{\lambda^2 z^2} \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda z} (x_1^2 - x_2^2 + y_1^2 - y_2^2) \right] \iiint \iiint \mathbf{J}_E(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \times \\
&\quad \times \exp \left[-i \frac{\pi}{\lambda z} (\xi_1^2 - \xi_2^2 + \eta_1^2 - \eta_2^2) \right] \times \\
&\quad \times \exp \left[\frac{2\pi i}{\lambda z} (x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2 + y_1 \eta_1 - y_2 \eta_2) \right] d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2, \quad (3.26)
\end{aligned}$$

Se dejará de lado el factor exponencial inicial, pues el interés reside en el módulo de \mathbf{J}_E . Se supondrá por ahora que la estructura de la superficie es tan fina que no se puede resolver desde la región de observación, en tal caso, se puede aproximar el valor medio dentro de la integral (3.26) del siguiente modo

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_E(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) &= \langle I(\xi_1, \eta_1) I^*(\xi_2, \eta_2) \rangle \\
&\cong \kappa I(\xi_1, \eta_1) I^*(\xi_2, \eta_2) \delta(\xi_1 - \xi_2 + \eta_1 - \eta_2), \quad (3.27)
\end{aligned}$$

donde κ es una constante de proporcionalidad y δ es la función delta de Dirac. Esto significa que \mathbf{J}_E es proporcional a la intensidad incidente cuando $(\xi_1, \eta_1) = (\xi_2, \eta_2)$ y nula cuando $(\xi_1, \eta_1) \neq (\xi_2, \eta_2)$. Reemplazando (3.27) en (3.26), dejando de lado como se dijo el factor exponencial imaginario e integrando, se obtiene

$$\mathbf{J}_E(x_1, y_1, x_2, y_2) = \frac{\kappa}{\lambda^2 z^2} \iint |I(\xi_1, \eta_1)|^2 \exp \left\{ \frac{2\pi i}{\lambda z} [\xi_1 (x_1 - x_2) + \eta_1 (y_1 - y_2)] \right\} d\xi_1 d\eta_1. \quad (3.28)$$

Se ve que la intensidad mutua de los campos observados depende sólo de las diferencias de coordenadas y está dada, a menos de constantes multiplicativas, por la transformada de Fourier de la distribución de intensidades $|I(\xi_1, \eta_1)|^2$ sobre la superficie difusora.

Reemplazando (3.28) en (3.24), y utilizando el resultado de la sección 1.2, que $\langle I \rangle$ es independiente del punto de observación, se tiene que

$$\Gamma_I(\Delta x, \Delta y) = \langle I \rangle^2 + \frac{\kappa}{\lambda^2 z^2} \left| \mathcal{F} \left[|I(\xi_1, \eta_1)|^2 \right] \right|^2. \quad (3.29)$$

Si se tiene una iluminación uniforme sobre una región limitada del espacio (por ejemplo con una pupila), el tamaño medio del grano de speckle generado será la transformada de Fourier del área iluminada.

3.2.2 Efecto de la estructura de la superficie sobre el speckle

Se considerará ahora el efecto de la estructura de la superficie en la función de autocorrelación \mathbf{J}_E . La geometría será la misma que en la figura 3, pero con la salvedad de que el plano de observación está ahora lo suficientemente lejos como para que sea válida la aproximación de Fraunhofer. En este caso, se puede despreciar el factor cuadrático de fase en (3.26), obteniéndose

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_E(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \frac{1}{\lambda^2 z^2} \iiint \iiint \mathbf{J}_E(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \times \\ &\times \exp \left[\frac{2\pi i}{\lambda z} (x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2 + y_1 \eta_1 - y_2 \eta_2) \right] d\xi_1 d\eta_1 d\xi_2 d\eta_2 \end{aligned} \quad (3.30)$$

La diferencia con el cálculo de la sección anterior es que se necesita una aproximación diferente de \mathbf{J}_E . Se utilizará la siguiente notación

$$\begin{aligned} \Delta x &= x_1 - x_2, & \Delta y &= y_1 - y_2; \\ \Delta \xi &= \xi_1 - \xi_2, & \Delta \eta &= \eta_1 - \eta_2; \end{aligned} \quad (3.31)$$

observando que vale

$$x_1 \xi_1 - x_2 \xi_2 + y_1 \eta_1 - y_2 \eta_2 = x_2 \Delta \xi + y_2 \Delta \eta + \xi_1 \Delta x + \eta_1 \Delta y. \quad (3.32)$$

Se supondrá además que la intensidad mutua sobre la superficie difusora es de la forma

$$\mathbf{J}_E(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) = \kappa I(\xi_1, \eta_1) I^*(\xi_2, \eta_2) \mu(\Delta \xi, \Delta \eta), \quad (3.33)$$

donde μ es el factor de coherencia complejo, definido como

$$\mu(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \equiv \frac{\mathbf{J}_E(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)}{|\mathbf{J}_E(\xi_1, \eta_1, \xi_1, \eta_1) \mathbf{J}_E(\xi_2, \eta_2, \xi_2, \eta_2)|^{1/2}} = \frac{\mathbf{J}_E(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2)}{\langle I \rangle}. \quad (3.34)$$

Es habitual que la estructura de los campos incidentes es mucho más extensa que la estructura del factor de coherencia complejo, que es del orden de la estructura de la superficie, se puede por lo tanto tomar en una muy buena aproximación

$$\mathbf{J}_E(\xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2) \cong \kappa |I(\xi_1, \eta_1)|^2 \mu(\Delta \xi, \Delta \eta). \quad (3.35)$$

Sustituyendo esta expresión y (3.32) en (3.30),

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_E(x_1, y_1, x_2, y_2) &= \frac{\kappa}{\lambda^2 z^2} \iint |U(\xi_1, \eta_1)|^2 \exp \left[\frac{2\pi i}{\lambda z} (\xi_1 \Delta x + \eta_1 \Delta y) \right] d\xi_1 d\eta_1 \times \\ &\times \iint \mu(\Delta\xi, \Delta\eta) \exp \left[\frac{2\pi i}{\lambda z} (x_2 \Delta\xi + y_2 \Delta\eta) \right] d\Delta\xi d\Delta\eta. \quad (3.36) \end{aligned}$$

Este resultado es de gran importancia, porque separa los efectos del tamaño finito de la zona iluminada (la integral que lleva el factor $|U(\xi_1, \eta_1)|^2$) de los efectos debidos a las propiedades de correlación de la onda dispersada (la integral que lleva el factor $\mu(\Delta\xi, \Delta\eta)$). Como el tamaño de la zona iluminada es habitualmente mucho mayor que el área de coherencia de la onda dispersada, la primera transformada de Fourier da una función angosta de $(\Delta x, \Delta y)$, que representa el tamaño promedio del speckle. La segunda integral, por otro lado, da una función ancha de (x_2, y_2) , y se puede ver como la distribución media de las intensidades en el plano (x, y) .

Se concluye que, si se cumplen las hipótesis hechas en la deducción, la estructura de la superficie influye sólo en la distribución promedio de la intensidad dispersada sobre el plano de observación y no influye en su granularidad. Se verá que este resultado no es válido para el caso de superficies curvas con rugosidad aleatoria, en el capítulo 6.

$$\text{vector } \underline{k} = \frac{\lambda}{2\pi} (\sin \theta \cos \phi, \sin \theta \sin \phi, \cos \theta).$$

En la figura 4 se presenta el esquema que se utilizará en ambos modelos para describir la difracción de luz. El sistema de coordenadas se elige de modo que el eje z coincida con el eje de simetría del cilindro. Una onda plana monocromática polarizada con ángulo de incidencia α y vector de onda $\underline{k}_i = \frac{\lambda}{2\pi} (-\sin \alpha, 0, \cos \alpha)$ incide sobre la superficie que se describe mediante la función $\rho = h(\varphi, z)$ en donde ρ , φ y z son las coordenadas cilíndricas habituales (ver figura 5). Se describirá la amplitud del campo dispersado h' como función de la dirección (θ, ϕ) en coordenadas esféricas, es decir mediante el

La causa de estas ventajas y desventajas. Las simplificaciones y suposiciones que se realizan en estos modelos son evidentemente que se tiene una dependencia funcional con los parámetros que se necesitan determinar. Analíticas que son extremadamente útiles para la caracterización de materiales, puesto que la onda incidente, pero, por otro lado, tienen la ventaja de proveer expresiones (backscattering) o, aún más elemental, el problema de qué pasa con la polarización importantes como por ejemplo el de generación de armónicos o el de retrodispersión continua, tienen, por un lado, la desventaja de no dar cuenta de algunos efectos como la teoría escalar de la difracción y el modelo geométrico que se describirán a lo mismo sucede en superficies rugosas planas. Los tratamientos más elementales. Iso infinito. Prácticamente toda otra situación debe ser resuelta numéricamente. tratamiento no tiene solución analítica salvo en el caso particular de un cilindro de contorno adecuadas al material que constituye el cilindro. Lamentablemente este rigurosa de tratar este problema es utilizar un modelo vectorial, con las condiciones luz por una superficie cilíndrica rugosa. Como se aclaró en la introducción, la manera En este capítulo se aplican dos descripciones teóricas para describir la dispersión de

Descripción Teórica

Capítulo 4

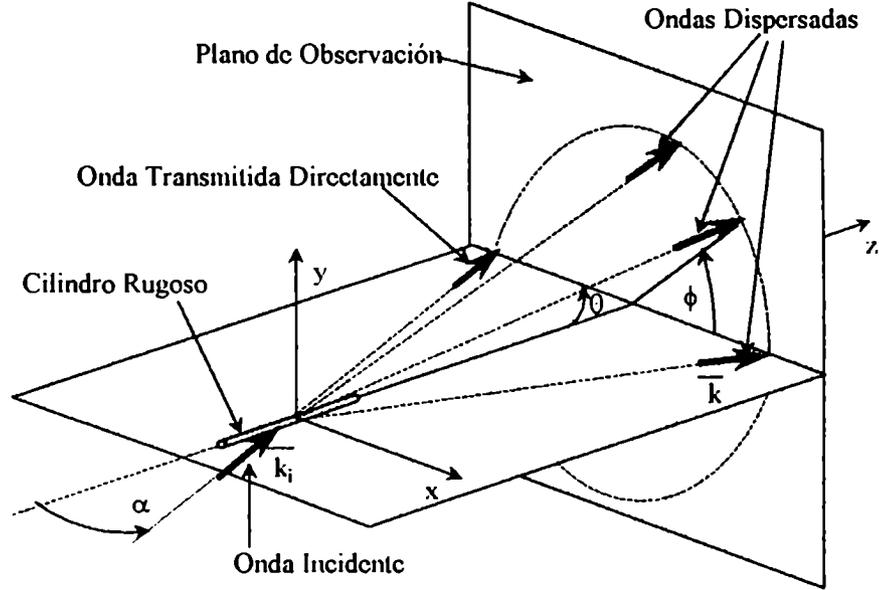


Figura 4: Notación utilizada para describir la dispersión de luz por una superficie cilíndrica. Una onda plana representada por el vector \vec{k}_i incide sobre el cilindro rugoso. Las ondas dispersadas están representadas por el vector \vec{k} o también por la dirección (θ, ϕ) , las coordenadas angulares esféricas habituales, cada una de las cuales determina un punto sobre el plano de observación en el campo lejano. La circunferencia punteada corresponde a $\theta = \alpha$.

4.1 Tratamiento Escalar

Para encontrar el campo $E(\theta, \phi)$ en este modelo, se parte de la integral de Helmholtz.

$$E(R_0, \theta, \phi) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left(E \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial E}{\partial n} \right) dS \quad (4.1)$$

en donde R_0 es la distancia desde el origen de coordenadas hasta el punto de observación y G es la función de Green que se elige como

$$G = \frac{\exp(ikR)}{R} \quad (4.2)$$

con R la distancia desde un punto arbitrario sobre la superficie hasta el punto de observación, de modo que $kR = kR_0 - \vec{k} \cdot \vec{r}$ siendo \vec{r} el vector que recorre la superficie de acuerdo con la figura 5. Se hizo, además, la suposición de que las distintas contribuciones al campo en cada dirección son colineales, es decir que el campo que fue dispersado en una dada dirección (θ, ϕ) (sin importar de qué lugar de la superficie

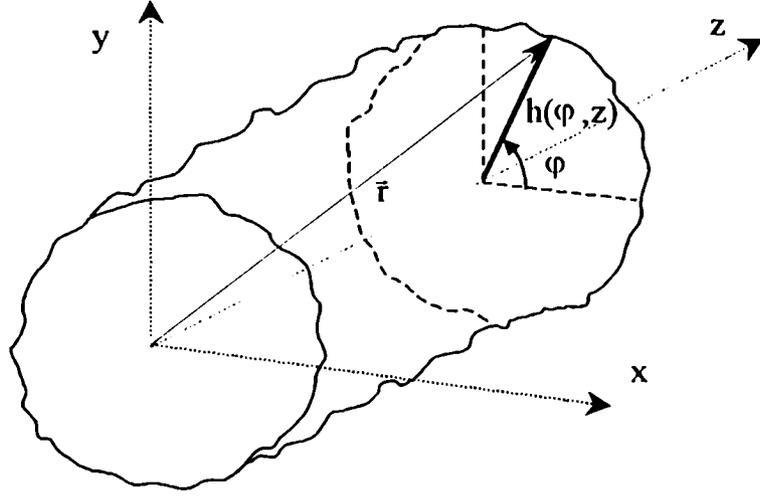


Figura 5: Nomenclatura elegida para describir la superficie cilíndrica rugosa. El vector $\vec{r} = (h(\varphi, z), \varphi, z)$ escrito en sus componentes en coordenadas cilíndricas termina sobre la superficie, que está descrita por la función $h(\varphi, z)$.

provino) tiene la misma polarización. Esta simplificación está basada en el siguiente razonamiento: La luz dispersada en una dada dirección (θ, ϕ) provendrá principalmente de elementos de superficie que tengan la misma pendiente y por lo tanto todas las contribuciones habrán cambiado su estado de polarización de la misma forma y serán aproximadamente colineales. Estas consideraciones son consistentes con la llamada aproximación de Kirchhoff que se hará a continuación.

Los valores exactos de E y $\partial E/\partial n$ son en general desconocidos, por lo que se utilizará la aproximación de Kirchhoff para evaluar estas dos cantidades sobre la superficie. Se tomará el campo en cualquier punto de la superficie igual al campo que estaría presente si la interfase fuera un plano tangente a la superficie en ese punto y se tomará igual a cero (el campo y la derivada) fuera de la zona iluminada. De este modo queda

$$\begin{aligned} E|_S &= (1 + \mathfrak{R})E_i|_S \\ \frac{\partial E}{\partial n}\Big|_S &= i(1 - \mathfrak{R})E_i|_S \bar{k}_i \cdot \bar{n} \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde E_i es el campo incidente sobre la superficie, \bar{n} la normal a la superficie y se ha considerado $E_i = E_0 \exp(i\bar{k}_i \cdot \vec{r})$ como una onda plana. E_0 es una constante y \mathfrak{R} es el coeficiente de reflexión local. Una manera alternativa de obtener los

valores E y $\partial E/\partial n$ sin utilizar la aproximación (4.3) es utilizando el teorema de extinción de Ewald-Oseen^[28]. Esta forma de calcular el campo y su derivada sobre la superficie contempla la posibilidad de reflexiones múltiples, que evidentemente quedan descartadas con la aproximación de Kirchhoff. El teorema de extinción fue aplicado al caso de superficies planas con rugosidades bajas comparadas con la longitud de onda incidente, obteniéndose un resultado en serie de potencias^[29].

La siguiente aproximación que se hará es tomar el módulo del coeficiente de reflexión local \mathfrak{R} que depende del material, de la polarización y del ángulo de incidencia local como constante. Esta es una buena aproximación para algunos metales y varios ángulos de incidencia para todos los fines prácticos que se abarcarán en este trabajo. Por ejemplo, en la figura 6, se muestran las reflectividades de la plata, que es el caso más favorable para esta aproximación, en función del ángulo de incidencia para polarización paralela y perpendicular.

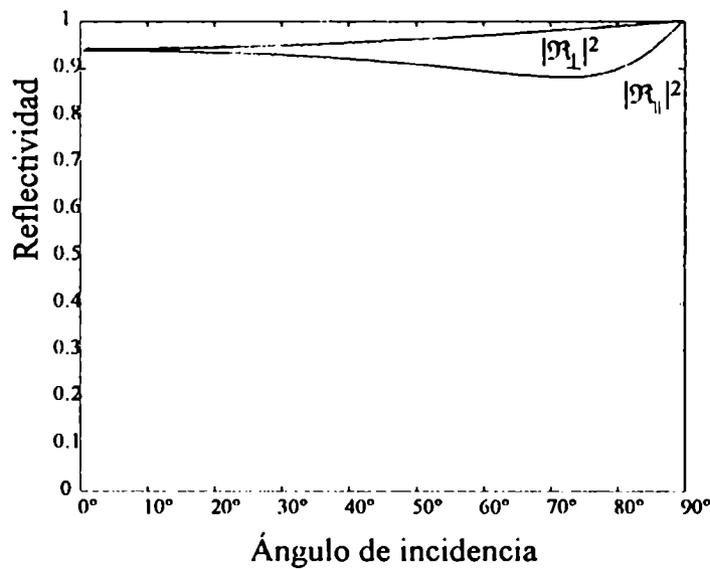


Figura 6: Coeficientes de reflexión para la plata en función del ángulo de incidencia, para polarizaciones paralela y perpendicular utilizando como longitud de onda incidente $\lambda = 0.6328 \mu m$.

Haciendo esta aproximación, es claro que el resultado final será, a menos de una constante multiplicativa, independiente del valor que tome \mathfrak{R} y se considerará por

lo tanto a partir de ahora $\Re = -1$, para simplificar las cuentas. La ecuación (4.1) queda entonces

$$\begin{aligned} E(R_0, \theta, \phi) &= \frac{-i}{2\pi} \iint_S \bar{k}_i \cdot \bar{n} G E_i|_S dS \\ &= \frac{-i E_0 \exp(ikR_0)}{2\pi R_0} \iint_S \bar{k}_i \cdot \bar{n} \exp[i(\bar{k}_i \cdot \bar{r} - \bar{k} \cdot \bar{r})] dS \end{aligned} \quad (4.4)$$

Ahora bien, se puede escribir $\bar{n} dS$ de la siguiente forma

$$\bar{n} dS = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \hat{\varphi} + \frac{\partial h}{\partial z} \hat{z} - \hat{\rho} \right) \rho d\varphi dz$$

y los vectores de onda incidente y dispersado con sus componentes en coordenadas cilíndricas

$$\begin{aligned} \bar{k}_i &= k(\cos \alpha \hat{z} + \sin \alpha \sin \varphi \hat{\varphi} - \sin \alpha \cos \varphi \hat{\rho}) \\ \bar{v} &= \bar{k}_i - \bar{k} = k[(\cos \alpha - \cos \theta) \hat{z} + (\sin \alpha \sin \varphi + \sin \theta \cos \phi \sin \varphi + \sin \theta \sin \phi \cos \varphi) \hat{\varphi} \\ &\quad - (\sin \alpha \cos \varphi + \sin \theta \cos \phi \cos \varphi + \sin \theta \sin \phi \sin \varphi) \hat{\rho}] \end{aligned} \quad (4.5)$$

Reemplazando esta expresión en (4.4), se obtiene

$$\begin{aligned} E(\theta, \phi) &= \frac{-i E_0 k \exp(ikR_0)}{2\pi R_0} \iint_{\varphi, z} \left[\frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin \alpha \sin \varphi + h \frac{\partial h}{\partial z} \cos \alpha + h \sin \alpha \cos \varphi \right] \times \\ &\quad \times \exp(i\bar{v} \cdot \bar{r}) d\varphi dz \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para resolver esta integral se reescribirá del siguiente modo

$$\begin{aligned} E(\theta, \phi) &= \frac{-i E_0 k \exp(ikR_0)}{2\pi R_0} \iint_{\varphi, z} \left[h \frac{\partial h}{\partial z} \cos \alpha + \frac{\partial(h \sin \varphi)}{\partial \varphi} \sin \alpha \right] \times \\ &\quad \times \exp[ik(cz + ah \cos \varphi + bh \sin \varphi)] d\varphi dz \end{aligned} \quad (4.7)$$

en donde a , b y c son funciones de los ángulos de dispersión, explícitamente

$$\begin{aligned} a &= -\sin \theta \cos \phi - \sin \alpha \\ b &= -\sin \theta \sin \phi \\ c &= \cos \alpha - \cos \theta \end{aligned} \quad (4.8)$$

Para tener una expresión más compacta y que pueda leerse con más facilidad, en las ecuaciones que se han escrito hasta ahora y en muchas de las que siguen se omitirán

habitualmente las dependencias funcionales de las variables, a menos que esta omisión produzca confusión o que se quiera resaltar alguna dependencia en particular. Por ejemplo $V(\theta, \phi)$ en vez de $V(\alpha, \theta, \phi)$, h por $h(\varphi, z)$ ó a en lugar de $a(\alpha, \phi, \theta)$.

Se tomará la siguiente notación para evaluar la integral (4.7): a la integral correspondiente al primer término dentro del corchete se la llamará I_1 y correspondientemente I_2 a la del segundo término, sin las constantes multiplicativas que están fuera. Haciendo así queda

$$V(\theta, \phi) \equiv \frac{-iV_0 k \exp(ikR_0)}{2\pi R_0} (I_1 + I_2) \quad (4.9)$$

La primer integral es

$$I_1 = \cos \alpha \iint_{\varphi, z} h \frac{\partial h}{\partial z} \exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi)) dz d\varphi \equiv \cos \alpha \int_{\varphi} I_{1z} d\varphi \quad (4.10)$$

en donde se han definido I_{1z} y $C(\varphi)$

$$\begin{aligned} I_{1z} &= \int_z h \frac{\partial h}{\partial z} \exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi)) dz \\ C(\varphi) &= a \cos \varphi + b \sin \varphi \end{aligned} \quad (4.11)$$

Integrando por partes I_{1z} , siendo $h \cdot \exp(ikcz)$ la función sin derivar, queda

$$\begin{aligned} I_{1z} &= \left. \frac{h \exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi))}{ikC(\varphi)} \right|_{-L/2}^{L/2} - \int_{-L/2}^{L/2} \left(ikch + \frac{\partial h}{\partial z} \right) \frac{\exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi))}{ikC(\varphi)} dz \\ &= \left. \frac{h \exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi))}{ikC(\varphi)} \right|_{-L/2}^{L/2} - \frac{1}{ikC(\varphi)} \left[\left. \frac{\exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi))}{ikC(\varphi)} \right|_{-L/2}^{L/2} - \right. \\ &\quad \left. - \int_{-L/2}^{L/2} \exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi)) \left(\frac{ikc}{ikC(\varphi)} - ikch \right) dz \right] \\ &= \frac{\exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi))}{ikC(\varphi)} \left[h - \frac{1}{ikC(\varphi)} \right] \Big|_{-L/2}^{L/2} - \\ &\quad - \frac{c}{C(\varphi)} \int_{-L/2}^{L/2} \exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi)) \left(h - \frac{1}{ikC(\varphi)} \right) dz \end{aligned} \quad (4.12)$$

En donde en la segunda línea de (4.12) se integró nuevamente por partes. Para integrar

I_2 se procede en forma similar.

$$I_2 = \sin \alpha \iint_{\varphi, z} \frac{\partial(h \sin \varphi)}{\partial \varphi} \exp(ikhC(\varphi)) d\varphi \exp(ikcz) dz \equiv \sin \alpha \int_z I_{2\varphi} \exp(ikcz) dz \quad (4.13)$$

con $I_{2\varphi}$ definido como

$$I_{2\varphi} = \int_{\varphi} \frac{\partial(h \sin \varphi)}{\partial \varphi} \exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi) d\varphi \quad (4.14)$$

Integramos por partes, de modo que la función sin derivar es $\exp(ikha \cos \varphi)$

$$I_{2\varphi} = \frac{\exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi)}{ikb} \Big|_{\varphi_i}^{\varphi_f} - \int_{\varphi} \frac{\partial(h \cos \varphi)}{\partial \varphi} \frac{a}{b} \exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi) d\varphi \quad (4.15)$$

En donde φ_i y φ_f dependen del ángulo de observación, pues están directamente relacionados con la parte de la zona iluminada que contribuye al campo en la dirección dada de observación. Este punto se aclarará un poco más adelante. Utilizando que

$$\frac{\partial(h \cos \varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{\sin \varphi} \left[\cos \varphi \frac{\partial(h \sin \varphi)}{\partial \varphi} - h \right] \quad (4.16)$$

la integral (4.15) puede reescribirse como

$$I_{2\varphi} = \int_{\varphi} \frac{\partial(\exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi))}{\partial \varphi} \frac{1}{ikb} d\varphi - \frac{a}{b} \int_{\varphi} \left[\frac{\partial(h \sin \varphi)}{\partial \varphi} \frac{\cos \varphi}{\sin \varphi} - \frac{h}{\sin \varphi} \right] \exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi) d\varphi \quad (4.17)$$

por lo tanto, reemplazando la definición de $I_{2\varphi}$ y haciendo un pasaje de términos

$$\begin{aligned} & \int_{\varphi} \frac{\partial(h \sin \varphi)}{\partial \varphi} \left[\frac{a \cos \varphi}{b \sin \varphi} + 1 \right] \exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi) d\varphi = \\ & = \int_{\varphi} \frac{\partial(\exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi))}{\partial \varphi} \frac{1}{ikb} d\varphi + \\ & \quad + \frac{a}{b} \int_{\varphi} \frac{h}{\sin \varphi} \exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi) d\varphi \end{aligned} \quad (4.18)$$

o equivalentemente

$$I_{2\varphi} = \int_{\varphi} \frac{\partial (\exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi))}{\partial \varphi} \frac{1}{ikb \left[\frac{a \cos \varphi}{b \sin \varphi} + 1 \right]} d\varphi + \frac{a}{b} \int_{\varphi} \frac{h}{\left[\frac{a \cos \varphi}{b \sin \varphi} + 1 \right] \sin \varphi} \exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi) d\varphi \quad (4.19)$$

Aplicando partes nuevamente en la primer integral, siendo $\left[\frac{a \cos \varphi}{b \sin \varphi} + 1 \right]^{-1}$ la función sin derivar se obtiene

$$I_{2\varphi} = \frac{\exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi)}{ikb \left[\frac{a \cos \varphi}{b \sin \varphi} + 1 \right]} \Bigg|_{\varphi_i}^{\varphi_f} - \frac{a}{b} \int_{\varphi} \left[\frac{1}{ikb \left[\frac{a \cos \varphi}{b \sin \varphi} + 1 \right]^2 \sin^2 \varphi} - \frac{h}{\left[\frac{a \cos \varphi}{b \sin \varphi} + 1 \right] \sin \varphi} \right] \cdot \exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi) d\varphi \quad (4.20)$$

que se puede reescribir utilizando la definición de $C(\varphi)$ (4.11) como

$$I_{2\varphi} = \frac{\exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi)}{ikC(\varphi)} \sin \varphi \Bigg|_{\varphi_i}^{\varphi_f} + a \int_{\varphi} \frac{\exp(ikha \cos \varphi) \exp(ikhb \sin \varphi)}{C(\varphi)} \left[h - \frac{1}{ikC(\varphi)} \right] d\varphi \quad (4.21)$$

Poniendo juntamente las expresiones (4.21), (4.13), (4.12), (4.10) en (4.9) queda

$$E(\theta, \phi) = \frac{-iE_0 k \exp(ikR_0)}{2\pi R_0} \times \left\{ \cos \alpha \left\{ \int_{\varphi} \frac{\exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi))}{ikC(\varphi)} \left[h - \frac{1}{ikC(\varphi)} \right] \Bigg|_{-L/2}^{L/2} dz d\varphi - \int_{\varphi} \int_z \frac{c}{C(\varphi)} \exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi)) \left[h - \frac{1}{ikC(\varphi)} \right] dz d\varphi \right\} + \sin \alpha \left\{ \int_z \frac{\exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi)) \sin \varphi}{ikC(\varphi)} \Bigg|_{\varphi_1}^{\varphi_2} dz + \int_{\varphi} \int_z \frac{a}{C(\varphi)} \exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi)) \left[h - \frac{1}{ikC(\varphi)} \right] dz d\varphi \right\} \right\} \quad (4.22)$$

Los términos que contienen a las integrales que han sido evaluadas entre $-L/2$ y $L/2$ ó entre φ_1 y φ_2 pueden ser despreciadas. Para ver que es así, basta ver que la integral entre $-L/2$ y $L/2$ se puede anular si se eligen adecuadamente las funciones $h(z = -L/2, \varphi)$ y $h(z = L/2, \varphi)$. Equivalentemente se anula la integral entre φ_1 y φ_2 si se eligen adecuadamente $h(z, \varphi = \varphi_1)$ y $h(z, \varphi = \varphi_2)$. Por lo tanto, estas integrales representan efectos de borde y deberán ser despreciables cuando el área iluminada que contribuye al campo en la dirección (θ, ϕ) sea grande. Teniendo todo esto en cuenta, la expresión para el campo es

$$E(\theta, \phi) = \frac{-iE_0k \exp(ikR_0)}{2\pi R_0} (a \sin \alpha - c \cos \alpha) \times \\ \times \int_{\varphi} \int_z \frac{\exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi))}{C(\varphi)} \left[h - \frac{1}{ikC(\varphi)} \right] dz d\varphi \quad (4.23)$$

Por último, se mostrará que el término $[ikC(\varphi)]^{-1}$ dentro de la integral es despreciable con respecto a h en toda la región de integración. Para hacer esto, es útil notar que $kC(\varphi)$ es la proyección de la diferencia de los vectores de onda incidente y dispersado en la dirección radial (en coordenadas cilíndricas)

$$kC(\varphi) = (\bar{k}_i - \bar{k}) \cdot \hat{\rho}(\varphi). \quad (4.24)$$

Este valor es máximo cuando $\hat{\rho}(\varphi)$ está justo en la dirección $\bar{k}_i - \bar{k}$, esto es, para $\varphi = \phi/2$. A medida que φ se aleja de ese valor, $C(\varphi)$ puede expresarse como

$$C(\varphi) = C(\varphi = \phi/2) \cos(\varphi - \phi/2). \quad (4.25)$$

Esto implica que, dada una dirección de dispersión \bar{k} , $kC(\varphi)$ es pequeño (y por lo tanto $[ikC(\varphi)]^{-1}$ es grande) únicamente para valores de φ que no contribuyen al campo en la dirección dada por \bar{k} . Por ejemplo, para la dirección de dispersión $(\theta = \alpha, \phi = \pi/4)$, $C(\varphi)$ se anula para $\varphi = -\pi/2 + \pi/8$ y $\varphi = \pi/2 + \pi/8$, que corresponden a la dirección perpendicular a $\bar{k}_i - \bar{k}$, como está representado en la figura 7. Al apartarse φ de esos valores críticos, el valor de $C(\varphi)$ se acerca gradualmente a $a^2 + b^2$, y por lo tanto el módulo del término $[ikC(\varphi)]^{-1}$ se aproxima a un valor un poco menor que λ , que es mucho menor que h .

Teniendo en cuenta entonces que podemos despreciar el término $[ikC(\varphi)]^{-1}$ en (4.23),

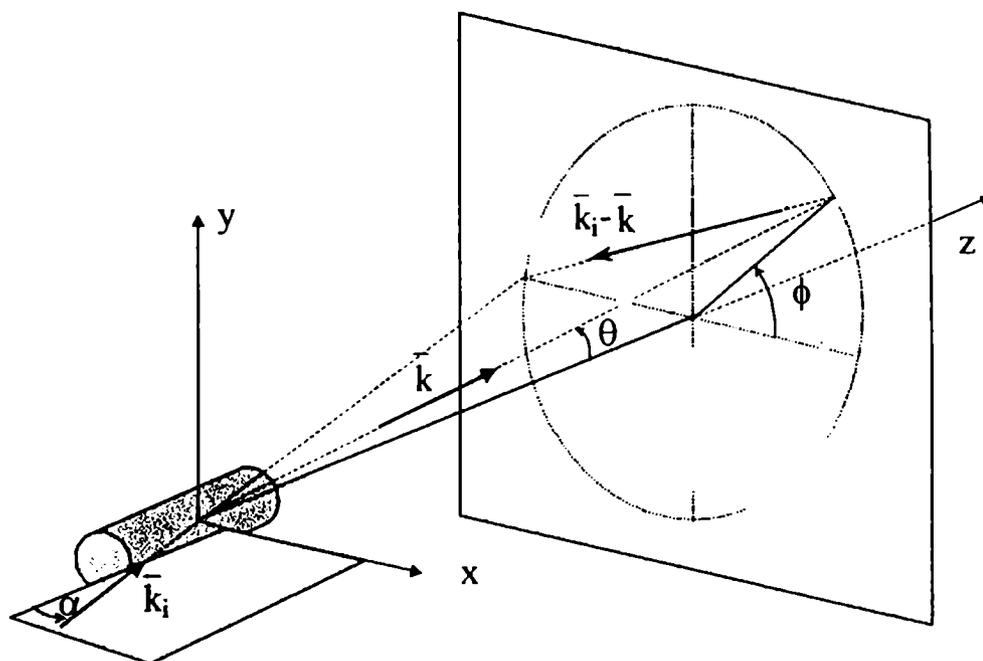


Figura 7: Interpretación geométrica de $C(\varphi)$. En esta situación particular se muestra el caso en que k es dispersado con un ángulo $\theta = \alpha$, de modo que siempre el vector $\bar{k}_i - \bar{k}$ es perpendicular al eje de simetría del cilindro (eje z). El valor máximo de $C(\varphi)$ ocurre en $\varphi = \phi/2$ y en $\varphi = \phi/2 + \pi$.

la aproximación final para el campo es

$$U(\theta, \phi) = K(\theta, \phi) \int_{\varphi} \int_z \frac{\exp(ikcz) \exp(ikhC(\varphi))}{C(\varphi)} h \, dz \, d\varphi, \quad (4.26)$$

en donde para abreviar se ha utilizado la definición:

$$K(\theta, \phi) = \frac{-iV_0 k \exp(ikR_0)}{2\pi R_0} (a \sin \alpha - c \cos \alpha). \quad (4.27)$$

Para seguir con los cálculos es necesario conocer la función $h(\varphi, z)$ o al menos suponerla como un proceso aleatorio y conocer algunas de sus propiedades estadísticas.

En particular, en los capítulos 5 y 6 se usará esta expresión del campo (4.26) para calcular la intensidad media dispersada y el tamaño del grano de speckle respectivamente.

4.2 Tratamiento Geométrico

El tratamiento del problema de la dispersión que se desarrollará aquí se basa únicamente en un trazado de rayos, en el que punto a punto, el ángulo de reflexión local del rayo reflejado es igual al ángulo de incidencia local (ver figura 8). La dirección de dispersión estará dada entonces, para cada rayo, por la pendiente de la superficie en el punto de incidencia. Conociendo la distribución de pendientes se podrá entonces obtener la distribución del campo dispersado. Utilizando la notación del principio de

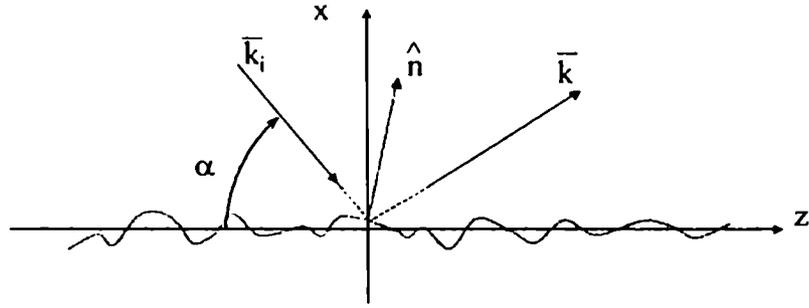


Figura 8: Dispersión de luz aplicando un modelo geométrico en el que cada rayo se refleja especularmente con respecto al ángulo de incidencia local.

este capítulo se describe a la superficie cilíndrica rugosa mediante la función $\rho = h(\varphi, z)$, de modo que se puede construir una nueva función $\Psi(\rho, \varphi, z) = \rho - h(\varphi, z)$, que se anula sobre la superficie rugosa. Con esta elección la normal a la superficie estará en la dirección del gradiente de Ψ

$$\hat{n} = \frac{\nabla \Psi(\rho, \varphi, z)}{\|\nabla \Psi(\rho, \varphi, z)\|} = \frac{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \hat{\varphi} - \frac{\partial h}{\partial z} \hat{z} + \hat{\rho}}{\left\| -\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \hat{\varphi} - \frac{\partial h}{\partial z} \hat{z} + \hat{\rho} \right\|} \quad (4.28)$$

Conviene descomponer al vector de onda incidente \bar{k}_i en sus componentes paralela y perpendicular a \hat{n} , ya que el rayo dispersado \bar{k} conservará la componente perpendicular e invertirá el signo de la componente paralela, con lo cual, en un elemento de superficie con normal \hat{n} se tendrá

$$\bar{k} = \bar{k}_i - 2(\bar{k}_i \cdot \hat{n})\hat{n} \quad (4.29)$$

Escribiéndolo explícitamente

$$\begin{aligned}
\bar{k}_i &= k(-\sin \alpha \hat{x} + \cos \alpha \hat{z}) \\
-(\bar{k}_i \cdot \hat{n}) &= k \frac{\left(\cos \alpha \frac{\partial h}{\partial z} + \sin \alpha \cos \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin \alpha \sin \varphi \right)}{\left\| -\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \hat{\varphi} - \frac{\partial h}{\partial z} \hat{z} + \hat{\rho} \right\|} \\
\bar{k} &= k \left[(-\sin \alpha \hat{x} + \cos \alpha \hat{z}) - 2 \frac{\left(\cos \alpha \frac{\partial h}{\partial z} + \sin \alpha \cos \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin \alpha \sin \varphi \right)}{\left\| -\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \hat{\varphi} - \frac{\partial h}{\partial z} \hat{z} + \hat{\rho} \right\|} \right. \\
&\quad \left. \cdot \frac{-\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \hat{\varphi} - \frac{\partial h}{\partial z} \hat{z} + \hat{\rho}}{\left\| -\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \hat{\varphi} - \frac{\partial h}{\partial z} \hat{z} + \hat{\rho} \right\|} \right] \quad (4.30)
\end{aligned}$$

Si se escriben los versores $\hat{\varphi}$ y $\hat{\rho}$ en función de los cartesianos \hat{x} e \hat{y} , se obtiene

$$\begin{aligned}
\bar{k} &= k \left[\cos \alpha + \frac{2 \left(\cos \alpha \frac{\partial h}{\partial z} + \sin \alpha \cos \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin \alpha \sin \varphi \right) \frac{\partial h}{\partial z}}{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + 1} \right] \hat{z} + \\
&+ k \left[-\sin \alpha + \frac{2 \left(\cos \alpha \frac{\partial h}{\partial z} + \sin \alpha \cos \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin \alpha \sin \varphi \right) \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin \varphi + \cos \varphi \right)}{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + 1} \right] \hat{x} + \\
&+ k \frac{2 \left(\cos \alpha \frac{\partial h}{\partial z} + \sin \alpha \cos \varphi + \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin \alpha \sin \varphi \right)}{\left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \right)^2 + \left(\frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 + 1} \left(\sin \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \hat{y} \quad (4.31)
\end{aligned}$$

Esta última expresión nos da la dirección de dispersión de un rayo que incide con dirección paralela a \bar{k}_i sobre un punto de la superficie con la normal dada por (4.28). Se podrá obtener entonces la dirección de dispersión (θ, ϕ) en función de las derivadas sobre la superficie (o viceversa), a partir del siguiente conjunto de ecuaciones

$$\begin{aligned}
\cos \theta &= \cos \alpha - \frac{2(\bar{k}_i \cdot \hat{n})}{\|\nabla \Psi(\rho, \varphi, z)\|^2} \frac{\partial h}{\partial z} \\
\sin \theta \cos \phi &= -\sin \alpha - \frac{2(\bar{k}_i \cdot \hat{n})}{\|\nabla \Psi(\rho, \varphi, z)\|^2} \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \sin \varphi + \cos \varphi \right) \\
\sin \theta \sin \phi &= \frac{2(\bar{k}_i \cdot \hat{n})}{\|\nabla \Psi(\rho, \varphi, z)\|^2} \left(\sin \varphi - \frac{1}{\rho} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \cos \varphi \right) \quad (4.32)
\end{aligned}$$

Una conclusión interesante que ya se puede deducir de aquí es que si $\partial h/\partial z = 0$, $\cos \theta = \cos \alpha$. Es decir que los rayos dispersados por un cilindro que es rugoso sólo en la dirección φ estarán dentro de un cono. Esa rugosidad sólo cambiará la distribución de intensidades a lo largo de ϕ .

Luego de un poco de álgebra se llega a

$$\begin{aligned} h_s &= \frac{\sin \alpha \sin \varphi + \sin \theta \sin(\varphi - \phi)}{\sin \alpha \cos \varphi + \sin \theta \cos(\varphi - \phi)} \\ h_z &= \frac{\cos \alpha - \cos \theta}{\sin \alpha \cos \varphi + \sin \theta \cos(\varphi - \phi)} \end{aligned} \quad (4.33)$$

En donde se ha utilizado h_z y h_s para designar a $\partial h/\partial z$ y a $\rho^{-1} \partial h/\partial \varphi$ respectivamente. Si se conoce la función de distribución de pendientes, se puede calcular la probabilidad de que un rayo sea dispersado en una dada dirección mediante

$$p_{\Theta\Phi} d\phi d\theta = p_{H_z H_s} dh_z dh_s \quad (4.34)$$

La relación entre los diferenciales está dada por

$$\begin{aligned} dh_z dh_s &= |J| d\phi d\theta \\ |J| &= \left| \det \begin{pmatrix} \partial h_z/\partial \phi & \partial h_z/\partial \theta \\ \partial h_s/\partial \phi & \partial h_s/\partial \theta \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \frac{1 + \sin \alpha \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \cos \alpha}{(\sin \alpha \cos \varphi + \sin \theta \cos(\varphi - \phi))^3} \right| \end{aligned} \quad (4.35)$$

Por lo tanto, juntando (4.34) y (4.35), la probabilidad de que un rayo (que incide con un ángulo α sobre un punto del cilindro con coordenada φ) sea dispersado en la dirección (θ, ϕ) , viene dada por

$$p_{\Theta\Phi}(\theta, \phi, \varphi) = p_{H_z H_s}(h_z(\theta, \phi, \varphi), h_s(\theta, \phi, \varphi)) \left| \sin \theta \frac{1 + \sin \alpha \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \cos \alpha}{(\sin \alpha \cos \varphi + \sin \theta \cos(\varphi - \phi))^3} \right| \quad (4.36)$$

Como se está considerando el caso en que incide una onda plana en la dirección dada por \bar{k}_i , la densidad de rayos será constante en un plano normal a \bar{k}_i . La probabilidad de que un rayo incida sobre un elemento de superficie de coordenada φ y normal \hat{n} , no

es la misma para toda φ , sino que debe ser corregida por el factor

$$\left| \frac{\cos(\bar{k}_i, \hat{n})}{\cos(\hat{\rho}, \hat{n})} \right| = -\frac{\bar{k}_i \cdot \hat{n}}{\hat{\rho} \cdot \hat{n}} \frac{1}{k} = \left| \frac{1 + \sin \alpha \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \cos \alpha}{\sin \alpha \cos \varphi + \sin \theta \cos(\varphi - \phi)} \right| \quad (4.37)$$

Teniendo en cuenta esto, se obtiene que, para una onda plana que incide sobre un cilindro rugoso con un ángulo α con respecto a su eje de simetría, el número de rayos dispersados en la dirección (θ, ϕ) será proporcional a

$$N(\theta, \phi) \propto \int_{\varphi} p_{H_z H_s}(h_z(\theta, \phi, \varphi), h_s(\theta, \phi, \varphi)) \sin \theta \frac{(1 + \sin \alpha \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha \cos \varphi + \sin \theta \cos(\varphi - \phi))^4} d\varphi \quad (4.38)$$

La amplitud del campo dispersado en la dirección (θ, ϕ) , consistirá en la suma de las contribuciones desfasadas de todos los rayos, provenientes de distintas regiones de la superficie rugosa que tienen la pendiente adecuada para que un rayo incidente se refleje hacia allí,

$$E(\theta, \phi) = \frac{\Lambda}{\sin^{1/2} \theta} \sum_{j=1}^{N(\theta, \phi)} \exp(i\psi_j), \quad (4.39)$$

en donde se ha llamado ψ_j a la fase de la contribución el rayo j y se ha supuesto que la constante de proporcionalidad Λ de cada contribución es la misma, para ser consistentes con la suposición $\mathfrak{R} = cte.$ de la sección anterior. El factor $\sin^{-1/2} \theta$ se añadió para tener en cuenta el hecho de que la energía es es proporcional al número de rayos por unidad de área.

Las ecuaciones (4.38) y (4.39) serán utilizadas en el capítulo siguiente para obtener la intensidad media dispersada. Para seguir con los cálculos es necesario hacer suposiciones acerca de la distribución de pendientes $p_{H_z H_s}(h_z, h_s)$ y de las fases ψ_j . Las relaciones obtenidas hasta ahora son totalmente generales y, salvo las hipótesis necesarias para la validez de la aplicación de un modelo geométrico, no se ha hecho ninguna hipótesis adicional sobre la superficie cilíndrica rugosa.

Intensidad Media Dispersada

Este capítulo está dedicado al estudio de la distribución angular de la intensidad media dispersada por una superficie cilíndrica rugosa. Se llegará a diferentes expresiones teóricas, de acuerdo a los dos tratamientos presentados en el capítulo anterior, y a diferentes aproximaciones de acuerdo al rango de rugosidad en que se esté trabajando. Se contrastarán los resultados teóricos contra mediciones experimentales.

5.1 Resultados teóricos

5.1.1 Tratamiento Escalar

Partiendo de la expresión del campo (4.26) del modelo escalar que se obtuvo en el capítulo 4, se tiene que el valor medio de la intensidad dispersada en la dirección (θ, ϕ) es

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) \rangle &= \langle V^*(\theta, \phi) V(\theta, \phi) \rangle = \\ &= |K(\theta, \phi)|^2 \int_{\varphi_1} \int_{z_1} \int_{\varphi_2} \int_{z_2} \frac{\exp[ikc(z_2 - z_1)]}{C^*(\varphi_2)C(\varphi_1)} dz_1 d\varphi_1 dz_2 d\varphi_2 \times \\ &\times \langle \exp[ik[h(\varphi_2, z_2)C(\varphi_2) - h(\varphi_1, z_1)C(\varphi_1)]] h(\varphi_2, z_2)h(\varphi_1, z_1) \rangle, \quad (5.1) \end{aligned}$$

en donde $\langle \rangle$ significa el valor medio sobre el ensemble de superficies que conforman el proceso aleatorio $h(\varphi, z)$. Se puede notar también que la contribución al valor medio viene dada principalmente por las variaciones en la fase debidas a $h(\varphi, z)$ y, por el contrario, la contribución debida a la aleatoriedad de las $h(\varphi, z)$ como factor en el integrando de (5.1) es despreciable y se puede reemplazar, en una muy buena aproximación por su valor medio, que es precisamente el radio promedio del cilindro,

y se notará $\langle h(\varphi, z) \rangle \equiv \tilde{a}^1$. Teniendo en cuenta esto y haciendo el cambio de variables de integración $\varphi_2, z_2 \rightarrow \tau, \zeta$ de acuerdo con

$$\begin{aligned}\tau \cos \zeta &= \tau_z = z_2 - z_1 \\ \tau \sin \zeta &= \tau_\varphi = \tilde{a}(\varphi_2 - \varphi_1),\end{aligned}\tag{5.2}$$

que se representa en la figura 9, la ecuación (5.1) queda

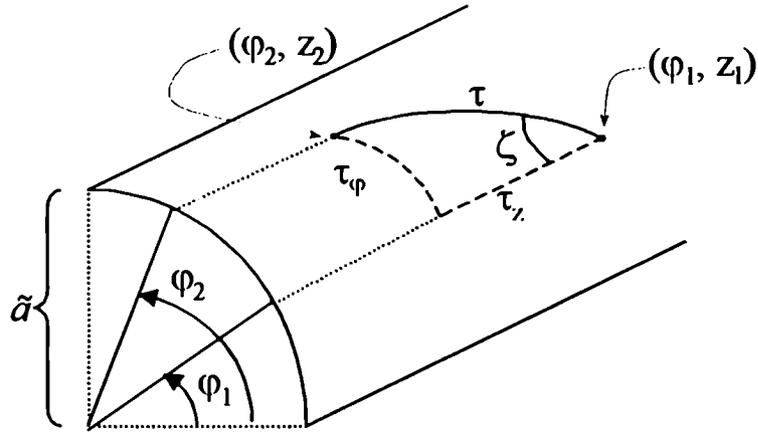


Figura 9: Coordenadas sobre la superficie del cilindro. $\tau_\varphi = \tau \sin \zeta = \tilde{a}(\varphi_2 - \varphi_1)$; $\tau_z = \tau \cos \zeta = z_2 - z_1$.

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = |K(\theta, \phi)|^2 \int_{\varphi_1} \int_{z_1} \int_{\zeta} \int_{\tau} \frac{\exp(ikc\tau \cos \zeta) \langle \exp[ik(h_2 C_2 - h_1 C_1)] \rangle}{C_2^* C_1} \tilde{a} \tau dz_1 d\varphi_1 d\tau d\zeta,\tag{5.3}$$

en donde se ha utilizado además la notación

$$\begin{aligned}C_1 &= C(\varphi_1) \\ C_2 &= C(\varphi_2) = C(\varphi_1 + \delta\varphi_1) = C\left(\varphi_1 + \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}}\right) \\ h_1 &= h(\varphi_1, z_1) \\ h_2 &= h(\varphi_2, z_2) = h\left(\varphi_1 + \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}}, z_1 + \tau \cos \zeta\right).\end{aligned}\tag{5.4}$$

Para evaluar el valor medio dentro de la integral en (5.3), se deben hacer, como se mencionó antes, algunas suposiciones acerca del proceso aleatorio h . En primer lugar

¹ Esta aproximación es muy buena siempre que el valor medio de $h(\varphi, z)$ (el radio promedio del cilindro) sea mucho mayor que su varianza (la rugosidad σ). En todas las muestras que se han utilizado (como en la vasta mayoría de las que son de interés práctico) esta condición se satisfizo siempre.

se supondrá que h es gaussiano con media \tilde{a} y varianza σ^2 ,

$$p_H(h) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp \left[- \left(\frac{h - \tilde{a}}{\sqrt{2}\sigma} \right)^2 \right], \quad (5.5)$$

con lo cual, la función característica de orden dos se puede expresar como^[30]

$$\langle \exp [ik (h_2 C_2 - h_1 C_1)] \rangle = \exp [ik\tilde{a}(C_2 - C_1)] \exp \left[-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2 (C_2^2 - 2C_1 C_2 \gamma + C_1^2) \right]. \quad (5.6)$$

Si se tiene en cuenta además la aproximación a primer orden

$$\begin{aligned} C_2 &= C \left(\varphi_1 + \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}} \right) \simeq C(\varphi_1) + \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}} [b \cos \varphi_1 - a \sin \varphi_1] \\ &\simeq C(\varphi_1) + \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}} d(\varphi_1), \end{aligned} \quad (5.7)$$

con $d(\varphi) = [b \cos \varphi - a \sin \varphi]$, la ecuación (5.6) se convierte en

$$\begin{aligned} \langle \exp [ik (h_2 C_2 - h_1 C_1)] \rangle &= \exp (ikd\tau \sin \zeta) \times \\ &\times \exp \left\{ -\sigma^2 k^2 \left[C_1^2 (1 - \gamma) + \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}} \left[C_1 (1 - \gamma) + \frac{1}{2} \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}} \right] \right] \right\}, \end{aligned} \quad (5.8)$$

en donde, por brevedad, se ha omitido escribir explícitamente la dependencia de d con la variable φ_1 . Introduciendo entonces (5.8) y (5.7) en (5.3), se tiene

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) \rangle &= |K(\theta, \phi)|^2 \tilde{a} \int_{\varphi_1} \int_{z_1} \int_{\zeta} \int_{\tau} \frac{\exp [ik\tau(c \cos \zeta + d \sin \zeta)]}{\left(C_1 + \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}} \right) C_1} \tau dz_1 d\varphi_1 d\tau d\zeta \times \\ &\times \exp \left\{ -\sigma^2 k^2 \left[C_1^2 (1 - \gamma) + \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}} \left[C_1 (1 - \gamma) + \frac{1}{2} \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}} \right] \right] \right\} \end{aligned} \quad (5.9)$$

La integral en z_1 ya puede ser evaluada. Si se considera que la superficie cilíndrica está iluminada entre $-L/2$ y $L/2$,

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) \rangle &= |K(\theta, \phi)|^2 \tilde{a} L \int_{\varphi_1} \int_{\zeta} \int_{\tau} \frac{\exp [ik\tau(c \cos \zeta + d \sin \zeta)]}{\left(C_1 + \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}} d \right) C_1} \tau d\varphi_1 d\tau d\zeta \times \\ &\times \exp \left\{ -\sigma^2 k^2 \left[C_1^2 (1 - \gamma) + \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}} \left[C_1 (1 - \gamma) + \frac{1}{2} \frac{\tau \sin \zeta}{\tilde{a}} \right] \right] \right\}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

Nuevamente, se deben hacer más suposiciones acerca de la estadística de la superficie para poder seguir con las cuentas. Se considerará que el coeficiente de autocorrelación

de la superficie γ está dado por la función

$$\gamma(\tau) = \exp(-\tau^2/l^2) \quad (5.11)$$

en donde el parámetro l , es la longitud de correlación. Como se puede apreciar en la ecuación (5.11), se ha considerado que el proceso aleatorio que representa a la superficie es homogéneo (estacionario, si la dependencia fuera temporal) e isótropo.

5.1.1.1 Rugosidades Altas ($\sigma \gtrsim \lambda$)

Se considera primero el caso en que la rugosidad σ es del orden o mayor que la longitud de onda λ del haz incidente. En esta situación, la exponencial negativa en (5.10) que va con $\sigma^2 k^2$ contribuirá sólo para valores chicos de τ , y podemos aproximar (5.11) por su desarrollo en serie a primer orden en τ^2/l^2 .

$$\gamma(\tau) \simeq 1 - \tau^2/l^2$$

Además, salvo situaciones muy particulares, se tendrá que $\tau/\tilde{a} \ll 1$ para los valores de τ que contribuyen en forma no despreciable a la integral, de modo que se despreciarán los términos con τ/\tilde{a} en la exponencial negativa y asimismo en el denominador de (5.10).

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = |K(\theta, \phi)|^2 \tilde{a}L \int_{\varphi_1} \int_{\zeta} \int_{\tau} \frac{\exp[ik\tau(c \cos \zeta + d \sin \zeta)] \exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2 \tau^2}{l^2}\right)}{C_1^2} \tau d\varphi_1 d\tau d\zeta \quad (5.12)$$

Con esta última suposición, es posible ahora integrar en la variable ζ , obteniendo

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = |K(\theta, \phi)|^2 2\pi\tilde{a}L \int_{\varphi_1} \int_{\tau} J_0\left(k\tau\sqrt{c^2 + d^2}\right) \frac{\exp\left(-\frac{\sigma^2 k^2 \tau^2}{l^2}\right)}{C_1^2} \tau d\varphi_1 d\tau \quad (5.13)$$

y ahora en τ

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = |K(\theta, \phi)|^2 \frac{\pi\tilde{a}Ll^2}{\sigma^2 k^2} \int_{\varphi_1} \frac{\exp\left[-\frac{l^2(c^2 + d^2)}{4\sigma^2 C_1^2}\right]}{C_1^4} d\varphi_1 \quad (5.14)$$

Esta última integral es un tanto complicada y su resolución requerirá un poco más de detalle. Se debe recordar que tanto C_1 como d son funciones de φ_1 . Estas dos funciones

se pueden reescribir de la siguiente forma

$$\begin{aligned} C_1^2(\varphi_1) &= (a \cos \varphi_1 + b \sin \varphi_1)^2 = (a^2 + b^2) \cos^2(\varphi_1 - \eta) \\ d^2(\varphi_1) &= (a \cos \varphi_1 - b \sin \varphi_1)^2 = (a^2 + b^2) - (a^2 + b^2) \cos^2(\varphi_1 - \eta) \end{aligned} \quad (5.15)$$

en donde el ángulo η está definido por las relaciones

$$\cos \eta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}; \quad \sin \eta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (5.16)$$

Por la simetría del problema es de esperar que $\langle I(\theta, \phi) \rangle$ sea simétrico en ϕ . Se considerará entonces, al evaluar (5.14), sólo los valores $\phi \geq 0$ para simplificar los cálculos. Teniendo esto en cuenta, los valores de φ_1 dentro de la zona iluminada que contribuyen a la integral en la dirección ϕ son aquellos que están entre los límites $\phi - \pi/2$ y $\pi/2$ (Ver figura 10).

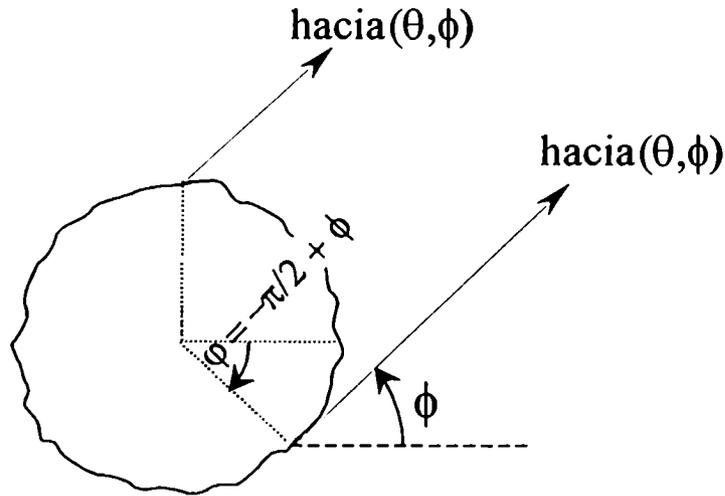


Figura 10: Región neta que contribuye al campo lejano en la dirección (θ, ϕ)

Reemplazando entonces estos límites y (5.15) en (5.14), queda

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) \rangle &= |K(\theta, \phi)|^2 \frac{\pi \tilde{a} I/I^2}{\sigma^2 k^2} \times \\ &\times \int_{\varphi_1 = \phi - \pi/2}^{\pi/2} \frac{\exp \left[-\frac{\gamma^2}{4\sigma^2} \frac{a^2 + b^2 + c^2 - (a^2 + b^2) \cos^2(\varphi_1 - \eta)}{(a^2 + b^2) \cos^2(\varphi_1 - \eta)} \right]}{(a^2 + b^2)^2 \cos^4(\varphi_1 - \eta)} d\varphi_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= |K(\theta, \phi)|^2 \frac{\pi \tilde{a} L I'^2 \exp \left[\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \right]}{\sigma^2 k^2 (a^2 + b^2)^2} \times \\
&\quad \times \int_{\varphi_1 = \phi - \pi/2}^{\pi/2} \frac{\exp \left[-\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{\cos^2(\varphi_1 - \eta)} \right]}{\cos^4(\varphi_1 - \eta)} d\varphi_1 \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Se hace ahora el cambio de variable $\varepsilon = \varphi_1 - \eta$, obteniéndose

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = |K(\theta, \phi)|^2 \frac{\pi \tilde{a} L I'^2 \exp \left[\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \right]}{\sigma^2 k^2 (a^2 + b^2)^2} \int_{\varepsilon = \phi - \pi/2 - \eta}^{\pi/2 - \eta} \frac{\exp \left[-\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{\cos^2 \varepsilon} \right]}{\cos^4 \varepsilon} d\varepsilon \quad (5.18)$$

Las contribuciones más importantes vendrán del entorno de $\varepsilon = 0$, o, equivalentemente, alrededor de $\varphi_1 = \eta$, que es, en una buena aproximación, lo mismo que alrededor de $\varphi_1 = \phi/2$. Se puede entonces modificar el límite de la integral en una excelente aproximación (pues para los valores de ε en los límites, la integral contribuye en forma despreciable) sustituyendo η por $\phi/2$.

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = |K(\theta, \phi)|^2 \frac{\pi \tilde{a} L I'^2 \exp \left[\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \right]}{\sigma^2 k^2 (a^2 + b^2)^2} \int_{\varepsilon = \phi/2 - \pi/2}^{\pi/2 - \phi/2} \frac{\exp \left[-\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} \frac{1}{\cos^2 \varepsilon} \right]}{\cos^4 \varepsilon} d\varepsilon. \quad (5.19)$$

La integral ha quedado ahora simétrica, por lo que es equivalente evaluarla en el intervalo $(0, \pi/2 - \phi/2)$ y multiplicarla por 2. Se hace además un nuevo cambio de variable

$$y = \cos^{-2} \varepsilon$$

que es biyectivo en el intervalo de integración, de modo que

$$\begin{aligned}
\langle I(\theta, \phi) \rangle &= |K(\theta, \phi)|^2 \frac{\pi \tilde{a} L I'^2 \exp \left[\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \right]}{\sigma^2 k^2 (a^2 + b^2)^2} \times \\
&\quad \times \int_{y=1}^{\cos^2(\pi/2 - \phi/2)} \exp \left[-\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} y \right] \frac{y}{\sqrt{y-1}} dy, \quad (5.20)
\end{aligned}$$

y finalmente un último cambio de variable: $w = y - 1$

$$\begin{aligned}
\langle I(\theta, \phi) \rangle &= |K(\theta, \phi)|^2 \frac{\pi \tilde{a} l l'^2}{\sigma^2 k^2} \frac{\exp\left[\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2}\right]}{(a^2 + b^2)^2} \times \\
&\quad \times \int_{w=0}^{\tan^2(\pi/2-\phi/2)} \exp\left[-\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} (w + 1)\right] \frac{w + 1}{w^{1/2}} dw \\
&= |K(\theta, \phi)|^2 \frac{\pi \tilde{a} l l'^2}{\sigma^2 k^2} \frac{\exp\left[-\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \frac{c^2}{a^2 + b^2}\right]}{(a^2 + b^2)^2} \times \\
&\quad \times \left\{ \int_{w=0}^{\tan^2(\pi/2-\phi/2)} \exp\left(-\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2}\right) w^{1/2} dw + \right. \\
&\quad \left. + \int_{w=0}^{\tan^2(\phi/2-\pi/2)} \exp\left(-\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2}\right) w^{-1/2} dw \right\}. \quad (5.21)
\end{aligned}$$

Se obtiene, entonces, evaluando esta última integral, la expresión de la intensidad media dispersada por una superficie cilíndrica rugosa con $\sigma > \lambda$, según la teoría escalar de la difracción de Kirchhoff.

$$\begin{aligned}
\langle I(\theta, \phi) \rangle &= |K(\theta, \phi)|^2 \frac{\pi \tilde{a} l l'^2}{\sigma^2 k^2} \frac{\exp\left[-\frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \frac{c^2}{a^2 + b^2}\right]}{(a^2 + b^2)^2} \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ \text{GammaDist}[\mu \tan^2(\pi/2 - \phi/2), 3/2] \mu^{-3/2} + \right. \\
&\quad \left. + \text{GammaDist}[\mu \tan^2(\pi/2 - \phi/2), 1/2] \mu^{-1/2} \right\}, \quad (5.22)
\end{aligned}$$

en donde

$$\text{GammaDist}[x, s] \equiv \int_0^x x^{s-1} \exp(-x) dx, \quad (5.23)$$

y se ha definido μ como

$$\mu = \frac{\gamma'^2}{4\sigma^2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} \quad (5.24)$$

El factor entre llaves en la ecuación (5.22), produce variaciones apreciables únicamente para valores de ϕ cercanos a π ó $-\pi$. Se ve que esta expresión de ninguna manera depende de la longitud de onda λ del haz incidente, ya que el k^2 que aparece en el denominador de (5.22) se cancela con el que está implícito en $|K(\theta, \phi)|^2$. Es también

digno de notar que la intensidad media depende de los parámetros σ y T sólo en la forma del cociente σ/T , que es, a menos de un factor $\sqrt{2}$, la varianza de la distribución de pendientes de la superficie (ver capítulo 2), lo que es un indicio de que también un modelo geométrico dará cuenta de esta función.

A continuación se muestran varias figuras representando distintas características de esta función. La figura 11 muestra distribución angular de la intensidad media dispersada por un cilindro rugoso que se vería en una pantalla plana, perpendicular a la dirección dada por el eje del cilindro, ubicada en el campo lejano de acuerdo a (5.22). Para facilitar la comparación, en la figura 12 se muestran conjuntamente los cortes de los cuatro gráficos de la figura 11 para $\phi = 0$.

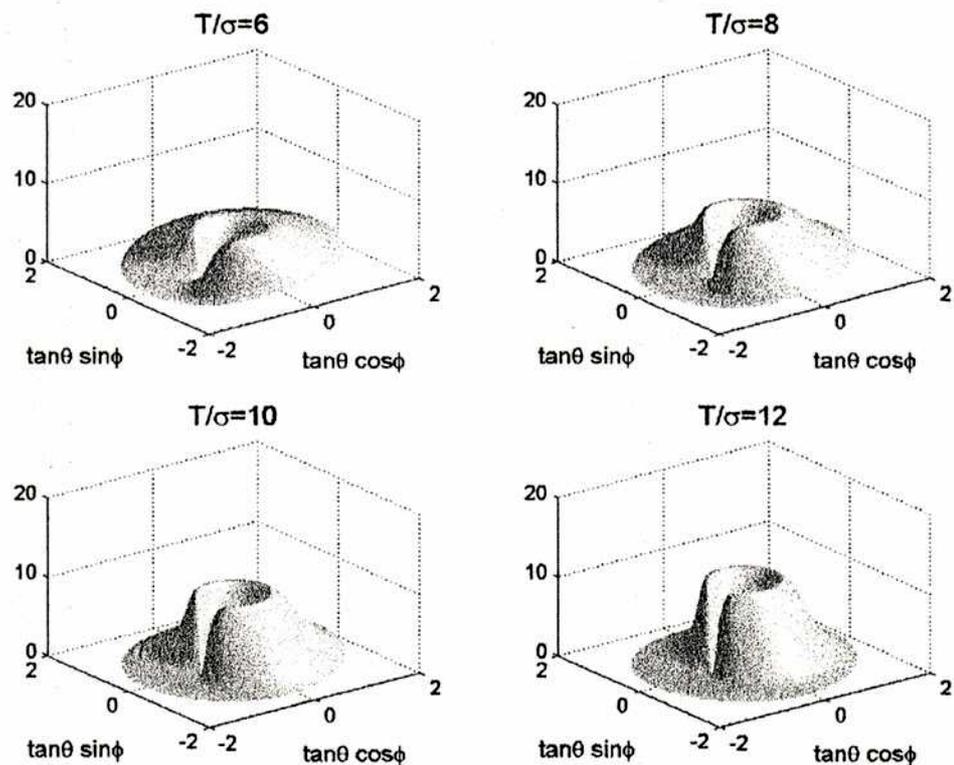


Figura 11: Intensidad media dispersada por un cilindro rugoso con $\sigma > \lambda$. Los parámetros elegidos fueron: $\alpha = 30^\circ$, y los valores de T/σ se muestran en la figura. Las unidades son arbitrarias, pero se ha elegido la misma escala, de modo que la energía, o equivalentemente la integral de $\langle I \rangle$ sea constante.

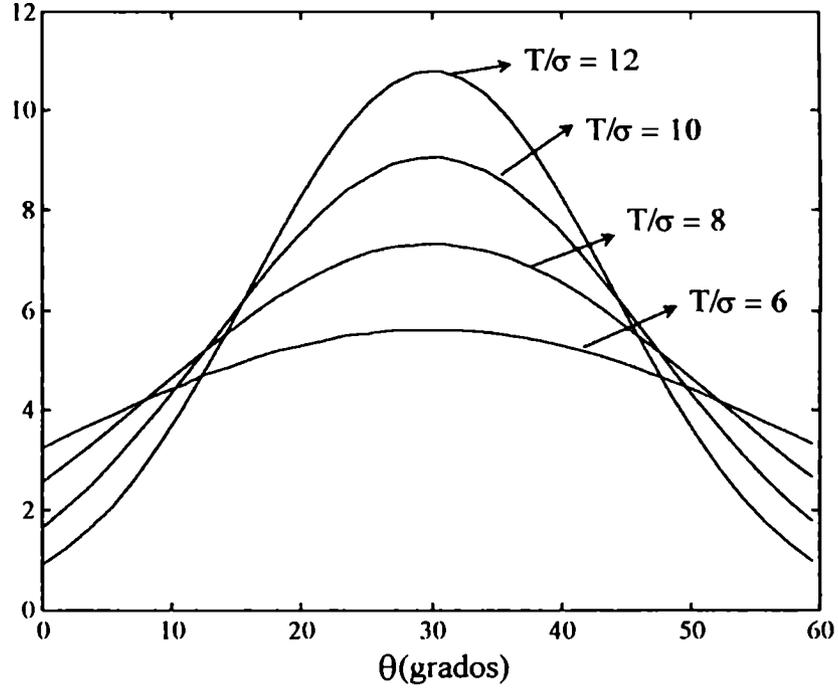


Figura 12: Perfil de intensidades de las cuatro gráficas de la figura anterior para $\phi = 0$.

5.1.1.2 Rugosidades Bajas ($\sigma < \lambda$)

Para evaluar la expresión (5.10) a rugosidades bajas, será necesario, por una cuestión de divergencia de las integrales involucradas, calcular primeramente la varianza del campo

$$Var[E(\theta, \phi)] = \langle E^*(\theta, \phi)E(\theta, \phi) \rangle - \langle E^*(\theta, \phi) \rangle \langle E(\theta, \phi) \rangle, \quad (5.25)$$

de acuerdo con (4.26) y utilizando las mismas definiciones y aproximaciones que llevaron a (5.3), se llega a

$$\begin{aligned} Var[E(\theta, \phi)] = & |K(\theta, \phi)|^2 \tilde{a} \int_{\varphi_1} \int_{z_1} \int_{\zeta} \int_{\tau} \frac{\exp(ik\tau \cos \zeta)}{C_2^* C_1} \times \\ & \times \{ \langle \exp [ik(h_2 C_2 - h_1 C_1)] \rangle - \\ & - \langle \exp [ik h_2 C_2] \rangle \langle \exp [-ik h_1 C_1] \rangle \} \tau dz_1 d\varphi_1 d\tau d\zeta, \quad (5.26) \end{aligned}$$

y utilizando (5.6)

$$\begin{aligned} Var[E(\theta, \phi)] &= |K(\theta, \phi)|^2 \tilde{a} \int_{\varphi_1} \int_{z_1} \int_{\zeta} \int_{\tau} \frac{\exp(ikc\tau \cos \zeta)}{C_2^* C_1} \exp[ik\tilde{a}(C_2 - C_1)] \times \\ &\times \left[\exp \left[-\frac{1}{2} \sigma^2 k^2 (C_2^2 - 2C_1 C_2 \gamma + C_1^2) \right] - \right. \\ &\left. \left[-\exp \left[-\frac{1}{2} \sigma^2 k^2 (C_2^2 + C_1^2) \right] \right] \right] \tau dz_1 d\varphi_1 d\tau d\zeta. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Si, como antes se supone que vale (5.11), entonces

$$\begin{aligned} Var[E(\theta, \phi)] &= |K(\theta, \phi)|^2 \tilde{a} \int_{\varphi_1} \int_{z_1} \int_{\zeta} \int_{\tau} \frac{\exp(ikc\tau \cos \zeta)}{C_2^* C_1} \\ &\times \exp \left[-\frac{1}{2} \sigma^2 k^2 (C_2^2 + C_1^2) \right] \exp[ik\tilde{a}(C_2 - C_1)] \times \\ &\times \left[\exp \left[\sigma^2 k^2 C_1 C_2 \exp \left(-\frac{\tau^2}{l^2} \right) \right] - 1 \right] \tau dz_1 d\varphi_1 d\tau d\zeta \end{aligned} \quad (5.28)$$

Aproximando C_2 como en (5.7) y despreciando los términos con τ/\tilde{a} que no están en la fase, se tiene

$$\begin{aligned} Var[E(\theta, \phi)] &= |K(\theta, \phi)|^2 \tilde{a} \int_{\varphi_1} \int_{z_1} \int_{\zeta} \int_{\tau} \frac{\exp[ik\tau(c \cos \zeta + d \sin \zeta)]}{C_1^2} \exp(-\sigma^2 k^2 C_1^2) \times \\ &\times \left[\exp \left[\sigma^2 k^2 C_1 C_2 \exp \left(-\frac{\tau^2}{l^2} \right) \right] - 1 \right] \tau dz_1 d\varphi_1 d\tau d\zeta \end{aligned} \quad (5.29)$$

que se puede ya integrar en z_1 y ζ , dando

$$\begin{aligned} Var[E(\theta, \phi)] &= |K(\theta, \phi)|^2 2\pi \tilde{a} L \int_{\varphi_1} \int_{\tau} J_0(k\tau \sqrt{c^2 + d^2}) \frac{\exp(-\sigma^2 k^2 C_1^2)}{C_1^2} \times \\ &\times \left[\exp \left[\sigma^2 k^2 C_1 C_2 \exp \left(-\frac{\tau^2}{l^2} \right) \right] - 1 \right] \tau d\varphi_1 d\tau \end{aligned} \quad (5.30)$$

A diferencia del caso $\sigma > \lambda$, ya no es cierto que $\sigma^2 k^2$ sea grande y, por lo tanto, no es cierto tampoco que las contribuciones más notables provengan de regiones con τ pequeño. Se hará entonces un desarrollo en serie de $\exp[\sigma^2 k^2 C_1^2 \exp(-\tau^2/l^2)]$ para evaluar (5.30), que es válido para valores de σ tales que $\sigma^2 k^2 C_1^2 < 1$, de modo que la serie converja.

$$Var[E(\theta, \phi)] = |K(\theta, \phi)|^2 2\pi \tilde{a} L \int_{\varphi_1} \int_{\tau} J_0(k\tau \sqrt{c^2 + d^2}) \frac{\exp(-\sigma^2 k^2 C_1^2)}{C_1^2} \times$$

$$\times \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^{2n} k^{2n} C_1^{2n} \exp[-n\tau^2/\Gamma^2]}{n!} \tau \, d\varphi_1 d\tau \quad (5.31)$$

Integrando en τ

$$\begin{aligned} \text{Var}[E(\theta, \phi)] &= |K(\theta, \phi)|^2 \pi \tilde{a} L \Gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\varphi_1} \frac{\exp(-\sigma^2 k^2 C_1^2)}{C_1^2} \exp\left[-\frac{(c^2 + d^2) \Gamma^2 k^2}{4n}\right] \times \\ &\times \frac{\sigma^{2n} k^{2n} C_1^{2n}}{n! 2n} d\varphi_1 \end{aligned} \quad (5.32)$$

Esta última expresión puede ser reescrita como en el caso $\sigma > \lambda$, teniendo en cuenta el cambio de variable implicado (5.15) y (5.16) y llamando como antes $\varepsilon = \varphi_1 - \eta$.

$$\begin{aligned} \text{Var}[E(\theta, \phi)] &= |K(\theta, \phi)|^2 \pi \tilde{a} L \Gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^{2n} k^{2n}}{n! 2n} (a^2 + b^2)^{n-1} \\ &\times \exp\left[-\frac{(a^2 + b^2 + c^2) \Gamma^2 k^2}{4n}\right] \times \\ &\times 2 \int_{\varepsilon=0}^{\pi/2-\phi/2} \cos^{2(n-1)} \varepsilon \exp\left[(a^2 + b^2) k^2 \left(\frac{\Gamma^2}{4n} - \sigma^2\right) \cos^2 \varepsilon\right] d\varepsilon \end{aligned} \quad (5.33)$$

Se hace además el cambio de variable

$$y = \cos^2 \varepsilon \quad (5.34)$$

que es biyectivo en el intervalo de integración.

$$\begin{aligned} \text{Var}[E(\theta, \phi)] &= |K(\theta, \phi)|^2 \pi \tilde{a} L \Gamma^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^{2n} k^{2n}}{n! 2n} (a^2 + b^2)^{n-1} \\ &\times \exp\left[-\frac{(a^2 + b^2 + c^2) \Gamma^2 k^2}{4n}\right] \times \\ &\times \int_{y=\cos^2(\pi/2-\phi/2)}^1 \exp\left[(a^2 + b^2) k^2 \left(\frac{\Gamma^2}{4n} - \sigma^2\right) y\right] \frac{y^{n-1/2}}{\sqrt{1-y}} dy \end{aligned} \quad (5.35)$$

Por último, el cambio

$$w = 1 - y \quad (5.36)$$

que lleva a

$$\begin{aligned}
Var[E(\theta, \phi)] &= |K(\theta, \phi)|^2 \pi \tilde{a} L l'^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sigma^{2n} k^{2n}}{n! 2n} (a^2 + b^2)^{n-1} \exp\left[-\frac{c^2 l'^2 k^2}{4n}\right] \times \\
&\times \exp\left[-k^2 \sigma^2 (a^2 + b^2)\right] \times \\
&\times \int_{w=0}^{\sin^2(\pi/2-\phi/2)} \exp\left[-(a^2 + b^2)k^2 \left(\frac{l'^2}{4n} - \sigma^2\right) w\right] \frac{(1-w)^{n-1/2}}{w^{1/2}} dw \quad (5.37)
\end{aligned}$$

Se tomará la siguiente notación para simplificar las expresiones que siguen

$$g \equiv k^2 \sigma^2 (a^2 + b^2) \quad (5.38)$$

de manera que

$$\begin{aligned}
Var[E(\theta, \phi)] &= |K(\theta, \phi)|^2 \pi \tilde{a} L l'^2 \exp(-g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n! 2n (a^2 + b^2)} \exp\left[-\frac{c^2 l'^2 k^2}{4n}\right] \times \\
&\times \int_{w=0}^{\sin^2(\pi/2-\phi/2)} \exp\left[-(a^2 + b^2)k^2 \left(\frac{l'^2}{4n} - \sigma^2\right) w\right] \frac{(1-w)^{n-1/2}}{w^{1/2}} dw \quad (5.39)
\end{aligned}$$

A esta altura es importante destacar que esta integral puede ser simplificada, tomando en cuenta el hecho de que w puede considerarse chico ya que w está relacionado con el ancho angular neto que contribuye al campo en la dirección (θ, ϕ) , por la siguiente razón: Como el cilindro es poco rugoso ($g < 1$) sabemos que reflejará la onda incidente, punto a punto en forma aproximadamente especular, es decir que la luz dispersada hacia un ángulo ϕ provendrá principalmente de la región cercana a $\varphi = \phi/2$ sobre la superficie del cilindro y esta región se corresponde con $w \cong 0$ (rastreado los cambios de variable). Sin embargo, es posible obtener una expresión más exacta para el resultado de (5.39), haciendo un desarrollo en serie del último factor de la integral a orden cero

$$\frac{(1-w)^{n-1/2}}{w^{1/2}} = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n-1/2}{j} (-1)^j w^{j-1/2} \cong w^{-1/2} \quad (5.40)$$

con lo cual (5.39) queda

$$Var[E(\theta, \phi)] = |K(\theta, \phi)|^2 \pi \tilde{a} L l'^2 \exp(-g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n! 2n (a^2 + b^2)} \exp\left[-\frac{c^2 l'^2 k^2}{4n}\right] \times$$

$$\times \int_{w=0}^{\sin^2(\pi/2-\phi/2)} \exp \left[-(a^2 + b^2)k^2 \left(\frac{T^2}{4n} - \sigma^2 \right) w \right] w^{-1/2} dw \quad (5.41)$$

Es una buena aproximación integrar en el mismo intervalo aunque las contribuciones vengan principalmente de la región donde w es chico, ya que la exponencial se hace cero rápidamente al aumentar w . Esto es así pues para que valga la aproximación de Kirchhoff del campo sobre la superficie debe ser el radio de curvatura mayor que λ , y en este caso eso implica que T sea mayor que λ . Esta última integral es similar a la integral en (5.21), de modo que se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Var}[I(\theta, \phi)] &= |K(\theta, \phi)|^2 \pi \tilde{a} T T^2 \exp(-g) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n! 2n (a^2 + b^2)} \exp \left[-\frac{c^2 T^2 k^2}{4n} \right] \times \\ &\times \text{GammaDist} [\mu' \sin^2(\phi/2 - \pi/2), 1/2] (\mu')^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.42)$$

En donde μ' es

$$\mu' = \left(\frac{T^2}{4n} - \sigma^2 \right) (a^2 + b^2) k^2 \quad (5.43)$$

El factor que aparece en la segunda línea de (5.42), al igual que en el caso anterior, corresponderá a un factor menor que 1, aproximadamente constante (salvo cerca de $\phi = \pi$) en las direcciones donde los otros factores no son muy despreciables y, por lo tanto, no cambiará esencialmente la forma de la curva. De acuerdo con (5.25), para obtener $\langle I(\theta, \phi) \rangle$ falta aún calcular $\langle I(\theta, \phi) \rangle$

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = K(\theta, \phi) \int_{\varphi} \int_z \frac{\exp(ikcz) \langle \exp[ikhC(\varphi)] \rangle}{C(\varphi)} \tilde{a} dz d\varphi \quad (5.44)$$

Haciendo las mismas hipótesis acerca de $h(\varphi, z)$,

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = K(\theta, \phi) \tilde{a} \int_{\varphi} \int_z \frac{\exp(ikcz) \exp[ik\tilde{a}C(\varphi)] \exp[-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2 C^2(\varphi)]}{C(\varphi)} dz d\varphi \quad (5.45)$$

La integral en z se puede realizar sin problemas

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = K(\theta, \phi) \tilde{a} L \frac{\sin(kcL/2)}{kcL/2} \int_{\varphi} \frac{\exp[ik\tilde{a}C(\varphi)] \exp[-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2 C^2(\varphi)]}{C(\varphi)} d\varphi \quad (5.46)$$

y esta integral que queda, puede resolverse exactamente mediante un desarrollo en serie, sin embargo es mucho más conveniente expresar el resultado aproximándola por

el método de fase estacionaria^[31], ya que $k\tilde{a}$, que aparece en $\exp[ik\tilde{a}C(\varphi)]$ en el integrando de (5.46) es un número muy grande. Por supuesto, el valor de φ en el que la fase tiene un extremo es justo el punto

$$\varphi_0 = \tan^{-1} \left(\frac{b}{a} \right) \quad (5.47)$$

que se corresponde, para $\theta = \alpha$, con la condición de reflexión especular $\varphi = \phi/2$.

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = K(\theta, \phi) \tilde{a} L \frac{\sin(kcL/2)}{kcL/2} \frac{\exp[-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2 (a^2 + b^2)]}{a^2 + b^2} \sqrt{\frac{2\pi}{k\tilde{a}\sqrt{(a^2 + b^2)}}} \quad (5.48)$$

Multiplicando por el complejo conjugado, queda

$$\begin{aligned} \langle I^*(\theta, \phi) \rangle \langle I(\theta, \phi) \rangle &= |K(\theta, \phi)|^2 \tilde{a} L^2 \left(\frac{\sin(kcL/2)}{kcL/2} \right)^2 \frac{\exp[-\sigma^2 k^2 (a^2 + b^2)]}{(a^2 + b^2)^{3/2}} \frac{2\pi}{k} \\ &\equiv I_0 e^{-g} \end{aligned} \quad (5.49)$$

En donde se ha definido I_0 implícitamente, pues se verá que es la intensidad cuando la rugosidad del cilindro es cero. Juntando ahora las expresiones (5.25), (5.42) y (5.49), se obtiene finalmente

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) \rangle &= \exp[-g] \left\{ I_0 + |K(\theta, \phi)|^2 \pi \tilde{a} L^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{g^n}{n! 2n} \frac{\exp\left[-\frac{c^2 \Gamma^2 k^2}{4n}\right]}{(a^2 + b^2)^n} \times \right. \\ &\quad \left. \times \text{GammaDist}[\mu' \sin^2(\pi/2 - \phi/2), 1/2] \left[\left(\frac{\Gamma^2}{4} - \sigma^2 \right) (a^2 + b^2) k^2 \right]^{-1/2} \right\} \end{aligned} \quad (5.50)$$

En el caso en que la rugosidad sea bastante menor que la longitud de onda de forma tal que $g \ll 1$, es posible quedarse con el primer término de la serie en (5.50),

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) \rangle &= \exp[-g] \left\{ I_0 + |K(\theta, \phi)|^2 \pi \tilde{a} L^2 \frac{g}{2} \frac{\exp\left[-\frac{c^2 \Gamma^2 k^2}{4}\right]}{(a^2 + b^2)} \times \right. \\ &\quad \left. \times \text{GammaDist}[\mu' \sin^2(\pi/2 - \phi/2), 1/2] \left[\left(\frac{\Gamma^2}{4} - \sigma^2 \right) (a^2 + b^2) k^2 \right]^{-1/2} \right\} \end{aligned} \quad (5.51)$$

Para el caso particular $g = 0$, se tiene que

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = I_0 = |K(\theta, \phi)|^2 \tilde{a} L^2 \left(\frac{\sin(kcL/2)}{kcL/2} \right)^2 \frac{2\pi}{k (a^2 + b^2)^{3/2}} \quad (5.52)$$

Si el largo L de la superficie iluminada es grande comparado con λ , como es generalmente el caso, la función $\sin(kcL/2)/(kcL/2)$ es muy angosta y podemos

considerar $\theta = \alpha$. Evaluando cada una de las funciones en (5.52) con el reemplazo $\theta = \alpha$, se obtiene

$$\langle I(\theta = \alpha, \phi) \rangle \propto \cos(\phi/2) \quad (5.53)$$

como se espera de un modelo geométrico.

Se ve entonces claramente que las ecuaciones (5.50) y (5.51), están formadas por una componente correspondiente a la reflexión especular $I_0 \exp[-g]$ y una componente difusa dada por el resto de cada expresión. Cuando se está en la condición $g \ll 1$, la relación entre el máximo de la componente especular y el de la componente difusa es

$$\frac{I_{esp}}{I_{dif}} = \frac{4L}{k^3 \sigma^2 T^2} = \frac{1}{2\pi^3} \left(\frac{\lambda}{\sigma} \right)^2 \frac{\lambda L}{T' T'}, \quad (5.54)$$

que representa varios órdenes de magnitud, puesto que λ/σ y L/T' son mucho mayores que 1.

Es también interesante notar que la distribución angular de la componente difusa, ahora no es independiente de la longitud de onda y que está gobernada sólo por la longitud de correlación T' , a diferencia del caso $\sigma \gtrsim \lambda$, en donde la difusión dependía del cociente σ/T' . Este resultado evidencia que un modelo geométrico no dará cuenta de la expresión (5.51), en el caso de rugosidades bajas, salvo en la aproximación más gruesa dada por (5.53).

Las figuras 13 y 14 muestran algunas de las características más importantes de (5.51).

En el gráfico inferior derecho de la figura 13 se utilizan dos escalas distintas, una para la componente especular y otra para la difusa, de manera de poder compararlas en cuanto a su forma y ubicación, ya que hay 4 órdenes de magnitud de diferencia entre una y otra. En cambio, la figura 14 muestra un corte transversal del gráfico superior izquierdo de la figura 13 a $\phi = 0$, representado en una única escala. Se puede notar claramente cómo el máximo de la componente difusa está desplazado con respecto a la dirección de reflexión especular ($\theta = \alpha$). Este es un efecto que fue notado experimentalmente por primera vez en 1987 para superficies planas^[32].

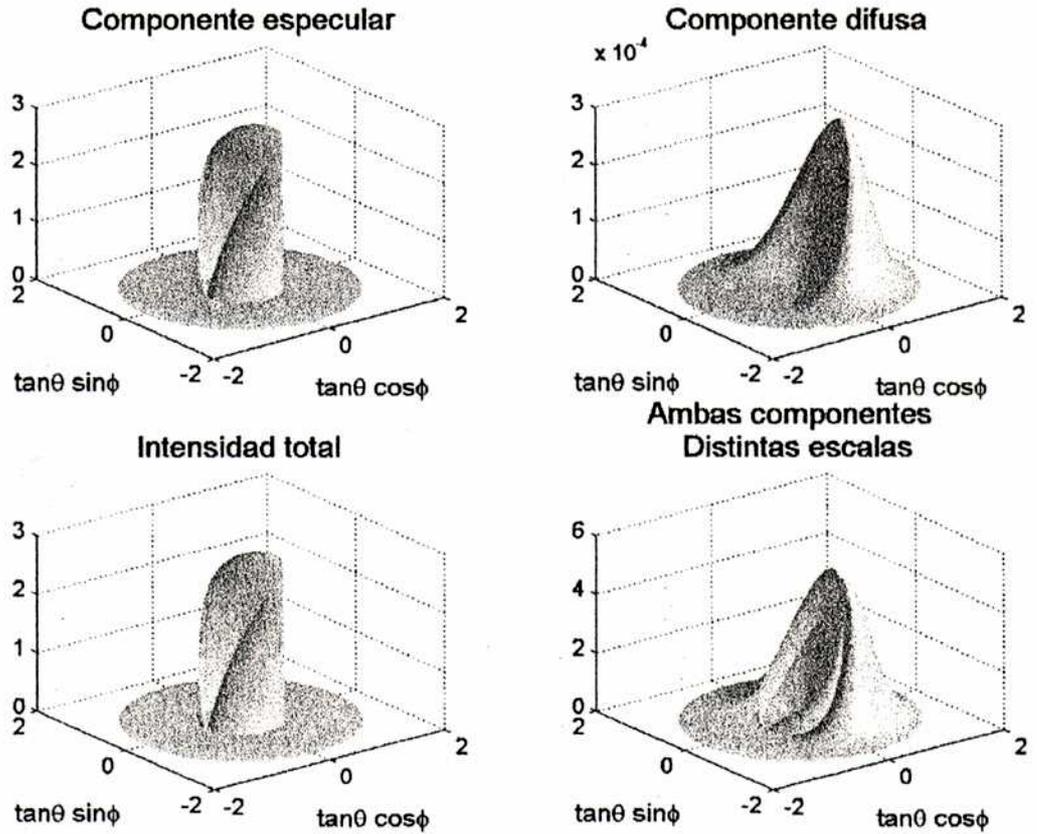


Figura 13: Intensidad media dispersada por un cilindro rugoso con $\sigma \ll \lambda$. Los parámetros elegidos fueron: $\alpha = 30^\circ$, $\lambda = 0.6328 \mu\text{m}$, $\sigma = \lambda/10$, $T = 2\lambda$. La longitud de la zona iluminada del cilindro y su radio fueron respectivamente, $L = 100 \text{ mm}$ y $\tilde{a} = 2.5 \text{ mm}$. Se han representado (de izquierda a derecha y de arriba abajo) la componente especular, la componente difusa, la suma de las dos (para notar que es esencialmente igual a la componente especular, pues hay cuatro órdenes de magnitud de diferencia) y ambas componentes (en la esquina inferior derecha) cada una en una escala de intensidades diferente, para facilitar la comparación de sus posiciones relativas.

5.1.2 Tratamiento Geométrico

A partir de los resultados (4.39) y (4.38), obtenidos en el capítulo 4 se obtendrá la expresión para la intensidad media dispersada.

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) \rangle &= \langle E^*(\theta, \phi) E(\theta, \phi) \rangle = \frac{\Lambda^* \Lambda}{\sin \theta} \sum_{m=1}^{N(\theta, \phi)} \sum_{n=1}^{N(\theta, \phi)} \langle \exp [i(\psi_n - \psi_m)] \rangle \\ &= \frac{\Lambda^* \Lambda}{\sin \theta} \{ N + N(N-1) \langle \exp [i(\psi_n - \psi_m)] \rangle \} \end{aligned}$$

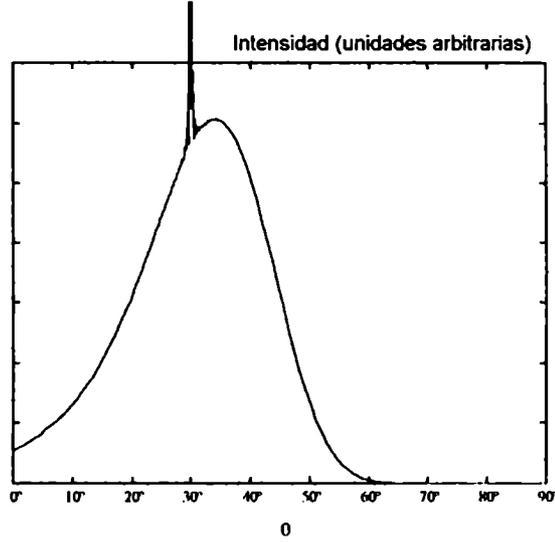


Figura 14: Intensidad media dispersada a $\phi = 0$, para los mismos parámetros que los elegidos para la figura anterior. Se observa que el máximo de la componente difusa está desplazado de la dirección de reflexión especular. El valor máximo del pico correspondiente a la componente especular es, como se notó en la figura anterior 4 órdenes de magnitud más grande que el valor máximo de la componente difusa.

$$= \frac{A^* A}{\sin \theta} \left\{ N + N(N-1) \int p_{\psi_n \psi_m}(\psi_n, \psi_m) \exp [i(\psi_n - \psi_m)] d\psi_n d\psi_m \right\} \quad (5.55)$$

Se considerará que los rayos dispersados en la misma dirección, provienen de puntos que están suficientemente separados sobre la superficie dispersora ($\tau > l$), de modo que en todos los casos se tendrá en cuenta a las fases como independientes (no correlacionadas). Si además se supone que la distribución $p_{\psi}(\psi)$ es simétrica en ψ alrededor de $\psi = 0$, se tiene

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = \frac{A^* A}{\sin \theta} \left\{ N + N(N-1) \left| \int p_{\psi}(\psi) \exp(i\psi) d\psi \right|^2 \right\} \quad (5.56)$$

5.1.2.1 Rugosidades Altas ($\sigma \gtrsim \lambda$)

Dentro de esta aproximación, se puede considerar que las variaciones de fases son grandes y por lo tanto estarán distribuidas uniformemente en el intervalo $(-\pi, \pi)$. De esta manera, la integral en (5.56) es igual a cero y queda la expresión simple

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = A^* A \frac{N(\theta, \phi)}{\sin \theta} \quad (5.57)$$

Reemplazando la expresión de (4.38) en (5.57),

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = \Lambda^* \Lambda \int_{\varphi} p_{H_z H_s}(h_z(\theta, \phi, \varphi), h_s(\theta, \phi, \varphi)) \frac{(1 + \sin \alpha \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha \cos \varphi + \sin \theta \cos(\varphi - \phi))^4} d\varphi \quad (5.58)$$

A partir de ahora es necesario para continuar los cálculos, hacer alguna suposición acerca de la distribución de pendientes. Para ser consistentes con el modelo escalar se considerará que la distribución de pendientes es gaussiana, lo que se corresponde con haber supuesto que la superficie cilíndrica es un proceso aleatorio gaussiano, ecuación (5.5), con un coeficiente de autocorrelación también gaussiano, ecuación (5.11).

$$p_{H_z H_s}(h_z, h_s) = \frac{1}{2\pi\sigma'^2} \exp \left[-\frac{h_z^2 + h_s^2}{2\sigma'^2} \right] \quad (5.59)$$

En donde se ha llamado σ' a la varianza de las pendientes, y (ver capítulo 2) es igual a

$$\sigma' = \sqrt{2} \frac{\sigma}{l} \quad (5.60)$$

Introduciendo entonces esta distribución y (4.33) en (5.58) queda

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) \rangle &= \frac{\Lambda^* \Lambda}{2\pi\sigma'^2} \int_{\varphi} \exp \left[-\frac{(\sin \alpha \sin \varphi + \sin \theta \sin(\varphi - \phi))^2 + (\cos \alpha - \cos \theta)^2}{2\sigma'^2 (\sin \alpha \cos \varphi + \sin \theta \cos(\varphi - \phi))^2} \right] \times \\ &\quad \times \frac{(1 + \sin \alpha \sin \theta \cos \phi - \cos \theta \cos \alpha)^2}{(\sin \alpha \cos \varphi + \sin \theta \cos(\varphi - \phi))^4} d\varphi \end{aligned} \quad (5.61)$$

que puede ser reescrita teniendo en cuenta las definiciones (4.27), (4.8) y (5.15) de la siguiente forma

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = \frac{B^* B}{2\pi\sigma'^2} |K(\theta, \phi)|^2 \int_{\varphi} \exp \left[-\frac{d^2(\varphi) + c^2}{2\sigma'^2 C^2(\varphi)} \right] \frac{1}{C^4(\varphi)} d\varphi, \quad (5.62)$$

en donde ahora B y B^* son constantes arbitrarias en reemplazo de Λ^* y Λ . La integral a resolver es exactamente igual a (5.14), y por lo tanto su solución será igual

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) \rangle &= \frac{B^* B}{2\pi\sigma'^2} |K(\theta, \phi)|^2 \frac{\exp \left[-\frac{1}{2\sigma'^2} \frac{c^2}{a^2 + b^2} \right]}{(a^2 + b^2)^2} \times \\ &\quad \times \{ \text{GammaDist} [\mu \tan^2(\pi/2 - \phi/2), 3/2] \mu^{-3/2} + \end{aligned}$$

$$+ \text{GammaDist} [\mu \tan^2(\pi/2 - \phi/2), 1/2] \mu^{-1/2} \}. \quad (5.63)$$

Este resultado expresa el hecho que, para el caso $\sigma > \lambda$, el modelo escalar y el geométrico predicen exactamente los mismos resultados (comparar con (5.22)).

5.1.2.2 Rugosidades Muy Bajas ($\sigma \ll \lambda$)

A diferencia del caso $\sigma > \lambda$, las fascas ahora no están distribuidas uniformemente en el intervalo $(0, 2\pi)$. El problema es bastante complicado de tratar analíticamente, ya que para cada dirección de dispersión (θ, ϕ) , la distribución $p_\psi(\psi)$ es distinta. Para tener una noción de la complejidad del problema, se considerará el caso plano unidimensional, representado en la figura 15. La diferencia de recorrido en los caminos de los dos rayos

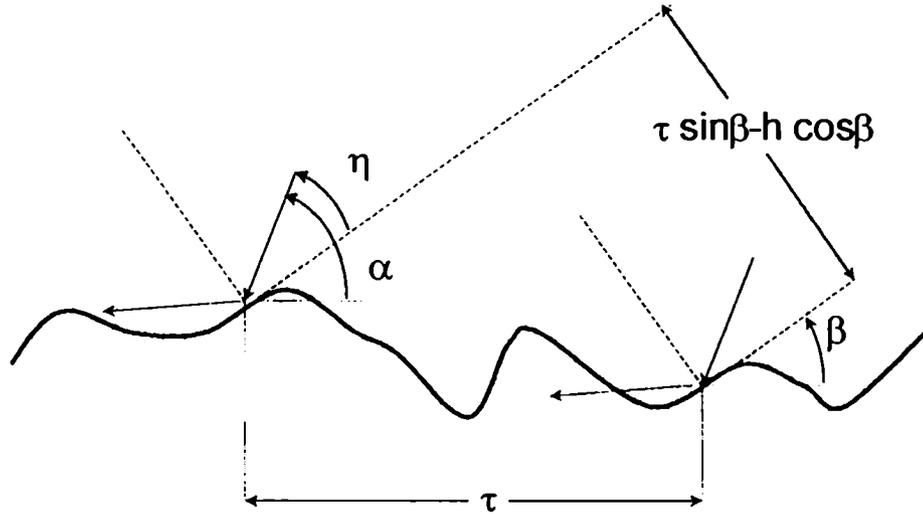


Figura 15: Parámetros a tener en cuenta al calcular la distribución de fascas de la luz dispersada por superficies con rugosidades bajas, de acuerdo a un modelo geométrico.

dibujados que se reflejan en dos elementos de superficie de la misma pendiente es

$$\begin{aligned} \Delta s &= 2(\tau \sin \beta - h \cos \beta) \sin \eta \\ &= 2(\tau \sin \beta - h \cos \beta)(\sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta) \\ &= 2 \cos^2 \beta (\tau \tan \beta - h)(\sin \alpha - \cos \alpha \tan \beta) \end{aligned}$$

$$= 2 \frac{1}{\tan^2 \beta + 1} (\tau \tan \beta - h) (\sin \alpha - \cos \alpha \tan \beta), \quad (5.64)$$

que depende de la distribución de alturas $p(h)$, de la distribución de pendientes $p(\tan \beta)$, y de cómo están separados (τ) los elementos de superficie con la misma pendiente. En el caso en que las pendientes sean despreciables, esto es $T \gg \sigma$, se tiene

$$\Delta s = -2h \sin \alpha \quad (5.65)$$

Para este caso particular, se obtendrá la intensidad media dispersada. Teniendo en cuenta entonces que el α que aparece en (5.65) es el ángulo de incidencia local, se puede expresar a la fase como

$$\begin{aligned} \psi &= -2k \sin \alpha \cos \varphi h \\ &= -2k \sin \alpha \cos \varphi h \end{aligned} \quad (5.66)$$

ya que se ha considerado el caso de pendientes bajas. Es válido en esta aproximación considerar además $\varphi = \phi/2$. Por lo tanto la distribución de fases será

$$p(\psi) = -2k \sin \alpha \cos(\phi/2) p(h) \quad (5.67)$$

y la función característica de $p(\psi)$ involucrada en (5.56)

$$\int p_{\psi}(\psi) \exp(i\psi) d\psi = \exp\left(-\frac{\sigma_{\psi}^2}{2}\right) = \exp\left[-\frac{(2k \sin \alpha \cos(\phi/2))^2 \sigma^2}{2}\right] \quad (5.68)$$

Reemplazando esta última expresión en (5.56) queda

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle = \frac{\Lambda^* \Lambda}{\sin \theta} \{ N + N(N-1) \exp[-(2k \sin \alpha \cos(\phi/2))^2 \sigma^2] \} \quad (5.69)$$

que se puede reordenar usando las aproximaciones

$$\begin{aligned} N^2 &\gg N \\ \exp[-(2k \sin \alpha \cos(\phi/2))^2 \sigma^2] &\approx 1 - 4k^2 \sin^2 \alpha \cos^2(\phi/2) \sigma^2, \end{aligned} \quad (5.70)$$

de modo que si se considera el caso extremo de una superficie lisa, $\sigma, \sigma' = 0$, (5.69) da

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) \rangle &= \frac{\Lambda^* \Lambda}{\sin \theta} N^2(\theta, \phi) \\ &= \lim_{\sigma' \rightarrow 0} \left[\frac{B^* B}{2\pi\sigma'^2} |K(\theta, \phi)|^2 \frac{\exp \left[-\frac{1}{2\sigma'^2} \frac{c^2}{a^2 + b^2} \right]}{(a^2 + b^2)^2} \times \right. \\ &\quad \left. \times \text{GammaDist} \left[\mu \tan^2(\pi/2 - \phi/2), 1/2 \right] \left(\frac{1}{2\sigma'^2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} \right)^{-1/2} \right]^2. \end{aligned} \quad (5.71)$$

La expresión entre corchetes se puede reescribir como

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) \rangle &\propto \left[\frac{B^* B}{2\pi\sigma'^2} |K(\theta, \phi)|^2 \frac{1}{(a^2 + b^2)^2} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma'^2} \frac{c^2}{a^2 + b^2} \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \text{GammaDist} \left[\mu \tan^2(\pi/2 - \phi/2), 1/2 \right] \left(\frac{1}{2\sigma'^2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} \right)^{-1/2} \right]^2 \\ &= |K(\theta, \phi)|^4 \frac{(B^* B)^2}{4\pi^2\sigma'^4} \frac{1}{(a^2 + b^2)^4} \exp \left[-\frac{1}{2\sigma'^2} \frac{c^2}{a^2 + b^2} \right] \times \\ &\quad \times \left\{ \text{GammaDist} \left[\mu \tan^2(\pi/2 - \phi/2), 1/2 \right] \right\}^2 \left(\frac{1}{2\sigma'^2} \frac{a^2 + b^2 + c^2}{a^2 + b^2} \right)^{-1} \\ &\propto \frac{|K(\theta, \phi)|^4}{(a^2 + b^2)^3} \frac{2 \exp \left[-\frac{1}{2\sigma'^2} \frac{c^2}{a^2 + b^2} \right]}{\sqrt{2\pi}\sigma'^2 (a^2 + b^2)} \end{aligned} \quad (5.72)$$

de modo que se nota claramente que el último factor es una gaussiana normalizada a 1, y en el límite de σ' tendiendo a 0, se obtiene una función $\delta(c) = \delta(\cos \theta - \cos \alpha)$. Por otra parte, para el factor inicial se puede considerar a causa de la función δ , sólo la situación $\theta = \alpha$. Haciendo esto, teniendo en cuenta las definiciones (4.27) y (4.8)

$$\begin{aligned} K(\theta, \phi) &= a \sin \alpha = \sin^2 \alpha (1 + \cos \phi) = 2 \sin^2 \alpha \cos^2(\phi/2) \\ a^2 + b^2 &= \sin^2 \alpha (1 + \cos \phi)^2 + \sin^2 \alpha \sin^2 \phi = 2 \sin^2 \alpha (1 + \cos \phi) \\ &= 4 \sin^2 \alpha \cos^2(\phi/2). \end{aligned} \quad (5.73)$$

Poniendo entonces este resultado y el límite mencionado en el párrafo anterior en (5.72) queda

$$\langle I(\theta, \phi) \rangle \propto \cos(\phi/2) \delta(\cos \theta - \cos \alpha), \quad (5.74)$$

lo que implica que la intensidad dispersada por un cilindro liso forma una circunferencia ($\theta = \alpha$) en el plano de observación, en la que la intensidad para un valor dado de ϕ es proporcional a $\cos(\phi/2)$.

5.2 Resultados Experimentales

El dispositivo que se utilizó para medir la intensidad media dispersada se muestra en la figura 16

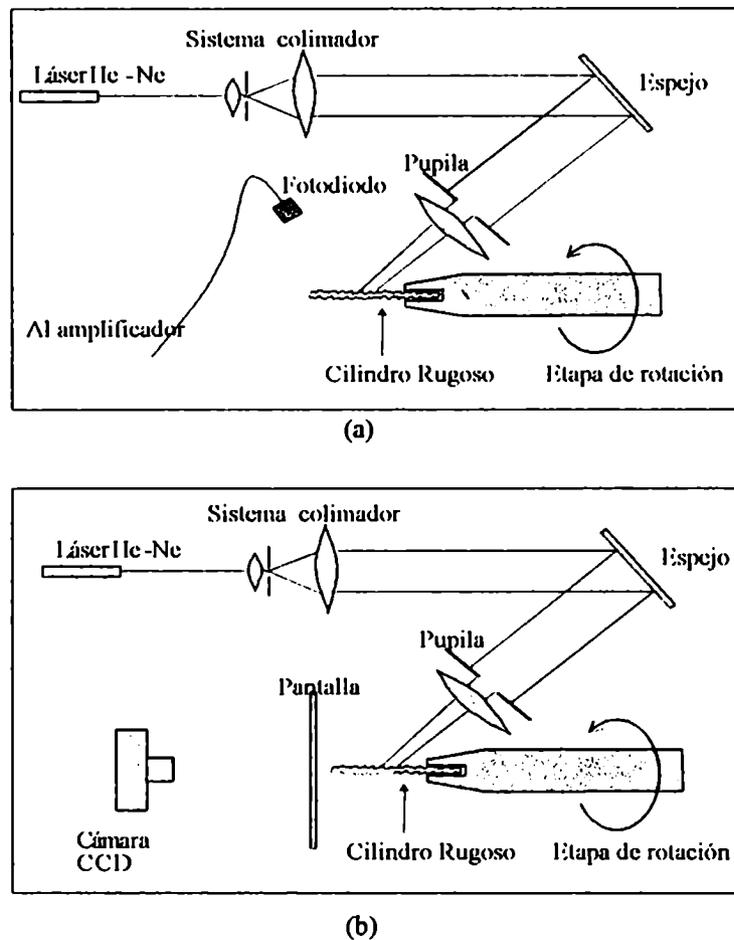


Figura 16: Vista superior de un esquema del dispositivo experimental utilizado para medir la intensidad media dispersada por un cilindro rugoso. Se observan dos sistemas de detección diferentes, en (a) la intensidad es medida con un fotodiodo, y en (b) la intensidad es registrada mediante la captura de la imagen de una pantalla plana difusora a través de una cámara CCD.

Un haz laser ensanchado y colimado se hace reflejar en un espejo plano que permite

variar el ángulo de incidencia. El haz reflejado pasa a través de una lente convergente en cuyo plano focal, donde es válida la aproximación de Fraunhofer, se coloca el detector. La pupila detrás de la lente, limita el tamaño de la zona iluminada asegurando una intensidad uniforme sobre la superficie del cilindro rugoso. Se utilizaron dos maneras distintas de detectar la intensidad de la luz dispersada por la superficie. En primer lugar un fotodiodo montado sobre dos goniómetros que permitían variar los ángulos (θ, ϕ) del punto de observación. En segundo lugar se usó un sistema mucho menos preciso y más indirecto, pero mucho más veloz: una pantalla y una cámara CCD que formaba la imagen en pantalla sobre el chip. El cilindro difusor se montó sobre una plataforma rotante con el objetivo de promediar el speckle, ya sea sobre el fotodiodo o sobre la pantalla.

Para seleccionar qué tipo de pantalla se utilizaría hubo que experimentar distintas alternativas. Un vidrio cuidadosamente esmerilado parecía ser lo más adecuado por su uniformidad, sin embargo, no resultó ser así por lo siguiente: Un vidrio esmerilado es altamente traslúcido, y, angularmente, no dispersa demasiado la luz que incide sobre él. La energía del haz se va principalmente en una dirección ligeramente menor a la que tenía originalmente^[38]. Esto implica que para ángulos muy pequeños la cámara recibirá suficiente luz pero para ángulos ligeramente más grandes ($\sim 15^\circ$) la cantidad de energía que llega a la cámara es comparable al ruido generado por la contribución de todos los rebotes de la luz en los distintos elementos del dispositivo experimental. Esta situación se esquematiza en la figura 17.

Fue, por lo tanto, necesario reemplazar el vidrio esmerilado por una pantalla traslúcida, pero que disperse más uniformemente la luz. La elección, luego de experimentar distintos tipos de papel, fue la de un papel de dibujo. Los papeles dispersan más la luz que un vidrio esmerilado, pero sus propiedades no son tan homogéneas. Se tuvo que compensar esta inhomogeneidad moviendo la pantalla durante el registro de la cámara.

Para que la medición con la pantalla sea válida hubo que calibrarla. Teniendo en cuenta el esquema de la figura 17, y la simetría de la configuración, se ve que la calibración consiste en encontrar el factor, que sólo depende del ángulo de incidencia sobre la pantalla (θ) , por el que hay que multiplicar el registro en los píxeles de la

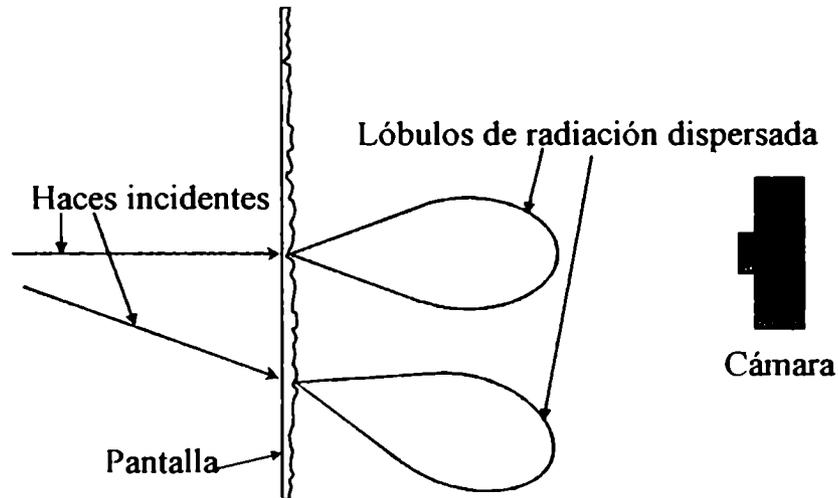


Figura 17: Esquema de la dispersión de luz por una pantalla difusora. Al aumentar el ángulo de incidencia, la cantidad de energía dispersada hacia la cámara disminuye notablemente

CCD correspondientes al ángulo θ para obtener un valor proporcional a la intensidad dispersada en ese ángulo. Para ese fin se utilizaron varias de las mediciones obtenidas con el fotodiodo como sistema de detección. El factor angular de calibración dio similar (dentro del 10%) para cada medición y para cada ángulo ϕ , y se utilizó el promedio sobre todos para calcular la intensidad dispersada a partir de la imagen de la cámara CCD. En la figura 18 se muestra la curva de sensibilidad de la pantalla. El factor de calibración es simplemente el recíproco de la sensibilidad.

La figura 19 muestra dos imágenes obtenidas con la configuración de pantalla y cámara CCD que se esquematizó en la figura 16 (b), para dos cilindros con rugosidades muy distintas. A la izquierda un cilindro extremadamente liso (un rodamiento de rulmán), a la derecha un cilindro de acero-plata despulido artificialmente para obtener valores altos de rugosidad.

5.2.1 Rugosidades Altas

En este régimen de rugosidades ($\sigma \gtrsim \lambda$), la dispersión está gobernada indistintamente

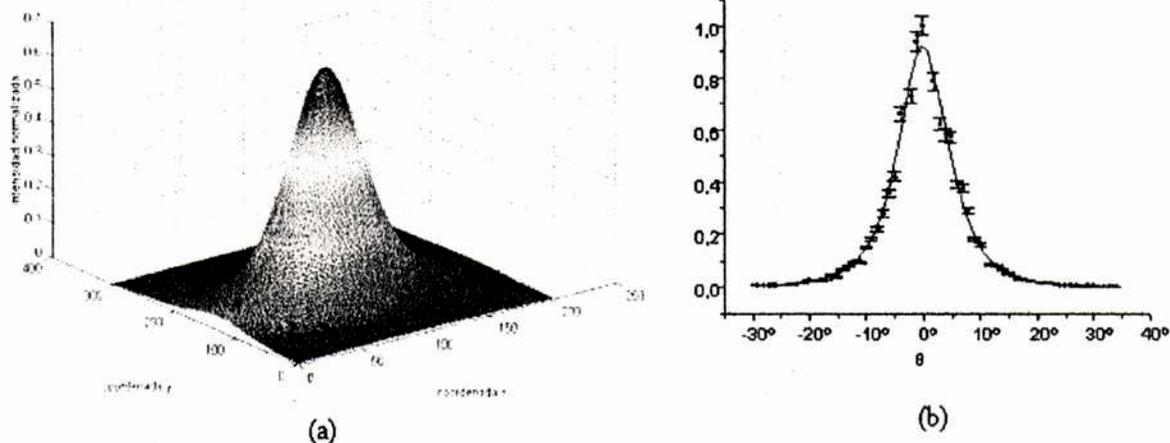


Figura 18: (a) Curva de sensibilidad para la pantalla de papel seleccionada. Esto es el perfil de intensidades que registraría la cámara iluminada con una fuente puntual ideal, ubicada en el centro de la zona iluminada del cilindro (los ejes x e y están en píxeles). (b) Uno de los relevamientos experimentales utilizados en el promediado que dio como resultado la curva de sensibilidad graficada en (a)

por la expresión (5.22), de acuerdo al modelo escalar con la aproximación de Kirchhoff, o bien por la expresión (5.63), según el modelo geométrico, puesto que ambos modelos predicen la misma expresión teórica. En la figura 12 se mostró la comparación de las curvas teóricas de la intensidad dispersada por superficies con distintos valores de T/σ . Se ve ahí el principio del método experimental: Se obtiene el mejor valor del

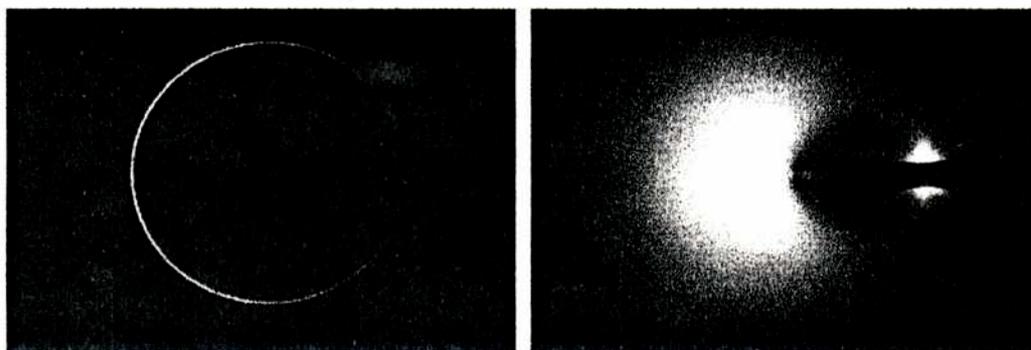


Figura 19: Imágenes de la luz dispersada por superficies cilíndricas capturadas con la configuración mostrada en la figura 15 (b). A la izquierda para un cilindro poco rugoso (un rodamiento de rulemán) y a la derecha para un cilindro muy rugoso. Se observa la sombra de un obturador que bloquea la parte del haz transmitido directamente sin dispersarse.

parámetro ajustando la curva teórica a los valores experimentales. Se puede apreciar cualitativamente la capacidad del método de discriminar entre distintos valores de T/σ .

La preparación de los difusores fue una de las etapas más difíciles, pues era imprescindible conseguir muestras rugosas que cumplieran con las hipótesis que se hicieron para llevar a cabo los cálculos, es decir, que la distribución de los radios fuera Gaussiana y que también fuera Gaussiana su función de autocorrelación. Para ver los detalles de este proceso así como también algunos de los perfiles, histogramas y funciones de autocorrelación experimentales obtenidos, ver Apéndice A. También en ese apéndice, en la tabla 5 se comparan las características de las distintas muestras utilizadas en esta experiencia, así como también los resultados experimentales obtenidos.

El procedimiento utilizado para la mediciones fue así. Se releva la curva de difusión (la intensidad en función de θ) con el fotodiodo para cada muestra a distintos valores del ángulo ϕ . Para cada conjunto de puntos experimentales a un dado ángulo ϕ , se determina el mejor parámetro T/σ mediante el ajuste la curva teórica (5.22) o bien (5.63) (son iguales). El mismo procedimiento se realiza para los datos obtenidos del registro de la cámara CCD para los mismos valores de ϕ . El algoritmo utilizado en la optimización del parámetro T/σ es el que usa el programa MATLAB[®], llamado Nelder-Mead simplex search [39].

En la figura 20 se muestra la fotografía de la dispersión de luz por el cilindro #450090 y en la figura 21 los perfiles de intensidad en la pantalla a lo largo de las líneas A, B y C, así como los valores de intensidad obtenidos con el fotodiodo, juntamente con las respectivas curvas teóricas que mejor ajustan.

Las curvas de la figura 21 muestran características generales de todas las muestras. Primeramente, los datos obtenidos a partir de las fotografías con la cámara CCD son mucho más ruidosos que los obtenidos con el fotodiodo, como es de esperar. Estos datos se apartan mucho de los valores teóricos y de los obtenidos por el fotodiodo para ángulos mayores que 60° aproximadamente. Esto se debe a la gran atenuación de la pantalla para esos ángulos de incidencia. Cuando el ajuste se lleva a cabo sólo con los datos entre 30° y 60° , el valor resultante de T/σ no cambia con respecto al obtenido con todos los datos, pero tiene una dispersión menor.

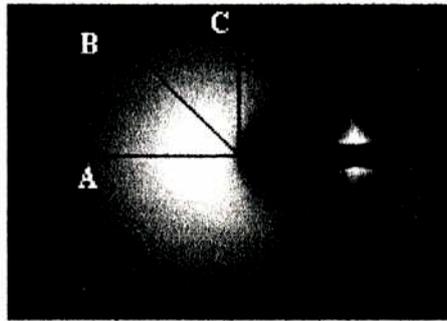


Figura 20: Fotografía de la luz dispersada por la muestra #450090. Los perfiles a lo largo de las líneas A, B, y C están representados en la figura siguiente, juntamente con las curvas teóricas que mejor ajustan.

En segundo lugar, se nota que los datos experimentales están por debajo de la curva teórica para ángulos menores que 20° ó 30° y que están por encima de la curva para ángulos mayores que 80° aproximadamente. Con base en la experiencia adquirida en dispersión por superficies planas^[40], surge que esta desviación se debe al múltiple scattering, que no está tenido en cuenta en las hipótesis del modelo teórico.

| Muestra # | Diámetro (mm) | Polvo # | T/σ (perfil.) | T/σ ($\langle I \rangle$) |
|-----------|-----------------|---------|----------------------|------------------------------------|
| 126400 | 1.26 ± 0.05 | 400 | 9.1 ± 3.4 | 6.5 ± 1.3 |
| 126220 | 1.26 ± 0.05 | 220 | 5.2 ± 1.3 | 6.2 ± 1.2 |
| 126150 | 1.26 ± 0.05 | 150 | 7.2 ± 1.3 | 6.2 ± 1.2 |
| 126090 | 1.26 ± 0.05 | 90 | — | 7.1 ± 1.4 |
| 275400 | 2.75 ± 0.05 | 400 | 9.0 ± 1.2 | 5.7 ± 1.1 |
| 275220 | 2.75 ± 0.05 | 220 | 6.8 ± 1.0 | 5.7 ± 1.1 |
| 275150 | 2.75 ± 0.05 | 150 | 7.3 ± 1.2 | 5.9 ± 1.2 |
| 275090 | 2.75 ± 0.05 | 90 | 7.2 ± 0.5 | 6.6 ± 1.3 |
| 375400 | 3.75 ± 0.05 | 400 | 11.9 ± 1.4 | 6.7 ± 1.3 |
| 375220 | 3.75 ± 0.05 | 220 | 5.7 ± 1.2 | 5.4 ± 1.1 |
| 375150 | 3.75 ± 0.05 | 150 | 5.9 ± 1.0 | 5.6 ± 1.1 |
| 375090 | 3.75 ± 0.05 | 90 | 6.7 ± 0.9 | 6.9 ± 1.4 |
| 450400 | 4.50 ± 0.05 | 400 | 9.2 ± 1.4 | 5.8 ± 1.2 |
| 450220 | 4.50 ± 0.05 | 220 | 6.4 ± 0.9 | 5.6 ± 1.1 |
| 450150 | 4.50 ± 0.05 | 150 | 6.7 ± 1.3 | 5.4 ± 1.1 |
| 450090 | 4.50 ± 0.05 | 90 | 6.6 ± 0.9 | 6.6 ± 1.3 |

Tabla 1: Comparación de las dos mediciones del parámetro T/σ de las muestras cilíndricas con rugosidades que cumplen $\sigma > \lambda$. Una medición se realizó con un rugosímetro electromecánico (perfilómetro) y la otra mediante la medición de la distribución angular de la intensidad media dispersada.

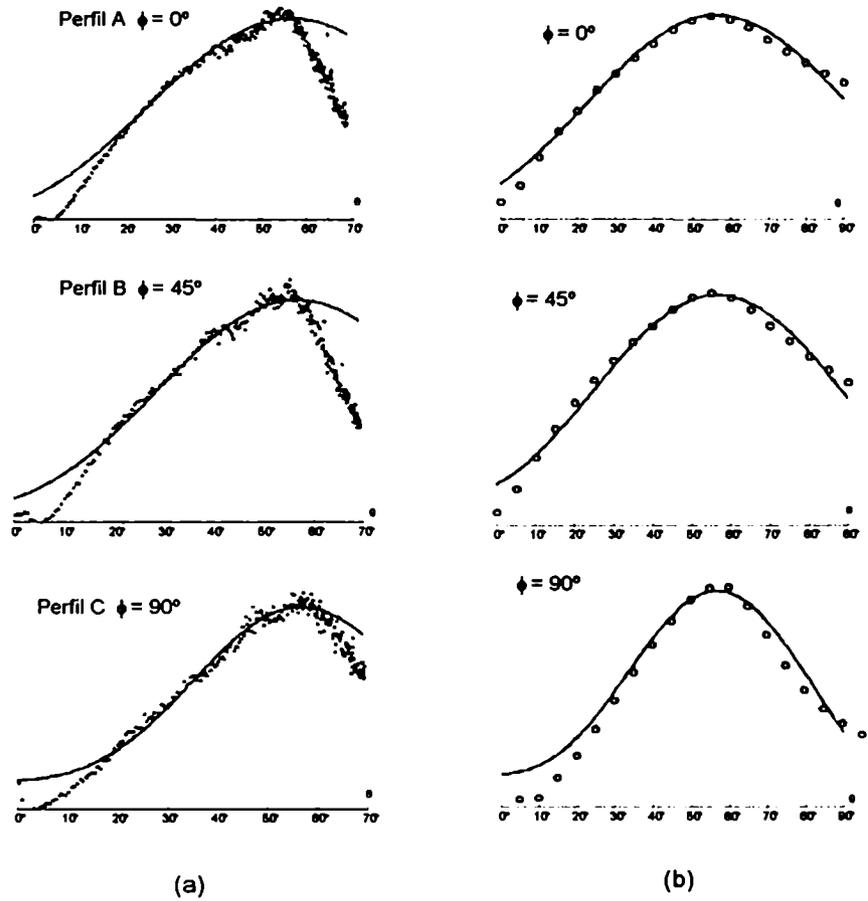


Figura 21: Perfil de intensidades para la muestra #450090. (a) Datos obtenidos de la foto de la figura anterior y los correspondientes ajuste teórico. (b) Datos obtenidos relevando la curva con el fotodiodo para los mismos ángulos y sus correspondientes ajustes teóricos. El ángulo de incidencia en esta experiencia fue $\alpha = 56^\circ 40'$

A pesar de estas desviaciones, como se puede ver en la tabla 1, los valores de T/σ obtenidos con este método están en buen acuerdo con los obtenidos mediante el rugosímetro mecánico. La excepción es el valor de T/σ dado por el perfilómetro para las muestras de rugosidad más baja (# XXX400), que fueron despulidas con el polvo # 400, pero esta diferencia es debida al tamaño de la púa ($5 \mu m$), que reduce la medida de σ y mantiene la de T . En el apéndice A, se describe la forma en que se caracterizaron las muestras, cómo fueron preparadas algunas de ellas y algunas mediciones adicionales.

5.2.2 Rugosidades Bajas

Para medir rugosidades en este régimen ($\sigma \ll \lambda$), estudiando la intensidad media dispersada, se utiliza la misma configuración experimental, pero el método es diferente.

Ubicándose en el ángulo correspondiente a la reflexión especular, $\theta = \alpha$, sólo el primer término entre las llaves de la ecuación (5.51) es relevante, como se ve también en las figuras 13 y 14. Es decir

$$\begin{aligned} \langle I(\theta = \alpha, \phi) \rangle &\cong \exp[-g(\theta = \alpha, \phi)] I_0(\theta = \alpha, \phi) \\ &\propto \exp[-(2k\sigma \sin \alpha \cos(\phi/2))^2] \cos(\phi/2) \end{aligned} \quad (5.75)$$

Por lo tanto, midiendo la intensidad a lo largo de la circunferencia $\theta = \alpha$, se obtendrá el parámetro σ ajustando la curva teórica (5.75) a los datos.

La explicación intuitiva de este método, es como sigue: Si no hay rugosidad, $\sigma = 0$, se tiene que la intensidad media $\langle I(\theta = \alpha, \phi) \rangle$ en un ángulo ϕ a lo largo de la circunferencia es proporcional a la energía incidente sobre el elemento de la superficie del cilindro con el que está conectado por un trazado de rayos mediante la óptica geométrica, esto es

$$\langle I(\theta = \alpha, \phi) \rangle \propto \cos(\phi/2) \quad (5.76)$$

Si se agrega una rugosidad σ , se tiene que parte de la energía incidente contribuirá a la componente difusa y hará disminuir por lo tanto la intensidad sobre la circunferencia correspondiente a la dirección especular. Como el ángulo de incidencia local no es el mismo en distintos puntos sobre la superficie (varía desde $\alpha_{local} = \alpha$ para $\varphi = 0$, hasta $\alpha_{local} = \pi/2$ para $\varphi = \pi/2$), la rugosidad aparente en cada sector de la superficie es diferente, y por lo tanto la cantidad de energía que se va de la componente especular es también diferente para cada ángulo. Llevándolo al caso de rugosidades planas, el método se correspondería a iluminar la muestra con diferentes ángulos de incidencia y medir para cada uno de esos ángulos la intensidad de la componente especular, aunque el método habitual para medir rugosidades bajas consiste en medir el cociente entre la energía en la componente difusa y la energía en la componente especular. Gaggioli y Roblin desarrollaron un método que tiene más relación con el propuesto aquí, pero para superficies planas translúcidas, cambiando la rugosidad aparente de las muestras

sumergiéndolas en líquidos de distintos índices de refracción^[41,42] .

La figura 22 muestra las curvas teóricas (5.75) para distintos valores de σ . En principio,

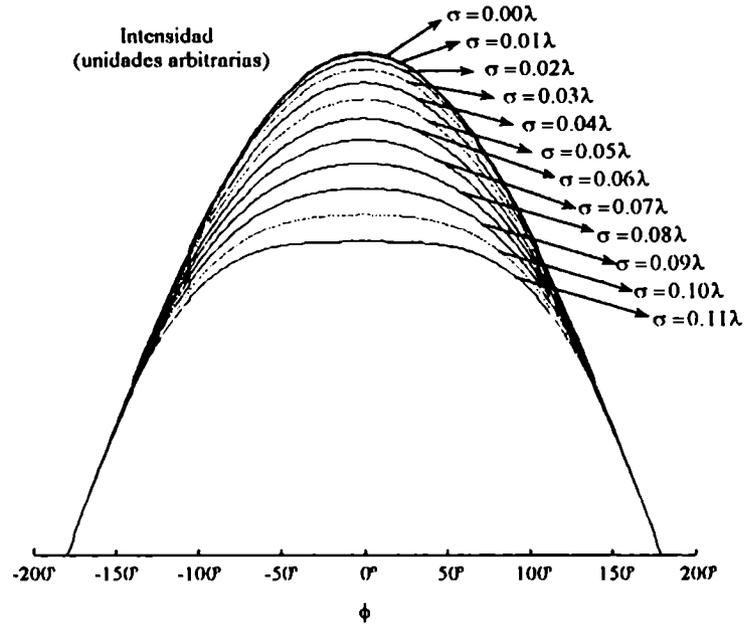


Figura 22: Curvas teóricas de la intensidad correspondiente a la componente especular a lo largo de la circunferencia $\theta = \alpha = 30^\circ$, para distintos valores de σ .

de acuerdo a estas curvas, el método permitiría discriminar valores de rugosidad entre $0.02\lambda \leq \sigma \leq 0.10\lambda$, por supuesto el método será adecuado cuando la reflectividad de la muestra cumpla con las hipótesis del modelo, esto es cuando se pueda considerar aproximadamente como constante.

Se presenta la medición correspondiente al rodamiento cilíndrico (muestra # R01). La fotografía de la figura 23, está tomada de acuerdo a la configuración mostrada en la parte inferior de la figura 16, con un ángulo de incidencia $\alpha = 24^\circ 40'$. A partir de esta fotografía se relevó el perfil de intensidades sobre la circunferencia, y se ajusta la curva teórica (5.75). El resultado de este proceso se muestra en la figura 24. El valor correspondiente obtenido de la rugosidad fue $\sigma = (0.04 \pm 0.03) \mu m$ y se muestra también en la tabla 2. Se corresponde con el obtenido con el rugosímetro, sin embargo, la dispersión de los valores experimentales, y por lo tanto del ajuste teórico también, es muy grande.

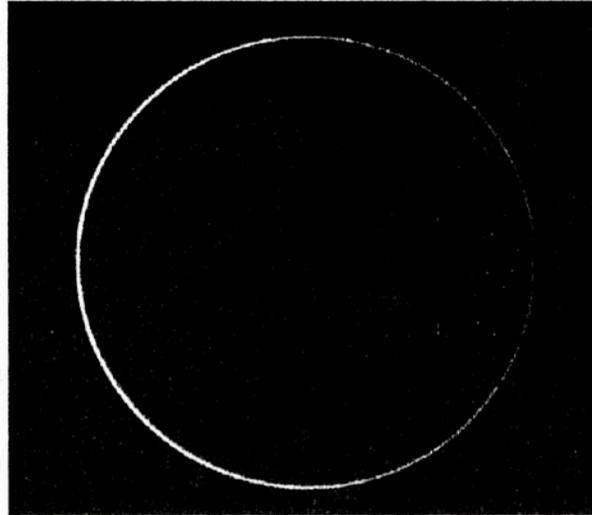


Figura 23: Fotografía de la luz dispersada por la muestra # R01, tomada con configuración de la parte inferior de la figura que muestra el dispositivo experimental

En el apéndice A se pueden encontrar datos adicionales de esta muestra y de otras más de rugosidades bajas, utilizadas en las experiencias del capítulo siguiente.

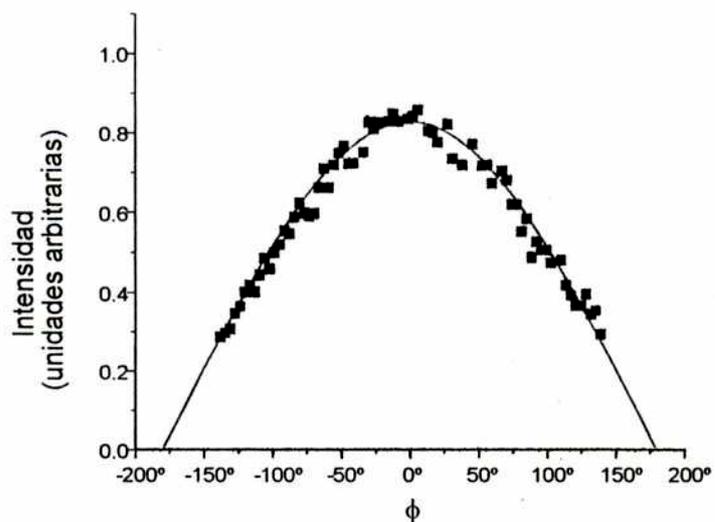


Figura 24: Relevamiento del perfil de intensidades de la fotografía de la figura anterior y su correspondiente ajuste teórico.

| Muestra # | Diámetro (mm) | σ (μm) (perfilóm.) | σ (μm) ($\langle I \rangle$) |
|--------------|----------------------|-------------------------------------|---|
| R01 | 5000 ± 50 | 0.08 ± 0.02 | 0.04 ± 0.03 |

Tabla 2: Comparación de las dos mediciones de rugosidad para un rodamiento cilíndrico con $\sigma < \lambda$. Una medición se realizó con un rugosímetro electromecánico y la otra mediante el ajuste de la componente especular de la intensidad media dispersada.

Estadística de Segundo Orden del Campo

Este capítulo estudia el tamaño y la forma de la estructura fina de la intensidad dispersada por una superficie cilíndrica rugosa. Se verá que, a diferencia de lo que sucede con superficies rugosas planas (ver ecuación (3.36) y comentarios siguientes), el tamaño del speckle tiene información de los parámetros característicos de la superficie.

6.1 Resultados Teóricos (Tratamiento Escalar)

Se utilizará el modelo escalar descrito en el capítulo 4 para calcular la autocorrelación de intensidad de la luz dispersada por cilindros rugosos. Si el campo tiene una distribución estadística circular gaussiana, la correlación de intensidades puede escribirse como^[36]

$$\begin{aligned} \gamma_{AB}(\theta, \phi, \theta', \phi') &= \frac{\langle I_A(\theta, \phi) I_B(\theta', \phi') \rangle - \langle I_A(\theta, \phi) \rangle \langle I_B(\theta', \phi') \rangle}{\left[(\langle I_A^2(\theta, \phi) \rangle - \langle I_A(\theta, \phi) \rangle^2) (\langle I_B^2(\theta', \phi') \rangle - \langle I_B(\theta', \phi') \rangle^2) \right]^{1/2}} \\ &= \frac{|\langle E_A(\theta, \phi) E_B^*(\theta', \phi') \rangle|^2}{\langle I_A(\theta, \phi) \rangle \langle I_B(\theta', \phi') \rangle}, \end{aligned} \quad (6.1)$$

en donde $\langle \rangle$ representa el promedio sobre el ensemble de superficies, los ángulos (θ, ϕ) y (θ', ϕ') hacen referencia a dos direcciones diferentes de observación y los subíndices A y B indican dos condiciones diferentes de iluminación, que pueden provenir por ejemplo de dos ángulos de incidencia distintos, dos diferentes longitudes de onda, etc. En este caso, como el objetivo es obtener la forma del grano de speckle, tomamos la condición $A = B$. La condición que lleva a que los campos tengan una estadística circular gaussiana, es simplemente que el área de correlación de la superficie sea mucho menor que el área iluminada, o más propiamente, que el área neta que contribuye al campo en una dada dirección.

Teniendo en cuenta la expresión (4.26) para el campo, es posible expresar la correlación

de los campos en dos direcciones arbitrarias (θ, ϕ) y (θ', ϕ') como

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) I^*(\theta', \phi') \rangle &= K(\theta, \phi) K^*(\theta', \phi') \iiint \int_{\varphi_1 z_1 \varphi_2 z_2} \exp [ik(cz_2 - c'z_1)] \times \\ &\times \frac{\langle \exp [ik(h_2 C(\varphi_2) - h_1 C'(\varphi_1))] h_1 h_2 \rangle}{C(\varphi_2) C'(\varphi_1)} dz_1 d\varphi_1 dz_2 d\varphi_2, \end{aligned} \quad (6.2)$$

en donde por brevedad, las primas indican que esas cantidades son funciones de los ángulos de dispersión (θ', ϕ') . Los factores angulares K y K^* varían muy suavemente con respecto a los ángulos de difusión y por lo tanto serán omitidos de aquí en más, ya que los mismos factores aparecen en el denominador de (6.1) y, en una muy buena aproximación, se cancelarán.

Como los granos de speckle son pequeños, se expresará la dirección (θ', ϕ') como $(\theta + \delta\theta, \phi + \delta\phi)$. Por conveniencia, también las coordenadas sobre la superficie cilíndrica z_2 y φ_2 serán expresadas como funciones de z_1 y φ_1 y la distancia entre ellas

$$\begin{aligned} c' &= \cos \alpha - \cos \theta' = \cos \alpha - \cos(\theta + \delta\theta) \simeq \cos \alpha - \cos \theta + \delta\theta \sin \theta \\ C'(\varphi_1) &= a(\theta + \delta\theta, \phi + \delta\phi) \cos \varphi_1 + b(\theta + \delta\theta, \phi + \delta\phi) \sin \varphi_1 \\ &\approx C(\varphi_1) + \sin \theta \sin(\phi - \varphi_1) \delta\phi - \cos \theta \cos(\phi - \varphi_1) \delta\theta \\ C(\varphi_2) &= a(\theta, \phi) \cos \varphi_2 + b(\theta, \phi) \sin \varphi_2 \\ &\approx C(\varphi_1) + \frac{\tau}{\tilde{a}} \sin \zeta (b \cos \varphi_1 - a \sin \varphi_1), \end{aligned} \quad (6.3)$$

con τ y ζ definidas como antes, ecuación (5.2), de acuerdo a la figura 9 y \tilde{a} es el radio promedio del cilindro.

Reemplazando las aproximaciones (6.3) en (6.2) y haciendo el cambio de variables $\varphi_2, z_2 \rightarrow \tau, \zeta$, se obtiene

$$\begin{aligned} \langle I(\theta, \phi) I^*(\theta', \phi') \rangle &= \tilde{a} \iiint \int_{z_1 \varphi_1 \zeta \tau} \exp (ikc\tau \cos \zeta) \exp (-ikcz_1 \sin \theta \delta\theta) \times \\ &\times \frac{\langle \exp [ik[h_2(C(\varphi_1) + \frac{\tau}{\tilde{a}} d \sin \zeta) - h_1(C(\varphi_1) + \Delta)]] \rangle}{(C(\varphi_1) + \Delta)(C(\varphi_1) + \frac{\tau}{\tilde{a}} d \sin \zeta)} dz_1 d\varphi_1 d\zeta \tau d\tau \end{aligned} \quad (6.4)$$

Al escribir (6.4) se reemplazaron como en el capítulo 4 los factores h_1 y h_2 dentro de $\langle \rangle$ por \tilde{a} y se ha utilizado además la siguiente notación

$$\Delta \equiv \sin \theta \sin(\phi - \varphi_1) \delta\phi - \cos \theta \cos(\phi - \varphi_1) \delta\theta$$

$$\begin{aligned}
d &\equiv b \cos \varphi_1 - a \sin \varphi_1 \\
z_2 - z_1 &= \tau \cos \zeta
\end{aligned} \tag{6.5}$$

La integral en z_1 se puede evaluar, dando

$$\int_{-L/2}^{L/2} \exp(-ikcz_1 \sin \theta \delta \theta) dz_1 = L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \tag{6.6}$$

Esta expresión muestra que el ancho del speckle en la dirección radial depende (en una relación de transformadas de Fourier) de la longitud del área iluminada del cilindro a lo largo de la dirección del eje z . Esto no es más que una manifestación del teorema de Wiener-Kintchine^[37].

Para evaluar el valor medio sobre el ensemble en (6.4), se considerará como antes que la distribución de probabilidades $h(\varphi, z)$ es gaussiana con valor medio \tilde{a} (el radio promedio del cilindro), de este modo

$$\begin{aligned}
\left\langle \exp[ik[h_2(C(\varphi_1) + \frac{\tau}{a}d \sin \zeta) - h_1(C(\varphi_1) + \Delta)]] \right\rangle &= \\
&= \exp \left[ik\tilde{a}((C(\varphi_1) + \frac{\tau}{a}d \sin \zeta) - (C(\varphi_1) + \Delta)) \right] \times \\
&\times \exp \left[-\frac{1}{2}\sigma^2 k^2 \left\{ (C(\varphi_1) + \frac{\tau}{a}d \sin \zeta)^2 - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - 2\gamma(z_1, \varphi_1, z_2, \varphi_2)(C(\varphi_1) + \frac{\tau}{a}d \sin \zeta)(C(\varphi_1) + \Delta) + (C(\varphi_1) + \Delta)^2 \right\} \right] \tag{6.7}
\end{aligned}$$

donde $\gamma(z_1, \varphi_1, z_2, \varphi_2)$ es el coeficiente de autocorrelación de la superficie. Se supone, como antes, que es también gaussiano y que no depende de la dirección, sino sólo de la distancia τ sobre la superficie (estacionaridad)

$$\gamma_{Sup}(z_1, \varphi_1, z_2, \varphi_2) = \exp \left(-\frac{\tau^2}{l^2} \right) \tag{6.8}$$

Si uno se queda con el desarrollo a primer orden sólo en la fase de (6.7), se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\langle \exp[ik[h_2(C(\varphi_1) + \frac{\tau}{a}d \sin \zeta) - h_1(C(\varphi_1) + \Delta)]] \right\rangle &= \exp(ik\tau d \sin \zeta) \exp(-ik\tilde{a}\Delta) \times \\
&\times \exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)(1 - \gamma)] \tag{6.9}
\end{aligned}$$

Reemplazando esta última expresión y (6.6) en (6.4) y aproximando el denominador a orden cero, queda

$$\begin{aligned} \langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &= \tilde{\alpha} L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \iiint_{\varphi_1 \zeta \tau} \exp [ik\tau(c \cos \zeta + d \sin \zeta)] \times \\ &\times \exp(-ik\tilde{\alpha}\Delta) \frac{\exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)(1 - \gamma(\tau))]}{C^2(\varphi_1)} d\varphi_1 d\zeta \tau d\tau \end{aligned} \quad (6.10)$$

Integrando (6.10) en ζ , resulta

$$\begin{aligned} \langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &= 2\pi\tilde{\alpha} L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \iint_{\varphi_1 \tau} J_0(k\tau\sqrt{c^2 + d^2}) \exp(-ik\tilde{\alpha}\Delta) \times \\ &\times \frac{\exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)(1 - \gamma(\tau))]}{C^2(\varphi_1)} d\varphi_1 \tau d\tau \end{aligned} \quad (6.11)$$

6.1.1 Rugosidades Altas

Si se trabaja con rugosidades σ tales que $\sigma > \lambda$, la exponencial negativa en (6.11) hará que la integral sea distinta de cero para valores pequeños de τ , de modo que se puede realizar la aproximación $\gamma \approx 1 - \tau^2/l^2$. De este modo (6.11) queda, integrando en τ

$$\begin{aligned} \langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &= \tilde{\alpha} L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \frac{l^2}{\sigma^2 k^2} \int_{\varphi_1} \frac{\exp\left[-\frac{l^2(c^2 + d^2)}{4\sigma^2 C^2(\varphi_1)}\right]}{C^4(\varphi_1)} \times \\ &\times \exp[-ik\tilde{\alpha}\Delta(\varphi_1)] d\varphi_1 \end{aligned} \quad (6.12)$$

Ahora se reescribe el ángulo de integración como $\varphi_1 = \phi/2 + \varepsilon$, de modo que se obtiene

$$\begin{aligned} C(\varphi_1) &= C(\phi/2) \cos \varepsilon \\ d(\varphi_1) &= C(\phi/2) \sin \varepsilon \\ \Delta(\varphi_1) &= -\Delta_0 \cos(\delta + \phi/2 + \varepsilon) \end{aligned} \quad (6.13)$$

$$\Delta_0 = \sqrt{M^2 + N^2}$$

$$M = \delta\theta \cos \theta$$

$$N = \delta\phi \sin \theta$$

$$\begin{aligned}\sin \delta &= \frac{N}{\Delta_0} \\ \cos \delta &= \frac{M}{\Delta_0}\end{aligned}\quad (6.14)$$

que se representan en la figura 25. Tomando en particular la dirección $\theta = \alpha$, se tiene

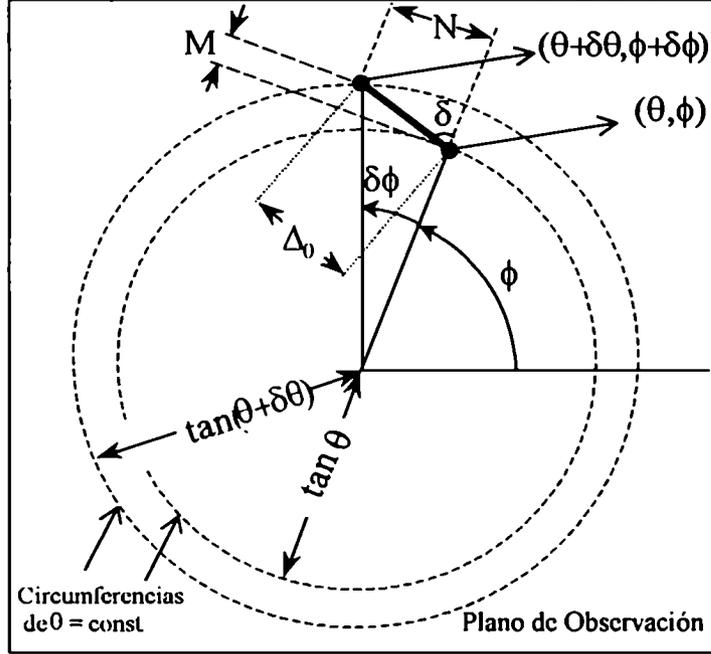


Figura 25: Representación geométrica de las coordenadas δ y Δ_0 (y también M y N) utilizadas para expresar la diferencia entre las direcciones angulares $(\theta + \delta\theta, \phi + \delta\phi)$ y (θ, ϕ) en el plano de observación

que $c = 0$, por lo tanto

$$\begin{aligned}\langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &= \tilde{a} L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \frac{T^2}{\sigma^2 k^2} \int_{\epsilon} \frac{\exp \left[-\frac{T^2 \tan^2 \epsilon}{4\sigma^2} \right]}{C^4(\phi/2) \cos^4 \epsilon} \times \\ &\times \exp [ik\tilde{a}\Delta_0(\cos \epsilon \cos(\delta + \phi/2) - \sin(\delta + \phi/2) \sin \epsilon)] d\epsilon\end{aligned}\quad (6.15)$$

Una simplificación aún mayor es tomar como despreciables las contribuciones a la integral cuando los valores de ϵ no son pequeños, e integrar en el intervalo $(-\infty, +\infty)$.

Reemplazamos entonces $\cos \epsilon \approx 1$ y $\sin \epsilon \approx \tan \epsilon \equiv \xi$. De este modo se llega a

$$\begin{aligned}\langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &\propto \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \int_{\xi} \exp \left[-\frac{T^2 \xi^2}{4\sigma^2} \right] (\xi^2 + 1) \times \\ &\times \exp [-ik\tilde{a}\Delta_0 \sin(\delta + \phi/2)\xi] d\xi\end{aligned}\quad (6.16)$$

En donde se han dejado de lado los factores de fase y las constantes que se simplifican con las correspondientes del denominador en (6.1). Despreciando por último ξ^2 con respecto a 1, (6.16) es la transformada de Fourier de una función gaussiana. Por lo tanto la aproximación analítica final es

$$\langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle \propto \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \exp \left[- \left(\frac{k\tilde{a}\Delta_0 \sin(\delta + \phi/2)\sigma}{T} \right)^2 \right] \quad (6.17)$$

y por lo tanto, tomando el módulo al cuadrado de acuerdo a (6.1),

$$\gamma_I(\theta, \phi, \theta + \delta\theta, \phi + \delta\phi) = \frac{\sin^2(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)^2} \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{2}k\tilde{a}\Delta_0 \sin(\delta + \phi/2)\sigma}{T} \right)^2 \right] \quad (6.18)$$

Esta última expresión da la forma de la función de autocorrelación de la figura de speckle a lo largo de la circunferencia $\theta = \alpha$ y provee por lo tanto una nueva manera de medir el parámetro T/σ .

6.1.2 Rugosidades Bajas

En el caso en que $\sigma \ll \lambda$, es conveniente hacer un desarrollo en serie de la exponencial negativa en (6.11)

$$\exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)(1 - \gamma(\tau))] = \exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2n} k^{2n} C^{2n}(\varphi_1)}{n!} \exp(-n \frac{\tau^2}{T^2}) \quad (6.19)$$

Reemplazándola en (6.11), queda

$$\begin{aligned} \langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &= 2\pi\tilde{a}L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \times \\ &\times \sum_{n=0}^{\infty} \iint_{\varphi_1 \tau} J_0(k\tau \sqrt{c^2 + d^2}) \exp(-n \frac{\tau^2}{T^2}) \times \\ &\times \exp(-ik\tilde{a}\Delta) \frac{\exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)]}{C^2(\varphi_1)} \frac{\sigma^{2n} k^{2n} C^{2n}(\varphi_1)}{n!} \tau d\tau d\varphi_1 \quad (6.20) \end{aligned}$$

El término correspondiente a $n = 0$, tiene que ver con la componente especular, así que se dejará de lado puesto que se está trabajando ahora con la componente difusa para estar dentro de la hipótesis de que el campo tiene una distribución circular gaussiana. El problema de la integral en (6.20) para ese término se puede resolver como en el

capítulo 5, cuando se calculó la varianza. Para el resto de los términos la integral en τ da

$$\begin{aligned} \langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &= 2\pi \tilde{a} L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma^2}{2n} \int_{\varphi_1} \exp \left[-\frac{k^2 \Gamma^2 (c^2 + d^2)}{4n} \right] \times \\ &\times \exp(-ik\tilde{a}\Delta) \frac{\exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)]}{C^2(\varphi_1)} \frac{\sigma^{2n} k^{2n} C^{2n}(\varphi_1)}{n!} d\varphi_1 \end{aligned} \quad (6.21)$$

y reteniendo solamente el término $n = 1$,

$$\begin{aligned} \langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &= \pi \tilde{a} L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \Gamma^2 \sigma^2 k^2 \int_{\varphi_1} \exp \left[-\frac{k^2 \Gamma^2 (c^2 + d^2(\varphi_1))}{4} \right] \times \\ &\times \exp(-ik\tilde{a}\Delta(\varphi_1)) \exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)] d\varphi_1 \end{aligned} \quad (6.22)$$

en donde se ha escrito explícitamente qué funciones dependen de φ_1 . Se puede reescribir la expresión anterior de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &= \pi \tilde{a} L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \Gamma^2 \sigma^2 k^2 \exp \left[-\frac{k^2 \Gamma^2 c^2}{4} \right] \times \\ &\times \int_{\epsilon} \exp \left[-k^2 C^2(\phi/2) \left(\frac{\Gamma^2}{4} \sin^2 \epsilon + \sigma^2 \cos^2 \epsilon \right) \right] \times \\ &\times \exp[ik\tilde{a}\Delta_0(\cos \epsilon \cos(\delta + \phi/2) - \sin(\delta + \phi/2) \sin \epsilon)] d\epsilon \end{aligned} \quad (6.23)$$

en donde se ha utilizado el cambio (6.13). Reemplazando ahora $\cos \epsilon \approx 1$ y $\sin \epsilon \approx \epsilon$, se tiene

$$\begin{aligned} \langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &\propto \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \int_{\epsilon} \exp \left[-k^2 C^2(\phi/2) \frac{\Gamma^2}{4} \epsilon^2 \right] \times \\ &\times \exp[-ik\tilde{a}\Delta_0 \sin(\delta + \phi/2) \epsilon] d\epsilon \end{aligned} \quad (6.24)$$

En donde se han omitido, como en el caso de rugosidades altas, los factores de fase y las constantes que se simplificarán. Esto es una transformada de Fourier si se integra en $(-\infty, +\infty)$, lo cual se hará, ya que el integrando sólo contribuye para valores pequeños de ϵ . Por lo tanto, integrando de esta forma, tomando el módulo al cuadrado y reemplazando en (6.1), se tendrá

$$\gamma_1(\theta, \phi, \theta + \delta\theta, \phi + \delta\phi) = \frac{\sin^2(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)^2} \exp \left[-\left(\frac{\sqrt{2}\tilde{a}\Delta_0 \sin(\delta + \phi/2)}{C(\phi/2)\Gamma} \right)^2 \right] \quad (6.25)$$

Comparando esta expresión con la correspondiente para rugosidades altas (6.18), se ve

que en aquélla el tamaño del grano de speckle estaba gobernado por el parámetro T/σ , mientras que aquí sólo depende del parámetro T . Esto es así ya que las correspondientes curvas de difusión de la intensidad media están gobernadas por estos parámetros. Si se aplica el teorema de Wiener-Khinchine^[37], la autocorrelación será proporcional a la transformada de Fourier de la zona iluminada, pero como no toda la zona iluminada contribuye al campo en la dirección (θ, ϕ) , en realidad la autocorrelación será proporcional a la transformada de Fourier de la zona *efectiva* que contribuye al campo en esa dirección. Esta zona efectiva está relacionada con la forma en que la superficie dispersa la luz. En el caso de rugosidades altas, la superficie dispersa en la forma dada por (5.22), es decir tanto más cuanto más grande es σ/T , por lo tanto la zona efectiva de dispersión es mayor cuanto más grande es σ/T y, consecuentemente, el grano de speckle será más angosto, de acuerdo con (6.18). Similarmente, para el régimen de rugosidades bajas la dispersión está gobernada por la longitud de correlación T (ecuación (5.51)). Al aumentar T , disminuye el tamaño de la superficie efectiva que contribuye al campo en una dirección cualquiera (θ, ϕ) fuera de la dirección especular y, correspondientemente con (6.25) aumenta el tamaño del speckle a lo largo de la dirección ϕ .

Estos resultados no tienen una analogía con los resultados conocidos para superficies planas. Sin embargo este estudio teórico sugiere una extensión natural para superficies planas y consiste simplemente en iluminar la superficie plana rugosa con un haz divergente. Haciendo así se obtendrá que el tamaño de grano del speckle dependerá de T/σ en el caso de $\sigma > \lambda$, y para el caso de rugosidades bajas dependerá sólo de T .

6.2 Resultados Experimentales

En esta sección se mostrarán las experiencias realizadas para comprobar las expresiones teóricas (6.18) y (6.25). Estas ecuaciones muestran una dependencia similar a lo largo de la dirección θ , a saber, proporcional a la transformada de Fourier de la zona iluminada, lo que es, como ya se advirtió antes, una manifestación del teorema de Wiener-Khinchine. La dependencia en ϕ del tamaño de grano es la que proveerá información acerca de las propiedades de la superficie. Se tomará entonces siempre el

caso $\delta\theta = 0$ (que implica $\delta = \pi/2$), con lo cual las ecuaciones mencionadas quedarán

$$\gamma_I(\theta, \phi, \theta, \phi + \delta\phi) = \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{2}k\tilde{a}\Delta_0 \cos(\phi/2)\sigma}{T} \right)^2 \right] \quad (6.26)$$

para rugosidades altas, y

$$\gamma_I(\theta, \phi, \theta, \phi + \delta\phi) = \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{2}\tilde{a}\Delta_0 \cos(\phi/2)}{C(\phi/2)T} \right)^2 \right] \quad (6.27)$$

para rugosidades bajas.

La figura 26 muestra el dispositivo experimental utilizado para medir la función de autocorrelación de intensidades en distintas direcciones (θ, ϕ) en donde es válida la aproximación de campo lejano.

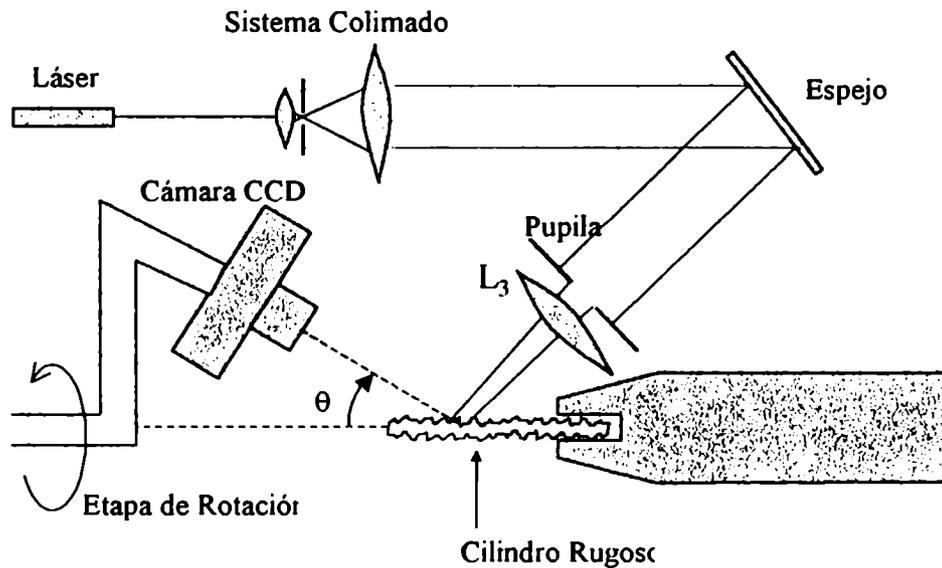


Figura 26: Vista superior del dispositivo experimental para la medición del tamaño del speckle de la luz dispersada por un cilindro rugoso.

El sistema ideado es equivalente al de la parte superior de la figura 16 con la diferencia de que no hay etapa de rotación y que se emplea el chip desnudo de la cámara CCD

para registrar la intensidad en el “foco” de la lente L_3 en vez del fotodiodo, en donde por “foco” se quiere significar la región del espacio en donde se enfocaría el haz si el cilindro fuera perfectamente liso, esto es a lo largo de la circunferencia $\theta = \alpha$. El ángulo θ está entonces fijo y se varía el ángulo ϕ haciendo girar el sistema que sostiene la cámara hacia otra posición.

En la figura 27 se representan (a modo de ejemplo) con pequeños rectángulos dos ubicaciones en donde se colocó el chip de la cámara CCD que registró las imágenes utilizadas para calcular la autocorrelación de intensidades. Las dos fotografías correspondientes a los dos rectángulos mostrados en la figura 27 se muestran en la figura 28.

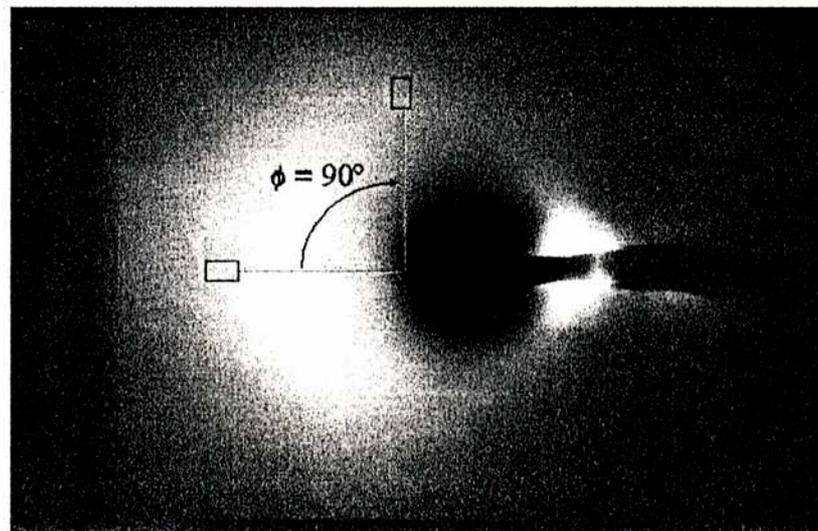


Figura 27: Imagen de la luz dispersada por un cilindro rugoso (# 450220) sobre una pantalla colocada en el plano lejano. Los pequeños rectángulos ubicados en $\phi = 0^\circ$ y $\phi = 90^\circ$, representan a modo de ejemplo el chip en donde se registraron las fotografías mostradas en la siguiente figura.

6.2.1 Rugosidades Altas

Las fotografías de la figura 28 corresponden a un cilindro con rugosidad $\sigma > \lambda$. Se observa que en la dirección vertical (que se corresponde con la dirección azimutal, es decir para θ fijo o equivalentemente a lo largo de ϕ) los granos son un poco más

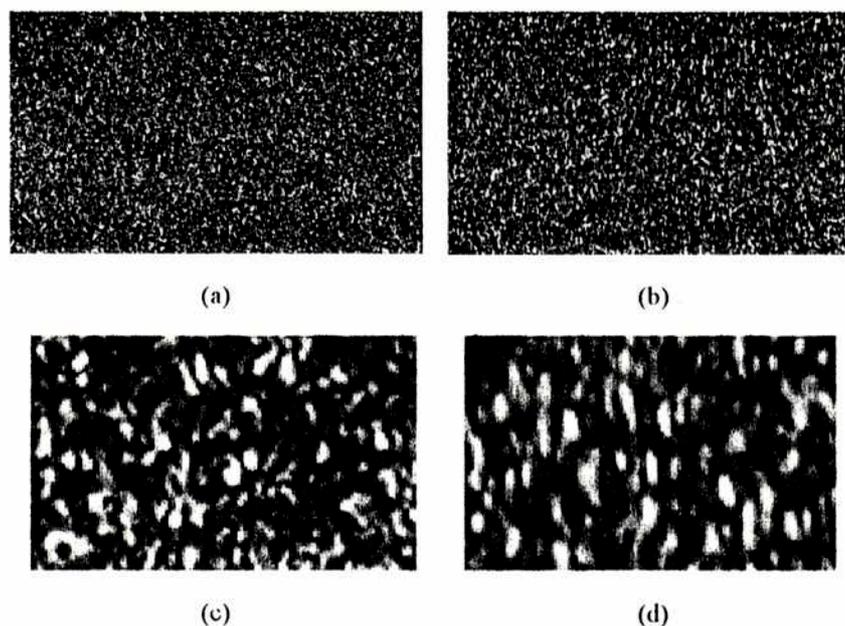


Figura 28: Fotografías correspondiente a los dos rectángulos de la figura anterior. (a) para $\phi = 0^\circ$ y (b) para $\phi = 90^\circ$. Una ampliación mayor de (a) y (b) se observa en las fotografías (c) y (d) respectivamente.

grandes, sin embargo en la dirección horizontal (que se corresponde con la dirección radial sobre la pantalla, esto es ϕ fijo o equivalentemente a lo largo de θ), los tamaños son equivalentes. Una representación un poco más cuantitativa de estas similitudes y diferencias se muestran en la figura 29. Estas curvas confirman lo ya deducido anteriormente en forma teórica acerca de la dependencia del tamaño de grano a lo largo de una y otra dirección.

Para este régimen de rugosidades se utilizaron cuatro muestras, seleccionadas de acuerdo a sus valores de T/σ . La tabla 3 muestra algunos parámetros característicos de estas cuatro muestras, comparando además los valores obtenidos con un rugosímetro electromecánico y con el método que se describe aquí.

Para cada muestra se tomaron fotografías a distintos valores de ϕ y se obtuvieron las correspondientes funciones de autocorrelación experimentales. Teniendo en cuenta la

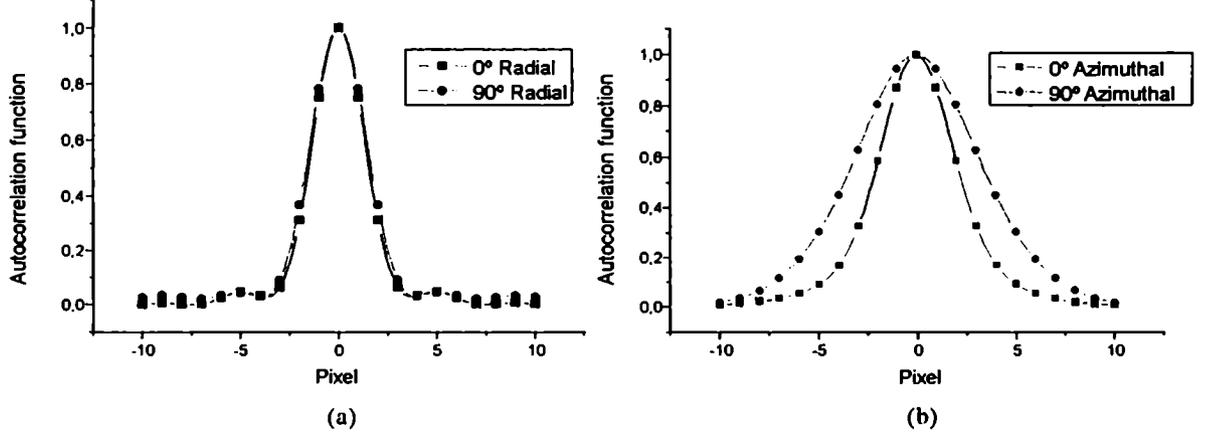


Figura 29: Autocorrelación digital de las fotografías (a) y (b) de la figura anterior. (a) A lo largo de la dirección radial (horizontal en la fotografía) y (b) a lo largo de la dirección azimutal (vertical en la fotografía).

expresión (6.26), a cada función se le ajustó una gaussiana de la siguiente forma,

$$\gamma_1(\theta, \phi, \theta, \phi + \delta\phi) = \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{2}k\tilde{\alpha}\Delta_0 \cos(\phi/2)\sigma}{T} \right)^2 \right] = \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{2}x}{W} \right)^2 \right] \quad (6.28)$$

en donde la relación entre el resultado teórico (6.26) y la curva que mejor ajusta al resultado experimental es como sigue:

La variable Δ_0 (sin unidades) en la expresión teórica (6.26), definida en (6.13) y que fue representada en la figura 25 se corresponde con la variable x (en pixels) en el ajuste experimental. La conexión entre ambas variables es, por lo tanto:

$$\Delta_0 = x \frac{p}{D} \quad (6.29)$$

$p = 9\mu m$ es la separación entre pixels (ver Apéndice D) y D es la distancia del centro

| Muestra | Diámetro (nm) | T/σ (perfilómetro) | T/σ (tamaño de grano) |
|--------------|----------------------|------------------------------|---------------------------------|
| A (# 450220) | 4.50 ± 0.05 | 6.4 ± 0.9 | 5.7 ± 0.6 |
| B (# 275090) | 2.75 ± 0.05 | 7.2 ± 0.5 | 7.3 ± 0.7 |
| C (# EP1) | 2.00 ± 0.05 | 7.8 ± 1.3 | 8.3 ± 0.8 |
| D (# EP2) | 2.00 ± 0.05 | 8.7 ± 1.5 | 8.4 ± 0.8 |

Tabla 3: Comparación de los valores de T/σ obtenidos con un rugosímetro mecánico y mediante la medición del tamaño de grano del speckle

del cilindro rugoso hasta la cámara. El parámetro W será llamado desde ahora ancho de la gaussiana o tamaño de grano, indistintamente (también en unidades de pixels), está relacionado entonces con el parámetro T/σ de este modo

$$W = \frac{T D}{\sigma p} \frac{1}{\cos(\phi/2)} \frac{1}{k\tilde{a}} \quad (6.30)$$

La figura 30 muestra la evolución del tamaño de grano con el ángulo ϕ de acuerdo con (6.30) para las cuatro muestras. Representando W en función de $\cos^{-1}(\phi/2)$ (ver figura 31) y haciendo un ajuste lineal para cada muestra, se obtienen los valores de T/σ mostrados en la tabla 3.

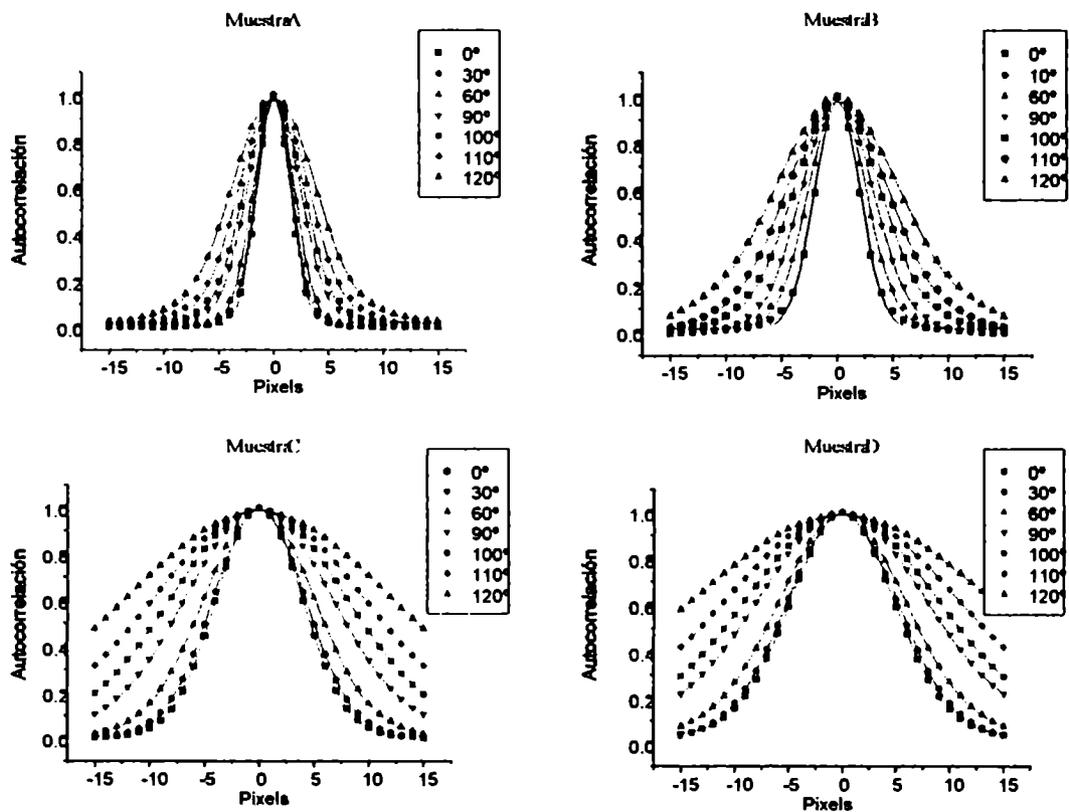


Figura 30: Funciones de autocorrelación experimentales para las muestras A, B, C y D, para distintos ángulos ϕ sobre el plano de observación con sus correspondientes ajustes teóricos.

El acuerdo entre las curvas teóricas y las experiencias (figuras 30 y 31) es muy bueno, siendo esta otra evidencia de lo adecuado que es el tratamiento escalar de Kirchhoff

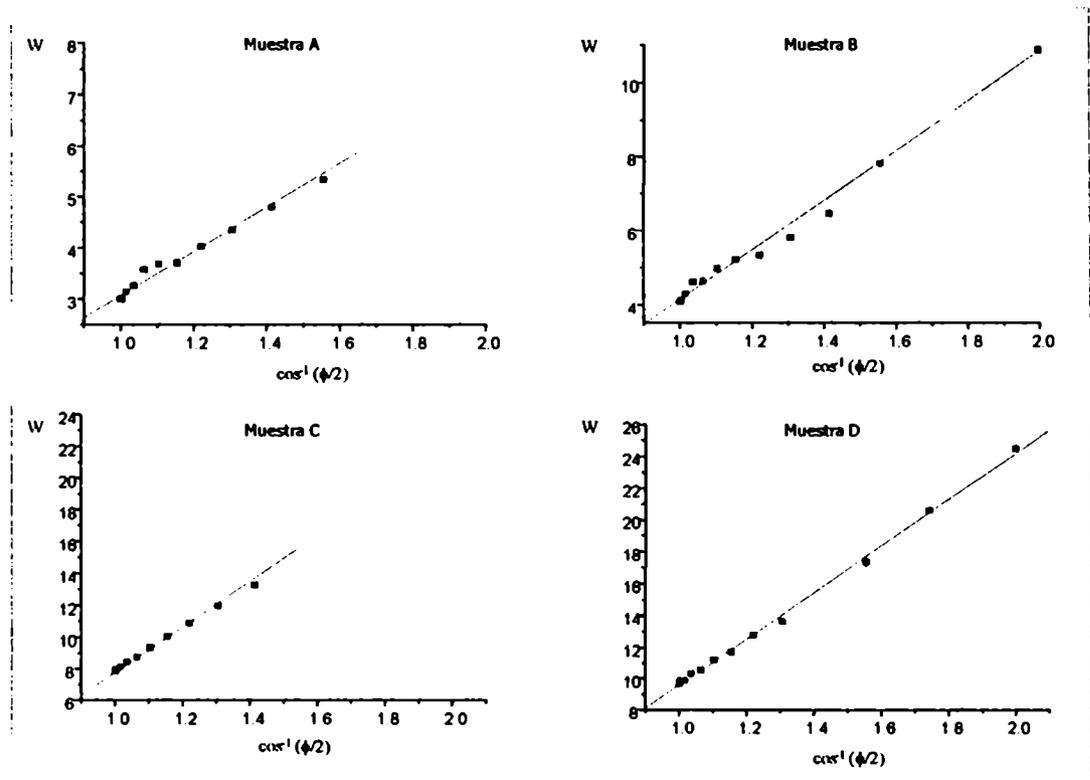


Figura 31: Ancho W en función de $\cos^{-1}(\phi/2)$ para las cuatro muestras, con su respectivo ajuste lineal.

para tratar varios aspectos de la dispersión de luz por superficies cilíndricas rugosas. La precisión del método para medir T/σ en este tipo de superficies es del orden del 10%, semejante al de los perfilómetros electromecánicos y semejante también a la precisión del método descrito en la sección 2.

Las curvas para ángulos ϕ mayores que 120° comenzaban a desviarse, debido a que al aumentar el tamaño del grano se hacen cada vez menos válidas las expresiones (6.3).

6.2.2 Rugosidades Bajas

La función de autocorrelación para este caso está dada por (6.27) que se puede reescribir

$$\gamma_I(\theta, \phi, \theta, \phi + \delta\phi) = \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{2}\tilde{a}\Delta_0 \cos(\phi/2)}{C(\phi/2)T_\varphi} \right)^2 \right] = \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{2}\tilde{a}\Delta_0}{(\sin \theta + \sin \alpha)T_\varphi} \right)^2 \right] \quad (6.31)$$

¡Se cancela toda dependencia en ϕ ! Por lo tanto el tamaño de grano a lo largo de la dirección azimutal da información de la longitud de correlación de la superficie. Se ha reemplazado aquí la variable T por T_φ , debido a que algunas de las muestras utilizadas presentan una notable anisotropía, esto es, las longitudes de correlación en la dirección longitudinal T_z y en la dirección azimutal T_φ son distintas. En el apéndice A, se encuentra una extensión de la ecuación (6.25) a este tipo de superficies, mostrando que el resultado es el mismo, pero permutando T por T_φ .

Definiendo como antes (6.29) la variable x , nos queda que

$$\gamma_I(\theta, \phi, \theta, \phi + \delta\phi) = \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{2}\tilde{a}\Delta_0}{(\sin \theta + \sin \alpha)T_\varphi} \right)^2 \right] = \exp \left[- \left(\frac{\sqrt{2}x}{W} \right)^2 \right] \quad (6.32)$$

en donde ahora W está dado por

$$W = T_\varphi \frac{D \sin \theta + \sin \alpha}{p \tilde{a}} \quad (6.33)$$

En la figura 32 se representan las funciones de autocorrelación experimentales de la intensidad para varios ángulos de dispersión ϕ , fuera de la componente especular, con sus correspondientes ajustes gaussianos, para el rodamiento cilíndrico (muestra # R01). Para el resto de las muestras, el comportamiento es similar.

Las figuras 33 - 38, muestran los anchos W en función del ángulo ϕ de observación para todas las muestras con rugosidad baja.

En todos los casos se observa (en forma notable en la figura 33) que el tamaño de grano es aproximadamente constante hasta cierto valor de ϕ , que es distinto para cada muestra, correspondiéndose con la predicción teórica (6.31), pero luego se ve un aumento a medida que ϕ aumenta que no está contemplado en la teoría. La explicación de esta diferencia posiblemente se encuentre en los efectos de multiple scattering o de sombra, que son las únicas hipótesis no incluidas en el cálculo teórico que pueden afectar

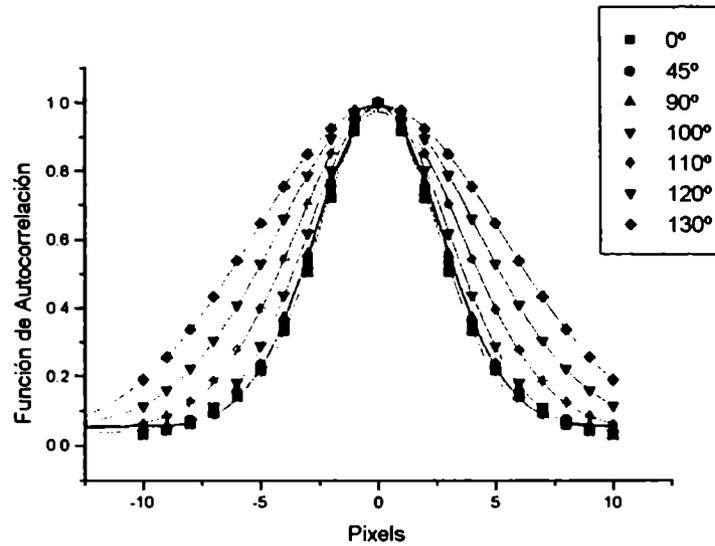


Figura 32: Función de autocorrelación de la intensidad a distintos valores de ϕ , para el rodamiento cilíndrico, muestra # R01. Las funciones correspondientes a los ángulos menores que 90° que no aparecen son esencialmente iguales a las de 0° , 45° y 90°

al tamaño de la zona efectiva que contribuye a la dispersión en una dada dirección (θ, ϕ) . Sin embargo, se necesita hacer otro estudio experimental para determinar si ésta es efectivamente la razón de la diferencia.

Para los hilos metálicos, la dispersión de los valores de W medidos es bastante grande, pero es menor que la dispersión de los valores correspondientes (T_ϕ) medidos con el AFM o con el perfilómetro electromecánico (ver tabla 4), lo cual es razonable, pues se está promediando sobre una superficie más grande. La comparación de los valores T_ϕ medidos con el AFM y mediante el tamaño de grano, muestra que ambas mediciones son consistentes.

Las muestras utilizadas en esta sección no fueron preparadas especialmente, sino que son piezas industriales típicas. La muestra # R01 es un rodamiento cilíndrico de 5 mm de diámetro (utilizado ya en la sección de resultados experimentales del capítulo anterior) y las otras son hilos metálicos que tienen varias aplicaciones. Sus características estadísticas obtenidas con un rugosímetro electromecánico (en el caso del rodamiento) y con un microscopio de fuerza atómica (en el caso de los alambres o hilos metálicos) se pueden encontrar en el apéndice A.

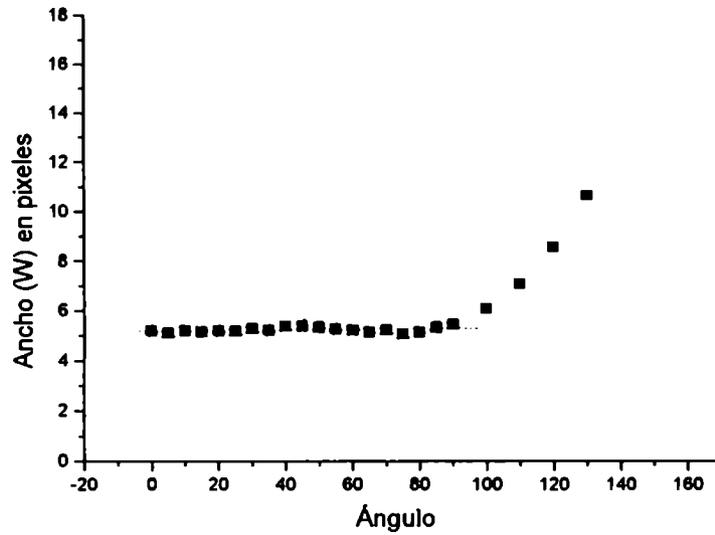


Figura 33: Gráfico del ancho W de la función de autocorrelación de intensidad vs. el ángulo de dispersión ϕ , para la muestra # R01

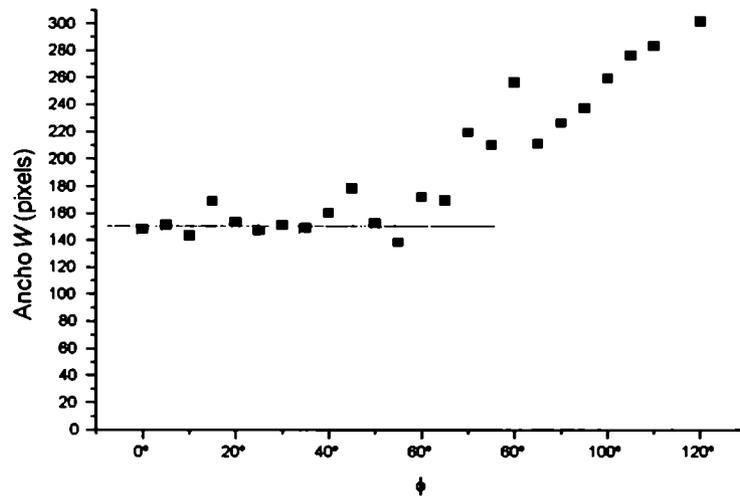


Figura 34: Gráfico del ancho W de la función de autocorrelación de intensidad vs. el ángulo de dispersión ϕ , para la muestra # E14

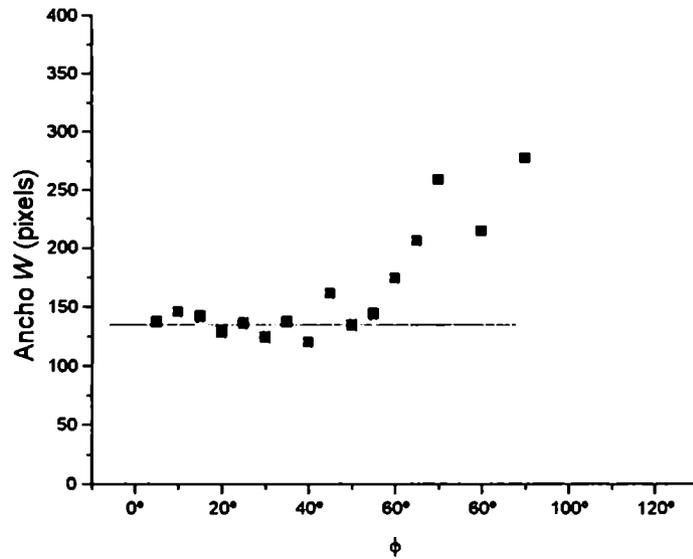


Figura 35: Gráfico del ancho W de la función de autocorrelación de intensidad vs. el ángulo de dispersión ϕ , para la muestra # E15

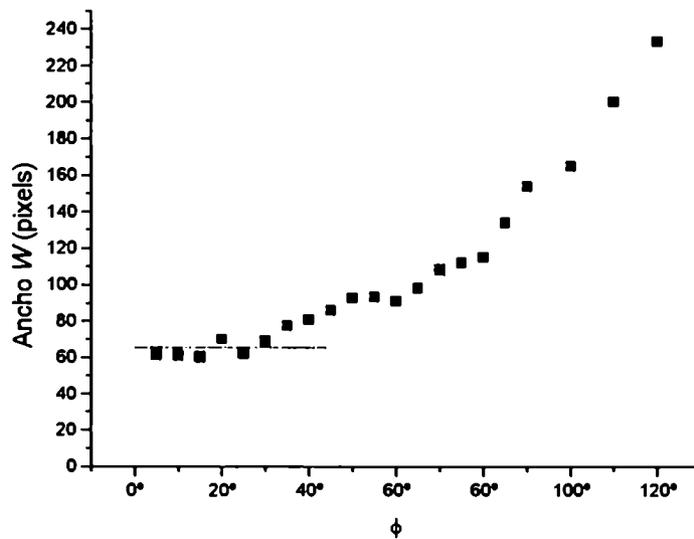


Figura 36: Gráfico del ancho W de la función de autocorrelación de intensidad vs. el ángulo de dispersión ϕ , para la muestra # E17

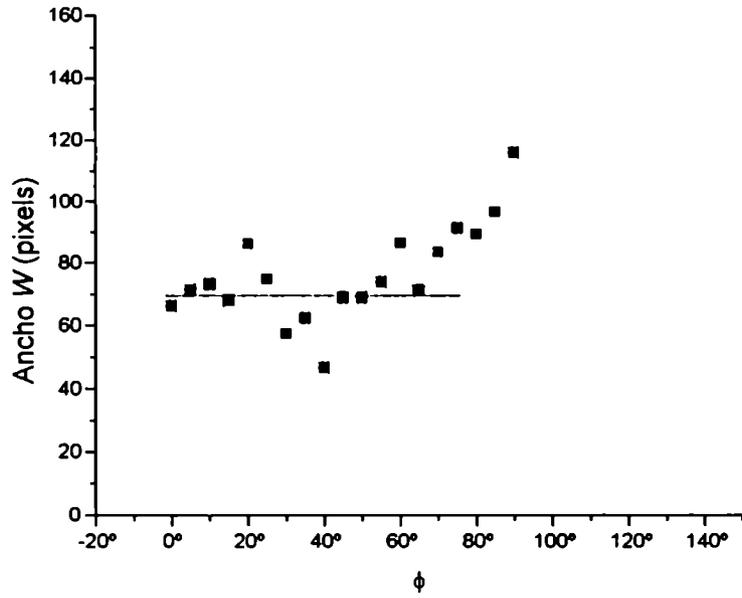


Figura 37: Gráfico del ancho W de la función de autocorrelación de intensidad vs. el ángulo de dispersión ϕ , para la muestra # E33

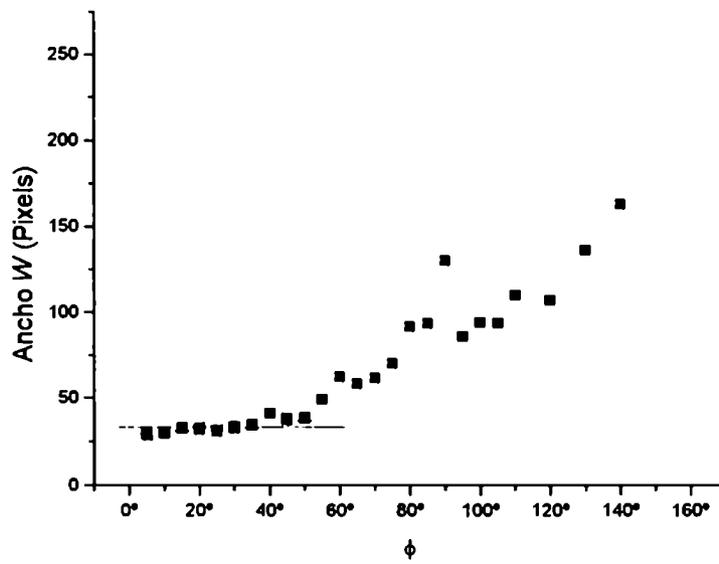


Figura 38: Gráfico del ancho W de la función de autocorrelación de intensidad vs. el ángulo de dispersión ϕ , para la muestra # E37

| Muestra # | Diámetro (μm) | T_z (μm) (AFM) | T_φ (μm) (AFM) | T_φ (μm) (T. Grano) |
|--------------|-------------------------|------------------------------|----------------------------------|---------------------------------------|
| E14 | 80 ± 1 | > 10 | 0.6 ± 0.3 | 0.95 ± 0.10 |
| E15 | 80 ± 1 | 2 ± 1 | 0.5 ± 0.3 | 0.85 ± 0.09 |
| E17 | 180 ± 1 | 8 ± 5 | 1.0 ± 0.5 | 0.91 ± 0.11 |
| E33 | 400 ± 1 | > 10 | 1.3 ± 1.1 | 2.2 ± 0.6 |
| E37 | 560 ± 1 | 7 ± 3 | 1.2 ± 0.4 | 1.37 ± 0.12 |
| R01 | 5000 ± 50 | 8.5 ± 0.5 (perfilóm.) | 1.0 ± 0.5 (perfilóm.) | 0.80 ± 0.03 |

Tabla 4: Comparación de las mediciones de T_φ obtenidas con un AFM (y un rugosímetro mecánico para la muestra # R01) y mediante la medición del tamaño de grano del speckle

Discusión de Resultados y Conclusiones

Se ha estudiado la dispersión de luz por superficies cilíndricas rugosas aleatorias y se logró obtener, como era la intención, expresiones analíticas para describir dos aspectos de este fenómeno: La distribución angular de la intensidad media dispersada y la función de autocorrelación de la intensidad.

En cuanto a la distribución angular de la intensidad media, se consiguió integrar las ecuaciones surgidas de la teoría escalar de Kirchhoff, mediante aproximaciones físicamente razonables que hacen posible su aplicación a una gran variedad de superficies cilíndricas. En el caso de rugosidades altas, comparables a la longitud de onda de la luz incidente, la ecuación (5.22) hace que sea posible medir el parámetro σ/l . Las experiencias aquí presentadas muestran que las mediciones de este parámetro son más precisas que con las obtenidas con un rugosímetro electromecánico y además compatibles con ellas. Se observa una diferencia en los valores calculados con esta teoría y las mediciones experimentales para ángulos de dispersión θ que difieren bastante de la dirección de reflexión especular $\theta = \alpha$, por ejemplo para ángulos cercanos a 0° o mayores que 80° en la figura 21, lo que se corresponde con la hipótesis de no haber considerado las dispersiones múltiples (multiple scattering). Un rayo que se disperse con ángulos pequeños (cercaos a $\theta = 0^\circ$) tendrá una probabilidad mayor de volver a dispersarse, y tanto más cuanto más cercano a $\theta = 0^\circ$ sea el ángulo. Un rayo con esta característica, que se refleje más de una vez sobre la superficie, se dispersará en promedio hacia ángulos más grandes. Esta interpretación es consistente con las mediciones que muestran que los valores experimentales están por debajo de los valores teóricos para ángulos de dispersión pequeños y por encima de los valores teóricos para ángulos mayores que 70° . Se ha propuesto y mostrado además que la medición de σ/l puede realizarse de manera mucho más veloz (aunque con más error, $\cong 20\%$) mediante el uso de una simple pantalla móvil de papel calibrada previamente. En el régimen

de rugosidades bajas, se ha obtenido una solución en serie, ecuación (5.50), que en el caso particular de cilindros muy poco rugosos, $\sigma \ll \lambda$ (hilos metálicos de alta calidad o rodamientos) se puede reescribir como en la ecuación (5.51), que permite medir los parámetros σ y T independientemente. Los resultados experimentales realizados hasta el presente apoyan esta afirmación.

Se ha presentado además un tratamiento geométrico de la dispersión, que reproduce exactamente la misma distribución angular de la intensidad media dispersada que la teoría escalar para el caso de rugosidades grandes. Este modelo sencillo, que relaciona cada elemento de superficie con una dada pendiente con un único ángulo de dispersión, tiene la virtud de poder tratar de manera muy simple cualquier otro tipo de distribución de pendientes y su característica más notable es que permite resolver el problema inverso, esto es, dada una distribución angular de intensidades en el campo lejano, permite deducir la distribución estadística de las pendientes de la superficie (siempre para el caso de rugosidades grandes). En el régimen de rugosidades bajas, este simple modelo geométrico ha sido ya implementado, proveyendo un novedoso método óptico en la detección de defectos superficiales de hilos metálicos de alta calidad^[43].

La aplicación de la teoría escalar de la difracción y la resolución de las integrales de Helmholtz - Kirchhoff ha permitido también obtener una expresión analítica de la forma y el tamaño de la función de autocorrelación de las intensidades (o grano promedio del speckle) en función de la dirección de observación (θ, ϕ) . Esta expresión analítica, que depende de T/σ en el caso de rugosidades altas y de T en el caso de rugosidades bajas, no tiene contraparte en las experiencias con superficies rugosas aleatorias planas, sino que es una propiedad inherente a las superficies curvas. Cuando la superficie dispersora es plana, todos los elementos de la superficie dispersora contribuyen al campo lejano de la misma manera y, por lo tanto, el tamaño promedio del grano de speckle está relacionado simplemente con la transformada de Fourier de la zona iluminada. Si, en cambio la superficie dispersora es curva, deja de ser cierto que todos los elementos de la superficie contribuyen en forma similar al campo lejano en una dada dirección, sino que dependerá de la curvatura media de la superficie y de la forma en que ésta dispersa la onda incidente. La curvatura media de la superficie cilíndrica es simplemente \tilde{a} en la dirección azimutal y los parámetros que gobiernan la difusión de la luz son σ/T

para rugosidades altas y T' para rugosidades bajas, fuera de la componente especular. Esto es exactamente lo que indican cuantitativamente las expresiones teóricas (6.18) y (6.25), que permitieron desarrollar un nuevo método de caracterización de superficies, midiendo simplemente el tamaño promedio del grano de speckle en la dirección azimutal. Estas expresiones han sido verificadas experimentalmente y muestran una correspondencia notable para todas las muestras con rugosidades altas (figuras 30 y 31) y para el rodamiento cilíndrico, muestra # R01, en el caso de rugosidades bajas. Las experiencias hechas con los hilos metálicos industriales predicen bien el parámetro T'_φ y, aunque tienen bastante más dispersión que las otras muestras, es menor que la que dan las mediciones hechas con el AFM, ya que éste promedia en una zona mucho menor que la zona iluminada en esta experiencia. Se infiere que se puede extender naturalmente este método de caracterización de superficies a superficies rugosas planas, iluminándolas con un haz divergente.

Quedan, indudablemente, muchos puntos interesantes por investigar que contribuirán a mejorar o extender los métodos de medición conocidos y a desarrollar nuevos. La depolarización de la onda dispersada como función del ángulo de dispersión; la inclusión de materiales con variaciones grandes de reflectividad; el estudio de la dispersión por superficies cilíndricas con estadísticas no gaussianas, para confirmar las predicciones del modelo geométrico con rugosidades altas y desarrollar nuevas aproximaciones con rugosidades bajas; la decorrelación de la figura de speckle al cambiar las condiciones de iluminación (ángulo de incidencia o longitud de onda, por ejemplo), son, entre otros, algunos de estos importantes temas por explorar.

Apéndice A

Muestras Cilíndricas Rugosas

En este apéndice se describen las muestras cilíndricas rugosas utilizadas en las experiencias descritas en los capítulos 5 y 6. Para el caso de rugosidades altas las muestras pudieron ser preparadas adecuadamente, y se describen a continuación las maneras en que se hizo la preparación. Para el caso de rugosidades bajas, las muestras no se prepararon, sino que se utilizaron hilos metálicos de alta calidad y un rodamiento cilíndrico.

A.1 Rugosidades altas

La preparación de las muestras cilíndricas rugosas para el régimen de rugosidades altas tuvo que hacerse en forma cuidadosa, como se detalló en el capítulo 5, para obtener superficies que cumplieran con las hipótesis hechas en el desarrollo de los cálculos. Aquí se describe la técnica utilizada y, a modo de muestra y por cuestiones de espacio, sólo algunos de los resultados obtenidos con esta técnica, habiendo caracterizado la superficie con el rugosímetro mecánico descrito en el Apéndice C. Se despulieron barras cilíndricas de acero plata de diferentes diámetros con polvos de carborundum (carburo de silicio, SiC) de diferentes números. La técnica de despulido consistía en frotar cada barra cilíndrica entre dos superficies planas cubiertas con el polvo de carborundum. La combinación del movimiento de traslación y de la presión que se le hace sufrir a la pieza, presión que está repartida sobre las duras y agudas aristas de los granos del abrasivo, provoca en la barra una multitud de fracturas y de pequeños fragmentos que la despulen. Si el movimiento y la presión que se le imprimen a la barra son tales que existe un régimen de presiones iguales en promedio sobre toda la superficie, se obtendrá un despulido uniforme, por supuesto con una rugosidad del orden del tamaño de los granos. Los accidentes ocasionales, pequeños pozos y fracturas, son también comparables en dimensiones al tamaño de los granos interpuestos. Sin embargo, una pequeña desigualdad en la presión repetida siempre en el mismo lugar, creará una notable deformación; para evitarla es necesario volver muy poco probable esta repetición. Como el trabajo exige varios miles de recorridos de frotamiento y como la amplitud del movimiento está dada por la mano de una persona

se producirá a la larga una asombrosa compensación de los errores individuales Citando a Texereau²: “Cuanto más torpezas cometa el operador, tanto mejor resultará”. El método tradicional³ más veloz de compensar los errores de presión y de recorrido consiste en realizar el movimiento superpuesto representado en la figura 39.

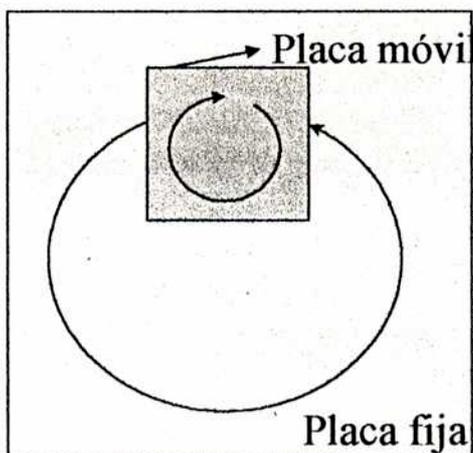


Figura 39: Representación esquemática del sistema de pulido utilizado para preparar las muestras.

La barra a pulir se coloca entre las dos placas, que se encuentran sobre un banco de pulido. La circunferencia mayor se recorre caminando alrededor del banco, mientras que la menor, en sentido opuesto al anterior, se realiza con el movimiento de la mano. Con esta técnica se consiguen las condiciones buscadas, es decir una distribución de radios gaussiana y también una función de autocorrelación gaussiana.

En la figura 40 se muestran los resultados obtenidos para la muestra # 450090. Los datos de las demás muestras pulidas de esta manera son muy similares en cuanto a la forma.

Para obtener valores un poco más diferentes de T/σ se realizó en algunas muestras previamente despulidas con polvo una electroerosión, en una solución de 10% de ácido fosfórico, 10% de agua y 80% de glicerina a más de 80 °C. El esquema se representa en la figura 41. La muestra cilíndrica a electropulir es el ánodo y el cátodo era un cilindro de níquel. Para las muestras finalmente utilizadas en la experiencia de

² Jean Texereau, "El telescopio del aficionado". EUDEBA, p. 44 (1961)

³ John Strong, "Procedures in Experimental Physics", Lindsay Publications (1986).

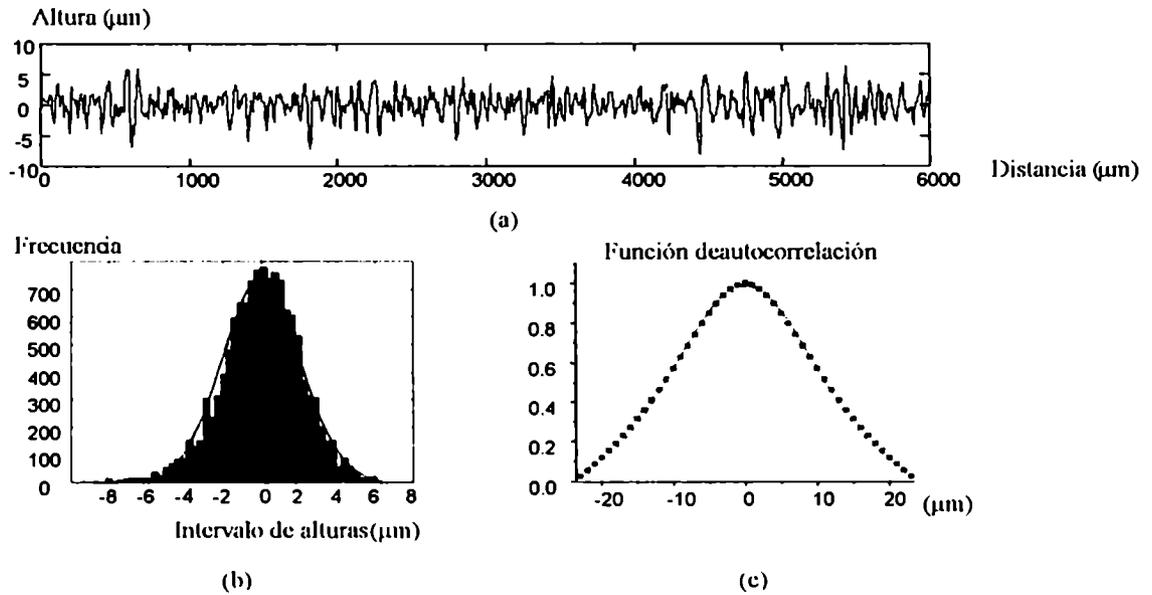


Figura 40: Gráficos generados a partir de los datos obtenidos con el rugosímetro electromecánico de la muestra # 450090. a) Altura por encima (o debajo) del radio medio. b) Histograma de a) con su correspondiente ajuste teórico gaussiano. c) Función de autocorrelación con su correspondiente ajuste Gaussiano

medición del tamaño de grano (capítulo 6), los parámetros del proceso fueron: tiempo de electropulido, 20 minutos; corriente de electropulido, 160 mA y 260 mA.

A continuación, en la tabla 5 están las características de las muestras de rugosidad $\sigma > \lambda$ utilizadas en las en las experie

A.2 Rugosidades bajas

Las muestras cilíndricas con rugosidades muy bajas utilizadas en las experiencias de este trabajo, fueron alambres (hilos metálicos) de alta calidad, utilizados en la industria. Debido a su pequeño diámetro, fueron caracterizados solamente con un microscopio de fuerza atómica (ver apéndice B). El microscopio da una excelente caracterización pero en una región muy reducida ($14\mu m \times 14\mu m$) de la superficie, y se comete mucho error al extrapolar los parámetros de esa región a los de toda la superficie. Se utilizó por lo tanto, además de los alambres, un rodamiento cilíndrico con el objetivo de poder caracterizarlo con el rugosímetro mecánico de manera más confiable a los fines de

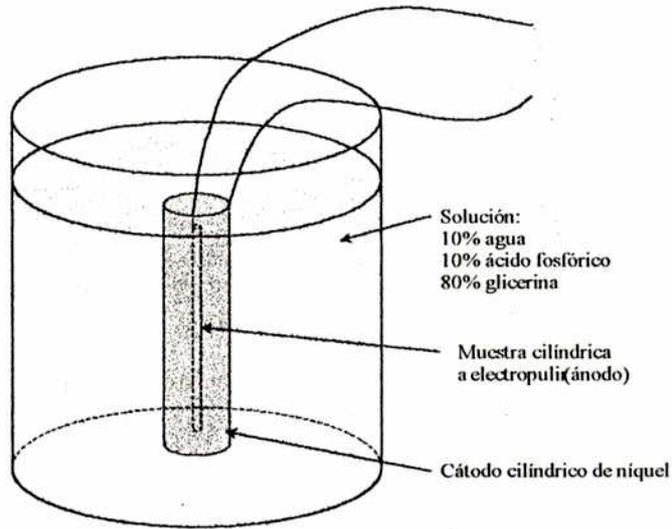


Figura 41: Esquema del equipo utilizado para el electropulido de muestras cilíndricas.

testear el modelo teórico. Los valores de los parámetros obtenidos con el microscopio, el rugosímetro y los métodos experimentales desarrollados en este trabajo, se muestran en la tabla 6. Se describe a continuación el proceso de caracterización de las diferentes muestras

| Muestra # | Diámetro (mm) | Polvo # | σ (perfil.) | T (perfil.) | T/σ (perfil.) | T/σ ($\langle I \rangle$) | T/σ (T. Grano) |
|-----------|-----------------|---------|--------------------|----------------|----------------------|------------------------------------|-----------------------|
| 126400 | 1.26 ± 0.05 | 400 | 0.8 ± 0.2 | 7.3 ± 0.9 | 9.1 ± 3.4 | 6.5 ± 1.3 | |
| 126220 | 1.26 ± 0.05 | 220 | 1.3 ± 0.2 | 6.7 ± 0.7 | 5.2 ± 1.3 | 6.2 ± 1.2 | |
| 126150 | 1.26 ± 0.05 | 150 | 2.1 ± 0.3 | 15.1 ± 0.6 | 7.2 ± 1.3 | 6.2 ± 1.2 | |
| 126090 | 1.26 ± 0.05 | 90 | — | — | — | 7.1 ± 1.4 | |
| 275400 | 2.75 ± 0.05 | 400 | 1.26 ± 0.14 | 10.3 ± 0.3 | 9.0 ± 1.2 | 5.7 ± 1.1 | |
| 275220 | 2.75 ± 0.05 | 220 | 2.24 ± 0.26 | 15.3 ± 0.5 | 6.8 ± 1.0 | 5.7 ± 1.1 | |
| 275150 | 2.75 ± 0.05 | 150 | 2.03 ± 0.25 | 14.8 ± 0.6 | 7.3 ± 1.2 | 5.9 ± 1.2 | |
| 275090 | 2.75 ± 0.05 | 90 | 2.09 ± 0.38 | 15.0 ± 0.6 | 7.2 ± 0.5 | 6.6 ± 1.3 | 7.3 ± 0.7 |
| 375400 | 3.75 ± 0.05 | 400 | 0.82 ± 0.06 | 9.8 ± 0.4 | 11.9 ± 1.4 | 6.7 ± 1.3 | |
| 375220 | 3.75 ± 0.05 | 220 | 1.8 ± 0.2 | 10.3 ± 1.0 | 5.7 ± 1.2 | 5.4 ± 1.1 | |
| 375150 | 3.75 ± 0.05 | 150 | 2.27 ± 0.28 | 13.4 ± 0.6 | 5.9 ± 1.0 | 5.6 ± 1.1 | |
| 375090 | 3.75 ± 0.05 | 90 | 2.23 ± 0.23 | 15.0 ± 0.7 | 6.7 ± 0.9 | 6.9 ± 1.4 | |
| 450400 | 4.50 ± 0.05 | 400 | 1.11 ± 0.12 | 10.2 ± 0.4 | 9.2 ± 1.4 | 5.8 ± 1.2 | |
| 450220 | 4.50 ± 0.05 | 220 | 2.22 ± 0.22 | 14.3 ± 0.6 | 6.4 ± 0.9 | 5.6 ± 1.1 | 5.7 ± 0.6 |
| 450150 | 4.50 ± 0.05 | 150 | 2.39 ± 0.36 | 16.1 ± 0.6 | 6.7 ± 1.3 | 5.4 ± 1.1 | |
| 450090 | 4.50 ± 0.05 | 90 | 2.39 ± 0.25 | 15.7 ± 0.6 | 6.6 ± 0.9 | 6.6 ± 1.3 | |
| EP1 | 2.00 ± 0.05 | 220 | 1.33 ± 0.18 | 10.4 ± 0.4 | 7.8 ± 1.3 | — | 8.3 ± 0.8 |
| EP2 | 2.00 ± 0.05 | 220 | 1.58 ± 0.25 | 13.7 ± 0.2 | 8.7 ± 1.5 | — | 8.4 ± 0.8 |

Tabla 5: Características de las muestras de rugosidad $\sigma > \lambda$ utilizadas en las distintas experiencias.

A.2.1 Hilos Metálicos

Para analizar la superficie de estos hilos, como se dijo, se utilizó un microscopio de fuerza atómica (AFM) de la empresa Burleigh, modelo ARIS 3300, en el modo topográfico. Este aparato puede explorar 256×256 puntos sobre un área de 70×70 , 35×35 ó $14 \times 14 \mu\text{m}$, con una resolución menor que 10 nm en la medición de alturas de la superficie (eje z), obteniéndose una imagen tridimensional, como la que se muestra en la figura 42. Para medir los alambres se tuvo que desarrollar una pieza especial para

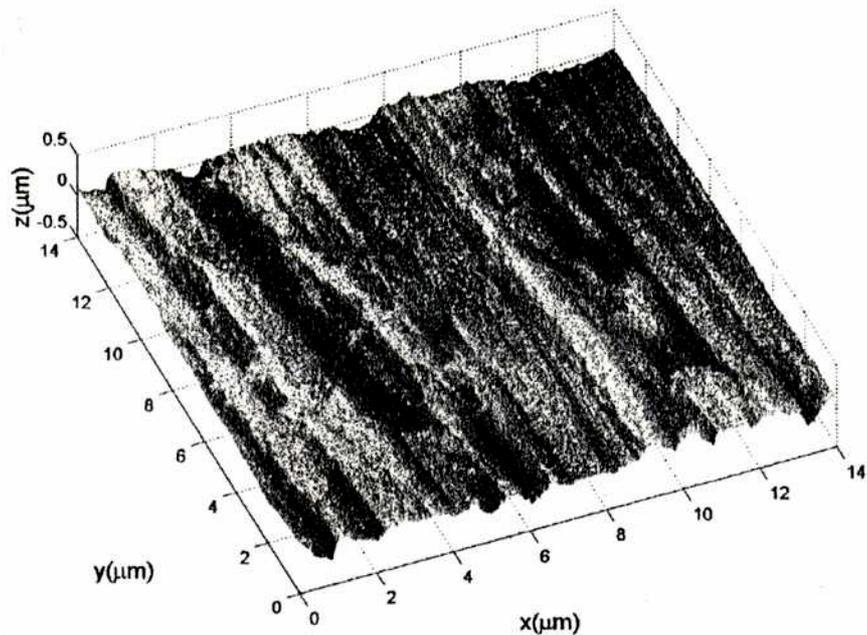


Figura 42: Vista tridimensional de la superficie de uno de los hilos metálicos utilizados (# E14). Es posible apreciar la estructura acanalada, como resultado del proceso de fabricación

posicionar el alambre en el AFM. Se calibró el AFM utilizando una red de difracción. Las muestras fueron limpiadas siguiendo el mismo proceder que se utiliza para limpiar superficies ópticas de alta precisión, esto es, se hacen sucesivas limpiezas de los alambres con agua jabonosa, agua destilada, alcohol isopropílico y acetona, por ultrasonido.

Se hicieron cuatro mediciones por hilo. Los datos que se muestran en la tabla 6 se calcularon promediando en cada dirección las distintas matrices asociadas a cada imagen. La figura ?? muestra las características de la muestra # E14. La distribución de alturas es aproximadamente gaussiana, la función de autocorrelación en la dirección

φ también, pero no la autocorrelación en la dirección z .

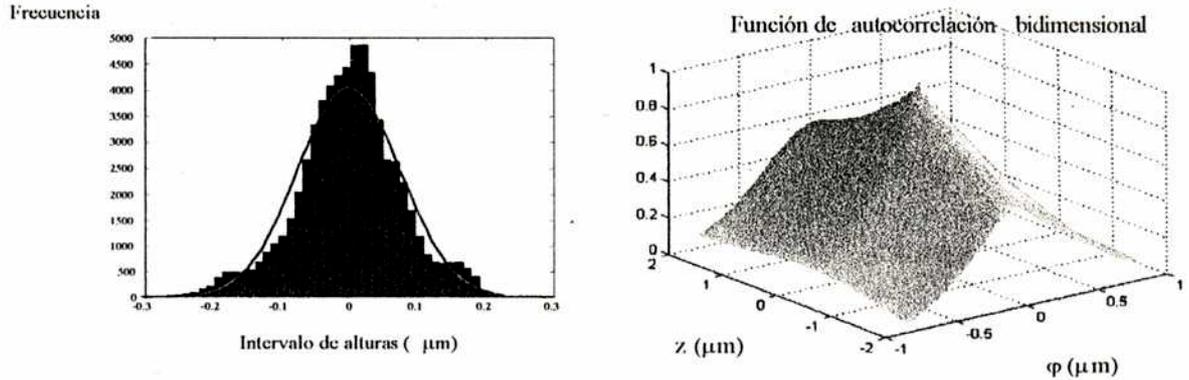


Figura 43: Histograma de alturas y función de autocorrelación bidimensional de la muestra # E14.

A.2.2 Rodamiento

La figura 44 muestra las características de la superficie del rodamiento cilíndrico utilizado en las experiencias de rugosidades bajas, obtenidas con el rugosímetro electromecánico. Se observa que el histograma de alturas es aproximadamente gaussiano, pero tiene una pequeña “cola” hacia los valores negativos. El relevamiento presentado es en la dirección del eje de simetría del cilindro. En la dirección transversal a esta la medición fue mucho más difícil. Hubo que realizar varias mediciones (25 en total) de una longitud muy corta (0.25 mm) para que el rugosímetro no se fuera de escala. Por esta razón la medición de T en esa dirección tiene un error relativo mucho mayor.

| Muestra # | Diámetro (mm) | σ (μm) (AFM) | σ (μm) ($\langle I \rangle$) | T_z (μm) (AFM) | T_φ (μm) (AFM) | T_φ (μm) (T. Grano) |
|-----------|---------------|-----------------------------|--|---------------------------|-------------------------------|------------------------------------|
| E14 | 80 ± 1 | 0.065 ± 0.025 | — | > 10 | 0.6 ± 0.3 | 0.95 ± 0.10 |
| E15 | 80 ± 1 | 0.07 ± 0.03 | — | 2 ± 1 | 0.5 ± 0.3 | 0.85 ± 0.09 |
| E17 | 180 ± 1 | 0.05 ± 0.02 | — | 8 ± 5 | 1.0 ± 0.5 | 0.91 ± 0.11 |
| E33 | 400 ± 1 | 0.12 ± 0.04 | — | > 10 | 1.3 ± 1.1 | 2.2 ± 0.6 |
| E37 | 560 ± 1 | 0.22 ± 0.11 | — | 7 ± 3 | 1.2 ± 0.4 | 1.37 ± 0.12 |
| R01 | 5000 ± 50 | 0.08 ± 0.02 (perfilóm.) | 0.04 ± 0.03 | 8.5 ± 0.5 (perfilóm.) | 1 ± 0.5 (perfilóm.) | 0.80 ± 0.03 |

Tabla 6: Características de las muestras de rugosidad $\sigma < \lambda$ utilizadas en las distintas experiencias.

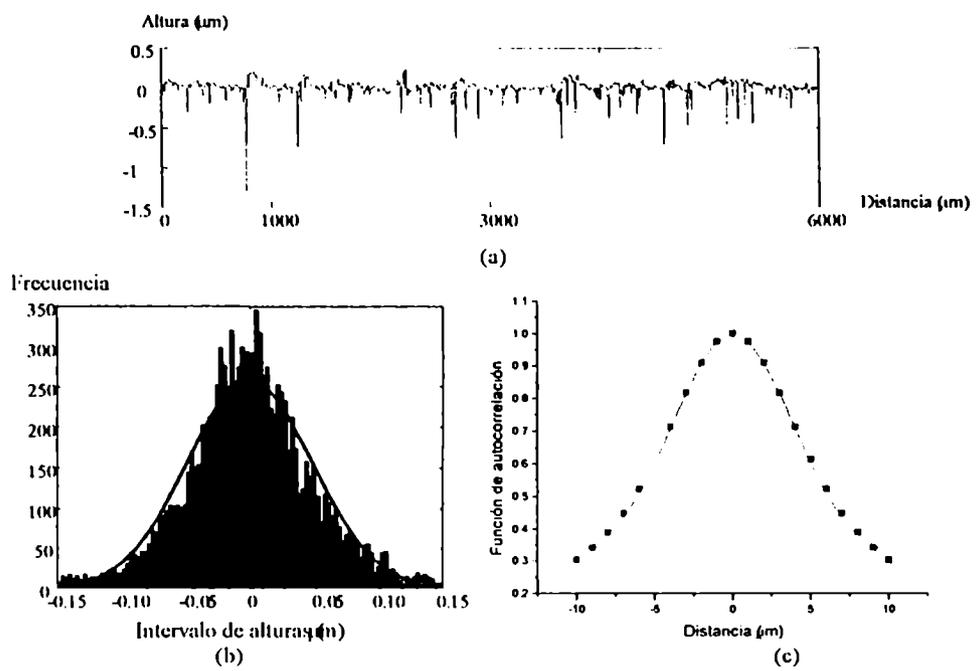


Figura 44: Gráficos generados a partir de los datos obtenidos con el rugosímetro electromecánico del rodamiento cilíndrico. a) Altura por encima (o debajo) del radio medio. b) Histograma de a) con su correspondiente ajuste teórico gaussiano. c) Función de autocorrelación con su correspondiente ajuste Gaussiano

Apéndice B

Microscopio de Fuerza Atómica

El microscopio de fuerza atómica (AFM) utilizado en la caracterización de los hilos metálicos de alta calidad fue el modelo ARIS 3300, de la empresa Burleigh Instruments (figura 45), cuyo principio de funcionamiento se esquematiza en la figura 46. El

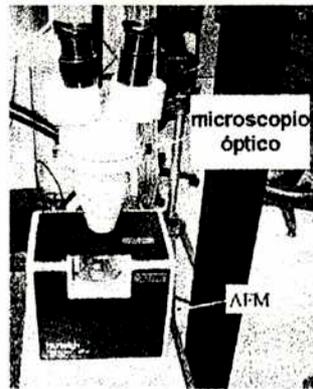


Figura 45: Fotografía del microscopio de fuerza atómica utilizado para caracterizar los hilos metálicos utilizados en las experiencias.

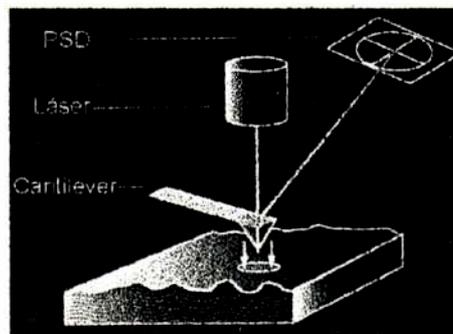


Figura 46: Representación esquemática del funcionamiento del microscopio de fuerza atómica.

elemento clave del microscopio es el sensor de fuerza o cantilever. Montado en el extremo del cantilever hay una punta de silicio de 100 \AA . Además del modo topográfico (que fue el modo en que se utilizó en las mediciones), el microscopio permite medir curvas de fuerza y fricción. En el modo topográfico, este sensor puede explorar 256×256 puntos sobre un área de 70×70 , 35×35 ó $14 \times 14 \mu\text{m}$, con una resolución menor que

10 *mm* en la medición de alturas de la superficie (eje *z*), obteniéndose una imagen tridimensional. La muestra es posicionada en los ejes *x*, *y* y *z* mediante actuadores piezoeléctricos con una resolución menor que 1 *mm*.

Apéndice C

Rugosímetro Electromecánico

El rugosímetro utilizado para caracterizar las muestras rugosas fue el modelo Surtronic 3+, de la empresa Taylor Hobson, que se muestra en la figura 47. Explora las superficies a medir con una púa de diamante de $5\ \mu\text{m}$ de radio (ver figura 48), y transforma las excursiones en tensión mediante una reluctancia variable.

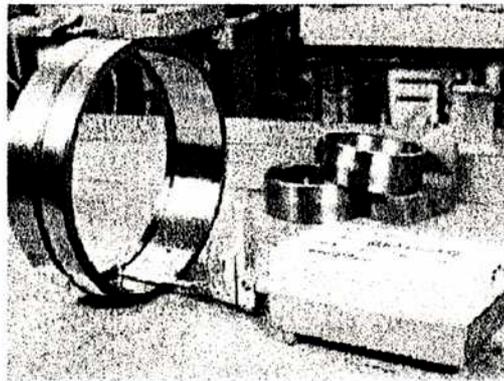


Figura 47: Fotografía del rugosímetro mecánico Surtronic 3+.

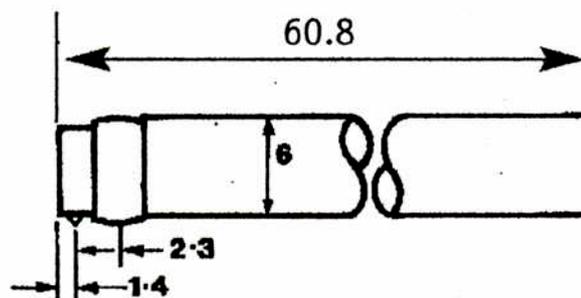


Figura 48: Esquema y dimensiones del brazo que sostiene la púa del rugosímetro Surtronic 3+. Las medidas están en mm .

La longitud máxima de recorrido de la púa es de $25.4\ \text{mm}$, a una velocidad de $1\ \text{mm/s}$, permitiendo realizar 1000 mediciones por segundo. La resolución máxima es de $0.01\ \mu\text{m}$.

Apéndice D

Cámara CCD

La cámara CCD utilizada en las experiencias fue una cámara astronómica SBIG modelo ST-7, que se muestra en la figura 49. El chip detector es marca Kodak, modelo Kaf0400 de 512×768 pixels cuadrados de $9 \mu m \times 9 \mu m$, siendo la dimensión total de la superficie detectora de $6.4 mm \times 4.6 mm$. La cámara tiene la posibilidad de enfriar el chip detector por efecto Peltier, 30° por debajo de la temperatura ambiente, para reducir el ruido térmico en exposiciones largas. Permite tomar fotografías con tiempos desde $0.1 seg$ hasta varias horas. El shutter se desplaza sobre el chip durante la exposición (*no se abre y cierra*), logrando de esta manera que no haya diferencias de tiempos de exposición en los distintos pixels. En el proceso de la lectura de la carga en cada pixel, se

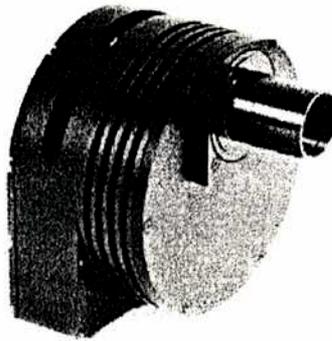


Figura 49: Fotografía de la cámara CCD, marca SBIG, modelo ST-7, utilizada en las distintas experiencias.

realiza una doble lectura, para mejorar la precisión. Esto es, se carga un capacitor con la carga del pixel, se lee el potencial correspondiente, se descarga el capacitor y se lee ahora el potencial residual. Luego se carga nuevamente con la carga del siguiente pixel y se resta el potencial residual correspondiente a la carga del pixel anterior. El proceso se repite hasta terminar la lectura de todos los pixels.

Apéndice E

Cálculo de Errores

La parte experimental del trabajo involucró esencialmente dos tipos de mediciones: La intensidad media dispersada y el tamaño de grano del speckle, cada una de ellas para rugosidades bajas y altas. A partir de estas mediciones se obtuvieron los parámetros característicos de las muestras que se presentaron en las tablas 5 y 6, de acuerdo con los ajustes explicados en las partes experimentales de los capítulos 5 y 6. Al medir la intensidad media, la fuente principal de error fue la dispersión de los puntos experimentales. Los errores en las cantidades medidas, distancia del detector a la muestra (o de la pantalla a la muestra), ángulos (de incidencia y de dispersión) y radio de las muestras, son despreciables al compararlos con éstos. El error dado por el ajuste del mejor parámetro es el que se usó en este caso.

En cuanto a la medición del tamaño de grano, la situación es distinta. La dispersión de los puntos en las figuras correspondientes a rugosidades altas, figura 31, es baja. Al calcular el parámetro T/σ se usó el ajuste lineal dado por la ecuación

$$W = \frac{T D}{\sigma p} \frac{1}{\cos(\phi/2)} \frac{1}{k\tilde{a}} \quad (\text{E.1})$$

La pendiente B del ajuste W vs. $\cos^{-1}(\phi/2)$ es

$$B = \frac{T D}{\sigma p} \frac{1}{k\tilde{a}}, \quad (\text{E.2})$$

y, por lo tanto, el error en el parámetro $\Delta(T/\sigma)$ se obtuvo mediante la expresión

$$\begin{aligned} (\Delta(T/\sigma))^2 = & \left(\frac{\partial(T/\sigma)}{\partial B} \right)^2 (\Delta B)^2 + \left(\frac{\partial(T/\sigma)}{\partial p} \right)^2 (\Delta p)^2 + \left(\frac{\partial(T/\sigma)}{\partial D} \right)^2 (\Delta D)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial(T/\sigma)}{\partial k} \right)^2 (\Delta k)^2 + \left(\frac{\partial(T/\sigma)}{\partial \tilde{a}} \right)^2 (\Delta \tilde{a})^2. \end{aligned} \quad (\text{E.3})$$

De todos estos errores, los que más contribuyeron fueron el correspondiente al error de la pendiente B y la distancia D .

El error en T mediante la medición del tamaño de grano para las muestras de rugosidades bajas (# E14 - # E37) está dado por la dispersión de los puntos en las figuras 34 a 38, los demás errores son despreciables comparados con éste. Por otra

parte, en la figura correspondiente al rodamiento (muestra # R01), figura 32, hubo que tener en cuenta los errores de las otras variables que aparecen en la ecuación (6.30):

$$W = T \frac{D \sin \theta + \sin \alpha}{p \tilde{a}}, \quad (\text{E.4})$$

pues la dispersión del valor de W es muy baja

$$\begin{aligned} (\Delta T)^2 = & \left(\frac{\partial T}{\partial W} \right)^2 (\Delta W)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial p} \right)^2 (\Delta p)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial D} \right)^2 (\Delta D)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial \alpha} \right)^2 (\Delta \alpha)^2 + \\ & + \left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \right)^2 (\Delta \theta)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial \tilde{a}} \right)^2 (\Delta \tilde{a})^2. \end{aligned} \quad (\text{E.5})$$

Apéndice F

Extensión de la ecuación (6.25) a superficies rugosas anisótropas

En el desarrollo que llevó a la expresión final (6.33) para el tamaño de grano del speckle de rugosidades bajas, en la dirección azimutal, se supuso (igual que en el caso de rugosidades altas) que la función de autocorrelación (6.8) era independiente de la dirección, una hipótesis que no está confirmada por las mediciones que se presentaron en el apéndice A. Se presenta aquí la corrección a este resultado, teniendo en cuenta la direccionalidad observada en el coeficiente de correlación de la superficie. Se considerará entonces la siguiente función de autocorrelación de la superficie en lugar de (6.8):

$$\gamma_{Sup}(z_1, \varphi_1, z_2, \varphi_2) = \exp\left(-\frac{\tau^2 \cos^2 \zeta}{T_z^2}\right) \exp\left(-\frac{\tau^2 \sin^2 \zeta}{T_\varphi^2}\right), \quad (F.1)$$

en donde ahora hay dos longitudes de correlación distintas, T_z y T_φ , una para cada dirección sobre la superficie. Retomando los cálculos a partir de la ecuación (6.10), se tiene

$$\begin{aligned} \langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &= \tilde{a}L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \iiint_{\varphi_1 \zeta \tau} \exp[ik\tau(c \cos \zeta + d(\varphi_1) \sin \zeta)] \times \\ &\times \exp(-ik\tilde{a}\Delta) \frac{\exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)(1 - \gamma(\tau))]}{C^2(\varphi_1)} d\varphi_1 d\zeta \tau d\tau \quad (F.2) \end{aligned}$$

Como antes, para el caso en que $\sigma \ll \lambda$, se hace el desarrollo en serie de la exponencial negativa en (F.2)

$$\begin{aligned} \exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)(1 - \gamma(\tau))] &= \exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sigma^{2n} k^{2n} C^{2n}(\varphi_1)}{n!} \times \\ &\times \exp\left(-n \frac{\tau^2 \cos^2 \zeta}{T_z^2}\right) \exp\left(-n \frac{\tau^2 \sin^2 \zeta}{T_\varphi^2}\right) \quad (F.3) \end{aligned}$$

Reemplazándola en (F.2), queda

$$\langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle = 2\pi \tilde{a}L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta \theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta \theta L/2)} \sum_{n=0}^{\infty} \cdot \iiint_{\varphi_1 \zeta \tau} \exp\left(-n \frac{\tau^2 \cos^2 \zeta}{T_z^2}\right) \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \exp\left(-n \frac{\tau^2 \sin^2 \zeta}{T_\varphi^2}\right) \exp[ik\tau(c \cos \zeta + d(\varphi_1) \sin \zeta)] d\zeta \tau d\tau \times \\
& \times \exp(-ik\tilde{a}\Delta) \frac{\exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)]}{C^2(\varphi_1)} \frac{\sigma^{2n} k^{2n} C^{2n}(\varphi_1)}{n!} d\varphi_1 \quad (\text{F.4})
\end{aligned}$$

Procediendo igual que en el capítulo 6, se deja de lado el término correspondiente a $n = 0$, y se retiene solamente el término $n = 1$. Además, la anisotropía de la función (F.1) hace que sea natural expresar el resultado en las siguientes variables

$$\begin{aligned}
\tau_z &= \tau \cos \zeta \\
\tau_\varphi &= \tau \sin \zeta.
\end{aligned} \quad (\text{F.5})$$

Con estas consideraciones (F.4) queda

$$\begin{aligned}
\langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &= 2\pi\tilde{a}L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta\theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta\theta L/2)} \iiint_{\varphi_1, z, s} \exp(ikc\tau_z) \exp(ikd(\varphi_1)\tau_\varphi) \times \\
&\times \exp\left(-\frac{\tau_z^2}{T_z^2}\right) \exp\left(-\frac{\tau_\varphi^2}{T_\varphi^2}\right) \exp(-ik\tilde{a}\Delta) \times \\
&\times \frac{\exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)]}{C^2(\varphi_1)} \frac{\sigma^{2n} k^{2n} C^{2n}(\varphi_1)}{n!} d\tau_\varphi d\tau_z d\varphi_1, \quad (\text{F.6})
\end{aligned}$$

que se integra fácilmente en τ_φ y τ_z , dando

$$\begin{aligned}
\langle E(\theta, \phi) E^*(\theta', \phi') \rangle &= 2\pi\tilde{a}L \frac{\sin(kc \sin \theta \delta\theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta\theta L/2)} \frac{T_z T_\varphi \sigma^2 k^2}{2} \times \\
&\times \exp\left[-\frac{k^2 T_z^2 c^2}{4}\right] \int_\varphi \exp(-ik\tilde{a}\Delta) \frac{\exp[-\sigma^2 k^2 C^2(\varphi_1)]}{C^2(\varphi_1)} \times \\
&\times \frac{\sigma^{2n} k^{2n} C^{2n}(\varphi_1)}{n!} \exp\left[-\frac{k^2 T_\varphi^2 d^2(\varphi_1)}{4}\right] d\varphi_1. \quad (\text{F.7})
\end{aligned}$$

Lo que sigue es similar al desarrollo en el capítulo 6, con la única diferencia que la longitud de correlación T dentro de la integral en (6.23) debe ser reemplazada por T_φ , por lo tanto la expresión final de la correlación de intensidades para rugosidades bajas será

$$\gamma_I(\theta, \phi, \theta + \delta\theta, \phi + \delta\phi) = \frac{\sin^2(kc \sin \theta \delta\theta L/2)}{(kc \sin \theta \delta\theta L/2)^2} \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{2}\tilde{a}\Delta_0 \sin(\delta + \phi/2)}{C(\phi/2)T_\varphi}\right)^2\right] \quad (\text{F.8})$$

Bibliografía

- [1] P. Beckmann and A. Spizzichino, "*The Scattering of Electromagnetic Waves from Rough Surfaces*", Pergamon, London (1963)
- [2] F. Perez Quintián, M. A. Rebollo and N. G. Gaggioli, "Diffusion of light transmitted from rough surfaces". *Journal of Modern Optics*, Vol. 44, N°3, p. 447-460 (1997).
- [3] F. Perez Quintián, "Estudio de la evolución de la indicatriz de difusión para diferentes cocientes entre la rugosidad y la longitud de correlación cuando se rota la superficie rugosa difusora". Tesis de licenciatura en física, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (1995).
- [4] M. A. Rebollo, "Estudio de superficies rugosas mediante el análisis del valor medio de la intensidad dispersada y la correlación de speckles". Tesis de doctorado en física, Facultad de Ciencias Exactas, Universidad Nacional de La Plata (1995).
- [5] F. G. Bass and I.M. Fuks, "*Wave Scattering from Statistically Rough Surfaces*", Pergamon, Oxford (1979).
- [6] J. M. Fastman, "Scattering by all-dielectric multilayer bandpass filters and mirror for lasers", in *Physics of Thin Films, Advances in Research and Development*, (Edited by G. Hass and M.H. Francombe), Academic Press, N. Y., Vol. 10, p. 167 (1978).
- [7] C. K. Carniglia, "Scalar theory for multilayer optical coatings". *Optical Eng.*, Vol. 18, p. 104 (1979).
- [8] S. O. Rice, "Reflection of electromagnetic waves from slightly rough surfaces". *Comm. Pure and Appl. Math.*, Vol. 4, p. 351 (1951).
- [9] J. M. Elson and R. H. Ritchie, "Photon interactions at a rough metal surface", *Phys. Rev. B.*, **4**, p.4129 (1971).
- [10] F. Toigo, A. Marvin, V. Celli and N. R. Hill, "Optical properties of rough surfaces: general theory and the small roughness limit". *Phys. Rev. B.*, **15**, p.5618 (1977).
- [11] J. M. Bennett, "*Surface Finish and its Measurement*", Vol. 2 of *Collected Works in Optics*, Optical Society of America, Washington DC (1992).
- [12] J. A. Ogilvy, "*Theory of wave scattering from random rough surfaces*", Adam Hilger, Bristol (1991).
- [13] M. Kerker, "*The scattering of light and other electromagnetic radiation*", Academic Press, New York and London (1969).
- [14] Y. Y. Fan and V. M. Huynh, "Light scattering from periodic rough cylindrical surfaces", *Applied Optics*, **32**, N° 19, p. 3452-3458 (1993).
- [15] D.J. Whitehouse, "Surface Metrology", *Meas. Sci. Technol.*, **8**, 955-972 (1997)
- [16] S. Gómez, K. Hale, J. Burrows, B. Griffiths, "Measurements of surface defects on optical components", *Meas. Sci. Technol.*, **9**, 607-616 (1998).
- [17] S. A. Stefani, C. R. Nagarajah and R. Willgoss, "A surface inspection technique for continuously extruded cylindrical products", *Meas. Sci. Technol.*, **10**, N21-N25 (1999).
- [18] L. M. Sanchez Brea, P. Siegmann, M. A. Rebollo and E. Bernabeu, "Optical technique for the automatic detection and measurement of surface defects on thin metallic wires", *Applied Optics*, **39**, N° 4, p. 539-545 (2000).
- [19] C. Babu Rao, A. V. Ananthalakshmi and R. Kesavamoorthy, "Laser scattering from the surface of thin wires at oblique illumination", in "*Optics and Optoelectronics Theory, Devices and Applications*" (O. Nijhawan, A. Gupta, A. K. Musla and K. Singh eds.), Narosa, House, New Delhi, (1999).

- [20] R. Berlasso, F. Perez Quintián, M. A. Rebollo, C. A. Raffo and N. G. Gaggioli, "A study of the speckle size of the light scattered from cylindrical rough surfaces", *Applied Optics*, in press (2000).
- [21] F. Perez Quintián, M. A. Rebollo, N. G. Gaggioli and C. A. Raffo, "The 'non-refractive effect' in translucent diffusers: a geometrical model". *Journal of Modern Optics*, Vol. 45, N°3, p. 441-448 (1998).
- [22] A. Papoulis, "*Probability, Random Variables and Stochastic Processes*". International Student Edition, McGraw Hill Kogakucha, p.312-320 (1965).
- [23] J. W. Goodman, "*Statistical optics*". Ed. John Wiley & Sons (1985).
- [24] J. D. Ridgen, E. I. Gordon, *Proc. I. R. E.* Vol. 50, p. 2367 (1962).
- [25] B. M. Oliver, *Proc. IEE*, Vol. 51, p. 220 (1963).
- [26] J. W. Strutt (Lord Rayleigh), *Phil Mag.* 10, p. 73 (1880).
- [27] J. W. Goodman, "*Introduction to Fourier Optics*", McGraw-Hill, New York (1968).
- [28] M. Born and E. Wolf, "*Principles of Optics*", Pergamon Press, Sixth (Corrected) Edition, Oxford (1993), p. 100.
- [29] M. Nieto Vesperinas and N. García, "A detailed study of the scattering of scalar waves from random rough surfaces", *Optica Acta*, Vol. 28, N° 12, p. 1651-1672 (1981).
- [30] A. Papoulis, "*Probability, Random Variables and Stochastic Processes*". International Student Edition, McGraw Hill Kogakucha, ecuación (7-114), p.226 (1965).
- [31] M. Born and E. Wolf, "*Principles of Optics*", Pergamon Press, Sixth (Corrected) Edition, Oxford (1993).
- [32] O'Donnell and E.R. Méndez, "Experimental study of scattering from characterised random surfaces". *J. Opt. Soc. Am. A* 4, 1194-1205 (1987).
- [33] G. Da Costa and J. Ferrari. "Anisotropic speckle patterns in the light scattered by rough cylindrical surfaces". *Applied Optics* 36, 5231-5237 (1997).
- [34] F. Perez Quintián, M. A. Rebollo, R. Berlasso and N. G. Gaggioli, "Roughness Measurement on Cylindrical Surfaces by Optical Methods". *Proceedings of the International Symposium on Laser Metrology for Precision Measurement and Inspection in Industry*. Florianópolis, Brazil. October 1999. p. 5.48 (1999).
- [35] F. Perez Quintián, M. A. Rebollo, M. T. Bernal and C. A. Raffo, "Measurements of High Quality Wire Roughness". *Proceedings of the International Symposium on Laser Metrology for Precision Measurement and Inspection in Industry*. Florianópolis, Brazil. October 1999. p. 5.58 (1999).
- [36] J. W. Goodman, "Statistical properties of laser speckle patterns" in "*Laser Speckle and Related Phenomena*" (Edited by C. Dainty), Springer-Verlag, Berlin, p. 36 (1975).
- [37] M. Born and E. Wolf, "*Principles of Optics*", Pergamon Press, Sixth (Corrected) Edition, Oxford (1993), p. 504.
- [38] F. Perez Quintián, "*Estudio de la evolución de la indicatriz de difusión para diferentes cocientes entre la rugosidad y la longitud de correlación cuando se rota la superficie rugosa dispersora*". Tesis de Licenciatura en Ciencias Físicas, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires (1995).
- [39] Nelder, J. A. and R. Mead, "A Simplex Method for Function Minimization," *Computer Journal*, Vol. 7, p. 308-313.
- [40] M. A. Rebollo, F. Perez Quintián and N.G. Gaggioli, "Diffusion of light transmitted from rough

surfaces". *Journal of Modern Optics*, **44**, n°3, 447-460 (1997).

- [41] N.G. Gaggioli et M.L. Roblin, "Etude des états de surface par les propriétés de diffusion à l'infini en lumière transmise". *Opt.Comm.*, **32**, p. 209 (1980).
- [42] N. G. Gaggioli et M. L. Roblin, "Détermination de la longueur de covariance d'une surface rugueuse par l'étude de la diffusion résiduelle à l'infini". *Opt.Comm.*, **54**, p. 201 (1985).
- [43] L. M. Sánchez Brea, P. Siegmann, E. Bernabeu; and M. A. Rebollo, F. Perez Quintián and C. A. Raffo, "Detection of surface defects on thin metallic wires by geometrical conical reflection". *Wire Journal International*, **33**, N° 8, pp. 124-127 (2000).