Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Un nuevo método de aproximación de soluciones de Ecuaciones Parabólicas No Lineales

Etcheverry, Javier Ignacio

2000

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Etcheverry, Javier Ignacio. (2000). Un nuevo método de aproximación de soluciones de Ecuaciones Parabólicas No Lineales. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3286_Etcheverry.pdf

Cita tipo Chicago:
Etcheverry, Javier Ignacio. "Un nuevo método de aproximación de soluciones de Ecuaciones Parabólicas No Lineales". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 2000.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3286_Etcheverry.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Un nuevo método de aproximación de soluciones de Ecuaciones Parabólicas No Lineales

Autor
Javier Ignacio Etcheverry

Director de Tesis
Bernardo Cockburn

Lugar de Trabajo Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Tesis presentada para optar por el título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires

2000

№ 3 2 3 9

Abstract

In this work, we present and analyze a new numerical method for the approximation of solutions of the nonlinear parabolic partial differential equations $u_t = \alpha(u)_{xx}$ for very general nonlinearities α.

The method is based on the approximation of α by means of a piecewise constant maximal monotone graph. We prove that the solution corresponding to this new constitutive relation can be expressed in terms of the solution of a system of ordinary differential equations.

We present a detailed analysis of the properties of the resulting system of ordinary differential equations and give several numerical examples of application of the proposed technique. In particular, we demonstrate the method on the heat equation, the porous media equations, and Stefan problems.

Finally, we develop error estimates based in the comparison of solutions corresponding to two different constitutive functions α. These estimates are obtained by means of a suitable extension of the Kružkov technique for nonlinear hyperbolic conservation laws.

Resumen

En este trabajo se presenta el desarrollo y análisis de un nuevo método numérico para la aproximación de soluciones de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales del tipo de difusión no lineal, $u_t = \alpha(u)_{xx}$ con α muy general.

El método está basado en considerar aproximaciones de $\alpha(u)$ por grafos maximales monótonos no decrecientes constantes a trozos. Se demuestra que, para ciertos datos iniciales, la solución del problema aproximado puede construirse explícitamente, a partir de la resolución un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

Se presentan numerosos ejemplos de aplicación de esta técnica a la resolución de diferentes problemas clásicos de difusión no lineal, así como un análisis detallado de las propiedades del sistema aproximado.

Finalmente, se desarrolla una teoría de convergencia, basada en obtener estimaciones de la diferencia entre las soluciones de ecuaciones de difusión no lineal con distintos α, mediante una extensión adecuada de las técnicas de Kružkov de duplicación de variables para analizar leyes de conservación hiperbólicas no lineales.

a mis seres queridos

Agradecimientos

Quisiera aprovechar esta oportunidad para agradecer a tanta gente que ha tenido directa o indirectamente algo que ver con este trabajo. En primer lugar, a papá, que encontró siempre fuerzas, en su penosa enfermedad, para animarme a terminar la escritura de esta tesis; a mi familia que me dio siempre todo su apoyo, y a todos mis maestros, amigos y compañeros.

Además, quiero en estas líneas recordar al Profesor Julio Bouillet, con quien comenzamos a pensar en los temas analizados en este trabajo, y que mucho hubiera deseado llegar a ver los resultados expuestos aquí. Quiero mencionar especialmente cuánto debo a Ricardo Durán por su amistad, su permanente interés, y su siempre cordial crítica. También deseo expresar mi reconocimiento a mi director, Bernardo Cockburn, por su hospitalidad en Minneapolis durante un mes y medio decisivos para la finalización de este trabajo, y a la Universidad de Buenos Aires, por proporcionarme los medios para viajar allí.

Finalmente, quiero agradecer a todos aquellos en este departamento, alumnos, docentes y no docentes, que hacen que sea para mí un orgullo aprender y enseñar en él.

Índice General

1 Introducción **11**
1.1 Resultados conocidos 14
1.2 Métodos numéricos 18

2 Método básico **21**
2.1 Motivación. Un problema aproximado 21
2.2 Solución exacta del problema con $\alpha(\cdot)$ escalera 24
2.2.1 Algunas propiedades del método 32
2.2.2 Soluciones exactas al problema de Dirichlet en la semirrecta 34
2.3 Método de malla móvil 38

3 Implementación numérica **41**
3.1 Ejemplos y resultados numéricos básicos 43
3.1.1 Ecuación del calor 43
3.1.2 Ecuación de medios porosos 48
3.1.3 Problema de Stefan a dos fases 52
3.1.4 Problema de Dirichlet en la semirrecta 55
3.1.5 Tiempos de espera 56
3.2 Mejora en la convergencia de $\alpha(u(x,t))$ 61
3.3 Ejemplos en más dimensiones 64
3.4 Conclusiones 65

4 Resultados de convergencia **69**
4.1 Estimaciones *a priori* 71
4.2 Estimaciones para $\beta_1 \neq \beta_2$ 74
4.3 Estimadores de error de la solución y del soporte 86

5 Conclusiones **89**

A Soluciones de Barenblatt **91**

B Problema de Stefan **93**

C Problema de Dirichlet en la semirrecta **95**

ÍNDICE GENERAL

Capítulo 1

Introducción

El problema que motiva este trabajo es la aproximación de soluciones del problema de Cauchy para ecuaciones en derivadas parciales de tipo parabólico no lineales de la forma:

$$\begin{cases} u_t = \alpha(u)_{xx} & \text{en } \mathbb{R} \times [0,\ T), \\ u(x,0) = u_0(x) & \forall x \in \mathbb{R}, \end{cases} \tag{1.1}$$

donde $\alpha(u)$ es, por ejemplo, una función continua no decreciente.

En este trabajo se desarrollará un nuevo método de aproximación de soluciones de la ecuación (1.1), en una generalidad que permitirá que la función $\alpha(u)$ sea un grafo maximal monótono, que posee una serie de características únicas.

El método está basado en aproximar la función constitutiva $\alpha(u)$ por un grafo maximal monótono constante a trozos α_d. De este modo, se reemplaza el problema original (1.1) por un problema aún más singular. Sin embargo, las soluciones de este nuevo problema tienen la notable propiedad de que, para cierto tipo de datos iniciales, se reducen a funciones constantes a trozos, con curvas de discontinuidad que satisfacen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias muy similar a las condiciones de Rankine - Hugoniot en leyes de conservación hiperbólicas. Por lo tanto, la solución aproximada se obtiene integrando numéricamente dicho sistema de ecuaciones ordinarias. Una versión preliminar del método apareció en [4]; mientras que en [2], [9], se exponen ideas relacionadas con su motivación.

Además, desarrollaremos estimaciones de la diferencia entre dos soluciones correspondientes a dos ecuaciones de la forma (1.1) con distintos α. De este modo, podremos analizar la convergencia de las soluciones aproximadas correspondientes a α_d, a la solución correspondiente a α, a medida que la diferencia entre α y α_d se hace pequeña en un sentido apropiado.

Muchos ejemplos importantes en las aplicaciones caen dentro de este marco general; los más conocidos son la ecuación del calor ($\alpha(u) = u$), la ecuación de medios porosos ($\alpha(u) = u^m$, $m > 1$), y los problemas de Stefan o de cambio de fase, donde α es constante en algún intervalo (por ejemplo,

$$\alpha(u) = \begin{cases} u & 0 \le u \le 1, \\ 1 & 1 \le u \le 2, \\ u-1 & 2 \le u \le \infty, \end{cases} \tag{1.2}$$

para un problema de Stefan a dos fases).

Si $\alpha'(u)$ no se anula para ningún valor de u, la ecuación se dice no degenerada. En cambio, si $\alpha'(u)$ es cero, se dice que la ecuación degenera. En este caso es típica la aparición de interfases o fronteras libres en la solución, correspondientes a las curvas de nivel de los conjuntos donde $\alpha'(u) = 0$. En el caso del problema de Stefan, dichas curvas delimitan los conjuntos donde el material pasa de estado sólido a estado líquido, por ejemplo. Para el caso de la ecuación de medios porosos, donde $\alpha'(u) = mu^{m-1}$ se anula para $u = 0$, las fronteras libres corresponden a la evolución del soporte. Una característica notable de las soluciones de esta ecuación, es que poseen soporte compacto para todo $t > 0$, si el dato inicial tiene soporte compacto. Esto contrasta con el comportamiento de la ecuación del calor, por ejemplo, donde inmediatamente el soporte se extiende hasta infinito.

La presencia de interfases puede comprenderse cualitativamente si se escribe la ecuación en la forma:

$$u_t = \alpha'(u)u_{xx} + \alpha(u)''u_x^2, \tag{1.3}$$

y se observa que cuando $\alpha\,'(u) = 0$ el término correspondiente a una difusión (derivadas de segundo orden en x) se anula, y resulta una ecuación de primer orden de tipo Hamilton-Jacobi [25, 3, 23].

En los conjuntos correspondientes a $\alpha'(u(x,t)) = 0$, además, las soluciones pueden no ser suaves, y por lo tanto la ecuación (1.1) debe ser entendida en un sentido débil adecuado (ver por ejemplo [63, 64, 65, 66, 68, 69, 62]).

El abordaje que será más utilizado en esta tesis es el que proporciona la teoría de semigrupos no lineales, desarrollada para el caso que nos interesa principalmente por Brézis, Bénilan y Crandall (ver por ejemplo los trabajos de review [30, 31, 32]). La ventaja que tiene este marco tan abstracto, es que es posible dar sentido a la ecuación (1.1) en un contexto muy general, donde α es un grafo maximal monótono.

Hay pocos ejemplos en la literatura de resultados de continuidad de las soluciones de problemas parabólicos generales, con respecto a variaciones en sus coeficientes. Los más relevantes al estudio que nos interesa se hallan en los trabajos de Bénilan y Crandall [20], Nochetto [33], y Cockburn y Gripenberg [15]. En el primero, los autores demuestran en condiciones muy generales que si $\alpha_d \to \alpha$, las soluciones correspondientes a α_d tienden en L^1 a las soluciones correspondientes a α. Nochetto [33] analiza la diferencia entre soluciones de problemas parabólicos degenerados y las soluciones a problemas regularizados estrictamente parabólicos.

Cockburn y Gripenberg desarrollan una extensión de la técnica de Kružkov y Kuznetsov de duplicación de variables [17] (originalmente aplicada al caso de leyes de conservación hiperbólicas) al caso de ecuaciones parabólicas degeneradas. Sin embargo, los resultados de [15] no son aplicables al contexto del presente trabajo, pues requieren de una suavidad en α que no es adecuada para nuestros propósitos. En este trabajo extendemos los resultados obtenidos con la técnica de duplicación de variables al caso en que las funciones constitutivas pueden ser grafos maximales monótonos.

Este trabajo esta organizado como sigue: en las secciones 1.2 y 1.3 resumiremos los resultados de la literatura respecto del tipo de ecuaciones considerado que serán utilizados más adelante, y los referentes a su resolución numérica, respectivamente.

El Capítulo 2 está dedicado a presentar una motivación del método propuesto, así como dos derivaciones formales diferentes, cada una enfatizando distintos aspectos de interés. Además, se demuestran una serie de propiedades importantes del algoritmo propuesto, como la conservación de la integral, y un teorema de comparación. Además, se analiza en detalle el problema de Dirichlet en la semirrecta para la ecuación (1.1) con dato inicial nulo, y se demuestra una fórmula implícita para las soluciones al problema con α_d un grafo maximal monótono no decreciente constante a trozos, análoga a la discutida por van Duyn y Peletier [12], Atkinson y Peletier [13, 14], para el problema con $\alpha(u)$ una función suave, y por Bouillet [6, 7], Bouillet, Saravia y Villa [8], Korten [10, 11] para coeficientes α más generales. De esta fórmula implícita se deducen condiciones para que las soluciones autosimilares tengan soporte acotado uniformemente. En esas condiciones, del teorema de comparación resulta que cualquier solución con dato inicial de soporte compacto y constante a trozos, tiene soporte acotado uniformemente (independientemente de lo cercana que esté α_d de α).

En el Capítulo 3 se describe una implementación del método numérico propuesto, esencialmente destinada a analizar y comprender sus ventajas y desventajas. Para ello se aplica el método a una amplia variedad de problemas, como soluciones de Barenblatt para la ecuación de medios porosos, el problema de Stefan a dos fases, problemas con tiempos de espera, soluciones autosimilares en la semirrecta, etc, que presentan muchas de las características distintivas de las soluciones de ecuaciones de difusión no lineales. En los casos donde la solución exacta es conocida, se hace una comparación detallada de las soluciones numéricas con las exactas, tanto de la diferencia en $L^1(\mathbb{R})$ como del error en las interfases. En la mayoría de los casos considerados ambos errores son proporcionales a Δ, el tamaño de la partición de u en la discretización de $\alpha(u)$, aunque el orden de convergencia puede ser mejorado cuando la solución exacta tiene soporte compacto. Este análisis de error permite comparar el método propuesto con otros métodos existentes en la literatura, así como guiar la teoría de convergencia que se desarrolla en el Capítulo 4. Además se muestra una extensión del método propuesto a más dimensiones espaciales con simetría radial.

En este último capítulo se extienden trabajos previos de Cockburn y Gremaud [16], Cockburn y Gripenberg [15], obteniendo estimaciones de error en L^1 de la diferencia entre dos soluciones de dos ecuaciones de la forma (1.1) con diferentes α, para coeficientes α muy generales. De este modo, se obtienen estimaciones de error para la solución, que permiten acotar el error en $L^1(\mathbb{R})$ a tiempo T con la norma L^1 del error del dato inicial más términos proporcionales a $\Delta^{2/5}$. Se muestra además que en el caso en que el soporte de la solución u es compacto para $0 < t < T$, el exponente se puede mejorar y conseguir convergencia proporcional a $\Delta^{1/2}$.

Además, utilizando una técnica de Nochetto [35], se obtienen estimaciones de error en medida en la posición de la frontera libre suponiendo válidos resultados de no degeneración de las soluciones del problema exacto. En particular, para la ecuación de medios porosos se obtiene estimaciones del error proporcionales a $\Delta^{(m-1)/2m}$.

1.1 Resultados conocidos

La literatura matemática referente a extensiones del concepto de solución clásica, adecuadas para este tipo de ecuaciones, es extensísima, y difícilmente enumerable en su totalidad. Asimismo son de gran interés los problemas de regularidad tanto de la solución como de las fronteras libres.

Por un lado, los trabajos de Oleinik, Kalashnikov, y Yui-Lin [63], Alt y Luckhaus [64], Gilding [65, 66], DiBenedetto [68, 69], DiBenedetto y Vespri [67], DiBenedetto y Gariepy [62], describen distintas formulaciones débiles y analizando la existencia, unicidad, y regularidad de las soluciones, para ecuaciones bastante generales.

Además de estos trabajos generales, existe una gran cantidad de trabajos concernientes a aplicaciones específicas, principalmente problemas de tipo Stefan [75], y la ecuación de medios porosos [23].

Por otro lado, existe una vasta literatura concerniente a extensiones del concepto de solución a espacios de funciones de variación acotada, originada en el trabajo de Volpert y Hudjaev [70]. Este trabajo, sin embargo, contenía algunos errores, que fueron salvados en trabajos posteriores [72, 71, 73]; ver también [74] para otra aplicación.

Resultados sobre la teoría clásica de ecuaciones parabólicas pueden encontrarse, por ejemplo, en el libro de Ladyzenskaya, Solonnikov, Uralceva [41], y en el de Friedman [1]. En particular, necesitaremos en lo que sigue (ver capítulo 4) resultados que garanticen que las soluciones del problema de Cauchy considerado (1.1) satisfacen ciertas condiciones de regularidad, al menos cuando el problema es no degenerado. Para ello, haremos uso del siguiente resultado de [41] (Teorema 8.1), adaptado al problema que nos interesa

Teorema 1 *(Existencia, unicidad, y regularidad de soluciones para el caso no degenerado)*
Sea u una solución del problema de Cauchy (1.1) en $\mathbb{R} \times [0,T]$.
Supongamos válidas las siguientes condiciones

1. *$u_0(x) \in H^{2+\beta}(\Omega)$ para cualquier $\Omega \in \mathbb{R}$, y $\|u_0\|_\infty < \infty$.*

2. *$\alpha'(u) \geq 0$ para todo u.*

3. *Para cualquier cilindro acotado $Q_T = \Omega \times (0,\ T)$, Ω subdominio acotado de $\mathbb{R}$ y $|u| \leq M$, la función $\alpha(u)$ satisface las condiciones: Para $|u| \leq M$, α es diferenciable con respecto a u, con derivada continua, y tanto α' como α'' satisfacen una condición de Hölder con exponente β, y se satisfacen las desigualdades*

$$\nu \leq \alpha'(u) \leq \mu, \quad \nu > 0, \tag{1.4}$$

$$|\alpha''(u)| \leq \mu, \tag{1.5}$$

con constantes dependientes en general de Q_T.

Entonces, existe al menos una solución $u(x,t)$ del problema de Cauchy (1.1) en $\mathbb{R} \times [0,\ T]$, con $|u(x,t)| \leq M$, $u \in H^{2+\beta,1+\beta/2}(\mathbb{R}^N \times [0,\ T])$.

Si además α es tres veces diferenciable con respecto a u, y satisface

$$\max_{|u|\leq N} |\alpha\,''(u)| \leq \mu_1 N, \tag{1.6}$$

$$\max_{|u|\leq N} \alpha\,'''(u) \leq \mu_2 N, \tag{1.7}$$

para N cualquiera, y con constantes μ_1, μ_2 en general dependientes de N, el problema de Cauchy (1.1) tiene no más de una solución clásica acotada en $\mathbb{R} \times [0,\ T]$, con derivadas de primer y segundo orden acotadas.

Si la condición 1. se reemplaza por el requerimiento más débil de u_0 continua y acotada, existe una solución acotada $u(x,t) \in H^{2+\beta,1+\beta/2}(Q_T) \cap C(\mathbb{R} \times [0,\ T])$ para cualquier $Q_T \subset (\mathbb{R} \times [0,\ T])$.

Resumiremos a continuación los elementos fundamentales de la teoría de semigrupos no lineales, que será utilizada en este trabajo ya que permite dar sentido al problema de Cauchy (1.1) en un contexto extremadamente general, en el que $\alpha(u)$ es un grafo maximal monótono. Excelentes panoramas de esta teoría se encuentran en los trabajos de Crandall [30, 31] y Bénilan y Wittbold [32].

Recordemos la definición:

Definición 1 *Un grafo maximal monótono α de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una aplicación, posiblemente multivaluada, que satisface*

$$(f_1 - f_2, u_1 - u_2) \geq 0, \quad \forall [u_1, f_1],\ [u_2, f_2] \in \alpha, \tag{1.8}$$

y tal que la imagen $R(I + \alpha) = \mathbb{R}$, con I la identidad.

Definición 2 *Una aplicación $A : X \to 2^X$ (el conjunto de partes de X) se dice un operador en X. En particular, las funciones $X \to X$ se pueden identificar con los operadores univaluados, tales que Ax es vacío o está compuesto por un sólo elemento.*

Definición 3 *El dominio de un operador, denotado con $D(A)$, está compuesto por los $x \in X$ con imagen no vacía.*

$$D(A) = \{x \in X : Ax \text{ es no vacía}\}. \tag{1.9}$$

El problema básico analizado mediante teoría de semigrupos no lineales, es el de resolver el problema de Cauchy abstracto:

$$\begin{cases} u' + Au \ni 0 \ \text{ en (0,T)}, \\ u(0) = u_0. \end{cases} \tag{1.10}$$

Definición 4 *Sea A un operador, $\omega \in \mathbb{R}$. Entonces $A + wI$ es acretivo (lo que denotaremos $A \in \mathcal{A}(\omega)$) si se tiene que:*

$$(1+\lambda\omega)\|x-\hat{x}\| \leq \|x-\hat{x}+\lambda(y-\hat{y})\| \text{ para todo } x,\ \hat{x} \in X\ y \in Ax,\ \hat{y} \in A\hat{x},\ y\ \lambda \geq 0. \tag{1.11}$$

Si $A + 0I$ es acretivo, se dice que A es acretivo.

Definición 5 *Sea $A \in \mathcal{A}(\omega)$. Entonces $A + \omega I$ es m-acretivo si $R(I + \lambda A) = X$ para $\lambda > 0$ y $\lambda\omega < 1$.*

Definición 6 *Una 'solución buena' (mild solution, bonne solution) del problema abstracto de Cauchy (1.10) se define como una función $u \in C([0, T); X)$, con $u(0) = u_0$, que satisface:*
Para todo $0 < T_0 < T$, y $\epsilon > 0$, existe:

1. $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{n-1} < T_0 \leq t_n < T$, $t_i - t_{i-1} \leq \epsilon$ *para* $i = 1, \ldots, n$,

2. $x_0, \ldots, x_n \in X$, *que verifican* $\|u_0 - x_0\| \leq \epsilon$, *y*

$$\frac{x_i - x_{i-1}}{t_i - t_{i-1}} + Ax_i \ni 0 \qquad \text{para } i = 1, \ldots, n, \tag{1.12}$$

tal que

$$\|u(t) - x_i\| \leq \epsilon \quad \text{para } t \in (t_{i-1}, t_i],\ i = 1, \ldots, n. \tag{1.13}$$

Es decir, una buena solución es una función continua que satisface la condición inicial, y que es un límite uniforme de soluciones de los problemas aproximados producidos discretizando en tiempo la derivada u', con el esquema implícito (1.12), enteramente análogo al método de Euler implícito para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

El resultado básico de existencia en este contexto probado por Crandall y Liggett [43], fue el punto de partida para una teoría más general (ver por ejemplo los reviews mencionados). Enunciamos a continuación un teorema de existencia y unicidad adecuado para nuestros propósitos [44].

Teorema 2 *Sea $A + \omega I$ m-acretivo, $u_0 \in \overline{D(A)}$. Entonces el problema abstracto de Cauchy (1.10) tiene una única buena solución en $[0, T]$.*

Las soluciones buenas del problema de evolución (1.10) son, por definición, continuas, pero no tienen en principio ninguna regularidad adicional. Es un problema importante entonces, el de determinar bajo qué condiciones sobre el dato inicial $u_0 \in \overline{D(A)}$ es posible obtener una mayor regularidad. Con este objeto, se definen

Definición 7 *Dado un operador A en X, $x \in X$, definimos:*

$$|x|_A = \inf\{M \geq 0 \text{ tal que } \exists (x_n, y_n) \in A, \text{ con } x_n \to x \text{ en } X,\ \|y_n\| \leq M\}. \tag{1.14}$$

Denotaremos como el dominio generalizado, $\tilde{D}(A)$ [32], a

$$\tilde{D}(A) = \{x \in X, \text{ con } |x|_A < \infty\}. \tag{1.15}$$

La relevancia de esta definición queda manifiesta por el siguiente resultado:

Teorema 3 *(ver Bénilan y Wittbold [32], Teorema 1). Sean $A \in \mathcal{A}(\omega)$, $\omega \in \mathbb{R}$, $u_0 \in \tilde{D}(A)$, u una buena solución del problema de Cauchy (1.10).*

Entonces u es localmente Lipschitz continua en $[0, T)$, y para cada $t \in [0, T)$ vale la estimación

$$\limsup_{h \searrow 0} \frac{\|u(t+h) - u(t)\|}{h} \leq e^{\omega t} |u(0)|_A. \tag{1.16}$$

En los espacios de Banach con la propiedad de Radon-Nikodym, las funciones localmente lipschitz continuas son derivables, y por lo tanto las soluciones buenas del problema de Cauchy, con dato inicial en el dominio generalizado $\tilde{D}(A)$ resultan soluciones fuertes. Sin embargo, el estudio que realizaremos en lo que sigue estará basado en L^1, y este espacio es uno de los ejemplos clásicos que no poseen esta propiedad [32].

La existencia de solución para el problema de Cauchy para (1.1) en este contexto tan general, se obtiene a partir de la teoría abstracta de semigrupos no lineales [43, 30, 31, 32], mediante uso de los resultados sobre ecuaciones elípticas semilineales desarrollados por Bénilan, Brézis y Crandall [42]. La idea básica es que para cada $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, el problema

$$u - \Delta v = g \qquad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N),\ v(x) \in \alpha(u(x)) \text{ en c.t.p.}, \tag{1.17}$$

tiene una solución $u \in L^1$ que es única dentro de una clase adecuada [42]. En particular, vale el siguiente teorema (ver [20])

Teorema 4 *Sea α un grafo maximal monótono en $\mathbb{R}$, $0 \in \alpha(0)$, y $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Entonces*

1. *Si $N \geq 3$, existe una única $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$, y una única $v \in M^{N/(N-2)}(\mathbb{R}^N)$, que satisfacen (1.17).*
2. *Si $N = 2$ y $0 \in \text{int}D(\alpha)$, hay una única $u \in L^1(\mathbb{R}^2)$ para la cual existe $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)$, con $v(x) \in \alpha(u(x))$ en c.t.p., $\nabla v \in M^2(\mathbb{R}^2)^2$, y que satisfacen (1.17).*
3. *Si $N = 1$, y $0 \in \text{int}D(\alpha)$, existe una única $u \in L^1(\mathbb{R})$ para la cual existe $v \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$, $v(x) \in \alpha(u(x))$, y que satisfacen (1.17).*

Aquí $M^p(\mathbb{R}^N)$ denota los espacios de Marcinkiewicz, o espacios L^p débil, ver Apéndice en [42].

Esto permite asociar con $-\Delta\, \alpha(u)$ un operador A_α definido como

$$A_\alpha u = \{f \in L^1(\mathbb{R}^N) \text{ tales que } u \text{ es la solución de (1.17) con } g = f + u\}, \tag{1.18}$$

para cada $u \in L^1(\mathbb{R}^N)$.

Los resultados de [42] demuestran además que el operador A_α así definido es m-acretivo en $L^1(\mathbb{R}^N)$, con dominio denso en $L^1(\mathbb{R}^N)$. La teoría general garantiza entonces la existencia de soluciones del problema (1.1) con dato inicial $u_0 \in L^1(\mathbb{R}^N)$ [30, 31, 32].

La unicidad de las soluciones del problema de Cauchy para (1.1) en este contexto tan general, así como la relación con la teoría de existencia, fue demostrada por Brézis y Crandall [19].

1.2 Métodos numéricos

El problema de aproximación numérica de las soluciones de ecuaciones de difusión no lineales de la forma considerada posee una enorme importancia tanto práctica como teórica. Por esto mismo, la literatura sobre métodos numéricos para ellas, y sus aplicaciones, es extensísima, tanto para ecuaciones generales [33, 45], como orientada a algún tipo particular de problema (Stefan [49, 50], medios porosos [51, 59, 52, 36, 53, 57, 58, 55, 54, 56, 60], por ejemplo).

Los métodos numéricos desarrollados para este tipo de ecuaciones pueden dividirse en tres grupos principales, de acuerdo a la forma en que se tratan las interfases.

Por un lado, hay métodos en los cuales la interfase no aparece explícitamente, estando en cambio oculta en la ecuación a resolver. A este tipo de método se llega por ejemplo regularizando la función constitutiva $\alpha(u)$ y utilizando elementos finitos [36, 33, 45] o diferencias finitas [53] para resolver el problema aproximado, o utilizando el marco abstracto de la teoría de semigrupos [48, 47, 46, 50] (por ejemplo, para aproximar la solución usando el esquema implícito (1.12)).

Entre las ventajas principales de este tipo de métodos está el que son naturalmente multidimensionales. Sin embargo, la manera de recuperar las interfases, y su convergencia al valor correcto, son temas de gran interés y que continúan abiertos en muchos casos importantes. Esto es debido a que la convergencia de las soluciones no necesariamente implica la convergencia de los conjuntos de nivel [51, 35]. Sin embargo, cuando la solución del problema exacto no degenera cerca de las fronteras libres, Nochetto [35] demuestra que es posible obtener estimaciones en medida del error de las fronteras libres a partir de estimaciones en L^p del error de las soluciones, a partir de una definición adecuada de la frontera libre numérica (ver también la sección (4.3)). En una dimensión espacial, Hoff y Lucier [51] demuestran convergencia en L^∞ de la solución de un esquema en diferencias a la solución correcta, para la ecuación de medios porosos, y muestran cómo estas estimaciones conducen a estimaciones de error de las interfases.

A la segunda categoría pertenecen los métodos que siguen interfases (*front tracking methods*). Estos métodos están habitualmente basados en utilizar en forma explícita las ecuaciones diferenciales ordinarias que gobiernan el movimiento de las interfases. Tienen la ventaja de que tanto las soluciones como las interfases pueden ser aproximados en L^∞, ver por ejemplo los trabajos de Di Benedetto y Hoff [56], Hoff [59], Mimura, Nakaki y Tomoeda [54], y Tomoeda y Mimura [55]. Sin embargo, son intrínsecamente unidimensionales, debido a la gran complejidad del problema de seguir interfases en más dimensiones. Además, muchos resultados se obtienen sólo para la ecuación de medios porosos, pues utilizan propiedades de homogeneidad del operador Δu^m.

Este mismo tipo de limitaciones tienen los métodos pertenecientes a la tercer categoría, que llamaremos métodos de transformación. En este caso, la idea básica consiste en encontrar transformaciones que conviertan el problema en un problema de valores iniciales y de contorno en un dominio fijo (es decir, hacer desaparecer la interfase mediante un cambio de variables). A esta categoría pertenecen por ejemplo los trabajos de Rosen [61], Berryman [58], Gurtin, MacCamy y Socolovsky [60], Bertsh y Dal Passo [57].

El método presentado en esta tesis puede ser deducido como un método de malla móvil (ver sección (2.3)), donde en vez de aproximar la solución en puntos fijos del espacio, se la aproxima en en ciertos valores que van evolucionando en el tiempo (ver por ejemplo [76] y las referencias allí consignadas). De este modo, habitualmente se logra una mejor captura de las interfases, o de las discontinuidades de la solución. Sin embargo, el método que se presenta aquí presenta también grandes similitudes con los métodos de seguimiento de interfases ('front-tracking'), puesto que aproxima las curvas de nivel de la solución.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Capítulo 2

Método básico

En este capítulo se presentan dos deducciones diferentes del mecanismo básico de aproximación que se desarrolla en este trabajo, y se demuestran una serie de propiedades de las soluciones aproximadas, que poseen interés intrínseco, y que serán utilizadas en los capítulos posteriores.

Ambas deducciones tienen interés independiente, pues resaltan distintos aspectos del método de aproximación propuesto, y conducen al mismo sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias.

En la primera de las deducciones presentada se muestra cómo suponiendo que la función constitutiva $\alpha(u)$ es una función escalera, aparece naturalmente un problema no clásico cuya solución es una función constante a trozos donde las curvas de separación entre intervalos de constancia satisfacen un sistema de ecuaciones diferenciales análogo a las relaciones de Rankine-Hugoniot para ecuaciones hiperbólicas. De este modo, la solución *exacta* de este problema aproximado puede obtenerse integrando en tiempo el sistema de ecuaciones diferenciales que da la evolución de los saltos de la solución u.

En la segunda deducción se muestra cómo el mismo sistema puede obtenerse mediante una construcción como la que se utiliza para desarrollar métodos de mallas móviles. En este formalismo se pierde de vista que se trata de una solución exacta de una ecuación en derivadas parciales en algún sentido aproximada a la original, pero es más evidente que el método propuesto puede entenderse como un miembro de una familia de métodos de malla móvil, donde la función u se aproxima en el espacio de funciones constantes a trozos, y $v = \alpha(u)$ en el espacio de funciones continuas lineales a trozos, y que otras elecciones de espacios conducen a una variedad de métodos distintos.

2.1 Motivación. Un problema aproximado

Consideremos nuevamente el problema (1.1):

$$\begin{cases} u_t = \alpha(u)_{xx}, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}, \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases}$$

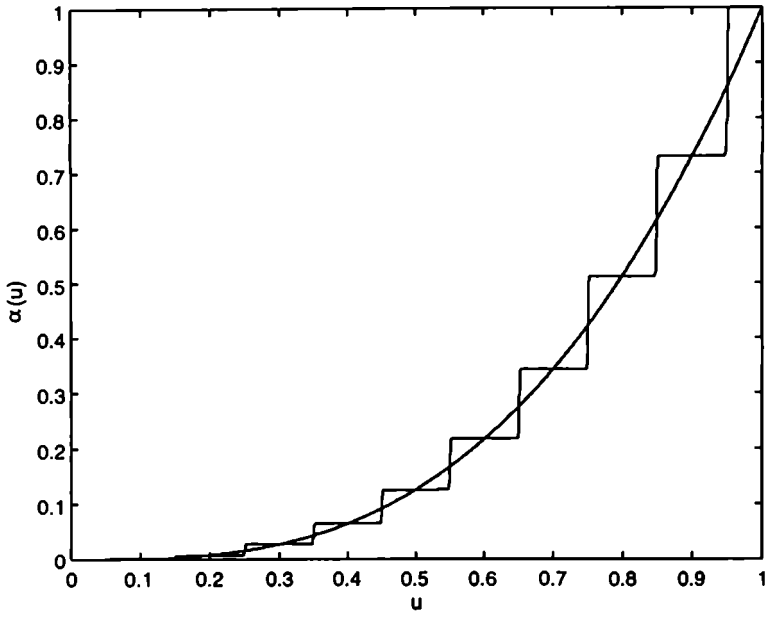

Figura 2.1: Funciones $\alpha(u) = u^3$ y regularización con $\epsilon = 0.01$ de su aproximación por una función a saltos correspondiente a $d = 0.1$.

para el caso típico de la ecuación de medios porosos, $\alpha(u) = u^m$, $m > 1$. Para fijar ideas utilizaremos el caso $m = 3$.

Consideremos ahora el problema 'similar' correspondiente a una función constitutiva $\alpha_d^\epsilon(u)$, como la mostrada en la figura 2.1. Esta función fue obtenida aproximando la identidad por una función $f(u)$ no decreciente, constante a trozos, regularizando $f(u)$ para obtener una aproximación continua f^ϵ, y finalmente calculando $\alpha_d^\epsilon(u) = \alpha(f^\epsilon(u))$. El parámetro d regula entonces cuán exactamente la función $f(u)$ aproxima a la identidad, y el parámetro ϵ describe cuánto se acerca f^ϵ a la función a saltos f.

En particular, la expresión usada en los ejemplos numéricos que siguen es:

$$f^\epsilon(u) = d[u/d] + \frac{d}{2}\left(1 + \tanh\left(\frac{(u - d([u/d] - 1/2))}{\epsilon}\right)\frac{1}{\tanh(\frac{d}{2\epsilon})}\right),$$

donde los corchetes denotan la parte entera. La regularización $\alpha_d^\epsilon(u) = (f^\epsilon(u))^3$ correspondiente a $\epsilon = 0.01$, $d = 1/10$ se muestra en la Figura 2.1.

Utilizaremos como ejemplo las soluciones autosimilares de Barenblatt (ver apéndice A). Para $m = 3$, y $t = 0$, se tiene $u_0(x) = \sqrt{1 - x^2}$. Con este dato inicial las soluciones correspondientes a $\alpha(u) = u^3$, y $\alpha_d^\epsilon(u)$, calculadas por diferencias finitas con una discretización muy fina hasta $t = 1$ se muestran en la figura 2.2.

Notar que la solución del problema α_d^ϵ es prácticamente constante a trozos, y que los valores que toma la solución u en los intervalos de constancia son justamente aquellos donde la función $\alpha^\epsilon(u)$ tiene un salto, y, recíprocamente, que donde la función u salta la función $\alpha^\epsilon(u)$ es prácticamente constante. Este comportamiento sugiere que la función

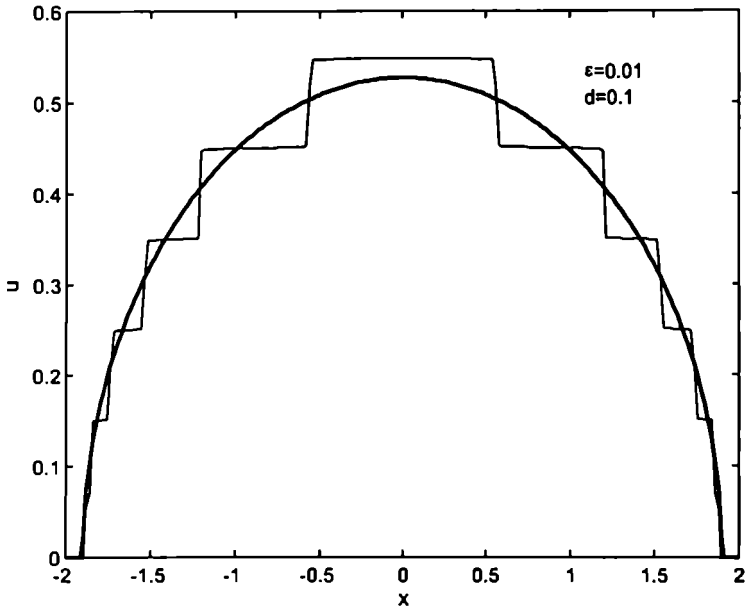

Figura 2.2: Solución de Barenblatt para $\alpha(u) = u^3$, a $t = 1$ (trazo grueso), comparada con la solución por diferencias finitas a $t = 1$ del problema con función constitutiva $\alpha_d^\epsilon(u)$, con $\epsilon = 0.01$ y $d = 0.1$ (trazo fino).

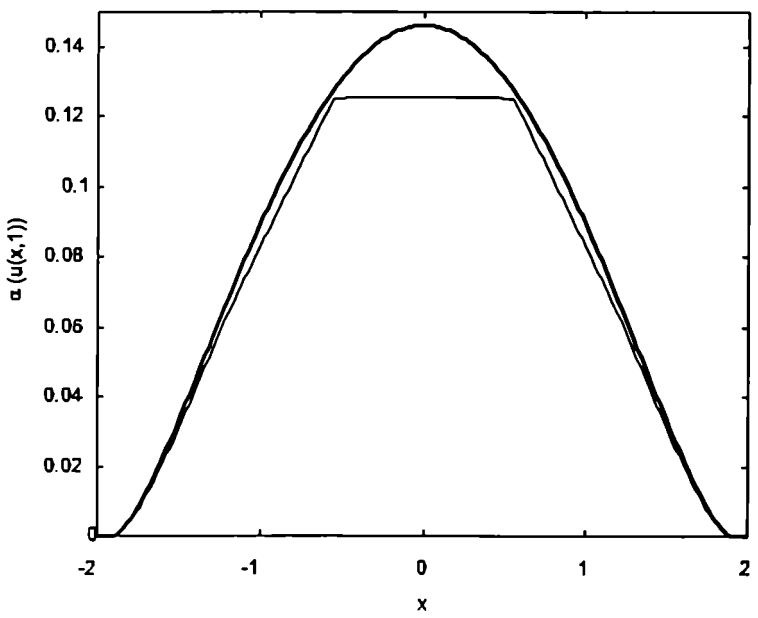

Figura 2.3: Gráficos de $\alpha(u)$ a $t = 1$ para la solución de Barenblatt con $m = 3$ (trazo grueso), y de la solución numérica por diferencias finitas a $t = 1$ del problema con $\alpha_d^\epsilon(u)$, como funciones de x (trazo fino). $\epsilon = 0.01$, $d = 0.1$.

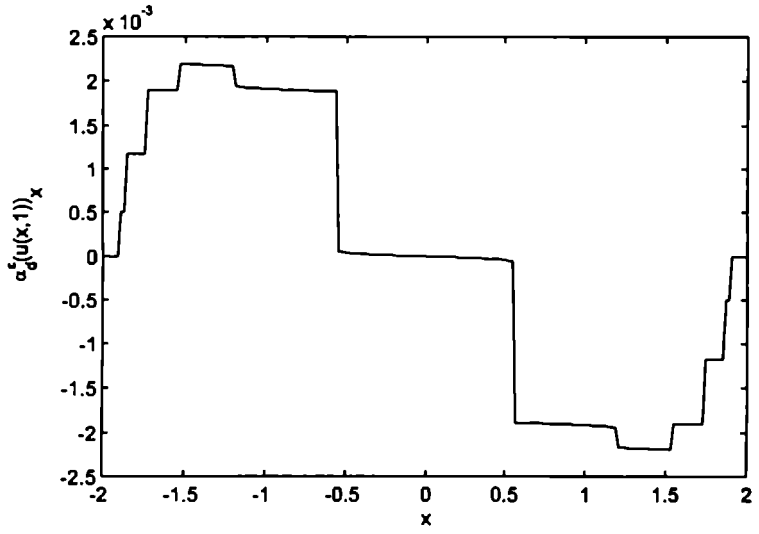

Figura 2.4: Derivada numérica de $\alpha_d^\epsilon(u(x))$ para el problema con función constitutiva una escalera, $\epsilon = 0.01$, $d = 0.1$.

$\alpha^\epsilon(u(x))$ debiera ser suave, lo que se verifica evidentemente en la figura 2.3. Consideración del problema límite, donde efectivamente u es constante a trozos, sugiere que $\alpha(u(x,\cdot))$ debiera ser una función lineal a trozos. Esto se puede ver en el ejemplo con la solución correspondiente a $\alpha_d^\epsilon(u)$, derivando numéricamente la solución por diferencias finitas (ver Figura 2.4).

Por último, nótese que a medida que ϵ se hace más pequeño, la resolución numérica del problema ϵ aproximado se hace cada vez más difícil utilizando diferencias o elementos finitos. Esto se debe a que la difusividad máxima es proporcional a $1/\epsilon$, y por lo tanto el radio espectral del sistema de ecuaciones que se debe resolver diverge. Esto obliga a la disminución del paso en tiempo si se utiliza un método explícito. Además la solución presenta variaciones muy rápidas cerca de las discontinuidades, y es necesario utilizar discretizaciones muy finas tanto en x como en t para poder resolverlas.

Esto constituye una motivación adicional para considerar el problema límite para $\epsilon \to 0$, donde $\alpha_d(u)$ es realmente una función a saltos creciente, y que veremos admite una formulación elegante y mucho más simple de resolver.

2.2 Solución exacta del problema con $\alpha(\cdot)$ escalera

En lo que sigue escribiremos indistintamente el problema de Cauchy considerado en la forma (1.1), o en la forma

$$\begin{cases} u_t = \Delta v \ , & u \in \beta(v), \\ u(x,0) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

con $\beta = \alpha^{-1}$ en el sentido de grafos.

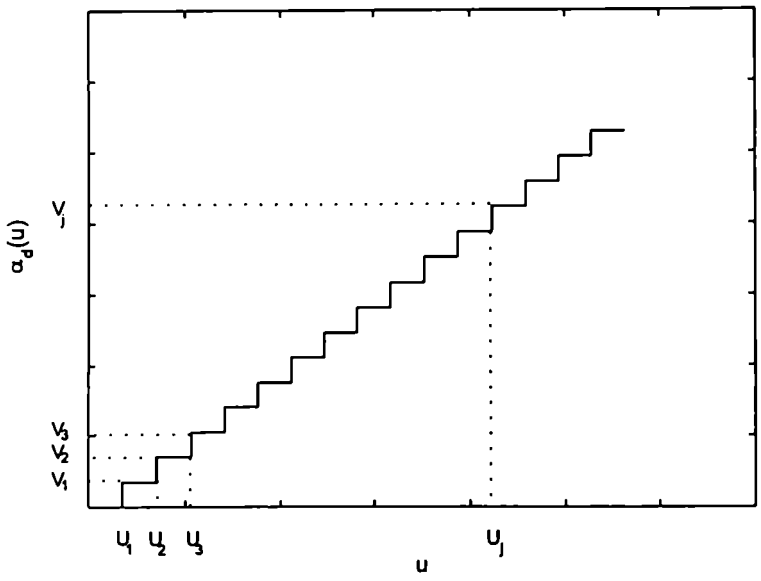

Figura 2.5: Esquema del grafo maximal monótono constante a trozos $\alpha_d(u)$.

Supongamos, además, que $\alpha = \alpha_d$ es un grafo maximal monótono constante a trozos, con saltos correspondientes a los valores $u = U_i$, $U_1 < U_2 < \cdots < U_j < \cdots$. Denotemos con V_i a los valores que asume $\alpha_d(u)$ en cada uno de los intervalos de constancia, ver Figura 2.5.

De acuerdo a lo observado en la sección precedente, vamos a suponer que $v(x,t) = \alpha_d(u(x,t))$ es lineal a trozos y continua como función de x. La condición de compatibilidad $u \in \beta_d(v)$, $\beta_d = \alpha_d^{-1}$, implica entonces que u es una función discontinua, constante a trozos, y que toma en cada intervalo de constancia uno de los valores U_i. En lo que sigue supondremos que las discontinuidades de u están ubicadas sobre curvas suaves $x_i(t)$, y mostraremos que para que la función resultante sea una solución de la ecuación en derivadas parciales, las curvas $x_i(t)$ deben satisfacer un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, análogo a las condiciones de Rankine-Hugoniot en leyes de conservación (ver por ejemplo [77, 78]).

Estas condiciones de salto han sido ya consideradas en el contexto de soluciones de variación acotada de ecuaciones parabólicas degeneradas con un término de transporte [21, 70].

Para describir la solución u, v del problema correspondiente a α_d utilizaremos la siguiente notación. Llamaremos x_i, $i = 1, \ldots, n$ a las curvas de discontinuidad de u. El valor constante que toma u en el intervalo $x \in (x_i, x_{i+1})$ se llamará $u_{i+1/2}$ (recordar que este valor debe ser igual a alguno de los U_j). Como estamos suponiendo, en base a las observaciones de la sección precedente, que la función v es lineal en cada intervalo (x_i, x_{i+1}) y es continua en x, queda determinada por los valores que asume en los puntos $x_i(t)$, que serán denotados con v_i. Notar nuevamente que estos valores no son arbitrarios, sino que corresponden a alguno de los valores permitidos V_j de la discretización. Además, como el

énfasis en este trabajo está puesto en resultados en L^1, supondremos que tanto u como v tienen soporte compacto, lo que se refleja en las condiciones $v_1 = v_n = 0$, y la convención $u_{1/2} = u_{n+1/2} = 0$.

Con esta notación, podemos enunciar el resultado principal de esta sección.

Teorema 5 *Sean u y v como antes. Entonces, si las interfases $x_i(t)$ satisfacen el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{u_{3/2} - u_{1/2}} \dfrac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1} \\ \dot{x}_i = -\dfrac{1}{u_{i+1/2} - u_{i-1/2}} \left[\dfrac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i} - \dfrac{v_i - v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right] \quad i = 2, \ldots, n-1 \\ \dot{x}_n = \dfrac{1}{u_{n+1/2} - u_{n-1/2}} \dfrac{v_n - v_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \end{cases} , \tag{2.2}$$

u y v resultan soluciones del problema (2.1) con $\beta = \beta_d$, y un dato inicial $u_0(x)$ constante a trozos y con saltos en $x_i(0)$, en el sentido de $\mathcal{D}'$. Es decir:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u\Phi_t + v \triangle \Phi)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\Phi(x,0)dx = 0, \tag{2.3}$$

para toda $\Phi(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R} \times [0,T))$.

Dem. Podemos asumir que no se produce ningún cruzamiento de interfases hasta el tiempo T. De ocurrir, se repite el argumento que se detalla a continuación en cada uno de los intervalos entre cruces, hasta llegar a $t = T$.

La demostración que sigue es esencialmente igual a la que da las condiciones de Rankine-Hugoniot en el contexto de leyes de conservación [77].

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u\Phi_t + v \triangle \Phi)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\Phi(x,0)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T \left[\int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} u_{i+1/2}\Phi_t dx + \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} v_{i+1/2}(x,t)\Phi_{xx} dx \right] dt$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i(0)}^{x_{i+1}(0)} u_{i+1/2}\Phi(x,0)dx,$$

donde se usa la notación $v_{i+1/2}(x,t)$ para la restricción de la función $v(x,t)$ al intervalo $(x_i(t), x_{i+1}(t))$. Integrando por partes en x en cada intervalo $(x_i(t), x_{i+1}(t))$ el término en Φ_{xx}, y recordando que por ser v lineal en cada intervalo tenemos $(v_{i+1/2}(x,t))_x =$

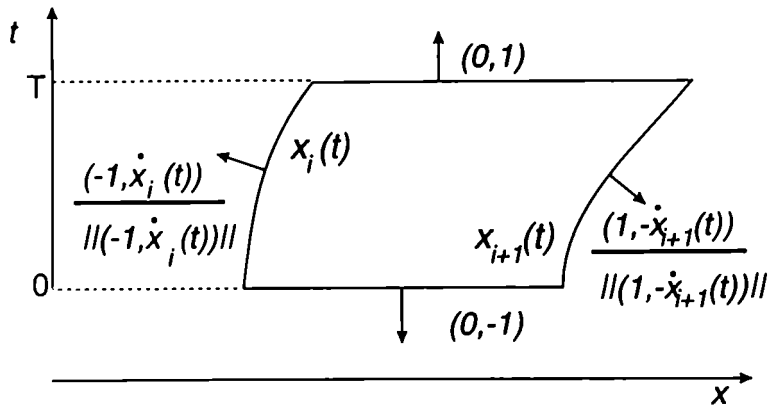

Figura 2.6: Región de integración, mostrando las normales utilizadas para aplicar el teorema de la divergencia.

$(v_{i+1} - v_i)/(x_{i+1} - x_i)$, se obtiene:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u\Phi_t + v \triangle \Phi)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\Phi(x,0)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \left[u_{i+1/2}\Phi_t - \left(\frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i} \right) \Phi_x \right] dxdt +$$

$$+ \int_0^T [v_{i+1}\Phi_x(x_{i+1},t) - v_i\Phi_x(x_i,t)]\, dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i(0)}^{x_{i+1}(0)} u_{i+1/2}\Phi(x,0)dx.$$

Como $u_{i+1/2}$ no depende de t, podemos utilizar el teorema de la divergencia en la integral doble, obteniendo una integral curvilínea sobre los bordes de la región delimitada por $(x_i(t), x_{i+1}(t))$, y $t = 0,\ T$ (ver Figura 2.6):

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u\Phi_t + v \triangle \Phi)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\Phi(x,0)dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n-1} \int_\Gamma \left(-\frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i}\Phi, u_{i+1/2}\Phi \right) \cdot \hat{\mathbf{n}} +$$

$$+ \int_0^T [v_{i+1}\Phi_x(x_{i+1},t) - v_i\Phi_x(x_i,t)]\, dt + \sum_{i=1}^{n-1} \int_{x_i(0)}^{x_{i+1}(0)} u_{i+1/2}\Phi(x,0)dx.$$

Utilizando los valores de las normales dados en la Figura 2.6, cancelando las contribu-

ciones del dato inicial y utilizando el hecho que $\Phi(x,T) = 0$, se obtiene:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u\Phi_t + v \triangle \Phi)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\Phi(x,0)dx =$$

$$= -\sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T \Phi(x_{i+1},t) \frac{1}{\sqrt{1+\dot{x}_{i+1}^2}} \left[\frac{v_{i+1}-v_i}{x_{i+1}-x_i} - u_{i+1/2}\dot{x}_{i+1}\right] dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T \Phi(x_i,t) \frac{1}{\sqrt{1+\dot{x}_i^2}} \left[\frac{v_{i+1}-v_i}{x_{i+1}-x_i} - u_{i+1/2}\dot{x}_i\right] dt +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1} \int_0^T [v_{i+1}\Phi_x(x_{i+1},t) - v_i\Phi_x(x_i,t)]\, dt.$$

Observemos ahora que la última suma en el miembro de la derecha es telescópica, y que $v_n = 0 = v_1$. Reacomodando los índices de la primera sumatoria, se obtiene finalmente:

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} (u\Phi_t + v \triangle \Phi)\, dxdt + \int_{\mathbb{R}} u(x,0)\Phi(x,0)dx =$$

$$= \int_0^T \Phi(x_1(t),t) \frac{1}{\sqrt{1+\dot{x}_1^2}} \left[\frac{v_2-v_1}{x_2-x_1} + u_{3/2}\dot{x}_1(t)\right] dt +$$

$$+ \int_0^T \Phi(x_n(t),t) \frac{1}{\sqrt{1+\dot{x}_n^2}} \left[-\frac{v_n-v_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} - u_{n-1/2}\dot{x}_n(t)\right] dt +$$

$$+ \sum_{i=2}^{n-1} \int_0^T \Phi(x_i(t),t) \frac{1}{\sqrt{1+\dot{x}_i^2}} \left[\frac{v_{i+1}-v_i}{x_{i+1}-x_i} - \frac{v_i-v_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} + (u_{i+1/2}-u_{i-1/2})\dot{x}_i(t)\right] dt = 0,$$

donde la última igualdad sale recordando la convención $u_{1/2} = u_{n+1/2} = 0$, y utilizando el sistema de ecuaciones 2.2. De este modo obtenemos finalmente (2.3). □

Observación 1 *Nótese que el término de interacción de una interfase con la otra, en el sistema de ecuaciones (2.2), se anula si ambas limitan por derecha e izquierda un máximo o un mínimo local de u (pues si x_i y x_{i+1} limitan un máximo o un mínimo de u, $v_{i+1} - v_i = 0$). Además, la interacción acopla sólo interfases vecinas. Por lo tanto, las ecuaciones que gobiernan interfases a ambos lados de un máximo o un mínimo local no están acopladas entre sí. Esto será útil para simplificar algunas de las consideraciones en lo que sigue.*

Si dos interfases contiguas no limitan un máximo o mínimo local, el término de interacción tiene un signo que hace que las interfases se rechacen entre sí. En particular, esto dice que el soporte de la solución es estrictamente creciente. Una determinación más precisa del soporte saldrá como consecuencia del ejemplo 1 y del principio de comparación (Lema 6).

Lema 1 *Sean x_k, x_{k+1}, ..., x_{k+m} las interfases correspondientes a una porción monótona de u (es decir, separadas por máximos y mínimos de u). Entonces, la restricción del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (2.2) a $i \in [k, k+m]$ tiene una única solución que satisface $x_k(t_0) < x_{k+1}(t_0) < \cdots < x_{k+m}(t_0)$, $t_0 \in \mathbb{R}$, y que existe para todo $t \in (t_0, +\infty)$.*

Dem. Sea $\Omega \in \mathbb{R}^{m+1}$ el abierto $\Omega = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{m+1} : x_1 < x_2 < \cdots < x_m\}$. Claramente, para cualquier dato inicial $\mathbf{x_0} = (x_k(t_0), \ldots, x_{k+m}(t_0)) \in \Omega$ la función que da el sistema de ecuaciones diferenciales es continua y Lipschitz respecto de x en un entorno de $\mathbf{x_0}$. Por el teorema de extensión de soluciones de ecuaciones diferenciales, de haber un intervalo maximal de existencia de la forma $(t_0 - \epsilon, b)$, $b < +\infty$, debe ocurrir que $(x_k(t), \ldots, x_{k+m}(t)) \longrightarrow \partial\Omega$ cuando $t \longrightarrow b^-$. Es decir, o bien $\exists j \in [k, k+m-1]$ tal que $x_{j+1}(t) - x_j(t) \overset{t\to b^-}{\longrightarrow} 0$, o bien $x_{k+m}(t) \overset{t\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$, o bien $x_k(t) \overset{t\to b^-}{\longrightarrow} -\infty$. Todos estos casos se reducen al mismo análisis, que se detalla para el caso $x_{k+m} \to +\infty$.

Si $x_{k+m} \overset{t\to b^-}{\longrightarrow} \infty$, su derivada debe tender a infinito,

$$\dot{x}_{k+m} = \frac{1}{u_{k+m+1/2} - u_{k+m-1/2}} \frac{v_{k+m} - v_{k+m-1}}{x_{k+m} - x_{k+m-1}} \overset{t\to b^-}{\longrightarrow} +\infty,$$

y por lo tanto $x_{k+m} - x_{k+m-1} \overset{t\to b^-}{\longrightarrow} 0$. Pero entonces, como

$$\dot{x}_{k+m-1} = -\frac{1}{u_{k+m-1/2} - u_{k+m-3/2}} \left[\frac{v_{k+m} - v_{k+m-1}}{x_{k+m} - x_{k+m-1}} - \frac{v_{k+m-1} - v_{k+m-2}}{x_{k+m-1} - x_{k+m-2}} \right],$$

se tiene que o bien $\dot{x}_{k+m-1} \overset{t\to b^-}{\longrightarrow} -\infty$ (lo cual es absurdo pues $x_{k+m} \overset{t\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$ y $x_{k+m} - x_{k+m-1} \longrightarrow 0$), o bien $x_{k+m-1} - x_{k+m-2} \overset{t\to b^-}{\longrightarrow} 0$. Repitiendo la misma argumentación, se llega a que $x_{k+1} - x_k \overset{t\to b^-}{\longrightarrow} 0$, lo que implica que $x_k \overset{t\to b^-}{\longrightarrow} +\infty$ y que

$$\dot{x}_k = -\frac{1}{u_{k+1/2} - u_{k-1/2}} \frac{v_{k+1} - v_k}{x_{k+1} - x_k} \overset{t\to b^-}{\longrightarrow} -\infty,$$

absurdo. □

Como consecuencia de los argumentos expuestos en la demostración anterior, se tiene el siguiente corolario.

Corolario 1 *Las interfases sólo se intersecan en los máximos o mínimos de u.*

Observación 2 *Cuando dos interfases se intersecan en un máximo o un mínimo de u, el conjunto de nivel que delimitan debe desaparecer, y ambas interfases son eliminadas. Notar que este procedimiento produce discontinuidades en t también para v, aunque v sea siempre lineal a trozos y continua en x. Ver ejemplo 1.*

Observación 3 *Si el dato inicial tiene soporte compacto, el soporte de la solución numérica es compacto para todo t, y está determinado en forma natural por las interfases donde*

u salta de U_1 a cero. Esto constituye una ventaja sobre otros métodos (diferencias finitas, elementos finitos), que por tener alguna disipación adicional producen un soporte poco determinado, y que debe ser calculado mediante extrapolación a partir de un conjunto donde $u = \delta$, para algún δ adecuado (ver más en la sección 4.3).

Observación 4 *Notar que la evolución continúa hasta que toda la masa inicial está distribuída a nivel U_1. Mediante el uso de la conservación de la integral de u durante la evolución (ver Lema 2), esto proporciona una cota para el soporte de la forma M/U_1, donde M es la masa (integral en $\mathbb{R}$) del dato inicial, y U_1 es el primer valor no nulo de la discretización del rango de la solución u. Más adelante será necesario obtener una cota para el soporte de la solución a tiempo t, que sea* independiente de la discretización de $\alpha(u)$, es decir, que sea independiente de U_1 *(ver teorema 8).*

Observación 5 *El número de interfases de u es siempre par para un dato inicial con soporte compacto (por cada interfase donde u salta hacia arriba, hay una donde salta hacia abajo). El caso de 2 interfases es trivial (no hay evolución). El siguiente ejemplo muestra la solución exacta en el caso de 4 interfases.*

Ejemplo 1 (Solución exacta para cuatro interfases) *Para cuatro interfases la solución u consta de dos niveles, correspondientes a U_1 y U_2. Es decir, $u_{3/2} = U_1 = u_{7/2}$, $u_{5/2} = U_2$. Además, v es lineal a trozos, y vale $v_1 = 0$, $v_2 = V_1$, $v_3 = V_1$, $v_4 = 0$. (Ver Figura 2.7).*

El sistema de ecuaciones a resolver es entonces:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{1}{u_{3/2}} \dfrac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1}, \\ \dot{x}_2 = \dfrac{1}{u_{5/2} - u_{3/2}} \dfrac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1}, \\ \dot{x}_3 = -\dfrac{1}{u_{7/2} - u_{5/2}} \dfrac{v_4 - v_3}{x_4 - x_3}, \\ \dot{x}_4 = \dfrac{1}{-u_{7/2}} \dfrac{v_4 - v_3}{x_4 - x_3}. \end{cases} \tag{2.4}$$

Nótese que las ecuaciones para x_1 y x_2 no contienen referencia a x_3 y x_4, y viceversa, debido a que están separadas por un máximo de u, y que las ecuaciones para x_1 y x_4, y para x_2 y x_3, son análogas. Vamos entonces a resolver por ejemplo para x_3 y x_4, y aplicar el resultado también a la determinación de x_1 y x_2.

Multiplicando la ecuación para x_3 por $\delta u_3 = (u_{7/2} - u_{5/2})$, y la ecuación para x_4 por $\delta u_4 = u_{9/2} - u_{7/2} =. -u_{7/2}$, y sumando, se obtiene (caso particular de conservación de la masa, véase más abajo el lema 2):

$$\delta u_3 \dot{x}_3 + \delta u_4 \dot{x}_4 = 0,$$

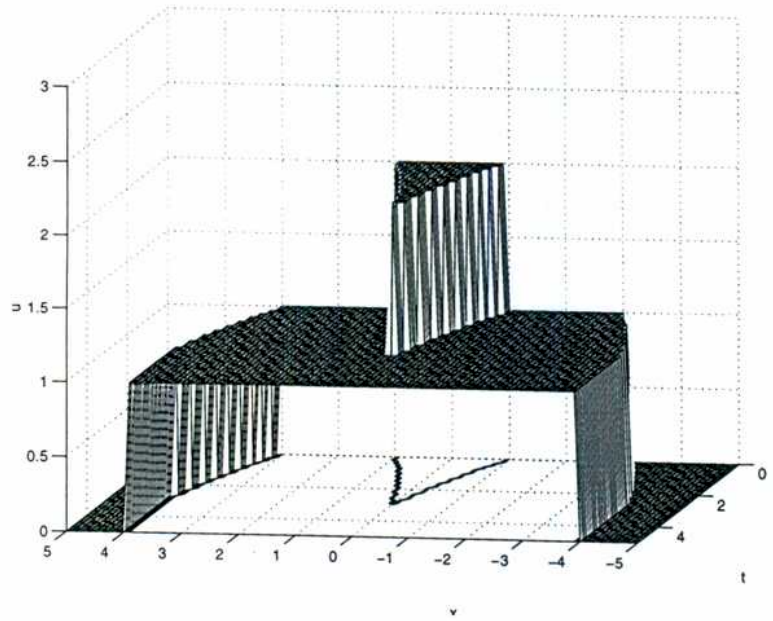

Figura 2.7: Solución u del ejemplo 1 para el caso simétrico.

lo que implica que esa cantidad no cambia, y es por lo tanto siempre igual a la inicial:

$$\delta u_3 x_3(t) + \delta u_4 x_4(t) = C = \delta u_3 x_3(0) + \delta u_4 x_4(0).$$

Despejando $x_3(t) = (C - \delta u_4 x_4(t))/\delta u_3$, *y reemplazando en la ecuación diferencial para* x_4, *se obtiene fácilmente la solución:*

$$x_4(t) = \frac{\delta u_3 x_3(0) + \delta u_4 x_4(0)}{\delta u_3 + \delta u_4} + \sqrt{2\frac{v_4 - v_3}{\delta u_3 + \delta u_4}\frac{\delta u_3}{\delta u_4}t + \left(\frac{x_4(0) - x_3(0)}{\delta u_3 + \delta u_4}\right)^2 \delta u_3^2}. \qquad (2.5)$$

De aquí

$$x_3(t) = \frac{\delta u_3 x_3(0) + \delta u_4 x_4(0)}{\delta u_3 + \delta u_4} - \sqrt{2\frac{v_4 - v_3}{\delta u_3 + \delta u_4}\frac{\delta u_4}{\delta u_3}t + \left(\frac{x_4(0) - x_3(0)}{\delta u_3 + \delta u_4}\right)^2 \delta u_4^2}. \qquad (2.6)$$

Análogamente se obtiene la solución para x_1 *y* x_2.

En el caso en que la discretización en U *es uniforme, se tiene* $\delta u_1 = \delta u_2 = -\delta u_3 = -\delta u_4 = \delta u = U_1$. *Además* $v_2 - v_1 = -(v_4 - v_3) = \delta v$. *En este caso las soluciones*

adquieren una gran simetría y sencillez:

$$\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{x_1(0)+x_2(0)}{2} - \sqrt{\frac{\delta v}{\delta u}t + \frac{(x_2(0)-x_1(0))^2}{4}}, \\
x_2(t) &= \frac{x_1(0)+x_2(0)}{2} + \sqrt{\frac{\delta v}{\delta u}t + \frac{(x_2(0)-x_1(0))^2}{4}}, \\
x_3(t) &= \frac{x_3(0)+x_4(0)}{2} - \sqrt{\frac{\delta v}{\delta u}t + \frac{(x_4(0)-x_3(0))^2}{4}}, \\
x_4(t) &= \frac{x_3(0)+x_4(0)}{2} + \sqrt{\frac{\delta v}{\delta u}t + \frac{(x_4(0)-x_3(0))^2}{4}}.
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Como se mostró en la observación 1, las interfases x_1 y x_4 se mueven 'hacia afuera' del soporte, mientras que x_2 es estrictamente creciente y x_3 estrictamente decreciente. Existe además un tiempo t^* en que $x_2(t^*) = x_3(t^*)$, y por lo tanto esas dos interfases se intersecan y deben ser eliminadas. Para el caso simétrico $x_1(0) = -x_4(0)$, $x_2(0) = -x_3(0)$, $x_2(t^*) = x_3(t^*)$ implica:

$$t^* = \frac{\delta u}{\delta v} x_3(0) x_4(0). \tag{2.8}$$

Es decir, luego de un tiempo finito desaparece la meseta de altura U_2, y la evolución se detiene.

2.2.1 Algunas propiedades del método

Lema 2 Conservación de masa. *La masa total de la solución u*

$$M = \sum_{i=2}^{n} \left(x_i(t) - x_{i-i}(t)\right) u_{i-1/2}, \tag{2.9}$$

se conserva.

Dem. Basta ver que la derivada de M respecto del tiempo es cero. Es decir:

$$\begin{aligned}
\dot{M}(t) &= \sum_{i=2}^{n} \left(\dot{x}_i(t) - \dot{x}_{i-i}(t)\right) u_{i-1/2} = \sum_{i=2}^{n} \dot{x}_i(t) u_{i-1/2} - \sum_{i=2}^{n} \dot{x}_{i-i}(t) u_{i-1/2} \\
&= \sum_{i=2}^{n} \dot{x}_i(t) u_{i-1/2} - \sum_{i=1}^{n-1} \dot{x}_i(t) u_{i+1/2} \\
&= \dot{x}_n u_{n-1/2} - \dot{x}_1 u_{3/2} + \sum_{i=2}^{n-1} \dot{x}_i(t) \left(u_{i-1/2} - u_{i+1/2}\right) = \\
&= \frac{v_n - v_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} + \frac{v_2 - v_1}{x_2 - x_1} + \sum_{i=2}^{n-1} \left[\frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{v_i - v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right] = 0.
\end{aligned}$$

□

Sean u, v y $\tilde{u}$, $\tilde{v}$ soluciones del problema (2.1), de la forma asumida en el teorema 5. Es decir, u y $\tilde{u}$ son funciones constantes a trozos, asumiendo valores $u_{i+1/2}$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\tilde{u}_{j+1/2}$, $j = 1, \ldots, \tilde{n} - 1$ respectivamente, y con intervalos de constancia separados por curvas $x_i(t)$, $\tilde{x}_j(t)$ respectivamente. En el siguiente teorema se demuestra que si una está por debajo de la otra a tiempo inicial, entonces está por debajo para todo tiempo posterior.

Teorema 6 (Principio de comparación) *Sean u y $\tilde{u}$ como antes. Entonces, si para $t = 0$ se tiene $u(x,0) \leq \tilde{u}(x,0)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, entonces $u(x,t) \leq \tilde{u}(x,t)$ para todo $t > 0$, y todo x.*

Dem: Para demostrar lo deseado, basta ver que si x_i y $\tilde{x}_j$ limitan a la derecha (izquierda) intervalos de constancia de u y $\tilde{u}$ respectivamente, correspondientes a una misma altura U_k, entonces $x_i(t) \leq \tilde{x}_j(t)$ $(x_i(t) \geq \tilde{x}_j(t))$ para todo t.

Consideremos el primer caso. Claramente interesa sólo la situación en que tanto x_i como $\tilde{x}_j$ pertenecen a porciones decrecientes de u y $\tilde{u}$ respectivamente. Por lo tanto, se tiene

$$u_{i+1/2} - u_{i-1/2} = \tilde{u}_{j+1/2} - \tilde{u}_{j-1/2} = \delta u < 0.$$

Razonando por el absurdo, supongamos que $\exists\ t^*$ donde dos interfases x_i y $\tilde{x}_j$ en las condiciones anteriores se cruzan por primera vez. Para ello, debe ser

$$x_i(t^*) = \tilde{x}_j(t^*) \quad \text{y} \quad \dot{x}_i(t^*) > \dot{\tilde{x}}_j(t^*). \tag{2.10}$$

Además, por ser el primer cruce y estar u por debajo de $\tilde{u}$, se tienen

$$x_{i+1}(t^*) \leq \tilde{x}_{j+1}(t^*) \quad \text{ó} \quad \tilde{v}_{j+1} - \tilde{v}_j = 0 \tag{2.11}$$

y

$$x_{i-1}(t^*) \leq \tilde{x}_{j-1}(t^*) \quad \text{ó} \quad v_i - v_{i-1} = 0. \tag{2.12}$$

Utilizando las ecuaciones que satisfacen x_i y $\tilde{x}_j$, se tiene

$$\dot{\tilde{x}}_j(t^*) - \dot{x}_i(t^*) = -\frac{1}{\delta u}\left[\frac{\tilde{v}_{j+1} - \tilde{v}_j}{\tilde{x}_{j+1} - \tilde{x}_j} - \frac{\tilde{v}_j - \tilde{v}_{j-1}}{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1}}\right] + \frac{1}{\delta u}\left[\frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i} - \frac{v_i - v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}\right].$$

Reordenando

$$\dot{\tilde{x}}_j(t^*) - \dot{x}_i(t^*) = -\frac{1}{\delta u}\left[\left(\frac{\tilde{v}_{j+1} - \tilde{v}_j}{\tilde{x}_{j+1} - \tilde{x}_j} - \frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i}\right) + \left(\frac{v_i - v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{\tilde{v}_j - \tilde{v}_{j-1}}{\tilde{x}_j - \tilde{x}_{j-1}}\right)\right].$$

Analizando los signos de cada uno de los paréntesis en esta expresión, para cada uno de los cuatro casos (2.11), (2.12), y recordando que por estar en un flanco decreciente de u es $\delta u < 0$, se obtiene

$$\dot{\tilde{x}}_j(t^*) - \dot{x}_i(t^*) \geq 0.$$

Esto es absurdo, pues se supuso (2.10). Por ejemplo, en el caso $\tilde{v}_{j+1} - \tilde{v}_j = 0$ y $v_i - v_{i-1} = 0$, en cada término entre paréntesis en la expresión anterior sobreviven sólo los términos que están restando, pero los numeradores de ambos son negativos (pues u y $\tilde{u}$ decrecientes implica v y $\tilde{v}$ decrecientes). □

Observación 6 *En la demostración anterior se ve también que si* $x_i(t^*) = \tilde{x}_j(t^*)$, *y las velocidades de ambas interfases son iguales, entonces* $x_{i-1}(t^*) = \tilde{x}_{j-1}(t^*)$ *y* $x_{i+1}(t^*) = \tilde{x}_{j+1}(t^*)$. *Pero entonces, el argumento del teorema anterior se puede aplicar a* $\tilde{x}_{j-1}$ *y* x_{i-1}, *y también a* $\tilde{x}_{j+1}$ *y* x_{i+1}. *De ello resulta que* $\dot{\tilde{x}}_{j-1} = \dot{x}_{i-1}$ *y* $\dot{\tilde{x}}_{j+1} = \dot{x}_{i+1}$. *Repitiendo el argumento, se obtiene que todas las interfases que correponden a la porción monótona que se está considerando son iguales para* u *y* $\tilde{u}$ *a tiempo* t^*. *Por la unicidad de la solución del sistema de ecuaciones diferenciales son iguales entonces también a tiempo* $t = 0$.

Es decir, si el gráfico de $u(x, 0)$ *está estrictamente por debajo del gráfico de* $\tilde{u}(x, 0)$, *está estrictamente por debajo para todo* $t > 0$.

Corolario 2 *El soporte de la solución es siempre creciente, hasta que toda la masa está repartida a nivel* U_1, *cuando la evolución se detiene.*

Dem: La demostración sale fácilmente tomando cada componente conexa del soporte de $u(x, t_0)$, y eligiendo como subsolución la del ejemplo 1 en el caso de que toda la componente conexa no esté ya a nivel U_1. □

A continuación se muestra cómo pueden implementarse condiciones de Dirichlet con el método numérico propuesto, y al mismo tiempo proporciona un ejemplo de soluciones autosimilares, que se pueden utilizar como barreras, vía el teorema de comparación, para poner por encima de datos iniciales arbitrarios.

2.2.2 Soluciones exactas al problema de Dirichlet en la semirrecta

Consideremos el problema de Dirichlet en la semirrecta $\mathbb{R}_{>0}$

$$u_t = \alpha(u)_{xx}, \qquad u(x, 0) = 0, \qquad u(0, t) = A, \tag{2.13}$$

con $\alpha(u)$ una función continua creciente, y A una constante positiva. Este problema admite soluciones autosimilares de la forma $u(x, t) = u(\eta)$, $\eta = x/\sqrt{t}$ donde u es una solución débil adecuada del problema de contorno (ver [12, 13, 14, 8]).

$$-\frac{1}{2}\eta u'(\eta) = \alpha(u)'', \qquad u(0) = A, \quad \lim_{\eta \longrightarrow \infty} u(\eta) = 0.$$

Con hipótesis adecuadas (ver [12, 13, 14] para el caso $\alpha(u)$ suave, [8, 7, 6, 10, 11] para $\alpha(u)$ con saltos e intervalos de constancia), es posible reescribir el problema en forma implícita utilizando a u como variable independiente, y a η como variable dependiente, es decir, buscando $\eta(u)$. Resulta ([6, 7]):

$$\eta(s)^2 = 4 \int_s^A \frac{d\alpha(u)}{u + 2\int_0^u \frac{d\alpha(r)}{\eta(r)^2}}. \tag{2.14}$$

En particular, si α es una función derivable, se tiene

$$\eta(0)^2 = 4 \int_0^A \frac{\alpha'(u)du}{u + 2\int_0^u \frac{\alpha'(r)dr}{\eta(r)^2}} \leq 4 \int_0^A \frac{\alpha'(u)du}{u}, \tag{2.15}$$

de donde surge que el soporte de la solución es acotado si $\alpha'(u)/u$ es integrable en $u = 0$. Para la ecuación del calor, por ejemplo, $\alpha'(u)/u = 1/u$, que no es integrable en $u = 0$. En cambio, para el caso de medios porosos con $\alpha(u) = u^m$, $m > 1$, $\alpha'(u)/u = mu^{m-2}$ es integrable en 0 y por lo tanto el soporte de la solución es compacto para todo t.

Consideremos ahora el problema obtenido reemplazando $\alpha(u)$ por una función escalera. Un problema aún más general ha sido estudiado en la literatura [6, 7, 10, 11], aunque sin mención del caso en que la función $\alpha(u)$ sólo contiene saltos e intervalos de constancia. Vamos entonces a analizar este caso particular, de acuerdo con las ideas expuestas hasta aquí. Se tiene:

$$u_t = \alpha_d(u)_{xx}, \qquad u(x,0) = 0, \qquad u(0,t) = A. \tag{2.16}$$

De acuerdo a lo expuesto en la sección anterior, buscamos la solución u a este problema como una función constante a trozos, con intervalos de constancia correspondientes a valores $0 < U_1 < U_2 < \cdots < U_n = A$, y donde $\alpha_d(u(x,t))$ es una función lineal a trozos y continua en la variable espacial. Como antes, la formulación débil del problema se utiliza para hallar las ecuaciones de movimiento de las interfases.

Para mantener cierta homogeneidad con la notación de la sección anterior, llamaremos $y_1(t)$ a la interfase donde u salta entre 0 y U_1, y_2 a donde u salta entre U_1 y U_2, y finalmente y_n a aquella donde la solución salta entre U_{n-1} y U_n. La manera más simple de imponer la condición de contorno consiste en tomar la interfase que limita por la izquierda al conjunto de nivel $u = A$, inicialmente en $y_n(0) = 0$ y requerir que su derivada temporal sea nula (para mantener la condición $u = A$ en $x = 0$).

Con la misma notación de la sección anterior, es decir, utilizando $u_{i+1/2}$, v_i, y δu_i para denotar el valor de u para $y_i \le x \le y_{i+1}$, el valor de v en $x = y_i(t)$, y el salto de u en $x = y_i(t)$ respectivamente, se llega al sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias (recordando que ahora $y_n \le y_{n-1} \le \cdots \le y_2 \le y_1$):

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = -\dfrac{1}{u_{3/2}} \dfrac{v_1 - v_2}{y_1 - y_2}, \\ \dot{y}_i = -\dfrac{1}{u_{i-1/2} - u_{i+1/2}} \left[\dfrac{v_{i-1} - v_i}{y_{i-1} - y_i} - \dfrac{v_i - v_{i+1}}{y_i - y_{i+1}} \right], \quad i = 2, \ldots, n-1, \\ \dot{y}_n = 0. \end{cases} \tag{2.17}$$

Para satisfacer la condición inicial $u(x,0) = 0$ se requiere:

$$y_1(0) = y_2(0) = \cdots = y_{n-1}(0) = y_n(0) = 0.$$

El sistema de ecuaciones diferenciales es por lo tanto singular para $t = 0$, y se requiere cierto cuidado para hallar sus soluciones. Sin embargo, considerando que las soluciones del problema (2.13) tienen la forma autosimilar $u(x,t) = u(x/\sqrt{t})$, es esperable que las curvas de nivel satisfagan $y_i(t) = \beta_i \sqrt{t}$.

Reemplazando ese *ansatz* en el sistema de ecuaciones (2.17), se obtiene el sistema de ecuaciones algebraicas:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\beta_1 \delta u_1 &= -\dfrac{\delta v_{3/2}}{\beta_2 - \beta_1}, \\ \frac{1}{2}\beta_i \delta u_i &= \dfrac{\delta v_{i-1/2}}{\beta_i - \beta_{i-1}} - \dfrac{\delta v_{i+1/2}}{\beta_{i+1} - \beta_i}, \qquad 2 \le i \le n-1, \\ \beta_n &= 0, \end{cases} \tag{2.18}$$

cuya solución debe satisfacer la condición

$$\beta_1 \ge \beta_2 \ge \cdots \ge \beta_n = 0, \tag{2.19}$$

para que las interfases $\beta_i \sqrt{t}$ puedan pensarse como curvas de nivel de una función.

Una demostración directa de existencia y unicidad de las soluciones del sistema algebraico (2.18) se detalla en el apéndice C (ver también [5]). Aquí mencionaremos sólo los argumentos que permiten demostrar que para un dado $\alpha(u)$, las soluciones de los problemas aproximados correspondientes a distintas funciones escalera $\alpha_d^k(u)$ tienen soportes acotados uniformemente en k.

Teorema 7 *Las soluciones del sistema de ecuaciones algebraicas (2.18) satisfacen la ecuación implícita*

$$\left(\beta_{k-1}^2 + \sum_{j=k}^{n} (\beta_j - \beta_{j-1})^2\right) = 4 \sum_{j=k}^{n} \frac{\delta v_{j-1/2}}{u_{j-1/2} + 2 \displaystyle\sum_{i=1}^{j-2} \frac{\delta v_{i+1/2}}{\beta_{i+1}\beta_i}}, \tag{2.20}$$

análoga a la relación (2.15) para el problema (2.13).

Dem. Con la convención $\delta v_{1/2} = 0$, las ecuaciones para $i = 1, \ldots, n-1$ en el sistema de ecuaciones (2.18) pueden ser reescritas en la forma

$$u_{i+1/2} - u_{i-1/2} = -\frac{2}{\beta_i}\left(\frac{\delta v_{i+1/2}}{\beta_{i+1} - \beta_i} - \frac{\delta v_{i-1/2}}{\beta_i - \beta_i - 1}\right), \quad i = 1, \ldots, n-1. \tag{2.21}$$

Sumando desde $i = 1$ a $j - 1$, resulta

$$u_{j-1/2} = -2 \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\beta_i}\left(\frac{\delta v_{i+1/2}}{\beta_{i+1} - \beta_i} - \frac{\delta v_{i-1/2}}{\beta_i - \beta_i - 1}\right). \tag{2.22}$$

Separando ambas sumas, y reordenando:

$$\begin{aligned} u_{j-1/2} &= -2\left[\sum_{i=2}^{j} \frac{1}{\beta_{i-1}} \frac{\delta v_{i-1/2}}{\beta_i - \beta_{i-1}} - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{1}{\beta_i} \frac{\delta v_{i-1/2}}{\beta_i - \beta_{i-1}}\right] \\ &= -2\left[\frac{1}{\beta_{j-1}} \frac{\delta v_{v-1/2}}{\beta_j - \beta_{j-1}} + \sum_{i=2}^{j-1} \left(\frac{1}{\beta_{i-1}} - \frac{1}{\beta_i}\right) \frac{\delta v_{i-1/2}}{\beta_i - \beta_{i-1}}\right] \\ &= -2\left[\frac{1}{\beta_{j-1}} \frac{\delta v_{j-1/2}}{\beta_j - \beta_{j-1}} + \sum_{i=2}^{j-1} \frac{\delta v_{i-1/2}}{\beta_i \beta_{i-1}}\right], \end{aligned} \tag{2.23}$$

de donde

$$\beta_{j-1}(\beta_j - \beta_{j-1}) = \frac{-2\delta v_{j-1/2}}{u_{j-1/2} + 2\sum_{i=1}^{j-2} \frac{\delta v_{i+1/2}}{\beta_{i+1}\beta_i}}. \tag{2.24}$$

Sumando ahora desde $j = k$ hasta n resulta

$$\sum_{j=k}^{n} \beta_{j-1}(\beta_j - \beta_{j-1}) = -2\sum_{j=k}^{n} \frac{\delta v_{j-1/2}}{u_{j-1/2} + 2\sum_{i=1}^{j-2} \frac{\delta v_{i+1/2}}{\beta_{i+1}\beta_i}}. \tag{2.25}$$

El primer miembro de esta igualdad puede reescribirse, usando sumación por partes y el hecho que $\beta_n = 0$:

$$\sum_{j=k}^{n} \beta_{j-1}(\beta_j - \beta_{j-1}) = -\beta_{k-1}^2 - \sum_{j=k}^{n}(\beta_j - \beta_{j-1})\beta_j. \tag{2.26}$$

Al mismo tiempo, la sumatoria en el miembro derecho puede relacionarse con la sumatoria del lado izquierdo, de la siguiente manera

$$\sum_{j=k}^{n}(\beta_j - \beta_{j-1})\beta_j = \sum_{j=k}^{n} \beta_{j-1}(\beta_j - \beta_{j-1}) + \sum_{j=k}^{n}(\beta_j - \beta_{j-1})^2. \tag{2.27}$$

Haciendo uso de las dos ecuaciones anteriores, surge que

$$\sum_{j=k}^{n} \beta_{j-1}(\beta_j - \beta_{j-1}) = -\frac{1}{2}\left(\beta_{k-1}^2 + \sum_{j=k}^{n}(\beta_j - \beta_{j-1})^2\right), \tag{2.28}$$

y por lo tanto, finalmente

$$\left(\beta_{k-1}^2 + \sum_{j=k}^{n}(\beta_j - \beta_{j-1})^2\right) = 4\sum_{j=k}^{n} \frac{\delta v_{j-1/2}}{u_{j-1/2} + 2\sum_{i=1}^{j-2} \frac{\delta v_{i+1/2}}{\beta_{i+1}\beta_i}}. \tag{2.29}$$

□

Lema 3 *El soporte de la solución del problema (2.16) satisface la estimación*

$$\beta_1^2 \leq 4\sum_{j=2}^{n} \frac{\delta v_{j-1/2}}{u_{j-1/2}}. \tag{2.30}$$

Dem. Basta aplicar la estimación anterior al caso $k = 2$, haciendo uso de la positividad estricta del término $\sum_{j=k}^{n}(\beta_j - \beta_{j-1})^2$, y teniendo en cuenta que $\delta v_{j-1/2} > 0$ para $j = 2, \ldots\ldots, n$. □

Observación 7 *Supongamos que $\alpha(s)$ es derivable en $s > 0$, y continua en $s \geq 0$. Supongamos además que $\alpha'(s)/s$ es integrable Riemann, con:*

$$\int_0^A \frac{\alpha'(s)}{s} ds < \infty. \tag{2.31}$$

Supongamos que se aproxima la función $\alpha(u)$ por una función escalera con saltos en $U_i = i\delta U$, $i = 1, \ldots$ y que en el salto U_i, $\alpha_d(u)$ salta entre $\alpha(U_{i-1})$ y $\alpha(U_i)$. La cota anterior muestra entonces que el soporte de la solución autosimilar correspondiente al problema con α_d satisface:

$$\beta_1^2 \leq 4 \sum_{j=2}^{n} \frac{\delta v_{j-1/2}}{u_{j-1/2}} = 4 \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha(U_{j-1}) - \alpha(U_{j-2})}{U_{j-1}} = 4 \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha'(\xi_{j-3/2})(U_{j-1} - U_{j-2})}{U_{j-1}}, \tag{2.32}$$

donde $\xi_{j-3/2} \in (U_{j-2}, U_{j-1})$. Por lo tanto, se tiene

$$\beta_1^2 \leq 4 \sum_{j=2}^{n} \frac{\alpha'(\xi_{j-3/2})(U_{j-1} - U_{j-2})}{\xi_{j-3/2}}. \tag{2.33}$$

Siendo la función $\alpha'(s)/s$ integrable Riemann, el lado derecho tiende, cuando la partición $U_j - U_{j-1} \longrightarrow 0$, a la integral de Riemann de $\alpha'(s)/s$ entre 0 y A. Por lo tanto, está acotada independientemente de n.

De la observación anterior, y del Teorema de comparación, surge el siguiente resultado.

Teorema 8 *Sea $\alpha(s)$ continua en $[0, \infty)$, derivable en $(0, \infty)$, y sea $\alpha'(s)/s$ integrable Riemann en el origen. Entonces, el soporte de la solución al problema (2.16) está uniformemente acotado independientemente de δu.*

2.3 Método de malla móvil

En esta sección presentamos una deducción del sistema de ecuaciones (2.2), en el marco de elementos finitos con mallas móviles. En este contexto se pierde de vista el hecho de que las soluciones construídas son en realidad soluciones exactas de un problema aproximado, donde $\alpha(u)$ fue reemplazada por una función escalera $\alpha_d(u)$. Sin embargo, se tiene la ventaja de que el método aquí considerado puede ser incluído dentro de una familia de métodos, deducidos a partir de formulaciones estándar de elementos finitos.

El método de elementos finitos para ecuaciones de evolución consiste habitualmente en considerar una versión de dimensión finita del problema escrito en forma débil:

$$\int_{\mathbb{R}} (u_t \phi + v_x \phi_x) dx = 0, \quad v \in \alpha(u), \tag{2.34}$$

para toda $\phi \in H_0^1(\mathbb{R})$.

De acuerdo con las ideas expuestas anteriormente, sea u una función constante a trozos, que toma valores $u_{i+1/2}$ en el intervalo $x \in [x_i, x_{i+1}]$, y sea v una función lineal a

trozos y continua en x. Finalmente, consideremos para cada t la base del subespacio de H_0^1 formada por las funciones 'sombrero', es decir, funciones $\phi_i(x,t)$ definidas por:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \dfrac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & x \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]. \end{cases} \tag{2.35}$$

O sea, estas funciones son lineales a trozos, continuas, y se anulan en todos los $x_j(t) \neq x_i(t)$.

Siguiendo con el procedimiento estándar, requerimos que la forma débil se satisfaga, no para toda función de $H_0^1(\mathbb{R})$, sino para todas las ϕ_i definidas más arriba. Entonces, tenemos para cada i:

$$\int_{\mathbb{R}} (u_t \phi_i + v_x (\phi_i)_x) dx = \int_{x_{i-1}}^{x_{i+1}} (u_t \phi_i + v_x (\phi_i)_x) dx. \tag{2.36}$$

Para calcular u_t, siendo u una función discontinua, procedemos formalmente, notando que se puede escribir

$$u(x,t) = \sum_{j=1}^{n} \delta u_j \Theta(x - x_j(t)), \tag{2.37}$$

donde como antes $\delta u_j = u_{j+1/2} - u_{j-1/2}$ es el salto de u al atravesar la interfase $x = x_j(t)$, y Θ es la función salto unitario de Heaviside. Derivando la expresión anterior, resulta:

$$u_t(x,t) = -\sum_{j=1}^{n} \delta u_j \delta(x - x_j(t)) \dot{x}_j(t), \tag{2.38}$$

y por lo tanto

$$\int_{\mathbb{R}} u_t(x,t) \phi_i(x,t) dx = -\int_{\mathbb{R}} \sum_{j=1}^{n} \delta u_j \delta(x - x_j(t)) \dot{x}_j(t) \phi_i(x,t) dx = -\delta u_i \dot{x}_i(t). \tag{2.39}$$

Como v_x y $(\phi_i)_x$ son constantes a trozos, la integración del término $v_x(\phi_i)_x$ no ofrece dificultades:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} v_x (\phi_i)_x dx = & \int_{x_{i-1}(t)}^{x_i(t)} \frac{v_i - v_{i-1}}{(x_i - x_{i-1})^2} dx - \int_{x_i(t)}^{x_{i+1}(t)} \frac{v_{i+1} - v_i}{(x_{i+1} - x_i)^2} dx = \\ = & \frac{v_i - v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i}. \end{aligned} \tag{2.40}$$

Recolectando estos resultados, se obtiene:

$$\int_{\mathbb{R}} (u_t \phi_i + v_x (\phi_i)_x) dx = 0 = -\delta u_i \dot{x}_i(t) + \frac{v_i - v_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} - \frac{v_{i+1} - v_i}{x_{i+1} - x_i}. \tag{2.41}$$

Utilizando ahora que $v_i = \alpha(u_{i-1/2})$, $i = 1, \ldots, n$, resulta que las curvas $x_i(t)$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias anterior (2.2).

Observación 8 *Esta situación, donde u y v se eligen en espacios diferentes, y donde debe introducirse una condición de compatibilidad que garantice que la relación $v = \alpha(u)$ se satisface de cierto modo, es análoga a la que se presenta en los métodos mixtos de elementos finitos (ver por ejemplo [79], y las citas allí consignadas).*

Observación 9 *Este modo de deducir el sistema de ecuaciones da sentido a la solución numérica aún cuando se discretice el dato inicial u_0 como una función constante a trozos que tome valores cualesquiera (y no sólo los valores donde $\alpha_d(u)$ es discontinua). Podrían entonces considerarse ejemplos más generales que los analizados hasta ahora, aunque perdiendo la propiedad de que la solución sea solución exacta del problema con α_d.*

Observación 10 *Los argumentos de este parágrafo pueden repetirse asumiendo que $\alpha(u)$ es una función lineal a trozos y continua, y que tanto u como v son lineales a trozos, o en muchas otras situaciones. Los métodos deducidos, posiblemente de mayor orden que el considerado en este trabajo, permitirían resolver aproximadamente el problema de valores iniciales para la ecuación en derivadas parciales (2.1), pero no proporcionan soluciones exactas del problema correspondiente a $\alpha_d(u)$.*

Capítulo 3

Implementación numérica

En el presente capítulo se muestran resultados obtenidos aplicando el esquema básico descripto en el capítulo anterior a una serie de ejemplos clásicos de soluciones de ecuaciones parabólicas, donde la solución es conocida analíticamente.

En particular, elegiremos ejemplos que presentan muchas de las características y dificultades distintivas de las ecuaciones de difusión no lineal. En primer lugar, consideraremos la solución fundamental de la ecuación del calor, infinitamente diferenciable en x para $t > 0$, y cuyo soporte no es acotado. Luego, aproximaremos las soluciones fundamentales de la ecuación de medios porosos con $m = 2,\ 3$ (soluciones de Barenblatt, ver apéndice A), que poseen soporte compacto para todo tiempo $t > 0$, y exhiben singularidades en u_x en la frontera que limita el conjunto $u = 0$. También analizaremos un problema de Stefan a 2 fases (ver apéndice B), donde la solución no tiene soporte compacto, tiene una frontera libre (curva de separación entre ambas fases), y presenta una discontinuidad en ella.

Para cada ejemplo, compararemos la solución numérica con las soluciones exactas, y presentaremos estimaciones numéricas del orden de convergencia a la solución exacta, tanto para u y v, como para las interfases (de existir fronteras libres).

Discutiremos en detalle, además, el cálculo numérico de las soluciones autosimilares del problema de Dirichlet en la semirrecta de la sección 2.2.2.

Otra característica notable de las soluciones de ecuaciones de difusión degeneradas es la existencia de tiempos de espera, un tiempo finito que necesita la solución para que su soporte comience a expandirse. En la sección 3.1.5 resumiremos los resultados conocidos en la literatura, y analizaremos el desempeño del método tanto para detectarlos como para analizar la suavidad en t de la interfase.

Luego, consideraremos algunas de las alternativas posibles para discretizar tanto el rango de la solución u, como la función constitutiva $\alpha(u)$, así como otra manera de recuperar la solución u (haciendo $\alpha^{-1}(v)$ por ejemplo). Finalmente, se mostrará en un ejemplo cómo se generalizan estas ideas a más dimensiones espaciales, en un caso con simetría radial.

La discretización más simple, que consideraremos inicialmente, consiste en discretizar el rango de la solución u, $[0, u_{\max}]$ en n intervalos iguales $0 = U_0, U_1 = u_{\max}/n,\ U_2 =$

$2u_{\max}/n, \ldots, U_n = u_{\max}$. Luego se discretiza el dato inicial $u_0(x)$, calculando las posiciones $x_i(0)$, $i = 1, \ldots, n$ donde $u_0(x_i(0)) = (U_j + U_{j-1})/2 \quad j = 1, \ldots, n$.

Notar que esto corresponde a una integración por la regla de punto medio del dato inicial, pensando a x como una función de u. Formalmente, esta regla tiene error de segundo orden para funciones suficientemente suaves. Es decir, el error en la masa inicial debiera ser proporcional a $1/n^2$. Sin embargo, como en los máximos y los mínimos la función $x(u)$ tiene derivada infinita, este orden no se observa en los ejemplos que se muestran a continuación. En cambio, se observa un orden 3/2, que es el esperado en el caso de que la derivada segunda en los máximos y los mínimos no se anule. En efecto, si $u(x) = 1 - x^2$, por ejemplo, se tiene $x(u) = \sqrt{1-u}$, que tiene una singularidad como $\sqrt{s}$ en $s = 1 - u = 0$. El error de la regla de punto medio es entonces proporcional a $h^{3/2}$:

$$\int_0^h \sqrt{s}ds - h\frac{\sqrt{0}+\sqrt{h}}{2} = \frac{2}{3}h^{3/2} - \frac{1}{2}h^{3/2} = \frac{1}{6}h^{3/2}. \tag{3.1}$$

Se utilizaron también otras alternativas (regla de rectángulos, regla de trapecios) para calcular la integral, con resultados similares.

Los valores de la discretización de $v = \alpha(u)$ se calculan entonces como $V_1 = \alpha_1 = 0$, $V_i = \alpha_i = \alpha(U_{i-1})$, $i = 2, \ldots, n$, $V_{n+1} = 0$.

El esquema numérico desarrollado anteriormente (2.2) fue resuelto numéricamente por medio de una rutina estándar que utiliza un método de Runge-Kutta-Fehlberg con control adaptivo del paso de integración. También se implementaron programas que utilizan métodos adaptivos basados en una familia de métodos de Adams, explícitos e implícitos, que tienen la ventaja de poder cambiar fácilmente a un método implícito para adaptarse a la rigidez (stiffness) del sistema de ecuaciones. En particular, para la ecuación de medios porosos, con m grande, al aumentar el número de mesetas, la resolución por un método explícito se hacía completamente impracticable, debido a la necesaria reducción en el paso de integración para mantener la estabilidad.

Se utilizaron tolerancias de error muy pequeñas, de modo tal que la diferencia entre el resultado de la integración numérica y la solución exacta proviniera casi enteramente de la aproximación de la función constitutiva por una escalera y del reemplazo del dato inicial por una función constante a trozos, y en cambio no hubiera una contribución notable de la precisión con la que se realiza la integración en t. Es decir, se respetó la idea de calcular la solución exacta del problema aproximado de las secciones anteriores.

Esta no es, obviamente, la manera óptima de generar eficientemente aproximaciones de la solución, sirve en cambio para estimar los alcances del método propuesto. Hemos realizado ya algunas modificaciones al algoritmo básico descripto en esta sección, que permiten mejorar la eficiencia del método, y que serán reportadas en futuros trabajos.

3.1 Ejemplos y resultados numéricos básicos

3.1.1 Ecuación del calor

Como primer ejemplo, consideremos el problema de valores iniciales para la ecuación del calor

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, & (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0}, \\ u(x,0) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}\, e^{-x^2/4}, \end{cases} \tag{3.2}$$

cuya solución exacta para todo t es

$$u_e(x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(t+1)}}\, e^{-x^2/4(t+1)}. \tag{3.3}$$

En la figura 3.1 se muestra la función constitutiva exacta, $\alpha(u) = u$, y su aproximación por una función escalera, para una subdivisión del rango de u en 16 intervalos. Notar que la función a saltos, con esta discretización, queda siempre por debajo de $\alpha(u)$. La solución u exacta y la numérica (es decir, la que corresponde a la solución exacta con la función $\alpha(u)$ escalera mostrada en la figura 3.1), se muestran en la figura 3.2 para tiempos $t = 0$ (dato inicial) y $t = 1$.

En la Figura 3.3 se muestran en cambio, los valores de v ($v \in \alpha(u)$) exacto, y obtenidos con el algoritmo descripto, nuevamente para $t = 0$ y $t = 1$. Observar que si bien la aproximación es buena, los perfiles correspondientes a la solución del problema aproximado están sistemáticamente por debajo de los correspondientes a la ecuación del calor.

Observar en la Figura 3.2 que el soporte de la solución discreta es compacto para todo t, aún cuando la solución exacta tenga soporte infinito. En la Figura 3.4 se muestra la evolución del soporte de la solución numérica, para la discretización en 16 intervalos de las figuras anteriores. Para el caso de la ecuación del calor, el soporte de la solución numérica no está acotado uniformemente cuando $n \longrightarrow \infty$, como puede observarse en la Figura 3.5, donde la posición del soporte de la solución a $t = 1$ se grafica en función de n.

Finalmente, en la Figura 3.6 se muestran los errores en la masa total (círculos), y en las normas:

$$\epsilon_{u,t,1} = \int_{\mathbb{R}} |u(x,t) - u_e(x,t)|dx, \tag{3.4}$$

$$\epsilon_{v,t,1} = \int_{\mathbb{R}} |v(x,t) - u_e(x,t)|dx, \tag{3.5}$$

donde u y v corresponden a la solución numérica, y $u_e(x,t)$, $v_e(x,t)$ a las soluciones exactas, para tiempos $t = 0$ y $t = 1$. Los resultados observados con compatibles con los exponentes de $1/n$ mostrados en la tabla 3.1 Los errores en la discretización del dato inicial están afectados por el hecho de que el exacto no tiene soporte compacto, mientras que la discretización sí lo tiene. El decaimiento en infinito de la solución exacta impide entonces obtener un orden de convergencia en L^1 mejor que 1 tanto para u como para v. En efecto,

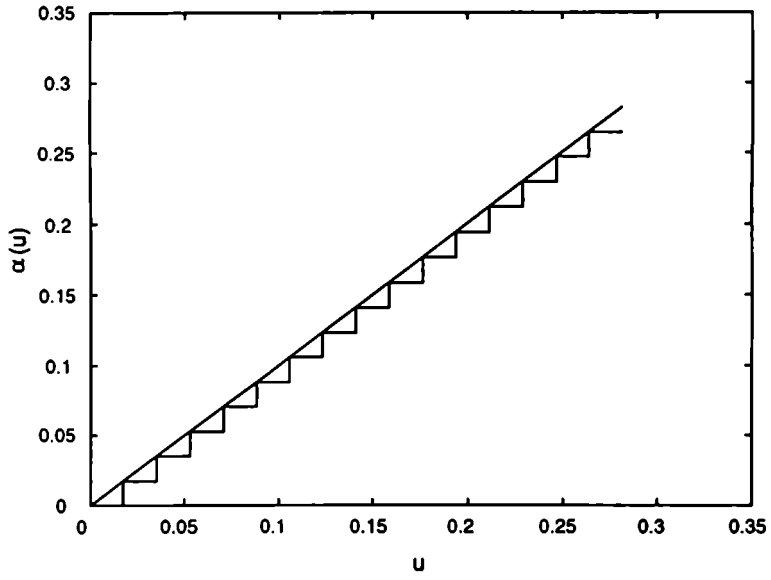

Figura 3.1: Gráfico de la función constitutiva para la ecuación del calor $\alpha(u) = u$, y su aproximación por una función escalera para $n = 16$.

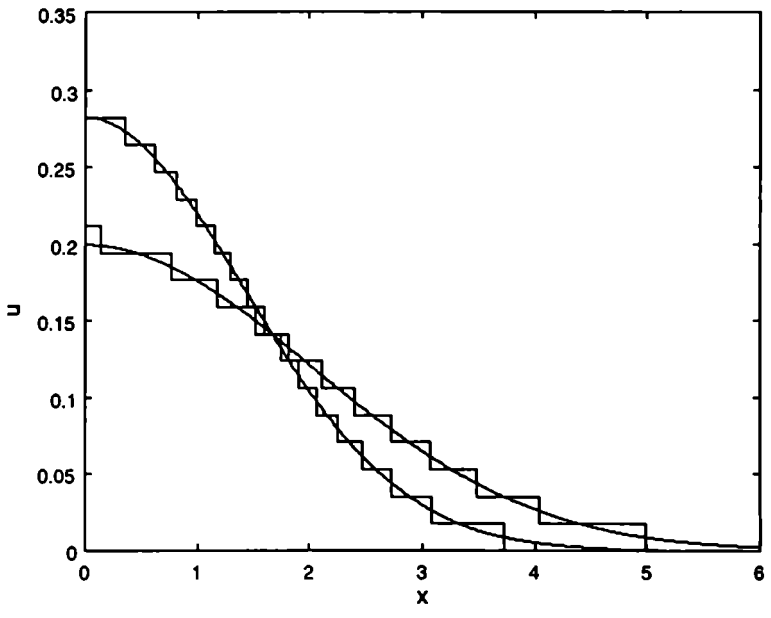

Figura 3.2: Soluciones u exacta y aproximada de la ecuación del calor, para tiempos inicial $t = 0$ y final $t = 1$. Dato inicial $u(x, 0) = 1/(2\sqrt{\pi}) \exp(-x^2/4)$.

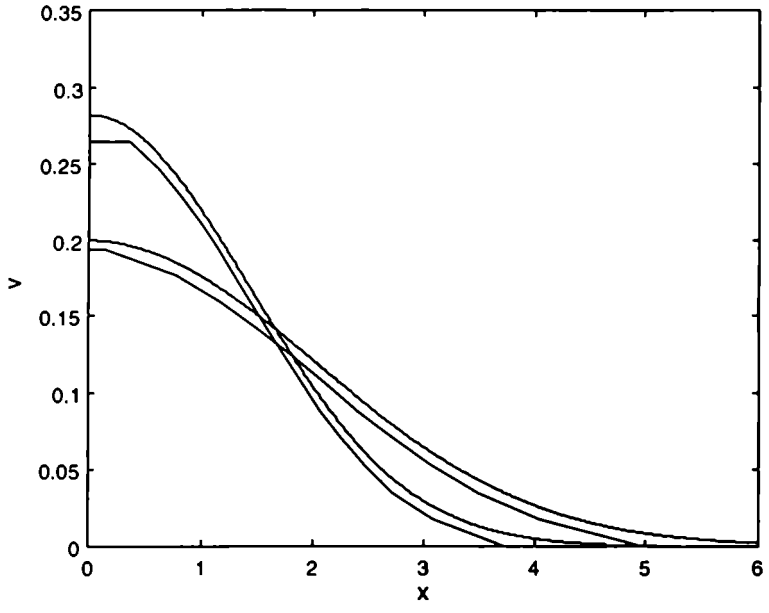

Figura 3.3: Soluciones $v(x,t)$ exacta y aproximada para la ecuación del calor y tiempos inicial $t = 0$ y final $t = 1$. Dato inicial: $u(x,0) = 1/(2\sqrt{\pi})\exp(-x^2/4)$.

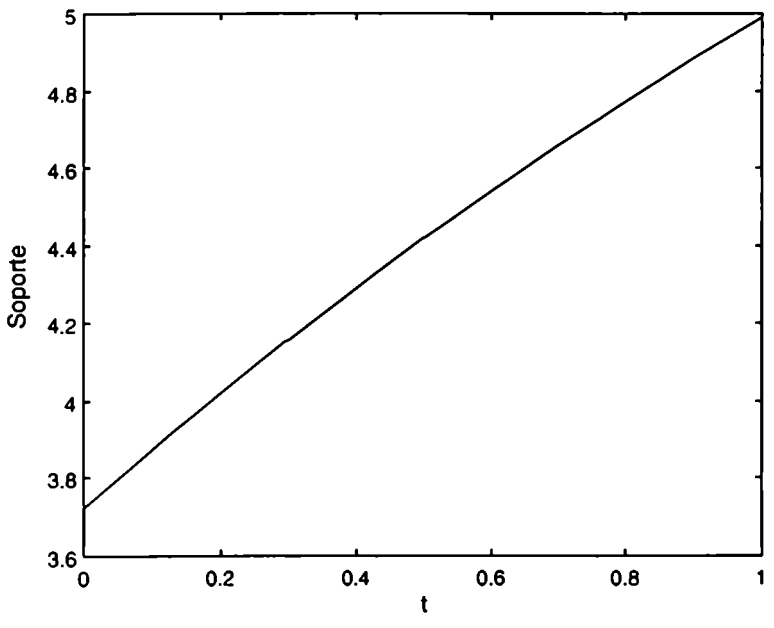

Figura 3.4: Evolución del soporte de la solución aproximada a la ecuación del calor, para $n = 16$.

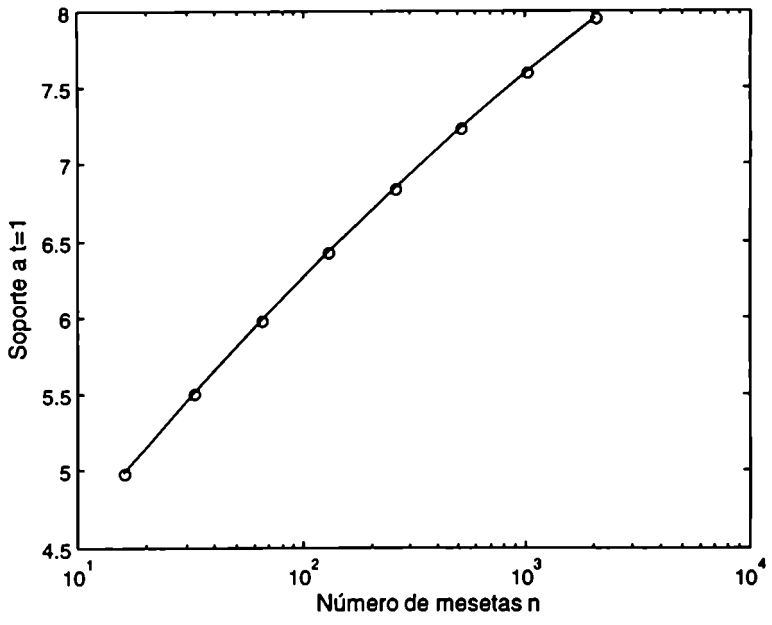

Figura 3.5: Posición del soporte a tiempo final $t = 1$ de las soluciones correspondientes a aproximaciones de $\alpha(u) = u$ con distinta cantidad de intervalos.

	Exponente de $1/n$
Error en la masa	1
Error inicial de u en L^1	0.9
Error inicial de v en L^1	0.9
Error final de u en L^1	0.9
Error final de v en L^1	0.9

Tabla 3.1: Comportamiento del error de la solución aproximada para la ecuación del calor.

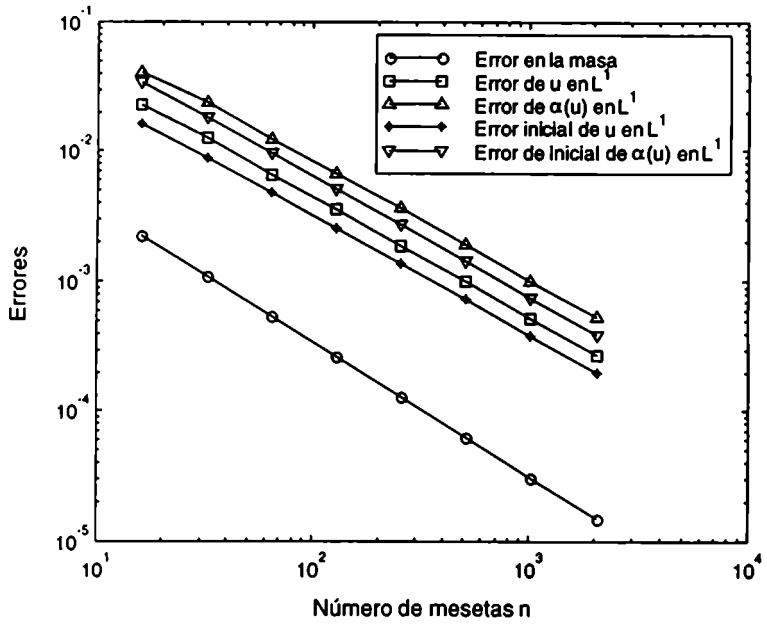

Figura 3.6: Errores en la masa de la discretización inicial, en la norma L^1 del dato inicial y de las soluciones para tiempo final $t = 1$, para u y v, como funciones del número de interfases de la aproximación de $\alpha(u) = u$.

el error en L^1 del dato inicial, tanto para u como para v, es mayor que la integral de la solución exacta fuera del soporte del dato inicial aproximado. Por lo tanto, como el soporte x_{max} del dato inicial aproximado está dado por $u_0(x_{max}) = u_{max}/n$ para la discretización considerada, se tiene $e^{-x_{max}^2/4} = C/n$, y por lo tanto $x_{max} = C\sqrt{\log(n) + C'}$. La integral del dato inicial exacto fuera del soporte del dato inicial aproximado vale entonces:

$$\int_{x_{max}}^{\infty} e^{-x^2/4} dx = C'' \mathrm{erfc}(C\sqrt{\log(n) + C'}) \sim C'' \frac{1}{n\sqrt{\log(n)}}, \tag{3.6}$$

donde la última estimación surge del comportamiento asintótico de la función erfc (ver por ejemplo [80]). Por otro lado, observar que un error de orden 1 en L^1 para u es el mejor posible para aproximación de una función suave por una discontinua con saltos de tamaño $1/n$. Sin embargo, como $v(x,t)$ es una función lineal a trozos y continua en x, el mejor orden posible de aproximación a un dato inicial suave sería 2.

Para los ejemplos que siguen, observaremos un orden de convergencia 3/2 en la masa cuando el dato inicial tiene soporte compacto, consistente con los comentarios realizados al comienzo del capítulo.

	Exponente de $1/n$, m=2	Exponente de $1/n$, m=3
Error en la masa	1.5	1.5
Error en el soporte	0.8	1
Error inicial de u en L^1	1	1
Error inicial de v en L^1	1	1
Error final de u en L^1	1	1
Error final de v en L^1	1	1

Tabla 3.2: Exponentes de $1/n$ de los errores en la aproximación de las soluciones de Barenblatt de la ecuación de medios porosos, para $m = 2$ y $m = 3$.

3.1.2 Ecuación de medios porosos

Consideremos ahora la ecuación de medios porosos:

$$u_t = (u^m)_{xx}, \qquad (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{>0},$$

para $m = 2$, 3. Utilizaremos como dato inicial, y para comparar a tiempos inicial y final, las soluciones de Barenblatt del apéndice A. En particular, utilizaremos los siguientes datos iniciales:

$$\begin{aligned} m = 2, \quad & u_0(x) = 1 - x^2, \\ m = 3, \quad & u_0(x) = \sqrt{1 - x^2}, \end{aligned} \tag{3.7}$$

y calcularemos las soluciones a $t = 1$.

En la Figura 3.7 se muestran las funciones $\alpha(u)$ correspondientes a u^2, u^3, y sus aproximaciones por una escalera, para una discretización en sólo 16 intervalos, de manera que sea posible apreciar los detalles. En las Figuras 3.8 y 3.9 se muestran las correspondientes soluciones aproximadas, a tiempos $t = 0$ y $t = 1$, y las soluciones exactas, para $m = 2$ y $m = 3$ respectivamente.

La evolución en los soportes para $m = 2$ y $m = 3$, y la discretización de $\alpha(u)$ en 16 intervalos, puede apreciarse en la Figura 3.10. Cuando el número de intervalos de la discretización aumenta, la aproximación mejora, como muestran las figuras 3.11 para $m = 2$, y 3.12 para $m = 3$. En las figuras además están graficados los errores en la masa del dato inicial, y las normas en $L^1(\mathbb{R})$ de las diferencias entre la solución u exacta y numérica, y entre v exacta y numérica, a tiempos inicial y final.

Los órdenes de convergencia son consistentes con los exponentes mostrados en la tabla 3.2.

Observación 11 *Notar que el método aparentemente sigue con mayor precisión la interfase en el caso $m = 3$, cuando la solución tiene derivada infinita. Esta es justamente la situación que causa más dificultades con métodos como diferencias finitas o elementos finitos.*

El error en la masa es en ambos casos consistente con un orden 3/2, que es esperable para integración por trapecios de una función que tiene una singularidad similar a $\sqrt{1 - x^2}$

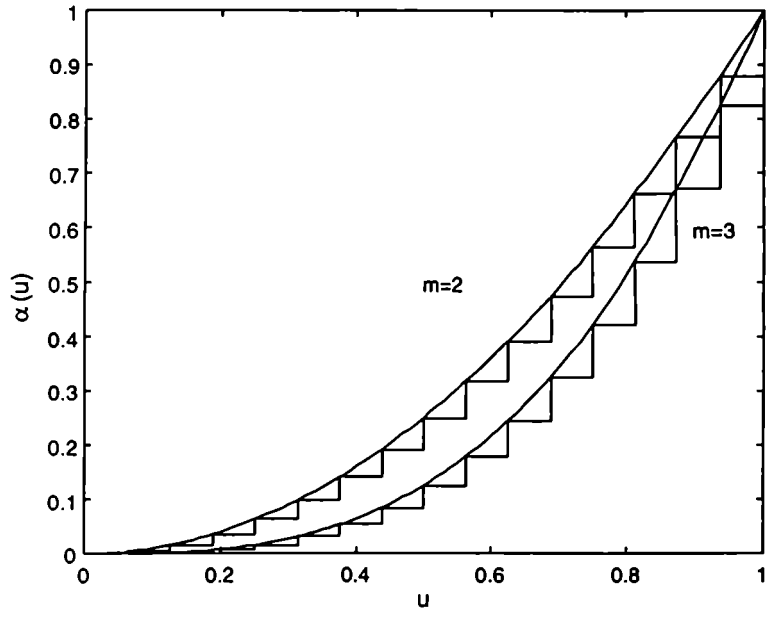

Figura 3.7: Gráfico de las funciones constitutivas para las ecuaciones de medios porosos con $m = 2,\ 3$, y sus aproximaciones por una función escalera para $n = 16$.

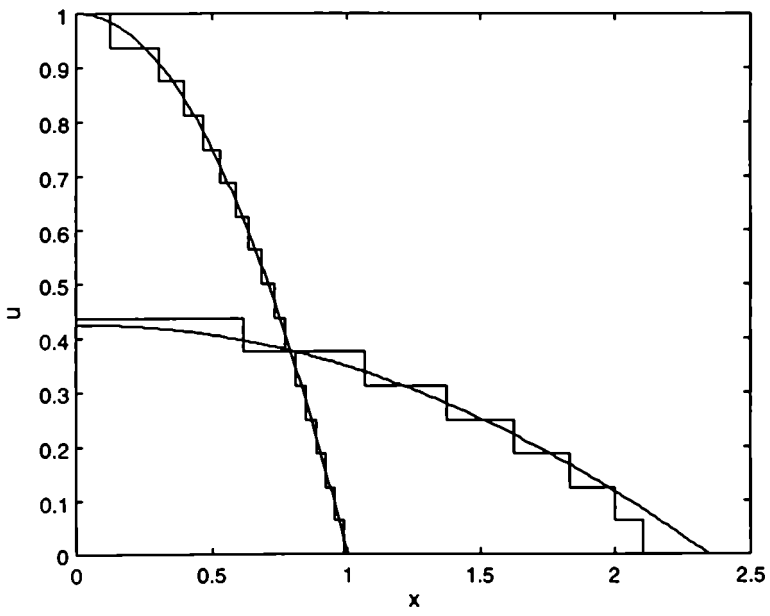

Figura 3.8: Soluciones u exacta y aproximada correspondientes a la solución de Barenblatt para $m = 2$, a tiempos inicial $t = 0$ y final $t = 1$. Dato inicial $u(x, 0) = (1 - x^2)$.

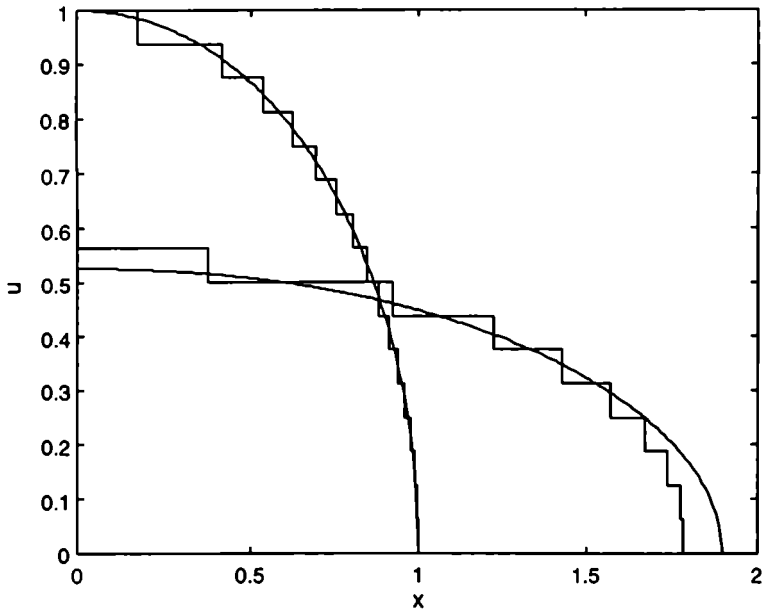

Figura 3.9: Soluciones u exacta y aproximada correspondientes a la solución de Barenblatt para $m = 3$, a tiempos inicial $t = 0$ y final $t = 1$. Dato inicial $u(x, 0) = \sqrt{1 - x^2}$.

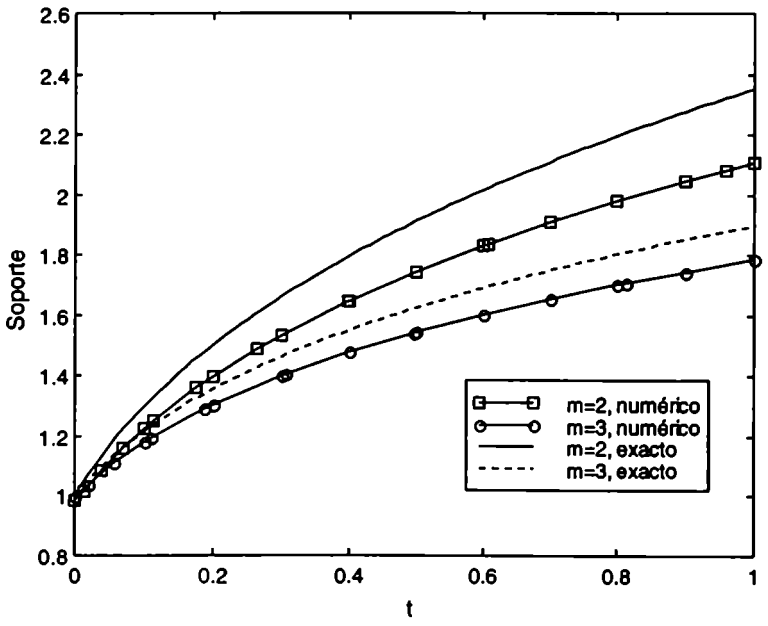

Figura 3.10: Evolución del soporte de las soluciones de Barenblatt para $m = 2,\ 3$, y las correspondientes soluciones aproximadas para $n = 16$.

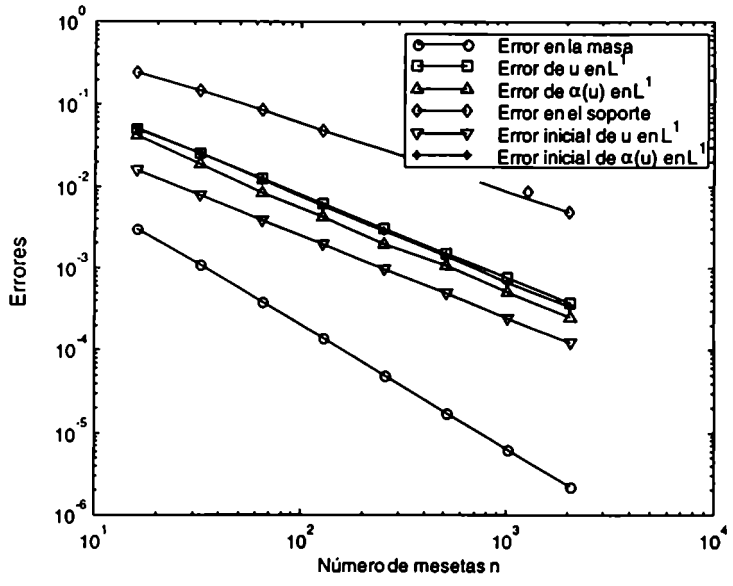

Figura 3.11: Errores correspondientes a la ecuación de medios porosos con $m = 2$, y dato inicial la solución de Barenblatt. Se muestran los errores en la masa de la discretización inicial, y en las normas L^1 de u y v para tiempos inicial $t = 0$ y final $t = 1$, como funciones del número de interfases de la aproximación de $\alpha(u)$.

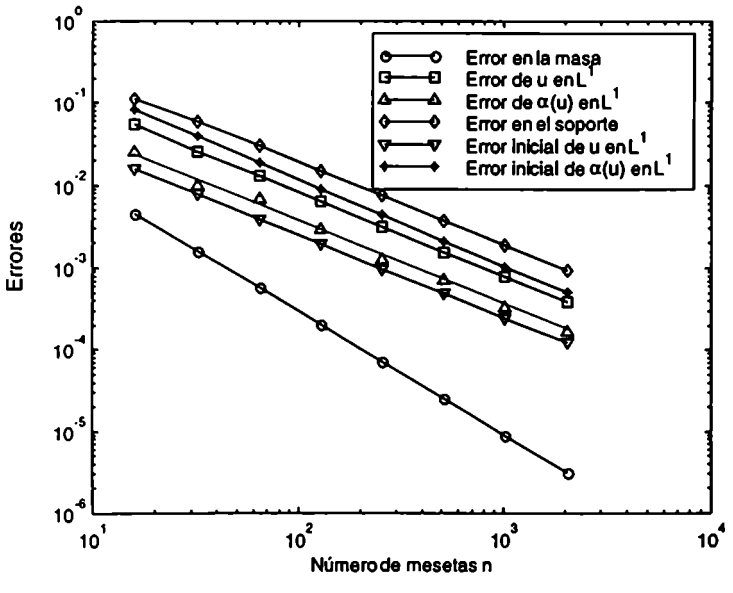

Figura 3.12: Errores correspondientes a la ecuación de medios porosos con $m = 3$, y dato inicial la solución de Barenblatt. Se muestran los errores en la masa de la discretización inicial, y en las normas L^1 de u y v para tiempos inicial $t = 0$ y final $t = 1$, como funciones del número de interfases de la aproximación de $\alpha(u)$.

	Exponente de $1/n$
Error inicial de u en L^1	0.93
Error inicial de v en L^1	0.90
Error final de u en L^1	0.95
Error final de v en L^1	0.87
Error en la posición de la frontera libre	1

Tabla 3.3: Exponentes de $1/n$ de los errores en la aproximación de las soluciones del problema de Stefan a dos fases.

en $x = 1$. El orden de convergencia en L^1 para u es nuevamente el mejor posible para aproximación de una función suave por una función constante a trozos.

3.1.3 Problema de Stefan a dos fases

Como tercer ejemplo, se considera un problema de Stefan a dos fases, donde la función constitutiva es

$$\alpha(u) = \begin{cases} u & 0 \leq u \leq 1, \\ 1 & 1 \leq u \leq 2, \\ u-1 & 2 \leq u \leq \infty. \end{cases} \tag{3.8}$$

En la Figura 3.13 se grafica la función $\alpha(u)$, junto con su aproximación numérica para una cantidad pequeña de saltos ($n = 17$). Notar que la aproximación de los intervalos de constancia de $\alpha(u)$ es completamente natural en nuestro método.

Se plantea el problema en la semirrecta $x \geq 0$, con dato de contorno en $x = 0$, y un dato inicial correspondiente a la solución autosimilar del problema de Stefan a dos fases (ver Apéndice B). La Figura 3.14 muestra las soluciones exactas y numérica correspondiente a $n = 17$, para tiempos inicial y final. Las curvas correspondientes a $v(x,t)$ para las soluciones exacta y numérica, para tiempos inicial $t = 0$ y final $t = 1$, se muestran en la Figura 3.15.

Uno de los problemas importantes en el análisis de un problema de transición de fase es la determinación de la posición de la frontera libre. En la Figura 3.16 se muestra la evolución de la frontera libre para las soluciones exacta y numérica. La concordancia, dada la pequeña cantidad de interfases utilizada en la solución numérica, es muy buena.

Un estudio más completo de los errores se muestra en la Figura 3.17 donde los errores en norma L^1 de u y v a tiempos inicial y final, y el error en la posición de la frontera libre, se muestran en función de n. Los resultados son consistentes con las estimaciones:

Como en el caso de la ecuación del calor, el error tanto en u como en v converge con un orden ligeramente menor que 1, debido a que la solución exacta no tiene soporte compacto. El error en la posición de la interfase es en cambio, de orden 1.

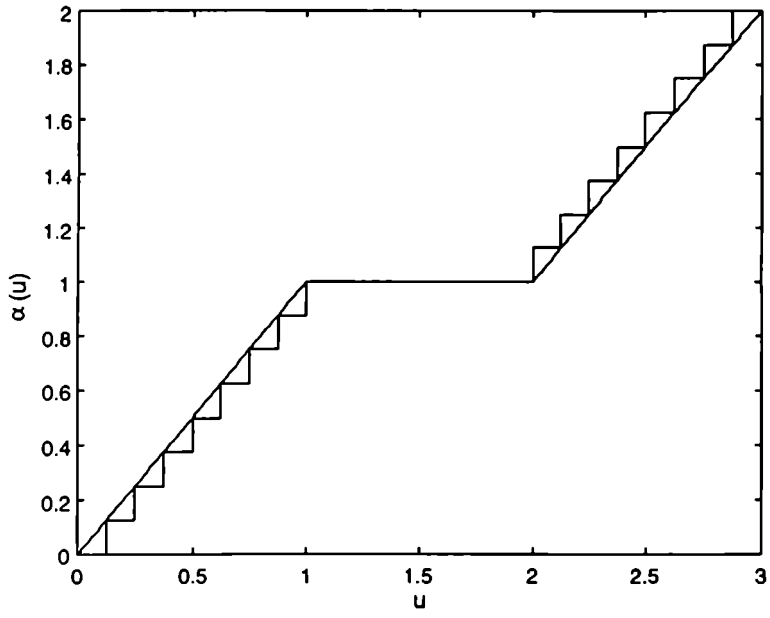

Figura 3.13: Gráfico de la función constitutiva para el problema de Stefan, y su aproximación por una función escalera para $n = 17$.

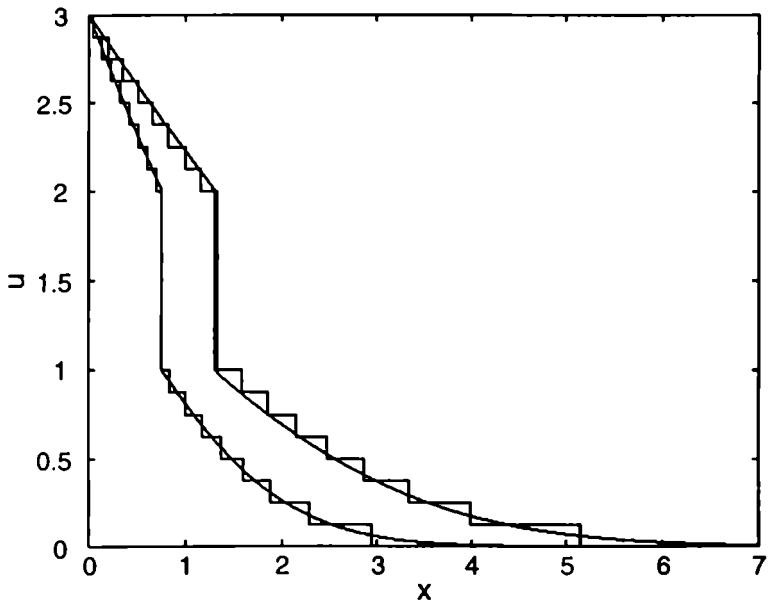

Figura 3.14: Soluciones u exacta y aproximada correspondientes a la solución autosimilar del problema de Stefan (ver texto), a tiempos inicial $t = 0$ y final $t = 1$.

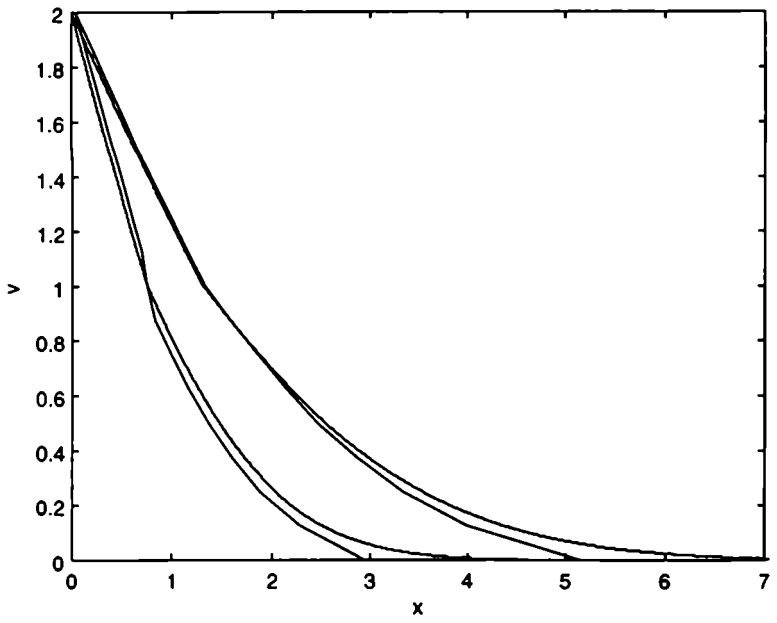

Figura 3.15: Soluciones $v(x,t)$ exacta y aproximada correspondientes a la solución autosimilar del problema de Stefan (ver texto), a tiempos inicial $t = 0$ y final $t = 1$, con $n = 17$.

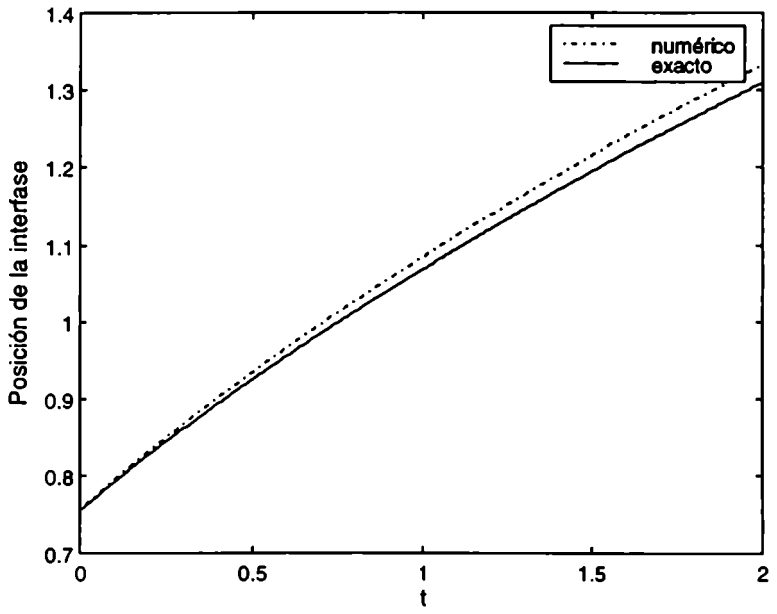

Figura 3.16: Evolución de la frontera libre en las soluciones exacta y aproximada correspondientes a la solución autosimilar del problema de Stefan, con $n = 17$.

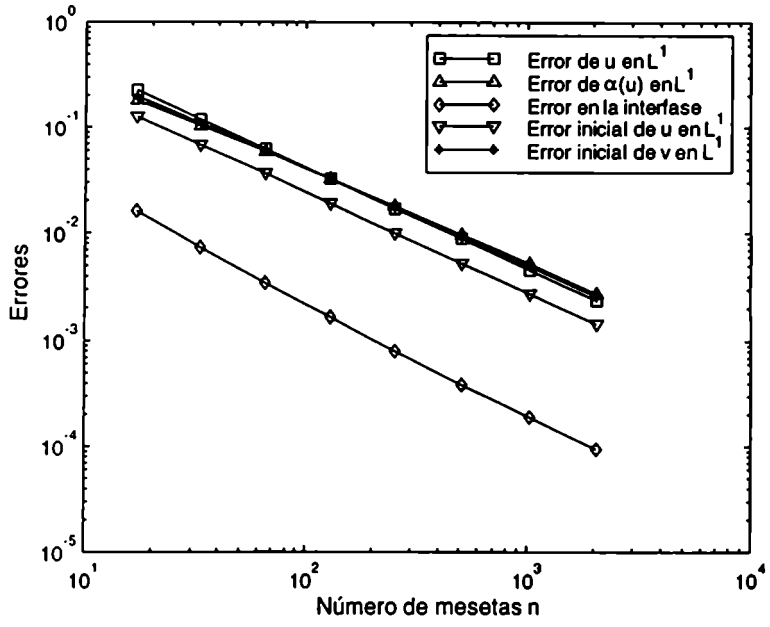

Figura 3.17: Errores de las soluciones aproximadas del problema de Stefan, en función del número de interfases n. Se muestran los errores en norma L^1 de u y v para tiempos inicial $t = 0$ y final $t = 1$, y el error en la posición de la frontera libre a $t = 1$.

3.1.4 Problema de Dirichlet en la semirrecta

Un caso particular que merece comentario es el de la resolución del problema de Dirichlet en la semirrecta (2.13), con dato inicial cero, considerado en el apéndice C y en la sección 2.2.2 del capítulo 2. En este caso, la autosimilaridad de la solución exacta se traducía en la existencia de una solución de la forma $y_i(t) = \beta_i\sqrt{t}$, donde los coeficientes β_i satisfacían el sistema de ecuaciones algebraicas (2.18). En lo que sigue, presentaremos un algoritmo muy simple para calcular las soluciones de dicho sistema algebraico, y mostraremos a continuación algunos ejemplos de solución numérica, para la ecuación de medios porosos, la ecuación del calor, y el problema de Stefan.

Para comenzar, obsérvese que las primeras $n-1$ ecuaciones de (2.18) pueden ser satisfechas simultáneamente tomando un valor arbitrario positivo para β_1, y calculando

$$\beta_i = \beta_{i-1} - \frac{2\delta v_{i-1/2}}{\sum_1^{i-1} \beta_j \delta u_j}, \qquad 2 \le i \le n. \tag{3.9}$$

Dem: La primera ecuación de 2.18 puede ser reescrita como

$$\beta_2 = \beta_1 - \frac{2\delta v_{3/2}}{\beta_1 \delta u_1},$$

de acuerdo con la expresión precedente. Sumando las primeras $i-1$ ecuaciones en (2.18),

y utilizando que la suma es telescópica, resulta

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{i-1}\beta_j \Delta u_j = -\frac{\delta v_{i-1/2}}{\beta_i - \beta_{i-1}},$$

de donde despejando β_i resulta lo deseado. □

Por lo tanto, se debe buscar el valor de β_1 tal que el β_n obtenido mediante la iteración (3.9) sea cero, satisfaciendo además las condiciones $0 = \beta_n < \beta_{n-1} < \cdots < \beta_1$ (ver (2.19) y los comentarios allí realizados).

El teorema 17 del Apéndice C muestra que es posible hallar un β_1 adecuado. El problema de cómo calcularlo puede ser atacado numéricamente utilizando un algoritmo de bisección, o de la secante, para encontrar los valores β_1 que producen $\beta_n = 0$.

La dificultad para implementar este procedimiento es que para β_1 no suficientemente grande, algunos β_i se hacen negativos para $i < n$, y aún podría ocurrir que el denominador de (3.9) se anule. El método propuesto para resolver esta dificultad consiste en reemplazar la iteración (3.9) por la iteración

$$\beta_i = \beta_{i-1} - \frac{2\delta v_{i-1/2}}{\sum_{1}^{i-1} |\beta_j| \delta u_j}, \qquad 2 \leq i \leq n. \tag{3.10}$$

Esta iteración está claramente bien definida, y satisface $\beta_n < \beta_{n-1} < \ldots < \beta_2 < \beta_1$ para cualquier valor inicial β_1. Además, una vez encontrado un valor β_1 tal que $\beta_n = 0$, como $\beta_i > \beta_n$, $i < n$, ese mismo valor proporciona también la solución de (3.9) que satisface (2.19).

En vez de utilizar un método de bisección, o de la secante, aplicaremos para mejorar la eficiencia del algoritmo una rutina de tipo Brent [39], que combina varias técnicas para obtener una convergencia rápida al valor de β_1 que produce $\beta_n = 0$. La solución del sistema de ecuaciones no lineales, con este abordaje, es muy rápida. Se pueden resolver en segundos sistemas de más de 100000 interfases.

El algoritmo descripto se aplicó para distintas funciones $\alpha(u)$. En la Figura 3.18 se muestran las soluciones correspondientes a la ecuación de medios porosos para $m = 2$, $m = 3$, $m = 5$, $m = 20$, $m = 50$, a tiempo $t = 2$. Notar que el número de interfases que se puede calcular es muy grande (10000 en estos gráficos), y que el método permite reflejar correctamente las pendientes infinitas con que inciden las soluciones en su soporte (para $m > 2$). En otro orden de cosas, el gráfico muestra la convergencia, cuando $m \longrightarrow \infty$, a la solución al 'problema de la mesa' (donde $\alpha(u)$ es un grafo maximal monótono, $\alpha(u) = 0$ para $0 \leq u \leq 1$, $\alpha(u) = +\infty$ para $u > 1$).

3.1.5 Tiempos de espera

Como es bien conocido, una de las características notables de las ecuaciones parabólicas degeneradas, es la eventual existencia de tiempos de espera para que el soporte de la solución comience a moverse. Es decir, para la ecuación de medios porosos, por ejemplo,

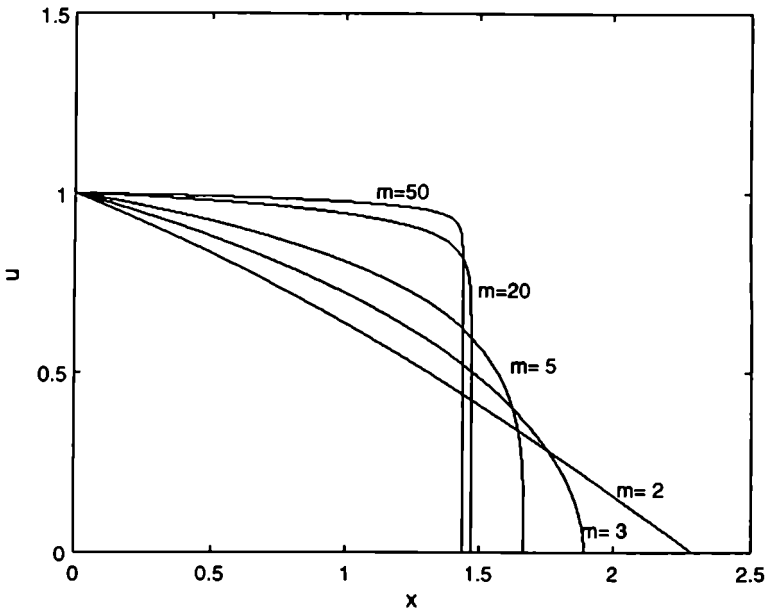

Figura 3.18: Soluciones del problema de Dirichlet en la semirrecta para la ecuación de medios porosos con dato inicial nulo y $m = 2,\ 3,\ 5,\ 20,\ 50$, a tiempo $t = 2$. n=10000.

es posible hallar datos iniciales de soporte compacto, tales que el soporte de la solución a tiempo $t < t^*$ es igual al soporte inicial, mientras que para tiempos $t > t^*$ el soporte es una función creciente de t (ver [23, 24]). Este valor t^* se denomina tiempo de espera de la solución. Además, el soporte visto como una función de t puede o no ser diferenciable.

Aprovechando el hecho de que el soporte aparece explícitamente en el método numérico presentado en este trabajo, trataremos de aplicarlo al problema de seguir la evolución del soporte de la solución de la ecuación de medios porosos con $m = 2$, y dato inicial

$$u_0^\theta(x) = (1-x^2)^2\left[\theta + (1-\theta)(1-x^2)^2\right], \qquad 0 \le \theta \le 1, \quad x \in [-1,1]. \tag{3.11}$$

Veremos a continuación que la teoría desarrollada en [26, 27] (ver también [23]) muestra que existe tiempo de espera para este dato inicial, y que para $\theta = 0$ el soporte no es de clase C^1, mientras que para $\theta^* \le \theta \le 1$ sí lo es. Cuando el soporte es C^1 resulta que el tiempo de espera debe ser igual a $t^* = \frac{1}{48\theta}$.

En las figuras 3.19 y 3.20, se muestran las soluciones correspondientes a $\theta = 0$ y $\theta = 1$. En el inset de la figura 3.19 se muestra el detalle de la evolución del soporte, pudiendo observarse cómo es la solución cerca del soporte inicial, hasta que la interfase comienza a moverse. Observar que las soluciones a tiempo final son en ambos casos muy parecidas a soluciones de Barenblatt. Esta propiedad vale en general para las soluciones de la ecuación de medios porosos con dato inicial con soporte compacto [22].

En la Figura 3.21 se muestra la evolución de los soportes numéricos, para valores de $\theta = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$. La discretización de la relación constitutiva $\alpha(u) = u^2$ se realizó con $n = 5000$ interfases. Obsérvese que para $\theta = 0$, $\theta = 0.25$ la interfase

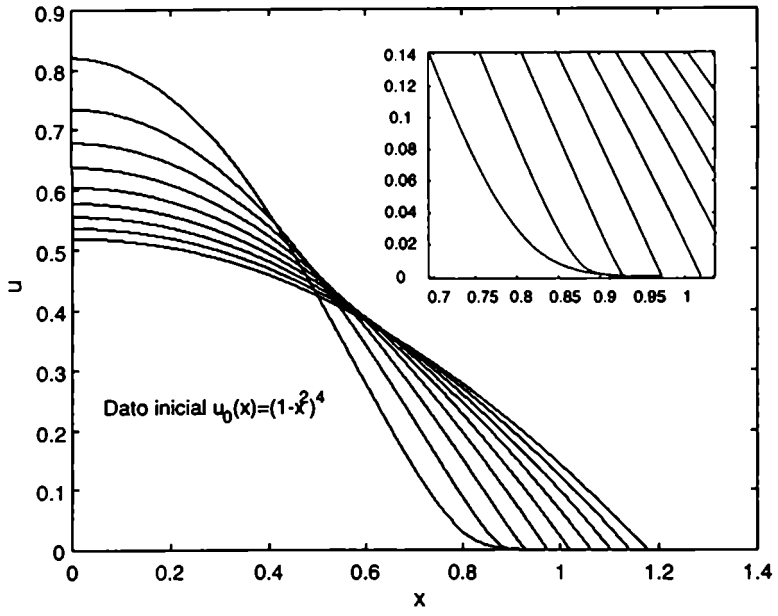

Figura 3.19: Solución numérica correspondiente a la discretización de la ecuación de medios porosos con $m = 2$, dato inicial $u_0(x) = (1 - x^2)^4$, y una discretización inicial de 5000 interfases. En el inset se muestra el detalle del tiempo de espera.

parece arrancar en forma no suave, mientras que la evolución para $\theta = 0.5,\ 0.75,\ 1$, parece una curva suave. Para obtener una evidencia más conclusiva, se muestran en las Figuras 3.22 y 3.23 las derivadas primeras y segundas de los soportes como funciones del tiempo. Observar que claramente los casos $\theta = 0,\ 0.25$ parecen corresponder a interfases no C^1 (la derivada segunda aproxima a una delta de Dirac). Esta evidencia es aún más conclusiva comparando los gráficos con los obtenidos para una discretización con una cantidad de interfases diferente. Por ejemplo, comparando con $n = 2500$ resulta que las derivadas primeras son esencialmente iguales para $\theta = 0.5,\ 0.75,\ 1$, mostrando que la suavidad observada no se debe a una aproximación pobre de la interfase, mientras que para $\theta = 0,\ 0.25$ la derivada correspondiente a $n = 5000$ es notablemente más abrupta que la derivada para $n = 2500$.

Resumiremos a continuación algunos resultados generales sobre la existencia de tiempos de espera (una referencia más completa puede hallarse en [23], así como en los trabajos [22, 26, 27]). Suponemos que existe una solución en un intervalo $(0, T)$ al problema para la ecuación de medios porosos con exponente m con dato inicial una medida no negativa concentrada en $\mathbb{R}_-$, y tal que todo entorno a la izquierda del origen tiene medida positiva respecto del dato inicial:

$$\sup\{x \in \mathbb{R} : \int_x^\infty u_0(x)dx > 0\} = 0. \tag{3.12}$$

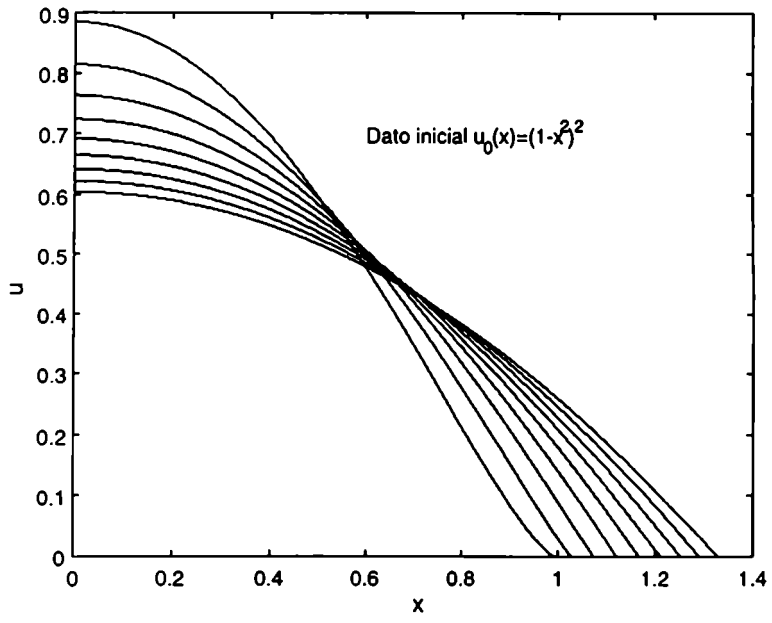

Figura 3.20: Solución numérica correspondiente a la discretización de la ecuación de medios porosos con $m = 2$, dato inicial $u_0(x) = (1 - x^2)^2$, y una discretización inicial de 5000 interfases.

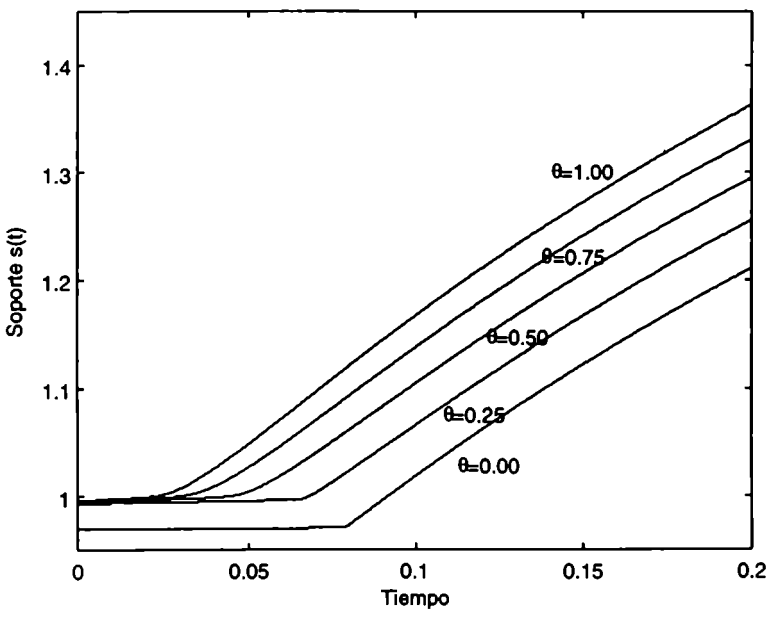

Figura 3.21: Evolución de los soportes de las soluciones numéricas de la ecuación de medios porosos con $m = 2$, y datos iniciales $u_0^\theta(x) = (1 - x^2)^2(\theta + (1 - \theta)(1 - x^2)^2)$.

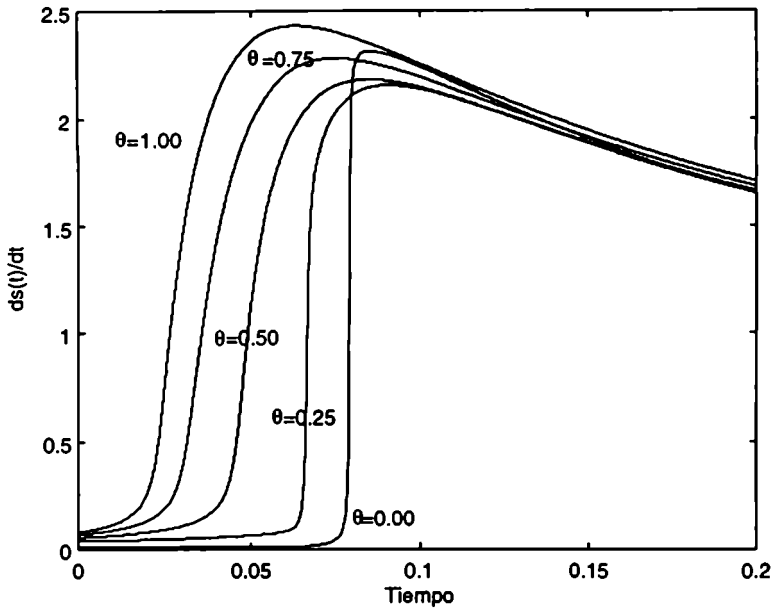

Figura 3.22: Derivada numérica del soporte respecto del tiempo, para las soluciones numéricas de la ecuación de medios porosos con $m = 2$, y datos iniciales $u_0^\theta(x) = (1-x^2)^2(\theta + (1-\theta)(1-x^2)^2)$.

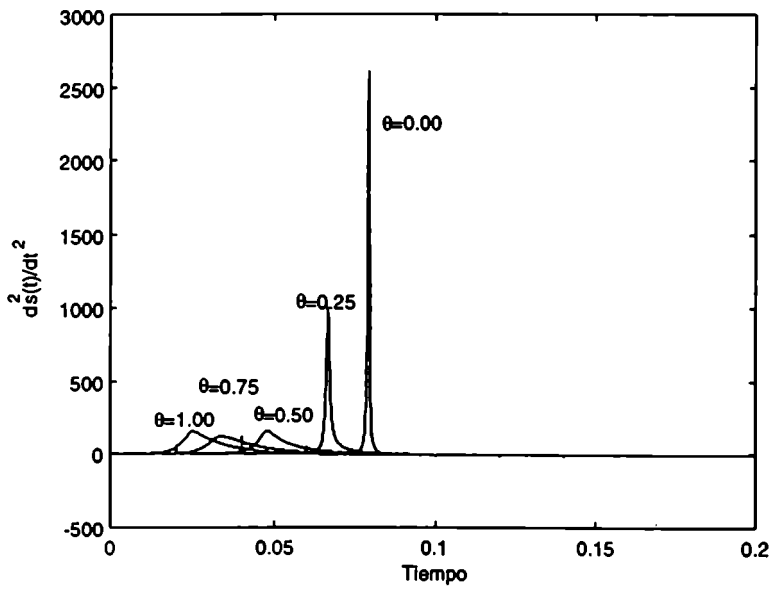

Figura 3.23: Derivada segunda numérica del soporte respecto del tiempo, para las soluciones numéricas de la ecuación de medios porosos con $m = 2$, y datos iniciales $u_0^\theta(x) = (1-x^2)^2(\theta + (1-\theta)(1-x^2)^2)$.

Definiremos:

$$M(x) = \int_x^0 u_0(d\xi), \tag{3.13}$$

$$B = \sup_{x<0} |x|^{\frac{m+1}{m-1}} M(x), \quad A_+ = \limsup_{x \nearrow 0} |x|^{\frac{m+1}{m-1}} M(x), \quad A_- = \liminf_{x \nearrow 0} |x|^{\frac{m+1}{m-1}} M(x). \tag{3.14}$$

Utilizaremos las notaciones:

$$T_m = \frac{1}{2m} \left(\frac{m-1}{m+1} \right)^m \qquad T_B = T_m B^{1-m}, \quad T_{A_\pm} = T_m A_\pm^{1-m}. \tag{3.15}$$

Observar que $T_{A_\pm}$ depende de las propiedades locales de $u_0(x)$ cerca del soporte, mientras que T_B depende del comportamiento global de u_0 en $\mathbb{R}_-$. Entonces, valen los siguientes teoremas

Teorema 9 *(Ver [24])*
i) Existe una constante $\mu = \mu(m)$ tal que el tiempo de espera t^* satisface $T_B \leq t^* \leq \mu T_B$.
ii) Si $A_- > 0$, entonces $t^* \leq T_{A_-}$.

Teorema 10 *(Ver [27]).*
i) Si $t^* = T_B$, entonces $s(t) \in C^1(0,T)$.
ii) Si $t^* < T_B$, $A_+ < \infty$, y $t^* < T_{A_+}$, entonces $s(t) \notin C^1(0,T)$.

En nuestro ejemplo, es inmediato verificar que $A_\pm = 4/3\theta$, $T_m = 1/36$. Más difícil es obtener el valor de B para cada θ. El comportamiento de $|s|^{-3}M(s)$ (donde $s = x - 1$ para desplazar el soporte del dato inicial a la semirrecta negativa) se muestra en la Figura 3.24. Observar que el supremo para valores de θ pequeños se obtiene en el interior del intervalo, mientras que para valores de θ cercanos a 1 se alcanza en el borde $s = 0$. El valor de θ correspondiente a esta transición es $\theta^* = 0.422629\ldots$ El valor de $|s|^{-3}M(s)$ en el borde es $4/3\theta$. En la Figura 3.25 se muestra el valor del supremo B, como función de θ. Se aprecia que para $\theta \in (\theta^*,\ 1)$ el supremo se alcanza en el borde, mientras que para $\theta \in [0,\ \theta^*)$ el supremo es estrictamente mayor que $4/3\theta$.

Por lo tanto se desprende que para $\theta \in (\theta^*,\ 1)$ $A_\pm = B$ y del teorema anterior 9 se tiene que $t^* = T_B = 1/(48\theta)$, y el soporte es de clase C^1. En cambio, para θ suficientemente pequeño se tiene que $t^* < T_{A_+}$ y por lo tanto el soporte $s(t) \notin C^1(0,T)$. De los resultados numéricos exhibidos parece desprenderse que para $\theta = 0.25$ el soporte no es suave. Una conjetura es que resulta $s(t) \notin C^1(0,T)$ para cualquier $\theta \in [0,\ \theta^*)$.

3.2 Mejora en la convergencia de $\alpha(u(x,t))$

Aquí analizaremos numéricamente la influencia que tiene la manera de aproximar la función constitutiva $\alpha(u)$ por una escalera, en el orden de convergencia del método. Es claro que siendo u una función constante a trozos, con saltos de orden $1/n$, el orden de aproximación de la solución numérica u a la exacta u_e en norma $L^1(\mathbb{R})$ no puede ser mejor que 1. Sin embargo, veremos que es posible obtener un orden 3/2 en norma $L^1(\mathbb{R})$ para el

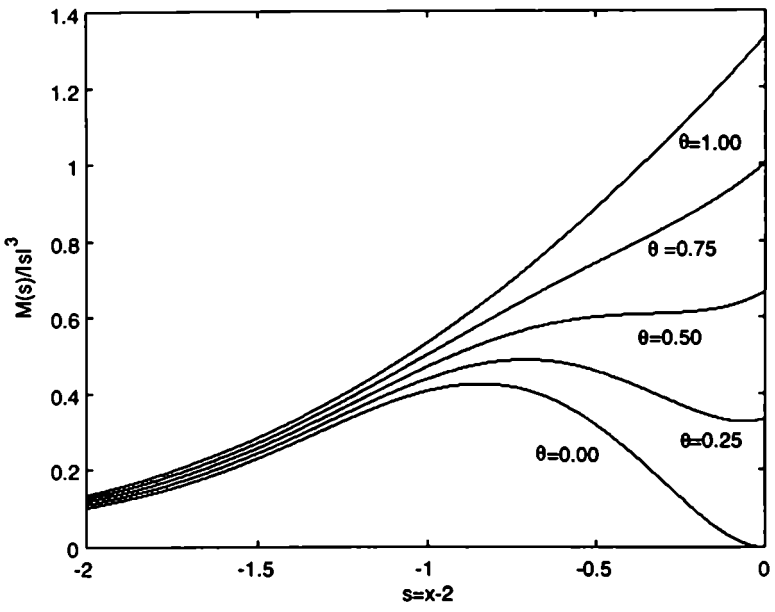

Figura 3.24: Gráficos de $|s|^{-3}M(s)$, para el dato inicial $u_0^\theta(x) = (1-x^2)^2(\theta+(1-\theta)(1-x^2)^2)$ y $\theta = 0,\ 0.25,\ 0.5,\ 0.75,\ 1$

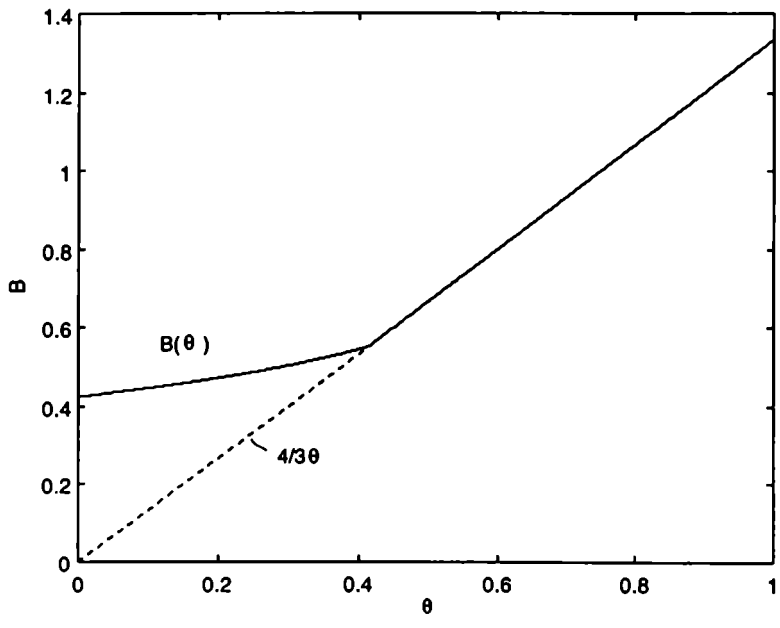

Figura 3.25: Gráficos de B en función de θ (línea continua). La línea punteada corresponde a $4/3\theta = A_\pm$. Dato inicial $u_0^\theta(x) = (1-x^2)^2(\theta + (1-\theta)(1-x^2)^2)$.

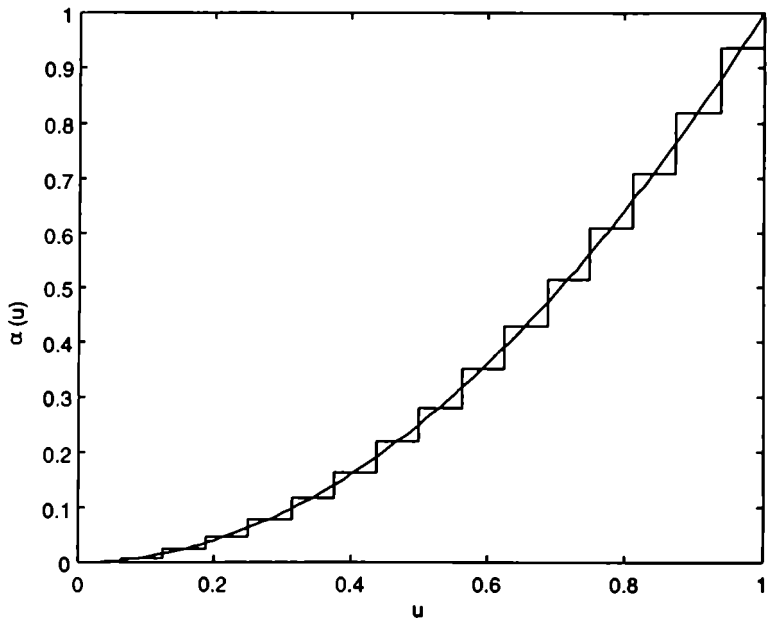

Figura 3.26: Gráfico de la función constitutiva para la ecuación de medios porosos con $m = 2$, y una aproximación alternativa por una función escalera para $n = 16$.

error en v, que es lineal a trozos y continua, en los diferentes ejemplos correspondientes a la ecuación de medios porosos.

En los casos de la ecuación del calor y el problema de Stefan a 2 fases, el hecho de que la solución aproximada no tiene soporte compacto, combinado con el decaimiento en infinito de la solución exacta, produce un orden de aproximación en norma $L^1(\mathbb{R})$ del dato inicial igual a 1. Por esta razón no es esperable obtener un orden mejor que 1 para $v = \alpha_d(u)$, que coincide con u en todos lados para la ecuación del calor y en $u < 1$ en el caso del problema de Stefan a 2 fases considerado.

Para aquellos casos en que el orden de convergencia de $v(x,t)$ se pudiera mejorar, tiene sentido tratar de recuperar u de otro modo (en vez de utilizar la aproximación como una función constante a trozos). En efecto, se puede utilizar la función original $\alpha(\cdot)$, y no su aproximación como una escalera, para definir $\tilde{u} = \alpha^{-1}(v(x,t)) = \beta(v(x,t))$, donde $v(x,t)$ es la solución aproximada correspondiente a $\alpha(u)$ escalera.

Además, como ya se observó previamente, el hecho de discretizar $\alpha(u)$ con una escalera que está por debajo de la función $\alpha(u)$ exacta, produce soluciones que están aparentemente por debajo de la solución exacta (ver Figura 3.2 por ejemplo). Por lo tanto, surge la idea de discretizar $\alpha(u)$ por medio de una escalera que deje 'por el medio' al gráfico de $\alpha(u)$. Para esto, discretizamos el rango de u como previamente (es decir $U_i = u_{max} i/n$) y elegimos $V_i = 1/2(\alpha(U_i) + \alpha(U_{i-1})) - 1/2\alpha(U_1)$, donde el último término es utilizado para tener $V_1 = 0$ (ver Figura 3.26).

En la Figura 3.27 se muestran las normas L^1 del error de $u(x,t)$ y $v(x,t)$, tanto inicial como final, el error del soporte de la solución, y el error de $\tilde{u} = \alpha^{-1}(v(x,t)) = \beta(v(x,t))$,

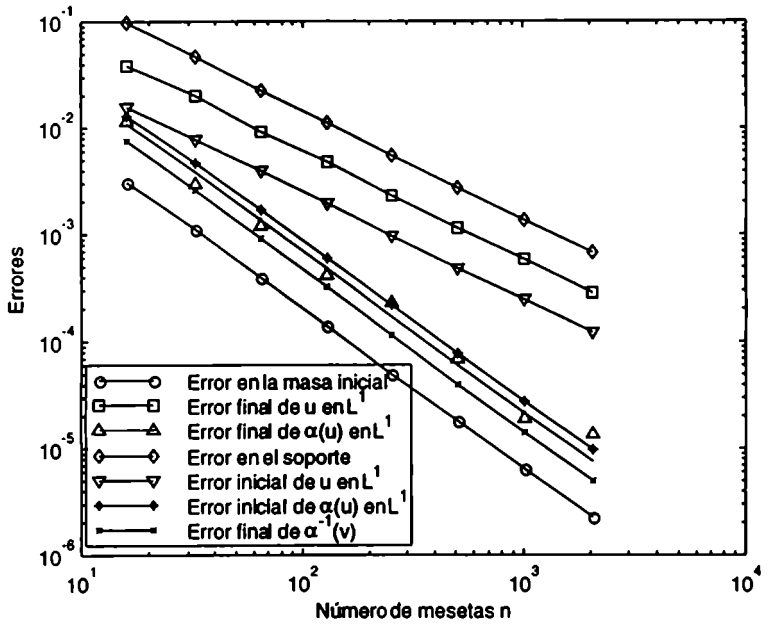

Figura 3.27: Errores correspondientes a la ecuación de medios porosos con $m = 2$, y dato inicial la solución de Barenblatt. Se muestran los errores en la masa de la discretización inicial, en el soporte, y en las normas L^1 de u y v para tiempos inicial $t = 0$ y final $t = 1$, como funciones del número de interfases de la aproximación de $\alpha(u)$. Se muestra también el error en norma L^1 para tiempo final de $\tilde{u} = \alpha^{-1}(v)$.

para la solución de Barenblatt correspondiente a $m = 2$ y dato inicial $1 - x^2$. Notar en la tabla 3.4 que el orden de convergencia en norma L^1 obtenido para $v(x,t)$, tanto inicial como final, es consistente con un exponente $3/2$, y que este mismo orden de convergencia se aplica al error en L^1 a tiempo final de $\alpha^{-1}(v)$. Sin embargo, como se espera a partir de observaciones anteriores, el error de u en L^1 sigue siendo de orden 1. Observar además que ha mejorado la convergencia del soporte respecto de la discretización de la sección 3.1.2, siendo ahora de orden 1. Mejoras análogas se obtienen para las soluciones de la ecuación de medios porosos, y $m = 3$.

3.3 Ejemplos en más dimensiones

En esta sección mostraremos que la idea del método se puede extender a más de una dimensión espacial, si bien no hay un algoritmo simple que permita calcular las soluciones en general. Sin embargo, para el caso particular de soluciones con simetría radial, es posible extender las ideas del capítulo 2, donde u es constante a trozos en función del radio, y donde v es una solución de $\Delta v = 0$ en cada intervalo de radios donde u es constante.

Así, en dos dimensiones espaciales, si u se discretiza como una función constante sobre

	Exponente de $1/n$
Error en la masa	3/2
Error inicial de u en L^1	1
Error inicial de v en L^1	3/2
Error final de u en L^1	1
Error final de v en L^1	3/2
Error en el soporte	1
Error final en $\alpha^{-1}(u)$	3/2

Tabla 3.4: Exponentes de $1/n$ de los errores en la aproximación de las soluciones de Barenblatt para $m = 2$.

coronas circulares limitadas por radios r_i, repitiendo la argumentación del Teorema 5 se obtiene que los $r_i(t)$ deben satisfacer el sistema de ecuaciones ordinarias:

$$\begin{cases} \dot{r}_1 = -\dfrac{1}{u_{3/2}}\dfrac{1}{r_1}\dfrac{v_1 - v_2}{r_1 - r_2}, \\ \dot{r}_i = -\dfrac{1}{u_{i-1/2} - u_{i+1/2}}\dfrac{1}{r_i}\left[\dfrac{v_{i-1} - v_i}{r_{i-1} - r_i} - \dfrac{v_i - v_{i+1}}{r_i - r_{i+1}}\right], \quad i = 2, \ldots, n-1, \\ \dot{r}_n = -\dfrac{1}{u_{n-1/2} - u_{n+1/2}}\dfrac{1}{r_n}\left[\dfrac{v_{i-1} - v_i}{r_{i-1} - r_i}\right]. \end{cases} \tag{3.16}$$

En efecto, la condición análoga a Rankine-Hugoniot es ahora $\dot{r}_i = -[\nabla\alpha(u)]/[u]$ (es el salto en el gradiente de $\alpha(u)$ dividido por el salto de u).

Pero $v(r,t) = \alpha(u(r,t))$ debe ser continua en r, y en cada intervalo $[r_{i+1}, r_i]$ solución radial del laplaciano, que satisface $v(r_i,t) = v_i$, $v(r_{i+1},t) = v_{i+1}$. De aquí resulta que en cada intervalo $[r_{i+1}, r_i]$ debe ser

$$v(r,t) = \frac{v_{i+1} - v_i}{\log(r_{i+1}) - \log(r_i)}\log(r/r_i) + v_i. \tag{3.17}$$

De aquí resulta fácilmente el sistema de ecuaciones (3.16).

En la Figura 3.28 se muestra la solución numérica correspondiente a dato inicial $u_0(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, para una discretización del rango de u_0 en una pequeña cantidad de intervalos (n=20). Observar que la solución tiene claramente soporte compacto para todo t, y que la pendiente con la que incide en el soporte es infinita.

3.4 Conclusiones

Para concluir este capítulo dedicado a experimentos numéricos, resumiremos los puntos esenciales que a nuestro juicio permiten una valoración del método numérico presentado.

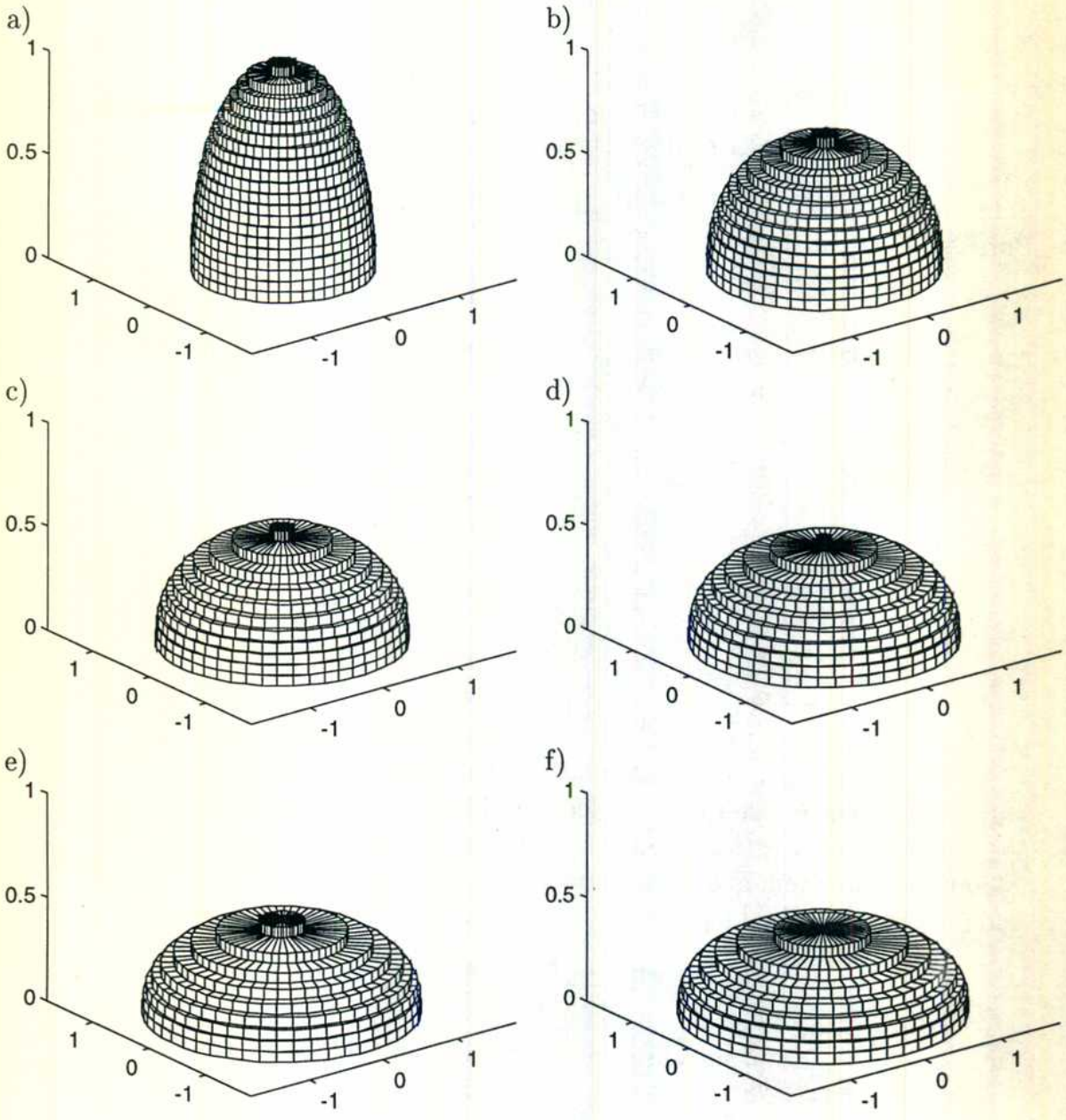

Figura 3.28: Soluciones radiales a la ecuación de medios porosos con $m = 3$, y $\alpha(u)$ discretizada con 20 intervalos. Dato inicial: $\sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Los gráficos a)–f) corresponden a tiempos $t = 0,\ 0.2,\ 0.4,\ 0.6,\ 0.8,\ 1$, respectivamente.

En primer lugar, permite resolver adecuadamente problemas estándar de ecuaciones de difusión. Sin embargo, el hecho de que las soluciones del problema discretizado tienen soporte compacto para todo tiempo, limita el orden de convergencia a 1 cuando las soluciones exactas no tienen soporte compacto.

En cambio, el método permite determinar de una manera unívoca las interfases, típicas de las ecuaciones parabólicas degeneradas. En particular, el comportamiento parece incluso mejor en los casos en que las técnicas generales de diferencias finitas o elementos finitos presentan mayores dificultades, por ejemplo, cuando la solución tiene fuertes flancos verticales cerca del borde del soporte. Esta habilidad para seguir adecuadamente el soporte también se ve reflejada en la capacidad para detectar la existencia de tiempos de espera.

La consideración de perfiles iniciales distintos de la solución autosimilar de Barenblatt, para la ecuación de medios porosos, realizada en la sección 3.1.5, muestra en particular que el método captura la asintótica correcta (una solución de Barenblatt con la misma masa que el dato inicial). Contribuye a este comportamiento asintótico adecuado el que el método conserve masa en forma exacta.

Merece mención también el hecho de que los problemas de Stefan de varias fases se encuadran naturalmente dentro del esquema del método, y que el método sigue las interfases adecuadamente.

Finalmente, cabe observar que la extensión a problemas en más variables espaciales es muy simple cuando por cuestiones de simetría es fácil resolver el problema básico de calcular una función armónica en cada región donde u es constante.

Capítulo 4

Resultados de convergencia

En este capítulo presentaremos un análisis de la convergencia del método propuesto. Para ello, explotaremos el hecho de que la aproximación numérica es la solución exacta de otro problema de evolución de la forma

$$\beta(v)_t = \Delta v, \qquad x \in \mathbb{R}, \quad u(x,0) = u_0(x), \tag{4.1}$$

donde la función $\beta(v)$ es una aproximación por una función escalera de la función β del problema original.

De este modo, lo que nos interesará a continuación es la obtención de resultados de continuidad de las soluciones de la ecuación (4.1) respecto de β.

El trabajo de Bénilan y Crandall [20] contiene resultados de continuidad en φ para soluciones de $u_t = \Delta\varphi(u)$, suficientemente generales para nuestros propósitos ($\varphi(u)$ puede ser un grafo maximal monótono). Sin embargo, no proporciona estimaciones explícitas, y por lo tanto no permite obtener estimaciones del orden de convergencia de las aproximaciones numéricas. De cualquier modo, como su aplicación proporciona una demostración directa de la convergencia del método expuesto en esta tesis, reproducimos el resultado a continuación, para el caso de una dimensión espacial.

Teorema 11 *(Bénilan, Crandall, 1981, caso $N = 1$)*
Sea $u_n \in C([0,\infty); L^1(\mathbb{R})) \cap L^\infty((0,\infty) \times \mathbb{R})$ la solución de

$$\begin{cases} (u_n)_t - \Delta\varphi_n(u_n) = 0 & \text{en } \mathcal{D}'((0,\infty) \times \mathbb{R}), \\ u_n(0,x) = u_{0n}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.2}$$

$n = 1, 2, \ldots, \infty$, con φ_n funciones continuas no decrecientes, con $\varphi_n(0) = 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(r) = \varphi_\infty(r) \quad \text{para } r \in \mathbb{R}, \tag{4.3}$$

y

$$\lim_{n\to\infty} \|u_{0n} - u_{0\infty}\|_{L^1(\mathbb{R})} = 0. \tag{4.4}$$

Entonces se tiene $u_n \longrightarrow u_\infty$ en $C([0,\infty); L^1(\mathbb{R}))$, donde u_∞ es solución de

$$\begin{cases} (u_\infty)_t - \Delta\varphi_\infty(u_\infty) = 0 & \text{en } \mathcal{D}'((0,\infty) \times \mathbb{R}), \\ u_\infty(0,x) = u_{0\infty}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.5}$$

Observación 12 *En el caso de grafos maximales monótonos, la convergencia $\varphi_n \to \varphi_\infty$ se puede reescribir como $\varphi_n^0(r) \to \varphi_\infty^0(r)$ en casi todo $r \in \mathbb{R}$, donde $\varphi_j^0(r)$ denota el elemento de $\varphi_j(r)$ de menor módulo, y $\varphi_j^0(r) = \infty$ $(-\infty)$ si r está por encima (respectivamente por debajo) del dominio de φ_j. El requerimiento $\varphi_n(0) = 0$ debe ser reemplazado por las condiciones $0 \in \varphi_n(0)$, $0 \in \text{int}D(\varphi_\infty)$. Con estos cambios el resultado del teorema anterior se mantiene.*

Observación 13 *En más dimensiones el resultado es esencialmente el mismo (el mismo para 2 dimensiones, si la dimensión es mayor o igual que 3 vale con condiciones adicionales para φ_∞, o controlando de algún modo el decrecimiento en $|x| = \infty$). Ver detalles en [20].*

No existen en la literatura muchos trabajos sobre continuidad de las soluciones de (4.1) con la generalidad deseada en φ, más allá del trabajo de Bénilan ya citado [20]. Entre ellos podemos citar a Bénilan y Touré [28], donde se analiza la continuidad de soluciones de $u_t = \varphi(u)_{xx} - \psi(u)_x + v$ respecto de φ, ψ, v, y u_0, en una dimensión espacial, para φ continua no decreciente.

Con una generalidad suficiente para comprender el problema de Stefan, y problemas de medios porosos, Nochetto [33] obtiene estimaciones en L^2 y $L^\infty(0,T;H^{-1}(\Omega))$ de la diferencia entre u y la solución a un problema regularizado, utilizando una técnica de dualidad parabólica originada en [34]. El dominio Ω se supone acotado, y la función β de la forma $\beta(s) = c(s) + \Theta(s)$ con $c(s)$ Lipschitz continua, estrictamente creciente, y Θ el grafo de Heaviside.

Conceptualmente más cercano a los desarrollos de este capítulo, merece mencionarse el reciente trabajo de Cockburn y Gripenberg [15] que extiende las ideas de Kuznetsov para el caso de leyes de conservación hiperbólicas [17] (para otros antecedentes en el uso de este tipo de técnicas, ver [16, 18, 29]).

En dicho trabajo, los autores analizan la ecuación

$$\begin{cases} u_t = \nabla \cdot \Phi(u) + \Delta\varphi(u) & \text{en } \mathbb{R}^N \times (0,\infty), \\ u(0,x) = u_0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{4.6}$$

con Φ y $\varphi \in C^1(\mathbb{R})$, φ no decreciente, y demuestran que si u_j es la solución de (4.6), correspondiente a Φ_j, φ_j, y dato inicial u_{0j}, $j = 1,\ 2$ respectivamente, entonces para $t > 0$ se satisface

$$\begin{aligned} \|u_1(t,\cdot) - u_2(t,\cdot)\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} \leq\ & \|u_{10} - u_{20}\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} + \\ & + \|u_{10}\|_{TV(\mathbb{R}^N)} \left(t \sup_{|s|<\|u_{10}\|_\infty} \|\Phi_1'(s) - \Phi_2'(s)\|_\infty + \right. \\ & \left. + 4\sqrt{tN} \sup_{|s|<\|u_{10}\|_\infty} \left|\sqrt{\varphi_1'(s)} - \sqrt{\varphi_2'(s)}\right| \right), \end{aligned} \tag{4.7}$$

donde $\|\cdot\|_{TV(\mathbb{R}^N)}$ denota la variación total en $\mathbb{R}^N$:

$$\|h\|_{TV(\mathbb{R}^N)} = \sup_{\Psi \in C_c^1(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}^N)} \frac{\int_{\mathbb{R}^N} h(\mathbf{x})(\nabla \cdot \Psi)(\mathbf{x})d\mathbf{x}}{\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^N} \|\Psi(\mathbf{x})\|_\infty}. \tag{4.8}$$

Notar que esta desigualdad proporciona una estimación explícita de la diferencia entre las soluciones de dos problemas similares. Sin embargo, no es útil para nuestro caso particular, debido a que involucra acotaciones de la diferencia entre las derivadas de la función constitutiva, y por lo tanto no permite una generalidad donde φ es un grafo maximal monótono con saltos.

El trabajo de Cockburn y Gremaud [16] contiene una novedad adicional, ya que desarrolla una técnica en la que no es necesario utilizar estimaciones del módulo de continuidad en tiempo de la solución aproximada, y sólo se requieren estimaciones del módulo de continuidad de la solución exacta. Esto es conveniente, pues nos permite obtener estimaciones que dependan sólo del dato inicial del problema exacto.

En lo que sigue, desarrollaremos estimaciones explícitas de la diferencia $\|u_1 - u_2\|_{L^1(\mathbb{R})}$, donde u_1 y u_2 son soluciones de las ecuaciones ($j = 1, 2$)

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u_j}{\partial t} = \Delta v_j, & u_j \in \beta_j(v_j), \quad \text{en } \mathbb{R} \times (0,\infty), \\ \\ u_j(0,x) = u_{j0}, & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{4.9}$$

Para introducir la técnica, comenzaremos en la sección siguiente por una situación más sencilla, donde $\beta_1 = \beta_2$, y obtendremos estimaciones *a priori* de las soluciones de (4.9). En la sección 4.2 nos dedicaremos al caso $\beta_1 \neq \beta_2$, y finalmente en la sección 4.3 aplicaremos las estimaciones obtenidas, para obtener cotas de error para nuestro método numérico.

Observación 14 *Para simplificar la notación, y debido a que el método expuesto en esta tesis es válido en una dimensión espacial, realizaremos las estimaciones para problemas unidimensionales. Sin embargo, con modificaciones menores, las ideas continúan siendo válidas para problemas en* $\mathbb{R}^N$.

4.1 Estimaciones *a priori*

Comencemos comparando dos soluciones v_1 y v_2 de (4.9), correspondientes a $\beta_1 = \beta_2 = \beta$. Asumamos por ahora que β es una función suave, estrictamente creciente, y que los datos iniciales u_{10} y u_{20} satisfacen $u_{10}, u_{20} \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R}) \cap H^{2+b}(\mathbb{R})$, $b \in (0,1)$ (ver teorema 1), de modo que las soluciones son clásicas.

Sea $U : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función suave, convexa, par y positiva. En lo que sigue haremos tender esa función a la función módulo, $|\cdot|$, suponiendo por ejemplo:

$$U(x) = U_s(x) = sG\left(\frac{x}{s}\right), \tag{4.10}$$

$$G \text{ suave, convexa, par, } |G'| \leq 1, \text{ sop } G'' \subset [-1,1], G(0) = 0.$$

Multiplicando por $U'(v_1 - v_2)$ las ecuaciones satisfechas por v_1 y v_2 ((4.9)), y restando, se obtiene:

$$\begin{aligned}(\beta(v_1) - \beta(v_2))_t U'(v_1 - v_2) &= ((v_1)_{xx} - (v_2)_{xx})U'(v_1 - v_2) \\ &= U(v_1 - v_2)_{xx} - U''(v_1 - v_2)((v_1)_x - (v_2)_x)^2.\end{aligned} \tag{4.11}$$

Sea ψ una función de corte

$$\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}),\ \text{par, positiva, sop } \psi \subset [-2,2],\ \psi(x) \leq 1,\ \psi(x) = 1\ \forall x \in [-1,1]. \tag{4.12}$$

Multiplicando la expresión anterior por $\psi(\frac{x}{m})$, $m \in \mathbb{R}_{>0}$, e integrando en $\mathbb{R} \times (0,T)$, se tiene:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_0^T \psi\left(\frac{x}{m}\right)(\beta(v_1) - \beta(v_2))_t U'(v_1 - v_2)dxdt &= \int_{\mathbb{R}}\int_0^T \psi\left(\frac{x}{m}\right)U(v_1 - v_2)_{xx}dxdt - \\ &- \int_{\mathbb{R}}\int_0^T \psi\left(\frac{x}{m}\right)U''(v_1 - v_2)((v_1)_x - (v_2)_x)^2 dxdt.\end{aligned} \tag{4.13}$$

Utilizando que $U'' \geq 0$, $\psi \geq 0$ se tiene:

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^T \psi\left(\frac{x}{m}\right)(\beta(v_1) - \beta(v_2))_t U'(v_1 - v_2)dxdt \leq \int_{\mathbb{R}}\int_0^T \psi\left(\frac{x}{m}\right)U(v_1 - v_2)_{xx}dxdt. \tag{4.14}$$

Integrando dos veces por partes el segundo miembro

$$\int_{\mathbb{R}}\int_0^T \psi\left(\frac{x}{m}\right)(\beta(v_1) - \beta(v_2))_t U'(v_1 - v_2)dxdt \leq \int_{\mathbb{R}}\int_0^T \frac{1}{m^2}\psi''\left(\frac{x}{m}\right)U(v_1 - v_2)dxdt. \tag{4.15}$$

Sumando y restando $U'(\beta(v_1) - \beta(v_2))$ dentro de la integral en el primer término se tiene

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)U(\beta(v_1) - \beta(v_2))_t U'(v_1 - v_2)dxdt = \\ &\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)(U(\beta(v_1) - \beta(v_2)))_t dxdt + \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)[U'(v_1 - v_2) - U'(\beta(v_1) - \beta(v_2))](\beta(v_1) - \beta(v_2))_t dxdt = \\ &= \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)U(\beta(v_1(T)) - \beta(v_2(T)))dx - \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)U(\beta(v_1(0)) - \beta(v_2(0)))dx + \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)[U'(v_1 - v_2) - U'(\beta(v_1) - \beta(v_2))](\beta(v_1) - \beta(v_2))_t dxdt.\end{aligned} \tag{4.16}$$

Por lo tanto, se tiene:

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)U(\beta(v_1(T)) - \beta(v_2(T)))dx - \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)U(\beta(v_1(0)) - \beta(v_2(0)))dx + \\ &\quad + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)[U'(v_1 - v_2) - U'(\beta(v_1) - \beta(v_2))](\beta(v_1) - \beta(v_2))_t dxdt \leq \\ &\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{m^2}\psi''\left(\frac{x}{m}\right)U(v_1 - v_2)dxdt.\end{aligned} \tag{4.17}$$

Por el teorema 1 se tiene $u_i = \beta(v_i) \in H^{2+b,1+b/2}(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, y por lo tanto, para m fijo, $(\beta(v_1) - \beta(v_2))_t \psi\left(\frac{x}{m}\right) \in L^1(\mathbb{R} \times [0, T])$. Observando que $|U'| \leq 1$, $0 \leq U(v_1 - v_2) \leq |v_1 - v_2|$, y utilizando que $0 \leq \psi \leq 1$, y que $U'(v_1 - v_2) - U'(\beta(v_1) - \beta(v_2)) \longrightarrow 0$ cuando U tiende al módulo, porque β es una función estrictamente creciente, es posible utilizar el teorema de convergencia mayorada para pasar al límite $U(\cdot) \longrightarrow |\cdot|$ (tomando $s \to 0$ en 4.10 por ejemplo) dentro de las integrales. De este modo, resulta

$$\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta(v_1(T)) - \beta(v_2(T))| dx - \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta(v_1(0)) - \beta(v_2(0))| dx \leq$$
$$\leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{m^2} \psi''\left(\frac{x}{m}\right) |v_1 - v_2| dx dt. \qquad (4.18)$$

Tomando límite ahora cuando $m \to \infty$, como $0 \leq \psi \leq 1$ y $\psi(x/m) \to 1$, y como por la teoría general $\beta(v_i) \in L^1(\mathbb{R})$, por convergencia mayorada se obtiene en el lado izquierdo:

$$\int_{\mathbb{R}} |\beta(v_1(T)) - \beta(v_2(T))| dx - \int_{\mathbb{R}} |\beta(v_1(0)) - \beta(v_2(0))| dx. \qquad (4.19)$$

En el lado derecho, como asumimos $\alpha'(u) \leq \mu$ para $|u| \leq M$ (ver teorema 1), se tiene

$$|v_1 - v_2| = |\alpha(u_1) - \alpha(u_2)| \leq \mu |u_1 - u_2| \,, \qquad (4.20)$$

y por lo tanto

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{m^2} \psi''\left(\frac{x}{m}\right) |v_1 - v_2| dx dt \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0. \qquad (4.21)$$

De este modo, finalmente se obtiene la propiedad de contracción en L^1 de las soluciones:

$$\int_{\mathbb{R}} |\beta(v_1(x,T)) - \beta(v_2(x,T))| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\beta(v_1(x,0)) - \beta(v_2(x,0))| dx. \qquad (4.22)$$

Si v_1 es una solución de (4.1), correspondiente a dato inicial v_{10}, y tomamos como $v_{20}(x) = v_{10}(x + h)$, obtenemos a partir de (4.22)

$$\int_{\mathbb{R}} |\beta(v_1(x,T)) - \beta(v_2(x+h,T))| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\beta(v_1(x,0)) - \beta(v_2(x+h,0))| dx, \qquad (4.23)$$

de donde sale que

$$\|\beta(v_1)\|_{L^\infty(0,T;TV(\mathbb{R}))} \leq \|\beta(v_{10})\|_{TV(\mathbb{R})}. \qquad (4.24)$$

Tomando como dato inicial $v_{20}(x) = v_1(x, \delta)$, se obtiene

$$\int_{\mathbb{R}} |\beta(v_1(x, T-\delta)) - \beta(v_1(x,T))| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\beta(v_1(x,0)) - \beta(v_1(x,\delta))| dx. \qquad (4.25)$$

Utilizando como dato inicial $v_{20} \equiv 0$, se tiene la solución trivial $v_2 \equiv 0$, y por lo tanto la estimación en L^1:

$$\int_{\mathbb{R}} |\beta(v_1(x,T))| dx \leq \int_{\mathbb{R}} |\beta(v_1(x,0))| dx. \qquad (4.26)$$

4.2 Estimaciones para $\beta_1 \neq \beta_2$

Deseamos ahora extender este tipo de resultados a soluciones de dos problemas diferentes de la forma (4.9), correspondientes a β_j, $j = 1, 2$. Las estimaciones que obtendremos, si bien utilizan técnicas similares, son esencialmente diferentes de las contenidas en Cockburn y Gripenberg [16], debido a que no deseamos asumir propiedades de suavidad de la función φ en (4.6) como las requeridas para obtener (4.7).

Como trabajaremos con la formulación (4.1), en vez de la versión con $\alpha = \beta^{-1}$, tenemos la ventaja de que el término de segundo orden es simplemente Δv. Por este motivo, al aplicar la técnica de duplicar variables de Kružkov, no necesitaremos duplicar las variables espaciales como en [16]. Sin embargo, debido a que las soluciones de (4.9) con β_2 una función escalera no son continuas en t, necesitaremos desdoblar las variables de tiempo (es decir, comparar $\beta_1(v_1(x,t))$ con $\beta_2(v_2(x,t')))$.

Consideremos entonces las ecuaciones

$$\beta_1(v_1(t))_t = \Delta v_1(x,t), \tag{4.27}$$
$$\beta_2(v_2(t'))_{t'} = \Delta v_2(x,t'), \tag{4.28}$$

y sea U como antes (ver (4.10)). Multiplicando la primera ecuación por $U'(v_1 - v_2)$, la segunda por $U'(v_2 - v_1)$, y sumando, se obtiene

$$\begin{aligned} &U'(v_1(x,t) - v_2(x,t'))\beta_1(v_1(t))_t + U'(v_2(x,t') - v_1(x,t))\beta_2(v_2(t'))_{t'} = \\ &= U'(v_1(x,t) - v_2(x,t'))v_1(x,t)_{xx} + U'(v_2(x,t') - v_1(x,t))v_2(x,t')_{xx} \\ &= U(v_1(x,t) - v_2(x,t'))_{xx} - U''(v_1(x,t) - v_2(x,t'))(v_1(x,t)_x - v_2(x,t')_x)^2. \end{aligned} \tag{4.29}$$

Observando que

$$\beta_1(v_1(t))_t = (\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_2(t')))_t, \tag{4.30}$$
$$\beta_2(v_2(t'))_{t'} = (\beta_2(v_2(t')) - \beta_2(v_1(t)))_{t'}, \tag{4.31}$$

podemos reescribir el primer miembro como

$$\begin{aligned} &U'(v_1(x,t) - v_2(x,t'))(\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_2(t')))_t + \\ &+U'(v_2(x,t') - v_1(x,t))(\beta_2(v_2(t')) - \beta_2(v_1(t)))_{t'} = \\ &= U(v_1(x,t) - v_2(x,t'))_{xx} - U''(v_1(x,t) - v_2(x,t'))(v_1(x,t)_x - v_2(x,t')_x)^2. \end{aligned} \tag{4.32}$$

Multiplicando ahora por una función de corte $\psi(x/m)$ como en la sección precedente ((4.12)), y por una función $\Phi(t - t')$, donde Φ es una aproximación a la delta

$$\Phi(t) = \frac{1}{\epsilon}\omega\left(\frac{t}{\epsilon}\right), \tag{4.33}$$

donde

$$\begin{aligned} &\omega \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R}),\ \omega \geq 0,\ \text{no decreciente en } \mathbb{R}_{\geq 0},\ \text{par}, \\ &\text{sop}\ \omega \subset [-1,1],\ \int_0^1 \omega(t)dt = 1/2, \omega(0) = 1. \end{aligned} \tag{4.34}$$

Integrando ahora en x, t, t', resulta

$$\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} U'(v_1(x,t)-v_2(x,t'))(\beta_1(v_1(t))-\beta_1(v_2(t')))_t\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')\,dxdtdt' \;+$$
$$+\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} U'(v_2(x,t')-v_1(x,t))(\beta_2(v_2(t'))-\beta_2(v_1(t)))_{t'}\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')\,dxdtdt' =$$
$$= \int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} U(v_1(x,t)-v_2(x,t'))_{xx}\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')dxdtdt' - \tag{4.35}$$
$$- \int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} U''(v_1(x,t)-v_2(x,t'))(v_1(x,t)_x-v_2(x,t')_x)^2\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')dxdtdt'.$$

Como $U'' \geq 0$, el último término es positivo. Luego de integrar por partes dos veces el primer término del segundo miembro, podemos escribir

$$\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} U'(v_1(x,t)-v_2(x,t'))(\beta_1(v_1(t))-\beta_1(v_2(t')))_t\,\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')\,dxdtdt' \;+$$
$$+\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} U'(v_2(x,t')-v_1(x,t))(\beta_2(v_2(t'))-\beta_2(v_1(t)))_{t'}\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')\,dxdtdt' \leq$$
$$\leq \frac{1}{m^2}\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} U(v_1(x,t)-v_2(x,t'))\psi''\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')dxdtdt'. \tag{4.36}$$

Como β_1 y β_2 son funciones estrictamente crecientes, podemos proceder como en la sección anterior y tomar límite cuando $U(\cdot) \to |\cdot|$, observando que

$$U'(\beta_1(v_1(t))-\beta_1(v_2(t)))-U'(v_1(x,t)-v_2(x,t)) \longrightarrow 0,$$

obteniendo

$$\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t))-\beta_1(v_2(t'))|_t\,\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')\,dxdtdt' \;+$$
$$+\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\beta_2(v_2(t'))-\beta_2(v_1(t))|_{t'}\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')\,dxdtdt' \leq$$
$$\leq \frac{1}{m^2}\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |v_1(x,t)-v_2(x,t')|\psi''\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')dxdtdt'. \tag{4.37}$$

Integrando por partes en t y t' respectivamente el primer y segundo término del primer miembro, resulta:

$$\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(T))-\beta_1(v_2(t'))|\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(T-t')\,dxdt' \;+$$
$$+\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\beta_2(v_2(T))-\beta_2(v_1(t))|\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-T)\,dxdt-$$
$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(0))-\beta_1(v_2(t'))|\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(0-t')\,dxdt' \;-$$
$$-\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\beta_2(v_2(0))-\beta_2(v_1(t))|\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-0)dxdt \leq$$

$$\leq \int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_2(t'))|\ \psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi'(t-t')\ dxdtdt' -$$
$$- \int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\beta_2(v_2(t')) - \beta_2(v_1(t))|\ \psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi'(t-t')\ dxdtdt' +$$
$$+ \frac{1}{m^2}\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |v_1(x,t) - v_2(x,t')|\psi''\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')dxdtdt'. \quad (4.38)$$

Para aligerar un poco la notación, llamaremos T_e al lado izquierdo de la desigualdad, puesto que provee el estimador de error. Llamaremos T_β a los dos primeros términos del lado derecho, puesto que provienen de la diferencia entre ambos β_j. Finalmente, denotaremos con T_d al último término de la derecha, que proviene del término difusivo de la ecuación. Con esta notación la desigualdad (4.38) se escribe

$$T_e \leq T_\beta + T_d. \quad (4.39)$$

En lo que sigue, trabajaremos con cada uno de los términos T_e, T_β, y T_d, para obtener una estimación útil de la diferencia entre $\beta_1(v_1(t))$ y $\beta_2(v_2(t))$. A diferencia del caso desarrollado en la sección anterior, ya no será posible tomar límite cuando $m \longrightarrow \infty$, y las estimaciones provendrán finalmente de una minimización adecuada del lado derecho de la desigualdad.

Comenzaremos con un lema muy simple, que es útil para acotar varias integrales que aparecen en las estimaciones que siguen.

Lema 4 *Sean Φ, ψ como antes (ver (4.33)), y $W(t) = \int_0^t \Phi(s)ds$. Entonces se tienen:*

i)
$$\int_0^T \Phi(t-t')dt' \leq 2W(T), \quad (4.40)$$

ii)
$$\int_0^T\int_0^T \Phi(t-t')dtdt' \leq 2W(T)T, \quad (4.41)$$

iii)
$$\int_0^T\int_0^T |\Phi'(t-t')|dtdt' \leq 2\frac{T}{\epsilon} + 2W(T), \quad (4.42)$$

iv)
$$\int_0^T \Phi(T-t')dt' = \int_0^T \Phi(t')dt' = W(T), \quad (4.43)$$

v)
$$\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \Phi(t-t')\left|\psi^{(k)}\left(\frac{x}{m}\right)\right|dxdtdt' \leq 2mW(T)T\|\psi^{(k)}\|_{L^1}, \qquad k \in \mathbb{N}_0. \quad (4.44)$$

Dem: Trivial. □

Lema 5 *(Estimación de T_d)*
i) En general

$$T_d \leq 2\frac{1}{m}W(T)T\|\psi''\|_{L^1}\{\|v_{10}\|_\infty + \|v_{20}\|_\infty\}. \tag{4.45}$$

ii) Si además $\alpha_1(s)$, $\alpha_2(s) \leq Ks$ para $s \in [0, \max\{\|v_{10}\|_\infty, \|v_{20}\|_\infty\}]$, para una constante K fija, se tiene:

$$T_d \leq 2\frac{1}{m^2}W(T)T\|\psi''\|_\infty K\{\|\beta_1(v_{10})\|_{L^1} + \|\beta_2(v_{20})\|_{L^1}\}. \tag{4.46}$$

Dem: i)

$$\begin{aligned}
|T_d| &= \left|\frac{1}{m^2}\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |v_1(x,t) - v_2(x,t')|\psi''\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')dxdtdt'\right| \leq \\
&\leq \frac{1}{m^2}\{\|v_{10}\|_\infty + \|v_{20}\|_\infty\}\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \left|\psi''\left(\frac{x}{m}\right)\right|\Phi(t-t')dxdtdt' \\
&\leq \frac{2}{m^2}\{\|v_{10}\|_\infty + \|v_{20}\|_\infty\}m\|\psi''\|_{L^1}W(T)T.
\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}
T_d &= \frac{1}{m^2}\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |v_1(x,t) - v_2(x,t')|\psi''\left(\frac{x}{m}\right)\Phi(t-t')dxdtdt' \leq \\
&\leq \frac{1}{m^2}\|\psi''\|_\infty \sup_{t\in(0,T)}\{\|v_1(x,t)\|_{L^1} + \|v_2(x,t')\|_{L^1}\}\int_0^T\int_0^T \Phi(t-t')dtdt'.
\end{aligned}$$

Como $v_j = \alpha_j(\beta_j(v_j)) \leq K\beta_j(v_j)$, $j = 1,\ 2$, haciendo uso de (4.26) se tiene finalmente

$$T_d \leq \frac{2}{m^2}K\{\|\beta_1(v_{10})\|_{L^1} + \|\beta_2(v_{20})\|_{L^1}\}\|\psi''\|_\infty W(T)T. \quad \square \tag{4.47}$$

□

En lo siguiente utilizaremos la siguiente notación:

$$\Delta = \sup\{|\beta_1(r) - \beta_2(r)| : r \in [0, \max\{\|v_{10}\|_\infty, \|v_{20}\|_\infty\}]\}. \tag{4.48}$$

Lema 6 *(Estimación de T_β)*

$$T_\beta \leq 4\Delta m\|\psi\|_{L^1}\{\frac{T}{\epsilon} + W(T)\}. \tag{4.49}$$

Dem:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}}\{|\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_2(t'))| - |\beta_2(v_2(t')) - \beta_2(v_1(t))|\}\psi\left(\frac{x}{m}\right)\Phi'(t-t')dxdtdt' \leq \\
&\leq \int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_2(t')) + \beta_2(v_2(t')) - \beta_2(v_1(t))|\,\psi\left(\frac{x}{m}\right)|\Phi'(t-t')|dxdtdt' \leq \\
&\leq 2\ \Delta\ \int_0^T\int_0^T\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)|\Phi'(t-t')|dxdtdt' \leq 2\ \Delta\ \|\psi\|_{L^1}\ m\int_0^T\int_0^T |\Phi'(t-t')|dtdt' \leq \\
&\leq 4\ \Delta\ m\ \|\psi\|_{L^1}\left\{\frac{T}{\epsilon} + W(T)\right\},
\end{aligned}$$

utilizando las estimaciones del Lema 4. □

Definamos un estimador de error

$$e(t) = \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(t)) - \beta_2(v_2(t))| dx, \tag{4.50}$$

que es esencialmente la norma en L^1 de la diferencia entre $\beta_1(v_1)$ y $\beta_2(v_2)$. Probaremos a continuación una estimación básica que muestra que T_e es más grande que una cierta expresión que contiene al estimador, y que permitirá, por medio de un análisis cuidadoso, hallar estimaciones de $e(T)$.

Lema 7 *(Cota inferior de T_e)*

$$\begin{aligned} T_e \geq\ & 2e(T)W(T) - 2e(0)W(T) - 4\Delta m\|\psi\|_{L^1}W(T) - \\ & -2\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_2(v_2(t)) - \beta_2(v_2(0))|\Phi(t)dxdt - 2\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt. \end{aligned} \tag{4.51}$$

Dem: Con la notación obvia a partir de (4.38), llamemos

$$T_e = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \tag{4.52}$$

Acotando cada término

$$\begin{aligned} T_1 = & \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(T)) - \beta_1(v_2(t'))|\Phi(T-t')dxdt' \geq \\ & \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(T)) - \beta_2(v_2(T))|\Phi(T-t')dxdt' - \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(T)) - \beta_2(v_2(t'))|\Phi(T-t')dxdt' - \\ & - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(t')) - \beta_1(v_2(t'))|\Phi(T-t')dxdt'. \end{aligned} \tag{4.53}$$

Utilizando la definición de $e(T)$ en la primera integral del segundo miembro, y observando que $|\beta_2(v_2(t')) - \beta_1(v_2(t'))| \leq \Delta$, se tiene:

$$T_1 \geq e(T)W(T) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(T)) - \beta_2(v_2(t'))|\Phi(T-t')dxdt' - m\Delta\|\psi\|_{L^1}W(T). \tag{4.54}$$

Por otro lado, como $|\psi| \leq 1$, y utilizando la contracción en L^1 (ver (4.25)), se tiene (haciendo $t = \delta = T - t'$, y por lo tanto $t' = T - t$)

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(T)) - \beta_2(v_2(t'))|\Phi(T-t')dxdt' \leq \\ & \qquad \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_2(v_2(t)) - \beta_2(v_2(0))|\Phi(t)dxdt. \end{aligned} \tag{4.55}$$

En total:

$$T_1 \geq e(T)W(T) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_2(v_2(t)) - \beta_2(v_2(0))|\Phi(t)dxdt - m\Delta\|\psi\|_{L^1}W(T). \tag{4.56}$$

Análogamente se procede con T_2, T_3 y T_4:

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(T)) - \beta_2(v_1(t))|\Phi(t-T)dxdt \geq \\ &\geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(T)) - \beta_1(v_1(T))|\Phi(t-T)dxdt - \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(T)) - \beta_1(v_1(t))|\Phi(t-T)dxdt - \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(t)) - \beta_2(v_1(t))|\Phi(t-T)dxdt \geq \\ &\geq e(T)W(T) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt - \Delta m\|\psi\|_{L^1}W(T). \end{aligned} \tag{4.57}$$

$$\begin{aligned} T_3 &= -\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(0)) - \beta_1(v_2(t'))|\Phi(-t')dxdt' \geq \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(0)) - \beta_1(v_2(0))|\Phi(-t')dxdt' - \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(0)) - \beta_2(v_2(t'))|\Phi(-t')dxdt' - \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(t')) - \beta_1(v_2(t'))|\Phi(-t')dxdt' \geq \\ &\geq -e(0)W(T) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_2(v_2(t')) - \beta_2(v_2(0))|\Phi(t')dxdt' - \Delta m\|\psi\|_{L^1}W(T). \end{aligned} \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned} T_4 &= -\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(0)) - \beta_2(v_1(t))|\Phi(t)dxdt \geq \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(0)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt - \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt - \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_1(t)) - \beta_1(v_1(t))|\Phi(t)dxdt \geq \\ &\geq -e(0)W(T) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt - \Delta m\|\psi\|_{L^1}W(T). \end{aligned} \tag{4.59}$$

Recolectando el resultado de estas estimaciones, se obtiene lo deseado. □

A partir de los resultados de los lemas precedentes, se llega entonces a la siguiente desigualdad básica:

$$e(T) \leq e(0) + 2\Delta m\|\psi\|_{L^1} + \\ + \frac{1}{W(T)}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_2(v_2(t)) - \beta_2(v_2(0))|\Phi(t)dxdt\right) \\ + \frac{1}{2W(T)}(T_d + T_\beta). \tag{4.60}$$

Consideremos ahora sucesiones $\beta_1^n \to \beta_1$, $\beta_2^n \to \beta_2$, $n \geq 1$, con $\beta_1^n(0) = 0$, $\beta_2^n(0) = 0$, $0 \in intD((\beta_i)^{-1})$, $i = 1, 2$, donde la convergencia se entiende en el sentido de grafos (ver Observación 12). Sean $\alpha_1^n = (\beta_1^n)^{-1}$, $\alpha_2^n = (\beta_2^n)^{-1}$, $\alpha_1 = (\beta_1)^{-1}$, $\alpha_2 = (\beta_2)^{-1}$.

Tomemos dos sucesiones de datos iniciales en $L^1(\mathbb{R}) \cap L^\infty(\mathbb{R})$, $u_{10}^n \xrightarrow{L^1} u_{10}$, $u_{20}^n \xrightarrow{L^1} u_{20}$, uniformemente acotados en $L^\infty(\mathbb{R})$

$$\|u_{i0}^n\|_\infty \leq M, \quad i = 1, 2, \ \forall n > 1, \tag{4.61}$$

y supongamos por ejemplo

$$|\alpha_i(s)| \leq Ks, \quad |\alpha_i^n(s)| \leq Ks, \quad \text{para } i = 1, 2, \ s \in [0, M], \text{ y } n \in \mathbb{N}. \tag{4.62}$$

Esta última condición garantiza la unicidad de las soluciones y permite simplificar algunos de los argumentos que siguen, aunque podría ser reemplazada por condiciones más débiles, como α_i, $i = 1, 2$ continuas en el origen ([19]).

Supongamos además que se satisface

$$\sup_{s \in [0, KM]} |\beta_1^n(s) - \beta_2^n(s)| < \Delta. \tag{4.63}$$

Con estas suposiciones, de acuerdo al teorema de Bénilan y Crandall [20] (ver Teorema 11), se tiene la convergencia en $C([0, \infty); L^1(\mathbb{R}))$ de las correspondientes soluciones:

$$\beta_1^n(v_1^n) = u_1^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_1, \qquad \beta_2^n(v_2^n) = u_2^n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} u_2. \tag{4.64}$$

Además, son válidas las estimaciones de los lemas 5 ii), 6. Pasando al límite en la estimación básica (4.60), obtenemos una estimación análoga válida para β_1 y β_2.

$$e(T) \leq e(0) + 2\Delta m\|\psi\|_{L^1} + \\ + \frac{1}{W(T)}\left(\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |u_1(x,t) - u_1(x,0)|\Phi(t)dxdt + \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |u_2(x,t) - u_2(x,0)|\Phi(t)dxdt\right) \\ + \frac{1}{m^2}T\|\psi''\|_\infty K\{\|u_{10}\|_{L^1} + \|u_{20}\|_{L^1}\} + 2\Delta m\|\psi\|_{L^1}\{\frac{T}{W(T)\epsilon} + 1\}. \tag{4.65}$$

Llamemos A_1 y A_2 a los operadores correspondientes a $\Delta\alpha_1$ y $\Delta\alpha_2$ respectivamente. Suponiendo que $u_{i0} \in \tilde{D}(A_i)$, $i = 1, 2$, se tiene por el teorema 3 (ver [32], Teorema 1) que tanto u_1 como u_2 son localmente Lipschitz continuas en $[0, T)$, y vale

$$\limsup_{h \searrow 0} \frac{\|u_i(h) - u_i(0)\|_{L^1}}{h} \leq |u_{i0}|_{A_i}, \qquad i = 1, 2. \tag{4.66}$$

De este modo, $\forall \delta > 0$ existen h_i, $i = 1, 2$, tales que

$$\frac{\|u_i(h) - u_i(0)\|_{L^1}}{h} \leq |u_{i0}|_{A_i} + \delta, \qquad i = 1, 2, \quad h < h_1, h_2. \tag{4.67}$$

Para aliviar la notación, en lo que sigue obviaremos hacer referencia a δ, y escribiremos

$$\|u_i(h) - u_i(0)\|_{L^1} \leq h|u_{i0}|_{A_i}, \tag{4.68}$$

entendiendo que esta estimación vale asintóticamente cuando $h \to 0$.

Entonces, para $i = 1, 2$,

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |u_i(t) - u_i(0)|\Phi(t)dxdt \leq \int_0^T t|u_{i0}|_{A_i}\Phi(t)dt \leq |u_{i0}|_{A_i}\epsilon W(T). \tag{4.69}$$

Reemplazando en (4.65) se tiene

$$\begin{aligned} e(T) \leq e(0) + 4\Delta m\|\psi\|_{L^1} + \epsilon(|u_{10}|_{A_1} + |u_{20}|_{A_2}) + \\ + \frac{1}{m^2}T\|\psi''\|_\infty K\{\|u_{10}\|_{L^1} + \|u_{20}\|_{L^1}\} + 2\Delta m\|\psi\|_{L^1}\frac{T}{W(T)\epsilon}. \end{aligned} \tag{4.70}$$

Para obtener una estimación en términos de Δ, debemos proponer un ϵ y un m adecuados. Claramente, para ϵ suficientemente pequeño, el último término es mucho mayor que $4m\Delta\|\psi\|_{L^1}$. Proponemos entonces $\epsilon = \Delta^\nu$, $m = \Delta^{-\mu}$, con $\nu = 2/5$, $\mu = 1/5$. De este modo se tiene, a partir de (4.70), el siguiente

Teorema 12 *En las condiciones anteriores (4.61), (4.62), y para datos iniciales $u_{i0} \in \tilde{D}(A_i)$, $i = 1, 2$, se tiene:*

$$\begin{aligned} e(T) \leq e(0) + 4\Delta^{4/5}\|\psi\|_{L^1} + \Delta^{2/5}(|u_{10}|_{A_1} + |u_{20}|_{A_2}) + \\ + \Delta^{2/5}T\|\psi''\|_\infty K\{\|u_{10}\|_{L^1} + \|u_{20}\|_{L^1}\} + 2\Delta^{2/5}\|\psi\|_{L^1}\frac{T}{W(T)}. \end{aligned} \tag{4.71}$$

Observación 15 *Sean $\beta_1^n \to \beta_1$, $\beta_2^n \to \beta_2$, $u_{10}^n \xrightarrow{L^1} u_{10}$, $u_{20}^n \xrightarrow{L^1} u_{20}$, como antes. Supongamos que las correspondientes soluciones u_1 y u_2 tienen soporte compacto para todo $t > 0$. Entonces, dado $T > 0$, existe m tal que*

$$\text{sop } (u_1(t)) \subset [-m, m] \ , \quad \text{sop } (u_2(t)) \subset [-m, m] \ , \quad \forall t \in [0, T]. \tag{4.72}$$

Para dicho m se tiene

$$\begin{aligned} T_d &= \frac{1}{m^2}\int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}-[-m,m]} \psi''\left(\frac{x}{m}\right)|v_1^n(t) - v_2^n(t')|\Phi(t-t')dxdtdt' \leq \\ &\leq \frac{1}{m^2}\|\psi''\|_\infty \int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}-[-m,m]} |v_1^n(t) - v_2^n(t')|\Phi(t-t')dxdtdt' \\ &\leq \frac{K}{m^2}\|\psi''\|_\infty \int_0^T \int_0^T \int_{\mathbb{R}-[-m,m]} (|u_1^n(t)| + |u_2^n(t')|)\Phi(t-t')dxdtdt' \\ &\leq \frac{2K}{m^2}\|\psi''\|_\infty W(T) \int_0^T \int_{\mathbb{R}-[-m,m]} (|u_1^n(t)| + |u_2^n(t')|)\Phi(t-t')dxdt \overset{n\to\infty}{\to} 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto, para β_1 y β_2 y datos iniciales $u_{i0} \in \tilde{D}(A_i)$ que producen soluciones con soporte compacto para todo t, se tiene que la contribución del término T_d es nula. Por lo tanto, la estimación (4.70) se puede reescribir, para m tal que sop $(u_1) \cup$ sop $(u_2) \subset [-m, m]$*:*

$$e(T) \leq e(0) + 4\Delta m\|\psi\|_{L^1} + \epsilon(|u_{10}|_{A_1} + |u_{20}|_{A_2}) + 2\Delta m\|\psi\|_{L^1}\frac{T}{W(T)\epsilon}. \tag{4.73}$$

Eligiendo ahora $\epsilon = \Delta^{1/2}$, se obtiene

Teorema 13 *En las condiciones anteriores (4.61), (4.62), para datos iniciales $u_{i0} \in \tilde{D}(A_i)$, $i = 1, 2$, que producen soluciones de soporte compacto para todo $t > 0$, y eligiendo m suficientemente grande de modo que* sop $(u_1(t)) \cup$ sop $(u_2(t)) \subset [-m, m]$ *para todo $t \in [0, T]$ se tiene:*

$$e(T) \leq e(0) + \left(4m\|\psi\|_{L^1} + (|u_{10}|_{A_1} + |u_{20}|_{A_2}) + 2m\|\psi\|_{L^1}\frac{T}{W(T)}\right)\Delta^{1/2}. \tag{4.74}$$

Observar que en estas estimaciones u_1 y u_2 juegan roles similares. A los efectos de utilizarlas para estudiar la diferencia entre la solución de un problema dado y el método propuesto en esta tesis, sería preferible contar con estimaciones donde en el lado derecho no apareciera $|u_2|_{A_2}$. Para esto, necesitaremos una leve modificación del Lema 7, y la aplicación de un lema de Cockburn y Gremaud [16]. Comencemos con la modificación del lema 7.

Lema 8 *(Otra cota inferior de T_e)*

$$T_e \geq \int_0^T \Phi(T-t')e(t')dt' + e(T)W(T) - \int_0^T e(t')\Phi(t')dt' - e(0)W(T) - \tag{4.75}$$
$$-4\Delta m\|\psi\|_{L^1}W(T) - 4\int_0^T\int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt.$$

Dem: Con la notación obvia a partir de (4.38), (4.39), procedemos análogamente al lema 7, llamando

$$T_e = T_1 + T_2 + T_3 + T_4. \tag{4.76}$$

Acotando cada término

$$\begin{aligned}
T_1 &= \int_0^T\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)|\beta_1(v_1(T)) - \beta_1(v_2(t'))|\Phi(T-t')dxdt' \geq \\
&\geq \int_0^T\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)|\beta_1(v_1(t')) - \beta_2(v_2(t'))|\Phi(T-t')dxdt' - \\
&- \int_0^T\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)|\beta_2(v_2(t')) - \beta_1(v_2(t'))|\Phi(T-t')dxdt' - \\
&- \int_0^T\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)|\beta_1(v_1(T)) - \beta_1(v_1(t'))|\Phi(T-t')dxdt' \geq \\
&\geq \int_0^T \Phi(T-t')e(t')dt' - m\Delta\|\psi\|_{L^1}W(T) - \\
&\qquad - \int_0^T\int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right)|\beta_1(v_1(T)) - \beta_1(v_1(t'))|\Phi(T-t')dxdt'.
\end{aligned} \tag{4.77}$$

Por otro lado, como $|\psi| \leq 1$, y utilizando la contracción en L^1 (ver (4.25)), se tiene (haciendo $t = \delta = T - t'$, y por lo tanto $t' = T - t$)

$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(T)) - \beta_1(v_1(t'))|\Phi(T-t')dxdt' \leq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt. \tag{4.78}$$

En total:

$$T_1 \geq \int_0^T \Phi(T-t')e(t')dt' - m\Delta\|\psi\|_{L^1}W(T) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt. \tag{4.79}$$

Análogamente se procede con T_2, T_3 y T_4:

$$\begin{aligned} T_2 &= \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(T)) - \beta_2(v_1(t))|\Phi(t-T)dxdt \geq \\ &\geq \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(T)) - \beta_1(v_1(T))|\Phi(t-T)dxdt - \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(T)) - \beta_1(v_1(t))|\Phi(t-T)dxdt - \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(t)) - \beta_2(v_2(t))|\Phi(t-T)dxdt \geq \\ &\geq e(T)W(T) - \Delta m\|\psi\|_{L^1}W(T) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt. \end{aligned} \tag{4.80}$$

$$\begin{aligned} T_3 &= -\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(0)) - \beta_1(v_2(t'))|\Phi(0-t')dxdt' \geq \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(t')) - \beta_2(v_2(t'))|\Phi(-t')dxdt' - \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(t')) - \beta_1(v_2(t'))|\Phi(-t')dxdt' - \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(0)) - \beta_1(v_2(t'))|\Phi(-t')dxdt' \geq \\ &\geq -\int_0^T e(t')\Phi(t')dt' - \Delta m\|\psi\|_{L^1}W(T) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt. \end{aligned} \tag{4.81}$$

$$\begin{aligned} T_4 &= -\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(0)) - \beta_2(v_1(t))|\Phi(t)dxdt \geq \\ &- \int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_2(v_2(0)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt - \end{aligned}$$

$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(t)) - \beta_2(v_1(t))|\Phi(t)dxdt - \tag{4.82}$$
$$-\int_0^T \int_{\mathbb{R}} \psi\left(\frac{x}{m}\right) |\beta_1(v_1(0)) - \beta_1(v_1(t))|\Phi(t)dxdt \geq$$
$$\geq -e(0)W(T) - \Delta m\|\psi\|_{L^1}W(T) - \int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt.$$

Recolectando el resultado de estas estimaciones, se tiene entonces lo deseado. □

Llegamos entonces a la desigualdad

$$\int_0^T \Phi(T-t')e(t')dt' + e(T)W(T) \leq \int_0^T e(t')\Phi(t')dt' + e(0)W(T) +$$
$$+4\Delta m\|\psi\|_{L^1}W(T) + 4\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |\beta_1(v_1(t)) - \beta_1(v_1(0))|\Phi(t)dxdt + T_d + T_\beta, \tag{4.83}$$

análoga a la desigualdad (4.60). La principal dificultad aquí es que no es una estimación puntual de $e(T)$, sino una desigualdad integral.

Tomando sucesiones β_i^n, y datos iniciales u_i^n como antes, se puede pasar al límite como antes, obteniendo que la desigualdad anterior es válida para β_1 y β_2 grafos generales. Además, son válidas las estimaciones de los lemas 5 ii), 6, y se tiene la desigualdad (correspondiente a (4.65)):

$$\int_0^T \Phi(T-t')e(t')dt' + e(T)W(T) \leq \int_0^T e(t')\Phi(t')dt' + e(0)W(T) +$$
$$+4\Delta m\|\psi\|_{L^1}W(T) + 4\int_0^T \int_{\mathbb{R}} |u_1(x,t) - u_1(x,0)|\Phi(t)dxdt + \tag{4.84}$$
$$+\frac{2}{m^2}TW(T)\|\psi''\|_\infty K\{\|u_{10}\|_{L^1} + \|u_{20}\|_{L^1}\} + 4\Delta m\|\psi\|_{L^1}\{\frac{T}{\epsilon} + W(T)\}.$$

Procediendo igual que en (4.70), para dato inicial u_{10} en el dominio generalizado de A_1, se tiene:

$$\int_0^T \Phi(T-t')e(t')dt' + e(T)W(T) \leq \int_0^T e(t')\Phi(t')dt' + e(0)W(T) +$$
$$+4\Delta m\|\psi\|_{L^1}W(T) + 4W(T)\epsilon|u_{10}|_{A_1} + \tag{4.85}$$
$$+\frac{2}{m^2}TW(T)\|\psi''\|_\infty K\{\|u_{10}\|_{L^1} + \|u_{20}\|_{L^1}\} + 4\Delta m\|\psi\|_{L^1}\{\frac{T}{\epsilon} + W(T)\}.$$

El problema de hallar una estimación de $e(t)$ a partir de esta desigualdad integral se resuelve con el siguiente lema, debido a Cockburn y Gremaud [16], y que reescribimos para adaptarlo a la situación de (4.85).

Lema 9 *Sea $e(t)$ tal que satisface la desigualdad integral*

$$\int_0^T e(t')\Phi(T-t')dt' + W(T)e(T) \leq e(0)W(T) + \int_0^T e(t')\Phi(t')dt' + W(T)C + DT + TW(T)E, \tag{4.86}$$

con Φ como en (4.33). Haciendo tender ω a la característica del intervalo $[-1/2, 1/2]$, lo cual denotaremos $\omega \longrightarrow \chi_{[-1/2,1/2]}$, se obtienen las estimaciones:

$$e(T) \leq \quad e(0) + C + D\epsilon + TE, \qquad T \leq \frac{\epsilon}{2}, \tag{4.87}$$

$$e(T) \leq \; 2e(0) + 2C + 4DT + 2TE, \qquad T > \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.88}$$

Dem: Haciendo $\omega \longrightarrow \chi_{[-1/2,1/2]}$, resulta, para $T \leq \epsilon/2$:

$$\frac{1}{\epsilon}\int_0^T e(t')dt' + \frac{T}{\epsilon}e(T) \leq \frac{T}{\epsilon}e(0) + \frac{1}{\epsilon}\int_0^T e(t')dt' + C\frac{T}{\epsilon} + DT + E\frac{T^2}{\epsilon}. \tag{4.89}$$

Simplificando, se obtiene (4.87). Consideremos ahora el caso $T > \epsilon/2$. Se tiene $W(T) = 1/2$, y por lo tanto (4.86) se escribe:

$$\int_0^T e(t')\frac{1}{\epsilon}\omega\left(\frac{T-t'}{\epsilon}\right) + \frac{1}{2}e(T) \leq \frac{1}{2}e(0) + \frac{1}{\epsilon}\int_0^{\epsilon/2} e(t')dt' + \frac{C}{2} + DT + \frac{1}{2}TE. \tag{4.90}$$

Como el integrando en el primer miembro es positivo es posible eliminarlo conservando la desigualdad, y como en la integral del segundo miembro se necesita sólo una estimación de $e(t')$ para $t' \in [0, \epsilon/2]$, utilizando (4.87) se tiene:

$$e(T) \leq 2e(0) + 2C + 2D\left(\frac{\epsilon}{2} + T\right) + E\left(\frac{\epsilon}{4} + T\right). \tag{4.91}$$

de donde se llega fácilmente a (4.88) utilizando $T \geq \epsilon/2$. □

Utilizando este lema, a partir de la desigualdad (4.85) se obtiene, para $T > \epsilon/2$

$$\begin{aligned} e(T) \leq\; & 2e(0) + 16\Delta m\|\psi\|_{L^1} + 8\epsilon|u_{10}|_{A_1} + \\ & + \frac{4}{m^2}T\|\psi''\|_\infty K\{\|u_{10}\|_{L^1} + \|u_{20}\|_{L^1}\} + 16\Delta m\|\psi\|_{L^1}\frac{T}{\epsilon}. \end{aligned} \tag{4.92}$$

Esta desigualdad es enteramente análoga a (4.70), difiriendo solamente en el valor de algunas de las constantes. Aplicando la misma técnica que conduce a los Teoremas 12, 13, se obtienen los resultados análogos

Teorema 14 *En las condiciones anteriores (4.61), (4.62), y para datos iniciales $u_{10} \in \tilde{D}(A_1)$, vale:*

$$\begin{aligned} e(T) \leq\; & 2e(0) + 16\Delta^{4/5}\|\psi\|_{L^1} + 8\Delta^{2/5}|u_{10}|_{A_1} + \\ & + 4\Delta^{2/5}T\|\psi''\|_\infty K\{\|u_{10}\|_{L^1} + \|u_{20}\|_{L^1}\} + 16\Delta^{2/5}\|\psi\|_{L^1}T. \end{aligned} \tag{4.93}$$

Teorema 15 *En las condiciones anteriores (4.61), (4.62), para datos iniciales $u_{10} \in \tilde{D}(A_1)$, que producen soluciones de soporte compacto para todo $t > 0$, y eligiendo m suficientemente grande de modo que* sop $(u_1(t)) \cup$ sop $(u_2(t)) \subset [-m, m]$ *para todo $t \in [0, T]$ se tiene:*

$$\begin{aligned} \|u_1(T) - u_2(T)\|_{L^1(\mathbb{R})} \leq\; & 2\|u_{10} - u_{20}\|_{L^1(\mathbb{R})} \\ & + \left(16m\|\psi\|_{L^1}\Delta^{1/2} + 8|u_{10}|_{A_1} + 16Tm\|\psi\|_{L^1}\right)\Delta^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.94}$$

4.3 Estimadores de error de la solución y del soporte

Los resultados de los Teoremas 12, 13, y los de los Teoremas 14, 15, son directamente aplicables al método expuesto en el Capítulo 2, y a los resultados numéricos del Capítulo 3, donde β_1 corresponde a la ecuación que se desea resolver, y β_2 es un grafo maximal monótono constante a trozos como los introducidos en el Capítulo 2. Notar que la unicidad de las soluciones del problema correspondiente a β_2 es necesaria para garantizar que las estimaciones son válidas para la solución exacta construída mediante las ideas del capítulo 2. La ventaja de los resultados de 14, 15 sobre los de 12, 13 reside en que no es necesario mostrar acotaciones uniformes en Δ de $|u_{20}|_{A_2}$.

En el caso de soluciones con soporte compacto, los resultados del Capítulo 2 (ver teorema 8), garantizan que el soporte de la solución numérica se mantiene acotado uniformemente en Δ. Por lo tanto, en la estimación (4.94), m puede ser escogido independientemente de Δ.

Modificando un argumento de Nochetto [35], las estimaciones de error en L^1 de las soluciones de la forma (4.94), pueden ser utilizadas para obtener acotaciones del error de la frontera libre. Por claridad, denotaremos $u = u_1$ a la solución exacta, y $u_\Delta = u_2$ a la solución numérica obtenida con nuestro método.

Sean

$$Q^+ = \{(x,t) \in [-m,m] \times (0,T)/u(x,t) > 0\}, \tag{4.95}$$

$$Q^+_\Delta = \{(x,t) \in [-m,m] \times (0,T)/u_\Delta(x,t) > \delta\}, \tag{4.96}$$

donde δ se ajustará luego apropiadamente.

Nochetto demuestra que si se conoce un resultado de no degeneración para la solución exacta u, de la forma:
existen constantes a, $C^* > 0$ *tales que* $\forall \epsilon$, $0 < \epsilon < \epsilon_0$, *se tiene:*

$$meas(\{(x,t) \in Q : t \geq t_0 > 0, 0 < u(x,t) < \epsilon^a\}) \leq C^* \epsilon, \tag{4.97}$$

entonces, a partir de (4.94), se obtiene el siguiente teorema, que adaptamos de Nochetto [35] para adecuarlo a nuestra situación.

Teorema 16 *Asumiendo (4.94), (4.97), y eligiendo* $\delta = \Delta^{\frac{a}{2(1+a)}}$, *existe una constante* $C > 0$ *que depende sólo de* a, *tal que:*

$$meas(Q^+ \Delta Q^+_\Delta) \leq C C^* \Delta^{\frac{1}{2(1+a)}}, \tag{4.98}$$

con C^* *y* a *como en (4.97).*

Dem: Como $Q^+ \Delta Q^+_\Delta = \{Q^+ \backslash Q^+_\Delta\} \cup \{Q^+_\Delta \backslash Q^+\}$, analizaremos cada uno de estos conjuntos por separado. En primer lugar,

$$Q^+ \setminus Q^+_\Delta = \{x : 0 < u(x) < 2\delta, u_\Delta(x) \leq \delta\} \cup \{x : u(x) \geq 2\delta, u_\Delta(x) \leq \delta\} = A \cup B. \tag{4.99}$$

Pero $A \subset \{x : 0 < u(x) < 2\delta\}$, y por lo tanto, usando (4.97) se tiene $\text{meas}(A) \leq C^*(2\delta)^{1/a}$. Como $x \in B$ implica $u(x) - u_\Delta(x) \geq \delta$, se tiene:

$$\text{meas}(B) \leq \frac{1}{\delta}\int_B u(x) - u_\Delta(x) \leq C\frac{\Delta^{1/2}}{\delta}. \tag{4.100}$$

Como para $x \in Q_\Delta^+ \setminus Q^+$ se tiene $u_\Delta(x) - u(x) > \delta$, el mismo análisis de B nos da finalmente:

$$\text{meas}(Q^+ \Delta Q_\Delta^+) \leq C^* 2^{1/a}\delta^{1/a} + \frac{\Delta^{1/2}}{\delta} + \frac{\Delta^{1/2}}{\delta}. \tag{4.101}$$

Finalmente, eligiendo $\delta = \Delta^{\frac{a}{2(1+a)}}$, se tiene lo deseado. □

Para el caso de la ecuación de medios porosos en una dimensión espacial, se conoce el siguiente resultado:

$$\text{meas}\left(\{(x,t) \in Q : t \geq t_0 > 0, 0 < u(x,t) < \epsilon^a\}\right) \leq C(t_0)\epsilon, \tag{4.102}$$

con $a = 1/(m-1)$ [35]. Por lo tanto, combinando (4.102) con (4.98), se obtiene para soluciones de la ecuación de medios porosos $u_t = \Delta u^m$

$$\text{meas}(Q^+ \Delta Q_\Delta^+) \leq CC^* \Delta^{\frac{m-1}{2m}}. \tag{4.103}$$

Observación 16 *Como para medios porosos $a = 1/(m-1)$, la constante C en (4.98) crece como 2^{m-1}, lo que da una estimación muy pobre si m es grande (cf. los resultados numéricos de la sección 3.1.4 para $m = 50$).*

Observar que los resultados numéricos expuestos en el Capítulo 3 para las soluciones de Barenblatt eran consistentes con exponentes 0.8 y 1 para $m = 2$, 3 respectivamente, mejores que los que proporciona la estimación (4.103) (1/4 y 1/3 respectivamente).

Combinando los resultados de [35, 36, 37], Nochetto obtiene, para el método de elementos finitos, una cota de la forma

$$h^{(m^2-1)/m^2},$$

con h el diámetro máximo de los elementos. Identificando Δ con h (el número de incógnitas en una dimensión espacial es inversamente proporcional a ambos), vemos que la cota obtenida para elementos finitos es superior. Sin embargo, la técnica de Nochetto, aplicada al método presentado en este trabajo, no explota el hecho de que la frontera libre está descripta de un modo natural como la interfase donde la solución salta al valor cero, identificándola en cambio con alguna curva de nivel $u = \delta$. Esto es natural en elementos finitos, o diferencias finitas, donde en principio existe alguna difusión artificial que hace que las fronteras libres no estén muy bien definidas, pero resulta artificial en nuestro caso.

Un camino alternativo, que consistiría en la demostración de la no-degeneración de la solución aproximada [38], constituye un tema de interés, en el que se continúa trabajando.

Capítulo 5

Conclusiones

En esta tesis se desarrolla un método de aproximación de soluciones de ecuaciones parabólicas de forma general, en una dimensión espacial, que presenta una serie de características únicas.

El método está basado en aproximar la ecuación por otro problema aún menos clásico, del cual sin embargo es posible hallar una solución exacta vía la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias, análogo a las condiciones de Rankine-Hugoniot. Este esquema de aproximación es también factible en más dimensiones espaciales, como queda demostrado por el ejemplo presentado en dos dimensiones con simetría radial. Las principales dificultades en más de una dimensión residen en la complejidad de la evolución de las curvas de nivel, que pueden desarrollar singularidades al crecer t, y en la resolución de la ecuación de Laplace en cada una de los conjuntos de nivel de u.

Se presentan una variedad de ejemplos representativos de aplicación, a problemas típicos de ecuaciones de difusión no lineales, que presentan singularidades, fronteras libres, etc. Se analiza además en detalle el comportamiento numérico, estimando órdenes de convergencia en $L^1(\mathbb{R})$ de las soluciones, y de las interfases, con resultados comparables a otros métodos estándar, como elementos o diferencias finitas.

Además, se desarrollan estimaciones de la diferencia entre soluciones de dos problemas parabólicos diferentes. Para ello se extiende la técnica de duplicación de variables, utilizada por Cockburn y Gripenberg [15], al contexto general considerado en este trabajo. Se utiliza también la técnica de Nochetto [35] para acotar el error en las fronteras libres.

Los órdenes de convergencia en L^1 y en las interfases observados numéricamente resultan en todos los ejemplos analizados mejores que los deducidos. Esta diferencia resulta comprensible, debido a que el método utilizado para obtener las estimaciones de error utiliza sólo requerimientos muy generales sobre $\alpha(u)$. Se continúa trabajando en la manera de explotar propiedades adicionales de α, así como en extender el análisis para abarcar las ideas presentadas en la sección 3.2.

Por otro lado, se concluye que en casos como la ecuación del calor, o el problema de Stefan, en que la solución exacta no tiene soporte compacto, el hecho de que las soluciones del método propuesto tienen soporte compacto, limita la convergencia a primer orden en Δ. Cuando la convergencia del dato inicial puede mejorarse, existen alternativas para

mejorar el orden de convergencia, calculando $\tilde{u} = \beta^{-1}(v)$ a partir de la función constitutiva exacta.

Además, en el método presentado las interfases aparecen naturalmente, y por lo tanto sería deseable no utilizar una definición *ad hoc* de las fronteras libres. En el caso de elementos o diferencias finitas esto es natural, debido a la difusión artificial que acompaña dichos métodos, o cuando se resuelven problemas regularizados [33, 35]. En particular, los experimentos numéricos sugieren que la aproximación de la interfase es mejor cuando la pendiente con que la solución exacta incide en el soporte es infinita, como en el caso de las soluciones a la ecuación de medios porosos con $m > 2$, y sin embargo las constantes que surgen de [35] y del análisis presentado en la sección 4.3 contienen un factor 2^m, que obligaría, para $m >> 1$, a una reducción prohibitivamente grande del paso de la discretización. Esta reducción podría estar justificada en el caso de elementos o diferencias finitas, ya que debiera haber una cantidad muy grande de puntos de la malla para poder resolver adecuadamente los gradientes que aparecen en la interfase, pero parece artificial en nuestro caso donde en algún sentido se está calculando $x(u)$, que resulta casi constante donde $u(x)$ tiene pendiente muy grande.

Apéndice A

Soluciones de Barenblatt

La ecuación de medios porosos

$$u_t = (u^m)_{xx}, \quad m > 1,$$

tiene familias de soluciones autosimilares, que han sido muy estudiadas, y que tienen una gran importancia en el desarrollo de la teoría.

Una de estas familias es la de soluciones autosimilares de Barenblatt, de la forma $u(x,t) = t^{\alpha} F(|x|t^{-\beta})$, que describiremos en la forma

$$u(x,t) = \max\left[0, \frac{1}{\lambda(t)}\left[1 - \left(\frac{x}{\lambda(t)}\right)^2\right]^{\frac{1}{m-1}}\right], \tag{A.1}$$

donde el soporte $\lambda(t)$ viene dado por

$$\lambda(t) = \left[\frac{2m(m+1)}{m-1}(t+1)\right]^{\frac{1}{m+1}} \tag{A.2}$$

Estas soluciones corresponden a la evolución de una delta de Dirac ubicada en el origen a tiempo $t = -1$, y muestran una de las características más sorprendentes de la evolución de las soluciones de la ecuación de medios porosos: tienen soporte compacto para todo t, en contraste con las soluciones por ejemplo de la ecuación del calor, donde el soporte inmediatamente es todo $\mathbb{R}$.

APÉNDICE A. SOLUCIONES DE BARENBLATT

Apéndice B

Problema de Stefan

Cuando la función constitutiva $\alpha(u)$ tiene un intervalo de constancia, por ejemplo

$$\alpha(u) = \begin{cases} u & 0 \leq u \leq 1, \\ 1 & 1 \leq u \leq 2, \\ u-1 & 2 \leq u \leq 1, \end{cases} \tag{B.1}$$

se tiene el clásico problema de cambio de fase, o problema de Stefan. En las formulación habitual, la variable $\alpha(u)$ es la temperatura, y la variable u representa la entalpía o la energía interna del material. Así, la función constitutiva refleja el hecho de que la temperatura crece linealmente con la entalpía, hasta llegar a una temperatura fija (la temperatura de cambio de fase). Luego, se puede incrementar la entalpía sin aumentar la temperatura, hasta que el material cambia de fase, momento a partir del cual nuevamente el aumento de temperatura es proporcional al aumento de la entalpía.

La ecuación en derivadas parciales $u_t = \Delta\alpha(u)$ expresa la conservación de la energía, y el hecho de que el flujo de calor es proporcional al gradiente de temperatura $\nabla\alpha(u)$.

En lo que sigue deduciremos la forma de una familia de soluciones autosimilares del problema de Stefan, correspondientes a la función constitutiva (B.1), en una dimensión espacial. Más información sobre soluciones autosimilares del problema de Stefan puede hallarse en [40], y en las referencias allí recolectadas.

Supongamos que se tiene una solución, en la cual la temperatura es continua, y a la izquierda de una curva $\xi(t)$ es mayor que la temperatura de fusión $v = 1$, y menor que $v = 1$ a la derecha. La conservación de la energía a través de la interfase $\xi(t)$ obliga al cumplimiento de la ecuación:

$$\dot{\xi}(t) = -[-\alpha(u)_x]_{\xi(t)}, \tag{B.2}$$

donde $[\cdot]_{\xi(t)}$ designa al salto de un lado a otro de la interfase $\xi(t)$. La iterpretación física es muy clara: el balance entre los flujos de calor es el que determina la velocidad de avance de la interfase. Designemos con $u^{(l)}(x,t)$ y $u^{(r)}(x,t)$ a las porciones de la solución $u(x,t)$ a la izquierda y derecha de la interfase, respectivamente.

Consideremos el problema en la semirrecta $x > 0$, que satisface $u(x = 0, t) = U_L$, $u(x, 0) = U_0$. La ecuación en derivadas parciales $u_t = \Delta\alpha(u)$ se traduce, en términos de

$u^{(l)}$ y $u^{(r)}$, al cumplimiento de las ecuaciones:

$$u_t^{(l)} = u_{xx}^{(l)}, \quad 0 < x < \xi(t), \tag{B.3}$$

$$u_t^{(r)} = u_{xx}^{(r)}, \quad \xi(t) < x < \infty, \tag{B.4}$$

$$\dot{\xi}(t) = u_x^{(r)} - u_x^{(l)}, \quad t > 0, \tag{B.5}$$

con las condiciones complementarias

$$u^{(l)}(\xi(t)) = 1 = u^{(r)}(\xi(t)),\ u^{(l)}(0,t) = U_L,\ u^{(r)}(x,0) = U_0. \tag{B.6}$$

Buscaremos una solución de la forma:

$$u^{(l)} = A_l + B_l \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right), \tag{B.7}$$

$$u^{(r)} = A_r + B_r \operatorname{erf}\left(\frac{x}{2\sqrt{t}}\right). \tag{B.8}$$

Las condiciones (B.6) se transforman en:

$$A_l = U_L,\ A_r + B_r = U_0,\ A_l + B_l \operatorname{erf}\left(\frac{\xi(t)}{2\sqrt{t}}\right) = 1,\ \ A_r + B_r \operatorname{erf}\left(\frac{\xi(t)}{2\sqrt{t}}\right) = 1. \tag{B.9}$$

Como las dos últimas deben satisfacerse para cualquier valor de t, es necesario que

$$\xi(t) = a\sqrt{t}. \tag{B.10}$$

De aquí surgen las expresiones para las constantes:

$$\begin{aligned} A_l &= U_L, & B_l &= \frac{1 - U_L}{\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2}\right)}, \\ A_r &= \frac{U_0 \operatorname{erf}\left(\frac{a}{2}\right) - 1}{\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2}\right) - 1}, & B_r &= \frac{1 - U_0}{\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2}\right) - 1}. \end{aligned} \tag{B.11}$$

La constante a se determina ahora imponiendo el cumplimiento de la condición para la interfase (B.5):

$$\frac{1 - U_0}{\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2}\right) - 1} - \frac{1 - U_L}{\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2}\right)} = a\frac{\sqrt{\pi}}{2} \exp\left(\frac{a^2}{4}\right). \tag{B.12}$$

Apéndice C

Problema de Dirichlet en la semirrecta

Consideremos el sistema de ecuaciones (2.18) del Capítulo 2:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\beta_1\delta u_1 &= & -\dfrac{\delta v_{3/2}}{\beta_2-\beta_1}, \\ \frac{1}{2}\beta_i\delta u_i &= & \dfrac{\delta v_{i-1/2}}{\beta_i-\beta_{i-1}} - \dfrac{\delta v_{i+1/2}}{\beta_{i+1}-\beta_i}, \qquad 2\le i\le n-1, \\ \beta_n &= & 0, \end{cases} \tag{C.1}$$

cuya solución debe satisfacer la condición

$$\beta_1 \ge \beta_2 \ge \cdots \ge \beta_n = 0. \tag{C.2}$$

Comencemos por observar que se pueden satisfacer formalmente las primeras $n-1$ ecuaciones tomando un valor arbitrario $\beta_1 > 0$, y eligiendo:

$$\beta_i = \beta_{i-1} - \frac{2\,\delta v_{i-1/2}}{\sum_1^{i-1}\beta_j\delta u_j}, \qquad 2\le i\le n. \tag{C.3}$$

Dem: La primera ecuación de (C.1) dice:

$$\beta_2 = \beta_1 - \frac{2\,\delta v_2}{\delta u_1\beta_1}, \tag{C.4}$$

de acuerdo con (C.3). Sumando las primeras $k-1$ ecuaciones (C.1), se tiene:

$$\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k-1}\beta_j\delta u_j = -\frac{\delta v_{k-1/2}}{\beta_k-\beta_{k-1}}, \tag{C.5}$$

y despejando β_k, obtenemos (C.3). □

Por lo tanto, el problema está en si es posible hallar un β_1 adecuado, de modo que se satisfagan la condición $\beta_n = 0$, junto con las relaciones (C.2).

Para ver esto, probaremos primero dos pequeños lemas:

Lema 10 *Dado un $n > 1$, si β_1 es suficientemente grande, los β_i calculados según (C.3) satisfacen*

$$\beta_1 \geq \beta_2 \geq \cdots \geq \beta_{n-1} \geq \beta_n > 0. \tag{C.6}$$

Dem: Sea

$$\beta_1 > \sqrt{\frac{2\sum_{j=2}^{n} \delta v_{j-1/2}}{\delta u_1}}. \tag{C.7}$$

Sea k el primer índice tal que $\beta_k \leq 0$. Si $k < n$, se tiene:

$$\begin{aligned} 0 \geq \beta_k &= \beta_{k-1} - \frac{2\delta v_{k-1/2}}{\sum_{j=1}^{k-1} \beta_j \delta u_j} \geq \\ &\geq \beta_{k-1} - \frac{2\delta v_{k-1/2}}{\beta_1 \delta u_1} = \beta_{k-2} - \frac{2\delta v_{k-3/2}}{\sum_{j=1}^{k-2} \beta_j \delta u_j} - \frac{2\delta v_{k-1/2}}{\beta_1 \delta u_1} \geq \\ &\geq \beta_{k-2} - \frac{2\delta v_{k-1/2}}{\beta_1 \delta u_1} - \frac{2\delta v_{k-1/2}}{\beta_1 \delta u_1} \geq \cdots \geq \beta_1 - \frac{2\sum_{j=2}^{k} \delta v_{j-1/2}}{\beta_1 \delta u_1} > 0, \end{aligned} \tag{C.8}$$

donde la última desigualdad sale de (C.7). □

Lema 11 *Sea $\hat{\beta}_1 > 0$ tal que $\hat{\beta}_1 \geq \hat{\beta}_2 \geq \cdots \geq \hat{\beta}_k \geq 0$. Entonces, para $\beta_1 \in [\hat{\beta}_1, \infty)$ se tiene que $\beta_2, \ldots, \beta_{k+1}$ calculados según (3.9) son funciones estrictamente crecientes continuas de β_1.*

Dem: Tomemos $\beta_1 > \hat{\beta}_1$, y supongamos que existe un j, $2 \leq j \leq k+1$ tal que $\beta_j \leq \hat{\beta}_j$. Sea l el primer índice para el cual $\beta_l \leq \hat{\beta}_l$. Se tiene:

$$\beta_l = \beta_{l-1} - \frac{2\ \delta v_{l-1/2}}{\sum_{i=1}^{l-1} \beta_i \delta u_i} > \hat{\beta}_{l-1} - \frac{2\ \delta v_{l-1/2}}{\sum_{i=1}^{l-1} \hat{\beta}_i \delta u_i} = \hat{\beta}_l, \tag{C.9}$$

una contradicción. Repitiendo esta cuenta para dos valores cualesquiera β_1, $\tilde{\beta}_1 \in [\hat{\beta}_1, \infty)$, se obtiene la monotonía deseada. La continuidad es inmediata por ser una composición de funciones continuas, para lo cual se requiere que no se anulen los denominadores:

$$\sum_{j=1}^{i} \beta_i \delta u_j > \sum_{j=1}^{i} \hat{\beta}_i \delta u_j > 0. \tag{C.10}$$

□

A partir de estos dos lemas, es fácil probar la existencia y unicidad de la solución de (C.1).

Teorema 17 *Para cada $n \geq 2$, existe una única solución del sistema algebraico no lineal (C.1) que satisface (C.2).*

Dem: La demostración sale por inducción. Sea $k = 2$, y observemos que

$$\beta_2 = \beta_1 - \frac{2\delta v_{3/2}}{\beta_1 \delta u_1} = 0 \Longleftrightarrow \beta_1 = \pm\sqrt{2\frac{\delta v_{3/2}}{\delta u_1}}. \tag{C.11}$$

Tomando $\beta_1 = \sqrt{2\frac{\delta v_{3/2}}{\delta u_1}}$ se tiene la única solución positiva. Sean $\beta_1^k \geq \beta_2^k \geq \cdots \geq \beta_k^k = 0$ la única solución de (C.1), (2.19). Se quiere probar que (C.1) con $n = k+1$ tiene sólo una solución que satisface (C.2). Por el lema 10 existe un $\beta_1^m > 0$ tal que el correspondiente $\beta_{k+1}^m > 0$. Por hipótesis se tiene $\beta_1^k \geq \cdots \geq \beta_k^k = 0$ y por lo tanto

$$\beta_{k+1}^k = \beta_k^k - \frac{2A_{k+1}}{\sum_{j=1}^k \beta_j^k \Delta u_j} = -\frac{2A_{k+1}}{\sum_{j=1}^k \beta_j^k \Delta u_j} \leq 0.$$

Por el lema 11, para $\beta_1 \geq \beta_1^k$ se tiene que β_{k+1} es una función creciente continua de β_1. El argumento anterior muestra que esta función continua es negativa o nula para $\beta_1 = \beta_1^k$, y positiva para $\beta_1 = \beta_1^m$. Por lo tanto, se anula para un único $\beta_1 \in [\beta_1^k, \beta_1^m]$. Como para $\beta_1 < \beta_1^k$ algún β_i, $i < k+1$, debe resultar negativo, y para $\beta_1 > \beta_1^m$ resulta $\beta_{k+1} > 0$, existe un única solución positiva de (C.1), (C.2). □

Bibliografía

[1] A. Friedman. Partial differential equations of parabolic type. Prentice Hall, 1964.

[2] J.E.Bouillet, M.K.Korten, V.Márquez. Singular limits and the 'mesa' problem. Preprint.

[3] J.E.Bouillet. Propiedades Hiperbólicas de soluciones de ciertas ecuaciones parabólicas. Revista de la Unión Matemática Argentina, Vol. 34, 1988.

[4] J.E.Bouillet, J.I.Etcheverry. Numerical experiments with $u_t = \alpha(u)_{xx}$. Trabajos de Matemática 190, IAM, CONICET, Dic. 1991.

[5] J.I.Etcheverry. On a numerical method to solve a boundary value problem for $u_t = \alpha(u)_{xx}$. Cuadern. Inst. Mat. Beppo Levi, 25 (1995), 27-34.

[6] J.E. Bouillet. Soluciones autosemejantes con cambio de fase. Preprint.

[7] J.E. Bouillet. Self similar solutions, having jumps and intervals of constancy, of a diffusion heat conduction equation. IMA Preprint Series 230, Marzo 1986.

[8] J.E. Bouillet, D.A. de Saravia, L.T. Villa. Similarity solutions of the equation of One-dimensional heat conduction. J. Diff. Eq. 35, 55-65 (1980).

[9] J.E. Bouillet. Fronteras libres en ecuaciones de conducción con coeficientes discontinuos. Cuadernos del Instituto de Matemática Beppo Levi, Vol. 24, 97-102, 1983.

[10] M.K. Korten. Generalized self-similar diffusion in $\mathbb{R}^n$. Pitman Res. Notes Math. Ser. 186, 888-892 (1990).

[11] M.K. Korten. Remarks on some particular solutions to generalized diffusion equations. Semesterbericht Funktionalanalysis, Tubingen, Sommersemester 1987.

[12] C.J. van Duyn, L.A. Peletier. A class of similarity solutions of the nonlinear diffusion equation. Nonl. Anal., Vol. 1, No 3, pág. 223-233.

[13] F.V. Atkinson, L. A. Peletier. Similarity solutions of the Nonlinear Diffusion equation. Arch. Rat. Mech. Anal., Vol 54.

[14] F.V. Atkinson, L. A. Peletier. Similarity flows through Porous Media. Arch. Rat. Mech. Anal., Vol 42.

[15] B. Cockburn, G. Gripenberg. Continuous dependence on the nonlinearities of solutions of degenerate parabolic equations. J.Diff. Eqs. 151, No. 2 (1999), 231-251.

[16] B. Cockburn, P.A. Gremaud. A priori error estimates for numerical methods for scalar conservation laws. Part I. The general approach. Math. Comp. Vol. 65, No. 214, April 1996, 553-573.

[17] N.N. Kuznetsov. Accuracy of some approximate methods for computing the weak solutions of a first-order quasi linear equation. USSR Computational Math. and Math. Phys. 16 (1976), 105-119.

[18] B.J. Lucier. A moving mesh numerical method for hyperbolic conservation laws. Math. Comp. 46 (1986), 59-69.

[19] H. Brézis, M.G. Crandall. Uniqueness of solutions of the initial-value problem for $u_t - \Delta\phi(u) = 0$. J. Math. Pures et Appl. 58, 1979, p.153-163.

[20] Ph. Bénilan, M.G. Crandall. The continuous dependence on φ of solutions of $u_t - \Delta\varphi(u) = 0$. Indiana Mathematics Journal, Vol. 30, No. 2 (1981), pp. 161-177.

[21] S. Evje, K. Karlsen. Degenerate Convection-Diffusion Equations and implicit monotone Difference schemes. To appear.

[22] Vazquez, J.L. Asymptotic behaviour and propagation properties of the one dimensional flow of gas in a porous medium. Trans. Amer. Math. Soc. 277 (1983), 507-527.

[23] Aronson, D.G. The porous medium equation. In Lecture Notes in Mathematics, 1224. Editado por A. Fasano, M. Primicerio. Springer Verlag, 1986.

[24] Vázquez, J.L. The interface of one dimensional flows in porous media. Trans. Amer. Math. Soc., 285 (1984), 717-737.

[25] Vázquez, J.L. Hyperbolic aspects in the theory of the porous medium equation. IMA volume in Mathematics and its Applications, Vol. 3: Metastability and Incompletely Posed Problems. (S. Antman et al. eds). Springer Verlag, 1987.

[26] Aronson, D., Caffarelli, L.A. Kamin, S. How an initially stationary interface begins to move in porous media flow. SIAM J. Math. Anal., 14 (1983), 639-658.

[27] Aronson, D., Caffarelli, L.A. Vázquez, J.L. Interfaces with a corner point in one-dimensional porous medium flow. Comm. Pure Appl. Math., 38 (1985), 375-404.

[28] Ph. Bénilan, H. Touré. Sul l' équation générale $u_t = \varphi(u)_{xx} - \psi(u)_x + v$. C.R. Acad. Sc. Paris, t. 299, Série I, No. 18, 1984.

[29] F. Bouchut, B. Perthame. Kružkov's estimates for scalar conservation laws revisited. Preprint 96-02, Département de Mathématiques, Université d'Orléans, 1996. Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[30] M.G. Crandall. Nonlinear Semigroups and Evolution Governed by Accretive Operators. Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, Volume 45 (1986), Part I. Pg. 305-337.

[31] M. G. Crandall. An introduction to Evolution Governed by Accretive Operators. In "Dynamical Systems, An international symposium", vol. 1. Acad. Press, New York, 1976, 131-165.

[32] Ph. Bénilan, P. Wittbold. Nonlinear Evolution equations in Banach spaces: Basic Results and Open Problems. Functional Analysis (Essen 1991). Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, 150, Dekker, N.Y., 1994.

[33] R.H. Nochetto. Error Estimates for Multidimensional Singular Parabolic Problems. Japan. J. Appl. Math. 4 (1987), 111-138.

[34] S. Kamenomostskaya. On the Stefan problem. Math. USSR-Sb., 53 (1961), 489-514.

[35] R.H. Nochetto. A note on the approximation of free boundaries by finite element methods. Mathematical Modelling and numerical analysis M^2AN, Vol. 20, N. 2, 1986, p. 355-368.

[36] M. Rose. Numerical methods for flows through porous media, I. Math. Comp. 40, 162 (1983), pp. 435-467.

[37] R.Rannacher, R. Scott. Some optimal error estimates for piecewise linear finite element approximations. Math. Comp. 38, 158 (1982), pp 437-445.

[38] F. Brezzi, L. Caffarelli. Convergence of the discrete free boundaries for finite element approximations. RAIRO Numer. Anal. 17 (1983), pp. 385-395.

[39] G.E. Forsythe, M. A. Malcolm, C. Moler. Computer Methods for Mathematical computations. Prentice-Hall, 1977.

[40] D.A. Tarzia. Estudios teóricos básicos en el problema de Stefan unidimensional a dos fases. Cuadernos del Instituto de Matemática Beppo Levi, Vol. 2, 45-75, 1987.

[41] O.A. Ladyzenskaja, V.A. Solonnikov, N.N. Uralceva. Linear and Quasilinear equations of parabolic type.Translations of Mathematical Monographs, Vol. 23, AMS, 1968.

[42] Ph. Bénilan, H. Brézis, M.G. Crandall. A semilinear Equation in $L^1(\mathbb{R}^N)$. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie IV,II (1975), 523-555.

[43] M.G. Crandall, T.M. Liggett. Generation of semi-groups of nonlinear transformations on general Banach spaces. Amer. J. Math. 93 (1971), 265-298.

[44] Ph. Bénilan. Equations d'évolution dans un espace de Banach quelconque et applications, Tesis Orsay (1972).

[45] R.H. Nochetto, C. Verdi. Approximation of degenerate parabolic problems using numerical integration. SIAM J. Numer. Anal., 25, (1988), 784-814.

[46] E. Magenes, R. H. Nochetto, C. Verdi. Energy error estimates for a linear scheme to approximate nonlinear parabolic problems. M^2AN Math. Mod. and Num. Anal., Vol. 21, N. 4, 1987, 655-678.

[47] E.A. Socolovsky. Difference Schemes for degenerate parabolic equations. Math. Comp. Vol. 47, N. 176, 1986, 411-420.

[48] A. E. Berger, H. Brézis, J.C.W. Rogers. A numerical method for solving the problem $u_t - \triangle f(u) = 0$. RAIRO Analyse numérique / Numer. Anal., Vol 13, N. 4, 1979, 297-312.

[49] U. Streit. An efficient enthalpy-type method for the Stefan problem. IMA J. of Numer. Anal., Vol. 9, 1989, 353-372.

[50] L.A. Baughman, N.J. Walkington. Co-volume methods for degenerate parabolic problems. Numerische Mathematik, 1993.

[51] D. Hoff, B. J. Lucier. Numerical methods with interface estimates for the porous medium equation. M^2AN Math. Mod. and Num. Anal., Vol. 21, N. 3, 1987, 465-485.

[52] T. Arbogast, M.F. Wheeler, Nai-Ying Zhang. A nonlinear mixed finite element method for a degenerate parabilic equation arising in porous media. SIAM J. Numer. Anal. Vol. 33, N. 4. 1669-1687, 1996.

[53] J.L. Graveleau, P. Jamet. A finite difference approach to some degenerate nonlinear parabolic equations. SIAM J. Appl. Math. Vol. 20, No. 2, 1971, 199-223.

[54] M. Mimura, T. Nakaki, K. Tomoeda. A numerical approach to interface Curves for some nonlinear diffusion equations. Japan. J. Appl. Math. 1 (1984), 94-139.

[55] K. Tomoeda, M. Mimura. Numerical approximations to interface curves for a porous media equation. Hiroshima Math. J. 13 (1983), 273-294.

[56] E. Di Benedetto, D. Hoff. An interface tracking algorithm for the porous medium equation. Trans. Am. Math. Soc. Vol. 84, No. 2, 1984, 463-500.

[57] M. Bertsch, R. Dal Passo. A numerical treatment of a superdegenerate equation with applications to the porous media equation. Quarterly of Appl. Math., Vol. XLVIII, No. I, 1990, 133-152.

[58] J.G. Berryman. Evolution of a stable profile for a class of nonlinear diffusion equations. III. Slow diffusion on the line. J. Math. Phys. 21, No. 6, 1980, 1326-1331.

[59] D. Hoff. A linearly implicit finite difference scheme for the one-dimensional porous medium equation. Math. Comp., 45, 1985, 23-33.

[60] M.E. Gurtin, R.C. MacCamy, E. A. Socolovsky. A coordinate transformation for the porous media equation that renders the free-boundary stationary. Quart. Appl. Math. 42, 345-357, 1984.

[61] G. Rosen. Nonlinear heat conduction in solid H_2, Phys. Rev. B 19, 2398-2399 (1979).

[62] E. Di Benedetto, R. Gariepy. Local Behavior of solutions of an elliptic-parabolic equation. Arch. Rational Mech. Anal. 97 (1987), no. 1, 1–17.

[63] O.A. Oleinik, Kalashnikov, A.S., Chzhou Yui-lin. The Cauchy problem and boundary problems for equations of the type of nonstationary filtration. Izv. Akad. Nauk., SSSR, Ser. Mat. 22, 667-704, 1958.

[64] H.W. Alt, S. Luckhaus. Quasilinear elliptic-parabolic differential equations. Math. Z. 183, 311-341, 1983.

[65] B. H. Gilding. A nonlinear degenerate parabolic equation. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4) 4 (1977), 393-432.

[66] B. H. Gilding. Improved theory for a nonlinear degenerate parabolic equation. Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. 16, 1989, 165-224.

[67] E. Di Benedetto, V. Vespri. On the singular equation $\beta(u)_t = \Delta u$. Arch. Rational Mech. Anal. 132 (1995), no. 3, 247–309.

[68] Di Benedetto. Continuity of weak solutions to certain singular parabolic equations. Annali Mat. Pura y Applicata. 130 (1982) 132-176.

[69] E. DiBenedetto. Continuity of weak solutions to a general porous medium equation. Indiana Univ. Math. J., Vol. 32, No. 1, 1983, 83-118.

[70] A.I. Vol'pert, S. I. Hudjaev. Cauchy's problem for degenerate second order quasilinear parabolic equations. Math. Sbornik, Tom. 78 (120), 1969, No. 3.

[71] W. Zhuoqun, Y. Jingxue. Some properties of functions in BV, and their applications to the uniqueness of solutions for degenerate quasilinear parabolic equations. Northeastern Math. J. 4 (4) , 1989, 393-422.

[72] W. Zhuoqun, W. Jun-yu. Some results on quasilinear degenerate parabolic equations of second order. Proceedings of the 1980 Beijing Symposium on Differential Geometry and Differential equations. Vol. 3, Science Press, Beijing; Gordon & Breach New York, 1982, 1593-1609.

[73] Y. Jingxue. On the uniqueness and stability of BV solutions for nonlinear diffusion equations. Commun. in partial differential equations, 15 (12), 1671-1683, (1990).

[74] R. Bürger, W. L. Wendland. Existence, Uniqueness, and Stability of generalized solutions of an initial-boundary value problem for a degenerating quasilinear parabolic equation. J. of Math. Anal. and Appl., 218, 207-239 (1998).

[75] A. Friedman. The Stefan problem in several space variables. Trans. Amer. Math. Soc., 133, (1968), 51-87.

[76] H.G. Roos, M. Stynes, L. Tobiska. Numerical Methods for Singularly Perturbed differential equations. Springer Series in Computational Mathematics, 24.

[77] J. Smoller, Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations. Springer-Verlag, New York, 1983.

[78] M. Renardy, R. C. Rogers. An introduction to partial differential equations. Texts in Applied Mathematics, 13, Springer-Verlag, New York, 1993.

[79] S. C. Brenner, L. R. Scott. The mathematical theory of finite element method. Texts in Applied Mathematics, 15, Springer Verlag, New York, 1994.

[80] M. Abramowitz, I. A. Stegun. Handbook of Mathematical Functions, National Bureau of Standards, Washington, D.C., 1964.