Soluciones de la ecuación de curvatura media prescripta para superficies no paramétricas y de ecuaciones cuasilineales de segundo orden

Cassinelli, María Martha

2000

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Soluciones de la ecuación de curvatura media prescripta para superficies no paramétricas y de ecuaciones cuasilineales de segundo orden

Autor: María Martha Cassinelli
Director: Dra. María Cristina Mariani
Lugar de trabajo: Departamento de Matemática

Trabajo presentado para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires

Buenos Aires, 2000

Soluciones de la ecuación de curvatura media prescripta para superficies no paramétricas y de ecuaciones cuasilineales de segundo orden

RESUMEN

En este trabajo se estudia la ecuación de curvatura media prescripta para superficies no paramétricas, por medio de métodos variacionales. Demostramos que bajo condiciones apropiadas para h y g, la funcional asociada al problema alcanza un mínimo, y mediante el Lema del Paso de la Montaña se hallan puntos críticos inestables. Se analiza la regularidad de las soluciones halladas.

Por último se encuentran soluciones utilizando métodos iterativos, inspirados en el procedimiento Newton-embedding.

También estudiamos una ecuación cuasilineal de segundo orden que generaliza a la de curvatura media, utilizando métodos de punto fijo. Demostramos la existencia y unicidad de soluciones y analizamos la regularidad de las mismas, describiendo propiedades topológicas del conjunto de soluciones.

Palabras claves: Curvatura media - Espacios de Sobolev - Teoremas de punto fijo - Ecuaciones cuasilineales - Métodos variacionales

ABSTRACT

In this work we use variational methods to study the prescribed mean curvature equation for nonparametric surfaces. We prove, that under appropriate conditions on h and g, the functional associated with the problem achieves a minimum. We also use the Mountain Pass Lemma to find unstable critical points. We analyze the regularity of the solutions found.

Finally, we find solutions using iterative methods, inspired in the Newton-embedding procedure.

We study a second order quasilineal equation that generalizes the mean curvature equation, using fixed point methods. We prove the existence and uniqueness of solutions and analize their regularity. We also describe topological properties of the solution set.

Key words: Mean curvature - Sobolev Spaces - Fixed Point theorems - Quasilineal equations - Variational methods

AGRADECIMIENTOS

A María Cristina Mariani y Pablo Amster, por su dedicación y permanente apoyo.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, por el apoyo brindado a través de la beca, en cuyo marco realicé esta tesis.

A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, por permitirme el uso de sus instalaciones.

María Martha Cassinelli

ÍNDICE

Introducción

A mediados del siglo XIX, el físico belga Joseph Plateau realizó diversas experiencias para describir las películas de jabón que se forman al sumergir curvas cerradas fabricadas con alambre, en una solución jabonosa.

Este problema inició el estudio de superficies minimales, es decir las superficies de area mínima que tienen como borde a una curva cerrada preestablecida (curva de Jordan). Este fue uno de los primeros problemas considerados por el cálculo variacional, y ha tenido una solución satisfactoria sólo en años recientes: en los años 30 se le encontró solución en el espacio euclideano de tres dimensiones, con los trabajos de Douglas y Radó [D], [R1], [R2].

Una superficie S en $\Re^3$ puede ser parametrizada localmente por una función $X = X(u,v)$, $X : \Omega \to \Re^3$, donde $\Omega \subset \Re^2$ es un conjunto abierto, acotado y conexo. La superficie S se dice regular si el vector normal unitario a la superficie está bien definido en todo punto. Dado $p \in S$, definimos la curvatura media de la superficie en ese punto, $h(p)$, como el promedio entre la mayor y la menor de las curvaturas de todas las curvas contenidas en S que pasan por p. Cuando la parametrización X satisface la condición:

$$|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = X_u \cdot X_v,$$

se dice que X es isoterma.

Dada ahora una función continua $h : \Re^3 \to \Re$, se plantea encontrar una superficie en $\Re^3$, parametrizada por $X : \Omega \to \Re^3$ isoterma, tal que en cada punto $X(u,v), (u,v) \in \Omega$, tenga curvatura media $h(X(u,v))$. Esto da origen al siguiente sistema no-lineal de ecuaciones diferenciales, dado por:

$$(P) \quad \Delta X = 2h(X) X_u \wedge X_v,$$

el cual se conoce como h-sistema, o ecuación de curvatura media prescripta para el caso de una superficie dada en forma paramétrica. La minimalidad de una superficie está relacionada con su curvatura media prescripta, ya que cuando $h \equiv 0$, una solución X del problema (P) es la parametrización de una superficie minimal (ver [O]).

En el presente trabajo estudiaremos la ecuación de curvatura media prescripta para superficies dadas en forma **no paramétrica**.

En el caso **no paramétrico**, buscamos superficies generadas por el gráfico de una función $f : \Omega \longrightarrow \Re$, es decir parametrizadas por $X : \Omega \longrightarrow \Re^3$, $X(u,v) =$

$(u, v, f(u, v))$, cuya curvatura media prescripta está dada por h. En este caso, obviaremos la condición de que X sea isoterma[1]. A partir de la ecuación de curvatura media prescripta dada en función de la Primera y la Segunda forma fundamental (ver [Do]) se obtiene para el caso no paramétrico una ecuación cuasilineal de segundo orden. Por otro lado, nos interesa hallar dicha superficie de forma tal que su borde esté dado por la imagen de una función g definida sobre el borde de Ω. Este caso da lugar al siguiente problema con condición de borde de Dirichlet:

$$(\mathrm{NP}) \begin{cases} (1+f_v^2) f_{uu} + (1+f_u^2) f_{vv} - 2 f_u f_v f_{uv} = 2h(u,v,f)\left(1+|\nabla f|^2\right)^{\frac{3}{2}} & \text{en } \Omega \\ f = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

En el caso paramétrico la ecuación de curvatura media ha sido ampliamente estudiada con condiciones de Dirichlet y de Plateau, esto es:

$$(\mathrm{Dir}) \begin{cases} \Delta X = 2H(X) X_u \wedge X_v & \text{en} \quad \Omega \\ X = g & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

$$(\mathrm{Pl}) \begin{cases} \Delta X = 2H(X) X_u \wedge X_v & \text{en} \quad \Omega \\ |X_u| - |X_v| = 0 = X_u \cdot X_v & \text{en} \quad \Omega \\ X : \partial\Omega \to \Gamma & \text{es una parametrización de } \Gamma. \end{cases}$$

Para su estudio se utilizaron métodos variacionales, esto es probando que el problema es equivalente a minimizar la funcional

$$D(X) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla X|^2$$

cuando $h \equiv 0$, y para $h \not\equiv 0$

$$D_H(X) = D(X) + 2Q(X) \cdot X_u \wedge X_v$$

donde $Q : \Re^3 \to \Re^3$ es cualquier campo vectorial que verifique $divQ = h$.

Cuando $h \equiv c \neq 0$ tenemos $Q(x, y, z) = \frac{h}{3}(x, y, z)$. Minimizando esta funcional en un conjunto apropiado, Hildebrandt [H] obtuvo en 1969 una primera solución al problema, llamada estable, bajo las respectivas condiciones $\|g\|_\infty |H| \leq 1$ o bien $\Gamma \subset B(0, R)$, con $R|H| \leq 1$.

[1]Si X fuera isoterma, y a la vez el gráfico de una función, implicaría que X es constante.

En 1984-86 respectivamente Struwe [St 1-2] y Brézis - Coron [B-C], encontraron una segunda solución correspondiente a un punto crítico inestable de D_H.

En 1990-92, Lami Dozo y Mariani, estudiaron los problemas de Dirichlet y Plateau para H acotada y continua, usando métodos variacionales y probaron la existencia de soluciones débiles (ver [LD-M 1,2]). En 1997-1998, Amster, Mariani y Rial estudiaron el problema de Dirichlet por medio de métodos topológigos, obteniendo resultados de existencia, unicidad y regularidad (ver [A-M] y [A-M-R]).

En este trabajo nos remitiremos al caso no paramétrico. Diremos que S es una superficie no paramétrica cuando S está definida a partir de una ecuación

$$z = f(u,v), \qquad (u,v) \in \Omega$$

En este caso, la curvatura media de S en un punto satisface

$$h = \frac{(1+f_v^2)f_{uu} + (1+f_u^2)f_{vv} - 2f_uf_vf_{uv}}{2\left(1+|\nabla f|^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

lo cual permite plantear el problema de Dirichlet asociado,(NP), que fue estudiado para el caso $h = h(u,v)$ (y, en general, $h = h(x_1,\cdots,x_n)$ para hipersuperficies de $\Re^{n+1}$) por Gilbarg, Trudinger [G-T], Simon [Si], Serrin [Se], y otros autores. Se ha demostrado (ver [G-T]) que existe solución para cualquier dato de contorno suave si la curvatura media H' de $\partial\Omega$ satisface

$$H'(x_1,\cdots,x_n) \geq \frac{n}{n-1}|H(x_1,\cdots,x_n)|$$

para todo $(x_1,\cdots,x_n) \in \partial\Omega$, y $H \in C^1(\overline{\Omega},\Re)$ satisface la desigualdad:

$$|\int_\Omega H\varphi| \leq \frac{1-\epsilon}{n}\int_\Omega |D\varphi|$$

para todo $\varphi \in C_0^1(\Omega,\Re)$ y cierto $\epsilon > 0$. En particular, si H es constante, esta última condición puede eliminarse. En cambio, la condición sobre la curvatura de $\partial\Omega$ es fundamental, como lo muestra un resultado de no existencia (ver [G-T], Corolario 14.13) que dice que si $H'(x_1,\cdots,x_n) < \frac{n}{n-1}|H(x_1,\cdots,x_n)|$ en algún punto y el signo de H es constante, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un dato de borde $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ con $\|g\|_\infty \leq \epsilon$ tal que el problema de Dirichlet no tiene solución.

En este trabajo estudiaremos el problema (NP) utilizando métodos variacionales, es decir, traduciendo el problema de encontrar soluciones de estas ecuaciones en encontrar mínimos y puntos críticos de una funcional cuyas ecuaciones de Euler Lagrange coincidan con la ecuación (NP). Además demostraremos la existencia de soluciones por medio de un método iterativo y por último estudiaremos con métodos de punto fijo una ecuación cuasilineal de segundo orden que generaliza a (NP).

En el Capítulo 1 desarrollaremos resultados que serán citados a lo largo de este trabajo.

En el Capítulo 2 hallaremos la funcional asociada al problema (NP) definiéndola en un espacio de Banach conveniente (un subespacio del espacio usual de Sobolev H^1), y demostraremos que bajo condiciones apropiadas para h y g la funcional alcanza un mínimo.

En el Capítulo 3 utilizaremos una variación del Lema del Paso de la Montaña y daremos condiciones para obtener puntos críticos inestables de la funcional asociada al problema (NP). Analizaremos también la regularidad de las soluciones halladas.

En el Capítulo 4 buscaremos soluciones de la ecuación (NP) por medio de métodos iterativos. En este caso estudiaremos el caso particular donde la curvatura prescripta sólo depende de z es decir $h(u, v, z) = h(z)$. El método utilizado es una adaptación del procedimiento Newton-embedding. Demostraremos la existencia de soluciones en $W^{2,p}$ para ciertas condiciones sobre h y h'.

Finalmente en el Capítulo 5 estudiaremos una ecuación cuasilineal de segundo orden con condición de Dirichlet que generaliza a la ecuación de curvatura media prescripta estudiada en los capítulos anteriores. Para su estudio utilizaremos métodos de punto fijo, con los cuales demostraremos la existencia y unicidad de soluciones. Analizaremos también la regularidad de las soluciones halladas y por úlimo describiremos propiedades topológicas del conjunto de soluciones.

Capítulo 1

En este Capítulo especificamos las notaciones que serán utilizadas a lo largo de este trabajo, y desarrollamos una serie de resultados que serán citados en los capítulos posteriores.

1.1 Notaciones.

Sea $\Omega \subset \Re^2$ un dominio, es decir un subconjunto abierto, convexo y acotado. Denotaremos con $W^{m,p}(\Omega)$ a los espacios de Sobolev usuales donde $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Nos remitimos a [A] para todo lo concerniente a espacios de Sobolev.

Las derivadas de $f = f(u, v)$ serán denotadas f_u y f_v.

Sea $0 < \alpha < 1$; denotaremos con $C^\alpha(\Omega)$ al espacio de funciones Höelder continuas en Ω con exponente α y con $C^\alpha(\overline{\Omega})$ al espacio de funciones uniformemente Höelder continuas en Ω con exponente α. Dado $k \in N$, notaremos con $C^{k,\alpha}(\Omega)$ (respectivamente $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$) al subespacio de $C^\alpha(\Omega)$ formado por las funciones cuyas derivadas de k-ésimo orden pertenecen a $C^\alpha(\Omega)$ (respectivamente $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega})$). Para simplificar la notación, entenderemos $C^{0,\alpha}(\Omega) = C^\alpha(\Omega)$ y $C^{0,\alpha}(\overline{\Omega}) = C^\alpha(\overline{\Omega})$. Ver [G-T] para más detalles.

Un dominio Ω y su frontera $\partial\Omega$ se dicen de clase $C^{k,\alpha}(0 \leq \alpha \leq 1)$ si para cada punto $x_0 \in \partial\Omega$ existe una bola $B = B(x_0)$ y una función $\Psi : B(x_0) \rightarrow D \subset \Re^2$ inyectiva de manera tal que:

(i) $\Psi(\Omega \cap B) \subset \Re^2_+$

(ii) $\Psi(\partial\Omega \cap B) \subset \partial\Re^2_+$

(iii) $\Psi \in C^{\alpha,k}(B)$ y $\Psi^{-1} \in C^{\alpha,k}(D)$.

Un dominio $C^{0,1}$ será denominado dominio Lipschitz.

1.2 Resultados previos

1.2.1 Funcionales en espacios de Banach.

Definición 1 *Sea X un espacio de Banach, dada $\Phi : X \rightarrow \Re$ funcional, $x_0 \in X$ y $\varphi \in C_0^\infty$ entenderemos*

$$d\Phi(x_0)(\varphi) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\Phi(x_0 + t\,\varphi) - \Phi(x_0)}{t}$$

siempre que este límite exista.

Definición 2 *Sea X un espacio de Banach separable y $\Phi : X \longrightarrow \Re$ una funcional, diremos que Φ es débilmente semicontinua inferiormente si para todo número real a, $\Phi^{-1}(a, +\infty)$ es abierto para la topología débil, o equivalentemente, si para toda sucesión u_n en X tal que $u_n \longrightarrow u$ débilmente en X, $\Phi(u) \leq \liminf \Phi(u_n)$.*

Teorema 1 *Sea X un espacio de Banach reflexivo y $\Phi \quad X \longrightarrow \Re$ una funcional débilmente semicontinua inferiormente, sea M un compacto débil de X entonces Φ alcanza su mínimo en M.*

Definición 3 *Sea X un espacio de Banach, una funcional $\Phi : X \longrightarrow \Re$ se dice convexa si para todo par de números reales positivos a y b tales que $a + b = 1$ y para todo x_0, $x_1 \in X$ se verifica $\Phi(ax_0 + bx_1) \leq a\Phi(x_0) + b\Phi(x_1)$.*

Teorema 2 *Sea X un espacio de Banach reflexivo y $\Phi : X \longrightarrow \Re$ una funcional convexa y semicontinua inferiormente, entonces es débilmente semicontinua inferiormente.*

1.2.2 Operadores de Nemitski

Definición:

Dado Ω un abierto acotado de $\Re^n$ podemos considerar el siguiente conjunto:

$$M(\Omega) = \{f : \Omega \longrightarrow \Re, \text{ medibles Lebesgue } \}$$

Sea $H : \Omega \times \Re \longrightarrow \Re$ una función que verifica las siguientes condiciones:

(i) $s \longrightarrow H(x, s)$ resulta una función continua para casi todo $x \in \Omega$.

(ii) $x \longrightarrow H(x, s)$ resulta una función medible para todo $s \in \Re$.

Se puede definir entoces el operador de Nemitski asociado a H, $N_H : M(\Omega) \longrightarrow M(\Omega)$, de la siguiente manera:

$$N_H(f)(x) = H(x, f(x))$$

Notación: Una función verificando (i) y (ii) se dice una N-función.

Buena definición:

La buena definición de N_H se prueba a través del siguiente lema:

Lema 1 *Si H es una N-función entonces $f \in M(\Omega) \Rightarrow N_H(f) \in M(\Omega)$.*

Dem: Como primer paso supongamos que f es una función simple, $f = \sum_{i=1}^{n} c_i \, \chi_{E_i}$, queremos ver que $\{x/N_H(f)(x) < \alpha\}$ es medible para todo $\alpha \in \Re$.

$$\{x/N_H(\sum_{i=1}^{n} c_i \, \chi_{E_i})(x) < \alpha\} = \{x/H(x, \sum_{i=1}^{n} c_i \, \chi_{E_i}(x)) < \alpha\} =$$

$$= \bigcup_{i=1}^{n} \{x \in E_i / H(x, c_i) < \alpha\} = \bigcup_{i=1}^{n} E_i \cap \{x/H(x, c_i) < \alpha\}.$$

Gracias a la condición (ii) los conjuntos $\{x/H(x, c_i) < \alpha\}$ resultan medibles, lo cual demuestra el Lema para una función simple. Tomemos ahora $f \in M(\Omega)$; sabemos que existe una sucesión de funciones simples f_n tal que $f_n \to u$ en casi todo punto de Ω. Por la condición (i) tenemos $(x, f_n(x)) \to (x, f(x))$ en casi todo punto de Ω.

Luego $N_H(f_n) \to N_H(f)$ en casi todo punto de Ω, es decir $N_H(f)$ puede verse como límite puntual de funciones medibles, con lo cual resulta $N_H(f) \in M(\Omega)$. □

Lema 2 *N_H es asintóticamente continuo, es decir si $\{f_n\}_{n \in N}$ y f son medibles finitas en casi todo punto de Ω y $f_n \to f$ en medida, entonces $N_H(f_n) \to N_H(f)$ en medida.*

Dem: Tenemos que probar que para cualquier $\alpha > 0$

$$\lim_{n \to \infty} |\{x \in \Omega \ \text{ tal que } \ |H(x, f_n(x)) - H(x, f(x))| \geq \alpha\}| \ = \ 0$$

Es decir dado $\varepsilon > 0$ debemos hallar n_0 de manera tal que para todo $n \geq n_0$ se verifique

$$|\{x \in \Omega \ \text{ tal que } \ |H(x, f_n(x)) - H(x, f(x))| \geq \alpha\}| < \varepsilon.$$

El Teorema de Lusín nos asegura que para $\frac{\varepsilon}{3}$ existe E_1 cerrado, $E_1 \subset \Omega$ verificando las siguientes condiciones:

1- $|\Omega - E_1| < \frac{\varepsilon}{3}$.

2- f resulta continua sobre E_1.

Llamemos $a = \max_{E_1} |f|$, podemos considerar $H : \Omega \times [-a-1, a+1] \longrightarrow \Re$ Sabemos que H es medible y por lo tanto podemos aplicar nuevamente el Teorema de Lusín para encontrar un cerrado de la forma $E_2 \times [-a-1, a+1]$ sobre el cual H resulta uniformemente continua y $|\Omega - E_2| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Al ser H uniformemente continua sobre $E_2 \times [-a, a]$, para nuestro $\alpha > 0$ obtendremos un $\delta < 1$ de manera tal que $|y_1 - y_2| < \delta \Rightarrow |H(x, y_1) - H(x, y_2)| < \alpha$.

Llamemos
$$D_n = \{x \in \Omega \text{ tal que } |f_n(x) - f(x)| < \delta\},$$
sabemos que existe $n_0 \in N$ tal que para todo $n \geq n_0$ se verifica $|\Omega - D_n| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Consideremos $n \geq n_0$ y $x \in D_n \cap E_1 \cap E_2$, luego tenemos:

$x \in D_n \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \delta < 1$,

$x \in E_2 \cap E_1$, la uniforme continuidad de H sobre $E_2 \times [-a-1, a+1]$ nos asegura que $|H(x, f_n(x)) - H(x, f(x))| < \alpha$.

Entonces concluimos
$$\{x \in \Omega \text{ tal que } |H(x, f_n(x)) - H(x, f(x))| \geq \alpha\} \subset \Omega - (D_n \cap E_1 \cap E_2).$$

Se tiene
$$|\Omega - (D_n \cap E_1 \cap E_2)| \leq$$
$$\leq |\Omega - D_n| + |\Omega - E_1| + |\Omega - E_2| <$$
$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

□

Teorema 3 *Sea H una N-función y sean p y $q \in [1, +\infty)$ entonces:*

(1) Si N_H mapea L^p en L^q entonces $N_H : L^p \longrightarrow L^q$ resulta un operador continuo y además existe una función $a(x) \in L^q$ y una constante $b \geq 0$ que verifica $|H(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p}{q}}$.

(2) Si existe $a(x) \in L^q$ y una constante $b \geq 0$ que verifica $|H(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p}{q}}$ entonces N_H resulta un operador continuo $N_H : L^p \longrightarrow L^q$.

Dem: Ver Apéndice.

1.2.3. Lema del Paso de la Montaña.

Sea X un espacio de Banach y $\Phi : X \to \Re$, $\Phi \in C^1(X)$.

Dado $u \in X$, diremos que u es un punto crítico de Φ si $\Phi'(u) = 0$ y dado $c \in \Re$, diremos que c es un valor crítico de Φ si existe un punto crítico u de Φ tal que $\Phi(u) = c$.

El conjunto de todos los puntos críticos de nivel c será designado por K_c, o sea $K_c = \{ u \in X \quad \Phi'(u) = 0 \ , \ \Phi(u) = c \ \}$, y se designará con Φ^c al conjunto de todos los puntos en niveles menores o iguales que c, $\Phi^c = \{ u \in X \quad \Phi(u) \leq c\}$.

Los siguientes resultados se utilizan en la demostración del Lema del Paso de la Montaña.

Teorema 4 *Sean $\Phi \in C^1(X)$ y $S \subset X$, $c \in \Re$, ε , $\delta > 0$ tales que $\|\Phi'(u)\| \geq \frac{4\varepsilon}{\delta}$ para todo $u \in \Phi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$, donde $S_{2\delta} = \{u \in X : dist(u,S) \leq \delta\}$.*

Entonces existe $\eta \in C([0,1] \times X, \ X)$ tal que, para todo $u \in X$ y $t \in [0,1]$ se verifican las siguientes propiedades

i) $\eta(0,u) = u$,

ii) $\eta(t,u) = u$ si $u \notin \Phi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$,

iii) $\eta(1, \Phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \Phi^{c+\epsilon} \cap S_\delta$,

iv) $\eta(t,\cdot) : X \to X$ es un homeomorfismo.

Dem: Ver [Wi],[GC]. □

Condiciones de Palais-Smale.

Sea $\Phi \in C^1(X)$. Diremos que Φ verifica la condición de Palais-Smale y notaremos "Φ verifica (P-S)" si para toda sucesión$(u_n) \in X$ tal que

i) $(\Phi(u_n))$ es acotada en $\Re$ y

ii) $\Phi'(u_n) \to 0$,

existe una subsucesión (u_{n_k}) convergente en X.

Diremos que Φ verifica la condición de Palais-Smale a nivel c y notaremos "Φ verifica $(P-S)_c$" si se verifica que cada vez que tenemos una sucesión$(u_n) \in X$ tal que

i) $\Phi(u_n) \to c$ y

ii) $\Phi'(u_n) \to 0$,

entonces c es un valor crítico de Φ.

Teorema 5 *Sea $\Phi \in C^1(X)$ satisfaciendo (P-S), entonces si $c \in \Re$ no es un valor crítico de Φ, para todo ε suficiemtemente pequeño, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, para todo $u \in X$ y $t \in [0,1]$ se verifican las siguientes condiciones*

i) $\eta(0,u) = u$,

ii) $\eta(t,u) = u$ *si* $u \notin \Phi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon])$,

iii) $\eta(1, \Phi^{c+\varepsilon}) \subset \Phi^{c+\varepsilon}$,

iv) $\eta(t,\cdot) : X \to X$ *es un homeomorfismo.*

Dem: Ver [C], [GC]. □

Teorema 6 *"Lema del Paso de la Montaña."*

Sea $\Phi \in C^1(X)$ que satisface $(P-S)$ o $(P-S)_c$.

Si existe $e \in X$ y un número positivo r tales que $0 < r < \|e\|$, y

$$a = \max\{\Phi(0), \Phi(e)\} < inf_{\|u\|=r}\Phi(u) = b,$$

entonces

$$c = \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{t\in[0,1]} \Phi(\gamma(t)),$$

donde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X) : \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\ \}$ es un valor crítico de Φ, y $c \geq b$.

Dem: Ver [A-R], [GC]. □

1.2.4 Teorema de Rellich-Kondrachov-Morrey.

Teorema 7 *Sea $\Omega \subset \Re^n$ un dominio Lipschitz. Entonces,*

(i) si $kp < n$, el espacio $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow L^{p*}(\Omega)$, con inclusión continua, donde $p = np/(n-kp)$, y $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^q(\overline{\Omega})$, con inclusión compacta para cualquier $q < p*$;*

(ii) si $0 \leq m < k - \frac{n}{p} < m+1$, entonces el espacio $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\alpha}(\overline{\Omega})$, con inclusión continua, donde $\alpha = k - \frac{n}{p} - m$, y $W^{k,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{m,\beta}(\overline{\Omega})$, con inclusión compacta, para cualquier $0 < \beta < \alpha$.

Dem: Ver [G-T]

1.2.5 Resultados de existencia y unicidad para ecuaciones elípticas y acotaciones útiles.

Definición 4 *Sea $\Omega \subset \Re^n$ y sea $L : W^{2,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$, el operador lineal definido por*

$$Lf = \sum_{ij} a_{ij}(x)D_{ij}f + \sum_{j} b_j(x)D_jf + c(x)f$$

L se dice elíptico cuando la matriz simétrica $(a_{ij}(x))$ es definida positiva para todo $x \in \Omega$. Si $\lambda_i(x) = \lambda_1(x) \leq \lambda_2(x) \leq \cdots \leq \lambda_n(x) = \lambda_s(x)$ son los autovalores de dicha matriz en el punto $x \in \Omega$, diremos que L es estrictamente elíptico si existe λ tal que $\lambda_1(x) \geq \lambda > 0$ para todo $x \in \Omega$ o lo que es equivalente, existe $\alpha > 0$ de manera tal que

$$\sum_{ij} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2, \text{ para todo } x \in \Omega,\ \xi \in \Re^n.$$

Teorema 8 *Sea $\partial\Omega \in C^{1,1}$ y L estrictamente elíptico en Ω con coeficientes $a_{ij} \in C(\overline{\Omega})$, b_j, $c \in L^\infty(\Omega), c \leq 0$. Entonces, dada $\eta \in L^p(\Omega), \varphi \in W^{2,p}(\Omega)$, $1 < p < \infty$, el problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lf = \eta & \text{en } \Omega \\ \\ f = \varphi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

admite única solución en $W^{2,p}(\Omega)$.

<u>Dem</u>: ver [G-T], Teorema 9.15. □

Asimismo se tiene la siguiente acotación a priori:

Lema 3 *Sean Ω y L como en el Teorema 8, $1 < p < \infty$. Existe entonces una constante c independiente de f tal que*

$$\|f\|_{2,p} \leq c\|Lf\|_p$$

para toda $f \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$. En otras palabras estamos diciendo que el operador $L|_{W^{2,p}(\Omega)\cap W_0^{1,p}(\Omega)}$ es inferiormente acotado.

<u>Dem</u>: ver [G-T], Lema 9.17.

Veamos que el Teorema 8 y el Lema 3 también son válidos bajo condiciones ligeramente distintas:

Teorema 9 *El Teorema 8 sigue siendo válido si se reemplaza la condición $c \leq 0$ por alguna de las siguientes condiciones:*

(i) $\|c\|_p$ suficientemente pequeña.

(ii) $|\Omega|$ suficientemente pequeño.

Dem: En primer lugar, observemos que basta verificar el resultado (i), pues vale que $\|c\|_p \leq \|c\|_\infty |\Omega|^{1/p}$. Consideramos el operador dado por $L_1 f = \sum_{ij} a_{ij}(x) D_{ij} f + \sum_j b_j(x) D_j f$. Como L_1 satisface las hipótesis del Teorema 8, dada $\overline{f} \in W^{2,p}\Omega \subset C^1(\overline{\Omega})$ fija , $c\overline{f} \in L^p(\Omega)$ y por lo tanto el problema

$$\begin{cases} L_1 f + c\overline{f} = \eta & \text{en } \Omega \\ f = \varphi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

admite única solución $f \in W^{2,p}(\Omega)$. Esto nos permite definir un operador T $W^{2,p}(\Omega) \to W^{2,p}(\Omega)$, dado por $T(\overline{f}) = f$. Además, si $\overline{f}$, $\overline{f_1} \in W^{2,p}(\Omega)$, entonces $T(\overline{f})$, $T(\overline{f_1})$ coinciden en $\partial\Omega$, y entonces por el Lema 3 existe una constante c_0 tal que

$$\|T(\overline{f}) - T(\overline{f_1})\|_{2,p} \leq c_0 \|L_1(T(\overline{f}) - T(\overline{f_1}))\|_p = c_0 \|c(\overline{f} - \overline{f_1})\|_p \leq c_0 \|c\|_p \|\overline{f} - \overline{f_1}\|_\infty.$$

Además, por la inmersión de Sobolev vale $\|\overline{f} - \overline{f_1}\|_\infty \leq c_1 \|\overline{f} - \overline{f_1}\|_{2,p}$. Luego, si $c_0 c_1 \|c\|_p < 1$, es una contracción, y por el Teorema 10 a continuación, tiene un único punto fijo que resulta ser única solución del problema original.

Lema 4 *El Lema 3 sigue siendo válido si reemplazamos la condición $c \leq 0$ por alguna de las siguientes condiciones:*

(i) $\|c\|_p$ suficientemente pequeña.

(ii) $|\Omega|$ suficientemente pequeño.

Dem: Sean L_1 y c_0 como en el Teorema anterior. Se cumple:

$$\|Lf\|_p \geq \|Lf\|_p - \|cf\|_p \geq \frac{1}{c_0} \|c\|_p \|f\|_\infty.$$

Ademas, siendo $\|f\|_\infty \leq c_1 \|f\|_{2,p}$, el resultado vale con claridad para $c_0 c_1 \|c\|_p < 1$.

1.2.6 Teoremas de punto fijo.

Definición 5 *Dado (E, d) espacio métrico y un operador $T : E \to E$,*

(i) T es compacto si T es continuo y además $\overline{T(X)}$ es compacto para todo $X \subset E$ acotado.

(ii) T es una contracción si existe $k < 1$ tal que $d(Tx, Ty) \leq kd(x, y)$ para todo $x, y \in E$.

Teorema 10 *(Banach)*

Sea (E, d) un espacio métrico completo, y sea $T : E \to E$ una contracción. Entonces T tiene un único punto fijo en E.

Teorema 11 *(Schauder)*

Sea C un convexo cerrado contenido en un espacio de Banach, y $T : C \to C$ un operador continuo tal que $\overline{T(C)}$ es compacto. Entonces T tiene al menos un punto fijo en C.

Observación 1 *En el teorema anterior, si C es acotado la hipótesis equivale a que T sea compacto. Esto no ocurre en general: por ejemplo, cualquier traslación en $C = \Re^n$ es un operador compacto sin puntos fijos.*

Capítulo 2

En este capítulo estudiaremos la existencia de soluciones débiles de la ecuación de curvatura media prescripta para superficies no paramétricas. Daremos condiciones sobre el dato de contorno y sobre la curvatura media prescripta, h, con el objetivo de encontrar soluciones al problema utilizando métodos variacionales.

Recordemos que la ecuación de curvatura media prescripta para la superficie dada por $X : \Omega \longrightarrow \Re^3$, $X(u,v) = (u, v, f(u,v))$ se representa con la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\text{(NP)} \begin{cases} (1+f_v^2)f_{uu} + (1+f_u^2)f_{vv} - 2f_u f_v f_{uv} = 2h(u,v,f)\left(1+|\nabla f|^2\right)^{\frac{3}{2}} & \text{en } \Omega \\ f = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\Re^2$, $h : \overline{\Omega} \times \Re \longrightarrow \Re$ es continua y $g \in H^1(\Omega)$.

Decimos que $f \in H^1(\Omega)$ es una solución débil de (NP) si $f \in g + H_0^1(\Omega)$ y para toda $\varphi \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int_\Omega (1+|\nabla f|^2)^{-1/2} \nabla f \cdot \nabla\varphi + 2h(u,v,f)\varphi \, dudv \;=\; 0$$

Es sabido que para el caso paramétrico, el problema de Plateau admite soluciones débiles que pueden ser obtenidas como puntos críticos de una funcional. (Ver [H], [St1], [LD-M1], [LD-M2]).

El caso no paramétrico fue estudiado para $h = h(x,y)$ (y en general $h = h(x_1, \cdots, x_n)$ para hipersuperficies en $\Re^{n+1}$) por Gilbarg, Trudinger, Simon, Serrin, entre otros (ver [G-T]). Cabe remarcar que las soluciones obtenidas en [G-T] son soluciones clásicas. En este capítulo encontraremos soluciones débiles, utilizando métodos variacionales.

Probaremos que para cada h, existe una funcional asociada, y bajo ciertas condiciones sobre h y g encontraremos un mínimo global de esta funcional en un subconjunto convexo de $H^1(\Omega)$, el cual proveerá de una solución débil en $H^1(\Omega)$, el espacio de Sobolev habitual (ver [A]).

2.1 El problema variacional asociado a la ecuación.

Dada una función $f \in C^2(\Omega)$, su gráfico genera una superficie en $\Re^3$, cuya parametrización es la siguiente :

$$X(u,v) = (u, v, f(u,v)).$$

Luego la curvatura media para cada punto de la superficie está dada por la fórmula

$$h(u,v,f)=\frac{1}{2}\frac{Ef_{vv}-2Ff_{uv}+Gf_{uu}}{(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{3}{2}}}$$

donde E, F y G son los coeficientes de la primera forma fundamental (ver [Do]).

Para h prescripta pueden hallarse soluciones débiles de (NP) como puntos críticos de la siguiente funcional

$$J_h(f)=\int_{\Omega}(1+|\nabla f|^2)^{1/2}+H(u,v,f)\;dudv$$

como se demuestra en la siguiente proposición:

Proposición 1 *Sea $J_h : H^1(\Omega) \longrightarrow \Re$ la funcional definida anteriormente, donde $H(u,v,z)=\int_0^z 2h(u,v,t)\;dt$. Entonces (NP) es la ecuación de Euler Lagrange para dicha funcional.*

Dem: Toda $\varphi \in C_0^1(\Omega)$ se anula en $\partial\Omega$, utilizando el Teorema de Green se obtiene:

$$dJ_h(f)(\varphi)=2\int_{\Omega}\left(\frac{1}{2}\frac{Ef_{vv}-2Ff_{uv}+Gf_{uu}}{(1+f_u^2+f_v^2)^{\frac{3}{2}}}-h(u,v,f)\right)\varphi\;dudv.$$

□

Observación 2 *Si $f \in T = g + H_0^1(\Omega)$ es un punto crítico de J_h, entonces f es una solución débil de (NP).*

2.2 Comportamiento de la funcional J_h.

Estudiaremos ahora el comportamiento de la funcional J_h restringida a T. Para mayor claridad escribiremos $J_h(f) = A(f) + B(f)$, con

$$A(f)=\int_{\Omega}(1+|\nabla f|^2)^{1/2}dudv, \qquad B(f)=\int_{\Omega}H(u,v,f)\;dudv.$$

Es claro que las funcionales A y B están bien definidas. Los siguientes lemas muestran propiedades útiles de dichas funcionales.

Lema 5 *La funcional $A : T \longrightarrow \Re$ resulta continua y convexa.*

Dem: La continuidad de la funcional puede probarse a través de un cálculo simple:

$$| A(f) - A(f_0) |=| \int_\Omega \frac{| \nabla f |^2 - | \nabla f_0 |^2}{\sqrt{1+ | \nabla f |^2} + \sqrt{1+ | \nabla f_0 |^2}} dudv |\leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \int_\Omega | \nabla f |^2 - | \nabla f_0 |^2 dudv = \frac{1}{2} \int_\Omega |< \nabla(f - f_0), \nabla(f + f_0) >| dudv \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|\nabla(f - f_0)\|_{L_2} \|\nabla(f + f_0)\|_{L_2}$$

lo cual prueba la continuidad.

En cuanto a la convexidad, basta probar que para $a, b \geq 0$ tales que $a + b = 1$ se verifica la siguiente desigualdad:

$$\sqrt{1 + |\nabla(af + bf_0)|^2} \leq a\sqrt{1 + |\nabla f|^2} + b\sqrt{1 + |\nabla f_0|^2}.$$

Elevando ambos miembros de la desigualdad al cuadrado, el problema se reduce a probar:

$$1 + 2ab < \nabla f, \nabla f_0 > \leq \ a^2 + b^2 + 2ab\sqrt{1+ | \nabla f |^2}\sqrt{1+ | \nabla f_0 |^2}.$$

Dado que $a^2 + b^2 = 1 - 2ab$, debemos probar la siguiente desigualdad:

$$< \nabla f, \nabla f_0 > +1 \leq \sqrt{1+ | \nabla f |^2}\sqrt{1+ | \nabla f_0 |^2}$$

Si el primer miembro de la desigualdad es negativo, la desigualdad queda trivialmente probada. En cambio si el primer miembro es positivo, entonces elevando nuevamente ambos miembros de la desigualdad al cuadrado, obtenemos:

$$(< \nabla f, \nabla f_0 >)^2 \leq| \nabla f |^2 + | \nabla f_0 |^2 -2 < \nabla f, \nabla f_0 > +(| \nabla f || \nabla f_0 |)^2$$

lo cual es cierto ya que

$$|< \nabla f, \nabla f_0 >|\leq| \nabla f || \nabla f_0 |$$

y

$$| \nabla f |^2 + | \nabla f_0 |^2 -2 < \nabla f, \nabla f_0 >=| \nabla(f - f_0) |^2$$

□

Observación 3 *Como A es continua y convexa, se sigue que A es débilmente semicontinua inferiormente en T.*

Lema 6 *Si h es una función acotada, entonces la funcional B resulta débilmente continua inferiormente en T.*

Dem: Como h es acotada, tenemos la siguiente desigualdad:

$$|H(u,v,z)| \leq a + b|z|.$$

La topología débil de $T \subset H^1$ es secuencial, entonces para probar la débil continudad de J_h bastará mostrar que de cada sucesión que verifique $f_n \to f$ débilmente se puede extraer una subsucesión tal que $J_H(f_{n_k}) \to J_H(f)$.

Si $f_n \to f$ débilmente en $T \subset H^1$ entonces $f_n - g \to f - g$ débilmente en H_0^1. Recordando la inmersión compacta $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^1(\Omega)$, sabemos que podemos obtener una subsucesión de manera que $f_{n_k} - g \to f - g$ en L^1, es decir $f_{n_k} \to f$ en L^1.

Por otro lado sabemos que H es una N-función (ver Capítulo 1, Teorema 3) y acepta una acotación de estilo

$$|H(u,v,z)| \leq a + b|z|,$$

con lo cual podemos concluir que N_H, el operador de Nemitski asociado a H, verifica:

$$N_H : L^\alpha \to L^\alpha \text{ continuo para todo } \alpha \in [1,+\infty).$$

En particular $N_H : L^1 \to L^1$, con lo cual tenemos:

$$\|N_H(f_{n_k}) - N_H(f)\|_1 \to 0.$$

Es decir

$$\int_\Omega |H(u,v,f_{n_k}(u,v)) - H(u,v,f(u,v))| \, dudv \to 0,$$

lo cual prueba que $|B(f_{n_k}) - B(f)| \to 0$. □

Observación 4 *Como consecuencia de los lemas anteriores concluimos que si h es acotada, la funcional J_h resulta débilmente semicontinua inferiormente sobre T.*

2.3 Búsqueda de soluciones débiles como puntos críticos de J_h.

Asumamos que $g \in W^{1,\infty}$, y consideremos para cada $k > 0$ los siguientes subconjuntos de T:

$$M_k = \{f \in T : \quad \|\nabla(f-g)\|_\infty < k\},$$
$$\overline{M}_k = \{f \in T : \quad \|\nabla(f-g)\|_\infty \leq k\}.$$

Observación 5 *(i)* M_k *es no vacío (ya que* $g \in M_k$*) y convexo, mientras que* $\overline{M}_K$ *es no vacío, convexo y cerrado en* T.

(ii) $\overline{M}_k$ *coincide con la clausura de* M_k*, pues dado* $f \in \overline{M}_k$*, podemos considerar la siguiente sucesión* $\{f_n = f - \frac{1}{n}(f-g) : n \in N\}$ *y* $f_n \in M_k$ *para todo* $n \in M$*, dado que*

$$\|\nabla(f - \frac{1}{n}(f-g) - g)\|_\infty = \|\nabla(f - g - \frac{1}{n}(f-g))\|_\infty =$$

$$= \|\nabla(1 - \frac{1}{n})(f-g)\|_\infty = \frac{1}{n}\|\nabla(f-g)\|_\infty < (\frac{1}{n})k < k.$$

Por otro lado, f_n *converge a* f *en* $H^1(\Omega)$ *ya que*

$$\|f - f_n\|_{H^1} = \|f - f - \frac{1}{n}(f-g)\|_{H^1} = \frac{1}{n}\|(f-g)\|_{H^1} \to 0.$$

Si ahora tomamos f *en la clausura de* M_k*, existe* $\{f_n\}_{n\in N} \subset M_k$ *tal que* $f_n \to f$ *en* $H^1(\Omega)$ *y entonces* $\nabla f_n \to \nabla f$ *en* L^2*. Podemos entonces extraer una subsucesión* ∇f_{n_j} *de manera que* $\nabla f_{n_j} \to \nabla f$ *para casi todo punto de* Ω*. Luego para casi todo* $x \in \Omega$ *tenemos que* $|\nabla(f-g)(x)| \leq |\nabla(f - f_{n_j})(x)| + |\nabla(f_{n_j} - g)(x)|$*, haciendo tender* j *a infinito y recordando que* $\|\nabla(f_{n_j} - g)\|_\infty \leq k$ *para todo* j*, probamos que* $f \in \overline{M}_k$.

(iii) $\overline{M}_k$ *es acotado en* T*, puesto que*

$$\|f\|_{H^1} \leq \|f-g\|_{H^1} + \|g\|_{H^1} \leq C\|\nabla(f-g)\|_{L^2} + \|g\|_{H^1} \leq$$

$$\leq C|\Omega|\|\nabla(f-g)\|_\infty + \|g\|_{H^1} \leq C|\Omega|k + \|g\|_{H^1}.$$

Observación 6 *Si* $g \in W^{1,\infty}(\Omega)$*, la hipótesis* $\|h\|_\infty < \infty$ *no será necesaria, puesto que para cada* $f \in \overline{M}_k$ *se tiene*

$$\|f\|_\infty \leq \|f-g\|_\infty + \|g\|_\infty \leq c_1\|f-g\|_{1,p} + \|g\|_\infty \leq$$

$$\leq c_1c_\Omega\|\nabla(f-g)\|_\infty + \|g\|_\infty \leq c_1c_\Omega k + \|g\|_\infty = C,$$

donde la segunda desigualdad es válida para $p > 2$ *debido al Teorema 7, Capítulo 1, y la tercera desigualdad se debe al Teorema de Poincaré.*

Luego, para todo $x \in \overline{\Omega}$ *tenemos* $-C \leq f(x) \leq C$*, con lo cual* h *queda restringida al compacto* $\overline{\Omega} \times [-C, C]$.

Hasta ahora hemos probado que J_h es una funcional débilmente semicontinua inferiormente y que $\overline{M}_k$ es un débil compacto de T, con lo cual podemos concluir que existe $f_0 \in \overline{M}_k$ verificando $J_h(f_0) = inf\{J_h(f) : f \in \overline{M}_k\}$ (ver Teorema 1 del

Capítulo 1). Bajo estas condiciones no podemos asegurar que f_0 sea una solución débil de (NP), ya que J_h no crece necesariamente sobre todas las direcciones $f_0 + \varphi$ con $\varphi \in C_0^\infty$. Sólo podemos afirmar que crecerá en las direcciones que apuntan hacia el interior del compacto. Esta idea nos lleva a la definición de declive de una funcional con respecto a un compacto.

Definición 6 *Llamaremos $\rho(f_0, \overline{M}_k)$ al declive de J_h con respecto al compacto $\overline{M}_k$ definido por:*

$$\rho(f_0, \overline{M}_k) = \sup\{dJ_h(f_0)(f_0 - f); f \in \overline{M}_k\}.$$

(Ver [St1]).

Tenemos entonces los siguientes resultados:

Lema 7 *Si $f_0 \in \overline{M}_k$ verifica $J_h(f_0) = \inf\{J_h(f) : f \in \overline{M}_k\}$ entonces $\rho(f_0, \overline{M}_k) = 0$.*

<u>Dem</u>:

$$dJ_h(f_0)(f - f_0) = \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{J_h(f_0 + \varepsilon(f - f_0)) - J_h(f_0)}{\varepsilon} =$$

$$= \lim_{\varepsilon \longrightarrow 0} \frac{J_h((1-\varepsilon)f_0 + \varepsilon f) - J_h(f_0)}{\varepsilon}.$$

Cuando $0 < \varepsilon < 1$ tenemos que $(1-\varepsilon)f_0 + \varepsilon f \in \overline{M}_k$ y entonces $dJ_h(f_0)(f_0 - f) \leq 0$ para todo $f \in \overline{M}_k$. Como $dJ_h(f_0)(f_0 - f_0) = 0$, se deduce que $\rho(f_0, \overline{M}_k) = 0$. □

Observación 7 *Recordemos que al ser J_h débilmente semicontinua inferiormente y $\overline{M}_k$ un subconjunto débilmente compacto de T, J_h alcanza un mínimo f_0 en $\overline{M}_k$. Por el Lema 7 se tiene $\rho(f_0, \overline{M}_k) = 0$.*

Si f_0 tiene declive nulo, es decir $\rho(f_0, \overline{M}_k) = 0$, diremos que f_0 es un ρ-punto crítico. El siguiente Teorema da condiciones suficientes para asegurar que si f_0 es un ρ-punto crítico, entonces f_0 es un punto crítico de J_h.

Teorema 12 *Sea $f_0 \in \overline{M}_k$ tal que $\rho(f_0, \overline{M}_k) = 0$, y asumamos que se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

(i) $dJ_h(f_0)(f_0 - g) \geq 0$, ó

(ii) $\|\nabla(f_0 - g)\|_\infty < k$, es decir $f_0 \in M_k$,

entonces $dJ_h(f_0) = 0$.

Dem: Como $\rho(f_0, \overline{M}_k) = 0$, tenemos que $dJ_h(f_0)(f_0 - f) \leq 0$ y entonces $dJ_h(f_0)(f_0 - g) \leq dJ_h(f_0)(f - g)$ para cualquier $f \in \overline{M}_k$. Probaremos que $dJ_h(f_0)(\varphi) = 0$ para $\varphi \in C_0^1$. Sea $\tilde{\varphi} = \frac{k\varphi}{2\|\nabla\varphi\|_\infty}$, entonces $\pm\tilde{\varphi} + g \in \overline{M}_k$, y $dJ_h(f_0)(f_0 - g) \leq \pm dJ_h(f_0)(\tilde{\varphi})$. Supongamos que $dJ_h(f_0)(\tilde{\varphi}) \neq 0$, entonces $dJ_h(f_0)(f_0 - g) < 0$. Si se verifica (i) obtenemos inmediatamente una contradicción. Por otro lado, si se verifica (ii) obtenemos un $r > 1$ tal que $g + r(f_0 - g) \in \overline{M}_k$, y en consecuencia $dJ_h(f_0)(f_0 - g) \leq r dJ_h(f_0)(f_0 - g)$, lo cuál resulta una contradicción. □

Luego, para $f_0 \in M_k$ verificando $J(f_0) = \min_{M_k}\{J_h(f)\}$, se cumple la condición (i) y por lo tanto f_0 resulta una solución débil.

Ejemplos

Si el dato de borde es constante, es decir $g \equiv c$, y h verifica alguna de las siguientes condiciones:

a) $|h(u, v, z)| \leq a(z - c)_+$ para todo $(u, v) \in \Omega$, $z \in \Re^3$, para alguna constante a verificando $a \leq \frac{1}{2c_\Omega^2(1+k^2)}$,

b) $\int_\Omega h(u, v, f)(f - c)\, dudv \geq 0$ para todo $f \in \overline{M}_k$. (Como caso particular podemos tomar $h(u, v, z) = a(z - c)$ para cualquier $a \geq 0$),

c) $h(u, v, z) = -a(z - c)$ para algún $a > 0$ verificando $a \leq \frac{1}{2k^2}$,

entonces $dJ_h(f)(f - g) \geq 0$ para todo $f \in \overline{M}_k$.

Esto se debe a que

$$dJ_h(f)(f - g) = \int_\Omega \frac{\nabla f \nabla(f - g)}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} + 2h(u, v, f)(f - g)\, dudv =$$

$$= \int_\Omega \frac{|\nabla f|^2}{\sqrt{1 + |\nabla f|^2}} + 2h(u, v, f)(f - c)\, dudv \geq$$

$$\geq \int_\Omega \frac{|\nabla f|^2}{1 + |\nabla f|^2} + 2h(u, v, f)(f - c)\, dudv.$$

En el caso de verificarse a) tenemos:

$$\int_\Omega \frac{|\nabla f|^2}{1 + |\nabla f|^2} + 2h(u, v, f)(f - c)\, dudv \geq \int_\Omega \frac{|\nabla f|^2}{1 + |\nabla f|^2} - 2|h(u, v, f)||(f - c)|\, dudv \geq$$

$$\geq \frac{1}{1 + k^2} \int_\Omega |\nabla f|^2\, dudv - 2\, a \int_\Omega (f - c)^2\, dudv = \frac{1}{1 + k^2} \|\nabla f\|_2^2 - 2\, a\|f - c\|_2^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{1 + k^2} \|\nabla f\|_2^2 - 2\, a\, c_\Omega^2 \|\nabla f\|_2^2 = (\frac{1}{1 + k^2} - 2\, a\, c_\Omega^2)\|\nabla f\|_2^2 \geq 0.$$

En el caso de verificarse b) tenemos:

$$\int_\Omega \frac{|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2} + \ 2h(u,v,f)(f-c)\ dudv =$$

$$= \int_\Omega \frac{|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2}\ dudv + \int_\Omega 2h(u,v,f)(f-c)\ dudv \geq 0.$$

En el caso de verificarse c) tenemos:

$$\int_\Omega \frac{|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2} + \ 2h(u,v,f)(f-c)\ dudv = \int_\Omega \frac{|\nabla f|^2}{1+|\nabla f|^2} - 2\ a\ (f-c)^2\ dudv \geq$$

$$\geq \frac{1}{1+k^2}\ \|\nabla f\|_2^2 - 2\ a\ c_\Omega^2\|\nabla f\|_2^2 = (\frac{1}{1+k^2} - 2\ a\ c_\Omega^2)\|\nabla f\|_2^2 \geq 0.$$

□

Observación 8 *Los ejemplos a), b), c) siguen siendo válidos si se reemplaza la condición $g \equiv c$ por la condición*

$$\int_\Omega \frac{\nabla(f-g)\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} dudv \geq 0$$

para toda $f \in \overline{M}_k$. Notemos que las dos condiciones terminan siendo equivalentes. Para esto, fijemos $\varphi \in C_0^1(\overline{\Omega})$, con lo cual para todo $-\delta < t < \delta$, resulta $g + t\varphi \in \overline{M}_k$. Definamos

$$u(t) = \int_\Omega \frac{\nabla t\varphi \nabla g}{\sqrt{1+|\nabla(g+t\varphi)|^2}} dudv = tv(t),$$

donde

$$v(t) = \int_\Omega \frac{\nabla\varphi\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla(g+t\varphi)|^2}} dudv.$$

Sabemos que $u(t) \geq 0$ para todo $-\delta < t < \delta$ y $u(0) = 0$, con lo cual $t = 0$ es mínimo de $u(t)$ y entonces $u'(0) = 0$ y $u''(0) \geq 0$. Por otro lado, $u''(t) = 2v'(t) + tv''(t)$ y entonces $u''(0) = 2v'(0)$. Calculando $v'(t)$, obtenemos

$$v'(0) = -\int_\Omega \frac{(\nabla\varphi\nabla g)^2}{(1+|\nabla g|^2)^{3/2}} dudv < 0,$$

si $\nabla g \not\equiv 0$. □

Corolario 1 *Si la condición $dJ_h(f)(f-g) \geq 0$ se verifica para toda $f \in \overline{M}_k$, entonces g resulta una solución débil de (NP) .*

Dem: Consideremos una sucesión $(k_n)_{n\in N}$ verificando $k_n \leq k$ y $k_n \to 0$. Como J_h alcanza un mínimo en cada $\overline{M}_{k_n}$, sabemos que existe $f_n \in \overline{M}_{k_n}$ tal que $\rho(f_n, \overline{M}_{k_n}) = 0$. Como $\overline{M}_{k_n} \subset \overline{M}_k$, la condición i) del Teorema 12 se verifica y entonces $dJ_h(f_n) = 0$. Finalmente, dado que $f_n \in \overline{M}_{k_n}$, tenemos que $\|\nabla(f_n - g)\|_\infty \leq k_n \to 0$ y que $f_n - g \in H_0^1$. Entonces es claro que $f_n \to g$ en $W^{1,\infty}$. Veamos que $dJ_h(f_n) \to dJ_h(g)$, es decir estudiemos:

$$\lim_{n\to\infty} \|dJ_h(f_n) - dJ_h(g)\|_{(H_0^1)^*} = \lim_{n\to\infty} \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}\leq 1} |dJ_h(f_n)(\varphi) - dJ_h(g)(\varphi)| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}\leq 1} \int_\Omega < \frac{\nabla f_n}{\sqrt{1+|\nabla f_n|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}, \nabla\varphi > +(h(f_n) - h(g))\varphi \, dudv \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}\leq 1} \int_\Omega \left|\frac{\nabla f_n}{\sqrt{1+|\nabla f_n|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}\right||\nabla\varphi| + |h(f_n) - h(g)||\varphi| \, dudv \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{\|\varphi\|_{H_0^1}\leq 1} \Big(\int_\Omega \left|\frac{\nabla f_n}{\sqrt{1+|\nabla f_n|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}\right|^2 dudv\Big)^{\frac{1}{2}} \|\nabla\varphi\|_{L^2} +$$

$$+\Big(\int_\Omega |h(f_n) - h(g)|^2 dudv\Big)^{\frac{1}{2}} \|\varphi\|_{L^2} \leq$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \Big(\int_\Omega \left|\frac{\nabla f_n}{\sqrt{1+|\nabla f_n|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+|\nabla g|^2}}\right|^2 dudv\Big)^{\frac{1}{2}} + \lim_{n\to\infty} \Big(\int_\Omega |h(f_n) - h(g)|^2 dudv\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Recordemos que $f_n \to g$ en $W^{1,\infty}$ luego $f_n \to g$ y $\nabla f_n \to \nabla g$ puntualmente. Gracias a la continuidad de h tenemos que $h(f_n) \to h(g)$. También sabemos que

$$\left|\frac{\nabla f_n}{\sqrt{1+|\nabla f_n|^2}} - \frac{\nabla g}{\sqrt{1+||g|^2}}\right| \leq \|\nabla f_n\|_\infty + \|\nabla g\|_\infty \leq \; k \,+\, 2\;\|\nabla g\|_\infty.$$

y que $|h(f_n) - h(g)| \leq 2M$, pues h es una función acotada. Luego podemos aplicar el Teorema de Convergencia Mayorada de Lebesgue para los dos límites, de lo cual se concluye que $dJ_h(g) = 0$. □

Observación 9 *En realidad se puede demostrar que en las condiciones del Corolario 1, g resulta un mínimo global de la funcional J_h en $\overline{M}_k$.*

Para ver esto, definamos $\varphi(t) = J_h(tf+(1-t)g)$, luego $\varphi'(t) = dJ_h(tf+(1-t)g)(f-g)$. Como $0 \leq dJ_h(tf+(1-t)g)(tf+(1-t)g-g) = tdJ_h(tf+(-t)g)(f-g)$, obtenemos entonces que $J_h(f) - J_h(g) = \varphi(1) - \varphi(0) = \varphi'(c) \geq 0$. □

Capítulo 3

En este Capítulo estudiaremos la multiplicidad de soluciones de (NP) y la regularidad de las mismas.

3.1 Soluciones múltiples.

Para cada $k = (k_1, k_2)$ consideremos el conjunto

$$\overline{N_k} = \{f \in \overline{M}_{k_1} \cap H^2 : \|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\|_\infty \leq k_2\}.$$

$\overline{N}_k$ resulta un subconjunto no vacío, acotado, y convexo de T, y la siguiente Proposición muestra que $\overline{N}_k$ resulta cerrado en T.

Proposición 2 *$\overline{N}_k$ es cerrado bajo la topología H^1.*

<u>Dem</u>: Para ver que $\overline{N}_k$ resulta cerrado, tomemos $f_n \to f$ en H^1, $f_n \in \overline{N}_k$. Es claro que $f \in \overline{M}_{k_1}$, veamos ahora que $f \in H^2(\Omega)$. Como $\{\partial_{11} f_n\}$ es acotada en L^2, entonces hay una subsucesión (llamémosla nuevamente $\partial_{11} f_n$) tal que $\partial_{11} f_n \to f_{11}$ débilmente en L^2. Luego, para $\varphi \in C_0^\infty$ vale que $\int \partial_{11} f_n \cdot \varphi \to \int f_{11} \cdot \varphi$. Por otro lado, $\int \partial_{11} u_n \cdot \varphi = \int \partial_{11}\varphi \cdot f_n \to \int \partial_{11}\varphi \cdot f$. Por definición de derivada débil, se ve que $\partial_{11} f = f_{11}$. Además, tenemos la siguiente acotación :

$$\|\partial_{11} f_n\|_p = \leq k_2 |\Omega|^{1/p}$$

pues

$$\int_\Omega |\partial_{11} f_n|^p \leq \int_\Omega \|\partial_{11} f_n\|_\infty^p \leq k_2^p\ |\Omega|.$$

Sabemos que $\partial_{11} f_n \to f_{11}$ débilmente en $L^2(\Omega)$, luego $\partial_{11} f_n \to f_{11}$ débilmente en L^p para todo $p > 2$, entonces para cada p tenemos $\|f_{11}\|_p \leq \underline{lim}\ \|\partial_{11} f_n\|_p \leq k_2 |\Omega|^{1/p}$. Sabemos además que $\|f_{11}\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f_{11}\|_p \leq \underline{lim}\ k_2 |\Omega|^{1/p} = k_2$. Para las restantes derivadas se procede en forma análoga. □

Observación 10 *$\overline{N}_k$ es débilmente compacto.*

Daremos ahora el siguiente Teorema que es una variante del Lema del Paso de la Montaña:

Teorema 13 *Sea $f_0 \in \overline{N}_k$ un mínimo local de J_h y asumamos que $J_h(f_1) < J_h(f_0)$ para algún $f_1 \in \overline{N}_k$. Sea*

$$c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} J_h(\gamma(t))$$

donde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], \overline{N}_k) : \gamma(0) = f_0, \gamma(1) = f_1\}$. Existe entonces $f \in \overline{N}_k$ tal que $J_h(f) = c$ y $\rho(f, \overline{N}_k) = 0$. (Cabe remarcar que f no es un mínimo local de J_h. Una f en esas condiciones se dirá un punto crítico inestable.)

Dem: Por los Lemas 8, 9 y 10 a continuación, se verifican las condiciones del Teorema 3.3 del Capítulo IV en [St1]. □

Lema 8 *La funcional J_h es $C^1(\overline{N}_k)$.*

Dem: Sean $f, f_0 \in \overline{N}_k$. Entonces,

$$|dJ_h(f)(\varphi) - dJ_h(f_0)(\varphi)| \leq \|\varphi\|_{H_0^1} \left(\overbrace{\left\| \frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla f_0}{\sqrt{1+|\nabla f_0|^2}} \right\|_2}^{(I)} + \overbrace{\|N_h(f_0) - N_h(f)\|_2}^{(II)} \right),$$

donde N_h es el operador de Netmiski asociado a h (ver Capítulo 1, Teorema 3). Para (I), obtenemos la siguiente estimación

$$\|\frac{\nabla f}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}} - \frac{\nabla f_0}{\sqrt{1+|\nabla f_0|^2}}\|_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\sqrt{1+|\nabla f_0|^2}\,\nabla f \; - \; \sqrt{1+|\nabla f|^2}\nabla f_0\|_2 \leq$$

$$\leq \frac{1}{2}\|\sqrt{1+|\nabla f_0|^2}(\nabla f - \nabla f_0)\|_2 + \|(\sqrt{1+|\nabla f_0|^2} - \sqrt{1+|\nabla f|^2})\nabla f_0\|_2 \leq$$

$$\leq C_1\|f_0 - f\|_{H_0^1} + C_2\|(|\nabla f_0|^2 - |\nabla f|^2)\nabla f\|_2 =$$

$$= C_1\|f_0 - f\|_{H_0^1} + C_2(\int_\Omega |<\nabla(f_0 - f), \nabla(f_0 + f)>|^2 |\nabla f|^2 dudv)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C_1\|f_0 - f\|_{H_0^1} + C_2(\int_\Omega |\nabla(f_0 - f)|^2 |\nabla(f_0 + f)|^2 |\nabla f|^2 dudv)^{\frac{1}{2}} \leq$$

$$\leq C_1\|f_0 - f\|_{H_0^1} + C_2(\int_\Omega |\nabla(f_0 - f)|^2 dudv)^{\frac{1}{2}} \leq C_3\|f_0 - f\|_{H_0^1}.$$

Por otro lado, para (II), $N_h : L^2(\Omega) \longrightarrow L^2(\Omega)$ resulta continuo, lo cual demuestra el resultado. □

Lema 9 *El declive ρ es H^1-continuo.*

Dem: Sea $f_n \in \overline{N}_k$ tal que $f_n \longrightarrow f_0$ en H_0^1. Para $\epsilon > 0$ tomamos $g_n \in \overline{N}_k$ tal que $\rho(f_n, \overline{N}_k) - \frac{\epsilon}{2} < dJ_h(f_n)(f_n - g_n)$. Entonces,

$$\rho(f_n, \overline{N}_k) - \rho(f_0, \overline{N}_k) \leq dJ_h(f_n)(f_n - g_n) + \frac{\epsilon}{2} - dJ_h(f_0)(f_0 - g_n) \leq$$

$$\leq \|dJ_h(f_n)\|_{(H_0^1)^*} \|(f_n - f_0)\|_{H_0^1} + \|dJ_h(f_n) - dJ_h(f_0)\|_{(H_0^1)^*} \|(f_0 - g_n)\|_{H_0^1} + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon$$

para $n \geq n_0$. Procedemos en forma analoga con $\rho(f_0, \overline{N}_k) - \rho(f_n, \overline{N}_k)$ y concluimos que $\rho(f_n, \overline{N}_k) \longrightarrow \rho(f_0, \overline{N}_k)$. □

Lema 10 (Condición de Palais Smale)

Sea $(f_n)_{n\in N} \subset \overline{N}_k$ tal que $\lim_{n\longrightarrow\infty} \rho(f_n, \overline{N}_k) = 0$. Entonces $(f_n)_{n\in N}$ tiene una subsucesión convergente en $H_0^1(\Omega)$.

Dem: Como $f_n \in \overline{N}_k$ sabemos que existe $f \in \overline{N}_k$ tal que $f_n \rightarrow f$ débilmente. Sea $\{\Psi_n\}_{n\in N} \subset H_0^1(\Omega)$, definida por $\Psi_n = f_n - f$. Para cada $n \in N$ se tiene:

$$dJ_h(f_n)(\Psi_n) = \int_\Omega \frac{\nabla f_n}{\sqrt{1 + |\nabla f_n|^2}} \nabla \Psi_n + 2h(u, v, f_n)\Psi_n \, dudv =$$

$$= \int_\Omega \frac{1}{\sqrt{1 + |\nabla f_n|^2}} |\nabla \Psi_n|^2 \, dudv + \int_\Omega \frac{\nabla \Psi_n}{\sqrt{1 + |\nabla f_n|^2}} \nabla f \, dudv + \int_\Omega 2h(u, v, f_n)\Psi_n \, dudv.$$

Luego, existe alguna constante c para la cual

$$c \|\nabla \Psi_n\|_2^2 \leq \rho(f_n, \overline{N}_k) - \int_\Omega \frac{\nabla \Psi_n}{\sqrt{1 + |\nabla f_n|^2}} \nabla f \, dudv - \int_\Omega 2h(u, v, f_n)\Psi_n \, dudv.$$

Sabemos que $\Psi_n \rightarrow 0$ débilmente en H^1, y que $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q$, inmersión compacta, para todo $q \geq 1$. En particular, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2$, inmersión compacta. Luego, $\{\Psi_n\}_{n\in N}$ admite una subsucesión convergente en L^2, que denotamos nuevamente $\{\Psi_n\}_{n\in N}$. Esto es, $\Psi_n \longrightarrow 0$ en $L^2(\Omega)$, y entonces

$$\left| \int_\Omega 2h(u, v, f_n)\Psi_n \, dudv \right| \leq 2 \|h\|_\infty |\Omega|^{\frac{1}{2}} \|\Psi_n\|_2 \longrightarrow 0$$

y

$$\left| \int_\Omega \frac{\nabla \Psi_n}{\sqrt{1 + |\nabla f_n|^2}} \nabla f \, dudv \right| =$$

$$= \left| - \int_\Omega \frac{\Delta f}{\sqrt{1+|\nabla f_n|^2}} \Psi_n \; dudv - \int_\Omega \Psi_n \nabla \left(1+|\nabla f_n|^2\right)^{-\frac{1}{2}} \nabla f \; dudv \right| \leq$$

$$\leq \|\Delta f\|_2 \|\Psi_n\|_2 + \|\nabla f_n\|_\infty \|\nabla f\|_\infty \left\|D^2 f_n\right\|_2 \|\Psi_n\|_2 \longrightarrow 0.$$

□

3.2 Ejemplo.

Mostraremos ahora con este ejemplo que (NP) puede admitir por lo menos tres ρ-puntos críticos en N_k:

Sea g constante, $g \equiv c$, y consideremos $\Omega = B_R{}^2$ y $h = -a(z-c)$, donde a es una constante positiva que verifica $a\, c_R^2 < \frac{1}{2}$, siendo c_R la constante de Poincare asociada a B_R. Veremos entonces que para $k_1 \leq \sqrt{\frac{1}{ac_R^2} - 2}$, $g \equiv c$ resulta un mínimo de J_h en $\overline{M}_{k_1}$ y por lo tanto un mínimo local en M_k para cualquier $k \geq k_1$.

Estimaremos $J_h(f) - J_h(g)$ para una f arbitraria de $\overline{M}_{k_1}$. Recordemos que $J_h(f) = \int\limits_{B_R} \sqrt{1+|\nabla f|^2} + H(u,v,f) \; dudv$ donde $H(u,v,z)$ verifica $\frac{\partial}{\partial z} H(u,v,z) = 2h(u,v,z)$ y por lo tanto $H(u,v,z) = -a(z-c)^2$.

Se tiene entonces:

$$J_h(f) - J_h(g) = \int\limits_{B_R} \sqrt{1+|\nabla f|^2} - a(f-c)^2 \; - \; 1 \; dudv =$$

$$\int\limits_{B_R} \frac{|\nabla f|^2}{1+\sqrt{1+|\nabla f|^2}} \; - a(f-c)^2 \; dudv \geq \int\limits_{B_R} \frac{|\nabla f|^2}{2+|\nabla f|^2} - a(f-c)^2 \; dudv \geq$$

$$\int\limits_{B_R} \frac{|\nabla f|^2}{2+k_1^2} \; - a(f-c)^2 \; dudv = \frac{1}{2+k_1^2} \int\limits_{B_R} |\nabla f|^2 \; - \; a \int\limits_{B_R} (f-c)^2 \; dudv =$$

$$\frac{1}{2+k_1^2} \|\nabla f\|_2^2 \; - \; a\, \|f-c\|_2^2 \geq \frac{1}{2+k_1^2} \|\nabla f\|_2^2 \; - \; a\, c_R^2 \, \|\nabla f\|_2^2 =$$

$$\left(\frac{1}{2+k_1^2} \; - \; a\, c_R^2\right) \|\nabla f\|_2^2 \geq 0$$

luego $J_h(f) \geq J_h(g)$ para toda $f \in \overline{M}_{k_1}$.

Para estar bajo las condiciones del Teorema 13 bastaría encontrar un R adecuado de manera de poder elegir un $k > k_1$ y $f_R \in \overline{M}_k$ tal que $J_h(f_R) < J_h(g)$.

[2] $B_R = \{(u,v) \in \Re^2 | u^2 + v^2 \leq R^2\}$

Para cada R definiremos f_R de la siguiente manera:

$$f_R(u,v) = c + R^2 - (u^2 + v^2).$$

Tenemos entonces:

$$J_h(f_R) - J_h(g) = \int\limits_{B_R} \sqrt{1 + 4(u^2 + v^2)} - a(R^2 - (u^2 + v^2))^2 \, dudv - \pi R^2 =$$

$$= 2\pi\left(\int_0^R (\sqrt{1 + 4r^2}) r \, dr - \int_0^R a(R^2 - r^2)^2 r \, dr\right) - \pi R^2 =$$

$$= 2\pi\left(\frac{1}{8}\int_1^{1+4R^2} \sqrt{\rho} \, d\rho - \frac{a}{2}\int_0^{R^2} \rho^2 \, d\rho \right) - \pi R^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3}((1 + 4R^2)^{3/2} - 1) - \frac{\pi \, a}{3} R^6 - \pi R^2 =$$

$$= \frac{\pi}{3}(1 + 4R^2)^{3/2} - \left(\frac{\pi}{3} + \pi R^2 + \frac{\pi \, a}{3} R^6\right).$$

Observando esta última expresión es claro ver que si tomamos un valor de R suficientemente grande, logramos $J_h(f_R) < J_h(g)$. Por otro lado tenemos que $\|\nabla(f_R - g)\|_\infty = \|\nabla f_R\|_\infty = 2\,R$. Una vez elegido R tomaremos un $k \geq 2\,R$ y asi lograremos $f_R \in \overline{M}_k$.

También vemos que podemos repetir la demostración del Lema 7 en $\overline{N}_k$, y entonces el mínimo de J_h en $\overline{N}_k$ es un ρ-punto crítico. Del Teorema 13 se deduce la existencia de un tercer ρ-punto crítico que no es un mínimo local de J_h.

3.3 Regularidad.

Como ya hemos probado, el problema (NP) admite (para un $k > 0$ apropiado) una solución débil $f_0 \in \overline{N}(k) \subset W^{2,\infty}(\Omega)$.

$f_0 \in \overline{N}(k) \subset W^{2,\infty}(\Omega) \subset W^{2,p}(\Omega)$. Para $p > 2$ se tiene $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$.

Por otro lado f_0 verifica

$$L_{f_0} f_0 = 2h(u, v, f_0)(1 + \nabla f_0^2)^{3/2} \text{ en } \Omega$$

donde para cada $f \in C^1(\overline{\Omega})$ $L_f : W^{2,p} \longrightarrow L^p$ es el operador estrictamente elíptico dado por

$$L_f \phi = (1 + f_v^2)\phi_{uu} + (1 + f_u^2)\phi_{vv} - 2 f_u f_v \phi_{uv}.$$

Para probar la regularidad de f_0, estudiaremos la siguiente ecuación

$$(L)\begin{cases} L_{f_0}\phi = 2h(u, v, f_0)(1 + \nabla f_0^2)^{3/2} & \text{en } \Omega \\ \\ \phi = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Proposición 3 *El operador L_{f_0} es estrictamente elíptico.*

Dem: Tomemos $(u,v) \in \Re^2$ y $(x,y) \in \Re^2$ entonces:

$$(1 + f_{0_v}^2(u,v))\ x^2\ (1 + f_{0_u}^2(u,v))y^2\ -\ 2\ f_u(u,v)\ f_v(u,v)\ x\ y =$$

$$= x^2\ +\ y^2\ +\ (f_{0_v}(u,v)\ x)^2\ (f_{0_u}(u,v)\ y)^2\ -\ 2\ f_u(u,v)\ f_v(u,v)\ x\ y =$$

$$= x^2\ +\ y^2\ +\ (f_{0_v}(u,v)\ x\ -\ f_{0_u}(u,v)\ y)^2 \geq\ x^2\ +\ y^2.$$

□

Proposición 4 *Asumamos que $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $g \in C^{2,\alpha}$ y $h \in C^{\alpha}$ para algún $0 < \alpha \leq 1 - \frac{2}{p}$. Entonces, si $\phi \in W^{2,p}$ es una solución de (L), entonces $\phi \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Dem: Gracias al Teorema de Inmersión de Sobolev se tiene que $\phi \in C^{1,\alpha}(\overline{\Omega})$. Por lo tanto $L_{f_0}\phi \in C^{\alpha}(\overline{\Omega})$ y los coeficientes del operador L_{f_0} pertenecen a C^{α}.

Por el Teorema 6.14 en [G-T], la ecuación $Lw = L_{f_0}\phi$ en Ω, $w = g$ en $\partial\Omega$ tiene solución única en $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, y el resultado se concluye de la unicidad demostrada en el Teorema 8 del Capítulo 1. □

Observación 11 *Como una simple consecuencia obtenemos que $f_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$, por la unicidad en $W^{2,p}$ dada por el Teorema 8 del Capítulo 1.*

Corolario 2 *Asumamos que $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$, $g \in C^{k+2,\alpha}$ y $h \in C^{k,\alpha}$ para algún $0 < \alpha \leq 1 - \frac{2}{p}$. Entonces $f_0 \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega})$.*

Dem: Es inmediata a partir de la proposición 2.1 y del Teorema 6.19 en [G-T]. □

Capítulo 4

En este capítulo buscaremos soluciones de la ecuación de curvatura media prescripta en el caso no paramétrico por medio de métodos iterativos. En particular, estudiaremos el caso en que la curvatura media sólo depende de f, es decir:

$$\text{(NP')}\begin{cases} (1+f_v^2)f_{uu}+(1+f_u^2)f_{vv}-2f_uf_vf_{uv}=2h(f)\left(1+|\nabla f|^2\right)^{\frac{3}{2}} & \text{en } \Omega \\ f=g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde Ω es un dominio acotado de $\Re^2$ con $\partial\Omega C^{1,1}$, $g \in W^{2,p}(\Omega), p > 2$ y $h \in C^1(\Re)$.

4.1 Descripción del Método Iterativo.

El método utilizado es una adaptación del procedimiento de Newton-embedding (ver [Hs]). Para cada $w \in W^{2,p}(\Omega)$, definimos el siguiente operador lineal:

$$L_f w = \frac{1}{2(1+|\nabla f|^2)^{\frac{3}{2}}}((1+f_v^2)w_{uu}+(1+f_u^2)w_{vv}-2f_uf_vw_{uv}).$$

Observación 12 *Cabe remarcar que f es solución de (NP') si y sólo si*

$$\begin{cases} L_f f = h(f) & \text{en } \Omega \\ f=g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

La idea del método es incluir a nuestro problema en una familia de problemas:

$$\text{P(t)} = \begin{cases} L_f f = th(f) & \text{en } \Omega \\ f=g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $t \in [0,1]$.

Llamando $f(t,u,v)$ a la solución del problema $P(t)$, observamos que $f(1,u,v)$ es una solución al problema original.

Observación 13 *Si $\partial\Omega$ es C^2 y tiene curvatura positiva, entonces la ecuación (NP') tiene solución única para $h=0$ (ver [G-T]).*

Supongamos que para algún t_0 (no necesariamente $t_0 = 0$) encontramos una solución de P(t_0). Nuestro objetivo es buscar $\epsilon > 0$ de manera tal que $P(t)$ tenga solución para todo t en el intervalo $[t_0,\ t_0 + \epsilon]$. En tal caso, la Observación 13 garantiza la existencia de una sucesión $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_N$. Si $t_N \geq 1$ para algún N, entonces (NP') tiene solución.

Asumiremos, de ahora en adelante, que $h \in C^2(\Re)$ y $h' \geq 0$. Llamemos f_0 a una solución del problema $P(t_0)$. A partir de f_0, definimos f_{n+1} como la única solución de

$$(\text{Eq1}) = \begin{cases} L_{f_{n+1}} f_{n+1} = (t_0 + \epsilon)(h'(f_n)(f_{n+1} - f_n) + h(f_n)) & \text{en } \Omega \\ \\ f_{n+1} = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para ϵ suficientemente pequeño, probaremos que la sucesión $\{f_n\}_{n\in N}$ definida en forma recursiva converge a una solución de $P(t_0 + \epsilon)$. Para probar que la sucesión $\{f_n\}_{n\in N}$ está bien definida y resulta convergente serán necesarios los siguientes lemas.

4.2 Lemas preliminares.

Lema 11 *Sean $f_1,\ f_2 \in C^1(\overline{\Omega})$. Entonces*

$$\|(L_{f_1} - L_{f_2})w\|_p \leq 3\|f_1 - f_2\|_{1,\infty}\|w\|_{2,p}$$

para todo $w \in W^{2,p}(\Omega)$ (es decir $L:\ C^1(\overline{\Omega}) \to L(W^{2,p}(\Omega),\ L^p(\Omega))$ es Lipschitz continua con constante $k \leq 3$).

<u>Dem</u>: Definamos F_i y $G : \Re^2 \to \Re$

$$F_i(a_1, a_2) = \frac{1 + a_i^2}{2(1 + a_1^2 + a_2^2)^{3/2}}, \quad G(a_1, a_2) = \frac{a_1 a_2}{(1 + a_1^2 + a_2^2)^{3/2}}.$$

Si $i = j$ tenemos:

$$|\frac{\partial F_i}{\partial a_i}| = |\frac{a_i}{(1 + a_1^2 + a_2^2)^{1/2}} - \frac{3\ a_i\ (1 + a_i^2)}{2\ (1 + a_1^2 + a_2^2)^{5/2}}| \leq \frac{|a_i|}{(1 + a_1^2 + a_2^2)^{1/2}} + \frac{3|a_i|(1 + a_i^2)}{2(1 + a_1^2 + a_2^2)^{5/2}} \leq 3$$

Si $i \neq j$ tenemos:

$$|\frac{\partial F_i}{\partial a_j}| = | - \frac{3\ (1 + a_i^2)}{(1 + a_1^2 + a_2^2)^{5/2}}| \leq 3$$

Finalmente para G obtenemos:

$$|\frac{\partial G}{\partial a_i}| = |\frac{a_j\ (1 + a_j^2 - 2a_i^2)}{(1 + a_1^2 + a_2^2)^{5/2}}| \leq \frac{|a_j|(1 + a_j^2)}{(1 + a_1^2 + a_2^2)^{5/2}} + \frac{2a_i^2}{(1 + a_1^2 + a_2^2)^{5/2}} \leq 3$$

Luego:

$$\|(L_{f_1} - L_{f_2})w\|_p =$$

$$= \|(F_2(\nabla f_1) - F_2(\nabla f_2))w_{uu} + (F_1(\nabla f_1) - F_1(\nabla f_2))w_{vv} - (G(\nabla f_1) - G(\nabla f_2))w_{uv}\|_p =$$

$$= \|\nabla F_2(\xi_1)\nabla(f_1 - f_2))w_{uu} + \nabla F_1(\xi_2)(\nabla(f_1 - f_2))w_{vv} - \nabla G(\xi_3)\nabla(f_1 - f_2)w_{uv}\|_p \leq$$

$$\leq 3\|\nabla(f_1 - f_2)\|_\infty \|w_{uu}\|_p + 3\|\nabla(f_1 - f_2)\|_\infty \|w_{vv}\|_p + 3\|\nabla(f_1 - f_2)\|_\infty \|w_{uv}\|_p \leq$$

$$\leq 3\|f_1 - f_2\|_{1,\infty}\|w\|_{2,p}$$

□

Para cada $f \in C^1(\overline{\Omega})$, $\alpha \in L^\infty(\Omega, \Re^2)$ y $\beta \in L^\infty(\Omega)$ una función no positiva. Definimos los operadores $L_{(f,\alpha,\beta)} : W^{2,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ como:

$$L_{(f,\alpha,\beta)}w = L_f w + \alpha\nabla w + \beta w.$$

A partir del Lema 3 del Capítulo 1 podemos afirmar que para cada (f, α, β) existe una constante $c = c(f, \alpha, \beta)$ tal que

$$\|w\|_{2,p} \leq c\|L_{(f,\alpha,\beta)}w\|_p$$

para toda $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Veremos que la constante $c = c(f, \alpha, \beta)$ puede ser elegida de manera uniforme en un entorno. En otras palabras, si $E = C^1(\overline{\Omega}) \times L^\infty(\Omega, \Re^2) \times L^\infty(\Omega)$ con norma $\|(f, \alpha, \beta)\| = \max\{\|f\|_{1,\infty}, \|\alpha\|_p, \|\beta\|_p\}$, entonces:

Lema 12 *Sea $c(f, \alpha, \beta) = \min\{c \in \Re > 0$ tal que $\|w\|_{2,p} \leq c\|L_{(f,\alpha,\beta)}w\|_p$ para toda $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\}$. Entonces $c : E \to \Re$ es semicontinua superiormente.*

<u>Dem</u>: $c : E \to \Re$ está bien definida, ya que $c = \inf\{c \in \Re > 0$ tal que $\|w\|_{2,p} \leq c\|Lw\|_p$ para toda $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)\}$, con lo cual exite $\{c_n\}_n$ tal que $c_n \searrow c$ y para todo $n \in N$ y $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$ se verifica que $\|w\|_{2,p} \leq c_n\|Lw\|_p$. Tomando límite para $n \to \infty$, es claro que $\|w\|_{2,p} \leq c\|Lw\|_p$ para toda $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

Sea $(f_0, \alpha_0, \beta_0) \in E$ de manera tal que $t > c(f_0, \alpha_0, \beta_0)$, es decir $(f_0, \alpha_0, \beta_0) \in c^{-1}((-\infty, t))$. Veamos que existe un entorno en E, alrededor de (f_0, α_0, β_0), de manera tal que para todo (f, α, β) en ese entorno, se verifica $t > c(f, \alpha, \beta)$.

Sabemos que

$$\|L_{(f,\alpha,\beta)}w\|_p \geq \|L_{(f_0,\alpha_0,\beta_0)}w\|_p - \|(L_{(f_0,\alpha_0,\beta_0)} - L_{(f,\alpha,\beta)})w\|_p \geq$$

$$\geq \|L_{(f_0,\alpha_0,\beta_0)}w\|_p - \|(L_{f_0} - L_f)w\|_p - \|(\alpha - \alpha_0)(\nabla w)\|_p - \|(\beta - \beta_0)w\|_p \geq$$
$$\geq \|L_{(f_0,\alpha_0,\beta_0)}w\|_p - 3\|f - f_0\|_{1,\infty}\|w\|_{2,p} - c_1\|\alpha - \alpha_0\|_p\|w\|_{2,p} - \|\beta - \beta_0\|_p\|w\|_{2,p} \geq$$
$$\geq \frac{1}{c(f_0,\alpha_0,\beta_0)}\|w\|_{2,p}3\|f - f_0\|_{1,\infty}\|w\|_{2,p} - \|\alpha - \alpha_0\|_p\|\nabla w\|_\infty - \|\beta - \beta_0\|_p\|w\|_\infty \geq$$
$$\geq (\frac{1}{c(f_0,\alpha_0,\beta_0)} - (3\|f - f_0\|_{1,\infty} + C_1\|\alpha - \alpha_0\|_p + C_0\|\beta - \beta_0\|_p))\|w\|_{2,p}.$$

Donde c_1 y c_2 son las constantes de inmersión de $W^{2,p}(\Omega)$ en $C^1(\overline{\Omega})$ y $C(\overline{\Omega})$ respectivamente.

Recordemos que $\frac{1}{c(f_0,\alpha_0,\beta_0)} > \frac{1}{t}$. Si (f,α,β) está lo suficientemente cerca de (f_0,α_0,β_0) en la norma del espacio E, entonces se logra

$$\frac{1}{c(f_0,\alpha_0,\beta_0)} - (3\|f - f_0\|_{1,\infty} + C_1\|\alpha - \alpha_0\|_p + C_0\|\beta - \beta_0\|_p) > \frac{1}{t}.$$

Luego $\|L_{(f,\alpha,\beta)}w\|_p \geq \frac{1}{t}\|w\|_{2,p}$ para toda $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, con lo cual es claro ver que $c(f,\alpha,\beta) < t$. □

Lema 13 *Sea $w \in W^{2,p}(\Omega)$ una solución de*

$$\begin{cases} L_w w = F(u,v,w) & en\ \Omega \\ \\ w = g & en\ \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $F \in C^\gamma(\overline{\Omega} \times \Re)$, $0 < \gamma < 1$. Entonces $w \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$.

<u>Dem</u>: Como $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^{1,\gamma}$, el problema

$$\begin{cases} L_w z = F(u,v,w) & \text{en } \Omega \\ \\ z = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

admite una única solución $z \in C^{2,\gamma}(\overline{\Omega})$ y por la unicidad de esta solución en $W^{2,p}(\Omega)$, podemos concluir que $z = w$. □

Lema 14 *Si $f_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ satisface*

$$P(t_0) = \begin{cases} L_{f_0} f_0 = t_0 h(f_0) & en\ \Omega \\ \\ f_0 = g & en\ \partial\Omega \end{cases}$$

entonces

$$\begin{cases} L_f f = (t_0 + \epsilon)(h'(f_0)(f - f_0) + h(f_0)) & en\ \Omega \\ \\ f = g & en\ \partial\Omega \end{cases}$$

tiene solución única en $W^{2,p}(\Omega)$.

Dem: La unicidad de la solución puede ser demostrada a partir del Teorema 10.2 en [G-T] y el Lema 13, puesto que hemos asumido $h' \geq 0$.

La existencia será demostrada con métodos de punto fijo. Para ello, llamemos $z = f - f_0$ y restemos miembro a miembro los sistemas anteriores, obteniendo:

$$(\text{Eq2}) \begin{cases} L_{z+f_0}(z+f_0) - L_{f_0}f_0 - (t_0+\epsilon)h'(f_0)z = \epsilon h(f_0) & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pero

$$L_{z+f_0}(z+f_0) - L_{f_0}f_0 - (t_0+\epsilon)h'(f_0)z = L_{z+f_0}z + (L_{z+f_0} - L_{f_0})f_0 - (t_0+\epsilon)h'(f_0)z =$$

$$= L_{z+f_0}z + (F_2(\nabla(f_0+z)) - F_2(\nabla f_0))f_{0_{uu}} + (F_1(\nabla(f_0+z)) - F_1(\nabla f_0))f_{0_{vv}} -$$

$$-(G(\nabla(f_0+z)) - G(\nabla f_0))f_{0_{uv}} - (t_0+\epsilon)h'(f_0)z.$$

Efectuando el desarrollo de Taylor de grado 1 para F_1, F_2 y G en ∇f_0, obteniendo:

$$F_1(\nabla(f_0+z)) = F_1(\nabla f_0) + \nabla F_1(\nabla f_0)\nabla z + r_1(\nabla z),$$

$$F_2(\nabla(f_0+z)) = F_2(\nabla f_0) + \nabla F_2(\nabla f_0)\nabla z + r_2(\nabla z),$$

$$G(\nabla(f_0+z)) = G(\nabla f_0) + \nabla G(\nabla f_0)\nabla z + r_3(\nabla z).$$

Y entonces:

$$L_{z+f_0}(z+f_0) - L_{f_0}f_0 - (t_0+\epsilon)h'(f_0)z =$$

$$= L_{z+f_0}z + (\nabla F_2(\nabla f_0)\nabla z + r_2(\nabla z))f_{0_{uu}} + (\nabla F_1(\nabla f_0)\nabla z + r_1(\nabla z))f_{0_{vv}} -$$

$$(\nabla G(\nabla f_0)\nabla z + r_3(\nabla z))f_{0_{uv}} - (t_0+\epsilon)h'(f_0)z =$$

$$= L_{z+f_0}z + \left[(f_{0_{uu}}\nabla F_2(\nabla f_0) + f_{0_{vv}}\nabla F_1(\nabla f_0) - f_{0_{uv}}\nabla G(\nabla f_0))\right]\nabla z -$$

$$-(t_0+\epsilon)h'(f_0)\ z\ +\ r_2(\nabla z)f_{0_{uu}} + r_1(\nabla z)f_{0_{vv}} - r_3(\nabla z)f_{0_{uv}}.$$

Como f_0 es una función previamente determinada, podemos llamar

$$r(\nabla z) = r_2(\nabla z)f_{0_{uu}} + r_1(\nabla z)f_{0_{vv}} - r_3(\nabla z))f_{0_{uv}}.$$

El resto $r(\nabla z)$ satisface:

$$|r(\nabla z)| \leq C_3|\nabla z|^2,$$

donde C_3 es una constante que depende únicamente de f_0. Definamos los operadores M_z^0 de la siguiente manera:

$$M_z^0 = L_{(f_0+z,\alpha_0,\beta_0)},$$

donde

$$\alpha_0 = f_{0_{uu}}\nabla F_2(\nabla f_0) + f_{0_{vv}}\nabla F_1(\nabla f_0) - f_{0_{uv}}\nabla G(\nabla f_0),$$

$$\beta_0 = -(t_0 + \epsilon)h'(f_0).$$

Entonces podemos volver a escribir (Eq2) de la siguiente manera:

$$\begin{cases} M_z^0 z = \epsilon h(f_0) + r(\nabla z) & \text{en } \Omega \\ \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Como habíamos mencionado, veremos que este sistema admite solución mediante métodos de punto fijo. Para ello, definimos $T : C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ como $T(z) = w$ si y sólo si w es la única solución de

$$\begin{cases} M_z^0 w = \epsilon h(f_0) + r(\nabla z) & \text{en } \Omega \\ \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

en $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$.

El operador $T : C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ resulta continuo, pues

$$\|Tz - Tz_0\|_{1,\infty} \le C_1\|Tz - Tz_0\|_{2,p} \le$$

$$\le C_1 c_{z_0}\|M_z^0(Tz - Tz_0)\|_p = c_1 c_{z_0}\|\epsilon h(f_0) + r(\nabla z) - M_z^0(Tz_0)\|_p =$$
$$= C_1 c_{z_0}\|r(\nabla z) - r(\nabla z_0) + (M_{z_0}^0 - M_z^0)(Tz_0)\|_p \le$$
$$\le C_1 c_{z_0}(\|r(\nabla z) - r(\nabla z_0)\|_p + \|(M_{z_0}^0 - M_z^0)(Tz_0)\|_p) \le$$
$$\le C_1 c_{z_0}(|\Omega|\|r(\nabla z) - r(\nabla z_0)\|_\infty + \|(L_{z_0+f_0} - L_{z+f_0})(Tz_0)\|_p) \le$$
$$\le c_1 c_{z_0}(|\Omega|c_3\|\nabla(z - z_0)\|_\infty + 3\|z_0 - z\|_\infty\|Tz_0\|_{2,p}) \le$$
$$\le Cte(z_0, |\Omega|)\|z_0 - z\|_{1,\infty}.$$

La segunda desigualdad se debe al Lema 12 que asegura la existencia de $\delta > 0$ suficientemente pequeño de manera tal que si $\|z - z_0\| < \delta$, la constante c_{z_0} puede utilizarse para todos los operadores M_z^0.

Dado R_0 definimos $B_{R_0} = \{z \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que $\|z\|_{1,\infty} \le R_0\}$. si R_0 es lo suficientemente pequeño, la constante c_0 correspondiente la operador $M_{z=0}^0$ puede ser utilizada para todo operador M_z^0 con $z \in B_{R_0}$. Entonces,

$$\|Tz\|_{2,p} \le c_0\|L_z(Tz)\|_p = c_0\|\epsilon h(f_0) + r(\nabla(z))\|_p \le c_0(\epsilon\|h\|_{\infty,K} + c_3 R_0^2),$$

donde K es un compacto conteniendo a un entorno de la imagen de f_0.

Esta última desigualdad muestra que $T(B_{R_0})$ es acotado en $W^{2,p}(\Omega)$, debido a la inmersión compacta $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$, podemos concluir que $\overline{T(B_{R_0})}$ es compacto en $C^1(\overline{\Omega})$.

Por otro lado, si $R_0 < 1$ (con lo cual $R_0^2 < R_0$) y ϵ es lo suficientente pequeño, obtenemos

$$c_0(\epsilon\|h\|_{\infty,K} + c_3R_0^2) \leq R_0$$

y por lo tanto

$$\|Tz\|_{1,\infty} \leq cc_0(\varepsilon\|h\|_{\infty,K} + c_3R_0^2) \leq R_0.$$

Tenemos $T(B_{R_0}) \subset B_{R_0}$, entonces el Teorema de Schauder (Teorema 11, Capítulo 1) asegura que el operador T tiene un punto fijo $\tilde{z} \in B_{R_0}$. Por lo tanto $f_1 = f_0 + \tilde{z}$ es la solución buscada. $\square$

Lema 15 *Asumamos que la sucesión $\{f_n\}$ está bien definida hasta el n-ésimo término, es decir, f_0 está dada y $f_1, f_2, \cdots, f_n \in W^{2,p}(\Omega)$ están bien determinadas. Asumamos también que $\|f_i - f_0\|_{2,p} < R$ para un R suficientemente chico, entonces se tiene*

$$\|f_n - f_{n-1}\|_{2,p} \leq (A(\epsilon))^{2^{n-1}-1}\|f_1 - f_0\|_{2,p}$$

<u>Dem</u>: En primer lugar observemos que si f_1 y f_0 verifican

$$L_{f_0}f_0 = t_0h(f_0)$$

y

$$L_{f_1}f_1 = (t_0 + \epsilon)(h'(f_0)(f_1 - f_0) + h(f_0)),$$

se tiene

$$L_{f_1}(f_1 - f_0) + (L_{f_1} - L_{f_0})(f_0) - (t_0 + \epsilon)h'(f_0)(f_1 - f_0) = \epsilon h(f_0).$$

En otras palabras,

$$L_{(f_1,\hat{\alpha}_0,\beta_0)}(f_1 - f_0) = \epsilon h(f_0),$$

donde

$$\hat{\alpha}_0 = f_{0_{uu}}\nabla F_2(\xi_2) + f_{0_{vv}}\nabla F_1(\xi_1) - f_{0_{uv}}\nabla G(\xi_3))$$

y

$$\beta_0 = -(t_0 + \epsilon)h'(f_0).$$

$\xi_i : \Omega \longrightarrow \Re^2$ son funciones de valores intermedios que pueden ser elegidas medibles y pertenecientes a $L^2(\Omega, \Re^2)$. Por el Lema 12, $L_{(f_1,\hat{\alpha}_0,\beta_0)}$ tiene asociada una constante $c = c_{(f_1,\hat{\alpha}_0,\beta_0)}$ y por lo tanto obtenemos

$$\|f_1 - f_0\|_{2,p} \leq c\|L_{(f_1,\hat{\alpha}_0,\beta_0)}(f_1 - f_0)\|_p = c\epsilon\|h(f_0)\|_p.$$

También sabemos que f_n y f_{n-1} verifican:

$$L_{f_n}f_n = (t_0 + \epsilon)(h'(f_{n-1})(f_n - f_{n-1}) + h(f_{n-1}))$$

y
$$L_{f_{n-1}} f_{n-1} = (t_0 + \epsilon)(h'(f_{n-2})(f_{n-1} - f_{n-2}) + h(f_{n-2})).$$
En este caso tenemos
$$L_{f_n} f_n - L_{f_{n-1}} f_{n-1} - (t_0 + \epsilon)h'(f_{n-1})(f_n - f_{n-1}) =$$
$$= (t_0 + \epsilon)(h(f_{n-1}) - h(f_{n-2}) - h'(f_{n-2})(f_{n-1} - f_{n-2}) =$$
$$= (t_0 + \epsilon)\frac{h''(s)}{2}(f_{n-1} - f_{n-2})^2.$$
Es decir,
$$L_{(f_n,\hat{\alpha}_{n-1},\beta_n)}(f_n - f_{n-1}) = (t_0 + \epsilon)\frac{h''(s)}{2}(f_{n-1} - f_{n-2})^2,$$
donde
$$\hat{\alpha}_{n-1} = f_{n-1_{uu}} \nabla F_2(\xi_2'') + f_{n-1_{vv}} \nabla F_1(\xi_1'') - f_{n-1_{uv}} \nabla G(\xi_3''))$$
y
$$\beta_{n-1} = -(t_0 + \epsilon)h'(f_{n-1}).$$
Debido a la continuidad de h' y a que $\|f_i - f_0\|_{2,p} < R$ podemos asegurar que $(f_n, \hat{\alpha}_{n-1}, \beta_{n-1})$ está suficientemente cerca de $(f_1, \hat{\alpha}_0, \beta_0)$ en E y entonces
$$\|f_n - f_{n-1}\|_{2,p} \leq c\|L_{(f_n,\hat{\alpha}_n,\beta_0)}(f_n - f_{n-1})\|_p =$$
$$= c\|(t_0 + \epsilon)\frac{h''(s)}{2}(f_{n-1} - f_{n-2})^2\|_p \leq$$
$$\leq c(t_0 + \epsilon)\|h''\|_{\infty,K}\|(f_{n-1} - f_{n-2})^2\|_p \leq$$
$$\leq c(t_0 + \epsilon)\|h''\|_{\infty,K}\|f_{n-1} - f_{n-2}\|_p\|f_{n-1} - f_{n-2}\|_\infty \leq$$
$$\leq cC_0(t_0 + \epsilon)\|h''\|_{\infty,K}\|f_{n-1} - f_{n-2}\|_{2,p}^2.$$

Llamando $B(\epsilon) = cC_0(t_0 + \epsilon)\|h''\|_{\infty,K}$ escribimos:
$$\|f_n - f_{n-1}\|_{2,p} \leq B(\epsilon)\|f_{n-1} - f_{n-2}\|_{2,p}^2.$$
Observemos que
$$\|f_2 - f_1\|_{2,p} \leq B(\epsilon)\|_{\infty,K}\|f_1 - f_0\|_{2,p}^2,$$
$$\|f_3 - f_2\|_{2,p} \leq \; B(\epsilon)\|f_2 - f_1\|_{2,p}^2 \leq$$
$$\leq B(\epsilon)(B(\epsilon)\|f_1 - f_0\|_{2,p}^2)^2,$$
es decir:
$$\|f_3 - f_2\|_{2,p} \leq B(\epsilon)\ B^2(\epsilon)(\|f_1 - f_0\|_{2,p})^{2\cdot 2}.$$

Análogamente,

$$\|f_4 - f_3\|_{2,p} \leq \; B(\epsilon)(B(\epsilon)\; B^2(\epsilon)\|f_1 - f_0\|_{2,p})^{2\cdot 2})^2 =$$
$$= B(\epsilon)\; B^2(\epsilon)\; B^4(\epsilon)(\|f_1 - f_0\|_{2,p})^{2\cdot 2\cdot 2}$$

Luego, inductivamente, se deduce:

$$\|f_n - f_{n-1}\|_{2,p} \leq B(\epsilon)\; B^2(\epsilon)\; B^{2^2}(\epsilon)\; \cdots\; B^{2^{n-2}}(\epsilon)(\|f_1 - f_0\|_{2,p})^{2^{n-1}} =$$
$$= (B(\epsilon))^{\sum_{j=0}^{n-1} 2^j}(\|f_1 - f_0\|_{2,p})^{2^{n-1}} =$$
$$= (B(\epsilon))^{(2^{n-1}-1)}(\|f_1 - f_0\|_{2,p})^{2^{n-1}} =$$
$$= (B(\epsilon)\|f_1 - f_0\|_{2,p})^{(2^{n-1}-1)}\|f_1 - f_0\|_{2,p}.$$

Recordando que $\|f_1 - f_0\|_{2,p} \leq c\epsilon\|h(f_0)\|_p$, obtenemos:

$$\|f_n - f_{n-1}\|_{2,p} \leq (B(\epsilon)c\epsilon\|h(f_0)\|_p)^{(2^{n-1}-1)}\|f_1 - f_0\|_{2,p},$$

es decir

$$\|f_n - f_{n-1}\|_{2,p} \leq (A(\epsilon))^{(2^{n-1}-1)}\|f_1 - f_0\|_{2,p},$$

con $A(\epsilon) = B(\epsilon)c\epsilon\|h(f_0)\|_p$. □

Observación 14 *Se tiene la siguiente estimación:*

$$\|f_n - f_0\|_{2,p} \leq \sum_{j=0}^{n-1}\|f_{j+1} - f_j\|_{2,p} \leq \sum_{j=0}^{n-1}(A(\epsilon))^{(2^j-1)}\epsilon\|h(f_0)\|_p \leq$$
$$\leq \epsilon\|h(f_0)\|_p \sum_{j=0}^{2^{n-1}-1} A^j(\epsilon) \leq \epsilon\|h(f_0)\|_p \frac{1 - A^{2^{n-1}}(\epsilon)}{1 - A(\epsilon)} \leq \frac{\epsilon\|h(f_0)\|_p}{1 - A(\epsilon)}.$$

Con lo cual, $\|f_n - f_0\|_{2,p} < R$ *si* ϵ *es lo suficientemente pequeño.*

Observación 15 *Para cada* $n \in N \cup \{0\}$ *y* $z \in B_{R_0}$ *consideremos los siguientes operadores:*

$$L_{(f_n+z,\alpha_n,\beta_n)}w = L_{f_n+z}w + \alpha_n\nabla w + \beta_n w,$$

donde

$$\alpha_n = (f_{n_{uu}}\nabla F_2(\nabla f_n) + f_{n_{vv}}\nabla F_1(\nabla f_n) - f_{n_{uv}}\nabla G(\nabla f_n))$$
$$\beta_n = -(t_0 + \epsilon)h'(f_n).$$

A partir del Lema 12, podemos afirmar que existen constantes $c_0, R, R_0 > 0$ *con* $R_0 < C_1 R$*, tales que si* $\|f_n - f_0\|_{2,p} \leq R$ *y por lo tanto* $\|f_n - f_0\|_{1,\infty} \leq C_1 R$*, entonces para toda* z *tal que* $\|z\|_{1,\infty} < R_0$*, se tiene*

$$\|w\|_{2,p} \leq c_0\|L_{f_n+z,\alpha_n,\beta_n}w\|_p,$$

para toda $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$.

4.3 Resultado de existencia para la ecuación (NP').

Teorema 14 *Existe $\epsilon > 0$ de manera tal que la sucesión dada por (Eq1) está bien definida, resulta convergente en $W^{2,p}(\Omega)$ y su límite resulta una solución del problema $P(t_0 + \epsilon)$.*

Dem: Para demostrar que cada término de la sucesión $\{f_n\}$ está bien determinado utilizaremos inducción. El Lema 14 demuestra que el término f_1 está bien definido y $f_1 \in B_{R_0}$. Consideraremos como hipótesis inductiva la buena definición de los términos $f_1, \cdots, f_n$ y asumiremos también que $f_i \in B_{R_0}(f_0)$ para todo $i = 1, \cdots, n$.

Debemos demostrar que es posible hallar f_{n+1} verificando:

$$\begin{cases} L_{f_{n+1}} f_{n+1} = (t_0 + \epsilon)(h'(f_n)(f_{n+1} - f_n) + h(f_n)) & \text{en } \Omega \\ f_{n+1} = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Sabemos que f_n verifica:

$$\begin{cases} L_{f_n} f_n = (t_0 + \epsilon)(h'(f_{n-1})(f_{n+} - f_{n-1}) + h(f_{n-1})) & \text{en } \Omega \\ f_n = g & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Restando ambas écuaciones:

$$L_{f_{n+1}}(f_{n+1}) - L_{f_n}(f_n) - (t_0 + \epsilon)h'(f_n)(f_{n+1} - f_n) =$$

$$(t_0 + \epsilon)[h(f_n) - h(f_{n-1}) - h'(f_{n-1})(f_n - f_{n-1})],$$

es decir

$$L_{f_{n+1}}(f_{n+1} - f_n) + (L_{f_{n+1}} - L_{f_n})(f_n) - (t_0 + \epsilon)h'(f_n)(f_{n+1} - f_n) =$$

$$= (t_0 + \epsilon)\frac{h''(s)}{2}(f_n - f_{n-1})^2,$$

donde s es una función de valores intermedios , $s \in L^\infty(\Omega)$.

Llamando $z = f_{n+1} - f_n$ obtenemos:

$$\begin{cases} M_z^n z = (t_0 + \epsilon)\frac{h''(s)}{2}(f_n - f_{n-1})^2 + r(\nabla z) & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde

$$M_z^n = L_{(f_n + z, \alpha_n, \beta_n)},$$

con

$$\alpha_n = (f_{n_{uu}}\nabla F_2(\nabla f_n) + f_{n_{vv}}\nabla F_1(\nabla f_n) - f_{n_{uv}}\nabla G(\nabla f_n))$$
$$\beta_n = -(t_0+\epsilon)h'(f_n).$$

Nuevamente definimos $T : C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$, pero esta vez $T(z) = w$ si y sólo si w es la única solución de

$$\begin{cases} M_z^n w = (t_0+\epsilon)\frac{h''(s)}{2}(f_n - f_{n-1})^2 + r(\nabla z) & \text{en } \Omega \\ w = 0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

La continuidad de $T : C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ se prueba de manera análoga a lo demostrado en el Lema 14.

Asumamos que hemos elegido R_0 y R como en la Observación 15. Entonces,

$$\|Tz\|_{2,p} \leq c_0\|M_z^n(Tz)\|_p = c_0\|(t_0+\epsilon)\frac{h''(s)}{2}(f_n - f_{n-1})^2 + r(\nabla z)\|_p \leq$$
$$\leq c_0[(t_0+\epsilon)\frac{1}{2}\|h''\|_{\infty,\overline{K}} + \|(f_n - f_{n-1})^2\|_p + c_3R_0],$$

donde $\overline{K}$ es un compacto conveniente.

Análogamente al Lema 14, $\overline{T(B_{R_0})}$ es compacto en $C^1(\overline{\Omega})$. Además,

$$\|Tz\|_{1,\infty} \leq C_1\|Tz\|_{2,p} \leq$$
$$\leq C_1c_0[(t_0+\epsilon)\frac{1}{2}\|h''\|_{\infty,\overline{K}}\|(f_n - f_{n-1})^2\|_p + C_3R_0^2] \leq$$
$$\leq C_1c_0[(t_0+\epsilon)\frac{1}{2}\|h''\|_{\infty,\overline{K}}\|(f_n - f_{n-1})^2\|_{2,p} + C_3R_0^2].$$

Utilizamos el Lema 15 para acotar $\|(f_n - f_{n-1})^2\|_{2,p}$, obteniendo:

$$\|Tz\|_{1,\infty} \leq C_1c_0[(t_0+\epsilon)\frac{1}{2}\|h''\|_{\infty,\overline{K}}(A(\epsilon))^{2^{n-1}-1}\|f_1 - f_0\|_{2,p} + C_3R_0^2] \leq$$
$$\leq C_1c_0[(t_0+\epsilon)\frac{1}{2}\|h''\|_{\infty,\overline{K}}(A(\epsilon))^{2^{n-1}-1}\ c\epsilon\|h(f_0)\|_p + C_3R_0^2].$$

Si tomamos R_0 lo suficientemente pequeño y ϵ suficientemente pequeño y de manera tal que $A(\epsilon) < 1$, obtenemos $\|T(z)\|_{1,\infty} \leq R_0$. El Teorema de Schauder asegura que el operador T tiene un punto fijo $\hat{z}$, concluyendo que $f_{n+1} = f_n + \hat{z}$ es la solución buscada.

La sucesión $\{f_n\}$ resulta de Cauchy debido a que

$$\|f_n - f_{n-1}\|_{2,p} \leq (A(\epsilon))^{2^{n-1}-1}\|f_1 - f_0\|_{2,p},$$

con $A(\epsilon) < 1$. Como $W^{2,p}(\Omega)$ es un espacio completo, podemos asegurar que existe $f^* \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que $f^* = \lim_{n\to\infty} f_n$. Tomando límite para n tendiendo a infinito en (Eq1), observamos claramente que f^* es solución de $P(t_0+\epsilon)$. □

Capítulo 5

En este capítulo estudiaremos una generalización del problema (NP) analizado en los capítulos anteriores. Sea $\Omega \subset \Re^n$ un dominio acotado y $C^{1,1}$, $h : \overline{\Omega} \times \Re \times \Re^n \to \Re$ es una función continua y $g \in W^{2,p}(\Omega)$ para algún $n < p < \infty$. Estudiaremos la siguiente ecuación cuasilineal de segundo orden con condición de borde de Dirichlet:

$$
(\text{NP"}) \begin{cases} Qf = h(x, f, D_1 f, \cdots, D_n f) & \text{en } \Omega \\ \\ f = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}
$$

donde L es un operador cuasilineal, estrictamente elíptico dado por $Qf = \sum a_{ij} D_{ij} f + \sum b_j D_j f + cf$, con $a_{ij}(x, f, D_1 f, \cdots, D_n f)$, continuos respecto de todas sus variables, C^1 en $f, D_1 f, \cdots, D_n f$, los $b_j(x, f)$ continuos y C^1 en f, y con $c \in L^\infty$, $c \leq 0$.

En el caso Q uniformemente elíptico ($\lambda_s(x)/\lambda_i(x)$ acotado en $\overline{\Omega}$) se han obtenido resultados de existencia para (NP") (ver [G-T]). Por otro lado, en [A-M-R] y [D-S-T] se estudian ciertas situaciones donde Q es elíptico pero no necesariamente uniformemente elíptico.

Dada la generalidad del problema no podemos asegurar la existencia de una funcional asociada a la ecuación que nos permita aplicar métodos variacionales. Por lo tanto encontraremos soluciones del problema mediante métodos topológicos.

5.1 Resultados preliminares.

Linealizamos el problema de la siguiente manera:

Para cada $f \in C^1(\overline{\Omega})$ consideramos $L_f : W^{2,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ el operador lineal definido por

$$
L_f w = \sum a_{ij}(x, f(x), D_1 f(x), \cdots, D_n f(x)) D_{ij} w + \sum b_j(x, f(x)) D_j w + c(x) w.
$$

A partir del Lema 3 del Capítulo 1 podemos afirmar que para toda $f \in C^1(\overline{\Omega})$ existe $c(f) \in \Re > 0$ de manera tal que $\|w\|_{2,p} \leq c(f) \|L_f w\|_p$ para toda $w \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$. Al igual que lo hicimos en el Lema 12 del Capítulo 4, probaremos que, en entornos, podemos independizarnos de la constante $c = c(f)$, en otras palabras:

Lema 16 *Sea $c(f) = \min\{c \in \Re$ tal que $\|w\|_{2,p} \leq c \|L_f w\|_p$ para toda $w \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}\}$. Entonces $c : C^1(\Omega) \to \Re > 0$ es semicontinua superiormente.*

Dem: Fijemos $\overline{f} \in C^1(\overline{\Omega})$. Sea $t > c(\overline{f})$, $w \in W^{2,p} \cap W_0^{1,p}$. Para $\|f - \overline{f}\|_{1,\infty} \leq R$, tenemos que:

$$\|L_f w\|_p \geq \frac{1}{c(\overline{f})}\|w\|_{2,p} - \|(L_{\overline{f}} - L_f)w\|_p =$$

$$= \frac{1}{c(\overline{f})}\|w\|_{2,p} - \|\sum[a_{ij}(x,\overline{f},D_1\overline{f},\cdots,D_n\overline{f}) - a_{ij}(x,,D_1 f,\cdots,D_n f))D_{ij}w +$$

$$+\sum b_j(x,\overline{f},D_1\overline{f},\cdots,D_n\overline{f}) - b_j(x,f,D_1 f,\cdots,D_n f)]D_j w\|_p =$$

$$= \frac{1}{c(\overline{f})}\|w\|_{2,p} - \|\sum \frac{\partial a_{ij}}{\partial f}(x,\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)(\overline{f} - f) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial a_{ij}}{\partial D_k f}(x,\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n)(D_k\overline{f} - D_k f))D_{ij}w + \sum \frac{\partial b_j}{\partial f}(x,\mu_0,\mu_1,\cdots,\mu_n)(\overline{f} - f)D_j w\|_p$$

Pero, como todos los $a_{ij}(x,f,D_1 f,\cdots,D_n f)$ son C^1 en $f, D_1 f,\cdots,D_n f$ y los $b_j(x,f)$ son C^1 en f, obtenemos $\partial a_{ij}/\partial f$, $\partial a_{ij}/\partial D_k f$, $\partial b_j/\partial f \in L^\infty(\overline{\Omega})$ con lo cual:

$$\|L_f w\|_p \geq \frac{1}{c(\overline{f})}\|w\|_{2,p} - \|(L_{\overline{f}} - L_f)w\|_p = \frac{1}{c(\overline{f})}\|w\|_{2,p} - KR\|w\|_{2,p}$$

para cierta constante K.

Entonces,

$$\|L_f w\|_p \geq (\frac{1}{c(\overline{f})} - KR)\|w\|_{2,p}.$$

Recordemos que $1/c(\overline{f}) > 1/t$. Si R es lo suficientemente pequeño se obtiene:

$$\frac{1}{c(\overline{f})} - KR > \frac{1}{t}.$$

Luego $\|L_f w\|_p \geq \frac{1}{t}\|w\|_{2,p}$ para toda $w \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, con lo cual es claro ver que $c(f) < t$. □

Sea $\eta : \overline{\Omega} \times \Re \times \Re^n \to \Re$ una función continua. Para cada $f \in C^1(\overline{\Omega})$ consideremos la ecuación dada por:

$$\begin{cases} L_f w = \eta(x,f,D_1 f,\cdots,D_n f) & \text{en } \Omega \\ \\ w = g & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Para cada f este problema admite una única solución $T(f) \in W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$. Dado que f es una función fija, esta ecuación queda reducida a un problema lineal y la existencia y unicidad de la solución quedan justificada por el Teorema 8 del Capítulo 1.

Lema 17 *$T : C^1(\overline{\Omega}) \to C^1(\overline{\Omega})$ es continuo y localmente compacto.*

Dem: Sea $\overline{f} \in C^1(\overline{\Omega})$. Probaremos que T es continuo en $\overline{f}$. Sea $f \in C^1(\overline{\Omega})$ verificando $\|f - \overline{f}\|_{1,\infty} < R$, donde $R > 0$ fue elegido de igual manera que en el Lema 16. Se tiene entonces,

$$\|Tf - T\overline{f}\|_{1,\infty} \leq c_1\|Tf - T\overline{f}\|_{2,p} \leq c(\overline{f})c_1\|L_f(Tf - T\overline{f})\|_p =$$

$$= c(\overline{f})c_1(\|\eta(x, f, D_1f, \cdots, D_nf) - L_fT\overline{f}\|_p =$$

$$= c(\overline{f})c_1(\|\eta(x, f, D_1f, \cdots, D_nf) - L_fT\overline{f} + L_{\overline{f}}T\overline{f} - L_{\overline{f}}T\overline{f}\|_p \leq$$

$$\leq c(\overline{f})c_1(\|\eta(x, f, D_1f, \cdots, D_nf) - \eta(x, \overline{f}, D_1\overline{f}, \cdots, D_n\overline{f})\|_p + \|(L_{\overline{f}} - L_f)T\overline{f}\|_p) \to 0 \text{ si } R \to 0,$$

puesto que para toda f que verifica $\|f - \overline{f}\|_{1,\infty} \leq R$, se tiene que $Im(f) \times Im(D_1f) \times \cdots \times Im(D_nf) \subset K$, donde K es un compacto conveniente de $\Re \times \Re^n$. Debido a la uniforme continuidad de η deducimos que

$$\|\eta(x, f, D_1f, \cdots, D_nf) - \eta(x, \overline{f}, D_1\overline{f}, \cdots, D_n\overline{f})\|_p \leq$$

$$\leq c_2\|\eta(x, f, D_1f, \cdots, D_nf) - \eta(x, \overline{f}, D_1\overline{f}, \cdots, D_n\overline{f})\|_\infty \to 0 \text{ si } R \to 0.$$

Por otro lado la demostración del Lema 16 nos muestra que

$$\|(L_{\overline{f}} - L_f)T\overline{f}\|_p \leq \|T\overline{f}\|_{2,p}\|f - \overline{f}\|_{1,\infty} \to 0 \text{ si } R \to 0,$$

lo cual prueba la continuidad.

Para mostrar que T es localmente compacto fijemos nuevamente $\overline{f}$ y consideremos $B_R(\overline{f}) = \{f \in C^1(\overline{\Omega}) \text{ tal que } \|f - \overline{f}\|_{1,\infty} < R\}$, con el mismo R elegido anteriormente. Es claro ver que $T(B_R(\overline{f}))$ es un subconjunto acotado en $W^{2,p}(\Omega)$. Teniendo en cuenta que la inmersión $W^{2,p}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ es compacta, podemos garantizar que $T(B_R(\overline{f}))$ es un precompacto de $C^1(\overline{\Omega})$. □

Veremos ahora que dada f_0 satisfaciendo $Qf_0 = h(x, f_0, D_1f_0, \cdots, D_nf_0)$, podemos encontrar, en un entorno de f_0, una solución del problema (NP"), siempre y cuando el dato de borde g este próximo a $f_0|_{\partial\Omega}$. Más aún, encontraremos soluciones admitiendo pequeñas perturbaciones para h.

5.2 Existencia de solución al perturbar los datos prescriptos.

Teorema 15 *Consideremos $f_0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$ que verifica $Qf_0 = h_0(x, f_0, D_1f_0, \cdots, D_nf_0)$ en Ω. Definamos*

$$\Psi(x) = \sum_{i,j} \frac{\partial a_{ij}}{\partial f}(x, f_0, D_1f_0, \cdots, D_nf_0)D_{ij}f_0 + \sum_j \frac{\partial b_j}{\partial f}(x, f_0)D_jf_0$$

y asumamos que se cumplen alguna de estas dos condiciones:

(i) h_0 es Lipschitz en $f, D_1 f, \cdots, D_n f$ con una constante suficientemente chica y $\Psi + c \leq 0$.

(ii) h_0 es C^1 en $f, D_1 f, \cdots, D_n f$ y $\Psi + c \leq \frac{\partial h_0}{\partial f}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0)$.

Entonces (NP") admite solución en $W^{2,p}(\Omega)$ para cualquier (h, g) suficientemente cerca de (h_0, f_0) en $C(\overline{\Omega} \times R \times R^n) \times W^{2,p}(\Omega)$.

Dem: Consideremos (h, g) en un entorno de (h_0, f_0). Buscamos una solución de (NP") para el par (h, g), lo cual resulta equivalente a encontrar $f \in W^{2,p}(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} Qf - Qf_0 = h(x, f, D_1 f, \cdots, D_n f) - h_0(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) & \text{en } \Omega \\ f - f_0 = g - f_0 & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

es decir,

$$\begin{cases} L_f f - L_{f_0} f_0 = h(x, f, D_1 f, \cdots, D_n f) - h_0(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) & \text{en } \Omega \\ f - f_0 = g - f_0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Llamando $z = f - f_0$, obtenemos

$$L_{z+f_0}(z + f_0) - L_{f_0} f_0 = L_{z+f_0} z + (L_{z+f_0} - L_{f_0}) f_0$$

Luego el problema queda planteado de la siguiente manera:

$$\begin{cases} L_{z+f_0} z + (L_{z+f_0} - L_{f_0}) f_0 = \\ \qquad = h(x, z + f_0, D_1(z + f_0), \cdots, D_n(z + f_0)) - h_0(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) & \text{en } \Omega \\ z = g - f_0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pero

$$(L_{z+f_0} - L_{f_0}) f_0 = \sum (a_{ij}(x, z+f_0, D_1(z+f_0), \cdots, D_n(z+f_0)) - a_{ij}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0)) D_{ij} f_0 +$$

$$+ \sum (b_j(x, z + f_0) - b_j(x, f_0)) D_j f_0.$$

Efectuando el desarrollo de Taylor de grado 1 para cada a_{ij} y b_j en $f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0$ obtenemos:

$$a_{ij}(x, z+f_0, D_1(z+f_0), \cdots, D_n(z+f_0)) = a_{ij}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) + \frac{\partial a_{ij}}{\partial f}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) z +$$

$$+\sum_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial D_k f}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) D_k z + \rho_{ij}(x, z, D_1 z, \cdots, D_n z),$$

y

$$b_j(x, z + f_0) = b_j(x, u_0) + \frac{\partial b_j}{\partial f}(x, f_0) z + \rho_j(x, z).$$

Luego

$$(L_{z+f_0} - L_{f_0}) f_0 = \sum (\frac{\partial a_{ij}}{\partial f}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) z +$$

$$+\sum_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial D_k f}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) D_k z + \rho_{ij}(x, z, D_1 z, \cdots, D_n z)) D_{ij} f_0 +$$

$$+\sum (\frac{\partial b_j}{\partial f}(x, f_0) z + \rho_j(x, z)) D_j f_0.$$

Entonces,

$$L_{z+f_0} z + (L_{z+f_0} - L_{f_0}) f_0 = \sum (a_{ij}(x, z + f_0, D_1 z + f_0, \cdots, D_n z + f_0) D_{ij} z +$$

$$+\sum b_j(x, z + f_0) D_j z + cz + \sum (D_{ij} f_0 \frac{\partial a_{ij}}{\partial f}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0)) z +$$

$$+\sum D_{ij} f_0 \sum_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial D_k f}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) D_k z +$$

$$+\sum D_{ij} f_0 \rho_{ij}(x, z, D_1 z, \cdots, D_n z) + \sum (D_j f_0 \frac{\partial b_j}{\partial f}(x, f_0)) z +$$

$$+\sum D_j f_0 \rho_j(x, z) = \sum [a_{ij}(x, z + f_0, D_1 z + f_0, \cdots, D_n z + f_0)] D_{ij} z +$$

$$+\sum_{k=1}^{n} [b_k(x, z + f_0) + \sum_{i,j} D_{ij} f_0 \frac{\partial a_{ij}}{\partial D_k f}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0)] D_k z +$$

$$+[\sum (\frac{\partial a_{ij}}{\partial f}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) D_{ij} f_0) + \sum (\frac{\partial b_j}{\partial f}(x, f_0) D_j f_0) + c] z +$$

$$\sum D_{ij} f_0 \rho_{ij}(x, z, D_1 z, \cdots, D_n z) + \sum D_j f_0 \rho_j(x, z).$$

En caso de cumplirse la condición (i), llamaremos

$$\overline{a}_{ij}(z, z, D_1 z, \cdots, D_n z) = a_{ij}(x, z + f_0, D_1(z + f_0), \cdots, D_n(z + f_0)),$$

$$\overline{b}_k(x, z) = b_k(x, z + f_0) + \sum_{i,j} D_{ij} f_0 \frac{\partial a_{ij}}{\partial D_k f}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0)$$

y

$$\overline{c}(x) = \sum (\frac{\partial a_{ij}}{\partial f}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) D_{ij} f_0) + \sum (\frac{\partial b_j}{\partial f}(x, f_0) D_j f_0) + c(x) =$$

$$= \Psi(x) + c(x).$$

Definimos el siguiente operador cuasilineal:

$$\overline{Q}z = \sum \overline{a}_{ij}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)D_{ij}z + \sum \overline{b}_j(x,z)D_jz + \overline{c}z.$$

Y consideramos su linealización:

$$\overline{L}_z w = \sum \overline{a}_{ij}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)D_{ij}w + \sum \overline{b}_j(x,z)D_jw + \overline{c}w$$

Entonces el problema queda transformado en:

$$\begin{cases} \overline{L}_z z = \overline{H}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz) + \overline{R}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz) & \text{en } \Omega \\ \\ z = g - f_0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\overline{H}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)) = h(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) - h_0(x,f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0)$ y $\overline{R}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz) = \sum D_{ij}f_0\rho_{ij}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz) + \sum D_jf_0\rho_j(x,z)$.

Como $f_0 \in W^{2,\infty}(\Omega) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega})$ resulta claro ver que los $\overline{a}_{ij}$ son continuos respecto de todas sus variables y C^1 en $z, D_1z,\cdots,D_nz$. También que los $\overline{b}_j(x,z)$ continuos y C^1 en z. Por último es claro que $\Psi(x) \in C^0(\overline{\Omega})$ con lo cual $\overline{c} \in L^\infty$ y la condición (i) nos asegura que $\overline{c} \leq 0$. Dado que el operador $\overline{Q}$ verifica las condiciones necesarias, podemos aplicar el Lema 17 y definir el operador $\overline{T} : C^1(\Omega) \to C^1(\Omega)$ que resulta continuo y localmente compacto.

Tomemos un R suficientemente pequeño y consideremos z tal que $\|z\|_{1,\infty} < R$, entonces,

$$\|\overline{T}z\|_{1,\infty} \leq \|g-f_0\|_{1,\infty} + \|\overline{T}z - (g-f_0)\|_{1,\infty} \leq$$

$$\leq \|g-f_0\|_{1,\infty} + cC_1\|\overline{L}_z(Tz-(g-f_0))\|_p \leq$$

$$\leq \|g-f_0\|_{1,\infty} + cc_1(\|\overline{H}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz) + \overline{R}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz) - L_z(g-f_0)\|_p \leq$$

$$\leq C_1\|g-f_0\|_{2,p} + cC_1(\|\overline{H}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)\|_p + \|\overline{R}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)\|_p + \|L_z(g-f_0)\|_p).$$

Pero como

$$\|\overline{H}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)\|_p = \|h(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) - h_0(x,f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0))\|_p =$$

$$= \|h(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) - h_0(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) +$$

$$+ h_0(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) - h_0(x,f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0))\|_p \leq$$

$$\leq \|h(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) - h_0(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0))\|_p +$$

$$+ \|h_0(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) - h_0(x,f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0))\|_p \leq$$

$$\leq |\Omega|\|h-h_0\|_\infty + c_{Lip}|\Omega|\|z\|_{1,\infty}.$$

Por otro lado,

$$\|L_z(g-f_0)\|_p =$$

$$= \| \sum \overline{a}_{ij}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)D_{ij}(g-f_0) + \sum \overline{b}_j(x,z)D_j(g-f_0) + \overline{c}(x)(g-f_0)\|_p.$$

Teniendo en cuenta que $\|z\|_{1,\infty} \leq R$ y que los a_{ij} y los b_j son continuos, obtenemos $|a_{ij}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)| \leq c_{ij}$ y $|b_j(x,z)| \leq c_j$, con lo cual

$$\|L_z(g-f_0)\|_p \leq \max\{c_{ij}, c_j, \|c\|_\infty\} \ \|g-f_0\|_{2,p}$$

Hasta el momento tenemos:

$$\|\overline{T}z\|_{1,\infty} \leq$$

$$\leq C_1\|g-f_0\|_{2,p} + |\Omega|\|h-h_0\|_\infty + c_{Lip.}|\Omega|\|z\|_{1,\infty} + C_3\|\overline{R}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)\|_\infty.$$

Si tomamos (h,g) suficientemente cerca de (h_0,f_0) y la constante de Lipchitz es lo suficientemente pequeña podemos concluir que

$$\|T(\overline{z})\|_{1,\infty} \leq R$$

para algún R suficientemente chico. Obtenemos entonces $T(B_R(0)) \subset B_R(0)$, aplicando el Teorema de punto fijo de Schauder (Teorema 11, Capítulo 1) se concluye la existencia de un punto fijo $z_1 \in B_R(0)$, con lo cual $f_1 = f_0 + z_1$ es la solución buscada, notar que $\|f_1 - f_0\|_{1,\infty} \leq R$.

En el caso de cumplirse la afirmación (ii), la demostración resulta similar, escribimos:

$$h(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) - h_0(x,f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0) =$$

$$h(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) - h_0(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) +$$

$$+h_0(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) - h_0(x,f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0) =$$

$$h(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) - h_0(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)) +$$

$$+\frac{\partial h_0}{\partial f}(x,f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0)z + \sum_k \frac{\partial h_0}{\partial D_kf}(x,f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0)D_kz +$$

$$+\rho(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)$$

y definimos el operador cuasilineal:

$$\overline{\overline{Q}}z = \sum \overline{\overline{a}}_{ij}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)D_{ij}z + \sum \overline{\overline{b}}_j(x,z)D_jz + \overline{\overline{c}}(x)z,$$

y su linealizado:

$$\overline{\overline{L}}_zw = \sum \overline{\overline{a}}_{ij}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)D_{ij}w + \sum \overline{\overline{b}}_j(x,z)D_jw + \overline{\overline{c}}(x)w,$$

donde:

$$\overline{\overline{a}}_{ij}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)=\overline{a}_{ij}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz),$$

$$\overline{\overline{b}}_j(x,z)=\overline{b}_j(x,z)-\frac{\partial h_0}{\partial D_jf}(x,f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0)$$

y

$$\overline{\overline{c}}(x)=\overline{c}(x)-\frac{\partial h_0}{\partial f}(x,f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0)=\Psi(x)+c(x)-\frac{\partial h_0}{\partial f}(x,f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0).$$

Llamamos

$$\overline{\overline{H}}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)=h(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0))-$$

$$-h_0(x,z+f_0,D_1(z+f_0),\cdots,D_n(z+f_0)),$$

$$\overline{\overline{R}}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)=\overline{R}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)+\rho(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)$$

y entoces el problema queda planteado de la siguiente forma:

$$\begin{cases}\overline{\overline{Q}}z=\overline{\overline{L}}_zz=\overline{\overline{H}}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)+\overline{\overline{R}}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz) & \text{en } \Omega\\ z=g-u_0 & \text{en } \partial\Omega.\end{cases}$$

Debido a que h_0 es C^1 en f tenemos que $\partial h_0/\partial f$ es continua. También sabemos que $f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0$ son funciones continuas, con lo cual $\partial h_0/\partial f(x,f_0,D_1f_0,\cdots,D_nf_0)\in C^1(\overline{\Omega})$ y por lo tanto es claro que $\overline{\overline{c}}(x)\in L^\infty(\overline{\Omega})$ y que $\overline{\overline{c}}(x)\leq 0$. En la situación anterior hemos mostrado que los $\overline{\overline{a}}_{ij}=\overline{a}_{ij}$ son continuos respecto a todas sus variables y C^1 en $f,D_1f,\cdots,D_nf$. Como h_0 es C^1 en $D_1f,\cdots,D_nf$, tenemos que $\partial h_0/\partial D_jf$ resultan funciones continuas, implicando que los $\overline{\overline{b}}_j$ son continuos con respecto a sus dos variables y claramente resultan C^1 en f, al igual que los $\overline{b}_j$.

Estamos nuevamente bajo la condiciones del Lema 17 y por lo tanto podemos asegurar que el operador $\overline{\overline{T}}:C^1(\overline{\Omega})\to C^1(\overline{\Omega})$ asociado a $\overline{\overline{L}}$ resulta continuo y localmente compacto. Tomemos un R suficientemente pequeño y consideremos $z\in B_R(0)\subset C^1$. Tal como lo hemos hecho en el caso anterior, obtenemos

$$\|\overline{\overline{T}}z\|_{1,\infty}\leq$$

$$\leq C_1\|g-f_0\|_{2,p}+cC_1(\|\overline{\overline{H}}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)\|_p+\|\overline{\overline{R}}(x,z,D_1z,\cdots,D_nz)\|_p+\|L_z(g-f_0)\|_p).$$

En forma amaloga se concluye la existencia de un punto fijo $z_2\in B_R(0)$ del operador $\overline{\overline{T}}$, con lo cual $f_2=f_0+z_2$ es la solución buscada, notar que $\|f_2-f_0\|_{1,\infty}\leq R$. □

Observación 16 *En (i) y en (ii) la condición sobre Ψ puede ser reemplazada pidiendo $\|\Psi + c\|_p$ (respectivamente $\|\Psi + c - \frac{\partial h_0}{\partial f}(\cdot, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0)\|_p$) suficientemente chico. Esto se debe a que, a partir del Teorema 9 del Capítulo 1, podemos deducir que bajo estas nuevas condiciones también se verifican los lemas y teoremas utilizados en la anterior demostración.*

Observación 17 *Consideraremos el caso particular donde $\Omega \subset \Re^2$ es un dominio $C^{2,\alpha}$,*

$$Q(f) = (1 + f_v^2) f_{uu} + (1 + f_u^2) f_{vv} - 2 f_u f_v f_{uv}$$

y

$$h(u, v, f, f_u, f_v) = 2H(u, v)\left(1 + |\nabla f|^2\right)^{\frac{3}{2}}.$$

En este caso $H \in C^1(\overline{\Omega})$ representa la curvatura media prescripta sobre el dominio Ω.

El Teorema 14.12, y Corolario 14.13 en [G-T] aseguran que, por ejemplo, si $H > 0$ satisface $H'(y_0)^3 < \frac{n}{n-1} H(y_0)$ en algún $y_0 \in \partial\Omega$, entonces para todo $\epsilon > 0$ existe $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$ con $\|\varphi\|_\infty < \epsilon$, tal que el problema

$$(Eq3) \begin{cases} Qf = 2H(u, v)\left(1 + |\nabla f|^2\right)^{\frac{3}{2}} & \text{en } \Omega \\ f = \varphi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

no tiene solución.

Por otro lado, el Teorema 16.10 en [G-T] asegura que si $H \in C^1(\overline{\Omega})$ satisface

$(i) H'(y) \geq \frac{n}{n-1}|H(y)|$, y

$(ii) |\int_\Omega H\eta dx| \leq \frac{(1-\epsilon_0)}{n} \int_\Omega |D\eta| dx$, para todo $\eta \in C_0^1(\Omega)$ y algún $\epsilon_0 > 0$

entonces el problema (Eq3) tiene solución única en $C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ para cualquier $\varphi \in C^\infty(\overline{\Omega})$.

Supongamos que contamos con H en las condiciones del Teorema 16.10 en [G-T] satisfaciendo $H'(y_0) = n/(n-1)\ H(y_0)$ para algún $y_0 \in \partial\Omega$. Consideremos $H_k(u, v) = H(u, v) + 1/k$, para todo $k \in N$ se tiene $H'(y_0) < n/(n-1)\ H(y_0)$. A partir del Corolario 14.13 en [G-T] construimos una sucesión $\{\varphi_k\} \subset C^\infty(\overline{\Omega})$ de manera que $\|\varphi\|_\infty < k$ y (Eq3) para $(2H_k\left(1 + |\nabla f|^2\right)^{\frac{3}{2}}, \varphi_k)$ no tiene solución.

[3] H' es la curvatura media de $\partial\Omega$.

Por el Teorema 16.10 en [G-T] sabemos que (Eq3) tiene solución única $f_0 \in C^0(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ *para* $(H,0)$, *es decir (NP") tiene solución* $f_0 \in W^{2,\infty}(\Omega)$ *para el par* $(h,0)$. *El Teorema 13 afirma que para cualquier par* (h,g) *suficientemente cerca de* $(h,0)$ *en* $C(\overline{\Omega} \times R \times R^n) \times W^{2,p}(\Omega)$, *existe solución del problema (NP"). En nuestro caso es claro ver que* $\|(2H_k\left(1+|\nabla f|^2\right)^{\frac{3}{2}} - h\|_\infty \to 0$. *En cuanto a* φ_k, *podemos decir que* $\|\varphi_n\|_\infty \to 0$, *pero por el Teorema 15 podemos concluir que ninguna subsucesión de* φ_n *convergerá en* $W^{2,p}$.

5.3 Resultados de unicidad.

Utilizando la misma idea con la que fue demostrado el Teorema 15 puede probarse la unicidad local de las soluciones de (NP"), dando lugar al siguiente Teorema:

Teorema 16 *Sea* $f_0 \in W^{2,\infty}$ *una solución de (NP") y asumamos que se verifica alguna de las siguientes condiciones:*

(i) h_0 *es Lipschitz en* $f, D_1 f, ..., D_n f$ *con una constante suficientemente chica y* $\Psi + c \leq 0$.

(ii) h_0 *es* C^1 *en* $f, D_1 f, \cdots, D_n f$ *y* $\Psi + c \leq \frac{\partial h_0}{\partial f}(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0)$.

Entonces f_0 *es aislada en* $C^1(\overline{\Omega}) \cap W^{2,p}(\Omega)$[4].

<u>Dem</u>: Supongamos que existe $f_1 \in W^{2,p}(\Omega)$ solución de (NP"), tal como lo hicimos en el teorema anterior obtenemos,

$$\begin{cases} Qf_1 - Qf_0 = h(x, f_1, D_1 f_1, \cdots, D_n f_1) - h_0(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) & \text{en } \Omega \\ f_1 - f_0 = g - g = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Llamamos $z = f_1 - f_0$ y en caso de cumplirse la condición (i), la ecuación anterior queda planteada como:

$$\begin{cases} \overline{L}_z z = \hat{H}(x, z, D_1 z, \cdots, D_n z) + \overline{R}(x, z, D_1 z, \cdots, D_n z) & \text{en } \Omega \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $\hat{H}(x, z, D_1 z, \cdots, D_n z) = h(x, f_0+z, D_1 f_0+z, \cdots, D_n f_0+z) - h(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0)$. Sabemos que $z_0 = f_1 - f_0$ es una solución de la ecuación recién planteada y por lo

[4] Existe $\delta > 0$ para el cual ninguna $f_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ solución de (NP"), verifica $\|f_1 - f_0\|_{1,\infty} < \delta$.

tanto se tiene $\hat{T}z_0 = z_0$. Para R suficientemente pequeño y $z \in B_R(0) \subset C^1(\Omega)$, obtenemos

$$\|\overline{T}z\|_{1,\infty} \leq c_{Lip.}|\Omega|\|z\|_{1,\infty} + C_3\|\overline{R}(x, z, D_1 z, \cdots, D_n z)\|_\infty \leq$$
$$\leq C(C_{Lip}, \Omega, \overline{R})\|z\|_{1,\infty}.$$

Si C_{Lip} es lo suficientemente pequeña, entonces $C(C_{Lip}, \overline{R}) < 1$ con lo cual $\hat{T}$ no acepta puntos fijos dentro de $B_R(0)$, excepto $z = 0$, lo cual demuestra el resultado.

En caso de cumplirse la condición (ii) escribimos $\hat{H}(x, z, D_1 z, \cdots, D_n z) = = \partial h_0/\partial f(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0)z + \sum_k \partial h_0/\partial D_k f(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0)D_k z + +\rho(x, z, D_1 z, \cdots, D_n z)$ y el problema queda planteado como:

$$\begin{cases} \overline{\overline{L}}_z z = \overline{\overline{R}}(x, z, D_1 z, \cdots, D_n z) & \text{en } \Omega \\ \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Para R suficientemente pequeño y $z \in B_R(0) \subset C^1(\Omega)$ obtenemos

$$\|\overline{\overline{T}}z\|_{1,\infty} \leq C_3\|\overline{\overline{R}}(x, z, D_1 z, \cdots, D_n z)\|_\infty \leq C(\overline{\overline{R}})\|z\|_{1,\infty}.$$

Si R es lo suficientemente pequeño, $C(\overline{\overline{R}}) < 1$ lo cual demuestra el resultado. □

En ciertos casos podemos probar la unicidad global, así lo muestra el siguiente Teorema:

Teorema 17 *Sea $f_0 \in W^{2,\infty}$ una solución de (NP") y asumamos que tanto los a_{ij} como los b_j no dependen de f y que h es C^1 en $f, D_1 f, \cdots, D_n f$. Entonces, si $c \leq \partial h/\partial f$, f_0 es única en $W^{2,p} \hookrightarrow C^1$.*

Dem: Como en el Teorema 15, si f_1 es otra solución de (NP"), tenemos que

$$\begin{cases} L_{f_1} f_1 - L_{f_0} f_0 = h(x, f_1, D_1 f_1, \cdots, D_n f_1) - h(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) & \text{en } \Omega \\ \\ f_1 = f_0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Es decir

$$\text{(Eq4)} \begin{cases} L_{f_1}(f_1 - f_0) + (L_{f_1} - L_{f_0})f_0 = h(x, f_1, D_1 f_1, \cdots, D_n f_1) - h(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) & \text{en } \Omega \\ \\ f_1 - f_0 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Pero

$$(L_{f_1} - L_{f_0})f_0 = \sum_{ij}(a_{ij}(x, D_1 f_1, \cdots, D_n f_1) - a_{ij}(x, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0))D_{ij} f_0 =$$

$$= \sum_{ij} [\sum_k \frac{\partial a_{ij}}{\partial D_k f}(x, \varphi^1_{ij}(x), \cdots, \varphi^n_{ij}(x)) D_k(f_1 - f_0)] D_{ij} f_0 =$$

$$= \sum_k \alpha_k(x) D_k(f_1 - f_0),$$

donde

$$\alpha_k(x) = \sum_{ij} \frac{\partial a_{ij}}{\partial D_k f}(x, \varphi^1_{ij}(x), \cdots, \varphi^n_{ij}(x)) D_{ij} f_0,$$

y las funciones de valores intermedios φ_{ij} puedes ser elegidas de manera medible y pertenecientes a L^∞.

Por otro lado tenemos

$$h(x, f_1, D_1 f_1, \cdots, D_n f_1) - h(x, f_0, D_1 f_0, \cdots, D_n f_0) =$$

$$= \frac{\partial h}{\partial f}(x, \varrho^0(x), \varrho^1(x), \cdots, \varrho^n(x))(f_1 - f_0) + \sum_k \frac{\partial h}{\partial D_k f}(x, \varrho^0(x), \varrho^1(x), \cdots, \varrho^n(x)) D_k(f_1 - f_0).$$

Luego podemos reescribir (Eq4) como

$$\begin{cases} \sum_{ij} a_{ij}(x, D_1 f_1, \cdots, D_n f_1) D_{ij}(f_1 - f_0) + \\ \\ \sum_k [b_k(x) + \alpha_k(x) - \frac{\partial h}{\partial D_k f}(x, \varrho^0(x), \varrho^1(x), \cdots, \varrho^n(x))] D_k(f_1 - f_0) + \\ \\ (c(x) - \frac{\partial h}{\partial f}(x, \varrho^0(x), \varrho^1(x), \cdots, \varrho^n(x)))(f_1 - f_0) = 0 & \text{en } \Omega \\ \\ f_1 - f_0 = 0 & \text{en } \partial\Omega. \end{cases}$$

Podemos pensar en $\hat{z} = f_1 - f_0$ como una solución del siguiente problema:

$$\text{(Eq4)} \begin{cases} Mz = 0 & \text{en } \Omega \\ \\ z = 0 & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde

$$Mz = \sum_{ij} A_{ij}(x) D_{ij} z + \sum_k B_k(x) D_k z + C(x) z$$

con

$$A_{ij}(x) = a_{ij}(x, D_1 f_1(x), \cdots, D_n f_1(x))$$

$$B_k(x) = b_k(x) + \alpha_k(x) - \frac{\partial h}{\partial D_k f}(x, \varrho^0(x), \varrho^1(x), \cdots, \varrho^n(x))$$

y

$$C(x) = c(x) - \frac{\partial h}{\partial f}(x, \varrho^0(x), \varrho^1(x), \cdots, \varrho^n(x)$$

Claramente los $A_{ij} \in C^0(\Omega)$, podemos asegurar que $B_k \in L^\infty$ gracias a que $f_0 \in W^{2,\infty}$ y debido a que $h \in C^1$ podemos afirmar que $C \in L^\infty$. También es claro ver que $C \leq 0$ puesto que $c - \frac{\partial h}{\partial f} \leq 0$. Entonces estamos bajo las condiciones del Teorema 8 (Capítulo 1) y podemos afirmar que (Eq4) acepta única solución en $W^{2,p}(\Omega)$, pero $z = 0$ es solución y también lo es $f_1 - f_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ y asi queda demostrado el teorema.

5.4 Regularidad de las soluciones.

Teorema 18 *Sea $f \in W^{2,p}(\Omega)$ una solución de (NP"), asumamos que $h \in C^{k,\alpha}$ para $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $\partial\Omega \in C^{k+2,\beta}$, que $a_{ij} \in C^{k,\beta}$ respecto de x y $a_{ij} \in C^{k+1}$ respecto de $f, D_1 f, \cdots D_n f$, $b_j \in C^{k,\beta}$ respecto de x y $b_j \in C^{k+1}$ respecto de f, $c \in C^{k,\beta}$ y que $g \in C^{k+2,\beta}$ para $\beta = \alpha(1 - \frac{n}{p})$. Entonces $f \in C^{k+2,\beta}(\overline{\Omega})$.*

Dem: Comenzamos con el caso $k = 0$. Por el Teorema 7 del Capítulo 1, tenemos que $f \in C^{1,1-n/p}(\overline{\Omega})$ y a su vez verifica:

$$\sum a_{ij}(x, f(x), D_1 f(x), \cdots, D_n f(x)) D_{ij} f + \sum b_j(x, f(x)) D_k f + c(x) f =$$

$$= h(x, f(x), D_1 f(x), \cdots, D_n f(x)).$$

Luego podemos pensar que f es solución del problema:

$$\begin{cases} Lw = \sum A_{ij}(x) D_{ij} w + \sum B_j(x) D_k w + c(x) w = D(x) & \text{en } \Omega \\ \\ w = g & \text{en } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde

$$A_{ij}(x) = a_{ij}(x, D_1 f_1(x), \cdots, D_n f_1(x))$$
$$B_j(x) = b_j(x, f(x))$$

y

$$D(x) = h(x, f(x), D_1 f(x), \cdots, D_n f(x)).$$

El operador elíptico L tiene C^β coeficientes:

$$\frac{|A_{ij}(x) - A_{ij}(y)|}{|x-y|^\beta} = \frac{|a_{ij}(x, f(x), D_1 f(x), \cdots, D_n f(x)) - a_{ij}(y, f(y), D_1 f(y), \cdots, D_n f(y))|}{|x-y|^\beta} =$$

$$= \frac{|a_{ij}(x, f(x), D_1 f(x), \cdots, D_n f(x)) - a_{ij}(y, f(x), D_1 f(x), \cdots, D_n f(x))|}{|x-y|^\beta} +$$

$$+ \frac{|a_{ij}(y, f(x), D_1 f(x), \cdots, D_n f(x)) - a_{ij}(y, f(y), D_1 f(y), \cdots, D_n f(y))|}{|x-y|^\beta} \leq$$

$$\leq \frac{|a_{ij}(x,f(x),D_1f(x),\cdots,D_nf(x)) - a_{ij}(y,f(x),D_1f(x),\cdots,D_nf(x))|}{|x-y|^\beta}+$$

$$+|\partial a_{ij}/\partial f(\xi)|\frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\beta} + \sum_k |\partial a_{ij}/\partial D_kf(\xi)|\frac{|D_kf(x)-D_kf(y)|}{|x-y|^\beta} < \infty$$

puesto que $f \in C^{1,\beta}(\overline{\Omega})$, $D_kf \in C^\beta(\overline{\Omega})$, $a_{ij} \in C^\beta$ respecto de x y $a_{ij} \in C^1$ respecto de $f, D_1f, \cdots D_nf$, con lo cual $\partial a_{ij}/\partial f$ y $\partial a_{ij}/\partial D_kf$ están acotados. Análogamente, se ve que $B_j \in C^\beta$. Por otro lado, $c \in C^\beta$ por hipótesis. Finalmente, $D \in C^\beta$ pues es la composición de una función C^α y una aplicación $C^{1-n/p}$.

Debido al Teorema 6.14 en [G-T], la ecuación $Lw = f$ en Ω, $w = g$ en $\partial\Omega$ admite solución única en $C^{2,\beta}(\overline{\Omega})$, y el teorema queda demostrado gracias a la unicidad que asegura el Teorema 9.15 en [G-T].

El caso general es inmediato a partir del Teorema 6.19 en [G-T]. □

5.5 Propiedades del conjunto $\{Qf = h\}$

Asumamos que $\partial\Omega \in C^{2,\beta}$, $h \in C^\alpha$ y que h y Q verifican las hipótesis del Teorema 13.

Consideremos los siguientes conjuntos:

$$M_h = \{f \in W^{2,p}(\Omega)/Qf = h(x,f,D_1f,\cdots,D_nf) \text{ en } \Omega\}$$

$$S_h = \{g \in W^{2,p}(\Omega) \text{ armónica / (NP") tiene una solución en } W^{2,p}(\Omega)\}$$

M_h es cerrado en $W^{2,p}(\Omega)$ pues $M_h = F^{-1}(0)$ con $F : W^{2,p}(\Omega, R) \rightarrow$ definida por $F(f) = Q(f) - h(\cdot, f, D_1, \cdots, D_nf)$ la cual esta bien definida y resulta una aplicación continua debido a que $h \in C^\alpha$ y a la regularidad de los coeficientes de Q.

Por otro lado, a partir de los Teoremas 15 y 18 podemos afimar que S_h es un abierto dentro del subespacio cerrado $\Delta^{-1}(0) \subset W^{2,p}(\Omega)$.

Utilizando los Teoremas 15 y 16 podemos definir la aplicación inyectiva

$$\lambda : M_h \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) \rightarrow S_h \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}),$$

donde $\lambda(f)$ es la única función armónica g que verifica $f = g$ en $\partial\Omega$.

La continuidad de λ está justificada pues el operador Δ está bajo las condiciones del Lema 3 del Capítulo 1 y por lo tanto

$$\|\lambda(f)-\lambda(f_0)\|_{2,p} \leq \|\lambda(f)-f-(\lambda(f_0)-f_0)\|_{2,p}+\|f-f_0\|_{2,p} \leq c\|\Delta f-\Delta f_0\|_p+\|f-f_0\|_{2,p}.$$

Observamos que podemos pensar a λ como la restricción del operador lineal $\overline{\lambda}$: $W^{2,p}(\Omega) \rightarrow \Delta^{-1}(0)$ que es suryectivo, continuo y por lo tanto abierto.

Puede verse que λ es un homeomorfismo, para lo cual es suficiente con considerar la sucesión $g_n \rightarrow g$, y notar que si $\lambda(f) = g$ podemos encontrar (siguiendo la última parte de la demostración del Teorema 15) para cada n suficientemente grande una solución $\overline{f}_n \in B_{R_n}(f)$ del problema con dato de borde g_n. Por unicidad obtenemos $\overline{f}_n = f_n$, y al igual que en el teorema citado vemos que $R_n \rightarrow 0$ cuando $g_n - g \rightarrow 0$.

Como una consecuencia tenemos el siguiente:

Teorema 19 *Asumamos que $\partial\Omega \in C^{2,\beta}$, $h \in C^{\alpha}$ y que se verifican las hipótesis del Teorema 17.*

Entones si para alguna h el problema (NP") admite a solución para cualquier g, $(M_f \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}),\ \|\cdot\|_{2,p})$ resulta homeomórfico al subespacio $\Delta^{-1}(0) \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$ denso dentro de $(\Delta^{-1}(0),\ \|\cdot\|_{2,p})$. En particular, resulta conexo por arcos.

Dem: Basta observar que si para toda g podemos hallar solución de (NP") para el par (h, g), entonces $S_h = \Delta^{-1}(0)$ y por lo tanto $S_h \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}) = \Delta^{-1}(0) \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega})$. □

Observación 18 *Este resultado se aplica al caso no paramétrico de la ecuación de curvatura media prescripta para curvatura constante H, si la curvatura de $\partial\Omega$, H' verifica la condición $H' \geq |H|\frac{n}{n+1}$ (ver [G-T], corolario 16.11).*

Apéndice

En esta Sección daremos la demostración del Teorema 3, enunciado en el Capítulo 1. Para ello, serán necesarios los Lemas 1 y 2 del Capítulo 1, y los lemas a continuación.

Lema 18 *Sean $f \in M(\Omega)$, $M \in \Re_{>0}$ y $n \in N$ verificando*

$$n\,M \;<\; \int_{\Omega} f(x)\,dx \;<\; (n+1)\,M$$

entoces puede encontrarse $G_1, G_2, \cdots, G_{n+1}$ partición de Ω de manera tal que para todo $i = 1, \cdots, n$ se cumple $\int_{G_i} f(x)\,d(x) < M$.

Dem: Ver [V]. □

Lema 19 *Sea $G : \Omega \times \Re \to \Re$ una N-función, sea $A = \{x \in \Omega$ tal que $G(x, \cdot)$no resulta continua$\}$ y consideremos un intervalo de la forma $[-k, k]$, entonces para todo podemos hallar $f_k : \Omega - A \to \Re$ medible, la cual verifica*

$$\max_{-k \le s \le k} G(x, s) = G(x, f_k(x)).$$

Dem: Ver [V]. □

Teorema 4 *Sea H una N-función y sean p y $q \in [1, +\infty)$ entonces:*

(1) Si N_H mapea L^p en L^q entonces $N_H : L^p \to L^q$ resulta un operador continuo y además existe una función $a(x) \in L^q$ y una constante $b \ge 0$ que verifica $|H(x,s)| \le a(x) + b|s|^{\frac{p}{q}}$.

(2) Si existe $a(x) \in L^q$ y una constante $b \ge 0$ que verifica $|H(x,s)| \le a(x) + b|s|^{\frac{p}{q}}$ entonces N_H resulta un operador continuo $N_H : L^p \to L^q$.

Dem: Observemos que probada la afirmación (1) , la afirmación (2) queda automáticamente demostrada pues si $a(x) \in L^q$ y $f \in L^p$ tenemos:

$$\int_{\Omega} |H(x, f(x))|^q \le \int_{\Omega} (a(x) + b|f(x)|^{\frac{p}{q}})^q \le$$

$$\le \int_{\Omega} 2^{q-1}(|a(x)|^q + b^q |f(x)|^p) =$$

$$= 2^{q-1}\left(\int_{\Omega} |a(x)|^q + b^q \int_{\Omega} |f(x)|^p\right) < \infty$$

Lo cual nos dice que N_H mapea L^p en L^q y por lo tanto la afirmación (1) nos garantiza la continuidad.

Dem de (1):

Dividiremos la demostración en tres partes:

a- Continuidad del operador N_H.

b- Acotación para el Operador N_H.

c- Acotación para la función H.

a- <u>Continuidad del Operador N_H.</u>

Sabiendo que N_H mapea L^p en L^q vamos a probar que es continuo. Asumimos que $N_H(0_{L^p}) = 0_{L^q}$ y probaremos la continuidad en 0_{L^p}. Una vez probado este caso particular podremos probar el caso general, pues para probar la continuidad en un f_0 arbitrario de L^p consideraremos la función

$$G(x, s) = H(x, s + f_0(x)) - H(x, f_0(x)).$$

Es claro que G es una N-función y también observamos que $N_G(0_{L_p}) = 0_{L_q}$ ya que

$$N_G(f)(x) = G(x, f(x)) = H(x, f(x) + f_0(x)) - H(x, f_0(x))$$

y que N_G mapea L^p en L^q. Entonces nos hemos reducido al caso particular y podemos asegurar que N_G es continuo en 0_{L_p} pero N_G y N_H estan relacionados de la siguiente manera:

$$N_H(f + f_0) = N_G(f)$$

con lo cual la continuidad de N_G en 0 prueba la continuidad de N_H en f_0.

Demostración del caso particular: Supongamos que N_H no es continua en 0_{L^p}, nuestro objetivo será construir una función Ψ en L^p de manera que $N_H(\Psi) \notin L^q$.

Siendo N_H discontinua en 0_{L^p}, existe una sucesión $\phi_{n\in N} \subset L^p$ tal que $\phi_n \to 0_{L^p}$ pero $N_H(\phi_n) \not\to 0_{L^p}$. Podemos pensar que para todo $n \in N$ se tiene

$$\|N_H(\phi_n)\|_q^q > a > 0$$

y

$$\sum_{n\in N} \|\phi_n\|_p^p < \infty.$$

Teniendo en cuenta estos hechos se construye una secuencia de números positivos ε_k, funciones ϕ_{n_k} y de conjuntos Ω_k que cumplen las siguientes condiciones:

(i) $\varepsilon_{k+1} < \frac{\varepsilon_k}{2}$

(ii) $|\Omega_k| \leq \varepsilon_k$

(iii) $\int_{\Omega_k} |H(x, \phi_{n_k}(x))|^q dx > \frac{2}{3}a$

(iv) Dado $D \subset \Omega$ arbitrario tal que $|D| < 2\varepsilon_{k+1}$ se verifica: $\int_D |H(x, \phi_{n_k}(x)|^q dx < \frac{a}{3}$

La construcción se realiza en forma inductiva. Para $n = 1$ tomamos

$$\varepsilon_1 = |\Omega| \ , \quad \Omega_1 = \Omega, \quad \phi_{n_1} = \phi_1$$

que claramente verifican (ii) y (iii). Ahora construiremos ε_2, Ω_2 y ϕ_{n_2}. Pare eligir ε_2 utilizamos la absoluta continuidad de la integral para la función[5] $|H(\phi_{n_1})|^q \in L^1(\Omega)$ y para $\varepsilon = \frac{a}{3}$ obteniendo asi un δ de manera tal que para cualquier $D \subset \Omega$ tal que $|D| < \delta$ se verifica: $\int_D |H(x, \phi_{n_1}(x)|^q dx < \frac{a}{3}$. Esto nos dice que eligiendo $\varepsilon_2 < \min[\delta, \frac{\varepsilon_1}{2}]$ logramos que se satisfaga la condición (iv).

Por otro lado recordemos que $\phi_n \to 0$ en L^p con lo cual $\phi_n \to 0$ en medida, entonces, gracias al Lema 2 podemos afirmar que $N_H(\phi_n) \to 0$ en medida. Eso quiere decir que

$$|\{x \in \Omega \text{ tal que } |H(x, \phi_n(x))| \leq \alpha\}| \to 0$$

$$|\Omega| - |\{|H(\phi_n) > \alpha\}| \to 0.$$

Entonces para ε_2 existe $n_2 \in N$ tal que $|\Omega - \{H(\phi_n) < \alpha\}| < \varepsilon_2$ para todo $n \geq n_2$.

Tomemos $\Omega_2 = \Omega - \{H(\phi_{n_2}) < \alpha\}$ y veamos como elegir un α adecuado para que se cumpla (iii). Llamemos $F_2 = \{H(\phi_{n_2}) < \alpha\}$.

$$\int_{\Omega_2} |H(x, \phi_{n_2}(x))|^q dx = \int_{\Omega} |H(x, \phi_{n_2}(x))|^q dx - \int_{F_2} |H(x, \phi_{n_2}(x))|^q dx \geq$$

$$a \ - \ |F_2| \ \ \alpha^q \geq a \ - \ |\Omega| \ \ \alpha^q.$$

Si tomamos $\alpha = (\frac{a}{3|\Omega|})^{\frac{1}{q}}$ logramos que se cumpla (iii). La construcción continúa en forma inductiva.

Con estos elementos definiremos $\Psi \in L^p(\Omega)$. Para ello llamemos

$$U_k = \bigcup_{i=k+1}^{\infty} \Omega_k \ \text{ y } \ D_k = \Omega_k - U_k$$

[5] Se entiende $H(\phi_{n_1}) = H(\cdot, \phi_{n_1}(\cdot))$

Observación 19 *Se tienen los siguientes hechos:*

1- Los conjuntos D_k son disjuntos.

2- $|U_k| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} |\Omega_i| = \sum_{j=1}^{\infty} |\Omega_{k+j}| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon_{k+1}}{2^{j-1}} = 2\ \varepsilon_{k+1}.$

Definimos

$$\Psi(x) = \begin{cases} \phi_{n_k}(x) & \text{si} \quad x \in D_k \\ \\ 0 & \text{si} \quad x \notin \bigcup_{i=1}^{\infty} D_i \end{cases}$$

Veamos que $\Psi \in L^p(\Omega)$:

$$\int_\Omega |\Psi(x)|^p dx = \int_{\bigcup_{k\in N} D_k} |\Psi(x)|^p dx = \sum_{k\in N} \int_{D_k} |\phi_{n_k}(x)|^p dx \leq \sum_{k\in N} \int_\Omega |\phi_{n_k}(x)|^p dx < \infty.$$

Veamos ahora que $N_H(\Psi) \notin L^q(\Omega)$:

$$\int_\Omega |H(x,\Psi(x))|^q dx = \sum_{k\in N} \int_{D_k} |H(x,\Psi(x))|^q dx = \sum_{k\in N} \int_{D_k} |H(x,\phi_k(x))|^q dx =$$

$$\sum_{k\in N} \left(\int_{\Omega_k} |H(x,\phi_k(x))|^q dx - \int_{\Omega_k \cap U_k} |H(x,\phi_k(x))|^q dx\right) \geq$$

$$\geq \sum_{k\in N} \frac{2}{3}\, a \ - \ \frac{a}{3} = \sum_{k\in N} \frac{a}{3} = \infty$$

ya que $|\Omega_k \cap U_k| \leq |U_k| \leq 2\varepsilon_{k+1}$. □

b- Acotación del Operador N_H.

Probaremos ahora que N_H es un operador acotado, es decir debemos hallar $M > 0$ de forma tal que $\|N_H(f)\| \leq M$ si $\|f\| \leq 1$.

Nuevamente asumimos que $N_H(0) = 0$. Hemos probado que N_H es continuo y por lo tanto existe $r > 0$ tal que

$$\int_\Omega |H(x,f(x))|^q dx \leq 1 \text{ si } \int_\Omega |f(x)|^p dx < r^p$$

Sea f una función cualquiera de $L^p(\Omega)$, entonces podemos encontrar n un número natural de manera tal que $nr^p \leq \|f\|_p^p \leq (n+1)r^p$ es decir $nr^p \leq \int_\Omega |f|^p \leq (n+1)r^p$.

Entonces estamos en condiciones de usar el Lema 18 para asegurar que existe $G_1, \cdots, G_{n+1}$ partición de Ω de manera que $\int_{G_i} |f|^p dx \leq r^p$ para todo $i = 1 \cdots n+1$ y por lo tanto

$$\|N_H(f)\|_q^q = \int_\Omega |H(x, f(x))|^q dx = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{G_i} |H(x, f(x))|^q dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{n+1} \int_\Omega |\chi_{G_i}(x) H(x, f(x))|^q dx = \sum_{i=1}^{n+1} \int_\Omega |H(x, \chi_{G_i}(x) f(x))|^q dx$$

pero $\int_\Omega |\chi_{G_i}(x) f(x)|^p dx = \int_{G_i} |f|^p \leq r^p \Rightarrow \int_\Omega |H(x, \chi_{G_i}(x) f(x))|^q dx \leq 1$.

Luego tenemos

$$\|N_H(f)\|_q^q \leq n+1$$

Recordemos que $nr^p \leq \|f\|_p^p$ es decir $n \leq \frac{\|f\|_p^p}{r^p}$ luego podemos concluir que

$$\|N_H(f)\|_q \leq \left(\frac{\|f\|_p^p}{r^p} + 1\right)^{\frac{1}{q}}$$

lo cual prueba la acotación.

En el caso que $N_H(0) \neq 0$, consideremos N_G anteriormente definido. Tenemos entonces que $N_G(0) = 0$ y por lo tanto N_G resulta acotado. Puesto que $N_G(f) = N_H(f) - H(x, 0)$, donde $H(x, 0)$ es una función determinada de $L^q(\Omega)$, concluimos que N_H es acotado.

Luego $\|N_H(f)\|_q = \|N_G(f) - H(x, 0)\|_q \leq \|N_G(f)\|_q + \|H(x, 0)\|_q$ con lo cual es claro que al ser N_G acotado también lo es N_H. □

c- Acotación para la función H.

Probaremos ahora que H admite una acotación del estilo $|H(x, s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p}{q}}$.

Hemos probado que N_H es acotado, luego existe $b > 0$ de manera tal que $\|N_H(f)\| \leq b$ si $\|f\| \leq 1$, es decir $\int_\Omega |H(x, f(x))|^q dx \leq b$ si $\int_\Omega |f(x)|^p dx < 1$

Definimos la función Φ $\Omega \times \Re \rightarrow \Re$ de la siguiente manera[6]:

$$\Phi(x, s) = \max(\ |H(x, s)| \ - \ b\ |s|^{\frac{p}{q}} \ ,\ 0\ ).$$

[6]Observamos que si $q < 1$, entonces $\Phi \geq 0$ se define como

$$(\Phi(x, s))^q = \max(|H(x, s)|^q - b^q |s|^p, 0);$$

por la desigualdad de Minkowsky se tiene

$$\Phi(x, s) \leq |H(x, s)| - b|s|^{\frac{p}{q}},$$

si $\Phi(x, s) \geq 0$, y la demostración sigue sin alteraciones.

Observación 20 *Observemos que :*

1- La desigualdad de Minkowsky nos asegura que si $\Phi(x,s) \neq 0$, entonces

$$|\Phi(x,s)|^q \leq |H(x,s)|^q - b|s|^p.$$

Sea f una función arbitraria de $L^p(\Omega)$.

2- Φ es una N-función.

Definamos $D = \{x \in \Omega \text{ tal que } \Phi(x, f(x)) > 0\}$. Podemos suponer que

$$\int_D |f(x)|^p dx = n + \varepsilon$$

donde n es un número natural y $0 \leq \varepsilon < 1$.

Utilizando nuevamente el Lema 18, podemos hallar $D_1, \cdots, D_n$ partición de D de manera tal que

$$\int_{D_i} |f(x)|^p dx < 1 \quad (i = 1, \cdots, n+1).$$

Luego

$$\int_D |\Phi(x, f(x))|^q dx = \sum_{i=1}^{n+1} \int_{D_i} |\Phi(x, f(x))|^q dx \leq (n+1)b^q$$

y también

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\Phi(x, f(x))|^q \, dx &= \int_D |\Phi(x, f(x))|^q \, dx \leq \\ &\leq \int_D |H(x, f(x))|^q \, dx - \int_D b^q |f(x)|^p \, dx \\ &\leq (n+1)b^q - b^q(n+\varepsilon) \leq b^q. \end{aligned}$$

Por otro lado el Lema 19 nos dice que para cada $k \in N$ existe una función medible f_k que verifica

$$\max_{[-k\ ,\ k]} \Phi(x,s) = \Phi(x, f_k(x)) \text{ para casi todo } x \in \Omega$$

Sabemos que f_k verifica $|f_k(x)| \leq k$ y por lo tanto tenemos que $f_k \in L^p(\Omega)$. También observamos que:

$$\sup_{s \in \Re} \Phi(x,s) = \lim_{k \to \infty} \Phi(x, f_k(x))$$

Llamemos $a(x) = \sup_{s \in \Re} \Phi(x,s)$. Utilizando el Lema de Fatou obtenemos:

$$\int_\Omega |a(x)|^q \, dx \leq \sup_k \int_\Omega |\Phi(x, f_k(x))| \, dx \leq b^q,$$

lo cual prueba que $a(x)$ es una función de $L^p(\Omega)$.

Finalmente se tiene

$$a(x) = \sup_{s\in\Re} \Phi(x,s) \geq \sup_{s\in\Re}\{|H(x,s)| - b|s|^{\frac{p}{q}}\},$$

lo cual muestra que

$$a(x) \geq |H(x,s)| - b|s|^{\frac{p}{q}} \text{ para todo } x \in \Omega,$$

es decir

$$|H(x,s)| \leq a(x) + b|s|^{\frac{p}{q}} \text{para todo } x \in \Omega.$$

$\square$

Referencias

[A] Adams, R. A., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.

[A-M] Amster, P., Mariani, M.C., The prescribed mean curvature equation with Dirichlet conditions. Aparecerá en *Nonlinear Analysis.*

[A-M-R] Amster, P., Mariani, M.C, Rial, D.F, Existence and unicity of H-System's solutions with Dirichlet conditions. Aparecerá en *Nonlinear Analysis, Theory, Methods, and Applications.*

[A-R] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P.H., Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Functional Analysis*, 14, (1973), 349-381.

[B-C] Brézis, H., Coron, J.M., Multiple solutions of H-system and Rellich's conjeture, *Comm. Pure Appl. Math.*, 37, (1984), 149 - 184.

[C] Clark, D.C., A variant of the Lusternik-Schnirelman theory, *Indiana Univ. Math. J.*, 22, (1972), 65-74.

[D] Douglas, J., Solution of the problem of Plateau, *Trans. AMS*, 33, (1931), 263-321.

[D-S-T] Díaz, J., Saa, J., Thiel, U., Sobre la ecuación de curvatura media prescripta y otras ecuaciones cuasilineales elípticas con soluciones anulándose localmente, *Revista de la Unión Matemática Argentina*, vol.35, 1989, 175-206.

[Do] Do Carmo, M., *Differential Geometric of Curves and Surfaces.* Prentice-Hall, 1976.

[G-T] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., *Elliptic partial differential equations of second order*, Springer- Verlag (1983).

[GC] Goldstein Costa, D., *Tópicos em Analise não Linear e Aplicacões as Ecuacões Diferenciais*, I.M.P.A., 1986.

[H] Hildebrandt, S., On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature, *Comm. Pure Appl. Math.*, 23 (1970), 97- 114.

[Hs] Hsiao, G., *Lectures on variational methods for boundary integral equations: theory and applications.* Publicaciones de la primera escuela de verano del Fondap en Matemáticas Aplicadas, Univ. de Concepción, Chile, 1998.

[LD-M1] Lami Dozo, E., Mariani, M.C., A Dirichlet problem for an H-system with variable H, *Manuscripta Mathematica*, 81 (1993), 1 - 14.

[LD-M2] Lami Dozo, E., Mariani, M.C., Solutions to the Plateau problem for the prescribed mean curvature equation via the Mountain Pass Lemma, *Studies un Applied Mathematics*, 96 (1996), 351 - 358.

[O] Osserman, R., *A survey of minimal surfaces*. Van Nostrand Reinhold Company, 1969.

[R1] Radó, T., On Plateau's problem, *Ann. of Math.*, 31, (1930), 457-469.

[R2] Radó, T., The problem of least area and the problem of Plateau, *Math. Z.*, 32, (1930), 763-796.

[Se] Serrin, J., *Gradient estimates for solutions of nonlinear elliptic and parabolic equations*, en Contributions to Nonlinear Functional Analysis, pp 565-601. New York, Academic Press (1971).

[Si] Simon, L., Equations of mean curvature type in 2 independent variables, *Pacific J.Math*, (1977).

[St1] Struwe, M., *Plateau's Problem and the Calculus of Variations*. Math. Notes 35, Princeton University Press. Princeton 1989.

[St2] Struwe, M., Non uniqueness in the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 93 (1986), 135-157.

[V] Vainberg, M. M., *Variational Methods in the Theory of Nonlinear Operators*. Holden-Day, San Francisco, 1964.

[Wi] Willem, M., Lectures on Critical Point Theory, *Trabalho de Matemática 199*, UnB, Brasilia, 1983.