

Tesis de Posgrado

Caos cuántico en sistemas dependientes de un parámetro

Wisniacki, Diego A.

1999

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Wisniacki, Diego A.. (1999). Caos cuántico en sistemas dependientes de un parámetro. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3232_Wisniacki.pdf

Cita tipo Chicago:

Wisniacki, Diego A.. "Caos cuántico en sistemas dependientes de un parámetro". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1999.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3232_Wisniacki.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Tesis Doctoral

Caos Cuántico en Sistemas Dependientes de un Parámetro

Autor: Diego A. Wisniacki
Director: Dr. Alejandro J. Fendrik

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas

Diciembre de 1999

Resumen

En esta tesis se estudian distintas manifestaciones cuánticas del caos en sistemas dependientes de un parámetro. Los sistemas considerados son de una y dos dimensiones.

A fin de estudiar las leyes de decaimiento temporal de sistemas Hamiltonianos cuasiligados, hemos considerado dos pozos de potencial unidimensionales de paredes oscilantes, poblados con partículas no interactuantes. A nivel clásico, mostramos que las leyes de decaimiento pueden ser cualitativamente distintas para los diferentes movimientos de las paredes, de acuerdo con las características de las órbitas periódicas atrapadas en cada caso. Sin embargo, la dinámica cuántica no muestra esa diferencia.

Por otro lado, hemos estudiado diferentes aspectos de la mecánica cuántica de un billar caótico de contorno deformable y área fija. En estos sistemas los niveles de energía experimentan interacción repulsiva que se manifiestan como cruces evitados cuando se varía un parámetro. Mostramos que si el parámetro se mueve muy lentamente, las transiciones entre niveles vecinos son como las del modelo de Landau-Zener. Se estudió la vinculación de la variación paramétrica y la localización en el espacio de fases en las autofunciones del sistema. Para esto se desarrolló un método que permite eliminar los cruces evitados en una región del espectro. Mostramos que la eliminación de los cruces evitados es el mecanismo natural para sacar a la luz las estructuras localizadas en órbitas de período corto embebidas en las autofunciones del sistema.

Finalmente, se considera la influencia de dicha localización en la dinámica cuántica. En este caso se estudió la dispersión de la energía cuando las paredes del billar oscilan en forma armónica. Se observó que la distribución de la energía se dispersa difusivamente. Se estudió la constante de difusión como función de la velocidad del contorno donde se observaron diferencias con predicciones teóricas basadas en la teoría de matrices aleatorias. Mostramos que la localización es la responsable de dichas diferencias.

PALABRAS CLAVES: Caos-Caos cuántico-Leyes de decaimiento temporal- Mecánica semiclásica-Billares-Localización en el espacio de fases-Órbitas periódicas

Abstract

This thesis is devoted to study quantum manifestations of classical chaos in systems with a parameter. We have considered one and two dimensional systems.

To study the time decay laws of quasibounded Hamiltonian systems we have considered two finite one-dimensional potential wells with oscillating walls filled with non interacting particles. We show that the time decay laws can be qualitatively different for different movement of the oscillating wall at classical level according to the characteristic of trapped periodic orbits. However, the quantum dynamics do not show such differences.

On the other hand, we have studied different aspects of the quantum mechanics of a chaotic billiard with deformable boundary and fixed area. In these systems, the parametric motion of energy levels proceeds without crossing any other and the defined avoided crossings quantify the interaction between states. We have showed that for slow variations of the parameter, the transitions between neighboring levels are like the Landau-Zener transitions. We have studied the relation between parametric variations and the phase space localization of the eigenfunctions of the system. We have developed a method to remove avoided crossings in chaotic billiards governed by a parameter. We have showed that the elimination of avoided crossings is the natural mechanism giving rise to localization in short periodic orbits.

Finally, it is considered the influence of phase space localization on the quantum dynamics. In this case, the dispersion of the energy was studied when the boundary of the billiard oscillates harmonically. The results showed that the distribution of energy spreads diffusively. We have studied the diffusion constant as a function of the boundary velocity and found differences with theoretical predictions based on random matrix theory. We have showed that localization was the responsible of such a differences.

KEY WORDS: Chaos-Quantum Chaos-Time decay laws- Semiclassics mechanics-Billiards-Phase space localization-Scars-Periodic Orbits.

TITLE: Quantum Chaos in systems with a parameter.

Indice

Introducción	3
I Sistemas de una dimensión	7
1 Leyes de decaimiento y dinámica interna	11
2 Sistemas Estudiados	15
2.1 Sistemas Clásicos .	15
2.2 Sistemas Cuánticos .	20
3 Leyes de Decaimiento	23
3.1 Decaimiento de los sistemas clásicos	23
3.2 Decaimiento de los sistemas cuánticos	28
II Sistemas en Dos Dimensiones	33
1 Caracterización de las transiciones en un espectro complejo	37
1.1 Modelo de Landau-Zener .	38
1.2 Una manera de resolver la dinámica cuántica de billares con contornos móviles	39
1.3 Modelo de Landau-Zener en la base adiabática	43

1.4	El billar estadio de Bunimovich	43
1.5	Transiciones de Landau-Zener en el billar estadio: Resultados Numéricos	46
2	Estructura Regular detrás de un Espectro Complejo	53
2.1	Localización en los Autoestados de un sistema caótico	54
2.2	Localización y Variación Paramétrica	55
2.3	El método	57
2.4	Resultados en el estadio	59
3	Dinámica cuántica en un sistema con espectro complejo	65
3.1	Difusión y disipación en sistemas caóticos cuánticos	67
3.2	Resultados numéricos en el estadio de pares oscilantes	69
3.3	Influencia de la localización en espacio de fases sobre la dinámica cuántica	71
	Conclusiones	75
	A Expansión del Hamiltoniano de Billaes Deformados	79
	B Parametrización de las deformaciones del estadio	85
	Bibliografía	87
	Agradecimientos	93

"Tantas posibles trayectorias como destinos".
M. Houellebecq

Introducción

Preguntas como: ¿qué es el **caos cuántico**? o ¿Existe en realidad el **caos cuántico**? siguen generando debate aun hoy [1], luego de 30 años de incesante investigación en este campo, y en sus respuestas está un problema fundamental de la física, la interrelación entre la mecánica cuántica, teoría fundamental del mundo microscópico, y la mecánica clásica.

La relación entre la mecánica clásica y cuántica está bien entendida en los sistemas integrables. En estos, la existencia de tantas constantes de movimiento como grados de libertad hace que el movimiento clásico resulte muy simple. De hecho, las trayectorias en el espacio de fases de un sistema integrable de n grados de libertad están sobre hipersuperficies con la topología de un toro n -dimensional. En este caso es válida la regla de cuantificación EBK (Einstein-Brillouin-Keller) que es la generalización de la regla de Bohr-Sommerfeld para sistema de más de un grado de libertad y que establece que los autoestados deben satisfacer

$$\oint_{\gamma_i} \vec{p} \cdot d\vec{q} = 2\pi\hbar(n_i + \alpha_i/4)$$

donde γ_i son circuitos irreducibles sobre el toro donde ocurre el movimiento clásico y α_i , llamado índice de Maslov, está asociado al número de cústicas atravesadas por el circuito correspondiente.

Ahora bien, ¿qué ocurre si el sistema es clásicamente caótico?. En este caso las cosas son menos claras y constituyen el objeto de estudio del campo que ha sido nombrado como **caos cuántico** o para algunos autores **caología cuántica** [2]. Ya desde los años 20, tiempos donde se fundaba la mecánica cuántica, estaba planteada esta pregunta aunque de una manera más oscura, ya que no se había avanzado en el conocimiento del caos. Fue Einstein quien se dio cuenta que las reglas de cuantificación de Bohr-Sommerfeld tenían problemas si el sistema no era integrable [3].

Por otro lado, el caos en mecánica clásica tiene una definición muy precisa. Esencialmente se considera que un sistema es clásicamente caótico cuando presenta sensibilidad exponencial

a las condiciones iniciales: las soluciones resultan tan inestables que trayectorias inicialmente vecinas se separan exponencialmente unas de otras. Esto implica dinámicas muy complejas que para tiempos largos, se vuelven impredecibles. Este tipo de comportamiento no se ha observado en mecánica cuántica. Por el contrario, existen varias razones para creer que dicha sensibilidad a las condiciones iniciales no es posible encontrarla en mecánica cuántica. Una de las razones que se ha esgrimido es que la ecuación de Schrödinger es lineal, lo cual implica que la dinámica cuántica es cuasiperiódica. Es decir, se observa que luego de suficiente tiempo la evolución cuántica suprime el caos clásico [4].

La pregunta formulada tempranamente por Einstein fue pasada por alto por más de 60 años y recién en 1970 con el trabajo de Martin Gutzwiller [5], que relaciona la densidad de estados cuánticos con las órbitas periódicas del sistema clásico caótico, comienza un período de gran actividad (que se extiende hasta el presente), donde se estudia la mecánica cuántica de los sistemas caóticos. En otras palabras, se estudia las manifestaciones de las estructuras clásicas como las órbitas periódicas, en las propiedades cuánticas tales como los niveles de energía y las autofunciones. Por ejemplo, un aspecto muy estudiado ha sido la morfología de las funciones de onda, especialmente los fenómenos de localización en el espacio de fases. Otro tema relevante ha sido la caracterización de las fluctuaciones estadísticas de la distribución de los niveles de energía en sistemas caóticos, mixtos e integrables, y su vinculación con la teoría de matrices aleatorias [6]. También se ha avanzado mucho en la relación de dichas distribuciones y las órbitas periódicas [7].

Por otro lado, este campo ha adquirido gran importancia en los últimos años debido al gran desarrollo en la construcción de dispositivos mesoscópicos en heterojunturas semiconductoras. En ellos son muy importantes las manifestaciones cuánticas del caos y distintos fenómenos han sido explicado a través de métodos semiclásicos [8].

Los sistemas cuyos Hamiltonianos dependen de un parámetro han resultado excelentes modelos para estudiar las manifestaciones cuánticas del caos. De hecho, fenómenos como la repulsión de niveles, tan característica de los sistemas clásicamente caóticos, queda de manifiesto cuando se varía un parámetro. La variación del parámetro puede ser infinitamente lenta o a una velocidad finita. El primer caso resulta muy adecuado para estudiar aspectos relacionados con la morfología de las funciones de onda de sistemas caóticos. Más específicamente el fenómeno de localización en el espacio de las fases. En cambio, si el parámetro se mueve a una velocidad finita tienen lugar fenómenos de decaimiento y disipación.

En esta tesis se estudian distintas manifestaciones cuánticas del caos en sistemas que dependen de un parámetro. Estos estudios se hicieron tanto en sistemas de una dimensión como en sistemas bidimensionales.

La tesis esta dividida en dos partes: la primera esta dedicada a los sistemas unidimensionales mientras que la segunda parte esta dedicada a un sistema bidimensional.

En la primera parte, se encuentran los estudios realizados en sistemas unidimensionales abiertos dependientes de un parámetro. La elección de estos modelos estuvo motivada en la pregunta: ¿Cuál es la influencia de las órbitas parabólicas en los decaimientos de sistemas cuánticos?. Dichas órbitas tienen una importancia fundamental en los decaimientos de sistemas clásicos. Su inclusión dentro de la familia de órbitas atrapadas (aquellas que no decaen) implica que la ley de decaimiento es de carácter algebraico y no puramente exponencial, como en el caso en que las órbitas atrapadas del sistema solo sean hiperbólicas. En esa dirección, se estudio el decaimiento de pozos unidimensionales de paredes móviles, donde dependiendo de la ley temporal del movimiento en las mismas, el sistema incluye o no órbitas parabólicas atrapadas. Los sistemas y sus características fundamentales se presentan en el capítulo 2 de esta parte. En el capítulo siguiente se estudian los decaimientos clásicos y cuánticos. Allí se muestra que los decaimientos cuánticos cumplen una ley algebraica independiente de la existencia de órbitas parabólicas atrapadas.

La segunda parte de esta tesis esta dedicada al estudio de un sistema bidimensional caótico dependiente de un parámetro. Mas precisamente, el sistema estudiado es el billar estadio de Bunimovich de contorno deformable y area fija. Este sistema ha tenido un papel fundamental en los estudios de caos clásico así como su efecto en mecánica cuántica. Actualmente juega un papel importante en distintos experimentos. Por ejemplo, se han estudiado las fluctuaciones de conductancia en función del campo magnético en una cavidad mesoscópica abierta con forma de estadio [8].

Una de las características de los niveles de energía de este tipo de sistemas es que experimentan interacción repulsiva, que se manifiesta como cruces evitados cuando se varía el parámetro. La forma como ocurren las transiciones entre niveles vecinos tiene importancia en distintos modelos de disipación de sistemas de fermiones no interactuantes. Dichos modelos se basan en asumir que el tipo de transición es como en el modelo simplificado de Landau-Zener, lo cual fue seriamente cuestionado recientemente [9]. En el primer capítulo de esta segunda parte mostramos que para evoluciones adiabáticas del parámetro las transiciones ajustan perfectamente con el modelo de Landau-Zener.

Otro de los temas que mayor relevancia ha tenido en el caos cuántico, es el estudio de la localización en el espacio de fases encontrada en las autofunciones de sistemas completamente caóticos. Contrariamente a lo esperado, algunas de las autofunciones presentan localización en órbitas de período corto y este fenómeno constituye la más grande desviación encontrada con la teoría de matrices aleatorias. En el capítulo 2 estudiamos la vinculación entre la variación paramétrica y el fenómeno de localización. Basados en el hecho de que los estados intercambian sus características individuales cuando experimentan un cruce evitado, proponemos la eliminación de los cruces evitados como mecanismo de localización. Eliminando los cruces evitados en una región del espectro del sistema estudiado, mostramos que las funciones transformadas presentan gran localización en órbitas de periodo corto. Es decir, se muestra que detrás de un espectro complejo existe una estructura regular relacionada con las órbitas periódicas cortas del sistema.

Finalmente en el capítulo 3 estudiamos cual es la influencia de dicha localización en la dinámica cuántica. En este caso el parámetro es una función oscilante con el tiempo y resolvemos la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo a través de una expansión del Hamiltoniano para billares presentada en el primer apéndice. En este caso se estudió la dispersión de la energía cuando las paredes del billar oscilan en forma armónica. Se observó que la distribución de la energía se dispersa difusivamente durante las primeras oscilaciones del contorno. Se estudió la dependencia de la constante de difusión con la velocidad del contorno. Los resultados numéricos mostraron diferencias con predicciones teóricas basadas en la teoría de matrices aleatorias. A través de la extracción del espectro de los estados más localizados, mostramos que la localización es la responsable de dichas diferencias.

Gran parte de los resultados de esta tesis fueron publicados recientemente [10, 11, 12, 13].

Parte I

Sistemas de una dimensión

Las leyes de decaimiento temporal (LDT) de sistemas hamiltonianos clásicos cuasiligados suelen incluir valiosa información relacionada con la dinámica del sistema mientras este permanece ligado. Las características de las LDT correspondientes a un sistema completamente caótico han sido bien determinadas. En especial, las LDT son muy sensibles a las características de las órbitas periódicas atrapadas. Sistemas cuyo conjunto de órbitas periódicas atrapadas son todas del tipo hiperbólico, exhiben una LDT completamente exponencial, mientras que si el sistema incluye órbitas del tipo parabólico (ligeramente inestables y no aisladas), las LDT presentan un comportamiento algebraico a tiempos largos. Esto se han observado en diversos sistemas [14, 15, 16], como por ejemplo el billar de Sinai [17] y el estadio de Bunimovich [18], paradigmas de sistemas completamente caóticos.

Si bien el problema del decaimiento de sistemas cuánticos cuasiligados a sido estudiado en distintos sistemas y usando diferentes técnicas, la influencia de las órbitas parabólicas en los decaimientos de sistemas cuánticos no fue abordado previamente. Para estudiar este problema hemos usado como modelos, pozos unidimensionales dependientes de un parámetro (ancho del pozo). Según cual sea la dependencia temporal del parámetro aparecen o no órbitas parabólicas en el espacio de fases extendido. Se estudiaron los decaimientos de los sistemas clásicos mostrando los resultados ya conocidos. Luego se estudiaron los decaimientos de los sistemas cuánticos, donde se observó que las las leyes de decaimiento temporal para sistemas cuánticos (LDTC) no son sensibles a las órbitas parabólicas como sus analogos clásicos.

Esta parte está organizada de la siguiente manera: primero se hace una breve introducción sobre los aspectos mas importantes de la relación entre las leyes de decaimiento y la dinámica interna. Luego, en el capítulo 2, se presentan los sistemas estudiados. Y finalmente, en el capítulo 3 se muestran las leyes de decaimiento tanto clásicas como cuánticas de los mismos.

Capítulo 1

Leyes de decaimiento y dinámica interna

Distintos fenómenos físicos pueden ser modelados a través de un sistema de partículas no interactuantes que, eventualmente atrapadas, pueden escapar de una cavidad. Ejemplos de esto los encontramos en ámbitos tan distintos como la física nuclear, moléculas complejas altamente excitadas hasta acústica geométrica. Uno de los ejemplos más conocidos constituye la formación y posterior decaimiento del núcleo compuesto que Bohr interpretó a través de un modelo puramente clásico en el cual el núcleo se modela por un pozo de potencial (campo medio) dentro del cual los nucleones se mueven libremente [19]. Así mismo, usando este modelo sencillo, Sabine estudió hace casi un siglo la absorción del sonido en una sala de conciertos [20].

Sin embargo, la relación entre las leyes de decaimiento de un sistema cuasiligado y su dinámica interna ha cobrado importancia en los últimos años debido al gran avance en la descripción de los sistemas caóticos. El primer intento en esta dirección, aunque erróneo, fue hecho en 1990 por Bauer y Bertsch [21]. En este trabajo calcularon numéricamente las leyes de decaimiento de un billar rectangular (sistema integrable) y el billar de Sinai (sistema caótico) ambos con un pequeño agujero por donde pueden escapar las partículas. Concluyeron que si la dinámica del sistema, mientras este permanece ligado, es caótica su ley de decaimiento es exponencial. Mientras que si por el contrario, su dinámica interna es regular, la ley de decaimiento es algebraica. Esta correspondencia uno a uno entre el tipo de ley de decaimiento y dinámica interna no es correcta [14, 22]. Por ejemplo, existen sistemas completamente caóticos, sin islas de estabilidad, cuyas leyes de decaimiento pueden ser no exponenciales [23]. Por otro lado, los sistemas mixtos, aquellos en los cuales conviven zonas regulares (islas de estabilidad)

rodeadas de regiones caóticas, el decaimiento de partículas que inicialmente pueblan la región caótica es algebraico debido al pegoteo que ocurre cerca de las islas de estabilidad [24, 25].

Trabajando con un sistema caótico pero no completamente hiperbólico, Fendrik, Rivas y Sanchez [14] mostraron que el carácter exponencial de las leyes de decaimiento está vinculado al conjunto atrapado de órbitas periódicas hiperbólicas (inestables y aisladas), mientras que si el sistema tiene alguna familia de órbitas llamadas parabólicas (marginamente inestables y no aisladas) su ley de decaimiento presentará una transición de exponencial a algebraica a tiempos largos.

A nivel cuántico, el estudio del decaimiento de sistemas abiertos tiene una larga historia. Si bien en la literatura aparecen con ese nombre distintos tipos de procesos, como por ejemplo se han estudiado sistemas que poseen un conjunto de estados metaestables que están acoplados al continuo al cual decaen, en esta tesis, se considera decaimiento al proceso de escape de partículas inicialmente confinadas en una región finita del espacio.

Haciendo una serie de aproximaciones, es fácil obtener que la probabilidad de que una partícula continúe dentro de un pozo cuadrado unidimensional decae exponencialmente [26]. Sin embargo, en 1958, Khalfin mostró que esto no es correcto y que para tiempos muy largos el decaimiento es tipo algebraico de la forma $t^{-1/2}$.

Más recientemente, a través de la expansión de la función de Green dependiente del tiempo en términos de todos los estados resonantes, Garcia Calderon, Mateos y Moshinsky [27, 28] han sido capaces de resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para el problema de una partícula que escapa de un potencial central de rango finito. Obteniendo $\psi(r, t)$, calcularon la probabilidad de que la partícula continúe a tiempo t dentro del pozo, es decir

$$P(t) = \int_R |\psi(r, t)|^2 dV. \quad (1.1)$$

donde R es la región del espacio donde inicialmente estaba confinada la partícula. En este caso encontraron, al igual que Khalfin en el problema del pozo cuadrado, que luego de un decaimiento exponencial la probabilidad $P(t)$ se comporta de forma algebraica como $t^{-\beta}$ pero aquí $\beta = 1$.

Por otro lado, desde el punto de vista de la teoría de la dispersión se ha hecho mucho trabajo para entender la forma en que sistemas que tienen un número finito de estados ligados se conectan (decaen) con los diferentes canales abiertos del continuo. Haciendo uso de la teoría de matrices aleatorias se ha encontrado también decaimientos del tipo algebraico $t^{-\beta}$ donde el exponente β depende del número de canales abiertos [29, 30, 31, 32].

Ahora bien, aunque es muy conocido que las características y distribución de las órbitas periódicas en un sistema ligado son relevantes a la hora de cuantificar semiclásicamente al sistema [5], la vinculación entre la dinámica interna y las leyes de decaimiento para los análogos cuánticos de los sistemas anteriormente descritos, es un tema abierto. En esta parte de esta tesis estudiamos este problema donde encontramos que el decaimiento algebraico es un efecto puramente cuántico sin correlato con el tipo de dinámica clásica presentado por el sistema.

Capítulo 2

Sistemas Estudiados

En este capítulo se presentan los sistemas estudiados tanto en su versión clásica como cuántica. Respecto a los sistemas clásicos, se muestran los aspectos fundamentales de la dinámica, especialmente las características de sus órbitas periódicas, aspecto fundamental en el decaimiento.

Por otro lado, se describen los análogos cuánticos de los sistemas, especialmente se muestran los métodos numéricos utilizados para resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo en sistemas abiertos.

2.1 Sistemas Clásicos

Hemos estudiado Hamiltonianos unidimensionales dependientes del tiempo. Estos sistemas pueden ser descritos en el *espacio de fases extendido* como un sistema conservativo de dos grados de libertad. Este espacio de fases se contruye considerando la energía $-E$ y el tiempo t como variables conjugadas (de la misma forma que p y q) [33].

Se consideran partículas no interactuantes de masa unidad que se mueven dentro de un potencial unidimensional dependiente del tiempo

$$V(q, t) = \begin{cases} \infty & \text{si } q < 0, \\ 0 & \text{si } 0 \leq q \leq a(t), \\ \infty & \text{si } a(t) < q \end{cases} \quad (2.1)$$

es decir, un pozo infinito con una pared móvil de acuerdo a la ley $a(t)$.

El estudio de estos sistemas comienza en 1949 cuando Fermi los introduce para modelar la aceleración de los rayos cósmicos por la transferencia de momento proveniente de estructuras de campo magnético [34]. Los primeros análisis numéricos fueron hechos por Ulam [35] y Chirikov [36] luego completados por Brahic [37] y, Lichtenberg y Lieberman [38]. Estos últimos se interesarán por distintos movimientos de la pared.

Mirando el gráfico de la posición de la partícula q , como función del tiempo t , podemos ver que el sistema es equivalente a una partícula moviéndose hacia adelante dentro de un tubo bidimensional infinito con condiciones de reflexión en el borde apropiadas (ver Fig. 2.1(a)). La condición de reflexión (el cambio de signo de la velocidad relativa entre la pared y la partícula) impone

$$\begin{aligned} v_f &= -v_i & \text{en } q = 0, \\ v_f &= 2\dot{a}(t) - v_i & \text{en } q = a(t), \end{aligned} \quad (2.2)$$

donde $v_f(v_i)$ es la velocidad de la partícula luego (antes) de la colisión. Ambas velocidades corresponden a las pendientes de las líneas rectas en el gráfico q versus t ($v = \tan \alpha$).

Hemos considerado $a(t)$ una función periódica en el tiempo, por lo tanto $a(t) = a(t + \tau)$.

Tomando en cuenta la simetría de traslación temporal, podemos considerar solamente un segmento elemental del canal, estableciendo condiciones de contorno periódicas, a saber $t = \tau \rightarrow t = 0$ de forma que $q(t = \tau) \rightarrow q(t = 0)$ y $v(t = \tau) \rightarrow v(t = 0)$. De esta manera, el sistema puede ser visto como un billar bidimensional donde las partículas que salen en $t = \tau$ emergen en $t = 0$ teniendo la misma velocidad v y la misma posición q y las colisiones con la pared siguen las leyes (2.2). En esta versión del sistema, tenemos dos grados de libertad asociados con la coordenada q y $\theta = t - [t/\tau]\tau$ (tiempo reducido) donde [...] significa la parte entera (Ver Fig. 2.1 (b)). Los momentos conjugados son v y $-E$ (energía cinética), respectivamente.

Cuando el potencial está dado por (2.1) las partículas permanecen ligadas independientemente de sus velocidades. Pero, si la pared móvil (en $q = a(t)$) es una barrera finita de altura V_0 , partículas con velocidades $|v| > \sqrt{2V_0}$ escapan del pozo cuando pasan los límites de la barrera. En este caso, de acuerdo con las características de la dinámica, la cual es controlada por la ley con que se mueve la barrera $a(t)$, el sistema puede estar transitoriamente ligado. Nos hemos centrado en dos reglas particulares para $a(t)$, el movimiento armónico y el llamado diente de sierra, en el cual la velocidad de la pared es constante salvo discontinuidades. En lo que sigue tomamos τ como unidad de tiempo, el valor medio de $a(t)$, $\langle a \rangle_t = 1/\tau \int_0^\tau a(t) dt$ como unidad de longitud y adimensionalizamos las energías (esto es, las dividimos por $m \langle a \rangle_t^2 / \tau^2$).

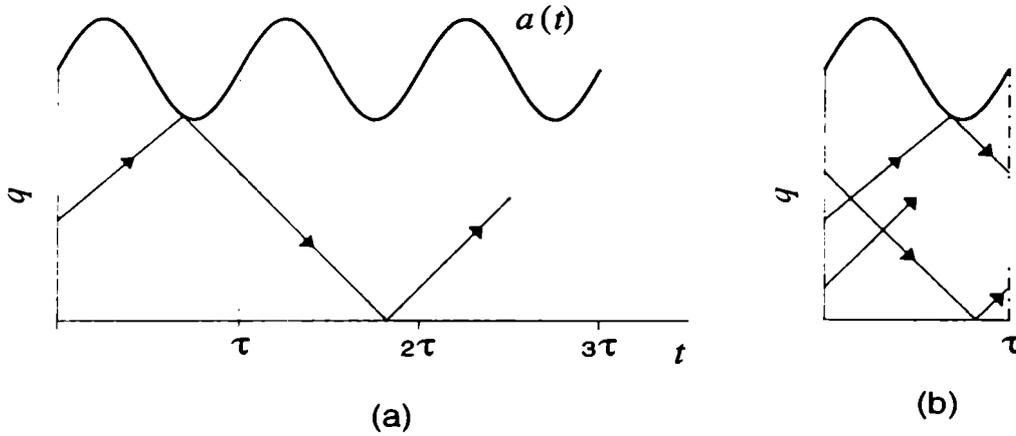


Fig. 2.1: (a) Una trayectoria en la versión bidimensional del sistema. Las coordenadas son el tiempo t y la posición de la partícula q . (b) La misma trayectoria en la versión billar. Este punto de vista se obtiene utilizando la simetría de traslación temporal. En este caso, θ (ver texto) es una de las coordenadas.

En el caso de oscilaciones armónicas:

$$a(t) = 1 + \delta \sin 2\pi t. \quad (2.3)$$

Este sistema, llamado acelerador completo de Fermi, fue ampliamente estudiado en versiones simplificadas [33]. En estas versiones, ambas paredes están fijas pero una de ellas transfiere un momento a la partícula en cada choque, de acuerdo a la velocidad de la misma. La dinámica resulta en estos casos un mapa que preserva el área de la forma

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= |v_n + f(\theta_n)|, \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + 2\pi M/v_{n+1} \pmod{2\pi}, \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde v_n (v_{n+1}) es la velocidad adimensionalizada de la partícula luego del n -ésimo ($n+1$ -ésimo) choque, θ_n (θ_{n+1}) es la fase de la pared en el n -ésimo ($n+1$ -ésimo) choque, M es una constante real y f es una función periódica (de periodo 2π) que dicta la transferencia de momento.

La figura 2.2 muestra una sección de Poincaré para $q = 0$ correspondiente a la energía cinética E versus Θ para el acelerador completo de Fermi. Se pueden distinguir claramente tres regiones. La región de bajas energías es completamente caótica, la región de energías intermedias presenta una dinámica mixta (islas regulares rodeadas de zonas caóticas) y finalmente la región adiabática, donde la dinámica es regular (se ven las curvas invariantes).

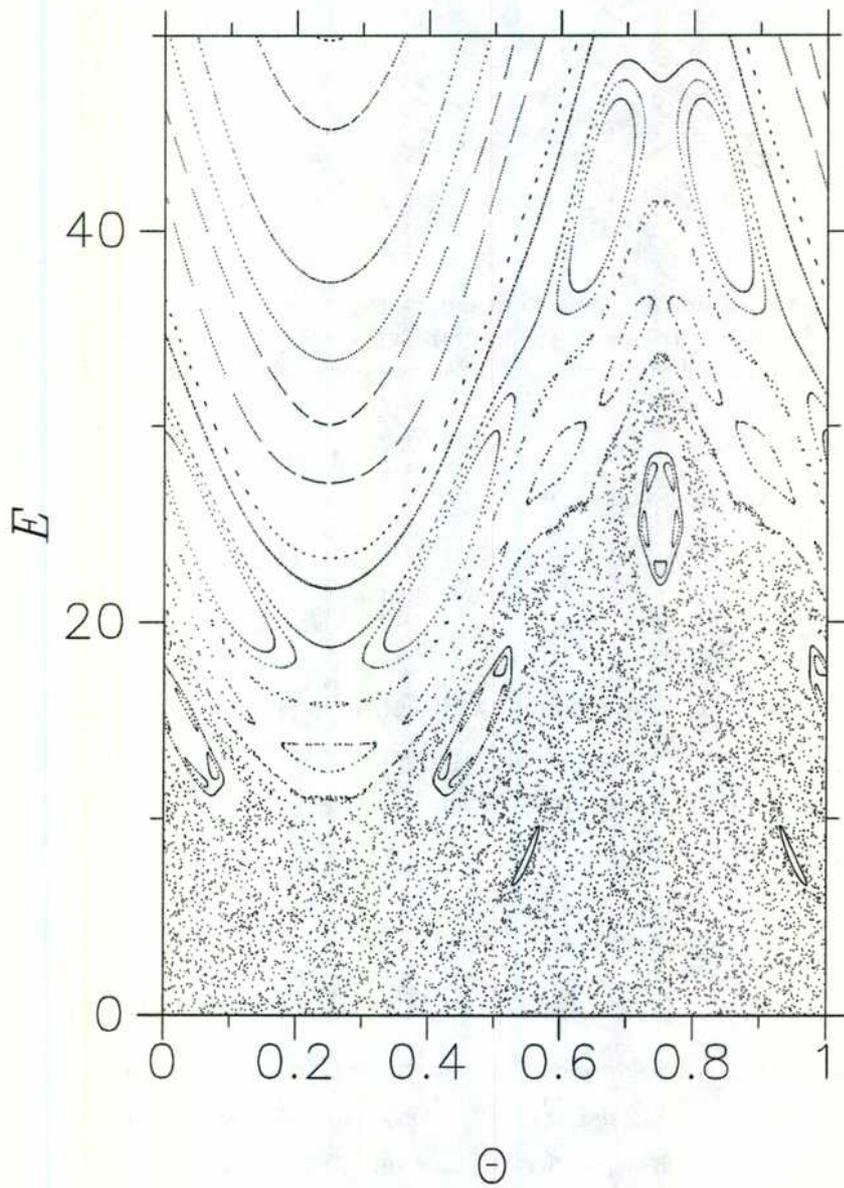


Fig. 2.2: E (energía cinética) vs. Θ a $q = 0$. Sección de Poincaré correspondiente al sistema cuando la pared oscila armónicamente. La amplitud de oscilación es $\delta = 0.2$.

Si asumimos ahora que la pared móvil es una barrera de potencial de profundidad V_0 , las partículas pueden escapar del pozo y el límite entre el movimiento ligado y movimiento libre es la línea $E = V_0$.

Si V_0 está en la región adiabática, esto es, si hay una curva invariante completamente debajo de esa línea límite, el sistema permanece siempre ligado. Por esto, para estudiar la ley de decaimiento, fijamos V_0 por debajo de la curva invariante de menor energía media.

El otro tipo de movimiento de la pared que hemos considerado son oscilaciones tipo diente de sierra. En este caso,

$$a(t) = \begin{cases} (1 + 4\delta t) & \text{si } 0 \leq t \leq 1/4 \text{ ,} \\ (1 + 2\delta) - 4\delta t & \text{si } 1/4 < t \leq 3/4 \text{ ,} \\ (1 - 4\delta) + 4\delta t & \text{si } 3/4 < t < 1 \end{cases} \quad (2.5)$$

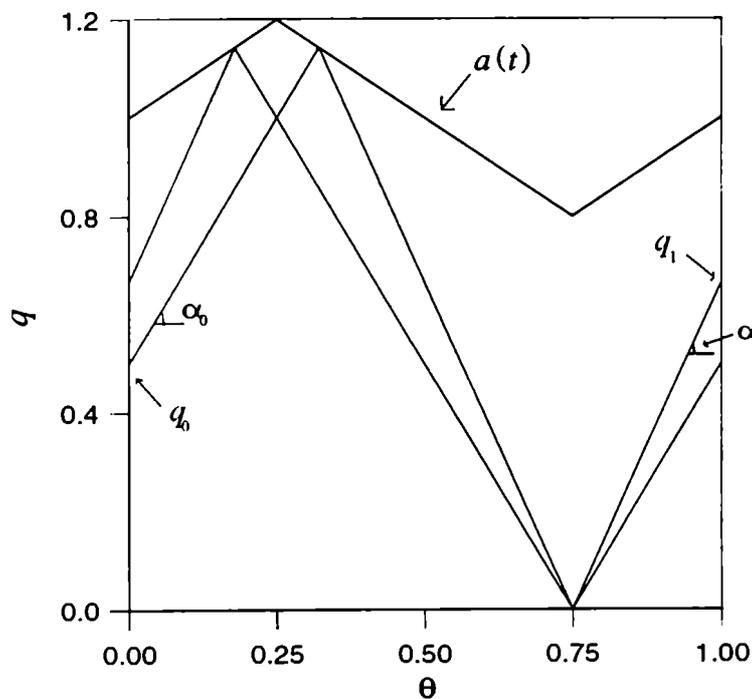


Fig. 2.3: Una órbita periódica parabólica correspondiente a oscilaciones diente de sierra. Aquí q es la posición de la partícula mientras que θ es el tiempo reducido. Para este gráfico se definen $q(\theta = 0) \equiv q_0$, $q(\theta = 1) \equiv q_1$, $\alpha(\theta = 0) \equiv \alpha_0$ y $\alpha(\theta = 1) \equiv \alpha_1$.

Los sistemas de dos grados de libertad independientes del tiempo equivalentes a este es un billar con contornos neutros (billar poligonal [39, 40]). La característica principal de este sistema es que sus órbitas periódicas son del tipo parabólico y no aisladas. Por ejemplo, la Fig. 2.3 muestra una típica órbita periódica de este sistema. Si miramos al billar como un mapa \mathcal{T} , es decir

$$(q(\theta = 0) \equiv q_0, \tan \alpha(\theta = 0) \equiv \alpha_0) \xrightarrow{\mathcal{T}} (q'(t = 1), \tan \alpha'(t = 1)), \quad (2.6)$$

la órbita periódica corresponde a un punto fijo de \mathcal{T}^2 . Un cálculo simple muestra que \mathcal{T}^2 tiene autovalores $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ cuando la linealizamos en este punto fijo. Esto implica que dicho punto corresponde a una órbita periódica parabólica [33]. Por otro lado, dado un punto periódico $(q_0, \tan \alpha_0)$, se ve claramente en la versión bidimensional del sistema (ver Fig. 2.1(a)), que existe un intervalo de q , $I = (q_{min}, q_{max})$, tal que $(q, \tan \alpha_0)$ es un punto fijo si $q \in I$. Esto es, los puntos fijos no están aislados.

2.2 Sistemas Cuánticos

Para estudiar los análogos cuánticos de los sistemas mencionados, se debe resolver la ecuación de Schrödinger,

$$i\hbar \frac{\partial |\alpha, t_0, t\rangle}{\partial t} = \hat{H}(q, t) |\alpha, t_0, t\rangle \quad (2.7)$$

donde $|\alpha, t_0, t_0\rangle$ es una condición inicial y $\hat{H}(q, t)$ es el operador Hamiltoniano $\hat{H} = \hat{T}(\hat{p}) + \hat{V}(\hat{q}, t)$, donde:

$$V(q, t) = \begin{cases} 0 & \text{si } -a(t) \leq q \leq a(t) \text{ ,} \\ V_0 & \text{si } a(t) < |q| \text{ .} \end{cases} \quad (2.8)$$

Se considera esta versión simétrica del potencial de la Eq. 2.1 debido a que el método usado para la resolución numérica de la Eq. 2.7 impide trabajar con potenciales infinitos.

Hemos empleado el *método espectral* [41] basado en la descomposición del operador evolución $\hat{U}(t, t_0)$ de la forma

$$|\alpha, t\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\alpha, t_0\rangle = \hat{U}(t, t - \delta t) \dots \hat{U}(t_0 + \delta t, t_0) |\alpha, t_0\rangle \quad (2.9)$$

En la representación posición, cada una de las evoluciones temporales en δt queda

$$\psi(\mathbf{r}, t + \delta t) = \exp\left(-i \frac{\hat{H}(t) \delta t}{\hbar}\right) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.10)$$

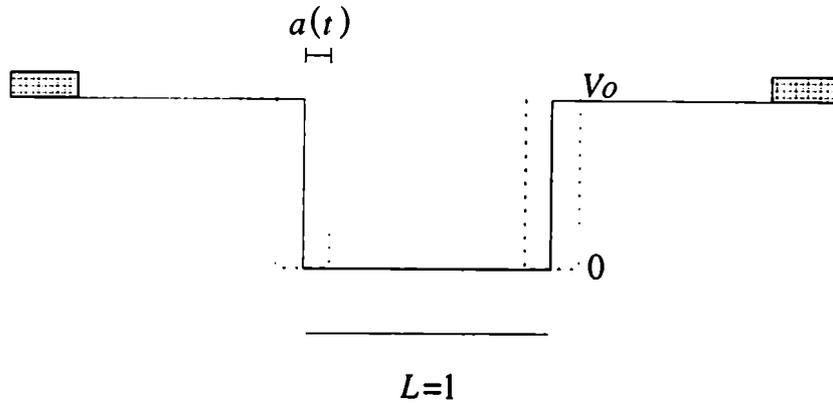


Fig. 2.4: Diagrama de las características principales del potencial usado para los cálculos cuánticos. La grilla espacial tiene 4096 retículos. La region de absorción se muestra con los rectángulos negros en los bordes del potencial. Cada lado tiene 250 retículos.

Expandiendo simétricamente el operador evolución en δt se obtiene

$$\psi(\mathbf{r}, t + \delta t) = \exp(-i\frac{\tilde{p}^2 \delta t}{4m\hbar}) \exp(-i\frac{V(\mathbf{r})\delta t}{\hbar}) \exp(-i\frac{\tilde{p}^2 \delta t}{4m\hbar}) \psi(\mathbf{r}, t) \quad (2.11)$$

donde se desprecia los errores de conmutación ya que son del orden δt^3 .

El primer operador aplicado a la función de onda en (2.11) es una evolución libre en $\delta t/2$ para lo cual se pasa $\psi(\mathbf{r}, t)$ al espacio de los momentos. Esto se hace utilizando la transformada rápida de Fourier [FFT] [42]. Luego de la evolución libre, se aplica la transformada inversa para obtener la función de onda en la representación posición y así aplicar el operador $\exp(-i\frac{V(\mathbf{r})\delta t}{\hbar})$. Se completa la evolución temporal en δt con otra evolución libre de $\delta t/2$. Ahora la evolución de un tiempo t_0 a t se realiza utilizando la ecuación (2.9) y cada una de las evoluciones en δt se hace como se dijo previamente. Es fundamental que el incremento temporal δt sea suficientemente chico para asegurar la convergencia de la evolución temporal.

Esta técnica ha sido ampliamente utilizada para resolver problemas en sistemas ligados [43, 44] así como en problemas abiertos [45, 46].

Para estudios de decaimiento, se necesita calcular

$$P_\alpha(t) = \int_{-a(t)}^{a(t)} |\langle \alpha, t_0, t | q \rangle|^2 dq \quad (2.12)$$

que es la probabilidad de detectar a la partícula dentro del pozo a tiempo t .

Como los sistemas estudiados son no ligados tenemos flujo de probabilidad no estacionario dirigiéndose a $q = \pm\infty$. El *método espectral* impone automáticamente condiciones de contorno

periódicas, por lo tanto el flujo de probabilidad que sale en $q = +(-)q_{max}$ aperecerá como si viniera de $q = -(+)q_{max}$. Por lo tanto, necesitamos suprimir dicho flujo. Para esto, hemos empleado condiciones de contorno absorbentes [47], sumando un barrera de potencial absorbivo (imaginario puro)

$$V_A = \frac{iU_0}{\cosh^2(\alpha(q - q_{max}))} + \frac{iU_0}{\cosh^2(\alpha(q + q_{max}))}, \quad (2.13)$$

al pozo de potencial (real) dependiente del tiempo (2.8). Aquí, U_0 y α son parámetros reales cuyos valores fueron elejidos de forma de minimizar la transmisión y reflexión de V_A . Todos los cálculos fueron realizados tomando el paso temporal $\Delta t = 0.00064$ en una grilla espacial de 4096 reticulados de $\Delta q = 0.00125$. La región de absorción en los bordes de la grilla incluyen 250 retículos espaciales. Esto determina el valor de α . Hemos tomado $U_0 = 14.79$. La figura 2.4 resume las características principales del potencial utilizado.

Por otro lado, hemos modificado la forma discontinua del potencial (2.8) por una versión suave con el forma de un Saxon-Woods

$$V(q, t) = \frac{V_0}{1 + \exp b(a(t)^2 - q^2)} \quad (2.14)$$

como fue recomendado en la Ref. [44] para mejorar la convergencia del método numérico. Se encontró que para asegurar la convergencia y estabilidad, se necesita que el potencial varíe de $\frac{V_0}{10}$ a $\frac{9V_0}{10}$ en dos retículos Δq . Esto determina el parámetro b . Recientemente se ha implementado una solución equivalente al problema del flujo saliente en un dispositivo experimental de microondas para el problema de los n-discos [48].

Capítulo 3

Leyes de Decaimiento

Presentamos aquí el estudio de los decaimientos de los sistemas clásicos y sus análogos cuánticos descritos en el capítulo anterior.

3.1 Decaimiento de los sistemas clásicos

Con el objeto de estudiar la LDT de ambos sistemas, poblamos una porción de la región ligada con $N_0 = 10^6$ partículas, cuyas condiciones iniciales fueron elegidas al azar (uniformemente) en posición y velocidad. Calculamos la fracción de la población inicial que a tiempo t continúa dentro del pozo ($N(t)/N_0$).

Es importante remarcar que el hecho de que el sistema con oscilaciones armónicas presente zonas regulares impone que la población inicial deba ser elegida en la región de bajas energías (zona caótica) para garantizar el decaimiento. En caso contrario, las partículas cuyas condiciones iniciales estén en las islas de estabilidad quedan atrapadas para siempre.

Por otro lado, evitamos poblar la región de muy bajas energías para minimizar el efecto de las órbitas asintóticas a la familia de órbitas (triviales) parabólicas caracterizadas con $E = 0$. Estas trayectorias son líneas paralelas al eje del tiempo en la versión bidimensional del sistema (tubo) y corresponden a partículas que, teniendo $v = 0$, nunca chocan con el contorno del pozo. Al final de esta sección mostramos el efecto de estas órbitas sobre la LDT. Por lo tanto, se considero una población inicial donde

$$E_{min} \leq E \leq E_{max}. \quad (3.1)$$

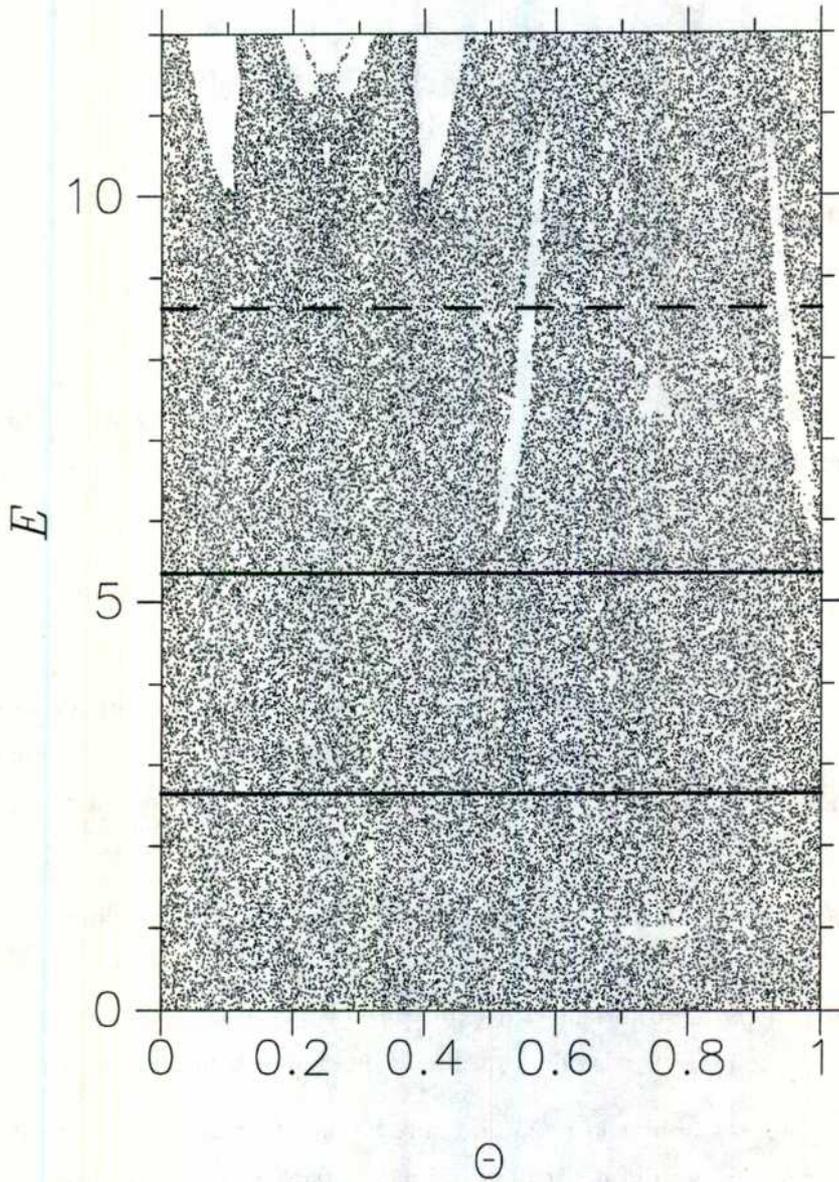


Fig. 3.1: E (energía cinética) vs. Θ a $q = 0$. Esta sección de Poincaré muestra la región de bajas energías y fue generada con una sola condición inicial. Las líneas rectas continuas limitan la zona que fue poblada inicialmente (ver texto). La línea cortada indica la profundidad del pozo (esta separa la región ligada de la no ligada o libre).

La región que fue inicialmente poblada en ambos sistemas se muestra en la Fig. 3.1. Esta figura es una ampliación de la zona de bajas energías de la sección de Poincare graficada en la Fig. 2.2. Hemos tomado $E_{min} = 2.64$ y $E_{max} = 5.35$.

Las Fig. 3.2 (a) y (b) muestran los resultados correspondientes a las oscilaciones armónicas y diente de sierra en gráficos log-lin y log-log respectivamente. Se observa que las curvas son muy distintas. En el caso de la Fig. 3.2(a) el gráfico log-lin plot muestra un comportamiento exponencial para las oscilaciones armónicas mientras que en la Fig. 3.2(b) el gráfico log-log muestra un decaimiento algebraico para las oscilaciones diente de sierra.

La diferencia encontrada entre las LDT de ambos sistemas se explica en términos de las características de las órbitas periódicas atrapadas [14]. En el caso de las oscilaciones armónicas, las órbitas periódicas atrapadas son del tipo hiperbólico y aisladas (salvo por la familia de $E = 0$ la cual no fue inicialmente poblada), mientras que en el caso de las oscilaciones diente de sierra las órbitas periódicas son no aisladas y parabólicas. La pequeña desviación del comportamiento exponencial observada en la Fig. 3.2 (a) para el caso de oscilaciones armónicas se la atribuimos a la población de la zona de muy bajas energías, luego de algunas colisiones.

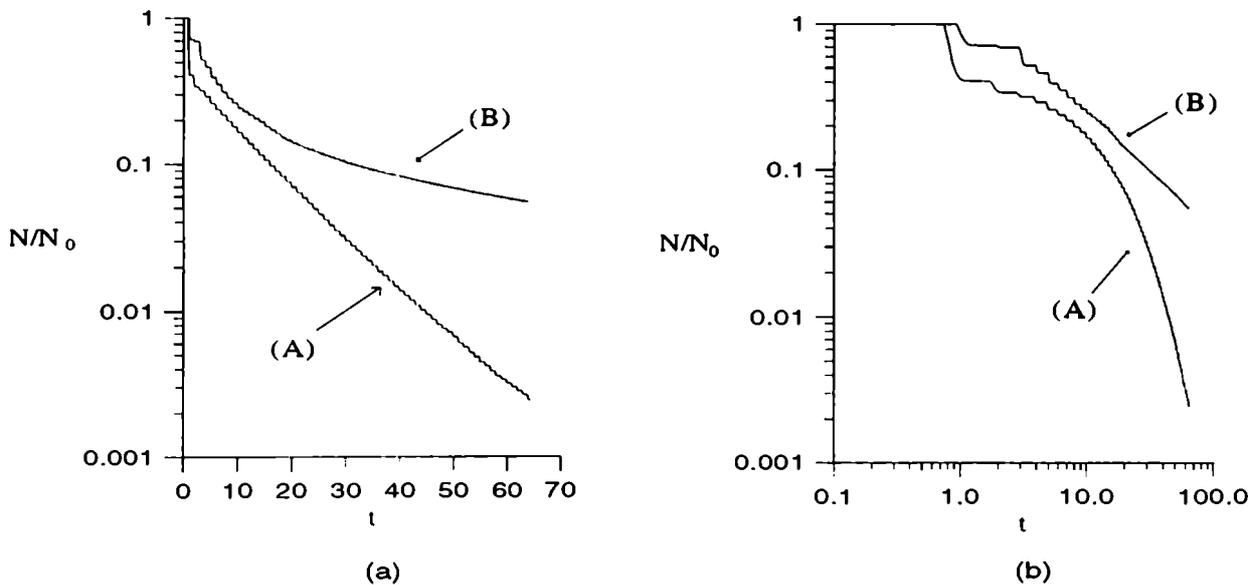


Fig. 3.2: (a) Gráfico Log-lin de la proporción de la población inicial $N(t)/N_0$ que a t está dentro del pozo (LDT). (A) corresponde al pozo cuyas paredes oscilan en forma armónica y tiene un comportamiento exponencial, mientras que (B) corresponde a oscilaciones de diente de sierra. En ambos casos la amplitud de la oscilación es $\delta = 0.2$ y la profundidad del pozo $V_0 = 8.63$. (b) Las mismas curvas que en (a) pero en un gráfico log-log para mostrar el comportamiento algebraico de (B).

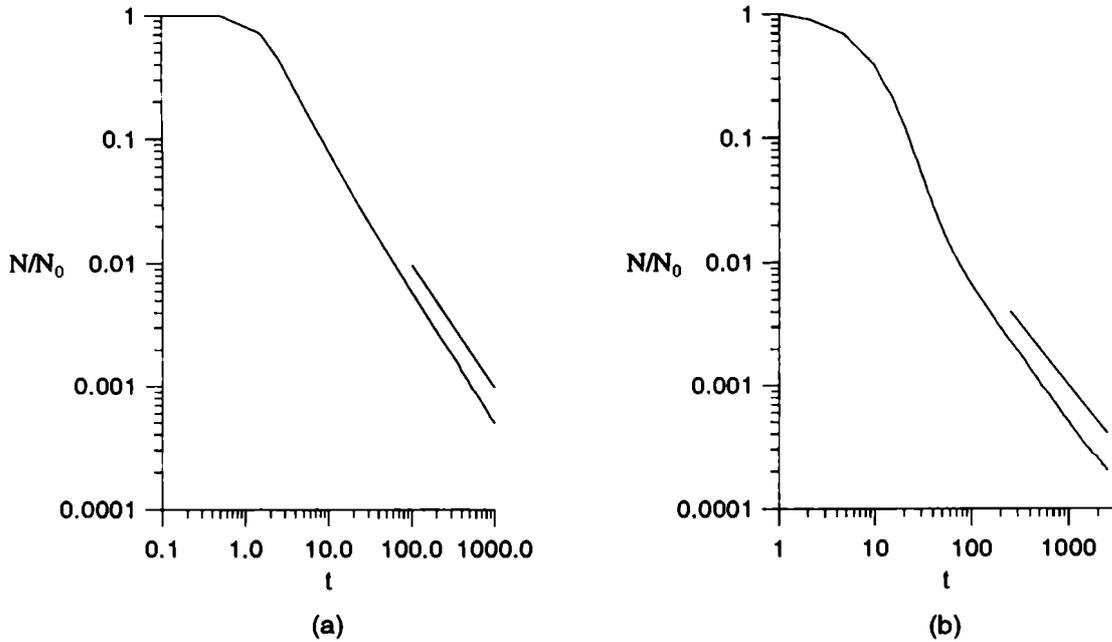


Fig. 3.3: (a) Gráfico Log-Log de la LDT correspondiente al pozo cuyas paredes oscilan en forma armónica, y que ha sido poblado inicialmente en forma uniforme en toda la región ligada. La profundidad del pozo es $V_0 = 0.78$ y $\delta = 0.2$. Hemos graficado también una línea recta de pendiente 1 a fin de clarificar el exponente característico del decaimiento algebraico. (b) Gráfico Log-Log de la LDT correspondiente al pozo cuyas paredes oscilan en forma armónica, pero en este caso $V_0 = 19.7$ y $\delta = 0.2$. La población inicial es la misma que en (a), esto es, $|v| \leq 1.25$. Aquí vemos que el comportamiento algebraico ocurre a tiempos largos. Al igual que en (a), graficamos también una línea recta de pendiente 1. La unidad de tiempo y la unidad de longitud son las mismas que en la Fig. 3.2.

Veamos con un poco más de detalle la influencia de la población de la región de muy bajas energías sobre la LDT.

Consideremos un pozo de profundidad V_0 . Hemos calculado la LDT comenzando con la población uniforme de toda la región ligada (esto es, $0 \leq q \leq 1$ y $-\sqrt{2V_0} \leq v \leq \sqrt{2V_0}$). En la Fig. 3.3(a) se muestra dicha LDT. Aquí podemos ver un comportamiento algebraico, esto es,

$$N(t)/N_0 \propto 1/t^\beta, \quad (3.2)$$

donde $\beta = 1$.

De acuerdo con la Ref. [14], se espera que un conjunto de órbitas parabólicas esté incluida en la región ligada. Este conjunto de órbitas corresponde a partículas que teniendo $v \approx 0$ generan trayectorias las cuales son asintóticas a las órbitas $v = 0$ las cuales son líneas paralelas al eje del tiempo en la versión bidimensional del sistema (tubo).

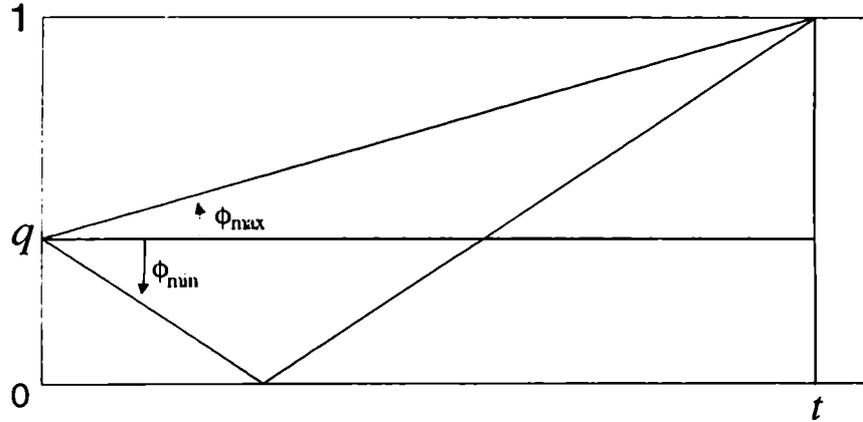


Fig. 3.4: Fracción de condiciones iniciales las cuales tiene su primera colisión con la pared móvil a tiempos mayores que t . Dada una posición inicial q , las velocidades son $v = \tan \phi$ con $\phi_{\min} \leq \phi \leq \phi_{\max}$.

Para mostrar esto consideremos $n(t)$, la fracción de condiciones iniciales que emplean un tiempo t' mayor que el tiempo dado t , para alcanzar la pared oscilante. Mirando la Fig. 3.4, estimamos para $t > 2/\sqrt{2V_0}$,

$$n(t) = \frac{1}{2\sqrt{2V_0}} \int dq \int_{-\tan \phi_{\min}=(1+q)/t}^{\tan \phi_{\max}=(1-q)/t} d(\tan \phi) \quad (3.3)$$

Por lo tanto,

$$n(t) = \frac{1}{\sqrt{2V_0}} \times \frac{1}{t} \quad (3.4)$$

Asumimos que para tiempos largos [15]

$$N(t)/N_0 \approx \omega \int_{t'=t}^{t'=\infty} g(t') dt' \quad (3.5)$$

donde $g(t)dt$ es la fracción de condiciones iniciales que la primera colisión con la pared móvil ocurre entre t y $t + dt$ y ω es la probabilidad de escapar luego de una colisión. Como

$$g(t) \approx \frac{-dn}{dt} \quad (3.6)$$

tenemos la ley 3.2 para la LDT. Hacemos énfasis en que en el caso de la Fig. 3.2 la ley algebraica empieza para $t \approx 2/\sqrt{2V_0}$ pero en general, si poblamos la región de bajas energías de forma que $|v| < |v_{\max}| < \sqrt{2V_0}$ se espera que la LDT exhiba primero un decaimiento exponencial y luego para tiempos largos, la ley algebraica 3.2, como se muestra en la Fig. 3.3(b).

Ahora bien, cuando se excluye de la población inicial la región de muy bajas energías, esto es, $|v_{\min}| \leq |v| \leq |v_{\max}|$, tenemos evidencias numéricas de que la cola algebraica se comporta como

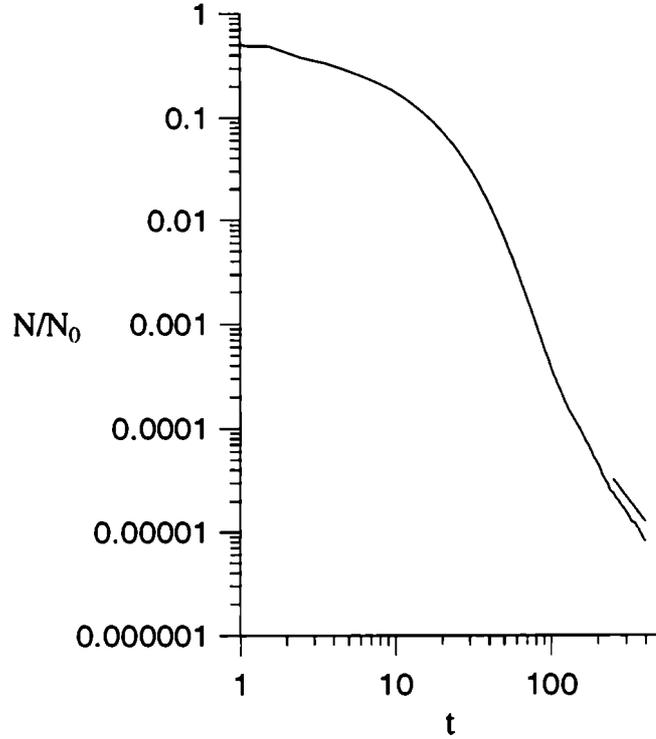


Fig. 3.5: Gráfico Log-Log de la LDT correspondiente al pozo cuyas paredes oscilan en forma armónica. En este caso la profundidad del pozo es $V_0 = 8.63$, $\delta = 0.2$, y se pobló uniformemente la región que se muestra en la Fig. 3.1, la cual excluye la región parabólica. Aquí vemos que el comportamiento algebraico ocurre a tiempos largos. Hemos graficado también una línea recta de pendiente 2. La unidad de tiempo y la unidad de longitud son las mismas que en la Fig. 3.2.

$1/t^2$ (ver Fig. 3.5). De esta manera, el exponente característico β difiere en uno respecto al caso anterior. Esta diferencia también ocurre en el decaimiento de otros sistemas Hamiltonianos cuasiligados cuando la región parabólica es poblada inicialmente o en forma indirecta [49, 50].

3.2 Decaimiento de los sistemas cuánticos

A fin de poblar al sistema cuántico de forma equivalente al sistema clásico, hemos considerado la evolución de un ensamble dado por

$$\hat{\rho}(t_0) = \frac{1}{N} \sum_{\alpha \in N} |\alpha, t_0, t_0\rangle \langle \alpha, t_0, t_0| \quad (3.7)$$

donde N es el número de autoestados del pozo estático de profundidad $V_0 = V(q, t = 0)$ cuyas autoenergías están en la región poblada en el sistema clásico. Este número depende del valor de \hbar . Tomando un valor apropiado hemos calculado

$$P(t) = \int_{-a(t)}^{a(t)} \langle q | \hat{\rho}(t) | q \rangle dq = \sum_{\alpha \in N} P_{\alpha}(t). \quad (3.8)$$

Calculamos (3.8) tomando $\hbar = 0.0255$. Para este valor hay diez autoestados del pozo estático cuyas autoenergías caen en $E_{min} \leq E \leq E_{max}$.

Los resultados se muestran en las Fig. 3.6 y 3.7. La primera muestra un gráfico lin-lin donde podemos ver que ambas curvas, correspondientes a oscilaciones armónicas (curva A) y oscilaciones diente de sierra (curva B). La figura 3.7(a) muestra un gráfico log-log donde se evidencia una ley algebraica para $t > 30$ en ambas curvas, aún cuando los decaimientos clásicos para el mismo intervalo temporal son cualitativamente diferentes (ver Fig. 3.2(a) y (b)). Es importante recalcar que si bien ambos decaimientos presentan un comportamiento algebraico ($\propto 1/t^{\beta}$), los exponentes característicos son distintos. El mejor ajuste para la LDTC correspondiente al sistema con oscilaciones armónicas es $\beta = 0.49$ mientras que para el sistema con oscilaciones diente de sierra es $\beta = 0.75$ (ver figura 3.7(b)).

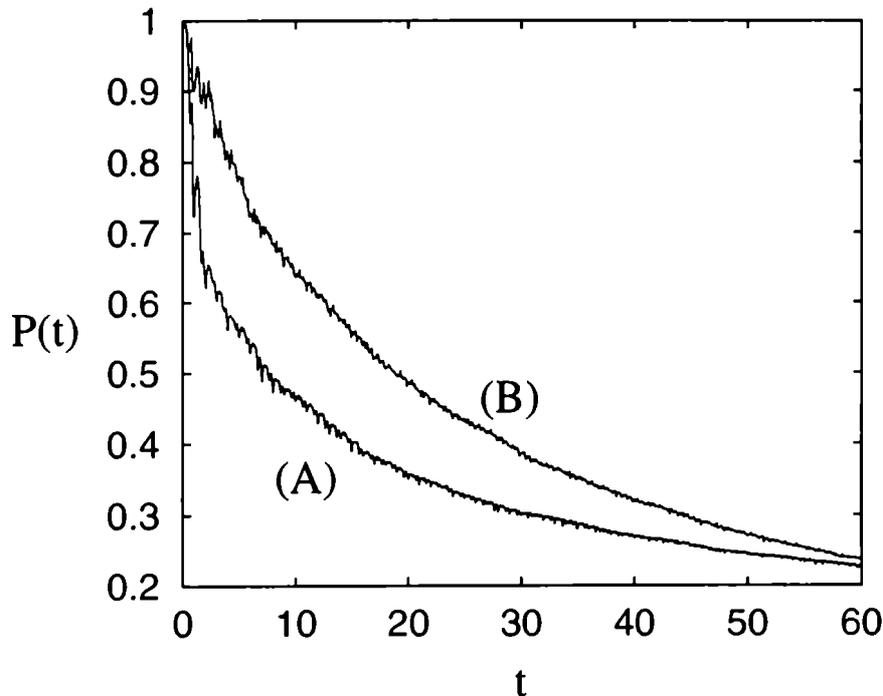


Fig. 3.6: $P(t)$ vs. t donde la curva (A) corresponde a oscilaciones armónicas mientras que (B) corresponde a oscilaciones de diente de sierra.

Se estudiaron las LDTC para otros valores de V_0 y δ . En todos los casos estudiados se observó el comportamiento algebraico. Sin embargo, los exponentes característicos varían para cada caso. Por ejemplo, para $V_0 = 2.47$ y $\delta = 0.2$ ambos sistemas presentan el mismo exponente característico $\beta = 2.2$. mientras que si $V_0 = 2.47$ y $\delta = 0.05$, $\beta = 0.7$ para oscilaciones armónicas y $\beta = 0.9$ para oscilaciones tipo diente de sierra.

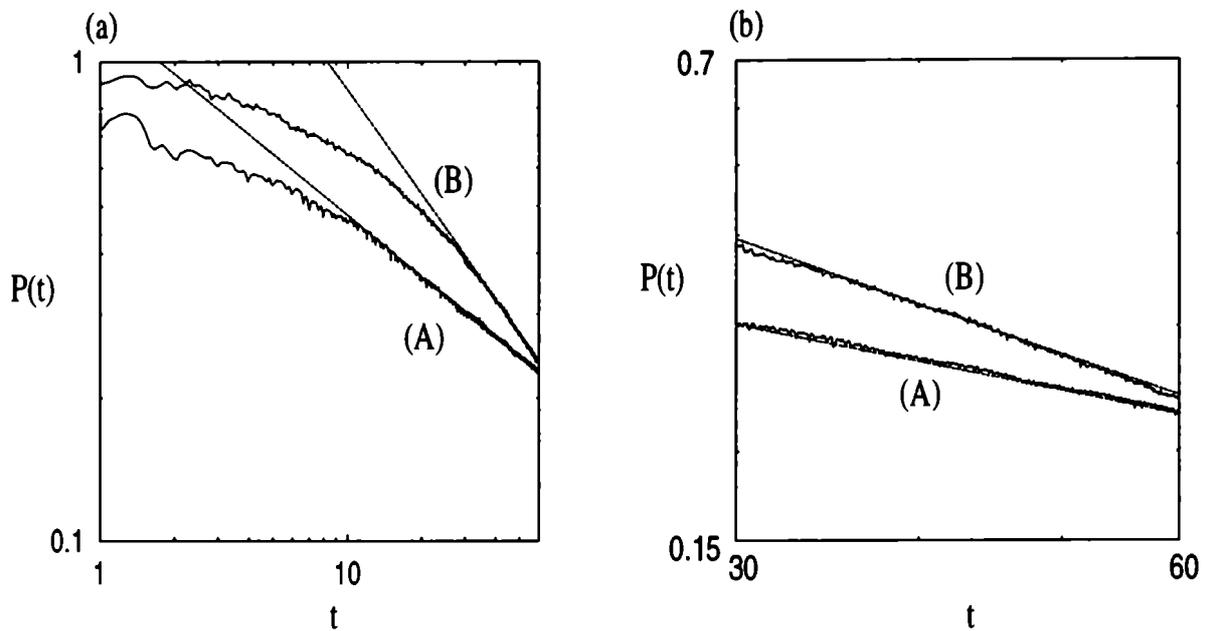


Fig. 3.7: (a) Gráfico log-log de $P(t)$ vs. t . Aquí vemos claramente el comportamiento algebraico de ambas curvas. (b) Las mismas curvas que (a) para $t > 30$. Tanto en (a) como en (b) se grafican el mejor ajuste de ambas curvas para $t > 30$ con la ley algebraica ($\propto 1/t^\beta$). Ver texto.

Por otro lado, existen evidencias de que los sistemas cuánticos abiertos autónomos (su Hamiltoniano no depende del tiempo) cuyos análogos clásicos son caóticos mientras permanecen ligados (con LDT exponencial), originan un comportamiento algebraico en su LDTC [32, 29, 30, 31] con diferentes exponentes característicos. Este efecto puede ser explicado por la distribución (Gaussiana) de resonancias, asumiendo que cada una de ellas decae en forma exponencial y una determinada población inicial de las mismas; y no por la existencia de familias de órbitas periódicas parabólicas. Variando la población inicial, se obtienen diferentes exponentes característicos. Lo cual está en concordancia con nuestros resultados.

En conclusión, hemos encontrado que las leyes de decaimiento de los sistemas cuánticos muestran un comportamiento algebraico en ambos sistemas, a pesar de la diferente dinámica

clásica exhibida. Esto último muestra que el decaimiento algebraico en estos sistemas cuánticos es un efecto puramente cuántico y no tiene correlato con la mecánica clásica correspondiente.

Parte II

Sistemas en Dos Dimensiones

En 1929, Von Newman y Wigner [52] mostraron que los niveles de energía de un sistema sin simetrías de ningún tipo, solo pueden cruzarse accidentalmente cuando se varía un parámetro del Hamiltoniano.

Los sistemas completamente caóticos no tienen más constantes de movimiento que la energía. Si además carecen de simetrías discretas, los niveles de energía se repelen al variar un parámetro del Hamiltoniano generando los llamados cruces evitados (CE).

Dicha repulsión de niveles constituye una de las manifestaciones más notorias del caos en mecánica cuántica. Esto tiene una influencia muy importante en la evolución dinámica cuando el parámetro es una función dependiente del tiempo así como en las propiedades de las autofunciones a un valor fijo del parámetro.

En esta parte de la tesis hacemos un estudio del espectro de un sistema completamente caótico cuando se varía un parámetro. El sistema estudiado es el billar estadio de Bunimovich [18] donde se mantiene el área constante y se varía un parámetro de forma (ver Sec. 1.4). El punto de partida (Cap. 1) constituyó el estudio del tipo de transiciones que ocurren en dicho sistema cuando la variación temporal del parámetro es muy lenta (adibática). Se muestra, a través de un análisis de la estructura de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la evolución, que las transiciones entre niveles vecinos ocurren sólo en los CE y son del tipo Landau-Zener [53, 54]. Uno de los resultados que se obtuvieron de dicho estudio es la posibilidad de obtener la ubicación y demás características de los cruces evitados existentes en el espectro. Basados en esto, desarrollamos (Cap. 2) un método que permite eliminar los cruces evitados existentes en el espectro, es decir, suprimir la interacción entre los niveles. Mostramos que la eliminación de CE es el mecanismo natural para sacar a la luz las estructuras localizadas en las autofunciones del sistema. De esta forma emerge la *estructura regular* existente detrás del espectro. Este nombre se debe a que en los sistemas regulares o integrables los niveles si pueden cruzarse, y en general es lo que se observa en los espectros de dichos sistemas. Se calcularon los autoestados del sistema luego de la eliminación de los CE obteniendo que los mismos presentan gran localización en órbitas periódicas cortas.

Finalmente, en el Cap. 3 se estudia la influencia de la *estructura regular* detrás de un espectro en la dinámica cuántica cuando el parámetro es función del tiempo.

Capítulo 1

Caracterización de las transiciones en un espectro complejo

El modelo de Landau-Zener [53, 54] es muy útil para describir transiciones entre niveles de energía que experimentan cuasi-cruces cuando se varía un parámetro del Hamiltoniano. Este modelo es una herramienta básica para entender fenómenos en áreas muy distintas como en física de partículas [55, 56, 57], física del estado sólido [58, 59] o física nuclear [60], entre otras. Por otro lado, los cuasi-cruces determinan el límite de aplicabilidad del teorema adiabático [61].

En este capítulo mostramos que, las transiciones entre niveles de energía vecinos en un sistema caótico dependiente de un parámetro, son como las transiciones en el modelo de Landau-Zener, cuando dicho parámetro se mueve muy lentamente (evolución adiabática). Esto se hace a través del análisis de la estructura de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica cuántica. En el capítulo 3 de esta parte llegamos a la misma conclusión pero en ese caso lo hacemos a través de la resolución directa de la evolución cuántica de distintas condiciones iniciales y el estudio de la dispersión de la energía.

Comenzamos este capítulo con una breve descripción del modelo de Landau-Zener. Luego, en la sección 1.2 se describe un método para resolver la dinámica cuántica de billares con paredes móviles. Dicho método nos permite escribir las ecuaciones diferenciales que gobiernan la evolución cuántica de una forma muy adecuada para la comparación con el modelo de Landau-Zener escrito en la base que diagonaliza el Hamiltoniano (base adiabática). La reformulación del modelo de Landau-Zener en la base adiabática se hace en la sección 1.3. El sistema estudiado se presenta en la sección 1.4 y finalmente, en la sección 1.5 se muestran los resultados numéricos.

1.1 Modelo de Landau-Zener

Sea un sistema de dos niveles que dependen de un parámetro ℓ de forma que en $\ell = \ell_0$ los niveles de energía experimentan una cuasi degeneración o cruce evitado. Sea $\{\phi_+(\ell), \phi_-(\ell)\}$ la base de autoestados del Hamiltoniano (llamada habitualmente base adiabática) y sus autoenergías en función de ℓ ,

$$E_{\pm} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)(\ell - \ell_0)}{2} \pm \sqrt{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (\ell - \ell_0)^2 / 4 + \epsilon^2} \quad (1.1)$$

forman una hipérbola, donde 2ϵ es la separación mínima los niveles (en $\ell = \ell_0$); α_1 y α_2 son las pendientes de las asíntotas. La Figura 1.1 muestra un gráfico esquemático de las autoenergías en función del parámetro.

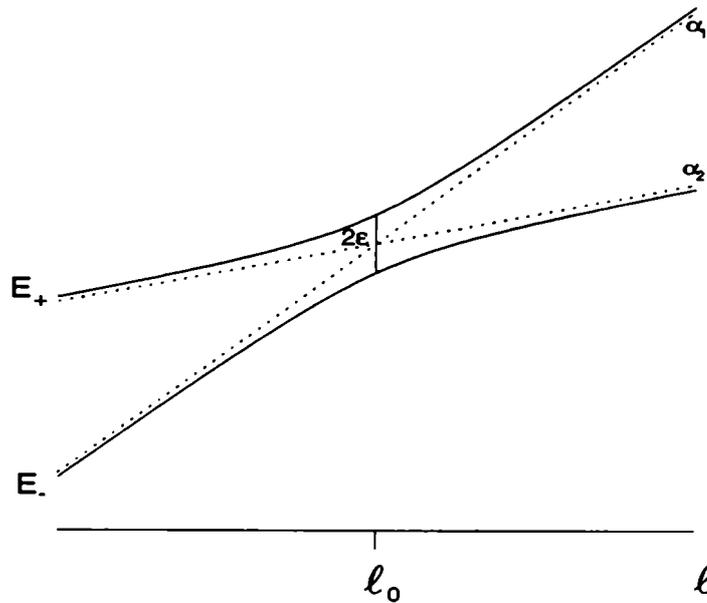


Fig. 1.1: Niveles de Energía E_+ y E_- como función del parámetro ℓ . En líneas de puntos se indican las asíntotas a E_+ y E_- . La distancia entre los niveles en $\ell = \ell_0$, $(E_+ - E_-)(\ell = 0) = 2\epsilon$, también se gráfica.

El teorema adiabático [61] establece que si el sistema está inicialmente en alguno de los autoestados del Hamiltoniano, por ejemplo $\phi_-(\ell)$ en $\ell \ll \ell_0$, y el parámetro se mueve infinitamente lento de $\ell \ll \ell_0$ a $\ell \gg \ell_0$, el sistema se mantendrá en dicho estado $\phi_-(\ell)$. De aquí el nombre, base adiabática.

Ahora bien, si el parámetro se mueve con una velocidad finita, esto ya no se cumple y el estado final en $\ell \gg \ell_0$ será una combinación de $\phi_-(\ell)$ y $\phi_+(\ell)$. Zener derivó la probabilidad de transición entre los estados en un modelo simplificado [54]. En dicho modelo, la velocidad

del parámetro ℓ es constante ($\dot{\ell} = \text{const.}$) y existe una base (que no depende del parámetro), $\{\psi_+, \psi_-\}$ llamada base diabática, en la cual el Hamiltoniano es de la forma,

$$H(\ell) = \begin{pmatrix} \alpha_1(\ell - \ell_0) & \epsilon \\ \epsilon & \alpha_2(\ell - \ell_0) \end{pmatrix}. \quad (1.2)$$

Luego, si a tiempo $t = -\infty$ el sistema se encuentra en el estado $\phi_-(\ell)$, la probabilidad de transición al estado $\phi_+(\ell)$ a $t = \infty$ es

$$P_{LZ} = e^{-4\pi\epsilon^2/\hbar\beta\dot{\ell}}, \quad (1.3)$$

donde $\beta \equiv |\alpha_1 - \alpha_2|$.

1.2 Una manera de resolver la dinámica cuántica de billares con contornos móviles

Resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo para billares planos de paredes móviles no es una tarea sencilla. Presenta varios problemas desde el punto de vista computacional: memoria necesaria para estudios a altas energías, tiempo de CPU, entre otros.

En esta sección se describe un método para resolver la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo de billares planos con contornos móviles. A diferencia del método que será presentado en el Cap. 3, basado en la expansión del Hamiltoniano del billar en el parámetro de deformación (Apéndice A), el método aquí presentado no es muy eficiente para resolver evoluciones temporales largas. Se presenta por dos razones. Primero, porque fue utilizado para todos los cálculos que se muestran en este capítulo y además ilustra la dificultad del problema numérico.

Sea $\mathcal{C}(t)$ una curva cerrada definiendo a tiempo t un dominio bidimensional $\mathcal{D}(t)$. Consideremos una partícula de masa m dentro del billar, entonces la ecuación de Schrödinger dependiente del tiempo queda

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = i \frac{\hbar}{2m} \Delta \Psi. \quad (1.4)$$

Ψ satisface la condición de contorno dependiente del tiempo $\Psi(\zeta, t) = 0$, donde ζ es un punto sobre $\mathcal{C}(t)$, y consideramos que las funciones están normalizadas en el dominio. Es un procedimiento estándar, expandir la solución en términos de la base adiabática,

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} a_{\mu}(t) P_{\mu}(t) \phi_{\mu}(\mathbf{r}, t), \quad (1.5)$$

donde $P_\mu(t) \equiv \exp(-i \int_0^t \omega_\mu dt')$ es la contribución de la fase dinámica con $\omega_\mu = \hbar k_\mu^2(t) / 2m$. La base adiabática $\{\phi_\mu\}$ constituye un conjunto completo de autofunciones reales del billar a cada tiempo; esto es, ϕ_μ satisface la ecuación de Helmholtz $\Delta \phi_\mu(\mathbf{r}, t) = -k_\mu^2(t) \phi_\mu(\mathbf{r}, t)$ con condiciones de contorno de Dirichlet $\phi_\mu(\zeta, t) = 0$, y es una función continua en el tiempo.

Reemplazando la expansión (1.5) en la ecuación (1.4) y luego de algo de álgebra, se obtiene

$$\sum_\nu \dot{a}_\nu(t) P_\nu(t) \phi_\nu(\mathbf{r}, t) = - \sum_\nu a_\nu(t) P_\nu(t) \frac{\partial \phi_\nu}{\partial t}(\mathbf{r}, t), \quad (1.6)$$

donde los puntos denotan la derivación respecto del tiempo. Empleando la condición de ortonormalidad en el dominio $\int_{\mathcal{D}(t)} \phi_\nu \phi_\mu d\sigma = \delta_{\nu\mu}$, se obtiene

$$\dot{a}_\mu(t) = - \sum_\nu a_\nu(t) (P_\nu(t)/P_\mu(t)) C_{\mu\nu}(t) \quad (1.7)$$

$$C_{\mu\nu}(t) \equiv \int_{\mathcal{D}(t)} \phi_\mu(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \phi_\nu}{\partial t}(\mathbf{r}, t) d\sigma. \quad (1.8)$$

El primer paso para resolver el sistema de ecuaciones (1.7) es conocer los coeficientes $C_{\mu\nu}(t)$. Vale la pena remarcar que cada $C_{\mu\nu}(t)$ involucra una integración sobre el dominio $\mathcal{D}(t)$. El orden de magnitud de esos cálculos se pueden estimar en términos del número de longitudes de onda de las funciones ϕ en la región de integración. Para realizar la integración, el dominio debe ser particionado como mínimo en $N \approx k^2$ celdas, con $k = \max\{k_\mu, k_\nu\}$. Si n es la dimensión de la base adiabática restringida a la región de energía donde la evolución se lleva a cabo, necesitamos conocer n^2 coeficientes. Como consecuencia, la dimensión del problema de encontrar los $C_{\mu\nu}$ de la Eq. 1.8 es del orden $n^2 \times N$ para cada tiempo.

En un trabajo reciente [62], Vergini y Saraceno desarrollaron un método para calcular directamente todos los autovalores y autofunciones en una pequeña región de energía para billares planos independientes del tiempo. Esto se hace resolviendo un problema de autovalores generalizado en términos de cantidades definidas sobre el contorno. Este método se basa en el uso de la propiedad de escaleamiento que permite escribir la norma sobre el contorno como función de la energía. Vamos a extender este método para billares cuyos contornos dependen del tiempo de forma de bajar considerablemente el orden de magnitud de los cálculos para obtener los coeficientes $C_{\mu\nu}(t)$.

Nos restringimos a dominios estrellados, esto significa $r_n \equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} > 0 \forall \mathbf{r} \in \mathcal{C}(t)$; \mathbf{n} es la normal exterior a $\mathcal{C}(t)$.

Generamos desde el dominio original definido por $\mathcal{C}(t)$ una familia de sistemas que dependen del parámetro α . Estos sistemas evolucionan con las curvas $\mathcal{C}_\alpha(t)$ que son obtenidas de $\mathcal{C}(t)$ por

una transformación de escala en el plano $\mathbf{r} \rightarrow \alpha \mathbf{r}$ (si ζ es un punto sobre $\mathcal{C}(t)$, ζ/α es el punto correspondiente sobre $\mathcal{C}_\alpha(t)$).

A cada función $\phi_\mu(\mathbf{r}, t)$ le asociamos la función de escala $\phi_\mu(\alpha, \mathbf{r}, t) \equiv \phi_\mu(\alpha \mathbf{r}, t)$. Esta familia de funciones que dependen del parámetro α , verifican la ecuación de Helmholtz con número de onda αk_μ y satisfacen la condición de Dirichlet sobre el contorno $\mathcal{C}_\alpha(t)$. Esto significa que $\phi_\mu(\alpha, \zeta/\alpha, t) = 0$ con ζ un punto sobre $\mathcal{C}(t)$.

Por otro parte, se requiere que la masa de la partícula en los sistemas de escaleamiento cambie como $\alpha^2 m$ de forma tal que ω_μ resulte independiente de α . Esto último implica que la evolución temporal es la misma *para todos* los sistemas de escaleamiento.

Expandimos la función de onda en la base adiabática, pero ahora representada por las funciones $\phi_\nu(\alpha, \mathbf{r}, t)$. Obtenemos el análogo de la Eq. (1.6),

$$\sum_\nu \dot{a}_\nu(t) P_\nu(t) \phi_\nu(\alpha, \mathbf{r}, t) = - \sum_\nu a_\nu(t) P_\nu(t) \frac{\partial \phi_\nu}{\partial t}(\alpha, \mathbf{r}, t). \quad (1.9)$$

Diferenciando esta última ecuación respecto de α resulta,

$$\sum_\nu \dot{a}_\nu(t) P_\nu(t) \frac{\partial \phi_\nu}{\partial \alpha}(\alpha, \mathbf{r}, t) = - \sum_\nu a_\nu(t) P_\nu(t) \frac{\partial^2 \phi_\nu}{\partial \alpha \partial t}(\alpha, \mathbf{r}, t). \quad (1.10)$$

Lo que queda del cálculo consiste en conmutar el orden de las derivadas parciales en el lado derecho de la Eq. (1.10), multiplicar la ecuación por $\partial \phi_\mu / \partial \alpha(\alpha, \mathbf{r}, t)$ y evaluar la ecuación en $\alpha = 1$. Finalmente integramos sobre el contorno del billar $\mathcal{C}(t)$. Luego de este cálculo directo obtenemos

$$\sum_\nu \dot{a}_\nu(t) P_\nu(t) \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial \alpha} \frac{dl}{r_n} = - \sum_\nu a_\nu(t) P_\nu(t) \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_\nu}{\partial \alpha} \right) \frac{dl}{r_n}. \quad (1.11)$$

donde dl es el elemento de longitud sobre el contorno. Por simplicidad se omitió el argumento $(\alpha = 1, \mathbf{r}, t)$ en la última ecuación.

En [62] se probó que la integral del lado derecho de la última ecuación verifica una relación de cuasiortogonalidad, esto significa,

$$\frac{1}{2k_\mu^2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial \alpha} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \alpha} \frac{dl}{r_n} = \delta_{\nu\mu} + \frac{(k_\mu - k_\nu)}{(k_\mu + k_\nu)} \mathcal{O}(1). \quad (1.12)$$

Usando esta importante relación para niveles cercanos en (1.11), obtenemos la Eq. (1.7), donde

$$C_{\mu\nu}(t) \simeq \frac{1}{2k_\mu^2} \oint_{\mathcal{C}} \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \alpha} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \phi_\nu}{\partial \alpha} \right) \frac{dl}{r_n}. \quad (1.13)$$

Esta ecuación proporciona la formulación *unidimensional* para calcular los coeficientes $C_{\mu\nu}$ en términos de cantidades definidas sobre el contorno.

Para el sistema específico estudiado en toda la segunda parte de ésta tesis, y que luego se describirá (Sec. 1.5), se calcularon los coeficientes $C_{\mu\nu}$ para μ fijo, con $\nu = \mu + j$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) calculado de forma exacta (Eq. (1.8)) y usando la Eq. (1.13) (ver Fig. 1.2). La correspondencia es extremadamente buena para un gran número de niveles. Los apartamientos entre los dos gráficos comienzan para $|j| \approx 10$, pero en esa región los valores de los coeficientes son muy pequeños. Con el presente cálculo unidimensional, el tiempo de maquina (CPU)

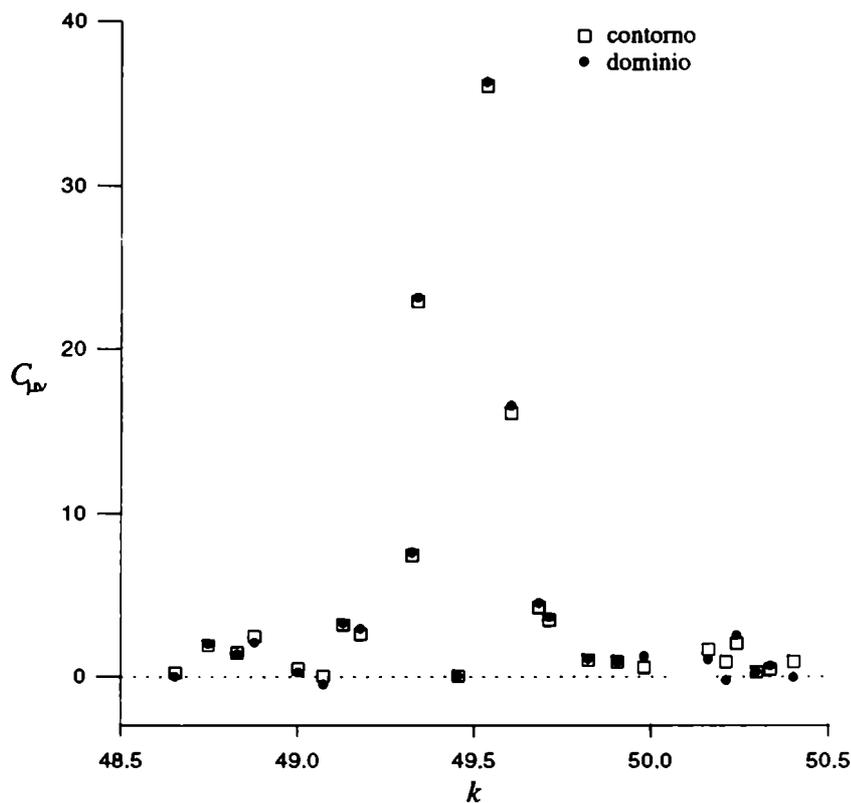


Fig. 1.2: Coeficientes $C_{\mu\nu}$ (con $k_\mu = 49.456279$) como función de $k_{\mu+j}$ calculado de forma exacta (Eq. 1.8) y sobre el contorno (Eq. 1.13). El sistema usado se presenta en la sección 1.5 y el cálculo corresponde a $\ell = 1$.

necesario para computar los coeficientes se reduce considerablemente comparado con el cálculo estándar (Eq. 1.8). Como en este capítulo vamos a estudiar la interacción entre niveles vecinos (como se vio, esta formulación no funciona bien para niveles alejados), hemos utilizado Eq. 1.13 para calcular los coeficientes.

1.3 Modelo de Landau-Zener en la base adiabática

El método descrito en la sección anterior, el cual nos permite resolver la dinámica cuántica de un billar con paredes móviles, está expresado en la base adiabática. Es por esto que reformulamos el modelo de Landau-Zener (Sec. 1.1) en términos de la base adiabática. De esta forma podemos comparar la forma de los coeficientes $C_{\mu\nu}(\ell)$ del modelo de Landau-Zener con los correspondientes en el sistema estudiado.

Diagonalizando el Hamiltoniano en la base diabática (Eq. 1.2) encontramos la relación entre ambas bases

$$\begin{aligned}\phi_+(\ell) &= b_+(\ell)\psi_+ + b_-(\ell)\psi_- \\ \phi_-(\ell) &= b_-(\ell)\psi_+ - b_+(\ell)\psi_- .\end{aligned}$$

Donde los coeficientes están definidos por

$$b_{\pm} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 \pm \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)\ell}{\sqrt{(\alpha_1 - \alpha_2)^2\ell^2 + 4\epsilon^2}} \right)^{1/2}, \quad (1.14)$$

y satisfacen $b_1^2 + b_2^2 = 1$.

Usando la definición de los coeficientes $C_{\mu\nu}$ (ver Eq. (1.8)), resulta

$$C_{+-}(\ell) \equiv \langle \phi_+(\ell) | \frac{\partial \phi_-(\ell)}{\partial \ell} \rangle = \frac{\partial b_+}{\partial \ell} b_- - \frac{\partial b_-}{\partial \ell} b_+.$$

Reemplazando (1.14) en la última ecuación finalmente encontramos que $C_{+-}(\ell)$ es la función Lorentziana,

$$C_{+-}(\ell) = \frac{\ell_{int}}{2(\ell_{int}^2 + (\ell - \ell_0)^2)}, \quad (1.15)$$

donde $\ell_{int} \equiv 4\epsilon/(\alpha_1 - \alpha_2)$ es el ancho característico de la misma.

1.4 El billar estadio de Bunimovich

El sistema estudiado en toda la segunda parte de esta tesis es el billar estadio de Bunimovich, modelo paradigmático tanto en estudios de caos clásico como cuántico. Su contorno está formado por dos semicírculos de radio r conectados por dos líneas rectas de longitud $2a$. Una partícula dentro del billar se mueve libremente y es perfectamente reflejada por el contorno.

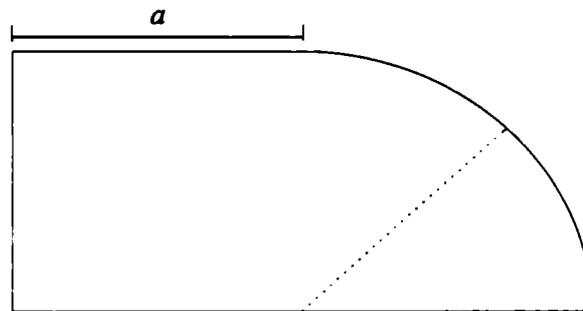


Fig. 1.3: Billar estadio de Bunimovich desimetrizado. El área del billar se fija en el valor $1 + \pi^2/4$. Luego, el contorno depende de un solo parámetro ($\ell \equiv a/r$).

Este sistema constituye uno de los primeros ejemplos de sistema completamente caótico. Bunimovich mostró que su dinámica clásica es ergódica y tiene la propiedad de mezclado (mixing) [63, 64]. Sus órbitas periódicas son aisladas e inestables (hiperbólicas) salvo una familia de órbitas periódicas marginalmente inestables (parabólicas) que rebotan perpendicularmente con los segmentos paralelos rectos. En la literatura, estas órbitas llevan el nombre de *bouncing ball* (BB).

El estadio completo es simétrico respecto de dos ejes perpendiculares, implicando que sus autoestados cuánticos se pueden dividir en cuatro subespacios de distinta paridad. Para evitar estas simetrías [65], se consideró una versión desimetrizada del billar, la cual se muestra en la Fig. 1.3.

Introducimos como parámetro a la razón $\ell \equiv a/r$. El área del billar se fija en el valor $1 + \pi^2/4$. Luego, el contorno depende solo de ℓ . Las propiedades clásicas como la entropía de Kolmogorov-Sinai, varían suavemente frente a cambios del parámetro alrededor de $\ell = 1$. De esta forma, este sistema resulta muy adecuado para investigaciones relacionadas con la dependencia del parámetro dentro de la zona de no integrabilidad.

Para estudiar la dinámica, el parámetro $\ell \equiv a/r$ se varía con una velocidad finita $\dot{\ell}$ manteniendo el área constante. Se ha fijado el área para mantener constante el espaciamiento medio de niveles. Luego, la dinámica del contorno es introducida por medio de la función $\ell(t)$.

La Fig. 1.4 muestra el espectro de $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ como función de ℓ , $1 \leq \ell \leq 1.14$. Hemos elegido la región en que los números de onda $k_\mu(\ell)$ están entre 49 y 50. La motivación de esta elección recae en el hecho de que en esta región existen un gran número de niveles en una pequeña porción del espectro. Aunque las propiedades que vamos a evaluar son características

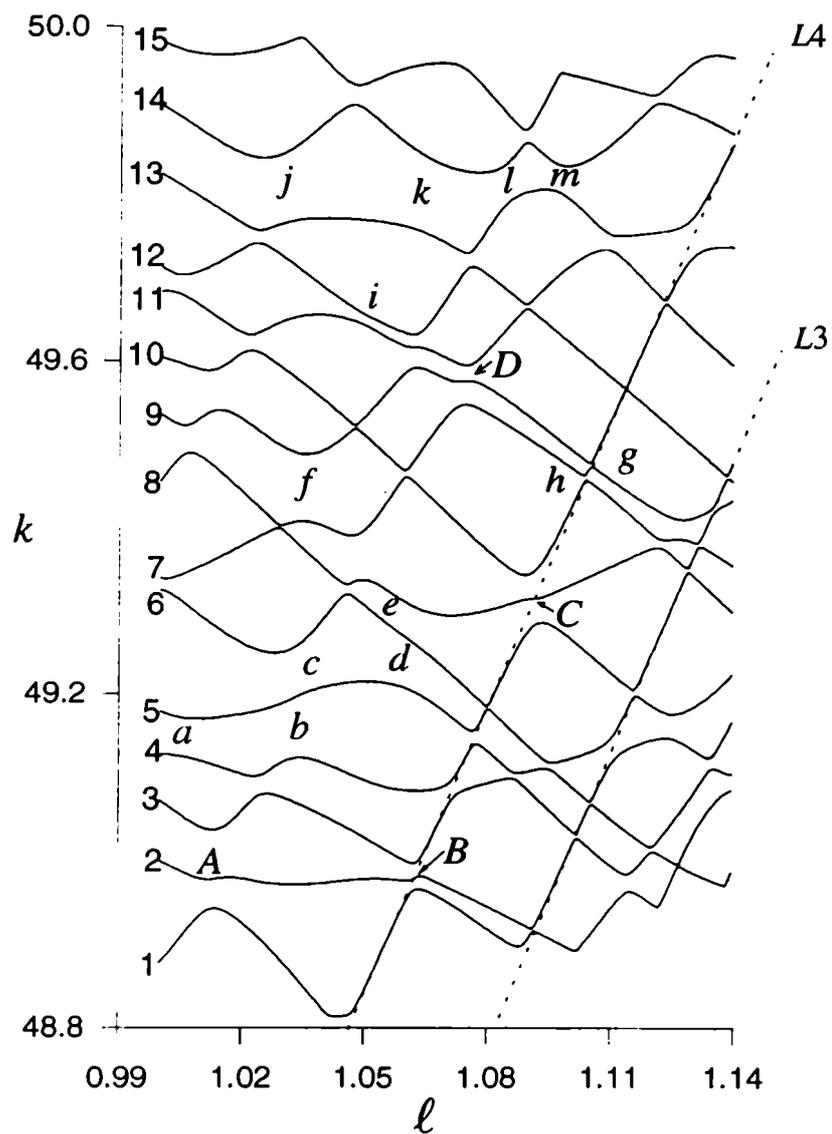


Fig. 1.4: Espectro del billar estadio como función de l , $1 \leq l \leq 1.14$. Los números de onda $k_\mu(l)$ están entre 49 y 50. Ver el texto para más detalle.

de esta región del espectro ($k \sim 50$), como se veremos luego, se puede hacer un escaleamiento apropiado para evaluarlas en otras zonas.

El espectro exhibe el típico comportamiento de cruces evitados que caracterizan a los niveles de energía cuando se varía un parámetro en sistemas sin constantes de movimiento [66]. También se observa que algunos de los cruces evitados están situados sobre dos líneas paralelas que las rotulamos $L3$ y $L4$ (ver Fig. 1.4). Estas líneas están asociadas a estados localizados en la familia parabólica BB. Dichos estados tienen tres y cuatro excitaciones horizontales, respectivamente. Estos estados están muy localizados en el espacio de los momentos, lo que implica que su interacción con los estados vecinos es menor que la interacción entre estados genéricos no localizados. En el capítulo 2 se profundizará sobre esto último.

1.5 Transiciones de Landau-Zener en el billar estadio: Resultados Numéricos

Vamos a analizar los coeficientes $C_{\mu\nu}(t)$ los cuales determinan la evolución cuántica del sistema (ver Sec. 1.2). Estos pueden ser expresados en término del parámetro de deformación ℓ , ya que se cumple $C_{\mu\nu}(t) = \dot{\ell} C_{\mu\nu}(\ell)$.

La figura 1.5 muestra las funciones $|C_{\mu\mu+1}(\ell)|$ para varios pares de niveles vecinos. Se observa claramente una estructura de picos bien definidos. Los picos aparecen cuando dos niveles vecinos experimentan un cruce evitado (esto es fácil de ver siguiendo un par de niveles vecinos en la Fig. 1.4). La altura de los picos disminuye cuando la diferencia de energía entre los niveles en un cruce evitado aumenta. Por esta razón los picos correspondientes a interacciones con estados de BB son un orden de magnitud mayor que los genéricos. Hemos rotulado a , b , c ., a los pequeños picos que corresponden a cruces evitados no muy bien definidos en el espectro o a casos en los cuales es difícil decidir si existe un cruce evitado simplemente mirando el espectro (ver también Fig. 1.4)

Para segundos vecinos, hemos observado también una estructura de picos bien definida; especialmente cuando tres niveles se acercan (esta situación se discute en detalle más adelante). La altura de los picos de $C_{\mu\mu+2}(\ell)$ son un orden de magnitud menor que aquellos de $C_{\mu\mu+1}(\ell)$. Para coeficientes con $|\mu - \nu| > 2$, no hemos observado una estructura simple; sin embargo, la magnitud de estos coeficientes es muy pequeña, comparada con la magnitud de los coeficientes entre primeros vecinos (menor que cinco en la escala de la Fig. 1.2).

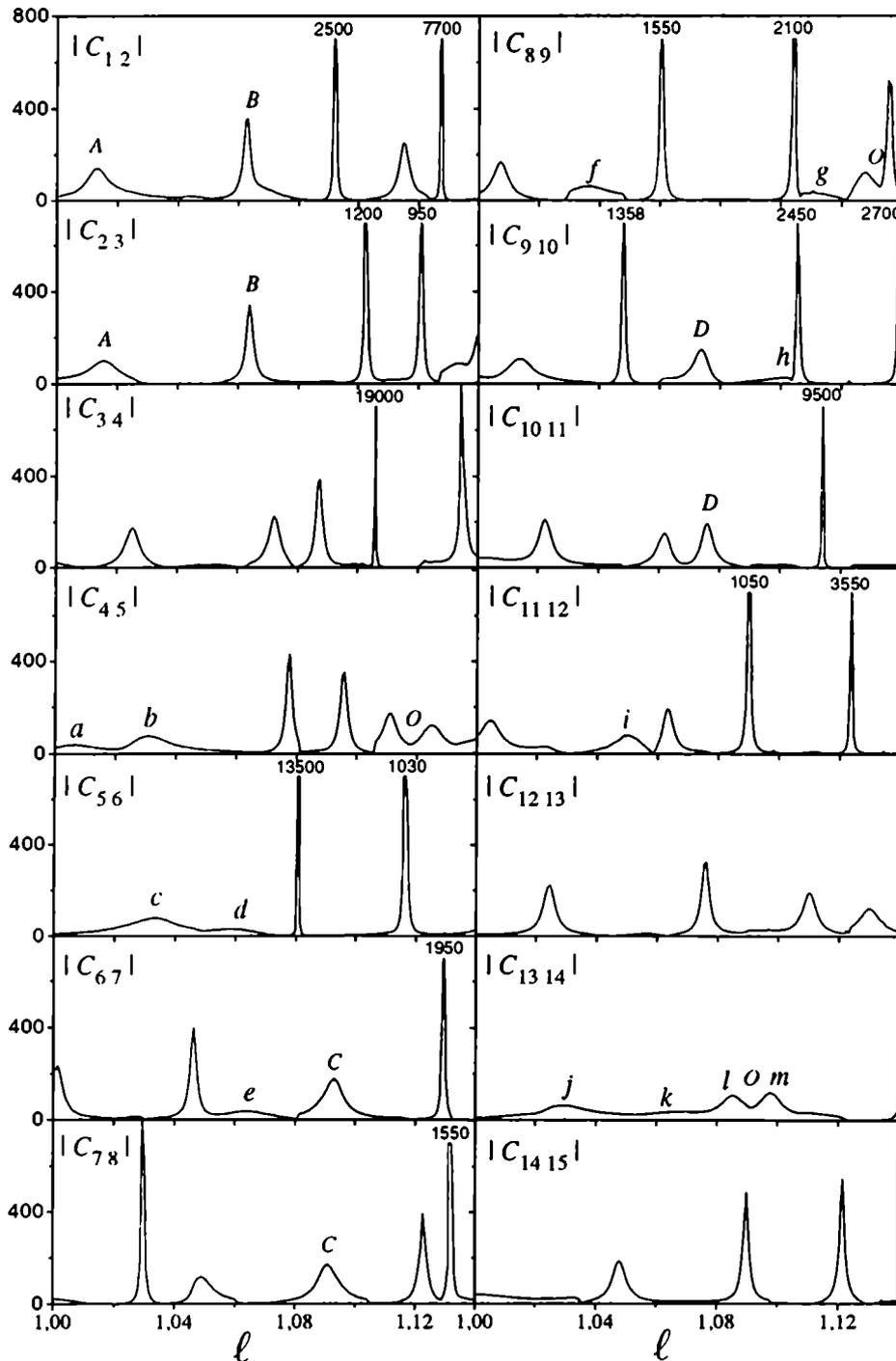


Fig. 1.5: $|C_{\mu+1}(\ell)|$ como función de ℓ para distintos primeros vecinos en energía. Los rótulos a , b , c , ..., muestran pequeños picos que corresponden a cruces evitados, cuyos parámetros no pueden obtenerse directamente del espectro. Los picos que corresponden a interacción con estados de *bouncing-ball* están fuera de escala y sus valores máximos están expresados. Los rótulos A , B , C y D indican picos bien definidos que en el espectro aparecen como cruces evitados entre tres niveles. El rótulo O indica algunos casos donde existe un solapamiento entre cruces evitados consecutivos.

Con el presente análisis queda claro que la información contenida en los coeficientes permite una definición completa de los cruces evitados y que esta información no siempre esta presente en el espectro. Los picos entre primeros vecinos ajustan muy bien con funciones Lorentzinas.

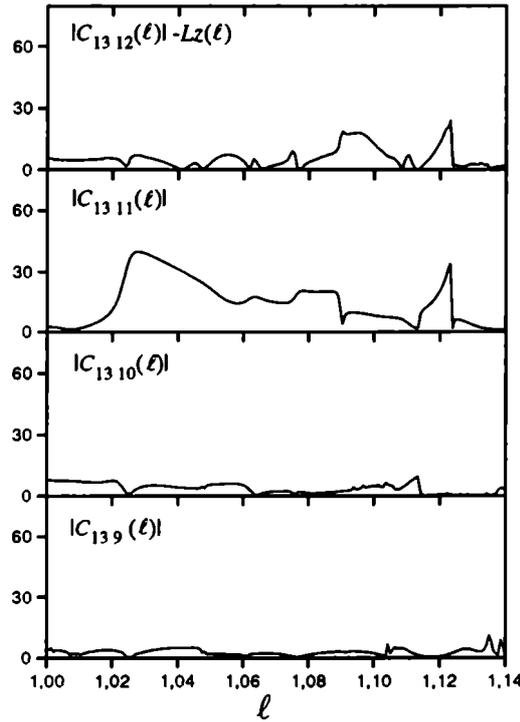


Fig. 1.6: El gráfico superior muestra $|C_{1312}(\ell)| - Lz(\ell)$ como función de ℓ . $Lz(\ell)$ es la suma de funciones Lorentzianas centradas en los picos del coeficiente $|C_{1312}(\ell)|$. Sus anchos y la posición de sus centros son ℓ_{int} y ℓ_0 respectivamente. Los otros gráficos de la figura muestran los coeficientes $|C_{1313-j}(\ell)|$ para $j = 2, 3, 4$ como función de ℓ

Esto es lo que ocurre en el modelo de Landau-Zener (ver Eq. 1.15). La Fig. 1.6 resume lo anteriormente expuesto. En la parte superior se muestra $|C_{1312}(\ell)| - Lz(\ell)$, donde $Lz(\ell)$ es la suma de funciones Lorentzianas centradas en los picos bien definidos de $|C_{1312}(\ell)|$. Cada una de las funciones Lorentzianas es definida en la Sec. 1.3 por la ecuación 1.15. Los anchos y centros de las Lorentzianas son ℓ_{int} y ℓ_0 , respectivamente. Los demás gráficos de la Fig. 1.6 muestran las funciones $|C_{1313-j}(\ell)|$ ($j = 2, 3, 4$) como función de ℓ . La figura revela el comportamiento Lorentziano para los primeros vecinos, y la falta de una estructura definida en los coeficientes $C_{\mu\nu}(\ell)$ para $|\mu - \nu| > 2$.

El estudio numérico presentado sería más relevante si supiéramos cómo es el escaleamiento del espectro a otras regiones de energía. El teorema de Weyl [5] nos dice que la densidad de

estados, asociada con el eje vertical de la Fig. 1.4, es proporcional a k . El problema aparece en el eje horizontal porque la ley de escaleamiento de la densidad de cruces evitados consecutivos $\rho_{c.e}$ no se conoce. Hemos obtenido, luego de un exhaustivo análisis numérico en distintas regiones

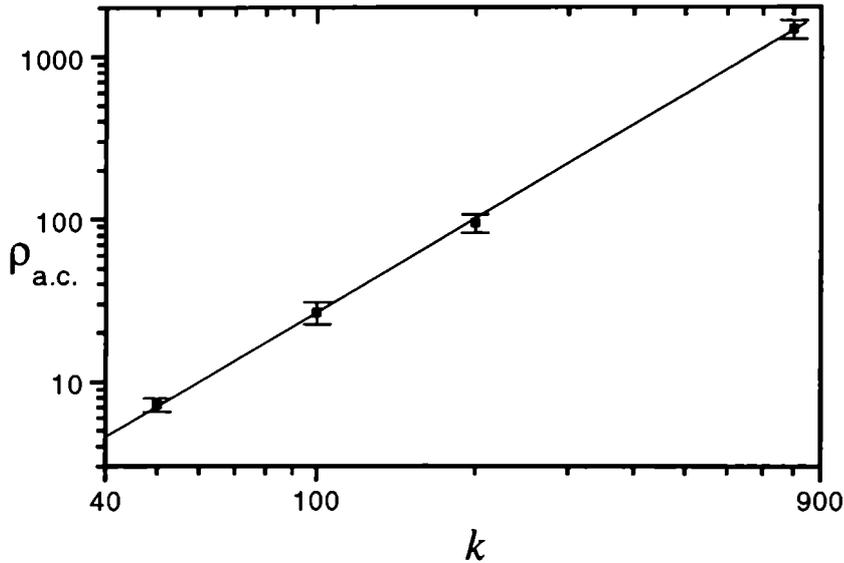


Fig. 1.7: Gráfico log-log de la densidad de cruces evitados $\rho_{c.e}$ como función del número de onda k para espaciamentos de energía menores que un cuarto del espaciamento medio entre niveles. $\rho_{c.e}$ es proporcional a k^d con $d = 1.92 \pm 0.1$.

de energía, que la ley de escaleamiento de $\rho_{c.e}$ va como k^d con $d = 1.92 \pm 0.1$. En la Fig. 1.7 se muestra $\rho_{c.e}$ como función de k para cruces evitados cuyas diferencias de energía sean menores que un cuarto del espaciamento medio entre niveles. En este cálculo no hemos considerado los cruces evitados que involucren a estados de BB porque su contribución a la densidad de estados decrece como $k^{1/2}$ [67].

Otro hecho importante para recalcar es que cada pico está muy bien definido; su ancho (dado por ℓ_{int}) es mucho menor que la distancia media entre picos consecutivos $\rho_{c.e}^{-1}$. Sólo se han observado unos pocos casos en que cruces evitados consecutivos se solapan (ver por ejemplo los picos rotulados con O de la figura 1.4). Para cruces evitados genéricos hemos obtenido que $\ell_{int}\rho_{c.e} \simeq 0.2$; y para el caso de cruces evitados con estados de BB es bastante menor como se espera.

En resumen, hemos mostrado que la estructura de los coeficientes $C_{\mu\nu}$ entre niveles vecinos responde a la del modelo de Landau-Zener. Por otro lado, los picos individuales de $C_{\mu\nu}$ están lo suficientemente separados ($\ell_{int}\rho_{c,\epsilon} \simeq 0.2$), de forma que no hay correlaciones entre cruces evitados vecinos. Queda por analizar una situación que a veces se observa en el espectro: tres niveles colisionan como por ejemplo los puntos A , B , C y D de la figura 1.4. Para entender estos procesos vamos a analizar un sistema de tres niveles, el cual imita esta circunstancia. Consideremos un Hamiltoniano dependiente de un parámetro definido en la base diabática por la siguiente matriz

$$\epsilon \begin{pmatrix} -\ell/\ell_{int} & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ell/\ell_{int} \end{pmatrix}$$

con ϵ la perturbación y ℓ_{int} la variación característica del parámetro durante la transición. Este Hamiltoniano se puede diagonalizar analíticamente para todo ℓ . Las autoenergías superior e inferior están representadas por las hipérbolas $E_{\pm} = \pm\epsilon\sqrt{(t/t_{int})^2 + 2}$, como en el modelo de Landau-Zener, y la autoenergía media $E_0 = 0$ para todo ℓ (ver Fig. 1.8).

Obviamente, para evoluciones diabáticas, si el sistema estaba en el estado superior para $-t/t_{int} \gg 1$, hay una alta probabilidad ~ 1 que el sistema decaiga al estado E_- a $t/t_{int} \gg 1$. En otras palabras, la presencia de E_- afecta enormemente la probabilidad de transición entre los estados E_+ y E_0 . Sin embargo, estamos interesados en evoluciones adiabáticas donde la probabilidad de transición a E_- se torna pequeña. En esta situación queremos determinar cuándo los parámetros de Landau-Zener para E_+ y E_0 , esto es $(E_+ - E_0)/2$ a $\ell = 0$ (que denotamos como Δ) y ℓ_{int} , describen adecuadamente la probabilidad de transición entre estos dos estados. Este punto no es para nada obvio. Por ejemplo, la distancia $(E_+ - E_0)$ es muy afectada por la presencia de E_- y $\Delta \neq \epsilon$, contrariamente al caso de dos niveles. Hemos calculado numéricamente la evolución dinámica de este modelo, obteniendo el siguiente resultado para la probabilidad de transición entre E_+ y E_0 :

$$P_{E_+ \rightarrow E_0} \sim \frac{1}{2} \exp[-\pi \Delta(\ell_{int}/\hbar) 0.96], \quad (1.16)$$

para $P_{E_+ \rightarrow E_0} \leq 0.2$. Esto es, aunque los parámetros necesitan ser renormalizados, el factor es muy cercano a 1. Como conclusión, este sistema de tres niveles se puede pensar como dos cruces evitados independientes con interacción de Landau-Zener.

Por último, vamos a aclarar qué significa evoluciones adiabáticas o lentas, es decir, el rango donde las transiciones son de Landau-Zener. Por ejemplo, hemos excluido del análisis a la estructura que muestra la función $C_{1311}(\ell)$ en la figura 1.5 porque su altura es chica. Aunque

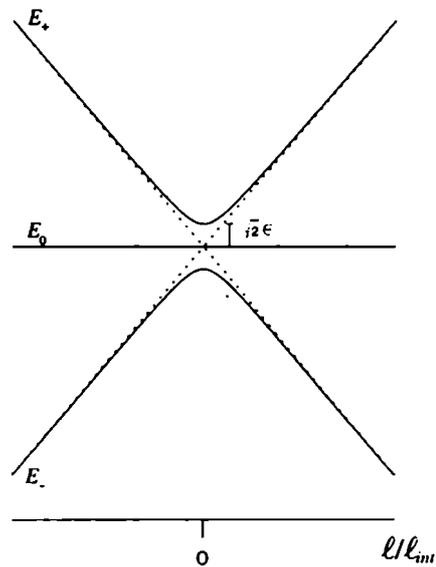


Fig. 1.8: Niveles de Energía E_+ , E_- y E_0 como función de l/l_{int} para el Hamiltoniano de tres niveles. En línea de puntos se indica las asíntotas a E_+ y E_- . La distancia $(E_+ - E_-)(l = 0) = \sqrt{2}\epsilon$, también se gráfica.

el área debajo de la misma es comparable con el área de cualquier pico observado en la figura 1.6, $C_{1311}(l)$ está multiplicado por una función oscilante de período $T \simeq \hbar\rho_E$ (ρ es la densidad de niveles de energía) en las ecuaciones diferenciales 1.7. De esta forma, su contribución efectiva se cancela si el tiempo colectivo para atravesar la estructura $t_{coll} \simeq \rho_{c.e}^{-1}/\dot{l}$ es mayor que T , es decir, si $\dot{l} \ll \rho_{c.e}^{-1}/(\hbar\rho_E)$.

Capítulo 2

Estructura Regular detrás de un Espectro Complejo

Los espectros de sistemas integrables y caóticos presentan características bien distintas. Los niveles de energía correspondientes a sistemas cuya dinámica clásica es caótica, exhiben interacción repulsiva, la cual se manifiesta como cruces evitados (CE), cuando se varía un parámetro del Hamiltoniano. En cambio, si el sistema es integrable, se observan agrupamientos y degeneraciones de niveles. En otras palabras, la conservación de cantidades aparte de la energía se manifiesta con la falta de interacción entre los niveles.

En el capítulo anterior mostramos una manera sencilla de obtener los parámetros (ℓ_{int} y ℓ_0) que caracterizan los CE del espectro de un sistema caótico. Aquí se presenta un método que permite eliminar los CE. El sistema que resulta de esta transformación presenta un espectro con características similares al espectro de un sistema integrable, es decir, observamos agrupamientos y degeneración de niveles. Más importante aún, los autoestados del nuevo sistema presentan localización en órbitas de período corto. En otras palabras, mostramos que la eliminación de CE es el mecanismo natural para sacar a la luz las estructuras localizadas en los autoestados de un sistema caótico.

Se comienza el capítulo (Sec. 2.1) con una breve introducción sobre la localización en el espacio de fases de los autoestados de un sistema caótico, una de las manifestaciones más sorprendentes de caos en la mecánica cuántica. En la sección 2.2 se muestra la relación entre los estados localizados y la variación de un parámetro en el Hamiltoniano. Luego, en la Sec. 2.3, se describe el método de eliminación de CE para finalmente en la Sec. 2.4 mostrar los

resultados de la aplicación del mismo al billar estadio de Bunimovich (ver sección 1.4 de esta parte).

2.1 Localización en los Autoestados de un sistema caótico

La conexión entre los autoestados individuales y los invariantes clásicos (órbitas periódicas) de un sistema caótico es un tema gran interés tanto para físicos como matemáticos, y que aún hoy no está completamente entendido.

Cuando se cuantifica un sistema integrable, los autoestados resultantes se entienden en términos de la condición de cuantificación WKB sobre las órbitas periódicas [68]. Sin embargo, en los sistemas clásicamente caóticos aun no ha sido posible obtener una relación directa entre las autofunciones cuánticas y las órbitas periódicas clásicas. Por otro lado, como una trayectoria típica eventualmente explora todo la hipersuperficie de energía constante, es natural suponer que un autoestado cuántico también tendrá una intensidad constante sobre dicha hipersuperficie, hasta la escala de la longitud de onda característica.

Los primeros pasos fueron dados hace algunos años por Berry [69] y Voros [70] quienes conjeturaron que los autoestados (de alta energía) de un sistema clásicamente caótico deberían comportarse localmente a una superposición al azar de ondas planas con el mismo número de onda local k , lo cual produce fluctuaciones que tienen una distribución Gaussiana en el espacio de configuración. El argumento esgrimido fue que el momento en un punto cualquiera del espacio correspondiente a la trayectoria típica, pasa por todas las posibles direcciones, por lo tanto es de esperar que un autoestado típico sea la superposición al azar de ondas planas con diferentes dirección y fases pero con la misma longitud de onda local. Esto se puede pensar como la manifestación cuántica de la uniformidad que existe en la hipersuperficie de energía en un sistema caótico. Esta imagen está respaldada por los primeros trabajos numéricos realizados McDonald y Kaufman [71] en el billar estadio de Bunimovich y por los importantes resultados rigurosos como los teoremas de Shnirelman [72], Colin de Verdiere [73] y Zelditch [74]. Estos teoremas muestran que el valor de expectación de un operador definido a partir de un observable clásico, sobre casi todos los autoestados individuales, converge (en el límite semiclásico) al valor promedio en el ensamble microcanónico de la versión clásica del operador. Sin embargo, estos teoremas dan poca información sobre la estructura de los autoestados en la escala de la longitud de onda característica del estado. Otra punto que refuerza la conjetura de Berry consiste en la

predicción de la teoría de matrices aleatorias que establece uniformidad en la amplitud de las autofunciones sobre todo el espacio de fases accesible, salvo por las fluctuaciones gaussianas.

No obstante, el trabajo de Heller en 1984 [75] modificó este punto de vista. El encontró que un gran número de autoestados de alta energía del billar de Bunimovich presentaban un acrecentamiento de la intensidad sobre las órbitas periódicas más cortas. Por otro lado, la teoría de órbitas periódicas de Gutzwiller [5] remarca la importancia de las mismas en la cuantificación de un sistema caótico y esto hace sospechar que dichas órbitas se deberían manifestar de alguna forma en los autoestados. Distintos aspectos de este fenómeno han sido aclarados con los trabajos de Heller [76], Bogomolny [77] y Berry [78]. Sin embargo aspectos fundamentales quedan aún sin ser comprendidos como por ejemplo poder predecir cuando un autoestado de un sistema va a estar localizado en una órbita periódica corta.

Por otro lado, autoestados localizados en el espacio de fases fueron directamente observados en experimentos de microondas en cavidades bidimensionales [79]. Aquí se usó la correspondencia entre los autoestados cuánticos de un billar y los modos del campo electromagnético en una cavidad con las mismas condiciones de contorno. Otros importantes experimentos donde se observó localización en las autofunciones fueron hechos en heteroestructuras semiconductoras [80]. Para estos se usó un dispositivo de tuneo resonante que consistía en un pozo cuántico separado por una barrera de un gas bidimensional de electrones. Se inyectaron electrones en el pozo y la información sobre las autofunciones se obtuvo del estudio de los tiempos de tuneo.

2.2 Localización y Variación Paramétrica

En un sistema que depende de un parámetro, las propiedades individuales de dos estados se mezclan cuando colisionan en un CE [54].

En la Fig. 2.1 mostramos cómo la propiedad de localización de un par de autofunciones del estadio de Bunimovich varía cuando cambia el parámetro de deformación ℓ . Lejos del CE las autofunciones están localizadas (estados (1), (3), (4) y (6)). Los estados (1) y (6) están localizados en la familia de BB, mientras que el (3) y (4) en las órbitas (b) y (k) de la Fig. 2.3. Por otro lado, cerca del CE, se mezclan y pierden la localización.

Es de esperar entonces, que la eliminación de los CE en sistemas gobernados por un Hamiltoniano dependiente de un parámetro proporcione un mecanismo de localización.

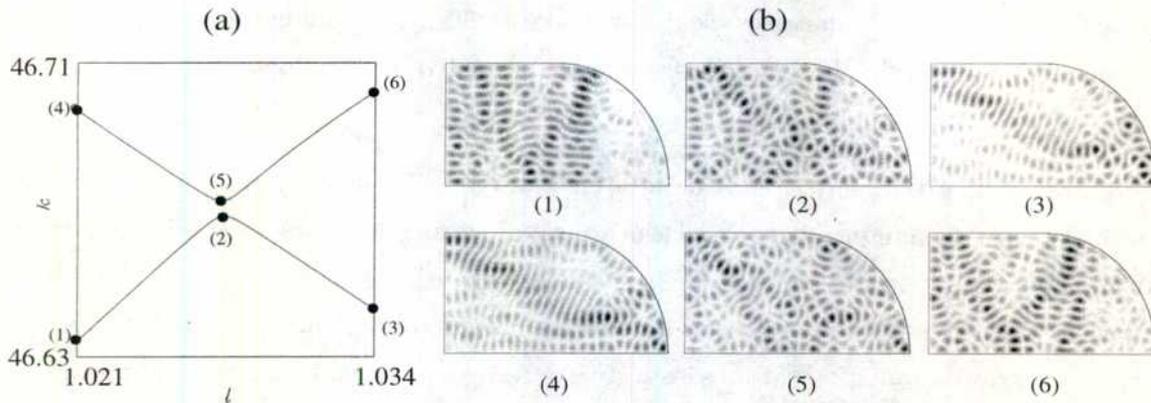


Fig. 2.1: (a) k vs. l para dos estados del estadio de Bunimovich que experimentan un CE. (b) Densidad de probabilidad de las autofunciones en los valores de parámetro señalados en (a). Se observa que las autofunciones (1), (3), (4) y (6) están localizadas mientras que cerca del CE ((2) y (5)) pierden esta propiedad.

En sistemas caóticos es imposible extraer todos los CE, ya que cada estado interactúa fuertemente con otros y esta interacción es de largo alcance. De cualquier modo, vamos a extraer los CE de mayor curvatura. Recientemente se ha establecido [81] que la distribución de curvaturas tiene un carácter universal para valores grandes, mientras que la distribución de curvaturas chicas es una propiedad particular del sistema que, posiblemente esté asociada con el fenómeno de localización en el espacio de fases. Precisamente, queremos *extraer la propiedad universal relacionada con el teorema de Shnirelman a las autofunciones caóticas, y quedarnos con las fluctuaciones que se manifiestan como localización en el espacio de fases*. En la misma línea, Takami [82, 83] ha conjeturado que las órbitas periódicas largas son el origen clásico de los CE. En este sentido, al eliminar los CE, es de esperar que salgan a la luz estados localizados en órbitas periódicas cortas.

Ahora bien, ¿Cómo se manifiestan los estados localizados en el espectro?. Supongamos que tenemos un estado localizado en un órbita periódica de longitud $L(\ell)$. La energía $E(\ell)$ del estado puede ser representada como la suma de dos componentes E_{\parallel} y E_{\perp} , que corresponden al movimiento longitudinal y perpendicular a la órbita periódica respectivamente. Si la localización es muy pronunciada, el movimiento dominante será longitudinal, es decir $E_{\parallel} \gg E_{\perp}$. Luego $E(\ell)$ queda

$$E(\ell) = E_{\parallel} + E_{\perp} \approx \left(\frac{\pi \hbar n}{mL(\ell)}\right)^2;$$

donde n es un entero y m es la masa de la partícula. De esta forma podemos obtener la derivada del autovalor respecto del parámetro

$$E'(\ell) \approx -\frac{2E(\ell)L'(\ell)}{L(\ell)}$$

donde las cantidades primadas se entienden como derivadas respecto del parámetro. En un rango de variación, el cual depende de la órbita, $E'(\ell)$ será aproximadamente constante. Por lo tanto, el autovalor de éste estado se va a comportar como una recta en ese pequeño rango del parámetro. Esto fue mostrado en el capítulo anterior para los estados de BB.

2.3 El método

Hemos desarrollado un método simple para eliminar los CE en billares caóticos planos de contorno deformable a través de un parámetro.

En líneas generales el método de eliminación de CE consiste en la aplicación reiterada de los siguientes pasos:

- **Obtención del espectro**

En el Apéndice A se obtuvo una expansión a segundo orden en el parámetro de deformación del Hamiltoniano de un billar plano. Al deformar el contorno, las energías y autoestados a diferentes valores del parámetro están conectados por la ecuación A.1. Para los cálculos relacionados con la eliminación de CE usamos dicha expansión a primer orden ya que se necesita una relación lineal entre el Hamiltoniano a distintos valores del parámetro.

Obtenemos la zona del espectro a estudiar a través de A.1 una vez fijando ℓ_0 y el valor medio de la energía, es decir k_0^2 (tomando $\hbar^2/2m=1$).

- **Detección del CE a eliminar**

Dada una zona del espectro, no es una tarea sencilla obtener la ubicación de los CE. Hemos encontrado (ver Cap. 1 de esta parte) una manera muy eficiente de encontrar los CE a través de los coeficientes $C_{\mu\nu}(\ell) \equiv \langle \varphi_\mu | \partial \varphi_\nu / \partial \ell \rangle$, los cuales definen la evolución dinámica del sistema.

Usando la expansión A.1 y teoría de perturbaciones [84] obtenemos que

$$C_{\mu\nu}(\ell) \approx H'_{\mu\nu} / (k_\mu^2 - k_\nu^2),$$

donde μ y ν están asociados con los autoestados de $H(\ell)$ (base adiabática).

En una vecindad del valor de parámetro ℓ_{CE} (ubicación del CE), $C_{\mu\nu}$ se comporta como una función lorentziana (ver Cap. 1)

$$(\ell_{int}/2)/[\ell_{int}^2 + (\ell - \ell_{CE})^2],$$

con $\ell_{int} = 1/2C_{\mu\nu}(\ell_{CE})$.

Ahora bien, hay que establecer un criterio para la eliminación de CE. El área en el espectro de energía, donde el CE es importante, se puede estimar por $A_{\mu\nu} = \Delta k^2 \times \ell_{int}$. Luego, si el área es menor que un valor determinado v ,

$$A_{\mu\nu} = (k_\mu^2 - k_\nu^2)^2 / |H'_{\mu\nu}| < v \equiv m \dot{\ell} \ln 2^4 / \pi \hbar, \quad (2.1)$$

eliminamos el CE de la forma que veremos a continuación. Todos los CE que satisfacen (2.1) son eliminados en orden creciente de acuerdo a su área. El criterio (2.1) tiene también una interpretación dinámica simple. Si el billar contiene una partícula de masa m en su interior y el contorno se mueve con una velocidad $\dot{\ell}$, el CE es eliminado cuando la probabilidad de transición de Landau-Zener es mayor que 1/2.

• Eliminación del CE

Una vez conocido el valor del parámetro ℓ_{CE} donde los niveles μ y ν colisionan en un CE y satisfaciéndose 2.1, la eliminación del CE es muy sencilla. A través de la Eq. A.1 evaluamos $H(\ell_{CE})$. Al diagonalizarlo obtenemos los autovalores \tilde{k}_μ^2 y las autofunciones $\tilde{\varphi}_\mu$ en ℓ_{CE} . Eliminamos el CE transformando los elementos μ y ν de la matriz $H(\ell_{CE})$ de la forma

$$\begin{aligned} \tilde{k}_\mu^2(nuevo) &= (\tilde{k}_\mu^2 + \tilde{k}_\nu^2)/2, \\ \tilde{k}_\nu^2(nuevo) &= \tilde{k}_\mu^2(nuevo), \end{aligned} \quad (2.2)$$

• Obtención del nuevo espectro

Una vez eliminado el CE en ℓ_{CE} obtenemos el nuevo Hamiltoniano (sin el CE) reemplazando $H_{\mu\nu}(\ell_0)$ por

$$H_{\mu\nu}^{nuevo}(\ell_0) = H_{\mu\nu}(\ell_{CE}) - (\ell_{CE} - \ell_0) H'_{\mu\nu}. \quad (2.3)$$

Donde hemos usado que la expansión del Hamiltoniano es lineal.

Luego, se repite estos pasos para eliminar los siguientes CE según el criterio.

2.4 Resultados en el estadio

Hemos aplicado el método de eliminación de CE al billar estadio de Bunimovich desimetrizado, de radio r y borde recto de longitud a (ver sección 1.4). En la Figura 2.2 se muestra la zona del espectro estudiada y se compara el espectro exacto y aproximado el cual calculado por la expansión del Hamiltoniano (Eq. A.1) a primer orden. Se vé que aún a primer orden la aproximación funciona muy bien.

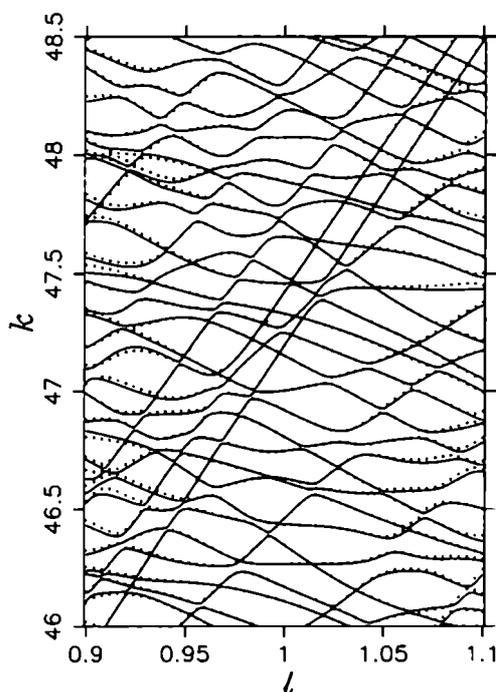


Fig. 2.2: Espectro aproximado (líneas continuas) obtenido por el Hamiltoniano a primer orden (eq. A) comparado con el espectro exacto (puntos).

Los estados localizados se manifiestan en el espectro como rectas (pendiente constante), si el rango de variación del parámetro es chico (ver Sec. 2.2). En el espectro del estadio (Fig. 2.2) vemos algunas líneas rectas interrumpidas por pequeños CE. Las más evidentes corresponden a los estados de BB (ver Sec. 1.4), cómo los estados 6, 14, 18 y 23 de la Fig. 2.5(a).

En la Fig. 2.4(a) se muestra el espectro del Hamiltoniano transformado por el método de eliminación de CE. En este caso se eliminaron todos los CE que satisfacen 2.1, con $\nu = 1.5$. En esta etapa se observa como todos los estados de BB emergen claramente. Los estados de BB se identifican con los números cuánticos (n_x, n_y) que cuentan las excitaciones en dirección horizontal y vertical respectivamente; n_y rotula las series de estados BB. Los estados 14, 18, y 23 de la Fig. 2.5(b) corresponden a $(n_x, 15)$, con $n_x = 1, 2$ y 3 , respectivamente, y los estados

6, 16 y 28 a $(n_x, 14)$, con $n_x = 6, 7$ y 8 . En este punto de transformación, aparecen también estados localizados en órbitas periódicas cortas. Estos son los estados 1, 2, 4, 7, 8, 9, 12, 17, 20, 21, 22, 26, 28, 29 y 30 de la Fig. 2.5(b). A cada uno de estos estados se le asocia las órbitas de la Fig 2.3 en las cuales están localizados.

La asociación de las órbitas periódicas de la Fig. 2.3 a los estados de la Fig. 2.5(b) fue hecha de la siguiente manera. Primero se hace una posible asociación por inspección ocular de cada estado. Luego, esto es confirmado (o no) a través de la regla usual de cuantificación de Bohr-Sommerfeld

$$k = \frac{2\pi}{L} \left(n + \frac{\nu}{4} \right) \quad (2.4)$$

donde n es el número de nodos sobre la órbita, L es su longitud, y ν es el índice de Maslov correspondiente [85]. En tabla 1 se especifican las longitudes e índices de Maslov de las órbitas de la Fig. 2.3.

órbita	L	ν	órbita	L	ν
(a)	2.00	4	(k)	8.601952	16
(b)	4.472136	9	(l)	6.472136	15
(c)	4.828427	11	(m)	9.348468	22
(d)	4.828427	10	(n)	9.237604	20
(e)	4.889432	12	(o)	9.3839	24
(f)	5.00	13	(p)	13.0820	30
(g)	5.014970	15	(q)	10.80977	26
(h)	5.196152	12	(r)	14.132	35
(i)	6.601952	16	(s)	15.729	35
(j)	8.977479	17	(t)	14.897	35

Tabla 1: Longitudes e índices de Maslov de las órbitas del billar estadio desimetrizado de la Fig. 2.3.

A modo de ejemplo, veamos la asignación de órbitas para el estado 1 de la Fig. 2.5(b). Mirando la localización del estado y la lista de órbitas se podría asignarle cualquiera de las órbitas (d), (e), (f), o (g). Los valores más cercanos que obtenemos por la regla de cuantificación de Bohr-Sommerfeld (Eq. 2.4) usando las longitudes e índices de Maslov de la tabla para las órbitas (d), (e), (f), y (g) son: 46.521, 46.262, 45.553 y 46.044 respectivamente. Vemos entonces que la mejor cuantificación la obtenemos con las órbitas (e) y (g).

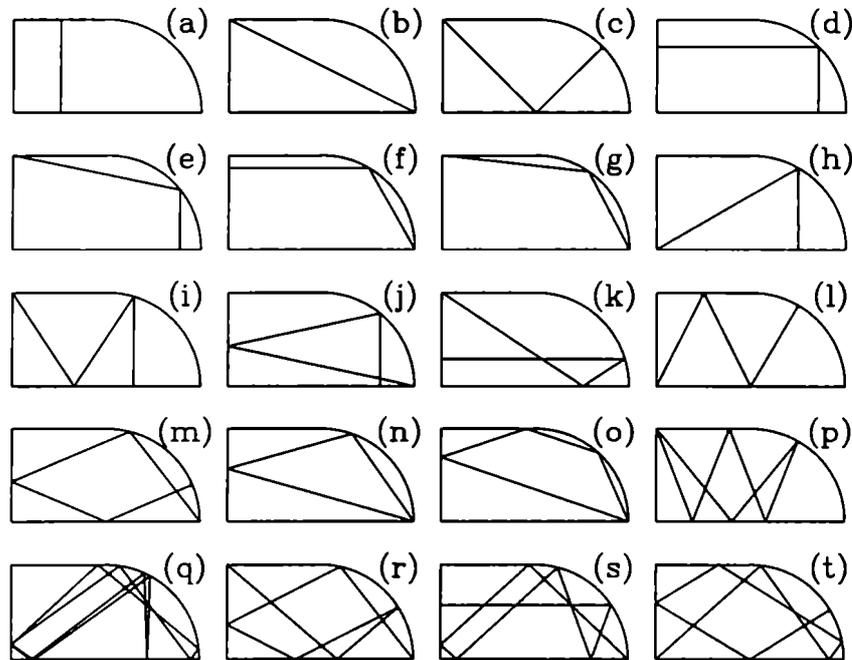


Fig. 2.3: Varias órbitas periódicas cortas del billar estadio desimetrizado de $l=1$.

En la Fig. 2.4(b) hemos eliminado todos los CE que satisfacen 2.1, con $v = 5$. Aparecen nuevas estructuras localizadas, los estados 3, 5, 10, 11, 13, 24, y 27 de la Fig. 2.5(b). No hemos podido identificar los estados 15 y 25 (probablemente contribuidos por la familia de órbitas llamadas *whispering gallery*) y el estado 19.

Las estructuras de la Fig. 2.5(b) fueron obtenidas del espectro (los estados sin transformar Fig. 2.5(a)) por una transformación ortogonal, la cual reduce la interacción paramétrica entre los estados; esto es, los términos no diagonales de la matriz H' se reducen considerablemente en esta nueva base. Los nuevos estados están caracterizados por su energía media $\langle k^2 \rangle$ y la dispersión σ , medida en unidades de espaciamiento medio de niveles. Si σ es menor que uno, el nuevo estado tiene alta probabilidad de aparecer en el espectro. Se espera que σ se incremente con k de acuerdo al teorema de Shnirelman. Por otro lado, para los estados de BB con n_x fijo, se espera que σ tienda a cero cuando n_y tienda a infinito [86].

Los elementos no diagonales del Hamiltoniano original en la nueva base nos dan la interacción entre las estructuras localizadas. Hemos observado fuerte interacción entre estructuras similares. Por ejemplo, los estados de BB (1, 15) y (2, 15) tienen poca interacción con los otros estados (CE muy pequeños; ver Fig. 2.2), excepto con el estado BB (7, 14) y los estados 10 y 24 de la

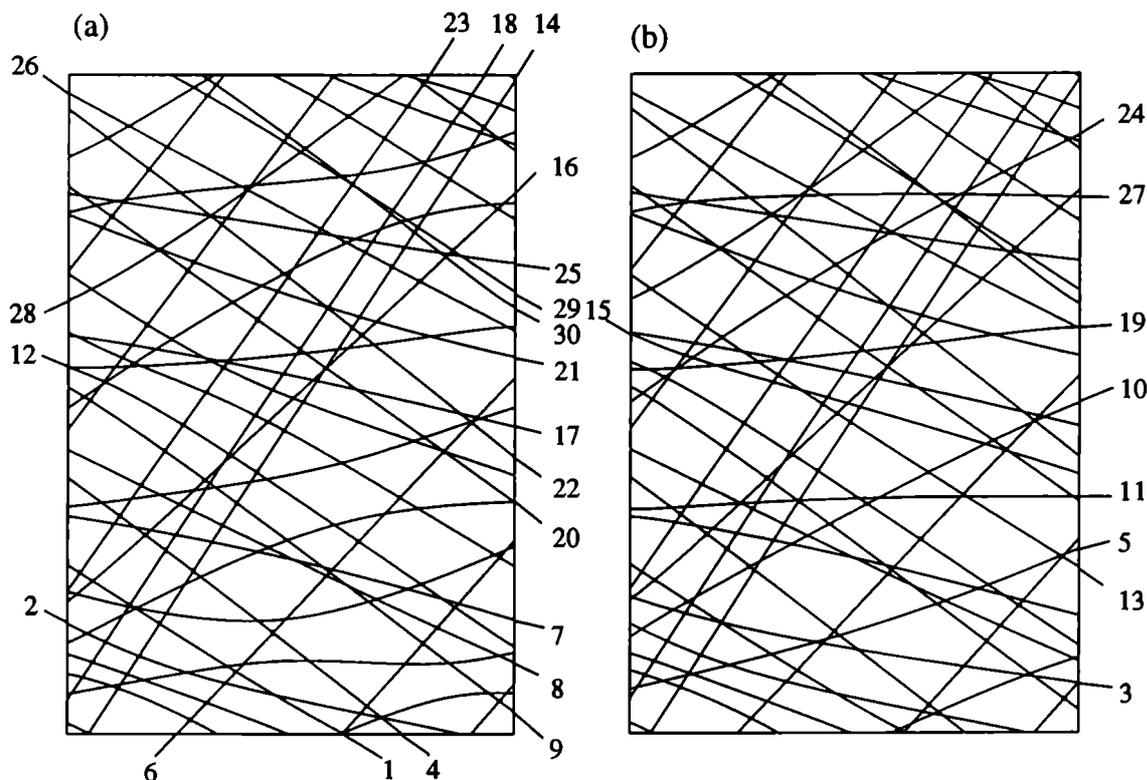


Fig. 2.4: (a) Espectro del Hamiltoniano transformado por la eliminación de todos los CEs que satisfacen eq. (2.1) con $\nu = 1.5$. Se muestran los estados localizados correspondientes a la Fig.2.5 (b). (b) Idem (a) para $\nu = 5$.

Fig. 2.5(b)). Se ha observado también, fuerte interacción entre estados localizados en órbitas de periódicas cortas, las cuales están cerca en el espacio de fase. Por ejemplo, los estados 4 y 22 tiene fuerte interacción con los estados 2 y 17 respectivamente, y los estados 10 y 24 con los estados 11 y 27 respectivamente.

En algunos casos, esta fuerte interacción probablemente decida la aparición de una determinada estructura. Por ejemplo, los estados 4 y 22 están contruidos principalmente por la órbita (j), pero la regla de cuantización de Bohr-Sommerfeld para ésta órbita [$k = 0.6999 (n + 1/4)$] predice un estado localizado en $k \sim 47.02$, el cual no se observa. Sin embargo, la otra contribución a estos estados, dada por la orbirta (d) [$k = 1.3013 (n + 1/4)$], no predice dicho estado. De hecho, en el rango $35 < k < 55$ hemos observado estructuras como la 4 y 22 solo para valores de k los cuales satisfagan aproximadamente la cuantización con (j) y (d) simultaneamente.

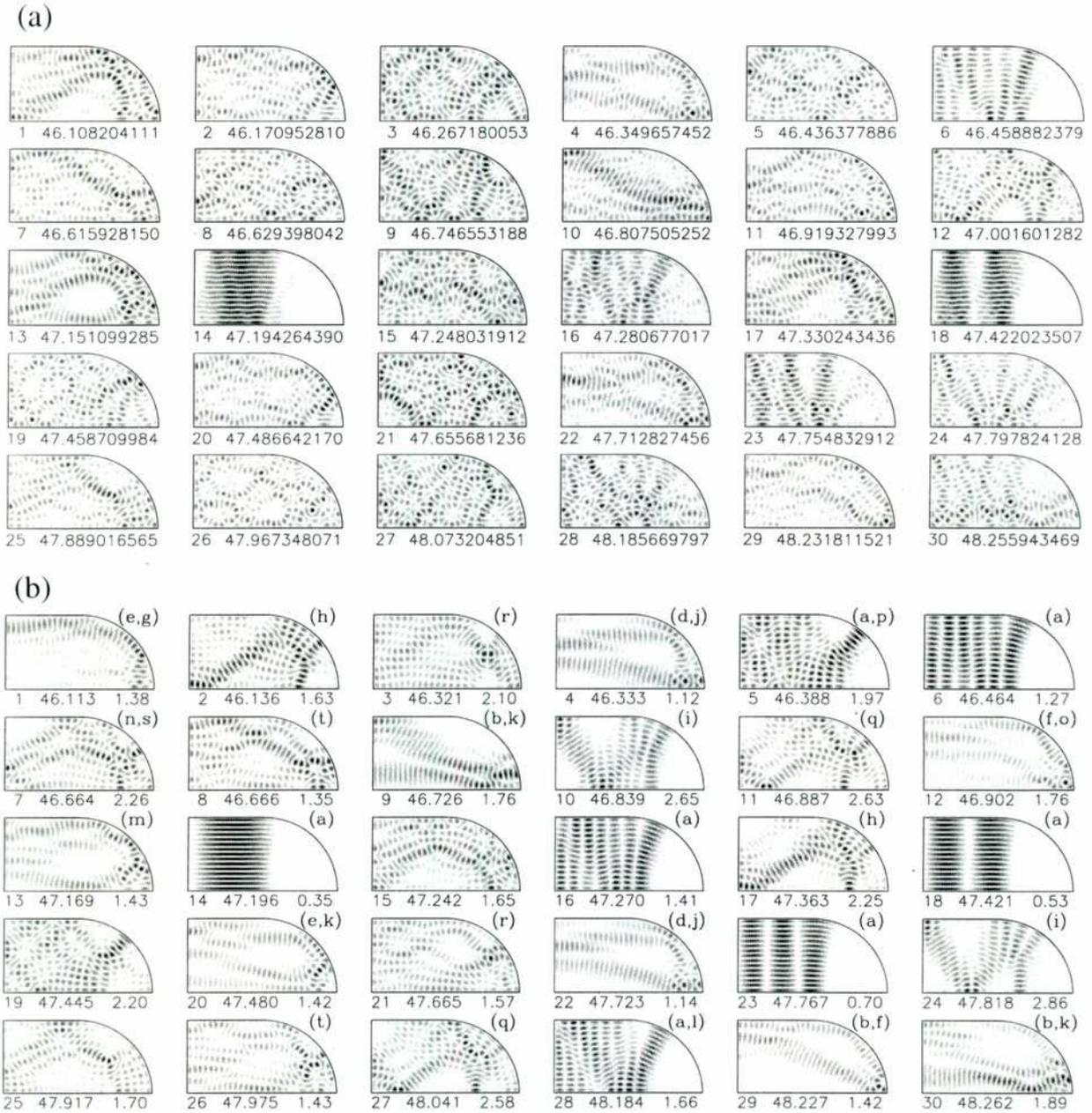


Fig. 2.5: (a) Gráficos de la densidad de probabilidad de las autofunciones del estadio de $\ell = 1$ y área $1 + \pi/4$. Los números debajo de cada gráfico son el rótulo (izquierda) y el número de onda k . (b) Gráficos de la densidad de probabilidad de las autofunciones del Hamiltoniano transformado por la eliminación de los CE's que satisfacen eq.(2.1), con $v = 5$. Las letras en el extremo superior derecho identifican las órbitas periódicas de la Fig. 2.3 de mayor contribución a cada estado localizado. El rótulo, $\sqrt{\langle k^2 \rangle}$ y la dispersión σ se muestran debajo de cada gráfico.. σ se mide en unidades del espaciamiento medio de la energía.

Capítulo 3

Dinámica cuántica en un sistema con espectro complejo

A través del análisis de la estructura de las ecuaciones diferenciales que gobiernan la dinámica cuántica del modelo que estudiamos en esta parte de la tesis, en el capítulo 1 mostramos que las transiciones entre niveles de energía vecinos, son como las transiciones en el modelo de Landau-Zener, cuando el parámetro se mueve muy lentamente (evolución adiabática). En el capítulo 2 se observó una estructura regular subyacente al espectro de nuestro modelo caótico y se determinó que dicha estructura está relacionada con la localización en el espacio de fases. De estas investigaciones surgen naturalmente las siguientes preguntas:

- ¿Cómo se manifiesta el hecho de que las transiciones entre niveles vecinos sean de Landau-Zener en la evolución dinámica del sistema?
- ¿Qué ocurre si la variación del parámetro no es suficientemente lenta?
- ¿Cuál es la influencia sobre la dinámica cuántica de la estructura regular subyacente al espectro caótico y de la localización en el espacio de las fases de algunas de las autofunciones estudiadas en el capítulo 2?

Los trabajos de Wilkinson [88, 89, 90] y, Wilkinson y Austin [91, 92, 93] han resuelto las dos primeras de estas preguntas dentro del marco de la teoría de matrices aleatorias [94] en sistemas gobernados por Hamiltonianos dependientes de un parámetro $H(\ell)$.

En la referencia [88] se muestra que en promedio (en condiciones iniciales), la dispersión de la energía se comporta en forma difusiva; es decir, $\langle \Delta^2 E \rangle(t) = 2 D t$, en estos sistemas genéricos

y con el parámetro ℓ , una función del tiempo. Por otro lado, allí se establece que la respuesta de un sistema caótico a grandes perturbaciones dependientes del tiempo se puede caracterizar por el coeficiente de difusión D . En otras palabras, el coeficiente D resulta una buena cantidad para caracterizar la dinámica cuántica. Expresiones teóricas asintóticas para el coeficiente de difusión fueron encontradas en los límites de velocidades chicas y grandes del parámetro.

La motivación física de estos estudios radica en la posibilidad de modelar la disipación cuántica de sistemas finitos formados por fermiones no interactuantes, basados en el comportamiento difusivo de la dispersión microscópica de la energía.

Por otro lado, la dinámica cuántica en cavidades bidimensionales es un tema de creciente interés debido al gran desarrollo en la fabricación de pequeños dispositivos semiconductores, como los *puntos cuánticos* [87], donde las manifestaciones cuánticas del caos juegan un papel importante.

Siguiendo esta línea, en este capítulo se presentan los estudios de la dinámica cuántica de un billar bidimensional caótico de contornos móviles (el modelo estudiado en toda esta parte de la tesis). En el capítulo 1 se mostró que no es una tarea sencilla, desde el punto de vista computacional, resolver la dinámica cuántica de billares con paredes móviles aún con el método *unidimensional* allí presentado. Hemos podido resolver este problema gracias a la expansión del Hamiltoniano de un billar plano, en potencias del parámetro que controla la deformación del contorno (apéndice A). Usando ésta expansión y definiendo una variación temporal del parámetro $\ell(t)$, la dinámica cuántica de una partícula dentro del billar resulta un sistema de ecuaciones lineales acopladas que se pueden integrar directamente.

Específicamente, hemos estudiado la dinámica cuántica del billar estadio de Bunimovich, cuyas paredes oscilan en forma armónica, y se ha calculado el coeficiente de difusión D como función de la velocidad media del contorno. Se encontraron diferencias con las predicciones teóricas de Wilkinson y se muestra que estas diferencias están relacionadas con la estructura regular que subyace al espectro de un sistema caótico, la cual fue mostrada en el capítulo anterior, y localización en el espacio de las fases de alguna de las autofunciones del sistema.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera. Se comienza con una breve exposición de los resultados más importantes sobre la difusión de la energía en sistemas caóticos dependientes de un parámetro, incluyendo la relación de la misma con la disipación. Luego, en la sección 3.2 se estudia la dispersión de la energía en el billar estadio de paredes oscilantes. Finalmente, en la sección 3.3 se muestra la influencia de la localización en el espacio de las fases

de las autofunciones y de la estructura regular que está por detrás del espectro (ver capítulo 2) del sistema caótico estudiado.

3.1 Difusión y disipación en sistemas caóticos cuánticos

Sea $H(\ell)$ el Hamiltoniano paramétrico correspondiente a un sistema caótico genérico para todo ℓ . El parámetro ℓ es una función dependiente del tiempo $\ell(t)$. Nos restringimos a sistemas con simetría de reversión temporal donde las propiedades estadísticas del espectro están bien descritas por los autovalores del ensamble de matrices ortogonales gaussianas (GOE) [94]. Para todo $\ell(t)$, el sistema admite un espectro de energías dado por el problema de autovalores para el Hamiltoniano instantáneo

$$\hat{H}(\ell(t)) \phi_\mu(\ell(t), \mathbf{r}) = \frac{k_\mu^2(\ell(t)) \hbar^2}{2m} \phi_\mu(\ell(t), \mathbf{r}). \quad (3.1)$$

Supongamos que a $t = 0$, el sistema se prepara en un autoestado excitado $\phi_\nu(\ell(0), \mathbf{r})$ del Hamiltoniano $\hat{H}(\ell(0))$. Como se dijo en el Cap. 1, el estado a tiempo t puede ser expresado en la base de autoestados del Hamiltoniano instantáneo (eq. 3.1), la llamada base adiabática,

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} a_{\mu}(t) \psi_{\mu}(\ell(t), \mathbf{r}).$$

La dispersión de la energía del estado considerado es:

$$\Delta^2 E(t) = \sum_{\mu} |a_{\mu}(t)|^2 (E_{\mu}(\ell(t)) - E(t))^2, \quad (3.2)$$

donde $E(t) \equiv \langle \Psi | E | \Psi \rangle = \sum_{\mu} |a_{\mu}(t)|^2 E_{\mu}(\ell(t))$ es el valor de expectación de la energía como función de t .

Wilkinson [88] observó que la dispersión de la energía exhibe un crecimiento difusivo cuando se la promedia sobre muchas condiciones iniciales, esto es

$$\langle \Delta^2 E \rangle(t) = 2 D t.$$

Recientemente esto fue probado rigurosamente por S. Jain utilizando como punto de partida la ecuación de Von Neumann para el operador densidad [96].

Este comportamiento difusivo actúa como mecanismo de disipación en sistemas pequeños, formado por fermiones no interactuantes donde la naturaleza discreta de los niveles cuánticos es

importante. Una consecuencia de esto es que la versión suave de la probabilidad de ocupación satisface una ecuación de difusión.

Esto último es fácil de ver si el parámetro se mueve lentamente. En este caso, la probabilidad de ocupación del nivel n , $f_n = f(E_n, t) = |a_n(t)|^2$ varía de la forma

$$\frac{\partial f_n}{\partial t} = \frac{D}{\rho^2} (f_{n+1} + f_{n-1} - 2f_n), \quad (3.3)$$

donde los dos primeros términos del miembro derecho representan el flujo de probabilidad de los vecinos $n \pm 1$ al nivel n y el último término es el flujo de probabilidad que sale del nivel n a los niveles vecinos; ρ es la densidad de estados. Si f_n varía poco con n , llegamos a

$$\frac{\partial f}{\partial t} = D \frac{\partial^2 f}{\partial^2 E}. \quad (3.4)$$

De esta forma, la energía total del sistema es

$$E_T = \sum_n f_n E_n = \int_{-\infty}^{\infty} dE f(E) E \rho(E). \quad (3.5)$$

Derivando esta ecuación y asumiendo que ρ y D son aproximadamente constantes en la zona donde $F(E)$ decrece de 1 a 0, obtenemos la relación entre el coeficiente de difusión D y la variación de la energía

$$\frac{dE_T}{dt} = \rho(E) D. \quad (3.6)$$

Usando la teoría de matrices aleatorias para describir las propiedades estadísticas del espectro, Wilkinson predijo que el coeficiente de difusión D tiene un carácter universal (no depende del sistema) y es una función de ρ (densidad media de energía), \hbar , $\dot{\ell}$ y el valor medio de los elementos fuera de la diagonal de $\partial H / \partial \ell$ que llamó σ .

El parámetro adimensional $\kappa = \rho^2 \hbar \dot{\ell} \sigma$ es una medida de la adiabaticidad de la variación del Hamiltoniano.

El encontró la siguiente forma asintótica para el coeficiente de difusión D para valores pequeños κ ($\kappa \ll 1$):

$$D = 2^{-5/4} \pi \Gamma(3/4) \frac{1}{\rho^3 \hbar} \kappa^{3/2} \quad (3.7)$$

Para el caso de velocidades grandes, es decir $\kappa \gg 1$, la variación de la energía respecto del tiempo es como la ecuación 3.6 pero, en este caso

$$D = \pi \frac{1}{\rho^3 \hbar} \kappa^2. \quad (3.8)$$

Esto se obtiene a través de la fórmula de Kubo [97, 98] basada en la teoría de la respuesta lineal.

3.2 Resultados numéricos en el estadio de pareces oscilantes

Completando los estudios de los capítulos anteriores, el sistema estudiado es nuevamente el billar estadio de Bunimovich desimetrizado de área fija (ver Sec. 1.5). Hemos elegido que los contornos oscilen de forma armónica de frecuencia ω y amplitud α , por lo tanto, el parámetro ℓ varía de la forma

$$\ell(t) = 1 + \alpha \sin(\omega t).$$

En la sección anterior se exhibieron los resultados de Wilkinson, quien mostró que el coeficiente de difusión D es una buena cantidad para caracterizar la dinámica cuántica de un sistema caótico. Para calcular el coeficiente de difusión D , se resolvió la ecuación de Schrödinger para diferentes condiciones iniciales

$$i\hbar \frac{\partial \Psi(t, \mathbf{r})}{\partial t} = \hat{H}(\ell(t)) \Psi(t, \mathbf{r}). \quad (3.9)$$

Una manera muy eficiente (mucho más que la mostrada en la Sec. 1.2) de resolver 3.9 es usando la expansión del Hamiltoniano obtenida en el Cap. A. La solución $\Psi(\mathbf{r}, t)$ se expande en la base de autofunciones en $\ell(0) = 1$,

$$\Psi(\mathbf{r}, t) = \sum_{\mu} b_{\mu}(t) \phi_{\mu}(\mathbf{r}). \quad (3.10)$$

Aunque $\phi_{\mu}(\mathbf{r})$ satisface las condiciones de contorno para $\ell(0) = 1$, esta no se anula fuera del dominio (ver Eq. A.3). Por supuesto, la amplitud de las oscilaciones está limitada a valores del orden de la longitud de onda. Luego de remplazar 3.10 en 3.9, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales

$$\dot{b}_{\mu}(t) = \frac{-i}{\hbar} \sum_{\nu} H_{\mu\nu}(\ell(t)) b_{\nu}.$$

Este sistema se integra usando el método de Runge-Kutta de cuarto orden [42], y la dispersión de la energía se evalúa usando (3.2) en los tiempos $t = 2n\pi/\omega$ ($n = 0, 1, 2, \dots$). Tomamos $\hbar = 1$ y $m = 1/2$. Para los cálculos que se presentan a continuación, usamos una base de 103 estados impares alrededor de $k_0 = 47.3$ en $\ell = 1$ (ver Fig. A.1(a)). Las evoluciones temporales se detienen antes que la función de onda se disperse hasta los límites del espectro.

Como ejemplo, en la Fig. 3.1 se muestra la dispersión de la energía $\langle \Delta^2 E \rangle$ para $\omega = 0.4$ y $\alpha = 0.05$. El promedio es sobre diez condiciones iniciales. Estas fueron elegidas cerca del

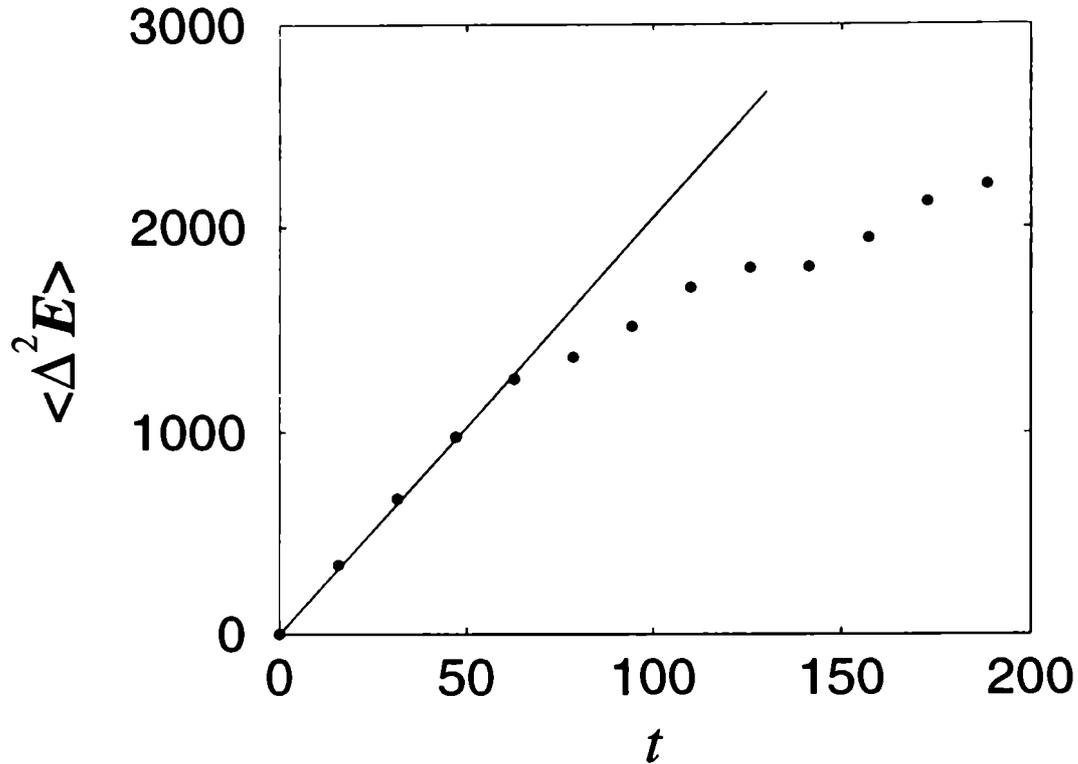


Fig. 3.1: Dispersión de la energía $\langle \Delta^2 E \rangle$ en función del tiempo t para $\omega = 0.4$. El promedio es sobre diez condiciones iniciales. La línea continua es el mejor ajuste lineal usado para estimar el coeficiente de difusión (la pendiente corresponde a $2D$).

centro del espectro. Se observa claramente el comportamiento lineal (difusivo) de la dispersión de la energía en las primeras oscilaciones del contorno (la pendiente es igual a $2D$); luego la dispersión se hace más lenta y eventualmente satura. Este fenómeno de saturación está asociado al hecho de que las autofunciones del operador evolución para un periodo (estados de Floquet), los cuales están localizados en energía, inhiben la dispersión de la energía para tiempos largos [91, 99, 100].

En la figura 3.2 se muestra un gráfico log-log de la constante de difusión D como función de κ la cual es proporcional al valor medio de la velocidad del contorno $\langle |\dot{\ell}| \rangle = 2\alpha\omega/\pi$. Se hicieron simulaciones para $\omega = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 1, 2, 5, 10, 20$ y 40 , con $\alpha = 0.05$ (círculos negros). En todos los casos el promedio fue hecho con diez condiciones iniciales. Las barras de error fueron calculadas usando la desviación estándar del promedio en el ensamble de las condiciones iniciales. En la figura se muestran también (líneas continuas) las predicciones

teóricas para sistemas caóticos genéricos con simetrías de reversión temporal (Eq. 3.7 y 3.8). Se observan diferencias significativas entre las predicciones teóricas y los resultados numéricos.

3.3 Influencia de la localización en espacio de fases sobre la dinámica cuántica

Los resultados del capítulo anterior nos inducen a pensar que dicha *estructura regular* detrás del espectro y la correspondiente localización en las autofunciones, debe tener alguna injerencia sobre las diferencias obtenidas entre los valores teóricos y numéricos del coeficiente de difusión D .

Para poder observar directamente la influencia de las autofunciones localizadas en la dinámica cuántica del sistema, extraemos del mismo aquellos estados que presentan mayor localización. Este procedimiento es muy sencillo, ya que estamos usando la expansión del Hamiltoniano presentada en el Cap. A.

Para extraer el estado j , simplemente sacamos la fila y columna j de la matriz del Hamiltoniano. Si en $\ell = 1$ este estado colisiona en un cruce evitado es necesario primero eliminarlo con el procedimiento descrito en el Cap. 2.

Hemos eliminado los estados de BB con $k = 46.4589, 47.1943, 47.4220$, and 47.7548 , en $\ell = 1$ (ver Fig. A.1(a) y 2.5(a)), ya que son los que presentan mayor localización. El espectro resultante se muestra en la Fig. 3.3.

De la misma forma que antes, se calculó el coeficiente de difusión para $\omega = 0.2, 0.4, 1, 5, 10$ y 20 con $\alpha = 0.05$, y para $\omega = 0.2, 0.4, 10, 20, 40$ y 60 con $\alpha = 0.09$. En este caso, los resultados están muy cerca de las predicciones teóricas, salvo para los valores más grandes de ω (ver Fig. 3.2).

A continuación se comentan con mas detalle los resultados obtenidos sobre el coeficiente de difusión D con y sin las estructuras más localizadas.

En el régimen adiabático (velocidades chicas del contorno), el sistema difunde más que lo predicho. Asociamos estas diferencias a la existencia de estados muy localizados en el espacio de las fases (ver Cap. 2). En particular, nos referimos a los estados BB, los cuales están muy localizados en momento. Como ya se dijo en el capítulo 1, la interacción entre estos estados,

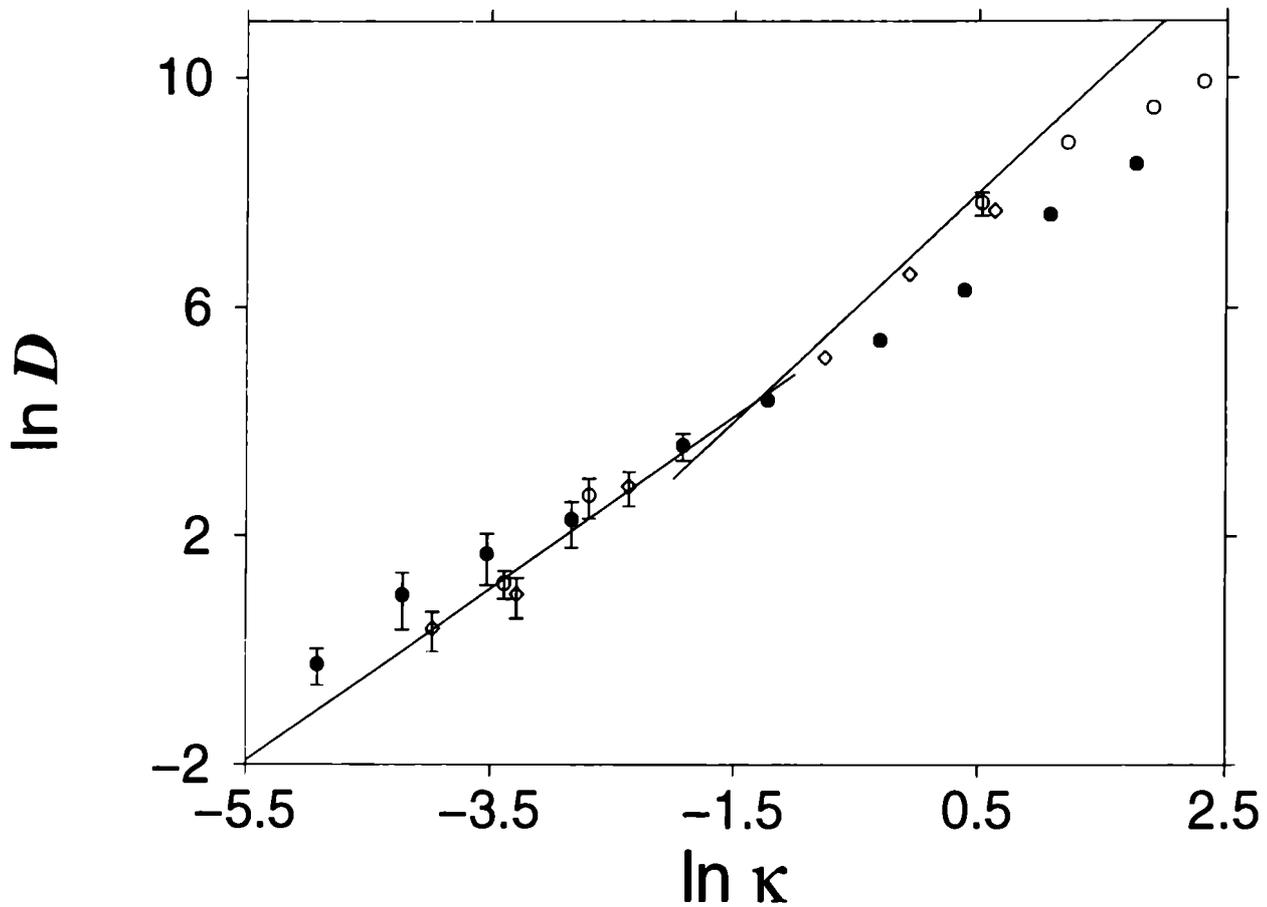


Fig. 3.2: Gráfico log-log de D en función de κ . Los (\bullet) corresponden al billar estadio con $\omega = 0.05, 0.1, 0.2, 0.4, 1, 2, 5, 10, 20$ y 40 . Para el caso en que se sacaron los estados de BB (ver texto), los (\diamond) corresponden a $\omega = 0.2, 0.4, 1, 5, 10$ y 20 con $\alpha = 0.05$ y los (\circ) a $\omega = 0.2, 0.4, 10, 20, 40$ y 60 con $\alpha = 0.09$. En líneas continuas se muestran las predicciones teóricas para sistemas genéricos caóticos con simetría de reversión temporal (Eq. 3.7 y 3.8). Errores menores que los símbolos no se grafican.

y estados caóticos genéricos (no localizados), es mucho menor que la típica interacción entre estados genéricos. Y, esto último se refleja en el espectro (ver Fig. A.1) con la ocurrencia de estructuras que sobreviven a la variación paramétrica, ésto es, líneas rectas interrumpidas por pequeños cruces evitados (ver secciones 1.4 y 2.2). Luego, teniendo en cuenta que en

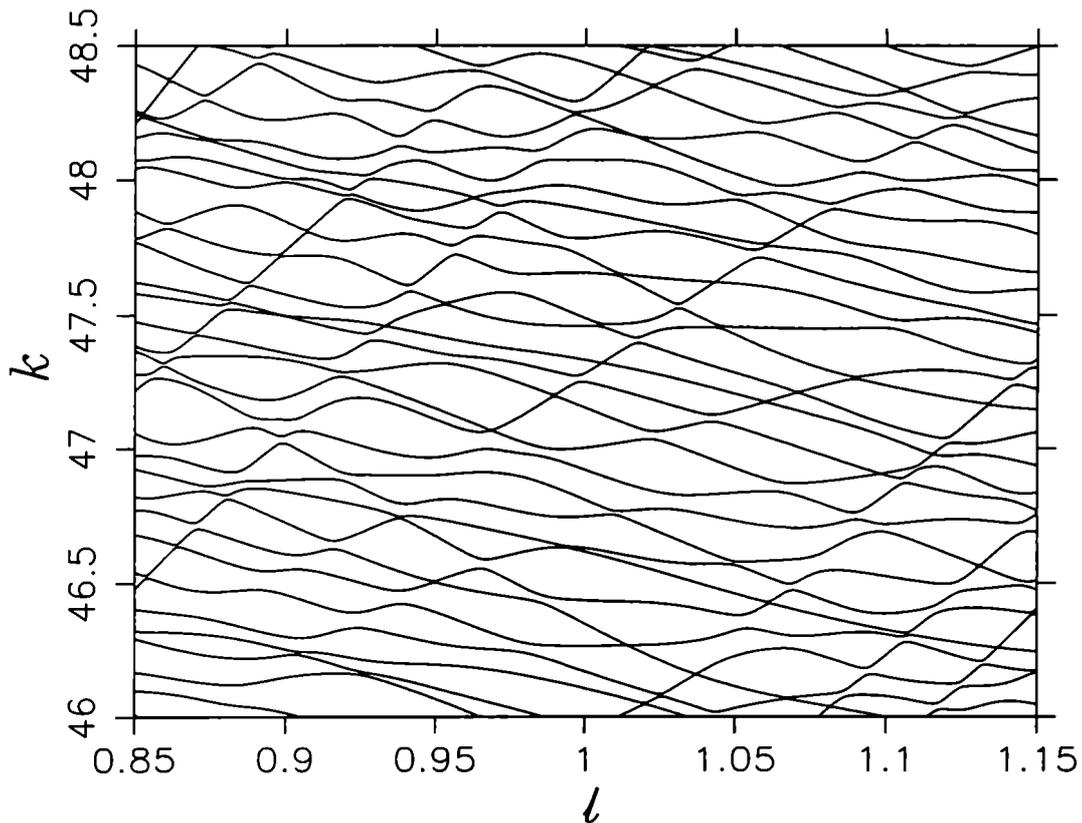


Fig. 3.3: El mismo espectro que en Fig. A.1(a) pero sin los estados BB con número de onda $k = 46.4589, 47.1943, 47.4220$ y 47.7548 at $\ell = 1$.

este régimen las transiciones son de Landau-Zener (mostrado en el capítulo 1), estas líneas rectas se comportan como canales los cuales permiten el transporte coherente de probabilidad a una mayor región de energía en cada oscilación del contorno. Se confirmó numéricamente esta explicación con el sistema sin aquellos estados BB que viven en la región que estamos estudiando. En este caso, el sistema difunde de acuerdo a la teoría. Ciertamente, billares clásicos con familias de órbitas marginalmente estables (como las BB) muestran también difusión anómala [101].

A medida que se incrementa la velocidad del contorno, la probabilidad de transición de Landau-Zener a través de pequeños CE se acerca exponencialmente a uno (Ec. 1.3). Luego, si el sistema empieza en un estado de BB, éste se mueve esencialmente para arriba y abajo por la línea recta sin mezclarse. Esta situación se asemeja a la evolución de un sistema regular donde

se sabe que la difusión es muy pequeña [102]. En el espectro sin estados de BB, la difusión observada concuerda con la teoría (en la Fig. 3.2 la línea continua de mayor pendiente) razonablemente bien. Sin embargo, las simulaciones de mayores velocidades y la teoría se apartan nuevamente mostrando el principio de la saturación del proceso difusivo.

En el capítulo 2 se propone que, el mecanismo natural para descubrir las estructuras localizadas embebidas en las autofunciones de sistemas Hamiltonianos caóticos, es la eliminación de los CE. Precisamente, se ha mostrado que muchos estados localizados en órbitas periódicas cortas se descubren en el billar estadio transformando el espectro en un conjunto de curvas suaves las cuales se cruzan entre ellas. Como se dijo, la eliminación de CE puede ser llevada a cabo dinámicamente por medio de un incremento de la velocidad del contorno; esto es, cuando la probabilidad de transición es prácticamente uno. En este sentido, la saturación de la difusión en sistemas caóticos es esperable para velocidades grandes del contorno como consecuencia de estas estructuras localizadas asociadas a órbitas de períodos cortos. Este fenómeno de saturación fue estudiado en un modelo de matrices de bandas aleatorias [93]; sin embargo, los autores no justificaron el uso de matrices de bandas en términos de localización en el espacio de fase.

Conclusiones

Esta tesis constituye un aporte al estudio de la mecánica cuántica de los sistemas clásicamente caóticos. Se han estudiado distintas manifestaciones cuánticas del caos en sistemas dependientes de un parámetro. Los modelos considerados fueron tanto unidimensionales como bidimensionales.

Se comenzó con el estudio de la influencia de las órbitas parabólicas (marginamente inestables) en el decaimiento de sistemas cuánticos. En los sistemas clásicos la inclusión o no de las mismas en la región atrapada (órbitas que nunca escapan) tiene una importancia fundamental. Si las órbitas periódicas atrapadas son solamente de carácter hiperbólico (inestables), la ley de decaimiento temporal es del tipo exponencial mientras si se incluyen familias de órbitas parabólicas, se observa un decaimiento del tipo algebraico a tiempos largos. Se estudiaron los decaimientos de pozos unidimensionales de paredes oscilantes. Dependiendo de el tipo de oscilación de la pared, la dinámica puede ser completamente hiperbólica (oscilaciones armónicas) o parabólica (oscilaciones diente de sierra). Se obtuvieron los resultados ya conocidos en los decaimientos de los sistemas clásicos, es decir, si las paredes oscilan en forma armónica el sistema decae en forma exponencial mientras que si las paredes del pozo oscilan en forma de diente de sierra lo cual implica que sus órbitas periódicas son del tipo parabólico, el sistema decae algebraicamente. Se resolvió los decaimientos de los análogos cuánticos de los sistemas mencionados obteniendo leyes del tipo algebraicas. De esta forma se mostró que las órbitas periódicas parabólicas no influyen en las leyes de decaimiento cuánticas como lo hacen con sus respectivas clásicas.

Por otro lado se estudiaron distintas características del espectro y autofunciones de un sistema bidimensional dependiente de un parámetro: el conocido billar estadio de Bunimovich.

A través de un minucioso análisis numérico de las ecuaciones que rigen la evolución cuántica en una zona del espectro, se mostró que las transiciones entre niveles vecinos obedecen la misma

ley que en el sencillo modelo de Landau-Zener para variaciones adiabáticas del parámetro. Así mismo se discutió el significado de evoluciones adiabáticas o lentas y la forma como estos resultados se aplican a otras zonas del espectro. Este estudio trajo aparejado la posibilidad de obtener todos los parámetros de los cruces evitados en una región determinada del espectro lo cual no es una tarea sencilla desde el punto de vista numérico.

Esto último permitió desarrollar el método de eliminación de los cruces evitados del espectro (presentado en el capítulo 2 de esta segunda parte). El sistema que resulta de esta transformación presenta un espectro con características similares al espectro de un sistema integrable. Más importante aún, los autoestados del nuevo sistema presentan localización en órbitas de período corto. En otras palabras, mostramos que la eliminación de cruces evitados es el mecanismo natural para poner de manifiesto las estructuras localizadas en los autoestados de un sistema caótico. Por otro lado, hemos observado fuerte interacción entre estados localizados. En algunos casos, esta fuerte interacción probablemente decida la aparición de una determinada estructura. Queda abierta la necesidad de realizar un estudio profundo de este tipo de fenómenos de batido e interacción entre órbitas periódicas los cuales podrían introducir nuevos conocimientos dentro de la teoría semiclásica de sistemas caóticos.

Finalmente, se estableció la influencia de las estructuras localizadas en espacio de fases sobre la dinámica cuántica. Esto se hizo a través del estudio de la dispersión de la energía en el estadio de Bunimovich cuyo contorno oscila en forma armónica. Se obtuvo que al igual que en resultados previos en modelos de matrices aleatorias, la dispersión de la energía se comporta difusivamente en las primeras oscilaciones del contorno. Se calculó el coeficiente de difusión para distintas velocidades del contorno y los resultados se compararon con predicciones teóricas para sistemas caóticos genéricos. Estas predicciones se basan en la teoría de matrices aleatorias donde no existe localización de ningún tipo. Para velocidades pequeñas del contorno, los resultados concuerdan con las predicciones teóricas y confirman que las transiciones son del tipo Landau-Zener como fue mostrado en el capítulo 1. Para mayores velocidades se observaron diferencias con las expresiones teóricas. Dichas diferencias se achican notablemente al extraer del espectro los estados más localizados. De esta forma se muestra como influye en la dinámica cuántica la existencia de estados localizados en órbitas periódicas. En resumen, hemos verificado que las expresiones asintóticas (ecuaciones 3.7 y 3.8) para la difusión de la energía en sistemas caóticos, funciona muy bien en un ancho rango de velocidades del contorno, salvo para velocidades grandes donde la difusión satura. Por otra parte, si una fracción de los estados del sistema están localizados como los estados de BB (o estados que viven en regiones clásicamente regulares las

cuales están conectadas con los estados caóticos por tuneleo), la difusión será anómala en el régimen adiabático

Es importante mencionar que de todos los estudios mencionados han resultado métodos numéricos y desarrollos, como la expansión en el parámetro de deformación del hamiltoniano de un billar plano (apéndice A), que resultan muy adecuados para distintos tipos de estudios en caos cuántico.

Apéndice A

Expansión del Hamiltoniano de Billares Deformados

Este apéndice está dedicado a presentar la expansión del Hamiltoniano correspondiente a una partícula dentro de un billar plano, en potencias del parámetro que controla la deformación del contorno. Llamaremos ℓ a dicho parámetro. Es importante recalcar que los cálculos que se mostraron en los capítulos 2 y 3 se han podido realizar gracias a que previamente se desarrolló la expansión que se muestra a continuación.

Esta expansión nos permite obtener el espectro (hasta segundo orden) y expresar las autofunciones del billar deformado en términos de las autofunciones a un dado valor del parámetro, que denotamos como ℓ_0 . Las deformaciones pueden ser tan grandes como la longitud de onda característica en la región de energía estudiada. Esto resulta muy útil para calcular (de forma muy eficiente) las propiedades estáticas del espectro, como, por ejemplo la distribución de curvaturas o la distribución de cruces evitados. Así mismo, usando ésta expansión y definiendo una variación temporal del parámetro $\ell \sim \ell(t)$, la dinámica cuántica de una partícula dentro del billar resulta en un sistema de ecuaciones lineales acopladas que se pueden integrar directamente.

Para variaciones $\delta \equiv \ell - \ell_0$ del parámetro en un entorno de ℓ_0 , proponemos la siguiente expansión en la base de autoestados en ℓ_0 ,

$$H_{\mu\nu}(\ell_0 + \delta) \simeq (H_{\mu\mu} + \delta^2 H''_{\mu\mu}/2) \delta_{\mu\nu} + \delta H'_{\mu\nu}, \quad (\text{A.1})$$

con $\delta_{\mu\mu} = 1$, y $\delta_{\mu\nu} = 0$ para $\mu \neq \nu$.

Sea ζ una curva cerrada suave a trozos que define un billar plano. Usamos un sistema de coordenadas curvilineo alrededor del contorno con s sobre ζ y z perpendicular a este en s ($z=0$ sobre ζ). Consideremos ahora que el contorno se deforma y sus variaciones se parametrizan de la forma

$$\mathbf{r}(s, \delta) = \mathbf{r}_0(s) + z(s, \delta) \mathbf{n}, \quad (\text{A.2})$$

con $\mathbf{r}_0(s)$ la ecuación paramétrica de ζ , y \mathbf{n} el versor normal exterior a ζ en $\mathbf{r}_0(s)$ (ver Fig. B.1 del apéndice B). En el apéndice B se muestra $z(s, \delta)$ para el billar estadio de Bunimovich, sistema que hemos utilizado en todos los estudios presentados en la segunda parte de esta tesis.

Sean $\{\phi_\mu(\mathbf{r}) ; \mu = 1, 2, \dots, N\}$ las autofunciones del billar definido por ζ con número de onda k_μ alrededor de k_0 ($|k_\mu - k_0| \leq \Delta k \sim \text{Perimetro}/\text{Area}$). Tomando $\hbar^2/2m = 1$, se ve inmediatamente de Eq. (A.1) que $H_{\mu\mu} = k_\mu^2$. Las autofunciones se anulan sobre ζ y pueden ser extendidas fuera del billar de forma suave usando la siguiente expansión

$$\phi_\mu(\mathbf{r}_0(s) + z \mathbf{n}) = z \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}_0(s)) + \mathcal{O}(z^3). \quad (\text{A.3})$$

Como en la sección 1.2, a cada autofunción $\phi_\mu(\mathbf{r})$ le asociamos la función de escaleamiento $\phi_\mu(k\mathbf{r}/k_\mu)$. Esta familia de funciones dependiente del parámetro de escala k verifica la ecuación de Helmholtz con número de onda k .

Cuando las variaciones del contorno son infinitesimales, es válido usar teoría de perturbaciones [84] para obtener las autofunciones y los autovalores del billar deformado. Con estas soluciones aproximadas obtenemos la expansión del Hamiltoniano en potencias de δ (Eq. A.1). Esta expansión nos permite extender el rango de las deformaciones hasta el orden de la longitud de onda ($2\pi/k_0$).

Sea $\psi_\mu(\mathbf{r}, \delta)$ la autofunción del billar deformado, obtenida de $\phi_\mu(\mathbf{r})$ a través de una variación continua del parámetro. Vamos a obtener el espectro hasta segundo orden en δ , por lo tanto expresamos ψ_μ en términos de ϕ_ν hasta primer orden

$$\psi_\mu(\mathbf{r}, \delta) = \phi_\mu\left(\frac{k_\mu(\delta)}{k_\mu} \mathbf{r}\right) + \delta \sum_{\nu(\neq\mu)} c_{\mu\nu} \phi_\nu\left(\frac{k_\nu(\delta)}{k_\nu} \mathbf{r}\right),$$

con $k_\mu(\delta)$ el número de onda para el cual $\psi_\mu(\mathbf{r}, \delta)$ se anula en el borde deformado (Eq. (A.2)). Luego, expandiendo alrededor de ℓ_0 obtenemos

$$0 = \frac{d\psi_\mu}{d\ell}(\mathbf{r}_0(s), 0) = [k'_\mu r_n/k_\mu + z'(s)] \frac{\partial \phi_\mu}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{r}_0(s)) + \sum_{\nu(\neq\mu)} c_{\mu\nu} \phi_\nu(k_\mu \mathbf{r}_0(s)/k_\nu), \quad (\text{A.4})$$

donde las primas indican la derivación respecto de ℓ en ℓ_0 y $r_n \equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{n}$. En lo que sigue de esta sección, omitimos el argumento ($\mathbf{r}_0(s)$) de la derivada normal y despreciamos los términos que incluyen derivadas de segundo orden o mayores. En particular, tomamos $\phi_\nu(k_\mu \mathbf{r}_0/k_\nu) \simeq (k_\mu/k_\nu - 1) \partial\phi_\nu/\partial\mathbf{n}$. Luego, multiplicando Eq. (A.4) por $\partial\phi_\mu/\partial\mathbf{n}$ e integrando sobre ζ , tenemos

$$H'_{\mu\mu} \equiv (k_\mu^2)' = - \oint_{\zeta} z'(s) \left(\frac{\partial\phi_\mu}{\partial\mathbf{n}} \right)^2 ds .$$

Para obtener la última expresión, usamos la relación de cuasiortogonalidad (1.12) pero escrita de en forma

$$\oint_{\zeta} \frac{\partial\phi_\mu}{\partial\mathbf{n}} \frac{\partial\phi_\nu}{\partial\mathbf{n}} \frac{r_n ds}{2k_\mu k_\nu} = \delta_{\mu\nu} + \frac{(k_\mu - k_\nu)}{(k_\mu + k_\nu)} \mathcal{O}(1) .$$

Ahora bien, multiplicando Eq. (A.4) por $\partial\phi_\nu/\partial\mathbf{n}$ e integrando sobre ζ , se obtiene

$$c_{\mu\nu}(k_\mu^2 - k_\nu^2) = - \frac{(k_\mu + k_\nu)}{2k_\nu} \oint_{\zeta} z'(s) \frac{\partial\phi_\mu}{\partial\mathbf{n}} \frac{\partial\phi_\nu}{\partial\mathbf{n}} ds .$$

Por teoría de perturbaciones la última expresión debería ser $H'_{\mu\nu}$; sin embargo, la misma no es simétrica respecto a μ y ν . Si trabajamos a primer orden en δ es suficiente remplazar el factor $(k_\mu + k_\nu)/2k_\nu$ por uno (asumimos que $|k_\mu - k_\nu| \ll k_0$); pero este no es el caso a segundo orden. Consideremos dos estados a la misma distancia de k_μ ; esto es $k_\pm = k_\mu \pm \epsilon$. Luego, el factor en cuestión (a primer orden en ϵ) es $1 \mp \epsilon/2k_\mu$. Para resolver el problema, definimos los factores simétricos

$$A_{\mu\nu} = 2 - (k_\mu + k_\nu)/2k_0 ,$$

que dan la misma contribución asimétrica al estado μ de los estados \pm . Por otro lado, subrayamos que para billares no integrables genéricos y deformaciones no triviales (la dilatación es trivial) la interacción entre los niveles es de largo rango. Por lo tanto, a fin de tomar en cuenta que estamos trabajando con una base finita se propone multiplicar los términos no diagonales por el siguiente factor de corte

$$Cf_{\mu\nu} = \exp \left[-2 (k_\mu^2 - k_\nu^2)^2 / (k_0 \Delta k)^2 \right] .$$

Finalmente, los elementos no diagonales del Hamiltoniano quedan

$$H'_{\mu\nu} = -Cf_{\mu\nu} A_{\mu\nu} \oint_{\zeta} z'(s) \frac{\partial\phi_\mu}{\partial\mathbf{n}} \frac{\partial\phi_\nu}{\partial\mathbf{n}} ds . \quad (\text{A.5})$$

Trabajando como antes, para obtener $H''_{\mu\mu}$ multiplicamos la ecuación $0 = d^2\psi_\mu/d\ell^2(\mathbf{r}_0(s), 0)$ por $\partial\phi_\mu/\partial\mathbf{n}$ e integramos sobre ζ . El resultado es

$$H''_{\mu\mu} = \frac{3(H'_{\mu\mu})^2}{2H_{\mu\mu}} - \oint_{\zeta} z''(s) \left(\frac{\partial\phi_\mu}{\partial\mathbf{n}} \right)^2 ds .$$

En la Fig. A.1 se comparan el espectro aproximado obtenido por eq. (A.1) con el exacto para el billar de Bunimovich en las regiones de $k \sim 47$ (a) y $k \sim 200$ (b). Se observa que la aproximación funciona muy bien para deformaciones del orden de la longitud de onda característica ($2\pi/k_0$), que para el caso de $k \sim 47$ es $\delta \sim 0.13$ y para $k \sim 200$ es $\delta \sim 0.0314$.

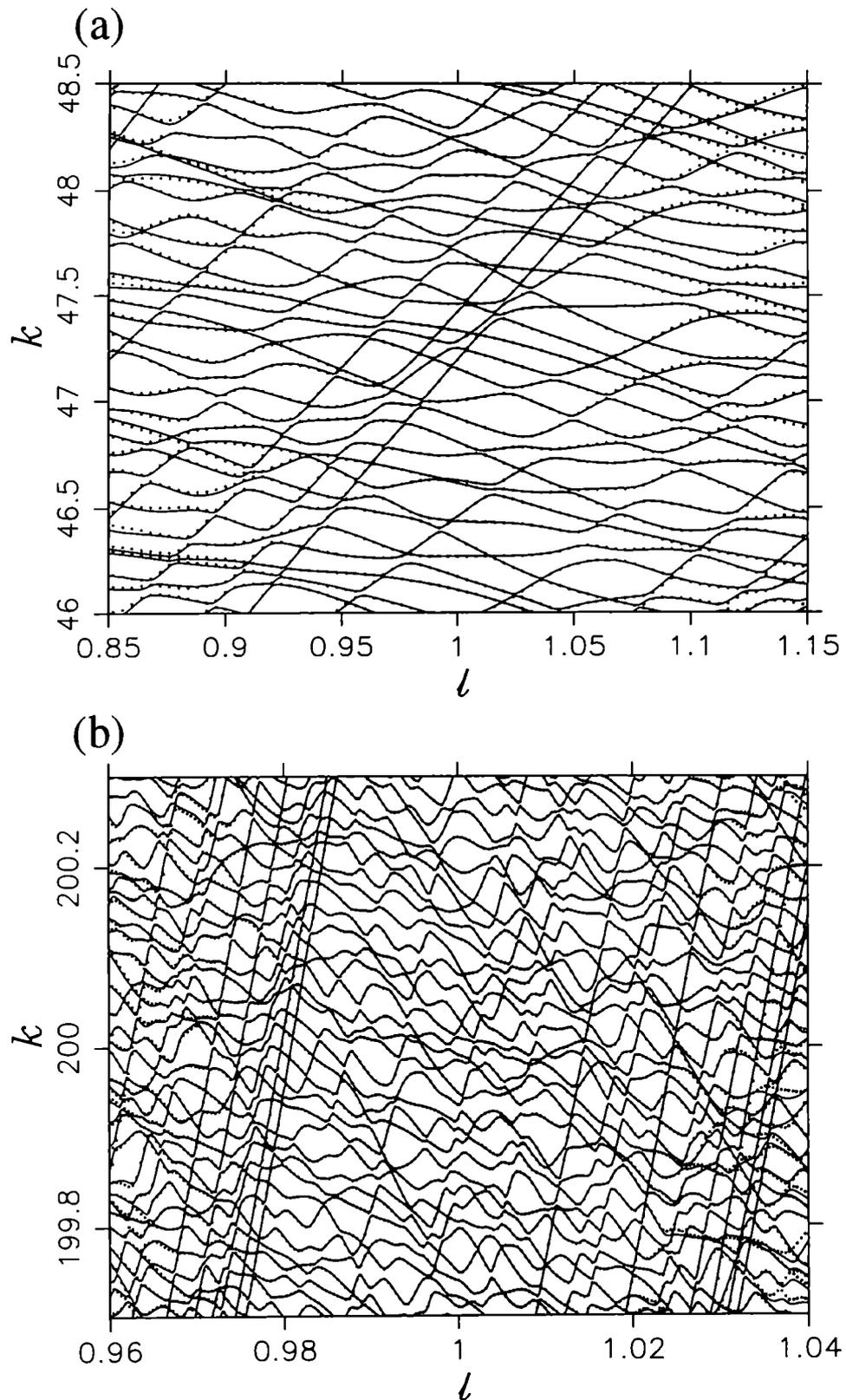


Fig. A.1: Espectro aproximado (líneas continuas) comparado con el espectro exacto (puntos) para el billar de Bunimovich de área fija en las regiones de $k = 47$ (a) y $k = 200$ (b).

Apéndice B

Parametrización de las deformaciones del estadio

En este apéndice se muestra la parametrización usada para describir las deformaciones del billar estadio de Bunimovich desimetrizado (ver sección 1.4).

El área se mantiene constante ($A = 1 + \pi/4$), implicando que el contorno depende solamente del parámetro $\ell = a/r$.

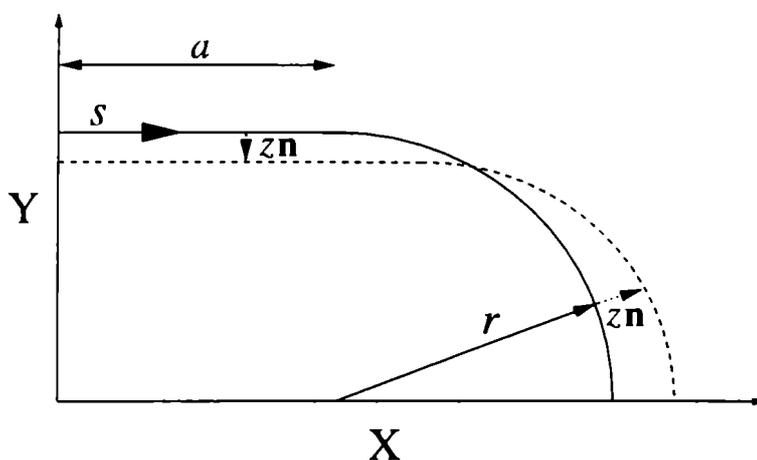


Fig. B.1: Gráfico esquemático del billar de Bunimovich para mostrar el sistema de coordenadas curvilíneas sobre el contorno. En línea punteada se muestra una deformación del billar. Las variaciones del contorno se describen por la función $z(s, \delta)$.

Un punto $\mathbf{r}_0 = (x, y)$ sobre el contorno a $\ell_0 = 1$ es dado en términos del sistema de coordenadas curvilíneas definido en el apéndice A (ver Fig. B.1).

$$x(s) = \begin{cases} s & \text{si } s \leq 1, \\ 1 + \sin(s-1) & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

$$y(s) = \begin{cases} 1 & \text{si } s \leq 1, \\ \cos(s-1) & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

Luego, si los contornos deformados están descritos por la Eq. (A.2), es un problema de geometría mostrar que $z(s, \delta) \simeq \delta z'(s) + \delta^2 z''(s)/2$, con

$$z'(s) = \begin{cases} -\frac{1}{2A} & \text{si } s \leq 1, \\ (1 - \frac{1}{2A}) \sin(s-1) - \frac{1}{2A} & \text{si } s > 1. \end{cases}$$

y

$$z''(s) = \begin{cases} \frac{3}{4A^2} & \text{si } s \leq 1, \\ \frac{1}{A} - 1 + (1 - \frac{1}{2A})^2 \sin^2(s-1) + \\ \frac{1}{2A^2} - \frac{1}{A}(1 - \frac{3}{4A}) \sin(s-1) & \text{si } s > 1 \end{cases}$$

Bibliografía

- [1] E. J. Heller and S. Tomsovic, *Phys. Today*, July 1993.
- [2] *Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics*, Les Houches, 1989, edited by M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1989).
- [3] A. Einstein, *Verhandlungen der Deutschen Physikalischen Gesellschaft* **19**, 82 (1917).
- [4] M. V. Berry in *New Trends in Nuclear Collective Dynamics*, edited by Y. Abe, H. Horiuchi and K. Matsuyanagi (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
- [5] M.C.Gutzwiller, *Chaos in Classical and Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, NY, 1990).
- [6] O. Bohigas, M. J. Giannoni and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **52**,1, (1984).
- [7] M. V. Berry, *Proc. R. Soc. London A* **400**,229 (1985).
- [8] L. Kouwenhoven and C. Marcus, *Physics World*, 35 June (1998).
- [9] A. Bulgac, G. Do Dang, D. Kusnezov, *Ann. Phys. (Leipzig)* **242**, 1, (1995), *Phys. Rep.* **264**, 67 (1996).
- [10] M. J. Sánchez, E. Vergini, and D. A. Wisniacki, *Phys. Rev. E* **54**, 4812 (1996).
- [11] A. J. Fendrik and D. A. Wisniacki, *Phys. Rev. E* **55**, 6507 (1997).
- [12] E. Vergini, and D. A. Wisniacki, *Phys. Rev. E* **58**, R5525 (1998).
- [13] D. A. Wisniacki and E. Vergini, *Phys. Rev. E* **59**, 6579 (1999).
- [14] A.J.Fendrik, A.F.M.Rivas and M.J.Sánchez, *Phys. Rev. E* **50**, 1948, (1994).
- [15] A.J.Fendrik and M.J.Sánchez, *Phys. Rev. E* **51**, 2996, (1995).

-
- [16] H.Alt, H.D.Gräf, H.L.Harney, R.Hofferbert, H.Rehfeld, A.Richter and P.Schardt, *Phys. Rev. E* **53**, 2217, (1996).
- [17] Ya.G.Sinai, *Russ. Math. Surveys*, **25**, 137, (1970).
- [18] L.A.Bunimovich, *Func. Anal. Appl.* **8**, 254, (1974).
- [19] N. Bohr, *Nature* **137**, 244 (1936).
- [20] W. C.Sabine, *Collected Papers on Acoustics* (Harvard Univ. Prees, Cambriedge, 1922).
- [21] W. Bauer and G. F. Bertsch, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 2213, (1990).
- [22] O. Legrand and D. Sornette, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2172, (1991).
- [23] C. F. Hillermeier, R. Blumel and U. Smilansky , *Phys. Rev. A* **45**, 3486, (1992).
- [24] B. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky, *Physica D* **13**, 395, (1984).
- [25] B. V. Chirikov and D. L. Shepelyansky, *Phys. Rev. Lett.* **82**, 528, (1999).
- [26] G. Baym, *Lectures on Quantum Mechanics* (Addison-Wesley, 1990).
- [27] G. Garcia-Calderón, J. L. Mateos and M. Moshinsky , *Phys. Rev. Lett.* **74**, 337, (1995).
- [28] G. Garcia-Calderón, J. L. Mateos and M. Moshinsky , *Ann. Phys. (N.Y.)* **249**, 430, (1996).
- [29] C.H.Lewenkopf and H.A.Weidenmüller, *Ann. Phys. (N.Y.)* **212**, 53, (1991).
- [30] H.L.Harney, F.M.Dittes and A.Müeller, *Ann. Phys. (N.Y.)* **220**, 159, (1992).
- [31] F.M.Dittes, I.Rotter and T.H.Seligman, *Phys. Rev. A* **45**, 701, (1992).
- [32] H.Alt, H.D.Gräf, H.L.Harney, R. Hofferbert, H.Lengeler, A.Richter, P. Schardt and H.A.Weidenmüller , *Phys. Rev. Lett.* **74**, 62, (1995).
- [33] A.J.Lichtenberg and M.A.Lieberman, *Regular and Chaotic Dynamics* (Springer-Verlag, Berlin, 1992).
- [34] E. Fermi, *Phys. Rev.* **75**, 1169, (1949).
- [35] S. M. Ulam, *Proc. 4th Berkeley Symp. on Math. Stat. and Probabil.*, pag. 315, (1961).
- [36] B. V. Chirikov, *Sov. Phys. Dok.* **11**, 989, (1965).
- [37] A. Brahic, *Astron. Astro.* **12**, 98, (1972)

-
- [38] A.J.Lichtenberg and M.A.Lieberman, *Phys. Rev. A* **5**, 1852, (1972).
- [39] P.J.Richens and M.V.Berry, *Physica D* **2**, 495, (1981).
- [40] J.L.Vega, T.Uzer and J.Ford, *Phys. Rev. E* **48**, 3414, (1993).
- [41] M.D.Feit, J.A.Fleck and A.Steiger, *J. Comput. Phys.* **47**, 412 (1983).
- [42] W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling and B. P. Flannery, *Numerical Recipes in Fortran*, (Cambridge University Press, 1992)
- [43] M.D.Feit, J.A.Fleck and A.Steiger, *J. Chem. Phys.* **78** , 1 (1988).
- [44] S.Tomsovic and E.J.Heller, *Phys. Rev. E* **47**, 282,, (1993).
- [45] A.Pimpale, S.Holloway and R.J.Smith, *J. Phys. A* **24**, 3533 (1991).
- [46] D. A. Wisniacki, *Tesis para la Licenciatura en Ciencias Físicas*, no publicada, (1994).
- [47] R.Kosloff and D.Kosloff, *J. Comput. Phys.* **63**, 363 (1986).
- [48] W. Lu, M. Rose, K. Pance and S. Sridhar, no publicado (chao-dyn/9902002).
- [49] A.S.Pikovsky, *J. Phys. A* **25**, L477, (1992).
- [50] A.J.Fendrik and M.J.Sánchez, *J. Phys. A* **28**, 4235 (1995).
- [51] F.M.Dittes, I.Rotter and T.H.Seligman, *Phys. Lett. A* **158**, 14, (1991).
- [52] J. Von Newman and E. P. Wigner, *Phys. Z* **30**, 467, (1929).
- [53] L. D. Landau, *Physik Z. Sowjetunion* **2**, 46 (1932).
- [54] C. Zener, *Proc. R. Soc. London Ser. A* **137**, 696 (1932).
- [55] W. C. Haxton, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1271 (1986).
- [56] J. S. Parke, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 1275 (1986).
- [57] S. T.Petcov, *Phys. Lett. B* **191**, 229 (1987).
- [58] R.Landauer and M. Büttiker, *Phys. Rev. Lett.* **54**, 2049 (1985).
- [59] R.Landauer, *Phys. Rev. Lett.* **58**, 2150 (1987).
- [60] D. Hill and J. Wheeler, *Phys. Rev.* **89**, 1102 (1952).

- [61] D. Bohm, *Quantum Theory* (Prentice-Hall, New York, 1951).
- [62] E. Vergini and M. Saraceno, *Phys. Rev. E* **52**, 2204 (1995).
- [63] L. A. Bunimovich, *Commun. Math. Phys.* **65**, 295 (1979).
- [64] N. Chernov, *J. Stat. Phys.* **88**,1 (1997).
- [65] O. Bohigas, in *Chaos and Quantum Physics*, edited by M. J. Giannoni, A. Voros and J. Zinn-Justin, Les Houches Summer School (Nort-Holland, Amsterdam, 1991).
- [66] M. V. Berry, *Ann. Phys.* **131**, 163 (1981).
- [67] M. V. Berry and M. Tabor, *J. Phys. A* **10**, 371 (1977).
- [68] M. V. Berry and M. Tabor, *Proc. R. Soc. London A* **349**, 101 (1976); M. V. Berry and M. Tabor, *J. Phys. A* **10**, 371 (1977).
- [69] M. V. Berry, *J. Phys. A* **10**, 2083 (1977).
- [70] A. Voros, in *Stochastic Behaviour in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, eds. G. Casati and G. Ford, *Lectures Notes in Physics* **93**, (Springer, Berlin, 1979) p. 326.
- [71] S. W. McDonald and A. N. Kaufman, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1189 (1979).
- [72] A. I. Shnirelman, *Usp. Mat. Nauk* **29**, 181 (1974).
- [73] Y. Colin de Verdiere, *Commun. Math. Phys.***102**, 497 (1985).
- [74] S. Zelditch *Duke Math. J.***55**, 919 (1987).
- [75] E. J. Heller, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1515 (1984).
- [76] E. J. Heller, in *Chaos and Quantum Physics*, edited by M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (Elsevier, Amsterdam, 1991).
- [77] E. B. Bogomolny, *Physica D* **31**, 169 (1988).
- [78] M. V. Berry , in *Chaos and Quantum Physics*, edited by M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (Elsevier, Amsterdam, 1991). M. V. Berry, *Proc. Roy. Soc. A* **243**, 219 (1989).
- [79] S. Sridhar, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 785 (1991). J. Stein and H. J. Stockman, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 2867 (1992).

- [80] T. M. Fromhold, P. B. Wilkinson, F. W. Sheard, L. Eaves, J. Miao, and G. Edwards, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 1142 (1995); P. B. Wilkinson, T. M. Fromhold, L. Eaves, F. W. Sheard, N. Miura, and T. Takamasu, *Nature* **380**, 608 (1996).
- [81] J. Zakrzewski and D. Delande, *Phys. Rev. E* **47**, 1650 (1993).
- [82] T. Takami, *Phys. Rev. Lett.* **68**, 3371 (1992).
- [83] T. Takami, *Phys. Rev. E* **52**, 2433 (1995).
- [84] L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *Quantum Mechanics*, Vol.3 (Pergamon Press Ltd. Paris, 1958).
- [85] V. M. Babič and V. S. Buldyrev, *Short-Wavelength Diffraction Theory* (Springer-Verlag, Berlin, 1991).
- [86] P. W. O'Connor and E.J.Heller, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 2288,(1988).
- [87] L. P. Kouwenhoven, Ch. M. Marcus, P. L. Mceuen, S. Tarucha, R. M. Westervelt and N. S. Wingreen, in *Mesoscopic Electron Transport*, eds. L. L. Sohn, L. P. Kouwenhoven and G. Schon, (Kluwer, 1997).
- [88] M. Wilkinson, *Phys. Rev. A* **41**, 4645 (1990).
- [89] M. Wilkinson, *J. Phys. A* **21**, 4021 (1988).
- [90] M. Wilkinson, *Physica. A* **157**, 58 (1989).
- [91] M. Wilkinson and E. J. Austin, *J. Phys. A* **23**, L957 (1990).
- [92] M. Wilkinson and E. J. Austin, *Phys. Rev. A* **46**, 46 (1992).
- [93] M. Wilkinson and E. J. Austin, *J. Phys. A* **28**, 2277 (1995).
- [94] *Statistical Theories of Spectra: Fluctuations*, edited by C. E. Porter (Academic, New York, 1965).
- [95] L. P. Kouwenhoven, Ch. M. Marcus, P. L. Mceuen, S. Tarucha, R. M. Westervelt and N. S. Wingreen, in *Mesoscopic Electron Transport*, eds. L. L. Sohn, L. P. Kouwenhoven and G. Schon, (Kluwer, 1997).
- [96] S. R. Jain, no publicado (chao-dyn/9803034)
- [97] R. Kubo, *Can. J. Phys.* **34**, 1274 (1956).

- [98] D. A. Greenwood, Proc. Phys. Soc. London, Sect. A **68**, 585 (1957).
- [99] G. Cassati and B. V. Chirikov, in *Quantum Chaos* ed. G. Cassati and B. V. Chirikov (Cambridge University Press, Cambridge, 1995) p.3.
- [100] Y. Gefen and D. J. Thouless, Phys. Rev. Lett. **59**, 1752 (1987).
- [101] R. Brown, E. Ott, and C. Grebogi, J. Stat. Phys. **49**, 511 (1987).
- [102] M. Wilkinson, J. Phys. A: Math. Gen. **23**, 3603 (1990).

Agradecimientos

A Alejandro Fendrik por todos estos años de trabajo y amistad.

A Eduardo Vergini por su constante apoyo, ayuda y amistad.

A todos con los que he colaborado científicamente de una forma u otra: Grupo de Caos Cuántico del Lab. TANDAR (Marcos Saraceno, Gabriel Carlo, Fernando Simonotti), Florentino Borondo, Maria J. Sanchez, Caio Lewenkopf.

A Cesar, Miguel y Lucas por sus ayudas computacionales.

Al Departamento de Física de la Universidad de Buenos Aires y sus integrantes que me han ofrecido todas las comodidades para poder realizar esta tesis.

A la Universidad de Buenos Aires.

A Pelusa, Natalio y Niso.

A Carolita.

