Estimación robusta en modelos arma multivariados

Martínez, Elena Julia

1999

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Tema de tesis

ESTIMACION ROBUSTA EN MODELOS ARMA MULTIVARIADOS

Autora: Elena Julia Martínez

Director: Dr. Víctor J. Yohai

Lugar de trabajo
Instituto de Cálculo. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

1999

EMartínez

INDICE

RESUMEN

En este trabajo se proponen estimadores robustos para modelos autoregresivos promedios móviles multivariados (VARMA), que son una generalización afín equivariante de los RA-estimadores para modelos ARMA univariados (Bustos & Yohai (1986)). Los estimadores propuestos tienen distribución asintótica normal y, cuando las innovaciones tienen distribución elíptica, su matriz de covarianza asintótica difiere de la de los estimadores de máxima verosimilitud en un factor escalar. Un estudio de Monte Carlo confirma que son eficientes bajo innovaciones normales y robustos en presencia de outliers aditivos. Se deriva asimismo un test de bondad de ajuste multivariado robusto basado en los estimadores propuestos.

Palabras clave: Procesos ARMA vectoriales; Estimacion robusta; Test de bondad de ajuste.

ABSTRACT

Bustos & Yohai (1986) proposed a class of robust estimates for ARMA models based on residual autocovariances (RA-estimates). In this work an affine equivariant generalization of the RA-estimates for vector autoregressive moving average processes (VARMA) is presented. These estimates are asymptotically normal and in the case that the innovations have elliptical distribution, their asymptotic covariance matrix differs only by a scalar factor from the one corresponding to the maximum likelihood estimate. A Monte Carlo study confirms that the RA-estimates are efficient under normal errors and robust when the sample contains additive outliers. A robustified multivariate goodness-of-fit test is also obtained.

Key words: Vector ARMA models; Robust estimation; Goodness of fit test.

1 Introducción

Sean $X_t = (X_{1t}, \ldots, X_{mt})'$ $(1 \leq t \leq T)$ observaciones correspondientes a un proceso vectorial autoregresivo promedio móvil estacionario, invertible e identificable, de órdenes p y q (VARMA(p,q)). Entonces, existen matrices $m \times m$

$$\phi_r = (\phi_{r,ij})_{1 \leq i,j \leq m} \qquad 1 \leq r \leq p$$

y

$$\theta_r = (\theta_{r,ij})_{1 \leq i,j \leq m} \qquad 1 \leq r \leq q,$$

con $\phi_p \neq 0$ y $\theta_q \neq 0$, tales que

$$X_t - \mu = \phi_1(X_{t-1} - \mu) + \cdots + \phi_p(X_{t-p} - \mu) + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \cdots - \theta_q a_{t-q}, \tag{1.1}$$

donde $\mu = E(X_t)$ y a_t es un proceso ruido blanco multivariado, i.e., los a_t son vectores aleatorios independientes e idénticamente distribuídos con

$$E(a_t) = 0, \qquad E(a_t\, a_t') = \Sigma,$$

siendo Σ es una matriz $m \times m$ no singular. Si

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= I_m - \textstyle\sum_{r=1}^{p} \phi_r\, z^r \\ \Theta(z) &= I_m - \textstyle\sum_{r=1}^{q} \theta_r z^r, \end{aligned}$$

donde I_m es la matriz identidad de orden m, las condiciones de estacionaridad e invertibilidad de X_t respectivamente requieren que las raíces de

$$\det\{\Phi(z)\} = 0, \quad \det\{\Theta(z)\} = 0,$$

estén fuera del círculo unitario $|z| \leq 1$, donde $\det(A)$ denota el determinante de A.

Las condiciones para identificabilidad (Hannan (1969), Dunsmuir & Hannan (1976)) requieren que $\Phi(z)$ y $\Theta(z)$ sean primos a izquierda y que la matriz $[\phi_p|\theta_q]$ tenga rango completo m. Recordemos que $f(z)$ y $g(z)$ son primos a izquierda si, cuando existe $d(z)$ que satisface $f(z) = d(z)\,f_1(z)$ y $g(z) = d(z)\,g_1(z))$, entonces $d(z)$ tiene determinante constante no nulo, o sea $d(z)$ es unimodular. Dado que la segunda condición de Hannan, no puede ser satisfecha por ciertos modelos VARMA, se han propuesto condiciones alternativas que imponen otras restricciones sobre las matrices de coeficientes. También hay enfoques que consisten en expresar el modelo VARMA en cierta forma canónica de manera tal que exista un y sólo un modelo representativo de esta forma para cada clase de modelos equivalentes (Hannan & Deistler (1988)).

La ecuación (1.1) puede escribirse como

$$\Phi(B)(X_t - \mu) = \Theta(B)a_t,$$

donde B es el operador de retardo, definido por $B(X_t) = X_{t-1}$.

Los parámetros desconocidos del modelo (1.1) son el vector

$$\beta = [\{\text{vec }(\phi_1)\}', ..., \{\text{vec }(\phi_p)\}', \{\text{vec }(\theta_1)\}', ..., \{\text{vec }(\theta_q)\}', \mu']'$$

y la matriz Σ.

Wilson (1973) propuso estimar los parámetros de este modelo maximizando una verosimilitud normal condicional a

$$X_0 = X_{-1} = ... = X_{-p+1} = \mu, \quad a_0 = a_{-1} = ... = a_{-q+1} = 0. \tag{1.2}$$

Este estimador, al que llamaremos estimador de máxima verosimilitud condicional (CMLE), tiene la misma distribución asintótica normal que el estimador de máxima verosimilitud exacto, por lo tanto es asintóticamente eficiente bajo innovaciones normales.

Sin embargo, el CMLE es muy sensible a violaciones del supuesto de normalidad y a la presencia de unas pocas observaciones atípicas (outliers).

Sea A una matriz $m \times m$ no singular, entonces el proceso $X_t^* = AX_t$ es también un proceso VARMA con parámetros $A\phi_i A^{-1}$ $(1 \leq i \leq p)$, $A\theta_j A^{-1}$ $(1 \leq j \leq q)$, $A\mu$ y matriz de covarianza $A\Sigma A'$.Es natural requerir que un estimador de los parámetros del modelo VARMA satisfaga las siguientes propiedades de afín equivariancia:

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi_i}\{(X_t^*)_{1\leq t\leq T}\} &= A\widehat{\phi_i}\{(X_t)_{1\leq t\leq T}\}A^{-1} \qquad 1 \leq i \leq p,\\
\widehat{\theta_j}\{(X_t^*)_{1\leq t\leq T}\} &= A\widehat{\theta_j}\{(X_t)_{1\leq t\leq T}\}A^{-1} \qquad 1 \leq j \leq q,\\
\widehat{\mu}\{(X_t^*)_{1\leq t\leq T}\} &= A\widehat{\mu}\{(X_t)_{1\leq t\leq T}\},\\
\widehat{\Sigma}\{(X_t^*)_{1\leq t\leq T}\} &= A\widehat{\Sigma}\{(X_t)_{1\leq t\leq T}\}A'.
\end{aligned}$$

La única clase de estimadores robustos propuestos para modelos VARMA, debida a Li & Hui (1989), es una extensión de los RA–estimadores (Bustos & Yohai (1986)).

Dado un modelo ARMA univariado:

$$\phi(B)\,(Z_t - \mu) = \theta(B)\,u_t,$$

los RA–estimadores se basan en expresar a los estimadores de mínimos cuadrados en una forma que involucra a los estimadores de las covarianzas de los residuos $r_t = \theta(B)^{-1}\,\phi(B)\,(Z_t - \mu)$, y en reemplazar a dichos estimadores por estimadores robustos.

En forma simplificada, los estimadores de mínimos cuadrados de $\lambda = (\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_p, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_q, \mu)$, son los valores que minimizan

$$\sum_t E^2(u_t/Z_1, \ldots, Z_T, \lambda).$$

Derivando esta expresión e igualando a 0, llamando $\{s_i\}$ a los coeficientes del desarrollo en serie de $\phi(B)^{-1}$ y $\{t_i\}$ a los de $\theta(B)^{-1}$, se obtiene

$$\sum_{h=0}^{T-j-p-1} s_h\,\gamma_{h+j}(\lambda) = 0 \qquad 1 \leq j \leq p \tag{1.3}$$

$$\sum_{h=0}^{T-j-p-1} t_h\,\gamma_{h+j}(\lambda) = 0 \qquad 1 \leq j \leq q \tag{1.4}$$

$$\sum_{h=p+1}^{T} r_t = 0 \tag{1.5}$$

donde $\gamma_i(\lambda) = \sum_{t=p+1+i}^{T} r_t\, r_{t-i}$.

La clase de los RA–estimadores se define reemplazando a los $\gamma_i(\lambda)$ por

$$\gamma_i^*(\lambda) = \sum_{t=p+1+i}^{T} \eta(\frac{r_t}{\hat{\sigma}}, \frac{r_{t-i}}{\hat{\sigma}}),$$

y, en la ecuación (1.5), a los r_t por $\psi(r_t/\hat{\sigma})$, donde $\eta : R^2 \rightarrow R$ y $\psi : R \rightarrow R$ son funciones continuas y acotadas, η es impar en cada variables, ψ es impar y $\hat{\sigma}$ es un estimador robusto de la escala de los $u_t's$.

Li & Hui (1989) consideran modelos autoregresivos multivariados de orden p:

$$(I_m - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p)X_t = a_t$$

donde a_t es un proceso ruido blanco multivariado, y expresan las ecuaciones de máxima verosimilitud condicional en la forma

$$\sum_t \sum_i \pi_i a_{h,t} a_{t-j-i} = 0 \qquad j = 1, \ldots p, \quad h = 1, \ldots m \tag{1.6}$$

donde $a_{h,t} = 0$ para $t < p+1$, $a_t = (a_{1,t}, \ldots, a_{m,t})$ y $\sum_i \pi_i B^i = (I_m - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p)^{-1}$.

Motivados en los RA–estimadores univariados, Li & Hui robustifican los productos $a_{h,t} a_{k,t'}$ mediante una función continua y acotada $\eta(u,v)$, impar en cada variable, que puede elegirse dentro de la familia de funciones tipo Mallows: $\eta(u,v) = \varphi(u)\varphi(v)$, o de las funciones tipo Hampel: $\eta(u,v) = \varphi(uv)$, siendo a su vez φ una función tipo Huber o tipo bicuadrada.

Llamando

$$\begin{aligned}\gamma_{h,k}(j) &= \sum_{t=p+1+j}^{T} \eta(a_{h,t}, a_{k,t-j}) \\ \gamma_h(j) &= (\gamma_{h,1}(j), \ldots, \gamma_{h,m}(j))',\end{aligned}$$

Li & Hui proponen reemplazar la ecuación (1.6) por

$$\sum_{i=0}^{T-j-p-1} \pi_i \gamma_h(i+j) = 0 \qquad j = 1, \ldots p \quad h = 1, \ldots m. \tag{1.7}$$

Los estimadores que se obtienen como solución de (1.7) no son afín equivariantes.

En este trabajo, se presenta un procedimiento de estimación robusta para un proceso VARMA(p,q) que es también una generalización de los RA–estimadores, pero produce estimadores que son afín equivariantes.

Se pueden citar al menos dos ventajas de este enfoque afín equivariante:

1. El procedimiento de Li y Hui (1989) modifica observaciones que tienen al menos una componente de la innovación grande, y por lo tanto no detecta outliers que no son atípicos coordenada a coordenada. Supongamos por ejemplo que $m = 2$ y que las innovaciones $a_t = (a_{t,1}, a_{t,2})$ tienen distribución normal multivariada con $E(a_{t,1}) = E(a_{t,2}) = 0$, $\text{var}(a_{t,1}) = \text{var}(a_{t,2}) = 1$ y $\text{cov}(a_{t,1}, a_{t,2}) = .9$. En este caso la innovación $(1.5, -1.5)$ es un outlier, pero cada componente aislada no lo es. El enfoque propuesto modifica observaciones en base a una norma afín equivariante de las innovaciones que es grande si al menos una combinación lineal arbitraria de las componentes de la innovación es atípica.

2. La eficiencia asintótica relativa de un procedimiento que no es afín equivariante con respecto al CMLE bajo innovaciones normales depende de los parámetros del modelo. Por lo tanto, no es posible elegir un estimador para obtener una eficiencia dada, independientemente del modelo. En este trabajo se prueba que los estimadores

propuestos tienen distribución asintótica normal y que si las innovaciones tienen distribución elíptica, la matriz de covarianza asintótica de los parámetros del modelo VARMA difiere de la matriz de covarianza del CMLE sólo por un factor escalar que es independiente de los parámetros del modelo. La inversa de este factor da precisamente la eficiencia asintótica relativa de los RA–estimadores con respecto al CMLE. Mas aún, esta eficiencia puede ser elegida tan próxima a 1 como se desee.

Los RA–estimadores equivariantes propuestos pueden ser interpretados, como en el caso de los RA–estimadores univariados, como el CMLE de un proceso generado por innovaciones modificadas. Esta interpretación es la base de un algoritmo iterativo.

Li (1988) propuso un test portmanteau de bondad de ajuste robusto basado en los RA–estimadores univariados. Li & Hui (1989) extendieron este test para el caso multivariado, usando su generalización de los RA–estimadores. En este trabajo se presenta un test portmanteau robusto basado en los RA–estimadores propuestos.

Los RA–estimadores son cualitativamente robustos sólo para modelos autoregresivos multivariados (VAR) y no lo son para modelos promedios móviles (VMA) o VARMA generales. Un estudio Monte Carlo muestra que, en el caso de modelos VAR, RA–estimadores convenientemente elegidos pueden ser altamente eficientes bajo normalidad y robustos cuando la muestra contiene outliers, y en el caso de modelos VMA y VARMA generales, son más estables que los CMLE en presencia de outliers.

En la Sección 2 se definen los RA–estimadores para un proceso VARMA. En la sección 3 se deriva su distribución asintótica normal y se calcula su eficiencia relativa con respecto al CMLE bajo innovaciones normales. En la sección 4 se presenta un algoritmo de cálculo basado en CMLE iterativos de un proceso generado por innovaciones modificadas. En la sección 5 se deriva el test portmanteau de bondad de ajuste robustificado y finalmente, en la sección 6, se presentan y discuten los resultados del estudio de simulación realizado.

2 RA–estimadores para un proceso VARMA

La idea básica de los RA–estimadores es escribir las ecuaciones de los CMLE como funciones de los residuos y su matriz de covarianza muestral. Entonces, los RA–estimadores se definen mediante las mismas ecuaciones, pero modificando los residuos con pesos que dependen de su grado de "atipicidad".

Para un valor dado de β, los residuos $\widehat{a}_t(\beta)$ se definen recursivamente como $\widehat{a}_t(\beta) = 0$, para $t \leq 0$, y para $1 \leq t \leq T$ por

$$\widehat{a}_t(\beta) = (X_t - \mu) - \phi_1(X_{t-1} - \mu) - \ldots - \phi_p(X_{t-p} - \mu) - \theta_1\widehat{a}_{t-1}(\beta) - \ldots - \theta_q\widehat{a}_{t-q}(\beta), \quad (2.1)$$

donde $X_0 = X_{-1} = \ldots = X_{-p+1} = \mu$. Entonces,

$$(X_t - \mu) - \sum_{n=1}^{p} \phi_n(X_{t-n} - \mu) = \widehat{a}_t(\beta) - \sum_{n=1}^{q} \theta_n\widehat{a}_{t-n}(\beta). \quad (2.2)$$

Sean $\widehat{\beta}$ y $\widehat{\Sigma}$ los CMLE de β y Σ y sea

$$S(\beta) = \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T} \widehat{a}'_t(\beta)\widehat{\Sigma}^{-1}\widehat{a}_t(\beta). \quad (2.3)$$

Wilson (1973) probó que

$$\widehat{\Sigma} = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} \widehat{a}_t(\widehat{\beta})\widehat{a}'_t(\widehat{\beta}) \quad (2.4)$$

y

$$\widehat{\beta} = \text{argmin } S(\beta). \quad (2.5)$$

Entonces las ecuaciones de CMLE son obtenidas igualando a cero las derivadas de S con respecto a ϕ_r, $1 \leq r \leq p$, θ_r, $1 \leq r \leq q$ y μ. Para obtener estas derivadas necesitaremos las derivadas de los residuos $\widehat{a}_t$ con respecto a ϕ_r, θ_r y μ.

Diferenciando ambos términos de (2.2) con respecto a ϕ_j, y usando que, si $\gamma \in \mathcal{R}^{m\times 1}$, $A(\gamma) \in \mathcal{R}^{n\times p}$ y $B(\gamma) \in \mathcal{R}^{p\times q}$:

$$\frac{\partial \mathrm{vec}(A\,B)}{\partial \gamma'} = (I_q \otimes A)\frac{\partial \mathrm{vec}(B)}{\partial \gamma'} + (B' \otimes I_n)\frac{\partial \mathrm{vec}(A)}{\partial \gamma'}$$

se obtiene:

$$-(X_{t-j} - \mu)' \otimes I_m = \frac{\partial \widehat{a}_t}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\phi_j)\}'} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \frac{\partial \widehat{a}_{t-i}}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\phi_j)\}'} = \Theta(B)(\frac{\partial \widehat{a}_t}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\phi_j)\}'})$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial \widehat{a}_t}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\phi_j)\}'} = -\Theta(B)^{-1}((X_{t-j} - \mu)' \otimes I_m).$$

Si $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n B^n$ y $\sum_{j=0}^{\infty} \pi_j B^j$ son los desarrollos en serie de los operadores $\Theta(B)^{-1}$ y $\Phi(B)^{-1}\Theta(B)$ respectivamente, entonces:

$$\frac{\partial \widehat{a}_t}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\phi_j)\}'} = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty} \gamma_n(\widehat{a}'_{t-j-n-h}\pi'_h \otimes I_m), \tag{2.6}$$

En forma similar, diferenciando ambos términos de (2.2) con respecto a θ_j, se obtiene:

$$0 = \frac{\partial \widehat{a}_t}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\theta_j)\}'} - \sum_{i=1}^{q}\left[\theta_i \frac{\partial \widehat{a}_{t-i}}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\theta_j)\}'} + (\widehat{a}'_{t-i} \otimes I_m)\frac{\partial\{\mathrm{vec}\ (\theta_i)\}}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\theta_j)\}'}\right] \tag{2.7}$$

$$0 = \frac{\partial \widehat{a}_t}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\theta_j)\}'} - \sum_{i=1}^{q}\theta_i \frac{\partial \widehat{a}_{t-i}}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\theta_j)\}'} - (\widehat{a}'_{t-j} \otimes I_m) \tag{2.8}$$

$$0 = \Theta(B)(\frac{\partial \widehat{a}_t}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\theta_j)\}'}) - (\widehat{a}'_{t-j} \otimes I_m)$$

Luego,

$$\frac{\partial \widehat{a}_t}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\theta_j)\}'} = \Theta(B)^{-1}(\widehat{a}'_{t-j} \otimes I_m) = \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n(\widehat{a}'_{t-j-n} \otimes I_m), \tag{2.9}$$

Finalmente, diferenciando ambos términos de (2.2) con respecto a μ, se obtiene:

$$\begin{aligned} -I_m + \phi_1 + \ldots + \phi_p &= \frac{\partial \widehat{a}_t}{\partial \mu'} - \sum_{i=1}^{q} \theta_i \frac{\partial \widehat{a}_{t-i}}{\partial \mu'} \\ -(I_m - \sum_{i=1}^{p} \phi_i) &= \Theta(B) \frac{\partial \widehat{a}_t}{\partial \mu'} \end{aligned}$$

Entonces

$$\frac{\partial \widehat{a}_t}{\partial \mu'} = -\left(I_m - \sum_{i=1}^{q} \theta_i\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{i=1}^{p} \phi_i\right), \tag{2.10}$$

Diferenciando S, definido en (2.3), con respecto a ϕ_j y usando (2.6), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial S}{\partial \{\text{vec } (\phi_j)'\}} &= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^{T} \frac{\partial\, [\widehat{a}_t' \Sigma^{-1} \widehat{a}_t]}{\partial \{\text{vec } (\phi_j)\}'} = -\sum_{t=1}^{T} \widehat{a}_t' \Sigma^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n \sum_{h=0}^{\infty} (\widehat{a}_{t-j-n-h}' \pi_h' \otimes I_m) \right) \\ &= -\sum_{t=1}^{T} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \widehat{a}_t' \Sigma^{-1} \gamma_n (\widehat{a}_{t-j-n-h}' \pi_h' \otimes I_m) \end{aligned} \tag{2.11}$$

Trasponiendo

$$\frac{\partial S}{\partial \{\text{vec } (\phi_j)\}} = -\sum_{t=1}^{T} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} (\widehat{a}_{t-j-n-h}' \pi_h' \otimes I_m)' \gamma_n' \Sigma^{-1} \widehat{a}_t$$

Usando que $(C'B' \otimes I)' = (BC \otimes I)$ y que vec $(ABC) = (C'B' \otimes I)$vec A, resulta:

$$\frac{\partial S}{\partial \text{vec } (\phi_j)} = \text{vec} \left\{ -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \gamma_n' \Sigma^{-1} \left(\sum_{t=1}^{T} \widehat{a}_t \widehat{a}_{t-j-n-h}' \right) \pi_h' \right\}$$

En forma similar, diferenciando S con respecto a θ_j y μ y usando (2.9) y (2.10) se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}} &= \text{vec}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n'\Sigma^{-1}\left(\sum_{t=1}^{T}\widehat{a}_t\widehat{a}_{t-j-n}'\right)\right\} \\
\frac{\partial S}{\partial\mu} &= -\left(I_m-\sum_{i=1}^{p}\phi_i\right)'\left\{\left(I_m-\sum_{i=1}^{q}\theta_i\right)^{-1}\right\}'\Sigma^{-1}\sum_{t=1}^{T}\widehat{a}_t
\end{aligned} \qquad (2.12)$$

Entonces los CMLE se obtienen resolviendo el sistema:

$$\frac{\partial S}{\partial \text{vec }(\phi_j)} = \text{vec}\left\{-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\gamma_n'\widehat{\Sigma}^{-1}\left(\sum_{t=1}^{T}\widehat{a}_t\widehat{a}_{t-j-n-h}'\right)\pi_h'\right\}=0 \quad 1\leq j\leq p, \qquad (2.13)$$

$$\frac{\partial S}{\partial \text{vec }(\theta_j)} = \text{vec}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n'\widehat{\Sigma}^{-1}\left(\sum_{t=1}^{T}\widehat{a}_t\widehat{a}_{t-j-n}'\right)\right\}=0 \qquad 1\leq j\leq q, \qquad (2.14)$$

$$\frac{\partial S}{\partial\mu} = -\left(I_m-\sum_{i=1}^{p}\phi_i\right)'\left\{\left(I_m-\sum_{i=1}^{q}\theta_i\right)^{-1}\right\}'\widehat{\Sigma}^{-1}\sum_{t=1}^{T}\widehat{a}_t=0 \qquad (2.15)$$

$$\widehat{\Sigma}=\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\widehat{a}_t(\widehat{\beta})\widehat{a}_t'(\widehat{\beta}). \qquad (2.16)$$

Los RA–estimadores se definen reemplazando en estas ecuaciones los $\widehat{a}_t$'s por residuos modificados $\tilde{a}_t$'s de la manera siguiente. Sea ψ una función impar y acotada, y definamos la función de peso

$$w(x)=\frac{\psi(x)}{x}.$$

Entonces los residuos modificados se definen como

$$\tilde{a}_t(\beta,\Sigma)=\widehat{a}_t(\beta)\ w\left[\{\widehat{a}_t'(\beta)\Sigma^{-1}\widehat{a}_t(\beta)\}^{1/2}\right]. \qquad (2.17)$$

La función ψ puede ser elegida por ejemplo en la familia de funciones de Huber

$$\psi_{H,k}(x)=\begin{cases} x & \text{if } \ |x|\leq k \\ k\ \text{sign}(x), & \text{if } \ |x|>k, \end{cases} \qquad (2.18)$$

o en la familia de funciones bicuadradas propuesta por Tukey

$$\psi_{B,k}(x) = \begin{cases} x\left\{1-(x/k)^2\right\}^2, & \text{if } |x| \leq k \\ 0, & \text{if } |x| > k. \end{cases} \tag{2.19}$$

La idea detrás de (2.17) es reducir la influencia de residuos sospechosos de ser outliers. Entonces los RA–estimadores $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\Sigma}$ se definen como solución del siguiente sistema:

$$\begin{aligned}
\text{vec}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\gamma_n'\tilde{\Sigma}^{-1}\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{a}_t\tilde{a}_{t-j-n-h}'\right)\pi_h'\right\} &= 0 \qquad 1\leq j\leq p, && (2.20)\\
\text{vec}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n'\tilde{\Sigma}^{-1}\left(\sum_{t=1}^{T}\tilde{a}_t\tilde{a}_{t-j-n}'\right)\right\} &= 0 \qquad 1\leq j\leq q, && (2.21)\\
\sum_{t=1}^{T}\tilde{a}_t &= 0, && (2.22)\\
\tilde{\Sigma} &= \frac{c}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{a}_t\tilde{a}_t', && (2.23)
\end{aligned}$$

con

$$c = \frac{m}{E\{\psi^2(v^{1/2})\}}, \tag{2.24}$$

donde v tiene distribución χ^2 con m grados de libertad.

Esta elección de c hace a $\tilde{\Sigma}$ un estimador consistente de la matriz de covarianza Σ bajo innovaciones normales. En efecto, suponiendo, sin pérdida de generalidad, que $a_t \sim N(0, I_m)$, $\|a_t\|^2 \sim \chi_m^2$, y $\tilde{\Sigma}$ converge a $c\,A$, donde $A = E(a_t\,a_t'\,w^2(\|a_t\|))$.

Ahora bien, $A_{ij} = \delta_{ij}\,E(a_{i,t}a_{j,t}\,w^2(\|a_t\|))$ y

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{m} A_{ii} = m\,A_{11} = E(\|a_t\|^2\,w^2(\|a_t\|)) = E(\psi^2(\|a_t\|)).$$

Luego,

$$A = \frac{E(\psi^2(\|a_t\|))}{m}\,I_m,$$

y por lo tanto

$$\tilde{\Sigma} \rightarrow c\,\frac{E(\psi^2(\|a_t\|))}{m} I_m.$$

Los RA–estimadores para modelos VARMA pueden interpretarse como los CMLE aplicados a una serie modificada. Definamos el proceso modificado

$$X_t^*(\beta,\Sigma) = \mu + \phi_1(X_{t-1}^* - \mu) + \cdots + \phi_p(X_{t-p}^* - \mu) + \tilde{a}_t - \theta_1\tilde{a}_{t-1} - \cdots - \theta_q\tilde{a}_{t-q} \quad (1 \leq t \leq T), \tag{2.25}$$

con la condiciones iniciales $X_0^* = X_{-1}^* ... = X_{-p+1}^* = \mu$ y donde los $\tilde{a}_t(\beta,\Sigma)$'s se definen en (2.17). Puede verificarse que, calculando los residuos del proceso modificado X_t^* usando (2.1), se obtiene el mismo resultado que calculando los residuos modificados $\tilde{a}_t$ del proceso original X_t . Por lo tanto, los RA–estimadores coinciden con los CMLE del proceso modificado. Esta propiedad sugiere un proceso iterativo que se describirá en la Sección 4.

3 Distribución asintótica de los RA–estimadores

Sea X_t un proceso VARMA(p,q) estacionario e invertible, dado por (1.1). Si denotamos

$$\begin{aligned}
\delta_{j,t}^{(1)}(\beta,\Sigma) &= \text{vec}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\gamma_n'\Sigma^{-1}\tilde{a}_t\tilde{a}_{t-j-n-h}'\pi_h'\right) \qquad 1\le j\le p, \\
\delta_{j,t}^{(2)}(\beta,\Sigma) &= \text{vec}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n'\Sigma^{-1}\tilde{a}_t\tilde{a}_{t-j-n}'\right) \qquad 1\le j\le q, \\
\delta_t^{(3)}(\beta,\Sigma) &= \tilde{a}_t
\end{aligned}$$

y

$$\delta_t(\beta,\Sigma) = [\{\delta_{1,t}^{(1)}(\beta,\Sigma)\}',\dots,\{\delta_{p,t}^{(1)}(\beta,\Sigma)\}',\{\delta_{1,t}^{(2)}(\beta,\Sigma)\}',\dots\{\delta_{q,t}^{(2)}(\beta,\Sigma)\}',\{\delta_t^{(3)}(\beta,\Sigma)\}']',$$

entonces los RA-estimadores $\tilde{\beta}$ y $\tilde{\Sigma}$ satisfacen

$$\begin{aligned}
L(\tilde{\beta},\tilde{\Sigma}) &= \sum_{t=1}^{T}\delta_t(\tilde{\beta},\tilde{\Sigma}) = 0 \\
\tilde{\Sigma} &= \frac{c}{T}\sum_{t=1}^{T}\tilde{a}_t\tilde{a}_t'
\end{aligned}$$

Sea β_0 el verdadero vector de parámetros, entonces bajo adecuadas condiciones de regularidad sobre ψ, y usando un desarrollo de Taylor alrededor de β_0,

$$L(\tilde{\beta},\tilde{\Sigma}) = L(\beta_0,\tilde{\Sigma}) + DL(\beta_0,\tilde{\Sigma})\,(\tilde{\beta}-\beta_0) + o(|\tilde{\beta}-\beta_0|),$$

donde DL es la matriz diferencial de L con respecto a β. Por lo tanto

$$(\tilde{\beta}-\beta_0) \simeq -\{DL(\beta_0,\tilde{\Sigma})\}^{-1}L(\beta_0,\tilde{\Sigma}),$$

y se obtiene

$$T^{1/2}(\tilde{\beta}-\beta_0) \quad \simeq \quad -\left\{\frac{1}{T}DL(\beta_0,\tilde{\Sigma})\right\}^{-1}\left\{\frac{1}{T^{1/2}}L(\beta_0,\tilde{\Sigma})\right\}. \tag{3.1}$$

De acuerdo a (2.23)

$$\tilde{\Sigma} \xrightarrow{p} \Sigma_0,$$

donde $\xrightarrow{p}$ denota convergencia en probabilidad, y

$$\Sigma_0 = c\,E[a_t a_t' w^2\{(a_t'\Sigma_0^{-1}a_t)^{1/2}\}]. \tag{3.2}$$

Esta última es la ecuación funcional de un M–estimador de la matriz de escala de a_t. La existencia y unicidad de la solución de esta ecuación fue estudiada por Maronna (1976). Si a_t tiene distribución normal multivariada con matriz de covarianza Σ, la elección de c dada en (2.24) implica que Σ_0=Σ. Si a_t tiene distribución elíptica con densidad que depende de $a_t'\Sigma^* a_t$, donde Σ^* es una matriz definida positiva, Σ_0 es un múltiplo escalar de Σ^*. Obsérvese que, dado que $w\{(a_t'\Sigma_0^{-1}a_t)^{1/2})\}\,a_t$ está acotado, la existencia de Σ_0 no requiere la existencia de momentos de segundo orden de a_t.

Bajo condiciones de regularidad sobre ψ,

$$\frac{1}{T}\{DL(\beta_0,\tilde{\Sigma}) - DL(\beta_0,\Sigma_0)\} \xrightarrow{p} 0$$

y

$$\frac{1}{T^{1/2}}\{L(\beta_0,\tilde{\Sigma}) - L(\beta_0,\Sigma_0)\} \xrightarrow{p} 0.$$

Por lo tanto

$$T^{1/2}(\tilde{\beta}-\beta_0) \quad \simeq \quad -\left\{\frac{1}{T}DL(\beta_0,\Sigma_0)\right\}^{-1}\left\{\frac{1}{T^{1/2}}L(\beta_0,\Sigma_0)\right\}. \tag{3.3}$$

Por el Teorema Ergódico (Hannan 1970)),

$$\frac{1}{T}DL(\beta_0,\Sigma_0) \xrightarrow{p} A = E\left\{D\delta_t(\beta_0,\Sigma_0)\right\},$$

y por el Teorema Central del Límite para martingalas (Billingsley (1961))

$$\frac{1}{T^{1/2}} L(\beta_0, \Sigma_0) \xrightarrow{D} \mathrm{N}(0,\, B)$$

donde B is la matriz de covarianzas de $\delta_t(\beta_0, \Sigma_0)$.

Por lo tanto,

$$T^{1/2}(\tilde{\beta} - \beta_0) \;\xrightarrow{D}\; \mathrm{N}(0,\, A^{-1}\, B\, A^{-1}). \tag{3.4}$$

Como caso particular, (3.4) da la distribución asintótica del CMLE cuando $\psi(u) = u$.

3.1 Derivación de la matriz de covarianzas asintótica

Se calcularán explícitamente las matrices A y B, donde $A = E\{D\delta_t(\beta_0, \Sigma_0)\}$ y B es la matriz de covarianza de δ_t.

Se supondrá que $E(a_t w_t) = 0$. Esta hipótesis se satisface si los a_t tienen distribución simétrica, o sea si $-a_t$ y a_t tienen la misma distribución.

En lo que sigue se omitirán, por claridad, los argumentos (β_0, Σ_0) en δ_t y se denotarán:

$$\begin{aligned} b_t &= (a_t' \Sigma_0^{-1} a_t)^{1/2}, \\ w_t &= w(b_t) \\ \text{y } w_t^* &= \frac{\psi'(b_t) b_t - \psi(b_t)}{b_t^3}. \end{aligned}$$

Particionando las matrices A y B en la forma:

$$A = \begin{pmatrix} A^{(11)}_{p\times p} & A^{(12)}_{p\times q} & A^{(13)}_{p\times 1} \\ A^{(21)}_{q\times p} & A^{(22)}_{q\times q} & A^{(23)}_{q\times 1} \\ A^{(31)}_{1\times p} & A^{(32)}_{1\times q} & A^{(33)}_{1\times 1} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B^{(11)}_{p\times p} & B^{(12)}_{p\times q} & B^{(13)}_{p\times 1} \\ B^{(21)}_{q\times p} & B^{(22)}_{q\times q} & B^{(23)}_{q\times 1} \\ B^{(31)}_{1\times p} & B^{(32)}_{1\times q} & B^{(33)}_{1\times 1} \end{pmatrix},$$

se demostrará que los elementos de los diferentes bloques están dados por las siguientes expresiones:

$$A_{ij}^{(11)} = E\left[\frac{\partial \delta_{i,t}^{(1)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\right] = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h Q \pi_s') \otimes [\gamma_n' \Sigma_0^{-1}\{E(w_t)I_m + U\Sigma_0^{-1}\}\gamma_{i+n+h-j-s}]$$

$$1 \le i \le p, \quad 1 \le j \le p$$

$$A_{ij}^{(12)} = E\left[\frac{\partial \delta_{i,t}^{(1)}}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}[\pi_h Q \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1}\{E(w_t)I_m + U\Sigma_0^{-1}\}\gamma_{i+n+h-j}]$$

$$1 \le i \le p, \quad 1 \le j \le q$$

$$A_{i1}^{(13)} = E\left(\frac{\partial \delta_{i,t}^{(1)}}{\partial \mu'}\right) = 0 \qquad 1 \le i \le p$$

$$A_{ij}^{(21)} = E\left[\frac{\partial \delta_{i,t}^{(2)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\right] = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}[Q\pi_s' \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1}\{E(w_t)I_m + U\Sigma_0^{-1}\}\gamma_{i+n-j-s}]$$

$$1 \le i \le q, \quad 1 \le j \le p$$

$$A_{ij}^{(22)} = E\left[\frac{\partial \delta_{i,t}^{(2)}}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}[Q \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1}\{E(w_t)I_m + U\,\Sigma_0^{-1}\}\gamma_{i+n-j}]$$

$$1 \le i \le q, \quad 1 \le j \le q$$

$$A_{i1}^{(23)} = E\left(\frac{\partial \delta_{i,t}^{(2)}}{\partial \mu'}\right) = 0 \qquad 1 \le i \le q$$

$$A_{1j}^{(31)} = E\left[\frac{\partial \delta_t^{(3)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\right] = 0 \qquad 1 \le j \le p$$

$$A_{1j}^{(32)} = E\left[\frac{\partial \delta_t^{(3)}}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}\right] = 0 \qquad 1 \le j \le q$$

$$A_{11}^{(33)} = E\left(\frac{\partial \delta_t^{(3)}}{\partial \mu'}\right) = -\{E(w_t)I_m + U\,\Sigma_0^{-1}\}\left(I_m - \sum_{l=1}^{q}\theta_l\right)^{-1}\left(I_m - \sum_{l=1}^{p}\phi_l\right)$$

$$B_{ij}^{(11)} = E(\delta_{i,t}^{(1)}\delta_{j,t}^{(1)'}) = \frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h\Sigma_0\pi_s') \otimes (\gamma_n'\Sigma_0^{-1}\gamma_{i+n+h-j-s})$$

$$1 \le i \le p, \quad 1 \le j \le p$$

$$B_{ij}^{(12)} = B_{ji}^{(21)} = E(\delta_{i,t}^{(1)}\delta_{j,t}^{(2)'}) = \frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(\pi_h\Sigma_0 \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}\gamma_{i+n+h-j})$$

$$1 \le i \le p, \quad 1 \le j \le q$$

$$B_{i1}^{(13)} = B_{1i}^{(31)} = E(\delta_{i,t}^{(1)}\delta_t^{(3)'}) = 0 \qquad 1 \le i \le p$$

$$B_{ij}^{(22)} = E(\delta_{i,t}^{(2)}\delta_{j,t}^{(2)'}) = \frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}(\Sigma_0 \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}\gamma_{i+n-j})$$

$$1 \le i \le q, \quad 1 \le j \le q$$

$$B_{i1}^{(23)} = B_{1i}^{(32)} = E(\delta_{i,t}^{(2)}\delta_t^{(3)\prime}) = 0 \qquad\qquad 1 \le i \le q$$

$$B_{11}^{(33)} = E(\delta_t^{(3)}\delta_t^{(3)\prime}) = \mathrm{E}(w_t^2 a_t a_t') = \frac{1}{c}\Sigma_0$$

Demostración:

Bloque $A^{(11)}$:

El primer bloque de la partición está compuesto por $p \times p$ matrices, cada una de ellas de dimensión $m^2 \times m^2$, siendo la matriz ij la esperanza de la derivada de $\delta_{i,t}^{(1)}$ con respecto a $\{\ \mathrm{vec}(\phi_j)\}'$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta_{i,t}^{(1)}}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\phi_j)\}'} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\Bigg[(I_m \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t a_{t-i-n-h}' w_{t-i-n-h})\,\frac{\partial \mathrm{vec}\ (\pi_h')}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\phi_j)\}'} \\
&+ (\pi_h \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t a_{t-i-n-h}')\,\frac{\partial \mathrm{vec}\ (I_m w_{t-i-n-h})}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\phi_j)\}'} \\
&+ (\pi_h w_{t-i-n-h} \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t)\,\frac{\partial a_{t-i-n-h}}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\phi_j)\}'} \\
&+ (\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t)\,\frac{\partial w_t}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\phi_j)\}'} \\
&+ (\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} w_t \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1})\,\frac{\partial a_t}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\phi_j)\}'}\Bigg].
\end{aligned}$$

Usando que, si F y G son vectores de dimensión m, $F'(G' \otimes I_m) = \{\mathrm{vec}\ (FG')\}'$, y que

$$\frac{\partial(a_t'\Sigma_0^{-1}a_t)}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\xi)\}'} = 2a_t'\Sigma_0^{-1}\frac{\partial a_t}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\xi)\}'}$$

se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial w_t}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} &= \frac{\psi'(b_t)b_t-\psi(b_t)}{b_t^2}\,\frac{\partial b_t}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\\
&= w_t^*\,\frac{1}{2}\,\frac{\partial(a_t'\Sigma_0^{-1}a_t)}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\\
&= w_t^* a_t'\Sigma_0^{-1}\{-\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_r(a'_{t-j-r-s}\pi'_s\otimes I_m)\}\\
&= \{\text{vec }(-\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\gamma_r'\Sigma_0^{-1}a_t a'_{t-j-r-s}\pi'_s w_t^*)\}'.
\end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\delta_{i,t}^{(1)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} = {} & \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(I_m\otimes\gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t a'_{t-i-n-h}w_{t-i-n-h})\,\frac{\partial\text{vec }(\pi_h')}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\\
& -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h\otimes\gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t a'_{t-i-n-h})\\
& \quad [\text{vec } I_m\otimes\{\text{ vec }(\gamma_r'\Sigma_0^{-1}a_{t-i-n-h}w^*_{t-i-n-h}a'_{t-i-n-h-j-r-s}\pi_s')\}']\\
& -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h}\otimes\gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t)(a'_{t-i-n-h-j-r-s}\pi'_s\otimes\gamma_r)\\
& -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h}a_{t-i-n-h}\otimes\gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t)\\
& \quad \{\text{ vec }(\gamma_r'\Sigma_0^{-1}a_t a'_{t-j-r-s}\pi'_s w_t^*)\}'\\
& -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h}a_{t-i-n-h}w_t\otimes\gamma_n'\Sigma_0^{-1})(a'_{t-j-r-s}\pi'_s\otimes\gamma_r).
\end{aligned}$$

Dado que $E(a_t w_t) = 0$, la esperanza de las tres primeras sumatorias es cero. En efecto, en el caso de la primera, $t-i-n-h < t$ y, por lo tanto $E(a_t w_t a'_{t-i-n-h} w_{t-i-n-h}) = 0$. Respecto a la segunda y a la tercera, lo mismo ocurre ya que $t-i-n-h-j-r-s < t-i-n-h < t$.

Usando que, si F y G son vectores de dimensión m, $\{\text{vec}\,(FG')\}' = G' \otimes F'$, la cuarta sumatoria puede escribirse en la forma:

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} \otimes \gamma'_n \Sigma_0^{-1} a_t)(a'_{t-j-r-s}\pi'_s \otimes a'_t \Sigma_0^{-1}\gamma_r w_t^*)$$

$$= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} a'_{t-j-r-s}\pi'_s \otimes \gamma'_n \Sigma_0^{-1} a_t a'_t \Sigma_0^{-1}\gamma_r w_t^*).$$

La quinta es igual a

$$-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} a'_{t-j-r-s}\pi'_s \otimes w_t \gamma'_n \Sigma_0^{-1}\gamma_r).$$

Al tomar esperanza, los únicos sumandos distintos de cero son aquellos para los cuales $t-i-n-h = t-j-r-s$, y, denotando

$$Q = E(w_t\, a_t\, a'_t), \qquad U = E(w_t^*\, a_t\, a'_t),$$

se obtiene

$$E\left[\frac{\partial \delta_{i,t}^{(1)}}{\partial\{\text{vec}\ (\phi_j)\}'}\right] = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h Q \pi'_s) \otimes [\gamma'_n \Sigma_0^{-1}\{E(w_t) I_m + U\Sigma_0^{-1}\}\gamma_{i+n+h-j-s}]. \quad (3.5)$$

Bloque $A^{(12)}$:

El bloque $A^{(12)}$ de la partición está compuesto por $p \times q$ matrices de dimensión $m^2 \times m^2$, siendo la matriz ij la esperanza de la derivada de $\delta_{i,t}^{(1)}$ con respecto a $\{\ \text{vec}(\theta_j)\}'$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \delta_{i,t}^{(1)}}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}[(I_m \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n-h}' w_{t-i-n-h}) \frac{\partial \text{vec } (\pi_h')}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'} \\
&+ (\pi_h \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n-h}') \frac{\partial \text{vec } (I_m w_{t-i-n-h})}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'} \\
&+ (\pi_h w_{t-i-n-h} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t) \frac{\partial a_{t-i-n-h}}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'} \\
&+ (\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t) \frac{\partial w_t}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'} \\
&+ (\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} w_t \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1}) \frac{\partial a_t}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'} \\
&+ (\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} w_t a_t' \Sigma_0^{-1} \otimes I_m) \frac{\partial \text{vec } (\gamma_n')}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'}],
\end{aligned}
$$

o bien,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \delta_{i,t}^{(1)}}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(I_m \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n-h}' w_{t-i-n-h}) \frac{\partial \text{vec } (\pi_h')}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'} \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n-h}') \\
&\quad [\text{vec } (I_m) \otimes \{\text{vec } (\gamma_s' \Sigma_0^{-1} a_{t-i-n-h} w_{t-i-n-h}^{*} a_{t-i-n-h-j-s}'\}'] \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t)(a_{t-i-n-h-j-s}' \otimes \gamma_s) \\
&+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t) \\
&\quad [\text{vec } (\gamma_s \Sigma_0^{-1} a_t w_t^{*} a_{t-j-s}')]'
\end{aligned}
$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} w_t \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1})(a_{t-j-s}' \otimes \gamma_s)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} w_t a_t' \Sigma_0^{-1} \otimes I_m)\,\frac{\partial \text{vec }(\gamma_n')}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(I_m \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n-h}' w_{t-i-n-h})\,\frac{\partial \text{vec }(\pi_h')}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n-h}')$$
$$[\text{vec }(I_m) \otimes \{\text{vec }(\gamma_s' \Sigma_0^{-1} a_{t-i-n-h} w_{t-i-n-h}^* a_{t-i-n-h-j-s}'\}']$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t)(a_{t-i-n-h-j-s}' \otimes \gamma_s)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} a_{t-j-s}' \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t a_t' \Sigma_0^{-1} \gamma_s w_t^*)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} w_t a_{t-j-s}' \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} \gamma_s)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} w_t a_t' \Sigma_0^{-1} \otimes I_m)\,\frac{\partial \text{vec }(\gamma_n')}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}.$$

Al tomar esperanza, las tres primeras sumatorias y la última se anulan ya que, como en el caso de la derivada con respecto a ϕ_j, $t-i-n-h<t$ en el caso de la primera y la sexta, y $t-i-n-h-j-s<t-i-n-h<t$ en el caso de la segunda y la tercera sumatorias. Respecto a la cuarta y la quinta, sólo tienen esperanza distinta de cero aquellos sumandos para los cuáles $t-i-n-h=t-j-s$, y, usando la notación antes introducida, se obtiene

$$E\left[\frac{\partial \delta_{i,t}^{(1)}}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}\right] = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}[\pi_h Q \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1}\{E(w_t) I_m + U\Sigma_0^{-1}\}\gamma_{i+n+h-j}]. \qquad (3.6)$$

Bloque $A^{(13)}$:

Este bloque está compuesto por $p \times 1$ matrices de dimensión $m^2 \times m^2$, siendo la i–ésima matriz la esperanza de la derivada de $\delta_{i,t}^{(1)}$ con respecto a μ'.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta_{i,t}^{(1)}}{\partial \mu'} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\left[(\pi_h \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n-h}') \frac{\partial \text{vec}\,(I_m w_{t-i-n-h})}{\partial \mu'}\right. \\
&+ (\pi_h w_{t-i-n-h} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t) \frac{\partial a_{t-i-n-h}}{\partial \mu'} \\
&+ (\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t) \frac{\partial w_t}{\partial \mu'} \\
&\left. + (\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} w_t \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1}) \frac{\partial a_t}{\partial \mu'}\right].
\end{aligned}$$

Usando que si $F_{m\times m}, G_{m\times 1}$ y $H_{m\times m}$, $(F\otimes G)H = (FH \otimes G)$ y que si $F_{m\times 1}, G_{m\times 1}$ y $H_{1\times m}$, $(F\otimes G)H = (F\otimes GH)$, la expresión anterior se puede escribir en la forma siguiente:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta_{i,t}^{(1)}}{\partial \mu'} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\Big[- (\pi_h \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n-h}') \\
&\left(\text{vec}\,(I_m) \otimes w_{t-i-n-h}^* a_{t-i-n-h} \Sigma_0^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q} \theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p} \phi_l\right)\right) \\
&- \left\{(\pi_h w_{t-i-n-h} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q} \theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p} \phi_l\right) \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t\right\} \\
&- \left\{\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t^* a_t' \Sigma_0^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q} \theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p} \phi_l\right)\right\} \\
&- \left\{\pi_h w_{t-i-n-h} a_{t-i-n-h} w_t \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q} \theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p} \phi_l\right)\right\}\Big].
\end{aligned}$$

Dado que $E(a_t w_t) = 0$, resulta

$$E\left(\frac{\partial \delta_{i,t}^{(1)}}{\partial \mu'}\right) = 0. \tag{3.7}$$

Bloque $A^{(21)}$:

El bloque $A^{(21)}$ de la partición está compuesto por $q \times p$ matrices de dimensión $m^2 \times m^2$, siendo la matriz ij la esperanza de la derivada de $\delta_{i,t}^{(2)}$ con respecto a $\{\text{ vec}(\phi_j)\}'$.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta_{i,t}^{(2)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(I_m \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n}') \frac{\partial \text{vec }(I_m w_{t-i-n})}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\right. \\
&+ (I_m w_{t-i-n} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t) \frac{\partial a_{t-i-n}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} \\
&+ (w_{t-i-n} a_{t-i-n} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t) \frac{\partial w_t}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} \\
&\left.+ (w_{t-i-n} a_{t-i-n} w_t \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1}) \frac{\partial a_t}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\right].
\end{aligned}$$

Desarrollando,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta_{i,t}^{(2)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} &= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(I_m \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n}') \\
&\quad [\text{ vec }(I_m) \otimes \{\text{vec }(\gamma_r' \Sigma_0^{-1} a_{t-i-n} a_{t-i-n-j-r-s}' \pi_s' w_{t-i-n}^*)\}'] \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(I_m w_{t-i-n} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t)(a_{t-i-n-j-r-s}' \pi_s' \otimes \gamma_r) \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(w_{t-i-n} a_{t-i-n} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t)[\{\text{ vec }(\gamma_r' \Sigma_0^{-1} a_t a_{t-j-r-s}' \pi_s' w_t^*)\}'] \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(w_{t-i-n} a_{t-i-n} w_t \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1})(a_{t-j-r-s}' \pi_s' \otimes \gamma_r).
\end{aligned}$$

Usando que $\{ \text{ vec } (\gamma_r'\Sigma_0^{-1}a_t a_{t-j-r-s}'\pi_s' w_t^*)\}' = (a_{t-j-r-s}'\pi_s' \otimes a_t'\Sigma_0^{-1}\gamma_r w_t^*)$,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \delta_{i,t}^{(1)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} &= -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(I_m \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t a_{t-i-n}') \\
&\quad [\text{ vec }(I_m) \otimes \{\text{vec }(\gamma_r'\Sigma_0^{-1}a_{t-i-n}a_{t-i-n-j-r-s}'\pi_s' w_{t-i-n}^*)\}'] \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(I_m w_{t-i-n} \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t)(a_{t-i-n-j-r-s}'\pi_s' \otimes \gamma_r) \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(w_{t-i-n}a_{t-i-n}a_{t-j-r-s}'\pi_s' \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t a_t'\Sigma_0^{-1}\gamma_r w_t^*) \\
&\quad - \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(w_{t-i-n}a_{t-i-n}w_t a_{t-j-r-s}'\pi_s' \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}\gamma_r).
\end{aligned}
$$

Al tomar esperanza, las dos primeras sumatorias se anulan. En las dos últimas sumatorias sólo tienen esperanza distinta de cero aquellos sumandos para los cuáles $t-i-n = t-j-r-s$, y se obtiene

$$
E\left[\frac{\partial \delta_{i,t}^{(2)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\right] = -\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}[Q\pi_s' \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}\{E(w_t)I_m + U\Sigma_0^{-1}\}\gamma_{i+n-j-s}]. \tag{3.8}
$$

Bloque $A^{(22)}$:

Este bloque está compuesto por $q \times q$ matrices de dimensión $m^2 \times m^2$, siendo la matriz ij la esperanza de la derivada de $\delta_{i,t}^{(2)}$ con respecto a $\{ \text{ vec}(\theta_j)\}'$.

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \delta_{i,t}^{(2)}}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left[(I_m \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t a_{t-i-n}')\,\frac{\partial \text{vec }(I_m w_{t-i-n})}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}\right. \\
&\quad \left. + (I_m w_{t-i-n} \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t)\,\frac{\partial a_{t-i-n}}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}\right.
\end{aligned}
$$

$$+ (w_{t-i-n}a_{t-i-n} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t) \frac{\partial w_t}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'}$$

$$+ (w_{t-i-n}a_{t-i-n}w_t \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1}) \frac{\partial a_t}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'}$$

$$\left. + (w_{t-i-n}a_{t-i-n}w_t a_t' \Sigma_0^{-1} \otimes I_m) \frac{\partial \text{vec } (\gamma_n')}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'} \right] .$$

O bien,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \delta_{i,t}^{(2)}}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (I_m \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n}') \\
&\quad [\text{ vec } (I_m) \otimes \{\text{vec } (\gamma_s' \Sigma_0^{-1} a_{t-i-n} a_{t-i-n-j-s}' w_{t-i-n}^*)\}'] \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (I_m w_{t-i-n} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t)(a_{t-i-n-j-s}' \otimes \gamma_s) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (w_{t-i-n}a_{t-i-n} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t)\{\text{ vec } (\gamma_s' \Sigma_0^{-1} a_t a_{t-j-s}' w_t^*)\}' \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (w_{t-i-n}a_{t-i-n}w_t \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1})(a_{t-j-s}' \otimes \gamma_s) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty} (w_{t-i-n}a_{t-i-n}w_t a_t' \Sigma_0^{-1} \otimes I_m) \frac{\partial \text{vec } (\gamma_n')}{\partial \{\text{vec } (\theta_j)\}'} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (I_m \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n}') \\
&\quad [\text{ vec } (I_m) \otimes \{\text{vec } (\gamma_s' \Sigma_0^{-1} a_{t-i-n} a_{t-i-n-j-s}' w_{t-i-n}^*)\}'] \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (I_m w_{t-i-n} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t)(a_{t-i-n-j-s}' \otimes \gamma_s) \\
&\quad + \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty} (w_{t-i-n}a_{t-i-n} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t)(a_{t-j-s}' \otimes a_t' \Sigma_0^{-1} \gamma_s' w_t^*)
\end{aligned}$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(w_{t-i-n}a_{t-i-n}a'_{t-j-s}w_t \otimes \gamma'_n\Sigma_0^{-1}\gamma_s)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(w_{t-i-n}a_{t-i-n}w_t a'_t\Sigma_0^{-1} \otimes I_m)\,\frac{\partial \text{vec }(\gamma'_n)}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}.$$

Al tomar esperanzas, las dos primeras sumatorias y la última se anulan ya que $t-i-n-j-s < t-i-n < t$, y los únicos sumandos no nulos en las otras dos sumatorias son aquellos para los cuáles $t-i-n = t-j-s$. Por lo tanto,

$$E\left[\frac{\partial\delta_{i,t}^{(2)}}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}\right] = \textstyle\sum_{n=0}^{\infty}[Q \otimes \gamma'_n\Sigma_0^{-1}\{E(w_t)I_m + U\,\Sigma_0^{-1}\}\gamma_{i+n-j}] \tag{3.9}$$

Bloque $A^{(23)}$:

Este bloque está compuesto por $q\times 1$ matrices de dimensión $m^2\times m^2$, siendo la i–ésima matriz la esperanza de la derivada de $\delta_{i,t}^{(2)}$ con respecto a μ'.

$$\begin{aligned}\frac{\partial\delta_{i,t}^{(2)}}{\partial\mu'} &= \sum_{n=0}^{\infty}\Bigg[(I_m \otimes \gamma'_n\Sigma_0^{-1}a_t w_t a'_{t-i-n})\,\frac{\partial \text{vec }(I_m w_{t-i-n})}{\partial\mu'}\\ &\quad + (I_m w_{t-i-n} \otimes \gamma'_n\Sigma_0^{-1}a_t w_t)\,\frac{\partial a_{t-i-n}}{\partial\mu'}\\ &\quad + (w_{t-i-n}a_{t-i-n} \otimes \gamma'_n\Sigma_0^{-1}a_t)\,\frac{\partial w_t}{\partial\mu'}\\ &\quad + (w_{t-i-n}a_{t-i-n}w_t \otimes \gamma'_n\Sigma_0^{-1})\,\frac{\partial a_t}{\partial\mu'}\Bigg].\end{aligned}$$

Desarrollando y usando propiedades del producto tensorial ya mencionadas,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \delta_{i,t}^{(2)}}{\partial \mu'} &= -\sum_{n=0}^{\infty} (I_m \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n}') \\
&\quad \left[\text{vec}\,(I_m) \otimes (w_{t-i-n}^* a_{t-i-n}' \Sigma_0^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q} \theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p} \phi_l\right)\right] \\
&\quad -\sum_{n=0}^{\infty} (I_m w_{t-i-n} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t) \left[\left(I_m - \sum_{l=1}^{q} \theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p} \phi_l\right)\right] \\
&\quad -\sum_{n=0}^{\infty} (w_{t-i-n} a_{t-i-n} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t) \left[w_t^* a_t' \Sigma_0^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q} \theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p} \phi_l\right)\right] \\
&\quad -\sum_{n=0}^{\infty} \left[w_{t-i-n} a_{t-i-n} w_t \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q} \theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p} \phi_l\right)\right] \\
&= -\sum_{n=0}^{\infty} (I_m \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n}') \\
&\quad \left[\text{vec}\,(I_m) \otimes (w_{t-i-n}^* a_{t-i-n}' \Sigma_0^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q} \theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p} \phi_l\right)\right] \\
&\quad -\sum_{n=0}^{\infty} \left[w_{t-i-n} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q} \theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p} \phi_l\right) \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t\right] \\
&\quad -\sum_{n=0}^{\infty} \left[w_{t-i-n} a_{t-i-n} \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t^* a_t' \Sigma_0^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q} \theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p} \phi_l\right)\right] \\
&\quad -\sum_{n=0}^{\infty} \left[w_{t-i-n} a_{t-i-n} w_t \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q} \theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p} \phi_l\right)\right].
\end{aligned}
$$

Tomando esperanzas, dado que $t - i - n < t$, se obtiene

$$
E\left(\frac{\partial \delta_{i,t}^{(2)}}{\partial \mu'}\right) = 0. \tag{3.10}
$$

Bloque $A^{(31)}$:

El bloque $A^{(31)}$ de la partición está compuesto por $1 \times p$ matrices de dimensión $m^2 \times m^2$, siendo la j–ésima matriz la esperanza de la derivada de $\delta_t^{(3)}$ con respecto a $\{\ \text{vec}(\phi_j)\}'$.

$$\frac{\partial \delta_t^{(3)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} = (I_1 \otimes a_t)\frac{\partial w_t}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} + (w_t \otimes I_m)\frac{\partial a_t}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}$$

$$= -a_t\left\{\text{vec }(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t a_{t-j-n-h}'\pi_h' w_t^*)\right\}' - w_t\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(a_{t-j-n-h}'\pi_h' \otimes \gamma_n),$$

y, tomando esperanzas y usando que, si F y G son vectores de dimensión m, $F\,G' = F \otimes G'$, se obtiene

$$E\left[\frac{\partial \delta_t^{(3)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\right] = 0. \tag{3.11}$$

Bloque $A^{(32)}$:

Este bloque de la partición está compuesto por $1 \times q$ matrices de dimensión $m^2 \times m^2$, siendo la j–ésima matriz la esperanza de la derivada de $\delta_t^{(3)}$ con respecto a $\{\ \text{vec}(\theta_j)\}'$.

$$\frac{\partial \delta_t^{(3)}}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'} = (I_1 \otimes a_t)\frac{\partial w_t}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'} + (w_t \otimes I_m)\frac{\partial a_t}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}$$

$$= a_t\left\{\text{vec }(\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t a_{t-j-n}' w_t^*)\right\}' + w_t\sum_{n=0}^{\infty}(a_{t-j-n}' \otimes \gamma_n),$$

y, al tomar esperanza,

$$E\left[\frac{\partial \delta_t^{(3)}}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}\right] = 0. \tag{3.12}$$

Bloque $A^{(33)}$:

Este bloque está compuesto por una matriz de dimensión $m^2 \times m^2$, la esperanza de la derivada de $\delta_t^{(3)}$ con respecto a μ'.

$$\frac{\partial \delta_t^{(3)}}{\partial \mu'} = (I_1 \otimes a_t)\frac{\partial w_t}{\partial \mu'} + (w_t \otimes I_m)\frac{\partial a_t}{\partial \mu'}$$

$$= -\left[a_t a_t' w_t^* \Sigma_0^{-1}\left(I_m - \sum_{l=1}^{q}\theta_l\right)^{-1}\left(I_m - \sum_{l=1}^{p}\phi_l\right)\right] - w_t\left[\left(I_m - \sum_{l=1}^{q}\theta_l\right)^{-1}\left(I_m - \sum_{l=1}^{p}\phi_l\right)\right],$$

y, al tomar esperanzas y con la notación usual, se obtiene

$$E\left(\frac{\partial \delta_t^{(3)}}{\partial \mu'}\right) = -\{E(w_t)I_m + U\,\Sigma_0^{-1}\}\left(I_m - \sum_{l=1}^{q}\theta_l\right)^{-1}\left(I_m - \sum_{l=1}^{p}\phi_l\right). \tag{3.13}$$

Bloque $B^{(11)}$:

El primer bloque de la partición está compuesto por $p \times p$ matrices de dimensión $m^2 \times m^2$, siendo la matriz ij la esperanza del producto de $\delta_{i,t}^{(1)}$ con $\delta_{j,t}^{(1)}$.

$$\begin{aligned}\delta_{i,t}^{(1)}\,\delta_{j,t}^{(1)'} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\{\text{ vec }(\gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t a_{t-i-n-h}' w_{t-i-n-h}\pi_h')\}\\ &\quad\{\text{ vec }(\gamma_r'\Sigma_0^{-1}a_t w_t a_{t-j-r-s}' w_{t-j-r-s}\pi_s')\}'\end{aligned}$$

y, usando que: vec $(FGH) = (H' \otimes F)$vec (G), se obtiene,

$$\begin{aligned}\delta_{i,t}^{(1)}\delta_{j,t}^{(1)'} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1})\{\text{ vec }(a_t w_t a_{t-i-n-h}' w_{t-i-n-h})\}\\ &\quad\{\text{ vec }(a_t w_t a_{t-j-r-s}' w_{t-j-r-s})\}'(\pi_s' \otimes \Sigma_0^{-1}\gamma_r).\end{aligned}$$

Al tomar esperanzas, los únicos términos que no se anulan son aquellos con $t-i-n-h = t-j-r-s$. Además,

$$E[\{\text{ vec }(a_t w_t a_{t-i-n-h}' w_{t-i-n-h})\}\{\text{ vec }(a_t w_t a_{t-i-n-h}' w_{t-i-n-h})\}'] = \frac{1}{c^2}(\Sigma_0 \otimes \Sigma_0),$$

entonces

$$E(\delta_{i,t}^{(1)}\delta_{j,t}^{(1)'}) = \frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h\Sigma_0\pi_s') \otimes (\gamma_n'\Sigma_0^{-1}\gamma_{i+n+h-j-s}). \tag{3.14}$$

Bloque $B^{(12)}$:

Este bloque de la partición está compuesto por $p \times q$ matrices de dimensión $m^2 \times m^2$, siendo la matriz ij la esperanza del producto de $\delta_{i,t}^{(1)}$ con $\delta_{j,t}^{(2)}$.

$$\begin{aligned}
\delta_{i,t}^{(1)}\,\delta_{j,t}^{(2)\prime} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}\{\text{ vec }(\gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t a_{t-i-n-h}' w_{t-i-n-h}\pi_h')\} \\
&\quad \{\text{ vec }(\gamma_s'\Sigma_0^{-1}a_t w_t a_{t-j-s}' w_{t-j-s})\}' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1})\{\text{ vec }(a_t w_t a_{t-i-n-h}' w_{t-i-n-h})\} \\
&\quad \{\text{ vec }(a_t w_t a_{t-j-s}' w_{t-j-s})\}'\,(I_m \otimes \Sigma_0^{-1}\gamma_s).
\end{aligned}$$

Tomando esperanzas,

$$E(\delta_{i,t}^{(1)}\delta_{j,t}^{(2)\prime}) = \frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(\pi_h\Sigma_0 \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1}\gamma_{i+n+h-j}). \tag{3.15}$$

Bloque $B^{(13)}$:

Este bloque está compuesto por $p \times 1$ matrices de dimensión $m^2 \times m^2$, siendo la i–ésima matriz la esperanza del producto de $\delta_{i,t}^{(1)}$ con $\delta_t^{(3)}$.

$$\begin{aligned}
\delta_{i,t}^{(1)}\,\delta_t^{(3)\prime} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\{\text{ vec }(\gamma_n'\Sigma_0^{-1}a_t w_t a_{t-i-n-h}' w_{t-i-n-h}\pi_h')\}\, w_t a_t' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(\pi_h \otimes \gamma_n'\Sigma_0^{-1})\{\text{ vec }(a_t w_t a_{t-i-n-h}' w_{t-i-n-h}\} a_t' w_t,
\end{aligned}$$

entonces

$$E(\delta_{i,t}^{(1)}\delta_t^{(3)\prime}) = 0. \tag{3.16}$$

Bloque $B^{(22)}$:

Este bloque de la partición está compuesto por $q \times q$ matrices de dimensión $m^2 \times m^2$, siendo la matriz ij la esperanza del producto de $\delta_{i,t}^{(2)}$ con $\delta_{j,t}^{(2)}$.

$$\begin{aligned}
\delta_{i,t}^{(2)}\,\delta_{j,t}^{(2)\prime} &= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\{\text{ vec } (\gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n}' w_{t-i-n})\}\ \{\text{ vec } (\gamma_h' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-j-h}' w_{t-j-h})\}' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(I_m \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1})\{\text{ vec } (a_t w_t a_{t-i-n}' w_{t-i-n})\} \\
&\quad \{\text{ vec } (a_t w_t a_{t-j-h}' w_{t-j-h})\}'(I_m \otimes \Sigma_0^{-1}\gamma_h).
\end{aligned}$$

Como antes, al tomar esperanzas, los únicos sumandos no nulos son aquellos para los cuáles $t-i-n=t-j-h$, y se obtiene

$$E(\delta_{i,t}^{(2)}\delta_{j,t}^{(2)\prime}) = \frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}(\Sigma_0 \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1}\gamma_{i+n-j}). \tag{3.17}$$

Bloque $B^{(23)}$:

Este bloque está compuesto por $q \times 1$ matrices de dimensión $m^2 \times m^2$, siendo la i–ésima matriz la esperanza del producto de $\delta_{i,t}^{(2)}$ con $\delta_t^{(3)}$.

$$\begin{aligned}
\delta_{i,t}^{(2)}\,\delta_t^{(3)\prime} &= \sum_{n=0}^{\infty}\{\text{ vec } (\gamma_n' \Sigma_0^{-1} a_t w_t a_{t-i-n}' w_{t-i-n})\}\ w_t a_t' \\
&= \sum_{n=0}^{\infty}(I_m \otimes \gamma_n' \Sigma_0^{-1})\{\text{ vec } (a_t w_t a_{t-i-n}' w_{t-i-n}\} a_t' w_t,
\end{aligned}$$

entonces

$$E(\delta_{i,t}^{(2)}\delta_t^{(3)\prime}) = 0. \tag{3.18}$$

Bloque $B^{(33)}$:

Este bloque está compuesto por una matriz de dimensión $m^2 \times m^2$, la esperanza del producto de $\delta_t^{(3)}$ con $\delta_t^{(3)}$.

$$E(\delta_t^{(3)}\delta_t^{(3)\prime}) \;=\; \mathrm{E}(w_t^2 a_t a_t') = \frac{1}{c}\,\Sigma_0. \tag{3.19}$$

3.2 Caso esférico

Si se supone que los a_t's tienen distribución esférica con $\Sigma_0 = I_m$, entonces se puede demostrar que

$$Q = \frac{E(w_t a_t' a_t)}{m} I_m, \qquad U = \frac{E(w_t^* a_t' a_t)}{m} I_m = \frac{E\{\psi'(b_t) - w_t\}}{m} I_m. \tag{3.20}$$

En efecto, si consideramos, por ejemplo, el caso de la matriz Q, los elementos que están fuera de la diagonal $(i \neq j)$ son nulos, y para verificarlo, basta considerar dos vectores que difieren sólo en el signo de una de sus componentes $a_{j,t}$ y que por lo tanto tienen igual norma. Respecto a los elementos de la diagonal, cualquiera sea i,

$$Q_{ii} = E(w_t(\|a_t\|)\, a_{i,t}\, a_{i,t}) = q,$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{m} Q_{ii} = E(w_t(\|a_t\|)\|a_t\|^2) = m\, q$$

y, por lo tanto

$$q = \frac{E(w_t a_t' a_t)}{m}.$$

Del mismo modo, se demuestra la otra expresión de (3.20).

Llamando

$$v = \{E(w_t) + \frac{E(w_t^* a_t' a_t)}{m}\},$$

las expresiones (3.5)-(3.19) se reducen a:

$$E\left[\frac{\partial\delta_{i,t}^{(1)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\right] = -qv\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h\pi_s')\otimes[\gamma_n'\gamma_{i+n+h-j-s}], \tag{3.21}$$

$$E\left[\frac{\partial\delta_{i,t}^{(1)}}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}\right] = qv\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}[\pi_h\otimes\gamma_n'\gamma_{i+n+h-j}], \tag{3.22}$$

$$E\left(\frac{\partial\delta_{i,t}^{(1)}}{\partial\mu'}\right) = 0, \tag{3.23}$$

$$E\left[\frac{\partial\delta_{i,t}^{(2)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\right] = -qv\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}[\pi_s'\otimes\gamma_n'\gamma_{i+n-j-s}], \tag{3.24}$$

$$E\left[\frac{\partial\delta_{i,t}^{(2)}}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}\right] = qv\textstyle\sum_{n=0}^{\infty}[I_m\otimes\gamma_n'\gamma_{i+n-j}], \tag{3.25}$$

$$E\left(\frac{\partial\delta_{i,t}^{(2)}}{\partial\mu'}\right) = 0, \tag{3.26}$$

$$E\left[\frac{\partial\delta_{t}^{(3)}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}\right] = 0, \tag{3.27}$$

$$E\left[\frac{\partial\delta_{t}^{(3)}}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}\right] = 0, \tag{3.28}$$

$$E\left(\frac{\partial\delta_{t}^{(3)}}{\partial\mu'}\right) = -v\left(I_m-\sum_{l=1}^{q}\theta_l\right)^{-1}\left(I_m-\sum_{l=1}^{p}\phi_l\right), \tag{3.29}$$

$$E(\delta_{i,t}^{(1)}\delta_{j,t}^{(1)\prime}) = \frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h\pi_s') \otimes (\gamma_n'\gamma_{i+n+h-j-s}), \tag{3.30}$$

$$E(\delta_{i,t}^{(1)}\delta_{j,t}^{(2)\prime}) = \frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(\pi_h \otimes \gamma_n'\gamma_{i+n+h-j}), \tag{3.31}$$

$$E(\delta_{i,t}^{(1)}\delta_{t}^{(3)\prime}) = 0, \tag{3.32}$$

$$E(\delta_{i,t}^{(2)}\delta_{j,t}^{(2)\prime}) = \frac{1}{c^2}\sum_{n=0}^{\infty}(I_m \otimes \gamma_n'\gamma_{i+n-j}), \tag{3.33}$$

$$E(\delta_{i,t}^{(2)}\delta_{t}^{(3)\prime}) = 0, \tag{3.34}$$

$$E(\delta_{t}^{(3)}\delta_{t}^{(3)\prime}) = \mathrm{E}(w_t^2 a_t a_t') = \frac{1}{c}\, I_m. \tag{3.35}$$

Sea la siguiente partición de la matriz de covarianza asintótica $V = A^{-1}\, B\, A^{-1}$

$$V = \left(\begin{array}{cccc|cccc|c}
V_{11}^{(11)} & V_{12}^{(11)} & & V_{1p}^{(11)} & V_{11}^{(12)} & V_{12}^{(12)} & & V_{1q}^{(12)} & 0 \\
 & & & & & & & & \\
V_{p1}^{(11)} & V_{p2}^{(11)} & \cdots & V_{pp}^{(11)} & V_{p1}^{(12)} & V_{p2}^{(12)} & \cdots & V_{pq}^{(12)} & 0 \\
\hline
V_{11}^{(21)} & V_{21}^{(21)} & & V_{p1}^{(21)} & V_{11}^{(22)} & V_{12}^{(22)} & & V_{1q}^{(22)} & 0 \\
 & & & & & & & & \\
V_{1q}^{(21)} & V_{2q}^{(21)} & \cdots & V_{pq}^{(21)} & V_{q1}^{(22)} & V_{q2}^{(22)} & \cdots & V_{qq}^{(22)} & 0 \\
\hline
0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & & V^{(33)}
\end{array}\right),$$

donde $V_{ij}^{(11)}$ es la matriz de covarianza entre $\tilde{\phi}_i$ y $\tilde{\phi}_j$, $V_{ij}^{(12)} = V_{ji}^{(21)}$ es la matriz de covarianza entre $\tilde{\phi}_i$ y $\tilde{\theta}_j$, $V_{ij}^{(22)}$ es la matriz de covarianza entre $\tilde{\theta}_i$ y $\tilde{\theta}_j$ y $V^{(33)}$ es la matriz de covarianza de $\tilde{\mu}$.

En este caso, (3.21)-(3.35) implican que $V = A^{-1}BA^{-1} = W^{-1}$, donde W es una matriz con la misma estructura que V pero reemplazando $V_{ij}^{(k)}$ por $W_{ij}^{(k)}$, donde

$$\begin{aligned}
W_{ij}^{(11)} &= f \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{\infty}(\pi_h \pi_s') \otimes (\gamma_n' \gamma_{i+n+h-j-s}),\\
W_{ij}^{(12)} &= f \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(\pi_h \otimes \gamma_n' \gamma_{i+n+h-j}),\\
W_{ij}^{(22)} &= f \sum_{n=0}^{\infty}(I_m \otimes \gamma_n' \gamma_{i+n-j}),\\
W^{(33)} &= g \left\{ \left(I_m - \sum_{i=1}^{q}\theta_i\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{i=1}^{p}\phi_i\right)\right\}^2
\end{aligned}$$

Los escalares f y g están dados por

$$f = (q\,v\,c)^2 = \frac{E^2(b_t^2 w_t)}{E^2(b_t^2 w_t^2)} \left[\frac{(m-1)E(w_t) + E\{\psi'(b_t)\}}{m}\right]^2 \tag{3.36}$$

y

$$g = v^2\, c = \frac{m}{E(b_t^2 w_t^2)} \left[\frac{(m-1)E(w_t) + E\{\psi'(b_t)\}}{m}\right]^2, \tag{3.37}$$

donde

$$b_t = (a_t' a_t)^{1/2} \qquad w_t = w(b_t). \tag{3.38}$$

Dado que en el caso del CMLE correspondiente a $\psi(u) = u$, f y g son iguales a 1, la eficiencia relativa asintótica de los RA-estimadores de ϕ_i's y θ_i's con respecto al CMLE está dada por f y la de los RA–estimadores de μ está dada por g. Estas eficiencias dependen de la dimensión m pero no del modelo VARMA.

Como los RA–estimadores son afín equivariantes, en el caso en que los a_t's tienen distribución elíptica, las eficiencias relativas están dadas por (3.36) y (3.37) como en el caso esférico, reemplazando b_t en (3.38) por

$$b_t = (a_t' \Sigma_0^{-1} a_t)^{1/2}. \tag{3.39}$$

Se ha calculado, por simulación, la eficiencia relativa de los RA–estimadores de los ϕ_i's y los θ_i's para el caso en que los a_t's tienen distribución normal y ψ pertenece a la familia Huber, $\psi_{H,k}$, o la familia bicuadrada, $\psi_{B,k}$. En la Tabla 1 se dan los valores de la constante k requerida para obtener una eficiencia dada.

Tabla 1. *Valores de la constante k de la función ψ requerida para obtener una eficiencia relativa asintótica dada (RAE)*

RAE	Función	Dimensión					
		m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=10
0.95	$\psi_{H,k}$	1.65	1.84	2.00	2.16	2.27	2.81
0.95	$\psi B, k$	5.57	6.10	6.45	6.84	7.14	8.47
0.90	$\psi_{H,k}$	1.34	1.49	1.61	1.68	1.80	1.80
0.90	$\psi B, k$	4.65	5.10	5.45	5.81	6.06	7.28
0.80	$\psi_{H,k}$	0.95	1.02	1.02	0.85		
0.80	$\psi B, k$	3.82	4.21	4.56	4.84	5.11	6.15

En la Tabla 2 se presentan los valores de la constante c en (2.23), para los mismos valores de la eficiencia.

Tabla 2. *Valores de la constante c en (2.23) para diferentes valores de la eficiencia asintótica relativa*

RAE	Función	Dimensión					
		m=1	m=2	m=3	m=4	m=5	m=10
0.95	$\psi_{H,k}$	1.20	1.22	1.25	1.27	1.30	1.41
0.95	$\psi B, k$	1.43	1.51	1.60	1.67	1.73	2.00
0.90	$\psi_{H,k}$	1.41	1.50	1.58	1.71	1.76	3.11
0.90	$\psi B, k$	1.66	1.79	1.93	2.01	2.14	2.58
0.80	$\psi_{H,k}$	2.06	2.46	3.17	5.64		
0.80	$\psi B, k$	2.06	2.29	2.49	2.70	2.89	3.84

En el caso en que ψ pertenece a la familia Huber, y cuando la dimensión es mayor o igual que 5, es imposible obtener estimadores con eficiencia 0.80. Esto está relacionado con el hecho de que cuando $m \to \infty$ la eficiencia relativa de los RA–estimadores basados en $\psi_{H,k}$ tiende a 1 uniformemente en k.

4 Algoritmo de cálculo

Se presenta un algoritmo de cálculo basado en la interpretación de los RA–estimadores dada al final de la sección 2. El algoritmo consta de los siguientes pasos:

1. A partir de valores iniciales $\tilde{\beta}_0$ y $\tilde{\Sigma}_0$ se calculan los residuos $\widehat{a}_t(\tilde{\beta}_0)$ para $t \leq T$ usando (2.1). Luego se calculan los residuos modificados $\tilde{a}_t(\tilde{\beta}_0, \tilde{\Sigma}_0)$ usando (2.17).

2. Usando (2.25), se construye el proceso modificado $X_t^*(\tilde{\beta}_0, \tilde{\Sigma}_0)$.

3. Se define
$$\tilde{\Sigma}_1 = \frac{c}{T}\sum_{t=1}^{T} \tilde{a}_t(\tilde{\beta}_0\,, \tilde{\Sigma}_0) \quad \tilde{a}_t'(\tilde{\beta}_0\,,\ \tilde{\Sigma}_0),$$
es decir, $\tilde{\Sigma}_1$ es, salvo la constante c, la matriz de covarianza muestral de los residuos modificados $\tilde{a}_t$.

4. Se minimiza (2.3), reemplazando $\widehat{\Sigma}$ por $\tilde{\Sigma}_1$ y X_t por $X_t^*(\tilde{\beta}_0, \tilde{\Sigma}_0)$. El valor de β obtenido se denotará $\tilde{\beta}_1$.

5. Se vuelve al paso 1 con $\tilde{\beta}_0$ y $\tilde{\Sigma}_0$ reemplazados por $\tilde{\beta}_1$ y $\tilde{\Sigma}_1$, y se itera hasta obtener la convergencia.

En el caso particular de un proceso autoregresivo, la minimización del paso 4 se simplifica, ya que en vez de buscar el mínimo de (2.3) que es función de $m + m^2p$ parámetros, se pueden minimizar m funciones, cada una de ellas de $1 + mp$ parámetros. De hecho, en vez de minimizar la suma de las normas de Mahalanobis de los residuos, es suficiente minimizar la suma de cuadrados para cada componente

$$\sum_{t=1}^{T} \widehat{a}_{t,i}^2 \quad (i = 1, ..., m),$$

donde

$$\widehat{a}_{t,i} = X_{t,i} - \alpha_i - \sum_{h=1}^{m} \phi_{1,ih}\, X_{t-1,h} - ... - \sum_{h=1}^{m} \phi_{p,ih}\, X_{t-p,h} \tag{4.1}$$

depende sólo de $mp + 1$ parámetros: el intercept α_i y las filas i de las matrices ϕ_r, para r=1,...,p. La relación entre $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_m)'$ y μ está dada por

$$\alpha = (I_m - \sum_{r=1}^{p} \phi_r)\mu. \tag{4.2}$$

La convergencia de este algoritmo al RA–estimador, solución del sistema dado por (2.20)–(2.23) no ha sido probada. Sin embargo en las simulaciones presentadas en la Sección 6, siempre se alcanzó la convergencia cuando la función ψ pertenece a la familia Huber. Cuando ψ no es monótona sino redescendiente, como por ejemplo cuando pertenece a la familia bicuadrada, el sistema (2.20)–(2.23) podría tener más de una solución. En este caso, el algoritmo convergerá a la verdadera solución, siempre que se parta de un buen estimador robusto inicial.

En el estudio descripto en la Sección 6 se calcula inicialmente un RA–estimador con una función ψ perteneciente a la familia Huber, usando los CMLE como valores iniciales del proceso iterativo. Una vez que se alcanza la convergencia, este RA–estimador es usado como valor inicial para el cálculo del RA–estimador con la función ψ perteneciente a la familia bicuadrada.

5 Test portmanteau de bondad de ajuste robusto

5.1 Introducción

Box & Pierce (1970) derivaron un test de bondad de ajuste, el test portmanteau, para el modelo ARMA univariado clásico:

$$\phi(B)\,\nabla^d\, z_t = \theta(B) a_t$$

donde $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \ldots - \phi_p B^p$, $\theta(B) = 1 - \theta_1 B - \ldots - \theta_q B^q$, $\{a_t\}$ es una sucesión de variables aleatorias independientes con distribución $N(0, \sigma^2)$, y las raíces de $\phi(B) = 0$ y $\theta(B) = 0$ están fuera del círculo unitario.

El estadístico del test de Box & Pierce, se basa en los estimadores de las M primeras autocorrelaciones de las innovaciones del modelo:

$$r_k = \frac{\sum a_t\, a_{t-k}}{\sum a_t^2}.$$

Si el modelo es apropiado, los a_t son calculados en base a los valores verdaderos de los parámetros, y si $M \to \infty$ cuando $T \to \infty$, de manera que $M \sim O(\sqrt{T})$, entonces $\mathrm{r} = (r_1, \ldots, r_M)$ tiene distribución aproximadamente normal multivariada y

$$T \sum_{k=1}^{M} r_k^2$$

tiene distribución aproximada χ^2 con M grados de libertad.

Box & Pierce estudian las propiedades de las autocorrelaciones del modelo estimado,

$$\hat{r}_k = \frac{\sum \hat{a}_t \hat{a}_{t-k}}{\sum \hat{a}_t^2}$$

y demuestran que, bajo las condiciones sobre T y M mencionadas anteriormente, el estadístico

$$Q = T \sum_{k=1}^{M} \hat{r}_k^2$$

tiene distribución aproximada χ^2 con $M - p - q$ grados de libertad. Posteriormente, Ljung & Box (1978) sugieren reemplazar el estadístico Q por

$$\tilde{Q} = T\,(T+2) \sum_{k=1}^{M} \frac{\hat{r}_k^2}{(T-k)}$$

demostrando que, bajo la hipótesis nula de adecuación del modelo, y para muestras pequeñas, los cuantiles de la distribución de $\tilde{Q}$ están más próximos a los correspondientes cuantiles de la distribución χ^2_{M-p-q} que los de la distribución de Q.

Este test fue generalizado al caso multivariado por Hosking (1980), quién considera modelos ARMA de la forma (1.1), estacionarios, invertibles e identificables.

Denotando $\hat{C}_o = \hat{\Sigma}$, y $\hat{C} = \text{vec}\,(\hat{C}_1\,\hat{C}_2 \ldots \hat{C}_M)$, siendo

$$\hat{C}_r = \frac{1}{T} \sum_t \hat{a}_t\,\hat{a}_{t-r}$$

la r-ésima matriz de covarianza residual, Hosking demuestra que, si $M \sim O(\sqrt{T})$, asintóticamente

$$P = T\,\hat{C}'\,(I_M \otimes \hat{C}_o^{-1} \otimes \hat{C}_o^{-1})\,\hat{C} \sim \chi^2_{m^2(M-p-q)},$$

y, escribiendo el estadístico P en la forma equivalente:

$$P = T \sum_{r=1}^{M} \text{tr}\,(\hat{C}_r' \hat{C}_o^{-1} \hat{C}_r \hat{C}_o^{-1}),$$

sugiere la siguiente modificación para pequeñas muestras:

$$P^* = T^2 \sum_{r=1}^{M} \frac{1}{T-r} \text{tr}\,(\hat{C}_r' \hat{C}_o^{-1} \hat{C}_r \hat{C}_o^{-1}).$$

Li (1988) propuso una versión robusta del test portmanteau para el caso univariado, basada en los RA–estimadores robustos (Bustos & Yohai (1986)). Esencialmente esta propuesta consiste en definir como estadístico del test

$$Q^* = \frac{T}{a}\sum_{k=1}^{M}\hat{\gamma}_k^2,$$

donde

$$\hat{\gamma}_k = \sum_{t=p+1+k}^{T} \eta(\hat{a}_t/\hat{\sigma}, \hat{a}_{t-k}/\hat{\sigma})/T,$$

siendo $\hat{\sigma}$ un estimador de escala robusto y η una función impar en cada variable, continua y acotada. Si $\lambda = (\phi_1, \ldots, \phi_p, \theta_1, \ldots, \theta_q)$ y $\hat{\lambda}$ es el RA–estimador de λ, Bustos & Yohai demuestran que $\sqrt{T}(\hat{\lambda} - \lambda)$ tiene distribución asintótica normal con media 0 y matriz de covarianzas que difiere de la matriz de covarianzas del estimador de máxima verosimilitud condicional por un escalar $\nu = a\sigma^2/b^2$, donde

$$a = E(\eta^2(a_t/\sigma, a_{t-1}/\sigma))$$

$$b = E(\eta_1(a_t/\sigma, a_{t-1}/\sigma)a_{t-1})$$

con $\eta_1 = \partial\eta(u,v)/\partial u$.

Li (1988) demuestra que si T y M son suficientemente grandes, el estadístico Q^* tiene distribución asintótica χ^2 con $M - p - q$ grados de libertad y, notando que para valores moderados de M y T, $E(Q^*) \neq M - p - q$, propone un estadístico modificado:

$$\tilde{Q}^* = \frac{T^2}{a}\sum_{k=1}^{M}\frac{\hat{\gamma}_k^2}{T-k}.$$

Al presentar sus estimadores robustos para modelos ARMA multivariados, Li & Hui (1989) generalizan el test portmanteau multivariado de Hosking (1980). Considerando modelos autoregresivos de orden p, su propuesta se basa en el estadístico:

$$Q_M = T\,\hat{C}'\,\hat{\Omega}^{-1}\,\hat{C}$$

donde $\hat{C}$ es el estimador de $C = \text{vec}\,(C_1 C_2 \ldots C_M)$, siendo C_j la matriz de autocovarianzas robustificada a lag j, cuyo elemento hk es $\sum \eta(a_{h,t}\, a_{k,t-j})/T$, y $\hat{\Omega}$ es un estimador consistente de la matriz de covarianza asintótica de C.

Muestran que, asintóticamente

$$Q_M \sim \chi^2_{m^2(M-p)},$$

y proponen una versión modificada de Q_M para pequeñas muestras, que se obtiene sumando a este estadístico la cantidad $\frac{1}{2}m^2 M(M+1)/T$ (Li & McLeod (1981)).

5.2 Test de bondad de ajuste

En esta sección se deriva un test similar al propuesto por Li & Hui (1989), pero basado en los RA–estimadores presentados en la sección 2. Sea

$$C_j \;=\; \frac{c}{T} \sum_{t=j+1}^{T} \tilde{a}_t(\beta_0, \Sigma_0)\; \tilde{a}'_{t-j}(\beta_0, \Sigma_0), \tag{5.1}$$

la matriz $m \times m$ de autocovarianzas de los residuos modificados a lag j, donde la constante c es la definida en (2.24), y sea, para M entero, $C = \text{vec}\,(C_1 C_2 \ldots C_M)$. Si se denota $\tilde{C} = \text{vec}\,(\tilde{C}_1 \tilde{C}_2 \ldots \tilde{C}_M)$, donde $\tilde{C}_j$ es la matriz (5.1) con (β_0, Σ_0) reemplazados por $(\tilde{\beta}, \tilde{\Sigma})$, se demostrará que, bajo la hipótesis nula de adecuación del modelo, el estadístico

$$Q_M = T\,\tilde{C}'\,\tilde{\Omega}^{-1}\,\tilde{C}$$

tiene distribución asintótica χ^2 con $m^2(M - p - q)$ grados de libertad, siendo

$$\tilde{\Omega} = I_M \otimes \tilde{\Sigma} \otimes \tilde{\Sigma} \tag{5.2}$$

el estimador robusto de la matriz de covarianzas de C.

Distribución asintótica de $T\,C'\,\Omega^{-1}\,C$:

Dado C_r definido en (5.1), se verifica que

$$E(C_r) = \Sigma_0\,\delta_{r0}.$$

Por otra parte

$$\begin{aligned} cov(C_{ij,r}, C_{kl,s}) &= cov\left((\frac{c}{T}\sum_t \tilde{a}_{t,i}\,\tilde{a}_{t-r,j})\,,\,(\frac{c}{T}\sum_{t^*}\tilde{a}_{t^*,k}\,\tilde{a}_{t^*-s,l}) \right) \\ &= \frac{c^2}{T^2}\sum_t\sum_{t^*} E(\tilde{a}_{t,i}\,\tilde{a}_{t-r,j}\tilde{a}_{t^*,k}\,\tilde{a}_{t^*-s,l}). \end{aligned}$$

Cada sumando es 0, excepto cuando $t = t^*$ y $r = s$, en cuyo caso es igual a $\tilde{\sigma}_{ik}\,\tilde{\sigma}_{jl}$, siendo $\tilde{\sigma}_{ik} = E(\tilde{a}_{ti}\tilde{a}_{tk}) = E(w_t^2 a_{ti} a_{tk}) = \frac{1}{c}(\Sigma_0)_{ik}$. Por lo tanto,

$$cov(C_{ij,r}, C_{kl,s}) \;=\; \frac{c^2}{T^2}\sum_t \tilde{\sigma}_{ik}\,\tilde{\sigma}_{jl}\,\delta_{rs} = \frac{c^2}{T}\tilde{\sigma}_{ik}\,\tilde{\sigma}_{jl}\,\delta_{rs}.$$

Luego, para todo $r > 0$, la distribución aproximada de $\sqrt{T}$ vec C_r es $N(0, \Sigma_0 \otimes \Sigma_0)$, y por lo tanto $\sqrt{T}\,C$ tiene distribución asintótica normal con media cero y matriz de covarianza

$$\Omega = I_M \otimes \Sigma_0 \otimes \Sigma_0$$

(Hannan (1970)), y $T\,C'\,\Omega^{-1}\,C$ tiene distribución asintótica χ^2 con $m^2 M$ grados de libertad.

Distribución asintótica conjunta de $(\sqrt{T}(\tilde{\beta}-\beta_0), \sqrt{T}C)$:

Aplicando (3.1), se obtiene la siguiente aproximación

$$cov(\sqrt{T}\,(\tilde{\beta}-\beta_0), \sqrt{T}\,C) \tilde{=} cov[-A^{-1}\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\delta_t(\beta_0,\Sigma_0), \sqrt{T}C]$$

Para r fijo,

$$cov(\sqrt{T}\,(\tilde{\beta}-\beta_0), \sqrt{T}\ \text{vec}(C_r) \tilde{=} cov[-A^{-1}\frac{1}{\sqrt{T}}\sum_{t=1}^{T}\delta_t(\beta_0,\Sigma_0), \frac{c}{\sqrt{T}}\ \text{vec}\{\sum_{t=r+1}^{T}\tilde{a}_t\,\tilde{a}'_{t-r}\}].$$

Si $t \neq t^*$, $cov(\delta_t(\beta_0,\Sigma_0),\ \text{vec}\{\tilde{a}_{t^*}\tilde{a}'_{t^*-r}\}) = 0$, y si r es pequeño en relación a T, entonces

$$\begin{aligned} cov(\sqrt{T}\,(\tilde{\beta}-\beta_0), \sqrt{T}\ \text{vec}(C_r) &\tilde{=} c\,cov[-A^{-1}\delta_t(\beta_0,\Sigma_0), \text{vec}(\tilde{a}_t\,\tilde{a}'_{t-r})] \\ &= -c\,A^{-1}E\left(\delta_t(\beta_0,\Sigma_0)\ [\ \text{vec}(\tilde{a}_t\,\tilde{a}'_{t-r})]'\right). \end{aligned}$$

Recordemos que, para un modelo ARMA multivariado general,

$$\delta_t(\beta,\Sigma) = [\{\delta_{1,t}^{(1)}(\beta,\Sigma)\}',\ldots,\{\delta_{p,t}^{(1)}(\beta,\Sigma)\}',\{\delta_{1,t}^{(2)}(\beta,\Sigma)\}',\ldots\{\delta_{q,t}^{(2)}(\beta,\Sigma)\}',\{\delta_t^{(3)}(\beta,\Sigma)\}']',$$

siendo

$$\begin{aligned} \delta_{j,t}^{(1)}(\beta,\Sigma) &= \text{vec}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\gamma'_n\Sigma^{-1}\tilde{a}_t\tilde{a}'_{t-j-n-h}\pi'_h\right) \quad 1\le j\le p, \\ \delta_{j,t}^{(2)}(\beta,\Sigma) &= \text{vec}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\gamma'_n\Sigma^{-1}\tilde{a}_t\tilde{a}'_{t-j-n}\right) \quad 1\le j\le q, \\ \delta_t^{(3)}(\beta,\Sigma) &= \tilde{a}_t. \end{aligned}$$

Entonces, si $1 \leq j \leq T$, $1 \leq r \leq M$,

$$\begin{aligned} c\,E\left(\delta_{j,t}^{(1)}\{\ \mathrm{vec}(\tilde{a}_t\,\tilde{a}_{t-r}')\}'\right) &= c\,E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\ \mathrm{vec}(\gamma_n'\Sigma_0^{-1}\tilde{a}_t\tilde{a}_{t-j-n-h}'\pi_h')\{\ \mathrm{vec}(\tilde{a}_t\,\tilde{a}_{t-r}')\}'\right) \\ &= c\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}(\pi_h\otimes\gamma_n'\Sigma_0^{-1})E[\mathrm{vec}\ (\tilde{a}_t\tilde{a}_{t-j-n-h}')\{\ \mathrm{vec}(\tilde{a}_t\,\tilde{a}_{t-r}')\}'], \end{aligned}$$

usando que vec $(FGH) = (H'\otimes F)$vec (G).

La esperanza es cero, salvo cuando $j+n+h=r$, en cuyo caso es igual a $\frac{1}{c^2}\ \Sigma_0\otimes\Sigma_0$. Entonces

$$\begin{aligned} E\left(\delta_{j,t}^{(1)}\,c\{\ \mathrm{vec}(\tilde{a}_t\,\tilde{a}_{t-r}')\}'\right) &= c\sum_{h=0}^{\infty}(\pi_h\otimes\gamma_{r-h-j}'\Sigma_0^{-1})\,\frac{1}{c^2}(\Sigma_0\otimes\Sigma_0) \\ &= \frac{1}{c}\sum_{h=0}^{\infty}(\pi_h\otimes\gamma_{r-h-j}'\Sigma_0^{-1})\,(\Sigma_0\otimes\Sigma_0) \end{aligned}$$

$$j=1,\ldots,p \quad r=1,\ldots,M$$

$$\begin{aligned} E\left(\delta_{j,t}^{(2)}\,c\{\ \mathrm{vec}(\tilde{a}_t\,\tilde{a}_{t-r}')\}'\right) &= c\,E\left(\sum_{n=0}^{\infty}\ \mathrm{vec}(\gamma_n'\Sigma_0^{-1}\tilde{a}_t\tilde{a}_{t-j-n}')\{\ \mathrm{vec}(\tilde{a}_t\,\tilde{a}_{t-r}')\}'\right) \\ &= c\sum_{n=0}^{\infty}(I_m\otimes\gamma_n'\Sigma_0^{-1})E(\mathrm{vec}\ (\tilde{a}_t\tilde{a}_{t-j-n}')\{\ \mathrm{vec}(\tilde{a}_t\,\tilde{a}_{t-r}')\}') \end{aligned}$$

La esperanza es no nula sólo cuando $j+n=r$, y se obtiene

$$E\left(\delta_{j,t}^{(2)}\,c\{\ \mathrm{vec}(\tilde{a}_t\,\tilde{a}_{t-r}')\}'\right) = \frac{1}{c}\,(I_m\otimes\gamma_{r-j}'\Sigma_0^{-1})(\Sigma_0\otimes\Sigma_0)$$

$$j=1,\ldots,q \quad r=1,\ldots,M$$

Por último,

$$E\left(\delta_t^{(3)}\, c\,\{\ \mathrm{vec}(\tilde a_t\, \tilde a'_{t-r})\}'\right) \ = \ c\, E\left(\tilde a_t\,\{\ \mathrm{vec}(\tilde a_t\, \tilde a'_{t-r})\}'\right) = 0.$$

Definiendo

$$G = \begin{pmatrix} G_{11}^{(1)} & & G_{1M}^{(1)} \\ & & \\ G_{p1}^{(1)} & & G_{pM}^{(1)} \\ G_{11}^{(2)} & & G_{1M}^{(2)} \\ & & \\ G_{q1}^{(2)} & & G_{qM}^{(2)} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} G_{ij}^{(1)} &= \sum_{h=0}^{\infty}(\pi_h \otimes \gamma'_{j-i-h}\Sigma_0^{-1}) \\ G_{ij}^{(2)} &= (I_m \otimes \gamma'_{j-i}\Sigma_0^{-1}), \qquad \text{si } j \le i \end{aligned}$$

y $G_{ij}^{(1)} = G_{ij}^{(2)} = 0$ si $j < i$, se obtiene la siguiente expresión:

$$cov(\sqrt{T}\,(\tilde\beta - \beta_0), \sqrt{T}\,C) \doteq -\, A^{-1}\,\frac{1}{c}\,G\,\Omega.$$

Entonces, $(\sqrt{T}\,(\tilde\beta - \beta_0), \sqrt{T}\,C)$ tiene distribución asintótica normal con media 0 y matriz de covarianzas

$$\begin{pmatrix} -A^{-1}\,B\,A^{-1} & -\frac{1}{c}\,A^{-1}\,G\,\Omega \\ -\frac{1}{c}\,\Omega\,G'\,(A^{-1})' & \Omega \end{pmatrix} \tag{5.3}$$

Distribución asintótica de $\sqrt{T}\tilde{C}$:

Sea ahora $\tilde{C}$ el vector C en el cual los $\tilde{a}_t(\beta_0, \Sigma_0)$ se reemplazan por $\tilde{a}_t(\hat{\beta}, \hat{\Sigma})$, siendo $(\hat{\beta}, \hat{\Sigma})$ los RA–estimadores de (β, Σ). Con el fin de obtener la distribución asintótica de $\sqrt{T}\tilde{C}$, se desarrolla por Taylor $\tilde{C}$ alrededor de (β_0, Σ_0). Sean

$$X_1 = \frac{\partial C}{\partial\{\text{vec }(\phi)\}'} \qquad X_2 = \frac{\partial C}{\partial\{\text{vec }(\theta)\}'} \qquad X_3 = \frac{\partial C}{\partial \mu'} \qquad X_4 = \frac{\partial C}{\partial\{\text{vec }(\Sigma)\}'},$$

evaluadas en (β_0, Σ_0) y sea Z la matriz $(X_1|X_2|X_3)$, entonces

$$\tilde{C} \doteq C + Z \ \text{vec}(\tilde{\beta} - \beta_0) + X_4 \,\text{vec }(\tilde{\Sigma} - \Sigma_0). \tag{5.4}$$

Denotando ahora $\Pi_i^{*\prime}$ a la matriz $(M\, m \times p\, m)$

$$\begin{pmatrix} \pi'_{-i} & \pi'_{-1-i} & \pi'_{1-p-i} \\ \pi'_{1-i} & \pi'_{-i} & \pi'_{2-p-i} \\ & & \\ \pi'_{M-1-i} & \pi'_{M-2-i} & \pi'_{M-p-i} \end{pmatrix},$$

y γ^* a la matriz $(M\, m \times q\, m)$

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_{-1} & \gamma_{1-q} \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \gamma_{2-q} \\ & & \\ \gamma_{M-1} & \gamma_{M-2} & \gamma_{M-q} \end{pmatrix},$$

se puede verificar que

$$E(\frac{\partial C}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'}) = -c\sum_{i=1}^{\infty}(I_M \otimes Q)\Pi_i^{*'} \otimes [(U\Sigma_0^{-1} + E(w_t)\, I_m)\gamma_i] \tag{5.5}$$

$$E(\frac{\partial C}{\partial\{\text{vec }(\theta_j)\}'}) = c\, Q \otimes [(U\Sigma_0^{-1} + E(w_t)\, I_m)\gamma^*] \tag{5.6}$$

En efecto, si se calcula inicialmente la derivada de $\text{vec}(C_r)$ respecto de $\text{vec}(\phi_j)$, se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \text{ vec}(\tilde{a}_t\tilde{a}'_{t-r})}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} &= \frac{\partial \text{ vec}(a_t\, w_t\, a'_{t-r}\, w_{t-r})}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} = (I_m \otimes a_t\, w_t\, a'_{t-r})\,\frac{\partial \text{ vec}(I_m\, w_{t-r})}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} \\
&+(I_m\, w_{t-r} \otimes a_t\, w_t)\,\frac{\partial a_{t-r}}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} \\
&+(w_{t-r}a_{t-r} \otimes a_t)\,\frac{\partial w_t}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} \\
&+(w_{t-r}\, a_{t-r}\, w_t \otimes I_m)\frac{\partial a_t}{\partial\{\text{vec }(\phi_j)\}'} \\
&= (I_m \otimes a_t\, w_t\, a'_{t-r})\,[\text{ vec }(I_m) \otimes \\
&\quad \{\text{ vec}(-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\gamma'_n\Sigma_0^{-1}a_{t-r}a'_{t-r-j-n-h}\pi'_h w^*_{t-r})\}'] \\
&+(I_m\, w_{t-r} \otimes a_t\, w_t)[-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\gamma_n(a'_{t-r-j-n-h}\pi'_h \otimes I_m)] \\
&+(w_{t-r}a_{t-r} \otimes a_t)\,\{\text{ vec}(-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\gamma'_n\Sigma_0^{-1}a_t a'_{t-j-n-h}\pi'_h w^*_t)\}' \\
&+(w_{t-r}\, a_{t-r}\, w_t \otimes I_m)[-\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{h=0}^{\infty}\gamma_n(a'_{t-j-n-h}\pi'_h \otimes I_m)]
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
= & -(I_m \otimes a_t\, w_t\, a'_{t-r}) \\
& [\text{ vec } (I_m) \otimes \{ \text{ vec}(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \gamma'_n \Sigma_0^{-1} a_{t-r} a'_{t-r-j-n-h} \pi'_h w^*_{t-r})\}'] \\
& -(I_m\, w_{t-r} \otimes a_t\, w_t)[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \gamma_n (a'_{t-r-j-n-h} \pi'_h \otimes I_m)] \\
& -(w_{t-r} a_{t-r} \otimes a_t)\, [\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} a'_{t-j-n-h} \pi'_h \otimes w^*_t a'_t \Sigma_0^{-1} \gamma_n] \\
& -(w_{t-r}\, a_{t-r}\, w_t \otimes I_m)[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} (a'_{t-j-n-h} \pi'_h \otimes \gamma_n)] \\
= & -(I_m \otimes a_t\, w_t\, a'_{t-r}) \\
& [\text{ vec } (I_m) \otimes \{ \text{ vec}(\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \gamma'_n \Sigma_0^{-1} a_{t-r} a'_{t-r-j-n-h} \pi'_h w^*_{t-r})\}'] \\
& -(I_m\, w_{t-r} \otimes a_t\, w_t)[\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \gamma_n (a'_{t-r-j-n-h} \pi'_h \otimes I_m)] \\
& -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} (w_{t-r} a_{t-r} a'_{t-j-n-h} \pi'_h \otimes w^*_t a_t a'_t \Sigma_0^{-1} \gamma_n) \\
& -\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} (w_{t-r}\, a_{t-r}\, w_t a'_{t-j-n-h} \pi'_h \otimes \gamma_n).
\end{aligned}
$$

Las dos primeras sumatorias tienen esperanza cero, ya que $t-r-j-n-h < t-r < t$. Respecto a la tercera y a la cuarta sumatoria, sólo tienen esperanza no nula aquellos sumandos para los cuáles $t-r = t-j-n-h$ y, usando la notación habitual, se obtiene que

$$
E(\frac{\partial \text{ vec}(C_r)}{\partial \{\text{vec } (\phi_j)\}'}) = -c \sum_{n=0}^{\infty} Q \pi'_{r-j-n} \otimes [U \Sigma_0^{-1} + E(w_t)\, I_m] \gamma_n
$$

Derivando ahora $\text{vec}(C_r)$ respecto de $\text{vec}(\theta_j)$,

$$\frac{\partial\ \text{vec}(\tilde{a}_t\tilde{a}'_{t-r})}{\partial\{\text{vec}\ (\theta_j)\}'} = \frac{\partial\ \text{vec}(a_t\, w_t\, a'_{t-r}\, w_{t-r})}{\partial\{\text{vec}\ (\theta_j)\}'} = (I_m \otimes a_t\, w_t\, a'_{t-r})\,\frac{\partial\ \text{vec}(I_m\, w_{t-r})}{\partial\{\text{vec}\ (\theta_j)\}'}$$

$$+(I_m\, w_{t-r} \otimes a_t\, w_t)\,\frac{\partial a_{t-r}}{\partial\{\text{vec}\ (\theta_j)\}'}$$

$$+(w_{t-r}a_{t-r} \otimes a_t)\,\frac{\partial w_t}{\partial\{\text{vec}\ (\theta_j)\}'}$$

$$+(w_{t-r}\, a_{t-r}\, w_t \otimes I_m)\frac{\partial a_t}{\partial\{\text{vec}\ (\theta_j)\}'}$$

$$= (I_m \otimes a_t\, w_t\, a'_{t-r})\,[\ \text{vec}\ (I_m) \otimes \{\ \text{vec}(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma'_n \Sigma_0^{-1} a_{t-r} a'_{t-r-j-n} w^*_{t-r})\}']$$

$$+(I_m\, w_{t-r} \otimes a_t\, w_t)[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (a'_{t-r-j-n} \otimes I_m)]$$

$$+(w_{t-r}a_{t-r} \otimes a_t)\,\{\ \text{vec}(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma'_n \Sigma_0^{-1} a_t a'_{t-j-n} w^*_t)\}'$$

$$+(w_{t-r}\, a_{t-r}\, w_t \otimes I_m)[\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n (a'_{t-j-n} \otimes I_m)]$$

$$= (I_m \otimes a_t\, w_t\, a'_{t-r})\,[\ \text{vec}\ (I_m) \otimes \{\ \text{vec}(\sum_{n=0}^{\infty} \gamma'_n \Sigma_0^{-1} a_{t-r} a'_{t-r-j-n} w^*_{t-r})\}']$$

$$+(I_m\, w_{t-r} \otimes a_t\, w_t)[\sum_{n=0}^{\infty} (a'_{t-r-j-n} \otimes \gamma_n)]$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(w_{t-r}a_{t-r}a'_{t-j-n}\otimes w_t^{*}a_ta_t'\Sigma_0^{-1}\gamma_n)$$

$$+\sum_{n=0}^{\infty}(w_{t-r}\,a_{t-r}\,w_ta'_{t-j-n}\otimes\gamma_n).$$

Las dos primeras sumatorias tienen esperanza cero, ya que $t-r-j-n<t-r<t$. Respecto a la tercera y a la cuarta sumatoria, sólo tienen esperanza no nula aquellos sumandos para los cuáles $t-r=t-j-n$. Por lo tanto,

$$E(\frac{\partial\ \mathrm{vec}(C_r)}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\theta_j)\}'})=c\left(Q\otimes[U\Sigma_0^{-1}+E(w_t)\,I_m]\gamma_{r-j}\right)$$

Considerando que $\pi_j=\gamma_j=0$ cuando $j<0$, se obtiene

$$\frac{\partial C}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\phi_j)\}'}\xrightarrow{p}-c\sum_{i=1}^{\infty}\begin{pmatrix} Q\,\pi'_{-i} & Q\,\pi'_{-1-i} & Q\,\pi'_{1-p-i}\\ Q\,\pi'_{1-i} & Q\,\pi'_{-i} & Q\,\pi'_{2-p-i}\\ & & \\ Q\,\pi'_{M-1-i} & Q\,\pi'_{M-2-i} & Q\,\pi'_{M-p-i}\end{pmatrix}\otimes[(U\Sigma_0^{-1}+E(w_t)\,I_m)\gamma_i],$$

$$\frac{\partial C}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\theta_j)\}'}\xrightarrow{p}c\begin{pmatrix} Q\otimes[(U\Sigma_0^{-1}+E(w_t)\,I_m)\gamma_0] & Q\otimes[(U\Sigma_0^{-1}+E(w_t)\,I_m)\gamma_{1-q}]\\ Q\otimes[(U\Sigma_0^{-1}+E(w_t)\,I_m)\gamma_1] & Q\otimes[(U\Sigma_0^{-1}+E(w_t)\,I_m)\gamma_{2-q}]\\ & \\ Q\otimes[(U\Sigma_0^{-1}+E(w_t)\,I_m)\gamma_{M-1}] & Q\otimes[(U\Sigma_0^{-1}+E(w_t)\,I_m)\gamma_{M-q}]\end{pmatrix},$$

Por otra parte, derivando $\mathrm{vec}(C_r)$ respecto de μ,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\ \mathrm{vec}(\tilde{a}_t\tilde{a}'_{t-r})}{\partial\mu'} &= \frac{\partial\ \mathrm{vec}(a_t\, w_t\, a'_{t-r}\, w_{t-r})}{\partial\mu'} \\
&= (I_m \otimes a_t\, w_t\, a'_{t-r})\, \frac{\partial\ \mathrm{vec}(I_m\, w_{t-r})}{\partial\mu'} + (I_m\, w_{t-r} \otimes a_t\, w_t)\, \frac{\partial a_{t-r}}{\partial\mu'} \\
&\quad + (w_{t-r} a_{t-r} \otimes a_t)\, \frac{\partial w_t}{\partial\mu'} + (w_{t-r}\, a_{t-r}\, w_t \otimes I_m) \frac{\partial a_t}{\partial\mu'} \\
&= -(I_m \otimes a_t\, w_t\, a'_{t-r}) \left[\mathrm{vec}(I_m) \otimes \left\{ w^*_{t-r}\, a'_{t-r}\, \Sigma_0^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q}\theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p}\phi_l\right)\right\}\right] \\
&\quad -(I_m\, w_{t-r} \otimes a_t\, w_t) \left\{ \left(I_m - \sum_{l=1}^{q}\theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p}\phi_l\right)\right\} \\
&\quad -(w_{t-r} a_{t-r} \otimes a_t) \left[w^*_t\, a'_t\, \Sigma_0^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{q}\theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p}\phi_l\right)\right] \\
&\quad -(w_{t-r}\, a_{t-r}\, w_t \otimes I_m) \{ - \left(I_m - \sum_{l=1}^{q}\theta_l\right)^{-1} \left(I_m - \sum_{l=1}^{p}\phi_l\right) \}
\end{aligned}
$$

La esperanza de esta expresión es cero, y por lo tanto

$$\frac{\partial C}{\partial\mu'} = 0. \tag{5.7}$$

Del mismo modo se verifica que

$$E(\frac{\partial C}{\partial\{\mathrm{vec}\ (\Sigma)\}'}) = 0. \tag{5.8}$$

Llamando $Z^* = (X_1|X_2)$ y $\beta^* = [\{\text{ vec}(\phi_1)\}', \ldots, \{\text{ vec}(\phi_p)\}', \{\text{ vec}(\theta_1)\}', \ldots, \{\text{ vec}(\theta_q)\}']'$, y usando (5.5), (5.6), (5.7) y (5.8) se obtiene la siguiente aproximación

$$\sqrt{T}\,\hat{C} \doteq \sqrt{T}\,C + Z^*\,\sqrt{T}\text{ vec}(\hat{\beta}^* - \beta^*). \tag{5.9}$$

De (5.3) y (5.9) se deduce que $\sqrt{T}\,\hat{C}$ tiene distribución asintótica normal con media cero. Se calculará ahora su varianza asintótica. Para ello, recordando que las matrices A y B calculadas en la sección 3.1, son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} & 0_{pm^2 \times m} \\ A^{(21)} & A^{(22)} & 0_{qm^2 \times m} \\ 0_{m \times pm^2} & 0_{m \times qm^2} & A^{(33)} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} B^{(11)} & B^{(12)} & 0 \\ B^{(21)} & B^{(22)} & 0 \\ 0 & 0 & B^{(33)} \end{pmatrix},$$

se denotará A^* y B^* a las submatrices:

$$A^* = \begin{pmatrix} A^{(11)} & A^{(12)} \\ A^{(21)} & A^{(22)} \end{pmatrix} \qquad B^* = \begin{pmatrix} B^{(11)} & B^{(12)} \\ B^{(21)} & B^{(22)} \end{pmatrix}.$$

Y, en forma similar, si se particiona la matriz G en la forma

$$G = \begin{pmatrix} G^{(1)} \\ G^{(2)} \\ 0 \end{pmatrix},$$

se denotará G^* a la submatriz formada por las primeras $m^2(p+q)$ filas:

$$G^* = \begin{pmatrix} G^{(1)} \\ G^{(2)} \end{pmatrix}.$$

Con esta notación, resulta:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\sqrt{T}\,\hat{C}) &\doteq \mathrm{Var}(\sqrt{T}\,C) + Z^{*}\ \mathrm{Var}(\sqrt{T}\ \mathrm{vec}(\hat{\beta}^{*} - \beta_0^{*}))\, Z^{*'} \\
&\quad + Z^{*}\ \mathrm{cov}(\sqrt{T}\,C,\ \sqrt{T}\ \mathrm{vec}(\hat{\beta}^{*} - \beta_0^{*})) \\
&\quad + \{\ \mathrm{cov}(\sqrt{T}\,C, \sqrt{T}\ \mathrm{vec}(\hat{\beta}^{*} - \beta_0^{*}))\}'\, Z^{*'} \\
&\doteq \Omega + Z^{*}\,(A^{*})^{-1}\,B^{*}\,(A^{*})^{-1}\,Z^{*'} \\
&\quad - \frac{1}{c}\,Z^{*}\,(A^{*})^{-1}\,G^{*}\,\Omega - \Omega'\,G^{*'}\,(A^{*})^{-1'}\,Z^{*'}.
\end{aligned}
\tag{5.10}
$$

Se probará ahora que $G^{*}\,\Omega\,Z^{*} \doteq c\,A^{*}$ y que $G^{*}\,G^{*'} \doteq c^2\,B^{*}$. Por afín equivariancia, se considerará sin pérdida de generalidad que $\Sigma_0 = I_m$ y por lo tanto $\Omega = I_{m^2 M}$.

$$
G^{*}\,Z^{*} = \begin{pmatrix} G^{*(1)}\,X_1 & G^{*(1)}\,X_2 \\ G^{*(2)}\,X_1 & G^{*(2)}\,X_2 \end{pmatrix}.
$$

$G^{*(1)}\,X_1$ está formado por $p \times p$ bloques, cada uno de dimensión $m^2 \times m^2$, y, llamando F a $\{E(w_t)I_m + U\Sigma_0^{-1}\}$, el bloque ij es:

$$
\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{m^2 M} G_{ir}^{*(1)}\,X_{1,rj} &= -c \sum_{r=1}^{m^2 M} \sum_{h=0}^{\infty} (\pi_h \otimes \gamma'_{r-i-h}) \sum_{n=0}^{\infty} (Q\,\pi'_{r-j-n} \otimes F\,\gamma_n) \\
&= -c \sum_{r=1}^{m^2 M} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\pi_h\,Q\pi'_{r-j-n} \otimes \gamma'_{r-i-h}\,F\,\gamma_n),
\end{aligned}
$$

que, si M es suficientemente grande, es aproximadamente igual a $c\,A_{ij}^{(11)}$.

$G^{*(1)}\, X_2$ está formado por $p \times q$ bloques, cada uno de dimensión $m^2 \times m^2$, y el bloque ij es:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{m^2 M} G_{ir}^{*(1)}\, X_{2,rj} &= c \sum_{r=1}^{m^2 M} \sum_{h=0}^{\infty} (\pi_h \otimes \gamma'_{r-i-h})\,(Q \otimes F\,\gamma_{r-j}) \\
&= c \sum_{r=1}^{m^2 M} \sum_{h=0}^{\infty} (\pi_h\, Q \otimes \gamma'_{r-i-h}\, F\,\gamma_{r-j}),
\end{aligned}$$

que es aproximadamente igual a $c\, A_{ij}^{(12)}$.

$G^{*(2)}\, X_1$ está formado por $q \times p$ bloques, cada uno de dimensión $m^2 \times m^2$, y el bloque ij es:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{m^2 M} G_{ir}^{*(2)}\, X_{1,rj} &= -c \sum_{r=1}^{m^2 M} (I_m \otimes \gamma'_{r-i}) \sum_{n=0}^{\infty} (Q\,\pi'_{r-j-n} \otimes F\,\gamma_n) \\
&= -c \sum_{r=1}^{m^2 M} \sum_{n=0}^{\infty} (Q\,\pi'_{r-j-n} \otimes \gamma'_{r-i}\, F\,\gamma_n),
\end{aligned}$$

que es aproximadamente igual a $c\, A_{ij}^{(21)}$.

$G^{*(2)}\, X_2$ está formado por $q \times q$ bloques, cada uno de dimensión $m^2 \times m^2$, y el bloque ij es:

$$\begin{aligned}
\sum_{r=1}^{m^2 M} G_{ir}^{*(2)}\, X_{2,rj} &= c \sum_{r=1}^{m^2 M} (I_m \otimes \gamma'_{r-i})\,(Q \otimes F\,\gamma_{r-j}) \\
&= c \sum_{r=1}^{m^2 M} (Q \otimes \gamma'_{r-i}\, F\,\gamma_{r-j}),
\end{aligned}$$

que es aproximadamente igual a $c\, A_{ij}^{(22)}$.

Se demostrará ahora que $G^* G^{*'} \doteq c^2 B^*$.

$$G^* G^{*'} = \begin{pmatrix} G^{*(1)} G^{*(1)'} & G^{*(1)} G^{*(2)'} \\ G^{*(2)} G^{*(1)'} & G^{*(2)} G^{*(2)'} \end{pmatrix}.$$

$G^{*(1)} G^{*(1)'}$ está formado por $p \times p$ bloques, cada uno de dimensión $m^2 \times m^2$, y el bloque ij es:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{m^2 M} G_{ir}^{*(1)} G_{rj}^{*(1)'} &= \sum_{r=1}^{m^2 M} \sum_{h=0}^{\infty} (\pi_h \otimes \gamma'_{r-i-h}) \sum_{n=0}^{\infty} (\pi'_n \otimes \gamma_{r-j-n}) \\ &= \sum_{r=1}^{m^2 M} \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} (\pi_h \pi'_n \otimes \gamma'_{r-i-h} \gamma_{r-j-n}), \end{aligned}$$

que, si M es suficientemente grande, es aproximadamente igual a $c^2 B_{ij}^{(11)}$.

$G^{*(1)} G^{*(2)'}$ está formado por $p \times q$ bloques, cada uno de dimensión $m^2 \times m^2$, y el bloque ij es:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{m^2 M} G_{ir}^{*(1)} G_{rj}^{*(2)'} &= \sum_{r=1}^{m^2 M} \sum_{h=0}^{\infty} (\pi_h \otimes \gamma'_{r-i-h}) (I_m \otimes \gamma_{r-j}) \\ &= \sum_{r=1}^{m^2 M} \sum_{h=0}^{\infty} (\pi_h \otimes \gamma'_{r-i-h} \gamma_{r-j}), \end{aligned}$$

que, si M es suficientemente grande, es aproximadamente igual a $c^2 B_{ij}^{(12)}$.

$G^{*(2)} G^{*(1)'}$ está formado por $q \times p$ bloques, cada uno de dimensión $m^2 \times m^2$, y el bloque ij es:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{m^2 M} G_{ir}^{*(2)} G_{rj}^{*(1)'} &= \sum_{r=1}^{m^2 M} \sum_{h=0}^{\infty} (I_m \otimes \gamma'_{r-i}) (\pi'_h \otimes \gamma_{r-j-n}) \\ &= \sum_{r=1}^{m^2 M} \sum_{h=0}^{\infty} (\pi'_h \otimes \gamma'_{r-i} \gamma_{r-j-h}), \end{aligned}$$

que, si M es suficientemente grande, es aproximadamente igual a $c^2\, B_{ij}^{(21)}$.

$G^{*(2)}\, G^{*(2)'}$ está formado por $q \times q$ bloques, cada uno de dimensión $m^2 \times m^2$, y el bloque ij es:

$$\begin{aligned} \sum_{r=1}^{m^2M} G_{ir}^{*(2)}\, G_{rj}^{*(2)'} &= \sum_{r=1}^{m^2M} (I_m \otimes \gamma'_{r-i})\,(I_m \otimes \gamma_{r-j}) \\ &= \sum_{r=1}^{m^2M} (I_m \otimes \gamma'_{r-i}\, \gamma_{r-j}), \end{aligned}$$

que, si M es suficientemente grande, es aproximadamente igual a $c^2\, B_{ij}^{(22)}$.

Utilizando las dos aproximaciones obtenidas, y premultiplicando los tres últimos sumandos de (5.10) por G^* y postmultiplicándolos por $G^{*'}$, se verifica lo siguiente:

$$\begin{aligned} G^*\, Z^*\, (A^*)^{-1}\, B^*\, (A^*)^{-1}\, Z^{*'} G^{*'} &\doteq c^2\, B^*, \\ -\frac{1}{c} G^*\, Z^*\, (A^*)^{-1}\, G^*\, G^{*'} &\doteq c^2\, B^*, \\ -G^*\, G^{*'}\, (A^*)^{-1}\, Z^{*'}\, G^{*'} &\doteq c^2\, B^*. \end{aligned}$$

Pero si

$$G^*\, P\, G^{*'} \doteq c^2\, B^* \quad \Longrightarrow \quad G^{*'}\, G^*\, P\, G^{*'}\, G^* \doteq c^2\, G^{*'}\, B^*\, G^*,$$

y

$$P \doteq c^2\, (G^{*'}\, G^*)^-\, G^{*'}\, B^*\, G^* (G^{*'}\, G^*)^- \doteq (G^{*'}\, G^*)^-\, G^{*'}\, G^*\, G^{*'}\, G^* (G^{*'}\, G^*)^-,$$

donde $(G^{*'}\, G^*)^-$ es una inversa generalizada de $G^{*'}\, G^*$. Entonces, en la expresión (5.10),

$$\mathrm{Var}(\sqrt{T}\, \hat{C}) \doteq I_{m^2M} - (G^{*'}\, G^*)^-\, G^{*'}\, G^*\, G^{*'}\, G^* (G^{*'}\, G^*)^-. \tag{5.11}$$

La matriz $(G^{*'}G^{*})^{-}G^{*'}G^{*}G^{*'}G^{*}(G^{*'}G^{*})^{-}$ es idempotente de dimensión $(m^2M \times m^2M)$ y rango $m^2(p+q)$, pues la matriz G^* tiene rango $m^2(p+q)$, entonces la matriz (5.11) es idempotente de rango $m^2(M-p-q)$. Luego, el estadístico

$$Q_M = T\,\tilde{C}'\tilde{\Omega}^{-1}\tilde{C}$$

tiene distribución asintótica χ^2 con $m^2(M-p-q)$ grados de libertad, siendo $\tilde{\Omega}$ el estimador consistente de Ω, que en este caso particular es I_{m^2M}, definido en (5.2). En efecto, si $Y \sim N_m(0, V\,\Sigma)$, donde V es una matriz idempotente de rango r y Σ es definida positiva y simétrica, entonces $Y'\,\Sigma^{-1}\,Y \sim \chi^2_r$ (Rao (1973)).

En el caso en que la matriz de covarianza Σ_0 es general, el resultado anterior sigue siendo cierto, dado que Q_M es invariante por transformaciones afines.

Dado que este tipo de test portmanteau es conservativo para valores de T pequeños o moderados, un posible ajuste para mejorar su performance, podría consistir en sumar al estadístico Q_M la cantidad $\frac{1}{2}m^2M(M+1)/T$ (Li & McLeod (1981)).

6 Resultados del estudio Monte Carlo

Con el propósito de estudiar la eficiencia y la robustez de los estimadores propuestos, se llevó a cabo un estudio de simulación. Se consideraron dos modelos VAR(1), un modelo VMA(1) y un modelo VARMA(1,1), todos ellos de dimensión 2. Las innovaciones a_t's fueron generadas a partir de una distribución multivariada N(0, I_2) y, en la Tabla 3 se presentan las matrices 2×2: ϕ y θ.

Tabla 3. *Modelos simulados*

Modelo	ϕ_{11}	ϕ_{12}	ϕ_{21}	ϕ_{22}	θ_{11}	θ_{12}	θ_{21}	θ_{22}
1	0.9	0.0	0.0	0.9				
2	0.9	0.0	-0.4	0.5				
3					0.9	0.0	-0.4	0.5
4	0.9	0.0	-0.4	0.5	-0.6	0.0	0.0	0.5

Aunque en todos los modelos la media es cero, en el caso de los modelos VAR(1) se estimó el vector de medias. Para cada modelo se calcularon tres estimadores: el estimador de máxima verosimilitud condicional (CMLE), el RA–estimador calculado con la función de Huber (RAH) y el RA–estimador calculado con la función bicuadrada (RAB). En estos dos últimos casos, las constantes utilizadas corresponden a una eficiencia asintótica relativa de 0.90.

Se consideró el caso de ausencia de outliers y tres tipos de contaminación con un 5 % de outliers aditivos. En los casos contaminados, se supuso que en vez de observar el proceso VARMA, X_t, se observa el proceso contaminado

$$\tilde{X}_t = (1 - V_t)X_t + V_t d,$$

donde $V_1, ..., V_T$ son variables aleatorias Bernoulli con $pr(V_t = 1) = 0.05$ y $d = (d_1, d_2)'$. Se consideraron 3 valores de d: (1) $d = (5, X_{t,2})$, (2) $d = (5, 5)$ y (3) $d = (5, -5)$.

Se simularon 500 muestras de tamaño T=100 para los modelos VAR y VMA, y T=200 para el modelo VARMA. En las Tablas 4 a 7 se presentan los errores cuadráticos medios de los estimadores y la eficiencia asintótica relativas de los RA–estimadores con respecto al CMLE. Los errores cuadráticos medios se presentan multiplicados por 100. Las eficiencias relativas se definen como el cociente entre los errores cuadráticos medios del CMLE y cada uno de los estimadores considerados.

Estos resultados muestran que, en ausencia de outliers, las eficiencias relativas de los RA–estimadores son siempre similares al valor asintótico 0.90. En el caso de las contaminaciones, la eficiencia de los RA–estimadores es en general grande. Sin embargo, hay algunos casos en los cuáles la eficiencia es menor que 1. La explicación para este comportamiento de la eficiencia es que en estos casos las observaciones contaminadas actúan como puntos leverage buenos. Considérese por ejemplo el Modelo 1 con contaminación tipo (1). En este caso, la única variable contaminada es $X_{t,1}$. Dado que, en la ecuación $X_{t,2} = \alpha_2 + \phi_{2,1} X_{t-1,1} + \phi_{2,2} X_{t-1,2} + a_{t,2}$ el coeficiente $\phi_{2,1} = 0$, las observaciones contaminadas son puntos leverage buenos y ésto explica la buena performance del CMLE de $\phi_{2,1}$, $\phi_{2,2}$ y μ_2.

Tabla 4. *Error cuadrático medio (MSE) y eficiencia relativa (RE) - Modelo 1*

		Contaminación							
		no		1		2		3	
Parámetro	Estimador	MSE	RE	MSE	RE	MSE	RE	MSE	RE
ϕ_{11}	CMLE	0.62	1.00	8.82	1.00	6.79	1.00	6.73	1.00
	RAH	0.63	0.98	1.59	5.55	1.16	5.85	1.15	5.85
	RAB	0.64	0.97	0.84	10.50	0.78	8.71	0.78	8.63
ϕ_{12}	CMLE	0.38	1.00	1.27	1.00	3.53	1.00	3.27	1.00
	RAH	0.41	0.93	0.54	2.35	0.56	6.30	0.48	6.81
	RAB	0.42	0.90	0.53	2.40	0.52	6.79	0.51	6.41
ϕ_{21}	CMLE	0.44	1.00	0.31	1.00	3.34	1.00	3.19	1.00
	RAH	0.48	0.92	0.44	0.70	0.62	5.39	0.61	5.23
	RAB	0.48	0.92	0.55	0.56	0.59	5.66	0.60	5.32
ϕ_{22}	CMLE	0.67	1.00	0.63	1.00	7.54	1.00	7.36	1.00
	RAH	0.72	0.93	0.72	0.88	1.23	6.13	1.25	5.89
	RAB	0.73	0.92	0.77	0.82	0.83	9.08	0.83	8.87
μ_1	CMLE	2.41	1.00	12.33	1.00	11.86	1.00	11.85	1.00
	RAH	2.55	0.95	4.19	2.94	3.50	3.39	3.51	3.38
	RAB	2.54	0.95	3.06	4.03	2.76	4.30	2.76	4.29
μ_2	CMLE	2.76	1.00	2.48	1.00	12.28	1.00	11.45	1.00
	RAH	2.87	0.96	2.78	0.89	3.86	3.18	3.77	3.04
	RAB	2.88	0.96	2.96	0.84	3.08	3.99	3.00	3.82

Tabla 5. *Error cuadrático medio (MSE) y eficiencia relativa (RE) - Modelo 2*

		Contaminación							
		no		1		2		3	
Parámetro	Estimador	MSE	RE	MSE	RE	MSE	RE	MSE	RE
ϕ_{11}	CMLE	0.72	1.00	14.23	1.00	11.83	1.00	4.28	1.00
	RAH	0.74	0.97	1.98	7.19	2.09	5.66	1.05	4.08
	RAB	0.74	0.97	0.93	15.30	0.95	12.45	1.47	2.91
ϕ_{12}	CMLE	0.52	1.00	5.94	1.00	8.17	1.00	3.37	1.00
	RAH	0.56	0.93	0.89	6.67	1.13	7.23	0.66	5.11
	RAB	0.57	0.91	0.69	8.61	0.69	11.84	2.13	1.58
ϕ_{21}	CMLE	0.59	1.00	1.92	1.00	0.71	1.00	2.15	1.00
	RAH	0.63	0.94	0.58	3.31	0.61	1.16	0.70	3.07
	RAB	0.62	0.95	0.73	2.63	0.77	0.92	0.65	3.31
ϕ_{22}	CMLE	0.64	1.00	1.12	1.00	1.71	1.00	5.09	1.00
	RAH	0.69	0.93	0.61	1.84	0.76	2.25	1.04	4.89
	RAB	0.70	0.91	0.82	1.37	0.84	2.04	2.54	2.00
μ_1	CMLE	2.10	1.00	7.67	1.00	6.14	1.00	11.73	1.00
	RAH	2.20	0.95	3.28	2.34	2.72	2.26	3.11	3.77
	RAB	2.20	0.95	2.63	2.92	2.46	2.50	1.32	8.89
μ_2	CMLE	1.34	1.00	1.68	1.00	5.73	1.00	7.02	1.00
	RAH	1.42	0.94	1.48	1.14	1.77	3.24	1.79	3.92
	RAB	1.43	0.94	1.60	1.05	1.67	3.43	1.98	3.55

Tabla 6. *Error cuadrático medio (MSE) y eficiencia relativa (RE) - Modelo 3*

		Contaminación							
		no		1		2		3	
Parámetro	Estimador	MSE	RE	MSE	RE	MSE	RE	MSE	RE
θ_{11}	CMLE	0.23	1.00	32.5	1.00	25.4	1.00	15.1	1.00
	RAH	0.24	0.96	19.6	1.66	17.5	1.45	9.10	1.66
	RAB	0.24	0.96	17.3	1.88	14.9	1.70	7.30	2.07
θ_{12}	CMLE	0.19	1.00	3.03	1.00	4.53	1.00	11.3	1.00
	RAH	0.24	0.81	2.59	1.17	1.91	2.37	7.81	1.45
	RAB	0.23	0.82	2.76	1.10	1.09	4.16	7.01	1.61
θ_{21}	CMLE	0.92	1.00	8.46	1.00	2.45	1.00	12.7	1.00
	RAH	1.02	0.90	6.51	1.30	2.24	1.09	8.25	1.54
	RAB	1.02	0.90	6.23	1.36	2.44	1.00	6.72	1.89
θ_{22}	CMLE	1.01	1.00	1.86	1.00	3.95	1.00	13.1	1.00
	RAH	1.10	0.92	2.07	0.90	2.56	1.54	8.76	1.50
	RAB	1.08	0.94	2.16	0.86	2.12	1.86	7.83	1.68

Tabla 7. *Error cuadrático medio (MSE) y eficiencia relativa (RE) - Modelo 4*

		Contaminación							
		no		1		2		3	
Parámetro	Estimador	MSE	RE	MSE	RE	MSE	RE	MSE	RE
ϕ_{11}	CMLE	0.66	1.00	4.61	1.00	4.43	1.00	2.04	1.00
	RAH	0.76	0.88	1.11	4.15	1.10	4.03	1.20	1.70
	RAB	0.76	0.87	1.24	3.72	1.83	2.42	1.08	1.89
ϕ_{12}	CMLE	1.04	1.00	5.78	1.00	6.06	1.00	2.84	1.00
	RAH	1.20	0.87	1.71	3.38	1.85	3.28	1.74	1.63
	RAB	1.21	0.86	2.49	2.32	4.52	1.34	1.73	1.64
ϕ_{21}	CMLE	0.29	1.00	1.74	1.00	2.18	1.00	1.03	1.00
	RAH	0.32	0.91	0.50	3.45	0.57	3.81	0.56	1.83
	RAB	0.32	0.91	0.47	3.69	0.49	4.47	0.54	1.90
ϕ_{22}	CMLE	0.41	1.00	1.93	1.00	3.29	1.00	1.31	1.00
	RAH	0.45	0.91	0.75	2.56	0.89	3.71	0.77	1.71
	RAB	0.44	0.92	0.70	2.75	0.82	4.01	0.76	1.72
θ_{11}	CMLE	0.53	1.00	72.5	1.00	69.8	1.00	40.0	1.00
	RAH	0.61	0.88	27.6	2.63	24.6	2.84	20.0	2.00
	RAB	0.62	0.87	18.8	3.85	13.4	5.20	13.4	2.99
θ_{12}	CMLE	1.40	1.00	9.22	1.00	13.2	1.00	29.6	1.00
	RAH	1.65	0.85	2.78	3.32	5.13	2.58	9.90	2.99
	RAB	1.64	0.85	3.17	2.91	6.49	2.04	5.05	5.86
θ_{21}	CMLE	1.18	1.00	4.64	1.00	4.20	1.00	3.09	1.00
	RAH	1.35	0.87	0.99	4.67	0.96	4.36	1.45	2.13
	RAB	1.34	0.88	1.00	4.64	1.01	4.16	1.46	2.12
θ_{22}	CMLE	1.01	1.00	5.63	1.00	6.82	1.00	5.13	1.00
	RAH	1.13	0.89	1.28	4.40	1.47	4.64	2.33	2.20
	RAB	1.13	0.89	1.01	5.57	1.12	6.09	1.69	3.04

Referencias

BILLINGSLEY, P. The Lindeberg–Lévy Theorem for martingales. (1961). *Proc. Am. Math. Soc.* **12**, 788–792.

BOX, G.E.P. & PIERCE, D.A. (1970). Distribution of residuals autocorrelations in ARIMA time series models. *J. Am. Statist. Assoc.* **65**, 1509–1526.

BUSTOS, O. & YOHAI, V. (1986). Robust estimates for ARMA models. *J. Am. Statist. Assoc.* **81**, 155–168.

DUNSMUIR, W. & HANNAN, E.J. (1976). Vector linear time series models. *Adv. Appl. Prob.* **8**, 339–364.

HANNAN, E.J. (1969). The identification of vector mixed autoregressive–moving average systems. *Biometrika* **56**, 223–225.

HANNAN, E.J. (1970). Multiple time series. John Wiley and Sons, New York.

HANNAN, E.J. & DEISTLER, M. (1988). The statistical theory of linear systems. John Wiley, New York.

HOSKING, J.R.M. (1980). The multivariate portmanteau statistic. *J. Am. Statist. Assoc.* **75**, 602–608.

LI, W.K. (1988). A goodness–of–fit test in robust time series modelling. *Biometrika* **75**, 355–361.

LI, W.K. & HUI, Y.V. (1989). Robust multiple time series modelling. *Biometrika* **76**, 309–315.

LI, W.K. & MCLEOD, A.I. (1981). Distribution of the residual autocorrelations in multivariate ARMA time series models. *J. R. Statist. Soc.* B **43**, 231–239.

LJUNG, G.M. & BOX, G.E.P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika* **65**, 297–303.

MARONNA, R.M. (1976). Robust M–estimators of multivariate location and scale. *Ann. Statist.* **4**, 51–67.

RAO, C. R. (1973). Linear statistical inference and its applications. John Wiley & Sons, New York.

REINSEL, G.C. (1993). Elements of multivariate time series analysis. Springer Verlag, New York.

WILSON, G.T. (1973). The estimation of parameters in multivariate time series models. *J. R. Statist. Soc.* B **40**, 76–85.