

## Tesis de Posgrado

# Algunas propiedades de la interacción de apareamiento nuclear

Tonina, Alejandra C.

1999

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Tonina, Alejandra C.. (1999). Algunas propiedades de la interacción de apareamiento nuclear. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_3155\\_Tonina.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3155_Tonina.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Tonina, Alejandra C.. "Algunas propiedades de la interacción de apareamiento nuclear". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1999.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_3155\\_Tonina.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3155_Tonina.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

# FCE y N BIBLIOTECA

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

*Facultad de Ciencias Exactas y Naturales*

*Departamento de Física*

*Algunas propiedades de la interacción de apareamiento nuclear*

por

Alejandra C. Tonina

Director de Tesis: Dr. Guillermo G. Dussel.

Lugar de Trabajo: Departamento de Física, FCE y N.

*Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas*

Mayo de 1999

Nº 3 15 5 ▲

## “Some properties of the nuclear pairing interaction”

### Abstract

In this work we analyze some properties of the nuclear pairing interaction, its influence on the sum rules for multipole particle-hole operators, and the correlation's spatial structure the pairing interaction causes.

This interaction is one of the most important which models the nuclear residual hamiltonian, so we believe that this work could help to clarify some aspects of this interaction.

We find that the pairing interaction is invariant under spatial translations and not invariant under galilean transformations, and because of it, the interaction does not conserve sum rules. The same behavior occurs with temperature, and we find a relation between the pairing interaction's gap and the energy weighted sum rule for a mass dipole operator.

We studied the Cooper's pair localization problem. We find that the no-localization in the configuration space is associated with the size of the Hilbert space used.

**Keywords** Nuclear, Pairing, Sum rules, Effective mass, Galilean invariance, Cooper's pair.

**Palabras clave** Nuclear, Apareamiento, Reglas de suma, Masa efectiva, Invariancia de Galileo, Par de Cooper.

## Resumen

En esta tesis se analizan algunas propiedades de la interacción de apareamiento nuclear, como su influencia sobre las reglas de suma para operadores de tipo partícula-agujero, y la estructura espacial de las correlaciones que induce.

Debido a que esta interacción es una de las que mejor modela el hamiltoniano residual nuclear, se cree que los resultados obtenidos permiten clarificar algunos aspectos de la interacción.

Se encontró que la interacción de apareamiento es invariante traslacional y no es invariante de Galileo, y que por esta razón no conserva las reglas de suma. Este análisis se extendió a temperatura finita, y se encontró una relación entre la regla de suma pesada por energía asociada al operador dipolar de masa y el gap de apareamiento.

Se estudió el problema de la localización del par de Cooper, y se encontró que la no localización del par está asociada al tamaño del espacio de Hilbert utilizado.

## Introducción

En un trabajo reciente<sup>[1]</sup>, se encontró que la interacción de apareamiento, junto con la interacción cuadrupolar, modelan apropiadamente la parte residual del hamiltoniano nuclear. En ese trabajo se encontró que los términos correspondientes a la interacción de apareamiento más el cuadrupolar corresponden a la parte más significativa (no estocástica) del hamiltoniano residual.

Si bien históricamente la interacción de apareamiento fue introducida para representar en forma simple y esquemática la parte de corto rango de la fuerza nuclear, ahora sabemos que además da una buena representación de una parte importante de la interacción residual nuclear, sobre todo en núcleos medios.

Pero algunos comportamientos de la interacción de apareamiento no son del todo satisfactorios. Por ejemplo, se había observado que la interacción de apareamiento no conservaba las reglas de suma, entre ellas, la regla de suma pesada por energía (EWSR1)<sup>[2],[3],[4],[5]</sup>. El interés particular en esta regla de suma está en que, cuando el operador asociado a esta regla de suma es el operador dipolar de masa, la EWSR1 no depende del hamiltoniano considerado, si este tiene la dependencia usual en la energía cinética de las partículas. Esta propiedad no se verifica con la interacción de apareamiento.

Existía además cierta confusión ante el comportamiento de la interacción

de apareamiento frente a algunas transformaciones espaciales de simetría.

En este trabajo se demostró que la interacción de apareamiento es invariante ante transformaciones traslacionales y no lo es ante transformaciones de Galileo, y que por esta última razón no conserva la EWSR1<sup>[13]</sup>. Debe notarse que el núcleo es el único sistema que se describe en forma no relativista y que muestra variaciones en la EWSR1 con respecto a los valores predichos por la regla de suma de Thomas-Reiche-Kuhn de casi el 100%<sup>[14, 15]</sup>. Por lo tanto era importante, desde el punto de vista experimental, observar si los desviamientos de los valores experimentales con los predichos por TRK, mostraban el mismo comportamiento que las variaciones inducidas en la regla de suma debido a la violación galileana de la interacción de apareamiento.

Se encontró además una expresión que relaciona la masa efectiva del nucleón con la EWSR1 asociada al operador dipolar de masa, por lo que la no conservación de la regla de suma con la interacción de apareamiento lleva, en este caso, a la no conservación de la masa efectiva del nucleón<sup>[13]</sup>.

Se estudió también cómo dependía la variación de la regla de suma con la temperatura, obteniéndose una descripción simple. Se encontró una relación sencilla entre el gap de apareamiento y la regla de suma dependiente de la temperatura (TEWSR1)<sup>[16]</sup>.

Se analizó la estructura espacial de los pares de Cooper, dado que otro aspecto de la interacción de apareamiento que mostraba un comportamiento

anómalo, era la no localización del par<sup>[17]</sup>. La contradicción se debe a que el par de Cooper se genera a partir de una fuerza que tiene en cuenta, fundamentalmente, la interacción de corto rango entre los nucleones. En esta tesis se demostró que la aparición de estructuras complicadas en la distribución espacial del par, con varios máximos que compiten en probabilidad, provienen de trabajar la interacción de apareamiento en un espacio muy reducido del espacio completo de Hilbert<sup>[18]</sup>.

En el primer capítulo se describe el formalismo relacionado con la interacción de apareamiento y se establece la notación utilizada. En el capítulo siguiente se introducen las reglas de suma, se analiza el comportamiento de la interacción de apareamiento ante las transformaciones traslacionales y galileanas, se obtienen las expresiones para la masa efectiva en función de la EWSR1 asociada al operador dipolar de masa, y para el cambio de la regla de suma al tener en cuenta apareamiento, y se muestran los resultados obtenidos. En el capítulo 3 se estudia la interacción de apareamiento cuando se tiene en cuenta temperatura, y se analiza la dependencia de los cambios de la EWSR1 ante las variaciones de la temperatura, aplicándose los cálculos a algunos de los núcleos trabajados en el capítulo anterior. En el capítulo 4 se estudia el problema de la localización espacial de los pares de Cooper y el tamaño del espacio de Hilbert considerado, y su comparación con una función  $\delta$ . Finalmente, se encuentran las conclusiones generales de la presente tesis.

# Indice

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introducción</b>   | <b>4</b>  |
| <b>1 La interacción de apareamiento</b>                             | <b>9</b>  |
| 1.1 La fuerza nuclear   | 9         |
| 1.2 La fuerza de apareamiento . . . . .                             | 11        |
| 1.3 Transformación a cuasipartículas                                | 15        |
| <b>2 La invariancia galileana y la interacción de apareamiento</b>  | <b>18</b> |
| 2.1 Introducción . . . . .  | 18        |
| 2.2 Reglas de Suma . . . . .  | 21        |
| 2.3 Las invariancias galileana y traslacional                       | 23        |
| 2.4 Más notación  | 26        |
| 2.5 La masa efectiva y el operador dipolar de masa                  | 27        |
| 2.6 El hamiltoniano de apareamiento y la invariancia traslacional . | 30        |
| 2.7 Cambios en la EWSR1   | 32        |
| 2.8 Sistemas Normales   | 34        |
| 2.9 Sistemas superconductores . . . . .                             | 36        |
| 2.10 Resultados obtenidos y discusión                               | 38        |
| <b>3 EWSR1 dependiente de la temperatura</b>                        | <b>44</b> |
| 3.1 Introducción . . . . .  | 44        |



|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| 3.2      | Funciones de Green . . . . .  | 45        |
| 3.3      | La EWSR y la función de Green . . . . .                                   | 47        |
| 3.4      | La EWSR1(T) con correlaciones de apareamiento                             | 53        |
| 3.5      | Límites de temperatura en la regla de suma                                | 58        |
| 3.6      | Aplicaciones Numéricas . . . . .  | 59        |
| 3.7      | Conclusiones . . . . .  | 64        |
| <b>4</b> | <b>La localización de los pares de Cooper</b>                             | <b>65</b> |
| 4.1      | Introducción . . . . .  | 65        |
| 4.2      | Función de onda de dos partículas . . . . .                               | 66        |
| 4.3      | Pares de Cooper . . . . .   | 70        |
| 4.4      | Cálculos y resultados obtenidos para el cuadrado de la función<br>de onda | 71        |
| 4.5      | La función $\delta$ . . . . .   | 79        |
| 4.6      | Resultados obtenidos para la $\delta$ . . . . .                           | 80        |
| <b>5</b> | <b>Conclusiones generales</b>   | <b>84</b> |
| <b>A</b> | <b>Modelo de dos niveles</b>  | <b>86</b> |
| <b>B</b> | <b>Cálculo de los propagadores</b>  | <b>91</b> |

# 1 La interacción de apareamiento

## 1.1 La fuerza nuclear

Habitualmente, al investigar el problema nuclear de muchos cuerpos desde un punto de vista microscópico, se usan varias simplificaciones. Por un lado, se desprecian los grados de libertad mesónicos, describiendo el núcleo como un sistema de  $A$  nucleones interactuando a través de un potencial. Por otro lado, se desprecian los efectos relativistas, y por último, se consideran importantes sólo las fuerzas de dos cuerpos.

A pesar de estas simplificaciones, inmediatamente aparecen serias dificultades. Como las fuerzas nucleares no pueden derivarse de primeros principios, los potenciales usados son, en su mayor parte, fenomenológicos. La segunda dificultad está en la forma misma de las fuerzas nucleares, que muestran una fuerte repulsión a cortas distancias (“hard-core”) y no se pueden tratar con las técnicas usuales directas de la teoría de muchos cuerpos. Por ejemplo, no pueden trabajarse con teoría de perturbaciones y el hard-core hace imposible un tratamiento de campo medio autoconsistente. De hecho, los nucleones dentro del núcleo no sienten el potencial nucleón-nucleón “desnudo”, sino que interactúan unos con otros en presencia de muchos otros nucleones. Lo que se hace entonces es introducir un potencial nucleón-nucleón efectivo, que permite la aplicación de las teorías de muchos cuerpos, como por ejemplo, la teoría de Hartree-Fock.

Una forma alternativa es usar fuerzas efectivas fenomenológicas, construidas sobre la base de estas consideraciones, pero dependientes de algunos parámetros que se ajustan con los datos experimentales.

La noción de “apareamiento” entre partículas se remonta al concepto de “seniority” establecido por Racah<sup>[19]</sup> en 1942 en la física atómica. En 1959 Belyaev<sup>[20]</sup> hizo la primera aplicación detallada de la teoría de la fuerza de apareamiento al núcleo. La matemática es idéntica a la usada en el caso de los superconductores, por lo que los dos casos son aplicaciones al tratamiento mecánico-cuántico del problema de muchos cuerpos.

La fuerza de apareamiento afecta la estructura intrínseca del núcleo. Ha sido exitosa en la descripción de diferentes aspectos del comportamiento nuclear encontrados experimentalmente, como el gap de energía que aparece en los núcleos con un número par - par de nucleones, la diferencia entre los valores esperados y los valores medidos de la densidad de niveles en las regiones de excitación más bajas, la transferencia de dos partículas y otros aspectos más. Además la fuerza de apareamiento permite una buena discusión acerca de la física del núcleo, es decir, más que lograr una buena reproducción de los datos nucleares experimentales, pone de manifiesto los ingredientes esenciales nucleares más básicos<sup>[2]</sup>.

## 1.2 La fuerza de apareamiento

Para escribir el hamiltoniano de apareamiento, definimos previamente los operadores de partícula  $a_k^\dagger$  y  $b_k$ , tales que  $a_k^\dagger$  representa el operador que crea una partícula en el estado  $k$  y que se transforma bajo rotaciones como  $(j_k, m_k)$ , mientras que  $b_k$  está relacionado con su operador aniquilación por la expresión

$$b_{j_k, m_k} = (-1)^{j_k - m_k} a_{j_k, -m_k} \quad (1)$$

Como estado  $k$  nos referimos al conjunto de números cuánticos que definen un estado, por ejemplo en una base esférica

$$|k\rangle = |nljm\rangle$$

El estado  $\bar{k}$  corresponde al estado inverso-temporal  $|\bar{k}\rangle = \mathcal{T}|k\rangle$ , que en la misma base será

$$|\bar{k}\rangle = (-1)^{j+m} |nlj - m\rangle$$

Se definen además los operadores bilineales

$$A_{12, \lambda\mu}^\dagger = \{a_1^\dagger a_2^\dagger\}_\mu^\lambda \quad (2)$$

$$B_{12, \lambda\mu} = \{b_1 b_2\}_\mu^\lambda \quad (3)$$

$$C_{12,\lambda\mu} = \{a_1^\dagger b_2\}_\mu^\lambda = (1)^{j_1-j_2+\mu} C_{12,\lambda-\mu}^\dagger = (1)^{j_1-j_2+\lambda} \overline{C}_{12,\lambda\mu}^\dagger \quad (4)$$

Con el símbolo  $\{\}_\mu^\lambda$ , denotamos el acoplamiento al momento angular  $\lambda$  con proyección  $\mu$ .

El hamiltoniano que tiene como interacción residual al hamiltoniano de apareamiento, tiene la forma

$$\mathcal{H} = \sum_{k>0} \epsilon_k (a_k^\dagger a_k + a_{\bar{k}}^\dagger a_{\bar{k}}) - G \mathcal{P}^\dagger \mathcal{P} \quad (5)$$

donde  $\mathcal{P}^\dagger = \frac{1}{2} \sum_k \hat{j}_k A_{kk,00}^\dagger$ , y por lo tanto  $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \sum_k \hat{j}_k B_{kk,00}$ .  $G$  es la magnitud de la interacción de apareamiento.

En analogía con Bardeen, Cooper y Schrieffer<sup>[21]</sup>, quienes determinaron el estado fundamental de un superconductor, la función de onda del estado fundamental de un núcleo par-par se escribe<sup>[4]</sup>

$$|BCS\rangle = \prod_{k>0} (U_k + V_k a_k^\dagger a_{\bar{k}}^\dagger) |0\rangle \quad (6)$$

donde  $V_k$  y  $U_k$  son los parámetros que representan la probabilidad de que un cierto estado  $(k, \bar{k})$  esté o no ocupado. Estos parámetros no son independientes, sino que la normalización del estado (6) impone

$$|U_k|^2 + |V_k|^2 = 1 \quad (7)$$

La ecuación (6) también puede escribirse como

$$|BCS\rangle \propto |0\rangle + \sum_{k>0} \frac{V_k}{U_k} a_k^\dagger a_k^\dagger |0\rangle + \frac{1}{2} \sum_{k,k'>0} \frac{V_k V_{k'}}{U_k U_{k'}} a_k^\dagger a_k^\dagger a_{k'}^\dagger a_{k'}^\dagger |0\rangle + \dots \quad (8)$$

Y si se escribe el operador generalizado de creación de pares

$$\Gamma^\dagger = \sum_k \frac{V_k}{U_k} a_k^\dagger a_k^\dagger \quad (9)$$

queda

$$|BCS\rangle = \mathcal{N} \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{1}{\nu!} \Gamma^{\dagger \nu} |0\rangle \quad (10)$$

$$= \mathcal{N} \exp \Gamma^\dagger |0\rangle \quad (11)$$

donde  $\Gamma^\dagger$  crea un par de nucleones y puede ser considerado como un operador proporcional que crea un “par de Cooper”.

En estas expresiones se ve claramente que el estado  $|BCS\rangle$  es una superposición de estados con diferente número de partículas, y solamente el término con  $\Gamma^{\dagger \frac{N}{2}}$  de la ecuación (11) tiene  $N$  partículas, que corresponde a un condensado de pares. Se debe entonces imponer la condición de que el valor de expectación del número de partículas tenga el valor  $N$ , es decir

$$\langle BCS | \hat{N} | BCS \rangle = 2 \sum_{k>0} V_k^2 = N \quad (12)$$

lo que puede alcanzarse a través del término adicional al hamiltoniano  $-\lambda\hat{N}$ , con  $\lambda$  un multiplicador de Lagrange que es el *potencial químico* o *energía de Fermi*

Al buscarse el valor de expectación de la energía libre  $\hat{\mathcal{H}}' = \hat{\mathcal{H}} - \lambda\hat{N}$ , se obtiene la expresión para el gap de energía

$$\langle BCS|\hat{\mathcal{H}}'|BCS\rangle = 2 \sum_{k>0} \bar{\epsilon}_k V_k^2 - \frac{\Delta^2}{G} \quad (13)$$

donde se han despreciado términos en  $GV_k^4$  y  $GV_k^2$ , y  $\bar{\epsilon}_k = \epsilon_k - \lambda$ .  $\Delta$  es tal que

$$\Delta = G \sum_{k>0} U_k V_k$$

De las ecuaciones anteriores se obtienen

$$\left\{ \begin{array}{l} U_k^2 \\ V_k^2 \end{array} \right\} = \frac{1}{2} \left[ 1 \pm \frac{\epsilon_k - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right] \quad (14)$$

La cantidad  $V_k^2 = \langle BCS|a_k^\dagger a_k|BCS\rangle$  es la probabilidad de ocupación para cada estado de partícula simple  $k$ .

Reemplazando (14) en la expresión del  $\Delta$ , se obtiene la ecuación del *gap*

$$\Delta = \frac{G}{2} \sum_{k>0} \frac{\Delta}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}} \quad (15)$$

que junto con la condición (12)

$$N = \sum_{k>0} \left( 1 - \frac{\epsilon_k - \lambda}{\sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2}} \right) \quad (16)$$

forman un sistema de ecuaciones no lineales que caracterizan esta interacción y que pueden ser resueltas por iteración.

### 1.3 Transformación a cuasipartículas

El concepto de cuasipartículas es muy usado en la física de muchos cuerpos. Una transformación a cuasipartículas permite representar el estado fundamental del núcleo como un “vacío” con respecto a las cuasipartículas y escribir el hamiltoniano en términos de las excitaciones elementales del modelo. La transformación a cuasipartículas de Bogoliubov se hace a través de las expresiones

$$\alpha_i^\dagger = U_i a_i^\dagger - V_i b_i \quad (17)$$

$$\beta_i = U_i b_i + V_i a_i^\dagger \quad (18)$$

donde  $\beta_i = \beta_{j_i, m_i} = (-1)^{j_i - m_i} \alpha_{j_i, -m_i}$

Las cuasipartículas mantienen las relaciones de anticonmutación usuales para operadores fermiónicos

$$\{\alpha_k^\dagger, \alpha_{k'}^\dagger\} = 0 \quad \{\alpha_k, \alpha_{k'}^\dagger\} = \delta_{kk'} \quad (19)$$



El estado fundamental correlacionado satisface

$$\alpha_k |BCS\rangle = 0 \quad k > 0 \text{ y } k < 0$$

y se lo puede escribir como

$$|BCS\rangle = \prod_{i>0} \alpha_i \alpha_i^\dagger |0\rangle \quad (20)$$

que, como antes, queda

$$\begin{aligned} |BCS\rangle &= \left( \prod_i U_i \right) \prod_{i>0} (U_i + V_i a_i^\dagger a_i^\dagger) |0\rangle \\ &= \mathcal{N} \exp \sum_i \frac{V_i}{U_i} a_i^\dagger a_i^\dagger |0\rangle = \mathcal{N} \exp \Gamma^\dagger |0\rangle \end{aligned}$$

La utilidad de las cuasipartículas está en que permiten cambiar de una representación de estados de pares de partículas interactuantes, a una representación de estados en términos de cuasipartículas no interactuantes.

Las energías de cuasipartículas son

$$E_k = \sqrt{(\epsilon_k - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (21)$$

Los estados de una cuasipartícula  $\alpha_k^\dagger |BCS\rangle$  tienen energía  $\langle BCS | \mathcal{H} - \lambda \mathcal{N} | BCS \rangle = E_k$ . Estos son una supersposición de estados con un número impar de partículas, y describen un núcleo con un valor impar de nucleones.

Los estados de dos cuasipartículas  $\alpha_k^\dagger \alpha_{k'}^\dagger |BCS\rangle$  tienen energía  $\langle BCS | \mathcal{H} - \lambda \mathcal{N} | BCS \rangle = E_k + E_{k'}$  y describen estados excitados en un sistema par. En este caso, un par es roto y la energía de excitación es  $E_k + E_{k'} \geq 2\Delta$ , es decir que en un sistema par, el primer estado excitado se halla por lo menos a  $2\Delta$  del estado fundamental.

## 2 La invariancia galileana y la interacción de apareamiento

### 2.1 Introducción

Un tema muy estudiado ha sido el de los espectros de excitación de operadores  $\hat{O}$ , para lo cual se define la función de excitación  $[(\nu|\hat{O}|0)]^2$ .

El modelo usado depende no sólo del operador que excita al núcleo sino de la región del espectro que uno desea analizar.

En los espectros de excitación de los operadores fermiónicos bilineales, relacionados con las excitaciones electromagnéticas p-h o con las reacciones de transferencia, el problema es cómo obtener la información contenida. El centroide de estas distribuciones se puede encontrar a través de cálculos en la RPA<sup>[22]</sup>. Hace un tiempo<sup>[2, 5, 23]</sup> se notó que una forma práctica de mostrar la información contenida en ellos era a través de las reglas de suma que involucran distintas potencias en la energía de excitación. Por esta razón existe un gran interés en el estudio de estas reglas de suma. En particular, el mayor interés se ha dado en la regla de suma dependiente de la energía (EWSR1). Esta tiene un status especial dado que, cuando está asociada al operador dipolar, es completamente independiente del modelo<sup>[3, 4]</sup>.

Este capítulo trata sobre la influencia de la interacción de apareamiento en las reglas de suma asociadas a operadores multipolares partícula-agujero. Inicialmente se trabajó sobre el operador dipolar de masas, dado que para

este operador, la EWSR1 es completamente independiente del modelo. Posteriormente se estudió la influencia de la interacción de apareamiento sobre las reglas de suma asociadas a los operadores  $E1$  y  $E2$ .

Dado que la expresión de la EWSR1 asociada al operador dipolar de masa está relacionada con el conmutador entre el hamiltoniano y el operador generador de las transformaciones galileanas, se analizó la invariancia de Galileo cuando la interacción considerada es el hamiltoniano de apareamiento.

La complejidad de las fuerzas nucleares y las dificultades inherentes a una descripción detallada de sistemas con un gran número de grados de libertad, hacen que la aplicación de las leyes de conservación jueguen un rol fundamental en la caracterización de los estados nucleares<sup>[6]</sup>. En el estudio de sistemas interactuantes, usualmente se asume la validez de la invariancia galileana. Pero debido a que los nucleones son partículas compuestas, uno podría dudar sobre la validez de la invariancia de Galileo para los sistemas nucleares.

Desde hace tiempo es bien conocido que la interacción de apareamiento no es invariante galileana<sup>[24]</sup>, ni invariante de gauge<sup>[7, 25]</sup>. La actitud general con respecto a estas propiedades no deseadas ha sido que uno debe en general tratar de removerlas cambiando apropiadamente la interacción. En particular, por ejemplo, en la Ref.[25] estos efectos son llamados “efectos espúreos de la interacción de apareamiento”. En este trabajo, ellos estudiaron en detalle

la posibilidad de que los efectos estuvieran relacionados con la aproximación de BCS y no que fueran un comportamiento físicamente importante de la interacción<sup>[13]</sup>.

Existen algunas indicaciones sobre la no invariancia galileana real de la interacción nuclear. Por un lado, en el núcleo la masa efectiva dinámica es considerablemente menor que 1 para todos los niveles (ver por ejemplo Ref.[4], en particular la figura 5.5 y la Ref. [26]). Una masa efectiva que es siempre menor que 1 puede implicar una interacción que no sea invariante galileana, debido a que de esta forma la masa efectiva de todos los nucleones estaría relacionada con la masa efectiva total.

Otra fuerte indicación de la no invariancia de Galileo de la interacción nuclear es el hecho experimental de que la EWSR1 para el operador E1 es en el núcleo sistemáticamente mayor que el valor  $\sigma_0$  dado por la regla de suma de Thomas-Reiche-Kuhn<sup>[14]</sup>. Esta es también una indicación en el mismo sentido. Cuánto mayor es su valor, dependerá de la energía usada como cut-off para la suma. Usualmente la EWSR1 para el operador E1 se mide usando reacciones  $\{\gamma, n\}$ . Usando una energía de cut-off para la  $\gamma$  del orden de  $35 MeV$ , el valor obtenido para la EWSR1(E1) es del orden de 1.15 a  $1.3\sigma_0$ <sup>[14, 15]</sup>. Si la energía de cut-off es del orden de la masa del pión, este factor es aproximadamente el doble de  $\sigma_0$ <sup>[15]</sup>.

En las secciones que siguen se introduce el formalismo general de las reglas

de suma y las invariancias de Galileo y traslacionales. Se discute el comportamiento general de las EWSR1 para operadores multipolares (en particular  $T_{1\mu}$ ) y se evalúa su cambio al introducir la interacción de apareamiento. La última sección se refiere a los resultados obtenidos al aplicar los cálculos a distintos núcleos y su discusión.

## 2.2 Reglas de Suma

En el análisis de los espectros de sistemas complejos, es usual utilizar expresiones generales que se obtienen de las relaciones algebraicas entre los operadores, y que pueden ser expresadas en la forma de reglas de suma. La expresión general para estas reglas de suma, asociadas a un operador multipolar  $Q_{\lambda\mu}$ , es

$$S_k(Q_{\lambda\mu}) = \sum_{\nu} E_{\nu}^k |\langle \Psi_{\nu} | Q_{\mu}^{\lambda} | \Psi_0 \rangle|^2 \quad (22)$$

donde  $|\Psi_0\rangle$  representa la función de onda en el estado fundamental y  $|\Psi_{\nu}\rangle$  representa la función de onda de los estados excitados del hamiltoniano  $\mathcal{H}$  con energías de excitación  $E_{\nu}$ . En base a esto puede definirse un conjunto de energías  $\epsilon_k$  que caracterizan la magnitud de la distribución (22) como

$$\epsilon_k = \left( \frac{S_k}{S_{k-2}} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (23)$$

Si la distribución es localizada y máxima a una cierta energía, todos los

$\epsilon_k$  coinciden. El grado al cual son diferentes da una medida del ancho de la distribución.

La  $EWSR1(Q_\lambda)$  corresponde al caso  $S_k$  con  $k = 1$ . Dado que su valor es independiente del subíndice  $\mu$  del operador  $Q_{\lambda\mu}$ , este fue omitido de la siguiente expresión

$$\begin{aligned} EWSR1(Q_\lambda) &= \sum_\nu E_\nu \langle \Psi_0 || Q_\lambda^\dagger || \Psi_\nu \rangle \langle \Psi_\nu || Q_\lambda || \Psi_0 \rangle \\ &= \frac{\sqrt{2\lambda+1}}{2} \langle \Psi_0 | \{ [Q_\lambda^\dagger; [\mathcal{H}, Q_\lambda]] \}_0^0 | \Psi_0 \rangle \end{aligned} \quad (24)$$

donde  $\mathcal{H}$  es el hamiltoniano del sistema. Con el símbolo  $\{ \}_0^0$  denotamos el acoplamiento al momento angular  $J = 0$  con proyección  $M = 0$ . El símbolo  $||$  se refiere al elemento de matriz reducido. Se observa que la EWSR1 es función del doble conmutador del operador asociado a la regla de suma con el hamiltoniano. En general, los operadores  $Q_{\lambda\mu}$  de la forma  $Q_{\lambda\mu} = r^\lambda Y_{\lambda\mu}$ , dependen sólo de las coordenadas espaciales, y si las interacciones consideradas no dependen explícitamente del momento de las partículas, el conmutador en (24) recibirá contribuciones sólo de la energía cinética, y por lo tanto

$$\begin{aligned}
EWSR1(Q_\lambda) &= \frac{\hbar^2}{2m} A \langle \Psi_0 | (\nabla Q_\lambda)^2 | \Psi_0 \rangle \\
&= \frac{\hbar^2}{2m} A \langle 0 | (\nabla r^\lambda Y_\mu^\lambda)^2 | 0 \rangle
\end{aligned} \tag{25}$$

que expresa la regla de suma como el valor esperado de un operador. En el caso dipolar,  $\lambda = 1$  y  $\nabla r Y_\mu = 1$ , por lo tanto la EWSR1 es independiente de la interacción considerada para el hamiltoniano residual.

### 2.3 Las invariancias galileana y traslacional

La invariancia galileana expresa la invariancia de las interacciones con respecto a una transformación a un sistema de coordenadas  $\mathcal{K}'$  que se mueve con velocidad uniforme  $\mathbf{u}$  con respecto a un sistema  $\mathcal{K}$ . En una aproximación no relativista, la transformación de un sistema al otro con orígenes coincidentes a tiempo  $t$  será

$$\begin{aligned}
\mathbf{r}'_{\mathbf{k}} &= \mathbf{r}_{\mathbf{k}} \\
\mathbf{v}'_{\mathbf{k}} &= \mathbf{v}_{\mathbf{k}} - \mathbf{u} \\
\mathbf{s}'_{\mathbf{k}} &= \mathbf{s}_{\mathbf{k}}
\end{aligned} \tag{26}$$

La transformación de las coordenadas y de los momentos puede obtenerse a través del operador unitario



$$\mathcal{U}(\mathbf{u}) = \exp\left\{\frac{i}{\hbar}\mathcal{M}\mathbf{u}\cdot\mathbf{R}_{c.m.}\right\} \quad (27)$$

donde  $\mathcal{M} = \sum_k M_k$  es la masa total y  $\mathbf{R}_{c.m.} = \frac{1}{\mathcal{M}} \sum_k M_k \mathbf{r}_k$  representa las coordenadas del centro de masa. Resulta entonces que  $\mathbf{R}_{c.m.}$  es el generador de las transformaciones infinitesimales galileanas.

Un hamiltoniano total no relativista que cumpla la invariancia galileana podrá escribirse como<sup>[6]</sup>

$$\mathcal{H} = \frac{P_{c.m.}^2}{2\mathcal{M}} + \mathcal{H}_{int} \quad (28)$$

donde  $P_{c.m.}$  es el momento del centro de masa y  $\mathcal{H}_{int}$  es la parte del hamiltoniano que depende solo de los grados de libertad internos. Es decir que la dinámica del sistema puede separarse en una parte asociada a las variables intrínsecas que es invariante de Galileo y una parte asociada al movimiento del centro de masa como un todo.

La invariancia implica entonces la relación

$$[\mathcal{H}, R_{CM}] = \frac{\hbar}{iM_T} P_{c.m.} \quad (29)$$

que muestra claramente que la invariancia de Galileo es una propiedad de las interacciones. La energía cinética en cambio, no es invariante y por lo tanto no lo es el  $\mathcal{H}$  total. Por esta razón no habrá leyes de conservación o números cuánticos asociados a esta transformación.

La otra simetría que analizamos fue la invariancia traslacional.

En general, la invariancia traslacional se refiere a que un estado cuántico cualquiera  $|\mathcal{A}\rangle$  con un observador en  $\mathcal{K}$  y su estado transformado  $|\mathcal{A}'\rangle$  con un observador en  $\mathcal{K}'$ , mantienen las mismas propiedades cuando  $\mathcal{K}'$  difiere de  $\mathcal{K}$ , en un desplazamiento dado por  $\mathbf{a}$ . El operador de la transformación será

$$\mathcal{U}(\mathbf{a}) = \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}\mathbf{a}\cdot\mathbf{P}\right\} \quad (30)$$

donde  $\mathbf{P}$  es el momento total, es decir, la suma de los momentos de los nucleones con todas las contribuciones que puedan estar presentes en el sistema.

Si bien esta transformación tiene un aspecto secundario en el análisis de la interacción nuclear intrínseca, los resultados obtenidos con la interacción de apareamiento hicieron que su estudio se considerara relevante. Dado que existe cierta confusión con respecto a las variaciones en la regla de suma cuando se considera la interacción de apareamiento, atribuidas a la no invariancia traslacional de esta interacción, se consideró de interés analizar explícitamente las invariancias traslacionales y galileanas, marcando sus diferencias y estudiando el comportamiento del apareamiento frente a cada una.

## 2.4 Más notación

En esta parte del capítulo se establecerán las relaciones de conmutación standard entre los operadores bilineales que fueron necesarias, ver ec.(2),(3) y (4).

Es conveniente tener la expresión de los conmutadores entre los tres operadores bilineales en forma acoplada. Las relaciones de conmutación son

$$\begin{aligned} \{[B_{12,J_{12}}, A_{34,J_{34}}^\dagger]\}_M^K &= -(1 + \hat{p}_{34})\delta_{13}\delta_{24}\hat{J}_{12}\delta_{K0} \\ &- (1 + \hat{p}_{12})(1 + \hat{p}_{34})\delta_{23}\hat{J}_{12}\hat{J}_{34} \begin{Bmatrix} j_4 & j_1 & K \\ J_{12} & J_{34} & j_2 \end{Bmatrix} C_{41,KM} \end{aligned} \quad (31)$$

$$\{[C_{12,J_{12}}, A_{34,J_{34}}^\dagger]\}_M^K = (1 + \hat{p}_{34})(-1)^{j_1-j_4+K}\delta_{23}\hat{J}_{12}\hat{J}_{34} \begin{Bmatrix} j_1 & j_4 & K \\ J_{34} & J_{12} & j_2 \end{Bmatrix} A_{14,KM}^\dagger \quad (32)$$

$$\{[B_{12,J_{12}}, C_{34,J_{34}}]\}_M^K = (1 + \hat{p}_{12})(-1)^{j_1-j_4+K}\delta_{23}\hat{J}_{12}\hat{J}_{34} \begin{Bmatrix} j_1 & j_4 & K \\ J_{34} & J_{12} & j_2 \end{Bmatrix} B_{14,KM} \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \{[C_{12,J_{12}}, C_{34,J_{34}}]\}_M^K &= (-1)^{j_1-j_4+K}\delta_{23}\hat{J}_{12}\hat{J}_{34} \begin{Bmatrix} j_1 & j_4 & K \\ J_{34} & J_{12} & j_2 \end{Bmatrix} C_{14,KM} \\ &+ (-1)^{j_2+j_3+J_{12}+J_{34}}\delta_{14}\hat{J}_{12}\hat{J}_{34} \begin{Bmatrix} j_2 & j_3 & K \\ J_{34} & J_{12} & j_1 \end{Bmatrix} C_{32,KM} \end{aligned} \quad (34)$$

donde se ha usado  $\hat{J} = \sqrt{2J+1}$ , y la cantidad  $\hat{p}_{mn}$  intercambia  $m \leftrightarrow n$  e introduce una fase extra de  $(-1)^{j_m-j_n+J_{mn}}$ .

Una relación de acoplamiento muy utilizada es

$$\begin{aligned} \{[C_{12,J_{12}} \otimes C_{34,J_{34}}]\}_M^K &= (-1)^{j_1-j_4+K} \delta_{23} \hat{J}_{12} \hat{J}_{34} \begin{Bmatrix} j_1 & j_4 & K \\ J_{34} & J_{12} & j_2 \end{Bmatrix} C_{14,KM} \\ &- \hat{J}_{12} \hat{J}_{34} \sum_{J_{13}J_{24}} \hat{J}_{13} \hat{J}_{24} \begin{Bmatrix} j_1 & j_2 & J_{12} \\ j_3 & j_4 & J_{34} \\ J_{13} & J_{24} & K \end{Bmatrix} \{A_{13,J_{13}}^\dagger B_{24,J_{24}}\}_M^K \end{aligned} \quad (35)$$

Para operadores tensoriales  $d_i$  que se transforman bajo rotaciones como  $(j_i, m_i)$ , es posible factorizar su conmutador en la forma

$$\begin{aligned} \{[d_1, \{d_2 d_3\}^{J_{23}}]\}_M^J &= \sum_{J_{12}} (-1)^{j_1+j_2+j_3+J} \hat{J}_{12} \hat{J}_{24} \begin{Bmatrix} j_3 & J_{12} & J \\ j_1 & J_{23} & j_2 \end{Bmatrix} \{[d_1; d_2]\}^{J_{12}} d_3\}_M^J \\ &+ \sum_{J_{13}} (-1)^{J_{23}+J_{13}-j_3+J} \hat{J}_{13} \hat{J}_{23} \begin{Bmatrix} j_2 & J_{13} & J \\ j_1 & J_{23} & j_3 \end{Bmatrix} \{d_2\{[d_1; d_3]\}^{J_{13}}\}_M^J \end{aligned} \quad (36)$$

## 2.5 La masa efectiva y el operador dipolar de masa

Un operador general partícula-agujero  $\mathcal{Q}_\mu^\lambda$  puede escribirse

$$\mathcal{Q}_{\lambda\mu} = \sum_{k,i} \langle k m_k | \mathcal{Q}_{\lambda\mu} | i m_i \rangle a_k^\dagger a_i$$

Por el Teorema de Wigner-Eckart, también puede escribirse como

$$\mathcal{Q}_{\lambda\mu} = \frac{-1}{\hat{\lambda}} \sum_{k,i} q_{ki}^\lambda C_{ki,\lambda\mu} \quad (37)$$

donde  $q_{ki}^\lambda = \langle k || \mathcal{Q}_\lambda || i \rangle$  son los elementos de matriz reducidos del operador  $\mathcal{Q}_{\lambda\mu}$  entre los estados  $i$  and  $k$ . En este trabajo se tomaron como base completa

para los estados de partícula independiente los estados de una partícula en el oscilador armónico, con frecuencia  $\omega$  y parámetro de tamaño  $b$ . Los estados de partícula simple están etiquetados por  $|n, l, j, m\rangle$ , con  $N = 2n + l$ . Las funciones de onda angulares se definieron de tal forma que los operadores proporcionales a los armónicos esféricos (como los operadores multipolares eléctricos) del tipo  $\mathcal{T}_{\lambda\mu} = r^\lambda \mathcal{Y}_\mu^\lambda$  satisfagan la siguiente relación de simetría ante el intercambio de dos índices

$$t_{ik}^\lambda = \langle k || \mathcal{T}_\lambda || i \rangle = (-1)^{j_i - j_k + \lambda} t_{ki}^\lambda \quad (38)$$

Debido a esta relación, es posible escribir también estos operadores como

$$\mathcal{T}_{\lambda\mu} = \frac{-1}{\hat{\lambda}} \sum_{k \geq i} \frac{t_{ki}^\lambda}{(1 + \delta_{k,i})} [C_{ki,\lambda\mu} + (-1)^{\lambda-\mu} C_{ki,\lambda-\mu}^\dagger] \quad (39)$$

El operador dipolar de masa  $\mathcal{T}_{1\mu}$  está definido como

$$\mathcal{T}_{1\mu} = \sum_i r_i \mathcal{Y}_{1\mu}(\theta_i, \phi_i) = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} A R_{\mu,CM} \quad (40)$$

donde  $A$  es el número másico y  $R_{\mu,CM}$  es la  $\mu$ -ésima coordenada de la posición del centro de masa, dada en coordenadas esféricas.

Se observa que la relación (29) está claramente relacionada a la EWSR1 para el operador dipolar de masa.

Para un hamiltoniano de interacción invariante de Galileo, la EWSR1( $\mathcal{T}_1$ ) puede escribirse (ver ec.(24))

$$\begin{aligned}
EWSR1(\mathcal{T}_1) &= \frac{\sqrt{3}}{2} \langle \Psi_0 | \{ [\mathcal{T}_1; [\mathcal{H}; \mathcal{T}_1]] \}_0^0 | \Psi_0 \rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{\mu} \langle 1\mu 1 - \mu | 00 \rangle \langle \Psi_0 | [\mathcal{T}_{1\mu}^\dagger; [\mathcal{H}; \mathcal{T}_{1\mu}]] | \Psi_0 \rangle \\
&= \frac{\sqrt{3}}{2} \sum_{\mu} \frac{(-1)^{1-\mu}}{\sqrt{3}} (-1)^{1-\mu} \langle \Psi_0 | [\mathcal{T}_{1-\mu}; [\mathcal{H}; \mathcal{T}_{1\mu}]] | \Psi_0 \rangle
\end{aligned}$$

Usando (29) y (40), y teniendo en cuenta que  $\langle \Psi_0 | [\mathcal{T}_{1-\mu}; [\mathcal{H}; \mathcal{T}_{1\mu}]] | \Psi_0 \rangle$  es independiente de  $\mu$  y que la única parte que contribuye al conmutador es el término que depende de  $P_{CM}$  en (28), queda

$$\begin{aligned}
EWSR1(\mathcal{T}_1) &= \frac{3}{2} \frac{3}{4\pi M_T} A^2 \hbar^2 \\
&= \frac{9\hbar^2 A^2}{8\pi M_T} \tag{41}
\end{aligned}$$

de forma tal que esta regla de suma será independiente del modelo. Si el operador bajo estudio es el operador dipolar eléctrico, esta independencia del modelo corresponde a la bien conocida regla de suma de Thomas-Reiche-Kuhn (TRK)<sup>[3, 4]</sup>.

Es interesante notar que (ver ec.41) podemos escribir la “masa efectiva del nucleón” en términos de esta regla de suma como

$$M_{eff} = \frac{9\hbar^2 A}{8\pi EWSR1(\mathcal{T}_1)} \tag{42}$$

Debe notarse en esta expresión que se definió la  $M_{eff}$  como la  $M_T/A$ .

El cálculo de la masa efectiva<sup>[7]</sup> puede hacerse como una función de la coordenada radial o como una función de estados de partícula simple<sup>[27]</sup>. En el apéndice se muestra en un modelo superconductor muy esquemático (formados por dos niveles igualmente degenerados) que los valores obtenidos para el cociente entre las energías del estado fundamental para sistemas superfluidos y no superfluidos son similares a los obtenidos usando los cambios en la EWSR1.

## 2.6 El hamiltoniano de apareamiento y la invariancia traslacional

La coordenada del centro de masa puede escribirse en términos de  $x_{ki} = \sqrt{\frac{4\pi}{3A^2}} t_{ki}^1$  (ver ec.(40)). Dado sus propiedades de conmutación con  $P_{c.m.}$ , es posible escribir explícitamente el operador momento del centro de masa como

$$P_{\mu}^{c.m.} = -\frac{i\hbar}{b^2} \sum_{k \geq i} x_{ki} [C_{ki,1\mu} - (-1)^{1-\mu} C_{ki,1-\mu}^{\dagger}] \quad (43)$$

Por otro lado, según la ec.(5) el hamiltoniano de apareamiento se escribe

$$H_p = -G\mathcal{P}^{\dagger}\mathcal{P} \quad (44)$$

donde  $\mathcal{P}^{\dagger} = \frac{1}{2} \sum_k \hat{j}_k A_{kk,00}^{\dagger}$ , y por lo tanto  $\mathcal{P} = \frac{1}{2} \sum_k \hat{j}_k B_{kk,00}$ .

Para calcular las relaciones de conmutación de  $\mathcal{P}$  y  $P_{c.m.}$  usamos las relaciones de conmutación dadas por las ecs.(31)-(34) :

$$[\mathcal{P}, C_{ki,1\mu}] = -B_{ki,1\mu} \quad (45)$$

$$[\mathcal{P}, (-1)^{\lambda-\mu} C_{ki,1-\mu}^\dagger] = -B_{ki,1\mu} \quad (46)$$

Lo mismo para calcular las relaciones de  $\mathcal{P}^\dagger$  con  $P_{c.m.}$ .

$$[\mathcal{P}^\dagger, C_{ki,1\mu}] = A_{ki,1\mu}^\dagger \quad (47)$$

$$[\mathcal{P}^\dagger, (-1)^{\lambda-\mu} C_{ki,1-\mu}^\dagger] = A_{ki,1\mu}^\dagger \quad (48)$$

Por lo tanto, si se calcula el conmutador de  $H_p$  con  $P_{c.m.}$  resulta

$$\begin{aligned} [\mathcal{H}_p, P_{c.m.}] &= (-G)\left(-\frac{i\hbar}{b^2}\right)\left\{\mathcal{P}^\dagger\left[\mathcal{P}, \sum_{k \geq i} x_{ki}(C_{ki,1\mu} - (-1)^{1-\mu} C_{ki,1-\mu}^\dagger)\right]\right. \\ &\quad \left.+ [\mathcal{P}^\dagger, \sum_{k \geq i} x_{ki}(C_{ki,1\mu} - (-1)^{1-\mu} C_{ki,1-\mu}^\dagger)]\mathcal{P}\right\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Se sigue que  $H_p$  y el momentum del centro de masa  $P_{c.m.}$  conmutan. De esta forma se ha verificado que el hamiltoniano de apareamiento usado en los sistemas nucleares es invariante traslacional.

En un tratamiento usual de sistemas nucleares se introducen términos que violan la invariancia traslacional, debido a la descripción del sistema en



términos de las coordenadas de partículas que no tienen en cuenta apropiadamente la conservación del centro de masa del sistema. Un hamiltoniano invariante traslacional tendrá en general la siguiente estructura

$$\mathcal{H} = \frac{P_{c.m.}^2}{2M_T} + F_1(P_{c.m.}) + G_1(P_{c.m.}, \text{variables intrínsecas}) + \mathcal{H}_{int} \quad (49)$$

donde  $F_1$  representa alguna función de  $P_{c.m.}$  (no necesariamente lineal) y será la que de el cambio en la masa efectiva del sistema completo, mientras que el término  $G_1$  introduce la dependencia en la velocidad de la interacción, en conexión con los grados de libertad internos.

Estos dos términos ( $G_1$  y  $F_1$ ) serán los que cambien la EWSR1( $\mathcal{T}_1$ ).

## 2.7 Cambios en la EWSR1

Se procederá ahora a calcular la EWSR1 asociada a operadores multipolares del tipo  $\mathcal{T}_{\lambda\mu}$  cuando se considera el hamiltoniano de apareamiento. Esta puede escribirse como

$$EWSR1(\mathcal{T}) = \frac{\hat{\lambda}}{2} \langle \Psi_0 | \{ \{ \mathcal{T}_\lambda; [\mathcal{H}_0 + H_p, \mathcal{T}_\lambda] \} \}_0^0 | \Psi_0 \rangle \quad (50)$$

donde  $\mathcal{H}_0$  es el hamiltoniano antes de que la interacción de apareamiento sea tomada en cuenta. Debe evaluarse el valor de expectación de esta expresión en el vacío real del sistema con  $N$  partículas  $|\Psi_0^{(N)}\rangle$ . Thouless encontró<sup>(23)</sup> que, para operadores partícula- agujero, la regla de suma evaluada en la

Random Phase Approximation (RPA) tiene el mismo valor que el obtenido al calcular la expresión (24) cuando  $|\Psi_0\rangle$  es la función de onda de Hartree-Fock autoconsistente.

Se separará el hamiltoniano  $\mathcal{H}_0$  en dos partes, una correspondiente a la aproximación de HF (o HF Bogoliubov HFB) que será diagonal con energías  $E_k$ , y la otra correspondiente a la interacción residual de dos cuerpos  $\mathcal{W}$  con elementos de matriz entre los estados de Hartree-Fock (Bogoliubov)  $\mathcal{W}_{ij,mn}$ . Como

$$\begin{aligned} U_i^k &= \langle \Psi_k^{(N-1)} | a_i | \Psi_0^{(N)} \rangle \\ V_i^k &= \langle \Psi_k^{(N+1)} | a_i^\dagger | \Psi_0^{(N)} \rangle \end{aligned} \quad (51)$$

es posible escribir explícitamente la  $EWSR1(\mathcal{T}_\lambda)$  en la RPA (se asumirá por simplicidad que  $U_i^k = \delta_{ik} U_i$  y  $V_i^k = \delta_{ik} V_i$ )

$$\begin{aligned} EWSR1(\mathcal{T}_\lambda)_{RPA} &= \frac{1}{2} \sum_{12} (U_1 V_2 + U_2 V_1)^2 |t_{12}^\lambda|^2 (E_1 + E_2) + \frac{1}{2} \sum_{1234} [U_2 V_2 U_4 V_4 \\ &\quad \overline{\mathcal{W}}_{12,34} + (U_1^2 V_2^2 - U_2^2 V_1^2)(U_3^2 V_4^2 - U_4^2 V_3^2) \overline{\mathcal{W}}_{14,23} \\ &\quad + U_1 V_1 U_3 V_3 \overline{\mathcal{W}}_{43,21}] t_{34}^{\lambda*} t_{12}^\lambda \end{aligned} \quad (52)$$

donde  $\overline{\mathcal{W}}_{12,34} = \mathcal{W}_{12,34} - \mathcal{W}_{12,43}$  es el elemento de matriz antisimetrizado de la interacción residual de dos cuerpos  $\mathcal{W}$ . En Ref.[28] se demostró que para evaluar la regla de suma considerando procesos más allá de la RPA, es

necesario sólo mejorar la función de Green de una partícula. En ese trabajo se demostró que si se clasifican los procesos que contribuyen a la EWSR1 [29] en términos de  $\frac{1}{\Omega}$ , el mejoramiento en la descripción de la función de Green de una partícula mas allá de HF provoca cambios en la EWSR1 del orden de  $\frac{1}{\Omega}$ . Al evaluar la regla de suma en el leading orden ( $\frac{1}{\Omega}$ ) es entonces apropiado usar el vacío de HF (o HFB).

El uso de las ecs.(31)-(34) y (35)-(36) permitirá evaluar el doble conmutador relacionado con la interacción de apareamiento

$$[H_p; \mathcal{T}_{\lambda\mu}] = \frac{2G}{\hat{\lambda}} \sum_{12} t_{12}^\lambda [\mathcal{P}^\dagger B_{12,\lambda\mu} + A_{12,\lambda\mu}^\dagger \mathcal{P}] \quad (53)$$

y para el doble conmutador se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\hat{\lambda}}{2} \{[\mathcal{T}_\lambda; [H_p; \mathcal{T}_\lambda]]\}_0^0 &= -G \sum_{12} \frac{(t_{12}^\lambda)^2}{\hat{j}_2} [\mathcal{P}^\dagger B_{22,0} + A_{22,0}^\dagger \mathcal{P}] \\ &+ G \sum_{121'2'} \frac{t_{12}^\lambda t_{1'2'}^\lambda}{\hat{\lambda}} \{A_{1'2',\lambda}^\dagger B_{12,\lambda}\}_0^0 \end{aligned} \quad (54)$$

## 2.8 Sistemas Normales

En núcleos de capa cerrada el hamiltoniano de apareamiento no es lo suficientemente fuerte como para hacer al sistema superconductor, y la estructura del vacío no será afectada por la presencia de  $H_p$ . Es entonces posible evaluar la contribución de  $\mathcal{H}_0$  a la regla de suma en la RPA recordando que los factores  $U$  y  $V$  en la ec.(52) son, respectivamente, 1 o 0 dependiendo de

qué nivel esté por encima o por debajo del nivel de Fermi. La expresión es idéntica a la obtenida previamente por Thouless<sup>[23]</sup>.

El cambio en la EWSR1 (CEWSR1) debido a la interacción de apareamiento estará entonces dado por

$$CEWSR1(\mathcal{T}) = \frac{\hat{\lambda}}{2} \langle \Psi_0 | \{ [\mathcal{T}_\lambda; [H_p, \mathcal{T}_\lambda]] \}_0^0 | \Psi_0 \rangle \quad (55)$$

donde  $|\Psi_0\rangle$  es el estado fundamental de  $\mathcal{H}_0$  en la aproximación de HF. El valor de expectación del primer término de la ec.(54) es

$$-G \langle \Psi_0 | \sum_{12k} \frac{(t_{12}^\lambda)^2 \hat{j}_k}{\hat{j}_2} [A_{kk,0}^\dagger B_{22,0} + A_{22,0}^\dagger B_{kk,0}] | \Psi_0 \rangle = 2G \sum_{\forall 1, 2 < E_F} (t_{12}^\lambda)^2 \quad (56)$$

mientras que el segundo

$$G \langle \Psi | \sum_{12, 1'2', \mu} \frac{t_{12}^\lambda t_{1'2'}^\lambda}{\hat{\lambda}^2} A_{1'2', \lambda \mu}^\dagger B_{12, \lambda \mu} | \Psi_0 \rangle = -2G \sum_{12 < E_F} (t_{12}^\lambda)^2 \quad (57)$$

La diferencia entre las ecuaciones (56) y (57) está en que en la primera la suma sobre 1 es irrestricta mientras que en la segunda 1 denota un estado que pertenece al mar de Fermi. Se obtiene entonces la siguiente expresión para el CEWSR1

$$CEWSR1 = 2G \sum_{1 > E_F, 2 < E_F} (t_{12}^\lambda)^2 \quad (58)$$

Debe notarse que una parte de este cambio puede entenderse en términos de la variación en las energías de HF producida por la interacción de apareamiento. La otra parte proviene de los últimos tres términos en (52). Sin embargo, ambas contribuciones darán sólo una pequeña corrección a la EWSR1 evaluada con  $\mathcal{H}_0$ .

## 2.9 Sistemas superconductores

La evaluación de la EWSR1 para sistemas superconductivos es más importante cuando el hamiltoniano de apareamiento es suficientemente fuerte, y produce un cambio en la estructura del estado fundamental, haciendo necesario el uso de la aproximación de HFB, en lugar de HF. Como  $|\Psi_0\rangle$  cambia, esto implica en general un cambio en el valor de expectación del doble conmutador de  $\mathcal{H}_0$  y el operador partícula-agujero  $\mathcal{T}_\lambda$ . La única forma de evaluar la EWSR1 en el leading orden será a través de la ec. (52).

Sin embargo, para el operador dipolar de masa la situación es más simple. Como el doble conmutador de  $\mathcal{H}_0$  y  $R_{\mu,CM}$  es un número,  $(\frac{3\hbar^2}{2M_T})$ , su valor de expectación es independiente del cambio en la función de onda del estado fundamental. Se puede evaluar entonces el cambio en la EWSR1 para el operador  $\mathcal{T}_{1\mu}$  en términos del doble conmutador dado por la ec.(54). Por simplicidad, se discutirá el vacío de BCS en lugar del de HFB.

Para eso es necesario hacer una transformación a cuasipartícula (ver sección 1.3 del capítulo 1).

La  $EWSR1(\mathcal{T}_1)_{RPA}$  está dada en la ec.(52). Para evaluarla en el vacío de BCS es necesario escribir el doble conmutador en términos de las cuasipartículas y considerar sólo los términos constantes.

Definiendo los operadores  $\mathcal{A}_{12,\lambda\mu}^\dagger$ ,  $\mathcal{B}_{12,\lambda\mu}$  y  $\mathcal{C}_{12,\lambda\mu}$  que tienen la misma definición que  $A^\dagger$ ,  $B$  y  $C$  pero escritos en términos de las cuasipartículas se sigue que

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{12,\lambda\mu}^\dagger &= U_1 U_2 \mathcal{A}_{12,\lambda\mu}^\dagger + V_1 V_2 \mathcal{B}_{12,\lambda\mu} + \\ &U_1 V_2 \mathcal{C}_{12,\lambda\mu} + (-1)^{j_1-j_2+\lambda} U_2 V_1 \mathcal{C}_{21,\lambda\mu} + \hat{j}_1 U_1 V_1 \delta_{12} \delta_{\lambda 0} \end{aligned} \quad (59)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_{12,\lambda\mu} &= V_1 V_2 \mathcal{A}_{12,\lambda\mu}^\dagger + U_1 U_2 \mathcal{B}_{12,\lambda\mu} \\ &- V_1 U_2 \mathcal{C}_{12,\lambda\mu} - (-1)^{j_1-j_2+\lambda} V_2 U_1 \mathcal{C}_{21,\lambda\mu} - \hat{j}_1 U_1 V_1 \delta_{12} \delta_{\lambda 0} \end{aligned} \quad (60)$$

El valor de expectación de los operadores del doble conmutador dado por la ec.(54) en el estado fundamental de BCS da

$$\begin{aligned} \langle BCS | \{ \mathcal{A}_{12,\lambda}^\dagger \mathcal{B}_{34,\lambda} \}_0^0 | BCS \rangle &= \hat{\lambda} V_1^2 V_2^2 (\delta_{13} \delta_{24} + (-1)^{j_1-j_2+\lambda} \delta_{14} \delta_{23}) \\ &- \hat{j}_1 \hat{j}_3 U_1 V_1 U_3 V_3 \delta_{12} \delta_{24} \delta_{\lambda 0} \end{aligned} \quad (61)$$

y por lo tanto puede escribirse para el CEWSR1

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \langle BCS | \{ [\mathcal{T}_1; [H_p; \mathcal{T}_1]] \}_0^0 | BCS \rangle = 2\Delta \sum_{12} t_{12}^2 U_2 V_2 + 2G \sum_{12} t_{12}^2 (V_2^2 - V_1^2) V_2^2 \quad (62)$$

El primer término tiene una mayor contribución (comparar  $G \simeq \frac{20}{A} MeV$  con  $\Delta$ , que por ejemplo para el  $^{114}Sn$  es  $\simeq 1.2 MeV$ ) y es el principal responsable del efecto que el hamiltoniano de apareamiento tiene sobre la regla de suma para sistemas superconductivos.

## 2.10 Resultados obtenidos y discusión

Se evaluaron los valores de la EWSR1 para los operadores de partícula-agujero dipolar de masa y cuadrupolar. La razón por la que se evaluó la suma en el primer operador en lugar del dipolar eléctrico (con mayor significado físico) se debe a que en ese caso debería usarse la carga eléctrica efectiva, que hubiera oscurecido el motivo de la discusión, pues un cálculo real dependería fuertemente del valor dado a la carga efectiva. El orden de magnitud de los cambios introducidos por considerar la interacción de apareamiento resulta ser más evidente para el operador de masa. Por otro lado, se utilizaron las energías de partícula simple tan realistas como fue posible. Los niveles de energía fueron obtenidos usando los niveles del oscilador armónico con las correcciones debidas a interacción spin-órbita y centrífuga<sup>[8]</sup>.

$$\begin{aligned}\frac{E}{\hbar\omega} &= N + \frac{3}{2} - \kappa l - \mu(l(l+1) - \frac{N(N+3)}{2}) \quad \text{para } j = l + 1/2 \quad (63) \\ \frac{E}{\hbar\omega} &= N + \frac{3}{2} - \kappa(l+1) - \mu(l(l+1) - \frac{N(N+3)}{2}) \quad \text{para } j = l - 1/2\end{aligned}$$

donde  $\hbar\omega = 41.0[1 + \frac{A-2Z}{3A}]A^{-\frac{1}{3}}MeV$  con  $A$  el número másico del núcleo,  $Z$  el número de protones,  $N$  el número cuántico principal y  $j, l$  los números cuánticos correspondientes al momento angular total y orbital respectivamente.  $\kappa$  and  $\mu$  se eligen para obtener las mejores aproximaciones a los valores experimentales para cada núcleo<sup>[31]</sup>.

Se han definido los niveles de partícula simple desde  $N = 0$  hasta 3 capas por encima del nivel de Fermi, dado que esta es una buena aproximación para los cálculos realizados. En el  $Sn$  y en las tierras raras se prefirieron usar, para los niveles próximos al nivel de Fermi, las energías dadas por Ref. [32]. Estas han dado buenos resultados en cálculos de BCS usando una magnitud de apareamiento  $G = g/A$ , donde  $g \simeq 20$ . Se asumió que el resto de los niveles tienen probabilidad de ocupación 1 o 0 si están por encima o por debajo de la superficie de Fermi.

En la región del  $Pb$  se usaron, para los niveles cercanos a la superficie de Fermi, los valores experimentales de energías de partícula simple<sup>[26]</sup>. El cambio de las energías de partícula simple en torno a la superficie de Fermi ha sido hecho, en todos los casos, teniendo cuidado de mantener el baricentro de energía de los niveles intercambiados en la misma posición. Se asumió



que este conjunto de niveles de partícula simple es bueno para analizar la influencia de la interacción de apareamiento en la EWSR1.

En el caso de los operadores dipolar de masa y cuadrupolar se evaluó la regla de suma para  $\mathcal{H}_0$  usando sólo el primer término de la ec.(52), lo cual es, evidentemente, una aproximación. Esto se verificó calculando la masa efectiva del nucleón a través de la ec.(42). Se consideró que, si los términos remanentes fueran irrelevantes, el valor de masa efectiva (en unidades de masa del protón) que se obtiene de la regla de suma asociada al operador dipolar debería tener un valor muy cercano a 1. El apartamiento de este valor daría una idea de la bondad de los niveles de energía de partícula simple usados y de la influencia de los términos de “reacoplamiento” del hamiltoniano. Para calcular el cambio en la regla de suma se necesitó evaluar ésta también en el sistema sin interacción de apareamiento. Esto forzó a analizar la EWSR1 sólo en algunos núcleos especiales, aquéllos para los cuales al tomar  $G = 0$  resulten los factores  $U$  y  $V$  iguales a 0 o 1 según corresponda. Esto llevó a aplicar los cálculos a núcleos con subcapas llenas.

En la tabla 1 se muestran los principales resultados de los cálculos realizados. En las columnas segunda y tercera están las masas efectivas obtenidas a través de la ec.(42) cuando en el hamiltoniano no se incluye o si se incluye la interacción de apareamiento. En la columna siguiente se muestra el porcentaje de cambio en un caso y en el otro. Se observa que el cambio es

Tabla 1: Masas efectivas calculadas por la regla de suma dependiente de la energía asociada al operador dipolar de masa sin ( $M_{eff}$ ) y con ( $M_{eff}^*$ ) la interacción de apareamiento, normalizadas por la masa del protón. Los cálculos son para algunos núcleos particulares y se muestra el porcentaje de cambio. En las columnas 5 y 6 se muestran las EWSR1 para el operador cuadrupolar (en  $fm^4$ ) sin y con la interacción de apareamiento. En la columna 7 se da el porcentaje de cambio.

| Núcleo     | $M_{eff}$ | $M_{eff}^*$ | Porcentaje | EWSR1( $T_2$ ) | EWSR1( $T_2^*$ ) | Porcentaje |
|------------|-----------|-------------|------------|----------------|------------------|------------|
| $^{60}Ni$  | 1.090     | 0.928       | 14.8       | 6.46           | 6.64             | 5.47       |
| $^{70}Ge$  | 1.134     | 0.963       | 15.1       | 8.26           | 8.68             | 4.84       |
| $^{72}Ge$  | 1.142     | 0.935       | 18.1       | 8.61           | 8.97             | 4.04       |
| $^{88}Sr$  | 1.106     | 1.066       | 3.65       | 12.00          | 12.16            | 1.31       |
| $^{90}Zr$  | 1.104     | 1.034       | 6.40       | 12.39          | 12.48            | 0.72       |
| $^{96}Zr$  | 1.074     | 0.882       | 17.8       | 13.98          | 14.85            | 5.82       |
| $^{100}Sn$ | 1.042     | 1.030       | 1.17       | 15.06          | 15.16            | 0.66       |
| $^{114}Sn$ | 1.053     | 0.905       | 14.1       | 18.87          | 19.52            | 3.32       |
| $^{116}Sn$ | 1.041     | 0.905       | 13.0       | 19.54          | 19.91            | 1.85       |
| $^{120}Sn$ | 1.030     | 0.906       | 12.1       | 19.56          | 20.49            | 4.55       |
| $^{132}Sn$ | 0.935     | 0.927       | 0.87       | 25.46          | 25.59            | 0.51       |
| $^{138}Ba$ | 0.986     | 0.909       | 7.84       | 26.53          | 27.29            | 2.43       |
| $^{154}Gd$ | 0.993     | 0.830       | 16.4       | 31.15          | 32.36            | 4.48       |
| $^{156}Dy$ | 0.992     | 0.831       | 16.2       | 31.17          | 32.63            | 4.48       |
| $^{170}Yb$ | 0.989     | 0.818       | 17.32      | 30.71          | 35.65            | 13.85      |
| $^{206}Pb$ | 0.939     | 0.908       | 3.39       | 45.70          | 46.63            | 1.98       |
| $^{208}Pb$ | 0.945     | 0.939       | 0.65       | 53.60          | 53.80            | 3.74       |

remarcablemente mayor cuando el núcleo es superconductor en ambos tipos de nucleones, protones y neutrones, mientras que para núcleos de doble capa cerrada como el  $^{208}\text{Pb}$  el efecto es mucho menor.

En forma similar, en las columnas 5 a 7 se muestran los cambios en la regla de suma asociada al operador cuadrupolar. Los efectos de la interacción de apareamiento en este caso son mucho menores.

La forma en la que han sido evaluados los cambios en la EWSR1 muestran claramente que el que las correcciones a la EWSR1 sean mayores para sistemas superconductivos no es debido a la aproximación BCS sino al hecho de que la corrección está relacionada con el gap  $\Delta$ . Como el cambio en la EWSR1 y el gap están claramente relacionados, no tiene sentido pensar que uno podría mantener una (la correlación de apareamiento en el espectro vía el gap  $\Delta$ ) y cancelar la otra (los efectos de la correlación de apareamiento sobre la EWSR1).

La principal conclusión de este capítulo es que la interacción de apareamiento produce grandes cambios en la regla de suma pesada por energía asociada al operador dipolar de masa, o, lo que es equivalente, en la masa efectiva del nucleón definida por la ec.(42). Como la interacción de apareamiento es una interacción simple no realista, uno podría preguntarse si este efecto permanecerá relevante para otras interacciones más realistas. En este trabajo se entiende que, debido a las consideraciones hechas sobre la no validez

de la invariancia de Galileo en el núcleo discutidas previamente en la introducción, en otras interacciones más realistas es de esperarse que el efecto tenga la misma relevancia.

## 3 EWSR1 dependiente de la temperatura

### 3.1 Introducción

Las variaciones observadas en la regla de suma con la interacción de apareamiento, se completaron con el estudio de la dependencia de la EWSR1 cuando se trabaja a temperatura finita. Se encontró que la EWSR1 asociada al operador dipolar de masa muestra dependencias con la temperatura en la zona en la que el núcleo es superconductor, y encontramos una relación simple entre el gap de apareamiento  $\Delta$  y la EWSR1( $T$ )<sup>[16]</sup>.

En este capítulo se trabajó con las técnicas de la función de Green. La principal ventaja de usar este tipo de expansión perturbativa es que los procesos relevantes pueden aislarse, y de esta manera se entienden mejor las aproximaciones hechas. Para eso se extendieron los resultados obtenidos en la Ref.[28], que relaciona la regla de suma de energía con la discontinuidad de la derivada primera de la función de Green, al caso con temperatura. Las expresiones obtenidas fueron aplicadas a algunos de los núcleos con los que se trabajó en el capítulo anterior. En la sección que sigue se introducen el formalismo y la notación utilizados en este capítulo. Luego se da la expresión que vincula la EWSR1 con temperatura y la interacción de apareamiento, y se verifican los límites a  $T = 0$  y núcleos normales. En la última sección se muestran las aplicaciones numéricas y sus conclusiones.

### 3.2 Funciones de Green

Como base de una descripción estadística del sistema nuclear<sup>[34][35]</sup> se usa la teoría de campo medio dependiente de la temperatura. A altas energías de excitación, la densidad de niveles nuclear aumenta tan rápidamente que se hace prácticamente imposible estudiar la transición entre los niveles individuales, siendo más adecuado trabajar en una descripción estadística. Dado que el núcleo es un sistema cerrado, y considerando que se trabaja con la presunción de equilibrio, que implica que todos los autoestados del sistema en un cierto intervalo de energía en torno a una energía  $E$  están poblados con la misma probabilidad, debería trabajarse en el ensamble microcanónico. Sin embargo es prácticamente imposible poder hacer cálculos detallados en este ensamble, y se hace más conveniente trabajar en el gran canónico, que está caracterizado no por una energía y número de partículas fijos, sino por fijar la temperatura y el potencial químico.

El operador densidad es de la forma

$$\hat{\rho}_G = \frac{e^{-\frac{(\hat{\mathcal{H}} - \mu \hat{N})}{T}}}{Z} \quad (64)$$

con  $\mu$  la energía del nivel de Fermi.  $Z$  es la función de partición gran canónica

$$Z = Tr \left[ e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu \mathcal{N})} \right] \quad (65)$$

con  $\beta = 1/k_B T$ ,  $k_B$  la constante de Boltzmann. La traza se refiere a la suma sobre todos los estados  $j$  del sistema y sobre todos los números de partícula.

A temperatura finita el valor medio de un observable  $\mathcal{O}$  en un sistema en equilibrio térmico que intercambia energía y partículas con el medio externo es<sup>[9]</sup>

$$\langle \mathcal{O} \rangle = \text{Tr} [\hat{\rho}_G \mathcal{O}] = \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu N)} \mathcal{O}] = \frac{1}{Z} \sum_m e^{-\beta(E_m - \mu N_m)} \langle m | \mathcal{O} | m \rangle \quad (66)$$

siendo  $N_m$  y  $E_m$  el número de partículas y la energía del estado estacionario  $|m\rangle$ .

La función de Green en la representación de Matsubara<sup>[36]</sup> para un operador bilineal partícula-agujero, dependiente de la temperatura (TDGF) es

$$\begin{aligned} G_{(\alpha\beta,\gamma\delta)}(\tau) &= \frac{1}{Z} \text{Tr} [e^{-\beta(\mathcal{H} - \mu N)} \{ a_\delta^\dagger(\tau) a_\gamma(\tau) a_\alpha^\dagger(0) a_\beta(0) \theta(\tau) \\ &\quad + a_\alpha^\dagger(0) a_\beta(0) a_\delta^\dagger(\tau) a_\gamma(\tau) \theta(-\tau) \}] \\ &= \frac{1}{Z} \sum_{m,n} e^{-\beta(E_m - \mu N_m)} \{ \langle m | a_\delta^\dagger(\tau) a_\gamma(\tau) | k \rangle \langle k | a_\alpha^\dagger(0) a_\beta(0) | m \rangle \theta(\tau) \\ &\quad + \langle m | a_\alpha^\dagger(0) a_\beta(0) | k \rangle \langle k | a_\delta^\dagger(\tau) a_\gamma(\tau) | m \rangle \theta(-\tau) \} \end{aligned} \quad (67)$$

y usando la representación de Heisenberg modificada<sup>[9]</sup>

$$G(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau) = \frac{1}{Z} \sum_{m,k} e^{-\beta(E_m - \mu N_m)} \left\{ e^{-(E_k - E_m)\tau} \langle m | a_\delta^\dagger a_\gamma | k \rangle \langle k | a_\alpha^\dagger a_\beta | m \rangle \theta(\tau) \right. \\ \left. + e^{-(E_m - E_k)\tau} \langle m | a_\alpha^\dagger a_\beta | k \rangle \langle k | a_\delta^\dagger a_\gamma | m \rangle \theta(-\tau) \right\} \quad (68)$$

La diferencia principal de la función de Green en el tratamiento a  $T = 0$  está en que la dependencia en el tiempo no es la usual, sino que la TDGF depende de una variable imaginaria ficticia  $\tau = it$ , definida en el intervalo 0 a  $\hbar\beta$ . La TDGF es periódica en el intervalo  $|\tau| \leq \hbar\beta$ , es decir

$$G(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau < 0) = -G(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau + \hbar\beta) \quad (69)$$

(esperamos que no haya confusión entre la expresión  $\beta$  que representa un estado posible del sistema y  $\beta$  como la inversa de  $k_B T$ ).

Esta propiedad de periodicidad de la TDGF permite que pueda ser expandida en serie de Fourier, lo que la lleva a una expresión muy simple Dado que

$$G(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau) = \frac{\delta_{\alpha\gamma, \beta\delta}}{\beta} \sum_{n=par} \frac{e^{i\omega_n \tau}}{i\omega_n - (E_\alpha - E_\beta)} \quad (70)$$

### 3.3 La EWSR y la función de Green

En el caso con temperatura, la EWSR1 dependiente de la temperatura asociada a un operador hermítico  $\mathcal{Q}$  es



$$EWSR1(Q, T) = \frac{1}{2} \langle \langle [Q, [\mathcal{H}, Q]] \rangle \rangle = \frac{1}{Z} \sum_{m,k} e^{-\beta(E_m - \mu N_m)} |\langle n | Q | m \rangle|^2 (E_n - E_m) \quad (71)$$

donde el doble  $\langle \rangle$  representa el valor medio del conmutador en el estado fundamental del sistema, y también su valor medio térmico.

Al evaluar la discontinuidad de la derivada primera de la función de Green dependiente de la temperatura resulta

$$G'(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau)|_{\tau=0^+} - G'(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau)|_{\tau=0^-} = \frac{1}{Z} \sum_{m,n} e^{-\beta(E_m - \mu N_m)} \quad (72)$$

$$(E_m - E_k) \left\{ \langle m | a_\delta^\dagger a_\gamma | k \rangle \langle k | a_\alpha^\dagger a_\beta | m \rangle + \langle k | a_\alpha^\dagger a_\beta | m \rangle \langle m | a_\delta^\dagger a_\gamma | k \rangle \right\}$$

y con

$$\langle k | Q | m \rangle = \sum_{\alpha, \beta} Q_{\alpha\beta} \langle k | a_\alpha^\dagger a_\beta | m \rangle \quad (73)$$

queda la expresión

$$EWSR1(Q, T) = \frac{-1}{2} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} Q_{\gamma\delta}^* \left[ G'(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau)|_{\tau=0^+} - G'(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau)|_{\tau=0^-} \right] Q_{\alpha\beta} \quad (74)$$

que extiende al caso con temperatura los resultados de la Ref.[28].

Para decidir cuáles son los procesos relevantes que contribuyen a la EWSR1, seguimos de cerca las discusiones de la Ref.[37] y [28]. Para un hamiltoniano con un término de un cuerpo y una interacción residual de dos cuerpos,

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{W} \quad (75)$$

consideramos los diagramas asociados con  $G(\alpha\beta, \gamma\delta, \tau + d\tau)$  y  $G(\alpha\beta, \gamma\delta, \tau)$ . Sustrayendo un conjunto de diagramas del otro, y tomando  $d\tau$  tendiendo a cero, tenemos

$$G'(\alpha\beta, \gamma\delta, \tau) = G'_0(\alpha\beta, \gamma\delta, \tau) + B(\alpha\beta, \gamma\delta, \tau). \quad (76)$$

donde  $G_0(\alpha\beta, \gamma\delta, \tau)$  es la TDGF de partícula-agujero libre,

$$G_0(\alpha\beta, \gamma\delta, \tau) = e^{-(\epsilon_\alpha - \epsilon_\beta)\tau/\hbar} [(1 - n_\alpha)n_\beta\theta(\tau) + (1 - n_\beta)n_\alpha\theta(-\tau)]\delta_{\alpha\gamma}\delta_{\beta\delta} \quad (77)$$

para  $\epsilon_\alpha$  es la energía y  $n_\alpha$  es la probabilidad de ocupación para el nivel  $\alpha$ .

Definiendo  $\tilde{\epsilon}_\alpha = \epsilon_\alpha - \mu$ , es

$$n_\alpha = \frac{1}{1 + e^{\tilde{\epsilon}_\alpha/\hbar}}. \quad (78)$$

El término  $B(\alpha\beta, \gamma\delta, \tau)$  representa la contribución de todos los diagramas que tienen un vértice al tiempo  $\tau$ . Los diagramas restantes se cancelan en la sustracción de  $G(\alpha\beta, \gamma\delta, \tau + d\tau) - G(\alpha\beta, \gamma\delta, \tau)$ , por lo que no se consideran.

Todos los diagramas contenidos en  $B(\alpha\beta, \gamma\delta, \tau)$  pueden ser agrupados, como en la Ref. [37], en restringidos e irrestrictos. Estos comienzan en  $\tau = 0$  y

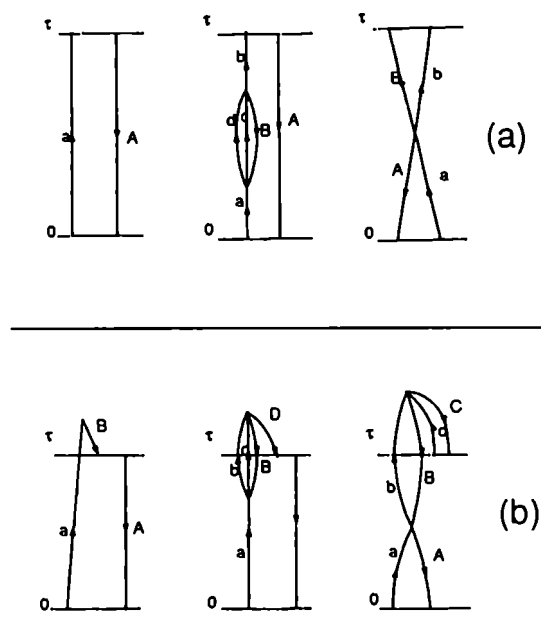


Figura 1 : Ejemplos de diagramas para  $B(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau)$ . (a) Diagramas restringidos y (b) diagramas irrestringidos.

terminan en  $\tau$  y son independientes del signo de  $\tau$ , por lo que no contribuyen a las discontinuidades de  $G'$  en  $\tau = 0$ . Los diagramas restringidos representan procesos que dan sólo contribuciones cuando  $\tau > 0$  (o  $t < 0$ ). En la figura 1 se muestran algunos ejemplos de ambos tipos.

En el caso de los diagramas restringidos, puede verse que aquéllos en los cuales  $W$  actúa entre 0 y  $\tau$  (pero no al tiempo  $\tau$ ), tienen una contribución que tiende a cero cuando  $\tau \rightarrow 0$ . Luego, necesitamos sólo los procesos mostrados en la figura 2, que tienen un vértice en  $\tau$ .

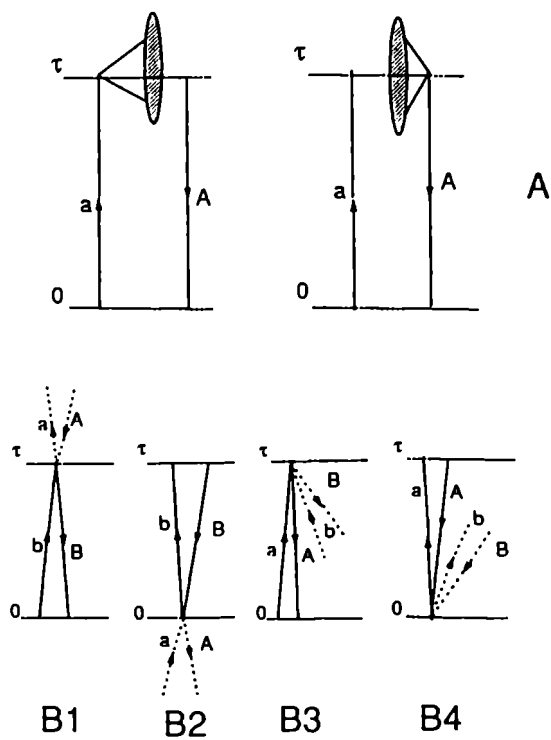


Figura 2 : Se muestran todos los procesos que contribuyen a  $B(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau)$  En la parte A se muestran los diagramas que contribuyen a las discontinuidades de la derivada del propagador libre de partícula-agujero. En la parte B se muestran los procesos que provienen de la interacción entre estados de partícula-agujero.

Los del grupo A están asociados con las discontinuidades de  $iG'_0$ . En estos gráficos la línea de fermiones corresponde a propagadores de HF y según el número de ocupación dependiente de la temperatura, pueden ser partículas (letras minúsculas) o agujeros (letras mayúsculas). El grupo B representa las únicas contribuciones que provienen de la interacción entre las líneas de partícula y agujero. Estos procesos perturbativos se calculan explícitamente según las reglas usuales de evaluación de los diagramas<sup>[10]</sup>. Sus contribuciones a la discontinuidad de la función de Green de partícula-agujero, usando la misma notación de la figura 2, son

$$B_1 + B_2 = (n_a - n_A)(n_b - n_B) (W_{aB,Ab} + W_{Ab,aB}) \quad (79)$$

$$B_3 + B_4 = -(n_a - n_A)(n_b - n_B) (W_{AB,ab} + W_{ab,AB}). \quad (80)$$

La contribución a la EWSR1 de la interacción de dos cuerpos usando las propiedades de simetría del elemento de matriz es

$$\begin{aligned} S_1^{parcial} &= \sum_{abAB} (n_a - n_A)(n_b - n_B) Q_{aA}^* \left[ (W_{aB,Ab} - W_{aB,bA}) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2}(W_{ab,AB} - W_{ab,BA}) + \frac{1}{2}(W_{AB,ab} - W_{AB,ba}) \right] Q_{bB}. \quad (81) \end{aligned}$$

Este es el mismo resultado que el obtenido por Thouless en la Ref. [23] con los factores dependientes del número de ocupación con temperatura.

El valor obtenido para la regla de suma usando las soluciones de la RPA con temperatura es entonces igual al del lado derecho de la ecuación (71) cuando se usa el estado fundamental auto-consistente de HF. La ecuación (74) define los procesos que contribuyen a la EWSR1. Una parte se debe a la descripción de los propagadores de un fermión. Esta parte puede, en principio, ser evaluada explícitamente una vez que se conoce la función de Green de una partícula (o un agujero), lo que define la base completa de partícula simple. La otra parte se debe a la interacción de dos cuerpos entre partículas y agujeros en esa base. Las ecuaciones (79) y (80) indican que esta segunda contribución está tenida en cuenta completamente en la solución de la RPA y no cambia con ningún mejoramiento en la descripción de la función de Green de partícula-agujero.

### **3.4 La EWSR1(T) con correlaciones de apareamiento**

Para evaluar la derivada primera de las TDGF cuando son importantes las correlaciones de apareamiento, se necesitan las funciones de Green de una partícula, dentro del formalismo de Matsubara, tanto la normal como la anómala, que describen la propagación de un fermión en presencia de un vacío formado por pares de Cooper. El propagador normal a  $T = 0$  representa una partícula (agujero) propagándose y llegando como una partícula (agujero). El anómalo, en cambio, representa una partícula (agujero) propagándose y llegando como agujero (partícula)<sup>(35)</sup>.

Estos propagadores son

$$\begin{aligned}
G(\alpha, \tau) = & \left[ -N_\alpha V_\alpha^2 e^{E_\alpha \tau} - (1 - N_\alpha) U_\alpha^2 e^{-E_\alpha \tau} \right] \theta(\tau) \\
& + \left[ (1 - N_\alpha) V_\alpha^2 e^{E_\alpha \tau} + N_\alpha U_\alpha^2 e^{-E_\alpha \tau} \right] \theta(-\tau)
\end{aligned} \tag{82}$$

$$\begin{aligned}
F(\alpha, \tau) = & V_\alpha U_\alpha \left\{ [N_\alpha e^{E_\alpha \tau} - (1 - N_\alpha) e^{-E_\alpha \tau}] \theta(\tau) \right. \\
& \left. - [(1 - N_\alpha) e^{E_\alpha \tau} - N_\alpha e^{-E_\alpha \tau}] \theta(-\tau) \right\}
\end{aligned} \tag{83}$$

con  $\tilde{\epsilon}_\alpha = (\epsilon_\alpha - \mu)$ ,  $E_\alpha = \sqrt{\tilde{\epsilon}_\alpha^2 + \Delta^2}$  y

$$N_\alpha = \frac{1}{e^{\beta E_\alpha} + 1} \quad U_\alpha^2 = \frac{1}{2} \left( 1 + \frac{\tilde{\epsilon}_\alpha}{E_\alpha} \right) \quad V_\alpha^2 = \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\tilde{\epsilon}_\alpha}{E_\alpha} \right) \tag{84}$$

Escribimos los propagadores de partícula-agujero de TDGF necesarios para las ecuaciones de la RPA, siguiendo la Ref.[35]. Estos propagadores comienzan (terminan) como partícula-agujero y terminan (comienzan) en dos posibilidades, como partícula-agujero (superíndice 0) o agujero-partícula (superíndice  $\bar{0}$ ), o como partícula-partícula (super índice 1) o agujero-agujero (superíndice  $\bar{1}$ ).

$$K^{10}(\alpha, \beta; \tau) = G(\alpha, \tau)F(\beta, \tau), \quad K^{01}(\alpha, \beta; \tau) = G(\alpha, \tau)F(\beta, -\tau) \quad (85)$$

$$K^{1\bar{0}}(\alpha, \beta; \tau) = F(\alpha, -\tau)G(\beta, -\tau), \quad K^{0\bar{1}}(\alpha, \beta; \tau) = F(\alpha, \tau)G(\beta, -\tau), \quad (86)$$

$$K^{00}(\alpha, \beta; \tau) = G(\alpha, \tau)G(\beta, -\tau), \quad K^{0\bar{0}}(\alpha, \beta; \tau) = -F(\alpha, \tau)F(\beta, -\tau). \quad (87)$$

Las transformadas de Fourier del propagador  $K^{\mu 0}(\alpha, \beta; \omega_n)$  son (ver apéndice B)

$$K^{10}(\alpha, \beta; \omega_n) = - (1 - N_\alpha - N_\beta)U_\beta V_\beta \left[ \frac{U_\alpha^2}{i\omega_n - E_{\alpha\beta}} + \frac{V_\alpha^2}{i\omega_n + E_{\alpha\beta}} \right] \\ + (N_\beta - N_\alpha)U_\beta V_\beta \left[ \frac{U_\alpha^2}{i\omega_n - \bar{E}_{\alpha\beta}} - \frac{V_\alpha^2}{i\omega_n + \bar{E}_{\alpha\beta}} \right], \quad (88)$$

$$K^{\bar{1}0}(\alpha, \beta; \omega_n) = -(1 - N_\alpha - N_\beta)U_\beta V_\beta \left[ \frac{V_\alpha^2}{i\omega_n - E_{\alpha\beta}} + \frac{U_\alpha^2}{i\omega_n + E_{\alpha\beta}} \right] \\ -(N_\beta - N_\alpha)U_\beta V_\beta \left[ \frac{V_\alpha^2}{i\omega_n - \bar{E}_{\alpha\beta}} - \frac{U_\alpha^2}{i\omega_n + \bar{E}_{\alpha\beta}} \right], \quad (89)$$

$$K^{00}(\alpha, \beta; \omega_n) = -(1 - N_\alpha - N_\beta) \left[ \frac{U_\alpha^2 V_\beta^2}{i\omega_n - E_{\alpha\beta}} - \frac{V_\alpha^2 U_\beta^2}{i\omega_n + E_{\alpha\beta}} \right] \\ -(N_\beta - N_\alpha) \left[ \frac{U_\alpha^2 U_\beta^2}{i\omega_n - \bar{E}_{\alpha\beta}} - \frac{V_\alpha^2 V_\beta^2}{i\omega_n + \bar{E}_{\alpha\beta}} \right], \quad (90)$$



$$\begin{aligned}
K^{\bar{0}0}(\alpha, \beta; \omega_n) = & - U_\alpha U_\beta V_\alpha V_\beta \left\{ (1 - N_\alpha - N_\beta) \left[ \frac{1}{i\omega_n - E_{\alpha\beta}} - \frac{1}{i\omega_n + E_{\alpha\beta}} \right] \right. \\
& \left. + (N_\beta - N_\alpha) \left[ \frac{1}{i\omega_n - \tilde{E}_{\alpha\beta}} - \frac{1}{i\omega_n + \tilde{E}_{\alpha\beta}} \right] \right\}, \quad (91)
\end{aligned}$$

donde  $E_{\alpha\beta} = (E_\alpha + E_\beta)$ , y  $\tilde{E}_{\alpha\beta} = (E_\alpha - E_\beta)$ .

Los propagadores anteriores son las funciones de Green dependientes de la temperatura de dos cuasipartículas *desnudas*. Las TDGF de dos cuasipartículas *vestidas* se obtienen usando la ecuación de Bethe-Salpeter

$$\begin{aligned}
G^{00}(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau) = & \left[ K^{00}(\alpha, \beta; \tau) + K^{\bar{0}0}(\alpha, \beta; \tau) \right] \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\delta} \\
& + \int_0^{\hbar\beta} d\tau' \sum_{\mu, \alpha', \beta'} \langle \alpha\beta | \mathcal{W} | \alpha' \beta' \rangle K^{0\mu}(\alpha, \beta; \tau') G^{\mu 0}(\alpha' \beta', \gamma\delta; \tau - \tau'). \quad (92)
\end{aligned}$$

De estos propagadores obtenemos las ecuaciones de la RPA dependientes de la temperatura. Como estamos interesados en su contribución a la EWSR1, tendremos en cuenta sólo aquéllos que contribuyen a la discontinuidad de la derivada primera de la función de Green de Matsubara en el origen. Se ven dos formas de contribuciones (para un seguimiento más detallado de los cálculos ver apéndice B)

$$G^{00'}(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau) \Big|_{\tau=0^+} - G^{00'}(\alpha\beta, \gamma\delta; \tau) \Big|_{\tau=0^-} = B_0 + B_1 \quad (93)$$

donde  $B_0$  y  $B_1$  están definidos por las siguientes ecuaciones, relacionadas a un kernel de dos fermiones desnudo

$$B_0 = \left[ K^{00}(\alpha, \beta; \tau) + K^{0\bar{0}}(\alpha, \beta; \tau) \right]' \Big|_{\tau=0^+} - \left[ K^{00}(\alpha, \beta; \tau) + K^{0\bar{0}}(\alpha, \beta; \tau) \right]' \Big|_{\tau=0^-} \quad (94)$$

$$B_1 = \left[ \sum_{res} K^{00}(\alpha, \beta; \omega_n) \right] \left[ \sum_{res} K^{00}(\gamma, \delta; \omega_n) \right] \quad (95)$$

donde  $(\sum_{res})$  indica que la suma es sobre los residuos de la transformada de Fourier de la función de Green de Matsubara.  $B_0$  representa la contribución del propagador partícula-agujero desnudo en el estado fundamental de BCS y  $B_1$  representa la contribución de todos los diagramas que tienen sólo un vértice de interacción en  $\tau$ . También se observa que  $K_{\alpha\beta}^{0\bar{0}}(\omega_n)$  no contribuye a la discontinuidad de la primera derivada en B1 pues  $(\sum_{res} K_{\alpha\beta}^{0\bar{0}}(\omega_n)) = 0$ . En el caso de una interacción separable partícula-agujero más el término monopolar de apareamiento, la simetría del elemento de matriz de la interacción con respecto al intercambio de  $\alpha$  y  $\beta$  elimina de la suma de la EWSR1 todas las contribuciones de  $B_1$  (ver Ref.[28]) y queda<sup>[16]</sup>

$$\begin{aligned} EWSR1(Q, T) = & \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} |Q_{\alpha\beta}|^2 \left[ (U_\alpha V_\beta + V_\alpha U_\beta)^2 E_{\alpha\beta} (1 - N_\alpha - N_\beta) \right. \\ & \left. + \tilde{E}_{\alpha\beta} (N_\beta - N_\alpha) (U_\alpha U_\beta - V_\alpha V_\beta)^2 \right] \end{aligned} \quad (96)$$

donde  $E_{\alpha\beta} = (E_\alpha + E_\beta)$  ,  $\tilde{E}_{\alpha\beta} = (E_\alpha - E_\beta)$

### 3.5 Límites de temperatura en la regla de suma

El límite a temperatura cero para la regla de suma de energía se obtiene fácilmente pues verifica (ver 84) que  $\lim_{T \rightarrow 0} N_\alpha = 0$  ( $E_\alpha > 0$ ) con lo cual la ec.(96) queda

$$EWSR1(Q, T) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} |Q_{\alpha\beta}|^2 E_{\alpha\beta} (U_\alpha V_\beta + V_\alpha U_\beta)^2 \quad (97)$$

que es la fórmula usual para una fuerza separable a  $T = 0$ .

El otro límite que debemos evaluar está en el valor de la regla de suma cuando la temperatura es la temperatura crítica, que es la temperatura a la cual se produce la transición de fase de un núcleo superconductor a uno normal<sup>[41, 11]</sup>. Este caso verifica que  $\lim_{T \rightarrow T_c} \Delta = 0$ , con lo cual

$$E_i = \begin{cases} \tilde{\epsilon}_i & si \quad \epsilon_i > \mu \\ -\tilde{\epsilon}_i & si \quad \epsilon_i < \mu \end{cases} \quad N_i = \begin{cases} n_i & si \quad \epsilon_i > \mu \\ 1 - n_i & si \quad \epsilon_i < \mu \end{cases} \quad (98)$$

$$U_i = \begin{cases} 1 & si \quad \epsilon_i > \mu \\ 0 & si \quad \epsilon_i < \mu \end{cases} \quad V_i = \begin{cases} 0 & si \quad \epsilon_i > \mu \\ 1 & si \quad \epsilon_i < \mu \end{cases} \quad (99)$$

con  $n_i = (e^{\beta\tilde{\epsilon}_i} + 1)^{-1}$ . La ec.(96), cuando se produce la transición de fase, queda

$$EWSR1(Q, T) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (\tilde{\epsilon}_\alpha - \tilde{\epsilon}_\beta) (n_\beta - n_\alpha) |Q_{\alpha\beta}|^2 \quad (100)$$

que es la fórmula usual de la regla de suma de energía para un núcleo normal dependiente de la temperatura<sup>[42]</sup>.

### 3.6 Aplicaciones Numéricas

Para evaluar los resultados obtenidos, se tomaron tres núcleos estables en la zona  $60 \leq A \leq 208$  que fueron el  $Ni^{60}$  con  $Z = 28, N = 32$ , el  $Zr^{96}$  con  $Z = 40, N = 56$  y el  $Gd^{154}$  con  $Z = 64, N = 90$ . Estos núcleos fueron elegidos teniendo en cuenta, al igual que antes, que fueran sub-capa cerrada en ambos tipos de nucleón, para evitar ambigüedades en la definición de cuasipartícula. En particular, el  $Ni^{60}$  es capa cerrada en protones. En todos los casos se calculó la temperatura crítica  $T_c$  para cada tipo de nucleón, neutrones o protones, según la expresión <sup>[41, 11]</sup>  $T_c \simeq 0.567\Delta(T = 0)$ , que verificó los rangos de convergencia del programa. Como ejemplo, obtuvimos para el  $Zr^{96}$  los valores  $T_{cN} = 0.875$  frente a  $T_{cN} = 0.887$  como el valor teórico, y  $T_{cZ} = 0.465$  calculado ante  $T_{cZ} = 0.470$  teórico.

Como en el capítulo anterior, se evaluó la regla de suma asociada al operador dipolar de masa (Ec.40). Dado que los cálculos de Hartree-Fock térmicos tienen una dependencia débil con la temperatura<sup>[43]</sup>, usamos las energías y las funciones de onda de partículas a  $T = 0$ . Para encontrar los estados de cuasipartículas se resolvieron las ecuaciones acopladas de BCS a

temperatura finita [35, 41]

$$\frac{2}{G} = \sum_{k>0} \frac{1}{[(\epsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2]^{1/2}} \tanh \left\{ \frac{[(\epsilon_k - \mu)^2 + \Delta^2]^{1/2}}{2k_B T} \right\}, \quad (101)$$

$$N = 2 \left[ \sum_{k>0} V_k^2 (1 - N_k) + U_k^2 N_k \right], \quad (102)$$

con  $G$  la constante de acoplamiento y  $N$  el número total de partículas.  $\mu$  y  $\Delta$  fueron ajustados en cada caso de tal forma de conservar el número medio de partículas y la ecuación del gap térmico. Los neutrones y los protones cumplen ambos por separado las ecuaciones acopladas.

El gráfico siguiente muestra los valores obtenidos para la  $EWSR1(T_1)$  como función de la temperatura, que han sido normalizados según su valor a  $T = 0$ . En los tres núcleos se obtuvieron además los límites a  $T = 0$  y a  $T > T_c$ . Debe notarse que en la zona del superconductor el leve cambio en la concavidad de la curva se debe a que un tipo de nucleón (los protones) al superar el valor de  $T_{cz}$  se convierte en un sistema normal, suavizando la pendiente en esa zona dado que las variaciones de la  $EWSR1$  con la temperatura en el caso normal son casi nulas. Por el contrario, en la zona superconductora hay variaciones de la  $EWSR1$  con la temperatura que en el mayor de los casos llega al 17%.

Estas variaciones se entendieron fundamentalmente debidas a los cambios del gap de apareamiento  $\Delta$  ante los distintos valores de temperatura. En la

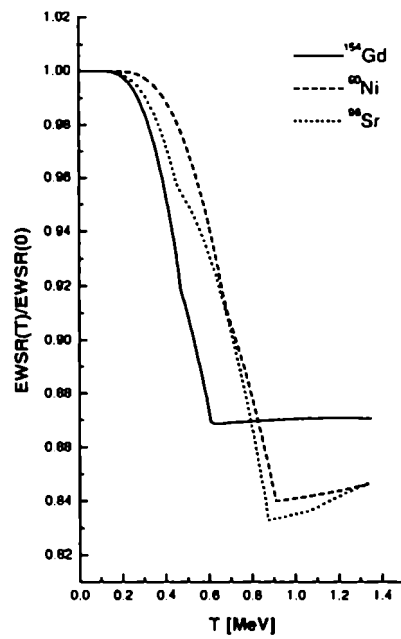


Figura 3 :  $EWSR1$  como función de la temperatura, para tres núcleos distintos. Los valores de la  $EWSR1$  han sido normalizados a su valor en  $T = 0$

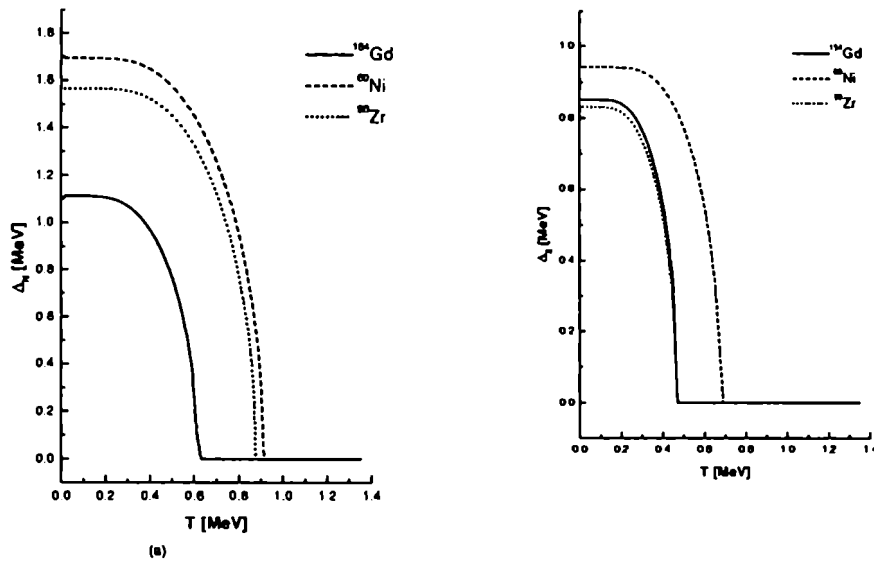
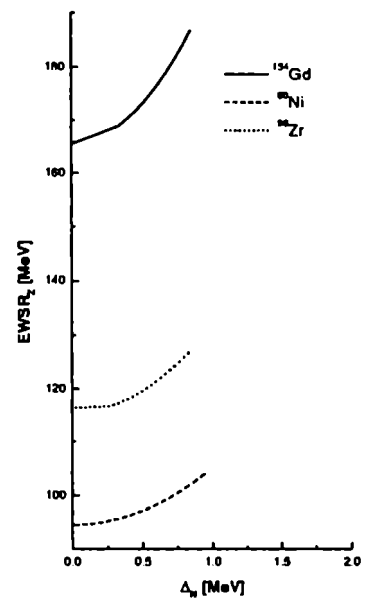
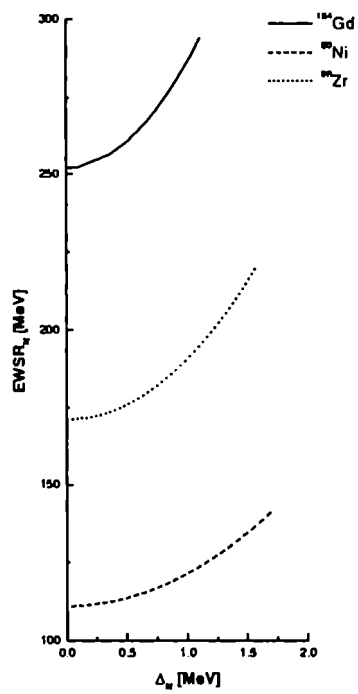


Figura 4 : En (a) se grafica el gap de energía  $\Delta$  como función de la temperatura cuando se considera la interacción de apareamiento en las capas de neutrones, mientras que en (b) se grafica la  $\Delta$  para el caso de protones.

figura 4 se graficaron las variaciones del gap  $\Delta$  con la  $T$ , para cada tipo de nucleón y para cada núcleo. El gap tiende a cero cuando aumenta la temperatura debido a un efecto de anti-apareamiento. La temperatura crítica es distinta para cada núcleo y para cada tipo de nucleón.

Esto nos llevó a graficar finalmente la  $EWSR1$  vs  $\Delta$  y se encontró en todos los casos que la relación entre ambos ajustaba a una función cuadrática con un alto coeficiente de correlación. Esto verificó la relación dada por la ec.(62), del capítulo 2.



(b)

Figura 5 : En (a) se grafica la EWSR1 para neutrones como función de la  $\Delta$  de neutrones, mientras que en (b) se grafica la EWSR1 en función de la  $\Delta$  para el caso de protones.



### 3.7 Conclusiones

En esta parte del trabajo se aplicaron los resultados obtenidos de desarrollar, siguiendo un trabajo previo<sup>[28]</sup>, un método para obtener las reglas de suma pesadas por energía dependientes de la temperatura, a partir del comportamiento de las funciones de Green en el formalismo de Matsubara. Este método, que da la derivada del propagador en un desarrollo de diagramas de Feynman, fue aplicado al caso simple de la interacción monopolar de apareamiento mas una interacción separable de partícula-agujero, para ver la influencia de la interacción residual considerada en las reglas de suma.

En el capítulo anterior se demostró que la variación de EWSR1 era debido a la no invariancia galileana de la interacción de apareamiento. En este capítulo observamos que las variaciones en la EWSR1 con la temperatura corroboran el resultado anterior, pues se deben al efecto de antiapareamiento que provoca el aumento de la temperatura.

## 4 La localización de los pares de Cooper

### 4.1 Introducción

En este capítulo tratamos el problema de la localización espacial de los “pares de Cooper” nucleares. Consideraremos dos partículas idénticas acopladas a momento angular total  $J = 0$ , que interactúan a través de la interacción de apareamiento.

En general, el problema de la estructura espacial de los pares de Cooper en el núcleo no atrajo mucha atención (Ref. [17] y otros trabajos, relacionados a este [48, 49]). Sin embargo, la estructura espacial que se obtienen muestra un comportamiento peculiar. Como puede verse en las figuras de Ref.[17], los pares no están bien localizados espacialmente y tienen muchos máximos que dependen de las capas consideradas en la descripción del sistema. Además, el máximo de probabilidad no aparece para pequeñas distancias relativas, como sería esperable.

La relación entre las reacciones de transferencia de partículas y las correlaciones en el espacio inducidas por la interacción ha sido estudiada con anterioridad por muchos autores<sup>[48, 49, 50, 51, 52]</sup>. Dado que la interacción de apareamiento induce correlaciones de corto rango entre los nucleones, se decidió tratar de entender este comportamiento que parece ser patológico<sup>[18]</sup>.

## 4.2 Función de onda de dos partículas

La función de onda total de un par de nucleones tendrá la forma<sup>[17]</sup>

$$\Psi(\vec{r}_1, \chi_1; \vec{r}_2, \chi_2) = \sum_{\alpha, \beta} B_{\alpha, \beta} [\psi_{\alpha}(\vec{r}_1, \chi_1) \otimes \psi_{\beta}(\vec{r}_2, \chi_2)] \quad (103)$$

Esta expresión corresponde a la función de onda general antisimetrizada que describe a las dos partículas. Acá  $\chi$  representa las variables de spin y  $\alpha$  corresponde a todos los números cuánticos necesarios para la descripción de los estados de partícula simple, es decir

$$\psi_{\alpha}(\vec{r}, \chi) = \phi_{nlj}(\tau) [Y_{lm}(\hat{r}) \chi_{\frac{1}{2}}(\chi)]_{jm} \quad (104)$$

Dado que las funciones de onda de partícula simple con las que se trabajó son las del oscilador armónico (HO), si no se considera spin se tendrá

$$\phi_{nlm}(\tau, \theta, \phi) = \mathcal{R}_{nl}(\tau) Y_{lm}(\theta, \phi) \quad (105)$$

donde los  $Y_{lm}(\theta, \phi)$  son los armónicos esféricos, y  $\mathcal{R}_{nl}$  son las funciones de onda radiales

$$\mathcal{R}_{nl}(\tau) = \left[ \frac{2n!}{\Gamma(n+l+\frac{3}{2})} \right]^{\frac{1}{2}} \tau^l \exp\left(-\frac{1}{2}\tau^2\right) \mathcal{L}_n^{l+\frac{1}{2}}(\tau^2) \quad (106)$$

con  $\mathcal{L}_n^{l+\frac{1}{2}}(\tau^2)$  un polinomio de Laguerre. Las funciones radiales están normalizadas, tal que

$$\int_0^{\infty} [\mathcal{R}_{nl}(r)]^2 r^2 dr = 1 \quad (107)$$

Es conveniente introducir las coordenadas relativas y de centro de masa,  $\vec{r} = \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{\sqrt{2}}$  y  $\vec{R} = \frac{\vec{r}_1 + \vec{r}_2}{\sqrt{2}}$ . Esta no es la definición usual, pero resulta conveniente en el caso del oscilador armónico<sup>[53]</sup>, pues con esta definición las funciones tienen el mismo parámetro de tamaño en ambos sistemas de coordenadas.

Para mostrar en una forma simple la distribución espacial del par de nucleones como función de las coordenadas relativas y de centro de masa  $\tau$  y  $R$ , integramos el cuadrado de la función de onda sobre las variables angulares y de spin, es decir, definimos

$$S(\tau, R) = \int |\Psi(\vec{r}_1, \chi_1; \vec{r}_2, \chi_2)|^2 d\hat{r} d\hat{R} d\chi_1 d\chi_2 \quad (108)$$

El símbolo  $d\hat{r}$  representa el diferencial en las variables angulares,  $d\hat{r} = \sin\theta d\theta d\phi$ .

Para escribir las funciones de onda en términos del centro de masa del par y de las coordenadas relativas, en el caso del oscilador armónico, pueden usarse los corchetes de transformación de Brody-Moshinsky<sup>[53]</sup>.

Para eso se debe cambiar del sistema de coordenadas de partícula simple al sistema de coordenadas del par. En lo que sigue, las expresiones  $n_i$  y  $l_i$  se refieren a los números cuánticos radial y orbital de las partículas, mientras

que  $n$  y  $l$  corresponden al movimiento relativo de las dos partículas y  $N$  y  $L$  al de su centro de masa.

El pasaje de un sistema al otro obliga a que se cumplan las siguientes condiciones

$$\vec{l}_1 + \vec{l}_2 = \vec{\lambda} = \vec{l} + \vec{L} \quad (109)$$

y por lo tanto

$$|l_1 - l_2| \leq \lambda \leq l_1 + l_2 \quad |l - L| \leq \lambda \leq l + L \quad (110)$$

La energía asociada con la función de onda de una partícula es, en unidades de  $\hbar\omega$

$$e_{nl} = 2n + l + \frac{3}{2} \quad (111)$$

y la conservación de la energía obliga a cumplir que

$$\rho = 2n_1 + l_1 + 2n_2 + l_2 = 2n + l + 2N + L \quad (112)$$

Los autoestados en los dos sistemas de coordenadas son

$$|n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \mu \rangle = \sum_{m_1 m_2} \langle l_1 l_2 m_1 m_2 | \lambda \mu \rangle \mathcal{R}_{n_1 l_1}(\tau_1) \mathcal{R}_{n_2 l_2}(\tau_2) Y_{l_1 m_1}(\theta_1, \phi_1) Y_{l_2 m_2}(\theta_2, \phi_2)$$

$$|nl, NL, \lambda\mu\rangle = \sum_{mM} \langle lLmM|\lambda\mu\rangle \mathcal{R}_{nl}(\tau)\mathcal{R}_{NL}(R) Y_{lm}(\theta, \phi)Y_{LM}(\Theta, \Phi) \quad (113)$$

en donde  $m_1, m_2$ ;  $m$  y  $M$  son los números cuánticos magnéticos y  $\mu$  es el número cuántico magnético total. Las cantidades  $\langle l_1 l_2 m_1 m_2 | \lambda \mu \rangle$  y  $\langle lLmM | \lambda \mu \rangle$  son los coeficientes de Clebsch-Gordan. Los corchetes de transformación están definidos entonces por la siguiente relación

$$|n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \mu\rangle = \sum_{nlNL} |nl, NL, \lambda \mu\rangle \langle nl, NL, \lambda | n_1 l_1, n_2 l_2, \lambda \rangle \quad (114)$$

Se puede mostrar<sup>[12]</sup> que esta transformación no depende de  $\mu$ , por esta razón no está incluido en los corchetes.

Teniendo en cuenta estas expresiones, la Ec.(108) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\tau, R) = & \sum_{\alpha_1, \alpha_2} B_{\alpha_1, \alpha_1} B_{\alpha_2, \alpha_2} \sum_{\lambda} \hat{\lambda}^4 \hat{j}_{\alpha_1}^2 \hat{j}_{\alpha_2}^2 \begin{Bmatrix} l_{\alpha_1} & l_{\alpha_1} & \lambda \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda \\ j_{\alpha_1} & j_{\alpha_1} & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} l_{\alpha_2} & l_{\alpha_2} & \lambda \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda \\ j_{\alpha_2} & j_{\alpha_2} & 0 \end{Bmatrix} \\ & \sum_{n, n', N, N', l, L} \langle n_{\alpha_1}, l_{\alpha_1}, n_{\alpha_1}, l_{\alpha_1}, \lambda | n, l, N, L, \lambda \rangle \\ & \langle n_{\alpha_2}, l_{\alpha_2}, n_{\alpha_2}, l_{\alpha_2}, \lambda | n', l, N', L, \lambda \rangle \phi_{nl}(\tau) \phi_{NL}(R) \\ & \phi_{n'l}(\tau) \phi_{N'L}(R) \end{aligned} \quad (115)$$

donde  $\langle n_1, l_1, n_2, l_2, \lambda | n, l, N, L, \lambda \rangle$  son los corchetes de transformación de Brody-Moshinsky usuales y  $j = \sqrt{2j + 1}$ .

Las cantidades  $\left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{matrix} \right\}$  se refieren a los símbolos 9-J de Wigner. Estos están definidos de forma tal de considerar la transformación entre dos esquemas de acoplamiento para cuatro momentos angulares<sup>[12]</sup>

$$\langle (j_1 j_2) j_{12}, (j_3 j_4) j_{34}, j | (j_1 j_3) j_{13} (j_2 j_4) j_{24}, j \rangle = ((2j_{12} + 1)(2j_{34} + 1) (2j_{13} + 1)(2j_{24} + 1))^{\frac{1}{2}} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_{12} \\ j_3 & j_4 & j_{34} \\ j_{13} & j_{24} & j \end{matrix} \right\} \quad (116)$$

Dado que el spin del par de nucleones  $S$  puede tomar sólo los valores  $S = 0$  o  $S = 1$ , en la Ec.(115) la suma sobre  $\lambda$  se reduce a los valores de  $\lambda = 0$  y  $\lambda = 1$ . También se trabajó con la variable  $P(r, R)$ , que es la densidad de probabilidad del par como función de  $r$  y  $R$ , y que está relacionada en una forma simple con el cuadrado de la función de onda

$$P(r, R) = \tau^2 R^2 S(r, R) \quad (117)$$

### 4.3 Pares de Cooper

Como en el capítulo 2, para trabajar con el hamiltoniano de apareamiento se usó la aproximación BCS haciendo una transformación a cuasipartículas (ver ec.(18))

Escribimos el estado fundamental correlacionado en función de las cuasi-partículas

$$\begin{aligned}
|BCS\rangle &= \prod_{i>0} \alpha_i \alpha_i^\dagger |0\rangle \\
&= \left( \prod_i U_i \right) \prod_{i>0} (U_i + V_i a_i^\dagger a_i^\dagger) |0\rangle \\
&= \mathcal{N} \exp \sum_i \frac{V_i}{U_i} a_i^\dagger a_i^\dagger |0\rangle \\
&= \mathcal{N} \exp \sum_i \sqrt{2j_i + 1} \frac{V_i}{U_i} \{a_i^\dagger a_i^\dagger\}_0^0 |0\rangle
\end{aligned} \tag{118}$$

Se puede entonces usar esta función de onda de dos partículas como la de la ec.(103), con

$$B_{\alpha,\beta} = \delta_{\alpha,\beta} \frac{V_\alpha \sqrt{2j_\alpha + 1}}{U_\alpha} \tag{119}$$

y la ec.(115) para evaluar  $\mathcal{S}(\tau, R)$ .

#### 4.4 Cálculos y resultados obtenidos para el cuadrado de la función de onda

Los cálculos se hicieron sobre el  ${}_{50}S_n^{114}$ . Elegimos distintos conjuntos de niveles de partícula simple para estudiar los efectos del tamaño del espacio de Hilbert sobre la estructura de los pares. Como niveles de energía de partícula simple se usaron los mismos niveles que en los capítulos anteriores,



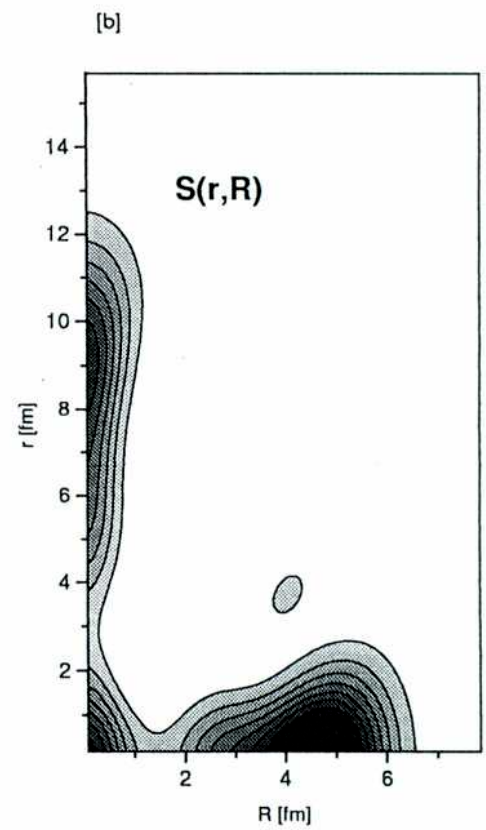
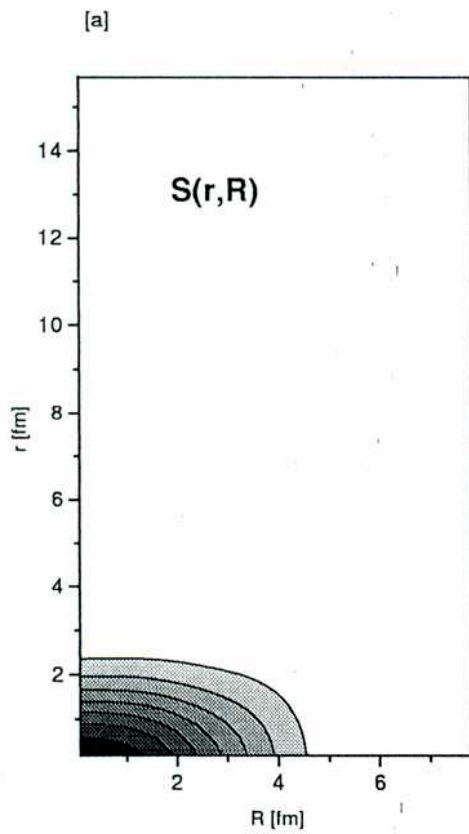
que son los niveles del oscilador armónico con las correcciones debidas a los términos centrífugo y de interacción spin-órbita<sup>[8]</sup>.

$\kappa = 0.0678$  y  $\mu = 0.0278$  se eligieron de forma tal de obtener el mejor ajuste en la región de los Sn<sup>[31]</sup>.

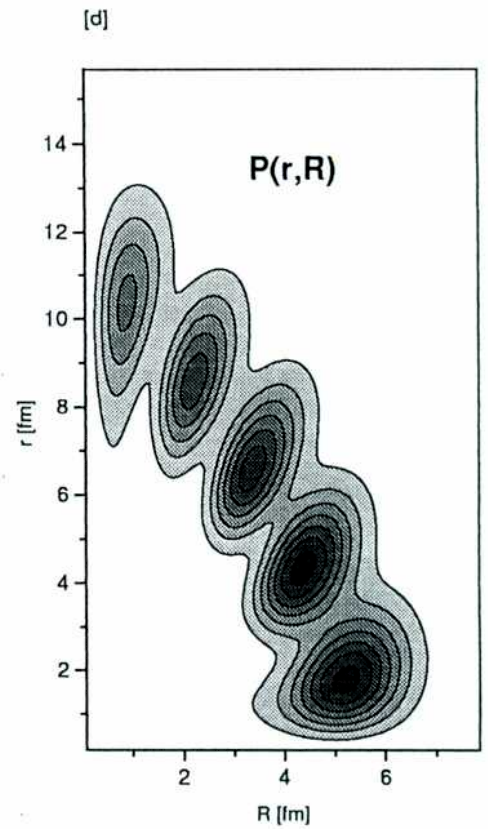
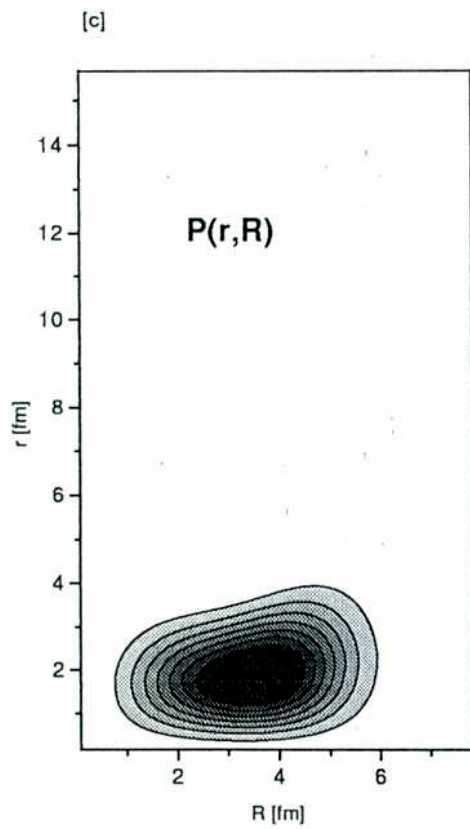
Usamos los niveles de partícula simple comenzando desde  $N = 2n + l = 0$  hasta  $N = 6$  (2 capas por encima del nivel de energía de Fermi), excepto para los niveles cercanos a la superficie de Fermi, donde se usaron los de la Ref.[32], por las mismas razones citadas en el capítulo 2. Al igual que antes, las sustituciones se hicieron de forma tal que la energía del baricentro (es decir, la suma de las energías de partícula simple por la degeneración de los niveles involucrados) permanezca constante.

Para estudiar el comportamiento del par, graficamos las funciones  $\mathcal{S}(\tau, R)$  y  $P(\tau, R)$ . Usamos dos espacios de Hilbert diferentes, el primero está formado por todos los niveles de partícula simple desde  $N = 0$  hasta  $N = 6$ . El otro está formado sólo por los cinco niveles de partícula simple que son los usualmente considerados en la descripción del  ${}_{50}\text{Sn}^{114}$ , los niveles  $\{1d_{5/2}, 0g_{7/2}, 2s_{1/2}, 1d_{3/2}, 0h_{11/2}\}$ . En las páginas que siguen, se muestran los gráficos de las funciones  $\mathcal{S}(\tau, R)$  y  $P(\tau, R)$ , y se observa que los dos casos dependen fuertemente del tamaño del espacio de Hilbert considerado para su evaluación.

Es bien conocido que el valor del gap de apareamiento  $\Delta$  depende del



Figuras 6[a] y 6[b] : Gráficos para  $G_n = 21 \text{ MeV/A}$  de  $S(r, R)$ . En [a] se usó el espacio de Hilbert mayor [ $N = 0$  a  $N = 6$ ] mientras que en [b] usamos el espacio de Hilbert reducido [cinco niveles].



Figuras 6[c] y 6[d] : Gráficos para  $G_n = 21 \text{ MeV/A}$  de  $P(r, R)$ . En [c] se usó el espacio de Hilbert mayor [ $N = 0$  a  $N = 6$ ] mientras que en [d] usamos el espacio de Hilbert reducido [cinco niveles].

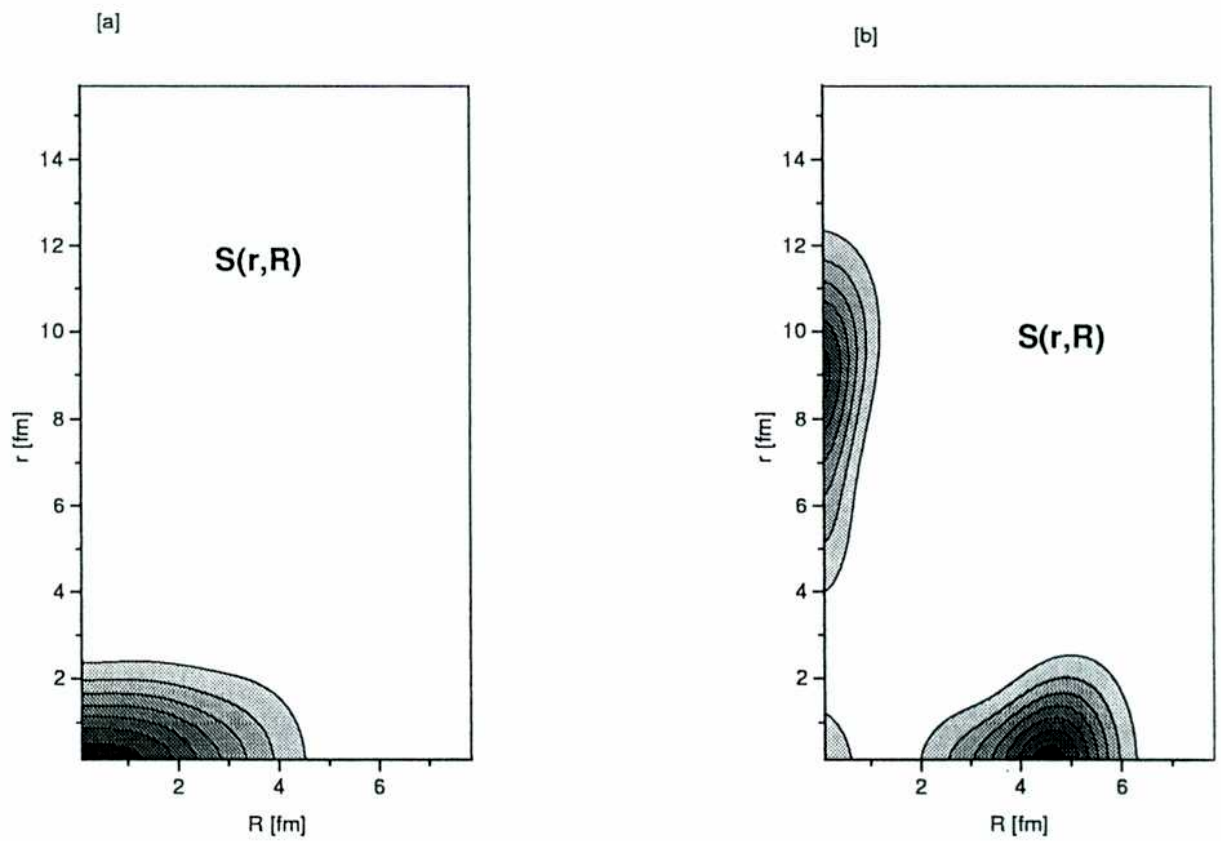
tamaño del espacio de Hilbert. En el caso del  ${}_{50}\text{Sn}^{114}$ , el gap  $\Delta$  vale, por consideraciones sobre la energía de ligadura, aproximadamente  $1.2 \text{ MeV}$ . Por esta razón usamos dos valores diferentes para la magnitud de la interacción de apareamiento. Por un lado se usó el valor que da el  $\Delta$  esperado cuando se usan cinco niveles ( $G = 21 \text{ MeV}/A$ )[Figura 6]. El otro valor usado corresponde al que da el mismo  $\Delta$  pero cuando se consideran todos los niveles desde  $N = 0$  a  $N = 6$  ( $G = 14.5 \text{ MeV}/A$ )[Figura 7].

En cada figura se muestran los gráficos de las funciones  $\mathcal{S}(r, R)$  [a y b] y  $P(r, R)$  [c y d]. En [a] y [c] usamos el espacio de Hilbert más grande, mientras que en [b] y [d] usamos el reducido.

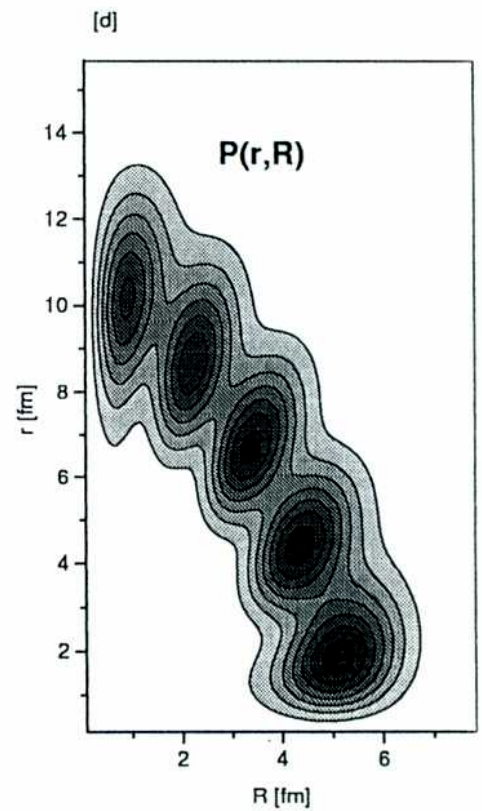
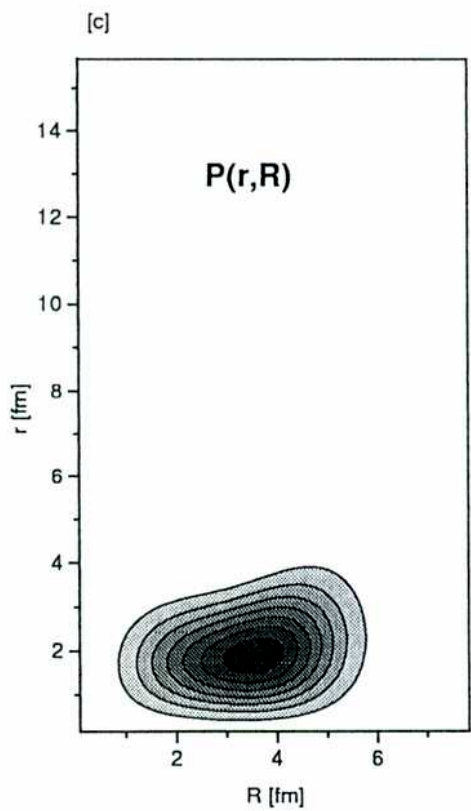
De las figuras se observa que cuando el sistema es superconductor los resultados son altamente independientes de la magnitud de la interacción de apareamiento. También puede verse que el cuadrado de la función de onda  $\mathcal{S}(r, R)$  tiene menos estructura que la probabilidad  $P(r, R)$ .

Por otro lado, la consideración de un espacio de Hilbert mayor hace que disminuya dramáticamente la aparición de estructuras complicadas. En el espacio mayor los pares tienen fuertes correlaciones de corto rango no sólo en el cuadrado de la función de onda, sino también en la distribución de la probabilidad. Además los máximos en el primer caso toman valores razonables tanto para las distancias relativas como para el centro de masa.

Los resultados obtenidos cuando se usa el espacio de Hilbert reducido



Figuras 7[a] y 7[b] : Gráficos para  $G_n = 14.5 \text{ MeV/A}$  de  $S(r,R)$ . En [a] se usó el espacio de Hilbert mayor [ $N = 0$  a  $N = 6$ ] mientras que en [b] usamos el espacio de Hilbert reducido [cinco niveles].



Figuras 7[c] y 7[d] : Gráficos para  $G_n = 14.5 \text{ MeV/A}$  de  $P(r, R)$ . En [c] se usó el espacio de Hilbert mayor [ $N = 0$  a  $N = 6$ ] mientras que en [d] usamos el espacio de Hilbert reducido [cinco niveles].

tienen comportamientos similares a los de la Ref.[17]. La inclusión del estado  $0h11/2$  hace la distribución de la probabilidad más asimétrica, corriéndola hacia valores mayores de  $R$  y correspondientemente a valores menores de  $\tau$ . Además, el número de máximos es similar a  $N$ , como se notó en la Ref.[17].

Cuando se usa el espacio de Hilbert más grande, es difícil comparar en detalle nuestros resultados para el  ${}_{50}S\tau^{114}$  con los de la Ref. [48], dado que ellos evalúan la función de onda para el  ${}_{50}S\tau^{120}$  y los grafican para una coordenada del centro de masa en particular. Sin embargo, su función de onda, que incluye todas las capas desde  $N = 0$  hasta  $N = 5$ , tiene comportamientos importantes en común con nosotros, como por ejemplo, está fuertemente centrada para pequeños valores de  $\tau$ .

Fue difícil entender cómo una interacción de corto rango, como es la interacción de apareamiento, puede inducir estructuras espaciales tan complicadas y claramente no de corto rango cuando se trabaja en el espacio de Hilbert reducido. Después de considerar este problema, pensamos que una explicación posible podía ser que la descripción de la interacción en un espacio de Hilbert reducido, debido al uso de sólo cinco niveles cercanos a la superficie de Fermi, produce una interacción efectiva que no es realmente de corto rango sino que tiene una estructura complicada. Surgió entonces la idea de comparar estos resultados con aquéllos que se obtendrían en la descripción de una función  $\delta$ , al variar el espacio de Hilbert.

## 4.5 La función $\delta$

La interacción de apareamiento puede ser considerada como un modelo muy simple con los comportamientos principales de la parte  $J = 0$  de una  $\delta(\tau_1 - \tau_2)$ . La similitud entre esta interacción simple y separable con fuerzas de corto rango ha sido estudiada en detalle en la literatura (ver, por ejemplo, Ref.[4]). Debido a esto se estudió la influencia del tamaño del espacio de Hilbert en la representación de la parte  $J = 0$  de una función tal como la  $\delta(\vec{\tau} - \vec{\tau}')\delta(\vec{R} - \vec{R}')$ .

$$\begin{aligned}
 \delta(\vec{\tau} - \vec{\tau}')\delta(\vec{R} - \vec{R}') &= \sum_{S,S',M_S,M_{S'}} \langle \vec{\tau}, \vec{R}, S, M_S | \vec{\tau}', \vec{R}', S', M_{S'} \rangle \\
 &= \sum_{S,S',M_S,M_{S'}, 1 \geq 2, J, M} \langle \vec{\tau}, \vec{R}, S, M_S | 1j_1 2j_2, JM \rangle \\
 &\quad \langle 1j_1 2j_2, JM | \vec{\tau}', \vec{R}', S', M_{S'} \rangle \quad (120)
 \end{aligned}$$

Los subíndices 1 y 2 se refieren a todos los estados cuánticos posibles en el sistema de coordenadas relativo y de centro de masa. Usando la Ec. (104) se puede integrar sobre todos los ángulos y sumar sobre todos los spines, usando para los estados intermedios los estados antisimetrizados de dos partículas. De esta forma se obtuvo para la parte  $J = 0$  de las  $\delta$ 's



$$\begin{aligned}
S_\delta(\tau, \tau', R, R') &= \sum_{\alpha \geq \beta} \sum_{\lambda} \hat{\lambda}^4 j_\alpha^2 j_\beta^2 \left\{ \begin{matrix} l_\alpha & l_\beta & \lambda \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \lambda \\ j_\alpha & j_\beta & 0 \end{matrix} \right\}^2 \\
&\quad \sum_{nlNl'n'N'} \langle n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta \lambda | nlNL\lambda \rangle \langle n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta \lambda | n'lN'L\lambda \rangle \\
&\quad \phi_{nl}(\tau) \phi_{n'l'}(\tau') \phi_{NL}(R) \phi_{N'L'}(R') \tag{121}
\end{aligned}$$

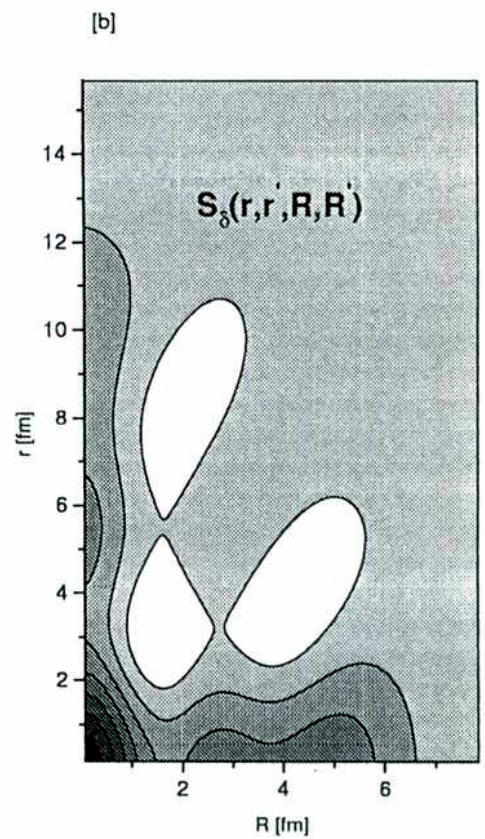
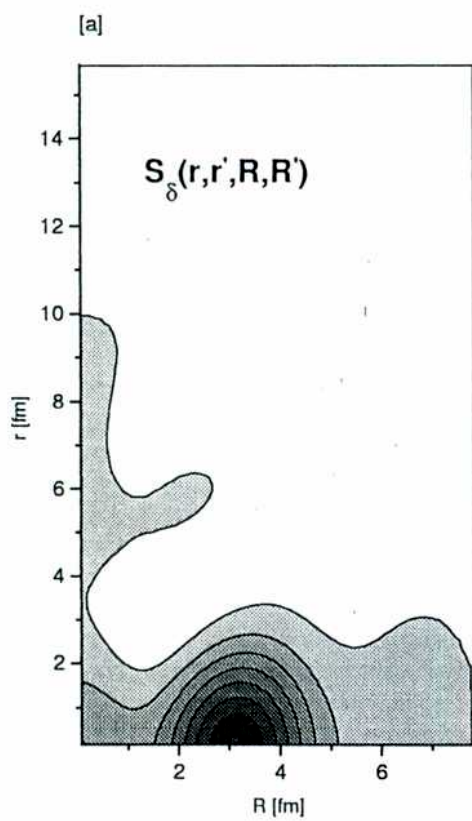
En este caso los subíndices  $\alpha$  y  $\beta$  se refieren a estados de partícula independiente. Tal como hicimos en la expresión del cuadrado de la función de onda, las cantidades  $\langle n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta \lambda | nlNL\lambda \rangle$  y  $\langle n_\alpha l_\alpha n_\beta l_\beta \lambda | n'lN'L\lambda \rangle$  son los corchetes de Brody-Moshinsky, y nuevamente deben usarse los símbolos 9-J de Wigner. Las cuentas se hicieron sobre las funciones de onda correspondientes a los estados posibles del  $50S\pi^{114}$ .

Además, en forma similar a lo que hicimos con el cuadrado de la función de onda, definimos la densidad de probabilidad

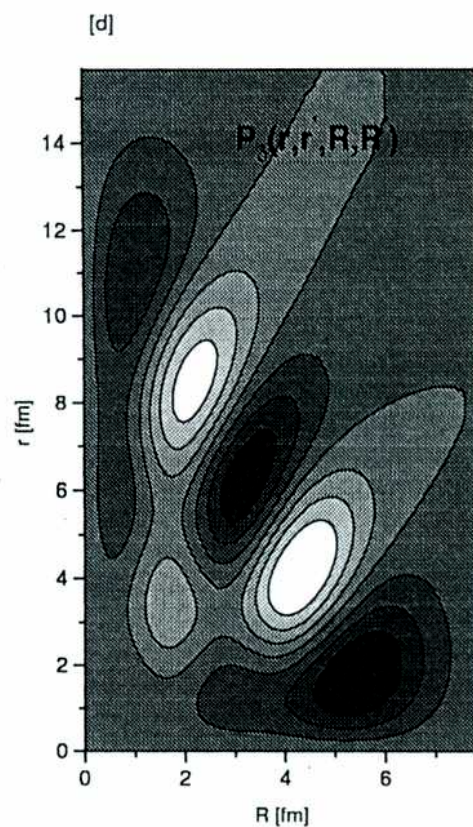
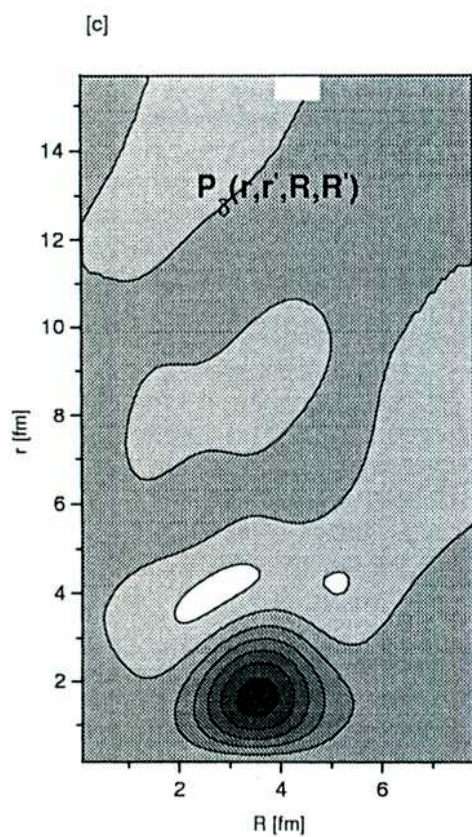
$$P_\delta(\tau, \tau', R, R') = \tau r' R R' S_\delta(\tau, \tau', R, R') \tag{122}$$

## 4.6 Resultados obtenidos para la $\delta$

En la Figura 8, usando las mismas convenciones que en las figuras 6 y 7, se graficaron  $S_\delta(\tau, \tau', R, R')$  y  $P_\delta(\tau, \tau', R, R')$  usando tanto el espacio mayor de



Figuras 8[a] y 8[b] : Gráficos de la integral angular de las representaciones de la función  $\delta$  [ $S_{\delta}(r, r', R, R')$ ]. En los dos casos  $r' = 0.01b$  and  $R' = 2.75b$ . En [a] usamos el espacio de Hilbert más grande [ $N = 0$  a  $N = 6$ ] mientras que en [b] usamos el reducido [sólo cinco niveles].



Figuras 8[c] y 8[d] : Gráficos de la integral angular de las representaciones de la función  $\delta$  multiplicada por  $rr'RR'$  [ $P_\delta(r, r', R, R')$ ] en . En los dos casos  $r' = 0.01b$  and  $R' = 2.75b$ . En [c] usamos el espacio de Hilbert más grande [ $N = 0$  a  $N = 6$ ] mientras que en [d] usamos el reducido [sólo cinco niveles].

Hilbert como el reducido. En orden de tener un gráfico similar al obtenido en las figuras 6 y 7, se usaron los valores  $r' = 0.01b$  y  $R' = 2.75b$ .

La similitudes obtenidas entre los resultados mostrados en las figuras 6 o 7 y la figura 8 son remarcables, y prueban que la presunción que conecta la existencia de estructuras complicadas con la reducción del espacio de Hilbert es básicamente correcta.

Por lo tanto si se considera el comportamiento espacial del par de Cooper cuando se recorta la base de estados, como se hace habitualmente tomando sólo aquellas capas donde la interacción de apareamiento es relevante, se observa la introducción de estructuras complicadas al punto de perder la localización del par, al tiempo que si se trabaja en una base de estados mayor, con el espacio de Hilbert mas completo posible, reaparece la localización. El carácter de corto rango de la interacción de apareamiento determina que haya que renormalizar la magnitud de la interacción  $G$  al alejarnos de los niveles de energía cercanos al nivel de Fermi, y que los elementos de matriz de la interacción deben ir reduciéndose también para asegurar la correcta convergencia de la integral relacionada con la ecuación del gap, dado que sino esta diverge. En nuestro análisis, tuvimos en cuenta en parte la renormalización de  $G$ , al trabajar también con el valor de  $G$  que da el gap correcto, pero se encontró que los resultados obtenidos eran independientes de estas consideraciones.

## 5 Conclusiones generales

Esta tesis trató sobre algunas características de la interacción de apareamiento, su comportamiento ante transformaciones de simetría y la conservación de las reglas de suma, y la localización en el espacio de fases del par de Cooper.

Se demostró que la no conservación de la EWSR1 cuando se tiene en cuenta la interacción de apareamiento se debe a la no invariancia galileana de esta interacción, y que esta propiedad cambia, además la masa efectiva de los nucleones. Los resultados que se obtuvieron fueron completados con el estudio de la interacción de apareamiento al tener en cuenta temperatura, que confirmó los cálculos anteriores y permitió, además chequear de una manera continua las variaciones de la EWSR1 con el apareamiento, debido a que la temperatura influye sobre el gap de los sistemas superconductivos.

Esta característica de no conservar la EWSR1 la entendemos como un comportamiento físico importante de la interacción, debido a la evidencia experimental que existe sobre la no conservación de la invariancia galileana de la interacción nuclear a bajas energías.

Si bien se calcularon explícitamente los cambios en la EWSR1 al tener en cuenta o no la interacción de apareamiento, entendemos que esta violación se debe posiblemente a efectos relativistas, que aún cuando cambian la masa efectiva en sólo un 1 %, son más relevantes en los cambios que generan en otras variables dinámicas.

En la información experimental existente, no hay un resultado concluyente sobre la relación entre la EWSR1 y la superconductividad en el núcleo. Por ejemplo, en la Ref[15] la EWSR1 para los isótopos del  $Sn$  y del  $Pb$  dan valores similares en términos de la regla de suma de Thomas-Reike-Kuhn  $\sigma_0$ , mientras que en la Ref[14] los valores que se obtienen son mayores a los valores clásicos para núcleos con peso atómico entre 100 y 160, lo cual es similar a nuestros resultados, dados en la Tabla I. Es decir que es necesario contar con más estudios experimentales sobre estas diferencias.

Por otro lado, la característica de corto rango de la interacción hacía esperar un comportamiento localizado del par de Cooper en el espacio de fases, en particular en el espacio de las coordenadas relativas y de centro de masa. El comportamiento que muestran, en cuanto a la aparición de estructuras complicadas y la presencia de varios máximos alejados de los valores más chicos de la coordenada radial relativa, se demostró que se debe a recortar la base de estados del espacio de Hilbert en el que se trabaja, dado que usualmente se toman sólo las capas más cercanas la nivel de Fermi. Al trabajar en una base de estados mayor, se obtiene una mayor localización del par, y estos resultados fueron confirmados cuando se comparó este comportamiento con el de la función  $\delta$ .

## A Modelo de dos niveles

En este apéndice trabajamos un caso simple y resoluble en forma exacta que contiene la mayoría de las características que se analizaron en el capítulo 2. Consideramos un modelo de dos niveles con momento angular  $j$  y paridad opuesta. La degeneración de cada nivel es  $2\Omega = 2j + 1$  y ambos están separados por una distancia en energías de  $\epsilon$ . Se asumió un sistema con  $N \geq 2\Omega$  partículas, interactuando a través de un hamiltoniano con (sin) una interacción de apareamiento. En este modelo simple se puede evaluar la  $EWSR(Q_1)$  para un sistema normal,  $\frac{2G\Omega}{\epsilon} < 1$  [29] o para sistemas superfluidos,  $\frac{2G\Omega}{\epsilon} > 1$

$$EWSR(Q_1) = 2\Omega(U_1 V_1 + V_1 U_1)^2 Q_{1\bar{1}}^2 \epsilon \quad (123)$$

donde  $V_i$  es la probabilidad de ocupación del  $i_{th}$  nivel y  $Q_{1\bar{1}}$  es el elemento de matriz del operador dipolar entre los dos niveles

$$Q_{1\bar{1}} = \langle 1 || r Y_1 || \bar{1} \rangle \quad (124)$$

$\bar{1}$  representa el nivel más bajo con energía  $-\frac{\epsilon}{2}$  y 1 es el nivel siguiente con energía  $\frac{\epsilon}{2}$ .

Sabiendo que la  $EWSR(Q_1)$  es proporcional a  $M_{eff}^{-1}$  (ver ec. (42)), se pudo evaluar el cambio en la  $M_{eff}$  producida por la interacción de apareamiento en este sistema.

### Sistema normal

En este caso la interacción de apareamiento se considera despreciable,  $\Delta = 0$ ,  $V_{\bar{1}} = 1$ , y por lo tanto de la ecuación que dá el valor correcto del número de partículas

$$2 \sum_{k>0} V_k^2 = N \quad (125)$$

se tiene

$$V_{\bar{1}} = 1 \quad (126)$$

$$V_1 = \sqrt{\frac{N - 2\Omega}{2\Omega}} \quad (127)$$

$$EWSR_N(Q_1) = (4\Omega - N)Q_{1\bar{1}}^2 \epsilon \quad (128)$$

Como se esperaba, este es el resultado que se obtiene de la contribución del bosón espúreo de la RPA a la  $EWSR(Q_1)$ .

### Sistemas superfluidos

Aquí se tuvo en cuenta la interacción de apareamiento a través del cálculo BCS dada por las dos fórmulas

$$\frac{2}{G} = \sum \frac{(j + 1/2)}{E_j} = \Omega \left( \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_{\bar{1}}} \right) \quad (129)$$

$$N = \sum (2j + 1)V_j^2 = 2\Omega(V_1^2 + V_{\bar{1}}^2) \quad (130)$$



La solución de estas dos ecuaciones nos dá los valores de los dos niveles de energía

$$E_1 = \frac{G\epsilon\Omega}{2(\frac{\epsilon}{2} + \lambda) - (N - 2\Omega)G} = \sqrt{(\frac{\epsilon}{2} - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (131)$$

$$E_{\bar{1}} = \frac{G\epsilon\Omega}{2(\frac{\epsilon}{2} - \lambda) - (N - 2\Omega)G} = \sqrt{(\frac{\epsilon}{2} + \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (132)$$

donde  $\Delta$  y  $\lambda$  son el gap y el potencial químico de las soluciones de BCS. De éstas ecuaciones se podrían calcular  $\Delta$  y  $\lambda$ , pero el problema es no lineal y no es posible encontrar soluciones analíticas para  $\Delta$  y  $\lambda$ . Sin embargo existe un caso ( $N = 2\Omega$ ) en el que las soluciones son analíticas y por simplicidad se resolverá este caso simple

$$E_1 = \frac{G\epsilon\Omega}{2(\frac{\epsilon}{2} + \lambda)} = \sqrt{(\frac{\epsilon}{2} - \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (133)$$

$$E_{\bar{1}} = \frac{G\epsilon\Omega}{2(\frac{\epsilon}{2} - \lambda)} = \sqrt{(\frac{\epsilon}{2} + \lambda)^2 + \Delta^2} \quad (134)$$

Las soluciones a estas ecuaciones son cinco. Cuatro de ellas pertenecen a sistemas normales y la otra, la cual minimiza la energía del estado fundamental, es la solución BCS del problema.

$$\lambda = 0 \quad (135)$$

$$\Delta = \sqrt{G^2\Omega^2 - \frac{\epsilon^2}{4}} \quad (136)$$

$$E_1 = E_{\bar{1}} = G\Omega \quad (137)$$

$$V_1^2 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\epsilon}{2G\Omega}\right) \quad (138)$$

$$V_{\bar{1}}^2 = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\epsilon}{2G\Omega}\right) \quad (139)$$

puede deducirse fácilmente que

$$U_1 V_{\bar{1}} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{\epsilon}{2G\Omega}\right) \quad (140)$$

$$U_{\bar{1}} V_1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\epsilon}{2G\Omega}\right) \quad (141)$$

$$U_1 V_{\bar{1}} + U_{\bar{1}} V_1 = 1 \quad (142)$$

y la regla de suma es

$$EWSR_{BCS}(\mathcal{T}_1) = 2\Omega(U_1 V_{\bar{1}} + U_{\bar{1}} V_1)^2 Q_{1\bar{1}}^2 (E_1 + E_{\bar{1}}) = 4\Omega^2 G Q_{1\bar{1}}^2 \quad (143)$$

Finalmente, la relación entre las dos  $EWSR(\mathcal{T}_1)$ , con y sin la interacción de apareamiento será

$$\frac{EWSR_{BCS}(\mathcal{T}_1)}{EWSR_N(\mathcal{T}_1)} = \frac{4G\Omega^2 Q_{1\bar{1}}^2}{2\Omega\epsilon Q_{1\bar{1}}^2} = \frac{M_{eff}(N)}{M_{eff}(BCS)} = \frac{2G\Omega}{\epsilon} = \frac{G}{G_{crit}} \quad (144)$$

El factor  $\frac{G}{G_{crit}} = 1$  define la transición de fase del sistema. Este cociente es mayor que uno para un sistema superfluido, y menor que uno para sistemas supernormales[29] (en este segundo caso, la aproximación BCS es no resoluble).

Por lo tanto, el hecho de que la interacción de apareamiento modifica la masa efectiva media del núcleo está directamente relacionada con el cambio en la estructura del estado fundamental. Además, puede verse que este cociente está directamente relacionado con el cociente entre las energías del estado fundamental en los dos casos.

$$E_{gs}(BCS) = \sum (\epsilon_i - \lambda) V_i^2 - \frac{\Delta^2}{G} = -\frac{\epsilon^2}{4G} - G\Omega^2 \quad (145)$$

$$E_{gs}(Normal) = -2\Omega \frac{\epsilon}{2} = -\epsilon\Omega \quad (146)$$

A primer orden en  $\Omega$  el cociente entre las energías de los estados fundamentales es proporcional al cociente dado por la ec. (144).

$$\frac{E_{gs}(BCS)}{E_{GS}(Normal)} = \frac{G\Omega}{\epsilon} \quad (147)$$

## B Cálculo de los propagadores

Para ver la forma de las transformadas de Fourier de las funciones de Green, tomamos la función de Green de un bosón.

Dado que el valor medio térmico de los operadores  $a_\alpha a_\alpha^\dagger$  es

$$\langle a_\alpha a_\alpha^\dagger \rangle = 1 + n_\alpha \quad (148)$$

con  $n_\alpha = \frac{1}{1+e^x}$ , y  $x = (\epsilon_\alpha - \mu)\beta$ , es

$$G_{\alpha,\gamma}^0(\tau) = -\delta_{\alpha\gamma} \left[ (1 + n_\alpha) e^{(\epsilon_\alpha - \mu)\tau/\hbar} \theta(\tau) + n_\alpha e^{-(\epsilon_\alpha - \mu)\tau/\hbar} \theta(-\tau) \right] \quad (149)$$

El desarrollo en serie de Fourier de la  $G_\alpha(\tau)$

$$G_\alpha(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_n g_\alpha^{(n)} e^{-i\omega_n \tau}, \quad \text{con } \omega_n = \frac{n\pi}{\beta}$$

lleva a

$$\begin{aligned} g_\alpha^{(n)} &= \frac{1}{2} \int_{-\beta}^{\beta} d\tau e^{i\omega_n \tau} G_\alpha(\tau) \\ &= \frac{\hbar}{i\omega_n - \epsilon_\alpha - \mu} \end{aligned} \quad (150)$$

donde la segunda igualdad se obtiene fácilmente con las propiedades de periodicidad de la función de Green.

Entonces, la antitransformada de Fourier es

$$G_{\alpha}(\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{n=par} \frac{e^{-i\omega_n \tau}}{i\omega_n - \epsilon_{\alpha} - \mu} \quad (151)$$

Para encontrar las funciones de Green vestidas hubo que resolver las integrales de los propagadores, que en general son de la forma

$$\sum_{\nu} \int d\tau K^{\mu\nu}(\alpha, \beta, \tau) K^{\nu\mu}(\gamma, \delta, t - \tau)$$

Al hacer la transformada de Fourier, usamos que

$$\theta(t - t') = i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega'}{2\pi i} \frac{e^{-i\omega'(t-t')}}{\omega' + i\eta} \quad (152)$$

En general, si se parte de una función de la forma

$$f(t) = Ae^{-i\epsilon t}\theta(t) + Be^{i\epsilon t}\theta(-t)$$

su transformada de Fourier es

$$f(\omega) = \frac{iA}{\omega - \epsilon} - \frac{iB}{\omega + \epsilon}$$

Luego, calcular las integrales de los propagadores implica calcular expresiones que son

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega \left( \frac{iA}{\omega - \epsilon_{\alpha\beta}} - \frac{iB}{\omega + \epsilon_{\alpha\beta}} \right) \left( \frac{iC}{\omega - \epsilon_{\gamma\delta}} - \frac{iD}{\omega + \epsilon_{\gamma\delta}} \right) cte e^{-i\omega t} \quad (153)$$

tales que, al evaluar la diferencia de las derivadas laterales queda

$$g'(t = 0^+) - g'(t = 0^-) = i c t e (A + B)(C + D) \quad (154)$$

Por ejemplo,

$$g^{00}(t) = \frac{1}{2\pi} \int d\omega K^{00}(\alpha\beta, \omega) K^{00}(\gamma\delta, \omega) e^{-i\omega t} \quad (155)$$

da

$$\frac{\partial g^{00}}{\partial t} \Big|_{t=0^+} - \frac{\partial g^{00}}{\partial t} \Big|_{t=0^-} = (u_\alpha^2 v_\beta^2 - u_\beta^2 v_\alpha^2)(u_\gamma^2 v_\delta^2 - u_\delta^2 v_\gamma^2) \quad (156)$$

## Referencias

- [1] M. Dufour and A. Zuker. *Phys. Rev.* **C54**, 1641 (1996).
- [2] A.M.Lane, *Nuclear Theory*, Benjamin, New York, 1964.
- [3] A.Bohr and B.Mottelson, *Nuclear Structure* Vol.2, W.A.Benjamin, New York, 1975. Especialmente Cap.6, pág. 404
- [4] P.Ring and P.Schuck, *The Nuclear Many Body Problem*, Springer Verlag, New York 1980.
- [5] O.Bohigas, A.M.Lane and J.Martorell, *Phys. Rep.* **C51**(1979)268.
- [6] A.Bohr and B.Mottelson, *Nuclear structure* Vol. 1, W.A.Benjamin, New York, 1969. Especialmente Cap. 1 , pág 11.
- [7] A.B.Migdal, *Theory of finite Fermi systems and applications to atomic nuclei*, Interscience, New York, 1967.
- [8] M.G.Mayer and J.H.D.Jensen, *Elementary Theory of Nuclear Shell Structure*, Willey, New York, NY, 1955.
- [9] A.Fetter and J.D.Walecka, *Quantum theory of many-particle systems*. Mc. Graw-Hill, 1971.
- [10] P.Nozieres, *Theory of interacting Fermi systems*, W.A.Benjamin, New York, 1964.

- [11] A.Abrikosov, L.Gorkov y I.Dzyaloshinski, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics*, Prentice-Hall, Inc. New Jersey, 1964.
- [12] A.R.Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, Princeton University Press, 1957.
- [13] G.Dussel, H.Sofia y A.Tonina, Phys.Rev. **C56**,(1997) 804.
- [14] S.C.Fultz, R.L.Bramblett, B.L.Berman, J.T.Caldwell and M.A.Kelly, in Proc. Inter. Nuclear Physics Conf., Gatlinburg, p.397. edin-chief R.L.Becker, Academic Press, New york, NY(1967).  
D.H.Wright, A.M.Nathan, L.J.Morford and P.T.Debevec, Phys. Rev. Lett. **52**(1984)244.  
A.Veyssierre, H.Beil, R.Bergere, P.Carlos and A. Lepretre, Nucl. Phys. **A159**(1970)561.
- [15] A.Lepretre, H.Beil, R.Bergere, P.Carlos, J.Fagot, A. De Miniac and A.Veyssiere, Nucl. Phys **A367**(1981)237.
- [16] E.Seva, H.M.Sofia y A.Tonina, Phys. Rev. C. Enviada para su publicación (1998).
- [17] F.Catara, A.Insolia, E.Maglione and A.Vitturi, Phys. Rev. **C29**, 1091 (1984).
- [18] M.Tischler,A. Tonina y G.Dussel, Phys Rev **C58**, (1998), 2592.
- [19] G. Racah, Phys. Rev. **62**, 438 (1942).



- [20] S. T. Belyaev, *Mat. Fys. Medd*, **31**, 11 (1959).
- [21] J.Bardeen, L.Cooper and J.Schrieffer, *Phys. Rev.* **108**, 1175 (1957).
- [22] M. Baranger, *Nucl. Phys.* **A149** (1970) 225.
- [23] D.J.Thouless, *Nucl. Phys.* **22** (1961) 78.
- [24] S.T.Belyaev, *Nuclear Structure, Dubna Symposium 1968, IAEA 1968,*  
*Sov. J.Nucl. Phys.* **4** (1966) 936.
- [25] J.M.Arias, M.Gallardo and J.Gómez-Camacho, *Nucl. Phys.* **A528**  
 (1991) 144.
- [26] S.L.Reich, H.M.Sofia and D.R.Bes, *Nucl. Phys.* **A233** (1974) 105.
- [27] O.Civitarese, R.Perazzo, S.Reich and M.Saraceno, *Z.Phys.* **A311** (1983)  
 135.
- [28] G. Dussel, R. Perazzo and H. Sofia, *Phys. Rev.* **C43** (1991) 1211.
- [29] D. Bes, G. Dussel, R. Broglia, R. Liotta and B. Mottelson, *Phys. Lett.*  
**52B** (1974) 253.  
 D. Bes, G. Dussel, R. Broglia, R. Liotta, R. Perazzo and H. Sofia  
*Nucl. Phys.* **A260** (1976) 1, 27 and 77.
- [30] S. Gustavson, I.L.Lamm, B.Nilsson and S.G.Nilsson, *Arkiv Fysik*  
**36**(1967)613.
- [31] C.Dasso, comunicación privada.

- [32] R.A.Uhrer and R.A.Sorensen, Nucl Phys. **A86** (1966) 1.
- [33] S.L.Reich, H.M.Sofia and D.R.Bes, Nucl. Phys. **A233** (1974) 105.
- [34] J.L.Egido and P.Ring, J.Phys G: Nucl. Part. Phys. **19** (1993). 1-54.
- [35] G.G.Dussel, H.Fortunato, H.M.Sofia, Phys.Rev. **C42** (1990) 2093.
- [36] T.Matsubara, Prog. Theor. Phys. **97**, 351 (1955).
- [37] M. Baranger, Nucl. Phys. **A149**, 225 (1970).
- [38] D. Vautherin y N. Vinh Mau, Nucl. Phys. **A422** (1984) 140.
- [39] M.Barranco, A.Polls, J.Martorell, Nucl. Phys. **A444** (1985) 445.
- [40] H.M.Sommermann, Ann. of Phys. **151** (1983) 163.
- [41] O.Civitarese, G.G.Dussel y R.P.J.Perazzo, Nucl. Phys. **A404** (1983) 15.
- [42] O.Civitarese, R.A.Brogliá y C.H.Dasso, Ann. of Phys. **156** (1984) 142.
- [43] P.Bonche, S.Levit and D.Vautherin, Nucl. Phys. **A427**, 278, (1984).
- [44] D.R.Bes and R.A.Sorensen, *Advances in Nuclear Physics*, editado por M.Baranger y E.Vogt, Plenum, New York, 1969. Vol.1 y referencias.
- [45] A.Bohr, B.Mottelson and D.Pines, Phys. Rev. **110**, 936 (1958).
- [46] D.R.Bes and R.Brogliá, Nucl. Phys. **A80**, 26 (1966).
- [47] R.Brogliá, O.Hansen and C.Riedel, *Advances in Nuclear Physics*, editado por M.Baranger and E.Vogt, Plenum, New York, 1973. Vol.6, p287.

- [48] A.Insolia, R.J.Liotta and E.Maglione, *J.Phys.G, Nucl.Part.Phys.* **15** (1989) 1249.
- [49] A. Insolia, R.J.Liotta and E.Maglione, *Europhysics Letts.* **7** (1988) 208.  
P.Lotti, E.Maglione, F.Catara and A. Insolia, *Europhysics Letts.* **6** (1988) 125.  
F.Catara, A.Insolia, E.Maglione and A.Vitturi, *Phys. Letts.* **149B** (1984) 41.  
W.T.Pimkston, *Phys. Rev.* **C29** (1984) 1123.
- [50] G.E.Bertsch, R.A.Brogliá and C.Riedel, *Nucl. Phys.* **A91**, 123 (1967).
- [51] R.H.Ibarra, N.Austern, M.Vallieres and D.H.Feng, *Nucl. Phys.* **A288**, 397 (1977).
- [52] A. F. Janouch and R.J.Liotta, *Phys. Rev.* **C27**, 896 (1983)
- [53] T.A.Brody and M.Moshinsky, *Tablas de corchetes de transformación*, Universidad Nacional Autónoma de México, 1960.

## *Agradecimientos*

*Quisiera agradecer a Willie Dussel el haber podido trabajar con él, y que me haya transmitido, con generosidad, sus conocimientos y su visión sobre la física. Deseo agradecer a Hugo Sofia por haber podido también trabajar y aprender con él, y su buena disposición toda vez que recurrí a su saber.*

*Quiero agradecer profundamente a Gustavo Rangugni y a mis compañeros del INTI, por haberme acompañado en el final de este trabajo. Agradezco a mi familia y a mis amigos, y dedico la presente tesis a Ricardo y a Manuel.*