

Tesis Doctoral

Turbulencia magnetohidrodinámica en la Corona Solar

Dmitruk, Pablo Ariel

1999

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias
Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the Master's and Doctoral Theses Collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Dmitruk, Pablo Ariel. (1999). Turbulencia magnetohidrodinámica en la Corona Solar. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n3110_Dmitruk

Cita tipo Chicago:

Dmitruk, Pablo Ariel. "Turbulencia magnetohidrodinámica en la Corona Solar". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1999.
http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n3110_Dmitruk

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

FCE y N BIBLIOTECA

Turbulencia Magnetohidrodinámica en la Corona Solar

por Pablo Ariel Dmitruk

Director: Dr. Daniel Osvaldo Gómez

Lugar de trabajo: Departamento de Física

3112

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas

Marzo de 1999

Resumen

En esta Tesis proponemos avanzar en el estudio de regímenes turbulentos, analizando la dinámica del magnetofluido que compone la corona solar. La temperatura en la corona, la capa más externa de la atmósfera del Sol, es más de cien veces superior que la temperatura de la superficie solar. Por lo tanto, debe existir un mecanismo muy eficiente de transferencia y disipación de energía. Uno de los escenarios más promisorios para explicar este fenómeno es la suposición de que los campos magnéticos y de velocidades del plasma coronal se encuentran en un estado fuertemente turbulento. La turbulencia actúa como un catalizador de los procesos disipativos. En esta Tesis desarrollamos el marco teórico de esta idea, con la ayuda de un soporte numérico. Elaboramos un código de simulación de las ecuaciones magnetohidrodinámicas que nos permitió estudiar la compleja evolución de un arco magnético coronal. Obtenemos resultados consistentes con la tasa de calentamiento requerida para mantener el plasma confinado en estas estructuras a las temperaturas observadas. Analizamos la dependencia de esta tasa con los parámetros del problema y describimos la morfología de las estructuras de disipación asociadas. Asimismo, presentamos un análisis estadístico de la distribución de energías de eventos disipativos la cual resulta totalmente comparable con la estadística observada para fulguraciones solares, sugiriendo la presencia de un mecanismo físico común a estos fenómenos de liberación de energía. Complementariamente, estudiamos el decaimiento de turbulencia hidrodinámica bidimensional y la formación de estados auto-organizados metaestables.

PALABRAS CLAVE:

**TURBULENCIA - MAGNETOHIDRODINAMICA - CORONA SOLAR - PLASMA -
METODOS ESPECTRALES - FLUIDOS**

MAGNETOHYDRODYNAMIC TURBULENCE IN THE SOLAR CORONA

Abstract

In this Thesis we propose to advance in the study of turbulent regimes, by analyzing the dynamics of the magnetofluid that composes the solar corona. The temperature in the corona, the most external layer of the Sun, is more than one hundred times larger than the temperature of the solar surface. Therefore, there must be a very efficient mechanism of energy transfer and dissipation. One of the most promising scenarios to explain this phenomenon is the assumption that the magnetic and velocity fields of the coronal plasma are in a fully developed turbulent state, which enhances dissipative processes. In this thesis, we develop a theoretical framework for these ideas, with the aid of numerical support. We built a simulation code of the magnetohydrodynamical equations, which allowed us to study the complex evolution of a coronal magnetic loop. We obtain results which are consistent with the heating rates required to keep the plasma confined in these structures at the observed temperatures. We analyze the dependence of this rate with the parameters of the problem and describe the morphology of the ensuing dissipative structures. Also, we present a statistical analysis of the energy distribution of dissipative events, which is remarkably consistent with the energy distribution of solar flares, thus suggesting the presence of a common physical origin for these otherwise different energy liberation phenomena. As a complementary study, we analyze the turbulent decay of two-dimensional hydrodynamics and the formation of self-organized and metastable states.

KEYWORDS:

TURBULENCE - MAGNETOHYDRODYNAMICS - SOLAR CORONA - PLASMA -
SPECTRAL METHODS - FLUIDS

Indice

1	Introducción	5
2	La corona solar	8
2.1	Descripción	8
2.2	El problema del calentamiento coronal	14
2.3	Modelo estandar de arco magnético coronal	17
3	Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica	19
3.1	La aproximación magnetohidrodinámica	19
3.2	La ecuación de movimiento	20
3.2.1	Tensión y presión magnéticas	21
3.3	La ecuación de inducción magnética	22
3.3.1	Difusión y congelamiento de líneas magnéticas	24
3.4	Las ecuaciones MHD incompresibles	25
3.4.1	Balance de energía	26
3.4.2	Ondas de Alfvén	28
3.5	La aproximación RMHD	29

3.6	Las ecuaciones MHD 2D	34
4	Turbulencia y simulaciones numéricas	35
4.1	Turbulencia hidrodinámica	36
4.1.1	Características de la turbulencia	36
4.1.2	Invariantes ideales en hidrodinámica 3D	37
4.1.3	Balance energético en cada escala	39
4.1.4	La ley de escala de Kolmogorov y el concepto de cascada	43
4.2	Simulación numérica de flujos turbulentos	46
4.2.1	Integración espacial	46
4.2.2	Integración temporal . .	52
4.2.3	Requerimientos de cómputo . .	54
4.2.4	Simulaciones de grandes escalas	55
4.2.5	El problema de clausura . . .	56
5	Decaimiento de flujos turbulentos en dos dimensiones	57
5.1	Turbulencia hidrodinámica bidimensional	58
5.2	Auto-organización, decaimiento selectivo y estados metaestables	65
5.3	Resultados numéricos	67
5.3.1	(a) Condiciones de contorno periódicas . . .	68
5.3.2	(b) Condiciones de contorno periódicas + deslizamiento libre	71
5.4	Truncaciones de longitud de onda grande	77
6	Modelo magnetohidrodinámico de un arco coronal	82

6.1	Introducción .	83
6.2	Turbulencia magnetohidrodinámica	84
6.2.1	Invariantes y cascadas	84
6.2.2	Espectro de Kraichnan . .	87
6.3	Aproximación RMHD de un arco magnético coronal	90
6.3.1	Ecuaciones	90
6.3.2	Método numérico . .	92
6.4	Eventos de reconexión magnética . . .	94
6.5	Tasa de calentamiento coronal y ley de escala	102
7	Fenómenos intermitentes y distribución de nanofulguraciones	110
7.1	Introducción .	110
7.2	Modelo MHD 2D de una sección de arco magnético . . .	111
7.3	Estadística de eventos. Distribución de nanofulguraciones y fulguraciones	114
7.4	Estructuras disipativas	122
7.5	Modelo turbulento fenomenológico de los eventos	126
8	Conclusiones	131
	Referencias	
	Agradecimientos	

Capítulo 1

Introducción

De qué se trata esta Tesis ? Desde cierto punto de vista, se podría decir que esta Tesis trata sobre el *aporte* que puede hacer la turbulencia magnetohidrodinámica a la física de la corona solar. Más específicamente, podría decirse que trata sobre un aporte esencialmente numérico al “aporte que puede hacer la turbulencia magnetohidrodinámica a la física de la corona solar”.

Pero también vale la visión aparentemente opuesta: que esta tesis se propone aportar a la comprensión de los regímenes turbulentos, *tomando* como sistema físico concreto (o como laboratorio) el magnetofluido que compone la corona solar. Esta es la perspectiva que parece la más correcta para definir este trabajo. Pero claro, esto parte de una suposición implícita: que la turbulencia magnetohidrodinámica tiene algo que ver con la dinámica de la corona solar. La existencia misma de turbulencia magnetohidrodinámica en la corona solar no es todavía un hecho aceptado por todos los físicos solares y es entonces materia de debate, encontrándose a físicos prestigiosos como E. Parker (1994) entre quienes se oponen a esta propuesta. No fue sino hasta años recientes ([Heyvaerts & Priest 1992], [Gómez & Ferro Fontán 1988], 1992) que comenzaron a aparecer artículos en revistas de astrofísica sobre turbulencia magnetohidrodinámica (MHD) en la corona solar. Estos trabajos son de carácter teórico y básicamente aportan ideas de la turbulencia para la comprensión del fenómeno físico del calentamiento coronal. El problema central consiste en identificar la fuente de energía y los mecanismos de transferencia y disipación que provocan que la corona tenga una temperatura mas de dos órdenes de magnitud superior

a la superficie solar, con una región de transición de sólo unos pocos cientos de km. Esta Tesis pretende darle un soporte esencialmente numérico a esas ideas. El tratamiento numérico de modelos coronales, es hoy un tema de intensa investigación en astrofísica, como lo demuestran trabajos publicados en años recientes ([Einaudi et al. 1996], [Hendrix & van Hoven 1996], [Dmitruk & Gómez 1997a], [Georgoulis et al. 1997], [Lionello et al. 1998], [Dmitruk et al. 1998]). Este trabajo se inscribe en esa línea de investigación. La utilización de simulaciones numéricas en turbulencia magnetohidrodinámica ha sido por otra parte muy desarrollada en publicaciones en revistas de fluidos y plasmas ([Fyfe et al. 1977], [Matthaeus & Lamkin 1986], [Ting et al. 1986], [Biskamp & Welter 1989], [Matthaeus et al. 1996]) siguiendo el camino originalmente señalado por investigaciones numéricas mediante métodos espectrales en problemas turbulentos puramente hidrodinámicos ([Patterson & Orszag 1971], [Gottlieb & Orszag 1977]).

Las simulaciones numéricas constituyen entonces una herramienta para poner a prueba estas teorías e intentar también predecir nuevos resultados: Se desarrolla turbulencia MHD en un arco coronal ? Para un conjunto de valores razonables de los parámetros coronales (geométricos y de contorno), es la tasa de disipación obtenida en una simulación MHD consistente con la tasa de calentamiento requerida por las observaciones ? Cómo es la dependencia de esta tasa de disipación con los parámetros del problema ? Qué tipo de estructuras disipativas se desarrollan ? Estas son algunas de las preguntas que nos formulamos y nos propusimos responder desarrollando códigos numéricos, junto a otras nuevas que surgieron durante el transcurso del trabajo, como el estudio de la estadística de eventos impulsivos en la serie temporal de disipación de energía.

La Tesis entonces, como bien lo dice su título, es una mezcla de tres ingredientes básicos: la turbulencia, la magnetohidrodinámica y la corona solar. El instrumento para mezclarlos son las simulaciones numéricas. El resultado es una buena oportunidad de aprender muchas cosas y a la vez sustentar un mecanismo posible de calentamiento coronal.

La organización de este trabajo es la siguiente. En el capítulo 2 realizamos una breve descripción de la corona solar, nuestro objeto físico de interés. Luego, planteamos el problema del calentamiento coronal y el modelo de arco magnético para estudiarlo, que supondremos en esta Tesis. En el capítulo 3 presentamos las ecuaciones de la MHD y enumeramos algunas de sus propiedades. El capítulo 4 reseña los fundamentos de la turbulencia hidrodinámica e introduce

conceptos tales como el de invariante ideal, cascada y el espectro de Kolmogorov. Describimos también los métodos espectrales utilizados para la simulación numérica de regímenes turbulentos. El capítulo 5 constituye un ejercicio previo que nos planteamos para iniciarnos en el desarrollo de este tipo de códigos numéricos. Utilizamos para ello el problema del decaimiento turbulento de un flujo puramente hidrodinámico y bidimensional. El estudio de algunos de los fenómenos observados, como el de auto-organización o la caracterización del estado metaestable, representaron además aportes originales al tema.

Los capítulos 6 y 7 son los más importantes de esta Tesis. Allí presentamos el modelo MHD de un arco magnético coronal y estudiamos su dinámica turbulenta mediante simulaciones numéricas. En el 6, discutimos resultados sobre simulaciones de la magnetohidrodinámica reducida (RMHD), una simplificación de la MHD, que es nuestro modelo "realista" de arco magnético. Describimos el tipo de eventos de disipación y las estructuras magnéticas que se desarrollan. Calculamos la tasa de disipación de energía en un régimen estacionario, en donde el forzado representa la acción de las bases fotosféricas (la superficie solar) sobre el arco coronal. Obtenemos la dependencia de esta tasa con los parámetros relevantes del problema. En el capítulo 7 analizamos características intermitentes en la dinámica del arco coronal. Una aproximación bidimensional nos permite extender las simulaciones a tiempos suficientemente largos como para poder realizar un análisis estadístico de los eventos disipativos. Los resultados se comparan con las distribuciones reportadas de observaciones reales de eventos mucho más energéticos (fulguraciones). También describimos el tipo de estructuras disipativas presentes (intermitencia espacial) y presentamos un primer intento teórico-fenomenológico de relacionar la estadística de eventos con conceptos de turbulencia MHD. Finalmente, en el capítulo 8 resumimos las principales conclusiones de este trabajo.

Capítulo 2

La corona solar

En este capítulo introducimos la terminología y los conceptos fundamentales para el estudio de regiones activas de la corona solar, y más específicamente de los arcos magnéticos que las componen, cuya dinámica se analizará en detalle en los capítulos subsiguientes.

2.1 Descripción

La corona es la capa más externa de la atmósfera solar, la cual se extiende desde la superficie visible del sol hasta millones de kilómetros en el espacio interplanetario. Consiste principalmente de hidrógeno altamente ionizado debido a su elevada temperatura, de alrededor de 2×10^6 K en la zona cercana a la superficie. Se trata de un plasma tenue, ya que la densidad de partículas es comparativamente baja en relación al plasma de la superficie o del interior del sol. En particular en la región más cercana a la superficie solar, esta densidad es de alrededor de 10^9 cm^{-3} , descendiendo luego monótonamente con la distancia al Sol hasta alcanzar valores de 10 cm^{-3} en las proximidades de la Tierra.

La corona emite en un amplio rango de longitudes de onda. Sin embargo, dada su baja densidad, la radiación emitida en el rango visible es extremadamente inferior a la producida en la superficie. Por lo tanto es imposible de observar sin la ayuda de instrumentos conocidos como “coronógrafos” o también durante eclipses totales como se muestra en la Figura 2.1

Fig. 2.1: Eclipse solar fotografiado en la India en 1980.



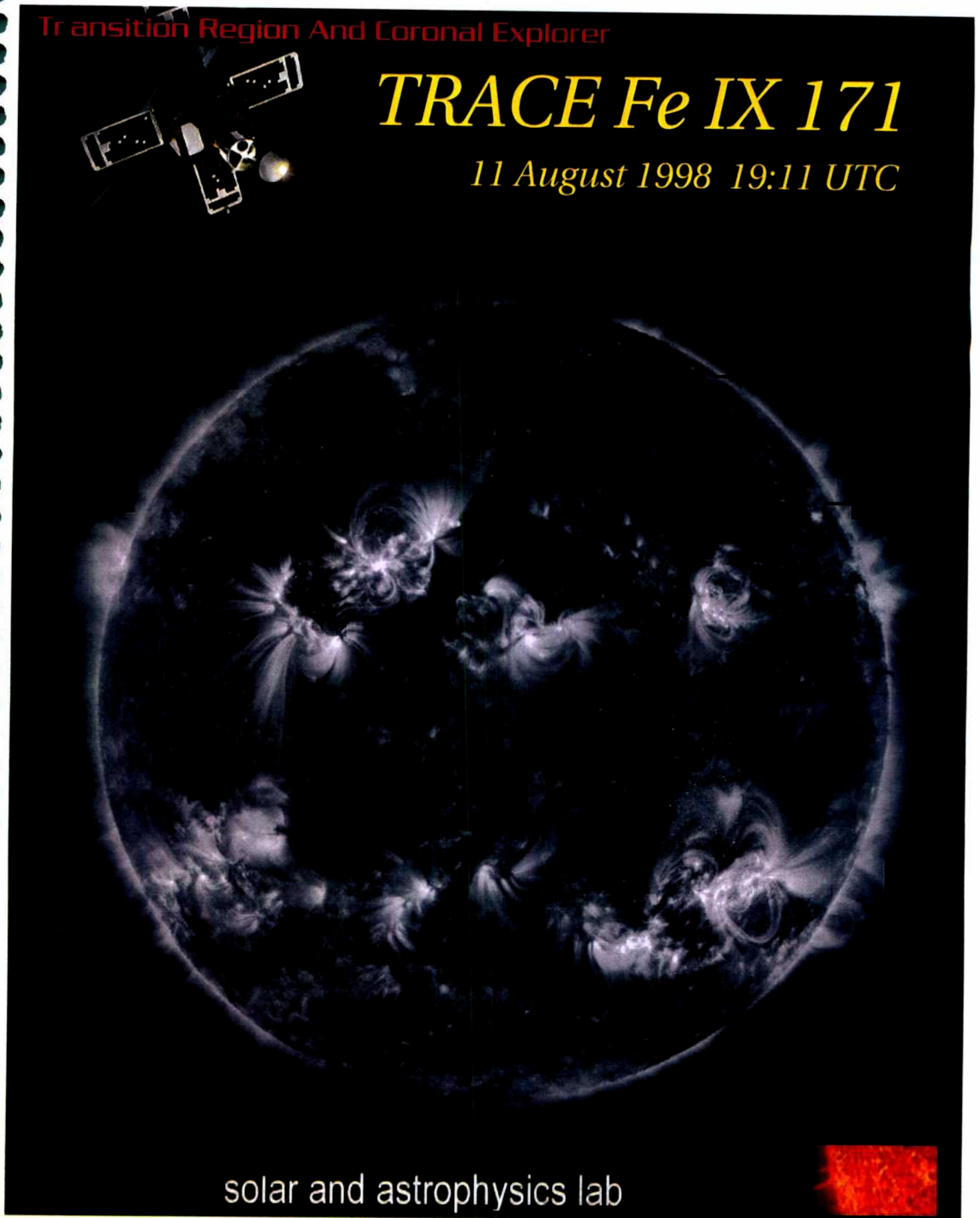
La principal emisión de radiación de la corona corresponde sin embargo al rango del extremo ultravioleta (EUV) y de rayos X del espectro electromagnético. No fue sino hasta años recientes con el advenimiento de la tecnología satelital, que fue posible observarla, dado que este tipo de radiación es fuertemente absorbida por la atmósfera terrestre (ver [Golub & Pasachoff 1997] para una descripción de instrumentos y técnicas observacionales de la corona).

En la Figura 2.2 se muestra una imagen en el EUV obtenida por el satélite TRACE (Transition Region and Coronal Explorer), con una resolución de $0.5''$ de arco, que equivale a una longitud aproximada de 360 km en el disco solar.

La imagen muestra una amplia jerarquía de estructuras de muy diverso tamaño y morfología. Estas estructuras están estrechamente vinculadas con el campo magnético coronal. La distribución del campo magnético coronal, inferida a partir de los llamados "magnetogramas", que miden el campo magnético en la superficie solar, en la dirección de la línea de observación, muestran en general una marcada coincidencia espacial y temporal con las estructuras en rayos X y EUV ([Priest 1982]).

Las observaciones muestran que existen dos tipos de regiones de naturaleza muy diferente. Existen zonas oscuras, llamadas agujeros coronales, que corresponden a estructuras magnéticas

Fig. 2.2: Imagen en EUV de la corona solar, obtenida con el satélite TRACE.



abiertas y por las cuales se cree que el plasma escapa en forma aproximadamente radial, constituyendo el denominado *viento solar* ([Schwenn & Marsch 1990]). Allí el campo magnético no es lo suficientemente intenso para confinar al plasma. Por otro lado, se encuentran regiones brillantes en rayos X, conocidas como regiones activas. Allí las estructuras magnéticas son cerradas, formando *arcos magnéticos* (loops) con una morfología sumamente compleja. En estas regiones el campo magnético es de alrededor de 100G, la densidad 10^9 cm^{-3} y la temperatura $2 \times 10^6 \text{ K}$. El campo es lo suficientemente intenso para confinar al plasma impidiéndole expandirse por gradiente de presiones, y por ello estas estructuras se ven brillantes en las imágenes en rayos X y EUV.

En las Figuras 2.3 y 2.4 se observan en detalle algunos de estos arcos magnéticos, a partir de imágenes del TRACE (resolución 0.5", longitud de onda 171 Å) y de Yohkoh (resolución 2.5", longitud de onda 3 – 50 Å). La imagen del TRACE muestra en particular la compleja estructura espacial de estos arcos, compuestos por una miríada de fibrilas, con diámetros tan pequeños como la resolución del instrumento. Las longitudes de estos loops varían entre 10^4 y 10^5 km y pueden permanecer durante varias horas o días sin cambiar, como se observa en imágenes sucesivas. Películas de alta resolución muestran también una dinámica temporal compleja, con abrillantamientos repentinos de los loops y movimiento de materia en su interior.

Además de los loops, podemos mencionar una variedad de fenómenos transientes que muestran que la corona solar, lejos de ser una estructura tranquila y estacionaria, presenta una dinámica sumamente compleja y variada. Entre los fenómenos más espectaculares se encuentran las *fulguraciones*, que se observan como regiones muy brillantes debido a la intensa emisión producida por liberaciones impulsivas de energía del orden de 10^{32} erg en pocos minutos u horas. Este tipo de fenómenos se atribuyen a una acumulación de energía en el campo magnético, la cual eventualmente llega a una configuración inestable y se disipa energía libre por *reconexión magnética* ([Priest 1982]). El mecanismo de reconexión consiste en un cambio topológico en las líneas de campo magnético y en transferencia de energía magnética a las partículas, ya sea en forma de energía cinética del plasma o en aceleración de haces de electrones y/o protones.

Existen también filamentos que aparecen como cintas oscuras sobre la superficie y brillantes al observárselas en el limbo, donde reciben el nombre de *prominencias*. Constituyen material relativamente frío y denso de la cromósfera que se elevó hacia la corona y puede permanecer allí

Fig. 2.3: Arcos magnéticos en la corona solar observados con el satélite TRACE.

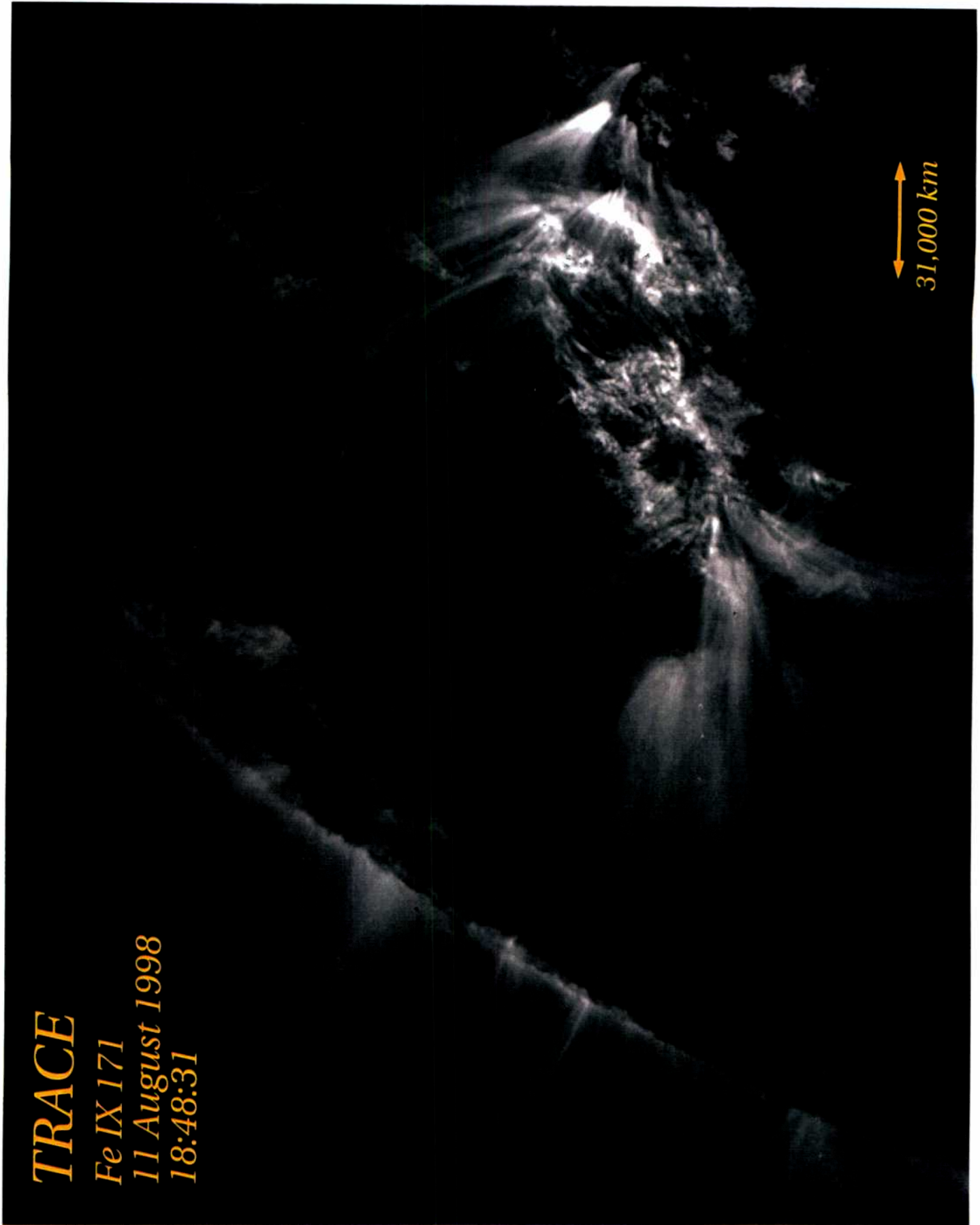
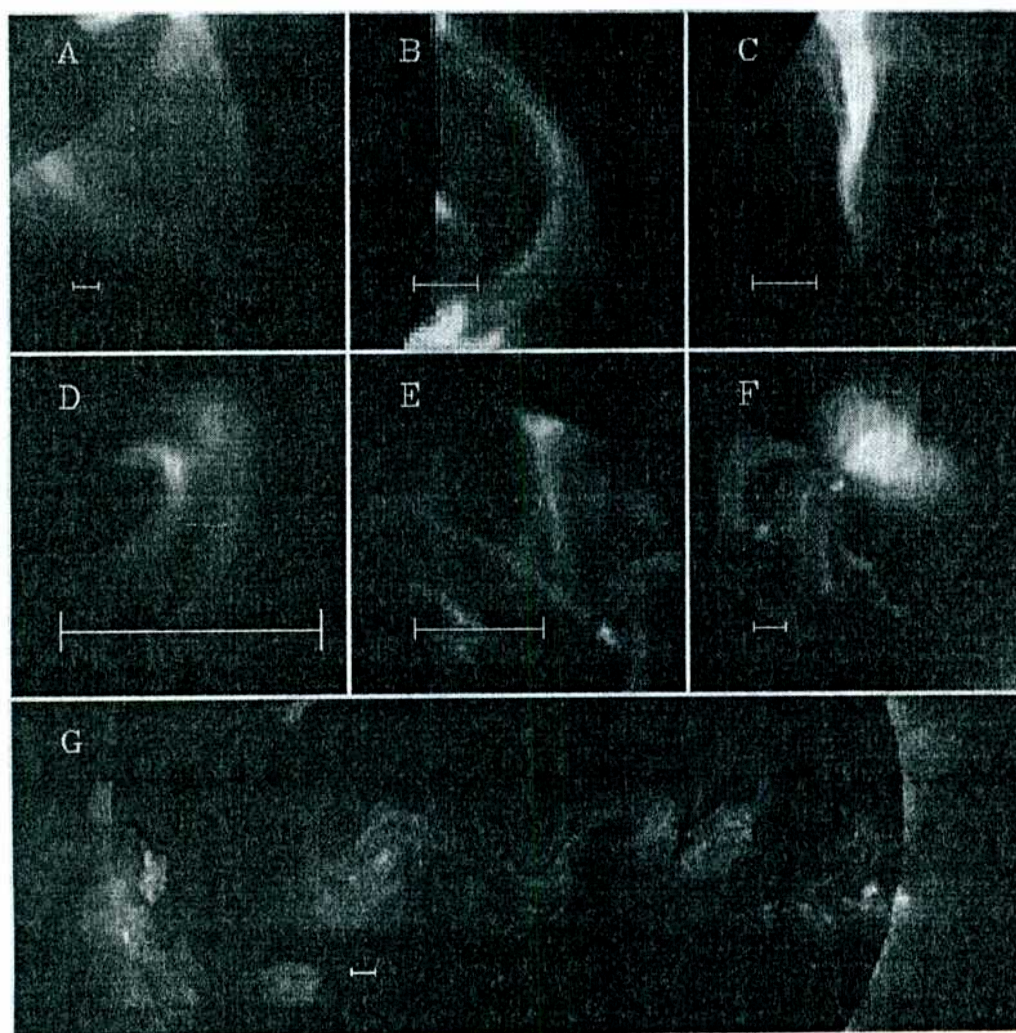


Fig. 2.4: Arcos magnéticos en la corona solar observados por el instrumento SXT del satélite Yohkoh. La barra blanca en la figura corresponde a 43500 km.



durante días. También en este tipo de fenómenos el campo magnético juega un rol preponderante, fundamentalmente sirviendo de sostén al filamento, que de otra forma debería caer por gravedad. Eventualmente algunas de estas prominencias son expulsadas de la superficie y producen violentas eyecciones de materia hacia el espacio interplanetario. El flujo de partículas producido en estas explosiones alcanza las capas mas externas de la atmósfera terrestre y la magnetósfera, influyendo sobre las comunicaciones y satélites o incluso provocando sobrecargas en líneas de transmisión eléctrica. El análisis y predicción de estos fenómenos es por lo tanto tema de intenso estudio.

2.2 El problema del calentamiento coronal

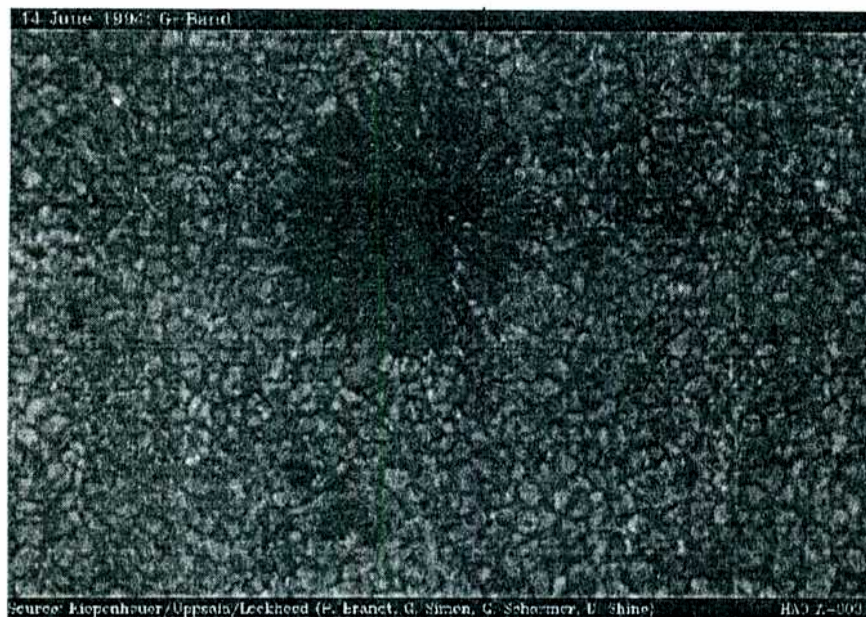
La atmósfera solar esta constituida por tres regiones con características físicas muy diferentes. La región mas profunda es una capa de gas neutro llamada *fotósfera*, que es relativamente densa ($10^{13-17} \text{ cm}^{-3}$) y opaca y emite la mayor parte de la radiación solar. Constituye la superficie visible del sol y su temperatura correspondiente a un espectro continuo de cuerpo negro, es del orden de 6000 K.

Dada su alta emisividad, la fotósfera puede ser observada en luz blanca. En la Figura 2.5 se muestra una imagen en el continuo de la fotósfera.

Esta imagen muestra una gran *mancha solar*, que es una zona de plasma relativamente frío y de intenso campo magnético y generalmente se encuentra asociada a una región activa de la corona. Rodeando a esta mancha se observa que la fotósfera aparece cubierta de gránulos, que son estructuras brillantes compuestas de plasma caliente en continuo movimiento. Estos gránulos son la manifestación del transporte convectivo turbulento de energía que tiene lugar justo debajo de la fotósfera. La vida media de un gránulo es de unos 8 min, su diámetro de unos 1000 km y su velocidad del orden de 1 km/s, con un período de rotación correspondiente de 1000 s. Existen también movimientos a grandes escalas, conocidos como mesogranulación y supergranulación.

Por encima de la fotósfera, se encuentra la *cromósfera*, de menor densidad ($10^{11-13} \text{ cm}^{-3}$) y mayor temperatura ($T \sim 10^4 \text{ K}$) y se la observa a través de filtros en diferentes longitudes de onda, como la línea $H\alpha$ del espectro de Balmer del hidrógeno. La cromósfera se conecta con la corona

Fig. 2.5: Imagen en luz blanca de la fotosfera que muestra una gran mancha solar y la granulación debida a los movimientos convectivos. La imagen cubre 60000 km horizontalmente y 38000 km verticalmente.



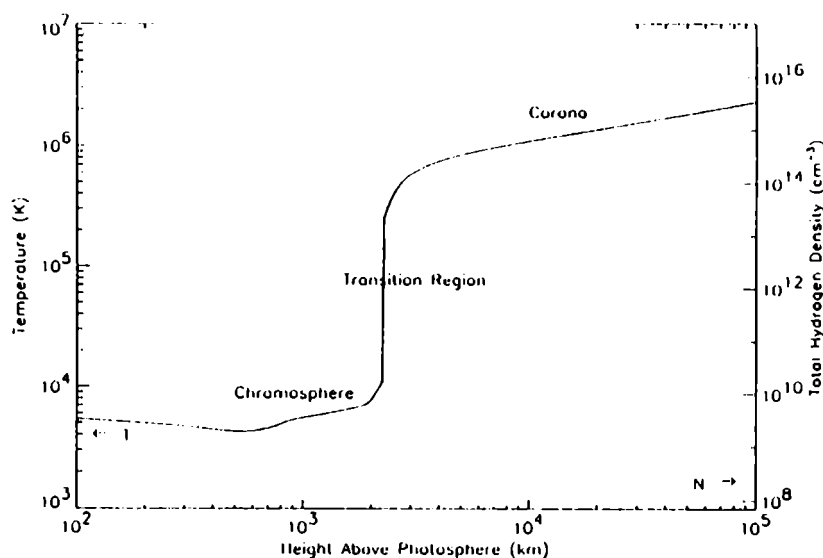
a través de una delgada *región de transición*, de alrededor de 300 km, en la cual la temperatura aumenta desde 10^4 K hasta valores coronales del orden de 2×10^6 K.

En la Figura 2.6 se muestra una representación esquemática de la temperatura y la densidad en la atmósfera solar como función de la altura medida desde la superficie.

El esquema evidencia el fenómeno conocido como *calentamiento coronal*. En ausencia de circunstancias especiales la temperatura en la atmósfera debería decrecer a medida que aumenta la distancia a la superficie del Sol. Sin embargo, luego de una pequeña disminución inicial y de un aumento suave en la cromósfera, la temperatura aumenta abruptamente en la región de transición, tal cual acabamos de señalar. La densidad en cambio disminuye, de forma tal que la presión se mantiene aproximadamente constante. Identificar el mecanismo responsable de este abrupto aumento de temperatura en la corona es aún uno de los mayores problemas en la física solar, lo cual da origen a una intensa actividad de investigación.

Para mantener estas elevadas temperaturas en la corona, debe existir un mecanismo muy eficiente de transferencia y disipación de energía desde la superficie hacia las capas exteriores.

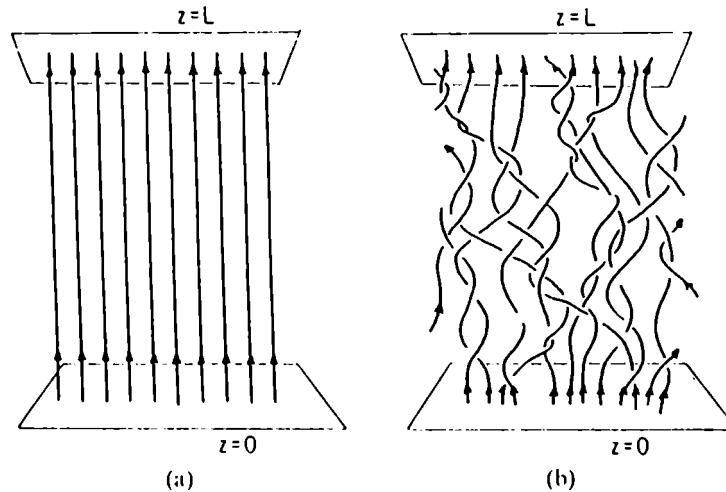
Fig. 2.6: Esquema de la variación de temperatura y densidad con la altura, desde la fotosfera hasta la corona solar, que ilustra el fenómeno del calentamiento coronal (Golub & Pasachoff 1997).



Cualquier teoría o modelo elaborado para explicarlo debe ser consistente con el balance del flujo de energía observado en la corona. Si consideramos un volumen en la atmósfera exterior, que suponemos en estado estacionario, entonces la energía que fluye hacia dicho volumen debe ser balanceada con la pérdida de una cantidad equivalente de energía en esa porción de la atmósfera. Sumando entonces las pérdidas se puede estimar la tasa de ingreso de energía. En la corona, se consideran dos mecanismos básicos de pérdida de energía: por conducción de calor hacia la cromósfera, y por radiación. Existen también pérdidas por eyección de materia o por partículas aceleradas, pero no son los efectos preponderantes en regiones cerradas (loops). Las pérdidas de energía medidas en regiones activas de la corona alcanzan valores de entre 10^5 y 10^7 $\text{erg cm}^{-2} \text{s}^{-1}$ ([Withbroe & Noyes 1977]).

Diversos mecanismos físicos se han propuesto para explicar el calentamiento coronal, los cuales deben predecir valores de flujo de energía comparables a las tasas de pérdida de energía recién mencionadas. Existe consenso en que el campo magnético juega un rol preponderante no sólo en la dinámica coronal, sino también en el mecanismo de calentamiento. No es la intención de este trabajo enumerar la variedad de mecanismos propuestos, un resumen de los cuales puede

Fig. 2.7: Esquema del modelo de arco magnético coronal (Parker 1994).



encontrarse en otras referencias ([Gómez 1990], [Narain & Ulmschneider 1990]). La idea central de esta tesis es profundizar, con el apoyo de simulaciones numéricas, en el estudio del rol potencial de la turbulencia MHD en el calentamiento de regiones activas ([Heyvaerts & Priest 1992], [Gómez & Ferro Fontán 1988], [Gómez & Ferro Fontán 1992]).

2.3 Modelo estandar de arco magnético coronal

El modelo de arco magnético que utilizaremos para nuestro estudio teórico y numérico se basa en ideas inicialmente introducidas por [Parker 1972]. Este modelo se desarrolla en detalle en el capítulo 6 y el esquema delineado aquí es sólo para describir los aspectos generales, que involucran hipótesis geométricas y físicas. La física básica del problema se describe simplemente con un campo magnético inicialmente uniforme que se extiende en la dirección z a través del plasma coronal que constituye el loop, entre las bases en $z = 0$ y $z = L$ que representan la fotosfera (Figura 2.7a). El esquema de la Figura 2.7a corresponde a un loop recto, lo cual indica que despreciamos la curvatura de dicho loop. Esta aproximación es adecuada para arcos largos y delgados, es decir aquellos para los cuales su radio menor es mucho más pequeño que su radio de curvatura.

El plasma se pone en movimiento a través de los movimientos convectivos fotosféricos en sus bases. La alta conductividad asegura, como veremos en una sección posterior, que estos movimientos arrastren consigo al campo magnético, cuyas líneas se comportan como si se tratase de cuerdas retorciéndose como consecuencia de la acción en sus bases. Esto genera gradientes de campo magnético y por lo tanto corrientes eléctricas, las que son plausibles de ser disipadas por efecto Joule. La liberación de la energía acumulada en el campo durante los retorcimientos a través de la disipación de estas corrientes, provee en consecuencia una fuente de calentamiento del plasma coronal confinado en el loop.

Si el forzado fotosférico persiste, el campo magnético presentará entonces un aspecto topológicamente muy complejo (Figura 2.7b), cuya dinámica y acoplamiento con el campo de velocidades, se describe mediante las ecuaciones macroscópicas de la magnetohidrodinámica (MHD), que presentamos en el siguiente capítulo.

Como veremos, estas ecuaciones son altamente no lineales en el caso coronal, de manera que la turbulencia pasa a jugar un rol preponderante en la dinámica de los campos. En particular, constituye un mecanismo para acelerar los tiempos de transferencia y disipación de energía, que en un caso puramente lineal serían excesivamente largos, a los niveles requeridos para el calentamiento de regiones activas de la corona.

Capítulo 3

Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica

En este capítulo se presentan las ecuaciones magnetohidrodinámicas (MHD), las cuales emplearemos para describir la dinámica de arcos magnéticos coronales. Se considera el caso incompresible y la aproximación conocida como magnetohidrodinámica reducida (RMHD), cuando existe un campo magnético intenso y esencialmente uniforme. Se discuten algunas propiedades de estas ecuaciones, las cuales serán de utilidad para las aplicaciones que se presentan en capítulos posteriores.

3.1 La aproximación magnetohidrodinámica

La magnetohidrodinámica (MHD) describe el comportamiento macroscópico de un plasma, bajo ciertas aproximaciones. Las ecuaciones MHD pueden ser derivadas en forma sistemática partiendo de la descripción cinética del plasma, tomando momentos sobre las ecuaciones de evolución de las funciones de distribución de iones y electrones ([Braginskii 1965]).

La suposición fundamental consiste en tratar al plasma como un medio continuo, es decir, en una descripción de fluido. Esto es válido mientras la escala de longitud de las variaciones de los campos sea mucho mayor que las escalas internas típicas del plasma, como el radio de giro

iónico. Esta relación se satisface ampliamente en plasmas astrofísicos o plasmas de laboratorio bajo campos magnéticos suficientemente intensos (el radio de giro iónico es inversamente proporcional al campo), tal como el que confina al plasma coronal. La segunda aproximación consiste en suponer que el plasma se encuentra en equilibrio termodinámico con funciones de distribución aproximadamente maxwellianas. Esto es válido para escalas de variación temporal mucho mayores que el tiempo entre colisiones y para escalas de longitud mucho mayores que el camino libre medio, es decir, en un régimen de alta colisionalidad. Desde luego, con esta aproximación no se pretende describir procesos cinéticos tales como la aceleración y evolución de haces de partículas. Si bien en la corona solar ocurren también procesos cinéticos de este tipo, el formalismo MHD describe de todas maneras la dinámica macroscópica que origina dichos fenómenos o los procesos lentos asociados al calentamiento coronal de regiones activas.

3.2 La ecuación de movimiento

La ecuación de evolución para el campo de velocidades \mathbf{u} del plasma se obtiene del balance de momento o la ecuación de fuerzas para un elemento de fluido ([Landau & Lifshitz 1987])

$$\rho \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \mathbf{F}_{vol} + \mathbf{F}_{visc} \quad (3.1)$$

donde ρ es la densidad de masa, ∇p es la fuerza por unidad de volumen debida a la presión p , \mathbf{F}_{vol} representa el término de las fuerzas de volumen presentes y \mathbf{F}_{visc} de las fuerzas viscosas.

En las fuerzas de volumen se considera la fuerza de Lorentz $q(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u}}{c} \times \mathbf{B})$ debida a la presencia de los campos eléctrico \mathbf{E} y magnético \mathbf{B} que actúan sobre las cargas q en el elemento de fluido. En la aproximación de quasi-neutralidad la carga neta en un elemento de fluido es cero (la longitud de Debye del plasma es mucho menor a las escalas de longitud típicas del fluido) aunque no así la densidad de corriente \mathbf{J} debida al movimiento relativo de iones y electrones. En esta aproximación sólo influye el término debido al campo magnético que es de la forma $\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c}$ (se utilizan aquí unidades CGS, y c es la velocidad de la luz en vacío). Además de la fuerza electromagnética,

existe la fuerza gravitacional cuyo valor por unidad de volumen es $\rho \mathbf{g} = -\rho \nabla \Phi_g$, donde Φ_g es el potencial gravitatorio. El término de fuerzas de volumen es entonces:

$$\mathbf{F}_{vol} = \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} - \rho \nabla \Phi_g \quad (3.2)$$

La fuerza viscosa por unidad de volumen se obtiene a partir de la divergencia del tensor de esfuerzos en el cual domina la fuerza viscosa debida a los iones. Si bien la presencia de campo magnético induce anisotropía en el tensor de esfuerzos viscosos, en los casos a los cuales restringiremos nuestro estudio (ver secciones 3.5 y 3.6), la fuerza viscosa se reduce a un término difusivo con una viscosidad cinemática escalar ν de la forma

$$\mathbf{F}_{visc} = \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.3)$$

Si despreciamos los efectos gravitatorios, la ecuación (3.1) de evolución del campo de velocidades resulta entonces

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} + \rho \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.4)$$

3.2.1 Tensión y presión magnéticas

Analizaremos ahora algunas propiedades del término de fuerza de Lorentz por unidad de volumen $\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c}$ en la ecuación de movimiento (3.4). Un primer punto a notar es que esta fuerza está dirigida perpendicularmente a la dirección del campo magnético y por lo tanto, la aceleración a lo largo de las líneas de campo debe ser producida por otras fuerzas (gravitatorias o por gradiente de presiones). Por otro lado, esta fuerza puede descomponerse en un término de presión magnética y un término de tensión magnética. Utilizando que $\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B}$ y la identidad vectorial $(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla(B^2/2)$ se obtiene

$$\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c} = \frac{1}{4\pi} (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \nabla \left(\frac{B^2}{8\pi} \right) \quad (3.5)$$

El primer término del lado derecho de (3.5) es no nulo si \mathbf{B} varía en la dirección de \mathbf{B} . Representa una *tensión magnética* paralela a \mathbf{B} de magnitud $B^2/4\pi$ por unidad de área, que tiene un efecto restitutivo cuando las líneas de campo están curvadas ([Priest 1982]).

El segundo término en (3.5) representa una fuerza debida a una *presión magnética* $B^2/8\pi$ que actúa en todas las direcciones. La presión magnética y la térmica se pueden combinar en la ecuación de movimiento (3.4) en un gradiente de presión total P

$$-\nabla P = -\nabla\left(p + \frac{B^2}{8\pi}\right) \quad (3.6)$$

El cociente entre las presiones se denomina el coeficiente β del plasma

$$\beta = \frac{p}{B^2/8\pi} \quad (3.7)$$

Un valor de β muy pequeño indica que la dinámica está gobernada por el campo magnético. Este es el régimen de las regiones magnéticamente cerradas de la corona. Por ejemplo, en un arco magnético con $B \sim 100$ G, densidad $n \sim 5 \cdot 10^9$ cm⁻³ y temperatura $T \sim 10^6$ K, se obtiene $\beta \sim 0.003$.

3.3 La ecuación de inducción magnética

La ecuación de evolución para el campo magnético \mathbf{B} se obtiene a partir de las ecuaciones de Maxwell y la ley constitutiva entre los campos y la densidad de corriente, que en su forma más simple es la ley de Ohm. Consideramos las siguientes ecuaciones de Maxwell:

$$\partial_t \mathbf{B} = -c \nabla \times \mathbf{E} \quad (3.8)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J} \quad (3.9)$$

La ec. (3.8) es la ley de Faraday, mientras que (3.9) es la ley de Ampère, en la que se despreció el término de corriente de desplazamiento $\frac{1}{c} \partial_t \mathbf{E}$. Esta aproximación (no relativista) es válida cuando la escala de variación espacial l y la escala de variación temporal t de los campos, son tales que $l/t \ll c$.

La ley de Ohm, en su versión más simple, expresa que en un medio conductor, la corriente es proporcional al campo eléctrico, $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, donde σ es la conductividad. En un fluido en

movimiento, se debe expresar el campo eléctrico en un sistema de referencia que se mueve con cada elemento de fluido a velocidad \mathbf{u} , ya que la ley de Ohm supone el medio en reposo. La ley de Ohm toma entonces la forma:

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\mathbf{E} + \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{B}}{c} \right) \quad (3.10)$$

Se debe recalcar aquí que esta forma simplificada de la ley constitutiva es válida en el régimen de alta colisionalidad. Para un plasma completamente ionizado y suponiendo interacciones coulombianas, se obtiene ([Spitzer 1962]) para la conductividad

$$\sigma \simeq 10^7 T^{3/2} \text{ s}^{-1} \quad (3.11)$$

donde la temperatura T se mide en Kelvin. Para la corona, con $T \sim 10^6$ K, se obtiene $\sigma \sim 10^{16} \text{ s}^{-1}$ que es comparable a la conductividad de un buen conductor metálico a temperatura ambiente.

Reemplazando las leyes de Ohm (3.10) y Ampère (3.9) en la ecuación de Faraday (3.8), obtenemos

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.12)$$

donde $\eta = c^2 / (4\pi\sigma)$ es la difusividad magnética.

La ecuación (3.12) se conoce con el nombre de ecuación de inducción magnética.

Las ecuaciones (3.4) y (3.12) describen la evolución del campo magnético y de velocidades, que como puede verse se encuentran fuertemente acoplados, a través de los términos $\frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{c}$ y $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$. Estos términos, junto con el convectivo $(\mathbf{u} \cdot \nabla) \cdot \mathbf{u}$, muestran además que las ecuaciones de evolución son no lineales y por lo tanto difíciles de resolver analíticamente excepto en situaciones muy simplificadas.

En esta formulación, el campo eléctrico \mathbf{E} es una cantidad derivada, ya que se obtiene a partir de los campos \mathbf{u} y \mathbf{B} utilizando la ley de Ohm (3.10).

3.3.1 Difusión y congelamiento de líneas magnéticas

Cuando el fluido está en reposo, o bien cuando las velocidades son pequeñas y la difusividad magnética grande, la ecuación de inducción (3.12) se reduce a la ecuación de difusión

$$\partial_t \mathbf{B} = \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.13)$$

Esto significa que una configuración inicial del campo magnético decrecerá con un tiempo de difusión $t_d = l^2/\eta$, en donde l es una longitud característica de la variación espacial de B . El tiempo t_d puede ser muy grande en la corona solar. Por ejemplo, para estructuras magnéticas de tamaño característico $l \sim 10^3$ km (diámetro de los granulos que inducen torsión en las líneas magnéticas) y con la difusividad obtenida a partir de la conductividad de Spitzer dada en la ec. (3.11), resulta $t_d \sim 10^{12}$ s $\sim 3 \cdot 10^4$ años. Como las estructuras de este tipo se mantienen sólo por horas o días, resulta claro que su disipación es acelerada por otros efectos. Veremos en el capítulo 4, que la turbulencia es un mecanismo eficiente de aceleración de la disipación. El aumento de la tasa de disipación en regímenes turbulentos se basa en la transferencia de energía de las escalas de longitud grandes l hacia escalas mucho más pequeñas, en las cuales los tiempos difusivos se reducen considerablemente.

En el límite opuesto al anterior, de muy baja difusividad, es decir cuando el tiempo característico de variación del campo magnético es pequeño comparado con el tiempo de difusión t_d (situación que como vimos ocurre en la corona), la ecuación de inducción (3.12) resulta:

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (3.14)$$

La ec. (3.14) expresa la conservación del flujo magnético que atraviesa cualquier curva cerrada que se mueva con la velocidad local del fluido ([Priest 1982]). Si consideramos que una línea de campo magnético constituye un tubo de flujo con diámetro despreciable e imaginamos curvas cerradas alrededor de la línea moviéndose con el fluido, la propiedad anterior implica que el fluido "arrastra" a las líneas de campo en su movimiento. Se dice que el campo magnético está *congelado* al fluido. Esta propiedad expresa el alto grado de acoplamiento entre el campo magnético y el campo de velocidades del plasma.

Los dos regímenes expuestos anteriormente pueden ser parametrizados por el cociente entre los dos términos del lado derecho de la ecuación de inducción (3.12):

$$\frac{|\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})|}{|\eta \nabla^2 \mathbf{B}|} \sim \frac{u/l}{\eta/l^2} = \frac{u l}{\eta} \quad (3.15)$$

donde u es una velocidad característica del fluido y l una longitud característica. Este cociente, que puede ser expresado también como el cociente t_η/t_u entre el tiempo difusivo $t_\eta = l^2/\eta$ y el tiempo característico de los movimientos $t_u = l/u$, se denomina *número de Reynolds magnético* R_M :

$$R_M = \frac{u l}{\eta} = \frac{t_\eta}{t_u} \quad (3.16)$$

Un alto número de Reynolds implica que el término no lineal $\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})$ domina sobre el término difusivo y el régimen puede ser turbulento. En situaciones coronales $R_M \sim 10^{13}$ y la turbulencia es entonces un escenario altamente plausible.

3.4 Las ecuaciones MHD incompresibles

A las ecuaciones de evolución de los campos \mathbf{u} y \mathbf{B} se deben agregar ecuaciones de evolución para la densidad del plasma ρ y para la presión p . La ecuación para la densidad es la ecuación de continuidad

$$\frac{d\rho}{dt} = \partial_t \rho + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u} \quad (3.17)$$

que expresa el balance de masa en un volumen de fluido.

La presión se relaciona con la densidad y la temperatura mediante una ecuación de estado, usualmente la ecuación de un gas ideal. La evolución de la temperatura se obtiene a su vez de la ecuación de balance térmico en la cual intervienen términos de calentamiento, conducción de calor y radiación (emisión de fotones). La *tasa de calentamiento* viene dada por la disipación Joule y la disipación viscosa, provenientes de los términos difusivos en las ecuaciones de evolución de los campos de velocidad y magnético. En el capítulo 6, derivaremos una predicción teórica para la tasa de calentamiento de arcos magnéticos coronales.

Cuando las velocidades del fluido son pequeñas comparadas con la velocidad de propagación de ondas de compresión (es decir si $u \ll c_s = \text{velocidad del sonido} \sim (\partial p / \partial \rho)^{1/2}$), vale la aproximación de incompresibilidad $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ([Landau & Lifshitz 1987]). A partir de la ecuación de continuidad (3.17), se obtiene que la densidad de cada elemento de fluido permanece constante. Si suponemos que la densidad es inicialmente homogénea, esta permanecerá constante en el tiempo y en cada punto del fluido. Las ecuaciones de la MHD incompresible son:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho} \right) + \frac{1}{4\pi\rho} (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.18)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (3.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.20)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.21)$$

La densidad ρ se introdujo en el gradiente de presiones, ya que se supone constante. Esto permite “eliminar” la presión del problema, tomando el rotor en la ec. (3.18). Se obtiene en ese caso una ecuación de evolución para la vorticidad del fluido $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$.

El sistema de ecuaciones (3.18), (3.19), (3.20), (3.21), son un conjunto cerrado del cual se pueden obtener los campos magnético y de velocidades, a partir de su estado inicial y de condiciones de contorno adecuadas.

3.4.1 Balance de energía

Multiplicando escalarmente (3.18) por $\rho \mathbf{u}$ e integrando sobre un volumen fijo, se obtiene la variación temporal de la energía cinética total del fluido. Análogamente, multiplicando (3.19) por $\mathbf{B}/4\pi$ e integrando sobre el volumen, se obtiene la variación temporal de la energía magnética total acumulada en el campo. La suma de estas dos contribuciones es la variación de la energía total E :

$$\partial_t E = \partial_t \int \rho \frac{u^2}{2} d^3V + \int \frac{B^2}{8\pi} d^3V \quad (3.22)$$

Luego de aplicar identidades vectoriales y transformar integrales de volumen en integrales de superficie mediante el teorema de Gauss, se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_t E &= - \int_S (\rho \frac{u^2}{2} + p) \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \frac{1}{4\pi} \int ((\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &+ \int \rho \nu \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} d^3V + \int \frac{\eta}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla^2 \mathbf{B} d^3V \end{aligned} \quad (3.23)$$

La energía total varía debido al efecto de los términos de contorno (forzado externo) o los términos disipativos. Los términos no lineales en las ecuaciones MHD no juegan ningún papel en el balance total de energía. Veremos posteriormente que su rol es precisamente el de transferir la energía entre las diferentes escalas espaciales del sistema.

Si las componentes normales de los campos $u_n = B_n = 0$ en los contornos o bien si $\mathbf{u} = 0$ en los contornos, entonces, en el límite ideal ($\nu = \eta = 0$) la energía total se conserva. Se dice que es un invariante ideal de las ecuaciones MHD. Analizaremos otros invariantes ideales de las ecuaciones MHD en el capítulo 6.

La segunda integral de superficie en (3.23) y el término de disipación resistiva se pueden combinar utilizando la ley de Ohm (3.10), e identidades vectoriales, de la forma:

$$\begin{aligned} \int ((\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS + \int \frac{\eta}{4\pi} \mathbf{B} \cdot \nabla^2 \mathbf{B} d^3V &= -c \int (\mathbf{E} \times \mathbf{B}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \\ &- \int \frac{J^2}{\sigma} d^3V \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $\sigma = c^2/(4\pi\eta)$. El primer término en (3.24) recibe el nombre de flujo de Poynting, mientras que el segundo término es claramente la disipación Joule de las corrientes.

En el caso de que $\mathbf{u} = 0$ en los contornos o bien si \mathbf{u} es periódico, el término disipativo viscoso se puede escribir como

$$\rho \nu \int \mathbf{u} \cdot \nabla^2 \mathbf{u} d^3V = -\rho \nu \int w^2 d^3V \quad (3.25)$$

donde w es el módulo de la vorticidad.

Los términos disipativos actúan como fuentes en la ecuación de balance térmico del fluido. Mas precisamente, la tasa de calentamiento por unidad de volumen, debida a la disipación viscosa y la disipación Joule es

$$H = \rho \nu w^2 + \frac{J^2}{\sigma} \quad (3.26)$$

3.4.2 Ondas de Alfvén

Las ecuaciones MHD incompresibles e ideales admiten soluciones de onda plana, llamadas *ondas de Alfvén*.

Consideramos una perturbación respecto de un equilibrio estático con campo magnético uniforme

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \delta\mathbf{B} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} + \delta\mathbf{u} \quad (3.28)$$

$$p = p_0 \quad (3.29)$$

con $\mathbf{B}_0 = \text{cte}$, $p_0 = \text{cte}$ y las perturbaciones son tipo onda plana:

$$\delta\mathbf{B}, \delta\mathbf{u} \sim \exp(i(\mathbf{k}\cdot\mathbf{r} - \omega t)) \quad (3.30)$$

La solución de las ecs. (3.18) y (3.19) son ondas transversales $\delta\mathbf{B} \perp \mathbf{B}_0$, $\delta\mathbf{u} \perp \mathbf{B}_0$ que se propagan en la dirección del campo magnético principal, $\mathbf{k} \parallel \mathbf{B}_0$, con la relación de dispersión:

$$\omega = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}} k \quad (3.31)$$

Las ondas se propagan a la *velocidad de Alfvén*

$$v_A = \frac{B_0}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (3.32)$$

Para campos magnéticos en la corona $B_0 \sim 100$ G y densidades $n \sim 5 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$, se obtiene (con $\rho = m_i n$ donde m_i es la masa iónica del hidrógeno) $v_A \sim 3000$ km/s.

3.5 La aproximación RMHD

Consideramos en esta sección las ecuaciones MHD en presencia de un campo magnético externo intenso y esencialmente uniforme, de forma tal que el parámetro β del plasma es una magnitud muy pequeña.

La aproximación RMHD fue introducida por [Strauss 1976] en el contexto del análisis de la dinámica del plasma en experimentos en tokamaks. Posteriormente encontró aplicación en situaciones astrofísicas, como el estudio de la dinámica de arcos magnéticos coronales ([Strauss 1988], [Otani & Strauss 1988], [Longcope & Sudan 1992], [Gómez et al. 1993]), utilizando el modelo básico presentado en la sección 2.3. La posibilidad de que la RMHD sea también de importancia en el viento solar, donde $\beta \sim 1$, se ha discutido en [Matthaeus et al. 1990]. En particular, un estudio riguroso de la relación entre las ecuaciones MHD y las ecuaciones RMHD puede encontrarse en [Zank & Matthaeus 1992], en donde las expansiones que aquí desarrollamos se presentan como apropiadas condiciones de secularidad (separación en escalas temporales lentas y rápidas, escalas espaciales cortas y largas y posterior eliminación de modos) sobre las ecuaciones MHD compresibles.

Estudiaremos aquí sólo el caso $\beta \ll 1$ que, como mostramos en una sección anterior, es una situación típica en regiones magnéticamente cerradas de la corona solar. Expandimos el campo magnético de la forma:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon} \mathbf{B}_0 + \mathbf{B}^{(0)} + \epsilon \mathbf{B}^{(1)} + O(\epsilon^2) \quad (3.33)$$

$$\mathbf{B}_0 = B_0 \hat{\mathbf{z}}, \quad \epsilon \ll 1 \quad (3.34)$$

El campo magnético externo \mathbf{B}_0 es grande comparado con el campo magnético inducido. Introducimos expansiones para las demás variables:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} + \epsilon \mathbf{u}^{(1)} + O(\epsilon^2) \quad (3.35)$$

$$p = p^{(0)} + \epsilon p^{(1)} + O(\epsilon^2) \quad (3.36)$$

$$\mathbf{J} = \mathbf{J}^{(0)} + \epsilon \mathbf{J}^{(1)} + O(\epsilon^2) \quad (3.37)$$

Suponemos además que las variaciones en la dirección del campo magnético principal, de aquí en adelante la dirección z , son pequeñas comparadas con las variaciones en las direcciones perpendiculares x, y . Bajo esta suposición estamos eliminando las fluctuaciones de alta frecuencia (o alto número de onda) en la dirección z . Está situación es compatible con un forzado lento, impuesto a través de las condiciones de contorno. Por ejemplo, en un arco magnético la dinámica de los campos es generada por el forzado lento debido a los movimientos fotosféricos en las bases del arco. Suponemos entonces:

$$\partial_x, \partial_y \sim 1 \quad \text{y} \quad \partial_z \sim \epsilon \ll 1 \quad (3.38)$$

Analicemos las consecuencias de las aproximaciones (3.33), (3.37) y (3.38) en las ecuaciones MHD. En primer lugar, dado que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$, expresamos el campo \mathbf{B} en términos de un potencial vector \mathbf{A} :

$$\mathbf{B} = \frac{1}{\epsilon} B_0 \hat{\mathbf{z}} + \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.39)$$

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^{(0)} + \epsilon \mathbf{A}^{(1)} + O(\epsilon^2) \quad (3.40)$$

y elegimos la medida de Coulomb, es decir $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$.

La ecuación de inducción (3.12) puede ser escrita en términos del potencial \mathbf{A} de la forma:

$$\partial_t \mathbf{A} = \mathbf{u} \times \left(\frac{1}{\epsilon} B_0 \hat{\mathbf{z}} + \nabla \times \mathbf{A} \right) - \frac{4\pi\eta}{c} \mathbf{J} - \nabla \phi \quad (3.41)$$

donde el potencial escalar ϕ tiene una expansión

$$\phi = \frac{1}{\epsilon} \phi_0 + \phi^{(0)} + \epsilon \phi^{(1)} + O(\epsilon^2) \quad (3.42)$$

La ecuación de movimiento (3.4) toma la forma:

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \frac{1}{\epsilon} \frac{\mathbf{J} \times B_0 \hat{\mathbf{z}}}{c} + \frac{\mathbf{J} \times (\nabla \times \mathbf{A})}{c} + \rho\nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (3.43)$$

con $\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} = -\frac{c}{4\pi} \nabla^2 \mathbf{A}$.

Considerando las contribuciones de mayor orden ($O(1/\epsilon)$) en (3.41) y (3.43) se obtiene:

$$\mathbf{u}^{(0)} \times B_0 \hat{\mathbf{z}} = \mathbf{u}_\perp^{(0)} \times B_0 \hat{\mathbf{z}} = \nabla_\perp \phi_0 \quad (3.44)$$

$$\mathbf{J}^{(0)} \times B_0 \hat{\mathbf{z}} = 0 \quad (3.45)$$

donde el subíndice \perp se refiere a las direcciones x, y . Haciendo el producto vectorial de (3.44) con $\hat{\mathbf{z}}$ se obtiene:

$$\mathbf{u}_{\perp}^{(0)} = -\frac{1}{B_0} \nabla_{\perp} \phi_0 \times \hat{\mathbf{z}} \quad (3.46)$$

La velocidad perpendicular entonces se puede obtener de una función escalar

$$\mathbf{u}_{\perp}^{(0)} = \nabla_{\perp} \varphi \times \hat{\mathbf{z}} \quad \varphi = -\frac{\phi_0}{B_0} \quad (3.47)$$

y por lo tanto $\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u}_{\perp}^{(0)} = 0$. La componente en z de la ecuación de movimiento (3.43) permite ver que la fuerza en z es de orden ϵ y por lo tanto podemos suponer $u_z^{(0)} = 0$ si las condiciones de contorno no imponen un flujo neto en esa dirección. Vemos entonces que el flujo es, a primer orden, incompresible, lo cual es consecuencia de las expansiones supuestas y no una hipótesis de la MHD reducida.

De la ecuación (3.45) se obtiene que: $\mathbf{J}^{(0)} = J_z \hat{\mathbf{z}}$, y de la ley de Ampère a $O(1)$:

$$\mathbf{J}^{(0)} = \frac{c}{4\pi} \nabla_{\perp} \times \mathbf{B}^{(0)} = -\frac{c}{4\pi} \nabla_{\perp}^2 \mathbf{A}^{(0)} \quad (3.48)$$

por lo tanto: $\mathbf{A}^{(0)} = A_z \hat{\mathbf{z}}$ y $\mathbf{B}^{(0)} = \nabla_{\perp} A_z \times \hat{\mathbf{z}}$. Considerando ahora términos de $O(1)$ en (3.41) resulta:

$$\begin{aligned} \partial_t A_z \hat{\mathbf{z}} &= \mathbf{u}_{\perp}^{(1)} \times B_0 \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{u}_{\perp}^{(0)} \times (\nabla_{\perp} A_z \times \hat{\mathbf{z}}) \\ &+ \eta \nabla_{\perp}^2 A_z \hat{\mathbf{z}} - \partial_z \phi_0 \hat{\mathbf{z}} \nabla_{\perp} \phi^{(0)} \end{aligned} \quad (3.49)$$

Si introducimos la vorticidad $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$, $\mathbf{w}^{(0)} = \nabla_{\perp} \times \mathbf{u}_{\perp}^{(0)} = -\nabla_{\perp}^2 \varphi \hat{\mathbf{z}} = w \hat{\mathbf{z}}$ podemos escribir el rotor de la ecuación de movimiento (3.43) a $O(1)$,

$$\begin{aligned} \rho \quad &(\partial_t w + \mathbf{u}^{(0)} \cdot \nabla_{\perp} w) \hat{\mathbf{z}} = \\ &\nabla_{\perp} \times \left(\frac{J_z \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{B}^{(0)}}{c} \right) + \nabla_{\perp} \times \left(\frac{\mathbf{J}^{(1)} \times B_0 \hat{\mathbf{z}}}{c} \right) + \rho \nu \nabla_{\perp}^2 w \hat{\mathbf{z}} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Finalmente, considerando las componentes en \hat{z} de (3.49) y (3.50) llegamos a las ecuaciones RMHD,

$$\partial_t A_z + \mathbf{u}^{(0)} \cdot \nabla_{\perp} A_z = B_0 \partial_z \varphi + \eta \nabla_{\perp}^2 A_z \quad (3.51)$$

$$\rho(\partial_t w + \mathbf{u} \cdot \nabla_{\perp} w) = \frac{\mathbf{B}^{(0)} \cdot \nabla_{\perp} J_z}{c} + \frac{B_0}{c} \partial_z J_z + \rho \nu \nabla_{\perp}^2 w \quad (3.52)$$

$$\mathbf{B} = B_0 \hat{z} + \mathbf{B}^{(0)} \quad \mathbf{B}^{(0)} \cdot \hat{z} = 0 \quad (3.53)$$

$$\mathbf{B}^{(0)} = \nabla_{\perp} A_z \times \hat{z} \quad J_z = -\nabla_{\perp}^2 A_z \quad (3.54)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^{(0)} \quad \mathbf{u}^{(0)} \cdot \hat{z} = 0 \quad (3.55)$$

$$\mathbf{u}^{(0)} = \nabla_{\perp} \varphi \times \hat{z} \quad w = -\nabla_{\perp}^2 \varphi \quad (3.56)$$

Reescribiremos ahora las ecuaciones RMHD de una forma mas compacta. En primer lugar, consideramos el campo magnético en unidades de velocidad, utilizando la velocidad de Alfvén definida en la sección anterior, $v_A = B_0/(\sqrt{4\pi\rho})$,

$$\mathbf{B} = v_A \hat{z} + \mathbf{b} \quad , \quad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (3.57)$$

de forma tal que el campo magnético original se reobtiene multiplicando por $\sqrt{4\pi\rho}$. Asimismo, definimos la densidad de corriente $\mathbf{j} = j \hat{z}$ (en unidades de inversa de tiempo) como

$$\mathbf{j} = \nabla \times \mathbf{b} = \frac{\nabla \times \mathbf{B}^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho}} = \frac{4\pi}{c} \frac{\mathbf{J}^{(0)}}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad (3.58)$$

y el potencial vector magnético $\mathbf{a} = a \hat{z}$ (en unidades de velocidad \times distancia) como:

$$\mathbf{a} = \frac{A_z}{\sqrt{4\pi\rho}} \quad , \quad \mathbf{b} = \nabla_{\perp} a \times \hat{z} \quad (3.59)$$

Por otro lado, escribimos el producto escalar $\mathbf{u} \cdot \nabla_{\perp} a$, en la forma de un *corchete de Poisson* como los que aparecen en las ecuaciones de Hamilton en la mecánica clásica:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla_{\perp} a &= (\nabla_{\perp} \varphi \times \hat{z}) \cdot \nabla_{\perp} a = \partial_x a \partial_y \varphi - \partial_y a \partial_x \varphi \\ &= -[\varphi, a] \end{aligned} \quad (3.60)$$

y análogamente:

$$\mathbf{u} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{w} = -[\varphi, w] \quad \mathbf{b} \cdot \nabla_{\perp} \mathbf{j} = -[a, j] \quad (3.61)$$

Las ecuaciones RMHD quedan entonces de la forma:

$$\partial_t a = v_A \partial_z \varphi + [\varphi, a] + \eta \nabla_{\perp}^2 a \quad (3.62)$$

$$\partial_t w = v_A \partial_z j + [\varphi, w] - [a, j] + \nu \nabla_{\perp}^2 w \quad (3.63)$$

donde los potenciales escalares son funciones de las tres coordenadas espaciales y el tiempo, $a = a(x, y, z, t)$, $\varphi = \varphi(x, y, z, t)$, la densidad de corriente y la vorticidad se relacionan con los potenciales mediante

$$j = -\nabla_{\perp}^2 a \quad y \quad w = -\nabla_{\perp}^2 \varphi \quad (3.64)$$

Los campos se obtienen de

$$\mathbf{B} = v_A \hat{\mathbf{z}} + \mathbf{b} \quad ,$$

$$\mathbf{b} = \nabla_{\perp} a \times \hat{\mathbf{z}} = \partial_y a \hat{\mathbf{x}} - \partial_x a \hat{\mathbf{y}} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{u} = \nabla_{\perp} \varphi \times \hat{\mathbf{z}} = \partial_y \varphi \hat{\mathbf{x}} - \partial_x \varphi \hat{\mathbf{y}} \quad (3.66)$$

$$\nabla_{\perp} \cdot \mathbf{b} = 0 \quad , \quad \nabla_{\perp} \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.67)$$

Vemos que la ventaja importante de las ecuaciones RMHD respecto a las MHD originales es que las ecuaciones de evolución son para dos magnitudes escalares (los potenciales φ y a) en lugar de tratar con ecuaciones de evolución para los campos de velocidad y magnético, reduciendo de esa forma el número de variables a considerar.

A este orden en el desarrollo perturbativo en ϵ , si hubiésemos considerado la anisotropía en el tensor de esfuerzos viscosos causada por el campo \mathbf{B}_0 , habríamos obtenido de todas maneras la expresión para la fuerza viscosa que presenta la ec. (3.63) ([Gómez & Ferro Fontán 1988]). El coeficiente de viscosidad que corresponde utilizar es $\nu = \nu_0 / (w_{ci} \tau_i)^2$, donde ν_0 es el coeficiente de viscosidad del caso isótropo, w_{ci} la frecuencia de ciclotrón iónica y τ_i el tiempo entre colisiones ión-ión.

Los términos no lineales en las ecuaciones RMHD son los corchetes de Poisson, que involucran solamente derivadas en las direcciones x e y . De la misma forma en los términos disipativos sólo intervienen derivadas perpendiculares. La dinámica es en ese sentido, fuertemente bidimensional. Los términos lineales de las derivadas en z sin embargo, acoplan la dinámica en cada plano (x, y) a lo largo de la dirección z . Se pueden interpretar como términos de forzado en cada uno de los planos (x, y) , lo que conduce a la aproximación bidimensional que tratamos en la sección siguiente.

3.6 Las ecuaciones MHD 2D

Si queremos analizar la dinámica en un plano (x, y) , perpendicular a la dirección del campo magnético principal, y proponemos que el efecto de los demás planos se manifiesta a través de un término de forzado que representa a las derivadas en z , obtenemos la aproximación bidimensional

$$\partial_t a = f + [\varphi, a] + \eta \nabla^2 a \quad (3.68)$$

$$\partial_t w = g + [\varphi, w] - [a, j] + \nu \nabla^2 w \quad (3.69)$$

En este límite $a = a(x, y, t)$, $\varphi = \varphi(x, y, t)$, mientras que $f = f(x, y, t)$, $g = g(x, y, t)$ son los términos de forzado.

En el capítulo 7, mostraremos un forzado adecuado para describir un arco magnético coronal con el modelo de la sección 2.3, mediante las ecuaciones MHD 2D.

Capítulo 4

Turbulencia y simulaciones numéricas

En este capítulo se resumen las ideas y conceptos básicos de la turbulencia en el caso puramente hidrodinámico. La extensión al caso magnetohidrodinámico y en particular la aplicación al estudio de la dinámica de arcos coronales se desarrolla los capítulos 6 y 7.

Se pone especial énfasis en la descripción fenomenológica de los flujos turbulentos. Se introducen los conceptos de invariantes ideales y el modelo de cascadas y se describe la ley de escala de Kolmogorov para el espectro de energía en turbulencia homogénea y estacionaria. En la parte final se aborda el tema de las simulaciones numéricas de flujos turbulentos, en particular mediante la utilización de métodos espectrales.

4.1 Turbulencia hidrodinámica

4.1.1 Características de la turbulencia

Las ecuaciones dinámicas para un fluido ordinario e incompresible, son las llamadas *ecuaciones de Navier-Stokes*. Corresponden por otro lado a las ecuaciones MHD incompresibles que presentamos en el capítulo anterior (ec. (3.18)-(3.21)), en el límite $\mathbf{B} = 0$),

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (4.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.2)$$

En un fluido se observa el desarrollo de turbulencia para altos números de Reynolds, es decir, cuando el parámetro que estima la magnitud de los términos no lineales frente a los disipativos es grande:

$$\frac{|(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}|}{|\nu \nabla^2 \mathbf{u}|} \sim \frac{u_0 l_0}{\nu} = R \gg 1 \quad (4.3)$$

donde u_0 es una velocidad característica, l_0 una longitud típica y ν la viscosidad.

Un fluido en regimen turbulento se caracteriza por ([Lesieur & Metais 1996]):

- Tener un comportamiento caótico; las ecuaciones de evolución (ecuaciones de Navier-Stokes) son deterministas. Sin embargo la dinámica del fluido es impredecible, en el sentido que condiciones iniciales similares dan soluciones muy distintas.

- La presencia de un gran número de grados de libertad. En un fluido turbulento existe un amplio rango de escalas dinámicamente relevantes, que va desde la escala típica en la cual se fuerza al sistema a la escala disipativa.

- El aumento en la velocidad de mezclado y difusión. Las no-linealidades producen transferencia de energía (y otros invariantes ideales) entre las diferentes escalas del flujo. Si la transferencia es hacia las escalas pequeñas, esto disminuye los tiempos difusivos típicos ($t \sim l^2/\nu$), de forma tal de acelerar los procesos de disipación de energía o el mezclado de sustancias disueltas en el fluido.

Un fluido turbulento presenta entonces un aspecto complejo y desordenado, por la impredecibilidad y el gran número de escalas presentes. Sin embargo, subyacente a ese desorden, existe un comportamiento coherente que es lo que se conoce como fenómeno de cascadas. En el modelo de cascadas, se describe la transferencia de energía, y otros invariantes ideales, entre las diferentes escalas asociadas a la dinámica del fluido.

4.1.2 Invariantes ideales en hidrodinámica 3D

Suponemos condiciones de contorno periódicas, es decir:

$$\mathbf{u}(x + n L, y + m L, z + q L, t) = \mathbf{u}(x, y, z, t) \quad , \quad m, n, q \in \mathcal{Z} \quad (4.4)$$

para todo x, y, z , donde L es el período. Esta suposición ignora los efectos de borde y se suele adoptar para estudiar sólo los mecanismos de transferencia y disipación de energía, en escalas mucho menores que las dimensiones reales del fluido. El análisis podemos hacerlo entonces en una caja de lado L . Un flujo no limitado por contornos puede obtenerse haciendo $L \rightarrow \infty$. En lo que sigue, consideramos $L = 2\pi$, es decir, $0 \leq x, y, z \leq 2\pi$.

El aspecto desordenado y la impredecibilidad en los regímenes turbulentos ha llevado a describirlos en forma estadística. En ese caso, se estudian las propiedades sobre promedios de ensambles correspondientes a distintas realizaciones en la evolución de un flujo turbulento. Es habitual proponer una hipótesis ergódica ([Frisch 1996]), para la evaluación experimental o numérica de estos promedios de ensamble, utilizando una sola realización de la evolución del fluido. Esto supone que, estadísticamente, el comportamiento del flujo es espacial y/o temporalmente homogéneo. Claramente, en las escalas de forzado o las asociadas a los contornos, la suposición de homogeneidad estadística no es válida. Sin embargo, la aproximación es buena para escalas mas pequeñas, en donde se realiza la transferencia y disipación de energía. Supondremos entonces, que cuando hablamos de promedios, nos referimos indistintamente a promedios sobre ensambles de realizaciones o promedios espaciales, y utilizamos la siguiente notación:

$$\langle f \rangle = \frac{1}{2\pi^3} \int f(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} \quad (4.5)$$

para el promedio de cualquier función de la posición \mathbf{r} en la caja de lado 2π .

Multiplicando la ecuación de Navier-Stokes (4.1) por \mathbf{u} y promediando, obtenemos la ecuación del balance global de energía

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right\rangle = -\frac{1}{2} \nu \left\langle \sum_{ij} (\partial_i u_j + \partial_j u_i)^2 \right\rangle = -\nu \left\langle \mathbf{w}^2 \right\rangle \quad (4.6)$$

donde $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u}$.

Si tomamos rotor en la ecuación de Navier-Stokes, multiplicamos por \mathbf{u} y promediamos, se obtiene la ecuación del balance de la *helicidad*

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \right\rangle = -\nu \left\langle \mathbf{w} \cdot \nabla \times \mathbf{w} \right\rangle \quad (4.7)$$

Introducimos ahora la siguiente notación y definiciones:

$$E = \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right\rangle \quad \text{energía} \quad (4.8)$$

$$\Omega = \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{w}^2 \right\rangle \quad \text{enstrofía} \quad (4.9)$$

$$H = \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{u} \cdot \mathbf{w} \right\rangle \quad \text{helicidad} \quad (4.10)$$

$$H_w = \left\langle \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \nabla \times \mathbf{w} \right\rangle \quad \text{helicidad vorticosa} \quad (4.11)$$

y las ecuaciones de balance de energía y helicidad pueden escribirse como:

$$\frac{dE}{dt} = -2 \nu \Omega \quad (4.12)$$

$$\frac{dH}{dt} = -2 \nu H_w \quad (4.13)$$

Observamos que en ausencia de disipación ($\nu = 0$) tanto la energía como la helicidad se conservan. Existen infinitos invariantes de las ecuaciones de Navier-Stokes 3D, sin embargo estos

son los únicos invariantes cuadráticos conocidos, que se conservan aun para truncaciones de los campos en su desarrollo en serie de Fourier (concepto que precisaremos en secciones posteriores).

La cantidad

$$\epsilon = - \frac{dE}{dt} \quad (4.14)$$

se denomina *tasa de disipación de energía* y es, como veremos, una cantidad fundamental en la descripción de la turbulencia.

4.1.3 Balance energético en cada escala

En la ecuación del balance energético global no aparece ninguna contribución del término no-lineal en la ecuación de Navier-Stokes. Veremos a continuación que el rol de las no-linealidades con relación a la energía es redistribuirla entre las diferentes escalas de movimiento ([Frisch 1996]).

Para poder avanzar en este análisis, debemos definir lo que entendemos por "escala". El campo de velocidades (o cualquier función de la posición que describa una propiedad del fluido) se puede expandir en *serie de Fourier*

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (4.15)$$

donde $\mathbf{k} \in \mathcal{Z}^3$ es el vector número de onda de cada componente Fourier $\mathbf{u}_{\mathbf{k}}$. Como la velocidad es real, entonces $\mathbf{u}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^*$ donde * indica la operación de conjugación compleja.

Las componentes Fourier se obtienen como:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}} = \frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \mathbf{u}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} \quad (4.16)$$

donde la integral se extiende a la caja de lado 2π . El producto interno entre dos funciones se define como

$$\langle f g \rangle = \frac{1}{2\pi^3} \int f(\mathbf{r}) g(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} = \sum_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}} g_{-\mathbf{k}} \quad (4.17)$$

donde se utilizó la identidad de Parseval. En particular, para la energía cinética se tiene:

$$\langle \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2 \quad (4.18)$$

Definimos dos familias de funciones dependientes de la posición \mathbf{r} y de un parámetro adicional $K > 0$. El filtro pasa bajo o la función de escalas grandes es:

$$f_K^<(\mathbf{r}) = \sum_{|\mathbf{k}| \leq K} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4.19)$$

y el filtro pasa alto o la función de escalas chicas es:

$$f_K^>(\mathbf{r}) = \sum_{|\mathbf{k}| > K} f_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \quad (4.20)$$

La longitud $l = 1/K$ es la *escala* del filtro y

$$f(\mathbf{r}) = f_K^<(\mathbf{r}) + f_K^>(\mathbf{r}) \quad (4.21)$$

Definimos además el operador de filtro pasa bajo:

$$P_K \quad f(\mathbf{r}) \rightarrow f_K^<(\mathbf{r}) \quad (4.22)$$

que anula todas las componentes Fourier con número de onda mayor que K . Este operador es un proyector, $P_K^2 = P_K$ que cumple con las siguientes propiedades:

(i) P_K conmuta con ∇ y ∇^2

(ii) Para cualquier par de funciones reales periódicas f y g se cumple $\langle f P_K g \rangle = \langle g P_K f \rangle = \sum_{|\mathbf{k}| \leq K} f_{\mathbf{k}} g_{-\mathbf{k}}$

(iii) Las funciones pasa bajo y pasa alto con el mismo número K son ortogonales: $\langle f_K^> g_K^< \rangle = 0$.

Las dos últimas propiedades son consecuencia de la definición del producto interno entre funciones y la identidad de Parseval.

Consideremos entonces las ecuaciones de Navier-Stokes, agregando un término de forzado, \mathbf{f} , que suponemos también 2π -periódico:

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (4.23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (4.24)$$

Aplicamos el proyector P_K en (4.23) y utilizamos (4.21) y la propiedad (i) para obtener:

$$\partial_t \mathbf{u}_K^\zeta + P_K(\mathbf{u}_k^\zeta + \mathbf{u}_K^\zeta) \cdot \nabla(\mathbf{u}_K^\zeta + \mathbf{u}_K^\zeta) = -\frac{\nabla p_K^\zeta}{\rho} + \nu \nabla^2 \mathbf{u}_K^\zeta + \mathbf{f}_K^\zeta \quad (4.25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}_K^\zeta = 0 \quad (4.26)$$

Tomamos ahora el producto escalar con \mathbf{u}_K^ζ , promediamos y utilizamos las propiedades (i), (ii) y (iii) para obtener:

$$\begin{aligned} \partial_t \langle \frac{1}{2} |\mathbf{u}_K^\zeta|^2 \rangle + \langle \mathbf{u}_K^\zeta \cdot [(\mathbf{u}_K^\zeta + \mathbf{u}_K^\zeta) \cdot \nabla(\mathbf{u}_K^\zeta + \mathbf{u}_K^\zeta)] \rangle \\ = -\langle \mathbf{u}_K^\zeta \cdot \frac{\nabla p_K^\zeta}{\rho} \rangle + \nu \langle \mathbf{u}_K^\zeta \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_K^\zeta \rangle + \langle \mathbf{u}_K^\zeta \cdot \mathbf{f}_K^\zeta \rangle \end{aligned} \quad (4.27)$$

La ecuación (4.27) se puede simplificar utilizando propiedades tales como $\langle \mathbf{u}_K^\zeta \cdot \nabla p_K^\zeta \rangle = 0$ y $\nu \langle \mathbf{u}_K^\zeta \cdot \nabla^2 \mathbf{u}_K^\zeta \rangle = -\nu \langle |\mathbf{w}_K^\zeta|^2 \rangle$. Sin embargo, ahora aparece un término adicional que proviene de la contribución de las no-linealidades. Si expandimos ese término, se obtienen otros cuatro, dos de los cuales se anulan:

$$\langle \mathbf{u}_K^\zeta \cdot (\mathbf{u}_K^\zeta \cdot \nabla \mathbf{u}_K^\zeta) \rangle = \langle \mathbf{u}_K^\zeta \cdot (\mathbf{u}_K^\zeta \cdot \nabla \mathbf{u}_K^\zeta) \rangle = 0 \quad (4.28)$$

El primero de esos términos nulos significa que las interacciones entre las escalas grandes ($k < K$) no pueden cambiar la energía contenida en dichas escalas. El segundo término nulo significa que la advección de las escalas grandes debido a los movimientos en escalas chicas, tampoco modifica la energía de las escalas grandes.

Finalmente entonces, obtenemos la siguiente ecuación de balance de energía por escalas:

$$\partial_t \mathcal{E}_K + \Pi_K = -2 \nu \Omega_K + \mathcal{F}_K \quad (4.29)$$

donde introducimos la energía en estructuras de tamaño $l = 1/K$ o mayores:

$$\mathcal{E}_K = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{u}_K^\zeta|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \leq K} |\mathbf{u}_k|^2 \quad (4.30)$$

idem para la enstrofia:

$$\Omega_K = \frac{1}{2} \langle |\mathbf{w}_K^\zeta|^2 \rangle = \frac{1}{2} \sum_{k \leq K} k^2 |\mathbf{u}_k|^2 \quad (4.31)$$

la energía por unidad de tiempo inyectada por el forzado en estructuras mayores que l :

$$\mathcal{F}_K = \langle \mathbf{f}_K^\zeta \cdot \mathbf{u}_K^\zeta \rangle = \sum_{k \leq K} \mathbf{f}_k \cdot \mathbf{u}_{-k} \quad (4.32)$$

y el flujo de energía a través del número de onda K :

$$\Pi_K = \langle \mathbf{u}_K^\zeta \cdot (\mathbf{u}_K^\zeta \cdot \nabla \mathbf{u}_K^\zeta) \rangle + \langle \mathbf{u}_K^\zeta \cdot (\mathbf{u}_K^\zeta \cdot \nabla \mathbf{u}_K^\zeta) \rangle \quad (4.33)$$

La interpretación de la ecuación de balance por escalas es la siguiente: el cambio de energía en escalas mayores que $l = 1/K$ es igual a la energía inyectada por las fuerzas externas (\mathcal{F}_K), menos la energía disipada ($2\nu\Omega_K$), menos la energía transferida a escalas menores por las interacciones no lineales (Π_K).

Observemos que si hacemos tender K a infinito (es decir, consideramos todos los modos), la energía cumulativa \mathcal{E}_K tiende a la energía total E , lo mismo que la enstrofia, y el flujo Π_K tiende a cero (las no linealidades conservan la energía total).

Se define además el espectro de energía E_k como

$$E_k = \frac{d\mathcal{E}_k}{dk} = \sum_{k \leq k' < k+dk} \frac{1}{2} |\mathbf{u}_{k'}|^2 \quad (4.34)$$

de forma tal que

$$E = \int E_k dk \quad (4.35)$$

4.1.4 La ley de escala de Kolmogorov y el concepto de cascada

La teoría elaborada por Kolmogorov 1941 es el resultado mas importante hasta la fecha en la descripción de los flujos turbulentos. Dicha teoría provee predicciones sobre el espectro de energía turbulento a partir de consideraciones dimensionales.

Supongamos que el fluido se encuentra en un estado estadísticamente estacionario. Para mantener el fluido en movimiento, un dispositivo de agitación le entrega constantemente energía (representado por el forzado f) a una escala de inyección l_I . Esta energía es conservada por las no-linealidades y disipada por los términos viscosos. Sin embargo, la disipación no ocurre en las escalas grandes de inyección, ya que por hipótesis, el número de Reynolds asociado a estas escalas es muy grande y, en consecuencia, la disipación viscosa en estas escalas l_I^2/ν es muy chica. La energía es transferida, es decir, *cascadea*, hacia las escalas pequeñas l_d en donde es disipada eficientemente y se alcanza un balance entre la energía que ingresa al sistema y la que se disipa por unidad de tiempo. Se puede pensar esta cascada como una serie de inestabilidades sucesivas, debidas a los términos no lineales, de los movimientos a escalas l , entre la escala de inyección l_I y la disipativa l_d .

El concepto de cascada permite comprender el hecho a priori sorprendente, pero bien verificado experimentalmente, de que una modificación de la viscosidad del fluido no cambia la tasa de disipación de energía en régimen turbulento. La modificación de ν produce simplemente el cambio en el número de etapas sucesivas de la cascada: las escalas pequeñas del movimiento se “adaptan” al cambio de viscosidad, de forma tal de disipar la misma energía por unidad de tiempo, inyectada en las escalas grandes.

Las hipótesis supuestas por Kolmogorov en su análisis son:

(i) Homogeneidad estadística en las escalas mas chicas que la de inyección o que el tamaño del sistema.

(ii) Para número de Reynolds tendiendo a infinito (viscosidad tendiendo a cero), el flujo presenta una tasa de disipación de energía por unidad de tiempo finita.

(iii) Para número de Reynolds tendiendo a infinito, todas las propiedades estadísticas de la microescala ($l \ll l_I$) son universalmente determinadas por la escala $l = 1/k$ y la tasa de disipación ϵ .

Si en la ecuación de balance por escalas (4.29) suponemos un forzado angosto (localizado en $l_I = 1/k_I$) entonces, para escalas intermedias, $k_I \leq k \leq k_d$ (con $k_d = 1/l_d$ correspondiente al rango disipativo), tanto el término de forzado como el disipativo se anulan y se tiene

$$\Pi_k \sim \epsilon \quad (4.36)$$

La tasa de disipación (por unidad de masa) en estado estacionario (estadístico) debe ser constante e igual al flujo de energía en cada escala Π_k .

Si estimamos (según la ecuación (4.33))

$$\Pi_k \sim k u_k^3 \quad (4.37)$$

obtenemos

$$u_k \sim (\epsilon/k)^{1/3} \quad (4.38)$$

es decir, los movimientos en $l = 1/k$ escalan como $(\epsilon l)^{1/3}$.

El espectro, E_k se obtiene de

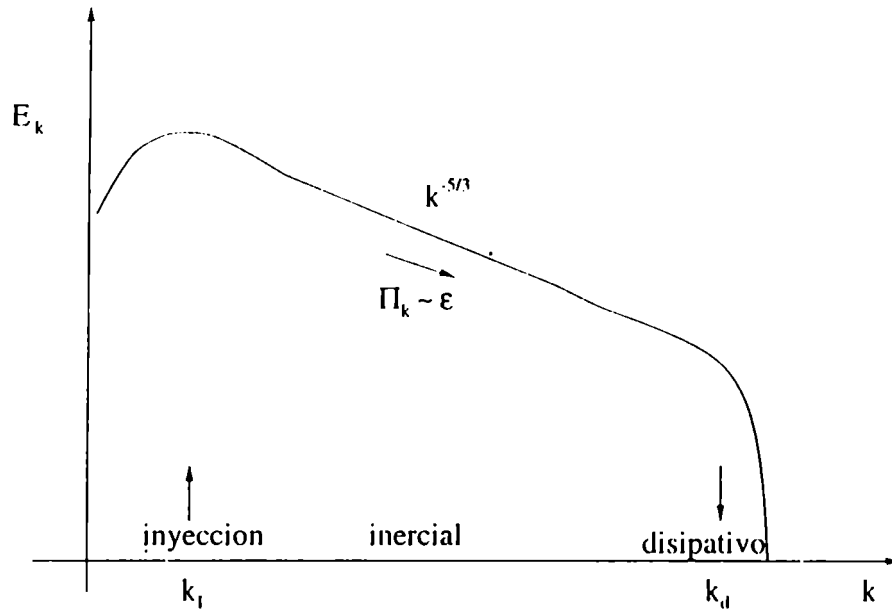
$$E_k \sim \frac{u_k^2}{k} \sim C_K \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (4.39)$$

donde C_K es una constante universal (la constante de Kolmogorov) de orden 1. Esta relación se denomina *espectro de Kolmogorov* y ha sido verificada en numerosos experimentos y simulaciones numéricas de flujos turbulentos ([Lesieur 1990], [Frisch 1996]).

La ley del espectro, puede obtenerse haciendo uso explícito de la hipótesis (iii) con el siguiente argumento dimensional:

Como E_k sólo puede depender de ϵ y $l = 1/k$, entonces $E_k \sim \epsilon^\alpha l^\beta$. Dimensionalmente $[E_k] = L^3/T^2$ y $[\epsilon] = L^2/T^3$. Por lo tanto el análisis dimensional indica que la única solución posible es $\alpha = 2/3$, $\beta = 5/3$. Luego, teniendo en cuenta que $l = 1/k$, reobtenemos la ec. (4.39).

Fig. 4.1: Esquema del espectro de Kolmogorov y los distintos rangos asociados al transporte de energía



Podemos obtener ahora la escala de disipación viscosa, utilizando la ley de Kolmogorov y definiendo un número de Reynolds asociado a cada escala $l = 1/k$

$$R_k \sim \frac{u_k(1/k)}{\nu} = \left(\frac{\epsilon}{\nu^3 k^4}\right)^{1/3} \quad (4.40)$$

donde se utilizó $u_k \sim (\epsilon/k)^{1/3}$.

La escala de disipación $l_d = 1/k_d$ es aquella cuyo $R_k \sim 1$, es decir, cuando los términos no-lineales y viscosos comienzan a ser del mismo orden. Despejando de $R_{k_d} = (\epsilon/(\nu^3 k_d^4))^{1/3} \sim 1$ se obtiene

$$k_d = 1/l_d \sim \left(\frac{\epsilon}{\nu^3}\right)^{1/4} \quad (4.41)$$

Vemos que el efecto de modificar ν produce un cambio en la escala de disipación l_d .

Los tres rangos característicos, de inyección, de cascada o *inercial* y disipativo en el espectro de energía, se ilustran en el esquema de la Figura 4.1

El número de escalas características o grados de libertad para describir al flujo turbulento estará dado por

$$N \sim \left(\frac{l_I}{l_d}\right)^3 \quad (4.42)$$

Si llamamos $R = u_I l_I / \nu$ al número de Reynolds, y además extendemos la validez de la ley de escala de Kolmogorov al rango de inyección, de forma tal que $u_I \sim (\epsilon l_I)^{1/3}$ entonces $l_I \sim (\nu^3 R^3 / \epsilon)^{1/4}$. En virtud de (4.41), se obtiene

$$N \sim R^{9/4} \quad (4.43)$$

Esta simple estimación muestra claramente la enorme dificultad a la que nos enfrentamos si se deseamos simular computacionalmente flujos turbulentos, debido a que sus números de Reynolds son necesariamente muy elevados. Existen dos caminos posibles ante este problema:

(i) La simulación directa, pero con números de Reynolds mucho más moderados, con la suposición implícita que algunas cantidades, tales como la tasa de disipación, pueden ser obtenidas a Reynolds moderados, y que no modifican sustancialmente su valor al incrementarse el Reynolds. Asimismo, se asume que las propiedades cualitativas de la turbulencia y las estructuras observadas a estos Reynolds moderados, se mantienen aproximadamente inalteradas.

(ii) Simular solamente las escalas macroscópicas, lo cual requiere modelar adecuadamente el efecto de las escalas pequeñas sobre las escalas más grandes. Esto lleva a enfrentarse con lo que se conoce como problema de clausura sobre el cual volveremos en una sección posterior.

4.2 Simulación numérica de flujos turbulentos

4.2.1 Integración espacial

Describimos en esta sección algunos conceptos básicos sobre simulación numérica de flujos turbulentos empleando métodos espectrales. Un resumen con numerosas referencias sobre simulación de turbulencia en general, es el de [Rogallo & Moin 1984]. Sobre la aplicación de métodos espectrales en simulaciones de fluidos, una referencia muy completa es la de [Canuto et al. 1988] y también

[Patterson & Orszag 1971], [Gottlieb & Orszag 1977] y [Gottlieb et al. 1984], que en particular fueron los que originalmente dieron impulso a la utilización de estos métodos en problemas de turbulencia. Sólo nos referiremos aquí a los métodos del tipo *Galerkin-Fourier*, que se utilizan cuando se consideran condiciones de contorno periódicas.

Tomaremos como ejemplo para describir las ideas generales, la ecuación de Burgers, que contiene todos los conceptos que aparecen en problemas más complejos como hidrodinámica 2D, 3D o magnetohidrodinámica.

El campo de velocidades $u = u(x, t)$ es unidimensional y satisface la ecuación:

$$\partial_t u + u \partial_x u = \nu \partial_{xx} u \quad (4.44)$$

con $\nu > 0$ la viscosidad. Esta ecuación se suplementa con condiciones iniciales $u(x, 0) = u_0(x)$ y de contorno, que supondremos periódicas en $(0, 2\pi)$, es decir $u(x, t) = u(x + 2\pi, t)$. Esto permite desarrollar en serie de Fourier,

$$u(x, t) = \sum_k u_k(t) e^{ikx} \quad (4.45)$$

donde la suma se extiende a todos los k enteros.

La aproximación que buscamos para la solución de la ecuación diferencial es el desarrollo Fourier truncado

$$u^N(x, t) = \sum_{k=-N/2}^{N/2} u_k(t) e^{ikx} \quad (4.46)$$

La idea de los métodos espectrales es pedir que el error que se comete al truncar el desarrollo en serie y reemplazar en la ecuación diferencial, tenga proyección nula sobre el subespacio generado por los polinomios e^{ikx} de dicho desarrollo en serie. Es decir, si formalmente la ecuación diferencial a resolver es de la forma

$$(\partial_t - L)u = 0 \quad (4.47)$$

donde L representa el operador que contiene todas las derivadas espaciales, entonces se imponen las condiciones

$$\int e^{-ikx} (\partial_t - L) u^N dx = 0 \quad k = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (4.48)$$

Se obtiene entonces un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias acopladas para los coeficientes $u_k(t)$ de la forma

$$\partial_t u_k = -(u \partial_x u)_k - \nu k^2 u_k \quad (4.49)$$

$$(u \partial_x u)_k = \sum_{l+m=k} i m u_l u_m \quad (4.50)$$

para $k = -N/2, \dots, N/2 - 1$.

Existen varias ventajas comparativas de los métodos espectrales en turbulencia homogénea, respecto a otros métodos numéricos como el de diferencias finitas. En primer lugar, se trabaja con los modos Fourier que son el contexto natural en turbulencia homogénea para describir la transferencia de energía y otros invariantes ideales entre las escalas de movimiento. Como mencionamos también, la truncación de los desarrollos en serie sigue cumpliendo la conservación de invariantes ideales, por ejemplo en el caso 2D tanto de la energía como de la enstrofia y las soluciones numéricas son entonces físicamente admisibles. Este hecho asegura además que los errores numéricos están controlados, es decir, los métodos espectrales son generalmente más estables en problemas no lineales que los métodos usuales en diferencias finitas.

Finalmente, la precisión obtenida es mayor. Los métodos espectrales tienen convergencia *exponencial* o *infinita* siempre que las funciones a desarrollar y todas sus derivadas, sean continuas y, en el caso de los métodos de Fourier, periódicas.

Para ver esto, consideremos la expresión de un coeficiente genérico u_k ,

$$u_k = \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} u(x) dx \quad (4.51)$$

Si integramos por partes, se obtiene

$$u_k = \frac{1}{i k} \frac{1}{2\pi} \int e^{-ikx} \partial_x u(x) dx \quad (4.52)$$

donde se utilizó la periodicidad $u(0) = u(2\pi)$. Como la integral de $\partial_x u$ es finita, vemos que $u_k \sim k^{-1}$. Si aplicamos este procedimiento m veces, vemos que para una función periódica m -veces diferenciable y de derivadas periódicas, $u_k \sim k^{-m}$, por lo tanto para una función periódica, infinitamente diferenciable y con todas sus derivadas periódicas,

$$\frac{|u_k|}{k^m} \rightarrow 0 \text{ si } k \rightarrow \infty, \text{ para todo } m > 0 \quad (4.53)$$

Esto significa que un desarrollo en serie que contenga modos con k suficientemente grande (el tamaño requerido para k se determina en cada caso práctico) converge exponencialmente a la solución exacta, ya que la contribución de los modos con mayor k tiende a cero más rápido que cualquier potencia de k .

Existe sin embargo un problema práctico si se quiere resolver el sistema directamente a partir de las ecuaciones (4.49). Si N es el número de modos considerado en la truncación, la evaluación del término no-lineal en (4.50) requiere $O(N^2)$ operaciones, para evaluar la doble suma sobre modos. Comparando, una discretización en el espacio físico (es decir, en x) trabajando con N puntos de grilla y utilizando diferencias finitas, requeriría $O(N)$ operaciones para la evaluación de $(u\partial_x u)$. Por otro lado, el cálculo directo de $(u\partial_x u)_k$ utilizando la doble suma en k introduce muchos errores de redondeo, amplificadas por el elevado número de operaciones a realizar. Para salvar estos problemas, se utiliza la transformada rápida de Fourier (FFT) ([Press et al 1986]), lo cual implica discretizar la función incógnita en el espacio físico. Se consideran los puntos de grilla:

$$x_j = \frac{2\pi}{N} j \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (4.54)$$

Los coeficientes de Fourier discretos de $u(x)$ respecto a estos puntos, son:

$$\tilde{u}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} u(x_j) e^{-ikx_j} \quad -N/2 \leq k \leq N/2 - 1 \quad (4.55)$$

Debido a la relación de ortogonalidad,

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} e^{ipx_j} = \delta_{p,Nm} \quad \text{para } m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (4.56)$$

se tiene la fórmula de inversión

$$u(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{u}_k e^{ikx_j} \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (4.57)$$

Las ecuaciones (4.55) y (4.57) definen una equivalencia entre la descripción mediante un número finito de modos en el espacio k o una descripción en términos de los valores de la función en un número finito de puntos.

La aproximación a las derivadas en los puntos de grilla se obtiene como

$$\partial_x u(x_j) = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} i k \tilde{u}_k e^{ikx_j} \quad j = 0, \dots, N-1 \quad (4.58)$$

El algoritmo FFT permite obtener los coeficientes discretos \tilde{u}_k a partir de los valores $u(x_j)$ y viceversa en $O(N \log N)$ operaciones. Esto posibilita que las sumas de convolución, como el del término no lineal $(u\partial_x u)_k$ en (4.49), se puedan evaluar en $O(N \log N)$ operaciones: en primer lugar en el espacio k se obtienen la derivada de $(\partial_x u)_k$ según (4.58) ($O(N)$ operaciones), luego se antitransforma con la FFT ($O(N \log N)$ operaciones) y se realizan los productos $(u\partial_x u)(x_j)$ en el espacio físico ($O(N)$ operaciones). Finalmente se transforma FFT ($O(N \log N)$ operaciones) para volver al espacio k y obtener $(u\partial_x u)_k$.

Esta técnica de trabajar en el espacio de Fourier, pero volver al espacio físico (discreto) para evaluar los términos no lineales, se conoce con el nombre de método *pseudoespectral* y es el que permite realizar en forma eficiente (por reducir de $O(N^2)$ a $O(N \log N)$ operaciones) y precisa (por tener la convergencia exponencial de los métodos espectrales) simulaciones de flujos turbulentos.

Existe sin embargo un problema, asociado al hecho de trabajar con un número discreto de puntos en el espacio físico, que se conoce como *aliasing* y que explicaremos a continuación.

La transformada discreta coincide con la transformada continua en los puntos de grilla x_j , es decir, los valores de $u^N(x)$ obtenidos con (4.55) en x_j coinciden con los obtenidos con un desarrollo Fourier continuo, pero esto es así sólo en ese conjunto discreto de puntos. En ese sentido, la transformada discreta aproxima a la función continua $u(x)$. Veamos en que sentido los coeficientes discretos \tilde{u}_k aproximan a los continuos u_k . Reemplazando con el desarrollo continuo

$u(\mathbf{x}) = \sum_k u_k e^{ik \cdot \mathbf{x}}$ evaluado en los puntos de grilla \mathbf{x}_j , en la ecuación para los coeficientes discretos (4.55) y utilizando la relación de ortogonalidad (4.56) resulta:

$$\tilde{u}_k = \sum_p u_p \delta_{p-k, Nm} \quad , \quad m \in \mathcal{Z} \quad (4.59)$$

o equivalentemente

$$\tilde{u}_k = u_k + \sum_{m \neq 0} u_{k+Nm} \quad k = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (4.60)$$

Vemos que los coeficientes \tilde{u}_k , obtenidos a partir de un conjunto discreto de valores de $u(\mathbf{x} = \mathbf{x}_j)$, superponen los coeficientes de un desarrollo continuo, u_k , con sus armónicos superiores u_{k+Nm} . Esto se conoce como *error de aliasing*. Su origen está en que con una dada resolución de N puntos discretos, las exponenciales trigonométricas $e^{ik\mathbf{x}}$ y $e^{i(k+Nm)\mathbf{x}}$ son indistinguibles.

Cuando las ecuaciones diferenciales a resolver contienen sólo términos lineales, el error de aliasing no es un problema, ya que basta con trabajar con desarrollos truncados con tantos modos como números de puntos de grilla se consideren, y los armónicos superiores nunca aparecen en el problema. En cambio, si hay términos no lineales, estos involucran productos de convolución, es decir, acoplan modos y los errores de aliasing pueden volverse importantes y de hecho hacer inestable numéricamente el método. Para salvar este problema existen diversas técnicas ([Canuto et al. 1988]) de las cuales describiremos la conocida como *regla del 2/3*.

Supongamos que se quiere evaluar el producto de dos funciones $w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})$ utilizando la técnica pseudoespectral descrita anteriormente. Utilizamos las transformadas discretas

$$u_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{u}_k e^{ikx_j} \quad (4.61)$$

$$v_j = \sum_{k=-N/2}^{N/2-1} \tilde{v}_k e^{ikx_j} \quad (4.62)$$

con $j = 0, \dots, N - 1$. Definimos ahora $w_j = u_j v_j$ y

$$\tilde{w}_k = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} w_j e^{-ikx_j} \quad k = -N/2, \dots, N/2 - 1 \quad (4.63)$$

Si utilizamos la relación de ortogonalidad (4.56) es posible ver que

$$\tilde{w}_k = \sum_{m+n=k} \tilde{u}_m \tilde{v}_n + \sum_{m+n=k\pm N} \tilde{u}_m \tilde{v}_n \quad (4.64)$$

Observamos que esta expresión corresponde al desarrollo de $w(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})$ pero con un error de aliasing, debido al segundo término en el lado derecho.

La técnica del 2/3 para eliminar este error, consiste en trabajar en el espacio Fourier con un número $M \geq 3N/2$ de modos, pero donde los modos "extra" con $|k| > N/2$ son puestos a cero (se "filtran") en cada evaluación de este tipo de términos de convolución. De esta manera, el error de aliasing toma la forma:

$$\sum_{m+n=k\pm M} \tilde{u}_m \tilde{v}_n \quad (4.65)$$

y sólo podrá ser distinto de cero si para alguna combinación de los índices se satisface $m + n - k = \pm M$. Por otro lado, el filtrado asegura que $-3N/2 + 1 \leq m + n - k \leq 3N/2 - 2$. Por lo tanto, eligiendo $M \geq 3N/2$ el aliasing no produce error.

Este tipo de técnicas logra que el método pseudoespectral sea completamente equivalente a uno espectral, con la ventaja adicional de realizar muchas menos operaciones. La desventaja que presentan es que en cierta forma desperdician memoria al implementarlos computacionalmente, ya que se debe reservar espacio para modos con $|k| > N/2$ que sin embargo son siempre puestos a cero. Existen técnicas alternativas ([Gosh et al. 1993]) que no eliminan completamente el aliasing, pero que lo mantienen controlado (es decir, impiden que se desarrollen inestabilidades numéricas) y sin desperdiciar memoria en modos nulos.

4.2.2 Integración temporal

Hasta aquí mencionamos la técnica para tratar las operaciones espaciales en las ecuaciones dinámicas. Como vimos, se obtienen ecuaciones diferenciales ordinarias para los coeficientes u_k que todavía deben integrarse en el tiempo para obtener la evolución de los campos.

Usualmente es conveniente la utilización de métodos implícitos ([Canuto et al. 1988], [Fletcher 1991]) que aseguren que el código sea incondicionalmente estable, es decir, que no haya requerimientos

sobre el paso de tiempo numérico Δt . Esto es sencillo de implementar para los términos lineales, como el término disipativo en (4.49), ya que se dispone de su expresión explícita. Pero nuevamente los inconvenientes aparecen con los términos no-lineales, que acoplan modos de distinto k y su evaluación requiere de una serie de operaciones complicadas que no es posible invertir en forma analítica para implementarlas implícitamente. Estos términos se tratan entonces explícitamente y el método global de evaluación de los términos lineales y no-lineales se llama *semi-implícito* ([Schnack et al. 1987]). La técnica que hemos empleado en las simulaciones presentadas en esta tesis es de tipo *predictor-corrector* ([Press et al 1986], [Kincaid & Cheney 1991]) para los términos no-lineales e implícita en los lineales, en ambos casos de segundo orden en Δt .

Para fijar ideas, supongamos que se desea resolver

$$\frac{dU}{dt} = F(U) + L U \quad (4.66)$$

donde $F(U)$ contiene los términos no lineales y $L U$ los lineales, siendo L un operador del cual es posible obtener analíticamente $(I - \alpha L)^{-1}$, donde I es el operador identidad y α una constante.

Llamemos U^n a la función incógnita en el paso de tiempo n . El esquema utilizado para obtener U^{n+1} se basa en dos etapas: la etapa *predictora*

$$\frac{U^* - U^n}{\Delta t} = \frac{3}{2}(F(U^n) + L U^n) - \frac{1}{2}(F(U^{n-1}) + L U^{n-1}) \quad (4.67)$$

de la cual se obtiene la "predicción" U^* a partir de la función U^n y U^{n-1} en los pasos anteriores (tantos como el orden del método) y la etapa *correctora*

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} = \frac{1}{2}(F(U^*) + L U^{n+1}) + \frac{1}{2}(F(U^n) + L U^n) \quad (4.68)$$

Notemos que en el lado derecho aparece el término implícito $L U^{n+1}$ y la ecuación debe invertirse, obteniéndose, formalmente,

$$U^{n+1} = (I - \frac{\Delta t}{2} L)^{-1} (U^n + \frac{\Delta t}{2} (F(U^*) + F(U^n) + L U^n)) \quad (4.69)$$

Para el problema de Burgers, que iniciamos presentando en esta sección, la anterior implementación se realiza con las siguientes identificaciones de notación

$$U^n \rightarrow u_k^n \quad (4.70)$$

$$F(U) \rightarrow (u \partial_x u)_k \quad (4.71)$$

$$L U \rightarrow -\nu k^2 u_k \quad (4.72)$$

y la iteración en el tiempo debe realizarse para cada modo k .

4.2.3 Requerimientos de cómputo

Vimos (ec. (5.45)) que para representar correctamente las escalas que se desarrollan en un flujo turbulento, el número de modos $M = N^3$ a emplear (utilizamos aquí N para el número de modos en cada dirección) debe escalar como $R^{9/4}$, donde R es el número de Reynolds. Esto implica que sólo sea posible simular en forma directa flujos con Reynolds moderados.

Por otro parte, un requerimiento adicional proviene de la integración temporal, que al no ser implícita, debido a la complejidad de los términos no-lineales, requiere una cota para el paso temporal. No existe una expresión analítica para la condición de estabilidad a emplear en un problema no lineal como es la simulación de turbulencia. Se emplea entonces una estimación, cuyo origen es la condición CFL ([Press et al 1986]) para problemas de advección. Estimativamente, se requiere poder resolver temporal y espacialmente el siguiente tipo de escalamiento

$$\frac{\partial u}{\partial t} \sim u \frac{\partial u}{\partial x} \quad (4.73)$$

Dada una resolución espacial fija (determinada por ejemplo por la condición $1/(\Delta x)^3 \sim N^3 \sim R^{9/4}$) se pide entonces que

$$\Delta t \leq \Delta x / u_0 \sim 1/N \sim 1/R^{3/4} \quad (4.74)$$

donde u_0 es alguna velocidad típica.

Vemos entonces que el requerimiento de cómputo en un problema 3D (sumando los requisitos de resolución espacial y temporal) escala como R^3 , lo cual muestra claramente la dificultad computacional a enfrentar en la resolución de problemas turbulentos.

4.2.4 Simulaciones de grandes escalas

Cuando el rango de escalas en un problema excede lo que permite la capacidad de cómputo disponible, entonces algunas escalas deben ser descartadas y la influencia de estas escalas descartadas sobre las que se retuvieron debe ser modelada. Se distingue entre simulaciones completamente resueltas o parcialmente resueltas, refiriéndose a ellas como "directas" o de "grandes escalas" (LES es el nombre técnico, por Large Eddy Simulations), respectivamente ([Rogallo & Moin 1984], [Lesieur 1990], [Lesieur & Metais 1996]). El nombre de "grandes escalas" es tal vez inapropiado cuando las estructuras de flujo importantes a resolver son muy chicas como aquellas cercanas a contornos sólidos o la escala de disipación con altos números de Reynolds. El atractivo de las simulaciones directas es que no precisan de modelos ad-hoc y la justificación usualmente utilizada es que la estadística de las escalas grandes varía poco con el número de Reynolds y puede ser obtenida a los bajos números de Reynolds requeridos para una completa resolución numérica. Esta idea ha sido exitosa en flujos no acotados donde la viscosidad sirve principalmente para establecer la escala disipativa, pero no es buena en situaciones como flujos cercanos a paredes, tales como flujos en canales, donde la capacidad de cómputo no ha permitido aun llegar a números de Reynolds en los cuales pueda mantenerse un régimen turbulento. Esta situación es típica de muchos flujos de interés en ingeniería y es lo que ha impulsado el desarrollo de los métodos LES.

La idea básica de un método LES es calcular explícitamente sólo los movimientos de escalas grandes que están directamente afectados por las condiciones de contorno y son por lo tanto específicos del problema que se está analizando. Los movimientos a escalas chicas se suponen aproximadamente universales, es decir, su estadística y su efecto sobre las escalas grandes puede ser especificado por un número pequeño de parámetros. Se espera que la convergencia del método con el incremento en resolución sea rápido, ya que la habilidad para parametrizar los efectos de la sub-escala deberían mejorar a medida que la escala temporal y espacial de esta sub-escala se separe de las escalas energéticas. El método LES se encuentra en un nivel intermedio entre el extremo

de las simulaciones directas, en donde todas las fluctuaciones son resueltas y no se requiere de ningún modelo y la aproximación clásica en la cual sólo los valores medios son calculados y todas las fluctuaciones modeladas.

4.2.5 El problema de clausura

Mencionamos finalmente, ya que no son objeto de estudio en esta tesis, los modelos empleados en teorías de turbulencia y que como dijimos, se utilizan para la realización de LES. En el modelado teórico se considera al campo de velocidades $u(\mathbf{r}, t)$ como una variable aleatoria y se obtienen ecuaciones para los sucesivos momentos de su distribución, a partir de promedios sobre las ecuaciones de Navier-Stokes. Rápidamente se observa que la evolución del momento de orden n depende del momento de orden $n + 1$, debido al término no lineal cuadrático, lo cual asegura una jerarquía infinita de ecuaciones de momento acopladas. Esto se conoce como el *problema de clausura* en turbulencia. Los modelos teóricos proponen relaciones de clausura para truncar esta jerarquía de ecuaciones en un número razonablemente pequeño. Las clausuras desarrolladas más comúnmente se clasifican en clausuras a un punto o clausuras a dos puntos, debido a que involucran respectivamente funciones de correlación de uno o dos puntos espaciales.

Entre las clausuras a un punto, en las cuales se modela el momento de segundo orden en términos del momento de primer orden, generalmente a través de una viscosidad turbulenta efectiva, las más conocidas son el modelo de "mezclado de escalas" (mixing-length) de Prandtl o el modelo $K - \epsilon$ ([Lesieur 1990]), de uso frecuente en ingeniería. Las clausuras a dos puntos, en las cuales se modelan momentos de tercer y cuarto orden, son mucho más complejas y entre otras encontramos la DIA (direct interaction approximation) desarrollada por Kraichnan ([Leslie 1973]). y la EDQNM (eddy damped quasi normal markovian) ([Lesieur 1990], [Pouquet et al. 1976]). Más recientemente se han desarrollado modelos basados en formalismos similares a los utilizados en Teoría de Campos, los cuales utilizan el llamado método de Grupo de Renormalización ([Canuto, V.M. & Dubovikov 1996], [Mc Comb 1990]).

Capítulo 5

Decaimiento de flujos turbulentos en dos dimensiones

Como un primer paso hacia la realización de simulaciones numéricas de turbulencia en sistemas mas complejos como la magnetohidrodinámica, estudiamos el problema del decaimiento de un flujo hidrodinámico bidimensional e incompresible. Este tema es de interés de por sí y mereció un estudio detallado de sus propiedades en este trabajo de tesis ([Dmitruk et al. 1996]).

Se resumen en primer lugar los conceptos básicos de la turbulencia en dos dimensiones, el fenómeno de cascada inversa y de decaimiento selectivo de invariantes ideales. Posteriormente se presentan los resultados de simulaciones numéricas del decaimiento de un flujo turbulento que muestran el fenómeno de auto-organización y la existencia de estados meta-estables coherentes con un alto grado de correlación entre la vorticidad y la función corriente y que pueden ser correctamente descritos en términos de la ecuación sinh-Poisson. Se observa que para condiciones iniciales de alta simetría (correspondientes a deslizamiento libre del flujo en los contornos) esta correlación desaparece, no verificándose una relación como la sinh-Poisson. Sin embargo, pequeñas perturbaciones a estos estados simétricos vuelven a llevar al sistema a estados metaestables con correlación sinh-Poisson entre la vorticidad y la función corriente. Mostramos además que, a tiempos largos en la evolución del flujo, un conjunto reducido de modos Fourier no linealmente acoplados provee una descripción correcta de la dinámica observada. El estado a tiempos largos es

entonces intermedio entre un estado de turbulencia desarrollada (no lineal) y un regimen disipativo (lineal).

5.1 Turbulencia hidrodinámica bidimensional

Suponemos un campo de velocidades en el plano (x, y) e incompresible, es decir:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, t) \quad , \quad \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{z}} = 0 \quad (5.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (5.2)$$

La condición de incompresibilidad permite expresar el campo de velocidades como el rotor de una función corriente

$$\mathbf{u} = \nabla \times \Phi \quad (5.3)$$

a menos de un gradiente. El hecho adicional de que el campo sea bidimensional (tanto en las componentes como en la dependencia con las variables) permite elegir la función corriente de forma tal que

$$\Phi = \varphi(x, y, t) \hat{\mathbf{z}} \quad (5.4)$$

y por lo tanto

$$\mathbf{u} = \nabla \times (\varphi \hat{\mathbf{z}}) = \nabla \varphi \times \hat{\mathbf{z}} = \partial_y \varphi \hat{\mathbf{x}} - \partial_x \varphi \hat{\mathbf{y}} \quad (5.5)$$

La vorticidad es asimismo,

$$\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u} = -\nabla^2 \varphi \hat{\mathbf{z}} = w \hat{\mathbf{z}} \quad (5.6)$$

Si tomamos rotor en la ecuación de Navier-Stokes (4.1), utilizamos (5.5) y (5.6) y multiplicamos escalarmente por $\hat{\mathbf{z}}$, obtenemos la siguiente ecuación dinámica para el fluido

$$\partial_t w = [\varphi, w] + \nu \nabla^2 w \quad (5.7)$$

donde

$$[\varphi, w] = \partial_x \varphi \partial_y w - \partial_y \varphi \partial_x w \quad (5.8)$$

Esta ecuación de evolución escalar, junto con la relación (5.6) determinan completamente la dinámica de un fluido bidimensional e incompresible.

Consideramos condiciones de contorno periódicas, en una caja cuadrada de lado 2π . Podemos expandir entonces la función corriente y la vorticidad en series de Fourier:

$$\varphi = \sum_{\mathbf{k}} \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad , \quad \varphi_{-\mathbf{k}} = \varphi_{\mathbf{k}}^* \quad , \quad \mathbf{k} \in \mathcal{Z}^2 \quad (5.9)$$

$$w = -\nabla^2 \varphi = \sum_{\mathbf{k}} k^2 \varphi_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} = \sum_{\mathbf{k}} w_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad (5.10)$$

con lo cual $w_{\mathbf{k}} = k^2 \varphi_{\mathbf{k}}$

La energía y enstrofia (por unidad de masa y superficie) son

$$E = \frac{1}{(2\pi^2)} \int \frac{u^2}{2} d^2\mathbf{r} = \frac{1}{(2\pi^2)} \int (\nabla\varphi)^2 d^2\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (5.11)$$

$$\Omega = \frac{1}{2\pi^2} \int \frac{w^2}{2} d^2\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |w_{\mathbf{k}}|^2 = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k^4 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (5.12)$$

Obtendremos ahora la conservación (ideal) de estas dos cantidades globales. La helicidad (invariante en 3D) es en este caso nula. Ilustraremos la conservación en el espacio Fourier, lo cual permite ver que tanto la energía como la enstrofia se conservan aún ante truncaciones en los desarrollos Fourier. Se dice que son invariantes *robustos*. Esta propiedad justifica el tratamiento numérico mediante métodos espectrales, descritos en el capítulo anterior.

La ecuación de evolución (5.7) es

$$\partial_t(k^2 \varphi_{\mathbf{k}}) = [\varphi, w]_{\mathbf{k}} - \nu k^4 \varphi_{\mathbf{k}} \quad (5.13)$$

$$[\varphi, w]_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{l}+\mathbf{m}=\mathbf{k}} (\mathbf{l} \times \mathbf{m}) l^2 \varphi_{\mathbf{l}} \varphi_{\mathbf{m}} \quad (5.14)$$

Para obtener la conservación de energía, multiplicamos (5.13) por $\varphi_{\mathbf{k}}^* = \varphi_{-\mathbf{k}}$ y tenemos en cuenta la ecuación de evolución equivalente para $\varphi_{-\mathbf{k}}$. Luego de sumar para todo \mathbf{k} (en este caso la suma se extiende a todos los modos del truncamiento, que puede ser arbitrario) se obtiene

$$\partial_t \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 = \sum_{\mathbf{k}} (\varphi_{-\mathbf{k}}[\varphi, w]_{\mathbf{k}} + \varphi_{\mathbf{k}}[\varphi, w]_{-\mathbf{k}}) - 2\nu \sum_{\mathbf{k}} k^4 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (5.15)$$

Como la suma en \mathbf{k} es sobre todos los valores (positivos y negativos), los dos términos del 1er miembro del lado derecho son iguales y resulta, dividiendo todo por 2

$$\partial_t \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 = \sum_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}}[\varphi, w]_{\mathbf{k}} - \nu \sum_{\mathbf{k}} k^4 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (5.16)$$

Del lado izquierdo, tenemos la energía total. Veamos que el 1er miembro del lado derecho es nulo. Teniendo en cuenta (5.14)

$$\sum_{\mathbf{k}} \varphi_{-\mathbf{k}}[\varphi, w]_{\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}=\mathbf{k}} (1 \times \mathbf{m}) l^2 \varphi_{\mathbf{l}} \varphi_{\mathbf{m}} \varphi_{-\mathbf{k}} = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}=0} (1 \times \mathbf{m}) l^2 \varphi_{\mathbf{l}} \varphi_{\mathbf{m}} \varphi_{\mathbf{k}} \quad (5.17)$$

En esta última sumatoria, $\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}$ son índices mudos, y podemos intercambiarlos, por ejemplo, intercambiando \mathbf{k} y \mathbf{m} obtenemos la suma como:

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}=0} (1 \times \mathbf{m}) l^2 \varphi_{\mathbf{l}} \varphi_{\mathbf{m}} \varphi_{\mathbf{k}} + \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}=0} (1 \times \mathbf{k}) l^2 \varphi_{\mathbf{l}} \varphi_{\mathbf{m}} \varphi_{\mathbf{k}} \quad (5.18)$$

y agrupando

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{l}, \mathbf{m}=0} (1 \times (\mathbf{m} + \mathbf{k})) l^2 \varphi_{\mathbf{l}} \varphi_{\mathbf{m}} \varphi_{\mathbf{k}} \quad (5.19)$$

de donde vemos que el aporte de cada terna $\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = 0$ es cero debido al término del producto vectorial. Agrupando entonces las no-linealidades por ternas, vemos que su aporte a la energía total es nulo y la ley de balance resulta

$$\partial_t E = -2\nu\Omega \quad (5.20)$$

de modo que la energía es un invariante ideal ($\nu = 0$).

A diferencia del caso 3D, en el caso 2D la enstrofia total es un invariante ideal, y es también robusto. La demostración es análoga a la desarrollada en el caso anterior, multiplicando ahora la ecuación de evolución (5.13) por $w_{\mathbf{k}}$. El aporte de las no linealidades es en este caso el término

$$\sum_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}=\mathbf{0}} (l \times m) l^2 k^2 \varphi_{\mathbf{l}} \varphi_{\mathbf{m}} \varphi_{\mathbf{k}} \quad (5.21)$$

que intercambiando \mathbf{k} con \mathbf{l} puede escribirse como

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}+\mathbf{l}+\mathbf{m}=\mathbf{0}} ((l + k) \times m) l^2 k^2 \varphi_{\mathbf{l}} \varphi_{\mathbf{m}} \varphi_{\mathbf{k}} \quad (5.22)$$

y nuevamente el aporte de cada terna es nulo, debido al producto vectorial.

El balance de enstrofia es entonces

$$\partial_t \Omega = -2\nu P \quad (5.23)$$

donde

$$P = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k^6 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (5.24)$$

es la *palinstrofia*. La enstrofia es por tanto un invariante ideal. No así la palinstrofia, ya que los productos del tipo $l^2 k^4$ que aparecen, no son simetrizables como en los casos anteriores. Presumiblemente, la energía y la enstrofia son los únicos invariantes (ideales) cuadráticos robustos de las ecuaciones de Navier-Stokes en dos dimensiones.

Es posible ver ([Ting et al. 1986]), a través de estas ecuaciones de balance, que la enstrofia decae más rápido que la energía, es decir, que

$$\frac{|\partial_t \Omega|}{\Omega} \geq \frac{|\partial_t E|}{E} \quad (5.25)$$

Esta condición equivale a que

$$E |\partial_t \Omega| \geq \Omega |\partial_t E| \quad (5.26)$$

o teniendo en cuenta las ecuaciones de balance (5.23) y (5.20)

$$P E \geq \Omega^2 \quad (5.27)$$

Esta última condición se verifica directamente de

$$2(P E - \Omega^2) = \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}} (k^6 m^2 - k^4 m^4) |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 |\varphi_{\mathbf{m}}|^2 \quad (5.28)$$

que tomando factor común $k^2 m^2$ y simetrizando la suma respecto a \mathbf{k}, \mathbf{m} se reescribe como

$$\frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{m}} k^2 m^2 (k^2 - m^2)^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 |\varphi_{\mathbf{m}}|^2 \quad (5.29)$$

que es siempre positiva.

El hecho de que la enstrofia decaiga más rápido que la energía, sugiere que la enstrofia *cascaea más rápido*, es decir, la cascada de enstrofia es más eficiente. Veremos ahora además que debe existir alguna rango en k en el que la cascada de energía procede en forma *inversa*, es decir, a diferencia del caso 3D, la energía debe cascaear hacia las escalas grandes en lugar de hacerlo hacia las escalas chicas.

Definimos los espectros de energía E_k y enstrofia Ω_k a partir de

$$\int E_k dk = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (5.30)$$

$$\int \Omega_k dk = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k^4 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (5.31)$$

es decir, el espectro en k es la suma de las energías sobre un anillo de modos, con número de onda (en módulo) entre k y $k + dk$. Notemos además que $\Omega_k = k^2 E_k$. Se llama en cambio *energía modal* $E(\mathbf{k})$ a la energía que aporta cada modo (vectorial) \mathbf{k} a la suma total, es decir,

$$E(\mathbf{k}) = k^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2 \quad (5.32)$$

Las ecuaciones de balance en k se escriben como

$$\partial_t E_k = - \frac{\partial \Pi_k}{\partial k} - 2\nu \Omega_k \quad (5.33)$$

$$\partial_t \Omega_k = -\frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} - 2\nu P_k \quad (5.34)$$

donde los términos no lineales se representan por los términos de flujo de energía $\partial \Pi_k / \partial k$ y enstrofía $\partial \Gamma_k / \partial k$ y $P_k = k^4 E_k$.

La conservación (ideal) global de estas cantidades implica que

$$\int \frac{\partial \Pi_k}{\partial k} dk = \int \frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} dk = 0 \quad (5.35)$$

Observemos por otro lado, que comparando (5.33) y (5.34) resulta

$$\frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} = k^2 \frac{\partial \Pi_k}{\partial k} \quad (5.36)$$

Integrando en k obtenemos

$$0 = \int \frac{\partial \Gamma_k}{\partial k} dk = \int k^2 \frac{\partial \Pi_k}{\partial k} dk = \int \frac{\partial(k^2 \Pi_k)}{\partial k} dk - \int 2k \Pi_k dk = - \int 2k \Pi_k dk \quad (5.37)$$

La anulación de esta última integral implica que Π_k no puede ser positivo en todo k , es decir, existe algún rango en el cual el flujo o la cascada de energía es inversa.

Es posible también ver (teorema de Fjortoft, ver [Lesieur 1990]) que, considerando sólo tres modos en el espacio Fourier, alineados, la enstrofía se transfiere hacia el modo de mayor k y la energía hacia el modo de menor k , si la inyección se realiza en el modo intermedio.

Estos argumentos llevaron a la plausible conclusión de que en hidrodinámica 2D es la enstrofía la que cascadea hacia las escalas chicas, mientras que la energía sigue una *cascada inversa*, hacia las escalas grandes. Esta conclusión ha sido verificada en simulaciones numéricas y recientemente en experimentos sobre películas delgadas de jabón ([Rutgers 1998]).

Con un análisis similar al seguido por Kolmogorov en el caso 3D, [Kraichnan 1967] supuso que si se fuerza al fluido 2D en una escala k_I , entregándole una tasa de energía ϵ y una tasa de enstrofía $\epsilon_\Omega = k_I^2 \epsilon$, existe un rango $k_I \ll k \ll k_d$ (donde k_d corresponde a la escala disipativa), donde el balance de enstrofía resulta

$$\Gamma_k \sim \epsilon_\Omega = \text{constante} \quad (5.38)$$

Estimando dimensionalmente el flujo como $\Gamma_k \sim k^3 u_k^3$ se obtiene

$$u_k \sim \epsilon_\Omega^{1/3} k^{-1} \quad (5.39)$$

con lo cual el espectro de energía es

$$E_k \sim \frac{u_k^2}{k} \sim \epsilon_\Omega^{2/3} k^{-3} \quad (5.40)$$

y el de enstrofía

$$\Omega_k = k^2 E_k \sim \epsilon_\Omega^{2/3} k^{-1} \quad (5.41)$$

Estos espectros corresponden al rango inercial de enstrofía, de cascada directa.

La energía sigue una cascada inversa, y su rango inercial se encuentra en $k \ll k_I$, en donde

$$\Pi_k \sim \epsilon \rightarrow u_k \sim (\epsilon/k)^{1/3} \rightarrow E_k \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (5.42)$$

La escala disipativa se obtiene del balance entre la tasa y la disipación de enstrofía y la utilización de (5.39):

$$\epsilon_\Omega \sim \nu k^4 u_k^2 \sim \nu \epsilon_\Omega^{2/3} k^2 \quad (5.43)$$

de donde

$$k_d \sim \left(\frac{\epsilon_\Omega}{\nu^3}\right)^{1/6} \quad (5.44)$$

El número de grados de libertad se estima como

$$N \sim \left(\frac{k_d}{k_I}\right)^2 \quad (5.45)$$

y considerando el número de Reynolds integral, es decir, de la macroescala, como

$$R_I = \frac{u_I(1/k_I)}{\nu} \quad (5.46)$$

se obtiene, luego de aplicar (5.39),

$$N \sim R_I \quad (5.47)$$

Como puede verse, las necesidades de cómputo en el caso 2D son mucho menores que en el 3D, en donde recordemos que N escala como $R_I^{9/4}$.

5.2 Auto-organización, decaimiento selectivo y estados metaestables

La cascada inversa de energía corresponde a un flujo de energía hacia escalas espaciales cada vez más grandes, en un proceso también llamado de *auto-organización*, ya que produce la impresión visual de una simplificación espacial del flujo ([Matthaeus et al. 1991a],b). Esta energía se acumula en la macroescala, en donde la disipación viscosa es muy ineficiente. Por el contrario, la enstrofia fluye hacia las escalas pequeñas y su disipación se enfatiza.

El proceso de auto-organización puede verse también interpretando el cociente entre la enstrofia y la energía como el numero de onda medio del flujo. En efecto,

$$\frac{\Omega}{E} = \frac{\sum k^4 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2}{\sum k^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2} \sim \langle k^2 \rangle \quad (5.48)$$

Por lo tanto, el decrecimiento de este cociente se puede interpretar como el incremento en la longitud de onda media del flujo. En otras palabras, el sistema evoluciona hacia estados dominados por las escalas mas grandes disponibles (las escalas mas grandes permitidas por las condiciones de contorno).

Un intento para analizar el flujo en este regimen de auto-organización o de estados *coherentes* ha sido el mecanismo de *decaimiento selectivo* ([Hasegawa 1985]). Como la enstrofia decae más rápido que la energía, se aplica un principio variacional que minimiza la enstrofia manteniendo la energía constante:

$$\delta\Omega - \lambda\delta E = 0 \quad (5.49)$$

con λ un multiplicador de Lagrange. Escribiendo la energía en la forma equivalente $E = \frac{1}{2} \int \varphi w d^2x$ y la enstrofia en su forma usual, $\Omega = \frac{1}{2} \int w^2 d^2x$ se obtiene

$$\int w \delta w d^2x - \frac{1}{2} \lambda \int (\delta \varphi w + \varphi \delta w) d^2x = 0 \quad (5.50)$$

y teniendo en cuenta que $w = -\nabla^2 \varphi$ y la periodicidad

$$\int \delta \varphi w = \int \delta \varphi (-\nabla^2 \varphi) = \int \varphi \delta (-\nabla^2 \varphi) = \int \varphi \delta w \quad (5.51)$$

entonces

$$\int (w - \lambda \varphi) \delta w d^2x = 0 \quad (5.52)$$

con lo cual

$$w = \lambda \varphi \quad (5.53)$$

En estos estados, la vorticidad es entonces proporcional a la función corriente. Las soluciones de (5.53) son modos Fourier con un único $k = |k|$ y la que asegura que Ω/E sea mínimo es una superposición de modos con $k = 1$.

Sin embargo, [Montgomery et al. 1992] mostraron en sus simulaciones, que la vorticidad y la función corriente en los estados coherentes puede ser descrita por la relación

$$w = c \sinh(\beta \varphi) \quad (5.54)$$

que se conoce como la ecuación *sinh-Poisson*.

Esta relación puede ser explicada en términos de un principio variacional alternativo. En los modelos de vórtices discretos ([Lundgren & Pointin 1977]), se estudia la dinámica de los flujos 2D de decaimiento pensando en un gas de vórtices positivos y negativos y aplicando conceptos de mecánica estadística. Definamos entonces un campo de *vorticidad positiva* w^+ y un campo de *vorticidad negativa* w^- , de tal forma que $w^\pm \geq 0$ y $w = w^+ - w^-$. En términos de los modelos de vórtices discretos podemos interpretar estos campos como proporcionales, respectivamente, al

donde C es una constante de normalización y $k_o \sim N/3$, con N el número de modos o puntos de grilla a considerar. El espectro inicial de energía E_k (5.30) es entonces ancho y varía como k^{-3} para longitudes de onda pequeñas, el cual corresponde al espectro estacionario de energía en el rango inercial de enstrofia (5.40).

El módulo de la función corriente inicial, para cada modo \mathbf{k} , se obtiene de $|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 = E(\mathbf{k})/k^2$, mientras que la fase compleja se elige al azar con una ley de distribución uniforme en $(0, 2\pi)$.

El número de Reynolds es $R = \langle u^2 \rangle^{1/2} l/\nu$, donde $\langle u^2 \rangle^{1/2}$ es la velocidad cuadrática media y l es una longitud típica, ambas dependiendo de las condiciones iniciales. Trabajando adimensionalmente y eligiendo una velocidad media y una longitud típica de orden uno, el número de Reynolds es de orden $1/\nu$, que es el tiempo adimensional en el cual el sistema decae al estado trivial ($\mathbf{u} = 0$) por disipación viscosa. Las simulaciones aquí presentadas corresponden a $R \sim 1000$.

Empleamos un método pseudoespectral completamente dealiasado ([Canuto et al. 1988]) como se describió en el capítulo 4, con integración temporal implícita en el término lineal (el término disipativo) y explícita, del tipo predictor-corrector ([Press et al 1986]) de 2do orden en el término no lineal.

La resolución fue de 96×96 puntos de grilla, lo que nos permitió realizar distintas simulaciones, a tiempos largos, del orden del tiempo de relajación disipativo $t_d = 1/\nu = R = 1000$.

Como test de la exactitud del método numérico, evaluamos en cada caso el cumplimiento de las ecuaciones de balance de energía y enstrofia (5.20) y (5.23), comparando (dentro de una tolerancia de 10^{-3}) la energía instantánea con la integral temporal del término disipativo.

5.3.1 (a) Condiciones de contorno periódicas

La Figura 5.1 muestra la evolución del flujo, mediante contornos de la función corriente para diferentes instantes. La Figura 5.2 corresponde a imágenes de la vorticidad escalar en esos mismos instantes. Las flechas sobre estas imágenes de vorticidad, representan el campo de velocidades.

El decaimiento del flujo está gobernado por la cascada inversa de energía, asociada a la formación de macro-vórtices ([Mc Williams 1984]). La cascada directa de enstrofia debe asociarse con

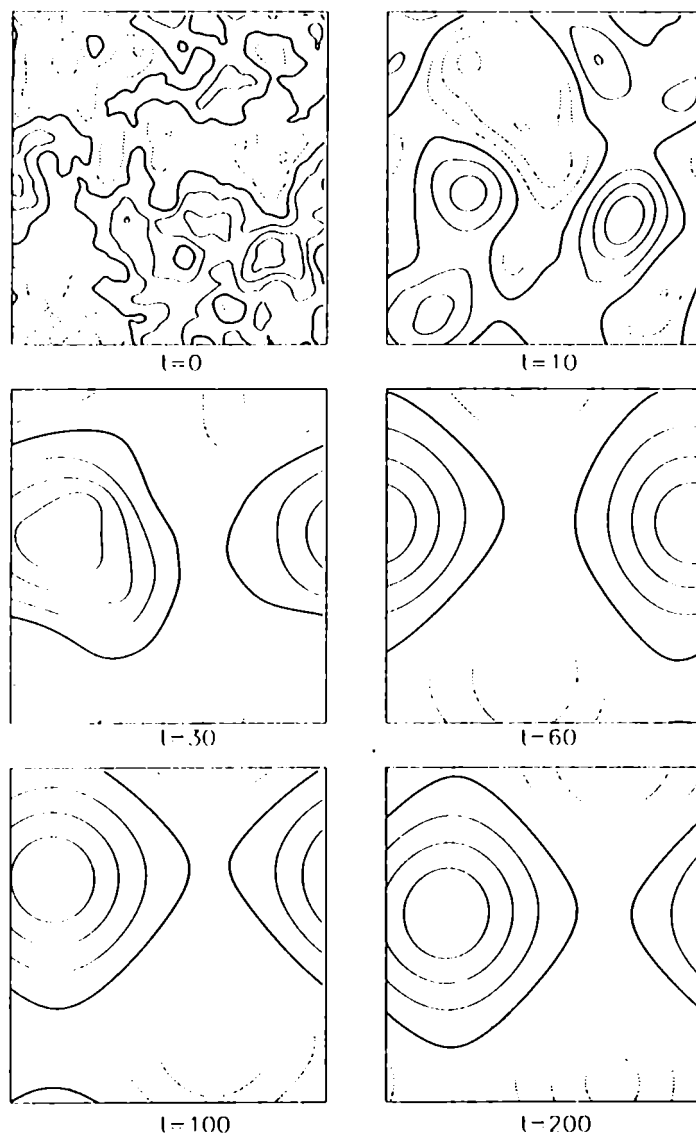


Fig. 5.1: Contornos de la función corriente en diferentes instantes. Las líneas punteadas indican valores negativos y las continuas valores positivos. Las líneas más gruesas corresponden al valor cero. La caja cuadrada tiene lado 2π .

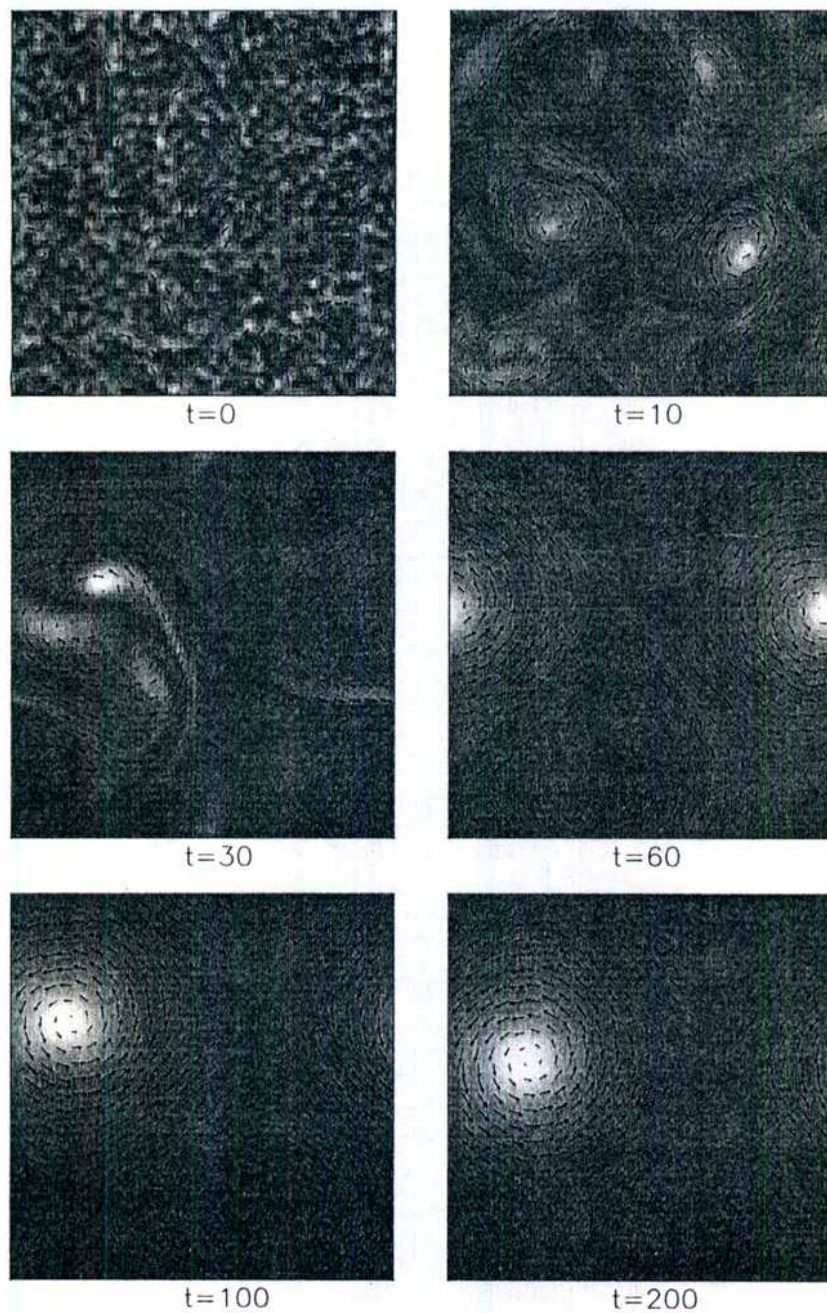


Fig. 5.2: Campo de velocidad (flechas) superpuesto a imágenes de la vorticidad escalar, en diferentes instantes. Los tonos más claros corresponden a valores positivos de vorticidad y los más oscuros a valores negativos.

la generación de zonas delgadas de gradiente de vorticidad en las primeras etapas de la evolución (entre $t = 0$ y $t = 10$) ([Brachet et al. 1988]). A tiempos más largos el flujo está dominado por las estructuras grandes. Los vórtices de igual signo se mezclan y unen hasta que sólo quedan dos núcleos de vorticidad de signo opuesto ([Matthaeus et al. 1991a]).

La correlación entre la vorticidad y la función corriente puede verse en la Figura 5.3. Para $t = 60$, o tiempos mayores, la correlación tiende a estar bien caracterizada por la relación sinh-Poisson (eq. (5.54) y podemos efectuar un ajuste de los parámetros c y β y su evolución en el tiempo. La correlación entre w y $\sinh(\beta\varphi)$ es mayor al 99% para $t \simeq 200$.

Estos resultados son similares a los obtenidos por [Montgomery et al. 1992].

5.3.2 (b) Condiciones de contorno periódicas + deslizamiento libre

La combinación de condiciones de contorno periódicas y de deslizamiento libre (también llamadas condiciones de contorno de Dirichlet) se obtienen imponiendo que $\varphi = 0$ en los contornos en la expansión de φ en serie de Fourier, lo que implica que

$$\varphi(x, y, t) = \sum_{i,j=1}^N a_{i,j}(t) \sin(ix) \sin(jy) \quad (5.58)$$

Esto asegura que en los contornos de la caja $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, \mathbf{u} tenga sólo componente paralela, es decir, su componente normal se anula. También $\mathbf{w} = \nabla \times \mathbf{u} = 0$ en los contornos.

Se puede ver que el subespacio generado por las funciones $\sin(ix) \sin(jy)$ es invariante sobre la evolución dada por la ecuación (5.7), es decir, si una función se expande inicialmente en senos como (5.58), entonces su evolución según (5.7) sigue expandiéndose en senos.

Realizamos simulaciones numéricas de la ecuación (5.7) con la misma elección de condiciones iniciales que en la sección anterior pero permitiendo solamente los valores π y 0 para las fases iniciales de los modos $\varphi_{\mathbf{k}}$, de forma tal que entonces la función corriente se expande como en (5.58).

Dada la simetría que una función de la forma (5.58) tiene en el dominio $(0, 2\pi) \times (0, 2\pi)$, resolver la ecuación de Navier-Stokes en este dominio corresponde a resolverla simultáneamente

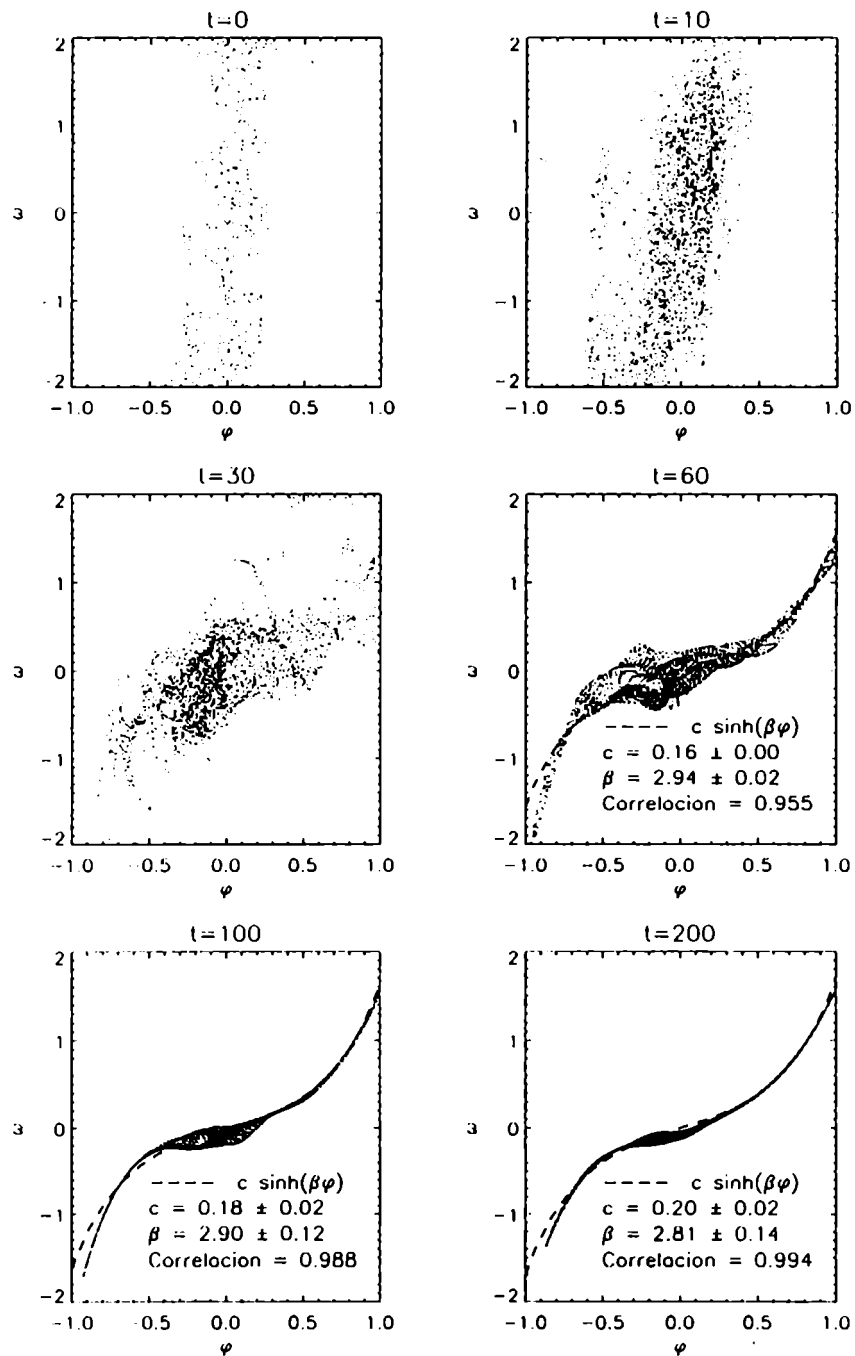


Fig. 5.3: Gráficos de la vorticidad w versus la función corriente φ en diferentes instantes. Se indican los valores del ajuste de $w = c \sinh(\beta\varphi)$ para $t > 60$. La correlación para esos tiempos es mayor al 95%.

en cuatro cuadrados de lado π con condiciones de contorno de Dirichlet o de deslizamiento libre (ver Figura 5.4). Las condiciones de contorno de deslizamiento libre son relevantes para fluidos no disipativos. Puesto que aquí estamos interesados en la evolución para tiempos mucho más cortos que la escala de tiempo disipativa en flujos con alto número de Reynolds y no estamos analizando la dinámica en la capa límite, creemos que este tipo de condiciones de contorno son también relevantes para nuestro análisis.

Los resultados de las simulaciones se muestran en la Figura 5.4, en donde se grafican contornos de la función corriente en diferentes instantes. Las cuatro cajas independientes de lado π pueden verse claramente. La antisimetría de reflexión de la función corriente, impuesta por (5.58) es también evidente en esta figura. El flujo también en este caso es dominado, a medida que evoluciona, por las estructuras más grandes permitidas por las condiciones de contorno, que a tiempos largos consisten en cuatro núcleos de vorticidad.

Esta evolución desde un estado desordenado a un estado organizado puede verse también en la Figura 5.5, que muestra gráficos de w versus φ para diferentes instantes. La Figura 5.5 muestra sin embargo que, a diferencia de las simulaciones presentadas en el caso anterior, este estado ordenado no puede ser descrito por la ecuación sinh-Poisson ni por ninguna otra dependencia funcional entre w y φ ([Dmítjuk et al. 1996]).

Dado este comportamiento particular, que es claramente diferente del obtenido en la sección anterior, parece natural realizar las siguientes dos preguntas. Primero, por qué ocurre esto? Segundo, dado que estas simulaciones son un caso particular de aquellas con condiciones de contorno periódicas generales, qué tan típicos o qué tan peculiares son los apartamientos de la relajación a estados sinh-Poisson? Como mencionamos antes, el subespacio generado por las funciones $\sin(ix) \sin(jy)$ es un subespacio invariante (para la evolución dada por (5.7)) del espacio de funciones periódicas. Sin embargo, hemos encontrado numericamente que no es *atractor*. Simulaciones de la ecuación (5.7), considerando una condición inicial en este subespacio invariante más el agregado de una perturbación ruidosa de pequeña amplitud, muestran que la solución permanece cercana a este subespacio invariante en los primeros instantes pero luego se aparta de este considerablemente. Mas aún, estas simulaciones mostraron que el sistema relaja a un estado sinh-Poisson. Existen muchos otros subespacios invariantes en el espacio de funciones periódicas,

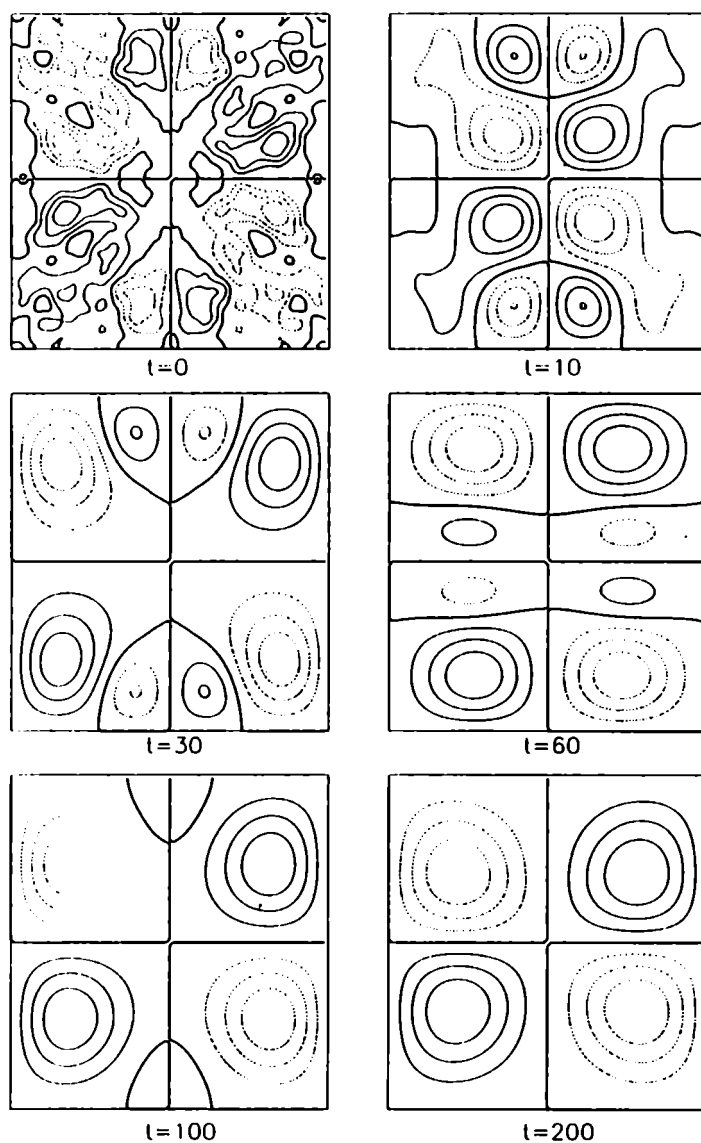


Fig. 5.4: Contornos de la función corriente a distintos instantes, para condiciones de contorno periódicas + deslizamiento libre ($\varphi = 0$ en los bordes).

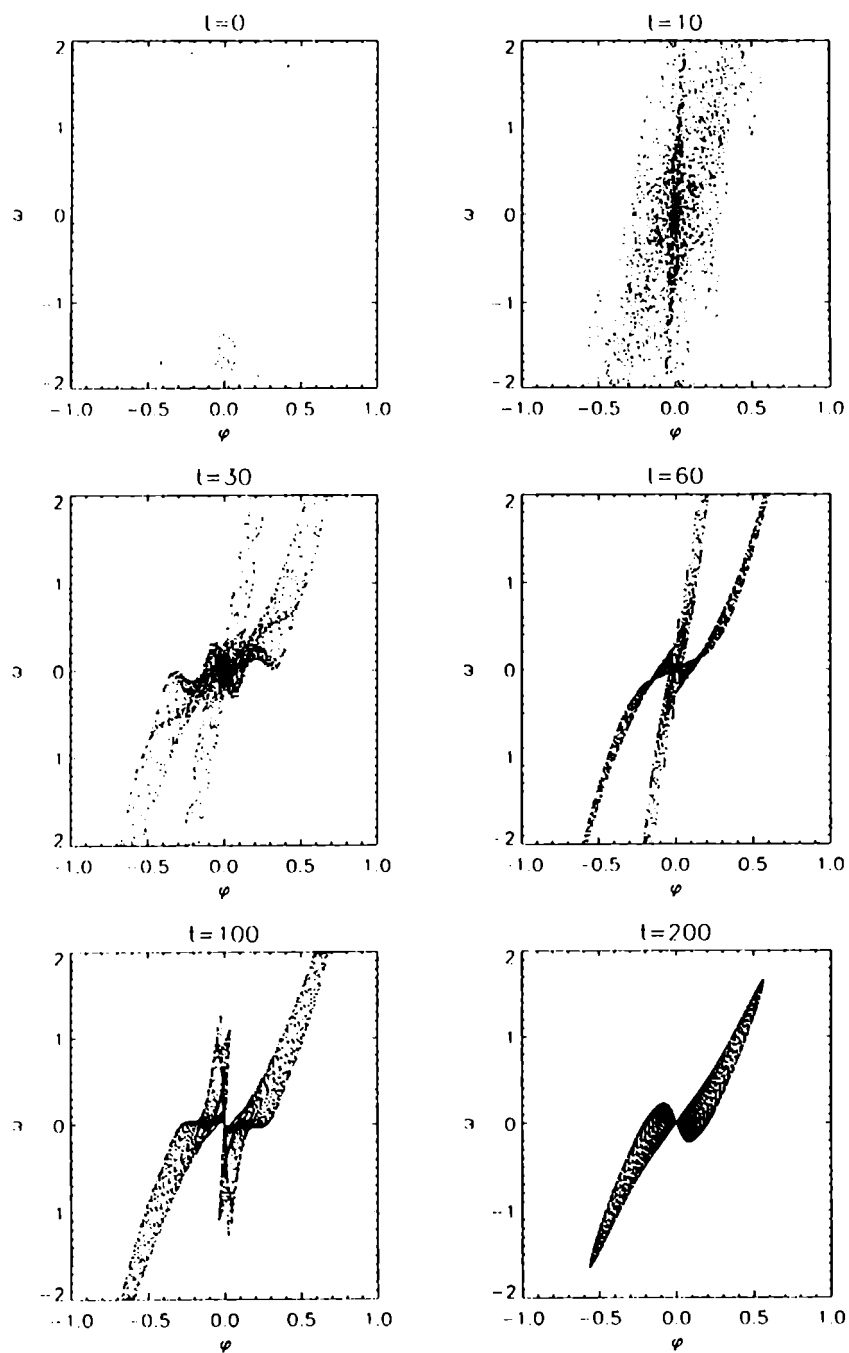


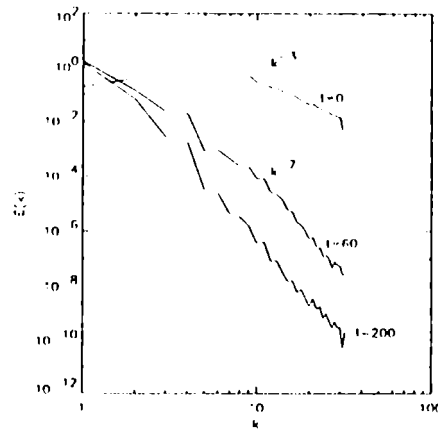
Fig. 5.5: Gráficos de vorticidad w versus función corriente φ a distintos instantes, para condiciones de contorno periódicas + deslizamiento libre.

tales como los generados por funciones de la forma $\sin(inx) \sin(jny)$ con n un entero arbitrario, o funciones que generan estructuras en diagonal como las observadas en la sección anterior. Sin embargo, todos parecen inestables ante una pequeña perturbación. Por lo tanto, si consideramos condiciones iniciales arbitrarias en el espacio de funciones periódicas (con un espectro de energía inicialmente ancho y fases al azar), es altamente plausible que el sistema relaje finalmente a un estado descrito por la ecuación sinh-Poisson.

Puesto que las condiciones de contorno de deslizamiento libre son físicamente relevantes, es importante entender por qué en este caso no se alcanza una relajación al estado sinh-Poisson. Como mencionamos antes, la relajación a un estado sinh-Poisson se puede explicar mediante un principio variacional: la entropía S (ver su definición en la ecuación (5.55)) se maximiza bajo ciertas condiciones. Una de esas condiciones es la conservación de la energía, la cual se cumple sólo aproximadamente en el caso disipativo $\nu \neq 0$. Encontramos que en el caso con condiciones de deslizamiento libre, la energía decae mucho más rápido que en el caso con condiciones periódicas generales. Sin la imposición de conservar la energía, el principio variacional lleva sólo al estado trivial ($w = 0$). Por lo tanto, a partir de nuestras simulaciones, concluimos que en el caso de deslizamiento libre el sistema no alcanza un estado metaestable no trivial descrito por la ecuación sinh-Poisson.

Hay un hecho interesante, sin embargo, que indica que la relajación al estado sinh-Poisson juega algún papel en este caso. En la Figura 5.4 observamos que para $t = 60$ hay ocho vórtices de dos formas diferentes, cuatro en la región intermedia y cuatro en las partes superior e inferior del cuadrado. Por otro lado, la Figura 5.5 luce como el gráfico de dos funciones superpuestas, como si hubiese dos posibles relaciones funcionales entre w y φ . Más aún, una de estas relaciones es similar a una curva de tipo seno hiperbólico. De hecho, encontramos que los puntos que vienen de vórtices en la parte superior e inferior del cuadrado, caen en esta curva, la cual puede ser ajustada por una función de la forma $c \sinh(\beta\varphi)$, al menos para valores de φ alejados del cero. Por lo tanto, algunos de los vórtices que se forman en el caso de deslizamiento libre relajan a un estado sinh-Poisson. Sin embargo, la disipación comienza a ser importante mucho antes que en el caso periódico general y este efecto parece destruir la correlación entre w y φ .

Fig. 5.6: Espectro de energía a diferentes instantes. Se indica la ley de potencias que aproxima en cada caso.



5.4 Truncaciones de longitud de onda grande

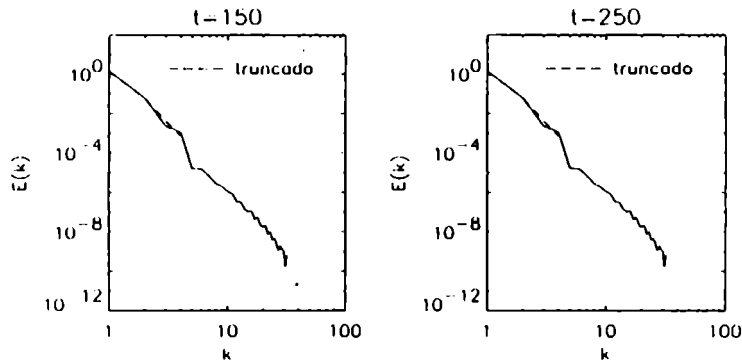
Volvemos ahora al caso periódico general para estudiar truncaciones del sistema a longitud de onda grande en la etapa coherente de su evolución.

La Figura 5.6 muestra espectros de energía en tres instantes diferentes. Podemos ver que para $t = 60$, el espectro pasó de ser inicialmente ancho, tipo k^{-3} , a estar altamente concentrado en los números de onda cortos, con una ley tipo k^{-7} . Esto sugiere realizar truncaciones de pocos modos Fourier (además de la truncación impuesta por la resolución finita de las simulaciones) y testear como esto afecta la dinámica del sistema en esta etapa de su evolución.

Para realizar esta comparación, evolucionamos el sistema completo hasta $t = 100$. En ese instante, truncamos el sistema a modos Fourier con $|\mathbf{k}| \leq 4$ y evolucionamos sólo esos modos para $t > 100$. Los espectros obtenidos con esta drástica truncación del sistema se comparan en la Figura 5.7 con los espectros del sistema completo, en los instantes $t = 150$ y $t = 250$. Como puede verse, el acuerdo es muy bueno.

La Figura 5.8 muestra la función corriente del sistema truncado comparada con la función corriente del sistema completo, para los mismos instantes. La única diferencia apreciable es un

Fig. 5.7: Espectro de energía para un sistema truncado en $k = 4$ (línea de trazos) comparado con el espectro de energía para el sistema completo (con número de onda máximo de alrededor de 40), en los instantes $t = 150$ y $t = 250$. La truncación se inicia en $t = 100$.



pequeño desplazamiento rígido de los patrones (vórtices) en el sistema truncado respecto al sistema completo.

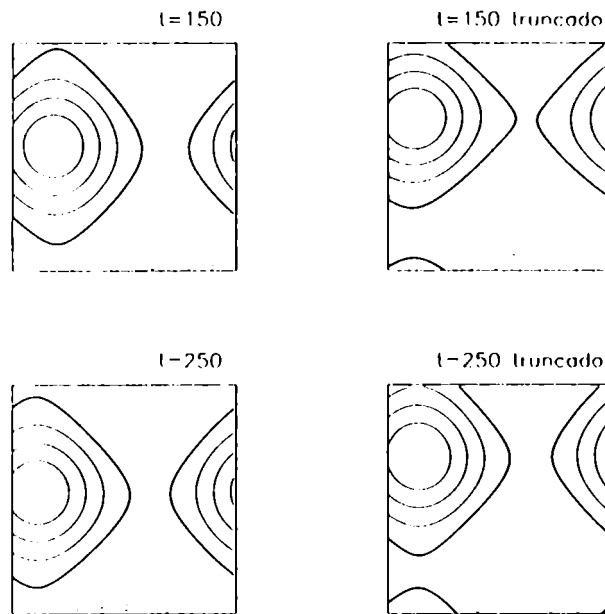
El sistema truncado también evoluciona a través de estados sinh-Poisson, como se muestra en la Figura 5.9 donde se grafican w versus φ para el sistema truncado y el completo. Más aún, los parámetros c y β coinciden dentro del error del procedimiento de ajuste.

La transferencia de energía entre modos, e indirectamente el grado de aproximación realizado con la truncación, puede ser medida cuantitativamente a través del siguiente procedimiento. Supongamos que consideramos un sistema truncado, con modos hasta un cierto $k = k_c$. El balance de energía para este sistema reducido, escrito en el espacio Fourier, es, como vimos anteriormente (ec (4.29)),

$$\partial_t \mathcal{E}_{k_c} = \Pi_{k_c} - 2\nu\Omega_{k_c} \quad (5.59)$$

donde $\mathcal{E}_{k_c} = \frac{1}{2} \sum_{k \leq k_c} k^2 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2$ es la energía del sistema truncado, $\Pi_{k_c} = \sum_{k \leq k_c} k^2 \varphi_{\mathbf{k}}^* [\varphi, w]_{\mathbf{k}}$ representa la transferencia no-lineal de energía proveniente (recordar que la cascada de energía es inversa) de modos con $k > k_c$ (los modos que están afuera del sistema truncado) y $2\nu\Omega_{k_c}$ es el término disipativo, con $\Omega_{k_c} = \frac{1}{2} \sum_{k \leq k_c} k^4 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2$ la enstrofia del sistema truncado.

Fig. 5.8: Contornos de la función corriente del sistema truncado en $k = 4$ a partir de $t = 100$ comparados con los contornos del sistema completo.



x

Fig. 5.9: Evolución del estado sinh-Poisson en el sistema truncado en $k = 4$ comparado con el sistema completo

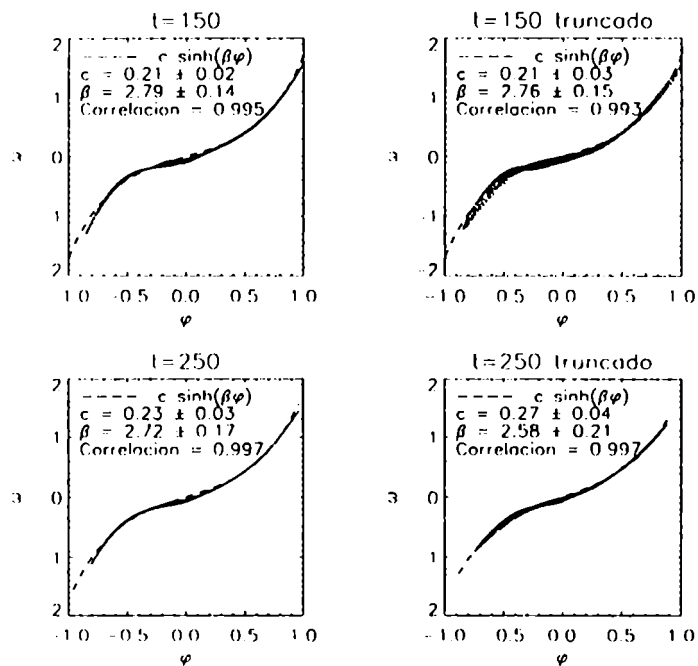
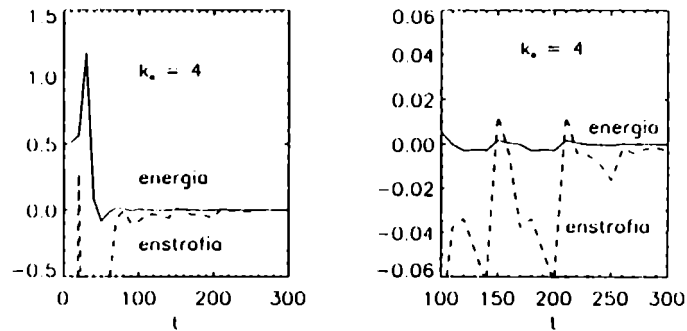


Fig. 5.10: Cocientes entre el término de transferencia de energía entre modos con $k \leq k_0 = 4$ y $k > k_0$ y el término disipativo (línea continua) y entre el término de transferencia de enstrofia y el término disipativo (línea de trazos). Para $t > 100$ ambos cocientes son menores que 0.06.



El cociente $\Pi_{k_c}/2\nu\Omega_{k_c}$ es una medida de la importancia del intercambio no-lineal de energía entre modos con $k > k_c$ y modos con $k \leq k_c$ frente a los términos disipativos.

Una ecuación similar puede obtenerse para el balance de enstrofia,

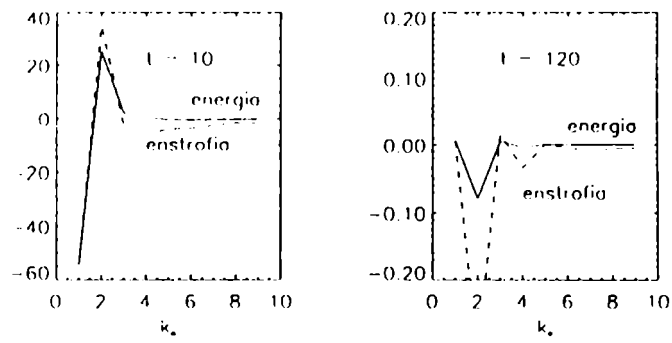
$$\partial_t \Omega_{k_c} = \Gamma_{k_c} - 2\nu P_{k_c} \quad (5.60)$$

donde $\Gamma_{k_c} = \sum_{k \leq k_c} k^4 \varphi_{\mathbf{k}}^* [\varphi, w]_{\mathbf{k}}$ representa la transferencia no lineal de enstrofia hacia (cascada directa) modos con $k > k_c$ y $2\nu P_{k_c}$ es el término disipativo, con $P_{k_c} = \frac{1}{2} \sum_{k \leq k_c} k^6 |\varphi_{\mathbf{k}}|^2$ la palinstrofia del sistema truncado. La importancia del intercambio no-lineal de enstrofia entre modos frente a la disipación puede medirse con el cociente $\Gamma_{k_c}/2\nu P_{k_c}$.

Los cocientes de transferencia de energía y transferencia de enstrofia se pueden ver en las Figuras 5.10 y 5.11. En la Figura 5.10, los cocientes se grafican en función del tiempo, para $k_c = 4$. Vemos en primer lugar, que, en general, $\Pi_{k_c} > 0$ y $\Gamma_{k_c} < 0$, lo cual confirma la dirección de las cascadas. Para $t = 100$, ambos cocientes son, en módulo, menores a 0.06, lo cual muestra que $k_c = 4$ es una elección razonable para truncar el sistema a tiempos largos en su evolución. En la Figura 5.11 los cocientes se grafican como función de k_c para dos instantes de tiempo diferentes.

El hecho de que la transferencia de energía y enstrofia entre modos de k grande y modos de k chicos sea comparativamente pequeña frente a la disipación, a tiempos largos, muestra que la

Fig. 5.11: Los mismos cocientes que en la Figura 5.10, pero ahora como función de k_0 , para $t = 10$ y $t = 120$



evolución del sistema en esta etapa, es intermedia entre un régimen turbulento no lineal y un régimen disipativo lineal.



Capítulo 6

Modelo magnetohidrodinámico de un arco coronal

Analizamos en este capítulo la dinámica de un arco magnético coronal forzado por los movimientos fotosféricos en sus bases. Se muestra que la turbulencia es un mecanismo adecuado para explicar la transferencia y disipación de energía en arcos magnéticos, a los niveles necesarios para el calentamiento de este tipo de regiones activas.

En primer lugar se resumen los conceptos básicos de turbulencia magnetohidrodinámica, como una extensión natural de las ideas presentadas en los capítulos anteriores para el caso hidrodinámico. Se desarrolla el modelo de arco magnético coronal forzado, introducido en la sección 2.3, aplicando la aproximación RMHD presentada en 3.5. Estas ecuaciones se resuelven numéricamente para distintos tipos de forzado. Se describe cualitativamente el tipo de estructuras observadas y los espectros de energía. Se obtiene la tasa de disipación de energía en régimen estacionario, que es consistente con los valores empíricos reportados en la literatura. Finalmente, se analiza la dependencia de la tasa de disipación con los diferentes parámetros del sistema y se obtiene una ley de escala a partir de consideraciones dimensionales y de las simulaciones numéricas.

6.1 Introducción

Diversos escenarios que se han propuesto para el calentamiento de arcos magnéticos en regiones activas, tienen en común la formación y disipación de corrientes eléctricas distribuidas en estructuras de escala pequeña. Entre ellos podemos mencionar la formación espontánea de discontinuidades tangenciales ([Parker 1972], 1983), el desarrollo de una cascada de energía forzada por movimientos aleatorios de las bases del loop en una configuración de equilibrio de fuerzas (force-free) ([van Ballegooijen 1986]) o la cascada de energía asociada a un régimen de turbulencia magneto-hidrodinámica forzada en este caso también por los movimientos fotosféricos en las bases del loop ([Heyvaerts & Priest 1992]; [Gómez & Ferro Fontán 1988], 1992). La conclusión principal es que la formación de estructuras de escala pequeña en la distribución espacial de corrientes eléctricas es necesaria para incrementar la tasa de disipación de energía magnética y por lo tanto disponer del suficiente calentamiento para el plasma confinado en estos arcos magnéticos.

Como se indicó en la introducción presentada en la sección 2.3, la dinámica de un arco coronal forzado por el movimiento fotosférico en sus bases, se describe mediante las ecuaciones MHD. Debido a que los números de Reynolds magnético y cinético en regiones activas de la corona son muy grandes, se espera que los movimientos en las bases lleven al loop a un régimen fuertemente turbulento. En términos de un escenario turbulento el mecanismo de calentamiento resulta natural y directo: los movimientos fotosféricos entregan energía a una escala relativamente grande (la escala de granulación) y donde la disipación es ineficiente; los términos no lineales actúan entonces, transfiriendo esta energía hacia las escalas pequeñas (cascada), donde la disipación puede alcanzar los niveles necesarios para explicar el calentamiento.

Las escalas típicas de estructuras asociadas con la región de cascada de energía o de estructuras disipativas son demasiado pequeñas ($\ll 10^3$ km) para ser resueltas por los instrumentos de observación de los que se dispone hoy en día. Es por eso que el testeo observacional de los modelos de calentamiento, como el de turbulencia MHD, es aún indirecto y basado sólo en consideraciones globales. Básicamente se exige que la descripción sea consistente con una tasa de calentamiento típica en regiones activas, del orden de 10^5 a 10^7 erg/(cm² s) ([Withbroe & Noyes 1977]).

En este capítulo, mostraremos simulaciones numéricas de un arco magnético mediante las ecuaciones MHD, que muestran simultáneamente el desarrollo de turbulencia junto con una tasa adecuada de calentamiento. Previamente, se resumen las ideas básicas de turbulencia magnetohidrodinámica y se discute el efecto Alfvén en la ley del espectro de energía.

6.2 Turbulencia magnetohidrodinámica

6.2.1 Invariantes y cascadas

En primer lugar reseñamos la extensión de los conceptos de invariantes ideales y cascadas turbulentas al caso magnetohidrodinámico. Veamos por ejemplo que la existencia de dos campos, el de velocidades y el magnético, complica las estimaciones y los análisis dimensionales. Notemos que existe más de un parámetro para estimar el valor de los términos no lineales frente a los disipativos en las ecuaciones de evolución de los campos.

Las ecuaciones MHD (sección 3.3.1) para el caso incompresible ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$) son

$$\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla \frac{p}{\rho} + (\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{u} \quad (6.1)$$

$$\partial_t \mathbf{B} = \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \eta \nabla^2 \mathbf{B} \quad (6.2)$$

donde el campo magnético se mide en unidades de velocidad.

Los parámetros que estiman el peso de las no-linealidades frente a los términos disipativos son los números de Reynolds magnético y cinético

$$R_M = \frac{u l}{\eta} \sim \frac{\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B})}{\eta \nabla^2 \mathbf{B}} \quad (6.3)$$

$$R = \frac{u l}{\nu} \sim \frac{\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}}{\nu \nabla^2 \mathbf{u}} \quad (6.4)$$

Existe además un tercer parámetro, llamado el número de Lundquist

$$S = \frac{B l}{\nu} \sim \frac{(\nabla \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}}{\nu \nabla^2 \mathbf{u}} \quad (6.5)$$

En estas estimaciones, u , B y l son magnitudes típicas. En la literatura se suele definir alternativamente al número de Lundquist con la velocidad de Alfvén v_A en lugar del campo típico.

Los valores de estos parámetros para un caso como el de la corona solar son del orden de 10^{10} o 10^{12} y entonces, al igual que en el caso puramente hidrodinámico, se espera una dinámica fuertemente turbulenta.

Suponemos condiciones de contorno periódicas en una caja de lado 2π , de forma tal que

$$\mathbf{u} = \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad , \quad \mathbf{u}_{-\mathbf{k}} = \mathbf{u}_{\mathbf{k}}^* \quad (6.6)$$

$$\mathbf{B} = \sum_{\mathbf{k}} B_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} \quad , \quad B_{\mathbf{k}} = B_{\mathbf{k}}^* \quad (6.7)$$

con $\mathbf{k} \in \mathcal{Z}^3$.

Las ecuaciones MHD admiten los siguientes invariantes cuadráticos ideales ($\nu = \eta = 0$), que además se conservan también ante truncaciones de desarrollos Fourier

$$E = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{u^2 + B^2}{2} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} (|\mathbf{u}_{\mathbf{k}}|^2 + |B_{\mathbf{k}}|^2) = E^U + E^M \quad (\text{energía total}) \quad (6.8)$$

$$H_m = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{2} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{A}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{B}_{-\mathbf{k}} \quad (\text{helicidad magnética}) \quad (6.9)$$

$$H_c = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{B}}{2} d^3\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} \mathbf{u}_{\mathbf{k}} \cdot B_{-\mathbf{k}} \quad (\text{helicidad cruzada}) \quad (6.10)$$

Para el caso MHD 2D, cuyas ecuaciones en términos del potencial vector magnético a y la función corriente φ presentamos en la sección 3.6, los invariantes cuadráticos ideales y robustos son (en ausencia de términos de forzado):

$$E = E^U + E^M = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{(u^2 + b^2)}{2} d^2\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k^2 (|\varphi_{\mathbf{k}}|^2 + |a_{\mathbf{k}}|^2) \quad (\text{energía total}) \quad (6.11)$$

$$H_c = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{b}}{2} d^2\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} k^2 \varphi_{\mathbf{k}} a_{-\mathbf{k}} \quad (\text{helicidad cruzada}) \quad (6.12)$$

$$A_m = \frac{1}{(2\pi)^2} \int \frac{a^2}{2} d^2\mathbf{r} = \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}} |a_{\mathbf{k}}|^2 \quad (\text{potencial magnético cuadrático medio}) \quad (6.13)$$

como puede verse escribiendo las ecuaciones dinámicas en el espacio de Fourier y procediendo de forma análoga a la mostrada en el caso hidrodinámico.

Las ecuaciones de balance para estos invariantes ideales son:

$$\partial_t E = -\eta \int j^2 d^2\mathbf{r} - \nu \int w^2 d^2\mathbf{r} \quad (6.14)$$

$$\partial_t H_c = -\frac{\eta + \nu}{2} \int \mathbf{w} \cdot \mathbf{j} d^2\mathbf{r} \quad (6.15)$$

$$\partial_t A_m = -\eta \int \mathbf{j} \cdot \mathbf{b} d^2\mathbf{r} \quad (6.16)$$

Vemos que, análogamente al caso hidrodinámico, las no-linealidades no aportan al balance global de estas cantidades. Puede verse también aquí que se cumple el balance detallado por ternas con números de onda que verifican $\mathbf{k} + \mathbf{l} + \mathbf{m} = 0$. Notar que las energías total cinética o magnética no se conservan por separado, sino que el invariante ideal es su suma.

Al igual que en hidrodinámica, la presencia de un forzado en una escala dada, k_I , produce cascadas de los invariantes, alcanzándose estados estadísticamente estacionarios en donde los invariantes son transferidos por las no-linealidades hacia escalas menores (cascada directa) o mayores (cascada inversa), desarrollándose en cada caso espectros estacionarios. En la siguiente tabla, se resumen los distintos tipos de cascadas, tanto en MHD como en HD ([Biskamp 1993], pp. 185).

		3D		2D	
MHD	E	directa	E	directa	
	H_c	directa	H_c	directa	
	H_m	inversa	A_m	inversa	
HD	E	directa	E	inversa	
	H	directa	Ω	inversa	

La característica importante a notar es que, a diferencia del caso hidrodinámico, existe una gran similitud entre la turbulencia en MHD 3D y 2D, en el sentido que en ambas la energía y

la helicidad cruzada cascadean hacia las escalas chicas y otro invariante (la helicidad magnética en 3D y el potencial cuadrático medio en 2D) realiza cascada inversa. La presencia de esta última cascada inversa origina procesos de auto-organización como en el caso HD 2D comentado en el capítulo anterior. En este caso, se manifiesta en la formación de estructuras magnéticas coherentes a escala macroscópica (*islas magnéticas*, [Biskamp 1993]). Entre estas islas magnéticas se forman las estructuras disipativas, de escala pequeña, consistente con la cascada directa de energía. Volveremos sobre una discusión de las características de las estructuras coherentes y disipativas cuando analicemos resultados numéricos de simulaciones MHD en secciones posteriores.

6.2.2 Espectro de Kraichnan

La transferencia de energía en turbulencia MHD se ve afectada por lo que se conoce como el *efecto Alfvén* que describiremos brevemente aquí.

Consideramos un campo magnético de fondo \mathbf{B}_0 y fluctuaciones \mathbf{b} sobre el, de forma que el campo magnético total es $\mathbf{B} = \mathbf{B}_0 + \mathbf{b}$. A diferencia de lo que sucede con una velocidad uniforme de fondo, el campo magnético \mathbf{B}_0 no puede ser eliminado de las ecuaciones dinámicas con un cambio de coordenadas y de hecho influye sobre la dinámica de las fluctuaciones. Es conveniente escribir las ecuaciones MHD en términos de las variables de Elsasser, $\mathbf{z}^\pm = \mathbf{u} \pm \mathbf{b}$. Luego de sumar y restar las ecuaciones (6.1) y (6.2) y aplicar identidades vectoriales, se obtiene el siguiente sistema, escrito aquí en forma compacta:

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{z} &= \pm \mathbf{B}_0 \cdot \nabla \mathbf{z}^\pm - \mathbf{z}^\mp \cdot \nabla \mathbf{z}^\pm \\ &- \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{b^2}{2} \right) + \frac{\nu + \eta}{2} \nabla^2 \mathbf{z}^\pm + \frac{\nu - \eta}{2} \nabla^2 \mathbf{z}^\mp \end{aligned} \quad (6.17)$$

El campo promedio \mathbf{B}_0 representa aquí el campo de las escalas grandes, y por lo tanto sus derivadas espaciales y temporales se suponen pequeñas. En ese sentido, las ecuaciones (6.17) son aproximaciones a las MHD, en donde se despreciaron las derivadas del campo promedio \mathbf{B}_0 .

Estas ecuaciones indican que la turbulencia puede ser considerada como un conjunto de fluctuaciones alfvénicas ($\mathbf{u} \pm \mathbf{b}$) que se propagan bajo un campo promedio \mathbf{B}_0 con interacciones que ocurren sólo entre modos que que viajan en direcciones opuestas. Es decir las fluctuaciones \mathbf{z}^+

sólo interactúan con fluctuaciones z^- y viceversa, pero no hay interacciones entre modos de igual signo.

Para estimar el tiempo típico de transferencia de energía entre escalas, observemos que existen dos escalas de tiempo dinámicas, dada una escala l : el tiempo de Alfvén, asociado al campo promedio,

$$t_A = l/B_0 \quad (6.18)$$

y el tiempo asociado a la fluctuación z_l (no distinguimos en estas estimaciones entre fluctuaciones de signo opuesto o campo magnético y de velocidades),

$$t_l \sim l/z_l \quad (6.19)$$

Usualmente, $t_A \ll t_l$, y justamente t_A es el tiempo de interacción entre las fluctuaciones de signo opuesto permitido por el campo promedio B_0 . Debido al breve tiempo de interacción, el cambio en la amplitud que produce cada una es pequeño y podemos estimarlo igualando la derivada temporal y el término no lineal en la ecuación (6.17) resultando,

$$\frac{\delta z_l}{z_l} = \frac{t_A}{t_l} \ll 1 \quad (6.20)$$

Debido a la naturaleza aleatoria de estos "encuentros", análogamente a lo que sucede en el movimiento browniano, se necesitan $N = (z/\delta z)^2$ pasos o interacciones elementales para producir un cambio apreciable en la amplitud de las fluctuaciones z .

El tiempo dinámico de transferencia es entonces:

$$\tau = N t_A = t_l^2/t_A \quad (6.21)$$

Veamos de que forma esto afecta a la ley espectral, por ejemplo para la energía.

Para ello vamos a obtener nuevamente el espectro de Kolmogorov en hidrodinámica, utilizando en este caso el tiempo de transferencia de energía $t_l \sim l/u_l$. El flujo de energía será u_l^2/t_l que debe ser constante e igual a la tasa de inyección (o disipación), es decir,

$$\epsilon \sim u_l^2/t_l = u_l^3/l \quad (6.22)$$

de donde

$$u_l \sim (\epsilon l)^{1/3} \quad (6.23)$$

y el espectro $E_k = u_k/k^2$, con $k = 1/l$ resulta

$$E_k \sim \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (6.24)$$

En MHD, se debe tener en cuenta el efecto Alfvén y por lo tanto, el tiempo t_l debe ser reemplazado por $\tau = t_l^2/t_A$. Por otro lado, hay dos campos u y b : supondremos que, al menos en las escalas mas chicas que la de inyección de energía, los campos están decorrelacionados, de forma tal que, estadísticamente $u_k \sim b_k$ para $k \ll k_I$ (el caso de campos con correlación se describe en [Biskamp 1993]). Las fluctuaciones entonces, tanto magnéticas como cinéticas, escalan según

$$\epsilon = u_l^2/\tau = (u_l^2 t_A)/t_l^2 = (u_l^4 t_A)/l^2 \quad (6.25)$$

de donde

$$u_l \sim b_l \sim (\epsilon B_0)^{1/2} l^{1/2} \quad (6.26)$$

$$E_k \sim (\epsilon B_0)^{1/2} k^{-3/2} \quad (6.27)$$

que es el espectro de Iroshnikov-Kraichnan para el rango inercial en turbulencia MHD con campos no correlacionados ([Kraichnan 1965]).

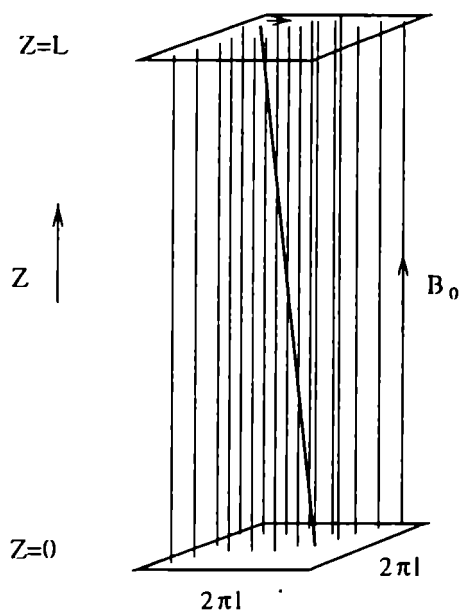
La escala de disipación puede obtenerse a partir de la condición de que el tiempo de transferencia de energía sea del orden del tiempo disipativo

$$t_l^2/t_A \sim l^2/\eta \quad (6.28)$$

con lo cual utilizando $t_l = l/u_l$ y (6.26) se obtiene

$$l = l_d = (\nu^2 B_0/\epsilon)^{1/3} \quad (6.29)$$

Fig. 6.1: Esquema del modelo de arco magnético



No hay ninguna distinción entre el caso MHD 3D y el MHD 2D en lo anteriormente expuesto, ya que en ambos la energía tiene una cascada directa. El campo medio B_0 en cada caso, corresponde a un valor típico de la macroescala, por ejemplo el valor cuadrático medio.

Este espectro ha sido confirmado en simulaciones numéricas ([Biskamp 1993], [Biskamp & Welter 1989]), aunque a nuestro parecer no se ha llegado aun a resoluciones espaciales suficientes como para distinguir fehacientemente entre una ley de potencias de Kolmogorov o Kraichnan.

6.3 Aproximación RMHD de un arco magnético coronal

6.3.1 Ecuaciones

Consideramos un arco magnético de longitud L , con una sección transversal $(2\pi l) \times (2\pi l)$. Descartamos efectos toroidales ya que consideramos el límite $l \ll L$. El campo magnético es inicialmente paralelo al eje del loop y de valor constante B_0 . Los planos $z = 0$ y $z = L$ corresponden a la fotosfera (ver Figura 6.1).

La alta conductividad eléctrica del plasma coronal asegura que los movimientos convectivos en la fotosfera arrastren consigo las líneas de campo magnético del loop, como vimos al explicar la propiedad de “congelamiento” en el capítulo 3. Esto produce que las líneas de campo magnético se retuerquen, generando componentes transversales del campo magnético y de velocidades, comparativamente chicas frente al campo principal B_0 .

La magnitud β del plasma, que mide el cociente entre la presión del gas y la magnética (ver sección 3.2.1), es además típicamente muy pequeña en la parte coronal del loop, del orden de 10^{-3} .

Estas consideraciones, justifican una descripción basada en las ecuaciones de la MHD reducida (RMHD) (ver sección 3.5) que reescribiremos aquí en forma adimensional. Utilizamos $l_0 = l$ como unidad de longitud transversal y L como unidad de longitud en z ; la unidad de tiempo es el tiempo de Alfvén, $t_0 = t_A = L/v_A$, es decir, el tiempo que tarda una onda de Alfvén (sección 3.4.2), de velocidad $v_A = B_0/\sqrt{4\pi\rho}$, en atravesar el loop. La unidad de velocidad y campo magnético es común a ambos, $u_0 = l_0/t_0 = l/t_A$.

De esta forma, las ecuaciones RMHD (3.63) resultan:

$$\partial_t a = \partial_z \varphi + [\varphi, a] + \frac{1}{S} \nabla_{\perp}^2 a \quad (6.30)$$

$$\partial_t w = \partial_z j + [\varphi, w] - [a, j] + \frac{1}{R} \nabla_{\perp}^2 w \quad (6.31)$$

donde $\varphi(x, y, z, t)$ es la función corriente y $a(x, y, z, t)$ el potencial vector, de los cuales se obtienen los campos transversales como

$$\mathbf{u} = \nabla_{\perp} \varphi \times \hat{\mathbf{z}} \quad , \quad \mathbf{b} = \nabla_{\perp} a \times \hat{\mathbf{z}} \quad (6.32)$$

Las cantidades $w = -\nabla_{\perp}^2 \varphi$ y $j = -\nabla_{\perp}^2 a$ son las componentes de la vorticidad y la densidad de corriente en la dirección del loop, donde $\nabla_{\perp}^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$. Los términos no-lineales son los corchetes de Poisson, de la forma $[u, v] = \partial_x u \partial_y v - \partial_y u \partial_x v$.

En estas ecuaciones adimensionales, $R = u_0 l / \nu$ y $S = u_0 l / \eta$ representan buenas estimaciones de los números de Reynolds cinético y magnético respectivamente.

Las coordenadas espaciales se extienden en los rangos $0 \leq x, y \leq 2\pi$ y $0 \leq z \leq 1$. En x, y suponemos condiciones de contorno periódicas. En z imponemos como condición de contorno una función corriente dada en $z = 0$ y $z = 1$, que represente al campo de velocidades fotosférico en las bases.

Definimos la energía $E(z, t)$ y la helicidad cruzada $H(z, t)$ por unidad de longitud en z como

$$E(z, t) = \frac{1}{2} \int (u^2 + b^2) d^2x \quad (6.33)$$

$$H(z, t) = \frac{1}{2} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d^2x \quad (6.34)$$

Estas cantidades satisfacen las ecuaciones de balance,

$$\partial_t E(z, t) = \partial_z H(z, t) - \int \left(\frac{j^2}{S} + \frac{w^2}{R} \right) d^2x \quad (6.35)$$

$$\partial_t H(z, t) = \partial_z E(z, t) - \left(\frac{1}{S} + \frac{1}{R} \right) \int \mathbf{w} \cdot \mathbf{j} d^2x \quad (6.36)$$

Los valores totales de energía y helicidad cruzada en el loop se obtienen integrando, $E(t) = \int_0^1 E(z, t) dz$, $H = \int_0^1 H(z, t) dz$ y la ecuación de balance global de energía en el loop es

$$\partial_t E = H(z = 1, t) - H(z = 0, t) - D \quad (6.37)$$

donde

$$D = \int \left(\frac{j^2}{S} + \frac{w^2}{R} \right) d^2x dz \quad (6.38)$$

es la tasa total de disipación.

6.3.2 Método numérico

Las técnicas de tipo espectral (sección 4.2) que aplicamos en el capítulo 5 a un caso hidrodinámico 2D, se pueden extender a problemas magnetohidrodinámicos. Sin embargo en este caso que estamos estudiando, dado que la dependencia en z no es periódica, debe tratarse en forma especial.

Los campos a y φ se expanden en cada plano (x, y) en serie de Fourier (truncada). Los coeficientes de este desarrollo dependen tanto del tiempo como de z y los expresamos como $a_{\mathbf{k}}(z, t)$ y $\varphi_{\mathbf{k}}(z, t)$, donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$ representa un modo Fourier y $k_x, k_y = -N/2, \dots, N/2 - 1$, con N la resolución utilizada.

Las ecuaciones de evolución de estos coeficientes resultan

$$\partial_t a_{\mathbf{k}} = \partial_z \varphi_{\mathbf{k}} + [\varphi, a]_{\mathbf{k}} - \frac{k^2}{S} a_{\mathbf{k}} \quad (6.39)$$

$$\partial_t w_{\mathbf{k}} = \partial_z j_{\mathbf{k}} + [\varphi, w]_{\mathbf{k}} - [a, j]_{\mathbf{k}} - \frac{k^2}{R} w_{\mathbf{k}} \quad (6.40)$$

con $w_{\mathbf{k}} = k^2 \varphi_{\mathbf{k}}$ y $j_{\mathbf{k}} = k^2 a_{\mathbf{k}}$ los coeficientes Fourier de las componentes en z de la vorticidad y la densidad de corriente.

Los términos no lineales, $[f, g]$ que sólo involucran derivadas en x, y y que acoplan modos de diferente \mathbf{k} , se evalúan con la técnica pseudoespectral completamente dealiaseada, como se explicó en 4.2.1.

Las derivadas en z se evalúan en diferencias finitas centradas, utilizando dos grillas regulares intercaladas: los nodos para φ y w se definen como $z_i = i/N_z$, con $i = 0, 1, \dots, N_z$; los nodos para a y j son $z_{i+1/2} = (i + 1/2)/N_z$ con $i = 0, 1, \dots, N_z - 1$. De esta forma la aproximación es de segundo orden en el intervalo $1/N_z$ y además las condiciones de contorno se imponen en forma directa y sencilla sobre φ en los nodos $z = 0$ y $z = 1$, que es donde se aplica el forzado fotosférico.

La evolución en el tiempo de las ecuaciones (6.39) y (6.40) se realiza con una técnica semi-implícita: de tipo predictor-corrector de segundo orden para los términos no lineales e implícita para los lineales (ver sección 4.2.2). Los términos de derivada en z acoplan linealmente las incógnitas (los coeficientes en $t + \Delta t$), en caso de aplicarse un método implícito. Existen dos variantes para tratar este problema: se resuelve el sistema lineal que resulta, de tipo tridiagonal, en cada instante de tiempo; o bien se evalúa primero una de las ecuaciones, por ejemplo (6.39), para obtener a en $t + \Delta t$ y luego este valor se utiliza en (6.40) para obtener φ en $t + \Delta t$. Empleamos ambos métodos, obteniendo resultados esencialmente equivalentes.

Nuestro objetivo es estudiar la dinámica del arco magnético cuando imponemos un forzado en las bases fotosféricas. Este forzado intenta simular los movimientos convectivos (granulación), en la fotosfera, a una escala de longitudes típica. Se cree que en la fotosfera, el flujo es turbulento, y por lo tanto existen estructuras en un amplio rango de escalas. Pretendemos mostrar que aún con un flujo limitado a una escala característica, se desarrolla turbulencia en la parte coronal del loop. En ese sentido, la multiplicidad de escalas en el forzado fotosférico, sólo reforzaría esta conclusión.

Para analizar el efecto entonces de los movimientos en las bases a una escala dada, procederemos en dos etapas. En una primera aproximación (sección 6.3), limitamos el forzado a dos vórtices (granulos) actuando en la tapa superior ($z = 1$). La idea es estudiar el tipo de estructuras que se generan en el loop, y el desarrollo de turbulencia. La dinámica observada constituye la base para comprender la evolución de la siguiente aproximación (sección 6.4), en donde forzamos con muchas estructuras vorticosas, que se distribuyen sobre toda la tapa superior, con un diámetro y velocidades característicos de los granulos fotosféricos. Con este segundo forzado, se estudia el estado estacionario (estadístico), se obtiene la tasa de disipación de energía y su escalamiento con los parámetros del sistema.

6.4 Eventos de reconexión magnética

Aplicamos un forzado constante en el tiempo, dado por la siguiente función corriente en las bases,

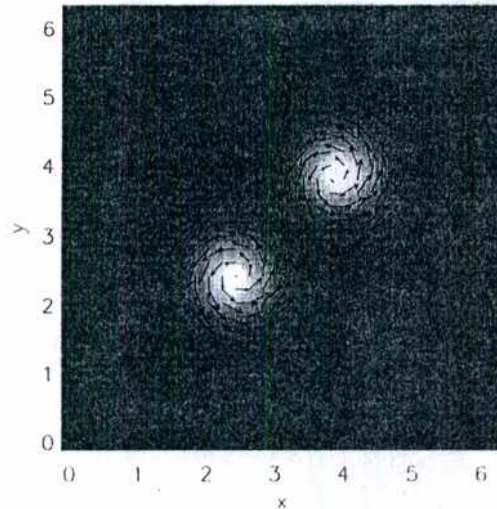
$$\varphi(x, y, z = 1) = \Phi(x, y) = \Phi_0 \left(e^{-\frac{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2}{d^2}} + e^{-\frac{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2}{d^2}} \right) \quad (6.41)$$

$$\varphi(x, y, z = 0) = 0 \quad (6.42)$$

donde $x_{1,2} = y_{1,2} = \pm\pi/4$ y $d = 2\pi/7$. Esta función representa dos vórtices de igual intensidad y sentido de rotación, centrados en (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , a una distancia d entre sí (Figura 6.2).

La constante Φ_0 determina la intensidad del forzado y, en unidades adimensionales, es proporcional a u_p/u_0 , donde u_p es una velocidad fotosférica típica. Específicamente, imponemos que la velocidad máxima en el flujo de los vórtices sea $2u_p$. Elegimos además la unidad de longitud como $l = l_p$, con l_p el diámetro típico de un granulo. Teniendo en cuenta que $u_0 = l/t_A$, resulta

Fig. 6.2: Condición de contorno en la tapa $z = 1$: campo de velocidades (flechas) sobre una imagen de la componente en z de la vorticidad. Los tonos claros indican vorticidad positiva y los oscuros negativa



$u_p/u_0 = t_A/t_p$ y la constante Φ_0 es proporcional a este cociente de tiempos que es típicamente chico, entre 10^{-2} y 10^{-1} , lo cual corresponde a un forzado en una escala de tiempos lenta comparada con el tiempo de viaje a través del loop de una onda de Alfvén.

El número de Reynolds empleado para estas simulaciones fue $R = 500$ y además supusimos que $S = R$ (es decir, el número de Prandtl $\nu/\eta = 1$). El número de Reynolds se puede expresar también como un cociente de tiempos, $S = t_\eta/t_A$, con $t_\eta = l_p^2/\eta$ el tiempo disipativo de las estructuras de escala grande (del orden del forzado granular). El escalamiento de los tiempos característicos es entonces

$$t_A \ll t_p \ll t_\eta \quad (6.43)$$

El tiempo disipativo t_η es muy grande en la corona (del orden de 10^4 años) y como señalamos anteriormente, la turbulencia es un mecanismo que permite explicar el incremento de la tasa de disipación, es decir, la disminución en los tiempos disipativos, a valores consistentes con el

calentamiento (los tiempos de enfriamiento radiativo y conductivo en loops son del orden de algunos minutos).

La condición inicial empleada fue

$$\varphi(x, y, z, t = 0) = z \Phi(x, y) \quad a(x, y, z, t = 0) = 0 \quad (6.44)$$

es decir, el campo magnético transversal nulo y una interpolación lineal del campo de velocidades entre los valores impuestos como condición de contorno en $z = 0$ y $z = 1$.

La resolución espacial utilizada en (x, y, z) fue de $96 \times 96 \times 16$. El paso temporal $\Delta t = 0.005$, en unidades de t_A .

A partir de esta condición inicial, evolucionamos las ecuaciones (6.30) y (6.31). A tiempos cortos ($t < 5 t_A$) la solución es aproximadamente el régimen lineal

$$\varphi(x, y, z, t) = z \Phi(x, y) \quad a(x, y, z, t) = t \Phi(x, y) \quad (6.45)$$

que corresponde a la solución de las ecuaciones RMHD linealizadas y sin disipación, con las condiciones de contorno e iniciales impuestas. El campo magnético transversal crece linealmente en esta etapa inicial, lo que corresponde al retorcimiento de las líneas de campo magnético total (Figura 6.3a) y a un incremento lineal con el tiempo de la corriente en los dos tubos de flujo.

La energía y disipación magnética correspondientes a la solución (6.45) crecen cuadráticamente en el tiempo, mientras que la energía y disipación cinética permanecen prácticamente constantes, como puede verse en la Figura 6.4 para $t < 5 t_A$.

A medida que la intensidad de las corrientes por los tubos de flujo se incrementa, la fuerza atractiva entre ellos (que podemos interpretar como una fuerza de Biot-Savart entre hilos de corriente) los acelera y comienzan a acercarse (Figura 6.5). La compresión del campo magnético de los dos tubos genera una hoja de corriente entre ellos y la disipación se intensifica. Los tubos finalmente se fusionan en una estructura compleja, análogamente a como sucedía en la coalescencia de vórtices en hidrodinámica 2D (capítulo 5). El evento se observa en la Figura 6.4b como un pico en ambas tasas de disipación entre $t = 7 t_A$ y $t = 11 t_A$. El proceso es claramente no lineal, y el apartamiento de la solución (6.45) es notorio.

Fig. 6.3: Líneas de campo magnético en (a) $t = 4 t_A$ y (b) $t = 11 t_A$. Las líneas en los dos instantes se originan en los mismos puntos del plano $z = 0$.

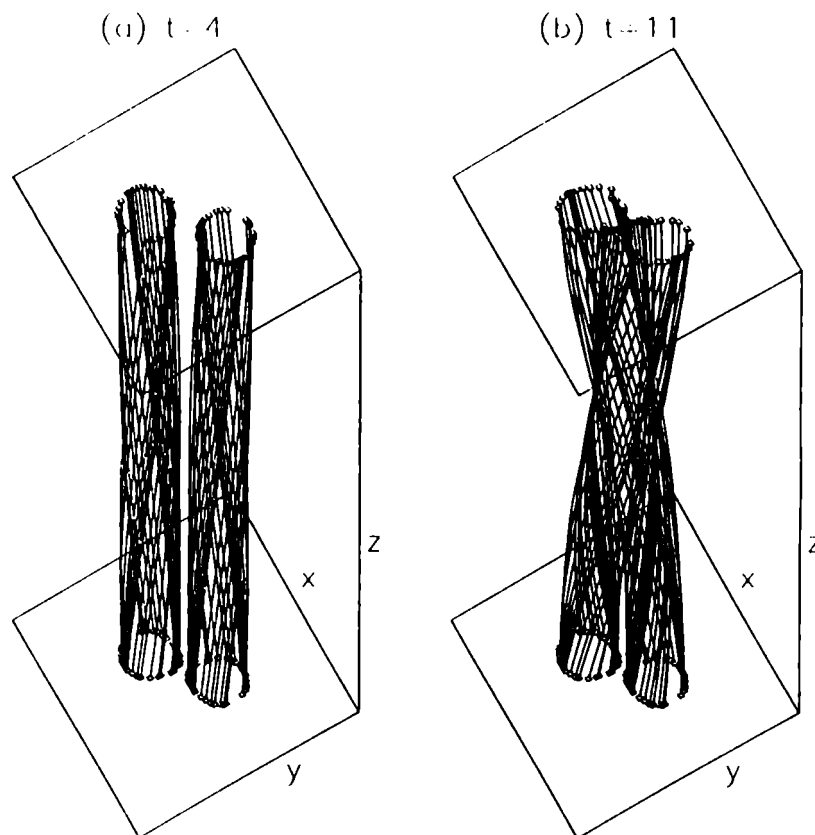
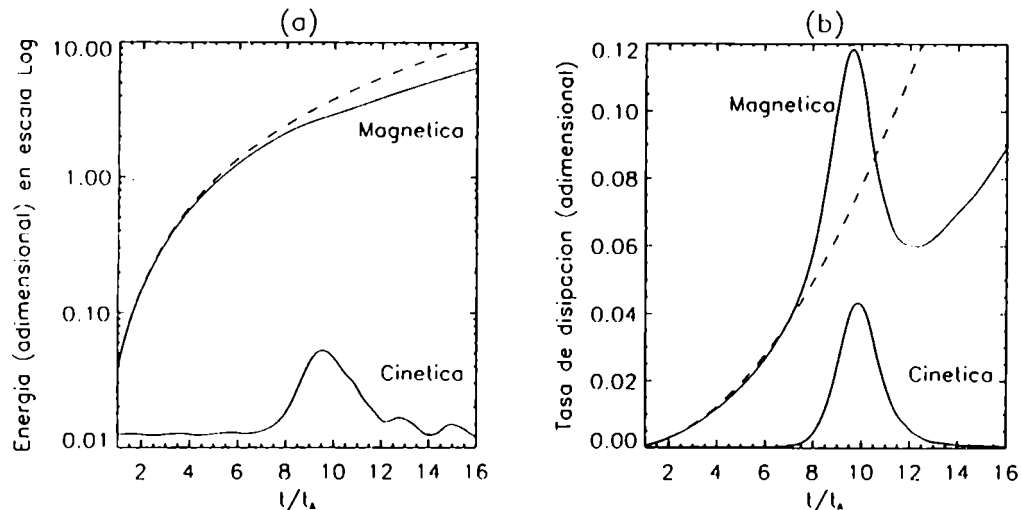


Fig. 6.4: (a) Energías magnética y cinética en función del tiempo. La escala en el eje vertical es logarítmica. (b) Tasas de disipación magnética y cinética en función del tiempo. En ambos gráficos, la línea punteada corresponde a la solución de la RMHD linealizada



El efecto sobre las líneas de campo se observa en la Figura 6.3b. Las líneas que salen de un conjunto de puntos fijos en la base $z = 0$, conectan sobre puntos transversalmente cercanos en $z = 1$ para $t = 4 t_A$. En $t = 11 t_A$, luego del evento impulsivo, las líneas conectan sobre puntos muy alejados, que anteriormente correspondían al tubo de flujo opuesto. Este cambio topológico del campo magnético se conoce como *reconexión magnética* (ver [Parker 1994], [Priest 1982], [Biskamp 1993] para resúmenes sobre este tema amplio y complejo). La reconexión que aquí observamos es 3D, y ha sido estudiada en situaciones similares por otros autores ([Longcope & Strauss 1994]). Un modelo reciente que permite predecir las zonas en donde se producirá reconexión magnética 3D es el de las llamadas cuasi-separatrices (QSL) ([Priest & Démoulin 1995], [Démoulin et al. 1996]). El estudio detallado de las QSL sobre esta simulación RMHD que estamos describiendo se encuentra en [Milano et al. 1998].

En la Figura 6.6 se muestra la densidad de corriente y el campo de velocidades a mitad del loop ($z = 1/2$) en dos instantes correspondientes al pico disipativo. La Figura 6.6a es típica de los procesos de reconexión ([Biskamp 1993]): el fuerte gradiente de campo magnético transversal generado por la atracción de los tubos de corriente, produce una hoja de corriente negativa muy intensa. El fluido ingresa lateralmente a esta zona de reconexión y es expulsado en los extremos

Fig. 6.5: Imágenes de la densidad de corriente en el plano $z = 1/2$ y campo magnético transversal (flechas), para distintos instantes. Los tonos claros indican corriente negativa en la dirección z y los oscuros positiva.

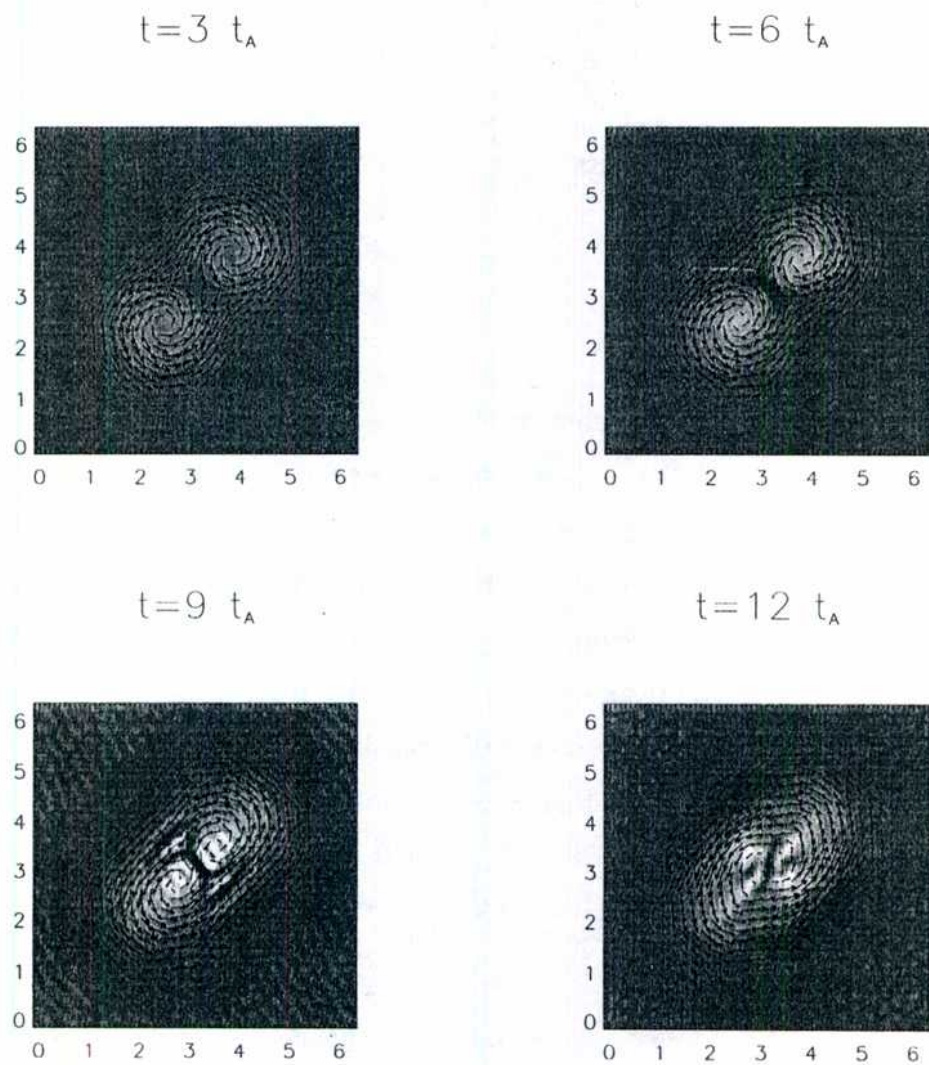
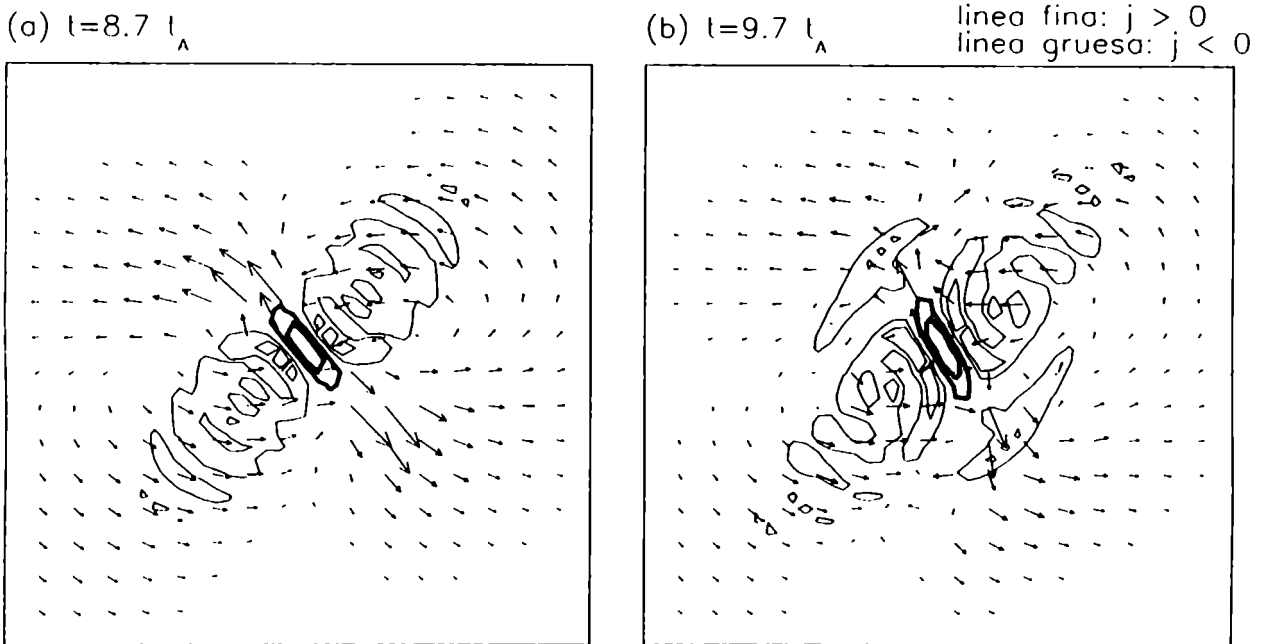


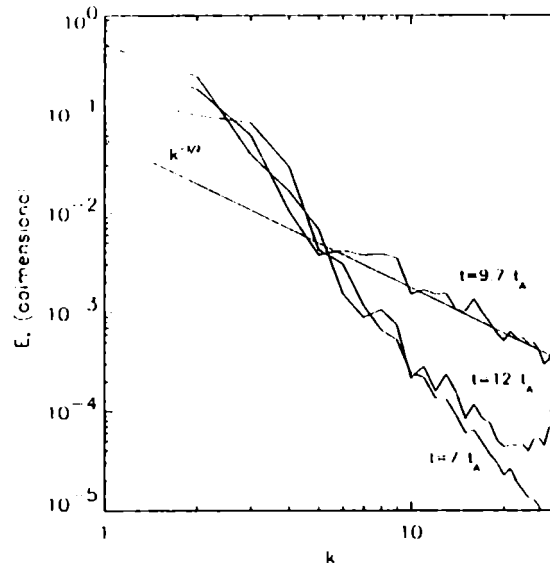
Fig. 6.6: Contornos de la densidad de corriente en el plano $z = 1/2$ y campo de velocidades (flechas), para (a) $t = 8.7 t_A$ y (b) $t = 9.7 t_A$, donde la disipación es máxima.



en forma de chorros, a una alta velocidad (del orden del campo magnético cuadrático medio en el plano). En la Figura 6.6b, correspondiente al pico de disipación en $t = 9.7 t_A$, tanto los chorros de velocidad como la hoja de corriente, se deformaron e inclinaron respecto al instante anterior. En esta figura, observamos estructuras fragmentadas de corriente. El desarrollo de estructura fina ha sido observado también por otros autores en simulaciones de procesos de reconexión turbulenta ([Matthaeus & Lamkin 1986]).

Una caracterización precisa del desarrollo de estructuras de pequeña escala en la reconexión, puede obtenerse analizando los espectros de energía. Como se ha señalado, en un régimen de turbulencia MHD la cascada de energía consiste precisamente en la transferencia de energía desde las escalas grandes de forzado hacia las escalas chicas en donde los efectos disipativos comienzan a ser importantes. En una situación homogénea, isotrópica y estacionaria, el espectro de energía según el modelo de Kraichnan (sección 6.1.1) es $E_k \sim k^{-3/2}$.

Fig. 6.7: Espectro de energía transversal en $z = 1/2$ para distintos instantes. Se indica la ley de Kraichnan $k^{-3/2}$ como referencia.



El espectro de energía (transversal) a diferentes instantes, para el plano $z = 1/2$ se muestra en la Figura 6.7. En $t \sim 9 t_A$, cuando la disipación es máxima, el espectro sigue una ley de potencias con pendiente $-3/2$ lo que es indicativo de un régimen turbulento, aun cuando en este caso el estado no sea estacionario. El desarrollo de espectros anchos turbulentos, de tipo Kraichnan o Kolmogorov en MHD no estacionaria ha sido reportado también por [Matthaeus & Lamkin 1986] en un proceso de reconexión no forzada y por [Hendrix & van Hoven 1996] en simulaciones RMHD.

El espectro antes y después del evento de reconexión presenta pendientes mucho más pronunciadas (mayores que k^{-2}). Es natural concluir que la coalescencia de los tubos de flujo dispara un proceso altamente no lineal, que involucra un amplio rango de escalas, como indica el espectro ancho en el momento que ocurre el pico de disipación. Es importante notar que la existencia de este transitorio turbulento podría pasar desapercibida si uno sólo se concentra en los aspectos globales o macroscópicos de la evolución, que muestra una estructura magnética bastante organizada, con la hoja de corriente entre los tubos de flujo y los chorros de velocidad en los extremos (Figura 6.6). Sin embargo, el crecimiento intenso de la densidad de corriente en una región muy localizada del espacio indica la sistemática excitación de modos Fourier de pequeña escala con

un alto grado de coherencia. Esta transferencia bastante abrupta de excitaciones de corriente, desde las escalas grandes a las pequeñas puede ser explicada naturalmente como producida por la cascada directa de energía del transitorio turbulento. El espectro tipo $E_k \sim k^{-3/2}$ (y cualquier espectro con pendiente mayor a k^{-2}) asegura que la disipación, cuyo espectro es $k^2 E_k \sim k^{1/2}$, sea mayor para las escalas chicas (k grande), en donde los tiempos disipativos se hacen comparables con los de ingreso y transferencia de energía. La cascada de energía es un buen mecanismo para entender por lo tanto la intensificación en la tasa de disipación que se observa durante el evento de reconexión.

6.5 Tasa de calentamiento coronal y ley de escala

Como segundo paso en el estudio de la dinámica de un loop forzado en sus bases, aplicamos como condición de contorno una función corriente constante en el tiempo, cuyos coeficientes de Fourier son distintos de cero solamente en un anillo de modos angosto:

$$\varphi_{\mathbf{k}}(z = 1, t) = \begin{cases} \Phi_0 & \text{si } k_o \leq |\mathbf{k}| \leq k_o + 1 \quad \text{y} \quad k_x, k_y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.46)$$

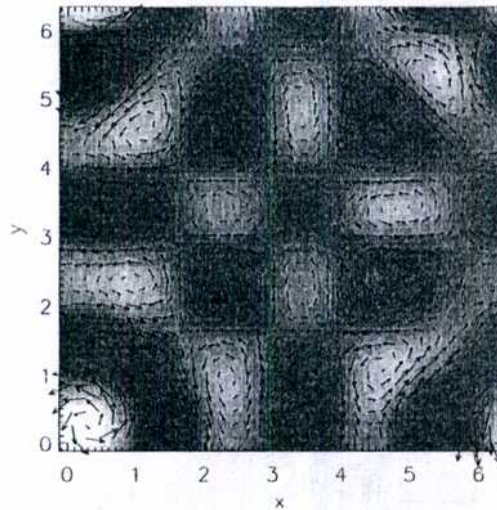
Como en la sección anterior, Φ_0 es proporcional a $u_p/u_0 = t_A/t_p$ (de forma tal que la velocidad máxima sea $2 u_p$). Elegimos $k_o = 3$, para que las estructuras vorticosas dadas por la función corriente de (6.46), tengan un diámetro típico de orden unidad. La Figura 6.8 muestra el campo de velocidades y la vorticidad de este forzado.

Empleamos nuevamente como condición inicial un campo magnético transversal nulo y una interpolación lineal del campo de velocidades entre los valores en $z = 1$ y $z = 0$.

La resolución utilizada fue de $96 \times 96 \times 32$ y con un número de Reynolds $S = R = 500$.

Como en el caso anterior, la primera etapa de la evolución es aproximadamente la solución lineal (6.45). Una vez superada esta etapa, comienzan a actuar las no-linealidades, y las estructuras magnéticas se hacen cada vez más complejas. El aspecto cualitativo de la distribución de corrientes se muestra en la Figura 6.9. Se observan tubos de corriente (estructuras redondeadas en los cortes transversales) y entre ellos estructuras más elongadas, del tipo de las hojas de corriente que describimos en el caso simplificado previo.

Fig. 6.8: Condición de contorno en la tapa $z = 1$: campo de velocidades (flechas) sobre una imagen de la vorticidad. Los tonos claros indican vorticidad positiva y los oscuros negativa



En este caso, evolucionamos el sistema durante un período mas largo de tiempo ($400 t_A$) de forma tal de alcanzar un estado estacionario. Para recuperar las dimensiones en nuestros resultados numéricos, utilizamos valores típicos de arcos magnéticos coronales: $L \sim 50000$ km (longitud del loop), $l_p \sim 1000$ km (diámetro granular fotosférico), $u_p \sim 1$ km/s (velocidad fotosférica), $B_0 \sim 100$ G (campo magnético longitudinal) y $n \sim 5 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}$ (densidad coronal). La velocidad de Alfvén longitudinal resulta $v_A \sim 3000$ km/s y el tiempo de Alfvén $t_A = L/v_A \sim 16$ s. El tiempo fotosférico (tiempo de giro de un granulo) es $t_p = l_p/u_p \sim 1000$ s.

La Figura 6.10 muestra la tasa de disipación de energía magnética y cinética (ec. (6.47)) en función del tiempo, $\rho L l_p^2 (l_p/t_A^3) D$, con

$$D = D_M + D_C = \int \frac{j^2}{S} d^2x dz + \int \frac{w^2}{R} d^2x dz \quad (6.47)$$

la disipación (sin dimensiones) y donde $\rho = m_i n$ ($m_i \sim 1.6 \times 10^{-24}$ g = masa iónica) es la densidad de masa coronal que junto a los otros parámetros permite obtener el valor de la la tasa en erg/s.

En la Figura 6.11 se grafica la energía total en función del tiempo.

Fig. 6.9: Secciones transversales de la caja de simulación, que muestran imágenes de la densidad de corriente. Los tonos rojos indican corriente positiva (en la dirección longitudinal) y los verdes negativa.

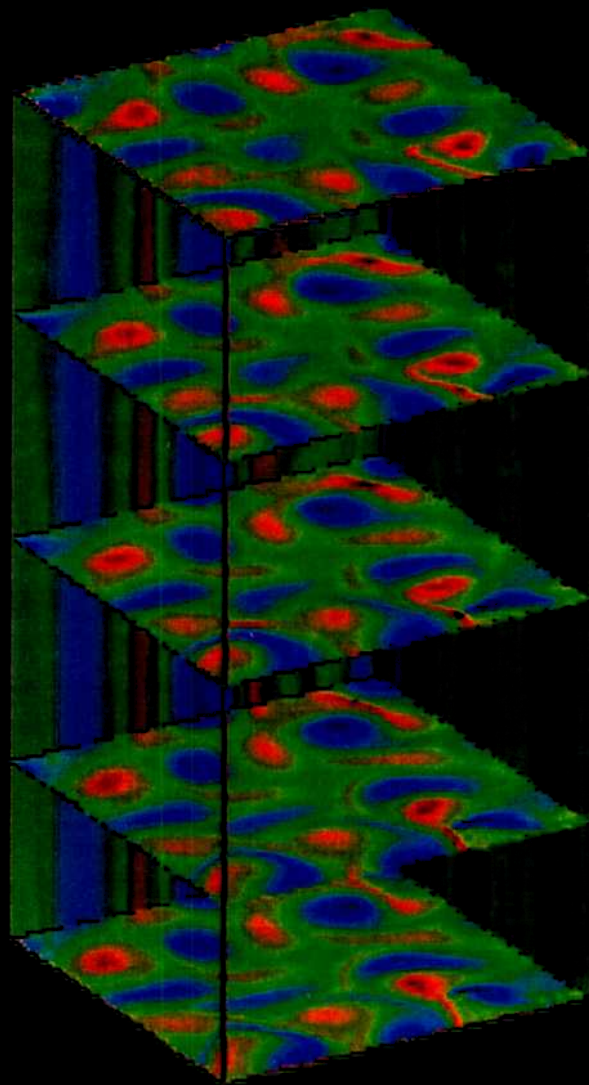




Fig. 6.10: Tasa de disipación magnética y cinética en función del tiempo y tasa de ingreso de energía

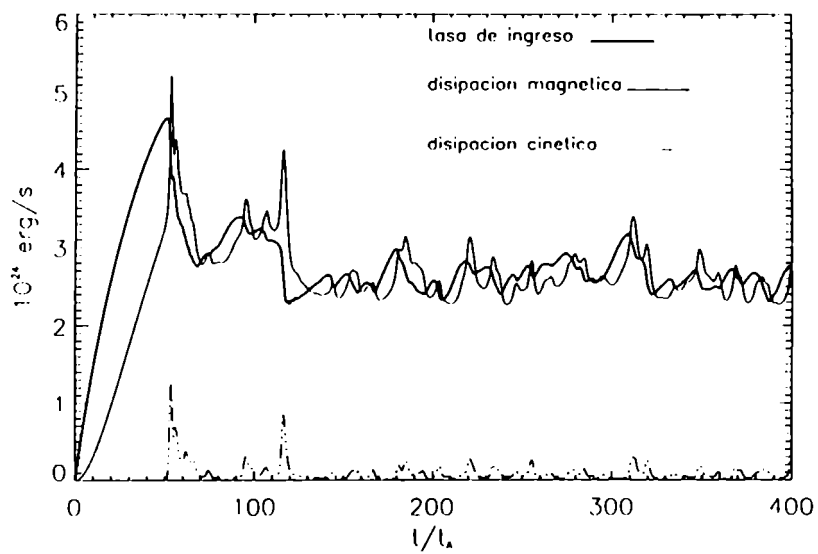
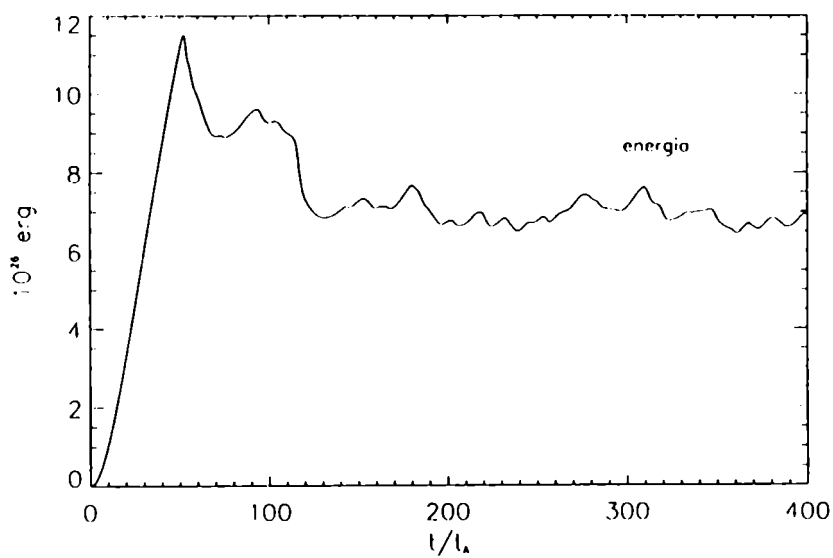


Fig. 6.11: Energía total en función del tiempo.



En un tiempo $t \sim 80 - 100 t_A$, que corresponde a valores del orden de un tiempo fotosférico ($t_p \sim 60 t_A$), el sistema llega a un estado estacionario, en un sentido estadístico. Se observa que la evolución en la Figura 6.10 consiste en una sucesión y superposición de eventos disipativos, como los descritos en la sección previa. En el capítulo siguiente, presentaremos un análisis estadístico de este tipo de eventos, pero aplicado a una simulación bidimensional, que permite extenderse, dado su menor costo computacional, hasta tiempos mucho más largos.

En el régimen estacionario, la tasa de ingreso de energía a través de la tapa superior se iguala, estadísticamente, a la tasa de disipación total en el loop, de manera que

$$\langle \partial_t E \rangle = \langle H_I \rangle - \langle D \rangle = 0 \quad (6.48)$$

donde los \langle, \rangle indican promedios sobre períodos largos de tiempo y

$$H_I = \frac{1}{2} \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{b} d^2x \quad (6.49)$$

con la integral evaluada sobre la tapa $z = 1$. La línea gruesa en la Figura 6.10 corresponde al valor obtenido de $\rho L l_p^2 (l_p^2/t_A^3) H_I$ (en erg/s), en función del tiempo.

El flujo de energía por unidad de área ($(2\pi l_p)^2$) y de tiempo, es decir, el valor del calentamiento en el loop, que obtuvimos en las simulaciones es:

$$\mathcal{F} = \frac{\langle \rho L l_p^2 H_I \rangle}{l_A^3 (2\pi)^2} = \frac{\langle \rho L l_p^2 D \rangle}{l_A^3 (2\pi)^2} \sim 6 \cdot 10^6 \text{ erg}/(\text{cm}^2 \text{ s}) \quad (6.50)$$

Este valor es consistente con el valor observacional para regiones activas aceptado actualmente, de entre 5×10^5 y 10^7 erg/(cm² s) ([Withbroe & Noyes 1977]) y es, como señalamos anteriormente, la condición que se le exige a cualquier modelo de calentamiento.

Debemos recalcar, que si bien la tasa de ingreso de energía en estado estacionario, y por lo tanto también la tasa de disipación, se puede estimar a partir de los parámetros que hemos supuesto, su valor depende de la respuesta del sistema al forzado. En un sistema no lineal la respuesta del sistema no es obvia a priori, y se debe asumir algún modelo si se pretende realizar este tipo de estimaciones. El modelo de Parker (1972, 1983) del calentamiento de un arco magnético, se basa en la formación y disipación de hojas de corriente, que espontáneamente se generan en la

evolución cuasi-estática de un campo magnético libre de fuerzas (force-free). Reinterpretamos aquí este modelo, como la dinámica turbulenta de las ecuaciones MHD, que tal como muestran nuestras simulaciones directas, desarrollan hojas de corriente como un proceso natural en la cascada de energía hacia las escalas pequeñas y alcanzan un estado estadísticamente estacionario con una tasa adecuada de disipación.

Estudiaremos ahora como depende la tasa de disipación de los distintos parámetros físicamente relevantes del problema. Observemos en primer lugar, que en las ecuaciones RMHD adimensionales (ec. (6.30) y (6.31)), el único parámetro adimensional que aparece explícitamente es el número de Reynolds $S = R = l_p^2/(\eta t_A)$. La condición de contorno introduce además otro parámetro adimensional t_A/t_p que, como hemos visto, es proporcional a la intensidad del forzado. Cualquier cantidad física, la obtenemos de la evolución de las ecuaciones adimensionales (6.30) y (6.31), sujetas al forzado especificado. Por razones entonces puramente dimensionales, concluimos que para cualquier cantidad física del sistema, su valor adimensional Π debe ser una función arbitraria de los únicos dos parámetros adimensionales relevantes del problema, es decir

$$\Pi = F(\Pi_1, \Pi_2) \quad \Pi_1 = \frac{t_A}{t_p} \quad \Pi_2 = S \quad (6.51)$$

Por ejemplo, para la tasa de disipación media de energía por unidad de masa

$$\epsilon = \frac{1}{(2\pi)^2} \frac{l_p^2}{t_A^3} \langle D \rangle \quad (6.52)$$

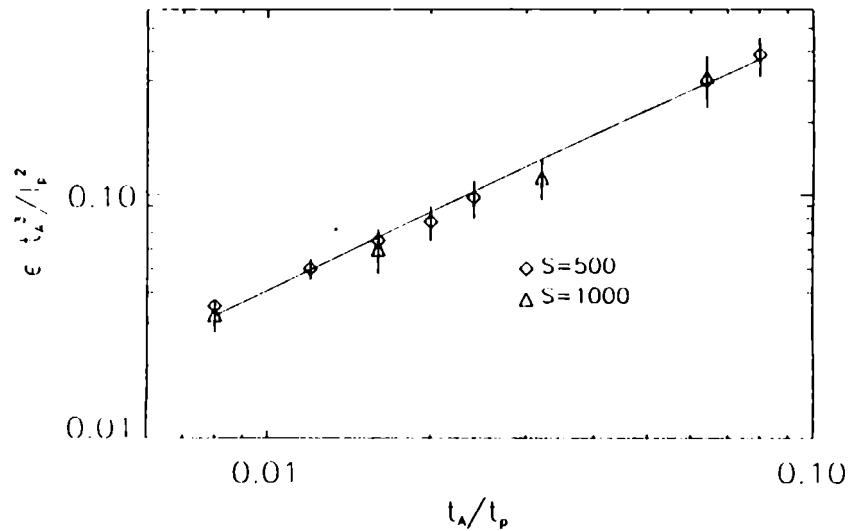
(ver ecuación (6.47)), que se mide en unidades de longitud²/tiempo³, podemos construir la cantidad adimensional $\Pi = \epsilon t_A^3/l_p^2$, con lo cual

$$\epsilon = \frac{l_p^2}{t_A^3} F\left(\frac{t_A}{t_p}, S\right) \quad (6.53)$$

En un regimen turbulento, la tasa de disipación es independiente del número de Reynolds, cuando este tiende a infinito. Para Reynolds moderados, como los que aquí consideramos, se espera una dependencia leve (de hecho esta es la suposición para justificar simulaciones numéricas directas con resolución limitada). Suponiendo entonces la hipótesis de turbulencia desarrollada,

$$\epsilon = \frac{l_p^2}{t_A^3} F\left(\frac{t_A}{t_p}\right) \quad (6.54)$$

Fig. 6.12: Tasa media de disipación (adimensional) para distintos valores del parámetro t_A/t_p y dos diferentes números de Reynolds, $S = 500$ (cuadrados) y $S = 1000$ (triángulos)



Para determinar esta dependencia funcional, realizamos una secuencia de simulaciones numéricas, con $S = 500$, variando el parámetro t_A/t_p en cada una, dentro de un rango razonable para la corona, de entre $8 \cdot 10^{-3}$ y $8 \cdot 10^{-2}$. Los resultados (en términos de la cantidad adimensional $\epsilon t_A^3 / l_p^2$) se muestran en la Figura 6.12.

Vemos que los puntos ajustan a una ley de potencias, es decir,

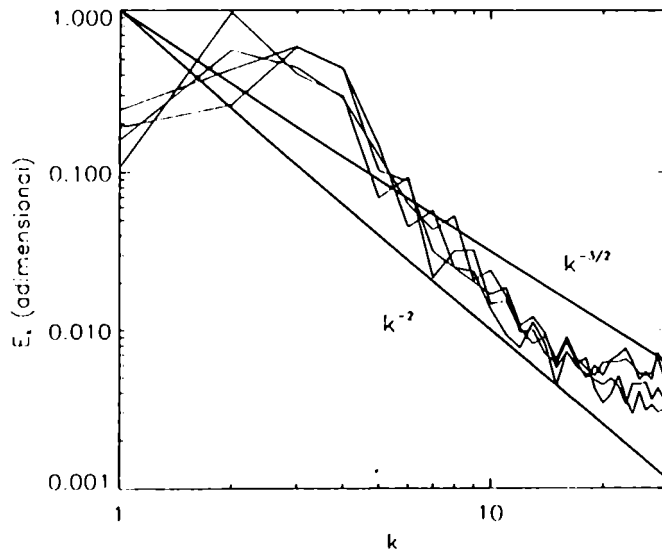
$$\epsilon = \frac{l_p^2}{t_A^3} \left(\frac{t_A}{t_p} \right)^s \quad (6.55)$$

donde el valor del exponente s , determinado por cuadrados mínimos, es

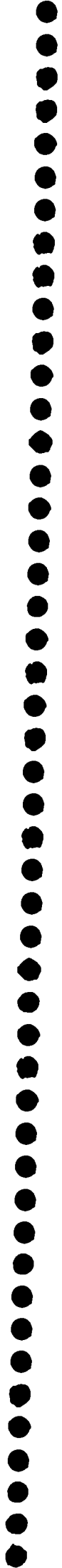
$$s = 1.06 \pm 0.07 \quad (6.56)$$

En la misma figura, se grafican los puntos obtenidos para una secuencia de simulaciones con $S = 1000$ que muestran la poca dependencia de los resultados con el número de Reynolds. Incrementar aún más el valor de S (por ejemplo, $S = 2000$), requería, como se comentó en la sección 4.2.3, de un aumento en la resolución, con el consiguiente costo computacional que ello implica, especialmente debido a que se aspira a alcanzar un régimen estacionario.

Fig. 6.13: Espectro de energía transversal en $z = 1/2$, para 4 instantes diferentes, separados por $\Delta t = 100 t_A$ en una simulación con $S = 1000$ y $t_A/t_p = 0.064$. Las líneas rectas de referencia corresponden a k^{-2} y $k^{-3/2}$.



Finalmente, en la Figura 6.13 mostramos el espectro de energía en el plano $z = 1/2$, en diferentes instantes del régimen estacionario de una simulación con $S = 1000$ y $t_A/t_p = 0.064$. Si bien la resolución perpendicular de 96×96 empleada es modesta, lo cual dificulta el desarrollo de un rango inercial amplio, se observa que los espectros son anchos, consistentes con leyes de potencias entre k^{-2} y $k^{-3/2}$.



Capítulo 7

Fenómenos intermitentes y distribución de nanofulguraciones

Se estudian en este capítulo aspectos de intermitencia en la dinámica turbulenta de un arco magnético coronal. Se presenta una simplificación de las ecuaciones RMHD al caso MHD 2D, que permite describir la dinámica de una sección del loop. Mediante una simulación de larga duración de estas ecuaciones, se realiza un análisis estadístico de los eventos impulsivos en la serie temporal de disipación de energía. Estos eventos se identifican con las llamadas nanofulguraciones solares, y su ley de distribución de energías se compara con leyes empíricas sobre distribución de fulguraciones y con modelos previos basados en conceptos de auto-criticalidad organizada.

Se describe brevemente el tipo de estructuras disipativas observadas (intermitencia espacial) y su relación con el fenómeno de reconexión magnética. Se presenta también un modelo simple de estructuras disipativas basado en la teoría de Kraichnan sobre turbulencia MHD y se discute su relación con la ley de distribución de eventos impulsivos.

7.1 Introducción

En el capítulo 6 mostramos como un loop coronal forzado en sus bases fotosféricas alcanza un estado estacionario turbulento, en el marco de un modelo RMHD. La tasa de disipación, que es la

cantidad física más relevante, alcanza un valor medio que es consistente con el calentamiento de regiones activas. Nuestro interés ahora es analizar las fluctuaciones de la tasa respecto a su valor medio, o más específicamente, nos proponemos estudiar la estadística de los eventos impulsivos de disipación, que como hemos visto, aparecen en la serie temporal de la tasa en función del tiempo (ver Figuras 6.4 y 6.11).

Estas variaciones de la tasa respecto a su valor medio, son típicas en los sistemas turbulentos y son una manifestación del fenómeno de intermitencia. La intermitencia se presenta también espacialmente, en el sentido que la disipación no es homogénea, sino que se concentra en estructuras que ocupan una fracción reducida del área total. Las variaciones temporal y espacial de la tasa de disipación, y por lo tanto de la tasa de transferencia de energía entre las diferentes escalas del sistema debida a las no linealidades, fue una de las primeras objeciones a la teoría de turbulencia de Kolmogorov de 1941. La inclusión de estas variaciones fue realizada por Kolmogorov y Obukhov en trabajos posteriores ([Kolmogorov 1962]). La intermitencia espacial fue estudiada en el marco de modelos fractales y multifractales ([Frisch 1996]) en el caso hidrodinámico y más recientemente en modelos simplificados (llamados modelos en cáscaras) para el caso MHD ([Carbone 1994], [Biskamp 1993]). Estos modelos proporcionan leves correcciones a la ley de potencias de Kolmogorov, en el caso HD, y a la de Kraichnan para MHD.

No es la intención de este trabajo analizar estos modelos teóricos sino estudiar en un caso práctico (la dinámica RMHD de un loop) las características estadísticas de los eventos impulsivos de disipación. Para ello, debemos realizar una simplificación adicional sobre el modelo RMHD de un arco magnético que presentamos previamente, que consiste en describir la dinámica en una sección transversal mediante las ecuaciones MHD 2D. Esto nos permitirá realizar una simulación de larga duración para así poder contar con suficientes eventos para el análisis estadístico.

7.2 Modelo MHD 2D de una sección de arco magnético

En la sección 3.6 se presentaron las ecuaciones MHD 2D como una simplificación al caso RMHD. Con la notación introducida en los capítulos 3 y 6, estas ecuaciones son:

$$\partial_t a = f + [\varphi, a] + \eta \nabla^2 a \quad (7.1)$$

$$\partial_t w = g + [\varphi, w] - [a, j] + \nu \nabla^2 w \quad (7.2)$$

$$w = -\nabla^2 \varphi \quad j = -\nabla^2 a \quad (7.3)$$

En este caso estudiaremos una sección fija del loop, y por lo tanto no consideramos la dependencia en z , es decir $a = a(x, y, t)$, $\varphi = \varphi(x, y, t)$.

Las derivadas en $[u, v] = \partial_x u \partial_y v - \partial_y u \partial_x v$ y en $\nabla^2 = \partial_{xx} + \partial_{yy}$ involucran solamente las variables x, y . Sin embargo, debemos proponer algún forzado (términos f y g en (7.1) y (7.2)) que represente los términos originales $v_A \partial_z \varphi$ y $v_A \partial_z j$ en las ecuaciones RMHD. Las ecuaciones RMHD en esta perspectiva se pueden considerar como un conjunto de sistemas MHD bidimensionales, distribuidos a lo largo del eje del loop y que interactúan entre ellos a través de los términos $v_A \partial_z$.

La aproximación más sencilla, consiste en suponer, que en promedio, el efecto de los términos de derivada en z corresponden a su valor para una solución de la RMHD linealizada (ver ec. (6.45) en el capítulo 6), y por lo tanto

$$f = v_A \partial_z \varphi \sim v_A \frac{\Phi(x, y)}{L} \quad g = v_A \partial_z j \simeq 0 \quad (7.4)$$

donde $\Phi(x, y)$ es la función corriente en la tapa y L la longitud del loop. Esta hipótesis fue asumida en [Dmitruk & Gómez 1997a],b, [Dmitruk et al. 1998]) y [Einaudi et al. 1996]. Para un forzado fotosférico de tipo granular,

$$\Phi(x, y) \sim u_p l_p \chi(x, y) \quad (7.5)$$

donde $\chi(x, y)$ es una función adimensional, de valor absoluto de orden unidad, que por ejemplo puede representar un anillo de modos en el espacio Fourier. Se tiene entonces,

$$f(x, y) = f_0 \chi(x, y) \quad f_0 = v_A u_p \frac{l_p}{L} \quad (7.6)$$

Notemos sin embargo, que en base a las consideraciones dimensionales presentadas en el capítulo anterior sobre las ecuaciones RMHD, la cantidad f_0 que representa el orden de mag-

nitud del forzado, puede ir multiplicada por una potencia, indeterminada a priori, del parámetro t_A/t_p ,

$$f_0 = v_A u_p \frac{l_p}{L} \left(\frac{t_A}{t_p}\right)^r \quad (7.7)$$

en donde suponemos que no hay dependencia con el otro parámetro adimensional que es el número de Reynolds, bajo la hipótesis de turbulencia desarrollada.

La aproximación sencilla, de interpolación lineal (7.6), corresponde al caso $r = 0$. Una segunda opción, más elaborada, se basa en imponer la consistencia de este modelo con la ley de escala para la tasa de disipación por unidad de masa, obtenida en el caso RMHD anterior.

En el caso RMHD obtuvimos la ley de escala,

$$\epsilon_{RMHD} \sim \frac{l_p^2 t_A}{t_A^3 t_p} \quad (7.8)$$

En este modelo MHD 2D, la ley de escala para la tasa puede obtenerse con el siguiente razonamiento. Observemos que en las ecuaciones (7.1) y (7.2) con $f = f_0 \chi(x, y)$ y $g = 0$ aparecen dos parámetros en forma explícita: f_0 y η (suponemos $\nu = \eta$). A diferencia del caso RMHD, toda la información de la condición de contorno fotosférica se ha modelado en el parámetro f_0 . Este parámetro tiene unidades de velocidad al cuadrado y es el que determina finalmente el orden de magnitud de los campos magnético y de velocidad. Resulta entonces conveniente, adimensionalizar las ecuaciones, utilizando $f_0^{1/2}$ como unidad de velocidad. La restante unidad necesaria es la unidad de longitud en x, y que tomamos como l_p . La unidad de tiempo es la combinación de estas dos, como $t_0 = l_p/f_0^{1/2}$. Las ecuaciones MHD 2D (con $\nu = \eta$) en términos de estas unidades resultan

$$\partial_t a = \chi(x, y) + [\varphi, a] + \eta_0 \nabla^2 a \quad (7.9)$$

$$\partial_t w = [\varphi, w] - [a, j] + \eta_0 \nabla^2 w \quad (7.10)$$

donde $\eta_0 = \eta/(l_p f_0^{1/2})$ y los campos a y φ son aquí adimensionales. Claramente, en estas ecuaciones el único parámetro es η_0 que es proporcional al número de Reynolds. Cualquier cantidad

física adimensional Π , será entonces función de este parámetro, $\Pi = F(\eta_0)$. Para la tasa de disipación por unidad de masa, cuyas unidades son de longitud²/tiempo³, construimos Π en base a nuestras unidades de velocidad $f_0^{1/2}$ y distancia l_p como $\Pi = \epsilon l_p / f_0^{3/2}$. Por lo tanto

$$\epsilon \sim \frac{f_0^{3/2}}{l_p} F(\nu_0) \quad (7.11)$$

Si suponemos entonces que la tasa no depende del Reynolds (turbulencia desarrollada), obtenemos la siguiente ley de escala para el caso 2D,

$$\epsilon_{2D} \sim \frac{f_0^{3/2}}{l_p} \quad (7.12)$$

Comparando con ϵ_{RMHD} (ec. (7.8)) resulta que la ley de consistencia para f_0 es

$$f_0 \sim \frac{l_p^2}{t_A^2} \left(\frac{t_A}{t_p} \right)^{2/3} \quad (7.13)$$

y en términos de la forma presentada en (7.7) resulta

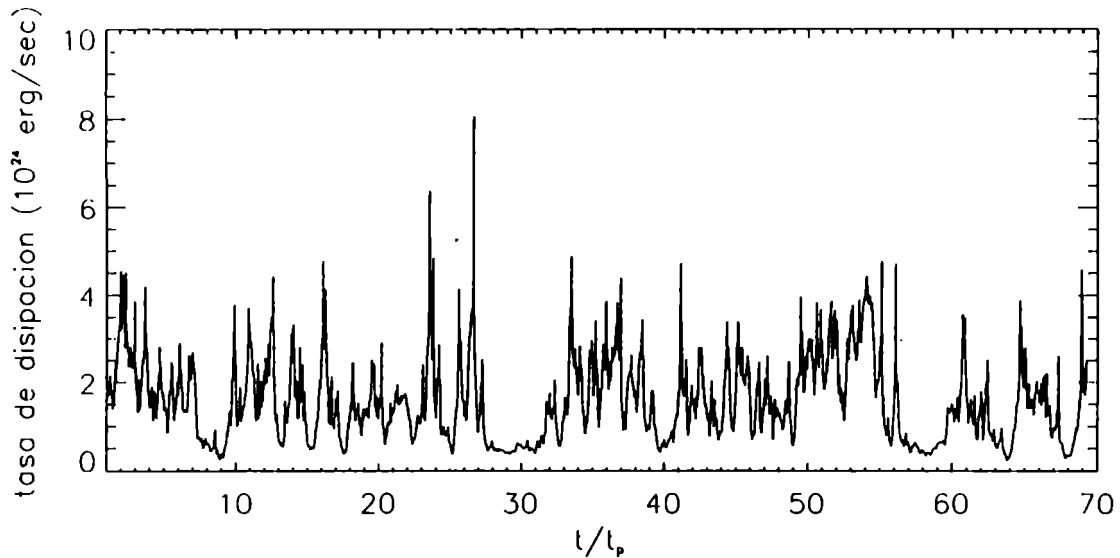
$$f_0 \sim v_A u_p \frac{l_p}{L} \left(\frac{t_A}{t_p} \right)^{-1/3} \quad (7.14)$$

es decir, el índice $r = -1/3$. La amplitud del forzado f_0 consistente con la tasa RMHD aparece entonces amplificada (ya que $t_p > t_A$) por un factor $(t_p/t_A)^{1/3}$ respecto a la amplitud del forzado sencillo de interpolación lineal. Para valores típicos coronales, este factor varía entre 4 y 2.

7.3 Estadística de eventos. Distribución de nanofulguraciones y fulguraciones

Realizamos una simulación numérica de las ecuaciones MHD 2D (7.1), (7.2), suponiendo condiciones de contorno periódicas en $0 \leq x, y \leq 2\pi$. Integramos las ecuaciones en el espacio Fourier, y empleamos nuevamente un tratamiento pseudoespectral dealiasado para los términos no lineales (ver sección 4.2). El esquema temporal es de tipo predictor-corrector para los términos no-lineales e implícito para los términos disipativos.

Fig. 7.1: Serie temporal de la tasa de disipación de energía total. El tiempo en el eje horizontal se mide en unidades de $t_p = 1000$ s.



El forzado está dado por un anillo angosto de modos en el espacio Fourier,

$$f_{\mathbf{k}} = \begin{cases} f_0 & \text{si } 3 \leq |\mathbf{k}| \leq 4 \quad \text{y} \quad k_x, k_y \neq 0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (7.15)$$

con f_0 constante en el tiempo. Elegimos un forzado simple, de espectro angosto y no aleatorio, para asegurarnos que los espectros de energía y la intermitencia que obtengamos se origina exclusivamente por la naturaleza no-lineal de las ecuaciones MHD y no por la complejidad del forzado.

La tasa de disipación en función del tiempo, para una simulación que se extiende durante unos $70 t_p \sim 4400 t_A$ se muestra en la Figura 7.1

En esta simulación se tomaron los mismos valores típicos coronales para los parámetros que en el capítulo 6. Adoptamos en este caso una amplitud de forzado dada por la interpolación lineal (7.6). El número de Reynolds es $S = \langle b^2 \rangle^{1/2} l_p / \eta \sim 500$, $\nu = \eta$ y la resolución espacial de 192×192 . Realizamos también una simulación mas extensa en el tiempo, durante unos $200 t_p \sim 12400 t_A$, pero de menor resolución (96×96) y número de Reynolds ($S = 200$), cuyos resultados se describen en Dmitruk y Gomez ([Dmitruk & Gómez 1997a]).

Pese a que el forzado es coherente y constante en el tiempo, el comportamiento de la serie temporal de disipación es altamente intermitente ([Frisch 1996], [Dmitruk et al. 1998]). Parker 1988 propuso que la disipación de energía de las estructuras magnéticas ocurre en un gran número de pequeños eventos, los cuales bautizó como “nanofulguraciones” (por su menor energía comparada con las fulguraciones solares). La superposición de un gran número de dichos eventos daría la apariencia global de un proceso de calentamiento homogéneo y estacionario. En un escenario turbulento, resulta natural asociar estos eventos impulsivos (tanto en espacio como en tiempo) con la intermitencia presente en todo régimen de turbulencia.

Asociamos entonces los picos de disipación de energía con las llamadas nanofulguraciones. Estimamos el número de eventos por unidad de energía y tiempo, $P(E) = dN/dE$, de forma tal que

$$\mathcal{R} = \int_{E_{min}}^{E_{max}} dE P(E) \quad (7.16)$$

es el número total de eventos por unidad de tiempo, y

$$D = \int_{E_{min}}^{E_{max}} dE E P(E) \quad (7.17)$$

es la tasa de disipación de energía (en erg/seg) a la cual contribuyen todos los eventos en el rango de energías $[E_{min}, E_{max}]$.

La inspección de la serie temporal de disipación $D(t)$ (Figura 7.1) indica que los eventos están en un régimen de alto apilamiento o concentración, es decir, que la tasa de eventos \mathcal{R} , multiplicada por la duración típica de uno de ellos, es mucho mayor que 1. En cada instante, muchos eventos están ocurriendo simultáneamente.

Este escenario de apilamiento es un serio problema para la realización de cualquier tipo de análisis estadístico. Para superar esta dificultad, definimos un evento de la siguiente manera: en primer lugar, establecemos una tasa de disipación umbral D_0 en la serie temporal de la Figura 7.1, del orden de su valor medio; un “evento” es entonces el exceso de disipación que comienza cada vez que $D(t)$ supera a D_0 y termina cuando $D(t)$ vuelve a ser menor que D_0 . Fijado un umbral, realizamos un análisis estadístico de los eventos, guardando la información de su valor de pico, su duración y la energía total disipada. La suposición implícita detrás de esta hipótesis de

trabajo es que la fracción de energía disipada que emerge sobre el umbral D_0 , es estadísticamente representativa de todo el conjunto de eventos.

El número de eventos por unidad de energía y tiempo (es decir, el número de eventos cuya energía cae entre E y $E + dE$, por unidad de energía y por unidad de tiempo) presenta un comportamiento tipo ley de potencias (Figura 7.2a),

$$P(E) = A E^{-1.5 \pm 0.2} \quad (7.18)$$

en el rango de energías que va de $E_{min} \simeq 10^{25}$ erg a $E_{max} \simeq 2 \times 10^{26}$ erg. La constante A en la ecuación (7.18) se elige de forma tal que la tasa de disipación calculada con la ecuación (7.17) coincida con la tasa total media de la Figura 7.1.

Calculamos también la distribución de eventos como función de su disipación pico (Figura 7.2b), que es también una ley de potencias, con pendiente $\alpha_p = 1.7 \pm 0.3$. Este valor es consistente con el obtenido por [Crosby et al. 1993] de 1.68, para eventos coronales observados en rayos X, y levemente menor al reportado por [Hudson 1991], de 1.8. El mismo comportamiento tipo ley de potencias, se observa en la distribución de eventos en función de su duración, en este caso con pendiente $\alpha_r = 1.9 \pm 0.2$.

Los errores en los índices de las leyes de potencia, involucran el error estadístico en cada intervalo de energía (bin), indicado por las barras en la Figura 7.2, y el error correspondiente al mejor ajuste de los datos. El error debido a las distintas elecciones posibles del umbral D_0 (que se varía dentro de un rango tal que el número total de eventos sea máximo) es siempre más chico que las otras fuentes de error mencionadas. Un procedimiento más técnico para elegir el umbral, que introduce una distribución de ajuste chi-cuadrado, ha sido utilizada en [Georgoulis et al. 1997]. El umbral así obtenido resulta levemente superior al valor medio de la serie.

Otros resultados importantes del análisis estadístico son las correlaciones entre las diferentes propiedades de los eventos (energía, duración y disipación pico). En la Figura 7.3a se muestra un gráfico de la energía de los eventos en función de su duración. Los datos pueden fitarse con una ley de potencias $E \sim \tau^{\gamma_{B\tau}}$, donde $\gamma_{B\tau} = 2.02 \pm 0.02$. La duración versus el pico de disipación de los

Fig. 7.2: Número de eventos en función de su (a) energía, (b) disipación pico y (c) duración. Las barras indican el error estadístico (raíz cuadrada del número de eventos) en cada intervalo.

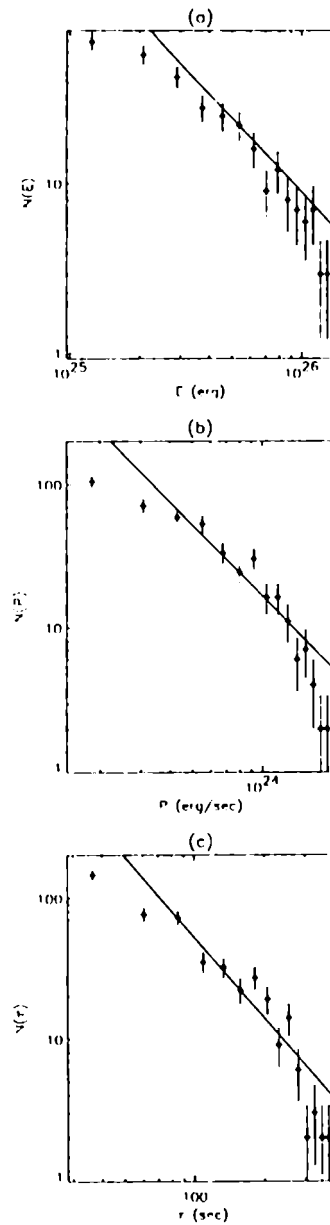
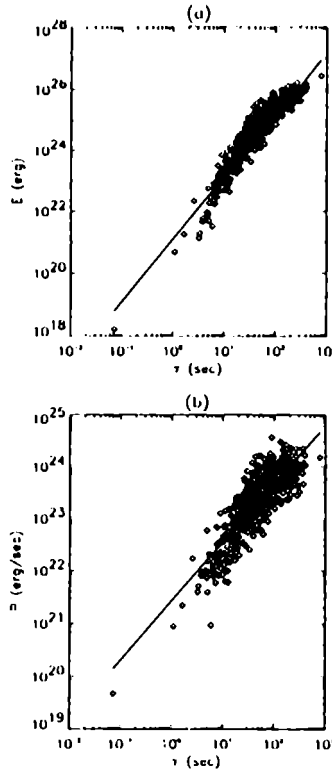


Fig. 7.3: Correlaciones entre los parámetros de los eventos: (a) energía vs duración; (b) duración vs disipación pico.



eventos, se muestra en la Figura 7.3b, que puede ser ajustada por $\tau \sim P^{\gamma_{\tau P}}$, con $\gamma_{\tau P} = 1.12 \pm 0.03$. Estos dos índices de correlación satisfacen la relación aproximada

$$\gamma_{\tau P} \sim \gamma_{B\tau} - 1 \quad (7.19)$$

que debería ser exacta si se supone la relación dimensional $E \sim \tau P$.

Si estas correlaciones son significativas, entonces los diferentes índices de las leyes de potencia (α_B , α_P y α_τ deberían relacionarse mutuamente según

$$\alpha_\tau = \gamma_{B\tau} \alpha_B - \gamma_{B\tau} + 1 \quad (7.20)$$

$$\alpha_P = \frac{\gamma_{B\tau} \alpha_B - 1}{\gamma_{B\tau} - 1} \quad (7.21)$$

Si utilizamos $\alpha_E \simeq 1.5$ y $\gamma_{E\tau} \simeq 2$ en la ecuación (7.20), obtenemos $\alpha_\tau \simeq 2$, en buen acuerdo con el valor observado de $\alpha_\tau = 1.9$. El valor obtenido para α_P en (7.21) es por otra parte $\alpha_P \simeq 2$, que se aproxima al observado $\alpha_P = 1.7$.

En [Dmitruk & Gómez 1997a] comparamos la distribución de energías de los nanoeventos con la distribución derivada por [Shimizu 1995] (pendiente entre 1.5 y 1.6) para eventos transientes brillantes observados en rayos X blandos por el instrumento SXT del satélite Yohkoh y con la distribución obtenida por [Crosby et al. 1993] (pendiente 1.53) de datos en rayos X duros de la misión SMM (Solar Maximum Mission). El índice que obtuvimos para ley de distribución de disipación pico ($\alpha_P = 1.7$) es también consistente con el obtenido por Crosby et al. 1993 de 1.68 y levemente menor al reportado por Hudson 1991, de 1.8.

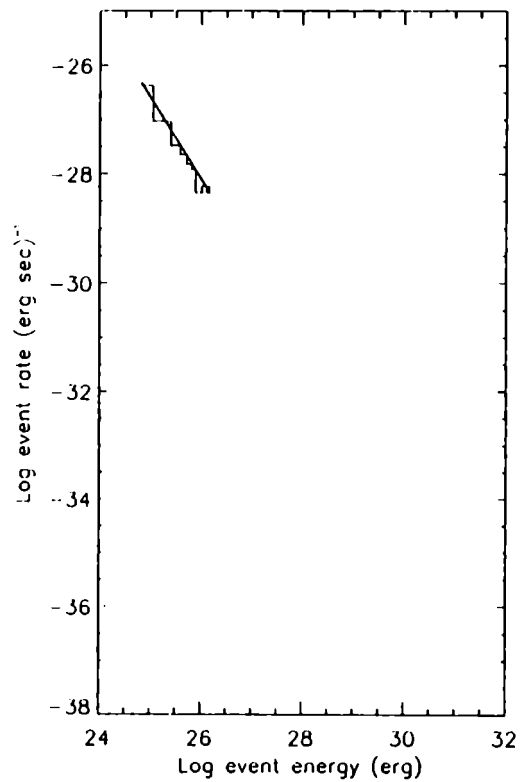
En la Figura 7.4 mostramos la distribución de energías de las nanofulguraciones, correspondiente a la simulación mas extensa y de menor resolución realizada en Dmitruk & Gómez 1997a, comparada con las distribuciones de los datos observacionales mencionados.

Los resultados sugieren que la distribución de nanofulguraciones (simulación) y de fulguraciones (observaciones, en el rango de altas energías) siguen una única ley de potencias en un rango que va de 10^{24} a 10^{33} erg.

Esta remarcable correspondencia sugiere la presencia de un proceso físico común en los eventos disipativos a lo largo de un extenso rango en energías. La interpretación de la corona disipativa como un sistema en un estado de auto-criticalidad organizada ([Bak et al. 1988]) ha sido sugerida por [Lu & Hamilton 1991] realizando simulaciones de fulguraciones con modelos tipo autómatas celulares. Ellos elaboraron un modelo sencillo de generación de eventos por distribución de excitaciones en una red tratando de representar la relajación de esfuerzos magnéticos en regiones activas, pero no se trata de una simulación de las ecuaciones MHD como aquí presentamos. La distribución de energías obtenida por Lu y Hamilton en su modelo sigue una ley de potencias con pendiente -1.4 .

Tanto desde las simulaciones como desde las observaciones, el índice de la ley de potencias que se obtiene se mantiene siempre menor que 2. La ecuación (7.17) implica que la contribución a la disipación de energía en un dado rango $[E_{min}, E_{max}]$, es dominada entonces por los eventos más

Fig. 7.4: Número de eventos por unidad de energía y tiempo. En la esquina superior izquierda se grafica el histograma para la simulación; la línea gruesa muestra el mejor ajuste tipo ley de potencias (pendiente 1.5 ± 0.2). La línea de trazos corresponde a la distribución derivada por Shimizu (1995) y la línea de puntos y trazos a la distribución obtenida por Crosby et al (1993).



energéticos (es decir con $E \simeq E_{max}$). De acuerdo a este resultado, los relativamente infrecuentes eventos de gran energía contribuirían mas a la tasa de disipación que los mucho más frecuentes eventos de poca energía. Sin embargo, es importante notar que este es sólo uno de los dos posibles escenarios para el calentamiento. Hudson (1991) señaló que este regimen (dominado por los eventos más grandes) cambiaría si ocurriese un aumento de la pendiente en la ley de distribución, a valores mayores que 2, hacia la zona de bajas energías. [Mercier & Trottet 1997] reportaron evidencias indirectas de dicho aumento en la pendiente, a partir de observaciones de estallidos (bursts) en estrellas de tipo I. [Vlahos et al. 1995] presentaron simulaciones de automata celular, con una regla diferente (anisotrópica) a la de Lu y Hamilton para la redistribución de las excitaciones magnéticas, y reportaron una pendiente de -3.5 para la ley de distribución de picos. El modelo fenomenológico que presentaremos en una sección posterior de este capítulo, basado en la teoría de Kraichnan para turbulencia MHD, también da un índice mayor que 2 para la distribución de energías. Resulta aparente entonces que para dilucidar si los eventos grandes o los pequeños son los dominantes, se requiere un mayor esfuerzo tanto teórico como observacional. Los eventos en el rango de energías bajas (es decir, las nanofulguraciones) son aún indetectables por los instrumentos de los que se dispone actualmente, pero se espera poder estudiarlos con los instrumentos de próxima generación, como el proyectado HIREX, con una resolución de $0.01''$ que corresponde a unos 7 km en el disco solar.

7.4 Estructuras disipativas

La Figura 7.5a muestra la distribución espacial de densidad de corriente, en un instante del régimen estacionario ($t = 11 t_p$) de la simulación correspondiente a la serie temporal de la Figura 7.1. Las corrientes intensas positivas (en dirección perpendicular al plano) corresponden a las regiones en tonos blancos, mientras que las corrientes negativas se indican en negro. El campo magnético está representado por las flechas. Esta imagen muestra concentraciones de corrientes en estructuras tipo O y tipo X (los nombres corresponden a la forma de las estructuras, ver [Priest 1982]). En el centro y hacia la izquierda se puede observar una hoja de corriente típica, que resulta luego del colapso de un punto X. El campo de velocidades y la vorticidad, que se muestran en la Figura 7.5b confirman la visión standard de la reconexión magnética en hojas de corriente, con chorros de

velocidad que emergen de los bordes de la estructura y una distribución cuadrupolar (ver los tonos oscuro y claro alternados de vorticidad en la hoja) de la vorticidad ([Matthaeus & Lamkin 1986]).

La reconexión de líneas magnéticas puede verse más claramente en la secuencia de la Figura 7.6, que muestra contornos del potencial vector, $a = \text{cte}$, en una sucesión de 9 instantes, separados por $\Delta t = 25 \text{ s}$. La figura corresponde a una ampliación en la zona de la hoja de corriente que mencionamos en la Figura 7.5a. Los contornos de $a = \text{cte}$, corresponden a líneas del campo magnético. Las líneas marcadas en trazo grueso se reconectan durante el intervalo observado. El campo magnético en la línea gruesa superior es de sentido opuesto al de la línea inferior. El fuerte gradiente de campo origina una intensa corriente, distribuida en forma de hoja elongada, que vemos como una zona más brillante en la Figura 7.5a.

Al mismo tiempo, las Figuras 7.5a y 7.5b muestran que en un régimen turbulento existe una rica variedad de estructuras disipativas, de diferente morfología, además de la hoja de corriente comparativamente simétrica que describimos. La Figura 7.7 muestra la distribución espacial y la morfología de las estructuras disipativas más intensas. Estas estructuras contribuyen a un 60% de la disipación total de energía, pese a que ocupan sólo un 6% del área total. Esta distribución inhomogénea de la disipación de energía es una manifestación de la intermitencia espacial que caracteriza a los regímenes turbulentos.

La Figura 7.8 muestra también la variedad de estructuras disipativas presentes, en este caso correspondiente a una simulación de resolución espacial 512×512 y número de Reynolds 2000 (realizada durante un corto intervalo de tiempo, aproximadamente $0.5 t_p$). Las hojas de corriente aparecen como estructuras elongadas en blanco (positiva) o negro intenso (negativa).

El grosor de las hojas de corriente, está marginalmente resuelto en estas imágenes, ya que corresponde a una escala disipativa pequeña, limitada por la resolución empleada. Por otro lado, el ancho de las hojas (su longitud en el plano de la caja) está determinado por la dinámica y por lo tanto se observa una amplia distribución de tamaños.

Fig. 7.5: (a) Campo magnético (flechas) sobre una imagen de la densidad de corriente, en $t = 11 t_p$. Los tonos claros indican corriente positiva (en dirección saliente a la hoja) y los oscuros negativa; (b) campo de velocidades sobre una imagen de la vorticidad, en el mismo instante.

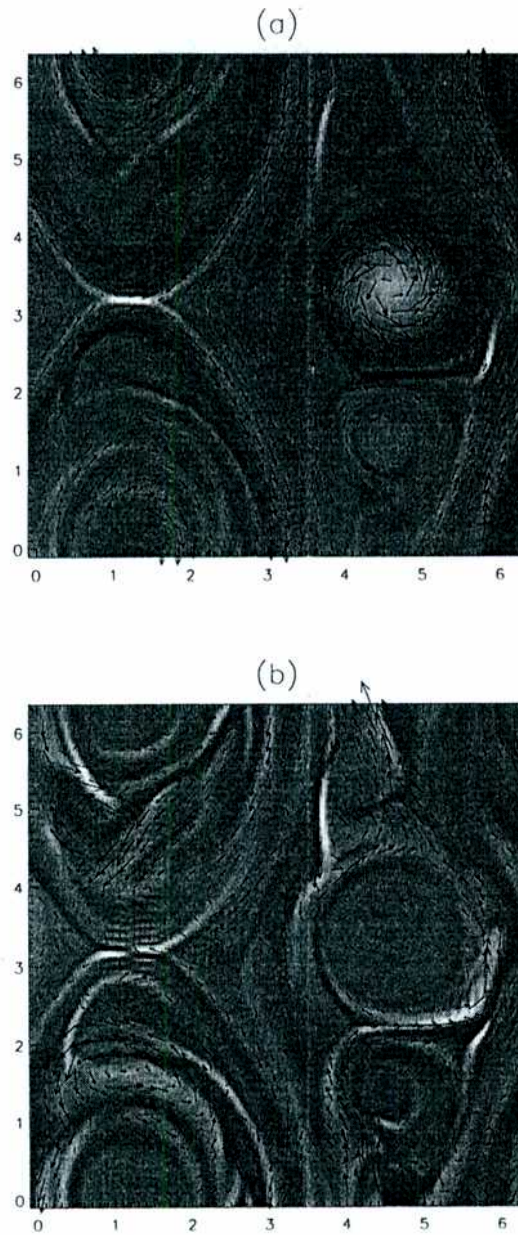


Fig. 7.6: Contornos de $a = \text{cte}$ (líneas de campo magnético), en una sucesión de 9 instantes separados por $\Delta t = 25$ s. La zona graficada corresponde a una ampliación de la región de una hoja de corriente en la Figura 7.5. Las líneas gruesas se reconectan.

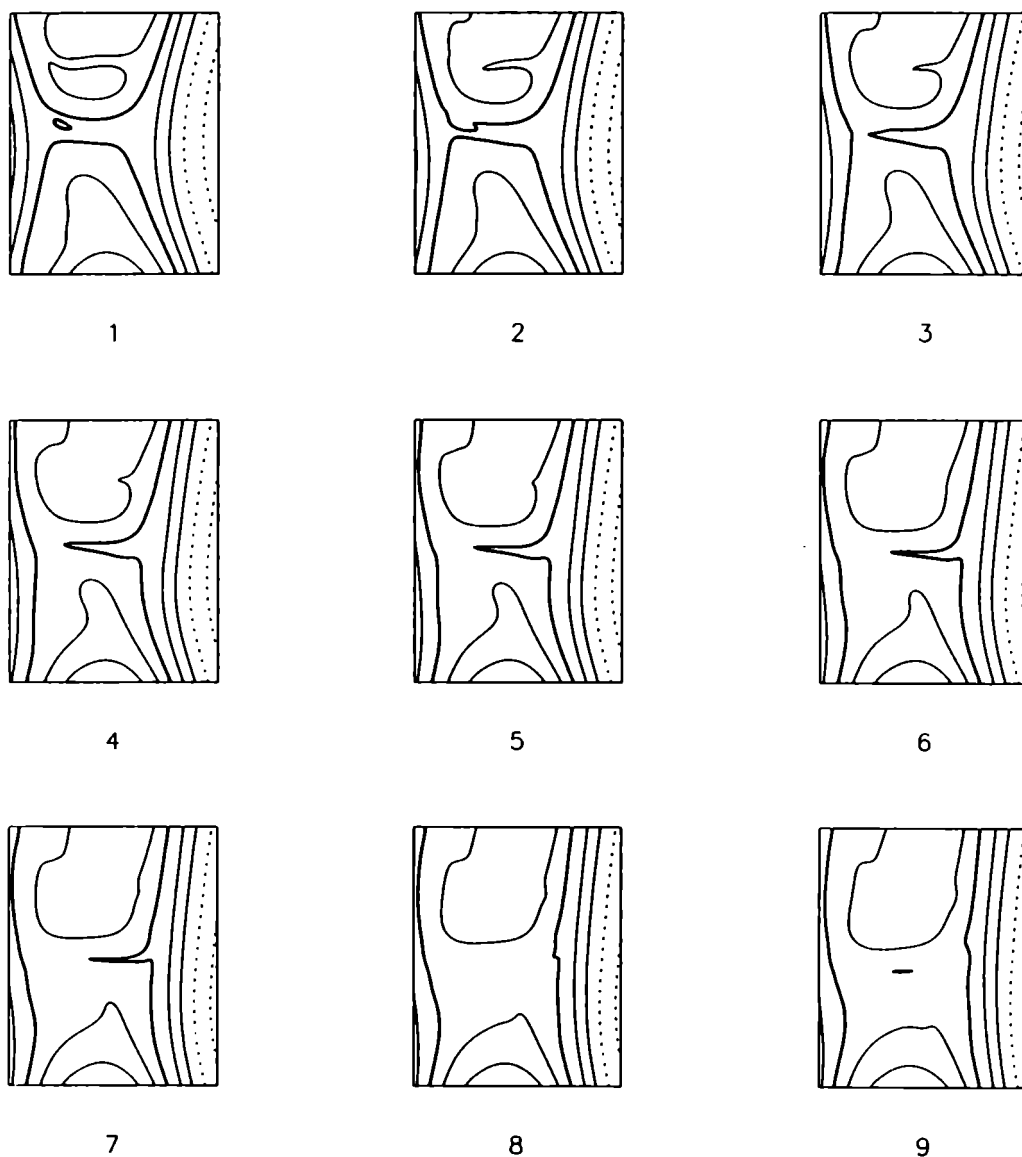
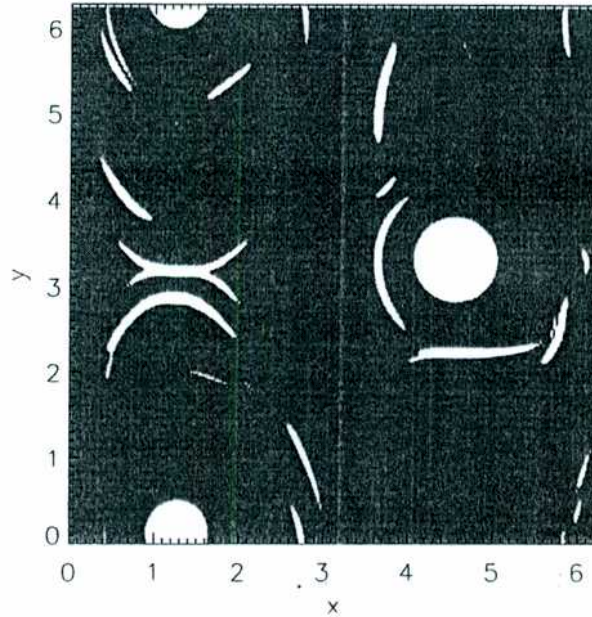


Fig. 7.7: Zonas de intensa disipación de energía. Las regiones en blanco concentran el 60% de la disipación total, en $t = 11 t_p$



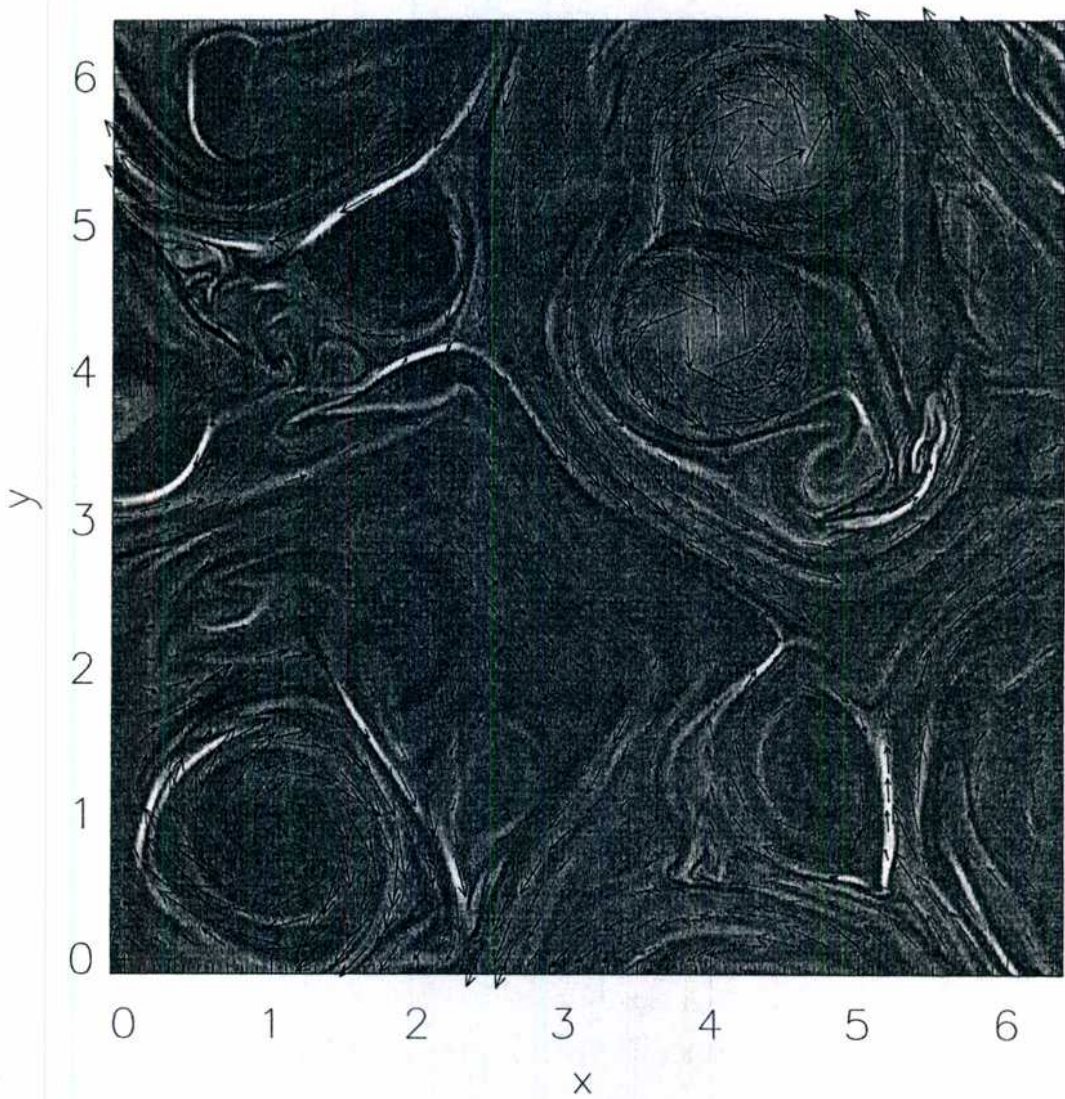
7.5 Modelo turbulento fenomenológico de los eventos

En esta sección presentamos una descripción fenomenológica de la disipación en un régimen turbulento, como un primer intento por relacionar conceptos del modelo de turbulencia MHD de Kraichnan con la distribución de eventos disipativos.

Haremos la suposición simplificatoria de que toda la disipación ocurre en hojas de corriente, de ancho (longitud en el plano) variable λ y grosor fijo l_d , que corresponde a la escala disipativa en un régimen turbulento. Las hojas de corriente se forman entre estructuras tipo vórtice (islas magnéticas) de tamaño λ y por lo tanto su ancho es también λ , que suponemos como una variable libre para realizar un análisis estadístico de los eventos disipativos. Supondremos también que el espectro de energía sigue la ley de Kraichnan (sección 6.2.2)

$$E_k = (\epsilon b_0)^{1/2} k^{-3/2} \quad (7.22)$$

Fig. 7.8: Imagen de la densidad de corriente y campo magnético (flechas), para una simulación de resolución 512×512 y número de Reynolds 2000.



donde ϵ es la tasa de disipación de energía por unidad de masa y b_0^2 es la energía magnética total por unidad de masa,

$$b_0^2 = \int_{1/L_\perp}^{1/l_d} dk E_k \simeq (\epsilon L_\perp)^{2/3} \quad (7.23)$$

$$L_\perp = 2\pi l_p, \quad l_d = \left(\frac{\eta^2 b_0}{\epsilon} \right)^{1/3} = L_\perp R^{-2/3} \quad (7.24)$$

con l_p la escala del forzado (inyección de energía) y $R = b_0 L_\perp / \eta$.

Con este espectro, podemos obtener un campo magnético típico (en unidades de velocidad) en un vórtice o isla magnética de tamaño λ como,

$$b_\lambda^2 = \int_{1/\lambda}^{1/l_d} dk E_k \simeq (\epsilon b_0 \lambda)^{1/2} \quad (7.25)$$

y por lo tanto este es el campo típico a ambos lados de una hoja de corriente de ancho λ . En este modelo, suponemos una jerarquía de estructuras disipativas "etiquetadas" por su ancho λ , distribuidas espacialmente de tal forma que su separación promedio es también del orden de λ (ver [Biskamp & Welter 1989] para una discusión de ideas similares). La contribución a la tasa de disipación, de todas las estructuras de ancho λ es entonces,

$$\epsilon_\lambda = \frac{l_d \lambda}{\lambda^2} \eta \left(\frac{b_\lambda}{l_d} \right)^2 = \frac{\epsilon}{R^{1/3}} \left(\frac{\lambda}{L_\perp} \right)^{-1/2} \quad (7.26)$$

ya que $(l_d \lambda / \lambda^2)$ es el factor de llenado de área de las hojas de corriente de ancho λ y grosor l_d , y la densidad de corriente en una de ellas es aproximadamente $j_\lambda \sim b_\lambda / l_d$, debido al gradiente dado por los campos opuestos, de magnitud b_λ , en los lados de la hoja de corriente.

El tiempo de vida de una de estas hojas de corriente está dado por la escala de tiempos no-lineal en la cual los vórtices de tamaño λ se rompen y transfieren su energía a los vórtices más chicos, como parte de la cascada turbulenta. Esta escala temporal es mucho más corta que el tiempo de disipación de las hojas de corriente, lo que implica que dos vórtices interactuantes se rompen mucho antes de que su energía sea completamente disipada en la hoja de corriente entre

ellos. Siguiendo el modelo de turbulencia MHD de Kraichnan, la escala de tiempos no-lineal es (ver sección 6.2.2),

$$\tau_\lambda = \frac{(\lambda/b_\lambda)^2}{\lambda/b_0} = \frac{b_0^2}{\epsilon} \left(\frac{\lambda}{L_\perp} \right)^{1/2} \quad (7.27)$$

En el regimen estacionario, el número de eventos de ancho λ por unidad de tiempo es

$$N_\lambda = \left(\frac{L_\perp}{\lambda} \right)^2 \frac{1}{\tau_\lambda} = \frac{\epsilon}{b_0^2} \left(\frac{\lambda}{L_\perp} \right)^{-5/2} \quad (7.28)$$

La energía disipada en una única estructura (hoja de corriente) de ancho λ es entonces,

$$E_\lambda = \frac{\epsilon_\lambda}{N_\lambda} = \frac{b_0^2}{R^{1/3}} \left(\frac{\lambda}{L} \right)^2 \quad (7.29)$$

Combinando las ecs (7.28) y (7.29), derivamos la ley de distribución de eventos como,

$$P(E) = \frac{dN_\lambda}{dE_\lambda} = \frac{\epsilon R^{1/3}}{b_0^4} \left(\frac{R^{1/3} E}{b_0^2} \right)^{-9/4} \sim E^{-\alpha_B}, \quad (7.30)$$

con $\alpha_B = 9/4 = 2.25$, que es consistente con,

$$\epsilon = \int_{E_{min}}^{E_{max}} dE E P(E) \quad (7.31)$$

donde $E_{min} = E_{\lambda=l_d} = b_0^2/R^{5/3}$ y $E_{max} = E_{\lambda=L} = b_0^2/R^{1/3}$.

Por lo tanto, de acuerdo a este modelo muy simplificado de la disipación, la pendiente de la distribución de eventos es mayor que dos, lo que implica que los eventos más chicos dominan el proceso de calentamiento. Las causas posibles para el desacuerdo de esta pendiente, con la obtenida en las simulaciones son las siguientes (1) El modelo teórico supone que toda la energía es disipada en hojas de corriente formadas por la coalescencia de dos vórtices. A pesar de que nuestras simulaciones muestran que una fracción considerable de la disipación de energía tiene lugar en este tipo de estructuras, es también claro que otras estructuras, tales como los puntos O, también contribuyen a la disipación. (2) Suponemos que todas las hojas de corriente tienen grosor l_d , lo cual probablemente sea una sobre-simplificación. Es de esperar que las hojas de corriente adquieran diferentes grosores, correspondientes a diferentes regímenes de reconexión magnética y

dependiendo de los parámetros y las condiciones de contorno. (3) El tiempo de vida estimado de las hojas de corriente es también una simplificación, ya que otros procesos podrían contribuir a romper las hojas una vez formadas. (4) Podría ocurrir también que nuestras simulaciones, de resolución espacial aún modesta, no reflejen exactamente las propiedades estadísticas de las estructuras disipativas en un régimen de alto número de Reynolds. También, porque en las simulaciones que presentamos las hojas de corriente están resueltas sólo marginalmente. Simulaciones con mayor resolución podrían posibilitar una mejor comprensión de la dinámica de estas hojas de corriente, lo que a su vez contribuiría a generar un modelo teórico más completo.

Otro factor que podría influir en el desacuerdo entre ambas pendientes, es el apilamiento de los eventos. El apilamiento, también puede ser estimado con el modelo teórico simple. El número total de eventos es

$$\mathcal{R} = \int_{E_{min}}^{E_{max}} dE P(E) = \frac{\epsilon R^{5/3}}{b_0^2} \quad (7.32)$$

donde utilizamos (7.30). Para evaluar si el régimen es de apilamiento, podemos comparar la tasa total de eventos \mathcal{R} con la duración más corta de uno de ellos (de (7.27)):

$$\tau_{\lambda=l_d} = \frac{b_0^2}{\epsilon} \left(\frac{l_d}{L} \right)^{1/2} = \frac{b_0^2}{\epsilon} R^{-1/3} \quad (7.33)$$

Obtenemos entonces

$$\mathcal{R} \tau_{\lambda=l_d} = R^{4/3} \gg 1 \quad (7.34)$$

Por lo tanto, en un régimen de turbulencia desarrollada, los eventos disipativos siempre se apilan.



Capítulo 8

Conclusiones

Desarrollamos simulaciones numéricas de las ecuaciones magnetohidrodinámicas (MHD) que nos permitieron analizar la dinámica de un arco magnético coronal forzado en sus bases fotosféricas. Mostramos como es posible utilizar en esta situación la aproximación conocida como magnetohidrodinámica reducida (RMHD), con campos dependientes de 3 variables espaciales y el tiempo, pero con componentes evolucionando sólo en las dos direcciones transversales al eje del arco magnético.

Procediendo en dos etapas, una con un forzado simplificado consistente en dos vórtices y otra con un forzado dado por un conjunto de vórtices de diámetro granular típico, estudiamos el tipo de estructuras que se desarrollan, la existencia de eventos de reconexión y la formación de hojas de corriente. Observamos el desarrollo de espectros de energía anchos, entre $E_k \sim k^{-2}$ y $\sim k^{-3/2}$, consistentes con un régimen turbulento. La cascada de energía turbulenta es un mecanismo adecuado para explicar la formación de estructuras pequeñas y la aceleración en los tiempos de disipación.

Forzando al sistema durante intervalos de tiempo largos, se mostró como este llega a un estado estacionario, en tiempos del orden del tiempo de giro de los gránulos fotosféricos. A partir de la tasa de disipación, obtuvimos un flujo de energía de $\sim 6 \times 10^6$ erg/(cm² s) consistente con los valores reportados de observaciones, para el calentamiento de regiones activas en la corona.

Estudiamos además la ley de escala de la tasa de disipación con los parámetros del problema, basándonos en consideraciones dimensionales y numéricas.

Presentamos una simplificación de las ecuaciones RMHD a un caso MHD 2D que modela la dinámica de una sección transversal de arco magnético. Realizamos simulaciones de este sistema bidimensional durante intervalos extensos de tiempo. Pese a que impusimos un forzado coherente y constante en el tiempo, el sistema desarrolla un comportamiento intermitente, lo cual es una característica típica de los regímenes turbulentos. La intermitencia temporal se manifiesta en la forma de eventos impulsivos en la serie temporal de la tasa de disipación de energía. Se observa también intermitencia espacial, ya que una fracción grande de la disipación ocurre en un porcentaje pequeño del área total.

El análisis estadístico de los eventos en simulaciones de larga duración, muestra una distribución de energías tipo ley de potencia, $dN/dE \sim E^{-1.5}$, que es consistente con la estadística de fulguraciones obtenida de observaciones y con modelos previos de autómatas celulares que señalan un estado de auto-criticalidad organizada en la disipación coronal. Las distribuciones de disipación pico y duración de los eventos también exhiben leyes de potencia, y además todas estas cantidades se correlacionan también entre sí a través de leyes potenciales.

Realizamos también, y como paso previo a las simulaciones magnetohidrodinámicas, un estudio de un caso puramente hidrodinámico y bidimensional. En particular analizamos el decaimiento de turbulencia hacia estados metaestables auto-organizados. Estos estados muestran en general una correlación entre vorticidad y función corriente con una ley tipo sinh-Poisson, excepto cuando las condiciones de contorno son de alta simetría. Sin embargo una pequeña perturbación a los estados simétricos los vuelve a llevar al caso sinh-Poisson. Mostramos que unos pocos modos Fourier, interactuando no-linealmente entre sí, bastan para describir correctamente la dinámica, a tiempos largos, de los estados metaestables.

En resumen, creemos que nuestros resultados dan un buen soporte al escenario de turbulencia magnetohidrodinámica en arcos magnéticos coronales y contribuyen a una mejor comprensión del fenómeno de calentamiento de la corona solar.

Referencias

- [Bak et al. 1988] Bak, P., Tang, C. & Wiesenfeld, K. 1988. *Phys. Rev. A* **38**, 364.
- [Biskamp & Welter 1989] Biskamp, D. & Welter, H. 1989. *Phys. Fluids B*, **1**, 1964.
- [Biskamp 1993] Biskamp, D. 1993. *Nonlinear Magnetohydrodynamics*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [Brachet et al. 1988] Brachet, M.E., Meneguzzi, M., Politano, H. & Sulem, P. 1988. *J. Fluid Mech.* **194**, 333.
- [Braginskii 1965] Braginskii, S.I. 1965 *Rev. Plasma Phys.* **1**, 205.
- [Canuto et al. 1988] Canuto, C., Hussaini, M.Y., Quarteroni, A., & Zang, T.A. 1988. *Spectral Methods in Fluid Dynamics*, Springer, New York.
- [Canuto, V.M. & Dubovikov 1996] Canuto, V.M. & Dubovikov, M.S. 1996. *Phys Fluids* **8**, 571.
- [Carbone 1994] Carbone, V. 1994. *Phys. Rev. Lett.* **71**, 1546.
- [Chorin 1994] Chorin, A.J. 1994. *Vorticity and Turbulence*, Springer Verlag.
- [Crosby et al. 1993] Crosby, N.B., Aschwanden, M.J. & Dennis, B.R. 1992. *Solar Phys.* **143**, 275.
- [Démoulin et al. 1996] Démoulin, P., Hénoux J.C., Priest E.R., Mandrini C.H. 1996. *Astron. & Astrophys.* **308**, 643.
- [Dmitruk et al. 1996] Dmitruk, P., Gómez, D.O., Costa, A. & Ponce Dawson, S. 1996. *Phys. Rev. E*, **54**, 2555.

- [Dmitruk & Gómez 1997a] Dmitruk, P. & Gómez, D.O. 1997a. *Astrophys. J. Lett.*, **484**, 83.
- [Dmitruk & Gómez 1997b] Dmitruk, P. & Gómez, D.O. 1997b. Proc. *Research Workshop on 2D Turbulence in Plasmas and Fluids*, AIP (eds. R. Dewar and R. Griffiths), p. 205-212.
- [Dmitruk et al. 1998] Dmitruk, P., Gómez, D.O. & DeLuca, E. 1998. *Astrophys. J.*, **505**, 974.
- [Einaudi et al. 1996] Einaudi, G., Velli, M., Politano, H., & Pouquet, A. 1996. *Astrophys. J. Lett.*, **457**, 113.
- [Fletcher 1991] Feltcher, C.A.J. 1991. *Computational Techniques for Fluid Dynamics, Vols I & II*, 2da Ed., Springer-Verlag, Heidelberg.
- [Frisch 1996] Frisch, U. 1996. *Turbulence*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [Fyfe et al. 1977] Fyfe, D., Montgomery, D. & Joyce, G. 1977. *J. Plasma Phys.*, **17**, 369.
- [Georgoulis et al. 1997] Georgoulis, M., Velli, M., & Einaudi, G. 1997. *Astrophys. J.*, **497**, 957.
- [Golub & Pasachoff 1997] Golub, L. & Pasachoff, J. 1997. *The Solar Corona*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [Gómez & Ferro Fontán 1988] Gómez, D.O., & Ferro Fontán, C. 1988. *Solar Phys.* **116**, 33.
- [Gómez 1990] Gómez, D.O. 1990. *Fund. Cosmic Phys.* **14**, 131.
- [Gómez & Ferro Fontán 1992] Gómez, D.O., & Ferro Fontán, C. 1992. *Astrophys. J.* **394**, 662.
- [Gómez et al. 1993] Gómez, D.O., De Luca, E.E., & Mc Clymont, A.N. 1993. *Astrophys. J.*, **448**, 954.
- [Gosh et al. 1993] Gosh, S., Hossain, M. & Matthaeus, W.H. 1993. *Comp. Phys. Comm.*, **74**, 18.
- [Gottlieb & Orszag 1977] Gottlieb, D. & Orszag, S.A. 1977. *Numerical Analysis of Spectral Methods: Theory and Application*, SIAM, Philadelphia.
- [Gottlieb et al. 1984] Gottlieb, D., Hussaini, M.Y. & Orszag, S.A. 1984. *Spectral Methods for Partial Differential Equations*, SIAM, Philadelphia.
- [Hasegawa 1985] Hasegawa, A. 1985. *Adv. in Phys.* **34**, 1.

- [Hendrix & van Hoven 1996] Hendrix, D.L., & van Hoven, G. 1996. *Astrophys. J.*, **467**, 887.
- [Heyvaerts & Priest 1992] Heyvaerts, J., & Priest, E.R. 1992. *Astrophys. J.* **390**, 297.
- [Hossain et al. 1983] Hossain, M., Matthaeus, W.H. & Montgomery, D. 1983. *J. Plasma Phys.*, **30**, 479.
- [Hudson 1991] Hudson, H.S. 1991. *Solar Phys.*, **133**, 357.
- [Kincaid & Cheney 1991] Kincaid, D. & Cheney, W. 1991. *Análisis Numérico: Las matemáticas del cálculo científico*, Addison-Wesley Iberoamericana (trad. de la versión original en inglés 1991).
- [Kolmogorov 1941] Kolmogorov, A.N. 1941. *Dokl. Acad. Nauk. SSSR*, **30**, 301 (reimpr. en *Proc. R. Soc. Lond. A*, **434**, 9 (1991)).
- [Kolmogorov 1962] Kolmogorov, A.N. 1962. *J. Fluid Mech.* **13**, 82.
- [Kraichnan 1965] Kraichnan, R.H. 1965. *Phys. Fluids* **8**, 138.
- [Kraichnan 1967] Kraichnan, R.H. 1967. *Phys. Fluids* **10**, 1417.
- [Landau & Lifshitz 1987] Landau, L.D. & Lifshitz, E.M. 1987. *Fluid Mechanics*, Pergamon Press, Oxford.
- [Lesieur 1990] Lesieur, M. 1990. *Turbulence in Fluids*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland.
- [Lesieur & Metais 1996] Lesieur, M. & Metais, O. 1996. *Ann. Rev. Fluid. Mech.* **28**, 45.
- [Leslie 1973] Leslie, D.C. 1973. *Developments in the theory of turbulence*, Clarendon Press, Oxford.
- [Lionello et al. 1998] Lionello, R., Velli, M., Einaudi, G. & Mikic, Z. 1998 *Astrophys. J.*, **494**, 840.
- [Longcope & Sudan 1992] Longcope, D.W., Sudan, R.N. 1992. *Astrophys. J.*, **384**, 305.
- [Longcope & Strauss 1994] Longcope, D.W., Strauss, H.R. 1994. *Astrophys. J.*, **426**, 742.
- [Lu & Hamilton 1991] Lu, E.T. & Hamilton, R.J. 1991. *Astrophys. J. Lett.* **380**, 89.

- [Lundgren & Pointin 1977] Lundgren, T.S. & Pointin, Y.B. 1977. *Journal of Stat. Phys.* **17**, 323.
- [Matthaeus & Lamkin 1986] Matthaeus, W.H. & Lamkin, S.L. 1986. *Phys. Fluids*, **29**, 2513.
- [Matthaeus et al. 1990] Matthaeus, W.H., Goldstein, M.L. & Roberts, D.A. 1990. *J. Geophys. Res.*, **95**, 20673.
- [Matthaeus et al. 1991a] Matthaeus, W.H., Stribling, W.T., Martinez, D., Oughton, S. & Montgomery, D. 1991. *Physica D* **51**, 531.
- [Matthaeus et al. 1991b] Matthaeus, W.H., Stribling, W.T., Martinez, D., Oughton, S. & Montgomery, D. 1991. *Phys. Rev. Lett* **66**, 2731.
- [Matthaeus et al 1996] Matthaeus, W.H., Gosh, S., Oughton, S. & Aaron, D. 1996. *J. Geophys. Res.*, **101**, 7619.
- [Mc Comb 1990] Mc Comb, W.D. 1990. *The Physics of Fluid Turbulence*, Oxford University Press, New York.
- [Mc Williams 1984] Mc Williams, J.C. 1984. *J. Fluid Mech.* **146**, 21.
- [Mercier & Trottet 1997] Mercier, C., & Trottet, G. 1997. *Astrophys. J. Lett.* **474**, 65.
- [Milano et al. 1998] Milano, L., Dmitruk, P., Mandrini, C., Gómez, D.O. & Demoulin, P. 1998. *Astrophys. J.*, enviado.
- [Miller et al. 1992] Miller, J., Weichman, P.B. & Cross, M. C. 1992. *Phys. Rev. A* **45**, 2328.
- [Montgomery et al. 1992] Montgomery, D., Matthaeus, W.H., Stribling, W.T., Martinez, D. & Oughton, S. 1992. *Phys. Fluids A* **4**, 3.
- [Montgomery et al. 1993] Montgomery, D., Shan, X. & Matthaeus, W.H. 1993. *Phys. Fluids A* **9**, 2207.
- [Narain & Ulmschneider 1990] Narain, U. & Ulmschneider, P. 1990. *Space Sci. Rev.* **54**, 377.
- [Otani & Strauss 1988] Otani, N.F. & Strauss, H. 1988. *Astrophys. J.* **325**, 468
- [Parker 1972] Parker, E.N. 1972. *Astrophys. J.* **174**, 499.

- [Parker 1983] Parker, E.N. 1983. *Astrophys. J.* **264**, 642.
- [Parker 1988] Parker, E.N. 1988. *Astrophys. J.* **330**, 474.
- [Parker 1994] Parker, E.N. 1994. *Spontaneous Current Sheets in Magnetic Fields*, Oxford University Press, New York.
- [Patterson & Orszag 1971] Patterson, G & Orszag, S.A. 1971. *Phys. Fluids*, **14**, 2353.
- [Pouquet et al. 1976] Pouquet, A., Frisch, U. & Léorat, J. 1976. *J. Fluid Mech.* **77**, 321.
- [Press et al 1986] Press, W., Flannery, B., Teukolsky, S. & Vetterling, W. 1986. *Numerical Recipes, The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press, Cambridge, UK.
- [Priest 1982] Priest, E.R. 1982. *Solar Magnetohydrodynamics*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Holland.
- [Priest & Démoulin 1995] Priest, E.R. & Démoulin, P. 1995. *J. Geophys. Res.* **100**, 23443.
- [Robert & Sommeria 1991] Robert, R. & Sommeria, J. 1991. *J. Fluid Mech.* **229**, 291.
- [Rogallo & Moin 1984] Rogallo, R.S. & Moin, P. 1984. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **16**, 99.
- [Rutgers 1998] Rutgers, M.A. 1998. *Phys. Rev. Lett.* **81**, 2244.
- [Schnack et al. 1987] Schnack, D.D., Barnes, D.C., Mikic, Z. & Harned, D.S. 1987. *J. Comp. Phys.*, **70**, 330.
- [Schwenn & Marsch 1990] Schwenn, R. & Marsch, E. eds. 1990. *Physics of the Inner Heliosphere, Vols I & II*, Springer-Verlag, Berlin.
- [Shimizu 1995] Shimizu, T. 1995. *Pacific Astron. Soc. Japan* **47**, 251.
- [Spitzer 1962] Spitzer, L. 1962. *Physics of Fully Ionized Gases*, 2da ed., Interscience Publishers, New York.
- [Strauss 1976] Strauss, H. 1976. *Phys. Fluids* **19**, 134
- [Strauss 1988] Strauss, H. 1988. *Astrophys. J.* **326**, 412

- [Stribling & Matthaeus 1991] Stribling, T. & Matthaeus, W.H. 1991. *Phys. Fluids B*, **3**, 1848.
- [Ting et al. 1986] Ting, A.C., Matthaeus, W.H. & Montgomery, D. 1986. *Phys. Fluids* **29**, 3261.
- [van Ballegooijen 1986] van Ballegooijen, A.A. 1986. *Astrophys. J.*, **311**, 1001.
- [Vlahos et al. 1995] Vlahos, H., Georgoulis, M., Kluiving, R., & Paschos, P. 1995. *Astron. & Astrophys.* **299**, 897.
- [Withbroe & Noyes 1977] Withbroe, G.L., & Noyes, R.W. 1977. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **15**, 363.
- [Zank & Matthaeus 1992] Zank, G.P., Matthaeus, W.H. 1992. *J. Plasma Phys.*, **48**, 85.

Agradecimientos

Quiero agradecerle a Daniel por toda su dedicación, trabajo y guía. Por la paciencia especial que tuvo con todas mis preguntas, las de física y las más "filosóficas", por haberme enseñado muchas cosas en estos cuatro años y por su amistad. Un maestro, en todos los sentidos.

A la Universidad de Buenos Aires por el sustento y al Departamento de Física por el lugar de trabajo y las facilidades (sobre todo las computadoras a las que les saqué bastante humo).

A los amigos de tantos almuerzos, mates y charlas, Leo y PabloV. Y gracias también Leo por haberme hecho "gancho" para un postdoc.

A los amigos del "norte", Adrian, Carina, Coco, Gabi, Roman, Cris y Albert, que me recibieron en mis periplos por USA. Un especial agradecimiento a Adrian por su amistad de tantos años acá y allá y por estar siempre dispuesto para mis pedidos/preguntas y a Coco, que me dedicó su tiempo para contarme el ABC de la paralelización de códigos.

A un amigo de "aca" y de siempre, como Beto con el que también tuvimos tantas charlas y meriendas "filosóficas". Y a Dieguito también, porque es otro amigo que siempre está.

A otra gente con quien tuve la suerte de trabajar como Silvina y Cristina, y Hernan y Vicky, que confiaron (!) en mis simulaciones de sus experimentos, a Diego (gracias por los macros), Fernando (gracias por las postas), Miguel con las máquinas, el Tano, y mis compañeros de cuarto y cafetera pal mate en Siberia, como Diego, Damián y varios que fueron pasando.

A mis viejos, un agradecimiento y un abrazo muy especial por todo el apoyo y también a Ernesto y flia, Martha, Agus, Artemio y tutta la famiglia.

Y a Guada, por haberme bancado en todos estos años de becario, tesista y viajero y por quererme y dejar que la quiera tanto.

