Extensión de polinomios en espacios de Banach

Carando, Daniel Germán

1998

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Extensión de Polinomios en Espacios de Banach

Daniel Germán Carando

Director de Tesis
Dr. Ignacio Zalduendo

Lugar de trabajo
Departamento de Economía y Matemática
Universidad de San Andrés

Tesis presentada para optar por el título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires

1998

Agradecimientos

A mi director, Nacho Zalduendo, porque es un gusto trabajar con él y porque sin su ayuda y su guía este trabajo no hubiera sido posible.

A Betina, Silvia y Vero (en estricto orden lexicográfico) con quienes compartimos muchas cosas que van desde el mate hasta el trabajo (en estricto orden de importancia). A Betina quiero agradecerle, además, el haberme permitido siempre usar y abusar de su computadora, que ya no es la misma desde que pasó por mis manos.

A María Eugenia y María Martha quienes, junto con Betina, Silvia y Vero, además de ser buenas amigas me ayudaron en tantas averiguaciones, papeleos y cuestiones burocráticas en general que entre las cinco hicieron por esta tesis tanto o más que yo.

A Sara, porque estando con ella todo es más fácil, lo bueno es mejor y lo malo no lo es tanto. Por todo lo que le debo y porque sé que no me va a exigir que se lo pague.

A la Universidad de San Andrés, por el apoyo recibido para desarrollar mi trabajo de investigación.

Extensión de Polinomios en Espacios de Banach

Resumen: Dado un polinomio homogéneo continuo $P : E \to F$ (donde E y F son espacios de Banach) nos preguntamos si P puede extenderse a un polinomio continuo definido sobre un espacio de Banach $G \supset E$. Con este fin estudiamos duales y preduales de distintos tipos de polinomios (nucleares, integrales, w-continuos en acotados, etc.). Para el caso $G = E''$ mostramos distintas propiedades de la extensión de Aron-Berner y que algunos tipos de polinomios se preservan cuando son extendidos por este método. Probamos que un polinomio definido sobre E se extiende a cualquier espacio si y sólo si se extiende a $\ell_\infty(B_{E'})$. Esto nos permite construir un predual del espacio de polinomios extensibles (cuando F es un dual) y probar que la extensibilidad se mantiene al componer un polinomio con un operador lineal. Mostramos ejemplos de polinomios extensibles (como los integrales y los K-acotados para ciertos $K \subset E'$) y aplicaciones a extensiones de series de potencias.
Palabras clave: extensión de polinomios, dualidad de espacios de polinomios.

Extension of Polynomials on Banach Spaces

Abstract: If $P : E \to F$ is a continuous homogeneous polynomial and $G \supset E$ (where E and F are Banach spaces) we want to know when P can be extended to a continuous polynomial defined a Banach space $G \supset E$. To this end we study duals and preduals of different classes of polynomials (nuclear, integral, w-continuous on bounded sets, etc.). When $G = E''$ we show some properties of the Aron-Berner extension and different classes of polynomials which are preserved when extended by this method. We show that a polynomial on E can be extended to any larger space if and only if it extends to $\ell_\infty(B_{E'})$. We use this fact to build a predual of the space of extendible polynomials and to prove that extendibility is preserved when polynomials are composed with linear operators. We exhibit different examples of extendible polynomials (such as the integral and the K-bounded polynomials for certain $K \subset E'$) and give some applications to extensions of power series.
Keywords: extension of polynomials, duality in spaces of polynomials.

Índice

INTRODUCCIÓN

El objetivo principal de este trabajo es estudiar la posibilidad de extender un polinomio homogéneo continuo $P : E \to F$ (donde E y F son espacios de Banach) a un espacio de Banach G que contenga a E. El problema de extensión fue planteado por Dineen [24] en relación a las completaciones holomorfas de espacios localmente convexos. Además de ser una herramienta básica para la extensión de funciones holomorfas en espacios de Banach, la extensión de polinomios ha sido aplicada a temas como el estudio de constantes de polarización [39], geodésicas [26], reflexividad de espacios de polinomios [35, 5] y espectros de álgebras de funciones analíticas [4, 7].

Recordemos que un polinomio homogéneo de grado k es una función $P : E \to F$ que se puede escribir como $P(x) = \Phi(x, \ldots, x)$, donde $\Phi : E \times \cdots \times E \to F$ es una función k-lineal. Si consideramos el caso $k = 1$, se sabe que no siempre es posible extender operadores lineales: el operador identidad $c_0 \to c_0$ no puede extenderse a un operador $\ell_\infty \to c_0$, ya que c_0 no está complementado en ℓ_∞. Para el caso escalar ($F = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) el teorema de extensión de Hahn-Banach asegura que toda funcional lineal y continua sobre E se extiende a cualquier espacio G que contenga a E conservando su norma. Sin embargo, no existe un teorema análogo para polinomios de grado mayor o igual a 2, aun si permitimos que la extensión aumente su norma. Por ejemplo, el polinomio homogéneo $P : \ell_2 \to \mathbb{R}$ (o $\mathbb{C}$) dado por $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty}(x_j)^2$ no puede extenderse a $C[0, 1]$, espacio que contiene a ℓ_2 por la separabilidad de este último (ver capítulo 4). En la búsqueda de aplicar el teorema de Hahn-Banach a la extensión de polinomios homogéneos escalares aparecen naturalmente los productos tensoriales. Todo polinomio homogéneo se linealiza algebraicamente a través del producto tensorial simétrico. Dotar al producto tensorial de topologías adecuadas nos permite extender algunas clases de polinomios homogéneos, simplemente extendiendo sus linealizaciones. Esto motiva el estudio de los duales y preduales de espacios de polinomios.

En el capítulo 1 introducimos las definiciones y resultados básicos sobre funciones multilineales y polinomios homogéneos. Definimos los distintos tipos de polinomios que serán utilizados en los capítulos posteriores y algunas de las funciones relacionadas con un polinomio homogéneo, como el operador lineal asociado y la diferencial. En la segunda sección, definimos los productos tensoriales proyectivos, que permiten linealizar polinomios y funciones multilineales continuas. Las secciones 3, 4 y 5 están dedicadas a los polinomios K-acotados. Probamos que los polinomios vectoriales w-continuos en acotados de E (respectivamente, w^*-continuos en acotados de E') son K-acotados para algún compacto K de E' (respectivamente, de E). Esto generaliza un resultado de [49] para polinomios escalares y nos permite dar una nueva demostración de un resultado conocido de Aron y Prolla [10] sobre aproximación de polinomios w-continuos en acotados por polinomios de tipo finito. Los resultados principales de estas secciones aparecen en [16].

En el segundo capítulo estudiamos los duales y preduales de distintos espacios de polinomios. En la primera sección, construimos preduales de algunos de los espacios de polinomios conocidos: los polinomios integrales, de tipo finito, w y w^*-continuos en acotados, etc. Además, mostramos que cualquier espacio de polinomios se puede ver como el dual del producto tensorial simétrico con alguna topología localmente convexa. Estos resultados aparecen en su mayoría en [18]. En la segunda sección de este capítulo estudiamos los espacios de polinomios nucleares e integrales. Mostramos que si E es Asplund, para cualquier espacio de Banach F los espacios $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE;F)$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE;F)$ (de polinomios nucleares e integrales, respectivamente) coinciden isométricamente, mejorando así un resultado de Alencar [1, 2]. Finalmente caracterizamos los duales de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE;F)$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE;F)$. Los temas de esta sección forman parte de [16].

El capítulo 3 está dedicado a estudiar el morfismo de extensión de Aron-Berner [3], que permite extender un polinomio definido en un espacio de Banach a su bidual. En la primera sección mostramos varias propiedades y caracterizaciones de este morfismo que se utilizan más adelante, resultados que aparecen en [15]. En la segunda sección, mostramos que distintos tipos de polinomios se preservan cuando se extienden por el morfismo de Aron-Berner. Además de los que "trivialmente" se preservan (como los de tipo finito, nucleares o aproximables), vemos que lo mismo ocurre con los polinomios K-acotados, cuando K es relativamente w-compacto [17] y con los integrales [18].

En el capítulo 4 estudiamos los polinomios extensibles, es decir, aquéllos que pueden extenderse a cualquier espacio mayor. Mostramos espacios en los que todo polinomio es extensible y ejemplos de polinomios que no pueden extenderse a ciertos espacios. En la primera sección de este capítulo analizamos la posibilidad de extender un polinomio definido sobre E a un espacio fijo $G \supset E$ en función de su linealización al producto tensorial simétrico. Con este fin, introducimos una norma η_G en el producto tensorial de manera que resulte equivalente que un polinomio escalar se extienda a G a que su linealización sea continua para la norma η_G. En la segunda sección, mostramos que un polinomio definido sobre E es extensible si y sólo si se extiende a $\ell_\infty(B_{E'})$ (en algunos casos, alcanza con que se extienda a $C(B_{E'}, w^*)$). Esto nos permite aplicar los resultados de la sección anterior al estudio de los polinomios extensibles, tomando $G = \ell_\infty(B_{E'})$. De esta manera, construimos un predual del espacio $\mathcal{P}_e(^kE; F)$ de polinomios extensibles de E a F, cuando F es un espacio dual. Mostramos, también, que la composición de un polinomio extensible con cualquier operador lineal es extensible (aun si el operador no lo es) y que la extensión de Aron-Berner de un polinomio extensible también lo es. Lo estudiado en estas dos secciones pertenece a [15]. En la tercera sección analizamos la extensibilidad de series de potencias entre espacios de Banach. Utilizando los resultados de las secciones precedentes, probamos la existencia de series de potencias $\sum_{k=1}^{\infty} P_k(x-a)$ de radio de convergencia infinito que no son extensibles aunque todos sus coeficientes P_k sean polinomios extensibles.

En el último capítulo exhibimos algunos ejemplos de polinomios extensibles. Utilizando los preduales del capítulo 2, analizamos la extensibilidad de polinomios dados por distintas topologías. Mostramos que todo polinomio integral escalar sobre E se extiende a un polinomio integral sobre cualquier espacio de Banach que contenga a E, conservando su norma integral. Probamos, por otra parte, que existen polinomios extensibles que no son integrales [18]. Damos ejemplos de conjuntos acotados $K \subset E'$ que verifican que todo polinomio K-acotado es extensible [17] y probamos la extensibilidad de los polinomios integrales vectoriales.

1. PRELIMINARES

En este capítulo presentaremos las funciones multilineales y los polinomios homogéneos en espacios de Banach. También enunciaremos algunas propiedades básicas de estas funciones y definiremos los distintos tipos de polinomios que serán utilizados en los capítulos siguientes. Estos temas se desarrollan con profundidad en [25] y [43].

Si X es un espacio de Banach, notaremos X' a su dual. La topología w de X será la topología débil $\sigma(X, X')$ definida de la siguiente manera: una red $(x_\alpha)_\alpha \subset X$ converge a $x \in X$ en la topología w si $\gamma(x_\alpha) \xrightarrow{\alpha} \gamma(x)$ para toda funcional $\gamma \in X'$. Por otra parte, la topología w^* de X' será la topología $\sigma(X', X)$: una red $(\gamma_\alpha)_\alpha \subset X'$ converge a $\gamma \in X'$ si para todo $x \in X$, $\gamma_\alpha(x) \xrightarrow{\alpha} \gamma(x)$.

Con B_X notaremos a la bola unitaria de X. Si K es un subconjunto de X, $\Gamma(K)$ denotará la cápsula absolutamente convexa de K.

1.1. Funciones multilineales y polinomios homogéneos

Recordemos que si $E_1, \ldots, E_k$ y F son espacios vectoriales, una función

$$\Phi : E_1 \times \cdots \times E_k \longrightarrow F$$

se dice **multilineal** o **k-lineal** si es lineal en cada una de sus coordenadas. El espacio de todas las funciones k-lineales de $E_1 \times \cdots \times E_k$ a F se notará $L(E_1, \ldots, E_k; F)$. En el caso que los espacios considerados sean espacios de Banach, notaremos $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; F)$ al subespacio de $L(E_1, \ldots, E_k; F)$ formado por las funciones multilineales que son continuas para las topologías dadas por las normas. Si $E_1 = \cdots = E_k = E$, los espacios anteriores se notarán $L(^kE; F)$ y $\mathcal{L}(^kE; F)$ respectivamente.

Una función k-lineal $\Phi : E^k \to F$ se dice **simétrica** si para cualquier permutación σ de $\{1, \ldots, k\}$ verifica

$$\Phi(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(k)}) = \Phi(x_1, \ldots, x_k)$$

para todo $(x_1, \ldots, x_k) \in E^k$. El subespacio de $\mathcal{L}(^kE; F)$ formado por las funciones k-lineales continuas simétricas se notará $\mathcal{L}_s(^kE; F)$.

Si Φ es una función k-lineal, definimos

$$\|\Phi\| = \sup\{\|\Phi(x_1, \ldots, x_k)\| : x_1 \in B_{E_1}, \ldots, x_k \in B_{E_k}\}$$

Una función multilineal resulta continua si y solamente si su norma es finita. Además, esta norma hace de $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; F)$ un espacio de Banach y vale

$$\|\Phi(x_1, \ldots, x_k)\| \leq \|\Phi\| \; \|x_1\| \; \cdots \|x_k\|$$

para todo $x_1 \in E_1, \ldots, x_k \in E_k$, siendo $\|\Phi\|$ la menor constante que verifica esta desigualdad.

Definición 1.1.1. *Diremos que una aplicación $P : E \to F$ es un* ***polinomio homogéneo de grado k*** *(o* ***polinomio k-homogéneo****) si existe una función k-lineal $\Phi : E^k \to F$ tal que*

$$P(x) = \Phi(x, \ldots, x) \tag{1.1}$$

para todo $x \in E$. En este caso diremos que $P = \hat{\Phi}$ (P es el polinomio asociado a Φ).

Distintas funciones k-lineales pueden generar, mediante la ecuación (1.1), un mismo polinomio P. Sin embargo, de todas las funciones que dan lugar a P sólo una es simétrica. A esta función la llamaremos la **función k-lineal simétrica asociada a** P y se notará $\check{P}$.

La siguiente **fórmula de polarización** permite recuperar la función multilineal simétrica a partir del polinomio asociado:

$$\check{P}(x_1,\ldots,x_k) = \frac{1}{2^k\,k!}\sum_{\varepsilon_i=\pm 1}\varepsilon_1\cdots\varepsilon_k\;P(\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i x_i) \tag{1.2}$$

para $x_1,\ldots,x_k \in E$.

Para un polinomio k-homogéneo P definimos:

$$\|P\| = \sup\{\|P(x)\| : x \in B_E\}.$$

El polinomio P resulta continuo si y solamente si $\|P\| < \infty$. Además,

$$\|P(x)\| \leq \|P\|\ \|x\|^k$$

para todo $x \in E$, siendo $\|P\|$ la menor constante que verifica esta desigualdad. Notaremos $\mathcal{P}(^kE;F)$ al espacio de todos los polinomios k-homogéneos continuos de E a F. El espacio de polinomios homogéneos resulta un espacio de Banach con la norma definida. Claramente, la norma de un polinomio es menor o igual a la de su función multilineal asociada. Una consecuencia de la fórmula de polarización (1.2) es que un polinomio homogéneo es continuo si y solamente si su función multilineal asociada lo es. Además, se verifica la siguiente desigualdad (que mostraremos en un contexto algo más general en la sección 1.3):

$$\|P\| \leq \left\|\check{P}\right\| \leq \frac{k^k}{k!}\|P\|.$$

Esto dice que la aplicación:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L}_s(^kE;F) & \longrightarrow & \mathcal{P}(^kE;F) \\ \Phi & \longmapsto & \hat{\Phi} \end{array}$$

es un isomorfismo de espacios de Banach (cuya inversa está dada por la aplicación $P \mapsto \check{P}$). Por otra parte, queda claro que

$$\mathcal{P}(^1E;F) = \mathcal{L}_s(^1E;F) = \mathcal{L}(E;F).$$

Dado un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE;F)$ se define el **operador asociado a** P como el operador lineal $T_P : E \to \mathcal{P}(^{k-1}E;F)$ dado por

$$T_P(x) = \check{P}(x, \underbrace{\cdot, \ldots, \cdot}_{k-1})$$

También definimos **la diferencial de** P como la aplicación $DP : E \to \mathcal{L}(E;F)$ dada por

$$\frac{1}{k} DP(x) = \check{P}(\underbrace{x, \ldots, x}_{k-1}, \cdot).$$

Es fácil ver que DP resulta un polinomio $(k-1)$-homogéneo de E a $\mathcal{L}(E;F)$.

Cuando el espacio de llegada F sea el cuerpo escalar $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, la notación de los espacios de funciones multilineales o polinomios homogéneos se simplificará omitiendo el codominio. Así, escribiremos $\mathcal{L}(E)$ en lugar de $\mathcal{L}(E;\mathbb{K})$ o $\mathcal{P}(^kE)$ en lugar de $\mathcal{P}(^kE;\mathbb{K})$.

Tipos de polinomios

El ejemplo más simple de polinomio k-homogéneo escalar sobre un espacio de Banach E está dado por $P(x) = \gamma(x)^k$, donde γ es una funcional lineal continua definida sobre E. Claramente, la función k-lineal simétrica asociada a este polinomio es:

$$\check{P}(x_1, \ldots, x_k) = \gamma(x_1) \cdots \gamma(x_k).$$

Más generalmente, diremos que un polinomio $P : E \to F$ es de **tipo finito** si existen funcionales $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in E'$ y vectores $y_1, \ldots, y_n \in F$ tales que

$$P(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(x)^k \, y_j \qquad \text{para todo } x \in E,$$

El espacio de polinomios de tipo finito se notará $\mathcal{P}_f(^kE;F)$. Una consecuencia de la fórmula de polarización es que dados $\varphi_1, \ldots, \varphi_k \in E'$, existen $(\gamma_j)_{j=1,\ldots,2^k}$ tales que

$$\varphi_1(x) \cdots \varphi_k(x) = \sum_{j=1}^{2^k} \gamma_j(x)^k \qquad \text{para todo } x \in E$$

si los espacios considerados son complejos (si los espacios son reales y k es par, las potencias de γ_j quedan multiplicadas por ± 1). Es decir que en la definición de polinomios de tipo finito podemos reemplazar las potencias de funcionales por productos de distintas funcionales. A partir de esto, es fácil ver que si $P : E \rightarrow F$ es un polinomio y $T : X \rightarrow E$ es un operador de rango finito, la composición $P \circ T$ es un polinomio de tipo finito. En particular, si E es un espacio de dimensión finita, todo polinomio sobre E es de tipo finito.

Por otra parte, diremos que un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$ es nuclear si existen una sucesión acotada $\{y_j\}_{j=1}^{\infty} \subset F$ y una sucesión $\{\gamma_j\}_{j=1}^{\infty} \subset E'$ que verifica $\sum_{j=1}^{n} \|\gamma_j\|^k < \infty$ tales que:

$$P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(x)^k \, y_j \qquad \text{para todo } x \in E. \tag{1.3}$$

El espacio de polinomios nucleares $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)$ resulta un espacio de Banach con la norma nuclear

$$\|P\|_{\mathcal{N}} = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma_j\|^k \| \, y_j \| \right\}$$

donde el ínfimo se toma entre todas las posibles representaciones de la forma (1.3). Dado un polinomio nuclear, siempre se puede encontrar una expresión de la forma (1.3) que verifique que $\sum_{j=1}^{n} \|\gamma_j\|^k < \infty$ y $\|y_j\| \rightarrow 0$.

La clausura del espacio de polinomios de tipo finito (o de polinomios nucleares) en $\mathcal{P}(^kE; F)$ es el espacio de polinomios **aproximables** $\mathcal{P}_{A}(^kE; F)$.

Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$ se dice **integral** si existe una medida regular, de Borel, σ-aditiva y de variación acotada G definida en $(B_{E'}, w^*)$ a valores en F tal que:

$$P(x) = \int_{B_{E'}} \gamma(x) \, dG(\gamma) \tag{1.4}$$

El espacio de polinomios integrales $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE; F)$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|P\|_{\mathcal{I}} = \inf\{| \, G \, | \, (B_{E'})\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las medidas que verifican (1.4). Notaremos $\mathcal{M}(B_{E'}, F)$ al espacio de todas las medidas regulares de Borel, σ-aditivas y de variación acotada definidas sobre $(B_{E'}, w^*)$ a valores en F.

Es fácil ver que todo polinomio nuclear es integral: si $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(x)^k\, y_j$, entonces P es integral con medida vectorial asociada

$$\sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma_j\|^k \; \delta_{\left(\frac{\gamma_j}{\|\gamma_j\|}\right)}\, y_j.$$

Como la variación de esta medida es $\sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma_j\|^k \; \|y_j\|$, se sigue que la norma integral de P es menor o igual a su norma nuclear. Aunque en general existen polinomios integrales no nucleares, veremos condiciones que aseguran la igualdad (isométrica) de los espacios $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE; F)$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)$ (ver sección 2.2)

Consideremos ahora polinomios definidos sobre un espacio dual E' que tomen sus valores en un espacio F. Diremos que un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE'; F)$ es de tipo *-finito si existen elementos $x_1, \ldots, x_m \in E$, $y_1, \ldots, y_m \in F$ tales que

$$P(\gamma) = \sum_{j=1}^{m} \gamma(x_j)^k\, y_j$$

para $\gamma \in E'$. Notaremos $\mathcal{P}_{f^*}(^kE'; F)$ a este espacio y su clausura en $\mathcal{P}(^kE'; F)$ es el espacio de polinomios *-aproximables $\mathcal{P}_{A^*}(^kE'; F)$. Claramente, $\mathcal{P}_{f^*}(^kE'; F) \subset \mathcal{P}_f(^kE'; F)$ y $\mathcal{P}_{A^*}(^kE'; F) \subset \mathcal{P}_A(^kE'; F)$.

Hasta aquí los polinomios se clasificaron según sus distintas expresiones. Sin embargo, existen otras clasificaciones que están relacionadas con diversas propiedades de continuidad. Así, diremos que un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$ es **w-continuo en acotados** si su restricción a cualquier acotado de E resulta una función continua considerando la topología débil en E y la dada por la norma en F. El espacio de estos polinomios se notara $\mathcal{P}_w(^kE; F)$. Análogamente, un polinomio definido sobre un espacio dual E' a valores en F se dirá **w^*-continuo en acotados** si su restricción a cualquier acotado de E' es continuo entre la topología w^* de E' y la de la norma F. El espacio de estos polinomios se notará $\mathcal{P}_{w^*}({}^kE;F)$.

Por otra parte, un polinomio P se dirá **secuencialmente débil continuo** (o **w.s.c.**) si, cada vez que una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge débilmente a x en E, $P(x_n)$ converge en norma a $P(x)$ en F. Notaremos con $\mathcal{P}_{wsc}({}^kE;F)$ al espacio de polinomios secuencialmente débil continuos de E a F.

Las siguientes relaciones entre los distintos espacios de polinomios se siguen inmediatamente de las definiciones de los mismos:

$$\mathcal{P}_f({}^kE;F) \subset \mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^kE;F) \subset \mathcal{P}_A({}^kE;F) \subset \mathcal{P}_w({}^kE;F) \subset \mathcal{P}_{wsc}({}^kE;F) \subset \mathcal{P}({}^kE;F)$$

y

$$\mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^kE;F) \subset \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F) \subset \mathcal{P}_{wsc}({}^kE;F)$$

donde la última inclusión es una consecuencia del teorema de convergencia mayorada. Todas las inclusiones son, en general, estrictas. Sin embargo existen casos en los que valen las inclusiones inversas. Por ejemplo, si E es de dimensión finita todos los espacios de polinomios coinciden. Si E' tiene la propiedad de aproximación, $\mathcal{P}_A({}^kE;F) = \mathcal{P}_w({}^kE;F)$ para todo espacio de Banach F [10] (ver sección 1.5). Si E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_1, $\mathcal{P}_w({}^kE;F) = \mathcal{P}_{wsc}({}^kE;F)$ para todo F [28], mientras que si E tiene la propiedad de Dunford-Pettis, $\mathcal{P}_{wsc}({}^kE) = \mathcal{P}({}^kE)$ [47]. Veremos en la sección 2.2 que $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^kE;F) = \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F)$ isométricamente si E' tiene la propiedad de Radon-Nikodym (ver también [1, 2]).

Las definiciones de los distintos tipos de funciones multilineales (de tipo finito, aproximables, nucleares, etc.) son análogas a las definiciones de los tipos de polinomios correspondientes. En la notación, utilizaremos $\mathcal{L}$ en lugar de $\mathcal{P}$.

1.2. Productos tensoriales

R. Ryan [48] introdujo los productos tensoriales simétricos al estudio de los polinomios y las funciones holomorfas en espacios de Banach (y en espacios localmente convexos). El objeto de la aplicación de productos tensoriales es linealizar problemas no lineales. Así, problemas concernientes a cierta clase de funciones (polinomios, funciones holomorfas) se traducen a problemas que involucran aplicaciones lineales (que son más simples) sobre los productos tensoriales, con el costo de tener que trabajar en espacios algo más complejos que los espacios originales.

Recordemos que si $E_1, \ldots, E_k$ son espacios vectoriales, el **producto tensorial** de $E_1, \ldots, E_k$ es el espacio vectorial $E_1 \otimes \ldots \otimes E_k$ generado por los elementos de la forma $x_1 \otimes \cdots \otimes x_k$, donde $x_1 \in E_1, \ldots, x_k \in E_k$, de manera que la aplicación

$$\begin{array}{rccc} \rho_k : & E_1 \times \cdots \times E_k & \longrightarrow & E_1 \otimes \ldots \otimes E_k \\ & (x_1, \ldots, x_k) & \longmapsto & x_1 \otimes \cdots \otimes x_k \end{array} \tag{1.5}$$

es k-lineal. Esta aplicación k-lineal es universal en el siguiente sentido: dado un espacio vectorial F y una función k-lineal $\Phi : E_1 \times \cdots \times E_k \to F$ existe una única aplicación lineal $A_\Phi : E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \to F$ tal que $\Phi = A_\Phi \circ \rho_k$ (es decir, $\Phi(x_1, \ldots, x_k) = A_\Phi(x_1 \otimes \cdots \otimes x_k)$). Además, dado cualquier operador lineal $A : E_1 \otimes \cdots \otimes E_k \to F$ la función $A \circ \rho_k$ es una función k-lineal de $E_1 \times \cdots \times E_k$ en F. En consecuencia, los espacios vectoriales $L(E_1, \ldots, E_k; F)$ y $L(E_1 \otimes \cdots \otimes E_k; F)$ resultan isomorfos vía la aplicación $\Phi \leftrightarrow A_\Phi$.

La multilinealidad de la aplicación (1.5) hace que todo elemento $t \in E_1 \otimes \ldots \otimes E_k$ tenga una representación (no única) de la forma

$$t = \sum_{j=1}^{m} x_1^j \otimes \cdots \otimes x_k^j$$

donde $x_i^j \in E_i$ para cada $i = 1, \ldots, k$ y cada $j = 1, \ldots, m$. Si $E_1, \ldots, E_k$ son espacios de Banach, se define en $E_1 \otimes \cdots \otimes E_k$ la **norma proyectiva** o (**π-norma**) de un elemento como

$$\|t\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{m} \left\|x_1^j\right\| \cdots \left\|x_k^j\right\| \right\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones de t. Al producto tensorial dotado con esta norma lo notaremos $E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_k$, y a su completación $E_1 \hat{\otimes}_\pi \cdots \hat{\otimes}_\pi E_k$. Esta norma tiene la siguiente propiedad fundamental:

Proposición 1.2.1. *La aplicación $\Phi \leftrightarrow A_\Phi$ es un isomorfismo isométrico entre los espacios $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k; F)$ y $\mathcal{L}(E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_k; F)$. En particular, si F es el cuerpo escalar, $\mathcal{L}(E_1, \ldots, E_k) = (E_1 \otimes_\pi \cdots \otimes_\pi E_k)'$ isométricamente.*

Dados dos espacios de Banach X e Y tenemos, por la proposición anterior, que $(X \otimes_\pi Y)' = \mathcal{L}(X, Y)$. Por otra parte, cada $\Phi \in \mathcal{L}(X, Y)$ define un operador $T_\Phi : X \to Y'$ dado por $T_\Phi(x)(y) = \Phi(x, y)$, para $x \in X$, $y \in Y$. Esto da un isomorfismo isométrico entre los espacios $\mathcal{L}(X, Y)$ y $\mathcal{L}(X; Y')$. Luego tenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.2.2. $(X \otimes_\pi Y)' = \mathcal{L}(X; Y')$ *isométricamente.*

Supongamos que $E_1 = \cdots = E_k = E$ y consideremos el espacio $\otimes^k E := \underbrace{E \otimes \cdots \otimes E}_{k}$ (el producto tensorial de orden k de E). El subespacio de $\otimes^k E$ generado por los elementos de la forma

$$x^{(k)} := x \otimes \cdots \otimes x$$

con $x \in E$, se denomina el **producto tensorial simétrico** de orden k de E. Este espacio se notará $\otimes_s^k E$ y llamaremos $\Delta_k : E \to \otimes_s^k E$ al polinomio k-homogéneo dado por

$$\Delta_k(x) = x^{(k)}.$$

Este polinomio tiene la siguiente propiedad: dado un espacio vectorial F y un polinomio k-homogéneo $P : E \to F$, existe una única aplicación lineal $L_P : \otimes_s^k E \to F$ tal que $P = L_P \circ \Delta_k$ (o, equivalentemente, $P(x) = L_P(x^{(k)})$). Recíprocamente, dado un operador lineal $L : \otimes_s^k E \to F$, la aplicación $L \circ \Delta_k$ es un polinomio k-homogéneo de E a F. Entonces, los espacios $P(^k E; F)$ y $L(\otimes_s^k E; F)$ son isomorfos vía la aplicación $P \leftrightarrow L_P$.

Dado un polinomio $P : E \to F$, el operador L_P que verifica $L_P(x^{(k)}) = P(x)$ se denomina la **linealización** de P.

Un elemento $s \in \otimes_s^k E$ tiene una representación (no única) de la forma

$$s = \sum_{j=1}^{m} x_j^{(k)} \qquad \text{con } x_j \in E,\ j = 1, \dots, m$$

si E es un espacio vectorial complejo (o si es real y k es impar). Si E es un espacio real y k es par, las representaciones de los elementos son

$$s = \sum_{j=1}^{m} x_j^{(k)} - \sum_{j=m+1}^{n} x_j^{(k)} \qquad \text{con } x_j \in E,\ j = 1, \dots, n.$$

Por comodidad, utilizaremos la notación compleja.

Si E y F son espacios de Banach, nos interesa darle al producto tensorial simétrico una norma de manera que la aplicación $P \leftrightarrow L_P$ sea una correspondencia biunívoca entre polinomios k-homogéneos continuos de E a F y operadores lineales continuos de $\otimes_s^k E$ (con su norma) y F. Para un elemento $s \in \otimes_s^k E$ definimos la **norma proyectiva (o π-norma) simétrica** de s como

$$\|s\|_\pi = \inf \left\{ \sum_{j=1}^{m} \|x_j\|^k \right\}$$

donde el ínfimo se toma entre todas las posibles representaciones $s = \sum_{j=1}^{m} x_j^{(k)}$. El producto tensorial $\otimes_s^k E$ dotado con la π-norma simétrica se notará $\otimes_{s,\pi}^k E$ y su completación será $\hat{\otimes}_{s,\pi}^k E$. Es importante observar que la norma proyectiva simétrica en $\otimes_s^k E$ no coincide con la restricción de la norma proyectiva de $\otimes^k E$ al producto tensorial simétrico. Sin embargo utilizaremos la misma notación (π) para ambas normas, asumiendo que en el producto tensorial simétrico se refiere siempre a la norma proyectiva simétrica. Si consideramos el subconjunto de $\hat{\otimes}_{s,\pi}^k E$

$$B_E^{(k)} := \{x^{(k)} : x \in B_E\}$$

se puede ver que la bola unitaria de $\hat{\otimes}_{s,\pi}^k E$ coincide con $\overline{\Gamma(B_E^{(k)})}$, la cápsula absolutamente convexa cerrada de $B_E^{(k)}$. Además la norma proyectiva tiene la siguiente propiedad fundamental:

Proposición 1.2.3. *Si E y F son espacios de Banach, la aplicación $P \leftrightarrow L_P$ es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{P}(^kE;F)$ y $\mathcal{L}(\otimes^k_{s,\pi}E;F)$. En particular, si F es el cuerpo escalar, tenemos $\left(\otimes^k_{s,\pi}E\right)' = \mathcal{P}(^kE)$.*

Queda claro que en las proposiciones 1.2.1 y 1.2.3 y en el corolario 1.2.2, los productos tensoriales se pueden reemplazar por los productos completados. Dado que $\left(\otimes^k_{s,\pi}E\right)' = \mathcal{P}(^kE)$, un elemento $s \in \otimes^k_{s,\pi}E$ se puede considerar dentro de $\left(\otimes^k_{s,\pi}E\right)'' = \left(\mathcal{P}(^kE)\right)'$. Así, notaremos también con s a la funcional

$$s(P) = L_P(s).$$

Si F es un espacio dual: $F = Y'$, combinando la proposición anterior y el corolario 1.2.2 tenemos:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(^kE;Y') &= \mathcal{L}(\otimes^k_{s,\pi}E;Y') \\ &= \left((\otimes^k_{s,\pi}E)\otimes_\pi Y\right)' \end{aligned} \tag{1.6}$$

isométricamente. Observemos que, en $(\otimes^k_{s,\pi}E)\otimes_\pi Y$, π denota la norma proyectiva simétrica en el producto simétrico $\otimes^k_{s,\pi}E$, mientras que en el producto no simétrico de $(\otimes^k_{s,\pi}E)$ con Y denota la norma proyectiva no simétrica. Dado un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE;Y')$, definimos su **funcional lineal asociada** $P^* \in \left((\otimes^k_{s,\pi}E)\otimes_\pi Y\right)'$

$$P^*(s\otimes y) = L_P(s)(y)$$

para $s \in (\otimes^k_{s,\pi}E)$ e $y \in Y$. En particular, $P^*(x^{(k)}\otimes y) = P(x)(y)$. Por lo dicho anteriormente, la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}(^kE;F) & \longrightarrow & \left((\otimes^k_{s,\pi}E)\otimes_\pi Y\right)' \\ P & \longmapsto & P^* \end{array}$$

es un isomorfismo isométrico. Todo $t \in (\otimes^k_{s,\pi}E)\otimes_\pi Y$ se puede considerar como elemento de $\left((\otimes^k_{s,\pi}E)\otimes_\pi Y\right)'' = \left(\mathcal{P}(^kE;F)\right)'$ de la siguiente manera:

$$t(P) = P^*(t).$$

1.3. Polinomios K-acotados

Sea K un subconjunto acotado de E'. Para $x \in E$, definimos la siguiente seminorma:

$$\|x\|_K = \sup_{\gamma \in K} |\gamma(x)|.$$

Observemos que $\|x\|_K = \sup_{\gamma \in K} |\gamma(x)| \leq \sup_{\gamma \in K} \|\gamma\| \ \|x\|$. Si llamamos λ_K al supremo de las normas de las funcionales $\gamma \in K$, tenemos:

$$\|x\|_K \leq \lambda_K \|x\|. \tag{1.7}$$

Diremos que un polinomio k-homogéneo P es **K-acotado** si existe una constante positiva C tal que

$$\|P(x)\| \leq C \|x\|_K^k \tag{1.8}$$

para todo x en E. La menor constante C que verifica (1.8) se notará $\|P\|_K$. Notemos que la desigualdad (1.7) implica que $\|P(x)\| \leq \|P\|_K \|x\|_K^k \leq \|P\|_K \ \lambda_K^k \ \|x\|^k$. Entonces, todo polinomio K-acotado es continuo y la K-norma de un polinomio se relaciona con la norma usual de la siguiente manera:

$$\|P\| \leq \lambda_K^k \ \|P\|_K. \tag{1.9}$$

El espacio de polinomios k-homogéneos K-acotados se notará $\mathcal{P}_K(^kE; F)$. La norma $\|\cdot\|_K$ hace a $(\mathcal{P}_K(^kE; F), \|\cdot\|_K)$ un espacio de Banach. Notemos que si $K = B_E$, entonces $\|\cdot\|_K = \|\cdot\|$ y por lo tanto $\mathcal{P}_K(^kE, F) = \mathcal{P}(^kE, F)$ con las mismas normas.

También diremos que una función k-lineal $\Phi : E^k \to F$ es K-acotada si existe una constante C tal que

$$\|\Phi(x_1, \ldots, x_k)\| \leq C \|x_1\|_K \cdots \|x_k\|_K \tag{1.10}$$

para toda k-upla $(x_1, \ldots, x_k) \in E^k$ y notaremos con $\|\Phi\|_K$ a la menor constante C que verifica (1.10). Como sucedía para la norma usual, la K-norma de un polinomio k-homogéneo y de una función k-lineal se pueden calcular como

$$\|P\|_K = \sup_{\|x\|_K \leq 1} \|P(x)\|$$

y

$$\|\Phi\|_K = \sup_{\|x_1\|_K \leq 1, \ldots, \|x_k\|_K \leq 1} \|\Phi(x_1, \ldots, x_k)\|$$

respectivamente.

Como $\|x\|_K \leq \lambda_K \ \|x\|$ para todo $x \in E$, toda función k-lineal K-acotada es continua. Claramente, si Φ es K-acotada el polinomio $P = \hat{\Phi}$ también lo es y $\|P\|_K \leq \|\check{P}\|_K$. Por otra parte, supongamos que P es K-acotado y tomemos $x_1, \ldots, x_k \in E$ con K-norma menor o igual que 1. Por la fórmulá de polarización,

$$\begin{aligned}
\left\|\check{P}(x_1, \ldots, x_k)\right\| &\leq \frac{1}{2^k k!} \sum_{\varepsilon = \pm 1} \|P(\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k)\| \\
&\leq \frac{1}{2^k k!} \sum_{\varepsilon = \pm 1} \|P\|_K \ \|\varepsilon_1 x_1 + \cdots + \varepsilon_k x_k\|_K^k \\
&\leq \frac{1}{2^k k!} \|P\|_K \sum_{\varepsilon = \pm 1} (\|x_1\|_K + \cdots + \|x_k\|_K)^k \\
&\leq \frac{1}{2^k k!} \|P\|_K \ 2^k \ k^k = \frac{k^k}{k!} \|P\|_K .
\end{aligned}$$

De esto se deduce que $\check{P}$ es K-acotada y $\|\check{P}\|_K \leq \frac{k^k}{k!} \|P\|_K$.

Finalmente tenemos:

$$\|P\|_K \leq \|\check{P}\|_K \leq \frac{k^k}{k!} \|P\|_K$$

Por lo tanto existe una correspondencia biunívoca entre polinomios K-acotados y funciones multilineales simétricas K-acotadas.

Así como la función multilineal simétrica asociada a un polinomio K acotado es K-acotada, el operador asociado también lo es. Más aún, si x e y son elementos de E, entonces

$$\|T_P(x)(y)\| = \left\|\check{P}(x, y, \ldots, y)\right\| \leq \|\check{P}\|_K \ \|x\|_K \ \|y\|_K^{k-1}, \tag{1.11}$$

lo que implica que $T_P(x)$ es un polinomio $(k-1)$-homogéneo K-acotado de K-norma menor o igual que $\|\check{P}\|_K \ \|x\|_K$. Luego, T_P resulta un operador K-acotado de E a $\mathcal{P}_K({}^{k-1}E, F)$.

Las observaciones que siguen serán muy utilizadas:

Observación 1.3.1. *Sean $x, y \in E$ y $P \in \mathcal{P}_K(^kE, F)$. Entonces*

$$\begin{aligned} \|P(x) - P(y)\| &\leq \left\|\check{P}(x,\dots,x) - \check{P}(y,x,\dots,x)\right\| + \left\|\check{P}(y,x,\dots,x) - \check{P}(y,y,x,\dots,x)\right\| \\ &\quad + \cdots + \left\|\check{P}(y,\dots,y,x) - \check{P}(y,\dots,y)\right\| \\ &\leq \|\check{P}\|_K \,\|x-y\|_K \,\|x\|_K^{k-1} + \|\check{P}\|_K \,\|x-y\|_K \,\|y\|_K \,\|x\|_K^{k-2} \\ &\quad + \cdots + \|\check{P}\|_K \,\|x-y\|_K \,\|y\|_K^{k-1} \\ &\leq k\|\check{P}\|_K \ \max\{\|x\|_K, \|y\|_K\}^{k-1} \,\|x-y\|_K. \end{aligned}$$

En particular, si $\|x-y\|_K = 0$, entonces $P(x) = P(y)$.

Observación 1.3.2. *Si $K_1 \subset K_2$ entonces, para cualquier x en E, $\|x\|_{K_1} \leq \|x\|_{K_2}$. Luego, todo polinomio K_1-acotado P es K_2-acotado y $\|P\|_{K_2} \leq \|P\|_{K_1}$.*

Por otra parte, dado $K \subset E'$, es fácil ver que $\|x\|_K = \|x\|_{\overline{\Gamma(K)}}$ (donde $\overline{\Gamma(K)}$ es la cápsula absolutamente convexa cerrada de K). Luego, los espacios de Banach $\mathcal{P}_K(^kE, F)$ y $\mathcal{P}_{\overline{\Gamma(K)}}(^kE, F)$ coinciden isométricamente.

Un resultado de E. Toma [49] (ver también [9] y [6]) afirma que un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE)$ es w-continuo sobre acotados si y solamente si existe un subconjunto compacto K de E' y una constante positiva C tales que

$$|P(x)| \leq C \sup_{\gamma \in K} |\gamma(x)|^k .$$

En otras palabras, un polinomio escalar es w-continuo en acotados si y sólo si es K-acotado para algún subconjunto compacto K de E'. A continuación veremos que lo mismo ocurre si P es un polinomio w-continuo en acotados que toma sus valores en un espacio de Banach F. Por otra parte, probaremos que un polinomio (vectorial) definido en un espacio dual E' es w^*-continuo en acotados si y solamente si es K-acotado para un subconjunto compacto K de E. Estos resultados nos permitirán estudiar condiciones bajo las cuales los polinomios w (o w^*)-continuos sobre acotados son aproximables (o *-aproximables). Otra aplicación será la construcción de preduales de los espacios $\mathcal{P}_w({}^kE)$ y $\mathcal{P}_{w^*}({}^kE)$, que se realizará en el capítulo siguiente.

Muchos de los resultados concernientes a polinomios w-continuos en acotados de E y a polinomios w^*-continuos en acotados de E' se demuestran de manera muy similar. En esos casos, demostraremos los resultados para polinomios w^*-continuos ya que suelen presentar algunas dificultades adicionales.

1.4. K-acotación de los polinomios w y w^*-continuos

Para probar la K-acotación de los polinomios w y w^*-continuos en acotados utilizaremos el teorema 1.4.4 y el corolario 1.4.5 de factorización uniforme de operadores compactos de Aron, Lindström, Ruess y Ryan [9]. Para poder aplicar estos resultados, debemos estudiar cómo se traducen los distintos tipos de continuidad de un polinomio en propiedades de su operador lineal asociado.

Lema 1.4.1. *a) Si $P \in \mathcal{P}_{w^*}({}^kE'; F)$ entonces su operador lineal asociado T_P pertenece al espacio $\mathcal{L}_{w^*}(E'; \mathcal{P}_{w^*}({}^{k-1}E'; F))$.*

b) Si $P \in \mathcal{P}_w({}^kE; F)$ entonces su operador lineal asociado T_P pertenece al espacio $\mathcal{L}_w(E; \mathcal{P}_w({}^{k-1}E; F))$.

DEMOSTRACIÓN: *a)* Si $P \in \mathcal{P}_{w^*}({}^kE'; F)$, por la fórmula de polarización (1.2) $\check{P} \in \mathcal{L}_{w^*}({}^kE'; F)$. En particular, como $T_P(\gamma)(\varphi) = \check{P}(\gamma, \varphi, \dots, \varphi)$, tenemos que $T_P(\gamma) = \check{P}(\gamma, \cdot, \dots, \cdot) \in \mathcal{P}_{w^*}({}^{k-1}E'; F)$ para todo $\gamma \in E'$. Supongamos que T_P no es w^*-continuo en algún acotado de E'. Entonces existe una red acotada y w^*-nula $\{\gamma_\alpha\}_\alpha \subset E'$ y un $\varepsilon > 0$ tales que $\|T_P(\gamma_\alpha)\| > \varepsilon$ para todo α. Para cada α tomemos una funcional $\varphi_\alpha \in B_{E'}$ que satisfaga $\|T_P(\gamma_\alpha)(\varphi_\alpha)\| > \varepsilon$. Como $B_{E'}$ es w^*-compacta, pasando a una subsucesión si es necesario, podemos suponer que $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ es w^*-convergente. Si φ es el w^*-límite de $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$, tenemos

$$T_P(\gamma_\alpha)(\varphi_\alpha) = \check{P}(\gamma_\alpha, \varphi_\alpha, \dots, \varphi_\alpha) \to \check{P}(0, \varphi, \dots, \varphi) = 0$$

lo que contradice que $\|T_P(\gamma_\alpha)(\varphi_\alpha)\|$ sea mayor que ε para todo α.

b) La demostración de *b)* es análoga. ∎

Notaremos con $\mathcal{K}(E;F)$ al espacio de operadores compactos de E a F. Definimos, además, el siguiente conjunto:

$$\mathcal{K}_{w^*w}(E';F) = \{T \in \mathcal{K}(E';F) : \ T \text{ es } w^*\text{-}w\text{-continuo}\}$$

El próximo lema muestra que los operadores lineales de E' a F que son w^*-w-continuos en acotados resultan w^*-w-continuos.

Lema 1.4.2. *a) Si $z \in E''$ es una funcional lineal w^*-continua en acotados de E', entonces $z \in E$.*

b) Si $T : E' \to F$ es w^*-w-continuo en acotados de E', entonces T es w^*-w-continuo.

DEMOSTRACIÓN: *a)* Supongamos que z no pertenece a E. Entonces existe una funcional $\Psi \in (E'')'$ tal que $\Psi|_E = 0$ y $\Psi(z) \neq 0$. Por el teorema de Goldstine, podemos encontrar una red acotada $\{\gamma_\alpha\}_\alpha \subset E'$ que converja a Ψ en la topología w^* de E''' (es decir, que $w(\gamma_\alpha) \to \Psi(w)$ para todo $w \in E''$). En particular, si tomamos $w \in E$, $\gamma_\alpha(w) \to \Psi(w) = 0$. Es decir que γ_α tiende a cero en la topología w^* de E'. Si z es w^*-continuo en acotados de E', $z(\gamma_\alpha) \to 0$. Pero además, $z(\gamma_\alpha) \to \Psi(z) \neq 0$, con lo que llegamos a una contradicción.

b) Para ver que T es w^*-w-continuo basta ver que para toda funcional $\xi \in F'$ la composición $\xi \circ T$ es w^*-continua. Si T es w^*-w-continuo en acotados, entonces $\xi \circ T$ es w^*-continua en acotados. Esto nos dice, por *a)*, que $\xi \circ T$ es un elemento de E y por lo tanto es w^*-continuo. ∎

Corolario 1.4.3. $\mathcal{L}_{w^*}(E';F) \subset \mathcal{K}_{w^*w}(E';F)$.

DEMOSTRACIÓN: Sea $T \in \mathcal{L}_{w^*}(E';F)$. Por ser la bola unidad de E' w^*−compacta, su imagen por T (que es w^*-continuo en acotados) resulta compacta. Por otra parte, T es w^*-continuo en acotados y, por lo tanto, es w^*-w-continuo en acotados. El lema anterior nos dice que T es w^*-w-continuo. Luego, $T \in \mathcal{K}_{w^*w}(E';F)$. ∎

Los resultados que siguen aparecen en [9]. Los enunciados fueron simplificados para nuestros propósitos.

Teorema 1.4.4. *Existe un espacio de Banach universal W que, dado cualquier par de espacios de Banach E y F, verifica: para todo subconjunto compacto H de $\mathcal{K}_{w^*w}(E';F)$ existe un operador $u \in \mathcal{K}_{w^*w}(E';W)$ y un conjunto compacto de operadores $\{L_T : T \in H\} \subset \mathcal{K}(W;F)$ tales que $T = L_T \circ u$ para todo $T \in H$.*

Corolario 1.4.5. *Para todo par de espacios de Banach E y F y todo subconjunto compacto H de $\mathcal{K}(E;F)$ existe un operador $u \in \mathcal{K}(E;W)$ y un conjunto compacto $\{L_T : T \in H\} \subset \mathcal{K}(W;F)$ tales que $T = L_T \circ u$ para todo $T \in H$.*

El lema 1.4.1 y el corolario 1.4.3 nos permiten aplicar los resultados de [9] a polinomios w y w^*-continuos en acotados.

Lema 1.4.6. *Si H_k es un subconjunto compacto de $\mathcal{L}_{w^*}(E';\mathcal{P}_{w^*}({}^{k-1}E';F))$ entonces existe un subconjunto compacto K de E, tal que $\|T(\gamma)(\gamma)\| \leq \sup_{x\in K}|\gamma(x)|^k$, para todo $T \in H_k$ (para el caso $k=1$, $\mathcal{P}_{w^*}({}^{k-1}E';F) = F$ y la desigualdad es en realidad $\|T(\gamma)\| \leq \sup_{x\in K}|\gamma(x)|$).*

DEMOSTRACIÓN: La demostración se hará por inducción en k.
$k=1$: Sean W, $u \in \mathcal{K}_{w^*w}(E';W)$ y $\{L_T : T \in H\} \subset \mathcal{K}(W;F)$ como en el teorema 1.4.4. Cada $T \in H_1$ se escribe como $T = L_T \circ u$, . Entonces,

$$\begin{aligned}\|T(\gamma)\| &= \|(L_T \circ u)(\gamma)\| \leq C\ \|u(\gamma)\| = C \sup_{z'\in B_{W'}} |z'(u(\gamma))| \\ &= C \sup_{z'\in B_{W'}} |u'(z')(\gamma)| = \sup_{x\in K_1} |\gamma(x)|\end{aligned}$$

donde C es el máximo de las normas de los operadores L_T y $K_1 = C\ \overline{u'(B_{W'})}$. Como u es un operador compacto, K_1 es un conjunto compacto. Sólo resta probar que está incluido en E. Para ver esto mostraremos que dada cualquier funcional $\xi \in B_{W'}$, la funcional

$u'(\xi)$ es w^*-continua sobre E': si $\gamma_\alpha \overset{w^*}{\rightarrow} 0$, como u es w^*-w-continuo, $u(\gamma_\alpha) \overset{w}{\rightarrow} 0$. Luego, $u'(\xi)(\gamma_\alpha) = \xi(u(\gamma_\alpha)) \rightarrow 0$.

Paso inductivo: Sea H_k un subconjunto compacto de $\mathcal{L}_{w^*}(E'; \mathcal{P}_{w^*}(^{k-1}E'; F))$. Con la notación del teorema anterior tenemos, para cada $T \in H_k$ y cada $\gamma \in E'$,

$$\begin{aligned} \|T(\gamma)(\gamma)\| &= \|(L_T \circ u)(\gamma)(\gamma)\| = \|(e_\gamma \circ L_T \circ u)(\gamma)\| \\ &= \sup_{\xi \in B_{F'}} |(\xi \circ e_\gamma \circ L_T \circ u)(\gamma)| = \sup_{\xi \in B_{F'}} |L'_T(\xi \circ e_\gamma)(u(\gamma))| \\ &\leq \sup_{\xi \in B_{F'}} \|L'_T(\xi \circ e_\gamma)\| \; \|u(\gamma)\| \end{aligned}$$

donde $e_\gamma : \mathcal{P}_{w^*}(^{k-1}E'; F) \rightarrow F$ está dada por $e_\gamma(P) = P(\gamma)$.

Como ocurrió en el caso $k = 1$, existe un subconjunto compacto K_1 de E tal que $\|u(\gamma)\| \leq \sup_{x \in K_1} |\gamma(x)|$. Veamos qué sucede con la otra norma:

$$\begin{aligned} \|L'_T(\xi \circ e_\gamma)\| &= \sup_{z \in B_W} |L'_T(\xi \circ e_\gamma)(z)| = \sup_{z \in B_W} |(\xi \circ e_\gamma)(L_T(z))| \\ &= \sup_{z \in B_W} |\xi(L_T(z)(\gamma))| \leq \sup_{z \in B_W} \|L_T(z)(\gamma)\| \end{aligned} \tag{1.12}$$

Consideremos el conjunto

$$H_{k-1} = \overline{\{L_T(z) : \; z \in B_W, \; T \in H_n\}} \subset \mathcal{P}_{w^*}(^{k-1}E'; F).$$

Para ver que H_{k-1} es compacto, tomemos una sucesión $L_{T_j}(z_j)$ en H_{k-1}. Como el conjunto $\{L_T : T \in H_n\}$ es compacto, existe una subsucesión $L_{T_{j_i}}$ que converge a cierto operador L_{T_0}. El operador L_{T_0} es compacto. Entonces, pasando nuevamente a una subsucesión, podemos suponer $L_{T_0}(z_{j_i})$ converge a un elemento P_0 de $\mathcal{P}_{w^*}(^{k-1}E'; F)$. Es inmediato ver que $L_{T_{j_i}}(z_{j_i})$ converge a P_0, de lo que se deduce que H_{k-1} es compacto. Por otra parte, el conjunto H_{k-1} se puede pensar, gracias al lema 1.4.1, como un subconjunto compacto de $\mathcal{L}_{w^*}(E'; \mathcal{P}_{w^*}(^{k-2}E'; F))$. Por hipótesis inductiva, existe un subconjunto compacto K_2 de E tal que $\|L_T(z)(\gamma)\| \leq \sup_{x \in K_2} |\gamma(x)|^{k-1}$ para todo $T \in H_k$ y todo $z \in B_W$. Volviendo a (1.12) obtenemos $\|L'_T(\xi \circ e_\gamma)\| \leq \sup_{x \in K_2} |\gamma(x)|^{k-1}$para todo $T \in H_k$. En consecuencia,

$$\|T(\gamma)(\gamma)\| \leq \sup_{x \in K} |\gamma(x)|^k$$

donde K es la unión de K_1 y K_2. ■

Modificando ligeramente la demostración anterior y utilizando el corolario 1.4.5 obtenemos el resultado análogo para polinomios w-continuos.

Lema 1.4.7. *Si H_k es un subconjunto compacto de $\mathcal{L}_w(E;\mathcal{P}_w({}^{k-1}E;F))$ entonces existe un subconjunto compacto K de E', tal que $\|T(x)(x)\| \leq \sup_{\gamma \in K} |\gamma(x)|^k$, para todo $T \in H_k$ (para el caso $k=1$, $\mathcal{P}_w({}^{k-1}E;F) = F$ y la desigualdad es en realidad $\|T(x)\| \leq \sup_{\gamma\in K} |\gamma(x)|$).*

Ahora estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

Teorema 1.4.8. a) *Un polinomio $P \in \mathcal{P}({}^kE';F)$ es w^*-continuo en acotados si y solamente si es K-acotado para algún subconjunto compacto K de E.*

b) Un polinomio $P \in \mathcal{P}({}^kE;F)$ es w-continuo en acotados si y solamente si es K-acotado para algún subconjunto compacto K de E'.

DEMOSTRACIÓN: a) Dado $P \in \mathcal{P}_{w^*}({}^kE';F)$, por el lema 1.4.1, su operador lineal asociado T_P pertenece a $\mathcal{L}_{w^*}(E';\mathcal{P}_{w^*}({}^{k-1}E';F))$. Por el corolario 1.4.3, este conjunto está contenido en $\mathcal{K}_{w^*w}(E';\mathcal{P}_{w^*}({}^{k-1}E';F))$. Consideremos el conjunto compacto $H_k = \{T_P\}$. Aplicando el lema 1.4.6 existe un subconjunto compacto K de E que verifica

$$\|P(\gamma)\| = \|T_P(\gamma)(\gamma)\| \leq \sup_{x\in K} |\gamma(x)|^k .$$

Recíprocamente, supongamos que P es K-acotado para algún subconjunto compacto K de E y tomemos una red acotada $\{\gamma_\alpha\}_\alpha$ que converja en la topología w^* a cierta funcional $\gamma \in E'$. Queremos ver que $P(\gamma_\alpha) \to P(\gamma)$. Como $\gamma_\alpha \xrightarrow{w^*} \gamma$, en particular para todo $x \in K$, $\gamma_\alpha(x) \to \gamma(x)$. Entonces tenemos una red acotada de funciones equicontinuas que convergen puntualmente en un compacto. Esto implica que $\gamma_\alpha \to \gamma$ uniformemente sobre K y en consecuencia $\|\gamma_\alpha - \gamma\|_K \to 0$. Entonces, por la observación 1.3.1 tenemos

$$\|P(\gamma_\alpha) - P(\gamma)\| \leq k\, \|\check{P}\|_K \sup\{\|\gamma_\alpha\|_K\}^{k-1}\ \|\gamma_\alpha - \gamma\|_K$$

que tiende a cero pues, por la desigualdad (1.7), $\sup\{\|\gamma_\alpha\|_K\} \leq \lambda_K \sup\{\|\gamma_\alpha\|\} < \infty$.

b) La demostración es análoga, utilizando el lema 1.4.7 y que un polinomio es w-continuo en acotados si y sólo si su operador asociado es compacto. ∎

1.5. La propiedad de aproximación

Un resultado clásico de Aron y Prolla [10] afirma que si E' tiene la propiedad de aproximación, entonces para cualquier espacio de Banach F, todo polinomio $P \in \mathcal{P}_w(^kE; F)$ es aproximable. A continuación mostraremos este hecho como una consecuencia de la K-acotación de los polinomios w-continuos en acotados. Además veremos que si E tiene la propiedad de aproximación, los polinomios w^*-continuos en acotados de E' a cualquier espacio de Banach F son *-aproximables. Esta última afirmación se puede deducir de un resultado de Valdivia para funciones multilineales [51, Teorema 4], pero las técnicas utilizadas aquí son muy diferentes.

Proposición 1.5.1. *Sea K un subconjunto compacto de E sobre el que la identidad $Id : E \to E$ se aproxima uniformemente por operadores de rango finito. Entonces, todo polinomio $P \in \mathcal{P}_K(^kE'; F)$ es *-aproximable.*

DEMOSTRACIÓN: Procederemos por inducción. Para $k = 1$, sea $T \in \mathcal{L}_K(E'; F)$ un operador K-acotado. Entonces existe una constante $C > 0$ que verifica

$$\|T(\gamma)\| \leq C \sup_{x\in K} |\gamma(x)|$$

para todo $\gamma \in E'$. Si $\xi \in B_{F'}$, $|T'(\xi)(\gamma)| = |(\xi \circ T)(\gamma)| \leq C \sup_{x\in K} |\gamma(x)|$. Entonces, por el teorema de Hahn-Banach, $T'(\xi)$ es un elemento de $C\,\overline{\Gamma(K)}$, donde $\overline{\Gamma(K)}$ es la cápsula absolutamente convexa cerrada de K. Esto nos dice que $T'(B_{F'})$ está incluido en $C\,\overline{\Gamma(K)}$.

Dado $\varepsilon > 0$, sea $I_\varepsilon : E \to E$ un operador de rango finito tal que $\|I_\varepsilon(x) - x\| < \frac{\varepsilon}{2C}$ para todo $x \in K$. Los elementos de $C\,\Gamma(K)$ se pueden escribir de la forma $x_0 = \sum_{j=1}^{l} \alpha_j x_j$, donde $x_1, \ldots, x_l \in K$ y $\sum_{j=1}^{l} |\alpha_j| \leq C$. Para x_0 tenemos:

$$\|I_\varepsilon(x_0) - x_0\| \leq \sum |\alpha_j| \; \|I_\varepsilon(x_j) - x_j\| < C\,\frac{\varepsilon}{2C} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Entonces, $\sup_{x \in C\ \Gamma(K)} \|I_\varepsilon(x) - x\| < \frac{\varepsilon}{2}$ y, en consecuencia, $\sup_{x \in C\ \overline{\Gamma(K)}} \|I_\varepsilon(x) - x\| < \varepsilon$.

Como $T'(B_{F'})$ está incluido en $C\ \overline{\Gamma(K)}$, $\|I_\varepsilon \circ T' - T'\| < \varepsilon$. Tomando transpuestas, tenemos que $\|T'' \circ I'_\varepsilon - T''\| < \varepsilon$. Como la imagen de I'_ε es un subespacio de E', restringiéndonos a E' resulta $\|T \circ I'_\varepsilon - T\| < \varepsilon$. Para ver que T es *-aproximable, sólo resta ver que $T \circ I'_\varepsilon$ es un operador de tipo *-finito. Esto es inmediato, ya que si $I_\varepsilon(x) = \sum_{i=1}^k \gamma_i(x)\ x_i$, entonces $T \circ I'_\varepsilon(\gamma) = \sum_{i=1}^k \gamma(x_i)\ T(\gamma_i)$ que es un operador *-finito de E' a F.

Asumamos que el resultado es cierto para polinomios homogéneos de grado menor que k y sea $P \in \mathcal{P}_K(^kE'; F)$. Entonces, por (1.11), el operador lineal asociado T_P es un operador K-acotado de E' a $\mathcal{P}_K(^{k-1}E'; F)$. Utilizando el caso lineal ($k = 1$) tenemos que T_P es un operador *-aproximable de E' a $\mathcal{P}_K(^{k-1}E'; F)$. Dado $\varepsilon > 0$, por la desigualdad (1.7) podemos encontrar un operador T_ε de la forma

$$T_\varepsilon(\gamma) = \sum_{j=1}^{l} \gamma(x_j)\ P_j \qquad (\text{donde } x_j \in E \text{ y } P_j \in \mathcal{P}_K(^{k-1}E'; F),\ j = 1, \ldots, l)$$

tal que $\|T_P - T_\varepsilon\| < \varepsilon/2$. Por hipótesis inductiva, cada P_j es *-aproximable. Para cada j sea Q_j de tipo *−finito tal que $\|P_j - Q_j\| < \frac{\varepsilon}{2l}$. El polinomio P_ε dado por

$$P_\varepsilon(\gamma) = \sum_{j=1}^{l} \gamma(x_j)\ Q_j(\gamma)$$

es de tipo *-finito y verifica $\|P - P_\varepsilon\| < \varepsilon$. En consecuencia, P es *-aproximable. ■

Como antes, pocos cambios en la demostración nos dan un resultado análogo para polinomios K-acotados sobre E, cuando K es un subconjunto compacto de E':

Proposición 1.5.2. *Sea K un subconjunto compacto de E' sobre el que la identidad $Id : E' \to E'$ se aproxima uniformemente por operadores de rango finito. Entonces, todo polinomio $P \in \mathcal{P}_K(^kE; F)$ es aproximable.*

Como mencionamos anteriormente, la parte a) del corolario siguiente es un resultado de Aron, Hervés y Valdivia [8], mientras que Valdivia [51] probó un resultado análogo a b) para funciones multilineales.

Corolario 1.5.3. *a) Si E tiene la propiedad de aproximación, todo polinomio w^*-continuo en acotados de E' es *-aproximable.*

b) Si E' tiene la propiedad de aproximación, todo polinomio w-continuo en acotados de E es aproximable.

DEMOSTRACIÓN: Si E (respectivamente, E') tiene la propiedad de aproximación, la identidad se aproxima uniformemente por operadores de rango finito en cualquier compacto de E (E'). Si un polinomio es w^*-continuo (w-continuo) en acotados, es K-acotado para algún compacto K de E (E') y por lo tanto *-aproximable (aproximable). ∎

2. Dualidad en espacios de polinomios

2.1. Preduales de espacios de polinomios

Hemos visto en la sección 1.2 que el espacio de polinomios homogéneos (escalares) es isomorfo al dual del producto tensorial simétrico con la norma proyectiva. La linealización de los polinomios es una herramienta muy útil pues permite aplicar resultados conocidos sobre funcionales u operadores lineales a funciones que no lo son. En particular, cuando nuestro objetivo sea extender polinomios, considerar a los mismos como funcionales lineales nos permitirá utilizar el teorema de extensión de Hahn-Banach. En esta sección nuestro objetivo es darle al producto tensorial simétrico distintas topologías y así construir preduales de algunos espacios de polinomios conocidos.

Predual de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)$

En [30] se define la transformada de Borel como la aplicación $B : \mathcal{P}(^kE)' \longrightarrow \mathcal{P}(^kE')$ dada por $B(L)(\gamma) = L(\gamma^k)$. Una funcional lineal $L \in \mathcal{P}(^kE)'$ pertenece al núcleo de B si y solamente si L se anula sobre todo polinomio de la forma γ^k. Como L es lineal y continua, esto es equivalente a que L se anule sobre el espacio de polinomios aproximables. En general, no todos los polinomios son aproximables, por lo que B no es necesariamente inyectiva. Sin embargo, el siguiente lema asegura que, restringida al subespacio $\otimes_s^k E$ de $\mathcal{P}(^kE)'$, la transformada de Borel es siempre inyectiva.

Lema 2.1.1. *[35]: Sean $x_1, \dots, x_n \in E$. Si $\sum_{j=1}^n \gamma(x_j)^k = 0$ para todo $\gamma \in E'$, entonces $\sum_{j=1}^n P(x_j) = 0$ para todo $P \in \mathcal{P}(^kE)$.*

Este lema es puramente algebraico y no requiere que los polinomios sean aproximables por los γ. En realidad, no necesitan ser ni siquiera continuos. Notemos que si $s = \sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)}$ entonces $B(s)(\gamma) = \sum_{j=1}^{n} \gamma(x_j)^k$, con lo que el lema asegura la inyectividad de B sobre $\otimes_s^k E$. En otras palabras, el lema dice que para un elemento $s \in \otimes_s^k E$, es equivalente "ser cero" como funcional aplicada a polinomios o como función aplicada a funcionales lineales. En vista de esta inyectividad, podemos considerar el mismo conjunto $\otimes_s^k E$ ahora con la topología inducida por esta aplicación, es decir, como subespacio de $\mathcal{P}(^k E')$. Cada tensor elemental $x^{(k)}$ tiene la misma norma que antes, pero la situación es totalmente diferente para sumas de dichos tensores. Para estos elementos la norma (que se denomina norma inyectiva y se nota $\|\cdot\|_\varepsilon$) resulta:

$$\|s\|_\varepsilon = \sup\{|\sum_{j=1}^{n} \gamma(x_j)^k| : \gamma \in B_{E'}\}$$

si $s = \sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)}$. Notaremos al producto tensorial con la norma inyectiva como $\otimes_{s,\varepsilon}^k E$. Observemos que los elementos de $\otimes_{s,\varepsilon}^k E$ pueden pensarse como funciones w^*-continuas sobre $B_{E'}$, asociando al tensor $\sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)}$ con la función $\gamma \mapsto \sum_{j=1}^{n} \gamma(x_j)^k$ (o, equivalentemente, $\gamma \mapsto s(\gamma^k)$). La norma ε del tensor coincide con la norma de la función correspondiente. Luego, $\otimes_{s,\varepsilon}^k E$ es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C(B_{E'}, w^*)$. Esto nos permite identificar al dual de $\otimes_{s,\varepsilon}^k E$ con el espacio de polinomios integrales sobre E:

Proposición 2.1.2. *$(\otimes_{s,\varepsilon}^k E)'$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^k E)$.*

DEMOSTRACIÓN: Ya hemos mencionado que $\otimes_{s,\varepsilon}^k E$ es un subespacio de $C(B_{E'}, w^*)$. Si $L \in \left(\otimes_{s,\varepsilon}^k E\right)'$, por el teorema de Hahn-Banach, podemos extenderla a una funcional $\overline{L} \in C(B_{E'}, w^*)'$ con la misma norma. Por el teorema de representación de Riesz, $\overline{L}$ puede identificarse con una medida μ regular y de Borel sobre $B_{E'}$, de manera que $\overline{L}(f) = \int_{B_{E'}} f(\gamma) d\mu(\gamma)$ para $f \in C(B_{E'}, w^*)$. Así definimos un polinomio integral k-homogéneo sobre E, que llamaremos P_L, de la siguiente forma:

$$P_L(x) = \int_{B_{E'}} \gamma(x)^k \, d\mu(\gamma).$$

Es importante notar que, para $x_1, \dots, x_n \in E$, si $s = \sum_{j=1}^n x_j^{(k)} \in \otimes_s^k E$,

$$\begin{aligned} L(s) &= \int_{B_{E'}} s(\gamma^k)\, d\mu(\gamma) \\ &= \int_{B_{E'}} \sum_{j=1}^n \gamma(x_j)^k\, d\mu(\gamma) \\ &= \sum_{j=1}^n \int_{B_{E'}} \gamma(x_j)^k\, d\mu(\gamma) = \sum_{j=1}^n P_L(x_j). \end{aligned}$$

En particular, $P_L(x) = L(x^{(k)})$, con lo que P_L no depende de la manera en que extendimos a L. Es fácil ver que la aplicación $L \mapsto P_L$ de $(\otimes_{s,\varepsilon}^k E)'$ a $P_{\mathcal{I}}(^kE)$ es lineal. También, tenemos que

$$\|P_L\|_{\mathcal{I}} = \inf\{\|\nu\| : \nu \text{ que representa a } P_L\} \leq \|\mu\| = \|\overline{L}\| = \|L\|.$$

Por otra parte, para cualquier ν que represente a P_L, tenemos

$$\|L\| = \sup_{\|s\|_\varepsilon \leq 1} |L(s)| = \sup_{\|s\|_\varepsilon \leq 1} \left| \int_{B_{E'}} s(\gamma^k)\, d\nu \right| \leq \sup_{\|s\|_\varepsilon \leq 1} \int_{B_{E'}} |s(\gamma^k)|\, d|\nu| \leq \int_{B_{E'}} d|\nu| = \|\nu\|,$$

De manera que $\|L\| \leq \inf\{\|\nu\| : \nu \text{ que representa a } P_L\} = \|P_L\|_{\mathcal{I}}$. Sólo resta ver que la aplicación $L \mapsto P_L$ es suryectiva. Si $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)$ y μ es una medida que lo representa, podemos definir $L \in (\otimes_{s,\varepsilon}^k E)'$ por

$$L(\sum_{j=1}^n x_j^{(k)}) = \int_{B_{E'}} \sum_{j=1}^n \gamma(x_j)^k d\mu(\gamma).$$

Entonces $P = P_L$, ya que $P(x) = \int_{B_{E'}} \gamma(x)^k d\mu(\gamma)$. Por lo tanto, la aplicación es suryectiva. ■

Una consecuencia de la proposición es que la imagen de la transformada de Borel $B : \mathcal{P}(^kE)' \longrightarrow \mathcal{P}(^kE')$ es el espacio de polinomios k-homogéneos integrales sobre E'.

Corolario 2.1.3. $B(\mathcal{P}(^kE)') = \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE')$.

Demostración: Sea $L \in \mathcal{P}(^kE)'$. Para ver que $B(L)$ es un polinomio integral, basta ver que su linealización es continua en $\otimes^k_{s,\varepsilon} E'$. Pero

$$\left|\sum_{j=1}^n B(L)(\gamma_j)\right| = \left|\sum_{j=1}^n L(\gamma_j^k)\right| = \left|L\left(\sum_{j=1}^n \gamma_j^k\right)\right| \leq \|L\| \left\|\sum_{j=1}^n \gamma_j^k\right\| = \|L\| \left\|\sum_{j=1}^n \gamma_j^{(k)}\right\|_\varepsilon .$$

Por otra parte, sea $Q \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE')$ y supongamos que se escribe

$$Q(\gamma) = \int_{B_{E''}} z(\gamma)^k \, d\nu(z).$$

Podemos definir una funcional L_f sobre $\mathcal{P}_f(^kE)$ como

$$L_f(\sum_{j=1}^n \gamma_j^k) = \int_{B_{E''}} \sum_{j=1}^n z(\gamma_j)^k \, d\nu(z).$$

Extendiendo L_f por Hahn-Banach a todo $\mathcal{P}(^kE)$ obtenemos una funcional $L \in \mathcal{P}(^kE)'$ que verifica $B(L)(\gamma) = L(\gamma^k) = Q(\gamma)$. ∎

El lema 2.1.1, aplicado a E', se puede reformular diciendo que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{P}_f(^kE) & \longrightarrow & \otimes^k_s E' \\ \sum_{j=1}^n \gamma_j^k & \longmapsto & \sum_{j=1}^n \gamma_j^{(k)} \end{array} \tag{2.1}$$

está bien definida. Además, la norma del polinomio $\sum_{j=1}^n \gamma_j^k$ está dada por

$$\left\|\sum_{j=1}^n \gamma_j^k\right\| = \sup\left\{\sum_{j=1}^n \gamma_j(x)^k : x \in B_E\right\}$$

mientras que la norma ε del tensor $\sum_{j=1}^n \gamma_j^{(k)}$ es

$$\left\|\sum_{j=1}^n \gamma_j^{(k)}\right\|_\varepsilon = \sup\left\{\sum_{j=1}^n z(\gamma_j)^k : z \in B_{E''}\right\}.$$

Por el teorema de Goldstine, estas dos normas coinciden. Luego, la aplicación 2.1 es un isomorfismo isométrico entre $\mathcal{P}_f(^kE)$ (con la norma usual) y $\otimes^k_{s,\varepsilon} E'$. Como el espacio de polinomios aproximables $\mathcal{P}_A(^kE)$ es la clausura (en norma) de $\mathcal{P}_f(^kE)$, obtenemos el siguiente resultado [23]:

$$\mathcal{P}_A(^kE)' = \mathcal{P}_f(^kE)' = \left(\otimes^k_{s,\varepsilon} E'\right)' = \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE') \tag{2.2}$$

donde el isomorfismo está dado por la transformada de Borel.

Topologías en $\otimes_s^k E$

Antes de considerar otros espacios de polinomios conocidos, notemos que la aplicación $L \mapsto P_L$, donde $P_L(x) = L(x^{(k)})$ (como en la proposición 2.1.2), es un isomorfismo entre el dual algebraico de $\otimes_s^k E$ y el espacio $P(^kE)$ de todos los polinomios k-homogéneos (no necesariamente continuos) sobre E. Imponer condiciones de continuidad más o menos restrictivas a L dará como resultado diferentes clases de polinomios. A continuación probaremos que todo subespacio de $\mathcal{P}(^kE)$ que contenga a los polinomios de tipo finito puede describirse como el dual de $\otimes_s^k E$ con alguna topología localmente convexa.

Proposición 2.1.4. *Si Z es un subespacio de $\mathcal{P}(^kE)$ que contiene a los polinomios de tipo finito, Z es (algebraicamente) isomorfo a $(\otimes_s^k E, \tau)'$, donde τ es una topología localmente convexa en $\otimes_s^k E$.*

DEMOSTRACIÓN: Definamos para cada $Q \in Z$, la seminorma

$$p_Q(s) = \left|\sum_{j=1}^{n} Q(x_j)\right|,$$

donde $s = \sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)}$. Sea τ la topología localmente convexa generada por dichas seminormas. Si $p_Q(s)$ es cero para todo $Q \in Z$, en particular lo es para las potencias de funcionales lineales. Entonces s es cero como consecuencia del lema 2.1.1. Esto indica que la topología τ es Hausdorff. Como $|L_Q(s)| = p_Q(s)$, L_Q es τ-continuo para todo Q en Z. Recíprocamente, si P es un polinomio tal que L_P es τ-continuo, existen $Q_1, \ldots, Q_m \in Z$ y una constante positiva c tales que para todo elemento $s \in \otimes_s^k E$,

$$|L_P(s)| \leq c \max\{p_{Q_1}(s), \ldots, p_{Q_m}(s)\}$$

Entonces $\cap_{i=1}^m \mathrm{Ker} L_{Q_i} \subset \mathrm{Ker} L_P$, y por lo tanto deben existir escalares $a_1, \ldots, a_m$ tales que $L_P = \sum_{i=1}^m a_i L_{Q_i}$ lo que implica que $P = \sum_{i=1}^m a_i Q_i \in Z$. ∎

Lamentablemente las seminormas definidas en la proposición anterior no son muy esclarecedoras, por lo que queremos considerar algunas topologías más concretas sobre

$\otimes_s^k E$. Por ejemplo, dado que $\otimes_s^k E$ puede verse como un subespacio de las funciones continuas sobre E', podemos estudiar en $\otimes_s^k E$ la topología de convergencia puntual τ_p y la topología compacto-abierta τ_0 de convergencia uniforme sobre compactos:

Proposición 2.1.5. : *La aplicación $L \mapsto P_L$ produce las siguientes identificaciones (algebraicas).*

i) $(\otimes_s^k E, \tau_p)' = \mathcal{P}_f(^k E)$.

ii) $(\otimes_s^k E, \tau_0)' \subset \mathcal{P}_w(^k E) \cap \mathcal{P}_I(^k E)$.

DEMOSTRACIÓN: i) Si $P = \gamma^k$ con $\gamma \in E'$, L_P es claramente continuo para la topología de convergencia puntual en $B_{E'}$, con lo cual dado Q en el espacio $\mathcal{P}_f(^k E)$ (que está generado por dichos polinomios) L_Q resulta continuo para esta topología. Para la otra inclusión, si L_Q es continuo en la topología de convergencia puntual, existen $c > 0$ y $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in B_{E'}$ tales que para $s \in \otimes_s^k E$,

$$|L_P(s)| \leq c \max\{|s(\gamma_1^k)|, \dots, |s(\gamma_m^k)|\}.$$

Como en la proposición anterior, $\cap_{i=1}^m \mathrm{Ker} L_{\gamma_i^k} \subset \mathrm{Ker} L_P$, y entonces $P = \sum_{i=1}^m a_i \gamma_i^k$.

ii) Si L es τ_0-continuo, entonces para algún subconjunto compacto K de E' y para todo $s \in \otimes_s^k E$, $|L(s)| \leq \sup_K |s(\gamma)|$. En particular, para $x \in E$,

$$P_L(x) \leq \sup_K |\gamma(x)|^k$$

por lo que P_L es K-continuo y en consecuencia débilmente continuo en subconjuntos acotados de E. Dado que la topología de la norma es más fuerte que la topología τ_0 en $C(B_{E'})$, todo $L \in (\otimes_s^k E, \tau_0)'$ corresponde a un polinomio integral. Pero no todo polinomio débilmente continuo en acotados es integral, por lo que la inclusión es en general estricta. De hecho, $(\otimes_s^k E, \tau_0)'$ corresponde a polinomios integrales representados por medidas regulares de Borel sobre subconjuntos compactos de E' (esta afirmación puede demostrarse de manera similar al teorema 2.1.2). ∎

Preduales de $\mathcal{P}_w({}^kE)$ y $\mathcal{P}_w({}^kE)$

Para finalizar esta sección, presentaremos a los espacios $\mathcal{P}_w({}^kE)$ y $\mathcal{P}_{w^*}({}^kE')$ como duales de $\otimes_s^k E$ y $\otimes_s^k E'$ respectivamente, con topologías localmente convexas más manejables que las consideradas en la proposición 2.1.4. Para ello utilizaremos la K-acotación de los polinomios w y w^* continuos por subconjuntos K compactos de E' y E respectivamente (teorema 1.4.8).

Dado un subconjunto compacto $K \subset E'$ y $s \in \otimes_s^k E$, definimos

$$p_K(s) = \inf\{\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_K^k\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones $s = \sum_{j=1}^n x_j^{(k)}$. Si llamamos t a la topología generada sobre $\otimes_s^k E$ por las seminormas p_K, ($K \subset E'$, compacto), tenemos:

Proposición 2.1.6. *$(\otimes_s^k E, t)'$ es (algebraicamente) isomorfo a $\mathcal{P}_w({}^kE)$.*

DEMOSTRACIÓN: Queremos ver que P es K-continuo si y sólo si L_P es p_K-continuo: si $|P(x)| \leq c\|x\|_K^k$ para todo $x \in E$, entonces para cada $s \in \otimes_s^k E$ y cada representación $s = \sum_{j=1}^n x_j^{(k)}$,

$$|L_P(s)| = \left|\sum_{j=1}^{n} P(x_j)\right| \leq \sum_{j=1}^{n} |P(x_j)| \leq c\sum_{j=1}^{n} \|x_j\|_K^k$$

o, equivalentemente, $|L_P(s)| \leq c\, p_K(s)$ y por lo tanto L_P es t-continuo. Por otra parte, si L_P es t-continua, existen compactos $K_1, \ldots, K_n \subset E'$ tales que

$$\begin{aligned} |L_P(s)| &\leq c \max\{p_{K_1}(s), \ldots, p_{K_n(s)}\} \\ &= c\, p_K(s) \end{aligned}$$

donde $K = K_1 \cup \cdots \cup K_n$. En particular tenemos, para cada $x \in E$, $|P(x)| = |L_P(x^k)| \leq c\, p_K(x^k) \leq c\|x\|_K^k$. En consecuencia, polinomios K-acotados (para algún K) se corresponden con funcionales t-continuas. Esto dice, por el teorema 1.4.8, que polinomios w-continuos se corresponden con funcionales t-continuas. ∎

Análogamente, dado $K \subset E$ compacto, definimos en $\otimes_s^k E'$ la seminorma

$$p_K(s) = \inf\{\sum_{j=1}^{n} \|\gamma_j\|_K^k\}$$

donde el ínfimo se toma sobre todas las posibles representaciones $s = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(k)}$. Si t^* es la topología sobre $\otimes_s^k E'$ generada por estas seminormas, por el teorema 1.4.8 tenemos:

Proposición 2.1.7. *$(\otimes_s^k E', t^*)'$ es (algebraicamente) isomorfo a $\mathcal{P}_{w^*}({}^k E')$.*

2.2. Polinomios nucleares e integrales

En esta sección estudiaremos los duales de los espacios de polinomios nucleares e integrales. Antes de caracterizar estos duales investigaremos condiciones que nos aseguren que los espacios $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^k E; F)$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^k E; F)$ coinciden isométricamente. Saber que todo polinomio integral es nuclear tiene diversas consecuencias. Por un lado, los polinomios nucleares tienen una expresión más simple que los integrales. Por el otro, el espacio de polinomios integrales (escalares) es un dual, afirmación que no podemos hacer sobre los nucleares. Por lo tanto, cuando estos dos espacios coinciden tenemos que $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^k E)$ es el dual de $\widehat{\otimes}_{s,\epsilon}^k E$.

Igualdad entre $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^k E; F)$ y $\mathcal{I}({}^k E; F)$

En la sección 1.1 vimos que todo polinomio nuclear es integral, siendo su norma integral menor o igual a su norma nuclear. Sin embargo, no todo polinomio integral es nuclear, ni siquiera en el caso escalar, como muestra el siguiente ejemplo [25]:

Si llamamos D al disco unitario de $\mathbb{C}$, entonces B_{ℓ_∞} y $D^{\mathbf{N}}$ coinciden como conjuntos. Además, la topología w^* en B_{ℓ_∞} es equivalente a la topología producto en $D^{\mathbf{N}}$. Tomemos una medida regular de Borel ν en D que verifique simultáneamente:

$$\begin{aligned} \int_D z \, d\nu(z) &= 0 \\ \int_D z^2 \, d\nu(z) &= 1. \end{aligned}$$

Si μ es la medida producto $\mu = \prod_{n\in\mathbb{N}} \nu$, μ resulta una medida regular de Borel en (B_{ℓ_∞}, w^*). Sea $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^2\ell_1)$ asociado a μ. Entonces tenemos:

$$\begin{aligned} P((x_j)_j) &= \int_{B_{\ell_\infty}} \gamma(x)^2 \, d\mu(\gamma) = \int_{D^{\mathbb{N}}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_i x_i\right)^2 d\mu(\gamma) \\ &= \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty} x_i x_j \int_{D^{\mathbb{N}}} \gamma_i \gamma_j \, d\mu(\gamma) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2 \int_D \gamma_j^2 \, d\nu(\gamma_j) + \sum_{i\neq j} x_i x_j \int_D \gamma_i \, d\nu(\gamma_i) \int_D \gamma_j \, d\nu(\gamma_j) \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} x_j^2. \end{aligned}$$

Luego, el polinomio $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty}(x_j)^2$ es integral en ℓ_1. Veamos que no es nuclear. Si lo fuera, en particular sería w-continuo en acotados. Entonces, su operador asociado $T_P : \ell_1 \to (\ell_1)' = \ell_\infty$ sería compacto [8]. Pero

$$T_P((x_j)_{j\in\mathbb{N}}) = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e'_j,$$

donde $e'_j \in (\ell_1)'$ denota la evaluación el la j-ésima coordenada. Luego, $e'_j \in T_P(B_{\ell_1})$ para todo j. Como $\left\|e'_j - e'_i\right\| = 1$ para $i \neq j$, el operador T_P no puede ser compacto y, en consecuencia, P no es nuclear. Luego, los polinomios integrales no son necesariamente nucleares.

Para estudiar condiciones que aseguren la igualdad (isométrica) entre polinomios integrales y nucleares, debemos introducir la propiedad de Radon-Nikodym:

Definición 2.2.1. *Un espacio de Banach X tiene la* **propiedad de Radon-Nikodym** *si para todo espacio de medida finita (Ω, μ) y para toda medida vectorial G sobre Ω a valores en X que es de variación acotada y absolutamente continua respecto de μ, existe $g : \Omega \to X$ integrable tal que*

$$G(A) = \int_A g \, d\mu$$

para todo subconjunto medible A de Ω.

Es decir que un espacio de Banach X tiene la propiedad de Radon-Nikodym si vale un resultado análogo al teorema de Radon-Nikodym para medidas a valores en X. Espacios reflexivos y espacios duales separables tienen la propiedad de Radon-Nikodym, mientras que c_0 no la tiene.

Además, diremos que un espacio de Banach es **Asplund** si su dual tiene la propiedad de Radon-Nikodym. Los espacios reflexivos y los que tienen dual separable son Asplund. Para estos espacios, Alencar [1, 2] probó los siguientes resultados:

Teorema 2.2.2. *Un espacio de Banach E es Asplund si y sólo si, para todo espacio de Banach F, cada $T \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}(E; F)$ es nuclear. En este caso, la aplicación identidad $\mathcal{L}_{\mathcal{N}}(E; F) \to \mathcal{L}_{\mathcal{I}}(E; F)$ es una isometría.*

Teorema 2.2.3. *Si el espacio de Banach E es Asplund entonces, para todo espacio de Banach F y todo k, $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F) = \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE; F)$ con normas equivalentes.*

El objetivo principal de esta sección será mejorar este último resultado. Veremos que, bajo las mismas condiciones del teorema anterior, los espacios $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)$ y $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE; F)$ coinciden isométricamente:

Teorema 2.2.4. *Si el espacio de Banach E es Asplund entonces, para todo espacio de Banach F, $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F) = \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE; F)$ isométricamente.*

Para la demostración de este teorema necesitamos probar primero la siguiente versión escalar, que tiene hipótesis algo más generales. El teorema que sigue fue probado también por Boyd y Ryan [14].

Teorema 2.2.5. *Si el espacio de Banach $\widehat{\otimes}^k_{s,\varepsilon} E$ no contiene a ℓ_1 entonces $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE) = \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)$ isométricamente.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $\alpha : \widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E' \to \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE)$ la aplicación definida por $\alpha(\gamma^{(k)}) = \gamma^k$. Si $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE)$, dado $\varepsilon > 0$ podemos escribir $P = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^k$ con $\sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma_k\|^k < \|P\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon$.

Tomemos el elemento $s \in \widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E'$ dado por $s = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j^{(k)}$. Entonces $\alpha(s) = P$ y $\|s\|_\pi < \|P\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon$. Esto dice que $\|P\|_{\mathcal{N}} = \inf\{\|s\|_\pi : \alpha(s) = P\}$, es decir, que α es una aplicación cociente.

Sea $i : \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE) \to \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)$ la inclusión canónica y definamos $j : \widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E' \to \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)$ como $j = i \circ \alpha$. Si j resulta una aplicación cociente, entonces $\mathrm{Im}(i) \supseteq \mathrm{Im}(j) = \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)$, con lo que $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE)$ coincidirá con $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)$. Además, para $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE)$ tendremos que $\|i(P)\|_{\mathcal{I}} = \inf\{\|s\|_\pi : j(s) = i(P)\} = \inf\{\|s\|_\pi : \alpha(s) = P\} = \|P\|_{\mathcal{N}}$. Luego, si probamos que j es una aplicación cociente podremos concluir que i es un isomorfismo isométrico, que es el resultado deseado.

Sea $S = \{\gamma^k : \gamma \in B_{E'}\} \subset \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)$. Teniendo en cuenta la dualidad $\left(\widehat{\otimes}^k_{s,\varepsilon} E\right)' = \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)$ vista en la proposición 2.1.2 y la definición de la norma ε, tenemos que $B_{\widehat{\otimes}^k_{s,\varepsilon} E}$ es el polar de S y, en consecuencia, $B_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)} = S^{\circ\circ} = \overline{\Gamma(S)}^{w^*}$. Como S es un subconjunto w^*-compacto de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)$, por el teorema de Krein-Millman sabemos que los puntos extremales de $B_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)}$ están contenidos en S.

Por otra parte, como $\widehat{\otimes}^k_{s,\varepsilon} E$ no contiene a ℓ_1, por un resultado de Haydon [33], tenemos que la bola unidad de su dual (es decir, la bola unidad de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)$) es la cápsula convexa cerrada de sus puntos extremales. Luego, $B_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)}$ está contenida en la cápsula convexa cerrada de S.

Como, además, S está contenido en la imagen por j de la bola unidad de $\widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E'$ y la aplicación j tiene norma uno, obtenemos:

$$B_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)} \subset \overline{\Gamma(S)} \subset \overline{j(B_{\widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E'})} \subset B_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)}.$$

Entonces $\overline{j(B_{\widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E'})} = B_{\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)}$, lo que implica que j tiene imagen densa y que $j(B_{\widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E'}) = B_{\mathrm{Im} j}$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E' & \xrightarrow{j} & \mathrm{Im} j \\ \downarrow & \nearrow_{\tilde{j}} & \\ \widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E' / \mathrm{Ker} j & & \end{array} \tag{2.3}$$

donde la flecha vertical es la proyección natural al cociente. Sea $P \in \mathrm{Im} j$ de norma 1. Sabemos que existe $s \in B_{\widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E'}$ tal que $j(s) = P$ y, por lo tanto, $P = \bar{j}(\bar{s})$ con $\|\bar{s}\| \leq 1$. Esto indica que $\|\bar{j}(\bar{s})\| \geq \|\bar{s}\|$. Como además j tiene norma 1, $\|\bar{j}(\bar{s})\| \leq \|\bar{s}\|$ para todo $\bar{s} \in \widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E' \,/\, \mathrm{Ker} j$. El operador $\bar{j}$ resulta así un isomorfismo isométrico. Entonces $\mathrm{Im} j$ es un espacio de Banach que, por ser denso en $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^k E)$, coincide con $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^k E)$. El diagrama (2.3) asegura que j es una aplicación cociente, teniendo en cuenta que $\bar{j}$ es un isomorfismo isométrico. ∎

Como los espacios Asplund no contienen a ℓ_1 (y hay espacios que no contienen a ℓ_1 pero que no son Asplund) las hipótesis del caso escalar son más generales que las del caso vectorial. Para probar el teorema 2.2.4, necesitamos también la siguiente proposición:

Proposición 2.2.6. *El operador lineal* $\Lambda : \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^k E; F) \to \mathcal{L}_{\mathcal{I}}(\widehat{\otimes}^k_{s,\varepsilon} E; F)$ *definido por* $\Lambda(P)(x^{(k)}) = P(x)$ *está bien definido, es continuo y de norma menor o igual a 1, si consideramos ambos espacios con sus normas integrales.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^k E; F)$ y $\varepsilon > 0$. Supongamos que $G \in \mathcal{M}(B_{E'}; F)$ representa a P :

$$P(x) = \int_{B_{E'}} \gamma(x)^k \, dG(\gamma) \qquad \text{para todo } x \in E.$$

y $|G|(B_{E'}) \leq \|P\|_{\mathcal{I}} + \varepsilon$.

Entonces tenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \widehat{\otimes}^k_{s,\varepsilon} E & \longrightarrow & F \\ R \downarrow & & \uparrow S \\ C(B_{E'}) & \xrightarrow[J]{} & L_1(\mu) \end{array}$$

donde $\mu = |G| \in \mathcal{M}(B_{E'})$, R y J son las inclusiones canónicas y $S(f) = \int_{B'_E} f(\gamma)\, dG(\gamma)$. Es inmediato que $\|R\| = 1$ y $\|S\| \leq 1$. Por [22, Ex.10, p. 166], el operador J es integral con norma integral igual a $|G|\,(B_{E'})$. Por [22, Prop. 9, p. 165], la composición $S \circ J \circ R$ es un operador integral y verifica

$$\|S \circ J \circ R\|_{\mathcal{I}} \leq \|S\| \, \|J\|_{\mathcal{I}} \, \|R\| \leq |G|\,(B_{E'}).$$

Podemos observar que

$$(S \circ J \circ R)(x^{(k)}) = \int_{B_{E'}} (J \circ R)(x^{(k)})(\gamma)\, dG(\gamma) = \int_{B_{E'}} \gamma(x)^k\, dG(\gamma) = P(x).$$

Esto significa que $S \circ J \circ R = \Lambda(P)$. Entonces, Λ está bien definida, es continua y

$$\|\Lambda(P)\|_{\mathcal{I}} \leq |G|\,(B_{E'}) \leq \|P\|_{\mathcal{I}} + \varepsilon.$$

Como ε es arbitrario, podemos concluir que $\|\Lambda(P)\|_{\mathcal{I}} \leq \|P\|_{\mathcal{I}}$. ∎

Ahora estamos en condiciones de probar el teorema 2.2.4.

Demostración del Teorema 2.2.4. Sea $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE; F)$ y consideremos el operador $\Lambda(P) \in \mathcal{L}_{\mathcal{I}}(\widehat{\otimes}^k_{s,\varepsilon}E; F)$, donde Λ es la aplicación definida en la proposición anterior. Por un resultado de Ruess y Stegall [46] sabemos que E es Asplund si y sólo si $\widehat{\otimes}^k_{s,\varepsilon}E$ es Asplund. Luego, por el teorema 2.2.2, $\mathcal{L}_{\mathcal{I}}(\widehat{\otimes}^k_{s,\varepsilon}E; F) = \mathcal{L}_{\mathcal{N}}(\widehat{\otimes}^k_{s,\varepsilon}E; F)$ isométricamente. Esto implica que $\Lambda(P)$ es un operador nuclear con $\|\Lambda(P)\|_{\mathcal{N}} = \|\Lambda(P)\|_{\mathcal{I}}$. Entonces, para cada $\varepsilon > 0$, existen una sucesión $\{Q_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE) = \left(\widehat{\otimes}^k_{s,\varepsilon}E\right)'$ y una sucesión $\{y_j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset F$ normalizada tales que

$$\Lambda(P)(s) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(s)\, y_j \qquad \text{para todo } s \in \widehat{\otimes}^k_{s,\varepsilon}E$$

con $\sum_{j=1}^{\infty} \|Q_j\|_{\mathcal{I}} \leq \|\Lambda(P)\|_{\mathcal{N}} + \frac{\varepsilon}{2}$.

Ahora aplicamos el teorema 2.2.5 para afirmar que, para cada $j \in \mathbb{N}$, el polinomio Q_j es nuclear con $\|Q_j\|_{\mathcal{N}} = \|Q_j\|_{\mathcal{I}}$. Entonces, para cada j existe una sucesión $\{\gamma_{ij}\}_{i\in\mathbb{N}} \subset E$ tal que

$$Q_j(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{ij}(x)^k \qquad \text{para todo } x \in E$$

con $\sum_{i=1}^{\infty} \|\gamma_{ij}\|^k \leq \|Q_j\|_{\mathcal{N}} + \frac{\varepsilon}{2^{j+1}}$.

Finalmente,

$$P(x) = \Lambda(P)(x^{(k)}) = \sum_{j=1}^{\infty} Q_j(x)\, y_j = \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \gamma_{ij}(x)^k\, y_j$$

y

$$\|P\|_{\mathcal{N}} \leq \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} \|\gamma_{ij}\|^k \|y_j\| \leq \|\Lambda(P)\|_{\mathcal{I}} + \varepsilon \leq \|P\|_{\mathcal{I}} + \varepsilon$$

por la proposición anterior. Como ε es arbitrario, obtenemos que todo polinomio integral $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE; F)$ es nuclear con $\|P\|_{\mathcal{N}} \leq \|P\|_{\mathcal{I}}$. La otra desigualdad es siempre cierta, con lo que completamos la demostración. ∎

El dual de $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)$

Queremos describir el dual del espacio de polinomios nucleares: $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)'$. En [30] C. Gupta probó que, si E' tiene la propiedad de aproximación, entonces $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE)' = \mathcal{P}(^kE')$ isométricamente. Dwyer [27] mostró que, para un espacio de Banach reflexivo E con la propiedad de aproximación, $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)' = \mathcal{P}(^kE'; F')$ isométricamente. En ambos casos, la transformada de Borel da la isometría. A continuación utilizaremos la transformada de Borel para describir $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)'$ para espacios de Banach generales E y F.

Sea $\Phi_{\mathcal{N}} : \left(\otimes^k_{s,\pi} E'\right) \otimes_\pi F \to \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)$ el operador lineal definido por

$$\Phi_{\mathcal{N}}\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j^{(k)} \otimes y_j\right)(x) = \sum_{j=1}^{n} \gamma_j(x)^k\, y_j$$

para todo $\gamma_j \in E'$ y todo $y_j \in F$, $j \in \mathbb{N}$. De las definiciones de la norma nuclear y la π-norma se sigue que

$$\|\Phi_{\mathcal{N}}(t)\|_{\mathcal{N}} \leq \|t\|_{(\otimes^k_{s,\pi}E')\otimes_\pi F}\,.$$

Luego, extendiendo por continuidad, tenemos un operador lineal $\Phi_{\mathcal{N}} : \widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E' \widehat{\otimes}_\pi F \to \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)$ de norma 1 (que en realidad resulta un operador cociente). Transponiendo $\Phi_{\mathcal{N}}$ e identificando $\left(\widehat{\otimes}^k_{s,\pi} E' \widehat{\otimes}_\pi F\right)'$ con $\mathcal{P}(^kE'; F')$ (ver 1.6)) obtenemos la transformada de Borel nuclear $B_{\mathcal{N}} : \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)' \to \mathcal{P}(^kE'; F')$, dada por

$$B_{\mathcal{N}}(T)(\gamma)(y) = T(\gamma^n(\cdot) y) \qquad T \in \mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)',\ \gamma \in E',\ y \in F.$$

Veamos que $B_{\mathcal{N}}$ es una isometría: por un lado, tenemos

$$|B_{\mathcal{N}}(T)(\gamma)(y)| = \left|T(\gamma^k(\cdot)y)\right| \leq \|T\|\, \left\|\gamma^k(\cdot)y\right\|_{\mathcal{N}} = \|T\|\, \|\gamma\|^k\, \|y\|$$

por lo que $\|B_{\mathcal{N}}(T)\| \leq \|T\|$. Por otro lado, si P es un polinomio nuclear con una representación

$$P(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j(x)^k y_j$$

de manera que $\sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma_j\|^k \ \|y_j\| < \infty$, entonces

$$|T(P)| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} T(\gamma_j^k)\, y_j\right| = \left|\sum_{j=1}^{\infty} B_{\mathcal{N}}(T)(\gamma_j)\, y_j\right| \leq \|B_{\mathcal{N}}(T)\| \sum_{j=1}^{\infty} \|\gamma_j\|^k \ \|y_j\|.$$

Tomando el ínfimo sobre todas las representaciones de P resulta $|T(P)| \leq \|B_{\mathcal{N}}(T)\| \ \|P\|_{\mathcal{N}}$. Por lo tanto, $B_{\mathcal{N}}$ es una isometría y el espacio $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)'$ es isométrico a $\mathrm{Im}(B_{\mathcal{N}})$ (esto se puede ver también utilizando el lema 2.2.11 y el hecho que $\Phi_{\mathcal{N}}$ es un cociente). Por otra parte, $\mathrm{Im}(B_{\mathcal{N}})$ coincide con el anulador (o polar) de $\ker(\Phi_{\mathcal{N}})$. El conjunto

$$\ker(\Phi_{\mathcal{N}}) = \left\{ s = \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i^{(k)} \otimes y_i \in \left(\widehat{\otimes}_{s,\pi}^k E'\right) \widehat{\otimes}_\pi F \text{ tales que } \sum_{i=1}^{\infty} \gamma_i(x)^k y_i = 0 \text{ si } x \in E \right\}$$

puede describirse, a su vez, como el polar del subespacio de $\mathcal{P}(^kE'; F')$ generado por los polinomios $x(\cdot)^k y'$, donde $x \in E$, $y' \in F'$, que es el espacio de polinomios de tipo *-finito. Entonces,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)' = (\ker(\Phi_{\mathcal{N}}))^\circ = \mathcal{P}_{f^*}(^kE'; F')^{\circ\circ} = \overline{\mathcal{P}_{f^*}(^kE'; F')}^{w^*}$$

Observación 2.2.7. *Notemos que, por el teorema de Goldstine, todo polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE'; F')$ de tipo finito esta en la clausura w^* de $\mathcal{P}_{f^*}(^kE'; F')$. Por lo tanto $\overline{\mathcal{P}_{f^*}(^kE'; F')}^{w^*}$ coincide con $\overline{\mathcal{P}_{f}(^kE'; F')}^{w^*}$*

Tenemos, entonces, que $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^kE; F)'$ es isométrico a $\overline{\mathcal{P}_{f}(^kE'; F')}^{w^*}$, donde w^* significa la topología en $\mathcal{P}(^kE'; F')$ dada por $\left(\widehat{\otimes}_{s,\pi}^k E'\right) \widehat{\otimes}_\pi F$. Sin embargo, como $\mathcal{P}(^kE'; F')$ es un espacio de funciones de E' a F', queremos una descripción de $\overline{\mathcal{P}_{f}(^kE'; F')}^{w^*}$ que dependa de una topología en $\mathcal{P}(^kE'; F')$ dada en función de estos espacios y no del producto tensorial $\left(\widehat{\otimes}_{s,\pi}^k E'\right) \widehat{\otimes}_\pi F$.

Para el sistema bilineal $\left(\mathcal{P}({}^kE';F'),\left(\widehat{\otimes}^k_{s,\pi}E'\right)\widehat{\otimes}_\pi F\right)$, notaremos M^* a la topología de Mackey en $\mathcal{P}({}^kE';F')$. Ésta es la topología de convergencia uniforme sobre subconjuntos débilmente compactos de $\left(\widehat{\otimes}^k_{s,\pi}E'\right)\widehat{\otimes}_\pi F$ y verifica que la clausura M^* de cualquier subespacio S de $\mathcal{P}({}^kE';F')$ coincide con su clausura w^*. Por otra parte, definimos en $\mathcal{P}({}^kE';F')$ la topología τ_s como la de convergencia uniforme sobre compactos de E' y w-compactos de F. Es decir, una red $(P_\alpha)_\alpha \subset \mathcal{P}({}^kE';F')$ converge a P en la topología τ_s si para todo subconjunto compacto K de E' y todo subconjunto débilmente compacto $\tilde{K}$ de F,

$$\sup_{\gamma\in K,\ y\in\tilde{K}} |P_\alpha(\gamma)(y)-P(\gamma)(y)| \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 0. \tag{2.4}$$

Notemos que si F es reflexivo, B_F es débilmente compacto y por lo tanto la topología τ_s coincide con la topología compacto-abierta de convergencia uniforme sobre compactos de E'. La topología τ_s nos permitirá dar una mejor caracterización del espacio de polinomios nucleares.

Lema 2.2.8. *Para todo subespacio S de $\mathcal{P}({}^kE';F')$ se tiene que $\overline{S}^{w^*}=\overline{S}^{\tau_s}$*

Demostración: Sabemos que $\overline{S}^{w^*}=\overline{S}^{M^*}$ y entonces todo polinomio de $\overline{S}^{w^*}$ puede ser aproximado uniformemente en subconjuntos débilmente compactos de $\left(\widehat{\otimes}^k_{s,\pi}E'\right)\widehat{\otimes}_\pi F$ por polinomios de S.

Sea $P\in\overline{S}^{w^*}$ y $\{P_\alpha\}\subset S$ que M^*-aproxime a P. Sea K un compacto de E'. Como la aplicación $\gamma\mapsto\gamma^{(k)}$ es continua, el conjunto $K^{(k)}:=\{\gamma^{(k)}:\gamma\in K\}$ es compacto en $\widehat{\otimes}^k_{s,\pi}E'$. Si, dado un subconjunto débilmente compacto $\tilde{K}$ de F, pudiésemos ver que $(K^{(k)})\otimes\tilde{K}=\{\gamma^{(k)}\otimes y:\gamma\in K,\ y\in\tilde{K}\}$ resulta débilmente compacto en $\widehat{\otimes}^k_{s,\pi}E'\widehat{\otimes}_\pi F$, obtendríamos que

$$\sup_{\gamma\in K,\ y\in\tilde{K}} |P_\alpha(\gamma)(y)-P(\gamma)(y)| = \sup|P^*_\alpha(\gamma^{(k)}\otimes y)-P^*(\gamma^{(k)}\otimes y)| \underset{\alpha\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

es decir, que P_α converge a P en la topología τ_s. Para ver que $(K^{(k)})\otimes\tilde{K}$ es débilmente compacto, tomemos una red $\gamma_\alpha^{(k)}\otimes y_\alpha$ en $(K^{(k)})\otimes\tilde{K}$. Como $K^{(k)}$ es compacto, podemos tomar una subred de manera que $\gamma_{\alpha_i}^{(k)}$ sea convergente en norma. Por otra parte, como $\tilde{K}$ es débilmente compacto, podemos pasar nuevamente a una subred y lograr que $y_{\alpha_{i_j}}$ converja débilmente. Finalmente, la subred $\gamma_{\alpha_{i_j}}^{(k)} \otimes y_{\alpha_{i_j}}$ resulta débilmente convergente.

Recíprocamente, dado $P \in \mathcal{P}(^kE'; F')$, veamos que si existe $\{P_\alpha\} \subset S$ tal que para todo compacto $K \subset E'$ y todo subconjunto débilmente compacto $\tilde{K} \subset F$ se cumple (2.4) entonces $P \in \overline{S}^{w^*}$. Para ver esto, sea $t \in \left(\hat{\otimes}_{s,\pi}^k E'\right) \hat{\otimes}_\pi F$. Podemos escribir

$$t = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j\, \gamma_j^{(k)} \otimes y_j \qquad \text{con } \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j| \leq 1,\ \|\gamma_j\| \to 0,\ \|y_j\| \to 0.$$

Sea $K = \{\gamma_j\}_{j \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$ y $\tilde{K} = \{y_j\}_{j \in \mathbb{N}} \cup \{0\}$, que claramente son subconjuntos compactos de E' y F respectivamente. Entonces, existe un índice α_0 tal que $|P_\alpha(\gamma_j)(y_j) - P(\gamma_j)(y_j)| < \varepsilon$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y todo $\alpha \geq \alpha_0$. Entonces,

$$|P_\alpha^*(t) - P^*(t)| \leq \sum_{j=1}^{\infty} |\alpha_j||P_\alpha(\gamma_j)(y_j) - P(\gamma_j)(y_j)| < \varepsilon \qquad \text{para todo } \alpha \geq \alpha_0.$$

En consecuencia, $\overline{S}^{w^*} = \overline{S}^{\tau_s}$. ■

Finalmente, por el lema anterior, obtenemos la siguiente caracterización del dual del espacio de polinomios nucleares:

$$\mathcal{P}_N(^kE; F)' = \overline{\mathcal{P}_f(^kE'; F')}^{\tau_s}$$

En el caso que F sea un espacio de Banach reflexivo, obtenemos una caracterización más simple, ya que τ_s es la topología compacto-abierta sobre $\mathcal{P}(^kE'; F')$. Utilizando la notación de Valdivia para esta topología [50, 51] tenemos:

$$\mathcal{P}_N(^kE; F)' = \mathcal{P}_{(f)}(^kE'; F').$$

Resumimos estos resultados en la siguiente

Proposición 2.2.9. *Para cualquier par de espacios de Banach E y F, $\mathcal{P}_N(^kE; F)'$ es isométricamente isomorfo a $\overline{\mathcal{P}_f(^kE'; F')}^{\tau_s}$, donde τ_s es la topología en $\mathcal{P}(^kE'; F')$ de convergencia uniforme sobre conjuntos compactos de E' y débilmente compactos de F. Si F*

es reflexivo, entonces $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^kE;F)'$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{P}_{(f)}({}^kE';F')$, que es la clausura de $\mathcal{P}_f({}^kE';F')$ en la topología compacto abierta.

Como consecuencia de la proposición obtenemos la siguiente versión vectorial del resultado de Gupta [30]:

Corolario 2.2.10. *Si E' tiene la propiedad de aproximación, $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^kE;F)'$ es isométricamente isomorfo a $\mathcal{P}({}^kE';F')$.*

DEMOSTRACIÓN: Si E' tiene la propiedad de aproximación, la identidad puede aproximarse uniformemente por operadores de rango finito sobre cualquier compacto de E'. Esto implica que los polinomios de E' pueden aproximarse uniformemente por polinomios de tipo finito sobre todo compacto de E'. Luego, $\overline{\mathcal{P}_f({}^kE';F')}^{\tau_0} = \mathcal{P}({}^kE';F')$, de lo que se deduce el resultado. ∎

El dual de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F)$

Por lo visto en la sección anterior, para describir el dual de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F)$ es natural definir la transformada de Borel integral. Ésta es la aplicación $B_{\mathcal{I}} : \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F)' \to \mathcal{P}({}^kE';F')$ dada por $B_{\mathcal{I}}(T)(\gamma)(y) = T(\gamma(\cdot)^k y)$, para $T \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F)'$, $\gamma \in E'$, $y \in F$. De manera análoga a la transformada de Borel para polinomios nucleares, $B_{\mathcal{I}}$ resulta ser la transpuesta del operador $\Phi_{\mathcal{I}} : \left(\widehat{\otimes}^k_{s,\pi}E'\right)\widehat{\otimes}_\pi F \to \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F)$, donde $\Phi_{\mathcal{I}}(\gamma^{(k)}\otimes y) = \gamma(\cdot)^k y$. La transformada de Borel integral dará una descripción de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F)'$ siempre y cuando sea un isomorfismo con su imagen. Pero para que esto ocurra, dado que $B_{\mathcal{I}} = (\Phi_{\mathcal{I}})'$, es necesario que $\Phi_{\mathcal{I}}$ sea un operador suryectivo, como afirma el siguiente lema:

Lema 2.2.11. *Sea $T : X \to Y$ un operador lineal continuo. Entonces:*

a) $T' : Y' \to X'$ es una isometría si y solamente si T es un operador cociente.

b) $T' : Y' \to X'$ es un isomorfismo con su imagen si y solamente si T es un operador suryectivo.

Demostración: *a)* Supongamos que $T' : Y' \to X'$ es una isometría y veamos, en primer lugar, que $T(B_X)$ es denso en B_Y. Si no lo fuera, podríamos encontrar $y_0 \in B_Y \setminus \overline{T(B_X)}$ y, por el teorema de Hahn-Banach, existiría $\xi \in Y'$ tal que $|\xi(y_0)| > \sup_{y \in T(B_X)} |\xi(y)|$. Pero entonces tendríamos

$$\begin{aligned} |\xi(y_0)| &> \sup_{y \in T(B_X)} |\xi(y)| = \sup_{x \in B_X} |\xi(T(x))| \\ &= \sup_{x \in B_X} |T'(\xi)(x)| = \|T'(\xi)\| \\ &= \|\xi\| \end{aligned}$$

que es absurdo pues $y_0 \in B_Y$. Entonces $T(B_X)$ es denso en B_Y y, en particular, $\mathrm{Im}(T)$ es denso en Y. Consideremos el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "T"] \arrow[d] & \mathrm{Im}(T) \\ X/\mathrm{Ker}T \arrow[ur, "\tilde{T}"'] & \end{tikzcd}$$

donde $\tilde{T}(\bar{x}) = T(x)$. $\tilde{T}$ es un operador biyectivo y si llamamos B a la bola unidad de $X/\mathrm{Ker}T$, verifica $\tilde{T}(B) = B_{\mathrm{Im}(T)}$. Entonces $\tilde{T}$ es un isomorfismo isométrico. Esto implica que $\mathrm{Im}(T)$ es completo y por ser denso coincide con Y. Además, como $\tilde{T}$ es un isomorfismo isométrico, T resulta un operador cociente de X a Y.

Recíprocamente, si T es un operador cociente tenemos, para cada $y \in Y$,

$$\|y\| = \inf \{x \in X : T(x) = y\} \tag{2.5}$$

Si $\xi \in Y'$ y $\varepsilon > 0$, existe un y de norma menor que 1 tal que $\|\xi\| < |\xi(y)| + \frac{\varepsilon}{2}$. Combinando esto con (2.5), existe $x \in X$ de norma menor que 1 que verifica $\|\xi\| < |\xi(T(x))| + \frac{\varepsilon}{2} = |T'(\xi)(x)| + \frac{\varepsilon}{2}$. Entonces $\|\xi\| \leq \|T'(\xi)\| + \frac{\varepsilon}{2}$ y como ε es arbitrario, $\|\xi\| \leq \|T'(\xi)\|$. Para la desigualdad inversa basta observar que, por (2.5), $\|T\| \leq 1$ y por lo tanto $\|T'\| \leq 1$.

b) Factoricemos a $T: X \to Y$ como $T = \tilde{T} \circ i$ donde $\tilde{T}: X \to \mathrm{Im}(T)$ es T correstringido su imagen y el operador $i : \mathrm{Im}(T) \to Y$ es la inclusión. Entonces tenemos:

$$X \xrightarrow{\tilde{T}} \mathrm{Im}(T) \xrightarrow{i} Y$$

$$X' \underset{(\tilde{T})'}{\longleftarrow} \mathrm{Im}(T)' \underset{i'}{\longleftarrow} Y'$$

Si T' es un isomorfismo con su imagen, i' debe ser inyectiva. Como $i'(\xi) = \xi\ |_{\mathrm{Im}(T)}$, la imagen de T es denso en Y. La restricción de una funcional a un subespacio denso mantiene su norma. Luego i' es una isometría. Por *a)*, i es una aplicación cociente, que en particular es suryectiva. Entonces $\mathrm{Im}(T) = Y$.

Recíprocamente, si T es suryectiva y consideramos

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \Pi \downarrow & \nearrow_{\bar{T}} & \\ X/\mathrm{Ker}T & & \end{array}$$

tenemos que $\bar{T}$ es un isomorfismo. Tomando duales, $T' = \Pi' \circ (\bar{T})'$, donde $(\bar{T})'$ es un isomorfismo (por serlo $\bar{T}$) y Π' es una isometría por *a)* (ya que Π es un cociente). Luego, T' es un isomorfismo con su imagen. ■

Por lo tanto, para que $B_{\mathcal{I}}$ sea un isomorfismo con su imagen el operador $\Phi_{\mathcal{I}}$ debe ser suryectivo. La imagen de $\Phi_{\mathcal{I}}$ está compuesta exclusivamente por polinomios nucleares, por lo que $\Phi_{\mathcal{I}}$ será suryectivo sólo si todo polinomio integral es nuclear. En conclusión tenemos:

Proposición 2.2.12. *Si la transformada de Borel $B_{\mathcal{I}} : \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F)' \to \mathcal{P}({}^kE';F')$ es un isomorfismo (isométrico) con su imagen entonces $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F) = \mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^kE;F)$ (isométricamente).*

DEMOSTRACIÓN: Sólo resta probar que, si $B_{\mathcal{I}}$ es una isometría, la igualdad $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F) = \mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^kE;F)$ es isométrica. Si $i : \mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^kE;F) \to \mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F)$ es la inclusión, como $B_{\mathcal{I}}$ es un isomorfismo con su imagen, i resulta un isomorfismo. Por otra parte tenemos que $\Phi_{\mathcal{I}} = i \circ \Phi_{\mathcal{N}}$. Como $\Phi_{\mathcal{N}}$ es un cociente y, al ser $B_{\mathcal{I}}$ isometría, $\Phi_{\mathcal{I}}$ también lo es por el lema 2.2.11, i es necesariamente una isometría. ∎

De esto podemos deducir que, si hay polinomios integrales no nucleares, el dual de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE;F)$ no se identifica mediante la transformada de Borel con un subespacio de $\mathcal{P}(^kE';F')$. En consecuencia, para describir el dual de $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE;F)$ en un contexto general debemos seguir otro camino.

Definamos $\varphi_{\mathcal{I}} : \mathcal{M}(B_{E'};F) \to \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE;F)$ como

$$\varphi_{\mathcal{I}}(G)(x) = \int_{B_{E'}} \gamma(x)^k \, dG(\gamma) \qquad \text{para todo } G \in \mathcal{M}(B_{E'};F),\ x \in E.$$

Es inmediato que $\varphi_{\mathcal{I}}$ es un operador lineal, continuo y de norma 1. Transponiendo este operador obtenemos la aplicación $\Lambda_{\mathcal{I}} : \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE;F)' \to \mathcal{M}(B_{E'};F)'$ dada por

$$\Lambda_{\mathcal{I}}(T)(G) = T\left(\int_{B_{E'}} \gamma(\cdot)^k \, dG(\gamma)\right) \qquad \text{para todo } T \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE;F)',\ G \in \mathcal{M}(B_{E'};F).$$

Como $\varphi_{\mathcal{I}}$ es una aplicación cociente (todo polinomio integral P es $\varphi_{\mathcal{I}}(G)$ tomando como G a cualquier medida que represente a P) por el lema 2.2.11 su transpuesta $\Lambda_{\mathcal{I}}$ resulta una isometría. Entonces tenemos que $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE;F)'$ es isométricamente isomorfo a la imagen de $\Lambda_{\mathcal{I}}$, que, como en el caso nuclear, coincide con el polar de $\ker(\varphi_{\mathcal{I}})$. Por otra parte,

$$\begin{aligned}
\ker(\varphi_{\mathcal{I}}) &= \left\{G \in \mathcal{M}(B_{E'};F) : \int_{B_{E'}} \gamma(x)^k \, dG(\gamma) = 0, \text{ para todo } x \in E\right\} \\
&= \left\{G \in \mathcal{M}(B_{E'};F) : y'\left(\int_{B_{E'}} \gamma(x)^k \, dG(\gamma)\right) = 0, \text{ para todo } x \in E,\ y' \in F'\right\}.
\end{aligned}$$

Entonces, si notamos $x^k \odot y'$ al elemento de $\mathcal{M}(B_{E'};F)'$ dado por

$$x^k \odot y'(G) = y'(\int_{B_{E'}} \gamma(x)^k \, dG(\gamma)),$$

obtenemos que $\ker(\varphi_I)$ es el polar del subespacio generado por estos elementos. Luego,

$$\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE;F)' = ([x^k \odot y']_{\substack{x\in E \\ y'\in F'}})^{\circ\circ} = \overline{[x^k \odot y']}^{w^*}_{\substack{x\in E \\ y'\in F'}} \subset \mathcal{M}(B_{E'};F)'$$

Finalmente tenemos la siguiente proposición:

Proposición 2.2.13. *Para todo par de espacios de Banach E y F, $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F)'$ es isométricamente isomorfo a la clausura w^* del subespacio de $\mathcal{M}(B_{E'};F)'$ generado por $\{x^k \odot y' : x \in E,\ y' \in F'\}$.*

En el caso que F sea un espacio dual, $F = Y'$, el espacio $\mathcal{M}(B_{E'};F)$ es el dual de $C(B_{E'};Y)$. Esto indica que $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}({}^kE;F)'$ se identifica con un subespacio de $C(B_{E'};Y)''$.

3. Extensiones al bidual de un espacio de Banach

Al estudiar el problema de extender polinomios definidos sobre un espacio de Banach E, tiene particular interés considerar al espacio E como subespacio de E''. En [3], Aron y Berner mostraron una forma de extender cualquier polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE, F)$ a un polinomio de E'' a F'' (ver también [52]). Esta manera particular de extender polinomios tiene algunas propiedades interesantes. Veremos que resulta un morfismo lineal e isométrico de $\mathcal{P}(^kE, F)$ a $\mathcal{P}(^kE'', F'')$. Además, muchas de las propiedades de un polinomio se preservan cuando se extiende por este método.

3.1. La extensión de Aron-Berner

Dada una funcional lineal continua $\gamma \in E'$, podemos extenderla naturalmente a E'' considerando $\bar{\gamma}(z) = z(\gamma)$ para $z \in E''$ (la aplicación $\gamma \mapsto \bar{\gamma}$ no es otra cosa que la inclusión canónica de E' en su bidual E'''). Generalizando esta idea, dado un operador lineal $T : E \to F$ se define el operador transpuesto de T como $T' : F' \to E'$ dado por $T'(\xi) = \xi \circ T$. El operador bitranspuesto de T será entonces $T'' : E'' \to F''$, donde $T''(z)(\xi) = z(T'(\xi)) = z(\xi \circ T)$. Este operador verifica que $T''(x) = T(x)$ para $x \in E$. Además la aplicación $T \mapsto T''$ es una isometría lineal entre $\mathcal{L}(E; F)$ y $\mathcal{L}(E''; F'')$. Un razonamiento similar nos permitirá extender polinomios definidos en E (a valores en F) a polinomios definidos en E'' (a valores en F''). Describiremos el proceso para construir esta extensión sólo para el caso de polinomios 2-homogéneos pero se generaliza fácilmente a cualquier grado.

Sea $P : E \to F$ un polinomio 2-homogéneo y consideremos su función bilineal simétrica asociada

$$\Phi : E \times E \longrightarrow F.$$

Fijemos $x \in E$ y $\xi \in F'$; entonces $\xi(\Phi(x,\cdot))$ es un elemento de E'. Esto da una aplicación

$$\Phi_1 : E \times F' \to E'.$$

Si repetimos el proceso (fijando ahora $\xi \in F'$ y $z \in E''$), $z(\Phi_1(\cdot,\xi)) \in E'$ y obtenemos una aplicación

$$\Phi_2 : F' \times E'' \to E'$$

y si insistimos llegaremos finalmente a la función bilineal (no necesariamente simétrica):

$$\bar{\Phi} : E'' \times E'' \longrightarrow F''$$

El polinomio $AB(P) \in \mathcal{P}(^kE''; F'')$ dado por $AB(P)(z) = \bar{\Phi}(z,z)$ se denomina la extensión de Aron-Berner de P. A continuación mencionamos algunos ejemplos de extensiones de este tipo.

- Si $P : E \to F$ es lineal, entonces $AB(P) = P''$.
- Si $\gamma \in E'$ y $P = \gamma^k$, su extensión de Aron-Berner será $AB(P)(z) = z(\gamma)^k$
- Si T es un operador lineal y P polinomio, $AB(T \circ P) = T'' \circ AB(P)$. En particular, si $\xi \in F'$ y $P \in \mathcal{P}(^kE, F)$, $AB(\xi \circ P)$ es el polinomio escalar sobre E'' dado por $AB(\xi \circ P)(z) = AB(P)(z)(\xi)$
- Si S es un operador lineal y P un polinomio, $AB(P \circ S) = AB(P) \circ S''$.

Estas afirmaciones se verifican directamente aplicando el proceso de extensión anteriormente mencionado a los polinomios correspondientes.

Dado un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE, F)$, hemos visto la manera de calcular su extensión de Aron-Berner. En la práctica, hay veces en las que es posible encontrar, por algún otro método, un polinomio $Q \in \mathcal{P}({}^kE'', F'')$ que verifique $Q(x) = P(x)$ para todo $x \in E$. En estas situaciones es conveniente tener algún criterio que nos permita saber si Q es la extensión de Aron-Berner de P (ya que $AB(P)$ no es el único polinomio de E'' a F'' que extiende a P). Para el caso escalar tenemos la siguiente caracterización [52]:

Proposición 3.1.1. *Si $Q \in \mathcal{P}({}^kE'')$ es tal que $Q|_E = P$, entonces $Q = AB(P)$ si y solamente si*

a) Para todo $x \in E$, $DQ(x)$ es w^*-continua.

b) Para todo $z \in E''$ y $(x_\alpha) \subset E$ tal que $x_\alpha \xrightarrow{w^*} z$, $DQ(z)(x_\alpha) \to DQ(z)(z)$.

Si bien la condición *b)* parece poco natural, existen ejemplos en los que la condición *a)* no garantiza que $Q = AB(P)$. Por otra parte, las condiciones *a)* y *b)* no pueden reemplazarse por "$DQ(z)$ es w^*-continua para todo $z \in E''$ ", ya que esto no siempre ocurre. Combinando este resultado escalar con los ejemplos de extensiones que mencionamos antes, extenderemos la caracterización de [52] al caso vectorial:

Proposición 3.1.2. *Si $Q \in \mathcal{P}({}^kE'', F'')$ es tal que $Q|_E = P \in \mathcal{P}({}^kE, F)$, entonces $Q = AB(P)$ si y solamente si*

a) Para todo $x \in E$, $DQ(x) : E'' \to F''$ es w^*-w^*-continua.

b) Para todo $z \in E''$ y $(x_\alpha) \subset E$ tal que $x_\alpha \xrightarrow{w^*} z$, $DQ(z)(x_\alpha) \xrightarrow{w^*} DQ(z)(z)$ en F''.

DEMOSTRACIÓN: Si $Q = AB(P)$, para cada $\xi \in F'$ y cada $z, w \in E''$, $(DQ(z)(w))(\xi) = (D(AB(\xi \circ P)))(z)(w)$. Si $z = x \in E$, esta última expresión es w^*-continua en la variable w por el caso escalar. Entonces, $DQ(x)$ es w^*-w^*-continuo. Análogamente se verifica la condición *b)*. Recíprocamente, supongamos que Q verifica las condiciones *a)* y *b)* de la proposición. Entonces, dado $\xi \in F'$, el polinomio $\xi \circ Q$ (donde estamos considerando $\xi \in F' \subset F'''$) verifica las condiciones *a)* y *b)* del caso escalar. Como además $\xi \circ Q\,|_E = \xi \circ P$, tenemos que $\xi \circ Q = AB(\xi \circ P)$. Por otra parte, $AB(\xi \circ P) = \xi \circ AB(P)$ para todo $\xi \in F'$. Luego, $\xi \circ Q = \xi \circ AB(P)$ para todo $\xi \in F'$, lo que implica que $Q = AB(P)$. ∎

Una consecuencia de la proposición 3.1.2 es que la extensión de Aron-Berner es un morfismo lineal de $\mathcal{P}(^kE, F)$ a $\mathcal{P}(^kE'', F'')$. Para ver esto, basta observar que las condiciones a) y b) son preservadas por sumas y multiplicaciones por escalares. En [19], Davie y Gamelin probaron, además, que en el caso escalar la extensión de Aron-Berner es en realidad una isometría: $\|AB(P)\| = \|P\|$ para todo $P \in \mathcal{P}(^kE)$.

Observación 3.1.3. *La extensión de Aron-Berner nos permite identificar el producto tensorial simétrico $\otimes^k_{s,\pi}E''$ con un subespacio de $\mathcal{P}(^kE)' = \left(\otimes^k_{s,\pi}E\right)''$ mediante la siguiente aplicación:*

$$\begin{aligned} \otimes^k_{s,\pi}E'' &\longrightarrow \mathcal{P}(^kE)' \\ z^{(k)} &\longmapsto e_z \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde $e_z(Q) = AB(Q)(z)$ para $Q \in \mathcal{P}(^kE)$. Notemos que si $s \in \otimes^k_{s,\pi}E''$ esta dado por $s = \sum_{j=1}^n z_j^{(k)}$, entonces

$$\left|\sum_{j=1}^n e_{z_j}(Q)\right| = \left\|\sum_{j=1}^n AB(Q)(z_j)\right\| \le \|AB(Q)\| \ \ \|s\|_\pi = \|Q\| \ \ \|s\|_\pi$$

por el resultado de Davie y Gamelin. Esto dice que la norma de un elemento $s \in \otimes^k_s E''$ considerado como elemento de $\mathcal{P}(^kE)'$ es menor o igual que $\|s\|_\pi$. Por otra parte, si tomamos un tensor elemental $z^{(k)}$, dada $\gamma \in B_{E'}$ tenemos:

$$\left|z(\gamma)^k\right| = \left|AB(\gamma^k)(z)\right| = \left|e_z(\gamma^k)\right| \le \|e_z\| \ \ \|\gamma\|^k \le \left\|z^{(k)}\right\|_\pi$$

Tomando supremo sobre todas las funcionales $\gamma \in B_{E'}$ resulta $\|z\|^k \le \|e_z\| \le \left\|z^{(k)}\right\|_\pi = \|z\|^k$.

El siguiente lema da una expresión para la extensión de Aron-Berner de un polinomio a valores vectoriales que nos permitirá, junto a la observación anterior, extender el resultado de Davie y Gamelin al caso vectorial.

Lema 3.1.4. *a) Si $\Delta : E \to \otimes_{s,\pi}^k E$ es el polinomio $\Delta(x) = x^{(k)}$ entonces $AB(\Delta) : E'' \to \mathcal{P}(^kE)'$ está dado por $AB(\Delta)(z) = e_z$.*
b) Sea $P : E \to F$ un polinomio $k-$homogéneo y L_P su linealización. Entonces $AB(P)(z) = L_P''(e_z)$.

DEMOSTRACIÓN: a) Definamos $\Delta_0 : E'' \to \mathcal{P}(^kE)'$ como $\Delta_0(z) = e_z$. Claramente, $\Delta_0|_E = \Delta$ y en consecuencia solamente necesitamos mostrar que Δ_0 satisface las condiciones de la proposición 3.1.2. Para ello, notemos que si $z_1, \ldots, z_k \in E''$ y $Q \in \mathcal{P}(^kE)$, entonces $\overset{\vee}{\Delta}_0 (z_1, \ldots, z_k)(Q) = \overset{\vee}{AB(Q)} (z_1, \ldots, z_k)$. Luego, si $z, w \in E''$,

$$\begin{aligned} (D\Delta_0(z)(w))(Q) &= k \, \overset{\vee}{\Delta}_0 (z, \ldots, z, w)(Q) \\ &= k \, AB(Q)(z, \ldots, z, w) \qquad (3.2) \\ &= D(AB(Q))(z)(w). \end{aligned}$$

Si consideramos $z = x \in E$, la última expresión es w^*-continua en la variable w (ya que $AB(Q)$ satisface las condiciones de la proposición) y en consecuencia $D\Delta_0(z)$ es w^*-w^*-continua.

Para ver que Δ_0 satisface la condición *b)* de la proposición 3.1.2, sea $z \in E''$ y supongamos que la red $\{x_\alpha\}$ converge a z en la topología w^*. Si en (3.2) reemplazamos w por x_α obtenemos

$$(D\Delta_0(z)(x_\alpha))(Q) = D(AB(Q))(z)(x_\alpha)$$

que converge, por la proposición 3.1.2, a $D(AB(Q))(z)(z)$. Además, $D(AB(Q))(z)(z) = k \, AB(Q)(z) = k \, e_z(Q) = k \, \Delta_0(z)(Q) = (D\Delta_0(z)(z))(Q)$. Esto significa que Δ_0 satisface también la condición *b)* de la proposición 3.1.2. Por lo tanto, $\Delta_0 = AB(\Delta)$.
b) Dado que $P = L_P \circ \Delta$, $AB(P)(z) = L_P''(AB(\Delta)(z)) = L_P''(e_z)$. ∎

Ahora estamos en condiciones de generalizar el resultado de Davie y Gamelin [19] al caso vectorial:

Proposición 3.1.5. *$AB : \mathcal{P}(^kE, F) \to \mathcal{P}(^kE'', F'')$ es una isometría.*

DEMOSTRACIÓN: Para $z \in E''$ tenemos

$$\begin{aligned} \|AB(P)(z)\| &= \|L''_P(e_z)\| \leq \|L''_P\| \, \|e_z\| \\ &= \|L_P\| \, \|z\|^k = \|P\| \|z\|^k. \end{aligned}$$

Esto implica que $\|AB(P)\| \leq \|P\|$ y como $AB(P)(x) = P(x)$ para todo $x \in E$, se cumple la igualdad. ■

Lamentablemente, si F no es reflexivo, la extensión de Aron-Berner de un polinomio no es una extensión en el sentido que le damos a esta palabra: una extensión de $P : E \rightarrow F$ a E'' debería ser un polinomio $\tilde{P} : E'' \rightarrow F$ que extendiera a P. Esto no siempre existe: el operador identidad en c_0 no puede ser extendido a un operador definido en $c_0'' = l_\infty$, ya que c_0 no esta complementado en l_∞. Notemos que, en este caso, la extensión de Aron-Berner resulta ser el operador identidad en l_∞. Si E está complementado en su bidual, siempre será posible extender polinomios al bidual. Recordemos que un espacio de Banach F se dice C_l si F esta complementado en su bidual con una proyección lineal $p : F'' \rightarrow F$ de norma menor o igual a l (ver [3]). En este caso, $AB_p(P) = p \circ AB(P)$ es una extensión de P al bidual y se tiene que $\|AB_p(P)\| \leq l \, \|P\|$.

El teorema de Gantmacher (ver, por ejemplo, [34]) afirma que $T : E \rightarrow F$ es débilmente compacto si y sólo si $T''(z)$ pertenece a F para todo $z \in E''$. En otras palabras, el operador T es débilmente compacto si y sólo si T'' es realmente una extensión de T. Diremos que un polinomio $P : E \rightarrow F$ es débilmente compacto si $P(B_E)$ es un conjunto relativamente débil compacto. Para estos polinomios tenemos:

Proposición 3.1.6. *Si $P : E \rightarrow F$ es polinomio k-homogéneo débilmente compacto, entonces $AB(P)(z)$ es un elemento de F para todo $z \in E''$.*

DEMOSTRACIÓN: Como mencionamos en la sección 1.2, la bola unidad B de $\hat{\otimes}^k_{s,\pi} E$ es la cápsula absolutamente convexa cerrada de $B_E^{(k)} = \{x^{(k)} : x \in B_E\}$. Si L_P es la linealización de P, la clausura de $L_P(B)$ es la cápsula absolutamente convexa cerrada de

$\{L_P(x^{(k)}) : x \in B_E\}$. Pero $\{L_P(x^{(k)}) : x \in B_E\} = \{P(x) : x \in B_E\} = P(B_E)$, que es relativamente débil compacta. Luego, por el teorema de Krein-Šmulian, su cápsula absolutamente convexa cerrada también lo es (ver [21]) y L_P resulta un operador lineal débilmente compacto. Por el teorema de Gantmacher, la imagen de L_P'' está incluida en F. Por el lema 3.1.4, $AB(P)(z) = L_P''(e_z)$, que pertenece a F para todo z de E''. ∎

A diferencia de lo que sucede en el caso lineal, un polinomio puede verificar que $AB(P)(E'') \subset F$ sin necesidad de ser débilmente compacto. Por ejemplo, tomemos el polinomio $P : \ell_2 \to \ell_1$ definido por $P(x) = (x_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ si $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_2$. En este caso, $P(B_{\ell_2})$ es la bola unidad de ℓ_1 y por lo tanto no es relativamente débil compacto. Sin embargo, $AB(P)(z) = P(z) \in \ell_1$ para todo $z \in (\ell_2)' = \ell_2$. Notemos que no se puede hallar un ejemplo similar para operadores ya que todo operador lineal definido en un espacio reflexivo es débilmente compacto (lo que no es cierto para polinomios, como muestra el ejemplo).

3.2. La extensión de Aron-Berner de distintos tipos de polinomios

La extensión de Aron-Berner preserva muchas propiedades de los polinomios. Es fácil ver que si $P(x) = \gamma^k(x)\, y$ entonces su extensión de Aron-Berner está dada por $AB(P)(z) = z(\gamma)^k\, y$. Como la extensión de Aron-Berner es lineal, si $P = \sum_{j=1}^n \gamma_j^k\, y_j$ es un polinomio de tipo finito, entonces $AB(P)(z) = \sum_{j=1}^n z(\gamma)^k$ es un polinomio de tipo *-finito en E'' (en particular, es de tipo finito). Con el mismo razonamiento podemos ver que la extensión de Aron-Berner de un polinomio nuclear será nuclear. Por otra parte, si P es un polinomio aproximable, existe una sucesión de polinomios de tipo finito $(P_n)_n$ que converge en norma a P. Como la extensión de Aron-Berner es una isometría, los polinomios $(AB(P_n))_n$ convergen a $AB(P)$ en norma. Por lo dicho anteriormente, $AB(P_n)$ es de tipo *-finito para todo n, con lo que $AB(P)$ resulta *-aproximable (y, en particular, aproximable). En conclusión, tenemos que

$$AB\left(\mathcal{P}_f({}^kE, F)\right) \subseteq \mathcal{P}_{f^*}({}^kE'', F'') \subseteq \mathcal{P}_f({}^kE'', F'')$$

$$\begin{aligned} AB\left(\mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^kE,F)\right) &\subseteq \mathcal{P}_{\mathcal{N}}({}^kE'',F'') \\ AB\left(\mathcal{P}_{A}({}^kE,F)\right) &\subseteq \mathcal{P}_{A^*}({}^kE'',F'') \subseteq \mathcal{P}_{A}({}^kE'',F'') \end{aligned}$$

A continuación veremos que los espacios de polinomios K-acotados (si K es relativamente débil compacto) y de polinomios integrales escalares son también preservados por el morfismo de extensión de Aron-Berner.

La extensión de Aron-Berner de polinomios K-acotados

Por la desigualdad 1.7, la seminorma $\|\cdot\|_K = \sup_{\gamma\in K}|\gamma(\cdot)|$ es continua sobre E. Entonces, el conjunto ${}^{\perp}K = \{x \in E : \|x\|_K = 0\}$ es un subespacio cerrado de E. En el cociente $E/{}^{\perp}K$, podemos definir la siguiente norma:

$$|||\,\Pi(x)\,||| = \|x\|_K$$

donde $\Pi : E \to E/{}^{\perp}K$ es la proyección al cociente. Esta norma está bien definida, ya que si $\Pi(x_1) = \Pi(x_2)$, entonces $\gamma(x_1) = \gamma(x_2)$ para todo $\gamma \in K$. Llamaremos E_K a la completación de $E/{}^{\perp}K$ con esta norma. Así definido, $(E_K, |||\cdot|||)$ resulta un espacio de Banach. Veremos que hay una correspondencia biunívoca entre polinomios K-acotados sobre E y polinomios continuos sobre E_K. Esta correspondencia resulta una isometría (considerando las normas $\|\cdot\|_K$ y $|||\cdot|||$ respectivamente):

Lema 3.2.1. *Sea K un subconjunto acotado de E'. Entonces $(\mathcal{P}_K({}^kE,F), \|\cdot\|_K)$ es isométricamente isomorfo a $(\mathcal{P}({}^kE_K,F), |||\cdot|||)$.*

DEMOSTRACIÓN: Para $P \in \mathcal{P}_K({}^kE,F)$ definimos $Q : E/{}^{\perp}K \to F$ como

$$Q(\Pi(x)) = P(x) \qquad \text{para todo } x \in E.$$

Veamos que Q está bien definido. Si $\prod(x_1) = \prod(x_2)$, entonces $\|x_1 - x_2\|_K = 0$. Por la observación 1.3.1 tenemos que $P(x_1) = P(x_2)$, con lo que Q no depende del representante elegido. Por otra parte, Q es un polinomio k-homogéneo y

$$\begin{aligned}
\|Q\| &= \sup\{\|Q(y)\| : y \in E/^{\perp}K, |||y||| = 1\} \\
&= \sup\{\|Q(\Pi(x))\| : x \in E, |||\Pi(x)||| = 1\} \\
&= \sup\{\|P(x)\| : x \in E, \|x\|_K = 1\} = \|P\|_K
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Entonces Q es continuo y se puede extender por continuidad, de manera única, a un polinomio k-homogéneo en E_K con la misma norma.

Recíprocamente, sea $Q \in \mathcal{P}(^kE_K, F)$ y definamos $P(x) = Q(\Pi(x))$. Siguiendo la serie de igualdades (3.3) en sentido inverso, se ve que P es un polinomio k-homogéneo K-acotado de E a F y $\|P\|_K = \|Q\|$.

Por lo tanto, $(\mathcal{P}_K(^kE, F), \|\cdot\|_K)$ y $(\mathcal{P}(^kE_K, F), |||\cdot|||)$ son isométricamente isomorfos vía el isomorfismo

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(^kE_K, F) &\longrightarrow \mathcal{P}_K(^kE, F) \\
Q &\longmapsto Q \circ \Pi. \quad \blacksquare
\end{aligned}$$

Todo $K \subset E'$ puede ser considerado como un subconjunto de E'''. Entonces, para $z \in E''$, tenemos:

$$\|z\|_K = \sup_{\gamma \in K} |z(\gamma)|.$$

Aron y Galindo [6] probaron que la extensión de Aron-Berner de un polinomio K-acotado escalar (definido sobre un espacio de Banach E) es K-acotado en E'', si K es un conjunto relativamente débil compacto de E'. Usando la construcción del lema anterior, generalizaremos este hecho al caso vectorial. Además mostraremos que la extensión de Aron-Berner es una isometría con la norma $\|\cdot\|_K$.

Proposición 3.2.2. *Sea K un subconjunto relativamente débil compacto de E'. Entonces, para todo k, el morfismo de Aron-Berner es una isometría de $(\mathcal{P}_K(^kE, F), \|\cdot\|_K)$ en $(\mathcal{P}_K(^kE'', F''), \|\cdot\|_K)$.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $P \in \mathcal{P}_K({}^kE, F)$, sea $Q \in \mathcal{P}({}^kE_K, F)$ como en el lema 3.2.1, $AB(Q) \in \mathcal{P}({}^k(E_K)'', F'')$ su extensión de Aron-Berner y $\overline{P} = AB(Q)\circ\Pi'' : E'' \to F''$ donde Π'' denota la bitranspuesta de Π. Como vimos al comienzo de este capítulo, $AB(Q)\circ\Pi'' = AB(Q\circ\Pi) = AB(P)$ y entonces $\overline{P}$ es la extensión de Aron-Berner de P. Veamos que $\overline{P}$ es K-acotado y que $\|\overline{P}\|_K = \|P\|_K$. Para $z \in E''$,

$$\left\|\overline{P}(z)\right\| = \|AB(Q)(\Pi''(z))\| \leq \|AB(Q)\| \; |||\Pi''(z)|||^k$$

Por la proposición 3.1.5 y el lema 3.2.1, $\|AB(Q)\| = \|Q\| = \|P\|_K$. Entonces

$$\begin{aligned} \left\|\overline{P}(z)\right\| &\leq \|P\|_K \; |||\Pi''(z)|||^k = \|P\|_K \sup_{\beta\in B_{E'_K}} |\Pi''(z)(\beta)|^k \\ &= \|P\|_K \sup_{\beta\in B_{E'_K}} |z(\Pi'(\beta))|^k. \end{aligned} \tag{3.4}$$

Afirmamos que $\Pi'(B_{E'_K})$ esta contenido en $\overline{\Gamma(K)}$, la cápsula absolutamente convexa cerrada de K. Para ver esto, si $\beta \in B_{E'_K}$, entonces

$$|\Pi'(\beta)(x)| = |\beta(\Pi(x))| \leq \|\beta\| \; |||\Pi(x)||| \leq \|x\|_K = \sup_{\gamma\in K} |\gamma(x)| \qquad \text{para todo } x \in E$$

Por el teorema de Hahn-Banach, $\Pi'(\beta)$ pertenece a $\overline{\Gamma(K)}^{w^*}$, la clausura de $\Gamma(K)$ en la topología w^* de E'. Como K es relativamente w-compacto, por el teorema de Krein-Šmulian, $\overline{\Gamma(K)}$ es w-compacto. Luego, $\overline{\Gamma(K)}$ es w^*-compacto y en consecuencia $\overline{\Gamma(K)}^{w^*} = \overline{\Gamma(K)}$. Por lo tanto, $\Pi'(B_{E'_K}) \subset \overline{\Gamma(K)}$. Volviendo a (3.4),

$$\left\|\overline{P}(z)\right\| \leq \|P\|_K \sup_{\varphi\in\overline{\Gamma(K)}} |z(\varphi)|^k = \|P\|_K \sup_{\varphi\in K} |z(\varphi)|^k = \|P\|_K \, \|z\|_K^k$$

Esto prueba que $\overline{P}$ es K-acotado y $\|\overline{P}\|_K \leq \|P\|_K$. La otra desigualdad es trivial, ya que $\bar{P}(x) = P(x)$ para todo $x \in E$. ∎

Como todo polinomio w-continuo sobre acotados es K-acotado para algún subconjunto compacto K de E', la proposición anterior nos permite generalizar un resultado de [41] sobre la extensión de Aron-Berner de estos polinomios:

Corolario 3.2.3. *Si $P \in \mathcal{P}_w({}^kE, F)$, entonces $AB(P) \in \mathcal{P}_{w^*}({}^kE'', F'')$.*

DEMOSTRACIÓN: Si P es un polinomio w-continuo en acotados de E, por el teorema 1.4.8 es K-acotado para algún subconjunto $K \subset E'$ compacto. Como K es en particular w-compacto, la extensión de Aron-Berner de P es un polinomio K-acotado sobre E''. Volviendo al teorema 1.4.8, vemos que $AB(P)$ es w^*-continuo en acotados de E'', como queríamos demostrar. ∎

La extensión de Aron-Berner de polinomios integrales

Como mencionamos anteriormente, si P es un polinomio nuclear sobre E, digamos $P = \sum_i \gamma_i^k$ entonces su extensión de Aron-Berner estará dada por $AB(P)(z) = \sum_i z(\gamma_i)^k$, para $z \in E''$. Si P es un polinomio integral escalar y μ es una medida regular de Borel sobre $B_{E'}$ que lo representa, es natural suponer que, para $z \in E''$,

$$AB(P)(z) = \int_{B_{E'}} z(\gamma)^k d\mu(\gamma). \tag{3.5}$$

El problema que presenta la expresión (3.5) es que la integral no está necesariamente definida ya que, de hecho, z^k no tiene por qué ser una función μ-medible. Notemos que, en general, z^k no es una función continua en $(B_{E'}, w^*)$, ni es límite puntual de una sucesión (x_n^k) de potencias de elementos de E (que son integrables por ser continuos).

Probaremos que la validez de la expresión (3.5) para la extensión de Aron-Berner los polinomios integrales en E es equivalente a que E no contenga una copia isomorfa de ℓ_1. También probaremos que la extensión de Aron-Berner de un polinomio integral es siempre un polinomio integral, con la misma norma integral, aun cuando la expresión anterior no sea válida.

Con μ denotaremos una medida regular de Borel sobre $(B_{E'}, w^*)$. Como μ no es necesariamente una medida positiva, con $L_1(\mu)$ denotaremos al espacio $L_1(|\mu|)$, donde $|\mu|$ es la variación de μ.

Definamos $S : L_1(\mu) \longrightarrow E'$ como

$$S(f)(x) = \int_{B_{E'}} f(\gamma)\ \gamma(x)\ d\mu(\gamma).$$

Observemos que si $f \in L_1(\mu)$, $|S(f)(x)| \leq \int_{B_{E'}} |f(\gamma)|\ |\gamma(x)|\ d|\mu|(\gamma) \leq \|f\|_1\ \|x\|$. Por lo tanto, $\|S\| \leq 1$. Consideremos ahora $S' : E'' \longrightarrow L_1(\mu)' = L_\infty(\mu)$. Por un lado tenemos que $\left\|S'\right\| = \|S\| \leq 1$. Además, si x es un elemento de E, para cada $f \in L_1(\mu)$ tenemos:

$$\int_{B_{E'}} f(\gamma)\ \gamma(x)\ d\mu(\gamma) = S(f)(x) = S'(x)(f) = \int_{B_{E'}} f(\gamma)\ [S'(x)](\gamma)\ d\mu(\gamma) \tag{3.6}$$

donde $[S'(x)]$ es un representante de la clase de funciones de $L_\infty(\mu)$ correspondiente a la funcional $S'(x) \in L_1(\mu)'$. La igualdad (3.6) nos dice que $[S'(x)](\gamma) = \gamma(x)$ en casi todo γ de $B_{E'}$ (según μ). Por lo tanto $S'(x)$, como elemento de $L_\infty(\mu)$, es la clase de la función $\gamma \mapsto \gamma(x)$.

Lema 3.2.4. *Si P es un polinomio integral sobre E, representado por la medida μ, su extensión de Aron-Berner $AB(P)$ se puede escribir de la forma*

$$AB(P)(z) = \int_{B_{E'}} [S'(z)]^k d\mu$$

DEMOSTRACIÓN: Definamos el polinomio k-homogéneo Q sobre E'' de la siguiente manera:

$$Q(z) = \int_{B_{E'}} [S'(z)]^k d\mu$$

Como Q es una extensión de P a E'', podemos verificar que $Q = AB(P)$ probando que los diferenciales de primer orden en cualquier $z \in E''$ son w^*-continuos y usando la proposición 3.1.2. Pero

$$DQ(z)(w) = k \int_{B_{E'}} [S'(z)]^{k-1}[S'(w)]d\mu.$$

Si $w_\alpha \xrightarrow{w^*} w$, tenemos que $S'(w_\alpha) \xrightarrow{w^*} S'(w)$ en $L_\infty(\mu)$, ya que S', al ser una transpuesta, es w^*-w^*-continua. Además, $[S'(z)]^{k-1}$ es una función de $L_1(\mu)$ por ser acotada en un espacio de medida finita. Esto implica que $\int_{B_{E'}}[S'(z)]^{k-1}[S'(w_\alpha)]d\mu \to \int_{B_{E'}}[S'(z)]^{k-1}[S'(w)]d\mu$ y por lo tanto $DQ(z)$ es w^*-continua. Luego, Q verifica las condiciones *a)* y *b)* de la proposición 3.1.2. ∎

Corolario 3.2.5. *La extensión de Aron-Berner de un polinomio integral es también integral y tiene la misma norma integral.*

DEMOSTRACIÓN: Un polinomio Q en un espacio de Banach E es integral si y sólo si existen una medida finita ν en un espacio topológico compacto Ω y un operador lineal y continuo $R : E \longrightarrow L_\infty(\Omega)$ tales que

$$Q(x) = \int_\Omega R(x)^k d\nu$$

(ver [20]). Además, se tiene que $\|Q\|_{\mathcal{I}} \leq \|R\|^k \ \|\nu\|$.

En nuestro caso, el lema previo nos da la factorización para la extensión de Aron-Berner, tomando $R = S'$. Como $\|S'\| \leq 1$, $\|AB(P)\|_{\mathcal{I}} \leq \|\mu\|$ para cualquier medida μ que represente a P. Tomando el ínfimo sobre todas las medidas que representan a P, resulta $\|AB(P)\|_{\mathcal{I}} \leq \|P\|_{\mathcal{I}}$. La otra desigualdad es una consecuencia de la proposición 2.1.2, ya que $AB(P)$ extiende a P como funcional lineal. ■

Recordemos que si K es un espacio Hausdorff compacto, una función $\phi : K \rightarrow \mathbb{C}$ se dice **universalmente medible** si es medible para toda medida regular de Borel definida sobre K. Si K es además un conjunto convexo (en algún espacio vectorial topológico) y μ es una medida de probabilidad sobre K, se define el **baricentro** de μ como el único punto $r\mu \in K$ que verifica

$$\int_K f \, d\mu = f(r\mu)$$

para toda función f continua y afín ($r\mu$ se llama también resultante de μ). Diremos que una función $\phi : K \rightarrow \mathbb{C}$ satisface el **cálculo baricéntrico** si ϕ es universalmente medible y

$$\int_K \phi \, d\mu = \phi(r\mu)$$

para toda medida de probabilidad μ sobre K.

El siguiente es un teorema de Haydon [33] (ver también [21]) que nos permitirá relacionar la validez de la fórmula (3.5) con la contención de ℓ_1 por parte del espacio E:

Teorema 3.2.6. *Sea E un espacio de Banach. Entonces son equivalentes:*

i) E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_1.

ii) Todo elemento de E'' es universalmente medible como función en $(B_{E'}, w^*)$.

iii) Todo elemento de E'' satisface el cálculo baricéntrico en $(B_{E'}, w^*)$.

En el siguiente teorema, μ denota alguna medida regular de Borel sobre $(B_{E'}, w^*)$. Cuando un elemento z de E'' sea una función μ-medible sobre $(B_{E'}, w^*)$, z denotará tanto al elemento de E'' como a su clase como función en $L_\infty(\mu)$.

Teorema 3.2.7. *Sea E un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

i) E no contiene ningún subespacio isomorfo a ℓ_1.

ii) Para toda μ, la aplicación $E'' \longrightarrow L_\infty(\mu)$ $(z \mapsto z)$ está bien definida y es w^*-w^*-continua.

iii) Para toda μ, todo $z \in E''$, $[S'(z)] = z$ μ-a.e.

iv) Para toda μ, cada $z \in E''$ es μ-medible y la extensión de Aron-Berner de $P(x) = \int \gamma(x)^k d\mu$ está dada por:

$$AB(P)(z) = \int_{B_{E'}} z(\gamma)^k d\mu(\gamma)$$

DEMOSTRACIÓN: *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: Por el teorema 3.2.6, la aplicación dada en *ii)* está bien definida. Tenemos que mostrar que dada $f \in L_1(\mu)$, la funcional lineal L_f definida por

$$L_f(z) = \int_{B_{E'}} zf d\mu$$

es w^*-continua. Para esto, notemos que $fd\mu$ es una medida regular de Borel, que asumiremos que es de probabilidad (para el caso general, basta escribir $fd\mu$ como combinación lineal de medidas de probabilidad). Nuevamente por el teorema 3.2.6, cada $z \in E''$ satisface el cálculo baricéntrico, y si $\gamma \in B_{E'}$ es el baricentro de $fd\mu$, tenemos

$$L_f(z) = \int_{B_{E'}} zf d\mu = z(\gamma)$$

Luego, L_f es w^*-continua.

ii) $\Rightarrow$ *iii)*: Para $f \in L_1(\mu)$, queremos ver que

$$\int_{B_{E'}} [S'(z)] f d\mu = \int_{B_{E'}} z f d\mu$$

Esta ecuación se satisface si $z \in E$, y ambos miembros son funciones w^*-continuas de z (el miembro izquierdo es siempre w^*-continuo, por ser S' una transpuesta, mientras que el derecho lo es por *ii)*). Entonces *iii)* se sigue del teorema de Goldstine.

iii) $\Rightarrow$ *iv)*: *iii)* y el lema previo implican *iv)*.

iv) $\Rightarrow$ *i)*: *i)* es, nuevamente, una consecuencia del teorema 3.2.6. ■

4. El espacio de los polinomios extensibles

En este capítulo estudiaremos el problema de extender polinomios k-homogéneos definidos en un espacio de Banach E a un espacio G que lo contenga. Todas las contenciones consideradas son isométricas.

En primer lugar estudiaremos situaciones en las que todo polinomio definido sobre E se puede extender a G. El caso más simple se da cuando E está complementado en G. En este caso, si $\Pi : G \to E$ es una proyección, para todo $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$ el polinomio $P \circ \Pi : G \to F$ es una extensión de P a G. Observemos que en este caso la aplicación $P \mapsto P \circ \Pi$ es un morfismo lineal y continuo (ya que $\|P \circ \Pi\| \leq \|P\| \ \|\Pi\|^k$) de $\mathcal{P}(^kE; F)$ a $\mathcal{P}(^kG; F)$. En el capítulo 3 vimos que si F es un espacio $\mathcal{C}_l$ (con proyección $p : F'' \to F$), todo polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$ se extiende a E'' vía la aplicación $P \mapsto AB_p(P)$, donde $AB_p(P) = p \circ AB(P)$. Un caso más general en el que todo polinomio de $\mathcal{P}(^kE; F)$ se extiende a G es el que da la siguiente proposición:

Proposición 4.0.1. *Si F es un espacio $\mathcal{C}_l$ y E'' está complementado en G'', todo polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$ se extiende a un polinomio $\tilde{P} : G \to F$.*

Demostración: Sean $p : F'' \to F$ y $\Pi : G'' \to E''$ las proyecciones. Si $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$, $AB(P)_p$ es una extensión de P a E''. Entonces, $\Pi \circ AB(P)_p$ es un polinomio definido sobre G'' que extiende a P. Si $\tilde{P}$ es la restricción de $\Pi \circ AB(P)_p$ a G, $\tilde{P}$ resulta una extensión de P a G. ∎

Para el caso particular en el que F es el cuerpo de escalares, tenemos:

Corolario 4.0.2. *Si E'' está complementado en G'', todo polinomio $P \in \mathcal{P}({}^kE)$ se extiende a un polinomio $\tilde{P} \in \mathcal{P}({}^kG)$.*

Notemos que la aplicación $P \mapsto \tilde{P}$ de la proposición 4.0.1 y su corolario es un morfismo lineal y continuo de extensión. Es decir que en los casos descritos, no sólo podemos extender todos los polinomios sino que podemos extenderlos de una manera muy particular. Esto no sucede en general ni siquiera para el caso lineal escalar, ya que el teorema de Hahn-Banach no da una forma lineal de extender las funcionales. Más precisamente, las siguientes afirmaciones son equivalentes [54]:

a) Existe un morfismo lineal y continuo de extensión $\sigma : E' \to G'$ ($\sigma(\gamma)(x) = \gamma(x)$ para todo $x \in E$).

b) E'' está complementado en G''.

c) Para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un morfismo lineal y continuo de extensión $\sigma_k : \mathcal{P}({}^kE) \to \mathcal{P}({}^kG)$.

d) Para algún $k \in \mathbb{N}$ existe un morfismo lineal y continuo de extensión $\sigma_k : \mathcal{P}({}^kE) \to \mathcal{P}({}^kG)$.

Definición 4.0.3. *Siguiendo a [36], diremos que un polinomio $P : E \to F$ es extensible si para todo espacio de Banach G que contenga a E existe una extensión $\tilde{P} \in \mathcal{P}({}^kG; F)$ de P. Notaremos $\mathcal{P}_e({}^kE; F)$ al espacio formado por todos estos polinomios.*

Antes de estudiar ejemplos de polinomios extensibles, recordaremos algunas definiciones y resultados.

Diremos que un espacio de Banach Y tiene la propiedad de extensión métrica si para todo espacio de Banach X, todo operador lineal $T : X \to Y$ y para cada Z que contenga a X existe un operador lineal $\tilde{T} : Z \to Y$ que extiende a T con la misma norma. Es inmediato que un espacio con la propiedad de extensión métrica está complementado en cualquier espacio que lo contenga con proyección de norma 1 (basta extender el operador identidad $I : Y \to Y$ a cualquier $Z \supset Y$ para obtener la proyección). En realidad, se puede ver que la propiedad de extensión métrica es equivalente a la de ser complementado con proyección de norma 1 en todo espacio mayor (ver [20]). Los espacios $\ell_\infty(I)$ y $C(K)''$ tienen la propiedad de extensión métrica para todo conjunto de índices I y para todo espacio Hausdorff compacto K [20]. Entonces podemos afirmar:

- Todo polinomio sobre $\ell_\infty(I)$ (a valores en cualquier espacio de Banach F) es extensible (ya que $\ell_\infty(I)$ está complementado en cualquier espacio que lo contiene).
- Si F es un espacio $\mathcal{C}_l$ y K es un espacio Hausdorff compacto, todo polinomio $P \in \mathcal{P}({}^kC(K); F)$ es extensible ($C(K)''$ está complementado en todo espacio que lo contiene). En particular, todo polinomio escalar sobre $C(K)$ es extensible.
- Un caso especial de lo anterior es el siguiente: $c_0'' = \ell_\infty$ está complementado en todo espacio que lo contenga. Luego, todo polinomio escalar (o que tome sus valores en un espacio $\mathcal{C}_l$) sobre c_0 es extensible.

Dado un espacio de Banach E, existen algunos espacios que canónicamente lo contienen. Uno de ellos es el espacio $C(B_{E'}, w^*)$ de funciones w^*-continuas sobre la bola unidad de E' (notemos que $(B_{E'}, w^*)$ es un espacio topológico compacto). E se puede ver como un subespacio de $C(B_{E'}, w^*)$ mediante la inclusión isométrica

$$I_E : E \hookrightarrow C(B_{E'}, w^*)$$

dada por

$$I_E(x)(\gamma) = \gamma(x) \text{ para todo } \gamma \in B_{E'}.$$

Otro espacio que canónicamente contiene a E es

$$\ell_\infty(B_{E'}) = \{(a_\gamma)_{\gamma \in B_{E'}} : \sup_{\gamma \in B_{E'}} |a_\gamma| < \infty\}.$$

En este caso la inclusión isométrica es

$$J_E : E \hookrightarrow \ell_\infty(B_{E'})$$

$$J_E(x) = (\gamma(x))_{\gamma \in B_{E'}}.$$

Si E es separable, Banach y Mazur mostraron que se puede reemplazar $C(B_{E'}, w^*)$ por $C([0,1])$ y $\ell_\infty(B_{E'})$ por ℓ_∞ (ver, por ejemplo, [12]). Además, es importante notar que, para cualquier espacio de Banach E, $C(B_{E'}, w^*) \subset \ell_\infty(B_{E'})$: cada $f \in C(B_{E'}, w^*)$ se corresponde con el elemento $(f(\gamma))_{\gamma \in B_{E'}} \in \ell_\infty(B_{E'})$.

Las inclusiones I_E y J_E junto con ciertas propiedades de los espacios $C(K)$ y $\ell_\infty(I)$ nos permitirán mostrar ejemplos de polinomios escalares no extensibles:

1. Sea $p \leq k$ y definamos el polinomio $P \in \mathcal{P}(^k\ell_p)$ como $P(x) = \sum_{j=1}^{\infty}(x_j)^k$ (donde $x = (x_j)_{j \in \mathbb{N}} \in \ell_p$). Este polinomio no puede extenderse a $C(B_{E'}, w^*)$ (ni a $C([0,1])$). Los espacios $C(K)$ tienen la propiedad de Dunford-Pettis [30]. Ryan [47] mostró que todo polinomio escalar sobre un espacio con esta propiedad es w.s.c. Como el polinomio P no es w.s.c. (la base canónica $(e_n)_n$ de ℓ_p tiende débilmente a cero, mientras que $P(e_n) = 1$ para todo n), no puede extenderse a un polinomio sobre $C([0,1])$ o $C(B_{E'}, w^*)$.

2. El polinomio $P \in \mathcal{P}(^2\ell_1)$ dado por $P(x) = \sum_j \sum_k \operatorname{sgn}(j+k)\ x_j x_k$ no se extiende a $C(B_{\ell_\infty}, w^*)$ (ni a $C([0,1])$). Sea $T_P : \ell_1 \to (\ell_1)' = \ell_\infty$ el operador asociado a P. Si $\tilde{P}$ es una extensión de P a $C(B_{\ell_\infty}, w^*)$ y $T_{\tilde{P}} : C(B_{\ell_\infty}, w^*) \to C(B_{\ell_\infty}, w^*)'$ es su operador asociado, es siguiente diagrama conmuta:

$$\begin{array}{ccc} \ell_1 & \xrightarrow{T_P} & \ell_\infty \\ I_{\ell_1} \downarrow & & \uparrow I'_{\ell_1} \\ C(B_{\ell_\infty}, w^*) & \xrightarrow[T_{\tilde{P}}]{} & C(B_{\ell_\infty}, w^*)' \end{array}$$

Todo operador de un espacio $C(K)$ en $C(K)'$ es débilmente compacto ([32]). Por la conmutatividad del diagrama, T_P resulta débilmente compacto. Pero $T_P : \ell_1 \to \ell_\infty$ está dado por $T_P(x) = \left(\sum_j \operatorname{sgn}(j+k)\ x_j\right)_k$, que no es un operador débilmente compacto [53, 54].

3. El polinomio $P \in \mathcal{P}(^2\ell_2)$ dado por $P(x) = \sum_j \frac{x_j^2}{j}$ es un ejemplo de polinomio aproximable no extensible. En [36], Kirwan y Ryan mostraron que los polinomios 2-homogéneos extensibles sobre un espacio de Hilbert son nucleares. El polinomio P no es nuclear, por lo que no es extensible.

Una de las herramientas fundamentales en el estudio de la extensibilidad de los polinomios es la linealización de los mismos. A continuación analizaremos la relación entre la posibilidad de extender un polinomio y ciertas propiedades de continuidad de su linealización.

4.1. Extendiendo polinomios a un espacio fijo

Sea E un subespacio cerrado de un espacio de Banach G. La inclusión $i : E \hookrightarrow G$ induce una aplicación entre los productos tensoriales simétricos:

$$\begin{aligned} \otimes_s^k i \ : \otimes_s^k E &\longrightarrow \otimes_s^k G \\ \sum_{j=1}^n x_j^{(k)} &\longmapsto \sum_{j=1}^n i(x_j)^{(k)} \end{aligned}$$

que es inyectiva como consecuencia del lema 2.1.1 y del teorema de Hahn-Banach: $\sum_{j=1}^n i(x_j)^{(k)} = 0$ en $\otimes_s^k G$, y $\gamma \in E'$, podemos extender γ a $\Gamma \in G'$, y tenemos que

$$\left(\sum_{j=1}^n x_j^{(k)} \right) (\gamma^k) = \left(\sum_{j=1}^n i(x_j)^{(k)} \right) (\Gamma^k) = 0$$

cualquiera sea $\gamma \in E'$. Esto implica, por el lema 2.1.1, que $\sum_{j=1}^n x_j^{(k)} = 0$.

En consecuencia, $\otimes_s^k E$ se puede ver, algebraicamente, como un subespacio de $\otimes_s^k G$. Sin embargo, en general $\otimes_{s,\pi}^k E$ no es, topológicamente, un subespacio de $\otimes_{s,\pi}^k G$. Si llamamos $\|\cdot\|_{\pi,E}$ a la π-norma en $\otimes_s^k E$, para $s \in \otimes_s^k E$ tenemos

$$\|s\|_{\pi,E} = \inf \sum_{j=1}^n \|x_j\|^k ,$$

donde el ínfimo se toma entre todas las representaciones $s = \sum_{j=1}^{n} x_j^{(k)}$, con $x_1, \dots, x_j \in E$. En cambio, para calcular la norma proyectiva de s como elemento de $\otimes_s^k G$ (es decir, la norma de $\otimes_s^k i(s)$), el ínfimo se toma sobre todas las representaciones $\otimes_s^k i(s) = \sum_{j=1}^{n} y_j^{(k)}$ donde $y_1, \dots, y_j \in G$. Como toda escritura de s como combinación de elementos de E se puede pensar como combinación de elementos de G, $\|s\|_{\pi,E}$ resulta mayor o igual a $\left\|\otimes_s^k i(s)\right\|_{\pi,G}$.

Supongamos que existe una constante $c > 0$ tal que para todo $s \in \otimes_s^k E$ se verifica

$$\|s\|_{\pi,E} \leq c \left\|\otimes_s^k i(s)\right\|_{\pi,G}. \tag{4.1}$$

Esto dice que $\otimes_{s,\pi}^k E$ es isomorfo a su imagen por $\otimes_s^k i$ en $\otimes_{s,\pi}^k G$ o, en otras palabras, que $\otimes_{s,\pi}^k E$ es, topológicamente, un subespacio de $\otimes_{s,\pi}^k G$. Dado un polinomio $P \in \mathcal{P}({}^k E)$, consideremos su linealización $L_P \in \left(\otimes_{s,\pi}^k E\right)'$. Como $\otimes_{s,\pi}^k E$ es un subespacio (topológico) de $\otimes_{s,\pi}^k G$, L_P se extiende por el teorema de Hahn-Banach a una funcional $\tilde{L}$ definida en $\otimes_{s,\pi}^k G$. Esto nos da un polinomio $\tilde{P} \in \mathcal{P}({}^k G)$ $(P(y) = \tilde{L}(y^{(k)}))$ que extiende a P. Además, como la norma de un polinomio coincide con la de su linealización, tenemos que $\left\|\tilde{P}\right\| \leq c \; \|P\|$. En consecuencia, si existe una constante $c > 0$ que satisface (4.1), todo polinomio k-homogéneo definido sobre E se extiende a un polinomio definido sobre G. Como hemos visto que no siempre los polinomios se extienden, en general las normas $\|\cdot\|_{\pi,E}$ y $\|\cdot\|_{\pi,G}$ no son equivalentes en $\otimes_{s,\pi}^k E$.

Veremos que un razonamiento análogo nos permitirá relacionar la posibilidad de extender un polinomio con la continuidad de su linealización respecto de cierta norma definida en el producto tensorial simétrico.

Debido a la mencionada inyectividad de $\otimes_s^k i$, la norma proyectiva π en $\otimes_s^k G$ induce por medio de esta aplicación una norma sobre $\otimes_s^k E$. Llamaremos a esta norma η_G. Entonces, para $s \in \otimes_s^k E$, tenemos:

$$\|s\|_{\eta_G} = \left\|\otimes_s^k i(s)\right\|_{\pi,G}$$

Por la definición de η_G, el espacio $\otimes_{s,\eta}^k E$ resulta (isométricamente) un subespacio de $\otimes_{s,\pi}^k G$. Por lo dicho anteriormente, en general la norma η_G no coincide con la norma proyectiva en $\otimes_s^k E$ (ni es equivalente). Como veremos en la proposición 4.1.1, un polinomio escalar $P \in \mathcal{P}(^kE)$ podrá extenderse a un polinomio definido en G si y sólo si su linealización L_P es una funcional η_G-continua sobre $\otimes_s^k E$. Esto no es cierto para polinomios vectoriales: para $k = 1$ la norma η_G es simplemente la norma en E, lo que implica que todo operador lineal definido sobre E es η_G-continuo. Sin embargo, no todo operador lineal se puede extender (por ejemplo, la identidad sobre c_0 no se extiende a ℓ_∞).

Llamaremos $\mathcal{P}_{e_G}(^kE; F)$ al espacio de todos los polinomios $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$ que puedan ser extendidos a un polinomio $\tilde{P} \in \mathcal{P}(^kG; F)$ (para polinomios escalares, escribiremos $\mathcal{P}_{e_G}(^kE)$). En este espacio podemos definir

$$\|P\|_{e_G} = \inf\left\{\left\|\tilde{P}\right\| : \tilde{P} : G \to F \text{ extiende a } P\right\} \tag{4.2}$$

que llamaremos la **norma G-extensible** de P. Como la norma de cualquier extensión de P es mayor que la de P, tenemos que $\|P\| \leq \|P\|_{e_G}$. Mas aún, si

$$\rho : \mathcal{P}(^kG; F) \longrightarrow \mathcal{P}_{e_G}(^kE; F)$$

es la aplicación "restricción" ($\rho(Q) = Q\mid_E$), podemos reescribir (4.2) como $\|P\|_{e_G} = \inf\left\{\left\|\tilde{P}\right\| : \rho(\tilde{P}) = P\right\}$. Se sigue que $\left(\mathcal{P}_{e_G}(^kE; F),\ \|\cdot\|_{e_G}\right)$ puede verse como el espacio cociente $\mathcal{P}(^kG; F)/\ker\rho$ (notemos que $\ker\rho$ está formado por los polinomios $Q \in \mathcal{P}(^kG; F)$ que se anulan sobre E). Además tenemos la siguiente proposición:

Proposición 4.1.1. *Sean $E \subseteq G$ y F espacios de Banach.*
a) $\left(\mathcal{P}_{e_G}(^kE; F), \|\cdot\|_{e_G}\right)$ es un espacio de Banach.
b) Para el caso escalar, $\left(\otimes_{s,\eta_G}^k E\right)' = \left(\mathcal{P}_{e_G}(^kE), \|\cdot\|_{e_G}\right)$ isométricamente.

DEMOSTRACIÓN: a) $\left(\mathcal{P}_{e_G}(^kE; F), \|\cdot\|_{e_G}\right)$ el cociente de un espacio de Banach por un subespacio cerrado.
b) Sea L una funcional η_G-continua en $\otimes_s^k E$ y P_L el polinomio asociado. Como $\otimes_{s,\eta_G}^k E$ es isométricamente un subespacio de $\otimes_{s,\pi}^k G$, L se extiende por el teorema de Hahn-Banach

a una funcional lineal $\tilde{L}$ en $\otimes_{s,\pi}^k G$ con $\|\tilde{L}\|_\pi = \|L\|_{\eta_G}$. La funcional $\tilde{L}$ define un polinomio $P_{\tilde{L}} \in \mathcal{P}(^k G)$ que extiende a P_L a todo G. Como $\|P_{\tilde{L}}\| = \|\tilde{L}\|_\pi = \|L\|_{\eta_G}$, resulta $\|P_L\|_{e_G} \leq \|L\|_{\eta_G}$.

Por otra parte, si $P \in \mathcal{P}_{e_G}(^k E)$, $\tilde{P}$ es una extensión de P a G y consideramos las linealizaciones de ambos polinomios, es inmediato que $L_{\tilde{P}}$ es una extensión de L_P a $\otimes_s^k G$. Como $\otimes_{s,\eta_G}^k E$ es isométricamente un subespacio de $\otimes_{s,\pi}^k G$, la norma de L_P como funcional sobre $\otimes_{s,\eta_G}^k E$ es menor o igual que la norma de $L_{\tilde{P}}$. Entonces $\|L_P\|_{\eta_G} \leq \|L_{\tilde{P}}\| = \|\tilde{P}\|$ y tomando el ínfimo sobre todas las extensiones posibles de P vemos que $\|L_P\|_{\eta_G} \leq \|P\|_{e_G}$. Esto junto a la primera desigualdad nos dice que la aplicación $P \mapsto L_P$ es un isomorfismo isométrico entre $\left(\mathcal{P}_{e_G}(^k E), \|\cdot\|_{e_G}\right)$ y $\left(\otimes_{s,\eta_G}^k E\right)'$. ■

De la demostración de b) se ve que para polinomios escalares, el ínfimo en (4.2) es en realidad un mínimo. Es decir que dado un polinomio $P \in \mathcal{P}_{e_G}(^k E)$ existe una extensión $\tilde{P}$ de P a G cuya norma coincide con la norma G-extensible de P. Lo mismo sucede con polinomios que toman valores en un espacio dual, como veremos más adelante.

Supongamos que $E \subset G$ y F son tales que todo polinomio $P \in \mathcal{P}(^k E; F)$ se extiende a G. Entonces $\mathcal{P}(^k E; F) = \mathcal{P}_{e_G}(^k E; F)$ es un espacio de Banach tanto con la norma usual como con la norma extensible. Como sabemos que $\|P\| \leq \|P\|_{e_G}$ para todo P, estas dos normas resultan equivalentes. Por lo tanto, si todo polinomio k-homogéneo de E en F se extiende a G, existe una constante $c > 0$ que verifica $\|P\|_{e_G} \leq c\ \|P\|$ para todo $P \in \mathcal{P}(^k E; F)$. Luego, dado $\varepsilon > 0$ podemos encontrar una extensión $\tilde{P} \in \mathcal{P}(^k G; F)$ de P con $\left\|\tilde{P}\right\| \leq (c+\varepsilon)\ \|P\|$ (en el caso escalar, se puede encontrar $\tilde{P}$ de manera que $\left\|\tilde{P}\right\| \leq c\ \|P\|$, ya que el ínfimo de (4.2) es un mínimo). En los ejemplos del comienzo de este capítulo, los casos en los que todos los polinomios escalares se extienden se puede fijar $c = 1$. Es decir que la norma G-extensible de los polinomios coinciden con su norma usual. Es natural preguntarse si en todos los casos en que $\mathcal{P}(^k E) = \mathcal{P}_{e_G}(^k E)$, esta igualdad es isométrica. La respuesta es negativa, aún en espacios de dimensión finita: en [40], P. Mazet mostró un espacio de dimensión finita G y un hiperplano $E \subset G$ para el cual $c = 2$ en el caso real y $c \geq \frac{7}{3}$ en el caso complejo.

Ya mencionamos que para polinomios a valores vectoriales, la η_G-continuidad de la linealización de un polinomio no asegura la extensibilidad del mismo al espacio G. De hecho, la η_G-continuidad esta relacionada con una noción más débil de extensibilidad:

Definición 4.1.2. *Un polinomio $P : E \longrightarrow F$ se dice débilmente extensible a G si para toda funcional lineal ξ en F', el polinomio escalar $\xi \circ P$ se extiende a G.*

Si $P \in \mathcal{P}_{e_G}(^kE; F)$ y $\tilde{P}$ es una extensión de P a G, entonces para cualquier $\xi \in F'$, $\xi \circ \tilde{P}$ es una extensión de $\xi \circ P$ a G. En consecuencia, un polinomio que se extiende a G resulta débilmente extensible a G. En cambio, no vale la recíproca: si $P : E \longrightarrow F$ es un operador lineal, $\xi \circ P \in E'$ para toda $\xi \in F'$. Por el teorema de Hahn-Banach, $\xi \circ P$ se puede extender a una funcional definida sobre G. Por lo tanto, todo operador lineal es débilmente extensible a cualquier espacio, pero los operadores lineales no siempre son extensibles. La próxima proposición muestra la relación entre extensibilidad débil y η_G-continuidad.

Proposición 4.1.3. *Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$ es débilmente extensible a G si y sólo si su linealización $L_P : \otimes_s^k E \longrightarrow F$ es η_G-continuo.*

DEMOSTRACIÓN: Si $L_P : \otimes_s^k E \longrightarrow F$ es η_G-continuo, entonces para cada $\xi \in F'$, $\xi \circ L_P$ es una funcional lineal η_G-continua sobre $\otimes_s^k E$. De la proposición 4.1.1 se sigue que $\xi \circ P$ se extiende a G (ya que $\xi \circ L_P$ es la linealización de $\xi \circ P$).

Supongamos ahora que P es débilmente extensible a G. Esto significa que para todo $\xi \in F'$ el polinomio $\xi \circ P$ es extensible a G. Por la proposición, la funcional lineal $L_{\xi \circ P} = \xi \circ L_P$ es η_G-continua sobre $\otimes_s^k E$. Si llamamos B a la bola unidad de $\otimes_{s,\eta_G}^k E$, $\xi(L_P(B)) = L_{\xi \circ P}(B)$ es acotado para todo $\xi \in F'$. Entonces $L_P(B)$ es un subconjunto débilmente acotado (y por lo tanto acotado) de F. Esto significa que L_P es un operador η_G-continuo. ∎

Para finalizar esta sección, construiremos un predual de $\mathcal{P}_{e_G}({}^kE;F)$ en el caso que F sea un espacio dual: $F = Y'$.

Sea $P \in \mathcal{P}({}^kE;Y')$ y $P^* \in \left(\left(\otimes_s^k E\right) \otimes Y\right)'$ su funcional lineal asociada. Para cada par de normas α en el producto tensorial simétrico $\otimes_s^k E$ y β en el producto tensorial $\left(\otimes_{s,\alpha}^k E\right) \otimes Y$, notaremos con $\|P^*\|_{\alpha,\beta}$ la norma de P^* como funcional lineal sobre $\left(\otimes_{s,\alpha}^k E\right) \otimes_\beta Y$. Nuestra idea es encontrar α y β tales que la α,β-norma de una funcional coincida con la e_G-norma del polinomio asociado.

Por la definición de η_G, $\otimes_{s,\eta_G}^k E$ es isométricamente un subespacio de $\otimes_{s,\pi}^k G$. Sin embargo, el producto tensorial (no simétrico) $\left(\otimes_{s,\eta_G}^k E\right) \otimes_\pi Y$ no es necesariamente un subespacio topológico de $\left(\otimes_{s,\pi}^k G\right) \otimes_\pi Y$. De hecho, utilizando el corolario 1.2.2 y un razonamiento análogo al de la proposición 4.1.1, será un subespacio si y solamente si cada operador continuo de $\otimes_{s,\eta_G}^k E$ a Y' se extiende a un operador continuo de $\otimes_{s,\pi}^k G$ a Y'. Utilizando la correspondencia probada en la proposición 4.1.3, esto equivale al siguiente hecho: todo polinomio de E a Y' débilmente extensible a G, se extiende a G. En este caso tenemos:

$$\left((\otimes_{s,\eta_G}^k E) \otimes_\pi Y\right)' = \mathcal{L}\left(\otimes_{s,\eta_G}^k E; Y'\right) = \mathcal{P}_{e_G}({}^kE;Y')$$

de manera isomorfa.

Para el caso general, la aplicación inyectiva:

$$\left(\otimes_s^k i\right) \otimes I_Y : \left(\otimes_{s,\eta_G}^k E\right) \otimes Y \longrightarrow \left(\otimes_{s,\pi}^k G\right) \otimes_\pi Y$$

donde I_Y es el operador identidad sobre Y, induce una norma en $\left(\otimes_{s,\eta_G}^k E\right) \otimes Y$ que denotaremos λ_G. Es decir

$$\|s \otimes y\|_{\eta_G,\lambda_G} = \left\|\otimes_s^k i(s) \otimes y\right\|_{\pi,\pi}.$$

Entonces tenemos:

Proposición 4.1.4. a) *Si todo polinomio de* E a Y' *que es débilmente extensible* a G, *se extiende a* G, *entonces* $\left((\otimes_{s,\eta_G}^k E) \otimes_\pi Y\right)' = \mathcal{P}_{e_G}({}^kE;Y')$ *en forma isomorfa.*

b) $\left((\otimes^k_{s,\eta_G} E) \otimes_{\lambda_G} Y\right)' = \mathcal{P}_{e_G}({}^kE; Y')$ *isométricamente.*

DEMOSTRACIÓN: *a)* Ya fue probado.

b) Tomemos un polinomio $P : E \to F$ cuya funcional lineal asociada P^* pertenezca a $\left((\otimes^k_{s,\eta_G} E) \otimes_{\lambda_G} Y\right)'$. Por el teorema de Hahn-Banach, esta funcional se extiende a una funcional sobre $\left(\otimes^k_{s,\pi} G\right) \otimes_\pi Y$ con la misma norma (ya que $(\otimes^k_{s,\eta_G} E) \otimes_{\lambda_G} Y$ es isométricamente un subespacio de $\left(\otimes^k_{s,\pi} G\right) \otimes_\pi Y$). Esto da una extensión de P a G con norma $\|P^*\|_{\eta_G,\lambda_G}$ y en consecuencia tenemos que $\|P\|_{e_G} \leq \|P^*\|_{\eta_G,\lambda_G}$. Por otra parte, cualquier extensión de P a G nos da una extensión de P^* a $\left(\otimes^k_{s,\pi} G\right) \otimes_\pi Y$. Entonces, $\|P^*\|_{\eta_G,\lambda_G} \leq \|Q\|$ para todo Q que extienda a P. Tomando ínfimo sobre todas las posibles extensiones y combinando esto con la desigualdad anterior, se sigue que $\|P\|_{e_G} = \|P^*\|_{\eta_G,\lambda_G}$. ∎

Observación 4.1.5. *La demostración de la proposición muestra que si F un espacio dual, el ínfimo en (4.2) es en realidad un mínimo.*

Corolario 4.1.6. *Si F es un espacio dual, todo polinomio $P : E \to F$ se extiende a G si y sólo si, en $\mathcal{P}_{e_G}({}^kE; F)$, la e_G-norma es equivalente a la norma usual.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que, en $\mathcal{P}_{e_G}({}^kE; F)$, la e_G-norma es equivalente a la norma usual y sea Y el predual de F. Como la η_G, λ_G-norma es menor o igual a la π, π-norma en $\left(\otimes^k_s E\right) \otimes Y$, la identidad $id : \left(\otimes^k_{s,\pi} E\right) \otimes_\pi Y \to (\otimes^k_{s,\eta_G} E) \otimes_{\lambda_G} Y$ es continua y se extiende a los productos tensoriales completados. Transponiendo, obtenemos la inclusión $id' : \mathcal{P}_{e_G}({}^kE; F) \to \mathcal{P}({}^kE; F)$. La equivalencia entre las norma e_G y la usual implica que id' es un isomorfismo con su imagen. Por el lema 2.2.11 la extensión de id a los productos tensoriales completados es suryectiva y, por lo tanto, abierta. Si $B_{\pi,\pi}$ y B_{η_G,λ_G} son las bolas unitarias de los productos tensoriales con normas π, π y η_G, λ_G respectivamente, existe una constante $c > 0$ de manera que $c \cdot B_{\eta_G,\lambda_G} \subset B_{\pi,\pi}$. Esto dice que las normas π, π y η_G, λ_G son equivalentes en $\left(\otimes^k_s E\right) \otimes Y$. Entonces los duales del producto tensorial con ambas normas coinciden. Luego, $\mathcal{P}_{e_G}({}^kE; F) = \mathcal{P}({}^kE; F)$.

La recíproca ya fue comentada. ∎

4.2. Polinomios extensibles

Los ejemplos de polinomios no extensibles que vimos al comienzo de este capítulo tienen una característica común: los espacios a los que no pueden extenderse están relacionados con el espacio inicial mediante las inclusiones $E \hookrightarrow C(B_{E'}, w^*)$ y $E \hookrightarrow \ell_\infty(B_{E'})$. Esto no es casual: veremos que bastará analizar la posibilidad de extender un polinomio a $\ell_\infty(B_{E'})$ (y en algunos casos, a $C(B_{E'}, w^*)$) para asegurar su extensibilidad. Este hecho se basa en la mencionada propiedad de extensión métrica de los espacios $\ell_\infty(B_{E'})$ y $C(B_{E'}, w^*)''$.

Teorema 4.2.1. *Si F es un espacio $\mathcal{C}_l$, un polinomio $P : E \to F$ resulta extensible si y solamente si P se extiende a $C(B_{E'}, w^*)$. En este caso, si P_0 es una extensión de P a $C(B_{E'}, w^*)$, para cualquier G que contenga a E existirá una extensión $\tilde{P}$, definida sobre G con $\|\tilde{P}\| \leq l\ \|P_0\|$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea P_0 una extensión de P a $C(B_{E'})$ y sea $AB_p(P_0)$ su extensión de Aron-Berner (a $C(B_{E'})''$) compuesta con la proyección $p : F'' \to F$ ($\|p\| \leq l$). Si G es un espacio de Banach que contiene a E, como $C(B_{E'})''$ tiene la propiedad de extensión métrica, la inclusión $E \hookrightarrow C(B_{E'}) \hookrightarrow C(B_{E'})''$ se extiende a un operador de norma unitaria $j : G \to C(B_{E'})''$ que hace conmutar el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, hook] \arrow[d] & C(B_{E'})'' \arrow[r, "AB_p(P_0)"] & F \\ G \arrow[ur, "j"] & & \end{tikzcd}$$

En consecuencia, si definimos $\tilde{P} = AB_p(P_0) \circ j$ obtenemos una extensión de P a G que verifica $\left\|\tilde{P}\right\| \leq \|AB_p(P_0)\|\ \|j\| \leq \|p\|\ \|P_0\| \leq l\ \|P\|$. Luego, P es un polinomio extensible. ■

Si F no es un espacio $\mathcal{C}_l$, el resultado de la proposición anterior no es cierto: un polinomio $P : E \to F$ que se extiende a $C(B_{E'})$ no es necesariamente extensible. Por ejemplo, consideremos el caso en que $E = c_0$. Dado que c_0 es separable, (B_{ℓ_1}, w^*) resulta un conjunto compacto metrizable. Esto implica que el espacio $C(B_{\ell_1})$ es separable. Para ver esto, sea $(y_n)_n$ un subconjunto denso numerable en (B_{ℓ_1}, w^*) y llamemos $U_{n,q}$ a la bola de centro y_n y radio $q \in \mathbb{Q}_{>0}$ (en la métrica equivalente a la topología w^*). Tomemos, para cada $0 < q < p$ y para cada n, una función $f_{n,p,q}$ que verifique: $0 \leq f_{n,p,q} \leq 1$, $f_{n,p,q} = 1$ en $U_{n,q}$ y $f_{n,p,q} = 0$ fuera de $U_{n,p}$. Por el teorema de Stone-Weierstrass, es fácil ver que $(f_{n,p,q})_{\substack{n\in\mathbb{N}\\ p,q\in\mathbb{Q}}}$ generan un subespacio denso en $C(B_{\ell_1})$, con lo que este espacio resulta separable. El teorema de Sobczyck (ver [38]) afirma que c_0 está complementado en todo espacio separable que lo contenga. En particular, estará complementado en $C(B_{\ell_1})$ y por lo tanto cualquier polinomio definido sobre c_0 se puede extender a $C(B_{\ell_1})$. Sin embargo, no todo polinomio sobre c_0 es extensible: la identidad de c_0 no lo es, como ya hemos mencionado. La utilización del teorema de Sobczyck para este ejemplo fue una sugerencia del profesor Antonio Suarez Granero.

Como conclusión, para asegurar la extensibilidad de un polinomio que toma sus valores en un espacio de Banach F genérico, será necesario extenderlo a un espacio mayor que $C(B_{E'})$:

Teorema 4.2.2. *Un polinomio $P : E \to F$ es extensible si y solamente si P se extiende a $\ell_\infty(B_{E'})$. En este caso, si P_0 es una extensión de P a $\ell_\infty(B_{E'})$, entonces para cualquier G que contenga a E existirá una extensión $\tilde{P}$ definida sobre G con $\|\tilde{P}\| \leq \|P_0\|$.*

DEMOSTRACIÓN: Sea P_0 una extensión de P a $\ell_\infty(B_{E'})$. Si G es un espacio de Banach que contiene a E, como $\ell_\infty(B_{E'})$ tiene la propiedad de extensión métrica, la inclusión $J_E : E \hookrightarrow \ell_\infty(B_{E'})$ se extiende a un operador de norma unitaria $\tilde{J}_E : G \hookrightarrow \ell_\infty(B_{E'})$. Entonces, $\tilde{P} = P_0 \circ \tilde{J}_E$ resulta una extensión de P que verifica $\left\|\tilde{P}\right\| \leq \|P_0\| \left\|\tilde{J}_E\right\| = \|P_0\|$. ■

Como consecuencia de los dos teoremas previos tenemos que

$$\mathcal{P}_e({}^kE; F) = \mathcal{P}_{e_{C(B_{E'})}}({}^kE; F) \tag{4.3}$$

si F es un espacio C_l y

$$\mathcal{P}_e({}^kE; F) = \mathcal{P}_{e_{\ell_\infty(B_{E'})}}({}^kE; F) \tag{4.4}$$

para cualquier caso. También se puede concluir de los teoremas que la **norma extensible** [36]:

$$\|P\|_e = \inf\{c > 0 : \text{dado } G \supset E \text{ existe una extensión de } P \text{a } G \text{ con norma} \leq c\} \quad (4.5)$$

está bien definida, siendo $\|P\|_e \leq \|P_0\|$ para cualquier extensión P_0 de P a $\ell_\infty(B_{E'})$. Tomando ínfimo sobre todas las posibles extensiones P_0, tenemos que $\|P\|_e \leq \|P\|_{e_{\ell_\infty(B_{E'})}}$. La desigualdad inversa es trivial (ya que $\ell_\infty(B_{E'})$ es uno de los posibles G de (4.5)), de donde tenemos $\|P\|_e = \|P\|_{e_{\ell_\infty(B_{E'})}}$ (análogamente, $\|P\|_e = \|P\|_{e_{\ell_\infty(B_{E'})}}$ si F es un espacio $\mathcal{C}_1$, lo que ocurre, por ejemplo, si F es un espacio dual). En consecuencia, la igualdad (4.4) resulta una isometría y lo mismo ocurre con (4.3) si F es $\mathcal{C}_1$.

Dado que (4.4) es una isometría, $\left(\mathcal{P}_e(^kE; F), \|\cdot\|_e\right)$ es un espacio de Banach. Como $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_e$, si todo polinomio $P : E \to F$ es extensible, ambas normas son equivalentes en $\mathcal{P}(^kE; F)$. Esto significa que si todo polinomio es extensible, hay una constante $C > 0$ de manera que para cualquier polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$ y cualquier espacio de Banach $G \supset E$ existe una extensión $\tilde{P} : G \to F$ con $\left\|\tilde{P}\right\| \leq C \ \|P\|$.

Extensión de Aron-Berner y composición con operadores de polinomios extensibles

Hemos visto en la sección 3.2 que varios de los espacios de polinomios usuales son preservados por el morfismo de Aron-Berner. Como aplicación de los teoremas de la sección previa mostraremos que la extensibilidad es otra propiedad preservada por este morfismo, así como por composiciones con operadores lineales.

Teorema 4.2.3. *Si $P : E \to F$ es extensible y $T : X \to E$ es un operador lineal continuo, entonces $P \circ T : X \to F$ es extensible y $\|P \circ T\|_e \leq \|P\|_e \ \|T\|^k$.*

DEMOSTRACIÓN: Gracias al teorema 4.2.2, sólo hace falta extender $P \circ T$ a $\ell_\infty(B_{X'})$. Sea $T' : E' \to X'$ el operador transpuesto de T y consideremos $T_1' = \frac{T'}{\|T\|}$. Claramente

$T_1'(B_{E'}) \subseteq B_{X'}$, por lo que podemos definir $T_0 : \ell_\infty(B_{X'}) \to \ell_\infty(B_{E'})$ como

$$T_0\,(a) = \|T\| \;\; (a_{T_1'(\gamma)})_{\gamma \in B_{E'}}$$

para $a = (a_\zeta)_{\zeta \in B_{G'}} \in \ell_\infty(B_{X'})$. Así obtenemos el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & E \\ J_X \downarrow & & \downarrow J_E \\ \ell_\infty(B_{X'}) & \xrightarrow{T_0} & \ell_\infty(B_{E'}) \end{array}$$

Si $P_0 : \ell_\infty(B_{E'}) \longrightarrow F$ es una extensión de P, entonces $P_0 \circ T_0$ resultará una extensión de $P \circ T$ a $\ell_\infty(B_{X'})$. Por el teorema 4.2.2, $P \circ T$ es extensible y tenemos que $\|P \circ T\|_e \leq \|P_0\| \;\; \|T_0\|^k = \|P_0\| \;\; \|T\|^k$ para cualquier extensión P_0 de P. Por lo tanto, $\|P \circ T\|_e \leq \|P\|_e \;\; \|T\|^k$. ∎

Observemos que el operador T no necesita ser extensible para que la composición lo sea. La afirmación del teorema 4.2.3 no es cierta si cambiamos al operador T por un polinomio no extensible: el polinomio $P(z) = z$ definido en $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$ es obviamente extensible pero si Q es un polinomio no extensible, la composición $P \circ Q = Q$ no será extensible.

Corolario 4.2.4. *La restricción de un polinomio extensible a un subespacio es extensible. Además, la norma extensible de la restricción no supera a la del polinomio original.*

DEMOSTRACIÓN: El resultado se deduce del teorema, tomando T como la inclusión. ∎

El corolario anterior dice que, si S es un subespacio de E y $P : E \to F$ es extensible, $P\,|_S$ también lo es. Esto puede parecer inmediato, pero observemos que la extensibilidad de $P\,|_S$ involucra a todo espacio de Banach que contenga a S, mientras que la de P se refiere solamente a los que contienen a E (que son algunos de los que contienen a S, pero no todos). Entonces la extensibilidad de P no implica "trivialmente" la de $P\,|_S$. Algo semejante ocurre con la extensión de Aron-Berner de un polinomio extensible. Si bien todo espacio G que contiene a E'' contiene también a E, extender un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$ a un polinomio $\tilde{P}$ sobre G no nos da una extensión de $AB(P)$ a G ya que $\tilde{P}\mid_{E''}$ no coincide necesariamente con $AB(P)$. Sin embargo, el siguiente teorema nos dice que la extensión de Aron-Berner de un polinomio extensible también lo es:

Teorema 4.2.5. *Si $P \in \mathcal{P}_e({}^kE;F)$, entonces $AB(P) \in \mathcal{P}_e({}^kE'';F'')$ y $\|AB(P)\|_e \leq \|P\|_e$.*

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que P un polinomio extensible y sea P_0 una extensión de P a $\ell_\infty(B_{E'})$. Como $P = P_0 \circ J_E$, la extensión de Aron-Berner de P es $AB(P_0) \circ J_E''$ (ver sección 3.1). Por otra parte, como $\ell_\infty(B_{E'})''$ tiene la propiedad de extensión métrica, el operador

$$J_E'' : E'' \longrightarrow \ell_\infty(B_{E'})''$$

se extiende a $\ell_\infty(B_{E'''}) \supset E''$, con la misma norma. Si llamamos j a esa extensión, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, "J_E"] \arrow[d] & \ell_\infty(B_{E'}) \arrow[r, "P_0"] \arrow[d] & F \arrow[d] \\
E'' \arrow[r, "J_E''"] \arrow[d, "J_{E''}"'] & \ell_\infty(B_{E'})'' \arrow[r, "AB(P_0)"] & F'' \\
\ell_\infty(B_{E'''}) \arrow[ur, "j"] & &
\end{tikzcd}$$

donde las flechas que no están marcadas representan las inclusiones canónicas a los respectivos biduales. Esto muestra que $AB(P_0) \circ j$ es una extensión de $AB(P_0) \circ J_E'' = AB(P)$. En consecuencia, $AB(P)$ es extensible y $\|AB(P)\|_e \leq \|AB(P_0) \circ j\| \leq \|P_0\|$. Como P_0 es una extensión arbitraria de P a $\ell_\infty(B_{E'})$, obtenemos el resultado deseado. ∎

Para polinomios escalares se tiene el siguiente corolario:

Corolario 4.2.6. *Un polinomio $P \in \mathcal{P}({}^kE)$ es extensible si y sólo si su extensión de Aron-Berner $AB(P)$ es extensible. En este caso, $\|P\|_e = \|AB(P)\|_e$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $AB(P)$ es extensible, siendo P su restricción a E, resulta extensible por el corolario 4.2.4 y $\|P\|_e \leq \|AB(P)\|_e$. La recíproca y la otra desigualdad se deducen del teorema. ∎

En general, la recíproca del teorema 4.2.5 no es cierta: el operador identidad $Id_{c_0} : c_0 \to c_0$ no es extensible (no se puede extender a ℓ_∞). Sin embargo, su extensión de Aron-Berner $AB(Id_{c_0}) = Id''_{c_0} = Id_{\ell_\infty}$, por la propiedad de extensión métrica de ℓ_∞, es extensible. En caso que F sea un espacio $\mathcal{C}_l$, podemos combinar los teoremas 4.2.3 y 4.2.5 para obtener:

Corolario 4.2.7. *Si F es un espacio $\mathcal{C}_l$, un polinomio $P : E \to F$ es extensible si y sólo si su extensión de Aron-Berner es extensible. En este caso, $\|AB(P)\|_e \leq \|P\|_e \leq l\,\|AB(P)\|_e$.*

DEMOSTRACIÓN: Si $p : F'' \to F$ es la proyección (con norma menor o igual a l), $P = p \circ AB(P)\,|_E$. Entonces P es extensible y $\|P\|_e \leq \|p\|\ \|AB(P)\,|_E\,\|_e \leq l\ \|AB(P)\|_e$. ∎

Predual del espacio de polinomios extensibles

Gracias a la correspondencia entre polinomios extensibles y polinomios que se extienden a $\ell_\infty(B_{E'})$ o a $C(B_{E'})$, podemos aplicar los resultados de la sección 4.1 para construir un predual del espacio de polinomios extensibles. Definimos sobre $\otimes_s^k E$ la siguiente norma:

$$\|s\|_\eta := \|s\|_{\eta_{C(B_{E'})}} = \| \otimes_s^k I_E(s)\|_{\pi_{C(B_{E'})}}$$

La η-norma coincide con la definida por Kirwan y Ryan en [36]. Ellos también probaron el siguiente corolario:

Corolario 4.2.8. $\left(\otimes_s^k E; \|\cdot\|_\eta\right)' = \left(\mathcal{P}_e(^kE), \|\cdot\|_e\right)$ *isométricamente.*

DEMOSTRACIÓN: Por el teorema 4.2.1 y la proposición 4.1.1 tenemos:

$$\begin{aligned}
\left(\otimes_s^k E, \|\cdot\|_\eta\right)' &= \left(\otimes_s^k E, \|\cdot\|_{\eta_{C(B_{E'})}}\right)' \\
&= \left(\mathcal{P}_{e_{C(B_{E'})}}(^kE), \|\cdot\|_{e_{C(B_{E'})}}\right) \\
&= \left(\mathcal{P}_e(^kE), \|\cdot\|_e\right) \blacksquare
\end{aligned}$$

Por el corolario anterior, un polinomio escalar es extensible si y sólo si es η-continuo. Como sucedía en la sección anterior (para el caso en que G es un espacio de Banach fijo), esto no es cierto para polinomios a valores vectoriales, ya que para grado 1 la η-norma es simplemente la norma de E. De hecho, la $\eta-$continuidad esta relacionada con la extensibilidad débil:

Definición 4.2.9. *Un polinomio $P : E \to F$ se dice* **débilmente extensible** *si para toda funcional ξ de F', el polinomio escalar $\xi \circ P$ es extensible.*

La siguiente proposición sigue de aplicar la proposición 4.1.3 tomando $G = C(B_{E'}, w^*)$.

Proposición 4.2.10. *Un polinomio $P \in \mathcal{P}(^kE; F)$ es débilmente extensible si y sólo si su linealización es $L_P : \otimes_s^k E \to F$ es $\eta-$continuo.*

Recordemos que un espacio de Banach Y se dice inyectivo si para cualquier espacio de Banach X, todo operador lineal $T : X \to Y$ se extiende a cualquier espacio Z que contenga a X. Los espacios con la propiedad de extensión métrica son claramente inyectivos. Además, todo espacio inyectivo es complementado en cualquier espacio que lo contenga. En particular, los espacios inyectivos son $\mathcal{C}_l$. El siguiente corolario afirma que si F es inyectivo, los polinomios débilmente extensibles que toman sus valores en F son extensibles.

Corolario 4.2.11. *Para un espacio de Banach F son equivalentes:*
i) F es inyectivo.
ii) Para todo espacio de Banach E, todo polinomio débilmente extensible (de cualquier grado) de E en F es extensible.

DEMOSTRACIÓN: *i)* $\Rightarrow$ *ii)*: Si $P : E \to F$ es débilmente extensible, la proposición anterior nos dice que su linealización $L_P : \otimes_s^k E \to F$ es $\eta-$continuo. Como $\otimes_{s,\eta}^k E$ es un subespacio isométrico de $\otimes_{s,\pi}^k C(B_{E'})$ y F es inyectivo, L_P se extiende a un operador continuo $\tilde{L}$ de $\otimes_{s,\pi}^k C(B_{E'})$ a F. Luego, $\tilde{P}(a) = \tilde{L}(a^{(k)})$ es una extensión de P a $C(B_{E'})$. Por el teorema 4.2.1 y por ser F un espacio $\mathcal{C}_l$, P es extensible.

ii) $\Rightarrow$ *i)*: Todo operador lineal (de cualquier espacio) en F es débilmente extensible. Por *ii)*, resultan ser todos extensibles. Esto es precisamente lo que significa que F sea inyectivo. ∎

También es simple ahora encontrar un predual del espacio de polinomios extensibles para el caso en que $F = Y'$ es un espacio dual. En este caso F es un espacio $\mathcal{C}_1$, con lo cual si definimos $\lambda = \lambda_{C(B_{E'})}$, tenemos:

Proposición 4.2.12. a) *Si todo polinomio débilmente extensible de E a Y' es extensible, entonces $\Big((\otimes^k_{s,\eta} E) \otimes_\pi Y\Big)' = \mathcal{P}_e({}^kE, Y')$ (de manera isomorfa).*
b) $\Big((\otimes^k_{s,\eta} E) \otimes_\lambda Y\Big)' = \mathcal{P}_e({}^kE, Y')$ *isométricamente.*

Corolario 4.2.13. *Si F es un espacio dual, el ínfimo de (4.5) es en realidad un mínimo.*

Corolario 4.2.14. *Si F es un espacio dual, todo polinomio $P : E \to F$ es extensible si y sólo si la e-norma es equivalente a la norma usual en $\mathcal{P}_e({}^kE; F)$.*

Este último corolario extiende un resultado probado en [36] para polinomios escalares.

4.3. Extensiones de series de potencias

En esta sección aplicaremos algunos de los resultados precedentes sobre polinomios a la extensión de funciones dadas por series de potencias sobre espacios de Banach. Para ello debemos introducir algunos conceptos.

Si E y F son espacios de Banach, se llama **serie de potencias** de E a F en el punto $a \in E$ a una función de la forma

$$x \longmapsto \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a)$$

donde $P_k \in \mathcal{P}({}^kE; F)$ para cada k. Los polinomios P_k se llaman los coeficientes de la serie. Se define el radio de convergencia de una serie de potencias como el mayor $r \geq 0$ tal que la serie converge uniformemente para x en $\overline{B(a,\rho)}$, para todo $\rho < r$. Diremos que una serie de potencias es convergente si su radio de convergencia es positivo. La fórmula de Cauchy-Hadamard nos permite calcular el radio de convergencia de una serie en función de sus coeficientes: el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a)$ está dado por

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \|P_k\|^{1/k}}$$

donde se sigue la convención $\frac{1}{0} = \infty$, $\frac{1}{\infty} = 0$.

El siguiente lema muestra que los coeficientes de una serie de potencias quedan unívocamente determinados por ella:

Lema 4.3.1. *Si existe $\rho > 0$ tal que $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a) = \sum_{k=0}^{\infty} Q_k(x-a)$ para todo $x \in B(a,\rho)$, entonces $P_k = Q_k$ para todo k.*

DEMOSTRACIÓN: Dado $x_0 \in E$ y λ de módulo menor que ρ, sea $x = a + \lambda \dfrac{x_0}{\|x_0\|}$. Es claro que $x \in B(a,\rho)$. Además, si $\xi \in F'$, tenemos:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\infty} \xi\left(P_k\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right)\right)\lambda^k &= \sum_{k=0}^{\infty} \xi \circ P_k\left(\lambda\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) = \xi\left(\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a)\right) \\
&= \xi\left(\sum_{k=0}^{\infty} Q_k(x-a)\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \xi \circ Q_k\left(\lambda\frac{x_0}{\|x_0\|}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \xi\left(Q_k\left(\frac{x_0}{\|x_0\|}\right)\right)\lambda^k.
\end{aligned}$$

Si definimos $a_k = \xi\left(P_k(\frac{x_0}{\|x_0\|})\right)$ y $b_k = \xi\left(Q_k(\frac{x_0}{\|x_0\|})\right)$ la igualdad anterior se reescribe de la siguiente manera:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k\lambda^k = \sum_{k=0}^{\infty} b_k\lambda^k \qquad \text{para } |\lambda| \leq \rho.$$

Pero dos series de potencias escalares coinciden si y solamente si todos los coeficientes coinciden. Luego, $\xi\left(P_k(\frac{x_0}{\|x_0\|})\right) = \xi\left(Q_k(\frac{x_0}{\|x_0\|})\right)$, y como esto sucede para todo $\xi \in F'$ y todo $x_0 \in E$, $P_k = Q_k$ para todo k. ∎

Definición 4.3.2. *Una serie de potencias de E a F en el punto $a \in E$ se dice* **extensible** *si para cualquier espacio G que contiene a E se extiende a una serie de potencias convergente de G a F. Es decir, $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a)$ es extensible si dado $G \supset E$, existen polinomios $\tilde{P}_k : G \to F$ de manera que*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_k(z-a)$$

es una serie de potencias convergente tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_k(x-a) = \sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a)$ para todo $x \in E$ en el que la serie converja.

Supongamos que una serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a)$ es extensible y, dado $G \supset E$, sea $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_k(z-a)$ una extensión a G. Como $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a) = \sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_k(x-a)$ para cada x en un entorno de a, el lema previo dice que $P_k = \tilde{P}_k \mid_E$ para todo k. Luego, $\tilde{P}_k$ es una extensión de P_k a G y P_k resulta un polinomio extensible. Es decir que si una serie de potencias es extensible, todos sus coeficientes son polinomios extensibles. Veremos más adelante que una serie de potencias cuyos coeficientes son todos extensibles no es necesariamente una serie extensible. Primero necesitamos definir el radio de extensibilidad de una serie de potencias:

Definición 4.3.3. *Si $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a)$ es una serie de potencias cuyos coeficientes son polinomios extensibles, se define el* **radio de extensibilidad** *de la serie como*

$$r_e = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \|P_k\|_e^{1/k}}$$

Como para cada k, $\|P_k\| \leq \|P_k\|_e$, el radio de extensibilidad de la serie es menor o igual que el de convergencia. La siguiente proposición nos permite estudiar la extensibilidad de una serie de potencias en función de sus coeficientes:

Proposición 4.3.4. *Sea $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a)$ una serie de potencias de E a F en el punto a. Entonces son equivalentes:*

a) $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a)$ *es una serie de potencias extensible*

b) Cada coeficiente P_k *es extensible y el radio de extensibilidad de la serie* r_e *es positivo.*

Además, si ocurren a) y b), dado cualquier espacio G *que contenga a* E *la serie* $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a)$ *se puede extender a una serie de potencias de* G *a* F *con radio de convergencia mayor o igual que* r_e.

DEMOSTRACIÓN: Supongamos que la serie es extensible. Ya vimos que los coeficientes P_k son polinomios extensibles, por lo que sólo resta probar que el radio de extensibilidad es positivo. Como la serie es extensible, en particular se extiende a una serie convergente de $\ell_\infty(B_{E'})$ a F. Si llamamos $\bar{P}_k$ a los coeficientes de esta extensión, cada $\bar{P}_k$ es una extensión de P_k a $\ell_\infty(B_{E'})$. Como la norma extensible de P_k es el ínfimo de las normas de las extensiones a $\ell_\infty(B_{E'})$, tenemos que $\|P_k\|_e \leq \|\bar{P}_k\|$. Entonces,

$$r_e = \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \|P_k\|_e^{1/k}} \geq \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \|\bar{P}_k\|^{1/k}}$$

que es positivo porque la serie de los $\bar{P}_k$ es convergente.

Recíprocamente, supongamos que vale *b)* y sea G un espacio de Banach que contenga a E. Para cada k tomemos $\varepsilon_k > 0$ de manera que $\limsup\limits_{k\to\infty} \|P_k\|_e^{1/k} = \limsup\limits_{k\to\infty} (\|P_k\|_e + \varepsilon_k)^{1/k}$. Además podemos encontrar, para cada k, una extensión $\tilde{P}_k$ de P_k a G tal que $\left\|\tilde{P}_k\right\| \leq \|P_k\|_e + \varepsilon_k$. Veamos que la serie de potencias $\sum_{k=0}^{\infty} \tilde{P}_k(z-a)$ es convergente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \left\|\tilde{P}_k\right\|^{1/k}} &\geq \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} (\|P_k\|_e + \varepsilon_k)^{1/k}} \\ &= \frac{1}{\limsup\limits_{k\to\infty} \|P_k\|_e^{1/k}} = r_e \end{aligned}$$

Esto dice que la serie es convergente con radio de convergencia mayor o igual que r_e. Luego, *a)* es verdadero, al igual que la afirmación sobre el radio de convergencia de las extensiones. ∎

Como aplicación de la proposición anterior mostraremos que existen series de potencias (de radio de convergencia infinito) no extensibles a pesar de que todos sus coeficientes sean extensibles. Vimos al comienzo de este capítulo que, si $k \geq p$, el polinomio $Q_k \in \mathcal{P}(^k\ell_p)$ dado por

$$Q_k(x) = \sum (x_j)^k$$

no es extensible. Esto implica que para $k \geq p$, $\mathcal{P}_e(^k\ell_p) \neq \mathcal{P}(^k\ell_p)$. Por el corolario 4.2.14, la norma extensible no es equivalente a la norma usual en $\mathcal{P}_e(^k\ell_p)$. Entonces, para cada $k \geq p$, podemos encontrar un polinomio $P_k \in \mathcal{P}_e(^k\ell_p)$ que verifique simultáneamente:

$$\|P_k\| \leq \frac{1}{k^k} \quad \text{y} \quad \|P_k\|_e \geq k^k.$$

Consideremos la serie de potencias (escalar) $\sum_{k=0}^{\infty} P_k(x-a)$ para cualquier $a \in \ell_p$, donde $P_k = 0$ si $k < p$. Por la definición de los P_k, todos los coeficientes son polinomios extensibles. Por otra parte, el radio de convergencia de la serie es infinito, ya que :

$$\limsup_{k\to\infty} \|P_k\|^{1/k} \leq \limsup_{k\to\infty} \left(\frac{1}{k^k}\right)^{1/k} = 0.$$

Sin embargo, dado que

$$\limsup_{k\to\infty} \|P_k\|_e^{1/k} \geq \limsup_{k\to\infty} \left(k^k\right)^{1/k} = +\infty\ ,$$

el radio de extensibilidad de la serie es 0. Esto muestra, por la proposición 4.3.4, que la serie no es extensible.

5. Ejemplos de polinomios extensibles

En este capítulo utilizaremos los conceptos y resultados de los capítulos anteriores para mostrar la extensibilidad de polinomios de distintos tipos. Además, estudiaremos cuándo un polinomio de cierto tipo (finito, nuclear, etc.) puede extenderse sin perder esa propiedad.

Una consecuencia inmediata del teorema de Hahn-Banach es que todo polinomio de tipo finito se extiende a cualquier espacio, simplemente extendiendo cada funcional lineal de su representación. Queda claro que el polinomio extendido resulta también de tipo finito. Por otra parte, supongamos que $P : E \to F$ es un polinomio nuclear y $G \supset E$. Si escribimos $P(x) = \sum_n \gamma_n(x)^k y_n$, donde $\sum_n \|\gamma_n\|^k \|y_n\| < \|P\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon$, podemos extender cada funcional a G preservando la norma. Así, tenemos que P se extiende a un polinomio nuclear $\tilde{P}$ de norma nuclear menor o igual a $\|P\|_{\mathcal{N}} + \varepsilon$, y como el ε es arbitrario, menor o igual a $\|P\|_{\mathcal{N}}$. Además, como $\left\|\tilde{P}\right\| \leq \left\|\tilde{P}\right\|_{\mathcal{N}}$, el ínfimo de las normas de todas las posibles extensiones de P será menor o igual a $\left\|\tilde{P}\right\|_{\mathcal{N}}$. Por lo tanto, tenemos:

Proposición 5.0.1. *Si $P : E \to F$ es un polinomio nuclear, entonces P es extensible con $\|P\|_e \leq \|P\|_{\mathcal{N}}$. Además, si $G \supset E$, existe una extensión nuclear de P a F cuya norma nuclear no supera a la de P.*

En general, los polinomios aproximables no son extensibles, como vimos al comienzo del capítulo anterior.

5.1. Preduales y extensiones

En esta sección utilizaremos las linealizaciones de distintos tipos de polinomios (ver sección 2.1) para extender polinomios escalares definidos en un espacio de Banach E a un espacio G que lo contenga. Para facilitar la notación, identificaremos a la funcional lineal L_P con el polinomio P. Así, escribiremos $P \in (\otimes_s^k E, \tau)'$.

Vimos en la sección 4.1 que la inclusión $i : E \hookrightarrow G$ induce una aplicación inyectiva entre los productos tensoriales simétricos:

$$\otimes_s^k i : \otimes_s^k E \longrightarrow \otimes_s^k G$$

Notemos que todo $P \in (\otimes_s^k E)^*$ (el dual algebraico de $\otimes_s^k E$) se extiende a $\otimes_s^k G$, con lo que todo polinomio puede ser extendido 'algebraicamente'. La pregunta que nos hacemos es qué tipo de polinomio podemos esperar que sea esta extensión. Consideremos topologías Hausdorff localmente convexas τ_E y τ_G en $\otimes_s^k E$ y $\otimes_s^k G$ respectivamente. La siguiente proposición es una consecuencia inmediata del teorema de Hahn-Banach.

Proposición 5.1.1. *Dados los espacios $(\otimes_s^k E, \tau_E)'$ y $(\otimes_s^k G, \tau_G)'$ de polinomios sobre E y G respectivamente, Un polinomio $P \in (\otimes_s^k E, \tau_E)'$ se extiende a un polinomio en $(\otimes_s^k G, \tau_G)'$ si y solo si P es τ_G-continuo (es decir, continuo para la topología inducida por τ_G en $\otimes_s^k E$).*

Notemos que el caso en que τ_E y τ_G son las topologías proyectivas en $(\otimes_s^k E, \tau_E)$ y $(\otimes_s^k G, \tau_G)$ fue tratado al comienzo de la sección 4.1.

Extensibilidad de los polinomios integrales

A continuación mostraremos que los polinomios integrales escalares sobre E pueden ser extendidos a polinomios integrales sobre cualquier espacio G que contenga a E.

Teorema 5.1.2. *Todo $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^k E)$ se extiende a un polinomio $\tilde{P} \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^k G)$, con $\|\tilde{P}\|_{\mathcal{I}} = \|P\|_{\mathcal{I}}$. En particular, todo $P \in \mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^k E)$ es extensible y $\|P\|_e \leq \|P\|_{\mathcal{I}}$*

DEMOSTRACIÓN: Recordemos que, por la proposición 2.1.2, $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kE)$ (respectivamente $\mathcal{P}_{\mathcal{I}}(^kG)$) es isométricamente isomorfo al dual de $\otimes_s^k E$ (respectivamente $\otimes_s^k G$) con la topología ε. Veamos que la aplicación $\otimes_s^k i : \otimes_{s,\varepsilon}^k E \longrightarrow \otimes_{s,\varepsilon}^k G$ es una isometría: si $s = \sum_{j=1}^n x_j^k \in \otimes_s^k E$,

$$\left\|(\otimes_s^k i)(s)\right\|_\varepsilon = \sup_{\Gamma \in B_{G'}} \left|\sum_{j=1}^n \Gamma(i(x_j))^k\right| = \sup_{\Gamma \in B_{G'}} \left|\sum_{j=1}^n \Gamma|_E (x_j)^k\right|$$

Por el teorema de Hahn-Banach, el conjunto $\{\Gamma|_E : \Gamma \in B_{G'}\}$ coincide con $B_{E'}$. Luego

$$\left\|(\otimes_s^k i)(s)\right\|_\varepsilon = \sup_{\gamma \in B_{E'}} \left|\sum_{j=1}^n \gamma(i(x_j))^k\right| = \|s\|_\varepsilon .$$

Por lo tanto, $\otimes_{s,\varepsilon}^k E$ es un subespacio (isométricamente) de $\otimes_{s,\varepsilon}^k G$. Entonces toda funcional lineal continua P sobre $\otimes_{s,\varepsilon}^k E$ se extiende por el teorema de Hahn-Banach a una funcional lineal $\tilde{P}$ sobre $\otimes_{s,\varepsilon}^k G$ con la misma norma.

En particular, P resulta extensible y $\|P\|_e \leq \left\|\tilde{P}\right\| \leq \left\|\tilde{P}\right\|_{\mathcal{I}} = \|P\|_{\mathcal{I}}$. ∎

La recíproca del teorema no es en general cierta. Existen polinomios extensibles que no son integrales. Esto es en realidad un corolario del teorema.

Corolario 5.1.3. *Existe un polinomio extensible sobre c_0 que no es integral.*

DEMOSTRACIÓN: Todo polinomio escalar sobre c_0 es extensible, como vimos al comienzo del capítulo anterior. Veamos que no todo polinomio sobre c_0 es integral. Dado que ℓ_1 es un dual separable, c_0 es Asplund. Esto implica, por el teorema 2.2.4, que los polinomios integrales sobre c_0 son nucleares. En consecuencia debemos probar que existen polinomios no nucleares sobre c_0.

Si todo polinomio sobre c_0 fuera nuclear, $\mathcal{P}_{\mathcal{N}}(^2c_0)$ sería isomorfo a $\mathcal{P}(^2c_0)$. Por el teorema de Littlewood-Bogdanowicz-Pelczyński [13, 45], todo polinomio sobre c_0 es aproximable, con lo que el espacio $\mathcal{P}_A(^2c_0)$ de polinomios aproximables sería isomorfo al espacio de polinomios nucleares $P_{\mathcal{N}}(^2c_0)$. Tomando duales (utilizando (2.2) y la proposición 2.2.10), todo polinomio 2-homogéneo sobre ℓ_1 sería integral. Por el teorema previo, todo polinomio 2-homogéneo sobre ℓ_1 debería ser extensible, lo que no es cierto, como vimos en los ejemplos del comienzo del capítulo anterior. ∎

Hemos visto que distintos tipos de polinomios (integrales, nucleares, de tipo finito) sobre un espacio E se extienden a polinomios sobre $G \supset E$ del mismo tipo. A continuación veremos que lo mismo sucede con los polinomios en $(\otimes_s^k E, \tau_0)'$.

Proposición 5.1.4. *Cada $P \in (\otimes_s^k E, \tau_0)'$ se extiende a $\tilde{P} \in (\otimes_s^k G, \tau_0)'$.*

DEMOSTRACIÓN: P está asociado a una funcional lineal τ_0-continua sobre $\otimes_s^k E$. Entonces existen un subconjunto compacto $K \subset E'$ y una constante $c > 0$ tales que

$$|T_P(s)| \leq c \sup_K |s| \qquad \text{para todo } s \in \otimes_s^k E.$$

Sea $\rho : G' \longrightarrow E'$ la aplicación restricción. Por el teorema de Hahn-Banach ρ es un operador suryectivo, por lo que el principio de selección continua de Michael [11] nos asegura la existencia de una sección continua (no lineal) $\sigma : E' \longrightarrow G'$. Tenemos que $\sigma(K)$ es un subconjunto compacto de G' y

$$\begin{aligned} \sup_K |s| &= \sup_{\gamma \in K} \left| \sum_{j=1}^n \gamma(x_j)^k \right| = \sup_{\gamma \in K} \left| \sum_{j=1}^n \rho(\sigma(\gamma))(x_j)^k \right| \\ &= \sup_{\alpha \in \sigma(K)} \left| \sum_{j=1}^n \rho(\alpha)(x_j)^k \right| = \sup_{\sigma(K)} |s|. \end{aligned}$$

Luego $|T_P(s)| \leq c \sup_K |s| = c \sup_{\sigma(K)} |s|$ para todo $s \in \otimes_s^k E$. T_P es τ_0-continuo (para la τ_0-topología inducida por $\otimes_s^k G$ en $\otimes_s^k E$) y entonces se extiende por Hahn-Banach a un polinomio $\tilde{P} \in (\otimes_s^k G, \tau_0)'$. ∎

5.2. Extensión de polinomios integrales vectoriales

En esta sección mostraremos que los polinomios integrales a valores en un espacio de Banach son extensibles. A diferencia del caso escalar, no podremos asegurar que siempre sea posible obtener una extensión integral.

Supongamos que el polinomio $P : E \rightarrow F$ es integral y tiene una representación de la forma

$$P(x) = \int_{B_{E'}} \gamma(x)^k \, dG(\gamma)$$

con $G \in \mathcal{M}(B_{E'}, F)$. Si $\mu = |G|$, entonces podemos definir el polinomio $\tilde{P} : L_\infty(B_{E'}, \mu) \rightarrow F$ como

$$\tilde{P}(f) = \int_{B_{E'}} f(\gamma)^k \, dG(\gamma).$$

El polinomio $\tilde{P}$ verifica:

$$\begin{aligned} \|\tilde{P}(f)\| &\leq \int_{B_{E'}} |f(\gamma)|^k \, d|G|(\gamma) \\ &\leq \|f\|_\infty^k \, |G|(B_{E'}) = \|G\| \, \|f\|_\infty^k. \end{aligned}$$

Entonces, $\tilde{P} \in \mathcal{P}(^k L_\infty(B_{E'}, \mu); F)$ y $\left\|\tilde{P}\right\| \leq \|G\|$. Como el espacio $L_\infty(B_{E'}, \mu)$ tiene la propiedad de extensión métrica, $\tilde{P}$ es un polinomio extensible y $\left\|\tilde{P}\right\|_e = \left\|\tilde{P}\right\| \leq \|G\|$. Por otra parte, si definimos:

$$\begin{aligned} T: \; E &\longrightarrow L_\infty(B_{E'}, \mu) \\ x &\longmapsto (\gamma \mapsto \gamma(x)) \end{aligned}$$

T resulta un operador lineal y $\|T(x)\|_\infty = \|x\|$. Además, $P(x) = \tilde{P}(T(x))$. Luego, $P = \tilde{P} \circ T$ y por el teorema 4.2.3 P es un polinomio extensible con $\|P\|_e \leq \left\|\tilde{P}\right\|_e \|T\|^k = \left\|\tilde{P}\right\| \leq \|G\|$. Como esto vale para cualquier medida G que represente a P, la norma extensible de P es menor o igual a su norma integral. Obtenemos finalmente la siguiente proposición:

Proposición 5.2.1. *Si $P : E \rightarrow F$ es integral, entonces es extensible. Además, $\|P\|_e \leq \|P\|_{\mathcal{I}}$.*

5.3. Extensión de polinomios K-acotados

En esta sección probaremos la extensibilidad de polinomios K-acotados para algunos $K \subset E'$ particulares. Antes recordemos que si K_0 es un subconjunto compacto de E', entonces existe una sucesión $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ que converge en norma a 0 y tal que K_0 está contenido en la cápsula convexa cerrada de $(\gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Si $K = \{\gamma_n : n \in \mathbb{N}\}$, por la observación 1.3.2 tenemos que

$$\mathcal{P}_{K_0}(^kE;F) \subset \mathcal{P}_{\overline{\Gamma(K)}}(^kE;F) = \mathcal{P}_K(^kE;F).$$

Luego, todo polinomio K_0-acotado para algún K_0 compacto de E' será K-acotado para algún K formado por una sucesión nula (en norma) de E'. A continuación estudiaremos la extensibilidad de polinomios acotados por sucesiones (no necesariamente nulas) de E'.

Proposición 5.3.1. *Sea $K = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ donde $\sum_{n=1}^{\infty} \|\gamma_n\|^2 < \infty$. Entonces todo polinomio K-acotado $P : E \to F$ es extensible.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $P \in \mathcal{P}_K(^kE;F)$ y $G \supset E$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, el teorema de Hahn-Banach nos da una funcional $\tilde{\gamma}_n \in G'$ que extiende a γ_n, con la misma norma. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \|\gamma_n\|^2 < \infty$, podemos definir un operador $u : E \to \ell_2$ dado por $u(x) = (\gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x), \ldots)$. Si $u(x) = u(y)$ la observación 1.3.1 nos asegura que $P(x) = P(y)$. Esto nos permite definir un polinomio $Q : \mathrm{Im}(u) \to F$ por $Q(u(x)) = P(x)$. El polinomio Q verifica:

$$\begin{aligned}
\|Q(u(x))\| &= \|P(x)\| \leq \|P\|_K \ \|x\|_K^k \\
&= \|P\|_K \ \sup_n |\gamma_n(x)|^k \leq \|P\|_K \ \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\gamma_n(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}k} \\
&= \|P\|_K \ \|u(x)\|^k.
\end{aligned}$$

Luego Q es un polinomio continuo de norma menor o igual a $\|P\|_K$ y se puede extender a $\overline{\mathrm{Im}(u)}$ conservando esta norma. Consideremos ahora el operador $\tilde{u} : G \to \ell_2$ dado por $\tilde{u}(x) = (\tilde{\gamma}_1(x), \ldots, \tilde{\gamma}_n(x), \ldots)$. Si definimos $\tilde{Q} : \ell_2 \to F$, $\tilde{Q}(y) = Q(\Pi(y))$, donde Π es la proyección ortogonal sobre $\overline{\mathrm{Im}(u)}$, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo:

$$\begin{array}{ccccc}
G & \xrightarrow{\tilde{u}} & \overline{\mathrm{Im}(\tilde{u})} & & \\
i\uparrow & & \downarrow \Pi & \overset{\tilde{Q}}{\searrow} & \\
E & \xrightarrow[u]{} & \overline{\mathrm{Im}(u)} & \xrightarrow[Q]{} & F
\end{array}$$

Entonces el polinomio $\widetilde{P} : G \to F$ dado por $\widetilde{P} = \widetilde{Q} \circ \widetilde{u}$ resulta una extensión de P. ∎

Proposición 5.3.2. *Sea $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E'$ una sucesión básica w-nula ($\gamma_n \xrightarrow{w} 0$) y sea $K = \{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Entonces, si F es un espacio $\mathcal{C}_l$, todo polinomio K-acotado $P : E \to F$ es extensible.*

DEMOSTRACIÓN: Sea $u : E \to c_0$ el operador dado por $u(x) = (\gamma_1(x), \ldots, \gamma_n(x), \ldots)$. Como $\{\|\gamma_n\|\}_{n\in\mathbb{N}}$ está acotada, $u \in \mathcal{L}(E; c_0)$ y $\|u(x)\| = \|x\|_K$. Sea $\overline{u} : E'' \to c_0$, $\overline{u}(z) = (z(\gamma_1), \ldots, z(\gamma_n), \ldots)$. Nuevamente, $\overline{u} \in \mathcal{L}(E''; c_0)$ y $\|\overline{u}(z)\| = \|z\|_K$, para todo $z \in E''$.

Como $\{\gamma_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión básica en E', existe una sucesión $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset E''$ tal que $z_n(\gamma_m) = \delta_{nm}$. En consecuencia, $\overline{u}(z_n) = e_n$, donde $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es la base canónica de c_0. Se sigue que $\mathrm{Im}(\overline{u})$ es un subespacio denso de c_0.

Sea $P \in \mathcal{P}_K({}^kE; F)$. Por la proposición 3.2.2, su extensión de Aron-Berner $AB(P)$ es un elemento de $\mathcal{P}_K({}^NE''; F'')$. Si $p : F'' \to F$ es una proyección con norma menor o igual a l, definimos el polinomio $Q : \mathrm{Im}(\overline{u}) \to F$ por $Q(\overline{u}(z)) = AB_p(P)(z)$. Q es un polinomio continuo k-homogéneo que verifica $\|Q\| \le \|p\|\ \|AB(P)\|_K \le l\ \|P\|_K$. Podemos extender Q a un polinomio continuo definido sobre todo c_0, al que seguiremos llamando Q, con la misma norma. Esto nos da el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
E'' \arrow[r, "\overline{u}"] \arrow[dr, "AB_p(P)"] & c_0 \arrow[d, "Q"] \\
E \arrow[u, "i"] \arrow[r, "P"'] & F
\end{tikzcd}$$

Sea $G \supset E$ y $\widetilde{u} : G \to \ell_\infty$ dado por $\widetilde{u}(y) = (\widetilde{\gamma}_1(y), \ldots, \widetilde{\gamma}_n(y), \ldots)$, donde $\widetilde{\gamma}_n \in F'$ es una extensión de γ_n con la misma norma. Sea $AB_p(Q) \in \mathcal{P}({}^k\ell_\infty; F)$ la extensión de Aron-Berner de $Q \in \mathcal{P}({}^kc_0; F)$ compuesta con la proyección p. Tenemos entonces el siguiente diagrama:

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\widetilde{u}"] & \ell_\infty \arrow[dr, "AB_p(Q)"] & \\
E \arrow[u, "i"] \arrow[r, "u"'] & c_0 \arrow[u, "j"'] \arrow[r, "Q"'] & F
\end{tikzcd}$$

donde j es la inclusión canónica de c_0 en ℓ_∞.

Si definimos $\widetilde{P} : G \to F$ como $\widetilde{P}(y) = AB_p(Q)(\widetilde{u}(y))$ para $y \in G$ obtenemos una extensión de P a G con

$$\left\|\widetilde{P}(y)\right\| = \|AB_p(Q)(\widetilde{u}(y))\| \leq l \; \|AB(Q)\| \; \|\widetilde{u}(y)\|^k = l \; \|P\|_K \; \|y\|^k_{\widetilde{K}} \quad \text{para todo } y \in F$$

donde $\tilde{K} = \{\tilde{\gamma}_n\}_n$. Esto implica que $\widetilde{P}$ es $\widetilde{K}$-acotado y $\|\widetilde{P}\|_{\widetilde{K}} \leq l \; \|P\|_K$. ■

Notemos que en las proposiciones 5.3.1 y 5.3.2, dada la sucesión $\{\gamma_n\}_n$ y fijadas las extensiones $\{\tilde{\gamma}_n\}_n$ a G, la aplicación $P \mapsto \tilde{P}$ es un morfismo de extensión.

BIBLIOGRAFÍA

[1] R. Alencar, *Multilinear mappings of nuclear and integral type*, Proc. Amer. Math. Soc. **94** (1985), 33-38.

[2] R. Alencar, *On reflexivity and basis for $\mathcal{P}(^mE)$*, Proc. Royal Irish Acad. **85A, No. 2** (1985), 131-138.

[3] R. Aron, P. Berner, *A Hahn-Banach extension theorem for analytic mappings*, Bull. Soc. Math. France **106** (1978), 3–24.

[4] R. Aron, B. Cole, T. Gamelin, *Spectra of algebras of analytic functions on a Banach space*, J. Reine Angew. Math. **415** (1991), 51–93.

[5] R. Aron, S. Dineen, *Q-Reflexive Banach spaces*, Rocky Mountain Jour. Math. (to appear).

[6] R. Aron, P. Galindo, *Weakly compact multilinear mappings*, Proc. Edimburgh Math. Soc. **40** (1997), 181-192.

[7] R. Aron, P. Galindo, D. García, M. Maestre, *Regularity and algebras of analytic functions in infinite dimensions*, Trans. Amer. Math. Soc. **348(2)** (1996), 543–559.

[8] R. Aron, R., C. Hervés, M. Valdivia, *Weakly continuous mappings on Banach spaces.* J. Funct. Anal. **52** (1983), 189-204.

[9] R. Aron, M. Lindström, W. Ruess, R. Ryan, *Uniform factorization for compact sets of operators*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[10] R. Aron, J. B. Prolla, *Polynomial approximation of differentiable functions on Banach spaces*, J. Reine Angew. Math. **313** (1980), 195–216.

[11] R. Bartle, L. Graves, *Mappings between function spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 400–413.

[12] B. Beauzamy, Introduction to Banach spaces and their geometry, North-Holland Math. Studies **68** (1985)

[13] W. Bogdanowicz, *On the weak continuity of the polynomial functional on the space* c_0, Bull. Acad. Polon. Sci. Cl. III. **5** (1957), 243-246, XXI.

[14] C. Boyd, R. Ryan, *Geometric theory of spaces of integral polynomials and symmetric tensor products* (preprint).

[15] D. Carando, *Extendible polynomials on Banach spaces* (preprint).

[16] D. Carando, V. Dimant, *Duality in spaces of nuclear and integral polynomials* (preprint).

[17] D. Carando, V. Dimant, B. Duarte, S. Lassalle, *K-bounded polynomials*, Proc. Royal Irish Acad. (to appear)

[18] D. Carando, I. Zalduendo, *A Hahn-Banach theorem for integral polinomials,* Proc. Amer. Math. Soc. (to appear)

[19] A. Davie, T. Gamelin, *A theorem on polynomial-star approximation*, Proc. Amer. Math. Soc. **106** (1989), 351-356.

[20] A. Defant, K. Floret, Tensor Norms and Operator Ideals, North-Holland Math. Studies **176** (1993).

[21] J. Diestel, Sequences and Series in Banach Spaces, Graduate Texts in Mathematics, 92, Springer-Verlag, New York (1984).

[22] J. Diestel, J. J. Uhl, Vector measures, Mathematical Surveys and Monographs No. 15, Amer .Math .Soc., 1977.

[23] S. Dineen, *Holomorphy types on a Banach space*, Studia Math. **39** (1971) 241-288.

[24] S. Dineen, *Holomorphically complete locally convex topological vector spaces*, LNM **332** (1973), 77-111

[25] S. Dineen, Complex Analysis in Locally Convex Spaces, North-Holland Math. Studies **57** (1981).

[26] S. Dineen, R. Timoney, *Complex geodesics on convex domains*, North-Holland Math. Studies **170** (1992), 333-365.

[27] T. Dwyer, *Convolution equations for vector-valued entire functions of nuclear bounded type*, Trans. Amer. Math. Soc. 217 (1976), 105-119.

[28] J. Ferrera, J. Gómez, J. G. Llavona, *On completion of spaces of weakly continuous functions*, Bull. London Math. Soc. **15** (1983), 260-264.

[29] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes d'espaces du type* $C(K)$, Canad. J. Math. **5** (1953), 129-173.

[30] C. Gupta, *Malgrange theorem for nuclearly entire functions of bounded type on a Banach space*, Ph.D.Thesis, I.M.P.A., Rio de Janeiro and University of Rochester (1966).

[31] P. Galindo, D. García, M. Maestre, J. Mujica, *Extension of multilinear mappings on Banach spaces*, Studia Math. 108 (1994), 55-76.

[32] G. Godefroy, B. Iochum, *Arens-regularity og Banach algebras and geometry of Banach spaces,* Jour. Funct. Anal. **80** (1988), 47-59.

[33] R. Haydon, *Some more characterizations of Banach spaces containing* ℓ_1, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **80** (1976), 269-276.

[34] E. Hille, R. Phillips, Functional Analysis and Semi-groups, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1974.

[35] J. A. Jaramillo, A. Prieto, I. Zalduendo, *The bidual of the space of polynomials on a Banach space*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc.**122** (1997), 457-471.

[36] P. Kirwan, R. Ryan, *Extendibility of homogeneous polynomials on Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. (to appear).

[37] J. Lindenstrauss, *Extension of compact operators*, Mem. Amer. Math. Soc. **48** (1964).

[38] J. Lindenstrauss, L. Tzafiri, Classical Banach spaces I, Springer-Verlag (1977)

[39] M. Lindström, R. Ryan, *Applications of ultraproducts to infinite-dimensional holomorphy*, Math. Scand. **71(2)** (1992), 229-242.

[40] P. Mazet, *A Hahn-Banach theorem for quadratic forms*, (to appear).

[41] L. Moraes, *The Hahn-Banach extension theorem for some spaces of n-homogeneous polynomials*, North-Holland Math. Studies **90** (1984), 265-274.

[42] L. Moraes, *A Hahn-Banach extension theorem for some holomorphic functions*, North-Holland Math. Studies **125** (1986), 205-220.

[43] J. Mujica, Complex Analysis in Banach Spaces, North-Holland Math. Studies **120** (1986).

[44] J. Mujica, *Linearization of bounded holomorphic mappings on Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **324** (**2**) (1991), 867–887.

[45] A. Pelczyński, *A property of multilinear operations*, Studia Math. **16** (1957), 173-182.

[46] W. Ruess, C. Stegall, *Extreme points in duals of operator spaces*, Math. Ann. **261** (1982), 535-546.

[47] R. Ryan, *Dunford-Pettis properties*, Bull. Acad. Polon. Sci., Sér. Sci. Math. **27** (1979), 373–379.

[48] R. Ryan, *Applications of topological tensor products to infinite dimensional holomorphy*, Ph.D.Thesis, University College, Dublin (1980).

[49] E. Toma, *Aplicaçoes holomorfas e polinomios τ-continuos*, Thesis, Universidade Federal do Rio de Janeiro (1993).

[50] M. Valdivia, *Banach spaces of polynomials without copies of ℓ_1*, Proc. Amer. Math. Soc. **123** **(10)** (1995), 3143-3150.

[51] M. Valdivia, *Some properties in spaces of multilinear functionals and spaces of polynomials* (preprint).

[52] I. Zalduendo, *A canonical extension for analytic functions on Banach spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **320(2)** (1990), 747–763.

[53] I. Zalduendo, *A simple example of a non-conmutative Arens product*, Publ. Mat. **35** **(2)** (1991), 475-477.

[54] I. Zalduendo, *Extending polynomials-a survey*, (preprint)