Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones del tipo curvatura media prescripta

Amster, Pablo

1998

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones del tipo curvatura media prescripta

Autor: Pablo Amster
Director: Dra. María Cristina Mariani
Lugar de trabajo: Departamento de Matemática

Trabajo presentado para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires

Buenos Aires, 1998

Existencia y unicidad de soluciones para ecuaciones del tipo curvatura media prescripta

RESUMEN

En este trabajo se estudia el problema de Dirichlet asociado a la ecuación de curvatura media prescripta, obteniéndose resultados de existencia y unicidad local y global, tanto para el caso general como para el caso no paramétrico, bajo diversas condiciones sobre la curvatura media H y el dato de borde g. Se demuestra también que si H y g son funciones suaves, las soluciones son clásicas. Por otra parte, se prueba en ambos casos que si existe alguna solución para ciertas H_0 y g_0, entonces también existe solución para H y g cercanas a H_0 y g_0.

También se estudian algunos casos de ecuaciones semilineales de la forma $X' = F(t, X)$ con dato de borde $X(0) = g(X(\alpha))$, para las cuales se obtienen resultados de existencia y unicidad bajo ciertas condiciones para las funciones continuas F y g. Para el caso periódico ($g = I$), se dan criterios de existencia de soluciones, y un resultado de unicidad.

Palabras clave: Curvatura media - Espacios de Sobolev - Teoremas de punto fijo - Operador elíptico

Existence and uniqueness of the solutions of equations of prescribed mean curvature type

ABSTRACT

In this work we study the Dirichlet problem associated to the prescribed mean curvature equation. We obtain existence and local and global uniqueness for the general and the nonparametric case under different conditions on the mean curvature H and the boundary data g. We also prove that if H and g are smooth, solutions are classic. Moreover, we prove in both cases that if there is a solution for some H_0 and g_0, then there exists also a solution for H and g close to H_0 and g_0.

We also study some semilinear equations of the type $X' = F(t, X)$ with boundary data $X(0) = g(X(\alpha))$, for which we obtain existence and uniqueness results under some conditions on the continuous functions F and g. For the periodic case ($g = I$), we give some criteria for the existence of solutions, and an uniqueness result.

Key words: Mean curvature - Sobolev Space - Fixed Point theorems - Elliptic operator

AGRADECIMIENTOS

A María Cristina Mariani, por su dedicación y permanente apoyo.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, por el apoyo brindado a través de becas, en cuyo marco realicé esta tesis.

A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, por permitirme el uso de sus instalaciones.

Pablo Amster

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN 1

CAPÍTULO 1 6

1.1 Notaciones 6

1.2 Algunos resultados previos 6

1.3 Resultados de existencia y unicidad para ecuaciones elípticas y acotaciones a priori 7

CAPÍTULO 2 17

2.1 Problema de Dirichlet asociado a la ecuación de curvatura media prescripta 17

2.2 Ecuación de curvatura media para superficies no paramétricas 33

CAPÍTULO 3 40

3.1 Unicidad local para (H) 40

3.2 Unicidad global para (H) 44

3.3 Unicidad local y global para (NP) 45

CAPÍTULO 4 50

4.1 Un método iterativo 51

4.2 Aplicación al problema (H) 51

CAPÍTULO 5 54

5.1 Un caso particular 54

5.2 Situación general 55

5.3 Unicidad para el problema (2) 61

BIBLIOGRAFÍA 63

INTRODUCCIÓN

En este trabajo estudiaremos mediante métodos topológicos algunas ecuaciones elípticas cuasilineales. En particular, nos ocuparemos de ecuaciones del tipo curvatura media prescripta.

Si S es una superficie en R^3, localmente podemos describirla como la imagen de cierta parametrización $X = X(u,v)$, en donde $X : \Omega \longrightarrow R^3$ es una función regular, y Ω es un abierto del plano, al que puede suponerse acotado y conexo. Si S es regular, el vector normal unitario $N = \frac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$ está bien definido, y determina para cada punto $p = X(u,v) \in S$ una única recta normal L_p. Luego, todo plano π que contiene a L_p corta a S en una curva γ_π, cuya curvatura en p es cierto valor K_π. Si giramos π alrededor de L_p, el valor K_π alcanza un máximo λ_1 y un mínimo λ_2. El promedio $H(p) = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$ se llama curvatura media, y es independiente de la parametrización, aunque su signo depende de la orientación de S.

Cuando la parametrización X satisface la condición

$$\text{(Iso)} \qquad |X_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = X_u . X_v$$

se dice que X es isoterma, y en tal caso es sencillo probar que vale

$$\text{(H)} \qquad \Delta X = X_{uu} + X_{vv} = 2H X_u \wedge X_v$$

El sistema de ecuaciones diferenciales (H) se denomina ecuación de curvatura media prescripta, o H-sistema. Toda solución regular de (H) que verifica (Iso) será entonces una superficie de curvatura media H. En particular, si $H = 0$ la superficie se denomina minimal. Las razones de esta denominación se entienden a partir de un conocido problema planteado por el físico belga Plateau, consistente en probar que para cada curva cerrada $C \subset R^3$ existe una superficie de área mínima que tiene a C como borde. Se cumple que toda superficie mínima es minimal. El problema de Plateau fue resuelto en 1930 por Douglas y Radó (ver [St1]), mediante el cálculo de variaciones, para lo cual demostraron, si B es el disco unidad de R^2, que encontrar el ínfimo del área $A(X) = \int_B |X_u \wedge X_v|$ sobre todas las X tales que $X|_{\partial B}$ es una parametrización de C equivale a encontrar el ínfimo sobre el mismo conjunto de la funcional $D(X)$, en donde D es la integral de Dirichlet

$$D(X) = \frac{1}{2} \int_B |\nabla X|^2$$

Se verifica que el ínfimo X así obtenido D satisface (Iso), aunque para que sea una solución admisible del problema de Plateau debe analizarse también la regularidad. Este problema presenta dos aspectos: por un lado, la regularidad de X, y por otro, determinar si existen de puntos de ramificación (es decir, puntos (u,v) tales que $\nabla X(u,v) = 0$) para ver si la superficie es localmente inmersa. Existen diversos resultados de regularidad, debidos a Hildebrandt, Nitsche, Tomi-Tromba, etc (ver [St1], [H-H]).

Para $H \neq 0$ constante, el problema de curvatura media prescripta puede resolverse estudiando la funcional

$$D_H(X) = D(X) + 2HV(X)$$

en donde $V(X) = \frac{1}{3}\int_B X_u \wedge X_v.X$. Minimizando esta funcional en un conjunto apropiado, Hildebrandt obtuvo en 1969 una primera solución al problema, llamada estable, para curvas $C \subset B_R(0)$, con $|H|R \leq 1$. En 1984 Brézis y Coron encontraron otra solución al problema, llamada "grande" o inestable, que no es un mínimo local de D_H. Si se considera $H = H(X)$, el problema también puede plantearse en forma variacional, mediante la funcional $D_H(X) = D(X) + 2V(X)$, en donde $V(X) = \frac{1}{3}\int_B Q(X).X_u \wedge X_v$ (volumen de Hildebrandt) se define a partir de un campo Q cuya divergencia es H. Bajo condiciones análogas al caso H constante, el problema de Plateau admite solución.

Paralelamente puede estudiarse el problema de Dirichlet asociado a la ecuación de curvatura media prescripta, es decir, analizar la existencia de soluciones de la ecuación (H) que tomen en $\partial\Omega$ algun valor determinado. Si $H = 0$ el problema es la conocida ecuación de Laplace, mientras que para $H \neq 0$ constante se han encontrado dos soluciones en caso de que el dato de borde no sea constante, y valga $|H|\|g\|_\infty < 1$ (ver [B-C]).

En todos los casos mencionados, las soluciones obtenidas en el espacio de Sobolev $H^1(\Omega, R^3)$ satisfacen (H) débilmente, es decir, verifican:

$$\int_B \nabla X.\nabla\varphi + 2HX_u \wedge X_v.\varphi = 0$$

para toda $\varphi \in C_0^1(B, R^3)$, aunque en caso de que X admita derivadas segundas en algún espacio L^p es inmediato probar que resulta una solución en el sentido fuerte.

La ecuación de curvatura media también puede plantearse en el caso de que S sea una superficie no paramétrica, es decir, cuando S está definida a partir de una ecuación

$$z = u(x,y), \qquad (x,y) \in \Omega$$

En este caso, la curvatura media de S en un punto satisface

$$\text{(NP)} \qquad H = \frac{(1+u_y^2)u_{xx} + (1+u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy}}{2\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}}$$

lo cual permite plantear el problema de Dirichlet asociado a (NP), que fue estudiado para el caso $H = H(x,y)$ (y, en general, $H = H(x_1,...,x_n)$ para hipersuperficies de R^{n+1}) por Gilbarg, Trudinger, Simon, Serrin, y otros autores. Se ha demostrado (ver [G-T]) que existe solución para cualquier dato de contorno suave si la curvatura media H' de $\partial\Omega$ satisface

$$H'(x_1,...,x_n) \geq \frac{n}{n-1}|H(x_1,...,x_n)|$$

para todo $(x_1,...,x_n) \in \partial\Omega$, y $H \in C^1(\overline{\Omega}, R)$ satisface la desigualdad:

$$\left|\int_\Omega H\varphi\right| \leq \frac{1-\epsilon}{n}\int_\Omega |D\varphi|$$

para todo $\varphi \in C_0^1(\Omega, R)$ y cierto $\epsilon > 0$. En particular, si H es constante, esta última condición puede eliminarse. En cambio, la condición sobre la curvatura de $\partial\Omega$ es fundamental, como lo muestra un resultado de no existencia (ver [G-T], corolario 14.13) que dice que si $H'(x_1,...,x_n) < \frac{n}{n-1}|H(x_1,...,x_n)|$ en algún punto y el signo de H es constante, entonces para cualquier $\epsilon > 0$ existe un dato de borde $g \in C^\infty(\overline{\Omega})$ con $\|g\|_\infty \leq \epsilon$ tal que el problema de Dirichlet no tiene solución. Si H depende también de u, pueden obtenerse resultados similares, bajo la condición adicional $\frac{\partial H}{\partial u} \geq 0$.

Si bien las soluciones obtenidas en [G-T] son clásicas, también en este caso puede estudiarse el problema débilmente, es decir, buscar las u que satisfacen

$$\int_\Omega \frac{\nabla u}{(1+|\nabla u|^2)^{\frac{1}{2}}}.\nabla\varphi + 2H\varphi = 0$$

para todo $\varphi \in C_0^1(\Omega, R)$.

En este trabajo buscaremos soluciones de ambas ecuaciones bajo condiciones diferentes, empleando métodos topológicos. Por otra parte, las ecuaciones serán estudiadas en su forma más general:

$$\text{(H)} \begin{cases} \Delta X = 2H(u,v,X,X_u,X_v)X_u \wedge X_v & \text{en} \quad \Omega \\ X = g \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

y

$$
(\mathrm{NP})\begin{cases} (1+u_y^2)u_{xx}+(1+u_x^2)u_{yy}-2u_xu_yu_{xy}= \\ \qquad\qquad 2H(x,y,u,u_x,u_y)\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}} & \text{en } \Omega \\ u=g \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}
$$

en los espacios $W^{2,p}(\Omega,R^3)$ y $W^{2,p}(\Omega,R)$ respectivamente.

En el capítulo 1 enunciaremos algunos resultados que serán empleados a lo largo del trabajo.

En el capítulo 2 daremos resultados de existencia para (H) y (NP) bajo diversas condiciones sobre las funciones H y g, y analizaremos también la regularidad de las soluciones. Por otra parte, veremos en ambos casos que si existe alguna solución para ciertas H_0 y g_0, entonces también existe solución para H y g cercanas a H_0 y g_0.

En el capítulo 3 analizaremos la unicidad local y global de las soluciones de (H) y (NP).

En el capítulo 4 plantearemos un método para encontrar soluciones de (H) por recurrencia, incorporando un parámetro t, $0\le t\le 1$ a la ecuación, y obteniendo soluciones para cierta sucesión $0=t_0<t_1<\dots$. Si $t_N\ge 1$ para algún N, entonces (H) tiene solución.

Finalmente, en el capítulo 5 veremos algunos casos de ecuaciones semilineales. El problema $u''+\nabla G(u)=P(t)$ en donde $P: R^m \longrightarrow R^m$ es periódica fue estudiado por Lazer [L] y Ahmad [Ah], quienes obtuvieron condiciones que aseguran la existencia y unicidad de soluciones para P arbitraria.

Empleando métodos iterativos y variacionales, Fonda y Mawhin encontraron condiciones suficientes para asegurar la existencia de una solución de la ecuación $Lx=Nx$ en un espacio de Hilbert abstracto, para un operador lineal L y un operador continuo N (ver [F-M]). En realidad, también es posible encontrar soluciones en un espacio de Banach empleando los teoremas de Schauder y Leray-Schauder, considerando el operador $T=1+S(L-N)$, en donde S es continuo y verifica: $Sy=0 \Longleftrightarrow y=0$. Podemos justificar este proceder con un simple ejemplo en R^n, que nos muestra que es posible aplicar Leray-Schauder en ciertos casos en los que las condiciones de Fonda-Mawhin no se satisfacen. Basta tomar $N(x)=(x_1^3,\dots,x_n^3)$ y $L=\lambda<0$, luego $T=L+1-N$ es compacto, y valen las condiciones de Leray-Schauder ya que si $x=\sigma Tx$ para algún $\sigma\in(0,1)$ entonces $x_i=\sigma(\lambda+1-x_i^2)x_i$, lo que implica que $x_i = 0$. Por otro lado, si se cumplen las condiciones de Fonda-Mawhin existen matrices A, B simétricas tales que $N - A$ y $B - N$ son positivas. En particular, ésto implica que $Nx.x \leq Bx.x$ para todo x, y luego $\sum x_i^4 \leq c.x.x$, lo que es absurdo.

Con esta idea, analizaremos ecuaciones de la forma $X' = F(t, X)$ con dato de borde $X(0) = g(X(\alpha))$, para las cuales se obtienen resultados de existencia y unicidad bajo ciertas condiciones para las funciones continuas F y g. Dichos resultados no son aplicables al caso periódico ($g = I$), estudiado por diversos autores (ver [Ma]), para el que se darán criterios de existencia de soluciones, y un resultado de unicidad.

CAPÍTULO 1

En este capítulo especificaremos las notaciones que serán utilizadas a lo largo del trabajo, y enunciaremos algunos de los resultados que se emplearán más adelante.

1.1 Notaciones

En lo que sigue Ω será un subconjunto abierto, acotado y conexo del plano. En particular, B denotará el disco unidad, es decir, $B = \{(u,v) \in R^2; u^2 + v^2 < 1\}$.

Usaremos frecuentemente los espacios de Sobolev, que serán notados en la forma $W^{k,p}(\Omega, R^n)$, $W_0^{k,p}(\Omega, R^n)$. Por $C^k(\overline{\Omega}, R^n)$ entenderemos a los espacios de funciones de clase C^k en $\overline{\Omega}$, provistos de la norma usual. Emplearemos también en algunos casos a los espacios de Holder $C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, R^n)$. Las derivadas parciales de $X = X(u,v)$ serán notadas en la forma X_u, X_v. El producto vectorial usual en R^3 se indicará con el signo " $\wedge$ ". Nos referiremos indistintamente a cualquier norma $|\quad|$ de R^n.

1.2 Algunos resultados previos

Antes de enunciar ciertos resultados clásicos que nos serán de utilidad, recordaremos las siguientes definiciones, para un operador $T : E \longrightarrow E$, en donde (E,d) es un espacio métrico cualquiera:

DEFINICIÓN

i) T es compacto si T es continuo y además $\overline{T(X)}$ es compacto para todo $X \subset E$ acotado.

ii) T es una contracción si existe $k < 1$ tal que $d(Tx, Ty) \leq kd(x,y)$ para todo $x, y \in E$.

TEOREMA 1.2.1 *(Banach)*

Sea (E,d) métrico completo, y sea $T : E \longrightarrow E$ una contracción. Entonces T tiene un único punto fijo en E.

Teorema 1.2.2 *(Schauder)*

Sea C un convexo cerrado contenido en un espacio de Banach, y $T : C \longrightarrow C$ un operador continuo tal que $\overline{T(C)}$ es compacto. Entonces T tiene al menos un punto fijo en C.

Observación

En el teorema anterior, si C es acotado la hipótesis equivale a que T sea compacto. Esto no ocurre en general: por ejemplo, cualquier traslación en $C = R^n$ es un operador compacto sin puntos fijos.

Tendremos en cuenta, además, las inmersiones de Sobolev (ver [A]). En particular:

Teorema 1.2.3 *(Rellich-Kondrachov-Morrey)*

Sea Ω un dominio con frontera Lipschitz, y sean $p > 2$, $0 \leq \alpha < 1 - \dfrac{2}{p}$. Entonces la inmersión $W^{k+1,p}(\Omega, R^n) \hookrightarrow C^{k,\alpha}(\overline{\Omega}, R^n)$ resulta compacta.

1.3 Resultados de existencia y unicidad para ecuaciones elípticas y acotaciones a priori

Definición

Sea $L : W^{2,p}(\Omega, R) \longrightarrow L^p(\Omega, R)$, el operador lineal definido por

$$Lu = \sum a_{ij}(x,y)D_{i,j}u + \sum b_i(x,y)D_iu + c(x,y)u$$

L se dice elíptico cuando la matriz simétrica (a_{ij}) es definida positiva. Si $\alpha_1(x,y) \leq \alpha_2(x,y)$ son los autovalores de dicha matriz en un punto $(x,y) \in \Omega$, diremos que L es estrictamente elíptico si existe α tal que $\alpha_1(x,y) \geq \alpha > 0$ para todo $(x,y) \in \Omega$.

El siguiente es un conocido resultado de la teoría de ecuaciones elípticas:

Teorema 1.3.1

Sea $\partial\Omega \in C^{1,1}$ y L estrictamente elíptico en Ω con coeficientes $a_{ij} \in C(\overline{\Omega}, R)$, $b_i, c \in L^\infty(\Omega, R)$, $c \leq 0$. Entonces, dadas $f \in L^p(\Omega, R)$, $\varphi \in W^{2,p}(\Omega, R)$, $1 < p <$

∞, *el problema de Dirichlet*

$$\begin{cases} Lu = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = \varphi & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

admite una única solución en $W^{2,p}(\Omega, R)$.

Asimismo, se tiene la siguiente acotación a priori, que nos será de utilidad:

LEMA 1.3.2

Sean Ω *y* L *como en el teorema 1.3.1,* $1 < p < \infty$. *Existe entonces una constante* c *independiente de* u *tal que*

$$\|u\|_{2,p} \leq c\|Lu\|_p$$

para toda $u \in W^{2,p}(\Omega, R) \cap W_0^{1,p}(\Omega, R)$.

En otras palabras, el lema 1.3.2 dice que el operador L restringido a $W_0^{1,p}(\Omega, R)$ es acotado inferiormente. Veamos que 1.3.1 y 1.3.2 también valen bajo condiciones ligeramente distintas:

TEOREMA 1.3.3

El Teorema 1.3.1 sigue siendo válido si se reemplaza la condición $c \leq 0$ *por alguna de las siguientes condiciones:*

i) $\|c\|_p$ *suficientemente pequeña.*

ii) $|\Omega|$ *suficientemente pequeño.*

<u>*Demostración*</u>

En primer lugar, observemos que basta verificar el resultado para i), pues vale que $\|c\|_p \leq \|c\|_\infty |\Omega|^{1/p}$.

Consideremos el operador dado por $L_1 u = \sum a_{i,j}(x,y) D_{i,j} u + \sum b_i(x,y) D_i u$. Como L_1 satisface las hipótesis del teorema 1.3.1, dada $\overline{u} \in W^{2,p}(\Omega, R) \subset C(\overline{\Omega}, R)$ fija, $c\overline{u} \in L^p(\Omega, R)$ y luego el problema

$$\begin{cases} L_1 u + c\overline{u} = f & \text{en} \quad \Omega \\ u = \varphi & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

admite una única solución $u \in W^{2,p}(\Omega, R)$. Esto nos permite definir un operador $T : W^{2,p}(\Omega, R) \longrightarrow W^{2,p}(\Omega, R)$, dado por $T(\overline{u}) = u$. Además, si $\overline{u}, \overline{v} \in W^{2,p}(\Omega, R)$,

$T(\overline{u})$ y $T(\overline{v})$ coinciden en $\partial\Omega$, y entonces por el lema 1.3.2 existe una constante c_0 tal que

$$\|T(\overline{u}) - T(\overline{v})\|_{2,p} \leq c_0\|L_1(T(\overline{u}) - T(\overline{v}))\|_p = c_0\|c(\overline{u} - \overline{v})\|_p \leq c_0\|c\|_p\|\overline{u} - \overline{v}\|_\infty$$

Además, por inmersión de Sobolev vale $\|\overline{u}-\overline{v}\|_\infty \leq c_1\|\overline{u}-\overline{v}\|_{2,p}$. Luego, si $c_0c_1\|c\|_p < 1$, T es una contracción, y por el teorema 1.2.1 tiene un único punto fijo, que resulta ser solución (única) del problema original.

Lema 1.3.4

El Lema 1.3.2 sigue siendo válido si se reemplaza la condición $c \leq 0$ por alguna de las siguientes condiciones:

i) $\|c\|_p$ *suficientemente pequeña.*

ii) $|\Omega|$ *suficientemente pequeño.*

Demostración

Sean L_1 y c_0 como en el teorema anterior. Se cumple:

$$\|Lu\|_p \geq \|L_1u\|_p - \|cu\|_p \geq \frac{1}{c_0}\|u\|_{2,p} - \|c\|_p\|u\|_\infty$$

Además, siendo $\|u\|_\infty \leq c_1\|u\|_{2,p}$, el resultado vale claramente para $c_0c_1\|c\|_p < 1$.

Observación

Según se puede observar, la condición sobre $\|c\|_p$ *en el lema anterior es la misma que en el teorema 1.3.3. En realidad, este teorema puede obtenerse como consecuencia de 1.3.4, como veremos más adelante.*

Los resultados anteriores pueden extenderse en forma general para operadores estrictamente elípticos definidos en $W^{2,p}(\Omega, R^n)$. Para nuestras aplicaciones, bastará considerar operadores de la forma $LX = \Delta X + AX_u + BX_v + CX$ en donde $A, B, C \in L^\infty(\Omega, R^{3\times 3})$, para los cuales veremos que el teorema 1.3.1 y el lema 1.3.2 son válidos bajo la hipótesis de que $C \leq -\mu$ (es decir, $Cx.x \leq -\mu x.x$ para todo $x \in R^3$), para cierto $\mu \geq 0$ suficientemente grande, o bien que $|\Omega|$ sea suficientemente pequeño:

Teorema 1.3.1 y Lema 1.3.2 (caso R^3)

Los resultados 1.3.1 y 1.3.2 valen para el operador $L : W^{2,p}(\Omega, R^3) \longrightarrow L^p(\Omega, R^3)$ *dado por* $LX = \Delta X + AX_u + BX_v + CX$, *con* $A, B, C \in L^\infty(\Omega, R^{3\times 3})$, *bajo alguna de las siguientes condiciones:*

i) $C \leq -\mu$ *para* $\mu > \frac{1}{4}(\|A\|_\infty + \|B\|_\infty)^2$

ii) $|\Omega|$ *es suficientemente pequeño.*

<u>*Demostración*</u>

Supongamos en primer lugar que el lema 1.3.2 es falso. En tal caso, existe una sucesión $X_n \in W^{2,p}(\Omega, R^3) \cap W_0^{1,p}(\Omega, R^3)$ tal que

$$\|X_n\|_{2,p} = 1, \qquad \|LX_n\|_p \longrightarrow 0.$$

Por inmersión de Sobolev, se sabe que $X_n \in W_0^{1,2}(\Omega, R^3)$. Veamos que $\|X_n\|_{1,2} \longrightarrow 0$: para ello, basta observar que si $X \in W^{2,p}(\Omega, R^3) \cap W_0^{1,p}(\Omega, R^3) \hookrightarrow C(\overline{\Omega}, R^3)$, entonces $LX.X \in L^1(\Omega, R^3)$. Por la fórmula de Green,

$$\int LX.X = -\int \nabla X.\nabla X + \int AX_u.X + \int BX_v.X + \int CX.X$$

y, si vale i), se obtiene por Cauchy-Schwartz:

$$\int LX.X \leq -\int \nabla X.\nabla X + \|A\|_\infty \|X_u\|_2 \|X\|_2 + \|B\|_\infty \|X_v\|_2 \|X\|_2 - \mu \int X.X$$

$$\leq -\|\nabla X\|_2^2 + (\|A\|_\infty + \|B\|_\infty)\|\nabla X\|_2 \|X\|_2 - \mu \|X\|_2^2$$

$$= -(\|\nabla X\|_2 - \frac{1}{2}(\|A\|_\infty + \|B\|_\infty)\|X\|_2)^2 - (\mu - \frac{1}{4}(\|A\|_\infty + \|B\|_\infty)^2)\|X\|_2^2$$

Luego, como $|\int LX_n.X_n| \leq \|LX_n\|_p \|X_n\|_q \longrightarrow 0$, se deduce que $\|X_n\|_2 \longrightarrow 0$ y $\|\nabla X_n\|_2 \longrightarrow 0$.

Si en cambio vale ii), el resultado es el mismo, pues se tiene la acotación:

$$|\int AX_u.X + \int BX_v.X + \int CX.X| \leq (\|A\|_\infty + \|B\|_\infty)\|\nabla X\|_2 \|X\|_2 + \|C\|_\infty \|X\|_2^2$$

y por inmersión de Sobolev, vale por ejemplo que $\|X\|_2 \leq \|X\|_4 |\Omega|^{1/4} \leq k\|\nabla X\|_2 |\Omega|^{1/4}$ para cierta constante k.

En consecuencia, para $p \leq 2$ resulta: $\|X_n\|_{1,p} \leq c\|X_n\|_{1,2} \longrightarrow 0$, y por ser A, B, C acotadas se deduce que $\|\Delta X_n\|_p = \|LX_n - AX_{n_u} - BX_{n_v} - CX_n\|_p \longrightarrow 0$. Esto es absurdo pues el lema 1.3.2 es válido para Δ. Para $p > 2$, $\|LX_n\|_2 \leq c\|LX_n\|_p \longrightarrow 0$, y luego $\|\Delta X_n\|_2 \longrightarrow 0$. Como el lema 1.3.2 vale para Δ, tomando una subsucesión se puede suponer que $\|X_n\|_{2,2} \longrightarrow 0$, y por inmersión de Sobolev $\|X_n\|_{1,p} \longrightarrow 0$. La prueba concluye ahora como en el caso $p \leq 2$.

Una vez probado el lema, se obtiene en forma inmediata la unicidad en el teorema 1.3.1, ya que si $X, Y \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ verifican que $LX = LY$, $X = Y$ en $\partial\Omega$, entonces para $Z = X - Y \in W^{2,p}(\Omega, R^3) \cap W_0^{1,p}(\Omega, R^3)$ vale $\|Z\|_{2,p} \leq c\|LZ\|_p = 0$.

Veamos, finalmente, el resultado de existencia, para lo cual consideraremos para $0 \leq t \leq 1$ el operador

$$L_t X = \Delta X + t(AX_u + BX_v + CX)$$

y probaremos para $f \in L^p(\Omega, R^3)$, $\varphi \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ que la ecuación (*) $L_t X = f$ en Ω, $X = \varphi$ en $\partial\Omega$ tiene solución para todo $t \in [0,1]$. Para $t = 0$ es claro, pues se trata de la ecuación de Laplace; veamos:

1) Si (*) tiene solución (para cualquier f) para todo $t \in [0, t_0]$, entonces existe ϵ_0 tal que (*) tiene solución para todo $t \in [0, t_0 + \epsilon_0)$: en efecto, si $t = t_0 + \epsilon$, para $\overline{X} \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ fijo $A\overline{X}_u + B\overline{X}_v + C\overline{X} \in L^p(\Omega, R^3)$ y entonces la ecuación

$$\begin{cases} L_{t_0} X = f - \epsilon(A\overline{X}_u + B\overline{X}_v + C\overline{X}) & \text{en } \Omega \\ X = \varphi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

admite una única solución X. Queda definido un operador $T : W^{2,p}(\Omega, R^3) \longrightarrow W^{2,p}(\Omega, R^3)$, dado por $T(\overline{X}) = X$. Además, si $X = T(\overline{X}), Y = T(\overline{Y})$, $X = Y$ en $\partial\Omega$ y por 1.3.2 vale:

$$\|X - Y\|_{2,p} \leq c(t_0)\|L_{t_0}(X - Y)\|_p = c(t_0)\epsilon\|A(\overline{X}_u - \overline{Y}_u) + B(\overline{X}_v - \overline{Y}_v) + C(\overline{X} - \overline{Y})\|_p$$

$$\leq c(t_0)\epsilon(\|A\|_\infty\|\overline{X}_u - \overline{Y}_u\|_p + \|B\|_\infty\|\overline{X}_v - \overline{Y}_v\|_p + \|C\|_\infty\|\overline{X} - \overline{Y}\|_p)$$

Es decir,

$$\|T(\overline{X}) - T(\overline{Y})\|_{2,p} \leq c(t_0)k\epsilon\|\overline{X} - \overline{Y}\|_{2,p}$$

para cierta constante k. Si ϵ es pequeño, T es una contracción, y entonces tiene un único punto fijo, que resulta solución de (*) para $t_0 + \epsilon$.

2) Si (*) tiene solución (para cualquier f) para todo $t \in [0, t_0)$, entonces tiene solución para t_0: como en el caso anterior, se define $T(\overline{X}) = X$, en donde X es la única solución del problema

$$\begin{cases} L_{t_0 - \epsilon} X = f - \epsilon(A\overline{X}_u + B\overline{X}_v + C\overline{X}) & \text{en } \Omega \\ X = \varphi & \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Nuevamente, T resultará una contracción para ϵ suficientemente pequeño. Sin embargo, en este caso la acotación de $\|T(\overline{X}) - T(\overline{Y})\|_{2,p}$ depende de la constante

$c(t_0 - \epsilon)$, de modo que debemos probar previamente que la constante provista por el lema 1.3.2 puede elegirse de modo uniforme en un entorno de t_0, es decir, que existen c, ϵ tales que $\|X\|_{2,p} \leq c\|L_t X\|_p$ para todo $t \in (t_0 - \epsilon, t_0]$, para todo $X \in W^{2,p}(\Omega, R^3) \cap W_0^{1,p}(\Omega, R^3)$.

En efecto, $\|L_t X\|_p \geq \|L_{t_0} X\|_p - \|(L_t - L_{t_0})X\|_p \geq \frac{1}{c(t_0)}\|X\|_{2,p} - \|(L_t - L_{t_0})X\|_p$, y además,

$$\|(L_t - L_{t_0})X\|_p \leq \epsilon k \|X\|_{2,p}$$

para cierta constante k, y basta tomar ϵ y c tales que $\frac{1}{c(t_0)} - \epsilon k = \frac{1}{c} > 0$.

OBSERVACIÓN

Se ve en general que el hecho de que L sea acotado inferiormente implica el resultado de existencia y unicidad.

Veremos a continuación que 1.3.1 y 1.3.2 valen también si A, B y C son suficientemente pequeñas (aunque no sean acotadas); en consecuencia, para cualquier L como en el teorema 1.3.1 existe un intervalo maximal $I = [0, t_0)$ tal que ambos resultados son válidos para L_t para cualquier $t \in I$. Si I es acotado, se ve en forma inmediata que $c(t) \longrightarrow \infty$ cuando $t \longrightarrow t_0$.

TEOREMA 1.3.5

Sean $\partial\Omega \in C^{1,1}$ $2 < p < \infty$ y $L : W^{2,p}(\Omega, R^3) \longrightarrow L^p(\Omega, R^3)$ el operador dado por

$$LX = \Delta X + AX_u + BX_v + CX$$

en donde los coeficientes $A, B, C \in L^p(\Omega, R^{3\times 3})$ verifican:

i) $\|A\|_p$ y $\|B\|_p$ son suficientemente pequeñas.

ii) $\|C\|_p$ es suficientemente pequeña.

Entonces, dadas $f \in L^p(\Omega, R^3)$, $\varphi \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$, el problema de Dirichlet

$$\begin{cases} LX = f & \text{en} \quad \Omega \\ X = \varphi & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

tiene solución única en $W^{2,p}(\Omega, R^3)$.

Además, si se reemplaza la condición ii) por

ii') $C \leq 0$ (es decir, $Cx.x \leq 0$ para todo $x \in R^3$)
el problema tiene a lo sumo una solución.

<u>*Demostración*</u>

En primer lugar, observemos que L está bien definido, pues si $\overline{X} \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$, por la inmersión de Sobolev (Teorema 1.2.3), $\overline{X}$ y sus derivadas primeras resultan continuas, y entonces $A\overline{X}_u + B\overline{X}_v + C\overline{X} \in L^p$. Además, como en los casos anteriores, por el Teorema 1.3.1, existe una única solución al problema

$$\begin{cases} \Delta X + A\overline{X}_u + B\overline{X}_v + C\overline{X} = f & \text{en} \quad \Omega \\ X = \varphi \qquad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

y queda definido el operador $T : W^{2,p}(\Omega, R^3) \longrightarrow W^{2,p}(\Omega, R^3)$, $T(\overline{X}) = X$. Además, por el lema 1.3.2 existe una constante c tal que para $\overline{X}, \overline{Y} \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ vale:

$$\|T(\overline{X}) - T(\overline{Y})\|_{2,p} \leq c\|\Delta(T(\overline{X}) - T(\overline{Y}))\|_p = c\|A(\overline{X}_u - \overline{Y}_u) + B(\overline{X}_v - \overline{Y}_v) + C(\overline{X} - \overline{Y})\|_p$$

$$\leq c(\|A\|_p\|\overline{X}_u - \overline{Y}_u\|_\infty + \|B\|_p\|\overline{X}_v - \overline{Y}_v\|_\infty + \|C\|_p\|\overline{X} - \overline{Y}\|_\infty)$$

Por inmersión de Sobolev, si $\|A\|_p$, $\|B\|_p$ y $\|C\|_p$ son suficientemente pequeñas, T es una contracción.

Si reemplazamos la condición ii) por ii'), y suponemos que X, Y son dos soluciones del problema, para $Z = X - Y$ vale:

$$\begin{cases} \Delta Z + AZ_u + BZ_v + CZ = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ Z = 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Multiplicando por Z de ambos lados e integrando sobre Ω, se obtiene:

$$\int \Delta Z.Z + \int AZ_u.Z + \int BZ_v.Z + \int CZ.Z = 0$$

Por la condición ii') y la fórmula de Green, vale

$$\int \nabla Z.\nabla Z \leq \int AZ_u.Z + \int BZ_v.Z$$

Además, por la desigualdad de Holder e inmersiones de Sobolev resulta

$$|\int AZ_uZ| \leq \int |A|.|Z_u|.|Z| \leq \|A\|_p(\int |Z_u|^q|Z|^q)^{1/q}$$

para $1 < q < 2$ tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tomando $r = \frac{2}{q}$, para $s = \frac{2}{2-q}$ vale que

$$(\int |Z_u|^q |Z|^q)^{1/q} \leq (\int |Z_u|^{qr})^{1/qr} (\int |Z|^{qs})^{1/qs} = (\int |Z_u|^2)^{1/2} (\int |Z|^{qs})^{1/qs}$$

Además, $W^{1,2}(\Omega, R^3) \hookrightarrow L^{qs}(\Omega, R^3)$ y entonces vale $\|Z\|_{qs} \leq k\|Z\|_{1,2}$ para cierta constante k, y en consecuencia

$$|\int A Z_u Z| \leq k\|A\|_p \|Z\|_{1,2}^2$$

Una desigualdad análoga se deduce para $\int B Z_v . Z$, lo que prueba, para $\|A\|_p$ y $\|B\|_p$ pequeñas, que $Z = 0$, pues por la desigualdad de Poincaré la norma de $W_0^{1,2}(\Omega, R^3)$ es equivalente a la dada por $(\int \nabla Z . \nabla Z)^{1/2}$.

Observación

En el teorema anterior, i) y ii) pueden enunciarse en forma más precisa, mediante la condición:

$$c_0 c_1 (\|A\|_p + \|B\|_p + \|C\|_p) < 1$$

en donde c_0 es la constante del lema 1.3.2 para el laplaciano, y c_1 es la constante correspondiente a la inmersión $W^{2,p}(\Omega, R^3) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}, R^3)$. A su vez, i) y ii') equivalen a la condición:

$$c^2 k (\|A\|_p + \|B\|_p) < 1$$

en donde k es como en el teorema y c es la constante de la desigualdad de Poincaré.

En caso de que valgan i) y ii'), si A, B y C son acotadas también puede probarse la existencia:

Corolario 1.3.6

El teorema 1.3.1 y el lema 1.3.2 (caso R^3) siguen siendo válidos para $p > 2$ si se reemplaza la condición $C \leq -\mu$ por las condiciones

i) $\|A\|_p + \|B\|_p$ *es suficientemente pequeña.*

ii) $C \leq 0$

<u>*Demostración*</u>

Si $Z_n \in W^{2,p}(\Omega, R^3) \cap W_0^{1,p}(\Omega, R^3)$ es una sucesión tal que $\|LZ_n\|_p \longrightarrow 0$, vale que $\|LZ_n\|_2 \longrightarrow 0$. De la demostración del teorema anterior se deduce que

$\int LZ_nZ_n \leq k\|Z_n\|_{1,2}^2$ para cierta $k < 0$, y en consecuencia $\|Z_n\|_{1,2} \longrightarrow 0$. La prueba concluye ahora de la misma forma que en 1.3.1 y 1.3.2 (caso R^3).

OBSERVACIÓN 1.3.7

El corolario 1.3.6 también vale si se reemplaza i) por

i') $c(\|A\|_\infty + \|B\|_\infty) < 1$

en donde c es la constante de la desigualdad de Poincaré. Esto es inmediato, pues $|\int AZ_uZ + \int BZ_vZ| \leq (\|A\|_\infty + \|B\|_\infty)\|\nabla Z\|_2\|Z\|_2 \leq c(\|A\|_\infty + \|B\|_\infty)\|\nabla Z\|_2^2$

Para terminar este capítulo, veremos que los teoremas 1.3.1 y 1.3.3 no son válidos en situaciones más generales. En particular, veremos que a diferencia del caso $n = 1$ las condiciones sobre los coeficientes de orden 1 (es decir, las matrices A y B) son esenciales, aún en el caso $C = 0$:

EJEMPLO

En este ejemplo exhibiremos cierto $\partial\Omega \in C^{1,1}$ y un operador estrictamente elíptico $LZ = \Delta Z + AZ_u + BZ_v$ con coeficientes $A, B \in L^2(\Omega, R^{3\times 3})$ para los cuales el problema de Dirichlet

$$(*)\begin{cases} LZ = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ Z = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

admite alguna solución débil no trivial.

Para ello, basta tomar $H > 0$ constante y $g \in C^2(\overline{\Omega}, R^3)$ no constante tales que $H\|g\|_\infty < 1$. Tomando $\Omega = B$, existen (ver [B-C]) dos soluciones distintas $X, Y \in W^{1,2}(\Omega, R^3)$ del problema

$$\begin{cases} \Delta X = 2HX_u \wedge X_v & \text{en} \quad \Omega \\ X = g & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Luego, si $Z = X - Y$ vale:

$$\begin{cases} \Delta Z - 2HZ_u \wedge Y_v - 2HX_u \wedge Z_v = 0 & \text{en} \quad \Omega \\ Z = 0 & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

En consecuencia, si consideramos $A, B \in L^2(\Omega, R^{3\times 3})$ tales que

$$AZ_u = -2HZ_u \wedge Y_v$$

$$BZ_v = -2HX_u \wedge Z_v$$

la ecuación (*) tiene solución no trivial.

OBSERVACIÓN

Del ejemplo anterior se concluye que $2H(\|X_u\|_\infty + \|Y_v\|_\infty) \geq \frac{1}{c}$ *, en donde* c *es la constante de la desigualdad de Poincaré. En efecto, en caso contrario se cumple que* $A, B \in L^\infty(\Omega, R^{3\times 3})$ *, y como en el corolario 1.3.6 resulta:*

$$\int LZ.Z \leq -\|\nabla Z\|^2 + 2cH(\|X_u\|_\infty + \|Y_v\|_\infty)\|\nabla Z\|^2 < 0$$

lo que es absurdo.

CAPÍTULO 2

En este capítulo daremos resultados de existencia para las ecuaciones mencionadas en la introducción, bajo condiciones diversas.

2.1. Problema de Dirichlet asociado a la ecuación de curvatura media prescripta

En esta parte estudiaremos la ecuación

$$(\mathrm{H})\begin{cases} \Delta X = 2H(u,v,X,X_u,X_v)X_u \wedge X_v & \text{en} \quad \Omega \\ X = g \qquad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

en donde $H : \overline{\Omega} \times (R^3)^3 \longrightarrow R$ es una función continua, y $\partial\Omega \in C^{1,1}$.

Sea $\overline{X} \in C^1(\overline{\Omega}, R^3)$ fija, y supongamos $g \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ para cierto p tal que $2 < p < \infty$. Por el Teorema 1.3.1, sabemos que existe una única solución $X \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ al problema

$$\begin{cases} \Delta X = 2H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v & \text{en} \quad \Omega \\ X = g \qquad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Dada la inmersión de Sobolev $W^{2,p}(\Omega, R^3) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}, R^3)$, queda definido un operador, que resulta compacto según se prueba en el siguiente teorema:

TEOREMA 2.1.1

Sean $2 < p < \infty$, $g \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$. Entonces el operador $T : C^1(\overline{\Omega}, R^3) \longrightarrow C^1(\overline{\Omega}, R^3)$, dado por $T(\overline{X}) = X$ es compacto.

Demostración

En primer lugar, probaremos la continuidad de T: dadas $X = T(\overline{X})$, $Y = T(\overline{Y})$, se cumple que $X = Y$ en $\partial\Omega$. Además, por la inmersión de Sobolev y el lema 1.3.2, se obtiene que

$$\|X - Y\|_{1,\infty} \leq c_1\|X - Y\|_{2,p} \leq c_1 c\|\Delta(X - Y)\|_p =$$

$$2c_1c\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_u\wedge\overline{X}_v-H(u,v,\overline{Y},\overline{Y}_u,\overline{Y}_v)\overline{Y}_u\wedge\overline{Y}_v\|_p$$

y la continuidad se sigue en forma inmediata.

Por otro lado, recordemos que la inmersión $W^{2,p}(\Omega,R^3)\hookrightarrow C^1(\overline{\Omega},R^3)$ es compacta, por lo cual el teorema quedará probado si vemos que la imagen de un conjunto acotado es acotada con la norma $\|\ \ \|_{2,p}$.

En efecto, sea $X_0=T(0)$. Si $\|\overline{X}\|_{1,\infty}\le R$, vale:

$$\|X-X_0\|_{2,p}\le c\|\Delta(X-X_0)\|_p=2c\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_u\wedge\overline{X}_v\|_p\le$$

$$2c\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\|_p\|\overline{X}_u\|_\infty\|\overline{X}_v\|_\infty\le kR^2$$

para cierta constante k, lo cual completa la demostración.

OBSERVACIÓN

En la situación del teorema, se ve también que $\|T(0)-g\|_{1,\infty}\le c_1c\|\Delta g\|_p$, *es decir,* $\|T(0)\|_{1,\infty}\le c_1(1+c)\|g\|_{2,p}$. *En muchos casos podremos suponer que* $g=T(0)$ *o, en otras palabras, que* g *es armónica.*

OBSERVACIÓN

Es evidente que si T *tiene un punto fijo, vale*

$$\inf_{\overline{Y}\in C^1(\overline{\Omega},R^3),\overline{Y}=g\text{ en }\partial\Omega}\|\overline{Y}-T(\overline{Y})\|_{1,\infty}=0$$

y también

$$\inf_{\overline{Y}\in W^{2,p}(\Omega,R^3),\overline{Y}=g\text{ en }\partial\Omega}\|\Delta\overline{Y}-2H(u,v,\overline{Y},\overline{Y}_u,\overline{Y}_v)\overline{Y}_u\wedge\overline{Y}_v\|_p=0$$

La afirmación recíproca no es necesariamente válida, dado que en ningún caso el ínfimo tiene por qué alcanzarse. Sin embargo, es fácil ver que se alcanza sobre conjuntos acotados de $W^{2,p}(\Omega,R^3)\cap(g+W_0^{1,p}(\Omega,R^3))$, *es decir:*

TEOREMA 2.1.2

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

i) (H) tiene solución en $W^{2,p}(\Omega,R^3)$

ii) Existe $R>0$ *tal que*

$$\inf_{\|\Delta\overline{Y}\|_p \leq R, \overline{Y}=g \text{ en } \partial\Omega} \|\Delta\overline{Y} - 2H(u,v,\overline{Y},\overline{Y}_u,\overline{Y}_v)\overline{Y}_u \wedge \overline{Y}_v\|_p = 0$$

iii) Existe $R > 0$ *tal que*

$$\inf_{\|\overline{Y}\|_{1,\infty} \leq R, \overline{Y}=g \text{ en } \partial\Omega} \|\overline{Y} - T(\overline{Y})\|_{1,\infty} = 0$$

Demostración

La implicación $i) \Longrightarrow ii)$ es evidente. Para $ii) \Longrightarrow iii)$, basta observar que si $\overline{Y} \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ verifica que $\|\Delta\overline{Y}\|_p \leq R, \overline{Y} = g$ en $\partial\Omega$ y g es armónica entonces

$$\|\overline{Y}\|_{1,\infty} \leq c_1\|\overline{Y}\|_{2,p} \leq c_1(\|\overline{Y} - g\|_{2,p} + \|g\|_{2,p}) \leq c_1(c\|\Delta(\overline{Y} - g)\|_p + \|g\|_{2,p}) \leq$$

$$\leq c_1(cR + \|g\|_{2,p}) = R'$$

Además,

$$\|\overline{Y} - T(\overline{Y})\|_{1,\infty} \leq c_1\|\overline{Y} - T(\overline{Y})\|_{2,p} \leq c_1 c\|\Delta(\overline{Y} - T(\overline{Y}))\|_p =$$

$$= c_1 c\|\Delta\overline{Y} - 2H(u,v,\overline{Y},\overline{Y}_u,\overline{Y}_v)\overline{Y}_u \wedge \overline{Y}_v\|_p$$

de donde el resultado se sigue en forma inmediata.

Finalmente, veamos $iii) \Longrightarrow i)$: consideremos una sucesión $\overline{Y}_n$ acotada en $C^1(\overline{\Omega}, R^3)$ tal que $\|\overline{Y}_n - T(\overline{Y}_n)\|_{1,\infty} \longrightarrow 0$. Por el teorema anterior, siendo T compacto podemos suponer que $T(\overline{Y}_n)$ converge a cierta $\overline{Y}$ en $C^1(\overline{\Omega}, R^3)$. Luego $\overline{Y}_n \longrightarrow \overline{Y}$, y se deduce que $\overline{Y}$ es un punto fijo de T.

El próximo teorema muestra que, bajo ciertas condiciones, también el ínfimo global se alcanza. Antes de enunciarlo, definiremos una noción de oscilación de la función H en un punto:

Definición

Sea E *un entorno de* $\overline{Y}$ *en* $C^1(\overline{\Omega}, R^3)$. *Llamaremos oscilación de* H *sobre* $\overline{Y}$ *en* E *al valor*

$$osc_E(H(\overline{Y})) = \sup_{\overline{X} \in E} \|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v) - H(u,v,\overline{Y},\overline{Y}_u,\overline{Y}_v)\|_p$$

Es claro que si E es acotado entonces $osc_E(H(\overline{Y})) < \infty$: por ejemplo, se cumple que $osc_E(H(\overline{Y})) \leq 2\|H\|_{\infty,\overline{\Omega}\times K}$ para cierto conjunto $K \subset (R^3)^3$ compacto suficientemente grande.

A continuación veremos que si $T(\overline{Y})$ está suficientemente cerca de $\overline{Y}$ y tanto H como $osc_E(H(\overline{Y}))$ son suficientemente pequeños en un entorno de $\overline{Y}$, la ecuación (H) tiene solución. Más precisamente:

TEOREMA 2.1.3

Sean $2 < p < \infty$, $g \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ y T, c_1, c como en el Teorema 2.1.1. Dada $\overline{Y} \in C^1(\overline{\Omega}, R^3)$, definimos

$$R(\overline{Y}) = \|\overline{Y} - T(\overline{Y})\|_{1,\infty}$$

$$k(\overline{Y}) = \sup_{\|\overline{X}-\overline{Y}\|_{1,\infty}\leq R} \|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{Y}_u\|_p + \|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_v\|_p$$

Supongamos que para cierto $R > 0$ se cumple que

$$2c_1 c\left(Rk(\overline{Y}) + osc_{B_R(\overline{Y})}(H(\overline{Y}))\|\overline{Y}_u \wedge \overline{Y}_v\|_\infty\right) \leq R - R(\overline{Y})$$

Entonces existe al menos una solución de (H) en la bola cerrada $B_R(\overline{Y}) \subset C^1(\overline{\Omega}, R^3)$.

<u>*Demostración*</u>

Como vimos en el Teorema 2.1.1, para $X = T(\overline{X})$, $Y = T(\overline{Y})$, vale

$$\|X - Y\|_{1,\infty} \leq 2c_1 c\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v - H(u,v,\overline{Y},\overline{Y}_u,\overline{Y}_v)\overline{Y}_u \wedge \overline{Y}_v\|_p \leq$$

$$\leq 2c_1 c(\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)(\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v - \overline{Y}_u \wedge \overline{Y}_v)\|_p$$

$$+\|(H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v) - H(u,v,\overline{Y},\overline{Y}_u,\overline{Y}_v))\overline{Y}_u \wedge \overline{Y}_v\|_p) =$$

$$2c_1 c(\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)((\overline{X}_u - \overline{Y}_u) \wedge \overline{X}_v + \overline{Y}_u \wedge (\overline{X}_v - \overline{Y}_v))\|_p$$

$$+\|(H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v) - H(u,v,\overline{Y},\overline{Y}_u,\overline{Y}_v))\overline{Y}_u \wedge \overline{Y}_v\|_p) \leq$$

$$2c_1 c(\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_v\|_p\|\overline{X}_u - \overline{Y}_u\|_\infty$$

$$+\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{Y}_u\|_p\|\overline{X}_v - \overline{Y}_v\|_\infty$$

$$+\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v) - H(u,v,\overline{Y},\overline{Y}_u,\overline{Y}_v)\|_p\|\overline{Y}_u \wedge \overline{Y}_v\|_\infty)$$

Luego, si $\|\overline{X}-\overline{Y}\|_{1,\infty} \leq R$, resulta

$$\|X-\overline{Y}\|_{1,\infty} \leq \|X-Y\|_{1,\infty} + \|Y-\overline{Y}\|_{1,\infty}$$

$$\leq 2c_1c\left(Rk(\overline{Y}) + osc_{B_R(\overline{Y})}(H(\overline{Y}))\|\overline{Y}_u \wedge \overline{Y}_v\|_\infty\right) + R(\overline{Y}) \leq R$$

Es decir,

$$T(B_R(\overline{Y})) \subset B_R(\overline{Y})$$

Además, por el teorema 2.1.1, T es compacto, de donde se deduce por el teorema 1.2.2 (Schauder) que T tiene al menos un punto fijo en $B_R(\overline{Y})$.

Observación

Claramente, el teorema anterior también es válido si definimos

$k(\overline{Y}) = \sup_{\|\overline{X}-\overline{Y}\|_{1,\infty}\leq R} \|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_u\|_p + \|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{Y}_v\|_p$

Considerando el caso $\overline{Y} = g$ podemos deducir el siguiente corolario:

Corolario 2.1.4

Sea $2 < p < \infty$, *y sea* $g \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ *armónica. Supongamos que para cierto* $R > 0$ *vale, para todo* $\overline{X} \in B_R(g)$:

$$2c_1c\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_u\|_p \leq \frac{R}{R+\|\nabla g\|_{1,\infty}}$$

o bien

$$2c_1c\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_v\|_p \leq \frac{R}{R+\|\nabla g\|_{1,\infty}}$$

Entonces existe al menos una solución de (H) en $B_R(g)$.

<u>*Demostración*</u>

Como en el teorema anterior obtenemos, para $\|\overline{X}-g\|_{1,\infty} \leq R$:

$$\|X-g\|_{1,\infty} \leq 2c_1c\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v\|_p$$

Es decir,

$$\|X-g\|_{1,\infty} \leq 2c_1c\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_u\|_p\|\overline{X}_v\|_\infty$$

$$\leq 2c_1c\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_u\|_p(R+\|\nabla g\|_{1,\infty})$$

y también

$$\begin{aligned}\|X-g\|_{1,\infty} &\leq 2c_1c\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_v\|_p\|\overline{X}_u\|_\infty\\ &\leq 2c_1c\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_v\|_p(R+\|\nabla g\|_{1,\infty})\end{aligned}$$

de donde la demostración se sigue en forma inmediata.

OBSERVACIÓN

Dadas $H \in C(\overline{\Omega} \times (R^3)^3)$ $g \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$, *podemos considerar los conjuntos:*

$$S_H = \{g \in W^{2,p}(\Omega, R^3)/(H) \text{ tiene solución}\}$$

$$S_g = \{H \in C(\overline{\Omega} \times (R^3)^3)/(H) \text{ tiene solución}\}$$

Es inmediato que S_H *y* S_g *son no vacíos, pues siempre vale que* X *es solución en los siguientes casos:*

i) $X = g$, *con* $g(u,v) = (ru+sv)A + C$ *con* $r,s \in R$, $A,C \in R^3$ *fijos.*

ii) $H(u,v,X,X_u,X_v) = 0$ *en* Ω, *en donde* $X \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ *es la única función armónica tal que* $X = g$ *en* $\partial\Omega$.

En los próximos corolarios veremos que si H *cumple ciertas condiciones,* S_H *contiene otros elementos aparte de los mencionados: más aun, veremos que* S_H *es un entorno del* 0 *en* $W^{2,p}(\Omega, R^3)$. *Del mismo modo,* S_g *es entorno de* 0 *en* $C(\overline{\Omega}\times(R^3)^3)$ *para cualquier* g *(con la topología usual de convergencia uniforme sobre compactos).*

OBSERVACIÓN

Para H *constante, un resultado de Hildebrandt [H2] asegura la existencia de soluciones débiles de (H) bajo la hipótesis* $|H|\|g\|_\infty < 1$. *Sin embargo, si* X *es solución de (H),* $Y = X + k$ *es solución de la misma ecuación con dato de borde* $g + k$ *para cualquier constante* k, *de modo que la hipótesis de Hildebrandt puede reemplazarse por la siguiente condición, más débil :* $|H|\|g-k\|_\infty < 1$ *para alguna constante* k.

De la misma forma, para el caso general probaremos en realidad que bajo las condiciones mencionadas S_H *es entorno de cualquier constante en* $W^{2,p}(\Omega, R^3)$. *Observemos que* $g \in S_H$ *si y sólo si* $g + c \in S_{H_c}$ *en donde* $H_c(u,v,x,y,z) = H(u,v,x+c,y,z)$.

COROLARIO 2.1.5

Sean c_1, c las constantes de los teoremas anteriores, $2 < p < \infty$, y supongamos que

$$H = \sup_{\overline{X} \in C^1(\overline{\Omega}, R^3)} \|H(u, v, \overline{X}, \overline{X}_u, \overline{X}_v)\|_p < \infty$$

Entonces (H) tiene solución para toda $g \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ armónica tal que $\|\nabla g\|_\infty \leq \dfrac{1}{8c_1cH}$.

<u>*Demostración*</u>

Procedemos como en el teorema anterior: para $\|\overline{X} - g\|_{1,\infty} \leq R$,

$$\|X - g\|_{1,\infty} \leq 2c_1c\|H(u, v, \overline{X}, \overline{X}_u, \overline{X}_v)\|_p\|\overline{X}_u\|_\infty\|\overline{X}_v\|_\infty \leq 2c_1cH(R + \|\nabla g\|_\infty)^2$$

Como vimos antes, para aplicar el teorema de Schauder bastará pedir que $2c_1cH(R + \|\nabla g\|_\infty)^2 \leq R$ para algún R, es decir, que la parábola

$$R^2 + (2\|\nabla g\|_\infty - \frac{1}{2c_1cH})R + \|\nabla g\|_\infty^2$$

tenga alguna raíz positiva. Como se ve fácilmente, ésto equivale a decir que el discriminante $(2\|\nabla g\|_\infty - \dfrac{1}{2c_1cH})^2 - 4\|\nabla g\|_\infty^2$ sea mayor o igual a 0, es decir, $\|\nabla g\|_\infty \leq \dfrac{1}{8c_1cH}$.

OBSERVACIÓN

El corolario 2.1.5 prueba en particular que S_H es entorno de cualquier constante k en $W^{2,p}(\Omega, R^3)$. En efecto, basta considerar la aplicación continua $X \longrightarrow g$, en donde $g \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ es la única que satisface $\Delta g = 0$ en Ω, $g = X$ en $\partial\Omega$, y luego tomar la preimagen del conjunto $\{g \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ armónica $/\|\nabla g\|_\infty \leq \dfrac{1}{8c_1cH}\}$, entorno de k en $W^{2,p}(\Omega, R^3)$.

El corolario 2.1.5 requiere que la función φ dada por $\varphi(\overline{X}) = H(u, v, \overline{X}, \overline{X}_u, \overline{X}_v)$ sea acotada sobre $W^{2,p}(\Omega, R^3)$, cosa que claramente ocurre cuando H es acotada. En caso de que φ no sea acotada, un resultado similar puede obtenerse si la oscilación de H en g tiene un crecimiento tipo lineal, es decir:

COROLARIO 2.1.6

Sean c_1, c *las constantes de los teoremas anteriores,* $g \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ *armónica,* $2 < p < \infty$ *, y supongamos que*

$$0 < H' = \sup_{\overline{X} \in C^1(\overline{\Omega}, R^3), \overline{X} \neq g} \frac{\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v) - H(u,v,g,g_u,g_v)\|_p}{\|\overline{X} - g\|_{1,\infty}} < \infty$$

Definimos $h = \|H(u,v,g,g_u,g_v)\|_p$ *,* $R_0 = \dfrac{-h + \sqrt{h^2 + 8hH'\|\nabla g\|_\infty}}{4H'}$ *, y la función*

$$f(R) = (H' + \frac{h}{R})(R + \|\nabla g\|_\infty)^2$$

Luego, si $f(R_0) \leq \dfrac{1}{2c_1 c}$ *, (H) tiene solución en* $W^{2,p}(\Omega, R^3)$ *.*

OBSERVACIÓN

En particular, si H *es una función globalmente Lipschitz con respecto a* X, X_u *y* X_v *, (H) tiene solución para cualquier* g *suficientemente cercana a una constante. En efecto, vemos que*

$$f(R_0) = (H'R_0 + h)(R_0 + 2\|\nabla g\|_\infty + \frac{\|\nabla g\|_\infty^2}{R_0}) \longrightarrow 0$$

si $\|\nabla g\|_\infty \longrightarrow 0$

Por ejemplo, esta situación se da si H *es derivable respecto a* X, X_u *y* X_v *, con derivadas acotadas, pues por el teorema de valor medio de Lagrange vale:*

$$\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v) - H(u,v,g,g_u,g_v)\|_p \leq k\|DH\|_\infty \|\overline{X} - g\|_{1,\infty}$$

para cierta constante k *.*

<u>*Demostración del corolario 2.1.6*</u>

Como en el teorema anterior, para $\|\overline{X} - g\|_{1,\infty} \leq R$

$$\|X - g\|_{1,\infty} \leq 2c_1 c(\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v) - H(u,v,g,g_u,g_v)\|_p$$

$$+\|H(u,v,g,g_u,g_v)\|_p)\|\overline{X}_u\|_\infty \|\overline{X}_v\|_\infty \leq 2c_1 c(H'R + h)(R + \|\nabla g\|_\infty)^2$$

Luego, una condición suficiente para que (H) admita una solución es que

$$2c_1 c(H'R + h)(R + \|\nabla g\|_\infty)^2 \leq R$$

para algún $R>0$ es decir, $f(R)\leq \dfrac{1}{2c_1c}$ para algún $R>0$.

El resultado es ahora inmediato, pues un simple cálculo muestra que f alcanza un único mínimo en el valor

$$R_0=\frac{-h+\sqrt{h^2+8hH'\|\nabla g\|_\infty}}{4H'}>0$$

OBSERVACIÓN

Para que valga $f(R_0)\leq \dfrac{1}{2c_1c}$, *es también necesaria la siguiente condición:*

$$2\|\nabla g\|_\infty h+H'\|\nabla g\|_\infty^2<\frac{1}{2c_1c}$$

Los dos corolarios anteriores se reformulan si ahora suponemos g fija:

COROLARIO 2.1.7

Sean c_1, c *las constantes de los teoremas anteriores,* $2<p<\infty$, $g\in W^{2,p}(\Omega,R^3)$ *armónica. Entonces (H) tiene solución para toda* H *que verifica cualquiera de las siguientes condiciones:*

i) $\sup_{\overline{X}\in C^1(\overline{\Omega},R^3)}\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\|_p\leq \dfrac{1}{8c_1c\|\nabla g\|_\infty}$, *o bien*

ii) $f(R_0)\leq \dfrac{1}{2c_1c}$, *con* f *y* R_0 *como en el corolario anterior.*

EJEMPLO

Tomando el máximo de los dos valores, podemos suponer $h=H'$, *y entonces* $R_0=\dfrac{-1+\sqrt{1+8\|\nabla g\|_\infty}}{4}$. *Luego, la condición que debe verificarse es:*

$$f(R_0)=h(1+\frac{1}{R_0})(R_0+1)^2\leq\frac{1}{2c_1c}$$

Por ejemplo, si $\|\nabla g\|_\infty=1$ *basta tomar* $h\leq\dfrac{2}{27c_1c}$.

En el siguiente resultado se elimina toda clase de condición sobre $\|g\|_{1,\infty}$:

COROLARIO 2.1.8

Sean c_1, c *las constantes de los teoremas anteriores,* $2<p<\infty$, $g\in W^{2,p}(\Omega,R^3)$, *y supongamos que existen constantes* $k, R_0>0$ *tales que* $k<\dfrac{1}{2c_1c}$, *y*

$$\|H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_u\wedge\overline{X}_v\|_p\leq k\|\overline{X}\|_{1,\infty}$$

para todo $\overline{X}$ *tal que* $\|\overline{X}\|_{1,\infty} \geq R_0$.

Entonces existe al menos una solución de (H) en $W^{2,p}(\Omega, R^3)$.

<u>*Demostración*</u>

Sin perder generalidad, puede suponerse que g es armónica. Como en el teorema anterior, si $T(\overline{X}) = X$ vale

$$\|X - g\|_{1,\infty} \leq 2c_1c\|H(u, v, \overline{X}, \overline{X}_u, \overline{X}_v)\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v\|_p$$

Para $\|\overline{X}\|_{1,\infty} \geq R_0$, resulta

$$\|X - g\|_{1,\infty} \leq 2c_1ck\|\overline{X}\|_{1,\infty} \leq 2c_1ck\left(\|\overline{X} - g\|_{1,\infty} + \|g\|_{1,\infty}\right)$$

Si además $\|\overline{X} - g\|_{1,\infty} \leq R$ siendo $2c_1ck < 1$ se cumple que

$$\|X - g\|_{1,\infty} \leq 2c_1ck(R + \|g\|_{1,\infty}) \leq R$$

para R suficientemente grande.

Por otra parte, para $\|\overline{X}\|_{1,\infty} \leq R_0$ vale

$$\|X - g\|_{1,\infty} \leq 2c_1c\|H(u, v, \overline{X}, \overline{X}_u, \overline{X}_v)\overline{X}_u \wedge \overline{X}_v\|_p \leq R'$$

para cierto R' , y el resultado se deduce tomando $R > R'$ suficientemente grande.

OBSERVACIÓN

Como caso particular, el teorema anterior es válido cuando el soporte de $H = H(u, v, x, y, z)$ *es acotado respecto de las dos últimas coordenadas. También vale, por ejemplo, en cualquier* H *de la forma* $\frac{H_1(u,v,X)}{1+|\nabla X|^2}$, *con* $\|H_1(u, v, X)\|_\infty \leq \|X\|_\infty$.

Veremos ahora un criterio de existencia, similar a un caso particular del teorema de Leray-Schauder:

TEOREMA 2.1.9

Sea (H_σ) *la ecuación dada por*

$$(H_\sigma)\begin{cases} \Delta X = 2\sigma H(u, v, X, X_u, X_v)X_u \wedge X_v & \text{en} \quad \Omega \\ X = \sigma g \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

y supongamos que existe $M > 0$ *tal que si* $X \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ *es solución de* (H_σ) *para algún* $\sigma \in (0,1)$, *vale* $\|X\|_{1,\infty} \leq M$. *Entonces (H) tiene solución en* $C^1(\overline{\Omega}, R^3)$.

Demostración

Sea T el operador compacto definido al comienzo del capítulo. Para cualquier $M' > M$ fijo, definimos el operador T', dado por

$$T'X = \begin{cases} TX & \text{si } \|TX\|_{1,\infty} \leq M' \\ \dfrac{M'TX}{\|TX\|_{1,\infty}} & \text{si } \|TX\|_{1,\infty} > M' \end{cases}$$

Claramente, T' es compacto, y además $T'(B_{M'}(0)) \subset (B_{M'}(0))$. Por el teorema 1.2.2, T' tiene un punto fijo X. Si X no es punto fijo de T, entonces $X = \sigma TX$, con $\sigma = \dfrac{M'}{\|TX\|_{1,\infty}} < 1$, y X es solución de (H_σ). Además $\|X\|_{1,\infty} = M'$, lo que es absurdo.

En la situación del teorema anterior, no es preciso que todas las soluciones de (H_σ) para $0 < \sigma < 1$ estén acotadas, si eso ocurre para alguna sucesión de soluciones de (H_{σ_n}), con $\sigma_n \longrightarrow 1$. Más en general, se tiene el siguiente resultado:

TEOREMA 2.1.10

Sea $X_n \in W^{1,\infty}(\Omega, R^3)$ *una sucesión acotada tal que* X_n *es solución débil del problema* (H) *para ciertas* $H_n \in C(\overline{\Omega} \times (R^3)^3), R)$, $g_n \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ *tales que* $H_n \longrightarrow H$ *y* $g_n \longrightarrow g$. *Entonces (H) tiene solución en* $W^{2,p}(\Omega, R^3)$ *para* H *y* g.

Demostración

En primer lugar, observemos que $X_n \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$, ya que si Z_n es es el único elemento de $W^{2,p}(\Omega, R^3)$ que verifica

$$\begin{cases} \Delta Z_n = 2H_n(u, v, X_n, X_{n_u}, X_{n_v})X_{n_u} \wedge X_{n_v} & \text{en} \quad \Omega \\ Z_n = g_n \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

se cumple débilmente que $\Delta(Z_n - X_n) = 0$ y como $Z_n - X_n = 0$ en $\partial\Omega$, se deduce que $Z_n = X_n$.

Por otra parte, por compacidad podemos suponer que $TX_n \longrightarrow X \in C^1(\overline{\Omega}, R^3)$. Además, $\Delta(TX_n - X_n) =$

$$2(H(u, v, X_n, X_{n_u}, X_{n_v})X_{n_u} \wedge X_{n_v} - H_n(u, v, X_n, X_{n_u}, X_{n_v})X_{n_u} \wedge X_{n_v}) \longrightarrow 0$$

uniformemente en $\overline{\Omega}$, de donde

$$\|TX_n - X_n\|_{1,\infty} \leq \|g - g_n\|_{1,\infty} + c_1c(\|\Delta(TX_n - X_n)\|_p + \|\Delta(g - g_n)\|_p) \longrightarrow 0$$

En consecuencia, $X_n \longrightarrow X$ en $C^1(\overline{\Omega}, R^3)$ y luego $TX = X$.

OBSERVACIÓN

Bajo ciertas condiciones (ver [B-G]) se sabe que si X *es una solución débil de (H), entonces* $X \in C(\overline{\Omega}, R^3) \cap C^2(\Omega, R^3)$. *En el teorema anterior hemos visto que si* $X \in W^{1,\infty}(\overline{\Omega}, R^3)$ *entonces* $X \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$. *Veremos a continuación que con algunas hipótesis adicionales, resulta* $X \in C^2(\overline{\Omega}, R^3)$.

TEOREMA 2.1.11

Sea $X \in W^{1,\infty}(\Omega, R^3)$ *una solución débil de (H), y supongamos, para cierto* $k \geq 0$, *que* $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$, $H \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega} \times (R^3)^3, R)$ $g \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega}, R^3)$ *para algún* α, *con* $0 < \alpha < 1$. *Entonces* $X \in C^{k+2,\beta}(\overline{\Omega}, R^3)$ *para todo* $\beta < \alpha$.

<u>*Demostración*</u>

Caso $k = 0$: por inmersión de Sobolev y el teorema anterior, para cualquier p tal que $\alpha \leq \gamma \leq 1 - \frac{2}{p}$ vale $X \in W^{2,p}(\Omega, R^3) \hookrightarrow C^{1,\gamma}(\overline{\Omega}, R^3)$. En consecuencia, tomando $\gamma = \frac{\beta}{\alpha}$ resulta $\Delta X = f \in C^{\beta}(\overline{\Omega}, R^3)$. Por el teorema 6.14 en [G-T], la ecuación $\Delta Z = f$ en Ω, $Z = g$ en $\partial\Omega$ tiene solución única en $C^{2,\beta}(\overline{\Omega}, R^3)$, y el resultado se deduce entonces de la unicidad en el teorema 1.3.1.

El caso general es ahora inmediato, por el teorema 6.19 en [G-T].

Para finalizar esta parte, estudiaremos al conjunto $S \subset C(\overline{\Omega} \times (R^3)^3, R) \times W^{2,p}(\Omega, R^3)$ definido por

$$S = \{(H, g) \in C(\overline{\Omega} \times (R^3)^3), R) \times W^{2,p}(\Omega, R^3) / \text{(H) tiene solución}\}$$

Es inmediato verificar que

1) S y S^c no tienen puntos aislados, ya que si $(H, g) \in S$, vale por ejemplo que:

i) $(H_c, g + c) \in S$, en donde H_c es la función definida por $H_c(u, v, x, y, z) = H(u, v, x + c, y, z)$

ii) $(H_\alpha, \alpha g) \in S$ en donde H_α es la función definida por $H_\alpha(u,v,x,y,z) = \frac{1}{\alpha}H(u,v,\frac{x}{\alpha},\frac{y}{\alpha},\frac{z}{\alpha})$. En efecto, si X es solución de (H) para (H,g), $Y = \alpha X$ es solución de (H) para $(H_\alpha, \alpha g)$.

OBSERVACIÓN

Como caso particular de ii), si H es par respecto de las últimas tres coordenadas, vale que $(H,g) \in S \iff (-H,-g) \in S$, es decir, sobre el conjunto de las H pares S resulta simétrico con respecto al origen.

2) S es unión numerable de cerrados: claramente, puede pensarse a S como unión de los conjuntos $S_M = \{(H,g) \in C(\overline{\Omega}, R^3) \times W^{2,p}(\Omega, R^3)/$ (H) admite una solución $X \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$, con $\|X\|_{2,p} \leq M\}$.

La prueba de que S_M es cerrado es inmediata, por el teorema 2.1.10.

3) S es entorno de $(0,k)$ para todo $k \in R$, por el corolario 2.1.5.

El próximo teorema muestra condiciones suficientes sobre H_0 para que un punto (H_0, g_0) sea interior:

TEOREMA 2.1.12

Sea $(H_0, g_0) \in S$, y sea $X_0 \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$ una solución de (H) para (H_0, g_0) tal que se verifica alguna de las siguientes condiciones:

i) $osc_{B_R(X_0)}(H_0(X_0)) \leq \lambda$ para ciertos R y λ suficientemente pequeños, y $\|H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})X_{0_u}\|_\infty + \|H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})X_{0_u}\|_\infty < \frac{1}{2c}$, en donde c es la constante de la desigualdad de Poincaré

ii) H_0 es continuamente derivable en los puntos $(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})$ con respecto a X, X_u y X_v, y vale

a) $C \geq 0$, en donde C es la la matriz definida por

$$CY = (\frac{\partial H_0}{\partial X}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y)X_{0_u} \wedge X_{0_v}$$

b) $\|A\|_\infty + \|B\|_\infty < \frac{1}{c}$, en donde las matrices $A, B \in C(\overline{\Omega}, R^{3\times 3})$ se definen por:

$$AY = -2(H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y \wedge X_{0_v} + (\frac{\partial H_0}{\partial X_u}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y)X_{0_u} \wedge X_{0_v})$$

$$BY = -2(H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})X_{0_u} \wedge Y + (\frac{\partial H_0}{\partial X_v}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y)X_{0_u} \wedge X_{0_v})$$

y c es la constante de la desigualdad de Poincaré.

Entonces (H_0, g_0) es un punto interior de S.

<u>*Demostración*</u>

Consideremos el par (H, g) con $\|g - g_0\|_{2,p} < \delta$ y $\|H - H_0\|_{\infty,K} < \delta$ para cierto compacto K que contiene a $X_0(\overline{\Omega} + B_R(0)$. Encontrar una solución X de (H) equivale, tomando $Y = X - X_0$, a encontrar una solución de la ecuación

$$\begin{cases} \Delta Y = 2H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v)(Y+X_0)_u \wedge (Y+X_0)_v \\ \qquad\qquad -2H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})X_{0_u} \wedge X_{0_v} \text{ en } \Omega \\ Y = g - g_0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Definiendo el operador $S(Y) = 2H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})(X_{0_u} \wedge Y_v + Y_u \wedge X_{0_v})$, esta ecuación se transforma en:

$$LY = \Delta Y - S(Y) = 2H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v)Y_u \wedge Y_v$$

$$+2(H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v) - H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v}))(X_{0_u} \wedge Y_v + Y_u \wedge X_{0_v})$$

$$+2(H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v) - H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v}))X_{0_u} \wedge X_{0_v} = F(Y)$$

Si vale i), podemos en forma análoga al teorema 2.1.1, definir $T(\overline{Y}) = Y$ en donde Y es la única solución del problema $LY = F(\overline{Y})$ en Ω, $Y = 0$ en $\partial\Omega$. El operador L satisface las hipótesis de la observación 1.3.7, T es compacto, y además vale para $\|\overline{Y}\|_{1,\infty} \leq R$ y cierta constante c_0 que

$$\|T(\overline{Y})\|_{1,\infty} \leq \|g - g_0\|_{1,\infty} + c_1 c_0(\|L(T(\overline{Y})\|_p + \|L(g - g_0)\|_p) \leq k\delta + c_1 c_0 \|F(\overline{Y})\|_p$$

para cierta constante k. Por otro lado, escribiendo

$$H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v) - H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v}) =$$

$$H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v) - H_0(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v)$$

$$+H_0(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v) - H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})$$

obtenemos que $\|F(\overline{Y})\|_p \leq k_1 R^2 + k_2(\delta + \lambda)R + k_3(\delta + \lambda)$ para ciertas constantes k_1, k_2, k_3, y entonces $\|T(\overline{Y})\|_{1,\infty} \leq R$ si λ, R y δ son suficientemente pequeños.

Por otro lado, si H_0 es continuamente derivable respecto de X, X_u, X_v podemos escribir para cada $(u,v) \in \Omega$, $Y = X - X_0 \in C^1(\overline{\Omega}, R^3)$:

$$H_0((u,v,X,X_u,X_v) - H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v}) = \frac{\partial H_0}{\partial X}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y$$

$$+\frac{\partial H_0}{\partial X_u}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y_u+\frac{\partial H_0}{\partial X_v}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y_v+\psi(Y)$$

y es fácil verificar que $\dfrac{\|\psi(Y)\|_\infty}{\|Y\|_{1,\infty}} \longrightarrow 0$ para $Y \longrightarrow 0$. Entonces, la ecuación se transforma en

$$L'Y=\Delta Y-S(Y)-2(\frac{\partial H_0}{\partial X}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y$$

$$+\frac{\partial H_0}{\partial X_u}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y_u+\frac{\partial H_0}{\partial X_v}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y_v)X_{0_u}\wedge X_{0_v}$$

$$=2H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v)Y_u\wedge Y_v$$

$$+2(H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v)-H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v}))(X_{0_u}\wedge Y_v+Y_u\wedge X_{0_v})$$

$$+2\psi(Y)X_{0_u}\wedge X_{0_v}=F'(Y)$$

Si vale ii), el operador $L'Y=\Delta X+AY_u+BY_v-2CY$ satisface las hipótesis de la observación 1.3.7 y, como antes, se define un operador $T':\overline{Y}\longrightarrow Y$. Para $\|Y\|(1,\infty \leq R$, usando el teorema de Lagrange para acotar $H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v)-H_0(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})$, se deduce que

$$\|T'(\overline{Y})\|_{1,\infty}\leq\|g-g_0\|_{1,\infty}+k_1\delta+k_2\delta R+k_3R^2$$

para ciertas constantes k_1,k_2,k_3. Tomando δ y R adecuados, el resultado se sigue inmediatamente.

Observación

En el teorema anterior, parte ii), el resultado también valdría por el teorema 1.3.1 bajo la condición $2C\geq\mu$ *para cierto* $\mu>0$ *suficientemente grande. Sin embargo, es fácil ver que esta condición nunca pude verificarse. En efecto, si para* (u,v) *fijo escribimos* $CY=((h_1,h_2,h_3)Y)(x_1,x_2,x_3)$, *tomando* $Y=(1,t,0)$, *de la condición* $2CY.Y\geq\mu Y.Y$ *se obtiene que* $(h_1+th_2)(x_1+tx_2)>0$ *para todo* t. *Esto implica que* $0>(h_1x_2+h_2x_1)^2-4h_1h_2x_1x_2=(h_1x_2-h_2x_1)^2$, *lo que es absurdo. El mismo razonamiento muestra también que la condición* $C\geq 0$ *implica que* $h_ix_j=h_jx_i$, *y que* $h_ix_i\geq 0$ *para* $1\leq i,j\leq 3$, *y un simple cálculo permite ver que estas condiciones necesarias son también suficientes.*

Condiciones análogas al teorema 1.3.1 pueden plantearse en caso de que $A,B\in C^1(\overline{\Omega},R)$ *(por ejemplo, si* H_0 *y* X_0 *son de clase* C^2 *), pues entonces el operador* L' *se escribe:* $L'Y=\Delta Y+(AY)_u+(BY)_v-(2C+A_u+B_v)Y$. *Como* $\int((AY)_u+$

$(BY)_v)Y = -\int AYY_u + BYY_v$, *una condición suficiente para que valga el teorema es que* $2C + A_u + B_v \geq \mu$ *para algún* $\mu > \frac{1}{4}(\|A\|_\infty + \|B\|_\infty)^2$.

También se pueden reemplazar las hipótesis sobre A, B *y* C *por la condición de que el dominio* Ω *sea suficientemente pequeño.*

2.2. Ecuación de curvatura media para superficies no paramétricas

Buscaremos ahora soluciones de la ecuación

$$
(\mathrm{NP}) \begin{cases} (1+u_y^2)u_{xx} + (1+u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = \\ \qquad\qquad 2H(x,y,u,u_x,u_y)\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{en } \Omega \\ u = g \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}
$$

en donde $H : \overline{\Omega} \times R^3 \longrightarrow R$ es una función continua, y $\partial\Omega \in C^{1,1}$.

Procederemos como en la primera parte de este capítulo, para lo cual efectuaremos una linealización del problema definiendo, para $v \in C^1(\overline{\Omega}, R)$ fija, el operador $L_v : W^{2,p}(\Omega, R) \longrightarrow L^p(\Omega, R)$ dado por

$$L_v u = (1+v_y^2)u_{xx} + (1+v_x^2)u_{yy} - 2v_x v_y u_{xy}$$

El operador L_v es estrictamente elíptico, ya que sus autovalores son $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 1 + v_x^2 + v_y^2$.

Antes de enunciar un resultado análogo al teorema 2.1.1 debemos verificar que la constante del lema 1.3.2 para el operador L_v puede elegirse de modo tal que sirva en un entorno de v:

LEMA 2.2.1

Sean $\overline{v} \in C^1(\overline{\Omega}, R)$, $2 < p < \infty$. *Existe entonces* $R_0 > 0$ *y una constante* $c = c(\overline{v})$ *tal que si* $\|\nabla v - \nabla \overline{v}\|_\infty \leq R_0$ *entonces*

$$\|u\|_{2,p} \leq c\|L_v u\|_p$$

para toda $u \in W^{2,p}(\Omega, R) \cap W_0^{1,p}(\Omega, R)$.

Demostración

Claramente, el operador $L_{\overline{v}}$ satisface las hipótesis del lema 1.3.2, y entonces existe una constante $\overline{c}$ tal que $\|u\|_{2,p} \leq \overline{c}\|L_{\overline{v}} u\|_p$ para toda $u \in W^{2,p}(\Omega, R) \cap W_0^{1,p}(\Omega, R)$.

Luego, podemos escribir $L_v u = L_v u - L_{\overline{v}} u + L_{\overline{v}} u$, y vale:

$$\|L_v u\|_p \geq \|L_{\overline{v}} u\|_p - \|(L_v - L_{\overline{v}})u\|_p \geq \frac{1}{\overline{c}}\|u\|_{2,p} - \|(L_v - L_{\overline{v}})u\|_p$$

Siendo

$$\|(L_v - L_{\overline{v}})u\|_p = \|(v_y^2 - \overline{v}_y^2)u_{xx} + (v_x^2 - \overline{v}_x^2)u_{yy} - 2((v_x - \overline{v}_x)v_y + \overline{v}_x(v_y - \overline{v}_y))u_{xy}\|_p$$

se obtiene que $\|(L_v - L_{\overline{v}})u\|_p \leq 4(\|\nabla v\|_\infty + \|\nabla\overline{v}\|_\infty)\|\nabla v - \nabla\overline{v}\|_\infty\|u\|_{2,p} \leq 4(2\|\overline{v}\|_\infty + R_0)\|\nabla v - \nabla\overline{v}\|_\infty\|u\|_{2,p}$ y basta tomar R_0 tal que $(2\|\nabla\overline{v}\|_\infty + R_0)R_0 < \dfrac{1}{4\overline{c}}$.

Observación

El lema anterior muestra que la constante c *del lema 1.3.2 para el operador* $L_{\overline{v}}$ *puede elegirse de modo tal que* $c : C^1(\overline{\Omega}, R^3) \longrightarrow R$ *resulte una función semicontinua superiormente. Para ello, basta observar que si* c_n *es una sucesión decreciente de constantes que satisfacen la desigualdad del lema 1.3.2 para* $L_{\overline{v}}$ *entonces* $c = \lim c_n$ *también la satisface. En consecuencia, puede elegirse* $c = c(\overline{v})$ *mínimo, y la función así definida satisface lo pedido.*

Notemos también que si $\overline{v}$ *es constante,* $c(\overline{v}) = c(\Delta)$ *y en el lema 2.2.1 alcanza con pedir* $R_0^2 < \dfrac{1}{4\overline{c}}$

Por el teorema 1.3.1, estamos ahora en condiciones de definir, para $\overline{u} \in C^1(\overline{\Omega}, R)$ fija, $g \in W^{2,p}(\Omega, R)$ ($2 < p < \infty$), el operador $T : C^1(\overline{\Omega}, R) \longrightarrow C^1(\overline{\Omega}, R)$ dado por $T\overline{u} = u$, en donde u es la única solución del problema

$$\begin{cases} L_{\overline{u}}u = 2H(x, y, \overline{u}, \overline{u}_x, \overline{u}_y)\left(1 + |\nabla\overline{u}|^2\right)^{\frac{3}{2}} & \text{en} \quad \Omega \\ u = g \quad \text{en } \partial\Omega \end{cases}$$

Sea $\overline{u} \in C^1(\overline{\Omega}, R)$ fija. Por el lema anterior, para $\overline{v} \in B_R(\overline{u})$ con R suficientemente pequeño, se cumple, siendo $u = T\overline{u}$, $v = T\overline{v}$:

$$\|v - u\|_{2,p} \leq c\|L_{\overline{v}}(v - u)\|_p \leq c(\|L_{\overline{v}}v - L_{\overline{u}}u\|_p + \|(L_{\overline{u}} - L_{\overline{v}})u)\|_p)$$

Como ya hemos visto, $\|(L_{\overline{u}} - L_{\overline{v}})u)\|_p \leq k\|\overline{v} - \overline{u}\|_{1,\infty}\|u\|_{2,p}$ para cierta constante $k = k(\overline{u})$, y también vale

$$\|L_{\overline{v}}v - L_{\overline{u}}u\|_p = 2\|H(x, y, \overline{v}, \overline{v}_x, \overline{v}_y)\left(1 + |\nabla\overline{v}|^2\right)^{\frac{3}{2}} - H(x, y, \overline{u}, \overline{u}_x, \overline{u}_y)\left(1 + |\nabla\overline{u}|^2\right)^{\frac{3}{2}}\|_p$$

$$\leq 2\|(H(x, y, \overline{v}, \overline{v}_x, \overline{v}_y) - H(x, y, \overline{u}, \overline{u}_x, \overline{u}_y))\left(1 + |\nabla\overline{v}|^2\right)^{\frac{3}{2}}\|_p$$

$$+\|H(x, y, \overline{u}, \overline{u}_x, \overline{u}_y)(\left(1 + |\nabla\overline{v}|^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1 + |\nabla\overline{u}|^2\right)^{\frac{3}{2}})\|_p$$

Por la inmersión $W^{2,p}(\Omega, R) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}, R)$ se obtiene que T es continuo; más aun, siendo $T(B_R(\overline{u}))$ acotado en $W^{2,p}(\Omega, R)$, resulta compacto en $C^1(\overline{\Omega}, R^3)$. Hemos probado, entonces:

TEOREMA 2.2.2

$T : C^1(\overline{\Omega}, R) \longrightarrow C^1(\overline{\Omega}, R)$ *es un operador continuo, localmente compacto.*

El siguiente teorema da condiciones suficientes para la existencia de soluciones en un entorno de cierta $\overline{u}_0 \in C^1(\overline{\Omega}, R)$. La oscilación de H en un punto $\overline{u} \in C^1(\overline{\Omega}, R)$ se define en forma análoga al caso R^3.

TEOREMA 2.2.3

Sean $2 < p < \infty$, $g \in W^{2,p}(\Omega, R)$ *y* T, c_1 *como en el teorema anterior. Dada* $\overline{u}_0 \in C^1(\overline{\Omega}, R)$, *sean* R_0 *y* $c = c(\overline{u}_0)$ *como en el lema 2.2.1 y* $u_0 = T(\overline{u}_0)$. *Definimos:*

$$R(\overline{u}_0) = \|\overline{u}_0 - u_0\|_{1,\infty}$$

$$k(\overline{u}_0) = \sup_{\|\overline{u}-\overline{u}_0\|_{1,\infty} \leq R} \|(\overline{u}_y + \overline{u}_{0_y})u_{0_{xx}} + (\overline{u}_x + \overline{u}_{0_x})u_{0_{yy}}\|_p + 2(\|\overline{u}_y u_{0_{xy}}\|_p + \|\overline{u}_{0_x} u_{0_{xy}}\|_p)$$

Supongamos que para cierto $0 < R \leq R_0$ *se cumple que*

$$2osc_{B_R(\overline{u}_0)} H(\overline{u}_0)(1 + (\|\nabla \overline{u}_0\|_\infty + R)^2)^{3/2} +$$

$$\left(3\|H(\overline{u}_0)\|_p(1 + (\|\nabla \overline{u}_0\|_\infty + R)^2)^{1/2}(2\|\nabla \overline{u}_0\|_\infty + R) + k(\overline{u}_0)\right) R \leq \frac{1}{c_1 c}(R - R(\overline{u}_0))$$

Entonces existe al menos una solución de (NP) en $B_R(\overline{u}_0) \subset C^1(\overline{\Omega}, R)$.

<u>*Demostración*</u>

Sea $\overline{u}$ tal que $\|\overline{u} - \overline{u}_0\|_{1,\infty} \leq R$, y sea $u = T(\overline{u})$. Se verifica entonces que $\|u - \overline{u}_0\|_{1,\infty} \leq R(\overline{u}_0) + \|u - u_0\|_{1,\infty}$, y además

$$\|u - u_0\|_{1,\infty} \leq c_1 c \|L_{\overline{u}}(u - u_0)\|_p \leq c_1 c(\|L_{\overline{u}} u - L_{\overline{u}_0} u_0\|_p + \|(L_{\overline{u}} - L_{\overline{u}_0})u_0\|_p)$$

Es claro que $\|(L_{\overline{u}} - L_{\overline{u}_0})u_0\|_p \leq k(\overline{u}_0)R$, y también se cumple que

$$L_{\overline{u}}u - L_{\overline{u}_0}u_0 = 2H(x, y, \overline{u}, \overline{u}_x, \overline{u}_y)\left(1 + |\nabla \overline{u}|^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2H(x, y, \overline{u}_0, \overline{u}_{0_x}, \overline{u}_{0_y})\left(1 + |\nabla \overline{u}_0|^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$= 2(H(x, y, \overline{u}, \overline{u}_x, \overline{u}_y) - H(x, y, \overline{u}_0, \overline{u}_{0_x}, \overline{u}_{0_y}))\left(1 + |\nabla \overline{u}|^2\right)^{\frac{3}{2}} +$$

$$2H(x,y,\overline{u}_0,\overline{u}_{0_x},\overline{u}_{0_y})\frac{3}{2}(1+\alpha)^{1/2}(|\nabla\overline{u}|^2-|\nabla\overline{u}_0|^2)$$

para cierto α entre $|\nabla\overline{u}|^2$ y $|\nabla\overline{u}_0|^2$.

Siendo $\|\nabla\overline{u}\|_\infty \leq \|\nabla\overline{u}_0\|_\infty + R$, se cumple por hipótesis que

$$\|u-u_0\|_{1,\infty} \leq R - R(\overline{u}_0),$$

es decir,

$$\|u-\overline{u}_0\|_{1,\infty} \leq \|u-u_0\|_{1,\infty} + \|u_0-\overline{u}_0\|_{1,\infty} \leq R$$

El resultado vale entonces por el teorema 1.2.2 (Schauder).

En la situación del teorema anterior podemos ver que si $\overline{u}_0$ es constante, $k(\overline{u}_0) \leq kR$ para cierta constante k, de donde se deduce que la existencia de soluciones cercanas a $\overline{u}_0$ está asegurada cuando $R(\overline{u}_0)$ y la oscilación de H sobre $\overline{u}_0$ son suficientemente pequeñas. A su vez, una condición suficiente para que $R(\overline{u}_0)$ sea pequeño es que lo sean $g-\overline{u}_0$ y $H(x,y,\overline{u}_0,0,0)$ como lo muestra el siguiente teorema:

TEOREMA 2.2.4

En la situación del teorema 2.2.3, con $\overline{u}_0$ constante, supongamos

$$H(R) = osc_{B_R(\overline{u}_0)}H(\overline{u}_0)(1+R^2)^{3/2} + \|H(x,y,\overline{u}_0,0,0)\|_p \leq \alpha R$$

para cierto $R \leq R_0$ y cierto $\alpha < \frac{1}{2c_1c}$. Entonces (NP) tiene solución para toda $g \in W^{2,p}(\Omega,R)$ armónica suficientemente cerca de $\overline{u}_0$.

Demostración

Basta observar que siendo $L_{\overline{u}_0} = \Delta$ y g armónica, resulta $\|u_0-g\|_{1,\infty} \leq 2c_1c\|H(x,y,\overline{u}_0,0,0)\|_p$, y entonces, para $\|\overline{u}-\overline{u}_0\|_{1,\infty} \leq R$ vale

$$\|u-\overline{u}_0\|_{1,\infty} \leq \|u-u_0\|_{1,\infty} + 2c_1c\|H(x,y,\overline{u}_0,0,0)\|_p + \|g-\overline{u}_0\|_{1,\infty}$$

Como $\overline{u}_0$ es constante, vale

$$\|u-u_0\|_{1,\infty} \leq c_1c(2osc_{B_R(\overline{u}_0)}H(\overline{u}_0)(1+R^2)^{3/2} + k_1R^2)$$

para cierta constante k_1 y el resultado se verifica tomando R y $\|g-\overline{u}_0\|_{1,\infty}$ suficientemente pequeños.

En particular, para $H=0$, el teorema muestra que existe una solución cuando g está suficientemente cerca de cualquier constante. Como no hay ninguna condición sobre la curvatura de $\partial\Omega$, se ve que el resultado de no existencia mencionado en la introducción (ver [G-T], corolario 14.13) no vale para $\| \quad \|_{1,\infty}$. Sin embargo, el mismo resultado muestra que no es posible hallar en este caso un teorema análogo a 2.1.8, en el cual no se pide ninguna condición sobre g ni sobre la curvatura de $\partial\Omega$.

Observación

Para $\Omega = B$, y g constante, sea $r = x^2 + y^2$ y supongamos que $H = H(r,u)$. En tal caso se pueden buscar soluciones de la forma $u = v(r)$, y la ecuación se transforma en el siguiente problema de ecuaciones ordinarias:

$$(*)\begin{cases} 2rv'' + 2v' + 4r(v')^3 = H(r,v)(1 + 4r(v')^2)^{3/2} \\ v(1) = g \end{cases}$$

Por ejemplo, si $g = \dfrac{1}{2}$ y $H(r,u) = \dfrac{1+u}{(1+r^2)^{3/2}}$ se obtiene la solución $v(r) = \dfrac{r}{2}$, que corresponde a la solución $u(x,y) = \dfrac{x^2+y^2}{2}$ del problema original. En el próximo capítulo veremos también que u es la única solución en $C^1(\overline{\Omega}, R)$.

Enunciaremos ahora un resultado de regularidad, cuya demostración es análoga a la del teorema 2.1.11:

Teorema 2.2.5

Sea $u \in W^{2,p}(\Omega, R)$ *una solución de (NP), y supongamos, para cierto* $k \geq 0$, *que* $\partial\Omega \in C^{k+2,\alpha}$, $H \in C^{k,\alpha}(\overline{\Omega} \times R^3, R)$, *y* $g \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega}, R)$ *para* $0 < \alpha \leq 1 - \dfrac{2}{p}$. *Entonces* $u \in C^{k+2,\alpha}(\overline{\Omega}, R)$.

Para finalizar el capítulo veremos un resultado similar al teorema 2.1.12. El conjunto S se define, al igual que en el caso paramétrico, como el conjunto de pares (H,g) tales que (NP) tiene solución.

Teorema 2.2.6

Sea $(H_0, g_0) \in S$, *y sea* $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega, R)$ *una solución de (NP) para* (H_0, g_0) *tal que se verifica*

i) $osc_{B_R(u_0)}(H_0(u_0)) \leq \lambda$ *para ciertos* R, *y* λ *apropiados.*

o bien

ii) H_0 *es continuamente derivable en* $(x, y, u_0, u_{0_x}, u_{0_y})$ *con respecto a* u, u_x *y* u_y, *y vale* $\dfrac{\partial H_0}{\partial u}(x, y, u_0, u_{0_x}, u_{0_y}) \geq 0$

Entonces (H_0, g_0) *es un punto interior de* S.

<u>*Demostración*</u>

Sea (H, g) en un entorno de (H_0, g_0). Buscamos una solución de (NP) para (H, g), lo que equivale a encontrar $u \in W^{2,p}(\Omega, R)$ tal que

$$L_u u - L_{u_0} u_0 = 2\left((H(x,y,u,u_x,u_y) - H_0(x,y,u,u_x,u_y)\right)(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}} +$$

$$2\left(H_0(x,y,u,u_x,u_y) - H_0(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y})\right)(1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}} +$$

$$2H_0(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y})\left((1+|\nabla u|^2)^{\frac{3}{2}} - (1+|\nabla u_0|^2)^{\frac{3}{2}}\right)$$

Además, si $z = u - u_0$, vale

$$\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}} - \left(1+|\nabla u_0|^2\right)^{\frac{3}{2}} = 3\left(1+|\nabla u_0|^2\right)^{\frac{1}{2}} \nabla u_0 \nabla z + \psi(\nabla z)$$

con $\dfrac{\|\psi(\nabla z)\|_\infty}{\|\nabla z\|_\infty} \longrightarrow 0$ para $\nabla z \longrightarrow 0$, y entonces podemos definir para cada z un operador elíptico M_z de modo que resulte

$$M_z z = L_u u - L_{u_0} u_0 - 6H_0(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y})\left(1+|\nabla u_0|^2\right)^{\frac{1}{2}} \nabla u_0 \nabla z$$

Observemos también que

$$L_u u - L_{u_0} u_0 = (1+u_y^2) z_{xx} + (1+u_x^2) z_{yy} - 2u_x u_y z_{xy} +$$

$$(u_y + u_{0_y}) u_{0_{xx}} z_y + (u_x + u_{0_x}) u_{0_{yy}} z_x - 2u_{0_{xy}}(u_x z_y + u_{0_y} z_x)$$

y el problema se resuelve de la misma forma que en los casos anteriores, definiendo para $\overline{z} = u - u_0$ fija un operador compacto $T : \overline{z} \longrightarrow z$ a partir de la ecuación $M_{\overline{z}} z = F(\overline{z})$, $z = g - g_0$ en $\partial\Omega$. Bajo la condición ii), se emplea el hecho de que

$$H_0(x,y,u,u_x,u_y) - H_0(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y}) = \frac{\partial H_0}{\partial u}(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y}) z$$

$$+ \frac{\partial H_0}{\partial u_x}(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y}) z_x + \frac{\partial H_0}{\partial u_y}(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y}) z_y + \psi_1(z)$$

y entonces el operador T' se define a partir de la ecuación

$$M'_{\overline{z}}z = M_{\overline{z}}z - 2(\frac{\partial H_0}{\partial u}(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y})z + \frac{\partial H_0}{\partial u_x}(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y})z_x$$

$$+\frac{\partial H_0}{\partial u_y}(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y})z_y)\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}} = F'(\overline{z})$$

Es fácil verificar que los operadores $M_{\overline{z}}$ y $M'_{\overline{z}}$ satisfacen las hipótesis necesarias para que se cumplan 1.3.1 y 1.3.2, dado que $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega, R)$ y entonces todos los coeficientes son acotados. En el caso ii), además, el término de orden 0 es $cz = -2\frac{\partial H_0}{\partial u}(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y})\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}} z$, que satisface por hipótesis $c \leq 0$.

Finalmente, escribiendo $M_{\overline{z}}z = M_0 z - (M_{\overline{z}} - M_0)z$ se prueba en forma análoga al lema 2.2.1 que la constante del lema 1.3.2 puede en ambos casos elegirse de modo tal que sirva para todo $\overline{z}$ en cierta bola $B_R(0)$, y la demostración concluye (por ejemplo, en el caso ii)) observando que si $\overline{z} \in B_R(0)$ vale

$$\|z\|_{1,\infty} \leq \|z-(g-g_0)\|_{1,\infty} + \|g-g_0\|_{1,\infty} \leq k\|g-g_0\|_{2,p} + c_1 c\|F'(\overline{z})\|_p$$

para cierta constante k.

De los dos últimos teoremas se obtiene:

COROLARIO 2.2.7

Sean $(H_0, g_0) \in S$, $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}$, $H_0 \in C^\alpha(\overline{\Omega} \times R^3, R)$ *y* $g_0 \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, R)$ *para cierto* $0 < \alpha \leq 1 - \frac{2}{p}$. *Sea* $u_0 \in W^{2,p}(\Omega, R)$ *una solución de (H) para* (H_0, g_0) *tal que se verifica i) o ii) del teorema 2.2.6*

Entonces (H_0, g_0) *es un punto interior de* S.

OBSERVACIÓN

Algunos de los teoremas de esta sección se prueban de manera más sencilla si se considera el operador $Q_{\overline{u}} = \frac{1}{\left(1+|\nabla\overline{u}|^2\right)^{\frac{3}{2}}} L_{\overline{u}}$.

OBSERVACIÓN

Es claro que también los teoremas 2.1.9 y 2.1.10 pueden reescribirse para el caso (NP).

CAPÍTULO 3

En este capítulo daremos algunos resultados de unicidad para las soluciones obtenidas en el capítulo anterior. Tanto en el problema (H) como en (NP), veremos que en ciertos casos las soluciones son aisladas en $C^1(\overline{\Omega}, R^3)$ y $C^1(\overline{\Omega}, R)$ respectivamente, y bajo ciertas condiciones adicionales se puede demostrar la unicidad global. En particular, esto último vale en (NP) para el caso H constante.

3.1. Unicidad local para (H)

Bajo ciertas condiciones, el operador T definido en el capítulo anterior resulta una contracción en cierta bola T-invariante B, lo que asegura entonces por el teorema 1.2.1 que T tiene exactamente un punto fijo en B. Como hemos visto, en el capítulo anterior, la condición $T(B) \subset B$ es suficiente para determinar la existencia de soluciones, de modo que ahora veremos únicamente condiciones para asegurar la unicidad.

Para abreviar, diremos que H es Lipschitz en $Y \in C^1(\overline{\Omega}, R^3)$ si existe $R > 0$ y $k = k(R)$ tales que

$$\|H(u, v, Z, Z_u, Z_v) - H(u, v, Y, Y_u, Y_v)\|_p \leq k\|Z - Y\|_{1,\infty}$$

para todo $Z \in B_R(Y)$.

TEOREMA 3.1.1

Sea $\overline{Y} \in C^1(\overline{\Omega}, R^3)$, y supongamos para $R > 0$ que H es Lipschitz en $\overline{Y}$ con constante $k = k(R)$. Sean

$$h(\overline{Y}) = \sup_{\overline{X} \in B_R(\overline{Y})} \|H(u, v, \overline{X}, \overline{X}_u, \overline{X}_v)\|_p$$

$$c(\overline{Y}) = k(\|\nabla\overline{Y}\|_\infty + R)^2 + h(\overline{Y})(2\|\nabla\overline{Y}\|_\infty + R)$$

Entonces, para $\overline{X} \in B_R(\overline{Y})$ vale

$$\|T(\overline{X}) - T(\overline{Y})\|_{1,\infty} \leq 2c_1 c c(\overline{Y})\|\overline{X} - \overline{Y}\|_{1,\infty}$$

En particular, si $\overline{Y}$ es solución de (H) y $2c_1cc(\overline{Y}) < 1$, $\overline{Y}$ es única en $B_R(\overline{Y})$.

Demostración

Dado $\overline{X} \in B_R(\overline{Y})$, se cumple que

$$\|T(\overline{X})-T(\overline{Y})\|_{1,\infty} \leq c_1c\|2H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)\overline{X}_u\wedge\overline{X}_v-2H(u,v,\overline{Y},\overline{Y}_u,\overline{Y}_v)\overline{Y}_u\wedge\overline{Y}_v\|_p$$

$$\leq 2c_1c(\|(H(u,v,\overline{X},\overline{X}_u,\overline{X}_v)-H(u,v,\overline{Y},\overline{Y}_u,\overline{Y}_v))\overline{X}_u\wedge\overline{X}_v\|_p$$

$$+\|H(u,v,\overline{Y},\overline{Y}_u,\overline{Y}_v)((\overline{X}_u-\overline{Y}_u)\wedge\overline{X}_v+\overline{Y}_u\wedge(\overline{X}_v-\overline{Y}_v))\|_p$$

Siendo $\|\nabla\overline{X}\|_\infty \leq \|\nabla\overline{Y}\|_\infty + R$, vale $\|T(\overline{X})-T(\overline{Y})\|_{1,\infty} \leq 2c_1cc(\overline{Y})\|\overline{X}-\overline{Y}\|_{1,\infty}$.

Además, si $2c_1cc(\overline{Y}) < 1$, y $\overline{X} \neq \overline{Y} \in B_R(\overline{Y})$ son puntos fijos de T resulta $\|\overline{X}-\overline{Y}\|_{1,\infty} < \|\overline{X}-\overline{Y}\|_{1,\infty}$, lo que es absurdo.

OBSERVACIÓN

En particular, cuando $H = H(u,v)$ vale $c(\overline{Y}) = \|H\|_p(2\|\nabla\overline{Y}\|_\infty + R)$ para cualquier R. Luego, cualquier solución $\overline{Y}$ tal que $\nabla\overline{Y}$ es suficientemente pequeño es aislada.

En el siguiente corolario se ve que si g es cercana a una constante se puede asegurar la existencia de una solución aislada cercana a g:

COROLARIO 3.1.2

Sea $a \in R^3$, y supongamos que H es Lipschitz en $B_{R_0}(a)$ con constante k. Entonces (H) tiene una solución aislada para cualquier $g \in W^{2,p}(\Omega,R^3)$ armónica tal que $\|g-a\|_{1,\infty}$ es suficientemente pequeño.

Demostración

Si $\|g-a\|_{1,\infty} = R < \frac{R_0}{2}$, entonces $B_R(g) \subset B_{R_0}(a)$ y como en el teorema anterior vale, para $\overline{X},\overline{Y} \in B_R(g)$, que

$$\|T(\overline{X})-T(\overline{Y})\|_{1,\infty} \leq 2c_1cc(g)\|\overline{X}-\overline{Y}\|_{1,\infty}$$

con $c(g) = k(\|\nabla g\|_\infty + R)^2 + 2h(g)(\|\nabla g\|_\infty + R) \longrightarrow 0$ para $R \longrightarrow 0$. Por otra parte,

$$\|T(\overline{X})-g\|_{1,\infty} = \|T(\overline{X})-T(a)\|_{1,\infty} \leq 2c_1cc(g)\|\overline{X}-a\|_{1,\infty} \leq 4c_1cc(g)R$$

y se deduce que T es una contracción en $B_R(g)$ para R suficientemente pequeño.

El siguiente teorema muestra la unicidad local de las soluciones bajo otras condiciones:

TEOREMA 3.1.3

Sea $X_0 \in C^1(\overline{\Omega}, R^3)$ *una solución de (H) tal que se cumple alguna de las siguientes condiciones:*

i) H *es Lipschitz en* X_0 *con constante pequeña (más precisamente: para todo* Z *en un entorno de* X_0 *y cierto* $\delta < 1$, *vale*

$$\|H(u,v,Z,Z_u,Z_v)-H(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})\|_p \leq \frac{\delta}{2c_1 c(X_0)\|X_{0_u}\|_\infty \|X_{0_v}\|_\infty}\|Z-X_0\|_{1,\infty}$$

para cierta constante $c(X_0)$ *), y*

$$\|H(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})X_{0_u}\|_\infty + \|H(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})X_{0_u}\|_\infty < \frac{1}{2c}$$

en donde c *es la constante de la desigualdad de Poincaré.*

ii) H *es continuamente derivable en los puntos* $(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})$ *con respecto a* X, X_u *y* X_v, *y vale*

a) $C \geq 0$, *en donde* C *es la la matriz definida por*

$$CY = (\frac{\partial H}{\partial X}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y)X_{0_u} \wedge X_{0_v}$$

b) $\|A\|_\infty + \|B\|_\infty < \frac{1}{c}$, *en donde las matrices* $A, B \in C(\overline{\Omega}, R^{3\times 3})$ *se definen por:*

$$AY = -2(H(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y \wedge X_{0_v} + (\frac{\partial H}{\partial X_u}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y)X_{0_u} \wedge X_{0_v})$$

$$BY = -2(H(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})X_{0_u} \wedge Y + (\frac{\partial H}{\partial X_v}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y)X_{0_u} \wedge X_{0_v})$$

y c *es la constante de la desigualdad de Poincaré.*

Entonces X_0 *es aislada en* $C^1(\overline{\Omega}, R^3)$

OBSERVACIÓN

De acuerdo con el teorema 2.1.12, bajo las mismas hipótesis se verifica que (H,g) *es un punto interior de* S. *También en este caso se pueden eliminar algunas condiciones si el dominio* Ω *es suficientemente pequeño.*

Demostración del teorema

Supongamos que X es otra solución de (H), es decir, que $Y = X - X_0$ es solución de la ecuación

$$\begin{cases} \Delta Y = 2H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v)(Y+X_0)_u \wedge (Y+X_0)_v \\ \qquad\qquad -2H(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})X_{0_u} \wedge X_{0_v} \qquad \text{en} \quad \Omega \\ Y = 0 \qquad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Definiendo el operador $S(Y) = 2H(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})(X_{0_u} \wedge Y_v + Y_u \wedge X_{0_v})$, resulta:

$$LY = \Delta Y - S(Y) = 2H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v)Y_u \wedge Y_v$$

$$+2(H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v) - H(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v}))(X_{0_u} \wedge Y_v + Y_u \wedge X_{0_v})$$

$$+2(H(u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v) - H(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v}))X_{0_u} \wedge X_{0_v}$$

Como en el teorema 2.1.12, si vale i), L satisface las condiciones de la observación 1.3.7 de donde se obtiene para $0 < R = \|Y\|_{1,\infty}$ pequeño:

$$R \leq c_1 c(X_0)\|LY\|_p \leq kR^2 + \delta R$$

para cierta constante k. Tomando $R \longrightarrow 0$ se obtiene que $1 \leq \delta$, lo que es absurdo. Esto muestra que X_0 es aislada.

Por otro lado, si vale ii) escribimos

$$H((u,v,Y+X_0,(Y+X_0)_u,(Y+X_0)_v) - H(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v}) =$$

$$\frac{\partial H}{\partial X}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y + \frac{\partial H}{\partial X_u}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y_u$$

$$+\frac{\partial H}{\partial X_v}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y_v + \psi(Y)$$

y el resultado se deduce en forma análoga empleando el operador

$$L'Y = \Delta Y - S(Y) - 2(\frac{\partial H}{\partial X}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y$$

$$+\frac{\partial H}{\partial X_u}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y_u + \frac{\partial H}{\partial X_v}(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v})Y_v)X_{0_u} \wedge X_{0_v}$$

Observación

En particular, el teorema anterior es válido cuando $H = H(u,v)$, si $H(u,v)X_{0_u}$ y $H(u,v)X_{0_v}$ son suficientemente pequeños.

APLICACIÓN

Observando que la prueba de unicidad local del teorema anterior es válida en $W^{1,\infty}(\Omega, R^3) \cap W^{2,2}(\Omega, R^3)$, *podemos deducir que si* g *es armónica y valen (además de i) o ii)) las hipótesis del teorema 3.1.2 en [M], entonces* g *es un mínimo local de la funcional* D_H.

3.2. Unicidad global para (H)

TEOREMA 3.2.1

Sea $X_0 \in C^1(\overline{\Omega}, R^3)$ *una solución de (H) tal que* H *es continuamente derivable con respecto a* X, X_u *y* X_v *y vale alguna de las siguientes condiciones:*

i) $H(u,v,X,X_u,X_v)X_u$, $H(u,v,X,X_u,X_v)X_{0_v}$ *y* $\|DH\|_\infty$ *son suficientemente pequeñas para todo* $X \in C^1(\overline{\Omega}, R^3)$.

ii) $C(Z) \geq 0$ *para todo* $Z \in (R^3)^3$ *en donde* $C(Z)$ *es la la matriz definida por* $C(Z)Y = (\frac{\partial H}{\partial X}(u,v,Z)Y)X_{0_u} \wedge X_{0_v}$, *y* $\|A\|_\infty + \|B\|_\infty < \frac{1}{c}$, *para*

$$A(X,Z)Y = -2(H(u,v,X,X_u,X_v)Y \wedge X_{0_v} + (\frac{\partial H}{\partial X_u}(u,v,Z_1,Z_2,Z_3)Y)X_{0_u} \wedge X_{0_v})$$

$$B(X,Z)Y = -2(H(u,v,X,X_u,X_v)X_u \wedge Y + (\frac{\partial H}{\partial X_v}(u,v,Z_1,Z_2,Z_3)Y)X_{0_u} \wedge X_{0_v})$$

y c *es la constante de la desigualdad de Poincaré.*

Entonces X_0 *es única en* $C^1(\overline{\Omega}, R^3)$.

<u>*Demostración*</u>

Se procede en forma similar al teorema 3.1.3: si $X_0, X \in C^1(\overline{\Omega}, R^3)$ son dos soluciones de (H), para $Y = X - X_0$ vale:

$$\Delta Y - 2H(u,v,X,X_u,X_v)(Y_u \wedge X_{0_v} + X_u \wedge Y_v)$$

$$-2(H(u,v,X,X_u,X_v) - H(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v}))X_{0_u} \wedge X_{0_v} = 0$$

Además, $Y = 0$ en $\partial\Omega$, y por el teorema de Lagrange podemos escribir, para (u,v) fijos: $H((u,v,X,X_u,X_v) - H(u,v,X_0,X_{0_u},X_{0_v}) =$

$$\frac{\partial H}{\partial X}(u,v,Z_1,Z_2,Z_3)Y + \frac{\partial H}{\partial X_u}(u,v,Z_1,Z_2,Z_3)Y_u + \frac{\partial H}{\partial X_v}(u,v,Z_1,Z_2,Z_3)Y_v$$

para cierto valor intermedio $Z(u,v) = t(X, X_u, X_v) + (1-t)(X_0, X_{0_u}, X_{0_v})$, con $t = t(u,v) \in [0,1]$. Siendo las derivadas de H continuas, se puede elegir t medible (por ejemplo, basta tomar t mínimo), es decir, tal que $Z \in L^\infty(\Omega, (R^3)^3)$, y entonces resulta $LY = 0$, $Y = 0$ en $\partial\Omega$ para cierto operador L que satisface las hipótesis de la observación 1.3.7. En consecuencia, $Y = 0$.

OBSERVACIÓN

Es evidente que el teorema también vale empleando $H(u,v,X,X_u,X_v)X_v$ *y* $H(u,v,X,X_u,X_v)X_{0_u}$.

Por ejemplo, las hipótesis del teorema se satisfacen para $H = \frac{H_1(u,v)}{1+|\nabla X|^2}X$, *con* H_1 *suficientemente pequeña. En particular, cuando* g *es constante el resultado es inmediato pues en tal caso para cualquier solución* X, *tomando* $Y = X - g$ *vale* $\Delta Y - 2H(u,v,Y,Y_u,Y_v)Y_u \wedge Y_v = 0$ *y basta pedir entonces* $\|H_1\|_2 < \frac{1}{c}$, *en donde* c *es la constante de la desigualdad de Poincaré.*

Recordemos además que para esta clase de H *el corolario 2.1.8 garantiza también la existencia de una solución para cualquier* g, *aunque no la unicidad, pues la condición de que* H_1 *sea pequeña depende de* g.

En cualquier caso, aunque no valga la unicidad global, el teorema 3.2.1 permite asegurar que una solución única en algún conjunto "grande" en el cual se verifican las hipótesis requeridas.

3.3. Unicidad local y global para (NP)

Para el problema (NP) obtendremos teoremas similares a 3.1.1, 3.1.3 y 3.2.1. En estos últimos dos casos, como ocurre en el teorema 2.2.6, debemos pedir la hipótesis adicional $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega, R)$. Dicha hipótesis no es necesaria bajo las condiciones del teorema 2.2.5.

TEOREMA 3.3.1

Sean $\overline{u}_0 \in C^1(\overline{\Omega}, R)$, R_0 *y* $c = c(\overline{u}_0)$ *como en el lema 2.2.1, y supongamos que* H *es Lipschitz en* $\overline{u}_0$ *con constante* $k = k(R)$, $R \leq R_0$. *Definimos*

$$a = \|\nabla \overline{u}_0\|_\infty$$

$$h = \sup_{\overline{u} \in B_R(\overline{u}_0)} \|H(x,y,\overline{u},\overline{u}_x,\overline{u}_y)\|_p$$

$$t = max\{\|T(\overline{u}_0)_{xx}\|_p, \|T(\overline{u}_0)_{yy}\|_p, \|T(\overline{u}_0)_{xy}\|_p, \}$$

en donde T es el operador definido en el capítulo 2. Entonces

$$\|T(\overline{u}) - T(\overline{u}_0)\|_{1,\infty} \leq 2c_1c(k(1+a^2)^{3/2}$$

$$+3h(1+(a+R)^2)^{1/2}(a+R) + 2(2a+R)t)\|\overline{u} - \overline{u}_0\|_{1,\infty}$$

Demostración

Dada $\overline{u} \in B_R(\overline{u}_0)$, sean $u = T(\overline{u})$, $u_0 = T(\overline{u}_0)$ el resultado se demuestra acotando como en el teorema 2.2.3:

$$\|u - u_0\|_{1,\infty} \leq c_1c(\|L_{\overline{u}}u - L_{\overline{u}_0}u_0\|_p + \|(L_{\overline{u}} - L_{\overline{u}_0})u_0\|_p)$$

OBSERVACIÓN

En particular, si $\overline{u}_0$ es constante, $a = 0$, y entonces vale que $\|T(\overline{u}) - T(\overline{u}_0)\|_{1,\infty} \leq 2c_1ck\|\overline{u}_0 - \overline{u}\|_{1,\infty}$ para R suficientemente pequeño. Es decir, si $2c_1ck < 1$ existe a lo sumo una solución de (NP) cercana a $\overline{u}_0$.

TEOREMA 3.3.2

Sea $u_0 \in W^{2,\infty}(\Omega, R)$ una solución de (NP) tal que se verifica

i) H es Lipschitz en u_0 con constante $k < \frac{1}{2c_1c(1+\|\nabla u_0\|_\infty^2)^{3/2}}$, en donde c es cierta constante que depende de u_0.

o bien

ii) H es continuamente derivable en $(x, y, u_0, u_{0_x}, u_{0_y})$ con respecto a u, u_x y u_y, tal que $\dfrac{\partial H}{\partial u}(x, y, u_0, u_{0_x}, u_{0_y}) \geq 0$

Entonces u_0 es aislada en $C^1(\overline{\Omega}, R)$

Demostración

Sea $u \in C^1(\overline{\Omega}, R)$ otra solución de (NP). En forma similar al teorema 2.2.6, escribiendo $z = u - u_0$ se obtiene:

$$M_z z := L_u u - L_{u_0}u_0 - 6H(x, y, u_0, u_{0_x}, u_{0_y})\left(1 + |\nabla u_0|^2\right)^{\frac{3}{2}} \nabla u_0 \nabla z =$$

$$2(H(x, y, u, u_x, u_y) - H(x, y, u_0, u_{0_x}, u_{0_y}))\left(1 + |\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$+2H(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y})\psi(\nabla z)$$

Luego, si vale la condición i) y $\|z\|_{1,\infty}=R$ es suficientemente pequeño, la constante c del lema 1.3.2 para M_z se puede elegir independiente de z, y vale:

$$R\leq c_1c\|M_z z\|_p\leq 2c_1c(kR\left(1+(\|\nabla u_0\|_\infty+R)^2\right)^{\frac{3}{2}}+k_1R))$$

para cierta $k_1(R)\longrightarrow 0$ cuando $R\longrightarrow 0$. El resultado es inmediato pues por hipótesis $2c_1ck\left(1+\|\nabla u_0\|_\infty^2\right)^{\frac{3}{2}}<1$.

Si en cambio vale ii), la deducción es similar, empleando el operador

$$M_z'z:=M_zz-2(\frac{\partial H}{\partial u_x}(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y})z_x$$

$$+\frac{\partial H}{\partial u_y}(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y})z_y+\frac{\partial H}{\partial u}(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y})z)\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}$$

Observación

La demostración anterior es válida también en $W^{1,\infty}(\Omega,R)\cap W^{2,2}(\Omega,R)$. Esto es claro, pues la constante del lema 1.3.2 para el operador M_z (o M_z') sirve para z en un entorno de 0 con la norma $\|\ \ \|_{1,\infty}$.

Teorema 3.3.3

Sea $u_0\in W^{2,\infty}(\Omega,R)$ una solución de (NP), y supongamos que H es continuamente derivable respecto de u,u_x y u_y, y vale $\frac{\partial H}{\partial u}\geq 0$

Entonces u_0 es única en $C^1(\overline{\Omega},R)$

Demostración

Sea $u\in C^1(\overline{\Omega},R)$ otra solución de (NP). Por el teorema de valor medio, para $z=u-u_0$ sabemos que

$$Q(z)=H(x,y,u,u_x,u_y)-H(x,y,u_0,u_{0_x},u_{0_y})=$$

$$\frac{\partial H}{\partial u}(x,y,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)z+\frac{\partial H}{\partial u_x}(x,y,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)z_x+\frac{\partial H}{\partial u_y}(x,y,\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)z_y$$

y

$$R(z)=\left(1+|\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}}-\left(1+|\nabla u_0|^2\right)^{\frac{3}{2}}=3\left(1+|\beta|^2\right)^{\frac{1}{2}}\beta\nabla z$$

para ciertos $\alpha \in L^\infty(\Omega, R^3)$, $\beta \in L^\infty(\Omega, R^2)$. Luego, vale:

$$S(z) = L_u u - L_{u_0} u_0 - 2Q(z)\left(1 + |\nabla u|^2\right)^{\frac{3}{2}} - 2H(x, y, u_0, u_{0_x}, u_{0_y})R(z) = 0$$

El operador S satisface las hipótesis del teorema 1.3.1, y siendo $z = 0$ en $\partial\Omega$ se deduce que $z = 0$.

OBSERVACIÓN

Supongamos que $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, R)$, *y que* $H \in C^\alpha(\overline{\Omega} \times R^3, R)$ *satisface las hipótesis del teorema anterior.*

Consideremos los conjuntos:

$$M_H = \{u \in W^{2,p}(\Omega, R)/(1 + u_y^2)u_{xx} + (1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy}$$

$$= 2H(x, y, u, u_x, u_y)(1 + |\nabla u|^2)^{3/2} \text{ en } \Omega\}$$

$$S_H = \{g \in W^{2,p}(\Omega, R) \text{ armónica / (NP) tiene solución en } W^{2,p}(\Omega, R)\}$$

Claramente, M_H *es cerrado en* $W^{2,p}(\Omega, R)$, *pues vale* $M_H = F^{-1}(0)$ *para cierta* $F : W^{2,p}(\Omega, R) \longrightarrow L^p$ *continua. Además, por el corolario 2.2.7* S_H *es abierto en el subespacio cerrado* $\Delta^{-1}(0) \subset W^{2,p}(\Omega, R)$. *Por los teoremas 1.3.1, 2.2.5 y 3.3.3, queda definida una aplicación biyectiva* $\lambda : M_H \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, R) \longrightarrow S_H \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, R)$, *que asocia a cada* u *la única* g *armónica tal que* $u = g$ *en* $\partial\Omega$ *Del mismo modo que con el operador* T *del capítulo 2, es inmediato verificar que* λ *es continua, pues*

$$\|\lambda(u) - \lambda(v)\|_{2,p} \leq \|\lambda(u) - u - (\lambda(v) - v)\|_{2,p} + \|u - v\|_{2,p} \leq c\|\Delta u - \Delta v\|_{2,p} + \|u - v\|_{2,p}$$

En realidad, también puede pensarse a λ *como la restricción de una aplicación lineal* $\overline{\lambda} : W^{2,p}(\Omega, R) \longrightarrow \Delta^{-1}(0)$ *que resulta continua y suryectiva (y luego, abierta).*

Veamos que λ *es un homeomorfismo: para ello, basta considerar una sucesión* $g_n \longrightarrow g$, *y observar que si* $\lambda(u) = g$, *siguiendo el procedimiento del teorema 2.2.6 para todo* n *suficientemente grande una solución* $\overline{u}_n \in B_{R_n}(u)$ *del problema con dato de borde* g_n. *Por unicidad,* $\overline{u}_n = u_n$, *y además se ve en el corolario mencionado que* $R_n \longrightarrow 0$ *cuando* $g_n - g \longrightarrow 0$.

Empleando el teorema 6.6 y el corolario 3.7 de [G-T], la misma demostración puede hacerse directamente con la norma de $C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, R^3)$, *bajo la hipótesis adicional de que las derivadas de* H *sean de clase* C^α.

Como consecuencia inmediata de la observación anterior, vemos que si H es tal que (NP) tiene solución para toda g, $M_H \cap C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, R)$ es homeomorfo a un subespacio denso de $\Delta^{-1}(0)$. En particular, es conexo por arcos. Por el teorema 14.14 de [G-T], obtenemos el siguiente resultado para superficies no paramétricas minimales:

COROLARIO 3.3.4

Supongamos que $\partial\Omega \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, R)$ *tiene curvatura media no negativa en todo punto.*

Entonces el conjunto

$$\{u \in C^{2,\alpha}(\overline{\Omega}, R)/(1+u_y^2)u_{xx} + (1+u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} = 0 \text{ en } \Omega\}$$

es conexo por arcos en $W^{2,p}(\Omega, R)$.

El mismo resultado (es decir, que el conjunto de superficies no paramtŕicas de curvatura media H es conexo por arcos) vale en general bajo ciertas condiciones adicionales para H, como consecuencia de [G-T], teorema 16.10. En particular, para H constante el resultado se verifica si la curvatura H' de $\partial\Omega$ verifica la relación: $H' \geq 2H$. El mismo resultado puede generalizarse a hipersuperficies en R^n, si se cumple la condición: $H' \geq \frac{n|H|}{n-1}$ ([G-T], corolario 16.11).

CAPÍTULO 4

En este capítulo sumergiremos el problema (H) en una familia de problemas

$$(H_t)\begin{cases} \Delta X = 2tH(u,v,X,X_u,X_v)X_u \wedge X_v & \text{en} \quad \Omega \\ X = g \qquad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

y mostraremos una forma de construir, a partir de una solución X_0 de (H_{t_0}), una solución X para $t = t_0 + \epsilon$ para cierto ϵ apropiado. Como (H_0) tiene solución, el método permite encontrar una sucesión de soluciones para $0 = t_0 < t_1 < t_2 ...$; en particular, si $t_N \geq 1$ para algún N, se podrá deducir que (H) tiene solución.

Por simplicidad, consideraremos únicamente el caso $H = H(u,v)$. Notemos que en este caso, si HX_{0_u} y HX_{0_v} son suficientemente pequeños (o Ω es suficientemente pequeño) la existencia de X está garantizada por el teorema 2.1.12; lo que mostrará el método aquí desarrollado es que X puede obtenerse como el límite de cierta sucesión convenientemente definida.

4.1 Un método iterativo

El método mencionado está basado en un procedimiento (ver [Hs], "The Newton Embeding Procedure") que permite hallar soluciones de

$$\begin{cases} \Delta u = tf(u) & \text{en} \quad \Omega \\ u = g & \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

para $0 = t_0 < ... < t_N = 1$ definiendo, a partir de una solución u_0 para cierto t_0, una sucesión u_n dada por los problemas

$$\begin{cases} \Delta u_{n+1} = (t_0 + \epsilon)(f'(u_n)(u_{n+1} - u_n) + f(u_n)) & \text{en} \quad \Omega \\ u_{n+1} = g \qquad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Tomando ϵ pequeño, y bajo ciertas condiciones para f, es fácil verificar que la sucesión así definida converge a cierta u que resulta solución del problema para $t_0 + \epsilon$.

Observemos, en este caso, que los procedimientos de punto fijo aplicados en el capítulo 2 (es decir, definiendo un operador $T : \overline{u} \longrightarrow u$) nos permiten asegurar la existencia de soluciones bajo condiciones diferentes a las de [Hs], por ejemplo:

i) f continua tal que $|f(x)| \leq k|x|$ para cierta constante k suficientemente pequeña y todo $|x| \geq M$ para algún M.

ii) f es Lipschitz con constante suficientemente pequeña. En este caso, el problema tiene solución única, que se obtiene por recurrencia.

4.2 Aplicación al problema (H)

Sean $H \in L^p(\Omega, R)$, $g \in W^{2,p}(\Omega, R^3)$, para $2 < p < \infty$, y supongamos que X_0 es solución de H_{t_0} para cierto t_0.

Para cierto $\epsilon > 0$, definimos por recurrencia una sucesión X_n, dada por los problemas:

$$\begin{cases} \Delta X_{n+1} = 2(t_0 + \epsilon)H(X_{n_u} \wedge (X_{n+1_v} - X_{n_v}) + (X_{n+1_u} - X_{n_u}) \wedge X_{n_v} \\ \qquad\qquad +X_{n_u} \wedge X_{n_v}) \qquad \text{en} \quad \Omega \\ X_{n+1} = g \qquad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Por la observación 1.3.7, si $(t_0+\epsilon)HX_{n_u}$ y $(t_0+\epsilon)HX_{n_v}$ son suficientemente pequeños (o Ω es suficientemente pequeño) la sucesión está bien definida, y además vale, para $Z_{n+1} = X_{n+1} - X_n$:

$$\Delta Z_{n+1} - 2(t_0 + \epsilon)H\left(X_{n_u} \wedge Z_{n+1_v} + Z_{n+1_u} \wedge X_{n_v}\right) = 2(t_0 + \epsilon)HZ_{n_u} \wedge Z_{n_v}$$

Por otro lado, $Z_{n+1} = 0$ en $\partial\Omega$, de donde se deduce que

$$\|Z_{n+1}\|_{2,p} \leq 2c(X_n)\|H\|_p(t_0 + \epsilon)\|Z_n\|_{1,\infty}^2$$

en donde $c(X_n)$ es la constante provista por la observación 1.3.7 para el operador $L_nZ = \Delta Z - 2(t_0 + \epsilon)H\left(X_{n_u} \wedge Z_v + Z_u \wedge X_{n_v}\right)$. Concluimos entonces que

$$\|Z_{n+1}\|_{2,p} \leq 2c(X_n)\|H\|_p(t_0 + \epsilon)c_1^2\|Z_n\|_{2,p}^2$$

en donde c_1 es la constante de la inmersión $W^{2,p}(\Omega, R^3) \hookrightarrow C^1(\overline{\Omega}, R^3)$, y por inducción se demuestra fácilmente que

$$\|Z_{n+1}\|_{2,p} \leq \left(2\|H\|_p(t_0 + \epsilon)c_1^2\|Z_1\|_{2,p}\right)^{2^n-1}\|Z_1\|_{2,p}\prod_{1\leq j\leq n} c(X_j)^{2^{n-j}}$$

Por otro lado,

$$\Delta Z_1 - 2(t_0+\epsilon)H\left(X_{0_u}\wedge Z_{1_v} + Z_{1_u}\wedge X_{0_v}\right) = 2\epsilon H X_{0_u}\wedge X_{0_v}$$

y entonces

$$\|Z_1\|_{2,p} \leq 2c(X_0)\|H\|_p\epsilon\|X_{0_u}\wedge X_{0_v}\|_\infty$$

Resumiendo, obtenemos:

PROPOSICIÓN 4.2.1

$$\|Z_{n+1}\|_{2,p} \leq \left(4\|H\|_p^2(t_0+\epsilon)c_1^2\epsilon c(X_0)\|X_{0_u}\wedge X_{0_v}\|_\infty\right)^{2^n-1}$$

$$2c(X_0)\|H\|_p\epsilon\|X_{0_u}\wedge X_{0_v}\|_\infty \prod_{1\leq j\leq n} c(X_j)^{2^{n-j}}$$

En particular, si vale la condición

$$(*)\quad c_n \leq c \text{ para todo } n$$

entonces $\prod_{1\leq j\leq n} c(X_j)^{2^{n-j}} \leq c^{2^n-1}$, de donde se obtiene, para $n\geq 1$:

$$\|Z_{n+1}\|_{2,p} \leq \left(4\|H\|_p^2(t_0+\epsilon)c_1^2\epsilon c^2\|X_{0_u}\wedge X_{0_v}\|_\infty\right)^{2^n-1} 2\|H\|_p\epsilon c\|X_{0_u}\wedge X_{0_v}\|_\infty$$

Luego, basta elegir ϵ de modo que

$$C(\epsilon) = 4\|H\|_p^2(t_0+\epsilon)c_1^2\epsilon c^2\|X_{0_u}\wedge X_{0_v}\|_\infty < 1$$

pues entonces X_n converge a cierta $X\in W^{2,p}(\Omega,R^3)$, y claramente X es solución de ($H_{t_0+\epsilon}$)

Veremos ahora que si ϵ es suficientemente pequeño, se cumple la condición (*). En rigor, primero deberemos establecer cierto $R>0$ de modo tal que en $B_R(X_0)$ valgan las condiciones de la observación 1.3.7, y encontrar ϵ de modo tal que la sucesión X_n permanezca en $B_R(X_0)$ (y esté en consecuencia bien definida). Veamos que en tal caso (*) se cumple necesariamente: de la misma forma que en el capítulo 2 mostraremos que eligiendo $c(X)$ mínimo resulta semicontinua superiormente con la norma $\| \quad \|_{1,\infty}$, y en tal caso es acotada en cualquier conjunto acotado de $W^{2,p}(\Omega,R^3)$ (pues es compacto en $C^1(\overline{\Omega},R^3)$). En efecto, dado $X\in B_R(X_0)$ fijo, si

$$L_X Z = \Delta Z - 2(t_0+\epsilon)H\left(X_u\wedge Z_v + Z_u\wedge X_v\right)$$

se cumple , para $\|Y-X\|_{1,\infty} \leq R_0$, $Z \in W^{2,p}(\Omega,R^3) \cap W_0^{1,p}(\Omega,R^3)$:

$$\|L_Y Z\|_p \geq \|L_X Z\|_p - \|(L_Y - L_X)Z\|_p \geq (\frac{1}{c(X)} - kR_0)\|Z\|_{2,p}$$

Como $c(Y)$ es mínimo, se deduce que $\frac{1}{c(Y)} \geq \frac{1}{c(X)} - kR_0$ Esto muestra que si $t > c(X)$ vale $t > c(Y)$ para R_0 suficientemente pequeño.

Podemos suponer entonces que vale (*), y obtenemos:

$$\|X_{n+1} - X_0\|_{2,p} \leq \sum_{1\leq k\leq n+1} \|Z_k\|_{2,p} \leq 2\|H\|_p\epsilon c\|X_{0_u} \wedge X_{0_v}\|_\infty (1 + \sum_{1\leq k\leq n} C(\epsilon)^{2^k-1})$$

Luego,

$$\|X_{n+1} - X_0\|_{2,p} \leq 2\|H\|_p\epsilon c\|X_{0_u} \wedge X_{0_v}\|_\infty \frac{1-C(\epsilon)^{2^n}}{1-C(\epsilon)}$$

es decir,

$$\|X_{n+1} - X_0\|_{2,p} \leq 2\|H\|_p c\|X_{0_u} \wedge X_{0_v}\|_\infty \frac{\epsilon}{1-C(\epsilon)}$$

En consecuencia, bastará tomar ϵ tal que

$$2\|H\|_p c\|X_{0_u} \wedge X_{0_v}\|_\infty \frac{\epsilon}{1-C(\epsilon)} \leq R$$

pues en tal caso $X_n \in B_R(X_0)$ para todo n .

OBSERVACIÓN

El mismo método puede emplearse a partir del sistema

$$(H_t)\begin{cases} \Delta X = 2H(u,v,X,X_u,X_v)X_u \wedge X_v & \text{en} \quad \Omega \\ X = tg \quad \text{en} \quad \partial\Omega \end{cases}$$

Como en el caso anterior, (H_0) tiene solución, y a partir de una solución de (H_{t_0}) se puede construir una solución para $t_0 + \epsilon$. En este caso, para garantizar la convergencia puede elegirse ϵ de modo tal que

$$C(\epsilon) = 2c\|H\|_p c_1^2 \epsilon(1+k)\|g\|_{2,p} < 1$$

y

$$\frac{\epsilon(1+k)\|g\|_{2,p}}{1-C(\epsilon)} < R$$

en donde $k = 4cc_1\|H\|_p\|X_0\|_{1,\infty}$.

Notemos que en ambos casos, si ϵ_0 satisface las condiciones propuestas, entonces también ϵ para todo $\epsilon \leq \epsilon_0$.

CAPÍTULO 5

En este capítulo estudiaremos existencia y unicidad de soluciones para ciertas ecuaciones ordinarias semilineales.

5.1. Un caso particular

En la introducción hemos mencionado al problema $u'' + \nabla G(u) = P(t)$ en donde $P : R^m \longrightarrow R^m$ es periódica. Este problema fue resuelto para ciertos casos por Lazer y Ahmad [Ah], [L], quienes probaron que si $G \in C^2(R^m, R)$ y existen matrices simétricas A, B tales que $A \leq G''(y) \leq B$ para todo $y \in R^m$ y números naturales N_k que verifican

$$N_k^2 < \lambda_k \leq \mu_k < (N_k + 1)^2$$

con $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_m$, y $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \cdots \leq \mu_m$ los respectivos autovalores de A y B, entonces existe una única solución del sistema.

Es fácil verificar la unicidad bajo otras condiciones para G; por ejemplo, si $\nabla G < 0$ (es decir, $(\nabla G(u) - \nabla G(v))(u - v) < 0$ para $u \neq v$). En general, existe a lo sumo una solución para la ecuación

$$u'' + ru' + N(u) = P(t) \qquad \text{en } (0, \alpha)$$

con $P : R^m \longrightarrow R^m$ continua, $N < 0$ y condiciones de Dirichlet

$$u(0) = u(\alpha) = 0$$

o bien periódicas

$$u(0) - u(\alpha) = u'(0) - u'(\alpha) = 0$$

En efecto, si u y v son soluciones de la ecuación, entonces $(u - v)'' + r(u - v)' + N(u) - N(v) = 0$. Multiplicando ambos miembros por $u - v$ e integrando, se obtiene:

$$-\int (u - v)'^2 + \frac{r}{2} \int ((u - v)^2)' + \int (N(u) - N(v))(u - v) = 0$$

y el resultado es inmediato.

La misma idea puede aplicarse cuando $G \in C^2(R^m, R)$, si $G''(y) < 0$ para todo $y \in R^3$, pues si u, v son dos soluciones, se define para cada $t \in (0, \alpha)$ fijo la función $\varphi(s) = \nabla G(su + (1-s)v)(u - v)$. Luego vale, por el teorema de Lagrange, que

$$(\nabla G(u) - \nabla G(v))(u - v) = (G''(\beta)(u - v))\,(u - v) < 0$$

para cierta $\beta = \beta(t) \in L^\infty((0, \alpha), R^m)$.

Observemos que esta demostración de unicidad no es aplicable bajo las condiciones de Lazer-Ahmad pues éstas implican que $G'' > 0$. Notemos además que si X es solución del sistema periódico

$$\begin{cases} X' = F(t, X) & \text{en} \quad (0, \alpha) \\ X(0) = X(\alpha) \end{cases}$$

entonces

$$\int_0^\alpha F(t, X) = 0$$

En particular, para la ecuación de orden n

$$u^{(n)} = f(t, u, ..., u^{(n-1)})$$

las condiciones periódicas implican que $f(t, u, ..., u^{(n-1)}) \perp 1$.

Esto muestra que los resultados de existencia de Lazer y Ahmad implican que ∇G es no acotado en cualquier dirección, ya que por la observación anterior, si u es la solución para cierta P debe verificarse que $\int_0^\alpha \nabla G(u) = \int_0^\alpha P$, y luego, para cualquier dirección fija v vale

$$\int_0^\alpha \nabla G(u)v = \int_0^\alpha Pv$$

y el resultado se obtiene eligiendo P apropiada. En realidad, este hecho puede probarse en forma directa, definiendo $r(t) = \nabla G(tv)$, pues en tal caso $r'(t) = G''(tv)v$ y como $0 < Av.v \leq r'(t)v$ para todo t, la conclusión es inmediata integrando ambos miembros de la inecuación.

5.2. Situación general

Nos ocuparemos de los sistemas

$$(2) \begin{cases} X' = F(t, X) & \text{en} \quad (0, \alpha) \\ X(0) = g(X(\alpha)) \end{cases}$$

en donde $F : R \times R^m \longrightarrow R^m$ y $g : R^m \longrightarrow R^m$ son continuas. En particular, para $g = kI$:

$$(2_k) \begin{cases} X' = F(t,X) & \text{en} \quad (0,\alpha) \\ X(0) = kX(\alpha) \end{cases}$$

Sean

$$F_M = \sup_{t\in[0,\alpha],\|x\|\leq M} |F(t,x)|$$

$$g_M = \sup_{\|x\|\leq M} |g(x)|$$

B_M denotará la bola cerrada de radio M centrada en 0 en el espacio $C([0,\alpha], R^m)$.

TEOREMA 5.2.1

Si $\frac{g_M}{M} + \alpha\frac{F_M}{M} \leq 1$, *el sistema* (2) *admite una solución en* B_M. *Además, si* g *y* F *son Lipschitz con constantes* K_g, K_F *tales que* $K_g + K_F\alpha < 1$, (2) *tiene solución única.*

Demostración

Consideremos el operador $T : C([0,\alpha], R^m) \longrightarrow C([0,\alpha], R^m)$, dado por:

$$TX(t) = g(X(\alpha)) + \int_0^t F(s, X(s))ds$$

Claramente, T es continuo (por ejemplo, por convergencia mayorada), y si $\|X\|_\infty \leq M$ entonces

$$|g(X(\alpha)) + \int_0^t F(s, X(s))ds| \leq g_M + \alpha F_M$$

Además,

$$|TX(t_2) - TX(t_1)| \leq |t_2 - t_1| F_M$$

Por Arzelá-Ascoli, se concluye que T es compacto, y siendo $\frac{g_M}{M} + \alpha\frac{F_M}{M} \leq 1$, vale que $T(B_M) \subset (B_M)$. Por el teorema de Schauder, se deduce que T tiene un punto fijo en B_M.

Si g y F son Lipschitz con constantes K_g y K_F, T es una contracción para $K_g + \alpha K_F < 1$: en efecto,

$$|TX(t) - TY(t)| \leq |g(X_\alpha) - g(Y_\alpha)| + \int_0^\alpha |F(s,X) - F(s,Y)|ds \leq (K_g + \alpha K_F)\|X - Y\|_\infty$$

OBSERVACIÓN

Si g tiene inversa continua, podemos considerar el operador

$$TX(t) = g^{-1}(X(0)) - \int_t^{\alpha} F(s, X(s))ds$$

y del mismo modo que en el teorema 5.2.1. se obtienen también soluciones de (2) reemplazando en las condiciones a g por g^{-1}. En particular, si g es lineal e inversible tal que $\|g\| \neq 1$, el sistema tiene solución en B_M para

$$\|g\| + \alpha \frac{F_M}{M} \leq 1 \qquad\qquad \|g^{-1}\| + \alpha \frac{F_M}{M} \leq 1$$

Por otro lado, el caso g constante es un caso particular del conocido resultado de existencia de al menos una solución de una ecuación ordinaria con dato de Cauchy. El método empleado anteriormente permite probar también el resultado general: dada $F : \Omega \longrightarrow R^m$ continua, con $\Omega \subset R \times R^m$ entorno de $(t_0, X_0) \in R \times R^m$, existe al menos una solución del problema

$$\begin{cases} X' = F(t, X) \\ X(t_0) = X_0 \end{cases}$$

definida en un entorno de t_0. En efecto, basta tomar un cubo cerrado $C \subset \Omega$ de lado $2\overline{\delta}$ centrado en (t_0, X_0) y una función continua $\phi : R \times R^m \longrightarrow R^m$ tal que $\phi = F$ en C, y $\|\phi\|_\infty = \|F\|_{\infty, C} = M$. Luego, para $\delta \leq \overline{\delta}, \frac{\overline{\delta}}{M}$ se define en $C([t_0 - \delta, t_0 + \delta], R^m)$ el operador

$$TX(t) = X_0 + \int_{t_0}^{t} \phi(s, X)ds$$

Como en el teorema 5.2.1, se ve que T tiene un punto fijo $X : [t_0 - \delta, t_0 + \delta] \longrightarrow C$, y luego vale $X'(t) = \phi(t, X) = F(t, X)$ para todo t.

Aplicando el mismo método a otro operador, veremos ahora un resultado similar al teorema 5.2.1, pero que permite en algunos casos encontrar soluciones bajo condiciones más débiles. En particular, ésto ocurre en el problema (2_k), para el cual 5.2.1 no es aplicable para $k = -1$, pues en tal caso $\frac{g_M}{M} = 1$ para cualquier M.

TEOREMA 5.2.2

Sea g lineal tal que $I - g$ es inversible, y sea $B = (I - g)^{-1} g$. Consideremos $G = B + \varphi I$, en donde φ es la función definida por

$$\varphi(t,s) = \begin{cases} 1 & si\ t \geq s \\ 0 & si\ t < s \end{cases}$$

y supongamos que para cierto M vale $\int_0^\alpha |G(t,s)| ds \dfrac{F_M}{M} \leq 1$ para todo t. Entonces (2) admite una solución en B_M.

Además, si F es Lipschitz con constante K, $\int_0^\alpha |G(t,s)| ds K < 1$, (2) tiene solución única.

<u>*Demostración*</u>

Dada $X \in C([0,\alpha], R^m)$ fija, se define

$$X_0 = \int_0^\alpha BF(s,X) ds$$

y

$$TX(t) = X_0 + \int_0^t F(s,X) ds = \int_0^\alpha G(t,s) F(s,X) ds$$

Como en los casos anteriores, se ve fácilmente que T es compacto, y además, para $\|X\|_\infty \leq M$ vale

$$\|TX\|_\infty \leq \int_0^\alpha |G(t,s)| ds F_M \leq M$$

Por el teorema de Schauder, T tiene un punto fijo en B_M, que resulta solución de (2).

Por otro lado, si F es Lipschitz,

$$\|TX - TY\|_\infty \leq \int_0^\alpha |G(t,s)| |F(s,X) - F(s,Y)| ds \leq \int_0^\alpha |G(t,s)| ds K \|X - Y\|_\infty,$$

y T resulta una contracción.

En particular, para (2_k) se obtienen las siguientes condiciones, que mejoran 5.2.1 cuando $k \leq 0$:

COROLARIO 5.2.3

Sean $k \neq 1$ y $c = \inf_{M>0} \frac{F_M}{M}$. Entonces el sistema (2_k) admite una solución en $C([0,\alpha], R^m)$ en los siguientes casos:

i) $|k| \geq 1$, $c\alpha < \dfrac{k-1}{k}$

ii) $|k| < 1$, $c\alpha < 1 - k$

En particular, si $\dfrac{F_M}{M} \longrightarrow 0$, *entonces para cualquier* $k \neq 1$ *el sistema* (2_k) *admite una solución en* $C([0,\alpha], R^m)$.

<u>*Demostración*</u>

Basta observar que vale

$$G(t,s) = \begin{cases} \frac{1}{1-k} & \text{si } t \geq s \\ \frac{k}{1-k} & \text{si } t < s \end{cases}$$

y un simple cálculo muestra que

$$\int_0^\alpha |G(t,s)|ds \leq \frac{k}{k-1} \quad \text{si } |k| \geq 1$$

y

$$\int_0^\alpha |G(t,s)|ds \leq \frac{1}{1-k} \quad \text{si } |k| < 1$$

OBSERVACIÓN

Si $n > 1$, *la hipótesis* $\dfrac{F_M}{M} \longrightarrow 0$ *no es aplicable a la ecuación* $u^{(n)} = f(t, u, ..., u^{(n-1)})$, *pues en este caso vale* $\frac{F_M}{M} \geq 1$ *para todo* M .

Veremos ahora algunos criterios para obtener soluciones del problema periódico ($g = I$).

TEOREMA 5.2.4

Sea X_n *una sucesión acotada en* $C([0,\alpha], R^m)$ *tal que*

$$\begin{cases} X_n' = F_n(t, X_n) & \text{en} \quad (0,\alpha) \\ X_n(0) = g_n(X_n(\alpha_n)) \end{cases}$$

para ciertas g_n *lineales,* F_n *continuas tales que* $g_n \longrightarrow I$, $F_n \longrightarrow F$, *y* $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ ($\alpha_n \leq \alpha$). *Entonces el problema periódico admite una solución en* $C([0,\alpha], R^m)$.

<u>*Demostración*</u>

Considerando el operador definido en el teorema 5.2.1 para $g = I$, vale

$$(TX_n)' = F(t, X_n) = F(t, X_n) - F_n(t, X_n) + X_n'$$

y entonces

$$(TX_n - X_n)(t) = (TX_n - X_n)(0) + \int_0^t F(s, X_n) - F_n(s, X_n)$$

Por compacidad, podemos suponer que $TX_n \longrightarrow X$. Además, para cierto compacto K suficientemente grande vale

$$|\int_0^t F(s, X_n) - F_n(s, X_n)| \leq \alpha \|F - F_n\|_{\infty, K} \longrightarrow 0$$

y

$$(TX_n - X_n)(0) = X_n(\alpha) - g_n(X_n(\alpha_n)) = (I - g_n)(X_n(\alpha)) + g_n(X_n(\alpha) - X_n(\alpha_n)) \longrightarrow 0$$

pues X_n es acotada, $I - g_n \longrightarrow 0$ y $X_n(\alpha) - X_n(\alpha_n) = \int_{\alpha_n}^{\alpha} F_n(s, X_n) \longrightarrow 0$.

Se deduce que $X_n \longrightarrow X$, lo que muestra que X es un punto fijo de T .

TEOREMA 5.2.5

Supongamos que el sistema

$$(3_r) \begin{cases} X' = \dfrac{1}{r} F(t, X) & \text{en} \quad (0, \alpha) \\ X(0) = \dfrac{1}{r} X(\alpha). \end{cases}$$

no tiene solución en ∂B_M *para ningún* $r \in (1, 1 + \alpha \frac{F_M}{M}]$. *Entonces el problema periódico (r=1) admite al menos una solución en* B_M .

<u>*Demostración*</u>

Considerando el operador compacto definido en el teorema 5.2.1 para $g = I$, definimos

$$T^*X = \begin{cases} TX & \text{si } \|TX\|_\infty \leq M \\ \dfrac{MTX}{\|TX\|_\infty} & \text{si } \|TX\|_\infty \geq M. \end{cases}$$

$T^* : B_M \longrightarrow B_M$ es compacto, y entonces tiene algún punto fijo X . Si X no es punto fijo de T , entonces $\|X\|_\infty = M$, y $TX = rX$, con $r = \dfrac{\|TX\|_\infty}{M}$.

Luego el sistema (3_r) tiene una solución en ∂B_M , y vale $1 < r \leq 1 + \alpha \dfrac{F_M}{M}$, lo que es absurdo.

OBSERVACIÓN

Para $r = 1+\alpha\frac{F_M}{M}$, 5.2.2 y 5.2.3 muestran que (3_r) tiene una solución $X \in B_M$, de modo que para que el criterio sea aplicable debe cumplirse que $\|X\|_\infty < M$.

EJEMPLOS

i) Sea F continua tal que $F(t,x).x < 0$ para todo $(t,x) \in [0,\alpha] \times R^m$ tal que $|x| = M$. En tal caso, para cualquier solución de (3_r) se verifica que $X'.X = \frac{1}{r}F(t,X).X < 0$ cuando $|X(t)|$ está cerca de M . Siendo $X'.X = \frac{1}{2}(X.X)'$, se deduce que si $|X(0)| < M$ entonces $\|X\|_\infty < M$. Por otra parte, si $|X(0)| = M$, $|X(\alpha)| = r|X(0)| > M$.

Por el teorema 5.2.5, el problema periódico tiene al menos una solución en B_M .

ii) Sea $A \in R^{m\times m}$ con todos sus autovalores reales y simples. Para el sistema lineal $X' = AX(t) + b$, si X_i es una base de soluciones del sistema homogéneo, $X_i(t) = e^{\lambda_i t}V_i$ y $X_{r_i}(t) = X_i(t/r)$ es una base de soluciones de

$$X' = \frac{1}{r}AX$$

Veamos que en este caso (3_r) admite alguna solución para todo r salvo un conjunto discreto.

En efecto, si $\sum a_i(t)X_{r_i}(t)$ es una solución de $X' = \frac{1}{r}(AX + b)$ con $a_i(0) = 0$, el sistema

$$(3_r)\begin{cases} X' = \frac{1}{r}(AX + b) & \text{en} \quad (0,\alpha) \\ X(0) = \frac{1}{r}X(\alpha). \end{cases}$$

tiene solución si y sólo si existen constantes $c_1, ...c_n$ tales que

$$\sum c_i(rX_i(0) - X_i(\frac{\alpha}{r}) = \sum a_i(\alpha)X_i(\frac{\alpha}{r})$$

Luego, si (3_r) no tiene solución, existen ciertos $u_1(r), ..., u_n(r)$ (no todos nulos) tales que $\sum u_i(r)(rX_i(0) - X_i(\frac{\alpha}{r}) = 0$ y entonces $u_i(r)(r - e^{\lambda_i\alpha/r}) = 0$ para todo i. Se concluye que $u_i(r) \neq 0$ a lo sumo para un conjunto de valores aislados de r .

5.3 Unicidad para el problema (2)

En los teoremas 5.2.1 y 5.2.2 hemos visto que si F y g son Lipschitz con constante suficientemente pequeña, el sistema (2) tiene solución única. Veremos ahora un resultado de unicidad bajo otras condiciones:

TEOREMA 5.3.1

Sean g lineal, F continuamente derivable con respecto a X, y $A(t,x) = D_X F(t,x)$. Entonces (2) tiene a lo sumo una solución en cualquiera de los siguientes casos:

i) $\|g\| < 1$ *y* $A(t,x) \leq 0$ *para todo* $(t,x) \in (0,\alpha) \times R^m$

ii) g *inversible,* $\|g^{-1}\| < 1$ *y* $A(t,x) \geq 0$ *para todo* $(t,x) \in (0,\alpha) \times R^m$

iii) g *isometría,* $A(t,x) > 0$ *(o* $A(t,x) < 0$*) para todo* $(t,x) \in (0,\alpha) \times R^m$, $x \neq 0$.

<u>*Demostración*</u>

Sean X, Y soluciones de (2), y sea $Z = Y - X$. Luego, $Z'.Z = (F(t,Y) - F(t,X))Z$, y aplicando para t fijo el teorema de Lagrange a la función $\varphi(u) = F(t, uY + (1-u)X)Z$ se deduce que

$$(Z.Z)' = 2A(t,\psi)Z.Z$$

para cierto valor intermedio $\psi(t)$. Luego, si vale i) se ve que la función $|Z| = (Z.Z)^{1/2}$ es decreciente en t, y el resultado es inmediato por ser $|Z(0)| = |g(Z(\alpha))| < |Z(\alpha)|$. Para ii) la demostración es la misma, usando ahora que $Z(\alpha) = g^{-1}(Z(0))$.

Finalmente, si vale iii) $|Z|$ es monótona, y si $Z(t_0) \neq 0$, entonces $Z \neq 0$ en cierto intervalo I y $Z.Z$ es estrictamente monótona en I. Esto es absurdo, pues $|Z(0)| = |g(Z(\alpha))| = |Z(\alpha)|$.

OBSERVACIÓN

En la situación del teorema anterior, si g es una isometría las condiciones dadas sobre A en i) o ii) implican que $|Z|$ es constante.

REFERENCIAS

[A] Adams, R. A., Sobolev Spaces, Academic Press, 1975.

[Ag] Agmon, S., Lectures on elliptic boundary problems, Van Nostrand Reinhold, 1965.

[Ah] S. Ahmad: An existence theorem for periodically pertubed conservative systems, Michigan Math.J. 20 (1974), 385-392.

[A-S] S.Ahmad, J.Salazar: On existence of periodic solutions for nonlinearly perturbed conservative systems. Differential Equations, pp. 103-114, Academic Press, Orlando, FL (1980)

[Be] Berger, M., Gostiaux, B., Differential geometry: manifolds, curves and surfaces, Springer- Verlag, 1987

[B] Bang-yen Chen, Geometry of Submanifolds, Marcel Dekker.Inc., 1973.

[B-C] Brezis, H., Coron, J., Multiple Solutions of H-Systems and Rellich's conjecture. Comm.Pure Appl. Math 37 no. 2, 1984

[B-G] Bethuel, F., Ghidaglia, J., Improved regularity of solutions to elliptic equations involving jacobians and applications. J.Math.Pures Appl. (9) 72 no.5, 1993.

[D] Do Carmo, M., Differential geometry of curves and surfaces, Prentice-Hall, 1976.

[Du] Dunford, N., Schwartz, J. T., Linear Operators, Part I and Part II, Interscience Publishers, 1963.

[F-M] A.Fonda, J.Mawhin:Iterative and Variational Methods for the Solvability of Some Semilinear Equations in Hilbert Spaces. Journal of Differential Equations, Vol 98, 2 (1992).

[G] Giaquinta, M., Multiple Integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems, Princeton Univ. Press, 1983.

[G-T] Gilbarg, D., Trudinger, N. S., Elliptic Partial Differential Equations of Second Order, Springer-Verlag, 1966.

[H-H] Heinz, E., Hildebrandt, S., The number of branch points of surfaces of bounded mean curvature, J.Differential Geometry 4, 1970 (227-235)

[H1] Hildebrandt, S., Randwertprobleme fur Flachen mit vorgeschriebener mittlerer Krummung und Anwendungen auf die Kapillaritatstheorie. Math.Z.,112,1969 (205-213).

[H2] Hildebrandt, S., On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature, Com. Pure Appl. Math., 23, 1970, (97-114).

[Hs] Hsiao, George, Lectures on variational methods for boundary integral equations: theory and applications. Preprint 1998.

[L-U] Ladyzhenskaya, O., Ural'tseva, N., Linear and Quasi-linear elliptic equations, Academic Press, 1968.

[LD-M1] Lami Dozo, E., Mariani, M. C., A Dirichlet problem for an H-system with variable H. Manuscripta Mathematica 81, 1-14 (1993).

[LD-M2] Lami Dozo, E., Mariani, M. C., Solutions to the Plateau problem for the prescribed mean curvature equation. Studies in Applied Mathematics 96, 351-358.

[LD-M2] Lami Dozo, E., Mariani, M. C.,The H-Surface system with constant boundary values. Aparecerá en la revista de la Unión Matemática Argentina.

[L] A. C. Lazer: Application of a lemma on bilinear forms to a problem in nonlinear oscillations, Proc. Amer. Math. Soc. 33 (1972) 89-94.

[M] Mariani, M.C., Problemas de Contorno para la ecuación de curvatura media prescripta. Tesis doctoral, 1992.

[Ma] J.Mawhin, Continuation theorems and periodic solutions of ordinary differential equations. Recherches de mathématique 44 (1994), Inst. de Math Pure et Apliquée, Univ.Cath.de Louvain. Prepublication

[Mo] Morrey C. B., Jr., Multiple Integrals in the Calculus of Variations, Springer-Verlag, 1966.

[St1] Struwe, M., Plateau's problem and the calculus of variations, Princeton Univ. Press, 1988.

[St2] Struwe, M., Variational methods, Springer-Verlag, 1990.

[We] Wente,H.C. The differential equation $\Delta X = 2HX_u \wedge X_v$ with vanishing boundary values, Proc.Amer.Math.Soc 50, (1975),131-7