

Tesis de Posgrado

Transición cuántico-clásica en teoría de campos

Lombardo, Fernando César

1998

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Lombardo, Fernando César. (1998). Transición cuántico-clásica en teoría de campos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3080_Lombardo.pdf

Cita tipo Chicago:

Lombardo, Fernando César. "Transición cuántico-clásica en teoría de campos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1998.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3080_Lombardo.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Tesis Doctoral

Transición Cuántico-Clásica en Teoría de Campos

Autor: Fernando César Lombardo

Director: Dr. Francisco Diego Mazzitelli

№ 3 0 8 0 -

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas

Noviembre de 1998

A mi familia

Resumen

En esta Tesis estudiamos el proceso de transición cuántico-clásica en teoría de campos. Extendiendo el formalismo de la funcional de influencia de Feynman y Vernon, estudiamos el proceso de pérdida de coherencia para campos autointeractuantes en espacios planos y para modelos de gravedad cuántica.

En primer lugar, después de destacar los principales resultados para una partícula Browniana cuántica acoplada a un entorno de osciladores armónicos, consideramos una teoría de campos con autointeracción en el espacio de Minkowski. Calculamos una acción efectiva de granulado grueso integrando los modos del campos cuyas longitudes de onda sean menores que cierta longitud crítica. A partir de esta acción efectiva obtenemos la ecuación de evolución para la matriz densidad reducida. Calculamos los coeficientes de difusión de esta ecuación y analizamos el proceso de pérdida de coherencia para las longitudes de onda mayores que la crítica. Luego, con el objeto de analizar la formación de estructuras en modelos inflacionarios, generalizamos los resultados a campos acoplados conformemente a la métrica de de Sitter. Mostramos que la pérdida de coherencia es efectiva si la longitud de onda crítica es mayor que el radio de Hubble.

Por otro lado, estudiamos el límite clásico en modelos de gravedad escalar-tensorial en dos dimensiones. Analizamos diferentes acoplamientos entre el campo dilatónico y el campo de materia. Discutimos el proceso de radiación de Hawking en los distintos modelos. A partir de un cálculo exacto de la funcional de influencia, estudiamos las condiciones bajo las cuales es posible que la pérdida de coherencia sea efectiva en métricas cosmológicas para asegurar la validez de la aproximación semiclásica.

Finalmente estudiamos modelos en cuatro dimensiones donde campos masivos se acoplan a la geometría del espacio-tiempo de manera arbitraria. Calculamos las ecuaciones de Einstein-Langevin para estudiar el efecto de las fluctuaciones cuánticas inducidas por los campos de materia sobre la geometría clásica.

Palabras claves:

Transición cuántico-clásica - Teoría cuántica de campos - Gravedad semiclásica - Pérdida de coherencia - Agujeros negros - Cosmología

Abstract

In this Thesis we study the quantum to classical transition process in the context of quantum field theory. Extending the influence functional formalism of Feynman and Vernon, we study the decoherence process for self-interacting quantum fields in flat space. We also use this formalism for arbitrary geometries to analyze the quantum to classical transition in quantum gravity.

After summarizing the main results known for the quantum Brownian motion, we consider a self-interacting field theory in Minkowski spacetime. We compute a coarse grained effective action by integrating out the field modes with wavelength shorter than a critical value. From this effective action we obtain the evolution equation for the reduced density matrix (master equation). We compute the diffusion coefficients for this equation and analyze the decoherence induced on the long-wavelength modes. We generalize the results to the case of a conformally coupled scalar field in de Sitter spacetime. We show that the decoherence is effective as long as the critical wavelength is taken to be not shorter than the Hubble radius.

On the other hand, we study the classical limit for scalar-tensorial models in two dimensions. We consider different couplings between the dilaton and the scalar field. We discuss the Hawking radiation process and, from an exact evaluation of the influence functional, we study the conditions by which decoherence ensures the validity of the semiclassical approximation in cosmological metrics.

Finally we consider four dimensional models with massive scalar fields, arbitrary coupled to the geometry. We compute the Einstein-Langevin equations in order to study the effect of the fluctuations induced by the quantum fields on the classical geometry.

Keywords:

Quantum to classical transition - Quantum field theory - Semiclassical gravity - Decoherence
- Black holes - Cosmology

Indice

1	Introducción	1
2	El movimiento Browniano cuántico	7
2.1	El modelo: sistema y entorno	8
2.2	Funcional de influencia de Feynman y Vernon	9
2.3	La ecuación maestra	14
2.4	Pérdida de coherencia	18
3	Granulado grueso y pérdida de coherencia en teoría de campos	23
3.1	La funcional de influencia para teoría de campos	24
3.2	Ecuaciones de movimiento semiclásicas	30
3.3	La ecuación maestra	33
3.4	Pérdida de coherencia y perturbaciones cosmológicas	36
3.4.1	Espacio-tiempo plano	37
3.4.2	Espacio-tiempo de de Sitter	41
3.5	Discusión	44
4	La acción de influencia en gravedad semiclásica	47

4.1	El modelo de Callan-Giddings-Harvey-Strominger	50
4.1.1	Ecuaciones clásicas de movimiento	50
4.1.2	Efectos cuánticos: la acción efectiva Euclídea	56
4.1.3	La acción efectiva de camino temporal cerrado	58
4.1.4	Las ecuaciones de movimiento covariantes	61
4.1.5	Radiación de Hawking: modelo CGHS	64
4.2	Modelos más realistas: acoplamiento dilatón-campo escalar	66
4.2.1	La acción efectiva y el tensor de energía-impulso	68
4.2.2	Radiación de Hawking: modelos con acoplamiento al dilatón	74
4.2.3	Correcciones cuánticas al potencial Newtoniano	75
4.2.4	Creación cosmológica de partículas	78
4.3	El límite semiclásico	80
4.3.1	Cálculo exacto de la funcional de influencia	80
4.3.2	Funcional de influencia para historias cosmológicas: límite clásico	82
4.3.3	Hipersuperficies de tiempo constante	83
4.3.4	Hipersuperficies más generales	84
4.4	Cálculos aproximados de la funcional de influencia	87
4.5	Discusión	90
5	Las ecuaciones de Einstein - Langevin	93
5.1	La acción efectiva Euclídea	94
5.1.1	Caso no-masivo	96
5.1.2	Caso masivo	97

5.2	La acción efectiva de camino temporal cerrado	98
5.3	Disipación y ruido: las ecuaciones de Einstein-Langevin	100
5.4	Discusión	102
6	Conclusiones	105

Capítulo 1

Introducción

La motivación fundamental de la presente Tesis es avanzar en la comprensión del origen y de los mecanismos por los cuales la transición cuántico-clásica tiene lugar en teoría de campos. En particular, utilizando una extensión del formalismo de la funcional de influencia de Feynman y Vernon para teoría de campos, estudiamos este proceso para campos escalares en el espacio de Minkowski y para campos escalares acoplados a geometrías arbitrarias con el objeto de entender la transición “a lo clásico” de modelos de gravedad cuántica.

La mecánica cuántica es una de las teorías más exitosas de la historia de la física: todas sus predicciones concuerdan con los experimentos con gran precisión y su aplicación ha transformado el mundo tecnológico en diferentes áreas. Por otra parte, su dominio de validez es notablemente amplio ya que se utiliza tanto para explicar la estructura de las estrellas de neutrones como también para predecir las observaciones de experiencias que involucran partículas elementales que interactúan a muy altas energías.

Si bien la mecánica cuántica es imprescindible para una *descripción microscópica* de la naturaleza, con la mecánica clásica bastaría, en principio, para describir el comportamiento de sistemas a escalas macroscópicas. Esta afirmación está basada fundamentalmente en nuestro “sentido común”: a escala macroscópica las cosas “suceden” o “no suceden” y los objetos materiales siempre tienen propiedades bien definidas. La física clásica está compuesta por un conjunto de axiomas compatibles con este tipo de afirmaciones. En cambio la mecánica cuántica es, a primera vista,

incompatible con ellas: no es posible asignar propiedades bien definidas a los sistemas físicos a menos que estas propiedades sean medidas. Pero la mecánica cuántica es absolutamente necesaria para explicar muchos fenómenos aún a escala macroscópica, como los propios de las estrellas de neutrones antes mencionadas.

En general, para que un sistema cuántico pueda considerarse como clásico hay, al menos, dos condiciones que deben satisfacerse. Por un lado, la función de onda debe predecir que las variables canónicas estén fuertemente correlacionadas de acuerdo a las leyes clásicas, o alguna distribución construida a partir de ella (como ser la funcional de Wigner) debe presentar un “pico” alrededor de una o un conjunto de configuraciones clásicas. Para ciertas funciones de onda que se describen frecuentemente como “semiclásicas”, se puede demostrar que predicen una fuerte correlación entre las coordenadas y los momentos. Entonces, nos referiremos a esta condición simplemente como *correlación*. Por otro lado, la segunda condición es que la interferencia entre las distintas configuraciones clásicas debe ser despreciable, de modo tal que sea posible decir que el sistema está en cierto estado definido, entre los muchos estados posibles. Esto involucra una *pérdida de coherencia*, es decir la destrucción de los elementos no-diagonales de la matriz densidad, que representan los términos de interferencia.

El conflicto aparente entre la mecánica cuántica y nuestro sentido común se basa en el hecho de que los efectos de interferencia cuántica entre estados macroscópicamente distinguibles no son observados en la naturaleza. En todos esos casos, la interferencia cuántica está ausente y las probabilidades pueden sumarse, al igual que en la mecánica clásica. Por otro lado, existe cierta ambigüedad cuando queremos establecer claramente la “frontera” entre lo que consideramos como cuántico y aquello que llamamos clásico, por lo tanto el entendimiento de esta transición es de gran importancia en muchas ramas de la física.

En general la inexistencia de interferencia cuántica entre estados macroscópicamente distinguibles puede ser explicada como consecuencia del proceso de *pérdida de coherencia*. Este proceso considera como aspecto fundamental que los objetos macroscópicos siempre interactúan con un entorno formado por un gran número de variables irrelevantes. Esta interacción es la que produce que los efectos de interferencia cuántica desaparezcan muy rápidamente [1, 2, 3] y emerja una descripción en términos de variables clásicas de lo que en principio era un sistema cuántico.

Por lo tanto, modelando en forma realista la interacción entre sistemas macroscópicos y sus entornos es posible tener una noción clara de cuán eficiente es el mecanismo de pérdida de coherencia y cuál es la escala de tiempo en la que éste actúa. En particular, se ha comprobado en varios ejemplos que la pérdida de coherencia puede tener lugar en tiempos mucho más cortos que aquellos para los cuales el entorno comienza a producir efectos disipativos. En consecuencia no es difícil entender el motivo por el cual no se observa interferencia cuántica de objetos macroscópicos.

Entre las motivaciones principales que llevaron a tratar de entender el proceso de pérdida de coherencia podemos mencionar, en primer lugar, al estudio de la dinámica de la transición del régimen cuántico al clásico: entender cómo y cuándo un sistema deja de comportarse cuánticamente (exhibiendo interferencias) para pasar a hacerlo clásicamente. En este contexto, reviste gran interés la comprensión del proceso de transición cuántico-clásica en cosmología cuántica, el cual involucra pérdida de coherencia, procesos disipativos y correlaciones. Este estudio se encuadra principalmente en la fundamentación de la aproximación semiclásica de la gravedad cuántica, donde consideramos campos de naturaleza cuántica acoplados a una geometría del espacio-tiempo que es clásica. Esta aproximación contiene efectos muy interesantes como, por ejemplo, la creación de partículas, que a su vez tiene un rol preponderante en la transición cuántico-clásica.

Los problemas antes mencionados indican la necesidad de un mejor entendimiento de la naturaleza y estructura de los sistemas cuánticos abiertos, especialmente para teoría cuántica de campos. La relación entre los procesos estadísticos y cuánticos que involucran ruido y fluctuaciones, tales como disipación, pérdida de coherencia, correlaciones y creación de partículas debieron estar presentes en el Universo temprano, y su consecuente evolución debió estar signada por la influencia de éstos hasta arribar a nuestro Universo actual, que se comporta clásicamente.

Particularmente, distintas teorías pretenden explicar la formación de las estructuras en el Universo (galaxias, cúmulos, etc) a partir de las inhomogeneidades primordiales, las cuales aparecieron debido a las fluctuaciones cuánticas de los campos de materia. Es posible que las fluctuaciones cuánticas se hayan convertido en perturbaciones clásicas debido a la expansión del Universo. Por lo tanto, la pérdida de coherencia de las inhomogeneidades primordiales sería la consecuencia de una combinación entre la expansión del Universo y la existencia de interacciones no lineales que

generan un acoplamiento entre aquellas inhomogeneidades que alcanzan la escala macroscópica y aquellas que nunca crecen lo suficiente (las cuales conforman un entorno efectivo para las primeras).

Por otro lado, y con el objeto de estudiar en detalle la frontera entre lo cuántico y lo clásico, es posible concebir experiencias de “pérdida de coherencia controlada” en las que se controla con precisión la intensidad de la interacción entre el sistema cuántico y su entorno. Cuando podemos considerar el acoplamiento como débil, el sistema manifiesta interferencias, mientras que cuando el proceso de pérdida de coherencia es efectivo se comporta en forma clásica. Recientemente se han realizado experiencias utilizando sistemas de iones atrapados en los que, mediante una combinación de campos electromagnéticos, se confina en el espacio a un conjunto de iones que permanece aislado de todo entorno (gracias a que los iones son enfriados lo suficiente). El entorno está formado por los modos del campo electromagnético debido a la aplicación de láseres; y es la frecuencia de éstos la que controla la transición cuántico-clásica [4].

El proceso inverso, aislar suficientemente a un sistema macroscópico hasta que se comporte cuánticamente no es tan sencillo. Sin embargo existen propuestas de utilizar superconductores para observar efectos cuánticos macroscópicos, dado que estos materiales presentan importantes efectos colectivos que involucran la acción coherente de un gran número de partículas [5].

Como mencionamos al inicio de esta Introducción, el objetivo principal en este trabajo consiste en estudiar el proceso de pérdida de coherencia en teoría de campos como primer paso hacia el entendimiento global de la transición cuántico-clásica en dicho contexto. En el Capítulo 2 utilizamos una partícula Browniana cuántica acoplada a un entorno de osciladores armónicos, como ejemplo para desarrollar un formalismo adecuado para estudiar sistemas cuánticos abiertos. Este formalismo, desarrollado por Feynman y Vernon [6] es muy útil para describir los efectos disipativos y difusivos, característicos de este tipo de modelos. Calculamos la ecuación maestra que da la evolución de la matriz densidad reducida, la cual se obtiene integrando los grados de libertad correspondientes al entorno. A partir de la ecuación maestra podemos analizar la aparición de efectos de ruido y disipación (debidos al acoplamiento con el entorno) que producen la transición al régimen clásico de la partícula Browniana. También mostramos la deducción de la ecuación de movimiento semiclásica y de la ecuación asociada de Langevin. Los resultados de este capítulo están basados, fundamentalmente en las referencias [15] y [23].

En el Capítulo 3, extendemos el formalismo de la funcional de influencia de Feynman y Vernon a teoría de campos. Consideramos un campo escalar con autointeracción del tipo $\lambda\phi^4$. Introduciendo una escala artificial en el modelo, separamos los modos de dicho campo entre los modos de longitud de onda mayor y menor que la escala introducida. De esta manera podemos evaluar (mediante cálculos perturbativos) la ecuación maestra asociada a los modos de longitud de onda mayor que la longitud crítica; luego de haber integrado los modos de longitud de onda corta, los que consideramos como entorno. Estudiando los coeficientes de difusión de la ecuación maestra analizamos el proceso de pérdida de coherencia de los diferentes modos del “campo-sistema”.

Este modelo desarrollado en el espacio de Minkowski, lo extendemos a espacios curvos con el objeto de mostrar que la pérdida de coherencia es realmente efectiva para aquellos modos del campo escalar cuya longitud de onda sea mayor que el radio de Hubble en el espacio de de Sitter. Esto es importante para los modelos que intentan explicar la formación de estructuras en cosmología a partir de las fluctuaciones de los campos de materia cuánticos. Todo el Capítulo 3 está basado en el trabajo [30].

Llegado a este punto comenzamos el estudio de campos cuánticos en espacios curvos, a los efectos de analizar el límite semiclásico en gravedad cuántica. En el Capítulo 4 estudiamos el límite semiclásico en modelos de gravedad escalar-tensorial en dos dimensiones. Analizamos diferentes acoplamientos entre el campo dilatónico y el campo de materia. Estudiamos el proceso de radiación de Hawking en los distintos modelos. A partir de un cálculo exacto de la funcional de influencia discutimos las condiciones bajo las cuales es posible que la pérdida de coherencia sea efectiva en métricas cosmológicas para asegurar la validez de la aproximación semiclásica. Este capítulo está basado en [66] y [67].

Luego, en el Capítulo 5 estudiamos modelos más realistas en 3+1 dimensiones. Con el objeto de entender la influencia de los campos cuánticos de materia sobre la geometría clásica del espacio-tiempo, evaluamos las llamadas ecuaciones de Einstein-Langevin para un campo escalar masivo con acoplamiento arbitrario a la geometría [62].

Finalmente en el Capítulo 6 resumimos nuestras conclusiones.

Capítulo 2

El movimiento Browniano cuántico

La relajación térmica de sistemas en interacción con entornos ha sido un tema de gran interés en mecánica estadística por mucho tiempo. En particular, es importante notar que la propia descripción de la relajación de sistemas cuánticos acoplados a un entorno, también debe ser analizada por medio de la mecánica cuántica [7]. La situación más simple que podemos considerar en este contexto es aquella del movimiento Browniano de un oscilador armónico cuántico en un entorno de la misma naturaleza. Los modelos de movimiento Browniano cuántico proveen un ejemplo típico de sistemas cuánticos abiertos, y han sido muy utilizados para el entendimiento de la teoría de medición en mecánica cuántica [1], óptica cuántica [8] y pérdida de coherencia [9], por citar sólo algunos de los intereses que presentan estos modelos. El objeto central de estudio es la ecuación maestra para la matriz densidad reducida de la partícula Browniana, que se obtiene luego de integrar los grados de libertad correspondientes al entorno. Una gran cantidad de trabajos en esta dirección han sido hechos en el pasado [10, 11, 12, 13, 14]. La derivación más general de esta ecuación maestra es la efectuada por B.L. Hu, J.P. Paz y Y. Zhang [15], donde utilizaron la funcional de influencia de Feynman y Vernon [6] provista por técnicas de integrales de camino, lo cual es de gran utilidad para extender el formalismo a teorías de campos, que es uno de nuestros objetivos fundamentales.

2.1 El modelo: sistema y entorno

El modelo está compuesto por una partícula Browniana de masa M y frecuencia natural Ω , acoplada a un entorno representado por un conjunto de osciladores armónicos de masa m_n y frecuencia natural ω_n . La partícula está acoplada a cada uno de los osciladores del entorno con una constante de acoplamiento λ_n . La acción total del sistema-entorno está dada por

$$\begin{aligned} S[x, q] &= S[x] + S_E[q] + S_{\text{int}}[x, q] \\ &= \int_0^t ds \left[\frac{1}{2} M (\dot{x}^2 - \Omega^2 x^2) + \sum_n \left[\frac{1}{2} m_n (\dot{q}_n^2 - \omega_n^2 q_n^2) \right] - \sum_n \lambda_n x q_n \right], \end{aligned} \quad (2.1)$$

donde x y q_n son las coordenadas de la partícula y de los osciladores respectivamente. Debemos señalar que por simplicidad en este capítulo, sólo nos referiremos a este tipo de acoplamiento lineal entre sistema y entorno. Nuestro objetivo fundamental es introducir el formalismo que luego emplearemos en teoría de campos, donde los acoplamientos serán más complicados. La ventaja de este modelo es que la ecuación maestra puede obtenerse en forma exacta para todo tipo de entorno a considerarse [15, 16]. Acoplamientos más generales ($x^k q_n^m$) han sido considerados en la literatura, donde la ecuación maestra ha sido obtenida perturbativamente [17].

En este modelo de movimiento Browniano, la evolución del sistema combinado (sistema-entorno), puede caracterizarse por cuatro escalas de tiempo diferentes: la primera está asociada a la frecuencia natural de la partícula aislada Ω ; la segunda está representada por el tiempo de relajación (caracterizado por el acoplamiento entre la partícula y el entorno); la tercera corresponde al “tiempo de memoria” del entorno (en general asociado a la frecuencia más alta presente en el entorno) y finalmente la escala de tiempo asociada con la temperatura del entorno, que mide la importancia relativa entre los efectos cuánticos y térmicos.

El efecto del entorno sobre la dinámica del sistema está caracterizado por los fenómenos de fluctuación y disipación. Estos efectos pueden determinarse por una propiedad totalmente específica del entorno: la *densidad espectral* $I(\omega)$. Esta densidad da el número de osciladores con

una dada frecuencia y para una magnitud específica λ_n de la constante de acoplamiento, presentes en el entorno,

$$I(\omega) = \sum_n \delta(\omega - \omega_n) \frac{\lambda_n^2}{2m_n\omega_n}. \quad (2.2)$$

Por lo tanto, dando la densidad $I(\omega)$ y el estado inicial del entorno, tanto la disipación como las fluctuaciones quedan unívocamente determinadas, como podremos ver en la siguiente sección.

Diferentes $I(\omega)$ clasifican a los diferentes tipos de entornos; la constante de acoplamiento se ajusta a la frecuencia del entorno, como por ejemplo $\lambda_n = m_n\omega_n^\alpha$ para cada modelo de entorno [11]. Por razones físicas, uno no espera que un entorno real contenga un número infinito de frecuencias, y en general se introduce una escala arbitraria, que llamaremos *frecuencia de corte* Λ , que volverá cero a la densidad espectral para aquellas frecuencias mayores que esta frecuencia de corte; es decir $I(\omega) \rightarrow 0$ cuando $\omega > \Lambda$. Por lo tanto, la escala de tiempo asociada a la memoria del entorno, mencionada en un párrafo anterior, queda determinada por la inversa de esta frecuencia de corte. El entorno se conoce usualmente como óhmico [10] si la densidad espectral es tal que $I(\omega) \approx \omega$ ($\omega < \Lambda$); supraóhmico si $I(\omega) \approx \omega^\alpha$ para $\alpha > 1$ o subóhmico si $\alpha < 1$. Es simple ver que el caso óhmico (que es el más estudiado en general) corresponde a la situación física en la que el entorno induce una fuerza lineal con la velocidad sobre el sistema. En este capítulo se utilizará la siguiente expresión explícita para la densidad espectral [15]

$$I(\omega) = \frac{2}{\pi} M \gamma_0 \omega \left(\frac{\omega}{\Lambda} \right)^{\alpha-1} e^{-\frac{\omega^2}{\Lambda^2}}, \quad (2.3)$$

donde con γ_0 representamos la constante de relajación del entorno que corresponde a la frecuencia asociada al acoplamiento entre sistema y entorno [5].

2.2 Funcional de influencia de Feynman y Vernon

El problema central de estudio en esta sección es desarrollar un formalismo general que nos permita encontrar todos los efectos cuánticos de un entorno sobre nuestro sistema de interés. En trabajos previos, la ecuación de evolución para la matriz densidad reducida fue calculada bajo ciertas

aproximaciones, como por ejemplo para entornos a temperatura arbitraria pero sólo en el caso óhmico [9]; o en el límite de alta temperatura [10]. En esta sección mostramos una representación funcional del operador de evolución de la matriz densidad reducida, que nos permitirá obtener la ecuación maestra exacta para un entorno general.

El operador matriz densidad $\hat{\rho}$ evoluciona unitariamente bajo la acción del operador de evolución $J(t, t_0)$, por lo tanto

$$\hat{\rho}(t) = J(t, t_0)\hat{\rho}(t_0), \quad (2.4)$$

es la ecuación de evolución para la matriz densidad total $\hat{\rho}$. Utilizando la representación de la integral de caminos [18], este propagador puede escribirse como

$$\begin{aligned} J(x, q, x', q'; t|x_i, q_i, x'_i, q'_i; t_0) &= U(x, q; t|x_i, q_i; t_0)U^*(x', q'; t|x'_i, q'_i; t_0) \\ &= \int_{x_i}^x \mathcal{D}x \int_{q_i}^q \mathcal{D}q \exp \left[\frac{i}{\hbar} S[x, q] \right] \int_{x'_i}^{x'} \mathcal{D}x' \int_{q'_i}^{q'} \mathcal{D}q' \exp \left[-\frac{i}{\hbar} S[x', q'] \right], \end{aligned} \quad (2.5)$$

donde U es el operador de evolución de la función de onda. Las integrales funcionales del segundo término de la ecuación están realizadas sobre todas las posibles historias compatibles con las condiciones de contorno. Con q estamos representando las coordenadas del conjunto completo de osciladores presentes en el entorno (q_n); y con i notamos las variables en el instante inicial.

La matriz densidad reducida está definida como

$$\rho_r(x, x') = \int_{-\infty}^{+\infty} dq \int_{-\infty}^{+\infty} dq' \rho(x, q|x', q') \delta(q - q'), \quad (2.6)$$

por lo tanto, su evolución temporal está regida por un operador evolución reducido J_r , definido como:

$$\rho_r(x, x'; t) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \int_{-\infty}^{+\infty} dx'_i J_r(x, x'; t|x_i, x'_i; t_0) \rho_r(x_i, x'_i; t_0). \quad (2.7)$$

Considerando como condición inicial que el sistema y el entorno no están correlacionados [15], $\hat{\rho}(t_0) = \hat{\rho}_{\text{sist}}(t_0) \otimes \hat{\rho}_{\text{ent}}(t_0)$, el operador de evolución reducido adopta la forma

$$\begin{aligned}
J_r(x_f, x'_f; t|x_i, x'_i; t_0) &= \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'_f} \mathcal{D}x' \exp \left[\frac{i}{\hbar} (S[x] - S[x']) \right] F[x, x'] \\
&= \int_{x_i}^{x_f} \mathcal{D}x \int_{x'_i}^{x'_f} \mathcal{D}x' \exp \left[\frac{i}{\hbar} A[x, x'] \right], \tag{2.8}
\end{aligned}$$

donde con el sub-índice f denotamos a las variables en el momento final de la evolución. $A[x, x']$ es la llamada “acción efectiva” para el sistema cuántico abierto y $F[x, x']$ es la *funcional de influencia* de Feynman y Vernon, definida explícitamente como [6]

$$\begin{aligned}
F[x, x'] &= \int_{-\infty}^{+\infty} dq_f \int_{-\infty}^{+\infty} dq_i \int_{-\infty}^{+\infty} dq'_i \int_{q_i}^{q_f} \mathcal{D}q \int_{q'_i}^{q'_f} \mathcal{D}q' \exp \left[\frac{i}{\hbar} (S_{\text{ent}}[q] + S_{\text{int}}[x, q]) \right] \\
&\quad \times \exp \left[-\frac{i}{\hbar} (S_{\text{ent}}[q'] + S_{\text{int}}[x', q']) \right] \rho_{\text{ent}}(q_i, q'_i; t_0) \\
&= \exp \left[\frac{i}{\hbar} \delta A[x, x'] \right], \tag{2.9}
\end{aligned}$$

donde llamamos $\delta A[x, x']$ a la *acción de influencia*. En consecuencia la acción efectiva para el sistema cuántico abierto es $A[x, x'] = S[x] - S[x'] + \delta A[x, x']$.

Debido a la estructura de esta funcional, podemos interpretar a las historias x y x' como moviéndose hacia el futuro y pasado, respectivamente (gracias a la diferencia de signo que aparece en cada exponencial). Esta observación permite señalar la similitud entre el formalismo de la funcional de influencia y el de la funcional generatriz de camino temporal cerrado (CTC) [19] (similitud que utilizaremos en los capítulos 4 y 5). Las reglas de Feynman que se deducen a partir del formalismo CTC son muy útiles para calcular la funcional de influencia en teoría de campos.

Gracias a la condición inicial en la que no existen correlaciones, la funcional de influencia sólo depende del estado inicial del entorno. En este ejemplo mostramos la funcional $F[x, x']$ para un entorno que inicialmente está en equilibrio termodinámico a temperatura β^{-1} (condiciones más generales acerca de la condición de equilibrio entre el sistema y el entorno pueden encontrarse en la Ref. [12]; acerca de condiciones iniciales con correlaciones consultar las Refs. [11, 20]). Para las presentes condiciones iniciales, la funcional de influencia puede calcularse exactamente [6, 10, 15].

El resultado es:

$$F[x, x'] = \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 [x(s_1) - x'(s_1)] \eta(s_1 - s_2) [x(s_2) + x'(s_2)] \right. \\ \left. - \frac{1}{\hbar} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 [x(s_1) - x'(s_1)] \nu(s_1 - s_2) [x(s_2) - x'(s_2)] \right]. \quad (2.10)$$

Los núcleos η y ν , son en general no-locales en el tiempo y están definidos como

$$\nu(s) = \int_0^{+\infty} d\omega I(\omega) \coth \frac{\beta \hbar \omega}{2} \cos \omega s, \quad (2.11)$$

$$\eta(s) = \frac{d}{ds} \gamma(s), \quad (2.12)$$

donde

$$\gamma(s) = \int_0^{+\infty} d\omega \frac{I(\omega)}{\omega} \cos \omega s. \quad (2.13)$$

Dada la expresión de la funcional de influencia en términos de los núcleos η y ν , podemos escribir la acción de influencia como

$$\delta A[x, x'] = -2 \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \Delta(s_1) \eta(s_1 - s_2) \Sigma(s_1) \\ + i \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \Delta(s_2) \nu(s_1 - s_2) \Delta(s_2), \quad (2.14)$$

donde hemos introducido las variables: $\Delta = x - x'$ y $\Sigma = 1/2(x + x')$.

Las partes real e imaginaria de la acción efectiva $A[x, x']$ pueden interpretarse como responsables de la disipación y el ruido, respectivamente. Los núcleos de ruido y disipación están siempre relacionados por una ecuación integral conocida como la relación de fluctuación-disipación [14]. Para el caso del movimiento Browniano cuántico, esta relación puede escribirse como

$$\nu(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} ds' K(s - s') \gamma(s'), \quad (2.15)$$

donde el núcleo $K(s)$ está definido por

$$K(s) = \int_0^{+\infty} d\omega \frac{\omega}{\pi} \coth \frac{\beta \hbar \omega}{2} \cos \omega s. \quad (2.16)$$

En el límite clásico de muy altas temperaturas, el núcleo K es proporcional a una función delta de Dirac, $K(s) = 2k_B T \delta(s)$ y la relación de fluctuación-disipación no es más que la relación de Einstein usual.

La ecuación de movimiento para la partícula Browniana puede deducirse a partir de la acción efectiva $A[x, x']$ mediante $\left. \frac{\delta A[x, x']}{\delta x} \right|_{x=x'} = 0$,

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) + 2 \int_0^t ds \eta(s-t)x(s) = 0, \quad (2.17)$$

que en este caso corresponde a haber efectuado un promedio sobre todas las posibles realizaciones del ruido. Para poner de manifiesto este hecho podemos escribir la parte imaginaria de la acción de influencia en términos de una fuerza estocástica ξ , acoplada al sistema y definida por una distribución de probabilidad gaussiana

$$P[\xi(t)] = N_\xi \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \xi(s_1) \nu(s_1 - s_2)^{-1} \xi(s_2) \right\}, \quad (2.18)$$

donde N_ξ es una constante de normalización. Por lo tanto, la parte imaginaria de la acción efectiva puede escribirse en función de la fuente de ruido estocástica como

$$\int \mathcal{D}\xi(t) P[\xi] \exp \left[-\frac{i}{\hbar} \Delta(t) \xi(t) \right] = \exp \left[\frac{i}{\hbar} \int_0^t ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 \Delta(s_1) \nu(s_1 - s_2) \Delta(s_2) \right]. \quad (2.19)$$

Finalmente, habiendo escrito la parte imaginaria en función de ξ , podemos escribir una ecuación de movimiento explicitando la presencia de un término de ruido. Esta es la ecuación asociada de Langevin, donde la dinámica de la partícula clásica está afectada por la presencia de una fuente de ruido [6, 9, 10, 11]:

$$\ddot{x}(t) + \Omega^2 x(t) + 2 \int_0^t ds \eta(s-t)x(s) = \xi(t). \quad (2.20)$$

El ruido estocástico ξ está caracterizado por su distribución de probabilidad $P[\xi]$ y por las funciones de correlación

$$\langle \xi(s) \rangle = 0 \quad \text{y} \quad \langle \xi(s) \xi(s') \rangle = \nu(s - s'). \quad (2.21)$$

2.3 La ecuación maestra

En general, por consideraciones físicas, el conocimiento de la ecuación maestra para la evolución de la matriz densidad reducida es más útil que la evolución exacta de la matriz densidad total misma. En realidad, a partir de la ecuación maestra podemos extraer muchos aspectos cualitativos acerca del comportamiento del sistema, los cuales son independientes de las condiciones iniciales.

El modelo presentado en este capítulo tiene un acoplamiento lineal y puede resolverse exactamente. Las integrales de camino de la Ec. (2.8) pueden evaluarse debido a que son integrales Gaussianas [15, 16]. Por este motivo la deducción de la ecuación maestra está basada en la representación de integral funcional para el operador de evolución de la matriz densidad reducida (Ec. (2.8)). La no-localidad de los núcleos presentes en la funcional de influencia es la única complicación; por lo tanto, obtener formalmente la ecuación maestra es conceptualmente equivalente a derivar la ecuación de Schrödinger a partir de la representación funcional del propagador en mecánica cuántica.

Para hallar la ecuación maestra debemos evaluar la derivada temporal del operador de evolución reducido. El hecho antes mencionado que la funcional de influencia sea no-local, implica que no podemos calcular esta derivada simplemente expandiendo en dt al propagador $J_r(t + dt, t)$ y restándole $J_r(t, t)$; dado que el propagador $J_r(t + dt, t)$ depende del estado del sistema a tiempo t . Esto sólo puede hacerse en el caso de alta temperatura porque en este límite la funcional de influencia se torna local en el tiempo [10].

Los resultados basados en el procedimiento funcional seguido por B.L. Hu, J.P. Paz y Y. Zhang en la Ref. [15] pueden re-obtenerse de una manera extremadamente sencilla mediante un método perturbativo (pero que en el caso de acoplamiento lineal provee la ecuación maestra exacta) [21]. En esta sección mostramos dicho procedimiento debido a que estamos interesados, fundamentalmente, en discutir las características más importantes de la ecuación maestra, y no de su deducción. El método funcional será empleado en el capítulo siguiente donde evaluaremos la ecuación maestra en teoría de campos.

En la representación de interacción, la matriz densidad total (sistema-entorno) evoluciona de acuerdo a la ecuación

$$i\hbar\dot{\rho} = [V(t), \rho], \quad (2.22)$$

donde el potencial de interacción $V(t)$, en la representación de interacción es, simplemente

$$V(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(H_{\text{sist}} + H_{\text{ent}})t\right] V \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(H_{\text{sist}} + H_{\text{ent}})t\right], \quad (2.23)$$

y la matriz densidad ρ es

$$\rho(t) = \exp\left[\frac{i}{\hbar}(H_{\text{sist}} + H_{\text{ent}})t\right] \rho \exp\left[-\frac{i}{\hbar}(H_{\text{sist}} + H_{\text{ent}})t\right]. \quad (2.24)$$

La solución de la ecuación (2.22) puede obtenerse perturbativamente mediante la serie de Dyson:

$$\rho(t) = \sum_{n \geq 0} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \dots \int_0^{t_n} \left(\frac{1}{i\hbar}\right)^n [V(t_1), [V(t_2), [\dots, [V(t_n), \rho(0)] \dots]]]. \quad (2.25)$$

A partir de esta serie, es sencillo deducir la ecuación de evolución para la matriz densidad reducida. La matriz densidad reducida $\rho_r = \text{Tr}_{\text{ent}}\rho$, en la representación de interacción, puede escribirse (conservando términos hasta segundo orden en la constante de interacción) como:

$$\begin{aligned} \rho_r(t) &\approx \rho_r(0) + \frac{1}{i\hbar} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_{\text{ent}}([V(t_1), \rho(0)]) \\ &\quad - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 \text{Tr}_{\text{ent}}([V(t_1), [V(t_2), \rho(0)]]). \end{aligned} \quad (2.26)$$

Para hallar la ecuación maestra debemos tomar la derivada temporal de la Ec. (2.26), obteniendo

$$\dot{\rho}_r = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_{\text{ent}}[V(t), \rho(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_{\text{ent}}[V(t), [V(t_1), \rho(0)]]. \quad (2.27)$$

Ahora bien, como estamos trabajando con la condición inicial de no-correlación $\rho(0) = \rho_{\text{sist}}(0) \otimes \rho_{\text{ent}}(0)$, la ecuación para matriz densidad reducida puede re-escribirse como

$$\dot{\rho}_r = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_{\text{ent}}[V(t), \rho_{\text{sist}}(0) \otimes \rho_{\text{ent}}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_{\text{ent}}[V(t), [V(t_1), \rho_{\text{sist}}(0) \otimes \rho_{\text{ent}}(0)]]. \quad (2.28)$$

El estado inicial $\rho_{\text{sist}}(t_0 = 0)$ que aparece en el lado derecho de la Ec. (2.28) puede expresarse nuevamente en términos de $\rho_r(t)$ gracias a la expansión (2.26). De esta manera el lado derecho de la ecuación (2.28) puede escribirse completamente en términos de la matriz densidad reducida a tiempo t . De esta manera podemos escribir la ecuación maestra (válida a segundo orden en un desarrollo perturbativo y para la condición inicial donde no existe correlación) como:

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_r &= \frac{1}{i\hbar} \text{Tr}_{\text{ent}}[V(t), \rho_r \otimes \rho_{\text{ent}}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_{\text{ent}}[V(t), [V(t_1), \rho_r \otimes \rho_{\text{ent}}(0)]] \\ &+ \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_{\text{ent}} \{ [V(t), \text{Tr}_{\text{ent}}([V(t_1), \rho_r \otimes \rho_{\text{ent}}(0)]) \otimes \rho_{\text{ent}}] \}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

En el caso de nuestro particular interés, $V = \sum_n \lambda_n q_n x$. Si el entorno está inicialmente en equilibrio a temperatura $T = 1/k_B \beta$, la ecuación maestra se reduce a

$$\dot{\rho}_r = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t dt_1 \text{Tr}_{\text{ent}}[V(t), [V(t_1), \rho_r \otimes \rho_{\text{ent}}(0)]]; \quad (2.30)$$

y el término dentro de la integral temporal puede escribirse como

$$\begin{aligned} \text{Tr}_{\text{ent}}[V(t), [V(t_1), \rho_r \otimes \rho_{\text{ent}}(0)]] &= \frac{1}{2} \sum_n \lambda_n^2 \left(\langle \{q_n(t), q_n(t_1)\} \rangle [x(t), [x(t_1), \rho_r]] \right. \\ &\left. + \langle [q_n(t), q_n(t_1)] \rangle [x(t), \{x(t_1), \rho_r\}] \right), \end{aligned} \quad (2.31)$$

donde $\langle \dots \rangle$ denota el promedio sobre el estado inicial del entorno. Retornando a la representación de Schrödinger, la ecuación maestra puede escribirse

$$\dot{\rho}_r = \frac{1}{i\hbar} [H_{\text{sist}}, \rho_r] - \int_0^t dt_1 \left(\nu(t-t_1) [x, [x(t_1-t), \rho]] - i\eta(t-t_1) [x, \{x(t_1-t), \rho\}] \right). \quad (2.32)$$

en función de los núcleos de ruido y disipación, que están dados por:

$$\begin{aligned} \nu(t) &= \frac{1}{2\hbar^2} \sum_n \lambda_n^2 \langle \{q_n(t), q_n(0)\} \rangle = \sum_n \frac{\lambda_n^2}{2m_n \hbar \omega_n} \cos(\omega_n t) (1 + 2N_n) \\ \eta(t) &= \frac{i}{2\hbar^2} \sum_n \lambda_n^2 \langle [q_n(t), q_n(0)] \rangle = \sum_n \frac{\lambda_n^2}{2m_n \hbar \omega_n} \sin(\omega_n t) \end{aligned} \quad (2.33)$$

Usando que $1 + 2N_n = \coth \frac{\beta \hbar \omega}{2}$, la expresión para la densidad espectral y la relación

$$\sum_{n=1}^N \frac{\lambda_n^2}{2m_n\omega_n} f(\omega_n) = \int_0^\infty d\omega I(\omega) f(\omega),$$

obtenemos

$$\nu(t) = \int_0^\infty d\omega I(\omega) \cos(\omega t) (1 + 2N(\omega)),$$

$$\eta(t) = \int_0^\infty d\omega I(\omega) \sin(\omega t).$$

Resolviendo las ecuaciones de Heisenberg para el sistema y determinando el operador $x(t)$

$$x(t) = x \cos(\Omega t) + \frac{1}{M\Omega} p \sin(\Omega t),$$

podemos escribir la expresión final de la ecuación maestra:

$$\dot{\rho}_r = -\frac{i}{\hbar} [H_{\text{sist}} + \frac{1}{2} M \bar{\Omega}^2(t) x^2, \rho_r] + 2i\gamma(t) [x, \{p, \rho_r\}] - D(t) [x, [x, \rho_r]] - f(t) [x, [p, \rho_r]], \quad (2.34)$$

donde los coeficientes temporales están dados por:

$$\begin{aligned} \bar{\Omega}^2(t) &= -\frac{2\hbar}{M} \int_0^t dt' \cos(\Omega t') \eta(t') \\ \gamma(t) &= -\frac{1}{2M\Omega} \int_0^t dt' \sin(\Omega t') \eta(t') \\ D(t) &= \int_0^t dt' \cos(\Omega t') \nu(t') \\ f(t) &= -\frac{1}{M\Omega} \int_0^t dt' \sin(\Omega t') \eta(t'), \end{aligned} \quad (2.35)$$

aquí $\bar{\Omega}$ es la frecuencia natural renormalizada por el entorno; $\gamma(t)$ es la tasa de relajación; $D(t)$ y $f(t)$ son los coeficientes de difusión (responsables de los efectos de pérdida de coherencia).

Esta ecuación, derivada perturbativamente, es la misma que se deduce en el cálculo exacto para el movimiento Browniano con acoplamiento lineal [15, 16, 21].

2.4 Pérdida de coherencia

En esta sección haremos una breve discusión acerca de los principales resultados obtenidos en relación al proceso de pérdida de coherencia en el movimiento Browniano cuántico. La relevancia del proceso de pérdida de coherencia en el contexto de la transición cuántico-clásica ha sido reconocida en los últimos años [1, 2, 3, 22]. La idea básica de este proceso es que los aspectos clásicos son una propiedad emergente en los sistemas cuánticos abiertos inducida por los entornos. Debido a la interacción con el entorno, la gran mayoría de los estados del espacio de Hilbert de un sistema cuántico se vuelven altamente inestables frente a la interacción. Después del tiempo de pérdida de coherencia, que para objetos macroscópicos es más corto que cualquier escala dinámica del sistema, un estado cuántico genérico decae en una mezcla de “estados indicadores” [2]. De esta forma el entorno induce una regla de selección efectiva sobre el sistema advirtiendo de la existencia de una superposición de estados indicadores que es estable. Estos estados indicadores se distinguen por su “habilidad” de permanecer después del monitoreo efectuado por el entorno, y por eso son los estados en los cuales el sistema cuántico abierto será observado (o medido).

Para estudiar el proceso de pérdida de coherencia a partir de la ecuación maestra (2.34), consideremos la siguiente superposición inicial de estados coherentes:

$$\psi(x, t = 0) = N \exp\left(-\frac{(x - L_0)^2}{2\delta^2} + iP_0x\right) + N \exp\left(-\frac{(x + L_0)^2}{2\delta^2} - iP_0x\right), \quad (2.36)$$

donde N es una constante. En este caso es posible resolver la ecuación maestra y mostrar que la función de Wigner construída a partir de la matriz densidad como [23]

$$W(x, p) = \frac{1}{2\pi\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} dy e^{\frac{ipy}{\hbar}} \psi^*\left(x + \frac{y}{2}\right) \psi\left(x - \frac{y}{2}\right), \quad (2.37)$$

está dada, en general por:

$$W(x, p; t) = W_1(x, p; t) + W_2(x, p; t) + W_{\text{int}}(x, p; t), \quad (2.38)$$

donde

$$\begin{aligned}
W_2 &= \bar{N}^2 \frac{\delta_2}{\delta_1} \exp \left(-\frac{(x+x_c)^2}{\delta_1^2} - \delta_2^2 [p+p_c - \beta(x+x_c)]^2 \right) \\
W_{\text{int}} &= 2\bar{N}^2 \frac{\delta_2}{\delta_1} \exp \left(-\frac{x^2}{\delta_1^2} - \delta_2^2 (p-\beta x)^2 \right) \cos [\phi_p + (\phi_x - \beta\phi_p)x] \exp(-A_{\text{int}}). \quad (2.39)
\end{aligned}$$

Las funciones $x_c(t)$, $p_c(t)$, $\delta_1(t)$, $\delta_2(t)$, $\beta(t)$, $\phi_x(t)$, $\phi_p(t)$ y $A_{\text{int}}(t)$ dependen del entorno (y de las constantes L_0 , P_0 y δ) de una manera complicada [23]. Nos concentraremos en A_{int} dado que es relevante para el estudio de la pérdida de coherencia.

Para un análisis cuantitativo del proceso de pérdida de coherencia es necesario definir una función que permita evaluar la importancia de la interferencia a un dado tiempo. Esta herramienta está dada por el cociente entre el término de interferencia y los términos directos de la función de Wigner, evaluados en sus respectivos picos, la cual es una cantidad determinada por A_{int} ,

$$\exp(-A_{\text{int}}) = \frac{1}{2} \frac{W_{\text{int}}|_{\text{pico}}}{[W_1(x,p)|_{\text{pico}} W_2(x,p)|_{\text{pico}}]^{\frac{1}{2}}}. \quad (2.40)$$

Asumiendo como condiciones iniciales que

$$\begin{aligned}
\delta_1^2 &= \delta_2^2 = \delta^2, \\
\phi_x &= P_0 = p_c \quad \phi_p = L_0 = x_c \\
A_{\text{int}} &= 0,
\end{aligned} \quad (2.41)$$

la función A_{int} está dada por la siguiente expresión

$$A_{\text{int}} = \frac{L_0^2}{\delta^2} + \delta^2 P_0^2 - \frac{\phi_p^2}{\delta_2^2} - \delta_1^2 \phi_x^2, \quad (2.42)$$

por lo tanto, se anula inicialmente y está siempre acotada:

$$A_{\text{int}} \leq \frac{L_0^2}{\delta^2} + \delta^2 P_0^2 = A_{\text{int}}|_{\text{max}}. \quad (2.43)$$

El proceso de pérdida de coherencia destruye la interferencia entre los estados indicadores, la cual está representada por los términos fuera de la diagonal de la matriz densidad reducida. Como A_{int}

crece con el tiempo, los efectos de interferencia se tornan menos importantes, así que el estado del sistema se acerca a una mezcla entre los estados indicadores.

Para analizar cómo la evolución de A_{int} se ve afectada por el entorno es conveniente utilizar la ecuación maestra (2.34). En la Ref. [15] fue demostrado que para un entorno acoplado linealmente a una temperatura arbitraria y para cualquier densidad espectral, A_{int} satisface la siguiente identidad:

$$\dot{A}_{\text{int}} = D(t)\phi_p^2 - 2f(t)\phi_p(\phi_x - \beta\phi_p). \quad (2.44)$$

El primer término contiene el efecto de la difusión e implica que A_{int} siempre aumente. Por el contrario, el signo del segundo término puede variar con el tiempo debido a la relación entre ϕ_x y ϕ_p . La ecuación (2.44) puede resolverse aproximadamente despreciando el coeficiente de difusión anómala $f(t)$, y considerando a $D(t)$ como una constante (esta aproximación se corresponde al caso de entorno óhmico y de alta temperatura). Si en el estado inicial ponemos $P_0 = 0$,

$$A_{\text{int}} \approx \frac{4L_0^2Dt}{(1 + 4D\delta^2t)}, \quad (2.45)$$

entonces, la tasa de pérdida de coherencia $\Gamma_{\text{dec}} = 1/t_{\text{dec}}$ con t_{dec} tal que $A_{\text{int}}(t_{\text{dec}}) = 1$, está dada por [23]

$$\Gamma_{\text{dec}} = 4L_0^2D \approx 8L_0^2m\gamma_0k_B T, \quad (2.46)$$

donde se usó que $D = 2\gamma_0k_B T$. Esto muestra que el coeficiente de difusión $D(t)$ de la ecuación maestra es el que regula el proceso de pérdida de coherencia y provee también de la escala de tiempo en la cual ésta se torna efectiva para destruir las interferencias cuánticas. Por lo tanto los términos fuera de la diagonal decaen como Γ_{dec} , y las coherencias cuánticas desaparecen exponencialmente en una escala que podemos re-escribir como

$$t_{\text{dec}} = \gamma_0^{-1} \left(\frac{\lambda_T}{L_0} \right)^2, \quad (2.47)$$

donde $\lambda_T = \hbar/\sqrt{2mk_B T}$ es la longitud de onda térmica de de Broglie. Entonces, para un objeto macroscópico el tiempo de pérdida de coherencia t_{dec} es, típicamente, varios órdenes de magnitud

menor que el tiempo de relajación $t_r = \gamma_0^{-1}$. Por ejemplo, para un sistema en una habitación a una temperatura $T = 300K$, con una masa de $m = 1g$ y con una separación $L_0 = 1cm$, el cociente $t_{dec}/t_r = 10^{-40}$. En consecuencia, aunque el tiempo de relajación sea del orden de la edad del Universo, $t_r \sim 10^{17}segs$, la coherencia cuántica sería destruida en $t_{dec} \sim 10^{-23}segs$. Una diferencia tan grande puede obtenerse sólo para objetos macroscópicos, y puede aceptarse sólo cuando las condiciones por las cuales se derivó la ecuación maestra se satisfacen. No obstante, es simple entender, en este contexto, por qué la pérdida de coherencia entre posiciones macroscópicamente distinguibles es casi instantánea; aún para sistemas casi aislados.

Capítulo 3

Granulado grueso y pérdida de coherencia en teoría de campos

En el capítulo precedente iniciamos el estudio del proceso de pérdida de coherencia en el caso del movimiento Browniano cuántico como un ejemplo sencillo de sistema cuántico abierto en el que la presencia de muchos de los efectos interesantes de modelos más complicados están puestos de manifiesto. Como mencionamos en la Introducción, este estudio es también de mucho interés en el contexto de la cosmología cuántica [24]. Se han realizado muchos esfuerzos para explicar el surgimiento de una métrica clásica del espacio-tiempo a partir de una teoría completamente cuántica, y para derivar, a partir de ésta, las ecuaciones de Einstein (o la versión cuánticamente corregida de ellas). Son los efectos de ruido, disipación, creación de partículas y su acción sobre la geometría (en modelos de cosmología cuántica), los aspectos relevantes de estudio para lograr un mejor entendimiento de la transición cuántico-clásica, tanto para modelos de movimiento Browniano cuántico como para teoría de campos [25].

De acuerdo al modelo inflacionario de evolución del Universo, las fluctuaciones cuánticas de los campos de materia son el origen de las inhomogeneidades que dan lugar (gracias a la expansión del Universo) a la formación de estructuras [26]. Una suposición vital en estos modelos es que las fluctuaciones cuánticas se vuelven clásicas cuando sus longitudes de onda asociadas se vuelven más grandes que el radio de Hubble H^{-1} . Por lo tanto, es necesario un análisis detallado del

proceso de transición cuántico-clásico para lograr un entendimiento completo del mecanismo de formación de estructuras.

Hubieron numerosos intentos en la dirección de probar la suposición anteriormente mencionada [27] utilizando modelos simplificados en los cuales la interacción entre dos campos escalares es tal que desaparece después de una redefinición de los campos; o usando un acoplamiento bi-cuadrático entre dos campos escalares independientes.

En este capítulo mostramos una manera consistente de iniciar el estudio de la transición cuántico-clásica de las inhomogeneidades primordiales a partir de las fluctuaciones cuánticas. Para comenzar consideramos una teoría con autointeracción $\lambda\phi^4$ en el espacio-tiempo de Minkowski. Siguiendo la idea original de A. Starobinsky [28] acerca del modelo de inflación estocástica, separamos el campo escalar en dos partes: el *sistema* $\phi_<$ que contiene los modos del campo escalar cuyas longitudes de onda son más “largas” que cierta longitud crítica Λ^{-1} y el *entorno* $\phi_>$ que contiene los modos con longitud de onda menor que la crítica [29]. Calculamos la funcional de influencia y la ecuación maestra asociada al sistema. También extendemos los cálculos a espacio-tiempos curvos, donde para un campo escalar acoplado conformemente a la métrica, podemos demostrar que el valor mínimo de la longitud de onda crítica debe ser del orden del radio de Hubble para que el sistema pierda coherencia. Para longitudes críticas más chicas existen modos del sistema que no pierden coherencia cuántica [30].

3.1 La funcional de influencia para teoría de campos

La técnica más conveniente para la formulación del problema y para la derivación de un “modelo efectivo” de evolución de lo que llamaremos sistema, es la acción efectiva de granulado grueso (AEGG). Esta acción efectiva se obtiene de manera totalmente análoga al caso del movimiento Browniano cuántico, al integrar los grados de libertad asociados al entorno. Por lo tanto, esta acción efectiva puede hallarse a partir de la funcional de influencia de Feynman y Vernon [6]. Es interesante notar que la AEGG coincide con la acción efectiva de camino temporal cerrado (CTC) de Schwinger y Keldysh (S_{ef}^{CTC}) cuando la aproximación clásica es válida [19, 31, 32]. En este

capítulo mostramos la deducción de la acción efectiva de granulado grueso y su utilidad para el estudio del proceso de pérdida de coherencia de un sistema acoplado a un entorno.

Consideramos un campo escalar cuántico en un espacio-tiempo plano (signatura $(+, -, -, -)$) con una autointeracción cuártica. Su acción clásica está dada por

$$S[\phi] = \int d^4x \left\{ \frac{1}{2} \partial_\nu \phi(x) \partial^\nu \phi(x) - \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) - \frac{\lambda}{4!} \phi^4(x) \right\}, \quad (3.1)$$

donde m es la masa *desnuda* del campo y λ es la constante de acoplamiento, también desnuda. Separando el campo entre sistema y entorno, como mencionamos en la introducción de este capítulo,

$$\phi(x) = \phi_<(x) + \phi_>(x), \quad (3.2)$$

el campo sistema queda definido como

$$\phi_<(\vec{x}, t) = \int_{|\vec{k}| < \Lambda} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}, t) \exp i\vec{k} \cdot \vec{x}, \quad (3.3)$$

y el entorno es

$$\phi_>(\vec{x}, t) = \int_{|\vec{k}| > \Lambda} \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \phi(\vec{k}, t) \exp i\vec{k} \cdot \vec{x}. \quad (3.4)$$

El campo sistema contiene aquellos modos menores que Λ , mientras que el entorno contiene aquellos mayores a Λ . Después de haber separado al campo en modos, la acción clásica puede expresarse como

$$S[\phi] = S_0[\phi_<] + S_0[\phi_>] + S_{\text{int}}[\phi_<, \phi_>], \quad (3.5)$$

donde con S_0 estamos notando a la acción del campo libre y el término de interacción es

$$\begin{aligned} S_{\text{int}}[\phi_<, \phi_>] = & - \int d^4x \left\{ \frac{\lambda}{4!} \phi_<^4(x) + \frac{\lambda}{4!} \phi_>^4(x) + \frac{\lambda}{4} \phi_<^2(x) \phi_>^2(x) \right. \\ & \left. + \frac{\lambda}{6} \phi_<^3(x) \phi_>(x) + \frac{\lambda}{6} \phi_<(x) \phi_>^3(x) \right\}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

La matriz densidad total (para el sistema-entorno) está definida como:

$$\rho[\phi_<, \phi_>, \phi'_<, \phi'_>, t] = \langle \phi_< \phi_> | \hat{\rho} | \phi'_< \phi'_> \rangle, \quad (3.7)$$

donde $|\phi_< \rangle$ y $|\phi_> \rangle$ son los autoestados de los operadores de campo $\hat{\phi}_<$ y $\hat{\phi}_>$, respectivamente. Vamos a considerar, sólo por simplicidad, la misma condición inicial que en el caso del movimiento Browniano cuántico del Capítulo 2: el sistema y entorno se acoplan a tiempo inicial t_0 . Por lo tanto, la matriz densidad puede escribirse como el producto de la matriz densidad correspondiente al sistema y al entorno a tiempo t_0 :

$$\hat{\rho}[t_0] = \hat{\rho}_<[t_0] \hat{\rho}_>[t_0]. \quad (3.8)$$

Posteriormente asumiremos que el campo entorno está, inicialmente, en su estado de vacío.

Como nos interesa la evolución del sistema teniendo en cuenta la influencia del entorno, será la matriz densidad reducida nuestro objeto de real importancia. La matriz densidad reducida está definida integrando funcionalmente todas las configuraciones posibles del campo entorno, sobre la matriz densidad total

$$\rho_{\text{red}}[\phi_<, \phi'_<, t] = \int \mathcal{D}\phi_> \rho[\phi_<, \phi_>, \phi'_<, \phi_>, t]. \quad (3.9)$$

La evolución temporal de la matriz ρ_r está dada por

$$\rho_r[\phi_<f, \phi'_<f, t] = \int d\phi_<i \int d\phi'_<i J_r[\phi_<f, \phi'_<f, t | \phi_<i, \phi'_<i, t_0] \rho_r[\phi_<i, \phi'_<i, t_0], \quad (3.10)$$

donde $J_r[t, t_0]$ es el operador de evolución reducido definido, a su vez por

$$J_r[\phi_<f, \phi'_<f, t | \phi_<i, \phi'_<i, t_0] = \int_{\phi_<i}^{\phi_<f} \mathcal{D}\phi_< \int_{\phi'_<i}^{\phi'_<f} \mathcal{D}\phi'_< \exp \{i[S[\phi_<] - S[\phi'_<]]\} F[\phi_<, \phi'_<]. \quad (3.11)$$

En esta expresión encontramos, al igual que en el caso del movimiento Browniano (ecuación (2.8)), la funcional de influencia de Feynman y Vernon $F[\phi_<, \phi'_<]$, que tiene en cuenta el efecto del entorno sobre el sistema; ahora definida como:

$$F[\phi_<, \phi'_<] = \int d\phi_>i \int d\phi'_>i \rho_>[\phi_>i, \phi'_>i, t_0] \int d\phi_>f \int_{\phi_>i}^{\phi_>f} \mathcal{D}\phi_> \int_{\phi'_>i}^{\phi'_>f} \mathcal{D}\phi'_> \\ \times \exp \{i[S[\phi_>] + S_{\text{int}}[\phi_<, \phi_>] - S[\phi'_>] - S_{\text{int}}[\phi'_<, \phi'_>]]\}. \quad (3.12)$$

Podemos definir también la *acción de influencia* $\delta A[\phi_{<}, \phi'_{<}]$ y la *acción efectiva de granulado grueso* $A[\phi_{<}, \phi'_{<}]$ como

$$F[\phi_{<}, \phi'_{<}] = \exp \{i\delta A[\phi_{<}, \phi'_{<}]\}, \quad (3.13)$$

$$A[\phi_{<}, \phi'_{<}] = S[\phi_{<}] - S[\phi'_{<}] + \delta A[\phi_{<}, \phi'_{<}]. \quad (3.14)$$

En el presente capítulo calcularemos la acción de influencia perturbativamente en la constante de acoplamiento, hasta orden cuadrático. Desarrollando en potencias de λ obtenemos,

$$\begin{aligned} \delta A[\phi_{<}, \phi'_{<}] &= \{ \langle S_{\text{int}}[\phi_{<}, \phi_{>}] \rangle_0 - \langle S_{\text{int}}[\phi'_{<}, \phi'_{>}] \rangle_0 \} \\ &+ \frac{i}{2} \{ \langle S_{\text{int}}^2[\phi_{<}, \phi_{>}] \rangle_0 - [\langle S_{\text{int}}[\phi_{<}, \phi_{>}] \rangle_0]^2 \} \\ &- i \{ \langle S_{\text{int}}[\phi_{<}, \phi_{>}] S_{\text{int}}[\phi'_{<}, \phi'_{>}] \rangle_0 - \langle S_{\text{int}}[\phi_{<}, \phi_{>}] \rangle_0 \langle S_{\text{int}}[\phi'_{<}, \phi'_{>}] \rangle_0 \} \\ &+ \frac{i}{2} \{ \langle S_{\text{int}}^2[\phi'_{<}, \phi'_{>}] \rangle_0 - [\langle S_{\text{int}}[\phi'_{<}, \phi'_{>}] \rangle_0]^2 \}, \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde el valor medio cuántico $\langle \dots \rangle$ de una funcional de los campos se define como

$$\begin{aligned} \langle B[\phi_{>}, \phi'_{>}] \rangle_0 &= \int d\phi_{>i} \int d\phi'_{>i} \rho_{>}[\phi_{>i}, \phi'_{>i}, t_0] \\ &\times \int d\phi_{>f} \int_{\phi_{>i}}^{\phi_{>f}} \mathcal{D}\phi_{>} \int_{\phi'_{>i}}^{\phi'_{>f}} \mathcal{D}\phi'_{>} \exp \{i[S_0[\phi_{>}] - S_0[\phi'_{>}]]\} B. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Los propagadores para el campo entorno están definidos por:

$$\langle \phi_{>}(x), \phi_{>}(y) \rangle_0 = iG_{++}^\Lambda(x-y), \quad (3.17)$$

$$\langle \phi_{>}(x), \phi'_{>}(y) \rangle_0 = -iG_{+-}^\Lambda(x-y), \quad (3.18)$$

$$\langle \phi'_{>}(x), \phi'_{>}(y) \rangle_0 = -iG_{--}^\Lambda(x-y). \quad (3.19)$$

Estos propagadores no son los propagadores usuales de Feynman, Dyson y Wightman, debido a que en este caso, la integración en los momentos está restringida por la presencia de la frecuencia de corte (infraroja) Λ . Las expresiones explícitas para cada uno son las siguientes:

$$G_{++}^\Lambda(x-y) = \int_{|\mathbf{p}|>\Lambda} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{1}{p^2 - m^2 + i\epsilon}, \quad (3.20)$$

$$G_{+-}^{\Lambda}(x-y) = - \int_{|\vec{p}|>\Lambda} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} 2\pi i \delta(p^2 - m^2) \Theta(p^0), \quad (3.21)$$

$$G_{--}^{\Lambda}(x-y) = \int_{|\vec{p}|>\Lambda} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \frac{1}{p^2 - m^2 - i\epsilon}. \quad (3.22)$$

Como ejemplo ilustrativo mostramos la expresión de G_{++}^{Λ} , en el caso no masivo. El propagador de Feynman usual está dado por

$$G_{++}(x) = \frac{i}{8\pi^2} \frac{1}{\sigma} - \frac{1}{8\pi} \delta(\sigma), \quad (3.23)$$

mientras que

$$\begin{aligned} G_{++}^{\Lambda}(x) &= \frac{i}{8\pi^2} \left[\frac{\cos[\Lambda(r-t)]}{r(r-t)} + \frac{\cos[\Lambda(r+t)]}{r(r+t)} \right] - \frac{1}{8\pi^2} \left[\frac{\sin[\Lambda(r-t)]}{r(r-t)} - \frac{\sin[\Lambda(r+t)]}{r(r+t)} \right] \\ &\equiv G_{++}(x) - G_{++}^{|\vec{p}|<\Lambda}(x), \end{aligned} \quad (3.24)$$

donde $\sigma = \frac{1}{2}x^2$ es un medio de la distancia geodésica. Por supuesto, el propagador G_{++}^{Λ} coincide con el propagador G_{++} cuando $\Lambda \rightarrow 0$.

La acción de influencia puede calcularse a partir de las ecuaciones (3.15)-(3.19) usando técnicas usuales, quedando determinada por:

$$\begin{aligned} \delta A[\phi_{<}, \phi'_{<}] &= -\lambda \int d^4 x \left\{ \frac{1}{24} [\phi_{<}^4(x) - \phi'_{<}{}^4(x)] + \frac{1}{4} i G_{++}^{\Lambda}(0) [\phi_{<}^2(x) - \phi'_{<}{}^2(x)] \right\} \\ &\quad + \lambda^2 \int d^4 x \int d^4 y \left\{ -\frac{1}{72} \phi_{<}^3(x) G_{++}^{\Lambda}(x-y) \phi_{<}^3(y) \right. \\ &\quad - \frac{1}{36} \phi_{<}^3(x) G_{+-}^{\Lambda}(x-y) \phi'_{<}{}^3(y) + \frac{1}{72} \phi'_{<}{}^3(x) G_{--}^{\Lambda}(x-y) \phi_{<}^3(y) \\ &\quad - \frac{1}{16} \phi_{<}^2(x) i G_{++}^{\Lambda 2}(x-y) \phi_{<}^2(y) + \frac{1}{8} \phi_{<}^2(x) i G_{+-}^{\Lambda 2}(x-y) \phi'_{<}{}^2(y) \\ &\quad - \frac{1}{16} \phi'_{<}{}^2(x) i G_{--}^{\Lambda 2}(x-y) \phi'_{<}{}^2(y) + \frac{1}{18} \phi_{<}(x) G_{++}^{\Lambda 3}(x-y) \phi_{<}(y) \\ &\quad \left. + \frac{1}{9} \phi_{<}(x) G_{+-}^{\Lambda 3}(x-y) \phi'_{<}{}(y) - \frac{1}{18} \phi'_{<}{}(x) G_{--}^{\Lambda 3}(x-y) \phi'_{<}{}(y) \right\}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\Sigma P = \frac{1}{2}(\phi_{<}^4 + \phi'_{<}{}^4) \quad \Delta P = \frac{1}{2}(\phi_{<}^4 - \phi'_{<}{}^4)$$

$$\Sigma R = \frac{1}{2}(\phi_{<}^3 + \phi'_{<}{}^3) \quad \Delta R = \frac{1}{2}(\phi_{<}^3 - \phi'_{<}{}^3)$$

$$\Sigma Q = \frac{1}{2}(\phi_{<}^2 + \phi'_{<}{}^2) \quad \Delta Q = \frac{1}{2}(\phi_{<}^2 - \phi'_{<}{}^2)$$

$$\Sigma \Phi = \frac{1}{2}(\phi_{<} + \phi'_{<}) \quad \Delta \Phi = \frac{1}{2}(\phi_{<} - \phi'_{<}),$$

y usando las identidades que satisfacen los propagadores, podemos separar las partes real e imaginaria de la acción de influencia:

$$\begin{aligned} \text{Re} \delta A = & -\lambda \int d^4x \left\{ \frac{1}{12} \Delta P(x) + \frac{i}{2} G_{++}^\Lambda(0) \Delta Q(x) \right\} \\ & + 2\lambda^2 \int d^4x \int d^4y \theta(x^0 - y^0) \left\{ -\frac{1}{18} \Sigma R(x) \text{Re} G_{++}^\Lambda(x-y) \Delta R(y) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4} \Sigma Q(x) \text{Im} G_{++}^{\Lambda^2}(x-y) \Delta Q(y) + \frac{1}{3} \Sigma \Phi(x) \text{Re} G_{++}^{\Lambda^3}(x-y) \Delta \Phi(y) \right\}, \quad (3.26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Im} \delta A = & \lambda^2 \int d^4x \int d^4y \left\{ -\frac{1}{18} \Delta R(x) \text{Im} G_{++}^\Lambda(x-y) \Delta R(y) \right. \\ & \left. - \frac{1}{4} \Delta Q(x) \text{Re} G_{++}^{\Lambda^2}(x-y) \Delta Q(y) + \frac{1}{3} \Delta \Phi(x) \text{Im} G_{++}^{\Lambda^3}(x-y) \Delta \Phi(y) \right\}. \quad (3.27) \end{aligned}$$

Esta expresión ha sido calculada a orden cuadrático en la constante λ . En lo que resta del presente capítulo especializaremos nuestros cálculos en el caso no-masivo por simplicidad [30].

La parte real de la acción de influencia tiene divergencias, las que deben renormalizarse siguiendo alguno de los procedimientos usuales en teoría de campos. Como los propagadores definidos en las ecuaciones (3.17)-(3.19) difieren de los usuales por la presencia de la longitud crítica Λ , las divergencias ultravioletas coinciden con las usuales de la teoría $\lambda\phi^4$. En consecuencia, la acción de influencia se renormaliza con los mismos contratérminos que se utilizan normalmente. El término $G_{++}^\Lambda(0)\Delta Q(x)$ es divergente. Como $G_{++}^\Lambda = G_{++} - G_{++}^{|\vec{p}|<\Lambda}$ y $G_{++}^{|\vec{p}|<\Lambda}(0)$ es una cantidad finita, las divergencias de G_{++}^Λ y G_{++} son coincidentes. Este término representa la renormalización de la masa.

Por medio de la regularización dimensional, el cuadrado del propagador de Feynman puede escribirse como

$$G_{++}^{\Lambda^2}(x) = G_{++}^2(x) + G_{++}^{(|\vec{p}| < \Lambda)^2}(x) - 2G_{++}(x)G_{++}^{(|\vec{p}| < \Lambda)}(x), \quad (3.28)$$

donde

$$G_{++}^2(x) = \frac{1}{16\pi^2} \left\{ \left[\frac{i}{n-4} + i\psi(1) - 4\pi i \right] \delta^4(x) + i\Sigma(x) - \eta(x) - \text{Log}[4\pi\mu^2] \delta^4(x) \right\}, \quad (3.29)$$

$$\Sigma(x) = \frac{1}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ipx} \text{Log}|p^2|, \quad (3.30)$$

$$\eta(x) = \frac{\pi}{(2\pi)^4} \int d^4p e^{ipx} \theta(p^2). \quad (3.31)$$

El término proporcional a $\frac{1}{n-4} \delta^4(x-y)$ representa otra de las divergencias usuales, y es independiente de Λ . Así, el término $\text{Im}G_{++}^{\Lambda^2}(x-y)\Sigma Q(x)\Delta Q(y)$ presente en la ecuación (3.26) también diverge y renormaliza a la constante λ . Las demás divergencias se deben tratar de la misma manera. Una característica importante es que la parte imaginaria $\text{Im}\delta A$ es finita.

3.2 Ecuaciones de movimiento semiclásicas

El método que estamos desarrollando en el presente capítulo nos permitirá describir la dinámica efectiva de los modos relevantes del campo cuántico, en términos de una acción disipativa y estocástica. En la ecuación de movimiento aparecerán términos asociados a fuerzas estocásticas que describen el intercambio de energía (y otros posibles números cuánticos) con los modos del entorno, tratados perturbativamente [33, 34]. Los términos disipativos describirán una eventual tendencia al equilibrio de los modos del sistema. La existencia de una relación de fluctuación-disipación asegura que los modos del sistema obtengan la misma temperatura que aquellos del entorno con los que interactúan.

La derivación de una ecuación de movimiento efectiva para los modos relevantes corresponde a hacer un granulado grueso del campo cuántico, lo que quedó puesto de manifiesto en el cálculo de

la acción efectiva de granulado grueso. En el espíritu general de la mecánica estadística, asumir equilibrio térmico para los modos que han sido eliminados puede interpretarse como asumir la mínima cantidad de información acerca del estado cuántico microscópico del entorno. El granulado grueso aporta los siguientes características a la dinámica efectiva del sistema:

1. parámetros como la masa y la constante de acoplamiento son renormalizadas y aparecen nuevas interacciones efectivas, en general no-locales. Lo mismo sucede en el caso del movimiento Browniano cuántico, donde aparece un corrimiento de la frecuencia natural de la partícula debido al entorno [15].

2. la dinámica es disipativa y contiene términos de ruido que satisfacen la relación de fluctuación-disipación. La evolución dinámica semiclásica es inherentemente estocástica, reflejando el acoplamiento entre los modos relevantes y un entorno térmico. La ecuación (2.15) muestra tal relación en el caso del movimiento Browniano.

3. los términos disipativos son, en general, no-locales en el tiempo debido a que el entorno requiere de cierto tiempo para “responder”. Un cambio en el sistema produce una influencia sobre el entorno y esta se comporta *causalmente*.

Las partes real e imaginaria de $\delta A[\phi_{<}^{\pm}, \phi_{>}^{\pm}]$ pueden asociarse con la disipación y el ruido respectivamente [6]. En particular, la parte imaginaria puede re-escribirse en términos de tres fuentes estocásticas de ruido $\nu(x)$, $\xi(x)$ y $\eta(x)$ con una distribución de probabilidad gaussiana dada por

$$\begin{aligned}
 P[\nu(x), \xi(x), \eta(x)] &= N_{\nu} N_{\xi} N_{\eta} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \nu(x) \left[\frac{\lambda^2}{9} \text{Im} G_{++}^{\Lambda} \right]^{-1} \nu(y) \right\} \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \xi(x) \left[\frac{\lambda^2}{2} \text{Re} G_{++}^{\Lambda^2} \right]^{-1} \xi(y) \right\} \\
 &\times \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int d^4x \int d^4y \eta(x) \left[\frac{-2\lambda^2}{3} \text{Im} G_{++}^{\Lambda^3} \right]^{-1} \eta(y) \right\}, \quad (3.32)
 \end{aligned}$$

donde N_{ν} , N_{ξ} y N_{η} son constantes de normalización. De esta manera, la parte imaginaria puede escribirse como tres integrales funcionales sobre las fuentes de ruido gaussianas

$$\int \mathcal{D}\nu(x) \int \mathcal{D}\xi(x) \int \mathcal{D}\eta(x) P[\nu, \xi, \eta] \exp \{-i [\Delta R(x)\nu(x) + \Delta Q(x)\xi(x) + \Delta \Phi(x)\eta(x)]\}$$

$$\begin{aligned}
&= \exp \left\{ -i \int d^4x \int d^4y \left[\frac{\lambda^2}{18} \Delta R(x) \text{Im} G_{++}^\Lambda(x, y) \Delta R(y) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{\lambda^2}{4} \Delta Q(x) \text{Re} G_{++}^{\Lambda^2}(x, y) \Delta Q(y) - \frac{\lambda^2}{3} \Delta \Phi(x) \text{Im} G_{++}^{\Lambda^3}(x, y) \Delta \Phi(y) \right] \right\}. \quad (3.33)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la acción efectiva de granulado grueso A , puede escribirse

$$A[\phi_{<}^+, \phi_{<}^-] = -\frac{1}{i} \ln \int \mathcal{D}\nu P[\nu] \int \mathcal{D}\xi P[\xi] \int \mathcal{D}\eta P[\eta] \exp \{i S_{\text{eff}}[\phi_{<}^+, \phi_{<}^-, \nu, \xi, \eta]\}, \quad (3.34)$$

donde hemos definido

$$S_{\text{eff}}[\phi_{<}^+, \phi_{<}^-, \nu, \xi, \eta] = \text{Re} A[\phi_{<}^+, \phi_{<}^-] - \int d^4x [\Delta R(x) \nu(x) + \Delta Q(x) \xi(x) + \Delta \Phi(x) \eta(x)]. \quad (3.35)$$

La ecuación de movimiento se obtiene tomando la variación funcional:

$$\left. \frac{\delta S_{\text{eff}}[\phi_{<}^+, \phi_{<}^-, \nu, \xi, \eta]}{\delta \phi_{<}^+} \right|_{\phi_{<}^+ = \phi_{<}^-} = 0, \quad (3.36)$$

obteniéndose

$$\begin{aligned}
&\square \phi_{<}(x) + \frac{1}{6} \phi_{<}^3(x) + \frac{1}{12} \lambda_{\text{ren}}^2 \phi_{<}^2(x) \int d^4y \text{Re} G_{++}^\Lambda(x, y) \phi_{<}^3(y) \\
&+ \frac{1}{4} \lambda_{\text{ren}}^2 \phi_{<}(x) \int d^4y \text{Im} G_{++}^{\Lambda^2}(x, y) \phi_{<}^2(y) + \frac{1}{6} \lambda_{\text{ren}}^2 \int d^4y \text{Re} G_{++}^{\Lambda^3}(x, y) \phi_{<}(y) \\
&= \frac{3}{2} \phi_{<}^2(x) \nu(x) + \phi_{<}(x) \xi(x) + \frac{1}{2} \eta(x). \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Esta es la llamada ecuación de Langevin [33] donde la fuerza estocástica aparece determinada por ruido aditivo y multiplicativo. Esta, es la generalización a teoría de campos de la ecuación (2.20) para el movimiento Browniano cuántico.

A partir de la acción efectiva de granulado grueso (o de la acción efectiva de camino temporal cerrado) y de esta ecuación semiclásica de movimiento, es posible concluir que el efecto total del entorno puede resumirse en tres aspectos fundamentales: renormaliza las constantes desnudas de la teoría, agrega disipación y produce fluctuaciones (ruido) que hacen “termalizar” al sistema. En la próxima sección vamos a estudiar cómo los núcleos de ruido destruyen las coherencias cuánticas del sistema originando la llamada transición cuántico-clásica.

3.3 La ecuación maestra

Al igual que en el caso del movimiento Browniano cuántico, en esta sección obtendremos la ecuación de evolución (ecuación maestra) para la matriz densidad reducida; por lo tanto generalizaremos los resultados del Capítulo 2 a teoría de campos.

Para el caso del movimiento Browniano con acoplamiento lineal (xq_i) sabemos que una solución aproximada de la ecuación maestra está representada por [15, 16]

$$\rho_r[x, x'; t] \approx \rho_r[x, x', 0] \exp \left[- (x - x')^2 \int_0^t D(s) ds \right], \quad (3.38)$$

de donde es simple ver que los términos fuera de la diagonal de la matriz densidad reducida van disminuyendo a medida que $\int_0^t D(s) ds$ se hace suficientemente grande. Para acoplamientos no lineales, tales como $x^n q_i^m$, es de esperar que la ecuación maestra desarrolle términos difusivos de la forma $iD^{(n,m)}(t)(x^n - x'^n)^2 \rho_r$. En esta observación basaremos nuestro estudio de los coeficientes de difusión que se obtienen en nuestro ejemplo, como primer paso hacia el entendimiento del proceso de pérdida de coherencia.

Para ello debemos calcular el operador de evolución reducido de la ecuación (3.11). Como este operador está definido por medio de integrales de camino, podemos obtener una estimación utilizando la aproximación de punto de ensilladura

$$J_r[\phi_{<f}^+, \phi_{<f}^-, t | \phi_{<i}^+, \phi_{<i}^-, t_0] \approx \exp \left\{ iA[\phi_{<}^{+cl}, \phi_{<}^{-cl}] \right\}, \quad (3.39)$$

donde $\phi_{<}^{+cl}(\phi_{<}^{-cl})$ es la solución de la ecuación de movimiento $\frac{\delta \text{Re}A}{\delta \phi_{<}^+} |_{\phi_{<}^+ = \phi_{<}^-} = 0$ con condiciones de contorno $\phi_{<}^{+cl}(t_0) = \phi_{<i}^+(\phi_{<i}^-)$ y $\phi_{<}^{+cl}(t) = \phi_{<f}^+(\phi_{<f}^-)$.

Los efectos de pérdida de coherencia están contenidos en la parte imaginaria de la acción efectiva de granulado grueso, la que hemos calculado perturbativamente hasta orden λ^2 . Por lo tanto, al evaluar $\text{Im}A$ podemos aproximar $\phi_{<}^{cl}$ por la solución de la ecuación de campo libre, con las condiciones de contorno adecuadas. De esta manera, la solución clásica que utilizamos en la aproximación de punto de ensilladura es:

$$\phi_{<}^{cl}(\vec{x}, s) = \left[\phi_{<f} \frac{\sin(k_0 s)}{\sin(k_0 t)} + \phi_{<i} \frac{\sin[k_0(t-s)]}{\sin(k_0 t)} \right] \cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{x}) \equiv \phi_{<}^{cl}(s) \cos(\vec{k}_0 \cdot \vec{x}), \quad (3.40)$$

donde hemos asumido que el campo sistema contiene sólo un modo Fourier (aunque arbitrario) con $\vec{k} = \vec{k}_0$.

Siguiendo el procedimiento empleado en el Capítulo 2, debemos calcular la derivada temporal del operador de evolución reducido J_r , y eliminar la dependencia en las configuraciones iniciales de los campos $\phi_{<i}^+$ y $\phi_{<i}^-$ que aparecen debido a la solución clásica. El operador libre, definido por

$$J_0[\phi_{<f}^+, \phi_{<f}^-, t | \phi_{<i}^+, \phi_{<i}^-, 0] = \int_{\phi_{<i}^+}^{\phi_{<f}^+} \mathcal{D}\phi_{<f}^+ \int_{\phi_{<i}^-}^{\phi_{<f}^-} \mathcal{D}\phi_{<f}^- \exp \{i [S_0(\phi_{<f}^+) - S_0(\phi_{<f}^-)]\}, \quad (3.41)$$

satisface las siguientes identidades

$$\phi_{<f}^{+cl}(\vec{x}, s) J_0 = \left[\phi_{<f}^+ \cos[k_0(t-s)] + \frac{\sin[k_0(t-s)]}{k_0} i \partial_{\phi_{<f}^+} \right] J_0, \quad (3.42)$$

y

$$\phi_{<f}^{-cl}(\vec{x}, s) J_0 = \left[\phi_{<f}^- \cos[k_0(t-s)] - \frac{\sin[k_0(t-s)]}{k_0} i \partial_{\phi_{<f}^-} \right] J_0. \quad (3.43)$$

La derivada temporal está dada por

$$\begin{aligned} i \partial_t J_r[\phi_{<f}^+, \phi_{<f}^-, t | \phi_{<i}^+, \phi_{<i}^-, 0] &= \{h_{ren}[\phi_{<f}^+] - h_{ren}[\phi_{<f}^-] \\ &- i \lambda^2 \left[\frac{(\phi_{<f}^{+3} - \phi_{<f}^{-3}) V}{1152} \int_0^t ds \Delta R^{cl}(s) \text{Im} G_{++}^\Lambda(3k_0; t-s) \right. \\ &+ \frac{(\phi_{<f}^{+2} - \phi_{<f}^{-2}) V}{32} \int_0^t ds \Delta Q^{cl}(s) (\text{Re} G_{++}^{\Lambda 2}(2k_0; t-s) + 2 \text{Re} G_{++}^{\Lambda 2}(0; t-s)) \\ &- \frac{(\phi_{<f}^+ - \phi_{<f}^-) V}{6} \int_0^t ds \Delta \Phi^{cl}(s) \text{Im} G_{++}^{\Lambda 3}(k_0; t-s) \\ &- \lambda^2 \left[- \frac{(\phi_{<f}^{+3} + \phi_{<f}^{-3}) V}{1152} \int_0^t ds \Delta R^{cl}(s) \text{Re} G_{++}^\Lambda(3k_0; t-s) \right. \\ &+ \frac{(\phi_{<f}^{+2} + \phi_{<f}^{-2}) V}{32} \int_0^t ds \Delta Q^{cl}(s) (\text{Im} G_{++}^{\Lambda 2}(2k_0; t-s) + 2 \text{Im} G_{++}^{\Lambda 2}(0; t-s)) \\ &\left. \left. + \frac{(\phi_{<f}^+ - \phi_{<f}^-) V}{6} \int_0^t ds \Delta \Phi^{cl}(s) \text{Re} G_{++}^{\Lambda 3}(k_0; t-s) \right] + \dots \} J_r[\phi_{<f}^+, \phi_{<f}^-, t | \phi_{<i}^+, \phi_{<i}^-, 0] \quad (3.44) \end{aligned}$$

donde $G_{++}^{\Lambda n}(k; t-s)$ es la transformada de Fourier de la n -ésima potencia del propagador (para $n = 1, 2$ o 3). Los puntos suspensivos están denotando otros términos que provienen de la derivada

temporal que no contribuyen a los coeficientes de difusión (es decir, vamos a ignorar todos aquellos términos que no sean proporcionales a $(\phi_{<f}^{+n} - \phi_{<f}^{-n})^2$ en la ecuación final). El factor V que está presente en la ecuación (3.44) proviene de haber asumido que el campo sólo tiene un modo Fourier. Este desaparece cuando uno considera paquetes de ondas.

Utilizando las identidades (3.42) y (3.43) podemos extraer la dependencia con las configuraciones iniciales de campo y obtener la ecuación maestra. Como esta ecuación es muy complicada, sólo nos concentramos en las correcciones que a la evolución unitaria usual aportan los núcleos de ruido:

$$\begin{aligned}
i\partial_t \rho_r[\phi_{<f}^+, \phi_{<f}^-, t] &= \langle \phi_{<f}^+ | [\hat{H}_{\text{ren}}, \hat{\rho}_r] | \phi_{<f}^- \rangle - i\lambda^2 \left[\frac{(\phi_{<f}^{+3} - \phi_{<f}^{-3})^2 V}{1152} D_1(k_0; t) \right. \\
&+ \left. \frac{(\phi_{<f}^{+2} - \phi_{<f}^{-2})^2 V}{32} D_2(k_0; t) - \frac{(\phi_{<f}^+ - \phi_{<f}^-)^2 V}{6} D_3(k_0; t) \right] \rho_r[\phi_{<f}^+, \phi_{<f}^-, t] + \dots \quad (3.45)
\end{aligned}$$

La ecuación (3.45) es la generalización de la ecuación maestra para el movimiento Browniano cuántico (2.34) presentada en el Capítulo 2. En este caso, el acoplamiento del sistema es no-lineal. Debido a la presencia de tres términos de interacción ($\phi_{<}^3 \phi_{>}$, $\phi_{<}^2 \phi_{>}^2$, and $\phi_{<} \phi_{>}^3$) hay tres coeficientes de difusión en la ecuación maestra. La forma de cada uno está determinada por estos acoplamientos y por la elección particular del estado cuántico del entorno.

De los tres coeficientes de difusión dependientes del tiempo $D_i(t)$ contenidos en la ecuación (3.45), si consideramos sólo los coeficientes presentes en el desarrollo a un lazo para el campo cuántico irrelevante, sólo sobreviven los coeficientes D_1 y D_2 , los cuales están dados por

$$\begin{aligned}
D_1(k_0; t) &= \int_0^t ds \cos^3(k_0 s) \text{Im} G_{++}^\Lambda(3k_0; t-s) \\
&= \frac{1}{6k_0} \int_0^t ds \cos^3(k_0 s) \cos(3k_0 s) \theta(3k_0 - \Lambda) \\
&= \frac{2k_0 t + 3 \sin(2k_0 t) + \frac{3}{2} \sin(4k_0 t) + \frac{1}{3} \sin(6k_0 t)}{576k_0^2}, \quad \frac{\Lambda}{3} < k_0 < \Lambda \quad (3.46)
\end{aligned}$$

$$D_2(k_0; t) = \int_0^t ds \cos^2(k_0 s) (\text{Re} G_{++}^{\Lambda 2}(2k_0; t-s) + 2\text{Re} G_{++}^{\Lambda 2}(0; t-s)). \quad (3.47)$$

Como los cuadrados de los propagadores son:

$$\begin{aligned} \text{Re}G_{++}^{\Lambda 2}(2k_0; t-s) &= \frac{\pi}{k_0} \left\{ \int_{\Lambda}^{2k_0+\Lambda} dp \int_{\Lambda}^{2k_0+p} dz \cos[(p+z)s] \right. \\ &\quad \left. + \int_{2k_0+\Lambda}^{\infty} dp \int_{p-2k_0}^{p+2k_0} dz \cos[(p+z)s] \right\}, \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\text{Re}G_{++}^{\Lambda 2}(0; t-s) = \pi \left\{ 2\pi\delta(s) - 2\frac{\sin(2\Lambda s)}{s} \right\}, \quad (3.49)$$

el coeficiente de difusión D_2 es

$$\begin{aligned} D_2(k_0; t) &= \frac{\pi}{4} \left\{ 3\pi - \left(\frac{3}{2} - \frac{\Lambda}{2k_0}\right)\text{Si}[2t(\Lambda - k_0)] - \left(2 - \frac{\Lambda}{2k_0}\right)\text{Si}[2\Lambda t] \right. \\ &\quad - \left(\frac{3}{2} + \frac{\Lambda}{2k_0}\right)\text{Si}[2t(\Lambda + k_0)] - \left(1 + \frac{\Lambda}{2k_0}\right)\text{Si}[2t(2k_0 + \Lambda)] \\ &\quad \left. + \frac{\cos[2\Lambda t]}{4k_0 t} - \frac{\cos[2t(\Lambda + k_0)]}{4k_0 t} + \frac{\cos[2t(\Lambda - k_0)]}{4k_0 t} - \frac{\cos[2t(2k_0 + \Lambda)]}{4k_0 t} \right\}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde las funciones $\text{Si}[z]$ son las funciones seno-integral [35].

3.4 Pérdida de coherencia y perturbaciones cosmológicas

En esta sección analizamos el comportamiento de los coeficientes de difusión D_1 y D_2 . Luego, extendemos los resultados al espacio-tiempo de de Sitter para discutir la transición cuántico-clásica de las fluctuaciones cuánticas primordiales.

Desarrollar un análisis pormenorizado del proceso de pérdida de coherencia en el modelo que estamos considerando en este capítulo es una tarea muy complicada. Realmente, uno debería estudiar los elementos fuera de la diagonal de la matriz densidad reducida y mostrar si ellos desaparecen o no. También podríamos analizar la funcional de Wigner y determinar la aparición o no de correlaciones clásicas. Teniendo en mente los resultados obtenidos para el movimiento Browniano cuántico, nos concentraremos sólo en los términos de difusión de la ecuación maestra. Tomaremos, en esta aproximación, al valor de dichos coeficientes como señal de la pérdida de coherencia sufrida por la matriz densidad reducida.

3.4.1 Espacio-tiempo plano

El coeficiente D_1 está asociado al término de interacción $\phi_{<}^3\phi_{>}$. Como el campo entorno ($\phi_{>}$) aparece linealmente en esta interacción, y sólo contiene modos con $k > \Lambda$ (por definición), el campo sistema ($\phi_{<}$) sólo está acoplado con el modo $\vec{k} = 3\vec{k}_0$ del entorno. Esto implica que D_1 es diferente de cero sólo si $\frac{\Lambda}{3} < k_0 < \Lambda$. En la Figura 3.1 hemos graficado la evolución temporal de $D_1(k_0, t)$. Como puede verse en esta figura, los efectos difusivos inducidos por D_1 aumentan con el tiempo proporcionalmente a $\frac{t}{k_0}$ (como estamos haciendo un cálculo perturbativo, ninguna estimación será válida para tiempos muy largos). En la Figura 3.2 graficamos $D_1(k_0, t)$ como una función de k_0 a tiempo fijo. Aquí, la curva depende de k_0 y tiene su valor máximo cuando $k_0 = \frac{\Lambda}{3}$.

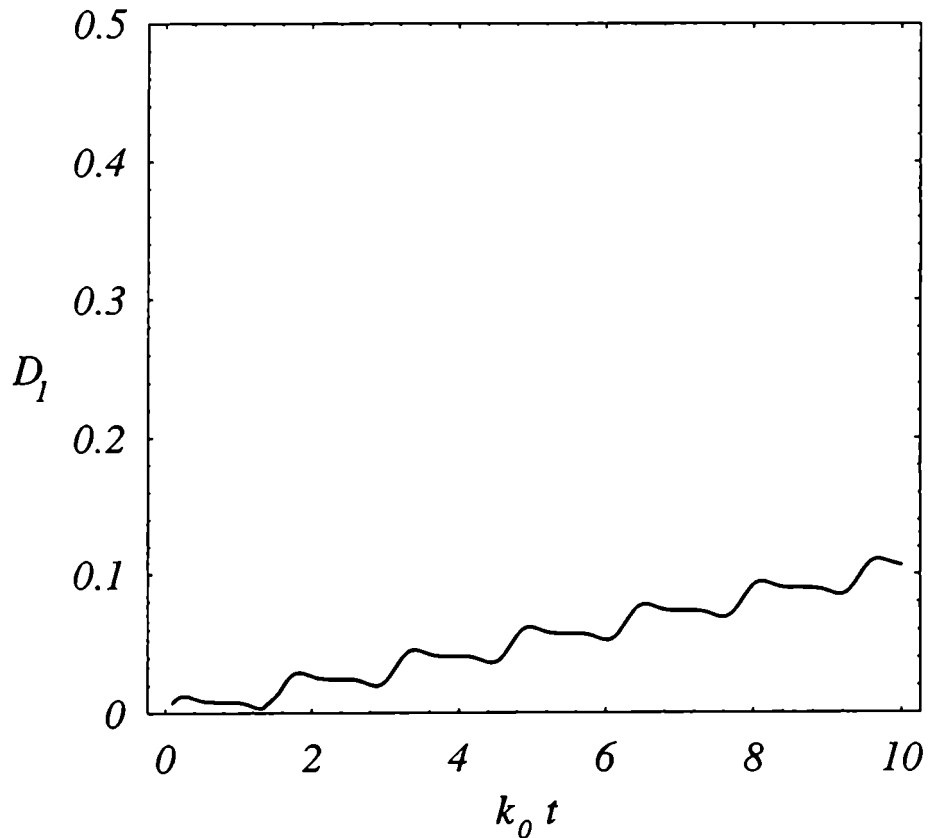


Fig. 3.1: Evolución temporal del coeficiente de difusión D_1 para $\frac{\Lambda}{3} < k_0 < \Lambda$ fijo.

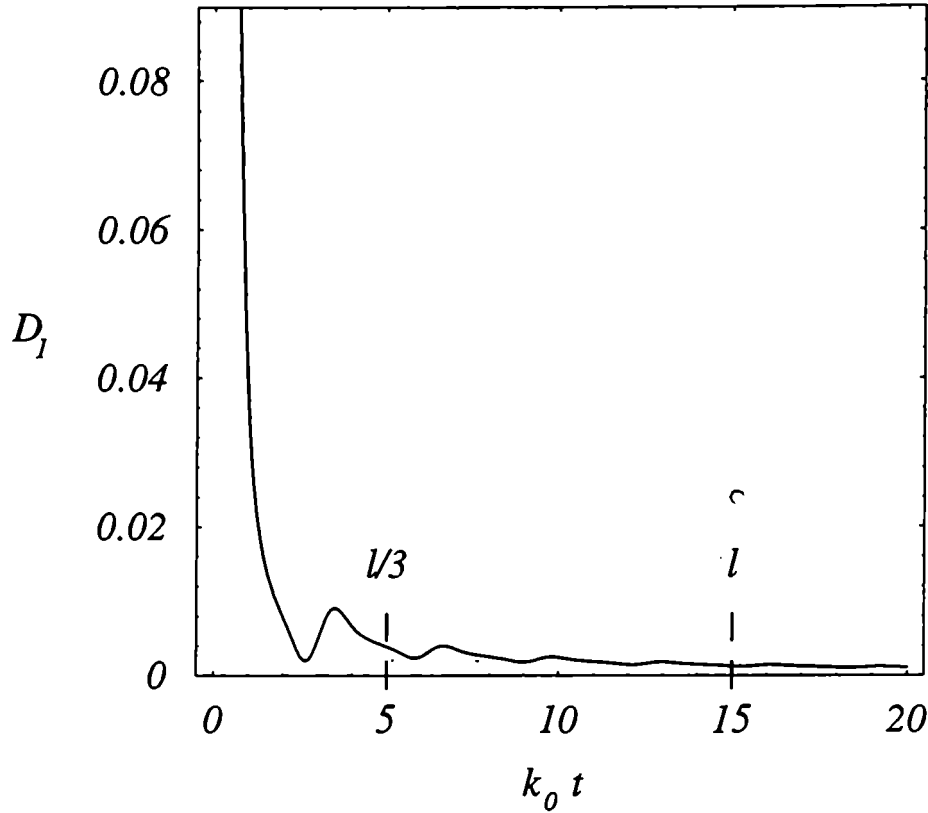


Fig. 3.2: Coeficiente D_1 en función de k_0 para un valor fijo del tiempo. D_1 es diferente de cero sólo dentro de la ventana $\frac{\Lambda}{3} < k_0 < \Lambda$. En la figura indicamos dicha ventana para un valor particular $l = \Lambda t = 15$.

Como analogía, es interesante notar que en el caso del movimiento Browniano cuántico con interacción $x^3 q$ y densidad espectral $I(\omega) \sim \delta(\omega - 3k_0)\theta(\omega - \Lambda)$, se obtiene un coeficiente de difusión similar [17].

El coeficiente de difusión D_2 proviene del término de interacción $\phi_L^2 \phi_S^2$. Como la interacción es cuadrática en el campo entorno, no existe restricción acerca de los posibles valores de k_0 para que $D_2 \neq 0$. En la Figura 3.3 graficamos la evolución temporal de este coeficiente para varios valores de $y = \frac{k_0}{\Lambda}$ (ahora con y identificamos cada una de las curvas). Formalmente, D_2 debería anularse cuando $t \rightarrow 0$ (ver ecuación (3.47)), sin embargo el gráfico muestra un salto inicial para todo valor de la variable y . Una posible explicación para la aparición de este salto reside en la condición inicial de no-correlación. A $t_0 = 0$ estamos asumiendo que la interacción se enciende

instantáneamente, es decir, más rápido que cualquier otra escala temporal presente en el sistema y en el entorno. Esta condición inicial presupone, implícitamente, la existencia de una frecuencia de corte ultravioleta Λ_{uv} para el entorno. Si uno considera tal Λ_{uv} , D_2 se anula a $t_0 = 0$ y desarrolla un pico durante una escala temporal del orden de $t \sim \frac{1}{\Lambda_{uv}}$. Sin embargo, el origen de este salto inicial es aún un tema de debate [20], dado que se han encontrado estos saltos aún para condiciones iniciales que contienen correlación entre sistema y entorno.

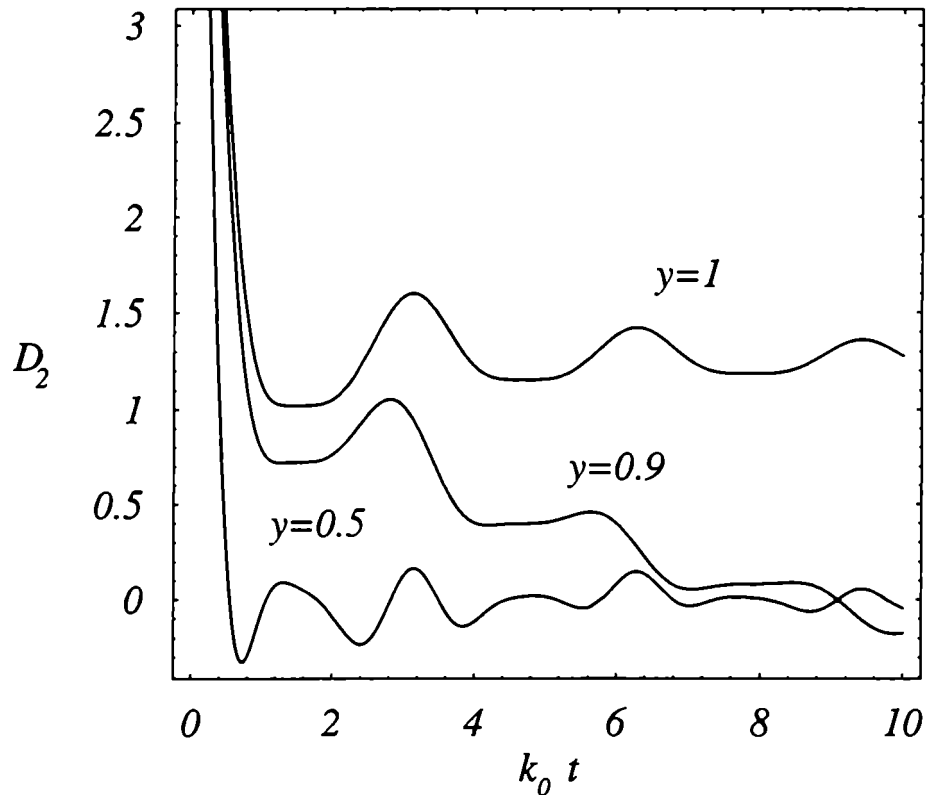


Fig. 3.3: Evolución temporal del coeficiente de difusión D_2 para diferentes valores de $y = k_0/\Lambda$.

Entonces, después del salto inicial, la Figura 3.3 muestra que el efecto difusivo crece con y , y es máximo cuando $k_0 \sim \Lambda$. La interpretación física de este hecho es clara. Podemos pensar que los efectos difusivos son debido a las partículas creadas por el entorno gracias a su interacción con el sistema [36]. Cuando en el entorno existe un umbral de frecuencias, sólo aquellos modos del sistema con frecuencias cercanas a dicho umbral tienen la posibilidad de excitar al entorno;

producir creación de partículas, y por lo tanto, de perder coherencia. Es por esto que el coeficiente de difusión es más importante cuando $k_0 \sim \Lambda$.

Las Figuras 3.4 y 3.5 muestran la dependencia de D_2 con k_0 a tiempo fijo. Para valores grandes de $l = \Lambda t$ ($\Lambda \rightarrow \infty$), el entorno contiene sólo frecuencias muy grandes y el coeficiente de difusión es muy chico, a menos que $k_0 \sim \Lambda$ (Figura 3.4). Cuando $l \leq 1$, D_2 es apreciablemente distinto de cero para todos los modos que pertenecen al sistema, dado que el entorno sólo puede producir pérdida de coherencia para modos $0 < k_0 < \Lambda$ (Figura 3.5). Finalmente, para $l \ll 1$, $D_2(k_0, t)$ tiende a un valor no nulo en el límite $k_0 < \Lambda \rightarrow 0$.

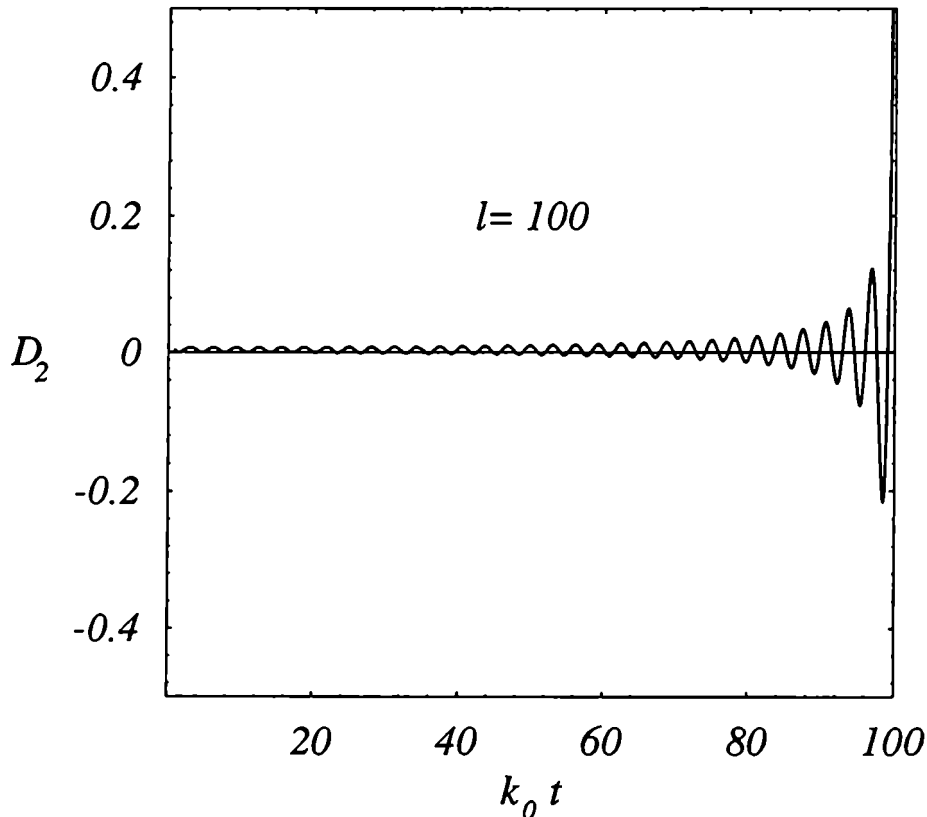


Fig. 3.4: Coeficiente de difusión D_2 en función de k_0 para un valor fijo del tiempo y $l = \Lambda t = 100$.

En el caso estudiado en la Ref. [37], donde se consideraron dos campos escalares acoplados bi-cuadráticamente, se demostró que los efectos difusivos eran más importantes en el sector infrarrojo.

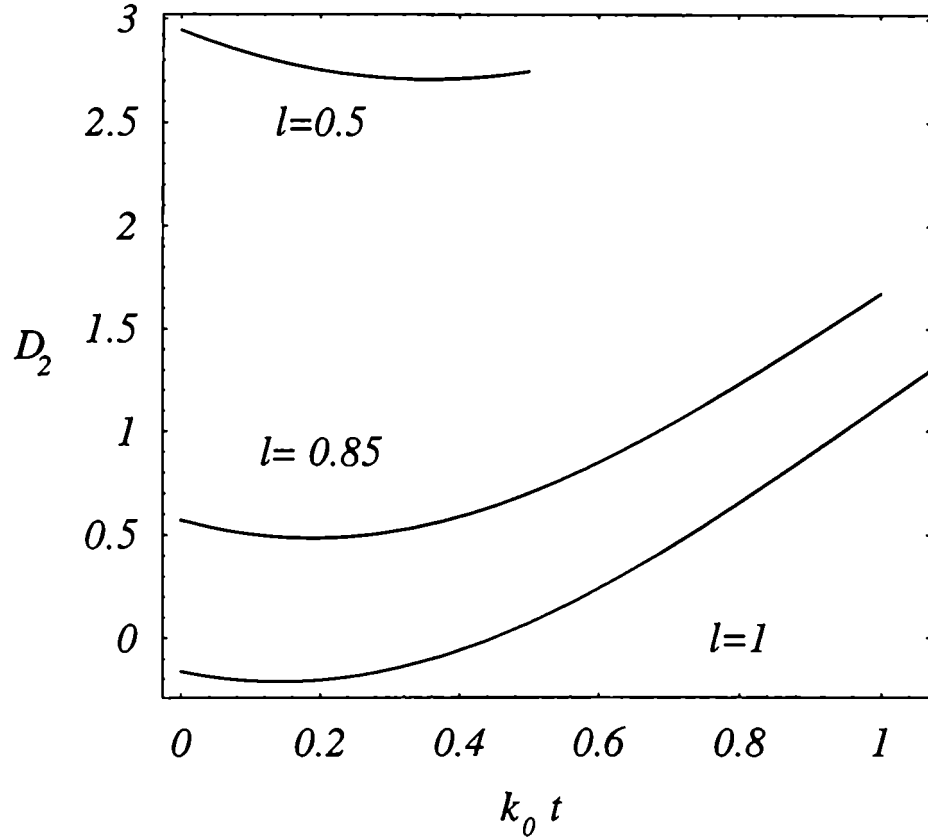


Fig. 3.5: Misma figura que 3.4 pero para valores más pequeños de l .

En nuestro ejemplo, el análisis de D_1 y de D_2 muestra que la pérdida de coherencia es más importante para $k_0 \sim \Lambda$, en contraposición con la conclusión de [37].

3.4.2 Espacio-tiempo de de Sitter

Como primer paso en hacia la comprensión del proceso de pérdida de coherencia de las perturbaciones cosmológicas haremos una simple extensión de los cálculos efectuados en las últimas secciones. La acción para un campo escalar con auto-interacción en un espacio-tiempo curvo es

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{\xi}{2} R \phi^2 - \frac{\lambda}{4!} \phi^4 \right] \quad (3.51)$$

donde ξ representa el acoplamiento a la curvatura del espacio-tiempo. Para una métrica de Robertson-Walker $ds^2 = dt^2 - a^2(t)d\vec{x}^2 = a^2(\eta)[d\eta^2 - d\vec{x}^2]$, esta acción puede escribirse como

$$S = \int d^4x \left[\frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \partial_\mu \chi \partial_\nu \chi - \frac{1}{2} m^2 a^2 \chi^2 - \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) R a^2 \chi^2 - \frac{\lambda}{4!} \chi^4 \right] \quad (3.52)$$

donde $\chi = a\phi$.

Dada la acción precedente, es directo notar que los resultados obtenidos en el espacio Minkowski pueden generalizarse a este caso cuando el campo escalar no tiene masa y está acoplado de manera conforme ($\xi = 1/6$). Por lo tanto, las expresiones de los coeficientes de difusión D_1 y D_2 serán las mismas que en el espacio plano, ecuaciones (3.46) y (3.50), reemplazando $t \rightarrow \eta = \int_0^t \frac{dt'}{a(t')}$. En el caso particular de la métrica de de Sitter, $a(t) = \exp(Ht)$ y $\eta = \frac{1}{H} \left(1 - \frac{1}{a} \right)$. De esta manera, nuestras variables adimensionales $l = \Lambda t$ y $k_0 t$ en las ecuaciones (3.46) y (3.50) pasan a ser $l = \frac{\Lambda}{H} \left(1 - \frac{1}{a} \right)$ y $\frac{k_0}{H} \left(1 - \frac{1}{a} \right)$ respectivamente. Si $a(t=0) = 1$, Λ y k_0 son los valores físicos iniciales de la frecuencia de corte y del vector de onda.

Un modo del sistema pierde coherencia si los coeficientes de difusión son diferentes de cero durante un tiempo apreciable. Por lo tanto la pregunta en el caso cosmológico pasa a ser: ¿cuál es el valor máximo de Λ tal que, unos pocos instantes después del tiempo inicial, todos los modos con $k_0 \leq \Lambda$ sufren aún efectos difusivos? El valor de los coeficientes de difusión a un dado tiempo depende de la variable l , la cual está dada aproximadamente por $l = \Lambda/H$ (después del salto inicial). Existen dos posibilidades. Cuando $l \sim \mathcal{O}(1)$ (Figura 3.6), el análisis hecho en el espacio plano muestra que ambos coeficientes, D_1 y D_2 son apreciablemente diferentes de cero para todos los posibles valores de k_0 . Por otro lado, cuando $l \gg 1$ la situación se vuelve totalmente diferente: D_1 es siempre muy pequeño mientras que D_2 es chico en el sector infrarrojo. Los efectos difusivos sólo importan cuando $k_0 \sim \Lambda$ (Figura 3.7). Como conclusión podemos decir que para obtener pérdida de coherencia en todos los modos con $k_0 < \Lambda$, sólo podemos incluir en nuestro sistema aquellos modos con longitud de onda mayor que H^{-1} . Esta es la propuesta original de A. Starobinsky [28]. Si incluimos modos de longitud de onda menor que H^{-1} en nuestro sistema, el umbral del entorno aumenta, y el sector infrarrojo del sistema nunca puede exitar al entorno lo suficiente y, por lo tanto, no pierde coherencia.

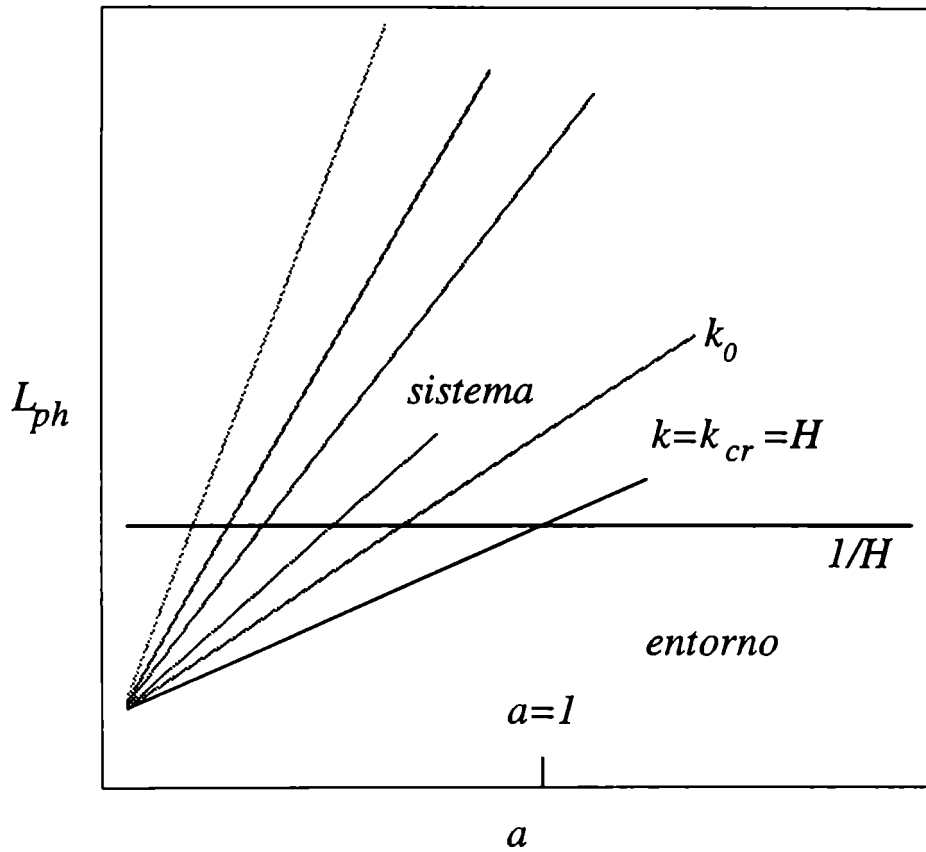


Fig. 3.6: Longitudes de onda físicas en función del factor de escala durante el período inflacionario. La línea horizontal $L_{ph} = H^{-1}$ corresponde al radio de Hubble. La línea $k = k_{cr} \equiv \Lambda$ divide sistema de entorno. A tiempo inicial ($a = 1$), la longitud de onda crítica es igual al radio de Hubble ($k_{cr} = H$). Todos los modos con $k_0 < k_{cr}$ (línea sólida) pierden coherencia.

Para establecer una relación estrecha con los modelos inflacionarios estudiados en la literatura, es necesario extender los cálculos al caso mínimamente acoplado ($\xi = 0$). Un cálculo más realista, en ese caso, deberá incluir una frecuencia de corte Λ que dependa del tiempo [29], dado que el sistema puede contener modos con $k_{ph} = \frac{k_0}{a} < H$ a cada tiempo. Sin embargo, el ejemplo discutido en esta sección representa un modelo sencillo que ilustra los principales aspectos del problema.

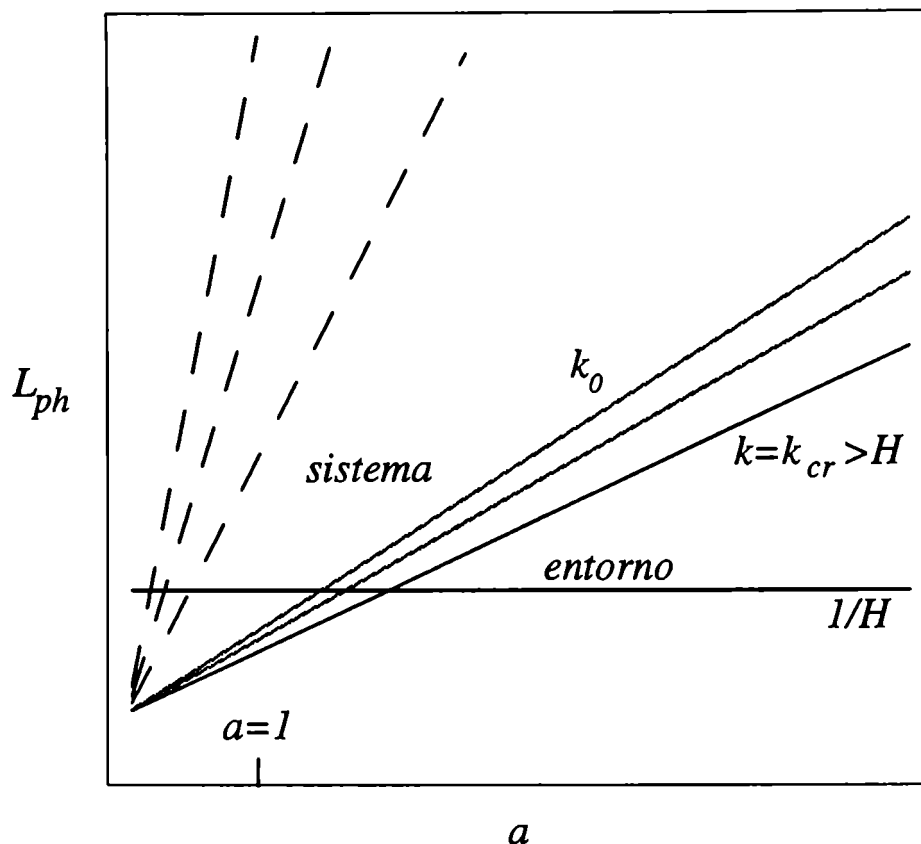


Fig. 3.7: Lo mismo que en la figura 3.6, pero para el caso en que $k_{cr} > H$. Después del tiempo inicial, los efectos difusivos son importantes sólo para los modos con $k_0 \sim k_{cr}$ (línea sólida). Los modos con $k_0 \ll k_{cr}$ no pierden coherencia.

3.5 Discusión

Como síntesis de este capítulo debemos señalar que hemos obtenido la AEGG para los modos de frecuencia baja integrando los modos de alta frecuencia de un campo escalar con autointeracción. A partir de la parte imaginaria de AEGG obtuvimos los coeficientes de difusión de la ecuación maestra. Como sistema y entorno son dos sectores de un mismo campo escalar, los resultados dependen fuertemente del "tamaño" de estos sectores, el cual está determinado por la longitud de onda crítica Λ^{-1} .

Posteriormente hemos analizado la dependencia con Λ de cada coeficiente. La pérdida de coherencia es efectiva para aquellos modos del sistema cuyas longitudes de onda asociadas sean del orden de la crítica. También generalizamos los resultados a la métrica de de Sitter mostrando que, cuando la longitud de onda crítica es igual al radio de Hubble, todos los modos del sistema evidencian pérdida de coherencia y por lo tanto la transición a lo clásico se torna posible.

Por otro lado, existe una importante conexión entre nuestro trabajo, el grupo de renormalización y las transformaciones de bloques de espín. La AEGG es similar a la acción efectiva promediada (AEP) propuesta en Refs. [38, 39, 40]. La AEP es una acción efectiva para promedios del campo sobre volúmenes finitos del espacio-tiempo Euclídeo. Está definida a partir de una longitud de onda crítica, similar a la introducida en este capítulo, dada por la relación Euclídea $p_\mu p_\mu = \Lambda^2$, donde Λ^{-1} es el tamaño típico del volumen Euclídeo. Es posible escribir una ecuación de evolución exacta para la dependencia de AEP con Λ . Esta ecuación fue discutida originalmente por Wegner y Houghton [41] y por Polchinski [42] cuando probó la renormalización de la teoría $\lambda\phi^4$. La AEGG es la versión de camino temporal cerrado de la AEP, donde el promedio sobre el campo se hace sobre volúmenes en tres dimensiones con una superficie de $t = cte$. Evaluamos la AEGG en forma perturbativa, no obstante es posible obtener una ecuación exacta para la dependencia con Λ de AEGG; y de esta forma poder evaluar de manera no perturbativa la acción de influencia. Un primer intento en esta dirección ha sido efectuado en la Ref. [43].

Para finalizar el capítulo, deseamos mencionar una posible aplicación de la AEGG para el análisis de transiciones de fase en teoría de campos. Cuando un campo sufre una transición de fase con ruptura de la simetría, desarrolla una estructura espacial de dominios que crece con el tiempo. El crecimiento de los dominios está asociado a la dinámica de los defectos topológicos que aparecen. Ahora bien, el objeto que contiene gran parte de la información es el parámetro de orden de la transición y está representado por el valor promedio del campo sobre el tamaño de cada dominio. Por lo tanto, es la AEGG la herramienta indicada para estudiar las transiciones de fase, incluyendo el proceso de transición cuántico-clásico del parámetro de orden y la formación de defectos topológicos [44, 45].

Capítulo 4

La acción de influencia en gravedad semiclásica

Pese a todos los intentos por lograr una descripción unificada de las interacciones fundamentales de la Naturaleza, la gravitatoria continúa siendo la interacción más problemática de vincular con las demás en una manera consistente. Por lo tanto, ante la ausencia de una teoría cuántica de la gravitación, una pregunta importante es: ¿podemos decir algo acerca de la influencia de los campos cuánticos de materia sobre la geometría clásica del espacio-tiempo? Con el advenimiento de la mecánica cuántica, muchos cálculos fueron efectuados asumiendo al campo electromagnético como un campo clásico de fondo, interactuando con materia cuántica. Bajo ciertas circunstancias esta aproximación semiclásica produjo resultados en total acuerdo con la posterior electrodinámica cuántica. En consecuencia, uno puede esperar que un régimen similar exista para los aspectos cuánticos de la gravedad, en el cual el campo gravitatorio es considerado como un campo clásico de fondo, mientras que los campos de materia están cuantizados de la manera usual.

A partir de la propuesta de J. Hartle y S. Hawking para la función de onda del Universo [46], la validez de la aproximación semiclásica ha sido ampliamente estudiada, principalmente en modelos cosmológicos de *minisuperespacio* en cuatro dimensiones. Como mencionamos en la Introducción, el límite semiclásico está basado en dos ingredientes principales: correlaciones y pérdida de coherencia [47]. Al igual que en el caso del movimiento Browniano cuántico, las

correlaciones entre las diferentes variables fue analizada por medio de la funcional de Wigner [48], mientras que la pérdida de coherencia fue estudiada a partir de la matriz densidad reducida [49]. Un exceso en la pérdida de coherencia puede producir ausencia en las correlaciones clásicas [50], por lo tanto ambos aspectos no son manifestaciones independientes. Posteriormente, la transición cuántico-clásica fue analizada utilizando la funcional de pérdida de coherencia de J. Hartle y M. Gell-Mann [51], la cual es una funcional de dos historias clásicas de la geometría $\mathcal{D}[g_{\mu\nu}^+, g_{\mu\nu}^-]$, después de haber integrado las variables cuánticas. La métrica $g_{\mu\nu}$ puede considerarse como clásica si la funcional de pérdida de coherencia es diagonal (o aproximadamente diagonal). En ese caso, las probabilidades para diferentes historias satisfacen la regla clásica de suma de probabilidades, y entonces los términos de interferencia cuántica son despreciables.

Si bien no contamos con una teoría cuántica de la gravitación, podemos obtener información acerca de la transición cuántico-clásica. De la misma manera que en el caso de la partícula Browniana cuántica, se pueden conocer los efectos de las fluctuaciones cuánticas del entorno sobre la partícula, siendo ésta de naturaleza clásica. Siguiendo nuestra formulación de la funcional de influencia para sistemas cuánticos abiertos, la métrica del espacio-tiempo $g_{\mu\nu}$ juega el rol del "sistema", y los campos cuánticos del "entorno". De esta manera, integrando sólo los grados de libertad del entorno podemos obtener información relevante acerca de la disipación, el ruido y la transición cuántico-clásica que sufre el sistema. Como veremos en este capítulo, la funcional de influencia está relacionada con la funcional de pérdida de coherencia de Hartle y Gell-Mann.

El efecto de los campos cuánticos sobre la geometría del espacio-tiempo constituye un problema fundamental en el marco de las teorías semiclásicas. La manera de estudiar estos efectos cuánticos de los campos sobre la geometría (que suponemos como clásica) está basada en el estudio de las ecuaciones de Einstein semiclásicas [52]

$$\frac{1}{8\pi G}G_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{clas}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (4.1)$$

donde $G_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein; $T_{\mu\nu}^{\text{clas}}$ es el tensor de energía-impulso clásico y con el valor medio $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ incorporamos los efectos de los campos cuánticos.

El estudio de estas ecuaciones es fundamental para entender procesos tales como el estado final de la evaporación de agujeros negros y problemas de pérdida de información; o para entender el efecto de los campos cuánticos sobre las singularidades clásicas de la relatividad general.

El análisis de las ecuaciones de Einstein semiclásicas en modelos realistas es una tarea muy complicada. Por esta razón es importante formular modelos simplificados donde tales dificultades no se manifiesten, pero que provean de resultados que permitan inducir los efectos de los modelos generales. Los modelos de gravedad escalar-tensorial en dos dimensiones son muy útiles en este sentido. A partir de estos modelos es posible entender algunos de los principales problemas referidos a las propiedades cuánticas de los agujeros negros y la influencia de los efectos cuánticos en situaciones cosmológicas [53].

Estas ecuaciones semiclásicas no proveen una descripción completa del problema, por ejemplo cuando el estado de los campos cuánticos es tal que el tensor de energía-impulso presenta importantes fluctuaciones alrededor de su valor medio [54], motivo por el cual en el Capítulo 5 estudiaremos las correcciones estocásticas a (4.1) que deben incluirse en los modelos más realistas.

En el presente capítulo estudiaremos fundamentalmente cuál es el dominio de aplicación de la aproximación semiclásica y en qué circunstancias dicha aproximación puede justificarse. En este contexto, los modelos en dos dimensiones proveen importantes simplificaciones para el cálculo de la funcional de influencia en gravedad semiclásica. La organización de este capítulo puede resumirse de la siguiente manera: en primer lugar presentamos el modelo bi-dimensional de Callan-Giddings-Harvey-Strominger; derivamos las ecuaciones de movimiento clásicas y calculamos la acción efectiva exacta. Seguidamente mostramos cómo obtener la acción efectiva de camino temporal cerrado para este modelo a partir de la expresión de la acción efectiva Euclídea. Deducimos las ecuaciones de movimiento de manera covariante, evaluando la contribución de las correcciones cuánticas aportadas por los campos de materia. Analizamos la radiación de Hawking para métricas de agujeros negros. Posteriormente estudiamos modelos donde el dilatón está acoplado a los campos de materia, re-analizando los problemas antes mencionados, destacando resultados físicos importantes. Finalmente estudiamos la transición cuántico-clásica a partir del cálculo de la funcional de influencia.

4.1 El modelo de Callan-Giddings-Harvey-Strominger

Los trabajos de S. Hawking acerca de la evaporación de agujeros negros [55, 56] sugieren que el proceso de formación y subsiguiente evaporación de un agujero negro no está gobernado por las leyes de la mecánica cuántica ordinaria: estados puros podrían evolucionar en estados mixtos. Esta conjetura es difícil de probar debido a la gran cantidad de grados de libertad y a la complejidad del espacio-tiempo en cuatro dimensiones. Un modelo donde se pueda controlar analíticamente todos los grados de libertad es de mucha utilidad. C. Callan, S. Giddings, J. Harvey y A. Strominger (CGHS) [57] propusieron un modelo bi-dimensional inspirado en teorías efectivas de cuerdas a bajas energías [58] que despertó gran interés. El modelo (CGHS) es un modelo bi-dimensional de la gravedad, acoplado a un campo escalar llamado el *dilatón* y a N campos conformes f_i , que contiene soluciones de agujero negro y radiación de Hawking. En este modelo puede calcularse el efecto completo de los campos cuánticos f_i sobre la geometría del espacio-tiempo, y en consecuencia el problema semiclásico puede resolverse exactamente [59, 60]. CGHS propusieron la siguiente acción clásica:

$$S_{\text{CGHS}} = \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{-g(x)} \left\{ e^{-2\phi} \left[R + 4(\partial\phi)^2 + 4\lambda^2 \right] - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (\partial f_i)^2 \right\}, \quad (4.2)$$

donde ϕ es el dilatón, R es el escalar de Ricci en dos dimensiones, λ es una constante positiva y los f_i son N campos escalares no-masivos, acoplados conformemente a la geometría bi-dimensional. Esta acción representa una acción efectiva que describe a los modos radiales de agujeros negros dilatónicos extremales en cuatro o más dimensiones, y también está relacionada a la acción de cuerdas no críticas a bajas energías. Independientemente de su motivación, es un modelo simplificado interesante para estudiar el problema en cuestión.

4.1.1 Ecuaciones clásicas de movimiento

Las ecuaciones de movimiento para cada uno de los campos de la teoría: $g^{\mu\nu}$, ϕ y f se obtienen tomando la variación funcional de la acción respecto de cada campo. Definiendo nuevas coordenadas,

$$x^+ = t + x, \quad x^- = t - x, \quad (4.3)$$

las ecuaciones de movimiento son

$$T_{+-} = \frac{\delta S_{\text{CGHS}}}{\delta g_{+-}} = 0, \quad (4.4)$$

$$T_{++} = \frac{\delta S_{\text{CGHS}}}{\delta g_{++}} = 0, \quad (4.5)$$

$$T_{--} = \frac{\delta S_{\text{CGHS}}}{\delta g_{--}} = 0. \quad (4.6)$$

En dos dimensiones (1+1) siempre es posible elegir la medida conforme

$$g_{\mu\nu} = e^{2\rho} \eta_{\mu\nu}, \quad (4.7)$$

donde $\eta_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio plano de Minkowski (con signatura $(-,+)$) y el factor $e^{2\rho}$ se conoce como el *factor conforme* o factor de Weyl; el intervalo puede escribirse como

$$ds^2 = e^{2\rho}[-dt^2 + dx^2] = -e^{2\rho} dx^+ dx^-. \quad (4.8)$$

Explícitamente, las ecuaciones de movimiento, en esta medida son:

$$T_{\pm\pm} = e^{-2\phi} (4\partial_{\pm}\rho\partial_{\pm}\phi - 2\partial_{\pm}^2\phi) + \frac{1}{2}\partial_{\pm}\partial_{\pm}f = 0, \quad (4.9)$$

$$T_{+-} = e^{-2\phi} (2\partial_+\rho\partial_-\phi - 4\partial_+\phi\partial_-\phi - \lambda^2 e^{2\rho}) = 0, \quad (4.10)$$

$$-4\partial_+\partial_-\phi + 4\partial_+\phi\partial_-\phi + 2\partial_+\partial_-\rho + \lambda^2 e^{2\rho} = 0, \quad (4.11)$$

$$\partial_+\partial_-\phi = 0. \quad (4.12)$$

Sumando miembro a miembro las ecuaciones (4.10) y (4.11) se obtiene

$$\partial_+\partial_-(\rho - \phi) = 0, \quad (4.13)$$

por lo tanto $\rho - \phi$ es un campo libre y, en consecuencia,

$$\rho - \phi = \frac{1}{2}W_+(x^+) + \frac{1}{2}W_-(x^-) \equiv \frac{1}{2}W. \quad (4.14)$$

Teniendo en cuenta (4.13) podemos escribir:

$$\partial_+ \partial_- e^{-2\phi} + \lambda^2 e^{2(\rho-\phi)} = 0, \quad (4.15)$$

de donde se deduce que

$$\partial_+ \partial_- e^{-2\phi} = -\lambda^2 e^{2(\rho-\phi)} = -\lambda^2 e^{(W_++W_-)}. \quad (4.16)$$

Integrando esta ecuación obtenemos,

$$e^{-2\phi} = -\lambda^2 \int dx^- e^{W_-(x^-)} \int dx^+ e^{W_+(x^+)} + u_+(x^+) + u_-(x^-), \quad (4.17)$$

donde u_+ y u_- son funciones a determinar a partir de las ecuaciones (4.9) y (4.12). Definiendo:

$$u = u_+(x^+) + u_-(x^-), \quad (4.18)$$

$$h_{\pm}(x^{\pm}) = \lambda \int^{x^{\pm}} dx^{\pm} e^{W_{\pm}}, \quad (4.19)$$

se puede obtener formalmente que

$$e^{-2\phi} = u - h_+ h_-, \quad (4.20)$$

y en consecuencia

$$e^{-2\rho} = e^{-W} (u - h_+ h_-). \quad (4.21)$$

Para completar la solución, es necesario conocer las funciones u_+ y u_- . La ecuación (4.12) para los campos de materia implica que

$$f = f_+(x^+) + f_-(x^-), \quad (4.22)$$

por lo que utilizando las ecuaciones de vínculo (4.9), y a partir de (4.20) y (4.21) encontramos que:

$$u_+ = \frac{M}{2\lambda} - \frac{1}{2} \int dx^+ e^{W_+} \int dx^- e^{-W_+} \partial_+ f \partial_+ f, \quad (4.23)$$

$$u_- = \frac{M}{2\lambda} - \frac{1}{2} \int dx^+ e^{W_-} \int dx^- e^{-W_-} \partial_- f \partial_- f. \quad (4.24)$$

En ambas ecuaciones, el término $\frac{M}{2\lambda}$ es una constante de integración cuyo significado quedará claro en lo que sigue de este capítulo.

Consideremos primero las soluciones de vacío, es decir, con $f = 0$. En este caso es trivial notar que

$$u = u_+ + u_- = \frac{M}{2\lambda}, \quad (4.25)$$

y que, además

$$h_{\pm} = \lambda x_{\pm}, \quad (4.26)$$

(a menos de traslaciones constantes en x^+ y x^-). Fijando completamente la medida, es decir eligiendo $W = 0$, el campo de Liouville ρ (que frecuentemente llamamos métrica) y el dilatón pueden escribirse como

$$e^{-2\rho} = e^{-2\phi} = \frac{M}{\lambda} - \lambda^2 x^+ x^-, \quad (4.27)$$

y el elemento de línea es

$$ds^2 = \frac{dx^+ dx^-}{(\lambda^2 x^+ x^- - \frac{M}{\lambda})}. \quad (4.28)$$

La solución (4.27) con $M \neq 0$ corresponde a la solución de agujero negro bi-dimensional encontrada por Witten. M resulta ser la masa del agujero negro [58]. La métrica (4.27) puede llevarse a una forma manifiestamente estática mediante el siguiente cambio de coordenadas:

$$\lambda x^+ = e^{\lambda\sigma^+} = e^{\lambda(\tau+\sigma)}, \quad (4.29)$$

$$\lambda x^- = -e^{-\lambda\sigma^-} = -e^{-\lambda(\tau-\sigma)}, \quad (4.30)$$

de donde es simple obtener:

$$ds^2 = (-d\tau^2 + d\sigma^2) \left[\frac{1}{1 + \frac{M}{\lambda} e^{-2\lambda\sigma}} \right]. \quad (4.31)$$

En el caso particular en que $M = 0$, la métrica es plana y el dilatón resulta lineal en la coordenada espacial,

$$\phi = -\frac{1}{2} \ln[-\lambda^2 x^+ x^-] = -\frac{1}{2} \lambda (\sigma^+ - \sigma^-) = -\lambda\sigma, \quad (4.32)$$

a esta solución con $M = 0$ se la conoce como "vacío de dilatón lineal". Cuando $M \neq 0$ la métrica (4.31) representa a la de un agujero negro de masa M [57]. El horizonte está en el límite $\sigma \rightarrow -\infty$.

Para poder estudiar la formación y eventual evaporación de un agujero negro es necesario considerar aquellas soluciones con $f \neq 0$. Para ello necesitamos considerar el tensor de energía-impulso de los campos de materia, definido por:

$$T_{\mu\nu}^f = \frac{2}{\sqrt{g}} \frac{\delta S^f}{\delta g_{\mu\nu}}, \quad (4.33)$$

donde S^f es la parte de la acción CGHS que corresponde a los campos de materia f . En la medida conforme,

$$T_{\pm\pm}^f = \partial_{\pm} f \partial_{\pm} f, \quad (4.34)$$

$$T_{+-}^f = T_{-+}^f = 0. \quad (4.35)$$

Del resultado anterior para la solución de vacío es de esperar que una perturbación debida a la presencia de campos de materia resulte en la formación de un agujero negro. Por lo tanto es instructivo considerar una onda de choque (o pulso de materia) de amplitud a viajando en la dirección x^- , descrita por el tensor de energía-impulso:

$$\frac{1}{2} \partial_+ f \partial_+ f = a \delta(x^+ - x_0^+). \quad (4.36)$$

Nuevamente, eligiendo la medida a partir de $W = 0$, y utilizando las ecuaciones anteriores, es fácil probar que

$$u_+'' = -a\delta(x^+ - x_0^+), \quad (4.37)$$

donde las primas denotan derivadas respecto de x^+ . Integrando dos veces obtenemos

$$u_+ = -a(x^+ - x_0^+)\theta(x^+ - x_0^+). \quad (4.38)$$

La ecuación análoga para u_- implica que $u_- = \alpha x_- + \beta$. Así, la métrica y el dilatón quedan dados por la siguiente expresión:

$$e^{-2\phi} = e^{-2\rho} = -a(x^+ - x_0^+)\theta(x^+ - x_0^+) - \lambda^2 x^+ x^-. \quad (4.39)$$

Es importante notar que para $x^+ < x_0^+$ se re-obtiene el vacío de dilatón lineal, mientras que para $x^+ > x_0^+$ la solución es la correspondiente a la de un agujero negro de masa $\alpha x_0^+ \lambda$ (luego de redefinir a x^- por $x^- - \frac{a}{\lambda^2}$). En conclusión, cualquier onda de materia incidente en gravedad dilatónica clásica produce un agujero negro con horizonte y singularidad.

Para demostrar esta última afirmación, calculamos explícitamente el escalar de curvatura, que en el modelo bi-dimensional siempre está dado en términos de derivadas del factor de Liouville (en la medida conforme).

$$R = 8e^{-2\rho} \partial_+ \partial_- \rho. \quad (4.40)$$

Luego, utilizando la ecuación (4.39) el escalar R puede escribirse

$$R = 4 \left[\frac{u_+' u_-' + \lambda^2 (u - x^+ u_+' - x^- u_-')}{u - \lambda^2 x^+ x^-} \right], \quad (4.41)$$

donde podemos notar que el escalar de curvatura diverge a lo largo de la curva $u - \lambda^2 x^+ x^- = 0$.

La eventual existencia de horizontes puede ponerse de manifiesto por medio de un sistema de coordenadas en el cual la métrica es asintóticamente plana. Haciendo el siguiente cambio de coordenadas:

$$e^{\lambda\sigma^+} = \lambda x^+, \quad (4.42)$$

$$e^{-\lambda\sigma^-} = -\lambda x^- - \frac{a}{\lambda}, \quad (4.43)$$

la métrica toma la forma

$$e^{2\rho} = \begin{cases} \left[1 + \frac{a}{\lambda} e^{\lambda\sigma^-}\right]^{-1} & \text{si } \sigma^+ < \sigma_0^+ \\ \left[1 + \frac{a}{\lambda} e^{\lambda(\sigma^- - \sigma^+ + \sigma_0^+)}\right]^{-1} & \text{si } \sigma^+ > \sigma_0^+ \end{cases} \quad (4.44)$$

de donde es fácil ver que en coordenadas (σ^+, σ^-) el factor conforme $e^{2\rho}$ se anula cuando $\sigma^- \rightarrow \infty$, que al pasar a las coordenadas (x^+, x^-) implica la existencia de un horizonte sobre la curva $x^- = -\frac{a}{\lambda^2}$ [57, 58].

4.1.2 Efectos cuánticos: la acción efectiva Euclídea

Para poder incluir los efectos cuánticos debido a los campos de materia f , debemos calcular las correcciones que aparecen en el tensor de energía-impulso. Es decir, podemos descomponer al tensor en una contribución clásica y una cuántica:

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{\text{clas}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (4.45)$$

Donde $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ proviene de la variación funcional de la correspondiente acción efectiva definida a partir de

$$e^{-S_{\text{ef}}^E} = \det[-\square]^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}f e^{-\frac{1}{2} \int d^2x f(-\square)f}, \quad (4.46)$$

debido a que estamos integrando funcionalmente sobre campos escalares no-masivos mínimamente acoplados en dos dimensiones.

Debido a la simetría conforme, la traza del tensor de energía-impulso de los campos escalares se anula clásicamente, pero existe a nivel cuántico una anomalía. En dos dimensiones, debido a que todas las métricas son conformemente planas, una teoría de campos no-masivos libre sería trivial sin anomalías conformes. Por otro lado, como la métrica bi-dimensional tiene sólo una componente desconocida, la acción efectiva está unívocamente determinada por la anomalía de traza de su variación funcional (tensor de energía-impulso). Como la traza del tensor de energía-impulso es proporcional a R (que determina completamente al tensor de Riemann en dos dimensiones), la contribución a la acción efectiva a partir de un campo no-masivo en dos dimensiones puede conocerse de manera *exacta*. En consecuencia, como

$$T_{\mu}^{\mu} = g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{g}} g^{\mu\nu} \frac{\delta S_{\text{ef}}}{\delta g_{\mu\nu}} = \frac{R}{24\pi}, \quad (4.47)$$

en la medida conforme podemos obtener la acción efectiva debida a los campos de materia cuánticos integrando la ecuación (4.47):

$$S_{\text{ef}}^{\text{E}} = S_{\text{CGHS}}^{\text{E}} - \frac{N}{96\pi} \int d^2x \sqrt{g(x)} \int d^2x' \sqrt{g(x')} R(x) \frac{1}{\square} R(x'). \quad (4.48)$$

Esta es la conocida acción de Polyakov.

En las secciones siguientes del presente capítulo haremos un análisis detallado del tensor de energía-impulso asociado a esta acción efectiva y de las ecuaciones de movimiento obtenidas a partir de él. Pero ahora centraremos nuestra atención en el cálculo del tensor de energía-impulso de los campos de materia.

Calculando la variación funcional de (4.48) podemos obtener la contribución cuántica al tensor de energía-impulso:

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle &= -\frac{1}{24\pi} \int d^2y \sqrt{g} [\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} - g_{\mu\nu} \square]_{(x)} R(y) \frac{1}{\square} \\ &+ \frac{1}{96\pi} \int d^2x \sqrt{g} \int d^2y \sqrt{g} \left\{ -g_{\mu\nu} \partial^{\alpha} \frac{R(x)}{\square} \partial_{\alpha} \frac{R(y)}{\square} + 2\partial_{\mu} \frac{R(x)}{\square} \partial_{\nu} \frac{R(y)}{\square} \right\}, \quad (4.49) \end{aligned}$$

donde el primer término contiene la información acerca de la anomalía de traza y el segundo, si bien tiene traza nula, contiene efectos no triviales como por ejemplo, es el término que aporta la

radiación de Hawking para métricas de colapso de agujero negro. Volveremos a este punto más adelante.

4.1.3 La acción efectiva de camino temporal cerrado

La manera usual de obtener las ecuaciones semiclásicas de movimiento se basa en tomar la variación funcional de (4.48). Estrictamente, ésta no es la manera correcta. Si pasamos del espacio Euclídeo al de Minkowski reemplazando el propagador Euclídeo por el de Feynman obtenemos la acción efectiva in-out usual (como veremos más adelante al evaluar la creación de partículas en métricas cosmológicas). Las ecuaciones de movimiento derivadas a partir de esta acción no son reales ni causales porque ellas son ecuaciones para los elementos de matriz in-out y no para valores medios de los campos. La solución de este problema radica en el formalismo de camino temporal cerrado (CTC) [19, 31, 32]. Con este formalismo podemos construir una acción efectiva in-in para los valores de expectación. Asumiendo el punto de vista semiclásico, donde no integramos sobre las diferentes configuraciones de la métrica, la acción efectiva CTC se define como [31, 32]:

$$e^{iS_{ef}^{CTC}[g^\pm, f^\pm]} = \mathcal{N} e^{i(S_{CGHS}[g^+, f^+] - S_{CGHS}[g^-, f^-])} \int \mathcal{D}\hat{f}^+ \mathcal{D}\hat{f}^- e^{i(S_{mat}[g^+, \hat{f}^+] - S_{mat}[g^-, \hat{f}^-])}. \quad (4.50)$$

Las ecuaciones de movimiento se obtienen tomando la variación de esta acción con respecto a la métrica $g_{\mu\nu}^+$, e imponiendo que $g_{\mu\nu}^+ = g_{\mu\nu}^-$. Las integrales de la ecuación (4.50) deben realizarse sobre las fluctuaciones cuánticas de los campos. Por lo tanto \hat{f}^+ y \hat{f}^- deben tener modos de frecuencia negativa y positiva, respectivamente, en el pasado remoto (estas son las llamadas condiciones de contorno in) y deben coincidir sobre una hipersuperficie espacial en el futuro (a un tiempo finito). Esta hipersuperficie, la cual debe ser una hipersuperficie de Cauchy, la llamaremos Σ . En consecuencia, la integral de camino puede pensarse como la integral de camino de dos campos independientes que evolucionan en dos ramas temporales diferentes; una en la dirección positiva del tiempo en presencia de la fuente $g_{\mu\nu}^+$ desde el vacío in hasta Σ , y la otra en la dirección temporal contraria, desde Σ hasta el vacío in en presencia de la fuente $g_{\mu\nu}^-$. El vínculo que debe imponerse a la evolución de los campos es $\hat{f}^+|_\Sigma = \hat{f}^-|_\Sigma$. Es importante notar que \hat{f} y $g_{\mu\nu}$ son independientes sobre las ramas + y -.

En la aproximación semiclásica, la AECTC coincide con la acción efectiva de granulado grueso definida en el Capítulo 3, y puede escribirse, sin pérdida de generalidad como [61],

$$S_{\text{ef}}^{\text{CTC}} = S_{\text{CGHS}}[g_{\mu\nu}^+, f^+] - S_{\text{CGHS}}[g_{\mu\nu}^-, f^-] + \Gamma_{\text{FI}}[g_{\mu\nu}^\pm], \quad (4.51)$$

donde $\Gamma_{\text{FI}}[g_{\mu\nu}^\pm]$ es la acción de influencia, presentada en los capítulos 2 y 3. Como veremos, esta acción depende de la hipersuperficie Σ , donde los campos deben coincidir. Como en todo sistema cuántico abierto donde realizamos la integración sobre las variables correspondientes al entorno (en este caso las fluctuaciones cuánticas de los campos de materia \hat{f}_i), encontramos una descripción “efectiva” para el sistema (la métrica $g_{\mu\nu}$, el dilatón, y la configuración clásica de fondo de los campos de materia f_i). El objeto $e^{iS_{\text{ef}}^{\text{CTC}}}$ es básicamente la funcional de influencia y coincide con la *funcional de pérdida de coherencia* de Hartle y Gell-Mann [51].

En nuestro caso presente, elegimos como condición inicial para el estado cuántico de los campos escalares el estado de vacío in en el pasado remoto $|0, in\rangle$. Para elecciones más generales, la acción de influencia es un objeto más complicado que depende fuertemente de las mismas [30].

La funcional de influencia puede escribirse alternativamente como:

$$e^{iS_{\text{ef}}^{\text{CTC}}} = \sum_{\alpha} \langle 0, in | \alpha, T \rangle_{g^-} \langle \alpha, T | 0, in \rangle_{g^+}, \quad (4.52)$$

y en consecuencia puede interpretarse como el producto escalar, sobre Σ , entre los estados evolucionados temporalmente (sobre cada una de las métricas $g_{\mu\nu}^\pm$) desde el estado inicial común hasta la hipersuperficie futura común Σ . La AECTC también puede escribirse alternativamente en término de los coeficientes de Bogolubov que “conectan” las bases in y out de cada rama temporal. Esto implica que existe pérdida de coherencia si y sólo si existe creación de partículas durante la evolución del campo [36].

La ecuación (4.50) puede escribirse también como [62, 63]

$$e^{iS_{\text{ef}}^{\text{CTC}}[g, f]} = \mathcal{N} e^{iS_{\text{CGHS}}^{\text{C}}[g, f]} \int \mathcal{D}\hat{f} e^{iS_{\text{mat}}^{\text{C}}[g, \hat{f}]}, \quad (4.53)$$

donde hemos introducido el camino temporal complejo CTC $\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \cup \mathcal{C}_-$, que va desde menos infinito a Σ (\mathcal{C}_+), y retorna, con una parte imaginaria infinitesimal decreciente (\mathcal{C}_-). Las integrales

temporales sobre el contorno \mathcal{C} están definidas por $\int_{\mathcal{C}} dt = \int_{\mathcal{C}_+} dt - \int_{\mathcal{C}_-} dt$. Las fluctuaciones \hat{f} de la ecuación (4.53) están relacionadas con aquellas presentes en (4.50) por la relación $\hat{f}(t, x) = \hat{f}_{\pm}(t, x)$ si $t \in \mathcal{C}_{\pm}$. Lo mismo se aplica para $g_{\mu\nu}$ y para la configuración clásica de fondo f . Esta ecuación es útil porque tiene la estructura de la acción efectiva in-out o de la acción Euclídea usual. Las reglas de Feynman son las ordinarias, simplemente reemplazando los propagadores Euclídeos de la siguiente manera:

$$G(x, y) = \begin{cases} G_{++}(x, y) = i\langle 0, in | T \hat{f}^+(x) \hat{f}^+(y) | 0, in \rangle, & t, t' \text{ ambos sobre } \mathcal{C}_+ \\ G_{--}(x, y) = -i\langle 0, in | \bar{T} \hat{f}^-(x) \hat{f}^-(y) | 0, in \rangle, & t, t' \text{ ambos sobre } \mathcal{C}_- \\ G_{+-}(x, y) = -i\langle 0, in | \hat{f}^+(x) \hat{f}^-(y) | 0, in \rangle, & t \text{ sobre } \mathcal{C}_+, t' \text{ sobre } \mathcal{C}_- \\ G_{-+}(x, y) = i\langle 0, in | \hat{f}^-(y) \hat{f}^+(x) | 0, in \rangle, & t \text{ sobre } \mathcal{C}_-, t' \text{ sobre } \mathcal{C}_+ \end{cases} \quad (4.54)$$

Cada propagador se define teniendo en cuenta que las fluctuaciones de los campos corresponden a métricas diferentes. Por ejemplo, G_{++} es el producto ordenado temporalmente de los dos campos en la métrica $+$, mientras que G_{--} es el producto anti-temporalmente ordenado para los campos en la métrica $-$. Es por ésto que la relación usual entre estas funciones de Green $G_{++} = G_{--}^*$ ya no es válida porque cada propagador está definido sobre métricas diferentes. De la misma forma, G_{+-} se construye a partir del producto de un campo definido sobre la métrica $+$ con otro sobre la $-$. Los propagadores de Feynman y Dyson se representan por

$$G_{\pm\pm}(x, y) = G_{\pm}(x, y) \theta(x^0 - y^0) + G_{\mp}(x, y) \theta(y^0 - x^0) \quad (4.55)$$

pero ahora no son válidas las relaciones usuales $G_+ = G_{+-}$ y $G_- = G_{-+}$.

A partir de las ecuaciones (4.48) y (4.54) la acción efectiva de camino temporal cerrado es:

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}}^{\text{CTC}} &= S_{\text{CGHS}}(g_{\mu\nu}^+, f^+) - S_{\text{CGHS}}(g_{\mu\nu}^-, f^-) \\ &\quad - \frac{N}{96\pi} \int d^2x \sqrt{-g(x)} \int d^2y \sqrt{-g(y)} R^a(x) G_{ab}(x, y) R^b(y), \end{aligned} \quad (4.56)$$

donde los índices a y b denotan cada una de las ramas CTC, $+$ y $-$.

4.1.4 Las ecuaciones de movimiento covariantes

Aunque nuestro interés fundamental radica en el estudio del proceso de pérdida de coherencia, en esta sección mostramos cómo se deducen las ecuaciones de movimiento covariantes a partir de la AECTC. Estas ecuaciones no pueden derivarse directamente a partir de la ecuación (4.48) porque, como mencionamos al inicio, el formalismo CTC es necesario para evaluarlas correctamente a partir de una acción efectiva. En general, las ecuaciones semiclásicas de movimiento han sido halladas por medio de [64]

$$2 \frac{\delta S_{\text{CGHS}}}{\delta g_{\mu\nu}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle. \quad (4.57)$$

Las componentes del tensor de energía-impulso pueden determinarse utilizando la anomalía de traza e imponiendo la ley de conservación [65]. En la literatura previa, estas ecuaciones han sido escritas y estudiadas en la medida conforme. Pero esta manera de calcular restringe la posibilidad de hallar las componentes del tensor de energía-impulso para aquellos campos de materia conformes o no acoplados al dilatón, dado que para estos casos más generales o no conocemos la anomalía de traza, y/o el tensor de energía-impulso no se conserva [66].

El formalismo CTC nos permite derivar las ecuaciones de movimiento covariantes a partir de la expresión:

$$\frac{\delta S_{\text{ef}}^{\text{CTC}}}{\delta g_{\mu\nu}^+} \Big|_{g_{\mu\nu}^+ = g_{\mu\nu}^-} = 0. \quad (4.58)$$

En consecuencia, la principal dificultad está en la variación funcional de las funciones de Green respecto a la métrica. Después de expandir al campo en modos, podemos probar que [67]

$$\delta G_{++} = G_{\text{ret}} \delta \square G_{++} + G_{++} \delta \square G_{\text{avan}} - G_{\text{ret}} \delta \square G_{\text{avan}}, \quad (4.59)$$

$$\delta G_{+-} = G_{\text{ret}} \delta \square G_{+-}, \quad (4.60)$$

$$\delta G_{-+} = G_{\text{ret}} \delta \square G_{-+}, \quad (4.61)$$

donde G_{ret} y G_{avan} son las funciones de Green retardada y avanzada usuales, respectivamente. La variación funcional del operador d'alambertiano $\delta\Box$ actuando sobre una función escalar arbitraria w está dada por [67]:

$$\delta\Box w = -\nabla^\mu \nabla^\nu \delta g_{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial^\lambda w g^{\mu\nu} (\delta g_{\lambda\nu;\mu} + \delta g_{\mu\lambda;\nu} - \delta g_{\mu\nu;\lambda}). \quad (4.62)$$

En las ecuaciones que provienen de la variación funcional todos los propagadores G_{ret} , G_{avan} , G_{+-} y G_{-+} están evaluados en $g_{\mu\nu}^+ = g_{\mu\nu}^-$, porque es lo que necesitamos para obtener las ecuaciones de movimiento. Finalmente, las ecuaciones covariantes están dadas por:

$$\begin{aligned} \frac{\delta S_{\text{CGHS}}}{\delta g_{\mu\nu}^+} &\equiv \frac{1}{2} \langle T_{\mu\nu} \rangle = -\frac{N}{48\pi} \int d^2 y \sqrt{-g(y)} R(y) [\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \Box]_{(x)} G_{\text{ret}}(x, y) \\ &+ \frac{N}{192\pi} \int d^2 x \sqrt{-g(x)} \int d^2 y \sqrt{-g(y)} \{ 2R(x) \partial_\mu(z) G_{\text{ret}}(x, z) \partial_\nu(z) G_{\text{ret}}(z, y) R(y) \\ &- R(x) g_{\mu\nu}(z) \partial^\alpha(z) G_{\text{ret}}(x, z) \partial_\alpha(z) G_{\text{ret}}(z, y) R(y) \}. \end{aligned} \quad (4.63)$$

La expresión anterior es la misma que la calculada en la ecuación (4.49), donde los propagadores Euclídeos fueron reemplazados por los retardados, por lo tanto éstas son ecuaciones de movimiento no-locales, reales y causales. De (4.63) obtenemos la anomalía conocida [52, 67]

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = 2g^{\mu\nu} \frac{\delta S_{\text{ef}}^{\text{CTC}}}{\delta g_{\mu\nu}^+} = N \frac{R}{24\pi}. \quad (4.64)$$

En la medida conforme,

$$\langle T_{+-} \rangle = \langle T_{-+} \rangle = -\frac{N}{12\pi} \partial_+ \partial_- \rho, \quad (4.65)$$

$$\langle T_{\pm\pm} \rangle = -\frac{N}{12\pi} [\partial_\pm^2 \rho - \partial_\pm \rho \partial_\pm \rho - t^\pm]. \quad (4.66)$$

Las funciones t^\pm dependen de x^\pm y pueden escribirse como

$$t^\pm = \partial_\pm^2 S^\pm - 2\partial_\pm S^\pm \partial_\pm S^\pm, \quad (4.67)$$

donde las funciones S^\pm son:

$$S^+(x^+) = \int d^2y \partial_{y^-} [\rho(y) \partial_{y^+} G_{\text{ret}}(x, y)], \quad (4.68)$$

$$S^-(x^-) = \int d^2y \partial_{y^+} [\partial_{y^-} \rho(y) G_{\text{ret}}(x, y)]. \quad (4.69)$$

Las funciones t^\pm dependen del estado cuántico de los campos de materia. En el modelo CGHS están completamente determinadas por las condiciones de contorno en el pasado remoto que corresponden al estado de vacío in. Como ejemplo calculamos la expresión explícita de estas funciones para métricas cosmológicas y de agujero negro.

Para métricas cosmológicas, ρ es una función del tiempo conforme t , $\rho = \rho(t)$. Como el propagador retardado es

$$G_{\text{ret}}(x, y) = \theta(t_x - t_y - |x - y|), \quad (4.70)$$

las funciones t^\pm son

$$t^\pm = \partial_\pm^2 \rho - \partial_\pm \rho \partial_\pm \rho. \quad (4.71)$$

Por lo tanto, por las ecuaciones (4.67), (4.66) y (4.67) obtenemos

$$\langle T_{+-} \rangle = \langle T_{-+} \rangle = -\frac{N}{12\pi} \ddot{\rho}, \quad (4.72)$$

$$\langle T_{\pm\pm} \rangle = 0. \quad (4.73)$$

De donde es simple ver que sólo aparece la anomalía de traza [68].

Si consideramos la onda de choque de la sección 4.1.1

$$\frac{1}{2} \partial_+ f \partial_+ f = a \delta(x^+ - x_0^+),$$

podemos hallar las funciones t^\pm en las coordenadas σ^\pm

$$t^\pm = \partial_{\sigma^\pm}^2 \rho - \partial_{\sigma^\pm} \rho \partial_{\sigma^\pm} \rho, \quad (4.74)$$

y las componentes del tensor de energía-impulso son

$$\langle T_{\pm\pm} \rangle = -\frac{N}{12} [\partial_{\pm}^2 \rho - \partial_{\pm} \rho \partial_{\pm} \rho - \partial_{\sigma^\pm}^2 \rho + \partial_{\sigma^\pm} \rho \partial_{\sigma^\pm} \rho]. \quad (4.75)$$

Este resultado es válido para todo el espacio-tiempo. En particular, para la región de vacío donde $\partial_{\sigma^\pm} \rho$ se anula obtenemos [57]

$$t^+(\sigma^+) = 0, \quad (4.76)$$

$$t^-(\sigma^-) = -\frac{1}{4} \lambda^2 \left[1 - \left(1 + \frac{a}{\lambda} e^{\lambda \sigma^-} \right)^{-2} \right]. \quad (4.77)$$

Que es el resultado conocido a través de la literatura.

4.1.5 Radiación de Hawking: modelo CGHS

Siguiendo el razonamiento empleado en la sección anterior, consideramos la formación de un agujero negro por colapso gravitacional de una onda de choque situada en $x^+ = x_0^+$. Cuando $x^+ < x_0^+$, como demostramos anteriormente, la métrica es la de Minkowski, es decir

$$ds_{\text{in}}^2 = -dx_{\text{in}}^- dx_{\text{in}}^+, \quad x_{\text{in}}^- = t - x, \quad x_{\text{in}}^+ = t + x. \quad (4.78)$$

Para $x^+ > x_0^+$, la geometría está representada por

$$ds^2 = -\lambda(r) du dv, \quad (4.79)$$

$$u = t - r^*, \quad v = t + r^*, \quad \frac{dr}{dr^*} = \lambda(r),$$

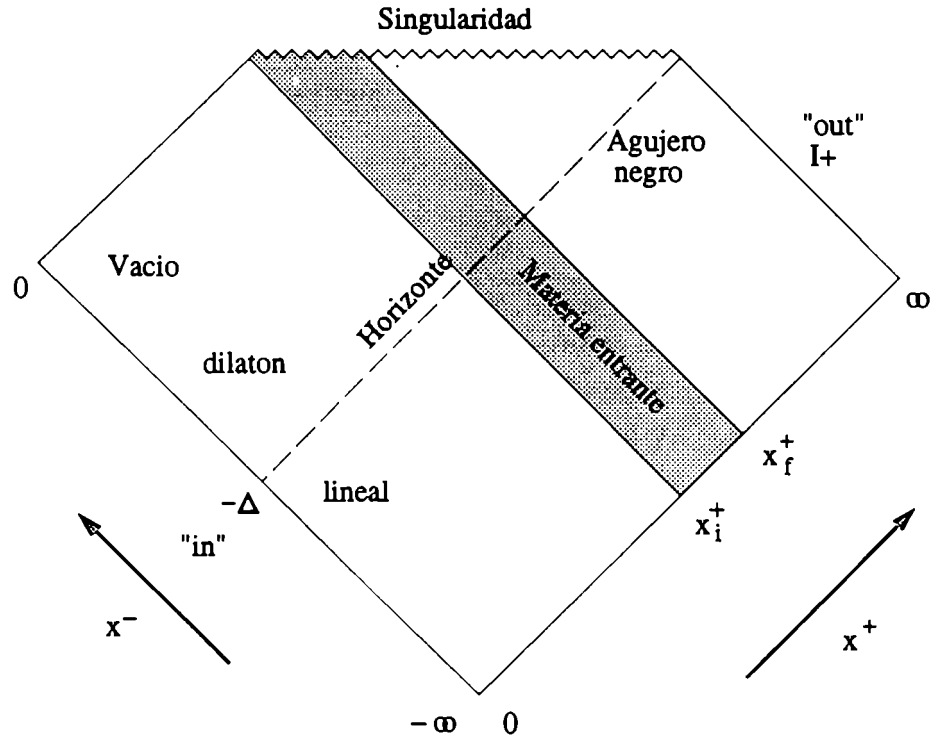


Fig. 4.1: Diagrama de Penrose correspondiente al colapso gravitatorio de una onda de choque.

donde $\lambda(r)$ se anula sobre el horizonte de eventos $r = r_+$. Para un agujero negro de Schwarzschild tenemos, por ejemplo que $\lambda(r) = 1 - \frac{2M}{r}$; en lo que sigue mantendremos la generalidad con la función $\lambda(r)$.

La relación entre las coordenadas "in" y "out" que representan uno y otro lado respecto de la onda de choque se obtiene de empalmar ambas geometrías en $x^+ = x_0^+$:

$$v = x_{in}^+, \quad \frac{dx_{in}^-}{du} = \lambda \left[\frac{1}{2}(x_0^+ - x_{in}^-) \right]. \quad (4.80)$$

Como hemos visto ((4.63)), en la ecuación (4.49) la expresión formal $\frac{1}{\square}R$ denota al propagador retardado G_{ret} actuando sobre el escalar de Ricci. Utilizando la medida conforme, $ds^2 = -e^{2\rho}dx^+dx^-$ tenemos que $-2\square\rho = R$, por ello ρ está formalmente representado por $-2\rho = \frac{1}{\square}R$. El propagador retardado queda definido por la relación $-2\rho_{in} = G_{ret}R$ donde ρ_{in} es el factor de

Liouville en las coordenadas "in". La relación entre los factores conformes en las coordenadas "in" y "out", respectivamente queda determinado entonces por:

$$e^{2\rho_{\text{in}}} = e^{2\rho_{\text{out}}} \frac{du}{dx_{\text{in}}^-} \frac{dv}{dx_{\text{in}}^+} = e^{2\rho_{\text{out}}} \frac{du}{dx_{\text{in}}^-}. \quad (4.81)$$

El flujo de energía a través de I^+ (ver Figura 4.1) está dado por

$$\langle T_{uu} \rangle_{I^+} = -\frac{1}{12\pi} \left[\frac{\partial^2 \rho_{\text{in}}}{\partial u^2} - \left(\frac{\partial \rho_{\text{in}}}{\partial u} \right)^2 \right]_{I^+} \quad (4.82)$$

Por medio de las ecuaciones (4.80) y (4.81) obtenemos

$$2[\rho_{\text{in}}]_{I^+} = \log \frac{du}{dx_{\text{in}}^-} + \text{const} = -\log \left[\lambda \left(\frac{1}{2} (x_0^+ - x_{\text{in}}^-) \right) \right] + \text{const}.$$

Combinando las ecuaciones anteriores podemos mostrar que [69]

$$\langle T_{uu} \rangle_{I^+} = -\frac{1}{192\pi} \lambda'^2, \quad (4.83)$$

donde $\lambda = \lambda(r_+)$. Este flujo corresponde a una temperatura ($\langle T_{uu} \rangle = \frac{\pi}{12} T_H^2$)

$$T_H = \frac{1}{4\pi} \lambda'(r_+). \quad (4.84)$$

Este resultado es aplicable para aquellos agujeros negros cuya métrica sea asintóticamente plana y de la forma $ds^2 = -\lambda(r)dt^2 + \lambda^{-1}(r)dr^2$. La temperatura de Hawking para un agujero negro genérico también puede calcularse trabajando en el espacio Euclideo y compactificando la dirección temporal. El resultado coincide con (4.84). Por ejemplo, para un agujero negro de Schwarzschild, tenemos que $T_H = \frac{1}{8\pi} \frac{1}{M}$. Volveremos a este punto en la siguiente sección.

4.2 Modelos más realistas: acoplamiento dilatón-campo escalar

Si bien el modelo de CGHS ha sido muy exitoso, es de interés investigar otros modelos con una vinculación directa a modelos en cuatro dimensiones, al menos para algún caso en particular. Por

ejemplo podemos obtener modelos bi-dimensionales a partir de modelos en cuatro dimensiones pero restringidos a simetría esférica. En particular, podemos considerar la acción de Einstein-Hilbert usual y campos mínimamente acoplados en cuatro dimensiones,

$$S = \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} \left[\frac{1}{16\pi} R^{(4)} - \frac{1}{2} (\partial^{(4)} f)^2 \right] \quad (4.85)$$

Para configuraciones esféricamente simétricas

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{ab}(x^a) dx^a dx^b + e^{-2\phi(x^a)} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (4.86)$$

$$f = f(x^a), \quad a, b = 0, 1,$$

la acción puede reducirse dimensionalmente a

$$S = \int d^2x \sqrt{g} e^{-2\phi} \left[\frac{1}{16\pi} (R + 2(\partial\phi)^2 + 2e^{2\phi}) - \frac{1}{2} (\partial f)^2 \right]. \quad (4.87)$$

A diferencia del modelo CGHS, en esta acción los campos escalares de materia están acoplados al dilatón.

De la misma manera, comenzando con campos escalares acoplados de manera arbitraria, cuya acción esté dada por

$$S_{\text{materia}} = -\frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g^{(4)}} \left[(\partial^{(4)} f)^2 + \xi R^{(4)} f^2 \right], \quad (4.88)$$

se obtiene, después de la reducción dimensional:

$$S_{\text{materia}} = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} e^{-2\phi} \left[(\partial f)^2 + \xi f^2 (R^{(2)} + 4\Box\phi - 6(\partial\phi)^2 + 2e^{2\phi}) \right], \quad (4.89)$$

que, en términos del campo $\psi = e^{-\phi} f$, puede re-escribirse como:

$$S_{\text{materia}} = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} \left[(\partial\psi)^2 + V\psi^2 \right], \quad (4.90)$$

con la función V definida por

$$V = \xi R^{(2)} + (4\xi - 1)\square\phi + (1 - 6\xi)(\partial\phi)^2 + 2\xi e^{2\phi} . \quad (4.91)$$

$\xi = 0$ y $\xi = 1/6$ son casos especiales. Para $\xi = 1/6$, la acción es invariante conforme en cuatro dimensiones, es decir, la acción queda invariante frente a transformaciones tales como $g_{\mu\nu} \rightarrow e^{2\sigma(x)}g_{\mu\nu}$ y $f \rightarrow e^{-\sigma(x)}f$. Desde el punto de vista del modelo bi-dimensional, la invarianza implica que $g_{ab} \rightarrow e^{2\sigma(x)}g_{ab}$, $\phi \rightarrow \phi - \sigma$ y $\psi \rightarrow \psi$ (o $f \rightarrow e^{-\sigma(x)}f$). La acción de materia (4.87), que corresponde al caso $\xi = 0$, es invariante conforme en dos dimensiones, es decir, frente a las transformaciones $g_{ab} \rightarrow e^{2\sigma(x)}g_{ab}$, $\phi \rightarrow \phi$ y $f \rightarrow f$. Para otro acoplamiento diferente de $\xi = 0$ o $\xi = 1/6$, no existe invarianza que implique transformaciones de Weyl en el modelo bi-dimensional.

Consideremos el modelo de la ecuación (4.87). Debido a la simetría conforme, la traza del tensor de energía-impulso de los campos escalares se anula a nivel clásico. Como ya hemos mencionado, aparece una anomalía a nivel cuántico. Esta anomalía ha sido calculada por varios autores [70]. A partir de estos modelos, algunos efectos nuevos han sido discutidos, como por ejemplo la evaporación (y la anti-evaporación) de agujeros negros de Schwarzschild-de Sitter [71]. Un aspecto muy importante en estos modelos es que debido al acoplamiento entre el dilatón y los campos de materia, el tensor de energía-impulso bi-dimensional de los campos de materia no se conserva, y por ello, el conocimiento de la anomalía de traza no es suficiente para determinar el tensor de energía-impulso total, como sí ocurre en el modelo CGHS [66, 72].

4.2.1 La acción efectiva y el tensor de energía-impulso

A nivel clásico, el tensor de energía-impulso de los campos de materia está dado por

$$T_{ab} = e^{-2\phi} \left[\partial_a f \partial_b f - \frac{1}{2} g_{ab} (\partial f)^2 \right] . \quad (4.92)$$

Este tensor tiene traza nula pero su divergencia no lo es; por lo tanto no se conserva. Efectivamente, si utilizamos la ecuación de movimiento clásica para f , la divergencia está dada por:

$$\nabla^a T_{ab} = -\frac{1}{2} \partial_a (e^{-2\phi}) (\partial f)^2 . \quad (4.93)$$

Claramente, el objeto que se conserva gracias al teorema de Noether es el tensor de energía-impulso total. Como veremos ahora, La razón por la cual T_{ab} no se conserva es clara a partir de la conservación del tensor de energía-impulso en cuatro dimensiones.

La conexión entre el modelo bi-dimensional y el caso general en cuatro dimensiones puede ponerse en evidencia debido a que gracias a la simetría esférica, el tensor de energía-impulso general puede escribirse como:

$$\begin{aligned}\langle T_{ab}^{(4)} \rangle &= \frac{1}{2\pi} e^{2\phi} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{\text{ef}}}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{4\pi} e^{2\phi} \langle T_{ab} \rangle, \\ \langle T_{ij}^{(4)} \rangle &= \frac{1}{8\pi} e^{2\phi} \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta S_{\text{ef}}}{\delta \phi} g_{ij},\end{aligned}\quad (4.94)$$

donde los índices i y j indican las coordenadas angulares.

En realidad, como $\nabla^\mu T_{\mu\nu}^{(4)} = 0$, y gracias a la ecuación (4.86), se obtiene que

$$\nabla^a T_{ab}^{(4)} = 2\partial^a \phi T_{ab}^{(4)} - e^{2\phi} (\partial_b \phi T_{\theta\theta}^{(4)} + \sin^{-2} \theta \partial_b \phi T_{\varphi\varphi}^{(4)}). \quad (4.95)$$

Luego de utilizar que $T_{\mu\nu}^{(4)} = \partial_\mu f \partial_\nu f - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (\partial f)^2$ y $f = f(x^a)$, reproducimos la ecuación (4.93).

A nivel cuántico, el valor medio $\langle T_{ab} \rangle$ es una cantidad divergente que debe ser renormalizada. Una renormalización covariante producirá entonces un tensor de energía-impulso que no se conserva y que contiene una anomalía de traza.

La acción de materia (4.90) puede re-escribirse para $\xi = 0$ como:

$$S_\psi = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} [(\partial\psi)^2 + P \psi^2], \quad (4.96)$$

donde $P = (\partial\phi)^2 - \square\phi$.

Al igual que en la sección anterior, la acción efectiva Euclídea puede calcularse usando el hecho que la anomalía de traza está determinada por $T = 2g^{ab} \frac{\delta S}{\delta g^{ab}} = \frac{1}{24\pi} (R - 6P)$ [70]. Por lo tanto, integrando esta ecuación es posible obtener [66]

$$\begin{aligned}S_{\text{ef}} &= -\frac{1}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} \int d^2y \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{12} R(x) \frac{1}{\square} R(y) - P(x) \frac{1}{\square} R(y) \right\} + S_{\text{ef}}^I \\ &\equiv S_{\text{ef}}^A + S_{\text{ef}}^I.\end{aligned}\quad (4.97)$$

El primer término de (4.97), S_{ef}^A produce la anomalía de traza esperada, mientras que el segundo término es invariante frente a transformaciones de Weyl. Este término es trivial en el caso en que el dilatón sea constante y/o si los campos de materia no están acoplados al dilatón. Por este motivo no lo incluímos al evaluar la acción efectiva para el modelo CGHS (ecuación (4.48)).

Trabajando en la medida conforme, el término invariante de Weyl puede escribirse como:

$$e^{-S_{\text{ef}}^I} = \det[-\square_p + P_p]^{-\frac{1}{2}} = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\psi e^{-\frac{1}{2} \int d^2x \psi(-\square_p)\psi} e^{-\frac{1}{2} \int d^2x P_p \psi^2}, \quad (4.98)$$

donde el sub-índice p indica que la cantidad debe evaluarse sobre una métrica plana; \mathcal{N} es una constante de normalización. En algunos trabajos esta parte invariante ha sido omitida, produciendo resultados contradictorios con los de los modelos en cuatro dimensiones [73]. Una manera de calcular esta parte invariante consiste en realizar una expansión en potencias de P_p [74]:

$$S_{\text{ef}}^I = \int d^2x P_p(x) D_1(x) + \int d^2x \int d^2y P_p(x) D_2(x, y) P_p(y) + \dots \quad (4.99)$$

Comparando términos del mismo orden entre las ecuaciones (4.98) y (4.99) obtenemos que $D_1(x) = \frac{1}{2}G(x, x)$, $D_2(x, y) = \frac{1}{4}G^2(x, y)$, donde G es el propagador Euclídeo plano. Por lo tanto la acción, a segundo orden en la expansión en potencias de P_p es:

$$S_{\text{ef}}^I = \frac{1}{4} \int d^2x \int d^2y P_p(x) G^2(x, y) P_p(y), \quad (4.100)$$

donde hemos omitido un término local y divergente que puede ser extraído mediante la adición de un contratérmino.

El propagador al cuadrado G^2 , ha sido calculado en la Ref. [75]:

$$G^2(p) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{p^2} \ln \frac{p^2}{\mu^2}. \quad (4.101)$$

Finalmente, transformando Fourier la ecuación (4.101), la parte invariante de la acción, a segundo orden en P_p queda:

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}}^I &= -\frac{1}{8\pi} \int d^2x \int d^2y P_p(x) \frac{1}{\square_p} \ln \frac{-\square_p}{\mu^2} P_p(y) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} \int d^2y \sqrt{g} P(x) \frac{1}{\square} \ln \frac{-\square}{\mu^2} P(y). \end{aligned} \quad (4.102)$$

La segunda línea de la ecuación (4.102) está escrita de manera explícitamente covariante usando el hecho que $P_p = \sqrt{g}P$ y que la función de Green $1/\square_p$ es invariante de Weyl: El parámetro μ representa una escala de corte infraroja, por lo tanto la acción efectiva en esta aproximación depende del parámetro μ debido a que estamos evaluando perturbaciones para campos no-masivos en dos dimensiones. Los resultados físicos van a depender de μ .

Si bien hemos realizado un desarrollo en potencias de P para evaluar la parte invariante de Weyl, no hemos desarrollado en potencias de R , a diferencia de lo hecho en [74]. Como veremos, esto será útil en geometrías no-triviales con $P \ll R$.

Una manera alternativa, basada en una aproximación diferente, puede aplicarse para el cálculo de S_{ef}^I . Esta nueva aproximación corresponde a despreciar la retrodispersión de la geometría sobre la dinámica de los campos de materia. Esta aproximación efectivamente supone que el término de masa en la ecuación (4.98) es una constante [76]. En este caso, la parte invariante de Weyl es:

$$\begin{aligned} S_{ef}^I &= -\frac{1}{8\pi} \int d^2x P_p \left(1 - \log \frac{P_p}{\mu^2} \right) \\ &= -\frac{1}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} P(x) \left(1 - \log \frac{P}{\mu^2} \right) - \frac{1}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} \int d^2y \sqrt{g} P(x) \frac{1}{\square} R(y). \end{aligned} \quad (4.103)$$

Nuevamente, la expresión anterior fue hallada en el espacio plano y luego se obtuvo la expresión covariante. Para ello debemos notar que en la medida conforme, $\log(\sqrt{g}) = -\square^{-1}R$. Está claro que podemos calcular las correcciones que vienen del hecho de que en realidad P no es una constante; éstas se obtienen haciendo perturbaciones en potencias de derivadas de P [76]. Notar que el último término en (4.103) se cancelará con un término idéntico en la S_{ef}^A (ver ecuación (4.97)).

En ambas aproximaciones la acción efectiva puede escribirse como $S_{ef} = S_{ef}^A + S_{ef}^I$. Dado que el tensor de energía-impulso se obtiene a partir de la acción efectiva, variándola respecto de la métrica bi-dimensional, una descomposición similar aparece en este caso $\langle T_{ab} \rangle = \langle T_{ab}^A \rangle + \langle T_{ab}^I \rangle$. La parte que corresponde a la acción de la anomalía es independiente de la aproximación hecha para calcular la parte invariante:

$$\langle T_{ab}^A \rangle = \frac{1}{4\pi} \int d^2y \sqrt{g} [\nabla_a \nabla_b - g_{ab} \square]_{(x)} P(y) \frac{1}{\square}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{1}{24\pi} \int d^2y \sqrt{g} [\nabla_a \nabla_b - g_{ab} \square]_{(x)} R(y) \frac{1}{\square} \\
& + \frac{1}{8\pi} \int d^2y \sqrt{g} [g_{ab} \nabla^c \phi \nabla_c - 2\nabla_a \phi \nabla_b + g_{ab} (\partial\phi)^2 - 2\nabla_a \phi \nabla_b \phi]_{(x)} R(y) \frac{1}{\square} \\
& + \frac{1}{96\pi} \int d^2x \sqrt{g} \int d^2y \sqrt{g} \left\{ 2\partial_a \frac{R(x)}{\square} \partial_b \frac{R(y)}{\square} - g_{ab} \partial^c \frac{R(x)}{\square} \partial_c \frac{R(y)}{\square} \right\} \\
& - \frac{1}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} \int d^2y \sqrt{g} \left\{ 2\partial_a \frac{P(x)}{\square} \partial_b \frac{R(y)}{\square} - g_{ab} \partial^c \frac{P(x)}{\square} \partial_c \frac{R(y)}{\square} \right\}. \quad (4.104)
\end{aligned}$$

Este tensor tiene la anomalía de traza correcta: $\langle T_a^a \rangle = \frac{1}{24\pi}(R - 6P)$. Además de la anomalía de traza, contiene una parte de traza nula pero que no se conserva, es decir que su divergencia es diferente de cero.

La parte del tensor asociada a la acción efectiva invariante de Weyl, cambia según cada una de las aproximaciones efectuadas. En particular, en la aproximación en potencias de P está dada por

$$\begin{aligned}
\langle T_{ab}^I \rangle & = -\frac{1}{4\pi} \int d^2y \sqrt{g} [g_{ab} \nabla^c \phi \nabla_c - 2\nabla_a \phi \nabla_b + g_{ab} (\partial\phi)^2 - 2\nabla_a \phi \nabla_b \phi] \frac{P(y)}{\square} \ln \frac{-\square}{\mu^2} \quad (4.105) \\
& - \frac{1}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} \int d^2y \sqrt{g} \left\{ -2\partial_a \frac{P(x)}{\square} \partial_b \frac{P(y)}{\square} + g_{ab} \partial^c \frac{P(x)}{\square} \partial_c \frac{P(y)}{\square} \right\} \left(1 - \ln \frac{-\square}{\mu^2} \right)
\end{aligned}$$

mientras que en la aproximación en que se desprecia la retrodispersión, la parte invariante de Weyl del tensor de energía-impulso es:

$$\begin{aligned}
\langle T_{ab}^I \rangle & = \frac{1}{8\pi} [g_{ab} \nabla^c \phi \nabla_c - 2\nabla_a \phi \nabla_b + g_{ab} (\partial\phi)^2 - 2\nabla_a \phi \nabla_b \phi] \log \frac{P}{\mu^2} \\
& - \frac{1}{8\pi} g_{ab} P - \frac{1}{4} \int d^2y \sqrt{g} [\nabla_a \nabla_b - g_{ab} \square]_{(x)} P(y) \frac{1}{\square} \\
& - \frac{1}{8\pi} \int d^2y \sqrt{g} [g_{ab} \nabla^c \phi \nabla_c - 2\nabla_a \phi \nabla_b + g_{ab} (\partial\phi)^2 - 2\nabla_a \phi \nabla_b \phi]_{(x)} R(y) \frac{1}{\square} \\
& + \frac{1}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} \int d^2y \sqrt{g} \left\{ 2\partial_a \frac{P(x)}{\square} \partial_b \frac{R(y)}{\square} - g_{ab} \partial^c \frac{P(x)}{\square} \partial_c \frac{R(y)}{\square} \right\}. \quad (4.106)
\end{aligned}$$

A esta altura son necesarios algunos comentarios acerca de los límites de aplicabilidad y alcances de cada aproximación. Debido a la presencia de un término proporcional a $\log P$, $\langle T_{ab}^I \rangle$ dado por la ecuación (4.106) tiene una singularidad cuando $P \rightarrow 0$. Por lo tanto, $\langle T_{ab}^I \rangle$ es singular

aún para el espacio-tiempo de Minkowski, donde $P \equiv 0$. Esta divergencia puede entenderse simplemente porque cuando estamos en el caso en que $P \cong 0$, la aproximación de no-retrodispersión deja de ser válida. El origen de esta singularidad está asociado a la divergencia infrarroja que siempre aparece para campos sin masa en dos dimensiones (que es lo que efectivamente sucede con el campo ψ cuando $P = 0$). O sea, la divergencia es producto de la aproximación donde asumimos que P es una constante no nula. En aquellos casos donde $P \cong 0$ es más adecuado utilizar la aproximación basada en el desarrollo en potencias de P , donde la divergencia está regularizada por la aparición del parámetro μ .

Como mencionamos al comienzo de esta sección, el hecho que el dilatón esté acoplado al campo escalar de materia, implica que el tensor de energía-impulso tenga divergencia distinta de cero. En la expansión en potencias de P , la divergencia está dada por:

$$\begin{aligned} \nabla^b \langle T_{ab} \rangle = & \frac{1}{8\pi} \left[\nabla^b \phi \nabla_a \nabla_b - \nabla^b \nabla_a \phi \nabla_b - 2 \nabla_a \phi \square - \nabla^b \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \nabla_a \phi \square \phi \right]_{(x)} \\ & \times \int d^2 y \sqrt{g} \left\{ R(y) \frac{1}{\square} - 2P(y) \frac{1}{\square} \ln \frac{-\square}{\mu^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.107)$$

Mientras que para el caso de no-retrodispersión,

$$\begin{aligned} \nabla^b \langle T_{ab} \rangle = & -\frac{1}{8\pi} \nabla_a P + \frac{1}{8\pi} \left[\nabla^b \phi \nabla_a \nabla_b - \nabla^b \nabla_a \phi \nabla_b \right. \\ & \left. - 2 \nabla_a \phi \square - \nabla^b \nabla_a \phi \nabla_b \phi - \nabla_a \phi \square \phi \right] \log \frac{P}{\mu^2}. \end{aligned} \quad (4.108)$$

Como en el caso clásico, el tensor no se conserva cuando el dilatón no es una constante.

En las tres próximas secciones mostraremos que si ignoramos la existencia del término invariante de Weyl, es decir si consideramos que $\langle T_{ab} \rangle = \langle T_{ab}^A \rangle$, se obtienen resultados físicos inconsistentes para los efectos cuánticos tanto en métricas de agujeros negros como para métricas cosmológicas. Lo mismo ocurre si calculamos el tensor de energía-impulso $\langle T_{ab} \rangle$ utilizando la anomalía de traza e imponiendo (incorrectamente) la ley de conservación $\nabla^b T_{ab} = 0$.

4.2.2 Radiación de Hawking: modelos con acoplamiento al dilatón

El motivo de esta sección es analizar en detalle la aplicación de las dos aproximaciones mencionadas en la sección anterior al cálculo de la radiación de Hawking. En las secciones siguientes extenderemos el estudio a otros fenómenos físicos de interés.

En particular, para una métrica dada por:

$$ds^2 = -\lambda(r)dudv, \quad (4.109)$$

es fácil demostrar que $P(r) = \frac{1}{r}\lambda'(r)$. Por lo tanto P es diferente de cero para todo punto fuera del horizonte de eventos $r > r_+$ (al menos en el caso de agujeros negros no-extremos; volveremos a este punto más adelante). Como P no se anula sobre el horizonte, podemos utilizar la aproximación de no-retrodispersión. En consecuencia, sumando las ecuaciones (4.97) y (4.103) la acción efectiva completa es:

$$S_{\text{ef}} = -\frac{1}{96\pi} \int d^2x \sqrt{g} R \frac{1}{\square} R + \text{términos locales}, \quad (4.110)$$

que, a menos de los términos locales coincide con la acción del modelo CGHS (acción de Polyakov), para la cual hemos calculado la radiación de Hawking en la sección anterior.

De esta manera, el resultado general implica que la temperatura de la radiación de Hawking está dada por la ecuación $T_H = \frac{1}{4\pi}\lambda'(r_{\text{hor}})$.

Por lo tanto, mientras P sea diferente de cero, hemos demostrado que podemos utilizar la aproximación de no-retrodispersión, y que el resultado para la radiación de Hawking en cuatro dimensiones es el calculado en la sección anterior. La contribución a la radiación está dada por el término de Polyakov de la acción efectiva [66].

Consideremos ahora una geometría donde P se anule sobre el horizonte, como por ejemplo para agujeros negros de Reissner-Nordström ($\lambda(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{r^2}$) en el límite extremo. Aún en este caso, la aproximación de no-retrodispersión continúa dando el resultado correcto para la radiación de Hawking. Si bien P se anula sobre el horizonte, no hay divergencia alguna en el tensor de energía-impulso, dado que los términos que aportan a la radiación tienen derivadas no

nulas de P . Como P es casi cero cerca del horizonte, también podemos utilizar el desarrollo en potencias de P . Cerca del horizonte de eventos la contribución más importante a la radiación de Hawking está nuevamente dada por el término de Polyakov que es independiente de P y es exacto a todo orden en R . Las correcciones de orden superior que aparecen en este caso provienen del término no-local proporcional a $\frac{1}{\square} \ln \frac{-\square}{\mu^2}$, y por lo tanto dependen de la escala μ .

Es importante recalcar a esta altura que la aproximación en potencias de P no es adecuada para estimar la radiación de Hawking para agujeros negros de Schwarzschild. Esto se debe a que en esta métrica $P = \frac{2M}{r^3} = \frac{R}{2}$, por lo tanto no es consistente el cálculo de S_{ef} a todo orden en R y restringido a orden cuadrático en la expansión en P . Deberíamos sumar un número infinito de términos no-locales para obtener el resultado correcto.

Finalmente, debemos notar que el hecho de no incluir el término invariante de Weyl en la acción efectiva produce resultados erróneos. El término relevante para la radiación de Hawking, a partir de la variación funcional de la acción efectiva anómala sería (ver ecuación (4.104)):

$$\frac{1}{48\pi} \int d^2x \sqrt{g} \int d^2y \sqrt{g} \left\{ \partial_a \frac{R(x)}{\square} \partial_b \frac{R(y)}{\square} - 12 \partial_a \frac{P(x)}{\square} \partial_b \frac{R(y)}{\square} \right\}. \quad (4.111)$$

Para el agujero negro de Schwarzschild $P = R/2$, el término proporcional a P produce un flujo "entrante" que excede por un factor 6 al flujo "saliente". Por lo tanto, si no se considera S_{ef}^I se obtiene un flujo de Hawking negativo, lo cual es inaceptable a partir de los resultados en cuatro dimensiones. Este problema apareció en algunos trabajos previos [77].

4.2.3 Correcciones cuánticas al potencial Newtoniano

En esta sección damos otro ejemplo que muestra la importancia de la parte invariante de Weyl en la acción efectiva: calculamos las correcciones cuánticas al potencial Newtoniano. Aquí no pretendemos hacer un análisis detallado de la manera en que estas correcciones han sido evaluadas anteriormente [78, 79], pero si utilizarlas en el marco de los modelos bi-dimensionales para probar la efectividad de cada una de las aproximaciones efectuadas.

Como mencionamos al inicio del presente capítulo, las ecuaciones de Einstein semiclásicas en cuatro dimensiones están dadas por

$$\frac{1}{8\pi}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R) = \text{clas}T_{\mu\nu}^{(4)} + \langle T_{\mu\nu}^{(4)} \rangle, \quad (4.112)$$

en el presente ejemplo, suponemos que la parte clásica de las fuentes está dada por una partícula puntual de masa M , $\text{clas}T_{\mu\nu}^{(4)} = -\delta_{\mu}^0\delta_{\nu}^0 M\delta^3(\vec{x})$ y que $\langle T_{\mu\nu}^{(4)} \rangle$ es el tensor de energía-impulso para un campo escalar cuántico sin masa.

Estas ecuaciones pueden resolverse considerando perturbaciones alrededor del espacio plano $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. Para encontrar las correcciones cuánticas al potencial Newtoniano, es suficiente calcular la solución de la ecuación para la traza de $h_{\mu\nu}$. Expandiendo perturbativamente, $h = h^{(0)} + h^{(1)}$, con $h^{(0)} = \frac{4M}{r}$ solución de la parte clásica, la ecuación para $h^{(1)}$ es:

$$\frac{1}{2\pi}\nabla^2 h^{(1)} = g^{\mu\nu}\langle T_{\mu\nu}^{(4)} \rangle. \quad (4.113)$$

A distancias grandes, la traza de $\langle T_{\mu\nu}^{(4)} \rangle$ es [78]

$$\langle T^{(4)} \rangle = -\frac{M}{8\pi^2 r^5} \equiv \frac{C}{r^5}. \quad (4.114)$$

Para campos sin masa acoplados mínimamente en cuatro dimensiones, la traza del tensor de energía-impulso depende del estado cuántico del campo. La ecuación (4.114) corresponde a calcular la traza del tensor en el estado de Boulware, que es el estado de vacío de Minkowski a grandes distancias.

Por lo tanto, la solución perturbativa de las ecuaciones semiclásicas de Einstein es:

$$-\frac{h}{4} = -\frac{M}{r} + \frac{M}{12\pi} \frac{1}{r^3} + \dots, \quad (4.115)$$

de la cual podemos extraer las correcciones cuánticas al potencial Newtoniano.

Para obtener el potencial Newtoniano consideramos las ecuaciones geodésicas de una partícula de prueba con coordenadas $x^\mu(\tau)$ ($d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu$), que se mueve en el fondo gravitatorio dado por $g_{\mu\nu}$. Las ecuaciones son

$$\frac{d^2 x^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\sigma}{d\tau}, \quad (4.116)$$

donde $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho$ es el símbolo de Christoffel asociado a la métrica solución de las ecuaciones semiclásicas. En el límite de campo débil, las ecuaciones geodésicas se reducen a

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\nabla V = \frac{1}{2} h_{00}, \quad (4.117)$$

por lo tanto, el potencial Newtoniano queda determinado por $V(r) = -\frac{1}{2}h_{00}$. En nuestro caso, $h_{00} = -\frac{1}{2}h$ y, en consecuencia la ecuación (4.115) determina las correcciones cuánticas al potencial Newtoniano.

Por lo tanto, queda claro que para determinar las correcciones cuánticas al potencial Newtoniano es necesario determinar la traza (en cuatro dimensiones) del tensor de energía-impulso en la métrica de Schwarzschild. El signo de C de la ecuación (4.114) es muy importante. Un valor positivo de esta constante podría implicar que la constante de Newton decrece con r , lo cual es inadmisibles dado que implicaría efectos de apantallamiento gravitatorio.

El tensor de energía-impulso en cuatro dimensiones $\langle T^{(4)} \rangle = g^{\mu\nu} \langle T_{\mu\nu}^{(4)} \rangle = g^{ab} \langle T_{ab}^{(4)} \rangle + g^{ij} \langle T_{ij}^{(4)} \rangle$ debe calcularse utilizando la aproximación en potencias de P , debido a que la aproximación que desprecia la retrodispersión no es adecuada para regiones asintóticamente planas, dado que diverge cuando $P \rightarrow 0$.

Por lo tanto, tenemos que evaluar las ecuaciones (4.104) y (4.105) en la métrica de colapso:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2, \quad (4.118)$$

donde $d\Omega^2$ es el elemento de línea de la dos-esfera, y r^* está dada por:

$$r^* = r + 2M \ln \left| \frac{r}{2M} - 1 \right|. \quad (4.119)$$

Las funciones no-locales $\frac{R}{\square}$ y $\frac{P}{\square} \ln \frac{-\square}{\mu^2}$ son evaluadas mediante transformaciones de Fourier [80] y resultan

$$\frac{R}{\square} = \frac{2M}{r} \quad \text{and} \quad \frac{P}{\square} \ln \frac{-\square}{\mu^2} = -\frac{2M}{r} \ln \tilde{\mu}r.$$

Por lo tanto, evaluando las ecuaciones (4.104) y (4.105) obtenemos la traza en cuatro dimensiones que, a primer orden en M , es

$$\langle T^{(4)} \rangle = -\frac{1}{8\pi^2} \frac{M}{r^5} \ln \tilde{\mu}r = \frac{C}{r^5} \ln \tilde{\mu}r. \quad (4.120)$$

Como esperábamos, las correcciones cuánticas al potencial newtoniano dependen de la escala μ . Estas correcciones concuerdan cualitativamente con el resultado conocido en la literatura [78]. Sin embargo, si la parte invariante de Weyl es ignorada, obtenemos:

$$\langle T^{(4)} \rangle = -\frac{1}{6} \frac{C}{r^5}, \quad (4.121)$$

que presenta el signo equivocado y llevaría concluir que existen efectos de apantallamiento gravitatorio producidos por campos de materia escalares.

4.2.4 Creación cosmológica de partículas

Como otro ejemplo de la utilidad y significado físico de la parte invariante de la acción efectiva, en esta sección calculamos la creación de partículas en una métrica cosmológica. Consideramos la siguiente métrica:

$$ds^2 = a^2(t)[-dt^2 + dr^2] + a^2(t)r^2 d\Omega_2, \quad (4.122)$$

donde $a(t) = 1 + \delta(t)$ con $\delta \ll 1$ y $\delta \rightarrow 0$ para el pasado y futuro lejanos. Llamamos t al tiempo conforme.

El número total de partículas creadas durante la evolución cosmológica está determinada por la parte imaginaria de la acción efectiva in-out. Esta acción efectiva puede obtenerse a

partir de la acción efectiva Euclídea reemplazando el propagador Euclídeo por el propagador de Feynman. Como $P \approx \delta$, la aproximación en potencias de P es adecuada para calcular la creación de partículas. Al orden más bajo en δ , la acción Euclídea está dada por las ecuaciones (4.97) y (4.102), donde los propagadores son los del espacio plano.

En el vacío conforme, los términos presentes en la parte anómala de la acción efectiva son reales y locales (lo que traerá importantes consecuencias en relación con el límite clásico de los modelos cosmológicos en dos dimensiones, como se verá en la sección siguiente). Sólo la parte invariante S_{ef}^I es no-local y contiene una parte imaginaria que da la creación de partículas.

Tomando la transformada de Fourier de la ecuación (4.102), y reemplazando $p^2 \rightarrow p^2 - i\epsilon$ obtenemos

$$S_{\text{ef}}^{\text{in-out}} = \frac{1}{16\pi^2} \int d^2p |\tilde{P}(p)|^2 \frac{1}{p^2 - i\epsilon} \ln \frac{p^2 - i\epsilon}{\mu^2} + \text{términos locales.} \quad (4.123)$$

Por otra parte, utilizando el hecho que:

$$\ln \frac{p^2 - i\epsilon}{\mu^2} = \ln \left| \frac{p^2}{\mu^2} \right| - i\pi\theta(-p^2), \quad (4.124)$$

el número total de partículas creadas está dado por

$$n_{\text{T}} = \text{Im} S_{\text{ef}}^{\text{in-out}} = -\frac{1}{16\pi} \int d^2p |\tilde{P}(p)|^2 \frac{\theta(-p^2)}{p^2}. \quad (4.125)$$

Esta ecuación es general (no hemos dicho nada acerca de P), ahora bien, en el caso en que $P = P(t)$, n_{T} puede re-escribirse como:

$$n_{\text{T}} = \text{Im} S_{\text{ef}}^{\text{in-out}} = \frac{1}{16V\pi} \int dp_0 |\tilde{P}(p_0)|^2 \frac{1}{p_0^2}, \quad (4.126)$$

donde V es el volumen espacial.

Como la métrica es asintóticamente plana para $t \rightarrow \pm\infty$, la transformada de Fourier $\tilde{P}(p_0)$ se anula cuando $p_0 \rightarrow 0$. Por lo que n_{T} es una cantidad finita que representa el análogo en dos

dimensiones de la expresión general en cuatro dimensiones (en el caso de $\xi = 0$, $m = 0$ y $C_{abcd} = 0$) encontrado en [81]:

$$n_T^{(4D)} = \frac{\pi^3}{60} \int d^4p \theta(p^2 - 4m^2) \left(1 - \frac{4m^2}{p^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left\{ |R(p)|^2 \left[60\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 - 40\frac{m^2}{p^2} \left[\xi - \frac{1}{6} + \frac{m^2}{6p^2}\right]\right] + |C_{\mu\nu\alpha\beta}(p)|^2 \left(1 - \frac{4m^2}{p^2}\right)^2 \right\}. \quad (4.127)$$

4.3 El límite semiclásico

En esta sección aplicaremos el método de la funcional de influencia en gravedad semiclásica con el objeto de iniciar el análisis de la transición cuántico-clásica en modelos bi-dimensionales. Siguiendo la formulación desarrollada para los sistemas cuánticos abiertos, calculamos la funcional de influencia integrando los grados de libertad asociados a los campos de materia cuánticos. Este cálculo es exacto para el modelo CGHS y requiere de aproximaciones en modelos más generales donde el dilatón aparece acoplado a los campos de materia.

Como mostramos en el Capítulo 3, la funcional de influencia está íntimamente relacionada a la acción efectiva de camino temporal cerrado (AECTC) por lo tanto en lo sucesivo utilizaremos ambas denominaciones para referirnos al mismo objeto. Como la funcional de influencia nos provee de la evolución temporal de la matriz densidad reducida, es una herramienta fundamental para el estudio de la validez de la aproximación semiclásica.

4.3.1 Cálculo exacto de la funcional de influencia

Debido a la invariancia conforme del modelo CGHS podemos calcular de manera exacta la funcional de influencia y desarrollar un estudio detallado de la validez de la aproximación semiclásica. Como mostramos en la Sección 4.1, los efectos cuánticos de los campos de materia producen la acción efectiva CTC de la ecuación (4.56) para el modelo CGHS [57]. En la medida conforme esta acción se reduce a:

$$\begin{aligned}
S_{\text{ef}}^{\text{CTC}}[\rho^+, f^+, \rho^-, f^-; \Sigma] &= S_{\text{CGHS}}(\rho^+, f^+) - S_{\text{CGHS}}(\rho^-, f^-) \\
&\quad - \frac{N}{6\pi} \int d^2x \int d^2y \partial_+ \partial_- \rho^a(x^\pm) G_{ab}(x^\pm, y^\pm) \partial_+ \partial_- \rho^b(y^\pm). \quad (4.128)
\end{aligned}$$

Integrando por partes, esta acción efectiva puede descomponerse en la contribución clásica, la diferencia entre los términos de Polyakov en cada rama, más un término de superficie:

$$\begin{aligned}
S_{\text{ef}}^{\text{CTC}}[\rho^+, f^+, \rho^-, f^-; \Sigma] &= S_{\text{CGHS}}(\rho^+, f^+) - S_{\text{CGHS}}(\rho^-, f^-) \\
&\quad - \frac{N}{12\pi} \int d^2x [\rho^+ \partial_+ \partial_- \rho^+ - \rho^- \partial_+ \partial_- \rho^-] \\
&\quad - \frac{N}{6\pi} \{\text{términos de superficie}\}, \quad (4.129)
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\{\text{term. de sup.}\} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy [\partial_x^- \Delta(x, k(x)) N_1[x, k(x); y, \bar{k}(y)] \partial_y^- \Delta(y, \bar{k}(y)) \\
&\quad + 2\partial_x^- \Xi(x, k(x)) N_2[x, k(x); y, \bar{k}(y)] \partial_y^- \Delta(y, \bar{k}(y)) \\
&\quad + \partial_x^- \Xi(x, k(x)) N_3[x, k(x); y, \bar{k}(y)] \partial_y^- \Xi(y, \bar{k}(y))] \\
&\quad - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy [\Xi(x, k(x)) \partial_x^+ N_2[x, k(x); y, \bar{k}(y)] \partial_y^- \Delta(y, \bar{k}(y)) \\
&\quad + \Xi(x, k(x)) \partial_x^+ N_4[x, k(x); y, \bar{k}(y)] \partial_x^- \Xi(y, \bar{k}(y)) \\
&\quad - \frac{1}{2} \Xi(x, k(x)) \partial_x^+ \partial_y^+ N_4[x, k(x); y, \bar{k}(y)] \Xi(y, \bar{k}(y))] . \quad (4.130)
\end{aligned}$$

La superficie de empalme Σ está definida por

$$t_x = k(x), t_y = \bar{k}(y); \Delta = \frac{1}{2}(\rho^+ - \rho^-), \Xi = \frac{1}{2}(\rho^+ + \rho^-), \text{ y los núcleos } N_i \text{ son}$$

$$\begin{aligned}
N_1 &= G_{++} + G_{+-} - G_{-+} - G_{--} \\
N_2 &= G_{++} + G_{+-} + G_{-+} + G_{--} \\
N_3 &= G_{++} - G_{+-} - G_{-+} + G_{--} \\
N_4 &= G_{++} - G_{+-} + G_{-+} - G_{--}. \quad (4.131)
\end{aligned}$$

La expresión (4.129) para la acción efectiva es totalmente general, y puede aplicarse a cualquier métrica en la medida conforme. Si la acción de influencia tiene una parte imaginaria no-trivial, ésta debe estar contenida en los términos de superficie. Si ambas métricas coinciden asintóticamente en el futuro, y si la superficie de empalme pertenece a tal región, todos los términos de superficie se anulan debido a las relaciones usuales entre las funciones de Green, las cuales son válidas en la región plana; N_4 y Δ son simultáneamente cero y sólo el término de la anomalía sobrevive dado que todos los términos de superficie son proporcionales a Δ y/o a N_4 .

El hecho que la acción de influencia pueda calcularse fácilmente a partir de la acción Euclídea es un resultado muy importante. La superficie de empalme Σ tiene un rol crucial, en la medida conforme toda la información relevante acerca de la transición cuántico-clásica está contenida en los términos de superficie que son dependientes de Σ .

4.3.2 Funcional de influencia para historias cosmológicas: límite clásico

En esta sección evaluamos explícitamente la funcional de influencia para métricas cosmológicas y calculamos su parte imaginaria. Como la funcional de influencia depende de la superficie de empalme, mostramos cómo depende el proceso de pérdida de coherencia de la elección de tal superficie.

Llamamos \mathcal{M} y $\tilde{\mathcal{M}}$ a cada uno de los espacio-tiempos descritos por $g_{\mu\nu}^+$ y $g_{\mu\nu}^-$ respectivamente. Asumimos que ambos espacio-tiempos son asintóticamente planos en el pasado y que ellos coinciden sobre una hipersuperficie espacial Σ . Siempre es posible definir una hipersuperficie $\Sigma_{\mathcal{M}}$ en \mathcal{M} por medio de una relación entre t y x , digamos $t = k(x)$. Lo mismo para una superficie $\Sigma_{\tilde{\mathcal{M}}}$ en $\tilde{\mathcal{M}}$ por medio de $\bar{t} = \bar{k}(\bar{x})$. Nosotros queremos identificar $\Sigma_{\mathcal{M}}$ y $\Sigma_{\tilde{\mathcal{M}}}$ en una hipersuperficie común Σ . Por lo tanto debemos introducir un mapa entre los puntos sobre ambas hipersuperficies a través de la identificación de la geometría intrínseca local. En los modelos bi-dimensionales, una definición invariante de la uno-geometría está provista por el valor del dilatón $\phi(s)$, como una función de la distancia propia a lo largo de la hipersuperficie. La identificación de la uno-geometría implica que para la misma distancia propia (medida respecto de algún punto de referencia arbitrario) $ds^2 = d\bar{s}^2$, el dilatón debe tener el mismo valor para cada una de las geometrías sobre Σ , es decir: $\phi^+(s) = \phi^-(\bar{s})$. Entonces, $d\phi^+/ds = d\phi^-(\bar{s})/d\bar{s}$. Dados dos espacio-tiempos y la función

k que define a la superficie $\Sigma_{\mathcal{M}}$ en \mathcal{M} , las condiciones impuestas por la identificación permiten determinar \bar{k} , y por ende $\Sigma_{\bar{\mathcal{M}}}$ en $\bar{\mathcal{M}}$.

Consideremos dos métricas cosmológicas caracterizadas por las funciones $\rho^+(t)$ y $\rho^-(t)$. Para calcular la funcional de influencia es necesario conocer explícitamente las funciones de Green G_{ab} . Como ambas métricas son planas en el pasado remoto y son conformes al espacio de Minkowski, los propagadores en el estado de vacío in tienen la misma estructura funcional que para el espacio plano, por ejemplo, el propagador de Feynman está dado por

$$\begin{aligned} G_{++}(x, y) &= i\langle 0, in | T \hat{f}^+(x) \hat{f}^+(y) | 0, in \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi^2} \int d^2p \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + i\epsilon} = -\frac{2\pi i}{2\pi^2} \int_0^\infty \frac{dp}{p} e^{-ip(x-y)} e^{-ip|t_x - t_y|} \\ &= \frac{\pi}{2} \text{Sgn}[|t_x - t_y| + x - y] - i \text{Log}|t_x - t_y + x - y| + C, \end{aligned} \quad (4.132)$$

donde C es una constante indeterminada (que proviene de la divergencia infraroja cuando $p \rightarrow 0$). Expresiones similares se pueden escribir para las demás funciones de Green. Es importante notar que en $G_{+-}(x, y)$ y $G_{-+}(x, y)$ las coordenadas x e y corresponden a diferentes espacio-tiempos.

4.3.3 Hipersuperficies de tiempo constante

Consideramos una superficie $\Sigma_{\mathcal{M}}$ en \mathcal{M} , definida por $t = T$. Para realizar el “empalme” entre las hipersuperficies, debemos imponer que $\phi^+ = \phi^-$ sobre Σ . Como ϕ^- es una constante sobre $\Sigma_{\bar{\mathcal{M}}}$, esta hipersuperficie debe ser también de tiempo constante $\bar{t} = \bar{T}$. Cambiando la escala temporal siempre podemos tomar $\bar{T} = T$.

La AECTC para métricas cosmológicas puede escribirse como

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}}^{\text{CTC}} &= S_{\text{CGHS}}(\rho^+, f^+) - S_{\text{CGHS}}(\rho^-, f^-) \\ &- \frac{N}{6\pi} \int_{-\infty}^T dt_x \int_{-\infty}^T dt_y \ddot{\rho}^a(t_x) \ddot{\rho}^b(t_y) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy G_{ab}(x, y), \end{aligned} \quad (4.133)$$

donde los índices a y b denotan nuevamente las diferentes ramas del CTC. Utilizando regularización dimensional, podemos evaluar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy G_{++} = \frac{\Omega}{2} |t_x - t_y|, \quad (4.134)$$

donde Ω es un factor de volumen global. Similares expresiones pueden obtenerse para G_{--} y G_{+-} . Reemplazando esta expresión en (4.133) podemos demostrar que:

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}}^{\text{CTC}} &= S_{\text{CGHS}}(\rho^+, f^+) - S_{\text{CGHS}}(\rho^-, f^-) \\ &- \frac{N}{12\pi} \int d^2x [\rho^+ \partial_+ \partial_- \rho^+ - \rho^- \partial_+ \partial_- \rho^-]. \end{aligned} \quad (4.135)$$

Como se ve de esta expresión no existe parte imaginaria y/o no-local en esta acción efectiva. La única corrección al término clásico proviene de la anomalía de traza. La consecuencia de este hecho es que la funcional de pérdida de coherencia es idénticamente uno. Para que la aproximación semiclásica sea válida, la funcional de pérdida de coherencia debe ser diagonal para geometrías del espacio-tiempo macroscópicamente diferentes, aún si ellas coinciden sobre una hipersuperficie espacial. Por lo tanto podemos concluir que debido a la invarianza conforme, los modelos cosmológicos en dos dimensiones no tienen un límite clásico bien definido.

4.3.4 Hipersuperficies más generales

Para mostrar explícitamente la dependencia de los resultados con la hipersuperficie, calculamos la funcional de influencia para hipersuperficies más generales.

Debemos calcular expresiones del tipo

$$\int dx \int dy \int_{-\infty}^{\Sigma} dt_x \int_{-\infty}^{\Sigma} dt_y \ddot{\rho}^a(t_x) \ddot{\rho}^b(t_y) G_{ab}(x, y), \quad (4.136)$$

donde hemos definido las hipersuperficies en cada rama como:

$$k(x) = T + \Delta k^+(x), \quad (4.137)$$

y

$$\bar{k}(x) = T + \Delta k^-(x). \quad (4.138)$$

Consideremos que $\Delta k^+(x)$ y $\Delta k^-(x)$ son pequeñas fluctuaciones alrededor de la superficie $t = T$ y calculamos la funcional de influencia a segundo orden en una expansión en potencias de dichas fluctuaciones. Obviamente, el orden cero sólo da la anomalía de traza. A primer orden la funcional de influencia sólo tiene términos reales [67] (términos de superficie que no contriuyen a las ecuaciones de movimiento). El segundo orden está dado por

$$\ddot{\rho}^a(T)\ddot{\rho}^b(T) \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy G_{ab}(x, T; y, T) \Delta k^a(x) \Delta k^b(y). \quad (4.139)$$

Introduciendo los propagadores y haciendo las integrales espaciales, la parte imaginaria resulta ser proporcional a:

$$4\pi i \int_0^{+\infty} \frac{dp}{p} \left[\ddot{\rho}^{2+}(T) \Delta k^{+2}(p) - \ddot{\rho}^+(T) \ddot{\rho}^-(T) \Delta k^{+*}(p) \Delta k^-(p) - \ddot{\rho}^-(T) \ddot{\rho}^+(T) \Delta k^+(p) \Delta k^{-*}(p) + \ddot{\rho}^{-2}(T) \Delta k^{-2}(p) \right], \quad (4.140)$$

donde $\Delta k^+(p)$ y $\Delta k^-(p)$ son las transformadas de Fourier de las funciones de perturbación. Para describir el empalme entre las hipersuperficies debemos resolver las ecuaciones,

$$\phi^+[k(x)] = \phi^+[T + \Delta k^+(x)] = \phi^-[\bar{k}(y)] = \phi^-[T + \Delta k^-(y)]. \quad (4.141)$$

Esta identificación puede describirse por medio de la función $y(x)$ entre las coordenadas sobre Σ en cada uno de los espacio-tiempos. Además debemos imponer que los intervalos sean iguales en cada espacio-tiempo sobre Σ , por lo tanto:

$$\left[\frac{dx}{dy} \right]^2 = \frac{1 - \left(\frac{dk}{dy} \right)^2 e^{\rho^-[k(y)]}}{1 - \left(\frac{dk}{dx} \right)^2 e^{\rho^+[k(x)]}}. \quad (4.142)$$

Expandiendo la ecuación (4.141) para $\Delta k^+(p)$ y $\Delta k^-(p)$ pequeños, y teniendo en cuenta que $y = x + \mathcal{O}(\Delta k^2)$, encontramos que

$$\Delta k^+(x) \cong \Delta k^-(y) \frac{\dot{\phi}^-(T)}{\dot{\phi}^+(T)} \cong \Delta k^-(x) \frac{\dot{\phi}^-(T)}{\dot{\phi}^+(T)}. \quad (4.143)$$

Por lo tanto la parte imaginaria puede re-escribirse como

$$4\pi i \left[\ddot{\rho}^+(T) - \frac{\dot{\phi}^+(T)}{\dot{\phi}^-(T)} \ddot{\rho}^-(T) \right]^2 \int_0^\infty \frac{dp}{p} |\Delta k^+(p)|^2. \quad (4.144)$$

En consecuencia existe una parte imaginaria de la funcional de influencia distinta de cero para pequeñas fluctuaciones alrededor de la superficie de tiempo constante. El valor absoluto de la funcional de pérdida de coherencia está dado por

$$|\mathcal{D}[\rho^+, \rho^-; \Sigma]| \approx e^{-4\pi \left[\ddot{\rho}^+(T) - \frac{\dot{\phi}^+(T)}{\dot{\phi}^-(T)} \ddot{\rho}^-(T) \right]^2 \int_0^\infty \frac{dp}{p} |\Delta k^+(p)|^2}. \quad (4.145)$$

En este punto debemos aclarar que un criterio razonable para asegurar que la transición cuántico-clásica es posible es exigir que $|\mathcal{D}| \ll 1$ para toda hipersuperficie de empalme Σ . Está claro que esta condición no se satisface para la superficie más simple en el caso cosmológico. El objetivo de los cálculos realizados en esta sección es mostrar la dependencia con Σ de la acción de influencia (ecuación (4.144)). El ejemplo de la ecuación (4.144) muestra la dependencia con Σ de la acción de influencia en un ejemplo sencillo. La importancia de tal ejemplo se pone de manifiesto también cuando se estudia la validez de la aproximación semiclásica en las cercanías de un agujero negro [83, 84]. Si la aproximación semiclásica es correcta, la funcional de onda de los campos cuánticos no puede depender fuertemente de la masa del agujero negro. En particular, si consideramos dos espacio-tiempos diferentes, uno descrito por el colapso de un agujero negro de masa M y el otro el de un agujero negro con masa $M + \Delta M$, funcionales de onda similares al inicio del colapso no pueden diferir mucho cuando el agujero negro ya se ha formado (si ΔM es pequeño). Para comparar ambas funcionales debemos hacer coincidir la superficie Σ en ambos espacio-tiempos y calcular el producto interno de las funcionales de onda sobre Σ . En [83] fue demostrado que para ciertas superficies, este producto es arbitrariamente chico para geometrías de colapso clásicas; mientras que en [84] el producto es de orden uno si se considera la retro-reacción cuántica.

El producto interno referido en el párrafo anterior (calculado en [83] y [84]) es exactamente la funcional de influencia evaluada a través de $S_{\text{ef}}^{\text{CTC}}$, para geometrías de colapso de agujeros negros con masas M y $M + \Delta M$ y superficie de empalme Σ . Por lo tanto, toda la información

acerca de la aproximación semiclassical en las cercanías de un agujero negro debe estar contenida en los términos de superficie que aparecen en la funcional de influencia de la ecuación (4.129). En realidad, el resultado de la ecuación (4.129) es completamente general y vale para todo par de métricas y para toda hipersuperficie de empalme Σ .

Volviendo a la situación cosmológica, la interpretación física de los resultados obtenidos en esta sección es la siguiente: nosotros hemos elegido el vacío in como estado cuántico de los campos de materia. Para hipersuperficies $t = T$, siempre podemos elegir una base out tal que sea el vacío conforme en ambos espacio-tiempos. Por lo tanto, los coeficientes de Bogoliubov entre las bases in y out son triviales en ambas geometrías. La funcional de influencia es real y no hay pérdida de coherencia. Para hipersuperficies más generales, podemos elegir como base out el vacío conforme en uno de los espacio-tiempos, pero esta base, en general, no corresponde al vacío conforme en el otro espacio-tiempo. Por lo tanto las bases in y out son diferentes en ambos espacio-tiempos, existe creación de partículas y por ende aparece una parte imaginaria.

Hemos mostrado que la funcional de influencia tiene una parte imaginaria para algunas hipersuperficies, y que esta parte imaginaria se anula para la más común de todas las posibles elecciones, las de tiempo constante. El valor absoluto de la funcional de pérdida de coherencia también depende de la hipersuperficie Σ .

4.4 Cálculos aproximados de la funcional de influencia

En la sección anterior utilizamos la acción efectiva para el modelo bi-dimensional de gravedad dilatónica, donde sólo los campos de materia fueron cuantizados, para evaluar de manera exacta la funcional de influencia y discutir el mecanismo de pérdida de coherencia cuántica. Si queremos tener una descripción completa de los efectos cuánticos en el modelo CGHS, debemos considerar las fluctuaciones cuánticas del dilatón y de la métrica. En la literatura, estas fluctuaciones fueron consideradas para el cálculo de la acción efectiva in-out [85]. La cuantización de estos campos implica la necesidad de desarrollar cálculos perturbativos en lazos y expansiones en potencias de la

curvatura. Por ejemplo, para evaluar las correcciones cuánticas que provienen del campo dilatón, podemos separarlo en dos contribuciones: un fondo clásico más una fluctuación cuántica pequeña

$$\phi(x) = \phi_0(x) + \hat{\phi}(x), \quad (4.146)$$

por lo tanto, introduciendo esta división en la acción clásica, y a orden cuadrático en las fluctuaciones cuánticas podemos escribir la contribución dilatónica a la acción clásica como

$$\begin{aligned} S_\phi = & \frac{1}{2\pi} \int d^2x \sqrt{-g(x)} \left\{ e^{-2\phi_0} [R + 4(\partial\phi_0)^2 + 4\lambda^2] \right. \\ & \left. + 4(\partial\psi)^2 + 2 [R(x) + 2(\partial\phi_0)^2 + 4\partial^2\phi_0] \psi^2 + 8\lambda^2\psi^2 \right\}, \end{aligned} \quad (4.147)$$

donde re-definimos $\psi = e^{-\phi_0} \hat{\phi}$.

En consecuencia, la acción para las fluctuaciones del dilatón ψ corresponde a la de un campo escalar masivo, acoplado de manera arbitraria a la curvatura y al dilatón clásico de fondo [67]. En la Sección 4.2.1, obtuvimos un modelo bi-dimensional de juguete a partir de modelos en cuatro dimensiones con simetría esférica, lo que representa otro ejemplo en la misma dirección. En ese caso la acción para los campos de materia es Ec. (4.96)

$$S_\psi = -\frac{1}{2} \int d^2x \sqrt{g} \left[(\partial\psi)^2 + P \psi^2 \right], \quad (4.148)$$

que corresponde a un campo escalar no-masivo acoplado a la geometría.

Por lo tanto, para obtener las contribuciones cuánticas en casos más generales, hay que tener en cuenta acciones del tipo de (4.147) o (4.148). Dado que en la Sección 4.2 calculamos la acción efectiva Euclídea correspondiente a la ecuación (4.148), en esta sección, a modo de ejemplo de los casos más generales, vamos a calcular la correspondiente funcional de influencia y mostraremos cómo aparece una parte imaginaria que produce los efectos de pérdida de coherencia a través de la funcional de Hartle y Gell-Mann (para el caso de la acción (4.147) ver la Ref. [67]).

Partimos de la acción efectiva Euclídea (ecuaciones (4.97) y (4.102))

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}} = & -\frac{1}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} \int d^2y \sqrt{g} \left\{ \frac{1}{12} R(x) \frac{1}{\square} R(y) - P(x) \frac{1}{\square} R(y) \right\} \\ & - \frac{1}{8\pi} \int d^2x \sqrt{g} \int d^2y \sqrt{g} P(x) \frac{1}{\square} \ln \frac{-\square}{\mu^2} P(y), \end{aligned} \quad (4.149)$$

que corresponde a la expansión en potencias de P de la sección anterior. Para obtener la acción efectiva de camino temporal cerrado, seguimos el mismo procedimiento que en el cálculo exacto de la funcional de influencia explicado anteriormente. Debemos reemplazar los propagadores Euclídeos por los correspondientes al CTC. Antes de hacer este reemplazo es necesario tener en cuenta que en el último término de (4.149) aparece un núcleo no-local que no es el propagador Euclídeo estrictamente. Debemos notar que este núcleo puede ser escrito de la siguiente manera en términos de propagadores masivos en el espacio Euclídeo:

$$\frac{1}{\square} \ln \frac{-\square}{\mu^2} = \lim_{\delta \rightarrow 0} \left[- \int_0^\infty dz \frac{G_{z\mu^2}}{(z+\delta)} + G_{-\delta\mu^2} \ln \delta \right], \quad (4.150)$$

donde

$$G_{z\mu^2} = \frac{1}{p^2 + z\mu^2}$$

$$G_{-\delta\mu^2} = \frac{1}{p^2 - \delta\mu^2}.$$

Ahora si, reemplazando los propagadores Euclídeos por los del CTC, la acción de influencia para este caso es:

$$\Gamma^{\text{CTC}} = -\frac{1}{8\pi} \int d^2x \int d^2y \left\{ \frac{1}{12} R_a G_{ab} R_b - P_a G_{ab} P_b + P_a F_{ab} P_b \right\}, \quad (4.151)$$

donde $F_{ab} = \lim_{\delta \rightarrow 0} [- \int_0^\infty dz \frac{G_{ab}^{\mu^2}}{(z+\delta)} + G_{ab}^{-\delta\mu^2} \ln \delta]$. Los índices a y b denotan las ramas temporales del CTC. En la medida conforme, los dos primeros términos se localizan aportando términos de superficie. Por lo tanto la acción de influencia en este caso es:

$$\begin{aligned} \Gamma^{\text{CTC}} &= -\frac{1}{12\pi} \int d^2x [\rho^+ \partial_+ \partial_- \rho^+ - \rho^- \partial_+ \partial_- \rho^-] \\ &- \frac{1}{8\pi} \int d^2x [\rho^+ \Delta P - \rho^- \Delta P] \\ &- \frac{1}{\pi} \int d^2x \int d^2y \Delta P(x) \Sigma P(y) \theta(x^0 - y^0) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{ip(x-y)} \frac{1}{p^2} \ln \left| \frac{p^2}{\mu^2} \right| \\ &+ \frac{i}{2\pi} \int d^2x \int d^2y \Delta P(x) \Delta P(y) \int \frac{d^2p}{(2\pi)^2} e^{ip(x-y)} \frac{\theta(-p^2)}{p^2} \\ &+ \{\text{términos de superficie}\}, \end{aligned} \quad (4.152)$$

donde $\Delta P = P^+ - P^-$.

Finalmente, el valor absoluto de la funcional de pérdida de coherencia tiene dos contribuciones: la parte imaginaria de los términos de superficie más el último término de (4.152)

$$|\mathcal{D}[\rho^+, \rho^-]| \approx e^{-\frac{1}{16\pi} \int d^2p |\Delta \bar{P}(p)|^2 \frac{(-p^2)}{p^2}} e^{-\text{Im} [\text{términos de superficie}]} \quad (4.153)$$

Es importante ver que el primer factor del lado derecho de esta ecuación tiene la misma forma que el término de creación de partículas para métricas cosmológicas (ecuación (4.125)). Aquí P ha sido reemplazada por la función $\Delta P = P^+ - P^-$ debido a que estamos haciendo el cálculo a partir de la acción efectiva de camino temporal cerrado. La ecuación (4.125) fue obtenida a partir de la acción efectiva in-out.

En particular, para aquellas situaciones donde los términos de superficie se anulen, los efectos de pérdida de coherencia persisten debido al término invariante proporcional a P^2 . Un modelo más realista debería incluir los efectos de los gravitones. En ese caso más realista donde las fluctuaciones cuánticas de la métrica son tenidas en cuenta, aparecerá una parte imaginaria extra, pero la conclusión acerca de cómo el efecto de pérdida de coherencia aparece en estos modelos seguirá siendo válida.

4.5 Discusión

En este capítulo hemos aplicado el método de la funcional de influencia a modelos de gravedad escalar-tensorial en dos dimensiones. Estos modelos presentan simplificaciones importantes respecto a los modelos generales en cuatro dimensiones. Para el modelo CGHS hemos mostrado que la acción de influencia puede calcularse exactamente y que es un objeto fuertemente dependiente de la hipersuperficie donde se empalman las geometrías. En particular, en la medida conforme la AECTC puede escribirse como la diferencia entre las acciones de Polyakov en cada rama temporal más una integral sobre Σ .

Utilizamos esta acción de influencia para derivar las ecuaciones de movimiento semiclásicas. Estas ecuaciones son reales, causales y no-locales, y se tornan locales en la medida conforme. La

derivación de estas ecuaciones no es trivial debido a la dependencia con la métrica de las funciones de Green. Este es un hecho muy importante porque permite extender el cálculo a casos donde no se puede determinar el $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ utilizando la ley de conservación y la anomalía de traza únicamente. En referencia a este último caso mostramos cómo obtener el tensor de energía-impulso para modelos donde el dilatón aparece acoplado al campo escalar de materia. En estos modelos el $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ no se conserva y la anomalía de traza no lo determina completamente. Seguidamente extendimos la discusión al cálculo correcto de la radiación de Hawking y otros observables físicos en este modelo.

Hemos estudiado la transición cuántico-clásica en modelos cosmológicos. La funcional de influencia no tiene una parte imaginaria para algunas superficies de empalme. Por lo tanto la aproximación semiclásica no es válida en estos modelos.

La aproximación semiclásica puede obtenerse de manera consistente cuando incluimos en la cuantización al dilatón para el modelo CGHS [67], o cuando estudiamos la funcional de influencia para campos escalares masivos y/o acoplados al dilatón o a la geometría de manera no conforme.

Para finalizar, es necesario mencionar que la geometría en los modelos bi-dimensionales está determinada por la métrica y el dilatón. Por ejemplo, cuando restringimos los modelos en cuatro dimensiones con simetría esférica (como el último ejemplo del capítulo), el dilatón es parte de la geometría dado que $e^{-2\phi}$ es el radio de la dos-esfera. En general, en el modelo CGHS, los lazos asociados a las fluctuaciones cuánticas del dilatón y de la métrica eran ignorados argumentando el límite de N grande (N es el número de campos escalares de materia presentes en el modelo). Como pudimos demostrar en este capítulo no importa cuán grande es N , no hay pérdida de coherencia si uno no considera el efecto de las fluctuaciones cuánticas del dilatón y/o de la geometría para el modelo CGHS. Para modelos más generales, donde existe un acoplamiento entre el dilatón y el campo de materia, la misma interacción asegura la aparición de una parte imaginaria en la acción de influencia y el efecto de pérdida de coherencia está asegurado.

Capítulo 5

Las ecuaciones de Einstein - Langevin

Como dijimos anteriormente, las ecuaciones semiclásicas para la gravedad son la generalización de las ecuaciones de Einstein cuando la materia, fuente de estas ecuaciones, es considerada cuánticamente. La fuente de estas ecuaciones es el valor de expectación de vacío del tensor de energía-impulso de los campos de materia. Debido a la presencia de divergencias en la teoría (dado que la relatividad general no es una teoría renormalizable), la ecuación semiclásica (4.1) del capítulo anterior usualmente se escribe como

$$\frac{1}{8\pi G} \left[R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right] - \alpha H_{\mu\nu}^{(1)} - \beta H_{\mu\nu}^{(2)} = T_{\mu\nu}^{\text{clas}} + \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (5.1)$$

donde los términos proporcionales a

$$H_{\mu\nu}^{(1)} = [4R_{;\mu\nu} - 4g_{\mu\nu}\square R] + O(R^2), \quad (5.2)$$

$$H_{\mu\nu}^{(2)} = [4R_{\mu}{}^{\alpha}{}_{;\nu\alpha} - 2\square R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}\square R] + O(R^2), \quad (5.3)$$

proviene de términos cuadráticos en la curvatura presentes en la acción gravitatoria, los cuales son necesarios para renormalizar la teoría.

Esta teoría, que asume a la gravedad como a un campo clásico, es válida para escalas mayores que la de Planck y cuando las fluctuaciones cuánticas del tensor de energía-impulso son pequeñas respecto al valor medio, es decir que cuando vale [54]

$$\langle T_{\mu\nu}(x)T_{\rho\sigma}(y) \rangle \approx \langle T_{\mu\nu}(x) \rangle \langle T_{\rho\sigma}(y) \rangle, \quad (5.4)$$

por lo tanto la descripción semiclásica no sería apropiada para aquellos estados de campo en los cuales el tensor de energía-impulso presenta fluctuaciones grandes. Estas fluctuaciones, sin embargo, pueden tenerse en cuenta incluyendo un término estocástico adicional del lado derecho de (5.1) [62, 86, 87]. Estos términos de ruido adicionales provienen de la parte imaginaria de la acción efectiva de camino temporal cerrado; por lo tanto las ecuaciones de Einstein semiclásicas pasan a ser ecuaciones de *Einstein-Langevin*, que incluyen efectos tanto disipativos como difusivos de los campos de materia sobre la geometría del espacio-tiempo.

Estas ecuaciones de Einstein-Langevin (EEL) fueron derivadas en la literatura, para perturbaciones pequeñas de la métrica con acoplamiento conforme a campos escalares sin masa sobre un fondo plano [87], y en escenarios cosmológicos, para campos masivos en universos de Robertson-Walker planos [88], o en modelos de Bianchi-I [89]. En este capítulo presentamos una derivación de las EEL para un campo cuántico, en una expansión covariante en potencias de la curvatura. En particular, mostramos que cuando el campo escalar no tiene masa, las EEL están completamente determinadas por la dependencia de las constantes de la teoría con la escala de energía, a través de las ecuaciones del grupo de renormalización (que llamaremos “escaleo” de las constantes). Para campos masivos, el escaleo no es suficiente para obtener la EEL y es necesario utilizar métodos más complejos.

5.1 La acción efectiva Euclídea

Consideramos un campo escalar masivo sobre un fondo curvo Euclídeo clásico en cuatro dimensiones. La acción clásica está dada por

$$S = S_{\text{grav}} + S_{\text{materia}}, \quad (5.5)$$

donde

$$S_{\text{grav}} = - \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{16\pi G_0} (R - 2\Lambda_0) + \alpha_0 R^2 + \beta_0 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right], \quad (5.6)$$

y

$$S_{\text{mat}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2]. \quad (5.7)$$

Como antes, ξ es la constante de acoplamiento a la curvatura del espacio-tiempo. G_0 , Λ_0 y las constantes adimensionales α_0 y β_0 son las constantes desnudas.

La acción efectiva para esta teoría es un objeto no-local complicado. Está definida integrando funcionalmente sobre el campo escalar de materia, y como vimos en el capítulo anterior, formalmente podemos definirla como:

$$e^{-S_{\text{ef}}} = N \int \mathcal{D}\phi e^{-S[g_{\mu\nu}, \phi]}, \quad (5.8)$$

donde N es una constante de normalización.

Este cálculo es obviamente imposible de realizar de manera exacta, y en consecuencia uno de los problemas fundamentales consiste en hallar esquemas aproximados para las ecuaciones efectivas en teoría de campos. Dos de estos esquemas están representados por los desarrollos perturbativos de campo débil y por la técnica de Schwinger-de Witt [52, 90]. Cada una de ellas tiene sus ventajas y desventajas. En particular, la teoría de perturbaciones no es covariante, y la técnica de Schwinger-de Witt no puede producir términos no-locales en la acción efectiva. A partir de estas observaciones, Barvinsky y Vilkovisky propusieron un método aproximado para evaluar la acción efectiva, basado en una expansión covariante en potencias de la curvatura [91].

En general, la acción efectiva a orden cuadrático en la expansión en potencias de la curvatura tendrá la siguiente estructura [74]

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}} = & - \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{16\pi G} R + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right] \\ & + \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} [F_0 R + R F_1(\square) R + R_{\mu\nu} F_2(\square) R^{\mu\nu} + \dots], \end{aligned} \quad (5.9)$$

donde los puntos suspensivos representan términos cúbicos en la curvatura. Por simplicidad hemos omitido el término relacionado con la constante cosmológica. Además en la ecuación (5.9) las constantes desnudas de (5.6) han sido reemplazadas por constantes "vestidas".

Toda la información acerca de los efectos de los campos cuánticos está contenida en la constante F_0 y en los llamados factores de forma F_1 y F_2 . Los factores de forma, en general, son funciones no-locales construídas con el operador \square y los parámetros ξ y m^2 . Además, F_1 y F_2 dependen también de la escala de energía μ , usualmente introducida en el proceso de regularización.

5.1.1 Caso no-masivo

Por medio de las ecuaciones del grupo de renormalización, las constantes de acoplamiento vestidas dependen de la escala de energía μ de la siguiente forma [52]:

$$\mu \frac{dG}{d\mu} = \frac{G^2 m^2}{\pi} \left(\xi - \frac{1}{6} \right), \quad (5.10)$$

$$\mu \frac{d\alpha}{d\mu} = -\frac{1}{32\pi^2} \left[\left(\frac{1}{6} - \xi \right)^2 - \frac{1}{90} \right], \quad (5.11)$$

$$\mu \frac{d\beta}{d\mu} = -\frac{1}{960\pi^2}. \quad (5.12)$$

La dependencia de F_0 , F_1 y F_2 con μ debe ser tal que la ecuación completa no dependa de μ . Por ejemplo, a partir de las ecuaciones (5.9) y (5.10) es inmediato demostrar que $F_0 = m^2 \ln \left(\frac{m^2}{\mu^2} \right) \left(\xi - \frac{1}{6} \right) + \text{constante}$.

Cuando el campo escalar no tiene masa, la información provista por las ecuaciones del grupo de renormalización es suficiente para determinar completamente los factores de forma. En particular, como las funciones F_i , $i = 1, 2$ son funciones de dos puntos adimensionales, mediante análisis dimensional es simple ver que $F_i(\square, \mu^2, \xi) = F_i(\frac{\square}{\mu^2}, \xi)$. Usando este hecho en la ecuación (5.9), las ecuaciones (5.11) y (5.12) y el hecho que S_{ef} debe ser independiente de μ , es posible obtener

$$\begin{aligned} -\mu \frac{d\alpha}{d\mu} + \mu \frac{dF_1(-\square/\mu^2)}{d\mu} &= 0, \\ -\mu \frac{d\beta}{d\mu} + \mu \frac{dF_2(-\square/\mu^2)}{d\mu} &= 0, \end{aligned}$$

por lo tanto, es simple demostrar que:

$$\begin{aligned} F_1(\square) &= \frac{1}{2} \left[\left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{1}{90} \right] \ln \left[\frac{-\square}{\mu^2} \right] + \text{constante}, \\ F_2(\square) &= \frac{1}{60} \ln \left[\frac{-\square}{\mu^2} \right] + \text{constante}. \end{aligned} \quad (5.13)$$

En consecuencia, la acción efectiva en este caso adquiere una clara interpretación: es la acción clásica donde las constantes de acoplamiento α y β se reemplazan por funciones de dos puntos (no-locales) que tienen en cuenta el “escaleo” en el espacio de configuraciones [62].

5.1.2 Caso masivo

La situación se vuelve más compleja cuando el campo escalar es masivo. Los factores de forma dependen también del parámetro m^2/μ^2 , y por lo tanto no alcanza con imponer que la acción efectiva sea independiente de μ para conocer los factores de forma completamente. Estos factores de forma han sido calculados explícitamente por medio de desarrollos covariantes en potencias de la curvatura [91], o mediante una resumación de la expansión de Schwinger-de Witt [74]. La expresión de dichas funciones es:

$$F_i(\square) = \int_0^1 d\gamma \chi_i(\xi, \gamma) \ln \left[\frac{m^2 - \frac{1}{4}(1 - \gamma^2)\square}{\mu^2} \right], \quad (5.14)$$

donde

$$\begin{aligned} \chi_1(\xi, \gamma) &= \frac{1}{2} \left[\xi^2 - \frac{1}{2}\xi(1 - \gamma^2) + \frac{1}{48}(3 - 6\gamma^2 - \gamma^4) \right], \\ \chi_2(\xi, \gamma) &= \frac{1}{12}\gamma^4. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Obviamente estos factores de forma coinciden con los de la ecuación (5.13) en el caso no-masivo.

A esta altura es muy útil introducir una representación integral para las funciones de dos puntos de las ecuaciones (5.13) y (5.14) para poder interpretarlas es términos del propagador Euclídeo (de la misma manera que obtuvimos la acción efectiva CTC al final del capítulo anterior).

Básicamente, el logaritmo del operador \square puede escribirse en términos del propagador Euclídeo masivo

$$\ln \left[\frac{m^2 - \frac{1}{4}(1 - \gamma^2)\square}{\mu^2} \right] = \left[\ln \frac{(1 - \gamma^2)}{4} + \int_0^\infty dz \left(\frac{1}{z + \mu^2} - G_E^{(z)} \right) \right], \quad (5.16)$$

con

$$G_E^{(z)} = \frac{1}{z + \frac{4m^2}{(1 - \gamma^2)} - \square}. \quad (5.17)$$

A partir de esta representación, la construcción de la acción efectiva de camino temporal cerrado sigue el mismo camino que el que empleamos anteriormente.

5.2 La acción efectiva de camino temporal cerrado

Reemplazando el propagador Euclídeo por el de Feynman en la representación integral (5.16) obtenemos la acción efectiva in-out usual. Sin embargo, nosotros queremos obtener la acción efectiva CTC que provee de ecuaciones de movimiento reales y causales, a la vez de hacer explícita la presencia de fluctuaciones estocásticas. Como ya mencionamos, esta acción está definida por la ecuación (4.53), reemplazando los propagadores Euclídeos por los del CTC, como realizamos en (4.54).

Las condiciones de contorno, como antes, implican que ϕ^+ y ϕ^- deben tener modos de frecuencia negativa y positiva respectivamente, en el pasado remoto y deben coincidir sobre una hipersuperficie espacial en el futuro; por lo tanto la dependencia con esta superficie Σ parece ser nuevamente crucial para el cálculo de la AECTC. Sin embargo, debemos notar que en este caso estamos calculando la acción efectiva utilizando un desarrollo covariante en potencias de la curvatura hasta el orden cuadrático. Entonces, como los factores de forma están presentes en los términos de orden R^2 de la acción, los propagadores que intervienen en el cálculo de la AECTC, son simplemente los correspondientes al espacio-tiempo plano; la discusión del capítulo anterior (donde estábamos calculando la AECTC de manera exacta para modelos bi-dimensionales) acerca de la dependencia con Σ deja de tener importancia en este caso.

En consecuencia, podemos introducir coordenadas normales de Riemann y escribir los propagadores como los planos (con signatura $(-, +, +, +)$)

$$G_F(x, y) = \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \frac{e^{ip(x-y)}}{p^2 + m^2 - i\epsilon} = G_D^*(x, y), \quad (5.18)$$

$$G_{\pm}(x, y) = \mp \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} 2\pi i \delta(p^2 - m^2) \theta(\pm p^0), \quad (5.19)$$

reemplazando la masa m^2 por $\frac{4m^2}{1-\gamma^2} + z$.

Realizando la integración en el parámetro z de la representación integral, podemos escribir

$$\ln \left[\frac{\frac{4m^2}{(1-\gamma^2)} - \square}{\mu^2} \right]_{CTC} = \begin{cases} \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \ln \left[\frac{(1-\gamma^2)(p^2 - i\epsilon) + 4m^2}{\mu^2} \right] & t, t' \text{ en } C_+ \\ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} \ln \left[\frac{(1-\gamma^2)(p^2 + i\epsilon) + 4m^2}{\mu^2} \right] & t, t' \text{ en } C_- \\ \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} 2\pi i \theta(p^0) \theta \left(-p^2 - \frac{4m^2}{1-\gamma^2} \right) & t \text{ en } C_-, t' \text{ en } C_+ \\ - \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-y)} 2\pi i \theta(-p^0) \theta \left(-p^2 - \frac{4m^2}{1-\gamma^2} \right) & t \text{ en } C_+, t' \text{ en } C_- \end{cases}$$

Gracias a esta representación podemos escribir la AECTC como

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}}^{\text{CTC}}[g^+, g^-] &= S_{\text{grav}}^r[g^+] - S_{\text{grav}}^r[g^-] \\ &+ \frac{i}{8\pi^2} \int d^4 x \int d^4 y \Delta(x) \Delta(y) N_1(x, y) \\ &- \frac{1}{8\pi^2} \int d^4 x \int d^4 y \Delta(x) \Sigma(y) D_1(x, y) \\ &+ \frac{i}{8\pi^2} \int d^4 x \int d^4 y \Delta_{\mu\nu}(x) \Delta^{\mu\nu}(y) N_2(x, y) \\ &- \frac{1}{8\pi^2} \int d^4 x \int d^4 y \Delta_{\mu\nu}(x) \Sigma^{\mu\nu}(y) D_2(x, y), \end{aligned} \quad (5.20)$$

donde $\Delta = \frac{R^+ - R^-}{2}$, $\Sigma = \frac{R^+ + R^-}{2}$, $\Delta_{\mu\nu} = \frac{R_{\mu\nu}^+ - R_{\mu\nu}^-}{2}$ y $\Sigma_{\mu\nu} = \frac{R_{\mu\nu}^+ + R_{\mu\nu}^-}{2}$. La acción gravitatoria clásica S_{grav}^r contiene las constantes de acoplamiento vestidas, las cuales dependen de μ , y F_0 se absorbe en la constante G .

La parte real e imaginaria de la acción efectiva $S_{\text{ef}}^{\text{CTC}}$ pueden asociarse con la disipación y el ruido respectivamente, como vimos en el Capítulo 3. Los núcleos de disipación D_i y de ruido N_i son:

$$D_i(x, y) = \int_0^1 d\gamma \chi_i(\xi, \gamma) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos[p(x - y)] \ln \left| \frac{(1 - \gamma^2)p^2 + 4m^2}{\mu^2} \right|, \quad (5.21)$$

$$N_i(x, y) = \int_0^1 d\gamma \chi_i(\xi, \gamma) \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos[p(x - y)] \theta \left(-p^2 - \frac{4m^2}{1 - \gamma^2} \right). \quad (5.22)$$

5.3 Disipación y ruido: las ecuaciones de Einstein-Langevin

Dada su definición, la parte imaginaria de la AECTC es definida positiva. Esto puede ponerse de manifiesto escribiendo la parte imaginaria en términos del tensor de Weyl $C_{\mu\nu\alpha\beta}$ y el escalar de curvatura R por medio de la relación $C_{\mu\nu\alpha\beta}C^{\mu\nu\alpha\beta} = 2R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} - 2/3R^2$. Por lo tanto es sencillo ver que la parte imaginaria de la acción efectiva es definida positiva:

$$\int d^4 p |\Delta(p)|^2 A \left(\xi - \frac{A^2}{12} - \frac{1}{4} \right)^2 + \int d^4 p |\Delta_{\mu\nu\alpha\beta}(p)|^2 B, \quad (5.23)$$

donde $A = \int_0^1 d\gamma \theta(p^2 - \frac{4m^2}{(1-\gamma^2)}) > 0$, y $B = \int_0^1 d\gamma \frac{\gamma^4}{12} \theta(p^2 - \frac{4m^2}{(1-\gamma^2)}) > 0$.

La parte imaginaria de la AECTC puede asociarse con la presencia de fuentes estocásticas clásicas de ruido $\eta(x)$ y $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}(x)$, donde este último tensor tiene las simetrías del de Weyl. Como es usual, esta parte imaginaria puede re-escribirse como:

$$\begin{aligned} & \int \mathcal{D}\eta(x) \int \mathcal{D}\eta^{\mu\nu\alpha\beta}(x) P[\eta, \eta^{\mu\nu\alpha\beta}] \exp \left(i \left\{ \Delta(x) \eta(x) + \Delta_{\mu\nu\alpha\beta} \eta^{\mu\nu\alpha\beta} \right\} \right) \\ &= \exp \left\{ - \int d^4 x \int d^4 y \left[\Delta(x) \tilde{N}(x - y) \Delta(y) + \Delta_{\mu\nu\alpha\beta}(x) N_2(x - y) \Delta^{\mu\nu\alpha\beta}(y) \right] \right\}, \quad (5.24) \end{aligned}$$

donde $\tilde{N}(x, y) = N_1(x, y) + 1/3 N_2(x, y)$ y $\Delta_{\mu\nu\alpha\beta} = \frac{1}{2}(C_{\mu\nu\alpha\beta}^+ - C_{\mu\nu\alpha\beta}^-)$. Además $P[\eta, \eta^{\mu\nu\alpha\beta}]$ es una distribución de probabilidad Gaussiana determinada por

$$\begin{aligned} P[\eta, \eta^{\mu\nu\alpha\beta}] &= A \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y \eta(x) \left[\tilde{N}(x, y) \right]^{-1} \eta(y) \right\} \\ &\quad \times \exp \left\{ - \frac{1}{2} \int d^4 x \int d^4 y \eta_{\mu\nu\alpha\beta}(x) \left[N_2(x, y) \right]^{-1} \eta^{\mu\nu\alpha\beta}(y) \right\}, \quad (5.25) \end{aligned}$$

donde A es un factor de normalización.

Por lo tanto, podemos definir la acción efectiva A_{ef} como

$$\exp\{iS_{\text{ef}}\} = \int \mathcal{D}\eta \mathcal{D}\eta_{\mu\nu\alpha\beta} P[\eta, \eta_{\mu\nu\alpha\beta}] \exp\{iA_{\text{ef}}[\Delta, \Delta_{\mu\nu\alpha\beta}, \Sigma, \Sigma_{\mu\nu}, \eta, \eta_{\mu\nu\alpha\beta}]\}, \quad (5.26)$$

donde

$$A_{\text{ef}} = \text{Re} S_{\text{ef}}^{\text{CTC}} + \int d^4x [\Delta(x)\eta(x) + \Delta_{\mu\nu\alpha\beta}(x)\eta^{\mu\nu\alpha\beta}]. \quad (5.27)$$

Las ecuaciones de movimiento $\left. \frac{\delta A_{\text{ef}}}{\delta g_{\mu\nu}^{\pm}} \right|_{g_{\mu\nu}^+ = g_{\mu\nu}^-} = 0$, que son las ecuaciones de *Einstein-Langevin* quedan

$$\begin{aligned} & \frac{1}{8\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \right) - \tilde{\alpha} H_{\mu\nu}^{(1)} - \tilde{\beta} H_{\mu\nu}^{(2)} \\ &= -\frac{1}{32\pi^2} \int d^4y D_1(x, y) H_{\mu\nu}^{(1)}(y) - \frac{1}{32\pi^2} \int d^4y D_2(x, y) H_{\mu\nu}^{(2)}(y) \\ &+ g_{\mu\nu} \square \eta - \eta_{;\mu\nu} + 2\eta_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta}{}_{;\alpha\beta}, \end{aligned} \quad (5.28)$$

donde $\tilde{\alpha}$ y $\tilde{\beta}$ difieren de α y β en una constante finita que depende de ξ . Como fuentes de estas ecuaciones tenemos al valor medio del tensor de energía-impulso del campo escalar más una corrección estocástica caracterizada por las funciones de correlación

$$\begin{aligned} \langle \eta(x)\eta(y) \rangle &= \tilde{N}(x, y) \\ \langle \eta_{\mu\nu\alpha\beta}(x)\eta_{\rho\sigma\lambda\theta}(y) \rangle &= T_{\mu\nu\alpha\beta\rho\sigma\lambda\theta} N_2(x, y), \end{aligned} \quad (5.29)$$

donde el tensor $T_{\mu\nu\alpha\beta\rho\sigma\lambda\theta}$ es una combinación lineal de productos de las métricas que conserva las simetrías de Weyl [87]:

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu\alpha\beta\rho\sigma\lambda\theta} &\equiv \frac{1}{24} \left\{ 8 \left[\eta_{\rho[\mu}\eta_{\nu]\sigma}\eta_{\lambda[\alpha}\eta_{\beta]\theta} + \eta_{\rho[\alpha}\eta_{\beta]\sigma}\eta_{\lambda[\mu}\eta_{\nu]\theta} + \eta_{\alpha[\mu}\eta_{\nu]\beta}\eta_{\lambda[\rho}\eta_{\sigma]\theta} \right] \right. \\ &+ 4 \left[\eta_{\rho[\mu}\eta_{\beta]\sigma}\eta_{\lambda[\alpha}\eta_{\nu]\theta} + \eta_{\rho[\mu}\eta_{\alpha]\sigma}\eta_{\lambda[\nu}\eta_{\beta]\theta} + \eta_{\rho[\nu}\eta_{\alpha]\sigma}\eta_{\lambda[\beta}\eta_{\mu]\theta} + \eta_{\rho[\beta}\eta_{\nu]\sigma}\eta_{\lambda[\alpha}\eta_{\mu]\theta} \right] \\ &- 3 \left[\eta_{\mu\alpha} \left(\eta_{\rho\lambda}\eta_{\sigma(\nu}\eta_{\beta)\theta} + \eta_{\sigma\theta}\eta_{\rho(\nu}\eta_{\beta)\lambda} - \eta_{\sigma\lambda}\eta_{\rho(\nu}\eta_{\beta)\theta} - \eta_{\rho\theta}\eta_{\sigma(\nu}\eta_{\beta)\lambda} \right) \right. \\ &\left. + \eta_{\nu\beta} \left(\eta_{\rho\lambda}\eta_{\sigma(\mu}\eta_{\alpha)\theta} + \eta_{\sigma\theta}\eta_{\rho(\mu}\eta_{\alpha)\lambda} - \eta_{\sigma\lambda}\eta_{\rho(\mu}\eta_{\alpha)\theta} - \eta_{\rho\theta}\eta_{\sigma(\mu}\eta_{\alpha)\lambda} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \eta_{\nu\alpha} \left(\eta_{\rho\lambda}\eta_{\sigma(\mu}\eta_{\beta)\theta} + \eta_{\sigma\theta}\eta_{\rho(\mu}\eta_{\beta)\lambda} - \eta_{\sigma\lambda}\eta_{\rho(\mu}\eta_{\beta)\theta} - \eta_{\rho\theta}\eta_{\sigma(\mu}\eta_{\beta)\lambda} \right) \\
& \left. - \eta_{\mu\beta} \left(\eta_{\rho\lambda}\eta_{\sigma(\nu}\eta_{\alpha)\theta} + \eta_{\sigma\theta}\eta_{\rho(\nu}\eta_{\alpha)\lambda} - \eta_{\sigma\lambda}\eta_{\rho(\nu}\eta_{\alpha)\theta} - \eta_{\rho\theta}\eta_{\sigma(\nu}\eta_{\alpha)\lambda} \right) \right\}. \quad (5.30)
\end{aligned}$$

A partir de la ecuación (5.28) podemos definir el tensor de energía-impulso efectivo

$$T_{\mu\nu}^{\text{ref}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle + T_{\mu\nu}^{\text{est}} = \langle T_{\mu\nu} \rangle + g_{\mu\nu} \square \eta - \eta_{;\mu\nu} + 2\eta_{\mu}{}^{\alpha}{}_{\nu}{}^{\beta}{}_{;\alpha\beta}, \quad (5.31)$$

donde $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ es el valor de espectación cuántico para el campo de materia y $T_{\mu\nu}^{\text{est}}$ es la contribución de la fuerza estocástica, la que aparece debido a la presencia de los núcleos de ruido escalar \tilde{N} y tensorial N_2 . En el caso no-masivo y de acoplamiento conforme, el núcleo de ruido escalar

$$\tilde{N}(x, y) = \frac{1}{2} \int_0^1 d\gamma \left[\left(\xi - \frac{(1-\gamma^2)}{4} \right)^2 - \frac{\gamma^4}{36} \right] \int \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \cos[p(x-y)] \theta \left(-p^2 - \frac{4m^2}{1-\gamma^2} \right), \quad (5.32)$$

se anula y por lo tanto $(T_{\mu}{}^{\mu})^{\text{est}} = 0$, debido a que la fuente de ruido $\eta^{\mu\nu\alpha\beta}$ tiene traza nula. Esto significa que no existe corrección estocástica a la anomalía de traza [62].

5.4 Discusión

En el presente capítulo hemos mostrado cómo los efectos de ruido aparecen en los modelos semiclásicos en cuatro dimensiones a través del cálculo de la acción efectiva de camino temporal cerrado. Un nuevo término estocástico no trivial se agrega a las fuentes de las ecuaciones de Einstein semiclásicas.

Como hemos mostrado, la parte imaginaria de la acción efectiva (o alternativamente de la funcional de influencia) juega un rol muy importante en el estudio de la transición cuántico-clásica, dado que el proceso de pérdida de coherencia queda puesto en evidencia a partir de la funcional de Hartle y Gell-Mann. En el presente caso, la parte imaginaria ha sido escrita en términos de dos núcleos de ruido. El análisis de dichos núcleos permite un mayor entendimiento del proceso de pérdida de coherencia y por lo tanto de la validez de la aproximación semiclásica.

En particular, estudiamos algunos casos de interés. En el caso no-masivo, \tilde{N} es proporcional a $(\xi - 1/6)^2$ y se anula para acoplamiento conforme. Por lo tanto este término está presente sólo

cuando el campo es masivo y/o cuando el acoplamiento no es conforme. Esto es de esperar, dado que la parte imaginaria de la AECTC está directamente relacionada con la creación de partículas. Para campos sin masa y acoplados de manera conforme, la creación de partículas sólo tiene lugar si el espacio-tiempo no es conformemente plano. En consecuencia, en ese caso la única contribución a la parte imaginaria de la AECTC es la proporcional al cuadrado del tensor de Weyl. Cuando los campos son masivos y/o no están acoplados conformemente, la creación de partículas existe aún cuando el tensor de Weyl es nulo. Esto explica la aparición de un término proporcional a R^2 en la parte imaginaria de la AECTC.

Capítulo 6

Conclusiones

La motivación general de la presente Tesis fue avanzar en la comprensión del origen y de los mecanismos por los cuales la transición cuántico-clásica tiene lugar en teoría de campos. En particular, utilizando una extensión del formalismo de la funcional de influencia de Feynman y Vernon para teoría de campos, estudiamos este proceso para campos escalares en el espacio de Minkowski y para campos escalares acoplados a geometrías arbitrarias con el objeto de entender la transición “a lo clásico” de modelos de gravedad cuántica. Estudiamos el mecanismo de pérdida de coherencia como primer paso hacia un entendimiento global del proceso de transición cuántico-clásica en teoría de campos.

A partir de los resultados conocidos para la partícula Browniana cuántica, hemos obtenido la acción efectiva de granulado grueso para los modos de frecuencia baja integrando los modos de alta frecuencia de un campo escalar con autointeracción. En consecuencia, gracias a la funcional de influencia de Feynman y Vernon obtuvimos los coeficientes de difusión de la ecuación maestra. Además, evaluamos las ecuaciones de movimiento para el campo-sistema, las cuales incluyen efectos tanto disipativos como difusivos gracias al acoplamiento con el entorno.

Como sistema y entorno son dos sectores de un mismo campo escalar, los resultados dependen fuertemente del “tamaño” de estos sectores, el cual está determinado por la longitud de onda crítica Λ^{-1} . Los resultados obtenidos para el espacio de Minkowski pueden generalizarse inmediatamente para el espacio-tiempo de de Sitter cuando el campo escalar es no-masivo y está acoplado de manera

conforme a la geometría. En ese caso mostramos que, cuando la longitud de onda crítica es igual al radio de Hubble, todos los modos del sistema sufren pérdida de coherencia y por lo tanto la transición a lo clásico se torna posible.

Posteriormente, como primer paso hacia la comprensión del proceso de transición cuántico-clásica en modelos de gravedad cuántica, aplicamos el método de la funcional de influencia a modelos de gravedad escalar-tensorial en dos dimensiones, considerando el régimen semiclásico, donde la geometría es un objeto clásico, mientras que los campos de materia se consideran de naturaleza cuántica. Estos modelos bi-dimensionales presentan simplificaciones importantes respecto a los modelos generales en cuatro dimensiones.

En primer lugar consideramos el modelo CGHS. En ese caso hemos mostrado que la acción de influencia puede calcularse exactamente y que es un objeto fuertemente dependiente de la hipersuperficie Σ donde se empalman las geometrías. En particular, en la medida conforme la acción efectiva de camino temporal cerrado puede escribirse como la diferencia entre las acciones de Polyakov en cada rama temporal más una integral sobre Σ .

Utilizamos esta acción de influencia para derivar las ecuaciones de movimiento semiclásicas. Estas ecuaciones son reales, causales y no-locales, y se tornan locales en la medida conforme. La derivación de estas ecuaciones no es trivial debido a la dependencia con la métrica de las funciones de Green. Este es un hecho muy importante porque permite extender el cálculo a casos donde no se puede determinar el $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ utilizando la ley de conservación y la anomalía de traza únicamente. En referencia a este último caso mostramos cómo obtener el tensor de energía-impulso para modelos donde el dilatón aparece acoplado al campo escalar de materia. En estos modelos el $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ no se conserva y la anomalía de traza no lo determina completamente. Seguidamente extendimos la discusión al cálculo correcto de la radiación de Hawking y otros observables físicos en este modelo.

Hemos estudiado la transición cuántico-clásica en modelos cosmológicos. La funcional de influencia no tiene una parte imaginaria para algunas superficies de empalme, y en consecuencia la aproximación semiclásica no es válida en estos modelos.

La aproximación semiclásica puede obtenerse de manera consistente cuando incluimos en la cuantización al dilatón para el modelo CGHS [67], o cuando estudiamos la funcional de influencia para campos escalares masivos y/o acoplados al dilatón o no conformemente a la geometría.

Por otro lado, es necesario mencionar que la geometría en los modelos bi-dimensionales está determinada por la métrica y el dilatón. Por ejemplo, cuando restringimos los modelos en cuatro dimensiones con simetría esférica (como el último ejemplo del capítulo), el dilatón es parte de la geometría dado que $e^{-2\phi}$ es el radio de la dos-esfera. En general, en el modelo CGHS, los lazos asociados a las fluctuaciones cuánticas del dilatón y de la métrica eran ignorados argumentando el límite de N grande (N es el número de campos escalares de materia presentes en el modelo). Como pudimos demostrar en Capítulo 4 no importa cuán grande es N , no hay pérdida de coherencia si uno no considera el efecto de las fluctuaciones cuánticas del dilatón y/o de la geometría para el modelo CGHS. Para modelos más generales, donde existe un acoplamiento entre el dilatón y el campo de materia, la misma interacción asegura la aparición de una parte imaginaria en la acción de influencia y el efecto de pérdida de coherencia está asegurado.

Finalmente, en el Capítulo 5 hemos estudiamos modelos semiclásicos en cuatro dimensiones, donde la métrica clásica está acoplada arbitrariamente a campos escalares masivos. Como mencionamos a lo largo de la presente Tesis, las ecuaciones de Einstein semiclásicas han sido postuladas para entender algunos de los efectos que se producen al acoplar campos cuánticos con geometrías de naturaleza clásica. Estas ecuaciones no proveen una descripción completa del problema, dado que podemos considerar estados cuánticos de los campos de materia con fluctuaciones tales que dicha descripción se vuelva totalmente inadecuada. Una manera de tener en cuenta la presencia de dichas fluctuaciones implica evaluar las correcciones estocásticas que se inducen en las ecuaciones de movimiento de las variables clásicas. De la misma manera que la ecuación asociada de Langevin aparece en el movimiento Browniano cuántico (Capítulo 2), o las ecuaciones del tipo Langevin que dedujimos para el modelo de teoría campos en el espacio plano (Capítulo 3), estas fluctuaciones deben tenerse en cuenta como nuevas fuentes en las ecuaciones de Einstein semiclásicas.

Las fuentes estocásticas provienen de la parte imaginaria de la acción efectiva de camino temporal cerrado que, en este modelo semiclásico es básicamente la acción de influencia. Esta parte imaginaria de la acción efectiva juega también un rol muy importante en el estudio de la

transición cuántico-clásica, dado que el proceso de pérdida de coherencia queda puesto en evidencia a partir de los núcleos de ruido de la acción de influencia y se ve claramente debido a la relación de ésta con la funcional de pérdida de coherencia de Hartle y Gell-Mann.

El análisis de los núcleos de ruido permite una comprensión mayor del proceso de pérdida de coherencia y por lo tanto de la validez de la aproximación semiclásica.

Para campos sin masa y acoplados de manera conforme, la creación de partículas sólo tiene lugar si el espacio-tiempo no es conformemente plano. En consecuencia, en ese caso la única contribución a la parte imaginaria de la AECTC es la proporcional al cuadrado del tensor de Weyl. Cuando los campos son masivos y/o no están acoplados conformemente, la creación de partículas existe aún cuando el tensor de Weyl es nulo. Esto explica la aparición de un término proporcional a R^2 en la parte imaginaria de la AECTC.

Por último quisiéramos señalar que el estudio de las transiciones de fase y la formación de defectos topológicos en teoría de campos, ha cobrado gran interés en los últimos tiempos, debido quizás, a que los resultados esperados de estos modelos teóricos tienen relevancia, tanto para física de altas energías como para sistemas de materia condensada. La funcional de influencia extensamente estudiada en los capítulos previos, es una herramienta fundamental para el análisis teórico de tales fenómenos. Es necesaria para la comprensión de por qué el parámetro de orden de la transición se vuelve clásico y para estudiar la dinámica de los defectos topológicos que se generan, donde el objeto de importancia es el valor del campo (clásico) promediado en una región finita del espacio. La funcional de influencia, por lo visto en esta Tesis, puede aportar importantes resultados al estudio de las transiciones de fase en teoría de campos. Actualmente estamos investigando este tema [45].

Bibliografía

- [1] W.H. Zurek, Phys. Rev. **D24**, 1516 (1981).
- [2] W.H. Zurek, Phys. Rev. **D26**, 1862 (1982).
- [3] W.H. Zurek, Physics Today **44**, 36 (1991).
- [4] C. Monroe, D. Meekhof, B. King y D. Wineland, Science, **272**, 1131 (1996).
- [5] A.J. Leggett et al, Rev. Mod. Phys. **59**, 1 (1987).
- [6] R. Feynman y F. Vernon, Ann. Phys. (N. Y.) **24**, 118 (1963).
- [7] K. Lindenberg y B.J. West, Phys. Rev. Lett. **51**, 1370 (1983).
- [8] H. Carmichel, *An open system approach to quantum optics* (Springer Verlag, 1993).
- [9] W.G. Unruh y W.H. Zurek, Phys. Rev. **D40**, 1071 (1989).
- [10] A.O. Caldeira y A.J. Leggett, Ann. Phys. (N.Y.) **149**, 374 (1983).
- [11] H. Grabert, P. Schram y G.L. Ingold, Phys. Rep. **168**, 115 (1988).
- [12] V. Hakim y V. Ambegoakar, Phys. Rev. **A32**, 423 (1985).
- [13] F. Haake y R. Reibold, Phys. Rev. **A32**, 2462 (1985).
- [14] K. Lindenberg y B.J. West, Phys. Rev. **A30**, 568 (1984).
- [15] B.L. Hu, J.P. Paz y Y. Zhang, Phys. Rev. **D45**, 2843 (1993).
- [16] J.P. Paz, en *The Physical Origin of Time Asymmetry*, ed. by J. Halliwell, J. Perez Mercader y W. Zurek (Cambridge University Press, Cambridge, 1994)
- [17] B.L. Hu, J.P. Paz y Y. Zhang, Phys. Rev. **D47**, 1576 (1993).
- [18] R.P. Feynman y A.R. Hibbs, *Quantum mechanics and path integrals* (McGraw-Hill, New York, 1965).
- [19] J.S. Schwinger, J. Math. Phys. **2**, 407 (1961); L.V. Keldish, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47**, 1515 (1964) [Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965)].
- [20] L. Dávila Romero y J.P. Paz, Phys. Rev. **A55**, 4070 (1997).
- [21] J.P. Paz, comunicación privada.
- [22] E. Joos y H.D. Zeh, Z. Phys. **B59**, 223 (1985).
- [23] J.P. Paz, S. Habib y W. Zurek, Phys. Rev. **D47**, 488 (1993).
- [24] C. Kiefer, Class. Quantum Grav. **4**, 1369 (1987); T. Padmanabhan, Phys. Rev. **D39**, 2912 (1989); J. Halliwell, Phys. Rev. **D36**, 3627 (1987); E. Calzetta y F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. **D42**, 4066 (1990).

- [25] E. Calzetta y B.L. Hu, Phys. Rev. **D49**, 6636 (1994); B.L. Hu y A. Matacz, Phys. Rev. **D49**, 6612 (1994); M. Morikawa, Phys. Rev. **D33**, 3607 (1986).
- [26] E. Kolb y M. Turner, *The early universe*, Addison-Wesley Publishing Company (1990); R. Brandenberger, en *Lectures on Modern Cosmology and Structure Formation*, proceedings de la 7th Swieca Summer School in Particles and Fields, Campos do Jordao, Brazil; eds. O. Eboli y V. Ribelles (World Scientific, Singapore, 1993).
- [27] R. Brandenberger, R. Laflamme y M. Mijić, Int. J. Mod. Phys. **A5**, 2311 (1990); H.A. Feldman y A. Y. Kamenshchick, Class. Quantum Grav. **8**, 265 (1991); B.L. Hu, J.P. Paz y Y. Zhang, *Quantum Origin of Noise and Fluctuations in Cosmology*, en *The Origin of Structure in the Universe*, eds. E. Gunzig y P. Nardone (Kluwer, Dordrecht, 1993).
- [28] A.A. Starobinsky, en *Field Theory, Quantum Gravity and Strings*, ed. H.J. de Vega y N. Sanchez (Springer, Belin 1986).
- [29] A. Matacz, Phys. Rev. **D55**, 1860 (1997); Phys. Rev. **D56**, 1836 (1997).
- [30] F.C. Lombardo y F.D. Mazzitelli, Phys. Rev. **D53**, 2001 (1996).
- [31] E. Calzetta y B.L. Hu, Phys. Rev. **D35**, 495 (1987); Phys. Rev. **D40**, 656 (1989).
- [32] R.D. Jordan, Phys. Rev. **D33**, 44 (1986).
- [33] M. Gleiser y R. Ramos, Phys. Rev. **D50**, 2441 (1994).
- [34] C. Greiner y B. Muller, Phys. Rev. **D55**, 1026 (1997).
- [35] M. Abramowitz y I. Stegun (eds.) del *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications (N. Y.) (1972).
- [36] E. Calzetta y F.D. Mazzitelli, Phys. Rev. **D42**, 4066 (1990).
- [37] B.L. Hu, J.P. Paz y Y. Zhang, *Quantum Origin of Noise and Fluctuations in Cosmology*, en *The Origin of Structure in the Universe*, eds. E. Gunzig y P. Nardone (Kluwer, Dordrecht, 1993).
- [38] C. Wetterich, Nucl. Phys. **B352**, 529 (1991)
- [39] T.R. Morris, Int. J. Mod. Phys. **A9**, 2411 (1994).
- [40] S.B. Liao y J. Polonyi, Ann. Phys. **222**, 122 (1993).
- [41] F.J. Wegner y A. Houghton, Phys. Rev. **A8**, 401 (1973).
- [42] J. Polchinsky, Nucl. Phys. **B231**, 269 (1984).
- [43] D.A.R. Dalvit y F.D. Mazzitelli, Phys. Rev. **D54**, 6338 (1996).
- [44] G. Karra y R.J. Rivers, Phys. Lett. **B414**, 28 (1997).
- [45] F.C. Lombardo y F.D. Mazzitelli, *Classicality of the order parameter during a phase transition*, en *preparación* (1998).
- [46] J. Hartle y S.W. Hawking, Phys. Rev. **D28**, 2960 (1983).
- [47] J. P. Paz y S. Sinha, Phys. Rev. **D44**, 1038 (1991).
- [48] J. J. Halliwell, Phys. Rev. **D36**, 3626 (1987).
- [49] J. J. Halliwell, Phys. Rev. **D39**, 2912 (1989); M. Castagnino, E. Gunzig y F.C. Lombardo, Gen. Rel. Grav. **27**, 257 (1995); M. Castagnino y F.C. Lombardo, Gen. Rel. Grav. **28**, 263 (1996).
- [50] R. Lafamme y J. Louko, Phys. Rev. **D43**, 3317 (1991).

-
- [51] M. Gell-Mann y J. Hartle, en *Complexity, Entropy and Physics on Information*, ed. W. H. Zurek (Addison-Wesley, Reading, 1990); Phys. Rev. **D47**, 3345 (1993); T. Brun, Phys. Rev. **D47**, 3383 (1993); H. F. Dowker y J. J. Halliwell, Phys. Rev. **D46**, 1580 (1992).
- [52] N. D. Birrel y P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space*, Cambridge University Press, Cambridge (1982).
- [53] A. Strominger, Les Houches Lectures on Black Holes. Conferencia dada en la NATO Advanced Study Institute: Les Houches Summer School. Les Houches, Francia (1994); hep-th/9501071.
- [54] Chung-I Kuo y L.H. Ford, Phys. Rev. D **47**, 4510 (1993).
- [55] S.W. Hawking, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975).
- [56] S.W. Hawking, Phys. Rev. **D14**, 2460 (1976).
- [57] C. G. Callan, S. B. Giddings, J. A. Harvey, y A. Strominger, Phys. Rev. **D45**, R1005 (1992).
- [58] E. Witten, Phys. Rev. **D44**, 314 (1991).
- [59] J. G. Russo, L. Susskind, y L. Thorlacius, Phys. Rev. **D46**, 344 (1992); Phys. Rev. **D47**, 533 (1993).
- [60] S. Bose. L. Parker y Y. Peleg, Phys. Rev. **D54**, 7490 (1996).
- [61] E. Calzetta and B.L. Hu, Phys. Rev. **D49**, 6636 (1994).
- [62] F.C. Lombardo y F.D. Mazzitelli, Phys. Rev. **D55**, 3889 (1997).
- [63] F. Cooper, S. Habib, Y. Kluger, E. Mottola, J.P. Paz y P. Anderson, Phys. Rev. **D50**, 2848 (1994).
- [64] C. G. Callan, S. B. Giddings, J. A. Harvey, y A. Strominger, Phys. Rev. **D45**, R1005 (1992); S. Bose. L. Parker y Y. Peleg, Phys. Rev. Lett. **76**, 861 (1996).
- [65] S. M. Christensen y S. A. Fulling, Phys. Rev. **D15**, 2088 (1977).
- [66] F.C. Lombardo, F.D. Mazzitelli y J.G. Russo, *Energy-momentum tensor for scalar fields coupled to the dilaton in two dimensional models*, Phys. Rev. **D** en prensa (1998).
- [67] F.C. Lombardo y F.D. Mazzitelli, Phys. Rev. **D58**, 024009 (1998).
- [68] F. D. Mazzitelli y J. G. Russo, Phys. Rev. **D47**, 4490 (1993).
- [69] V. Frolov y G.A. Vilkovisky, in Proc. Second Seminar in Quantum Gravity; eds. M. A. Markov y P. C. West (Plenum Press, London 1983).
- [70] V. Mukhanov, A. Wipf y A. Zelnikov, Phys. Lett. **B332**, 283 (1994); E. Elizalde, S. Naftulin y S.D. Odintsov, Phys. Rev. **D49**, 2852 (1994); R. Bousso y S.W. Hawking, Phys. Rev. **D56**, 7788 (1997); W. Kummer, H. Liebl y D.V. Vassilevich, Mod. Phys. Lett **A12**, 2683 (1997); hep-th/9801122; S. Nojiri y S.D. Odintsov, Phys. Rev. **D57**, 4847 (1998); J. S. Dowker, Class. Quant. Grav. **15**, 1881 (1998).
- [71] R. Bousso y S.W. Hawking, Phys. Rev. **D57**, 2436 (1998).
- [72] R. Balbinot y A. Fabbri, *Hawking radiation by effective two-dimensional theories*, gr-qc/9807123.
- [73] A. Mikovic y V. Radovanovic, Nucl. Phys. **B504**, 511 (1997).
- [74] I. G. Avramidi, Yad. Fiz. **49**, 1185 (1989) [Sov. J. Nucl. Phys. **49**, 735 (1989)].
- [75] H. Balasin, W. Kummer, O. Piguet y M. Schweda, Phys. Lett. **B287**, 138 (1992).
- [76] V. Mukhanov, A. Wipf y A. Zelnikov, Phys. Lett. **B332**, 283 (1994).
- [77] W. Kummer, H. Liebl y D.V. Vassilevich, Mod. Phys. Lett **A12**, 2683 (1997); S. Nojiri y S.D. Odintsov, Phys. Rev. **D57**, 4847 (1998).

- [78] D.A.R. Dalvit y F.D. Mazzitelli, Phys. Rev. **D50**, 1001 (1994); Phys. Rev. **D56**, 7779 (1997).
- [79] J.F. Donoghue, Phys. Rev. **D50**, 3874 (1994); H. Hamber y S. Liu, Phys. Lett. **B357**, 51 (1995); I. Muzinich y S. Vokos, Phys. Rev. **D52**, 3472 (1995).
- [80] M.J. Lighthill, *Introduction to Fourier Analysis and Generalised Functions*, Cambridge University Press (1958).
- [81] J. Frieman, Phys. Rev. **D39**, 389 (1989).
- [82] A. M. Polyakov, Phys. Lett. **B103**, 207 (1981).
- [83] E. Keski-Vakkuri, G. Lifschytz, S. D. Mathur y M. E. Ortiz, Phys. Rev. **D51**, 1764 (1995).
- [84] S. Bose, L. Parker y Y. Peleg, Phys. Rev. **D53**, 7089 (1996).
- [85] A. Miković y V. Radovanović, Class. Quant. Grav. **14**, 2647 (1997); Class. Quant. Grav. **15**, 827 (1998).
- [86] A. Campos y E. Verdaguer, Phys. Rev. **D49**, 1861 (1994).
- [87] A. Campos y E. Verdaguer, Phys. Rev. **D53**, 1927 (1996).
- [88] B.L. Hu y A. Matacz, Phys. Rev. **D51**, 1577 (1995).
- [89] B.L. Hu y S. Sinha, Phys. Rev. **D51**, 1587 (1995).
- [90] B.S. de Witt, *Dynamical Theory of Groups and Fields*, (New York: Gordon and Breach) (1965).
- [91] A.O. Barvinsky y G.A. Vilkovisky, Nucl. Phys. **B282**, 163 (1987); **B333**, 471 (1990).