

Tesis Doctoral

Correcciones cuánticas y acción efectiva en teoría de campos

Dalvit, Diego Alejandro Roberto

1998

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the Master's and Doctoral Theses Collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Dalvit, Diego Alejandro Roberto. (1998). Correcciones cuánticas y acción efectiva en teoría de campos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n3041_Dalvit

Cita tipo Chicago:

Dalvit, Diego Alejandro Roberto. "Correcciones cuánticas y acción efectiva en teoría de campos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1998. http://hdl.handle.net/20.500.12110/tesis_n3041_Dalvit

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física

Tesis Doctoral

**Correcciones Cuánticas y
Acción Efectiva en Teoría de Campos**

Autor: Diego Alejandro Roberto Dalvit

Director: Dr. Francisco Diego Mazzitelli

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas

Junio de 1998





A los Willies



Resumen

En esta Tesis estudiamos correcciones cuánticas a la dinámica clásica de valores medios en teoría de campos. Para ello utilizamos el formalismo de acción efectiva de camino temporal cerrado, con el cual obtenemos ecuaciones de movimiento reales y causales.

Introducimos una acción efectiva de granulado grueso, que es de utilidad en el estudio de transiciones de fase en teoría de campos. Derivamos una ecuación exacta del grupo de renormalización que describe cómo esta acción varía con la escala de granulado grueso. Desarrollamos distintos métodos de aproximación para resolver dicha ecuación y obtenemos mejoras no perturbativas para el potencial efectivo para una teoría escalar autointeractuante. Discutimos además los aspectos estocásticos contenidos en esta acción.

Por otro lado, usando la acción efectiva, hallamos correcciones cuánticas de bajas energías y largas distancias al potencial de interacción gravitatorio, tratando a la relatividad como una teoría efectiva de bajas energías. Incluimos el efecto de campos cuánticos escalares, espinoriales y de gravitones. La inclusión de fluctuaciones de la métrica hace que las ecuaciones de Einstein semiclásicas dependan de los parámetros de fijado de medida, y sean por ende no físicas. Resolvemos este problema identificando como observable físico a la trayectoria de una partícula de prueba. Mostramos explícitamente que las ecuaciones geodésicas para dicha partícula son independientes de los parámetros arbitrarios que aparecen en el fijado de medida.

Palabras claves:

Acción efectiva - Teoría cuántica de campos - Gravedad semiclásica - Correcciones cuánticas - Grupo de renormalización - Transiciones de fase - Cosmología



Abstract

In this Thesis we study quantum corrections to the classical dynamics for mean values in field theory. To that end we make use of the formalism of the closed time path effective action to get real and causal equations of motion.

We introduce a coarse grained effective action, which is useful in the study of phase transitions in field theory. We derive an exact renormalization group equation that describes how this action varies with the coarse graining scale. We develop different approximation methods to solve that equation, and we obtain non perturbative improvements to the effective potential for a self interacting scalar field theory. We also discuss the stochastic aspects contained in this action.

On the other hand, using the effective action, we find low energy and large distance quantum corrections for the gravitational potential, treating relativity as an effective low energy theory. We include the effect of scalar fields, fermions and gravitons. The inclusion of metric fluctuations causes Einstein semiclassical equations to depend on the gauge fixing parameters, and they are therefore non physical. We solve this problem identifying as a physical observable the trajectory of a test particle. We explicitly show that the geodesic equation for such particle is independent of the arbitrary parameters of the gauge fixing.

Keywords:

Effective action - Quantum field theory - Semiclassical gravity - Quantum corrections - Renormalization group - Phase transitions - Cosmology



Indice

1	Introducción	1
2	La acción efectiva y sus variantes	9
2.1	La acción efectiva usual	9
2.2	La acción efectiva de camino temporal cerrado	12
2.3	La acción efectiva de Vilkovisky-DeWitt	16
3	La acción efectiva de granulado grueso	23
3.1	Su definición	23
3.2	Aproximación a un lazo	25
3.3	Ecuación del grupo de renormalización exacto	29
3.3.1	Expansión en derivadas	32
3.4	Discusión	38
4	La acción efectiva usual: métodos de cálculo covariantes	43
4.1	El heat kernel	43
4.2	La expansión de Schwinger-DeWitt	45
4.3	Resumación de la expansión de Schwinger-DeWitt	46

5	Correcciones cuánticas al potencial newtoniano	53
5.1	Teorías de campos efectivas	53
5.2	El apantallamiento de la carga eléctrica	56
5.3	Campos escalares en fondos curvos	65
5.3.1	Ecuaciones efectivas no locales para el campo gravitatorio	65
5.3.2	El potencial newtoniano a partir de la acción efectiva	71
5.4	Campos fermiónicos en fondos curvos	76
5.5	Discusión	78
6	Correcciones al potencial newtoniano por efecto de gravitones	81
6.1	La relatividad general como una teoría efectiva	82
6.2	La acción efectiva para gravedad + materia: divergencias	84
6.2.1	Divergencias para medidas mínimas	87
6.2.2	Divergencias para medidas no mínimas	88
6.3	Ecuaciones de Einstein. Problema del fijado de medida	90
6.4	Correcciones cuánticas a las ecuaciones de las geodésicas	93
6.5	Discusión	97
7	Conclusiones	99

Capítulo 1

Introducción

El tema general de esta tesis es el cálculo de correcciones cuánticas a la dinámica clásica en teoría de campos. Como punto de partida para analizar la influencia de las fluctuaciones cuánticas, nos concentraremos en la acción efectiva, la cual contiene toda la información sobre los aspectos cuánticos del campo. Por un lado, a partir de la acción efectiva es posible hallar los elementos de matriz de dispersión y estudiar procesos de interacción entre partículas en física de altas energías. Por otro lado, la acción efectiva permite estudiar la evolución de valores medios de campos cuánticos, lo cual es de utilidad en distintas ramas de la física, como por ejemplo en cosmología y mecánica estadística. Para esta tesis es este segundo aspecto el que será relevante.

Una rama de la física teórica en la cual la acción efectiva es de gran utilidad es la gravedad semiclásica, en la cual el interés radica en analizar los efectos de campos de materia cuánticos sobre el comportamiento de campos gravitatorios clásicos [1]. Las ecuaciones que rigen la dinámica del espacio-tiempo incluyendo tales efectos cuánticos se llaman ecuaciones de Einstein semiclásicas, que tienen como fuente el valor de expectación del tensor de energía-impulso de todos los campos existentes, y eventualmente también el de las fluctuaciones de la métrica. En ausencia de una teoría consistente de la gravedad cuántica, la justificación de la aproximación semiclásica se basa en la suposición de la existencia de un régimen de energías para la gravedad cuántica en el cual el fondo gravitatorio se comporte clásicamente. Las ecuaciones semiclásicas han sido utilizadas en la literatura para estudiar distintos procesos físicos en los cuales los efectos cuánticos sobre el campo

gravitatorio son importantes. Por un lado existe un amplio conjunto de trabajos sobre la evolución de campos de materia cuánticos en espacio-tiempo curvo, en los cuales se han estudiado con detalle las soluciones a las ecuaciones semiclásicas [2]. Los efectos cuánticos pueden haber sido uno de los responsables de las características observables de nuestro Universo actual, como por ejemplo la isotropía a gran escala. Si inicialmente el Universo era anisótropo, la expansión del mismo tuvo como consecuencia la creación de grandes cantidades de partículas, las cuales “reaccionan” sobre la métrica del espacio-tiempo a través de las ecuaciones semiclásicas. Esto induce términos disipativos en las ecuaciones para el campo gravitatorio, que finalmente conducen a la disipación de las anisotropías de partida [3, 4, 5, 6]. Otro campo de interés es el estudio de los procesos cuánticos que intervienen en el colapso gravitatorio y la formación de agujeros negros. Al colapsar una estrella para formar un agujero negro se produce una perturbación gravitatoria que induce, por efectos cuánticos de los campos de materia presentes, la emisión de un flujo de radiación con espectro térmico: el agujero negro no es completamente negro, sino que emite radiación [7]. La temperatura de la radiación es inversamente proporcional a la masa del agujero negro, de modo que mientras menor sea la masa de éste, mayor será el número de especies de partículas que se crean: fotones, neutrinos, pares electrón-positrón, etc.

Dentro de los aspectos cosmológicos, el conocimiento de la forma exacta de la acción efectiva en modelos inflacionarios juega un rol fundamental en la descripción de las transiciones de fase que tuvieron lugar en el Universo temprano. Los primeros estudios de transiciones de fase en este contexto se hicieron para configuraciones de campo constantes, en cuyo caso la acción efectiva se reduce al denominado potencial efectivo [8]. Ello permite deducir aspectos cualitativos de la transición, como por ejemplo decidir si es de primer o segundo orden. Sin embargo, cerca de la temperatura crítica a la cual se produce la transición, el potencial efectivo resulta insuficiente para describir los procesos fuera de equilibrio que tienen lugar. En este caso resulta imprescindible evaluar la acción efectiva para configuraciones dependientes del tiempo, y a partir de ella obtener la dinámica del parámetro de orden. De esta forma es posible estudiar procesos tales como la creación de partículas debida a la amplificación de las fluctuaciones cuánticas, la influencia de dichas partículas sobre la dinámica del inflatón, y la dinámica autoconsistente del espacio-tiempo [9, 10].

En física de altas energías es también de interés estudiar la evolución temporal de valores de expectación de campos en diversas situaciones. Un ejemplo es la formación y ulterior evolución de los llamados condensados quirales desorientados que se formarían en colisiones entre núcleos pesados a altas energías. El plasma de quarks y gluones que se genera en la colisión se enfría al expandirse y atraviesa la transición de fase quiral de la cromodinámica cuántica. En esta forma se producen amplias regiones espaciales correlacionadas, donde el condensado quiral tiene valor de expectación no nulo y está orientado en una dirección incorrecta. El estudio de los aspectos de no equilibrio de la transición de fase quiral permitiría decidir si durante la evolución se generan inestabilidades que afectan a las fluctuaciones cuánticas y producen eventualmente un crecimiento de las correlaciones y la formación de dominios quirales [11, 12]. Relacionado con lo anterior, es también relevante el análisis de los aspectos cuánticos y estadístico-cinéticos de sistemas multipartónicos fuera de equilibrio en física de altas energías. A partir de un formalismo cinético-cuántico basado en la acción efectiva es posible desarrollar una teoría de transporte para quarks y gluones con el fin de describir procesos disipativos y dispersivos de sistemas multipartónicos en tiempo real [13].

Todos los casos anteriores tienen en común el hecho de que sólo ciertos grados de libertad son los relevantes para estudiar la dinámica, mientras que la influencia de los otros grados de libertad sobre los primeros se considera en forma efectiva. Los grados de libertad relevantes forman el “sistema” y los irrelevantes “el entorno”. Por ejemplo, en gravedad semiclásica, el sistema de interés es el fondo gravitatorio, mientras que los campos de materia cuánticos sobre los cuales se integra forman el entorno, que afecta la dinámica de la métrica. En inflación, el sistema corresponde a los modos de longitudes de onda mayores que el horizonte, mientras que el entorno está formado por los de longitudes de onda menores y por el resto de los campos que se acoplan al inflatón para producir recalentamiento. En el estudio de las colisiones multipartónicas a altas energías, importa analizar la dinámica de los modos livianos (excitaciones colectivas de largo alcance), mientras que los modos pesados (excitaciones de corto alcance) son tratados en forma efectiva, y forman el entorno. Este proceso de extraer a partir de un número grande, frecuentemente infinito, de grados de libertad unas pocas variables que capturen la física esencial del sistema completo es típico de la mecánica estadística [14]. Allí, a partir del cálculo de la función de partición, y previa identificación de las variables relevantes del sistema de interés, es posible hacer el promedio sobre los grados de libertad irrelevantes que forman el entorno. El ejemplo típico es el movimiento Browniano cuántico, en

el cual se estudia la dinámica de una partícula browniana pesada acoplada a un conjunto de osciladores livianos [15, 16]. Basándose en la acción efectiva resultante del proceso de promediado (también conocida como acción efectiva de granulado grueso, o funcional de influencia), se logra tener en cuenta cómo los grados de libertad integrados “reaccionan” sobre el sistema [17]. Dicho proceso de separación sistema-entorno resulta en aspectos nuevos para la dinámica del sistema cuántico abierto. La característica más sobresaliente es la aparición de disipación, por transferencia de energía del sistema al entorno, y de ruido, por efecto de las fluctuaciones del entorno sobre el sistema. La fuente de ruido puede provenir de fluctuaciones térmicas o de vacío, y están relacionadas con la disipación a través de la relación de fluctuación-disipación. Estos métodos han sido utilizados para analizar la transición cuántico-clásica mediante el proceso de decoherencia, es decir la diagonalización de la matriz densidad reducida del sistema por efecto del acoplamiento con el entorno [18].

El esquema de aislación de un sistema de interés y el tratamiento efectivo de sus interacciones con el entorno no es exclusivo de la mecánica estadística. La técnica del grupo de renormalización, usada frecuentemente en teoría de campos y materia condensada, comparte básicamente el mismo espíritu [19]. Originalmente esta técnica fue introducida mediante la llamada transformación de bloques de espín, con el objeto de estudiar sistemas de espines en la red [20]. La idea subyacente es partir de un sistema microscópico de espines, identificar un conjunto de grados de libertad relevantes (bloques de espín), promediar sobre los grados de libertad irrelevantes (espines en cada bloque) y deducir finalmente la interacción efectiva entre estas nuevas variables. Se obtiene así un mapeo entre los parámetros del modelo a dos escalas de promediado diferentes. En este proceso el granulado grueso es discreto, pero puede generalizarse al caso continuo utilizando la teoría de campos basada en la acción efectiva. Aquí se integran las fluctuaciones cuya longitud de onda sea menor que una dada escala, y se obtiene así una nueva acción efectiva de granulado grueso. La correspondiente ecuación del grupo de renormalización describe la manera en la cual dicha acción varía con la escala. La resolución de tal ecuación es una tarea formidable, y en general requiere métodos de aproximación, ya sean perturbativos o no perturbativos.

La presente tesis doctoral está organizada en la siguiente forma: en el Capítulo 2 presentamos una revisión de conceptos básicos de teoría de campos y la definición de la acción efectiva. La for-

mulación usual de la acción efectiva adolece de dos problemas fundamentales a la hora de estudiar la evolución temporal de valores de expectación en teoría de campos. Por un lado, las ecuaciones que se obtienen no son ni reales ni causales. Por este motivo describimos la denominada acción efectiva de camino temporal cerrado, apta para describir procesos de no equilibrio. Por otro lado, en teorías de medida, la acción efectiva usual es una cantidad que depende (paramétricamente) de la elección de las condiciones de medida impuestas sobre las fluctuaciones cuánticas. Diferentes elecciones de esas condiciones conducen a distintas acciones efectivas. Más en general, la acción efectiva usual no es una cantidad invariante ante reparametrizaciones de los campos. Describimos brevemente la propuesta usualmente utilizada para tratar este problema en la definición de la acción efectiva.

En el Capítulo 3 nos ocupamos del primer problema de la formulación usual de la acción efectiva, y discutimos métodos de aproximación no perturbativos para la acción efectiva de camino temporal cerrado. Introducimos la acción efectiva de granulado grueso, que es de especial utilidad para estudiar transiciones de fase en teoría de campos y desarrollamos las técnicas del grupo de renormalización exacto, que describen cómo varía dicha acción con la escala de granulado. En el Capítulo 4 se describen métodos de cálculo covariantes de la acción efectiva. En la aproximación a un lazo en las fluctuaciones cuánticas, el problema reside en evaluar determinantes funcionales de operadores diferenciales de segundo orden. Debido a su complejidad, es necesario recurrir a técnicas de aproximación. Describimos la aproximación (local) de Schwinger-DeWitt, que es una expansión en derivadas del campo de fondo, y otra técnica basada en una resumación de la anterior, que identifica los aspectos no locales de la acción efectiva.

Los capítulos restantes son aplicaciones de la acción efectiva al cálculo de correcciones cuánticas en relatividad general. Como hemos visto, en gravedad semiclásica se trabaja con escalas de distancias mucho mayores que la distancia de Planck y energías mucho menores que la energía de Planck, lo cual permite suponer que los efectos cuánticos del campo gravitatorio son despreciables, y en consecuencia se trata a dicho campo en forma clásica. Sin embargo, esa suposición no es estrictamente correcta. De acuerdo al principio de equivalencia, todas las formas de materia y energía se acoplan a la gravedad con la misma intensidad. En particular, ésto también incluye a la misma energía gravitatoria: un gravitón se acopla a un campo gravitatorio externo al igual que

cualquier otra excitación cuántica. En consecuencia, siempre que un campo gravitatorio clásico de fondo produzca importantes efectos que involucren campos de materia cuánticos (por ejemplo, fotones, ya sean reales o virtuales), también debemos esperar efectos igualmente relevantes relacionados con gravitones. Por lo tanto, la gravedad cuántica entra en forma no trivial en todas las escalas de distancias y energías. En resumen, la cuantización del campo gravitatorio es tan importante como la cuantización de los campos de materia [21]. A pesar de la complicación que implica la cuantización de la gravedad, todavía es posible proceder con una descripción semiclásica, escribiendo a la métrica como un fondo clásico más una fluctuación cuántica (gravitones) que se propaga en dicho fondo. Este campo de gravitones representa perturbaciones linealizadas en el fondo clásico, y puede incluirse junto con los otros campos cuánticos como parte de la materia en vez de la geometría. Inmediatamente surge un problema con este procedimiento. Debido al hecho que la constante de acoplamiento de la teoría posee dimensiones, cada nuevo orden en teoría de perturbaciones conduce a nuevas divergencias que no poseen la estructura de los ordenes anteriores. Esto hace que la gravedad sea una teoría no renormalizable. Ahora bien, la relatividad general, como toda teoría física, es necesariamente provisoria, ya que su validez ha sido testeada experimentalmente para un rango limitado de distancias y energías. Pensando a la relatividad como una teoría efectiva de bajas energías, la no renormalizabilidad no representa un impedimento para calcular las correcciones cuánticas más importantes a los resultados clásicos [22].

A modo de ejemplificar los métodos que usaremos para hallar correcciones cuánticas en relatividad general, comenzamos en el Capítulo 5 por el estudio de un caso sencillo de electrodinámica cuántica, correspondiente al apantallamiento de la carga eléctrica por fluctuaciones del vacío. Seguidamente pasamos al tratamiento semiclásico de la gravedad, y calculamos las modificaciones cuánticas al potencial newtoniano por campos de materia escalares y fermiónicos. Finalmente, en el Capítulo 6 consideramos el tratamiento de la gravedad como una teoría efectiva, y nos ocupamos del segundo problema de la acción efectiva usual. Siguiendo los mismos métodos del capítulo anterior, hallamos la contribución de los gravitones a las ecuaciones de Einstein y mostramos que su solución depende de los parámetros del fijado de medida para las fluctuaciones cuánticas. Por lo tanto la cantidad calculada no puede ser un observable. Proponemos identificar las cantidades físicas, y consideramos el movimiento de una partícula de prueba en presencia de gravitones. A partir del cálculo de la acción efectiva, mostramos explícitamente que las ecuaciones geodésicas

corregidas por efectos cuánticos y el potencial newtoniano resultan independientes del fijado de medida. Finalmente en el Capítulo 7 resumimos nuestras conclusiones.



Capítulo 2

La acción efectiva y sus variantes

En este capítulo introducimos algunos conceptos fundamentales de la teoría de campos para estudiar la evolución de valores medios. Comenzamos con la definición convencional de la acción efectiva, apta para describir problemas de dispersión. El estudio de la evolución temporal de valores medios basado en esta acción efectiva presenta dos problemas. Primero, las ecuaciones de movimiento efectivas no resultan ni reales ni causales, lo cual dificulta la interpretación de las mismas para describir problemas a condiciones iniciales. Segundo, en el caso de teorías de medida, tanto la acción como las ecuaciones de movimiento dependen paramétricamente de la forma en que se fija la medida al integrar las fluctuaciones cuánticas, lo cual implica que dichas ecuaciones de evolución no son físicas. Como solución al primer problema describimos el formalismo de la acción efectiva de camino temporal cerrado, apropiado para tratar sistemas fuera de equilibrio. En cuanto al segundo problema, describimos brevemente el formalismo de la acción efectiva de Vilkovisky-DeWitt.

2.1 La acción efectiva usual

Con el objeto de introducir la definición usual de acción efectiva nos restringiremos al caso más sencillo posible, es decir a una teoría (que no sea de medida) para un único campo bosónico en

espacio-tiempo plano. Consideremos pues un campo ϕ cuya acción clásica es $S(\phi)$. La amplitud de persistencia del vacío en presencia de una fuente clásica J se define como

$$Z[J] = \exp\left(\frac{i}{\hbar}W[J]\right) = \langle 0, \text{out} | 0, \text{in} \rangle_J = \langle 0, \text{out} | T \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int d^4x J(x)\phi_{\text{H}}(x)\right) | 0, \text{in} \rangle, \quad (2.1)$$

donde $\phi_{\text{H}}(x)$ es el operador de campo en representación de Heisenberg para la teoría sin fuente, y T es el operador de ordenamiento temporal. El estado de vacío "in", $|0, \text{in}\rangle$, está definido en $t \rightarrow -\infty$, mientras que el estado de vacío "out", $|0, \text{out}\rangle$, en el futuro remoto. En un contexto general fuera de equilibrio, como por ejemplo un espacio-tiempo curvo dependiente del tiempo, o para campos de fondo dependientes del tiempo, ambos estados no son necesariamente equivalentes. Podemos escribir también una representación de $Z[J]$ mediante integral de camino

$$Z[J] = \int D\phi \exp\left[\frac{i}{\hbar}\left(S[\phi] + \int d^4x J(x)\phi(x)\right)\right], \quad (2.2)$$

donde la integral funcional es la suma sobre las historias clásicas del campo ϕ que en el pasado asintótico tienen frecuencias negativas (es decir, los modos espaciales de Fourier de ϕ tienen una dependencia temporal de la forma $\exp(i\omega t)$, con $\omega > 0$), y frecuencias positivas ($\propto \exp(-i\omega t)$) en el futuro asintótico¹. Se asume que la interacción con la fuente se apaga en estas regiones asintóticas.

Diferenciando la funcional $W[J]$ respecto a la fuente se genera el elemento de matriz del operador de campo entre estados asintóticos de vacío

$$\varphi(x) = \frac{\delta W[J]}{\delta J(x)} = \frac{\langle 0, \text{out} | \phi(x) | 0, \text{in} \rangle_J}{\langle 0, \text{out} | 0, \text{in} \rangle_J}. \quad (2.3)$$

Asumiendo que la relación anterior se puede invertir para expresar la fuente J como una funcional del campo (clásico) φ , la acción efectiva usual queda definida como la transformada de Legendre de la funcional $W[J]$ en la forma

$$S_{\text{ef}}[\varphi] = W[J[\varphi]] - \int d^4x J[\varphi](x)\varphi(x). \quad (2.4)$$

¹Estas condiciones de contorno son equivalentes a agregar una pequeña parte imaginaria $-i\epsilon\phi^2$ en la acción clásica, con $\epsilon > 0$.

A partir de esta ecuación podemos derivar la dinámica para el campo efectivo φ en la forma

$$\frac{\delta S_{\text{ef}}[\varphi]}{\delta \varphi} = -J, \quad (2.5)$$

que expresa las correcciones cuánticas a la ecuación clásica como un problema variacional. En particular, para $J = 0$, obtenemos la ecuación dinámica para el campo clásico $\varphi[J = 0]$ en ausencia de fuentes.

La acción efectiva puede escribirse como la siguiente integral de camino

$$S_{\text{ef}}[\varphi] = -i\hbar \ln \left\{ \int D\phi \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S[\phi] - \frac{\delta S_{\text{ef}}[\varphi]}{\delta \varphi} (\phi - \varphi) \right) \right] \right\}, \quad (2.6)$$

que es una ecuación integro-diferencial para la acción efectiva, y que posee una solución formal

$$S_{\text{ef}}[\varphi] = S[\varphi] - \frac{i\hbar}{2} \ln \det(A^{-1}) + \Gamma_1[\varphi], \quad (2.7)$$

donde $A(x, x')$ es la segunda derivada funcional de la acción clásica respecto al campo. El segundo término es la corrección a un lazo, mientras que el tercero representa las correcciones a lazos superiores. Esta acción efectiva (o acción efectiva "in-out") es la generatriz de funciones de vértice de n puntos (diagramas de una partícula irreducible sin líneas externas), incluyendo tanto sus componentes clásicas como sus correcciones cuánticas. A diferencia de las funciones de vértice clásicas, que en general aparecen en una cantidad finita y son locales, el número de funciones de vértice cuánticas es siempre infinito y son no locales [23]. Utilizando estas funciones de vértice y las correspondientes reglas de Feynman se pueden calcular todos los distintos elementos de matriz de dispersión. Es éste el ámbito en el cual la acción efectiva usual tiene sus mayores aplicaciones, permitiendo el estudio sistemático de procesos de dispersión en la física de partículas.

Es importante remarcar algunos aspectos: por un lado $\varphi[J = 0]$ es un elemento de matriz entre estados asintóticos en ausencia de fuente, y es en general una cantidad compleja. Las cantidades de interés para estudiar evoluciones dinámicas son en cambio valores de expectación de observables tomados respecto al mismo estado. Por otro lado, la ecuación de movimiento (2.5) no posee una estructura causal. Por la propia definición de la acción efectiva in-out, la solución a las ecuaciones efectivas es un problema de contorno (estados asintóticos in y out) en vez de un problema de

condiciones iniciales. Finalmente, el formalismo usual de acción efectiva sólo permite analizar situaciones de vacío asintótico - situaciones más generales, como por ejemplo estados térmicos asintóticos, no están contenidas.

2.2 La acción efectiva de camino temporal cerrado

Como vimos anteriormente, es conveniente introducir un nuevo formalismo que permita obtener ecuaciones de movimiento reales y causales para valores de expectación, dado un conjunto de datos iniciales de Cauchy. Dicho formalismo se conoce en la actualidad con el nombre general de Schwinger-Keldysh [24]. Versiones no relativistas del mismo han sido aplicadas a problemas de mecánica estadística y materia condensada. Aquí describiremos la formulación relativista de teoría de campos para el caso sencillo de un campo bosónico en espacio-tiempo plano.

La idea es analizar cómo evoluciona el estado de vacío ² in (asociado al estado asintótico en $t \rightarrow -\infty$) en presencia de dos fuentes externas distintas $J_+(x)$ y $J_-(x)$ y comparar los resultados en una base común $\{|\psi\rangle\}$ en un tiempo futuro T . Definamos la funcional $Z[J_+, J_-]$ como

$$Z[J_+, J_-] = \exp\left(\frac{i}{\hbar} W[J_+, J_-]\right) = \sum_{|\psi\rangle} \langle 0, \text{in} | \psi \rangle_{J_-} \langle \psi | 0, \text{in} \rangle_{J_+}, \quad (2.8)$$

que también puede escribirse en la forma

$$Z[J_+, J_-] = \int D\psi \langle 0, \text{in} | \hat{T} e^{-\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^T dt \int d^3x J_-(x) \phi_H(x)} | \psi \rangle \langle \psi | T e^{\frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^T dt \int d^3x J_+(x) \phi_H(x)} | 0, \text{in} \rangle, \quad (2.9)$$

donde \hat{T} denota el operador de ordenamiento antitemporal. Podemos pensar a esta funcional como la integral sobre un camino temporal cerrado en el plano complejo temporal. En efecto, dicho camino \mathcal{C} se ilustra en la figura 2.1: el camino va desde el vacío in en el infinito pasado hasta el estado $|\psi\rangle$ definido sobre una superficie común Σ de tiempo constante T en el futuro, en presencia de una fuente J_+ definida en la rama positiva del camino. Luego regresa por la rama negativa desde T hasta el vacío in en presencia de la fuente J_- .

²La formulación permite incluir estados más generales descritos por una matriz densidad ρ . A lo largo de esta Tesis nos restringiremos a estados iniciales de vacío.

A partir de esta funcional podemos calcular valores de expectación de observables físicos a un tiempo finito. Por ejemplo, las funciones de Green de 2 puntos

$$\begin{aligned}
G_{++}(x, x') &= i \frac{\partial}{\partial J_+(x)} \frac{\partial}{\partial J_+(x')} Z \Big|_{J_+=J_-=0} = i \langle 0, \text{in} | T \phi_H(x) \phi_H(x') | 0, \text{in} \rangle \\
G_{--}(x, x') &= i \frac{\partial}{\partial J_-(x)} \frac{\partial}{\partial J_-(x')} Z \Big|_{J_+=J_-=0} = i \langle 0, \text{in} | \hat{T} \phi_H(x) \phi_H(x') | 0, \text{in} \rangle \\
G_{+-}(x, x') &= i \frac{\partial}{\partial J_+(x)} \frac{\partial}{\partial J_-(x')} Z \Big|_{J_+=J_-=0} = i \langle 0, \text{in} | \phi_H(x') \phi_H(x) | 0, \text{in} \rangle \\
G_{-+}(x, x') &= i \frac{\partial}{\partial J_-(x)} \frac{\partial}{\partial J_+(x')} Z \Big|_{J_+=J_-=0} = i \langle 0, \text{in} | \phi_H(x) \phi_H(x') | 0, \text{in} \rangle, \quad (2.10)
\end{aligned}$$

que corresponden, en la teoría libre, a los propagadores de Feynman, Dyson, y de Wightman de frecuencias positivas y negativas, respectivamente. En consecuencia, a diferencia de la formulación usual, en este nuevo formalismo las funciones de Green tienen un nuevo índice, que indica los posibles ordenamientos temporales a lo largo del camino temporal cerrado. Así, por ejemplo, hay cuatro funciones de Green de dos puntos, que pueden representarse en una matriz G_{ab} de 2×2 .

La funcional $Z[J_+, J_-]$ tiene también una representación funcional

$$Z[J_+, J_-] = \int D\phi_+ D\phi_- e^{\frac{i}{\hbar}(S[\phi_+] + \int d^4x J_+(x)\phi_+(x))} e^{-\frac{i}{\hbar}(S[\phi_-] + \int d^4x J_-(x)\phi_-(x))}. \quad (2.11)$$

La integral funcional es sobre todas las configuraciones tales que i) $\phi_+ = \phi_-$ en $t = T$, ii) ϕ_+ (ϕ_-) consiste en modos de frecuencia negativa (positiva) en $t \rightarrow -\infty$. Nótese que las integrales funcionales sobre ϕ_+ y ϕ_- en la expresión anterior no son independientes, pues están conectadas por la condición de contorno en la hipersuperficie en común en el futuro remoto. Diferenciando obtenemos los campos clásicos

$$\varphi_{\pm}(x) = \pm \frac{\delta W[J_+, J_-]}{\delta J_{\pm}(x)} = \pm \frac{\langle 0, \text{in} | \phi_{\pm}(x) | 0, \text{in} \rangle}{\langle 0, \text{in} | 0, \text{in} \rangle}, \quad (2.12)$$

cuya acción efectiva de camino temporal cerrado es

$$S_{\text{ef}}[\varphi_+, \varphi_-] = W[J_+, J_-] - \int d^4x J_+(x)\varphi_+(x) + \int d^4x J_-(x)\varphi_-(x), \quad (2.13)$$

que conduce a las ecuaciones para los campos medios (en presencia de fuentes)

$$\frac{\delta S_{\text{ef}}[\varphi_+, \varphi_-]}{\delta \varphi_{\pm}} = \mp J_{\pm}. \quad (2.14)$$

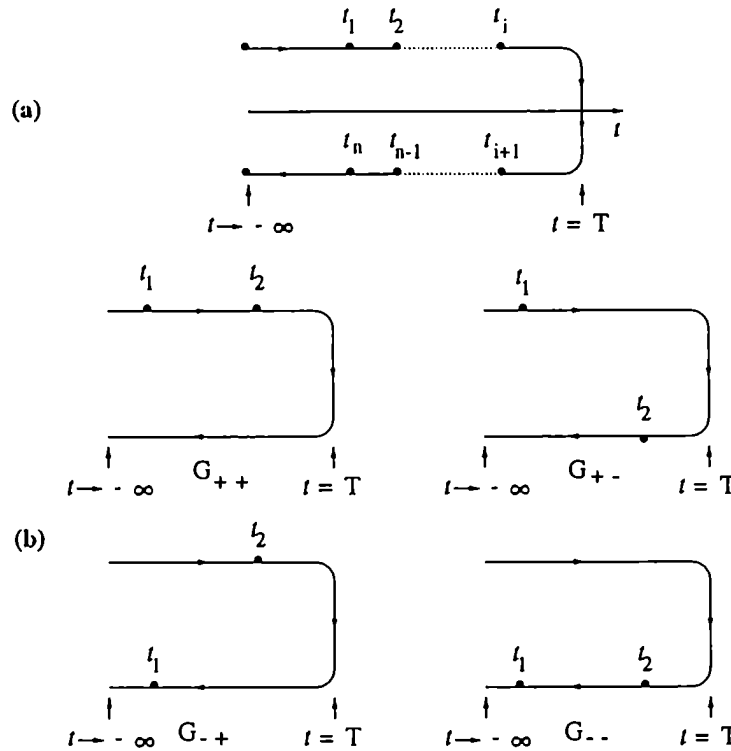


Fig. 2.1: (a) El camino temporal cerrado en el plano complejo t para la evolución de valores de expectación. Cualquier punto en la rama positiva ($t \rightarrow -\infty, t = T$) corresponde a un instante anterior a cualquier punto en la rama negativa ($t = T, t \rightarrow -\infty$). (b) Los cuatro posibles ordenamientos temporales (t_1, t_2) en los argumentos de las funciones de Green de dos puntos $G(x, y) = G(t_1, \mathbf{x}; t_2, \mathbf{x}')$, correspondientes a $G_{++}(x, x')$, $G_{+-}(x, x')$, $G_{-+}(x, x')$ y $G_{--}(x, x')$.

Si las fuentes son iguales, $J_+ = J_- \equiv J$, entonces los campos medios también lo son, $\varphi_+ = \varphi_- \equiv \varphi$, que es el valor de expectación del campo en representación de Heisenberg con respecto al estado evolucionado a partir del $|0, in\rangle$ en presencia de la fuente J . En particular, para el caso sin fuentes, obtenemos las ecuaciones dinámicas del valor de expectación $\varphi[J = 0]$. Notar que estas ecuaciones dinámicas no resultan inmediatamente de un simple principio variacional, a diferencia de las ecuaciones in-out. Estrictamente hablando, tenemos ecuaciones efectivas para valores medios φ , pero no tenemos una acción efectiva para los mismos. Dos puntos importantes a recalcar son los siguientes: primero, φ es real, por ser un valor de expectación. Esto implica que las ecuaciones de movimiento que satisface también son reales. Segundo, dichas ecuaciones de movimiento tienen una estructura causal, lo cual permite analizar problemas a condiciones iniciales [25].

La acción efectiva de camino temporal cerrado también admite una representación funcional

$$S_{\text{ef}}[\varphi_+, \varphi_-] = -i\hbar \ln \left\{ \int_{\text{CTC}} D\phi_+ D\phi_- \exp \left[\frac{i}{\hbar} \left(S[\phi_+] - S[\phi_-] - \frac{\delta S_{\text{ef}}}{\delta \varphi_a} (\phi_a - \varphi_a) \right) \right] \right\}, \quad (2.15)$$

donde $a = \pm$ y el símbolo CTC denota que la integral funcional debe hacerse con las particulares condiciones de contorno del camino temporal cerrado. La expansión en lazos de esta ecuación integro-diferencial es

$$S_{\text{ef}}[\varphi_+, \varphi_-] = S[\varphi_+] - S[\varphi_-] - \frac{i\hbar}{2} \ln \det(A_{ab}^{-1}) + \Gamma_1[\varphi_+, \varphi_-], \quad (2.16)$$

donde A_{ab} es la matriz de segundas derivadas de la acción clásica. El segundo término es la corrección a un lazo, y el tercero a lazos superiores.

Formalmente la acción efectiva de camino temporal cerrado es análoga a la usual, excepto que los propagadores son ahora matrices 2×2 que satisfacen las condiciones de contorno arriba mencionadas. Correspondientemente, las reglas de Feynman son las mismas, pero cada línea de un propagador en un diagrama puede corresponder a cualquiera de las cuatro componentes de las funciones de Green de dos puntos. Además es la generadora de diagramas de una partícula irreducible.

Como vimos, la acción efectiva da la dinámica para valores medios de la teoría, es decir para las funciones de Green de un punto. Si se deseara además estudiar la dinámica de las funciones de Green de dos o más puntos (varianzas, etc.), entonces sería necesario generalizar la definición de la función de partición Z introduciendo múltiples fuentes no locales ($K_2(x, y), K_3(x, y, z)$, etc.), lo que conduce a nuevas representaciones de la acción efectiva [26, 27]. A partir de ellas es posible derivar el conjunto (infinito) de ecuaciones acopladas para la dinámica de las funciones de Green, que es el análogo en teoría cuántica de campos de la jerarquía BBGKY de la mecánica estadística. El truncamiento a más bajo orden corresponde a la dinámica de los valores medios.

Existen dos métodos alternativos para obtener las mismas ecuaciones de movimiento reales y causales para los valores medios, para el caso en el que el estado inicial sea el vacío. El primer método consiste en calcular la acción efectiva usual en signatura euclídea $S_{\text{ef}}^E[\varphi]$, calcular luego la ecuación de movimiento euclídea $\delta S_{\text{ef}}^E[\varphi]/\delta \varphi = 0$, y en la expresión final ir a signatura

lorentziana reemplazando todas las funciones de Green euclídeas por las funciones de Green retardadas, $\square_E^{-1} \rightarrow \square_{\text{ret}}^{-1}$. Este reemplazo no debe ser hecho a nivel de la acción, sino a nivel de las ecuaciones de movimiento. En esta forma se obtienen las mismas ecuaciones para valores medios deducidas mediante el formalismo in-in [28]. El segundo método parte del cálculo de la acción efectiva usual en signatura lorentziana, es decir la acción efectiva in-out. Se procede a hallar las correspondientes ecuaciones de movimiento que, según vimos, no son ni reales ni causales. Finalmente se reemplazan todos los propagadores por dos veces su parte real y causal. Así se llega a las mismas ecuaciones dinámicas anteriores [29]. A modo de ejemplo, en el capítulo 5 calcularemos mediante estos tres métodos las ecuaciones efectivas (reales y causales) para el campo electromagnético en electrodinámica cuántica.

2.3 La acción efectiva de Vilkovisky-DeWitt

Todas las distintas acciones efectivas definidas hasta ahora presentan un problema en su propia definición, que se pone de manifiesto cuando la teoría en consideración es de medida. Dicha patología consiste en la dependencia de la acción y de las ecuaciones de movimiento en la elección de las condiciones de medida.

Una parte del problema es el hecho que la acción no es invariante de medida. Usualmente, cuando se fija la medida para los campos cuánticos, automáticamente se fija una medida para los campos medios. Existe sin embargo la posibilidad de fijar la medida de los primeros sin fijar la de los segundos, es decir obtener una acción efectiva invariante de medida. Ello se logra utilizando el método de cuantización mediante campos de fondo [30]. La otra parte del problema radica en el hecho que la acción efectiva así obtenida todavía depende *en forma paramétrica* de la elección de las condiciones de medida para las fluctuaciones. Diferentes elecciones de estas condiciones conducen a diferentes acciones efectivas covariantes.

Una manifestación más general de la no unicidad de la acción efectiva es su dependencia en la elección de la parametrización para los campos cuánticos. Este problema es inherente tanto a teorías de medida como a teorías que no son de medida. A modo de ilustración, consideremos un

campo escalar complejo Φ con autointeracción $(\Phi^\dagger\Phi)^2$ en espacio-tiempo plano. La acción clásica es

$$S = \int d^n x \left[\partial^\mu \Phi^\dagger \partial_\mu \Phi - m^2 \Phi^\dagger \Phi - \frac{\lambda}{6} (\Phi^\dagger \Phi)^2 \right]. \quad (2.17)$$

Dos posibles parametrizaciones del campo son en términos de su parte real e imaginaria, $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi_1 + i\phi_2)$, o en términos de su módulo y fase, $\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}}\rho e^{i\theta}$. En la primera parametrización, la acción clásica es

$$S_1[\phi_1, \phi_2] = \int d^n x \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \phi^a \partial_\mu \phi^a - \frac{1}{2} m^2 \phi^a \phi^a - \frac{\lambda}{4!} (\phi^2 \phi^2)^2 \right], \quad (2.18)$$

donde los índices repetidos denotan suma sobre 1 y 2. En la segunda parametrización, la acción clásica es

$$S_2[\rho, \theta] = \int d^n x \left[\frac{1}{2} \partial^\mu \rho \partial_\mu \rho + \frac{1}{2} \rho^2 \partial^\mu \theta \partial_\mu \theta - \frac{1}{2} m^2 \rho^2 - \frac{\lambda}{4!} \rho^4 \right]. \quad (2.19)$$

Si bien S_1 y S_2 corresponden simplemente a distintas parametrizaciones de la misma teoría clásica, las respectivas acciones efectivas son distintas. En [32] se calcula el potencial efectivo a un lazo y se obtienen resultados distintos. Para este ejemplo en particular, si nos concentramos en la teoría no interactuante ($\lambda = 0$), en la primera parametrización la acción efectiva a un lazo es exacta, pues la teoría es cuadrática, mientras que en la segunda parametrización la acción clásica no es cuadrática, y por lo tanto la aproximación a un lazo no es exacta. En general, la diferencia entre las acciones efectivas calculadas en distintas parametrizaciones es proporcional al extremal, es decir, a las ecuaciones de movimiento clásicas.

Otro ejemplo de la dependencia ante reparametrizaciones y fijado de medida se encuentra al calcular el potencial efectivo $V_\beta(\varphi)$ dependiente de temperatura en electrodinámica escalar, y la correspondiente temperatura crítica $\beta_c = (kT_c)^{-1}$, definida como el valor de β para el cual la masa efectiva $m^2(\beta) = 2\partial^2 V_\beta / \partial \varphi^2|_{\varphi=0}$ se anula [33]. En la parametrización "cartesiana" (ϕ_1, ϕ_2) para el campo escalar, el potencial efectivo a un lazo depende de los parámetros de fijado de medida, mientras que la temperatura crítica resulta independiente de dichos parámetros. Por otro lado, en la parametrización "polar" (ρ, θ) , tanto el potencial como la temperatura crítica resultan independientes del fijado de medida [34]. Sin embargo, el valor de β_c que se obtiene en

esta parametrización difiere del obtenido en la parametrización anterior. Se debe decidir entonces cuál es la respuesta "correcta". Para que el cálculo en lazos sea consistente se debe verificar que los efectos de orden superior sean despreciables en ambas parametrizaciones. Ello se ha verificado en la parametrización (ϕ_1, ϕ_2) , pero no así en la parametrización (ρ, θ) , debido a problemas con la renormalizabilidad. En conclusión, no se debe confiar en el cálculo de la temperatura crítica en la parametrización polar, pues los efectos de orden superior no se pueden despreciar consistentemente.

A pesar de la no unicidad de la acción efectiva usual, los elementos de matriz de dispersión son invariantes ante reparametrizaciones de los campos y fijados de medida. Ello se debe al hecho que la matriz de dispersión se obtiene a partir de la acción efectiva evaluada en la capa de masa, de modo que sí está unívocamente definida.

Existe una definición de una acción efectiva que resuelve los problemas de la dependencia ante reparametrizaciones y el fijado de medida de la acción efectiva usual, y que se conoce con el nombre de acción efectiva de Vilkovisky-DeWitt [36]. Los detalles de la definición y de sus propiedades pueden encontrarse en estas referencias, aquí daremos una somera descripción del formalismo.

Representemos por ϕ^i ³ a un campo bosónico genérico cuya acción clásica es $S[\phi]$. La formulación de Vilkovisky-DeWitt (VDW) es geométrica: se considera que el campo ϕ^i es una coordenada en una variedad de campos \mathcal{F} , y se asocia a dicha variedad una conexión afín $\Gamma_{mn}^i(\phi)$ y una métrica G_{mn} . Una reparametrización del campo equivale entonces a un difeomorfismo en la variedad \mathcal{F} . A diferencia de la funcional generatriz usual $Z[J]$, en la cual el campo se acopla linealmente con la fuente J (ver ec.(2.2)), en el nuevo formalismo un acoplamiento del tipo $\phi^i J_i$ no es covariante, por ser el campo una coordenada. Se debe entonces modificar la definición de funcional generatriz.

Teniendo una conexión podemos construir una cantidad $\sigma^i(\phi, \varphi)$ que depende de dos puntos en la variedad, el campo cuántico ϕ^i y el campo de fondo φ^i . Está definida como el vector tangente a la geodésica que conecta ϕ y φ , siendo tangente en el punto φ y dirigido de ϕ a φ . Además, es

³Usamos la notación de DeWitt, en la cual el índice i representa tanto un índice continuo (espacio-temporal) como discreto (interno). Indices repetidos denotan una integral sobre los índices continuos y una suma sobre los discretos.

un vector respecto del punto φ y un escalar respecto del punto ϕ . Su expansión en potencias de $(\phi - \varphi)$ es

$$-\sigma^i(\varphi, \phi) = (\phi^i - \varphi^i) + \frac{1}{2}\Gamma_{mn}^i(\varphi)(\phi^m - \varphi^m)(\phi^n - \varphi^n) + \dots \quad (2.20)$$

La propuesta de VDW es reemplazar el acoplamiento (no covariante) $\phi^i J_i$ por $[\varphi^i - \sigma^i(\varphi, \phi)]J_i$, y definir la siguiente funcional generatriz

$$Z^{\text{VDW}}[J] = \int D\phi \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ S[\phi] + [\varphi^i - \sigma^i(\varphi, \phi)]J_i \right\}. \quad (2.21)$$

La definición del campo de fondo φ viene dada por

$$\langle \sigma^i(\varphi, \phi) \rangle = 0. \quad (2.22)$$

Dado que $\sigma^i(\varphi, \phi)$ es un escalar respecto del punto de integración ϕ , esta definición de campo de fondo es independiente de la parametrización. Notar que cuando $\Gamma_{mn}^i \equiv 0$, esta definición coincide con la definición usual de campo medio (ver ec.(2.3)). Entonces la acción efectiva de Vilkovisky-DeWitt es (compararla con la acción efectiva usual, ec.(2.6))

$$S_{\text{ef}}^{\text{VDW}}[\varphi] = -i\hbar \ln \int D\phi \exp \frac{i}{\hbar} \left\{ S[\phi] + \sigma^i(\varphi, \phi) \frac{\delta S_{\text{ef}}^{\text{VDW}}[\varphi]}{\delta \varphi^i} \right\}. \quad (2.23)$$

Por construcción, esta acción efectiva no depende de la parametrización del campo cuántico ni del fijado de medida. Para definirla completamente falta determinar la conexión afín y la métrica. Para ello Vilkovisky impone tres condiciones sobre la conexión: a) debe determinarse a partir de la acción clásica mediante alguna regla universal; b) debe anularse para un campo libre, en la parametrización en la cual la acción clásica es cuadrática; y c) debe ser "ultralocal", es decir debe contener sólo campos y funciones deltas sin diferenciar.

En muchos casos existe una elección natural para la métrica G_{mn} de la variedad \mathcal{F} , que se lee del término cinético de $S[\phi]$. La conexión, en tales situaciones, es un símbolo de Christoffel,

$$\Gamma_{mn}^i = \frac{1}{2}G^{ik}(\partial_m G_{kn} + \partial_n G_{km} - \partial_k G_{mn}). \quad (2.24)$$

Por ejemplo, en el caso de la electrodinámica escalar que hemos mencionado más arriba, para la parametrización (ϕ_1, ϕ_2) , la componente de la métrica que involucra al campo escalar es $G_{mn} = \delta_{mn}$, ya que dicha parametrización es el análogo a coordenadas cartesianas en la variedad \mathcal{F} ⁴. Sin embargo, hay muchos otros casos en los cuales la elección no es unívoca, quedando parámetros arbitrarios en la definición de la métrica G_{mn} [37, 38]. Entonces, si bien $S_{\text{ef}}^{\text{VDW}}$ resuelve el problema de la no invariancia ante reparametrizaciones y de la dependencia en el fijado de medida para las fluctuaciones cuánticas, mantiene cierta arbitrariedad en la elección de la métrica y la conexión afín: la acción de Vilkovisky-DeWitt no está unívocamente determinada. Estos parámetros arbitrarios aparecen tanto en la acción como en las ecuaciones de movimiento para los campos de fondo. Por lo tanto, la acción de VDW no es una solución satisfactoria puesto que no es invariante ante el fijado de la métrica de la variedad de campos. Para decirlo en forma cruda, en este sentido, el formalismo de VDW es más un placebo que una panacea [39].

Ahora bien, ¿cuál es la verdadera necesidad de tener un formalismo para una acción efectiva que sea invariante ante el fijado de medida? La dependencia en los parámetros de fijado de medida de la acción efectiva (in-out o in-in) y de las ecuaciones de movimiento para los campos medios no es en sí necesariamente inaceptable, pues bien podría ocurrir que las distintas elecciones describan una única y misma teoría. El punto importante es identificar las verdaderas cantidades físicas observables, las cuales, naturalmente, no deberían depender de dichos parámetros arbitrarios. Un ejemplo de esto es la temperatura crítica β_c en electrodinámica escalar, que supuestamente es un observable. Otro claro ejemplo se encuentra al calcular el potencial efectivo para un campo de Higgs (que es una teoría de medida) [40]. Tanto el potencial efectivo como el estado base dependen del parámetro λ con el cual se fija la medida de las fluctuaciones cuánticas, es decir $V = V(\phi, \lambda)$ y $\bar{\phi} = \bar{\phi}(\lambda)$. Sin embargo, todas las cantidades físicas son independientes de λ . Por ejemplo, el valor del mínimo del potencial, $V(\bar{\phi}, \lambda)$, que está relacionado con la escala de ruptura de simetría, y la masa del Higgs, $m^2(\bar{\phi}, \lambda)$, resultan independientes del parámetro arbitrario pues la dependencia explícita en λ se cancela con la dependencia implícita a través de $\bar{\phi}$ gracias a las

⁴En coordenadas cartesianas, la acción efectiva de Vilkovisky-DeWitt para teorías de Yang-Mills es igual a la acción efectiva usual calculada en la medida de Landau-DeWitt [35]. Dado que la temperatura crítica β_c obtenida mediante la acción efectiva usual en parametrización cartesiana es independiente del fijado de medida, entonces se sigue que la acción de Vilkovisky-DeWitt reproducirá dicho resultado, para *todas* las parametrizaciones.

llamadas identidades de Nielsen [41]

$$\frac{dV}{d\lambda} = \left. \frac{\partial V}{\partial \lambda} \right)_{\bar{\phi}} + \left. \frac{\partial V}{\partial \bar{\phi}} \right)_{\lambda} \frac{d\bar{\phi}}{d\lambda} = 0 \quad \frac{dm^2}{d\lambda} = \left. \frac{\partial m^2}{\partial \lambda} \right)_{\bar{\phi}} + \left. \frac{\partial m^2}{\partial \bar{\phi}} \right)_{\lambda} \frac{d\bar{\phi}}{d\lambda} = 0. \quad (2.25)$$

En el capítulo 6 calcularemos la acción efectiva (in-out/in-in) para la gravedad, que es una teoría de medida. Si bien dicha acción y las ecuaciones del movimiento para el fondo gravitatorio dependen del fijado de medida, veremos que un observable particular (las geodésicas de una partícula de prueba) es independiente de los parámetros de medida. Es de esperar que el mismo cálculo realizado a partir de la acción efectiva de Vilkovisky-DeWitt conduzca a una cancelación de los parámetros de la métrica en el espacio de campos y lleve a los mismos resultados obtenidos con la acción efectiva (in-out/in-in).



Capítulo 3

La acción efectiva de granulado grueso

En este capítulo definimos la acción efectiva de granulado grueso, que es de especial utilidad en el estudio de transiciones de fase en teoría cuántica de campos. Partimos de la acción de camino temporal cerrado (CTC) e integramos las fluctuaciones cuánticas de longitudes de onda menores que un valor crítico. Derivamos una ecuación exacta CTC del grupo de renormalización, que describe cómo la acción efectiva depende de la escala de granulado grueso [42]. Esta es una complicada ecuación integro-diferencial que requiere de métodos de aproximación. Mediante una expansión en derivadas del campo (aproximación adiabática) analizamos la forma en que la acción efectiva de granulado grueso fluye ante el grupo de renormalización. También discutimos los aspectos estocásticos contenidos en la acción de granulado grueso.

3.1 Su definición

El estudio de transiciones de fase en teoría cuántica de campos es de gran interés en cosmología y física de partículas. Los primeros trabajos sobre el tema se basaron en el uso del potencial efectivo, que se obtiene a partir de la acción efectiva al evaluarla sobre configuraciones constantes. Dicho potencial es útil sólo en situaciones cuasiestáticas, y con él no es posible analizar los aspectos fuera

de equilibrio de la transición. Para ello es necesario considerar la acción efectiva completa, y en particular su versión de camino temporal cerrado.

Usualmente las transiciones de fase ocurren vía la formación y crecimiento de dominios espaciales. Dentro de estos dominios, el parámetro de orden de la transición evoluciona dinámicamente y el interés yace en calcular esa evolución temporal. La forma habitual de hacerlo es partir de la acción efectiva CTC y evaluarla para configuraciones de campo que dependan sólo del tiempo. Presumiblemente dichas configuraciones corresponden al parámetro de orden dentro de un dominio típico [43, 44, 45]. Nosotros procederemos de una manera diferente, inspirándonos en la metodología que se sigue en el contexto de materia condensada [14, 46]. Haremos un granulado grueso del campo hasta una escala de longitud Λ^{-1} comparable con el tamaño inicial de un dominio. Por simplicidad consideraremos un campo escalar autointeractuante $\lambda\phi^4$ en espacio-tiempo plano. Definimos una acción efectiva de granulado grueso CTC, $S_\Lambda(\phi_+, \phi_-)$, que es básicamente la acción CTC en la cual solamente ciertos modos (los de $|\mathbf{q}| > \Lambda$) han sido integrados. Su definición es ¹

$$e^{iS_\Lambda(\phi_+, \phi_-)} \equiv \int_{\text{CTC}} \prod_{\Lambda_0 > |\mathbf{q}| > \Lambda} \mathcal{D}[\phi_+(\mathbf{q}, t)] \mathcal{D}[\phi_-(\mathbf{q}, t)] e^{iS_{\text{cl}}(\phi_+, \phi_-)}, \quad (3.1)$$

donde $S_{\text{cl}}(\phi_+, \phi_-) = S_{\text{cl}}(\phi_+) - S_{\text{cl}}(\phi_-)$ es la diferencia de las acciones clásicas en las dos ramas del camino temporal cerrado. El granulado grueso lo logramos mediante una frecuencia de corte Λ . Λ_0 es una frecuencia de corte ultravioleta que usamos para regularizar. Las integrales funcionales sobre los modos de longitud de onda corta se hacen siguiendo la prescripción de integración en el camino temporal cerrado: los campos ϕ_+ y ϕ_- tiene frecuencias negativas y positivas respectivamente, en el pasado $-T$, y coinciden en el futuro T . Como resultado de la traza sobre los modos de longitud de onda corta (grados de libertad del “entorno”), la acción efectiva de granulado grueso (que depende de los modos de longitud de onda larga, el “sistema”) posee una parte imaginaria, relacionada con el ruido, y una parte real, asociada a la disipación.

Esta acción efectiva de granulado grueso fue introducida originalmente en [47] para estudiar cosmología inflacionaria, y evaluada en forma perturbativa en [48] para analizar la decoherencia del sector de longitudes de onda larga en la teoría $\lambda\phi^4$. En espíritu es similar a la versión

¹De ahora en más usaremos unidades $\hbar = c = 1$.

euclídea propuesta con anterioridad [49, 50, 51, 52, 53, 54, 55]. La principal diferencia entre ambas acciones es que la acción de granulado grueso euclídea promedia el campo sobre volúmenes espacio-temporales, mientras que la versión de camino temporal cerrado lo hace sobre volúmenes espaciales, y por lo tanto, es más adecuada para analizar situaciones fuera de equilibrio. Ambas versiones tienen en común el hecho de que interpolan entre la teoría desnuda en $\Lambda = \Lambda_0$ y la teoría física en la escala de granulado grueso. Existen otras versiones de acciones efectivas de granulado grueso, como por ejemplo la de [56], que interpola entre la teoría física a temperatura nula $T = 0$ y la teoría física a temperatura finita $T \neq 0$.

3.2 Aproximación a un lazo

Al igual que con las diferentes versiones de acciones efectivas del capítulo anterior, en el presente caso es también necesario utilizar métodos de aproximación. Un método posible es hacer perturbaciones en la constante de acoplamiento λ , suponiéndola pequeña [48]. Otra posibilidad, que seguiremos aquí a modo ilustrativo, es hacer una aproximación a un lazo, en cuyo caso la acción puede escribirse como $S_\Lambda(\phi_+, \phi_-) = S_{cl}(\phi_+) - S_{cl}(\phi_-) + \Delta S_\Lambda(\phi_+, \phi_-)$, donde el último término es lineal en \hbar . Para ello expresamos el campo como $\phi_\pm \rightarrow \phi_\pm(t) + \varphi_\pm$, donde las fluctuaciones φ_\pm contienen modos espaciales con $|\mathbf{q}| > \Lambda$. Notar que estamos asumiendo que el único modo con $|\mathbf{q}| < \Lambda$ es el modo espacialmente homogéneo ($\mathbf{q} = 0$), que depende del tiempo. La corrección a un lazo es entonces

$$e^{i\Delta S_\Lambda(\phi_+(t), \phi_-(t))} = \int_{CTC} \prod_{\Lambda_0 > |\mathbf{q}| > \Lambda} \mathcal{D}[\varphi_+] \mathcal{D}[\varphi_-] e^{\frac{i}{2} \int dt \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left[\varphi_+ \frac{\delta^2 S_{cl}}{\delta \phi_+ \delta \phi_+} \varphi_+ - \varphi_- \frac{\delta^2 S_{cl}}{\delta \phi_- \delta \phi_-} \varphi_- \right]} \times e^{\frac{i}{2} \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int dt \frac{d}{dt} [\varphi_+ \dot{\varphi}_+ - \varphi_- \dot{\varphi}_-]}, \quad (3.2)$$

donde las derivadas funcionales están evaluadas en $\varphi_\pm = 0$. La acción para las fluctuaciones cuánticas es la de un campo escalar libre con una masa $M_\pm^2 = V''(\phi_\pm)$, donde V es el potencial en la acción clásica desnuda. Sus modos espaciales de Fourier son, entonces, osciladores armónicos

con una frecuencia que depende del tiempo, $w_{q,\pm}^2(t) = q^2 + V''(\phi_{\pm}(t))$, con $q = |\mathbf{q}|$. Al ser la integral funcional cuadrática, su cálculo es sencillo, resultando

$$\Delta S_{\Lambda}(\phi_+(t), \phi_-(t)) = \frac{i}{2} \int_{\Lambda_0 > |\mathbf{q}| > \Lambda} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \ln[g_-(\mathbf{q}, T)g_+(\mathbf{q}, T) - g_+(\mathbf{q}, T)g_-(\mathbf{q}, T)], \quad (3.3)$$

donde los modos g_{\pm} son soluciones de $\ddot{g}_{\pm}(\mathbf{q}, t) + w_{q,\pm}^2(t)g_{\pm}(\mathbf{q}, t) = 0$ satisfaciendo las condiciones CTC en el pasado y teniendo una normalización arbitraria en el futuro.

La ecuación de movimiento real y causal para el campo $\phi(t)$, se obtiene derivando funcionalmente la acción respecto a ϕ_+ y poniendo $\phi_+ = \phi_- = \phi$. Obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{\phi} + V'(\phi) + \frac{1}{2}V'''(\phi) \int_{\Lambda_0 > |\mathbf{q}| > \Lambda} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} |g(\mathbf{q}, t)|^2 &= 0 \\ \ddot{g}(\mathbf{q}, t) + (q^2 + V''(\phi))g(\mathbf{q}, t) &= 0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Aún en la aproximación a un lazo, la acción efectiva es un objeto muy complicado y debemos recurrir a aproximaciones adicionales para obtener resultados analíticos. La más simple es la aproximación adiabática [1], en la cual se desprecian las excitaciones del campo φ_{\pm} debidas a la dependencia temporal del campo de fondo ϕ_{\pm} . Empezamos entonces por escribir los modos en la forma

$$g_{\pm}(\mathbf{q}, t) = \frac{1}{\sqrt{2W_q(\phi_{\pm}(t))}} e^{\pm i \int_{-\tau}^t dt' W_q(\phi_{\pm}(t'))}, \quad (3.5)$$

donde las funciones $W_q(\phi_{\pm})$ satisfacen

$$W_q^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\ddot{W}_q}{W_q} - \frac{3}{2} \left(\frac{\dot{W}_q}{W_q} \right)^2 \right) = w_q^2. \quad (3.6)$$

La aproximación adiabática consiste en resolver esta ecuación en una expansión en derivadas del campo de fondo. El resultado es

$$W_q^2 = q^2 + V'' + \frac{5}{16} \left[\left(\frac{V'''}{q^2 + V''} \right)^2 - \frac{V''''}{4(q^2 + V''')} \right] \dot{\phi}^2 - \frac{V'''}{4(q^2 + V''')} \ddot{\phi} + \dots, \quad (3.7)$$

donde los términos suspensivos denotan derivadas de orden superior. Entonces la acción de granulado grueso CTC puede expresarse en la forma ² $\Delta S_\Lambda(\phi_+, \phi_-) = \Delta S_\Lambda(\phi_+) - \Delta S_\Lambda(\phi_-)$, donde

$$\Delta S_\Lambda(\phi) = \frac{1}{2} \int dt \int_\Lambda^{\Lambda_0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(-\sqrt{q^2 + V''} + \frac{\dot{\phi}^2}{32} \frac{V'''^2}{(q^2 + V'')^{5/2}} \right). \quad (3.8)$$

Es importante recalcar que en esta aproximación la acción de granulado grueso CTC se separa en dos partes, una para cada rama del camino temporal cerrado, y no hay términos que acoplen ambas ramas. Por lo tanto, se pierden los importantes aspectos estocásticos que están contenidos en la acción de camino temporal cerrado.

Incluyendo la parte clásica, la acción efectiva total resulta

$$S_\Lambda(\phi) = \int dt \left(-V_\Lambda(\phi) + \frac{1}{2}(1 + Z_\Lambda(\phi))\dot{\phi}^2 + \dots \right), \quad (3.9)$$

donde

$$\begin{aligned} V_\Lambda &= V + \frac{1}{2} \int_\Lambda^{\Lambda_0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \sqrt{q^2 + V''} \\ &= V + \frac{1}{4\pi^2} \left[\frac{\Lambda_0}{4} \sqrt{\Lambda_0^2 + V''} \left(\frac{V''}{2} + \Lambda_0^2 \right) - \frac{V''^2}{8} \ln(\Lambda_0 + \sqrt{\Lambda_0^2 + V''}) \right. \\ &\quad \left. - \frac{\Lambda}{4} \sqrt{\Lambda^2 + V''} \left(\frac{V''}{2} + \Lambda^2 \right) + \frac{V''^2}{8} \ln(\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + V''}) \right], \end{aligned} \quad (3.10)$$

y

$$Z_\Lambda = \frac{1}{32} \int_\Lambda^{\Lambda_0} \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{V'''^2}{(q^2 + V'')^{5/2}} = \frac{1}{192\pi^2} \frac{V'''^2}{V''} \left[\frac{\Lambda_0^3}{(\Lambda_0^2 + V'')^{3/2}} - \frac{\Lambda^3}{(\Lambda^2 + V'')^{3/2}} \right]. \quad (3.11)$$

Mientras que la función $Z_\Lambda(\phi)$ es finita cuando $\Lambda_0 \rightarrow \infty$, el potencial $V_\Lambda(\phi)$ diverge en el UV. Para renormalizar, escribimos el potencial desnudo a un lazo en la forma $V(\phi) = \frac{1}{2}(m_R^2 + \delta m^2)\phi^2 + \frac{1}{4!}(\lambda_R + \delta\lambda)\phi^4$, donde la masa renormalizada y la constante de acoplamiento renormalizada están definidas como

$$m_R^2 \equiv \left. \frac{\partial^2 V_\Lambda}{\partial \phi^2} \right|_{\Lambda=\phi=0}, \quad \lambda_R \equiv \left. \frac{\partial^4 V_\Lambda}{\partial \phi^4} \right|_{\Lambda=\phi=0}, \quad (3.12)$$

²Omitimos un término de superficie evaluado en el tiempo final T .

y los contratérminos son

$$\begin{aligned}\delta m^2 &= -\frac{\lambda_R}{32\pi^2} \left[\frac{m_R^2}{2} + 2\Lambda_0^2 + m_R^2 \ln\left(\frac{m_R^2}{4\Lambda_0^2}\right) \right] \\ \delta\lambda &= -\frac{3\lambda_R^2}{32\pi^2} \left[2 + \lambda_R^2 \ln\left(\frac{m_R^2}{4\Lambda_0^2}\right) \right].\end{aligned}\quad (3.13)$$

Entonces el potencial renormalizado es

$$\begin{aligned}V_\Lambda^{\text{ren}}(\phi) &= \frac{1}{2}m_R^2\phi^2\left(1 - \frac{\lambda_R}{64\pi^2}\right) + \frac{1}{4!}\lambda_R\phi^4\left(1 - \frac{3\lambda_R}{16\pi^2}\right) \\ &\quad + \frac{1}{32\pi^2} \left[-\Lambda(2\Lambda^2 + m_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_R\phi^2)\sqrt{\Lambda^2 + m_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_R\phi^2} \right. \\ &\quad \left. + (m_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_R\phi^2)^2 \ln\left(\frac{\Lambda + \sqrt{\Lambda^2 + m_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_R\phi^2}}{m_R}\right) \right],\end{aligned}\quad (3.14)$$

y la renormalización de la función de onda es

$$Z_\Lambda^{\text{ren}}(\phi) = \frac{1}{192\pi^2} \frac{\lambda_R^2\phi^2}{m_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_R\phi^2} \left[1 - \frac{\Lambda^3}{(\Lambda^2 + m_R^2 + \frac{1}{2}\lambda_R\phi^2)^{3/2}} \right].\quad (3.15)$$

A partir de las ecuaciones (3.10) y (3.11), es inmediato obtener el flujo con la escala de granulado grueso del potencial efectivo V_Λ y de la renormalización de la función de onda Z_Λ , en la aproximación a un lazo,

$$\begin{aligned}\Lambda \frac{dV_\Lambda}{d\Lambda} &= -\frac{\Lambda^3}{4\pi^2} \sqrt{\Lambda^2 + V''} \\ \Lambda \frac{dZ_\Lambda}{d\Lambda} &= -\frac{\Lambda^3}{64\pi^2} \frac{V'''^2}{(\Lambda^2 + V'')^{5/2}}.\end{aligned}\quad (3.16)$$

La ecuación para el potencial efectivo fue obtenida con anterioridad por otros autores usando una transformación de bloques (emparentada con los bloques de espín en el modelo de Ising) [57].

El estudio del potencial V_Λ muestra que es posible tener una estructura no trivial de dominios aún en la fase simétrica de la teoría ($m_R^2 > 0$) [57]. En efecto, para cierto rango de los parámetros de la teoría puede ocurrir que, a pesar que $m_R^2 > 0$, el cuadrado de la masa desnuda sea negativo. En este caso, para escalas Λ mayores que un valor crítico Λ_{cr} , el potencial tiene la forma de un pozo doble con dos mínimos equidistantes del origen $\varphi = 0$, y para escalas menores, un único

mínimo en $\varphi = 0$ (ver la figura 3.1). La interpretación de este hecho es que el campo promediado fluctúa alrededor de cero para escalas $\zeta > \Lambda_{\text{cr}}^{-1}$, o alrededor de dos mínimos no nulos para escalas $\zeta < \Lambda_{\text{cr}}^{-1}$. La fase simétrica contiene entonces dominios de tamaño $\zeta \approx \Lambda_{\text{cr}}^{-1}$. Este fenómeno ocurre en la fase simétrica de la teoría, y no debe ser confundido con la ruptura espontánea de simetría (RES).

Por otra parte, cuando sí hay ruptura espontánea de simetría ($m_R^2 < 0$), tanto el potencial a un lazo como la renormalización de la función de onda desarrollan una parte imaginaria para $\Lambda < \Lambda_{\text{RES}} \equiv \sqrt{-m_R^2 - \frac{1}{2}\lambda_R\phi^2}$. Estas partes imaginarias generan términos no reales en las ecuaciones de movimiento, y son artefactos de la aproximación adiabática. No están relacionadas con los términos de ruido de la acción CTC que hemos mencionado anteriormente. Además la renormalización de la función de onda diverge a medida que Λ se aproxima a Λ_{RES} por arriba. Todo esto muestra claramente que la aproximación adiabática no es adecuada para describir la evolución temporal del parámetro de orden, para escalas próximas o menores que Λ_{RES} .

Como se remarca en [58], una parte imaginaria en el potencial efectivo es una señal de la aparición de inestabilidades que conducen a la formación de dominios cuyo tamaño es por lo menos $\sqrt{-m_R^2}$. Este hecho es analizado en [44], donde se concluye que para teorías débilmente acopladas el tamaño de los dominios puede ser mucho mayor que la distancia de correlación a temperatura cero, $\sqrt{-m_R^2}$.

3.3 Ecuación del grupo de renormalización exacto

En esta sección derivamos una ecuación exacta (no perturbativa) que rige el flujo de la acción de granulado grueso CTC ante el grupo de renormalización. El método que seguimos para derivarla es análogo al de Wegner y Houghton para la versión euclídea de la misma [49]. Escribimos la acción de granulado grueso para una escala $\Lambda - \delta\Lambda$, es decir

$$e^{iS_{\Lambda-\delta\Lambda}(\phi_+, \phi_-)} \equiv \int_{\text{CTC}} \prod_{\Lambda_0 > |\mathbf{q}| > \Lambda - \delta\Lambda} \mathcal{D}[\phi_+(\mathbf{q}, t)] \mathcal{D}[\phi_-(\mathbf{q}, t)] e^{iS_{\text{cl}}[\phi_+, \phi_-]}. \quad (3.17)$$

Los modos a integrarse pueden dividirse en dos partes: unos dentro del intervalo $\Lambda > |\mathbf{q}| > \Lambda - \delta\Lambda$ (que es una especie de “cáscara” en el espacio de momentos) y otros modos cuyos momentos

satisfacen $\Lambda_0 > |\mathbf{q}| > \Lambda$. Expandiendo la acción en potencias de los modos dentro de la cáscara, tenemos

$$e^{iS_{\Lambda-\delta\Lambda}(\phi_+, \phi_-)} = e^{iS_{\Lambda}(\phi_+, \phi_-)} \int_{\text{CTC}} \prod_{\Lambda > |\mathbf{q}| > \Lambda - \delta\Lambda} \mathcal{D}[\phi_+] \mathcal{D}[\phi_-] e^{i(S_1 + S_2 + S_3)} \\ \times e^{\frac{i}{2} \int' \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int dt \frac{d}{dt} (\phi_a(-\mathbf{q}, t) \dot{\phi}_b(\mathbf{q}, t) g_{ab})}, \quad (3.18)$$

donde

$$S_1 = \int dt \int' \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \phi_a(\mathbf{q}, t) \frac{\partial S_{\Lambda}}{\partial \phi_a(-\mathbf{q}, t)} \\ S_2 = \frac{1}{2} \int dt dt' \int' \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \phi_a(\mathbf{q}, t) \frac{\partial^2 S_{\Lambda}}{\partial \phi_a(-\mathbf{q}, t) \partial \phi_b(\mathbf{q}, t')} \phi_b(\mathbf{q}, t'). \quad (3.19)$$

El significado de la prima en las integrales sobre los momentos es que éstas están restringidas a la cáscara. Además, en las derivadas funcionales de S_{Λ} (que contienen modos cuyos vectores de onda satisfacen $|\mathbf{q}| < \Lambda$) los modos dentro de la cáscara se toman iguales a cero. La notación que usamos es la usual para el formalismo de camino temporal cerrado,

$$\phi_a(\mathbf{q}, t) = \begin{pmatrix} \phi_+(\mathbf{q}, t) \\ \phi_-(\mathbf{q}, t) \end{pmatrix} \quad g_{ab} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (3.20)$$

El término S_3 es cúbico en los modos dentro de la cáscara, y puede probarse que no contribuye en el límite $\delta\Lambda \rightarrow 0$ (básicamente porque se está haciendo un cálculo a un lazo para los modos dentro de la cáscara). Las integrales funcionales sobre dichos modos cumplen con las particulares condiciones de contorno del camino temporal cerrado.

Para evaluar las integrales funcionales dividimos al campo en la forma $\phi_a = \bar{\phi}_a + \varphi_a$ e imponemos las condiciones de contorno sobre los campos clásicos $\bar{\phi}_{\pm}$, i.e. se anulan en el pasado $-T$ (frecuencias negativas y positivas respectivamente) y coinciden en una superficie de Cauchy al tiempo T en el futuro. Las fluctuaciones φ_a se anulan tanto en el pasado como en el futuro. Los campos clásicos son solución de

$$\left(-\frac{d^2}{dt^2} - q^2\right) g_{ab} \bar{\phi}_b(\mathbf{q}, t) + \int dt' \frac{\partial^2 S_{\text{int}}}{\partial \varphi_a(-\mathbf{q}, t) \partial \varphi_b(\mathbf{q}, t')} \bar{\phi}_b(\mathbf{q}, t') = 0, \quad (3.21)$$

donde hemos separado a la acción de granulado grueso en la parte cinética y la de interacción, $S_\Lambda(\phi_\pm) = S_{\text{cin}}(\phi_\pm) + S_{\text{int}}(\phi_\pm)$ con

$$S_{\text{cin}} = \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_+)^2 + \frac{i\epsilon}{2}\phi_+^2 \right] - \int d^4x \left[\frac{1}{2}(\partial_\mu \phi_-)^2 - \frac{i\epsilon}{2}\phi_-^2 \right]. \quad (3.22)$$

Al igual que antes, en las derivadas funcionales los modos dentro de la cáscara se toman iguales a cero.

Sean h_a soluciones de la ec.(3.21), que se anulan en el pasado y que satisfacen una normalización arbitraria en el futuro, y sea $\phi(\mathbf{q})$ el valor común que toman los campos en cada rama del camino temporal cerrado en el futuro. Podemos entonces escribir

$$\bar{\phi}_a(\mathbf{q}, t) = \phi(\mathbf{q}) \frac{h_a(\mathbf{q}, t)}{h_a(\mathbf{q}, T)}. \quad (3.23)$$

Integramos primero sobre el valor común $\phi(\mathbf{q})$ y luego procedemos con la integración funcional sobre las fluctuaciones φ_a (ambas son integrales gaussianas con términos de fuente). Finalmente resulta

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial S_\Lambda}{\partial \Lambda} &= -\frac{i\Lambda}{2\delta\Lambda} \int' \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \ln \left(\frac{\dot{h}_+(\mathbf{q}, T)}{h_+(\mathbf{q}, T)} - \frac{\dot{h}_-(\mathbf{q}, T)}{h_-(\mathbf{q}, T)} \right) \\ &+ \frac{\Lambda}{2\delta\Lambda} \int' \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \left(\frac{\dot{h}_+(\mathbf{q}, T)}{h_+(\mathbf{q}, T)} - \frac{\dot{h}_-(\mathbf{q}, T)}{h_-(\mathbf{q}, T)} \right)^{-1} \left(\int dt \frac{h_a(\mathbf{q}, t)}{h_a(\mathbf{q}, T)} \frac{\partial S_\Lambda}{\partial \varphi_a(-\mathbf{q}, t)} \right)^2 \\ &- \frac{i\Lambda}{2\delta\Lambda} \ln \det'(A_{ab}) \\ &+ \frac{\Lambda}{2\delta\Lambda} \int dt \int dt' \int' \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{\partial S_\Lambda}{\partial \varphi_a(\mathbf{q}, t)} A_{ab}^{-1}(-\mathbf{q}, t; \mathbf{q}, t') \frac{\partial S_\Lambda}{\partial \varphi_b(\mathbf{q}, t')}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

La matriz de 2×2 A_{ab} posee los siguientes elementos

$$\begin{aligned} A_{++}(-\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t') &= \left(-\frac{d^2}{dt^2} - q^2 + i\epsilon \right) \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{q}') + \frac{\partial^2 S_{\text{int}}}{\partial \varphi_+(-\mathbf{q}, t) \partial \varphi_+(\mathbf{q}', t')} \\ A_{--}(-\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t') &= \left(\frac{d^2}{dt^2} + q^2 + i\epsilon \right) \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{q} + \mathbf{q}') + \frac{\partial^2 S_{\text{int}}}{\partial \varphi_-(-\mathbf{q}, t) \partial \varphi_-(\mathbf{q}', t')} \\ A_{+-}(-\mathbf{q}, t; \mathbf{q}', t') &= A_{-+}(\mathbf{q}', t'; -\mathbf{q}, t) = \frac{\partial^2 S_{\text{int}}}{\partial \varphi_+(-\mathbf{q}, t) \partial \varphi_-(\mathbf{q}', t')}. \end{aligned} \quad (3.25)$$

El determinante primado debe ser calculado como el producto de los autovalores de A_{ab} en un espacio de funciones cuyos vectores de onda se encuentren dentro de la cáscara ($\Lambda - \delta\Lambda < |\mathbf{q}| < \Lambda$) y satisfagan condiciones de contorno nulas, tanto en el pasado como en el futuro. Condiciones similares se deben usar para calcular la inversa A_{ab}^{-1} .

La ecuación del grupo de renormalización exacto (3.24) es “exacta” en el sentido de que hasta el momento no se ha requerido ninguna aproximación perturbativa. Como ya hemos dicho, es similar a la versión euclídea [49], pero resulta más complicada por las peculiares condiciones de contorno del CTC. Contiene toda la información de la influencia de los modos de longitud de onda corta sobre los de longitud de onda larga, y puede representar un punto de partida para cálculos no perturbativos de decoherencia, disipación, formación de dominios y evolución fuera de equilibrio.

3.3.1 Expansión en derivadas

La ecuación del grupo de renormalización exacto es una ecuación integro-diferencial para la acción efectiva de granulado grueso CTC. La extrema complejidad de la misma hace necesario que se busquen métodos de aproximación para hallar soluciones. En la formulación euclídea a la que hicimos referencia con anterioridad, los métodos más usuales son una expansión en derivadas del campo [59, 60, 61] o un desarrollo en potencias del campo [62]. En esta sección aplicaremos la técnica del desarrollo en derivadas para resolver la ecuación del grupo de renormalización. Este método da un desarrollo local para la acción, y la ec.(3.24) admite una solución de la forma

$$S_{\Lambda}(\phi_+, \phi_-) = S_{\Lambda}(\phi_+) - S_{\Lambda}(\phi_-). \quad (3.26)$$

Claramente esta no es la forma más general que puede adoptar la acción de granulado grueso de camino temporal cerrado, ya que no tiene en cuenta los términos de acoplamiento entre los campos en las dos ramas del camino temporal cerrado, y por ende los términos de disipación y ruido. Como ya vimos en la aproximación a un lazo, la causa de esto es el mismo desarrollo en derivadas, que al ser una expansión local pierde los importantes aspectos estocásticos. Nosotros nos conformaremos con usar este método pues permite en forma sencilla obtener soluciones a la ecuación RG. Para ir más allá de la aproximación en derivadas, se requiere una aproximación no

local de la acción, que incluya términos reales e imaginarios asociados a la disipación y el ruido, respectivamente. Esos términos estarán conectados a nivel de la ecuación RG, y es de esperar que a partir de ella se pueda obtener una relación de fluctuación-disipación no perturbativa, que describa cómo los núcleos de ruido y disipación varían con la escala de granulado grueso (ver la discusión al final del capítulo).

El Ansatz de la ec.(3.26), consistente con la aproximación en derivadas, permite expresar el determinante de la matriz A_{ab} como el producto de dos determinantes, uno para A_{++} y otro para A_{--} . Basándonos en [63], podemos expresar ambos determinantes, $\det' A_{++}$ y $\det' A_{--}$, como el producto sobre los momentos de la cáscara de los modos $h(\mathbf{q}, t)$ evaluados en el tiempo $t = T$. El último término de la ecuación RG puede ser reescrito como

$$\ln \det'(A_{ab}) = \ln[\det'(A_{++})\det'(A_{--})] = \int' \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \ln(h_+(\mathbf{q}, T)h_-(\mathbf{q}, T)). \quad (3.27)$$

Entonces la ecuación RG adopta finalmente la forma

$$\begin{aligned} \Lambda \frac{\partial S_\Lambda}{\partial \Lambda} &= -\frac{i\Lambda}{2\delta\Lambda} \int' \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \ln(h_-(\mathbf{q}, T)\dot{h}_+(\mathbf{q}, T) - h_+(\mathbf{q}, T)\dot{h}_-(\mathbf{q}, T)) \\ &+ \frac{\Lambda}{2\delta\Lambda} \int' \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \left(\frac{\dot{h}_+(\mathbf{q}, T)}{h_+(\mathbf{q}, T)} - \frac{\dot{h}_-(\mathbf{q}, T)}{h_-(\mathbf{q}, T)} \right)^{-1} \left(\int dt \frac{h_a(\mathbf{q}, t)}{h_a(\mathbf{q}, T)} \frac{\partial S_\Lambda}{\partial \varphi_a(-\mathbf{q}, t)} \right)^2 \\ &+ \frac{\Lambda}{2\delta\Lambda} \int dt dt' \int' \frac{d^3 q}{(2\pi)^3} \frac{\partial S_\Lambda}{\partial \varphi_a(\mathbf{q}, t)} A_{ab}^{-1}(-\mathbf{q}, t; \mathbf{q}, t') \frac{\partial S_\Lambda}{\partial \varphi_b(\mathbf{q}, t')}. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Por otro lado, con el Ansatz precedente para la acción, las ecuaciones que satisfacen los modos h_+ y h_- (cc.(3.21)) se simplifican considerablemente, dado que ambas ecuaciones se desacoplan. Lo que todavía resta por probar es que el miembro derecho de la ecuación RG también adopta la forma de una diferencia entre dos contribuciones, una para cada rama del camino temporal cerrado.

Consideramos la siguiente expansión en derivadas del término de interacción

$$S_{\text{int}}(\phi_\pm) = \int d^4 x [-V_\Lambda(\phi_\pm) + \frac{1}{2}Z_\Lambda(\phi_\pm)\dot{\phi}_\pm^2 - \frac{1}{2}Y_\Lambda(\phi_\pm)(\nabla\phi_\pm)^2 + \dots]. \quad (3.29)$$

Dado que el granulado grueso rompe la invariancia Lorentz, hemos tomado diferentes coeficientes para las derivadas temporales y espaciales. El objetivo entonces es utilizar esta propuesta para

la acción y obtener ecuaciones que digan cómo los coeficientes V_Λ , Z_Λ e Y_Λ varían con la escala de granulado grueso. Expandimos los campos alrededor de un fondo dependiente del tiempo $\phi_\pm = \phi_\pm(t) + \varphi_\pm(\mathbf{x}, t)$ y transformamos Fourier en las coordenadas espaciales. Resolvemos luego la ec.(3.21) para los modos a orden cero en las fluctuaciones, es decir, igualamos términos en las ecuaciones para h_\pm que sean independientes de φ_\pm . Dado que la primer derivada funcional de la acción efectiva de granulado grueso (S') es lineal en las fluctuaciones φ_\pm , ponemos $S' = 0$ y mantenemos las contribuciones en S''_{int} que sean independientes de φ_\pm . Luego de un poco de álgebra y derivadas funcionales, obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 S_{\text{int}}}{\partial \varphi(\mathbf{q}, t) \partial \varphi(-\mathbf{q}', t')} &= [-V'' - \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 Z'' - Y q^2 - Z' \dot{\phi} \frac{d}{dt} - Z \frac{d^2}{dt^2} - \ddot{\phi} Z' + \dots] \\ &\times \delta(t - t') \delta^3(\mathbf{q} - \mathbf{q}'), \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde las primas denotas derivación respecto al campo, y los puntos suspensivos denotan términos lineales en las fluctuaciones. En esta expresión y en forma sucesiva, omitiremos los índices \pm , tanto en los campos de fondo $\phi_\pm(t)$, en el potencial $V_\Lambda(\phi_\pm(t))$, como en los factores de la función de onda $Z_\Lambda(\phi_\pm(t))$ e $Y_\Lambda(\phi_\pm(t))$. En esta aproximación en derivadas, las ecuaciones para los modos h_n se localizan y adoptan la forma de ecuaciones tipo oscilador armónico (con una frecuencia que depende del fondo variable $\phi(t)$) con un término con primeras derivadas temporales (tipo disipativo). Si se definen nuevos modos $f(\mathbf{q}, t) \equiv (1 + Z_\Lambda)^{1/2} h(\mathbf{q}, t)$, los términos lineales en derivadas temporales se cancelan y los nuevos modos son osciladores armónicos de frecuencia

$$w_q^2(t) = q^2 \frac{1 + Y_\Lambda}{1 + Z_\Lambda} + \frac{V''_\Lambda}{1 + Z_\Lambda} + \frac{1}{4} \frac{Z'^2_\Lambda}{(1 + Z_\Lambda)^2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \frac{Z'_\Lambda}{1 + Z_\Lambda} \ddot{\phi}. \quad (3.31)$$

Usando la expansión adiabática para los modos,

$$h_\pm(\mathbf{q}, t) = (1 + Z_\Lambda)^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2W_\pm(\mathbf{q}, t)}} e^{\pm i \int_{-\tau}^t W_\pm(\mathbf{q}, t') dt'}, \quad (3.32)$$

podemos evaluar el término logarítmico del lado derecho de la ecuación RG (ver ec.(3.28)). Los otros términos de dicha ecuación son cuadráticos en las fluctuaciones y no contribuyen al orden en que estamos trabajando. Tenemos entonces

$$h_-(\mathbf{q}, T)\dot{h}_+(\mathbf{q}, T) - h_+(\mathbf{q}, T)\dot{h}_-(\mathbf{q}, T) = e^{i \int_{-T}^T [W_+(\mathbf{q}, t) - W_-(\mathbf{q}, t)] dt} \times \left\{ \frac{\left[-\frac{z'_+}{2(1+z_+)} \dot{\phi}_+ - \frac{\dot{w}_+}{2W_+} + iW_+ \right] - \left[-\frac{z'_-}{2(1+z_-)} \dot{\phi}_- - \frac{\dot{w}_-}{2W_-} - iW_- \right]}{2\sqrt{W_+W_-}(1+z_+)(1+z_-)} \right\}_{t=T}. \quad (3.33)$$

Notar que, al igual que en el caso a un lazo, los campos + y - se desacoplan, a menos de un factor evaluado en $t = T$. Este factor es una contribución de superficie que, al tomar logaritmos, es irrelevante para las ecuaciones de movimiento. Por el contrario, el primer factor sí depende de toda la historia de los campos y su forma es consistente con el Ansatz para la acción, ec.(3.26). Entonces podemos escribir la ecuación del grupo de renormalización en la siguiente forma

$$\Lambda \int dt \left\{ \left[-\frac{dV_\Lambda(\phi_+)}{d\Lambda} + \frac{1}{2} \frac{dZ_\Lambda(\phi_+)}{d\Lambda} \dot{\phi}_+^2 \right] - \left[-\frac{dV_\Lambda(\phi_-)}{d\Lambda} + \frac{1}{2} \frac{dZ_\Lambda(\phi_-)}{d\Lambda} \dot{\phi}_-^2 \right] \right\} = \frac{\Lambda}{2\delta\Lambda} \int' \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \int [W_+(\mathbf{q}, t) - W_-(\mathbf{q}, t)] dt. \quad (3.34)$$

En la aproximación adiabática

$$W^2 = A_\Lambda + B_\Lambda \dot{\phi}^2(t) + C_\Lambda \ddot{\phi}(t), \quad (3.35)$$

donde los coeficientes son

$$\begin{aligned} A_\Lambda &= \Lambda^2 \frac{1 + Y_\Lambda}{1 + Z_\Lambda} + \frac{V_\Lambda''}{1 + Z_\Lambda} \\ B_\Lambda &= \frac{Z_\Lambda'^2}{4(1 + Z_\Lambda)^2} + \frac{5A_\Lambda'^2}{16A_\Lambda^2} - \frac{A_\Lambda''}{4A_\Lambda} \\ C_\Lambda &= \frac{Z_\Lambda'}{2(1 + Z_\Lambda)} - \frac{A_\Lambda'}{4A_\Lambda}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Integrando por partes finalmente obtenemos

$$\int dt \left\{ -\Lambda \frac{dV_\Lambda}{d\Lambda} + \frac{1}{2} \Lambda \frac{dZ_\Lambda}{d\Lambda} \dot{\phi}^2 \right\} = \frac{\Lambda^3}{4\pi^2} \int dt \left\{ \sqrt{A_\Lambda} + \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 \left[\frac{B_\Lambda}{\sqrt{A_\Lambda}} - \left(\frac{C_\Lambda}{\sqrt{A_\Lambda}} \right)' \right] \right\}. \quad (3.37)$$

A partir de esta expresión podemos leer la dependencia de V_Λ y Z_Λ con la escala de granulado grueso, esto es

$$\begin{aligned}\Lambda \frac{dV_\Lambda}{d\Lambda} &= -\frac{\Lambda^3}{4\pi^2} \sqrt{\Lambda^2 \frac{1+Y_\Lambda}{1+Z_\Lambda} + \frac{V_\Lambda''}{1+Z_\Lambda}} \\ \Lambda \frac{dZ_\Lambda}{d\Lambda} &= \frac{\Lambda^3}{4\pi^2} \left[\frac{B_\Lambda}{\sqrt{A_\Lambda}} - \left(\frac{C_\Lambda}{\sqrt{A_\Lambda}} \right)' \right].\end{aligned}\quad (3.38)$$

Estas ecuaciones describen el flujo de la acción de granulado grueso con la escala de renormalización, en la aproximación en derivadas. De la comparación entre estas ecuaciones y las correspondientes al caso de la aproximación a un lazo, concluimos que los términos de orden superior en el desarrollo en derivadas modifican la ecuación diferencial para el potencial efectivo.

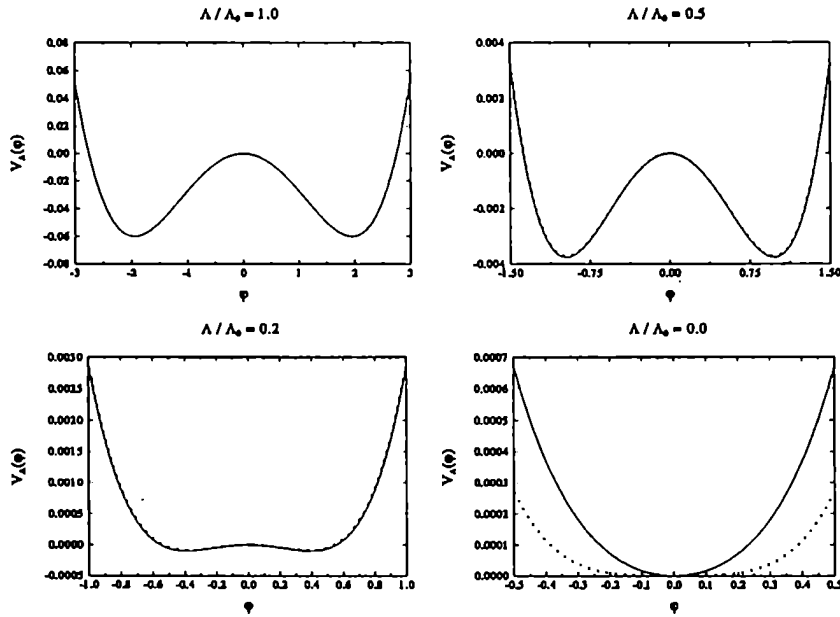


Fig. 3.1: El potencial efectivo de granulado grueso V_Λ para $\Lambda_0 = 10$, $m_R^2 = 10^{-4}$, y $\lambda_R = 0.1$. Las líneas llena y punteada corresponden al cálculo mediante el grupo de renormalización y el cálculo a un lazo, respectivamente.

Hemos obtenido dos ecuaciones para las tres cantidades incógnitas V_Λ , Z_Λ e Y_Λ . Para hallar una tercera ecuación para la variación de Y_Λ con la escala, se requiere ir hasta orden cuadrático en las fluctuaciones a nivel de la ecuación RG. En vez de hacer eso, y por simplicidad, asumiremos que

Z_Λ e Y_Λ son cantidades pequeñas, y las pondremos iguales a cero en el lado derecho de la ec.(3.38). Esta suposición se ve confirmada por los cálculos numéricos que hemos llevado a cabo para la fase simétrica de la teoría. En esta aproximación la forma del potencial efectivo mejorado por el grupo de renormalización es la misma que la propuesta en [57]. Además, cuando en el miembro derecho de la ecuación RG reemplazamos las funciones por sus valores clásicos, $V_\Lambda = V$, $Z_\Lambda = Y_\Lambda = 0$, recobramos las ecuaciones de evolución a un lazo, ec.(3.16).

Como ilustración consideremos una teoría $\lambda\phi^4$. Debemos resolver las ecuaciones diferenciales (3.38) con las condiciones iniciales clásicas, $V_{\Lambda_0} = V$, $Z_{\Lambda_0} = 0$ y $Y_{\Lambda_0} = 0$, evolucionando las ecuaciones desde la escala ultravioleta Λ_0 hasta la escala de granulado grueso Λ de interés. Los resultados se muestran en las figuras 3.1 y 3.2, donde se compara el resultado a un lazo con la mejora ante el grupo de renormalización. Notar que los resultados son consistentes con la suposición $Z_\Lambda \ll 1$.

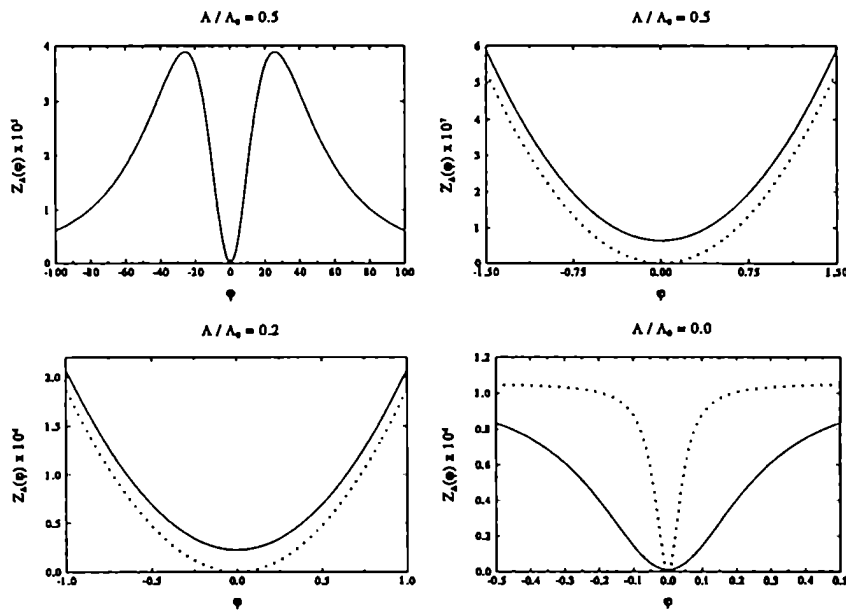


Fig. 3.2: La renormalización de la función de onda de granulado grueso Z_Λ para $\Lambda_0 = 10$, $m_R^2 = 10^{-4}$, y $\lambda_R = 0.1$. Las líneas llena y punteada corresponden al cálculo mediante el grupo de renormalización y el cálculo a un lazo, respectivamente.

Una vez conocidas las funciones V_Λ , Z_Λ e Y_Λ , se puede escribir la ecuación dinámica del parámetro de orden

$$\square\phi + V'_\Lambda(\phi) + Z_\Lambda(\phi)\ddot{\phi} + \frac{1}{2}Z'_\Lambda(\phi)\dot{\phi}^2 - Y_\Lambda(\phi)\nabla^2\phi - \frac{1}{2}Y'_\Lambda(\phi)(\nabla\phi)^2 = 0, \quad (3.39)$$

que es una mejora por el grupo de renormalización a la ecuación que se obtiene mediante la expansión usual en derivadas. Esta ecuación será válida siempre que ϕ sea lentamente variable y $Z_\Lambda, Y_\Lambda \ll 1$. Al igual que en el caso a un lazo, la expansión en derivadas resulta inadecuada si hay ruptura espontánea de simetría, para escalas próximas o menores que Λ_{RES} .

3.4 Discusión

La acción efectiva de granulado grueso de camino temporal cerrado S_Λ contiene toda la información sobre la influencia de los modos de longitud de onda corta sobre los de larga longitud de onda. En principio, a partir de ella es posible encontrar no sólo la ecuación para el valor medio del campo, sino también una ecuación estocástica del tipo Langevin para el campo clásico. Esta ecuación de Langevin puede ser utilizada para analizar la formación y crecimiento de dominios, y, en general, aspectos de no equilibrio de transiciones de fase.

En este capítulo hemos definido la acción S_Λ y obtenido una ecuación de evolución exacta para la dependencia de dicha acción con la escala de granulado grueso (ec.(3.24)), que resolvimos mediante una aproximación en derivadas. Esta técnica nos sirvió para hallar una solución a la ecuación RG y describir mejoras por el grupo de renormalización al potencial efectivo.

No podemos terminar este capítulo sin discutir en forma crítica esta aproximación en derivadas. Como ya hemos mencionado, su principal defecto es que es responsable de la falta de términos de ruido y disipación en la acción de granulado grueso, y por lo tanto no permite describir los importantes aspectos estocásticos en teoría de campos. Más allá de esta aproximación adiabática, es de esperar que a medida que la escala de granulado grueso decrezca a partir de Λ_0 , los términos de ruido y de disipación empiecen a crecer: S_Λ desarrollará una parte imaginaria, relacionada con el ruido, y una parte real; asociada con la disipación, y en ambos casos habrá términos de interacción entre los campos ϕ_+ y ϕ_- de cada rama temporal. Todo esto puede ser fácilmente

chequeado tanto a nivel de la ecuación a un lazo (ec.(3.3)) como a nivel de la ecuación exacta RG (ec.(3.24)). Las partes reales e imaginarias de la acción de granulado grueso no están desacopladas: en la escala $\Lambda = \Lambda_0$ la acción posee sólo términos reales, que inducirán una parte imaginaria a escalas menores.

Dada la ecuación exacta RG es posible resolverla en forma perturbativa. Así, por ejemplo, el cálculo explícito de la acción de granulado grueso para una teoría $\lambda\phi^4$, a segundo orden en λ [48], da $S_\Lambda(\phi_+, \phi_-) = S_0(\phi_+) - S_0(\phi_-) + \Delta S_\Lambda(\phi_+, \phi_-)$, donde S_0 es la parte libre de la acción clásica, y

$$\begin{aligned} \text{Re}\Delta S_\Lambda(\phi_+, \phi_-) &= -\lambda \int d^4x \left\{ \frac{1}{12} P_-(x) + \frac{i}{2} G_{++}^\Lambda(0) Q_-(x) \right\} + \lambda^2 \int d^4x \int d^4y \theta(x^0 - y^0) \\ &\quad \times \left\{ -\frac{1}{18} R_+(x) \text{Re}G_{++}^\Lambda(x-y) R_-(y) + \frac{1}{4} Q_+(x) \text{Im}G_{++}^{\Lambda^2}(x-y) Q_-(y) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3} S_+(x) \text{Re}G_{++}^{\Lambda^3}(x-y) S_-(y) \right\} \end{aligned} \quad (3.40)$$

$$\begin{aligned} \text{Im}\Delta S_\Lambda(\phi_+, \phi_-) &= \lambda^2 \int d^4x \int d^4y \left\{ -\frac{1}{18} R_-(x) \text{Im}G_{++}^\Lambda(x-y) R_-(y) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{4} Q_-(x) \text{Re}G_{++}^{\Lambda^2}(x-y) Q_-(y) + \frac{1}{3} S_-(x) \text{Im}G_{++}^{\Lambda^3}(x-y) S_-(y) \right\}, \end{aligned} \quad (3.41)$$

donde G_{++}^Λ es el propagador de Feynman para los modos con $|\mathbf{q}| > \Lambda$ y

$$\begin{aligned} P_\pm &= \frac{1}{2}(\phi_+^4 \pm \phi_-^4) & R_\pm &= \frac{1}{2}(\phi_+^3 \pm \phi_-^3) \\ Q_\pm &= \frac{1}{2}(\phi_+^2 \pm \phi_-^2) & S_\pm &= \frac{1}{2}(\phi_+ \pm \phi_-). \end{aligned} \quad (3.42)$$

Para introducir los núcleos de ruido, reescribimos la exponencial de la parte imaginaria como la integral funcional sobre fuentes de ruido (tres en este ejemplo particular, $\nu(x)$, $\zeta(x)$ y $\eta(x)$) con distribución de probabilidad gaussiana $P[\nu]$, $P[\zeta]$ y $P[\eta]$. Esto es posible ya que, en esta aproximación perturbativa, la parte imaginaria de la acción efectiva es suma de términos gaussianos que involucran funciones de dos puntos. Mediante este truco, la acción de granulado grueso queda

$$S_\Lambda(\phi_+, \phi_-) = i \ln \int D\nu P[\nu] \int D\zeta P[\zeta] \int D\eta P[\eta] \exp i S_\Lambda^{\text{ef}}(\phi_+, \phi_-, \nu, \zeta, \eta), \quad (3.43)$$

donde hemos definido una nueva acción efectiva, real y dependiente de las fuentes de ruido, cuya expresión es

$$S_{\Lambda}^{\text{ef}}(\phi_+, \phi_-, \nu, \zeta, \eta) = S_0(\phi_+) - S_0(\phi_-) + \text{Re}\Delta S(\phi_+, \phi_-) - \int d^4x [R_-(x)\nu(x) + Q_-(x)\zeta(x) + S_-(x)\eta(x)]. \quad (3.44)$$

A partir de esta acción es posible hallar la ecuación de Langevin para el campo, resultando

$$\left. \frac{\delta(S_0 + \text{Re}\Delta S_{\Lambda})}{\delta\phi_+} \right|_{\phi_+ = \phi_- = \phi} = F_{\text{ruido}}, \quad (3.45)$$

donde la fuerza estocástica es $F_{\text{ruido}} = 3\nu\phi^2/2 + \zeta\phi + \eta/2$; es decir ruido multiplicativo y aditivo. Las fuentes de ruido están caracterizadas por sus funciones de dos puntos $\langle\langle \nu(x)\nu(y) \rangle\rangle = (\lambda^2/9)\text{Im}G_{++}^{\Lambda}(x, y)$, $\langle\langle \zeta(x)\zeta(y) \rangle\rangle = (\lambda^2/2)\text{Re}G_{++}^{\Lambda^2}(x, y)$ y $\langle\langle \eta(x)\eta(y) \rangle\rangle = -(2\lambda^2/3)\text{Im}G_{++}^{\Lambda^3}(x, y)$, donde $\langle\langle \mathcal{O} \rangle\rangle \equiv \int D\nu D\zeta D\eta P[\nu]P[\zeta]P[\eta] \mathcal{O}$. Mientras que la parte imaginaria de la acción de granulado grueso induce efectos de ruido, la parte real renormaliza la acción clásica e induce efectos disipativos.

Para lograr retener los aspectos estocásticos en una aproximación *no perturbativa* de la ecuación exacta RG, es necesario proponer un Ansatz para la acción de granulado grueso que sea más general que el utilizado para la aproximación en derivadas. Un posible método es proponer un desarrollo no local de la acción de granulado grueso en potencias de la suma $\Sigma = \phi_+ + \phi_-$ y diferencia $\Delta = \phi_+ - \phi_-$ de campos, que respete las propiedades generales que la acción de granulado grueso de camino temporal cerrado cumple: a) $S_{\Lambda}[\Sigma, \Delta = 0] = 0$; b) $S_{\Lambda}[\Sigma, \Delta] = -S_{\Lambda}^*[\Sigma, -\Delta]$; c) $\text{Im}S_{\Lambda}[\Sigma, \Delta] \geq 0$; y d) estructura real y causal para las ecuaciones de movimiento $\delta S_{\Lambda}/\delta\Delta|_{\Delta=0} = 0$. El Ansatz más general es [64]

$$\begin{aligned} \Delta S_{\Lambda}(\Delta, \Sigma) &= \int d^4x_1 \Delta(x_1) C_1(x_1; \Sigma_{x_1}) \\ &+ \frac{i}{2} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \Delta(x_1) \Delta(x_2) C_2(x_1, x_2; \Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}) \\ &- \frac{1}{3!} \int d^4x_1 \int d^4x_2 \int d^4x_3 \Delta(x_1) \Delta(x_2) \Delta(x_3) C_3(x_1, x_2, x_3; \Sigma_{x_1}, \Sigma_{x_2}, \Sigma_{x_3}) \\ &+ \dots, \end{aligned} \quad (3.46)$$

donde $C_n(x_1, \dots, x_n; \Sigma_{x_1}, \dots, \Sigma_{x_n})$ son cantidades reales, que son función de los puntos x_i ($1 \leq i \leq n$), y funcionales de los campos Σ_{x_i} ($1 \leq i \leq n$), entre los límites temporales $-\infty$ y x_i^0 . Por ejemplo,

$$C_1(x_1) = \int^{x_1^0} d^4 y_1 \Sigma(y_1) \mu_1^{(1)}(y_1) + \int^{x_1^0} d^4 y_1 \int^{x_1^0} d^4 y_2 \int^{x_1^0} d^4 y_3 \Sigma(y_1) \Sigma(y_2) \Sigma(y_3) \mu_3^{(1)}(y_1, y_2, y_3) + \dots \quad (3.47)$$

$$C_2(x_1, x_2) = \nu_0^{(2)}(x_1, x_2) + \int^{x_1^0} d^4 y_1 \int^{x_2^0} d^4 y_2 \Sigma(y_1) \Sigma(y_2) \nu_2^{(2)}(y_1, y_2) + \dots \quad (3.48)$$

donde $\mu_j^{(i)}$ y $\nu_j^{(i)}$ son núcleos de disipación y de ruido, respectivamente, de j puntos ³, que dependen de la escala de granulado grueso Λ . Dada esta forma general de la acción de granulado grueso, y haciendo algún tipo de truncamiento (por ejemplo, conservando sólo unos pocos términos en la expansión en potencias del campo), podríamos resolver en forma aproximada (pero no perturbativa) la ecuación RG exacta. Hallaríamos así ecuaciones RG para los núcleos de ruido y disipación que aparecen en ese desarrollo no local. Es de esperar que ello permita encontrar en forma no perturbativa una relación de fluctuación-disipación que dependa de la escala de granulado grueso. En la presente Tesis no continuaremos con esta línea de trabajo.

³Es relativamente sencillo hallar la expresión de estos núcleos en el caso perturbativo, a partir de la ecs.(3.40) y (3.41). En el caso perturbativo, todos los núcleos de más de dos puntos pueden expresarse como núcleos de sólo dos puntos.



Capítulo 4

La acción efectiva usual: métodos de cálculo covariantes

En este capítulo desarrollamos dos técnicas de aproximación covariantes para calcular la acción efectiva usual, en signatura euclídea. Si bien trabajamos con la acción efectiva a un lazo, los métodos que describimos pueden extenderse a mayor cantidad de lazos. Ambas técnicas se basan en el denominado núcleo de calor (“heat kernel”), que permite calcular determinantes funcionales de operadores diferenciales de segundo orden. Las técnicas de aproximación que describimos son: i) la llamada expansión de Schwinger-DeWitt, que da una expansión local de la acción efectiva; ii) una técnica de resumación, basada en la anterior, que conduce a una expansión no local. Discutimos los rangos de validez de ambas aproximaciones, sus ventajas y sus desventajas.

4.1 El heat kernel

En la aproximación a un lazo, la acción efectiva usual (con signatura euclídea) está dada por

$$S_{\text{ef}}[\varphi] = S[\varphi] + \frac{1}{2} \ln \det \frac{F}{\mu^2} = S[\varphi] + \frac{1}{2} \text{Tr} \ln \frac{F}{\mu^2}, \quad (4.1)$$

donde F es un operador diferencial de segundo orden que se obtiene tomando las segundas derivadas de la acción clásica (euclídea) S , Tr es una supertraza (sobre índices de Lorentz e

internos del campo de fondo φ), y μ es un parámetro con unidades de masa. Existe un amplio conjunto de problemas para los cuales este operador toma la forma

$$F = \hat{F}(\nabla) = -\square\hat{1} + m^2\hat{1} - (\hat{Q} - \frac{1}{6}R\hat{1}), \quad (4.2)$$

donde $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$, $g_{\mu\nu}$ es la métrica con signatura euclídea (+ + +), ∇_μ es la derivada covariante, \hat{Q} es una matriz que no involucra derivadas y que depende del campo de fondo y m^2 es un parámetro de masa. La convención que utilizaremos para definir los tensores de curvatura es $R^\mu{}_{\nu\alpha\beta} = \partial_\alpha\Gamma^\mu{}_{\nu\beta} - \dots$, $R_{\alpha\beta} = R^\mu{}_{\alpha\mu\beta}$ y $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$. Cuando el operador F toma esta forma se dice que es mínimo. Operadores no mínimos poseen estructuras más complicadas en las derivadas, como veremos en el caso de la cuantización a un lazo de la gravedad.

Asumiendo que $\hat{F}(\nabla)$ es definido positivo, podemos escribir

$$\frac{1}{-\square\hat{1} + m^2\hat{1} - (\hat{Q} - \frac{1}{6}R\hat{1})} = \int_0^\infty ds \exp \left\{ -s \left[-\square\hat{1} + m^2\hat{1} - (\hat{Q} - \frac{1}{6}R\hat{1}) \right] \right\}, \quad (4.3)$$

con lo cual

$$\text{Tr} \ln \left[-\square\hat{1} + m^2\hat{1} - (\hat{Q} - \frac{1}{6}R\hat{1}) \right] = - \int_0^\infty \frac{ds}{s} \text{Tr} K(s) + \text{constante}, \quad (4.4)$$

donde $K(s) \equiv e^{-sm^2} \exp \left\{ s[\square\hat{1} + (\hat{Q} - \frac{1}{6}R\hat{1})] \right\}$ es el núcleo del calor ("heat kernel"). La constante no depende de los parámetros del operador \square y puede reabsorberse en el parámetro de masa μ . Obviamente, el heat kernel se puede calcular en forma exacta sólo en casos de campos de fondo muy particulares. Sin embargo, interesa tener una expresión general de la acción efectiva a partir de la cual, por derivadas funcionales, se obtengan las ecuaciones de movimiento corregidas de los campos de fondo. Por este motivo es necesario desarrollar métodos de aproximación en un caso general. Además, resulta conveniente que tales métodos sean manifiestamente covariantes, en el sentido que preserven la covariancia general de la teoría orden a orden.

4.2 La expansión de Schwinger-DeWitt

La expansión de Schwinger-DeWitt (SDW) [65] es un desarrollo asintótico de la traza del heat kernel para tiempos cortos, $s \rightarrow 0$, en la forma

$$\text{Tr}K(s) = (4\pi s)^{-w} e^{-sm^2} \sum_{n=0}^{\infty} s^n \int d^{2w}x \sqrt{g'} \text{Tr}a_n(x), \quad (4.5)$$

donde $d = 2w$ es la dimensión del espacio-tiempo, $g = \det g_{\mu\nu}$ y $a_n(x)$ es el límite de coincidencia de los denominados coeficientes de Schwinger-DeWitt. Estas son cantidades locales construídas a partir de las curvaturas de fondo \mathcal{R} . Denotaremos con \mathcal{R} en forma indistinta al tensor de Riemann $R_{\mu\nu\alpha\beta}$ (o a cualquiera de sus contracciones con la métrica), al conmutador de sus derivadas covariantes $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ ($[\nabla_\mu, \nabla_\nu]\phi = \mathcal{R}_{\mu\nu}\phi$) o a la matriz \hat{Q} . El cálculo de los coeficientes de Schwinger-DeWitt en un fondo arbitrario es desde el punto de vista técnico una tarea compleja, y sólo se han podido calcular en forma explícita los primeros coeficientes. La estructura general del n -ésimo coeficiente es

$$a_n(x) = \nabla^{2n-2}\mathcal{R} + \mathcal{R}\nabla^{2n-4}\mathcal{R} + \dots + \nabla\nabla\mathcal{R}^{n-1} + \mathcal{R}^n. \quad (4.6)$$

Nótese que tiene dimensión de (longitud) $^{-2n}$ y que aparecen a lo sumo n curvaturas de fondo \mathcal{R} . La expresión (integrada) de los primeros tres coeficientes es [65]

$$\int d^{2w}x \sqrt{g'} \text{Tr}a_0(x) = \int d^{2w}x \sqrt{g'} \text{Tr}\hat{1} \quad (4.7)$$

$$\int d^{2w}x \sqrt{g'} \text{Tr}a_1(x) = \int d^{2w}x \sqrt{g'} \text{Tr}\hat{Q} \quad (4.8)$$

$$\int d^{2w}x \sqrt{g'} \text{Tr}a_2(x) = \int d^{2w}x \sqrt{g'} \text{Tr} \left\{ \frac{1}{2}\hat{Q}^2 + \frac{1}{12}\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} + \left[\frac{1}{180}R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} - \frac{1}{180}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} \right] \hat{1} \right\}. \quad (4.9)$$

La expansión de SDW es válida en el caso de campos cuánticos masivos en campos de fondo débiles, $\mathcal{R} \ll m^2$, es decir en el caso en que la longitud de onda Compton del campo cuántico sea mucho menor que la longitud típica de variación del campo de fondo (campos de fondo lentamente variables). En ese caso los coeficientes de SDW verifican $a_n \ll m^{2n}$. Haciendo el cambio de

variables $u = sm^2$ e intercambiando el orden de la integral en el tiempo u con el de la sumatoria, podemos obtener una expansión analítica de la acción efectiva en potencias inversas de la masa

$$S_{\text{ef}} = S - \frac{1}{2(4\pi)^{-w}} \int d^{2w}x \sqrt{g} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(m^2)^{n-w}} \text{Tr} a_n(x) \int_0^{\infty} du e^{-u} u^{n-w-1}. \quad (4.10)$$

La integral en el tiempo u presenta una divergencia ultravioleta en el límite inferior, que debe ser regularizada ya sea mediante regularización dimensional o mediante un cut-off m^2/L^2 , ($L \rightarrow \infty$).

Para $d = 4$ dimensiones, los tres primeros términos del desarrollo son divergentes, obteniéndose

$$S_{\text{ef}} = S - \frac{1}{32\pi^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} [\rho_0 a_0(x) + \rho_1 a_1(x) + \rho_2 a_2(x) + \sum_{n=3}^{\infty} (n-3)! \frac{1}{(m^2)^{n-2}} a_n(x)], \quad (4.11)$$

donde

$$\begin{aligned} \rho_0 &= -m^2 L^2 - \frac{1}{2} m^4 \ln\left(\frac{m^2}{L^2}\right) + \frac{1}{2} m^4 \left(\frac{3}{2} - C\right) \\ \rho_1 &= L^2 + m^2 \ln\left(\frac{m^2}{L^2}\right) + m^2 (C - 1) \\ \rho_2 &= -\ln\left(\frac{m^2}{L^2}\right) - C, \end{aligned} \quad (4.12)$$

con $C = -d/dq \ln \Gamma(q)|_{q=1}$.

El desarrollo de SDW es básicamente una expansión en derivadas del campo de fondo. Es útil para estudiar la renormalizabilidad de la teoría y para analizar los efectos de polarización de vacío de campos cuánticos masivos. Sin embargo, existen distintos procesos físicos que esta aproximación no cubre. Es completamente inadecuada para tiempos largos ($s\mathcal{R} \gg 1$), para campos de fondo intensos ($\mathcal{R} \gg m^2$), y carece de sentido para teorías no masivas. También es inadecuada para campos débiles y rápidamente variables.

4.3 Resumación de la expansión de Schwinger-DeWitt

Cuando $m^2 = 0$ las integrales en el tiempo s de la expansión de Schwinger-DeWitt del heat kernel divergen en el límite superior, y cada término del desarrollo en la serie es más divergente que

el anterior. Sin embargo, la integral de partida ec.(4.4) converge en dicho límite superior. El problema es que la serie de la ec. (4.5) no puede ser integrada término a término, como lo hicimos en el caso masivo: se requiere algún tipo de resumación.

El método de resumación que utilizaremos consiste en realizar la suma de todos los términos con una dada potencia de la curvatura \mathcal{R} y cualquier número de derivadas de todos los coeficientes de Schwinger-DeWitt [66, 67, 68]. Claramente este método de resumación tendrá sentido para situaciones en las cuales $\nabla\nabla\mathcal{R} \gg \mathcal{R}\mathcal{R}$, es decir para campos débiles y rápidamente variables. La técnica puede ser aplicada tanto para casos masivos como no masivos. Seguidamente presentaremos la idea del método en forma esquemática y en capítulos posteriores haremos cálculos concretos basándonos en este proceso de resumación.

Comencemos entonces a analizar la resumación orden a orden en potencias de curvaturas. El orden más bajo no posee curvaturas y está dado por el coeficiente $a_0(x) = \hat{1}$. Por lo tanto, a este orden, el heat kernel es

$$\text{Tr}K(s)_0 = (4\pi s)^{-2} e^{-sm^2} \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} \{ \hat{1} \}. \quad (4.13)$$

El orden uno en curvaturas provendrá de la resumación de los términos lineales en curvaturas de los coeficientes de SDW, es decir

$$a_1(x) = \alpha_1 \mathcal{R}$$

$$a_2(x) = \alpha_2 \square \mathcal{R} + \mathcal{O}(\mathcal{R}^2)$$

$$a_n(x) = \alpha_n \square^{n-1} \mathcal{R} + \mathcal{O}(\mathcal{R}^2). \quad (4.14)$$

Todos los términos excepto el primero son derivadas totales, de modo que pueden ser descartados en la integrales espacio-temporales, bajo la suposición de que el espacio-tiempo es asintóticamente plano. A primer orden el heat kernel queda

$$\text{Tr}K(s)_1 = (4\pi s)^{-2} e^{-sm^2} \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} \{ s\mathcal{R} \}. \quad (4.15)$$

Teniendo en cuenta la estructura general del enésimo coeficiente de SDW (ec.(4.6)), usando que el conmutador de derivadas covariantes da términos de orden $\mathcal{O}(\mathcal{R}^3)$ e integrando sucesivamente por partes, las contribuciones cuadráticas se pueden reducir a la forma

$$\int d^4x \sqrt{g} a_n(x) = \int d^4x \sqrt{g} \sigma_n \mathcal{R}(-\square)^{n-2} \mathcal{R} + \mathcal{O}(\mathcal{R}^3) \quad (n \geq 2), \quad (4.16)$$

con ciertos coeficientes σ_n , que se calculan al transformar al coeficiente de SDW de modo que tenga esta forma particular. Una vez hallados, definiendo la función

$$\sigma(\eta) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n \eta^{n-2}, \quad (4.17)$$

llamada factor de forma, la resumación del heat kernel a segundo orden en curvaturas conduce a una expresión no local de la forma

$$\text{Tr}K(s)_2 = (4\pi s)^{-2} e^{-sm^2} \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} \left\{ s^2 \mathcal{R} \sigma(-s\square) \mathcal{R} \right\}. \quad (4.18)$$

Lo difícil en este proceso es hallar los factores de forma que acompañan a las distintas contribuciones que provienen de las distintas posibles curvaturas \mathcal{R} . Dicho cálculo ha sido llevado a cabo en [66, 67, 68], y el resultado final, a orden cuadrático en curvaturas ¹, es

$$\begin{aligned} \text{Tr}K(s) = & (4\pi s)^{-2} e^{-sm^2} \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} \left\{ \hat{1} + s\hat{Q} + s^2 \left[R_{\mu\nu} f_1(-s\square) R^{\mu\nu} \hat{1} + R f_2(-s\square) R \hat{1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \hat{Q} f_3(-s\square) R \hat{1} + \hat{Q} f_4(-s\square) \hat{Q} + \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} f_5(-s\square) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} \right] \right\} + \mathcal{O}(\mathcal{R}^3), \end{aligned} \quad (4.19)$$

donde $f_i (i = 1, \dots, 5)$ son factores de forma, función de la variable $\eta = -s\square$, dados por

$$f_1(\eta) = \frac{f(\eta) - 1 + \eta/6}{\eta^2} \quad (4.20)$$

$$f_2(\eta) = \frac{1}{8} \left[\frac{1}{36} f(\eta) + \frac{f(\eta) - 1}{3\eta} - \frac{f(\eta) - 1 + \eta/6}{\eta^2} \right] \quad (4.21)$$

$$f_3(\eta) = \frac{1}{12} f(\eta) + \frac{f(\eta) - 1}{2\eta} \quad (4.22)$$

¹Recientemente la resumación ha sido calculada hasta orden cúbico en curvaturas [69], resultando una estructura no local muy complicada que involucra veintinueve factores de forma. Afortunadamente, en las aproximaciones en que trabajaremos en los capítulos siguientes, estos términos cúbicos son despreciables frente a los cuadráticos, de modo que podremos evitar trabajar con semejante cantidad de factores de forma.

$$f_4(\eta) = \frac{1}{2}f(\eta) \quad (4.23)$$

$$f_5(\eta) = -\frac{f(\eta) - 1}{2\eta} \quad (4.24)$$

$$f(\eta) \equiv \int_0^1 dt e^{-\frac{1-t^2}{4}\eta}. \quad (4.25)$$

Los términos de orden cero y uno en curvaturas en la ec.(4.19) son locales, mientras que los de segundo orden son no locales, y tienen la estructura $\mathcal{R}\beta(-s\Box)\mathcal{R}$ de la que hablábamos anteriormente. La sexta posible estructura, $R_{\mu\nu\alpha\beta}f(-s\Box)R^{\mu\nu\alpha\beta}$ no está presente en la ec.(4.19), pues, en este desarrollo perturbativo covariante, es siempre posible eliminar al tensor de Riemann utilizando las identidades de Bianchi para expresarlo en función del tensor y del escalar de Ricci, más términos no locales de orden superior en curvaturas.

Para tiempos cortos $\eta \rightarrow 0$, el comportamiento de los factores de forma es

$$\begin{aligned} f_1(\eta) &= \frac{1}{60} + \mathcal{O}(\eta) & f_2(\eta) &= -\frac{1}{180} + \mathcal{O}(\eta) & f_3(\eta) &= 0 + \mathcal{O}(\eta) \\ f_4(\eta) &= \frac{1}{2} + \mathcal{O}(\eta) & f_5(\eta) &= \frac{1}{12} + \mathcal{O}(\eta). \end{aligned} \quad (4.26)$$

En este límite se recupera el desarrollo de Schwinger-DeWitt, a orden cuadrático en curvaturas.

En el límite opuesto, de tiempos largos $\eta \rightarrow \infty$, los factores de forma se comportan como

$$\begin{aligned} f_1(\eta) &= \frac{1}{6\eta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta^2}\right) & f_2(\eta) &= -\frac{1}{18\eta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta^2}\right) & f_3(\eta) &= -\frac{1}{3\eta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta^2}\right) \\ f_4(\eta) &= \frac{1}{\eta} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta^2}\right) & f_5(\eta) &= \frac{1}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{\eta^2}\right). \end{aligned} \quad (4.27)$$

En este caso, la traza del heat kernel $K(s)$ es proporcional a s^{-w+1} para todos los ordenes en curvatura, excepto el orden cero, que es proporcional a s^{-w} .

La acción efectiva resulta de integrar en el tiempo s el heat kernel de acuerdo a la ec.(4.4). Obtenemos así

$$\begin{aligned} S_{\text{ef}} &= S - \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} \lim_{L \rightarrow \infty} \text{Tr} \left\{ h_0 \hat{1} + h_1 \hat{Q} + R_{\mu\nu} F_1(\Box) R^{\mu\nu} \hat{1} + R F_2(\Box) R \hat{1} \right. \\ &\quad \left. + \hat{Q} F_3(\Box) R \hat{1} + \hat{Q} F_4(\Box) \hat{Q} + \hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu} F_5(\Box) \hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} \right\} + \mathcal{O}(\mathcal{R}^3), \end{aligned} \quad (4.28)$$

donde

$$h_0 = \int_{1/L^2}^{\infty} ds s^{-3} e^{-sm^2} = -\frac{m^4}{2} \ln \frac{m^2}{L^2} \quad (4.29)$$

$$h_1 = \int_{1/L^2}^{\infty} ds s^{-2} e^{-sm^2} = m^2 \ln \frac{m^2}{L^2}, \quad (4.30)$$

y los factores de forma no locales están dados por $F_i(\square) = \int_{1/L^2}^{\infty} ds \frac{e^{-sm^2}}{s^{\omega-1}} f_i(-s\square)$ y resultan ser, para $d = 4$ dimensiones

$$F_1(\square) = \int_0^1 dt \left[-\frac{1}{32} (1-t^2)^2 \ln \frac{G(\square)}{L^2} + \left(-\frac{m^4}{2\square^2} + \frac{1-t^4}{4} \frac{m^2}{\square} \right) \ln \frac{G(\square)}{m^2} \right] \quad (4.31)$$

$$F_2(\square) = \frac{1}{8} \int_0^1 dt \left[\left(-\frac{1}{36} + \frac{1}{12} (1-t^2) + \frac{1}{32} (1-t^2)^2 \right) \ln \frac{G(\square)}{L^2} + \left(-\frac{m^2}{3\square} + \frac{m^4}{2\square^2} - \frac{m^2}{\square} \frac{1-t^2}{4} \right) \ln \frac{G(\square)}{m^2} \right] \quad (4.32)$$

$$F_3(\square) = \int_0^1 dt \left[\frac{1}{8} \left(\frac{1}{3} - t^2 \right) \ln \frac{G(\square)}{L^2} - \frac{m^2}{2\square} \ln \frac{G(\square)}{m^2} \right] \quad (4.33)$$

$$F_4(\square) = -\frac{1}{2} \int_0^1 dt \ln \frac{G(\square)}{L^2} \quad (4.34)$$

$$F_5(\square) = \frac{1}{2} \int_0^1 dt \left[-\frac{1-t^2}{4} \ln \frac{G(\square)}{L^2} + \frac{m^2}{\square} \ln \frac{G(\square)}{m^2} \right], \quad (4.35)$$

donde $G(\square) = m^2 - \frac{1}{4}(1-t^2)\square$. El factor de forma $F(\square) \equiv \ln G(\square)/L^2$ admite una representación espectral en términos del propagador euclídeo masivo $(M^2 - \square)^{-1}$

$$F(\square) = \ln \left[\frac{m^2 - \frac{1}{4}(1-t^2)\square}{L^2} \right] = \ln \left(\frac{1-t^2}{4} \right) + \int_0^{\infty} dz \left[\frac{1}{z + L^2} - \frac{1}{z + \frac{4m^2}{1-t^2} - \square} \right]. \quad (4.36)$$

Entonces, $F(\square)$ es una función de dos puntos que sobre una función de prueba $f(x)$ actúa de la forma $F(\square)f(x) = \int d^4x' F(\square)(x, x')f(x')$.

Tanto las integrales h_i como los factores de forma $F_i(\square)$ son cantidades que divergen en el límite ultravioleta $L \rightarrow \infty$, siendo proporcionales a $\ln L^2$. La teoría es renormalizable si la acción clásica de partida S tiene la misma estructura que las divergencias, es decir, si posee términos independientes de curvaturas (proporcionales a $\hat{1}$), términos lineales (proporcionales a

\hat{Q}), y términos cuadráticos (proporcionales a $\mathcal{R}\mathcal{R}$). En ese caso las divergencias pueden ser absorbidas en las constantes desnudas $\{\alpha_d^i\}$ de la acción clásica S , redefiniéndolas en la forma $\alpha_d^i = \alpha_v^i - \text{cte}^i \ln(L^2/\mu^2)$, donde $\{\alpha_d^i\}$ son las correspondientes constantes vestidas, μ es un parámetro de escala con unidades de masa, y $\{\text{cte}^i\}$ son las constantes que acompañan a las divergencias en $\ln L^2$. Los factores de forma renormalizados son los mismos que los dados en las ecs. (4.31)-(4.35) con L^2 reemplazado por μ^2 . En esta forma se renormaliza la teoría, resultando un conjunto de constantes vestidas que dependen de la escala de energía, $\alpha_v^i = \alpha_v^i(\mu)$. Usando el hecho que la acción efectiva no depende de este parámetro arbitrario μ , se obtiene un conjunto de ecuaciones del grupo de renormalización para las constantes vestidas, $\mu d\alpha_v^i/d\mu = \beta^i(\{\alpha_v^j\})$ que rigen la forma en que dichas constantes cambian a distintas escalas de energía.



Capítulo 5

Correcciones cuánticas al potencial newtoniano

En este capítulo calculamos correcciones cuánticas al potencial newtoniano basándonos en la acción efectiva. Con el objeto de dar un ejemplo sencillo del método que utilizaremos, comenzamos por calcular el apantallamiento de la carga eléctrica en electrodinámica cuántica. Pasamos luego a tratar los efectos de campos de materia (escalares y fermiónicos) sobre un fondo gravitatorio clásico, en el contexto de teoría semiclásica de la gravedad. A partir de los términos no locales de la acción efectiva, obtenidos en el capítulo anterior, calculamos cómo la constante gravitatoria pasa a ser función de la distancia entre partículas masivas [70]. Hacemos un análisis comparativo entre los resultados obtenidos con los que resultan de la aplicación del grupo de renormalización [71].

5.1 Teorías de campos efectivas

La teoría de la relatividad general es una teoría clásica que describe en forma satisfactoria diferentes procesos gravitacionales a escalas de energías presentes, es decir mucho menores que la escala de Planck. Si se desea estudiar procesos a escalas de energía mayores se deben incluir efectos cuánticos. Como hemos discutido en la introducción, es entonces necesario tener en cuenta no

sólo las fluctuaciones de los campos de materia, sino también las fluctuaciones del propio campo gravitatorio [21]. Es aquí donde aparecen serias dificultades técnicas que pueden describirse como una incompatibilidad entre la mecánica cuántica y la relatividad general. En efecto, debido a que la constante gravitatoria tiene dimensiones y a la naturaleza no lineal de la teoría, en el cálculo de lazos de gravitones aparecen divergencias ultravioletas que no pueden ser absorbidas en la acción clásica de partida: la teoría no es renormalizable. Históricamente esta dificultad fue considerada como un impedimento para realizar predicciones mediante la relatividad general cuantizada, debiendo entonces encontrarse la verdadera teoría cuántica de la gravedad (hasta hoy desconocida), válida para energías cercanas y superiores a la de Planck. A pesar de la no renormalizabilidad de la teoría, los procesos cuánticos a bajas energías y largas distancias *pueden* ser calculados en forma satisfactoria cuantizando la relatividad general, independientemente de la eventual forma de la gravedad cuántica. La clave es que, a bajas energías, la relatividad general se comporta en la forma en que usualmente se tratan las teorías de campos efectivas. Seguidamente describiremos las ideas que subyacen en el tratamiento de teorías efectivas. Una descripción más completa de estas ideas puede hallarse en [73, 74] y su aplicación a la relatividad general en [22, 75].

Una teoría de campos efectiva está construida en base a ciertos grados de libertad e interacciones entre los mismos que describen procesos físicos en un cierto rango de energías y distancias. Estos grados de libertad pueden resultar insuficientes o completamente inadecuados para explicar la física a escalas de energías mayores, en cuyo caso es necesario reemplazar la teoría efectiva por otra mejor. La teoría de bajas energías involucra un lagrangiano efectivo (que es una cantidad local construida con los grados de libertad efectivos) y un tratamiento completo de su cuantización (lazos, renormalización, etc.). El objetivo final es poder describir en forma satisfactoria todos los procesos cuánticos de bajas energías. Hay dos elementos que juegan un papel fundamental en la metodología de teorías efectivas. El primero es la separación entre el sector de baja y de alta energía. En un tratamiento diagramático, los efectos de las partículas virtuales pesadas involucran propagaciones de corto alcance y pueden ser representados por una serie de lagrangianos locales. Un ejemplo de esto es la teoría de Fermi de las interacciones débiles. Por el contrario, los efectos no locales corresponden a la propagación de partículas virtuales livianas por grandes distancias, y sólo pueden provenir del sector de bajas energías de la teoría.

El segundo aspecto de importancia es la expansión en energías. La idea es escribir el lagrangiano más general compatible con las simetrías de la teoría y ordenar los infinitos términos en potencias del cociente entre la escala de bajas energías y la de altas energías. El orden más bajo de dicho lagrangiano sirve para definir los propagadores y vértices, mientras que los restantes ordenes se tratan perturbativamente. Al cuantizar y calcular lazos, aparecen divergencias ultravioletas (cantidades locales y analíticas en el espacio de momentos) que tienen la forma de algún término en dicho lagrangiano y renormalizan las constantes de acoplamiento del lagrangiano. En el proceso de cálculo de los lazos aparecen otras contribuciones de un carácter diferente, que surgen del sector de bajas energías, y que son no analíticas, típicamente de la forma $\ln(-q^2)$ ¹. Estos efectos provienen del orden más bajo del lagrangiano y por lo tanto son independientes del valor que tomen las constantes de acoplamiento de los ordenes superiores. Son estos términos no analíticos los que conducen a predicciones cuánticas bien definidas de bajas energías.

Una teoría de campos efectiva cuya estructura es similar a la de la relatividad general es el modelo σ no lineal, que describe una teoría de piones que es el límite de bajas energías de QCD [74, 89, 90]. Esta teoría ha sido extensamente estudiada, tanto teórica como experimentalmente. El lagrangiano de orden más bajo es

$$\mathcal{L}_2 = -\frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr}(\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger) \quad U = \exp(i\pi^a \tau^a / f_\pi), \quad (5.1)$$

donde τ^a son los generadores de $SU(n)$. Al igual que en la relatividad general, la constante de acoplamiento f_π posee dimensiones, la teoría es intrínsecamente no lineal, y no es renormalizable. En efecto, a un lazo existe una divergencia ultravioleta de la forma

$$\mathcal{L}_{\text{div}} \propto [\text{Tr} \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger]^2 + 2 \text{Tr} [\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger]^2. \quad (5.2)$$

que no posee la estructura de \mathcal{L}_2 . Adoptando la metodología de teorías efectivas, escribimos el lagrangiano más general compatible con las simetrías de la teoría

$$\mathcal{L}_{\text{ef}} = \mathcal{L}_2 + \alpha [\text{Tr} \partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger]^2 + \beta \text{Tr} [\partial_\mu U \partial^\mu U^\dagger]^2 + \dots, \quad (5.3)$$

¹Esta forma aparece para fluctuaciones no masivas, como por ejemplo gravitones. Si las fluctuaciones tuviesen masa Ω , entonces habría otra contribución no analítica de la forma $\Omega/\sqrt{-q^2}$, que también es relevante a bajas energías.

y a bajas energías ($|\partial| = p^2 < f_\pi^2$), \mathcal{L}_2 será el término dominante. El procedimiento para implementar el método de teorías efectivas a un lazo es el siguiente:

- i) Calcular vértices y propagadores con \mathcal{L}_2 , [$\mathcal{O}(p^2)$].
- ii) Calcular las correcciones a un lazo.
- iii) Combinar los efectos de orden $\mathcal{O}(p^2)$ y $\mathcal{O}(p^4)$ del lagrangiano efectivo con las correcciones a un lazo. Las divergencias (y las correspondientes partes finitas) pueden absorberse en las constantes α y β .
- iv) Medir los coeficientes desconocidos por comparación con el experimento. Habiendo determinado los parámetros de la teoría, se pueden hacer predicciones válidas a orden $\mathcal{O}(p^4)$ en una expansión en energías.
- v) Para obtener las correcciones cuánticas más relevantes en la expansión en energías, es necesario calcular las contribuciones no analíticas a un lazo. Estas son independientes de los parámetros α y β .

Como veremos, este procedimiento también puede aplicarse a la relatividad general. Sin embargo, dado que el cálculo de correcciones cuánticas por efecto de gravitones en relatividad general es complicado desde un punto de vista técnico, dejaremos para el próximo capítulo el efecto de las fluctuaciones cuánticas del propio campo gravitatorio, y en este capítulo comenzaremos por ejemplos más sencillos. Calcularemos las correcciones cuánticas debidas a campos de materia (campos escalares y fermiónicos) a la dinámica de un fondo gravitatorio clásico. Pero antes trataremos un caso aún más simple en el contexto de electrodinámica, que nos servirá para ejemplificar las técnicas que utilizaremos.

5.2 El apantallamiento de la carga eléctrica

En electrodinámica cuántica es bien sabido que debido a efectos de polarización de vacío el potencial de interacción electrostático entre cargas puntuales en reposo difiere del potencial coulombiano clásico r^{-1} . La forma usual de obtener este efecto es calculando la interacción entre dos partículas de carga e (con corrientes asociadas $J^\mu(p)$, siendo p^μ el cuadri-impulso) a través del intercam-

bio de un fotón, e incluir las correcciones al propagador del fotón $D_{\mu\nu}(p)$ por emisión de pares virtuales electrón-positrón. Los diagramas de Feynman necesarios para realizar dicho cálculo a primer orden en la constante de estructura fina $\alpha = e^2/4\pi\hbar c$ se muestran en la figura 5.1.

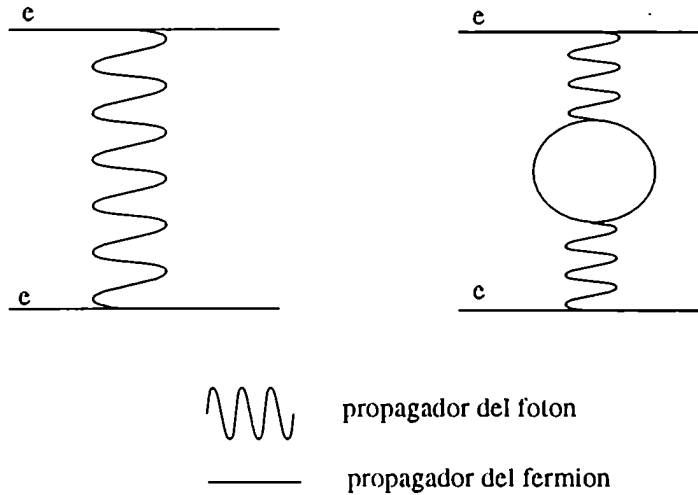


Fig. 5.1: Diagramas de Feynman para calcular, al orden más bajo en la constante de estructura fina, el potencial de interacción coulombiano entre cargas puntuales. El segundo diagrama es la contribución debida a la polarización de vacío.

El potencial de interacción electrostática se encuentra tomando la transformada de Fourier del límite estático de $M_{12}(p) \equiv J^\mu(p)D_{\mu\nu}(p)J^\nu(-p)$. El resultado final es [72]

$$V_{\text{int}}(r) = \frac{e^2(r)}{4\pi} = \frac{e^2}{4\pi r} \left[1 + \frac{e^2}{6\pi^2} \int_1^\infty du e^{-2mru} \left(1 + \frac{1}{2u^2} \right) \frac{\sqrt{u^2 - 1}}{u^2} + \mathcal{O}(e^4) \right]. \quad (5.4)$$

Por los efectos de los pares virtuales, la carga eléctrica que “ve” una de las partículas no es igual a e , sino que mide una carga $e(r)$ que depende de la distancia a la otra partícula cargada. Para grandes distancias ($mr \gg 1$), dicha carga es aproximadamente igual a e , mientras que para separaciones pequeñas ($mr \ll 1$),

$$e(r) = e \left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln \frac{r}{r_0} + \mathcal{O}(e^4) \right], \quad (5.5)$$

donde r_0 está definido por $-\ln mr_0 = 2\gamma + \frac{5}{3}$. La presencia de la carga desnuda e polariza el vacío, siendo rodeada por cargas virtuales de signo opuesto, que finalmente hacen que la carga

vestida $e(r)$ sea de magnitud menor. A medida que nos acercamos al origen, la carga vestida crece logarítmicamente.

Otra manera de obtener el potencial electrostático en el límite de cortas distancias se basa en un argumento "wilsoniano". La idea es partir del potencial coulombiano clásico y reemplazar a la carga e por la solución de la ecuación del grupo de renormalización $e(\mu)$, y finalmente identificar a la escala de energía μ con la inversa de la distancia, es decir

$$V_{\text{int}}(r) = \frac{e^2(\mu \rightarrow \frac{1}{r})}{4\pi}. \quad (5.6)$$

La ecuación del grupo de renormalización en electrodinámica es $\mu de/d\mu = -e^2/12 + \mathcal{O}(e^4)$, cuya solución resulta

$$e(\mu) = e(\mu_0) \left[1 - \frac{e^2(\mu_0)}{12\pi^2} \ln \frac{\mu_0}{\mu} + \mathcal{O}(e^4) \right]. \quad (5.7)$$

Es inmediato entonces comprobar que se obtiene la dependencia correcta con la distancia tanto para la carga vestida como para el potencial electrostático, en el límite de cortas distancias. En electrodinámica el argumento wilsoniano conduce al resultado correcto.

A continuación calcularemos, a partir de la acción efectiva, las ecuaciones de movimiento para el campo electromagnético en presencia de los fermiones y veremos cómo resulta el apantallamiento de la carga eléctrica. La acción clásica de la electrodinámica es ²

$$S_{\text{clas}} = S[A_\mu] + S[\psi, \bar{\psi}, A_\mu] = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \int d^4x \bar{\psi} (\gamma^\mu \partial_\mu + m + ie\gamma^\mu A_\mu) \psi, \quad (5.8)$$

donde las matrices de Dirac satisfacen $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2g^{\mu\nu}$, $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0 \gamma^\mu \gamma^0$, siendo γ^0 antihermítica y γ^i hermítica.

Comencemos por calcular la acción efectiva in-out, para lo cual integramos sobre los campos fermiónicos. De este modo resulta

$$S_{\text{ef}}[A_\mu] = S[A_\mu] - i \ln \det(\gamma^\mu \partial_\mu + m + ie\gamma^\mu A_\mu). \quad (5.9)$$

²Usamos la signatura $(-+++)$ y las definiciones de [73].

En general este determinante fermiónico no puede calcularse en forma exacta, y por ello haremos un desarrollo perturbativo en potencias de la constante de estructura fina, o equivalentemente en potencias del campo A_μ . Obtenemos

$$S_{\text{ef}}[A_\mu] = S[A_\mu] + \frac{i}{2} \int d^4x d^4x' A_\mu(x) \Pi^{\mu\nu}(x, x') A_\nu(x') + \mathcal{O}(A^4), \quad (5.10)$$

donde $\Pi^{\mu\nu}(x, x') \equiv -e^2 \text{Tr}[\gamma^\mu F_{++}(x, x') \gamma^\nu F_{++}(x', x)]$ es el tensor de polarización de vacío en electrodinámica cuántica, y

$$F_{++}(x, x') = i \langle \text{Tr} \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle = \int \frac{d^4p}{(2\pi)^4} e^{ip(x-x')} \frac{i\gamma^\mu p_\mu - m}{p^2 + m^2 - i\epsilon}, \quad (5.11)$$

es el propagador fermiónico. La ecuación de movimiento in-out para el campo es

$$0 = -\partial_\nu F^{\mu\nu} + ie^2 \int d^4x' \text{Tr}[\gamma^\mu F_{++}(x, x') \gamma^\nu F_{++}(x', x)] A_\nu(x'). \quad (5.12)$$

El problema de esta ecuación es que no es ni real ni causal, debido a la estructura del propagador F_{++} . Para obtener las ecuaciones de movimiento reales y causales para el campo electromagnético debemos hallar la acción efectiva in-in.

La funcional generatriz fermiónica in-in para el caso sin interacción es

$$Z[\bar{\eta}^+, \eta^+, \bar{\eta}^-, \eta^-] = \int_{\text{CTC}} D\bar{\psi}^- D\psi^- D\bar{\psi}^+ D\psi^+ \times e^{-i(S[\psi^-, \bar{\psi}^-] + \eta^- \psi^- + \bar{\psi}^- \eta^-)} e^{i(S[\psi^+, \bar{\psi}^+] + \eta^+ \psi^+ + \bar{\psi}^+ \eta^+)}, \quad (5.13)$$

donde la integral se hace con las condiciones de contorno de camino temporal cerrado. De aquí resulta el siguiente propagador fermiónico F_{ab} ,

$$\begin{aligned} F_{++}(x, x') &= i \frac{\delta}{i\bar{\eta}^+(x)} \frac{\delta}{i\eta^+(x')} Z \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\ &= i \langle \text{Tr} \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle = i[\theta(x^0 - x'^0) \langle \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle - \theta(x'^0 - x^0) \langle \bar{\psi}(x') \psi(x) \rangle] \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$F_{+-}(x, x') = i \frac{\delta}{i\bar{\eta}^+(x)} \frac{\delta}{-i\eta^-(x')} Z \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = -i \langle \bar{\psi}(x') \psi(x) \rangle \quad (5.15)$$

$$F_{-+}(x, x') = i \frac{\delta}{-i\bar{\eta}^-(x)} \frac{\delta}{i\eta^+(x')} Z \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} = i \langle \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned}
F_{--}(x, x') &= i \frac{\delta}{-i\bar{\eta}^-(x)} \frac{\delta}{-i\eta^-(x')} Z \Big|_{\eta=\bar{\eta}=0} \\
&= i \langle \hat{\Gamma} \psi(x) \bar{\psi}(x') \rangle = i [-\theta(x^0 - x'^0) \langle \bar{\psi}(x') \psi(x) \rangle + \theta(x'^0 - x^0) \langle \psi(x') \bar{\psi}(x) \rangle]. \quad (5.17)
\end{aligned}$$

Estos propagadores verifican las propiedades siguientes

$$F_{++}(x, x') = \theta(x^0 - x'^0) F_{-+}(x, x') + \theta(x'^0 - x^0) F_{+-}(x, x') \quad (5.18)$$

$$\gamma^0 F_{++}^\dagger(x, x') \gamma^0 = -\theta(x^0 - x'^0) F_{-+}(x', x) - \theta(x'^0 - x^0) F_{+-}(x', x). \quad (5.19)$$

La acción efectiva in-in para el campo electromagnético la obtenemos integrando los fermiones con la prescripción del camino temporal cerrado

$$e^{iS_{\text{ef}}[A_\mu^+, A_\mu^-]} = e^{i(S[A_\mu^+] - S[A_\mu^-])} \int_{\text{CTC}} D\bar{\psi}^- D\psi^- D\bar{\psi}^+ D\psi^+ e^{-iS[\psi^-, \bar{\psi}^-, A_\mu^-] + iS[\psi^+, \bar{\psi}^+, A_\mu^+]}. \quad (5.20)$$

Haciendo perturbaciones en la constante de estructura fina (o equivalentemente en un desarrollo en potencias del campo electromagnético), la acción efectiva CTC adopta la siguiente forma

$$S_{\text{ef}}[A_\mu^+, A_\mu^-] = S[A_\mu^+] - S[A_\mu^-] + \frac{i}{2} e^2 \int d^4x d^4x' \times \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned}
&\text{Tr} \left[\gamma^\mu A_\mu^+(x) F_{++}(x, x') \gamma^\nu A_\nu^+(x') F_{++}(x', x) - \gamma^\mu A_\mu^+(x) F_{+-}(x, x') \gamma^\nu A_\nu^-(x') F_{-+}(x', x) \right. \\
&\left. - \gamma^\mu A_\mu^-(x) F_{-+}(x, x') \gamma^\nu A_\nu^+(x') F_{+-}(x', x) + \gamma^\mu A_\mu^-(x) F_{--}(x, x') \gamma^\nu A_\nu^-(x') F_{--}(x', x) \right] + \mathcal{O}(A^4)
\end{aligned}$$

Las ecuaciones de movimiento in-in quedan entonces

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\delta S_{\text{ef}}}{\delta A_\mu^+} \Big|_{A_\mu^+ = A_\mu^- = A_\mu} \\
&= -\partial_\nu F^{\mu\nu} + ie^2 \int d^4x' \text{Tr} [\gamma^\mu F_{++}(x, x') \gamma^\nu F_{++}(x', x) - \gamma^\mu F_{+-}(x, x') \gamma^\nu F_{-+}(x', x)] A_\nu(x').
\end{aligned} \quad (5.22)$$

Para mostrar que efectivamente estas ecuaciones son reales y causales, usamos las propiedades de los propagadores fermiónicos (ecs.(5.18) y (5.19)) y de las matrices de Dirac para demostrar la identidad

$$\begin{aligned}
&i \text{Tr} [\gamma^\mu F_{++}(x, x') \gamma^\nu F_{++}(x', x) - \gamma^\mu F_{+-}(x, x') \gamma^\nu F_{-+}(x', x)] \\
&= 2\theta(x^0 - x'^0) \text{ReTr} [i \gamma^\mu F_{++}(x, x') \gamma^\nu F_{++}(x', x)].
\end{aligned} \quad (5.23)$$

Introduciendo esta identidad en la ec.(5.22) y comparándola con la ec.(5.12), vemos que la ecuación de movimiento in-in puede obtenerse a partir de la in-out si a los términos no locales de esta última le tomamos dos veces su parte real y causal. Esta propiedad que acabamos de demostrar es también válida en el caso bosónico.

Volvamos entonces a concentrarnos en la acción efectiva in-out. Como es sabido, el tensor de polarización de vacío en QED presenta divergencias (ultravioletas) en $d = 4$, que deben ser tratadas mediante algún procedimiento adecuado de renormalización. Utilizaremos regularización dimensional, para lo cual trabajaremos en dimensión arbitraria d . El tensor de polarización de vacío resulta entonces [76]

$$\begin{aligned}\Pi^{\mu\nu}(x, x') &= -e^2 \mu^{4-d} \Gamma[\gamma^\mu F_{++}(x, x') \gamma^\nu F_{++}(x', x)] \\ &= ie^2 \mu^{4-d} (4\pi)^{-2} \Gamma(2 - \frac{d}{2}) 2^{1+\frac{d}{2}} (\partial^\mu \partial^\nu - \eta^{\mu\nu} \square) \\ &\quad \times \int_0^1 dt (1-t^2) \left[\frac{m^2 - \frac{1}{4}(1-t^2)\square - i\epsilon}{4\pi} \right]^{\frac{d}{2}-2} \delta(x, x'),\end{aligned}\quad (5.24)$$

donde μ es un parámetro con unidades de masa. Expandiendo alrededor del polo en $d = 4$ obtenemos la siguiente forma para la acción efectiva in-out

$$\begin{aligned}S_{\text{ef}} &= -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{e^2}{24\pi^2} \left[\frac{2}{d-4} + \gamma + \ln \frac{m^2}{4\pi\mu^2} \right] \int d^4x A_\mu(x) (\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) A_\nu(x) \\ &\quad - \frac{e^2}{2\pi^2} \int d^4x A_\mu(x) (\eta^{\mu\nu} \square - \partial^\mu \partial^\nu) F(\square) A_\nu(x),\end{aligned}\quad (5.25)$$

donde el factor de forma no local está dado por

$$F(\square) = \frac{1}{8} \int_0^1 (1-t^2) \ln \left[\frac{m^2 - \frac{1}{4}(1-t^2)\square - i\epsilon}{\mu^2} \right]. \quad (5.26)$$

La divergencia adopta la misma forma que la acción clásica, de modo que la absorbemos en el campo desnudo clásico. Así obtenemos finalmente una expresión renormalizada (finita) para la acción efectiva in-out

$$S_{\text{ef}} = -\frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} \left[1 + \frac{e^2}{\pi^2} F(\square) \right] F^{\mu\nu} + \mathcal{O}(A^4). \quad (5.27)$$

Las correspondientes ecuaciones de Maxwell son

$$\left[1 + \frac{e^2}{\pi^2} F(\square)\right] \partial_\mu F^{\mu\nu} = J_{\text{clas}}^\nu, \quad (5.28)$$

donde hemos incluido una fuente clásica J_{clas}^ν . En el límite de distancias cortas ($m^2 \ll -\square$), estas ecuaciones in-out se reducen a

$$\left[1 - \frac{e^2}{12\pi^2} \ln\left(\frac{-\square - i\epsilon}{\mu^2}\right)\right] \partial_\mu F^{\mu\nu} = J_{\text{clas}}^\nu. \quad (5.29)$$

Frecuentemente encontraremos la distribución $G(-\frac{\square}{\mu^2}) \equiv \ln(\frac{-\square - i\epsilon}{\mu^2})$ a nivel de ecuaciones in-out. Para hallar su contrapartida a nivel in-in, G_{in} , le debemos tomar dos veces su parte real y causal. Sobre una función de prueba $f(x)$, este factor de forma actúa de la manera siguiente

$$G_{\text{in}}(-\frac{\square}{\mu^2})f(x) = 2\text{Re} \int d^4x' \theta(x^0 - x'^0) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \ln\left(\frac{k^2 - i\epsilon}{\mu^2}\right) f(x'). \quad (5.30)$$

Podemos escribir el término derecho en forma más compacta si introducimos el propagador de Feynman no masivo plano $G(x, x') = \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{e^{ik(x-x')}}{k^2 - i\epsilon}$ [25, 77, 78]. Usando que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} G(x, x') &= i \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} \frac{k_\alpha e^{ik(x-x')}}{k^2 - i\epsilon} = \frac{i}{2} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \frac{\partial}{\partial k^\alpha} \ln\left(\frac{k^2 - i\epsilon}{\mu^2}\right) \\ &= \frac{1}{2} (x_\alpha - x'_\alpha) \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \ln\left(\frac{k^2 - i\epsilon}{\mu^2}\right), \end{aligned} \quad (5.31)$$

y el hecho que $\text{Re}G(x, x') = \delta((x - x')^2)/4\pi$, obtenemos

$$\text{Re} \int \frac{d^4k}{(2\pi)^4} e^{ik(x-x')} \ln\left(\frac{k^2 - i\epsilon}{\mu^2}\right) = \frac{1}{\pi} \delta'((x - x')^2). \quad (5.32)$$

De este modo, la distribución logarítmica in-in adopta la forma

$$G_{\text{in}}(-\frac{\square}{\mu^2})f(x) = \frac{2}{\pi} \int d^4x' \theta(x^0 - x'^0) \delta'((x - x')^2) f(x'). \quad (5.33)$$

Un caso especialmente sencillo es cuando la función de prueba es independiente del tiempo

$$G_{\text{in}}(-\frac{\square}{\mu^2})f(\mathbf{x}) = G(-\frac{\nabla^2}{\mu^2})f(\mathbf{x}) = \int d^3x' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} \ln\left(\frac{k^2}{\mu^2}\right) f(\mathbf{x}'). \quad (5.34)$$

Existe otra manera alternativa de hallar las ecuaciones de movimiento reales y causales para estados de vacío in, que se basa en el cálculo de la acción efectiva euclídea. La acción clásica de la electrodinámica en espacio euclídeo es [79]

$$S^E[A_\mu] = \int d^4x \left[\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \psi^\dagger (\gamma^\mu \nabla_\mu + im) \psi \right], \quad (5.35)$$

donde γ^μ son las matrices de Dirac para signatura euclídea y $\nabla_\mu = \partial_\mu + ieA_\mu$. Siguiendo los mismos métodos utilizados para calcular la acción efectiva in-out renormalizada, concluimos que la acción efectiva euclídea resulta (comparar con la ec.(5.27))

$$S_{\text{ef}}^E = S^E[A_\mu] - \text{Tr} \ln(\gamma^\mu \nabla_\mu + im) = \frac{1}{4} \int d^4x F_{\mu\nu} \left[1 + \frac{e^2}{\pi^2} F(\square_E) \right] F^{\mu\nu} + \mathcal{O}(A^4), \quad (5.36)$$

donde el factor de forma $F(\square_E)$ es el mismo de la ec.(5.26) sin la prescripción $-i\epsilon$ y con el D'Alambertiano euclídeo ³. Las ecuaciones de movimiento euclídeas para el campo electromagnético son las mismas ecs.(5.28), también con el D'Alambertiano euclídeo.

Para hallar las ecuaciones de movimiento in-in, basta reemplazar en las ecuaciones de movimiento euclídeas el propagador \square_E^{-1} por el propagador retardado $\square_{\text{ret}}^{-1}$ [28], obteniéndose de esta forma la versión in-in del factor de forma. Sobre funciones de prueba independientes del tiempo, dicho factor de forma actúa como

$$F_{\text{in}}(\square) f(\mathbf{x}) = F(\nabla^2) f(\mathbf{x}) = \int d^3x' \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} e^{ik(\mathbf{x}-\mathbf{x}')} F(-k^2) f(\mathbf{x}'), \quad (5.37)$$

pues la integral temporal del propagador retardado coincide con la función de Green del laplaciano. En particular, en el límite de distancias cortas, el factor de forma es logarítmico y reobtenemos la ec.(5.34).

Estamos ahora listos para calcular las modificaciones al potencial electrostático. Tomando como fuente clásica una carga puntual estática, la ley de Gauss adopta la forma

$$\nabla \cdot \mathbf{E} - \frac{e^2}{12\pi^2} G\left(-\frac{\nabla^2}{\mu^2}\right) \nabla \cdot \mathbf{E} = e\delta^3(\mathbf{x}). \quad (5.38)$$

³Esta expresión para la acción efectiva euclídea también puede deducirse en base a las técnicas del capítulo anterior. Para ello usamos la identidad $\text{Tr} \ln(\gamma^\mu \nabla_\mu + im) = \frac{1}{2} \text{Tr} \ln(K)$ donde $K \equiv (\gamma^\mu \nabla_\mu + im)(\gamma^\mu \nabla_\mu - im) = -\square + m^2 + \frac{e}{2} \sigma_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$, siendo $\sigma_{\mu\nu} = \frac{i}{2} [\gamma_\mu, \gamma_\nu]$. Vemos entonces que el determinante fermiónico puede escribirse en términos del determinante de un operador diferencial de segundo orden K , del tipo de la ec. (4.2). Aplicando la técnica de resumación del capítulo 4 obtenemos la expresión de la acción efectiva euclídea (5.36).

La solución para el campo eléctrico es esféricamente simétrica $\mathbf{E} = E(r)\hat{\mathbf{r}}$ y la hallaremos perturbativamente en potencias de e^2 , $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)}$. El término de orden cero es la contribución clásica

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^{(0)} = e\delta^3(\mathbf{x}) \implies E^{(0)}(r) = \frac{e}{4\pi r^2}, \quad (5.39)$$

y el término de primer orden es una corrección cuántica dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{E}^{(1)} = \frac{e^2}{12\pi^2} G\left(-\frac{\nabla^2}{\mu^2}\right) \nabla \cdot \mathbf{E}^{(0)}. \quad (5.40)$$

En consecuencia, debemos evaluar la acción de $G\left(-\frac{\nabla^2}{\mu^2}\right)$ sobre la delta de Dirac. Usando la ec.(5.34) obtenemos

$$\ln\left(-\frac{\nabla^2}{\mu^2}\right)\delta^3(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi r^3} - \ln(\mu^2)\delta^3(\mathbf{x}), \quad (5.41)$$

donde el último término da una corrección que depende de μ a la solución clásica, y que absorberemos en la fuente clásica ⁴. La corrección cuántica es

$$E^{(1)}(r) = E^{(1)}(r_0) \frac{r_0^2}{r^2} - \frac{e^3}{24\pi^3 r^2} \ln \frac{r}{r_0}, \quad (5.42)$$

donde r_0 es un radio de referencia arbitrario. Integrando las ecuaciones (5.39) y (5.42) y multiplicando por la carga e , obtenemos el potencial de interacción electrostático

$$V_{\text{int}}(r) = \frac{e^2}{4\pi r} \left[1 - \frac{e^2}{6\pi^2} \ln \frac{r}{r_0} + \mathcal{O}(e^4) \right]. \quad (5.43)$$

A partir de esta ecuación es inmediato obtener la forma en que la carga eléctrica varía con la distancia, y el resultado coincide con el hallado en la ec.(5.5).

⁴Esta expresión también puede obtenerse por medio de la transformada de Fourier $\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}} \ln p^2 = -\frac{1}{2\pi r^3}$.

5.3 Campos escalares en fondos curvos

5.3.1 Ecuaciones efectivas no locales para el campo gravitatorio

Consideremos ahora un campo escalar cuántico en un fondo gravitatorio clásico y en presencia de una masa clásica M . La acción euclídea de la teoría es $S = S_M + S_{\text{grav}} + S_{\text{materia}}$, donde

$$S_M = -M \int \sqrt{g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu} \quad (5.44)$$

$$S_{\text{grav}} = - \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{16\pi G} (R - 2\Lambda) + \alpha R^2 + \beta R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} \right] \quad (5.45)$$

$$S_{\text{materia}} = \frac{1}{2} \int d^4x \sqrt{g} [\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + m^2 \phi^2 + \xi R \phi^2]. \quad (5.46)$$

Aquí $g_{\mu\nu}$ es la métrica del fondo gravitatorio, x^μ es la trayectoria de la partícula M , m es la masa del campo escalar y ξ es una constante adimensional asociada al acoplamiento del campo escalar con la curvatura. En la acción gravitatoria, G es la constante de Newton, Λ es la constante cosmológica y α y β son constantes adimensionales que acompañan a los términos cuadráticos en curvaturas. Todos estos parámetros en la acción gravitatoria son constantes desnudas que se renormalizarán al integrar las fluctuaciones del campo escalar. Haciendo la integral gaussiana sobre el campo escalar obtenemos la acción efectiva para el campo gravitatorio. Formalmente el resultado es

$$S_{\text{ef}} = S_M + S_{\text{grav}} + \frac{1}{2} \ln \det \left[\frac{-\square + m^2 + \xi R}{\mu^2} \right] \equiv S_M + S_{\text{grav}} + \Gamma. \quad (5.47)$$

La acción efectiva tiene la forma estudiada en el capítulo 4, siendo en este caso la matriz $\hat{Q} = (\frac{1}{6} - \xi)R\hat{1}$. Como hemos visto, la tarea de evaluar este determinante funcional en un fondo gravitatorio arbitrario es extremadamente difícil, y se requieren técnicas de aproximación. Para campos gravitatorios lentamente variables, las técnicas de Schwinger-DeWitt (límite de tiempos cortos del heat kernel) da una expansión de Γ en potencias inversas de la masa. En la notación del capítulo 4,

$$\Gamma = -\frac{1}{32\pi^2} \lim_{L \rightarrow \infty} \int d^4x \sqrt{g} \text{Tr} \left[\rho_0 a_0(x) + \rho_1 a_1(x) + \rho_2 a_2(x) + \sum_{n=3}^{\infty} (n-3)! \frac{1}{(m^2)^{n-2}} a_n(x) \right], \quad (5.48)$$

donde ⁵

$$a_0(x) = 1 \quad (5.49)$$

$$a_1(x) = \left(\frac{1}{6} - \xi\right)R \quad (5.50)$$

$$a_2(x) = \frac{1}{60}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 - \frac{1}{90}\right]R^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{5} - \xi\right), \quad (5.51)$$

y ρ_0 , ρ_1 y ρ_2 son cantidades divergentes para $L \rightarrow \infty$ dadas en la ec.(4.12). Las divergencias son absorbidas en una redefinición de las constantes desnudas de la acción clásica gravitatoria. Las divergencias en ρ_0 se renormalizan en la constante cosmológica, las de ρ_1 en la constante gravitatoria, y las de ρ_2 en las constantes α y β . En esta forma obtenemos la versión renormalizada de la acción efectiva

$$\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} \left[\frac{1}{2}m^4 \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - m^2 a_1(x) \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + a_2(x) \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) - \frac{1}{2} \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(n-3)!}{(m^2)^{n-2}} a_n(x) \right], \quad (5.52)$$

donde ahora todos los parámetros son vestidos. A partir de esta expansión, es fácil derivar el escaleo de las constantes gravitatorias. Dado que la acción efectiva no depende de la escala arbitraria μ , es decir $\mu dS_{\text{ef}}/d\mu = 0$, se obtiene el siguiente conjunto de ecuaciones del grupo de renormalización

$$\mu \frac{dG}{d\mu} = \frac{G^2 m^2}{\pi} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \quad (5.53)$$

$$\mu \frac{d\alpha}{d\mu} = -\frac{1}{32\pi^2} \left[\left(\frac{1}{6} - \xi \right)^2 - \frac{1}{90} \right] \quad (5.54)$$

$$\mu \frac{d\beta}{d\mu} = -\frac{1}{960\pi^2} \quad (5.55)$$

$$\mu \frac{d\Lambda}{d\mu G} = \frac{m^4}{4\pi}. \quad (5.56)$$

⁵Usamos la identidad de Gauss-Bonnet $0 = \int d^4x \sqrt{g} [R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2]$, que es un invariante topológico en $d = 4$ dimensiones, para escribir el coeficiente $a_2(x)$ en términos sólo de R y de $R_{\mu\nu}$.

Partiendo de la ec.(5.53) podemos obtener el potencial gravitatorio 'wilsoniano' generado por la partícula M , asumiendo que ésta es estática y que está localizada en el origen. Dado que el escaleo de $G(\mu)$ viene dado por $G(\mu) = G_0 \left(1 + \frac{m^2 G_0}{\pi} (\xi - \frac{1}{6}) \ln \frac{\mu}{\mu_0}\right)$, el potencial wilsoniano resulta

$$V(r) = -\frac{MG(\mu = r^{-1})}{r} = -\frac{G_0 M}{r} \left[1 - \frac{m^2 G_0}{\pi} (\xi - \frac{1}{6}) \ln \frac{r}{r_0}\right]. \quad (5.57)$$

Es decir, los efectos cuánticos debidos al campo de materia hacen que se modifique la ley de Newton clásica r^{-1} , y entonces la constante gravitatoria pasa a ser función de la distancia. Siguiendo las mismas técnicas que en la sección anterior, a continuación analizaremos si es posible derivar este potencial basándonos en los términos no locales de la acción efectiva.

Como hemos visto en el capítulo 4, la acción efectiva posee contribuciones no locales, que han sido calculadas mediante la resumación de la expansión de Schwinger-DeWitt, válida en el caso de campos débiles y rápidamente variables. En el presente caso la acción efectiva, a orden cuadrático en curvaturas, toma la forma

$$\Gamma = \frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} \lim_{L \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{2} m^4 \ln\left(\frac{m^2}{L^2}\right) + m^2 \ln\left(\frac{m^2}{L^2}\right) (\xi - \frac{1}{6}) R \right. \\ \left. + R H_1(\square) R + R_{\mu\nu} H_2(\square) R^{\mu\nu} \right]. \quad (5.58)$$

Los factores de forma $H_i(\square)$ se expresan en función de los factores de forma $F_i(\square)$ del capítulo 4 como sigue

$$H_1(\square) = F_2(\square) + \left(\frac{1}{6} - \xi\right) F_3(\square) + \left(\frac{1}{6} - \xi\right)^2 F_4(\square) \quad (5.59)$$

$$H_2(\square) = F_1(\square). \quad (5.60)$$

A partir de esta expresión para la acción efectiva, podemos derivar las ecuaciones de Einstein semiclásicas $\delta S_{\text{ef}} / \delta g_{\mu\nu} = 0$. Dado que estamos despreciando términos de orden $\mathcal{O}(\mathcal{R}^3)$ en la acción efectiva, debemos descartar toda contribución a las ecuaciones de movimiento que sea cuadrática en curvaturas. En consecuencia, al tomar la variación de la acción respecto a $g_{\mu\nu}$, no es necesario tener en cuenta la dependencia de los factores de forma en la métrica. Además, a este orden, es posible conmutar derivadas covariantes actuando sobre una curvatura, es decir

$\nabla_\mu \nabla_\nu \mathcal{R} = \nabla_\nu \nabla_\mu \mathcal{R} + \mathcal{O}(R^2)$. Obtenemos así las ecuaciones semiclásicas (euclídeas) para el campo gravitatorio

$$\left[\frac{1}{8\pi G} - \frac{m^2}{16\pi^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \ln \frac{m^2}{L^2} \right] (R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}) - \alpha H_{\mu\nu}^{(1)} - \beta H_{\mu\nu}^{(2)} = T_{\mu\nu} + \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (5.61)$$

donde $T_{\mu\nu}(y) = M \int d\tau \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \delta^4(y - x(\tau))$ es el tensor de energía-momento asociado a la partícula M . Denotamos con \cdot a la derivada respecto al tiempo propio τ , definido como $d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$.

La contribución cuántica al tensor de energía-impulso es

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{32\pi^2} [H_1(\square) H_{\mu\nu}^{(1)} + H_2(\square) H_{\mu\nu}^{(2)}]. \quad (5.62)$$

Los tensores $H_{\mu\nu}^{(i)}$ valen

$$\begin{aligned} H_{\mu\nu}^{(1)} &= 4\nabla_\mu \nabla_\nu R - 4g_{\mu\nu} \square R + \mathcal{O}(R^2) \\ H_{\mu\nu}^{(2)} &= 2\nabla_\mu \nabla_\nu R - g_{\mu\nu} \square R - 2\square R_{\mu\nu} + \mathcal{O}(R^2), \end{aligned} \quad (5.63)$$

y provienen de derivar los términos cuadráticos en curvaturas a nivel de la acción. En las ecuaciones de movimiento hemos asumido que la constante cosmológica vestida es nula, de modo que no aparecen contribuciones proporcionales a la métrica $g_{\mu\nu}$ independientes de curvaturas.

Las ecuaciones de movimiento son válidas para campos gravitatorios débiles y rápidamente variables y, a priori, para cualquier valor de la masa del campo cuántico. En el límite en que la escala de variación del campo gravitatorio es mucho mayor que la inversa de la masa (es decir $m^2 \mathcal{R} \gg \nabla \nabla \mathcal{R}$), los factores de forma $H_i(\square)$ se pueden desarrollar en potencias de $-\square/m^2$ y se reobtiene la ecuación de movimiento (local) que resulta del desarrollo de Schwinger-DeWitt. En el límite opuesto ($m^2 \mathcal{R} \ll \nabla \nabla \mathcal{R}$) se puede hacer una expansión en $-m^2/\square$. Al igual que en el caso de la electrodinámica, estaremos interesados en este último caso.

Para estudiar el comportamiento de los factores de forma para el caso $z \equiv -m^2/\square \ll 1$, partimos de su definición $H_i(\square) = \int_{1/L^2}^{\infty} ds \frac{e^{-sm^2}}{s} h_i(-s\square)$, donde

$$\begin{aligned} h_1(\eta) &= \frac{f(\eta)}{8} \left[\frac{1}{36} + \frac{1}{3\eta} - \frac{1}{\eta^2} \right] - \frac{1}{16\eta} + \frac{1}{8\eta^2} + \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \left[\frac{f(\eta)}{12} + \frac{f(\eta) - 1}{2\eta} \right] + \frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 f(\eta) \\ h_2(\eta) &= \frac{f(\eta) - 1 + \eta/6}{\eta^2}. \end{aligned} \quad (5.64)$$

Denotemos en forma genérica con σ a cualquiera de las funciones h_i y procedamos a estudiar el comportamiento de la integral $I \equiv \int_{1/L^2}^{\infty} ds \frac{e^{-sm^2}}{s} \sigma(-s\Box)$ en términos de z . Para ello partimos la integral en la forma $I = A + B$, donde

$$A(z) = \int_{-\Box/L^2}^C \frac{d\eta}{\eta} e^{-\eta z} \sigma(\eta) \quad (5.65)$$

$$B(z) = \int_C^{\infty} \frac{d\eta}{\eta} e^{-\eta z} \sigma(\eta), \quad (5.66)$$

con C una constante elegida de forma tal que $z^{-1} \gg C \gg 1$. En la primer integral podemos usar la expansión en Taylor del factor de forma, $\sigma(\eta) = \sum_{n=2}^{\infty} \sigma_n \eta^{n-2}$, donde las constantes σ_n se leen del correspondiente coeficiente de Schwinger-DeWitt (ver ecs.(4.16) y (4.17)). Los términos con $n \geq 3$ son finitos en el límite $L^2 \rightarrow \infty$ y dan una contribución analítica en la variable z , mientras que el término en $n = 2$ (que corresponde al segundo coeficiente de Schwinger-DeWitt) da una contribución divergente. Expandiendo la exponencial en la integral $A(z)$ en potencias de $\eta z \ll 1$ obtenemos finalmente

$$A = -\sigma_2 \ln\left(-\frac{\Box}{L^2}\right) + \mathcal{O}\left(\left(-\frac{m^2}{\Box}\right)^2\right), \quad (5.67)$$

donde el último término denota contribuciones finitas y analíticas en $-m^2/\Box$. Como ya vimos, la divergencia logarítmica se renormaliza con el contratérmino clásico \mathcal{R}^2 . En cuanto a la integral B , su comportamiento en potencias de $-m^2/\Box$ está gobernado por el límite asintótico de $\beta(\eta)$ para tiempos grandes. Usando que $\beta(\eta) = \frac{k}{\eta}$ para $\eta \rightarrow \infty$ (ver ec.(4.27)), la integral resulta

$$B = -k \frac{m^2}{\Box} \ln\left(-\frac{m^2}{\Box}\right) + \mathcal{O}\left(\left(-\frac{m^2}{\Box}\right)^2\right). \quad (5.68)$$

En conclusión

$$\lim_{L \rightarrow \infty} \int_{1/L^2}^{\infty} ds \frac{e^{-sm^2}}{s} \sigma(-s\Box) = -\sigma_2 \ln\left(-\frac{\Box}{L^2}\right) - k \frac{m^2}{\Box} \ln\left(-\frac{m^2}{\Box}\right) + \mathcal{O}\left(-\frac{m^2}{\Box}\right)^2. \quad (5.69)$$

Los coeficientes $\sigma^{(i)}$ los obtenemos del límite de tiempos cortos de las funciones $f_i(\eta)$ (ec.(4.26)), y los coeficientes $f_i(\eta)$ del límite de tiempos largos (ec.(4.27)). Resulta

$$\begin{aligned}\sigma_2^{(1)} = h_1(0) &= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{1}{6} - \xi \right)^2 - \frac{1}{90} \right] & \sigma_2^{(2)} = h_2(0) &= \frac{1}{60} \\ k^{(1)} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta h_1(\eta) &= \xi^2 - \frac{1}{12} & k^{(2)} = \lim_{\eta \rightarrow \infty} \eta h_2(\eta) &= \frac{1}{6}.\end{aligned}\quad (5.70)$$

Finalmente los factores de forma renormalizados quedan

$$H_1(\square) = -\sigma_2^{(1)} \ln\left(-\frac{\square}{\mu^2}\right) - k^{(1)} \frac{m^2}{\square} \ln\left(-\frac{m^2}{\square}\right) + \mathcal{O}\left(-\frac{m^2}{\square}\right)^2 \quad (5.71)$$

$$H_2(\square) = -\sigma_2^{(2)} \ln\left(-\frac{\square}{\mu^2}\right) - k^{(2)} \frac{m^2}{\square} \ln\left(-\frac{m^2}{\square}\right) + \mathcal{O}\left(-\frac{m^2}{\square}\right)^2. \quad (5.72)$$

Los términos independientes de la masa del campo escalar son proporcionales al factor de forma no local $\ln(-\square/\mu^2)$, siendo los factores de proporcionalidad las correspondientes constantes del segundo coeficiente de Schwinger-DeWitt. Cabe mencionar que estos términos no locales y no masivos pueden deducirse fácilmente partiendo de las ecuaciones del grupo de renormalización. En efecto, imponiendo el hecho que la acción efectiva no depende del parámetro arbitrario μ , y usando el hecho que los factores de forma son cantidades adimensionales, $H_i = H_i(-\frac{\square}{\mu^2}; \xi)$, el escaleo de las constantes α y β determina su expresión en forma unívoca. Notemos que estas contribuciones no masivas de los factores de forma tienen una interpretación clara: corresponden a la acción gravitatoria clásica en la cual las constantes α y β han sido reemplazadas por funciones de dos puntos no locales. En el caso masivo, la situación es más complicada pues los factores de forma pueden también depender de otra cantidad adimensional m^2/μ^2 , y el grupo de renormalización no es suficiente para determinar su expresión. En este caso es necesario recurrir al análisis asintótico descrito anteriormente.

El tensor de energía-momento queda finalmente

$$\begin{aligned}\langle T_{\mu\nu} \rangle &= -\frac{1}{32\pi^2} \left\{ \log\left(-\frac{\square}{\mu^2}\right) \left[\sigma_2^{(1)} H_{\mu\nu}^{(1)} + \sigma_2^{(2)} H_{\mu\nu}^{(2)} \right] \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2 k^{(1)}}{\square} \log\left(-\frac{m^2}{\square}\right) \left[H_{\mu\nu}^{(1)} + \frac{k^{(2)}}{k^{(1)}} H_{\mu\nu}^{(2)} \right] \right\}.\end{aligned}\quad (5.73)$$

El primer término (no masivo) puede ser interpretado como una corrección a las constantes gravitacionales α y β . Como ya hemos dicho, los factores numéricos de esas correcciones provienen del

límite de tiempos cortos del heat kernel, y por lo tanto coinciden con los que resultan del segundo coeficiente de Schwinger-DeWitt. El segundo término (masivo) podría ser interpretado como una corrección a G si pudiese ser expresado en una combinación proporcional a $m^2 \ln(-\frac{m^2}{\square})(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu})$. Al orden que estamos trabajando $\mathcal{O}(\mathcal{R}^2)$, vale la relación

$$H_{\mu\nu}^{(1)} - 2H_{\mu\nu}^{(2)} = 4\square(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}), \quad (5.74)$$

de modo que esta interpretación será posible sólo si $k^{(2)}/k^{(1)} = -2$. Esta condición se satisface únicamente para acoplamiento mínimo, $\xi = 0$. Cuando resolvamos las ecuaciones de movimiento veremos cómo este hecho se traduce en la dependencia de la constante gravitatoria con la distancia.

A partir de las ecuaciones de movimiento también es posible derivar las ecuaciones del grupo de renormalización, imponiendo que las primeras no dependan de la escala μ . Una forma alternativa es hacer la transformación $g_{\mu\nu} \rightarrow s^{-2}g_{\mu\nu}$ y analizar cómo se comportan las constantes gravitatorias en el límite $s \rightarrow \infty$ [76, 80]. Dado que ante dicha transformación, $\square \rightarrow s^2\square$, los términos no locales proporcionales a $\ln(-\square)$ se hacen relevantes para s grande. De los términos no masivos de la ecuación de movimiento obtenemos el mismo escaleo que mediante el grupo de renormalización

$$\alpha(s) = \alpha(s=1) - \frac{1}{32\pi^2} \left(\left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 - \frac{1}{90} \right) \ln s \quad (5.75)$$

$$\beta(s) = \beta(s=1) - \frac{1}{960\pi^2} \ln s. \quad (5.76)$$

Los términos masivos, en cambio, conducen a un escaleo para G sólo para acoplamiento mínimo $\xi = 0$, por las mismas razones indicadas más arriba. En este caso,

$$G(s) = G(s=1) \left(1 - \frac{G(s=1)m^2}{6\pi} \ln s \right) \quad (\xi = 0), \quad (5.77)$$

que coincide con lo prescripto por el grupo de renormalización para $G(\mu)$ para este valor particular del acoplamiento. Este hecho ya había sido remarcado en [76].

5.3.2 El potencial newtoniano a partir de la acción efectiva

Al igual que en electrodinámica cuántica, los efectos de polarización de vacío contenidos en $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ inducen modificaciones en el potencial newtoniano. Seguidamente calcularemos estas correcciones

partiendo de las ecuaciones de Einstein semiclásicas. Para ello es necesario transformar las ecuaciones de movimiento euclídeas (5.61) en ecuaciones in-in. Ello se logra reemplazando en los factores de forma no locales los propagadores euclídeos masivos por los correspondientes propagadores retardados, o bien haciendo una rotación de Wick para escribir las ecuaciones minkowskianas y tomando luego dos veces la parte real y causal de las mismas. Sin embargo, al calcular el potencial newtoniano consideramos campos independientes del tiempo, de modo que las ecuaciones in-in son simplemente las ecuaciones euclídeas donde \square es reemplazado por ∇^2 . La signatura de la métrica en estas ecuaciones in-in será $(-+++)$.

Las ecuaciones de movimiento son covariantes, es decir invariantes ante cambios generales de coordenadas. Para resolverlas haremos perturbaciones alrededor del espacio-tiempo plano, $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$, con $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-+++)$ y $|h_{\mu\nu}| \ll 1$, y fijaremos la medida mediante la denominada medida armónica, $(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu})^{;\nu} = 0$. Para esta elección,

$$R_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\square h_{\mu\nu} \quad (5.78)$$

$$R = -\frac{1}{2}\square h \quad (5.79)$$

$$H_{\mu\nu}^{(1)} = (-2\partial_\mu\partial_\nu + 2\eta_{\mu\nu}\square)\square h \quad (5.80)$$

$$H_{\mu\nu}^{(2)} = (-\partial_\mu\partial_\nu + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\square)\square h + \square\square h_{\mu\nu}, \quad (5.81)$$

donde $h = \eta^{\mu\nu}h_{\mu\nu}$. Los índices suben y bajan con la métrica plana $\eta_{\mu\nu}$. Las ecuaciones de movimiento linealizadas quedan entonces

$$\left[-\frac{1}{16\pi G} + \frac{m^2}{32\pi^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right] \square \bar{h}_{\mu\nu} - \alpha H_{\mu\nu}^{(1)} - \beta H_{\mu\nu}^{(2)} = T_{\mu\nu} + \langle T_{\mu\nu} \rangle, \quad (5.82)$$

con $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}$.

Asumiremos que la partícula M es estática y que está localizada en el origen, $\dot{x}^\mu = (1, 0, 0, 0)$, $T^{\mu\nu}(\mathbf{x}) = \delta_0^\mu\delta_0^\nu M\delta^3(\mathbf{x})$, $T_\mu^\mu(\mathbf{x}) = -M\delta^3(\mathbf{x})$. Dado que calcularemos correcciones al potencial newtoniano a largas distancias, podemos asumir que la fuente M es una "masa puntual", a pesar que su tamaño debe ser mucho mayor que su radio de Schwarzschild y que la longitud de Planck, de modo de justificar la aproximación de campo débil que haremos más adelante. Para obtener el potencial newtoniano consideraremos las ecuaciones geodésicas de una partícula de prueba de

masa m_p con coordenadas $z^\mu(\tau)$, [$d\tau^2 = -g_{\mu\nu}dz^\mu dz^\nu$] que se mueve en el fondo gravitatorio $g_{\mu\nu}$. Estas ecuaciones son

$$0 = \frac{d^2 z^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\sigma}{d\tau}, \quad (5.83)$$

donde $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho$ es el símbolo de Christoffel asociado a la métrica solución de las ecuaciones semiclásicas. En el límite de campo débil y velocidades no relativistas, las ecuaciones geodésicas se reducen a

$$\frac{d^2 \mathbf{z}}{dt^2} = -\nabla V = \frac{1}{2} \nabla h_{00}, \quad (5.84)$$

de modo que podemos definir el potencial newtoniano como $V(r = |\mathbf{z}|) = -\frac{1}{2}h_{00}$. Debemos entonces hallar la componente 00 de la perturbación a la métrica plana, $h_{00} = \bar{h}_{00} - \frac{1}{2}h$, y para ello resolveremos la ec.(5.82) para \bar{h}_{00} en el caso estático, y la ecuación para la traza h ,

$$\left[\frac{1}{16\pi G} - \frac{m^2}{32\pi^2} \left(\xi - \frac{1}{6} \right) \ln \frac{m^2}{\mu^2} \right] \nabla^2 h - 2(3\alpha + \beta) \nabla^2 \nabla^2 h = T_\mu^\mu + \langle T_\mu^\mu \rangle, \quad (5.85)$$

donde

$$\langle T_\mu^\mu \rangle = -\frac{1}{32\pi^2} \left[3 \left(\xi - \frac{1}{6} \right)^2 \ln \left(-\frac{\nabla^2}{\mu^2} \right) \nabla^2 \nabla^2 - 6m^2 \left(\xi^2 - \frac{1}{36} \right) \ln \left(-\frac{\nabla^2}{m^2} \right) \nabla^2 \right] h. \quad (5.86)$$

Primero resolvemos la ecuación para h y luego haremos lo propio con \bar{h}_{00} .

En forma consistente con la aproximación semiclásica, proponemos una solución perturbativa $h = h^{(0)} + h^{(1)}$, donde el primer término corresponde a la solución clásica y el segundo es la contribución cuántica. La primera parte satisface la ecuación

$$(\nabla^2 - \sigma^{-2} \nabla^2 \nabla^2) h^{(0)} = -16\pi G M \delta^3(\mathbf{x}) \quad \sigma^{-2} = 32\pi G(3\alpha + \beta), \quad (5.87)$$

que posee la siguiente solución esféricamente simétrica [81]

$$h^{(0)} = \frac{4GM}{r} (1 - e^{-\sigma r}). \quad (5.88)$$

Vemos que las contribuciones en α y β , que provienen de los términos cuadráticos en curvaturas en la acción clásica, conducen a una perturbación de corto alcance del tipo Yukawa, que para

grandes distancias ($\sigma r \gg 1$)⁶ es despreciable frente a la contribución de largo alcance en r^{-1} , que proviene del término lineal en curvaturas. Este hecho es una propiedad de la relatividad general, que discutiremos en más detalle en el capítulo 6, al estudiar a la relatividad como una teoría efectiva de bajas energías. En este límite la solución se reduce entonces al potencial clásico r^{-1} . La parte cuántica satisface

$$(\nabla^2 - \sigma^{-2}\nabla^2\nabla^2)h^{(1)} = \mathcal{D}(\nabla^2)h^{(0)}, \quad (5.89)$$

donde

$$\mathcal{D}(\nabla^2) = -\frac{3G}{2\pi}\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 \ln\left(-\frac{\nabla^2}{\mu^2}\right)\nabla^2\nabla^2 + \frac{Gm^2}{\pi} \left[\frac{1}{2}\left(\xi - \frac{1}{6}\right) \ln\left(\frac{m^2}{\mu^2}\right) + 3\left(\xi^2 - \frac{1}{36}\right) \ln\left(-\frac{\nabla^2}{m^2}\right)\nabla^2 \right]. \quad (5.90)$$

Usando que $\nabla^2 r^{-1} = -4\pi\delta^3(\mathbf{x})$ y recordando la acción del núcleo logarítmico sobre la delta de Dirac (ec.(5.41)), encontramos

$$\frac{1}{64\pi G^2 M} (\nabla^2 - \sigma^{-2}\nabla^2\nabla^2)h^{(1)} = \left[\frac{3m^2}{8\pi^2} \left(\xi^2 - \frac{1}{36}\right) \right] \frac{1}{r^3} - \left[\frac{9}{8\pi^2} \left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 \right] \frac{1}{r^5}. \quad (5.91)$$

La solución a esta ecuación es

$$h^{(1)} = -\frac{24G^2 M m^2}{\pi} \left(\xi^2 - \frac{1}{36}\right) \frac{\ln \frac{r}{r_0}}{r} - \frac{12G^2 M}{\pi} \left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 \frac{1}{r^3} + \dots \quad (5.92)$$

El primer término proviene de la fuente proporcional a r^{-3} y el segundo de la proporcional a r^{-5} . Los puntos suspensivos denotan contribuciones que decrecen más rápidamente que r^{-3} .

A continuación hallaremos la solución para \bar{h}_{00} en el límite de grandes distancias ($\sigma r \gg 1$). Como ya hemos visto, los términos en α y β dan contribuciones de corto alcance, y por lo tanto podemos nuevamente obviar su contribución. Proponemos una solución perturbativa $\bar{h}_{00} = \bar{h}_{00}^{(0)} + \bar{h}_{00}^{(1)}$, donde el primer término es la parte clásica, que resulta ser $\bar{h}_{00}^{(0)} = 4GM/r$. El segundo término satisface $\nabla^2 \bar{h}_{00}^{(1)} = -16\pi G \langle T_{00} \rangle$, estando el miembro derecho evaluado en la solución clásica. Para ello necesitamos las expresiones linealizadas de $H_{00}^{(1)}$ y $H_{00}^{(2)}$,

⁶Las ecuaciones semiclásicas fueron deducidas bajo las condiciones $\nabla\nabla\mathcal{R} \gg \mathcal{R}^2$ y $m^2\mathcal{R} \ll \nabla\nabla\mathcal{R}$, de modo que para el potencial clásico GM/r ello implica que el rango de distancias en el cual la solución tendrá validez es $GM \ll r \ll m^{-1}$.

$$\begin{aligned}
H_{00}^{(1)} &= (-2\partial_0\partial_0 - 2\Box)\Box h \\
H_{00}^{(2)} &= (-\partial_0\partial_0 - \frac{1}{2}\Box)\Box h + \Box\Box h_{00}.
\end{aligned} \tag{5.93}$$

Al evaluarlas en la solución clásica $h^{(0)} = 4GM/r$ y $h_{00}^{(0)} = \bar{h}_{00}^{(0)} - \frac{1}{2}h^{(0)} = 2GM/r$, resulta $H_{00}^{(1)} = 32\pi GM\nabla^2\delta^3(\mathbf{x})$ y $H_{00}^{(2)} = 0$. Finalmente obtenemos

$$\bar{h}_{00}^{(1)} = -\frac{4G^2M}{\pi} \left[\left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{90} \right] \frac{1}{r^3} - \frac{8G^2Mm^2}{\pi} \left(\xi^2 - \frac{1}{12}\right) \frac{\ln(r/r_0)}{r}. \tag{5.94}$$

El potencial newtoniano lo obtenemos a partir de $h_{00} = \bar{h}_{00} - \frac{1}{2}h$, y resulta

$$V(r) = -\frac{1}{2}h_{00} = -\frac{GM}{r} \left\{ 1 + \frac{2G}{\pi} \left[\frac{1}{2} \left(\xi - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{90} \right] \frac{1}{r^2} + \frac{2m^2G}{\pi} \left(\xi^2 + \frac{1}{12}\right) \ln \frac{r}{r_0} \right\}. \tag{5.95}$$

Hay dos tipos de correcciones cuánticas al potencial newtoniano:

a) Una corrección en r^{-3} que es independiente de la masa del campo escalar y cuyo coeficiente está asociado al límite de tiempos cortos del heat kernel (segundo coeficiente de Schwinger-DeWitt), como hemos discutido con anterioridad. La forma en que α y β escalcan ante el grupo de renormalización determina la estructura no local y no masiva de la acción efectiva, a segundo orden en curvaturas. Por lo tanto, es dicho escaleo el responsable de las correcciones en r^{-3} .

b) Una corrección en $m^2r^{-1} \ln r$, que depende de la masa del campo escalar y cuyo coeficiente está asociado al límite de tiempos largos del heat kernel. Esta contribución logarítmica es cualitativamente similar a la corrección que resulta del escaleo de G mediante el argumento wilsoniano, pero el coeficiente numérico no coincide (comparar la ec.(5.57) con la ec.(5.95)). La razón de esta discrepancia es que el potencial wilsoniano se basa en el grupo de renormalización, es decir en el escaleo de las constantes gravitatorias como aparecen en el segundo coeficiente de Schwinger-DeWitt. En cambio, la corrección logarítmica en el *espacio de configuración* surge de los tiempos largos del heat kernel, que no está relacionado con dicho coeficiente. Para el caso particular de acoplamiento mínimo $\xi = 0$, nuestro resultado coincide con el wilsoniano. Ello se debe, como hemos visto anteriormente, al hecho de que sólo para este valor particular del acoplamiento se cumple $k^{(2)}/k^{(1)} = -2$, de modo que los términos masivos pueden interpretarse efectivamente

como una corrección al escaleo de G . Notemos que el argumento wilsoniano nunca conduce a la corrección proporcional a r^{-3} .

5.4 Campos fermiónicos en fondos curvos

En esta sección estudiamos las correcciones cuánticas al potencial newtoniano debidas a campos espinoriales. El tratamiento de espinores de Dirac en espacio-tiempo curvo cuatridimensional se basa en el uso del formalismo de vierbeins. Se introducen matrices de Dirac $\gamma^\mu(x) = V_a^\mu(x)\gamma^a$, donde las γ^a son las matrices de Dirac usuales en el espacio plano, y $V_a^\mu(x)$ es el vierbein. Una descripción detallada del formalismo puede hallarse en [1, 23].

La acción euclídea para fermiones masivos en espacio-tiempo plano es [79]

$$S[\psi, \psi^\dagger] = \int d^4x \psi^\dagger [\gamma^\mu \partial_\mu + im] \psi, \quad (5.96)$$

donde $\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = -2\eta^{\mu\nu}$. Su generalización a espacio-tiempo curvo, con una métrica con signatura euclídea, es

$$S[\psi, \psi^\dagger] = \int d^4x \sqrt{g} \psi^\dagger [\gamma^\mu(x) \nabla_\mu + im] \psi, \quad (5.97)$$

donde $\{\gamma^\mu(x), \gamma^\nu(x)\} = -2g^{\mu\nu}(x)$ y ∇_μ es la derivada covariante. El conmutador de derivadas covariantes es $\mathcal{R}_{\mu\nu} = [\nabla_\mu, \nabla_\nu] = \frac{1}{8}[\gamma^\alpha(x), \gamma^\beta(x)]R_{\alpha\beta\mu\nu}(x)$ [82]. La contribución del campo fermiónico a la acción efectiva a un lazo es

$$\begin{aligned} \Gamma &= -\text{Tr} \ln(\gamma^\mu(x) \nabla_\mu + im) = -\frac{1}{2} \text{Tr} \ln \hat{K} \\ \hat{K} \psi &= (\gamma^\mu(x) \nabla_\mu + im)(\gamma^\mu(x) \nabla_\mu - im) \psi = (-\square + m^2 + \frac{1}{4}R) \psi. \end{aligned} \quad (5.98)$$

Vemos que evaluar la acción efectiva para los fermiones es similar a evaluar la acción efectiva para un campo escalar con $\xi = 1/4$, salvo un signo global y la traza sobre los índices de las matrices de Dirac. Para calcular esta acción aplicamos el mismo método de resumación de la sección anterior. A segundo orden en curvaturas, la acción efectiva resulta

$$\Gamma = -\frac{1}{32\pi^2} \int d^4x \sqrt{g} \lim_{L \rightarrow \infty} \left\{ \text{Tr}(\mathcal{R}_{\mu\nu} H_3(\square) \mathcal{R}^{\mu\nu}) + 4 \times \left[\left(\frac{1}{2} m^4 \ln\left(\frac{m^2}{L^2}\right) + m^2 \ln\left(\frac{m^2}{L^2}\right) \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) R + R H_1(\square) R + R_{\mu\nu} H_2(\square) R^{\mu\nu} \right) \right] \right\}, \quad (5.99)$$

donde el término entre corchetes es igual al caso escalar evaluado en $\xi = 1/4$, y el prefactor 4 proviene de trazar sobre los índices de Dirac. Tenemos además una contribución extra proporcional a

$$H_3(\square) = \int_{1/L^2}^{\infty} ds \frac{e^{-sm^2}}{s} h_3(-s\square) \quad h_3(\eta) = -\frac{f(\eta) - 1}{2\eta}. \quad (5.100)$$

Usando la expresión para $\mathcal{R}_{\mu\nu}$ y calculando la traza del producto de cuatro matrices de Dirac, esta nueva contribución puede escribirse en la forma $\text{Tr} \mathcal{R}_{\mu\nu} H_3(\square) \mathcal{R}^{\mu\nu} = -\frac{1}{2} R_{\alpha\beta\mu\nu} H_3(\square) R^{\alpha\beta\mu\nu}$. Finalmente, usando integraciones por partes, las identidades de Bianchi y la expansión no local del tensor de Riemann en términos del tensor de Ricci [67, 83]

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} = \frac{1}{\square} \left\{ \nabla_\mu \nabla_\alpha R_{\nu\beta} + \nabla_\nu \nabla_\beta R_{\mu\alpha} - \nabla_\nu \nabla_\alpha R_{\mu\beta} - \nabla_\mu \nabla_\beta R_{\nu\alpha} \right\} + \mathcal{O}(\mathcal{R}^2), \quad (5.101)$$

resulta la siguiente identidad

$$\int d^4x \text{Tr} \mathcal{R}_{\mu\nu} H_3(\square) \mathcal{R}^{\mu\nu} = \int d^4x \left[\frac{1}{2} R H_3(\square) R - 2 R_{\mu\nu} H_3(\square) R^{\mu\nu} + \mathcal{O}(\mathcal{R}^3) \right]. \quad (5.102)$$

Entonces el tensor de energía-momento es básicamente el de un campo escalar, pero modificado en la forma

$$\langle T_{\mu\nu} \rangle = \frac{1}{32\pi^2} \left\{ \log\left(-\frac{\square}{\mu^2}\right) \left[(4\sigma_2^{(1)} + \frac{1}{2}\sigma_2^{(3)}) H_{\mu\nu}^{(1)} + (4\sigma_2^{(2)} - 2\sigma_2^{(3)}) H_{\mu\nu}^{(2)} \right] + \frac{m^2}{\square} \log\left(-\frac{m^2}{\square}\right) \left[(4k^{(1)} + \frac{1}{2}k^{(3)}) H_{\mu\nu}^{(1)} + (4k^{(2)} - 2k^{(3)}) H_{\mu\nu}^{(2)} \right] \right\}. \quad (5.103)$$

Los nuevos coeficientes, asociados al factor de forma $H_3(\square)$, están dados por $\sigma_2^{(3)} = 1/12$ (comportamiento a tiempos cortos) y $k^{(3)} = 1/2$ (comportamiento a tiempos largos), mientras que los otros coeficientes (ecs.(5.70)), asociados al campo escalar, deben ser evaluados en $\xi = 1/4$. En

el caso fermiónico, los términos dependientes de la masa en $\langle T_{\mu\nu} \rangle$ pueden interpretarse como una corrección a la constante de Newton, pues se verifica que $(4k^{(2)} - 2k^{(3)})/(4k^{(1)} + \frac{k^{(3)}}{2}) = -2$. El campo espinorial se comporta, en este sentido, como un campo escalar mínimamente acoplado. Entonces es de esperar que, al igual que en el caso escalar, el potencial newtoniano wilsoniano coincida con el que surge de las ecuaciones geodésicas para una partícula de prueba.

Podemos obtener la ecuación del grupo de renormalización para $G(\mu)$ imponiendo que la acción efectiva (la acción clásica más la contribución cuántica, ec.(5.99)) sea independiente de μ . En esta forma obtenemos que, debido a los fermiones, la constante de gravitación corre con la escala en la forma

$$\mu \frac{dG}{d\mu} = -\frac{G^2 m^2}{3\pi}, \quad (5.104)$$

de modo que $G(\mu) = G_0[1 - \frac{G_0 m^2}{3\pi} \ln \frac{\mu}{\mu_0}]$, y el potencial wilsoniano asociado es $V(r) = -MG(\mu = r^{-1})/r$. Por otro lado, siguiendo los mismos pasos que en la sección anterior, podemos resolver las ecuaciones de Einstein semiclásicas en el límite newtoniano y obtener la contribución de los fermiones a las ecuaciones geodésicas de la partícula de prueba. De allí leemos la modificación al potencial newtoniano, que resulta

$$V(r) = -\frac{GM}{r} \left[1 + \frac{2G}{15\pi r^2} + \frac{Gm^2}{3\pi} \ln \frac{r}{r_0} \right]. \quad (5.105)$$

Como habíamos anticipado, la corrección logarítmica coincide con la predicción del argumento wilsonianos.

5.5 Discusión

En este capítulo hemos calculado correcciones cuánticas al potencial newtoniano válidas para bajas energías y largas distancias, debidas a campos de materia cuánticos. Como hemos visto, hay correcciones del tipo r^{-3} , independientes de la masa de campo de materia, y correcciones del tipo $m^2 r^{-1} \ln r$. Ambas correcciones son extremadamente pequeñas, del orden de l_{planck}/r .

Para QED y campos fermiónicos en espacio-tiempo curvo, el argumento wilsonianos coincide con las correcciones logarítmicas que se obtienen de resolver las correspondientes ecuaciones

de movimiento, mientras que para campos escalares dicha coincidencia se produce sólo para acoplamiento mínimo. Hemos analizado este hecho en función del comportamiento del heat kernel para tiempos largos y cortos. En cuanto a las correcciones en r^{-3} , éstas no se obtienen mediante un argumento wilsoniano. Dado que están presentes aún para campos escalares no masivos, y recordando que los grados de libertad físicos de los gravitones pueden ser tratados como campos escalares no masivos, esperamos que también haya correcciones en r^{-3} cuando se incluyen las fluctuaciones cuánticas del campo gravitatorio. Confirmaremos este hecho en el próximo capítulo.

Argumentos del tipo wilsoniano han sido utilizados para intentar explicar, al menos parcialmente, el problema de la materia oscura [84]: debido a efectos cuánticos, el potencial newtoniano se modifica en la forma $V = -G(\mu = r^{-1})Mr^{-1}$, donde $G(\mu)$ es la solución a las ecuaciones RG para una particular teoría renormalizable de la gravedad con términos R^2 en el lagrangiano [85]. Dado que la teoría es asintóticamente libre, $G(r)$ es una función creciente de la distancia, lo cual podría explicar parte de la materia faltante ⁷. Además, la dependencia de la constante gravitatoria con la distancia puede inducir interesantes efectos cosmológicos y astrofísicos [87]. Sin embargo, en base a los resultados de este capítulo, podemos decir que los términos de mayor importancia en el límite de grandes distancias/bajas energías, es decir los que decaen como r^{-3} , *nunca* aparecen en un argumento wilsoniano. Por lo tanto, este tipo de argumentos no sólo da resultados cuantitativamente disímiles (el distinto prefactor del escaleo de la constante gravitatoria), sino también resultados cualitativamente diferentes, perdiéndose las correcciones de mayor relevancia. Para obtener los resultados correctos, podemos definir una acción efectiva wilsoniana como la acción clásica en la cual los parámetros α y β son reemplazados por $\alpha(\square)$ y $\beta(\square)$. Estos son los núcleos no locales, independientes de la masa del campo cuántico, y que, como vimos, están unívocamente determinados por el escaleo de estas constantes que resulta de las ecuaciones del grupo de renormalización.

⁷Sin embargo, el comportamiento de $G(r)$ no es suficiente para explicar la curva de rotación en la Vía Láctea [86].



Capítulo 6

Correcciones al potencial newtoniano por efecto de gravitones

En este capítulo describimos el tratamiento de la relatividad general como una teoría cuántica de campos efectiva, válida para energías mucho menores que la de Planck. Aplicamos esta técnica y los métodos de la acción efectiva para hallar las correcciones cuánticas al potencial newtoniano en el límite de grandes distancias debidas a la inclusión de gravitones [88]. Mostramos que las ecuaciones de Einstein a un lazo en gravitones dependen (paramétricamente) del fijado de medida de los gravitones. La solución a dichas ecuaciones también depende de tales parámetros, y como tal no posee relevancia física. Consideramos en cambio un observable físico, que corresponde a la trayectoria de una partícula de prueba en presencia de gravitones. Derivamos las correcciones cuánticas a las ecuaciones geodésicas para dicha partícula y mostramos que son explícitamente independientes del fijado de medida. A partir de estas ecuaciones calculamos finalmente el potencial newtoniano modificado.

6.1 La relatividad general como una teoría efectiva

El lagrangiano más general compatible con la invariancia general de coordenadas conduce a una acción para la gravedad de la forma

$$S = \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \left[\lambda + \frac{2}{\kappa^2} \bar{R} + \alpha \bar{R}^2 + \beta \bar{R}_{\mu\nu} \bar{R}^{\mu\nu} + \dots \right], \quad (6.1)$$

donde $\kappa^2 = 32\pi G$ y los puntos suspensivos indican términos cúbicos y de orden superior en las curvaturas. El lagrangiano queda ordenado en una expansión en derivadas: λ es de orden ∂^0 (orden p^0 en el espacio de momentos), R es de orden ∂^2 (dos derivadas respecto a la métrica, orden p^2), los términos cuadráticos son de orden ∂^4 ($\propto p^4$), etc. El primer término está relacionado con la constante cosmológica, $\Lambda = -8\pi G\lambda$ y, en principio, deber ser incluido en el lagrangiano efectivo. Sin embargo, las cotas cosmológicas dan valores muy pequeños para esta constante, de modo que pondremos $\lambda = 0$ de ahora en más. Por otro lado, el término de Einstein lineal en R domina sobre los términos cuadráticos, cúbicos, etc. en el límite de bajas energías $p^2 \rightarrow 0$ (energías mucho menores que la energía de Planck, $E_{\text{planck}} = G^{-1}$). Como consecuencia de ello, los experimentos que involucran la interacción gravitatoria a escalas presentes son insensibles a los términos de orden superior. Sólo es posible establecer cotas más bien pobres sobre los coeficientes, $\alpha, \beta < 10^{74}$ [81]. Otra forma equivalente de expresar el dominio del término de Einstein es notar que la curvatura de Planck es $R_{\text{planck}} \propto 1/\kappa^2$, de modo que para curvaturas pequeñas $R \ll R_{\text{planck}}$ (o distancias grandes $l \gg l_{\text{planck}}$), dicho término es el más importante.

Una vez construido el lagrangiano efectivo procedemos a cuantizarlo. Para ello usaremos la cuantización covariante basada en el método de campos de fondo, que tiene la ventaja de preservar la invariancia de medida ante transformaciones del campo de fondo. Escribimos las fluctuaciones del campo gravitatorio alrededor de una métrica de fondo, $\bar{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \kappa s_{\mu\nu}$ y expandimos el término de Einstein del lagrangiano efectivo en términos de las fluctuaciones $s_{\mu\nu}$ (gravitones)

$$\begin{aligned} S_G \equiv & \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \bar{R} = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{2}{\kappa^2} R + \frac{1}{\kappa} s_{\mu\nu} (g^{\mu\nu} R - 2R^{\mu\nu}) \right. \\ & + \left[-\frac{1}{2} \nabla_\alpha s_{\mu\nu} \nabla^\alpha s^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \nabla_\alpha s \nabla^\alpha s - \nabla_\alpha s \nabla_\beta s^{\alpha\beta} + \nabla_\alpha s_{\mu\beta} \nabla^\beta s^{\mu\alpha} \right. \\ & \left. \left. + R \left(\frac{1}{4} s^2 - \frac{1}{2} s_{\mu\nu} s^{\mu\nu} \right) + R^{\mu\nu} (2s_\mu^\lambda s_{\nu\lambda} - s s_{\mu\nu}) \right] + \mathcal{O}(s_{\mu\nu}^3) \right\}, \quad (6.2) \end{aligned}$$

donde $s = g^{\mu\nu} s_{\mu\nu}$. Luego fijamos la medida mediante una función $\chi^\mu[g, s]$ e introducimos una acción de fijado de medida

$$S_{\text{gf}}[g, s] = - \int d^4x \sqrt{-g} \chi^\mu g_{\mu\nu} \chi^\nu, \quad (6.3)$$

y agregamos la correspondiente acción de los fantasmas. La acción efectiva para el campo de fondo $g_{\mu\nu}$ se obtiene de integrar los gravitones y los fantasmas. A un lazo, su expresión es

$$S_{\text{ef}} = S_G + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln \left[\frac{\delta^2 S_G[g]}{\delta g^{\alpha\beta} \delta g^{\gamma\delta}} - 2 \frac{\delta \chi^\mu}{\delta g^{\alpha\beta}} g_{\mu\nu} \frac{\delta \chi^\nu}{\delta g^{\gamma\delta}} \right] - i \text{Tr} \ln \left[-2 g_{\nu\alpha} \nabla_\beta \frac{\delta \chi^\mu}{\delta g^{\alpha\beta}} \right], \quad (6.4)$$

donde el primer término es la acción clásica de Einstein-Hilbert, el segundo proviene de las fluctuaciones de gravitones y el tercero de los fantasmas. Estos dos últimos términos son lineales en \hbar .

Las divergencias ultravioletas pueden ser calculadas una vez elegida la función de fijado de medida, y según su forma el cálculo puede resultar más o menos engorroso. En la sección siguiente estudiaremos ésto con detalle. Para describir la metodología de teorías efectivas, nos basta con considerar el caso más simple (medida de DeWitt), estudiado originalmente en [91]. La divergencia de la acción efectiva resulta ¹

$$\Delta S_G^{\text{div}}(\lambda = 0) = \frac{\ln L^2}{96\pi^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{53}{15} (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2) + \frac{21}{10} R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + \frac{1}{20} R^2 \right]. \quad (6.5)$$

Si además de la gravedad hay otros campos de materia, éstos también proveerán contribuciones adicionales en R^2 y $R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}$, como veremos luego. El hecho que las divergencias no sean proporcionales a la acción de Einstein original indica que la teoría no es renormalizable. Sin embargo, *sí lo es* en el espíritu de teorías efectivas. Las divergencias a un lazo pueden ser absorbidas en las constantes α y β de los términos cuadráticos del lagrangiano efectivo. Análogamente, las divergencias a dos lazos [92] pueden ser absorbidas en los términos cúbicos, etc. Sin embargo, estas divergencias *no son* predicciones de la teoría efectiva, pues provienen de momentos altos en los diagramas de Feynman, y justamente la teoría no pretende describir tales rangos de energía. Los valores de los parámetros del lagrangiano efectivo *tampoco* son predicciones, pues engloban nuestra ignorancia sobre la verdadera teoría de altas energías.

¹Si se utiliza regularización dimensional, el factor $\ln L^2$ en la ec.(6.5) debe ser reemplazado por $2/(4-d)$.

¿ Cuáles son entonces las predicciones cuánticas de la relatividad general como teoría efectiva? Corresponden a los efectos cuánticos debidos a la porción de bajas energías de la teoría. Ellos se deben a la propagación de partículas no masivas, que dan contribuciones no locales a la acción efectiva. En el espacio de momentos estas contribuciones son no analíticas, proporcionales a $\ln(-q^2)$, independientes de los parámetros contenidos en los ordenes superiores del lagrangiano efectivo, y claramente distinguibles de las contribuciones locales de altas energías.

En este punto conviene hacer una aclaración sobre la forma de extraer los términos no locales logarítmicos de la acción efectiva y obtener ecuaciones reales y causales para la métrica de fondo. Siguiendo la línea de razonamiento de los capítulos 4 y 5, deberíamos partir de la acción euclídea, resumir la serie de Schwinger-DeWitt, identificar los términos logarítmicos en los factores de forma, y finalmente calcular las ecuaciones de movimiento in-in reemplazando los propagadores euclídeos por los retardados a nivel de las ecuaciones de movimiento. En vez de seguir este camino, en este capítulo utilizaremos otro más corto que nos conducirá a las mismas ecuaciones in-in. Partimos de la acción efectiva escrita en signatura lorentziana $(- + + +)$ (ec.(6.4)), y calculamos las divergencias. Como ya vimos en el capítulo 5, los coeficientes que acompañan los factores de forma $\ln(-\square)$ están dados por las divergencias (segundo coeficiente de Schwinger-DeWitt), de modo que calculando éstas podemos obtener inmediatamente las correcciones logarítmicas a la acción efectiva. Luego escribimos las ecuaciones de movimiento in-out y finalmente, tomando dos veces su parte real y causal, llegamos a las correctas ecuaciones in-in.

6.2 La acción efectiva para gravedad + materia: divergencias

Distintos autores han estudiado correcciones cuánticas al potencial newtoniano debida a efectos de gravitones, cuantizando la métrica alrededor del espacio plano y definiendo el potencial a partir de diferentes conjuntos de diagramas de Feynman [22, 75, 93, 94]. En vez de evaluar diagramas y elementos de matriz de dispersión, nuestra intención es usar la acción efectiva para hacer un cálculo covariante. Este método covariante es más adecuado para estudiar problemas que involucren fluctuaciones alrededor de campos de fondo no planos.

Al igual que en el capítulo anterior, consideremos una partícula masiva M , que trataremos como una fuente clásica. La acción (minkowskiana) de partida es $S = S_G + S_M$, con

$$S_G = \frac{2}{\kappa^2} \int d^4x \sqrt{-\bar{g}} \bar{R} \quad (6.6)$$

$$S_M = -M \int \sqrt{-\bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu}. \quad (6.7)$$

Para calcular la acción efectiva a un lazo, debemos expandir estas acciones en las fluctuaciones $s_{\mu\nu}$ y extraer los términos cuadráticos. Para fijar la medida utilizaremos principalmente una familia de funciones (que llamaremos "familia λ ") $\chi^\mu(\lambda)$, parametrizadas por un número real λ , dadas por

$$\chi^\mu(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}} \left[g^{\mu\gamma} \nabla^\sigma s_{\gamma\sigma} - \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} \nabla^\mu s_{\gamma\sigma} \right]. \quad (6.8)$$

El caso $\lambda = 0$ corresponde a la medida de DeWitt de la que hablábamos anteriormente. Para este tipo de medidas, que son lineales en las fluctuaciones, los fantasmas se desacoplan de los gravitones y se acoplan sólo al campo de fondo. El desarrollo a orden cuadrático de la gravedad pura está dado en la ec.(6.2) y, para esta elección de la medida, la acción efectiva a un lazo queda

$$S_{\text{ef}} = S_G + \frac{i}{2} \text{Tr} \ln F^{\alpha\beta, \mu\nu}(\nabla) - i \text{Tr} \ln(\square \delta_\nu^\mu + R_\nu^\mu), \quad (6.9)$$

donde el operador diferencial de segundo orden es

$$F^{\alpha\beta, \mu\nu}(\nabla) = \sqrt{-g} C^{\alpha\beta, \lambda\sigma} \left\{ \square \delta_{(\lambda}^\mu \delta_{\sigma)}^\nu - \frac{2\lambda}{1+\lambda} \delta_{(\lambda}^\mu \nabla_{\sigma)} \nabla^\nu + \frac{\lambda}{1+\lambda} g^{\mu\nu} \nabla_{(\lambda} \nabla_{\sigma)} + P_{\lambda\sigma}^{\mu\nu} \right\}, \quad (6.10)$$

con

$$\begin{aligned} C^{\alpha\beta, \lambda\sigma} &= \frac{1}{4} (g^{\lambda\alpha} g^{\sigma\beta} + g^{\lambda\beta} g^{\sigma\alpha} - g^{\lambda\sigma} g^{\alpha\beta}) \\ P_{\lambda\sigma}^{\mu\nu} &= 2R_{\lambda \cdot \sigma}^{(\mu \nu)} + 2\delta_{(\lambda}^{\mu} R_{\sigma)}^{\nu)} - g^{\mu\nu} R_{\lambda\sigma} - g_{\lambda\sigma} R^{\mu\nu} - R \delta_{(\lambda}^{\mu} \delta_{\sigma)}^{\nu)} + \frac{1}{2} g^{\mu\nu} g_{\lambda\sigma} R. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Los paréntesis denotan simetrización con un factor 1/2. Notemos que para $\lambda = 0$ el operador diferencial tiene la forma de un operador mínimo $F_{AB}(\nabla) = \hat{C}_{AB} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu + \hat{Q}_{AB}$.

Para deducir la contribución de la masa M a la acción efectiva, desarrollamos la acción S_M a orden cuadrático en las fluctuaciones. Obtenemos

$$S_M = -M \int d\tau \left[1 - \frac{\kappa}{2} s_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{\kappa^2}{8} s_{\mu\nu} s_{\rho\sigma} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma + \mathcal{O}(s_{\mu\nu}^3) \right], \quad (6.12)$$

donde \cdot representa derivada respecto al tiempo propio τ , definido como $d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$. Introduciendo una identidad, $1 = \int d^4y \sqrt{-g} \delta^4(y - x(\tau))$, la acción puede ser reescrita en la siguiente forma

$$S_M = -M \int d\tau + \frac{\kappa}{2} \int d^4y \sqrt{-g} s_{\mu\nu}(y) T^{\mu\nu}(y) + \int d^4y \sqrt{-g} s_{\mu\nu}(y) s_{\rho\sigma}(y) \tilde{M}^{\mu\nu\rho\sigma}(y) + \dots (6.13)$$

donde

$$T^{\mu\nu}(y) = M \int d\tau \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \delta^4(y - x(\tau)) \quad (6.14)$$

$$\tilde{M}^{\mu\nu\rho\sigma}(y) = \frac{M\kappa^2}{8} \int d\tau \delta^4(y - x(\tau)) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\rho \dot{x}^\sigma. \quad (6.15)$$

Los términos cuadráticos de la ec.(6.13) introducen una nueva contribución al operador diferencial $F(\nabla)$, que finalmente toma la forma

$$F^{\alpha\beta,\mu\nu}(\nabla) = \sqrt{-g} C^{\alpha\beta,\lambda\sigma} \left\{ \square \delta_{(\lambda}^\mu \delta_{\sigma)}^\nu - \frac{2\lambda}{1+\lambda} \delta_{(\lambda}^{(\mu} \nabla_{\sigma)} \nabla^{\nu)} + \frac{\lambda}{1+\lambda} g^{\mu\nu} \nabla_{(\lambda} \nabla_{\sigma)} + F_{\lambda\sigma}^{\mu\nu} + M_{\lambda\sigma}^{\mu\nu} \right\}, \quad (6.16)$$

siendo

$$M_{\lambda\sigma}^{\mu\nu}(y) = (C^{-1})^{\mu\nu\alpha\beta} \tilde{M}_{\alpha\beta\lambda\sigma}(y) = \frac{M\kappa^2}{8} \int d\tau \delta^4(y - x(\tau)) [g^{\mu\nu} \dot{x}_\lambda \dot{x}_\sigma + 2\dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}_\lambda \dot{x}_\sigma]. \quad (6.17)$$

Una vez que tenemos la expresión de los operadores diferenciales para los gravitones y fantasmas, podemos calcular las divergencias de la acción efectiva. Para ello conviene distinguir el caso de medidas mínimas y no mínimas. El resultado final de la divergencia para cualquier valor de λ puede verse en la ec.(6.32).

6.2.1 Divergencias para medidas mínimas

Para $\lambda = 0$ (medida de DeWitt) los operadores diferenciales, tanto para los gravitones como para los fantasmas, tienen la forma mínima, que en notación matricial es

$$\hat{\mathcal{F}}(\nabla) = \square + \hat{\mathcal{Q}} - \frac{1}{6}R\hat{1}. \quad (6.18)$$

En efecto, para los gravitones la matriz $\hat{\mathcal{Q}}$ está dada por $\hat{\mathcal{Q}} = \hat{P} + \hat{M} + \frac{1}{6}R\hat{1}$, mientras que para los fantasmas, $\hat{\mathcal{Q}} = \hat{R} + \frac{1}{6}R\hat{1}$. Para calcular las trazas funcionales usamos la técnica de SDW,

$$\text{Tr} \ln \hat{\mathcal{F}} = \lim_{L \rightarrow \infty} \frac{i}{(4\pi)^{\frac{d}{2}}} \int_{1/L^2}^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{d}{2}+1}} \int d^d x \text{Tr} \sum_{n=0}^{\infty} (is)^n \hat{a}_n(x), \quad (6.19)$$

donde los $\hat{a}_n(x)$'s son los límites de coincidencia de los coeficientes de SDW. Como ya sabemos, en $d = 4$ dimensiones las divergencias están en los coeficientes \hat{a}_0 , \hat{a}_1 y \hat{a}_2 . Los dos primeros renormalizan la constante cosmológica y la de Newton, mientras que el último es

$$\hat{a}_2(x) = \frac{1}{180}(R_{\mu\nu\alpha\beta}R^{\mu\nu\alpha\beta} - R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \square R)\hat{1} + \frac{1}{2}\hat{\mathcal{Q}}^2 + \frac{1}{12}\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}\hat{\mathcal{R}}^{\mu\nu} + \frac{1}{6}\square\hat{\mathcal{Q}}, \quad (6.20)$$

con $\hat{\mathcal{R}}_{\mu\nu}$ el conmutador de derivadas covariantes. Insertando las expresiones de $\hat{\mathcal{Q}}$ para gravitones y fantasmas obtenemos las divergencias de la acción efectiva debidas a la gravedad pura y a la masa M . La primera da el resultado de la ec.(6.5)

$$\begin{aligned} \Delta S_G^{\text{div}}(\lambda = 0) = & \frac{\ln L^2}{96\pi^2} \int d^4 x \sqrt{-g} \left[\frac{53}{15}(R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + R^2) \right. \\ & \left. + \frac{21}{10}R_{\mu\nu}R^{\mu\nu} + \frac{1}{20}R^2 \right], \end{aligned} \quad (6.21)$$

mientras que la segunda se lee de la contribución de M al \hat{a}_2 , a saber $\frac{1}{6}\square\hat{M} + \frac{1}{2}\hat{M}^2 + \hat{M}(\hat{P} + \frac{1}{6}R\hat{1})$. Obtenemos

$$\Delta S_M^{\text{div}}(\lambda = 0) = \frac{\ln L^2}{64\pi^2} \int d^4 x \sqrt{-g} \left[M_{\mu\nu\rho\sigma}M^{\mu\nu\rho\sigma} + 2M_{\mu\nu\rho\sigma} \left(P^{\rho\sigma\mu\nu} + \frac{1}{6}R\delta^{\rho(\mu}\delta^{\sigma\nu)} \right) \right]. \quad (6.22)$$

La divergencia para $\lambda = 0$ es entonces

$$\Delta S^{\text{div}}(\lambda = 0) = \Delta S_G^{\text{div}}(\lambda = 0) + \Delta S_M^{\text{div}}(\lambda = 0). \quad (6.23)$$

6.2.2 Divergencias para medidas no mínimas

Cuando $\lambda \neq 0$ el operador $\hat{F}(\nabla)$ no tiene forma mínima y por lo tanto no se puede aplicar la técnica de SDW. Sin embargo, en [95] ha sido desarrollado un método de reducción que generaliza esa técnica y que permite hallar las divergencias de operadores no mínimos. Al igual que la expansión de SDW, este método de reducción consiste en un desarrollo local en los campos de fondo, y ha sido calculado hasta segundo orden en los tensores de curvatura. El punto de partida es notar que, dado que la teoría es independiente del fijado de medida en la capa de masa, la diferencia de la acción efectiva calculada en dos medidas distintas es siempre proporcional a las ecuaciones de movimiento clásicas (extremal). Con esta idea en mente, esa diferencia puede ser expresada en términos de funciones de Green no mínimas para gravitones y fantasmas, que luego se expanden en los campos de fondo.

Un caso especialmente simple es cuando la acción de fijado de medida difiere en un factor global de la mínima. Este es justamente el caso para la familia λ , pues $\chi^\mu(\lambda) = \frac{1}{\sqrt{1+\lambda}}\chi^\mu(\lambda = 0)$. Siguiendo los métodos de [95], podemos escribir la acción efectiva para cualquier valor del parámetro de medida,

$$S_{\text{ef}}(\lambda) = S_{\text{ef}}(\lambda = 0) + \frac{i}{2}\lambda [\text{Tr}V_{1\nu}{}^\mu(\nabla) - \text{Tr}V_{2\nu}{}^\mu(\nabla)] - \frac{i}{4}\lambda^2 \text{Tr}[V_{1\nu}{}^\mu(\nabla)]^2 + \mathcal{O}((\mathcal{E}^{\mu\nu})^2), \quad (6.24)$$

donde el extremal está dado por

$$\mathcal{E}^{\mu\nu} = \frac{\delta(S_G + S_M)}{\delta g^{\mu\nu}} = -\frac{2}{\kappa^2}(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu}) + \frac{1}{2}T^{\mu\nu}, \quad (6.25)$$

y $V_{1\nu}{}^\mu(\nabla)$ y $V_{2\nu}{}^\mu(\nabla)$ son tensores lineales y cuadráticos en el extremal. Su acción sobre una función de prueba ζ^ν es

$$\begin{aligned} V_{1\nu}{}^\mu(\nabla)\zeta^\nu &= 2\kappa^2 Q_\alpha^\mu \nabla_\beta \Gamma_{\rho\sigma}^{(\alpha}(\nabla) \mathcal{E}^{\rho\beta)} Q_\nu^\sigma \zeta^\nu \\ V_{2\nu}{}^\mu(\nabla)\zeta^\nu &= -\kappa^2 g^{\mu\omega} Q_\omega^\gamma \mathcal{E}^{(\alpha\rho} \Gamma_{\rho\gamma}^{\beta)}(\nabla) G_{\alpha\beta,\varphi\theta}(\nabla) \Gamma_{\delta\sigma}^{(\varphi}(\nabla) \mathcal{E}^{\theta)\delta} Q_\nu^\sigma \zeta^\nu. \end{aligned} \quad (6.26)$$

En estas expresiones, $\Gamma_{\rho\sigma}^\nu(\nabla) = \delta_\rho^\nu \nabla_\sigma - 2\delta_\sigma^\nu \nabla_\rho$, y $G_{\alpha\beta,\varphi\theta}(\nabla)$ y Q_μ^σ son respectivamente funciones de Green para gravitones y fantasmas, evaluadas en la medida de DeWitt

$$F^{\gamma\sigma,\alpha\beta}(\nabla|\lambda=0) G_{\alpha\beta,\varphi\theta}(\nabla) = -\delta_{\varphi\theta}^{\gamma\sigma} \quad (\square\delta_{\alpha}^{\mu} + R_{\alpha}^{\mu})Q_{\mu}^{\sigma} = \delta_{\alpha}^{\sigma}. \quad (6.27)$$

Como discutiremos cuando resolvamos las ecuaciones para el campo de fondo, nos basta con considerar los términos lineales en el extremal a nivel de la acción efectiva. Nos concentramos entonces en $\text{Tr}V_{1\nu}^{\mu}(\nabla)$, que viene dada por

$$\text{Tr}V_{1\nu}^{\mu}(\nabla) = 2\kappa^2 \int d^4x \left[R^{\alpha}_{\gamma\beta\sigma} \mathcal{E}^{\gamma\beta} - \mathcal{E}^{\beta\gamma} \delta_{\sigma}^{\alpha} \nabla_{\beta} \nabla_{\gamma} \right] (\square\delta_{\alpha}^{\sigma} + R_{\alpha}^{\sigma})^{-2} \delta(x, y)|_{y=x}. \quad (6.28)$$

Para calcular su divergencia usamos los métodos de [95]. Dado que estamos trabajando a orden cuadrático en curvaturas, en el primer término en el corchete podemos aproximar $(\square\delta_{\alpha}^{\sigma} + R_{\alpha}^{\sigma})^{-2}$ por $\square^{-2}\delta_{\alpha}^{\sigma}$. Aparecen dos divergencias, que son

$$\square^{-2}\delta_{\alpha}^{\sigma} \delta(x, y)|_{y=x}^{\text{div}} = \frac{i}{16\pi^2} \ln L^2 \sqrt{-g} \quad (6.29)$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} \nabla_{\gamma} (\square\delta_{\alpha}^{\sigma} + R_{\alpha}^{\sigma})^{-2} \delta(x, y)|_{y=x}^{\text{div}} &= \frac{i}{16\pi^2} \ln L^2 \sqrt{-g} \left[\frac{1}{6} (R_{\beta\gamma} - \frac{1}{2} g_{\beta\gamma} R) \delta_{\alpha}^{\sigma} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} R^{\sigma}_{\alpha\beta\gamma} - \frac{1}{2} g_{\beta\gamma} R_{\alpha}^{\sigma} \right]. \end{aligned} \quad (6.30)$$

de modo que

$$\text{Tr}V_{1\nu}^{\mu}(\nabla)|^{\text{div}} = \frac{i\kappa^2}{24\pi^2} \ln L^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[-5R_{\mu\nu} \mathcal{E}^{\mu\nu} + \frac{5}{2} R g_{\mu\nu} \mathcal{E}^{\mu\nu} \right]. \quad (6.31)$$

En definitiva, la divergencia total de la acción efectiva a un lazo resulta

$$\Delta S^{\text{div}}(\lambda) = \Delta S^{\text{div}}(\lambda=0) - \frac{\lambda\kappa^2}{48\pi^2} \ln L^2 \int d^4x \sqrt{-g} \left[-5R_{\mu\nu} \mathcal{E}^{\mu\nu} + \frac{5}{2} R g_{\mu\nu} \mathcal{E}^{\mu\nu} \right], \quad (6.32)$$

6.3 Ecuaciones de Einstein. Problema del fijado de medida

Como ya vimos, dadas las divergencias de la acción efectiva, podemos extraer los términos no locales logarítmicos que dominan la física de bajas energías / largas distancias. Las constantes de proporcionalidad que acompañan al factor de forma $\ln(-\square)$ se leen de la divergencia como sigue

$$\alpha \ln L^2 \int d^4x \sqrt{-g}(\dots) \rightarrow -\alpha \int d^4x \sqrt{-g}(\dots) \ln(-\square). \quad (6.33)$$

La parte no local de la acción efectiva es entonces $\Delta S = \Delta S_G^{\text{nl}}(\lambda = 0) + \Delta S_M^{\text{nl}}(\lambda = 0) + \Delta S^{\text{nl}}(\lambda \neq 0)$, con

$$\Delta S_G^{\text{nl}}(\lambda = 0) = -\frac{1}{96\pi^2} \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{21}{10} R_{\mu\nu} \ln(-\square) R^{\mu\nu} + \frac{1}{20} R \ln(-\square) R \right] \quad (6.34)$$

$$\begin{aligned} \Delta S_M^{\text{nl}}(\lambda = 0) = & -\frac{1}{64\pi^2} \int d^4x \sqrt{-g} [M_{\mu\nu\rho\sigma} \ln(-\square) M^{\rho\sigma\mu\nu} \\ & + 2M_{\mu\nu\rho\sigma} \ln(-\square) \left(P^{\rho\sigma\mu\nu} + \frac{1}{6} R \delta^{\rho(\mu} \delta^{\sigma\nu)} \right)], \end{aligned} \quad (6.35)$$

$$\Delta S^{\text{nl}}(\lambda \neq 0) = \int d^4x \sqrt{-g} [a(\lambda) R_{\mu\nu} \ln(-\square) \mathcal{E}^{\mu\nu} + b(\lambda) R g_{\mu\nu} \ln(-\square) \mathcal{E}^{\mu\nu}], \quad (6.36)$$

donde $a(\lambda) = -\frac{5\lambda\kappa^2}{48\pi^2}$ y $b(\lambda) = \frac{5\lambda\kappa^2}{96\pi^2}$.

Consideremos ahora el caso en que M es estática y está localizada en el origen: $\dot{x}^\mu = (1, 0, 0, 0)$, $T^{\mu\nu}(x) = M \delta_0^\mu \delta_0^\nu \delta^3(\mathbf{x})$, $T_\mu^\mu = -M \delta^3(\mathbf{x})$. Para esta elección de la fuente, los distintos tensores que aparecen en la parte masiva no local son

$$\begin{aligned} M^{\mu\nu\lambda\sigma}(y) &= \frac{M\kappa^2}{8} \delta^3(y) [g^{\mu\nu} + 2\delta_0^\mu \delta_0^\nu] \delta_0^\lambda \delta_0^\sigma \\ M_{\mu\nu\rho\sigma} R \delta^{\rho(\mu} \delta^{\sigma\nu)} &= \frac{M\kappa^2}{8} R \delta^3(y) \\ M_{\mu\nu\rho\sigma} P^{\rho\sigma\mu\nu} &= \frac{M\kappa^2}{8} \delta^3(y) [g^{\mu\nu} P_{00\mu\nu} + 2P_{0000}] = -\frac{M\kappa^2}{8} R \delta^3(y). \end{aligned} \quad (6.37)$$

de modo que

$$\Delta S_M^{\text{nl}}(\lambda = 0) = \frac{5M\kappa^2}{1536\pi^2} \int d^4x \sqrt{-g} R \ln(-\nabla^2) \delta^3(\mathbf{x}), \quad (6.38)$$

donde hemos usado que M es estática para reemplazar \square por ∇^2 . Omitimos el término cuadrático en M pues es irrelevante en el límite de distancias largas.

Las ecuaciones de movimiento in-out se obtienen derivando funcionalmente la acción efectiva respecto a la métrica de fondo $g_{\mu\nu}$, y no son ni reales ni causales. Las ecuaciones in-in (reales y causales) las deducimos tomando dos veces la parte real y causal de las ecuaciones in-out. En el caso de campos estáticos, la situación se simplifica pues basta reemplazar el D'Alambertiano por el laplaciano. A orden cuadrático en curvaturas, las ecuaciones para el valor medio del campo de fondo son

$$\frac{1}{8\pi G}(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}) = T_{\mu\nu} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\lambda=0}^G + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\lambda=0}^M + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{a(\lambda)} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{b(\lambda)}, \quad (6.39)$$

donde

$$\begin{aligned} \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\lambda=0}^G &= -\frac{1}{96\pi^2} \left[\frac{21}{10} \ln(-\nabla^2) H_{\mu\nu}^{(2)} + \frac{1}{20} \ln(-\nabla^2) H_{\mu\nu}^{(1)} \right] \\ \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\lambda=0}^M &= \frac{5M\kappa^2}{768\pi^2} (\nabla_\mu \nabla_\nu - g_{\mu\nu} \nabla^2) \ln(-\nabla^2) \delta^3(\mathbf{x}) \\ \langle T_{\mu\nu} \rangle_{a(\lambda)} &= a(\lambda) \left[-\frac{2}{\kappa^2} \ln(-\nabla^2) H_{\mu\nu}^{(2)} + \frac{1}{\kappa^2} \ln(-\nabla^2) H_{\mu\nu}^{(1)} - \frac{1}{2} \nabla^2 \ln(-\nabla^2) T_{\mu\nu} \right] \\ \langle T_{\mu\nu} \rangle_{b(\lambda)} &= b(\lambda) \left[\frac{2}{\kappa^2} \ln(-\nabla^2) H_{\mu\nu}^{(1)} + \nabla_\mu \nabla_\nu \ln(-\nabla^2) T_\alpha^\alpha - g_{\mu\nu} \nabla^2 \ln(-\nabla^2) T_\alpha^\alpha \right]. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Estas son las ecuaciones de Einstein modificadas por los efectos cuánticos de los gravitones. Su solución da la métrica de fondo del espacio-tiempo. Para encontrarla procedemos en forma análoga al capítulo anterior. Perturbamos alrededor del espacio plano $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ ($\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-+++)$) y elegimos la medida armónica $(h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu})^{;\nu} = 0$ para la perturbación $h_{\mu\nu}$. Vale la pena recalcar que esta elección es completamente independiente de la libertad de fijado de medida para las fluctuaciones cuánticas $s_{\mu\nu}$. Las ecuaciones de movimiento linealizadas quedan

$$\nabla^2 \bar{h}_{\mu\nu} = -16\pi G \left[T_{\mu\nu} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\lambda=0}^G + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{\lambda=0}^M + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{a(\lambda)} + \langle T_{\mu\nu} \rangle_{b(\lambda)} \right], \quad (6.41)$$

siendo $\bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}h\eta_{\mu\nu}$. Resolvemos estas ecuaciones en forma perturbativa alrededor de la solución clásica. Es justamente este método perturbativo el que nos permite omitir a nivel de la acción efectiva todo término cuadrático (o de orden superior) en el extremal $\mathcal{E}^{\mu\nu}$. Estos términos

dan contribuciones al lado derecho de la ec.(6.41) que se anulan idénticamente cuando resolvemos las ecuaciones perturbativamente.

El potencial newtoniano depende de la componente 00 de la métrica, y para ello debemos hallar \bar{h}_{00} y h . El resultado es

$$\bar{h}_{00} = \frac{4GM}{r} - \frac{2}{15\pi} \frac{G^2 M}{r^3} + \frac{5}{3\pi} \frac{G^2 M}{r^3} + 4a(\lambda) \frac{GM}{r^3} + 8b(\lambda) \frac{GM}{r^3} \quad (6.42)$$

$$h = \frac{4GM}{r} - \frac{18}{3\pi} \frac{G^2 M}{r^3} + \frac{5}{\pi} \frac{G^2 M}{r^3} + 4a(\lambda) \frac{GM}{r^3} + 24b(\lambda) \frac{GM}{r^3}, \quad (6.43)$$

donde, en ambos casos, el primer término es el clásico, el segundo y el tercero provienen respectivamente de la parte gravitatoria y masiva en la medida $\lambda = 0$, y los últimos dos corresponden a otras medidas $\lambda \neq 0$. Finalmente

$$h_{00} = \bar{h}_{00} - \frac{1}{2}h = \frac{2GM}{r} \left[1 + \frac{43G}{30\pi r^2} - \frac{5G}{12\pi r^2} + \frac{a(\lambda) - 2b(\lambda)}{r^2} \right]. \quad (6.44)$$

En resumen, el efecto de gravitones (fluctuaciones no masivas) introduce correcciones a la métrica en r^{-3} . Estas correcciones son cualitativamente las mismas del capítulo anterior, en el caso que campos escalares no masivos. Además son las más importantes a bajas energías / largas distancias. En efecto, si hubiésemos incluido en el lagrangiano efectivo los términos locales cuadráticos en curvatura, hubiésemos obtenido modificaciones a la métrica que decrecen exponencialmente a largas distancias.

Tanto la acción efectiva, las ecuaciones semiclásicas, y su solución dependen paramétricamente de la elección del fijado de medida para la teoría cuántica. Usualmente se argumenta que la gravedad pura (es decir, en ausencia de campos de materia) no presenta esta patología, pues las correcciones cuánticas a las ecuaciones de movimiento se anulan al evaluarse en las soluciones clásicas $R_{\mu\nu} = 0$. Sin embargo, la inclusión de campos de materia hace que este argumento pierda validez. Las partes cuánticas de las ecuaciones de Einstein modificadas no son simplemente proporcionales al extremal, de modo que la dependencia en la medida persiste. En conclusión, la solución a dichas ecuaciones no puede ser física. La razón de ello es simple: cualquier aparato clásico utilizado para medir la geometría del espacio-tiempo también sentirá las fluctuaciones de gravitones. Como el acoplamiento entre dicho aparato y la métrica es no lineal, el aparato *no*

medirá la geometría de fondo $g_{\mu\nu}$ (que resulta de resolver las ecuaciones de Einstein). En particular, una partícula de prueba *no* seguirá las geodésicas de dicha métrica, sino que su movimiento estará determinado por otras ecuaciones geodésicas que incluyan los efectos del acoplamiento mencionado. Estas nuevas ecuaciones geodésicas serán el tema que describiremos en la próxima sección.

El análisis precedente nos conduce a una solución del denominado problema de fijado de medida, sobre el cual discutimos en el capítulo 2. La dependencia en el parámetro λ de la acción y de las ecuaciones de movimiento es un ejemplo particular de dicho problema “técnico” del formalismo de la acción efectiva (in-out o in-in). El método estándar para remediar la arbitrariedad en el fijado de medida es introducir la acción efectiva de Vilkovisky-DeWitt, que está específicamente construida para solucionar el problema. Sin embargo, como ya vimos en el capítulo 2, esa acción tiene otro tipo de arbitrariedad, que es la dependencia en la supermétrica de la variedad de campos. Por lo tanto, tampoco es una solución satisfactoria al problema del fijado de medida. En realidad, este problema no es “técnico”, sino físico: a causa del acoplamiento entre el aparato clásico y los gravitones, la solución a las ecuaciones de movimiento no tiene una interpretación clara. La verdadera solución del problema pasa por la identificación de los observables de la teoría. Dadas las ecuaciones de Einstein, es necesario extraer de su solución las cantidades físicas, que obviamente deben ser independientes del fijado de medida.

6.4 Correcciones cuánticas a las ecuaciones de las geodésicas

Consideremos una partícula de prueba clásica de masa m_p , en presencia del campo gravitatorio cuántico $\bar{g}_{\mu\nu}$. Proponemos como un observable físico la trayectoria de esta partícula. Supondremos que $m_p \ll M$, lo cual nos permite despreciar todas las contribuciones de la partícula de prueba a la solución ec.(6.44) de las ecuaciones de Einstein. Ahora introducimos el punto clave: para determinar cómo se mueve la masa m_p , debemos tener en cuenta que se acopla a $\bar{g}_{\mu\nu}$ a través de un término en la acción dado por $-m_p \int \sqrt{-\bar{g}_{\mu\nu}(z) dz^\mu dz^\nu}$, denotando z^μ la trayectoria de la partícula. Habrá entonces una contribución extra a la acción efectiva debida al acoplamiento con los gravitones, la cual a su vez llevará a una corrección a las ecuaciones geodésicas para la partícula. La modificación a la acción efectiva la obtenemos de las ecs.(6.35) y (6.36) reemplazando

$M_{\mu\nu\rho\sigma}$ por $m_{\mu\nu\rho\sigma} + M_{\mu\nu\rho\sigma}$ y $T^{\mu\nu}$ por $T^{\mu\nu} + T_{m_p}^{\mu\nu}$ y guardando términos lineales en m_p . Aquí el tensor $m_{\mu\nu\rho\sigma}$ está dado por la ec.(6.17) con M reemplazada por m_p y x_μ por z_μ . $T_{m_p}^{\mu\nu}$ es el tensor energía-momento de la partícula de prueba, dado por la ec.(6.14), con el mismo reemplazo. Esta contribución es

$$\begin{aligned} \Delta S_{m_p} = \int d^4x \sqrt{-g} & \left[-\frac{1}{32\pi^2} m_{\mu\nu\rho\sigma} \ln(-\square) M^{\rho\sigma\mu\nu} \right. \\ & - \frac{1}{32\pi^2} m_{\mu\nu\rho\sigma} \ln(-\square) \left(\Gamma^{\rho\sigma\mu\nu} + \frac{1}{6} R \delta^{\rho(\mu} \delta^{\sigma\nu)} \right) \\ & \left. + \frac{a(\lambda)}{2} R_{\mu\nu} \ln(-\square) T_{m_p}^{\mu\nu} + \frac{b(\lambda)}{2} R g_{\mu\nu} \ln(-\square) T_{m_p}^{\mu\nu} \right], \end{aligned} \quad (6.45)$$

Los primeros dos términos corresponden a la medida $\lambda = 0$, y los últimos dos son términos extras que aparecen para cualquier otra medida.

Las ecuaciones geodésicas para la partícula de prueba las obtenemos derivando funcionalmente la acción respecto a las coordenadas de la partícula

$$0 = \frac{1}{m_p} \frac{\delta S_{\text{ef}}}{\delta z_\rho} = - \left[\frac{d^2 z^\rho}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\sigma}^\rho \frac{dz^\mu}{d\tau} \frac{dz^\sigma}{d\tau} \right] + \frac{1}{m_p} \frac{\delta \Delta S_{m_p}}{\delta z_\rho}, \quad (6.46)$$

donde $\Gamma_{\mu\sigma}^\rho$ es el símbolo de Christoffel y $d\tau^2 = -g_{\mu\nu} dz^\mu dz^\nu$. En el límite de campo débil y velocidades no relativistas, las ecuaciones geodésicas con correcciones cuánticas adoptan la forma

$$\frac{d^2 \mathbf{z}}{dt^2} - \frac{1}{2} \nabla h_{00} = \frac{1}{m_p} \frac{\delta \Delta S_{m_p}}{\delta \mathbf{z}}. \quad (6.47)$$

Notar que h_{00} , dado en la ec.(6.44), depende de $a(\lambda)$ y $b(\lambda)$.

Procedemos a calcular el término derecho de esta ecuación. Para este fin calculamos los distintos términos en ΔS_{m_p} . Usando la expresión para $M^{\mu\nu\rho\sigma}$ correspondiente a la fuente estática, el primer término de la ecuación (6.45) es

$$\begin{aligned} \Delta S_{m_p, M}(\lambda = 0) & \equiv -\frac{1}{32\pi^2} \int d^4y \sqrt{-g} m_{\mu\nu\rho\sigma} \ln(-\square) M^{\rho\sigma\mu\nu} \\ & = -\frac{1}{32\pi^2} \frac{m_p M \kappa^2}{64} \int d^4y \sqrt{-g} \ln(-\square) \delta^3(\mathbf{y}) \\ & \quad \times \int d\tau \delta^4(\mathbf{y} - \mathbf{z}(\tau)) [2\dot{z}_0 \dot{z}_0 + 2g_{00} \dot{z}_0 \dot{z}_0 + 4\dot{z}_0 \dot{z}_0 \dot{z}_0] \end{aligned}$$

$$\approx -\frac{m_p M \kappa^4}{512\pi^2} \int d\tau \ln(-\square) \delta^3(z(\tau)). \quad (6.48)$$

Acá hemos usamos el hecho que, en el límite no relativista, $\dot{z}_0 \approx -1$. Como ΔS_{m_p} es proporcional a \hbar , en esta ecuación también hemos tomado que la métrica $g_{\mu\nu}$ es igual a la clásica $\eta_{\mu\nu}$ - cualquier otra corrección daría términos $\mathcal{O}(\hbar^2)$. En una forma similar

$$\begin{aligned} \Delta S_{m_p, R}(\lambda = 0) &\equiv -\frac{1}{192\pi^2} \int d^4y \sqrt{-g} m_{\mu\nu\rho\sigma} \ln(-\square) R \delta^{\rho(\mu} \delta^{\sigma\nu)} \\ &= -\frac{m_p \kappa^2}{1536\pi^2} \int d\tau \ln(-\square) R(z(\tau)). \end{aligned} \quad (6.49)$$

Los otros términos de la ec.(6.45) son

$$\begin{aligned} \Delta S_{m_p, P}(\lambda = 0) &\equiv -\frac{1}{32\pi^2} \int d^4y \sqrt{-g} m^{\mu\nu\rho\sigma} \ln(-\square) P_{\rho\sigma\mu\nu} \\ &= -\frac{m_p \kappa^2}{256\pi^2} \int d\tau [g^{\mu\nu} \dot{z}^\rho \dot{z}^\sigma + 2\dot{z}^\mu \dot{z}^\nu \dot{z}^\rho \dot{z}^\sigma] \ln(-\square) P_{\rho\sigma\mu\nu} \end{aligned} \quad (6.50)$$

$$\Delta S_{m_p, a}(\lambda) \equiv \frac{a(\lambda)}{2} \int d^4y \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \ln(-\square) T_{m_p}^{\mu\nu} = a(\lambda) \frac{m_p}{2} \int d\tau \dot{z}^\mu \dot{z}^\nu \ln(-\square) R_{\mu\nu}(z(\tau)) \quad (6.51)$$

$$\Delta S_{m_p, b}(\lambda) \equiv \frac{b(\lambda)}{2} \int d^4y \sqrt{-g} R g_{\mu\nu} \ln(-\square) T_{m_p}^{\mu\nu} = -b(\lambda) \frac{m_p}{2} \int d\tau \ln(-\square) R(z(\tau)). \quad (6.52)$$

En estas ecuaciones el escalar de Ricci es el de la métrica clásica, $R(z(\tau)) = -\frac{1}{2} \nabla^2 h^{(0)}(z(\tau)) = 8\pi G M \delta^3(z(\tau))$. Lo mismo vale para el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}(z(\tau))$.

Ahora tomamos la variación respecto de \mathbf{z} . Obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta \mathbf{z}} \Delta S_{m_p, M}(\lambda = 0) &= \frac{m_p M G^2}{\pi} \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \\ \frac{\delta}{\delta \mathbf{z}} \Delta S_{m_p, R}(\lambda = 0) &= \frac{m_p M G^2}{12\pi} \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \\ \frac{\delta}{\delta \mathbf{z}} \Delta S_{m_p, P}(\lambda = 0) &= -\frac{m_p M G^2}{2\pi} \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \\ \frac{\delta}{\delta \mathbf{z}} \Delta S_{m_p, a}(\lambda) &= -a(\lambda) m_p M G \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \\ \frac{\delta}{\delta \mathbf{z}} \Delta S_{m_p, b}(\lambda) &= 2b(\lambda) m_p M G \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right), \end{aligned} \quad (6.53)$$

donde $r = |\mathbf{z}|$. En consecuencia

$$\frac{d^2\mathbf{z}}{dt^2} - \frac{1}{2}\nabla h_{00} = \frac{1}{m_p} \frac{\delta\Delta S_{m_p}}{\delta\mathbf{z}} = \left[\frac{7G}{12\pi} - a(\lambda) + 2b(\lambda) \right] \nabla \left(\frac{GM}{r^3} \right). \quad (6.54)$$

Introduciendo la ec.(6.44) en esta expresión vemos que aquellos términos dependientes del fijado de medida que provienen de h_{00} se cancelan exactamente con aquellos que salen del acoplamiento de la partícula de prueba con los gravitones. Nótese además que los términos en $a(\lambda)$ y $b(\lambda)$ se cancelan en forma separada.

En una manera relativamente sencilla podemos extender este tipo de cálculo a cualquier medida que no pertenezca a la familia λ . Como ya hemos mencionado, la diferencia de la acción efectiva para $\lambda = 0$ y para cualquier otra medida es proporcional al extremal $\mathcal{E}^{\mu\nu}$, que se anula en la capa de masa. A orden cuadrático en curvaturas, este hecho fija la forma más general de esta diferencia. Si nos concentramos en los términos logarítmicos no analíticos, entonces

$$\Delta S_{\text{medida}}^{\text{cualquier}} - \Delta S(\lambda = 0) = \int d^4x \sqrt{-g} [aR_{\mu\nu} \ln(-\square)\mathcal{E}^{\mu\nu} + bRg_{\mu\nu} \ln(-\square)\mathcal{E}^{\mu\nu} + \mathcal{O}((\mathcal{E}^{\mu\nu})^2)], \quad (6.55)$$

donde a y b son constantes que dependen de la particular medida que se esté utilizando. Así, por ejemplo, para la familia λ , $a = a(\lambda) = -5\lambda\kappa^2/48\pi^2$ y $b = b(\lambda) = 5\lambda\kappa^2/96\pi^2$. En virtud de los cálculos precedentes, concluimos que sin importar los valores específicos de a y b , en las ecuaciones geodésicas se produce la cancelación de todos los términos que dependen de estos valores. En esta forma obtenemos finalmente un potencial newtoniano $V(r)$ que es físico, independiente del fijado de medida, que lo extraemos de $d^2\mathbf{z}/dt^2 = -\nabla V$. Nuestro resultado es

$$V(r) = -\frac{GM}{r} \left[1 + \frac{43G}{30\pi r^2} - \frac{5G}{12\pi r^2} + \frac{7G}{12\pi r^2} \right]. \quad (6.56)$$

donde los tres últimos términos son correcciones cuánticas. Comparando las ecs.(6.44) y (6.56) concluimos que el acoplamiento de la partícula de prueba con los gravitones produce un término adicional (el último en la ec.(6.56)) y hace que el potencial sea independiente del fijado de medida. Al igual que en los casos anteriores, estas correcciones a largas distancias son extremadamente pequeñas como para ser medidas. Sin embargo, la importancia del resultado radica en que tanto el movimiento de la partícula de prueba como el potencial newtoniano son independientes del fijado de medida.

6.5 Discusión

Para resolver el problema del “backreaction” incluyendo el efecto de gravitones, *no basta* con resolver las ecuaciones de Einstein semiclásicas, dado que dependen del fijado de medida y no son físicas. Es necesario además encontrar los observables físicos. Como ilustración de este hecho hemos elegido la trayectoria de una partícula de prueba y hemos mostrado explícitamente que, en el límite newtoniano, la acción efectiva usual conduce a un resultado que es independiente del fijado de medida.

Cabe preguntarse si el potencial newtoniano que obtuvimos depende de la parametrización para los gravitones. En la parametrización usada por nosotros, y para la medida de DeWitt ($\lambda = 0$), el término cinético de la acción clásica es diagonal (ver ec.(6.16)). Entonces la métrica de la variedad de campos en la acción efectiva de Vilkovisky-DeWitt es la plana y por ende dicha acción coincide con la acción efectiva que calculamos aquí. Por lo tanto es de esperar que la acción efectiva de VDW reproduzca el mismo potencial newtoniano en todas las parametrizaciones. Más aún, también es de esperar que, debido al acoplamiento entre la partícula de prueba y los gravitones, se produzca una cancelación no sólo de los parámetros de fijado de medida (lo cual es inmediato en el formalismo de VDW), sino también de los parámetros arbitrarios de la métrica de la variedad de campos. Así, el resultado final para el potencial newtoniano debería coincidir con el obtenido en este capítulo.



Capítulo 7

Conclusiones

En esta Tesis hemos estudiado correcciones cuánticas a la dinámica clásica en teoría cuántica de campos. Para ello nos hemos basado en el formalismo de la acción efectiva. La representación usual de la acción efectiva (in-out) presenta dos problemas a la hora de estudiar la evolución temporal de valores medios. Por un lado está el problema de que las ecuaciones de movimiento que se obtienen no poseen estructura causal. Por otro lado, en teorías de medida, dependen de los parámetros que fijan la medida. Más en general, no son invariantes ante reparametrizaciones de los campos.

Hemos descrito otra representación de la acción efectiva, de camino temporal cerrado (CTC), que es adecuada para analizar problemas con datos de Cauchy. Mediante esta representación, hemos definido una acción efectiva de granulado grueso, utilizando una frecuencia de corte en el espacio de momentos. Esta acción es útil para analizar transiciones de fase y la transición cuántico-clásica en teoría de campos. Hemos deducido una ecuación exacta del grupo de renormalización (RG), que describe en forma no perturbativa (de ahí el nombre de “exacta”) cómo la acción CTC varía con la escala de granulado grueso, y que tiene una complicada estructura integro-diferencial. Esta ecuación contiene toda la información de la influencia de los modos de longitud de onda corta sobre los de larga longitud de onda, y es el análogo CTC de las diversas formulaciones euclídeas presentes en la literatura. Al igual que su pariente euclídeo, debido a su extrema complejidad, la única esperanza de obtener soluciones es mediante métodos de aproximación. Nosotros hemos

utilizado una aproximación en derivadas, que nos permitió obtener una mejora ante el grupo de renormalización para el potencial efectivo. Esta aproximación, muy usada a nivel euclídeo, tiene un serio defecto a nivel CTC: pierde completamente los aspectos estocásticos que surgen de la interacción entre los modos de longitud de onda larga (el "sistema") y los de corta longitud de onda (el "entorno").

Para rescatar estos importantes efectos contenidos en la acción de granulado grueso es necesario usar otras aproximaciones. En una aproximación perturbativa, es relativamente sencillo calcular la acción, ya que los núcleos de ruido y disipación tienen distribuciones de probabilidad gaussiana. Sin embargo, no bien se intenta hacer un cálculo no perturbativo basado en la ecuación exacta RG, los cálculos se vuelven extremadamente complicados, pues los núcleos son ahora funciones de n puntos, que no poseen distribuciones de probabilidad gaussianas, y que dependen de la escala de granulado grueso. El Ansatz más general posible para la acción, que posee la estructura de la acción de camino temporal cerrado, tiene una infinitud de núcleos de ruido y disipación. Introduciendo este Ansatz en la ecuación exacta RG, esperamos encontrar una jerarquía entre los distintos tipos de núcleos que describirá cómo, al variar la escala de renormalización desde la escala ultravioleta hasta la escala física, se van generando los efectos estocásticos, y el ruido y la disipación se interconectan a través de una relación de fluctuación-disipación no perturbativa. Para resolver dicha jerarquía habrá que aplicar algún tipo de truncamiento a nivel de la ecuación exacta RG. Relacionado con esto, también resulta interesante estudiar cómo afecta la elección de la frecuencia de corte para el granulado. Nosotros hemos elegido una frecuencia de corte tipo delta (o "sharp cut-off"). Otras posibilidades, frecuentemente usadas en las formulaciones euclídeas de la ecuación exacta RG, son frecuencias de corte suaves. Sería interesante estudiar la dependencia de los resultados con la elección de la frecuencia de corte a nivel CTC. Estas ideas son posibles puntos de partida para extensiones de esta parte de la Tesis.

El resto de la Tesis está orientado a tratar el segundo problema de la acción efectiva, esto es, la dependencia de la acción (in-out o in-in) y de las ecuaciones de movimiento en los parámetros de medida. Con el fin de describir el método de cálculo, hemos estudiado ejemplos de dificultad creciente. Primero tratamos un caso muy conocido, que consiste en el apantallamiento de la carga eléctrica debido a fluctuaciones de vacío en QED. Hemos mostrado tres métodos equiva-

lentes para obtener ecuaciones de movimiento reales y causales a partir de la acción efectiva. El primero se basa en el cálculo de las ecuaciones de movimiento in-in, el segundo en las in-out, a las cuales hay que tomarles dos veces su parte real y causal, y un tercer método basado en las ecuaciones euclídeas, en las cuales hay que reemplazar los propagadores euclídeos por los retardados. Mostramos que la resolución de las ecuaciones de Maxwell corregidas por efectos cuánticos conduce a la misma dependencia del potencial electrostático con la distancia que se obtiene mediante argumentos wilsonianos, basados en el grupo de renormalización. Pasamos luego al cálculo de correcciones cuánticas al potencial newtoniano en gravedad semiclásica, debidas a campos de materia cuánticos, escalares y espinoriales. Mediante una técnica de resumación del desarrollo de Schwinger-DeWitt, calculamos las partes no locales de las ecuaciones de Einstein semiclásicas. En el límite de largas distancias y bajas energías, en el cual un tratamiento semiclásico tiene sentido, hallamos dos tipos de correcciones cuánticas, una que decrece como una potencia de la distancia a la fuente y otra que decrece logarítmicamente. Hemos comparado estos resultados con los que se obtienen via argumentos wilsonianos y concluimos que, en general, este tipo de argumentos no dan resultados satisfactorios, ni cualitativa ni cuantitativamente, ya que pierden el comportamiento de potencias, que es el más importante. Finalmente nos embarcamos en cálculos similares para una teoría de medida, la gravedad cuántica. Describimos las ideas de teorías efectivas y mostramos que la relatividad general posee la estructura de una teoría efectiva. Por ello, si bien la relatividad general no es renormalizable, es posible hacer predicciones cuánticas bien definidas para largas distancias y bajas energías, que son independientes de la verdadera teoría cuántica de la gravedad, hasta hoy desconocida. Mostramos que, debido a la inclusión de gravitones, las ecuaciones de Einstein semiclásicas dependen del fijado de medida, y por lo tanto carecen de interpretación física. Una partícula de prueba no sigue las geodésicas de la métrica que resulta de resolver esas ecuaciones. La solución a este problema es encontrar observables físicos, que obviamente son independientes de los parámetros de fijado de medida. Hemos estudiado las ecuaciones geodésicas de una partícula de prueba y, teniendo en cuenta su acoplamiento con los gravitones, hemos mostrado explícitamente que tales ecuaciones resultan independientes del fijado de medida. Con ellas hallamos las correspondientes correcciones cuánticas al potencial newtoniano por efectos de gravitones, que son del tipo de potencias.

Entre las posibles extensiones de las ideas expuestas en esta parte de la Tesis, sería interesante estudiar las correcciones cuánticas a las ecuaciones geodésicas en un contexto cosmológico, de ser posible más allá de la aproximación newtoniana. Otro posible ámbito de aplicación es en el análisis de las ecuaciones para valores medios en cualquier teoría de medida. Por ejemplo, en teorías de Yang-Mills, para estudiar efectos de gluones sobre soluciones clásicas.

Bibliografía

- [1] N. D. Birrell y P. C. W. Davies, *Quantum Fields in Curved Space* (Cambridge University Press, London, 1982).
- [2] P. R. Anderson, Phys. Rev. D **28**, 271 (1983); **28**, 2695 (1983); **29**, 615 (1984); **33**, 1567 (1986).
- [3] Ya. B. Zel'dovich y A. A. Starobinski, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **61**, 2161 (1971) [Sov. Phys. JETP **34**, 1159 (1972)].
- [4] J. B. Hartle y B. L. Hu, Phys. Rev. D **20**, 1772 (1979); *ibid* **21**, 2756 (1980).
- [5] E. Calzetta y B. L. Hu, Phys. Rev. D **35**, 495 (1987).
- [6] J. P. Paz, Phys. Rev. D **41**, 1054 (1990).
- [7] S. W. Hawking, Nature **248**, 30 (1974).
- [8] E. Kolb y M. Turner, *The Early Universe* (Addison-Wesley, Redwood City, CA, 1990).
- [9] D. Boyanovsky *et al.*, Phys. Rev. D **52**, 6805 (1995).
- [10] S. Ramsey y B. L. Hu, Phys. Rev. D **56**, 678 (1997).
- [11] F. Cooper *et al.*, Phys. Rev. D **51**, 2377 (1995).
- [12] D. Boyanovsky, H. J. de Vega y R. Holman, Phys. Rev. D **51**, 734 (1995).
- [13] K. Geiger, Phys. Rev. D **56**, 2665 (1997).
- [14] N. Goldenfeld, *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group* (Addison-Wesley, Reading, MA, 1993).
- [15] A. Caldeira y A. Leggett, Phys. Rev. A **31**, 1059 (1985).
- [16] B. L. Hu *et al.*, Phys. Rev. D **47**, 1576 (1993).
- [17] R. P. Feynman y F. L. Vernon, Ann. Phys. (N.Y.) **24**, 118 (1963).
- [18] W. H. Zurek, Phys. Today **44**, 36 (1991).
- [19] K. G. Wilson, Rev. Mod. Phys. **55**, 583 (1983).
- [20] L. P. Kadanoff, Physics **2**, 263 (1966).
- [21] B. S. DeWitt, Phys. Rev. **160**, 1113 (1967); *ibid* **162**, 1195 (1967).
- [22] J. F. Donoghue, Phys. Rev. Lett. **72**, 2996 (1994).
- [23] I. L. Buchbinder, *Effective Action in Quantum Gravity* (Institute of Physics Publishing, Bristol, 1992).
- [24] J. Schwinger, J. Math. Phys. (N.Y.) **2**, 407 (1961); L. V. Keldysh, Zh. Eksp. Teor. Fiz. **47**, 1515 (1964) [Sov. Phys. JETP **20**, 1018 (1965)].

- [25] R. D. Jordan, *Phys. Rev. D* **33**, 44 (1986).
- [26] J. M. Cornwall, R. Jackiw y E. Tomboulis, *Phys. Rev. D* **10**, 2428 (1974).
- [27] E. Calzetta y B. L. Hu, *Phys. Rev. D* **37**, 2878 (1988).
- [28] G. A. Vilkovisky, en *Quantum Theory of Gravity*, ed. S. M. Christensen (Hilger, Bristol, 1984).
- [29] R. D. Jordan, *Phys. Rev. D* **36**, 3593 (1987).
- [30] B. S. DeWitt, *Phys. Rev.* **162**, 1195 (1967).
- [31] I. A. Batalin y G. A. Vilkovisky, *Quantum Gravity*, ed. M. A. Markov (Plenum, London).
- [32] G. Kunstatter y H. P. Leivo, *Phys. Lett. B* **183**, 75 (1987).
- [33] L. Dolan y R. Jackiw, *Phys. Rev. D* **9**, 3320 (1974).
- [34] G. Kunstatter, *Vilkovisky's unique effective action: an introduction and explicit calculation*, en *Super Field Theories*, ed. H. C. Lee *et al.*, Plenum, New York (1987).
- [35] A. Rebhan, *Nucl. Phys. B* **288**, 832 (1987).
- [36] G. A. Vilkovisky, *Nucl. Phys. B* **234**, 125 (1984); B. S. DeWitt, *Quantum Field Theory and Quantum Statistics* (Adam Hilger, Bristol, 1987).
- [37] D. Odintsov, *Phys. Lett. B* **262**, 394 (1991).
- [38] R. Kantowski y C. Marzban, *Phys. Rev. D* **46**, 5449 (1992).
- [39] R. Kobes, G. Kunstatter y D. Toms, *The Vilkovisky-DeWitt effective action: panacea or placebo ?*, Proceedings del 12. John Hopkins Workshop. ed. G. Domokos, World Scientific, 326 (1988).
- [40] I. J. R. Aitchison y C. M. Fraser, *Annals of Physics* **156**, 1 (1984).
- [41] N. K. Nielsen, *Nucl. Phys. B* **101**, 173 (1975).
- [42] D. A. R. Dalvit y F. D. Mazzitelli, *Phys. Rev. D* **54**, 6338 (1996).
- [43] D. Boyanovsky y H. J. de Vega, *Phys. Rev. D* **47**, 2343 (1993).
- [44] D. Boyanovsky, D. S. Lee y A. Singh, *Phys. Rev. D* **48**, 800 (1993).
- [45] J. Borrill y M. Gleiser, *Phys. Rev. D* **51**, 4111 (1995).
- [46] J. D. Gunton, M. San Miguel y P. S. Sahni, "The Dynamics of First-order Phase Transitions" en *Phase Transitions and Critical Phenomena*, Vol.8, ed. C. Domb y J. L. Lebowitz (Academic Press, New York, 1983).
- [47] B. L. Hu, en *Relativity and Gravitation: Classical and Quantum* Proceedings del SILARG VII, Co-coyoc, Mexico, Dec. 1990. eds. J. C. D'Olivo *et al.* (World Scientific, Singapore, 1991).
- [48] F. C. Lombardo y F. D. Mazzitelli, *Phys. Rev. D* **53**, 2001 (1996).
- [49] F. Wegner y A. Houghton, *Phys. Rev. A* **8**, 401 (1973).
- [50] C. Wetterich, *Nucl. Phys. B* **352**, 529 (1991); *Phys. Lett. B* **301**, 90 (1993); *Z. Phys. C* **60**, 461 (1993).
- [51] S. B. Liao y J. Polonyi, *Ann. Phys.* **222**, 122 (1993).
- [52] J. Polchinski, *Nucl. Phys. B* **231**, 269 (1984).
- [53] A. Hasenfratz y P. Hasenfratz, *Nucl. Phys. B* **270**, 687 (1986).
- [54] T. R. Morris, *Int. J. Mod. Phys. A* **9**, 2411 (1994).
- [55] M. Bonini, M. D'Attanasio y G. Marchesini, *Nucl. Phys. B* **409**, 441 (1993).

-
- [56] M. D'Attanasio y M. Pietroni, Nucl. Phys. **B472**, 711 (1996).
- [57] S. B. Liao, J. Polonyi y D. Xu, Phys. Rev. D **51**, 748 (1995); S. B. Liao y S. Strickland, Phys. Rev. D **52**, 3653 (1995).
- [58] E. J. Weinberg y A. Wu, Phys. Rev. D **36**, 2474 (1987).
- [59] T. R. Morris, Phys. Lett. B **329**, 241 (1994).
- [60] R. Ball *et al.*, Phys. Lett. B **347**, 80 (1995); P. Haagenen *et al.*, Phys. Lett. B **323**, 330 (1994).
- [61] J. Adams *et al.*, Mod. Phys. Lett. A **10**, 2367 (1995).
- [62] T. R. Morris, Phys. Lett. B **334**, 355 (1994).
- [63] I. Gel'fand y A. Yaglom, J. Math. Phys. **1**, 48 (1960); S. Coleman, *Aspects of Symmetry* (Cambridge University Press, Cambridge, England, 1985).
- [64] B. L. Hu y A. L. Matacz, Phys. Rev. D **51**, 1577 (1995).
- [65] J. S. Schwinger, Phys. Rev. D **82**, 664 (1951); B. S. DeWitt, *Dynamical Theory of Groups and Fields* (Gordon and Breach, New York, 1965).
- [66] G. A. Vilkovisky, en *Quantum Theory of Gravity*, ed. S.M. Christensen, (Adam Hilger, Bristol, 1984); Proceedings of the Strasbourg Meeting between Physicists and Mathematicians, CERN preprint CERN-TII.6392/92 (1992).
- [67] A. O. Barvinsky y G. A. Vilkovisky, Nucl. Phys. B **282**, 163 (1987); *ibid.* **333**, 471 (1990).
- [68] I. G. Avramidy, Sov. J. Nucl. Phys. **49**, 735 (1989).
- [69] A. Barvinsky *et al.*, Class. Quant. Grav. **12**, 2157 (1995); A. G. Mirzabekian y G. A. Vilkovisky, Class. Quant. Grav. **12**, 2173 (1995).
- [70] D. A. R. Dalvit y F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. D **50**, 1001 (1994).
- [71] D. A. R. Dalvit y F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. D **52**, 2577 (1995).
- [72] C. Itzykson y J. B. Zuber, *Quantum Field Theory* (McGraw-Hill, New York, 1980).
- [73] S. Weinberg, *The Quantum Theory of Fields*, Volumes 1 y 2 (Cambridge University Press, London, 1995).
- [74] J. F. Donoghue, E. Golowich y B. R. Holstein, *Dynamics of the Standard Model* (Cambridge University Press, Cambridge, 1992).
- [75] J. F. Donoghue, Phys. Rev. D **50**, 3874 (1994).
- [76] L. Parker y D. J. Toms, Phys. Rev. D **32**, 1409 (1985).
- [77] G. T. Horowitz, Phys. Rev. D **21**, 1445 (1980).
- [78] C. G. Bollini y J. J. Giambiaggi, J. Math. Phys. **34**, 610 (1993).
- [79] P. Ramond, *Field Theory, A Modern Primer* (The Benjamin Cummings Publishing Co., 1981).
- [80] B. L. Nelson y P. Panangaden, Phys. Rev. D **25**, 1019 (1982).
- [81] K. S. Stelle, Gen. Rel. and Grav. **9**, 353 (1978).
- [82] S. M. Christensen, Phys. Rev. D **17**, 946 (1978).
- [83] A. O. Barvinsky *et al.*, J. Math. Phys. **35**, 3525 (1994); **35**, 3543 (1994).
- [84] T. Goldman *et al.*, Phys. Lett. B **281**, 219 (1992).

-
- [85] E. S. Fradkin y A. A. Tseytlin, Nucl. Phys. B **201**, 469 (1982); I. G. Avramidy y A. O. Barvinsky, Phys. Lett. B **159**, 269 (1985).
- [86] A. Bottino, C. W. Kim y J. Song, Phys. Lett. B **351**, 116 (1995).
- [87] O. Bertolami, J. M. Mourao y J. Pérez-Mercader, Phys. Lett. B **311**, 27 (1993).
- [88] D. A. R. Dalvit y F. D. Mazzitelli, Phys. Rev. D **56**, 7779 (1997).
- [89] S. Weinberg, Physica **96 A**, 327 (1979).
- [90] J. Gasser y H. Leutwyler, Ann. Phys. (NY) **158**, 142 (1984); Nucl. Phys. B **250**, 465 (1985).
- [91] G. 't Hooft y M. Veltman, Ann. Inst. H. Poincaré A **20**, 69 (1974).
- [92] M. Goroff y A. Sagnotti, Nucl. Phys. B **266**, 799 (1986).
- [93] I. Muzinich y S. Vokos, Phys. Rev D **52**, 3472 (1995).
- [94] H. Hamber y S. Liu, Phys. Lett. B **357**, 51 (1995).
- [95] A. Barvinsky y G. A. Vilkovisky, Phys. Rep. **119**, 1 (1985).





Ante todo deseo agradecerle muy especialmente a Diego por todo su apoyo, dedicación y disposición durante todos estos años. A su increíble capacidad didáctica le debo haber comprendido temas que creía imposibles. También a Juan Pablo, de quien aprendí mucha física y con quien discutí varios de los temas de esta tesis. A los miembros de la cueva, Fernando, Sting, Matius, Fecho y Gabriela, a Dora, Mercedes, Silvina, Lucho, Néstor y Rolo, con todos ellos compartí muy buenos momentos. A César y Miguel, por su infinita paciencia para responder preguntas sobre computación; muchachos, prometo leer más los manuales! A Jimmy, por la aventura del libro, y a Gabriel, por todos sus consejos durante la escritura del mismo. A Marcela, Marina, Carlos, Leo, Alfonso y Martín. A mi familia. A todos ellos, vielen Dank!

