

## Tesis de Posgrado

# Control adaptativo de sistemas no lineales a tiempo discreto

González, Graciela Adriana

1997

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

González, Graciela Adriana. (1997). Control adaptativo de sistemas no lineales a tiempo discreto. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_3025\\_Gonzalez.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3025_Gonzalez.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

González, Graciela Adriana. "Control adaptativo de sistemas no lineales a tiempo discreto". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1997.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_3025\\_Gonzalez.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3025_Gonzalez.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

CONTROL ADAPTATIVO DE SISTEMAS  
NO LINEALES A TIEMPO DISCRETO

por

GRACIELA ADRIANA GONZÁLEZ

Director: Dr. CARLOS ENRIQUE D'ATTELLIS

Tesis presentada para optar al grado de

*Doctor de la Universidad de Buenos Aires*

( Área: Ciencias Matemáticas)

Diciembre de 1997

Nº 3 02 5

52

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

*Control adaptativo de sistemas no lineales a tiempo discreto*

*Adaptive control of discrete time nonlinear systems*

Autor: Lic. Graciela Adriana González

Director: Dr. Carlos Enrique D'Attellis

**Resumen** - Este trabajo se dedica a la aplicación de técnicas adaptativas con el propósito de resolver el problema de seguimiento de trayectorias para algunas clases de sistemas no lineales a tiempo discreto. Se alcanza el objetivo de control por diversos caminos. Éstos se resumen en la utilización de métodos de control adaptativo conocidos a sistemas submodelados como lineales, extensión de estrategias clásicas para sistemas lineales a sistemas no lineales parametrizados y diseño de algoritmos ad-hoc para una clase dada de sistemas.

**Palabras claves:** *sistemas no lineales a tiempo discreto, objetivo de control, control adaptativo, seguimiento de trayectorias, lazo cerrado, acotación y convergencia global o local.*

**Abstract** - This work deals with the application of adaptive techniques to solve tracking problem for some classes of discrete time nonlinear systems. The control objective is achieved by means of different approaches. These are summarized as follows: use of known adaptive control methods to linearly submodeled systems, extension of classical strategies for linear systems to parametrized nonlinear systems and design of ad-hoc algorithms for a given class of systems.

**Keywords:** *discrete time nonlinear systems, control objective, adaptive control, tracking trajectories, closed loop, global or local boundedness and convergence*

*A mis padres*

## *Agradecimientos*

La experiencia vivida tanto en lo profesional como en lo personal a lo largo de estos años me resulta invaluable y será sin duda, inolvidable. Son muchos los que estuvieron cerca de mí para que eso fuera posible.

Deseo expresar en primer lugar, toda mi gratitud hacia mi familia que desde lo cotidiano ha apuntalado mi tarea a pura paciencia y comprensión.

Vaya mi reconocimiento al Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales que me ha permitido llevar a cabo esta labor con toda libertad, poniendo a mi disposición sus recursos.

Debo recordar a mi director de tesis, Dr. Carlos Enrique D'Attellis quien ha depositado en mí tanta confianza desde los comienzos de mi trabajo junto a él.

Es imposible mencionar sin olvidar a alguien, a todos aquellos compañeros del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales como del Departamento de Matemática de la Facultad de Ingeniería que en diversas circunstancias han colaborado conmigo de una u otra manera.

Sin embargo entre todos, hay dos colegas a quienes deseo nombrar especialmente. Me refiero a María Inés Troparevsky con quien he compartido los primeros pasos en estos temas y cuyas opiniones han sido tan importantes para mí. Y a Eduardo Serrano que con su colaboración incondicional y su entusiasmo, no me ha dejado bajar los brazos en ningún momento.

A todos, muchas gracias!!.

G.A.G.

# Índice

## Capítulo 1 PRESENTACIÓN

1.1	Introducción	1
1.2	Organización de la tesis	2
1.3	Difusión de los resultados	3

## Capítulo 2 PUNTOS DE PARTIDA

2.1	Introducción	6
2.2	Herramientas básicas	7
2.3	El problema no lineal	9

## Capítulo 3 REDUCCIÓN AL CASO LINEAL

3.1	Introducción	11
3.2	Submodelado lineal	11
3.3	Linealización por cambio de coordenadas	20
3.4	Conclusiones	23

## Capítulo 4 SISTEMAS BILINEALES

4.1	Introducción	25
4.2	Modelo exacto	26
4.3	Sistemas submodelados	30
4.4	Convergencia de la salida a una referencia constante	35
4.5	Conclusiones	37

## Capítulo 5 SISTEMAS AFECTADOS POR CONTROL LINEAL ADITIVO

5.1	Introducción	38
5.2	Sobre "controlar caos"	38
5.3	Alcances del algoritmo clásico	44
5.4	Conclusiones	52

Capítulo 6  
SISTEMAS LINEALIZABLES RESPECTO AL CONTROL - I

6.1	Introducción	53
6.2	Planteo del problema	54
6.3	Ley de estimación de parámetros	55
6.4	Esquema de control adaptativo	57
6.5	Confrontación con otros algoritmos	63
6.6	Robustez con respecto a perturbaciones aditivas acotadas	65
6.7	Conclusiones	69

Capítulo 7  
SISTEMAS LINEALIZABLES RESPECTO AL CONTROL - II

7.1	Introducción	71
7.2	Construyendo un nuevo algoritmo	72
7.3	Algoritmo de ortogonalización	74
7.4	Algoritmo de ortogonalización modificado	78
7.5	Conclusiones	80

Capítulo 8  
COMPLEMENTOS

8.1	Introducción	81
8.2	Sistemas no linealizables	81
8.3	Sistemas bilineales generalizados	84
8.4	Sistemas afines en los estados	86
8.5	Conclusiones	89

<i>Apéndice</i>	90
<i>Referencias</i>	92

# Capítulo 1

## PRESENTACIÓN

### 1.1 Introducción.

La presente tesis trata acerca de la implementación de técnicas de control adaptativo para sistemas no lineales en tiempo discreto, con el objeto de resolver el problema de seguimiento de trayectorias.

Es evidente que la teoría de sistemas de control cuenta con un desarrollo mucho mayor en lo que se refiere a sistemas lineales que a no lineales. El área de control adaptativo no es excepción a esta regla. Sobre el tratamiento de sistemas lineales por técnicas de control adaptativo, [20] sigue siendo bibliografía de cabecera, aunque mucho más ha sido desarrollado a posteriori: [17], [37] o [43], y las referencias allí citadas dan fe de este hecho.

Sin embargo, muchos problemas de control resultan ser inherentemente no lineales. En [38], por ejemplo, se presenta una interesante lista de aplicaciones de modelos bilineales, provenientes de temas tan diversos como la fisión nuclear, relaciones presa-depredador de especies biológicas, transferencia de calor, columnas de destilación, etc.. Otros ejemplos que pueden mencionarse son los introducidos en [19] y en [1] que describen ciertos procesos químicos o el de [23] sobre el seguimiento de la trayectoria de un telescopio. Además están los casos de sistemas no lineales caóticos que son controlados con el objeto de desterrar la complejidad de su comportamiento; entre otros, [44], [8] tratan el tema.

Por otro lado, el desarrollo de la información digitalizada, a consecuencia de la evolución de las ciencias de la computación, es justificación más que suficiente para el estudio de sistemas en tiempo discreto. Además, es un hecho que las ecuaciones en diferencia son más apropiadas para describir variadas situaciones provenientes de la biología, economía, etc.. Probablemente, el caso más simple y famoso, está dado por la ecuación logística ([12]), que



resulta de gran interés debido a la riqueza de su dinámica. Actualmente, se está profundizando en el estudio de ecuaciones en diferencias con retardo ([14]). Por supuesto, ha crecido notablemente el número de trabajos que tratan sobre sistemas de control no lineales a tiempo discreto, de los que aquí mencionamos unos pocos ([5], [30], [33], [25], [51]).

Las técnicas adaptativas para sistemas no lineales en tiempo continuo han recibido un gran empuje ([47], [29], [31], [27]), pero los avances obtenidos no son en general, extensibles al campo de los sistemas no lineales en tiempo discreto. La bibliografía sobre control adaptativo aplicado a sistemas no lineales en tiempo discreto es aún reducida y en la mayoría de los casos se caracteriza por conjeturar resultados sobre la base de simulaciones numéricas, sin pruebas matemáticas rigurosas, o dedicarse a sistemas (o clases de sistemas) no lineales muy particulares.

Como se señala en [1], en la mayor parte de los procesos de control usuales en las aplicaciones prácticas, las no linealidades intervinientes son conocidas. Esto quiere decir que la incerteza sobre el sistema matemático que describe a un tal proceso, radica en el desconocimiento acerca de los valores de ciertos parámetros. Además, ciertos modelos no lineales parametrizados son particularmente considerados dentro del contexto de identificación y modelización de sistemas no lineales como se puede apreciar en [34] o [2]. Estas observaciones respaldan la modalidad seguida en este trabajo. Se consideran diversas subclases de sistemas no lineales y partiendo de técnicas conocidas en el caso lineal, se desarrollan algoritmos adecuados a las mismas, introduciendo las modificaciones necesarias en cada situación.

Cabe agregar que interesa no sólo cumplimentar el objetivo de control sino verificar otras cuestiones que hacen a la buena "performance" de los algoritmos, como ser las relacionadas con la acotación de las variables, velocidad de convergencia, estabilidad numérica, robustez, etcétera. Asimismo, los antecedentes inmediatos sobre el tema son mencionados particularmente a lo largo de esta tesis y confrontados con las nuevas propuestas u observaciones.

A continuación se realiza una descripción de los temas a desarrollar.

## 1.2 Organización de la tesis.

El Capítulo 2 es introductorio. Se sintetizan los fundamentos de control adaptativo que se manejarán a lo largo de esta tesis y se presenta el problema

general a resolverse.

En el Capítulo 3 se estudia la implementación de cierta regla de control adaptativo para sistemas lineales sobre sistemas no lineales, mediante una previa linealización de estos últimos ya sea por submodelado o por alguna ley de retroalimentación.

En el Capítulo 4 se considera el conjunto de sistemas bilineales que carecen de término lineal respecto al control. Se prueban resultados de convergencia y robustez del esquema adaptativo propuesto.

En el Capítulo 5 se toma la clase de sistemas no lineales caracterizados por presentar comportamiento no lineal sólo respecto a los estados. En particular, se obtiene una respuesta para ciertos casos encuadrados dentro del problema conocido como "controlar caos".

En el Capítulo 6 será tratada la clase de sistemas no lineales parametrizados linealmente y tales que, a través de una ley de retroalimentación, resultan lineales respecto al control. Mediante una generalización de un algoritmo clásico, se obtiene un resultado de carácter global ( restringiendo el conjunto de no linealidades admisibles) y otro de carácter local ( imponiendo restricciones sobre las condiciones iniciales del lazo). Finalmente, se extienden estos resultados para el caso en que tales sistemas son afectados por perturbaciones acotadas.

En el Capítulo 7, se introduce un nuevo esquema adaptativo con el propósito de resolver el problema de seguimiento de trayectorias con convergencia global del lazo cerrado en casos no logrado con el algoritmo propuesto en el capítulo anterior.

El Capítulo 8 presenta extensiones o modificaciones a ciertos esquemas de los anteriores que permiten el tratamiento de sistemas no considerados con anterioridad.

### **1.3 Difusión de los resultados.**

Muchos de los resultados que se desarrollan a lo largo de esta tesis son continuación o parte de trabajos publicados, aceptados para su publicación o presentados en reuniones científicas nacionales e internacionales. Lo que sigue es un listado de los mismos.

#### **A. Revistas con arbitraje.**

1. *A remark on chaotic behaviour in adaptive control systems.* IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.39, N°10, Octubre 1994. En colaboración con M. I. Tropsarevsky y C. E. D 'Attellis.
2. *Controlling chaos in an uncertain Lozi system via adaptive techniques.* International Journal on Bifurcation & Chaos, Vol.5, N°2, Abril 1995.
3. *Adaptive control of linearizable discrete time systems.* Automatica, Vol.33, N°3, Abril 1997.
4. *Dynamical behaviour arising in the adaptive control of the generalized logistic map.* Chaos, Solitons and Fractals, Vol.8, N°9, Julio 1997.

#### **B. Anales de congresos con arbitraje.**

1. *Análisis del controlador adaptativo de un sistema no lineal mediante un modelo lineal.* IV Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control; Buenos Aires, Noviembre 1991, en colaboración con M. I. Tropsarevsky. Publicado en los Anales de la Reunión, págs. 422-430.
2. *Controlling bilinear systems via adaptive techniques.* VI Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control; Bahía Blanca, Noviembre 1995, en colaboración con M. I. Tropsarevsky. Publicado en los Anales de la Reunión, págs. 241-244.
3. *Propiedades de un esquema adaptativo sobre cierta clase de sistemas no lineales .* VII Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información y Control; San Juan, Septiembre 1997. Publicado en los Anales de la Reunión, págs. 142-144.

#### **C. Presentaciones en congresos.**

1. *Dinámica no lineal en control adaptativo.* XL Reunión Anual de Comunicaciones Científicas UMA; San Luis, Septiembre 1990, en colaboración con M. I. Tropsarevsky

2. *Un problema de control adaptativo*. XLI Reunión Anual de Comunicaciones Científicas UMA; Santiago del Estero, Octubre 1991, en colaboración con M. I. Troparevsky.
3. *Controlador adaptativo para un sistema discreto de cualquier orden*. XLII Reunión Anual de Comunicaciones Científicas UMA; Tandil, Octubre 1992, en colaboración con M. I. Troparevsky.
4. *On chaotic behaviour in adaptive control systems*. First International Congress on Complex Systems in Computational Physics; Buenos Aires, Octubre 1993, en colaboración con M. I. Troparevsky.
5. *Control adaptativo en sistemas discretos no lineales*. XLIV Reunión Anual de Comunicaciones Científicas UMA; Buenos Aires, Septiembre 1994.
6. *Aplicación de modelos bilineales para el control de sistemas no lineales mediante técnicas adaptativas*. I Coloquio Latinoamericano de Matemática Aplicada a la Industria y a la Medicina; Buenos Aires, Noviembre 1995, en colaboración con M. I. Troparevsky.
7. *Control adaptativo de sistemas no lineales a tiempo discreto*. IV Jornada de Investigación de la Asociación de Universidades Grupo Montevideo; Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Brasil, Agosto 1996.
8. *Submodelado lineal y control adaptativo*. XLVI Reunión Anual de Comunicaciones Científicas UMA; Salta, Septiembre 1996.
9. *Application of centre manifold theory to an adaptive control problem*. Fourth SIAM Conference on Applications of Dynamical Systems; Snowbird, Utah, U.S.A., Mayo 1997.

## Capítulo 2

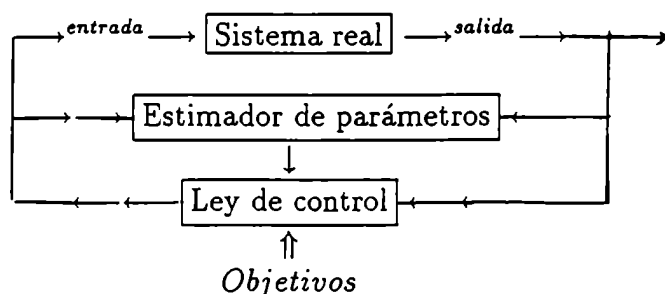
# PUNTOS DE PARTIDA

### 2.1 Introducción.

El término *control adaptativo* incluye a toda técnica de control que se modifica a sí misma a medida que el sistema evoluciona y de acuerdo a la información que éste mismo le proporciona. Resulta particularmente útil para controlar sistemas cuyas ecuaciones son sólo parcialmente conocidas.

Considérese un proceso de control que evoluciona en el tiempo del cual se desconoce un sistema matemático que lo describa. Se pretende cumplir con un cierto objetivo de control o sea, implementar una ley de control tal que obligue a la salida del sistema a comportarse de alguna manera deseada; por ejemplo, que converja a una referencia constante, que siga alguna trayectoria prefijada, etc..

Supóngase que es posible proponer un modelo parametrizable para representar el sistema y calcular el control necesario para alcanzar el objetivo deseado. Si el modelo elegido se asemeja al sistema real, se espera que el control construido en base al primero resulte efectivo. Para que el modelo represente lo más fielmente posible al sistema, no se fijan los valores de los parámetros del modelo sino que, a partir de uno inicial, se los actualiza mediante algún algoritmo de estimación. En resumen, los algoritmos de control adaptativo con los que se trabaja en esta tesis, se aplican a modelos parametrizados y se componen de una ley de estimación de parámetros combinada con una estrategia de control. Gráficamente, el esquema general de cualquiera de éstos puede representarse de la siguiente forma:



Los sistemas de control que se tratarán a lo largo de este trabajo son sistemas SISO ( *single input - single output*) en tiempo discreto. Más precisamente, están descritos por una ecuación en diferencias de la siguiente forma:

$$x_{k+d+1} = f(x_k, \dots, x_{k-d_1}, u_k, \dots, u_{k-d_2})$$

con  $d, d_1, d_2 \geq 0$ , siendo  $x_k \in R$ , estado o salida y  $u_k \in R$ , control o entrada.

Para el caso de sistemas lineales, o sea si  $f$  depende linealmente tanto de las entradas como de las salidas, y teniendo como objetivo el seguimiento (asintótico) de trayectorias, diversas estrategias han sido desarrolladas en [20]. En la siguiente sección, se presenta una de ellas junto a sus propiedades más relevantes. La misma resultará de gran utilidad pues será el punto de partida para resolver ciertos problemas no lineales que se introducen, muy someramente, en la Sección 2.3 y que constituyen el tema de esta tesis.

## 2.2 Herramientas básicas.

En esta sección se describe un problema lineal clásico junto a un esquema convencional de control adaptativo que lo resuelve satisfactoriamente. Tal esquema será de referencia constante a lo largo de esta tesis.

Sea una planta cuyo comportamiento entrada-salida está regido por el siguiente sistema lineal SISO en tiempo discreto:

$$x_{k+1+d} = \alpha(q^{-1})x_k + \beta(q^{-1})u_k \quad k = 0, 1, \dots \quad (2.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \alpha(q^{-1}) &= \alpha_0 + \alpha_1 q^{-1} + \dots + \alpha_{d_1} q^{-d_1} \\ \beta(q^{-1}) &= \beta_0 + \beta_1 q^{-1} + \dots + \beta_{d_2} q^{-d_2}, \end{aligned}$$

con  $\beta_0 \neq 0$ ,  $d, d_1, d_2 \geq 0$  conocidos, siendo  $d$  el retardo del sistema y  $d_i (i = 1, 2)$ , cotas superiores de los grados de los polinomios  $\alpha$  y  $\beta$ .

El objetivo es diseñar una ley de control adaptativo que verifique:

i) estabilidad del lazo cerrado; i.e., que todas las variables intervinientes permanezcan acotadas;

ii) seguimiento asintótico de la salida a una sucesión o señal  $(x_k)_{k>d}$  dada, o sea  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x_k^*) = 0$

Denotando

$$\theta^t = (\alpha_0, \dots, \alpha_{d_1}, \beta_0, \dots, \beta_{d_2})$$

entonces (2.1) puede ser reescrito de la forma

$$x_{k+1+d} = \theta^t \phi_k, \quad (2.2)$$

siendo

$$\phi_k^t = (x_k, \dots, x_{k-d_1}, u_k, \dots, u_{k-d_2}).$$

Para obtener el resultado anticipado, será necesaria la estabilidad del sistema inverso, que para sistemas lineales es equivalente a:

**Hipótesis A:**

a) los modos del modelo inverso de (2.1) son de módulo menor o igual a uno,

b) los modos controlables del modelo inverso de (2.1) son de módulo menor a uno,

c) a cualquier modo del modelo inverso de (2.1) que tenga módulo igual a uno, le corresponde bloque de Jordan de dimensión uno.

Bajo la Hipótesis A, si el parámetro  $\theta$  es conocido, la ley de control obtenida de  $x_{k+1+d}^* = \theta^t \phi_k$ , lleva la salida a la referencia en un paso. Este control es conocido como "one-step-ahead-control" ([20], p.120). Cuando  $\theta$  es desconocido, se lo reemplaza por un estimador de parámetros  $\hat{\theta}_k$  y por lo tanto, se tiene

$$x_{k+1+d}^* = \hat{\theta}_k^t \phi_k. \quad (2.3)$$

Como estimador de parámetro se elige el "algoritmo de proyección" ([20], p.184) definido por la siguiente ley:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \frac{\alpha \phi_{k-d} [x_{k+1} - \phi_{k-d}^t \hat{\theta}_k]}{\gamma + \|\phi_{k-d}\|^2}, \quad (2.4)$$

con  $\|\phi_{k-d}\|^2 = \phi_{k-d}^t \phi_{k-d}$ ,  $\alpha$  y  $\gamma$  constantes,  $0 < \alpha < 2$  y  $\gamma \geq 0$ .

Suponiendo que la ecuación (2.3) puede resolverse en cada iteración se demuestra el siguiente resultado:

**Teorema 2.2.1** *Sea el sistema (2.1) bajo la Hipótesis A. Si se aplica el esquema adaptativo (2.3)-(2.4) resulta*

- i)  $(\|\hat{\theta}_k - \theta\|)_{k \geq 0}$  converge,
- ii)  $(x_k)_{k \geq 0}$  y  $(u_k)_{k \geq 0}$  son sucesiones acotadas,
- iii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x_k^*) = 0$ ,
- iv)  $\sum_{k=0}^{\infty} (x_k - x_k^*)^2 < \infty$ .

Tanto la demostración del teorema como otras propiedades del esquema presentado pueden verse en [20]. Antes de pasar a la próxima sección, cabe agregar algunas observaciones que serán útiles más adelante.

- Notar que se puede obtener  $u_k$  de (2.3) sólo si  $\hat{\theta}_k(d_1+2) \neq 0$  siendo  $\hat{\theta}_k(i)$  el  $i$ -ésimo elemento del vector  $\hat{\theta}_k$ . Para evitar este problema, y darle además más estabilidad numérica al algoritmo, se supone que se conoce el signo y una cota inferior del módulo de  $\theta(d_1+2) = \beta_0$ . Bajo esta hipótesis, se introduce una modificación en la definición del estimador que puede verse en [20, p.189] y que será presentada con detalle en este trabajo cuando sea necesario.
- El algoritmo requiere conocer  $x_{k+1+d}^*$  en el tiempo  $k$ ; esto es razonable al pretender controlar sistemas con retardo.
- El hecho de que los sistemas propuestos puedan ser escritos en la forma (2.2) es fundamental para deducir importantes propiedades del estimador. Esta forma es conocida como modelo DARMA (*Deterministic Autoregressive Moving Average*).

## 2.3 El problema no lineal.

El algoritmo (2.3)-(2.4) resuelve el problema de control planteado para sistemas lineales. Sin embargo, no es para nada inusual la aparición de no



linealidades en cualquier dinámica que describe una situación real y en consecuencia, tampoco en los sistemas de control. Por lo tanto, es de interés la implementación de algún esquema adaptativo para sistemas no lineales.

Se trata de satisfacer el objetivo de control planteado en la sección anterior pero para sistemas dados por

$$x_{k+d+1} = f(x_k, \dots, x_{k-d_1}, u_k, \dots, u_{k-d_2}), \quad (2.5)$$

con  $d, d_1, d_2 \geq 0$  y  $f : R^{d_1+d_2+1} \rightarrow R$ , no lineal y parcialmente conocido cuya incerteza depende básicamente de cierto conjunto de parámetros.

En lugar de buscar soluciones al problema planteado con tanta generalidad, la clave está en tomar clases de sistemas no lineales e implementar el algoritmo adecuado en cada caso. Vale la pena adelantar que, de todos modos, el conjunto de las clases que se tratarán no totalizan el de los sistemas no lineales ni que, necesariamente las clases resulten ser todas disjuntas entre sí. Por otro lado y según el caso, se podrá resolver el problema de seguimiento de trayectoria acotada cualquiera o se limitará a la regulación o a la convergencia de la salida a una referencia constante.

Sintéticamente, se presentan dos caminos. Uno, es ver los alcances del esquema válido para el caso lineal, si se desprecian los términos no lineales del sistema real. El segundo es, definitivamente, incorporar los términos no lineales; para esto, será sumamente útil reconsiderar los modelos DARMA, ya que si en la función  $\phi$  de (2.2) se admiten no linealidades, siguen siendo válidas muchas de las propiedades del estimador (2.4).

## Capítulo 3

# REDUCCIÓN AL CASO LINEAL

### 3.1 Introducción.

En el primer capítulo se hizo referencia ciertos resultados acerca de control adaptativo en sistemas lineales. Luego, en la Sección 2.2 se expuso uno de los algoritmos más conocidos así como el resultado de la convergencia global del mismo al ser aplicado sobre sistemas lineales. Contando con esto como punto de partida, la idea central de este capítulo es ver qué posibilidades existen de aplicar a un sistema no lineal una técnica conocida para lineales.

Se explorarán dos caminos. En el primero, se aplica un algoritmo para sistemas lineales, despreciando la parte no lineal del sistema real y se analiza el lazo cerrado resultante ( Sección 3.2). En el segundo se estudia en qué casos es posible linealizar previamente el sistema por un cambio de variables para combinarlo con un algoritmo creado para sistemas lineales ( Sección 3.3).

### 3.2 Submodelado lineal.

El efecto del submodelado cuando el sistema real es lineal y, por lo tanto el error de modelado radica en la diferencia entre el orden del sistema real y del modelo propuesto, fue estudiado en [35], [36], [16] y [49]. Estos trabajos permiten concluir que el submodelado puede originar importantes cambios de comportamiento dinámico del lazo cerrado respecto al que se presenta si el orden del sistema se conoce con exactitud. Precisamente, comportamiento caótico fue conjeturado en [35]-[36] al aplicar (2.3)-(2.4) con  $\gamma = 0$  en cierto caso de submodelado - aún cuando simultáneamente, se verifica el objetivo de control - . En tanto que en [A.1, Secc.1.3] se trató el mismo problema frente al

mismo esquema pero con  $\gamma > 0$  y se obtuvo el objetivo de control, desterrando el caos aunque con convergencia local. Debido a estos antecedentes y dado que en el problema a plantear a continuación se suma la complejidad que puede acarrear la intervención de la no linealidad, la metodología de esta sección seguirá los pasos de dicho trabajo. Comenzando por sistemas muy sencillos se estudian separadamente los casos donde no hay ( Sección 3.2.1) o hay ( Sección 3.2.2) error en el orden, generalizados en las Notas 3.1 y 3.4 respectivamente.

### 3.2.1. Sin error en el orden del sistema.

Consideremos que el sistema está descrito por la ecuación

$$x_{k+1} = ax_k + g(x_k) + u_k \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.1)$$

siendo  $a$  parámetro desconocido y  $g : R \rightarrow R$ ,  $g \in C^2$ ,  $g(0) = g'(0) = 0$ .

El objetivo de control es la regulación (asintótica) de la salida, es decir, obtener  $x_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

Suponiendo que se desconoce la parte no lineal del sistema, se toma como modelo de diseño,

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{a}_k x_k + u_k.$$

En concordancia con el esquema presentado en el Capítulo 2, se introduce como ley de control

$$u_k = -\hat{a}_k x_k, \quad (3.2)$$

y como ley de estimación de parámetros

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + \frac{x_k}{\gamma + x_k^2} (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}), \quad (3.3)$$

donde  $\gamma > 0$  es una constante fija.

La combinación de (3.2) y (3.3) constituye el esquema de control adaptativo escogido. Si se aplica a (3.1) este esquema y se define:

$$a_k = \hat{a}_k - a,$$

resulta el siguiente lazo cerrado:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -a_k x_k + g(x_k) \\ a_{k+1} &= a_k + \frac{x_k}{\gamma + x_k^2} (-a_k x_k + g(x_k)) \end{aligned} \quad (3.4)$$

Se prueba el siguiente resultado:

**Lema 3.2.1** Sea  $\lambda \in R$  tal que  $|\lambda| < 1$ . El sistema (3.4) es estable en  $(0, \lambda)$ . Además, si se eligen condiciones iniciales  $(x_0, a_0)$  suficientemente cerca de  $(0, \lambda)$ , existe  $s_0 \in R$  que verifica:

$$|x_k| \leq C\beta^k \quad y \quad |a_k - \lambda - s_0| \leq C\beta^k \quad \forall k > 0$$

para constantes  $C > 0$  y  $0 < \beta < 1$ .

**Demostración:**

Como se sabe que  $g(0) = 0$  el sistema (3.4) presenta una recta de puntos fijos, a saber;

$$P = \{(0, \lambda), \lambda \in R\}$$

Si para cada  $\lambda$  fijo, se define el siguiente cambio de variables

$$w_k = a_k - \lambda,$$

el sistema (3.4) se transforma en

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ w_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w_k x_k + g(x_k) \\ -\frac{x_k}{\gamma + x_k^2} [(w_k + \lambda)x_k - g(x_k)] \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Aplicando herramientas de la teoría de sistemas dinámicos se estudia la estabilidad de (3.5) en  $(0, 0)$ . Como la linealización tiene a 1 como autovalor, no es posible aplicar el teorema de Hartman-Grobman ([21]). Sin embargo, sí se puede aplicar la *Teoría de la Variedad Centro* (ver Apéndice) si nos restringimos a  $|\lambda| < 1$ . En efecto, usando la notación del Apéndice, se tiene:  $n = m = 1$ ,  $A = 1$ ,  $B = -\lambda$ ,  $F(x, w) = -\frac{x}{\gamma + x^2} [(w + \lambda)x - g(x)]$  y  $G(x, w) = -xw + g(x)$ . Se verifican hipótesis del Teorema A.1 del Apéndice y por lo tanto, existe la variedad centro. Es muy fácil ver que la correspondiente ecuación de la variedad centro se verifica con  $h \equiv 0$ . Luego, la ecuación reducida a estudiar es

$$s_{k+1} = s_k$$

que es estable en cero. Es decir que vía el Teorema A.2 del Apéndice, se tiene asegurada la estabilidad del  $(0, 0)$  para (3.5) cuando  $|\lambda| < 1$ . A su vez esto permite concluir, a través de la parte (b) del mismo teorema, que si se toma  $(x_0, w_0)$  suficientemente cerca del origen, existe  $s_0 \in R$  tal que  $|x_k| \leq C\beta^k$  y  $|w_k - s_0| \leq C\beta^k \forall k > 0$  con  $C > 0$  y  $0 < \beta < 1$ . En términos de la variables originales, esto da la tesis.

**Nota 3.1:** Retomando el esquema (3.2)-(3.3), el resultado anterior dice que fijado  $\lambda$  de módulo menor que 1, existe  $\epsilon > 0$  ( dependiente de  $\lambda$ ) tal que si  $|x_0| < \epsilon$  y  $|\hat{a}_0 - a - \lambda| < \epsilon$  se obtiene convergencia *exponencial* de la salida a cero, en tanto que el estimador converge a algún valor que depende de las condiciones iniciales. Como el resultado se desprende de aplicar el teorema de la variedad centro, no se conoce a priori el valor de  $\epsilon$ . Desde un punto de vista práctico, para aumentar la posibilidad de éxito deberá aproximarse  $|x_0| \cong 0$  y  $|\hat{a}_0 - a - \lambda| \cong 0$  todo lo que se pueda. Sin embargo, si la aproximación necesaria es demasiado pequeña puede perder sentido usar control adaptativo. Concretamente, si se cuenta con  $|\hat{a}_0 - a| < 1$ , aplicando  $u_k = -\hat{a}_0 x_k$  a (3.1) resulta

$$x_{k+1} = Ax_k + g(x_k)$$

con  $|A| < 1$  que por linealización y con las hipótesis que se tienen sobre  $g$ , tiene al origen como punto fijo asintóticamente estable.

Por otro lado, las simulaciones permiten concluir que aunque no se cuente con una estimación demasiado buena del parámetro  $a$ , el objetivo de control puede ser logrado aplicando el esquema propuesto. A modo de ejemplo, supongamos que el sistema real está dado por

$$x_{k+1} = 2x_k + 3x_k^2 + u_k$$

y que se aplica (3.2)-(3.3) con  $x_0 = 0.15$ ,  $\hat{a}_0 = 0.85$  y  $\gamma = 0.1$ . La figura 1.a muestra el comportamiento de la salida y la 1.b del estimador, en este caso.

figura 1.a

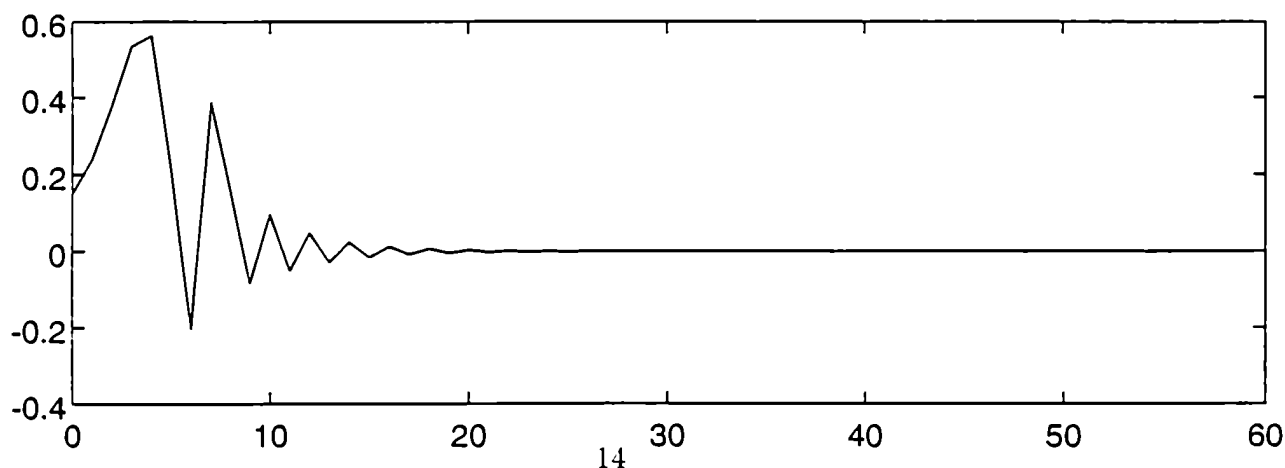
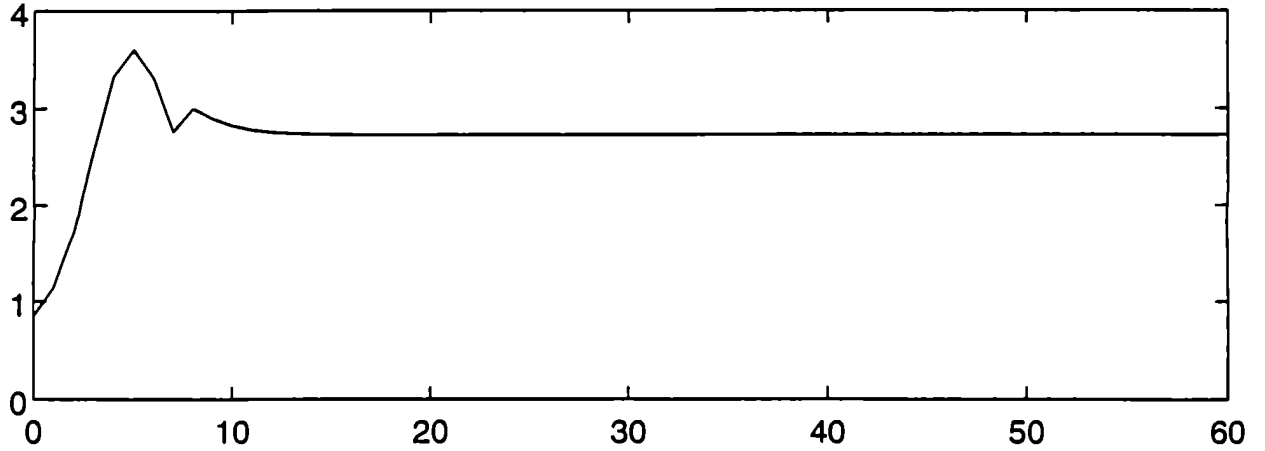


figura 1.b



Nota 3.2: El caso estudiado puede ser generalizado sin dificultad al de orden mayor dado por

$$x_{k+1} = \sum_{i=0}^{d_1} a^i x_{k-i} + g(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-d_1}) + u_k \quad (3.6)$$

con  $d_1 > 0$  conocido. Si se propone:

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^{d_1} \hat{a}_k^i x_{k-i} + u_k$$

$$u_k = - \sum_{i=0}^{d_1} \hat{a}_k^i x_{k-i}$$

$$\hat{a}_{k+1}^i = \hat{a}_k^i + \frac{x_{k-i}}{\gamma + \sum_{i=0}^{d_1} x_k^2} (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}) \quad i = 0, 1, \dots, d_1$$

y se llama

$$a_k^i = \hat{a}_k^i - a_i \quad i = 0, 1, \dots, d_1,$$

el correspondiente lazo cerrado resulta

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= - \sum_{i=0}^{d_1} a_k^i x_{k-i} + g(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-d_1}) \\ a_{k+1}^i &= a_k^i + \frac{x_{k-i}}{\gamma + \sum_{i=0}^{d_1} x_k^2} (- \sum_{i=0}^{d_1} a_k^i x_{k-i} + g(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-d_1})) \quad (i = 0, 1, \dots, d_1) \end{aligned}$$



trata entonces de ver bajo qué restricciones los ceros del polinomio  $P(r) = r^{d+1} + \lambda_0 r^d + \dots + \lambda_{d-1} r + \lambda_d$  verifican tal propiedad. También se puede aplicar resultados que relacionan el módulo de los autovalores con los elementos de la matriz (ver Apéndice). En cualquier caso, impuestas las restricciones sobre los  $\lambda_i$ 's se puede aplicar la *Teoría de la Variedad Centro* y obtener un resultado análogo al del Lema 3.2.1.

### 3.2.2. Con error en el orden del sistema.

Supongamos que el sistema está descrito por la ecuación:

$$x_{k+1} = ax_k + bx_{k-1} + g(x_k, x_{k-1}) + u_k \quad k = 0, 1, \dots \quad (3.7)$$

siendo  $a$  y  $b$  parámetros desconocidos y  $g : R^2 \rightarrow R$ ,  $g \in C^2$  que verifica  $g(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial x}(0, 0) = \frac{\partial g}{\partial y}(0, 0) = 0$ .

El diseñador considera no sólo que el modelo es lineal sino también que es de un orden menor. Por lo tanto, propone el mismo esquema adaptativo que para (3.1), o sea (3.2)-(3.3).

Siendo  $a_k = \hat{a}_k - a$ , el lazo cerrado resulta:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -a_k x_k + bx_{k-1} + g(x_k, x_{k-1}) \\ a_{k+1} &= a_k + \frac{x_k}{\gamma + x_k^2} (-a_k x_k + bx_{k-1} + g(x_k, x_{k-1})) \end{aligned}$$

Para encarar el estudio de éste como en la sección anterior, es necesario definir una tercera variable

$$y_k = x_{k-1}$$

Se trata entonces de analizar el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -a_k x_k + by_k + g(x_k, y_k) \\ y_{k+1} &= x_k \\ a_{k+1} &= a_k + \frac{x_k}{\gamma + x_k^2} (-a_k x_k + by_k + g(x_k, y_k)) \end{aligned} \quad (3.8)$$

Los puntos fijos del sistema definen el conjunto

$$P = \{(0, 0, \lambda), \lambda \in R\}$$

Para cada uno de estos elementos el determinante de la matriz jacobiana es  $-b$ . O sea que  $0 < |b| < 1$  es condición necesaria para obtener estabilidad. El estudio de la dinámica en un entorno de estos puntos requiere del siguiente:



**Lema 3.2.2** Supongamos que  $0 < |b| < 1$  y  $|\lambda| < 1 - b$ . El sistema (3.8) es estable en  $(0, 0, \lambda)$ . Además, si se eligen condiciones iniciales  $(x_0, y_0, a_0)$  suficientemente cerca de  $(0, 0, \lambda)$ , existe  $s_0 \in \mathbb{R}$  que verifica:

$$\|(x_k, y_k)\| \leq C\beta^k \quad y \quad |a_k - \lambda - s_0| \leq C\beta^k \quad \forall k > 0$$

para constantes  $C > 0$  y  $0 < \beta < 1$ .

**Demostración:**

Si para cada  $(0, 0, \lambda)$ , se define  $w_k = a_k - \lambda$ , el sistema (3.8) se transforma en:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ w_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\lambda & b & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ w_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -w_k x_k + g(x_k, y_k) \\ 0 \\ \frac{x_k}{\gamma + x_k^2} [-(w_k + \lambda)x_k + by_k + g(x_k, y_k)] \end{pmatrix}$$

Bajo las hipótesis establecidas, la matriz

$$\begin{pmatrix} -\lambda & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tiene autovalores dentro del círculo unitario. Dadas las hipótesis sobre  $g$ , se puede recurrir a la *Teoría de la Variedad Centro* nuevamente. De acuerdo a la notación del Apéndice, se tiene:

$$A = 1 \quad F(x, y, w) = \frac{x}{\gamma + x^2} [-(w + \lambda)x + by + g(x, y)]$$

$$B = \begin{pmatrix} -\lambda & b \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad G(x, y, w) = \begin{pmatrix} -wx + g(x, y) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resulta  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, h \equiv (0, 0)$  como la correspondiente variedad centro. Aplicando sucesivamente Teorema A.2 (a) y (b) del Apéndice se obtiene la tesis.

**Nota 3.3:** El caso particular  $g \equiv 0$  fue estudiado en [A.1, Secc.1.3]. El resultado desarrollado aquí demuestra la robustez del algoritmo de ese trabajo con respecto a no linealidades suficientemente suaves y que afectan al sistema aditivamente. Es interesante notar la similitud entre la demostración para  $g \equiv 0$  y la correspondiente a  $g \in C^2$  cualquiera; vale decir que los términos no lineales no afectan la estabilidad del lazo. Cabe agregar que se

pueden hacer análogas observaciones al Lema 3.2.2 que las hechas en la Nota 3.1 con referencia al Lema 3.2.1.

**Nota 3.4:** La generalización de este caso corresponde a tener el sistema (3.6) submodelado por

$$\hat{x}_{k+1} = \sum_{i=0}^{\bar{d}_1} \hat{a}_k^i x_{k-i} + u_k \quad \text{con} \quad \bar{d}_1 < d_1.$$

El desarrollo analítico es esencialmente el mismo y se obtiene resultado local, bajo restricciones sobre los parámetros correspondientes a la parte lineal no modelada. Como para  $d_1 = 1, \bar{d}_1 = 0$  (Nota 3.3), el caso lineal correspondiente a esta generalización ya fue estudiado ([49, p.29-32]).

**Nota 3.5:** En [52] se propone un esquema de control para sistemas no lineales en tiempo discreto submodelados por uno lineal. El tipo de restricción sobre la parte no lineal es muy distinta de la presentada aquí pero sigue siendo exigente ya que involucra cotas que relacionan la evolución de la salida, la entrada y los términos no modelados del sistema. El objetivo de control es en principio, el seguimiento (asintótico) de una trayectoria dada. Sin embargo, el algoritmo propuesto logra la convergencia (con decaimiento exponencial) de la salida del sistema a un conjunto compacto que contiene a la referencia y asegura el objetivo original sólo en el caso ideal (i.e. sistema no afectado ni por perturbaciones ni por no linealidades).

En [15], se toma el algoritmo de mínimos cuadrados y se le incorpora un "factor variable de olvido" con el propósito de otorgar al esquema más capacidad de adaptación. Se conjetura mediante numerosas simulaciones el éxito del mismo, al ser aplicado a sistemas que se presumen no lineales pero que han sido modelados como lineales.

**Nota 3.6:** En todos los casos estudiados el cero es punto fijo del sistema libre y sólo se ha considerado el problema de la regulación. No obstante, el problema de llevar la trayectoria a una referencia constante puede resolverse análogamente. Pero el problema general del seguimiento de trayectorias no admite el mismo tratamiento. Por otro lado, los sistemas no lineales introducidos tienen dos características fundamentales: a) el control aparece afectando sólo aditivamente al sistema; b) la parte no lineal verifica ciertos requisitos de "suavidad". Por lo tanto, esta propuesta constituye una primera respuesta al problema, particularmente útil si se tiene muy poca información sobre el

sistema real. Las restricciones impuestas en esta sección, tanto en lo que se refiere al objetivo de control como al modelo del sistema, serán sucesivamente modificadas de manera de responder de la forma más completa posible al problema planteado en el Capítulo 2.

### 3.3 Linealización por cambio de coordenadas.

Una alternativa que parece interesante es la posibilidad de linealizar el sistema previamente por retroalimentación y luego, aplicar al sistema resultante, las técnicas clásicas de control adaptativo para modelos lineales. Esta metodología ha sido aplicada con éxito para sistemas en tiempo continuo ([29], [47]).

Para indagar sobre la misma en el caso discreto, se puede partir de un primer ejemplo:

$$x_{k+1} = ax_k + b(1 + x_k^2)u_k \quad (3.9)$$

donde  $a$  y  $b$  son parámetros desconocidos. Si se define

$$v_k = (1 + x_k^2)u_k$$

resulta

$$x_{k+1} = ax_k + bv_k \quad (3.10)$$

Si se aplica a (3.10) algún esquema de control adaptativo de sistemas lineales ([20]), bastará luego aplicar dicho esquema a (3.9) con  $u_k = \frac{v_k}{1+x_k^2}$ .

En qué casos será posible proceder de esta manera?. En primer lugar, habrá que analizar qué sistemas no lineales en tiempo discreto, son linealizables por retroalimentación. Establecido este punto, se debe ver cómo combinar la linealización con alguna ley de control adaptativo. Como ya se ha señalado, para sistemas SISO no lineales en tiempo continuo, se ha podido resolver el problema de seguimiento de trayectorias para ciertos casos combinando técnicas de linealización y de control adaptativo. Específicamente, en [47] han sido tratados sistemas de la forma

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + g(x)u \\ y &= h(x) \end{aligned}$$

con  $x \in R^n$ ,  $u, y \in R$ ,  $f, g, h : R^n \rightarrow R$ , funciones suaves dadas por

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n_1} \alpha_i f_i(x) \quad y \quad g(x) = \sum_{i=1}^{n_2} \beta_i g_i(x)$$

siendo  $\alpha_i$  ( $1 \leq i \leq n_1$ ) y  $\beta_i$  ( $1 \leq i \leq n_2$ ) parámetros desconocidos. El éxito de los resultados obtenidos radica en que para el caso continuo, la transformación aplicada para obtener el sistema lineal equivalente, conserva la relación lineal entre las salidas y los parámetros (o funciones de los parámetros) originales.

Trataremos de ver qué sucede para sistemas SISO en tiempo discreto. En el trabajo de [32] se desarrollan condiciones necesarias y suficientes para la linealización de sistemas en tiempo discreto mediante cambio de coordenadas y retroalimentación en los estados. Ellos trabajan con sistemas descritos de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= f(x_k, u_k) \\ y_k &= h(x_k) \end{aligned} \quad (3.11)$$

donde  $x_k \in R^n$ ,  $u_k, y_k \in R$ ;  $f : R^{n+1} \rightarrow R$ ,  $h : R^n \rightarrow R$  funciones suaves con  $f(0,0) = h(0) = 0$ .

A efectos de simplificar la presentación, se considerará la posibilidad de aplicar una transformación (global) que linealice el sistema. Introduciendo la notación de [32],

$$\begin{aligned} \hat{f}^1(x, u) &= f(x, u) \\ \hat{f}^{i+1}(x, u) &= f(\hat{f}^i(x, u), 0) \quad 1 \leq i \leq n-1, \end{aligned}$$

$\hat{f}^i(x, u)$  representa el efecto de una entrada  $u$  en  $k=0$  sobre el estado  $x_i$  y resulta que si

$$\begin{aligned} a) D_u(h \circ \hat{f}^i) &\equiv 0 \quad 1 \leq i \leq n-1 \\ b) \det \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \Big|_{x=0} \\ \vdots \\ \frac{\partial (h \circ \hat{f}^{n-1})}{\partial x} \Big|_{(0,0)} \end{bmatrix} &\neq 0 \\ c) D_u(h \circ \hat{f}^n) \Big|_{(0,0)} &\neq 0, \end{aligned}$$

entonces la transformación  $T : R^n \rightarrow R^n$ ,  $T(x) = \xi$ , definida por:

$$\xi_1 = h(x), \xi_2 = h \circ \hat{f}(x, u), \dots, \xi_n = h \circ \hat{f}^n(x, u)$$

es un difeomorfismo que modifica el sistema (3.11) como:

$$\begin{aligned}\xi_1(k+1) &= \xi_2(k) \\ \xi_2(k+1) &= \xi_3(k) \\ &\vdots \\ \xi_{n-1}(k+1) &= \xi_n(k) \\ \xi_n(k+1) &= h \circ \hat{f}^n(T^{-1}(\xi(k)), u_k) \\ y_k &= \xi_1(k)\end{aligned}$$

con lo cual

$$y_{k+1} = h \circ \hat{f}^n(x_{k-n+1}, u_{k-n+1}). \quad (3.12)$$

Supongamos ahora que el sistema no lineal se conoce parcialmente; más precisamente, se tiene una parametrización del mismo de la siguiente forma:

$$f(x, u) = \sum_{i=1}^p \alpha_i f_i(x, u) \quad (3.13)$$

donde los  $\alpha_i$  son parámetros desconocidos y las  $f_i$  son funciones conocidas con  $f_i(0, 0) = 0$  ( $1 \leq i \leq p$ ).

Si nos reducimos al caso  $n = 1$ ,  $h = id$  - que corresponde al modelo general propuesto en el Capítulo 2 con  $d_1 = d_2 = 0$  - es fácil ver que las condiciones de linealización se reducen a

$$\frac{\partial f}{\partial u}(0, 0) \neq 0 \quad (3.14)$$

y es obvio que ejemplos simples como los que siguen no verifican tal condición,

$$x_{k+1} = ax_k + bx_k u_k,$$

$$x_{k+1} = ax_k + bu_k^2.$$

A su vez, la condición (3.14) no asegura que exista solución de

$$f(x_k, u_k) = x_k^* \quad \forall k.$$

Esto sucede en el ejemplo particular (3.9) y sistemas más generales con esta propiedad serán tratados más adelante ( Capítulo 6). Finalmente, si se puede

”despejar sólo localmente” habrá que redefinir la ley de control adecuadamente; un ejemplo a este respecto corresponde a

$$x_{k+1} = ax_k + bx_k u_k + cu_k,$$

para el cual el problema de seguimiento asintótico a una referencia acotada vía técnicas de control adaptativo se ha desarrollado en [18].

En cuanto a  $n > 1$ , es fácil ver que para funciones no demasiado complicadas, la combinación de (3.12) y (3.13) no conduce a una relación entrada-salida donde los parámetros (o funciones de éstos) intervengan en forma lineal, como sucedía en el caso continuo. Observar que el modelo general del Capítulo 2, debe ser previamente puesto en la forma (3.11) y entonces  $n = d_1 + d_2 + 1$ . Se concluye que, no se puede establecer una teoría general (ni siquiera para una subclase de sistemas) que permita combinar las técnicas de linealización y control adaptativo para sistemas lineales en tiempo discreto. Sin embargo, si el sistema admite una linealización sin cambio de coordenadas esto sí es posible. De hecho, estos sistemas linealizables, han sido tratados en [9] y en [10] y serán retomados en este trabajo a partir del Capítulo 6. Cabe agregar que la combinación de técnicas de linealización por cambio de coordenadas con métodos de control adaptativo ha sido desarrollado con éxito en [53] para una subclase de sistemas no lineales a tiempo discreto no considerados en este trabajo (más detalles acerca de esto, al final del Capítulo 6).

### 3.4 Conclusiones

Debido a los buenos resultados establecidos sobre algoritmos adaptativos para el caso lineal, un camino atractivo es la directa aplicación de alguno de ellos sobre sistemas no lineales. A partir de esta idea inicial, se han explorado dos caminos. El primero consiste en submodelar el sistema no lineal por uno lineal. Aplicando una técnica adaptativa exitosa con respecto al lineal, se obtiene un resultado de carácter local con respecto al sistema real. El segundo camino apunta a la utilización de técnicas adaptativas con posterioridad a la aplicación de un cambio de coordenadas que linealice el sistema. Esto funciona sólo para cierta subclase de sistemas no lineales que conservan la linealidad respecto al control actual y con los que se trabajará más adelante.

La metodología seguida en el resto de la tesis, es de filosofía distinta a la de este capítulo. En lugar de "linealizar" el sistema en algún sentido, se modifican las estrategias de control adaptativo para sistemas lineales teniendo en cuenta las no linealidades intervinientes.

# Capítulo 4

## SISTEMAS BILINEALES

### 4.1 Introducción.

En varios trabajos ( [1], [38], [18], [19]) se ha hecho mención a la aparición de sistemas bilineales al describir procesos originados en plantas industriales. Esta característica ha motivado especialmente la consideración de esta clase. Además, por tratarse de un conjunto de sistemas parametrizados invita a la aplicación de técnicas adaptativas ( [18], [19]).

Un sistema SISO bilineal completo está definido por

$$x_{k+1} = ax_k + bx_k u_k + cu_k \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

En [18] se ha tratado el problema del seguimiento de una trayectoria acotada prefijada con herramientas de control adaptativo. Los resultados obtenidos en dicho artículo requieren contar con las restricciones  $|b| > \gamma_1 > 0$  y  $|c| > \gamma_2 > 0$  para ciertos valores  $\gamma_1, \gamma_2$  conocidos.

En este capítulo se considerará que el sistema de control está regido por la ecuación

$$x_{k+1} = ax_k + bx_k u_k \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

donde  $a$  y  $b \neq 0$  son parámetros fijos no conocidos. El objetivo es la regulación de la planta y para esto, se propone un esquema de control adaptativo combinando, como se ha hecho anteriormente, el "*algoritmo de proyección*" y el "*one-step-ahead-control*". Sin embargo, sólo se hará una estimación adaptativa del parámetro  $a$  en tanto que el parámetro  $b$  será estimado a priori por un valor fijo  $\bar{b}$ . De modo que se propone

- el modelo de diseño:

$$\hat{x}_{k+1} = \hat{a}_k x_k + \bar{b} x_k u_k$$



- la ley de control:

$$u_k = -\frac{\hat{a}_k}{\bar{b}} \quad (4.2)$$

- el estimador de parámetro:

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + \frac{x_k}{\gamma + x_k^2}(x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}) \quad (4.3)$$

siendo  $\gamma \geq 0$  un parámetro fijo.

Antes de encarar la resolución del problema propuesto, vale la pena aclarar algunos puntos.

Está claro que en lugar de estimar  $b$  por un valor fijo  $\bar{b}$ , también se podría haber definido una sucesión  $(\hat{b}_k)_{k \geq 1}$ , análogamente a lo hecho para  $(\hat{a}_k)_{k \geq 1}$ . En tal caso, tal sucesión debe ser definida de manera de asegurar que la misma "no se acerque" a cero y así tener garantizada que la sucesión de entradas (4.2) permanezca acotada. En particular, si se conoce un valor  $\beta_{min} : 0 < \beta_{min} < |b|$  se puede introducir una definición de  $\hat{b}_k$  que además asegure  $|\hat{b}_k| > \beta_{min} \forall k$ . Esta variante fue introducida por [18] y se aplicará oportunamente en los capítulos posteriores.

Otro punto interesante es la elección del valor del parámetro  $\gamma$ . En principio, se podría elegir  $\gamma = 0$  lo cual simplifica notablemente la ecuación (4.3). Sin embargo, esto acarrea en la práctica problemas de inestabilidad numérica. Esta cuestión es tratada en la próxima sección donde se analizan separadamente los casos  $\gamma > 0$  y  $\gamma = 0$ .

En este capítulo se estudiará en primer lugar el caso ideal, i.e. se supone que la planta de control está modelada por un sistema de la forma (4.1). Luego, se analizan ciertas situaciones donde además hay submodelado.

## 4.2 Modelo exacto.

En este caso la forma del modelo coincide exactamente con el sistema que define la planta, es decir,

$$x_{k+1} = ax_k + bx_k u_k$$

donde  $a$  y  $b$  son parámetros desconocidos. Se trabajará primero el esquema (4.2)-(4.3) con  $\gamma > 0$ , y luego con  $\gamma = 0$  introduciendo en el esquema original las modificaciones necesarias.

CASO  $\gamma > 0$ .

**Proposición 4.2.1** Consideremos el sistema descrito por (4.1). Sea  $\bar{b}$  una estimación de  $b$  y apliquemos el esquema (4.2)-(4.3). Si  $0 < \frac{b}{\bar{b}} < 2$ , para toda condición inicial  $(x_0, \hat{a}_0)$  se verifica:

- i)  $(\left| \frac{b}{\bar{b}} \hat{a}_k - a \right|)_{k \geq 1}$  es una sucesión convergente,
- ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ ,
- iii)  $\sum_{k \geq 1} x_k^2 < +\infty$ .

**Demostración:**

Sea  $p_k = \frac{b}{\bar{b}} \hat{a}_k - a$ . Combinando (4.2)-(4.3) con esta notación, se obtiene el siguiente lazo cerrado:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -p_k x_k \\ p_{k+1} &= p_k - \frac{b}{\bar{b}} \frac{x_k^2 p_k}{\gamma + x_k^2} \end{aligned}$$

A partir de la segunda ecuación,

$$p_{k+1}^2 \leq p_k^2 - \frac{p_k^2 x_k^2}{\gamma + x_k^2} \left( 2 \frac{b}{\bar{b}} - \left( \frac{b}{\bar{b}} \right)^2 \right) \quad (4.4)$$

de donde  $(|p_k|)_{k \geq 0}$  es una sucesión decreciente y por ende, convergente; por lo tanto vale i). Además se tiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_k^2 x_k^2}{\gamma + x_k^2} = 0. \quad (4.5)$$

De aquí, se concluye el item ii), considerando los siguientes casos:

- a)  $\exists K : |p_K| < 1$
- b)  $\forall k \quad |p_k| \geq 1$

Si vale a), como  $(|p_k|)_{k \geq 0}$  es decreciente, resulta  $\lim_{k \rightarrow \infty} |p_k| < 1$  que junto a la primera ecuación del lazo conduce a  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| < 1$  y por lo tanto a ii).

En el caso b), basta aplicar el *Lema Técnico Clave* ( ver Apéndice) a (4.5) y ii) es obtenido.

Finalmente, como en particular se tiene que  $|x_k|$  es uniformemente acotado, de (4.4) sale el item iii).

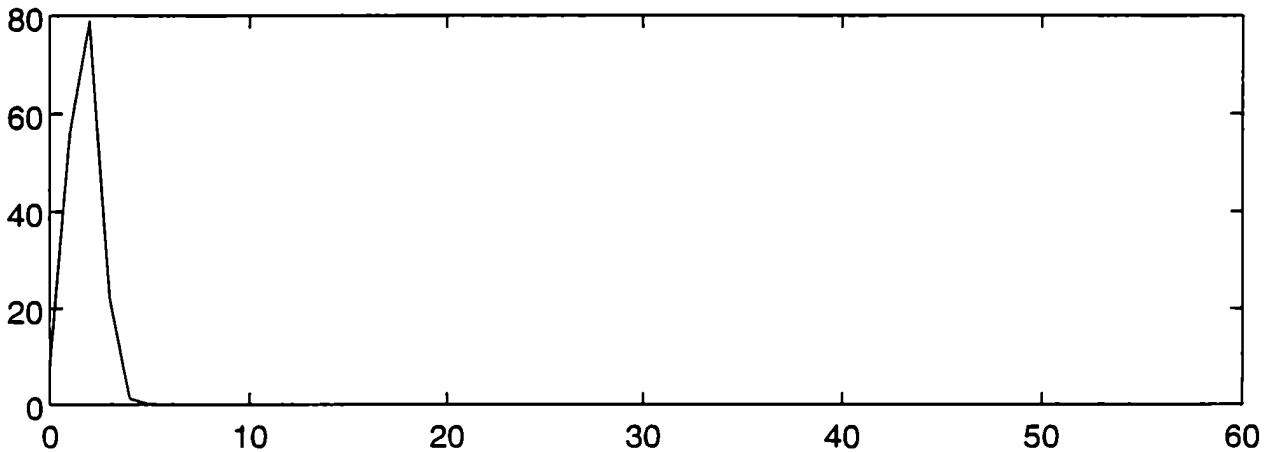
**Nota 4.1:** El algoritmo permite obtener el objetivo de control independientemente del valor del parámetro  $a$  y con convergencia global del lazo cerrado. Si se contara con información sobre ambos parámetros, más precisamente, si fuera posible determinar  $c$  tal que  $|a + cb| < 1$ , definiendo  $u_k \equiv c$  se obtiene también la convergencia - aunque sólo local - de la salida a cero.

Vale la pena notar además que: i)  $|p_k|$  converge pero no se puede calcular a priori a qué valor ( y de hecho, las simulaciones permiten concluir que éste depende de las condiciones iniciales del lazo); ii) el comportamiento transitorio del estado puede crecer mucho si las condiciones iniciales no son demasiado buenas. Si se toma el siguiente ejemplo:

$$x_{k+1} = 3x_k + 2x_k u_k,$$

cuando se aplica el esquema (4.2)-(4.3) con  $x_0 = 8.$ ,  $\hat{a}_0 = -5.$ ,  $\bar{b} = 2.5$  y  $\gamma = 0.1$ , resulta que  $\hat{a}_k \rightarrow 3.7465096\dots$  en tanto que  $x_k \rightarrow 0$  de la manera que se ve en la figura 2.

*figura 2*



**CASO  $\gamma = 0.$**

Si  $\gamma = 0$  la ecuación (4.3) se reduce a

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + \frac{x_{k+1}}{x_k}. \quad (4.6)$$

El conjunto de ecuaciones (4.1)-(4.2)-(4.6) da lugar al siguiente lazo cerrado:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= (a - \hat{a}_k \frac{b}{\bar{b}})x_k \\ \hat{a}_{k+1} &= (1 - \frac{b}{\bar{b}})\hat{a}_k + a\end{aligned}\quad (4.7)$$

y si definimos  $r_k = \hat{a}_k - \frac{\bar{b}}{b}a$ , es equivalente a:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= -\frac{b}{\bar{b}}r_k x_k \\ r_{k+1} &= (1 - \frac{b}{\bar{b}})r_k\end{aligned}\quad (4.8)$$

Si  $0 < \frac{b}{\bar{b}} < 2$  resulta que  $r_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ . De aquí, no sólo se obtiene  $\hat{a}_k \rightarrow \frac{\bar{b}}{b}a$  cuando  $k \rightarrow \infty$  sino también la convergencia a cero de  $x_k$ ; en efecto, si se fija  $0 < \epsilon < 1$ ,  $\exists K$  tal que  $\forall k > K \quad |r_k| < \epsilon \frac{\bar{b}}{b}$  y por lo tanto,  $\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{x_{k+1}}{x_k} \right| \leq \epsilon$ .

Sin embargo, al aplicar el esquema (4.2)-(4.6) a (4.1) surgen problemas de inestabilidad numérica. Esto se debe a que la segunda ecuación de (4.7) es algebraicamente equivalente a (4.6) pero las simplificaciones efectuadas no son válidas para las operaciones de la computadoras. Justamente como  $x_k$  tiende a cero, cuando éste se hace demasiado pequeño, se produce "overflow" al calcular el estimador de acuerdo con la fórmula (4.6). Para evitar este problema será suficiente una modificación muy sencilla.

Sea  $\delta > 0$  un mínimo fijo de tolerancia ("el cero de la computadora"). La definición del estimador es modificada como

$$\hat{a}_{k+1} = \begin{cases} \hat{a}_k + \frac{x_{k+1}}{x_k} & \text{si } |x_k| > \delta \\ \hat{a}_k & \text{en caso contrario} \end{cases}\quad (4.9)$$

y se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 4.2.2** *Consideremos el sistema descrito por (4.1). Sea  $\bar{b}$  una estimación de  $b$  y apliquemos el esquema (4.2)-(4.9). Si  $0 < \frac{b}{\bar{b}} < 2$ , para toda condición inicial  $(x_0, \hat{a}_0)$  con  $|x_0| > \delta$  se verifica:*

- i)  $(\hat{a}_k)_{k \geq 1}$  es una sucesión convergente,
- ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = 0$ .

**Demostración:**

Sea  $k_0 = \min\{k \in N : |x_k| \leq \delta\}$ , (su existencia sale trivialmente por el absurdo, a partir de (4.8)).

Supongamos que  $|r_{k_0}| \geq \frac{\bar{b}}{b}$ . Como  $|x_k| > \delta \forall k < k_0$ , para estos valores de  $k$ , el esquema (4.2)- (4.9) es equivalente al sistema (4.8). En particular, vale  $|r_{k+1}| < |r_k|$  y por ende,  $|r_k| > \frac{\bar{b}}{b} \forall k < k_0$ . Como  $x_{k+1} = -\frac{b}{\bar{b}} r_k x_k$ , entonces  $|x_{k+1}| > |x_k| \forall k < k_0$ , que a su vez implica  $|x_{k_0}| > |x_0| > \delta$  y se arriba a un absurdo. Luego,  $|r_{k_0}| < \frac{\bar{b}}{b}$ .

Por lo tanto, por (4.9),  $r_k = r_{k_0} \forall k \geq k_0$  de donde resulta  $x_k \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .

### 4.3 Sistemas submodelados.

En esta sección se estudia la robustez del algoritmo adaptativo propuesto con respecto a distintos submodelados. Más precisamente, se analizan casos donde el sistema real está descrito por

$$x_{k+1} = ax_k + bx_k u_k + \varphi(X_k) \quad (4.10)$$

con  $X_k = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-d_1})$ ,  $d_1 \geq 0$ ,  $\varphi : R^{d_1+1} \rightarrow R$ .

Será conveniente estudiar por separado los casos donde  $\varphi$  depende o no de las salidas anteriores, o sea  $d_1 = 0$  ( Subsección 4.3.1) o  $d_1 > 0$  ( Subsección 4.3.2). En ambos, los resultados serán de carácter local, obtenidos recurriendo a herramientas sobre estabilidad de sistemas dinámicos no lineales.

#### 4.3.1. Sin error en el orden del modelo.

Se comenzará por un caso simple con el propósito de generalizarlo más adelante. Sea entonces, en (4.10)  $\varphi(X_k) = cx_k^2$ . Por lo tanto el sistema real viene dado por

$$x_{k+1} = ax_k + bx_k u_k + cx_k^2. \quad (4.11)$$

Se obtiene el siguiente resultado:

**Proposición 4.3.1** *Consideremos el sistema descrito por (4.11). Sea  $\bar{b}$  una estimación fija de  $b$  y apliquemos el esquema (4.2)-(4.4). Para todo  $c, p \in R$  con  $|p| < 1, \exists \epsilon > 0$  tal que si la condición inicial  $(x_0, \hat{a}_0)$  verifica*

$$|x_0| < \epsilon \quad y \quad \left| \frac{\bar{b}}{b} \hat{a}_0 - a - p \right| < \epsilon$$

entonces:

- i) La sucesión  $(\hat{a}_k)_{k \geq 0}$  converge.
- ii) La sucesión  $(x_k)_{k \geq 0}$  converge exponencialmente a cero.

**Demostación:**

Sea  $p_k = \frac{b}{\gamma} \hat{a}_k - a$ . Las ecuaciones que definen el lazo cerrado son

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -p_k x_k + c x_k^2 \\ p_{k+1} &= p_k - \frac{b}{\gamma} p_k \frac{x_k^2}{\gamma + x_k^2} + c \frac{b}{\gamma} \frac{x_k^3}{\gamma + x_k^2} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Los puntos fijos de (4.12) son los elementos del subespacio  $P \subset \mathbb{R}^2$  :

$$P = \{(0, p) : p \in \mathbb{R}\}$$

La matriz jacobiana en cada punto fijo  $(0, p)$  está dada por

$$J(0, p) = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para cada  $(0, p)$ , sea  $z_k = p_k - p$ . Las ecuaciones (4.12) pueden reescribirse:

$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} g_1(x_k, z_k) \\ g_2(x_k, z_k) \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

con

$$\begin{aligned} g_1(x_k, z_k) &= -z_k x_k + c x_k^2; \\ g_2(x_k, z_k) &= -\frac{b}{\gamma} p \frac{x_k^2}{\gamma + x_k^2} - \frac{b}{\gamma} z_k \frac{x_k^2}{\gamma + x_k^2} + c \frac{b}{\gamma} \frac{x_k^3}{\gamma + x_k^2}. \end{aligned}$$

El origen es obviamente un punto fijo para este sistema pero, como un autovalor de la matriz jacobiana es 1, no puede concluirse su estabilidad con la linealización del sistema. Sin embargo, si se pide  $|p| < 1$ , el sistema está bajo las condiciones requeridas para aplicar *Teoría de la Variedad Centro* ( ver Apéndice). Es fácil ver que en este caso, la función que define la variedad centro es  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $h \equiv 0$  y la ecuación reducida correspondiente está dada por  $s_{k+1} = s_k$ , que es trivialmente estable en el origen. En consecuencia, se deduce la estabilidad del origen para (4.13). Además, para todo  $(x_0, z_0)$  suficientemente cerca de  $(0, 0)$ , existe  $s_0$  tal que se verifica

$$|z_k - s_0| < C \beta^k \quad y \quad |x_k| < C \beta^k \quad \forall k > 0$$

para ciertas constantes  $C > 0$  y  $0 < \beta < 1$ . Poniendo esto en término de las variables originales del problema, se obtiene la tesis.

**Nota 4.2:** El resultado anterior incluye al caso tratado en la Sección 4.2. Desaparece la restricción sobre  $\bar{b}$  y la convergencia es exponencial, pero el

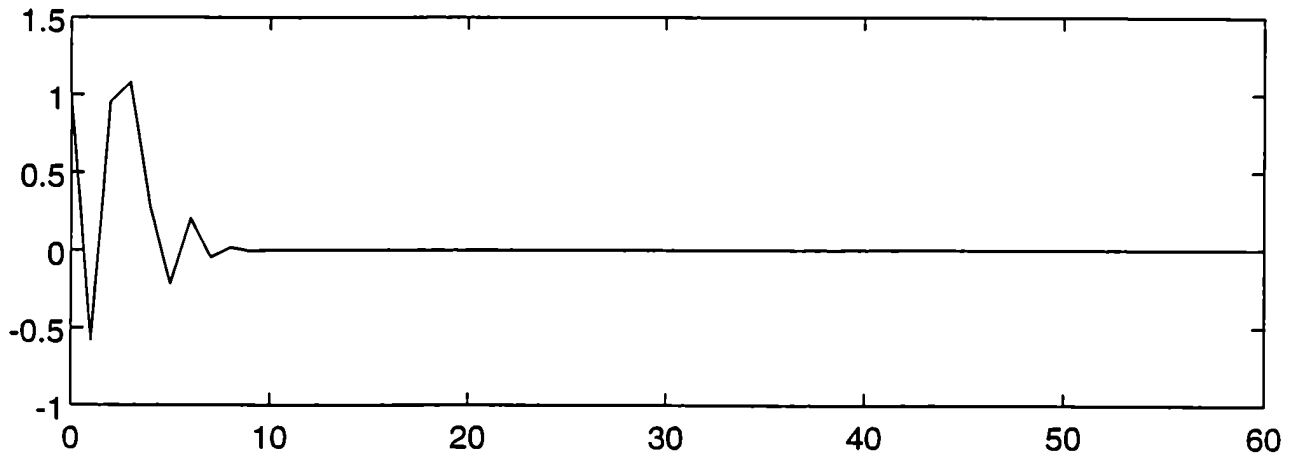
resultado es de carácter local y exige conocer valores aproximados de ambos parámetros del sistema real.

La Proposición 4.3.1 establece la existencia de cierta cuenca de atracción pero no hay forma de calcularla a priori. Evidentemente, si la información que se tiene acerca de  $a$  y  $b$  permite calcular  $\hat{a}_0$  de modo que  $|a - \frac{b}{\hat{a}_0}| < 1$ , el control  $u_k = -\hat{a}_0/\bar{b}$  resuelve trivialmente el problema. En el siguiente ejemplo, no se verifica tal desigualdad y se obtiene la regulación del sistema

$$x_{k+1} = 3.8x_k + 4.5x_k u_k + x_k^2,$$

al aplicar (4.2)-(4.4) con  $x_0 = 1.$ ,  $\hat{a}_0 = 5.5$ ,  $\bar{b} = 4.6$  y  $\gamma = 0.1$ , como se ve en la figura 3.

figura 3



Por otro lado, el resultado puede ser inmediatamente generalizado a una clase más amplia de sistemas no lineales. En efecto, si se reemplaza en (4.11), el término  $cx_k^2$  por  $\varphi(x_k)$  tal que  $\varphi \in C^2$  y  $\varphi(0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0) = 0$ , la Proposición 4.3.1 sigue siendo válida.

#### 4.3.2. Con error en el orden del modelo.

Como antes, es conveniente hacer el análisis sobre un caso sencillo para luego, generalizar a la clase más amplia posible. Esta vez se considera en (4.10)  $\varphi(X_k) = cx_{k-1}$ . Por lo tanto, el sistema real viene dado por

$$x_{k+1} = ax_k + bx_k u_k + cx_{k-1}. \quad (4.14)$$

Se obtiene el siguiente resultado de carácter local:

**Proposición 4.3.2** Consideremos el sistema descrito por (4.14). Sea  $\bar{b}$  una estimación de  $b$  y apliquemos el esquema (4.2)-(4.4). Para todo  $c \in R$  con  $|c| < 1$ , sea  $p \in R$  tal que:

$$-1 < c < -\frac{p^2}{4} \quad \text{ó} \\ |p| < 2 \quad \text{y} \quad -\frac{p^2}{4} \leq c < \min\{1-p, 1+p\}.$$

Entonces  $\exists \epsilon > 0$  tal que si la condición inicial  $(x_{-1}, x_0, \hat{a}_0)$  verifica:

$$|x_i| < \epsilon \quad i = -1, 0 \quad \text{y} \quad \left| \frac{b}{\bar{b}} \hat{a}_0 - a - p \right| < \epsilon$$

i) La sucesión  $(\hat{a}_k)_{k \geq 0}$  converge.

ii) La sucesión  $(x_k)_{k \geq 0}$  converge exponencialmente a cero.

**Demostración:**

Sea  $p_k = \frac{b}{\bar{b}} \hat{a}_k - a$  e  $y_k = x_{k-1}$ . Las siguientes ecuaciones describen completamente el lazo cerrado:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -p_k x_k + c y_k \\ y_{k+1} &= x_k \\ p_{k+1} &= p_k - \frac{b}{\bar{b}} p_k \frac{x_k^2}{\gamma + x_k^2} + c \frac{b}{\bar{b}} \frac{y_k x_k^2}{\gamma + x_k^2} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Los puntos fijos de (4.15) son los elementos de los subespacios de  $R^3$  :

$$\begin{aligned} P &= \{(0, 0, p) : p \in R\} \\ Q &= \{(x^*, x^*, c) : x^* \in R\} \end{aligned}$$

Como interesa resolver la convergencia de la salida a cero, basta estudiar la estabilidad de los puntos de  $P$ . La matriz jacobiana en cada uno de ellos está dada por

$$J(0, 0, p) = \begin{pmatrix} -p & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyos autovalores son  $\lambda_1 = 1$  y  $|\lambda_i| < 1$  ( $i = 2, 3$ ) si se elige  $p$  bajo las hipótesis establecidas. De manera que se está en condiciones de aplicar *Teoría de la Variedad Centro* (ver Apéndice). Para cada  $p$  fijo, sea  $z_k = p_k - p$ , el sistema (4.15) puede reescribirse



$$\begin{pmatrix} x_{k+1} \\ y_{k+1} \\ z_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p & c & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_k \\ y_k \\ z_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -z_k x_k \\ 0 \\ g(x_k, y_k, z_k) \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

con

$$g(x_k, y_k, z_k) = -\frac{b}{\bar{b}} p \frac{x_k^2}{\gamma + x_k^2} - \frac{b}{\bar{b}} z_k \frac{x_k^2}{\gamma + x_k^2} + c \frac{b}{\bar{b}} \frac{y_k x_k}{\gamma + x_k^2}.$$

La variedad centro está dada por  $h : R \rightarrow R^2$ ,  $h \equiv (0, 0)$  y la ecuación reducida por  $s_{k+1} = s_k$ . En consecuencia, se concluye la estabilidad del origen para (4.16). Además, para todo  $(x_0, y_0, z_0)$  suficientemente cerca de  $(0, 0, 0)$ , existe  $s_0$  tal que se verifica

$$|z_k - s_0| < C\beta^k \quad y \quad \|(x_k, y_k)\| < C\beta^k \quad \forall k > 0$$

para ciertas constantes  $C > 0$  y  $0 < \beta < 1$ . Reescribiendo esto en término de las variables originales del problema, la proposición queda demostrada.

**Nota 4.3:** Caben aquí observaciones análogas a las comentadas en el caso anterior ( Nota 4.2) acerca de la información necesaria sobre los verdaderos parámetros del sistema.

El resultado de la Proposición 4.3.2 puede generalizarse a una clase más amplia de sistemas no lineales, a saber;

$$x_{k+1} = ax_k + bx_k u_k + \varphi(x_k, x_{k-1}, x_{k-2}, \dots, x_{k-d_1})$$

tal que  $\varphi \in C^2$  y  $\varphi(0, \dots, 0) = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(0, \dots, 0) = 0$ . Si

$$c_i = \frac{\partial \varphi}{\partial z^i}(0, \dots, 0) \quad 1 \leq i \leq d_1,$$

el lazo cerrado queda definido por un sistema de dimensión  $(d_1 + 2) \times (d_1 + 2)$ , que tiene puntos fijos de la forma  $(0, 0, \dots, 0, p) \in R^{d_1+2}$ , siendo la matriz jacobiana en cada uno de ellos

$$J(0, \dots, 0, p) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con  $A \in (d_1 + 1) \times (d_1 + 1)$  dada por

$$A = \begin{pmatrix} -p & c_1 & c_2 & & c_{d_1} \\ 1 & 0 & 0 & & 0 \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Si se establecen condiciones para asegurar que los autovalores de esta matriz sean de módulo menor que uno, siguiendo los mismos pasos que en la demostración de la Proposición 4.3.2, resulta que existe  $\epsilon > 0$  tal que si se toman condiciones iniciales con  $|x_i| < \epsilon$  ( $-d_1 \leq i \leq 0$ ) y  $|\frac{b}{b} \hat{a}_0 - a - p| < \epsilon$ , la tesis de la misma es válida.

Resta establecer condiciones sobre los parámetros del sistema que aseguren que el espectro de  $A$  verifica lo pedido. Recurriendo a un resultado sobre *estimación de autovalores* ( ver Apéndice), se tiene que una condición suficiente es

$$\frac{1}{d_1 + 1} \left\{ |p| + d_1 \left[ \|A\|_F^2 - \frac{(v(A))^2}{6 \|A\|_F^2} - \left(\frac{p}{d_1 + 1}\right)^2 \right] \right\} < 1$$

siendo

$$\|A\|_F^2 = p^2 + \sum_{i=1}^{d_1} c_i^2 + d_1;$$

$$(v(A))^2 = (1 - \sum_{i=1}^{d_1} c_i^2)^2 + \sum_{i=1}^{d_1} c_i^4 + 2p^2(c_1 - 1)^2 + 2 \sum_{i=1}^{d_1-1} (pc_{i+1} - c_i)^2 + 2 \sum_{i < j} c_i^2 c_j^2$$

*Observación:* Se pueden obtener resultados análogos si también se desprecian términos no lineales respecto a los controles. Es decir, que en (4.10) se reemplaza  $\varphi(X_k)$  por  $\varphi(X_k, U_k)$  siendo  $U_k = (u_k, \dots, u_{k-d_2})$  y  $\varphi : R^{d_1+d_2+2} \rightarrow R$ , si se cuenta con que tanto  $\varphi$  como sus derivadas de primer orden se anulan en el origen.

## 4.4 Convergencia a una referencia constante.

En esta sección se retoma el sistema (4.1) como real pero con el objetivo de llevar la salida a una referencia constante  $x^* \neq 0$ . Una vez más, el problema puede resolverse aplicando elementos de la teoría de sistemas dinámicos.

El control, definido análogamente a lo hecho para la regulación, está dado por

$$u_k = \frac{x^* - \hat{a}_k x_k}{\bar{b} x_k} \quad (4.17)$$

pero pierde la particularidad de ser independiente de la salida (confrontar con (4.2)). Hecha esta observación, si se desea conservar la ley (4.17) sólo tiene sentido apuntar a un resultado de carácter local. A su vez, si se va a asegurar que la variable  $x_k$  se mantenga suficientemente lejos del cero para todo  $k$ , se puede tomar la ley de estimación de parámetros (4.4) con  $\gamma = 0$ , o sea:

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + \frac{x_{k+1} - x^*}{x_k} \quad (4.18)$$

**Proposición 4.4.1** *Consideremos el sistema descrito por (4.1). Sea  $\bar{b}$  una estimación de  $b$  y apliquemos (4.17)-(4.18). Si se verifica  $0 < \frac{\bar{b}}{b} < 3/4$  y se toman condiciones iniciales  $(x_0, \hat{a}_0)$  suficientemente cerca de  $(x^*, \frac{\bar{b}}{b}(a-1)+1)$ , entonces*

$$(x_k, \hat{a}_k) \rightarrow (x^*, \frac{\bar{b}}{b}(a-1)+1) \text{ para } k \rightarrow \infty$$

**Demostración:**

Sea  $p_k = \frac{\bar{b}}{b}\hat{a}_k - a$ . Combinando (4.1), (4.17) y (4.18), se obtiene el siguiente lazo cerrado:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -p_k x_k + \frac{\bar{b}}{b} x^* \\ p_{k+1} &= p_k + \frac{\bar{b}}{b} \left( -p_k x_k + \frac{\bar{b}}{b} x^* - x^* \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

cuyo único punto fijo es  $P = (x^*, \frac{\bar{b}}{b} - 1)$ . La matriz jacobiana en éste es

$$J(P) = \begin{pmatrix} 1 - \frac{\bar{b}}{b} & -x^* \\ \frac{\bar{b}}{b} \left(1 - \frac{\bar{b}}{b}\right) \frac{1}{x^*} & 1 - \frac{\bar{b}}{b} \end{pmatrix}$$

Si  $b/\bar{b} = 1$ ,  $(x_k, \hat{a}_k) = (x^*, a) \forall k > 1$ . Si  $b/\bar{b} \neq 1$ , ambos autovalores son de módulo menor que uno y por lo tanto,  $P$  es punto fijo asintóticamente estable, lo cual implica la tesis.

**Nota 4.4:** Como cada vez que se deduce estabilidad vía linealización del sistema dinámico, no se cuenta con ninguna estimación de la cuenca de atracción correspondiente a (4.19) en su punto fijo. Observar que se necesita

$\hat{a}_0$  suficientemente cerca de  $\frac{b}{a}(a-1) + 1$  para garantizar la convergencia, o sea que se necesita información sobre ambos parámetros del sistema. En este sentido, el resultado es más pobre que el que da la Proposición 4.2.1 para el problema particular de la regulación, por lo cual no presenta interés analizar el problema planteado en esta sección frente a submodelado. Vale la pena aclarar que no ofrece ventaja alguna introducir  $\gamma > 0$  y que la Proposición 4.4.1 no puede extenderse al seguimiento de trayectorias variantes en el tiempo. Este problema será retomado en el Capítulo 6.

## 4.5 Conclusiones.

Se implementa una ley de control adaptativo admitiendo las no linealidades intervinientes en el sistema real. Se completan resultados anteriores donde técnicas adaptativas son aplicadas sobre sistemas SISO bilineales. Precisamente, se trata de sistemas bilineales que carecen de término lineal respecto al control. Esta particularidad, combinada con el objetivo de control que se ha propuesto ( la regulación) permite implementar una ley de control adaptativa muy sencilla y comprobar la convergencia del lazo cerrado. Además, se han podido comprobar propiedades de robustez del esquema propuesto respecto a perturbaciones no lineales de los estados.

# Capítulo 5

## SISTEMAS AFECTADOS POR CONTROL ADITIVO LINEAL

### 5.1 Introducción.

Nos dedicaremos a cierta subclase particular dentro de los sistemas SISO no lineales en tiempo discreto. Los mismos se caracterizan por el hecho de que la función que los define presenta no linealidades sólo respecto a los estados y depende del control en forma lineal. Se introducen aquí por dos motivos, a saber;

- a) aparecen en diversos ejemplos de aplicación al excitar un sistema dinámico no lineal, con control lineal,
- b) el esquema adaptativo clásico - introducido en el Capítulo 2 - puede ser inmediatamente generalizado a estos sistemas.

Con respecto a a), resultan de interés aquellos casos donde el sistema dinámico presenta originalmente comportamiento caótico y se pretende, de alguna manera, modificar esa característica. A este procedimiento se lo conoce como "*controlar caos*". En la Sección 5.2 se desarrollarán esquemas adaptativos diseñados específicamente para cumplimentar este objetivo sobre cierto sistema particular.

En virtud de b), en la Sección 5.3 se verán los alcances del esquema mencionado al ser aplicado sobre los sistemas propuestos en este capítulo.

### 5.2 Sobre "controlar caos".

Diversos trabajos se han dedicado a estudiar el problema conocido como "*controlar caos*". Pueden mencionarse [26], [8], [50], [41], [22], [45], [39], [44];

en particular, estos tres últimos han utilizado técnicas de control adaptativo con este propósito.

En esta sección se toma un caso particular, el mismo considerado en [8], y se proponen esquemas adaptativos con el objetivo de llevar las trayectorias a cualquier referencia constante dada. Se trata del *sistema de Lozi* que es un sistema dinámico a tiempo discreto descrito por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_1(k+1) &= -p|x_1(k)| + x_2(k) + 1 & k = 0, 1, \dots \\x_2(k+1) &= qx_1(k)\end{aligned}\quad (5.1)$$

Este sistema dinámico resulta interesante ya que si bien está definido a través de ecuaciones simples, sus soluciones presentan comportamiento complejo para cierto subconjunto de valores de los parámetros. En efecto, puede verse que si  $0 < q < 1$ ,  $p > q + 1$  y  $2p + q > 4$ , el punto de equilibrio

$$(x_1^*, x_2^*) = \left( \frac{1}{p - q + 1}, \frac{q}{p - q + 1} \right) \quad (5.2)$$

es inestable ( más precisamente, es punto de ensilladura) pero, existe una región donde todas las trayectorias se mueven erráticamente en las cercanías de este punto aunque nunca lo alcanzan ni se aproximan asintóticamente. Es más, para los valores de  $p$  y  $q$  antes mencionados, se observan características propias de un atractor extraño ([12]).

Chen y Dong ([8]) tomaron el sistema de Lozi y estudiaron el control del mismo por medio de técnicas de control clásico. Ellos centran su trabajo en la idea de llevar las trayectorias del sistema al punto fijo (5.2) siendo el objetivo primero, desterrar el caos que presenta el sistema libre. Aquí se retoma este ejemplo pero agregando la dificultad de no conocer los verdaderos valores de los parámetros intervinientes y por ello, se recurre a técnicas de control adaptativo.

Si aplicamos al sistema (5.1) un control de la forma  $(1, 0)^t u_k$ , se obtiene el siguiente sistema de control:

$$\begin{pmatrix} x_1(k+1) \\ x_2(k+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p|x_1(k)| + x_2(k) + 1 \\ qx_1(k) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} u_k. \quad (5.3)$$

Si se define  $x_k = x_1(k)$ , el sistema de control (5.3) queda expresado como un sistema SISO en tiempo discreto, no lineal, de segundo orden,

$$x_{k+1} = -p|x_k| + qx_{k-1} + 1 + u_k. \quad (5.4)$$

Supongamos que se desconozcan los valores exactos de los parámetros  $p$  y/o  $q$  y que el objetivo de control sea llevar la salida  $x_k$  a una referencia fija  $x^*$ . Si bien (5.4) no establece una relación lineal, la no linealidad del sistema consiste en una "linealidad a trozos", más concretamente, la función módulo. Luego, es natural proponer esquemas de control adaptativo para este ejemplo, inspirados en los algoritmos usados para modelos lineales. A continuación se presentan dos estrategias; en el primer caso, se asume que se desconoce el valor del parámetro  $p$  pero se conoce exactamente el valor de  $q$ , mientras que en el segundo, tanto  $p$  como  $q$  se conocen sólo aproximadamente.

**Caso 1:** Se toma como modelo de diseño

$$\hat{x}_{k+1} = -\hat{p}_k |x_k| + qx_{k-1} + 1 + u_k.$$

Se propone como ley de control,

$$u_k = x^* + \hat{p}_k |x_k| - qx_{k-1} - 1 \quad (5.5)$$

y como estimador de parámetros,

$$\hat{p}_{k+1} = \hat{p}_k - \frac{\alpha |x_k|}{\gamma + x_k^2} (x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}) \quad (5.6)$$

con  $\alpha > 0$ ,  $\gamma \geq 0$  fijos. Definiendo  $p_k = \hat{p}_k - p$ , el lazo cerrado resultante de (5.4), (5.5) y (5.6) está dado por

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= p_k |x_k| + x^* & (a) \\ p_{k+1} &= p_k - \frac{\alpha x_k^2}{\gamma + x_k^2} p_k & (b) \end{aligned} \quad (5.7)$$

Si  $x^* \neq 0$ , esta transformación tiene a  $(x^*, 0)$  como único punto fijo y si  $x^* = 0$ , todos los puntos  $(0, p^*)$  con  $p^* \in R$ , son puntos fijos. La idea es estudiar la convergencia de las trayectorias hacia esos puntos.

**Lema 5.2.1** *Para todo  $p, q \in R$ ,  $\gamma \geq 0$  y  $0 < \alpha < 1$ , el punto  $(x^*, 0)$  es globalmente asintóticamente estable para (5.7), excepto si  $\gamma > 0$  y  $x^* = 0$  (en ese caso,  $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$  pero  $p_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} p^*$  para algún  $p^* \in R$ ).*

**Demostración:**

Sea  $\gamma > 0$ . Como  $0 < 1 - \frac{\alpha x_k^2}{\gamma + x_k^2} \leq 1$ , de (5.7.b) se llega a que  $p_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} p^*$  para algún  $p^* \in R$ .

Sea  $x^* \neq 0$ . Supongamos que  $p^* \neq 0$ . De (5.7.b), resulta  $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ , pero esto a su vez junto a (5.7.a) implica  $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$ , absurdo; por lo tanto,  $p^* = 0$ . Luego, existe  $K$  tal que  $|p_k| < 1 \forall k \geq K$  y de (5.7.a) se deduce  $|x_{k+1}| < |x_k| + \frac{|x^*|}{1-|p_k|}$ . Por lo tanto tomando límite en (5.7.a), se obtiene  $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$ .

Sea  $x^* = 0$ . Si  $p^* \neq 0$ , por (5.7.b)  $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$  y si  $p^* = 0$ , como antes resulta  $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$ .

Sea  $\gamma = 0$ . La ecuación (5.7.b) se reduce a  $p_{k+1} = (1 - \alpha)p_k$  y como  $0 < \alpha < 1$ ,  $p_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ . Luego, idem para  $\gamma > 0$ , se obtiene  $|x_k|$  acotada y finalmente  $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$ .

En términos del problema de control, significa que si se aplica la estrategia (5.5)-(5.6) a (5.4), para cualquier condición inicial  $(x_{-1}, x_0, \hat{p}_0)$  se obtiene  $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$ , pero es necesario conocer el valor exacto de  $q$  para definir el controlador (5.6).

**Caso 2:** Aquí la idea es submodelar el sistema, introduciendo como modelo de diseño

$$\hat{x}_{k+1} = -\hat{p}_k |x_k| + 1 + u_k.$$

Se propone la ley de control,

$$u_k = x^* + \hat{p}_k |x_k| - 1 \tag{5.8}$$

y como estimador de parámetros, la ley de iteración (5.6). Si se definen  $p_k = \hat{p}_k - p$  y  $z_k = x_{k-1}$ , queda el siguiente lazo cerrado:

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= p_k |x_k| + qz_k + x^* \\ z_{k+1} &= x_k \\ p_{k+1} &= p_k - \frac{\alpha |x_k|}{\gamma + x_k^2} (p_k |x_k| + qz_k) \end{aligned} \tag{5.9}$$

Se ve fácilmente que si  $x^* \neq 0$ , esta transformación tiene un único punto fijo  $(x^*, x^*, -sg(x^*)q)$  en tanto que para  $x^* = 0$ , todo punto  $(0, 0, p^*)$  es un punto fijo. Nuevamente, interesa estudiar la convergencia de las trayectorias a estos



puntos. Pero aquí se analizará la linealización del sistema, por lo cual el caso  $x^* = 0$ , debe ser descartado ya que la transformación no es diferenciable en esos puntos. La matriz correspondiente a la linealización del sistema (5.9) en cada punto fijo es

$$J = \begin{pmatrix} -q & q & |x^*| \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa q}{|x^*|} & -\frac{\kappa q}{|x^*|} & 1 - \kappa \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

siendo  $\kappa = \begin{cases} \frac{\alpha(x^*)^2}{\gamma+(x^*)^2} & \text{si } \gamma > 0 \\ \alpha & \text{si } \gamma = 0 \end{cases}$

y su polinomio característico  $-\lambda^3 + (1 - q - \kappa)\lambda^2 + 2q\lambda - q$ .

*Resultado:* Sea  $f(\lambda) = -\lambda^3 + (1 - q - \kappa)\lambda^2 + 2q\lambda - q$ ,  $q, \kappa \in \mathbb{R}$ ,  $\kappa \geq 0$ .

a) Si  $|q| \geq 1$ ,  $\forall \kappa \in \mathbb{R}$ , alguna raíz de  $f$  es de módulo mayor que uno.

b) Si  $-1 < q < 1/2$ ,  $\exists \kappa = \kappa(q) \in \mathbb{R}$  tal que todas las raíces de  $f$  son de módulo menor que uno.

c) Si  $1/2 \leq q < 1$ ,  $\forall \kappa \in \mathbb{R}$ , alguna raíz de  $f$  es de módulo mayor que uno.

*Demostración:* Como  $f$  es el polinomio característico de la matriz  $J$ , si  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  son sus raíces, entonces

$$|\lambda_1 \lambda_2 \lambda_3| = |\det(J)| = |q| \quad (5.11)$$

y se pueden distinguir los siguientes casos:

a) Si  $|q| > 1$ , de (5.11) es inmediato que para algún  $i$ ,  $|\lambda_i| > 1$ . Si  $q = 1$ , basta analizar la función en  $(-\infty, -1)$  y si  $q = -1$  en  $(0, 1)$  para llegar a la misma conclusión.

b) Si  $-1 < q \leq -1/2$  y se eligen  $r \in (-1, q)$ ,  $\kappa = r + 1 - q(1 + 1/r)^2$ ; resulta que  $-r$  es la única raíz real y que el módulo de las dos complejas no reales, también es menor que 1.

Si  $-1/2 < q < 1/2$ , sea  $\kappa = 1/2 - q$ , se tiene

$$\begin{aligned} -1/2 < q < 0 : \lambda_1 &= 1/2, & \lambda_2 &= \sqrt{2|q|}i, & \lambda_3 &= -\sqrt{2|q|}i. \\ 0 \leq q < 1/2 : \lambda_1 &= 1/2, & \lambda_2 &= \sqrt{2|q|}, & \lambda_3 &= -\sqrt{2|q|}. \end{aligned}$$

que obviamente, verifican la tesis.

c) Si  $1/2 \leq q < 1$ , estudiando la función en  $(-\infty, -1)$  se ve que existe raíz de módulo mayor que 1.

De este resultado, se desprende el siguiente:

**Lema 5.2.2** Sea  $x^* \in R$ ,  $x^* \neq 0$ . Para todo  $p, q \in R$  con  $-1 < q < 1/2$  y  $q \neq 0$ , es posible elegir  $\alpha > 0$  y  $\gamma \geq 0$  de modo que el punto fijo  $(x^*, x^*, -sg(x^*)q)$  sea localmente asintóticamente estable.

**Demostración:**

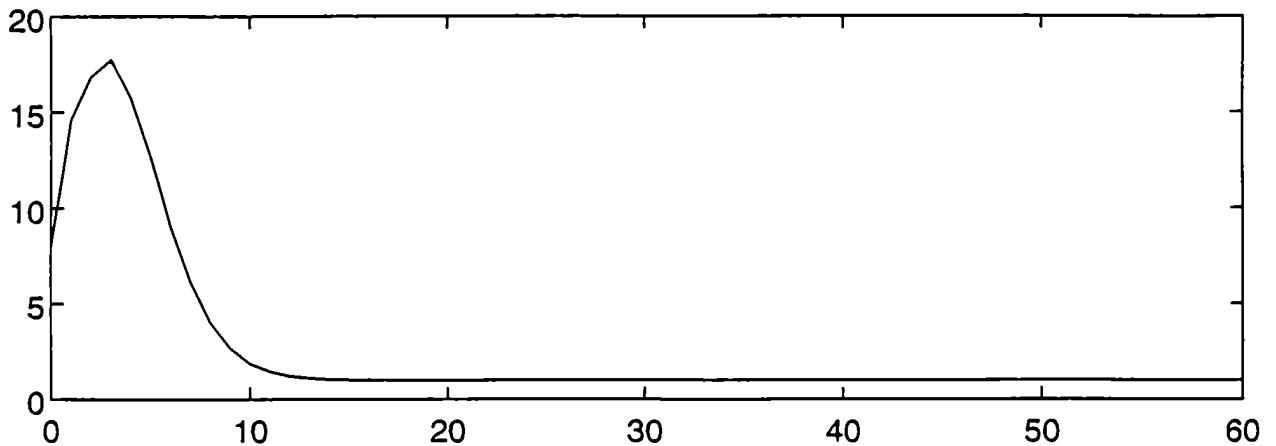
Es inmediato del resultado anterior pues las raíces del polinomio característico son no nulas y de módulo menor que uno.

En términos del problema de control significa que si  $x^* \neq 0$  y se aplica la estrategia (5.8)-(5.6) al sistema (5.4), tomando la condición inicial  $(x_{-1}, x_0, \hat{p}_0)$  en un entorno de  $(x^*, x^*, p - sg(x^*)q)$  se obtiene  $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$ . A diferencia del Caso 1, sólo es necesario conocer aproximaciones tanto de  $p$  como de  $q$ . El *Resultado* dice cómo calcular  $\kappa$  para obtener raíces de módulo menor que uno y por ende, se puede elegir  $\alpha$  y  $\gamma$  adecuadas. Pero por la naturaleza de la demostración, no se cuenta a priori con la aproximación necesaria para las condiciones iniciales. Sin embargo, la misma no resulta un requerimiento muy exigente según lo que se puede conjeturar a partir de las simulaciones. Entre éstas, el siguiente es un ejemplo donde el objetivo es logrado, con condiciones iniciales no demasiado buenas:

$$x_{k+1} = 2|x_k| + 0.4x_{k-1} + u_k + 1.$$

Aplicando (5.8)-(5.6) con  $\alpha = 0.2, \gamma = 1$  y  $(x_{-1}, x_0, \hat{p}_0) = (10, 8, 3.2)$  para  $x^* = 1$ , se logra la convergencia de la salida como se ve en la figura 4.

figura 4



**Nota 5.1:** En ambos casos, se prueba que el objetivo también es alcanzado cuando  $\gamma = 0$ . Sin embargo, para este valor del parámetro surgen problemas de inestabilidad numérica. De hecho, valen observaciones y modificaciones semejantes que las efectuadas para el algoritmo correspondiente en el capítulo anterior ( ver Sección 4.2, segunda parte).

Con los algoritmos propuestos se logra "controlar el caos" ya que se estabilizan las trayectorias para valores "problemáticos" de los parámetros, incluyendo casos para los cuales el esquema de [8] no funciona como se puede ver en [A.2, Secc.1.3].

Es claro que quedaría por ver qué sucede si tanto  $p$  como  $q$  son estimados. Esta opción está incluida en el problema mucho más general a desarrollar en la próxima sección.

### 5.3 Alcances del algoritmo clásico.

El comportamiento entrada - salida de cierta planta de control está gobernado por el siguiente sistema:

$$x_{k+1} = \phi_k^T \theta + u_k \quad k = 0, 1, .. \quad (5.12)$$

donde

- $\theta^T = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in R^m$  es un vector de parámetros desconocidos y  $m \geq 1$ ,
- $\phi_k = \phi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-d_1})$  con  $d_1 \geq 0$  y  $\phi : R^{d_1+1} \rightarrow R^m$ , función no lineal, acotada sobre conjuntos acotados.

El objetivo de control es el seguimiento (asintótico) de trayectorias; precisamente, obtener  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x_k^*) = 0$  siendo  $(x_k^*)_{k \geq 0}$  una señal fija, conocida y acotada. Como la incerteza sobre el verdadero sistema radica en que se desconoce el valor exacto que toman los parámetros del mismo, se aplicarán herramientas de control adaptativo. Consideremos el siguiente esquema,

- modelo de diseño:

$$\hat{x}_{k+1} = \phi_k^T \hat{\theta}_k + u_k$$

siendo  $\hat{\theta}_k$  un estimador de parámetros,

• ley de control :

$$u_k = x_{k+1}^* - \phi_k^T \hat{\theta}_k. \quad (5.13)$$

Será conveniente introducir alguna notación:

$$e_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}, \quad (5.14)$$

$$\theta_k = \hat{\theta}_k - \theta. \quad (5.15)$$

Obsérvese que

$$e_{k+1} = x_{k+1} - x_{k+1}^* = -\phi_k^T \theta_k. \quad (5.16)$$

La ley de control descrita en (5.13) puede ser combinada con diversos estimadores de parámetros y así obtenerse diferentes estrategias de control adaptativo. Se trabajará con el algoritmo de proyección cuyas propiedades para los sistemas lineales han sido reseñadas en la Sección 2.2.

El estimador de parámetros  $\hat{\theta}_k$  se construye directamente como generalización del *algoritmo de proyección* para sistemas lineales, esto es

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \frac{\phi_k}{\gamma + \|\phi_k\|^2} e_{k+1}, \quad (5.17)$$

donde  $\gamma > 0$  es un parámetro fijo y  $\|\cdot\|$  es la norma euclídeana en  $R^m$ . Debido a la definición (5.15) se tiene

$$\theta_{k+1} = \theta_k + \frac{\phi_k}{\gamma + \|\phi_k\|^2} e_{k+1}. \quad (5.18)$$

Luego se obtiene,

$$\|\theta_{k+1}\|^2 \leq \|\theta_k\|^2 + \frac{2\phi_k^t \theta_k}{\gamma + \|\phi_k\|^2} e_{k+1} + \frac{e_{k+1}^2}{\gamma + \|\phi_k\|^2}$$

que combinado con (5.16) conduce a

$$\|\theta_{k+1}\|^2 \leq \|\theta_k\|^2 - \frac{e_{k+1}^2}{\gamma + \|\phi_k\|^2} \quad (5.19)$$

de donde  $(\|\theta_k\|)_{k \geq 0}$  es una sucesión decreciente y por ende, converge. A su vez, resulta que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}^2}{\gamma + \|\phi_k\|^2} = 0. \quad (5.20)$$

Cuando se trabaja con sistemas lineales,  $\phi_k$  es función lineal de los  $x_i$  ( $i \leq k$ ) y por lo tanto, aplicando el *Lema Técnico Clave* ( ver Apéndice), a (5.20) se deduce el objetivo. Esto ya no es válido para  $\phi$  cualquiera. Para obtener un resultado análogo se presentan dos caminos posibles. Uno es imponer alguna condición de crecimiento sobre la función  $\phi$ , con lo cual se restringe la clase de sistemas propuestos originalmente en (5.12). El otro, es determinar ciertas restricciones sobre las condiciones iniciales y por lo tanto, obtener un resultado de carácter local.

**Hipótesis G:** Existen constantes positivas  $\rho_i$  ( $i = 1, 2$ ) tales que

$$\|\phi(z_0, z_1, \dots, z_{d_1})\| \leq \rho_1 \max_{0 \leq i \leq d_1} |z_i| + \rho_2$$

para todo  $(z_0, z_1, \dots, z_{d_1}) \in R^{d_1+1}$ .

**Proposición 5.3.1** *Supongamos que el sistema real está dado por (5.12) y verifica la Hipótesis G. Sea  $(x_k^*)_{k \geq 0}$  una señal acotada dada. Si se aplica el esquema adaptativo (5.13)-(5.17), para cualquier condición inicial*

*$(x_{-d_1}, x_{-d_1+1}, \dots, x_0, \hat{\theta}_0)$ , se verifica:*

- i)  $(\|\hat{\theta}_k - \theta\|)_{k \geq 0}$  converge,
- ii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x_k^*) = 0$ ,
- iii)  $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_k^*)^2 < \infty$ .

**Demostración:**

Como ya se comentó, el item i) es inmediato de (5.19).

En virtud de la Hipótesis G y de la definición de  $e_j$  se llega a

$$\|\phi_k\| \leq \rho_1 \max_{j \leq k+1} |e_j| + \rho_1 M + \rho_2$$

con  $M = \sup_k |x_k^*|$ . Luego por (5.20), aplicando el *Lema Técnico Clave*, se obtiene que  $(\|\phi_k\|)_{k \geq 0}$  es acotada así como el item ii). Finalmente, de i) y (5.19), resulta  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e_{k+1}^2}{\gamma + \|\phi_k\|^2} < \infty$  y como  $\|\phi_k\|$  está uniformemente acotada, se concluye el item iii).

**Proposición 5.3.2** Supongamos que el sistema real está dado por (5.12). Sea  $(x_k^*)_{k \geq 0}$  una señal dada con  $|x_k^*| \leq M \forall k \geq 0$ . Sea  $\delta > 0$  y apliquemos el esquema adaptativo (5.13)-(5.17) con condición inicial  $(x_{-d_1}, \dots, x_0, \hat{\theta}_0)$  tal que  $|x_i| \leq \delta + M \forall i \leq 0$  y  $\|\hat{\theta}_0 - \theta\| \leq \frac{\delta}{C}$  donde

$C = \sup\{\|\phi(z_0, \dots, z_{d_1})\| ; |z_i| \leq \delta + M \ (0 \leq i \leq d_1)\}$  entonces:

- i)  $(\|\hat{\theta}_k - \theta\|)_{k \geq 0}$  converge,
- ii)  $|x_i - x_i^*| \leq \delta$  for all  $i \geq 1$ ,
- iii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x_k^*) = 0$ ,
- iv)  $\sum_{k=1}^{\infty} (x_k - x_k^*)^2 < \infty$ .

**Demostración:**

El item i) es inmediato de (5.19).

Se prueba inductivamente sobre  $k \in N$ , la propiedad

$$P(k) : |x_j - x_j^*| \leq \delta \text{ para todo } j \leq k \text{ y } \|\phi_k\| \leq C.$$

En efecto,

- $P(1)$  : por hipótesis sobre las condiciones iniciales,  $\|\phi_0\| \leq C$  lo que implica - debido a (5.16) -  $|e_1| \leq \delta$  y de esto,  $|x_1| \leq \delta + M$  con lo que además resulta  $\|\phi_1\| \leq C$ .
- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$  :  $\|\theta_k\| \leq \|\theta_0\| \leq \delta/C$  y por hipótesis inductiva,  $\|\phi_k\| \leq C$  ; luego,  $|e_{k+1}| \leq \delta$ . Además, por hipótesis inductiva,  $|e_i| \leq \delta \forall i \leq k$  y se llega a  $\|\phi_{k+1}\| \leq C$ .

Con esto, queda probado el item ii) y simultáneamente que  $\|\phi_k\|$  está uniformemente acotada. Por lo tanto, el item iii) se desprende inmediatamente de (5.20) y el item iv) sale idem Proposición 5.3.1.

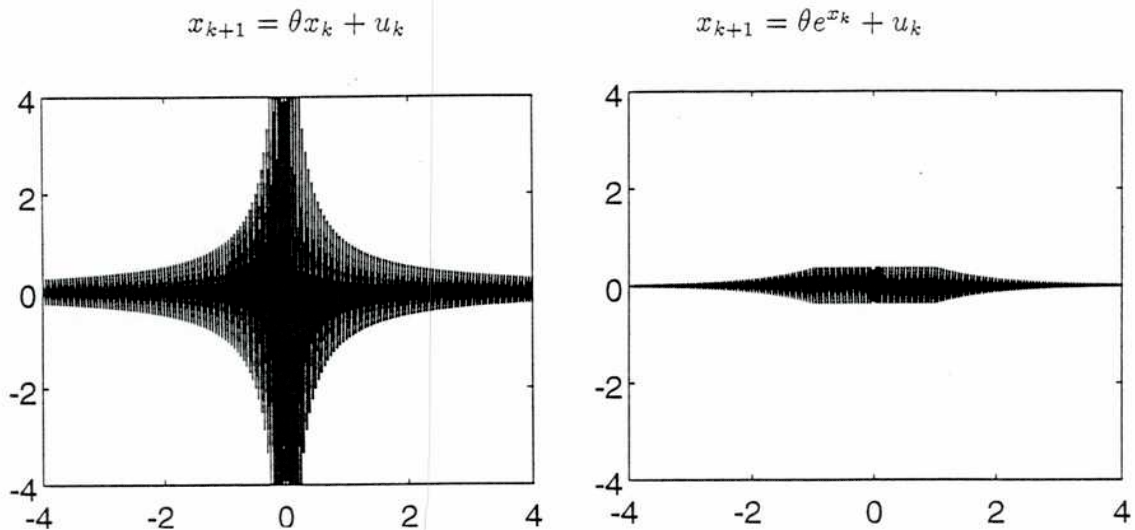
*Observación:* La demostración es válida si en lugar de  $C$  se pone

$$\tilde{C} = \sup_{k \geq 0} \{\|\phi(y_k, \dots, y_{k-d_1})\| ; |y_i - x_i^*| \leq \delta \forall i\}.$$

**Nota 5.2:** Observemos que verificadas las hipótesis correspondientes a alguna de las proposiciones anteriores, se obtiene la estabilización asintótica de la salida a la referencia cualesquiera sean las condiciones iniciales *respecto*

a los estados. Sin embargo, la Proposición 5.3.2 no establece convergencia global del lazo cerrado resultante; de hecho, para asegurarse el objetivo de control es necesario, hacer un compromiso entre las cotas de las condiciones iniciales para la salida y la precisión con que se conozca al verdadero parámetro  $\theta$ . Por supuesto, tal compromiso va a resultar más o menos restrictivo según la naturaleza de la función  $\phi$ . Veamos por ejemplo, cuán diferente es el conjunto de condiciones iniciales establecido para garantizar convergencia, en los siguientes casos sencillos:

figura 5

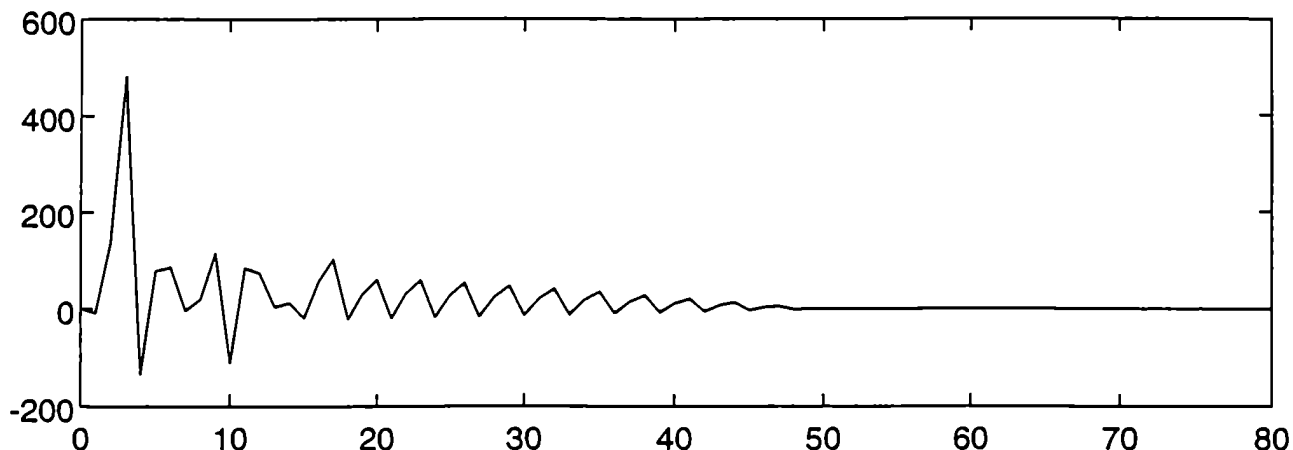


Por otro lado, si bien bajo la Hipótesis G, se prueba convergencia global, no se cuenta en cualquier caso, con una cota a priori de la salida como en cambio asegura la Proposición 5.3.2. Consideremos el siguiente ejemplo:

$$x_{k+1} = 3x_k + 2\ln(1 + |x_k|) + u_k$$

con el propósito de regular la salida; si se toma  $\|(\hat{a}_0, \hat{b}_0) - (3, 2)\| \leq 0.5$  y  $x_0 = 1$ , se sabe no sólo que  $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$  sino también que  $|x_k| \leq 1 \forall k \geq 1$ . Pero si  $(x_0, \hat{a}_0, \hat{b}_0)$  no verifica hipótesis de la Proposición 5.3.2, el transitorio puede crecer mucho, como se ve si se elige  $\gamma = 0.1$  y  $(x_0, \hat{a}_0, \hat{b}_0) = (1, 20, -10)$ , en la figura 6.

figura 6



**Nota 5.3:** Las simulaciones permiten afirmar que no es posible obtener un resultado de convergencia global bajo el esquema (5.13)-(5.17) si  $\phi$  no verifica la Hipótesis G. Para ilustrar, se puede considerar el ejemplo dado por

$$x_{k+1} = ax_k + bx_k^2 + u_k \quad (5.21)$$

con  $a = 3.8$  y  $b = -3.9$ . Si se aplica el esquema adaptativo propuesto con  $x_k^* \equiv 0$ ,  $x_0 = 1$ ,  $\gamma = 0.1$  y  $\hat{\theta}_0 = (-2, 5)$ , resulta que  $x_k$  diverge.

Cabe agregar que el sistema libre correspondiente a (5.21) es la *logística generalizada* y por lo tanto, si se aplica (5.13)-(5.17) bajo las condiciones establecidas en la Proposición 5.3.2, se logra "controlar el caos" característico de ésta. Este ejemplo se trata con detalle en [A.4, Secc.1.3].

**Nota 5.4:** Está claro por (5.13) que si los estados resultan acotados, los controles también lo están. Supongamos que el sistema a tratar estuviese definido por

$$x_{k+1} = \phi_k^t \theta + \beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1} + \dots + \beta_{d_2} u_{k-d_2} \quad (5.22)$$

siendo  $\beta_i$  ( $1 \leq i \leq d_2$ ) parámetros reales conocidos,  $\beta_0 \neq 0$  y  $d_2 > 0$ . Evidentemente, definiendo

$$v_k = \beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1} + \dots + \beta_{d_2} u_{k-d_2}$$



se tiene un sistema de la forma (5.12) y aplicando el esquema adaptativo (5.13)-(5.17), bajo las correspondientes restricciones establecidas en las proposiciones anteriores, se obtiene el objetivo de control con  $(v_k)$  acotados. Sin embargo, los controles "originales"  $u_k$  pueden resultar no acotados, como se ve en el siguiente ejemplo:

$$x_{k+1} = 3x_k + 2 \ln(1 + |x_k|) + 3u_k + 4u_{k-1},$$

donde tomando  $x^* = x_0 = 0$ ,  $\hat{\theta}_0 = \theta = (3, 2)$ , si  $u_{-1} = \mu$  se obtiene que  $u_k = (-4/3)^{k+1} \mu \forall k \geq 0$ .

Es fácil ver que si se pide

$$\frac{|\beta_1| + \dots + |\beta_{d_2}|}{|\beta_0|} < 1,$$

se asegura la acotación de la sucesión de controles. Esta observación será útil cuando se trabaje con sistemas como (5.22) pero con parámetros  $\beta_i$ 's desconocidos. Los mismos constituyen un subconjunto de los sistemas a tratar en el próximo capítulo.

**Nota 5.5:** Resulta interesante analizar qué se puede decir acerca de la dinámica del lazo cerrado, independientemente de si se verifican o no, las condiciones requeridas por las proposiciones.

En primer lugar, si la sucesión  $(\|\phi_k\|)_{k \geq 0}$  está acotada, se deduce el objetivo. Si no está acotada, entonces - por hipótesis sobre  $\phi$  - la sucesión  $(|x_k|)_{k \geq 0}$  tampoco lo está.

En cuanto al estimador  $\hat{\theta}_k$ , permanece acotado en cualquier caso, pero aún cuando se obtiene la convergencia de la salida a la referencia deseada, no es posible asegurar la convergencia del mismo al verdadero parámetro  $\theta$ . De hecho, se obtiene que para algún  $\mu \geq 0$ ,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}_{k+1} - \theta\| = \mu. \quad (5.23)$$

Además, una vez probado que  $e_{k+1} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ , de (5.17) resulta

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k\| = 0. \quad (5.24)$$

Limitémonos ahora al caso donde  $\phi$  es continua y  $x_k^* \equiv x^*$ . Sea

$\phi_* = \phi(x^*, \dots, x^*) \in R^m$ . Como  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$ , entonces  $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k = \phi_*$ . Por otro lado, de (5.16),  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = x^*$  si y sólo si  $\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_k^t \theta_k = 0$ . Todo esto implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \phi_*^t \theta_k = 0. \quad (5.25)$$

En efecto, si  $\|\theta_0\| = 0$  entonces  $\|\theta_k\| = 0$  y (5.25) sale trivialmente. Si  $\|\theta_0\| \neq 0$ , dado  $\epsilon > 0$ ,  $\exists k_0 \in N$  tal que  $\forall k \geq k_0$ :

$$\|\phi_k - \phi_*\| < \frac{\epsilon}{2\|\theta_0\|} \quad \text{y} \quad |\phi_k^t \theta_k| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Luego,

$$|\phi_*^t \theta_k| \leq \|\phi_k - \phi_*\| \|\theta_k\| + |\phi_k^t \theta_k| < \epsilon.$$

Sea  $S_* = \{\lambda \phi_* : \lambda \in R\} \subset R^m$  y  $S_*^\perp$  su complemento ortogonal. Por lo tanto, (5.25) dice que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\theta_k, S_*^\perp) = 0$$

siendo  $\text{dist}$  la distancia entre conjuntos de  $R^n$  inducida por la norma euclídeana. Además, por (5.23),

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\theta_k, \partial B(0, \mu)) = 0$$

donde  $\partial B(0, \mu) = \{v \in R^m : \|v\| = \mu\}$ . Si llamamos  $\mathcal{A} = S_*^\perp \cap \partial B(0, \mu)$ , se tiene que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\theta_k, \mathcal{A}) = 0. \quad (5.26)$$

A partir de aquí pueden diferenciarse las siguientes posibilidades:

- i)  $\mu = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = \{0\} \Rightarrow \hat{\theta}_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \theta$ ;
- ii)  $\mu \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} \phi_* = 0 \Rightarrow S_*^\perp = R^m \Rightarrow \mathcal{A} = \partial B(0, \mu) \\ \phi_* \neq 0 \Rightarrow \dim S_*^\perp = m - 1 \Rightarrow \mathcal{A} = S_*^\perp \cap \partial B(0, \mu) \end{cases}$

Veamos qué puede decirse acerca del comportamiento de  $\hat{\theta}_k$ :

- $m = 1$

$$\text{si } \phi_* \neq 0 \Rightarrow \hat{\theta}_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \theta$$

$$\text{si } \phi_* = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \theta + \mu \quad \text{ó} \quad \hat{\theta}_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \theta - \mu$$

- $m = 2$   
 si  $\phi_* \neq 0 \Rightarrow \hat{\theta}_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \theta + \mu\omega$  ó  $\hat{\theta}_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} \theta - \mu\omega$  ( $\|\omega\| = 1, \omega^t \phi_* = 0$ )  
 si  $\phi_* = 0 \Rightarrow \hat{\theta}_k$  converge a  $\partial B(0, \mu) \subset \mathbb{R}^2$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k\| = 0$
- $m \geq 3$   
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \text{dist}(\theta_k, \mathcal{A}) = 0$   
 $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}_{k+1} - \hat{\theta}_k\| = 0$

Notemos que  $\mu$  ( y por lo tanto  $\mathcal{A}$ ) en principio dependen de las condiciones iniciales del lazo cerrado.

En resumen, no puede concluirse la convergencia del estimador y si bien en las simulaciones, "se ve cierta estabilización de  $\hat{\theta}_k$  a un vector fijo", esto no es más que el efecto numérico a consecuencia de (5.24).

## 5.4 Conclusiones.

El denominador común del presente capítulo es el conjunto de sistemas tratados, resumidos en (5.12). Sin embargo, el mismo contiene dos partes bien diferenciadas.

En primer lugar se hizo mención al hecho de que sistemas como éstos surgen dentro del contexto usualmente reconocido como "control del caos". Trabajando en un ejemplo particular, se vio que si se cuenta con un modelo parametrizado ( con valor de los parámetros desconocido), el comportamiento caótico puede ser controlado, implementando un esquema adaptativo.

Como ya se había comentado en el Capítulo 2, los modelos DARMA que incluyen no linealidades, admiten la aplicación del algoritmo de proyección. Además, dada la forma de los sistemas (5.12), es posible recurrir al "one-step-ahead" control. En la segunda parte de este capítulo se comprueba que este esquema, clásico en el campo lineal, también permite obtener los objetivos de control propuestos si se lo aplica a sistemas no lineales, bajo hipótesis adecuadas.

A partir de estos resultados, en el próximo capítulo se introducirán las modificaciones necesarias de modo de extender los mismos a una clase más amplia de sistemas no lineales.

# Capítulo 6

## SISTEMAS LINEALIZABLES RESPECTO AL CONTROL - I

### 6.1 Introducción.

En este Capítulo se extienden los resultados de la segunda parte del anterior, ampliando en tres sentidos el conjunto de sistemas a tratar:

- i) se admite retardo en la salida,
- ii) se incorporan no linealidades respecto a los controles,
- iii) aparecen parámetros de valor desconocido afectando al control.

En las tres secciones subsiguientes se introducen las hipótesis necesarias y se establecen los correspondientes resultados al aplicar la generalización del algoritmo clásico a dichos sistemas siendo el objetivo de control el seguimiento (asintótico) de la salida hacia una trayectoria deseada.

Tal como se había anticipado en la Sección 3.3, los sistemas a considerarse se caracterizan por el hecho de que es posible linealizarlos respecto al control mediante la definición de una ley de retroalimentación. Sistemas linealizables en este sentido aparecen en trabajos anteriores y la confrontación con ellos se realiza en la Sección 6.5.

Finalmente, en la última sección se admite la posibilidad de submodelado para el caso en que el error del modelo es acotado, con cota conocida. Se pretende lograr el mismo objetivo de control aunque dentro del margen de error introducido por el submodelado. Para ello se combina el algoritmo analizado en las primeras secciones con una estrategia de las denominadas de "zona muerta". Cabe agregar que estos resultados han sido publicados en el artículo citado en [A.3] de la Sección 1.3.

## 6.2 Planteo del problema.

Consideremos una planta de control con comportamiento entrada - salida definido por un sistema SISO no lineal en tiempo discreto de la forma

$$x_{k+1+d} = \alpha^T \phi_k + B(q^{-1})u_k \psi_k \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.1)$$

donde:

- $d \geq 0, d_1, d_2, d_3 \geq 0, m \geq 1$  son enteros conocidos,
- $\alpha^T = (\alpha(1), \alpha(2), \dots, \alpha(m))$  ;  
 $B(q^{-1}) = \beta(0) + \beta(1)q^{-1} + \dots + \beta(d_2)q^{-d_2}$  con  $\alpha(i)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) y  $\beta(i)$  ( $i = 0, \dots, d_2$ ) , parámetros reales desconocidos,
- $X_k = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-d_1})$  ;  $U_k = (u_{k-1}, \dots, u_{k-d_3})$ ,  
 $\psi_k = \psi(X_k, U_k)$  ;  $\psi : R^{d_1+d_3+1} \rightarrow R$  función conocida,  
 $\phi_k = \phi(X_k, U_k)$  ;  $\phi^T = (\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m)$  ;  $\varphi_i : R^{d_1+d_3+1} \rightarrow R$  funciones conocidas.

El objetivo de control es el seguimiento de trayectorias con estabilidad del lazo cerrado resultante. Obsérvese que los sistemas (5.12) constituyen una subclase de (6.1) caracterizada por  $d_2 = d_3 = 0, \psi \equiv 1$  y  $\phi_k = \phi(X_k)$ .

Será útil la siguiente notación:

$$\theta^T = (\alpha(1), \dots, \alpha(m), \beta(0), \beta(1), \dots, \beta(d_2)),$$

$$\Phi_k^T = (\phi_k^T, u_k \psi_k, u_{k-1} \psi_{k-1}, \dots, u_{k-d_2} \psi_{k-d_2}).$$

En estos términos, el sistema (6.1) puede ser reescrito como un modelo DARMA ([20]):

$$x_{k+1+d} = \Phi_k^T \theta. \quad (6.2)$$

A semejanza de lo hecho en casos anteriores, se presenta un controlador y un estimador de parámetros, cuya combinación constituye el esquema de control adaptativo propuesto. El mismo no es más que la correspondiente generalización del algoritmo (5.13)-(5.17) aunque alguna modificación será necesaria.

De acuerdo a la fórmula (6.2) es natural tomar como modelo de diseño,

$$\hat{x}_{k+1+d} = \Phi_k^T \hat{\theta}_k$$

donde  $\hat{\theta}_k^T = (\hat{\alpha}_k(1), \dots, \hat{\alpha}_k(m), \hat{\beta}_k(0), \hat{\beta}_k(1), \dots, \hat{\beta}_k(d_2)) = (\hat{\alpha}_k^T, \hat{\beta}_k^T)$  es el estimador de parámetros.

Recurriendo una vez más al "one-step-ahead", la ley de control se define como

$$u_k = \frac{1}{\hat{\beta}_k(0)\psi_k} (x_{k+1+d}^* - \hat{\alpha}_k^T \phi_k - \hat{\beta}_k(1)u_{k-1}\psi_{k-1} - \dots - \hat{\beta}_k(d_2)u_{k-d_2}\psi_{k-d_2}). \quad (6.3)$$

Como antes, llamemos

$$\begin{aligned} e_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}, \\ \theta_k &= \hat{\theta}_k - \theta. \end{aligned}$$

con lo cual

$$e_{k+1} = -\Phi_{k-d}^T \theta_{k-d}. \quad (6.4)$$

La fórmula anterior muestra que ahora  $e_{k+1}$  ("matching - error") no sólo depende de las salidas anteriores sino también de los controles. Como ya se señaló anteriormente ( Nota 5.4) se pueden producir salidas acotadas aún con controles no acotados uniformemente. Esto quiere decir que el sistema inverso no es estable y dicho sea de paso, la estabilidad del sistema inverso es requerida para asegurar la acotación de la sucesión de controles, inclusive para sistemas lineales ( ver Sección 2.2 o ([20, p.185])). Este tipo de comportamiento no tiene sentido a efectos prácticos. Además debe ser definitivamente desterrado en el caso que nos ocupa ya que no se puede concluir la convergencia de la salida a cero si no se cuenta con controles acotados. Para lograrlo se impondrán ciertas restricciones sobre los parámetros  $\beta_i$ 's, como veremos más adelante.

### 6.3 Ley de estimación de parámetros.

Se presenta la correspondiente generalización del *algoritmo de proyección*. De la fórmula (6.3), es evidente que un requisito necesario para que los controles permanezcan acotados será asegurarnos que  $|\hat{\beta}_k(0)\psi_k|$  "no se haga demasiado pequeño". Por esto, se imponen las hipótesis que siguen.

**Hipótesis F:** Existe un valor fijo y conocido  $\epsilon > 0$  tal que  $|\psi(\cdot)| > \epsilon$ .

**Hipótesis B:** Se sabe que  $\beta(0) \neq 0$  y se conoce tanto el signo de  $\beta(0)$  como un valor  $\beta_{\min} > 0$  tal que  $|\beta(0)| \geq \beta_{\min}$ .

La Hipótesis B es necesaria aún en el caso lineal y de hecho, la misma fue introducida en [20, p.189], así como la modificación al estimador de parámetros original que se presenta a continuación.

$$\hat{\theta}'_{k+1} = \hat{\theta}_k + \frac{\Phi_{k-d}}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} \epsilon_{k+1}, \quad (6.5)$$

con  $\gamma > 0$  constante fija y  $\hat{\theta}_{k+1}$  dado por

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{k+1}(i) &= \hat{\theta}'_{k+1}(i) & i \neq m+1 \\ \hat{\theta}_{k+1}(m+1) &= \begin{cases} \hat{\theta}'_{k+1}(m+1) & \text{si } \hat{\theta}'_{k+1}(m+1) \text{sg}\beta(0) \geq \beta_{\min} \\ \text{sg}\beta(0)\beta_{\min} & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.6)$$

donde

$$\epsilon_{k+1} = x_{k+1} - \Phi_{k-d}^T \hat{\theta}_k. \quad (6.7)$$

De (6.4) y (6.7) se tiene que

$$e_{k+1} = \epsilon_{k+1} + \Phi_{k-d}^T (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-d}). \quad (6.8)$$

Resulta que para todo  $k$ ,

$$|\hat{\theta}_{k+1}(m+1)| \geq \beta_{\min},$$

$$|\hat{\theta}_k(m+1) - \beta(0)| \leq |\hat{\theta}'_k(m+1) - \beta(0)|,$$

y se sigue

$$\|\hat{\theta}_{k+1} - \theta\| \leq \|\hat{\theta}'_{k+1} - \theta\|, \quad (6.9)$$

$$\|\hat{\theta}_{k+n} - \hat{\theta}_k\| \leq \|\hat{\theta}'_{k+n} - \hat{\theta}_k\| \quad \forall n \geq 1. \quad (6.10)$$

De (6.5), (6.7) y (6.10):

$$\|\theta_{k+1}\|^2 \leq \|\theta_k\|^2 - \frac{\epsilon_{k+1}^2}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} \quad (6.11)$$

de donde resulta sucesivamente,

- $(\|\theta_k\|)_{k \geq 0}$  es sucesión convergente (6.11.a)

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\epsilon_{k+1}^2}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} = 0$  (6.11.b)

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\epsilon_{k+1}^2}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} < \infty$  (6.11.c)

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\hat{\theta}_{k+n} - \hat{\theta}_k\| = 0 \quad \forall n \geq 1$  (6.11.d)

- $\sum_{k=0}^{\infty} \|\hat{\theta}_{k+n} - \hat{\theta}_k\| < \infty \quad \forall n \geq 1$  (6.11.e)

- $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{e_{k+1}^2}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} = 0$  (6.11.f)

- $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e_{k+1}^2}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} < \infty$  (6.11.g)

Vale la pena notar que todas las propiedades mencionadas en esta sección son independientes de la definición del control y de que la función  $\Phi$  sea o no lineal.

## 6.4 Esquema de control adaptativo.

El esquema que se presenta en esta sección surge de la combinación de la ley de control (6.3) y la ley de estimación de parámetros (6.6).

En primer lugar, se presenta la hipótesis necesaria ( correspondiente generalización de la Hipótesis G del Capítulo 5) para obtener el objetivo propuesto con convergencia global.

**Hipótesis GG:** Existen constantes positivas  $\rho_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) tales que:

$$\|\phi(z_0, z_1, \dots, z_{d_1}; y_1, \dots, y_{d_3})\| \leq \rho_1 \max_{0 \leq i \leq d_1} |z_i| + \rho_2 \max_{1 \leq j \leq d_3} |y_j| + \rho_3$$

para todo  $(z_0, z_1, \dots, z_{d_1}; y_1, \dots, y_{d_3}) \in R^{d_1+d_3+1}$ .

Además, sean

$$C_1 = \frac{1 + |\alpha(1)| + \dots + |\alpha(m)|}{|\beta(0)|} \quad C_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } d_2 = 0 \\ \frac{|\beta(1)| + \dots + |\beta(d_2)|}{|\beta(0)|} & \text{si } d_2 > 0 \end{cases}$$



**Proposición 6.4.1** *Supongamos que el sistema real está dado por (6.1) bajo las hipótesis B, F, GG y que  $C_2 < 1 - \frac{p_2 C_1}{\epsilon}$ . Sea  $(x_k^*)_{k \geq 0}$  señal fija, conocida y acotada. Si se aplica el esquema adaptativo (6.3)-(6.6) para cualquier conjunto  $\{x_i : -d_1 \leq i \leq d ; u_j : -(d_2 + d_3) \leq j \leq -1 ; \hat{\theta}_0\}$  de condiciones iniciales, se verifica:*

- i)  $(\|\hat{\theta}_k - \theta\|)_{k \geq 0}$  converge,
- ii)  $(x_k)_{k \geq 0}$  y  $(u_k)_{k \geq 0}$  son sucesiones acotadas,
- iii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x_k^*) = 0$ ,
- iv)  $\sum_{k=0}^{\infty} (x_k - x_k^*)^2 < \infty$ .

**Demostración:**

El item i) sale de (6.11). Para lo que sigue, sea

$$v_k = u_k \psi_k. \quad (6.12)$$

Entonces (6.1) se reescribe de la forma

$$x_{k+1+d} = \alpha^T \phi_k + B(q^{-1})v_k \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.13)$$

en tanto que

$$v_k = \frac{1}{\beta(0)} \left[ x_{k+1+d} - \sum_{i=1}^m \alpha(i) \varphi_i(X_k, U_k) - \sum_{j=1}^{d_2} \beta(j) v_{k-j} \right]$$

y si

$$\xi_{k+d+1} = \max\{|x_{k+1+d}|, |\varphi_1(X_k, U_k)|, \dots, |\varphi_m(X_k, U_k)|\},$$

entonces

$$|v_j| \leq C_1 \xi_{j+d+1} + C_2 \max_{i \leq j-1} |v_i| \quad \forall j \geq 0.$$

Como en particular  $C_2 < 1$ , de lo anterior se deduce

$$|v_k| \leq \frac{C_1}{1 - C_2} \max_{i \leq k+1+d} \xi_i.$$

Por definición de  $\xi_i$ , Hipótesis GG, la desigualdad anterior y la cota sobre  $C_2$  se obtiene

$$\max_{i \leq k+1+d} \xi_i \leq \tilde{m}_1 \max_{j \leq k+1+d} |x_j| + \tilde{m}_2$$

para ciertas constantes positivas  $\tilde{m}_1, \tilde{m}_2$  y por lo tanto,

$$|v_k| \leq m_1 \max_{j \leq k+1+d} |x_j| + m_2 \quad (6.14)$$

para ciertas constantes positivas  $m_1, m_2$ .

Finalmente, se tienen constantes  $M_1, M_2 > 0$  tales que:

$$\|\Phi_k\| \leq M_1 \max_{j \leq k+1+d} |x_j| + M_2. \quad (6.15)$$

Si se combina (6.15) con (6.11.f) vía el *Lema Técnico Clave* ( ver Apéndice) se obtiene  $\|\Phi_k\|$  está uniformemente acotada y que  $e_{k+1} \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ , de modo que se prueba *iii*). En particular, se obtiene  $(x_k)_{k \geq 0}$  sucesión acotada y a su vez, por (6.14),  $(v_k)_{k \geq 0}$  también lo es; luego de la Hipótesis F y (6.12) se tiene  $(u_k)_{k \geq 0}$  acotada y por lo tanto, queda probado *ii*). Por último, como  $(\|\Phi_k\|)_{k \geq 0}$  es acotada, por medio de (6.11.g) sale *iv*).

Antes de pasar al segundo resultado, veamos un ejemplo donde se lleva la salida a una trayectoria no constante.

**Ejemplo 6.1:** Sea el sistema

$$x_{k+1} = 2.5x_k + 2\sqrt{|x_k|} + 1.5u_k + 1.2u_{k-1}.$$

Se pretende llevar la salida a  $x_k^* = \text{sen}(k/5)$ . La figura 7 muestra conjuntamente la trayectoria deseada y la salida obtenida al aplicar el algoritmo (6.3)-(6.6) con  $\gamma = 0.1, \beta_{\min} = 1$  y condiciones iniciales  $x_0 = 1, u_{-1} = 0.1, \theta_0 = (2.3, 2.3, 1.4, 1.4)$ .

Como para la clase reducida (5.12), si se levantan las hipótesis acerca del crecimiento de las no linealidades, se puede obtener un resultado de carácter local. Para ello se reemplazan las Hipótesis GG y F por una más débil.

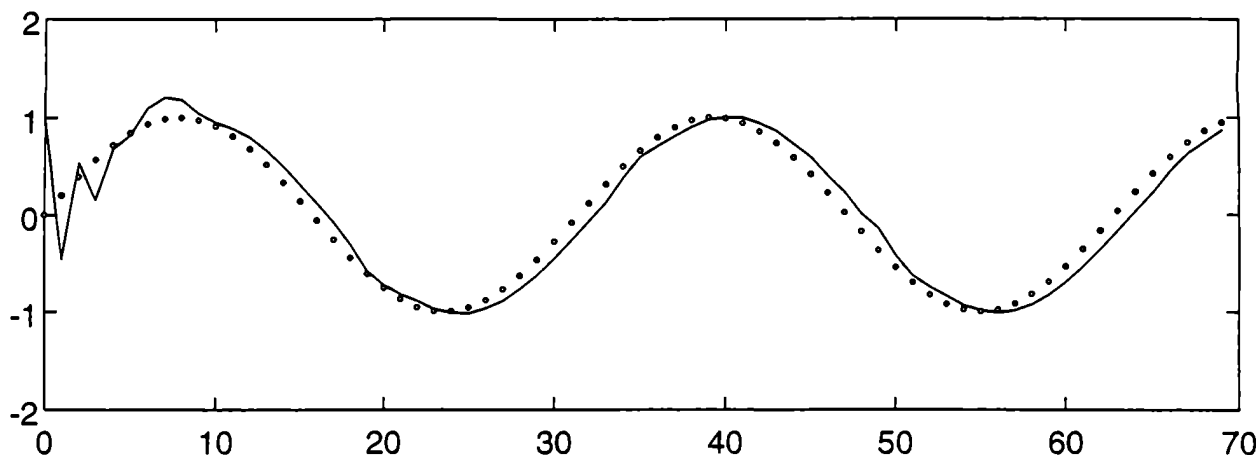
**Hipótesis GL:** Dados  $\delta_1, \delta_2 > 0$ , existen  $\eta_i = \eta_i(\delta_1, \delta_2)$  ( $i = 1, 2$ ) y  $\epsilon = \epsilon(\delta_1, \delta_2)$  tales que si  $|z_i| \leq \delta_1$   $0 \leq i \leq d_1$  y  $|y_i| \leq \delta_2$   $1 \leq i \leq d_3$  entonces

$$\begin{aligned} \|\phi(z_0, z_1, \dots, z_{d_1}; y_1, \dots, y_{d_3})\| &\leq \eta_1 \quad y \\ \epsilon \leq \|\psi(z_0, z_1, \dots, z_{d_1}; y_1, \dots, y_{d_3})\| &\leq \eta_2. \end{aligned} \quad (6.16)$$

En este caso será útil definir:

$$D_1 = \frac{|\alpha(1)| + \dots + |\alpha(m)|}{\beta_{\min}} \quad D_2 = \begin{cases} 0 & \text{si } d_2 = 0 \\ \frac{|\beta(1)| + \dots + |\beta(d_2)|}{\beta_{\min}} & \text{si } d_2 > 0 \end{cases}$$

figura 7



**Proposición 6.4.2** Consideremos que el sistema real está dado por (6.1) bajo las hipótesis B y GL. Sea  $(x_k^*)_{k \geq 0}$  una señal fija, conocida y acotada con  $|x_k^*| \leq M \forall k$ . Supongamos que  $D_2 < \frac{\epsilon}{\eta_2}$  y que es posible elegir  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales que  $\delta_2 > \frac{D_1 \eta_1 + \frac{M}{\beta_{\min}}}{\epsilon - D_2 \eta_2}$  con  $\eta_i = \eta_i(\delta_1 + M, \delta_2)$  ( $i = 1, 2$ ) y  $\epsilon = \epsilon(\delta_1 + M, \delta_2)$  de acuerdo a (6.16). Si se aplica el esquema adaptativo (6.3)-(6.6) con condiciones iniciales  $\{x_i : -d_1 \leq i \leq d ; u_j : -(d_2 + d_3) \leq j \leq -1 ; \hat{\theta}_0\}$  que verifican:

$$\begin{aligned} & |x_i - x_i^*| \leq \delta_1 \quad \forall i \leq d; \\ & \text{si } d_2 > 0 \text{ o } d_3 > 0 : |u_j| \leq \delta_2 \quad \forall j \leq -1; \\ & \|\hat{\theta}_0 - \theta\| \leq \min\left\{ \frac{\delta_1}{\sqrt{\eta_1^2 + (d_2 + 1)\eta_2^2 \delta_2^2}}, \beta_{\min} \frac{(\epsilon - D_2 \eta_2)\delta_2 - D_1 \eta_1 - M/\beta_{\min}}{m\eta_1 + d_2 \eta_2 \delta_2} \right\} \end{aligned}$$

Entonces:

- i)  $(\|\hat{\theta}_k - \theta\|)_{k \geq 0}$  converge,
- ii)  $|x_i - x_i^*| \leq \delta_1$  y  $|u_i| \leq \delta_2 \forall i \geq 0$ ,
- iii)  $\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x_k^*) = 0$ ,
- iv)  $\sum_{k=0}^{\infty} (x_k - x_k^*)^2 < \infty$ .

**Demostración:**

El item i) sale de (6.11). Si vale ii), resulta

$$\|\Phi_k\| \leq \sqrt{\eta_1^2 + (d_2 + 1)\eta_2^2 \delta_2^2} \quad \forall k$$

que combinado con (6.11.f) y (6.11.g) permite concluir *iii*) y *iv*).

Por lo tanto, la demostración se reduce a probar *ii*). Para esto, deben verse primero algunos puntos. De (6.3) y (6.12) se obtiene

$$v_k = \frac{1}{\hat{\beta}_k(0)} \left[ x_{k+1+d}^* - \sum_{i=1}^m \hat{\alpha}_k(i) \varphi_i(X_k, U_k) - \sum_{j=1}^{d_2} \hat{\beta}_k(j) v_{k-j} \right].$$

Si llamamos

$$\bar{D}_1 = D_1 + \frac{m \|\theta_0\|}{\beta_{\min}} \quad \bar{D}_2 = D_2 + \frac{d_2 \|\theta_0\|}{\beta_{\min}}$$

usando la desigualdad triangular y el hecho de que  $(\|\theta_k\|)_{k \geq 0}$  es decreciente, resulta

$$\frac{|\hat{\alpha}_k(1)| + \dots + |\hat{\alpha}_k(m)|}{|\hat{\beta}_k(0)|} \leq \bar{D}_1 \quad \text{y} \quad \frac{|\hat{\beta}_k(1)| + \dots + |\hat{\beta}_k(m)|}{|\hat{\beta}_k(0)|} \leq \bar{D}_2$$

Definiendo,

$$\tilde{\xi}_k = \max_{1 \leq i \leq m} |\varphi_i(X_k, U_k)|$$

finalmente sale

$$|v_k| \leq \frac{M}{\beta_{\min}} + \bar{D}_1 \tilde{\xi}_k + \bar{D}_2 \max_{i \leq k-1} |v_i| \quad (6.17)$$

Se puede probar por inducción sobre  $k \geq 0$  :

$$P(k) : \begin{cases} |u_j| \leq \delta_2 & \forall j \leq k-1 \\ |x_i - x_i^*| \leq \delta_1 & \forall i \leq k \end{cases}$$

En efecto,

- $P(0)$  : trivial, por elección de las condiciones iniciales.
- $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ : combinando (6.12) con la hipótesis inductiva, se tiene  $|v_j| \leq \eta_2 \delta_2 \quad \forall j \leq k-1$  y  $\tilde{\xi}_k \leq \eta_1$ . Luego, de (6.17) y la restricción sobre  $\|\theta_0\|$  se llega a  $|v_k| \leq \epsilon \delta_2$ , con lo que  $|u_k| \leq \delta_2$ . Además, se desprende de la hipótesis inductiva que  $\|\Phi_k\| \leq \sqrt{\eta_1^2 + (d_2 + 1)\eta_2^2 \delta_2^2}$  y entonces, usando convenientemente la información sobre  $\|\theta_0\|$  se obtiene  $|x_{k+1} - x_{k+1}^*| \leq \delta_1$ .

**Nota 6.1:** Valen comentarios análogos a los de las Notas 5.2, 5.3 y 5.5 del capítulo anterior en concordancia con la generalización desarrollada en éste.

Por otro lado, en la Proposición 6.4.1, se puede reemplazar  $C_1$  por  $\frac{1+\|\hat{\alpha}\|}{\beta(0)}$  y sale la demostración, definiendo  $\xi_{k+d+1} = \max\{|x_{k+1+d}|, \|\phi(X_k, U_k)\|\}$ . En tanto que en la Proposición 6.4.2, se puede reemplazar  $D_1$  por  $\frac{\|\hat{\alpha}\|}{\beta_{\min}}$ ,  $\bar{D}_1$  por  $\frac{\|\hat{\alpha}\|+\|\theta_0\|}{\beta_{\min}}$  y poner  $\|\phi(X_k, U_k)\|$  en lugar de  $\tilde{\xi}_k$  obteniéndose el mismo resultado.

Se debe notar que no en cualquier caso es posible hallar  $\delta_2$  como es requerido en la Proposición 6.4.2, justamente porque tanto los  $\eta_i$ 's como  $\epsilon$  dependen de  $\delta_2$  pero esto deja de ser inconveniente si  $d_3 = 0$ .

**Nota 6.2:** Como ya se había anticipado en la Nota 5.4 es necesario pedir ciertas condiciones sobre los  $\beta_i$ 's para asegurar que la sucesión de controles permanezca acotada. En la Proposición 6.4.1 se pide  $C_2 < 1 - \frac{\rho_2 C_1}{\epsilon}$  mientras que en la Proposición 6.4.2 corresponde a  $D_2 < \frac{\epsilon}{\eta_2}$ .

Es interesante notar que si  $d_3 = 0$ , en la primera la condición se reduce a  $C_2 < 1$  y que si  $\psi \equiv cte$ , en la otra basta pedir  $D_2 < 1$  ( con lo que  $C_2 < 1$ ). En particular, los sistemas lineales verifican ambas condiciones y se comprueba fácilmente que la condición  $C_2 < 1$  implica "estabilidad del sistema inverso" ( confrontar con [20, p.185]).

**Nota 6.3:** Las restricciones dependen de los parámetros *desconocidos*. Esto no impide necesariamente la aplicación práctica del algoritmo, si contamos con cotas adecuadas de los parámetros. El ejemplo que sigue ilustra esta cuestión.

Supongamos que el sistema de la planta es modelado por

$$x_{k+1} = \alpha_1 x_k^2 + \beta_0 u_k + \beta_1 u_{k-1}$$

y se sabe que

$$1.9 < \alpha_1 < 2.1, \quad 4 < \beta_0 < 4.1 \text{ y } 0.9 < \beta_1 < 1.1 \quad (6.18)$$

Se quiere regular asintóticamente la salida, arrancando con condiciones iniciales  $x_0 = 1$ ,  $u_{-1} = 1$ . Estudiemos dentro de qué conjunto puede elegirse  $\hat{\theta}_0$  para asegurar el objetivo. De acuerdo con lo anterior tiene sentido tomar  $\beta_{\min} = 4$ ,  $\delta_1 = \delta_2 = 1$  y  $\eta_1 = \eta_2 = 1$  y entonces se requiere  $\|\theta - \hat{\theta}_0\| \leq 0.4$ , que se verifica si los elementos de  $\hat{\theta}_0$  pertenecen al intervalo definido por (6.18). Bajo estas condiciones queda asegurado a priori que  $|x_k| \leq 1$ ,  $|u_k| \leq 1 \forall k$  y  $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} 0$ .

## 6.5 Confrontación con otros algoritmos.

1) El trabajo [48] es el primero que resuelve la problemática planteada - al menos para cierta clase de sistemas no lineales - imponiendo condiciones de crecimiento a las no linealidades. El mismo presenta el siguiente modelo:

$$A(q^{-1})\gamma^{-1}(x_k) = q^{-d}B(q^{-1})\{p_0(x_k, \dots, x_{k-n_p}) + p^t(x_k)\theta + q_0(x_k, \dots, x_{k-n_q})u_k\}$$

siendo  $p^t = (p_1, \dots, p_l)$ ,  $p_i : R \rightarrow R$  ( $0 \leq i \leq l$ ),  $\gamma, \gamma^{-1} : R \rightarrow R$  y  $\theta^t = (\theta_1, \dots, \theta_l)$  con

$$|p_i(\cdot)| \leq c_1 + c_2 |\gamma^{-1}(\cdot)|, \quad (6.19)$$

$$A(q^{-1}) = 1 + a_1q^{-1} + \dots + a_nq^{-n}, \\ B(q^{-1}) = b_0 + b_1q^{-1} + \dots + b_mq^{-m}, \quad b_0 \neq 0.$$

Como  $|q_0(\cdot)| > \epsilon$ , definen el control como

$$u_k = \frac{1}{q_0(x_k, \dots, x_{k-n_q})} [-p_0(x_k, \dots, x_{k-n_q}) + v_k].$$

Haciendo el cambio de variables

$$y_k = \gamma^{-1}(x_k)$$

resulta que el sistema no es más que un caso particular de (6.1) con

$$\alpha^t = (-a_1, -a_2, \dots, -a_n, b_0\theta_1, \dots, b_0\theta_l, \dots, b_m\theta_1, \dots, b_m\theta_l), \\ \beta^t = (0, 0, \dots, 0, b_1, \dots, b_m), \\ \phi_k = (y_k, y_{k-1}, \dots, y_{k-n}, p_1(\gamma(y_{k+1-d})), \dots, p_l(\gamma(y_{k+1-d-n}))).$$

Como se puede ver, las no linealidades del sistema considerado en [48] son muy particulares y eso permite mantener la hipótesis de estabilidad del sistema inverso como en el caso lineal mientras que en el caso más general tratado aquí resultan necesarias mayores exigencias sobre los parámetros  $\beta'_i$ s. El artículo [48] se restringe a la subclase donde los  $p'_i$ s satisfacen (6.19) y por ello los resultados allí demostrados, pueden verse como corolario de la Proposición 6.4.1. Notemos también que la hipótesis  $|q_0(\cdot)| > \epsilon$  es equivalente a la Hipótesis F para los sistemas (6.1).

2) De la misma manera que en este Capítulo se trabaja a partir del algoritmo de proyección para sistemas lineales, también se puede generalizar

al caso no lineal el algoritmo de mínimos cuadrados ([20, p.60]). En tal caso, el estimador de parámetros queda definido por

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \frac{\alpha_k P_k \phi_k}{1 + \alpha_k \phi_k^t P_k \phi_k} e_{k+1} \quad (6.20)$$

$$P_{k+1} = P_k - \frac{\alpha_k P_k \phi_k \phi_k^t P_k}{1 + \alpha_k \phi_k^t P_k \phi_k} e_{k+1}, \quad P_0 = I \in R^{m \times m} \quad (6.21)$$

donde  $(\alpha_k)_{k \geq 0}$  es una sucesión de elementos no negativos.

Si se toma  $\alpha_k \equiv 1$ , el esquema adaptativo (6.3)-(6.20)-(6.21) da lugar a resultados semejantes a los establecidos para el esquema (6.3)-(6.6) en la sección anterior.

Por otro lado, de este algoritmo se partió en [28] pero con el propósito de obtener el objetivo de control con *convergencia global*, sin restricciones adicionales sobre las no linealidades. Para ello, se introdujo  $\alpha_k = 1 + \|\phi_{k+1}\|^2$ . Sin embargo, la prueba analítica en dicho trabajo se reduce a una subclase muy particular de sistemas no lineales, precisamente es el subconjunto de (5.12) con  $m = 1$  y  $d_1 = 0$ . Aunque las simulaciones permiten conjeturar que el algoritmo de [28] también funciona para  $m > 1$ , la manipulación algebraica efectuada para el caso  $m = 1$  no es trivialmente generalizable a  $m > 1$  y de hecho, no ha sido desarrollado ( comunicación personal con el autor).

3) En [10] se consideran sistemas de la forma

$$x_{k+1} = \sum_{i=1}^a \alpha_i f_i(\cdot) + \left( \sum_{i=1}^b \beta_i g_i(\cdot) \right) u_k$$

donde  $f_i, g_i$  son funciones *infinitamente diferenciables* que dependen de  $x_{k-n+1}, \dots, x_k, u_{k-m}, \dots, u_{k-1}$ . Si  $b > 1$ , la función que multiplica a  $u_k$  depende de parámetros desconocidos y por lo tanto no es posible aplicar el "one-step-ahead-control" como se hace en [10]. Si  $b = 1$ , se tiene una subclase de (6.1), con  $d = d_2 = 0$ . Los resultados de [10] no son extensibles a sistemas con retardo y el teorema establecido, si bien asegura la existencia de una región de inicialización para aplicar con éxito el esquema propuesto, no determina el cálculo efectivo de la misma.

4) Los resultados desarrollados en este capítulo, también son aplicables al modelo propuesto por [9]. En efecto, en dicho trabajo se presenta

$$x_{k+1} = f_0(X_k, U_k) + g_0(X_k, U_k)u_{k-d+1}$$

con  $d \geq 1$ ,  $X_k = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-n+1})$ ,  $U_k = (u_{k-1}, \dots, u_{k-d-n+1})$  y se ve que trabajando con un cambio de coordenadas adecuado vale

$$x_{k+d} = f_{d-1}(X_k, U_k) + g_{d-1}(X_k, U_k)u_k$$

con  $|g_{d-1}|$  acotado fuera de cero; evidentemente, esto es un caso particular de (6.1). La diferencia es que en [9] las no linealidades son desconocidas (bajo ciertas restricciones) y se las "estima" por medio de algoritmos basados en redes neuronales.

5) El problema de llevar la salida asintóticamente a una referencia prefijada para cierta clase de sistemas no lineales en tiempo discreto también ha sido tratado en [53]. La clase de sistemas que allí se considera incluye a la presentada en este capítulo. Pero las restricciones impuestas a los mismos, para obtener *convergencia global* de los algoritmos propuestos, excluyen justamente a parte de los considerados aquí. De hecho, las hipótesis que ellos manejan son esencialmente: i) condiciones tipo Lipschitz que equivalen a la Hipótesis GG; ii) condiciones verificables sólo una vez que el esquema ha sido aplicado (precisamente, el algoritmo de proyección ortogonalizado) y que para muchos sistemas de la forma (6.1) no se cumplen.

## 6.6 Robustez con respecto a perturbaciones acotadas.

Supongamos que el sistema real que define la planta de control no corresponde exactamente a (6.1) sino que ha sido submodelado pero que el error de modelo es acotado con cota conocida, i.e.,

$$x_{k+1+d} = \theta^t \Phi_k + \omega_{k+1+d} \quad k = 0, 1, \dots \quad (6.22)$$

con  $\sup_{k \geq 1+d} |\omega_k| \leq \Delta$ ,  $\Delta > 0$  conocido y lo que resta, como se definió en la Sección 6.2.

Se verá que resultados como los obtenidos para los sistemas (6.1) aplicando el esquema (6.3)-(6.6), se pueden extender a los sistemas (6.22), si se modifica el estimador de parámetros (6.6) de acuerdo al algoritmo de zona muerta introducido en [42] para sistemas lineales. Esto es,



$$\hat{\theta}'_{k+1} = \hat{\theta}_k + \frac{\Phi_{k-d}}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} f(\epsilon_{k+1})$$

donde  $\gamma > 0$ ,

$$f(\epsilon_{k+1}) = \begin{cases} \epsilon_{k+1} - \Delta & \text{si } \epsilon_{k+1} > \Delta \\ 0 & \text{si } |\epsilon_{k+1}| \leq \Delta \\ \epsilon_{k+1} + \Delta & \text{si } \epsilon_{k+1} < -\Delta \end{cases}$$

y  $\hat{\theta}_{k+1}$  dado por

$$\begin{aligned} \hat{\theta}_{k+1}(i) &= \hat{\theta}'_{k+1}(i) & i \neq m+1 \\ \hat{\theta}_{k+1}(m+1) &= \begin{cases} \hat{\theta}'_{k+1}(m+1) & \text{si } \hat{\theta}'_{k+1}(m+1) \text{sg}\beta(0) \geq \beta_{\min} \\ \text{sg}\beta(0)\beta_{\min} & \text{en caso contrario} \end{cases} \end{aligned} \quad (6.23)$$

El lazo cerrado generado al aplicar (6.3)-(6.23) a (6.22) da lugar a una serie de propiedades que se presentan a continuación. Salvo mención, se conserva la nomenclatura de la Sección 6.2. En primer lugar, ahora se tiene

$$e_{k+1} = -\theta_{k-d}^t \Phi_{k-d} + \omega_{k+1}, \quad (6.24)$$

$$\epsilon_{k+1} = -\theta_k^t \Phi_{k-d} + \omega_{k+1}. \quad (6.25)$$

Debido a la definición (6.23),

$$\|\hat{\theta}_k - \theta\| \leq \|\hat{\theta}'_k - \theta\|. \quad (6.26)$$

Usando las fórmulas (6.23) a (6.26) se obtiene

$$\|\theta_{k+1}\|^2 \leq \|\theta_k\|^2 - \frac{(f(\epsilon_{k+1}))^2}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} \quad (6.27)$$

de donde se sigue que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(f(\epsilon_{k+1}))^2}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} = 0. \quad (6.28)$$

Por otro lado, de (6.23) y (6.26) se llega a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|\theta_{k+1} - \theta_k\| = 0. \quad (6.29)$$

Debido a la definición de  $f(\epsilon_{k+1})$ , (6.28) puede reescribirse

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sigma_k (|\epsilon_{k+1}| - \Delta)^2}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} = 0 \quad (6.30)$$

con  $\sigma_k = \begin{cases} 0 & \text{si } |\epsilon_{k+1}| \leq \Delta \\ 1 & \text{en caso contrario.} \end{cases}$

De (6.24) y (6.25) se ve que sigue siendo válida la fórmula

$$e_{k+1} = \epsilon_{k+1} + \Phi_{k-d}^T (\theta_k - \theta_{k-d}),$$

de modo que aplicando la desigualdad triangular, la definición de  $\sigma_k$  y dividiendo por  $\sqrt{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2}$  se arriba a

$$\frac{|\epsilon_{k+1}| - \Delta}{\sqrt{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2}} \leq \frac{\sigma_k (|\epsilon_{k+1}| - \Delta)}{\sqrt{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2}} + \|\theta_k - \theta_{k-d}\|. \quad (6.31)$$

Hechas estas acotaciones, se podrá establecer un par de resultados, el primero de carácter global y el segundo local. Para ello se reconsideran las hipótesis y las constantes definidas en la Sección 6.2. Las demostraciones son muy parecidas a las correspondientes de las Proposiciones 6.4.1 y 6.4.2 por lo cual, las mismas serán muy breves, restringiéndose a los detalles que las diferencian de las anteriores.

**Proposición 6.6.1** *Supongamos que el sistema real está dado por (6.22) bajo las hipótesis B, F, GG y que  $C_2 < 1 - \frac{e_2 C_1}{\epsilon}$ . Sea  $(x_k^*)_{k \geq 0}$  señal fija, conocida y acotada. Si se aplica el esquema adaptativo (6.3)-(6.23) para cualquier conjunto  $\{x_i : -d_1 \leq i \leq d ; u_j : -(d_2 + d_3) \leq j \leq -1 ; \hat{\theta}_0\}$  de condiciones iniciales se verifica:*

- i)  $(\|\hat{\theta}_k - \theta\|)_{k \geq 0}$  converge,
- ii)  $(x_k)_{k \geq 0}$  y  $(u_k)_{k \geq 0}$  son sucesiones acotadas,
- iii)  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |x_k - x_k^*| \leq \Delta$ .

**Demostración:**

El ítem *i*) es inmediato de (6.27) y el ítem *ii*), se puede probar, una vez demostrado *iii*), de la misma manera que en la Proposición 6.4.1.

Por lo tanto, basta demostrar *ii*). Para esto notar que - ídem en la Proposición 6.4.1 - existen constantes  $M_1, M_2 > 0$  tales que

$$\|\Phi_k\| \leq M_1 \max_{j \leq k+1+d} |x_j| + M_2 \quad \forall k. \quad (6.32)$$

Ahora, deben considerarse dos posibilidades:

- 1) Si  $\limsup_{k \rightarrow \infty} (|e_{k+1}| - \Delta) \leq 0$ , *iii*) es inmediato.
- 2) Supongamos  $\limsup_{k \rightarrow \infty} (|e_{k+1}| - \Delta) > 0$ . Aplicando en (6.31) la desigualdad de Schwartz, junto a las fórmulas (6.29) y (6.30) se deduce que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(|e_{k+1}| - \Delta)^2}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} = 0.$$

Aplicando (6.32) a esto último, vía el *Lema Técnico Clave* ( ver Apéndice) se obtiene *iii*).

**Proposición 6.6.2** *Consideremos que el sistema real está dado por (6.22) bajo las hipótesis B y GL . Sea  $(x_k^*)$  una señal fija, conocida y acotada con  $|x_k^*| \leq M \forall k$ . Supongamos que  $D_2 < \frac{\epsilon}{\eta_2}$  y que es posible elegir  $\delta_1, \delta_2 > 0$  tales*

*que  $\delta_1 > \Delta$  y  $\delta_2 > \frac{D_1 \eta_1 + \frac{M}{\beta_{\min}}}{\epsilon - D_2 \eta_2}$  con  $\eta_i = \eta_i(\delta_1 + M, \delta_2)$  ( $i = 1, 2$ ) y  $\epsilon = \epsilon(\delta_1 + M, \delta_2)$  de acuerdo a (6.16). Si se aplica el esquema adaptativo (6.3)-(6.23) con condiciones iniciales*

*$\{x_i : -d_1 \leq i \leq d ; u_j : -(d_2 + d_3) \leq j \leq -1 ; \hat{\theta}_0\}$  que verifican:*

$$|x_i - x_i^*| \leq \delta_1 \quad \forall i \leq d;$$

$$\text{si } d_2 > 0 \text{ o } d_3 > 0 : |u_j| \leq \delta_2 \quad \forall j \leq -1;$$

$$\|\hat{\theta}_0 - \theta\| \leq \min\left\{ \frac{\delta_1 - \Delta}{\sqrt{\eta_1^2 + (d_2 + 1)\eta_2^2 \delta_2^2}}, \beta_{\min} \frac{(\epsilon - D_2 \eta_2)\delta_2 - D_1 \eta_1 - M/\beta_{\min}}{m\eta_1 + d_2 \eta_2 \delta_2} \right\}$$

*Entonces:*

*i)  $(\|\hat{\theta}_k - \theta\|)_{k \geq 0}$  converge,*

*ii)  $|x_i - x_i^*| \leq \delta_1$  y  $|u_i| \leq \delta_2 \forall i \geq 0$ ,*

*iii)  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |x_k - x_k^*| \leq \Delta$ .*

### **Demostración:**

Sigue los mismos pasos de la demostración de la Proposición 6.4.2, teniendo en cuenta la diferencia en cuanto a las restricciones sobre  $\|\hat{\theta}_0 - \theta\|$ .

**Nota 6.4:** Observemos que los resultados son análogos a los obtenidos para el modelado exacto salvo que la convergencia de la salida real sólo puede asegurarse dentro de una banda alrededor de la referencia cuya dimensión depende de la cota de la perturbación.

La cuestión del submodelado con error acotado de cota conocida ha despertado interés en el caso lineal. La introducción de los algoritmos de zona muerta se debe a Egardt ([13]) y desde entonces, diversas modificaciones se han desarrollado sobre el mismo. El esquema presentado en [42] es uno de los últimos. Las características por las cuales constituye un paso adelante en este tema son a) consigue el objetivo de control dentro de la mínima cota posible y b) es aplicable a sistemas con retardo. Éstas motivaron su elección para combinarlo con el algoritmo anterior y aplicarlo a los sistemas no lineales tratados.

Cabe mencionar que la subclase de sistemas considerada en [1] incluye a los sistemas (6.22) pero allí el submodelado es asumido como estocástico y además, los resultados son de muy poca rigurosidad matemática.

## **6.7 Conclusiones.**

Cierta clase de sistemas SISO no lineales a tiempo discreto ha sido considerada. Precisamente, se trata de sistemas no lineales parametrizables con parámetros desconocidos. Las no linealidades son conocidas y dependen tanto de salidas como de entradas anteriores, pero una ley de retroalimentación puede definirse de tal manera que resulten lineales sobre el control. Mediante una adecuada generalización del algoritmo clásico, se obtienen dos resultados. En el primero se logra convergencia global del lazo cerrado, imponiendo ciertas condiciones de crecimiento a las funciones no lineales intervinientes. El segundo resultado establece las restricciones necesarias sobre las condiciones iniciales del lazo si cualquier no linealidad es admitida.

Por último, el mismo algoritmo es enriquecido con la incorporación de un esquema de zona muerta y éste resulta robusto frente a sistemas perturbados

por errores acotados.

El problema de hallar un esquema de control adaptativo que verifique el objetivo propuesto con convergencia global y sin demasiadas restricciones sobre las no linealidades intervinientes, es una asignatura pendiente entre los trabajos dedicados al tema. Esta cuestión será tratada en el próximo capítulo.

# Capítulo 7

## SISTEMAS LINEALIZABLES RESPECTO AL CONTROL - II

### 7.1 Introducción.

El problema de seguimiento de trayectoria con convergencia global, en el caso no lineal en tiempo discreto es de gran interés y de poco desarrollo. Merecen recordarse [48], [28] y [53]. En todos estos trabajos se han extendido métodos de control adaptativo conocidos para sistemas lineales a alguna clase de sistemas no lineales parametrizados.

Como se señala en [48], la herramienta esencial que da paso a la convergencia global en el caso lineal es el *Lema Técnico Clave* pero éste deja de ser útil en el caso no lineal. Los primeros pasos dados para superar esta dificultad se efectuaron fijando hipótesis sobre el crecimiento ( de tipo lineal) de las no linealidades. Esta perspectiva, presente en [48], [53] y en los capítulos 5 y 6 de este trabajo, restringe notablemente el conjunto de sistemas considerados. Con el propósito de obtener convergencia global, sin restricciones adicionales sobre las no linealidades, en [28] se introduce una modificación ad-hoc en el algoritmo de mínimos cuadrados pero el éxito de la misma sólo es probada sobre una clase muy restringida de sistemas.

En este capítulo se diseña un nuevo algoritmo adaptativo aplicable a los sistemas presentados en el capítulo anterior para resolver el problema de seguimiento de trayectoria con convergencia global del lazo cerrado. Más concretamente, se introducirá una ley distinta de estimación de parámetros que a través de un proceso de ortogonalización permite lograr el objetivo.

## 7.2 Construyendo un nuevo algoritmo.

Con el propósito de obtener una ley de control adaptativa con convergencia global para cierta subclase de sistemas no lineales, será necesario abandonar el algoritmo de proyección e introducir una ley de estimador de parámetros distinta.

Consideremos la siguiente clase de sistemas:

$$x_{k+1+d} = \phi_k^t \theta + u_k \quad k = 0, 1, \dots \quad (7.1)$$

siendo  $\theta^t = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) \in R^m$ , vector de parámetros desconocidos y  $\phi_k = \phi(x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-d_1}, u_{k-1}, \dots, u_{k-d_3})$  con  $\phi : R^{d_1+d_2+d_3+1} \rightarrow R^m$  función acotada sobre conjuntos acotados. Observar que los sistemas (7.1) constituyen la subclase de (6.1) caracterizada por  $d_2 = 0$  y  $\beta(0)$  conocido.

Como ya es usual, se toma como modelo de diseño:

$$\hat{x}_{k+1+d} = \phi_k^t \hat{\theta}_k + u_k$$

y siendo  $(x_k^r)_{k \geq 0}$  la señal de referencia se define la ley de control

$$u_k = x_{k+1+d}^r - \phi_k^t \hat{\theta}_k. \quad (7.2)$$

Nuevamente serán de utilidad,

$$\begin{aligned} \theta_k &= \hat{\theta}_k - \theta, \\ e_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{x}_{k+1} = -\phi_{k-d}^t \theta_{k-d}. \end{aligned} \quad (7.3)$$

Antes de introducir el algoritmo, pueden verse algunos puntos que sirven como motivación del mismo. Para ello, basta reducirse al caso  $d = 0$ , es decir,

$$x_{k+1} = \phi_k^t \theta + u_k \quad k = 0, 1, \dots$$

El algoritmo de proyección original, o sea con  $\gamma = 0$ , es

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \frac{\phi_k}{\|\phi_k\|} e_{k+1}$$

y verifica

$$\theta_{k+1}^t \cdot \phi_k = 0 \quad \forall k \geq 0.$$

Resulta prometedor un estimador que verifique tal condición de ortogonalidad pero con respecto a todas las  $\phi'_k$ s anteriores. En efecto, supongamos que

$$\theta_{k+1} \perp [\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k] \subset R^m \quad \forall k \geq 0 \quad (7.4)$$

donde  $[g_0, \dots, g_k]$  es el subespacio de  $R^m$  generado por los vectores  $\{g_0, \dots, g_k\}$  y  $\perp$  significa "ortogonal". Se tiene que:

a) Si existe  $k'$  tal que  $\dim[\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_{k'}] = m$ , por (7.4)  $\theta_{k+1} = 0$   $\forall k \geq k'$  y por lo tanto,  $e_{k+1} = 0 \forall k > k'$ .

b) Si no se verifica a), entonces la sucesión  $(\phi_k)_{k \geq 0}$  genera un subespacio de  $R^m$  de dimensión  $m' < m$ . En tal caso, existe un subconjunto  $\{\phi_{k_1}, \dots, \phi_{k_{m'}}\}$  que constituye una base de dicho subespacio y además,  $\phi_k = \sum_{i=1}^{m'} \alpha_i \phi_{k_i}$   $\forall k > k_{m'}$  con lo cual  $e_{k+1} = 0 \forall k > k_{m'}$ .

En síntesis, en ambos casos se obtiene el objetivo de control en finitos pasos y en particular, si vale a) el estimador converge al valor verdadero del parámetro.

Se trata entonces de definir un estimador de parámetros tal que su diferencia con el verdadero parámetro verifique (7.4). Obsérvese que para cada elección de las condiciones iniciales, los vectores  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_k$  generan un subespacio  $S_k \subset R^m$  tal que  $S_k \subseteq S_{k+1}$  y  $\dim(S_k) \leq \dim(S_{k+1})$ . Si  $(p_i)_{i=1}^j$  es base ortonormal de  $S_k$ , se necesita:

$$(\theta - \hat{\theta}_{k+1}) \perp p_i \quad (1 \leq i \leq j)$$

lo cual implica  $\hat{\theta}_{k+1} p_j = \theta^t p_j$ . Cómo construir la base ortonormal?. Cómo definir  $\hat{\theta}_k$ ?. Se trata de generar los  $p_i$ s a partir de los  $\phi_i$ s mediante un proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt, en tanto que  $\hat{\theta}_{k+1}$  se construye como la proyección de  $\theta$  sobre el espacio  $S_k$ . Esto es, si al llegar a la iteración  $k$  ya se tiene  $\{p_1, \dots, p_{j-1}\}$  base ortonormal de  $S_{k-1}$ , sea:

$$q_j = \phi_k - \sum_{i=1}^{j-1} (\phi_k^t \cdot p_i) p_i,$$

Si  $q_j = 0$ ,  $S_{k-1} = S_k$  y  $\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k$

Si  $q_j \neq 0$ , sea  $p_j = \frac{q_j}{\|q_j\|}$  y  $\hat{\theta}_{k+1} = \sum_{i=1}^j a_i p_i$  con

$$a_j = \theta^t p_j = \frac{\theta^t (\phi_k - \sum_{i=1}^{j-1} (\phi_k^t \cdot p_i) p_i)}{\|q_j\|} = \frac{e_{k+1} + \hat{\theta}_k^t \cdot \phi_k - \sum_{i=1}^{j-1} (\phi_k^t \cdot p_i) a_i}{\|q_j\|}$$



En la próxima sección se define el algoritmo de control adaptativo a ser aplicado a cualquier sistema de la forma (7.1). Para esto, será útil recordar la definición

$$\epsilon_{k+1} = x_{k+1} - \phi_{k-d}^t \hat{\theta}_k = -\phi_{k-d}^t \theta_k. \quad (7.5)$$

La ley de estimación de parámetro está dada por

### 7.3 Algoritmo de ortogonalización.

#### Algoritmo O1

Inicialización :  $b_0 = 0, j = 0$

Para  $k = 0, 1, \dots$

Si  $\epsilon_{k+1} = 0$

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k$$

Si  $\epsilon_{k+1} \neq 0$

$$j = j + 1$$

si  $j = 1$  entonces

$$q_1 = \phi_{k-d}$$

$$p_1 = q_1 / \|q_1\|$$

$$a_1 = \frac{\epsilon_{k+1} + \hat{\theta}_k^t \phi_{k-d}}{\|q_1\|}$$

si  $j > 1$  entonces

$$q_j = \phi_{k-d} - \sum_{i=1}^{j-1} (\phi_{k-d}^t \cdot p_i) p_i$$

$$p_j = q_j / \|q_j\|$$

$$a_j = \frac{\epsilon_{k+1} + \hat{\theta}_k^t \phi_{k-d} - \sum_{i=1}^{j-1} (\phi_{k-d}^t \cdot p_i) a_i}{\|q_j\|}$$

$$b_j = b_{j-1} + a_j p_j$$

$$\hat{\theta}_{k+1} = b_j$$

**Proposición 7.3.1** *Supongamos que el sistema de control está regido por (7.1) y sea  $(x_k^*)_{k \geq 0}$  señal de referencia fija. Si se aplica el esquema adaptativo (7.2)-(O1) para cualquier  $(x_{-d_1}, \dots, x_0, \dots, x_d, \dots, u_{-d_3}, \dots, u_{-1}, \hat{\theta}_0)$  como condición inicial se verifica*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (x_k - x_k^*) = 0.$$

**Demostración:**

Consiste en probar que existe  $k_{\max}$  tal que

$$\epsilon_{k+1} = 0 \quad \text{y} \quad \hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k \quad \forall k \geq k_{\max}. \quad (7.6)$$

Como de (7.3) y (7.5) se tiene que

$$e_{k+1} = \epsilon_{k+1} + \phi_{k-d}^t (\hat{\theta}_k - \hat{\theta}_{k-d}), \quad (7.7)$$

resulta que

$$e_{k+1} = 0 \quad \forall k \geq k_{\max} + d$$

que conduce a la tesis.

Sea

$$\mathcal{K} = \{k \geq 0 : \epsilon_{k+1} \neq 0\}.$$

Si  $\mathcal{K} = \emptyset$ , el resultado es inmediato.

En otro caso, veamos por inducción en  $j$  ( $1 \leq j \leq \text{card}(\mathcal{K})$ ), que el algoritmo O1 verifica

- $q_j \neq 0$
- $a_j = \theta^t \cdot q_j$
- $(b_j - \theta) \perp p_i \quad i = 1, \dots, j$

Sea  $j = 1$ . Si  $k_1$  es el primero de los  $k$  tal que  $\epsilon_{k+1} \neq 0$ , de (7.5) resulta que  $q_1 = \phi_{k_1-d} \neq 0$ . Además por definición en el algoritmo O1,

$$a_1 = \frac{\epsilon_{k_1+1} + \hat{\theta}_{k_1}^t \phi_{k_1-d}}{\|\phi_{k_1-d}\|} = \theta^t \frac{\phi_{k_1-d}}{\|\phi_{k_1-d}\|} = \theta^t p_1,$$

$$b_1 = a_1 p_1 = (\theta^t p_1) p_1 \Rightarrow (b_1 - \theta)^t p_1 = 0.$$

Supongamos que valen las propiedades para  $j - 1$ . Sea  $k_j$  el  $j$ -ésimo de los  $k$  tal que  $\epsilon_{k+1} \neq 0$ . Si  $q_j = 0$ , luego  $\phi_{k_j-d} = \sum_{i=1}^{j-1} (\phi_{k_j-d}^t \cdot p_i) p_i$  lo cual implica por (7.5) y definición de  $\hat{\theta}_{k_j}$ ,  $\epsilon_{k_j+1} = 0$  y por lo tanto, una contradicción.

En conclusión  $q_j \neq 0$ . Por definición y recurriendo a la hipótesis inductiva, resulta

$$a_j = \frac{\theta^t \phi_{k_j-d} - \sum_{i=1}^{j-1} (\phi_{k_j-d}^t \cdot p_i) a_i}{\|q_j\|} = \frac{\theta^t (\phi_{k_j-d} - \sum_{i=1}^{j-1} (\phi_{k_j-d}^t \cdot p_i) p_i)}{\|q_j\|} = \theta^t p_j,$$

$$b_j = \sum_{i=1}^j a_i p_i \Rightarrow (b_j - \theta)^t p_i = 0 \quad (1 \leq i \leq j).$$

Sea  $m' = \text{card}(\mathcal{K}) \leq m$ ; por construcción,

$$\theta_{k+1} \perp [p_1, \dots, p_{m'}] \quad \forall k \geq k_{m'}$$

y

$$\phi_{k+1-d} \in [p_1, \dots, p_{m'}] \quad \forall k$$

lo que implica (7.6) con  $k_{\max} = k_{m'} + 1$ .

### Propiedades del esquema (7.2)-(O1)

i) No es difícil comprobar en ejemplos como los de las Notas 5.2 y 5.3, que si se aplica (7.2)-(O1) el objetivo de control se logra en dos pasos. Pero no se cuenta con cota a priori de las variables del lazo y debido a la exigencia impuesta por la ortogonalización, pueden originarse valores muy grandes en términos comparativos con respecto a la referencia o a las condiciones iniciales. El algoritmo funciona para cualquier señal ( aún no acotada) aunque esto no tenga sentido desde el punto de vista práctico. Por otro lado, si  $d_3 > 0$  - e inclusive con señal de referencia acotada - el lazo cerrado puede generar una sucesión de controles no acotados; esto se puede ver en ejemplos simples como

$$x_{k+1} = a u_{k-1}^2 + u_k$$

con  $x^* = 0$ ,  $x_0 = 0$  y  $u_{-1}, \hat{a}_0 : \hat{a}_0 \neq a$  y  $|a \hat{a}_0 u_{-1}^2| > 1$ .

ii) El algoritmo es generalizable a los sistemas (6.1) y funciona siempre que  $|\hat{\beta}_k(0)| > 0 \quad \forall k$ . Sin embargo, esto no puede asegurarse a priori y aún bajo la hipótesis B, modificar la definición de  $\hat{\theta}_k$  para asegurar  $|\hat{\beta}_k(0)| > \beta_{\min}$  implica perder la ortogonalidad de  $\theta_k$  respecto a los  $\phi_i$ 's anteriores que es la clave del algoritmo.

iii) De la demostración de la proposición se desprende que la salida alcanza la señal deseada en finitos pasos pero en general no se puede predecir en cuántos.

Vale la pena notar que bajo ciertas restricciones, es posible tener una estimación del número de pasos necesarios para lograr el objetivo. En efecto, si  $x_k^* \equiv x^*$ ,  $d_3 = 0$  y  $\phi(x^*, \dots, x^*) = 0$ , se puede asegurar que  $k_{\max} \leq m(d_1 + d)$ . Observar que si para algún  $k$  se cumple  $\epsilon_{k+i} = 0$  con  $i = 1, \dots, d_1 + d + 1$ , resulta  $e_{k'} = 0 \forall k' > k + 1 + d + d_1$ . Si esta situación no se diese nunca, entonces sólo puede haber  $(d_1 + d)$   $\epsilon'_k$ s consecutivos nulos; en tal caso como por construcción del algoritmo, se agrega un elemento más a la base cada vez que  $\epsilon_k \neq 0$ , superadas las  $m(d_1 + d)$  iteraciones, el objetivo está garantizado.

iv) La sucesión  $(\theta_k)_{k \geq 0}$  es finita y decreciente en norma. Lo primero se ve inmediatamente en la demostración. Para lo segundo, sea  $\{p_1, \dots, p_{m'}\}$  el conjunto ortonormal generado por el algoritmo O1 y  $\{p_{m'+1}, \dots, p_m\}$  un conjunto ortonormal que completa el primero a una base ortonormal de  $R^m$ . Como

$$\theta = \sum_{i=1}^m a_i p_i, \quad \hat{\theta}_{k_j+1} = \sum_{i=1}^j a_i p_i, \quad \hat{\theta}_{k_{(j+1)}+1} = \sum_{i=1}^{j+1} a_i p_i,$$

resulta  $\|\theta_k\| \leq \|\theta_{k'}\| \quad \forall k \geq k'$ .

v) El algoritmo O1 no es más que una forma de resolver secuencialmente un conjunto de ecuaciones lineales con respecto al vector desconocido  $\theta$ . El conjunto de ecuaciones disponibles es infinito ( cada una corresponde a una iteración del sistema); si existen  $m$  ecuaciones linealmente independientes, se obtiene única solución, que obviamente es el valor del parámetro verdadero; si no, el algoritmo puede seleccionar otras de las posibles soluciones del sistema.

En este sentido, el algoritmo coincide con el llamado "algoritmo de proyección ortogonalizado" ([20], p.54) y que se reescribe a continuación:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \frac{P_k \phi_k}{\phi_k^t P_k \phi_k} \epsilon_{k+1}$$

$$P_{k+1} = P_k - \frac{P_k \phi_k \phi_k^t P_k}{\phi_k^t P_k \phi_k}, \quad P_0 = I \in R^{m \times m}$$

Este algoritmo es superado por el algoritmo O1 en dos sentidos:

a) Dado que en cada iteración, hay que calcular la matriz de covariancia  $P_k$ , éste es de mayor complejidad.

b) La división por  $\phi_k^t P_k \phi_k$  puede traer problemas de inestabilidad numérica. En el caso lineal se lo corrigió sumando un valor  $\gamma > 0$  - algoritmo de mínimos cuadrados, ([20], p.58) - pero tal algoritmo deja de ser útil en el caso no lineal.

En cambio, una modificación muy simple puede hacerse en el algoritmo O1, que también presenta problemas si  $\|q_j\|$  se hace muy pequeña y que permite obtener el objetivo de control con la precisión que se desee:

## 7.4 Algoritmo de ortogonalización modificado.

### Algoritmo O2

*Inicialización* :  $b_0 = 0, j = 0$

*Para*  $k = 0, 1, \dots$

*Si*  $|\epsilon_{k+1}| \leq \delta$

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k$$

*Si*  $|\epsilon_{k+1}| > \delta$

$$j = j + 1$$

*si*  $j = 1$  *entonces*

$$q_1 = \phi_{k-d}$$

$$p_1 = q_1 / \|q_1\|$$

$$a_1 = \frac{\epsilon_{k+1} + \hat{\theta}_k^t \phi_{k-d}}{\|q_1\|}$$

*si*  $j > 1$  *entonces*

$$q_j = \phi_{k-d} - \sum_{i=1}^{j-1} (\phi_{k-d}^t \cdot p_i) p_i$$

$$p_j = q_j / \|q_j\|$$

$$a_j = \frac{\epsilon_{k+1} + \hat{\theta}_k^t \phi_{k-d} - \sum_{i=1}^{j-1} (\phi_{k-d}^t \cdot p_i) a_i}{\|q_j\|}$$

$$b_j = b_{j-1} + a_j p_j$$

$$\hat{\theta}_{k+1} = b_j$$

**Proposición 7.4.1** *Supongamos que el sistema de control está regido por (7.1), sean  $(x_k^*)_{k \geq 1}$  señal de referencia fija y  $\delta > 0$  arbitrario. Si se aplica el esquema adaptativo (7.2)-(O2) para cualquier condición inicial  $(x_{-d_1}, \dots, x_0, \dots, x_d, \dots, u_{-d_3}, \dots, u_{-1}, \hat{\theta}_0)$  se verifica*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x_k^*| \leq \delta.$$

### Demostración:

Consiste en probar que existe  $k_{\max}$  tal que

$$|\epsilon_{k+1}| \leq \delta \quad \text{y} \quad \hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k \quad \forall k \geq k_{\max}. \quad (7.8)$$

De aquí, ídem se detalló para la proposición anterior

$$|e_{k+1}| \leq \delta \quad \forall k \geq k_{\max} + d$$

y por ende, la tesis.

Sea

$$\mathcal{K} = \{k \geq 0 : |\epsilon_{k+1}| > \delta\}.$$

Si  $\mathcal{K} = \emptyset$ , el resultado es inmediato.

Si no, vemos por inducción en  $j$  ( $1 \leq j \leq \text{card}(\mathcal{K})$ ) que el algoritmo O2 verifica:

- $\|q_j\| > \delta / \|\theta_0\|$
- $a_j = \theta^t \cdot q_j$
- $(b_j - \theta) \perp p_i \quad i = 1, \dots, j$

La demostración de la dos últimas propiedades es igual que en la Proposición 7.3.1. Por lo tanto, sólo se verá la primera.

Sea  $j = 1$ . Sea  $k_1$  el primero de los  $k$  tal que  $|\epsilon_{k+1}| > \delta$ . Suponiendo que  $\|q_1\| \leq \delta / \|\theta_0\|$  se llega a  $|\epsilon_{k_1+1}| \leq \delta$  y queda probado por el absurdo.

Supongamos que valen las propiedades para  $j - 1$ . Por construcción,  $\|\theta_k\| \leq \|\theta_0\| \quad \forall k$ . Sea  $k_j$  el  $j$ -ésimo de los  $k$  tal que  $|\epsilon_{k+1}| > \delta$  y supongamos que  $\|q_j\| \leq \delta / \|\theta_0\|$ . Resulta el absurdo como en lo anterior y se concluye la validez de la propiedad.

Sea  $m' = \text{card}(\mathcal{K}) \leq m$ . Resulta que vale (7.8) con  $k_{\max} = k_{m'} + 1$ .

**Nota 7.1:** Robustez frente a perturbaciones aditivas acotadas.

El algoritmo O2 es además robusto frente a perturbaciones aditivas acotadas. Más precisamente, supongamos que la clase de sistemas a considerar está dado por

$$x_{k+1+d} = \theta^t \phi_k + u_k + \omega_{k+1+d} \quad k = 0, 1, \dots \quad (7.9)$$

con  $\sup_k |\omega_k| \leq \Delta$ , siendo  $\Delta > 0$  constante conocida. Todos los restantes elementos que definen(7.9) se hallan bajo las mismas hipótesis que las establecidas para (7.1).

Observemos que si se aplica el control (7.2) a (7.9) resulta

$$e_{k+1} = -\phi_{k-d}^t \theta_{k-d} + \omega_{k+1}$$

$$\epsilon_{k+1} = -\phi_{k-d}^t \theta_k + \omega_{k+1}$$

y que la fórmula (7.7) sigue siendo válida. Por lo cual es obvio - repasando la demostración de la Proposición 7.4.1 - que si se reemplaza  $\delta$  por  $\delta + \Delta$  resulta:

**Proposición 7.4.2** *Supongamos que el sistema de control está regido por (7.9) y se quiere llevar la salida a una referencia  $(x_k^*)_{k \geq 0}$ . Si se elige  $\delta_1 > 0$  arbitrario y se aplica (7.2)-(O2) con  $\delta = \delta_1 + \Delta$ , para cualquier conjunto de condiciones iniciales se verifica*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_k - x_k^*| \leq \delta_1 + \Delta.$$

## 7.5 Conclusiones

Una nueva ley de control adaptativo es propuesta con el propósito de obtener convergencia global del lazo cerrado. Ésta es aplicable a una subclase de los sistemas introducidos en el capítulo anterior. El esquema permite alcanzar la trayectoria deseada en finitos pasos y agregando una simple modificación, es posible mejorar su estabilidad y su robustez frente a perturbaciones acotadas.

# Capítulo 8

## COMPLEMENTOS

### 8.1 Introducción.

Ciertos sistemas no lineales que no han sido considerados anteriormente serán tratados en este capítulo. Debido a sus características, es posible desarrollar extensiones o modificaciones más o menos inmediatas sobre los algoritmos vistos de manera de poder aplicarlos a estos sistemas y verificar los objetivos de control propuestos.

Primero, se reconsideran los sistemas tratados en el Capítulo 6 pero levantando la hipótesis acerca de la cota inferior de la función que multiplica al control. Se verá que bajo ciertas restricciones, es posible obtener los objetivos usuales, modificando ligeramente el esquema del Capítulo 6 ( Sección 8.2) o llevando a un caso más general, la propuesta del Capítulo 4 ( Sección 8.3).

Por otro lado, en la Sección 8.4, se presenta una clase de sistemas no lineales DARMA cuya característica esencial es la linealidad respecto a los estados. Esto permite volver a aplicar el algoritmo de proyección como estimador de parámetros y aunque la solución del "*one-step-ahead-control*" ya no se puede garantizar en cualquier caso, es interesante analizar el alcance del esquema resultante y la posibilidad de nuevas propuestas.

### 8.2 Sistemas no linealizables.

El conjunto de sistemas más amplio hasta aquí considerado está constituido por los de la forma:

$$x_{k+1+d} = \alpha^t \phi_k + B(q^{-1})\psi_k u_k + \omega_{k+1+d} \quad k = 0, 1, \dots \quad (8.1)$$



bajo las condiciones establecidas en (6.22). Tales sistemas son linealizables con respecto al control si verifican la hipótesis  $|\psi(\cdot)| > \epsilon > 0$  ( hipótesis F del Capítulo 6). Esta restricción es usual en la bibliografía ( [1], [48], [9] y [10]) y la misma es fundamental en los resultados obtenidos en el Capítulo 6.

En esta sección, se pretende resolver nuevamente el problema de seguimiento de trayectorias pero para sistemas (8.1) que no cumplen con la hipótesis F. En su lugar, se establecen hipótesis de manera que si  $|\psi_k|$  "se hace muy pequeño" los estados caigan dentro de cierta "cuenca de estabilidad" de la referencia con respecto al sistema libre con lo cual, deteniendo allí la acción del controlador adaptativo, se puede asegurar cierta cota para el comportamiento asintótico de la salida. Por lo tanto, se requiere:

**Hipótesis E1:** El *sistema libre* correspondiente a (8.1) es uniformemente estable en la órbita  $\{x_k^*\}$ ; o sea, dado  $\epsilon_0 > 0$ ,  $\exists \delta_0 = \delta_0(\epsilon_0, \{x_k^*\})$  tal que:

$$\begin{aligned} \text{si para algún } k_1 : |x_i - x_i^*| \leq \delta_0 \quad (k_1 - d_1 \leq i \leq k_1) \\ \text{entonces} \\ |x_i - x_i^*| \leq \epsilon_0 + \Delta \quad \forall i \geq k_2, \text{ para algún } k_2 \geq k_1. \end{aligned} \quad (8.2)$$

*Observación:* Esta definición de estabilidad es una generalización de la definición clásica en la literatura ( ver [20, p.484]); como se admite error de modelado, es natural conformarse con que la salida real y la trayectoria deseada se "aproximen en el infinito" dentro del margen de error, en concordancia con lo obtenido en la Sección 6.6.

Consideramos una subclase de los sistemas representados en (8.1), concretamente aquéllos con  $d_2 = d_3 = 0$ . La necesidad de esta restricción se debe a que se pretende dejar al sistema libre una vez alcanzado el tiempo  $k_1$  donde se verifica (8.2), pero esto no es posible si actúan controles definidos en tiempos anteriores.

Para establecer la segunda hipótesis, se restringirá el objetivo de control al seguimiento hacia una referencia fija, i.e.  $x_k^* \equiv x^*$ .

**Hipótesis E2:** La función  $\psi$  verifica:

$$\{y = (y_0, y_1, \dots, y_{d_1}) / |\psi(y)| \leq \epsilon\} \subset V_{\delta_0}(x^*) \quad \text{con } \epsilon = \epsilon(\delta_0, x^*) \quad (8.3)$$

donde

$$V_{\delta_0}(x^*) = \{x = (x_0, x_1, \dots, x_{d_1}) / |x_i - x^*| \leq \delta_0 \quad \forall i : 0 \leq i \leq d_1\}$$

En síntesis, la subclase de sistemas a considerar es:

$$x_{k+1+d} = \alpha^t \phi(x_k, \dots, x_{k-d_1}) + \beta_0 \psi(x_k, \dots, x_{k-d_1}) u_k + \omega_{k+1+d} \quad (8.4)$$

bajo las hipótesis E1 y E2. Los elementos intervinientes se hallan bajo las mismas condiciones que en (6.1) y (6.22) y el parámetro  $\beta_0$  verifica la hipótesis B del Capítulo 6. El objetivo de control es  $x_k \rightarrow_{k \rightarrow \infty} x^*$ .

El esquema adaptativo a aplicar consiste en:

$$\begin{aligned} \text{si } |\psi_k| > \epsilon, \quad u_k &= \frac{x^* - \hat{\alpha}_k \phi_k}{\beta_k(0)\psi_k} \text{ y } \hat{\theta}_k \text{ según (6.23),} \\ \text{si } |\psi_{k_1}| \leq \epsilon, \quad u_k &= 0 \text{ y } \hat{\theta}_k = \hat{\theta}_{k-1} \quad \forall k \geq k_1. \end{aligned} \quad (8.5)$$

Luego, reconsiderando las hipótesis B, GG y GL del Capítulo 6 ( sin incluir en esta última, la cota inferior de  $|\psi|$ ) se tiene:

**Proposición 8.2.1** Sean el sistema (8.4) bajo las hipótesis B, GG, E1 y E2 y  $x^* \in R$ . Dado  $\epsilon_0$ , existe  $\epsilon = \epsilon(\epsilon_0, x^*) > 0$  tal que si para tal  $\epsilon$  se aplica el esquema adaptativo (8.5), para toda condición inicial  $(x_{-d_1}, \dots, x_{-1}, x_0, \hat{\theta}_0)$  resulta:

- i)  $(\|\hat{\theta}_k - \theta\|)_{k \geq 0}$  converge,
- ii)  $(x_k)_{k \geq 0}$  y  $(u_k)_{k \geq 0}$  son sucesiones acotadas,
- iii)  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |x_k - x^*| \leq \epsilon_0 + \Delta$ .

**Demostración:**

Se reduce a probar iii). Como vale la hipótesis E1,  $\exists \delta_0 = \delta_0(\epsilon_0, x^*)$  que verifica (8.2) y para este  $\delta_0$  vale la hipótesis E2, de modo que se puede elegir  $\epsilon = \epsilon(\delta_0, x^*)$  que verifica (8.3). Por lo tanto:

$$\epsilon = \epsilon(\delta_0(\epsilon_0, x^*), x^*) = \epsilon(\epsilon_0, x^*).$$

Si  $|\psi_k| > \epsilon \quad \forall k$ , por la Proposición 6.6.1, sale  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |x_k - x^*| \leq \Delta$  y por lo tanto, el item iii).

Si  $\exists k_1 : |\psi_{k_1}| \leq \epsilon$ , por hipótesis E2,  $|x_i - x^*| \leq \delta_0 \quad \forall i : k_1 - d_1 \leq i \leq k_1$ . Y por (8.5),  $u_k = 0 \quad \forall k \geq k_1$ . Finalmente, por hipótesis E1,  $\exists k_2$  tal que  $|x_i - x^*| \leq \epsilon_0 + \Delta \quad \forall i \geq k_2$ , lo cual conduce a iii).

**Proposición 8.2.2** Sean el sistema (8.4) bajo las hipótesis B, GL, E1 y E2 y  $x^* \in R$ . Dado  $\epsilon_0$ , existe  $\epsilon = \epsilon(\epsilon_0, x^*) > 0$  tal que si para tal  $\epsilon$  se aplica el esquema adaptativo (8.5) y se fijan  $\delta_1 > \Delta$ ,  $\delta_2 > \frac{D_1 \eta_1 + |x^*|/\beta_{\min}}{\epsilon}$  ( $\eta_1 = \eta_1(\delta_1 + |x^*|)$ ) de acuerdo a (6.16), con  $(x_{-d_1}, \dots, x_{-1}, x_0, \hat{\theta}_0)$  como condición inicial que verifica:

$$\begin{aligned} |x_i - x^*| &\leq \delta_1 \quad \forall i \leq 0, \\ \|\hat{\theta}_0 - \theta\| &\leq \min\left\{ \frac{\delta_1 - \Delta}{\sqrt{\eta_1^2 + \eta_2^2 \delta_2^2}}, \beta_{\min} \frac{\epsilon \delta_2 - D_1 \eta_1 - |x^*|/\beta_{\min}}{m \eta_1} \right\} \end{aligned}$$

Entonces:

- i)  $(\|\hat{\theta}_k - \theta\|)_{k \geq 0}$  converge,
- ii)  $|x_i - x^*| \leq \max\{\delta_1, \epsilon_0 + \Delta\}$ ,  $|u_i| \leq \delta_2 \quad \forall i$ ,
- iii)  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |x_k - x^*| \leq \epsilon_0 + \Delta$ .

**Demostración:**

Se reduce a combinar convenientemente los pasos seguidos en las demostraciones de la proposición anterior y de la Proposición 6.6.2.

**Nota 8.1:** En ambas proposiciones,  $\epsilon_0 > 0$  es arbitrario. Por lo tanto, se obtiene el objetivo de control con tanta precisión como se desee, siempre que ésta esté por encima de la cota de error de modelado.

### 8.3 Sistemas bilineales generalizados.

Otro caso en el que se puede obviar el problema de la restricción sobre la función que multiplica al control es el correspondiente a la clase de sistemas definidos por

$$x_{k+1} = a\varphi(X_k, U_k) + bu_k\varphi(X_k, U_k) + \omega_{k+1} \quad k = 0, 1, \dots \quad (8.6)$$

donde

$$X_k = (x_k, x_{k-1}, \dots, x_{k-d_1}) \quad \text{y} \quad U_k = (u_k, \dots, u_{k-d_3})$$

con  $a$  y  $b$  parámetros desconocidos,  $\varphi$  una función conocida (acotada sobre conjuntos acotados) mientras que  $(\omega_k)_{k \geq 1}$  representa una perturbación acotada con cota conocida o sea  $\sup_{k \geq 1} |\omega_k| \leq \Delta$  con  $\Delta \geq 0$  conocido.

Los sistemas (8.6) constituyen una subclase de (8.1) con  $d = d_2 = 0$ ,  $m = 1$  y  $\varphi = \psi$ . Es justamente esta última particularidad lo que permite levantar la

restricción de  $|\psi|$  acotada inferiormente a cierta distancia de cero. De hecho, son una generalización inmediata de los sistemas bilineales presentados en el Capítulo 4, de modo que siguiendo la misma línea y teniendo como objetivo la regulación, se propone:

- ley de control:

$$u_k = -\frac{\hat{a}_k}{\bar{b}} \quad (8.7)$$

con  $\bar{b}$  estimación fija a priori de  $b$ .

- estimador de parámetros:

$$\hat{a}_{k+1} = \hat{a}_k + \frac{\varphi_k}{\gamma + \varphi_k^2} f(x_{k+1}) \quad (8.8)$$

$$f(x) = \begin{cases} x - \Delta & \text{si } x > \Delta \\ 0 & \text{si } |x| \leq \Delta \\ x + \Delta & \text{si } x < -\Delta \end{cases}$$

siendo

$$\varphi_j = \varphi(X_j, U_j) \quad \text{y} \quad \gamma > 0, \text{ fijo.}$$

Si se define

$$p_k = \frac{b}{\bar{b}} \hat{a}_k - a,$$

es fácil ver que

$$p_{k+1}^2 \leq p_k^2 - \frac{(f(x_{k+1}))^2}{\gamma + \varphi_k^2} \left( 2\frac{b}{\bar{b}} - \left(\frac{b}{\bar{b}}\right)^2 \right)$$

de donde si  $0 < b/\bar{b} < 2$ , se obtiene la convergencia de la sucesión  $(|p_k|)_{k \geq 1}$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(f(x_{k+1}))^2}{\gamma + \varphi_k^2} = 0$ . De aquí, si se pide que  $\varphi$  verifique la hipótesis GG o se restringen adecuadamente las condiciones iniciales, se obtiene

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup |x_k| \leq \Delta$$

en tanto que todas las variables del lazo se mantienen acotadas.

También, a semejanza de lo hecho en el Capítulo 4, se puede estudiar casos donde el sistema real ha sido submodelado despreciando ciertos términos no lineales. Para ello, será necesario introducir hipótesis de suavidad sobre  $\varphi$  y recurrir a las correspondientes herramientas de sistemas dinámicos.

## 8.4 Sistemas afines en los estados.

A lo largo de todo este trabajo, se ha tratado con sistemas que permiten la aplicación del "one-step-ahead-control". Esto no es posible con

$$x_{k+1+d} = \sum_{i=0}^{d_1} p_i(u_k, \dots, u_{k-d_3}) x_{k-i} + p_{d_1+1}(u_k, \dots, u_{k-d_3})$$

siendo  $p_i$  polinomiales en  $u_k, \dots, u_{k-d_3}$ ,

$$p_i(u_k, \dots, u_{k-d_3}) = \beta_i^t \psi_i + \alpha_i$$

con  $\beta_i$  ( $0 \leq i \leq d_1 + 1$ ) vectores reales desconocidos y  $\alpha_i$  ( $0 \leq i \leq d_1 + 1$ ) escalares desconocidos salvo  $\alpha_{d_1+1} = 0$ , en tanto que los  $\psi_i$ 's son vectores conocidos cuyos elementos son monomios escalares en  $u_k, \dots, u_{k-d_3}$ . Por lo tanto, el sistema propuesto puede reescribirse como

$$x_{k+1+d} = \theta^t \Phi_k \tag{8.9}$$

siendo

$$\theta^t = (\beta_0^t, \alpha_0, \beta_1^t, \alpha_1, \dots, \beta_{d_1}^t, \alpha_{d_1}, \beta_{d_1+1}^t),$$

$$\Phi_k^t = (\psi_0 x_k, x_k, \psi_1 x_{k-1}, \dots, \psi_{d_1} x_{k-d_1}, x_{k-d_1}, \psi_{d_1+1}).$$

Estos sistemas son considerados en [11] (ellos los llaman "bilineales generalizados") y se dedican al problema de "excitación persistente", caracterizando la identificabilidad y estableciendo condiciones que garantizan la excitación persistente para estos sistemas. Además, el caso  $d = d_1 = 0$  y  $\beta_1 = 0$  pertenece al conjunto de los llamados "sistemas estado-afín" ([40]) con dimensión del espacio de estados igual a uno. En ([40]) se prueba que la subclase de sistemas estado afín es densa dentro de una clase mucho más amplia de sistemas SISO no lineales.

Desde la perspectiva de este trabajo, estos sistemas resultan interesantes ya que como bien queda claro de (8.9) pueden ser tratados como modelos DARMA y aplicarse un algoritmo de identificación clásico. En efecto, consideremos el siguiente sistema:

$$x_{k+1+d} = \theta^t \Phi_k + \omega_{k+1+d} \tag{8.10}$$

y el modelo de diseño:

$$\hat{x}_{k+1+d} = \hat{\theta}_k^t \Phi_k. \quad (8.11)$$

Tomando nuevamente el algoritmo de zona muerta de [42] como ley de identificación de parámetros:

$$\hat{\theta}_{k+1} = \hat{\theta}_k + \frac{\Phi_{k-d}}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} f(\epsilon_{k+1}) \quad (8.12)$$

donde  $\gamma > 0$ ,

$$\begin{aligned} \epsilon_{k+1} &= x_{k+1} - \hat{\theta}_k^t \Phi_{k-d}, \\ f(\epsilon_{k+1}) &= \begin{cases} \epsilon_{k+1} - \Delta & \text{si } \epsilon_{k+1} > \Delta \\ 0 & \text{si } |\epsilon_{k+1}| \leq \Delta \\ \epsilon_{k+1} + \Delta & \text{si } \epsilon_{k+1} < -\Delta \end{cases} \end{aligned}$$

se concluye:

**Proposición 8.4.1** *Si se aplica el algoritmo de identificación (8.12) al sistema (8.10) se tiene:*

i) *la sucesión  $(\|\hat{\theta}_k - \theta\|)_{k \geq 0}$  converge.*

*Si además,*

a)  *$(u_k)_{k \geq 0}$  es acotada,*

b)  *$(x_k)_{k \geq 0}$  o  $(\hat{x}_k)_{k \geq 0}$  es acotada.*

*Entonces:*

ii)  *$(x_k)_{k \geq 0}$  y  $(\hat{x}_k)_{k \geq 0}$  son ambas acotadas,*

iii)  *$\limsup_{k \rightarrow \infty} |x_k - \hat{x}_k| \leq \Delta.$*

**Demostración:**

Como en la Sección 6.6, se prueba la validez del item i).

Sea  $e_{k+1} = x_{k+1} - \hat{x}_{k+1}$ . Trabajando como en la demostración de la Proposición 6.6.1, se obtiene que:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} (|e_{k+1}| - \Delta) \leq 0$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(|e_{k+1}| - \Delta)^2}{\gamma + \|\Phi_{k-d}\|^2} = 0. \quad (8.13)$$

La primera no es otra cosa que iii), que a su vez implica, por b), el punto ii).

Veamos qué pasa si vale la segunda.

Supongamos que  $(\hat{x}_k)_{k \geq 0}$  no es acotada. Entonces por *b)*,  $(x_k)_{k \geq 0}$  lo es. De esto último y *a)* se tiene que  $(\|\Phi_k\|)_{k \geq 0}$  es acotada. Junto a (8.13), lo anterior conduce a  $\lim_{k \rightarrow \infty} (|e_{k+1}| - \Delta) = 0$ , obteniéndose una contradicción.

Supongamos que  $(x_k)_{k \geq 0}$  no es acotada. Entonces por *b)*,  $(\hat{x}_k)_{k \geq 0}$  lo es. Debido a *a)* y a que  $\Phi_k$  es lineal respecto a los estados y polinomial respecto a los controles, resulta

$$\|\Phi_{k-d}\| \leq C \max_{i \leq k+1} |x_i| \quad (8.14)$$

para cierta  $C > 0$ . Entonces, se puede repetir los mismos pasos que en la última parte de la demostración de la Proposición 6.6.1 lo cual lleva a  $\lim_{k \rightarrow \infty} (|e_{k+1}| - \Delta) = 0$ , y nuevamente a una contradicción.

En resumen se ha probado el ítem *ii)* y como valen (8.13) y (8.14), a continuación se deduce el ítem *iii)*, por medio del *Lema Técnico Clave* ( ver Apéndice).

Observar que el resultado anterior se logra gracias a que la función  $\Phi$  es afín en los estados . Pero el hecho de que sea polinomial en los controles no permite, en general, resolver el "*one-step-ahead-control*". Por lo tanto, no se puede garantizar el objetivo de control si se implementa la correspondiente estrategia de control adaptativo pues se debe resolver la ecuación no lineal

$$x_{k+1+d}^* = \hat{\theta}_k^t \Phi_k \quad (8.15)$$

para la señal de referencia  $(x_k^*)_{k \geq 1+d}$  dada. Luego, sólo puede decirse:

**Corolario 8.4.1** *Sea el sistema de control (8.10) y sea  $(x_k^*)_{k \geq 1+d}$  señal de referencia dada, fija y acotada. Si se aplica el esquema de control adaptativo (8.12)-(8.15) y se obtiene  $(u_k)_{k \geq 0}$  acotada. Entonces:*

- i)  $(\|\hat{\theta}_k - \theta\|)_{k \geq 0}$  converge,*
- ii)  $\limsup_{k \rightarrow \infty} |x_k - x_k^*| \leq \Delta.$*

**Demostración:**

Es consecuencia inmediata de la proposición anterior pues  $\hat{x}_k \equiv x_k^*$  es uniformemente acotada en tanto que el control también lo es por hipótesis.

**Nota 8.2:** La determinación de hipótesis necesarias para la existencia de solución ( global) de la ecuación (8.15) no es trivial. Una propuesta aparece

en [15] pero no resuelve el problema general ni asegura la acotación uniforme de los controles.

Se impone la necesidad de recurrir a otras leyes de control. Como el objetivo es el alcance *asintótico* de la trayectoria, puede ser interesante prestar atención a controladores que cumplimentan dicho objetivo cuando el sistema es conocido ( [3], [33]).

Es de rigor comentar que los sistemas estado-afín presentados en [40] son sistemas SISO pero la salida es función de los estados ( vectoriales). La relación DARMA está dada entre controles y estados, pero estos últimos en general no son observables. Por lo tanto, si se quiere continuar con los esquemas desarrollados en este trabajo será necesario:

- a) desarrollar extensiones a sistemas MIMO ("*multiple input-multiple output*");
- b) combinar con técnicas de observadores para sistemas no lineales en tiempo discreto ([6]).

Resolver el problema para estos sistemas sería un paso muy importante, debido a que sistemas no lineales mucho más generales pueden ser aproximados por éstos ( [40], [7], [24]).

## 8.5 Conclusiones.

Se presentaron algunos resultados complementarios que permiten extender técnicas desarrolladas en capítulos previos a ciertos sistemas no considerados anteriormente.

Finalmente, se tratan los sistemas estado-afín los cuales son de gran interés porque además de ser parametrizables, constituyen un conjunto denso respecto a una amplia clase de sistemas no lineales. A partir de la última sección, se esbozan algunas ideas a modo de posible continuación de este trabajo.



## Apéndice

### Teoría de la Variedad Centro.

Para más detalles, consultar ([21] o [4]).

Sea  $T : R^{n+m} \rightarrow R^{n+m}$  dado por:

$$T(x, y) = (Ax + F(x, y), By + G(x, y)) \quad (1)$$

donde  $x \in R^n$ ,  $y \in R^m$ ;  $A, B \in R^{n \times n}$  verifican

$$\sigma(A) \subset \{z \in C : |z| = 1\} \quad \sigma(B) \subset \{z \in C : |z| < 1\}.$$

Además,  $F$  y  $G \in C^2(R^{n+m})$  y tanto  $F, G$  como sus derivadas de primer orden, se anulan en el origen.

**Teorema A.1:** Existe variedad centro  $h : R^n \rightarrow R^m$  para  $T$ . Más precisamente, para algún  $\epsilon > 0$ , existe  $h \in C^2(R^n)$  con  $h(0) = h'(0) = 0$  tal que si  $|x| < \epsilon$ ,  $(x_1, y_1) = T(x, h(x))$  implica  $y_1 = h(x_1)$ .

A fin de determinar  $h$  se debe resolver la ecuación

$$(x, h(x)) = T(x, h(x)).$$

Por (1) esto es equivalente a

$$h(Ax + F(x, h(x))) = Bh(x) + G(x, h(x)). \quad (2)$$

Si se estudia el sistema

$$\begin{cases} x_{k+1} = Ax_k + F(x_k, y_k) \\ y_{k+1} = By_k + G(x_k, y_k) \end{cases} \quad (3)$$

resulta que el comportamiento asintótico de sus soluciones cerca del origen está determinado por el flujo sobre la variedad centro, i.e.:

$$s_{k+1} = As_k + F(s_k, h(s_k)) \quad (4)$$

**Teorema A.2:**

(a) Supongamos que el origen es una solución estable (asintóticamente estable) (inestable) de (4). Entonces, el origen es solución estable (asintóticamente estable) (inestable) de (3).

(b) Supongamos que el origen es una solución estable de (3). Sea  $(x_k, y_k)$  solución de (3) con  $\|(x_0, y_0)\|$  suficientemente pequeño. Entonces, existe una solución  $s_k$  de (4) tal que  $|x_k - s_k| \leq C\beta^k$  y  $|y_k - h(s_k)| \leq C\beta^k \forall k$  para ciertas constantes  $0 < \beta < 1, C > 0$ .

**Estimación de autovalores.**

Se transcribe el resultado más importante de [46] que establece una estimación para los autovalores de una matriz compleja.

**Teorema A3:** Si  $A$  es una matriz compleja de orden  $n$  con autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , se satisface:

$$\left| \lambda_j - \frac{\text{tr}(A)}{n} \right| \leq \left[ \frac{n-1}{n} \left( \|A\|_F^2 - \frac{(v(A))^2}{6\|A\|_F^2} - \left( \frac{\text{tr}(A)}{n} \right)^2 \right) \right]^{\frac{1}{2}}$$

siendo

$$\begin{aligned} \text{tr}(A) &= \sum_{i=1}^n a_{ii} \quad (\text{traza de } A), \\ \|A\|_F^2 &= \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij}^2 \quad (\text{norma Frobenius de } A), \\ v(A) &= \left\| \bar{A}^t A - A \bar{A}^t \right\|_F. \end{aligned}$$

**Lema Técnico Clave.**

La demostración de este lema se encuentra en ([20], p.181).

**Lema A1:** Sean  $b_1, b_2 \in R; (s_k)_{k \geq 1}$  y  $(\sigma_k)_{k \geq 1}$  sucesiones en  $R$  y en  $R^p$  respectivamente, tales que:

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{s_k^2}{b_1 + b_2 \|\sigma_k\|^2} &= 0 \\ \text{b) } \|\sigma_k\| &\leq C_1 + C_2 \max_{0 \leq i \leq k} |s_i| \quad \text{con } 0 < C_1, C_2 < \infty \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \text{i) } \lim_{k \rightarrow \infty} s_k &= 0 \\ \text{ii) } (\|\sigma_k\|)_{k \geq 1} &\text{ es acotada.} \end{aligned}$$

## Referencias

- [1] Agarwal, M. & Seborg, D.E. (1987), *Self-tuning Controllers for Nonlinear Systems*, Automatica, Vol.23, no.2.
- [2] Aguirre, L.A. & Mendes, E.M. (1996), *Global Nonlinear Polynomial Models: Structure, Term Clusters and Fixed Points*, Int. J. Bif. & Chaos, Vol.6, no.2.
- [3] Byrnes, M., Lin W. & Ghosh, B.K. (1993), *Stabilization of discrete-time nonlinear systems by smooth state feedback*; Systems & Control Letters 21.
- [4] Carr, J. (1981), *Applications of Centre Manifold Theory*; Applied Mathematical Sciences 35; Springer-Verlag.
- [5] Castillo, B., Di Gennaro, S. Monaco, S. & Normand-Cyrot, D. (1993), *Nonlinear regulation for a class of discrete-time systems*, Systems & Control Letters 20.
- [6] Ciccarella, G., Dalla Mora, M. & Germani, A. (1995), *A robust observer for discrete time nonlinear systems*, Systems & Control Letters 24.
- [7] Costanza, V., Dickinson, B.W. & Johnson, E.F. (1983), *Universal Approximations of Discrete-Time Control Systems over Finite Time*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.AC-28, no.4.
- [8] Chen, G. & Dong, X. (1992), *On feedback control of chaotic nonlinear dynamic systems*, Int. J. Bif. & Chaos, Vol.2, no.2.
- [9] Chen, F. & Khalil, H.K. (1995), *Adaptive Control of Nonlinear Discrete-Time Systems Using Neural Networks*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.40, no.5.

- [10] Chen, F. & Tsao, W. (1994), *Adaptive Control of Linearizable Discrete-Time Systems*, Proceedings of the ACC, Baltimore, Maryland, p.880-881.
- [11] Dagupta, S., Shrivastava, Y. & Krenzer, G. (1991), *Persistent Excitation in Bilinear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.36, no.3.
- [12] Devaney, R.L. (1987), *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*, Addison-Wesley Publishing Company Inc.
- [13] Egardt, B. (1978), *Stability of model reference adaptive and self-tuning regulators*, Tech. Rep. Dept. Aut. Control, Lund Institute of Technology, Lund Sweden.
- [14] Elaydi, S.N., Kocic, L.V. & Li J. (1996), *Global Stability of Nonlinear Delay Difference Equations*, Journal of Difference Equations and Applications, Vol.2, no.1.
- [15] Fortescue, T.R., Kershenbaum, L.S. & Ydstie, B.F. (1980), *Implementation of Self-tuning regulators with Variable forgetting Factors*, Automatica, Vol.17, no.5.
- [16] Golden, M.P. & Ydstie, B.E. (1989) *Bifurcation in model reference adaptive control systems*, Systemas & Control Letters 11.
- [17] Goodwin, G.C., Hill, D.J. & Palaniswami M. (1984), *A Perspective on Convergence of Adaptive Control Algorithms*, Automatica, Vol.20, no.5.
- [18] Goodwin, G.C., Long, R.S & McInnis, B.C. (1980), *Adaptive Control of Bilinear Systems*, Technical Report 8017, Dept. of Electrical and Computer Engineering, Univ. of Newcastle, Australia.
- [19] Goodwin, G.C., Long, R.S & McInnis, B.C. (1981), *Adaptive Control Algorithms for Waste Water Treatment and ph-Neutralization*, Technical Report 8112, Dept. of Electrical and Computer Engineering, Univ. of Newcastle, Australia.
- [20] Goodwin, G.C. & Sin, K.S. (1984), *Adaptive Filtering, Prediction and Control*, Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall.

- [21] Guckenheimer, J. & Holmes, P. (1987), *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcations of Vector Fields*; Springer-Verlag.
- [22] Hartley, C. & Mossayebi, F. (1992), *A Classical Approach to Controlling the Lorenz Equations*, Int. J. Bif. & Chaos, Vol.2, no.4.
- [23] Haque, S.J. & Monopoli, R.V. (1980), *Discrete adaptive control of a radio telescope*, Applications of Adaptive Control, Narendra and Monopoli, editors; Academic Press, p.397-421.
- [24] Hinamoto, T. & Mackawa, S. (1984), *Approximation of Polynomial State-Affine Discrete-Time Systems*, IEEE Transactions on Circuits and Systems, Vol.CAS-31, no.8.
- [25] Huang, J. & Lin, C-F. (1994), *A Stability Property and its Applications to Discrete-Time Nonlinear Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.39, no.11.
- [26] Jackson, E. (1991), *On the control of complex dynamic systems*, Physica D50.
- [27] Jankovic, M., Sepulchre, R. & Kokotovic, P. (1997), *Global Adaptive Stabilization of Cascade Nonlinear Systems*, Automatica, Vol.33, no.2.
- [28] Kanellakopoulos, I. (1994), *A Discrete-Time Adaptive Nonlinear System*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.39, no.11.
- [29] Kanellakopoulos, I., Kokotovic, P. V. & Marino R. (1989), *Robustness of Adaptive Nonlinear Control under an Extended Matching Condition*, Preprint IFAC-NOLCOS, p. 192-197.
- [30] Kazakos, D. & Tsinias, J. (1994), *The Input to State Stability Condition and Global Stabilization of Discrete-Time Systems*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.39, no.10.
- [31] Krstic, M. & Kokotovic, P. V.(1994) *Observer-based schemes for adaptive nonlinear state-feedback control* , Int.J.Control, Vol.59, no.6.
- [32] Lee, H. & Marcus, S. J. (1986), *Approximate and local linearizability of non-linear discrete-time systems*, Int. J. Control, Vol.44, no.4.

- [33] Lin, W. (1997), *Global robust stabilization of minimum-phase nonlinear systems with uncertainty*, Automatica, Vol.33, no.3.
- [34] Luo, W., Billings, S.A. & Tsang, K.M. (1996), *On-line Structure Detection and Parameter Estimation with Exponential Windowing for Non-linear Systems*, European Journal of Control, Vol.1, no.2.
- [35] Mareels, I. M. & Bitmead, R.R. (1986), *Non-linear Dynamics in Adaptive Control: Chaotic and Periodic Stabilization*, Automatica, Vol.22, no.6.
- [36] Mareels, I. M. & Bitmead, R.R. (1988), *Non-linear Dynamics in Adaptive Control: Chaotic and Periodic Stabilization II*, Automatica, Vol.24, no.4.
- [37] Middleton, R.H., Goodwin, G.C., Hill, D.J. & Mayne, D.Q. (1988), *Design Issues in Adaptive Control*, IEEE Transactions on Automatic Control, Vol.33, no.11.
- [38] Mohler, R.R. (1973), *Bilinear Control Processes*, Academic Press.
- [39] Mossayebi, F.; Qammar, H. & Hardy, T., (1991), *Adaptive estimation and synchronization of chaotic systems*, Phys.Lett.A 161.
- [40] Normand-Cyrot, D. (1983), *Theorie et pratique des systemes non lineaires en temps discret*, Tesis doctoral, Univrsite de Paris-Sud, Centre D 'Orsay.
- [41] Ott, E.; Grebogi, C. & Yorke, J. A.,(1990), *Controlling Chaos*, Phys.Rev.Lett.64.
- [42] Ortega, R. & Lozano-Leal R. (1987), *A Note on Direct Adaptive Control of Systems with Bounded Disturbances*,Automatica, Vol.23, no.2.
- [43] Ortega, R. & Tang Y., (1989), *Robustness of Adaptive Controllers - a Survey*, Automatica, Vol.25, no.5.
- [44] Qammar, H.K; Mossayebi, F. & Murphy, L. (1993), *Dynamical complexity arising in the adaptive control of a chaotic system*, Phys.Lett.A 178.

- [45] Rajasekar, S. & Lakshmanan (1992), *Controlling of chaos in Bonheffer-Van der Pol oscillator*, Int. J. Bif. & Chaos, Vol.2, no.1.
- [46] Rojo, O., Soto, R. & Rojo, H. (1991), *New eigenvalue estimates for complex matrices*, Preprint Depto de Matemática, Universidad Católica del Norte, Antofagasta, Chile.
- [47] Sastry, S. & Bodson, M. (1989), *Adaptive Control: Stability, Convergence and Robustness*, Englewood Cliffs, N.J: Prentice-Hall.
- [48] Song, Y. & Grizzle, J.W. (1993) *Adaptive output-feedback control of a class of discrete-time nonlinear systems*, Proc.1993 Amer. Contr. Conf., San Francisco, CA, p.1359-1364.
- [49] Troparevsky, M.I. (1995). *Control Adaptivo de Sistemas Lineales en Tiempo Discreto Parcialmente Conocidos*, Tesis doctoral, Depto de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires.
- [50] Wang, H.; Abed, E.H. & Lee, H. (1992), *Robust Control of a Chaotic Dynamical System*, Proceedings of the ACC, Chicago, p.2236-2237.
- [51] Yang, X. & Stepanenko, Y. (1994), *A stability criterion for a class of discrete nonlinear systems with random parameters*, Systems & Control Letters 22.
- [52] Ydstie, B.E. (1989), *Stability of discrete model reference adaptive control - revisited*, Systems & Control Letters 13.
- [53] Yeh, P.C. & Kokotovic, P.V. (1995), *Adaptive control of a class of nonlinear discrete-time systems*, Int. J. Control, Vol.62, no.2.

