

## Tesis de Posgrado

# Aspectos cuánticos de los solitones en teorías de campos

Kruczenski Gainza, Luis Martín

1998

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias  
Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

#### Cita tipo APA:

Kruczenski Gainza, Luis Martín. (1998). Aspectos cuánticos de los solitones en teorías de campos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_3002\\_KruczenskiGainza.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3002_KruczenskiGainza.pdf)

#### Cita tipo Chicago:

Kruczenski Gainza, Luis Martín. "Aspectos cuánticos de los solitones en teorías de campos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1998.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_3002\\_KruczenskiGainza.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_3002_KruczenskiGainza.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ASPECTOS CUÁNTICOS DE LOS  
SOLITONES EN TEORÍAS DE CAMPOS

LUIS MARTÍN KRUCZENSKI GAINZA

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de  
Buenos Aires

Área: Ciencias Físicas

Director de Tesis: Dr. Norberto N. Scoccola

Lugar de trabajo: Departamento de Física,  
Comisión Nacional de Energía Atómica

Marzo 1998

REC 2

h<sup>2</sup>

## Resumen

En la presente tesis estudiamos dos métodos de cuantificación de solitones. En primer lugar utilizando el método de coordenadas colectivas se calculó la corrección a dos loops a los niveles vibracionales de un modelo que engloba distintas teorías que poseen solitones. Este modelo describe una partícula moviéndose en una variedad de Riemann en presencia de un potencial. Los resultados se especializaron para el caso del kink en  $1 + 1$  dimensiones y el modelo  $O(3)$  en  $2 + 1$  dimensiones. Los cálculos se realizaron introduciendo un sistema de coordenadas geodésico en la variedad. Las bandas colectivas asociadas a los niveles vibracionales se describen en términos de las cuantificaciones no equivalentes asociadas a espacios cociente  $G/H$ , donde  $G$  es el grupo de simetría de la acción y  $H$  el de la solución solitónica.

En segundo lugar se aplicó el método de funciones de Green al caso del skyrmión. Si bien las funciones de Green ya habían sido definidas, en la tesis mostramos como la introducción de condiciones de contorno alrededor de las singularidades permite describir correctamente los grados de libertad internos del solitón (spin e isospin) así como su carácter fermiónico. Un análisis del propagador demuestra que es el correcto para describir, en forma covariante, las partículas que representa el skyrmión. Esto es un conjunto de partículas con spin igual al isospin.

## Aspects of soliton quantization

In this thesis two different methods of soliton quantization are studied. Using the collective coordinates approach the two-loops correction to the vibrational states is obtained for a model which comprises several theories with solitons. The model describes a particle moving on a Riemann surface under the action of an external potential. The results are applied to the  $\phi^4$  kink in  $1 + 1$  dimensions and to the  $O(3)$  model in  $2 + 1$  dimensions. To perform the calculation we use a geodesic coordinate system. The collective bands associated with each vibrational state are described in terms of inequivalent coset space quantizations. The coset space is given by  $G/H$  where  $G$  is the symmetry group of the action and  $H \subset G$  the symmetry group of the soliton.

In the second part of the thesis the method of Green functions is applied to the Skyrme model. Although Green functions for the skyrmion have already been defined, we show that using certain boundary conditions around the singularities, the correct internal degrees of freedom (spin and isospin) appear and the Green functions describe fermions. A careful analysis of the propagator shows that it describes, in a manifestly covariant way, the particles which the skyrmion is known to represent. That is a tower of spin equal to isospin particles.

Solitones; coordenadas colectivas; funciones de Green.

Solitons; collective coordinates; Green functions.

## AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar aquí mi agradecimiento a todas las personas que de una forma u otra colaboraron para que pueda realizar la tesis.

A Norberto Scoccola y Daniel Bes por compartir sus conocimientos y su trabajo conmigo por un lado y por darme cierta libertad de trabajo por otro.

A J.P. Garrahan con quién realicé el trabajo correspondiente a los capítulos 2 y 3 y a L.E. Oxman con quién realicé el trabajo correspondiente al capítulo 5.

A C.L. Schat por numerosas discusiones y sugerencias.

A C.A. Nuñez por dedicar parte de su tiempo a enseñarme teoría de cuerdas y a ayudarme a trabajar en temas, que si bien no presento aquí, permitirán continuar lo realizado en la tesis.

A los compañeros y al personal permanente del Departamento de Física del TANDAR que hacen de él un grato lugar de trabajo e intercambio de ideas.

A mi esposa Laura por el apoyo que me brindó estos años así como por revisar el manuscrito.

A mis padres por haberme incentivado para comenzar.

Finalmente deseo agradecer a la Comisión de Energía Atómica por financiar este trabajo a través de una beca de doctorado.

# Índice

|          |   |           |
|----------|---|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introducción</b>   | <b>1</b>  |
| 1.1      | El kink . . . . .   | 2         |
| 1.2      | El modelo $O(3)$ . . . . .  | 3         |
| 1.3      | El skyrmion . . . . .   | 5         |
| 1.4      | Monopolos . . . . .   | 7         |
| <b>2</b> | <b>Coordenadas colectivas</b>   | <b>9</b>  |
| 2.1      | El modelo . . . . .   | 11        |
| 2.2      | Cálculo a 2-loops de la energía . . . . .                             | 15        |
| 2.3      | Independencia del sistema de coordenadas . . . . .                    | 19        |
| 2.4      | Coordenadas de Riemann . . . . .                                      | 22        |
| 2.5      | Ejemplo del kink . . . . .  | 24        |
| 2.6      | El modelo $O(3)$ . . . . .  | 27        |
| <b>3</b> | <b>Bandas colectivas</b>  | <b>33</b> |
| 3.1      | Cuantificaciones no-equivalentes en un espacio $G/H$                  | 34        |
| 3.1.1    | Sistemas de imprimitividad . . . . .                                  | 34        |
| 3.1.2    | Representaciones inducidas . . . . .                                  | 35        |
| 3.1.3    | Consecuencias dinámicas . . . . .                                     | 37        |
| 3.2      | El Hamiltoniano colectivo . . . . .                                   | 38        |
| 3.2.1    | El Hamiltoniano colectivo a partir de la integral de camino . . . . . | 39        |
| 3.2.2    | El Hamiltoniano colectivo a partir del Laplaciano . . . . .           | 40        |
| 3.2.3    | Relación con las cuantificaciones no equivalentes . . . . .           | 42        |
| 3.3      | Bandas colectivas . . . . .   | 45        |
| 3.4      | El rotor simétrico . . . . .  | 48        |
| 3.5      | Correcciones a dos-loops . . . . .                                    | 53        |

|          |  |            |
|----------|--|------------|
| <b>4</b> | <b>Funciones de Green de Solitones</b>                 | <b>55</b>  |
| 4.1      | Variables de desorden en el modelo de Ising            | 56         |
| 4.2      | Funciones de Green para el Skyrmion                    | 60         |
| 4.3      | Un ejemplo en dos dimensiones . . . . .                | 61         |
| <b>5</b> | <b>Funciones de Green para Skyrmiones</b>              | <b>67</b>  |
| 5.1      | Funciones de Green . . . . .                           | 67         |
| 5.2      | Las condiciones de contorno . . . . .                  | 72         |
| 5.3      | Simetrías del propagador . . . . .                     | 76         |
| 5.4      | Propagador de Skyrmion . . . . .                       | 81         |
| 5.5      | Matriz-S . . . . .                                     | 87         |
| <b>6</b> | <b>Conclusiones</b>                                    | <b>91</b>  |
| <b>A</b> | <b>Fórmulas útiles para grupos de Lie</b>              | <b>95</b>  |
| <b>B</b> | <b>Integrales de propagadores térmicos</b>             | <b>99</b>  |
| <b>C</b> | <b>Problemas de orden en integrales de camino</b>      | <b>101</b> |
| <b>D</b> | <b>Propagadores para partículas de spin arbitrario</b> | <b>105</b> |

# Capítulo 1

## Introducción

Los solitones tienen una gran importancia en distintas ramas de la física como soluciones de ciertas ecuaciones de campo que se propagan en el tiempo sin deformarse. También se usa la palabra solitón en un sentido más restringido, indicando que estas soluciones no cambian su forma luego de interactuar entre ellas. En la presente tesis usaremos el primer significado, más amplio, porque son pocos los casos en que se verifica la segunda condición.

Los primeros solitones se estudiaron en la física de los fluidos, siendo soluciones de las ecuaciones de movimiento que describen ondas de superficie en canales. Sin embargo con el tiempo se observó que esto era un fenómeno general que aparecía en óptica, física del sólido, teoría cuántica de campos, etc. En el caso de la teoría cuántica de campos (que es el que se analizará en esta tesis), el tema toma un nuevo aspecto ya que se debe estudiar que rol desempeñan los solitones en la teoría cuántica. En principio, los solitones aparecen como soluciones localizadas y de energía finita de las ecuaciones de movimiento clásicas. Existen otras soluciones que describen el solitón trasladándose o rotando en primera aproximación como un cuerpo rígido. Esto sugiere que el solitón representa una nueva partícula de la teoría y por lo tanto en el espacio de estados deben existir nuevos sectores correspondientes a estados que contienen distinto número de solitones. La forma más sencilla de estudiar estos sectores es a través de una aproximación semiclásica [1, 2, 3, 4]. Las traslaciones y rotaciones (y posibles rotaciones en el espacio interno) se describen a través de coordenadas colectivas que determinan el movimiento del solitón en su conjunto. El resto de los grados de libertad corresponde a vibraciones alrededor de la solución clásica y describen la interacción del solitón con el campo original de la teoría. Cuan-

tificando el movimiento colectivo se obtienen funciones de onda con valores definidos de impulso y momento angular. En este caso el movimiento a lo largo de los grados de libertad colectivos es un movimiento libre, es decir sin energía potencial. En los sectores de número solitónico mayor es útil introducir coordenadas colectivas que describan el scattering de solitones por distintos canales. En este caso existirán una energía potencial y una métrica que determinarán posibles estados ligados y un scattering no trivial. En este tratamiento se estudia al solitón en primera cuantificación y al campo original como un campo cuántico en segunda cuantificación.

Existe un método alternativo, aunque menos estudiado, que permite tratar a ambos como campos cuánticos definiendo funciones de Green para solitones de la misma manera que se definen funciones de Green para los campos originales. Este método fue desarrollado por Fröhlich y Marchetti [5, 6] en base a trabajos previos de otros autores [7, 8].

En esta tesis estudiaremos ciertos aspectos de ambos métodos. En el capítulo 2 consideraremos los métodos semiclásicos. Para ello, introduciremos coordenadas colectivas y calcularemos correcciones a los estados vibracionales [9, 10, 11]. En el capítulo 3 describiremos las bandas colectivas.

En el capítulo 4 describiremos el método relativista de funciones de Green introducido por Fröhlich y Marchetti y mostraremos como las condiciones de contorno alrededor de la singularidad introducen más topología lo que permite cuantificar al solitón como fermión. En el capítulo 5 aplicaremos este resultado al skyrmion, obteniendo las funciones de Green correspondientes.

Finalmente resumiremos el trabajo y daremos nuestras conclusiones en el capítulo 6.

En lo que sigue daremos ejemplos de teorías de campo que poseen solitones y que servirán para ejemplificar los cálculos de los siguientes capítulos. Nos basaremos para ello en los textos [12, 13] donde pueden encontrarse las referencias a los trabajos originales.

## 1.1 El kink

El kink es un solitón que aparece en una teoría en  $1+1$  dimensiones descrita por el Lagrangiano:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4, \quad (1.1)$$

donde  $\phi(x, t)$  es un campo escalar y  $\lambda > 0$ ,  $m^2 > 0$ . Nótese que el término de masa tiene signo opuesto al usual.



El vacío está caracterizado por  $\phi(x) = \pm \text{cte.} = \pm m\sqrt{6/\lambda}$ . Se puede ver que existen soluciones estáticas que conectan los dos posibles vacíos en  $\pm\infty$  dadas por:

$$\phi(x) = \pm \left( m\sqrt{\frac{6}{\lambda}} \right) \tanh \left[ \frac{m}{\sqrt{2}}(x - x_0) \right]. \quad (1.2)$$

La masa del solitón que se obtiene de la solución anterior vale

$$M = 4\sqrt{2} \frac{m^3}{\lambda}, \quad (1.3)$$

donde  $\lambda$  tiene unidades de  $m^2$ . Cuánticamente es de esperar entonces que existan estados de una partícula con masa  $M$  correspondientes a esa solución clásica.

Un modelo similar es el de sine-Gordon cuyo lagrangiano es:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \left( \frac{m^4}{\lambda} \right) \left[ \cos \left( \frac{\sqrt{\lambda}}{m} \phi \right) - 1 \right], \quad (1.4)$$

el cual posee solitones

$$\phi(x) = \pm \frac{4m}{\sqrt{\lambda}} \tan^{-1} [\exp(m(x - x_0))] \quad (1.5)$$

de masa  $M = 8m^3/\lambda$ . En este caso, los solitones no se deforman al interactuar unos con otros como se ve por ejemplo en la solución que describe la colisión de dos solitones:

$$\phi(x) = 4 \tan^{-1} \left( \frac{u \sinh(x/\sqrt{1-u^2})}{\cosh(ut/\sqrt{1-u^2})} \right). \quad (1.6)$$

Sin embargo estos casos son poco frecuentes y los solitones más estudiados en teoría de campos son del tipo del kink.

## 1.2 El modelo $O(3)$

El modelo  $O(3)$  no lineal se define en  $2 + 1$  dimensiones y consiste en tres campos escalares  $\phi_a$  ( $a = 1, 2, 3$ ) sujetos a la restricción

$$\sum_{a=1}^3 \phi_a \phi_a = 1. \quad (1.7)$$

El lagrangiano está dado por ( $\mu = 0, 1, 2$ )

$$\mathcal{L} = \frac{f^2}{2} \partial_\mu \phi_a \partial^\mu \phi_a, \quad (1.8)$$

que es invariante ante traslaciones y rotaciones espaciales como así también ante transformaciones internas  $O(3)$ . La constante  $f$  es un parámetro del modelo. Un caso de interés es aquel en el que  $1/f$  es pequeño (en unidades  $\hbar = c = 1$ ) lo que permite realizar una expansión en potencias de  $1/f$ .

La simetría  $O(3)$  está rota espontáneamente. Como vacío es usual elegir  $\vec{\phi} = (0, 0, 1)$ . Además de esta solución las ecuaciones de movimiento admiten otras soluciones estáticas de energía finita y que satisfacen que  $\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{\phi} = (0, 0, 1)$  [14]. Estas soluciones son mapas de  $S_2^{(fis.)}$  en  $S_2^{(int.)}$  y se caracterizan por el número de enrollamiento  $W$

$$W = \frac{1}{8\pi} \int \epsilon^{0ij} \epsilon^{abc} \phi_a \partial_j \phi_b \partial_i \phi_c. \quad (1.9)$$

Para hallar explícitamente las soluciones es convenientes introducir campos independientes. Como se muestra en la ref.[12] una parametrización útil es proyectar estereográficamente la esfera  $S_2^{(int.)}$  sobre un plano paralelo al plano  $\{\phi_1, \phi_2\}$  y que contenga al polo sur. Las coordenadas internas obtenidas se agrupan en dos campos complejos definidos como

$$\theta = \frac{\phi_1 + i\phi_2}{1 - \phi_3}; \quad \bar{\theta} = \frac{\phi_1 - i\phi_2}{1 - \phi_3}. \quad (1.10)$$

De la misma forma las coordenadas del espacio físico bidimensional  $x^1, x^2$  se combinan en coordenadas complejas

$$z = x^1 + i x^2; \quad \bar{z} = x^1 - i x^2. \quad (1.11)$$

En términos de estos campos el Lagrangiano es

$$\mathcal{L} = \frac{2f^2}{(1 + \theta\bar{\theta})^2} \left[ \dot{\theta}\dot{\bar{\theta}} - 2(\partial_z \theta \partial_{\bar{z}} \bar{\theta} + \partial_{\bar{z}} \theta \partial_z \bar{\theta}) \right], \quad (1.12)$$

donde

$$\partial_z = \frac{1}{2}(\partial_1 - i\partial_2); \quad \partial_{\bar{z}} = \frac{1}{2}(\partial_1 + i\partial_2). \quad (1.13)$$

Las ecuaciones de movimiento que se obtienen de este lagrangiano para campos independientes del tiempo son

$$\frac{2\bar{\theta}}{1 + \theta\bar{\theta}} \partial_z \theta \partial_{\bar{z}} \theta - \partial_{z\bar{z}} \theta = 0, \quad (1.14)$$

y la conjugada compleja para  $\bar{\theta}$ . Se ve fácilmente que cualquier función analítica  $\theta(z)$  (o antianalítica  $\theta(\bar{z})$ ) satisface automáticamente (1.14). Debido a que el campo  $\phi_a(x)$  es univaluado la única singularidad admisible para  $\theta(z)$  son polos (es decir no puede tener cortes en el plano complejo). Como se muestra en la Ref. [14], la forma general del solitón está dada por un cociente de polinomios. El número de enrollamiento está dado por el máximo entre los grados del numerador y el denominador. Para  $W = 1$  la solución general que satisface  $\theta \rightarrow \infty$  ( $|x| \rightarrow \infty$ ) está dada por la familia con cuatro parámetros

$$\theta(z) = az + b, \quad (1.15)$$

donde  $a, b$  son constantes complejas arbitrarias. Como solución particular con  $W = 1$  tomaremos  $\theta = z$  ( $a = 1, b = 0$ ). Como la masa del solitón es independiente de los parámetros  $a$  y  $b$ , habrá cuatro modos cero alrededor de la solución correspondientes a las transformaciones que conectan la solución particular con cualquier otra dada por la ec. (1.15). Dos de estos modos corresponden a traslaciones ( $b$ ), uno a rotaciones espaciales e internas ( $a = e^{i\theta}$ ) y el restante a dilataciones ( $a \in \mathbb{R}$ ). En realidad hay tres rotaciones independientes en el espacio interno. Las rotaciones alrededor de los ejes 1 y 2 darán modos de frecuencia cero (bosones de Goldstone) también en el sector  $W = 0$  debido al vacío elegido  $(0, 0, 1)$ . En el sector  $W = 1$  se ven estos modos restantes si utilizamos la familia con seis parámetros  $\theta(z) = (az + b)/(cz + d)$  sujeta a la condición  $ad - bc = 1$ . Para los modos de isospin 1 y 2 las divergencias infrarrojas se pueden regularizar introduciendo un pequeño término de masa para los bosones de Goldstone, en ambos sectores  $W = 0, 1$ . En realidad el modelo en el cuál se incluye un término de masa finito para las excitaciones en las direcciones de isospin 1 y 2 también puede estudiarse ya que posee solitones similares. La única desventaja de incluir un término de masa es que los perfiles solitónicos deben hallarse numéricamente.

En el capítulo siguiente tomaremos este modelo como ejemplo para los cálculos realizados. Respecto del kink implica una complicación puesto que tiene más modos cero, incluyendo modos rotacionales. Sin embargo es más simple que el modelo de Skyrme que describiremos a continuación.

### 1.3 El skyrmion

El modelo de Skyrme se define por el siguiente lagrangiano [15, 16]:

$$\mathcal{L} = \frac{f_\pi^2}{4} \text{Tr} \left( \partial_\mu U^\dagger \partial^\mu U \right) + \frac{1}{32e^2} \text{Tr} \left( \left[ U^\dagger \partial_\mu U, U^\dagger \partial_\nu U \right]^2 \right), \quad (1.16)$$

donde  $U$  es una matriz perteneciente a  $SU(2)$ . El lagrangiano es invariante bajo transformaciones quirales globales  $SU(2)_L \times SU(2)_R$  con  $U \rightarrow g_L U g_R^\dagger$ ,  $g_L, g_R \in SU(2)$ . Esta simetría está rota espontáneamente. Si elegimos el valor de expectación en el vacío de  $U$  como  $\langle U \rangle = 1$ , la simetría que sobrevive es el subgrupo diagonal  $SU(2)_V$  ( $g_L = g_R$ ) o grupo de isospin. Una parametrización conveniente de  $U$  es

$$U = \exp(i\pi_a \tau^a), \quad (1.17)$$

donde  $\tau^a$  son las matrices de Pauli, y los campos  $\pi_a$  describen los piones cuyo valor de expectación en el vacío es cero ( $\langle U \rangle = 1 \Rightarrow \langle \pi_a \rangle = 0$ ). Otra parametrización muy útil para los cálculos es

$$U = \phi_0 1 + i\phi_a \tau^a, \quad \phi_0^2 + \phi_a^2 = 1. \quad (1.18)$$

También se puede considerar un término de masa para los campos  $\pi_a$  y términos de mayor orden en derivadas como  $-\epsilon_8 B^\mu B^\mu$ , donde  $\epsilon_8$  es una constante y  $B^\mu$  se define en la ec.(1.19) más abajo.

Una configuración estática de energía finita debe satisfacer  $U \rightarrow 1$  en infinito, lo que equivale (topológicamente) a compactificar el espacio a  $S^3$ . Así, una configuración estática define un mapa  $S^3 \rightarrow SU(2)$ , esto es, un elemento de  $\Pi_3(S^3) = \mathbb{Z}$ . El número bariónico  $B$ , definido como la integral de la corriente topológica

$$\begin{aligned} B^\mu &= \frac{\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta}}{24\pi^2} \text{Tr} \left[ (U^\dagger \partial_\nu U) (U^\dagger \partial_\alpha U) (U^\dagger \partial_\beta U) \right], \\ B &= \int d^3x B^0, \end{aligned} \quad (1.19)$$

es el número de enrollamiento asociado con  $\Pi_3(S^3)$  y por lo tanto se conserva. Lo mismo sucede en mecánica cuántica si consideramos la amplitud de transición como una integral de camino sobre caminos continuos, es decir que no pueden cambiar el número topológico. Las configuraciones con  $B = 1$  describen estados de un nucleón. La energía de la configuración estática con  $B = 1$  que minimiza la acción está concentrada en el espacio y puede tratarse aproximadamente como un cuerpo rígido que rota en el espacio y también en el espacio interno. El spin e isospin aparecen al cuantificar estos grados de libertad colectivos [17].

Una descripción detallada del modelo de Skyrme se puede encontrar en [18]. El modelo tiene un gran interés porque da una descripción fenomenológica de los nucleones como solitones del campo de piones. Aunque cuantitativamente no es muy preciso ( $\approx 30\%$ ) es el único solitón en teoría de partículas que tiene una interpretación fenomenológica directa.

## 1.4 Monopolos

Ciertas teorías de gauge tambien tienen solitones. Un ejemplo de ellos son los monopolos de t'Hooft-Polyakov que aparecen en una teoría de gauge  $O(3)$  en  $3 + 1$  dimensiones con lagrangiano

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^a F^{a\mu\nu} + \frac{1}{2}D_\mu\phi^a D^\mu\phi^a - \frac{1}{2}m^2\phi^a\phi^a - \frac{\lambda}{4!}(\phi^a\phi^a)^2. \quad (1.20)$$

Los solitones satisfacen las ecuaciones de movimiento deducidas del lagrangiano anterior con un comportamiento asintótico

$$\begin{aligned} A_i^a &\rightarrow -\varepsilon_{iab}\frac{r^b}{er^2}, \\ A_0^a &\rightarrow 0, \\ \phi^a &\rightarrow \left(-\frac{6m^2}{\lambda}\right) \end{aligned}$$

Las ecuaciones deben resolverse numéricamente. El campo en el infinito describe un campo magnético radial indicando que el monopolo está cargado magnéticamente. Estos solitones son fundamentales para las conjeturas de dualidad en teorías de gauge supersimétricas y se cree que juegan un rol importante en el confinamiento de las cargas eléctricas en teorías de gauge no abelianas. No los describiremos en más detalle puesto que no fueron estudiados en esta tesis.



## Capítulo 2

# Coordenadas colectivas

Como ya se ha mencionado, los solitones aparecen como soluciones de las ecuaciones de movimiento, localizadas y de energía finita. En particular, las soluciones estáticas están dadas por los mínimos de la energía potencial. Para estudiar la mecánica cuántica de los solitones en la aproximación semiclásica, se expande el campo alrededor de la configuración que minimiza el potencial. Las fluctuaciones del campo se tratan entonces cuánticamente como un sistema con infinitos grados de libertad. Para comprender el procedimiento veamos primeramente el caso de un sistema de un grado de libertad  $q$ . Cuando el potencial  $V(q)$  tiene un mínimo  $\bar{q}$ , se lo puede expandir alrededor de  $\bar{q}$ :

$$V(q) = V(\bar{q}) + \frac{1}{2}V''(\bar{q})(q - \bar{q})^2 + \dots, \quad (2.1)$$

donde se tiene en cuenta la condición de mínimo  $V'(\bar{q}) = 0$ . Al orden más bajo se tiene un oscilador armónico de frecuencia  $\omega^2 = V''(\bar{q})/m$ , donde  $m$  es la masa de la partícula. Los siguientes términos pueden tratarse con teoría de perturbaciones si sus elementos de matriz son mucho menores que la diferencia de energías entre niveles sin perturbar, es decir que  $\hbar\omega$ .

Cuando hay más de un grado de libertad  $q_i$ , se debe diagonalizar la matriz  $\partial V / \partial q_i \partial q_j$ . En este caso aparece a orden más bajo un conjunto de osciladores armónicos (modos normales) con frecuencias dadas por los autovalores de la matriz. Puede darse el caso en que haya autovalores cero, es decir direcciones alrededor del mínimo que sean planas. En este caso lo que existe es una variedad  $\mathcal{M}$  de mínimos  $\bar{q} \in \mathcal{M}$  todos con el mismo valor de  $V(\bar{q})$ . Estos modos no se pueden tratar directamente como perturbaciones ya que su frecuencia es cero y lo que se debe hacer es separar estos grados de libertad del resto. Los autoestados estarán dados por funciones de onda

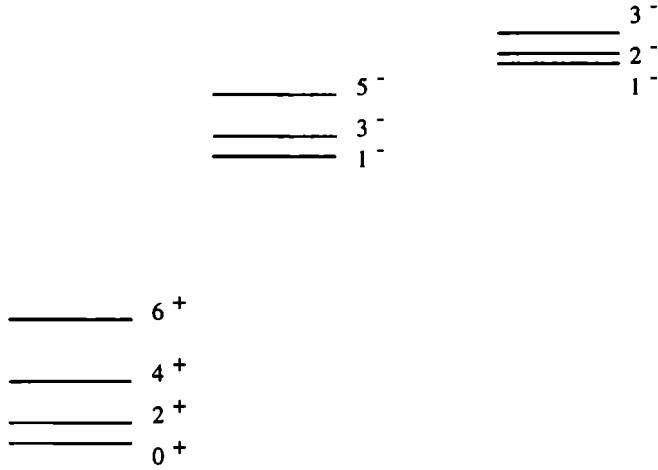


Figura 2.1: Espectro vibro-rotacional para núcleos deformados (esquema).

sobre  $\mathcal{M}$  obtenidos de la diagonalización del Hamiltoniano asociado a los modos cero. Lo que se puede tratar perturbativamente es la interacción entre modos cero y modos de frecuencia finita, para lo cual la energía cinética del movimiento en  $\mathcal{M}$  debe ser mucho menor que la energía de excitación de los modos vibracionales, esto es

$$\frac{\hbar^2}{2\mathfrak{I}} \ll \hbar\omega, \quad (2.2)$$

donde  $\mathfrak{I}$  es el parámetro de inercia asociado al movimiento en  $\mathcal{M}$ . Esta expansión es equivalente a una expansión semiclásica en potencias de  $\hbar$ . Si se utilizan unidades tal que  $\hbar = 1$  el parámetro de expansión será  $1/(\mathfrak{I}\omega)$ .

Un ejemplo característico de este caso son las bandas vibro-rotacionales de los núcleos deformados. En este caso, el mínimo corresponde a un núcleo que no posee simetría esférica. Todas las orientaciones distintas posibles tendrán la misma energía y por lo tanto habrá infinitos mínimos que se obtienen unos de otros por rotaciones. En este caso, el espectro es como el de la figura (2.1) donde vemos que a cada estado vibracional se asocia una banda rotacional. Por supuesto también se tienen las traslaciones del centro de masa y por ello hay también una banda traslacional con energía  $\hbar^2 k^2 / 2m$  e impulso  $p = \hbar k$ .

El caso de los solitones es similar, pero con un número infinito de osciladores armónicos, o modos normales. Esto no es solamente una analogía ya que los modelos descritos en el capítulo anterior (a excepción de los monopolos) pueden considerarse como ejemplos de sistemas de una partícula



moviéndose en una variedad de Riemann infinito dimensional, en presencia de un potencial. Por ejemplo, el caso del kink se describe en la sección 2.5 y el del modelo  $O(3)$  en la 2.6. Dentro de la variedad infinito dimensional que describe todos los posibles valores del campo, habrá una variedad finito dimensional  $\mathcal{M}$  que describe el solitón en distintas posiciones, ya sea en el espacio físico o en el espacio interno. El estado cuántico al orden más bajo estará dado por una función de onda en  $\mathcal{M}$ . Más formalmente, podemos decir que existe un grupo  $G$  de simetrías de la acción que comprenderá las traslaciones, las rotaciones espaciales y posibles transformaciones internas de los campos (p.ej. isospin). El solitón no será invariante ante  $G$ , sino sólo ante un subgrupo  $H$ . Por ejemplo al ser una configuración localizada de energía no puede ser invariante ante traslaciones, pero también podría no ser invariante ante rotaciones o transformaciones internas. En este caso, la variedad  $\mathcal{M}$  contiene a  $G/H$  ya que aplicando transformaciones de  $G$  que no dejen el solitón invariante (es decir que no estén en  $H$ ), se obtienen otras soluciones con la misma energía y que se pueden interpretar como el solitón en otra posición, ya sea trasladado, o rotado en el espacio físico o interno. En las siguientes secciones analizaremos un modelo que describe esta situación de modo suficientemente general como para abarcar distintos tipos de solitones.

## 2.1 El modelo

Como se menciona en la sección anterior, el problema es similar al de una partícula moviéndose en una variedad de Riemann  $\mathcal{C}$ , en presencia de un potencial. La variedad está parametrizada por ciertas coordenadas  $q^a$  con métrica  $g_{st}$  y la acción es

$$S = \int dt \frac{1}{2} g_{st} \dot{q}^s \dot{q}^t - V(q). \quad (2.3)$$

El caso a estudiar es aquel en el cual el sistema (la métrica y el potencial) es invariante ante un grupo compacto de simetría  $G$  que actúa sobre las  $q^a$  como

$$q^a \rightarrow R^a(q, \alpha). \quad (2.4)$$

Las  $\alpha^a$  parametrizan el grupo  $G$  y se eligen de modo que  $\alpha^a = 0$  corresponda a la identidad de  $G$ . Aunque la variedad de Riemann sea infinito dimensional, al grupo  $G$  lo tomaremos siempre de dimensión finita. El hecho de que la métrica y el potencial son invariantes se expresa como

$$g_{st}(q) = \frac{\partial R^u}{\partial q^s} \frac{\partial R^v}{\partial q^t} g_{uv}(R(q, \alpha)), \quad (2.5)$$

$$V(q) = V(R(q, \alpha)). \quad (2.6)$$

Consideremos un mínimo  $\bar{q}$  del potencial. Si a este mínimo le aplicamos las operaciones de  $G$ , se tendrá nuevamente un mínimo que será el mismo sólo en el caso de que  $\bar{q}$  sea invariante ante  $G$ . Si  $\bar{q}$  es invariante sólo ante un subgrupo  $H \subset G$  entonces hay una órbita no trivial de  $\bar{q}$  ante  $G$ :

$$\mathcal{M} = O_G(\bar{q}) = \{R(\bar{q}, \alpha)\} \simeq G/H. \quad (2.7)$$

Asumiremos que estos son todos los mínimos que existen en un entorno de  $\mathcal{M}$ , es decir, que todos los modos cero están asociados con operaciones de simetría en  $G$  que no son simetrías de la solución  $\bar{q}$ .

Las variaciones (2.4) pueden escribirse en forma infinitesimal

$$\delta_a q^s = \partial_a R^s(q, \alpha)|_{\alpha=0}. \quad (2.8)$$

Conmutando dos de estas variaciones se obtiene el álgebra de Lie del grupo  $G$

$$\frac{\partial R^t}{\partial \alpha_a} \frac{\partial^2 R^s}{\partial \alpha_b \partial q^t} - \frac{\partial R^t}{\partial \alpha_b} \frac{\partial^2 R^s}{\partial \alpha_a \partial q^t} = C_{ab}^c \frac{\partial R^s}{\partial \alpha_c}, \quad (2.9)$$

donde  $C_{ab}^c$  son las constantes de estructura de  $G$ .

Dada una solución estática particular, las transformaciones infinitesimales  $\{\delta_a\}$  se dividen en dos: las  $\delta_{a'}$ , que modifican la solución estática, y las  $\delta_{\bar{a}}$ , que la dejan invariante. Los elementos de  $G$  que dejan al mínimo invariante forman un subgrupo compacto  $H$  de  $G$  con álgebra de Lie  $\mathfrak{h}$ .

Como  $H$  es un subgrupo tenemos que

$$[\mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{h}. \quad (2.10)$$

Como los grupos son compactos se puede elegir la parametrización de tal modo que

$$[\mathfrak{g} - \mathfrak{h}, \mathfrak{h}] \subseteq \mathfrak{g} - \mathfrak{h}. \quad (2.11)$$

En efecto, si  $T_{\bar{a}}$  son los generadores de  $\mathfrak{h}$  y  $T_{a'}$  los de  $\mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ , elegidos de tal manera que

$$\text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}, \quad (2.12)$$

lo que es posible si  $G$  es compacto. Se satisface que

$$\text{Tr}(T_{\bar{a}}[T_{\bar{b}}, T_{c'}]) = \text{Tr}([T_{\bar{a}}, T_{\bar{b}}]T_{c'}) = 0, \quad (2.13)$$

lo que implica que  $[T_{\bar{b}}, T_{c'}]$  está en  $\mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ .

Para realizar cálculos perturbativos se debe expandir la acción alrededor de un mínimo  $\bar{q}$  elegido arbitrariamente en  $\mathcal{M}$ . Al realizar la expansión aparecen modos vibracionales y modos colectivos como se expresó anteriormente. Para separar el movimiento colectivo es útil introducir explícitamente coordenadas extra como parámetros de transformaciones dependiente del tiempo [19, 20]

$$q^s \rightarrow R^s(q, \alpha(t)). \quad (2.14)$$

La acción transformada es

$$S' = \int d\tau \left[ \frac{1}{2} g_{st} \left( \dot{q}^s + \dot{\alpha}^a \Psi_a^b \delta_b q^s \right) \left( \dot{q}^t + \dot{\alpha}^c \Psi_c^d \delta_d q^t \right) + V(q) \right], \quad (2.15)$$

donde la matriz  $\Psi_a^b$  se define en el apéndice A (ec. (A.9)).

Si se consideran los parámetros  $\alpha^a$  como variables genuinas del problema habrá coordenadas de más que se deben eliminar antes de realizar los cálculos. Un método alternativo es dejar estas coordenadas y tratar al sistema como una teoría con vínculos, es decir una teoría de gauge, a la que se pueden aplicar distintos métodos de cuantificación: BRST [20], método de anticampos [11, 21], etc.

Al expandir la acción (2.15) alrededor de  $\bar{q}$ , es decir  $q^s \rightarrow \bar{q}^s + q^s$  se obtiene a orden cuadrático la ecuación de movimiento para las fluctuaciones:

$$\left( \frac{\partial^2 V}{\partial q^s \partial q^t} - \omega^2 g_{st} \right) q^t = 0, \quad (2.16)$$

donde las magnitudes  $g_{st}$ ,  $V$  y sus derivadas se evalúan en  $\bar{q}$ . De la diagonalización de  $V_{st}$  (con la métrica  $g_{st}$ ) surgen los modos normales. En el caso de los solitones el operador  $V_{st}$  es un operador diferencial y su diagonalización es similar a resolver una ecuación de Schrödinger independiente del tiempo. Los generadores de  $\mathfrak{g} - \mathfrak{h}$  dan lugar a modos cero

$$\bar{V}_{st} \psi_{a'}^t = 0, \quad \psi_{a'}^s \propto \delta_{a'} q^s. \quad (2.17)$$

Si se eligen los generadores  $\delta_{a'}$  de forma tal que el tensor de inercia

$$\mathcal{I}_{a'b'} = \bar{g}_{st} \delta_{a'} \bar{q}^s \delta_{b'} \bar{q}^t, \quad (2.18)$$

sea diagonal, entonces se pueden definir los modos cero normalizados

$$\psi_{a'}^s = \mathcal{I}_{a'}^{-1/2} \delta_{a'} \bar{q}^s, \quad (2.19)$$

donde los momentos de inercia  $\mathcal{I}_{a'}$  son los elementos diagonales de  $\mathcal{I}_{a'b'}$ .

Los modos normales  $\{\psi_n^s\} = \{\psi_n^s; \psi_{a'}^s\}$  se definen por las ecuaciones

$$\begin{cases} \bar{V}_{st}\psi_{a'}^t &= 0 \\ \bar{V}_{st}\psi_n^t &= \omega_n^2 \bar{g}_{su}\psi_n^u \quad (\omega_n \neq 0) \end{cases} \quad (2.20)$$

y satisfacen las relaciones de ortogonalidad

$$\bar{g}_{st}\psi_n^s\psi_m^t = \delta_{nm}, \quad \bar{g}_{st}\psi_{a'}^s\psi_{b'}^t = \delta_{a'b'}, \quad \bar{g}_{st}\psi_n^s\psi_{a'}^t = 0, \quad (2.21)$$

y completitud

$$\bar{g}_{st}\delta^{nm}\psi_n^t\psi_m^u + \bar{g}_{st}\delta^{a'b'}\psi_{a'}^t\psi_{b'}^u = \delta_s^u. \quad (2.22)$$

Para tratar el problema perturbativamente, expandiremos  $q$  alrededor del mínimo en términos de modos normales

$$q^s = \bar{q}^s + \psi_n^s \xi^n + \psi_{a'}^s \xi^{a'} + \dots, \quad (2.23)$$

donde  $\xi^n$  son las coordenadas normales. Los puntos suspensivos indican términos arbitrarios de orden superior en  $\xi^n$  que puede ser conveniente incluir para simplificar los cálculos. Los  $\xi^{a'}$  son las coordenadas asociadas a los modos cero ( $\omega_{a'} = 0$ ) y las  $\xi^n$  las asociadas a los modos de frecuencia finita  $\omega_n > 0$ . Con  $\xi^n$  se denota una coordenada genérica sin especificar si es modo cero o no. Expandiendo la acción hasta orden cuarto en las fluctuaciones se obtiene:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2}\dot{\xi}^n\dot{\xi}^n + \frac{1}{2}\omega_n^2\xi^n\xi^n + \frac{1}{6}A_{nml}\xi^n\xi^m\xi^l + \frac{1}{2}B_{nm,l}\dot{\xi}^n\dot{\xi}^m\xi^l + \\ & \frac{1}{24}E_{nm,lp}\xi^n\xi^m\xi^l\xi^p + \frac{1}{4}F_{nm,lp}\dot{\xi}^n\dot{\xi}^m\xi^l\xi^p + \frac{1}{2}\dot{\alpha}_a\Psi_a^b\dot{\alpha}_c\Psi_c^b\mathfrak{S}_b \\ & + K_{nm}^b\dot{\alpha}_a\Psi_a^b\dot{\xi}^n\xi^m + \frac{1}{2}\dot{\alpha}_a\Psi_a^bP_{b,nmp}\dot{\xi}^n\xi^m\xi^l \\ & + \frac{1}{2}\dot{\alpha}_a\Psi_a^b\dot{\alpha}_c\Psi_c^dM_n^{bd}\xi^n + \frac{1}{4}\dot{\alpha}_a\Psi_a^b\dot{\alpha}_c\Psi_c^dN_{nm}^{bd}\xi^n\xi^m, \end{aligned} \quad (2.24)$$

donde  $A, B, E, F, K, N, M, P$  son ciertos coeficientes constantes que salen de la expansión y dependen de los términos de orden superior en la ec. (2.23). Evidentemente se pueden tomar como coordenadas extra las  $\xi^{a'}$  y las  $\alpha_a$ . Si se las elimina tomando  $\xi^{a'} = \alpha_a = 0$ , el número de grados de libertad será el mismo que al principio y habremos realizado un cambio de coordenadas  $q^s \rightarrow (\alpha_{a'}, \xi^n)$ .

Para el tratamiento cuántico utilizaremos el formalismo de integral de camino para los  $\xi^n$  que es más apropiado para un sistema con infinitos grados de libertad y para los  $\alpha_{a'}$  utilizaremos el formalismo Hamiltoniano usual de la mecánica cuántica.

Debemos tener en cuenta sin embargo que, en el caso cuántico, al realizar un cambio de variables como  $q^s \rightarrow (\alpha_a, \xi^{\bar{n}})$  la acción resultante no es (2.24) sino que contiene términos extra conocidos como el potencial de Gervais-Jevicki [22]. Este potencial extra es:

$$V_{G.J.} = \frac{1}{8} g^{st} \Gamma_{sv}^u \Gamma_{tu}^v + \frac{R}{8} , \quad (2.25)$$

donde  $\Gamma$  es la conexión métrica y  $R$  es el escalar de curvatura de la variedad. Una forma de deducir este resultado la damos en el Apéndice C. El término  $R/8$  es independiente del sistema de coordenadas y por lo tanto se puede eliminar, redefiniendo la acción (2.3). Haciendo esto, no lo tomaremos en cuenta en adelante.

## 2.2 Cálculo a 2-loops de la energía

En esta sección calcularemos la corrección a 2 loops de los niveles vibrationales. El análisis de las bandas rotacionales se hará en el capítulo siguiente.

Para este cálculo se utiliza un formalismo de temperatura finita. A partir de la función de partición y sabiendo las energías de los estados sin perturbar se pueden deducir las correcciones a la energía.

Para calcular la función de partición se utiliza la integral de camino con tiempo imaginario (extendiéndose de 0 a  $\beta$ , la temperatura inversa) y con condiciones periódicas de contorno  $\xi^{\bar{n}}(\beta) = \xi^{\bar{n}}(0)$ .

Los propagadores estarán determinados por la parte cuadrática de la acción

$$S_{\text{int.}}^{(2)} = \int d\tau \sum_{\bar{n}} \frac{1}{2} \left( \dot{\xi}^{\bar{n}} \xi^{\bar{n}} + \omega_{\bar{n}}^2 \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{n}} \right) . \quad (2.26)$$

Con condiciones periódicas de contorno se obtiene el propagador:

$$\langle\langle T \xi^{\bar{n}}(\tau) \xi^{\bar{n}}(\tau') \rangle\rangle = G_{\omega_{\bar{n}}}(\tau - \tau') \quad (2.27)$$

$$= \frac{1}{2\omega_{\bar{n}}(e^{\beta\omega_{\bar{n}}} - 1)} \left( e^{\beta\omega_{\bar{n}}} e^{-\omega_{\bar{n}}|\tau - \tau'|} + e^{\omega_{\bar{n}}|\tau - \tau'|} \right) . \quad (2.28)$$

Para el propagador de dos derivadas temporales definimos el producto ordenado temporalmente como

$$\begin{aligned} \langle\langle \hat{T} \dot{\xi}^{\bar{n}}(\tau) \dot{\xi}^{\bar{n}}(\tau') \rangle\rangle &= \partial_{\tau} \partial_{\tau'} G_{\omega_{\bar{n}}}(\tau - \tau') \\ &= \delta(\tau - \tau') - \omega_{\bar{n}}^2 G_{\omega_{\bar{n}}}(\tau - \tau') . \end{aligned} \quad (2.29)$$

El término  $\delta(\tau - \tau')$  se cancela con vértices extra que aparecen en el lagrangiano (a diferencia del Hamiltoniano de interacción) y que se deben a las interacciones con términos dependientes de la velocidad. El fenómeno es similar al que aparece en la electrodinámica escalar. También cancela contribuciones proporcionales a  $\delta(0)$  que provienen de exponenciar la medida  $\frac{1}{2}\delta(0) \int d\tau \sqrt{g(\tau)}$  [23, 24].

Los vértices de interacción están dados por los términos de orden superior en (2.24)

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{6} A_{\bar{n}\bar{m}I} \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{m}} \xi^I + \frac{1}{2} B_{\bar{n}\bar{m},I} \dot{\xi}^{\bar{n}} \dot{\xi}^{\bar{m}} \xi^I + \frac{1}{24} E_{\bar{n}\bar{m}I\bar{p}} \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{m}} \xi^I \xi^{\bar{p}} \\ & + \frac{1}{4} F_{\bar{n}\bar{m},I\bar{p}} \dot{\xi}^{\bar{n}} \dot{\xi}^{\bar{m}} \xi^I \xi^{\bar{p}} + \frac{1}{2\mathfrak{G}_b} K_{\bar{n}\bar{m}}^{b'} K_{I\bar{p}}^{b'} \dot{\xi}^{\bar{n}} \dot{\xi}^I \xi^{\bar{m}} \xi^{\bar{p}}, \end{aligned} \quad (2.30)$$

donde se incluye un término extra proveniente de la parte colectiva que se deducirá en el siguiente capítulo. Observemos que todas las sumas son sobre los modos finitos únicamente, ya que se hizo  $\xi^{a'} = 0$ . La función de partición  $Z$  se expandirá como

$$Z = Z^{(1)} e^{\beta W_2} e^{\beta W_3} \dots, \quad (2.31)$$

donde  $Z^{(1)}$  simboliza la contribución de 1 loop que es el producto de las funciones de partición de los osciladores armónicos con frecuencia  $\omega_{\bar{n}}$  y  $W_p$  son las contribuciones de los diagramas conectados de  $p$ -loops. El valor de  $Z^{(1)}$  se obtiene de los diagramas de 1-loop resultando [25]:

$$\begin{aligned} Z^{(1)} &= \int \mathcal{D}[\xi^{\bar{n}}] \sqrt{g} \exp(-S^{(2)}) \\ &= \prod_{\bar{n}} \det^{-1/2}(\partial_\tau^2 - \omega_{\bar{n}}^2) \\ &= \prod_{\bar{n}} \left[ 2 \sinh\left(\frac{\beta \omega_{\bar{n}}}{2}\right) \right]^{-1} \end{aligned} \quad (2.32)$$

A dos loops, con los vértices (2.30) se calculan los diagramas de vacío de la figura (2.2) lo que resulta en:

$$\begin{aligned} (a) + (b) + (c) = & \frac{1}{8\omega_{\bar{n}}^2} (A_{\bar{n}\bar{m}\bar{m}} - \omega_{\bar{m}}^2 B_{\bar{m}\bar{m},\bar{n}}) (A_{\bar{n}I} - \omega_{\bar{m}}^2 B_{I\bar{n},\bar{n}}) G_{\bar{m}}(0) G_I(0) \\ & + \frac{1}{12} A_{\bar{n}\bar{m}I} A_{\bar{n}\bar{m}I} g(\omega_{\bar{n}}, \omega_{\bar{m}}, \omega_I) + \frac{1}{2} A_{\bar{n}\bar{m}I} B_{\bar{n}\bar{m},I} g(\omega_I, \dot{\omega}_{\bar{n}}, \dot{\omega}_{\bar{m}}) \\ & - \frac{1}{2} \omega_{\bar{m}}^2 B_{\bar{n}\bar{m},I} B_{\bar{n}\bar{m},I} G_{\bar{m}}(0) G_I(0) + \frac{1}{4} B_{\bar{n}\bar{m},I} B_{\bar{n}\bar{m},I} \omega_{\bar{n}}^2 \omega_{\bar{m}}^2 g(\omega_{\bar{n}}, \omega_{\bar{m}}, \omega_I) \end{aligned}$$

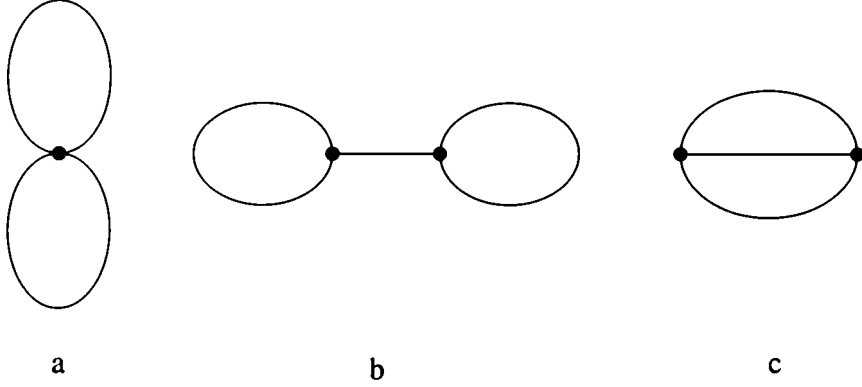


Figura 2.2: Diagramas de vacío a dos loops que aparecen en el cálculo de la función de partición.

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} B_{\bar{n}\bar{m},\bar{l}} B_{\bar{n}\bar{l},\bar{m}} \omega_{\bar{n}}^2 g(\omega_{\bar{n}}, \dot{\omega}_{\bar{m}}, \dot{\omega}_{\bar{l}}) - \frac{1}{8} E_{\bar{n}\bar{n}\bar{l}\bar{l}} G_{\bar{n}}(0) G_{\bar{l}}(0) \\
& + \frac{1}{4} F_{\bar{n}\bar{n},\bar{l}\bar{l}} \omega_{\bar{n}}^2 G_{\bar{n}}(0) G_{\bar{l}}(0) - \frac{1}{2\mathfrak{S}_{\alpha'}} K_{\bar{n}\bar{m}}^{\alpha'} K_{\bar{n}\bar{m}}^{\alpha'} \omega_{\bar{n}}^2 G_{\bar{n}}(0) G_{\bar{m}}(0). \quad (2.33)
\end{aligned}$$

Las funciones  $g(\omega_{\bar{n}}, \omega_{\bar{m}}, \omega_{\bar{l}})$  y  $g(\omega_{\bar{n}}, \dot{\omega}_{\bar{m}}, \dot{\omega}_{\bar{l}})$  se definen en el apéndice B.

A esto último hay que agregarle la contribución del potencial de Gervais-Jevicki. Como este potencial es proporcional a  $\hbar^2$ , sólo se debe calcular a este orden su valor de expectación. Para ello es necesario evaluar la conexión métrica definida por

$$\Gamma_{tv}^s = g^{su} [tv, u], \quad (2.34)$$

donde  $[st, u]$  son los símbolos de Christoffel definidos por

$$[st, u] = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_{su}}{\partial q^t} + \frac{\partial g_{tu}}{\partial q^s} - \frac{\partial g_{st}}{\partial q^u} \right). \quad (2.35)$$

En el sistema de coordenadas  $(\xi^{\bar{n}}, \alpha_{\alpha'})$  que estamos utilizando, la métrica vale

$$g_{\bar{n}\bar{m}} = \delta_{\bar{n}\bar{m}} + B_{\bar{n}\bar{m},\bar{l}} \xi^{\bar{l}} + \frac{1}{2} F_{\bar{n}\bar{m},\bar{l}\bar{p}} \xi^{\bar{l}} \xi^{\bar{p}} + \dots, \quad (2.36)$$

$$g_{\alpha'\bar{n}} = K_{\bar{n}\bar{m}}^b \Psi_{\alpha'}^b \xi^{\bar{m}} + \dots, \quad (2.37)$$

$$g_{\alpha'b'} = \Psi_{\alpha'}^{c'} \Psi_{\alpha'}^{c'} \mathfrak{S}_{c'} + \Psi_{\alpha'}^c \Psi_{b'}^d M_{\bar{n}}^{cd} \xi^{\bar{n}} + \frac{1}{2} \Psi_{\alpha'}^c \Psi_{b'}^d N_{\bar{n}\bar{m}}^{bd} \xi^{\bar{n}} \xi^{\bar{m}} + \dots, \quad (2.38)$$

como se deduce del término cinético de (2.24). A partir de la métrica se calculan los símbolos de Christoffel (ec. (2.35)), resultando:

$$[\bar{n}\bar{m}, \bar{l}] = \frac{1}{2} (B_{\bar{n}\bar{l},\bar{m}} + B_{\bar{m}\bar{l},\bar{n}} - B_{\bar{n}\bar{m},\bar{l}}),$$

$$\begin{aligned}
[\bar{n}\bar{m}, a'] &= \frac{1}{2} \left( K_{\bar{n}\bar{m}}^b + K_{\bar{m}\bar{n}}^b \right) \Psi_{a'}^b, \\
[\bar{n}a', \bar{m}] &= \frac{1}{2} \left( K_{\bar{m}\bar{n}}^b - K_{\bar{n}\bar{m}}^b \right) \Psi_{a'}^b = K_{[\bar{m}\bar{n}]}^b \Psi_{a'}^b, \\
[\bar{n}a', b'] &= \frac{1}{2} \Psi_{a'}^c \Psi_{b'}^d M_{\bar{n}}^{cd}, \\
[a'b', \bar{n}] &= -\frac{1}{2} \Psi_{a'}^c \Psi_{b'}^d M_{\bar{n}}^{cd}, \\
[a'b', c'] &= \overline{[a'b', c']},
\end{aligned} \tag{2.39}$$

$$\begin{aligned}
[\bar{n}a', b'] &= \frac{1}{2} \Psi_{a'}^c \Psi_{b'}^d M_{\bar{n}}^{cd}, \\
[a'b', \bar{n}] &= -\frac{1}{2} \Psi_{a'}^c \Psi_{b'}^d M_{\bar{n}}^{cd}, \\
[a'b', c'] &= \overline{[a'b', c']},
\end{aligned} \tag{2.40}$$

donde la barra en la última igualdad indica que  $[a'b', c']$  está evaluado en la variedad  $\mathcal{M}$ . El resto está evaluado en  $\xi^{\bar{n}} = 0$ . A partir de los símbolos de Christoffel se calcula la conexión. Aquí resulta útil redefinir los coeficientes  $K$  y  $M$ . En la ec.(2.40) hay sumas sobre  $b$  que corren sobre los  $b'$  y  $\bar{b}$ . Con mas detalle

$$\begin{aligned}
K_{\bar{n}\bar{m}}^b \Psi_{a'}^b &= K_{\bar{n}\bar{m}}^{b'} \Psi_{a'}^{b'} + K_{\bar{n}\bar{m}}^{\bar{b}} \Psi_{a'}^{\bar{b}} = \left( K_{\bar{n}\bar{m}}^{b'} - \Theta_{b'}^{\bar{c}} K_{\bar{n}\bar{m}}^{\bar{c}} \right) \Psi_{a'}^{b'}, \\
&= \tilde{K}_{\bar{n}\bar{m}}^{b'} \Psi_{a'}^{b'},
\end{aligned} \tag{2.41}$$

donde se utilizó que

$$\Psi_{a'}^{\bar{b}} = -\Psi_{a'}^{c'} \Theta_{c'}^{\bar{b}}, \tag{2.42}$$

y se definió

$$\tilde{K}_{\bar{n}\bar{m}}^{b'} = K_{\bar{n}\bar{m}}^{b'} - \Theta_{b'}^{\bar{c}} K_{\bar{n}\bar{m}}^{\bar{c}}. \tag{2.43}$$

De la misma forma se define  $\tilde{M}$ .

Ahora, el potencial de Gervais y Jevicki se puede escribir como

$$\begin{aligned}
V_{G.J.} &= \frac{1}{32} (2B_{\bar{n}\bar{m},I} B_{\bar{m}\bar{n},I} - B_{\bar{n}\bar{m},I} B_{\bar{n}\bar{m},I}) - \frac{1}{8\mathfrak{S}_{a'}} \tilde{K}_{[\bar{n}\bar{m}]}^{a'} \tilde{K}_{[\bar{n}\bar{m}]}^{a'} \\
&\quad - \frac{1}{32} \frac{1}{\mathfrak{S}_{a'} \mathfrak{S}_{b'}} \tilde{M}_{\bar{n}}^{a'b'} \tilde{M}_{\bar{n}}^{a'b'} + \frac{1}{8} g^{c'd'} \Gamma_{b'c'}^{a'} \Gamma_{a'd'}^{b'}.
\end{aligned} \tag{2.44}$$

Agregando esta expresión a (2.33) se obtiene

$$\begin{aligned}
W_2 &= \frac{1}{8\omega_{\bar{n}}^2} (A_{\bar{n}\bar{m}\bar{m}} - \omega_{\bar{m}}^2 B_{\bar{m}\bar{m},\bar{n}}) (A_{\bar{n}\bar{I}\bar{I}} - \omega_{\bar{m}}^2 B_{\bar{I}\bar{I},\bar{n}}) G_{\bar{m}}(0) G_{\bar{I}}(0) \\
&\quad + \frac{1}{12} A_{\bar{n}\bar{m}\bar{I}} A_{\bar{n}\bar{m}\bar{I}} g(\omega_{\bar{n}}, \omega_{\bar{m}}, \omega_{\bar{I}}) + \frac{1}{2} A_{\bar{n}\bar{m}\bar{I}} B_{\bar{n}\bar{m},\bar{I}} g(\omega_{\bar{I}}, \dot{\omega}_{\bar{n}}, \dot{\omega}_{\bar{m}}) \\
&\quad - \frac{1}{2} \omega_{\bar{m}}^2 B_{\bar{n}\bar{m},\bar{I}} B_{\bar{n}\bar{m},\bar{I}} G_{\bar{m}}(0) G_{\bar{I}}(0) + \frac{1}{4} B_{\bar{n}\bar{m},\bar{I}} B_{\bar{n}\bar{m},\bar{I}} \omega_{\bar{n}}^2 \omega_{\bar{m}}^2 g(\omega_{\bar{n}}, \omega_{\bar{m}}, \omega_{\bar{I}}) \\
&\quad + \frac{1}{2} B_{\bar{n}\bar{m},\bar{I}} B_{\bar{n}\bar{I},\bar{m}} \omega_{\bar{n}}^2 g(\omega_{\bar{n}}, \dot{\omega}_{\bar{m}}, \dot{\omega}_{\bar{I}}) - \frac{1}{8} E_{\bar{n}\bar{n}\bar{I}\bar{I}} G_{\bar{n}}(0) G_{\bar{I}}(0)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{4} F_{\bar{n}\bar{n},\bar{l}} \omega_{\bar{n}}^2 G_{\bar{n}}(0) G_{\bar{l}}(0) - \frac{1}{2\mathfrak{S}_{a'}} K_{\bar{n}\bar{m}}^{a'} K_{\bar{n}\bar{m}}^{a'} \omega_{\bar{n}}^2 G_{\bar{n}}(0) G_{\bar{m}}(0) \\
& - \frac{1}{32} (2B_{\bar{n}\bar{m},\bar{l}} B_{\bar{m}\bar{l},\bar{n}} + B_{\bar{n}\bar{m},\bar{l}} B_{\bar{n}\bar{m},\bar{l}}) + \frac{1}{8\mathfrak{S}_{a'}} K_{[\bar{n}\bar{m}]}^{a'} K_{[\bar{n}\bar{m}]}^{a'} \\
& + \frac{1}{32} \frac{1}{\mathfrak{S}_{a'} \mathfrak{S}_{b'}} M_{\bar{n}}^{a'b'} M_{\bar{n}}^{a'b'} + R_{G/H}.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

En el resultado anterior no se incluyó el término  $\overline{g^{c'd'} \Gamma_{b'e'}^{a'} \Gamma_{a'd'}^{b'}} / 8$  de la ec.(2.44) y se reemplazó  $\tilde{K}$  y  $\tilde{M}$  por  $K$  y  $M$ . Los términos no incluidos dependen de las coordenadas colectivas y por lo tanto se sumarán al Hamiltoniano colectivo en el capítulo siguiente. Además se sumó un término  $R_{G/H}$  que es la curvatura de la variedad  $G/H$  y que vale:

$$R_{G/H} = \frac{1}{\mathfrak{S}_{f'}} C_{f'a'}^{\bar{d}} C_{f'd}^{a'} + \frac{1}{2\mathfrak{S}_{f'}} C_{f'a'}^{d'} C_{f'd'}^{a'} + \frac{1}{4} \frac{\mathfrak{S}_{c'}}{\mathfrak{S}_{a'} \mathfrak{S}_{f'}} C_{f'a'}^{c'} C_{f'a'}^{c'}. \tag{2.46}$$

Este término es constante y se puede incluir aquí o en la parte colectiva. Se elige incluirlo aquí para que la energía colectiva en el caso de una función de onda constante sobre  $\mathcal{M}$  sea cero.

La expresión (2.45) contiene las correcciones a la energía de los estados vibracionales. Para finalizar se debe expresar los coeficientes  $A, B, E, F, K, N, M, P$  en términos de  $g_{st}$  y  $V(q)$ . Como se mencionó anteriormente estos coeficientes dependen del sistema de coordenadas elegido. Demostraremos en la siguiente sección que a pesar de ello, el resultado es invariante ante cambios de coordenadas en la variedad de Riemann. Esto permite evaluar los coeficientes en un sistema de coordenadas geodésico en el cuál sus expresiones son más sencillas.

## 2.3 Independencia del sistema de coordenadas

En esta sección se verificará que el resultado obtenido en la sección anterior para la función de partición es invariante ante un cambio arbitrario de coordenadas. Primeramente hagamos el cálculo cuando no hay coordenadas colectivas ( $H = G$ ) en cuyo caso el Lagrangiano es:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & \frac{1}{2} \dot{\xi}^n \dot{\xi}^n + \frac{1}{2} \omega_n^2 \xi^n \xi^n + \frac{1}{6} A_{nml} \xi^n \xi^m \xi^l + \frac{1}{2} B_{nm,l} \dot{\xi}^n \dot{\xi}^m \xi^l \\
& + \frac{1}{24} E_{nmlp} \xi^n \xi^m \xi^l \xi^p + \frac{1}{4} F_{nm,lp} \dot{\xi}^n \dot{\xi}^m \xi^l \xi^p.
\end{aligned} \tag{2.47}$$

La corrección a dos loops para la función de partición obtenida en la sección anterior (eliminando los términos colectivos) vale:

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{8\omega_n^2} (A_{\bar{n}\bar{m}\bar{m}} - \omega_{\bar{m}}^2 B_{\bar{m}\bar{m},\bar{n}}) (A_{\bar{n}I} - \omega_{\bar{m}}^2 B_{I,\bar{n}}) G_{\bar{m}}(0) G_I(0) \\
& + \frac{1}{12} A_{\bar{n}\bar{m}I} A_{\bar{n}\bar{m}I} g(\omega_{\bar{n}}, \omega_{\bar{m}}, \omega_I) + \frac{1}{2} A_{\bar{n}\bar{m}I} B_{\bar{n}\bar{m},I} g(\omega_I, \dot{\omega}_{\bar{n}}, \dot{\omega}_{\bar{m}}) \\
& - \frac{1}{2} \omega_{\bar{m}}^2 B_{\bar{n}\bar{m},I} B_{\bar{n}\bar{m},I} G_{\bar{m}}(0) G_I(0) + \frac{1}{4} B_{\bar{n}\bar{m},I} B_{\bar{n}\bar{m},I} \omega_n^2 \omega_{\bar{m}}^2 g(\omega_{\bar{n}}, \omega_{\bar{m}}, \omega_I) \\
& + \frac{1}{2} B_{\bar{n}\bar{m},I} B_{\bar{n}I,\bar{m}} \omega_n^2 g(\omega_{\bar{n}}, \dot{\omega}_{\bar{m}}, \dot{\omega}_I) - \frac{1}{8} E_{\bar{n}\bar{n}I} G_{\bar{n}}(0) G_I(0) \\
& + \frac{1}{4} F_{\bar{n}\bar{n},I} \omega_n^2 G_{\bar{n}}(0) G_I(0). \tag{2.48}
\end{aligned}$$

Realicemos un cambio de coordenadas  $\xi \rightarrow \zeta$  de la forma

$$\xi^n = \zeta^n + \frac{1}{2} \Lambda_{pq}^n \zeta^p \zeta^q + \frac{1}{6} \Theta_{pqr}^n \zeta^p \zeta^q \zeta^r, \tag{2.49}$$

donde se consideraron, en la expansión de  $\xi$  en función de  $\zeta$ , sólo los términos relevantes para la demostración. Los coeficientes cambiarán como

$$\begin{aligned}
\tilde{B}_{nm,l} &= B_{nm,l} + \Lambda_{nl}^n + \Lambda_{nl}^m, \\
\tilde{A}_{nml} &= A_{nml} + \omega_n^2 \Lambda_{ml}^n + \omega_m^2 \Lambda_{nl}^m + \omega_l^2 \Lambda_{mn}^l, \\
\tilde{E}_{nm lp} &= E_{nm lp} + \omega_n^2 \Theta_{mlp}^n + \omega_m^2 \Theta_{nlp}^m + \omega_l^2 \Theta_{nmp}^l + \omega_p^2 \Theta_{nml}^p \\
&\quad + \omega_r^2 \Lambda_{nm}^r \Lambda_{lp}^r + \omega_r^2 \Lambda_{nl}^r \Lambda_{mp}^r + \omega_r^2 \Lambda_{np}^r \Lambda_{ml}^r \\
&\quad + \Lambda_{nm}^r A_{rlp} + \Lambda_{nl}^r A_{rmp} + \Lambda_{np}^r A_{rml}, \\
&\quad + \Lambda_{lp}^r A_{rnm} + \Lambda_{mp}^r A_{rnl} + \Lambda_{ml}^r A_{rnp} \tag{2.50}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{nm,pq} &= F_{nm,pq} + \Theta_{mpq}^n + \Theta_{npq}^m + \Lambda_{np}^r \Lambda_{mq}^r + \Lambda_{nq}^r \Lambda_{mp}^r \\
&\quad + B_{nm,r} \Lambda_{pq}^r + B_{rn,p} \Lambda_{mq}^r + B_{rm,p} \Lambda_{nq}^r \\
&\quad + B_{rn,q} \Lambda_{mp}^r + B_{rm,q} \Lambda_{np}^r. \tag{2.51}
\end{aligned}$$

Debemos ahora verificar que la expresión (2.48) queda invariante ante este cambio. Un cálculo largo pero sencillo muestra que no es invariante y sobra un término

$$\frac{1}{8} B_{\bar{n}\bar{m},I} + \frac{1}{8} \Lambda_{\bar{n}I}^{\bar{m}} \Lambda_{\bar{n}\bar{m}}^I. \tag{2.52}$$

Esto se debe a que no se consideró el potencial de Gervais-Jevicki que está dado por (evaluamos (2.44) sin la parte de modos cero)

$$V_{G.J.} = \frac{1}{8} \Gamma_{\bar{m}I}^{\bar{n}} \Gamma_{\bar{n}I}^{\bar{m}} = \frac{1}{32} (2B_{\bar{n}I,\bar{m}} B_{\bar{n}\bar{m},I} - B_{\bar{n}\bar{m},I} B_{\bar{n}\bar{m},I}). \tag{2.53}$$

Este potencial adicional tampoco es invariante y su variación es

$$\frac{1}{8}B_{nm,l} + \frac{1}{8}\Lambda_{nl}^m \Lambda_{nm}^l, \quad (2.54)$$

que cancela lo anterior ya que contribuye con un signo negativo a la función de partición. El resultado de sumar (2.48) y  $V_{G.J.}$  es por lo tanto invariante como se quería ver. Esto nos permite utilizar un sistema de coordenadas que resulte más conveniente. En particular las expresiones se simplifican en un sistema de coordenadas geodésico que será el utilizado en la siguiente sección.

Ahora veamos lo que ocurre con el lagrangiano completo (2.24) y la expresión (2.45) para la función de partición.

El cambio de variables se hará siguiendo la siguiente secuencia:

- Se introducen coordenadas colectivas  $(\alpha_{a'})$  en el lagrangiano original (2.15)
- Se expande en  $\xi^n, \xi^{a'}$ .
- Se cambia de variables  $(\xi^n, \xi^{a'}) \rightarrow (\zeta^n, \zeta^{a'})$ .
- Se hace  $\zeta^{a'} = 0$  con lo cual se obtiene el lagrangiano (2.24) con otros coeficientes.
- Al evaluar la ec.(2.45) con estos nuevos coeficientes se debe obtener el mismo resultado.

Los coeficientes  $B, A, E, F$  transforman igual que en la ec.(2.51) pero hay que tener en cuenta que en las sumas los índices  $n$  corren también sobre  $a'$ .

Los restantes coeficientes transforman como

$$\begin{aligned} \tilde{P}_{nmp}^a &= P_{nmp}^a + (2K_{sm}^a \Lambda_{mp}^s + K_{ns}^a \Lambda_{mp}^s)_{\text{sim.}} + \Theta_{nmp}^a, \\ \tilde{N}_{nm}^{bd} &= N_{nm}^{bd} + M_s^{bd} \Lambda_{nm}^s, \\ \tilde{K}_{nm}^a &= K_{nm}^a - \Lambda_{nm}^a, \\ \tilde{M}_n^{bd} &= M_n^{bd}. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Al hacer  $\zeta^{a'} = 0$ , el cálculo da el mismo resultado que antes, es decir, es invariante, salvo por los términos con contracciones sobre  $a'$  que equivalen a hacer

$$\tilde{E}_{\tilde{n}\tilde{m}\tilde{l}\tilde{p}} = E_{\tilde{n}\tilde{m}\tilde{l}\tilde{p}} + 6 \left( \Lambda_{\tilde{n}\tilde{m}}^{a'} A_{a'\tilde{l}\tilde{p}} \right),$$

$$\begin{aligned}\bar{F}_{\bar{n}\bar{m},\bar{p}\bar{q}} &= F_{\bar{n}\bar{m},\bar{p}\bar{q}} + \Lambda_{\bar{n}\bar{p}}^{a'} \Lambda_{\bar{m}\bar{q}}^{a'} + \Lambda_{\bar{n}\bar{q}}^{a'} \Lambda_{\bar{m}\bar{p}}^{a'} \\ &\quad + B_{\bar{n}\bar{m},a'} \Lambda_{\bar{p}\bar{q}}^{a'} + 4 \left( B_{a'\bar{n},\bar{p}} \Lambda_{\bar{m}\bar{q}}^{a'} \right)_{\text{sim.}}\end{aligned}\quad (2.56)$$

Notemos además que  $\tilde{K}_{[nm]} = K_{[nm]}$  ya que  $\Lambda$  es simétrico.

Si se realizan las variaciones de los coeficientes dadas por las ecs.(2.55) y (2.56) se comprueba que la variación de la ec.(2.45) es cero.

## 2.4 Coordenadas de Riemann

La sección anterior nos muestra que el resultado (2.45) es invariante ante cambios de coordenadas. Elegiremos entonces las coordenadas geodésicas o de Riemann para la expansión porque con ellas se obtiene una expresión más sencilla para los coeficientes.

Las coordenadas geodésicas alrededor del mínimo  $\bar{q}$  se definen como un mapa del espacio tangente en la variedad dado por:

$$\xi \in T_{\bar{q}}(C) \rightarrow q^s(1), \quad (2.57)$$

donde  $q^s(\eta)$  es una geodésica que pasa por  $\bar{q}$  y cuya tangente es  $\xi$ . Es decir,  $q^s$  satisface la ecuación

$$\frac{d^2 q^s}{d\eta^2} + \Gamma_{uv}^s \frac{dq^u}{d\eta} \frac{dq^v}{d\eta} = 0, \quad (2.58)$$

con la condición inicial

$$\frac{dq^v}{d\eta}(0) = \psi_n^s \xi^n. \quad (2.59)$$

Al resolver estas ecuaciones se obtiene que el cambio de coordenadas está dado por (hasta orden 3 en las fluctuaciones)

$$q^s = \bar{q}^s + \psi_n^s \xi^n - \frac{1}{2} \Gamma_{uv}^s \psi_n^u \xi^n \psi_m^v \xi^m + \frac{1}{6} (2\Gamma_{ux}^s \Gamma_{vw}^x - \partial_v \Gamma_{uw}^s) \psi_n^u \xi^n \psi_m^v \xi^m \psi_l^w \xi^l. \quad (2.60)$$

Insertando esta expansión en la ec. (2.23) se puede obtener los coeficientes deseados. Un método más rápido, sin embargo, es el siguiente:

Primeramente expandamos  $V(q)$ . Sea un punto dado por las coordenadas  $\xi^n$ . Definamos la función

$$V(\eta) = V(q^s(\eta)), \quad (2.61)$$

donde  $q^s(\eta)$  es una geodésica que pasa por  $\bar{q}$  con tangente  $\xi$ . Por definición  $V(\xi^n) = V(\eta = 1)$ . La función  $V(\eta)$  se puede expandir como

$$V(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V^{(n)}(\eta = 0). \quad (2.62)$$

Calculemos algunas derivadas

$$\begin{aligned} V^{(0)} &= V(\bar{q}), \\ V^{(1)} &= \frac{dV}{dq^s} \frac{dq^s}{d\eta} = V_{;s} \psi_n^s \xi^n, \\ V^{(2)} &= \frac{d}{d\eta} \frac{dV}{dq^s} = \frac{dV}{dq^s} \ddot{q}^s + \frac{d^2 V}{dq^s dq^t} \dot{q}^s \dot{q}^t \\ &= (V_{;sv} - V_{;r} \Gamma_{sv}^r) \dot{q}^s \dot{q}^t = V_{;sv} \psi_n^s \xi^n \psi_m^v \xi^m, \end{aligned} \quad (2.63)$$

donde  $V_{;s}$  denota derivada covariante. En la última igualdad se utilizó la ecuación de la geodésica para reemplazar  $\ddot{q}^s$ .

Es fácil ver por recursividad que

$$V^{(n)} = V_{;s_1 s_2 \dots s_n} \psi_{m_1}^{s_1} \xi^{m_1} \psi_{m_2}^{s_2} \xi^{m_2} \dots \psi_{m_n}^{s_n} \xi^{m_n}, \quad (2.64)$$

con lo cual la expansión geodésica para una función escalar (p.ej. el potencial) queda:

$$V(\xi^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} V_{;s_1 s_2 \dots s_n} \psi_{m_1}^{s_1} \xi^{m_1} \psi_{m_2}^{s_2} \xi^{m_2} \dots \psi_{m_n}^{s_n} \xi^{m_n}, \quad (2.65)$$

donde las derivadas se evalúan en  $\bar{q}$ .

Para expandir el término cinético observemos que

$$g_{st} \dot{q}^s \dot{q}^t = g_{st} \frac{\partial q^s}{\partial \xi^n} \frac{\partial q^t}{\partial \xi^m} \xi^n \xi^m. \quad (2.66)$$

Para  $n$  fijo,  $q_n^s = \partial q^s / \partial \xi^n$  es un vector y por lo tanto  $g_{st} q_n^s q_m^t$  es un escalar y podemos aplicar la misma expansión que para  $V$ . Para ello hay que utilizar los siguientes resultados que se obtienen por cálculo explícito:

$$\begin{aligned} q_{n;u}^s &= 0, \\ q_{n;uv}^s &= \frac{1}{3} (R_{tvu}^s + R_{uvt}^s) \psi_n^t, \end{aligned} \quad (2.67)$$

donde las derivadas están evaluadas en  $\bar{q}$  y  $R_{uv}^s$  es el tensor de curvatura. Finalmente

$$g_{st}\dot{q}^s\dot{q}^t = g_{st}\psi_n^s\psi_m^t\xi^n\xi^m + \frac{1}{3}R_{stuv}\psi_n^s\dot{\xi}_n\psi_m^t\xi^m\psi_l^u\xi^l\psi_p^v\dot{\xi}_p. \quad (2.68)$$

Con el mismo procedimiento se expanden los términos dependientes de las coordenadas colectivas. Resumiendo, los coeficientes quedan:

$$\begin{aligned} B_{nm,l} &= 0, \\ A_{nml} &= V_{;stu}\psi_n^s\psi_m^t\psi_l^u, \\ E_{nm lp} &= V_{;stuv}\psi_n^s\psi_m^t\psi_l^u\psi_p^v, \\ F_{nm,pq} &= \frac{1}{3}(R_{stuv} + R_{sutv})\psi_p^s\psi_n^t\psi_m^u\psi_q^v, \\ K_{mn}^a &= R_{a;s}\psi_n^t\psi_m^s, \\ M_n^{ab} &= (R_a^s R_b^t g_{st})_{;v}\psi_n^v, \\ N_{nm}^{ab} &= (R_a^s R_b^t g_{st})_{;vu}\psi_n^v\psi_m^u, \end{aligned} \quad (2.69)$$

donde

$$R_a^s = \partial_a R^s(q, \alpha)|_{\alpha=0}. \quad (2.70)$$

La expresión para  $P$  la omitimos ya que no interviene en el resultado. Comentemos además que en coordenadas geodésicas el  $K_{nm}^a$  resulta anti-simétrico en los índices  $n$  y  $m$ .

Reemplazando estos coeficientes en la expresión (2.45) se obtiene el resultado deseado.

$$\begin{aligned} W_2 &= \frac{1}{8\omega_n^2}V_{;\bar{n}\bar{m}\bar{m}}V_{;\bar{n}\bar{l}}G_{\bar{m}}(0)G_{\bar{l}}(0) + \frac{1}{12}V_{;\bar{n}\bar{m}\bar{l}}V_{;\bar{n}\bar{m}\bar{l}}g(\omega_{\bar{n}}, \omega_{\bar{m}}, \omega_{\bar{l}}) + \\ &\quad - \frac{1}{8}V_{;\bar{n}\bar{n}\bar{l}}G_{\bar{n}}(0)G_{\bar{l}}(0) + \frac{1}{6}R_{\bar{l}\bar{n}\bar{n}\bar{l}}\omega_{\bar{n}}^2G_{\bar{n}}(0)G_{\bar{l}}(0) \\ &\quad - \frac{1}{2\Im_{a'}}K_{\bar{n}\bar{m}}^{a'}K_{\bar{n}\bar{m}}^{a'}\omega_{\bar{n}}^2G_{\bar{n}}(0)G_{\bar{m}}(0) + \frac{1}{8\Im_{a'}}K_{[\bar{n}\bar{m}]}^{a'}K_{[\bar{n}\bar{m}]}^{a'} \\ &\quad + \frac{1}{32}\frac{1}{\Im_{a'}\Im_{b'}}M_{\bar{n}}^{a'b'}M_{\bar{n}}^{a'b'} + \frac{1}{\Im_{f'}}C_{f'a'}^dC_{f'd}^{a'} + \frac{1}{2\Im_{f'}}C_{f'a'}^{d'}C_{f'd'}^{a'} \\ &\quad + \frac{1}{4}\frac{\Im_{c'}}{\Im_{a'}\Im_{f'}}C_{f'a'}^{c'}C_{f'a'}^{c'}. \end{aligned} \quad (2.71)$$

## 2.5 Ejemplo del kink

En el caso del kink (sección 1.1), el problema es abeliano y existe un único modo cero correspondiente a las traslaciones. En este caso la corrección a

dos loops de la energía de vacío es bien conocida [22] y nos permite verificar el resultado de la sección anterior. Recordemos que el kink aparece como solitón de una teoría de campo escalar en 1 + 1 dimensiones con lagrangiano

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 - \frac{1}{4!} \lambda \phi^4. \quad (2.72)$$

El espacio de configuraciones está dado por los mapas de  $R \rightarrow R$ . La métrica y el potencial están dados por:

$$\begin{aligned} g(x, y) &= \delta(x - y), \\ V[\phi(x)] &= \int dx \left( \frac{1}{2} (\partial_x \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 + \frac{1}{4!} \lambda \phi^4 \right). \end{aligned} \quad (2.73)$$

Como la métrica es independiente de  $\phi$ , la conexión se anula y las derivadas covariantes coinciden con las ordinarias. Existe un mínimo del potencial  $\bar{\phi}(x)$  dado por la ec.(1.2). El único modo cero está asociado a las traslaciones y es

$$\delta \bar{\phi}(x) = \partial_x \bar{\phi}(x). \quad (2.74)$$

El momento de inercia correspondiente es la masa del solitón

$$\mathfrak{I} = M = \int dx (\partial_x \bar{\phi})^2, \quad (2.75)$$

y el modo cero normalizado queda entonces como

$$\psi_0 = \frac{1}{\sqrt{M}} \partial_x \bar{\phi}. \quad (2.76)$$

Las derivadas del potencial evaluadas en  $\bar{\phi}(x)$  son

$$\begin{aligned} \frac{\delta^3 V}{\delta \phi(x) \delta \phi(y) \delta \phi(z)} &= \lambda \delta(x - y) \delta(x - z) \bar{\phi}(x), \\ \frac{\delta^4 V}{\delta \phi(x) \delta \phi(y) \delta \phi(z) \delta \phi(w)} &= \lambda \delta(x - y) \delta(x - z) \delta(x - w), \end{aligned} \quad (2.77)$$

de donde se obtienen los coeficientes

$$\begin{aligned} A_{nml} &= \lambda \int_x \bar{\phi}(x) \psi_n(x) \psi_m(x) \psi_l(x), \\ E_{nm lp} &= \lambda \int_x \psi_n(x) \psi_m(x) \psi_l(x) \psi_p(x). \end{aligned} \quad (2.78)$$

Los coeficientes  $K$  y  $M$  se obtienen a partir de la variación del campo ante una traslación:

$$\delta\phi(x) = R(x) = \partial_x\phi(x), \quad (2.79)$$

dando

$$\begin{aligned} K_{nm} &= u_{;m}^n = g_{su} u_{;t}^s \psi_n^u \psi_m^t \\ &= \int_{xy} \psi_n(x) \frac{\delta(\partial_x\phi(x))}{\delta\phi(y)} \psi_m(y) = - \int_x \partial_x \psi_m \psi_n, \\ M_n &= (u^s u^t g_{st})_{;n} = \int_x \frac{\delta(-\int \phi \partial_x^2 \phi)}{\delta\phi(x)} \psi_n(x) \\ &= -2 \int \partial_x^2 \bar{\phi}(x) \psi_n(x). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Para evaluar la corrección a la energía del vacío se toma el límite de la función de partición para  $\beta \rightarrow \infty$  a través de los resultados (ver apéndice B)

$$\begin{aligned} \lim_{\beta \rightarrow \infty} G_n(0) &= \frac{1}{2\omega_n}, \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} g(\omega_n, \omega_m, \omega_l) &= \frac{1}{4\omega_n \omega_m \omega_l (\omega_n + \omega_m + \omega_l)}. \end{aligned} \quad (2.81)$$

Al reemplazar en la expresión general (2.45) resulta útil introducir la notación

$$G^{(l)}(x, y) = \sum_{\vec{n}} \psi_{\vec{n}}(x) \frac{1}{(2\omega_{\vec{n}})^l} \psi_{\vec{n}}(y), \quad (2.82)$$

y  $G(x, y) = G^{(1)}(x, y)$ . La expresión final es

$$\begin{aligned} (\delta m)_2 &= \frac{\lambda^2}{2} \int \bar{\phi}(x) G(x, x) G^{(2)}(x, y) G(y, y) \bar{\phi}(y) - \frac{\lambda}{8} \int G(x, x) G(x, x) \\ &+ \frac{1}{48} \sum_{\vec{n}\vec{m}\vec{l}} \frac{(\int \bar{\phi} \psi_{\vec{n}} \psi_{\vec{m}} \psi_{\vec{l}})^2}{\omega_{\vec{n}} \omega_{\vec{m}} \omega_{\vec{l}} (\omega_{\vec{n}} + \omega_{\vec{m}} + \omega_{\vec{l}})} + \sum_{\vec{n}\vec{m}} \frac{1}{8M} (\partial_x \psi_{\vec{m}}, \psi_{\vec{n}})^2 \\ &\frac{1}{8M^2} \int (\bar{\phi}'')^2 - \frac{1}{8M} \int \partial_{xy} G(x, y) G^{(-1)}(x, y) \end{aligned} \quad (2.83)$$

que coincide con los resultados conocidos [22]. Este resultado contiene divergencias ultravioletas. Para eliminarlas se debe primeramente restar la energía de vacío (sin solitón) calculada al mismo orden en la constante de acoplamiento  $\lambda$ . El resultado aún es divergente, pero la naturaleza de las divergencias es la misma que la de las divergencias que aparecen en el cálculo



de funciones de Green en el sector de vacío. Para eliminarlas se debe introducir una regularización adecuada en las sumas sobre energías (es decir un cut-off ultravioleta) y considerar que los parámetros que aparecen son parámetros desnudos dependientes del cut-off [26]. La dependencia de los parámetros desnudos con el cut-off se obtiene a partir de renormalizar las amplitudes de vacío.

## 2.6 El modelo $O(3)$

Otro caso de interés es el modelo  $O(3)$  que describimos en el capítulo anterior. En esta sección será conveniente utilizar campos  $\theta_{1,2}$  definidos como  $\theta = \theta_1 + i\theta_2$ . En función de ellos se puede escribir la parte cinética de la acción como

$$T = \frac{1}{2} \int d^2x g_{ab} \dot{\theta}^a \dot{\theta}^b, \quad (2.84)$$

donde  $g_{ab} = (1 + \theta^c \theta^c)^{-2} \delta_{ab}$ . De aquí obtenemos que la métrica en la variedad infinito dimensional de mapas de  $R^2 \rightarrow S^2$  está dada por

$$g_{(a,x)(b,y)} = \frac{1}{(1 + \theta^c \theta^c)^2} \delta_{ab} \delta(x - y). \quad (2.85)$$

Los índices  $(a, x)$  corresponden a la notación

$$\theta_{(a,x)} = \theta^a(x). \quad (2.86)$$

Con esta métrica es sencillo calcular el tensor de curvatura necesario para obtener la corrección a dos-loops (2.71). El resultado es

$$R_{(b,y)(c,z)(d,w)}^{(a,x)} = \frac{4}{(1 + \theta^c \theta^c)^2} (\delta_{ac} \delta_{bd} - \delta_{ad} \delta_{bc}) \delta(x - y) \delta(x - z) \delta(x - w). \quad (2.87)$$

Aquí se utilizó que la variedad interna es una esfera para la cual vale que el tensor de Riemann es

$$R_{bcd}^a = 4(\delta_c^a g_{bd} - \delta_d^a g_{bc}). \quad (2.88)$$

La energía potencial que aparece en la acción es

$$V = \frac{1}{2} \int d^2x g_{ab} \nabla_i \theta^a \nabla_i \theta^b, \quad (2.89)$$

donde  $i = 1, 2$  son índices espaciales. Las ecuaciones de movimiento que se deducen de la acción son

$$(1 + \theta^2) \partial_\mu \partial^\mu \theta^a = 4\theta^b \partial_\mu \theta^b \partial_\mu \theta^a - 2\theta^a \partial_\mu \theta^b \partial^\mu \theta^b. \quad (2.90)$$

La solución de  $W = 1$  que se está considerando es la  $\theta^a = x_a$ . Si consideramos fluctuaciones dependientes del tiempo alrededor de la solución,

$$\theta^a(x, t) = x_a + e^{i\omega_n t} \psi_n^a(x), \quad (2.91)$$

y linealizamos las ecuaciones de movimiento para las  $\psi_n^a$ , obtendremos las ecuaciones para los modos normales

$$\nabla_i \nabla_i \psi_n^a + \frac{4}{(1+r^2)^2} (x_b \partial_b \psi_n^a + (x_b \partial_a - x_a \partial_b) \psi_n^b) = -\omega_n^2 \psi_n^a. \quad (2.92)$$

En este punto es conveniente cambiar a coordenadas polares en el plano  $(x_1, x_2) \rightarrow (r, \varphi)$  y utilizar nuevamente el campo complejo  $\psi_n = \psi_n^1 + i\psi_n^2$ . El campo  $\psi(r, \varphi)$  se puede descomponer como

$$\psi_n(r, \varphi) = \sum_m R_{nm}(r) e^{im\varphi}. \quad (2.93)$$

Reemplazando en (2.92) se obtiene la ecuación para  $R_{nm}$  :

$$R_{nm}'' + \left( \frac{1}{r} - \frac{4r}{1+r^2} \right) R_{nm}' - \frac{m^2}{r^2} R_{nm} + \frac{4m}{1+r^2} R_{nm} = -\omega_n^2 R_{nm}. \quad (2.94)$$

Las funciones  $\psi_n^a$  están normalizadas como

$$\int d^2x g_{ab} \psi_n^{*a} \psi_m^b = \delta_{nm}, \quad (2.95)$$

lo que se traduce en

$$\int dr \frac{r}{(1+r^2)^2} R_{np}^* R_{np} = 1. \quad (2.96)$$

Parte de la métrica se puede absorber en la función  $R$  definiendo

$$\tilde{R}_{nm} = \frac{1}{(1+r^2)} R_{nm}, \Rightarrow \int r dr \tilde{R}_{nm}^* \tilde{R}_{nm} = 1. \quad (2.97)$$

La ecuación que satisface  $\tilde{R}$  es entonces:

$$\tilde{R}_{nm}''(r) + \frac{1}{r} \tilde{R}_{nm}'(r) - \left( \frac{m^2}{r^2} - \frac{4m}{1+r^2} - \frac{4(1-r^2)}{(1+r^2)^2} \right) \tilde{R}_{nm}(r) = -\epsilon_{nm}^2 \tilde{R}_{nm}(r). \quad (2.98)$$

La ecuación anterior tiene modos cero de la forma

$$\tilde{R}_{0m} \propto \frac{r^m}{1+r^2}. \quad (2.99)$$

Aquellos con  $m > 1$  no corresponden a modos cero alrededor de la solución con  $W = 1$  y deben descartarse. Los cuatro modos cero restantes están asociados a las traslaciones espaciales (2), a las rotaciones espaciales e internas (1) y a las dilataciones (1). Este último indica que el solitón no tiene una escala de longitud determinada y desaparece si se considera un término de masa para los campos  $\phi_{1,2}$ . Por ello en los cálculos siguientes lo consideraremos como un modo finito. Además de las soluciones de energía cero hay un continuo de soluciones de energía finita cuya forma asintótica es

$$\begin{aligned} R_{nm} &\approx r^{|m|} && \text{para } r \rightarrow 0, \\ R_{nm} &\approx r^{-\frac{1}{2}} \sin(\epsilon_{nm} r + \delta_{nm}) && \text{para } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (2.100)$$

Usando estas condiciones de contorno se pueden obtener numéricamente las autofunciones y autovalores. También se pueden calcular los corrimientos de fase (phase-shifts)  $\delta_{nm}$  como función de la energía  $\epsilon_{nm}$ . Esto no lo haremos aquí, sino que supondremos conocidos los modos normales  $\psi_n$  (con frecuencia  $\omega_n$ ) y daremos la corrección a dos loops en términos de ellos.

Para hallar las derivadas covariantes de  $V$  que aparecen en la expresión a dos loops es conveniente reescribir el potencial como

$$V = \int d^2x d^2y g_{(a,x)(b,y)} \nabla_i \theta^a(x) \nabla_i \theta^b(y). \quad (2.101)$$

Esta expresión es mas sencilla de derivar covariantemente puesto que las derivadas covariantes de la métrica son nulas. Basta entonces evaluar

$$\begin{aligned} (\nabla_i \theta^a(x))_{(b,y)} &= \delta_{ab} \nabla_i^x \delta(x-y) - \Gamma_{bc}^a \delta(x-y) \nabla_i \theta^c(x), \\ (\nabla_i \theta^a(x))_{(b,y)(c,z)} &= R_{bcd}^a \nabla_i \theta^d(x-y) \delta(x-z), \\ (\nabla_i \theta^a(x))_{(b,y)(c,z)(d,w)} &= R_{bcf}^a \delta(x-y) \delta(x-z) \left( \delta^{fd} \nabla_i^x \delta(x-w) \right. \\ &\quad \left. + \Gamma_{dh}^f \nabla_i \theta^h \right), \\ (\nabla_i \theta^a(x))_{(b,y)(c,z)(d,w)(f,v)} &= R_{bch}^a R_{fdg}^h \delta(x-y) \delta(x-z) \delta(x-w) \delta(x-v) \nabla_i \theta^g, \end{aligned} \quad (2.102)$$

donde se utilizó que la derivada covariante del tensor de Riemann de la variedad se anula debido a que es proporcional a la métrica (2.87). Se introdujo también la conexión métrica sobre la esfera, que en coordenadas estereográficas está dada por

$$\Gamma_{ab}^c = -\frac{2}{(1+\theta^2)^3} (\delta_{ac} x_b + \delta_{bc} x_a - \delta_{ab} x_c). \quad (2.103)$$

Para hallar la corrección debemos evaluar las derivadas tercera y cuarta

$$\begin{aligned}
V_{;(nml)} &= \int_{x,y,z} V_{;(a,x)(b,y)(c,z)} \psi_n^a(x) \psi_m^b(y) \psi_l^c(z) \\
&= \int_x \frac{16}{(1+r^2)^4} \left[ \psi_n^a \psi_m^b \partial_b \psi_l^a - \psi_n^a \psi_m^a \partial_b \psi_l^b \right] + \int_x \frac{32x_a}{(1+r^2)^5} \psi_n^a \psi_m^b \psi_l^b, \\
V_{;(nmlp)} &= \int_{x,y,z} V_{;(a,x)(b,y)(c,z)(d,w)} \psi_n^a(x) \psi_m^b(y) \psi_l^c(z) \psi_p^d(w) = \\
&= 64 \int \frac{(2-r^2)}{(1+r^2)^6} \psi_n^a \psi_m^a \psi_l^b \psi_p^b + 32 \int \frac{x_a x_b}{(1+r^2)^6} \psi_n^a \psi_m^b \psi_l^c \psi_p^c \\
&\quad + 96 \int \frac{x_c}{(1+r^2)^3} \psi_n^a \psi_m^a \left( \psi_l^c \partial_a \psi_p^a - \psi_l^b \partial_b \psi_p^c \right) \\
&\quad + 8 \int \frac{1}{(1+r^2)^4} \left( \nabla_i \psi_n^a \nabla_i \psi_m^b \psi_l^a \psi_p^b - \nabla_i \psi_n^a \nabla_i \psi_m^a \psi_l^b \psi_p^b \right), \quad (2.104)
\end{aligned}$$

donde los paréntesis que encierran una serie de subíndices indican que la expresión se debe simetrizar respecto de los mismos. Los modos cero están asociados como se dijo a las simetrías de la acción que no son simetrías de la solución solitónica. En este caso las simetrías de la acción son las traslaciones espaciales generadas por operadores de traslación  $P_1$  y  $P_2$ , la rotación espacial generada por  $J$  y la rotación de isospin alrededor del eje 3 generada por  $I$ . Las rotaciones de isospin alrededor de los ejes 1 y 2 cambian el vacío y, por lo tanto, la condición de contorno en infinito. Las mismas corresponden a excitaciones de los bosones de Goldstone y no a modos cero del solitón. El álgebra de los operadores de simetría es

$$\begin{aligned}
[J, P_1] &= iP_2, \\
[J, P_2] &= -iP_1,
\end{aligned} \quad (2.105)$$

y todos los otros conmutadores iguales a cero. La solución solitónica  $\theta^a = x_a$  es invariante ante el operador  $I - J$ . Los modos cero que etiquetaremos como 1, 2 y 3 corresponden respectivamente a los operadores  $P_1$ ,  $P_2$  y  $I + J$ . Falta ahora calcular los coeficientes  $K$  y  $M$  con lo cual tendremos todo lo necesario para evaluar la expresión (2.71). Las variaciones del campo debidas a las simetrías son

$$\begin{aligned}
R_i^a(x) &= \nabla_i \theta^a(x), \\
R_3^a(x) &= \epsilon_{ab} \theta^b(x) - \epsilon_{ij} x_i \nabla_j \theta^a(x).
\end{aligned} \quad (2.106)$$

A partir de estas expresiones se obtienen por cálculo directo los coeficientes

$K$ :

$$\begin{aligned}
K_{mn}^i &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1+r^2)^2} (\nabla_i \psi_m^a \psi_n^a - \nabla_i \psi_n^a \psi_m^a) + \int \frac{2x_a}{(1+r^2)^3} (\psi_m^i \psi_n^a - \psi_n^i \psi_m^a), \\
K_{mn}^3 &= - \int \frac{1-r^2}{(1+r^2)^3} \epsilon_{ab} \psi_m^a \psi_n^b - \frac{1}{2} \int \frac{1}{(1+r^2)^2} \epsilon_{ij} x_i (\nabla_i \psi_m^a \psi_n^a - \nabla_i \psi_n^a \psi_m^a) \\
&\quad + \int \frac{2}{(1+r^2)^3} \epsilon_{ab} x_b x_c (\psi_m^a \psi_n^c - \psi_n^a \psi_m^c), \tag{2.107}
\end{aligned}$$

donde  $\epsilon_{12} = -\epsilon_{21} = 1$  y  $\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = 0$ . Similarmente se determinan los coeficientes  $M$  resultando

$$\begin{aligned}
M_n^{ij} &= \int \frac{1}{(1+r^2)^2} (\nabla_i \psi_n^j + \nabla_j \psi_n^i) - 4\delta_{ij} \int \frac{x_c}{(1+r^2)^3} \psi_n^c \\
M_n^{i3} &= \int \frac{3+r^2}{(1+r^2)^3} \epsilon_{ia} \psi_n^a + 6 \int \frac{1}{(1+r^2)^3} (\epsilon_{ab} x_b x_i - \epsilon_{ib} x_a x_b) \psi_n^a \\
M_n^{33} &= 8 \int \frac{1-r^2}{(1+r^2)^3} x_a \psi_n^a. \tag{2.108}
\end{aligned}$$

La expresi3n final puede obtenerse reemplazando en la ec.(2.71) los coeficientes (2.104), (2.107) y (2.108).

Como en el caso del kink el resultado tiene divergencias ultravioletas pero el modelo  $O(3)$  no es renormalizable y las divergencias no se pueden eliminar por medio de un n3mero finito de contrat3rminos. Esto indica que la teor3a es v3lida s3lo hasta una escala de energ3a dada. Esta escala debe tomarse como cut-off en todas las integraciones en el espacio de momentos y ser3 un par3metro adicional que debe determinarse fenomenol3gicamente.

Finalmente, determinado el cut-off, se debe recurrir a un m3todo num3rico como el propuesto en [27] para evaluar la expresi3n final. Esto queda como interesante trabajo para el futuro.

Lo importante aqu3 es remarcar que el m3todo desarrollado en esta secci3n permite tratar adecuadamente los modos cero en el caso no abeliano y da expresiones compactas para los coeficientes que intervienen en el resultado.



## Capítulo 3

# Bandas colectivas

En el capítulo anterior calculamos correcciones a las energías de los estados vibracionales. Sobre cada estado vibracional hay a su vez una banda de estados correspondientes al movimiento colectivo que es lo que estudiaremos en este capítulo. Estas excitaciones colectivas, en el caso que estamos tratando, resultan del movimiento en la variedad de vacíos  $G/H$  y parecería que en primera aproximación corresponden al movimiento libre en  $G/H$ , determinado por la métrica que induce el espacio en el cuál está inmersa. Sin embargo es bien conocido, a partir del estudio de las rotaciones nucleares y moleculares, que las bandas colectivas asociadas a distintos modos vibracionales son distintas (ver fig.2.1). En particular los valores de momento angular y paridad que aparecen en cada banda están determinados por las simetrías del estado vibracional al cuál corresponde. Aquí buscamos una descripción equivalente para los grupos  $G$  que aparecen al estudiar los solitones.

El modelo considerado en el capítulo anterior consiste en una partícula moviéndose en una variedad  $\mathcal{C}$ . Los estados vibracionales corresponden a excitaciones en el plano tangente a  $\mathcal{C}$  que pasa por  $\bar{q}$  (el mínimo del potencial) y que son ortogonales a los modos cero. El subgrupo  $H \subset G$  deja invariante  $\bar{q}$  y por lo tanto actúa naturalmente sobre el espacio tangente y los modos vibracionales se clasifican en representaciones de  $H$ . Veremos en este capítulo que a un estado vibracional que transforma en una dada representación irreducible  $\chi$  de  $H$  corresponde una banda colectiva que transforma en la representación de  $G$  inducida por  $\chi$ . Al partir esta representación en representaciones irreducibles de  $G$  se obtienen los distintos autoestados de energía que componen la banda colectiva. También puede expresarse este hecho diciendo que la banda colectiva asociada a un estado vibracional que

transforma en la representación  $\chi$  de  $H$  realiza una cuantificación no equivalente del espacio de configuraciones  $G/H$ . Por ello, en la siguiente sección, describiremos brevemente las distintas cuantificaciones que corresponden a un espacio de configuraciones  $G/H$  y que fueron descritas por MacKey [28] y más recientemente tratadas en [29, 30].

### 3.1 Cuantificaciones no-equivalentes en un espacio $G/H$

#### 3.1.1 Sistemas de imprimitividad

El formalismo de operadores de la mecánica cuántica se basa en la regla de conmutación

$$[q, p] = i. \quad (3.1)$$

Esta álgebra se representa sobre funciones  $f(q)$  como  $q = q$  y  $p = -i\partial_q$  y esta representación es única [31]. La regla de conmutación (3.1) puede interpretarse diciendo que el espacio de configuraciones del sistema está parametrizado por las  $q$  y que los  $p$  son operadores de traslación. Efectivamente, la regla (3.1) equivale a

$$e^{-iap} F(q) e^{iap} = F(q - a), \quad (3.2)$$

donde  $F$  es un operador que es función de  $q$  y  $a$  es un número real arbitrario. En el caso de que el espacio de configuraciones es un espacio cociente  $G/H$ , es natural tomar el grupo de movimientos (traslaciones) del espacio como  $G$ . En ese caso la generalización de la ec.(3.2) es

$$U(g)F(x)U^{-1}(g) = F(g^{-1}x), \quad (3.3)$$

donde  $x \in G/H$  y  $g^{-1}x$  designa la acción natural de  $G$  sobre  $G/H$ . Además  $U(g)$  indica un operador cuántico asociado a cada elemento de  $G$ . Mackey introdujo el concepto de sistema de imprimitividad [32] que es una formalización de la relación (3.3). En este contexto demostró que no hay una única representación de (3.3) sino que existen distintas representaciones o cuantificaciones no equivalentes entre sí, que están etiquetadas por las representaciones unitarias irreducibles de  $H$ . Básicamente, esto se debe a que el grupo de movimientos tiene mayor dimensión que el espacio de configuraciones permitiendo una estructura interna que transforme no trivialmente ante  $H$ . Esto debemos distinguirlo de la cuantificación de  $G/H$  pensado como un espacio de fases o cuantización de Berezin, que se discute por ejemplo en [33].



Dada una representación irreducible  $\chi$  de  $H$ , las funciones de onda en la cuantificación asociada a  $\chi$  toman valores en el espacio vectorial  $V_\chi$  sobre el cual se realiza la representación y se pueden obtener de funciones de  $G$  en  $V_\chi$  que satisfacen

$$f_{(\chi,\mu)}(gh) = \sum_{\nu} \pi_{\nu\mu}^\chi(h) f_{(\chi,\nu)}(g), \quad (3.4)$$

donde  $g \in G$ ,  $h \in H$ , y  $\pi_{\nu\mu}^\chi(h)$  son las matrices que realizan la representación  $\chi$  de  $H$ . La expresión (3.4) también se puede escribir en forma infinitesimal como

$$I_j f_{(\chi,\mu)}(g) = i \sum_{\nu} (T_j)_{\nu\mu}^\chi f_{(\chi,\nu)}(g), \quad (3.5)$$

donde  $(T_j)_{\mu\nu}^\chi$  son los generadores infinitesimales de  $H$  en la representación  $\chi$  y los  $I_j$  son los operadores infinitesimales que generan la acción derecha del grupo  $g \xrightarrow{g_1} gg_1$ . Debemos ahora ver que estas funciones definidas en  $G$  se corresponden con funciones definidas en  $G/H$  y que existen operadores  $U(g)$  que satisfacen la relación (3.3) actuando sobre estas funciones. Para ello es útil considerar primero las representaciones de un grupo inducidas por una representación dada de un subgrupo. Esto lo haremos en la próxima sección.

### 3.1.2 Representaciones inducidas

Las cuantificaciones no equivalentes están íntimamente relacionadas con las representaciones de un grupo inducidas por una representación de un subgrupo. Por ello describiremos brevemente en esta sección el método de representaciones inducidas siguiendo [32] donde se las estudia en detalle.

Dado un grupo compacto  $G$  es útil considerar la representación regular definida sobre funciones en  $G$  como

$$f(g) \xrightarrow{g_1} f(g_1^{-1}g). \quad (3.6)$$

Esta representación es reducible e infinito dimensional y al partirla en representaciones irreducibles (irreps) de  $G$  se obtienen todas las irreps de  $G$  cada una tantas veces como su dimensión. Para verlo, basta utilizar el teorema de Peter-Weyl y descomponer la función  $f(g)$  como:

$$f(g) = \sum_I C_{MN}^I D_{MN}^I(g), \quad (3.7)$$

donde la suma es sobre todas las irreps  $I$  de  $G$  y  $D_{MN}^I(g)$  son las matrices que realizan esa representación. Cada término de la suma transforma en la

representación  $I$  ante la acción (3.6) y aparece tantas veces como valores toma  $N$ , es decir  $\dim I$ .

Supongamos que se conoce una representación finito dimensional  $\chi$  de un subgrupo  $H$  de  $G$  dada por matrices  $\pi_{\mu\nu}^\chi(h)$  que actúan sobre un espacio vectorial  $V_\chi$ . Consideremos el conjunto  $\mathcal{H}_V$  de funciones de  $G$  en  $V_\chi$  que satisfacen la condición (3.4). Como la condición (3.4) que define el conjunto es invariante ante la acción izquierda (3.6), ésta definirá sobre este conjunto una representación que se conoce como la representación de  $G$  inducida por  $\chi$ . Esta representación es, en general, infinito dimensional y reducible.

La representación también puede definirse sobre funciones en  $G/H$ . Para ello debemos tomar una sección local (de  $G$  considerado como fibrado con base  $G/H$  y fibra  $H$ ),  $\sigma : G/H \rightarrow G$ , es decir elegir un representante de cada clase en  $G/H$ . Dada esta sección fija, cada elemento  $g \in G$  se parte en forma única como

$$g = \sigma(p(g))h_\sigma(g), \quad (3.8)$$

donde  $p : G \rightarrow G/H$  es la proyección del fibrado y  $h_\sigma : G \rightarrow H$ . Definimos entonces una correspondencia biunívoca entre funciones  $f : G \rightarrow V_\chi$  y funciones  $F : G/H \rightarrow V_\chi$  dada por

$$F_{(\chi,\mu)}(x) = f_{(\chi,\mu)}(\sigma(x)). \quad (3.9)$$

La correspondencia es biunívoca porque dada  $F$  podemos reconstruir la  $f$  como

$$f_{(\chi,\mu)}(g) = \sum_{\nu} \pi_{\nu\mu}^\chi(h_\sigma(g)) F_{(\chi,\nu)}(p(g)). \quad (3.10)$$

Vemos entonces que el conjunto  $\mathcal{H}_V$  es equivalente a un conjunto de funciones de  $G/H$  en  $V_\chi$  y será entonces el espacio de Hilbert sobre el que realizaremos la representación de la relación (3.3). Sobre las funciones  $T_{(\chi,\mu)}(x)$ ,  $G$  actúa por izquierda como

$$F_{(\chi,\mu)}(x) \xrightarrow{g} U(g)[F_{(\chi,\mu)}](x) = \sum_{\nu} \pi_{\nu\mu}^\chi(h_\sigma(g^{-1}\sigma(x))) F_{(\chi,\nu)}(g^{-1}x), \quad (3.11)$$

donde  $g^{-1}x = p(g^{-1}\sigma(x))$  define la acción de  $G$  sobre  $G/H$ . A través de la ecuación (3.11) queda definido el operador  $U(g)$ . Un cálculo simple muestra que este operador satisface la relación (3.3) con lo cual vemos que existen distintas representaciones de esta relación, cada una de las cuales está etiquetada por una representación  $\chi$  de  $H$  y se realiza sobre el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_V$ .

McMullan y Tsuitsui [30] desarrollaron un tratamiento de las cuantizaciones no equivalentes apropiado para definir integrales de camino. Utilizando el hecho de que en la ec.(3.8)  $h \in H$  puede ser descompuesto como  $h = r(h)s(h)$ , donde  $s$  está en el subgrupo de Cartan de  $H$ , mostraron que, en lugar de las funciones  $f_{(\chi\mu)}(g)$  se pueden utilizar sus componentes de peso máximo  $f_{(\chi\chi)}$  evaluadas en  $g = \sigma r$  (i.e.,  $s = 1$ ). Las condiciones (3.5) implican que estas funciones son aniquiladas por los operadores de ascenso  $E_{\phi>0}$  en la base de Chevalley  $\{H_\alpha, E_\phi\}$  de  $\mathfrak{h}$ . En este caso las funciones son escalares, lo que permite definir en forma mas sencilla la integral de camino.

### 3.1.3 Consecuencias dinámicas

En el caso de movimiento libre sobre un grupo  $G$ , el Hamiltoniano está dado por

$$\hat{H} = -\frac{1}{2}\Delta, \quad (3.12)$$

donde  $\Delta$  es el Laplaciano definido con una métrica invariante por la izquierda. Estas métricas quedan definidas por su valor en la identidad que tomaremos como  $g_{ab} = \mathfrak{S}_a \delta_{ab}$ . Otra forma usual de escribir el Hamiltoniano es

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mathfrak{S}_a} I_a I_a, \quad (3.13)$$

donde los  $I_a$  son los generadores de traslaciones por la derecha dados por

$$I_a = \Theta_a^b \partial_b. \quad (3.14)$$

La funciones  $\Theta$  son las definidas en el apéndice A. El movimiento libre en  $G/H$  estará dado por el mismo Hamiltoniano actuando sobre funciones independientes de las  $\alpha_{\bar{a}}$  que parametrizan  $H$ . Tendremos entonces el Hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{1}{2\mathfrak{S}_{a'}} I_{a'} I_{a'}, \quad (3.15)$$

$$I_{a'} = \Theta_{a'}^{b'} \partial_{b'}. \quad (3.16)$$

Ahora bien, si tomamos una cuantificación no equivalente, tendremos que las funciones no son independientes de  $\alpha_{\bar{a}}$  sino que satisfacen la condición (3.4) o su forma local (3.5):

$$I_{\bar{a}} f_{(\chi,\mu)}(g) = i \sum_{\nu} (T_{\bar{a}})_{\nu\mu}^{\chi} f_{(\chi,\nu)}(g). \quad (3.17)$$

De las propiedades de las funciones  $\Theta$  y  $\Psi$  dadas en el apéndice se obtiene que:

$$I_{a'} = \Theta_{a'}^{b'} \partial_b' + \Theta_a^b \partial_b \quad (3.18)$$

$$I_a = \Theta_a^b \partial_b. \quad (3.19)$$

Al evaluar en  $\alpha_{\bar{a}} = 0$  se tiene que  $\Theta_a^b = \delta_a^b$  con lo cual  $\partial_a = I_a$ . Reemplazando  $I_a$  por su valor dado en la ec. (3.17) se obtiene que el Hamiltoniano (3.15) se reduce a

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} g^{a'b'} \left( \delta_{\mu\mu'} \nabla_{a'} - \Psi_{a'}^{\bar{e}} i(T_{\bar{e}})_{\mu\mu'}^x \right) \left( \delta_{\mu'\nu} \partial_{b'} - \Psi_{b'}^{\bar{d}} i(T_{\bar{d}})_{\mu'\nu}^x \right), \quad (3.20)$$

actuando sobre funciones en  $\mathcal{H}_V$ . En la expresión anterior, se tiene que

$$g^{a'b'} = \Theta^{c'a'} \frac{1}{\mathfrak{F}_{c'}} \Theta^{c'b'}, \quad (3.21)$$

es la métrica sobre  $G/H$  inducida por la métrica de  $G$  y  $\nabla_{a'}$  denota la derivada covariante calculada utilizando dicha métrica. Además se utilizó la igualdad

$$\Psi_{a'}^{\bar{b}} = -\Psi_{a'}^{c'} \Theta_{c'}^{\bar{b}}. \quad (3.22)$$

De la ecuación (3.20) se ve que el movimiento sobre  $G/H$  cuando se considera una cuantificación no trivial, no corresponde al movimiento libre sino que está descrito por el movimiento libre acoplado a un campo de gauge  $H$  definida por

$$A_{a'} = \Psi_{a'}^{\bar{b}} i(T_{\bar{b}})_{\nu\mu}^x, \quad (3.23)$$

y que aparece como un campo de fondo. Este resultado fue obtenido por Landsman y Linden [29]. En la siguiente sección veremos que las bandas colectivas proveen un ejemplo físico de estas cuantizaciones no equivalentes.

## 3.2 El Hamiltoniano colectivo

En el capítulo anterior efectuamos un cálculo dentro del formalismo lagrangiano de integral de camino y determinamos la corrección a los niveles vibracionales introducida por los modos finitos. Aunque hay un número infinito de modos normales, sólo un número finito de ellos son modos cero. Como además los operadores relacionados con los modos cero realizan en forma natural una representación del grupo  $G$ , es más apropiado tratar estos modos dentro del formalismo Hamiltoniano de operadores. En esta sección determinaremos el Hamiltoniano colectivo al orden más bajo para ver la relación con las cuantizaciones no equivalentes.

### 3.2.1 El Hamiltoniano colectivo a partir de la integral de camino

El Hamiltoniano colectivo se obtiene a partir de los términos de la acción (2.24) que dependen de las coordenadas colectivas  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \dot{\alpha}_a \Psi_a^b \dot{\alpha}_c \Psi_c^b \mathfrak{S}_b \\ & + K_{nm}^b \dot{\alpha}_a \Psi_a^b \dot{\xi}^n \xi^m + \frac{1}{2} \dot{\alpha}_a \Psi_a^b P_{b,nmp} \dot{\xi}^n \xi^m \xi^l \\ & + \frac{1}{2} \dot{\alpha}_a \Psi_a^b \dot{\alpha}_c \Psi_c^d M_n^{bd} \dot{\xi}^n + \frac{1}{4} \dot{\alpha}_a \Psi_a^b \dot{\alpha}_c \Psi_c^d N_{nm}^{bd} \dot{\xi}^n \xi^m, \end{aligned} \quad (3.24)$$

De aquí resultan los momentos conjugados (a orden más bajo)

$$\mathcal{P}_{a'} = \Psi_{a'}^{b'} \dot{\alpha}_{c'} \Psi_{c'}^{b'} \mathfrak{S}_{b'} + \Psi_{a'}^b K_{nm}^b \dot{\xi}^n \xi^m, \quad (3.25)$$

y el Hamiltoniano

$$H_{col} = \frac{1}{2\mathfrak{S}_{b'}} \left( \Theta_{b'}^{a'} \mathcal{P}_{a'} - \tilde{K}_{nm}^{b'} \dot{\xi}^n \xi^m \right) \left( \Theta_{b'}^{c'} \mathcal{P}_{c'} - \tilde{K}_{lp}^{b'} \dot{\xi}^l \xi^p \right), \quad (3.26)$$

donde nuevamente se utilizó

$$\tilde{K}_{nm}^{a'} = K_{nm}^{a'} - \Theta_{a'}^b K_{nm}^b. \quad (3.27)$$

Este Hamiltoniano tiene problemas de orden ya que  $\mathcal{P}$  y  $\alpha$  no conmutan entre sí, así como tampoco conmutan  $\xi$  y  $\dot{\xi}$ . Recordemos, por otra parte, que la acción está definida por la prescripción de punto medio lo cual significa que el hamiltoniano correspondiente está ordenado según el orden de Weyl:

$$H_{col} = \left[ \frac{1}{2\mathfrak{S}_{b'}} \left( \Theta_{b'}^{a'} \mathcal{P}_{a'} - \tilde{K}_{nm}^{b'} \dot{\xi}^n \xi^m \right) \left( \Theta_{b'}^{c'} \mathcal{P}_{c'} - \tilde{K}_{lp}^{b'} \dot{\xi}^l \xi^p \right) \right]_W. \quad (3.28)$$

El Hamiltoniano anterior se puede reescribir utilizando las propiedades del orden de Weyl descriptas en el apéndice C. El primer término es:

$$\left[ \frac{1}{2\mathfrak{S}_{b'}} \left( \Theta_{b'}^{a'} \mathcal{P}_{a'} \right) \left( \Theta_{b'}^{c'} \mathcal{P}_{c'} \right) \right]_W. \quad (3.29)$$

Del potencial de Gervais-Jevicki (ec. (2.44)) se obtuvo una contribución

$$\frac{1}{8} g^{c'd'} \Gamma_{b'c'}^{a'} \Gamma_{a'd'}^{b'}, \quad (3.30)$$

que debe sumarse al resultado anterior. Además se puede sumar y restar una constante  $R_{G/H}/8$  (donde  $R_{G/H}$  es la curvatura de  $G/H$ ) para obtener el laplaciano sobre  $G/H$ :

$$\left[ \frac{1}{2\mathfrak{S}_{b'}} \left( \Theta_{b'}^{a'} \mathcal{P}_{a'} \right) \left( \Theta_{b'}^{c'} \mathcal{P}_{c'} \right) \right]_W + \frac{1}{8} g^{c'd'} \Gamma_{b'c'}^{a'} \Gamma_{a'd'}^{b'} + \frac{1}{8} R_{G/H} = -\frac{1}{2} \psi^{\frac{1}{2}} \Delta \psi^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.31)$$

donde  $\psi$  es la raíz cuadrada del determinante de  $g_{a'b'}$ . La constante  $R_{G/H}/8$  que se sumó aquí debe restarse de la parte colectiva (o sea sumarse a la función de partición) lo cual se hizo en la ec.(2.45). Otro término es

$$\frac{1}{2\mathfrak{S}_{a'}} \tilde{K}_{nm}^{a'} \tilde{K}_{lp}^{a'} \left[ \xi^n \dot{\xi}^m \xi^l \dot{\xi}^p \right]_W = \frac{1}{2\mathfrak{S}_{a'}} \tilde{K}_{nm}^{a'} \xi^n \dot{\xi}^m \tilde{K}_{lp}^{a'} \xi^l \dot{\xi}^p + \frac{1}{8\mathfrak{S}_{a'}} \tilde{K}_{nm}^{a'} \tilde{K}_{nm}^{a'}, \quad (3.32)$$

donde se utilizó que  $\tilde{K}_{nm}^{a'}$  es antisimétrico en los índices  $n$  y  $m$ . El sumando

$$\frac{1}{8\mathfrak{S}_{a'}} \tilde{K}_{nm}^{a'} \tilde{K}_{nm}^{a'}, \quad (3.33)$$

se cancela con una contribución similar del potencial de Gervais-Jevicki (ec.2.44).

Finalmente hay un término

$$\frac{1}{\mathfrak{S}_{b'}} \left[ \Theta_{b'}^{a'} \mathcal{P}_{a'} \tilde{K}^{b'} \right]_W = \frac{1}{2\mathfrak{S}_{b'}} \mathcal{P}_{a'} \Theta_{b'}^{a'} \tilde{K}^{b'} + \frac{1}{2\mathfrak{S}_{b'}} \tilde{K}^{b'} \Theta_{b'}^{a'} \mathcal{P}_{a'}. \quad (3.34)$$

Sumando los tres términos se obtiene que

$$H_{col} = \frac{1}{2} \psi^{-\frac{1}{2}} \left( \mathcal{P}_{a'} \Theta_{c'}^{a'} - \tilde{K}^{c'} \right) \frac{\psi}{\mathfrak{S}_{c'}} \left( \Theta_{c'}^{b'} \mathcal{P}_{b'} - \tilde{K}^{c'} \right) \psi^{-\frac{1}{2}}. \quad (3.35)$$

Esta última expresión se puede reescribir como

$$H_{col} = -\frac{1}{2} \psi^{\frac{1}{2}} g^{a'b'} \left( \nabla_{a'} - i \tilde{L}_{a'} \right) \left( \partial_{b'} - i \tilde{L}_{b'} \right) \psi^{-\frac{1}{2}}, \quad (3.36)$$

donde  $\tilde{L}_{a'} = \Psi_{a'}^{d'} \tilde{K}_{nm}^{d'} \xi^n \dot{\xi}^m$  y  $\nabla_{a'}$  indica la derivada covariante calculada con la métrica inducida en  $G/H$ .

### 3.2.2 El Hamiltoniano colectivo a partir del Laplaciano

El Hamiltoniano colectivo puede ser calculado también sin basarse en la integral de camino, recordando el hecho de que el Hamiltoniano en el sistema original de las  $q^a$  está dado por

$$\hat{H} = -\frac{1}{2} \Delta + V(q), \quad (3.37)$$

donde  $\Delta$  es el Laplaciano sobre la variedad  $\mathcal{C}$ :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial q^s} \left( g^{st} \frac{\partial}{\partial q^t} \right). \quad (3.38)$$

Al pasar al sistema de coordenadas  $(\xi^n, \alpha_{a'})$  el potencial depende únicamente de las  $\xi$ . Para hallar el Hamiltoniano colectivo debemos entonces escribir el Laplaciano en el nuevo sistema de coordenadas. El cambio de variables para el caso de coordenadas geodésicas (2.60) es:

$$q^s = R^s(\bar{q}^t + \psi_n^t \xi^n - \frac{1}{2} \Gamma_{uv}^s \psi_n^u \psi_m^v \xi^n \xi^m + \dots, \alpha_{a'}). \quad (3.39)$$

Expandiendo en potencias de  $\xi$  se obtiene

$$q^s = R^s(\bar{q}^t, \alpha) + \psi_n^t(\alpha) \xi^n - \frac{1}{2} \Gamma_{uv}^s(\alpha) \psi_n^u(\alpha) \psi_m^v(\alpha) \xi^n \xi^m + \dots, \quad (3.40)$$

donde

$$\psi_n^s(\alpha) = \frac{\partial R^s}{\partial q^t} \psi_n^t, \quad (3.41)$$

y  $\Gamma_{uv}^s(\alpha)$  es la conexión métrica del espacio  $\mathcal{C}$  evaluada en el punto  $R^s(\bar{q}, \alpha)$ . Las  $\psi_n^s(\alpha)$  definen un sistema de versores normales en cada punto de  $\mathcal{M}$ . El cálculo del Laplaciano es similar al que se realiza en [34] con la diferencia de que en nuestro caso la variedad  $\mathcal{C}$  no es plana. Se obtiene sin embargo un resultado similar para la parte dependiente de las coordenadas colectivas que, a menos de términos constantes, vale:

$$H_{col} = -\frac{1}{2\psi} \left( \partial_{a'} + \frac{i}{2} \tilde{L}_{a'} \right) \Theta_{c'}^{a'} \frac{1}{\mathfrak{F}_{c'}} \Theta_{c'}^{b'} \psi \left( \partial_{b'} + \frac{i}{2} \tilde{L}_{b'} \right), \quad (3.42)$$

donde

$$\tilde{g}^{a'b'} = \Theta_{c'}^{a'} \frac{1}{\mathfrak{F}_{c'}} \Theta_{c'}^{b'}, \quad (3.43)$$

es la métrica inducida en el espacio  $G/H$  y  $\psi$  denota la raíz cuadrada del determinante de esta métrica. Además

$$\tilde{L}^{a'} = -i \tilde{L}_{nm}^{a'} (\xi^n \partial_m - \xi^m \partial_n), \quad (3.44)$$

juega el papel de un campo de gauge. Las matrices  $\tilde{L}_{nm}^{a'}$  están dadas por

$$\tilde{L}_{a'}^{nm} = g_{sv}(\alpha) \psi_n^v(\alpha) (D_{a'} \psi_m^s), \quad (3.45)$$

donde  $D_{a'}$  indica la derivada covariante en la dirección de  $\alpha_{a'}$  calculada con la conexión de  $\mathcal{C}$ . De la expresión anterior es evidente que  $\tilde{L}_{nm}^{a'}$  es

antisimétrica en los índices  $nm$  (porque  $D_{a'}g = 0$ ), hecho que se utilizó para escribir las ecs.(3.42) y (3.44). Podemos obtener una expresión más sencilla para  $\tilde{L}_{nm}^{a'}$  reescribiendo todas las magnitudes en el punto  $\bar{q}$ , utilizando que

$$\partial_{a'} R^s(q, \alpha) = \frac{\partial R^s}{\partial q^t} \Psi_{a'b} \partial_b R^t(q, 0), \quad (3.46)$$

$$\Gamma_{tu}^s(\alpha) = \frac{\partial R^s}{\partial q^m} \frac{\partial q^l}{\partial R^t} \frac{\partial q^h}{\partial R^u} \Gamma_{hl}^m(0) - \frac{\partial^2 R^s}{\partial q^l \partial q^h} \frac{\partial q^l}{\partial R^t} \frac{\partial q^h}{\partial R^u}, \quad (3.47)$$

$$g_{uw}(\alpha = 0) = g_{sv}(\alpha) \frac{\partial R^s}{\partial q^u} \frac{\partial R^v}{\partial q^w}. \quad (3.48)$$

Por medio de estas relaciones se obtiene

$$\tilde{L}_{nm}^{a'} = g_{ut} \psi_n^u \Psi_{a'b} D_v u_b^t \psi_m^v = \Psi_{a'b} R_{b;m}^n = \Psi_{a'b'} \tilde{K}^{b'}, \quad (3.49)$$

lo cual muestra que las  $\tilde{L}_{a'}$  son las mismas que las utilizadas más arriba y, por lo tanto, el Hamiltoniano (3.42) obtenido por expansión directa del Laplaciano coincide con el obtenido de la integral de caminos (ec. (3.36)).

Utilizando la definición de  $\tilde{K}$ , el resultado (3.36) se puede escribir como

$$\begin{aligned} H_{col} = & \frac{1}{2} \psi^{\frac{1}{2}} g^{a'b'} (\nabla_{a'} - iA_{a'}) (\partial_{b'} - iA_{b'}) \psi^{-\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{2} \psi^{\frac{1}{2}} g^{a'b'} (\nabla_{a'} - iA_{a'}) L_{b'} + \frac{1}{2} \psi^{\frac{1}{2}} g^{a'b'} L_{a'} (\partial_{b'} - iA_{b'}) \psi^{-\frac{1}{2}} \\ & + \frac{1}{2} g^{a'b'} L_{a'} L_{b'}, \end{aligned} \quad (3.50)$$

donde se definió

$$\begin{aligned} A_{a'} &= \Psi_{a'}^d K_{nm}^d \xi^n \dot{\xi}^m, \\ L_{a'} &= \Psi_{a'}^{d'} K_{nm}^{d'} \xi^n \dot{\xi}^m. \end{aligned} \quad (3.51)$$

### 3.2.3 Relación con las cuantificaciones no equivalentes

Consideremos ahora los estados en la banda colectiva asociada a un conjunto de estados intrínsecos que transforman ante  $H$  en una representación  $\chi$  dada. La parte intrínseca de estos estados estará dada por ciertas funciones de onda  $\phi_{(\chi, \mu)}(\xi)$ . Para ver cuáles son los operadores que generan las transformaciones de  $H$  actuando sobre estos estados, se debe estudiar la acción de  $H$  sobre las variables  $\xi$ .



A un conjunto de coordenadas  $\xi^{\bar{n}}$  le corresponde un punto  $q^s$  cuyas coordenadas se obtienen de resolver las ecuaciones

$$\begin{aligned}\frac{d^2 q^s}{d\eta^2} + \Gamma_{uv}^s \frac{dq^u}{d\eta} \frac{dq^v}{d\eta} &= 0, \\ \frac{dq^v}{d\eta}(0) &= \psi_n^s \xi^n, \\ q^s(\eta=0) &= \bar{q},\end{aligned}\tag{3.52}$$

y hacer

$$q^s(\xi^{\bar{n}}) = q^s(\eta=1).\tag{3.53}$$

Al aplicar una transformación de  $H$  el punto  $q^s$  va a

$$q^s \mapsto q'^s = R^s(q, \alpha_{\bar{a}}).\tag{3.54}$$

Para hallar las coordenadas  $\xi$  del nuevo punto  $q'$  se toma la función

$$F^s(\eta) = R^s(q(\eta), \alpha_{\bar{a}}).\tag{3.55}$$

Utilizando el hecho de que  $q(\eta)$  satisface las ecuaciones (3.52) y la propiedad de transformación de la conexión métrica dada en la ecuación (3.48) se obtiene que  $F^s(\eta)$  satisface

$$\begin{aligned}\frac{d^2 F^s}{d\eta^2} + \Gamma_{uv}^s(R(q, \alpha_{\bar{a}})) \frac{dF^u}{d\eta} \frac{dF^v}{d\eta} &= 0, \\ \frac{dF^s}{d\eta}(0) &= \partial_t R^s(\bar{q}, \alpha_{\bar{a}}) \psi_n^t \xi^n, \\ F^s(\eta=0) &= \bar{q}.\end{aligned}\tag{3.56}$$

donde la última igualdad se deduce del hecho de que  $\bar{q}$  es invariante ante  $H$  (y por lo tanto estos razonamientos no se aplican a las operaciones de  $G/H$ )  
Por otra parte

$$q'^s = F^s(1),\tag{3.57}$$

con lo cual las coordenadas  $\xi$  de  $q'$  son

$$\xi'^{\bar{m}} = \partial_t R^s(\bar{q}, \alpha_{\bar{a}}) g_{sv} \psi_{\bar{n}}^v \psi_{\bar{m}}^t \xi^{\bar{m}}.\tag{3.58}$$

Por lo tanto se ve que  $H$  actúa linealmente sobre las coordenadas geodésicas  $\xi$ . Los generadores infinitesimales se obtienen derivando la ec.(3.58) respecto de  $\alpha_{\bar{a}}$  y evaluando en  $\alpha_{\bar{a}} = 0$ . Resulta entonces que los operadores infinitesimales de  $H$  actuando sobre funciones de onda de  $\xi$  son

$$-i\partial_t R^s(\bar{q}, \alpha_{\bar{a}}) g_{sv} \psi_{\bar{n}}^v \psi_{\bar{m}}^t \xi^{\bar{m}} \partial_{\bar{n}} = -iK_{\bar{n}\bar{m}}^{\bar{a}} \xi^{\bar{m}} \partial_{\bar{n}}.\tag{3.59}$$

Se deduce que los operadores  $-iK_{\bar{n}m}^{\bar{a}}\xi^{\bar{m}}\partial_{\bar{n}}$  satisfacen las reglas de conmutación de  $H$ . También se puede ver esto último directamente derivando la relación de conmutación (2.9) con respecto a  $q^u$  y evaluándola en  $\bar{q}$

$$\partial_u R_a^t \partial_t R_b^s - \partial_t R_b^s \partial_u R_a^t + R_a^t \partial_{ut} R_b^s - \partial_{ut} R_b^s R_a^t = C_{ab}^c \partial_u R_c^s, \quad (3.60)$$

donde utilizamos la notación

$$R_a^t = \partial_a R(q, \alpha)|_{\alpha=0}. \quad (3.61)$$

Para las transformaciones  $\bar{a}$  asociadas a  $H$  se tiene que  $R_{\bar{a}}^s = 0$  porque así están definidas y se deduce que

$$\partial_u R_{\bar{a}}^t \partial_t R_{\bar{b}}^s - \partial_t R_{\bar{b}}^s \partial_u R_{\bar{a}}^t = C_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}} \partial_u R_{\bar{c}}^s. \quad (3.62)$$

Puesto que  $R_{\bar{a}}^s = 0$  se puede reemplazar las derivadas ordinarias por covariantes. Pasando a la base de modos normales la última igualdad se convierte en

$$K_{nm}^{\bar{a}} K_{ml}^{\bar{b}} - K_{nm}^{\bar{b}} K_{ml}^{\bar{a}} = C_{\bar{a}\bar{b}}^{\bar{c}} K_{nl}^{\bar{c}}, \quad (3.63)$$

que es la relación de conmutación buscada ya que la regla de conmutación de los operadores  $-iK_{\bar{n}m}^{\bar{a}}\xi^{\bar{m}}\partial_{\bar{n}}$  está determinada por la de las matrices  $K_{\bar{n}m}^{\bar{a}}$

Como se verifica que los  $-iK_{nm}^{\bar{a}}\xi^{\bar{n}}\partial_m$  actuando sobre funciones de  $\xi^{\bar{n}}$  generan las transformaciones infinitesimales de  $H$ , entonces, actuando sobre los estados  $\phi(\xi)_{(\chi\mu)}$  que transforman en la representación  $\chi$  satisfacen

$$-iK_{nm}^{\bar{a}}\xi^{\bar{n}}\partial_m \phi_{(\chi,\mu)}(\xi) = (T_{\bar{a}}^{\chi})_{\mu\nu} \phi_{(\chi,\nu)}(\xi). \quad (3.64)$$

Incluyendo la dependencia en la parte colectiva, la función de onda del estado se escribe como

$$\sum_{\mu} \psi_{(\chi,\mu)}(\alpha_{a'}) \phi_{(\chi,\mu)}(\xi). \quad (3.65)$$

Ahora bien, si nos restringimos al conjunto dado de estados intrínsecos, las funciones  $\phi_{(\chi,\mu)}(\xi)$  están fijas. Lo único que necesitamos es entonces la función  $\psi_{(\chi,\mu)}(\alpha_{a'})$  que puede considerarse como una función de  $G/H$  en  $V_{\chi}$ , esto es, el espacio vectorial sobre el que se realiza  $\chi$ . El Hamiltoniano colectivo actuando sobre estas funciones es el (3.50) pero reemplazando  $-iK_{nm}^{\bar{a}}\xi^{\bar{n}}\partial_m$  por  $T_{\bar{a}}^{\chi}$ , es decir queda

$$A_{a'} = \Psi_{a',i}^{\bar{b}} (T_{\bar{a}}^{\chi})_{\nu\mu}^{\bar{b}}. \quad (3.66)$$

Se ve entonces que el primer término del Hamiltoniano (3.50) es igual al Hamiltoniano de la cuantificación no equivalente asociada a la representación

$\chi$  de  $H$ . El segundo y tercer término de la ec.(3.50) describen un acoplamiento con un campo de gauge extra  $L_{a'}$ . El último término es independiente de las coordenadas colectivas y puede escribirse como

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} g^{a'b'} L_{a'} L_{b'} &= \frac{1}{2\mathfrak{S}_{a'}} K_{nm}^{b'} \xi^n \xi^m K_{lp}^{b'} \xi^l \xi^p \\ &= \frac{1}{2\mathfrak{S}_{a'}} K_{nm}^{a'} K_{lp}^{a'} \left[ \xi^n \xi^m \xi^l \xi^p \right]_W - \frac{1}{8\mathfrak{S}_{a'}} K_{nm}^{a'} K_{nm}^{a'}. \end{aligned} \quad (3.67)$$

Estos dos términos se suman al Lagrangiano intrínseco, uno, como un nuevo vértice de cuatro campos que fue incluido en la ec.(2.30) y el otro, como una constante que se incluyó en la ec.(2.45) como potencial de Gervais y Jevicki. El orden de Weyl en el vértice equivale a no contraer  $\xi$  con  $\xi$  al calcular la corrección a orden más bajo.

### 3.3 Bandas colectivas

Los estados que forman las bandas colectivas asociadas a cada estado intrínseco surgen de diagonalizar el Hamiltoniano colectivo y deberán etiquetarse con los números cuánticos de  $G$  que es la simetría original del problema.

Supongamos entonces que nos restringimos a estudiar la banda colectiva de un conjunto dado de estados intrínsecos que transforman en una representación  $\chi$  dada de  $H$ . Las funciones de onda serán las (3.65). Dado que las funciones de  $\xi$  son las mismas para toda la banda, basta considerar la parte colectiva  $\psi_{(\chi,\mu)}(\alpha_{a'})$  que son funciones de  $G/H$  en  $V_\chi$ .

El Hamiltoniano a diagonalizar es el (3.50) donde se reemplaza  $A_{a'}$  por la ec.(3.66). Este Hamiltoniano describe el movimiento libre sobre  $G/H$  acoplado a un campo de gauge  $A_{a'}$  asociada al grupo  $H$  y otra interacción con un campo de fondo  $L_{a'}$ . Esta expresión es de interés porque muestra explícitamente la aparición de los campos de gauge pero no es útil para ser diagonalizada.

El primer término de la ec.(3.50) es el Hamiltoniano asociado a una cuantificación no equivalente. Vimos en la sección 3.1.3 que este Hamiltoniano actuando sobre funciones de  $G/H$  en  $V_\chi$  es equivalente a

$$H_{col} = \frac{1}{2\mathfrak{S}_{a'}} I_{a'} I_{a'}, \quad (3.68)$$

pero donde este último actúa sobre funciones de  $G$  en  $V_\chi$  que satisfacen la condición (3.4). Esta última condición asegura que haya una correspondencia biunívoca entre los dos espacios de Hilbert y, por otro lado, permite

reemplazar los  $I_{\bar{a}}$  por los  $T_{\bar{a}}$  lo que da lugar al campo  $A_{a'}$ . Desde el punto de vista de las coordenadas colectivas esto se puede interpretar diciendo que no se eliminan las coordenadas extra  $\alpha_{\bar{a}}$  como se hizo en la sección 2.1. Al tener coordenadas de más el sistema es un sistema de gauge con vínculos de primera clase que justamente son los (3.5) y que expresan las mismas condiciones (3.4) pero en forma local.

Los términos asociados al campo de gauge  $L_{a'}$  producen que el Hamiltoniano sea ahora

$$H_{col} = \frac{1}{2\mathfrak{S}_{a'}} I_{a'} I_{a'} + \frac{1}{\mathfrak{S}_{a'}} I_{a'} L_{a'}, \quad (3.69)$$

donde el segundo término es similar al término de Coriolis que aparece cuando se consideran rotaciones. La diagonalización del Hamiltoniano (3.69) debe hacerse en el espacio de Hilbert  $\mathcal{H}_V$  definido en la sección 3.1.2 como el conjunto de funciones de  $G$  en  $V_\chi$  que satisfacen (3.4). El Hamiltoniano (3.69) conmuta con la acción izquierda de  $G$  como así también con la acción simultánea de  $H$  por la derecha sobre las coordenadas colectivas y sobre el estado intrínseco. En efecto, la acción derecha está generada por los operadores

$$J_a = \hat{\Theta}_a^b \partial_b, \quad (3.70)$$

donde  $\hat{\Theta}$  se define en el apéndice A. Estos operadores satisfacen el álgebra de  $G$  y además

$$[J_a, I_b] = 0; \quad (3.71)$$

por lo tanto conmutan obviamente con  $H$ . Por otro lado, la acción derecha de  $H$  sobre las coordenadas colectivas está generada por los operadores  $I_{\bar{a}}$ . Ante estas transformaciones, tanto los  $I_{a'}$  como los  $L_{a'}$  transforman en la representación definida por las constantes de estructura

$$\begin{aligned} [I_{\bar{a}}, I_{b'}] &= C_{\bar{a}b'}^{c'} I_{c'}, \\ [L_{\bar{a}}, L_{b'}] &= C_{\bar{a}b'}^{c'} L_{c'}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

La segunda igualdad sería obviamente satisfecha si  $L_{b'}$  fuera el operador que genera las transformaciones asociadas a las  $\alpha_{a'}$ , actuando sobre las fluctuaciones. Sin embargo el operador  $L_{a'}$  es (3.51):

$$L_{a'} = -i\Psi_{a'}^{d'} K_{nm}^{d'} \xi^n p_m, \quad (3.73)$$

es decir sólo el término cuadrático en una expansión en potencias de  $\xi$  y  $p$ . Llamando  $\mathcal{L}_{a'}$  al operador total tendremos:

$$\mathcal{L}_{a'} = p_{a'} + L_{a'} + \dots, \quad (3.74)$$

donde  $p_{a'}$  es el momento asociado al modo cero  $a'$ . La segunda igualdad en (3.72) se sigue de expandir en potencias de  $\xi$  y  $p$  el conmutador

$$[\mathcal{L}_{a'}, \mathcal{L}_{\bar{a}}] = C_{\bar{a}b'}^{c'} \mathcal{L}_{c'}, \quad (3.75)$$

y del hecho de que  $\mathcal{L}_{\bar{a}} = L_{\bar{a}}$  ya que la acción de las transformaciones asociadas a  $\alpha_{\bar{a}}$  es lineal en coordenadas geodésicas (cf. ec.(3.58)).

La acción de  $L_{\bar{a}} + I_{\bar{a}}$  la denominaremos  $H_R$  por brevedad. La invariancia del Hamiltoniano ante esta acción se debe a que el tensor de inercia definido como

$$\mathfrak{S}_{a'b'} = \delta_{a'b'} \mathfrak{S}_{a'}, \quad (3.76)$$

es invariante ante  $H$ . Esto se deduce de que por definición  $\mathfrak{S}_{a'b'}$  es la métrica inducida en  $G/H$  por la métrica de  $\mathcal{C}$  evaluada en el punto  $\bar{q}$ . Por otro lado la métrica es invariante ante  $G$  y, como  $H$  deja invariante el punto  $\bar{q}$ , esto implica que debe dejar invariante el tensor de inercia.

Debido a que el Hamiltoniano conmuta con  $G$  y  $H_R$  debemos partir el espacio de Hilbert en representaciones irreducibles de ambos grupos y diagonalizar  $H$  en cada una de ellas. Ahora bien, la condición (3.5) implica que las funciones de onda están en la representación trivial de  $H_R$ . El espectro estará caracterizado entonces por los números cuánticos asociados a  $G$ , lo cual es correcto ya que  $G$  es la simetría original del problema.

Por otra parte, como consecuencia de la condición (3.4) las funciones de onda transforman ante  $G$  en la representación inducida por  $\chi$ . Para partirlas en representaciones irreducibles podemos utilizar el teorema de Peter-Weyl y escribirlas como

$$\psi_{(\chi, \mu)}(\alpha) = \sum_{IMN} C_{MN(\chi\mu)}^I D_{MN}^I(\alpha), \quad (3.77)$$

donde la suma se extiende sobre todas las representaciones irreducibles  $I$  de  $G$ , definidas por las matrices  $D_{MN}^I(\alpha)$ . Bajo la acción izquierda de  $G$  cada término de la suma transforma en la representación correspondiente  $I$ .

Bajo la acción derecha de  $H$ , cada término en (3.77) transforma en la representación  $I$  de  $G$  pensada como una representación de  $H$ . Esta representación de  $H$  es en general reducible y se puede descomponer en sus partes irreducibles  $\chi_k^I$ . La condición (3.4) implica que deben mantenerse solo aquellos  $k$  tales que  $\chi_k^I = \chi$ . Podemos reescribir entonces (3.77) como

$$\psi_{(\chi, \mu)}(\alpha) = \sum_{IM, k/\chi_k = \chi, \mu} C_{M\chi k}^I D_{M(\chi k, \mu)}^I(\alpha), \quad (3.78)$$

donde el índice  $N$  se reemplazó por su descomposición en representaciones  $(\chi_k, \mu)$  de  $H$ . Esto significa que cada representación  $I$  de  $G$  aparece en la banda colectiva tantas veces como la representación  $\chi$  de  $H$  aparece en la descomposición de  $I$  en irreps de  $H$  (a este número lo llamaremos  $d_\chi^I$ ). Como el Hamiltoniano (3.69) no mezcla representaciones de  $G$  o  $H_R$ , puede ser diagonalizado en cada subespacio de dimensión  $d_\chi^I$ . Para hacerlo debemos escribir los operadores  $L_{a'}$  e  $I_{a'}$  como matrices y diagonalizarlas en cada caso. Sin embargo, de la simetría, se puede extraer un poco más de información.

En efecto, las matrices  $L_{a'}$  transforman ante  $H$  en la representación definida por las constantes de estructura:

$$[L_a, L_{b'}] = C_{ab'}^{c'} L_{c'}. \quad (3.79)$$

Esta representación es en general reducible y se parte en un número  $d$  de representaciones irreducibles. Dentro de cada representación irreducible el teorema de Wigner-Eckart (aplicado al grupo  $H$ ) permite determinar a menos de un factor las matrices  $L_{a'}$ . Habrá por lo tanto sólo un conjunto de  $d$  factores a determinar. Además, como la matriz  $\mathfrak{S}_{a'b'}$  es invariante ante  $H$ , los momentos de inercia deben ser constantes en cada representación irreducible. Entonces habrá  $d$  momentos de inercia independientes.

En el caso de un espacio simétrico en el que se cumple que  $[g - h, g - h] \in h$  se puede ver que la representación es irreducible y por lo tanto hay un único momento de inercia. Utilizando otros argumentos se ve que las matrices  $L_{a'}$  se anulan. En ese caso, el Hamiltoniano se puede escribir como

$$H = \frac{1}{\mathfrak{S}} I_{a'} I_{a'} = \frac{1}{\mathfrak{S}} I_a I_a - \frac{1}{\mathfrak{S}} I_a I_{\bar{a}}, \quad (3.80)$$

y por lo tanto es resta de un operador de Casimir de  $G$  y uno de  $H$ . De esta manera ya está diagonalizado y su valor se obtiene conociendo la representación  $I$  de  $G$  y la  $\chi$  de  $H$ .

### 3.4 El rotor simétrico

Como se mencionó anteriormente, el caso de un núcleo deformado con simetría axial (rotor simétrico) es un ejemplo típico en el cual aparece un espectro rotacional asociado a los estados vibracionales (ver fig. 2.1). Los resultados en este caso son bien conocidos y los utilizaremos para ilustrar los cálculos de este capítulo. Para mayor simplicidad no consideraremos la paridad de los estados sino únicamente el momento angular.

Como este ejemplo es sencillo podemos hacer un análisis preliminar de los resultados esperados. La posición del rotor simétrico (por ejemplo una

pelota de rugby), está determinada por dos ángulos  $\theta$  y  $\varphi$  que indican la dirección del eje de simetría que llamaremos dirección  $\check{3}$ . Las funciones de onda con momento angular definido son entonces los armónicos esféricos  $Y_{jm}(\theta, \varphi)$ . Por otro lado las orientaciones opuestas son indistinguibles por lo tanto deben tener igual amplitud de probabilidad. Se debe satisfacer entonces

$$Y_{jm}(\pi - \theta, \varphi + \pi) = Y_{jm}(\theta, \varphi). \quad (3.81)$$

De aquí se deduce que  $j$  debe ser par. Por lo tanto los momentos angulares posibles son  $0, 2, 4, \dots$ . Si el rotor simétrico está vibrando, esta vibración puede no ser invariante ante rotaciones alrededor del eje de simetría (eje  $\check{3}$ ). En este caso tendrá una proyección de momento angular  $k$  en esa dirección y el estado será un estado de momento  $k$  en la dirección  $\check{3}$ . La probabilidad de que esté en un estado de proyección de momento angular  $m$  en la dirección  $z$  vale

$$\langle m_z | k_{\check{3}} \rangle = \langle m_z | R(\theta, \varphi) | k_z \rangle = D_{mk}^j(\theta, \varphi), \quad (3.82)$$

donde  $R(\theta, \varphi)$  es una rotación que lleva el eje  $z$  al eje  $\check{3}$  y  $D_{mk}^j$  son sus elementos de matriz en la base  $|jm\rangle$ . Las funciones de onda serán entonces las  $D_{mk}^j(\theta, \varphi)$ . El caso anterior es un caso particular para  $k = 0$  ya que  $D_{m0}^j \propto Y_{jm}$ . Para  $k > 0$  se debe tener  $j \geq k$  y por lo tanto la banda estará compuesta por los momentos angulares mayores o iguales que  $k$ .

Veamos ahora como reproducir estos resultados utilizando los cálculos de este capítulo. El Hamiltoniano que describe las interacciones nucleares es invariante ante rotaciones espaciales con lo cual el grupo  $G$  es  $SU(2)$ . En el caso de simetría axial, el núcleo deformado es invariante ante rotaciones alrededor del eje de simetría y también ante rotaciones en  $\pi$  alrededor de cualquier eje perpendicular. El grupo  $H$  es entonces  $D_\infty$  que consiste de las operaciones

$$D_\infty = \{R(\varphi), S.R(\varphi)\}, \quad (3.83)$$

donde  $R(\varphi) = \exp(-i\varphi I_3)$  es una rotación de ángulo  $\varphi$  alrededor del eje  $\check{3}$  y  $S$  es una rotación de ángulo  $\pi$  alrededor del eje  $\check{2}$ . El producto de elementos del grupo se obtiene fácilmente sabiendo que:

$$R(\varphi_1).R(\varphi_2) = R(\varphi_1 + \varphi_2), \quad S.R(\varphi).S = R(-\varphi), \quad S.S = 1. \quad (3.84)$$

El núcleo deformado puede a su vez vibrar alrededor de la configuración simétrica. Estas vibraciones se agruparán en representaciones de  $D_\infty$  las cuales son:

- dos representaciones unidimensionales

$$\begin{aligned} 0^+ & R = S = 1 , \\ 0^- & R = 1, \quad S = -1 , \end{aligned} \quad (3.85)$$

- infinitas representaciones bidimensionales

$$k \ (k \in \mathbb{Z}) : R(\varphi) = \begin{pmatrix} e^{ik\varphi} & 0 \\ 0 & e^{-ik\varphi} \end{pmatrix} , \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (3.86)$$

Por otro lado los estados de una banda rotacional estarán caracterizados por  $j, m$ , los números cuánticos de  $G = SU(2)$ . Para saber que estados aparecen en una dada banda, debemos descomponer las representaciones de  $SU(2)$  en representaciones de  $D_\infty$ . Es sencillo ver que si  $j$  es par aparecen las representaciones  $0^+, 1, 2, \dots, j$  y si  $j$  es impar las  $0^-, 1, 2, \dots, j$ .

Las bandas rotacionales correspondientes a cada representación de  $D_\infty$  estarán compuestas por todos los  $j$  que contengan dicha representación. Es decir:

$$\begin{aligned} 0^+ & 0, 2, 4, 6 \dots \\ 0^- & 1, 3, 5, 7 \dots \\ k & k, k+1, k+2, \dots \end{aligned} \quad (3.87)$$

El estado fundamental es simétrico (representación  $0^+$ ) y por lo tanto su banda rotacional constará de estados de  $j$  par. Esto se ve en la figura 2.1 donde se ve también una banda asociada a una vibración  $0^-$  y una  $k = 1$ . La paridades de los estados se obtienen realizando un análisis similar.

El Hamiltoniano colectivo (a orden más bajo) queda determinado por la simetría y es

$$H = \frac{1}{2\mathfrak{I}} (I_1^2 + I_2^2) = \frac{1}{2\mathfrak{I}} (I^2 - I_3^2) , \quad (3.88)$$

donde el momento de inercia  $\mathfrak{I}$  debe determinarse del hamiltoniano completo (o tomarse como parámetro fenomenológico). La energía de los estados vale entonces

$$E = \frac{1}{2\mathfrak{I}} (j(j+1) - k^2) , \quad (3.89)$$

donde  $j$  es el momento angular y  $k$  es la representación de  $D_\infty$  en la cual está la vibración. A partir de las representaciones de los grupos  $G$  y  $H$  se puede entonces determinar los estados que aparecen en cada banda con sus energías (aproximadas).



Veamos ahora como interpretar estos resultados en términos del movimiento en un espacio cociente en presencia de un campo de gauge. Para ello elijamos una parametrización adecuada de  $SU(2)$ :

$$U = \exp(i\theta(\cos\varphi I_1 + \sin\varphi I_2)) \exp(i\psi I_3) . \quad (3.90)$$

El subgrupo  $U(1)$  (componente continua de  $D_\infty$ ) que deja invariante el núcleo deformado es

$$\exp(i\psi I_3) , \quad (3.91)$$

y el cociente  $G/H$  estará parametrizado por  $\theta, \varphi$  con  $\psi = 0$ . Las direcciones correspondientes a los modos cero son las  $a' = 1, 2$  y la correspondiente a  $H$  la  $\bar{a} = 3$ .

Dada la parametrización se pueden calcular las matrices  $\Psi$  definidas en el apéndice A. Se obtiene:

$$\begin{array}{lll} \Psi_\psi^1 = 0 & \Psi_\psi^2 = 0 & \Psi_\psi^3 = 1 \\ \Psi_\theta^1 = \cos(\varphi + \psi) & \Psi_\theta^2 = \sin(\varphi + \psi) & \Psi_\theta^3 = 0 \\ \Psi_\varphi^1 = -\sin(\theta)\sin(\varphi + \psi) & \Psi_\varphi^2 = \sin(\theta)\cos(\varphi + \psi) & \Psi_\varphi^3 = 1 - \cos(\theta) \end{array} , \quad (3.92)$$

con una notación que indica que, por ejemplo,

$$U^{-1} \partial_\theta U = i \Psi_\theta^a \frac{\tau_a}{2} , \quad (3.93)$$

donde  $\tau_a$  son las matrices de Pauli y  $U$  es la definida en (3.90). A partir de  $\Psi$  se calcula la métrica del espacio cociente (2.38)

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= (\Psi_\theta^1)^2 + (\Psi_\theta^2)^2 = 1 , \\ g_{\theta\varphi} &= \Psi_\theta^1 \Psi_\varphi^1 + \Psi_\theta^2 \Psi_\varphi^2 = 0 , \\ g_{\varphi\varphi} &= (\Psi_\varphi^1)^2 + (\Psi_\varphi^2)^2 = \sin^2 \theta , \end{aligned} \quad (3.94)$$

con lo cual el elemento de arco vale

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2 , \quad (3.95)$$

y por lo tanto el movimiento colectivo se da sobre una esfera sobre la cual  $\theta$  y  $\varphi$  son coordenadas polares. En realidad debido a la simetría discreta de rotación en  $\pi$  alrededor de un eje perpendicular ciertos puntos de la esfera están identificados. Esto se ve fácilmente porque la orientación de un rotor simétrico queda determinada por dos ángulos  $(\theta, \varphi)$  que parametrizan una esfera. Sin embargo las orientaciones opuestas son indistinguibles, es decir los puntos  $(\theta, \varphi)$  y  $(\pi - \theta, \varphi + \pi)$  están identificados. Aquí consideraremos

el movimiento sobre la esfera con los puntos sin identificar. Las simetrías discretas pueden considerarse luego, tomando estados que sean combinaciones lineales que satisfagan las condiciones de Mackey para las simetrías discretas.

Como se dijo anteriormente el movimiento sobre la esfera no es libre sino que aparece un campo de gauge  $U(1)$  dado por (ecs. 3.23, 3.66):

$$A_{a'} = \Psi_{a'}^3 I_3 \Rightarrow \begin{cases} A_\theta &= 0 \\ A_\varphi &= (1 - \cos \theta) I_3 \end{cases} \quad (3.96)$$

Para un estado vibracional con  $I_3 = k$  se tendrá  $A_\varphi = k(1 - \cos \theta)$ . La intensidad de campo vale

$$F_{\theta\varphi} = \partial_\theta A_\varphi - \partial_\varphi A_\theta = k \sin(\theta). \quad (3.97)$$

Como es proporcional al elemento de área de la esfera, esto indica que el campo de gauge corresponde al de un monopolo de intensidad  $k$  colocado en el centro de la esfera.

El Hamiltoniano para el movimiento en  $S^2$  acoplado al campo de gauge es:

$$H_{col.} = -\frac{1}{2\mathfrak{I}} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \partial_\theta (\sin \theta \partial_\theta) + \frac{1}{\sin^2 \theta} (\partial_\varphi - iA_\varphi)(\partial_\varphi - iA_\varphi) \right] \quad (3.98)$$

Reemplazando el valor de  $A_\varphi$  se obtiene

$$H_{col.} = -\frac{1}{2\mathfrak{I}} \left[ \partial_\theta^2 + \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \partial_\theta + \frac{1}{\sin^2 \theta} \partial_\varphi^2 - \frac{2ik}{\sin^2 \theta} (1 - \cos \theta) \partial_\varphi - \frac{k^2(1 - \cos \theta)^2}{\sin^2 \theta} \right]. \quad (3.99)$$

Esta expresión no es útil para obtener las autofunciones. Sin embargo de la expresión (3.88) y escribiendo la matriz (3.90) en términos de los ángulos de Euler, se deduce que las autofunciones están dadas por

$$D_{mk}^j(\varphi, \theta, -\varphi), \quad (3.100)$$

donde las  $D$  son las matrices de rotación de Wigner. Por ejemplo para  $k = 1$  las autofunciones de los estados de energía más baja (sin normalizar) son

$$\begin{aligned} j = 1, \quad m = 1 & \quad 1 + \cos \theta \\ j = 1, \quad m = 0 & \quad e^{i\varphi} \sin \theta \\ j = 1, \quad m = -1 & = e^{2i\varphi} (1 - \cos \theta). \end{aligned} \quad (3.101)$$

Por cálculo directo se ve que estas funciones son efectivamente autofunciones de (3.99) y el autovalor es

$$E = \frac{1}{2\mathfrak{S}}(I(I+1) - k^2) = \frac{1}{2\mathfrak{S}} , \quad (3.102)$$

como debía ser. Otra forma de expresar esto es decir que las bandas colectivas realizan las cuantificaciones no equivalentes de la esfera pensada como cociente  $SU(2)/U(1)$ , es decir considerando que los movimientos naturales de la esfera son las rotaciones tridimensionales. Vemos así, en este caso bien conocido, que hay una relación entre las bandas colectivas y las cuantificaciones no equivalentes de un espacio cociente. El caso de grupos  $G$  y  $H$  cualesquiera es una generalización directa como se describió en el presente capítulo.

### 3.5 Correcciones a dos-loops

En las secciones anteriores hemos estudiado el Hamiltoniano colectivo al orden más bajo. Las correcciones de orden superior pueden calcularse utilizando teoría de perturbaciones. En [11, 21] se realizó este cálculo a través del formalismo de anticampos y allí puede encontrarse la expresión resultante que no incluiremos aquí.



## Capítulo 4

# Funciones de Green de Solitones

En los capítulos anteriores estudiamos la expansión semiclásica alrededor de una solución solitónica. Este tratamiento rompe manifiestamente la simetría de Lorentz. Por otro lado en teorías de campo es usual un tratamiento covariante basado en la definición de funciones de Green para los campos asociados a las partículas. Las funciones de Green son los valores de expectación en el vacío de los operadores de campo temporalmente ordenados:

$$G_{a_1, a_2, \dots, a_n}(x_1, x_2, \dots, x_n) = \langle 0 | \hat{T} \{ \phi_{a_1}(x_1) \phi_{a_2}(x_2) \dots \phi_{a_n}(x_n) \} | 0 \rangle. \quad (4.1)$$

Si a los solitones corresponden nuevas partículas, debemos esperar que existan estados cuánticos asociados a ellos y que sea posible definir operadores de campo con los cuales calcular funciones de Green. Para el caso del kink esto fue realizado por Mandelstam [35].

Para los otros solitones es difícil encontrar los operadores correspondientes pero en cambio es posible definir directamente las funciones de Green en términos de integrales de camino. Esto fue hecho por Fröhlich y Marchetti [5, 6] en base a otros trabajos previos [7, 8].

Como este método es menos conocido lo describiremos, en forma muy breve, en este capítulo. El método apunta a construir los sectores solitónicos en una forma matemáticamente rigurosa. Este aspecto no lo reflejaremos aquí sino que nos limitaremos a exponer los resultados relativos al modelo de Skyrme que se utilizan en el capítulo siguiente.

## 4.1 Variables de desorden en el modelo de Ising

La base del método de Fröhlich y Marchetti está en la definición de operadores de desorden. Veamos como aparecen estos operadores en el modelo de Ising [36]. Sea una red cuadrada bidimensional en cada uno de cuyos sitios  $i$  se define una variable  $\sigma_i$  que puede tomar valores  $\pm 1$ . La función de partición está dada por

$$Z = \sum_{\sigma_i = \pm 1} \exp \left( \beta J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \right), \quad (4.2)$$

donde  $J > 0$  es la constante de acoplamiento y  $\beta$  es la temperatura inversa. Además  $\langle ij \rangle$  indica que la suma es sobre primeros vecinos.

Consideremos ahora un camino cerrado en la red dual<sup>1</sup> como el que se indica en la figura (4.1).

Definamos una nueva función de partición calculada como la anterior pero invirtiendo el signo del acoplamiento  $J$  en todos los links que son cortados por el camino elegido. Es fácil ver que la función de partición vale lo mismo porque por cada configuración de spines en la suma original, existe otra (consistente en invertir los spines encerrados por el camino en la red dual) que tiene, con los nuevos acoplamientos, la misma energía.

Sin embargo, consideremos ahora un camino abierto en la red dual como en la figura (4.2).

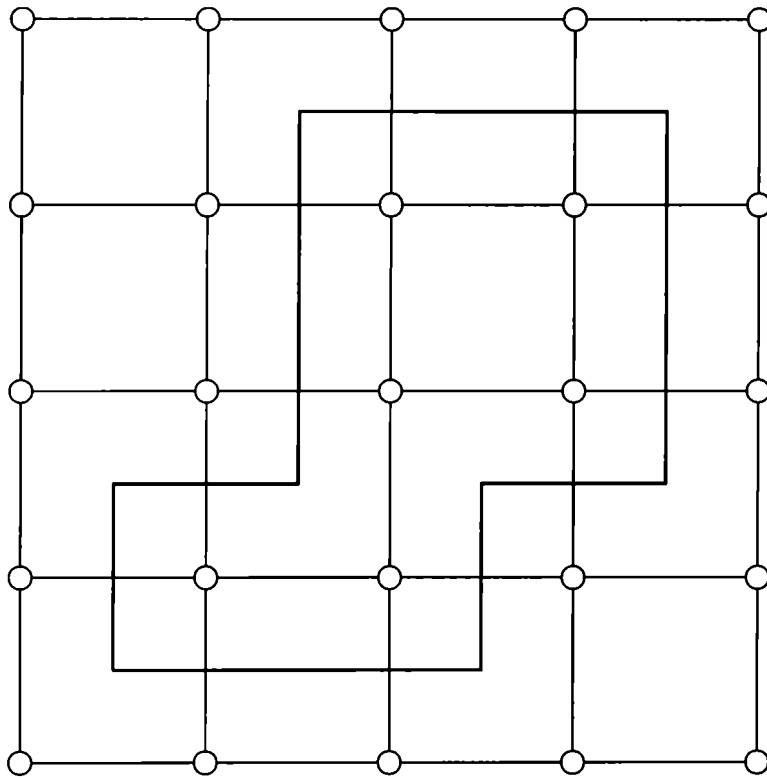
En este caso la función de partición evaluada invirtiendo el signo de  $J$  en los links que cruza el camino no será igual a la anterior (ec. (4.2)). Pero sí puede verse que no dependerá del camino elegido sino sólo de los puntos iniciales y finales. Esto se debe a que para un camino cerrado la función de partición no varía. Tendremos entonces una función de partición

$$Z_{x^*, y^*} = \sum_{\sigma_i = \pm 1} \exp \left( \beta \bar{J} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \right), \quad (4.3)$$

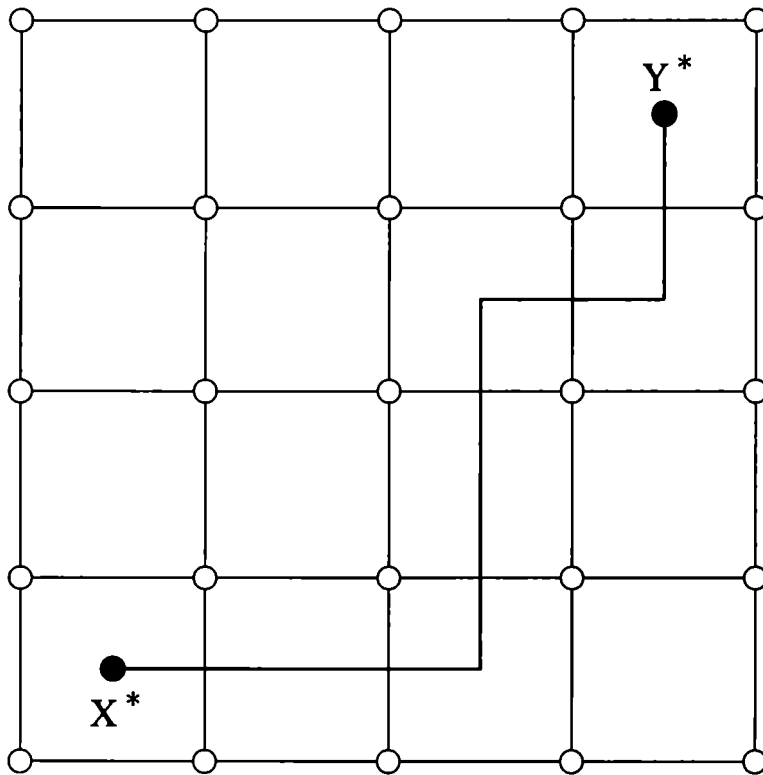
donde se indica que depende de los puntos  $x^*, y^*$  de la red dual y  $\bar{J}$  indica que se invierten los acoplamiento en ciertos links. Esta función de partición se puede pensar como la función de correlación de ciertos operadores  $\tau_{x^*}$ .

---

<sup>1</sup>La red dual es la que se obtiene intercambiando sitios por plaquetas. Un camino en la red dual es una sucesión de plaquetas con un lado común. Equivalentemente, es un camino que une los centros de plaquetas vecinas.



**Figura 4.1:** Camino cerrado sobre la red dual. La función de partición queda invariante si se invierte el signo de  $J$  en los links cruzados por el camino.



**Figura 4.2:** Camino abierto sobre la red dual. La función de partición cambia si se invierte el signo de  $J$  en los links cruzados por el camino y define la correlación del campo de desorden.



definidos en la red dual. Tendremos así dos correladores:

$$\begin{aligned}\langle \sigma_x \sigma_y \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\sigma_i = \pm 1} \sigma_x \sigma_y \exp \left( \beta J \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \right), \\ \langle \tau_{x^*} \tau_{y^*} \rangle &= \frac{1}{Z} \sum_{\sigma_i = \pm 1} \exp \left( \beta \bar{J} \sum_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \right).\end{aligned}\quad (4.4)$$

La primera igualdad es el valor medio usual de un producto de operadores. La segunda igualdad es la definición de la función de correlación de los operadores  $\tau$ . La lección importante de la ecuación (4.4) es que utilizando únicamente las variables  $\sigma$  se pueden definir funciones de correlación no sólo de las mismas  $\sigma$  sino también de otros operadores que no están presentes en la teoría ( $\tau_{x^*}$ ). En las teorías de campo las funciones de Green para los  $\sigma$  serán las usuales y las de los  $\tau$  serán las de los solitones.

El caso del modelo de Ising es muy interesante porque resulta que los operadores  $\tau$  son duales de los  $\sigma$  y las funciones de Green de los  $\tau$  son iguales a las de los  $\sigma$  a la temperatura dual ( $\beta^*$ ) definida por

$$\sinh(\beta^*) \sinh(\beta) = 1. \quad (4.5)$$

Esta propiedad es particular del modelo de Ising y no vale en otros modelos.

La función de partición (4.3) puede describirse también diciendo que el campo  $\sigma$  está acoplado a un campo de gauge de fondo que toma valores en  $Z_2$  [7]. El campo de gauge está definido en los links y la función de partición es

$$Z_{x^* y^*} = \sum_{\sigma_i = \pm 1} \exp \left( \beta J \sum_{\langle ij \rangle} A_{\langle ij \rangle} \sigma_i \sigma_j \right), \quad (4.6)$$

donde  $A_{\langle ij \rangle} = \pm 1$  según el link  $\langle ij \rangle$  sea cortado o no por el camino elegido. A partir del campo de gauge se define una curvatura  $F$  que toma valores en las plaquetas (o equivalentemente en la red dual):

$$\exp iF(x^*) = \prod_{\langle ij \rangle} A_{\langle ij \rangle}, \quad (4.7)$$

donde el producto se toma sobre los 4 links que rodean a  $x^*$ .

De la figura (4.2) se ve que la curvatura es

$$F(z^*) = \pi (\delta(z^* - x^*) + \delta(z^* - y^*)), \quad (4.8)$$

es decir está concentrada en los puntos iniciales y finales del camino. En resumen podemos decir que la función de partición (4.3) describe un modelo de Ising acoplado a un campo de gauge  $Z_2$  fijo, cuya curvatura está concentrada en  $x^*$  e  $y^*$ .

## 4.2 Funciones de Green para el Skyrmion

En el caso del skyrmion Fröhlich y Marchetti definen funciones de Green por analogía con las variables de desorden del modelo de Ising. Los operadores de orden  $\sigma$  son los  $\pi_a$  y los de desorden  $\tau$  los operadores asociados al skyrmion.

Supongamos entonces que queremos definir funciones de Green del tipo

$$G_{a_1 \dots a_r}^{n_1 \dots n_p}(x_1 \dots x_p, y_1 \dots y_r) = \langle T(\psi^{n_1}(x_1) \dots \psi^{n_r}(x_p) \phi_{a_1}(y_1) \dots \phi_{a_r}(y_r)) \rangle, \quad (4.9)$$

donde  $\psi^{n_i}(x_i)$  representa (formalmente) un operador que destruye un solitón de número topológico  $n_i$  en  $x_i$  o crea un antisolitón  $-n_i$  en  $x_i$ .

Siguiendo [6] introducimos una integral de camino sobre campos definidos en el espacio tiempo compactificado a  $S^4$  y con los puntos  $x_1 \dots x_p$  removidos ( $M_{1 \dots p} = (R^4 \cup \{\infty\}) \setminus \{x_1, \dots, x_p\}$ ). Esto es el equivalente de considerar que los campos  $\tau$  se definen en la red dual. La variedad  $M_{1 \dots p}$  es contraíble a un haz de  $p - 1$  esferas  $S^3$  con un punto en común, lo que implica que los mapas de  $M_{1 \dots p}$  a  $SU(2)$  se clasifican con  $p - 1$  enteros independientes. Estos enteros pueden escribirse en términos de  $p$  enteros  $n_i$ , definidos por

$$n_i = \int_{S_i} dS \, n^\mu B^\mu, \quad i = 1 \dots p, \quad (4.10)$$

donde  $S_i$  es una tres esfera que encierra  $x_i$  y que no encierra ningún otro punto  $x_j$  ( $j \neq i$ ),  $n^\mu$  es la normal a  $S_i$  y  $dS$  es el elemento de superficie sobre  $S_i$ . Debido al hecho de que  $U$  es constante en el infinito, tenemos que  $n_1 + \dots + n_p = 0$  lo que implica que sólo  $p - 1$  de los  $n_i$  son independientes. De esta forma aparecen naturalmente los números enteros  $n_i$  que caracterizan los operadores solitónicos.

Las funciones de Green para skyrmiones de la ec.(4.9) fueron definidas por Fröhlich and Marchetti en la ref. [6]. Agregando el campo de piones a la definición, las funciones de Green mixtas pion-skyrmion son

$$G_{a_1 \dots a_r}^{n_1 \dots n_p}(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_r) = \int \mathcal{D}[U] \phi_{a_1}(y_1) \dots \phi_{a_r}(y_r) \exp(-\int_M \mathcal{L}[U]), \quad (4.11)$$

donde  $U = \exp(i\phi_a \tau^a)$  toma el valor  $U = 1$  en el infinito espacio-temporal y tiene número topológico  $n_i$  alrededor de  $\mathbf{x}_i$  ( $i = 1, \dots, p$ ). Para ver la analogía con el caso del modelo de Ising consideremos la función de correlación

$$G^{1,-1}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \int \mathcal{D}[U] \exp\left(-\int_M \mathcal{L}[U]\right), \quad (4.12)$$

donde la integral es sobre campos  $U$  que tienen número topológico 1 alrededor de  $\mathbf{x}_1$  y  $-1$  alrededor de  $\mathbf{x}_2$  y tienden a 1 en infinito. Debido a ello el campo  $U$  debe tomar el valor  $-1$  a lo largo de un camino que una  $\mathbf{x}_1$  y  $\mathbf{x}_2$ . Este camino es el análogo al camino sobre la red dual que aparecía en el modelo de Ising.

Si quisieramos definir la integral de camino (4.11) rigurosamente deberíamos hacerlo primeramente en una red y despues tomar el límite del continuo [5]. Alternativamente podemos definirla por su expansión perturbativa alrededor de un camino extremal. En ambos casos se requiere un cut-off ultravioleta finito  $\Lambda$  ya que la teoría no es renormalizable. En el caso de la teoría de perturbaciones quiral [37] el límite  $\Lambda \rightarrow \infty$  se puede tomar absorbiendo los infinitos en los términos con mayor orden en derivadas, los cuales son despreciables a grandes distancias. Este método resulta útil para calcular la corrección a 1-loop a la masa [38].

En el capítulo siguiente trataremos de analizar esta definición y ver cómo aparecen los grados de libertad del skyrmion.

### 4.3 Un ejemplo en dos dimensiones

Para entender las definiciones de la sección anterior introduciremos un modelo sencillo en  $1 + 1$  dimensiones. Los resultados son bien conocidos y pueden encontrarse por ejemplo en [39]. Aquí reobtendremos esos resultados poniendo énfasis en la relación con el método de Fröhlich y Marchetti.

Consideremos un campo escalar  $\phi$  que toma valores reales pero con la identificación  $\phi \equiv \phi + 2\pi R$ , con lo cuál el espacio interno es un círculo de radio  $R$ . La acción está dada por la del campo libre

$$S = \int \frac{d^2x}{2\pi} \frac{1}{2} \sum_{\mu=1,2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi. \quad (4.13)$$

Reescalando el campo  $\phi \rightarrow \phi/R$  obtendremos un campo en un círculo de radio unidad ( $\phi \equiv \phi + 2\pi$ ) con acción

$$S = \gamma \int dx d\tau \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi \quad (4.14)$$

donde  $4\pi\gamma = R^2$ . Como se trabaja en espacio euclídeo es útil utilizar una notación compleja  $z = x + ir$ . Para definir el propagador en forma similar a la sección anterior, tomaremos el plano menos dos puntos  $z_1$  y  $z_2$  y consideraremos dos círculos de radio  $\epsilon \rightarrow 0$  alrededor de ellos  $S_1^\epsilon$  y  $S_2^\epsilon$ . El campo  $\phi$  determinará un mapa de  $S_1^\epsilon$  en el  $S_1$  interno. Este mapa estará caracterizado por un número topológico  $n \in \Pi_1(S^1)$  que determina cuantas veces se cubre la variedad interna por el mapa dado. Alrededor de  $z_2$  el número topológico deberá ser  $-n$  puesto que no hay otra singularidad. La integral de camino sobre todos los mapas caracterizados por  $n$  determinará el propagador de un operador con número topológico  $n$ . Ahora bien, si deseamos, por ejemplo, obtener una configuración de saddle point veremos que no es única. El hecho de que la trayectoria clásica no sea única no es admisible y se debe a que no fijamos los valores del campo en  $S_1^\epsilon$  y  $S_2^\epsilon$ . Por lo tanto, definiremos el propagador como

$$G_n(z_1, \alpha; z_2, \beta) = \mathcal{N} \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}, \quad (4.15)$$

donde la integral se hace sobre campos que satisfacen

$$\begin{aligned} \phi|_{S_1^\epsilon} &= \alpha + n \text{Arg}(z - z_1), \\ \phi|_{S_2^\epsilon} &= \beta - n \text{Arg}(z - z_2), \end{aligned} \quad (4.16)$$

es decir con condiciones de contorno fijas. En el infinito no ponemos condiciones puesto que la simetrías no está espontáneamente rota. En (4.15)  $\mathcal{N}$  es un factor de normalización que se definirá luego. Hasta ahora apareció un número topológico  $n$ . Al fijar las condiciones de contorno aparece otro número topológico que corresponde al arrollamiento en la dirección temporal. Esto se ve reemplazando  $\beta$  por  $\beta + 2\pi m$  y observando que la condición de contorno es la misma para el campo identificado  $\phi \equiv \phi + 2\pi$ . Sin embargo mapas con distintos número  $m$  no son homotópicos entre sí.

Para calcular la integral de camino se puede evaluar la acción sobre una trayectoria clásica (que ahora es única) y luego la parte cuadrática de las fluctuaciones alrededor de ella.

Para evaluar la acción clásica se hace una transformación conforme

$$\xi + i\eta = \omega = \ln \left( \frac{z - z_1}{z - z_2} \right), \quad (4.17)$$

que lleva la región de interés a un rectángulo

$$-\xi_2 \leq \xi \leq \xi_2; \quad -\pi \leq \eta \leq \pi, \quad (4.18)$$

con

$$\xi_2 \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \ln \left( \frac{|z_1 - z_2|}{\epsilon} \right). \quad (4.19)$$

La acción estará dada por

$$\begin{aligned} S &= 2i\gamma \int dz d\bar{z} \partial\phi \bar{\partial}\phi = 2i\gamma \int d\omega d\bar{\omega} \partial\phi \bar{\partial}\phi \\ &= \int d\xi d\eta ((\partial_\xi\phi)^2 + (\partial_\eta\phi)^2). \end{aligned} \quad (4.20)$$

En el rectángulo se ve más fácilmente que  $\phi$  se puede arrollar independientemente alrededor de  $\eta$  (con número topológico  $n$ ) y de  $\xi$  (con  $m$ ).

La solución que minimiza la acción es

$$\phi = \frac{\alpha + \beta + n\pi}{2} + \frac{\beta - \alpha - 2n\text{Arg}(z_2 - z_1) - n\pi + 2\pi m}{2\xi_2} \xi + n\eta. \quad (4.21)$$

Con esta solución la acción clásica vale

$$S_m^{(cl)} = 4\pi\gamma\xi_2 \left( \left( \frac{\beta - \alpha - 2n\text{Arg}(z_2 - z_1) - n\pi + 2\pi m}{2\xi_2} \right)^2 + n^2 \right). \quad (4.22)$$

En el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  es decir  $\xi_2 \rightarrow \infty$  la acción se comporta como

$$S_m^{(cl)} \simeq 4\pi\xi_2 n^2 = 4\pi \ln \left( \frac{|z_2 - z_1|}{\epsilon} \right) = 4\pi\gamma \ln |z_2 - z_1| n^2 - 4\pi n^2 \ln \epsilon. \quad (4.23)$$

La divergencia logarítmica ( $\simeq \ln \epsilon$ ) es independiente de  $z_1$  y  $z_2$  y se puede absorber en la normalización de los campos de solitón, es decir equivale a renormalizar la función de onda del solitón.

Ahora bien, como se dijo antes las historias posibles del campo no son todas homotópicas entre sí y se clasifican por un número topológico adicional  $m$ . La integral de camino de la ec.(4.15) se puede escribir entonces como una suma sobre las contribuciones para cada  $m$ . La situación es similar a la cuantificación en un espacio que no es simplemente conexo. Como se sabe es posible multiplicar cada término de la suma por un factor  $e^{im\theta}$  donde  $\theta$  aparece como un nuevo parámetro de la teoría. El propagador es entonces

$$G_n(z_1, \alpha; z_2, \beta) = \mathcal{N} \sum e^{im\theta} \int \mathcal{D}\phi_m e^{-S[\phi_m]}. \quad (4.24)$$

El factor de normalización lo elegiremos como la inversa del valor de la sumatoria para  $n = 0$  y  $\theta = 0$ :

$$G_n(z_1, \alpha; z_2, \beta) = \frac{\sum e^{im\theta} \int \mathcal{D}\phi_m e^{-S[\phi_m]}}{\sum \int \mathcal{D}\phi e^{-S[\phi]}}. \quad (4.25)$$

En este caso las fluctuaciones cuadráticas tienen la mismas condiciones de contorno en el numerador y denominador y su contribución se cancela. El propagador está dado entonces por

$$G_n(z_1, \alpha; z_2, \beta) = \frac{\sum_m e^{im\theta} e^{-S_m^{(cl)}(n)}}{\sum_m e^{-S_m^{(cl)}(n=0)}}. \quad (4.26)$$

Falta calcular todavía

$$\begin{aligned} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{i\theta m} e^{-4\pi\gamma\xi_2 \left(\frac{A+\pi m}{\xi_2}\right)^2} &\simeq \xi_2 \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\theta x} e^{-4\pi\gamma\xi_2 \left(\frac{A}{\xi_2} + \pi x\right)^2} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{\xi_2}{4\gamma}} e^{-i\frac{1}{\pi} A\theta} e^{-\theta^2 \frac{\xi_2}{16\pi^3\gamma}}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

donde se definió  $A$  como

$$A = \frac{\beta - \alpha - 2n\text{Arg}(z_2 - z_1) - n\pi}{2}. \quad (4.28)$$

Dividiendo por el valor para  $\theta = 0$  y absorbiendo las constantes infinitas en la normalización de los campos se obtiene

$$G_n(z_1, \alpha; z_2, \beta) = \frac{e^{-i\frac{\theta A}{\pi}}}{|z_2 - z_1|^{4\pi\gamma n^2 + \frac{\theta^2}{16\pi^3\gamma}}}, \quad (4.29)$$

y reemplazando  $A$  por su valor queda

$$G_n(z_1, \alpha; z_2, \beta) = \frac{e^{-i\frac{\theta}{2\pi}(\beta-\alpha)} e^{in\theta/2}}{|z_2 - z_1|^{4\pi\gamma n^2 + \frac{\theta^2}{16\pi^3\gamma}} e^{-\frac{i\theta}{\pi}\text{Arg}(z_2 - z_1)}}. \quad (4.30)$$

Poniendo  $\theta = 2\pi k$  queda en el denominador

$$|z_2 - z_1|^{4\pi\gamma n^2 + \frac{k^2}{4\pi\gamma}} e^{-2ik\text{Arg}(z_2 - z_1)} = (z_2 - z_1)^{2h} (\bar{z}_2 - \bar{z}_1)^{2\bar{h}}, \quad (4.31)$$

con

$$\begin{aligned} 2(h + \bar{h}) &= 4\pi\gamma n^2 + \frac{k^2}{4\pi\gamma}, \\ 2(h - \bar{h}) &= -2nk, \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned}
h &= \frac{1}{4} \left( nR - \frac{k}{R} \right)^2, \\
\bar{h} &= \frac{1}{4} \left( nR + \frac{k}{R} \right)^2.
\end{aligned} \tag{4.33}$$

Es decir que el propagador describe campos conformes con pesos  $h$  y  $\bar{h}$  dados por la fórmula anterior. El spin está dado por  $h - \bar{h} = -nk$ . Por ejemplo para spin 1/2 tomemos el caso  $k = 1/2$  ( $\theta = \pi$ ) y  $n = -1$ . Si deseamos fermiones holomorfos elegiremos además  $\bar{h} = 0$  ( $R = 1$ ). Para  $n = -1$  tendremos el propagador

$$G_{n=1}^{\theta=\pi}(z_1, z_2) = \frac{1}{z_1 - z_2} \tag{4.34}$$

Vemos entonces que se obtiene el propagador correcto para fermiones libres.

Fröhlich y Marchetti en este caso obtienen funciones de correlación fermiónicas introduciendo un factor adicional  $e^{i\phi(z_1)/2} e^{i\phi(z_2)/2}$  en la integral de camino. Lo que vemos de este ejemplo es que eso no es necesario si fijamos las condiciones de contorno alrededor de las singularidades. Esto se debe a que al fijar las condiciones de contorno aparece mas topología lo que hace aparecer un parámetro adicional  $\theta$ . Los resultados obtenidos son similares a los de [39] y bien conocidos de la teoría de campos conformes. Lo que aquí queremos destacar es la utilidad de las condiciones de contorno que aplicaremos en el próximo capítulo al caso del skyrmion. Además de introducir más topología permiten definir los grados de libertad internos. Aquí estarían determinados por la dependencia del propagador en  $\alpha$  y  $\beta$ . Sin embargo esta dependencia está fija dado el valor de  $n$  y por lo tanto en el ejemplo de 1 + 1 dimensiones no hay grados de libertad internos como era de esperarse.





## Capítulo 5

# Funciones de Green para Skyrmiones

En el capítulo anterior vimos cómo se definen las funciones de Green para Skyrmiones en términos de los campos piónicos [6]. Ahora veremos cómo la introducción de condiciones de contorno alrededor de la singularidad permite definir los grados de libertad internos (spin e isospin) del solitón y que además aparece en forma natural más topología permitiendo la cuantificación del skyrmion  $SU(2)$  como fermión [40].

Antes de continuar aclaremos, como cuestión de notación, que en este capítulo trabajaremos en espacio Euclídeo y usaremos supraíndices ( $\mu = 1, \dots, 4$ ) para designar componentes espacio-temporales. Sin embargo, por brevedad llamaremos transformaciones de Lorentz a las rotaciones Euclídeas en 4 dimensiones reservando el nombre de rotaciones para las rotaciones Euclídeas en 3 dimensiones.

### 5.1 Funciones de Green

La definición de las funciones de Green fue dada en la ec.(4.11). En esta sección buscaremos clarificar el significado de la ec.(4.11). Para ello consideremos el propagador solitónico

$$G^{-1,+1}(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int \mathcal{D}[U] \exp\left(-\int_{M_{12}} \mathcal{L}[U]\right). \quad (5.1)$$

La integral de camino se realiza sobre campos  $U$  que tienen número topológico  $+1$  alrededor de  $\mathbf{x}_2$  y  $-1$  alrededor de  $\mathbf{x}_1$ . La situación se muestra en la figura 5.1.

Consideremos una sección espacial a tiempo constante  $t = t_a$ . Cerrando esta sección a  $t = -\infty$  vemos que la misma tiene número topológico 0, esto es, no hay excitaciones topológicas a  $t = t_a$ . El mismo argumento para una sección a  $t = t_b$  muestra que tiene número topológico +1 y, a  $t = t_c$ , tenemos nuevamente 0. Esto significa que un solitón  $B = 1$  se crea en  $x_2$  y luego se destruye en  $x_1$ .

Por otra parte, si miramos el proceso inverso temporal, encontramos que la sección a  $t = t_b$  tiene número topológico -1, ya que la definición (1.19) tiene un signo menos cuando se invierte la normal. Así, la figura también describe un antisolitón propagándose hacia atrás en el tiempo, esto es, en  $x_2$  se crea un solitón o equivalentemente, se destruye un antisolitón.

De lo anterior se sigue que las singularidades en  $x_1$  y  $x_2$  tienen el efecto esperado para un operador de campo cuántico asociado con el antisolitón (recordemos que un campo  $\psi$  destruye la partícula y crea la antipartícula mientras que  $\psi^\dagger$  hace lo opuesto).

El siguiente paso es encontrar una configuración que sea extremo de la acción. Esto lo haremos proponiendo un ansatz de Skyrme dependiente del tiempo

$$U = \exp(ief(u, v)\check{x}_a\tau^a), \quad (5.2)$$

donde  $\check{x}_a = x_a/r$ ,  $r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ , y  $u = ef_\pi r$ ,  $v = ef_\pi t$  son adimensionales. Minimizando la acción, obtenemos una ecuación para  $f(u, v)$ :

$$\begin{aligned} (2\sin^2 f + u^2) \left( \frac{d^2 f}{dv^2} + \frac{d^2 f}{du^2} \right) + \sin(2f) \left( \left( \frac{df}{dv} \right)^2 + \left( \frac{df}{du} \right)^2 \right) + \\ + 2u \frac{df}{du} - \sin(2f) \left( 1 + \frac{\sin^2 f}{u^2} \right) = 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

La condición de contorno  $U = 1$  en el infinito requiere  $f(u, v) \rightarrow 0$  cuando  $v \rightarrow \pm\infty$  o  $u \rightarrow \infty$ . En  $u = 0$ , para que  $U$  sea univaluada  $f$  debe valer 0 o  $\pi$ . La continuidad de  $f$  (en la variedad  $M_{12}$ ) y el requerimiento de que  $U$  tenga número topológico 1 alrededor de  $x_2$  y -1 alrededor de  $x_1$  implica que

$$\begin{aligned} f(u, v) &= 0 \quad \text{si } v \rightarrow \pm\infty \text{ ó } u \rightarrow \infty, \\ f(0, v) &= 0 \quad \text{si } v < ef_\pi x_2^4 \text{ ó } v > ef_\pi x_1^4, \\ f(0, v) &= \pi \quad \text{si } ef_\pi x_2^4 < v < ef_\pi x_1^4. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Estas condiciones de contorno respetan la simetría cilíndrica del ansatz. También es posible utilizar condiciones de contorno menos simétricas como discutiremos en la sección siguiente.

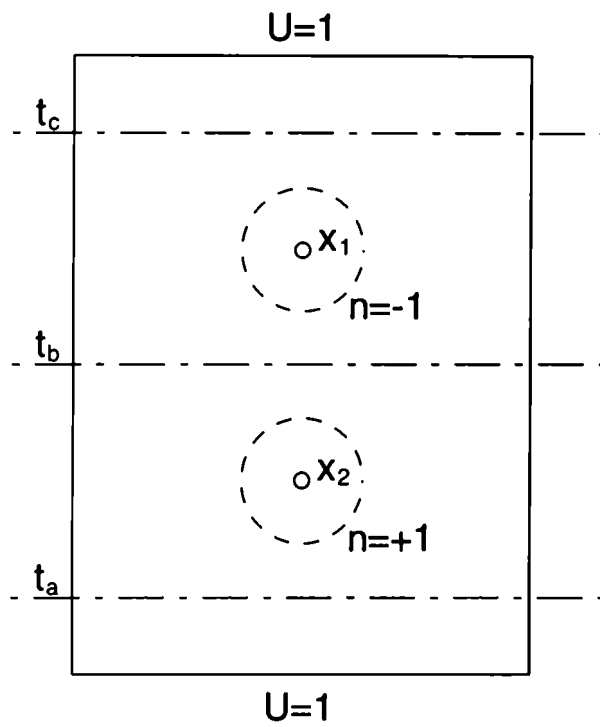


Figura 5.1: Para definir el propagador se consideran configuraciones sobre  $R^4 \setminus \{x_1, x_2\}$ . Ver discusión en el texto.

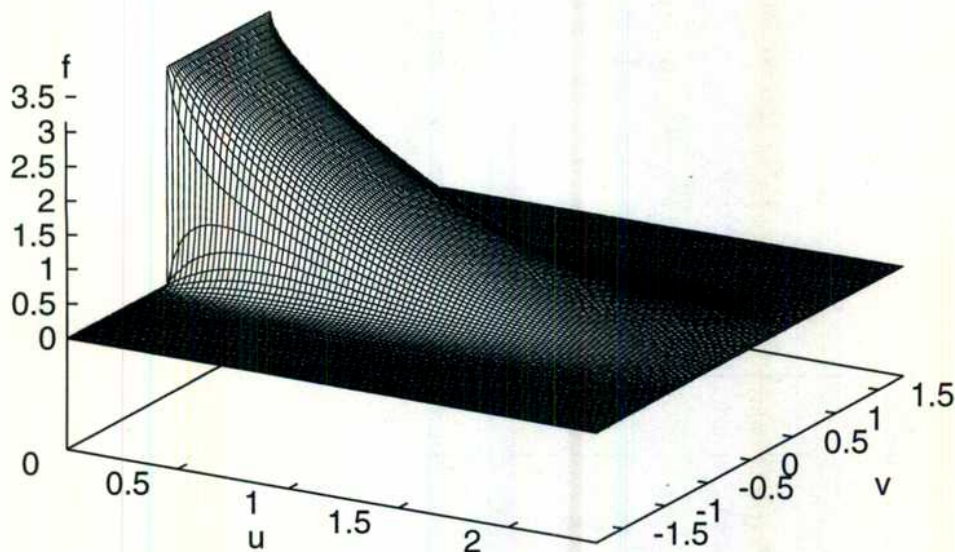


Figura 5.2: Solución numérica para  $f(u, v)$  que minimiza la acción para  $(u = ef_\pi r, v = ef_\pi t)$ . En la figura,  $|x_2 - x_1| = 6(ef_\pi)^{-1}$ .

La solución numérica a las ecs.(5.3) y (5.4) se muestra en la figura 5.2 donde vemos que  $f$  (y por lo tanto  $\phi_a$ ) es aproximadamente cero antes de  $x_2^4$  o después de  $x_1^4$  y prácticamente igual a la solución estática en la zona intermedia. Esto está de acuerdo con la idea de que se crea un solitón en  $x_2$  el cual se propaga hasta  $x_1$  donde se destruye. Como la solución es aproximadamente independiente del tiempo en el intervalo temporal  $(x_2^4, x_1^4)$  e igual al perfil estático, la acción está dada aproximadamente por  $S = M_{cl}|x_2 - x_1|$ , donde  $M_{cl}$  es la energía clásica. Vemos así que en la aproximación de saddle-point el propagador contiene un factor  $\exp(-M_{cl}|x_2 - x_1|)$  que es el comportamiento correcto para el propagador euclídeo de una partícula con masa  $M_{cl}$ . En la sección (5.2) mejoraremos esta aproximación obteniendo el espectro correcto de partículas con spin igual al isospin.

Consideremos ahora esferas  $S_R$  de radio  $R < |x_2 - x_1|$  alrededor de  $x_2$ . Todas estas esferas tienen número topológico 1 pero la densidad topológica, que en este caso está dada por  $\rho(x_\mu) = B^\mu(x - x_2)^\mu/|x - x_2|$ , se distribuye de manera diferente. Reemplazando el ansatz de la ec.(5.2) en la última expresión se sigue que la densidad es solamente función del ángulo  $\theta$  entre  $x - x_2$  y el eje 4, y está dada por

$$\rho(\theta) = -\frac{1}{2\pi^2} \frac{\sin^2(f)\partial_\theta f}{\sin^2(\theta)}. \quad (5.5)$$

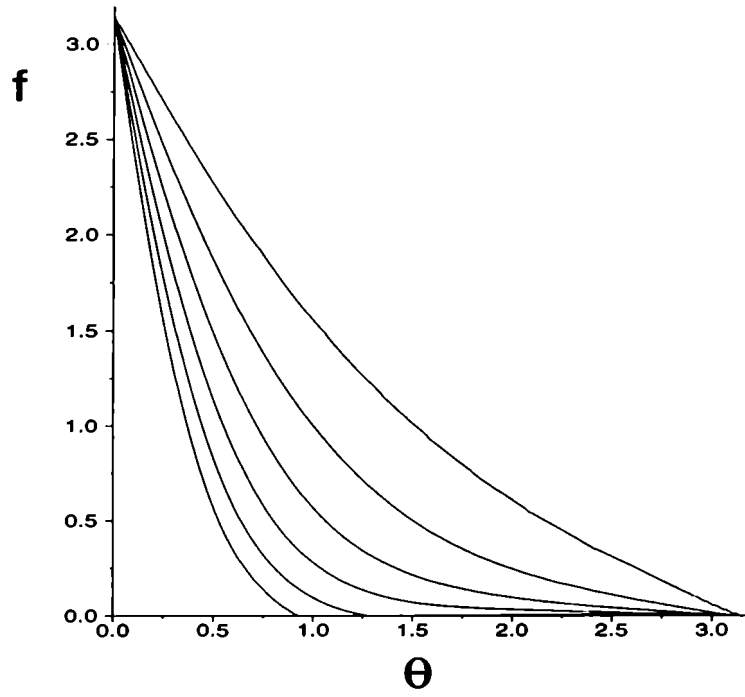


Figura 5.3:  $f$  como función de  $\theta$  para diferentes radios, correspondiendo a (De la curva superior a la inferior)  $R = 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5, 3.0$  en unidades de  $(ef_{\pi})^{-1}$ , en el caso  $|x_2 - x_1| = 6(ef_{\pi})^{-1}$ .

La solución numérica  $f(u, v)$  como función de  $\theta$  se obtiene por interpolación de la fórmula

$$f(\theta) = f(R \sin(\theta), e f_{\pi} x_2^4 + R \cos(\theta)). \quad (5.6)$$

El resultado para varios valores de  $R$  (en unidades de  $(e f_{\pi})^{-1}$ ) se muestra en la figura 5.3. Aquí vemos que cerca de la singularidad ( $R \rightarrow 0$ )  $f(\theta)$  tiende a  $\pi - \theta$ , lo cual da una densidad topológica uniforme (cf. eq. (5.5)). Si nos alejamos de la singularidad la densidad topológica se concentra alrededor del polo Norte de la esfera dando lugar a un solitón que se mueve hacia  $x_1$ . Esto describe en forma gráfica la aparición de un solitón alrededor de  $x_2$ .

Este comportamiento de la solución (deslocalizado para  $R$  pequeño, y localizado para  $R$  grande) esta de acuerdo con lo que se conoce del ansatz de Skyrme en una esfera [41] y se corresponde con el hecho de que a cortas distancias la simetría quiral no se rompe mientras que sí lo hace a grandes distancias.

Terminaremos esta sección notando que el comportamiento  $f(\theta) \approx \pi - \theta$  cerca de  $x_2$  es equivalente a

$$U(x) \approx -X_2^\dagger(x), \quad X_2(x) = \frac{x^4 - x_2^4}{|x - x_2|} + i \frac{x^a - x_2^a}{|x - x_2|} \tau_a, \quad (5.7)$$

donde  $\tau_a$  son las matrices de Pauli. Un análisis similar alrededor de  $x_1$ , revela que  $U$  se comporta como  $X_1$ , donde  $X_1$  se define como  $X_2$ , pero substituyendo  $x_2$  por  $x_1$ . Estos comportamientos serán útiles en la próxima sección cuando discutamos las condiciones de contorno que imponaremos a los campos.

## 5.2 Las condiciones de contorno

La solución que minimiza la acción, obtenida en la sección anterior, no es invariante ante rotaciones o iso-rotaciones. Esto significa que si p.ej. la rotamos obtendremos una configuración de campo distinta pero con la misma acción y que, por lo tanto, también será un mínimo. Esto es, existen varios mínimos de la acción o, equivalentemente, varias trayectorias clásicas distintas. Esto no es admisible y se debe al hecho de que no hemos especificado las condiciones de contorno que satisface el campo alrededor de  $x_1$  y  $x_2$ .

Para especificarlas, extraigamos dos pequeñas bolas  $B_1^4$  y  $B_2^4$  de radio  $\epsilon \rightarrow 0$  alrededor de  $x_1$  y  $x_2$  respectivamente. Ahora debemos especificar los valores que toma el campo  $U$  en las superficies  $S_1^3 = \partial B_1^4$  y  $S_2^3 = \partial B_2^4$  pero teniendo en cuenta la condición de que  $U$  debe tener número topológico +1 alrededor de  $x_2$  y -1 alrededor de  $x_1$ .

En principio podríamos elegir cualquier función  $U : S^3 \rightarrow \text{SU}(2)$  pero nos restringiremos a un conjunto mínimo de condiciones de contorno que cierren ante transformaciones de Lorentz e isospin. Al final de la sección 5.1 vimos que cerca de  $\mathbf{x}_2$  la solución numérica se comporta como  $-X_2^\dagger$ , resultando en una densidad topológica uniforme. Realizando transformaciones de Lorentz obtenemos, alrededor de la singularidad, los comportamientos  $S_1(-X_2)^\dagger S_2^\dagger$  ( $S_1, S_2 \in \text{SU}(2)$ , ver ec.(5.23) más abajo) sin alterar la densidad topológica uniforme. Esto sugiere que todas las condiciones de contorno  $S_1(-X_2)^\dagger S_2^\dagger$  deben ser tratadas en pie de igualdad para obtener una representación de las simetrías de Lorentz e isospin. Por lo tanto tomaremos las condiciones de contorno como

$$\begin{aligned} U|_{S_1^3} &= A_1 X_1 B_1^\dagger, \\ U|_{S_2^3} &= A_2 (-X_2)^\dagger B_2^\dagger, \end{aligned} \quad (5.8)$$

donde  $A_1, B_1, A_2, B_2$  pertenecen a  $\text{SU}(2)$  y  $X_1, X_2$  son matrices de  $\text{SU}(2)$  definidas como

$$X_{1,2}(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}^4 - \mathbf{x}_{1,2}^4}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{1,2}|} + i \frac{\mathbf{x}^a - \mathbf{x}_{1,2}^a}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_{1,2}|} \tau_a, \quad (5.9)$$

Como comentario digamos que, en términos del campo vectorial  $L_\mu = U^\dagger \partial_\mu U$ , estas condiciones aparecen como la inserción de un instanton (anti-instanton) de radio cero en  $\mathbf{x}_1$  ( $\mathbf{x}_2$ ).<sup>1</sup>

Cada par  $A_i, B_i$  determina un mapa  $S_i^3 \rightarrow \text{SU}(2)$ , y, como exactamente el mismo mapa es determinado por  $-A_i, -B_i$ , la condición de contorno está definida por un punto en la variedad  $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)/Z_2$ . Estas condiciones de contorno representan los grados de libertad internos de los campos de skyrmion.

Dados dos puntos  $p_1$  y  $p_2$  en  $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)/Z_2$  definimos el propagador

$$G(\mathbf{x}_1, p_1; \mathbf{x}_2, p_2) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{D}[U] \exp \left( - \int_{M_{12}} \mathcal{L}[U] + 2C_\epsilon \right), \quad (5.10)$$

donde  $U$  sobre  $S_1^3$  está dado por  $p_1$  y sobre  $S_2^3$  por  $p_2$ , de acuerdo con la ec.(5.8) (En el infinito espacio-temporal tomamos  $U = 1$ , esto es, la configuración de vacío). El término  $C_\epsilon = -(3\pi^2/e^2) \log(\epsilon)$  se suma para cancelar la contribución infinita a la acción debida a la singularidad y se puede pensar como una renormalización de los campos de skyrmion. Incluir términos con

<sup>1</sup>En nuestro caso no tenemos una teoría de gauge pero podemos definir la funciones de Green en términos de un campo  $U$  acoplado a un  $L_\mu$  singular como se describe en [6].

mayor número de derivadas en la acción produce peores singularidades y deberíamos redefinir  $C_\epsilon$  apropiadamente; por ejemplo, la inclusión del término de sexto orden  $-\epsilon_6 B^\mu B_\mu$  requiere que  $C_\epsilon = -(6\pi^2/\epsilon^2) \log(\epsilon) - \epsilon_6(2\pi^2\epsilon^2)^{-1}$ . Por supuesto, a cortas distancias, los términos más significativos son precisamente aquellos que no tuvimos en cuenta a grandes distancias, reflejando el hecho de que cerca de la singularidad el lagrangiano de la ec.(1.16) no es adecuado. Sin embargo esto no modifica los argumentos de simetría y, lejos de la singularidad, la solución clásica es poco sensible a términos de orden superior.

Veamos ahora que las condiciones de contorno impuestas llevan en forma natural a las distintas cuantificaciones posibles del modelo de Skyrme. Hasta ahora, como  $M_{12} = (R^4 \cup \{\infty\}) \setminus \{x_1, x_2\}$  es contraíble a  $S^3$ , las configuraciones  $U : M_{12} \rightarrow \text{SU}(2)$  están clasificadas por un número entero. Sin embargo, cuando se fijan los puntos iniciales y finales queda definido un mapa

$$U : S^3 \times [0, 1] \rightarrow \text{SU}(2), \quad (5.11)$$

porque  $M_{12}$  se puede deformar a un cilindro con base  $S^3$ . Aquí,  $\partial B_1^4$  y  $\partial B_2^4$  son las bases del cilindro y el parámetro  $[0, 1]$  representa la deformación continua de  $\partial B_2^4$  en  $\partial B_1^4$  pasando a través de secciones entre  $x_1$  y  $x_2$  (recordemos que el infinito está identificado a un punto). Dos de estos mapas no son necesariamente homotópicos. La situación es similar a la de un plano con un agujero. Caminos con los extremos libres son homotópicos, pero los caminos con extremos fijos están clasificados por  $\Pi_1(S^1) = \mathbb{Z}$ .

En nuestro caso, supongamos dadas dos configuraciones

$$U_1, U_2 : S^3 \times [0, 1] \rightarrow \text{SU}(2), \quad (5.12)$$

que satisfacen la misma condición de contorno en 0 y 1. Ellas pueden ser usadas para definir un mapa  $U : S^3 \times S^1 \rightarrow \text{SU}(2)$ :

$$U(X, t) = \begin{cases} U_1(X, 2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ U_2(X, 2(1-t)) & \text{si } t \in [1/2, 1]. \end{cases} \quad (5.13)$$

Es fácil verificar que  $U$  es continua en  $1/2$  y periódica ( $U(X, 0) = U(X, 1)$ ), si suponemos, como antes, que  $U_1$  y  $U_2$  satisfacen la misma condición de contorno en  $t = 0, 1$ . Este mapa es el análogo al camino cerrado que se puede construir con dos caminos que tienen los mismos extremos en el ejemplo del plano con un agujero.

Dos configuraciones  $U_1$  y  $U_2$  son homotópicas si el mapa  $U : S^3 \times S^1 \rightarrow \text{SU}(2)$  se puede extender a un mapa  $S^3 \times D_2 \rightarrow \text{SU}(2)$ , donde  $D_2$  es un disco



bidimensional ( $\partial D_2 = S^1$ ). En general hay una obstrucción para dicha extensión que está dada por  $\Pi_4(\text{SU}(2)) = \mathbb{Z}_2$  [42], esto significa que existen dos clases de homotopía. Una forma de distinguir las es embeber trivialmente  $\text{SU}(2)$  en  $\text{SU}(3)$  y evaluar el término de Wess-Zumino-Witten. Este término da 0 para la clase trivial y  $\pi$  para la no trivial. Si consideráramos solitones  $\text{SU}(3)$  todos los caminos serían homotópicos y el término de Wess-Zumino-Witten daría un valor diferente para cada camino [42].

Remarquemos solamente que la necesidad de considerar la extensión de un mapa  $U : S^3 \times S^1 \rightarrow \text{SU}(2)$  a un mapa  $U : S^3 \times D_2 \rightarrow \text{SU}(2)$  para estudiar las distintas cuantificaciones posibles de modelo de Skyrme (que en [42] fue propuesta al imponer condiciones de contorno periódicas para calcular la función de partición) aquí surge naturalmente del formalismo de Fröhlich y Marchetti suplementado con condiciones de contorno fijas alrededor de la singularidad.

La integral de camino que define el propagador se puede separar en dos integrales, una sobre cada clase de homotopía. A la clase no trivial se le puede asignar una fase igual a 0 o  $\pi$  lo que corresponde a sumar o restar las dos contribuciones:

$$G(\mathbf{x}_1, p_1; \mathbf{x}_2, p_2) = G^{(1)}(\mathbf{x}_1, p_1; \mathbf{x}_2, p_2) \pm G^{(2)}(\mathbf{x}_1, p_1; \mathbf{x}_2, p_2). \quad (5.14)$$

El signo  $+$  ( $-$ ) corresponde a cuantificar el solitón como bosón (fermión) (ver sección 5.4).

Supongamos ahora que tenemos un camino en una cierta clase topológica y que termina con una condición de contorno asociada a  $A_2, B_2$ . Si movemos adiabáticamente esta condición de contorno, dejando  $A_1, B_1$  fija, de manera tal de obtener la condición de contorno asociada a  $-A_2, -B_2$  (la cual representa el mismo punto ya que  $A_2, B_2$  y  $-A_2, -B_2$  están identificadas), el nuevo camino estará en una clase topológica diferente. Esto se debe a que el nuevo camino se puede obtener componiendo el camino original con un camino "cerrado", con base en  $\partial B_2^4$ , que comienza en  $(A_2, B_2)$  y termina en  $(-A_2, -B_2)$ . Este último camino es no trivial y por lo tanto el camino original cambiará de clase de homotopía. De esta manera, cambiando adiabáticamente la condición final desde  $(A_2, B_2)$  hasta  $(-A_2, -B_2)$  intercambiamos  $G^{(1)}$  y  $G^{(2)}$ .

Este resultado nos permite extender en forma continua las condiciones de contorno de  $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)/\mathbb{Z}_2$  a  $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ , definiendo una nueva función  $\tilde{G}$  como sigue

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\mathbf{x}_1, A_1, B_1; \mathbf{x}_2, A_2, B_2) &= \tilde{G}(\mathbf{x}_1, -A_1, -B_1; \mathbf{x}_2, -A_2, -B_2) \\ &= G^{(1)}(\mathbf{x}_1, p_1; \mathbf{x}_2, p_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tilde{G}(\mathbf{x}_1, A_1, B_1; \mathbf{x}_2, -A_2, -B_2) &= \tilde{G}(\mathbf{x}_1, -A_1, -B_1; \mathbf{x}_2, A_2, B_2) \\ &= G^{(2)}(\mathbf{x}_1, p_1; \mathbf{x}_2, p_2),\end{aligned}\quad (5.15)$$

donde  $A_{1,2}, B_{1,2}$  y  $-A_{1,2}, -B_{1,2}$  corresponden ambos a  $p_{1,2}$  en  $SU(2) \times SU(2)/Z_2$  y las definiciones son válidas cuando  $A_1, A_2 > 0$ <sup>2</sup>. En términos de  $\tilde{G}$  el propagador original se puede escribir como

$$G(\mathbf{x}_1, p_1; \mathbf{x}_2, p_2) = \tilde{G}(\mathbf{x}_1, A_1, B_1; \mathbf{x}_2, A_2, B_2) \pm \tilde{G}(\mathbf{x}_1, A_1, B_1; \mathbf{x}_2, -A_2, -B_2). \quad (5.16)$$

En las siguientes secciones analizaremos las propiedades de  $\tilde{G}$ .

Para finalizar esta sección digamos que el propagador  $G$  se puede asociar al propagador de un campo

$$G(\mathbf{x}_1, p_1; \mathbf{x}_2, p_2) = \langle 0 | T \{ \psi_{A_1, B_1}^1(\mathbf{x}_1) \psi_{A_2, B_2}^{-1}(\mathbf{x}_2) \} | 0 \rangle. \quad (5.17)$$

Similarmente, las funciones de Green para cualquier número ( $p$ ) de operadores  $\psi_{A, B}^n(\mathbf{x})$ , y operadores  $\phi_a(y)$ , se puede definir (con la restricción  $n_i = \pm 1$ ) de acuerdo a:

$$\begin{aligned}\langle 0 | T \{ \psi_{A_1, B_1}^{n_1}(\mathbf{x}_1) \dots \psi_{A_p, B_p}^{n_p}(\mathbf{x}_p) \phi_{a_1}(y_1) \dots \phi_{a_r}(y_r) \} | 0 \rangle = \\ \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int \mathcal{D}[U] \phi_{a_1}(y_1) \dots \phi_{a_r}(y_r) e^{-S[U] + p C_\epsilon},\end{aligned}\quad (5.18)$$

junto con las condiciones de contorno

$$\begin{aligned}U|_{S_i} &= \begin{cases} A_i X_i B_i^\dagger & \text{if } n_i = -1 \\ A_i (-X_i)^\dagger B_i^\dagger & \text{if } n_i = +1 \end{cases} \\ X_i &= \frac{\mathbf{x}^4 - \mathbf{x}_i^4}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} + i \frac{\mathbf{x}^a - \mathbf{x}_i^a}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i|} \tau_a \in SU(2),\end{aligned}\quad (5.19)$$

para pequeñas esferas  $S_i$  alrededor de  $\mathbf{x}_i$  ( $C_\epsilon = -(3\pi^2/e^2) \log(\epsilon)$ ).

En el caso  $n > 1$ , el operador  $\psi^n(\mathbf{x})$  podría ser definido como un límite  $\psi^1(y_1) \dots \psi^1(y_n)$  cuando  $y_i \rightarrow \mathbf{x}$ . Sin embargo no trataremos este tema aquí y consideraremos solamente campos  $\psi^{\pm 1}$  los cuales denotaremos como  $\psi^{+1} = \psi$ ,  $\psi^{-1} = \bar{\psi}$ .

### 5.3 Simetrías del propagador

Las simetrías que posee el propagador pueden encontrarse efectuando distintos cambios de variable dentro de la integral de camino. Si los cambios de

<sup>2</sup>Definimos  $A > 0$ ,  $A \in SU(2)$  cuando  $A = a_0 + i\vec{a} \cdot \vec{\tau}$ , ( $a_0^2 + \vec{a}^2 = 1$ ) y  $a_0 > 0$ .

variable dejan invariante la acción entonces afectarán sólo las condiciones de contorno y de esta forma podremos ver como actúan estas simetrías sobre las variables internas  $A_i, B_i$ .

**Traslaciones** El cambio de variables  $U(x) \rightarrow U(x+a)$  no afecta a la acción pero sí a las condiciones de contorno. Trivialmente se sigue que

$$\tilde{G}(x_1 + a, A_1, B_1; x_2 + a, A_2, B_2) = \tilde{G}(x_1, A_1, B_1; x_2, A_2, B_2). \quad (5.20)$$

**Iso-rotaciones** Con el cambio de variables  $\tilde{U} = AUA^\dagger$ , ( $A \in \text{SU}(2)$ ) obtenemos

$$\begin{aligned} S[AUA^\dagger] &= S[U], \\ A1A^\dagger &= 1 \quad \text{at } \infty, \\ \tilde{U}|_{S_1^3} &= A U|_{S_1^3} A^\dagger = AA_1 X_1 B_1^\dagger A^\dagger = (AA_1) X_1 (AB_1)^\dagger, \\ \tilde{U}|_{S_2^3} &= A U|_{S_2^3} A^\dagger = AA_2 (-X_2)^\dagger B_2^\dagger A^\dagger \\ &= (AA_2) (-X_2)^\dagger (AB_2)^\dagger. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Y entonces

$$\tilde{G}(x_1, AA_1, AB_1; x_2, AA_2, AB_2) = \tilde{G}(x_1, A_1, B_1; x_2, A_2, B_2). \quad (5.22)$$

**Transformaciones de Lorentz** Para describir partículas de spin semientero debemos considerar el cubrimiento universal del grupo de Lorentz, es decir  $\text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$ . A cada par de matrices  $S_1, S_2 \in \text{SU}(2)$  le corresponde una matriz  $\Lambda \in \text{SO}(4)$ . La transformación  $x \rightarrow x' = \Lambda x$  se puede escribir en forma matricial como

$$X \rightarrow X' = S_1 X S_2^\dagger, \quad X = \frac{x^4}{|x|} + i \frac{x^a}{|x|} \tau_a, \quad X \in \text{SU}(2). \quad (5.23)$$

Hagamos ahora el cambio de variables

$$U(x) \rightarrow \tilde{U}(x) = U(\Lambda^{-1}x), \quad (5.24)$$

que deja invariante a la acción. La condición de contorno se transforma como

$$\begin{aligned} \tilde{U}(X')|_{S_1^3} &= U(X)|_{S_1^3} = A_1 X_1 B_1^\dagger = A_1 S_1^\dagger X_1' S_2 B_1^\dagger \\ &= (A_1 S_1^\dagger) X_1 (B_1 S_2^\dagger)^\dagger, \\ \tilde{U}(X')|_{S_2^3} &= U(X)|_{S_2^3} = A_2 (-X_2^\dagger) B_2^\dagger \\ &= (A_2 S_2^\dagger) (-X_2'^\dagger) (B_2 S_1^\dagger)^\dagger, \end{aligned} \quad (5.25)$$

lo que da

$$\tilde{G}(\Lambda \mathbf{x}_1, A_1 S_1^\dagger, B_1 S_2^\dagger; \Lambda \mathbf{x}_2, A_2 S_2^\dagger, B_2 S_1^\dagger) = \tilde{G}(\mathbf{x}_1, A_1, B_1; \mathbf{x}_2, A_2, B_2). \quad (5.26)$$

**Paridad** El pion es un pseudoescalar, y por lo tanto ante paridad  $U$  se transforma

$$U(\mathbf{x}^4, \vec{x}) \rightarrow \tilde{U}(\mathbf{x}^4, \vec{x}) = U^\dagger(\mathbf{x}^4, -\vec{x}). \quad (5.27)$$

Una inversión espacial mapea  $X_{1,2} \rightarrow X_{1,2}^\dagger$  mientras que una transformación de paridad simplemente intercambia  $A$  y  $B$  en las condiciones de contorno. Así, la invariancia de paridad de la acción implica que

$$\tilde{G}(\mathbf{x}_1^4, \vec{x}_1, A_1, B_1; \mathbf{x}_2^4, \vec{x}_2, A_2, B_2) = \tilde{G}(\mathbf{x}_1^4, -\vec{x}_1, B_1, A_1; \mathbf{x}_2^4, -\vec{x}_2, B_2, A_2). \quad (5.28)$$

Tratemos ahora de encontrar cómo estas simetrías restringen la forma del propagador. Debido a la invariancia translacional,  $\tilde{G}$  depende sólo de la diferencia  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ . El vector  $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$  se puede descomponer en una parte angular y una radial de la siguiente manera

$$\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2 \rightarrow \begin{cases} |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \\ X_{12} = \frac{(\mathbf{x}_1^4 - \mathbf{x}_2^4)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} + i \frac{(\mathbf{x}_1^a - \mathbf{x}_2^a)}{|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|} \tau_a \in \text{SU}(2). \end{cases} \quad (5.29)$$

$\tilde{G}$  es una función suave de  $X_{12}, A_1, B_1, A_2, B_2$ . Cualquier función de este tipo se puede escribir como combinación lineal de los elementos de matriz de  $D_{\sigma\sigma'}^j$ . Esto se deduce de la teoría de grupos de Lie o simplemente porque las matrices  $D^j$  son los armónicos esféricos en  $S^3$ . Así, podemos expandir  $\tilde{G}$  como

$$\tilde{G}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, X_{12}, A_1, B_1, A_2, B_2) = \sum_{j_i, |\sigma_i|, |\sigma'_i| \leq j_i} \eta(j_i, \sigma_i, \sigma'_i; |\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|) D_{\sigma_1 \sigma'_1}^{j_1}(A_1) D_{\sigma_2 \sigma'_2}^{j_2}(B_1) D_{\sigma_3 \sigma'_3}^{j_3}(A_2) D_{\sigma_4 \sigma'_4}^{j_4}(B_2) D_{\sigma_5 \sigma'_5}^{j_5}(X_{12}). \quad (5.30)$$

donde  $j$  corre sobre  $\frac{1}{2}Z_{\geq 0}$ , i.e. representaciones de spin entero y semientero. De la definición (5.15) se ve que

$$\begin{aligned} \tilde{G}(\mathbf{x}_1, A_1, B_1; \mathbf{x}_2, A_2, B_2) &= \tilde{G}(\mathbf{x}_1, -A_1, -B_1; \mathbf{x}_2, -A_2, -B_2) \\ \Rightarrow (-)^{2(j_1+j_2+j_3+j_4)} &= 1, \end{aligned} \quad (5.31)$$

donde la implicación se sigue de la fórmula  $D^j(-A) = (-)^{2j} D^j(A)$ .

Variando independientemente  $A, S_1, S_2$  en las ecs. (5.22), (5.26) y usando los argumentos usuales de acoplamiento de momentos angulares se encuentra que los índices  $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)$  de  $\eta$  están acoplados a cero (isorotaciones), así como también los índices  $(\sigma'_2, \sigma'_3, \sigma'_5)$  y  $(\sigma'_1, \sigma'_4, -\sigma'_5)$  (transformaciones de Lorentz). El propagador más general  $\tilde{G}$  que satisface todas las simetrías resulta ser entonces

$$\begin{aligned} \tilde{G}(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|, X_{12}, A_1, B_1, A_2, B_2) = \\ \sum_{\forall \sigma, \sigma', j, m, I} (2I+1)^2 C_{\sigma'_1 \bar{\sigma}_1} C_{\bar{\sigma}_4 \sigma'_4} C_{m_2 m_1} \eta_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 I}(|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1|) \\ \begin{pmatrix} j_1 & j_4 & j_5 \\ \bar{\sigma}_1 & \bar{\sigma}_4 & \sigma_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_2 & j_5 \\ \sigma'_3 & \sigma'_2 & \sigma'_5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & I \\ \sigma_1 & \sigma_2 & m_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & I \\ \sigma_3 & \sigma_4 & m_2 \end{pmatrix} \\ D_{\sigma_1 \sigma'_1}^{j_1}(A_1) D_{\sigma_2 \sigma'_2}^{j_2}(B_1) D_{\sigma_3 \sigma'_3}^{j_3}(A_2) D_{\sigma_4 \sigma'_4}^{j_4}(B_2) D_{\sigma_5 \sigma'_5}^{j_5}(X_{12}), \end{aligned} \quad (5.32)$$

donde usamos los símbolos  $3j$  de Wigner (que acoplan a cero tres momentos angulares) y las matrices  $C_{mm'} = (-)^{j+m} \delta_{m, -m'}$  las cuales cumplen que  $C = C^*$ ,  $C^{-1} = C^t = (-)^{2j} C$ .

La conservación de la paridad implica que  $\eta_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_5 I} = \eta_{j_2 j_1 j_4 j_3 j_5 I}$  (cf. ec. (5.28)).

Las reglas de transformación de esta sección se pueden definir también sobre los campos  $\psi_{A,B}, \bar{\psi}_{A,B}$  por medio de operadores unitarios  $U$  que satisfagan

Iso-rotaciones:

$$\begin{aligned} U_A \psi_{A_1, B_1}(x) U_A^\dagger &= \psi_{AA_1, AB_1}(x), \\ U_A \bar{\psi}_{A_1, B_1}(x) U_A^\dagger &= \bar{\psi}_{AA_1, AB_1}(x). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Transformaciones de Lorentz:

$$\begin{aligned} U_\Lambda \psi_{A_1, B_1}(x) U_\Lambda^\dagger &= \psi_{A_1 S_1^\dagger, B_1 S_2^\dagger}(\Lambda x), \\ U_\Lambda \bar{\psi}_{A_2, B_2}(x) U_\Lambda^\dagger &= \bar{\psi}_{A_1 S_2^\dagger, B_1 S_1^\dagger}(\Lambda x), \end{aligned} \quad (5.34)$$

donde  $\Lambda \equiv (S_1, S_2)$ .

Estas transformaciones sugieren que es conveniente pasar a una base de los campos que transformen bajo representaciones finito dimensionales de los grupos de Lorentz y de isospin. Las representaciones irreducibles de  $SU(2) \times SU(2)$  están etiquetadas por dos números  $j_1, j_2 \in \frac{1}{2}Z_{\geq 0}$ . Si  $\Lambda \equiv (S_1, S_2)$ , la representación  $(j, 0)$  está dada por  $\mathcal{D}^j(\Lambda) = D^j(S_1)$  y la  $(0, j)$  por  $\bar{\mathcal{D}}^j(\Lambda) = D^j(S_2)$ . Las matrices  $D^j$  son las matrices de rotación

usuales que representan  $SU(2)$  y por lo tanto, a diferencia del caso de la métrica de Minkowski, estas representaciones son unitarias pero no fieles. Finalmente, la representación  $(j_1, j_2)$  está dada por  $(j_1, 0) \otimes (0, j_2)$ . Los campos que transforman en estas representaciones están dados por:

$$\begin{aligned} \psi_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I}(x) &= Z_{j_1 j_2 I}^{-1} C_{\sigma'_1 \sigma_1} C_{\sigma'_2 \sigma_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & I \\ \sigma'_1 & \sigma'_2 & m_I \end{pmatrix} \\ &\int_{A,B} D_{\sigma'_1 \sigma'_1}^{j_1}(A) D_{\sigma'_2 \sigma'_2}^{j_2}(B) \psi_{A,B}(x); \end{aligned} \quad (5.35)$$

la misma fórmula vale para  $\bar{\psi}$ . La integración sobre  $SU(2)$  se realiza usando el elemento de volumen invariante del grupo y  $Z_{j_1 j_2 I}$  es un factor de normalización que elegiremos después. Las transformaciones (5.33) y (5.34) ahora se escriben:

$$\begin{aligned} U_A \psi_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I}(x) U_A^\dagger &= D_{m_I m_I}^I(A) \psi_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I}(x), \\ U_A \bar{\psi}_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I}(x) U_A^\dagger &= D_{m_I m_I}^I(A) \bar{\psi}_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I}(x), \\ U_\Lambda \psi_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I}(x) U_\Lambda^\dagger &= \mathcal{D}_{\sigma_1 \sigma'_1}^{j_1}(\Lambda^{-1}) \bar{\mathcal{D}}_{\sigma_2 \sigma'_2}^{j_2}(\Lambda^{-1}) \psi_{\sigma'_1 \sigma'_2 m_I}^{j_1 j_2 I}(\Lambda x), \\ U_\Lambda \bar{\psi}_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I}(x) U_\Lambda^\dagger &= \bar{\mathcal{D}}_{\sigma_1 \sigma'_1}^{j_1}(\Lambda^{-1}) \mathcal{D}_{\sigma_2 \sigma'_2}^{j_2}(\Lambda^{-1}) \bar{\psi}_{\sigma'_1 \sigma'_2 m_I}^{j_1 j_2 I}(\Lambda x), \end{aligned} \quad (5.36)$$

lo cual significa que  $\psi_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I}(x)$  transforma en la representación  $(j_1, j_2)$  del grupo de Lorentz mientras que  $\bar{\psi}_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I}(x)$  transforma en la  $(j_2, j_1)$ . Además, ambos campos tienen isospin  $I$ .

Usando la ec.(5.32) y la definición (5.35) podemos obtener la forma general del propagador

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \bar{\psi}_{\sigma_3 \sigma_4 m_I}^{j_3 j_4 I'} \psi_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I} \} | 0 \rangle &= Z_{j_1 j_2 I}^{-1} Z_{j_3 j_4 I'}^{-1} \delta_{II'} C_{m_I m_I} D_{\sigma_1 \sigma'_1}^{j_1}(X_{12}) D_{\sigma_4 \sigma'_4}^{j_4}(X_{12}) \\ &\sum_{j_6} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_6 \\ \sigma'_1 & \sigma_2 & \sigma_6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j_6 \\ \sigma_3 & \sigma'_4 & \sigma'_6 \end{pmatrix} C_{\sigma'_6 \sigma_6} \bar{\eta}_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_6 I} \end{aligned} \quad (5.37)$$

donde  $\bar{\eta}$  se puede escribir en términos de  $\eta$  y los símbolos  $6j$  [43] como

$$\bar{\eta}_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_6 I} = \sum_{j_5} \eta_{j_1 j_2 j_3 j_4 j_6 I} (-)^{2j_5} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & j_6 \\ j_3 & j_4 & j_5 \end{matrix} \right\}. \quad (5.38)$$

El spin asociado a estos campos se obtiene componiendo  $j_1$  y  $j_2$  y por lo tanto estarán en el rango  $|j_2 - j_1|$  a  $j_1 + j_2$ . Cuáles de estos spines son los que se propagan lo determina el propagador (5.10). En la siguiente sección mostraremos que (5.10) tiene una simetría extra que determina la propagación de partículas con spin igual al isospin  $I$ .

## 5.4 Propagador de Skyrmon

Ahora evaluaremos en forma aproximada el propagador en el límite de  $|x_2 - x_1|$  grande. Realizando una transformación de Lorentz se puede tomar el eje 4 a lo largo de  $x_2 - x_1$ , i.e.  $X_{12} = 1$  y por medio de la ec.(5.37) extenderlo luego a valores arbitrarios de  $X_{12}$ .

Habiendo fijado  $X_{12}$ , analizaremos qué debemos esperar para diferentes valores de  $A_{1,2}$  y  $B_{1,2}$ .

Si  $A_1 = B_1 = A_2 = B_2 = 1$ , la situación es la de la sección 5.1 donde evaluamos (numéricamente) la solución clásica. Este extremo de la acción será la base de nuestro análisis y lo denotaremos como  $U_0(t, \vec{x})$ . Recordemos que se comporta como  $-X_2^\dagger$  alrededor de  $x_2$  y como  $X_1$  alrededor de  $x_1$ . Notemos también que  $U_0(t, \vec{x})$  (como función de  $\vec{x}$ ), en el intervalo temporal entre  $x_2^4$  y  $x_1^4$ , es casi igual a la solución estática, que denotaremos como  $U_{SK}(\vec{x})$ .

Supongamos ahora que  $A_2 = B_2 = A$ ,  $A_1 = B_1 = 1$ . Esto corresponde a realizar una iso-rotación en la vecindad de  $x_2$ . Sabemos que si  $U$  es una solución de la ecuación de movimiento, entonces,  $AU A^\dagger$  (con  $A$  constante) es también una solución, esto es, la función  $AU_0 A^\dagger$  satisface las ecuaciones de movimiento alrededor de  $x_2$  y la condición de contorno en  $\partial B_2^4$ . Además, este comportamiento puede pegarse con el comportamiento alrededor de  $x_1$  por medio de un ansatz dependiente del tiempo de la forma

$$U(t, \vec{x}) = A(t)U_0 A^\dagger(t), \quad A(x_2^4) = A, \quad A(x_1^4) = 1, \quad (5.39)$$

el cual satisface  $U = 1$  en infinito. Después de sustituirlo en la acción obtenemos una ecuación para  $A(t)$ . La solución  $A(t)$  reemplazada en  $U(t, \vec{x}) = A(t)U_0 A^\dagger(t)$  representa la creación en  $x_2$  de un skyrmion iso-rotado en  $A$ , con perfil  $AU_{SK} A^\dagger$ , y que rota lentamente hasta que es aniquilado en  $x_1$ .

Generalizando, para  $A_2 = B_2$  y  $A_1 = B_1$ , el mínimo se obtendrá aproximadamente minimizando la acción con respecto al ansatz (5.39) con  $A(x_2^4) = A_2$ ,  $A(x_1^4) = A_1$ . Esto es un cálculo usual en el modelo de Skyrme y da un movimiento libre sobre  $SU(2)$  con un momento de inercia  $\mathfrak{I}$  que se obtiene de  $U_{SK}(\vec{x})$  [17]. Una mejor aproximación se obtiene integrando sobre todos los posibles  $A(t)$  lo que da el propagador libre sobre  $SU(2)$ , entre  $A_2$  y  $A_1$ , lo cual corresponde a cuantificar los modos cero iso-rotacionales (o rotacionales).

Consideremos ahora el caso  $A_2 \neq B_2$ ,  $A_1 = B_1 = 1$ . En este caso, tenemos también que  $A_2 U_0 B_2^\dagger$  es una solución en la vecindad de  $x_2$  y satisface la condición de contorno en  $\partial B_2^4$ , pero aquí, un ansatz dependiente del

tiempo no es suficiente. En un ansatz semejante, el comportamiento  $A_2 U_0 B_2^\dagger$  alrededor de  $x_2$  se extiende a infinito en los hyperplanos  $x^4 = \text{const.} \approx x_2^4$  dando un valor  $A_2 B_2^\dagger \neq 1$  y, por lo tanto, no se satisface el comportamiento asintótico deseado del campo  $U$ . Recordemos que, alrededor de  $x_2$ ,  $U_0$  no está localizado para  $|x - x_2| < r_l$ , mientras que sí está localizado en el polo norte para  $|x - x_2| > r_l$  (ver la discusión al final de la sección 5.1). Entonces, si comenzamos con una función tal que, muy cerca de  $|x - x_2| = \epsilon$ , se comporta como la solución  $A_2 U_0 B_2^\dagger$  y este comportamiento persiste hasta el radio de localización, la densidad topológica no se localizará en el polo norte de la esfera  $|x - x_2| = r_l$ , sino en la dirección  $x - x_2$  que satisface  $X_2 = B_2^\dagger A_2$ . Este comportamiento representa un solitón que comienza a moverse en una dirección que no es la que apunta hacia  $x_1$ . Por lo tanto, si tratamos de pegar esto con el comportamiento alrededor de  $x_1$ , donde el solitón se aniquila, obtendremos una función cuya acción es mayor que la asociada a una función que representa un solitón que comienza a moverse hacia  $x_1$ , esto es, esperamos que la configuración que minimice la acción se comporte, en la zona de deslocalización alrededor de  $x_2$ , como

$$U(x) = A(\tau) U_0 B(\tau)^\dagger, \quad A(\epsilon) = A_2, \quad B(\epsilon) = B_2, \quad A(r_l) = B(r_l) = C_2 \quad (5.40)$$

donde  $\tau = |x - x_2|$ ,  $\epsilon$  es el radio de la pequeña esfera que extrajimos alrededor de  $x_2$  y  $r_l \sim (\epsilon f_\pi)^{-1}$ . Notemos que este comportamiento en  $\tau = r_l$ , localiza correctamente a la densidad topológica en el polo norte, aunque iso-rotado en  $C_2$ . El valor de  $C_2$  debe ser elegido para minimizar la acción en la zona de deslocalización. Informalmente,  $(C_2, C_2)$  será la rotación más próxima a la transformación de Lorentz  $(A_2, B_2)$ . Una respuesta cuantitativa se obtiene insertando el ansatz anterior en la acción:

$$S = 4\pi^2 \int_{\epsilon < \tau < r_l} d\tau h(\tau) \text{Tr} \left( \dot{A} \dot{A}^\dagger + \dot{B} \dot{B}^\dagger \right),$$

$$h(\tau) = \frac{f_\pi^2}{8} \tau^3 + \frac{\tau}{4e^2} - \frac{\epsilon_8}{16\pi^2} \frac{1}{\tau}, \quad (5.41)$$

donde los puntos representan la derivada respecto de  $\tau$ , y usamos la aproximación  $U_0 \simeq -X_2^\dagger$ . Después de un cambio de variables  $u = u(\tau)$  tal que  $\dot{u} = 1/h(\tau)$ , se cancela el factor  $h(\tau)$  y la expresión (5.41) representa un movimiento libre sobre  $SU(2) \times SU(2)$  para  $(A(u), B(u))$ . Para  $\tau$  pequeño, la solución de  $\dot{u} = 1/h(\tau)$  es  $u(\tau) \simeq -8\pi^2 \tau^2 / \epsilon_8$ .

Cuando  $u \sim u(r_l)$  debemos tener  $A(u) = B(u) = C_2$ ; en ese caso la



acción es igual a

$$\begin{aligned} S &= 8\pi^2 \frac{s_{A_2 C_2}^2 + s_{B_2 C_2}^2}{u(r_l) - u(\epsilon)}, \\ s_{AB} &= 2\text{Arccos}\left(\frac{1}{2}\text{Tr}(AB^\dagger)\right). \end{aligned} \quad (5.42)$$

Donde  $s_{AB}$  es la distancia entre  $A$  y  $B$  medida con la métrica usual de  $\text{SU}(2)$ . Si  $A_2$  y  $B_2$  están fijos, el cálculo muestra que la acción se minimiza para  $C_2 = B_2 \sqrt{B_2 A_2^\dagger}$ . Notemos que en  $\text{SU}(2)$ , la raíz cuadrada está bien definida a menos de un signo<sup>3</sup>. Esta parte del mínimo contribuye al propagador con un factor  $\exp(-(s_{A_2 C_2}^2 + s_{B_2 C_2}^2)/(u(r_l) - u(\epsilon)))$ . En el caso general en que  $A_1 \neq B_1$ , debemos repetir el mismo análisis alrededor de  $x_1$ . El resultado se expresa mejor en términos de las variables  $C_i$  y  $F_i$ , definidas por las relaciones

$$A_i = C_i F_i, \quad B_i = C_i F_i^\dagger, \quad (5.43)$$

o equivalentemente

$$C_i = B_i \sqrt{B_i^\dagger A_i}, \quad F_i = \sqrt{B_i^\dagger A_i}. \quad (5.44)$$

Tendremos así

$$s_{A_i C_i}^2 + s_{B_i C_i}^2 = \frac{s_{A_i B_i}^2}{2} = 2\text{Arccos}\left(\frac{1}{2}\text{Tr}(F_i^2)\right). \quad (5.45)$$

Los comportamientos (a una distancia  $r_l$ ) alrededor de  $x_1$  y  $x_2$  se pueden pegar ahora por medio de un ansatz dependiente del tiempo cuya minimización completará la construcción de la solución clásica y representará un solitón rotando lentamente desde  $C_2$  a  $C_1$ . Nuevamente obtendremos una mejor aproximación considerando el propagador libre sobre  $\text{SU}(2)$  desde  $C_2$  hasta  $C_1$  (cuya expresión puede encontrarse en [44]). Incluyendo los factores generados en la zona de deslocalización obtenemos la siguiente expresión para  $\tilde{G}$

$$\begin{aligned} \tilde{G}(x_1, A_1, B_1; x_2, A_2, B_2) &= g_1(\text{Tr} F_1) g_2(\text{Tr} F_2) \sum_I D_{km}^I(C_1) D_{mk}^I(C_2^\dagger) \\ &\quad e^{-\frac{I(I+1)}{2g}|x_2-x_1|} \frac{e^{-M_{cl}|x_2-x_1|}}{\left(\frac{2\pi}{M}|x_2-x_1|\right)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (5.46)$$

<sup>3</sup>Excepto la raíz cuadrada de menos la identidad ya que cualquier matriz  $A = i\vec{a} \cdot \vec{\tau}$ ,  $\vec{a} \cdot \vec{a} = 1$ , satisface  $A^2 = -1$ .

donde incluimos también el factor  $\exp(-M_{\text{cl}}|x_2 - x_1|)$  proveniente de la acción clásica, y un factor proporcional a  $|x_2 - x_1|^{-3/2}$  resultante de la integración sobre los modos cero traslacionales. La función  $g_i$  solamente depende de  $\text{Tr}(F_i)$  (ya que para una matriz de  $\text{SU}(2)$ ,  $\text{Tr}(F^2) = (\text{Tr}(F))^2 - 2$ ) y contiene el factor gaussiano  $\exp(-(s_{A_i C_i}^2 + s_{B_i C_i}^2)/(u(r_l) - u(\epsilon)))$  (cf. ec. (5.45)).

Finalmente, para obtener el propagador  $G$ , notemos que  $A \rightarrow -A$ ,  $B \rightarrow -B$  es equivalente a  $C \rightarrow -C$ ,  $F \rightarrow F$ , y  $D^I(-C) = (-)^{2I} D^I(C)$ ; por lo tanto si definimos  $G$  en la ec. (5.16) usando el signo  $+$  ( $-$ ) los términos que sobreviven son aquellos con  $\bar{I}$  entero (semi-entero). Se mostrará más abajo que  $\bar{I}$  es el spin y el isospin, así, elegir el signo  $+$  ( $-$ ) llevará a tener partículas de spin igual al isospin entero (semientero).

Notemos que  $\tilde{G}$  en la ecuación (5.46) tiene las siguientes propiedades:

- (1)  $\tilde{G}$  satisface el requerimiento de paridad (5.28) (invariancia ante  $A_i \leftrightarrow B_i$ ) ya que esto es equivalente a  $F_i \leftrightarrow F_i^\dagger$  y para una matriz de  $\text{SU}(2)$ ,  $\text{Tr}(F) = \text{Tr}(F^\dagger)$ ,
- (2)  $\tilde{G}$  es invariante ante una simetría extra  $F_i \rightarrow R_i F_i R_i^\dagger$ .

Ahora mostraremos que el propagador de la ecuación (5.46) propaga partículas con spin igual al isospin.

Para encontrar el propagador de los campos  $\psi^{j_1 j_2}$  usamos la ec. (5.35) obteniendo:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \bar{\psi}_{\sigma_3 \sigma_4 m_I}^{j_3 j_4 I'} \psi_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I} \} | 0 \rangle &= Z_{j_1 j_2 I}^{-1} Z_{j_3 j_4 I'}^{-1} \sum_I \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & I' \\ \sigma_3'' & \sigma_4'' & m_I' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & I \\ \sigma_1'' & \sigma_2'' & m_I \end{pmatrix} \\ &C_{\sigma_1' \sigma_1} C_{\sigma_2' \sigma_2} C_{\sigma_3' \sigma_3} C_{\sigma_4' \sigma_4} \int_{A_1, 2, B_1, 2} D_{\sigma_1'' \sigma_1'}^{j_1}(A_1) D_{\sigma_2'' \sigma_2'}^{j_2}(B_1) D_{\sigma_3'' \sigma_3'}^{j_3}(A_2) D_{\sigma_4'' \sigma_4'}^{j_4}(B_2) \\ &g_1(\text{Tr} F_1) g_2(\text{Tr} F_2) D_{km}^I(C_1) D_{mk}^I(C_2^\dagger) \frac{e^{-M_I |x_2 - x_1|}}{\left(\frac{2\pi}{M} |x_2 - x_1|\right)^{3/2}}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

donde definimos  $M_I = M_{\text{cl}} + \bar{I}(\bar{I} + 1)/(2\mathfrak{G})$ . Realicemos primero la integral sobre  $A_1$ ,  $B_1$ . Es conveniente escribir todo en términos de  $C_1$  y  $F_1$ . Los factores que aparecen son:

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} j_1 & j_2 & I \\ \sigma_1'' & \sigma_2'' & m_I \end{pmatrix} C_{\sigma_1' \sigma_1} C_{\sigma_2' \sigma_2} \times \\ &\times \int_{A_1 B_1} D_{\sigma_1'' \sigma_1'}^{j_1}(C_1 F_1) D_{\sigma_2'' \sigma_2'}^{j_2}(C_1 F_1^\dagger) g_1(\text{Tr} F_1) D_{km}^I(C_1). \end{aligned} \quad (5.48)$$

Para cambiar de variables debemos evaluar el jacobiano que se puede calcular parametrizando las matrices como  $A = a_0 + i\vec{a} \cdot \vec{\tau}$  con  $(a_0^2 + \vec{a}^2 = 1)$  y expresiones similares para  $B$ ,  $C$  y  $F$ . La medida invariante es

$$dA = \frac{da_1 da_2 da_3}{a_0}, \quad (5.49)$$

y el jacobiano es el determinante de una matriz de  $6 \times 6$  que vale

$$\int dA dB = \int dC dF 2(\text{Tr} F)^2. \quad (5.50)$$

Este factor lo absorbemos en  $g_1$  definiendo  $\bar{g}_1 = 2g_1(\text{Tr} F_1)^2$ . Como  $\bar{g}_1$  es una función de la clase de  $F_1$ , esto es,  $\bar{g}_1(S F_1 S^\dagger) = \bar{g}_1(F_1)$ , puede ser expandida de acuerdo a

$$\bar{g}_1(F_1) = \sum_{l_1} \bar{g}_{1l_1} D_{\bar{m}\bar{m}}^{l_1}(F_1). \quad (5.51)$$

Ahora ya podemos calcular las integrales puesto que la integral del producto de tres matrices  $D$  se escribe en términos de los símbolos  $3j$  [43]. El resultado es

$$\begin{aligned} & \sum_{l_1} \bar{g}_{1l_1} C_{\sigma'_1 \sigma_1} C_{\sigma'_2 \sigma_2} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & I \\ \sigma_1'' & \sigma_2'' & m_I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \bar{I} \\ \sigma_1'' & \sigma_2'' & k \end{pmatrix} \\ & \times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & \bar{I} \\ \sigma_1''' & \sigma_2''' & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & l_1 \\ \sigma_1''' & \sigma_2 & \bar{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & l_1 \\ \sigma_1' & \sigma_2' & \bar{m} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (5.52)$$

Los dos primeros símbolos  $3j$  dan  $\delta_{II'} \delta_{m_I k} / (2I + 1)$ , los tres restantes se pueden simplificar por medio de los símbolos  $6j$  dando

$$\sum_{l_1} \frac{\bar{g}_{1l_1}}{2I + 1} C_{\sigma_1 \sigma'_1} C_{\sigma_2 \sigma'_2} \delta_{km_I} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & I \\ j_1 & j_2 & l_1 \end{matrix} \right\} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & I \\ \sigma_1' & \sigma_2' & m \end{pmatrix}. \quad (5.53)$$

La integral sobre  $A_2$ ,  $B_2$  se hace de la misma manera. Juntando todo obtenemos:

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \bar{\psi}_{\sigma_3 \sigma_4 m_I}^{j_3 j_4 I'} \psi_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I} \} | 0 \rangle &= Z_{j_1 j_2 I}^{-1} \bar{Z}_{j_3 j_4 I'}^{-1} \frac{C_{m_I' m_I} \delta_{II'}}{(2I + 1)^2} \frac{e^{-M_I |x_2 - x_1|}}{(\frac{2\pi}{M} |x_2 - x_1|)^{3/2}} \\ &\times \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & I \\ \sigma_1 & \sigma_2 & m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & I \\ \sigma_3 & \sigma_4 & m' \end{pmatrix} C_{m' m} \\ &\times \sum_{l_1 l_2} \bar{g}_{1l_1} \bar{g}_{2l_2} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & I \\ j_1 & j_2 & l_1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} j_3 & j_4 & I \\ j_3 & j_4 & l_2 \end{matrix} \right\}. \end{aligned} \quad (5.54)$$

Eligiendo en esta ecuación

$$Z_{j_1 j_2 I} = \sum_{l_1} \frac{\bar{g}_{1l_1}}{2I+1} \left\{ \begin{matrix} j_1 & j_2 & I \\ j_1 & j_2 & l_1 \end{matrix} \right\}, \quad (5.55)$$

y lo mismo para  $Z_{j_3 j_4 I'}$  (reemplazando  $\bar{g}_{1l_1}$  por  $\bar{g}_{2l_2}$ ) llegamos a

$$\left( \begin{matrix} j_1 & j_2 & I \\ \sigma_1 & \sigma_2 & m \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} j_3 & j_4 & I \\ \sigma_3 & \sigma_4 & m' \end{matrix} \right) C_{m'm} C_{m_I m_I} \delta_{II'} \frac{e^{-M_I |x_2 - x_1|}}{\left( \frac{2\pi}{M} |x_2 - x_1| \right)^{3/2}}. \quad (5.56)$$

Finalmente, de la ec. (5.37) podemos leer el valor de  $\bar{\eta}$  y entonces extender el propagador de  $X_{12} = 1$  a un valor arbitrario de  $X_{12}$ , obteniendo

$$\begin{aligned} \langle 0 | T \{ \bar{\psi}_{\sigma_3 \sigma_4 m_I'}^{j_3 j_4 I'} \psi_{\sigma_1 \sigma_2 m_I}^{j_1 j_2 I} \} | 0 \rangle &= C_{m'm} C_{m_I m_I} \delta_{II'} \mathcal{D}_{\sigma_1 \sigma_1'}^{j_1} (X_{12}) \mathcal{D}_{\sigma_4 \sigma_4'}^{j_4} (X_{12}) \\ &\left( \begin{matrix} j_1 & j_2 & I \\ \sigma_1' & \sigma_2 & m \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} j_3 & j_4 & I \\ \sigma_3 & \sigma_4' & m' \end{matrix} \right) \frac{e^{-M_I |x_2 - x_1|}}{\left( \frac{2\pi}{M} |x_2 - x_1| \right)^{3/2}}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Esta expresión coincide con el propagador libre que evaluamos en el apéndice D, fórmula (D.15), donde el índice  $I$  en (5.57) reemplaza al índice  $j$  en aquella fórmula. El índice  $j$  en (D.15) es el spin de los estados de una partícula que usamos para construir los campos libres. Por otro lado  $I$  (el isospin) es también el spin de nuestros campos (cf. ec. (5.36)), implicando que el propagador  $\tilde{G}$  describe una torre de partículas con spin igual al isospin (y con masa  $M_I$ ). Además, las funciones de Green obtenidas en el apéndice corresponden a campos libres que conmutan (anti-conmutan) para  $j$  entero (semientero) cuando están separados por un intervalo de tipo espacio. De esta manera obtenemos que los campos que definimos por medio de las funciones de Green (5.17) y ec. (5.35) obedecen el teorema de spin estadística.

Consideremos como ejemplo el caso de spin  $1/2$  ignorando la parte de isospin ya que ésta es trivial (ec.(5.57)). Para spin  $1/2$  es usual tomar la representación de Dirac que es la  $(1/2, 0) \oplus (0, 1/2)$ . El campo de Dirac  $\Psi$  de cuatro componenetes lo identificaremos como

$$\begin{aligned} \Psi &= \begin{pmatrix} \psi^{(0\frac{1}{2})} \\ \psi^{(\frac{1}{2}0)} \end{pmatrix}, \\ \bar{\Psi} &= \left( C\bar{\psi}^{(\frac{1}{2}0)} \ C\bar{\psi}^{(0\frac{1}{2})} \right), \end{aligned} \quad (5.58)$$

donde  $(C\psi)_\sigma = C_{\sigma\sigma'} \psi_{\sigma'}$ . A través de la ecuación (5.57) se obtiene

$$\langle 0 | \hat{T} \psi_{\sigma'}^{(\frac{1}{2}0)} \bar{\psi}_\sigma^{(\frac{1}{2}0)} | 0 \rangle = -\frac{1}{2} D_{\sigma'\bar{\sigma}}^{\frac{1}{2}}(X) C_{\bar{\sigma}\sigma},$$

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{T} \psi_{\sigma'}^{(0\frac{1}{2})} \bar{\psi}_{\sigma}^{(0\frac{1}{2})} | 0 \rangle &= -\frac{1}{2} D_{\sigma\sigma'}^{\frac{1}{2}}(X) C_{\sigma\sigma'}^{-1}, \\
\langle 0 | \hat{T} \psi_{\sigma'}^{(\frac{1}{2}0)} \bar{\psi}_{\sigma}^{(0\frac{1}{2})} | 0 \rangle &= \frac{1}{2} C_{\sigma'\bar{\sigma}} D_{\sigma'\bar{\sigma}}^{\frac{1}{2}}(X) D_{\sigma\bar{\sigma}}^{\frac{1}{2}}(X) = \frac{1}{2} C_{\sigma'\sigma}, \\
\langle 0 | \hat{T} \psi_{\sigma'}^{(0\frac{1}{2})} \bar{\psi}_{\sigma}^{(\frac{1}{2}0)} | 0 \rangle &= \frac{1}{2} C_{\sigma'\sigma}.
\end{aligned} \tag{5.59}$$

A partir de aquí se reconstruye el propagador de las  $\Psi$  como

$$\begin{aligned}
\langle 0 | \hat{T} \Psi(x_1) \bar{\Psi}(x_2) | 0 \rangle &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -D_{\sigma\sigma'}^{\frac{1}{2}}(X) \\ -\left(D_{\sigma\sigma'}^{\frac{1}{2}}(X)\right)^{-1} & 1 \end{pmatrix} \frac{e^{-M_I|x_2-x_1|}}{\left(\frac{2\pi}{M}|x_2-x_1|\right)^{3/2}} \\
&= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -(x_4 + i\vec{x}\cdot\vec{\tau}) \\ -(x_4 - i\vec{x}\cdot\vec{\tau}) & 1 \end{pmatrix} \frac{e^{-M_I|x_2-x_1|}}{\left(\frac{2\pi}{M}|x_2-x_1|\right)^{3/2}} \\
&\simeq_{|x|\rightarrow\infty} \frac{1}{2M} \int d^4p e^{-ipx} \frac{p\cdot\gamma - M}{p^2 + M^2},
\end{aligned} \tag{5.60}$$

donde  $\gamma$  son las matrices de Dirac,  $\tau$  las de Pauli y  $x = x_1 - x_2$  con  $X = (x_4 + i\vec{x}\cdot\vec{\tau})/|x| \in SU(2)$ . La última igualdad vale a grandes distancias, es decir al orden dominante en  $1/|x|$ . La ecuación (5.60) muestra que a grandes distancias el propagador de los nucleones coincide con el usual para una partícula libre y que por lo tanto el spin es descrito correctamente por las condiciones de contorno elegidas.

## 5.5 Matriz-S

Para calcular las amplitudes de scattering debemos poder extraer la matriz-S de las funciones de Green que definimos anteriormente. Como primer paso aplicamos la definición (5.35) para obtener las funciones de Green para los campos  $\psi^{j_1 j_2}$  y  $\bar{\psi}^{j_1 j_2}$  (recordemos que  $\psi$  y  $\bar{\psi}$  se refieren a singularidades topológicas de número +1 y -1 respectivamente). Después, continuamos analíticamente las funciones de Green a Minkowski reemplazando  $x^4 \rightarrow -ix^0$ . El propagador a grandes distancias obtenido en la sección previa nos permite identificar los estados asintóticos que serán dispersados como partículas con spin igual al isospin. Todo lo que debemos hacer ahora es aplicar la fórmula de reducción LSZ, la cual se discute en el apéndice, y que da:

$$\text{out} \langle p_1 \bar{\sigma}_1 \bar{s}_1, \dots, p_n \bar{\sigma}_n \bar{s}_n | q_1 \sigma_1 s_1, \dots, q_l \sigma_l s_l \rangle_{\text{in}} = \text{disc. parts} + (iZ^{-1/2})^{n+l}$$

$$\int d^4 y_1 \cdots d^4 x_l \bar{u}_{m_1 m'_1}^{j_1 j'_1 I_1}(p_1, \bar{\sigma}_1) \cdots u_{m_l m'_l}^{j_l j'_l I_l}(q_l, \sigma_l) \exp \left( i \sum_1^n p_k y_k - i \sum_1^l q_r x_r \right) (\square_{y_1} + m_1^2) \cdots (\square_{x_l} + m_l^2) \langle 0 | T \bar{\psi}_{m_1 m'_1 s_1}^{j_1 j'_1 I_1}(y_1) \cdots \psi_{m_l m'_l s_l}^{j_l j'_l I_l}(x_l) | 0 \rangle, \quad (5.61)$$

donde  $\sigma_i$  denota la proyección de spin  $z$  en el sistema en reposo,  $s$  es la proyección 3 de isospin y las funciones de onda  $u, \bar{u}$  se definen en el apéndice D. Si consideramos el scattering de antipartículas,  $u, \bar{u}$  se deben reemplazar por  $v, \bar{v}$ . La función de Green en la ec.(5.61) se obtiene de (5.18) y (5.35). Intuitivamente se puede entender esta función de Green usando la idea de defectos lineales de la ref. [6]. Allí la contribución dominante a la integral de camino (5.18) se identifica con configuraciones descritas por defectos lineales abiertos que emergen de  $x_1, \dots, x_n$  más un gas de defectos tubulares cerrados. Si uno lleva, e.g.,  $x_1$  lejos de los otros puntos, la suma sobre los defectos lineales abiertos asociados a  $x_1$  dará un propagador libre de skyrmion desde  $x_1$  hacia la región de interacción. Este propagador tiene el polo (en  $p^2$ ) que se requiere para que la amplitud de scattering no se anule y contiene también toda la información sobre la condición de contorno alrededor de  $x_1$ .

Como se dice en el apéndice D, los diferentes campos que se pueden construir a partir de los mismos estados de partícula, no son independientes y uno debe elegir solamente un  $\psi^{j_1 j_2 I}$  para representar cada partícula. Por ejemplo, la  $\Delta$  ( $j = 3/2$ ) se puede representar por un campo  $(3/2, 0)$  o por uno  $(1, 1/2)$ , como en la representación de Rarita-Schwinger. Elegir uno u otro es equivalente a una redefinición de los campos y, por lo tanto, la matriz  $S$  debe ser independiente de esta elección. Esta afirmación se puede chequear dentro de la aproximación de saddle-point teniendo en cuenta que toda la información acerca de las condiciones de contorno está contenida en los propagadores libres (5.57) asociados a los puntos  $x_i$  (como señalamos en la sección anterior). La dependencia explícita en  $(j_1, j_2)$  es cancelada por la elección del factor de normalización  $Z_{j_1 j_2 I}$  (5.55).

Es interesante notar que, para el campo  $(1/2, 0)$ , la fórmula de reducción que damos contiene el operador  $(\square + m^2)$ , en lugar del usual  $(i\partial + m)$ . Esto es así porque usamos un spinor de dos componentes (ver [45] para una discusión sobre este punto). Para un espinor de dos componentes necesitamos  $\psi^{1/2 0}$  y  $\partial_t \psi^{1/2 0}$  para recuperar los operadores  $a$  y  $b^\dagger$ . En el caso de fermiones de spin  $1/2$  la alternativa usual es considerar dos campos,  $\psi^{1/2 0}$  y  $\psi^{0 1/2}$  (o en general  $\psi^{j_1 j_2}$  y  $\psi^{\bar{j}_1 \bar{j}_2}$ ). Usando estos dos campos (spinor de 4 componentes) se puede obtener  $a$  y  $b^\dagger$  sin necesidad de la derivada temporal del campo. En ese caso la fórmula de reducción LSZ tendrá un operador de primer orden.

Lo mismo se puede hacer para campos de spin mayor, pero el operador que aparece en la fórmula LSZ es de mayor orden y, por lo tanto, más difícil de usar que el operador  $(\square + m^2)$  asociado con la representación de un solo campo.

Las funciones de Green que definimos en la ec.(5.18) implican que el campo de piones que definimos no es solamente la parte fluctuante sino la suma de la configuración clásica y la fluctuación. En realidad esto es natural ya que la separación entre parte clásica y fluctuación es una consecuencia de la aproximación de saddle-point que incluso puede no ser adecuada.

Precisamente, la sugerencia de que el campo de piones debe ser identificado con el solitón clásico más la fluctuación, en lugar de ser identificado solamente con la fluctuación llevó a la solución del problema de Yukawa (ver refs. [46], [47] y [48]).

El acoplamiento de Yukawa se obtiene del vértice

$$\langle 0|T\{\psi_{\sigma_1,\sigma_2,m_I}^{j_1,j_2,I}(x_1)\bar{\psi}_{\sigma_4,\sigma_3,m_{I'}}^{j_4,j_3,I'}(x_2)\phi_a(y_1)\}|0\rangle, \quad (5.62)$$

A grandes distancias ( $|x_1 - x_2|$  grande) las configuraciones relevantes están descritas por defectos lineales abiertos que se pueden interpretar como líneas de mundo de skyrmiones. En ese caso, el cálculo de saddle-point es similar al de la referencia [46] donde se obtuvo el acoplamiento de Yukawa correcto usando un ansatz rotacional mejorado. En nuestro formalismo, el cálculo es análogo a la evaluación del propagador que se hizo en la sección 5.4.

A cortas distancias ( $|x_1 - x_2|$  pequeño), la aproximación de saddle point ya no resulta similar a la solución estática dentro del intervalo entre creación y destrucción del solitón, y uno debería esperar diferencias con el formalismo de [46]. Sin embargo, no discutiremos este punto ya que a cortas distancias el lagrangiano de Skyrme no es adecuado. Esta discusión podría sí ser relevante para otros modelos solitónicos.





## Capítulo 6

# Conclusiones

En una teoría cuántica de campos que posee solitones, éstos tienen gran importancia puesto que representan nuevas partículas de la teoría y están ligados a aspectos no perturbativos.

Los solitones aparecen como soluciones a las ecuaciones clásicas de movimiento y por lo tanto se debe utilizar un método adecuado para cuantificarlos.

Para el caso en que no hay solitones, existen dos métodos principales para definir la teoría cuántica. Uno se basa en definir un espacio de estados y el Hamiltoniano que determina la evolución del sistema a través de la ecuación de Schrödinger. Este método no es manifiestamente covariante. El otro método consiste en definir funciones de Green de los campos a través, por ejemplo, de la integral de camino. Estas funciones transforman covariantemente y permiten determinar las amplitudes de scattering. Ambos métodos se relacionan puesto que las funciones de Green se pueden definir como valores de expectación en el vacío de productos de operadores de campo temporalmente ordenados, y viceversa, dadas las funciones de Green puede reconstruirse un espacio de estados y el Hamiltoniano.

Paralelamente, en el caso de los solitones la cuantificación puede realizarse por medio del método de coordenadas colectivas [2, 3] que se basa en encontrar el espacio de estados y el Hamiltoniano, y por el método de funciones de Green de Fröhlich y Marchetti [5, 6] que consiste en extender las funciones de Green a los solitones. La primera parte de la Tesis (cap. 2 y 3) se dedicó a estudiar el primer método mientras que el segundo método se consideró en los capítulos 4 y 5.

El método de coordenadas colectivas se basa en la observación de que el espectro de excitaciones de baja energía alrededor del solitón está determi-

nado por el movimiento del mismo en su conjunto, o sea, por las excitaciones colectivas, de manera similar a lo que ocurre en los núcleos deformados o en las moléculas poliatómicas. Por lo tanto, cuando la energía de excitación de las vibraciones es alta comparada con la energía de los modos colectivos, el espectro constará de bandas colectivas asociadas a los distintos estados vibracionales.

Para tratar adecuadamente este problema es necesario separar las coordenadas colectivas ya que el movimiento colectivo se da en aquellas direcciones en las cuales no hay variación de energía potencial y que corresponden por lo tanto a osciladores de frecuencia cero o modos cero que producen divergencias infrarrojas en los cálculos perturbativos si no se tratan separadamente de los modos de energía finita.

Una forma de aislar las coordenadas colectivas es introducirlas como coordenadas extra del problema. Estas coordenadas extra dan lugar a una teoría de gauge que se puede tratar, por ejemplo, utilizando el método BRST [10, 11, 20, 21], en cuyo caso las divergencias infrarrojas se eliminan a través de un fijado de gauge adecuado. Alternativamente, como se hizo en esta tesis, se puede realizar un cambio de variables que separe explícitamente las coordenadas colectivas [22]. En este caso es necesario tener en cuenta que, en mecánica cuántica, los cambios de variable introducen términos extra en el lagrangiano [22, 49, 50].

En el capítulo 2 de la Tesis introducimos un modelo general y calculamos correcciones a dos loops a los niveles vibracionales. El modelo consiste en una partícula moviéndose en una variedad de Riemann que, en el caso de una teoría de campos, es la variedad infinito dimensional de todas las posibles configuraciones de campo. Allí se mostró como la introducción de coordenadas geodésicas en esta variedad permite obtener expresiones compactas para la función de partición a dos loops. En particular reproducimos los resultados conocidos para el caso del kink en  $1+1$  dimensiones [22] y realizamos el cálculo para el modelo  $O(3)$  en  $2+1$  dimensiones [10]. Remarquemos que el cálculo para cada uno de los modelos consiste en reemplazar los valores de los coeficientes en la expresión (2.71) que engloba el resultado de todos ellos.

El método de coordenadas geodésicas se utiliza también en el sector de vacío [51] pero introduciéndolas en la variedad en la cual toman valores los campos. A diferencia de ello, en nuestro caso las coordenadas geodésicas se introducen en la variedad infinito dimensional de configuraciones del campo.

En el capítulo 3 se estudiaron las bandas colectivas que se asocian a cada uno de los estados vibracionales. Para ello se debe conocer el grupo  $G$  de simetría de la acción y el grupo  $H \subset G$  de simetría del solitón. Los

estados vibracionales se agrupan en representaciones irreducibles  $\chi$  de  $H$ . A cada conjunto de estados vibracionales en una representación  $\chi$  corresponde una banda colectiva en la que aparecen todas las representaciones de  $G$  que contengan la representación  $\chi$  de  $H$ . Cada una aparece tantas veces como  $\chi$  esté contenida en ella. Este resultado es conocido del estudio de los espectros de moléculas poliatómicas [52]. Lo que se encontró al estudiar la dinámica es que a orden más bajo está descrita por el movimiento libre sobre  $G/H$  acoplada a ciertos campos de gauge. A partir de allí se ve una relación entre el problema tratado y las cuantificaciones no equivalentes que fueron introducidas por Mackey [28] con relación a la teoría de representaciones inducidas de grupos. Esta relación permitió describir las bandas colectivas en términos de representaciones inducidas. En particular se obtiene que la banda colectiva realiza una representación del grupo de simetría de la acción inducida por una representación del grupo de simetría del solitón. Al descomponer esta representación en representaciones irreducibles se obtienen los distintos niveles de la banda colectiva con su multiplicidad. Los resultados obtenidos son una generalización de los resultados conocidos para el grupo de rotaciones en el caso de moléculas [52]. Esta generalización puede ser útil para describir los modos colectivos de los skyrmiones con número topológico mayor que 1 que fueron hallados recientemente [53, 54, 55, 56, 57] y cuyos grupos de simetría son grupos puntuales similares a los que aparecen en moléculas poliatómicas.

En resumen, en la primera parte de la Tesis (cap. 2 y 3) estudiamos un modelo general, obteniendo la corrección a dos loops a los niveles vibracionales, realizando para ello un adecuado tratamiento de los modos cero. Por otra parte al estudiar el movimiento colectivo encontramos una relación entre este problema y el estudio de las cuantificaciones no equivalentes en espacios cociente.

En la segunda parte (cap. 4 y 5) se analizó el método de Fröhlich y Marchetti que se basa en definir funciones de Green para los solitones.

En la Tesis nos concentramos en estudiar las funciones de Green del Skyrmion definidas por Fröhlich y Marchetti en [6]. En el caso del Skyrmion (con campos que varían en  $SU(2)$ ), no aparecía claramente cómo realizar la cuantificación como fermión y además no se discutía la aparición de los grados de libertad internos. La forma usual de cuantificar el Skyrmión como fermión se basa en el hecho de que las configuraciones espacio temporales son mapas de  $R^4$  en  $SU(2)$ . Con la condición de contorno de que  $U \rightarrow 1$  en infinito, éstos son mapas de  $S^4$  en  $SU(2)$  caracterizados por un elemento de  $Z_2 = \Pi_4(SU(2))$ . Cada mapa representa una historia posible del campo y por lo tanto la suma sobre historias (integral de camino) se

escribe como suma de dos contribuciones, cada una correspondiendo a un elemento de  $Z_2$  según en que clase topológica de  $\Pi_4(SU(2))$  esté. Si en lugar de sumar ambas contribuciones, se restan (ya que el signo relativo es arbitrario), el solitón aparece cuantificado como fermión. Por el contrario, utilizando la definición de Fröhlich y Marchetti [6] se consideran mapas de  $R^4 \setminus \{x_1, x_2\} \rightarrow SU(2)$ . Con la condición  $U \rightarrow 1$  en infinito es equivalente a mapas de  $S^4 \setminus \{x_1, x_2\} \rightarrow SU(2)$ . Pero  $S^4 \setminus \{x_1, x_2\}$  es contractible a  $S^3$ , entonces los mapas se caracterizan por un número entero en  $Z = \Pi_3(SU(2))$ . Este número entero es el número bariónico del operador de campo correspondiente pero no aparece en el análisis el grupo  $Z_2$  responsable del carácter fermiónico. En el capítulo 5 se describe cómo, introduciendo condiciones de contorno alrededor de la singularidad, aparece más topología la cual soluciona este problema. Este hecho se verificó antes en el capítulo 4 con un modelo simple en dos dimensiones.

Además de introducir más topología, las condiciones de contorno permiten introducir naturalmente los grados de libertad internos del solitón, es decir, en este caso, incluir el spin e isospin. Como aparecen partículas con valores de spin semientero arbitrarios, escribimos las fórmulas de reducción LSZ para el caso general.

Vemos entonces que las condiciones de contorno propuestas determinan correctamente los grados de libertad internos del solitón y permiten cuantificarlo como fermión. Como trabajos de interés quedaría calcular las funciones de Green definidas utilizando alguna aproximación adecuada y también deducir otras propiedades basándose en la invariancia relativista.

## Apéndice A

# Fórmulas útiles para grupos de Lie

Un grupo de transformaciones de Lie  $G$  es un grupo de Lie que actúa sobre un espacio  $\mathcal{C}$  a través de transformaciones de coordenadas

$$q'^s = R^s(q, \alpha) \quad (\text{A.1})$$

donde  $q^s$  son coordenadas en la variedad  $\mathcal{C}$  y las  $\alpha$  parametrizan el grupo  $G$ . Para que sea un grupo se debe satisfacer que

$$R^s(R(q, \alpha), \beta) = R^s(q, \phi(\beta, \alpha)) \quad (\text{A.2})$$

donde  $\phi(\beta, \alpha)$  denota la ley de composición del grupo que debe satisfacer las condiciones de asociatividad y existencia de identidad e inversa.

Las transformaciones infinitesimales  $q'^s = R^s(q, \delta\alpha)$  son generadas por

$$J_a(q') = -R_a^s(q') \frac{\partial}{\partial q'^s}, \quad (\text{A.3})$$

$$R_a^s(x') = \left. \frac{\partial R^s(q', \beta)}{\partial \beta^a} \right|_{\beta=0}. \quad (\text{A.4})$$

Las relaciones de conmutación de los generadores determinan el álgebra de Lie a través de las constantes de estructura

$$[J_a(q'), J_b(q')] = C_{ab}^c J_c(q') \quad (\text{A.5})$$

De la propiedad

$$q^s = R^s(R(q'', \beta), \alpha) = R^s(q'', \phi(\alpha, \beta)). \quad (\text{A.6})$$

y derivando respecto de  $\beta^a$  ambos miembros, evaluando en  $\beta^a = 0$ , y usando que  $q' = q''$  cuando  $\beta^a = 0$ , se obtiene

$$\frac{\partial R^s(q', \alpha)}{\partial q'^t} R_a^t(q') = \frac{\partial R^s(q', \alpha)}{\partial \alpha^b} \frac{\partial \phi^b(\alpha, \beta)}{\partial \beta^a} \Big|_{\beta=0}. \quad (\text{A.7})$$

Es natural aquí introducir las definiciones de

$$\Theta_a^b(\alpha) = \frac{\partial \phi^b(\alpha, \beta)}{\partial \beta^a} \Big|_{\beta=0}, \quad (\text{A.8})$$

y su inversa  $\Psi_a^b(\alpha)$ ,

$$\Psi_a^b \Theta_b^c = \Theta_a^b \Psi_b^c = \delta_a^c. \quad (\text{A.9})$$

En la práctica es más sencillo calcular primero  $\Psi$  a través de la fórmula

$$U^{-1}(\alpha) \frac{\partial U(\alpha)}{\partial \alpha_a} = i \Psi_a^c T_c, \quad (\text{A.10})$$

donde  $U(\alpha)$  denota el elemento del grupo correspondiente a  $\alpha$  y

$$i T_a = \frac{\partial U(\alpha)}{\partial \alpha_a} \Big|_{\alpha=0}, \quad (\text{A.11})$$

son los generadores infinitesimales. La relación (A.7) se puede reescribir como

$$\frac{\partial R^s(q', \alpha)}{\partial \alpha^a} = \frac{\partial R^s(q', \alpha)}{\partial q'^t} \Psi_a^b(\alpha) R_b^t(q'). \quad (\text{A.12})$$

Derivando (A.12) respecto de  $\alpha^b$  se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 R^s}{\partial \alpha^a \partial \alpha^b} &= \frac{\partial R^s}{\partial q'^t \partial \alpha^b} \Psi_a^c R_c^t + \frac{\partial R^s}{\partial q'^t} \frac{\partial \Psi_a^c}{\partial \alpha^b} R_c^t \\ &= \frac{\partial}{\partial q'^t} \left( \frac{\partial R^s}{\partial q'^v} \Psi_b^d R_d^v \right) \Psi_a^c R_c^t + \frac{\partial R^s}{\partial q'^t} \frac{\partial \Psi_a^c}{\partial \alpha^b} R_c^t \\ &= \frac{\partial^2 R^s}{\partial q'^t \partial q'^v} \Psi_a^c \Psi_b^d R_c^t R_d^v + \frac{\partial R^s}{\partial q'^v} \Psi_a^c \Psi_b^d R_c^t \frac{\partial R_d^v}{\partial q'^t} + \frac{\partial R^s}{\partial q'^t} \frac{\partial \Psi_a^c}{\partial \alpha^b} R_c^t, \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

y, por lo tanto, intercambiando  $a$  con  $b$  y restando miembro a miembro se obtiene

$$\Psi_{a,b}^c - \Psi_{b,a}^c = C_{de}^c \Psi_a^d \Psi_b^e, \quad (\text{A.14})$$

donde  $, a \equiv \partial_a \equiv \partial / \partial \alpha^a$ . De  $\Psi \Theta = 1$  se obtiene

$$\Theta_a^d \Theta_{b,d}^c - \Theta_b^d \Theta_{a,d}^c = C_{ab}^d \Theta_d^c. \quad (\text{A.15})$$

A partir de las matrices  $\Theta$  se pueden definir los generadores de traslaciones derechas  $F(\alpha) \rightarrow F(\phi(\alpha, \beta))$  en el grupo de Lie

$$I_a(\alpha) = -\Theta_a^b \partial_b, \quad (\text{A.16})$$

con reglas de conmutación que surgen de (A.15)

$$[I_a(\alpha), I_b(\alpha)] = -C_{ab}^c I_c(\alpha). \quad (\text{A.17})$$

A veces es conveniente usar la parametrización para un grupo  $G$  dada por la descomposición por el espacio cociente  $G/H$  [58]. Dada una sección  $\sigma : G/H \rightarrow G$ , se puede descomponer  $g \in G$  como:

$$g = \sigma h, \quad (\text{A.18})$$

con

$$\sigma = \exp(\alpha^{a'} T_{a'}) \in G, \quad h = \exp(\alpha^{\bar{a}} T_{\bar{a}}) \in H, \quad (\text{A.19})$$

siendo  $T_{\bar{a}}$  los generadores del subálgebra  $\mathfrak{h}$  y  $T_{a'}$  los del complemento  $\mathfrak{g} - \mathfrak{h}$ . En esta parametrización las matrices  $\Psi$  y  $\Theta$  son

$$\Psi = \begin{pmatrix} \bar{\Psi}_{\bar{a}}^{\bar{b}} & \Psi_{a'}^{\bar{b}} \\ 0 & \Psi_{a'}^{b'} \end{pmatrix}, \quad \Theta = \begin{pmatrix} \bar{\Theta}_{\bar{a}}^{\bar{b}} & -\Theta_{a'}^{c'} \Psi_{c'}^{\bar{d}} \bar{\Theta}_{\bar{d}}^{\bar{b}} \\ 0 & \Theta_{a'}^{b'} \end{pmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

Las matrices  $\Psi'$ ,  $\bar{\Psi}_{a'}^{\bar{b}}$  y  $\Theta'$  dependen de todos los parámetros  $\alpha$ , mientras que  $\bar{\Psi}$  y  $\bar{\Theta}$  solamente de los  $\alpha^{\bar{a}}$ , que parametrizan  $H$ .  $\Theta'$  es la inversa de  $\Psi'$  y  $\bar{\Theta}$  la de  $\bar{\Psi}$ .

De la misma manera se pueden definir las traslaciones a izquierda introduciendo las matrices

$$\hat{\Theta}_a^b(\alpha) = \left. \frac{\partial \phi^b(\beta, \alpha)}{\partial \beta^a} \right|_{\beta=0}, \quad (\text{A.21})$$

y su inversa  $\hat{\Psi}_a^b(\alpha)$ . Los operadores infinitesimales que generan traslaciones a izquierda son

$$J_a(\alpha) = -\hat{\Theta}_a^b \partial_b, \quad (\text{A.22})$$

con reglas de conmutación

$$[J_a(\alpha), J_b(\alpha)] = C_{ab}^c J_c(\alpha) \quad (\text{A.23})$$

$$[J_a(\alpha), I_b(\alpha)] = 0. \quad (\text{A.24})$$





## Apéndice B

# Integrales de propagadores térmicos

En los diagramas a segundo orden aparecen la integrales

$$\begin{aligned}
 g(\omega_n, \omega_m, \omega_l) &= \frac{1}{\beta} \int_0^\beta d\tau G_{\omega_n}(\tau) G_{\omega_m}(\tau) G_{\omega_l}(\tau) \\
 &= \left[ \omega_n (\omega_n^2 - \omega_m^2 - \omega_l^2) \coth\left(\frac{\beta\omega_m}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_l}{2}\right) \right. \\
 &\quad + \omega_m (\omega_m^2 - \omega_n^2 - \omega_l^2) \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_l}{2}\right) \\
 &\quad + \omega_l (\omega_l^2 - \omega_m^2 - \omega_n^2) \coth\left(\frac{\beta\omega_m}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) + 2\omega_n\omega_m\omega_l \Big] / \\
 &\quad [4\omega_n\omega_m\omega_l (\omega_n + \omega_m + \omega_l) (\omega_n + \omega_m - \omega_l) (\omega_n - \omega_m + \omega_l) \\
 &\quad (\omega_n - \omega_m - \omega_l)] , \\
 g(\omega_n, \dot{\omega}_m, \dot{\omega}_l) &= \int_0^\beta d\tau G_{\omega_n}(\tau) \partial_\tau G_{\omega_m}(\tau) \partial_\tau G_{\omega_l}(\tau) \\
 &= \beta \left[ \omega_n (\omega_n^2 - \omega_m^2 - \omega_l^2) + \omega_m (\omega_m^2 - \omega_n^2 + \omega_l^2) \coth\left(\frac{\beta\omega_m}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) \right. \\
 &\quad + \omega_l (\omega_l^2 - \omega_n^2 + \omega_m^2) \coth\left(\frac{\beta\omega_l}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right) + \\
 &\quad + 2\omega_n\omega_m\omega_l \coth\left(\frac{\beta\omega_m}{2}\right) \coth\left(\frac{\beta\omega_l}{2}\right) \Big] / \\
 &\quad [4\omega_n (\omega_n + \omega_m + \omega_l) (\omega_n + \omega_m - \omega_l) (\omega_n - \omega_m + \omega_l) (\omega_n - \omega_m - \omega_l)] ,
 \end{aligned} \tag{B.1}$$

y el propagador evaluado en 0 :

$$G_n(0) = \frac{1}{2\omega_n} \coth\left(\frac{\beta\omega_n}{2}\right). \tag{B.2}$$

Para los cálculos del cap.2 se necesitan las relaciones:

$$\begin{aligned}
 g(\omega_n, \dot{\omega}_m, \dot{\omega}_l) + g(\omega_l, \dot{\omega}_m, \dot{\omega}_n) + \omega_m^2 g(\omega_n, \omega_m, \omega_l) &= G_n(0) G_l(0) , \\
 \omega_n^2 g(\omega_n, \dot{\omega}_m, \dot{\omega}_l) + \omega_m^2 g(\omega_m, \dot{\omega}_n, \dot{\omega}_l) + \omega_l^2 g(\omega_l, \dot{\omega}_n, \dot{\omega}_m) &= \frac{1}{4} ,
 \end{aligned} \tag{B.3}$$

que se deducen por cálculo explícito. Si se desea evaluar la corrección a la energía del estado fundamental basta conocer el límite de los propagadores anteriores para temperatura cero:

$$\begin{aligned}\lim_{\beta \rightarrow \infty} G_n(0) &= \frac{1}{2\omega_n} , \\ \lim_{\beta \rightarrow \infty} g(\omega_n, \omega_m, \omega_l) &= \frac{1}{4\omega_n\omega_m\omega_l(\omega_n + \omega_m + \omega_l)} .\end{aligned}\tag{B.4}$$

## Apéndice C

# Problemas de orden en integrales de camino

El problema de orden en la integral de camino fue estudiado en [49, 22]. En particular este apéndice sigue la derivación de [44, 22]. Este problema aparece también en el caso de teorías de campo [50, 24]. La integral de camino que describe el movimiento de una partícula en un espacio curvo es:

$$\int \mathcal{D}[q(t)] e^{i \int (g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu - V(q)) dt} . \quad (\text{C.1})$$

Si se desea una integral de camino que sea invariante ante cambios de coordenadas entonces es natural considerar la medida invariante y redefinir la integral de camino como

$$\int \mathcal{D}[q(t)] \sqrt{g} e^{i \int (g_{\mu\nu} \dot{q}^\mu \dot{q}^\nu - V(q)) dt} . \quad (\text{C.2})$$

Dado que no es sencillo definir una medida sobre el espacio de caminos continuos la expresión anterior es formal. Se puede entender como el límite para caminos discretos. Dividamos el intervalo temporal en pequeños intervalos de duración  $\epsilon$  (y luego se hará  $\epsilon \rightarrow 0$ ). La integral de camino quedará

$$\prod_i (\sqrt{g(q_i)} dq_i) e^{i \sum_i S(i, i+1)} . \quad (\text{C.3})$$

Para  $S(i, i+1)$  es natural tomar la acción sobre la trayectoria clásica que une los puntos  $(q_i, t_i)$  y  $(q_{i+1}, t_{i+1})$  porque es invariante ante cambios de coordenadas. También se podría elegir la acción sobre una geodésica, pero no sobre una recta que una dichos puntos porque en ese caso tomaría distintos

valores en cada sistema de coordenadas. Para evaluar el límite  $\epsilon \rightarrow 0$  es útil expandir  $S(i, i+1)$  en potencias de  $\Delta^i = q_{i+1} - q_i$  ya que para un camino estocástico con peso dado por la acción cuadrática en  $\Delta_i$  se tiene  $\Delta^i \simeq \sqrt{\epsilon} \rightarrow 0$ . Puede verse que solo contribuyen términos de hasta orden cuarto en  $\Delta^i$ .

Las funciones de  $q$  (incluyendo el factor  $\sqrt{g}$ ) se dejan evaluadas en el punto intermedio  $(q^{i+1} + q^i)/2$ . Resulta para la acción

$$\tilde{S}(i, i+1) = \frac{1}{2} g_{st} \left( \frac{q_{i+1} + q_i}{2} \right) \frac{q_{i+1}^s - q_i^s}{\epsilon} \frac{q_{i+1}^t - q_i^t}{\epsilon} \epsilon + V \left( \frac{q_{i+1} + q_i}{2} \right) \epsilon + V_{G.J.}, \quad (C.4)$$

donde

$$V_{G.J.} = \frac{1}{8} R + \frac{1}{8} g^{st} \Gamma_{st}^u \Gamma_{tu}^v, \quad (C.5)$$

con  $R$  el escalar de curvatura del espacio de Riemann. El potencial extra  $V_{G.J.}$  se conoce como potencial de Gervais y Jevicki y aparece al definir la integral de camino en el punto intermedio. La parte cinética de la acción aparece definida sobre una recta y por lo tanto no es invariante ante cambios de coordenadas. Por otro lado el potencial extra tampoco es invariante. Ambas variaciones se compensan para reproducir el resultado invariante deseado.

La mecánica cuántica se define mas usualmente a traves del formalismo de operadores. En este caso el Hamiltoniano clásico es

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2} p_s g^{st} p_t + V(q). \quad (C.6)$$

Cuánticamente  $p$  y  $q$  no conmutan y debemos elegir un orden para el término cinético. Nuevamente recurriendo a la condición de invariancia ante cambios de coordenadas en natural definir el Hamiltoniano como

$$\mathcal{H} = -\frac{1}{2} \Delta + V(q), \quad (C.7)$$

donde  $\Delta$  indica el Laplaciano sobre la variedad. Este Hamiltoniano actuará sobre funciones de onda  $\varphi$  normalizadas tal que

$$\int \sqrt{g} \phi^* \phi = 1. \quad (C.8)$$

Se pueden definir también funciones

$$\psi = g^{\frac{1}{4}} \phi, \quad \int \psi^* \psi = 1, \quad (C.9)$$

con lo cual el Hamiltoniano queda

$$\mathcal{H} = -g^{\frac{1}{4}} \frac{\Delta}{2} g^{-\frac{1}{4}} + V(q) . \quad (\text{C.10})$$

Para ver a que orden de operadores corresponde la definición anterior introduzcamos el orden de Weyl que se define por la relación

$$e^{(\alpha p + \beta q)} = \sum_n \sum_{k+l=N} \frac{1}{k!l!} \alpha^k \beta^l [p^k q^l]_W . \quad (\text{C.11})$$

Utilizando que

$$e^{(\alpha p + \beta q)} = e^{\alpha p} e^{\beta q} e^{\frac{i}{2} \alpha \beta} , \quad (\text{C.12})$$

se deduce que

$$[p^k q^l]_W = l!k! \sum_{s=\max.(0, k-l)}^k \left(\frac{i}{2}\right)^{k-s} \frac{p^s q^{s+l-k}}{s!(s+l-k)!(k-s)!} . \quad (\text{C.13})$$

Como casos particulares

$$\begin{aligned} [pq^l]_W &= pq^l + \frac{i}{2} \partial_q q^l , \\ [p^2 q^l]_W &= pq^l p + \left(\frac{i}{2}\right)^2 \partial_q^2 q^l , \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

y de allí

$$[p_s g^{st} p_t]_W = p_s g^{st} p_t - \frac{1}{4} \partial_{st} g^{st} . \quad (\text{C.15})$$

Utilizando la definición

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \partial_s (\sqrt{g} g^{st} \partial_t) , \quad (\text{C.16})$$

y las propiedades anteriores para el orden de Weyl, resulta sencillo deducir que

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= -g^{\frac{1}{4}} \frac{\Delta}{2} g^{-\frac{1}{4}} + V(q) \\ &= \frac{1}{2} [p_s g^{st} p_t]_W + V(q) + \frac{1}{8} R + \frac{1}{8} g^{st} \Gamma_{st}^u \Gamma_{tu}^u , \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

donde  $p_s = -i\partial_{q^s}$  y  $R$  es el escalar de curvatura del espacio de Riemann. Vemos que el potencial extra es el mismo que el que aparece al considerar la prescripción del punto intermedio verificando que corresponde al orden de Weyl.



## Apéndice D

# Propagadores para partículas de spin arbitrario

En este apéndice vamos a resumir un método debido a Weinberg [59] para definir propagador para campos de spin arbitrario en la métrica de Minkowski.

Para comenzar se consideran estados de una partícula (con masa  $m$ ) en reposo, con spin  $j$  y proyección de spin  $\sigma$ :  $|(m, 0); j\sigma\rangle$ . A partir de ellos definimos los estados

$$|p; j\sigma\rangle = \sqrt{\frac{m}{p_0}} U(L_p) |(m, 0); j\sigma\rangle, \quad (D.1)$$

donde  $U(L_p)$  es un boost que lleva  $(m, 0)$  a  $p$ , y que se define por la matriz de  $SL(2, C)$

$$L_p = \exp(\theta \hat{p} \cdot \vec{\tau}). \quad (D.2)$$

donde  $\hat{p}$  es el vector unitario  $\vec{p}/|\vec{p}|$ , y  $\sinh(\theta) = |\vec{p}|/m$ . Notemos que  $L_p L_p = (p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\tau})/m$ . Las transformaciones de Lorentz actúan sobre los estados (D.1) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} U_\Lambda |p; j\sigma\rangle &= \sqrt{\frac{m}{p_0}} U(\Lambda L_p) |(m, 0); j\sigma\rangle = \sqrt{\frac{m}{p_0}} U(L_{\Lambda p}) U(L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p) |(m, 0); j\sigma\rangle \\ &= \sqrt{\frac{(\Lambda p)_0}{p_0}} D_{\sigma'\sigma}^j (L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p) |\Lambda p; j\sigma'\rangle. \end{aligned} \quad (D.3)$$

El punto clave es que  $L_{\Lambda p}^{-1} \Lambda L_p$  es una rotación y las rotaciones actúan sobre los estados  $|(m, 0); j\sigma\rangle$  por medio de las matrices  $D^j$  como sabemos.

Los estados de una partícula  $|p; j\sigma\rangle$  se crean del vacío por medio de los operadores  $a_{p,\sigma}^\dagger$  los cuales, en vista de la ec. (D.3), satisfacen:

$$\begin{aligned} U_\Lambda a_{p,\sigma} U_\Lambda^\dagger &= \sqrt{\frac{(\Lambda p)_0}{p_0}} D_{\sigma\sigma'}^j (L_p^{-1} \Lambda^{-1} L_{\Lambda p}) a_{\Lambda p, \sigma'}, \\ U_\Lambda a_{p,\sigma}^\dagger U_\Lambda^\dagger &= \sqrt{\frac{(\Lambda p)_0}{p_0}} (C D^j (L_p^{-1} \Lambda^{-1} L_{\Lambda p}) C^{-1})_{\sigma\sigma'} a_{\Lambda p, \sigma'}^\dagger. \end{aligned} \quad (D.4)$$

Usando los operadores  $a, a^\dagger$ , y los correspondientes operadores  $b, b^\dagger$  para las antipartículas, podemos construir campos que transformen en cualquier representación  $(j_1, j_2)$  del grupo de Lorentz (con  $|j_2 - j_1| < j < |j_1 + j_2|$ ) a través de la fórmula

$$\begin{aligned} \psi_{m_1 m_2}^{j_1 j_2} &= \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_p}} \mathcal{D}_{m_1 m_1'}^{j_1}(L_p) \bar{\mathcal{D}}_{m_2 m_2'}^{j_2}(L_p) \\ &\quad C_{\sigma\sigma'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1' & m_2' & \sigma' \end{pmatrix} \left[ a_{p,\sigma} e^{-ipx} + (-)^{2j_2} C_{\sigma\sigma'}^{-1} b_{p,\sigma'}^\dagger e^{ipx} \right], \\ \bar{\psi}_{m_1 m_2}^{j_1 j_2} &= C_{m_1' m_1} C_{m_2' m_2} \left( \psi_{m_1' m_2'}^{j_1 j_2} \right)^\dagger. \end{aligned} \quad (D.5)$$

El signo  $(-)^{2j_2}$  es necesario para que  $\psi$  y  $\psi^\dagger$  conmuten (o anticonmuten) si están separados espacialmente. Si están separados temporalmente, no conmutan ya que se construyen con los mismos operadores  $a, a^\dagger$ . Esto significa que los diversos campos que se pueden construir a partir de los mismos estados de una partícula de spin  $j$  no son independientes y que por lo tanto debemos elegir sólo uno de ellos para representarla. El campo  $\psi$  transforma como

$$U_\Lambda \psi_{m_1 m_2}^{j_1 j_2}(x) U_\Lambda^\dagger = \mathcal{D}_{m_1 m_1'}^{j_1}(\Lambda^{-1}) \bar{\mathcal{D}}_{m_2 m_2'}^{j_2}(\Lambda^{-1}) \psi_{m_1' m_2'}^{j_1 j_2}(\Lambda x) \quad (D.6)$$

donde  $\bar{\psi}$  obedece una relación similar pero con  $j_1, j_2$  intercambiados, como corresponde al operador adjunto. Ahora podemos evaluar el propagador

$$\langle 0 | T \{ \psi(x)_{m_1 m_2}^{j_1 j_2} \bar{\psi}(y)_{m_3 m_4}^{j_3 j_4} \} | 0 \rangle = \begin{cases} \langle 0 | \psi(x)_{m_1 m_2}^{j_1 j_2} \bar{\psi}(y)_{m_3 m_4}^{j_3 j_4} | 0 \rangle & \text{si } x_0 > y_0 \\ (-)^{2j} \langle 0 | \bar{\psi}(y)_{m_3 m_4}^{j_3 j_4} \psi(x)_{m_1 m_2}^{j_1 j_2} | 0 \rangle & \text{si } y_0 > x_0 \end{cases} \quad (D.7)$$

dando

$$\begin{aligned} &\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \mathcal{D}_{m_1 m_1'}^{j_1}(L_p) \bar{\mathcal{D}}_{m_2 m_2'}^{j_2}(L_p) \bar{\mathcal{D}}_{m_4 m_4'}^{j_4}(L_p) \mathcal{D}_{m_3 m_3'}^{j_3}(L_p) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1' & m_2' & \sigma \end{pmatrix} C_{\sigma\sigma'} \\ &\quad \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j \\ m_3' & m_4' & \sigma' \end{pmatrix} [\theta(x_0 - y_0) e^{-ip(x-y)} + (-)^{(2j_2+2j_4)} \theta(y_0 - x_0) e^{ip(x-y)}] \end{aligned} \quad (D.8)$$



Para un boost  $\bar{\mathcal{D}}^j(L_p) = \mathcal{D}^j(L_p^{-1})$ ; entonces, usando las propiedades de los símbolos  $3j$ :

$$\mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{j_1}(L_p^{-1}) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m'_1 & m_2 & m_3 \end{pmatrix} = \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{j_2}(L_p) \mathcal{D}_{m_3 m'_3}^{j_3}(L_p) \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j_3 \\ m_1 & m'_2 & m'_3 \end{pmatrix}. \quad (\text{D.9})$$

Esta expresión se puede llevar a

$$\int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3 2\omega_p} \mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{j_1}(L_p L_p) \mathcal{D}_{m_4 m'_4}^{j_4}(L_p L_p) C_{\sigma' \sigma} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m'_2 & \sigma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j \\ m_3 & m'_4 & \sigma \end{pmatrix} [\theta(x_0 - y_0) e^{-ip(x-y)} + (-)^{(2j_2+2j_4)} \theta(y_0 - x_0) e^{ip(x-y)}]. \quad (\text{D.10})$$

Teniendo en cuenta que

$$\mathcal{D}^{1/2}(L_p L_p) = L_p L_p = \frac{1}{m}(p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\tau}) \quad (\text{D.11})$$

y que los elementos de matriz de  $\mathcal{D}^j$  son combinaciones lineales de los elementos de  $\mathcal{D}^{1/2} \otimes \dots \otimes \mathcal{D}^{1/2}$ , ( $2j$  veces), se sigue que  $\mathcal{D}^j$  es un polinomio en  $p_\mu$  de orden  $2j$ . En la integral (D.10) podemos extraer los polinomios  $\mathcal{D}^j((p_0 + \vec{p} \cdot \vec{\tau})/m)$ , si reemplazamos  $p_\mu$  por  $-i\partial_\mu$ . De esta manera, la expresión final para el propagador de Minkowski es

$$\langle 0 | T \{ \psi(x)_{m_1, m_2}^{j_1, j_2} \bar{\psi}(y)_{m_3, m_4}^{j_3, j_4} \} | 0 \rangle = C_{\sigma \sigma'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m'_1 & m_2 & \sigma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j \\ m_3 & m'_4 & \sigma \end{pmatrix} \mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{j_1} \left( -\frac{i}{m}(\partial_0 + \vec{\tau} \cdot \vec{\partial}) \right) \mathcal{D}_{m_4 m'_4}^{j_4} \left( -\frac{i}{m}(\partial_0 + \vec{\tau} \cdot \vec{\partial}) \right) \Delta_F(x - y), \quad (\text{D.12})$$

donde introdujimos el propagador escalar de Feynman  $\Delta_F$ . Cuando extrajimos las derivadas no las aplicamos a las funciones  $\theta$  que definen el orden temporal. Así, el propagador es el llamado propagador covariante. Las partes no covariantes deberían cancelarse automáticamente por vértices no covariantes en el Hamiltoniano de interacción si usamos el formalismo canónico (ver [59]). En nuestro caso, ya que la integral de camino usada para definir el propagador (ec. (5.10)) es invariante de Lorentz, esperamos obtener este propagador covariante. Como las  $\mathcal{D}^j(-i\sigma^\mu \partial_\mu u)$  son polinomios en  $\partial_\mu$ , esta expresión se puede continuar analíticamente a espacio Euclídeo. Definiendo el propagador escalar Euclídeo  $\Delta_E(x_4, \vec{x}) = \Delta_F(ix_4, \vec{x})$  obtenemos la continuación analítica

$$C_{\sigma \sigma'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m'_1 & m_2 & \sigma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j \\ m_3 & m'_4 & \sigma \end{pmatrix} \mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{j_1} \left( -\frac{1}{m}(\partial_0 + i\vec{\tau} \cdot \vec{\partial}) \right) \mathcal{D}_{m_4 m'_4}^{j_4} \left( -\frac{1}{m}(\partial_0 + i\vec{\tau} \cdot \vec{\partial}) \right) \Delta_E(x - y). \quad (\text{D.13})$$

Para grandes distancias  $\Delta_E(x)$  se comporta como

$$\Delta_E(x) \simeq_{|x| \rightarrow \infty} \frac{e^{-m|x|}}{\left(\frac{2\pi}{m}|x|\right)^{3/2}}, \quad (\text{D.14})$$

Conservando solo los términos dominantes a  $1/(m|x|)$  podemos reemplazar  $\partial_\mu$  por  $-m x_\mu/x$ , obteniendo

$$\mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{j_1}(X) \mathcal{D}_{m_4 m'_4}^{j_4}(X) C_{\sigma\sigma'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m'_1 & m_2 & \sigma' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} j_3 & j_4 & j \\ m_3 & m'_4 & \sigma \end{pmatrix} \frac{e^{-m|x-y|}}{\left(\frac{2\pi}{m}|x-y|\right)^{3/2}}, \quad (\text{D.15})$$

donde introducimos la matriz  $X = x_4 + i\vec{x} \cdot \vec{\tau}$ .

Otro cálculo útil que se puede hacer con los campos libres (D.5) es obtener la fórmula de reducción LSZ. El procedimiento es bien conocido [60]. Primero debemos expresar  $a$ ,  $a^\dagger$ ,  $b$ ,  $b^\dagger$  en términos de los campos  $\psi$ . Esto es una tarea sencilla que da, por ejemplo, los operadores  $a^\dagger$  como:

$$a_{p\sigma}^{\dagger(\text{in})} = \frac{2j+1}{\sqrt{2\omega_p}} (-)^{2j} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & \sigma \end{pmatrix} \bar{\mathcal{D}}_{m_1 m'_1}^{j_1}(L_p^{-1}) \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{j_2}(L_p^{-1}) \int \frac{d^3x}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\vec{p}\vec{x}} e^{-i\omega_p t} \left( \omega_p \bar{\psi}_{m'_1 m'_2}^{(\text{in})} - i\partial_t \bar{\psi}_{m'_1 m'_2}^{(\text{in})} \right). \quad (\text{D.16})$$

La reducción LSZ procede ahora a usar las condiciones asintóticas sobre los campos interactuantes

$$\langle f | \psi(t) | i \rangle \xrightarrow{t \rightarrow -\infty} Z^{-1/2} \langle f | \psi^{(\text{in})} | i \rangle, \quad (\text{D.17})$$

para reemplazar  $\psi^{(\text{in})}$  por  $\psi$  en la fórmula  $a_{p,\sigma}^\dagger$ . El factor de renormalización  $Z$  absorberá el factor  $\exp(-C_\epsilon)$  introducido en la ec. (5.10). Después, usando la relación

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} f(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \partial_t f(t) dt + \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) \quad (\text{D.18})$$

llegamos a la fórmula de reducción. El resultado para  $a^\dagger$  así como para los

otros operadores es

$$\begin{aligned}
\langle \text{out} | a_{p\sigma}^{\dagger(\text{in})} | \text{in} \rangle &= \langle \text{out} | a_{p\sigma}^{\dagger(\text{out})} | \text{in} \rangle + iZ^{1/2} \frac{2j+1}{\sqrt{2\omega_p}} (-)^{2j} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & \sigma \end{pmatrix} \\
&\quad \bar{\mathcal{D}}_{m_1 m'_1}^{j_1}(L_p^{-1}) \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{j_2}(L_p^{-1}) \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx} (\square + m^2) \langle \text{out} | \bar{\psi}_{m'_1 m'_2}^{j_1 j_2} | \text{in} \rangle \\
&= \text{disc.} + iZ^{1/2} \int d^4 x e^{-ipx} \bar{u}_{m_1 m_2}^{j_1 j_2}(p\sigma) (\square + m^2) \langle \text{out} | \bar{\psi}_{m_1 m_2}^{j_1 j_2} | \text{in} \rangle, \\
\langle \text{out} | b_{p\sigma}^{\dagger(\text{in})} | \text{in} \rangle &= \langle \text{out} | b_{p\sigma}^{\dagger(\text{out})} | \text{in} \rangle + iZ^{1/2} \frac{2j+1}{\sqrt{2\omega_p}} (-)^{2j_1} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & \sigma \end{pmatrix} \\
&\quad \mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{j_1}(L_p^{-1}) \bar{\mathcal{D}}_{m_2 m'_2}^{j_2}(L_p^{-1}) \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^{3/2}} e^{-ipx} (\square + m^2) \langle \text{out} | \psi_{m'_1 m'_2}^{j_1 j_2} | \text{in} \rangle \\
&= \text{disc.} + iZ^{1/2} \int d^4 x e^{-ipx} v_{m_1 m_2}^{j_1 j_2}(p\sigma) (\square + m^2) \langle \text{out} | \psi_{m_1 m_2}^{j_1 j_2} | \text{in} \rangle, \\
\langle \text{out} | a_{p\sigma}^{(\text{out})} | \text{in} \rangle &= \langle \text{out} | a_{p\sigma}^{(\text{in})} | \text{in} \rangle + iZ^{1/2} \frac{2j+1}{\sqrt{2\omega_p}} (-)^{2j} C_{\sigma\sigma'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & \sigma' \end{pmatrix} \\
&\quad \mathcal{D}_{m_1 m'_1}^{j_1}(L_p^{-1}) \bar{\mathcal{D}}_{m_2 m'_2}^{j_2}(L_p^{-1}) \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^{3/2}} e^{ipx} (\square + m^2) \langle \text{out} | \psi_{m'_1 m'_2}^{j_1 j_2} | \text{in} \rangle \\
&= \text{disc.} + iZ^{1/2} \int d^4 x e^{ipx} u_{m_1 m_2}^{j_1 j_2}(p\sigma) (\square + m^2) \langle \text{out} | \psi_{m_1 m_2}^{j_1 j_2} | \text{in} \rangle, \\
\langle \text{out} | b_{p\sigma}^{(\text{out})} | \text{in} \rangle &= \langle \text{out} | b_{p\sigma}^{(\text{in})} | \text{in} \rangle + iZ^{1/2} \frac{2j+1}{\sqrt{2\omega_p}} (-)^{2j_1} C_{\sigma\sigma'} \begin{pmatrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & \sigma' \end{pmatrix} \\
&\quad \bar{\mathcal{D}}_{m_1 m'_1}^{j_1}(L_p^{-1}) \mathcal{D}_{m_2 m'_2}^{j_2}(L_p^{-1}) \int \frac{d^4 x}{(2\pi)^{3/2}} e^{ipx} (\square + m^2) \langle \text{out} | \bar{\psi}_{m'_1 m'_2}^{j_1 j_2} | \text{in} \rangle \\
&= \text{disc.} + iZ^{1/2} \int d^4 x e^{ipx} \bar{v}_{m_1 m_2}^{j_1 j_2}(p\sigma) (\square + m^2) \langle \text{out} | \bar{\psi}_{m_1 m_2}^{j_1 j_2} | \text{in} \rangle,
\end{aligned} \tag{D.19}$$

donde por brevedad definimos  $u, \bar{u}, v, \bar{v}$  que se pueden interpretar como las funciones de onda de partículas entrantes y salientes. Estas fórmulas nos permiten extraer las amplitudes de scattering de las funciones de Green que definimos.



# Bibliografía

- [1] J. Goldstone and R. Jackiw, *Quantization of non linear waves*, Phys. Rev. D **11**, 1486 (1975).
- [2] J.L. Gervais and B. Sakita, *Extended particles in quantum field theory*, Phys. Rev. D **11**, 2943 (1975).
- [3] J.L. Gervais, A. Jevicki and B. Sakita, *Perturbation expansion around extended particles states in quantum field theory. 1.*, Phys. Rev. D **12**, 1038 (1975).
- [4] N.H. Christ and T.D. Lee, *Quantum expansion of soliton solutions*, Phys. Rev. D **12**, 1606 (1975).
- [5] J. Fröhlich and P.A. Marchetti, *Soliton Quantization in Lattice Field Theories*, Comm. Math. Phys. **112**, 343 (1987),  
*Bosonization, Topological Solitons and Fractional Charges in Two-Dimensional Quantum Field Theory*, Comm. Math. Phys. **116**, 127 (1988),  
*Quantum Field Theories of Vortices and Anyons*, Comm. Math. Phys. **121**, 177 (1989).
- [6] J. Fröhlich and P.A. Marchetti, *Quantum Skyrmions*, Nucl. Phys. **B335**, 1 (1990).
- [7] E.C. Marino, J.A. Swieca, *Order, disorder and generalized statistics*, Nucl. Phys. **B 170**, 175 (1980),  
E.C. Marino, B. Schroer, J.A. Swieca, *Euclidean functional integral approach for disorder variables and kinks*, Nucl. Phys. **B 200**, 473 (1982).
- [8] G. 't Hooft, *On the phase transition to permanent quark confinement*, Nucl. Phys **B138**, 1 (1978).

- [9] J.P. Garrahan, M. Kruczenski, and D.R. Bes, *Lagrangian BRST treatment of collective coordinates. A simple example*, in Topics in Theoretical Physics (World Scientific, in press).
- [10] J.P. Garrahan, M. Kruczenski, C.L. Schat, D.R. Bes and N.N. Scoccola, *Becchi-Rouet-Stora-Tyutin quantization of a soliton model in 2+1 dimensions*, Phys. Rev. D **51**, 2950 (1995), hep-th/9603041.
- [11] J.P. Garrahan, M. Kruczenski, and D.R. Bes, *Lagrangian Becchi-Rouet-Stora-Tyutin treatment of collective coordinates*, Phys. Rev. D **53**, 7176 (1996).
- [12] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, (North Holland, Amsterdam, 1989).
- [13] M. Kaku, *Quantum Field Theory*, (Oxford University Press, New York, 1993).
- [14] A. A. Belavin and A. M. Polyakov, JETP Lett. **22**, 245 (1975).
- [15] T.H.R. Skyrme, *A nonlinear field theory*, Proc. R. Soc. London **260**, 127 (1961).
- [16] T.H.R. Skyrme, *A Unified Field Theory of Mesons and Baryons*, Nucl. Phys. **31**, 556 (1962).
- [17] E. Witten, *Baryons in the  $1/N$  expansion*, Nucl. Phys. **B160**, 57 (1979);  
G.S. Adkins, C. Nappi and E. Witten, *Static Properties of nucleons in the Skyrme model*, Nucl. Phys. **B228**, 552 (1983).
- [18] I. Zahed and G.E. Brown, *The Skyrme Model*, Phys. Rep. **142**, 1 (1986).
- [19] A. Hosoya and K. Kikkawa, *Quantum theory of collective motion and an application to theory of extended hadrons*, Nucl. Phys. **B101**, 271 (1975).
- [20] D.R. Bes and J. Kurchan, *The Treatment of Collective Coordinates in Many-Body Systems*, Lecture Notes in Physics, Vol. 34 (World Scientific, Singapore, 1990).
- [21] J.P. Garrahan, *Tratamiento BRST lagrangiano de coordenadas colectivas*, Ph.D. Thesis (Universidad de Buenos Aires, Argentina, 1997)

- [22] J.L. Gervais, A. Jevicki, *Point canonical transformations in the path integral*, Nucl. Phys. B **110**, 93 (1976).
- [23] J.Honerkamp, Nucl.Phys. **B36**, 130 (1972).
- [24] I.Gerstein, R.Jackiw, B.Lee, S.Weinberg, *Chiral loops*, Phys.Rev.D **3**, 2486 (1971).
- [25] J.I. Kapusta, *Finite-temperature field theory*, (Cambridge University Press, New York, 1993).
- [26] H.J. de Vega, *Two-loop quantum corrections to the soliton mass in two dimensional scalar field theories*, Nucl. Phys. **B1**, 411 (1976),  
J. Verwaest, *Higher order correction to the sine-gordon soliton mass*, Nucl. Phys. **B123**, 100 (1977).
- [27] C. Barnes, N. Turok, *A Technique for Calculating Quantum Corrections to Solitons*, hep-th/9711071.
- [28] G.W. Mackey, *Induced Representations of Groups and Quantum Mechanics*, (Benjamin, New York, 1969).
- [29] N.P. Landsman and N. Linden, *The geometry of inequivalent quantizations*, Nucl. Phys. **B365**, 121 (1991).
- [30] D. McMullan and I. Tsutsui, *On the emergence of gauge structures and generalized spin when quantizing on a coset space*, Ann. of Phys. **237**, 269 (1995), hep-th/9308027.
- [31] J. von Neumann, Math. Ann. **104**, 570 (1931).
- [32] A.O. Barut and R. Raczka, *Theory of Group Representations and Applications*, (World Scientific, Singapore, 1986).
- [33] A. Perelomov, *Generalized Coherent States and Their Applications*, (Springer Verlag, Berlin, 1986).
- [34] P. Maraner, *A complete perturbative expansion for quantum mechanics with constraints*, J. Phys. A **28**, 2939 (1995), hep-th/9409080,  
*Monopole Gauge Fields and Quantum Potentials Induced by the Geometry in Simple Dynamical Systems*, Ann. Phys. **246**, 325 (1997).
- [35] S. Mandelstam, *Soliton operators for the quantized sine-Gordon equation*, Phys. Rev. D **11**, 3026 (1975).

- [36] L. Kadanoff, H. Ceva, *Determination of an operator algebra for the two-dimensional Ising model*, Phys. Rev. B, Vol. 3, N° 11, 3918 (1971).
- [37] J. Gasser and H. Leutwyler, *Chiral perturbation theory to one loop*, Ann. Phys. **158**, 142 (1984).
- [38] B. Moussallam, Ann. Phys. **225**, 264 (1993).
- [39] C. Itzykson, J.-M. Drouffe, *Statistical Field Theory*, (Cambridge University Press, New York, 1992).
- [40] M. Kruczenski and L.E. Oxman, *Covariant quantization of the skyrmion*, Nuc. Phys. **B488**, 513 (1997).
- [41] N.S. Manton and P.J. Ruback, *Skyrmions in flat space and curved space*, Phys.Lett.B **181**, 137 (1986).
- [42] E. Witten, *Global Aspects of Current Algebra*, Nucl. Phys. **B223**, 422 (1983);  
*Current Algebra, Baryons and Quark Confinement*, **B223**, 433 (1983).
- [43] A.R. Edmonds, *Angular Momentum in Quantum Mechanics*, (Princeton University Press, Princeton, 1960).
- [44] L.S. Schulman, *Techniques and applications of Path Integration*, (John Wiley and Sons, New York, 1981).
- [45] R.P. Feynman and M. Gell-Mann, *Theory of the Fermi Interaction*, Phys.Rev. **109**, 193 (1958).
- [46] N. Dorey, J. Hughes and M.P. Mattis, *Skyrmion Quantization and the Decay of the  $\Delta$* , Phys. Rev. D **50**, 5816 (1994), (hep-ph/9404274).
- [47] D.I. Dyakonov, V. Yu. Petrov and P.B. Poblitsa, *Born diagrams in pion-skyrmion scattering*, Phys. Lett. **B205**, 372 (1988).
- [48] A. Hayashi, S. Saito and M. Uehara, Phys. Lett. **B246**, 15 (1990).
- [49] S.F. Edwards and Y.V. Gulyaev, *Path Integrals in Polar Coordinates*, Proc. R. Soc. London, Ser. A **279**, 229 (1964).
- [50] N.H. Christ and T.D. Lee, *Operator ordering and Feynman rules in gauge theories*, Phys. Rev. D **22**, 939 (1980).
- [51] D.H. Friedan, *Nonlinear Models in Two + Epsilon Dimensions*, Ann. of Phys. **163**, 318 (1985).



- [52] L.D. Landau and E.M. Lifshitz, *Quantum Mechanics, Nonrelativistic Theory*, (Pergamon Press, Oxford, 1965).
- [53] R.A. Battye and P.M. Sutcliffe, *Multisoliton dynamics in the Skyrme model*, Phys. Lett. **B391**, 150 (1997).
- [54] R.A. Battye and P.M. Sutcliffe, *Symmetric Skyrmions*, Phys. Rev. Lett. **79**, 363 (1997), hep-th/9702081.
- [55] C. Barnes, W.K. Baskerville and N. Turok, *Normal Mode Spectrum of the Deuteron in the Skyrme Model*, Phys. Lett. **B411**, 180 (1997). hep-th/9704028.
- [56] C. Barnes, W.K. Baskerville and N. Turok, *Normal modes of the  $B=4$  Skyrme soliton*, Phys. Rev. Lett. **79**, 367 (1997), hep-th/9704012.
- [57] R.A. Leese and N.S. Manton, *Stable instanton-generated Skyrme fields with baryon numbers three and four*, Nucl. Phys. **A572**, 575 (1994).
- [58] R. Gilmore, *Lie Groups, Lie Algebras, and Some of Their Applications*, (John Wiley, New York, 1974).
- [59] S. Weinberg, *Feynman rules for any spin*, Phys. Rev. **133B**, 1318 (1964).
- [60] C. Itzykson and J.-B. Zuber, *Quantum Field Theory*, (Mc Graw-Hill, New York, 1980).