Extensión de los conceptos de Visibilidad Afín

Rodríguez, Mabel Alicia

1997

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

EXTENSIÓN DE LOS CONCEPTOS DE VISIBILIDAD AFÍN.

por Mabel Alicia Rodríguez

Director de tesis: **Dr. Fausto A. Toranzos**

Lugar de trabajo: Dpto. de Matemática de la F.C.E.y N.

Tesis presentada para optar por el título de

Doctora de la Universidad de Buenos Aires
(Área: Matemática)

1997

A mi familia.

Agradecimientos.

Agradezco muy especialmente a mi Director de Tesis, el Dr. Fausto A. Toranzos, no solamente por la enorme dedicación que me ha prestado sino también por el apoyo y seguridad que me brindó constantemente a lo largo de estos años. También a los matemáticos Dr. Juan Carlos Bressan, Dra. Ana Forte y Dr. Guillermo Hansen con quienes tuve el lujo de poder estudiar.

A mi mamá y a mi papá quienes incondicionalmente me alentaron y acompañaron.

A Walter, quien con suma paciencia y objetividad me apoyó y acompañó en mis elecciones.

A Marcela, con quien compartimos trabajo, sueños, desavenencias y logros.

A las autoridades e investigadores-docentes de la Universidad Nacional de General Sarmiento.

Finalmente, a toda mi familia y amigos.

Title. *Extension of concepts from Affine Visibility.*

Abstract. This work is about Convex Geometry and in particular Affine Visibility. It contains a first part composed mainly by technical results in which the kernel of a regular domain is described as the intersection of the inner stems of its points of local nonconvexity. It also contains a K-lemma, i.e. a new characterization of the kernel of the set as the intersection of the closed convex hulls of the inner stems of its points of local nonconvexity. By means of it, Krasnoselsky-type theorems are obtained. In the second part external visibility problems are studied, where external visibility means visibility referred to the closed complement of the set. The emission of outward rays is connected with the half-line property and with the shining boundary property defined here. The last part is devoted to analyze the structure of closed finitely starshaped sets that are not starshaped. It is proved that the recession cone of such a set is non trivial. Properties concerning visibility elements (stars, novae, etc.) are studied, and a planar characterization by means of convex components is exhibited. Finally, the finitely starshaped sets are connected with the external visibility and with the enlarged affine space.

Keywords. outward rays, external visibility, half-line property, finitely starshaped sets, convex components, K-lemma, inner stem.

Título. *Extensión de los conceptos de Visibilidad Afín.*

Resumen. Este trabajo se inserta dentro de la Geometría Convexa, más precisamente en el área de Visibilidad Afín. Consta de una primera parte esencialmente técnica en la que se describe, en el espacio euclídeo n-dimensional, el mirador de un dominio regular como la intersección de los inner stems de sus puntos de no convexidad local. Para esta descripción se obtiene un Lema tipo-K, es decir, una nueva caracterización del mirador como intersección de las cápsulas convexas cerradas de los inner stems de sus puntos de no convexidad local permitiendo así obtener teoremas tipo Krasnoselsky. La segunda parte trata de problemas de visibilidad externa, o sea problemas referentes a la visibilidad en la clausura del complemento del conjunto. Se conecta la propiedad de la semirrecta con la emisión de rayos salientes así como con la propiedad de la frontera radiante aquí definida. Por último, se estudia la estructura de los conjuntos finitamente estrellados no estrellados cerrados. Se prueba que un tal conjunto admite cono de recesión no trivial y se obtienen propiedades referentes a elementos de visibilidad tales como estrellas, novas, etc. Por último se conecta este tema con la visibilidad externa, con el espacio afín ampliado y también se exhibe una caracterización plana de ellos por medio de componentes convexas.

Palabras claves. rayos salientes, visibilidad externa, propiedad de la semirrecta, conjuntos finitamente estrellados, componentes convexas, lema tipo-K, inner stem.

Índice.

Introducción.

El presente trabajo se inserta dentro de lo que clásicamente se conoce con el nombre de "Convexidad" o "Geometría Convexa". El estudio sistemático de la Convexidad comenzó en las postrimerías del siglo 19. En esos tiempos, la Convexidad surgió como una rama independiente dentro de la Matemática, con sus propios problemas, métodos y teorías. Ideas referidas a la "convexidad" estaban latentes desde tiempos anteriores, podríamos mencionar a Arquímedes quien fue el primero en dar una definición precisa de curva o superficie convexa. En estos comienzos asistemáticos, la Geometría Convexa se ubicaba entre la Geometría, el Análisis y la Matemática Discreta, evidenciando, así, una amplia relación con otras áreas como por ejemplo la Optimización, Teoría de Control, Cristalografía, Análisis Funcional, etc. Por supuesto hay muchas otras áreas de la Matemática que han tenido un fuerte impacto sobre ella, incluso, es bien sabido que muchos aportes han sido hechos desde fuera del área. En este sentido cabe citar, por ejemplo, a matemáticos como Lebesgue, Lindelöf, Sierpinski, etc.

Minkowski, en algún sentido, podría considerarse como el impulsor del estudio formal de los conjuntos convexos, así como Brunn del estudio de los conjuntos estrellados. Estos últimos son una generalización de los convexos, originándose así de manera bastante natural, una generalización o ampliación de la Convexidad: la Visibilidad Afín. Dentro del estudio de los conjuntos estrellados muchos avances se han desarrollado en los últimos tiempos. Podríamos citar, por ejemplo, problemas que se han estado estudiando derivados de un clásico problema que se conoce como *el problema del guardián de la galería (watchman art-gallery problem)*. La idea sintetizada es: *dado un recinto conexo R, calcular la mínima cantidad de "guardianes" (o bien acotar dicho número) que deben colocarse en R de forma* *que "vigilen" todo R*. De aquí dos preguntas surgen inmediatamente: ¿cuál es la mínima cantidad necesaria? y ¿dónde ubicar los guardianes? Este planteo ha sufrido modificaciones con el correr del tiempo, y se han considerado casos en los que, por ejemplo: los guardianes son puntuales, fijos y que observan en toda dirección, o bien que se desplazan sobre una trayectoria predeterminada (por ej. segmentos). En este contexto, vigilar significará que el vigía *ve* todo punto de R, y *ver* se definirá de distintas formas según qué tipo de recinto se considere. Por ejemplo, si R es un subconjunto del espacio euclídeo n-dimensional, x e y puntos de R se dice que x *ve* a y -vía R- si $[x,y] \subseteq R$, en cambio si R es el reticulado entero d-dimensional que consiste de d-uplas de enteros, donde p es un número primo, P el conjunto de números primos y S un subconjunto de P; dos puntos de R son *visibles módulo p* si son distintos módulo p; dos puntos de R *son visibles módulo S* si son visibles módulo p para todo $p \in S$, y si son *visibles módulo P* es que lo son en el sentido geométrico clásico. En este último ambiente se estudian problemas llamados de "ubicación de cámaras" que consisten esencialemente en determinar una configuración S de ubicaciones de las s cámaras, para un cierto entero s dado, contenida en el reticulado de forma tal de maximizar la densidad de los puntos que son visibles desde al menos un punto de S ([12]).

Si se quisiera encuadrar el problema del guardián de la galería (caso euclídeo clásico) dentro del estudio de los conjuntos estrellados, se observa que este problema consiste en descomponer el recinto conexo R como una unión de subconjuntos estrellados. Claramente, sería suficiente ubicar un vigía en el mirador de cada conjunto estrellado. Por otra parte, los conjuntos estrellados tienen la particularidad de contener un subconjunto convexo (su mirador) y de estar contenidos en otro convexo (su cápsula convexa). Sin embargo esta característica de apariencia sumamente obvia, no se sabe, hasta el presente, si caracteriza a los estrellados en el siguiente sentido: dados dos convexos A y B, con $A \subset B$, ¿existe un conjunto estrellado C tal que $A \subset C \subset B$ y además que el mirador de C sea A y la cápsula convexa de C sea B?

Como se puede observar al analizar los distintos planteos del problema del guardián de la galería dependientes de la definición de "ver" elegida, se está trabajando con una idea más global de Visibilidad Afín, originándose así lo que se ha dado en llamar la Visibilidad Generalizada. Dentro de ésta, se estudian por ejemplo problemas concernientes a los llamados conjuntos L y L_n. La L_n-visibilidad, garantizada (en el segundo caso) por la existencia de una poligonal de n-tramos (incluida en el conjunto) que une dos puntos particulares, aporta hoy en día herramientas teóricas para resolver problemas computacionales. Basta pensar que, en una pantalla de computadora, la forma de "unir" puntos se realiza a través de una poligonal.

Es en esta sub-rama de la Convexidad, la Visibilidad Generalizada, en la que se insertan problemas llamados de "Visibilidad Externa" que trataremos en este trabajo. Estos problemas consisten esencialmente en estudiar la visibilidad en el complemento (o la clausura del complemento) de un cierto conjunto, acotado o no, que consideraremos incluido en el espacio euclídeo n-dimensional. El tratamiento de la visibilidad externa contribuye al análisis de problemas de "visibilidad con obstáculos" ([14]) o "problemas de iluminación de recintos" ([16]). En este contexto los obstáculos se consideran opacos y se pretende iluminar desde afuera de ellos. De manera muy simple podemos introducir alguno de estos problemas:

1. En el plano se tiene una familia $\mathcal{F}$ formada por una cantidad finita de cuerpos convexos disjuntos (los "obstáculos"). Se pretende estudiar, por ejemplo, la forma de disponer un "sistema V de iluminación primitivo". Esto significa encontrar un conjunto V de manera que todo punto frontera de todo miembro de $\mathcal{F}$ sea iluminado desde algún punto de V, pero además que ningún subconjunto propio de V tenga esta propiedad. Se estudian en este caso el número máximo de puntos que forma un sistema primitivo y el mínimo entre estos

máximos tomado sobre todas las familias $\mathcal{F}$ consistentes de n cuerpos convexos disjuntos planos.

2. ¿Cuál es el número máximo de puntos requeridos para "iluminar" los bordes de n objetos convexos disjuntos planos, con $n \geq 4$? Este problema fue resuelto por Fejes-Tóth [24] en 1977. Recientemente, en 1994, Pocciola y Vegter ([14]) proveen una respuesta alternativa con el uso de la "pseudo-triangulación" que permite además, dar un algoritmo para encontrar el lugar de ubicación de los "puntos lumínicos".

El trabajo aquí desarrollado está dividido esencialmente en tres partes que describiremos brevemente a continuación, indicando en cada una los principales aportes originales.

1. (Correspondiente a los capítulos II y III).

   Se trabajan aquí ciertos resultados principalmente técnicos referentes a rayos salientes e inner stems. Se obtiene una caracterización del mirador de un cierto conjunto (teorema II.7) junto con una generalización de un Lema tipo-K que había sido hecha anteriormente para el caso plano (teorema III.3.2). Obtenemos teoremas de tipo Krasnoselsky (teoremas III.4.1, III.4.2). De esta forma queda bastante completo el estudio de los rayos salientes e inner stems en relación con los conjuntos estrellados.
2. En esta segunda parte se tratan temas de visibilidad externa (corresponde al capítulo IV). Se estudian caracterizaciones de conjuntos que tienen la propiedad de la semirrecta (Stavrakas) (IV.1.7, IV.1.8). Estos conjuntos son aquellos tales que desde cada punto de su complemento se pueden emitir rayos que no intersecan al conjunto. Se estudian y definen aquí propiedades concernientes a la emisión de rayos desde puntos del conjunto en lugar de

puntos de su complemento de forma de obtener caracterizaciones de los conjuntos que gozan de la propiedad de la semirrecta (IV.2.3, IV.3.2, IV.3.4).

3. En esta última parte se estudian conjuntos finitamente estrellados (corresponde al capítulo V). Estos últimos, que son una generalización de los conjuntos estrellados, son aquellos conjuntos S tales que cualquier subconjunto finito está contenido en la estrella de algún punto de S. El estudio de los conjuntos finitamente esrtellados no estrellados no había sido desarrollado en forma estructural. Se conocen ciertos resultados concernientes a tales conjuntos en el caso en el que sean acotados. Se estudian aquí los conjuntos finitamente estrellados no estrellados cerrados, que como se verá resultan no acotados (V.4.1, V.4.2.). Obtenemos descripciones de estos conjuntos que nos permiten, por un lado establecer conexiones interesantes con el espacio afín ampliado (V.4.4., V.4.5., V.4.8.)y por otra parte abordar el estudio de los elementos de visibilidad largamente estudiados para el caso de conjuntos estrellados (como estrellas, novas, células de visibilidad, etc.), (V.4.1., V.4.9., V.4.10., V.4.13., V.4.14). Asimismo se logra una caracterización a partir de componentes convexas (V.5.4.) y se conecta este estudio con la visibilidad externa anteriormente tratada (V.4.11., V.4.12.).

Parte de lo fascinante de la Convexidad radica en las interrelaciones que surgen a partir de ella, muchas veces de forma imprevista. Asimismo, creemos que es sumamente atrayente que gran parte de los problemas pueden ser enunciados fácilmente. Esto ocurre incluso con muchos de sus problemas más difíciles y las supuestas soluciones a ellos. Sin embargo, demostraciones de las respuestas conjeturadas a estos problemas de enunciado simple, le han costado décadas de esfuerzo a muchos matemáticos. El problema de Borsuk y su supuesta respuesta es un ejemplo de esto.

El presente trabajo, que tiene una orientación esencialmente teórica, esperamos que pueda ser un punto de partida para obtener algunas aplicaciones efectivas en alguno de los temas de Visibilidad Generalizada antes mencionados. A la vez, han surgido una serie de problemas abiertos que intentaremos estudiar en lo sucesivo y que mencionaremos en las conclusiones del trabajo.

CAPÍTULO I: *Definiciones y resultados previos.*

Introducción.

Enumeramos en este capítulo algunos resultados básicos que serán usados a lo largo del trabajo. En primer lugar, mencionamos resultados concernientes a conjuntos de convexos y a estrellados, en segundo lugar citaremos para futura referencia algunos teoremas de tipo combinatorio.

Salvo expresa meción todos los puntos y conjuntos considerados aquí están incluidos en $\mathbf{R}^n$ el espacio euclídeo real n-dimensional. El interior, clausura, frontera y complemento de un conjunto S se denotan por: intS, clS, bdryS, y CS respectivamente. Notaremos A\B a la diferencia conjuntista entre A y B, o sea, $A \cap CB$. El segmento abierto que une x e y se denota (x,y). La sustitución de uno o ambos paréntesis por corchetes indican la adjunción de los correspondientes extremos.

Definiciones.

- Decimos que *x ve a y -vía S-* si $[x,y] \subseteq S$.
- La *estrella de un punto x en S* es el conjunto st(x,S) de todos los puntos de S que ve x -vía S-.
- Un *punto radiante* de S es un punto $x \in S$ tal que st(x,S) = S.
- El *mirador (kernel) de S* es el conjunto kerS de todos los puntos radiantes de S.
- S is *estrellado* si $\ker S \neq \varnothing$.
- S es *convexo* si para todo par de puntos $x, y \in S$, se verifica que $[x,y] \subset S$.

Lema I.1: *Si $K \subset \mathbf{R}^n$ convexo, entonces clK es convexo*

Dem. Sean x, y $\in$ clK. Tomemos un punto del segmento [x,y] y veamos que pertenece a clK. Un tal punto tiene la forma: $t.x + (1 - t).y$ para algún $t \in [0,1]$. Como $x \in$ clK, existe una sucesión $\{x_n\}$ que tiende a x. Análogamente para y, existe $\{y_n\}$ que tiende a y. Consideremos la siguiente función continua: f: $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$

$$(x,y) \rightarrow t.x + (1 - t).y$$

Entonces, como $(x_n, y_n) \rightarrow (x,y)$ y f es continua resulta que

$f((x_n, y_n)) \rightarrow f((x,y)) = t.x + (1 - t).y \in$ clK. ❑

Observación: Podría obtenerse el mismo resultado en un espacio vectorial topológico modificando levemente la demostración anterior utilizando redes en lugar de sucesiones.

Lema I.2: *Si S es cerrado, entonces cualquiera sea $y \in S$ se verifica que st(y,S) es cerrada.*

Dem. Probaremos que dado $y \in S$ cualquiera, cl(st(y,S) $\subset$ st(y,S). La otra inclusión es inmediata. Sea $x \in$ cl(st(y,S)), entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ con $x_n \in$ st(y,S) tal que x_n tiende a x. Veamos que x pertenece a la estrella de y en S:

sea $t \in [x,y]$, entonces $t = \lambda.x + (1 - \lambda).y$ para algún $\lambda \in [0,1]$. Consideremos la sucesión siguiente: $t_n = \lambda.x_n + (1 - \lambda).y$. Notar que $t_n \in [x_n , y] \subset S$ (pues $x_n \in$ st(y,S)) para todo $n \in \mathbf{N}$, y como t_n tiende a t, resulta que $t \in$ clS = S (pues S cerrado), luego $t \in$ S. ❑

Los dos siguientes resultados proveen descripciones del mirador de conjuntos estrellados. Es importante remarcar que estas descripciones no necesitan condiciones topológicas ni dimensionales, ni sobre el conjunto ni sobre el espacio.

Teorema I.3: *Dado un conjunto A,* $KerA = \bigcap_{x \in A} st(x,A)$

Dem. $\subseteq$) Si y $\in$ KerA, entonces y es un punto radiante y por lo tanto st(y,A) = A. Veamos que y $\in$ st(x,A) para todo x $\in$ A. Es inmediato que cualquiera sea el x $\in$ A, x $\in$ st(y,A) pues y es punto radiante, luego y $\in$ st(x,A).

$\supseteq$) Sea y $\in$ $\bigcap_{x \in A} st(x,A)$. Veamos que y es un punto radiante. Sea x $\in$ A, y $\in$ st(x,A) entonces x $\in$ st(y,A). Por lo tanto A $\subseteq$ st(y,A) y como por definición st(y,A) $\subseteq$ A vale la igualdad st(y,A) = A. ❑

Definiciones.

- K es una *componente convexa* de un conjunto S si es un convexo maximal de S respecto de la inclusión. O sea, K $\subset$ S, K es convexo, y si C es un convexo de S tal que K $\subset$ C, entonces C = K.
- Una familia de componentes convexas $\mathcal{C}$ de S es *cobertora* si para todo x $\in$ S, existe C $\in$ $\mathcal{C}$ tal que x $\in$ C.

La familia de componentes convexas, o bien una subfamilia cobertora nos permite dar una caracterización del mirador de un conjunto de la siguiente forma ([21]):

Teorema I.4: *Si $\mathcal{C}$ es la familia de todas las componentes convexas de* S, *entonces el mirador de S es la intersección de la familia $\mathcal{C}$.*

Corolario I.5: *Si $\mathcal{C}$ es una familia cobertora de componentes convexas de* S, *entonces el mirador de S es la intersección de la familia $\mathcal{C}$.*

Dem. Resulta inmediato del teorema I.4. ❑

Lema I.6: *Las componentes convexas de un cerrado son cerradas.*

Dem. Resulta inmediatamente por la maximalidad de las componentes convexas y por el lema I.1. ❑

Definiciones.

- La *cápsula convexa de* A, que notaremos convA, es el conjunto tal que:

  i) convA es convexo,

  ii) convA $\supseteq$ A

  iii) si K es un convexo tal que K $\supseteq$ A, entonces K $\supseteq$ convA

  O sea, convA es el convexo minimal (respecto de la inclusión) que contiene a A.

- El *joint entre A y B* es el conjunto J(A,B) = $\bigcup_{a\in A, b\in B}[a,b]$ o sea J(A,B) está formado por todos los segmentos que tienen origen en un punto de A y terminan en un punto de B.

Teorema I.7 (Lema topológico o de accesibilidad lineal). *Sea M convexo, x $\in$ intM, y $\in$ clM, entonces (x,y) $\subset$ intM.*

Dem. Sea z $\in$ (x,y), entonces z = α.x + (1 - α).y para algún $\alpha \in (0,1)$. Probaremos que z $\in$ intM. Como x $\in$ intM, existe $\delta > 0$ tal que U(x, δ) $\subset$ intM. Sea $\gamma = \frac{\delta.(1-\alpha)}{2\alpha} > 0$. Si y $\in$ clM, entonces M $\cap$ U(y,ε) $\neq \emptyset$, cualquiera sea el $\varepsilon > 0$, en particular para el γ, o sea M $\cap$ U(y,γ) $\neq \emptyset$. Sea y' $\in$ M $\cap$ U(y,γ), y sea x' = $\frac{1}{1-\alpha}z + \frac{-\alpha}{1-\alpha}y'$

$$\|x-x'\| = \left\|x - \frac{1}{1-\alpha}z + \frac{-\alpha}{1-\alpha}y'\right\| = \frac{1}{1-\alpha}.\|(1-\alpha).x - z + \alpha.y'\| = \frac{1}{1-\alpha}.\|-\alpha.y + \alpha.y'\| =$$

$\frac{\alpha}{1-\alpha}.\|y-y'\| < \frac{\alpha}{1-\alpha}.\gamma$ (por la elección de y')

$= \frac{\alpha}{1-\alpha} . \frac{\delta.(1-\alpha)}{2\alpha} = \frac{\delta}{2}$. Entonces, $\|x - x'\| < \frac{\delta}{2}$. Resulta U(x', $\frac{\delta}{2}$) ⊂ U(x,δ) ⊂ intM

La primera de estas inclusiones se verifica pues si w ∈ U(x', $\frac{\delta}{2}$) entonces $\|x' - w\| < \frac{\delta}{2}$.

Veamos que $\|w - x\| < \delta$.

$\|w - x\| \leq \|x - x'\| + \|x' - w\| < \delta$ ya que cada uno de estos sumandos es menor o igual que $\frac{\delta}{2}$.

Sea U = U(x', $\frac{\delta}{2}$), consideramos K = conv({y'} ∪ U) ⊂ M pues {y'} ∪ U ⊂ M implica conv({y'} ∪ U) ⊂ convM = M ya que M es convexo.

Definimos f(t) = α.y' + (1 - α).y. Notemos en primer lugar que z = f(x') ya que:

f(x') = α.y' + (1 - α).x' = α.y' + (1 - α).[$\frac{1}{1-\alpha} z + \frac{-\alpha}{1-\alpha} y'$] = α.y' + z - α.y' = z. Por otra parte, como U es abierto veremos que f(U) es abierto, para ello probamos que: f(U) = $U(z,(1-\alpha).\frac{\delta}{2})$ viendo cada una de las dos inclusiones:

⊆) Si y ∈ f(U), existe w ∈ U tal que y = f(w) y además, que w ∈ U implica que $\|x' - w\| \leq \frac{\delta}{2}$.

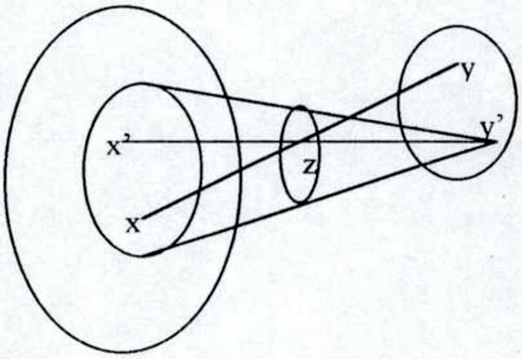
Como es f(w) = α.y' + (1 - α).w, entonces tenemos

$\|f(w) - z\| = \|f(w) - f(x')\| = \|\alpha . y' + (1-\alpha)w - \alpha y' - (1-\alpha)x'\|$ = (1 - α).$\|w - x'\| < \frac{\delta}{2}$.(1 - α).

⊇) Si h ∈ $U(z,(1-\alpha).\frac{\delta}{2})$, veamos que h ∈ f(U), o sea queremos hallar algún x ∈ U tal que f(x) = h. Como x debe pertenecer a U deberá cumplir $\|x' - x\| < \frac{\delta}{2}$. El x que hay que tomar es el siguiente: x = $\frac{1}{1-a} . h + \frac{-a}{1-a} y'$. Probemos entonces que tal x pertenece a U:

$$\|x - x'\| = \left\| \frac{1}{1-\alpha} . h + \frac{-\alpha}{1-\alpha} y' - \frac{1}{1-\alpha} z + \frac{\alpha}{1-\alpha} y' \right\| = \frac{1}{1-\alpha} \|h - z\| < \frac{1}{1-\alpha} (1-\alpha) . \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}.$$

Como x' $\in$ U y dado que z = f(x'), tenemos que z $\in$ f(U), y por otra parte vimos que K $\subset$ M. Además f(U) $\subset$ K $\subset$ M. La primera de estas inclusiones vale pues dado h $\in$ f(U), existe u $\in$ U tal que f(u) = h, o sea h = f(u) = α.y' + (1 - α).u $\in$ [y',u]. Luego z $\in$ f(U) que es un abierto contenido en M, entonces z $\in$ intM. ❑



Teorema de separación estricta I.8: *Sea **E** un espacio normado, A y B convexos disjuntos de E, A cerrado y B compacto. Entonces existe un hiperplano que los separa estrictamente.*

La demostración puede verse en [20].

Teoremas de tipo combinatorio.

Los teoremas de tipo combinatorio han sido de mucha importancia en el estudio geométrico en Convexidad ya que permiten, en muchos casos, obtener información sobre alguna característica de un conjunto (como por ejemplo el hecho que sea estrellado, o condiciones sobre la dimensión del mirador, etc.) a partir de una cantidad finita de elementos particulares. Entre este tipo de teoremas tal vez el de mayor renombre, y el más usado incluso en otras áreas, es el Teorema de Helly que desarrollaremos a continuación. Incluso en el capítulo III veremos aplicaciones de él en el contexto de visibilidad en el que estaremos.

Teorema I.9: (Helly): *Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos convexos de $\mathbf{R}^n$ tal que toda subfamilia de $n + 1$ miembros de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía. Supongamos además que $\mathcal{F}$ es finita o que todos sus miembros son compactos. Entonces la intersección de todos sus miembros es no vacía.*

Dem. Probamos por casos:

<u>a) Suponemos $\mathcal{F}$ finita y todos sus miembros compactos.</u>

Demostramos por inducción en n:

Para n = 1 (o sea en **R**) el resultado vale de inmediato. Suponemos ahora que vale para n - 1, y probaremos que vale para $\mathbf{R}^n$. Consideramos que $\mathcal{F}$ tiene por lo menos n + 1 miembros en $\mathbf{R}^n$.

Supongamos, por el absurdo, que $\bigcap\limits_{F_\lambda \in \mathcal{F}} F_\lambda = \varnothing$. Entonces existirá una subfamilia $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$ y un miembro $F_0 \in \mathcal{F}'$ tales que:

$\bigcap\limits_{F_\lambda \in \mathcal{F}'} F_\lambda = \varnothing$. y $\bigcap\limits_{F_\lambda \in \mathcal{F}' - \{F_0\}} F_\lambda = S \neq \varnothing$, entonces $S \cap F_0 = \varnothing$ y como S y F_0 son ambos convexos, compactos y no vacíos, por el teorema de separación estricta existe un hiperplano H que los separa estrictamente. Sea I la intersección de n conjuntos cualesquiera de la subfamilia $\mathcal{F}' - \{F_0\}$. Vale que $I \supset S$, y por la hipótesis central del teorema se tiene $I \cap F_0 \neq \varnothing$. Como I es convexo y contiene puntos a ambos lados de H resulta que $I \cap H \neq \varnothing$.

Consideremos la familia $\mathcal{F}_\lambda = \{\ F_\lambda \cap H \ / \ F_\lambda \in \mathcal{F}' - \{F_0\}\ \}$. Es una familia finita de convexos y compactos contenidos en un espacio de dimensión n - 1, y tal que la intersección de n miembros es no vacía. Luego por hipótesis inductiva la intersección de todos sus elementos es no vacía, y por lo tanto $H \cap S \neq \varnothing$ lo que es absurdo por definición de H.

<u>b) Suponemos $\mathcal{F}$ no finita, pero todos sus elementos compactos.</u>

El razonamiento de la parte a) nos asegura que toda subfamilia finita de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía, y por la propiedad de intersección finita de compactos vale el teorema.

c) Suponemos que los miembros no son compactos, pero $\mathcal{F}$ finita.

Para cada subfamilia de $\mathcal{F}$ de n + 1 puntos seleccionamos un punto de la intersección de tales conjuntos. Sea P el conjunto finito así formado (es finito pues $\mathcal{F}$ lo es, y por lo tanto hay finitas subfamilias de n + 1 puntos).

Para cada miembro F ∈ $\mathcal{F}$, sea $\widetilde{F}$ = conv(P ∩ F). Llamamos $\widetilde{\mathcal{F}} = \{\ \widetilde{F} / F \in \mathcal{F}\ \}$. Los miembros de esta familia son polítopos (o sea cápsulas convexas de conjuntos finitos), y por lo tanto convexos y compactos. Además en todos los casos $\widetilde{F} \subset F$. Como cada subfamilia de n + 1 conjuntos de $\widetilde{\mathcal{F}}$ tiene intersección no vacía, usando la parte a) resulta $\bigcap_{\widetilde{F}\in\widetilde{\mathcal{F}}} \widetilde{F} \neq \emptyset$. Entonces, usando que $\widetilde{F} \subset F$ resulta $\bigcap_{F\in\mathcal{F}} F \neq \emptyset$. ❑

La condición de compacidad puede debilitarse de la siguiente manera:

Corolario I.10: *Sea $\mathcal{F}$ una familia de conjuntos convexos cerrados de $\mathbf{R}^n$ tales que al menos uno de ellos sea compacto y que satisfagan la hipótesis central del Teorema de Helly. Entonces la intersección de $\mathcal{F}$ es no vacía.*

Dem. Sea $F_0 \in \mathcal{F}$, F_0 compacto, definimos para todo $F_\lambda \in \mathcal{F}$, $\hat{F}_\lambda = F_\lambda \cap F_0$. Claramente $\hat{F}_\lambda$ es compacto.

Por otra parte, sea $\{\ F_1\ ,\ \ldots.,\ F_{n+1}\ \}$ una subfamilia de n + 1 miembros cualesquiera de $\mathcal{F}$. Consideramos la subfamilia finita $\{\ F_0\ ,\ F_1\ ,\ \ldots.,\ F_{n+1}\ \}$. Por la versión finita del teorema de Helly (parte c)) resulta $\bigcap_{i=1}^{n+1}\hat{F}_i = \bigcap_{i=1}^{n+1}(F_i \cap F_0) = \bigcap_{i=1}^{n+1} F_i \neq \emptyset$. Es decir, la familia $\widetilde{\mathcal{F}}$ satisface las hipótesis de la parte b), entonces: $\bigcap_{F_\lambda\in\mathcal{F}} \hat{F}_\lambda \neq \emptyset$ y como $\widetilde{F}_\lambda \subset F_\lambda$ vale que $\bigcap_{F_\lambda\in\mathcal{F}} F_\lambda \neq \emptyset$.❑

El Teorema de Krasnoselsky es un resultado que se obtiene a partir del Teorema de Helly y constituye un resultado sumamente útil en la teoría de conjuntos estrellados. Para demostrarlo se necesita un lema previo, que también ha sido sumamente usado independientemente del resultado principal.

Lema de Krasnoselsky I.11: *Sea $S \subset \mathbf{R}^n$ compacto conexo. Supongamos que $x \in \mathbf{R}^n$, $y \in S$ tales que y no ve a x vía S. Entonces existe $z \in S$ y un hiperplano H que pasa por z que deja a st(z,S) de un lado y a x del otro.*

Dem. Como y no ve a x en S, [x,y] no está todo contenido en S (que es cerrado), entonces existe $t \in [x,y]$ y $\alpha > 0$ tales que $U(t, \alpha) \cap S = \varnothing$.

Sea el conjunto $T_\alpha = \{ t \in [x,y] / \operatorname{dist}(t,S) \geq \alpha \}$. Notar que T_α es cerrado y no vacío. Sea t_0 el elemento de T_α más próximo a y. Sean U_0 y B_0 las bolas abierta y cerrada de centro t_0 y radio α. Entonces $U_0 \cap S = \varnothing$ y $B_0 \cap S \neq \varnothing$. El hiperplano H_0 ortogonal a [x,y] y que pasa por t_0 determina en B_0 dos hemisferios: el B_x más próximo a x y el B_y más próximo a y. Por la definición del t_0 existe $z \in B_y \cap S$. Sea H el hiperplano que pasa por z y es ortogonal a $[t_0, z]$. Tal H separa a x de st(z,S) y entonces $x \notin H$. ❑

<u>Observación:</u> En este lema la hipótesis de compacidad no es necesaria, sí en cambio el conjunto debe ser cerrado. Nosotros usaremos más adelante este Lema de Krasnoselsky con esta hipótesis debilitada.

Teorema de Krasnoselsky I.12: *Sea S un conjunto conexo y compacto en $\mathbf{R}^n$ tal que para todo subconjunto de $n + 1$ puntos existe un punto de S que ve a los $n + 1$ simultáneamente. Entonces, S es estrellado.*

Dem. Para cada $y \in S$ definimos $A(y) = \text{cl conv}(\text{st}(y,S))$. Entonces la hipótesis del teorema asegura que la familia $\{A(y)\}_{y \in S}$ cumple la condición de Helly. Sea entonces un punto $x_o \in \cap_{y \in S} \{A(y)\}$. Afirmamos que $x_o \in \cap_{y \in S} \{\text{st}(y,S)\}$. En caso contrario, existe un $y_o \in S$ tal que x_o no ve a y_o. Por el lema de Krasnoselsky existe $z_o \in S$ y un hiperplano H que separa estrictamente x_o y $\text{st}(z_o,S)$. Esto contradice que $x_o \in \text{cl conv}(\text{st}(z_o,S))$. ❑

Otro resultado de la familia es el Teorema de Klee cuya demostración puede verse en [20].

Teorema I.13: (Klee) *Sea $\mathcal{K}$ una colección de conjuntos en $\boldsymbol{R}^n$ compactos y convexos, que contiene por lo menos $n + 1$ miembros; y sea C un conjunto compacto convexo en $\boldsymbol{R}^n$ tal que para cada subfamilia de $n + 1$ miembros de $\mathcal{K}$ existe un trasladado de C incluido en la intersección de la subfamilia. Entonces existe un trasladado de C incluido en la intersección de toda la colección.*

CAPÍTULO II: *Caracterización del mirador a partir de inner stems.*

Introducción.

La célula de visibilidad de un punto p, que definiremos formalmente a continuación, intuitivamente se puede pensar como el conjunto de aquellos puntos que pueden "ver más" que p. Pensando en la definición del mirador de un conjunto, tiene sentido esperar que estos subconjuntos participen en alguna descripción del mismo. De hecho, ha sido probado [22] que el mirador de un cerrado conexo en un espacio vectorial topológico localmente convexo con el conjunto de puntos de no convexidad local compacto es la intersección de las células de visibilidad de los puntos de no convexidad local. Es sumamente útil esta descripción, como se advierte en la bibliografía existente, dado que, el hecho que estos conjuntos sean convexos facilita su manejo y, por ejemplo, permite rápidamente aplicar Teoremas tipo Helly de forma de obtener condiciones finitas sobre el conjunto que aseguren que el mismo es estrellado.

Por otra parte incluimos algunos resultados existentes sobre la nova de un punto p. Este conjunto estará formado por aquellos puntos que puedan "ver claramente" al punto p. Informalmente esto significa que no sólo el punto es visto, sino que lo es todo un entorno del mismo. A diferencia de la célula de visibilidad, este conjunto no necesariamente es convexo, sin embargo permite caracterizar al mirador, y, tras una artimaña técnica es posible también obtener Teoremas de tipo Helly. Las relaciones de "ver más" así como la de "ver claramente" resultan inmediatamente relaciones que no son simétricas, contrariamente a lo que pasa con la relación "ver". Estos dos conceptos junto con el concepto de inner stem, que está relacionado con la posibilidad de emitir "rayos salientes" a través de un punto frontera del conjunto serán estudiados aquí de forma de obtener relaciones entre ellos.

En [23] se afirma que la célula de visibilidad de un punto está siempre incluida en el inner stem del mismo. Esta afirmación es errónea como mostraremos en un contraejemplo a continuación, y esencialmente el error es de tipo topológico. Al explorar aquí las relaciones entre ambos conceptos, logramos corregir el enunciado y demostrar el correcto. Por otra parte, la afirmación errónea formó parte de la demostración del teorema de caracterización del mirador de un cierto conjunto como intersección de los inner stems de sus puntos de no convexidad local. Con la corrección hecha la afirmación ya no puede ser usada en la demostración del resultado principal. Probamos aquí que el teorema de caracterización sigue valiendo y obtenemos una nueva demostración del mismo donde se elude el uso del resultado incorrecto.

II.1. Sobre células de visibilidad, novas e inner stems.

<u>Definiciones.</u> Sea $S \subset \mathbf{R}^n$.

- Un *dominio regular* S es un conjunto tal que intS es conexo y S = cl intS.
- Un dominio regular acotado es un *hunk*.
- Sean p, q $\in$ S, *p tiene más visibilidad que q vía S* si st(q,S) $\subseteq$ st(p,S).
- Si x $\in$ S, definimos la *célula de visibilidad de x*, y notaremos vis(x,S), como el conjunto $vis(x,S) = \{y \in st(x,S) / st(y,S) \supseteq st(x,S)\}$.
- Un punto x $\in$ S se llama de *convexidad local* de S si admite un entorno V tal que V $\cap$ S es convexo; de otra forma se llama de *no-convexidad local*. El conjunto de todos los puntos de convexidad local y de no-convexidad local se denotan lcS y lncS respectivamente.

Se obtuvo (Toranzos) una caracterización de la célula de visibilidad por medio de componentes convexas:

Lema II.1.1: *La célula de visibilidad de un punto p de S es la intersección de las componentes convexas de S que contienen a p.*

Dem. Queremos probar que $vis(p,S) = \bigcap \{K / K \text{ es componente convexa de } S,\ p \in K\}$.

$\subseteq$) Sea $x \in vis(p,S)$ y sea K una componente convexa de S que contiene a p. Entonces tenemos que $K \subset st(p,S) \subset st(x,S)$. La primera inclusión vale pues tomando $y \in K$, $[y,p] \subset K$ pues y y $p \in K$ y K es convexa. La segunda por definición de vis(p,S). Entonces, lo que resulta es que $K' = conv(\{x\} \cup K) = J(\{x\}, K) \subset S$. Y como tenemos $K \subset K'$, por maximalidad de K debe ser $K = K'$ y por lo tanto $x \in S$.

$\supseteq$) Sea $x \in \bigcap \{K / K \text{ es componente convexa de } S,\ p \in K\}$. Veamos que $x \in vis(p,S)$. Sea $z \in st(p,S)$. Queremos probar que $z \in st(x,S)$ o sea $[x,z] \subset S$. Sabemos que existe una componente convexa K_0 de S tal que $[z,p] \subset K_0$. Pero $x \in K_0$ y $z \in K_0$ y K_0 es convexa, $[x,z] \subset K_0 \subset S$, y por lo tanto x ve a z vía S, luego $z \in st(x,S)$, y como esto vale para todo $z \in st(p,S)$, resulta que $st(p,S) \subset st(x,S)$ y por lo tanto $x \in vis(p,S)$. ❑

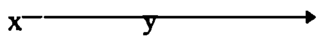
Observación: Esta caracterización no usa alguna estructura topológica en especial.

Corolario II.1.2: *S cerrado, $p \in S$, entonces la célula de visibilidad de p es cerrada.*

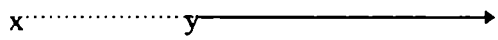
Dem. Inmediato de la caracterización anterior y el hecho que las componentes convexas de conjuntos cerrados son cerradas. ❑

Definiciones.

- Para x ≠ y notaremos R(x → y) = {λ.(y - x) + x / λ ≥ 0 } al rayo cerrado con origen en x que pasa por y, mientras que R(xy →) = {λ.(y - x) + y / λ ≥ 0 } es el rayo cerrado con origen en y, y que tiene la misma dirección que R(x → y).



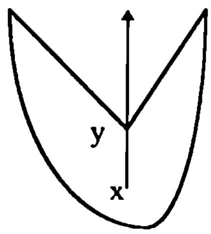
R(x → y)



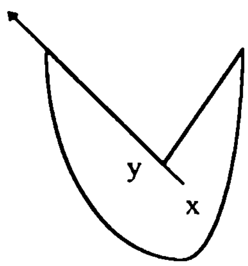
R(xy→)

- Dados y ∈ bdryS y x ∈ st(y,S) decimos que el rayo R(x → y) es *entrante a través de y* si existe t ∈ R(xy →) tal que (y,t) ⊂ intS. De otra forma se llama *rayo saliente a través de y.*

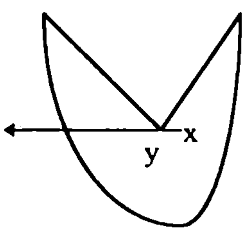
Veamos algunos ejemplos de rayos entrantes y de rayos salientes:



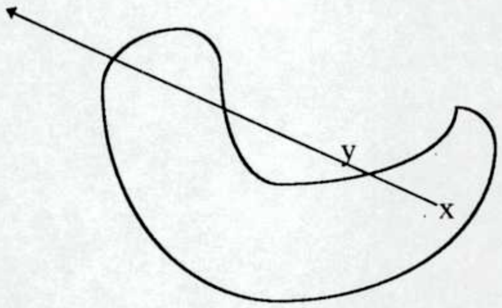
R(x → y) es saliente a través de y.



R(x → y) es saliente a través de y.



R(xy→) es entrante a través de y



R(x→y) es saliente a través de y

Se observa que el hecho que un rayo sea entrante o saliente a través de un punto frontera "y" depende esencialmente de la posición del punto x. De aquí es que se desprende la necesidad de considerar el conjunto de aquellos puntos desde los cuales se emiten rayos salientes a través de un cierto punto frontera fijo. Por otra parte, el hecho que un rayo saliente pueda "entrar" al conjunto "más allá de y" será restringido al definir en el capítulo IV el inner stem fuerte de un punto.

- El *inner stem de y* con respecto a S es el conjunto ins(y,S) formado por y, y todos los puntos de st(y,S) que emiten rayos salientes a través de y. O sea,

  $\mathrm{ins}(y,S) = \{y\} \cup \{ x \in \mathrm{st}(y,S) \,/\, R(x \to y) \text{ es saliente a través de } y \}$

- Notaremos *relintA* al interior relativo de A.

- Se dice que *x ve claramente a y*, si existe un entorno de y que notamos U_y tal que $U_y \cap S \subset \mathrm{st}(x,S)$.

- La *nova* de un punto $x \in S$ es $\mathrm{nova}(x,S) = \{ y \in S \,/\, y \text{ ve claramente a } x \}$

- Si S es un conjunto conexo con interior no vacío, y $x \in S$, se define el conjunto de *visibilidad crítica de x* en S como $\mathrm{cv}(x,S) = \mathrm{int}S \cap \mathrm{bdry}(\mathrm{st}(x,S))$. Cada punto de este conjunto es llamado *punto de visibilidad crítica* de x en S.

Propiedad II.1.3: *S dominio regular cerrado, $y \in \mathrm{bdry}S$, entonces $\mathrm{nova}(y,S) \subset \mathrm{ins}(y,S)$.*

Dem. Sea $x \in nova(y,S)$, entonces existe un entorno U_y tal que $U_y \cap S \subset st(x,S)$. Veamos que $x \in ins(y,S)$. Si no fuera así, existiría $t \in R(xy \to)$ tal que $(y,t) \subset intS$. Sea $t' \in (y, t) \cap U_y$ y sea $U_{t'} \subset intS$ entorno de t'. Como $U_{t'} \subset U_y$ resulta que $U_{t'} \subset st(x,S)$ entonces el joint $J = J(\{x\}, U_{t'}) \subset S$, luego tendríamos $y \in intJ \subset S$. Esto es absurdo pues $y \in bdryS$. ❑

Teorema II.1.4: *S un dominio regular, $x \in S$, $y \in st(x,S)$.*

(i) $y \in cv(x,S)$ si y sólo si y no es claramente visible desde x.

(ii) si $y \in cl(cv(x,S))$ entonces y no es claramente visible desde x vía S.

Dem. (i) $\Rightarrow$) Si $y \in cv(x,S)$, para cada U_y entorno de y existe $t \in S \cap U_y$ con lo que y no es claramente visible desde x.

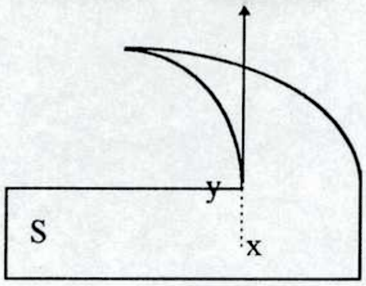
$\Leftarrow$) Si $y \in intS$ pero no es claramente visible desde x, no puede ser interior a st(x,S) luego $y \in cv(x,S)$.

(ii) Para cada entorno de y, U_y existe $t \in U_y \cap cv(x,S)$, entonces existe $z \in S \cap U_y$ tal que $z \notin st(x,S)$. Luego $S \cap U_y \not\subset st(x,S)$ y entonces resulta que y no es claramente visible desde x vía S. ❑

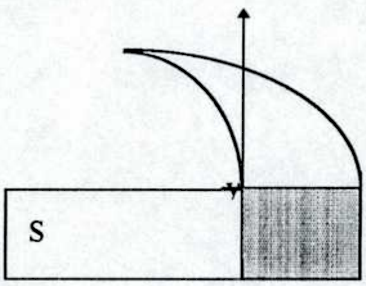
II.2. El resultado principal.

La afirmación errónea mencionada al principio del capítulo es ([23] teorema 4.1 (a)) la siguiente:

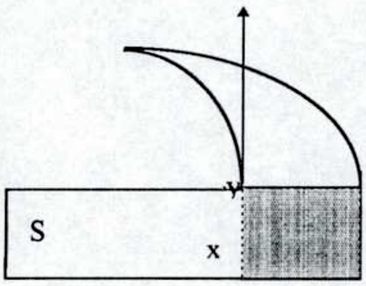
Si S es cerrado, conexo, $y \in bdryS$, la célula de visibilidad de y está incluida en el inner stem del mismo punto. La figura plana siguiente es un contraejemplo de esta afirmación. Notar que $x \in vis(y,S)$ pero $x \notin ins(y,S)$.



Más precisamente la célula de visibilidad de x en S es el siguiente conjunto:



Mientras que el inner stem de x en S es :



La esencia del error mencionado es de naturaleza topológica: la célula de visibilidad de cualquier punto de un cerrado es cerrada (II.1.2) mientras que no se puede establecer fácilmente una condición topológica sobre el inner stem de un tal punto. Teniendo en cuenta estos hechos, intentaremos esclarecer la relación entre células de visibilidad e inner stems.

Proposición II.2.1: *Sea $S \subset \boldsymbol{R}^n$ cerrado conexo, $p \in bdryS$ y $p \in lcS$. Entonces $ins(p,S) = st(p,S)$.*

Dem. La inclusión ins(p,S) $\subset$ st(p,S) es trivial. Sea x $\in$ st(p,S) y U un entorno cerrado de p tal que U' = U $\cap$ S es convexo. Si x $\in$ U, definimos x'= x. De otra forma sea x' el único punto en [x,p] $\cap$ bdryU'. En ambos casos es claro que R(x'p $\rightarrow$) = R(x p $\rightarrow$). Sea t $\in$ U' $\cap$ R(x'p $\rightarrow$). Entonces t $\notin$ intS ya que de otra forma por el Teorema de accesibilidad lineal I.7 aplicado a U' implicaría p $\in$ intS. Entonces x $\in$ ins(p,S). ❑

Corolario II.2.2: *Sea $S \subset \boldsymbol{R}^n$ cerrado conexo, $p \in bdry\ S$ y $p \in lcS$. Entonces $vis(p,S) \subset ins(p,S)$*

Dem. Inmediato por proposición II.2.1 y la definición de célula de visibilidad. ❑

Teorema II.2.3: *Sea $S \subset \boldsymbol{R}^n$ cerrado conexo, $p \in bdry\ S$, entonces:*

(1) $int\ vis(p,S) \subset ins(p,S)$

(2) $bdry\ vis(p,S) \subset cl\ ins(p,S)$

(3) $vis(p,S) \subset cl\ ins(p,S)$

Dem. La célula de visibilidad de p es cerrada (corolario II.1.2) convexa y no vacía. Podemos asumir, sin pérdida de generalidad vis(p,S) tiene interior no vacío, ya que de otra forma podríamos restringir nuestro argumento a la cápsula afin de vis(p,S). En este subespacio afin relint(vis(p,S)) $\neq \varnothing$.

(1) Sea x $\in$ int vis(p,S) y U un entorno convexo de x incluido en vis(p,S). Supongamos que R(x $\rightarrow$ p) es entrante a través de p. Debe existir t $\in$ R(x p $\rightarrow$) tal que (p,t) $\subset$ intS. Si z $\in$ (p,t) consideremos el conjunto J = J(U,z) = $\cup$ { [y,z] / y $\in$ U }. Como z $\in$ st(p,S) y U $\subset$ vis(p,S), se sigue que $\forall$ y $\in$ U, z $\in$ st(y,S). Luego J $\subset$ S y p $\in$ int J $\subset$ int S. Esto contradice que

$p \in \text{lncS}$ y esto proviene de suponer que $R(x \to p)$ es entrante a través de p, luego $x \in \text{ins}(p,S)$.

(2) Por el Teorema I.7 de accesibilidad lineal se sigue que un convexo cerrado es la clausura de su interior relativo. Luego,

$\text{bdry vis}(p,S) \subset \text{cl vis}(p,s) = \text{cl (int vis}(p,S)) \subset \text{cl ins}(p,S)$.

(3) Inmediato a partir de (1) y (2). ❑

Demostramos el teorema de caracterización del mirador (4.3 de [23]) de forma de evitar el lema erróneo mencionado.

Lema II.2.4: *Sea $S \subset E$ (E espacio vectorial topológico localmente convexo) cerrado conexo, $y \in \text{lncS}$. Entonces $\text{kerS} \subset \text{ins}(y,S)$.*

Dem. Sea $x \in \text{kerS}$ y supongamos que $R(x \to y)$ es entrante a través de y. Debe entonces existir $t \in R(x\ y \to)$ tal que $(y,t) \subset \text{intS}$. Tomando $z \in (y,t)$ debe existir un entorno V de z incluido en S. Definimos el conjunto $K = J(V,x) = \cup \{ [p,x] / p \in V \} = \text{conv}(V \cup \{x\})$. Como x es un star-center de S y $V \subset S$, vale que $K \subset S$. Luego $y \in \text{int } K \subset \text{int } S$. Esto contradice $y \in \text{lncS}$. Luego el rayo $R(x \to y)$ debe ser saliente por y, con lo cual se tiene que $x \in \text{ins}(y,S)$. ❑

Conocemos (Toranzos) algunos resultados que relacionan la visibilidad crítica con los puntos de no convexidad local del conjunto:

Teorema II.2.5: *Sea S cerrado, con interior no vacío, $y \in \text{lcS}$, $p \in \text{cv}(y,S)$. Entonces (p,y) contiene puntos de no convexidad local de S*

Dem. Como $y \notin kerS$ (de otra forma $cv(y,S)$ sería vacía), $st(y,S)$ es un subconjunto propio cerrado de S. Afirmamos que $(p,y) \cap bdryS \neq \emptyset$. Si no fuera así, tendríamos $(p,y) \cap bdryS \subset intS$. Sea V un entorno de 0, tal que $(V + y) \cap S$ es convexo. Sea $y_0 \in (p,y) \cap (V + y)$, y sea U. ❑

Lema II.2.6: *S dominio regular, $y \in S$, $y \notin kerS$, pero ve al menos un punto interior. Entonces $cv(y,S) \neq \emptyset$.*

Dem. Ver [23].

Teorema II.2.7: *S un dominio regular en un espacio normado de dimensión finita, $y \notin kerS$. Entonces se verifica al menos uno de los siguientes resultados:*

(i) existe $p \in cv(y,S)$ tal que $(p,y) \cap lncS \neq \emptyset$.

(ii) para cada $\varepsilon > 0$ existe $t \in lncS$ tal que $t \notin st(y,S)$ y $/y - t/ < \varepsilon$.

Dem. ver [23].

Teorema II.2.8: *El mirador de un dominio regular no convexo es la intersección de los inner stems de sus puntos de no convexidad local.*

Dem. Sea el conjunto $K = \cap\{ ins(y,S) \,/\, y \in S \}$. Veamos que $K \subset kerS$, la otra inclusión resulta del lema II.4.2.. Supongamos que existe un punto $y \in K$ tal que $y \notin kerS$. Consideremos entonces dos casos:

a) si $y \in lcS$. Por el lema II.2.6, resulta que $cv(y,S) \neq \emptyset$. Para cada $p \in cv(y,S)$ el teorema II.2.5 asegura la existencia de un punto $t \in (y,p) \cap lncS$. Luego tenemos $y \notin ins(t,S)$ y por lo tanto $y \notin K$.

b) $y \in \mathrm{IncS}$. Por el teorema II.2.7, resulta que cada alternativa provee un punto $t \in \mathrm{IncS}$ tal que $t \notin \mathrm{ins}(t,S)$. Luego $y \notin K$.□

CAPÍTULO III: *Teorema tipo-K para rayos salientes.*

Introducción.

Vimos en el capítulo anterior (teorema II.2.7) que el mirador de un dominio regular $S \subseteq \mathbf{R}^n$ se puede describir como la intersección de los inner stems de sus puntos de no convexidad local. Cuando se tiene una caracterización del mirador de un conjunto, es natural buscar teoremas tipo Krasnoselsky que establecen condiciones (sobre subconjuntos finitos de S) que aseguran que S sea estrellado. En general, la forma de obtener estos teoremas es aplicando el teorema de Helly o alguno de sus derivados a los conjuntos que aparecen en la caracterización. Como hemos visto (teorema I.9) entre las hipótesis del teorema de Helly se necesita que los conjuntos involucrados sean convexos. Nuestro problema aquí es que los inner stems de puntos frontera no son necesariamente convexos. Este inconveniente se presenta con frecuencia, y para subsanarlo, en general se intenta probar lo que se ha dado en llamar "lema tipo Krasnoselsky" o "lema tipo-K". Éste consiste en obtener una nueva caracterización del mirador del conjunto como la intersección de las clausuras de las cápsulas convexas de los conjuntos involucrados en la caracterización. Esto es, en realidad, un nuevo problema donde una de las inclusiones resulta siempre inmediata por haber logrado la primera de las caracterizaciones. Ahora bien, notar que, habiéndolo resuelto se podrán obtener los teoremas de tipo Krasnoselsky aplicando el Teorema de Helly a la nueva familia que, ahora sí, está formada por convexos. En nuestro caso entonces, debemos probar que el mirador de un conjunto (con ciertas hipótesis) es la intersección de la clausura de la cápsula convexa de los inner stems de sus puntos de no-convexidad local.

El trabajo aquí desarrollado consiste en generalizar el lema tipo-K (para inner stems) a un espacio euclídeo de dimensión n > 2, ya que el caso plano fue resuelto por F.

Toranzos. Creemos que es de interés incluir la demostración plana con el propósito de evidenciar la dificultad de la generalización por la misma vía.

Entonces, formalmente el planteo es probar que para n > 2, *$S \subseteq \mathbf{R}^n$ hunk, entonces kerS es la intersección de las clausuras de las cápsulas convexas de los inner stems de los puntos de no convexidad local de S.*

Observación: En realidad, dado que se conoce para dimensión n (n > 2) la caracterización del mirador de S con los inner stems de sus puntos de no convexidad local, la inclusión $\subseteq$ es inmediata. Entonces nuestro problema, planteando el contrarrecíproco, es:

$S \subseteq \mathbf{R}^n$ $(n > 2)$ hunk, $x \in S$. Si $x \notin kerS$, entonces existe t, un punto de no convexidad local de S, tal que $x \notin cl\ conv(\ ins(t,S)\ )$.

Incluimos en la sección siguiente ciertas herramientas sobre peaks que usaremos en la demostración (sección IV).

III.1. Un apartado sobre peaks.

Definiciones.

- x es un *punto ciego* de S si x no ve claramente ningún punto de S.
- Un *peak* de S es un punto p $\in$ S que admite un entorno U tal que p tiene más visibilidad vía S que cualquier otro punto de U $\cap$ S.

Lema III.1.1: *$S \subset \mathbf{R}^n$, compacto. Sea P la familia de componentes convexas de S con interior no vacío, entonces P cubre a todo punto de S que no es ciego.*

Dem. Si $x \in S$ no es ciego, entonces existe $y \in S$ y un $\varepsilon > 0$ tal que $\mathcal{U} = U(y, \varepsilon) \cap S \subset st(x,S)$, entonces por ser S hunk, $\mathcal{U}$ incluye puntos interiores de S. Sea $J = J(x,S)$ y sea $x' \in J$ tal que existe $\mathcal{U}_{x'} \subset J$. Sea $J' = J(x', \mathcal{U})$, este es un convexo incluido en S con interior no vacío, luego usando el principio maximal de Hausdorff existe K una componente convexa de S que incluye a J'. Luego, $K \in P$. ❑

Teorema III.1.2: *Sea $S \subset \mathbf{R}^n$ un hunk, $x \in S$. x es un peak de S si y sólo si $x \in kerS$.*

Dem. $\Leftarrow$) inmediato.

$\Rightarrow$) Supongamos por el absurdo que $x \notin kerS$. Notar que un punto ciego seguro que no es un peak de S, luego podemos suponer sin pérdida de generalidad que x no es un punto ciego de S. Luego, x ve claramente algún punto de S y por lo tanto verá claramente algún punto interior $y \in intS$. Por otra parte, como $x \notin kerS$, existe algún $r \in S$ (que podemos considerar interior a S) que no es visto por x. Como intS es conexo, y abierto, sea $\Lambda \subset intS$ un arco de curva simple conextremos r y x. Por otra parte, sea $M = \{ m \in st(x,S) \ / \ x$ ve claramente a m vía S $\}$. Inmediatamente $M \cap \Lambda \neq \emptyset$. Sea C_y la componente conexa de $M \cap \Lambda$ tal que C_y incluye a y. Luego C_y es un arco cerrado de Λ. Sea t su último punto yendo desde y hacia r, y sea $\varepsilon > 0$ suficientemente chico como para que $\mathcal{U} = U(t,\varepsilon) \subset intS$. Luego, por la construcción de t podemos tomar $v \in \mathcal{U} \cap M$ y $w \in \mathcal{U}$ con w un punto tal que x no puede verlo vía S. Por el lema anterior, sean K_1 y $K_2 \subset S$ componentes convexas con interior no vacío tales que: $x, v \in K_1$ y $\mathcal{U} \subset K_2$. Claramente estas dos componentes convexas son distintas, pero existe un punto $u \in intK_1 \cap intK_2$. También existe $z \in intK_2$ tal que x no ve a z. Sea, entonces Γ la poligonal en "L", $\Gamma = [x,u] \cup [u,z]$, y sea p el último punto de Γ (yendo de x hacia z) visible desde x. Claramente Γ (salvo x) está constituida por puntos interiores de S. Luego, un punto

$t \in (x,u)$ suficientemente cercano a x puede ver puntos de Γ más allá de p. Luego, x no es un peak de S. ❑

III.2. Construcciones básicas.

La idea que nos llevó a obtener la demostración del resultado principal es que para encontrar un punto z de no convexidad local cuyo inner stem se pueda separar del punto x (que no está en el mirador del conjunto) por un hiperplano debíamos hallar un punto que fuera un punto frontera de una cierta esfera incluida en el conjunto, y que por supuesto además fuera z de no convexidad local de S. Un hiperplano de apoyo de la esfera por tal z que dejara la esfera de un lado y al punto x del otro nos permitiría probar que el x no pertenece a la clausura de la cápsula convexa del inner stem de z. Justamente el hecho de tener la esfera y el hiperplano de apoyo por z asegura que la única forma de obtener un rayo saliente a través de z es que el rayo comience en algún punto del conjunto que esté del lado -determinado por H- de la esfera, ya que de no ser así el rayo "entraría" en la esfera y por lo tanto en el conjunto.

Necesitamos entonces hacer ciertas construcciones previas que luego utilizaremos en la demostración. Este parágrafo está destinado a ello.

<u>Definiciones.</u> Dado $S \subseteq \mathbf{R}^n$ y $\varepsilon > 0$ definimos

- $S_\varepsilon = B(S,\varepsilon) = \bigcup\{B(x,\varepsilon) / x \in S\}$ donde $B(x, \varepsilon)$ es la bola cerrada con centro en x y radio ε. Este conjunto se llama el *ε-paralelo exterior* de S.
- $S_{-\varepsilon} = B(S,-\varepsilon) = cl(CB(CS,\varepsilon))$ se llama el *ε-paralelo interior* de S.

Resulta inmediato el siguiente lema:

Lema II.2.1: *A, $M \subseteq R^n$, $\varepsilon > 0$, entonces $M \subseteq B(A, -\varepsilon)$ si y sólo si $B(M, \varepsilon) \subseteq A$.*

•

Basándonos en la hipótesis de nuestro problema asumimos que $S \subseteq \mathbf{R}^n$ es un dominio regular, $x \in S$ y que x no pertencece al mirador de S. Este hecho dice que existe algún punto $q \in S$ tal que x no ve a q vía S, o sea $x \notin st(q,S)$. Como la estrella de cualquier punto de S es un conjunto cerrado (lema I.2), luego sabemos que existe un punto del interior de S que no pertenece a la estrella de q, o sea $x' \in intS$ y $x' \notin st(q,S)$. Análogamente como $q \notin st(x,S)$ entonces existe $q' \in intS$ tal que $q' \notin st(x,S)$.

Luego, desde el principio suponemos -sin pérdida de generalidad- que x y q son puntos interiores de S. Ya que intS es conexo y abierto existe un arco de curva simple $\Omega \subseteq intS$ que conecta x y q.

Por medio de un argumento standard de compacidad podemos obtener $\varepsilon > 0$ tal que $\Omega_\varepsilon \subseteq intS$. El lema III.2.1 previo implica que $\Omega \subseteq S_{-\varepsilon}$ y, por lo tanto $x, q \in S_{-\varepsilon}$ pero ellos no se ven mutuamente vía $S_{-\varepsilon}$. Definimos la siguiente familia:

$\mathcal{F} = \{ \Lambda / \Lambda$ arco de curva simple que conecta x y q, $\Lambda \subset S_{-\varepsilon} \}$. Es una familia no vacía ya que hemos mostrado $\Omega \in \mathcal{F}$. Luego podemos elegir $\Gamma \in \mathcal{F}$ de longitud mínima. Siguiendo el argumento de Stavrakas (ver [17]) sabemos que existe un primer punto $z_1 \in lnc(S_{-\varepsilon})$ (yendo desde x hacia q) y un primer punto $z_2 \in lnc(S_{-\varepsilon})$ (yendo desde q hacia x) y que el primer y el último tramos de la curva son segmentos $[x, z_1]$ y $[z_2, q]$ respectivamente.

Las características geométricas de $S_{-\varepsilon}$ nos permiten asegurar la existencia de un punto interior a S, q', que no es visto por x, y tal que Γ admite la configuración: $\Gamma = [x, z_1) \cup \overline{\Gamma_1} \cup (z_2, q']$ donde $\overline{\Gamma_1}$ es un arco de curva no degenerado y distinto de un segmento. Sin pérdida de generalidad suponemos que q es un tal punto. Notar que podemos elegir a priori $\varepsilon > 0$ lo suficientemente chico de forma que $[x, z_1) \subseteq \mathrm{int}(S_{-\varepsilon})$ y $(z_2, q] \subseteq \mathrm{int}(S_{-\varepsilon})$ resultando de esta forma que $\overline{\Gamma_1}$ es el único arco de Γ enteramente incluido en $\mathrm{bdry}(S_{-\varepsilon})$. (*)

Ahora estudiaremos algunas propiedades de la curva Γ construida arriba.

Proposición III.2.2: *Consideramos la curva Γ construida arriba, entonces:*

a) $\overline{\Gamma_1} \subseteq \mathit{lnc}(S_{-\varepsilon})$.

b) Sea $p \in \mathit{bdry}(\Gamma_\varepsilon)$, y $c \in \Gamma$ tal que $p \in \mathit{bdry}(B(c, \varepsilon))$

b.1) Si $p \in \mathit{bdry}S$, entonces $p \in \mathit{lnc}S$.

b.2) Si $p \in \mathit{lc}S$, entonces $c \in \mathit{lc}(S_{-\varepsilon})$.

c) $(\overline{\Gamma_1})_\varepsilon \cap \mathit{bdry}S \subset \mathit{lnc}S$.

Dem. a) Tomemos $p \in \overline{\Gamma_1}$ y supongamos $p \in \mathrm{lc}(S_{-\varepsilon})$. Esto significa que existe $U = B(p,\delta)$ un entorno cerrado tal que $U \cap S_{-\varepsilon}$ es convexo. Sea *a* el primer punto de $\overline{\Gamma_1}$ sobre U y *b* el último punto (yendo desde x hacia q). Como $a, b \in U \cap S_{-\varepsilon}$ que es convexo, resulta $[a,b] \subset U \cap S_{-\varepsilon} \subset S_{-\varepsilon}$ y $\overline{\Gamma_1}$ no sería de longitud mínima.

b.1) Supongamos que $c \in \mathrm{lnc}(S_{-\varepsilon})$, entonces existen c_1 y c_2 lo suficientemente cercanos a c de forma que $[c_1, c_2]$ no está incluido en $S_{-\varepsilon}$. Si tomamos U cualquier entorno de p, tomemos los puntos $p_i \in \mathrm{bdry}(B(c_i, \varepsilon)) \cap \mathrm{bdry}S$ $(i = 1, 2)$. Se ve fácilmente que $[p_1, p_2]$ no puede estar incluido en S ya que esto contradiría la afirmación inicial.

b.2) Si $p \in \mathrm{bdry}(\Gamma_\varepsilon)$, existe $c \in \Gamma$ tal que $p \in \mathrm{bdry}(B(c,\varepsilon))$ y si $p \in \mathrm{lc}S$, entonces $c \in \mathrm{lc}(S_{-\varepsilon})$ y $c \in \mathrm{bdry}(S_{-\varepsilon})$, pero entonces debido a (*) $c \in \overline{\Gamma_1}$ y usando a) $c \in \mathrm{lnc}(S_{-\varepsilon})$ lo cual es absurdo. Luego $p \in \mathrm{lnc}S$.

c) Es inmediato por a) y b). ❑

Notaremos $T = \Gamma_{\varepsilon} = B([x, z_1),\varepsilon) \cup \overline{(\Gamma_1)}_{\varepsilon'} \cup B((z_2, q],\varepsilon)$ que es un "tubo" incluido en S, donde $B([x, z_1), \varepsilon)$ y $B((z_2, q], \varepsilon)$ son cilindros totalmente incluidos en intS, y $\overline{(\Gamma_1)}_{\varepsilon} \cap$ bdryS es un arco de curva formado por puntos de no-convexidad local de S.

III.3. El resultado principal.

El lema de Krasnoselsky (teorema I.11) nos provee una herramienta de "separación" en el sentido que, bajo las hipótesis del mismo, asegura la existencia de un punto cuya estrella queda separada un cierto punto del conjunto. También se obtiene un hiperplano separador. Nuestro problema es en cierto sentido similar, por un lado necesitamos construir un hiperplano y encontrar un punto de no convexidad local de forma que el hiperplano separe a un cierto punto del conjunto del inner stem de este punto de no convexidad local. Claramente, si pudiéramos separar la estrella del punto de no convexidad local del punto sería por demás suficiente. El problema que surge al intentar usar el lema de Krasnoselsky es que en él no se puede asegurar que el punto que se obtiene sea de no convexidad local. Nosotros en esta parte del trabajo usaremos el lema de Krasnoselsky en un conjunto particular, y las herramientas que hemos construido antes nos permitirán asegurar que el punto de contacto del hiperplano separador será de no convexidad local

Teorema III.3.1: *$S \subseteq R^n$ $(n \geq 2)$ un hunk, $x \in S$.*

Si x es un punto de S que no pertenece al mirador de S entonces existe z, un punto de no convexidad local de S tal que x no pertenece a la clausura de la cápsula convexa del inner stem de z en S.

Dem. Tratamos de encontrar un punto z de no convexidad local de S y un hiperplano H por z que separe x del inner stem de z en S, o sea, ins(z,S) $\subseteq H^+$, y x $\in H^-$ donde H^+ y H^- son los semiespacios cerrado y abierto respectivamente determinados por H. Inmediatamente tendremos la tesis.

Como hicimos en el parágrafo anterior podemos considerar x, q puntos interiores de S tales que x no ve a q vía S y $\Gamma = [x, z_1) \cup \overline{\Gamma_1} \cup (z_2, q]$ la curva de longitud mínima construida para un cierto $\varepsilon > 0$. Notamos además $T = B(\Gamma, \varepsilon)$.

Como x no ve q vía S, x no ve q vía T, luego x $\notin$ kerT, y sabemos por III.1.2 que x no es un peak de T. Luego $\forall$ U entorno de x, existe algún punto x'$\in$ U $\cap$ T que verifica: x' ve -vía T- algún punto que x no ve. Tomemos U = B(x,ε) y sea x' $\in$ B(x,ε) $\cap$ T un punto tal que st(x',T) no está incluida en st(x,T); x' $\in$ intS por construcción.

Elegimos p $\in \Gamma$ el último punto de Γ visible desde x (yendo desde x hacia q), y s $\in \Gamma$ el último punto de Γ visible desde x' (yendo desde x' hacia q); p es un punto de visibilidad crítica de S y s es un punto de visibilidad crítica de x'. Esto nos permite asegurar que en los tramos (x,p) y (x',s) debe haber puntos de no convexidad local, es decir, existen puntos t $\in$ (x,p) $\cap$ lncS e y $\in$ (x',s) $\cap$ lncS (Teorema II.2.5).

Existe c $\in \Gamma$ tal que B(c,ε) es la última bola enteramente vista desde x (yendo desde x hacia q), t $\in$ bdryB(c,ε). Análogamente existe d $\in \Gamma$ tal que B(d,ε) es la última bola enteramente vista desde x' (yendo desde x' hacia q), y $\in$ bdryB(d,ε). Notar que debido a la construcción c $\neq$ d incluso aunque p = s.

Consideramos dos casos:

(i) t = y (ver fig.1) (En esta figura $c_1 = z_1$, $d_1 = z_2$)

x ve y ya que x ve t pero no ve B(d,ε) completamente, entonces la recta L(x,y) a través de x e y es tangente a B(c,ε) por y pero atraviesa B(d,ε) en y. Sea H el hiperplano tangente a B(d,ε) por y. Se verifica que L(x,y) no está incluida en él, luego $x \notin H$. Si notamos H^+ al semiespacio cerrado determinado por H en el cual B(d,ε) está incluida, tenemos $x \in H^-$. El z buscado es t.

(ii) $t \neq y$ (ver fig.2)

Sea $\Gamma_1 \subset \overline{\Gamma_1}$ el subarco de $\overline{\Gamma_1}$ desde z_1 hasta d, y T' = $B([x,z_1) \cup \Gamma_1, \varepsilon)$. Por construcción x no ve a y -vía T'- entonces, aplicando el Lema de Krasnoselsky a x e y en T' tenemos que existe un punto z en bdryT'y un hiperplano H_0 a través de z que separa x de st(z,T'). Es claro que este hiperplano separa x de ins(z,T').

Tenemos t, y ∈ bdryT' ∩ bdryS, entonces usando III.2.2 (b.1) el arco $\Gamma_2 \subset \overline{\Gamma_1}$ que conecta c y d verifica $\Gamma_2 \subset \mathrm{Inc}(S_{-\varepsilon})$ y por lo tanto $B(\Gamma_2, \varepsilon) \cap \mathrm{bdry}S \subset \mathrm{Inc}S$.

Cuando usamos el Lema de Krasnoselsky para x e y, esto significa "empujar" (en la dirección de x hacia y) una bolita suficientemente pequeña externa a T', obtenemos un cierto punto z que yace en bdryT'∩ bdryS el cual es - debido a III.2.2 - un punto de no-convexidad local de S.

Entonces hemos encontrado un hiperplano H_0 que separa x de ins(z,T'), (supongamos $x \in H_0^-$, ins(z,T') $\subseteq H_0^+$) y z ∈ IncS. Entonces H_0 separa x de ins(z,S) ya que: si tomamos u ∈ ins(z,S) notar que:

a) si $u \in T' \Rightarrow u \in H_0^+$

b) si u $\notin$ T' consideremos v $\in$ R(u $\to$ z) $\cap$ bdryT' (el primer punto desde u hacia z) y, como R(u $\to$ z) es un rayo saliente por z, R(v $\to$ z) es un rayo saliente por z, entonces v $\in$ ins(z,T') $\Rightarrow$ v $\in$ H_0^+, luego u $\in$ H_0^+. ❑

Corolario III.3.2: *$S \subseteq R^n$ ($n \geq 2$) un hunk, entonces el mirador de S se puede obtener de la forma $kerS = \cap \{ cl(conv(ins(t,S))) / t \in IncS\}$*

Dem. $\subseteq$) inmediato por teorema II.2.8.

$\supseteq$) es teorema III.3.1. ❑

III.4. Teoremas tipo Krasnoselsky.

Habiendo obtenido la caracterización del mirador por medio de conjuntos convexos, se obtienen de forma inmediata los siguientes resultados.

Teorema III.4.1: *Sea $S \subseteq R^n$ un hunk no convexo tal que para cada conjunto M, $M \subseteq IncS$ de k puntos (con $k \leq n$) existe un punto $p \in S$ que ve cada punto de M y emana rayos salientes a través de tales puntos. Entonces S es estrellado.*

Dem. Es inmediato aplicando el Teorema de Helly (I.9) a la familia siguiente:

$\mathcal{F}$ = { cl conv (ins(y,S)) / y $\in$ IncS } y usando corolario III.3.2. ❑

Teorema III.4.2: *Sea $S \subseteq R^n$ un hunk no convexo y $\delta > 0$ tal que para cada conjunto M de cardinal k, $M \subseteq IncS$ (con $k \leq n+1$) existe un disco D de radio δ incluido en la estrella de* *cada punto de M, y tal que cada punto de D emana un rayo saliente a través de cada punto de M. Entonces kerS incluye un disco de radio δ.*

Dem. Es inmediato usando el Teorema de Klee (I.13) y el corolario III.3.2. ❑

Teorema III.4.3: *Sea $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un hunk no convexo tal que lncS es finito y para cada conjunto M de cardinal k, $M \subseteq$ lncS (con $k < n + 1$) existe un segmento I incluido en la estrella de cada punto de M, y tal que cada punto de I emana rayos salientes a través de cada punto de M. Entonces kerS tiene dimensión por lo menos 1.*

Este teorema sólo tiene sentido en el caso n = 2, probado por F. Toranzos en [23], ya que M. Breen probó en [4] que si lncS es finito, entonces S es plano.

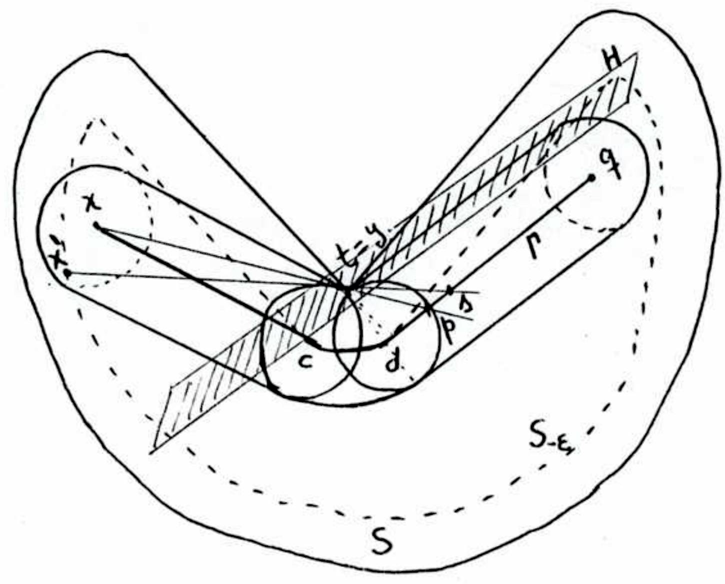

H
x
x'
t=y
q
r
s
p
c
d
$S_{-\varepsilon}$
S

Fig. 1

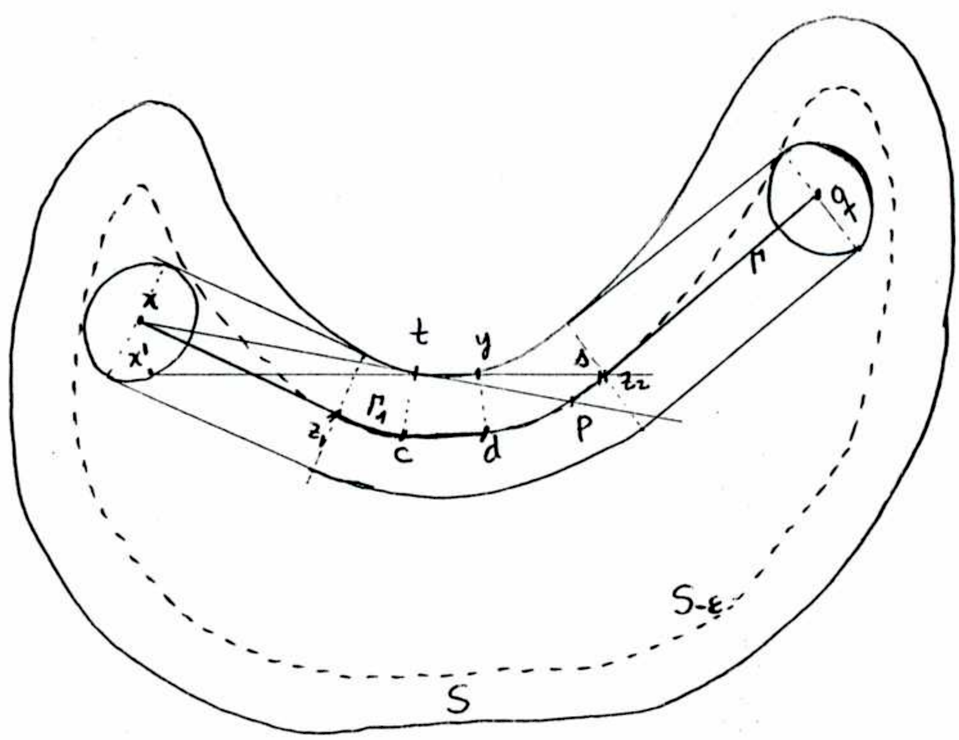

x
x'
t
y
s
z_2
q
r
r_1
z_1
c
d
p
$S_{-\varepsilon}$
S

Fig. 2

CAPÍTULO IV: *Visibilidad externa.*

Introducción.

Cuando nos referimos a la *visibilidad externa* respecto a un cierto conjunto cerrado S queremos significar la visibilidad referida a los puntos de su complemento o bien a la clausura de su complemento. Esta clase de estudio geométrico aparece de manera bastante natural en el planeamiento de movimientos de servo-mecanismos y robots cuando se intentan describir trayectorias de movimientos en campos con obstáculos.

Empezamos aquí estudiando la propiedad de la semirrecta definida por N. Stavrakas. Un conjunto tiene la propiedad de la semirrecta si desde cualquier punto del complemento es posible emitir una semirrecta que tenga intersección vacía con el conjunto. En este contexto, el conjunto S tiene el papel de "obstáculo visual". Observemos que si S se obtuviera como una unión finita de convexos disjuntos, estaríamos en la situación de partida de trabajos sobre "iluminación de recintos" o "visibilidad con obstáculos" como describimos en la introducción.

El planteo aquí será estudiar los "obstáculos", considerados opacos. Es decir por ejemplo, sabiendo que un cierto conjunto conexo no necesariamente convexo (el obstáculo) tiene la propiedad de la semirrecta, pretendemos analizar propiedades sobre el obstáculo mismo, de forma de conocer características sobre él que garanticen la visión en su complemento. Conectamos aquí la visibilidad externa de un cierto conjunto S (en particular la propiedad de la semirrecta) con nuevas propiedades sobre el conjunto que involucran puntos de S en lugar de puntos de su complemento.

IV.1. Propiedad de la semirrecta.

Definiciones.

- La *visibilidad de x en* un cierto conjunto *S* significa la estrella de x en S.
- La *visibilidad externa de S* es el estudio de la visibilidad en el complemento de S, o bien en la clausura del complemento de S.
- S tiene la *propiedad de la semirrecta* (ps) (Stavrakas ([18])) si para cada punto $x \in CS$ existe una semirecta con origen en x, y tal que tenga intersección vacía con S.

Como es bien sabido los convexos abiertos o cerrados son no acotados si y sólo si incluyen semirrectas desde cada uno de sus puntos. El siguiente resultado es una extensión de esta propiedad a estrellados no acotados debida a B. Ambrosio. Dado que retomaremos estos resultados en el capítulo V, incluiremos allí la demostración de la caracterización recién mencionada de los convexos no acotados (propiedad V.2.1).

Lema IV.1.1: *Sea S un conjunto cerrado, estrellado y no acotado de* $\boldsymbol{R}^n$, *y x un punto radiante de S. Entonces existe una semirrecta con origen en x e incluida en S.*

Dem. Sea x un punto radiante de S, o sea $x \in \ker S$. Para cada dirección $u \in \Omega_n$ se puede definir $\rho(u) = \sup \{ \lambda > 0 / x + \lambda.u \in S \}$. Supongamos que S no contiene semirrectas con origen en x. Entonces, para todo $u \in \Omega_n$ vale $\rho(u) < +\infty$. Ahora bien, como S no es acotado, $\forall k \in \mathbf{N}$, $\exists u_k \in \Omega_n$ tal que $\rho(u_k) > k$. Como Ω_n es compacta, existe al menos un punto u_0 de acumulación de la sucesión $\{u_k\}$. Pero $\rho(u_0) = p < +\infty$. Sea $z_k = x + 2pu_k$. A partir de un cierto índice k en adelante la sucesión $\{z_k\}$ está en S, y el punto $z_0 = x + 2pu_0$ es un punto de acumulación de dicha sucesión. Pero por construcción z_0 no pertenece a S. Esto contradice el hecho de ser S cerrado. Entonces existirá al menos un $u \in \Omega_n$ tal que $\rho(u) = +\infty$. Entonces el conjunto siguiente es una semirrecta con origen en x e incluida en S $\{ y \in \mathbf{R}^n / y = x + \lambda u \text{ con } \lambda \in \mathbf{R}^+ \}$.❑

Definiciones.

- Dado $S \subset \mathbf{R}^n$, $p \in S$, diremos que S tiene *visibilidad acotada en p* si el conjunto st(p,S) es acotada.
- S se dice que *tiene visibilidad acotada* si tiene visibilidad acotada en cada uno de sus puntos.

Los siguientes resultados de B. Ambrosio nos dan información de partida para el estudio de estos temas.

Lema IV.1.2: *$S \subset \mathbf{R}^n$, cerrado. Son equivalentes:*

(i) S tiene visibilidad acotada. (ii) S no incluye semirrectas.

Dem. (i) $\Rightarrow$ (ii): Si S incluyera una semirrecta, la estrella del origen de dicha semirrecta no sería acotada, contradiciendo (i).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Para todo $x \in S$, st(x,S) es un conjunto cerrado, estrellado y que no contiene semirrectas. Por el contrarrecíproco del lema IV.1.1 resulta que st(x,S) es acotada. ❑

Corolario IV.1.3: *$K \subset \mathbf{R}^n$, cerrado y convexo. K no es acotado si y sólo si K contiene al menos una semirrecta con origen en cada uno de sus puntos.*

Dem. Es evidente que si K contiene una semirrecta no es acotado. Recíprocamente, como K es convexo kerK = K. Aplicando el lema IV.1.1 al conjunto K resulta la existencia de una semirrecta con origen en cada punto de K incluida en K. ❑

Teorema IV.1.4: *$S \subset R^n$, cerrado, finitamente estrellado y de visibilidad acotada. Entonces S es estrellado y compacto.*

Dem. Consideremos la familia $\mathcal{F} = \{ st(x,S) / x \in S \}$. Como S es de visibilidad acotada y cerrado, cada miembro de $\mathcal{F}$ resulta compacto. Pero como S es finitamente estrellado, toda subfamilia finita de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía. Por la propiedad de intersección finita de los conjuntos compactos, la intersección de todos los miembros de $\mathcal{F}$ resulta no vacía. Es decir, S es estrellado. Por otra parte, si x es un punto radiante de S, resulta que S = st(x,S) que es un compacto. ❑

Definiciones.

- Sea $S \subset \mathbf{R}^n$, un punto $x \in S$ se dice que es *k-extremal* de S si dado cualquier simplex D (k+1)- dimensional, con $D \subset S$, se tiene que $x \notin$ relintD. Notaremos ext(S) al conjunto de los puntos (n - 2)-extremales.

Como es sabido ([11]), para un conjunto $S \subset \mathbf{R}^n$ ($n \geq 2$) compacto y estrellado, el mirador de S se puede caracterizar como la intersección de las estrellas de sus puntos (n - 2)-extremales. Stavrakas ([18]) se planteó por un lado qué condiciones deberían pedirse sobre el conjunto S de forma que sea verdadero el recíproco, y por otra parte si la hipótesis de "estrellado" podía debilitarse. Las respuestas correspondientes vienen dadas en los siguientes teoremas debidos a Stavrakas.

Teorema IV.1.5: *Dado $S \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) compacto y tal que $\bigcap\{st(x,S) / x \in extS\} \neq \emptyset$. Entonces son equivalentes:*

(1) S tiene la propiedad de la semirrecta

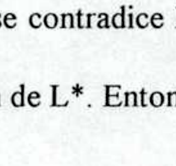
(2) $KerS = \bigcap\{st(x,S) / x \in extS\} \neq \emptyset$

Dem. (2) $\Rightarrow$ (1). Inmediato ya que por (2) S es estrellado, y todo estrellado tiene la propiedad de la semirrecta.

(1) $\Rightarrow$ (2). Sea $y \in \bigcap\{st(x,S) / x \in extS\}$, probaremos que $y \in kerS$. Si no fuera así, existiría z $\in$ S tal que $[y,z] \not\subset S$. Sea $a \in [y,z] \setminus S$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que a es el origen *O*. Por hipótesis existe una semirrecta L: $\{ \lambda.b / \lambda \geq 0\}$con $L \cap S = \emptyset$. Sea Q el subespacio bidimensional generado por *y* y *b*. Rotamos L en Q de forma que el ángulo entre L y L': $\{ \lambda.z / \lambda \geq 0\}$ (que ya es menor que π) decrezca. Se cesa la rotación al intersecar S y llamamos L* a la semirrecta rotada. Notar que $L^* \cap S$ es compacto y luego existe $\theta = \sup\{ \|x\| / x \in L^* \cap S \}$. Sea $x \in L^* \cap S$ tal que $\|x\| = \theta$. Afirmamos que x es un punto extremal de S. Si no fuera así, $x \in$ relintD, donde D es un simplex (d-1)-dimensional de S. Como $x \in D \cap Q$, $\dim(D \cap Q) \geq 1$. Para cada $z \in D$, $z \neq x$ sea el segmento $[z,e_z]= \lambda.(z-x)+z / \lambda \geq 0\} \cap D$, y notemos que $x \in (z, e_z)$. Sea $w \in D \cap Q$, $w \neq x$. Notar $[w, e_w] \subset Q$. Ahora, si $[w, e_w] \subset L^*$ se contradice la definición de x ya que $x \in (w, e_w)$ y si $[w, e_w] \not\subset L^*$ se contradice la definición de L*. Entonces $y \in kerS$. ❑

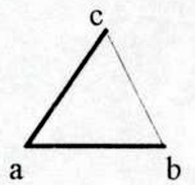
Observemos que en la implicación (1) $\Rightarrow$ (2) no se puede eliminar la hipótesis de que S tenga la propiedad de la semirrecta, como puede notarse a través del siguiente ejemplo:

S un triángulo en el plano:



a, b y c son puntos extremales de S, y vale que la intersección de las estrellas de ellos es no vacía, pues:

st(a,S) es:



Resulta entonces, que $\bigcap\{st(x,S) / x \in extS\} = \{a, b, c\}$ y por lo tanto no vacío, sin embargo S no tiene la propiedad de la semirrecta.

Corolario IV.1.6: *Dado $S \subset \mathbb{R}^n$ ($n \geq 2$) compacto. Son equivalentes:*

(1) S es estrellado.

(2) $\bigcap\{st(x,S) / x \in extS\} \neq \emptyset$ y S tiene la propiedad de la semirrecta.

Dem. Inmediato del teorema IV.1.5. ❑

Empezamos con algunos resultados sobre la visibilidad en el complemento de S:

Lema IV.1.7: *Si $S \subset \mathbb{R}^n$ es un hank, entonces S tiene la propiedad de la semirrecta si y sólo si para cada punto x del complemento de S se verifica que la estrella de x -en CS- es no acotada.*

Dem. $\Rightarrow$) Sea $x \in CS$, consideramos el rayo R con vértice en x tal que $R \cap S = \emptyset$. $R \subseteq CS$ e inmediatamente $R \subseteq st(x,CS)$, luego la st(x,CS) es no acotada.

$\Leftarrow$) Supongamos que existe $x \in CS$ tal que para cada semirrecta R con vértice en x se verifica que $R \cap S \neq \emptyset$. Tomamos un entorno U tal que $S \subseteq U$, entonces $K = st(x,CS)$ es acotado ya que verifica $K \subseteq U$ pues de otra forma podríamos considerar la semirrecta

$R = [x,w] \cup R(xw \rightarrow)$ donde w es un punto $w \neq x$, $w \in K$, $w \notin U$ y tal R contradice la suposición inicial. ❑

Definición.

- Una *componente conexa* de S es una clase de equivalencia para la siguiente relación (de equivalencia): $x \sim y$ si y sólo si existe un subconjunto conexo de S que contiene a x y a y.

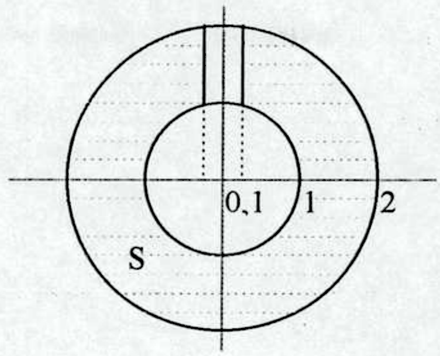
Las componentes conexas de S se pueden caracterizar como aquellos subconjuntos disjuntos de S cuya unión da S y tal que cada subconjunto conexo de S interseca a uno y sólo uno de estos conjuntos.

Lema IV.1.8: *$S \subset \mathbf{R}^n$ un hunk. Si S tiene la propiedad de la semirrecta, entonces CS no tiene componentes conexas acotadas.*

Dem. Supongamos que existe $A \subset CS$ una componente conexa acotada. Sea $a \in A$, y consideremos st(a,CS). Esta estrella es conexa ya que claramente es arco conexa y es no acotada por hipótesis. Como ella interseca a A debe entonces verificar $st(a,CS) \subset A$ lo cual es absurdo. ❑

Notar que la recíproca es falsa. Consideremos, por ejemplo el conjunto plano $S = S_1 \setminus S_2$ donde S_1 y S_2 son los siguientes:

$S_1 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / 0 < 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4 \}$; $S_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / |x| < 0.1; y \geq 0\}$.



IV.2. Propiedad de la frontera radiante.

Definiciones.

- Notaremos $\Omega_n = \{x \in \mathbf{R}^n / ||x|| = 1\}$.
- Dado $A \subset \mathbf{R}^n$ definimos la *cápsula algebraica de A* como el siguiente conjunto:

  ${}^aA = \{y \in \mathbf{R}^n$ / existe $x \in A$ tal que $[x,y) \subset A\}$
- Consideramos $S \subseteq \mathbf{R}^n$ cerrado tal que ${}^aS = S$ and ${}^aCS = clCS$ y diremos que S tiene la *propiedad de la frontera radiante* (pfr) si y sólo si el complemento de S no tiene componentes conexas acotadas y además si para cada punto x de la frontera de S existe una semirrecta con origen en x y disjunta con el interior de S.

Proposición IV.2.1: *Sea $S \subseteq \mathbf{R}^n$ un hunk, ${}^aS = S$ y ${}^aCS = clCS$. Si S tiene la propiedad de la semirrecta, entonces S tiene la propiedad de la frontera radiante.*

Dem. Supongamos que S no tiene la propiedad de la frontera radiante entonces se presentan dos alternativas: (i) CS tiene una componente conexa acotada, (ii) existe p un punto frontera de S tal que tomando cualquier semirrecta R(p) con origen en p, se verifica que R(p) interseca intS. Para el primer caso, usando lema IV.1.8 resulta que S no tiene ps. Para el segundo caso, consideremos $K = st(p,clCS)$. Se puede chequear con un argumento standard que bajo estas hipótesis K es acotado. Mostraremos la existencia de un punto x en $CS \cap K$ tal que $st(x,CS)$ es acotada. Debido al lema IV.1.7 esto será absurdo. Definimos el siguiente subconjunto propio de K, $A = \{ x \in K / \exists\, v \in \Omega_n \text{ tal que } \{ \lambda v + x / \lambda \geq 0 \} \cap intS = \emptyset \}$. Es inmediato por el teorema IV.1.1 que si $x \in K \setminus A$ entonces $st(x,CS)$ es acotada. A está propiamente incluido en K ya que $p \in K$ pero $p \notin A$ (de otra forma $\exists\, v_0 \in \Omega_n$ tal que $\{\lambda.v_0 + p / \lambda \geq 0\} \subseteq K$, lo cual implica K no acotada). Probamos ahora que A es un cerrado: sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente incluida en A, y sea $\lim x_n = x$. Como $x_n \in A$, $\exists\, v_n \in \Omega_n / \{\lambda.v_n + x_n / \lambda \geq 0\} \cap intS = \emptyset$ entonces tenemos una sucesión $\{v_n\}$ en Ω_n y por compacidad resulta que $\{v_n\}$ (o una subsucesión) converge a un cierto v_o de Ω_n. Se verifica fácilmente que $\{\lambda.v_o + x / \lambda \geq 0 \} \cap intS = \emptyset$. Entonces $x \in A$, y A es cerrado. Si $A = \emptyset$ consideremos $x \in intK$, $x \neq p$. Tal $x \notin A$. (tal x existe pues ${}^aCS = clCS$). Si $A \neq \emptyset$, como A es cerrado, existe un entorno U de p tal que $(U \cap K) \cap A = \emptyset$. Pero $p \in clCS$, entonces $p \in {}^aCS$ entonces existe $w \in CS$ tal que $[w,p) \subset CS$. Tomamos $x \in [w,p) \cap U$. Tal x no pertenece a A. Luego, en ambos casos $st(x,CS)$ es acotada. ❑

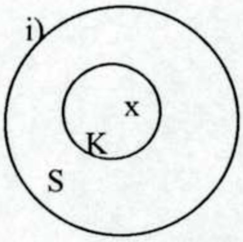
Proposición IV.2.2: *Sea S un hunk plano, ${}^aS = S$ y ${}^aCS = clCS$. Si S no tiene la propiedad de la semirrecta, entonces S no tiene la propiedad de la frontera radiante.*

Dem. Usando lema IV.1.7, existe $x \in CS$ tal que $K = st(x,CS)$ es acotada. Probaremos que: existe una componente conexa acotada de CS o bien existe p un punto de S tal que cualquier semirrecta con origen en él interseca a intS. Consideremos el siguiente conjunto: $A = \{ y \in clK / \exists\, v \in \Omega_2 \text{ tal que } \{ \lambda.v + y / \lambda \geq 0\} \cap intS = \emptyset\}$. Naturalmente aparecen cuatro posibilidades: (i) $A = \emptyset$; (ii) A propiamente incluido en clK con $x \in A$; (iii) A propiamente incluido en clK ($x \notin A$, $A \neq \emptyset$); y (iv) A = clK (ver figuras a continuación de la demostración).

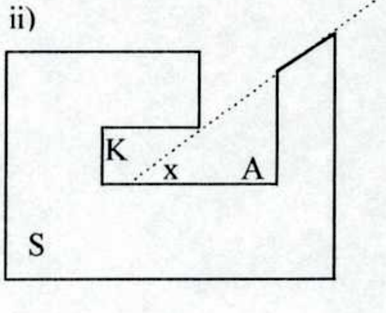
Consideremos cada una de ellas: (i) si tomamos $p \in$ bdryK $\cap$ bdryS, un tal punto verifica que cualquier rayo por él interseca a intS ya que de no ser así, p pertenecería a A lo cual es absurdo. (ii) Probamos primero que si existe $a \in A$, $a \neq x$, entonces el segmento completo [a,x] está incluido en A: el hecho que $a \in A$ implica que $[a,x] \subset$ clCS. Como a y x pertenecen a A, esto implica la existencia de direcciones v_0 y v_1 en Ω_2 tales que R_0: $\{\lambda.v_0 + a \,/\, \lambda \geq 0\}$ y R_1: $\{\lambda.v_1 + x \,/\, \lambda \geq 0\}$ están incluidas en clCS. Consideremos la poligonal $P = R_0 \cup [a,x] \cup R_1$ que está incluida en clCS. Supongamos que $R_0 \cap R_1 = \emptyset$ y notemos H_1 y H_2 las regiones abiertas determinadas por P. Luego el plano resulta una unión disjunta de P, H_1 y H_2. Podemos suponer -sin pérdida de generalidad- que intS está incluido en H_1 (como intS es conexo, estará contenido exclusivamente en uno de los H_i, i = 1, 2). Entonces si tomamos $t \in [a,x]$ se ve fácilmente que siempre existe una semirrecta con origen en t incluida en H_2. Si ocurre que $R_0 \cap R_1 = \{w\}$, el plano resulta una unión disjunta de P y tres regiones abiertas determinadas por P, a saber H_2: la única región acotada, H_1: la única región no acotada tal que [a,x] está incluida en su frontera y H_3: la región no acotada que verifica que [a,x] no está incluida en su frontera. Nuevamente intS estará incluido exclusivamente en una de las regiones H_i (i = 1, 2, 3). Si intS $\subset H_2$ ó intS $\subset H_3$ es inmediato que para cada t en [a,x] podemos elegir una semirrecta con origen en t que yace en un semi-plano disjunto de intS; o en el caso que intS $\subset H_1$ consideramos $R(t \to w)$. En los tres casos la semirrecta considerada no interseca intS, y por lo tanto t pertenece a A. Ahora bien, que A esté propiamente incluido en clK implica que existe $c \in$ clK tal que $c \notin A$. Consideremos el primer punto t (yendo desde x hacia c) tal que $t \in$ bdryS $\cap$ $R(x \to c)$ que debe existir pues de otra forma el rayo $R(x \to c)$ haría que K fuera no acotada. Por las consideraciones anteriores, $t \notin A$ ya que $c \in [t, x]$ y $c \notin A$.

(iii) Que A esté propiamente incluido en clK significa que podemos tomar $a \in A$, $a \neq x$. Con un argumento análogo al anterior podemos considerar el primer punto t (yendo desde a hacia x) $t \in \text{bdry}S \cap R(a \rightarrow x)$ y tal t no pertenece a A. (iv) Mostraremos que K es una componente conexa de CS y como es acotada resulta la tesis. En este caso existe una semirrecta $R_v(x)$: $\{ \lambda.v + x \,/\, \lambda \geq 0 \}$ tal que $R_v(x) \subset \text{clCS}$ pero el hecho que K es acotada significa que $R_v(x)$ no puede estar completamente incluida en CS luego, existe $u \in R_v(x) \cap \text{bdry}S$. Notar que no podría existir otra dirección w, $(w \neq v)$ tal que $R_w \subset \text{clCS}$ pues de ser así si consideramos la poligonal $P = R_w \cup R_v$ usando un argumento análogo al anterior podríamos elegir una nueva dirección z tal que $R_z \subset CS$. Nuevamente es fácil ver que si $a \in A$, $(a \neq x)$ la única semirrecta con origen en a que no interseca intS debe pasar por u. Como claramente K es conexo debe existir $C \subset CS$, una componente conexa de CS que contenga a K. Como C resulta abierto y por lo tanto arco conexo, si existe $c \in C$ tal que $c \notin K$ podemos considerar un arco Γ que une x con c, $\Gamma \subset CS$; pero la única forma de "abandonar" K es pasando por u lo cual es absurdo. Luego K = C. ❑

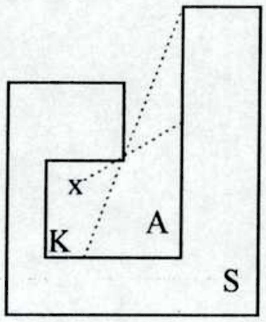
i)



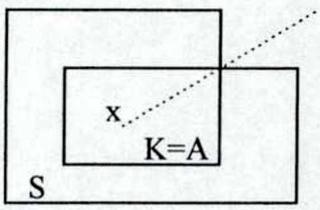
ii)



iii)



iv)



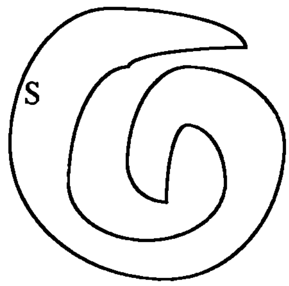
Teorema IV.2.3: *Sea S un hunk plano, $^{a}S = S$ y $^{a}CS = clCS$. S tiene la propiedad de la semirrecta si y sólo si S tiene la propiedad de la frontera radiante.*

Dem. Proposiciones IV.2.1 y IV.2.2 ❑

IV.3. Conexión con la emisión de rayos salientes.

En este parágrafo intentamos conectar la propiedad de la semirrecta con la emisión de rayos salientes. Para un conjunto plano S probaremos que si S tiene la propiedad de la semirrecta entonces para cada punto frontera x de S se verifica que el inner stem de x es no trivial. Definiremos el inner stem fuerte de un punto frontera de S como un cierto subconjunto del inner stem del mismo, y probaremos que éste es no trivial. La recíproca es falsa como podemos ver si tomamos el siguiente hunk plano S: $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \ / \ 0 < \alpha \leq x^2 + y^2 \leq \beta\}$ (notar que

$^{a}S = S$ y $^{a}CS = clCS$). Todo punto frontera de la circunferencia interior tiene inner stem no trivial, pero S no tiene la propiedad de la semirrecta. También se pueden encontrar contraejemplos de la misma afirmación donde el complemento del conjunto no tenga componentes conexas acotadas, por ejemplo:



Definiciones previas.

Dados A y B subconjuntos de $\mathbf{R}^n$ notaremos

- $A + B = \{a + b / a \in A, b \in B\}$ la suma de Minkowski
- $\lambda.A = \{\lambda.a / a \in A\}$, $(\lambda \in \mathbf{R})$
- $A - B = A + (-1).B$.
- $C \subset \mathbf{R}^n$ es un *cono con vértice a* si $\forall\ \lambda \in \mathbf{R}$, $\lambda > 0$ se tiene que $\lambda.(C - \{a\}) \subset C - \{a\}$.
- Dado $A \subset \mathbf{R}^n$, $a \in A$ definimos I(A,a) el *cono inscripto en A desde a* como el cono formado por $\{a\}$ y toda semirrecta incluida en A teniendo como origen a a.
- Consideramos I(clCS,p) y definimos el *conjunto de direcciones externas a S desde p* como: $exd(S,p) = [I(clCS,p) - \{p\}] \cap \Omega_n$ donde $p \in bdryS$.

Proposición IV.3.1: *1) $A \subset \mathbf{R}^n$ cerrado, $a \in bdryA$, entonces I(A,a) es un cono cerrado.*

2) $S \subset \mathbf{R}^2$ hunk, $p \in bdryS$ entonces:

a) exd(p,S) es conexo por arcos.

b)si $p \in bdry(convS)$, entonces exd(p,S) contiene una semicircunferencia de Ω_2

c) si $p \in int(convS)$, entonces $I(clCS,p)$ es un cono convexo y $exd(p,S)$ es un arco cerrado más corto que una semi-circunferencia.

Dem. 1) Resulta fácilmente ya que A es cerrado.

2)a) Supongamos que existen dos direcciones externas v_1 y v_2 en exd(p,S), $v_1 \neq v_2$ tales que ambos arcos determinados por ellos no están completamente incluidos en exd(p,S). Entonces si notamos L_i: $\{\lambda.v_i + p / \lambda \geq 0\}$ (i = 1, 2) en ambas regiones determinadas por $L_1 \cup L_2$ deben existir puntos interiores de S que denotamos x_1 y x_2. Notar que $L_i \subset clCS$ y $p \in bdryS$, luego no hay forma de conectar x_1 con x_2 con un arco incluido completamente en intS lo cual es absurdo.

2)b) Si $p \in bdry(convS)$ existe L una recta por p que es de apoyo de convS entonces si L^+ y L^- denotan los semiplanos cerrados determinados por L tenemos que si $S \subset L^+$ entonces $L^- \subset I(clCS,p)$. Luego la afirmación es inmediata.

2)c) Como $p \in int(convS)$ ninguna recta L por p deja convS en uno de los semi-planos determinados por L, entonces el cono I(clCS,p) está propiamente incluido en uno de los semiplanos. Luego, usando parte a), resulta que el cono es convexo, entonces exd(p,S) verifica la tesis. ❑

Mostraremos en un ejemplo posterior un conjunto en $\mathbf{R}^3$ donde el item 2)a) no se verifica. Esta es una de las razones por las cuales trabajamos en el plano.

<u>Definición.</u>

- Consideremos ahora el conjunto J(A,a) formado por {a} y toda semirrecta con origen en a y dirección opuesta a aquellas direcciones que componen I(A,a). Definimos el *inner stem fuerte de p en S* ($p \in bdryS$) como el conjunto: sins(p,S) = $J(clCS,p) \cap st(p,S)$.

Notar que resulta de inmediato que sins(p,S) $\subset$ ins(p,S).

Teorema IV.3.2: *Sea S un hunk plano, ^aS = S y ^aCS = clCS. S tiene la propiedad de la semirrecta si y sólo si para cada p $\in$ bdryS se tiene que sins(p,S) es no trivial y el complemento de S no tiene componentes conexas acotadas.*

Dem. $\Leftarrow$) Probaremos que S tiene la propiedad de la frontera radiante, luego la tesis seguirá por teorema IV.2.3. Sabemos que existe un punto x distinto de p tal que x $\in$ J(clCS,p) $\cap$ st(p,S). El hecho que x $\in$ J(clCS,p) implica que x pertenece a una cierta semirrecta $R_{-v}(p)$ con origen en p y alguna dirección -v tal que $R_v(p)$ verifica que ésta no interseca intS. Este resultado junto con la hipótesis que CS no tiene componentes conexas acotadas llevan a la tesis.

$\Rightarrow$) Si S tiene la ps, entonces tiene la pfr como se vio en teorema IV.2.3, luego en particular CS no tiene componentes conexas acotadas. Entonces tenemos que probar que cada punto frontera de S verifica que su inner stem fuerte es no trivial. Consideremos dos casos:

(a) p $\in$ bdry(convS) y (b) p $\in$ int(convS).

(a) Dado cualquier punto x en la estrella de p en S, distinto de p (tal punto existe pues ^aS = S) se verifica que R(xp $\rightarrow$) no interseca intS ya que existe L una recta de apoyo de convS por p. Esto significa que si convS $\subset L^+$, entonces R(xp $\rightarrow$) $\subset L^-$ donde L^+ y L^- denotan los semiplanos cerrados determinados por L. (b) I(clCS,p) es un cono convexo cerrado y exd(p,S) resulta un arco cerrado en Ω_2 como vimos en IV.3.1. Consideremos v_1 y v_2 las direcciones extremas de este arco. (Eventualmente pueden coincidir). Usaremos las siguientes denominaciones, a saber L_i': $\{\lambda.v_i + p / \lambda \geq 0\}$; - L_i': $\{ \lambda.(-v_i) + p / \lambda \geq 0 \}$ y $L_i = L_i' \cup (- L_i')$ (i = 1, 2). Entonces el plano aparece naturalmente dividido en cuatro regiones (o dos en el caso $v_1 = v_2$) que notaremos I = I(clCS,p), J = J(clCS,p), $R_1 = L_1^- \cap L_2^+$, $R_2 = L_1^+ \cap L_2^-$, donde L_i^+

son los semiplanos cerrados determinados por L_i tales que $L_i^+ \cap I = L_i$, y L_i^- son los complementos cerrados de los L_i^+ ($i = 1, 2$). También consideramos: $S_i = S \cap R_i$ ($i = 1, 2$) y $S_3 = S \cap J$. (En el caso $v_1 = v_2$ la configuración resulta simplificada pero la construcción y el siguiente argumento son análogos). Si st(p,S) $\cap$ S_3 es no trivial, todo punto de esta intersección pertenecería a sins(p,S). Si esto no ocurre, suponemos -sin pérdida de generalidad- que p tiene accesibilidad lineal por S con puntos de S_1. El hecho que p tenga accesibilidad lineal por puntos de S y el hecho que v_1 es una dirección extrema de exd(S,p) aseguran la existencia de puntos interiores de S en S_1 y S_2. Entonces, por la conexidad del interior de S tenemos que deben existir puntos interiores a S en S_3 y por lo tanto en $-L_1'$. Entonces, como estamos bajo las hipótesis que ningún punto de S_3 está en st(p,S), entonces en particular, esto se verifica para todo punto de $-L_1'$. Estos dos hechos nos permiten tomar un punto $y \in -L_1'$ tal que $y \in CS \cap$ convS. Podemos tomar U, un entorno de y tal que se verifique $U \subset CS \cap$ convS. Si consideramos un punto $y' \in U \cap R_1$ éste verifica que st(y',CS) es un conjunto acotado lo cual es absurdo ya que S tiene la propiedad de la semirrecta. ❑

Corolario IV.3.3: *Sea S un hunk plano, ${}^{\alpha}S = S$ y ${}^{\alpha}CS = clCS$. Si S tiene la propiedad de la semirrecta entonces para cualquier punto frontera p de S se verifica que ins(p,S) es no trivial.*
Dem. Inmediato por teorema IV.3.2 y el hecho que sins(p,S) está incluido en ins(p,S). ❑

Estas caracterizaciones de los conjuntos que gozan de la propiedad de la semirrecta llevan a resultados equivalentes a los de Stavrakas ([18]).

Teorema IV.3.4: *Sea S un compacto plano tal que ${}^{\alpha}S = S$ y ${}^{\alpha}CS = clCS$.*

Si $\cap$ { st(x,S) / x es un punto 0-extremal } $\neq \varnothing$, entonces los siguientes enunciados son equivalentes:

(i) S tiene la propiedad de la frontera radiante.

(ii) KerS = $\cap$ { st(x,S) / x es un punto 0-extremal}

Dem. Inmediato por teorema IV.1.5 y el teorema IV.2.3. ❑

Corolario IV.3.5: *Sea S un compacto plano, ^aS = S y ^aCS = clCS. S es estrellado si y sólo si S tiene la propiedad de la frontera radiante y la intersección de las estrellas de los puntos 0-extremales es no vacía.*

Dem. Inmediato por corolario IV.1.6 y el teorema IV.2.3. ❑

Finalmente mostramos un ejemplo de un hunk $S \subset \mathbf{R}^3$ que tiene la propiedad de la semirrecta, la de la frontera radiante pero contiene un punto frontera tal que el inner stem fuerte de él es trivial. Luego, no hay forma de mejorar los resultados planos. Notemos $X = (x,y,z) \in \mathbf{R}^3$

$S_1 = \{X / x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, z \leq 1\} \cup \{X / -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq 2, 1 \leq z \leq 2\} \cup$

$\cup \{X / -2 \leq x \leq 2, 1 \leq y \leq 2, 0 \leq z \leq 2\} \cup \{ X / -2 \leq x \leq 2, -2 \leq y \leq -1, 0 \leq z \leq 2\}$

S_2 es el simétrico a S_1 con respecto al plano z = 0. El conjunto considerado es $S = S_1 \cup S_2$. El origen p es un punto frontera de S y ins(p,S) = {p}. Notar que exd(p,S) está formado por dos arcos que yacen en el plano z = 0 que no forman un conjunto arco conexo, luego la proposición IV.3.1 c) no puede ser generalizada.

Queda abierta la posibilidad de obtener una generalización de la equivalencia entre la propiedad de la semirrecta y la de la frontera radiante en espacios de dimensión mayor que dos, o bien exhibir un contraejemplo.

CAPÍTULO V: *Conjuntos finitamente estrellados.*

Introducción.

En este capítulo estudiaremos conjuntos finitamente estrellados. Un conjunto se dice finitamente estrellado cuando cualquier subconjunto finito de él está siempre eincluido en la estrella de algún punto del mismo. Estos conjuntos surgieron de manera natural al generalizar los conjuntos estrellados. Estos últimos, que originariamente surgieron como generalización de los convexos, han sido estudiados largamente y, actualmente, se desarrolla la teoría de conjuntos estrellados en forma bastante independiente de la teoría de conjuntos convexos. La intención aquí es desarrollar una teoría para los conjuntos finitamente estrellados no estrellados. En la bibliografia existente no figura un estudio preciso sobre el tema. Lo poco que ha sido estudiado se refiere al caso de conjuntos acotados. Aquí presentamos un estudio de conjuntos finitamente estrellados no estrellados cerrados. Esta condición, como veremos a continuación, garantiza que el conjunto no es acotado. El hecho de trabajar con estos conjuntos, por un lado seguía el orden clásico de analizar en primer lugar el caso cerrado, pero por otra parte, el hecho de estar trabajando con conjuntos no acotados hacía que nos planteáramos problemas donde necesariamente se debía relacionar el trabajo con la visibilidad externa así como con el espacio afin ampliado y el tratamiento de conos. En este sentido nos proponemos establecer conexiones entre $\mathbf{R}^n$ y en$\mathbf{I}\mathbf{R}^n$ y también aprovechar el estudio ya existente de conos, ampliamente tratado por ejemplo en [10]. Comenzaremos por un lado estudiando propiedades de los conjuntos finitamente estrellados no estrellados cerrados de forma de conocer de manera bastante operativa su estructura. Por otra parte analizaremos características de los elementos de visibilidad conocidos y largamente estudiados para el caso de conjuntos estrellados, como por ejemplo estrellas, células de visibilidad, inner stems, inner stems fuertes, novas, etc.. Paralelamente obtenemos una caracterización plana de estos conjuntos por medio de componentes convexas a través de un lema previo que nos brinda información sobre cómo, y desde dónde, es posible "vigilar" a un tal conjunto. Finalmente exhibimos una serie de contraejemplos a algunas conjeturas que habían sido establecidas para estos conjuntos, completando de este modo un primer estudio estructural del tema.

V.1. Resultados previos.

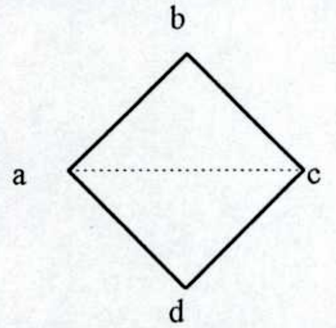
Definición.

- Un conjunto S es *finitamente estrellado* si dado cualquier subconjunto finito de S, $F \subset S$, se verifica que existe $x \in S$ tal que $F \subset st(x,S)$.

B. Peterson empezó a estudiar conjuntos finitamente estrellados y publicó en 1982 un paper cuyo título es "Is there a Krasnoselsky theorem for finitely starshaped sets?". En este trabajo Peterson analiza esta pregunta e intenta responderla. En realidad, no puede responder definitivamente esta cuestión, aunque muestra que el número de Krasnoselsky, n + 1 para el caso de conjuntos estrellados, no sirve para el caso de finitamente estrellados. Ni siquiera en el caso en que tales conjuntos sean cerrados. Como para probar el teorema de Krasnoselsky se necesita aplicar el teorema de Helly, es necesario que la intersección de las estrellas de los puntos del conjunto coincida con la intersección de las cápsulas convexas de las estrellas de los mismos puntos, y esto no vale en el caso de conjuntos finitamente estrellados no estrellados cerrados. Por ejemplo en el conjunto S de la sección V.5 las cápsulas convexas de estrellas de puntos de S pueden intersearse fuera de S. De todas formas deja pendiente la respuesta para algún otro número de Krasnoselsky. Veremos a continuación algunos ejemplos trabajados por Peterson.

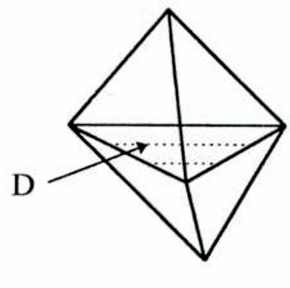
Ejemplo 1: Consideremos en $\mathbf{R}^2$, el siguiente conjunto:

C = conv{a, b, c, d} donde a, b, c, y d son puntos del plano tales que no haya entre ellos tres alineados. Consideramos el conjunto S = C\D donde D = relint(conv{a,c}). O sea, S se forma haciendo la diferencia entre C y el interior relativo de un 1-simplex.



Notar que en este caso el número de Krasnoselsky es 3 = 2 + 1, y en este ejemplo es inmediato que cada tres puntos de S son visibles desde un punto de S, pero si tomamos los cuatro vértices: a, b, c, d éstos no son vistos desde ningún punto de S. Luego, en el plano, el número de Krasnoselsky, si existe, debe ser mayor que 3.

Ejemplo 2: Se puede generalizar el ejemplo anterior a un espacio de dimensión n procediendo de la siguiente forma: C = conv{a, b, c, d} donde a, b, c, d son puntos de $\mathbf{R}^n$, y se remueve de C el interior relativo de un (n - 1)-simplex D, considerando, entonces el conjunto S = C\D. En este conjunto si tomamos los baricentros del simplex extraido y le agregamos los vértices suspendidos, tenemos un conjunto de n + 2 puntos tal que no es simultáneamente visto desde un punto de S.



M. Breen ([5]) retomó la pregunta estudiada por Peterson y obtuvo algunos teoremas de tipo Krasnoselsky para conjuntos finitamente estrellados del plano. Se encontró con inconvenientes: no logró caracterizar los finitamente estrellados en general, y en el caso plano debió imponer condiciones sobre la visibilidad. Específicamente, necesitó incorporar que, en el lugar de visibilidad simple se verificara la visibilidad clara en un caso, y en otro impuso restricciones en el conjunto int(clS)\S.

Los resultados más importantes que obtuvo son los siguientes:

Teorema V.1.1: *Dado $S \subset \mathbf{R}^2$, que verifique int(clS)\S = ∅. Entonces, S es finitamente estrellado si y sólo si cada tres puntos de S son visibles desde un punto común de S. El número tres es el mejor posible.*

En el caso nuestro, trabajaremos con conjuntos cerrados por lo que la hipótesis int(clS)\S = ∅ no tiene sentido incluirla expresamente e incluso si el conjunto es además acotado, veremos que resultará estrellado y por lo tanto la condición de que para cada terna de puntos existe uno que los ve también perderá sentido.

Teorema V.1.2: *Dado $S \subset \mathbf{R}^2$ un conjunto no vacío. Si cada tres puntos de clS son claramente visibles desde un punto común de S, entonces S es finitamente estrellado.*

El siguiente resultado debilita un poco la condición int(clS) \ S = ∅.

Teorema V.1.3: *Dado $S \subset R^2$. Supongamos que existe una cantidad numerable de rectas $\{ L_i \,/\, i \geq 1 \}$ tales que $(\text{int cl}S) \setminus S \subseteq \cup \{ L_i \,/\, i \geq 1 \}$ y $((\text{int cl}S) \setminus S) \cap L_i$ tiene medida 1-dimensional de Lebesgue cero, $i \geq 1$. Entonces, cada 5 puntos de S ven un punto en común si y sólo si S es finitamente estrellado. El número 5 es el mejor posible.*

Un ejemplo donde se ve que no se pueden debilitar las hipótesis de $\text{int(cl}S) \setminus S = \emptyset$ en el caso del teorema V.1.1, y que no se puede cambiar la visibilidad clara del teorema V.1.2 por la visibilidad simple es el siguiente:

Ejemplo: $S = D \setminus E$ donde D y E son los siguientes conjuntos $D = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, \|(x,y)\| \leq 1 \}$ y $E = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, x = 0,\ y \text{ es irracional} \}$

Para cada sobconjunto T de S de 7 elementos ocurre una de las siguientes posibilidades:

i) si T contiene a lo sumo un punto de L, eje x, entonces todo punto de T es visible desde un punto de $L \cap S$.

ii) Si $T \cap L$ contiene por lo menos 2 puntos, entonces renombrando apropiadamente se tiene que $T \cap L_1$ contiene a lo sumo 2 y todo punto de T es visible desde algún punto de $L_2 \cap S$. Aquí L_i son los semi-planos determinados por L.

Sin embargo, no se verifica que dados 8 puntos cualesquiera éstos sean mutuamente visibles desde un punto de S. Por ejemplo: elegimos 3 puntos en cada $L_i \cap S$, dos de ellos con coordenadas racionales y uno con coordenadas irracionales, y elegimos dos puntos sobre $L \cap S$. Finalmente exhibe un ejemplo plano donde cada ocho puntos son mutuamente visibles de un punto del conjunto pero cada nueve no. Con lo cual, en dimensión 2, si el número de Krasnoselsy existe, debe ser al menos nueve.

Citaremos aquí para referencia futura algunos resultados combinatorios conocidos que involucran conjuntos convexos y estrellados. Empezamos por una variante del Teorema de Helly aplicable a convexos no acotados.

Teorema V.1.4: *Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos cerrados convexos de $\boldsymbol{R}^d$ sin una dirección de recesión común y tal que la intersección de cualquier subfamilia de $d+1$ de estos conjuntos es no vacía. Entonces, la intersección de la familia completa $\mathcal{F}$ es no vacía.*

<u>Dem</u>: Ver [23].❑

Como un corolario inmediato del Teorema de Helly, tenemos el siguiente resultado.

Corolario V.1.5: *Sea $\mathcal{F}$ una familia de subconjuntos cerrados convexos de $\boldsymbol{R}^d$ tal que por lo menos uno de estos conjuntos es compacto y la intersección de cualquier subfamilia de $d+1$ de estos conjuntos es no vacía. Entonces la intersección de la familia $\mathcal{F}$ es no vacía.*

Teorema V.1.6: *$S \subset \boldsymbol{R}^n$, cerrado, finitamente estrellado y de visibilidad acotada. Entonces S es estrellado y compacto.*

Dem. Consideremos la familia $\mathcal{F}$ = { st(x,S) / x ∈ S }. Como S es de visibilidad acotada y cerra-do, cada miembro de $\mathcal{F}$ resulta compacto. Pero como S es finitamente estrellado, toda subfamilia finita de $\mathcal{F}$ tiene intersección no vacía. Por la propiedad de intersección finita de los conjuntos compactos, la intersección de todos los miembros de $\mathcal{F}$ resulta no vacía. Es decir, S es estrellado. Por otra parte, si x es un punto radiante de S, resulta que S = st(x,S) que es un compacto. ❑

El siguiente resultado es una consecuencia directa del Teorema de Krasnoselsky:

Teorema V.1.7: *Sea $S \subset \mathbf{R}^n$, compacto y finitamente estrellado. Entonces S es estrellado.*

Dem. Observar que el hecho que S sea finitamente estrellado asegura que cada n + 1 puntos la intersección de las estrellas de estos puntos es no vacía, luego si S es compacto se aplica el Teorema de Krasnoselsky (I.11) y resulta que la intersección de todas las estrellas de puntos de S es no vacía, y por lo tanto, S estrellado. ❑

Dado que estaremos trabajando con conjuntos no acotados es natural usar herramientas que han sido diseñadas especialmente para tal fin como por ejemplo el estudio de conos y el espacio afin ampliado. En las secciones V.2 y V.3 siguientes haremos una breve descripción de los conceptos y propiedades que necesitaremos para el trabajo.

V.2. Un apartado sobre conos.

Definiciones.

- El origen o vector nulo se denota por θ.
- $x \in A$, $A \subset \mathbf{R}^n$, se dice que una recta que pasa por x *inserta x en A* si x está incluido en un segmento abierto de la recta contenido en A.
- x es *interno a A* si toda recta inserta x en A.
- Notaremos ${}^{i}A$ al *internado* de A, o sea el conjunto de todos los puntos internos de A.
- Decimos que x es *contiguo* a A si existe $y \neq x$ tal que $[y,x) \subset A$. Observar que el conjunto de todos los puntos contiguos a A es ${}^{a}A$. Notaremos ${}^{-}A = A \cup {}^{-}A$.
- Δ_z indicará la recta por el origen de dirección z.

Teorema V.2.1: *$A \subset \mathbf{R}^n$ convexo. A es no acotado si y sólo si existe un rayo R contenido en A. Si además, A es abierto o cerrado, cualquiera sea a $\in$ A el rayo con origen an a paralelo a R está contenido en A.*

Dem. Es obvio que si existe R, A es no acotado. Recíprocamente, supongamos que A es no-acotado. Entonces existe una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A tal que $| x_n| \to \infty$. Podemos suponer que $x_n \neq 0$ para todo n. Llamemos $z_n = x_n / | x_n| \in \Omega_n$. Como Ω_n es compacta existe $z \in \Omega_n$ de acumulación de z_n, y podemos suponer que $z_n \to z$. Sea $a \in {}^iA$. Entonces, $a + \Delta_z \subset A$. En efecto, sea $\lambda.z \in \Delta_z$, con $\lambda > 0$. Si n es suficientemente grande, entonces $0 < \lambda/| x_n| < 1$, y en consecuencia $\lambda/| x_n|.x_n + [1 - (\lambda/| x_n|)].a \in A$ por convexidad. Además $\lambda/| x_n|.x_n + [1 - (\lambda/| x_n|)].a = a + \lambda. (x_n / | x_n|) - (\lambda/| x_n|). a \longrightarrow a + \lambda.z$ cuando n tiende a infinito, de donde $a + \lambda.z \in {}^-A$. Por el lema de accesibilidad local (I.7) $a + \mu.z \in {}^iA$ para todo $\mu \in (0, \lambda)$ y como $\lambda.z \in \Delta_z$ es arbitrario, esto significa que $a + \Delta_z \subset {}^iA \subset A$. De aquí se desprende inmediatamente la tesis. ❑

<u>Definiciones.</u> Las definiciones de cono de vértice a y cono inscripto en A a partir de a figuran en el capítulo IV, sección 3.

- Un cono de vértice 0 es *convexo* si $(0,+\infty). C + (0,+\infty). C \subset C$.
- El *cono inscripto centralizado* es $I_0(A,a) = I(A,a) - a$.

A partir de estos conos podremos definir dos conos fundamentales en el estudio de los conjuntos convexos no acotados, el *cono de infinitud* y el *cono de recesión* de A. Según el V.2.1 existe un rayo R contenido en A y además todo rayo paralelo a R con origen en un punto interior relativo de A está también incluido en A. La unión C_a de todos los rayos contenidos en A con origen en un punto interior relativo cualquiera, a, de A es un cono convexo. También es obvio que si b es un punto del interior relativo de A, entonces C_b se obtiene de C_a por traslación.

- Para A un conjunto convexo no acotado, se llama *cono de infinitud de A*, y se simboliza **I**(A) al cono con vértice en el origen y que se obtiene trasladando uno cualquiera de los conos C_a mencionados. O sea, I(A) = $\bigcup_{a\in A} I_0(A,a)$.
- El *cono de recesión de A*, en cambio, simbolizado por **R**(A) es **R**(A) = $\bigcap_{a\in A} I_0(A,a)$.
- Una *dirección de recesión* de un cierto conjunto M es una dirección $v \in \Omega_n$ tal que para todo $x \in S$ se verifica que $\{ \lambda.v + x / \lambda \geq 0 \} \subset M$.
- Notaremos en algunos casos $R_x(v)$ al rayo cerrado que parte de x y que tiene dirección v.

Teorema V.2.2: *Dado A un conjunto cualquiera, **R(A)** es convexo.*

Dem. Ver [10]

V.3. El espacio afín ampliado.

G. Hansen ([14] y [15]) desarrolló un abordaje integrado que permite un tratamiento unificado de convexos acotados y no acotados llamado *el espacio afín ampliado*. Éste consiste esencialmente en una compactificación del espacio afín n-dimensional, diferente de la compactificación de Alexandroff y de la proyectiva. Sea $E' = \mathbf{R}^d \sim \{\theta\}$ y definamos en este conjunto la relación:

$$a \approx b \Leftrightarrow a = \lambda.b \text{ con } \lambda > 0$$

Se denota $\mathbf{D}^d = E'/\approx$ y se define enl$\mathbf{R}^d = \mathbf{R}^d \cup \mathbf{D}^d$, donde $\mathbf{R}^d$ es el conjunto de *puntos propios* y $\mathbf{D}^d$ el conjunto de *puntos impropios*, que intuitivamente representa las direcciones comunes de semirrectas paralelas. Una *estructura de convexidad e*s introducida en enl$\mathbf{R}^d$ definiendo el segmento entre un punto propio x y uno impropio y como el rayo que sale de x y que tiene dirección y. El segmento entre dos puntos impropios (no antipodales) es el arco de direcciones definidas por los extremos. El segmento entre dos puntos antipodales impropios se reduce a este par de puntos. De esta forma toda la maquinaria de Convexidad y Visibilidad se puede construir *"mutatis mutandi"*.

Definimos las siguientes funciones:

- u: $\mathbf{D}^n \to S^{n-1}$ por $u(d) = R \cap S^{n-1}$ donde R es la semirrecta desde 0 en la dirección definida por d.
- la proyección π: $\mathbf{R}^n - \{0\} \to \mathbf{D}^n$

  Notar que para cualquier $x \in \mathbf{R}^n - \{0\}$ y $d \in \mathbf{D}^n$ se tiene que:

  $(\pi \circ u)(d) = d$ y $(u \circ \pi)(x) = x / \|x\|$

El espacio ampliado tiene la estructura usual de $\mathbf{R}^n$ y la siguiente base de topología: para $x \in \mathbf{R}^n$, $d \in \mathbf{D}^n$, $\varepsilon > 0$, $\rho > 0$, los abiertos son entonces $U[x, \varepsilon]$ y $N[d, \varepsilon, \rho]$ donde $U[x,\varepsilon]$ es la bola cerra-da con centro en x y radio ε, (notaremos $B[x, \varepsilon]$ la bola abierta con centro en x y radio ε) y N se define de la siguiente forma: $N[d, \varepsilon, \rho] = D[d, \varepsilon] \cup \bigcup_{\lambda\geq\rho} \lambda.U[u(d);\varepsilon]$

El siguiente homeomorfismo entre enl$\mathbf{R}^n$ y $B^n = \{ X \in \mathbf{R}^n / \|X\| \leq 1\}$ da una imagen útil del espacio afin ampliado:

$$h(p) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\|p\|}.p & \text{si } p \in R^n \\ u(p) & \text{si } p \in D^n \end{cases}$$

Por medio de h podemos identificar $\mathbf{R}^n$ con $U^n = \{ X \in \mathbf{R}^n / \|X\| < 1\}$ y $\mathbf{D}^n$ con S^{n-1}.

<u>Definiciones.</u> *Segmentos y convexos en el espacio ampliado.*

- Si a y b son puntos de enl$\mathbf{R}^n$ definimos el *segmento cerrado de extremos a y b* que notaremos [a,b] de la siguiente forma:

  i) el segmento usual [a,b] si a y b son propios.

  ii) la clausura de la semirrecta $\{ a + \lambda.u(b) / \lambda \geq 0 \}$ si a es propio y b impropio.

  iii) $\pi \{ \lambda.u(a) + \mu.u(b) / \lambda \geq 0, \mu \geq 0$ no ambos nulos $\}$ si a y b son impropios.

  Análogamente definimos y notamos (a,b) el segmento abierto.

- Un conjunto $C \subseteq$ enl$\mathbf{R}^n$ es *convexo* si para todo par de puntos a, b $\in$ C se verifica que $[a,b] \subseteq C$. Por supuesto para subconjuntos de $\mathbf{R}^n$ este es el concepto clásico.

- Para cualquier $A \subseteq \mathbf{R}^n$ se define el *ampliado de A*, y se nota enlA al siguiente conjunto:

  enlA $= A \cup \{ x \in \mathbf{D}^n / R_a(x) \subseteq A$ para cada $a \in A \}$

Teorema V.3.1: *Si $A \subseteq R^n$ es convexo entonces enlA es convexo.*

Dem: Si A es vacío o un conjunto unitario entonces enlA = A es convexo. Supongamos entonces que existen $x \neq y$ elementos de enlA. Si alguno de ellos es propio, entonces es claro que $[x,y] \subset$ enlA. Si x e y son impropios y $z \in A$ es arbitrario, entonces $R_x(z) \subset A$ y $R_y(z) \subset A$. Entonces el cono con vértice z generado por estos segmentos está contenido en A ya que A es convexo. Luego, $[x,y] \subset$ enlA ya que z es arbitrario. ❑

Recientemente los Dres. Hansen y Dupin obtuvieron una caracterización del espacio afín ampliado que facilita su descripción y que incluimos brevemente a continuación. La notación usada es la siguiente:

$\mathcal{H}_0$ hiperplano homogéneo en $\mathbf{R}^{n+1}$

$\mathcal{H}' \parallel \mathcal{H}_0$ con $\mathcal{H}' \neq \mathcal{H}_0$, $\mathcal{H}' \cap \Omega_{n+1} = \varnothing$

$\mathcal{H}_0'$ semiespacio de $\mathbf{R}^{n+1}$ determinado por $\mathcal{H}_0$ que contiene a $\mathcal{H}'$.

$\mathcal{H}^\infty = \mathcal{H}_0 \cap \Omega_{n+1}$

Entonces, enl$\mathbf{R}^n = \mathcal{H} = \mathcal{H}' \cup \mathcal{H}^\infty$

Si $A \subset$ enl$\mathbf{R}^n$ entonces $A = A' \cup A^\infty$ con $A' \subset \mathcal{H}'$ y $A^\infty \subset \mathcal{H}^\infty$.

De esta forma podemos definir para a, b $\in$ enl$\mathbf{R}^n$ el segmento $[a,b]_{\mathcal{H}}$ de la siguiente forma:

$[a,b]_{\mathcal{H}} = [\text{conv } C(\{a, b\})] \cap \mathcal{H} = [R(\theta \to a) + R(\theta \to b)] \cap \mathcal{H}$

Con estas definiciones se define de la manera usual un conjunto convexo, la cápsula convexa, l

V.4. Estructura de conjuntos finitamente estrellados no estrellados.

Como hemos visto (V.1.7) un conjunto finitamente estrellado compacto es estrellado, sin embargo hay ejemplos fáciles, incluso en el plano, de finitamente estrellados, cerrados que no son estrellados. Resulta inmediatamente que estos conjuntos no pueden ser acotados. Estudiaremos aquí algunas características geométricas relevantes de estos conjuntos. Probaremos que el cono de recesión de un tal conjunto es no trivial. Esto nos permitirá describir elementos de visibilidad (estrellas, novas, células de visibilidad, etc.) estudiados para conjuntos estrellados y que no han sido analizados (en la bibliografia existente) para conjuntos finitamente estrellados no estrellados.

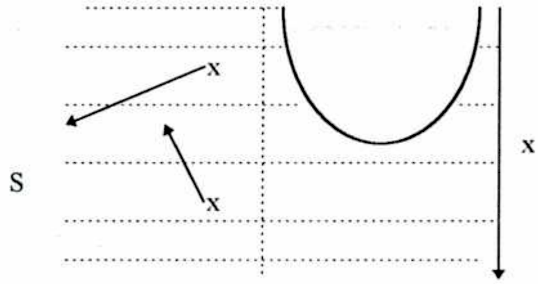
<u>Notación.</u>

- $B(x,\varepsilon)$ y $U(x,\varepsilon)$ notarán respectivamente, la bola cerrada y abierta centrada en x y radio ε. En algunos casos en los que no hace falta explicitar el radio, notaremos directamente B_x y U_x respectivamente.

Lema V.4.1: *Sea* $S \subset \mathbf{R}^d$ *un cerrado finitamente estrellado no estrellado. Entonces* $\forall x \in S$ *existe un rayo* R_x *que emana de x e incluido en st(x,S).*

Dem. Consideramos la familia $\mathcal{K} = \{\text{cl conv } st(x,S) \,/\, x \in S\}$. Usando teoremas I.3 y I.9, resulta fácilmente que kerS es la intersección de $\mathcal{K}$. Ya que S no es estrellado, esta intersección debe ser vacía, pero todos los miembros de la familia son cerrados convexos. Luego, el corolario V.1.5 implica que ninguno de estos conjuntos puede ser acotado. Esto significa que $\forall$ x $\in$ S el conjunto st(x,S) es cerrado y no acotado. Ya que cada una de estas estrellas es estrellada, el teorema IV.1.1 implica la tesis. ❑

Este resultado da información parcial sobre los conjuntos finitamente estrellados no estrellados ya que desde cada punto se puede trazar una semirrecta incluida en el conjunto pero no se sabe nada sobre la dirección de tal semirrecta.



El teorema principal es un refinamiento del lema previo y nos proveerá información en este sentido.

Teorema V.4.2: *Sea* $S \subset \mathbf{R}^d$ *un cerrado finitamente estrellado no estrellado. Entonces, existe* $v_0 \in \Omega_d$ *tal que* $\forall x \in S$, $R_x(v_o) \subset st(x,S) \subset S$.

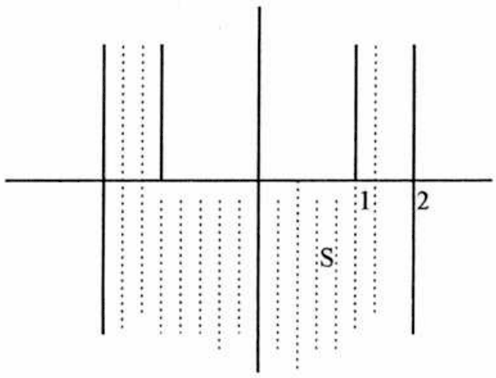
Dem. Como $\mathbf{R}^d$ es separable, podemos tomar D = { x_1; x_2; x_3; ...,..}, un subconjunto de S denso numerable. Ningún punto de S puede ver a todo D, ya que un tal punto pertenecería a kerS que es vacío. Usando que S es finitamente estrellado (f.e.) podemos tomar $y_1 \in$ S que vea a x_1 y x_2. Sea n_1 el primer entero positivo tal que el elemento de D indicado por él es invisible desde y_1. Otra vez, usando que S es f.e se obtiene un nuevo punto $y_2 \in S$ que ve a y_1 y a cada x_i hasta este índice. Debe existir otro $n_2 > n_1$ tal que éste indique el primer punto de D invisible desde y_2. Este proceso inductivo puede seguir indefinidamente dando una sucesión $Y = \{ y_1; y_2; y_3;.. \}$ tal que sus elementos no sólo van viendo progresivamente más puntos de D, sino que cada y_i puede ver a cada y_k con $k < i$. Esto significa que cada par de puntos de Y se ven mutuamente vía S. Es claro que esta sucesión Y no puede tener puntos de acumulación, ya que un tal punto pertenecería a kerS. En particular, Y debe ser no acotada. Para cada entero $k > 1$ definimos $w_k = \dfrac{(y_k - y_1)}{\|y_k - y_1\|} \in \Omega_d$. Como Ω_d es compacto, la sucesión $W = \{w_2; w_3; \ldots\}$ (o bien una subsucesión que renombramos de la misma forma) debe tener un punto v_o de acumulación. Afirmamos que este punto v_o es la dirección común que buscamos. Denotemos T(z) al enunciado: *"El rayo $R_z(v_o) \subset S$".*

(a) T(z) es válido para todo $z \in Y$: Supongamos que existe $u = y_1 + \lambda v_o \in CS$ (con $\lambda > 0$). Luego debe existir $\delta > 0$ tal que $U(u,\delta) \subset CS$. Como Y es no acotada, $\exists\, y_k \in Y$ tal que $\|y_k - y_1\| > \lambda$, y $\|w_k - v_o\| < \dfrac{\delta}{\lambda}$. Esto implicaría $(y_1; y_k) \cap U(u,\delta) \neq \varnothing$. Pero esta implicación contradice el hecho que y_k ve a y_1 vía S. Entonces no puede existir tal u y $T(y_1)$ vale. Casi el mismo argumento vale *mutatis mutandi* para cada $y_j \in Y$.

(b) T(z) es válido para $z \in D$: Sea x_k un punto genérico de D y denotemos $R_k = R_{x_k}(v_o)$. Supongamos que existe un punto $v \in R_k$ tal que no pertenezca a S. Debería existir $\delta > 0$ tal que $U(v,\delta) \subset CS$. Sea n el primer índice tal que y_n puede ver a x_k. Por construcción sabemos que y_m puede ver a x_k para cada $m \geq n$. Más aún, podemos tomar un índice m suficientemente grande como para que w_m esté suficientemente cercano a v_o y $\|x_k - y_m\|$ sea suficientemente grande como para permitir que el segmento $[x_k; y_m]$ atraviese el entorno $U(v,\delta)$. Pero esto contradiría el hecho que x_k y y_m son mutuamente visibles. Luego no puede existir un tal punto v.

(c) T(z) es válido para $z \in S$: Sea ahora z un punto genérico de S. Existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de D que converge a z. Es claro que cada punto p del rayo $R_z(v_o)$ es límite de una sucesión $\{p_n\}$ tal que cada p_n pertenece al rayo paralelo que sale de z_n. Pero (b) implica que tales puntos están en S. Luego $p \in S$. ❑

Notemos que la recíproca es falsa. Basta considerar el conjunto $S = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, 1 \le |x| \le 2 \}$ $\cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, |x| \le 1, y \le 0 \}$



Aquí v = (0, -1) es una dirección de recesión de S, sin embargo S no es finitamente estrellado, como se observa inmediatamente si consideramos por ejemplo que los puntos (1, 1) y (-1,1) no son mutuamente visibles desde S.

El resultado anterior se puede enunciar en términos de conos de la forma:

Corolario V.4.3: *$S \subset R^n$ cerrado, finitamente estrellado, no estrellado, entonces $\boldsymbol{R(S)} \neq \{\theta\}$.*

También podemos pensar el resultado del teorema V.4.2 en términos del espacio ampliado, y obtenemos así, una primera conexión entre $\mathbf{R}^n$ y enl$\mathbf{R}^n$:

Teorema V.4.4: *Sea $S \subset \boldsymbol{R}^n$ un cerrado finitamente estrellado no estrellado, entonces enlS es un subconjunto estrellado de enl$\boldsymbol{R}^n$.*

Más aún, sabiendo que enlS será un estrellado, es natural preguntarse ¿cómo es el conjunto ker(enlS)? en el sentido de saber por qué tipo de puntos está formado, si este conjunto tiene propiedades, datos sobre la dimensión, etc. Analizamos aquí estas preguntas. Sobre la dimensión del mirador del ampliado de un conjunto f.e.n.e, exhibimos un contraejemplo en la sección V.6 de una conjetura que establecía como cota superior n - 2, donde n es la dimensión del espacio.

Teorema V.4.5: *Sea $S \subset \boldsymbol{R}^n$ un cerrado finitamente estrellado, entonces ker(enlS) = **R(S)**.*

Dem. Inmediato a partir del teorema V.4.2. ❑

Corolario V.4.6: *Sea $S \subset \boldsymbol{R}^n$ un cerrado finitamente estrellado, entonces ker(enlS) es convexo.*

Dem. Es inmediato a partir de la igualdad entre el mirador de enlS y el cono de recesión de S y usando el hecho que el cono de recesión de cualquier conjunto es convexo (V.2.2). ❑

Consecuencias del teorema principal.

Teorema V.4.7: *Sea $S \subset \boldsymbol{R}^n$ un cerrado finitamente estrellado y no estrellado. Si K es una componente convexa de S, entonces **R(K)** $\neq \{\theta\}$.*

Dem. Sea K una componente convexa de S y $x \in K$ un punto cualquiera. Por el teorema V.4.2 existe v una dirección de recesión de S, luego $R_x(v) \subset S$. Como $x \in R_x(v) \subset S$ y $R_x(v)$ es convexo, entonces $R_x(v) \subset K$. Luego por ser K un convexo no acotado, y debido al teorema V.2.1, K contiene un trasladado de $R_x(v)$ por cada uno de sus puntos, luego $v \in \mathbf{R}(K)$. ❑

El siguiente resultado conecta los conjuntos finitamente estrellados con la visibilidad externa tratada en el capítulo IV.

Teorema V.4.8: *Sea $S \subset \boldsymbol{R}^n$ un cerrado finitamente estrellado y no estrellado, entonces enl(CS) es estrellado en enl($\boldsymbol{R}^n$). Más aún, ker(enl(CS)) $\cap$ $\boldsymbol{D}^n \neq \varnothing$.*

Dem. Sea $x \in CS$, y v dirección de recesión de S. Veamos que la dirección buscada es $d = -v$. Probamos a continuación que $R_x(d) \subset CS$, pues de no ser así tendríamos que $R_x(d) \cap S \neq \varnothing$. En este caso podemos tomar $t \in R_x(d) \cap S$, luego por teorema V.4.2, $R_t(v) \subset S$, y dado que $x \in R_t(d) \subset S$, tendríamos que $x \in S$. Absurdo. ❑

Corolario V.4.9: *Sea $S \subset \boldsymbol{R}^n$ un cerrado finitamente estrellado y no estrellado, $A \subset CS$ componente conexa de CS, entonces A es no acotada.*

Dem. Sea $x \in A$, y $d \in$ ker(enl(CS)) $\cap$ $\mathbf{D}^n$, tal d existe por teorema V.4.2. Entonces $R_x(d) \subset CS$, y como $R_x(d)$ es un conexo que contiene a x resulta que $R_x(d) \subset A$ y A es no acotada. ❑

Teorema V.4.10: *Sea $S \subset \boldsymbol{R}^n$ un cerrado finitamente estrellado y no estrellado, $x \in$ bdryS, entonces $\boldsymbol{I}$(ins(x,S)) $\neq \{\theta\}$.*

Dem. Sea v una dirección de recesión de S. Veamos que $R_x(v) \subset ins(x,S)$. De no ser así existiría $t \in R_x(-v)$ tal que $(x,t) \subset intS$. Tomemos $t' \in (x,t)$, y sea U un entorno de t' tal que $U \subset intS$, luego por teorema V.4.2 resulta que $\bigcup_{z \in U} R_z(v) \subset S$, con lo cual $x \in intS$, absurdo. ❑

Teorema V.4.11: *Sea $S \subset R^n$ un cerrado finitamente estrellado y no estrellado, $^{a}S = S$ y $^{a}CS = clCS$. Entonces S tiene la propiedad de la frontera radiante.*

Dem. Notar que CS no tiene componentes conexas acotadas por el corolario V.4.9, y lo que resta es observar que resulta inmediato en la demostración del teorema V.4.7 que el rayo $R_x(-v)$ tiene intersección vacía con el interior de S. ❑

De esta observación resulta inmediato el siguiente resultado:

Teorema V.4.12: *Sea $S \subset R^n$ un cerrado finitamente estrellado y no estrellado. Entonces $I(sins(x,S)) \neq \{\theta\}$, más precisamente $R_x\ (v) \subset sins(x,S)$.*

Proposición V.4.13: *$S \subseteq R^n$ finitamente estrellado no estrellado. Cualquiera sea $x \in S$ resulta, $I(\ vis(x,S)\ ) \neq \{\theta\}$.*

Dem. Sea v una dirección de recesión de S, afirmamos que existe $y \in R_v\ (x)$ tal que: $\forall\ t \in R_v(y)$ se verifica $st(x,S) \subseteq st(t,S)$. De no ser así, dado cualquier $y \in R_v\ (x)$,existiría $t \in R_v\ (y)$ tal que $st(x,S) \not\subset st(t,S)$, o sea $\exists\ w \in st(x,S)$ tal que $w \notin st(t,S)$, con lo cual $\exists\ z \in (w,t) \cap S^c$ y por lo tanto $\exists\ U_z \subseteq S^c$. Absurdo, ya que por ser v dirección de recesión de S por cada punto $a \in [x,w]$ se tiene que $R_v(a) \subseteq S$ no puede existir $U_z \subseteq S^c$. ❑

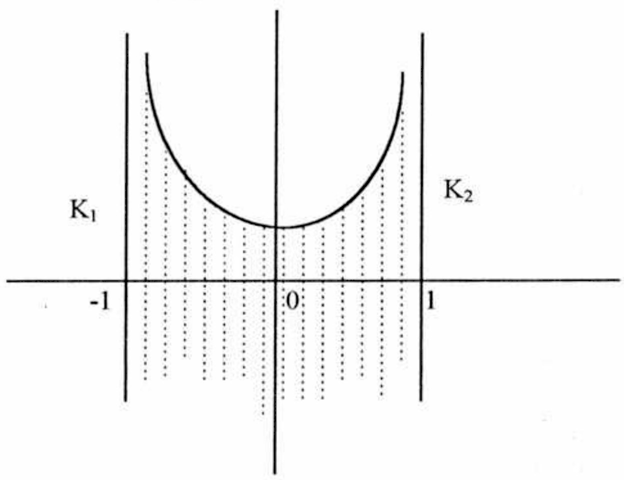
Corolario V.4.14: *$S \subseteq R^n$ finitamente estrellado no estrellado, $x \in S$ cualquiera, entonces* ***R****(vis(x,S)* $\neq \{\theta\}$.

Dem. Como vis(x,S) contiene una semirrecta, por ser convexo no acotado contiene una paralela por cada uno de sus puntos, en particular por x ∈ vis(x,S). ❑

Veremos en el ejemplo 4 de la sección V.6 que no se verifica, bajo las mismas hipótesis, un análogo de esta propiedad para las novas de puntos frontera de S.

V.5. Componentes convexas en finitamente estrellados.

Como hemos visto a lo largo del trabajo, en muchos casos resulta útil tener caracterizaciones de conjuntos a partir de subconjuntos que sean convexos. El principal motivo de esto es que, en general, pueden aplicarse al conjunto caracterizado algunas de las herramientas y teoría existente para los convexos. Partimos aquí de una conjetura que establecía que dado un conjunto cerrado finitamente estrellado y no estrellado la intersección de finitas componentes convexas debía ser no vacía. Este hecho se refuta fácilmente mostrando, por ejemplo, el conjunto S = $\{(x,y) \in \mathbf{R}^2 \,/\, y \leq \frac{1}{1-x^2}, -1 < x < 1\} \cup \{(x,y) \,/\, x = -1 \text{ ó } x = 1\}$



Este conjunto es cerrado, finitamente estrellado, no estrellado y sin embargo las componentes convexas $K_1 = \{(x,y) / x = -1\}$ y $K_2 = \{(x,y) / x = 1\}$ tienen intersección vacía.

Surgió entonces la idea de "descartar" algunas componentes convexas de modo que las restantes tuvieran la propiedad de intersección finita y que además la subfamilia considerada fuera cobertora. Estudiamos aquí la existencia de una tal subfamilia de la familia de todas las componentes convexas.

Este planteo sigue la línea de tratar de generalizar la siguiente caracterización (Toranzos) de los conjuntos estrellados por medio de componentes convexas:

Teorema V.5.1: *Sea S estrellado si y sólo si para toda familia cobertora* $\mathcal{P}$ *de componentes convexas de S se verifica que la intersección de los miembros de* $\mathcal{P}$ *es no vacía.*

De esta forma planteamos la siguiente caracterización de los conjuntos finitamente estrellados no estrellados cerrados.

TeoremaV.5.2: *Sea* $S \subset \mathbb{R}^d$ *cerrado. S es finitamente estrellado si y sólo si existe una familia cobertora* $\mathcal{P}$ *de componentes convexas de S que verifica que la intersección de finitos miembros de* $\mathcal{P}$ *es no vacía.*

Hasta ahora hemos demostrado el caso plano.

Observar que si la intersección de la familia completa es no vacía equivaldría a que S es estrellado.

Antes de demostrar este teorema, veamos un resultado que nos será de mucha utilidad para poder definir la familia de componentes convexas que tendrá esta propiedad. Este resultado nos da información de cómo se puede "controlar" un conjunto finitamente estrellado no estrellado en el caso plano, en el sentido que asegura la existencia de un conjunto tal que mirando desde él, es posible ver a cualquier punto de S.

Teorema V.5.3: *Sea $S \subset \mathbb{R}^2$ cerrado finitamente estrellado y no estrellado. Sea v una dirección de recesión de S. Entonces existe $x_0 \in S$ tal que* $S = \bigcup_{y \in R_{x_0}(v)} st(y, S)$.

Dem. $\supset$) Inmediato.

$\subset$) Caso a) (Vale en dimensión n).

Supongamos que existe $x_0 \in S$ tal que $st(x_0,S) \subset L_{x_0}(v) \cap S$ (donde $L_{x_0}(v)$ es la recta que pasa por x_0 de dirección v).

En este caso un tal x_0 es el buscado pues: dado $w \in S$ cualquiera existe $p \in S$ tal que p ve a x_0 y a w (por ser S f.e). Como p ve a x_0 entonces $p \in L_{x_0}(v)$ y como p ve a w resulta que $w \in st(p,S)$. Si $p \notin R_{x_0}(v)$ tomo $p' \in R_{x_0}(v)$ y dado que $p' \in R_p(v) \subset vis(p,S)$ (por V.4.14) resulta que p' ve a w con lo que $w \in st(p',S)$ y $p' \in R_{x_0}(v)$.

Notar que pueden existir dos o más x_0, $x_1 \in S$ con la propiedad $st(x_0,S) \subset L_{x_0}(v)$ y $st(x_1,S) \subset L_{x_1}(v)$ con $L_{x_0}(v) \parallel L_{x_1}(v)$ y $L_{x_0}(v) \neq L_{x_1}(v)$ ya que en tal caso no podría existir un punto en S que vea a x_0 y a x_1.

Caso b) Supongamos que no existe $x_0 \in S$ tal que $st(x_0,S) \subset L_{x_0}(v) \cap S$.

En este caso tomemos $x_0 \in S$ genérico. Lo determinaremos de forma tal que valga la inclusión $S \subset \bigcup_{y \in R_{x0}(v)} st(y,S)$.

Dado $x \in S$ cualquiera, si $x \in L_{x_0}(v) \cap S$ el resultado es inmediato, entonces suponemos que $x \notin L_{x_0}(v)$. Consideremos la recta L por x y x_0. Notemos que la dirección de esta recta es distinta de v. Llamamos H^- al semiplano cerrado determinado por L y tal que no contiene ningún rayo en dirección v. Ahora bien, tomemos algún punto p que vea a x y a x_0, y analicemos en qué regiones del plano puede estar ubicado p.

Si $p \in H^-$ el hecho que $[x,p] \cup [p,x_0] \subset S$ y el teorema V.4.2 implican que el conjunto $A = \cup\{R_z(v) / z \in [x,p] \cup [p,x_0]\} \subset S$, pero $x \in A$ y más aún, $R_{x_0}(v) \subset A$, con lo cual x es visto por $R_{x_0}(v)$ y la afirmación vale.

Supongamos ahora que $p \in CH^-$. En CH^- encontramos tres regiones abiertas R_1, R_2, y R_3 definidas como sigue:

$R_1 = CH^- \cap L_{x_0}{}^+$ donde $L_{x_0}{}^+$ es el semiplano abierto determinado por la recta $L_{x_0}(v)$ y tal que no contiene a x.

$R_3 = CH^- \cap L_x{}^+$ donde $L_x{}^+$ es el semiplano abierto determinado por la recta $L_x(v)$ y tal que no contiene a x_0.

R_2 es la región tal que $CH^- = R_1 \cup R_2 \cup R_3 \cup R_{x_0}(v) \setminus \{x_0\} \cup R_x(v) \setminus \{x\}$.

Si $p \in R_1 \cup R_2 \cup R_{x_0}(v) \setminus \{x_0\} \cup R_x(v) \setminus \{x\}$ el resultado sigue por un razonamiento análogo al anterior. La diferencia en este caso reside en que x no sería visto por todo el rayo $R_{x_0}(v)$, pero $x \in st(w,S)$ donde $w \in R_{x_0}(v)$ y $\{w\} = R_{x_0}(v) \cap R(x \to p)$. Luego, sólo resta considerar el caso en el que los puntos de S que ven mutuamente a x y a x_0 únicamente están en R_3. En este caso, el x_0 buscado es x. Renombrando, llamemos x_0 a x, con lo cual la región R_1 pasa a ser R_3, repitiendo las opciones para p, resulta imposible que p sea un punto de R_3 ya que esto contradice el hecho que S es finitamente estrellado. ❑

Teorema V.5.4: *Sea $S \subset R^2$ cerrado.*

S es finitamente estrellado si y sólo si existe una familia cobertora $\mathcal{P}$ de componentes convexas de S que verifica que la intersección de finitos miembros de $\mathcal{P}$ es no vacía.

Dem. $\Leftarrow$) Es inmediato ya que dados finitos puntos en S, se toman componentes convexas que los contengan y un punto en la intersección de tales componentes convexas será un punto en la intersección de las estrellas de dichos puntos, con lo cual S resulta ser finitamente estrellado.

$\Rightarrow$) Sabemos por el teorema V.5.3 que existe $x_0 \in S$ tal que S puede ser escrito como $\cup\{st(y,S) / y \in R_{x_0}(\nu)\}$. Entonces, dado $x \in S$ tomemos $p \in R_{x_0}(\nu)$ que vea a x (tal p existe por el teorema V.5.3), y consideremos una componente convexa K_x tal que $K_x \supset [x,p]$.

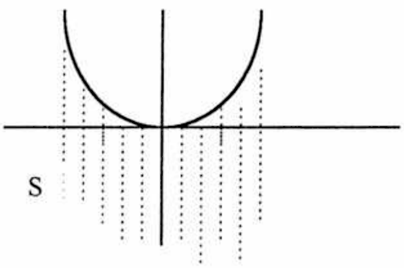
Definimos la familia de componentes convexas $\mathcal{P}$ de la forma $\mathcal{P} = \{ K_x / x \in S \}$. Esta familia es inmediatamente cobertora. También resulta inmediato que esta familia tiene la propiedad de intersección finita, pues dadas $K_{x_1}, K_{x_2}, \ldots K_{x_n} \in \mathcal{P}$ por construcción poemos tomar $p_i \in S$ tales que cada p_i ve a x_i con $p_i \in R_{x_0}(\nu)$. Tomamos entonces $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que p_m es el último punto entre los p_i yendo desde x_0 en dirección v. Por construcción resulta que $R_{p_m}(\nu) \subset K_{x_i}$ para todo i = 1, ..., n; luego $\varnothing \neq R_{p_m}(\nu) \subset \cap \{ K_{x_i} / i = 1, \ldots, n \}$.❑

V.6. Contraejemplos.

Supondremos, a lo largo de esta sección que $S \subseteq \mathbf{R}^n$ cerrado, finitamente estrellado no estrellado.

1) S contiene alguna recta en alguna dirección de recesión.

$S = \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 / y \leq x^2 \}$

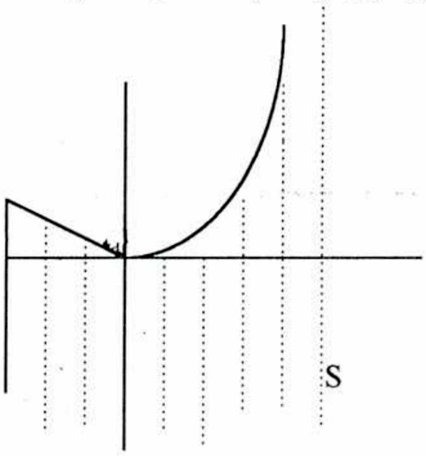


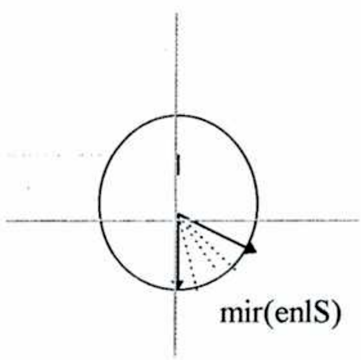
En este ejemplo la única dirección de recesión unitaria de S es (0,-1) y claramente S no contiene ninguna recta en esta dirección. Observar que $\lambda.(0,-1)$ (con $\lambda \geq 0$) también son direcciones de recesión, sin embargo de aquí en adelante por simplificar la escritura, consideraremos las unitarias.

2) dim(mir(enlS)) $\leq$ n - 2

Con n = 2, se pueden tener conjuntos finitamente estrellados, no estrellados y tal que presenten más de una dirección de recesión, por ejemplo:

$S = \{ \{x,y\} \in \mathbf{R}^2 / y \leq x^2, x \geq 0 \} \cup \{(x,y) / y \leq -x, -1 \leq x \leq 0 \}$.





Notar que ker(enlS) es el arco de direciones convexas entre (0,-1) y $\left(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Luego,

dim(ker(enlS)) = 2

3) Si lncS es compacto, entonces S es estrellado.

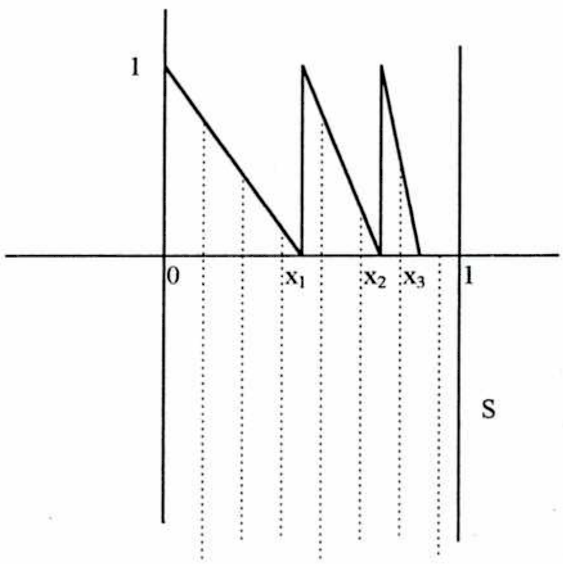
Al intentar encontrar un contraejemplo para esta afirmación, surgieron una serie de ejemplos planos, algunos de ellos de conjuntos estrellados, otros finitamente estrellados no estrellados que parece interesante incluir aquí antes de exhibir el contraejemplo buscado ya que aclararán un poco los inconvenientes presentados.

Ejemplo 1:

$$S = \bigcup_{i \in N} \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 / y \leq -2^i .x + 2^i - 1 \text{ con } x_i \leq x \leq x_{i+1} \} \text{ donde } x_i = 1 - \frac{1}{2^{i-1}}$$

Este conjunto está formado por regiones determinadas por rectas L_i que pasan por $(x_i, 1)$ y $(x_{i+1}, 0)$.

En este ejemplo, resulta que $L_i \cap L_{i+1} = \{(1,-1)\}$, luego (1,-1) ve a todo punto de S, por lo tanto S es estrellado.

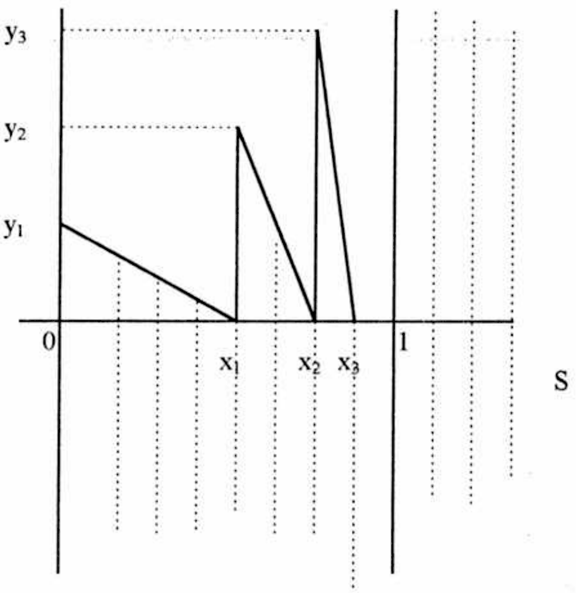


Ejemplo 2:

$$S = \bigcup_{i \in N} \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 / y \leq -i2^i x + i(2^i-1),\ 1-\frac{1}{2^{i-1}} \leq x \leq 1-\frac{1}{2^i} \} \cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x \geq 1\}$$

S es finitamente estrellado, no estrellado.

Notar que lncS = $\bigcup_{i \in N} \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / y = 0,\ x = 1-\frac{1}{2^{i-1}} \} \cup \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 / x = 1,\ x \geq 0\}$. Por lo tanto, lncS no es compacto, luego no sirve de contraejemplo.



En este ejemplo, la sucesión $\{(x_i, 0)\}$ es la sucesión $\{(1-\frac{1}{2^{i-1}},0)\}$ que tiende al punto (1,0) y la sucesión $\{(0,y_i)\}$ es $\{(0, i)\}$ que diverge.

La idea entonces es que los puntos $(0, y_i)$ no pueden diverger, pues si así fuera los puntos de la semirrecta vertical x = 1 con x ≥ 0 serían puntos de no convexidad local, con lo cual el conjunto lncS no sería acotado. Por otra parte, si $\{(0,y_i)\}$ converge a un cierto punto (0,a), entonces S resulta estrellado.

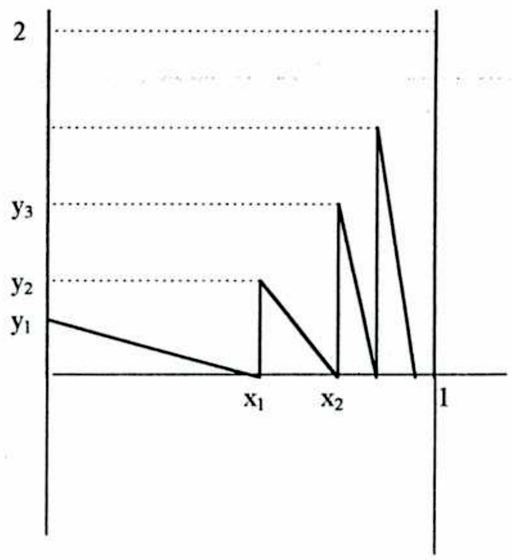
Ejemplo 3:

$$S = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{(x,y) / x_i \le x \le x_{i+1} \text{ y } y \le L_{i+1}\} \cup \{ (x,y) / x = 1\} \text{ donde}$$

$x_i = 1 - \frac{1}{2^{i-1}}$ e $y_i = 2 - \frac{1}{2^{i-1}}$ y L_i es la recta por los puntos $(x_{i-1} ; y_i)$ y $(x_i ; 0)$, o sea:

L_i: $(1 - 2^i).x + (2^i + 2^{1-i} - 3)$.

Luego, $S = \bigcup_{i \in N} \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 / y \le (1-2^i).x + (2^i + 2^{1-i} - 3),\ 1-\frac{1}{2^{i-1}} \le x \le 1-\frac{1}{2^i} \}$

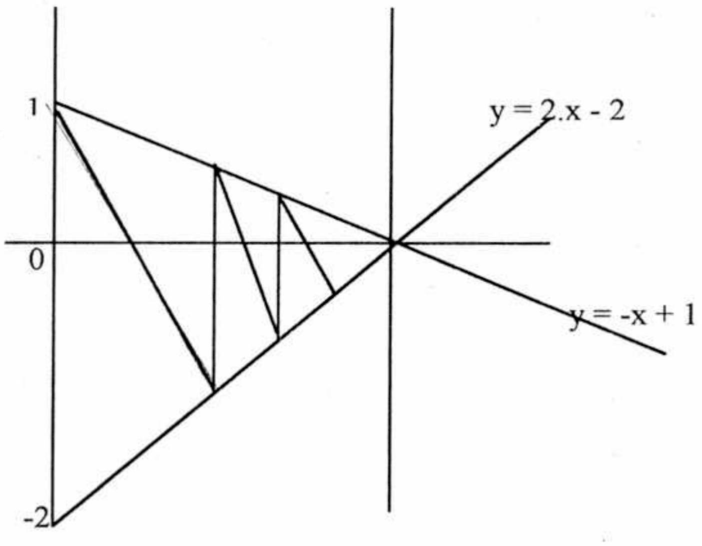


Y dado que la intersección entre L_i y L_{i+1} es: $\{ \left(1 - \frac{1}{2^{2i}}; -2 - \frac{1}{2^{2i}} + \frac{3}{2^i}\right) \} \longrightarrow \{(1,-2)\}$ cuando $i \to +\infty$, resulta que S es estrellado. Notar que lncS no es acotado, todos los puntos de la semirrecta $x = 1$ con $y \ge 0$ son puntos de no convexidad local.

<u>Ejemplo 4:</u>

$S = \bigcup_{i \in N} \{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 / y \le (-3i - 1).x + (3i - 2),\ 1-\frac{1}{2^{i-1}} \le x \le 1-\frac{1}{2^i} \}$

En este caso, como $L_i \cap L_{i+1} = \{(1,-3)\}$ y S es estrellado.



Contraejemplo de la conjetura 3:

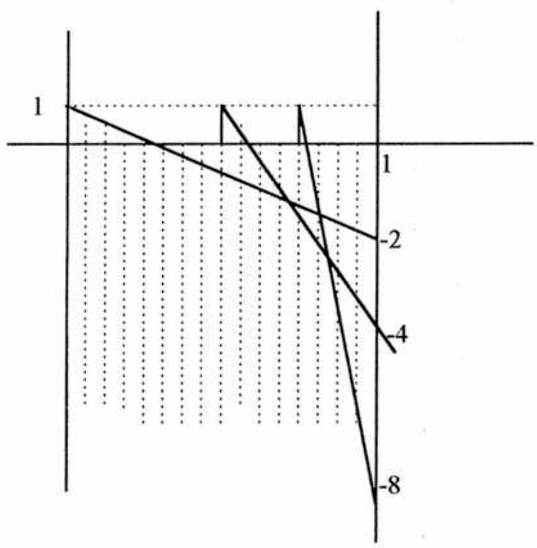
$$S=\bigcup_{i\in\mathbf{N}}\left\{(x,y)\in R^2\,/\,y\le\left(\frac{-2^i-4^i}{2}\right).x+\frac{4^i-2^i}{2},1-\frac{1}{2^{i-1}}\le x\le 1-\frac{2}{1+2^i}\right\}\cup\{(x,y)\,/\,x\ge 0,\ y\le 0\}\ \cup$$

$\{(x,y)\,/\,x=1,\ y\le 1\}$.

En este conjunto, el conjunto de puntos de no convexidad local es el siguiente:

$$\text{lncS}\ =\ \bigcup_{i\in\mathbf{N}}\left\{(x,y)\in\mathrm{R}^2\,/\,x=1-\frac{2}{1+2^i},y=0\right\}\ \cup\ \left\{(x,y)\,/\,x=1-\frac{1}{2^{i-1}},y=0\right\}\ \cup$$

$\left\{(x,y)\,/\,x=1,\ 0\le y\le 1\right\}$



4) I(nova) = { θ }

El contraejemplo es el conjunto anterior con x = (1,0).

Mabel A. Rodríguez
Tesista

Dr. Fausto A. Toranzos.
Director de Tesis

Conclusiones.

Creemos que el tema de conjuntos finitamente estrellados no estrellados pudo conjugar varios de los conceptos y propiedades estudiados aquí. Asimismo, las herramientas desarrolladas para trabajar con estos conjuntos brindaron posibilidades en muchas de las direcciones de estudio que no habían sido tratadas anteriormente. De todas formas, mucho queda aún por hacer. Por un lado las generalizaciones al caso de dimensión n, con $n > 2$, de la caracterización de estos conjuntos usando componentes convexas, así como la equivalencia entre propiedad de la semirrecta y propiedad de la frontera radiante. Por otra parte, para los conjuntos finitamente estrellados ha quedado pendiente el estudio de resultados tipo Krasnoselsky. Confiamos en que los resultados obtenidos tanto este tema como en el de visibilidad externa sean herramientas que puedan contribuir en el estudio de problemas de iluminación de recintos, visibilidad con obstáculos y la R-visibilidad definida por Cel. No hemos intentado aún establecer estas relaciones sin embargo creemos que es factible tratar estos temas desde el punto de vista aquí presentado.

Bibliografía.

[1] AMBROSIO, B., *Consecuencias del teorema "topológico" de Helly*, Revista de la Unión Matemática Argentina, **35** (1990), 13-18.

[2] BERG, M. De, "Computational Geometry, Algotithms, applications", Springer-Verlag, 1997.

[3] BOLTYANSKI, S., MARTINI, H, SOLTAN, P. S. "Excursions into combinatorial geometry", Springer-Verlag, 1996.

[4] BREEN, M., *Essential and inessential points of local nonconvexity.* Israel J. of Math. **12-4** (1972), 347-355.

[5] BREEN, M. *Clear visibility, starshaped sets, and finitely starshaped sets.* Journal of Geometry, **19** (1982), 183-196.

[6] BREEN, M. *Finitely starlike sets whose F-stars have positive measure.* Journal of Geometry **35** (1989), 19-25.

[7] GRUBER, P. Y WILLS, J. M., "Handbook of convex geometry", North Holland. (volumen A y B), 1993.

[8] HANSEN, G., Tesis doctoral F.C.E. y N, UBA, 1990.

[9] HANSEN, G., *Unbounded convex sets.* Aceptado para su publicación en la Revista de Matemática y Física Teórica U.N.T, 1997.

[10] JONGMANS, F., *Etudes des cônes associés à un ensemble.* Stencil de un seminario, Liège, 1983-1984.

[11] KENELLY, J. W., HARE, W. R. et. al., *Convex components, extreme points, and the convex kernel,* Proc. Amer. Math. Soc., **21** (1969), 83-87.

[12] KRANAKIS, E., POCCHIOLA, M., *Camera placement in integer lattices.* Discrete Comput. Geom. **12**, 91-104 (1994).

[13] PANIK, M., "Fundamental on convex analysis", Kluwer, 1993.

[14] POCCHIOLA, M., VEGTER, G., *Order types and visibility types of configurations of disjoint convex plane sets.* Extended abstract, Liens, 1994.

[15] RODRIGUEZ, M., *Propiedades de Visibilidad Externa,* Comunicación a la U.M.A (1994).

[16] SOLTAN, V., SZABÓ, L., VÁSÁRHELYI, É., *Primitive illumination systems for families of convex bodies.* Geometriae Dedicata **66** 125-148, 1997.

[17] STAVRAKAS, N., *The dimension of the convex kernel and points of local nonconvexity.* Proc. of the Amer. Math. Soc. **34** (1972) 222-224.

[18] STAVRAKAS, N., *A note on starshaped sets, (k)-extreme points and the half ray property.* Pacific Journal of Mathematics, **53** No.2 (1974), 627 - 628.

[19] TORANZOS, F.A., FORTE CUNTO, A., *Local characterization of starshapedness.* Geometriae Dedicata, **66**, (1997), 65-67.

[20] TORANZOS, F., NANCLARES, J., "Convexidad". Univ. de Zulia, Maracaibo, Venezuela (1978).

[21] TORANZOS, F. *Radial functions of convex and star-shaped bodies.* Amer. Math. Monthly **74** (1967), 278-280.

[22] TORANZOS, F. *The points of local nonconvexity of starshaped sets.* Pacific J. **101** (1982), 209-214.

[23] TORANZOS, F. A., *Critical visibility and outward rays.* Journal of Geometry **33** (1988), 155-167.

[24] ZONG, C., DUDZIAK, J., "Strange Phenomena in Convex and Discrete Geometry", Springer-Verlag, 1996.