

Tesis de Posgrado

Procesos disipativos rápidos en magnetohidrodinámica

Bender, Laurence E.

1997

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Bender, Laurence E.. (1997). Procesos disipativos rápidos en magnetohidrodinámica. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2957_Bender.pdf

Cita tipo Chicago:

Bender, Laurence E.. "Procesos disipativos rápidos en magnetohidrodinámica". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1997.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2957_Bender.pdf

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

**Procesos disipativos rápidos en
magnetohidrodinámica**

Laurence E. Bender

Director de Tesis
Dr. Fausto T. Gratton

Instituto de Física del Plasma
Departamento de Física

Agosto 1997

Tesis presentada para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas

12 05 97

Fast Dissipation in MHD Flows

The time evolution of current sheets under the influence of driven stagnation point flows is studied. It is shown that significant physical processes occur during the formation of the current sheet, originated from a sparse magnetic seed field or from an external continuous injection of magnetic flux. The advection and amplification of the magnetic field at a stagnation flow can give rise to large amounts of Joule dissipation over hydrodynamic time scales. These effects may lead to an accelerated annihilation of the magnetic field, or to steady state dissipative layers, depending on the balance between the incoming magnetic flux and the dissipation rate. The basic elements of the flow enhanced dissipation mechanism are discussed using order of magnitude considerations. Analytic time dependent solutions that describe the evolution of the magnetic field are obtained for planar flows. Starting from generic initial and boundary conditions for the magnetic field component lying on the plane of the flow, it is shown that the sublayer in which a change of sign of the magnetic field occurs tends to vanish in a short time during the formation of the current sheet. On the other hand, the magnetic field component normal to the flow plane is always rapidly extinguished. Thus, configurations commonly considered as models for steady state reconnection or tearing instability studies, are exceptional cases rather than generic magnetic structures. Self similar solutions that describe the amplification and decay of the magnetic field for planar and axial-symmetric flows are also obtained. In three dimensional stagnation point flows, current sheets that are not sustained by a continuous injection of magnetic energy are completely annihilated in a few hydrodynamic times. Several applications, including coronal heating, the dayside magnetospheric stagnation point, and the formation of hot spots in the Plasma Focus experiments, are discussed. The influence of stagnation flows on the stability of these dissipative structures is studied. These flows tend to oppose the permanence of a reconnected configuration. Numerical simulations of two-dimensional magnetic reconnection show the build up and consolidation of the current sheet. Thermal effects due to the rise of temperature in the current sheath and the resulting conductivity increment, enhance the amplification and extinction processes. These effects are illustrated with numerical solution examples. The heating and compressibility limits of the model are briefly outlined. Finally, the effect of density variations during the evolution of current sheets in compressible stagnation point flows is also studied numerically.

Keywords:

magnetohydrodynamics - current sheets - magnetic annihilation - stability of current sheets - magnetic reconnection

Resumen

Se investiga en forma analítica y numérica la evolución temporal de láminas de corriente en configuraciones de aniquilación magnética forzadas por un flujo con un punto de estancamiento. Se muestran las importantes consecuencias físicas de la etapa de formación de la lámina de corriente, que se puede originar a partir de una "semilla" inicial de campo magnético o mediante la inyección continua de flujo magnético. La convección y amplificación del campo magnético en un flujo de estancamiento genera una disipación Joule muy intensa dentro de la lámina de corriente en escalas de tiempo hidrodinámicas. Estos efectos pueden dar lugar a la aniquilación rápida del campo magnético, a la formación de estructuras disipativas estacionarias o a soluciones que crecen indefinidamente con el tiempo, dependiendo del balance entre la disipación y el ingreso de flujo magnético. Los elementos básicos del proceso de amplificación de la energía magnética se examinan usando argumentos físicos sencillos basados en consideraciones de orden de magnitud. Se obtienen soluciones analíticas dependientes del tiempo que describen la evolución del campo magnético en flujos con geometría plana. Suponiendo condiciones iniciales y de contorno generales para la componente de campo magnético contenida en el plano del movimiento, se demuestra que la capa en donde el campo magnético cambia de signo tiende a desaparecer durante la formación de la lámina de corriente. Por otra parte, la componente de campo magnético normal al flujo de estancamiento siempre se extingue rápidamente. En consecuencia, las configuraciones estacionarias de campo magnético con cambio de signo que se consideran habitualmente en los estudios de procesos de reconexión magnética e inestabilidades resistivas, resultan ser casos excepcionales en lugar de estructuras magnéticas genéricas. Se obtienen soluciones autosimilares que describen la amplificación y el decaimiento del campo magnético en flujos planos y axialmente simétricos. En flujos con un punto de estancamiento tridimensional las láminas de corriente se aniquilan completamente a menos que sean sostenidas por una inyección continua de energía magnética. Se consideran aplicaciones de estos modelos a la magnetosfera terrestre, a la formación de estructuras disipativas en el Plasma Focus y al calentamiento de la corona solar. Se estudia la influencia del flujo de estancamiento, que tiende a oponerse a la permanencia de configuraciones con campo magnético reconectado, sobre la estabilidad de la lámina de corriente. Simulaciones numéricas de reconexión magnética en dos dimensiones muestran la formación y consolidación de la lámina de corriente. El incremento de la conductividad provocado por el aumento de la temperatura en la lámina de corriente puede acelerar los procesos de amplificación y decaimiento del campo magnético. Estos efectos térmicos se ilustran mediante soluciones numéricas. Los límites del modelo incompresible debidos al calentamiento y a las variaciones de densidad se discuten brevemente. En el último capítulo se estudia en forma numérica la evolución de láminas de corriente en flujos compresibles.

Palabras claves:

magnetohidrodinámica - láminas de corriente - aniquilación magnética - estabilidad de láminas de corriente - reconexión magnética

Indice

1 Introducción	1
1.1 Procesos disipativos en láminas de corriente.	
1.2 Organización de la tesis.	
2 Ecuaciones generales	8
2.1 La magnetohidrodinámica con efectos disipativos.	
2.2 Flujos incompresibles.	
2.3 Ecuaciones para flujos incompresibles.	
2.4 Funciones de corriente y de flujo magnético.	
2.5 Ecuaciones reducidas.	
2.5.1 Flujos con simetría de traslación.	
2.5.2 Flujos con simetría axial.	
3 Intensificación y disipación rápida del campo magnético	16
3.1 Flujos incompresibles planos con un punto de estancamiento.	
3.1.1 Soluciones irrotacionales.	
3.1.2 Flujos limitados por paredes.	
3.2 Intensificación del campo magnético.	
3.3 Intensificación y disipación rápida en una solución elemental.	
3.4 Evolución del campo magnético en flujos con transitorios.	
4 Formación de láminas de corriente en flujos planos	29
4.1 Evolución del campo magnético.	
4.2 Solución general del problema de valores iniciales.	
4.3 Sistemas sin inyección de flujo magnético.	
4.4 Conservación del flujo magnético total.	
4.5 Evolución de la componente normal de campo magnético.	
5 Energía magnética	38
5.1 Evolución de la energía magnética.	
5.2 El origen de la amplificación de la energía magnética.	
5.3 Una cota superior para el crecimiento de la energía magnética.	

6 Soluciones autosimilares	43
6.1 Reducción a ecuaciones en derivadas ordinarias.	
6.2 Soluciones con $\lambda=0$.	
6.3 La solución general para $H(z)$.	
6.4 Soluciones autosimilares para la componente normal de campo magnético.	
7 Soluciones con inyección continua de flujo magnético	51
7.1 Condiciones de contorno en sistemas forzados.	
7.2 Crecimiento de las soluciones pares.	
8 Extensiones del modelo	56
8.1 Aniquilación rápida del campo magnético en un flujo tridimensional.	
8.1.1 Decaimiento del campo magnético.	
8.1.2 Solución elemental.	
8.1.3 Soluciones autosimilares.	
8.1.4 Soluciones estacionarias.	
8.2 Flujos convergentes con simetría axial.	
8.2.1 Evolución del campo magnético.	
8.2.2 Soluciones autosimilares.	
9 Aplicaciones a procesos disipativos en plasmas	70
9.1 Plasma Focus.	
9.2 Magnetosfera terrestre.	
9.3 Corona solar.	
9.3.1 El modelo básico y la amplificación de campo magnético.	
9.3.2 Calentamiento coronal: el modelo de "nanoflares" de Parker.	
9.3.3 Calentamiento coronal y fulguraciones en el marco de amplificación y aniquilación magnética.	
10 Estabilidad de láminas de corriente y reconexión magnética	83
10.1 Influencia del movimiento sobre la estabilidad de la lámina de corriente.	
10.1.1 Estabilidad de la lámina de corriente formada por la componente de campo magnético normal al plano del movimiento.	
10.1.2 Estabilidad de la lámina de corriente formada por la componente de campo magnético contenida en el plano del movimiento.	
10.2 Flujos planos dependientes del tiempo: soluciones numéricas.	

10.2.1 Ecuaciones y condiciones de contorno.	
10.2.2 Consolidación de la lámina de corriente.	
10.3 Comparación con el modelo de Sweet y Parker.	
11 Evolución térmica de la lámina de corriente	100
11.1 Efectos no lineales de la temperatura en la evolución de la lámina de corriente.	
11.2 Ecuaciones del modelo incompresible.	
11.3 Parámetros adimensionales.	
11.4 Soluciones numéricas: algunos ejemplos.	
11.4.1 Evolución de la disipación sin inyección de flujo magnético.	
11.4.2 Evolución de la disipación con inyección de flujo magnético.	
11.5 Aplicaciones a fenómenos disipativos en plasmas.	
11.6 Intensificación de la energía térmica.	
12 Evolución de láminas de corriente en flujos compresibles	110
12.1 Límites del modelo incompresible.	
12.2 Un modelo compresible de aniquilación magnética.	
12.3 Soluciones numéricas: efectos de la compresibilidad.	
12.3.1 Evolución de la energía magnética sin inyección de flujo magnético.	
12.3.2 Evolución de la energía magnética con inyección de flujo magnético.	
12.3.3 Estructura de la lámina de corriente compresible.	
13 Conclusiones	119
Apéndices	123
A.1 Solución numérica de las ecuaciones magnetohidrodinámicas.	
A.1.1 Discretización de las ecuaciones.	
A.1.2 Solución de las ecuaciones discretizadas.	
A.1.3 Aplicaciones del método numérico a problemas hidrodinámicos.	
A.2 Aniquilación magnética en una dimensión y el tiempo.	
A.3 Flujos incompresibles planos.	
A.4 Aniquilación magnética en flujos compresibles.	
A.5 Cálculo de autovalores mediante métodos matriciales con diferencias finitas.	
A.5.1 Solución numérica de las ecuaciones perturbativas.	
Referencias	136

1 Introducción.

1.1 Procesos disipativos en láminas de corriente.

El estudio de la formación y evolución temporal de láminas de corriente en configuraciones de aniquilación magnética tiene particular interés por su aplicación a un conjunto importante de fenómenos en plasmas, tanto astrofísicos como de laboratorio. Las láminas de corriente son configuraciones magnéticas donde se almacena una gran cantidad de energía, la cual puede ser liberada en forma rápida a través de inestabilidades resistivas, procesos de reconexión magnética o mediante la disipación de Joule (aniquilación magnética). La transferencia rápida de energía es el proceso básico subyacente en las fulguraciones solares o “flares” (ver, por ejemplo, Priest, 1995 y Parker, 1994). En los tokamaks, que son las configuraciones más avanzadas propuestas para el desarrollo de reactores de fusión, las láminas de corriente ocurren naturalmente durante la descarga en la fase de intensificación de corriente, o bien como resultado de la deformación de las líneas de campo magnético inducidas por inestabilidades (ver White, 1983, y la literatura allí citada). Asimismo, se ha propuesto la aniquilación rápida de campos magnéticos como el proceso responsable del calentamiento de las partículas en la columna de plasma comprimido del Plasma Focus (Gnavi, Gratton & Bender, 1994).

En el esquema de aniquilación magnética propuesto en esta tesis se considera un flujo con un punto de estancamiento que transporta un campo magnético formado por líneas rectas. El movimiento del plasma arrastra las líneas de campo magnético hacia el punto de estancamiento y las concentra formando una lámina de corriente. Simultáneamente, el campo magnético se intensifica a expensas del trabajo realizado por la presión dinámica del flujo. Como resultado de ambos efectos se puede producir una gran amplificación de la energía magnética y su disipación en tiempos cortos (del orden del tiempo hidrodinámico característico), cuando el número de Reynolds magnético es grande (Gratton, Gnavi & Bender, 1992). La evolución temporal de las soluciones en estas configuraciones depende fuertemente de la geometría del flujo y de las condiciones de contorno asintóticas para el campo magnético. En algunos casos se

produce la rápida extinción del campo magnético presente inicialmente en la región del flujo, mientras que en otros se forman estructuras estacionarias fuertemente disipativas que se mantienen intactas mientras actúa el movimiento. También cabe la posibilidad de que el sistema no pueda disipar la energía magnética acumulada, dando lugar a una lámina de corriente cuya intensidad crece con el tiempo.

Un proceso disipativo se considera “rápido” cuando se desarrolla en tiempos menores que el tiempo característico de difusión $\tau_d \sim L^2/\nu_m$ o, equivalentemente, con una velocidad mayor que la velocidad de difusión $v_d \sim \nu_m/L$, donde L es una escala característica de longitud y ν_m es la difusividad magnética. En términos del número de Lundquist $S = Lv_A/\nu_m = \tau_d/\tau_A$, donde v_A es la velocidad de Alfvén y $\tau_A = L/v_A$, un proceso rápido se define como aquel que posee una escala temporal del orden de $\sim \tau_A S^\sigma$ con $0 < \sigma < 1$ (Biskamp, 1994). La inestabilidad resistiva de corte de las líneas magnéticas (el modo “tearing”) para una lámina de corriente en equilibrio difusivo tiene una tasa de crecimiento típica del orden de $\gamma \sim (\tau_d \tau_A)^{-1/2}$, donde $\tau_A \ll \tau \sim \gamma^{-1} \ll \tau_d$ (Furth, Killeen & Rosenbluth, 1963). En consecuencia, el crecimiento de la inestabilidad es un proceso más rápido que la difusión del campo magnético, pero de menor duración que el tiempo característico de Alfvén.

A partir de una configuración de aniquilación magnética se puede originar la reconexión magnética propiamente dicha, que consiste en el cambio de la topología de las líneas de campo magnético hacia una configuración de menor energía magnética, con la consiguiente liberación de energía térmica y cinética (partículas aceleradas) durante el proceso (Biskamp, 1994; Forbes & Priest, 1987). En el modelo de reconexión lenta de Sweet y Parker (Sweet, 1958; Parker, 1963) la escala de tiempo es del orden de $\tau_{SP} \sim \tau_d S_i^{-1/2}$, donde $S_i = Lv_{Ai}/\nu_m$ es el número de Lundquist calculado usando la velocidad de Alfvén correspondiente al campo magnético que ingresa a la región disipativa. Esto corresponde a una velocidad de reconexión $v_r/v_{Ai} \sim 1/S_i^{1/2}$, donde v_i es la velocidad con que ingresa el plasma a la región disipativa. El tiempo característico de reconexión lenta es mucho menor que el tiempo de difusión τ_d cuando $S_i \gg 1$, a pesar de lo cual resulta demasiado largo para explicar la liberación rápida de energía observada en numerosos fenómenos disipativos, e.g. fulguraciones y prominencias solares (Priest, 1985). Con el modelo de reconexión rápida de Petscheck (Vasyliunas, 1975) se obtienen valores mucho

mayores para la velocidad de reconexión $v_i/v_{Ai} \sim \pi(8 \ln S_i)^{-1}$, que a su vez depende débilmente del número de Lundquist S_i . Sin embargo, este modelo ha sido cuestionado a partir de las soluciones obtenidas mediante simulaciones numéricas de flujos magnetohidrodinámicos incluyendo efectos disipativos (Biskamp, 1986). Parker (1994) ha desarrollado en tiempos más recientes la interesante hipótesis de un gran número de “nanoflares” de muy pequeña escala para explicar las fulguraciones solares mayores y el calentamiento coronal en general. En el modelo de Parker el problema de la escala de tiempos es superado por la teoría de un “mar de nanoflares”.

En las configuraciones de aniquilación magnética desarrolladas en esta tesis (sin reconexión, aunque este efecto puede aparecer en los bordes lejanos del modelo, como se muestra en el capítulo 10), la disipación de la energía magnética se produce en una escala de tiempo que es del orden del tiempo hidrodinámico $\tau_h = h_0/U$, donde h_0 es el tamaño de la región del flujo y U es la velocidad característica del movimiento. Esta escala de tiempo es mucho menor que las correspondientes a reconexión lenta y al crecimiento de las inestabilidades resistivas. La evolución del campo magnético está determinada fundamentalmente por la presencia de un movimiento impuesto en forma externa. En consecuencia, el número de Mach-Alfvénico definido por $M_{Ai} = v_i/v_{Ai}$ (que corresponde a la “velocidad de aniquilación” del campo magnético) no depende del número de Lundquist S y puede alcanzar, en principio, valores arbitrariamente grandes. En flujos planos la amplificación del campo magnético como consecuencia del movimiento del plasma origina una intensa disipación Joule $D \sim (1/\tau_h)W_0R_m^{1/2}$ (por unidad de área y de tiempo) dentro de una lámina de corriente de ancho $\delta/h_0 = R_m^{-1/2}$, donde $R_m = Uh_0/\nu_m$ es el número de Reynolds magnético (que se supone grande) y $W_0 = B_0^2 h_0 / 8\pi$ es la energía magnética (por unidad de área) contenida en la región a $t=0$. El tiempo característico de este proceso es del orden de $\tau \sim \tau_h(1/2)\ln R_m$.

La mayor parte de los estudios sobre láminas de corriente y reconexión se han ocupado de configuraciones estacionarias (Phan & Sonnerup, 1990; Sonnerup, Ip, & Phan, 1990; Vasyliunas, 1975). Un antecedente importante es el artículo de Sonnerup & Priest (1975), donde se estudia la aniquilación estacionaria de un campo magnético formado por líneas rectas con un modelo de flujo incompresible muy simple sin efectos viscosos (punto de estancamiento irrotacional). Publicaciones más recientes incorporan

el efecto de la viscosidad (Gratton et al., 1988; Phan & Sonnerup, 1990), componentes adicionales de velocidad paralelas a la lámina de corriente (Besser, Biernat & Rijnbeek, 1990), flujos tridimensionales (Jardine, Allen & Grundy, 1993) y la presencia de contornos u otros límites a la región ocupada por el fluido (Gratton & Bender, 1991). El estudio de la evolución de láminas de corriente en flujos dependientes del tiempo tiene como precursor el trabajo de Clark (1964), donde se obtiene una solución exacta dependiente del tiempo para la evolución del campo magnético en un flujo incompresible plano. En este trabajo también se obtienen las leyes de escala del proceso de amplificación del campo magnético y se estudia el comportamiento asintótico de algunas soluciones particulares. Gratton, Gnavi & Bender (1992) generalizan la solución de Clark para movimientos irrotacionales dependientes del tiempo, obtienen una familia de soluciones autosimilares que describen la evolución del campo magnético y estudian la evolución de sistemas con condiciones de contorno asintóticas más generales, e.g. inyección continua de flujo magnético. Anderson & Priest (1993) analizan la influencia del comportamiento asintótico del campo magnético inicial sobre su evolución posterior, así como los efectos debidos a una variación brusca de la difusividad magnética y la presencia de diversos campos de velocidad dependientes del tiempo.

La etapa de formación de la lámina de corriente tiene consecuencias físicas importantes. Uno de los resultados más significativos que se desprende del estudio de la evolución del campo magnético en flujos planos es el predominio de componentes de campo magnético sin cambio de signo, que se desarrollan en tiempos más cortos que el tiempo de crecimiento de las inestabilidades resistivas. En consecuencia, las configuraciones estacionarias de campo magnético con cambio de signo que se toman como punto de partida para estudiar procesos de reconexión magnética e inestabilidades resistivas, pueden no llegar a desarrollarse a partir de distribuciones más generales. En caso de formarse una lámina de corriente con campos antiparalelos balanceados, es posible concebir una combinación del modelo de intensificación tratado aquí con un esquema Sweet-Parker de reconexión (sección 10.3). La intensificación del campo magnético modifica la velocidad de reconexión del modelo original de Sweet-Parker y permite estimar valores mucho más elevados.

1.2 Organización de la tesis.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 se presentan las ecuaciones generales de la magnetohidrodinámica, incluyendo efectos disipativos debidos a la presencia de viscosidad y resistividad. Se analizan las condiciones para que flujo se pueda considerar (aproximadamente) incompresible y se introducen los potenciales de Euler. Asimismo, se presentan las ecuaciones reducidas correspondientes a flujos planos con simetría de traslación y flujos axialmente simétricos.

En los capítulos 3 al 7 se examinan distintos aspectos de la evolución del campo magnético en flujos incompresibles con geometría plana. En el capítulo 3 se hace un repaso de las principales soluciones incompresibles para el movimiento del fluido. Los mecanismos físicos básicos del modelo de aniquilación se discuten mediante argumentos de tipo dimensional y se obtienen leyes de escala aproximadas. Se analiza en forma detallada una solución "elemental" particularmente sencilla de las ecuaciones magnetohidrodinámicas, que presenta muchas de las características que se encuentran en soluciones más generales. Por último, se estudia la evolución del campo magnético en flujos con transitorios.

En el capítulo 4 se investiga la evolución del campo magnético a partir de condiciones iniciales más generales. Se obtiene la solución general del problema de valores iniciales correspondiente a configuraciones sin inyección de flujo magnético (que podría ser traído por el movimiento del plasma desde las fronteras lejanas de la sistema) y la solución asintótica para $t \rightarrow \infty$. Se demuestra que la componente impar del campo magnético inicial se extingue completamente en un tiempo del orden de $\tau \sim \tau_h (1/2) \ln R_m$, después de una etapa inicial que presenta una intensificación importante de la energía magnética y una disipación Joule considerable. En cambio, la componente par del campo magnético tiende a una solución gaussiana estacionaria que disipa energía en forma continua mientras se mantiene el movimiento. La última sección describe la evolución del campo magnético normal al plano de movimiento, que no es amplificado por el flujo y que se caracteriza por la extinción rápida de todas las componentes presentes inicialmente en un lapso de tiempo del orden de τ_h . Los resultados analíticos

se complementan con soluciones numéricas obtenidas a partir de la ecuación de evolución del campo magnético usando un método de diferencias finitas.

En el capítulo 5 se obtienen balances energéticos correspondientes a configuraciones sin inyección de flujo magnético y se analiza el origen de la intensificación de la energía magnética. El capítulo 6 describe una familia de soluciones autosimilares que para la evolución del campo magnético en un flujo irrotacional.

La evolución del campo magnético en sistemas con inyección continua de flujo magnético se analiza en el capítulo 7. Cuando la inyección de flujo magnético desde ambos lados de la lámina de corriente no se produce en forma perfectamente simétrica, se obtiene una solución par que crece linealmente con el tiempo. El crecimiento de la componente par del campo magnético se da en un tiempo del orden de τ_h y puede interferir en el desarrollo de procesos disipativos que requieren la existencia de una lámina de corriente con cambio de signo en el campo magnético (e.g. reconexión).

En el capítulo 8 se extiende el modelo plano de aniquilación magnética a configuraciones de flujos tridimensionales y axialmente simétricos con geometría cilíndrica (Gratton & Bender, 1993). Los resultados obtenidos para configuraciones tridimensionales permiten explicar la escasa amplificación del campo magnético observada en la magnetosfera terrestre. Un flujo convergente con geometría cilíndrica podría modelar procesos disipativos rápidos como los que se observan en el Plasma Focus, particularmente la formación de pequeñas regiones altamente disipativas en la columna de plasma durante la etapa del foco (Gnavi, Gratton & Bender, 1994). En el capítulo 9 se muestra que los valores de disipación Joule y las escalas de tiempo obtenidas a partir de los modelos de aniquilación magnética son similares en orden de magnitud a los observados en estos escenarios. Los resultados de la tesis también permiten realizar un aporte a la discusión del problema del calentamiento de la corona solar. Se examinan varios escenarios de disipación de energía magnética en el marco de las ideas de Parker sobre "nanoflares" (Parker, 1997).

En el capítulo 10 se estudian algunos aspectos de la estabilidad de láminas de corriente en flujos planos con un punto de estancamiento. Se discute la influencia del movimiento sobre la estabilidad de láminas de corriente formadas por la componente de campo magnético normal al plano de movimiento y en láminas de corriente formadas

por la componente contenida en el mismo plano. En ambos casos el flujo de estancamiento tiende a estabilizar la configuración. La formación de una lámina de corriente alargada de carácter cuasi-unidimensional en flujos bidimensionales se ilustra mediante simulaciones numéricas directas de las ecuaciones magnetohidrodinámicas en la aproximación incompresible. Los resultados obtenidos se comparan con simulaciones de reconexión magnética realizadas por otros autores (Biskamp, 1986; Yan, Lee & Priest, 1991).

El efecto de la temperatura en la evolución de láminas de corriente se estudia en el capítulo 11 a través de un modelo simplificado de carácter unidimensional que mantiene la hipótesis de incompresibilidad (Bender & Gratton, 1994). La disipación generada durante la evolución del campo magnético puede dar lugar a un aumento importante de la temperatura en la región disipativa. En estos casos se produce un efecto de acoplamiento no lineal debido a una dependencia de la difusividad magnética con la temperatura de la forma $\nu_m \propto T^{3/2}$. Las ecuaciones no lineales del modelo se resuelven numéricamente para determinar la influencia de los parámetros adimensionales que rigen la evolución del campo magnético. También se analizan las condiciones en que se puede desarrollar un “desboque térmico” de la región disipativa.

En el capítulo 12 se lleva a cabo un estudio numérico de los efectos de la compresibilidad en la evolución de láminas de corriente planas. A diferencia de lo que ocurre con las configuraciones incompresibles consideradas en la mayor parte de la tesis, las ecuaciones de la magnetohidrodinámica compresible no admiten una separación natural que permite analizar el movimiento del plasma en forma independiente del campo magnético (en particular el flujo irrotacional con un punto de estancamiento no es solución), por lo que se debe resolver la dinámica completa del problema. El flujo de estancamiento se modela mediante la introducción de un término forzante en la ecuación de movimiento para reducir el sistema magnetohidrodinámico original a un problema con una sola variable espacial. Los principales efectos de la compresibilidad se analizan para un conjunto de soluciones correspondientes a configuraciones planas, variando las condiciones de contorno para el campo magnético y los parámetros adimensionales que rigen su evolución. En el capítulo 13 se presentan las conclusiones del trabajo.

2 Ecuaciones generales.

2.1 La magnetohidrodinámica con efectos disipativos.

Las ecuaciones fundamentales que gobiernan el flujo de un plasma en la aproximación de la magnetohidrodinámica son (ver, por ejemplo, Roberts, 1967 y Priest, 1982)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0, \quad (2.1)$$

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad} \mathbf{v} = -\text{grad}(p + V + \frac{2}{3} \mu \text{div} \mathbf{v}) + \text{div}(\mu \text{grad} \mathbf{v} + \mu \{\text{grad} \mathbf{v}\}^T) + \frac{1}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.2)$$

$$\rho \frac{\partial e}{\partial t} + \rho \mathbf{v} \cdot \text{grad} e = \text{div}(\lambda \text{grad} T) + p \text{div} \mathbf{v} + \mathcal{Q}, \quad (2.3)$$

$$\frac{1}{\sigma} \mathbf{j} = \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (2.4)$$

$$\text{rot} \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}, \quad (2.5)$$

$$\text{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (2.6)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad (2.7)$$

donde ρ es la densidad, \mathbf{v} es la velocidad, e es la energía interna por unidad de masa, \mathbf{B} es el campo magnético, \mathbf{j} es la densidad de corriente, \mathbf{E} es el campo eléctrico, V es el potencial gravitatorio por unidad de volumen y p es la presión del plasma. Los coeficientes disipativos corresponden a la viscosidad μ , la conductividad térmica λ y la conductividad eléctrica σ . El término \mathcal{Q} en la ecuación de energía (2.3) representa la contribución debida a la disipación resistiva y viscosa, u otras formas de energía. Se asume una ley de Ohm simplificada de la forma que se muestra en (2.4). Todas las magnitudes están expresadas en unidades cgs-ues (c es la velocidad de la luz en el vacío). El sistema se completa con una ecuación de estado para el plasma.

Introduciendo potenciales electrodinámicos \mathbf{A} y Φ_e tales que

$$\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}, \quad (2.8)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \text{grad} \Phi_e. \quad (2.9)$$

con

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = 0, \quad (2.10)$$

la ley de Ohm en combinación con (2.6) da

$$-\operatorname{grad} \Phi_e = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{B} \times \mathbf{v} + \nu_m \operatorname{rot} \mathbf{B}, \quad (2.11)$$

donde $\nu_m = c^2/4\pi\sigma$ es la difusividad magnética. El potencial electrostático Φ_e se puede eliminar tomando el rotor de (2.11) para obtener la "ecuación de inducción"

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) - \operatorname{rot} (\nu_m \operatorname{rot} \mathbf{B}). \quad (2.12)$$

Cuando el término difusivo es despreciable la ec. (2.12) se reduce a

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \operatorname{rot} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad (2.13)$$

que implica la conservación del flujo magnético (magnetohidrodinámica ideal). Esta ecuación también se puede escribir de la forma

$$\frac{D\mathbf{B}}{Dt} = \mathbf{B} \cdot \operatorname{grad} \mathbf{v} - \mathbf{B} \operatorname{div} \mathbf{v}, \quad (2.14)$$

donde $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{v} \cdot \nabla$ es la derivada material siguiendo la partícula de fluido. Usando la ecuación de continuidad (2.1) se obtiene

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \operatorname{grad} \right) \mathbf{v}, \quad (2.15)$$

cuya integral es (Roberts, 1967)

$$\frac{\mathbf{B}}{\rho} = \left(\frac{\mathbf{B}_0}{\rho_0} \cdot \operatorname{grad}_0 \right) \mathbf{r}, \quad (2.16)$$

donde grad_0 es el operador de gradiente aplicado al vector de posición Lagrangiano \mathbf{r}_0 , $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t)$, $\rho = \rho(\mathbf{r}_0, t)$ y $\rho_0 = \rho_0(\mathbf{r}_0, t)$. La expresión (2.16) proporciona la variación del vector \mathbf{B}/ρ con respecto a su valor inicial \mathbf{B}_0/ρ_0 debido a un desplazamiento \mathbf{r} del elemento de fluido. Este resultado se suele expresar diciendo que las líneas de \mathbf{B}/ρ están "congeladas" al fluido cuando la conductividad es infinita.

El número de Reynolds magnético definido por $R_m = U_0 L / \nu_m$, donde U_0 , L son escalas características de velocidad y de longitud, juega un rol importante en la evolución del campo magnético. Valores de $R_m \gg 1$ corresponden a flujos en donde los efectos disipativos de la resistividad son despreciables, salvo en las láminas de corriente

	Conductividad σ (s^{-1})	Difusividad magnética ν_m ($cm^2 s^{-1}$)	Velocidad U_o ($cm s^{-1}$)	Longitud L (cm)	Reynolds magnético $R_m=LU_o/\nu_m$
Agua+25% NaCl (20 °C)	$1.9 \cdot 10^{11}$	$3.7 \cdot 10^8$	10^2	10^2	$2.7 \cdot 10^{-5}$
Acero fundido (1500 °C)	$6.3 \cdot 10^{16}$	$1.1 \cdot 10^3$	10	10^2	$8.8 \cdot 10^{-1}$
Sodio líquido (400 °C)	$5.4 \cdot 10^{16}$	$1.3 \cdot 10^3$	escalas industriales		10
Núcleo terrestre (5000 K)	$\sim 7 \cdot 10^{17}$	$\sim 10^2$	10^{-1}	10^8	10^5
Fotosfera solar (~ 5600 K)	$\sim 3 \cdot 10^{12}$	$\sim 10^7$	10^5	10^9	10^7
Corona solar ($\sim 10^6$ - 10^7 K)	$\sim 8 \cdot 10^{16}$	$\sim 10^3$	10^5	10^8	10^{10}
Plasma Focus (~ 2000 eV)	$\sim 7.6 \cdot 10^{17}$	$\sim 10^2$	10^7	10^{-1}	10^4

Tabla 1. Valores típicos de los coeficientes disipativos.

que rodean las superficies singulares del campo magnético. En la Tabla 1 se muestran los valores de σ y ν_m para algunos escenarios físicos de interés, así como valores típicos de R_m .

2.2 Flujos incompresibles.

En flujos donde se cumple la condición de incompresibilidad $\text{div } \mathbf{v}=0$ las ecuaciones de la magnetohidrodinámica se simplifican considerablemente. Si el problema además posee simetría de traslación o de rotación, el número de variables se puede reducir introduciendo potenciales de Euler para la velocidad y el campo magnético.

La hipótesis de incompresibilidad es razonable cuando se estudian procesos magnetohidrodinámicos en líquidos conductores, como los que aparecen en la tabla 1. Sin embargo, en un plasma se producen variaciones de la densidad cuyo orden de magnitud está dado por

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim \frac{1}{c_s^2} \frac{\Delta p}{\rho}, \quad (2.17)$$

donde c_s es la velocidad del sonido ($c_s=9.8 \times 10^5 (\gamma T/\mu)^{1/2}$ cm s⁻¹; T en eV y $\mu=m_i/m_p$). La variación de la presión Δp en procesos dinámicos, que se puede estimar a partir de los términos grad p, grad B²/8π y ρv.grad v (suponiendo que la viscosidad es pequeña) en la ecuación de movimiento (2.2), es del orden de $\Delta p/\rho \sim U\Delta U + B\Delta B/8\pi\rho$. Luego, la variación relativa de la densidad es aproximadamente

$$\frac{\Delta\rho}{\rho} \sim M^2 \left(\frac{\Delta U}{U} \right) + \frac{1}{\gamma\beta} \left(\frac{\Delta B}{B} \right), \quad (2.18)$$

donde $M=U/c_s$ es el número de Mach y $\beta=8\pi n k T/B^2=4 \times 10^{-11} n T/B^2$ (n es el número de partículas por cm⁻³; k es la constante de Boltzmann). Por lo tanto, la condición de incompresibilidad $\Delta\rho/\rho \ll 1$ requiere que $M^2 \ll 1$ y $\beta \gg 1$ durante la evolución del flujo. La mayor parte de los resultados obtenidos en esta tesis asumen la validez de estas condiciones. Cabe notar que en este contexto el valor estático de β es irrelevante; lo que importa es la diferencia entre los valores iniciales y finales del campo magnético. En el último capítulo se presenta una evaluación preliminar de las modificaciones debidas a la compresibilidad.

2.3 Ecuaciones para flujos incompresibles.

En el caso de flujos incompresibles (densidad uniforme) con viscosidad y conductividad eléctrica constantes, las ecs. (2.1)-(2.7) se reducen a

$$-\text{grad } P = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{v} \text{ rot } \boldsymbol{\omega} - \frac{1}{\rho c} \mathbf{j} \times \mathbf{B}, \quad (2.19)$$

$$-\text{grad } Q = \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{B} \times \mathbf{v} + \mathbf{v}_m \text{ rot } \mathbf{B}, \quad (2.20)$$

donde

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\mu}/\rho, \quad \boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}, \quad P = p/\rho + |\mathbf{v}|^2/2 + V, \quad Q = c\Phi_e.$$

Tomando el rotor de (2.19)-(2.20) para eliminar los gradientes de las magnitudes P y Q, y observando que

$$\text{rot}(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{grad } \boldsymbol{\omega} - \boldsymbol{\omega} \cdot \text{grad } \mathbf{v} = \{\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}\}, \quad (2.21)$$

$$\text{rot}(\mathbf{B} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot \text{grad } \mathbf{B} - \mathbf{B} \cdot \text{grad } \mathbf{v} = \{\mathbf{v}, \mathbf{B}\}, \quad (2.22)$$

donde $\{\mathbf{v}, \omega\}$ es el conmutador de los campos vectoriales \mathbf{v} y ω , se obtienen las ecuaciones

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \{\mathbf{v}, \omega\} + \mathbf{v} \text{ rot rot } \omega = \frac{1}{\rho c} \{\mathbf{j}, \mathbf{B}\}, \quad (2.23)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \{\mathbf{v}, \mathbf{B}\} + \mathbf{v}_m \text{ rot rot } \mathbf{B} = 0. \quad (2.24)$$

2.4 Funciones de corriente y de flujo magnético.

En un flujo incompresible se puede representar la velocidad y el campo magnético de la forma

$$\mathbf{v} = \text{grad } \xi \times \text{grad } \zeta \quad (2.25)$$

$$\mathbf{B} = \text{grad } \psi \times \text{grad } \chi \quad (2.26)$$

donde ζ , ξ , ψ y χ son los "potenciales de Euler" (Moffat, 1978; Roberts, 1967). El flujo de \mathbf{v} y \mathbf{B} a través de una superficie abierta S limitada por una curva cerrada C se obtiene a partir de las expresiones

$$\int_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \xi d\zeta = -\oint_C \zeta d\xi \quad (2.27)$$

$$\int_S \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \psi d\chi = -\oint_C \chi d\psi \quad (2.28)$$

La elección particular $\zeta=z$, $\xi=\xi(x,y)$, $\chi=z$ y $\psi=\psi(x,y)$, donde ξ es la función de corriente y ψ es la función de flujo magnético, representa un flujo plano con simetría de traslación en z . Las componentes de la velocidad y del campo magnético en coordenadas cartesianas son

$$v_x = \frac{\partial \xi}{\partial y}, \quad v_y = -\frac{\partial \xi}{\partial x},$$

$$B_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad B_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

El flujo de \mathbf{v} a través de una superficie de altura z , cuya intersección con el plano (x,y) forma una línea que une los puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2) , es igual a $[\xi(x_2, y_2) - \xi(x_1, y_1)]z$. Análogamente, el flujo de \mathbf{B} es $[\psi(x_2, y_2) - \psi(x_1, y_1)]z$.

La elección $\zeta = \varphi$, $\xi = \xi(z, r)$, $\chi = \varphi$, $\psi = \psi(z, r)$ corresponde a flujos con simetría axial (coordenada φ ignorable). Las componentes físicas de la velocidad y del campo magnético en coordenadas cilíndricas (z, r) son

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial z},$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad B_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z},$$

Los flujos respectivos de \mathbf{v} y \mathbf{B} a través de un disco de radio r que está contenido en el plano $z = \text{cte}$ son iguales a $2\pi\xi(r, z)$ y $2\pi\psi(r, z)$.

2.5 Ecuaciones reducidas.

Cuando el problema posee una coordenada ignorable se obtiene una reducción importante del conjunto de seis ecuaciones (2.23)-(2.24). A continuación se presentan, sin demostración, las ecuaciones reducidas para flujos planos con simetría de traslación y flujos axialmente simétricos. Una derivación detallada de las ecuaciones reducidas de la magnetohidrodinámica con efectos disipativos en coordenadas curvilíneas, se puede encontrar en Gratton & Heyn (1989) y Gratton, Bender & Gnani (1996).

2.5.1 Flujos con simetría de traslación.

Para flujos con simetría de traslación (coordenada z ignorable) de la forma

$$\mathbf{v} = \text{grad } \xi \times \mathbf{e}_z + v_z \mathbf{e}_z, \quad (2.29)$$

$$\mathbf{B} = \text{grad } \psi \times \mathbf{e}_z + B_z \mathbf{e}_z, \quad (2.30)$$

las ecuaciones reducidas en coordenadas cartesianas (x, y) son

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) \nabla^2 \xi = \frac{1}{4\pi\rho} [\nabla^2 \psi, \psi] - [\nabla^2 \xi, \xi], \quad (2.31)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2 \right) v_z = [\xi, v_z] - \frac{1}{4\pi\rho} [\psi, B_z], \quad (2.32)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \nabla^2 \right) \psi = [\xi, \psi], \quad (2.33)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \nabla^2 \right) B_z = [\xi, B_z] - [\psi, v_z], \quad (2.34)$$

donde

$$[\xi, \psi] = \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} - \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

La presión se obtiene *a posteriori* integrando el diferencial exacto

$$dP = -\delta^* \left(\frac{\partial}{\partial t} - v \nabla^2 \right) \xi + \nabla^2 \xi d\xi - \frac{1}{4\pi\rho} \nabla^2 \psi d\psi + d\left(\frac{v_z^2}{2}\right) - d\left(\frac{B_z^2}{8\pi\rho}\right), \quad (2.35)$$

donde

$$\delta^* = dx \frac{\partial}{\partial y} - dy \frac{\partial}{\partial x}.$$

2.5.2 Flujos con simetría axial.

Para flujos axialmente simétricos (coordenada φ ignorable) de la forma

$$\mathbf{v} = \frac{1}{r} \text{grad } \xi \times \mathbf{e}_\varphi + v_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (2.36)$$

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r} \text{grad } \psi \times \mathbf{e}_\varphi + B_\varphi \mathbf{e}_\varphi \quad (2.37)$$

las ecuaciones reducidas en coordenadas cilíndricas (z, r) son

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v D^2 \right) D^2 \xi = r \left(\frac{1}{4\pi\rho} \left[\frac{1}{r^2} D^2 \psi, \psi \right] - \left[\frac{1}{r^2} D^2 \xi, \xi \right] + \frac{1}{4\pi\rho} \left[\frac{1}{r^2}, \frac{r^2 B_\varphi^2}{2} \right] - \left[\frac{1}{r^2}, \frac{r^2 v_\varphi^2}{2} \right] \right), \quad (2.38)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v D^2 \right) r v_\varphi = \frac{1}{r} \left([\xi, r v_\varphi] - \frac{1}{4\pi\rho} [\psi, r B_\varphi] \right), \quad (2.39)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_m D^2 \right) \psi = \frac{1}{r} [\xi, \psi], \quad (2.40)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - v_m D^2 \right) r B_\varphi = r \left([\xi, \frac{B_\varphi}{r}] - [\psi, \frac{v_\varphi}{r}] \right), \quad (2.41)$$

donde

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right), \quad [\xi, \psi] = \frac{\partial \xi}{\partial z} \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \xi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z}.$$

La presión se obtiene integrando el diferencial exacto

$$dP = -\delta^* \left(\frac{\partial}{\partial t} - v D^2 \right) \xi + \frac{1}{r^2} \left(D^2 \xi d\xi + d\left(\frac{r^2 v_\varphi^2}{2}\right) \right) - \frac{1}{4\pi\rho r^2} \left(D^2 \psi d\psi + d\left(\frac{r^2 B_\varphi^2}{2}\right) \right), \quad (2.42)$$

donde

$$\delta^* = \frac{1}{r} \left(dz \frac{\partial}{\partial r} - dr \frac{\partial}{\partial z} \right).$$

3 Intensificación y disipación rápida del campo magnético.

3.1 Flujos incompresibles planos con un punto de estancamiento.

El conjunto de ecuaciones reducidas (2.31)-(2.34) admiten una familia de soluciones exactas de la forma

$$\xi = x f(y, t), \quad \psi = \psi(y, t), \quad (3.1)$$

donde $\xi(x, y, t)$ es la función de corriente y $\psi(y, t)$ es la función de flujo magnético. El flujo representado por (3.1) tiene un punto de estancamiento en el origen cuando $f(0, t) = 0$. El campo magnético está formado por líneas rectas con componente en la dirección x solamente ($B_y = -\partial\psi/\partial x = 0$). Estas soluciones tienen la propiedad de que el término $[\nabla^2\psi, \psi]$ en (2.31) es idénticamente nulo. Por lo tanto, la ecuación de movimiento se desacopla de la evolución del campo magnético y se puede estudiar por separado.

La ecuación que rige el movimiento del plasma es

$$\frac{\partial f'}{\partial t} + f'^2 - ff'' - \nu f''' = C(t), \quad (3.2)$$

donde f' denota la derivada $\partial f/\partial y$ y $C(t)$ es una función del tiempo que mide el gradiente de presión (lineal) en la dirección x . El campo magnético $B(y, t) = \partial\psi/\partial y$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nu_m \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(fB). \quad (3.3)$$

La distribución de presión se obtiene a partir de las soluciones $f(y, t)$ y $B(y, t)$ usando la fórmula

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho C(t) x^2 - \frac{B^2}{8\pi} - \frac{1}{2} \rho f^2 - \rho \nu f, \quad (3.4)$$

donde p_0 es una presión constante de referencia. El gradiente lateral de la presión $\partial p/\partial x = -\rho Cx$ es el motor del flujo y caracteriza su intensidad. El movimiento resultante del plasma es independiente del campo magnético, que solamente modifica la presión a través del término $B^2/8\pi$ en (3.4). En cambio, la evolución del campo magnético es fuertemente influenciada por el movimiento. Dada la importancia que reviste la forma

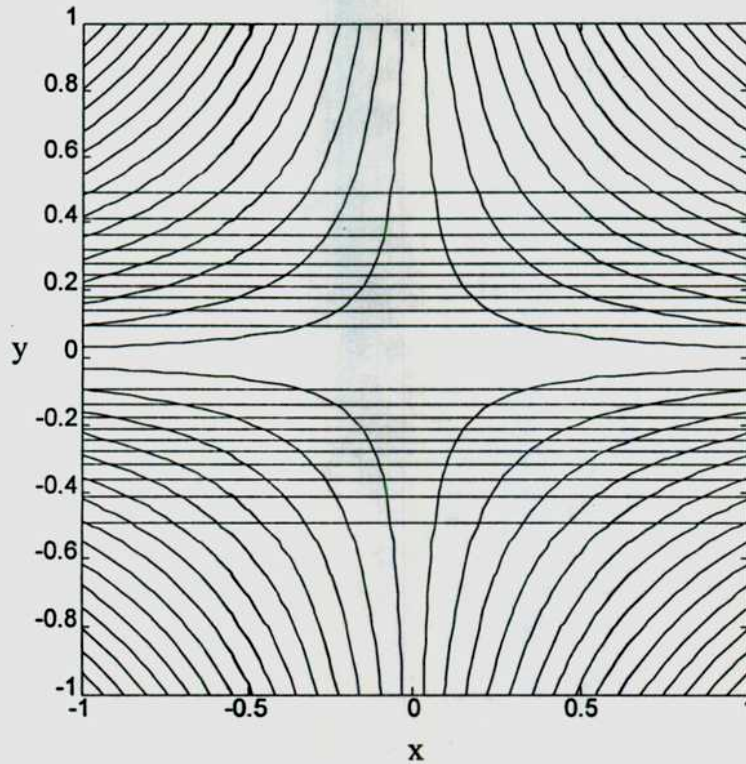


Figura 1. Flujo irrotacional con un punto de estancamiento. Líneas de corriente (punteadas) y de campo magnético (continuas).

del movimiento en la evolución del campo magnético, a continuación se repasan algunas soluciones de (3.2) que son relevantes para las aplicaciones de esta tesis.

3.1.1 Soluciones irrotacionales.

Se puede verificar por sustitución directa en (3.2) que existe una familia de soluciones de la forma

$$f = a(t) y, \quad (3.5)$$

donde $a(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{a} = C(t) - a^2. \quad (3.6)$$

Estas soluciones representan flujos irrotacionales ($\text{rot}v=0$) con un punto de estancamiento en el origen (fig. 1). El caso más sencillo, con $a=C_0^{1/2}=cte$ ($\partial p/\partial x=\rho C_0 x$), corresponde al clásico movimiento irrotacional estacionario

$$f = \sqrt{C_0} y, \quad (3.7)$$

donde $v_x=ax$ y $v_y=-ay$ (Batchelor, 1967).

Si se establece un gradiente de presión $\partial p/\partial x=\rho C_0 x$ a $t=0$ ($a=0$ para $t=0$) se

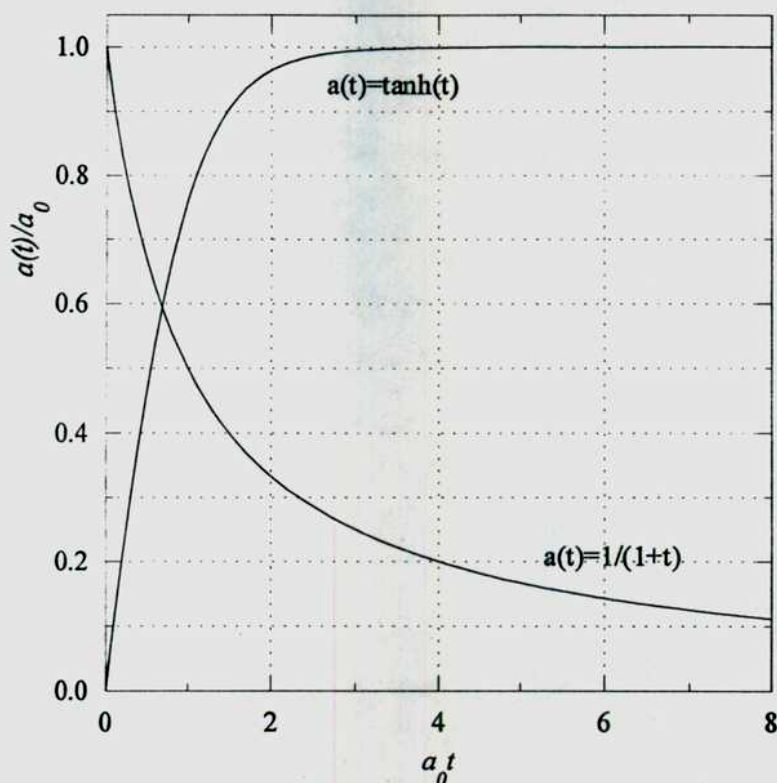


Figura 2. Soluciones irrotacionales.

obtiene la solución

$$a(t) = \sqrt{C_0} \tanh(\sqrt{C_0} t), \quad (3.8)$$

cuyo límite asintótico $a(t \rightarrow \infty) = C_0^{1/2}$ corresponde a (3.7). En el caso más general, cuando el gradiente de presión cambia en forma abrupta, con $C(t)$ pasando de un valor inicial C_0 a un valor C_1 ($C_1 > C_0$), se obtiene

$$a(t) = \sqrt{C_1} \frac{1 - \alpha e^{-2\sqrt{C_1} t}}{1 + \alpha e^{-2\sqrt{C_1} t}}, \quad (3.9)$$

donde

$$\alpha = \frac{\sqrt{C_1} - \sqrt{C_0}}{\sqrt{C_1} + \sqrt{C_0}}. \quad (3.10)$$

Esta solución incluye a (3.7) y (3.8) como casos particulares.

Por el contrario, si el gradiente de presión cesa de actuar a $t=0$, con $C(t)$ pasando de un valor $C=C_0$ para $t < 0$ a $C=0$ para $t > 0$, el movimiento subsiguiente decae lentamente con

$$a(t) = \frac{\sqrt{C_0}}{1 + \sqrt{C_0}t}. \quad (3.11)$$

La fig. 2 muestra en forma comparativa el comportamiento temporal de las soluciones (3.8) y (3.11).

3.1.2 Flujos limitados por paredes.

Las soluciones irrotacionales del inciso anterior corresponden a un plasma infinito sin contornos físicos donde la componente de velocidad v_y crece en forma lineal con la coordenada y . Cuando se consideran sistemas limitados por "paredes" (que podrían modelar un plasma de densidad mayor) se obtienen soluciones con vorticidad distinta de cero. En estos casos el movimiento se puede establecer de dos maneras: i) por la acción de paredes sólidas que empujan el fluido hacia el punto de estancamiento; ii) mediante la inyección de fluido a través de paredes porosas que se encuentran fijas. El caso i) se puede analizar despreciando el desplazamiento de las paredes para valores pequeños del número de Reynolds $Re = Uh/\nu$, donde U es la velocidad de las paredes y h es la distancia de las mismas al punto de estancamiento (Gratton & Bender, 1991). El caso ii) ha sido estudiado por numerosos autores (ver, por ejemplo, Terrill, 1964 y Zaturka, Drazin & Banks, 1988). En el trabajo de Zaturka et al. (1988) se investiga la estabilidad de este tipo de flujos, incluyendo la existencia de bifurcaciones en soluciones correspondientes a inyección y succión de fluido a través de las paredes (sin campo magnético).

Si se inyecta fluido con velocidad normal U a través de dos paredes porosas ubicadas en $y = \pm h$, las soluciones estacionarias correspondientes a los límites $Re \ll 1$ y $Re \gg 1$ ($Re = Uh/\nu$) son (Bender, 1991)

$$f(y) = \frac{3}{2}U\left(\frac{y}{h} - \frac{(y/h)^3}{3}\right) = \frac{3}{2}\frac{Ch^3}{\nu}\left(\frac{y}{h} - \frac{(y/h)^3}{3}\right) \quad (Re \ll 1), \quad (3.12)$$

$$f(y) = U\text{sen}\left(\frac{\pi y}{2h}\right) = \frac{2\sqrt{Ch}}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi y}{2h}\right) \quad (Re \gg 1), \quad (3.13)$$

donde $\partial p/\partial x = -\rho Cx$. Los perfiles de la velocidad normalizada $f(y)/U$ difieren muy poco en ambos límites y son lineales (es decir, el movimiento es casi irrotacional) cerca del punto de estancamiento, como se puede ver en la fig. 3.

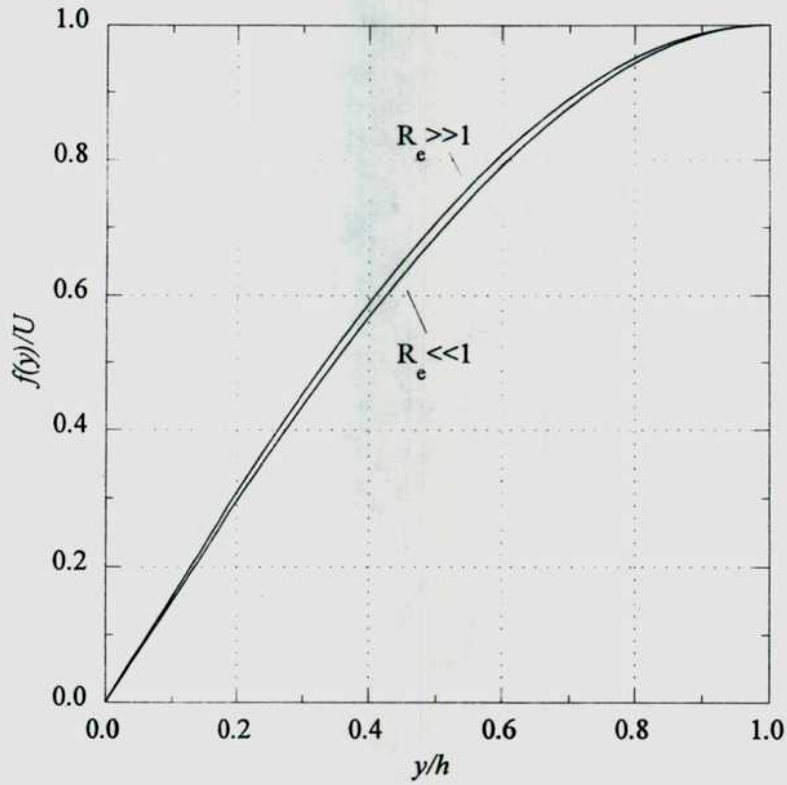


Figura 3. Soluciones para flujos limitados por paredes.

Las soluciones anteriores se extienden fácilmente para incluir componentes de velocidad v_x paralela a las paredes, que se pueden originar a partir de un gradiente de presión constante en la dirección x (flujo de Poiseuille) o por el desplazamiento lateral de las mismas (flujo de Couette). Si a la función de corriente definida en (3.1) se le suma una función adicional de la forma

$$\xi = x f(y, t) + g(y, t), \quad (3.14)$$

entonces $g(y, t)$ se obtiene a partir de la ecuación

$$\frac{\partial g'}{\partial t} + f' g' - f g'' - v g''' = K, \quad (3.15)$$

donde $f(y, t)$ es solución de (3.2). La constante K representa el valor del gradiente de presión constante en la dirección x , $\partial(p/\rho)/\partial x = -\rho Cx - K$. En la fig. 4 se muestran las líneas de corriente correspondientes a soluciones con $K=0$ y $Re \ll 1$, que satisfacen las condiciones de contorno $g(\pm h)=1$ en el caso (a) y $g(\pm h)=\pm 1$ en el caso (b) (Gratton & Bender, 1991). Estas soluciones podrían modelar el flujo oblicuo de dos plasmas de distinta densidad y son análogas a las obtenidas por Besser, Biernat & Rijnbeek (1990) y

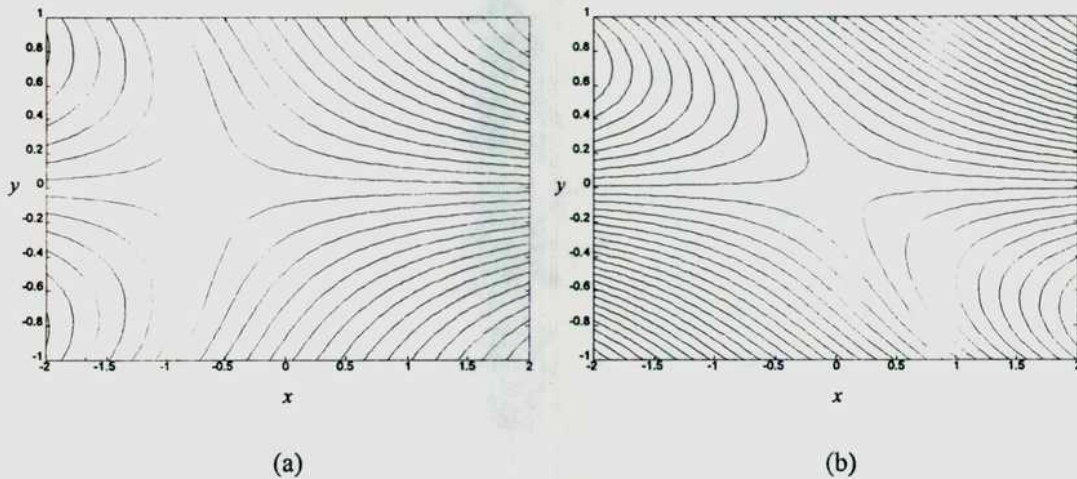


Figura 4. Flujos con $R_e \ll 1$ y deslizamiento de las paredes.
 (a) v_x simétrico y (b) v_x antisimétrico.

Phan & Sonnerup (1990) para sistemas ilimitados. La introducción de una componente adicional de velocidad v_x no afecta la evolución del campo magnético, ya que en (3.4) aparece solamente la componente v_y ($f = -v_y$).

3.2 Intensificación del campo magnético.

La intensificación del campo magnético en flujos con un punto de estancamiento se puede describir, en una primera aproximación, mediante argumentos sencillos basados en consideraciones de orden de magnitud (Gratton, Bender & Gnani, 1994). El movimiento del plasma, que se supone estacionario con $v_x = ax$ y $v_y = -ay$ ($a = C^{1/2} = cte$), arrastra las líneas magnéticas hacia el origen en $y=0$ para formar una lámina de corriente de ancho δ (ver fig. 1). Suponiendo que el campo magnético inicial se extiende hasta una distancia h_0 de ambos lados del punto de estancamiento, se puede definir el número de Reynolds magnético $R_m = U_0 h_0 / \nu_m$ ($U_0 = ah_0$). Para valores grandes de R_m la difusión es despreciable en toda la región $|y| < h_0$, salvo dentro de la delgada lámina de corriente que se forma en $|y| < \delta$. El ancho de la misma puede estimarse igualando la velocidad de difusión ν_m / δ a la velocidad $v_y = a\delta$ con que ingresa flujo magnético, de donde resulta

$$\frac{\delta}{h_0} \approx \frac{1}{\sqrt{R_m}}. \quad (3.16)$$

Como R_m se supone grande, el campo magnético en la región comprendida entre

$\delta < |y| < h_0$ está prácticamente “congelado” al plasma. Luego, a partir de (2.16) se obtiene para la componente x

$$B = B_0 \frac{\delta x}{\delta x_0}, \quad (3.17)$$

donde B y δx son, respectivamente, el campo magnético y la línea material (que se mueve con el fluido) a tiempo t , correspondientes a los valores iniciales B_0 y δx_0 . De las ecuaciones de las trayectorias de los elementos del fluido

$$x = x_0 e^{at}, \quad y = y_0 e^{-at}, \quad (3.18)$$

resulta que $\delta x / \delta x_0 = \delta y_0 / \delta y$. Por lo tanto, tomando $\delta y_0 = h_0$ y $\delta y = \delta$ se obtiene

$$B(\delta, t) \approx B(h_0, 0) \frac{h_0}{\delta} \approx B(h_0, 0) \sqrt{R_m}. \quad (3.19)$$

La expresión anterior da una estimación del orden de magnitud de la intensificación del campo magnético, que es amplificado por el flujo debido al “estiramiento” $\delta x / \delta x_0$ de las líneas magnéticas.

Este resultado también se puede obtener a partir de la conservación del flujo magnético. En un movimiento de la forma (3.18) la altura δy de una línea material se reduce a medida que se acerca al origen en $y=0$ (fig 5). La conservación del flujo magnético $B_x \delta y$ implica entonces que el valor medio del campo magnético debe

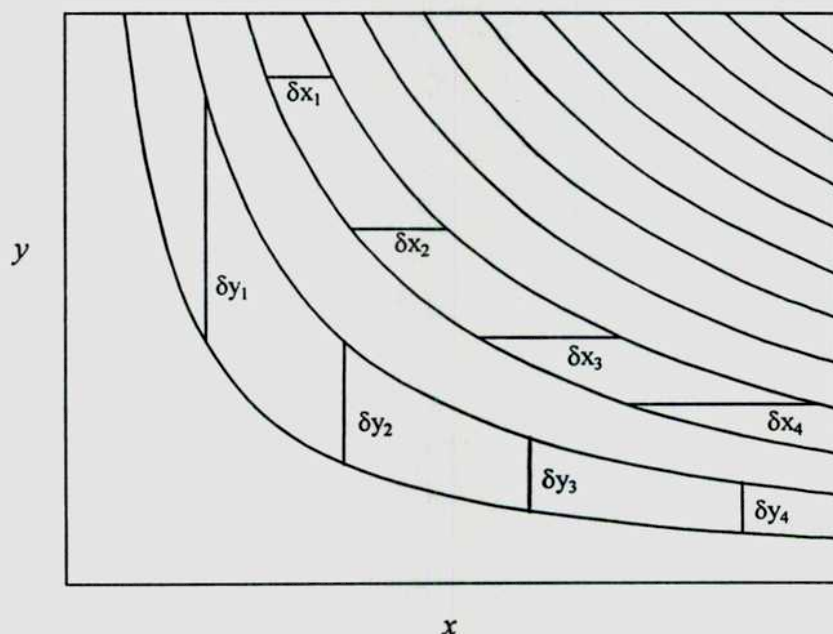


Figura 5. Líneas materiales en un flujo irrotacional con un punto de estancamiento.

aumentar en la misma proporción. Un razonamiento análogo aplicado a la componente B_y del campo magnético muestra que ésta tiende a reducirse, ya que en este caso el ancho δx de la línea material de tamaño cuando se acerca al origen.

A partir de (3.16) y (3.19) se obtiene que la energía magnética total por unidad de área en la lámina de corriente (de ancho δ) es

$$W_M \approx \frac{B^2}{8\pi} \delta \approx W_0 \sqrt{R_m}, \quad (3.20)$$

donde $W_0 = h_0 B_0^2 / 8\pi$ es una estimación de la energía magnética inicial (por unidad de área). La disipación Joule en la lámina de corriente durante el estado final estacionario es aproximadamente igual a W_M por cada $1/a$ unidades de tiempo. El tiempo característico del proceso de intensificación, que se puede estimar haciendo $h_0/\delta = \exp(at_M)$ en (3.18), es del orden de

$$t_M \approx \frac{\ln R_m}{2a}. \quad (3.21)$$

En este lapso de tiempo la energía alcanza el valor dado por (3.20). Comparando (3.21) con el tiempo característico de difusión $t_D = h_0^2 / \nu_m$ se obtiene

$$\frac{t_M}{t_D} \approx \frac{\ln R_m}{2R_m}. \quad (3.22)$$

Cuando R_m es grande el tiempo de intensificación t_M es varios órdenes de magnitud menor que t_D . Por ejemplo, para $a \approx 10^{-2}$ y $R_m \approx 10^7$, que representan valores típicos en plasmas solares (ver la tabla 1 del capítulo 2) se obtiene $t_D \approx 10^9$ s (≈ 32 años), mientras que $t_M \approx 800$ s.

La energía magnética total disponible inicialmente en un volumen de plasma $V_0 = h_0 L_x L_z$ es aproximadamente $W_0 = (B_0^2 / 8\pi) V_0$. El movimiento del plasma amplifica esta energía hasta un valor $W \approx W_0 R_m^{1/2}$ en un tiempo del orden de $1/a$ (que representa un "tiempo de tránsito" de la partícula de fluido). La densidad de energía W/δ en la lámina de corriente final es aproximadamente $w \approx w_0 R_m$. Suponiendo que se distribuye de manera uniforme entre las partículas, la energía por partícula puede alcanzar valores muy elevados del orden de $\theta \approx (2/3)(w_0/n)R_m$.

3.3 Intensificación y disipación rápida en una solución elemental.

El proceso de intensificación y disipación rápida de la energía magnética en flujos de estancamiento se puede ilustrar mediante una solución particularmente sencilla de las ecuaciones magnetohidrodinámicas. Esta solución describe la evolución de una componente de Fourier del campo magnético inicial (Gratton, Gnani & Bender, 1992).

La ecuación que rige la evolución de un campo magnético $B_x=B(y,t)$ en un flujo irrotacional con $f=ay$ ($a=cte$) es

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nu_m \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + a \frac{\partial B}{\partial y} + aB. \quad (3.23)$$

En el estado inicial se asume una distribución de campo magnético que corresponde a un modo puro de Fourier

$$B(y,0) = b_0 \text{sen}(k_0 y), \quad (3.24)$$

donde k_0 es el número de onda inicial y b_0 es la amplitud del modo. Reemplazando en (3.23) una solución de la forma

$$B(y,t) = b(t) \text{sen}(k(t) y), \quad (3.25)$$

la ecuación resultante se separa en

$$\dot{k} = a k, \quad \dot{b} = (a - \nu_m k^2) b,$$

de donde se obtiene

$$B(y,t) = b_0 \text{sen}(k_0 e^{at} y) \exp \left[at - \frac{(h_0 k_0)^2}{2R_m} (e^{2at} - 1) \right]. \quad (3.26)$$

En (3.26) se ha introducido una escala arbitraria de longitud h_0 , que representa el tamaño de la región del flujo (en la dirección y). Usando h_0 se puede definir una velocidad característica $v_y=U_0=ah_0$ y el número de Reynolds magnético $R_m=ah_0^2/\nu_m$.

La amplitud de la solución (3.26) crece desde su valor inicial b_0 hasta alcanzar un valor máximo

$$b_M = b_0 \sqrt{\frac{R_m}{(h_0 k_0)^2}} \exp \left[-\frac{1}{2} + \frac{(h_0 k_0)^2}{2R_m} \right] \approx b_0 \sqrt{\frac{R_m}{e(h_0 k_0)^2}}, \quad (3.27)$$

en un tiempo igual a

$$t_M = \frac{\ln R_m}{2a} - \frac{\ln(h_0 k_0)}{a}. \quad (3.28)$$

Después de t_M el campo magnético se extingue rápidamente, con un decaimiento

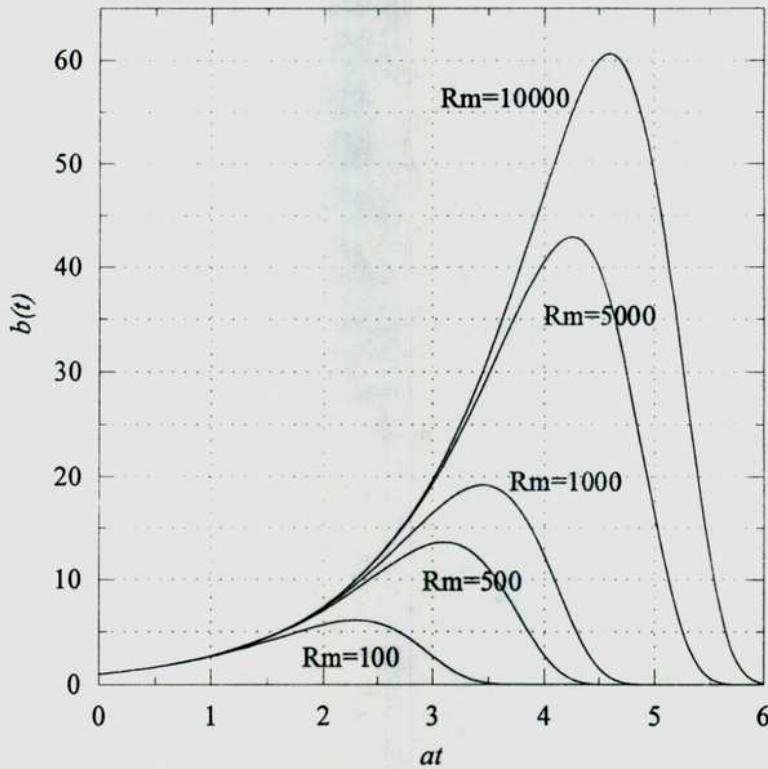


Figura 6. Evolución de la amplitud en una solución elemental con $h_0 k_0 = 1$.

proporcional a $\exp[-(k_0^2 \nu_m / a) \exp(2at)]$ para $t \rightarrow \infty$. Este comportamiento se debe al crecimiento exponencial del número de onda $k(t)$, que da lugar a la disipación eficiente del campo magnético en láminas de corriente muy intensas ($j_z \propto \partial B / \partial y \propto k(t)$). La evolución de la amplitud $b(t)/b_0$ se grafica en la fig. 6, donde el decaimiento rápido de la solución se observa claramente para valores grandes de R_m .

La solución elemental (3.26) muestra dos tendencias básicas que son comunes a todas las soluciones en flujos planos: i) la amplificación del campo magnético es proporcional a $R_m^{1/2}$; ii) el tiempo característico del proceso de intensificación (acompañado por una disipación importante) es proporcional a $(\ln R_m) / 2a$. Este tiempo es del orden del tiempo hidrodinámico $1/a$ y depende débilmente de R_m ($\ln R_m \approx 6-18$ para R_m entre 10^3-10^8). En ausencia de movimiento el campo magnético inicial (3.24) se extinguiría en un tiempo del orden de $t_D = 1/\nu_m k_0^2$, que corresponde al tiempo difusivo clásico. Por lo tanto, el movimiento acelera el decaimiento por un factor $t_D/t_M \sim 2R_m/\ln R_m$.

La energía disipada en una celda de tamaño igual a una longitud de onda $\lambda = 2\pi/k$,

donde $\lambda(t) \sim e^{-at}$, se puede calcular fácilmente. Si $\varepsilon_0 = (2\pi/k_0)(b_0^2/8\pi)$ es la energía magnética (por unidad de área) contenida inicialmente en la celda, la energía disipada entre $t=0$ y $t=\infty$ es

$$d = \varepsilon_0 \sqrt{\pi} 2q (1 - \text{Erf}(\sqrt{q})) e^q, \quad (3.29)$$

donde $q = (h_0 k_0)^2 / R_m$. Para $R_m \gg 1$ ($q \ll 1$) se obtiene

$$\frac{d}{\varepsilon_0} \approx \frac{\sqrt{\pi R_m}}{h_0 k_0}. \quad (3.30)$$

En consecuencia, un plasma con energía inicial ε_0 puede llegar a recibir una cantidad de energía del orden de $\varepsilon_0 (\pi R_m)^{1/2}$ por disipación Joule, en un tiempo del orden de $t_M = \ln R_m / 2a$. La energía disipada es entregada principalmente en una región de tamaño $\delta \approx (2\pi/k_0) \exp(-at_M) \approx (2\pi/k_0) R_m^{-1/2}$.

Cabe observar que en las expresiones anteriores se ha supuesto la existencia de una escala arbitraria h_0 para el tamaño de la región del flujo. Estrictamente, la escala natural correspondiente a la condición inicial (3.24) es $h_0 = 1/k_0$, por lo que las ecs. (3.26)-(3.28) deben leerse con $h_0 k_0 = 1$ ($R_m = ak_0^{-2}/\nu_m$). Para configuraciones iniciales de tamaño finito, donde el campo magnético es distinto de cero solamente en una región de ancho h_0 , se tendrá $h_0 k_0 \neq 1$. En estos casos los valores exactos de b_M y t_M correspondientes a un modo de Fourier dependen de la razón entre la escala h_0 del flujo y la longitud de onda del modo ($\sim 1/k_0$).

3.4 Evolución del campo magnético en flujos con transitorios.

La evolución de una componente de Fourier del campo magnético inicial también se puede obtener en el caso de movimientos irrotacionales no estacionarios de la forma

$$f = a(t) y,$$

donde $a(t)$ es una función del tiempo que satisface (3.6). Reemplazando en (3.23) la solución

$$B(y, t) = b(t) \text{sen}(k(t)y),$$

se obtienen las ecuaciones

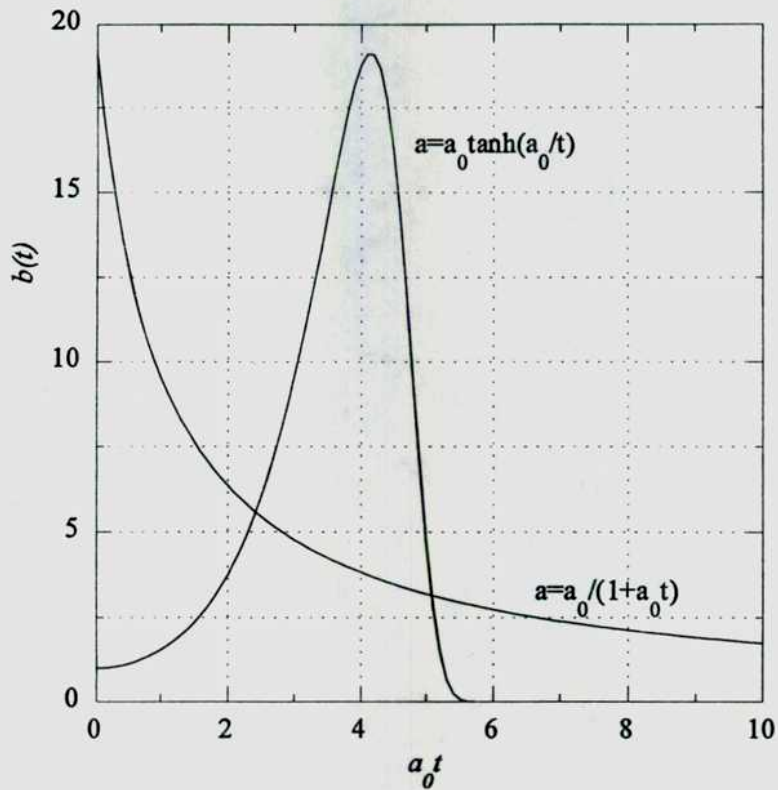


Figura 7. Evolución del campo magnético en flujos con transitorios.

$$k(t) = k_0 \exp\left(\int_0^t a(t') dt'\right), \quad (3.31)$$

$$b(t) = b_0 \exp\left(\int_0^t \{a(t') - v_m k^2(t')\} dt'\right). \quad (3.32)$$

Para un movimiento que arranca del reposo dado por (3.8) la solución es

$$k(t) = k_0 \cosh(a_\infty t), \quad (3.33)$$

$$b(t) = b_0 \cosh(a_\infty t) \exp\left[-\frac{(h_0 k_0)^2}{2R_m} \left(\frac{1}{2} \sinh(2a_\infty t) + a_\infty t\right)\right], \quad (3.34)$$

donde $a_\infty = a(t \rightarrow \infty)$. Esta solución tiende a (3.26) después de un tiempo del orden de $1/a_\infty$ y es cualitativamente similar al caso $a = a_\infty = cte$.

La evolución del campo magnético es muy diferente cuando se considera el decaimiento del movimiento descrito por (3.11). En este caso se obtiene

$$k(t) = \frac{k_1}{1 + a_0 t}, \quad (3.35)$$

$$b(t) = \frac{b_1}{1 + a_0 t} \exp\left(-\frac{(h_0 k_1)^2}{R_m} \frac{a_0 t}{1 + a_0 t}\right), \quad (3.36)$$

donde k_1 y b_1 son, respectivamente, el número de onda y la amplitud del modo a $t=0$. El decaimiento del campo magnético se produce lentamente, prolongándose por un tiempo mucho mayor que $1/a_0$ cuando R_m es grande. Si, por ejemplo, en la solución (3.26) el gradiente de presión cesa de actuar cuando la amplitud del campo magnético alcanza su valor máximo b_M , se tiene que $(h_0 k_1)^2 = R_m$ y $b_1 = b_0 (R_m/e)^{1/2}$ y transcurrirá un tiempo $\Delta t \approx (1/a_0)(R_m/e)^{1/2}$ a partir de t_M hasta que la amplitud vuelva a su valor inicial b_0 . Durante este intervalo la disipación en la lámina de corriente aún es relevante.

El proceso de intensificación del campo magnético durante el arranque del movimiento se produce en tiempos mucho menores que su extinción durante el frenado del flujo. El movimiento del plasma, que no puede seguir los cambios abruptos del gradiente de presión, mantiene la lámina de corriente porque sigue actuando el mecanismo de "estiramiento" de las líneas magnéticas (ec. 3.17). En consecuencia, un campo magnético localizado inicialmente en una pequeña región de tamaño $\delta = h_0/R_m^{1/2}$, cuya disipación completa se produciría en un tiempo $t_D = \delta^2/\nu_m = 1/a_0$ si el movimiento cesara abruptamente, se extingue en un lapso mucho mayor $t_D R_m^{1/2}$ durante el lento decaimiento del flujo. En la fig. 7 se comparan las soluciones (3.34) y (3.36) con $h_0 k = 1$ y $R_m = 5000$.

4 Formación de láminas de corriente en flujos planos.

4.1 Evolución del campo magnético.

En este capítulo se estudia la evolución del campo magnético en un flujo con simetría plana (coordenada z ignorable) a partir de condiciones iniciales más generales (Gratton, Gnani & Bender, 1992). La configuración de campo magnético, que se muestra en la fig. 8, incluye una componente adicional $B_z=D(y,t)$ normal al plano del movimiento además de la componente $B_x=B(y,t)$. Las ecuaciones que rigen la evolución del campo magnético en presencia de un movimiento irrotacional con $f(y,t)=a(t)y$ (ver sección 3.1) son

$$\frac{\partial B}{\partial t} = v_m \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + ay \frac{\partial B}{\partial y} + aB, \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial D}{\partial t} = v_m \frac{\partial^2 D}{\partial y^2} + ay \frac{\partial D}{\partial y}. \quad (4.2)$$

La distribución de presión se obtiene a partir de

$$\frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho} + \frac{1}{2}C(t)(y^2 - x^2) - a(t)^2 y^2 - \frac{B^2 + D^2}{8\pi\rho}. \quad (4.3)$$

La ec. (4.1) contiene un término adicional aB que es el responsable de la amplificación de la componente B_x (cuando $a>0$) y que no aparece en (4.2) para la componente B_z . Ambas ecuaciones son invariantes frente al cambio de variable $y \rightarrow -y$, por lo que admiten soluciones con paridad definida en y . Además, por ser lineales, toda solución se puede expresar como una combinación de soluciones pares e impares (con respecto a la transformación $y \rightarrow -y$).

Haciendo el cambio de variables

$$\zeta = \frac{y}{h_0} \exp\left\{ \int_0^t a(t') dt' \right\}, \quad \tau = \frac{v_m}{h_0^2} \int_0^t \exp\left\{ 2 \int_0^{t'} a(t'') dt'' \right\} dt', \quad (4.4)$$

$$B^*(\zeta, \tau) = B(y, t) \exp\left\{ - \int_0^t a(t') dt' \right\}, \quad (4.5)$$

la ec. (4.1) se transforma en la ecuación de difusión

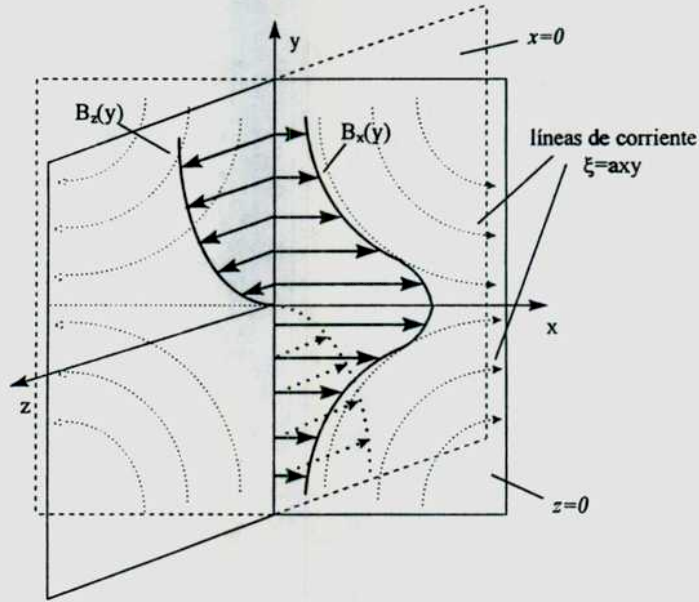


Figura 8. Configuración de flujo y campo magnético.

$$\frac{\partial B^*}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 B}{\partial \zeta^2} \quad (4.6)$$

La escala de longitud h_0 corresponde a la extensión de la región del flujo en la dirección y . Cuando el movimiento es estacionario ($a=C_0^{1/2}=cte$) las nuevas variables son

$$\zeta = \frac{y}{h_0} e^{at}, \quad \tau = \frac{1}{2R_m} (e^{2at} - 1), \quad B^*(\zeta, \tau) = e^{-at} B(y, t), \quad (4.7)$$

donde $R_m = ah_0^2/\nu_m$ es el número de Reynolds magnético calculado usando la velocidad característica $U=ah_0$. En lo sucesivo se supone que R_m es grande.

4.2 Solución general del problema de valores iniciales.

Partiendo de una distribución inicial de campo magnético $B^*(\zeta, 0) = B(y, 0)$, la solución para todo tiempo posterior está dada por la integral de Poisson

$$B^*(\zeta, \tau) = \frac{1}{2\sqrt{\pi\tau}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\zeta-\xi)^2/4\tau} B^*(\xi, 0) d\xi, \quad (4.8)$$

donde la condición inicial debe satisfacer la condición

$$|B^*(\zeta, 0)| < M,$$

en el intervalo $(-\infty, \infty)$.

Alternativamente, se puede calcular la solución $B^*(\zeta, \tau)$ a partir de la transformada de Fourier de la condición inicial

$$\varphi(k, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} B^*(\zeta, 0) e^{i\zeta k} d\zeta, \quad (4.9)$$

usando la fórmula

$$B^*(\zeta, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(k, 0) e^{-i\zeta k} e^{-k^2 \tau} dk. \quad (4.10)$$

Aplicando la identidad de Parseval

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\zeta |B^*(\zeta, \tau)|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} dk |\varphi(k, 0)|^2 e^{-2k^2 \tau},$$

la energía magnética (por unidad de área) como función del tiempo es

$$\begin{aligned} W(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy \frac{|B(y, t)|^2}{8\pi} \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{h_0}{8\pi} |\varphi(k, 0)|^2 e^{at - (1/R_m)k^2(e^{2\alpha} - 1)}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Multiplicando a (4.1) por $B(y, t)$ e integrando por partes, se obtiene la ecuación de evolución para la energía magnética

$$\frac{\partial W}{\partial t} = - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_m}{4\pi} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 dy + aW$$

donde se ha supuesto que $W(t)$ no diverge. La energía disipada por calentamiento Joule (por unidad de área) desde $t=0$ es

$$\int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j^2}{\sigma} dy = \int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{v_m}{4\pi} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 dy = a \int_0^t W(t') dt' - [W(t) - W(0)], \quad (4.12)$$

que se calcula fácilmente conocido $W(t)$.

4.3 Sistemas sin inyección de flujo magnético.

Como una primera aplicación de las fórmulas (4.8)-(4.11) se consideran distribuciones iniciales de campo magnético con flujo magnético total finito (por unidad de longitud en z)

$$F_0 = \int_{-\infty}^{\infty} B(y,0) dy, \quad (4.13)$$

y energía magnética (por unidad de área)

$$W_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|B(y,0)|^2}{8\pi} dy. \quad (4.14)$$

La integral (4.13) está bien definida para distribuciones de campo magnético que tienden a cero más rápidamente que $1/|y|$ para $|y| \rightarrow \infty$. Esta condición implica que $\lim_{|y| \rightarrow \infty} yB \rightarrow 0$ o, equivalentemente, $v_y B \rightarrow 0$ para $|y| \rightarrow \infty$ (pues $v_y = -ay$). Por lo tanto, no hay ingreso de flujo magnético a la configuración desde las fronteras lejanas del sistema: el campo magnético evoluciona "libremente" sin la influencia de agentes magnéticos externos. Se trata entonces de estudiar la evolución de una semilla inicial de campo magnético existente en la región considerada. En el capítulo 7 se consideran sistemas "forzados" con inyección continua de flujo magnético, donde $v_y B \rightarrow cte$ para $|y| \rightarrow \infty$.

El campo magnético inicial $B(y,0)$ se puede descomponer en una parte par, cuyo flujo total F_{par} es distinto de cero, y en una parte impar con $F_{impar}=0$. A partir de la integral de Poisson (4.8), que se puede escribir de la forma

$$B(y,t) = \frac{\sqrt{2R_m \tau + 1}}{2h_0 \sqrt{\pi \tau}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{\left((y/h_0)\sqrt{2R_m \tau + 1} - \xi\right)^2}{4\tau}\right] B^*(\xi,0) d\xi, \quad (4.15)$$

y tomando el límite $t \rightarrow \infty$, se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B(y,t) = \sqrt{\frac{R_m}{2\pi}} \frac{1}{h_0} \exp\left[-\frac{R_m}{2}(y/h_0)^2\right] F. \quad (4.16)$$

En consecuencia:

Las soluciones impares ($F=0$) originadas a partir de campos magnéticos iniciales integrables en valor absoluto en el intervalo $(-\infty, \infty)$ decaen asintóticamente para $t \rightarrow \infty$. Las soluciones pares correspondientes ($F \neq 0$) tienden todas a la solución gaussiana (4.16).

La componente impar del campo magnético se aniquila completamente con el paso del tiempo, después de una etapa inicial donde es amplificada por el flujo (cuando los efectos disipativos aún no son importantes). En cambio, la componente par termina

por concentrarse en un filamento gaussiano estacionario de ancho $\delta/h_0 \approx 1.18R_m^{1/2}$ (correspondiente a 1/2 de la altura de la campana), donde alcanza un valor pico de $(R_m/2\pi)^{1/2}F/h_0 = (a/2\pi\nu_m)^{1/2}F$. El filamento magnético persiste indefinidamente mientras dura el movimiento, manteniendo un equilibrio estacionario entre amplificación, advección y disipación. En la fig. 9 se muestra la formación de la solución gaussiana a partir de un campo magnético inicial par que presenta ondulaciones, obtenida integrando numéricamente la ec. (4.1) en el intervalo finito $-1 \leq y/h_0 \leq 1$ con $R_m = 5000$ (ver el apéndice).

Comparando la energía magnética en el estado final W_∞ (calculada a partir de la solución 4.16) con el valor inicial (4.14), se obtiene

$$\frac{W_\infty}{W_0} = \sqrt{\frac{R_m}{4\pi}} r, \quad (4.17)$$

donde

$$r = \frac{\left(\int B(y,0)dy\right)^2}{h_0 \int (B(y,0))^2 dy} = \frac{F^2}{8\pi h_0 W_0} \quad (4.18)$$

es un factor que depende solamente de la forma de la distribución inicial. La energía

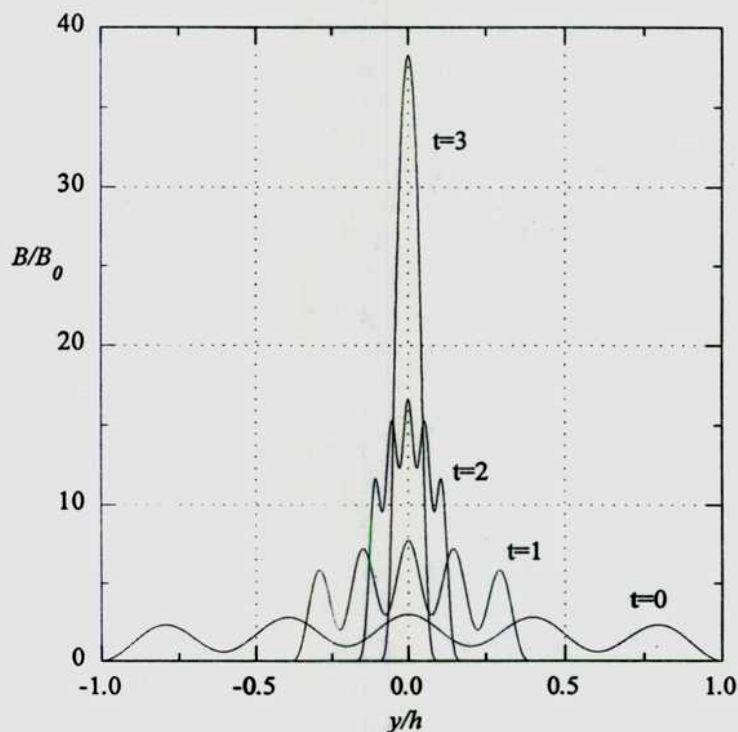


Figura 9. Evolución de un campo magnético inicial con oscilaciones espaciales.

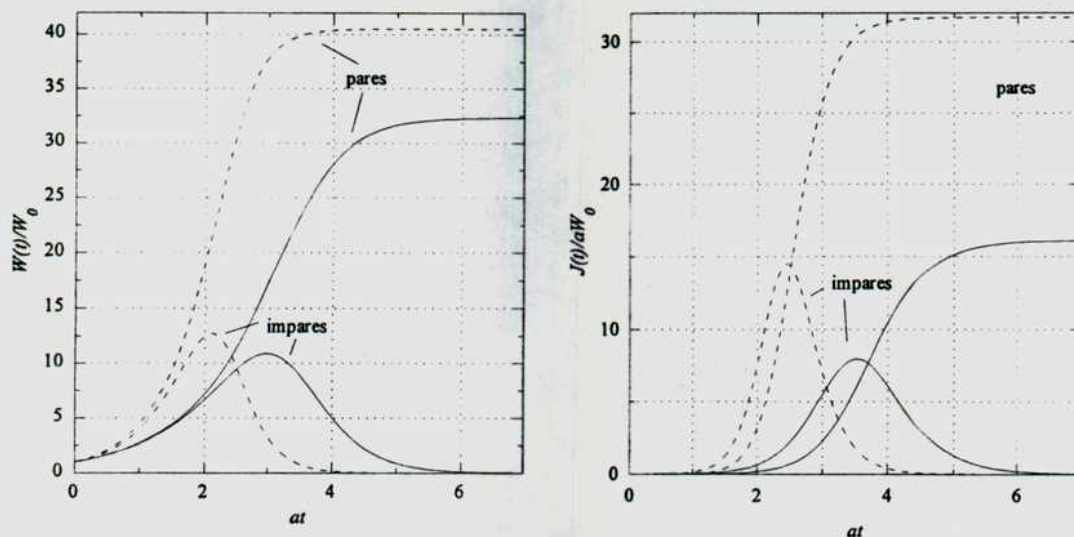


Figura 10. Soluciones sin inyección de flujo magnético: flujo irrotacional $f=ay$ (líneas continuas) y flujo rotacional $f=\sin(\pi/2y)$ (líneas punteadas).

magnética final es $R_m^{1/2}$ veces mayor que la inicial a menos del factor de forma r , que por lo general es del orden de uno. En el caso particular de un campo magnético inicial con perfil gaussiano $B(y,0)=\exp[-(y/h_0)^2/2s^2]$ se obtiene $r=(4\pi)^{1/2}s$, por lo que $W_\infty/W_0=sR_m^{1/2}$.

El calentamiento Joule (por unidad de área) en el estado disipativo final es

$$J(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j^2}{\sigma} dy = \frac{v_m}{2} \frac{F^2}{h_0^3} \left(\frac{R_m}{4\pi} \right)^{3/2}, \quad (4.19)$$

de donde se obtiene que la energía disipada (a la tasa dada por 4.19) durante un lapso de tiempo t es

$$\int_0^t dt \int_{-\infty}^{\infty} \frac{j^2}{\sigma} dy = atr \sqrt{\frac{R_m}{4\pi}} W_0. \quad (4.20)$$

Estos resultados se ven reflejados en las curvas de la fig. 10, obtenidas integrando la ec. (3.4) en el intervalo finito $-1 \leq y/h_0 \leq 1$ usando un método de diferencias finitas. Se consideran dos tipos de movimiento: i) $f=ay$, irrotacional (líneas continuas) y ii) $f=U_0 \sin(\pi y/2h_0)$, inviscido rotacional ec. (3.13) (líneas punteadas). La velocidad en los límites del intervalo se normalizó haciendo $f(\pm y/h_0)=\pm 1$, y en todos los casos $R_m=5000$. La condición de contorno para el campo magnético es $B(\pm y/h_0)=0$, con lo cual se asegura que no hay ingreso de flujo magnético a la región del cálculo. La fig. 10a muestra la evolución de la energía magnética $W(t)$ para soluciones pares con

$B(y,0)=B_0\cos(\pi y/2h_0)$ y soluciones impares con $B(y,0)=B_0\sin(\pi y/h_0)$. En la fig. 10b se grafica la disipación Joule $J(t)/aW_0$ correspondiente. Independientemente del tipo de movimiento, se observa que las soluciones pares tienden asintóticamente a un estado estacionario. En cambio, las impares decaen completamente después de una etapa de amplificación. El decaimiento de las componentes impares y la consolidación de las componentes pares en estructuras disipativas estacionarias son características generales de las soluciones en sistemas sin inyección de flujo magnético.

4.4 Conservación del flujo magnético total.

Integrando la solución gaussiana (4.16) se comprueba que el flujo magnético total correspondiente al estado final, definido por $F(t \rightarrow \infty) = \int B(t \rightarrow \infty) dy$, es igual al flujo inicial (4.13). La conservación del flujo magnético total en sistemas sin inyección de flujo magnético se puede demostrar en general integrando la ecuación del campo magnético (4.1) para obtener

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} B(y,t) dy = v_m \left. \frac{\partial B}{\partial y} \right|_{-\infty}^{\infty} + ayB|_{-\infty}^{\infty} = 0. \quad (4.21)$$

donde se ha usado que $|B| \rightarrow 0$ más rápidamente que $1/|y|$ para $|y| \rightarrow \infty$.

Por otra parte, observando que la ec. (4.1) posee una solución estacionaria de tipo par dada por

$$B_{\infty}(y) = B_1 \exp\left[-\frac{Rm}{2}(y/h_0)^2\right], \quad (4.22)$$

e igualando el flujo magnético inicial a

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} B_{\infty}(y) dy$$

se deduce (4.16) inmediatamente.

4.5 Evolución de la componente normal de campo magnético.

La ec. (4.2) describe la evolución de la componente normal de campo magnético $B_z = D(y,t)$. Si $D(y,t)$ decae más rápidamente que $1/|y|$ para $|y| \rightarrow \infty$ ($\lim_{|y| \rightarrow \infty} ayD \rightarrow 0$), el flujo magnético por unidad de área en el plano (x,y) definido por

$$F = \int_{-\infty}^{\infty} D(y,t) dy,$$

es finito para todo tiempo t . Integrando (4.2) entre $(-\infty, \infty)$ se obtiene

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -aF. \quad (4.33)$$

Suponiendo $a=cte$ se tiene que $F(t)=F(0)\exp(-at)$, por lo que todas las soluciones pares ($F \neq 0$) se extinguen en un tiempo del orden de $1/a$. En el caso de las soluciones impares, donde $F(0)=0$, la ec. (4.33) asegura solamente que $F(t)=0$ para todo tiempo t . Sin embargo, multiplicando a (4.2) por $D(y,t)$ e integrando por partes se llega a la expresión

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D^2}{8\pi} dy = -\frac{v_m}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial D}{\partial y} \right)^2 dy - a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{D^2}{8\pi} dy, \quad (4.34)$$

cuyo signo es definido negativo (por ser $a > 0$). Luego, la energía magnética siempre disminuye y las soluciones impares también se extinguen para $t \rightarrow \infty$. El decaimiento de B_z se debe a que el movimiento no amplifica esta componente de campo magnético (ver ec. 2.16).

Las soluciones estacionarias de (4.2) son

$$D = D_0 = cte, \quad D = \frac{2D_1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{(a/v_m)y}} e^{-\xi^2} d\xi = D_1 \operatorname{erf}\left(\sqrt{\frac{a}{v_m}} y\right), \quad (4.35)$$

en cuyo caso las integrales para el flujo magnético y la energía magnética divergen. Estas soluciones pueden existir solamente cuando hay una inyección continua de flujo magnético que crece linealmente con la coordenada y , pues $|v_y D| \sim |ay D_{0,1}|$ para $|y| \rightarrow \infty$. Si la tasa de inyección de flujo magnético disminuye, por ejemplo tomando un valor constante con $\lim_{|y| \rightarrow \infty} |v_y D| \rightarrow cte$, las soluciones estacionarias no se pueden mantener y el campo magnético comienza a decaer.

El problema general de valores iniciales para la componente normal de campo magnético $D(y,t)$ se puede resolver haciendo el cambio de variables

$$\zeta = \frac{y}{h_0} \exp\left\{ \int_0^t a(t') dt' \right\}, \quad \tau = \frac{v_m}{h_0^2} \int_0^t \exp\left\{ 2 \int_0^{t'} a(t'') dt'' \right\} dt', \quad (4.36)$$

que transforma a (4.2) en la ecuación de difusión

$$\frac{\partial D}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 D}{\partial \zeta^2}. \quad (4.37)$$

Las soluciones de (4.37) se obtienen a partir de la integral de Poisson (4.8), o bien usando la fórmula de Fourier (4.10).

5 Energía magnética.

5.1 Evolución de la energía magnética.

A partir de las ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm (2.4) se obtiene la variación de la energía magnética (Roberts, 1967):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \right) = -\text{div} \left(\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) - \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} - \frac{1}{\sigma} |\mathbf{j}|^2. \quad (5.1)$$

Por otra parte, multiplicando la ecuación de movimiento (2.2) escalarmente por \mathbf{v} (suponiendo que la densidad ρ y la viscosidad μ son constantes) la variación de la energía cinética está dada por

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 \right) = -\text{div} \left[\mathbf{v} \left(p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 - \mu \text{grad} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \right] + \frac{1}{c} (\mathbf{j} \times \mathbf{B}) \cdot \mathbf{v} - \varepsilon_\mu, \quad (5.2)$$

donde

$$\varepsilon_\mu = \mu \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

es el término de disipación viscosa. Cuando el movimiento es estacionario ambas expresiones se pueden combinar para eliminar el término correspondiente a la potencia de la fuerza de Lorentz $\mathbf{v} \cdot (\mathbf{j} \times \mathbf{B})$, de donde resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi} \right) = -\text{div} \left(\frac{c}{4\pi} \mathbf{E} \times \mathbf{B} \right) - \text{div} \left[\mathbf{v} \left(p + \frac{1}{2} \rho |\mathbf{v}|^2 - \mu \text{grad} \frac{|\mathbf{v}|^2}{2} \right) \right] - \frac{1}{\sigma} |\mathbf{j}|^2 - \varepsilon_\nu. \quad (5.3)$$

Los términos a la derecha de (5.3) corresponden, respectivamente, al flujo del vector de Poynting, la potencia de los esfuerzos normales, la disipación Joule y la disipación viscosa.

En el caso particular de flujos planos de aniquilación magnética, con un campo magnético $B_x = B(y, t)$ y un movimiento irrotacional estacionario dado por (3.7), la variación de la energía magnética (por unidad de área) se puede obtener directamente a partir de (4.1). Multiplicando por $B(y, t)$ e integrando entre $(-\infty, \infty)$, la expresión resultante es

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2}{8\pi} dy = -\frac{v_m}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 dy + a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2}{8\pi} dy, \quad (5.4)$$

donde se ha supuesto que $yB \rightarrow 0$ para $|y| \rightarrow \infty$. La primera integral de la derecha representa la pérdida de energía por disipación Joule, mientras que la segunda es la contribución a la energía debida a la amplificación del campo magnético por el movimiento (ver capítulo 3).

5.2 El origen de la amplificación de la energía magnética.

El origen del término de amplificación en (5.4) se puede descubrir integrando la expresión general (5.3) sobre una región rectangular R del plano (x,y) definida entre $L_x \leq x \leq L_x$ y $-h_0 \leq y \leq h_0$. Para un movimiento irrotacional con un punto de estancamiento de la forma (3.7) se tiene que

$$\operatorname{div}(\mu \operatorname{grad} \frac{v^2}{2}) - \varepsilon_\mu = 0.$$

Por otra parte, para $B_y = B_z = 0$ el vector de Poynting se reduce a

$$c \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{4\pi} = \frac{c}{4\pi} E_z B_x \mathbf{e}_y, \quad (5.5)$$

donde \mathbf{e}_y es el versor unitario en la dirección y . Luego,

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_R \frac{B^2}{8\pi} dx dy = - \oint_{\partial R} \frac{c}{4\pi} E_z B_x \mathbf{e}_y \cdot \mathbf{n} dl - \oint_{\partial R} (p + \frac{1}{2} \rho v^2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl - \int_R \frac{v_m}{4\pi} (\frac{\partial B}{\partial y})^2 dx dy, \quad (5.6)$$

donde \mathbf{n} es el versor normal a la frontera ∂R . Haciendo $h_0 \rightarrow \infty$, y suponiendo que $B \rightarrow 0$ para $|y| \rightarrow \infty$ (E_z es constante), desaparece la contribución debida al flujo del vector de Poynting para dar

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2}{8\pi} 2L_x dy = - \oint_{\partial R} (p + \frac{1}{2} \rho v^2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl - \frac{v_m}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\frac{\partial B}{\partial y})^2 2L_x dy. \quad (5.7)$$

Comparando (5.7) con (5.4) se obtiene

$$a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2}{8\pi} dy 2L_x = - \oint_{\partial R} (p + \frac{1}{2} \rho v^2) \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} dl. \quad (5.8)$$

El término responsable del aumento de la energía magnética proviene entonces de una disminución de la potencia neta ejercida por la presión dinámica $p + (1/2)\rho v^2$ sobre la región R . La ec. (5.8) también se puede escribir de la forma

$$aL_x \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2}{8\pi} dy = -aL_x \int_{-\infty}^{\infty} \left(p + \frac{1}{2} \rho v^2 \right) dy, \quad (5.9)$$

donde se ha reemplazado la velocidad v_x en $x=\pm L_x$ por su valor $v_x=\pm aL_x$ ($v_x=ax$). De (5.9) se deduce la siguiente versión magnetohidrodinámica de la ecuación de Bernoulli

$$p + \frac{1}{2} \rho v^2 + \frac{B^2}{8\pi} = cte, \quad (5.10)$$

que también se puede obtener directamente a partir de (4.3). Como el movimiento del plasma se supone estacionario, el aumento de $B^2/8\pi$ se realiza a expensas de una disminución local de la presión. En consecuencia, *la intensificación del campo magnético en el modelo incompresible está limitada en la práctica por el valor asintótico de la presión dinámica.*

5.3 Una cota superior para el crecimiento de la energía magnética.

Integrando la ec. (3.3) sobre una región de tamaño *finito* definida entre $-h_0 \leq y \leq h_0$ se obtiene

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_{-h_0}^{h_0} \frac{B^2}{8\pi} f' dy - \frac{v_m}{4\pi} \int_{-h_0}^{h_0} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 dy + \left[f \frac{B^2}{8\pi} - \frac{v_m}{4\pi} B \frac{\partial B}{\partial y} \right]_{-h_0}^{h_0}, \quad (5.11)$$

donde

$$W(t) = \int_{-h_0}^{h_0} \frac{B^2}{8\pi} dy$$

es la energía magnética total por unidad de área en la región y $f(y)$ es una solución estacionaria de (3.2) ($v_x=xf'(y)$, $v_y=-f(y)$). Para valores grandes del número de Reynolds magnético $R_m=\gamma h_0^2/v_m$ el término difusivo $(v_m/4\pi)B\partial B/\partial y$ es despreciable en $y=\pm h_0$. Sin embargo, como $f(h_0)=-f(-h_0)>0$ la energía magnética $W(t)$ tiene una contribución adicional (además del término de amplificación) debido al flujo de energía magnética a través de las fronteras de la región, representado por el término $fB^2/8\pi$ evaluado en $y=\pm h_0$.

Si $\gamma=\max(f')$ es el valor máximo de la derivada de $f(y)$ en $(-h_0, h_0)$, entonces

$$\int_{-h_0}^{h_0} \frac{B^2}{8\pi} f' dy \leq \gamma W. \quad (5.12)$$

Por lo tanto, si $B(y,t)$ es una solución de (3.3) tal que $B(y,t)=0$ para $|y|\geq h_0$ se tiene que

$$\frac{\partial W}{\partial t} \leq \gamma W - \frac{v_m}{4\pi} \int_{-h_0}^{h_0} \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 dy. \quad (5.13)$$

Este caso puede darse si el campo magnético inicial $B(y,0)$ es distinto de cero solamente en una región de tamaño mucho menor que h_0 y R_m es lo suficientemente grande, de manera que la solución no difunde hasta $y=h_0$ en un tiempo apreciable. También se puede considerar a $B=B_1-B_2$ como la suma de dos soluciones con las mismas condiciones de contorno $B_1(\pm h_0,t)=B_2(\pm h_0,t)$, pero con distintas condiciones iniciales $B_1(y,0)\neq B_2(y,0)$.

Para toda función $p(y)$ derivable en el intervalo $(-h_0, h_0)$ se cumple la desigualdad

$$\left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 \geq \left(\frac{\partial p}{\partial y} - p^2\right)B^2 - \frac{\partial}{\partial y}(pB^2), \quad (5.14)$$

pues $(\partial B/\partial y + pB)^2 \geq 0$. Luego, como por hipótesis $B=0$ en $y=\pm h_0$, resulta que

$$\int_{-h_0}^{h_0} \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 dy \geq \int_{-h_0}^{h_0} \left(\frac{\partial p}{\partial y} - p^2\right)B^2 dy. \quad (5.15)$$

Tomando $p=(\pi/2L)\tan(\pi y/2L)$, con $h_0/L < 1$ para evitar la singularidad en $y=\pm h_0$, la expresión anterior se transforma en

$$-\frac{v_m}{4\pi} \int_{-h_0}^{h_0} \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 dy \leq -\frac{v_m}{4\pi} \left(\frac{\pi}{h_0}\right)^2 W. \quad (5.16)$$

Reemplazando en (5.13) se obtiene una cota superior para el crecimiento de la energía magnética de la forma

$$\frac{dW}{dt} \leq \gamma \left(1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{R_m^*}\right) W, \quad (5.17)$$

donde $R_m^* = \gamma h_0^2 / v_m$, cuya integral es

$$W(t) \leq W(0) \exp\left[\gamma t \left(1 - \frac{\pi^2}{2} \frac{1}{R_m^*}\right)\right]. \quad (5.18)$$

Este resultado garantiza que $W(t) \rightarrow 0$ para $t \rightarrow \infty$ cuando $R_m^* < \pi^2/2$. Por lo tanto, todas las distribuciones iniciales de campo magnético con $R_m^* < \pi^2/2$ tienden a la misma

solución asintótica si las condiciones de contorno son idénticas. Para valores de $R_m^ > \pi^2/2$ la ec. (5.18) indica solamente que la energía $W(t)$ no puede crecer más rápidamente que $\exp(\gamma t)$. Típicamente, $\gamma \approx U_0/h_0$ es aproximadamente igual al inverso del tiempo que tarda una partícula de fluido en recorrer la región del flujo (un tiempo de “tránsito”).*

6 Soluciones autosimilares.

6.1 Reducción a ecuaciones en derivadas ordinarias.

La ecuación para la componente $B_x=B(y,t)$ del campo magnético posee un conjunto infinito de soluciones analíticas de tipo autosimilar. Este conjunto incluye soluciones pares e impares sin inyección de flujo magnético y una solución impar estacionaria sostenida por inyección continua de flujo magnético (Gratton, Gnani & Bender, 1992).

Partiendo de la ec. (4.1)

$$\frac{\partial B}{\partial t} = v_m \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y}(a(t)yB),$$

donde $a(t)$ puede depender del tiempo (ver capítulo 3), se buscan soluciones de la forma

$$B(y, t) = b(t)H[\gamma(t)(y - \eta(t))]. \quad (6.1)$$

La variable autosimilar es $z=\gamma(t)(y-\eta(t))$, donde $\gamma(t)$ y $\eta(t)$ son funciones del tiempo a determinar y $b(t)$ es la amplitud, también variable en el tiempo, de la solución autosimilar. Reemplazando la solución (6.1) en (4.1) se obtiene la siguiente ecuación para $H(z)$:

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \left[\frac{1}{\gamma v_m} (\dot{\eta} + a\eta) + \frac{1}{\gamma^2 v_m} \left(a - \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) z \right] \frac{dH}{dz} + \frac{1}{\gamma^2 v_m} \left(a - \frac{\dot{b}}{b} \right) H = 0. \quad (6.2)$$

Luego, para las funciones $\gamma(t)$, $\eta(t)$ y $b(t)$ que satisfacen

$$\frac{1}{\gamma^2 v_m} \left(a - \frac{\dot{\gamma}}{\gamma} \right) = q, \quad (6.3)$$

$$\frac{1}{\gamma^2 v_m} \left(a - \frac{\dot{b}}{b} \right) = \lambda + 1, \quad (6.4)$$

$$\frac{1}{\gamma v_m} (\dot{\eta} + a\eta) = k, \quad (6.5)$$

donde k , q y λ son constantes arbitrarias, se tiene que $H(z)$ es solución de

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + [k + qz] \frac{dH}{dz} + (\lambda + 1)H = 0. \quad (6.6)$$

Cabe observar que en las ecs. (6.3)-(6.6) se pueden tomar $k=0$ y $q=1$ sin pérdida de generalidad, ya que esto equivale a definir una nueva variable autosimilar $\xi=q^{1/2}z + k/q^{1/2}$ en (6.1).

Haciendo el cambio de variable

$$T = \int_0^t a(t') dt', \quad (6.7)$$

las ecs. (6.3)-(6.5) se escriben (con $k=0$ y $q=1$) de la forma

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d\gamma}{dT} = 1 - \frac{v_m}{a} \gamma^2, \quad (6.8)$$

$$\frac{1}{b} \frac{db}{dT} = 1 - (\lambda+1) \frac{v_m}{a} \gamma^2, \quad (6.9)$$

$$\frac{d\eta}{dT} + \eta = 0. \quad (6.10)$$

Cuando el movimiento es estacionario ($a=cte$) se tiene que $T=at$. Definiendo

$$\tilde{\gamma} = \frac{h_0}{\sqrt{R_m}} \quad (a=cte), \quad (6.11)$$

donde $R_m = ah_0^2/v_m$, se obtiene

$$\frac{1}{\tilde{\gamma}} \frac{d\tilde{\gamma}}{dT} = 1 - \tilde{\gamma}^2, \quad (6.12)$$

$$\frac{1}{b} \frac{db}{dT} = 1 - (\lambda+1) \tilde{\gamma}^2. \quad (6.13)$$

Las soluciones de (6.10) y (6.12) son

$$\eta(T) = \eta_0 e^{-T}, \quad (6.14)$$

$$\tilde{\gamma}(T) = \frac{\tilde{\gamma}_0}{\sqrt{\tilde{\gamma}_0^2 + (1 - \tilde{\gamma}_0^2) e^{-2T}}}, \quad (6.15)$$

donde $\tilde{\gamma}_0 = \tilde{\gamma}(T=0)$. La amplitud $b(T)$ se calcula a partir de la solución para $\tilde{\gamma}(T)$ observando que (6.13) se puede escribir de la forma

$$\frac{1}{b} \frac{db}{dT} = -\lambda + (\lambda+1) \frac{1}{\tilde{\gamma}} \frac{d\tilde{\gamma}}{dT}.$$

Integrando esta ecuación y reemplazando (6.15) se obtiene

$$b(T) = b_0 e^{-\lambda T} \left(\tilde{\gamma}_0^2 + (1 - \tilde{\gamma}_0^2) e^{-2T} \right)^{-(\lambda+1)/2}. \quad (6.16)$$

La amplitud de la solución autosimilar crece sin límite cuando $\lambda < 0$. Si $\lambda > 0$, entonces $b(T)$ tiende asintóticamente a cero, después de alcanzar un valor máximo

$$b_M = b_0 \sqrt{\frac{1 - \tilde{\gamma}_0^2}{\lambda \tilde{\gamma}_0^2} \left(\frac{\lambda}{(\lambda + 1)(1 - \tilde{\gamma}_0^2)} \right)^{(\lambda + 1)/2}}, \quad (6.17)$$

en un tiempo

$$T_M = -\frac{1}{2} \ln \left(\frac{\lambda \tilde{\gamma}_0^2}{(1 - \tilde{\gamma}_0^2)} \right). \quad (6.18)$$

Tomando $\lambda = 1$ y $\gamma(0) = 1/h_0$ ($\tilde{\gamma}_0 = R_m^{-1/2}$) se obtiene

$$b_M = \frac{b_0}{2} \sqrt{R_m - 1} \left(\frac{1}{1 - (1/R_m)} \right), \quad (6.19)$$

$$T_M = \frac{1}{2} \ln(R_m - 1), \quad (6.20)$$

que para valores grandes de R_m corresponde en forma muy aproximada a las expresiones (3.27)-(3.28).

6.2 Soluciones con $\lambda = 0$.

Cuando $\lambda = 0$ la ec. (6.6), con $k = 0$ y $q = 1$, se reduce a

$$\frac{d^2 H}{dz^2} + \frac{d}{dz}(zH) = 0, \quad (6.21)$$

que tiene dos soluciones, una par y otra impar, de la forma

$$H_{\text{par}}(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right), \quad (6.22)$$

$$H_{\text{impar}}(z) = \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \int_0^z \exp\left(\frac{\xi^2}{2}\right) d\xi. \quad (6.23)$$

La primera representa campos magnéticos con perfiles gaussianos cuya intensidad $b(T)$, posición $\eta(T)$ y ancho (proporcional a $\gamma(T)^{-2}$) cambian con el tiempo. Son soluciones sin inyección de flujo magnético ($v_y B \rightarrow 0$ para $|y| \rightarrow \infty$) que tienden asintóticamente a formar un filamento gaussiano estacionario centrado en $y = 0$ (ec. 4.16). La solución impar (6.23), que se conoce como la función de Dawson (Abramowitz & Stegun, 1972), representa campos magnéticos que para $t \rightarrow \infty$ tienden a la solución estacionaria de (4.1)

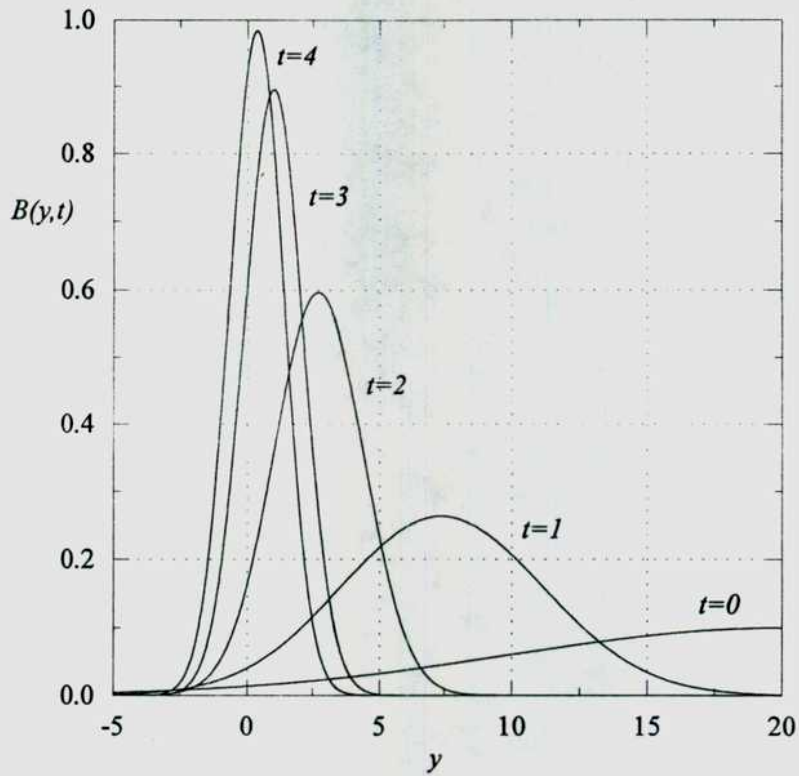


Figura 11. Evolución de una solución gaussiana. ($\lambda=0$).

sostenida por inyección continua de flujo magnético (Sonnerup and Priest, 1975). En efecto, cuando $|y| \rightarrow \infty$ la función de Dawson decrece como $1/|y|$, por lo que $\lim_{|y| \rightarrow \infty} v_y B$ tiende a un valor finito.

La soluciones para $\tilde{\gamma}(T)$ y $b(T)$ correspondientes a $\lambda=0$ son

$$\tilde{\gamma}(T) = \frac{\tilde{\gamma}_0}{\sqrt{\tilde{\gamma}_0^2 + (1 - \tilde{\gamma}_0^2)e^{-2T}}}, \quad (6.24)$$

$$b(T) = \frac{b_0}{\sqrt{\tilde{\gamma}_0^2 + (1 - \tilde{\gamma}_0^2)e^{-2T}}}. \quad (6.25)$$

Para valores de $\tilde{\gamma}_0 \gg 1$, que corresponden a un campos magnéticos iniciales muy localizados en torno a $y=\eta_0$ (ver por ejemplo la ec. 6.22), la función $\tilde{\gamma}(T)$ decrece rápidamente y alcanza su valor asintótico $\tilde{\gamma}_\infty=1$ en un tiempo del orden de $1/a$. La amplitud $b(T)$ también decrece durante este tiempo. En el límite de $\tilde{\gamma}_0=b_0=\infty$ se obtiene una función de Green, es decir la solución correspondiente a la condición inicial $B(y,0)=\delta(y-\eta_0)$. Cuando $\tilde{\gamma}_0 \ll 1$ y $b_0 \ll 1$ se tiene un campo magnético inicial débil y poco localizado en el espacio. En este caso, tanto $\tilde{\gamma}(T)$ como $b(T)$ crecen en forma

monótona hasta alcanzar sus valores asintóticos respectivos $\tilde{\gamma}_\infty=1$ y $b_\infty=b_0/\tilde{\gamma}_0$. En la fig. 11 se muestra la evolución de una solución gaussiana con $\tilde{\gamma}_0=0.1$, $b_0=0.1$ y $\eta_0=20$.

6.3 La solución general para $H(z)$.

Haciendo en (6.6) el cambio de variable

$$H(z) = e^{-z^2/2} Q(z) \quad (6.26)$$

se obtiene la ecuación de Kummer

$$z^2 \frac{d^2 Q}{dz^2} + \frac{dQ}{dz} + (\lambda + 1)Q = 0. \quad (6.27)$$

Las soluciones regulares de (6.27) son las funciones de Kummer (pertenecientes a la familia de las funciones hipergeométricas confluentes) y pueden ser pares o impares. Estas soluciones se pueden escribir de la forma

$$H_{\text{par}}(z) = e^{-z^2/2} M\left(\frac{1}{4} - \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{z^2}{2}\right), \quad (6.28)$$

$$H_{\text{impar}}(z) = e^{-z^2/2} M\left(\frac{3}{4} - \frac{\lambda + 1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{z^2}{2}\right), \quad (6.29)$$

donde $M(a, b, z^2/2)$ representa la función de Kummer definida por los dos parámetros a, b (Abramowitz & Stegun, 1972). Para $-1 \leq \lambda < 0$ las soluciones H_{par} y H_{impar} decaen más lentamente que $1/|y|$ para $|y| \rightarrow \infty$, por lo que $\lim_{|y| \rightarrow \infty} v_y B$ diverge. Por lo tanto, estas soluciones crecen indefinidamente, es decir $b(T \rightarrow \infty) \rightarrow \infty$, como también se desprende de (6.37). En cambio, todas las soluciones autosimilares con $\lambda > 0$ decaen asintóticamente a cero.

Cuando $\lambda = n$ es un número entero positivo las funciones de Kummer se reducen a polinomios de Hermite y se obtienen soluciones de la forma

$$H(z) = H_n(z) e^{-z^2/2}. \quad (6.30)$$

donde $H_n(z)$ es el polinomio de Hermite de orden n . Este subconjunto de soluciones corresponde a distribuciones de campo magnético que son básicamente de tipo gaussiano, pero modulados por oscilaciones cuyo número depende del orden del polinomio. Son soluciones pares e impares sin inyección de flujo magnético (todas decrecen más rápidamente que $1/|y|$ para $|y| \rightarrow \infty$), con flujo total $F=0$, y tales que

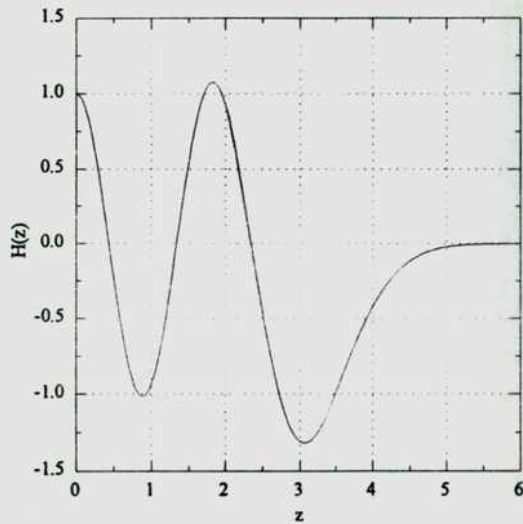


Figura 12. Función de Hermite de orden $n=6$.

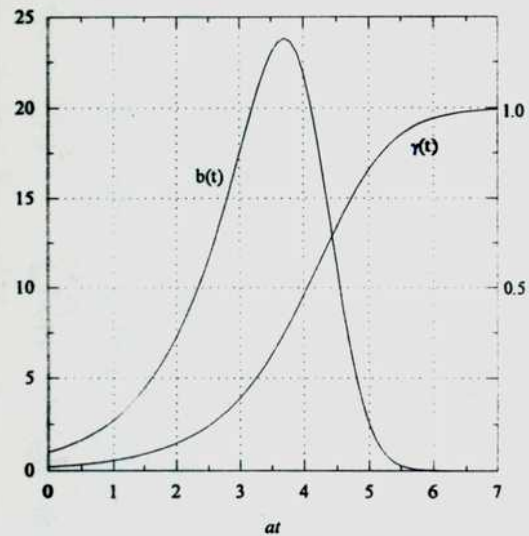


Figura 13. Soluciones autosimilares con $n=6$.

$\tilde{\gamma}(T) \rightarrow 1$ y $b(T) \rightarrow 0$ para $T \rightarrow \infty$ ($n > 0$ en (6.15) y (6.16)). El decaimiento del campo magnético se produce más rápidamente en las soluciones con valores grandes de n . Esto se debe a que poseen un número mayor de oscilaciones que favorecen la disipación de la energía magnética acumulada. En la fig. 12 se muestra la solución autosimilar representada por la función de Hermite con $n=6$. En la fig. 13 aparecen graficadas las funciones $\tilde{\gamma}(T)$ y $b(T)$ correspondientes ($\tilde{\gamma}(0)=0.01$, $b(0)=1$).

La energía magnética de las soluciones autosimilares se puede calcular a partir de la fórmula

$$\begin{aligned}
 W(T) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2(y,t)}{8\pi} dy = \frac{b^2(T)}{8\pi\gamma(T)} \int_{-\infty}^{\infty} H^2(z) dz \\
 &= W(0) e^{-2\lambda T} \left(\frac{\tilde{\gamma}_0^2}{\tilde{\gamma}_0^2 + (1 - \tilde{\gamma}_0^2)e^{-2\lambda T}} \right)^{(\lambda+1)/2}. \quad (6.31)
 \end{aligned}$$

Cuando $\lambda > 0$ la energía magnética tiende asintóticamente a cero para $T \rightarrow \infty$. En el caso de las soluciones con $\lambda=0$ se obtiene $W(\infty) = W(0)/\tilde{\gamma}_0 = W(0)R_m^{1/2}/\gamma h_0$, es decir la energía final es proporcional a $R_m^{1/2}$.

6.4 Soluciones autosimilares para la componente normal de campo magnético

La ec. (4.2) para la componente $B_z = D(y,t)$ también admite un conjunto de

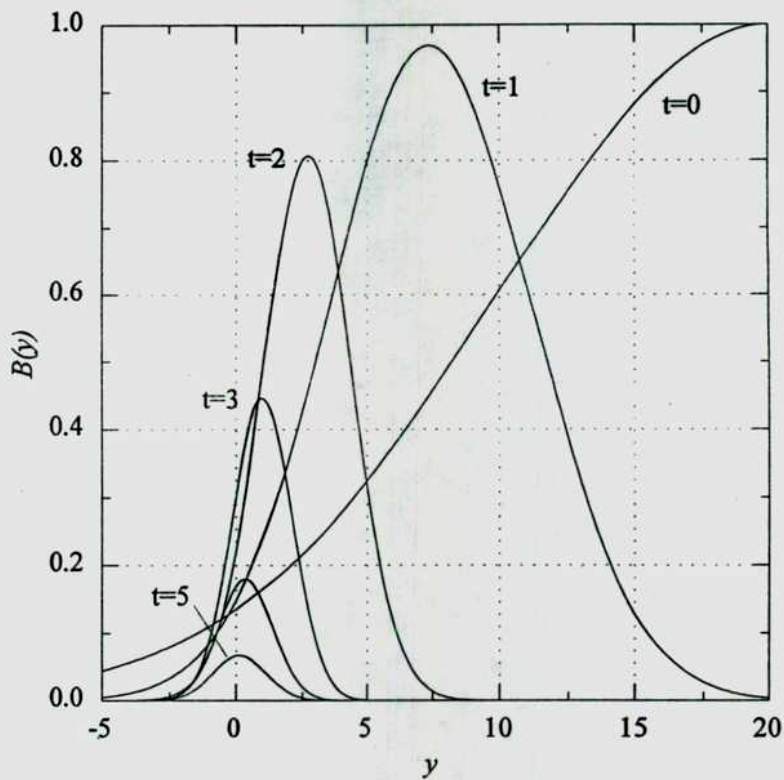


Figura 14. Evolución de una solución gaussiana para la componente normal B_z .
soluciones autosimilares de la forma

$$D(y, t) = d(t) M[\gamma(t)(y - \eta(t))], \quad (6.32)$$

donde $z = \gamma(t)(y - \eta(t))$ es la variable autosimilar y $d(t)$ es la amplitud. Procediendo en forma análoga a la sección 6.1 se obtienen las ecuaciones

$$\frac{\dot{d}}{d} = -(\lambda + 1)v_m \gamma^2, \quad (6.33)$$

$$\frac{\dot{\gamma}}{\gamma} = a - v_m \gamma^2, \quad (6.34)$$

$$\dot{\eta} + a\eta = 0, \quad (6.35)$$

$$\frac{d^2 M}{dz^2} + z \frac{dM}{dz} + (\lambda + 1)M = 0. \quad (6.36)$$

Los perfiles de campo magnético $M[z]$ son los mismos que para la componente $B(y, t)$. En particular, cuando $\lambda = n$ (n entero y positivo) se obtienen las funciones de Hermite (6.30), mientras que para $\lambda = 0$ los perfiles corresponden a la gaussiana (6.22) y a la función de Dawson (6.23). Sin embargo, el comportamiento temporal de las soluciones autosimilares es diferente, como se puede ver en la ec. (6.33), cuya solución es

$$d(T) = d_0 e^{-(\lambda+1)T} \left(\tilde{\gamma}_0^2 + (1 - \tilde{\gamma}_0^2) e^{-2T} \right)^{-(\lambda+1)/2}, \quad (6.37)$$

donde $T = \alpha t$ y $\tilde{\gamma}_0 = (\mu_0 / R_m^{1/2}) \gamma_0$. Para $\lambda > -1$ la amplitud decrece en forma monótona, sin pasar por un máximo como en el caso de la solución (6.16). Por lo tanto, estas soluciones describen la extinción de la componente normal de campo magnético como consecuencia del movimiento del plasma. En la fig. 14 se muestra el decaimiento de una solución gaussiana ($\lambda = 0$) con $\tilde{\gamma}_0 = 0.1$, $b_0 = 1$ y $\eta_0 = 20$.

7 Soluciones con inyección continua de flujo magnético.

7.1 Condiciones de contorno en sistemas forzados.

Las soluciones obtenidas en los capítulos previos describen la evolución del campo magnético en configuraciones sin inyección de flujo magnético, donde $v_y B \rightarrow 0$ para $|y| \rightarrow \infty$. En cambio, cuando $\lim_{|y| \rightarrow \infty} v_y B$ es distinto de cero el movimiento lejano del plasma arrastra un campo magnético que ingresa al sistema en forma continua. Esta condición corresponde a un valor finito de inyección de flujo magnético por unidad de tiempo $v_y B$, que en un flujo real se realiza mediante valores constantes de la velocidad y del campo magnético a distancias grandes de la lámina de corriente.

Cuando $R_m \gg 1$ se puede ver que el término difusivo en la ecuación del campo magnético (4.1) es despreciable lejos de la lámina de corriente (de hecho $\partial^2 B / \partial y^2$ decae asintóticamente como $1/|y|^3$). Por lo tanto, para $|y| \rightarrow \infty$ la ec. (4.1) se reduce a

$$\frac{\partial B}{\partial t} - ay \frac{\partial B}{\partial y} = aB \quad (|y| \rightarrow \infty), \quad (7.1)$$

cuya solución

$$B(y, t) = F(ye^{at})e^{at} \quad (|y| \rightarrow \infty), \quad (7.2)$$

se obtiene por el método de las características.

Esta solución describe el comportamiento asintótico del campo magnético para $|y| \rightarrow \infty$. La función $F(Y)$, con $Y = ye^{at}$, representa la distribución espacial de campo magnético a $t=0$ para valores grandes de $|y|$. La forma del campo magnético lejano determina las condiciones de contorno para la evolución de la lámina de corriente. En el caso más general se puede tener inyección de flujo magnético variable en el tiempo, aún cuando la velocidad asintótica del fluido sea constante. La solución $F(Y) = a_1/Y$, con $a_1 = cte$, corresponde a sistemas con inyección continua de flujo magnético a una tasa constante en el tiempo: $\lim_{|y| \rightarrow \infty} v_y B = a_1$. En los puntos siguientes se consideran sistemas "forzados" de este tipo.

7.2 Crecimiento de las soluciones pares.

Si se inyecta flujo magnético al sistema en forma asimétrica, es decir con $\lim_{|y| \rightarrow +\infty} yB \neq \lim_{|y| \rightarrow -\infty} yB$, las soluciones tienden a crecer en forma indefinida sin alcanzar un estado estacionario. Este resultado, que tiene importantes consecuencias físicas, se puede demostrar considerando una distribución inicial de campo magnético $B(y,0)=B_0(y)$ tal que $\lim_{y \rightarrow +\infty} yB_0=a_1$ y $\lim_{y \rightarrow -\infty} yB_0=a_2$, donde a_1, a_2 son constantes y $a_1 \neq a_2$. Descomponiendo la condición inicial en una parte par y otra impar de la forma

$$\begin{aligned} B_0^{\text{par}} &= \frac{1}{2}(B_0(y) + B_0(-y)), \\ B_0^{\text{impar}} &= \frac{1}{2}(B_0(y) - B_0(-y)), \end{aligned} \quad (7.3)$$

se tiene que

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} yB_0^{\text{par}} = \frac{1}{2}(a_1 - a_2) \equiv d, \quad (7.4)$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} yB_0^{\text{impar}} = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \equiv a. \quad (7.5)$$

La componente B_0^{par} se puede escribir a su vez como

$$B_0^{\text{par}} = (B_0^{\text{par}} - \frac{d}{|y|}) + \frac{d}{|y|} \quad |y| \geq h_0, \quad (7.6)$$

donde $h_0 > 0$ es una distancia arbitraria al origen. Expresada de la forma (7.6), la componente par se divide en dos partes: una parte "forzada" sostenida por inyección continua de flujo magnético

$$\begin{aligned} B_0^d &= \frac{d}{|y|} & |y| \geq h_0, \\ B_0^d &= 0 & |y| < h_0, \end{aligned} \quad (7.7)$$

y una contribución inicial de la forma

$$\begin{aligned} B_0^s &= B_0^{\text{par}} - \frac{d}{|y|} & |y| \geq h_0, \\ B_0^s &= B_0^{\text{par}} & |y| < h_0, \end{aligned} \quad (7.8)$$

con $\lim_{|y| \rightarrow \infty} yB_0^s = 0$. La contribución (7.8) representa la componente par del campo magnético inicial que evoluciona sin inyección de flujo magnético. Por lo tanto, esta parte de la solución tiende asintóticamente al perfil gaussiano estacionario (3.16).

La evolución de la componente "forzada" B_0^d se puede obtener a partir de la integral de Poisson (ver sección 4.2)

$$B^d(y, t) = dh_0 \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{\pi}} \int_{|y|>h_0} d\xi \frac{\exp[-(y - \chi\xi)^2 \phi]}{|\xi|}, \quad (7.9)$$

donde $\chi = \exp(-at)$ y $\phi = a/(2v_m(1 - \exp^{-2at}))$. Desarrollando la expresión anterior se obtiene

$$B^d(y, t) = dh_0 \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2 \phi} \int_{h_0}^{\infty} d\xi \frac{\exp[-\chi^2 \xi^2 \phi]}{\xi} 2 \cosh(2y\chi\xi\phi). \quad (7.10)$$

Por otra parte, como

$$\int_{h_0}^{\infty} d\xi \frac{\exp[-\chi^2 \xi^2 \phi]}{\xi} = \frac{1}{2} \int_{\chi^2 \phi h_0^2}^{\infty} d\zeta \frac{e^{-\zeta}}{\zeta} = -\frac{1}{2} \text{Ei}(-\chi^2 \phi h_0^2), \quad (7.11)$$

donde $\text{Ei}(x)$ es la función exponencial-integral, que satisface para $x > 0$ la relación

$$\text{Ei}(-x) = C + \ln x - \int_0^x (1 - e^{-u}) \frac{du}{u}$$

donde C es la constante de Euler (Abramowitz & Stegun, 1972), se obtiene una cota inferior para B^d de la forma

$$B^d(y, t) \geq \frac{d}{h_0} \frac{\sqrt{\phi}}{\sqrt{\pi}} e^{-y^2 \phi} \left[-\ln(\chi^2 \phi h_0^2) + \int_0^{\chi^2 \phi h_0^2} (1 - e^{-u}) \frac{du}{u} - C \right]. \quad (7.12)$$

Para $\exp(at) \gg 1$ esta cota crece en forma lineal con el tiempo como

$$B^d(y, t) \geq \frac{d}{h_0} \sqrt{\frac{2R_m}{\pi}} e^{-(R_m/2)(y/h_0)^2} at. \quad (7.13)$$

La componente del campo magnético originada a partir de B_0^{impa} y sostenida por la inyección de flujo magnético a' tiende asintóticamente a formar una lámina de corriente estacionaria representada la función de Dawson (6.23) (ver capítulo 6, sección 6.2). Asimismo, la componente par sin inyección B_0^s evoluciona hacia un perfil gaussiano del tipo (3.16). Ambas componentes de la solución alcanzan sus respectivos estados estacionarios en un tiempo del orden de $\tau_h = 1/a$, que corresponde a la escala de tiempo hidrodinámico. Por lo tanto, el resultado (7.13) implica que la evolución del campo magnético total es dominada en poco tiempo (del orden de $at \approx 10$) por el crecimiento de la solución par sostenida por $d \neq 0$, a menos que la inyección se realice en forma perfectamente simétrica ($d=0$). En consecuencia, el perfil gaussiano originado a

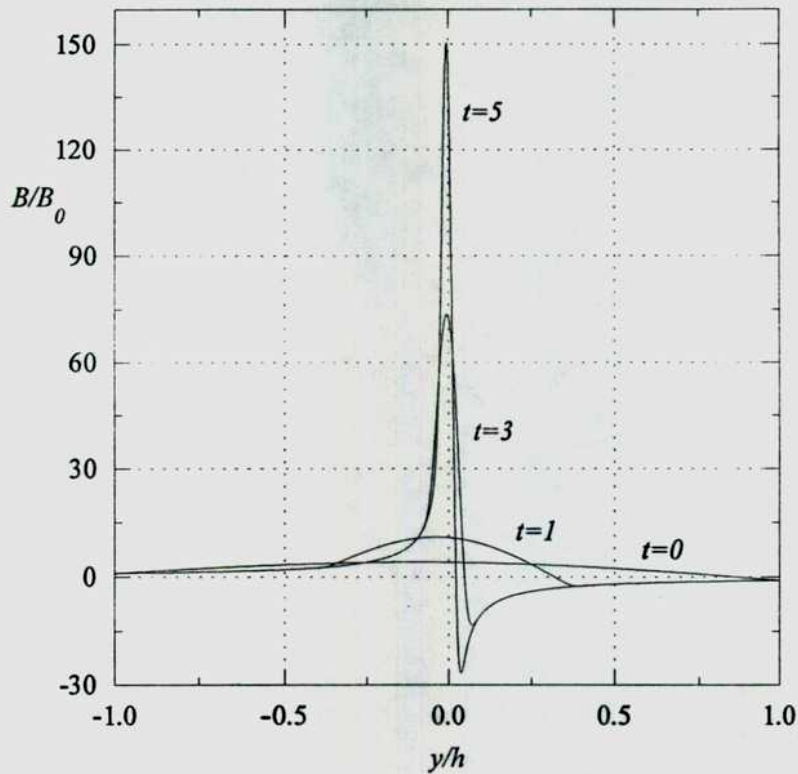


Figura 15. Formación de una lámina de corriente asimétrica.

partir de B_0^d , cuya amplitud crece linealmente con el tiempo, puede llegar a cancelar la región en donde el campo magnético cambia de signo (originada a partir de la componente impar B_0^{impar}). Es importante observar que aún en flujos con $B_0^d=0$ la presencia de una contribución inicial par sin inyección B_0^s puede interferir en la formación de una lámina de corriente con campo magnético antisimétrico.

En la fig. 15 se muestra la evolución del campo magnético en un sistema con inyección continua de flujo magnético perfectamente simétrica ($d=0$), donde a $t=0$ existe además un contribución inicial de campo magnético par $B(y,0)=4B_0\cos(\pi y/2h_0)$. La solución se obtuvo integrando la ec. (4.1) numéricamente en el intervalo finito $|y/h_0|<1$, con las condiciones de contorno $B/B_0=\pm 1$ y $f=\pm h$ en $y=\pm h$ ($R_m=5000$). Los sucesivos perfiles de campo magnético muestran claramente el desarrollo de la solución impar de Dawson junto con la intensificación de la componente par inicial, de manera que asintóticamente se forma una lámina de corriente asimétrica en torno a $y=0$.

En conclusión, la evolución del campo magnético en flujos planos se caracteriza por el predominio de las soluciones pares. Esto ocurre tanto en las configuraciones sin inyección de flujo magnético, donde son las únicas componentes que sobreviven, como

en aquellas con inyección continua de flujo magnético $d \neq 0$. Por lo tanto, las configuraciones que se proponen habitualmente para estudiar procesos de reconexión o el desarrollo de inestabilidades resistivas, que requieren la existencia de una lámina de corriente con cambio de signo del campo magnético, pueden no llegar a realizarse cuando se considera la formación de la lámina de corriente a partir de condiciones iniciales genéricas.

8 Extensiones del modelo.

8.1 Aniquilación rápida del campo magnético en un flujo tridimensional.

La evolución del campo magnético en flujos tridimensionales se caracteriza por el decaimiento de todas las componentes del campo magnético inicial, en contraste con los flujos planos, donde tienden a sobrevivir las componentes pares. La fig. 16 muestra en forma cualitativa las líneas de corriente correspondientes a un campo de velocidades tridimensional en la vecindad de un punto de estancamiento (Gratton et al., 1990). El movimiento producido como consecuencia del desplazamiento de discos sólidos que empujan un fluido contenido entre ellos hacia el centro (el "squeeze flow" de Kuzma, Maki & Donnelly, 1964) y el movimiento generado por la inyección de líquido a través de dos discos porosos enfrentados (Gratton & Bender, 1991) son otros ejemplos.

En el modelo de flujo tridimensional considerado aquí se supone un campo de velocidades incompresible y axialmente simétrico alrededor del eje y . Ambas condiciones se satisfacen exactamente para movimientos de la forma (en coordenadas cartesianas)

$$\mathbf{v} = (xf'(y,t), -2f, zf'(y,t)), \quad (8.1)$$

donde $f' = \partial f / \partial y$. Cuando $f(0,t) = 0$ el campo de velocidades (8.1) tiene un punto de estancamiento en el origen. El campo magnético está formado por líneas rectas paralelas al plano (x,z) , cuyas dos componentes dependen solamente de la coordenada axial y del tiempo:

$$\mathbf{B} = (B_x(y,t), 0, B_z(y,t)). \quad (8.2)$$

A partir de (8.1) y (8.2) se obtiene

$$\boldsymbol{\omega} = (zf'', 0, -xf''),$$

$$\{\mathbf{v}, \boldsymbol{\omega}\} = (2zf'f'' - 2zf''', 0, 2xf'f'' - 2xf'''),$$

$$\text{rot rot } \boldsymbol{\omega} = (-z\nabla^2 f'', 0, -x\nabla^2 f''),$$

$$\mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \left(\frac{\partial B_x}{\partial y}, 0, \frac{\partial B_z}{\partial y} \right),$$

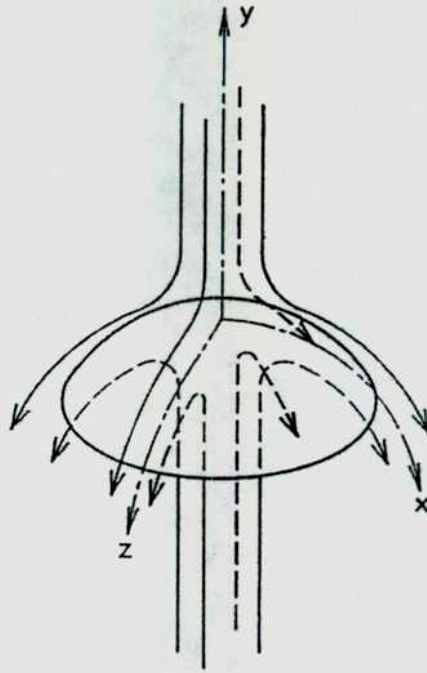


Figura 16. Ejemplo de un flujo tridimensional.

$$\{B, j\} = 0,$$

por lo que las ecs. (2.23)-(2.24) se reducen a

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \frac{\partial f}{\partial y} = C(t) - \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + 2f \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \quad (8.3)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \nu_m \frac{\partial^2 B}{\partial y^2} + 2f \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} B, \quad (8.4)$$

donde $B(y,t) = B_{x,z}$. Combinando soluciones para B_x y B_z (con diferentes condiciones iniciales y de contorno) se obtienen soluciones más generales de campo magnético con cizalla. En este capítulo se estudia la evolución de una sola componente $B_x = B(y,t)$. La constante $C(t)$ mide los gradientes de presión (lineales) en las direcciones x y z . La distribución de presión se obtiene a partir de

$$p = p_0 - \frac{1}{2} \rho C x^2 - \frac{1}{2} \rho C z^2 - \frac{B^2}{8\pi} - \rho f^2 - 2\rho \nu f, \quad (8.5)$$

donde p_0 es una presión constante de referencia. Las ecs. (8.3)-(8.4) son idénticas a las del caso plano (3.3)-(3.5), salvo por un factor 2 que aparece en ambas y que tiene consecuencias importantes para la evolución del campo magnético, como se verá más adelante.

8.1.1 Decaimiento del campo magnético.

La ecuación de movimiento (8.3) posee una familia de soluciones irrotacionales de la forma $f=a(t)y$. La solución

$$f = \frac{a}{2}y, \quad (8.6)$$

con $a=2C^{1/2}=cte$, representa un movimiento estacionario con un punto de estancamiento en el origen. En este caso el cambio de variables

$$\zeta = \frac{y}{h_0} e^{at}, \quad \tau = \frac{1}{2R_m} (e^{2at} - 1), \quad B^*(\zeta, \tau) = e^{-(a/2)t} B(y, t), \quad (8.7)$$

donde $R_m = ah_0^2/\nu_m$, transforma a (8.4) en la ecuación de difusión

$$\frac{\partial B^*}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 B^*}{\partial \zeta^2}. \quad (8.8)$$

Si se conoce la distribución inicial de campo magnético $B^*(\zeta, 0) = B(y, 0)$, el problema de valores iniciales puede resolverse usando las técnicas descritas en la sección 4.1. Por ejemplo, la energía magnética total (por unidad de área) se calcula con la fórmula

$$W(t) = \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{h_0}{8\pi} |\varphi(k, 0)|^2 e^{-k^2/R_m(e^{2at}-1)}, \quad (8.9)$$

donde $\varphi(k, 0)$ es la transformada de Fourier de la condición inicial.

Multiplicando la ec. (8.4) por $B(y, t)$, con $f=(a/2)y$, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2}{8\pi} dy = -\frac{\nu_m}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\partial B}{\partial y}\right)^2 dy + \frac{\nu_m}{4\pi} B \frac{\partial B}{\partial y} \Big|_{-\infty}^{\infty} + ay \frac{B^2}{8\pi} \Big|_{-\infty}^{\infty}, \quad (8.10)$$

después de integrar por partes. Si el campo magnético decae más rápidamente que $1/|y|^{1/2}$ para $|y| \rightarrow \infty$, los dos últimos términos de (8.10) son nulos y la energía magnética decrece en forma monótona debido a la disipación Joule. La contribución del término $(a/2)B$ en (8.4), que representa la amplificación del campo magnético por el movimiento (8.6), se cancela en este tipo de flujos por la presencia de una mayor advección $ay\partial B/\partial y$. Se tiene entonces el siguiente resultado general:

Todas las soluciones originadas a partir de campos magnéticos iniciales que tienden a cero más rápidamente que $1/|y|^{1/2}$ para $|y| \rightarrow \infty$ decaen asintóticamente para $t \rightarrow \infty$.

Este resultado se aplica en particular a campos magnéticos que se comportan

como $1/|y|$ para $|y| \rightarrow \infty$. Esto corresponde a sistemas con inyección continua de flujo magnético a una tasa constante, donde $v_y B \rightarrow cte$ para $|y| \rightarrow \infty$. Por lo tanto, en un flujo tridimensional de la forma (8.1)-(8.2) todas las componentes del campo magnético se aniquilan para $t \rightarrow \infty$. Una solución estacionaria se puede sostener solamente mediante el ingreso de flujo magnético a una tasa que crece como $|y|^{1/2}$ para $|y| \rightarrow \infty$, lo que equivale a tener una inyección continua de energía magnética ($\lim_{|y| \rightarrow \infty} v_y B^2 \rightarrow cte$).

El tiempo de extinción se puede calcular exactamente en el caso de distribuciones pares de campo magnético sin inyección de flujo magnético, donde $\lim_{|y| \rightarrow \infty} v_y B \rightarrow 0$. Integrando (8.4) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} B(y, t) dy = -\frac{a}{2} \int_{-\infty}^{\infty} B(y, t) dy, \quad (8.11)$$

La expresión (8.11) es una ecuación de evolución para el flujo total de campo magnético (por unidad de longitud)

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} B(y, t) dy,$$

cuya solución es

$$F(t) = F_0 e^{-(a/2)t}, \quad (8.12)$$

donde F_0 es el flujo inicial. La aniquilación del campo magnético se produce en unos pocos tiempos característicos $1/a$, como ocurre también para la componente normal de campo magnético en flujos planos (ver sección 4.5). Este tiempo de extinción es mucho menor que el tiempo difusivo $t_D = h_0^2 / \nu_m$ cuando R_m es grande. La fig. 17 muestra el decaimiento de la energía magnética en soluciones pares con $B(y, 0) = B_0 \cos(\pi y/2)$, que fueron obtenidas integrando numéricamente la ec. (8.4) en el intervalo finito $-h \leq y \leq h$ con las condiciones de contorno $B(-h) = B(h) = 0$. En la fig. 18 se muestra la disipación Joule $D(t)/aW_0$ correspondiente.

8.1.2 Solución elemental.

Al igual que en el caso plano (sección 3.3), la evolución del campo magnético se puede resolver en forma exacta cuando la condición inicial corresponde a un modo puro de Fourier

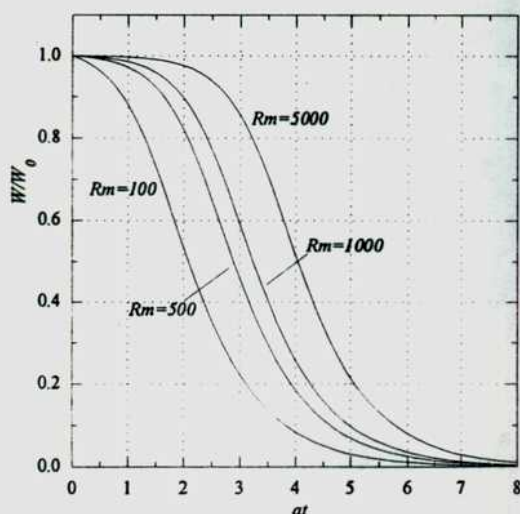


Figura 17. Decaimiento de la energía en un flujo tridimensional (soluciones pares).

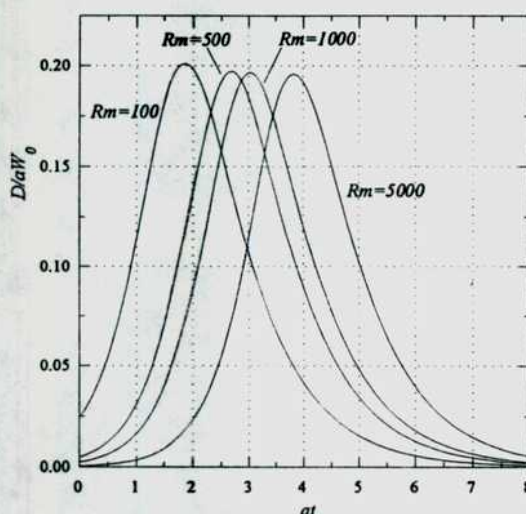


Figura 18. Disipación Joule en un flujo tridimensional (soluciones pares).

$$B(y,0) = b_0 \text{sen}[k_0 y], \quad (8.13)$$

donde b_0 es la amplitud inicial y k_0 es el número de onda (también se puede considerar un modo del tipo $b_0 \cos(k_0 y)$). Reemplazando en (8.4) la solución

$$B(y,t) = b(t) \text{sen}(k(t)y), \quad (8.14)$$

se obtiene (para $f=(a/2)y$)

$$k(t) = k_0 e^{at}, \quad (8.15)$$

$$b(t) = b_0 \exp\left[\frac{a}{2}t - \frac{(h_0 k_0)^2}{2R_m} (e^{2at} - 1)\right]. \quad (8.16)$$

La amplitud $b(t)$ crece inicialmente hasta alcanzar un valor máximo

$$b_M = b_0 \left(\frac{R_m}{2(h_0 k_0)^2}\right)^{1/4} \exp\left[-\frac{1}{4} + \frac{(h_0 k_0)^2}{2R_m}\right], \quad (8.17)$$

en un tiempo

$$t_M = \frac{1}{2a} \log(R_m) - \log(\sqrt{2} h_0 k_0). \quad (8.18)$$

Después de $t=t_M$ el campo magnético se extingue muy rápidamente, con un decaimiento proporcional a $\exp[-(h_0 k_0)^2 e^{2at}/2R_m]$ para $t \rightarrow \infty$. El campo inicial (8.13) se aniquila completamente (a pesar de no tener un comportamiento del tipo $1/|y|^{1/2+\epsilon}$ para $|y| \rightarrow \infty$) debido al crecimiento exponencial del número de onda $k(t)$. El tiempo característico de intensificación t_M es del mismo orden que en el caso de la solución elemental plana

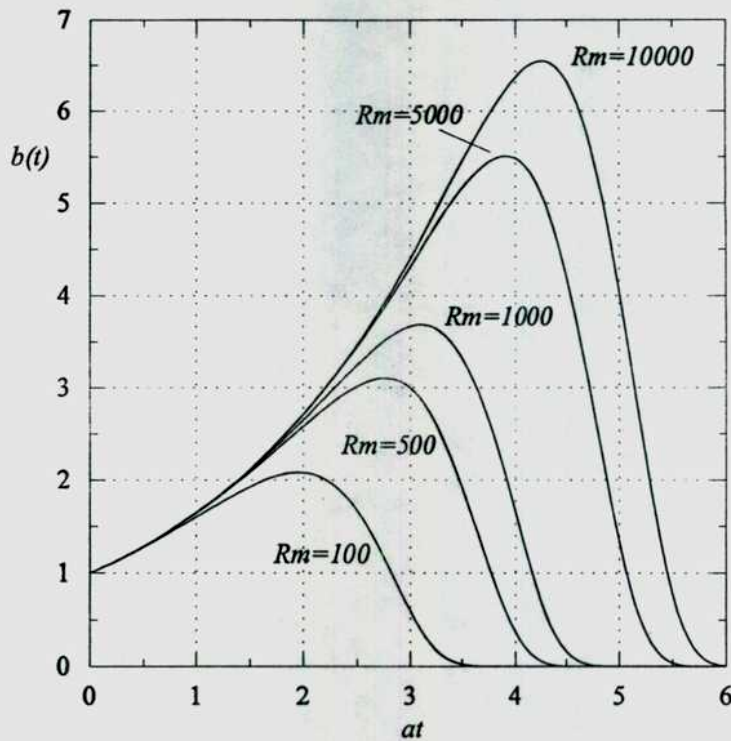


Figura 19. Soluciones elementales en un flujo tridimensional.

(3.28). Sin embargo, la amplitud máxima b_M es menor al ser proporcional a $R_m^{1/4}$ (en lugar de $R_m^{1/2}$). En la fig. 19 se muestra la evolución de la amplitud $b(t)$ para distintos valores de R_m . Comparando estas curvas con las de la fig. 6, correspondientes a soluciones elementales en flujos planos, se observa la menor amplificación del campo magnético en el flujo tridimensional.

8.1.3 Soluciones autosimilares.

Las principales características de la evolución del campo magnético en estos flujos tridimensionales también se manifiestan en una familia de soluciones autosimilares de la forma

$$B(y, t) = b(t)N[\gamma(t)(y - \eta(t))], \quad (8.19)$$

donde $z = \gamma(t)(y - \eta(t))$ es la variable autosimilar y $b(t)$ es la amplitud del campo magnético. Siguiendo los pasos llevados a cabo en el caso plano (capítulo 6) se obtiene que la función $N[z]$ satisface la ecuación

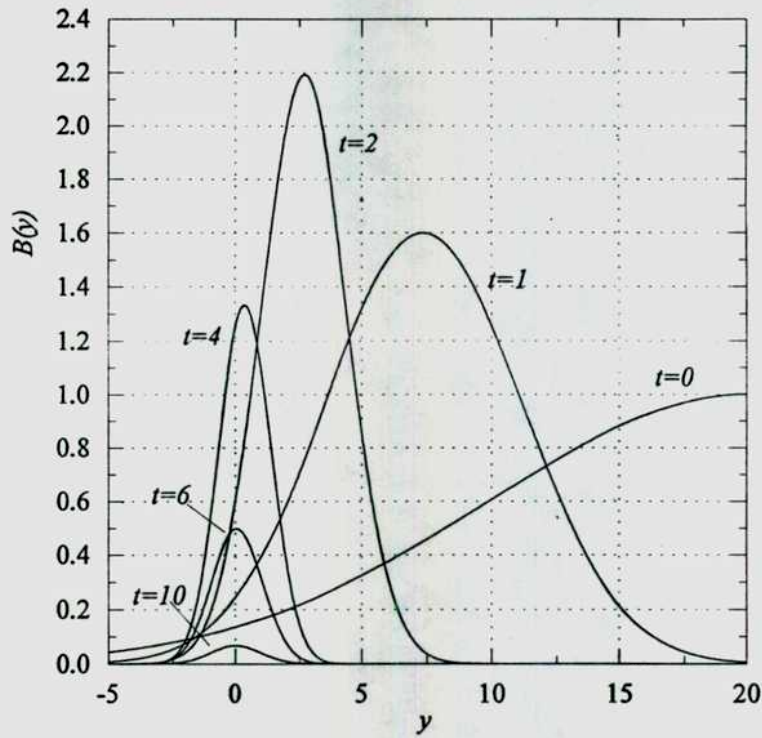


Figura 20. Evolución de una solución gaussiana en un flujo tridimensional.

$$\frac{d^2N}{dz^2} + z \frac{dN}{dz} + (\lambda + 1)N = 0. \quad (8.20)$$

Las funciones $\eta(t)$, $b(t)$ y $\tilde{\gamma}(t) = (h_0/R_m^{1/2})\gamma$ correspondientes son

$$\eta(t) = \eta_0 e^{-at}, \quad (8.21)$$

$$b(t) = b_0 e^{-(\lambda+1/2)at} \left(\tilde{\gamma}_0^2 + (1 - \tilde{\gamma}_0^2) e^{-2at} \right)^{-(\lambda+1)/2}, \quad (8.22)$$

$$\tilde{\gamma}(t) = \frac{\tilde{\gamma}_0}{\sqrt{\tilde{\gamma}_0^2 + (1 - \tilde{\gamma}_0^2) e^{-2at}}}. \quad (8.23)$$

Todas las soluciones autosimilares con $\lambda \geq 0$ decaen asintóticamente para $t \rightarrow \infty$. Sin embargo la amplitud $b(t)$ no decrece en forma monótona, sino que crece a partir de $t=0$ hasta alcanzar un valor máximo

$$b_M = b_0 \left(\frac{1 - \tilde{\gamma}_0^2}{(2\lambda + 1)\tilde{\gamma}_0^2} \right)^{1/4} \left(\frac{2\lambda + 1}{(\lambda + 1)(1 - \tilde{\gamma}_0^2)} \right)^{-(\lambda+1)/2}, \quad (8.24)$$

en un tiempo

$$t_M = -\frac{1}{2a} \ln \left(\frac{(2\lambda + 1)\tilde{\gamma}_0^2}{1 - \tilde{\gamma}_0^2} \right). \quad (8.25)$$

Reemplazando $\gamma_0=1/h_0$ ($\tilde{\gamma}_0^2=1/R_m$) en (8.25) se obtiene que la amplitud máxima del campo magnético es proporcional a $R_m^{1/4}$, en lugar de $R_m^{1/2}$ como en la solución autosimilar plana 6.19. Por lo tanto, en un flujo tridimensional también se produce una amplificación considerable del campo magnético para valores grandes de R_m , aunque algo menor que en el caso de un flujo plano.

En la fig. 20 se muestra la evolución de una solución gaussiana ($\lambda=0$) con $b/b_0=1, \tilde{\gamma}_0^2=0.1$ y $\eta_0/h_0=20$. El perfil gaussiano inicial se desplaza hacia el origen ($\eta(t \rightarrow \infty) \rightarrow 0$) mientras su amplitud crece hasta alcanzar un valor máximo $b/b_0 \approx 3.15$ para un tiempo $\alpha t_M \approx 2.3$, después del cual se extingue completamente. Este comportamiento se puede comparar con el de la fig. 14, correspondiente a una solución autosimilar para la componente B_z en un flujo plano, donde la amplitud del perfil gaussiano decae continuamente mientras se mueve hacia el origen.

8.1.4 Soluciones estacionarias.

Se ha visto que la existencia de soluciones estacionarias en un flujo tridimensional requiere una inyección continua de energía magnética, de manera que $\lim_{|y| \rightarrow \infty} v_y B^2 \rightarrow cte$. Para valores grandes números de Reynolds magnético $R_m = ah_0^2/\nu_m$ se pueden estudiar estas soluciones usando una aproximación de tipo capa límite (resistiva). Lejos de la lámina de corriente la ecuación del campo magnético (8.4) se reduce a (suponiendo $f=(a/2)y$ con $a=cte$)

$$y \frac{\partial B}{\partial y} + \frac{1}{2} B = 0 \quad |y| \rightarrow \infty, \quad (8.26)$$

cuya solución es

$$B = \frac{B_0}{\sqrt{|y/h_0|}} \quad |y| \rightarrow \infty, \quad (8.27)$$

donde B_0 es el valor del campo magnético en el punto $y=h_0$. Esta solución describe el comportamiento del campo magnético lejano, que verifica $\lim_{|y| \rightarrow \infty} v_y B^2 \rightarrow cte$. El campo magnético dentro de la lámina de corriente satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + r \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{1}{2} B = 0, \quad (8.28)$$

donde $r=R_m^{1/2}(y/h_0)$. Haciendo el cambio de variable

$$B(r) = p(r)e^{-\frac{1}{4}r^2}, \quad (8.29)$$

se obtiene la ecuación

$$p'' - \frac{1}{4}r^2 p = 0, \quad (8.30)$$

cuya solución general es una combinación lineal de dos funciones parabólicas cilíndricas, una par y la otra impar (Abramowitz & Stegun, 1972). Desarrollando las soluciones de (8.28) para $r \rightarrow \infty$ ($y \rightarrow h_0$) e igualando a la solución externa (8.27) se obtiene

$$\begin{aligned} B_{\text{par}}(y) &= B_0 \frac{\Gamma(1/4)}{\sqrt{\pi}} R_m^{1/4} e^{-\frac{1}{2}R_m(y/h_0)^2} p_{\text{par}}(\sqrt{R_m}y/h_0) & |y| < \delta \\ &= \frac{B_0}{\sqrt{|y/h_0|}} & |y| > \delta, \end{aligned} \quad (8.31)$$

$$\begin{aligned} B_{\text{impar}}(y) &= \pm 2B_0 \frac{\Gamma(3/4)}{\sqrt{\pi}} R_m^{1/4} e^{-\frac{1}{2}R_m(y/h_0)^2} p_{\text{impar}}(\sqrt{R_m}y/h_0) & |y| < \delta \\ &= \frac{\pm B_0}{\sqrt{|y/h_0|}} & |y| > \delta, \end{aligned} \quad (8.32)$$

donde $\delta \sim h_0/R_m^{1/2}$ es el ancho de la capa resistiva. La amplitud de ambas soluciones es proporcional a $R_m^{1/4}$, por lo que son menos intensas que las correspondientes a flujos planos (a pesar de sostenerse mediante una inyección continua de flujo magnético que diverge para $|y| \rightarrow \infty$).

La energía magnética por unidad de área en la lamina de corriente final es (en orden de magnitud)

$$W \approx \frac{B^2}{8\pi} \delta \approx \frac{B_0^2 (R_m)^{1/2}}{8\pi} \frac{h_0}{(R_m)^{1/2}} \approx W_0, \quad (8.33)$$

donde $W_0 \approx (B_0^2/8\pi)h_0$ es una estimación de la energía inicial en la región del flujo. Por lo tanto, la inyección de energía magnética apenas alcanza para mantener la energía inicial de la configuración.

El análisis previo se aplica también a flujos más generales del tipo (8.1), por ejemplo rotacionales, ya que el movimiento siempre se puede aproximar localmente por (8.6) en la vecindad del punto de estancamiento (Gratton & Bender, 1991).

8.2 Flujos convergentes con simetría axial.

Las ecuaciones reducidas correspondientes a flujos axialmente simétricos (2.38)-2.41) se satisfacen exactamente para soluciones de la forma

$$\xi(z,r,t) = z f(r,t), \quad \psi(z,r,t) = \psi(r,t), \quad (8.34)$$

donde $\xi(z,r,t)$ es la función de corriente y $\psi(r,t)$ es la función de flujo magnético, expresadas en un sistema de coordenadas cilíndricas (z,r,ϕ) con ϕ ignorable (Gratton & Bender, 1993). El flujo representado por (8.34) tiene un punto de estancamiento en el origen cuando $f(0,t)=0$. El campo magnético correspondiente a (8.34) está formado por líneas rectas paralelas al eje axial z . Las componentes de la velocidad y del campo magnético se obtienen a partir de

$$v_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial r} = z \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r}, \quad v_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \xi}{\partial z} = -\frac{1}{r} f, \quad v_\phi = 0, \quad (8.35)$$

$$B_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} = B(r,t), \quad B_r = 0, \quad B_\phi = B_\phi(r,t), \quad (8.36)$$

donde se ha incluido una componente adicional de campo magnético azimutal $B_\phi=B_\phi(r,t)$. Como ψ y B_ϕ dependen solamente de las coordenadas r,t se tiene que

$$\left[\frac{1}{r^2} D^2 \psi, \psi \right] = \left[\frac{1}{r^2}, \frac{r^2 B_\phi^2}{2} \right] = [\psi, r B_\phi] = 0.$$

En consecuencia, las ecs. (2.38)-(2.41) se reducen a

$$\frac{1}{r} \frac{\partial f'}{\partial t} + \frac{1}{r^2} (f')^2 - \frac{1}{r} f \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} f' \right) = C(t) + v \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} f' \right) \right], \quad (8.37)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = v_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial B}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (f B), \quad (8.38)$$

$$\frac{\partial B_\phi}{\partial t} = v_m \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial (r B_\phi)}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} f B_\phi \right) - \frac{1}{r} f' B_\phi, \quad (8.39)$$

donde $f' = \partial f / \partial r$ y $C(t)$ mide el gradiente de presión en la dirección z : $\partial(p/\rho) / \partial z = -C(t)z$.

Las soluciones irrotacionales de (8.37) son de la forma

$$f = a(t)r^2, \quad (8.40)$$

donde $a(t)$ satisface la ecuación

$$\dot{a} = \frac{C}{2} - 2a^2. \quad (8.41)$$

El caso más sencillo, con $a=(1/2)C_0^{1/2}=cte$, representa un movimiento estacionario en donde el plasma converge radialmente hacia el eje axial z , escapando a lo largo del mismo eje en ambos sentidos (con una velocidad que crece a medida que se aleja del punto de estancamiento).

8.2.1 Evolución del campo magnético.

La variación temporal de la energía magnética de la componente axial $B(r,t)=B_z$ (por unidad de longitud en z)

$$W(t) = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{B^2}{8\pi} r dr ,$$

y del flujo magnético total

$$F(t) = 2\pi \int_0^{\infty} B r dr .$$

se pueden calcular a partir de (8.38) suponiendo $f=ar^2$ ($a=cte$). Multiplicando por $2\pi r B(r,t)$ e integrando en la coordenada radial r entre $(0,\infty)$ se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} \frac{B^2}{8\pi} 2\pi r dr = -\frac{v_m}{4\pi} \int_0^{\infty} \left(\frac{\partial B}{\partial r}\right)^2 2\pi r dr + 2a \int_0^{\infty} \frac{B^2}{8\pi} 2\pi r dr , \quad (8.42)$$

donde se ha supuesto que $B \sim 1/r^{1+\epsilon}$ ($\epsilon > 0$) para $r \rightarrow \infty$. Las integrales a la derecha de (8.42) representan la disipación Joule y la amplificación del campo magnético por el movimiento. Comparando la expresión anterior con la correspondiente para flujos planos, ec. (5.4), se observa que el término de amplificación es dos veces mayor en este caso.

La variación del flujo magnético total, que se calcula integrando (8.38) después de multiplicar por $2\pi r$, es

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^{\infty} B 2\pi r dr = 2\pi r v_m \left. \frac{\partial B}{\partial r} \right|_0^{\infty} - 2\pi r a r B \Big|_0^{\infty} . \quad (8.43)$$

Para configuraciones de campo magnético con flujo total $F(t)$ finito, es decir que decaen más rápidamente que $1/r^2$ para $r \rightarrow \infty$, se obtiene la conservación del flujo magnético total. Esta condición corresponde a configuraciones sin inyección de flujo magnético, pues $2\pi r v_r B \rightarrow 0$ para $r \rightarrow \infty$ ($v_r = ar$).

El comportamiento asintótico del campo magnético se puede calcular

observando que (8.38) tiene una solución estacionaria dada por

$$B_{\infty} = B_0 \exp\left[-\frac{R_m}{2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right], \quad (8.44)$$

donde r_0 es una escala radial característica del campo magnético inicial $B(0,r)$ y $R_m = ar_0^2/\nu_m$. Igualando el flujo inicial $F_0 = F(0)$ con

$$F_{\infty} = \int_0^{\infty} B_0 \exp\left[-\frac{R_m}{2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] 2\pi r dr$$

se obtiene

$$\lim_{t \rightarrow \infty} B(r,t) \rightarrow \frac{R_m}{2\pi r_0^2} \exp\left[-\frac{R_m}{2} \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right] F_0. \quad (8.45)$$

Por lo tanto:

Todas las soluciones originadas a partir de campos magnéticos iniciales con flujo magnético total finito en el intervalo $r \in (0, \infty)$ tienden para $t \rightarrow \infty$ a la solución gaussiana (8.45).

El campo magnético axial presente inicialmente en la región del flujo convergente es amplificado y concentrado por el movimiento del plasma en un filamento gaussiano de ancho $\delta/r_0 \approx (R_m)^{-1/2}$, donde alcanza un valor pico proporcional a $R_m F_0$. La intensificación del campo magnético en estos flujos es mayor que en el caso plano por un factor $R_m^{1/2}$. La energía magnética en la lámina de corriente final también es mayor, ya que

$$W_{\infty} \approx \frac{B_0^2}{8\pi} R_m^2 2\pi \delta^2 \approx W_0 R_m, \quad (8.46)$$

donde $W_0 = (2\pi r_0^2) B_0^2 / 8\pi$ es una estimación de la energía inicial.

8.2.2 Soluciones autosimilares.

La ecuación de evolución del campo magnético axial $B(r,t)$ también admite una familia de soluciones autosimilares de la forma

$$B = b(t) H\left[\frac{R_m}{2} \gamma(t) \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right], \quad (8.47)$$

donde $H(z)$ es una función de la variable autosimilar $z = (1/2) R_m \gamma(t) (r/r_0)^2$. Reemplazando (8.47) en (8.38) y suponiendo $f = ar^2$ ($a = cte$) se obtienen las siguientes ecuaciones para el factor de escala radial $\gamma(t)$ y la amplitud $b(t)$:

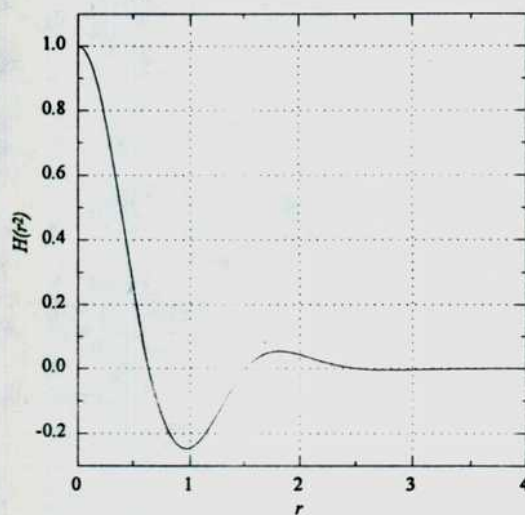
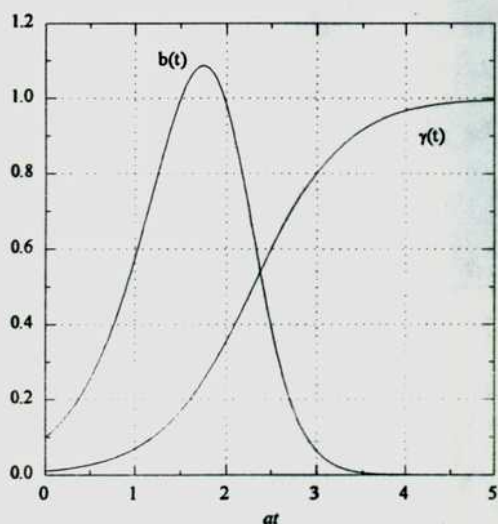


Figura 21. Soluciones autosimilares para $n=3$. Figura 22. Perfil de la solución autosimilar con $n=3$.

$$\frac{d\gamma}{dt} = 2a\gamma(1-\gamma), \quad (8.48)$$

$$\frac{1}{b} \frac{db}{dt} = 2a[1 - (\lambda + 1)\gamma], \quad (8.49)$$

donde λ es un número real arbitrario (ver derivación para el caso plano, capítulo 6). Si $b(t)$ y $\gamma(t)$ satisfacen (8.48)-(8.49) entonces $H(z)$ es solución de la ecuación

$$zH'' + (1+z)H' + (\lambda + 1)H = 0. \quad (8.50)$$

El factor de escala radial $\gamma(t)$ y la amplitud $b(t)$ están dadas por

$$\gamma(t) = \frac{\gamma_0}{\gamma_0 + (1 - \gamma_0)e^{-2at}}, \quad (8.51)$$

$$b(t) = \frac{b_0 e^{-\lambda 2at}}{[\gamma_0 + (1 - \gamma_0)e^{-2at}]^{\lambda+1}}, \quad (8.52)$$

donde $\gamma_0 = \gamma(t=0)$ y $b_0 = b(t=0)$.

Definiendo

$$H(z) = e^{-z}D(z), \quad (8.53)$$

se obtiene una ecuación de Kummer para $D(z)$

$$zD'' + (1-z)D' + \lambda D = 0, \quad (8.54)$$

cuyas soluciones son las funciones de Kummer $M(-\lambda, 1, z)$, pertenecientes a la familia de las funciones confluentes (Abramowitz & Stegun, 1972). Cuando $\lambda = n$ es un número entero positivo la función $M(-n, 1, z) = n!L_n(z)$ es proporcional al polinomio de Laguerre

de orden n , por lo que

$$H(z) = n! e^{-z} L_n(z), \quad (8.55)$$

para $n=1, \dots, \infty$. Estas soluciones representan campos magnéticos con perfiles gaussianos modulados por oscilaciones espaciales. Todas las soluciones con $\lambda=n$ se extinguen para $t \rightarrow \infty$, como se desprende de (8.52). En la fig. 21 se grafica la evolución temporal de la amplitud $b(t)$ y del factor de escala $\gamma(t)$ para la solución autosimilar con $n=3$ ($\gamma(0)=0.01$, $b(0)=0.1$). La fig. 22 muestra el perfil del campo magnético correspondiente. Usando el principio de superposición, el problema de valores iniciales para una distribución arbitraria de campo magnético $B_0=B(r,t=0)$ se puede resolver sumando soluciones de la forma (8.55).

El caso particular $\lambda=0$ corresponde a la evolución de un campo magnético de perfil gaussiano

$$B(r,t) = \frac{b_0}{\gamma_0 + (1-\gamma_0)e^{-2at}} \exp\left[-\frac{R_m}{2} \gamma(t) \left(\frac{r}{r_0}\right)^2\right], \quad (8.56)$$

con $\gamma(t)$ proporcional a $b(t)$. Para $\gamma_0=1/R_m \ll 1$ la solución (8.56) tiende asintóticamente a formar un filamento gaussiano de ancho $\delta \approx r_0 R_m^{-1/2}$ ($\gamma \rightarrow 1$ para $t \rightarrow \infty$), con una amplitud igual a $b_0 R_m$. La intensificación del campo magnético se produce en un tiempo del orden de $t \sim (1/2a) \ln R_m$. El filamento gaussiano disipa energía (por unidad de longitud) a una tasa dada por

$$J = \frac{\pi}{16} R_m^2 \left(v_m \frac{b_0^2}{8\pi} \right), \quad (8.57)$$

mientras continúa el movimiento del plasma.

9 Aplicaciones a procesos disipativos en plasmas.

En este capítulo se consideran algunas aplicaciones a fenómenos fuertemente disipativos en plasmas donde localmente se producen movimientos con un punto de estancamiento. Se obtienen estimaciones para el calentamiento Joule y las escalas características de tiempo en procesos disipativos correspondientes a tres situaciones físicas: i) la formación de "hot spots" durante la etapa de la columna de plasma comprimido en el experimento Plasma Focus; ii) la aniquilación rápida del campo magnético en la magnetopausa terrestre subsolar; iii) fenómenos disipativos rápidos asociados con fulguraciones ("flares") en la corona solar. En la discusión de los ejemplos no se pretende llevar a cabo un análisis detallado de la física de estos complejos sistemas. El propósito del capítulo es mostrar que a partir de las configuraciones de campo magnético estudiadas en los capítulos previos, se obtienen valores que corresponden en orden de magnitud a los observados en diversos procesos de transferencia rápida de energía.

9.1 Plasma Focus.

El Plasma Focus consiste en la descarga eléctrica de un banco de capacitores entre dos electrodos cilíndricos dispuestos en forma coaxial con la parte delantera abierta, que son colocados en una cámara llenada con deuterio a baja presión (a veces se usa una mezcla 50%-50% de deuterio y tritio). La lámina de corriente que se genera entre los electrodos (posición 1 de la figura) es empujada por fuerzas magnéticas hacia adelante, donde colapsa sobre el eje axial del dispositivo formando una columna densa y caliente de plasma (posición 2). A esta última etapa se la conoce propiamente como el Plasma Focus (Rager, 1982).

La columna de plasma, que mide típicamente unos 2-3 cm de largo y tiene un diámetro de 0.3-0.4 cm, dura aproximadamente 100 ns y es una fuente de radiación intensa (rayos X de 10-100 keV), haces de partículas (iones de 1-10 MeV emitidos hacia adelante sobre el eje y electrones relativistas de ~1 MeV emitidos hacia atrás en dirección de los electrodos) y neutrones de fusión (Bostick, Nardi & Prior, 1972; Nardi

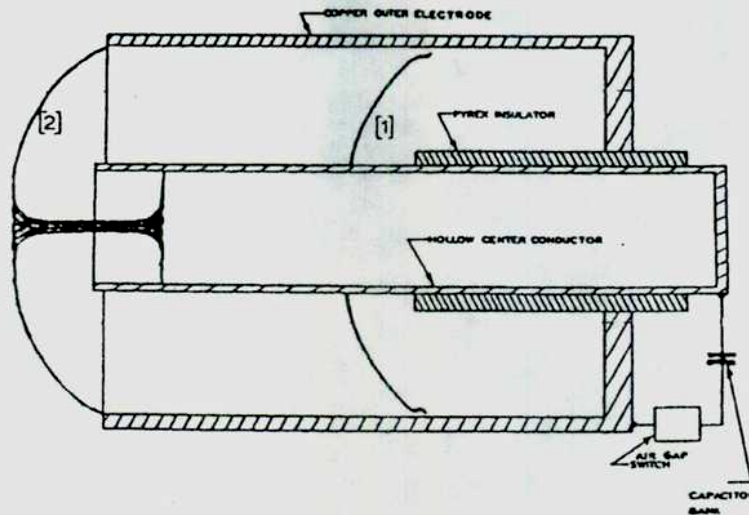


Figura 23. El Plasma Focus.

et al., 1980). Estos procesos altamente energéticos se logran usando bancos de capacitores de 20-80 kJ, operando entre 20-50 kV y con descargas de $\sim 1\mu\text{s}$. Mediante técnicas especiales en dispositivos de 80 kV y 200 kJ, se han obtenido breves destellos (40-80 ns) con una producción de 10^{10} - 10^{11} neutrones de 2.4 MeV a partir de reacciones Deuterio-Deuterio (Nardi et al., 1988).

El tamaño del dispositivo, incluyendo el sistema de vacío y el banco de capacitores, es moderado y su costo es relativamente bajo. Entre las aplicaciones tecnológicas del Plasma Focus actualmente en desarrollo que buscan explotar las características especiales de esta fuente de radiación (puntual, muy intensa y de corta duración), se encuentran la litografía por rayos-X de microcomponentes electrónicos y su utilización como fuente de neutrones para la neutrografía y el análisis de materiales por activación neutrónica (Nardi & Brzosko, 1989; Gnani, Gratton & Bender, 1994).

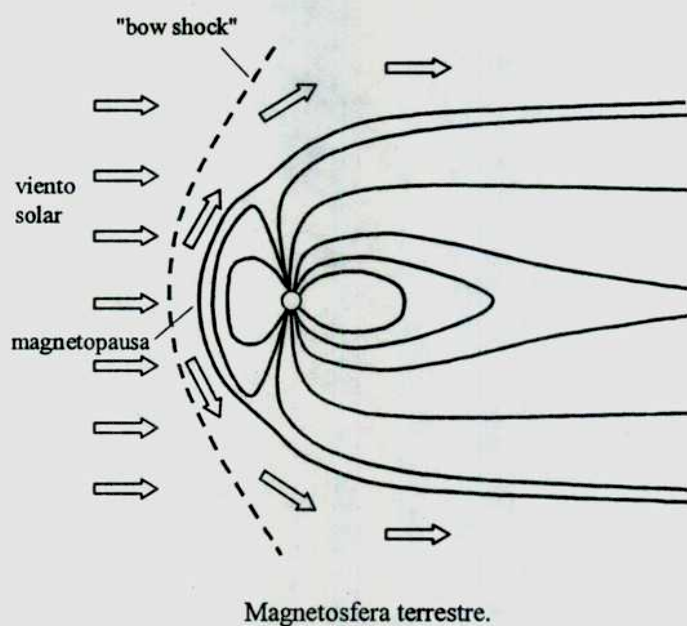
En los experimentos del Plasma Focus se observa la formación de pequeñas regiones de alta energía durante la etapa del foco. Estas regiones, conocidas como "hot spots", se asocian con estrangulamientos localizados de la columna de plasma comprimido (Choi et al., 1993). Por otra parte, algunos trabajos experimentales han reportado la existencia de estructuras filamentosas con campo magnético propio en la lámina de corriente durante la etapa coaxial y en la columna de plasma (Bostick, Nardi & Prior, 1971; Nardi, Bostick & Prior, 1973). Los filamentos magnéticos

proporcionarían una componente de campo magnético axial en la columna, cuya disipación se podría intensificar debido a la presencia del movimiento radial en la región del estrangulamiento.

Para la aplicación del modelo en geometría cilíndrica de la sección 8.2 se considera una región en la columna de tamaño $r_0 \sim 0.1$ cm (en la dirección radial). Las escalas de tiempo para la emisión de rayos X y de partículas son del orden de 10 ns en los experimentos realizados con el Plasma Focus. Se puede tomar entonces un valor de $a \sim 10^8$ s⁻¹, que corresponde a una velocidad radial $|v_r| = ah_0 \sim 10^7$ cm/s para el colapso de la columna. Suponiendo una temperatura inicial de $T \sim 2000$ eV se obtiene (usando la fórmula de Spitzer) $v_m \sim 10^2$ cm²/s, de donde resulta $R_m \sim 10^4$. El valor inicial del campo magnético axial se estima en $B_0 \sim 10^5$ Gauss. Se han medido campos magnéticos filamentosarios del orden de $3 \times 10^3 - 10^4$ Gauss durante la etapa coaxial, por lo que es razonable esperar un valor más alto en la etapa del foco debido a la intensificación por efecto de la compresión del plasma. Mediante corrientes de descarga de 5×10^5 amperios (valor pico) se pueden obtener campos azimutales del orden de $B_\phi \sim 10^6$ Gauss, es decir diez veces mayor que B_0 .

A partir de estos valores el modelo predice la formación de una lámina de corriente de radio $\delta \sim 10^{-3}$ cm en un lapso de tiempo $t \sim 40$ ns. La densidad de energía magnética dentro de la lámina de corriente final es del orden de $w \sim w_0 R_m^2 \sim 4 \times 10^{16}$ erg/cm³. Suponiendo una densidad de plasma en la columna igual a $n \sim 10^{20}$ cm⁻³ se tendrían $\sim 10^{14}$ partículas en el volumen final de la lámina de corriente $V \sim 3 \times 10^{-7}$ cm³ ($V \sim \pi \delta^2 L_z$), con una disipación Joule de 30keV por partícula (por nanosegundo). El campo magnético axial puede llegar en teoría hasta los ~ 200 MGauss (Nardi, Bostick & Prior, 1973), aunque cabe recordar que la presión dinámica asintótica del flujo limita el proceso de intensificación en la práctica (ver sección 5.2).

Se puede mostrar que la disipación generada por la componente azimutal de campo magnético B_ϕ (que origina el estrangulamiento) es despreciable frente a la disipación de B_z , debido fundamentalmente a que el flujo de estancamiento no amplifica esta componente del campo magnético. El valor máximo que alcanza B_ϕ durante la etapa del colapso del Plasma Focus es de aproximadamente 10^8 Gauss, puesto que los valores experimentales para $B_\phi \sim 2I/cr_0$ son de ese orden, convalidando que la presión magnética



debida a B_ϕ sostiene el proceso de intensificación y disipación de la componente axial B_z .

9.2 Magnetosfera terrestre.

El viento solar comprime el campo magnético terrestre al llegar a la magnetosfera, formando una compleja estructura con un choque estacionario ("bow shock") donde el plasma es frenado hasta llegar a la magnetopausa (Saunders, 1991). El carácter tridimensional del flujo de estancamiento en la magnetopausa subsolar podría explicar la moderada intensificación del campo magnético que se observa en esa región. Estos flujos se caracterizan por el decaimiento rápido del campo magnético y requieren la inyección continua de energía magnética a una tasa finita para sostener estructuras disipativas estacionarias (sección 8.1). Las consideraciones siguientes se refieren al frente diurno de la magnetopausa en condiciones de campo magnético interplanetario con orientación norte y ángulo pequeño con el campo geomagnético. De esta manera se excluye la posibilidad de procesos de reconexión.

Una escala de longitud característica para el flujo delante de la magnetopausa subsolar es $h_0 \sim 2.6 \times 10^4$ km (correspondiente a la distancia entre el "bow shock" y la magnetopausa, de aproximadamente 4 radios terrestres) con una velocidad $U_0 \sim 200$ km/s

para el plasma (Rijnbeek et al., 1989; Sonnerup et al., 1981). Por lo tanto, $a \sim U_0/h_0 \sim 7.7 \times 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ correspondería a un tiempo característico para la evolución del campo magnético del orden de algunos minutos, según el modelo considerado aquí ($t \sim 1/a$). El valor de la difusividad magnética ν_m en esta región no se conoce con exactitud (Gratton et al., 1988).

Las mediciones realizadas a partir de datos proporcionados por satélites indican que se producen cambios importantes en la presión del viento solar y de la posición de la magnetopausa en periodos de varios minutos (Farrugia et al., 1989). Es poco probable entonces que se desarrollen láminas de corriente estacionarias: el campo magnético delante de la magnetopausa crece, se aniquila y rodea la región siguiendo los cambios del viento solar. Sin embargo, se ha observado que el campo magnético que ingresa desde el "bow shock" es intensificado hasta 1.5 veces su valor original al llegar a la magnetopausa, lo que implicaría un valor pequeño de $R_m \sim 5$ si se supone un flujo estacionario donde la amplitud del campo magnético escala como $R_m^{1/4}$ (ecs. 8.31-8.32). Este valor de R_m está dentro del rango sugerido por varios autores para el flujo en esta región (e. g., Phan & Sonnerup, 1991).

9.3 Corona solar.

9.3.1 El modelo básico y la amplificación de campo magnético.

Los valores de disipación necesarios para una fulguración solar grande ("flare") de 10^{32} erg, así como para fulguraciones menores de 10^{29} erg, son fácilmente obtenidos a partir de la amplificación de energía magnética que predicen los modelos de los capítulos precedentes. En un escenario básico de fulguración solar se considera la interacción de dos lazos de campo magnético bipolar (fig 23a), originados en las regiones activas de la fotosfera (Machado et al, 1988). Los movimientos convectivos de la superficie solar empujan estas estructuras una contra otra, formándose a la altura de la corona solar una lámina de corriente que abarca una región de volumen $V \sim 10^{24} \text{ cm}^3$ (Machado et al, 1997) donde se produce un flujo de plasma con una línea de estancamiento. Los filamentos de campo magnético que forman los lazos tienen una intensidad aproximada de $B_L \sim 100$ Gauss y la difusividad magnética es del orden de

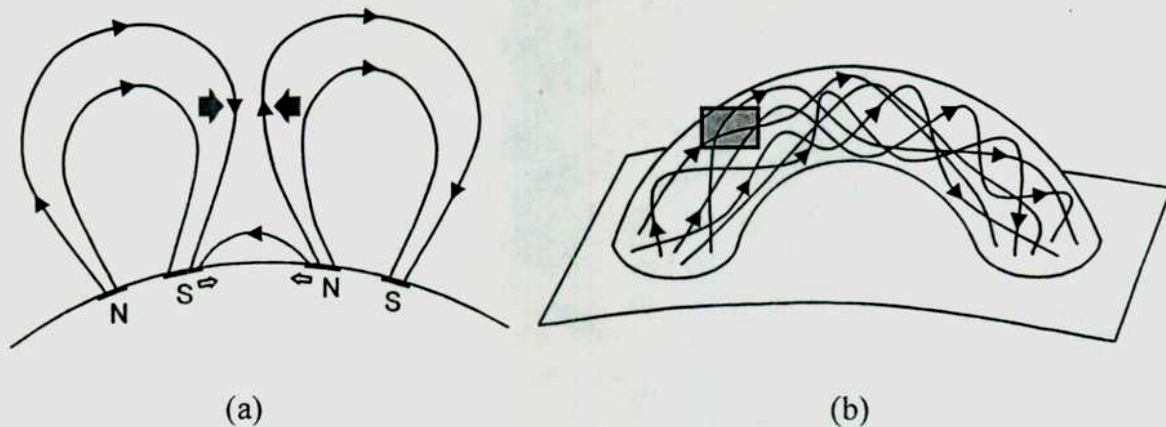


Figura 23. (a) Escenario de fulguración solar; (b) Entrelazado de las líneas magnéticas debido a movimientos convectivos de la superficie solar.

$v_m \sim 10^3 \text{ cm}^2/\text{s}$, que corresponde a una temperatura de $10^6\text{-}10^7 \text{ K}$ para la corona solar (Parker, 1997). La energía magnética inicial es por lo tanto $W_0 \sim 4 \times 10^{26} \text{ erg}$. Suponiendo una velocidad característica de convección $U_0 \sim 1 \text{ km/s}$ para los gránulos fotosféricos, resulta entonces que $a \sim 10^{-2} \text{ s}^{-1}$ y $R_m \sim 10^{10}$. En consecuencia, la intensificación de la energía magnética sería del orden de $W \sim W_0 R_m^{1/2} \sim 4 \times 10^{31} \text{ erg}$, que representa también la energía disipada por calentamiento Joule en una unidad at de tiempo (es decir cada 100 segundos) dentro de la lámina de corriente final. La escala temporal del proceso de intensificación es $\tau \sim (1/2a) \ln R_m \sim 1150 \text{ s}$.

Sin embargo, como se vio en la sección 5.2 la amplificación de la energía magnética en los modelos incompresibles está limitada en la práctica por el valor asintótico de la presión dinámica. En el caso solar resulta que los valores de $\beta \sim 0.02$ ($\beta = 8\pi p_0 / B_L^2$) y del número de Mach-Alfvénico $M_A \sim 5 \times 10^{-4}$ (es decir una velocidad característica de Alfvén $v_A = B_L / (4\pi m_p n) \sim 2000 \text{ km/s}$, donde $n \sim 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ para la corona, mucho mayor que U_0) limitan la intensificación del campo magnético hasta aproximadamente 100 Gauss, a través de la condición

$$\frac{B_L^2}{8\pi} + \frac{1}{2} \rho U_0^2 + p_0 \approx \frac{B^{*2}}{8\pi},$$

donde $B^* \sim B_L$ es el máximo valor alcanzable para el campo magnético, correspondiente a una presión que se hace cero en la vecindad de la línea de estancamiento (ver ec. 5.10). Por otra parte, dada la magnitud de las variaciones ΔB del campo magnético los efectos de la compresibilidad también pueden llegar a ser importantes (sección 2.2). No

obstante, hay varios resultados de la tesis que permiten realizar un aporte a la discusión del problema solar. A continuación se examinan varios escenarios de disipación de energía magnética en el marco de las ideas de Parker (Parker, 1994; Parker, 1997) sobre "nanoflares" y se vuelve a considerar el escenario tradicional de reconexión mencionado anteriormente. La discusión se hará teniendo en cuenta conceptos desarrollados en varios capítulos de este trabajo.

9.3.2 Calentamiento coronal: el modelo de "nanoflares" de Parker.

Entrelazado de líneas magnéticas y formación de discontinuidades.

En el modelo de Parker se explica la emisión térmica observada en la corona solar como el resultado conjunto de numerosos eventos energéticos relativamente pequeños denominados "nanoflares", por involucrar energías del orden de 10^{23} erg, es decir, nueve órdenes de magnitud menores que la energía de una fulguración solar grande ($\sim 10^{32}$ erg). Los movimientos convectivos lentos de las celdas en forma de remolinos que se producen en la base de los lazos magnéticos (gránulos en la superficie del sol con una escala de longitud característica de $l \sim 300$ km), retuercen y entrelazan los filamentos de campo magnético que forman dichas estructuras (ver fig 23b). El elemento básico de esta teoría es entonces la deformación de la madeja de filamentos magnéticos que constituyen los lazos y la consecuente producción de "apretujamientos" locales de regiones de plasma y campo magnético del orden de $l \sim 300$ km. El entrelazado aleatorio de las líneas de campo magnético introduce la energía magnética libre que alimenta la disipación de calor en la corona.

Para un lazo magnético típico de longitud $L \sim 2 \times 10^9 - 2 \times 10^{10}$ cm, resulta que la escala de tiempo dinámico $\tau_a = L/v_A \sim 10 - 100$ s es mucho menor que la escala de tiempo asociada con la convección fotosférica $\tau_c = l/U_G \sim 300$ s. Por lo tanto el campo magnético del lazo se encontraría en un estado continuo de cuasi-equilibrio estático a medida que los puntos de apoyo de los filamentos se entreveran lentamente, desplazados por los remolinos convectivos de la fotosfera. Como consecuencia del proceso de entrelazado de las líneas magnéticas los esfuerzos de Maxwell inherentes a la configuración tienden a empujar regiones de fluido y campo magnético, formando superficies de discontinuidad tangencial con el fin de lograr un equilibrio estático (Parker, 1994). En

presencia de una conductividad eléctrica finita las discontinuidades no se pueden desarrollar (por lo que un equilibrio absolutamente estático no es posible), formándose en cambio láminas de corriente intensas en las superficies de separación de los filamentos magnéticos.

Reconexión en las láminas de corriente.

Llegado a este punto Parker señala que la configuración local de la lámina de corriente corresponde a un escenario de reconexión lenta (ver sección 10.3). En este escenario dos campos magnéticos no paralelos son transportados por el flujo de plasma hacia una región disipativa de tamaño l y espesor $\delta=l/S^{1/2}$ ($S=lv_A/v_m$ es el número de Lundquist), donde son reconectados a una velocidad máxima dada por $v_{SP}=v_A/S^{1/2}$, liberando energía térmica y cinética (chorros de partículas aceleradas que son rápidamente termalizadas) durante el proceso.

Parker (1997) estima que el campo magnético B_{\perp} generado por el entrelazado aleatorio de los filamentos magnéticos (transversal al campo medio $B_L \sim 100$ Gauss) es de aproximadamente 10 Gauss. A partir de este valor de campo magnético se obtiene una velocidad de Alfvén $v_{AL} \sim 2 \times 10^7$ cm/s suponiendo una densidad coronal de $n \sim 10^{10}$ cm⁻³, de donde resulta, tomando $l \sim 3 \times 10^7$ cm, un número de Lundquist del orden de $S \sim 6 \times 10^{11}$. En consecuencia, $v_{SP} \sim 20$ cm/s, con un tiempo característico de reconexión $\tau_{SP} = l/v_{SP} \sim 1.5 \times 10^6$ s. Este tiempo es largo comparado con el tiempo típico de entrelazado de los filamentos magnéticos, que Parker calcula en $\tau_e \sim 2 \times 10^4$ s para un lazo de longitud $L \sim 2 \times 10^{10}$ cm y suponiendo una velocidad característica de entrelazado (mayor que la velocidad de las celdas convectivas) del orden de $u \sim 10$ km/s.

De aquí que debe postular un proceso más rápido de reconexión, que haga factible la disipación de la energía acumulada por el entrelazado de las líneas magnéticas en tiempos comparables con τ_e y de esa manera lograr un estado disipativo estadísticamente estacionario. Con este fin invoca la existencia de una resistividad anómala, teniendo en cuenta que el plasma se encuentra en un estado turbulento y el hecho de que la velocidad de conducción electrónica estimada a partir de la ley de Ampère $v_{diff} \sim cB_{\perp}/4\pi ne\delta \sim 1.6 \times 10^8$ cm/s, es aproximadamente diez veces mayor que la velocidad térmica de los iones.

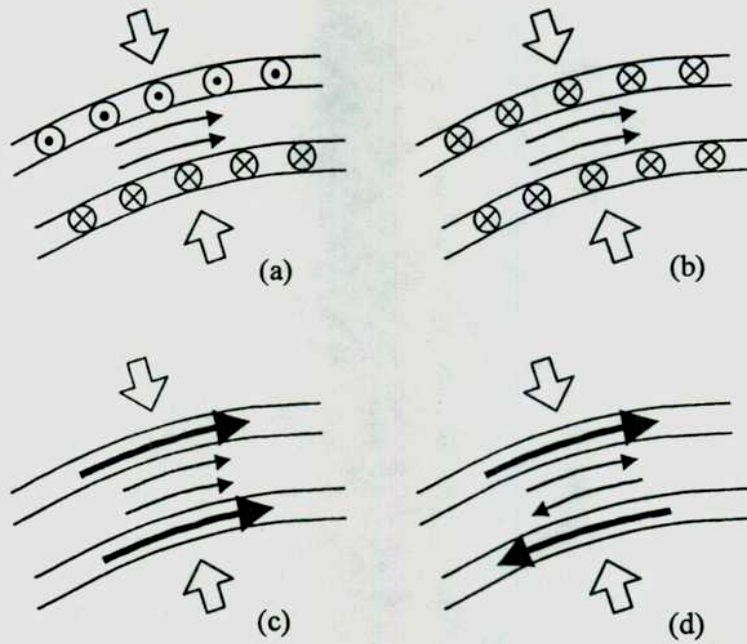


Figura 24. Escenarios de aniquilación magnética dentro de los lazos magnéticos.

La reconexión rápida de los campos magnéticos en las láminas de corriente formadas como consecuencia del retorcimiento y entrelazado de los filamentos, da lugar por lo tanto a una liberación rápida y localizada de energía térmica. Estas explosiones o estallidos, que corresponden a fulguraciones pequeñas de energía $l^3 B_{\perp} / 8\pi \sim 10^{23}$ erg, son denominados "nanoflares" por Parker. En consecuencia, el calentamiento observado en la corona solar, cuya intensidad es del orden de $I \sim 10^7$ erg $\text{cm}^{-2} \text{s}^{-1}$, sería el resultado de un mar de "nanoflares", con la producción del equivalente de aproximadamente un "nanoflare" de 10^{23} erg cada segundo, sobre cada región de área $\sim 10^{16}$ cm^2 .

9.3.3 Calentamiento coronal y fulguraciones en el marco de amplificación y aniquilación magnética.

La turbulencia de líneas magnéticas y la formación de zonas de disipación rápida.

Una consecuencia importante de la idea de Parker acerca de la madeja de líneas magnéticas es la generación de flujos de estancamiento a bajas velocidades, del orden de $u \sim 10$ km/s (mucho menores que la velocidad del sonido $c_s \sim 200$ km/s), como consecuencia del retorcimiento y entrelazado de las líneas de campo magnético que forman el tejido de los lazos coronales (fig. 23b). La presión magnética $B_0^2 / 8\pi$ del

campo magnético medio de los filamentos, que tiene un valor aproximado de $B_0 \sim 100$ Gauss, funciona en este sentido como el agente o forzante de flujos con líneas de estancamiento en las regiones comprendidas entre las fibras de campo magnético.

En la fig. 24 se muestra en forma esquemática varios escenarios de aniquilación magnética que pueden aparecer en el contexto del modelo de Parker (pero no examinados por este autor), correspondientes a pequeñas regiones dentro del "ovillo" de campo magnético como la que aparece en el recuadro de la fig. 23. La línea de estancamiento del flujo es perpendicular al plano del papel. Entre los filamentos de ~ 100 Gauss existe un campo magnético de menor intensidad (por lo menos al comenzar la evolución del lazo), que representa la "semilla" inicial de campo magnético de los modelos estudiados en los capítulos precedentes de la tesis.

En la figs. 24a-24b el campo magnético de los filamentos es normal al plano del flujo de estancamiento. En estos dos casos cabe esperar un decaimiento del campo magnético más intenso, como se vio en la sección 4.5, mientras la "semilla" de campo magnético contenida en el plano del flujo es intensificada. Las figs. 24c-24d muestran en cambio dos casos en los que los filamentos magnéticos se encuentran contenidas en el plano del flujo de estancamiento. El escenario de la fig. 24d, que presenta una capa neutra formada a partir de dos campos magnéticos de sentido opuesto, corresponde al escenario de reconexión vislumbrado por Parker (modelo Sweet-Parker de reconexión).

Por supuesto que los cuatro escenarios mencionados son simplificaciones que corresponden a casos límites. En general, la configuración de campos será de naturaleza tridimensional, con componentes de campo magnético filamentario tanto en el plano del flujo de estancamiento como en la dirección normal al mismo. Ahora bien, la intensificación del campo magnético debido al flujo de estancamiento está limitada en la práctica por el valor asintótico de presión magnético $B_L^2/8\pi$, por lo que el campo magnético amplificado puede alcanzar a lo sumo un valor de $B_L \sim 100$ Gauss. Por otra parte, como ya se señaló en el caso de los escenarios de las figuras 24a-24b, el modelo de aniquilación predice el decaimiento de las componentes normales al flujo. En consecuencia, a partir de una configuración genérica de campos magnéticos en una región pequeña dentro de los lazos coronales, tienden a privilegiarse los escenarios de las figs. 24c-24d. Esto apoya en parte la tesis de Parker, en cuanto a que la

configuración de campos que supone para justificar la liberación de energía térmica en forma de "nanoflares" corresponde a un proceso de reconexión rápida (caso de la fig. 24d).

Sin embargo, a diferencia del modelo de Parker, los resultados de esta tesis muestran que en el caso de los escenarios de las figs. 24c-24d puede haber disipación rápida aún sin reconexión magnética. Durante la primera etapa del proceso de amplificación el campo magnético en la región del flujo de estancamiento crece en forma exponencial con el tiempo (ec. 3.26), hasta alcanzar un valor máximo $B^* \sim 100$ Gauss. Suponiendo que la "semilla" de campo magnético es de aproximadamente 1 Gauss (un orden de magnitud menor que el valor utilizado por Parker), el tiempo de exponenciación es del orden de $\tau^* \sim \ln 100 / \alpha \approx 138$ s, donde $\alpha = u/l \sim 3 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}$. Este tiempo de intensificación, que es mucho menor que el tiempo característico de entrelazado de las líneas $\tau_e \sim 2 \times 10^4$ s calculado por Parker, permite obtener valores muy altos de disipación $J \sim \alpha l^3 B^{*2} / 8\pi \approx 3 \times 10^{23} \text{ erg s}^{-1}$ sin la necesidad de invocar configuraciones ad-hoc de campo magnético, ni procesos de reconexión rápida. En efecto, el caso de la fig. 24c y también las campos magnéticos "semillas" de las figs. 24a-24b, son todos ejemplos de campos monopoles, donde hay disipación intensa pero no hay reconexión. Por lo tanto, con el modelo de aniquilación se obtiene una disipación que es del orden de un "nanoflare" de Parker durante la etapa final del proceso de amplificación.

Aceleración de los procesos disipativos.

Por otra parte, la intensificación de campo magnético es acompañada por una disminución de la presión del plasma en cada punto de los "huecos" que se van llenando con el campo magnético amplificado (ver ec. 5.18). Cabe esperar entonces una caída de la densidad del plasma ("plasma depletion") en estas regiones, por lo que la energía disipada termina distribuyéndose sobre un menor número de partículas. El fenómeno de "plasma depletion" y su influencia sobre la evolución del campo magnético se estudia con más detalle en el capítulo 12. La disipación continua de energía ocasiona asimismo un incremento importante de la temperatura del plasma. El aumento de la temperatura genera una disminución de la resistividad local, cuya dependencia es de la forma $T^{-3/2}$, lo

que puede dar lugar a un "desboque térmico" que acelera aún más el proceso disipativo (ver capítulo 11).

Es interesante observar también que la disminución de densidad en la región disipativa puede facilitar la reconexión magnética que Parker asume en el escenario de la fig24d, e incrementar la disipación de energía en el caso de la fig. 24c, a través del aumento de la velocidad de deriva. La generación de una resistividad anómala requiere que la velocidad de conducción electrónica $v_{\text{drift}} \sim (c/4\pi)B^*/neh^*$, donde $h^* \sim l \exp(a\tau^*) \approx 3$ km es una estimación del ancho la lámina de corriente (ver ec. 3.18), sea mayor que la velocidad térmica de los iones (proporcional a $T^{1/2}$). Una caída de la densidad implica por lo tanto valores mayores de v_{drift} . Los resultados del capítulo 12 indican que la generación de resistividad anómala es factible a pesar del aumento de la temperatura en la región disipativa, por cuanto ese aumento moderado en comparación con la disminución de densidad observada en estos flujos.

Avalanchas.

Las consideraciones precedentes llevan a plantear las posibles consecuencias secundarias de un proceso rápido de reconexión ocurrido en un escenario como el de la fig. 24d. Suponiendo que la reconexión ocurre para valores de campo magnético cercanos a los que postula Parker (1997), es decir del orden de $B \sim 10$ Gauss, se generan chorros de plasma dentro del lazo magnético, con la velocidad de Alfvén correspondiente $v_A \sim 200$ km/s. En consecuencia, un evento explosivo de esta naturaleza puede desencadenar explosiones vecinas en escenarios similares a los ya descritos, pero con una velocidad de flujo mayor que acelera el proceso disipativo. En efecto, si la velocidad es del orden de $v_A \sim 200$ km/s, el tiempo de amplificación exponencial del campo magnético inicial (~ 1 Gauss) se reduce a $\tau^* \sim 7$ s ($a \sim v_A/l \approx 0.67$ s), con una disipación final resultante de $\sim 7 \times 10^{24}$ erg s⁻¹. Lo que se tiene entonces es un escenario en el que un evento explosivo inicial, un "nanoflare" de Parker, genera una avalancha o reacción en cadena de estallidos vecinos con escalas de tiempo más cortas y tasas de disipación mayores.

Revisión del modelo básico.

El escenario básico de interacción entre dos lazos magnéticos (fig. 23a) también se puede rever en el marco de las ideas presentadas aquí, separando el proceso en dos fases. En primer lugar se produce una fase inicial lenta, que corresponde a la intensificación de la "semilla" de campo magnético que forma la lámina de corriente. Esta etapa tiene un tiempo característico de $\tau_h \sim L/U \approx 1000$ s, donde $L \sim 1000$ km es la escala de longitud de la región del flujo de estancamiento y $U \sim 1$ km/s corresponde a la velocidad de las celdas convectivas de la superficie solar (que empujan el campo magnético de los lazos uno contra el otro). Durante la etapa de intensificación la densidad del plasma disminuye, con el consiguiente aumento de la velocidad de deriva electrónica. En consecuencia, la generación de resistividad anómala puede desencadenar una segunda fase explosiva, que corresponde a la fulguración propiamente dicha. La energía magnética acumulada durante la primera etapa de la fulguración, que es del orden de $L^3 B_L^2 / 8\pi \sim 4 \times 10^{26}$ erg ($B_L \sim 100$ Gauss), es liberada en forma explosiva mediante un proceso de reconexión rápida. El tiempo característico de esta segunda fase es del orden del tiempo de Alfvén $L/v_A \sim 0.5$ s, donde $v_A \sim 2000$ km/s. Estos valores de energía y tiempo son similares a los observados experimentalmente en los "Energy Release Fragments" (ERF), que serían los eventos rápidos que componen las fulguraciones solares de escalas más grandes (Machado et al. 1997).

10 Estabilidad de láminas de corriente y reconexión magnética.

Las láminas de corriente formadas a partir de campos magnéticos de sentido opuesto, e.g. la solución de Dawson (6.23), son susceptibles a la generación de inestabilidades resistivas (modos “tearing”) y procesos de reconexión magnética (White, 1983; Forbes & Priest, 1987; Sonnerup, Ip & Phan, 1990). Sin embargo, para configuraciones más generales de campo magnético, como las estudiadas en los capítulos previos, la evolución de la lamina de corriente puede ser muy diferente.

Se ha visto que la formación de una lámina de corriente estacionaria con campos magnéticos opuestos requiere la existencia de una inyección continua de flujo magnético que es perfectamente simétrica desde ambos lados de la configuración (ver capítulo 7). En caso de existir una asimetría en la inyección de flujo magnético, la componente par del campo magnético sostenida por inyección crece rápidamente y domina la solución global en muy poco tiempo (menor que el tiempo de crecimiento de las inestabilidades resistivas). Aún cuando la inyección de flujo magnético se produzca en forma simétrica, una componente inicial de campo magnético par (sin inyección) puede llegar a crecer lo suficiente como para modificar substancialmente la estructura de la lámina de corriente original. Por otra parte, en flujos con un punto de estancamiento tridimensional todas las componentes del campo magnético se aniquilan rápidamente, a menos que sean sostenidas por una inyección continua de energía magnética (ver sección 8.1).

Tomando en cuenta estas consideraciones se puede distinguir entre dos casos al estudiar la estabilidad de láminas de corriente genéricas. Por un lado, se encuentran las configuraciones estacionarias de campo magnético impar sostenidas por una inyección continua y simétrica de flujo magnético. En este capítulo se considera la estabilidad de estas láminas de corriente. Por el otro, están las configuraciones dependientes del tiempo que decaen completamente para $t \rightarrow \infty$, o tienden a soluciones gaussianas estacionarias. En estas soluciones el campo magnético no cambia de signo, por lo que la configuración tiende a ser estable y el concepto de reconexión no resulta aplicable.

10.1 Influencia del movimiento sobre la estabilidad de la lámina de corriente.

En la teoría clásica de los modos resistivos “tearing” se consideran configuraciones estáticas de plasma con una lámina de corriente en equilibrio difusivo (Furth, Killeen & Rosenbluth, 1963). Sin embargo, la presencia de un flujo de plasma puede modificar substancialmente el desarrollo de la inestabilidad. La consideración de configuraciones de equilibrio no estáticas tiene particular interés en aplicaciones astrofísicas, por cuanto se observan en las prominencias solares, la magnetopausa terrestre y en chorros (“jets”) extragalácticos (Ofman et al., 1991). En particular, el estudio de la estabilidad de láminas de corriente sostenidas por un flujo con un punto de estancamiento constituye una variante novedosa dentro de la teoría.

Una teoría de los modos resistivos para la componente B_x del campo magnético, es decir para la lámina de corriente formada a partir del campo magnético contenido en el plano del flujo de punto de estancamiento, todavía no ha sido completamente desarrollada. Esto se debe fundamentalmente a las dificultades teóricas asociadas a la naturaleza intrínsecamente bidimensional del problema perturbativo (Priest (1985) analiza el caso de un flujo no uniforme a largo de la lámina de corriente de la forma $v_0=U_0xe_x$, con $U_0=cte$). En cambio, el problema de la estabilidad lineal de la componente B_z , que no es amplificado por el movimiento (ver ec. 4.2), se puede reducir a una dimensión usando el método de modos normales. En este caso la configuración de equilibrio es una solución exacta de las ecuaciones magnetohidrodinámicas. Esto permite realizar el análisis sin las limitaciones usuales a valores pequeños de la resistividad y viscosidad.

10.1.1 Estabilidad de la lámina de corriente formada por la componente de campo magnético normal al plano del movimiento.

En el trabajo de Phan & Sonnerup (1991) se investiga la estabilidad de una lámina de corriente sostenida por un flujo de estancamiento en el plano normal a la dirección del campo magnético. Agregando a la configuración considerada por estos autores una componente adicional de velocidad paralela al campo magnético, se obtiene una solución *exacta* de equilibrio dada por

$$\mathbf{v}_0 = (ax, -aY, U_0 \operatorname{erf}\{\frac{Y}{\sqrt{2}h_v}\}), \quad \mathbf{B}_0 = (B_T \exp\{-\frac{1}{2}(\frac{Y}{h})^2\}, 0, B_0 \operatorname{erf}\{\frac{Y}{\sqrt{2}h}\}), \quad (10.1)$$

donde a, B_T, B_0, U_0 , son constantes y $h_v=(v/a)^{1/2}$, $h=(v_m/a)^{1/2}$ son las escalas de longitud de las láminas de vorticidad y corriente iniciales. Cabe notar que las dos escalas de longitud no son independientes. Por otra parte, como el equilibrio es exacto se puede analizar la estabilidad para el rango completo de h y h_v .

Expresando la velocidad y el campo magnético como $\mathbf{v}=\mathbf{v}_0+\mathbf{v}_1$ y $\mathbf{B}=\mathbf{B}_0+\mathbf{B}_1$, se consideran perturbaciones de la forma $f_1=f_1(Y)\exp(\lambda t+ik_z z)$. Las ecuaciones magnetohidrodinámicas linealizadas se pueden escribir en términos de las variables v_{1Y} y B_{1Y} , que corresponden a las perturbaciones de la velocidad y del campo magnético normales a la lámina de corriente. Las ecuaciones perturbativas resultantes para $v=v_{1Y}/v_A$ y $B=iB_{1Y}/B_0$, donde $v_A=B_0/(4\pi\rho)^{1/2}$ es la velocidad de Alfvén, son

$$(p - Dy + P_m N)Nv + ikSM_A (WN + W'')v = -kS(\beta N + \beta'')B, \quad (10.2)$$

$$(p + 1 - yD + N)B + ikSM_A WB = kS\beta v, \quad (10.3)$$

donde se han definido las magnitudes adimensionales

$$M_A = \frac{U_0}{v_A}, \quad S = \frac{v_A h}{v_m} = \frac{v_A}{\sqrt{a}v_m}, \quad p = \frac{\lambda}{a}, \quad P_m = \frac{\nu}{v_m}$$

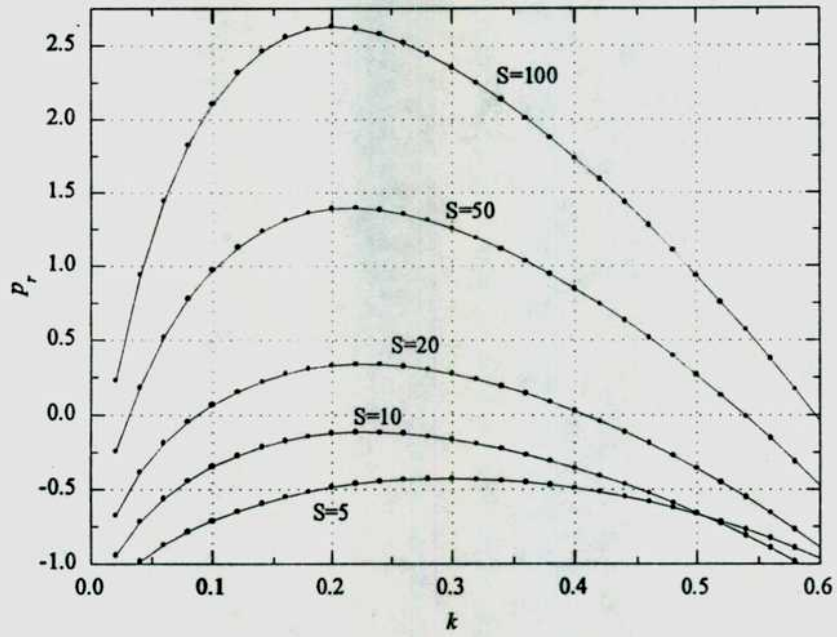
$$k = k_z h = k_z \sqrt{\frac{v_m}{a}}, \quad y = \frac{Y}{h}, \quad \beta = \frac{B_{0z}}{B_0}, \quad W = \frac{v_{0z}}{U_0},$$

y los operadores $D=d/dy$, $N=k^2-D^2$. En (10.2)-10.3) aparecen tres parámetros adimensionales: el número de Lundquist S , un número de Mach-Alfvénico M_A y el número de Prandtl magnético P_m .

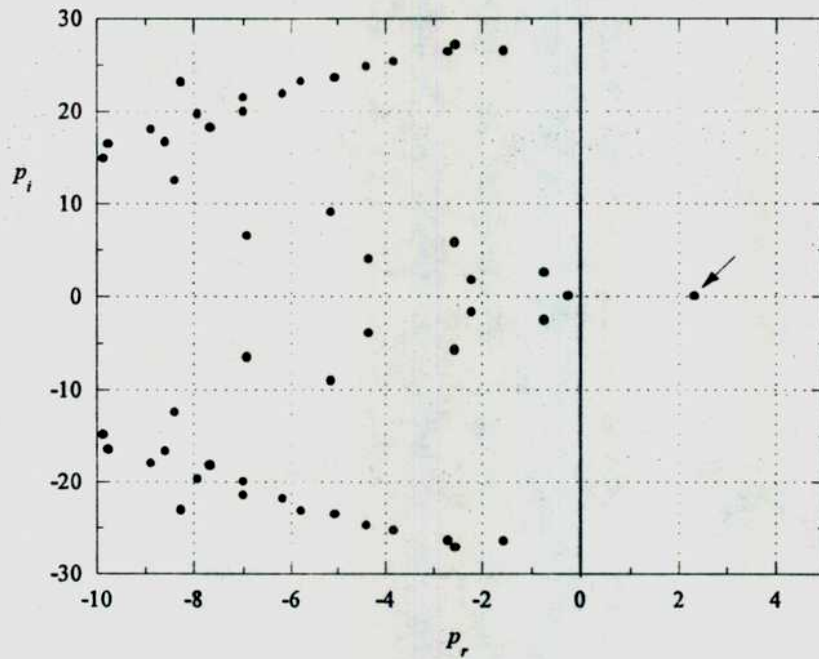
Las ecs. (10.2)-(10.3) definen un problema de autovalores para p que se puede resolver usando un método matricial con diferencias finitas (Drazin & Reid, 1981). Las ecuaciones originales se reemplazan por ecuaciones en diferencias, donde las derivadas se aproximan por desarrollos de Taylor escritos en función de los valores de las variables dependientes sobre una grilla numérica. El resultado final es una ecuación matricial de la forma

$$[A+pB]\phi=0, \quad (10.4)$$

donde A, B son matrices de coeficientes complejos y $\phi=(v_1, v_2, \dots, v_N, B_1, B_2, \dots, B_N)^T$ es un vector formado por los valores de la velocidad y del campo magnético perturbativos



(a)



(b)

Figura 25. (a) Tasas de crecimiento para modos resistivos con $W=0$ (b) Espectro de autovalores para $k=0.3$, $S=100$ y $P_m=10^{-5}$.

en los puntos de la grilla numérica. Los autovalores p y las autofunciones correspondientes se obtienen a partir de (10.4) usando el método QR para matrices. Para más detalles sobre el método numérico se puede consultar el apéndice.

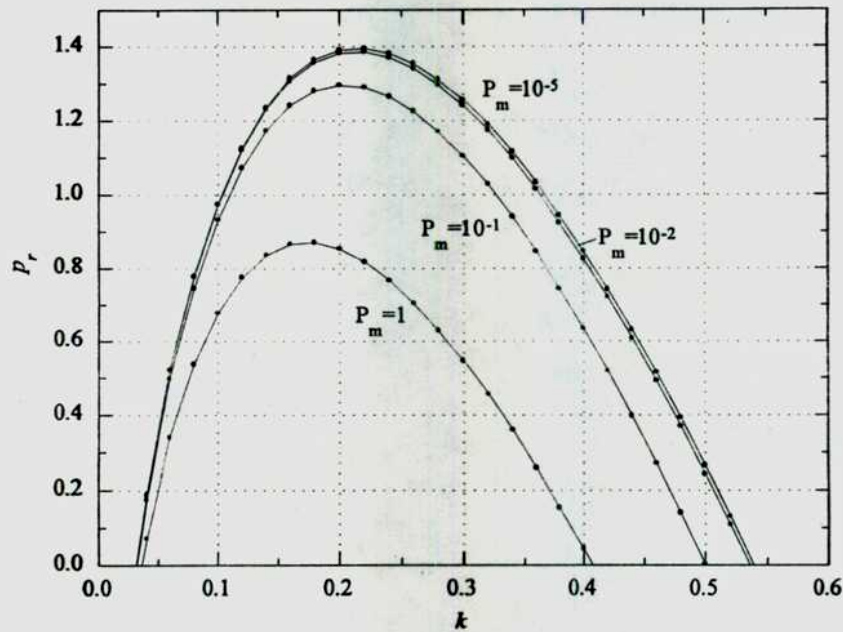


Figura 26. Influencia de la viscosidad en modos resistivos con $S=50$ ($W=0$).

En la fig. 25a se muestran las tasas (máximas) de crecimiento $p_r = \text{Re}(p)$ correspondientes a modos resistivos con $W=0$ ($M_A=0$) como función del número de onda adimensional k , para distintos valores del número de Lundquist S y $P_m=10^{-5}$. Los valores de p_r coinciden en todos los puntos calculados con los de Phan & Sonnerup (1991), que fueron obtenidos usando un método numérico diferente. Las curvas muestran que el flujo de equilibrio $v_0=(aX, -aY)$ tiende eventualmente a estabilizar la lámina de corriente. En efecto, a medida que aumenta su fuerza (valores mayores de a implican un gradiente de presión mayor, pues $\partial p/\partial x \propto a^2$) disminuye el valor de S (al reducirse el ancho de la lámina de corriente $h=(v_m/a)^{1/2}$). Para valores de S menores que el valor crítico $S_c=12.25$, la tasa de crecimiento p_r es siempre negativo y el flujo es estable.

El método numérico utilizado aquí para obtener las tasas de crecimiento también proporciona una aproximación al espectro completo de autovalores. En la fig. 25b se muestran algunos de los autovalores para el caso $k=0.3$, $S=100$ y $P_m=10^{-5}$. La flecha indica el autovalor real correspondiente al modo inestable. Los demás autovalores tienen parte real negativa y corresponden a modos estables con una componente oscilatoria. A diferencia del trabajo de Phan & Sonnerup (1991), donde se buscaban los autovalores

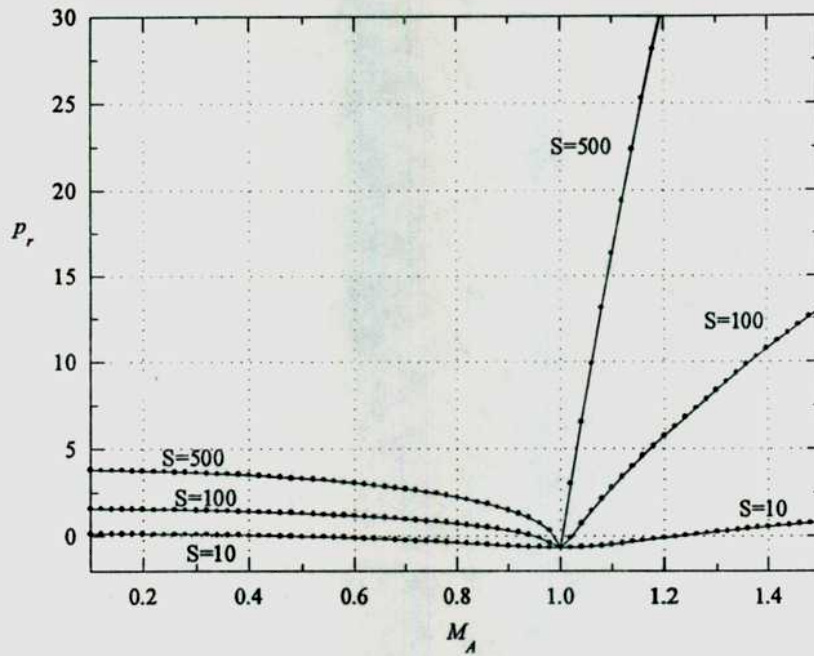


Figura 27. Tasas de crecimiento para modos con $W \neq 0$.

usando un método básicamente de prueba y error, esta forma de obtener los puntos permite garantizar la existencia de un solo modo inestable.

El efecto de la viscosidad sobre las tasas de crecimiento se muestra en la fig. 26, donde se varía el número de Prandtl magnético P_m manteniendo $S=50$ (con $W=0$). La presencia de viscosidad tiende a reducir la tasa de crecimiento de la inestabilidad. Esta es una característica general de los modos resistivos tipo "tearing". En el caso de una lámina de corriente en equilibrio difusivo ($v_0=0$) se puede demostrar que la tasa de crecimiento no es una función de S y P_m por separado, sino que depende únicamente del número de Hartmann $H_a=S/P_m^{1/2}$ con una ley de escala de la forma $p=\lambda h^2/\nu_m \propto H_a^{1/3} \propto \nu^{-1/6}$ (Gratton & Krasnopolsky, 1994).

Cuando $W \neq 0$ ($M_a \neq 0$) el problema presenta mayores complicaciones, ya que pueden existir modos de tipo Kelvin-Helmholtz además de los resistivos. En la fig. 27 se muestran las tasas de crecimiento como función de M_A , para $k=0.4$ y $P_m=1$ ($h_v=h$). Los puntos con $M_A < 1$ corresponden a modos "tearing" que son estabilizados por la presencia del flujo $v_{0z}(y)$. Para $M_A > 1$ se desarrollan inestabilidades de Kelvin-Helmholtz, con tasas de crecimiento mayores que las correspondientes a los modos resistivos. Un estudio más detallado sobre los efectos combinados de la inestabilidad de

Kelvin-Helmholtz y la "tearing" en estas configuraciones, así como la influencia del número de Prandtl magnético P_m , se puede encontrar en Bender, Gratton & Galvão (1996).

10.1.2 Estabilidad de la lámina de corriente formada por la componente de campo magnético contenida en el plano del movimiento.

Existen indicios teóricos y numéricos de que la lámina de corriente formada por la componente B_x es aún más estable que la formada por B_z (Biskamp, 1994). Las ecuaciones perturbativas para un campo magnético $B_x^0=B(y)$ en un flujo irrotacional representado por la función de corriente $\xi_0=axy$ son (Gratton & Krasnopolsky, 1994)

$$(\partial_t - L_v)\nabla^2 \xi_1 = -MB_{1y}, \quad (10.5)$$

$$(\partial_t - L_m)B_{1y} = -aB_{1y} - B\partial_{xx}\xi_1 \quad (10.6)$$

donde $B_{1y} = B_{1y}(x,y,t)$ es la componente del campo magnético perturbativo en la dirección y (la componente de reconexión, normal a B_x^0), $\xi_1 = \xi_1(x,y,t)$ es la perturbación a la función de corriente, $M=(1/4\pi\rho)(B\nabla^2 - B'')$ y $L_{v(m)} = v_{(m)}\nabla^2 - a(x\partial_x - y\partial_y)$. Integrando (10.6) para perturbaciones que se anulan en el infinito se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \frac{B_{1y}^2}{8\pi} dS = -v_m \int |\text{grad } B_{1y}|^2 dS - \int \frac{B_{x0} B_{1y}}{4\pi} \frac{\partial^2 \xi_1}{\partial x^2} dS - a \int \frac{B_{1y}^2}{8\pi} dS, \quad (10.7)$$

donde $dS=dx dy$. Los primeros dos términos a la derecha de (10.7) aparecen también en el caso de una lámina de corriente en equilibrio difusivo ($a=0$). El primero representa el decaimiento de la energía magnética por disipación Joule, mientras que el segundo es el que da origen a la inestabilidad. El tercer término, que aparece solamente cuando existe un flujo de orden cero $\xi_0=axy$, es claramente estabilizante y se debe a que el movimiento tiende a reducir la componente de campo magnético normal a la lámina de corriente (ver sección 3.2).

La estabilidad de la lámina de corriente formada por la componente B_x también se puede analizar considerando un flujo de equilibrio con $\xi^{(0)}=xf_0(y)$ y $\psi^{(0)}=\varphi_0(y)$, donde ψ es la función de flujo magnético, frente a perturbaciones de la forma

$$\xi^{(1)} = xf_1(y)e^{\lambda t}, \quad (10.8)$$

$$\psi^{(1)} = \{\psi_0(y) + \frac{1}{2}x^2\psi_2(y)\}e^{\lambda t}, \quad (10.9)$$

donde $B_{1x} = \partial \psi^{(1)} / \partial y = \psi_0' + (1/2)x^2 \psi_2'$ y $B_{1y} = -\partial \psi^{(1)} / \partial x = x \psi_2$ son las componentes del campo magnético perturbado. Las expresiones (10.8)-(10.9) corresponden a los primeros términos de un desarrollo en potencias de x^n de las funciones de corriente y de flujo magnético perturbativas, donde se supone que el valor de x es pequeño comparado con la longitud de la lámina de corriente y se desprecian los términos de orden superior a x^2 (ver, e.g., Biskamp, 1986). Con éstas hipótesis las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (previamente linealizadas) se separan en

$$(\lambda - f_0 D + f_0' - v D^2) D^2 f_1 + f_0'' D f_1 - f_0''' f_1 = \frac{1}{4\pi\rho} \phi_0' D^2 \psi_2 - \phi_0''' \psi_2, \quad (10.10)$$

$$(\lambda - f_0 D - v_m D^2) \psi_0 = f_1 \phi_0' + 2 \psi_2, \quad (10.11)$$

$$(\lambda - f_0 D + 2f_0' - v_m D^2) \psi_2 = 0, \quad (10.12)$$

donde $\text{Re}(\lambda)$ es la tasa de crecimiento de la perturbación. Como la ecuación para ψ_2 está desacoplada de la restantes se pueden considerar dos casos: i) si $\psi_2 \neq 0$, el autovalor λ está determinado por (10.12) y la solución ψ_2 genera a f_1 y ψ_0 ; ii) si $\psi_2 = 0$, la ec. (10.10) determina el autovalor λ y la solución para f_1 genera a ψ_0 . En un flujo con $f_0 = ay$ ($a = cte$), se puede integrar (10.12) en el primer caso para obtener

$$2 \text{Re}(\lambda) \int |\psi_2|^2 dy = -2v_m \int |D\psi_2|^2 dy - 5a \int |\psi_2|^2 dy. \quad (10.13)$$

Integrando (10.10) en el segundo caso, se obtiene

$$2 \text{Re}(\lambda) \int |\omega_{1z}|^2 dy = -2v \int |D\omega_{1z}|^2 dy - 3a \int |\omega_{1z}|^2 dy, \quad (10.14)$$

donde $\omega_{1z} = -D^2 f_1$ es la vorticidad perturbativa. En ambos casos el flujo es estable (es decir $\text{Re}(\lambda) < 0$) para $a > 0$. Cuando $a < 0$ las expresiones (10.13)-(10.14) no tienen signo definido y el flujo puede ser inestable. En este ejemplo el término que da origen a la inestabilidad en (10.7) es nulo, por ser $\partial^2 \xi^{(1)} / \partial x^2 = 0$ para una perturbación de la forma (10.8). Tomando un mayor número de términos en los desarrollos (10.8)-(10.9) se puede estudiar la estabilidad de estas configuraciones recurriendo a un método numérico para calcular los autovalores.

10.2 Flujos planos dependientes del tiempo: soluciones numéricas.

Un flujo de estancamiento en el plano (x,y) tiende a estabilizar la lámina de corriente, reduciendo la componente de reconexión B_y del campo magnético a la vez que amplifica la componente B_x (ver sección 3.2). Este efecto se opone a la permanencia de configuraciones con reconexión y favorece en cambio la formación de láminas de corriente alargadas de carácter cuasi-unidimensional, como las estudiadas en este trabajo. La consolidación de la lámina de corriente en flujos bidimensionales se puede ilustrar a través de soluciones numéricas obtenidas directamente a partir de las ecuaciones magnetohidrodinámicas con efectos disipativos.

10.2.1 Ecuaciones y condiciones de contorno.

Las ecuaciones correspondientes a un flujo plano incompresible (densidad constante) en dos dimensiones, con viscosidad y resistividad uniformes, son

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \nabla^2\right) \nabla^2 \xi = \frac{1}{4\pi\rho} [\nabla^2 \psi, \psi] - [\nabla^2 \xi, \xi], \quad (10.15)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu_m \nabla^2\right) \psi = [\xi, \psi], \quad (10.16)$$

$$\omega = -\nabla^2 \xi, \quad (10.17)$$

donde $\xi(x,y,t)$ es la función de corriente, $\psi(x,y,t)$ es la función de flujo magnético, $\omega(x,y,t)$ es la vorticidad y $[f,g] = \partial_x f \partial_y g - \partial_x g \partial_y f$ (ver capítulo 2). Estas ecuaciones se resuelven numéricamente en una región rectangular del plano comprendida entre $0 \leq x \leq L$ y $-h \leq y \leq h$. En las fronteras $y = \pm h$ se inyecta plasma y flujo magnético al sistema en forma continua. Las ecs. (10-15)-(10.17) se pueden escribir en términos de magnitudes adimensionales definiendo nuevas variables de la forma $t \rightarrow t v_A/h$, $y \rightarrow y/h$, $x \rightarrow x/h$, $\psi \rightarrow \psi/B_0 h$ y $\xi \rightarrow \xi/v_A h$, donde $v_A = B_0/(4\pi\rho)^{1/2}$ es la velocidad de Alfvén en el punto $(x,y) = (0,h)$. Los parámetros adimensionales que aparecen en las ecuaciones sin dimensiones son el número de Reynolds $S_v = v_A h/\nu$ y el número de Lundquist $S = v_A h/\nu_m$.

Las distribuciones iniciales de velocidad y de campo magnético, expresadas en las variables adimensionales, están dadas por

$$\xi_0(x, y) = M_A x \left(\frac{U-1}{2} y^3 + \frac{3-U}{2} y \right), \quad (10.18)$$

$$\psi_0(x, y) = \frac{1}{2} y^2 - \frac{a}{2} x^2 (1 - by^2), \quad (10.19)$$

donde a, b son constantes arbitrarias y $M_A = |v_y(y=h)|/v_A$ es el número de Mach-Alfvénico calculado en $y=\pm h$ ($y=\pm 1$ en variables adimensionales). La función de corriente inicial (10.18) representa un flujo estacionario con un punto de estancamiento en el origen donde el plasma ingresa con una velocidad normal $v_y = -M_A$ en $y=1$. El caso con $U=1$ corresponde a un flujo irrotacional estacionario (ec. 3.7). Variando las constantes a, b en (10.19) se obtienen distintas configuraciones iniciales de campo magnético, desde un perfil lineal sin reconexión ($a=0$) hasta una distribución potencial con un punto neutro de tipo hiperbólico en el origen ($a=1, b=0$). Las configuraciones iniciales con $b=1$ corresponden a campos magnéticos reconectados donde $B_y=0$ en $y=\pm 1$.

Las condiciones de contorno aplicadas en la frontera $y=\pm 1$ son

$$\begin{aligned} \xi(x, y = \pm 1, t) &= \xi_0(x, y = \pm 1), \\ \partial_y \xi(x, y = \pm 1, t) &= M_A U x, \\ \psi(x, y = \pm 1, t) &= \psi_0(x, y = \pm 1) - E_{\pm} t, \end{aligned} \quad (10.20)$$

donde E_{\pm} representa aproximadamente el valor del campo eléctrico (adimensionalizado) en los contornos ($\partial_t \psi \approx -E_{\pm}$ en $y=\pm 1$ cuando $U=0$). El caso con $E=0$ corresponde a un sistema sin inyección de flujo magnético. En la frontera de flujo saliente $x=x_s$, se usaron las condiciones de contorno

$$\begin{aligned} \xi(x_s, y, t) &= \xi_0(x_s, y), \\ \partial_{xx} \xi(x_s, y, t) &= 0, \\ \partial_{xx} \psi(x_s, y, t) &= 0. \end{aligned} \quad (10.21)$$

Las soluciones numéricas se obtuvieron resolviendo el problema de valores iniciales con un esquema de diferencias finitas de tipo implícito. En los cálculos se usaron hasta 257×257 puntos sobre una grilla numérica cartesiana, generalmente con $\Delta x = 2\Delta y$. El esquema numérico, incluyendo las condiciones de contorno (10.20)-(10.21), se probó mediante una serie de corridas para configuraciones con un campo magnético formado por líneas rectas en un flujo irrotacional ($B_y=0$). Se obtuvieron soluciones correspondientes a sistemas sin inyección de flujo magnético y con inyección continua a

una tasa constante. Las soluciones calculadas a partir de las ecuaciones (10.15)-(10.17) coincidieron en todas las pruebas realizadas con las predicciones teóricas y numéricas de los capítulos anteriores. El método de discretización y la solución del sistema de ecuaciones no lineales resultante se discute con más detalle en el apéndice.

10.2.2 Consolidación de la lámina de corriente.

La fig. 28 muestra la evolución de una configuración con un campo magnético inicialmente reconectado ($a=0.1$ y $b=1$ en 10.18), en un flujo rotacional con $U=0$, $S_v=1000$, $S=500$ y $M_A=0.2$ ($R_m=SM_A=100$). En este ejemplo la función de flujo magnético satisface la condición de contorno $\partial\psi/\partial x=0$ sobre las fronteras ubicadas en $y=\pm 1$. Por lo tanto, el campo magnético que ingresa en forma continua a la región tiene solamente una componente B_x . Los gráficos sucesivos muestran la evolución de la configuración para tiempos sucesivos a partir de $t=0$. Se observa claramente como la componente B_y del campo magnético inicial es reducida y expulsada por el flujo, formándose una lámina de corriente alargada de carácter cuasi-unidimensional que termina por abarcar la región del cálculo en poco tiempo. Cabe observar que la tensión magnética del campo magnético reconectado favorece este proceso para valores pequeños de M_A , ya que tiende a acelerar la expulsión de la componente reconectada mientras se desarrolla la lámina de corriente a partir de la componente B_x amplificadas. La configuración final (ver la figura para $t=6$) corresponde en forma muy aproximada a una lámina de corriente unidimensional plana, como las descritas en esta tesis.

En cambio, si el campo magnético que ingresa a la región del flujo tiene una componente adicional B_y ($\partial\psi/\partial x \neq 0$ en $y=\pm 1$) también se observa la formación de una lámina de corriente de carácter cuasi-unidimensional, pero cuya longitud depende ahora de los valores de S y M_A . Este tipo de configuraciones se muestran en las figs. 29-32, donde se grafican soluciones (aproximadamente) estacionarias correspondientes a flujos con $U=0$ y $S_v=2000$, obtenidas a partir de una distribución inicial de campo magnético dada por $\psi_0=(1/2)(y^2-x^2)$. Las figs. 29-30 corresponden a dos soluciones con el mismo valor de $R_m=SM_A=100$, pero con valores diferentes de S y M_A . En ambos casos se

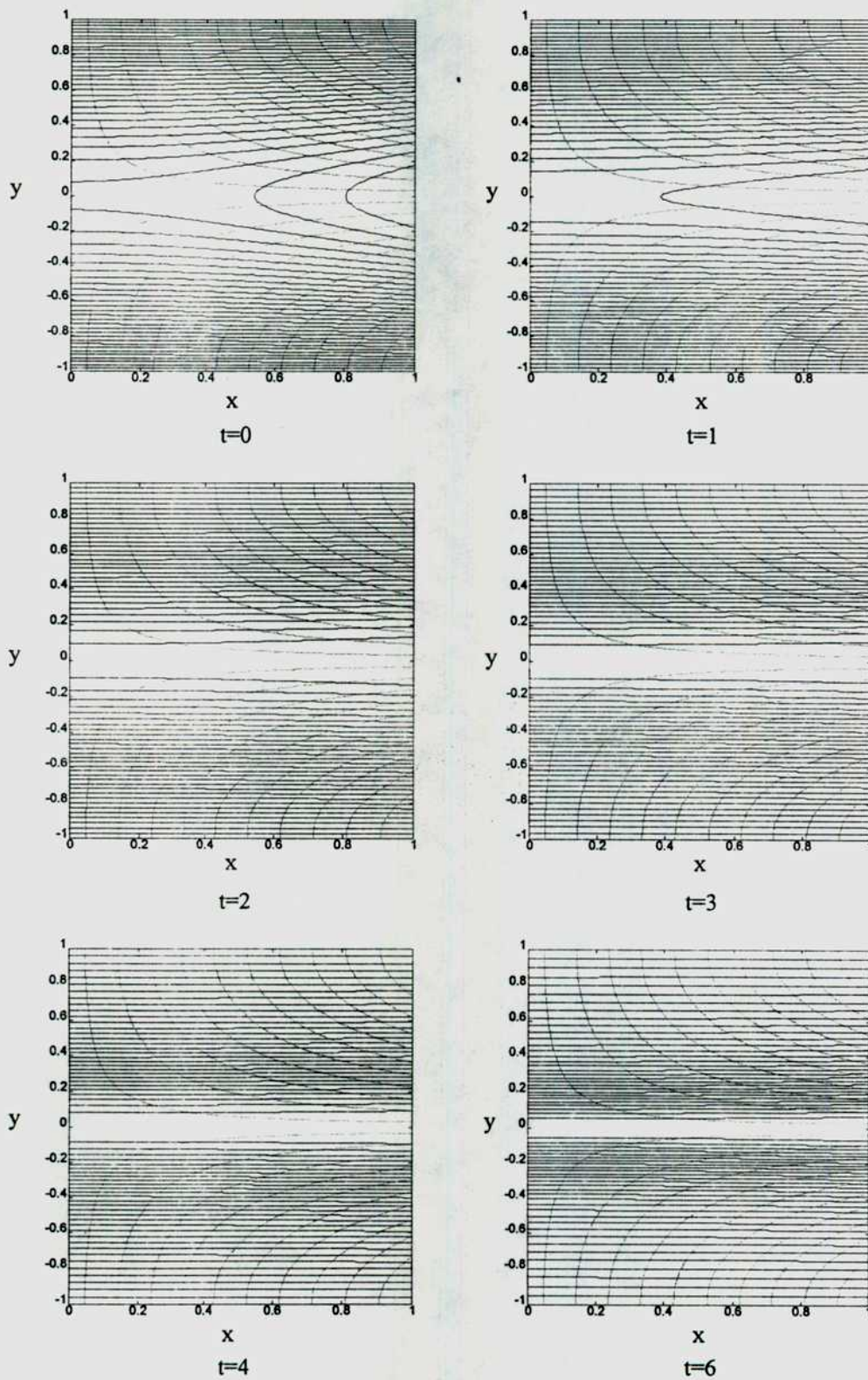


Figura 28. Consolidación de la lámina de corriente ($M_A=0.2$, $S=500$). Líneas de corriente (punteadas) y de campo magnético (continuas).

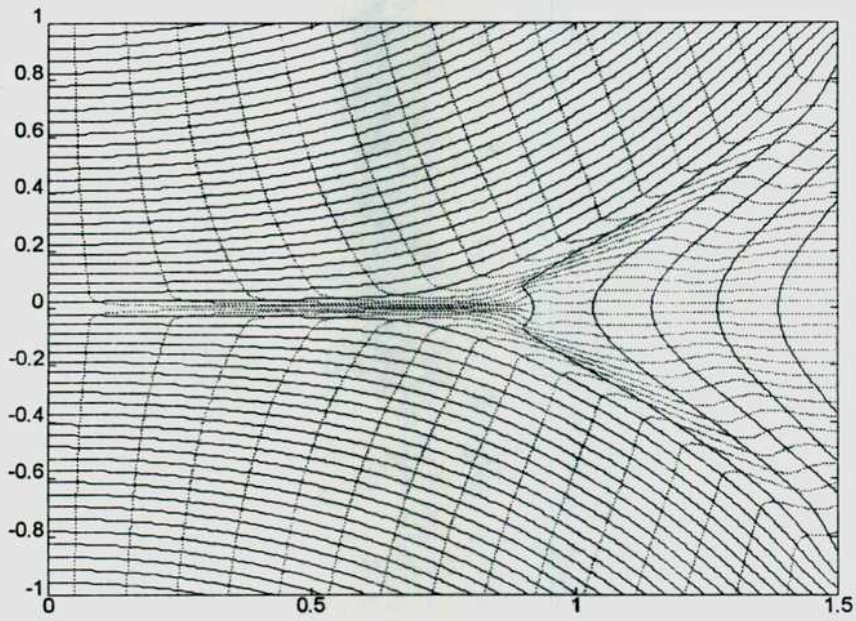


Figura 29. Líneas de corriente (punteadas) y de campo magnético (continuas) en un flujo con $M_A=0.05$ y $S=2000$ ($R_m=100$)

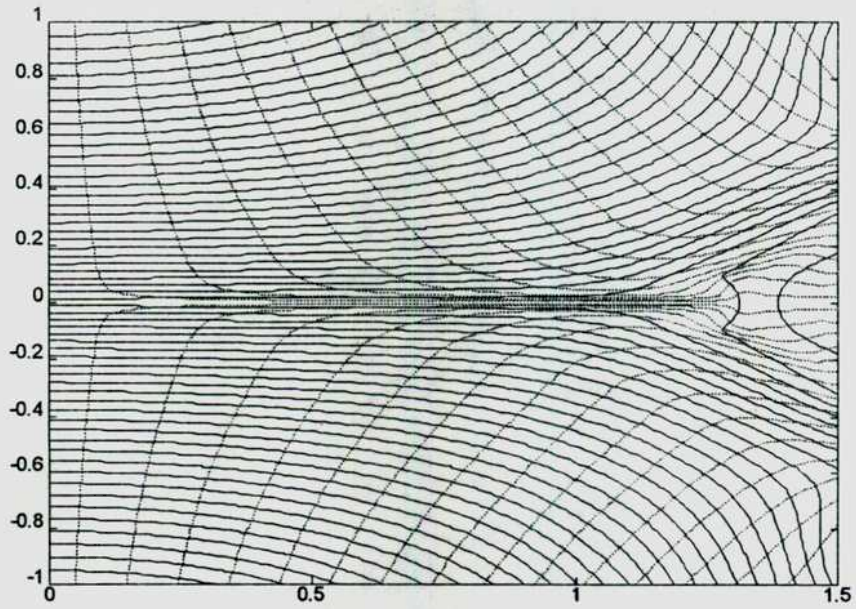


Figura 30. Líneas de corriente (punteadas) y de campo magnético (continuas) en un flujo con $M_A=0.1$ y $S=1000$ ($R_m=100$).

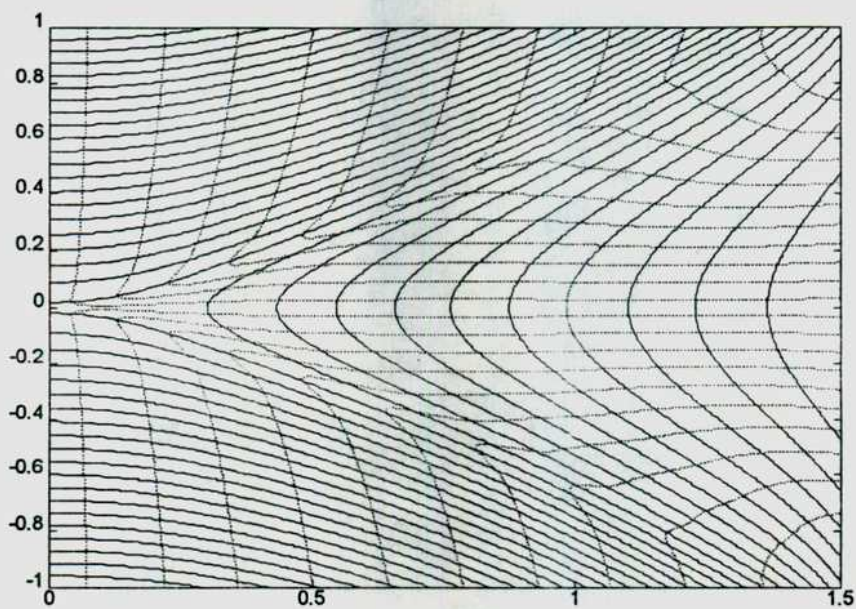


Figura 31. Líneas de corriente (punteadas) y de campo magnético (continuas) en un flujo con $M_A=0.02$ y $S=2000$ ($R_m=40$).

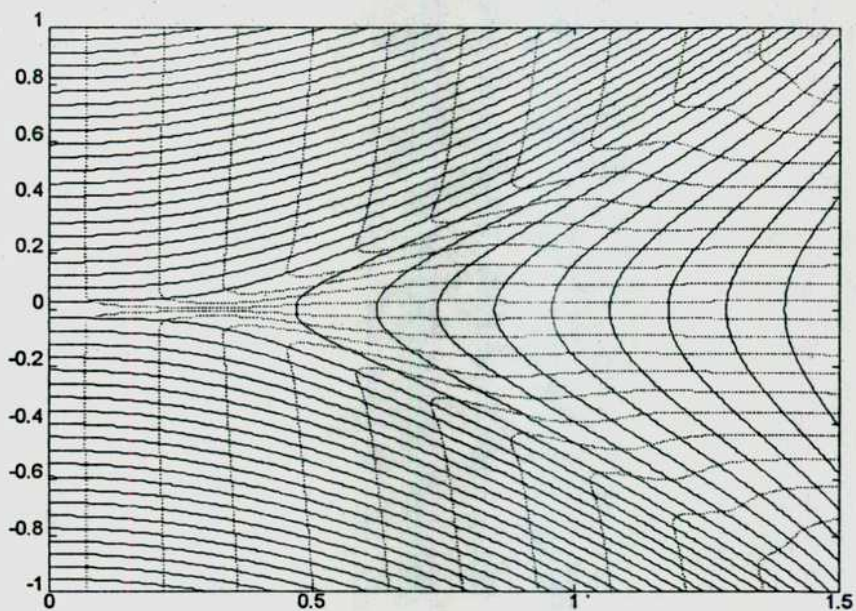


Figura 32. Líneas de corriente (punteadas) y de campo magnético (continuas) en un flujo con $M_A=0.05$ y $S=1000$ ($R_m=50$).

observa la formación de una lámina de corriente cuasi-unidimensional, que presenta además una compleja región de transición en el extremo donde el chorro de plasma que se desarrolla dentro de la región disipativa es abruptamente desacelerado (Biskamp (1994) discute estas regiones con cierto detalle a partir de simulaciones numéricas de configuraciones similares realizadas por él mismo). Para valores menores de R_m se obtienen soluciones como las que se muestran en las figs. 31-32, en las que se forma una región disipativa relativamente pequeña. En flujos con valores bajos del número de Reynolds magnético hay poca intensificación de la componente B_x del campo magnético, por lo que la configuración inicialmente reconectada casi no se modifica.

La influencia del número de Mach-Alfvénico M_A se puede apreciar comparando las figs. 29 y 31, donde se grafican dos soluciones con $S=2000$ pero con distintos valores de M_A . Asimismo, las soluciones de las figs. 30 y 32 corresponden a un valor de $S=1000$. En los dos casos la longitud de la lámina de corriente es mayor para valores más grandes de M_A . La influencia del número de Lundquist se muestra en las figs. 29 y 32, que corresponden a dos soluciones con el mismo valor de $M_A=0.05$. En todos estos ejemplos se observa que la longitud de la región disipativa final es mayor en la medida que son mayores M_A y S . Esto equivale a tener valores más grandes de R_m , con lo cual hay una mayor intensificación de la componente B_x que favorece la consolidación de la lámina de corriente.

En las simulaciones numéricas de reconexión llevadas a cabo por Biskamp (1986) siempre se observa la formación de una lámina de corriente cuasi-unidimensional cuya longitud crece con M_A y S . Cuando la lámina de corriente es lo suficientemente larga y delgada (valores grandes de M_A y S) pueden darse además inestabilidades "tearing", generándose islas magnéticas dentro de la lámina de corriente que luego son expulsadas por el chorro de plasma. Basándose en sus resultados numéricos Biskamp hace una importante crítica al modelo de reconexión rápida de Petscheck (Biskamp, 1994). La tendencia a formar láminas de corriente también se observa en las simulaciones numéricas de flujos compresibles realizadas por Jin & Ip (1991). Para ciertos rangos de valores de los parámetros estos autores obtienen una reconexión de tipo intermitente, seguida por la formación de una nueva lámina de corriente. El trabajo de Yan, Lee & Priest (1992) muestra la formación de una lámina de

corriente en simulaciones con resistividad uniforme. Los autores inducen la reconexión de las líneas magnéticas a partir de una hipótesis ad-hoc: una resistividad anómala (no uniforme) en la región cercana al punto de estancamiento.

10.3 Comparación con el modelo de Sweet y Parker.

El modelo de Sweet y Parker (Sweet, 1958; Parker, 1963) se aplica a configuraciones de reconexión magnética estacionaria, pero incluye la disipación de flujo magnético en una lámina de corriente plana sin reconexión como caso límite (aniquilación del campo magnético). La configuración básica se muestra en la fig. 34a. El movimiento del plasma arrastra las líneas del campo magnético B_i que ingresa a la región de difusión (de ancho δ^* y largo L) con una velocidad v_i . La reconexión, que es el motor del flujo, se produce en el punto de estancamiento, donde $B=0$ y $v=0$. El plasma que lleva el campo magnético reconectado B_o sale de la región de difusión con una velocidad v_o . La conservación de masa implica que

$$v_i L \approx v_o \delta \quad (10.22)$$

Por otra parte, de la ecuación de Bernoulli

$$p_i + \frac{B_i^2}{8\pi} + \frac{1}{2} \rho v_i^2 \approx p_N \approx p_o + \frac{B_o^2}{8\pi} + \frac{1}{2} \rho v_o^2, \quad (10.23)$$

donde p_N es la presión en el punto de estancamiento, y suponiendo que la presión de entrada p_i es aproximadamente igual a la presión de salida p_o , se obtiene $v_o^2 \approx B_i^2 / (4\pi\rho) = v_{Ai}^2$ (donde se ha supuesto $(B_o/B_i)^2 \ll 1$ y $(v_i/v_o)^2 \ll 1$). Por otra parte, como la configuración se supone estacionaria la velocidad con que ingresa flujo magnético a la región de difusión es aproximadamente igual a la velocidad de difusión:

$$v_i \approx \frac{v_m}{\delta^*} \quad (10.24)$$

Combinando las ecs. (10.22)-(10.24) se obtiene que $(\delta^*/L) \approx S_i^{-1/2} \approx v_i/v_{Ai}$, donde $v_{Ai} = B_i / (4\pi\rho)$ es la velocidad de Alfvén calculada con el campo magnético externo B_i y $S_i = v_{Ai} L / v_m$ es el número de Lundquist correspondiente. Se acostumbra usar el número de Mach Alfvénico $M_{Ai} = v_i / v_{Ai}$ para medir la velocidad de reconexión, que en este modelo tiene un valor máximo dado por $M_{Ai} \approx S_i^{-1/2}$. En configuraciones estacionarias (donde el campo eléctrico E es constante) el flujo de energía magnética que ingresa a la

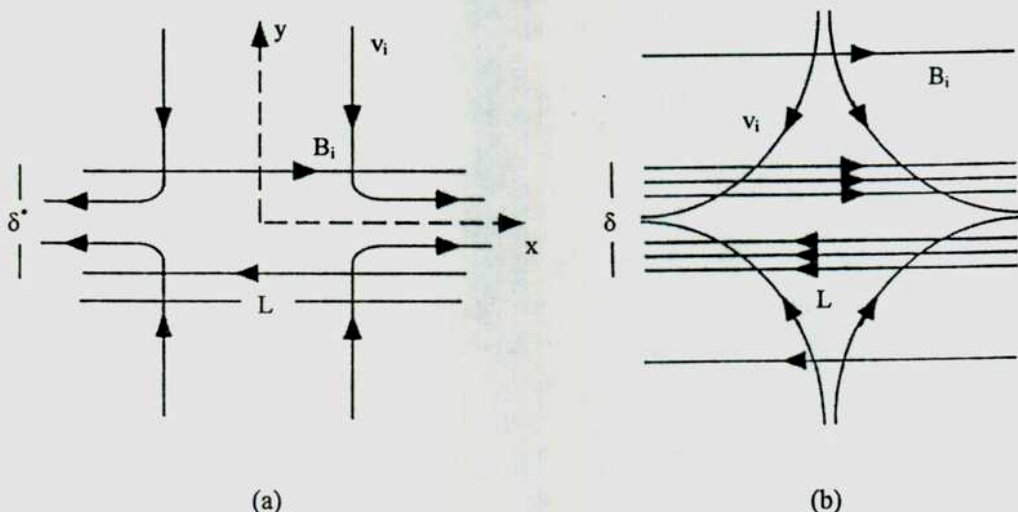


Figura 33. (a) Modelo de Sweet y Parker; (b) Lámina de corriente sostenida por un flujo de estancamiento (aniquilación magnética).

región de difusión EB_i es mayor que el flujo de energía saliente EB_o , dado que B_o es menor que B_i . Una parte de esta energía es convertida en calor y la otra en energía cinética ($v_o > v_i$).

Las leyes de escala de los modelos de aniquilación magnética descritas en esta tesis difieren de las correspondientes al modelo de Sweet y Parker por dos motivos importantes: i) la presencia de un movimiento impuesto en forma externa y ii) la intensificación del campo magnético en la lámina de corriente. En la fig. 34b se muestra en forma esquemática la configuración para el caso de un flujo plano. La lámina de corriente, que se supone de ancho δ y largo L , es sostenida por un flujo irrotacional en el que $v_i \approx v_o$. A partir de los resultados de la sección 3.2 y suponiendo $L \approx h$, se obtiene $\delta/L \approx R_m^{-1/2}$ ($R_m = v_i L / \nu_m$). El campo magnético externo B_i es amplificado por el flujo de estancamiento hasta alcanzar un valor $B_M \approx B_i R_m^{1/2}$ en $y = \delta$. Como la configuración se supone estacionaria, el ingreso de flujo magnético $v_i B_i$ en $y = L$ debe balancearse con la disipación $\nu_m B_M / \delta$ dentro de la lámina de corriente. En consecuencia, la velocidad de reconexión $M_{Ai} = v_i / v_{Ai}$ puede alcanzar en principio cualquier valor, pero está limitada en la práctica por la presión dinámica disponible externamente para mantener el flujo (ver, por ejemplo, la discusión de la sección 9.3 relativo a la generación de fulguraciones solares). Por último, como $R_m = M_{Ai} S_i$ se tiene $\delta/\delta^* = M_{Ai}^{-1/2}$.

11 Evolución térmica de la lámina de corriente.

11.1 Efectos no lineales de la temperatura en la evolución de la lámina de corriente.

La disipación generada durante la evolución del campo magnético, que alcanza valores muy elevados cuando el número de Reynolds magnético R_m es grande (ver capítulo 9), puede dar lugar a un aumento importante de la temperatura en la lámina de corriente. En estos casos se produce un acoplamiento no lineal entre la temperatura y el campo magnético a través de la difusividad magnética, que tiene una dependencia con la temperatura de la forma $\nu_m \propto T^{-3/2}$.

El estudio detallado de este complejo proceso, incluyendo los efectos de la compresibilidad, viscosidad, anisotropía de los coeficientes disipativos y otros factores físicos relevantes, implica un esfuerzo computacional considerable en dos dimensiones y el tiempo. Como una primera aproximación al problema se propone un modelo simplificado de carácter unidimensional que mantiene la hipótesis de incompresibilidad (Bender & Gratton, 1994). En esta aproximación la ecuación de movimiento admite soluciones irrotacionales para el flujo. El acoplamiento entre la temperatura y el campo magnético se realiza, tal como se obtiene a partir de la teoría de procesos de transportes en plasmas, a través de una dependencia con la temperatura de la difusividad magnética

$$\nu_m = \nu_{m0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-3/2}, \quad (11.1)$$

la conductividad térmica

$$\lambda_{\parallel} = \lambda_{\parallel 0} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{5/2}, \quad \lambda_{\perp} = \lambda_{\perp 0} \left(\frac{B}{B_0} \right)^{-2} \left(\frac{T}{T_0} \right)^{-1/2}, \quad (11.2)$$

y la disipación Joule (en la ecuación de energía).

Las ecuaciones no lineales que resultan del modelo incompresible se resuelven numéricamente para determinar la influencia de los parámetros que rigen la evolución del sistema. Bajo ciertas condiciones se puede originar un “desboque térmico” de la región disipativa, ya que el valor local de R_m crece al aumentar la temperatura del plasma (porque disminuye ν_m). Como consecuencia el ancho δ de la lámina de corriente

(proporcional a $R_m^{-1/2}$) se reduce al mismo tiempo que sigue intensificándose el campo magnético ($B \sim R_m^{1/2}$), generando a su vez una mayor disipación y un aumento adicional de la temperatura en la región.

11.2 Ecuaciones del modelo incompresible.

Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica (2.1)-(2.7) correspondientes a un flujo incompresible, incluyendo una dependencia con la temperatura de la viscosidad $\nu(T)$, difusividad magnética $\nu_m(T)$ y conductividad térmica $\lambda(T, B)$, se pueden escribir de la forma

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \omega \times \mathbf{v} = -\text{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{v^2}{2}\right) + \frac{1}{4\pi\rho} \text{rot } \mathbf{B} \times \mathbf{B} + 2\text{div}(\nu \text{grad } \mathbf{v}), \quad (11.3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + \text{div}(\nu_m \text{grad } \mathbf{B}), \quad (11.4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \text{grad}\right) 3nkT = \text{div}(\lambda \text{grad } T) + \frac{\nu_m}{4\pi} (\text{rot } \mathbf{B})^2, \quad (11.5)$$

donde n es la densidad (constante) de número de partículas, $\rho = mn$, ω es la vorticidad y k es la constante de Boltzmann. En (11.5) no aparece el término correspondiente a la disipación viscosa $2\rho\nu(\text{grad } \mathbf{v})^2$, que se supone despreciable frente al efecto de la disipación Joule. Este sistema de ecuaciones se satisface en forma exacta para flujos irrotacionales planos y radialmente convergentes, definidos en coordenadas cartesianas y cilíndricas por:

plano: $v_x = ax, v_y = -ay$ $B_x = B(y, t), B_y = B_z = 0,$ $T = T(y, t),$	cilíndrico: $v_z = 2az, v_r = -ar,$ $B_z = B(y, t), B_r = B_\phi = 0,$ $T = T(r, t).$
---	---

(11.6)

Con estas suposiciones se obtienen las ecuaciones

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{\zeta^s} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\nu_{m0} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-3/2} \zeta^s \frac{\partial B}{\partial \zeta} \right) + a\zeta \frac{\partial B}{\partial \zeta} + (s+1)aB, \quad (11.7)$$

$$3n \frac{\partial(kT)}{\partial t} = \frac{1}{\zeta^s} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\lambda(T, B) \zeta^s \frac{\partial(kT)}{\partial \zeta} \right) + 3na\zeta \frac{\partial(kT)}{\partial \zeta} + \frac{\nu_{m0}}{4\pi} \left(\frac{T}{T_0}\right)^{-3/2} \left(\frac{\partial B}{\partial \zeta}\right)^2, \quad (11.8)$$

donde $s=0$ corresponde a un flujo plano ($\zeta=y$) y $s=1$ al caso cilíndrico ($\zeta=r$). La conductividad eléctrica en (11.7) tiene una dependencia con la temperatura de la forma $(T/T_0)^{3/2}$, donde T_0 es la temperatura inicial (uniforme) del plasma. En este modelo la conducción térmica se produce en dirección perpendicular a las líneas de campo magnético, pues $\partial T/\partial x=0$ ($\partial T/\partial z=0$ para $s=1$). La conductividad térmica perpendicular λ_{\perp} corresponde a la de Braginskii (1965) en el límite de campos magnéticos intensos, mientras que λ_{\parallel} es la conductividad térmica isotrópica ($B=0$).

El problema de valores iniciales se resuelve en un intervalo finito $-h_0 \leq y \leq h_0$ ($0 \leq r \leq h_0$ para $s=1$) donde a $t=0$ existe una distribución de campo magnético $B(y,0)$. Si no hay inyección de flujo magnético la distancia h_0 corresponde a la escala de longitud del campo magnético inicial. Cuando existe inyección continua de flujo magnético (traído por el movimiento del plasma) el valor de la tasa a la cual ingresa flujo magnético $v_y B$ determina la escala h_0 . Esto es equivalente a fijar el valor de la velocidad $v_y = ah_0$ y del campo magnético B_0 en $y=h_0$, que es la forma en que se procede para el cálculo numérico de las soluciones.

11.3 Parámetros adimensionales.

Los parámetros adimensionales que gobiernan las soluciones son: el número de Reynolds magnético $R_m = ah_0^2 / \nu_{m0}$, el número de Péclet $P_e = ah_0^2 / \kappa_0$ (donde $\kappa_0 = \lambda_{\parallel 0} / 3n$ es la difusividad térmica isotrópica), el cociente de la conductividad térmica isotrópica y perpendicular $\gamma = \lambda_{\parallel 0} / \lambda_{\perp 0}$, y el cociente de las energías magnética y térmica iniciales $\epsilon = (B_0^2 / 8\pi) / (3nkT_0)$.

El espesor de la lámina de corriente y la intensificación del campo magnético inicial dependen de R_m ($B_{\max} \propto R_m^{1/2}$ para $s=0$, $B_{\max} \propto R_m$ para $s=1$). Solamente para valores grandes de R_m se puede obtener un calentamiento importante de la región disipativa. El efecto de la difusión térmica en la región externa (donde $B \approx 0$) está representado por P_e , mientras que el aumento de la temperatura dentro de la lámina de corriente depende del valor de γ (o más precisamente de $P_e \gamma$). Este parámetro mide la influencia del campo magnético sobre la conductividad térmica. Cuando γ es grande el campo magnético tiende a reducir el valor local de la conductividad térmica, evitando la

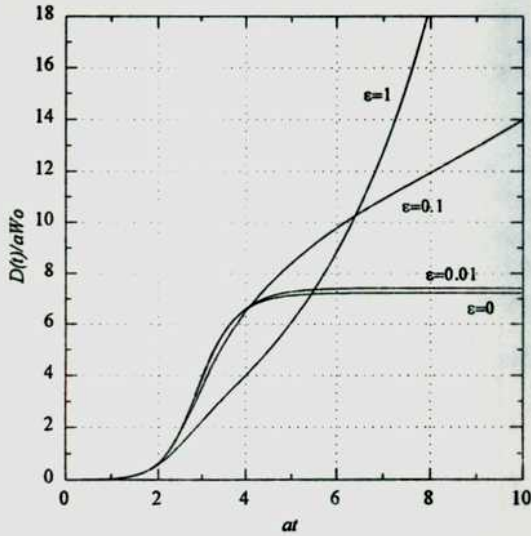


Figura 34. Soluciones pares con $R_m=1000$, $P_e=0.01$ y $\gamma=100$.

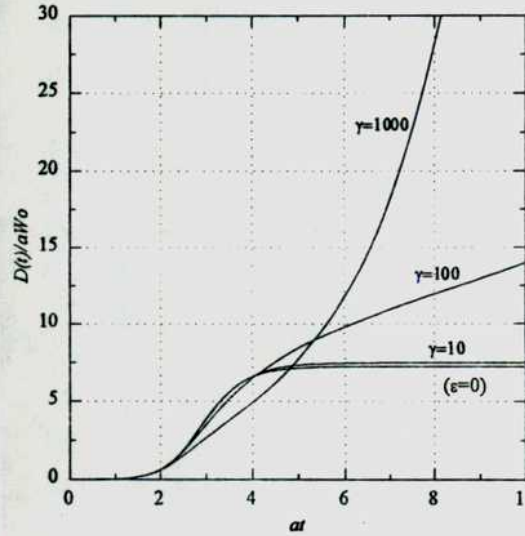


Figura 35. Soluciones pares con $R_m=1000$, $P_e=0.01$ y $\epsilon=0.1$.

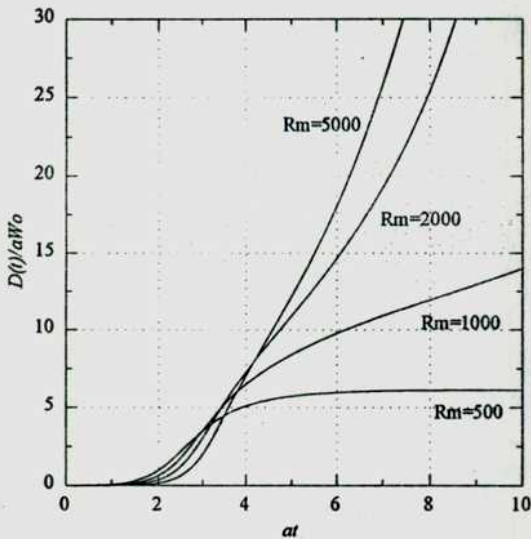


Figura 36. Soluciones pares con $P_e=0.01$, $\gamma=100$ y $\epsilon=0.1$.

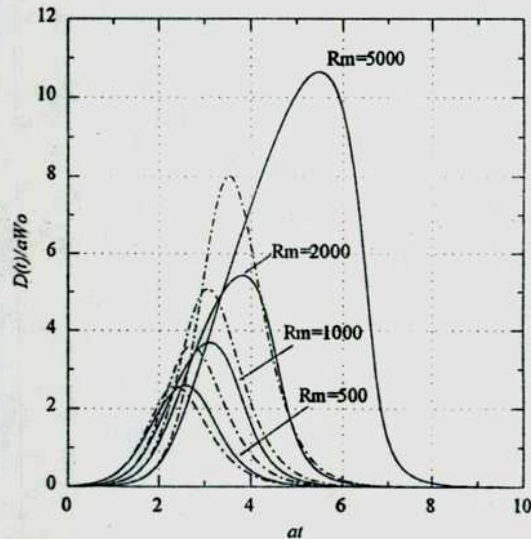


Figura 37. Soluciones impares con $P_e=0.01$, $\gamma=100$ y $\epsilon=0.1$.

pérdida de calor por difusión dentro de la región disipativa. La evolución térmica de la lámina de corriente también depende de la energía magnética disponible inicialmente para ser convertida en calor, representado por el parámetro ϵ . Cuando $\epsilon \gg 1$, $R_m \gg 1$ y $P_e \gamma \gg 1$ las soluciones se vuelven muy sensibles al efecto térmico. Por el contrario, para valores pequeños de estos parámetros se obtienen soluciones estacionarias.

Otros factores que determinan la evolución temporal de las soluciones son la paridad del campo magnético inicial (par o impar), la geometría de la configuración y la presencia o ausencia de inyección de flujo magnético.

11.4 Soluciones numéricas: algunos ejemplos.

Las soluciones numéricas se obtuvieron integrando las ecs. (11.7)-(11.8) usando un esquema de diferencias finitas de segundo orden que se describe en el Apéndice. Las corridas numéricas se llevaron a cabo hasta alcanzar un estado estacionario, en caso de existir, o bien hasta que la grilla numérica fuera incapaz de resolver la delgada lámina de corriente originada como consecuencia del efecto de acoplamiento térmico.

11.4.1 Evolución de la disipación sin inyección de flujo magnético.

En las figs. 34-37 se muestra la disipación Joule total (por unidad de área y de tiempo) $D(t) = (\nu_{m0}/4\pi) \int_{-h}^h (T/T_0)^{-3/2} (dB/dy)^2$, medida en unidades de αW_0 con $W_0 = B_0^2/8\pi$, para soluciones planas ($s=0$) sin inyección de flujo magnético. Las figs. 34-36 corresponden a soluciones con un campo magnético de tipo par, con $B(y,0) = B_0 \cos((\pi/2)y/h_0)$.

La influencia del parámetro ϵ se muestra en las curvas de la fig. 34, donde se mantienen fijos los otros parámetros: $P_\epsilon = 0.01$, $\gamma = 100$ y $R_m = 1000$. Cuando $\epsilon = 0$ el campo magnético alcanza el estado estacionario disipativo representado por la gaussiana (4.16). Esta solución corresponde al caso sin efectos térmicos con $T = T_0 = cte$ (ver capítulo 4). Tomando $\epsilon = 0.01$ también se obtiene un estado estacionario, pero con una disipación final levemente mayor que en el caso anterior. A medida que aumenta el valor de ϵ se alcanzan valores mayores de disipación en lapsos de tiempo más cortos. La solución con $\epsilon = 1$, que tiende a crecer indefinidamente de manera aparentemente exponencial, termina por “explotar” (al menos numéricamente) en poco tiempo. En cambio, la solución correspondiente a $\epsilon = 0.1$ representa un caso marginal en el límite entre disipación estacionaria y el “desboque térmico” observado para $\epsilon = 1$. La influencia de γ se muestra en la fig. 35. Como se señaló en la sección 11.3, los efectos térmicos son más importantes para valores grandes de este parámetro, al igual que en el caso de ϵ . Es así

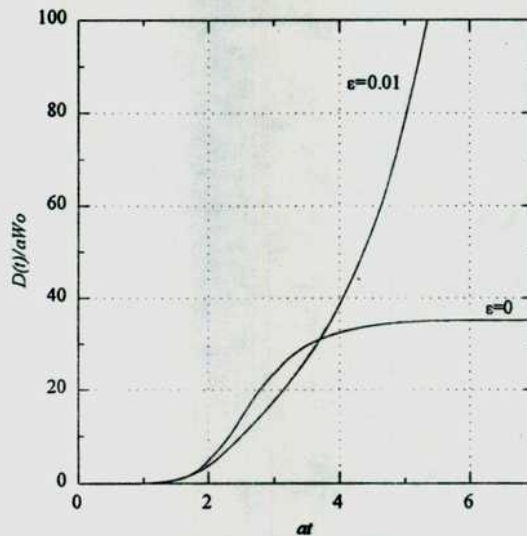


Figura 38. Soluciones impares con inyección continua de flujo magnético, $R_m=1000$, $P_\epsilon=0.01$ y $\gamma=100$.

que la curva correspondiente a $\gamma=1000$ presenta un comportamiento explosivo similar a la solución con $\epsilon=1$ de la fig. 34. El efecto del número de Reynolds magnético R_m se muestra en la fig. 36. En todos los casos se obtienen soluciones que crecen en forma explosiva para valores grandes de ϵ , γ , y R_m .

La fig. 37 muestra la influencia de R_m en un conjunto de soluciones con campo magnético impar, donde $B(y,0)=B_0\text{sen}(\pi y/h_0)$. Las líneas continuas corresponden a $\epsilon=0.1$, mientras que las líneas punteadas representan soluciones con $\epsilon=0$ (temperatura constante). A diferencia de las soluciones pares, todas las soluciones con campo magnético impar se aniquilan completamente después de una etapa de amplificación. Comparando las curvas con $\epsilon=0$ y $\epsilon=0.1$ (para el mismo valor de R_m) se observa claramente el aumento de la disipación debido al acoplamiento térmico.

11.4.2 Evolución de la disipación con inyección de flujo magnético.

En configuraciones donde existe una inyección continua de flujo magnético, por ejemplo fijando el valor del campo magnético en $y=\pm h_0$, los efectos térmicos también son importantes. En la fig. 38 se ilustra este caso graficando la disipación Joule total correspondiente a dos soluciones impares con $B(y=\pm h_0,t)=\pm B_0$. La curva con $\epsilon=0$ corresponde a la solución estacionaria representada por la función de Dawson (ec. 6.23). Tomando un valor de $\epsilon=0.01$ la solución respectiva alcanza valores elevados de

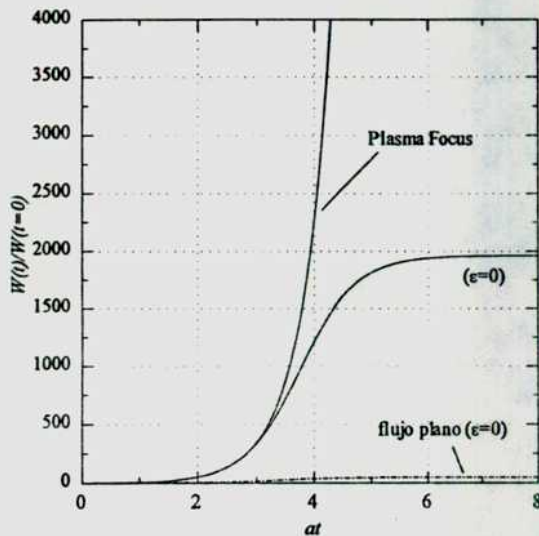


Figura 39. Energía magnética en el Plasma Focus

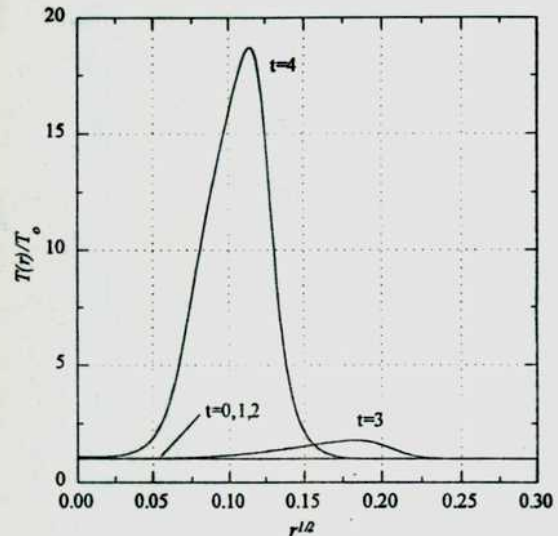


Figura 40. Evolución del perfil de la temperatura en el Plasma Focus.

disipación en un tiempo muy corto, a pesar de la poca energía magnética disponible inicialmente para el calentamiento del plasma. Las leyes de escala de la intensificación de la disipación se discuten en forma más detallada en la sección 11.6.

11.5 Aplicaciones a fenómenos disipativos en plasmas.

La disipación que se obtiene en las aplicaciones de estos modelos a diversos sistemas físicos, como los examinados en el capítulo 9, puede ser aun más importante cuando se incluyen efectos térmicos. En el caso del flujo generado por un estrangulamiento de la columna de plasma comprimido en el Plasma Focus ($s=1$ en las ecs. 11.7-11.8), las condiciones físicas que se asumen son $T_0 \sim 2000$ eV, $n \sim 10^{20}$ cm $^{-3}$, $B_0 \sim 10^5$ Gauss, $r_0 \sim 0.1$ cm y $U_0 \sim 10^7$ cm/s. El campo magnético axial B_0 se origina en los filamentos generados durante la descarga en la etapa coaxial. Con estos valores se obtienen los siguientes parámetros adimensionales: $R_m \sim 1.1 \times 10^4$, $P_e \sim 8.3 \times 10^{-3}$, $\gamma \sim 150$ y $\varepsilon \sim 4.2 \times 10^{-4}$.

En la fig. 39 se muestra la evolución de la energía magnética (por unidad de longitud en z) $W(t) = (1/8\pi) \int_0^h 2\pi r B^2 dr$, para soluciones correspondientes a una configuración cilíndrica con un campo magnético inicial $B(r,0) = B_0 \cos((\pi/2)r/h_0)$. La curva con $\varepsilon=0$ ($R_m = 1.1 \times 10^4$) representa una solución estacionaria sin efectos térmicos

(ec. 8.45). Reemplazando los parámetros del Plasma Focus se obtiene una solución cuya energía crece muy rápidamente en poco tiempo, como se observa en el gráfico. La influencia de la geometría del flujo se puede apreciar claramente en la curva inferior de la figura, que corresponde a la evolución de la energía magnética en un flujo plano ($s=0$) con $\varepsilon=0$, suponiendo un campo magnético inicial de la forma $B(y,0)=B_0\cos((\pi/2)y/h_0)$. La evolución temporal del perfil de la temperatura (inicialmente uniforme) correspondiente a la solución del Plasma Focus, se muestra en la fig. 40.

Como un ejemplo de aplicación a la física solar se consideran nuevamente los parámetros correspondientes a escenarios tradicionales de fulguraciones en la corona (ver sección 9.3): $T_0\sim 5\times 10^6$ K y $n\sim 10^{10}$ cm⁻³. Suponiendo un flujo plano con $h_0\sim 10^8$ cm, $U_0\sim 10^5$ cm/s y $B_0\sim 100$ Gauss, se obtiene $R_m\sim 10^{10}$, $\gamma P_e\sim 4\times 10^{10}$ y $\varepsilon\sim 2\times 10^1$. Los valores elevados de estos parámetros dificultan la solución numérica del problema debido a las limitaciones prácticas del tamaño de la grilla de diferencias finitas. Sin embargo, los resultados obtenidos a partir de soluciones con valores más pequeños indican que se produciría un aumento considerable de la disipación y una aceleración importante del proceso disipativo como consecuencia del acoplamiento térmico (ver también las discusiones de las secciones 11.3 y 11.6). Por otra parte, como se señaló en la sección 9.3, cabe esperar en estas condiciones un escenario caótico en el que un evento explosivo inicial (un "nanoflare") genera una avalancha de estallidos vecinos con escalas de tiempo más cortas y valores de disipación aún mayores, acelerado e intensificado por los efectos térmicos que se presentan aquí.

11.6 Intensificación de la energía térmica.

Definiendo variables adimensionales de la forma $y\rightarrow y/h$, $B\rightarrow B/B_0$, $T\rightarrow T/T_0$ y $t\rightarrow \alpha t$, las ecuaciones correspondientes a flujos planos ($s=0$) se pueden escribir como

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{R_m} \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{v}_m(T) \frac{\partial B}{\partial y} \right) + y \frac{\partial B}{\partial y} + B, \quad (11.9)$$

$$\frac{\partial \Delta T}{\partial t} = \frac{1}{P_e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\tilde{\lambda}(T, B) \frac{\partial \Delta T}{\partial y} \right) + y \frac{\partial \Delta T}{\partial y} + \frac{\varepsilon}{R_m} \tilde{v}_m(T) \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2, \quad (11.10)$$

donde $\Delta T = T - 1$, de manera que $\Delta T \rightarrow 0$ para $|y| \rightarrow \infty$. En las expresiones anteriores $\tilde{v}_m(T) = v_m(T)/v_{m0}$ y $\tilde{\lambda}(T, B) = \lambda_{\perp}(T, B)/\lambda_{\perp 0}$, donde v_{m0} y $\lambda_{\perp 0}$ son los valores de la difusividad magnética y conductividad térmica para $T=1$.

En metales líquidos (ver tabla 1, capítulo 2) la conductividad térmica depende solamente de la temperatura y $\epsilon = (B_0^2/4\pi)/\rho CT_0$, donde C es el calor específico por unidad de masa, es un parámetro independiente que en principio puede tomar cualquier valor. En cambio, cuando se tiene un plasma el valor de $\epsilon \sim 1/\beta$ debe ser pequeño para que valga la aproximación de flujo incompresible (ver sección 2.2). A primera vista esta condición implica que el término de disipación Joule en (11.10) es despreciable frente al término de advección $y\partial\Delta T/\partial y$, que representa el ingreso de plasma frío a la lámina de corriente desde la región externa del flujo. Sin embargo, es importante observar que la disipación se vuelve muy intensa para valores grandes de R_m . En estos casos el término $(1/R_m)(\partial B/\partial y)^2$ puede ser importante dentro de la región disipativa.

La intensificación de la energía térmica durante la evolución del campo magnético se puede analizar a partir de expresiones integrales de las ecs. (11.9)-(11.10). Integrando ambas ecuaciones, después de multiplicar a (10.9) por $B/4\pi$, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} W = -D + W, \quad (11.11)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta E = -\Delta E + 4\pi\epsilon D, \quad (11.12)$$

donde por hipótesis $|y\Delta T| \rightarrow 0$ para $|y| \rightarrow \infty$ y

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta T dy, \quad W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2}{8\pi} dy, \quad D = \frac{1}{R_m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{v}_m(T)}{4\pi} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 dy.$$

Suponiendo $\Delta T=0$ a $t=0$ (temperatura uniforme), se tiene que $\partial\Delta E/\partial t = 4\pi\epsilon D > 0$ al comenzar el flujo. La energía térmica ΔE crece inicialmente en forma proporcional a ϵ debido al calentamiento Joule ($D \sim O(1)$ en la etapa inicial). El término de enfriamiento, que corresponde a $-\Delta E$ en (11.12), se vuelve importante recién cuando $\Delta E \sim O(1)$.

Combinando las ecs. (11.11)-(11.12) se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} (\Delta E + 4\pi\epsilon W) = 4\pi\epsilon W - \Delta E. \quad (11.13)$$

Por lo tanto, la energía total (térmica y magnética) crece solamente cuando $4\pi\epsilon W > \Delta E$. Un estado estacionario puede existir, en principio, si asintóticamente $D \rightarrow W$ al mismo tiempo que $\Delta E \rightarrow 4\pi\epsilon W$, como se desprende de (11.11) y (11.13). En flujos planos la amplificación de la energía magnética tiene una ley de escala de la forma $W \sim R_m^{1/2}$ (ver capítulo 3). Luego, para un flujo estacionario se obtiene una intensificación de la energía térmica que es aproximadamente del orden de $\Delta E \sim 4\pi\epsilon R_m^{1/2}$. Cuando $4\pi\epsilon R_m^{1/2} \gg 1$ la energía térmica puede alcanzar valores muy elevados, aún con $\epsilon \ll 1$.

Un argumento similar se puede aplicar en el caso de flujos convergentes con geometría cilíndrica ($s=1$). Los balances de energía correspondientes son iguales a (11.11)-(11.12), a excepción de un cambio en la definición de las integrales:

$$\Delta E = \int_{-\infty}^{\infty} \Delta T 2\pi r dr, \quad W = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{B^2}{8\pi} 2\pi r dr, \quad D = \frac{1}{R_m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tilde{v}_m(T)}{4\pi} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2 2\pi r dr.$$

En el caso cilíndrico se tiene una intensificación mayor de la energía magnética $W \sim R_m$, de manera que para flujos estacionarios se obtiene $\Delta E \sim 4\pi\epsilon R_m$.

Estos resultados sugieren que los efectos térmicos comienzan a ser importantes en la evolución de la lámina de corriente cuando $4\pi\epsilon R_m^{(s+1)/2} \sim 1$ ($s=0$: flujo plano, $s=1$: flujo cilíndrico) y que para valores por encima de este límite se puede producir un "desboque térmico" de la región disipativa.

12 Evolución de láminas de corriente en flujos compresibles.

12.1 Límites del modelo incompresible.

Si la evolución del campo magnético ocurre en una región de plasma donde el valor de $\beta_0 = 8\pi nkT_0/B_0^2$ es grande, por ejemplo $\beta_0 = 10$ y $R_m = 10^4$ ($\epsilon \sim 1/\beta_0 \sim 0.1$, $4\pi\epsilon R_m^{1/2} \sim 120$), el modelo incompresible describe adecuadamente la primera etapa de la formación de la lámina de corriente. El campo magnético inicial se intensifica al mismo tiempo que aumenta la temperatura debido a la disipación Joule, con una variación de β del orden de $\beta/\beta_0 \sim T/B^2 \sim \Delta E/W \sim 4\pi\epsilon \sim 1$. En consecuencia, la evolución de la lámina de corriente puede desarrollarse en condiciones cuasi-incompresibles (es decir con $\beta > 1$) durante un tiempo considerable, porque la intensificación del campo magnético es acompañada por un aumento proporcional de la temperatura que limita el descenso de β . Asimismo, para un flujo con $R_m \sim O(1)$ en una región de bajo β , es decir con $\epsilon \sim 1/\beta_0 \gg 1$, la intensificación del campo magnético es despreciable y las variaciones de la presión magnética ΔB^2 casi no afectan la densidad del plasma. Cabe esperar entonces que el modelo incompresible también sea una buena aproximación en este caso.

Claro está que existen rangos de β y R_m donde las variaciones de la presión magnética producen cambios importantes en la densidad del plasma. Por ejemplo, en plasmas con $\beta \ll 1$, o para valores muy grandes de R_m , la condición de incompresibilidad no puede mantenerse por mucho tiempo. En estos casos el modelo incompresible debe ser superado por otro que contemple los efectos de la compresibilidad. La evolución de láminas de corriente en flujos compresibles constituye un problema muy complejo y se conoce poco acerca de estos regímenes. Por otra parte, la extensión del análisis al caso compresible requiere un esfuerzo computacional importante ya que deben resolverse las ecuaciones completas de la magnetohidrodinámica en dos dimensiones y el tiempo. Algunos trabajos que se han ocupado de los efectos de la compresibilidad en la evolución de láminas de corriente y problemas de reconexión magnética son los de Sato et al. (1992), Jin & Ip (1991), Jardin & Priest (1990), Priest (1985) y Forbes, Priest & Hood (1982). En la sección siguiente

se propone un modelo compresible simplificado para la evolución de láminas de corriente planas sin reconexión (es decir con $B_y=0$).

12.2 Un modelo compresible de aniquilación magnética.

Las ecuaciones de la magnetohidrodinámica para flujos compresibles planos admiten una separación similar al del caso incompresible (ec. 3.1), si se supone $\partial p/\partial x=0$ en la ecuación de movimiento y se incorpora un término forzante de la forma $g_a x$, que reemplaza al gradiente de presión como motor del flujo. Este término actúa en forma continua e inexorable, i. e. no hay efecto de realimentación sobre el mismo, por lo que el modelo exagera el efecto de reducción de la densidad del plasma ("plasma depletion"), como se verá más adelante.

Con estas hipótesis el problema original se reduce a una dimensión y el tiempo para las variables

$$\begin{aligned} n &= n(y, t), & v_x / x &= \varphi(y, t), & v_y &= -f(y, t), & v_z &= 0, \\ B_x &= B(y, t), & B_y &= B_z = 0, & T &= T(y, t), \end{aligned} \quad (12.1)$$

donde n es la densidad de partículas ($\rho = mn$). Tomando $n(y, t) = n_0$ (constante) y $\varphi = f'$ se obtiene nuevamente el modelo incompresible del capítulo 11. Las ecuaciones que rigen el flujo, expresadas en las variables adimensionales $t \rightarrow tU/h$, $y \rightarrow y/h$, $n \rightarrow n/n_0$ ($\rho \rightarrow \rho/\rho_0$), $\varphi \rightarrow \varphi/Uh$, $f \rightarrow f/U$, $B \rightarrow B/B_0$, $T \rightarrow T/T_0$, donde h es una escala de longitud característica y $U = |f(h)|$, son

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -n\varphi + \frac{\partial(nf)}{\partial y}, \quad (12.2)$$

$$\frac{\partial(n\varphi)}{\partial t} = -2n\varphi^2 + \frac{\partial(n\varphi f)}{\partial y} + nG_a + \frac{1}{R_e} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}, \quad (12.3)$$

$$\frac{\partial(nf)}{\partial t} = -n\varphi f + \frac{\partial(nf^2)}{\partial y} + \frac{1}{M^2} \frac{\partial(nT)}{\partial y} + \frac{4}{3R_e} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{1}{3R_e} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{1}{M_a^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B^2}{2} \right), \quad (12.4)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = \frac{1}{R_m} \frac{\partial}{\partial y} \left(T^{-3/2} \frac{\partial B}{\partial y} \right) + \frac{\partial(fB)}{\partial y}, \quad (12.5)$$

$$\frac{\partial(nT)}{\partial t} = \frac{1}{P_e} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{T^{5/2}}{1 + \gamma B^2 T^3} \frac{\partial T}{\partial y} \right) - \frac{5}{3} n\varphi T + \frac{\partial(nfT)}{\partial y} + \frac{2}{3} nT \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{2\varepsilon}{R_m} T^{-3/2} \left(\frac{\partial B}{\partial y} \right)^2, \quad (12.6)$$

donde $G_a = g_a h^2 / U^2$, $R_e = \rho_0 U h / \mu$, $M = m U / (2 m k T_0)^{1/2}$, $P_e = 3 U h n_0 / \lambda_{0\parallel}$, $\gamma = \lambda_{0\parallel} / \lambda_{0\perp}$, $M_A = U / v_A$ ($v_A = B_0 / (4\pi\rho_0)^{1/2}$ es la velocidad de Alfvén) y $\varepsilon = (B_0^2 / 8\pi) / (3 n_0 k T_0) = (1/3)(M/M_A)^2$.

El término ρG_a en (12.3) se debe a la presencia del término forzante. El valor de ε , que es un parámetro independiente en el caso incompresible, ahora es función de los valores de M (número de Mach) y M_A (número de Mach-Alfvénico). Este sistema de ecuaciones posee una solución hidrodinámica estacionaria ($B=0$), para $R_e \gg M^2$, de la forma

$$T = 1, \quad f = y, \\ n = \exp\left[\frac{M^2}{2}(1-y^2)\right], \quad \varphi = 1 - M^2 y^2, \quad G_a = 1 + M^4 y^4 \quad (12.7)$$

que tiende a la solución incompresible (3.7) cuando $M \rightarrow 0$.

Las ecs. (12.2)-(12.6) se integraron numéricamente en el intervalo finito $-1 \leq y \leq 1$ usando un método de diferencias finitas con una grilla uniforme (ver Apéndice). Como condición de contorno se impuso un flujo de masa $\rho f = cte$ en $y = \pm 1$. Los valores fijos del campo magnético en las fronteras de la región de cálculo determinan la inyección de flujo magnético. Las condiciones iniciales para las simulaciones numéricas corresponden a distribuciones de campo magnético con $M_A > 1$ (es decir un campo magnético inicial de poca intensidad) en un flujo con $M < 1$ dado por (12.7).

Debido al gran número de parámetros que aparecen en el problema se estudió principalmente la influencia de M y M_A sobre la evolución del campo magnético. La región del espacio de parámetros elegida para ilustrar los efectos físicos más significativos está limitada también por las dificultades del cálculo numérico. Por ejemplo, no es fácil obtener soluciones para valores altos de R_m , γP_e y ε . Por lo tanto, los resultados que siguen no implican que el modelo no pueda predecir valores de energía magnética o de temperatura mayores que los casos descriptos.

12.3 Soluciones numéricas: efectos de la compresibilidad.

12.3.1 Evolución de la energía magnética sin inyección de flujo magnético.

En las figs. 41-43 se muestra la evolución de la energía magnética total (por unidad de área) $W(t) = (1/8\pi) \int_{-1}^1 B^2 dy$, para diversas configuraciones sin inyección de

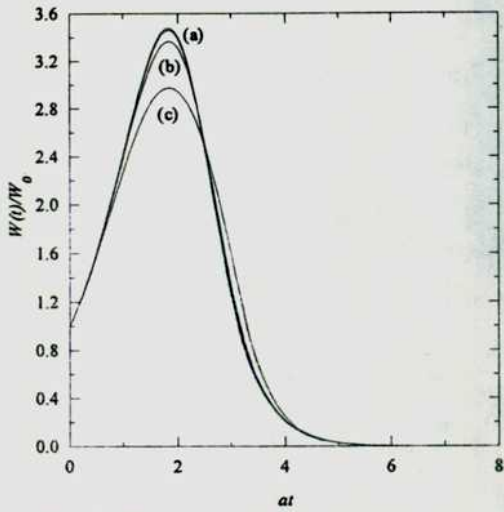


Figura 41. Soluciones impares con $R_m=500$, $P_e=10^{-2}$ y $\gamma=100$ (sin inyección).

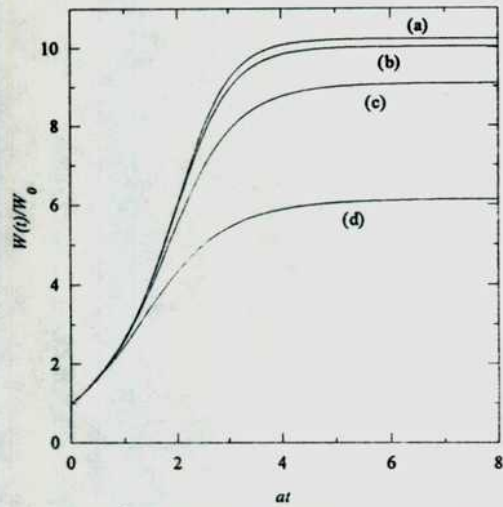


Figura 42. Soluciones pares con $R_m=500$, $P_e=10^{-2}$ y $\gamma=100$ (sin inyección).

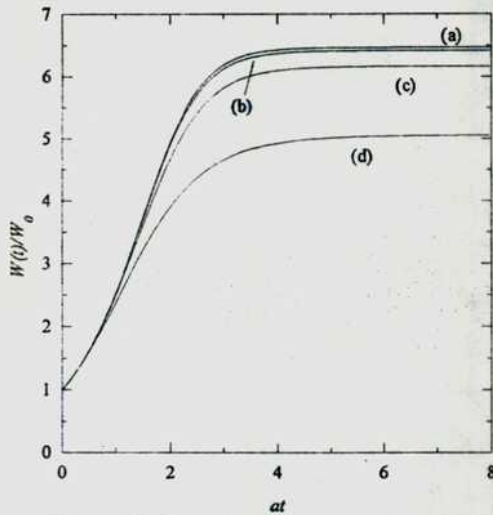


Figura 43. Soluciones pares con $R_m=200$, $P_e=10^{-2}$ y $\gamma=100$ (sin inyección).

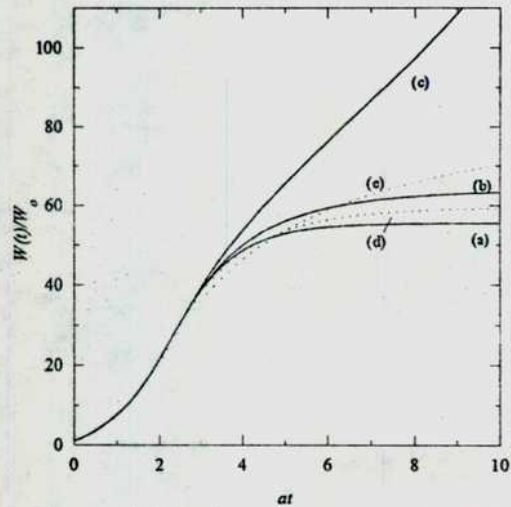


Figura 44. Soluciones impares con $R_m=200$, $P_e=10^{-2}$ y $\gamma=100$ (inyección continua).

flujo magnético. La fig. 41 corresponde a un campo magnético impar con $B(y,0)=\text{sen}(\pi y)$, $R_m=500$, $P_e=10^{-2}$ y $\gamma=100$. La curva (a) representa una solución casi incompresible con $M=0.1$ y $M_A=10$ ($\epsilon=3.3 \times 10^{-5}$). Los efectos de la compresibilidad son más importantes en la solución de la curva (c), donde $M=0.5$ y $M_A=2$ ($\epsilon=2.1 \times 10^{-2}$). La curva (b) es un caso intermedio con $M=0.2$ y $M_A=5.0$ ($\epsilon=3.3 \times 10^{-3}$). En todas estas soluciones impares se produce una etapa inicial con amplificación de la energía magnética, seguida por el decaimiento completo del campo magnético.

La solución correspondiente a la curva (c) es interesante, por cuanto se observa una menor amplificación de la energía a pesar de ser más grande el valor de ϵ . Esto se

debe a que la presión magnética ejercida por el campo magnético amplificado tiende a frenar el movimiento del plasma que ingresa a la lámina de corriente. En flujos incompresibles este efecto no se manifiesta puesto que la ecuación de movimiento se desacopla de la ecuación del campo magnético (aunque la presión del fluido disminuye al crecer el campo, ver capítulo 5).

Un comportamiento similar se observa en el caso de las soluciones pares de la fig. 42, donde se muestra la evolución de la energía magnética para flujos con un campo magnético inicial $B(y,0)=\cos(\pi y/2)$, $R_m=500$, $P_e=10^{-2}$ y $\gamma=100$. La curva (a) representa la solución incompresible con $T=T_0$ constante ($\epsilon=0$). Pasando de la curva (b) ($M=0.2$, $M_A=5.0$, $\epsilon=5.3 \times 10^{-4}$) y (c) ($M=0.2$, $M_A=2.0$, $\epsilon=3.3 \times 10^{-3}$) a la curva (d) ($M=0.5$, $M_A=2.0$, $\epsilon=2.1 \times 10^{-2}$) se vuelven más importantes los efectos de la compresibilidad. Al igual que en el caso incompresible las soluciones pares alcanzan un estado disipativo estacionario, pero con una energía magnética que es menor en la medida que pesan más los efectos de la compresibilidad.

Las soluciones de la fig. 43 han sido obtenidas usando los mismos valores de las curvas (a), (b), (c), (d) de la fig. 42, pero con un valor menor de $R_m=200$. Comparando con las curvas de la fig. 42 se observa un comportamiento similar, pero con valores menores de energía en todos los casos (por ser menor R_m).

12.3.2 Evolución de la energía magnética con inyección de flujo magnético.

La fig. 44 muestra la evolución de la energía magnética para soluciones impares sostenidas por una inyección continua de flujo magnético (simétrica), donde $B(y,0)=y$, $R_m=200$, $P_e=10^{-2}$ y $\gamma=100$. La curva (a) tiene $\epsilon=0$ y corresponde a la solución incompresible estacionaria de Dawson (6.23). Las curvas (b)-(c) también representan soluciones incompresibles, pero con distintos valores de ϵ . En (b) se tiene un valor pequeño de $\epsilon=8.3 \times 10^{-4}$. En este caso la solución alcanza un estado disipativo estacionario, pero con una mayor energía magnética que en (a) como consecuencia del del acoplamiento térmico (ver capítulo 11). Tomando un valor más grande de $\epsilon=3.3 \times 10^{-3}$ se obtiene la curva (c), donde los efectos térmicos dan lugar a un rápido crecimiento de la energía magnética en lo que parece ser un “desboque térmico” de la región disipativa.

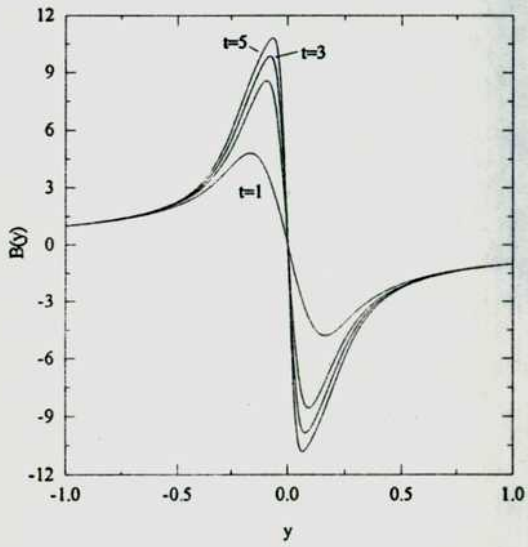
Las curvas (d)-(e) incluyen efectos de la compresibilidad. La curva (d) representa

una solución poco compresible ($M=0.1$ y $M_A=2.0$) donde el valor de $\epsilon=8.3 \times 10^{-4}$ es igual al de la curva (b). En este caso se alcanza un estado estacionario, pero con una energía final menor que el de la curva (b) (aún así es un poco mayor que en (a)). La solución de la curva (e) tiene $M=0.2$, $M_A=2.0$, por lo que $\epsilon=3.3 \times 10^{-3}$ es igual al de la solución incompresible de la curva (c). Aquí el efecto de la compresibilidad es más importante ya que, a diferencia del caso incompresible, la solución tiende a un estado estacionario sin que se produzca un “desboque térmico”. Estos ejemplos muestran que la compresibilidad también limita la intensificación de la energía magnética en soluciones con inyección continua de flujo magnético.

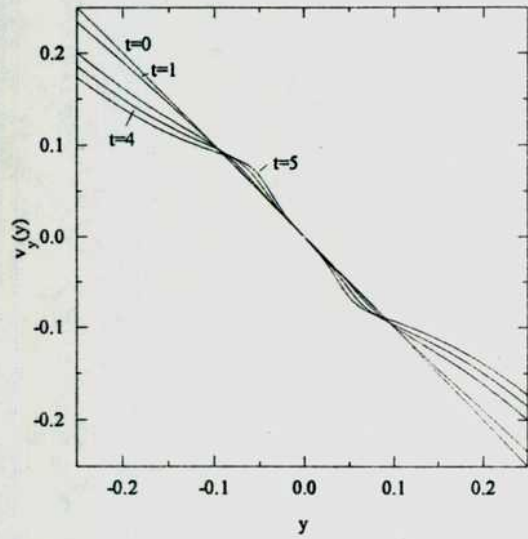
12.3.3 Estructura de la lámina de corriente compresible.

En la fig. 45 se muestra la evolución temporal de los perfiles de campo magnético, velocidad, densidad y temperatura correspondientes a una solución impar de campo magnético con inyección continua de flujo magnético (simétrica), donde $B(y,0)=y$, $R_m=200$, $P_e=10^{-2}$, $\gamma=100$, $M=0.2$ y $M_A=2$ ($\epsilon=3.3 \times 10^{-3}$). El flujo evoluciona a partir de la condición inicial (12.7) hasta formar una lámina de corriente con un campo magnético amplificado que cambia de signo en el origen (donde está el punto de estancamiento). Durante la formación de la lámina de corriente la densidad del plasma disminuye en la región disipativa. Sin embargo, cerca del punto de estancamiento la densidad vuelve a crecer un poco, al igual que la velocidad v_y , debido a que la configuración local del campo magnético forma un “pinch” plano (ver Forbes (1982), donde sin embargo la lámina no es forzada).

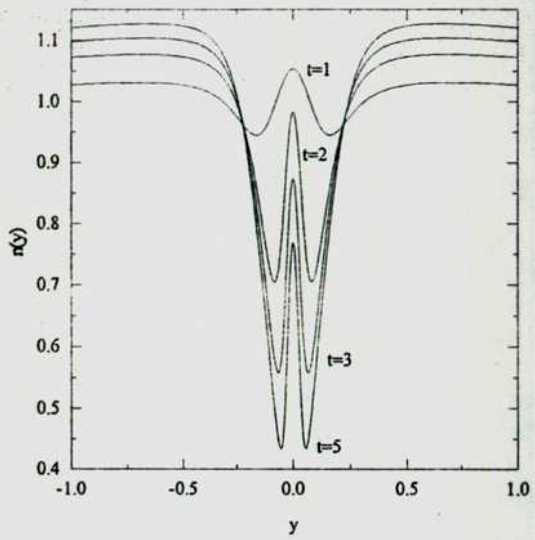
La fig. 45d muestra que la temperatura en la lámina de corriente aumenta considerablemente. Asimismo, se observan dos regiones (una a cada lado de la lámina de corriente) donde la temperatura disminuye con respecto a su valor inicial. Este efecto se debe a una expansión local del plasma que se origina cuando la presión magnética reduce la velocidad v_y ya que, al mantenerse fijo el valor de G_a , la velocidad de salida v_x prácticamente no cambia. En este aspecto la presencia del término forzante exagera el efecto de las pérdidas convectivas de energía. No obstante, este ejemplo muestra que la



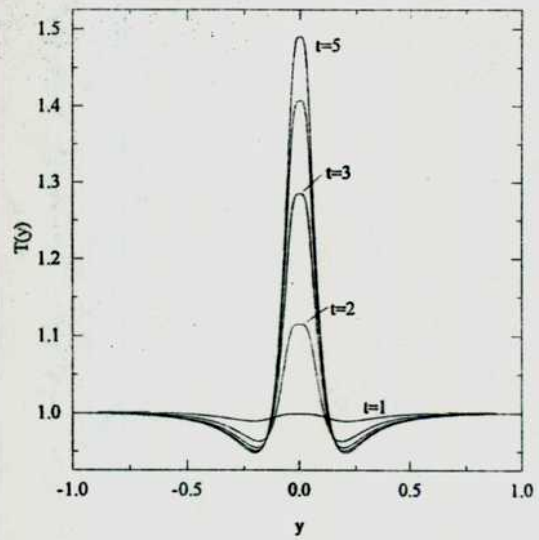
(a) Campo magnético.



(b) Velocidad.

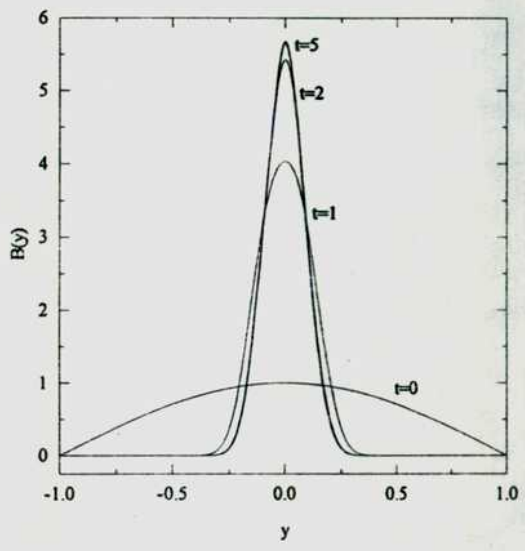


(c) Densidad.

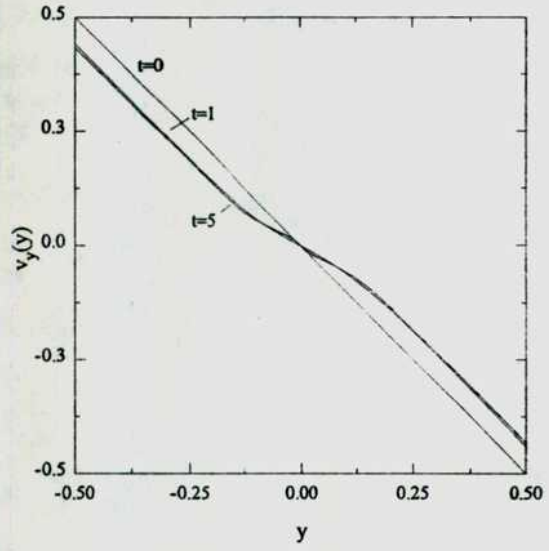


(d) Temperatura.

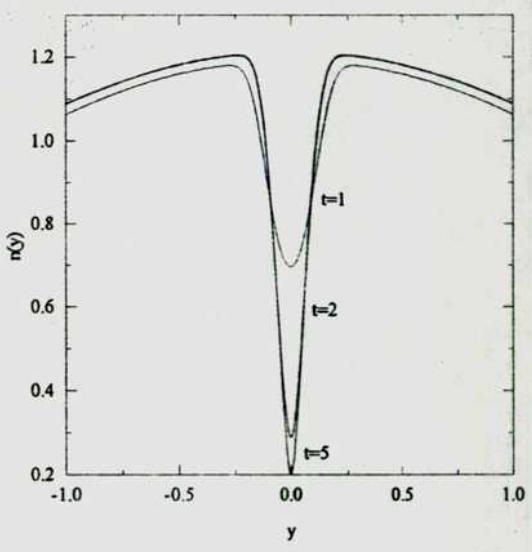
Figura 45. Estructura de la lámina de corriente en una solución impar con inyección continua de flujo magnético, $R_m=200$, $R_e=10^3$, $P_e=10^{-2}$, $\gamma=100$, $M=0.2$ y $M_A=2$.



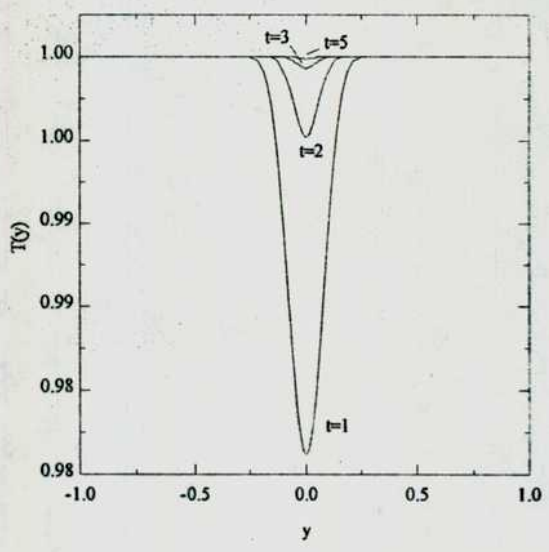
(a) Campo magnético.



(b) Velocidad.



(c) Densidad.



(d) Temperatura.

Figura 46. Estructura de la lámina de corriente en una solución par sin inyección de flujo magnético, $R_m=200$, $R_e=10^3$, $P_e=10^{-2}$, $\gamma=100$, $M=0.5$ y $M_A=2$.

energía disipada en de la lámina de corriente, aunque no tan intensa como en el caso incompresible (donde la amplificación del campo magnético es mayor), puede producir un aumento importante de la temperatura en esa región. Dado que la densidad en la lámina de corriente disminuye (porque al aumentar la presión magnética disminuye la presión del plasma) la energía final por partícula también puede alcanzar valores considerables.

El efecto de reducción de la densidad es aún más importante (en este modelo) cuando se considera la evolución de un campo magnético par, como el que se muestra en la fig. 46, donde $B(y,0)=\cos(\pi y)$, $R_m=200$, $P_e=10^{-2}$, $\gamma=100$, $M=0.5$ y $M_A=2$ ($\epsilon=2.1 \times 10^{-2}$). En este caso no hay inyección de flujo magnético: $B(y=\pm 1,t)=0$. El movimiento del plasma amplifica el campo magnético inicial para formar asintóticamente un filamento magnético con un perfil de tipo gaussiano (fig. 46a). En la fig 46b se observa la formación una región de estancamiento para la velocidad v_y . Este efecto se debe a la acción de la presión magnética ejercida por el campo magnético amplificado, que tiende a frenar el movimiento. La densidad del plasma en la lámina de corriente disminuye drásticamente, como muestran las curvas de la fig. 46c, mientras que la temperatura casi no varía (fig 46d).

Resumiendo, los principales efectos de la compresibilidad en la evolución de láminas de corriente planas que muestran las soluciones numéricas son: i) limitar la intensificación de la energía magnética, fundamentalmente porque la presión magnética tiende a frenar el movimiento que produce la amplificación del campo magnético; ii) la reducción de la densidad del plasma en la lámina de corriente. Cabe recordar, sin embargo, que la simplificación introducida mediante el término forzante exagera los efectos de fuga del plasma. En consecuencia, los resultados del modelo deben ser considerados sólo como indicativos de los efectos físicos. Por otra parte, al disminuir la densidad se pueden obtener valores de energía por partícula muy elevados dentro de la lámina de corriente final, aún cuando el calentamiento en un flujo compresible no es tan importante como en el caso incompresible. También es importante destacar que la ley de escala temporal del proceso de intensificación sigue siendo muy rápida (tiempos hidrodinámicos).

13 Conclusiones.

La evolución del campo magnético en flujos magnetohidrodinámicos con un punto de estancamiento a valores altos del número de Reynolds magnético es un proceso rápido, que se desarrolla en escalas de tiempo hidrodinámicas. La convección y amplificación del campo magnético presente inicialmente en la región del flujo genera una delgada lámina de corriente, donde se produce una intensa disipación de la energía magnética acumulada.

En flujos planos incompresibles la evolución de lámina de corriente se caracteriza por el predominio de las componentes de campo magnético sin cambio de signo que se encuentran contenidas en el plano del movimiento. Esto ocurre tanto en sistemas sin inyección de flujo magnético, donde son las únicas que sobreviven asintóticamente, como en sistemas forzados mediante una inyección continua de flujo magnético. En estos casos la componente par del campo magnético sostenida por inyección crece en forma lineal con el tiempo, mientras la componente impar alcanza un estado estacionario disipativo. Los principales resultados obtenidos a partir del estudio de las soluciones de aniquilación magnética en flujos irrotacionales planos ($v_x = \alpha x$, $v_y = -\alpha y$, con $\alpha = cte$) son:

a) En configuraciones sin inyección de flujo magnético la energía magnética se intensifica durante la etapa inicial del flujo. Posteriormente, la componente impar del campo magnético se aniquila por completo. En cambio, la componente par se consolida formando una delgada lámina de corriente con un perfil de campo magnético gaussiano de ancho $\delta = h_0/R_m^{1/2}$ e intensidad pico $B_{\max} \sim B_0 R_m^{1/2}$, que sigue disipando energía mientras subsiste el movimiento. Este proceso se da en un tiempo $t \sim (1/2\alpha) \ln R_m$.

b) En configuraciones con inyección continua de flujo magnético la componente par forzada del campo magnético inicial crece indefinidamente. La componente impar (sostenida por una inyección simétrica de flujo magnético) tiende asintóticamente a formar una lámina de corriente estacionaria con dos picos de campo magnético opuestos, cuya intensidad es proporcional a $R_m^{1/2}$. Esta componente, así como la componente par sin inyección, alcanza un estado estacionario en unas pocas unidades de αt . En consecuencia, a menos que la inyección esté perfectamente balanceada (es decir,

que $\lim_{y \rightarrow -\infty} yB = \lim_{y \rightarrow +\infty} yB$) la componente par forzada se vuelve dominante en poco tiempo. Por lo tanto, las configuraciones estacionarias de campo magnético con cambio de signo que se consideran habitualmente en estudios de procesos de reconexión magnética e inestabilidades resistivas, resultan ser la excepción cuando se examina la evolución del campo magnético a partir de condiciones iniciales genéricas.

c) La componente de campo magnético normal al plano del movimiento, que no es amplificada por el flujo como en el caso de la componente coplanar, se extingue completamente en un tiempo del orden de a^{-1} . Solamente bajo condiciones especiales de inyección de flujo magnético pueden sostenerse las soluciones estacionarias de esta componente. Por lo tanto, una configuración inicial con un campo magnético que tiene componentes tanto en el plano del flujo de estancamiento como en la dirección normal, tiende asintóticamente a formar una lámina de corriente contenida completamente en el plano del movimiento.

En flujos con un punto de estancamiento de tipo tridimensional la evolución del campo magnético es muy distinta. Todas las componentes del campo magnético inicial se aniquilan en un lapso de tiempo del orden del tiempo hidrodinámico característico, a menos que estén sostenidas por una inyección continua de energía magnética. Aún en las soluciones estacionarias se observa una menor amplificación del campo magnético, que escala como $R_m^{1/4}$ en estos flujos. Por el contrario, en un flujo axialmente simétrico, con un campo de velocidades que converge en forma radial hacia el punto de estancamiento, la componente axial del campo magnético inicial se intensifica un factor $R_m^{1/2}$ veces mayor que la componente B_x en un flujo plano. La amplificación y decaimiento del campo magnético en estas configuraciones también se puede estudiar mediante soluciones autosimilares cuando el flujo es irrotacional.

Las aplicaciones a fenómenos disipativos rápidos de la física espacial (magnetosfera terrestre) y de laboratorio (Plasma Focus) muestran que utilizando estos modelos sencillos se obtienen valores de disipación y escalas característicos de tiempo dentro de los rangos observados en estos escenarios. Asimismo, se ha hecho un aporte al problema del calentamiento de la corona solar, analizando varios escenarios de disipación de energía magnética en el marco de las ideas de Parker sobre "nanoflares". Los resultados de la tesis permiten obtener valores elevados de disipación ($\sim 3 \times 10^{23}$ erg

s^{-1}) en estos escenarios sin la necesidad de invocar configuraciones ad-hoc de campo magnético, ni procesos de reconexión magnética rápida.

La estabilidad lineal de una lámina de corriente formada por la componente normal de campo magnético B_z se analizó numéricamente, incluyendo una componente adicional de velocidad paralela al campo magnético que permite el desarrollo de inestabilidades de Kelvin-Helmholtz (además de los modos resistivos “tearing”). Usando un método matricial con diferencias finitas para calcular las tasas de crecimiento de la perturbación, se mostró que el flujo tiende a estabilizar la lámina de corriente. Existen indicios teóricos y numéricos de que la lámina de corriente formada por la componente B_x (es decir en el plano del movimiento) es aún más estable que la formada por B_z . Este efecto, que se opone a la permanencia de configuraciones con reconexión, se ilustró mediante simulaciones numéricas en dos dimensiones y el tiempo usando las ecuaciones de la magnetohidrodinámica disipativa. Las soluciones numéricas confirman la consolidación de láminas de corriente de carácter cuasi-unidimensional (como las estudiadas en la tesis) y se comparan favorablemente con simulaciones realizadas por otros autores.

La influencia de la temperatura en la evolución del campo magnético se estudió en forma numérica utilizando un modelo plano simplificado que mantiene la hipótesis de densidad constante. Las soluciones numéricas muestran que la amplificación de la energía magnética y su disipación en forma de calor es aún mayor cuando se incluyen efectos térmicos. Para valores grandes de los parámetros adimensionales R_m , γP_e y ϵ se obtienen soluciones que muestran un “desboque térmico” de la región disipativa. Los plasmas solares son muy sensibles a este efecto dado los altos valores de los parámetros que se obtienen para flujos en la corona solar.

Cuando las variaciones de la presión magnética son importantes, por ejemplo en plasmas con $\beta \ll 1$, o para valores muy grandes de R_m , aparecen efectos de compresibilidad que no son descritos en el modelo incompresible. Modelando el flujo de estancamiento mediante la introducción de un término forzante en la ecuación de movimiento, de tal manera que el sistema magnetohidrodinámico se reduce a un problema en una variable espacial y el tiempo, se estudió el efecto de la compresibilidad en un conjunto de soluciones numéricas correspondientes a configuraciones planas de

aniquilación magnética. La presencia de compresibilidad limita la intensificación de la energía magnética y da lugar a una reducción importante de la densidad en la lámina de corriente ("plasma depletion"). Estos resultados deben ser considerados sólo como indicativos de efectos físicos, ya que la introducción del término forzante exagera los efectos causados por la fuga lateral de plasma.

En síntesis, se ha examinado un conjunto de soluciones exactas del sistema de ecuaciones de la magnetohidrodinámica disipativa variables en el tiempo. La principal novedad de las soluciones tratadas en este trabajo está en la amplificación de campo magnético debido al flujo de punto de estancamiento. Este efecto produce una considerable aceleración de los procesos de aniquilación magnética. Consideradas en sí mismas, estas soluciones representan una variedad de problemas físicos, algunos de los cuales se describen en la tesis. Asimismo pueden ser interpretadas, en otra escala, como piezas o elementos constitutivos de sistemas más grandes, formados por una colección estadística de tales elementos. En este sentido son también aptas para una discusión de estados de turbulencia magnetohidrodinámica, donde muchas configuraciones disipativas básicas pueden formarse caóticamente.

Apéndices

A.1 Solución numérica de las ecuaciones magnetohidrodinámicas.

A.1.1 Discretización de las ecuaciones.

En el método de diferencias finitas (Fletcher, 1988) se representan las funciones incógnitas, por ejemplo $u(x,y,t)$, por sus valores en un conjunto discreto de puntos

$$u_{i,j}^n = u(x_i, y_j, t_n), \quad (\text{A1.1})$$

donde $x_i = x_0 + i\Delta x$, $y_j = y_0 + j\Delta y$, $t_n = t_0 + n\Delta t$ ($i=0,1,\dots, L$; $j=0,1,\dots, M$; $n=0,1, \dots$). Estos puntos constituyen la grilla numérica. Las ecuaciones originales en derivadas parciales se reemplazan en cada punto de la grilla por ecuaciones en diferencias, donde las derivadas se aproximan mediante desarrollos de Taylor usando los valores de las incógnitas en los puntos vecinos. Por ejemplo, una aproximación de segundo orden al laplaciano de la función $u(x,y,t)$ a $t=t_n$ en el punto (x_i, y_j) es

$$\nabla^2 u_{i,j}^n = \frac{u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n - 2u_{i,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n - 2u_{i,j}^n}{\Delta y^2} + O(\Delta x^2, \Delta y^2). \quad (\text{A1.2})$$

La discretización de las derivadas temporales se realiza en forma análoga. Cuando los valores de las incógnitas a $t=t_n$ (en cada punto) se obtienen a partir de los valores a tiempos anteriores se dice que el método es explícito. En cambio, si se calculan en función de los valores vecinos para el mismo tiempo el método es de tipo implícito. Los métodos implícitos son generalmente más estables que los explícitos y se usan a menudo en problemas donde coexisten procesos físicos con distintas escalas temporales.

En las simulaciones numéricas de este trabajo se usaron diferencias centradas de segundo orden para aproximar las derivadas espaciales. La discretización temporal se realizó usando un esquema implícito (también de segundo orden) con

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{i,j}^{n+1} = \frac{3\phi_{i,j}^{n+1} - 4\phi_{i,j}^n + \phi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} + O(\Delta t^2), \quad (\text{A1.3})$$

donde ϕ es una variable cualquiera (Fletcher, 1988).

El resultado final del proceso de discretización es un sistema de ecuaciones no lineales de la forma

$$\begin{aligned}
f_1(\phi_1^{n+1}, \phi_2^{n+1}, \dots, \phi_N^{n+1}, t_{n+1}) &= 0, \\
f_2(\phi_1^{n+1}, \phi_2^{n+1}, \dots, \phi_N^{n+1}, t_{n+1}) &= 0, \\
&\vdots \\
f_N(\phi_1^{n+1}, \phi_2^{n+1}, \dots, \phi_N^{n+1}, t_{n+1}) &= 0,
\end{aligned}
\tag{A1.4}$$

donde f_1 - f_N son N funciones de los valores de las incógnitas en los puntos de la grilla a $t=t_{n+1}$. En un esquema de tipo implícito se debe resolver un sistema como (A1.4) para cada paso de tiempo.

A.1.2 Solución de las ecuaciones discretizadas.

Existen una variedad de métodos para resolver sistemas de ecuaciones no lineales, de los cuales el más conocido es el método de Newton (Rheinboldt, 1974). El algoritmo de Newton converge en forma cuadrática a la solución, pero requiere conocer (o calcular numéricamente) el Jacobiano de (A1.4) y resolver un sistema de ecuaciones lineales adicional. Los métodos iterativos o de relajación, que incluyen el método de aproximaciones sucesivas, el método de Jacobi y el método de Gauss-Seidel (Carnahan, Luther & Wilkes, 1969), constituyen una alternativa al método de Newton de aplicación más sencilla.

En el método de Gauss-Seidel se reemplaza (A1.4) por el sistema

$$\begin{aligned}
\phi_1^{n+1} &= F_1(\phi_2^{n+1}, \phi_3^{n+1}, \dots, \phi_N^{n+1}, t_{n+1}), \\
\phi_2^{n+1} &= F_2(\phi_1^{n+1}, \phi_3^{n+1}, \dots, \phi_N^{n+1}, t_{n+1}), \\
&\vdots \\
\phi_N^{n+1} &= F_N(\phi_1^{n+1}, \phi_2^{n+1}, \dots, \phi_{N-1}^{n+1}, t_{n+1}).
\end{aligned}
\tag{A1.5}$$

Partiendo de una aproximación inicial a la solución (e.g. la condición inicial) se calcula una nueva aproximación para ϕ_1 usando la primera ecuación de (A1.5). Este valor se reemplaza en la segunda ecuación, de donde se obtiene una nueva aproximación para ϕ_2 , y así sucesivamente hasta llegar a ϕ_N . El proceso completo, que se puede representar de la forma

$$\phi_{m,k} = F_m(\phi_{1,k}, \phi_{2,k}, \dots, \phi_{m-1,k}, \phi_{m+1,k-1}, \dots, \phi_{N,k-1}),
\tag{A1.6}$$

donde $k=0,1,\dots$ es el número de iteración, se repite hasta cumplir un determinado criterio de convergencia, típicamente $|\phi_{m,k} - \phi_{m,k-1}| < \epsilon$ para todo m . Se puede demostrar que este algoritmo converge a la solución cuando las ecuaciones originales son fuertemente elípticas. Las desventajas principales del método son: i) la lentitud de convergencia

cuando el número de ecuaciones es grande y ii) la aparición de oscilaciones numéricas en problemas de tipo advección-difusión en donde los coeficientes de transporte son pequeños (valores altos del número de Reynolds o Reynolds magnético). Por otra parte, como el sistema (A1.5) se resuelve hasta una precisión finita en cada paso de tiempo pueden acumularse errores en la solución después de muchos pasos.

La velocidad de convergencia se puede mejorar considerablemente usando una relajación de tipo Gauss-Seidel en combinación con un método iterativo más sofisticado conocido como Multigrilla o, en su versión no lineal, como FAS (del inglés "Full Approximation Storage") (Briggs, 1987; Press et al., 1992). La idea básica consiste en resolver el problema en una sucesión de grillas de distinto tamaño. Primero se obtiene una solución aproximada en la grilla original usando el método de Gauss-Seidel. El siguiente paso, que se llama de restricción, consiste en pasar la solución a una grilla con menos puntos y resolver el problema en la nueva grilla. Este proceso continua hasta llegar a la grilla más pequeña, a partir de donde se lleva a cabo el procedimiento inverso, o de prolongación, hasta volver a la grilla original. El ciclo completo se repite hasta lograr la convergencia. Con este método se obtiene la solución de un sistema como (A1.4) en un tiempo mucho menor que usando Gauss-Seidel solamente.

Sin embargo, las dificultades de convergencia para valores altos del número de Reynolds y Reynolds magnético persisten en el método de Multigrilla. Si el problema original depende explícitamente del tiempo la convergencia se puede mejorar usando valores pequeños de Δt , lo que a su vez prolonga el tiempo de cálculo. Una alternativa que permite utilizar pasos de tiempo más largos consiste en resolver las ecuaciones usando relajación local (Botta & Veldmann, 1981) en lugar de una relajación de tipo Gauss-Seidel. En los métodos de relajación local la aproximación k-ésima a la solución (donde k es el número de iteración) se calcula a partir de la fórmula

$$\phi_{m,k} = \sigma_m \phi_{m,k}^* + (1 - \sigma_m) \phi_{m,k-1}, \quad (A1.7)$$

donde $\phi_{m,k}^*$ es el valor de Gauss-Seidel y σ_m es el parámetro de relajación, que puede variar de un punto de la grilla a otro. Cuando $\sigma_m=1$ se obtiene nuevamente el método de Gauss-Seidel, mientras que $\sigma_m>1$ corresponde a un método con sobre-relajación (Press et al., 1992). En problemas altamente no lineales la convergencia se logra solamente para $\sigma_m<1$, es decir con subrelajación.

La acumulación de errores en la solución después de muchos pasos de tiempo se puede mitigar usando el procedimiento correctivo de Hirt & Harlow (1967). Esta técnica permite resolver sistemas de ecuaciones en forma iterativa con un criterio de convergencia “blando” que reduce notablemente el tiempo de cálculo.

A.1.3 Aplicaciones del método numérico a problemas hidrodinámicos.

Los métodos numéricos descriptos se probaron inicialmente en la solución de problemas hidrodinámicos dependientes del tiempo. Las ecuaciones para un flujo incompresible plano se pueden escribir de la forma

$$\frac{\partial \omega_z}{\partial t} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \omega_z}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \omega_z}{\partial y} = \frac{1}{R_e} \nabla^2 \omega_z, \quad (\text{A1.8})$$

$$\nabla^2 \xi = -\omega_z, \quad (\text{A1.9})$$

donde $\xi = \xi(x, y, t)$ es la función de corriente y $\omega_z = \omega_z(x, y, t)$ es la vorticidad. El flujo de un líquido viscoso dentro de una cavidad cuadrada, cuya pared superior se desliza a una velocidad constante mientras las restantes permanecen fijas, es un problema clásico de la física computacional y se utiliza muy a menudo para probar métodos numéricos nuevos (Nguyen, Paik & Chung, 1993; Hou et al., 1995). Usando una computadora HP Apollo 750 se obtuvieron, en tiempos de cálculo muy razonables, resultados de fineza similar a los trabajos publicados en las principales revistas científicas.

La fig. 47 muestra las líneas de corriente correspondientes a un flujo con $R_e = 7000$, calculado usando una grilla numérica de 257×257 puntos. Las estructuras del flujo, vórtices secundarios, separación de la pared y re-adherencia (“reattachment”) están enfatizadas localmente con una mayor densidad de líneas de corriente. El flujo se separa en varias regiones con líneas de corrientes cerradas, donde la vorticidad es aproximadamente uniforme (Batchelor, 1956). En forma complementaria, se estudió la evolución de un campo magnético B_z normal al movimiento anterior para distintos valores del número de Reynolds magnético R_m . Se puede demostrar que el campo magnético también es aproximadamente uniforme en las regiones donde las líneas de corriente son cerradas, cuando R_m es grande. Esto corresponde a la extensión magnetohidrodinámica del teorema de Batchelor para la vorticidad.

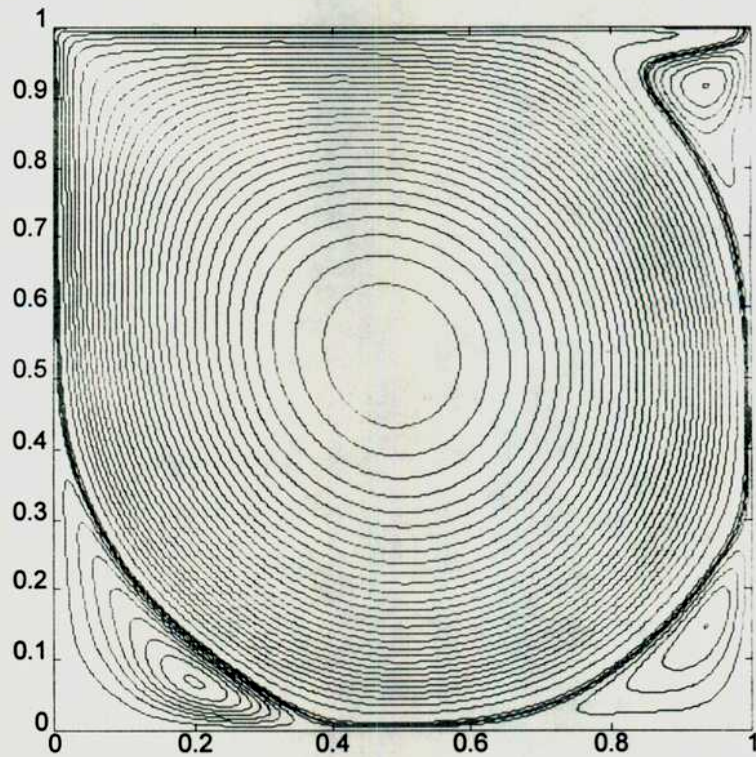


Figura 47. Flujo en una cavidad cuadrada: líneas de corriente para $R_e=7000$.

La experiencia adquirida a partir de la solución de problemas hidrodinámicos se utilizó en el desarrollo de códigos numéricos para resolver las ecuaciones magnetohidrodinámicas que aparecen en esta tesis (configuraciones de aniquilación magnética en una dimensión y de reconexión magnética en dos dimensiones).

A.2 Aniquilación magnética en una dimensión y el tiempo.

Las ecs. (11.7)-(11.8) correspondientes a flujos planos ($s=0$) se resolvieron en el intervalo finito $-h_0 \leq y \leq h_0$ usando una grilla de N puntos. Las ecuaciones discretas para una grilla uniforme, escritas en las variables adimensionales $t \rightarrow tU/h_0$, $y \rightarrow y/h_0$, $f \rightarrow f/U$, $B \rightarrow B/B_0$, $T \rightarrow T/T_0$, donde $U=|f(h_0)|$ ($U=ah_0$ para $f=ay$), son

$$\frac{3B_j^{n+1} - 4B_j^n + B_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{R_m \Delta y^2} (T_a^{-3/2} B_{j+1}^{n+1} + T_b^{-3/2} B_{j-1}^{n+1} - (T_a^{-3/2} + T_b^{-3/2}) B_j^{n+1}) + \frac{1}{2\Delta y} (f_{j+1} B_{j+1}^{n+1} - f_{j-1} B_{j-1}^{n+1}), \quad (\text{A2.1})$$

$$\frac{3T_j^{n+1} - 4T_j^n + T_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{P_e \Delta y^2} (\Omega_a T_{j+1}^{n+1} + \Omega_b T_{j-1}^{n+1} - (\Omega_a + \Omega_b) T_j^{n+1}) + \frac{f_j}{2\Delta y} (T_{j+1}^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}) + \frac{\varepsilon}{R_m} (T_j^{n+1})^{-3/2} \frac{(B_{j+1}^{n+1} - B_{j-1}^{n+1})^2}{2\Delta y^2}, \quad (\text{A2.2})$$

$$T_a = \frac{1}{2} (T_{j+1}^{n+1} + T_j^{n+1}), \quad T_b = \frac{1}{2} (T_j^{n+1} + T_{j-1}^{n+1}), \quad (\text{A2.3})$$

$$B_a = \frac{1}{2} (B_{j+1}^{n+1} + B_j^{n+1}), \quad B_b = \frac{1}{2} (B_j^{n+1} + B_{j-1}^{n+1}), \quad (\text{A2.4})$$

$$\Omega_a = \frac{(T_a)^{5/2}}{1 + \gamma (B_a)^2 (T_a)^3}, \quad \Omega_b = \frac{(T_b)^{5/2}}{1 + \gamma (B_b)^2 (T_b)^3}, \quad (\text{A2.5})$$

donde $j=2, \dots, N$ y $\Delta y=2/(N-1)$. En estas ecuaciones no aparecen los términos correctivos de Hirt & Harlow (1967). Haciendo $\varepsilon=0$ se obtienen las soluciones para el caso con temperatura constante (ec. 4.1). Las condiciones de contorno correspondientes a una temperatura constante en $y=\pm h_0$ son $T_1=T_N=1$. Los valores de B_1 y B_N determinan distintas condiciones de inyección de flujo magnético (e.g. no simétrica). El caso $B_1=B_N=0$ corresponde a un sistema sin inyección de flujo magnético.

Para resolver mejor la delgada lámina de corriente que se forma como consecuencia del acoplamiento térmico, también se realizaron simulaciones usando una grilla no uniforme en la coordenada y . Esto se llevó a cabo haciendo el cambio de variable

$$y = \eta^2, \quad \text{para } y \geq 0, \eta \geq 0,$$

$$y = -\eta^2, \quad \text{para } y \leq 0, \eta \leq 0,$$

en (11.7)-(11.8). Las ecuaciones discretas para la nueva grilla (que es uniforme en la coordenada η) son

$$\frac{3B_j^{n+1} - 4B_j^n + B_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{4R_m \eta_j \Delta \eta^2} \left(\frac{T_a^{-3/2}}{\eta_a} B_{j+1}^{n+1} + \frac{T_b^{-3/2}}{\eta_b} B_{j-1}^{n+1} - \left(\frac{T_a^{-3/2}}{\eta_a} + \frac{T_b^{-3/2}}{\eta_b} \right) B_j^{n+1} \right) + \frac{1}{4\eta_j \Delta \eta} (f_{j+1} B_{j+1}^{n+1} - f_{j-1} B_{j-1}^{n+1}), \quad (\text{A2.6})$$

$$\frac{3T_j^{n+1} - 4T_j^n + T_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{4P_e \eta_j \Delta \eta^2} \left(\frac{\Omega_a}{\eta_a} T_{j+1}^{n+1} + \frac{\Omega_b}{\eta_b} T_{j-1}^{n+1} - \left(\frac{\Omega_a}{\eta_a} + \frac{\Omega_b}{\eta_b} \right) T_j^{n+1} \right) + \frac{f_j}{4\eta_j \Delta \eta} (T_{j+1}^{n+1} - T_{j-1}^{n+1}) + \frac{2\varepsilon}{4\eta_j^2 R_m \Delta \eta^2} (T_j^{n+1})^{-3/2} (B_{j+1}^{n+1} - B_{j-1}^{n+1})^2 \quad (\text{A2.7})$$

donde $\Delta\eta=2/(N-1)$, $\eta_a=(\eta_{j+1}+\eta_j)/2$ y $\eta_b=(\eta_j+\eta_{j-1})/2$.

Las ecuaciones para flujos con simetría axial ($s=1$) se resolvieron en el intervalo $0 \leq r \leq h_0$ usando grillas uniformes y no uniformes. Las ecuaciones discretizadas correspondientes son análogas a (A2.1)-(A2.7). Las condiciones de contorno para el campo magnético y la temperatura también son similares, pero incluyen además la condición de simetría $\partial B/\partial r = \partial T/\partial r = 0$ en $r=0$.

A.3 Flujos incompresibles planos.

Las simulaciones numéricas de flujos magnetohidrodinámicos incompresibles en dos dimensiones se realizaron sobre una grilla cartesiana uniforme con $M \times N$ puntos, definida entre $0 \leq x \leq L$ y $-h \leq y \leq h$. Las ecuaciones discretas correspondientes a (10.8)-(10.10), escritas en las variables adimensionales definidas en el la sección 10.3, son

$$\frac{3\omega_{i,j}^{n+1} - 4\omega_{i,j}^n + \omega_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{S_v} \frac{(\omega_{i+1,j}^{n+1} + \omega_{i-1,j}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1})}{\Delta x^2} + \frac{1}{S_v} \frac{(\omega_{i,j+1}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1} - 2\omega_{i,j}^{n+1})}{\Delta y^2} - \frac{(\xi_{i,j+1}^{n+1} - \xi_{i,j-1}^{n+1})(\omega_{i+1,j}^{n+1} - \omega_{i-1,j}^{n+1})}{4\Delta x\Delta y} + \frac{(\xi_{i+1,j}^{n+1} - \xi_{i-1,j}^{n+1})(\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1})}{4\Delta x\Delta y} + 2F_{i,j}^n - F_{i,j}^{n-1}, \quad (A3.1)$$

$$\frac{3\psi_{i,j}^{n+1} - 4\psi_{i,j}^n + \psi_{i,j}^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{S} \frac{(\psi_{i+1,j}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1})}{\Delta x^2} + \frac{1}{S} \frac{(\psi_{i,j+1}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1} - 2\psi_{i,j}^{n+1})}{\Delta y^2} - \frac{(\xi_{i,j+1}^{n+1} - \xi_{i,j-1}^{n+1})(\psi_{i+1,j}^{n+1} - \psi_{i-1,j}^{n+1})}{4\Delta x\Delta y} + \frac{(\xi_{i+1,j}^{n+1} - \xi_{i-1,j}^{n+1})(\psi_{i,j+1}^{n+1} - \psi_{i,j-1}^{n+1})}{4\Delta x\Delta y}, \quad (A3.2)$$

$$\xi_{i,j}^{n+1} = \frac{1}{2} \frac{(\xi_{i+1,j}^{n+1} + \xi_{i-1,j}^{n+1} + h^2\xi_{i,j+1}^{n+1} + h^2\xi_{i,j-1}^{n+1} + \Delta x^2\omega_{i,j}^{n+1})}{(1+h^2)}, \quad (A3.3)$$

donde $i=2, \dots, M-1$, $j=2, \dots, N-1$, $\Delta x=x_s/(M-1)$, $\Delta y=2/(N-1)$ y $h=\Delta x/\Delta y$. Los términos $F_{i,j}$ en (A3.1) representan las aproximaciones de segundo orden al término $[\nabla^2 \psi, \psi]$. La vorticidad en los contornos se calculó usando las fórmulas

$$\omega_{i,j}^{n+1} = 0, \\ \omega_{M,j}^{n+1} = -\frac{(\xi_{M,j+1}^{n+1} + \xi_{M,j-1}^{n+1} - 2\xi_{M,j}^{n+1})}{\Delta y^2},$$

$$\omega_{i,1}^{n+1} = -\frac{(\xi_{i+1,1}^{n+1} + \xi_{i-1,1}^{n+1} - 2\xi_{i,1}^{n+1})}{\Delta x^2} - \frac{2(\xi_{i,2}^{n+1} - \xi_{i,1}^{n+1} - \Delta y \partial_y \xi)_{i,1}}{\Delta y^2},$$

$$\omega_{i,N}^{n+1} = -\frac{(\xi_{i+1,N}^{n+1} + \xi_{i-1,N}^{n+1} - 2\xi_{i,N}^{n+1})}{\Delta x^2} - \frac{2(\xi_{i,N-1}^{n+1} - \xi_{i,N}^{n+1} - \Delta y \partial_y \xi)_{i,N}}{\Delta y^2}. \quad (\text{A3.4})$$

El valor de la función de corriente en los contornos se fijó de antemano, mientras que para la función de flujo magnético ψ se utilizaron las expresiones

$$\psi_{i,1}^{n+1} = \psi_{i,1}^0 - E_-(n+1)\Delta t,$$

$$\psi_{i,N}^{n+1} = \psi_{i,N}^0 - E_+(n+1)\Delta t,$$

$$\psi_{0,j}^{n+1} = \psi_{2,j}^{n+1} \text{ (en (A3.2) con } i=1),$$

$$\psi_{M+1,j}^{n+1} = 2\psi_{M,j}^{n+1} - \psi_{M-1,j}^{n+1} \text{ (en (A3.2) con } i=M). \quad (\text{A3.5})$$

A.4 Aniquilación magnética en flujos compresibles.

Las ecs. (12.1)-(12.6) se resolvieron usando una grilla uniforme de N puntos definida entre $-1 \leq y \leq 1$. Las ecuaciones discretas correspondientes son

$$\frac{3n_j^{n+1} - 4n_j^n + n_j^{n-1}}{2\Delta t} = -n_j^{n+1}\varphi_j^{n+1} + \frac{(n_{j+1}^{n+1}f_{j+1}^{n+1} - n_{j-1}^{n+1}f_{j-1}^{n+1})}{2\Delta y}, \quad (\text{A4.1})$$

$$\frac{3n_j^{n+1}\varphi_j^{n+1} - 4n_j^n\varphi_j^n + n_j^{n-1}\varphi_j^{n-1}}{2\Delta t} = -2n_j^{n+1}(\varphi_j^{n+1})^2 + \frac{(n_{j+1}^{n+1}\varphi_{j+1}^{n+1}f_{j+1}^{n+1} - n_{j-1}^{n+1}\varphi_{j-1}^{n+1}f_{j-1}^{n+1})}{2\Delta y} +$$

$$+ G_a n_j^{n+1} + \frac{1}{R_e} \frac{(\varphi_{j+1}^{n+1} + \varphi_{j-1}^{n+1} - 2\varphi_j^{n+1})}{\Delta y^2}, \quad (\text{A4.2})$$

$$\frac{3n_j^{n+1}f_j^{n+1} - 4n_j^n f_j^n + n_j^{n-1}f_j^{n-1}}{2\Delta t} = -n_j^{n+1}\varphi_j^{n+1}f_j^{n+1} + \frac{(n_{j+1}^{n+1}(f_{j+1}^{n+1})^2 - n_{j-1}^{n+1}(f_{j-1}^{n+1})^2)}{2\Delta y} +$$

$$+ \frac{1}{M^2} \frac{(n_{j+1}^{n+1}T_{j+1}^{n+1} - n_{j-1}^{n+1}T_{j-1}^{n+1})}{2\Delta y} + \frac{4}{3R_e} \frac{(f_{j+1}^{n+1} + f_{j-1}^{n+1} - f_j^{n+1})}{\Delta y^2} -$$

$$- \frac{1}{3R_e} \frac{(\varphi_{j+1}^{n+1} - \varphi_{j-1}^{n+1})}{2\Delta y} + \frac{1}{M_a^2} \frac{((B_{j+1}^{n+1})^2 - (B_{j-1}^{n+1})^2)}{4\Delta y}, \quad (\text{A4.3})$$

$$\frac{3B_j^{n+1} - 4B_j^n + B_j^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{R_m \Delta y^2} (T_a^{-3/2} B_{j+1}^{n+1} + T_b^{-3/2} B_{j-1}^{n+1} - (T_a^{-3/2} + T_b^{-3/2}) B_j^{n+1}) +$$

$$+ \frac{(f_{j+1}^{n+1} B_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1} B_{j-1}^{n+1})}{2\Delta y}, \quad (\text{A4.4})$$

$$\begin{aligned} \frac{3n_j^{n+1} T_j^{n+1} - 4n_j^n T_j^n + n_j^{n-1} T_j^{n-1}}{2\Delta t} &= \frac{1}{P_e \Delta y^2} (\Omega_a T_{j+1}^{n+1} + \Omega_b T_{j-1}^{n+1} - (\Omega_a + \Omega_b) T_j^{n+1}) + \\ &+ \frac{(n_{j+1}^{n+1} f_{j+1}^{n+1} T_{j+1}^{n+1} - n_{j-1}^{n+1} f_{j-1}^{n+1} T_{j-1}^{n+1})}{2\Delta y} + \frac{1}{3} n_j^{n+1} T_j^{n+1} \frac{(f_{j+1}^{n+1} - f_{j-1}^{n+1})}{\Delta y} - \\ &- \frac{5}{3} n_j^{n+1} \varphi_j^{n+1} T_j^{n+1} + \frac{\varepsilon}{R_m} (T_j^{n+1})^{-3/2} \frac{(B_{j+1}^{n+1} - B_{j-1}^{n+1})^2}{2\Delta y^2}, \quad (\text{A4.5}) \end{aligned}$$

donde los valores de $T_{a,b}$, $\Omega_{a,b}$ están dados por (A2.3)-(A2.5), $j=2,\dots,N-1$ y $\Delta y=2/(N-1)$. Las condiciones de contorno son $n_1 f_1 = -n_N f_N = 1$, $\varphi_1 = \varphi_N = 1 - M^2$, $T_1 = T_N = 1$. Los valores (fijos) de B_1 y B_N determinan la inyección de flujo magnético.

A.5 Cálculo de autovalores mediante métodos matriciales con diferencias finitas.

La aplicación del método de diferencias finitas para el cálculo de autovalores se puede ilustrar considerando el problema definido en el intervalo $0 \leq z \leq 1$ por las ecuaciones

$$\begin{aligned} p''(z) &= \lambda p(z) \\ p(0) &= p(1) = 0, \end{aligned} \quad (\text{A5.1})$$

El primer paso consiste en definir la grilla numérica, formada por los puntos

$$z_j = jh \quad j = 0, 1, \dots, N$$

donde $h=1/N$. El valor de la función $p(z)$ en el punto z_j se representa por $p_j = p(z_j)$.

Usando una aproximación de segundo orden para la segunda derivada, $p''_j = (p_{j+1} + p_{j-1} - 2p_j) + O(h^2)$ (Fletcher, 1988), se obtiene el siguiente problema matricial de autovalores:

$$\frac{1}{h^2} \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & & \\ 1 & -2 & 1 & 0 & \dots & \\ 0 & 1 & -2 & 1 & \dots & \\ \vdots & & & & & \\ 0 & & & & 1 & -2 & 1 \\ 0 & & & & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{j-1} \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_{j-1} \end{bmatrix}. \quad (\text{A5.2})$$

donde se han aplicado las condiciones de contorno $p_0=p_N=0$. El problema original (A1.1) se reduce entonces a encontrar los autovalores de la matriz en (A5.2) usando el método QR para matrices, que también proporciona los autovectores correspondientes (Press et al., 1992).

Un esquema de este tipo fue utilizado por Gary & Helgason (1970) para estudiar la estabilidad lineal del flujo de Poiseuille plano (ecuación de Orr-Sommerfeld). En este problema las condiciones de contorno sobre las derivadas de la función de corriente se discretizaron agregando nodos ‘ficticios’ a la grilla numérica. El procedimiento da lugar a un problema de autovalores generalizado del tipo

$$A\phi=cB\phi \quad (A5.3)$$

donde B es una matriz singular. Para poder utilizar el método QR es necesario reducir el problema a la forma estándar

$$A'(\alpha,R)\phi=c\phi$$

donde los autovalores de A' son los mismos del problema original. Una forma de llevar a cabo dicha reducción se describe en el trabajo de Gary & Helgason.

La ventaja más importante de los métodos matriciales en relación con los métodos de integración a partir de valores iniciales (“shooting”) es que no requieren una estimación inicial para los autovalores. La precisión de los autovalores y autovectores obtenidos depende de mucho factores: el número de puntos de la grilla, el valor de los parámetros adimensionales del problema, el tipo de discretización (diferencias centradas, diferencias no centradas), el orden de las aproximaciones discretas, la forma de la grilla numérica y la precisión aritmética del cálculo. Uno de los mayores problemas asociados con el método QR es la aparición de modos espurios. Estos modos son puramente numéricos y se deben a la discretización del problema original. En general los autovalores asociados a los modos espurios varían mucho con el tamaño de la grilla, por lo que se pueden detectar repitiendo el cálculo con grillas más refinadas.

A.5.1 Solución numérica de las ecuaciones perturbativas.

El problema de autovalores para $p=\lambda/a$ determinado por las ecuaciones (10.2)-(10.3) se resolvió usando un método matricial con diferencias finitas donde los operadores diferenciales se transforman en matrices. Definiendo una grilla uniforme de

N puntos entre $-y_{\max} < y < y_{\max}$ se tiene que $y_j = j\Delta y$ ($j=1, \dots, N$), donde $\Delta y = 2y_{\max}/N$. Sobre esta grilla se definen los vectores

$$\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, \dots, v_N)^T, \quad \mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3, \dots, B_N)^T, \quad (\text{A5.4})$$

formados por los valores de la velocidad y del campo magnético perturbativos.

Los operadores diferenciales se discretizan utilizando aproximaciones de segundo orden para las derivadas, de forma tal que se transforman en las matrices

$$\mathbf{D} \rightarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & -1 & 0 & 1 \\ & & & & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{N} \rightarrow k^2 \mathbf{I} - \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & -2 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & 1 & -2 & 1 \\ & & & & 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad (\text{A5.5})$$

donde se han usado las siguientes condiciones de contorno para las perturbaciones: $v_0 = v_{N+1} = B_0 = B_{N+1} = 0$ ($v_{1y}(\pm y_{\max}) = B_{1y}(\pm y_{\max}) = 0$). A partir de esta discretización las ecs. (10.2)-(10.3) se transforman en el siguiente sistema matricial

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P} & \mathbf{Q} \\ \mathbf{R} & \mathbf{S} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix} = p \begin{pmatrix} \mathbf{v} \\ \mathbf{B} \end{pmatrix}, \quad (\text{A5.6})$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \mathbf{N}^{-1} \mathbf{D} \mathbf{y} \mathbf{N} - \mathbf{P}_m \mathbf{N} - ik \mathbf{S} \mathbf{M}_a (\mathbf{N}^{-1} \mathbf{W} \mathbf{N} + \mathbf{N}^{-1} \mathbf{W}''), \\ \mathbf{Q} &= -k \mathbf{S} (\mathbf{N}^{-1} \beta \mathbf{N} + \mathbf{N}^{-1} \beta''), \quad \mathbf{R} = k \mathbf{S} \beta, \\ \mathbf{S} &= \mathbf{y} \mathbf{D} - \mathbf{I} - \mathbf{N} - ik \mathbf{S} \mathbf{M}_a \mathbf{W}, \end{aligned}$$

son matrices complejas de $N \times N$ elementos. Las matrices \mathbf{y} , \mathbf{W} , \mathbf{W}'' , β , β'' son estrictamente diagonales y se forman a partir de los valores de las funciones en los puntos de la grilla numérica, e.g.

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & y_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & 0 & y_{N-1} & 0 \\ & & & 0 & & y_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & W_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & 0 & W_{N-1} & 0 \\ & & & & 0 & W_N \end{bmatrix}, \quad (\text{A5.7})$$

y así sucesivamente. Los autovalores p se obtienen diagonalizando la matriz en (A5.6) usando el método QR.

En los cálculos llevados a cabo con una grilla uniforme se observa la aparición de inestabilidades numéricas para valores pequeños de \mathbf{P}_m . Por otra parte, cuando el

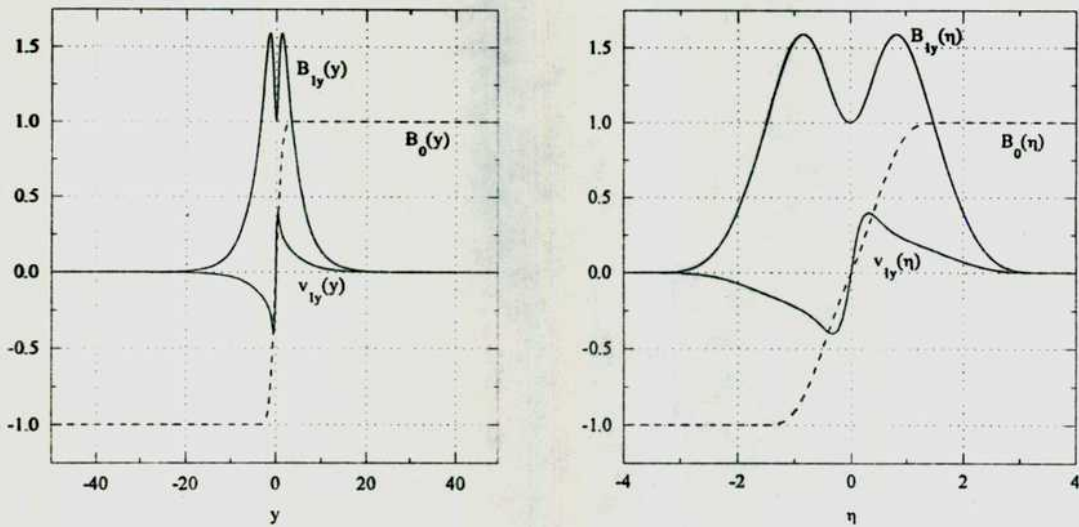


Figura 48. Autofunciones correspondientes a $p=2.34$ ($k=0.3$, $S=100$, $P_m=10^{-5}$, $M_A=0$).

valor de S es muy grande los resultados se vuelven imprecisos, ya que la grilla numérica no puede resolver adecuadamente las fuertes variaciones espaciales que aparecen en las autofunciones. Las inestabilidades numéricas asociadas a valores pequeños de la viscosidad se pueden eliminar usando diferencias no centradas para discretizar el operador D (Peyret & Taylor, 1983). En cambio, para poder resolver los gradientes espaciales de las autofunciones es necesario la introducción de una grilla no uniforme.

La elección de la forma de la grilla depende del problema particular que se está estudiando. En este caso, donde no existen contornos físicos que limiten la región del flujo (como ocurre en el flujo de Poiseuille), es conveniente utilizar una grilla definida por el cambio de variable

$$\begin{aligned} y &= e^\eta - 1 & (y \geq 0, \eta \geq 0), \\ y &= 1 - e^{-\eta} & (y \leq 0, \eta \leq 0). \end{aligned} \quad (\text{A5.8})$$

Las ecuaciones (10.2)-(10.3) se escriben en términos de la nueva variable η y se discretizan sobre una grilla numérica definida entre $-\eta_{\max} < \eta < \eta_{\max}$, que es uniforme en η . La forma de los operadores matriciales en la nueva variable se obtienen fácilmente a partir de los operadores originales, multiplicando por matrices diagonales que representen los factores de escala introducidos por el cambio de coordenadas. Por ejemplo, como

$$\frac{\partial}{\partial y} = e^{-\eta} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (\eta \geq 0),$$

el operador matricial D_η , correspondiente a la derivada primera en términos de la variable η , se obtiene multiplicando el operador D por una matriz diagonal de la forma

$$D_\eta = \begin{bmatrix} e^{-\eta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-\eta_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & 0 & e^{-\eta_{N-1}} & 0 \\ & & & & 0 & e^{-\eta_N} \end{bmatrix} D \quad (\eta \geq 0), \quad (A5.9)$$

Asimismo, la segunda derivada se transforma en

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = e^{-2\eta} \left(\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \frac{\partial}{\partial \eta} \right) \quad (\eta \geq 0),$$

por lo que el nuevo operador N_η es

$$N_\eta = k^2 I - \begin{bmatrix} e^{-2\eta_1} & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & e^{-2\eta_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & \ddots & & 0 \\ & & & 0 & e^{-2\eta_{N-1}} & 0 \\ & & & & 0 & e^{-2\eta_N} \end{bmatrix} (k^2 I - N - D) \quad (\eta \geq 0). \quad (A5.10)$$

El efecto de la grilla no uniforme (en la variable y) se muestra en la fig. 48, donde se grafican las autofunciones de la velocidad y del campo magnético como función de la coordenada original y de la coordenada estirada η . Con la grilla no uniforme se obtiene una buena resolución de las autofunciones usando relativamente pocos puntos.

Referencias.

- Abramowitz, M., Stegun, I. A. (1972). Handbook of mathematical functions. Dover Publications, Inc., New York.
- Anderson, C., Priest, E.R. (1993). Time-dependent magnetic annihilation at a stagnation point. *J. Geophys. Res.*, **98**, 19395-19407.
- Batchelor, G. K. (1956). *J. Fluid Mech.*, **1**, 177-190.
- Batchelor, G. K. (1967) An introduction to fluid dynamics. Cambridge University Press.
- Bender, L. E. (1991). Flujos magnetohidrodinámicos disipativos con un punto de estancamiento y una capa de corriente, generados por inyección del fluido o movimiento de los contornos. Tesis de Licenciatura, Departamento de Física, Universidad de Buenos Aires.
- Bender, L. E., Gratton, F. T. (1994). Thermal enhancement of energy dissipation in the evolution of current sheets. Proc. VI Latin American Workshop on Plasma Physics, Oct. 31-Nov. 4, 1994, Foz do Iguaçu, Brazil, 13-16.
- Bender, L. E., Gratton, F. T., Galvão, R. M. (1996). Efecto de una configuración de Kelvin-Helmholtz sobre la inestabilidad 'tearing' de láminas de corriente forzadas por flujos de estancamiento, *Anales de la Asociación de Física Argentina*, en prensa.
- Besser, B. P., Biernat, H. K., Rijnbeek, R. P. (1990). Planar mhd stagnation-point flows with velocity shear. *Planet. Space Sci.*, **38**, 411-418.
- Biskamp, D. (1986). Magnetic reconnection via current sheets. *Phys. Fluids*, **29**, 1520-1531.
- Biskamp, D. (1994). Nonlinear magnetohydrodynamics. Cambridge University Press.
- Bostick, W. H., Nardi, V., Prior, W. (1971). Similarities between solar flares and laboratory hot plasma phenomena. *Cosmic Plasma Physics*, K. Schindler ed., Plenum, New York.
- Bostick, W. H., Nardi, V., Prior, W. (1972). X-ray fine structure of dense plasmas in a co-axial accelerator. *J. Plasma Phys.*, **8**, 7-20.
- Botta, E. F. F., Veldman, A. E. P. (1981). On local relaxation methods and their application to convection-diffusion equations. *J. Comput. Phys.*, **48**, 127-149.
- Braginskii, S. I. (1965). Transport processes in a plasma. *Reviews of Plasma Physics* (Vol. I), Consultants Bureau, New York.

- Briggs, W. L. (1987). *A multigrid tutorial*. SIAM.
- Carnahan, B., Luther, H. A., Wilkes, J. D. (1969). *Applied numerical methods*. John Wiley & Sons, Inc.
- Choi, P., Aliaga-Rossel, R., Dumitrescu-Zoita, C., Deeney, C. (1993). Dynamics of hot spots formations in a dense plasma focus: optical and x-ray observation. Proc. 3rd Int. Conf. in Dense Z-Pinches, London.
- Clark, A. (1964). Production and dissipation of magnetic energy from differential fluid motions. *Phys. Fluids*, 7, 1299-1305.
- Drazin P. G., Reid W. H. (1981). *Hydrodynamic stability*. Cambridge University Press.
- Farrugia, C. J., Freeman, M.P., Cowley, S. W. H., Southwood, D. J. (1989). Plasma-driven magnetopause motions and attendant response on the ground. *Planet. Space Sci.*, 37, 589-607.
- Fletcher, C. A. J. (1988). *Computational techniques for fluid dynamics 1*. Springer Series in Computational Physics, Springer-Verlag, New York.
- Forbes, T. G. (1982). Implosion of a uniform current sheet in a low beta plasma. *J. Plasma Phys.*, 27, 491-505.
- Forbes, T. G., Priest, E. R. (1987). A comparison of analytical and numerical models for steadily driven reconnection. *Rev. Geophys.*, 25, 1587-1607.
- Forbes, T. G., Priest, E. R., Hood, A. W. (1982). Evolution of current sheets following the onset of enhanced resistivity. *J. Plasma Phys.*, 27, 157-176.
- Furth, H. P., Killeen, J., Rosenbluth, M. N. (1963). Finite resistivity instabilities in a sheet pinch. *Phys. Fluids*, 6, 459-484.
- Gary, J., Helgason, R. (1970). A matrix method for ordinary differential eigenvalue problems. *J. Comput. Phys.*, 5, 169-187.
- Gnavi, G., Gratton, F. T., Bender, L. (1994). Mathematical modelling of the formation of hot spots in a coaxial electrical discharge. Proc. Seventh European Conference on Mathematics in Industry, March 2-6, Montecatini, Terme, Italy, 1993, A. Fasano and M. Primicerio eds., 225-232, B.G. Teubner, Stuttgart.
- Gratton, F. T., Bender, L. (1991). A survey of mhd flows in bounded systems, en *Current Research on Fusion, Laboratory and Astrophysical Plasmas*, S. Kuhn, K. Schöpf & R. Schrittwieser eds., 155-179, World Scientific, Singapore.

Gratton, F. T., Bender, L. (1993). Fast energy dissipation in an axial symmetric mhd flow, en *Current Topics in Astrophysical and Fusion Plasma Research*, M.F. Heyn, W. Kembichler and H.K. Biernat eds., 302-305, dvb-Verlag, Graz.

Gratton F. T., Bender, L., Gnani. G. (1994). Fast dissipation of magnetic fields by plasma motions, en *The Solar-Wind-Magnetosphere System*, H.K. Biernat, G.A. Bachmaier, S.J. Bauer and R.J. Rijnbeek eds., 335-341, Austrian Academy of Sciences Press, Viena.

Gratton F. T., Bender, L., Gnani. G. (1996). Fast mhd dissipative processes. *Brazilian Jour. Phys.*, 26 (3), 637-676.

Gratton, F. T., Gnani, G., Bender, L. (1992). Development of strongly dissipative mhd structures. *IEEE Trans. Plasma Science*, 20 (6), 882-890.

Gratton, F. T., Gnani, G., Heyn, M. F., Biernat, H. K., Rijnbeek, R. P. (1990). Pressure drive and viscous dragging: a reply. *J. Geophys. Res.*, 95, 261-263.

Gratton, F. T., Heyn, M. F. (1989). The reduced equations of dissipative incompressible magnetohydrodynamics and some of their exact integrals. Technical Report IWF8903, Institut für Weltraumforschung, Graz.

Gratton, F. T., Heyn, M. F., Biernat, H. K., Rijnbeek, R. P., Gnani, G. (1988). Mhd stagnation point flows in the presence of resistivity and viscosity. *J. Geophys. Res.*, 93, 7318-7324.

Gratton, F. T., Krasnopolsky, R. (1994). Stability of current sheets: finite dimensional approximations to the spectrum, en *The Solar-Wind-Magnetosphere System*, H.K. Biernat, G.A. Bachmaier, S.J. Bauer and R.J. Rijnbeek eds., 343-357, Austrian Academy of Sciences Press, Viena.

Hirt, C. W., Harlow, F. H. (1967). A general corrective procedure for the numerical solution of initial-value problems. *J. Comput. Phys.*, 2, 114-119.

Hou, S., Qisu, Z., Shiyi, C., Doolen, G., Cogley, A. C. (1995). Simulation of cavity flow by the lattice Boltzmann method. *J. Comput. Phys.*, 118 (2), 329-347.

Jardine, M., Allen, H. R., Grundy, R. E. (1993). Three-dimensional magnetic field annihilation. *J. Geophys. Res.*, 98 (11), 19409-19417.

Jardine, M., Priest, E. R. (1990). Energetics of compressible models of fast steady-state reconnection. *J. Plasma Phys.*, 43, 141-150.

Jin, S. P., Ip, W. H. (1991). Two-dimensional compressible magnetohydrodynamic simulation of the driven reconnection process. *Phys. Fluids B*, 3 (8), 1927-1936.

- Kuzma, D. C., Maki, E. R., Donnelly, R. S. (1964). The magnetohydrodynamic squeeze flow. *J. Fluid Mech.*, **19**, 395-401.
- Machado, M. E., Emslie, A. G., Ong, K. K., Fishman, G. J., Paciesas, W. S. (1997). Fundamental temporal structures in solar hard x-rays. (no publicado).
- Machado, M. E., Moore, R. L., Hernández, A. M., Rovira, M. G., Hagyard, M. J., Smith, J. B. (1988). The observed characteristics of flare energy release. I. Magnetic structures at the energy release site. *Astrophys. J.*, **326**, 425-450.
- Moffat, H. K. (1978). Magnetic field generation in electrically conducting fluids. Cambridge University Press, London.
- Nardi, V., Bortolotti, A., Brzosko, J. S., Esper, M., Luo, C. M., Pedrielli, F., Powell, C., Zeng, D. (1988). Stimulated acceleration and confinement of deuterons in focused discharges. *IEEE Trans. Plasma Sci.*, **16** (3), 368-378.
- Nardi, V., Bostick, W. H., Feugeas, J., Prior, W. (1980). Internal structure of electron-beam filaments. *Physical Rev. A*, **22**, 2211-2217.
- Nardi, V., Bostick, W. H., Prior, W. (1973). Magnetic fields higher than 100 MGauss produced in the current sheath of a co-axial accelerator. *Physique sous Champs Magnetiques Intenses, Colloques Internationaux*, Vol. 242, CNRS, France, 129-138.
- Nardi, V., Brzosko, J. S. (1989) Neutron Radiography Workshop, Los Alamos. LANL-11393-C Suppl. UC4143, Los Alamos Natl. Lab.
- Nguyen H. D., Paik S., Chung J. N. (1993). Application of vorticity integral conditioning to Chebyshev pseudospectral formulation for the Navier-Stokes equations. *J. Comput. Phys.*, **106**, 115-124.
- Ofman L., Chen X. L., Morrison P. J., Steinolfson R. S. (1991). Resistive tearing mode instability with shear flow and viscosity. *Phys. Fluids B* **3**, 6, 1364-1373.
- Parker, E. N. (1963). The solar flare phenomenon and the theory of reconnection and annihilation of magnetic fields. *Astrophys. J., Suppl. Ser.*, **8**, 177-212.
- Parker, E. N. (1994). Spontaneous current sheets in magnetic fields. Oxford University Press.
- Parker, E. N. (1997). Spontaneous current sheets and stellar x-ray emission. *Plasma Phys. Control Fusion*, **39**, A9-A14.
- Peyret, R., Taylor, T. D. (1983). Computational methods for fluid flow. Springer-Verlag.

- Phan, T. D., Sonnerup B. U. Ö. (1990). Mhd stagnation-point flows at a current sheet including viscous and resistive effects: general two-dimensional solutions. *J. Plasma Phys.* **44** (3), 525-546.
- Phan, T. D., Sonnerup B. U. Ö. (1991). Resistive tearing-mode instability in a current sheet with equilibrium viscous stagnation-point flow. *J. Plasma Phys.* **46**, 3, 407-421.
- Press, W. H., Teukolsky, S. A., Vetterling, W. T., Flannery, B. P. (1992). Numerical recipes. Cambridge University Press.
- Priest, E. R. (1982). Solar magnetohydrodynamics. D. Reidel, Holland.
- Priest, E. R. (1985). The magnetohydrodynamics of current sheets. *Rev. Prog. Phys.*, **48**, 995-1090.
- Priest, E. R. (1995). The sun and its magnetohydrodynamics, en *Introduction to Space Physics*, Kivelson, M. G., Russell, C. T., eds., Cambridge Univ. Press.
- Rager, J. P. (1982). The plasma focus, en *Unconventional Approaches to Fusion*, B. Brunelli & G. Leotta, eds., Plenum, New York.
- Rheinboldt, W. C. (1974). Methods for solving systems of nonlinear equations. SIAM.
- Rijnbeek, R. P., Biernat, H. K., Heyn M. F., Semenov, V. S., Farrugia, C. J., Southwood, D. J., Paschmann, G., Sckopka, N., Russell, C. T. (1989). The structure of the reconnection layer observed by ISEE 1 on 8 September 1978. *Annales Geophysicae*, **7**, 297-310.
- Roberts, P. H. (1967). An introduction to magnetohydrodynamics. Longmans, London.
- Sato, T., Hayashi, T., Watanabe, K., Horiuchi, R., Tanaka, M., Sawairi, N., Kusano, K. (1992). Role of compressibility on driven magnetic reconnection. *Phys. Fluids B*, **4** (2), 450-457.
- Saunders, M. (1991). The earth's magnetosphere, en *Advances in Solar System Magnetohydrodynamics*, E. R. Priest & A. W. Wood, ed., Cambridge University Press.
- Sonnerup, B. U. Ö., Ip, J., Phan, T. P. (1990). Steady magnetic reconnection, en *Physics of Magnetic Flux Ropes*, Geophysical Monograph 58, Russell, C. T., Priest, E. R., Lee, L. C., eds. American Geophysical Union.
- Sonnerup, B. U. Ö., Paschmann, G., Papamastorakis, I., Sckopka, N., Haerendel, G. H., Bacne, S. J., Asbridge, J. R., Gosling, J. J., Russell, C. T. (1981). Evidence for magnetic field reconnection at the earth's magnetopause. *J. Geophys. Res.*, **86**, 10049-10067.
- Sonnerup, B. U. Ö., Priest, E. R. (1975). Resistive mhd stagnation-point flows at a current sheet. *J. Plasma Phys.*, **14** (2), 283-294.

Sweet, P. A. (1958). The neutral point theory of solar flares, en *Electromagnetic Phenomena in Cosmical Physics*, B. Lenhart ed., Cambridge University Press.

Terrill, R. M. (1964). Laminar flow in a uniformly porous channel. *Aeronaut. Quart.*, **15**, 299-310.

Vasyliunas, V. M. (1988). Large-scale models of the ionosphere/magnetosphere/solar system - mhd as a unifying principle, en *Modeling Magnetospheric Plasmas*, Geophysical Monograph 44, Moore T.E., Waite J.H., Eds. American Geophysical Union.

White, R. B. (1983). Resistive instabilities and field line reconnection, en *Handbook of Plasma Physics Vol. I*, Eds. M. N. Rosenbluth & R. Z. Sadeev. North Holland.

Yan, M., Lee, L. E., Priest, E. R. (1992). Fast magnetic reconnection with small shock angles. *J. Geophys. Res.*, **97**, 8277-8293.

Zaturska, M. B., Drazin, P. G., Banks, W. H. H. (1988). On the flow of a viscous fluid driven along a channel by suction at porous walls. *Fluid Dynamics Res.*, **4**, 151-178.

Agradecimientos

Ante todo quiero agradecer a Silvia, por el amor que me brinda constantemente. También a las compañeras y a los compañeros del Instituto de Física del Plasma por su apoyo. Por último, quiero agradecer especialmente al Dr. Fausto Gratton, quien me alentó y apoyó invariablemente. A él le dedico las palabras de otro gran maestro:

Men asleep live each in his own world, but awake they live in the world together.

Heraclitus