

Tesis de Posgrado

Flujos MHD de fluidos conductores entre paredes caladas

Devia Cubillos, Alfonso

1996

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Devia Cubillos, Alfonso. (1996). Flujos MHD de fluidos conductores entre paredes caladas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2955_DeviaCubillos.pdf

Cita tipo Chicago:

Devia Cubillos, Alfonso. "Flujos MHD de fluidos conductores entre paredes caladas". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1996.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2955_DeviaCubillos.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES.

Tema de tesis
FLUJOS MHD DE FLUIDOS CONDUCTORES ENTRE PAREDES CALADAS.

Autor
ALFONSO DEVIA CUBILLOS

Director de tesis
FAUSTO T. GRATTON

Lugar de trabajo
Instituto de Física del Plasma
Departamento de Física

Tesis presentada para optar el título de Doctor en Ciencias Físicas.
Diciembre 1996

RESUMEN

Se tiene un canal bidimensional de paredes caladas a través de las cuales se inyecta o succiona continuamente un fluido conductor. El flujo dentro del canal es tal que se produce un punto de estancamiento en el centro del mismo. El movimiento es restringido por un campo magnético.

Se hace un análisis teórico magnetohidrodinámico de las soluciones de equilibrio para valores asintóticos de los tres parámetros adimensionales de los que depende el problema R_e , R_m y M_A (R_e es el número de Reynolds viscoso, R_m es el número de Reynolds magnético, M_A número de Mach Alfvénico). Se estudia la formación de capas límites viscosas y resistivas para los casos de paredes dieléctricas y conductoras, así como también la dependencia del gradiente de presiones con los parámetros adimensionales. Para fluidos altamente conductores ($R_m \gg 1$) se encuentra que el campo magnético restringe la salida del fluido cuando $M_A < 1$, mientras que favorece el escape cuando $M_A > 1$. En el caso de baja conductividad ($R_m \ll 1$) el campo magnético controla la salida o entrada del fluido. Para el caso de succión el flujo es inestable a partir de un valor crítico de los parámetros adimensionales. Se encuentran bifurcaciones tipo *pitchfork* para diferentes valores de los parámetros R_e , R_m , M_A cuando hay el cambio de estabilidad. Para el caso de inyección el flujo siempre es estable.

ABSTRACT

A conducting fluid is continuously injected through a pair of parallel porous walls and escapes in both directions along the channel. The flow forms a stagnation point at the center and the effluence is restricted by a magnetic field. A theoretical analysis of the steady state solutions of the MHD equations in the incompressible case is given as a function of three parameters: R_e , R_m , and M_A (R_e : Reynolds number, R_m : magnetic Reynolds number, M_A : Alfvénic Mach number) for all the significant asymptotic limits. The resistive and viscous boundary layers are examined (both for dielectric and conducting walls) as well as the dependence of the pressure gradient that drives the flow on the non-dimensional parameters.

For highly conducting plasma ($R_m \gg 1$) it is found that the magnetic field restrains the outflow for $M_A < 1$ and drives the escape for $M_A > 1$. In motions of low conductivity ($R_m \ll 1$) the magnetic field contains (and can be used for controlling) the effluence.

In the case of suction, critical values of the parameters are found for which there are bifurcations in the stability of the system. Such bifurcations are of *pitchfork* type.

In the case of injection, the flux is always stable.

INDICE

1	Introducción.	1
2	Ecuaciones Básicas.	7
	2.1 Soluciones de Semejanza.	8
	2.2 Condiciones de Contorno.	13
	2.3 Adimensionalización de Parámetros.	15
3	Revisión del Problema Hidrodinámico.	19
	3.1 Condiciones de Frontera Para el Caso Hidrodinámico.	21
	3.2 Estudio de la Estabilidad Para el Caso Hidrodinámico.	24
	3.3 Evolución Temporal Para el Caso Hidrodinámico.	30
4	Problema Magnetohidrodinámico.	33
	4.1 Aproximaciones Asintóticas Para Diferentes Valores de R_m , R_e y M_A .	34
	4.2. Régimen de Conductividad Alta: Flexión de las Líneas Magnéticas.	35 36
	4.2.1 Soluciones Asintóticas de $R_e \gg 1$ y $R_m \gg 1$.	37
	4.2.2 Caso Inyección.	37
	4.3 Soluciones Asintóticas $R_e \ll 1$ y $R_m \ll 1$.	44
	4.3.1 Caso Inyección.	44
	4.4 Solución con Capa Límite en la Pared $R_e \gg 1$ y $R_m \gg 1$ $M_A \ll 1$.	48

4.5	Determinación del Campo de Presión.	52
4.6	Solución Clásica Para el Flujo de Hartmann.	58
4.7	Caso Succión Cuando $R_e \ll 1$ y $R_m \ll 1$.	61
5.	Estudio de la Estabilidad Para el Problema MHD en Placas Perforas y Paralelas.	65
5.1	Introducción.	65
5.2	Estabilidad Para Perturbaciones: Simétrica f_1 y Antisimétrica p_1 .	68
5.3	Estabilidad Para Perturbaciones: Antisimétrica f_1 y Simétrica p_1 .	73
5.4	Análisis del tipo de Bifurcación Local.	77
6	Conclusiones.	83
	Apéndice A.	87
	Agradecimientos.	96

FLUJOS MHD DE FLUIDOS CONDUCTORES ENTRE PAREDES CALADAS.

1. Introducción.

El movimiento de fluidos ordinarios que se inyectan o succionan por canales porosos ha sido de considerable interés en la reciente literatura sobre hidrodinámica. El problema bidimensional de un fluido viscoso e incompresible en un canal poroso con un punto de estancamiento en el centro, fue inicialmente estudiado por Berman (1953) cuyo trabajo estaba motivado para dar un modelo que explicara la separación del uranio desde U_{238} al U_{235} por difusión gaseosa. El uranio es previamente convertido al gas UF_6 , el cual tiene características apropiadas para su manipulación. En este trabajo pionero se resolvió el problema del caso estacionario, utilizando soluciones similares para reducir la ecuación de Navier-Stokes a una ecuación diferencial de cuarto grado, (escrita en la ecuación (3.1)) con un par de condiciones de frontera en cada pared. Berman encontró soluciones analíticas para la situación asintótica de bajos números de Reynolds en el caso de succión en las paredes. Posteriores autores han estudiado diferentes situaciones físicas de este problema, Sellars (1955), Yuang (1956), Proudman (1962), Shrestha (1967), Terril (1964), Brady y Acrivos (1981), Brady (1984), Robinson (1987), Zaturka et al (1988), Watson et al (1990), Cox (1991), Banks (1988, 1992) quienes en general han tratado, por ejemplo los casos de flujos simétricos, asimétricos, paredes con aceleración, diferentes velocidades de succión o inyección en las paredes superior e inferior. Taylor et al (1991), resolvieron el problema tridimensional de flujos en canales porosos, en donde el caso bidimensional

con geometrías cartesianas y cilíndricas, son obtenidos como casos particulares, por la variación de un parámetro que da el carácter dimensional del problema.

Dado que el caso de inyección siempre es estable temporalmente, Hocking (1975), una especial atención ha tenido el estudio de la estabilidad en el caso de succión. Las soluciones obtenidas muestran que son inestables a partir de un número de Reynolds crítico $R_e=6.0014$. Para ciertos valores grandes de R_e , los flujos tienen un comportamiento periódico a partir de $R_e=12.936$ y caótico para $R_e>20$. En particular, Zaturka et al (1988), hacen una excelente descripción sobre el problema de la estabilidad y la evolución temporal de estas soluciones, así como también del cálculo analítico y numérico para los regímenes asintóticos $R_e\ll 1$ y $R_e\gg 1$. El caso de la estabilidad espacial ha sido tratado por Durlofsky y Brady (1984), utilizando el mismo esquema de soluciones autosimilares.

En el presente trabajo, estudiamos el movimiento de un fluido conductor en una configuración similar a la descrita anteriormente, un flujo con un punto de estancamiento en el centro de las placas (es decir en el plano $z=const.$), pero en este caso existe un campo magnético, el cual es en principio, perpendicular a las placas que también suponemos perforadas. (Ver figuras 2.2 y 2.3).

La literatura para el caso de fluidos en canales perforados es bastante numerosa, pero ha tenido creciente interés para el caso MHD, en vista de sus aplicaciones en el control de flujo de metales líquidos, por ejemplo en la industria metalúrgica Ueno (1991), Talmage et al (1991). Kenny (1982) quien recientemente ha tratado el efecto del frenado de un campo magnético no uniforme sobre un líquido metálico en un canal, pero sin paredes porosas, da adicionalmente unas referencias importantes sobre este problema. Moffat (1991) presenta una serie de interesantes conceptos sobre los efectos MHD relevantes para procesos metalúrgicos y flujos de metales líquidos.

Existe también interés en el estudio de metales líquidos MHD motivado por los desarrollos alcanzados en el diseño de sistemas para recubrimiento y enfriamiento de

reactores de fusión (Sterl A, 1990), también es importante esta configuración en los circuitos de enfriamiento para autogeneradores nucleares (Breeder Reactor). Un problema similar al tratado en este trabajo, a sido presentado por Gratton y Bender (1993), pero solo en el caso de inyección y con el campo magnético paralelo a las paredes. Otro problema afín a este tipo de configuraciones es el estudio de películas conductoras aprisionadas, de interés en control de lubricaciones, Kuzma et al (1964), Maki et al (1966).

En esta tesis también tratamos, el caso de fluidos con baja conductividad (pequeños valores para el número de Reynolds magnético, R_m) inyectados (o succionados) a través de paredes caladas. El efecto del campo magnético es el de restringir la salida (o entrada) del fluido, actuando en una forma similar al flujo de Hartmann en un canal no calado o perforado. También para altos números de Reynolds, se encuentran soluciones, en particular se estudia el comportamiento, cuando el número de Mach Alfvénico M_A , es mayor que la unidad. En este caso el campo magnético favorece al escape del fluido a lo largo del canal. Esto es debido a que la curvatura de las líneas del campo magnético distorsionado, producen la fuerza necesaria para dirigir el movimiento del fluido.

Hemos analizado así mismo los flujos con números de Reynolds magnéticos muy elevados. El caso asintótico de $R_m \gg 1$ de hecho no es aplicable a escala de laboratorio, donde se utilizan metales líquidos, sin embargo es importante para plasmas. El análisis que se pretende realizar en este trabajo es lo suficientemente extenso para cubrir este caso. Sin embargo las condiciones de frontera que se utilizan no son aplicables al caso de plasmas. Entonces para la aplicación del modelo a escenarios donde el fluido es plasma, las condiciones de frontera deben ser reinterpretadas. Trataremos un modelo simplificado, en donde dos plasmas moviéndose uno hacia el otro, se encuentran a una cierta distancia de una región central donde está el punto de estancamiento. En una configuración de plasmas astrofísicos las condiciones de frontera de hecho no son paredes. Las condiciones de frontera, asumidas en nuestro modelo, simulan aproximadamente la entrada de dos

plasmas, moviéndose uno hacia el otro así que los plasmas colapsan en el centro y son eyectados lateralmente. El campo magnético colineal con el flujo que entra y que se transporta junto al plasma ("campo magnético congelado") es entonces distorsionado.

En general los flujos con puntos de estancamiento en presencia de campos magnéticos son importantes en física solar y espacial, donde los procesos de formación y decaimiento de láminas de corriente son importantes (Sonnerup et al (1975), Priest (1985)). Además, en la reconexión de líneas del campo magnético en un punto de estancamiento, el proceso de aniquilación del campo magnético, aumentado por la presencia del punto de estancamiento ha sido analizado en trabajos recientes Biskamp (1993), Gratton et al (1996). En todos estos estudios las líneas del campo magnético son perpendiculares a la dirección de la velocidad del flujo y paralelas a la lámina de corriente. En el modelo con puntos de estancamiento tratado en este trabajo, el campo magnético sin embargo es paralelo a la velocidad de entrada del flujo.

En resumen el modelo MHD es de interés en el estudio de la dinámica de metales líquidos desde el punto de vista de las aplicaciones tecnológicas, donde usualmente $R_m \ll 1$, por otro lado con un cambio apropiado del significado de las condiciones de frontera, el flujo puede ser de interés también en el dominio astrofísico donde por el contrario, $R_m \gg 1$.

Por otro lado, se realiza en este trabajo, el estudio de la estabilidad en el caso MHD, que de acuerdo a los resultados por nosotros encontrados en el desarrollo de esta investigación, muestran una variada estructura que modifica el diagrama de estabilidad hidrodinámico, dependiendo ahora de tres parámetros, R_e , R_m y M_A . Si se tienen en cuenta las aplicaciones prácticas del modelo por nosotros planteado, es importante conocer para bajos números de Reynolds la estabilidad de estos sistemas y la posibilidad de estados de movimiento bifurcados para estos casos. También en el campo de las aplicaciones, el estudio de la estabilización de los sistemas para altos valores del número de Hartmann ($H_A = R_e R_m / M_A$) es importante y es considerado en esta disertación.

En este trabajo no se presentarán los detalles de una aplicación específica; el propósito fundamental es estudiar la estructura teórica de un problema general para diferentes escenarios de interés físico. El esquema general con el que abordaremos el estudio de los flujos MHD de líquidos conductores entre paredes perforadas es el siguiente:

1.) En el capítulo 2 se revisan las ecuaciones básicas de la MHD, en particular, se ilustra el método de soluciones autosimilares para reducir las ecuaciones vectoriales de la magnetohidrodinámica a un sistema compuesto por cuatro ecuaciones diferenciales que permiten estudiar más fácilmente diferentes configuraciones geométricas del campo magnético y de movimiento del fluido, en particular dada la geometría y las condiciones de frontera de nuestro modelo, solo utilizamos dos de ellas. También se hará un análisis de las condiciones de frontera mecánicas y electromagnéticas para el caso en donde las paredes son conductoras o dieléctricas, igualmente se ilustrará la adimensionalización de los parámetros involucrados, para obtener los números de Hartmann, Reynolds, Reynolds magnético y Mach Afvénico.

2.) En el capítulo 3 se trata el problema hidrodinámico de succión e inyección, para números de Reynolds viscosos pequeños y grandes. Se muestra además la aparición de tres tipos de soluciones denominadas soluciones tipo I, II y III. Estas soluciones son obtenidas para el caso de flujos simétricos, es decir, el punto de estancamiento se encuentra en $y=0$. Por otro lado, utilizando el método de perturbaciones de la forma $Exp(st)f_1(y)$ en la ecuación dependiente del tiempo, se obtienen matrices que resuelven el problema de la estabilidad en forma numérica, para perturbaciones $f_1(y)$ que pueden ser simétricas y antisimétricas. Usando un método matricial con diferencias finitas se calcularán los autovalores s y las autofunciones f_1 del problema. Las soluciones obtenidas por este método serán verificadas por un tratamiento teórico (Zaturska et al (1988), Taylor et al (1991)). La evolución temporal para las soluciones tipo I donde estos flujos dejan de ser estables, es tratada igualmente en este capítulo.

3.) El problema MHD es tratado, para el caso de los flujos simétricos, en el capítulo 4. Se presenta, además un cuadro de las diferentes ecuaciones que representan los aproximaciones asintóticas. Se estudian aquí los problemas de inyección y succión para diferentes regímenes asintóticos tanto analíticamente en unos casos, como numéricamente en otros. La validez de las ecuaciones encontradas en estos casos límites es comprobada numéricamente al integrarse las ecuaciones básicas completas. Adicionalmente se estudiará la aparición de capas límites resistivas y viscosas tanto en el centro como en las paredes del canal. Por otro lado también se trata el problema del campo de presiones que es afectado por efectos de origen tanto fluidístico como electromagnético. Igualmente tratamos en este capítulo, como un caso particular del sistema de ecuaciones completas, el problema del flujo de Hartmann.

4.) En el capítulo 5, se hace un estudio sobre la estabilidad del problema MHD en placas perforadas y paralelas para modos de perturbación que cumplen con ley de semejanza, y se encuentran soluciones para diferentes variaciones de los parámetros involucrados en el problema. También hacemos un estudio teórico sobre el tipo de bifurcación que aparece cuando hay un cambio de estabilidad. Finalmente en el apéndice A se ilustrará el método numérico utilizado para el cálculo de las soluciones del equilibrio, método de relajación. También se muestra en este apéndice A, el método matricial utilizado para el cálculo de la estabilidad del problema.

2 ECUACIONES BÁSICAS DEL PROBLEMA MAGNETOHIDRODINAMICO.

Las ecuaciones básicas de la magnetohidrodinámica (MHD) usadas en este trabajo, utilizando unidades cgs, son las siguientes:

i) La ecuación de Navier-Stokes para fluidos, en este tratamiento incluimos la fuerza de Lorentz:

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (2.1)$$

donde ν y ρ , que asumimos constantes, representan la viscosidad cinemática y la densidad de masa y c es la velocidad de la luz en el vacío, \mathbf{V} es la velocidad del fluido, \mathbf{E} , \mathbf{B} , son los campos eléctricos y magnéticos respectivamente, \mathbf{J} es la densidad de corriente y P la presión del fluido. Además tenemos en cuenta que la vorticidad esta dada por la expresión: $\omega = \nabla \times \mathbf{V}$

ii) La ley de Ohm, de la cual tomamos en cuenta únicamente los efectos resistivos, esto es, asumimos que el fluido es conductor:

$$\frac{c}{\sigma} \mathbf{J} = c\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B} \quad (2.2)$$

aquí $\frac{1}{\sigma}$ es la resistividad

iii) El fluido es incompresible, esta premisa es válida para líquidos conductores. En el caso de los plasmas, la hipótesis es correcta si la rapidez del movimiento es mucho menor que la velocidad del sonido en ese medio. Esta suposición puede hacerse, por ejemplo cerca de un punto de estancamiento. Bajo estas condiciones,

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0 \quad (2.3)$$

iv) Las ecuaciones de Maxwell que cierran el sistema de ecuaciones de la MHD, para movimientos lentos y procesos de baja frecuencia, están dadas por :

$$\nabla \times \mathbf{B} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{J}, \quad \nabla \times \mathbf{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2.4)$$

2.1 Soluciones de semejanza.

Trataremos el problema bidimensional, en coordenadas cartesianas, invariante frente a translaciones en una dirección, por ejemplo según la coordenada z . Esta será una coordenada ignorable y $\partial/\partial z = 0$, como también las componentes $V_z = B_z = 0$. Bajo estas hipótesis, las ecuaciones de la MHD pueden ser escritas en términos de una función de corriente $\xi(x, y, t)$ para la velocidad y por una función de flujo $\psi(x, y, t)$ para el campo magnético, de la siguiente manera : (ver e.g Gratton et al (1988 y 1996), Biskamp 1993)

$$V_x = \partial_y \xi, \quad V_y = -\partial_x \xi, \quad B_x = \partial_y \psi, \quad B_y = -\partial_x \psi \quad (2.5)$$

El término ∂_i indica la derivada parcial con respecto a la coordenada i -ésima. Las ecuaciones de Navier-Stokes y la ley de Ohm, (ecuaciones (2.1) y (2.2)), teniendo en cuenta las definiciones dadas en la ecuación (2.5), se pueden escribir en una forma reducida como:

$$(\partial_t - v\nabla^2)\nabla^2\xi - [\xi, \nabla^2\xi] - \frac{1}{4\pi\rho} [\nabla^2\psi, \psi] = 0 \quad (2.6)$$

$$(\partial_t - v_m\nabla^2)\psi - [\xi, \psi] = cE_z \quad (2.7)$$

El corchete $[f, g] = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial g}{\partial x}$ define al Jacobiano de las funciones f y g , además

$v_m = \frac{c}{4\pi\sigma}$ es la difusividad magnética, $-\nabla^2\xi$ es la componente z de la vorticidad

$\boldsymbol{w} = \nabla \times \boldsymbol{V}$, ψ es la componente z del vector potencial \boldsymbol{A} ($\nabla \times \boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$), es decir, la

componente J_z se puede escribir en términos de la función ψ , como $-\nabla^2\psi = \frac{1}{4\pi} J_z$. Los

corchetes $[\xi, \nabla^2\xi]$ y $[\xi, \psi]$ representan los términos de transporte convectivo de $-\omega_z$ y

ψ_z , respectivamente. Adicionalmente, el corchete $[\nabla^2\psi, \psi]$ representa la componente z

del rotacional de la fuerza de Lorentz. Suponemos que existe una invariancia de

translación en z , esto es, por ejemplo $\frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$ y $\frac{\partial E_y}{\partial y} = 0$. Además resulta que

$E_z = E_z(t)$, solo depende del tiempo. En general, el campo eléctrico puede estar descrito por:

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\phi + \boldsymbol{E}_z(t) - \frac{1}{c} \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t}$$

de tal forma que se pueda encontrar un potencial $\hat{\phi}$, tal que:

$$\hat{\phi} = \phi(x, y, t) + E(t)z$$

Nosotros estudiaremos un modelo en el cual las paredes laterales, supuestas distantes en la dirección z , no se pueden cargar eléctricamente, entonces la componente z del campo eléctrico E_z es cero. Este hecho permitirá, como veremos más adelante, el uso de soluciones similares para desacoplar el sistema de ecuaciones (2.6) y (2.7). También

se puede suponer que dichas paredes son conductoras pero están en cortocircuito para un modelo de laboratorio (ver figura 2.1). Finalmente, estas paredes podrían estar en el infinito; este último caso se presenta, por ejemplo, en un modelo astrofísico. De lo anterior se deduce que en un modelo tridimensional, las condiciones de frontera en z están relacionadas con el campo eléctrico E_z .

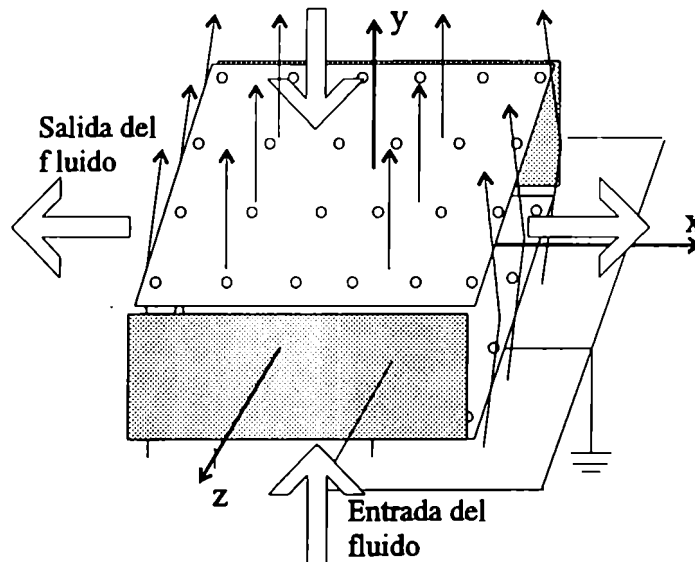


Fig. 2.1 Aquí se ilustra una configuración de laboratorio, para el caso de inyección. Las paredes en la dirección del eje z se supone que están muy alejadas y el fluido es inyectado en la dirección del eje y .

Por otro lado, nótese que al tomar el rotacional de la ecuación (2.1), desaparece el término correspondiente al gradiente presiones, sin embargo ésta variable puede ser recuperada por una adecuada manipulación de las componentes x e y de la ecuación (2.1). Este cálculo es desarrollado en la sección 4.5.

El sistema de ecuaciones (2.6) y (2.7) planteado anteriormente, admite en general soluciones similares de la forma:

$$\xi = xf(y, t, \eta) + g(y, t, \eta), \quad (2.8)$$

$$\psi = xp(y, t, \eta) + q(y, t, \eta), \quad (2.9)$$

las cuales permiten hacer una separación de las componentes de la velocidad y del campo magnético, según las direcciones de los ejes x e y . En las anteriores ecuaciones, η representa todos los parámetros involucrados en el problema, en nuestro caso y como veremos posteriormente, estará relacionado con la viscosidad, la difusividad magnética y el campo magnético externo. Reemplazando las ecuaciones (2.8) y (2.9) en las ecuaciones (2.6) y (2.7), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$f_{yy} - \nu f_{yyy} = (ff_{yy} - (f_y)^2)_y - \frac{1}{4\pi\rho} (pp_{yy} - (p_y)^2)_y \quad (2.10)$$

$$g_{yy} - \nu g_{yyy} = (fg_{yy} - g_y f_y)_y - \frac{1}{4\pi\rho} (pq_{yy} - p_y q_y)_y \quad (2.11)$$

$$p_t - \nu_m p_{yy} = fp_y - f_y p \quad (2.12)$$

$$q_t - \nu_m q_{yy} = fq_y - g_y p + cE_z \quad (2.13)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales anteriores es por sí mismo un sistema cerrado, el cual en principio, resuelve una gran variedad de problemas para diferentes configuraciones tanto geométricas como del campo magnético, con las adecuadas condiciones de frontera. En el caso de un recinto cerrado, las soluciones internas deben empalmarse con las externas, de tal forma que $\nabla^2 \psi^{ext} = 0$ es decir, $\psi^{ext} = cxy - bx$. Se puede notar que las ecuaciones (2.10) y (2.12) forman un sistema separado. Una vez obtenidas las soluciones para f y p , estas funciones aparecen como datos en el sistema acoplado (2.11) y (2.13), que se resuelve en una segunda etapa.

El problema general así planteado es bastante complejo desde un punto de vista matemático. Nosotros estudiaremos algunos casos particulares, como por ejemplo, el caso del problema central de este trabajo en el cual un fluido viscoso, conductor e incompresible, entra o sale por un par de placas paralelas perforadas infinitas con igual tasa de succión o inyección en ambas paredes (separadas una distancia $2h_0$). El fluido

interacciona con un campo magnético, que en principio, es perpendicular a las placas en el caso de que sean conductoras. Si las placas son dieléctricas, el campo magnético puede tener las dos componentes x , e y en la frontera. Este campo magnético es modificado por el movimiento del fluido conductor, como se ilustra en las figuras 2.2 y 2.3. El problema así planteado implica que en el sistema de ecuaciones (2.10) a (2.13) se debe tomar $g = q = 0$. Obsérvese que este problema es una extensión del problema del flujo de Hartmann, con la diferencia de que el fluido se mueve entre un par de placas paralelas, sin movimiento, según la dirección del eje x . El problema de Hartmann está gobernado por las ecuaciones (2.11) y (2.13), en el caso en que $f=0$, mientras que $p_y = 0$, esto es $B_y = B_0 = \text{constante}$. En cambio, en nuestra situación, las placas pueden estar en movimiento una hacia la otra o estar en reposo. En este último caso, dichas placas estarán perforadas (paredes caladas) para permitir la entrada o salida del fluido a través de ellas.

El campo magnético $\mathbf{B} = (B_x, B_y, 0)$ y la velocidad $\mathbf{V} = (V_x, V_y, 0)$ se pueden obtener entonces de la siguiente forma:

$$V_x = \partial_y \xi = x f_x \quad V_y = -\partial_x \xi = -f \quad (2.14)$$

$$B_x = \partial_y \psi = x p_y \quad B_y = -\partial_x \psi = -p \quad (2.15)$$

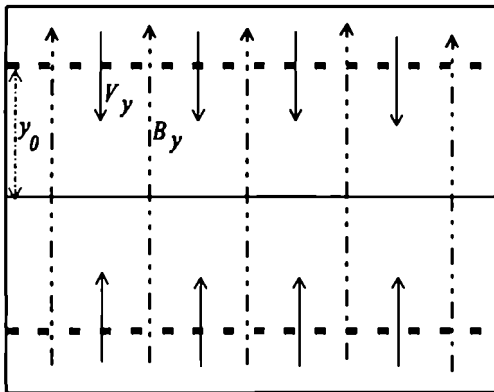


Fig. 2.2. Se muestra la inyección de un fluido conductor. El campo magnético se representa sin interacción entre el campo y el fluido. y_0 es la mitad del ancho del canal.

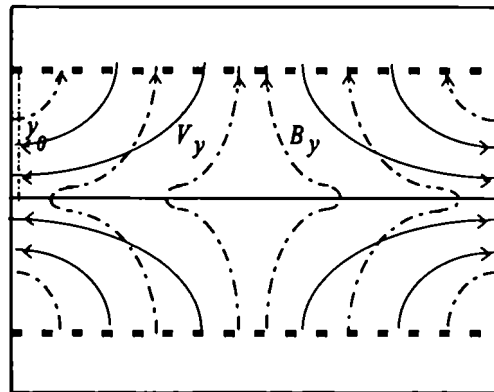


Fig. 2.3. Se ilustra las líneas de velocidad y el campo en el caso en donde se considera que existe interacción con el campo magnético. Este caso se presenta cuando existe inyección de fluido a través de las paredes.

Con las anteriores suposiciones, la ecuación de Navier-Stokes y la ley de Ohm dependientes del tiempo se puede escribir en términos de f y p de la siguiente manera:

$$f_{yy} - \nu f_{yyy} = \left(ff_{yy} - (f_y)^2 \right)_y - \frac{1}{4\pi\rho} \left(pp_{yy} - (p_y)^2 \right)_y \quad (2.16)$$

$$p_t - \nu_m p_{yy} = fp_y - f_y p \quad (2.17)$$

Nótese que si $p = 0$ el problema se reduce al caso fluidístico puro, al cual nos referiremos brevemente en el capítulo siguiente.

2.2 Condiciones de contorno.

Para el caso de un fluido que entra o sale por un par de paredes perforadas y paralelas, en presencia de un campo magnético las condiciones iniciales, son en general : $f(y,0,\eta) = f(y,\eta) = f_0(y,\eta) + f_1(t)$ y $p(y,0,\eta) = p(y,\eta) = p_0(y,\eta) + p(t)$, aquí la parte temporal $f_1(t)$ y $p_1(t)$ son pequeñas perturbaciones de f_0 y p_0 , que a su vez son las soluciones para el caso estacionario obtenidas de las ecuaciones (2.16) y (2.17). Adicionalmente η se determina ahora por una serie fija de parámetros del sistema ν_o , ν_{om} y B_o que corresponden a los valores en la frontera de la viscosidades cinemática y magnética y el campo magnético respectivamente. Antes de dar las condiciones de frontera para el sistema y teniendo en cuenta que la ecuación que representa el movimiento es de cuarto grado y la ecuación para el campo magnético es de segundo grado es conveniente definir los siguientes operadores:

$$Hf = [f(-1), f_y(-1), f(1), f_y(1)] \quad (2.18)$$

$$H_S f = [f(1), f_y(1), f(0), f_{yy}(0)] \quad (2.19)$$

$$H_A f = [f(1), f_y(1), f_y(0), f_{yyy}(0)] \quad (2.20)$$

$$Kp = [p(-1), p(1)] \quad (2.21)$$

$$K_{\beta} p = [p(1), p_y(1)] \quad (2.22)$$

La condición de frontera para la velocidad, es decir, la condición sobre f , en el caso de succión en las paredes es $Hf = [1, 0, -1, 0]$ y para el caso de inyección $Hf = [-1, 0, 1, 0]$. Dado que en nuestro cálculo numérico, nosotros integramos las ecuaciones (2.16) y (2.17) entre la mitad del ancho del canal ($y = 0$) y la pared ($y = 1$), definimos los operadores H_S y H_A que corresponden a los casos de las soluciones simétricas ($H_S = [\pm 1, 0, 0, 0]$, para inyección (+) y succión (-)) y antisimétricas ($H_A = [\pm 1, 0, 0, 0]$ para inyección (+) y succión (-)) respectivamente. Nótese que si f representa un flujo simétrico, entonces ésta debe ser una función impar, de modo que $f(0) = 0$, y por lo tanto, el origen es siempre un punto de estancamiento.

Las condiciones de frontera para el campo magnético, es decir, las condiciones sobre p , dependen del carácter conductor de las paredes y del fluido. Sin embargo, en general, deben satisfacerse las siguientes condiciones para ambos casos de succión e inyección:

$$K_{\beta} p = [-1, \beta] \quad (2.23)$$

Si las paredes son conductoras, la constante β se ajusta dependiendo de los parámetros característicos del problema; por ejemplo, en los regímenes de baja viscosidad y alta conductividad se toma $\beta = 0$, ya que en este caso el fluido arrastra las líneas del campo magnético, de tal manera que llegan a ser paralelas, por lo tanto el campo magnético y la velocidad satisfacen la misma condición de frontera sobre la pared.

También, esta última condición de $\beta=0$, es válida para paredes conductoras. Si las paredes son dieléctricas, entonces el campo magnético entre las placas se debe suponer originado por un par de bobinas exteriores que generan un campo magnético externo de la forma:

$$B_x^e = cx \quad B_y^e = -cy + b \quad (2.24)$$

Es decir, la función ψ que representa el flujo del campo magnético (ver ecuación (2.5)) es ahora dada por la expresión:

$$\psi^{ext} = -bx + cxy \quad (2.25)$$

Como en las paredes el campo magnético puede tomar cualquier valor, las condiciones de frontera para el campo magnético en el interior de las placas que permitan el acople con el campo magnético externo, se pueden escribir en una forma compacta de la siguiente manera:

$$K_\alpha p = [p_y(1), p_y(0)] \quad (2.26)$$

Si $K_\alpha = [c, 0]$, se obtiene en caso simétrico de paredes dieléctricas, pero si $K_\alpha = [0, 0]$, entonces las paredes serán metálicas.

2.3 Adimensionalización de Parámetros.

Es conveniente en este punto reescribir el sistema de ecuaciones (2.16) y (2.17) en términos de variables adimensionales, utilizando como magnitudes características h_0 , que es la mitad del ancho del canal, u_0 la velocidad característica de entrada del fluido en la

pared y B_0 el campo magnético externo exactamente sobre la pared, esto es, a partir de las siguientes definiciones:

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \frac{x}{x_0} & \hat{y} &= \frac{y}{y_0} & \hat{f} &= \frac{f}{u_0} & \hat{p} &= \frac{p}{B_0} & \hat{V}_x &= \frac{V_x}{u_0} = xf_y \\ \hat{V}_y &= \frac{V_y}{u_0} = -f & \hat{t} &= \frac{tu_0}{h_0} & \hat{b}_x &= \frac{B_x}{B_0} = xp_y & \hat{b}_y &= \frac{B_y}{B_0} = -p \\ R_e &= \frac{u_0 h_0}{\nu} & R_m &= \frac{u_0 h_0}{\nu_m} & M_A^2 &= \frac{\frac{1}{2} \rho u_0^2}{\frac{B_0^2}{8\pi}} & H_a^2 &= \frac{R_m R_E}{M_A^2} \end{aligned} \quad (2.27)$$

R_e es el número de Reynolds, R_m es el número de Reynolds magnético, H_a es el número de Hartmann y M_A es el número de Mach Alfvénico. De acuerdo a las anteriores definiciones, las ecuaciones (2.16) y (2.17) se transforman en:

$$f_{yy} - \frac{1}{R_e} f_{yyy} = \left(ff_{yy} - (f_y)^2 \right)_y - \frac{1}{M_A^2} \left(pp_{yy} - (p_y)^2 \right)_y \quad (2.28)$$

$$p_t - \frac{1}{R_m} p_{yy} = fp_y - f_y p \quad (2.29)$$

Aquí, por razones de simplicidad de notación, hemos omitido las tildes en las variables, pero ha de entenderse que son todas sin dimensiones. Nótese que ahora $f = f(y, t, R_e, R_m, M_A)$ y $p = p(y, t, R_e, R_m, M_A)$. Dados R_e , R_m y M_A , el sistema dado por las ecuaciones (2.28) y (2.29) puede ser resuelto numérica o analíticamente en los casos asintóticos que estudiaremos en el capítulo 4. En ocasiones, cuando se utiliza la técnica de shooting para resolver el sistema de ecuaciones dado anteriormente, el problema se invierte y los parámetros a calcular son ahora R_e , R_m y M_A ; para más detalles ver por ejemplo el trabajo de Terril (1964). Dado que en este trabajo presentamos

únicamente el caso de los flujos simétricos, fijamos la condición $f(\pm 1) = \mp 1$ para el fluido y para el campo magnético $p(\pm 1) = -1$ para el cálculo numérico, lo que equivale a tomar, $R_e > 0$ y $R_m > 0$ para el caso de succión, mientras que para el caso de inyección $R_e < 0$ y $R_m < 0$, sin necesidad de variar las condiciones de frontera; esto es consistente con las definiciones dadas en la ecuaciones (2.27) para ambos números de Reynolds, también puede observarse por simple inspección del sistema de ecuaciones (2.28) y (2.29). Adicionalmente, al utilizar la convención anterior, el tiempo cambia de signo en el caso de inyección. Es claro que las definiciones de tiempos negativos y números de Reynolds negativos no tienen ninguna interpretación física, se trata solamente de un artificio matemático utilizado en este tipo de problemas para facilitar los cálculos numéricos y su posterior análisis.

En ocasiones es conveniente usar una integración de la ecuación (2.28). Para el caso estacionario, el sistema de ecuaciones dado en las ecuaciones (2.27) y (2.28) queda descrito por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-\frac{1}{R_e} f_{yyy} = C + (ff_{yy} - (f_y)^2) - \frac{1}{M_A^2} (pp_{yy} - (p_y)^2) \quad (2.30)$$

$$-\frac{1}{R_m} p_{yy} = fp_y - f_y p \quad (2.31)$$

La constante C de integración se determina a partir de los valores en la frontera, que en el caso estacionario de paredes conductoras y de inyección de fluido en las paredes, C viene dado por la ecuación:

$$C = \left\{ -\frac{1}{R_e} f_{yyy} - (f_{yy}) + \frac{1}{M_A^2} (p_{yy} - \beta^2) \right\}_{y=1} \quad (2.32)$$

Esta constante de integración C , por otro lado esta directamente relacionada con el gradiente de presiones según el eje x a través de la expresión:

(Este resultado es deducido en la sección 4.6).

$$(\partial p / \partial x = -\alpha x - xP'^2 / 4\pi) \quad (2.33)$$

Es decir, el gradiente de presiones depende tanto de la componente x del campo magnético como de la posición según el eje x .

3 REVISIÓN DEL PROBLEMA HIDRODINAMICO

La suposición de que no existe campo magnético, es equivalente a tomar $p(y, t, R_e, R_m, M_A) = 0$ en las ecuaciones (2.28) y (2.29), con lo cual obtenemos el caso fluidístico puro. De esta manera el sistema está descrito por la siguiente ecuación hidrodinámica:

$$f_{tyy} - \frac{1}{R_e} f_{yyyy} = \left(ff_{yy} - (f_y)^2 \right)_y \quad (3.1)$$

Nótese que ahora la dependencia de f está dada en la forma: $f = f(y, t, R_e)$.

La condición de frontera $f(1, t, R_e) = -1$ implica que el caso de succión se obtiene si $R_e > 0$ y el de inyección si $R_e < 0$. Adicionalmente, en este último caso el signo de t cambia (recordar que el tiempo está definido por $t = u_0 T/h$). El problema bidimensional de un fluido viscoso e incompresible en un canal poroso fue inicialmente estudiado por Berman (1953) quien resolvió el problema del caso estacionario, utilizando soluciones similares para reducir la ecuación de Navier-Stokes a la escrita anteriormente en la ecuación (3.1). En dicho trabajo, encontró soluciones analíticas para la situación asintótica de $R_e \ll 1$ y para el caso de succión en las paredes. Estas soluciones las reproduciremos más adelante. Posteriores autores han estudiado diferentes situaciones físicas de este problema, Terril (1964), Brady y Acrivos (1981), Brady (1984), Durlofaky y Brady (1984), Zaturka et al (1988), Watson et al (1990), Cox (1991), quienes han tratado diferentes aspectos del problema, por ejemplo los casos de flujos simétricos, asimétricos, paredes con aceleración, diferentes velocidades de succión o inyección en las paredes superior e inferior. Todos estos casos son estudiados mediante

la ecuación (3.1), pero con las apropiadas condiciones de frontera. Un especial cuidado debe tenerse con la definición del número de Reynolds, ya que es necesario definirlo según las condiciones físicas del caso estudiado, por ejemplo, cuando se tienen diferentes tasas de succión en las paredes es $R_e = \frac{(u_o + u_{o-})h}{2\nu}$, en donde u_o es la velocidad de salida en la pared superior y u_{o-} es la velocidad de salida en la parte inferior, como también el tiempo se determina por la expresión $\hat{t} = \frac{u_o - u_{o-}}{2h}t$, (Cox (1991), quien adicionalmente estudió la estabilidad y la dependencia temporal de las soluciones encontradas).

La ecuación (3.1) admite una integración que para el caso independiente del tiempo puede escribirse como:

$$-\frac{1}{R_e} f_{yyy} = ff_{yy} - (f_y)^2 + C \quad (3.2)$$

Ahora la constante de integración toma la forma $C = \left\{ -\frac{1}{R_e} f_{yyy} + (f_y)^2 \right\}_{y=1}$ en el caso específico de succión. En general, los trabajos que existen al respecto resuelven la ecuación (3.2) tanto analítica como numéricamente (siempre en los casos asintóticos), más aún, las distintas soluciones numéricas encontradas para algunos números de R_e fijos, se calculan utilizando diferentes valores de esta constante C . Sin embargo, en esta sección, para los cálculos numéricos, nosotros integramos directamente la ecuación (3.1), tanto en el caso estacionario como en el dependiente del tiempo, utilizando para ello un método matricial en diferencias finitas, para calcular los autovalores y autofunciones, es decir los operadores diferenciales son reemplazados por sus correspondientes operadores matriciales. Este método será ilustrado posteriormente en el apéndice A.

3.1 Condiciones de frontera para el caso hidrodinámico.

En el problema hidrodinámico, las condiciones de frontera son:

$$Hf = [f(-1), f_y(-1), f(1), f_y(1)] \quad (3.3)$$

$$H_s f = [f(1), f_y(1), f(0), f_{yy}(0)] \quad (3.4)$$

$$H_A f = [f(1), f_y(1), f_y(0), f_{yyy}(0)] \quad (3.5)$$

En todos los casos, se satisface la condición de frontera $Hf = [1, 0, -1, 0]$, es decir para inyección ($R_e < 0$) o succión ($R_e > 0$). Sin embargo, tal como se mencionó en el capítulo anterior, dado que únicamente integramos entre el centro de la placa y la pared, las soluciones para flujos simétricos deberán satisfacer la condición $H_s f = 0$; en este caso, las funciones que representan el fluido son funciones impares. Por otro lado, si el flujo es asimétrico, entonces se debe satisfacer la condición $H_A f = 0$. Se ha encontrado que en el caso de flujos simétricos y para el caso de inyección existe una única solución para todos los números de Reynolds $R_e < 0$ (Banks et al (1988), Banks et al (1992), Sellars (1955), Taylor et al (1991), Terril (1973), Yuang (1966), Zaturka et al (1988)). Estas soluciones se extienden para los números de Reynolds $R_e > 0$, es decir al caso de succión, y se conocen en la literatura como soluciones tipo I. También se han encontrado otras dos soluciones que aparecen únicamente en el caso de succión y para números de Reynolds $R_e > 12.16$. Estas soluciones se denominan soluciones tipo II y tipo III. Una manera de encontrarlas, desde un punto de vista numérico, aplicando el método de shooting, es mediante la variación de la constante de integración C que aparece en la ecuación (3.2). Para valores de $R_e \gg 1$ se han encontrado soluciones

analíticas. Para resolver la ecuación (3.2), las soluciones tipo I y II tiene una forma de tipo polinomial, mientras que las soluciones tipo III son de forma senoidal. En este régimen de valores altos del número de Reynolds, siempre aparece una capa límite en la pared la cual tiene un espesor del orden de $1/R_e$ (Robinson (1976), Zaturka et al (1988)). La figura 3.1 muestra la variación de $f''_{yy}(1, R_e)$ con respecto a R_e , para el caso de flujos simétricos, obsérvese que las soluciones tipo I y II se bifurcan para $R_e \rightarrow \infty$, mientras que el punto $R_e > 12.16$ es un punto de retorno y demarca la separación entre las familias del tipo II y III.

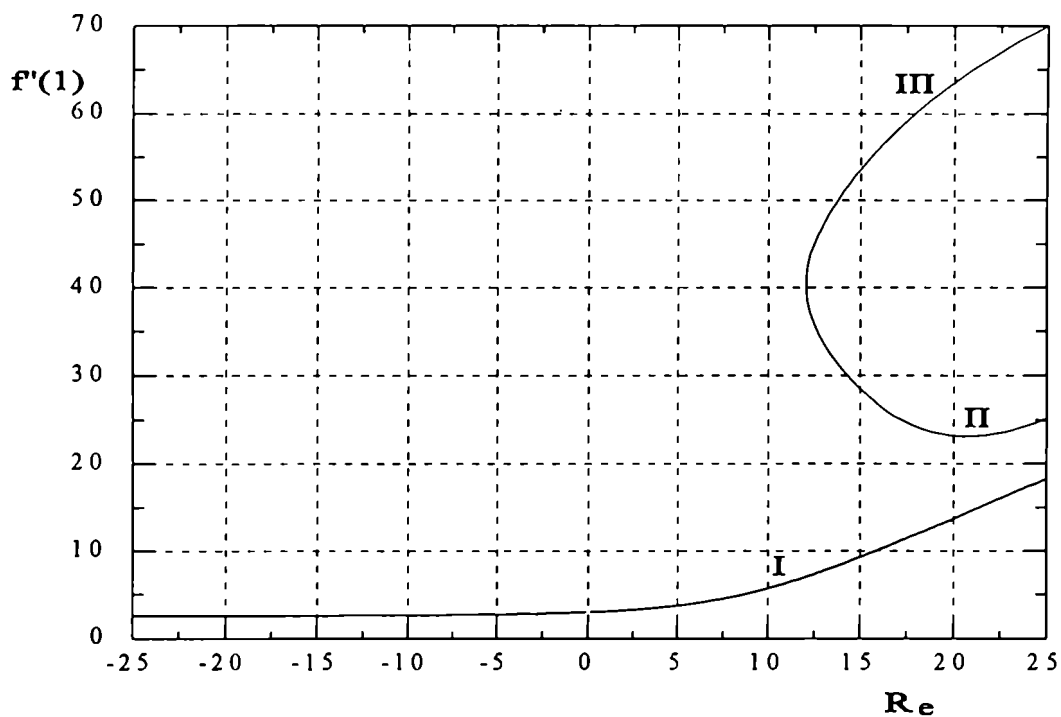


Fig. 3.1 Se ilustran los valores de la vorticidad en la pared en función del número de Reynolds para los flujos simétricos del tipo I, II y III. En ambos casos: succión e inyección.

La figura 3.2 muestra cómo son las líneas de velocidad para el caso de succión (también aparece esta configuración en el caso de inyección, salvo que las líneas de corriente van en sentido contrario), cuando los flujos son simétricos para las soluciones de tipo I y en algunos casos para los flujos tipo II; más exactamente, estas aparecen cuando $R_e > 13.199$.

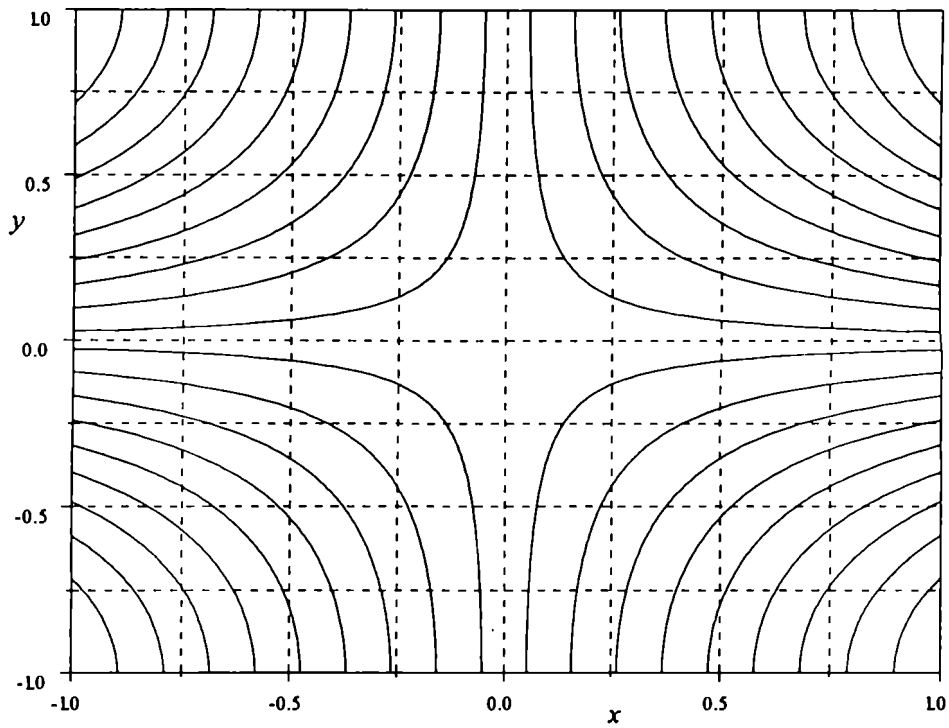


Fig. 3.2 Aquí se ilustran las líneas de velocidad en el caso de flujos simétricos, para inyección o succión cuando las soluciones son del tipo I y algunas del tipo II.

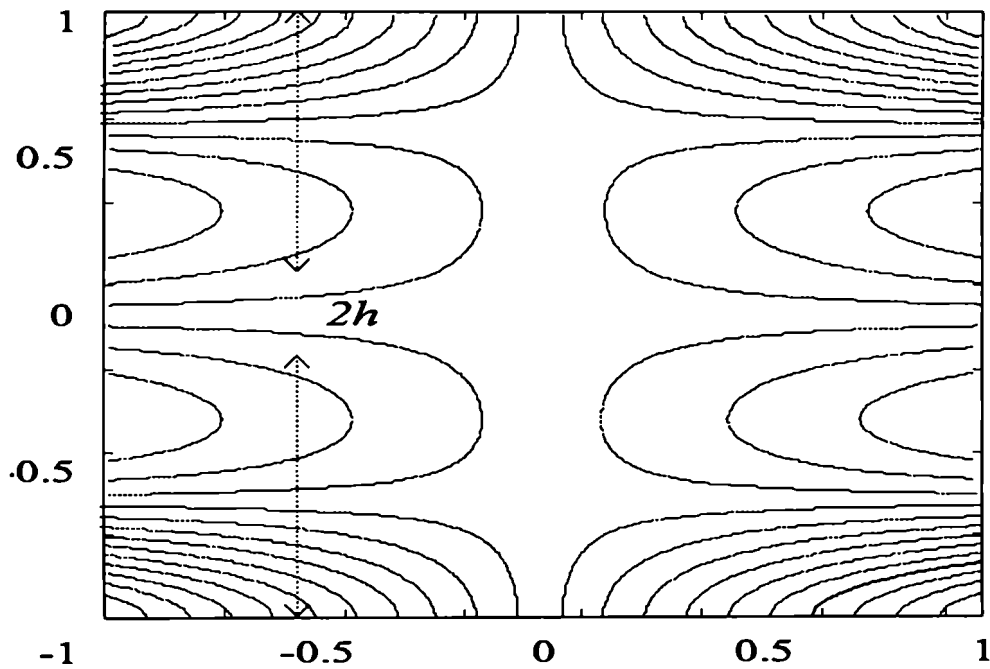


Fig. 3.3 Se ilustran las líneas de velocidad de los flujos simétricos, para las soluciones del tipo III y algunas del tipo II. Esta situación sólo se presenta en el caso de succión.

Por otro lado la figura 3.3 muestra las líneas de velocidad en el caso de flujos de tipo III y algunas de tipo II (estas aparecen en el intervalo $12.165 < R_e < 13.199$). En dicha figura se observa la aparición de dos nuevos puntos de estancamiento, lo cual ocasiona una inversión en la dirección del flujo cerca del centro del canal. Obsérvese que esto hace que se obtenga una mayor velocidad en la región cercana a las placas.

3.2 Estudio de la estabilidad para el caso hidrodinámico.

Para estudiar la estabilidad de las soluciones estacionarias, se linealiza la ecuación (3.1), esto es, definimos:

$$f(y, t, R_e) = f_0(y, R_e) + f_p(y, t, R_e) \quad (3.6)$$

donde $f_0(y, R_e)$ es la solución de equilibrio y $f_p(y, t, R_e)$ es una pequeña perturbación, que a su vez tiene una dependencia temporal, la cual puede ser expresada exponencialmente de la siguiente forma:

$$f_p(y, t, R_e) = e^{st} f_1(y, R_e), \quad (3.7)$$

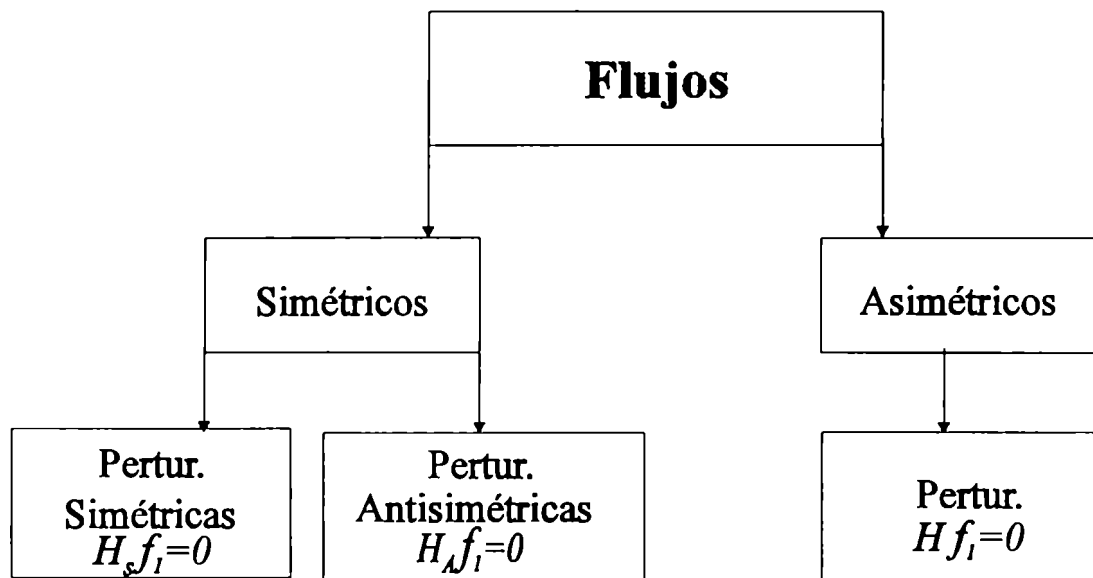
Dicha forma preserva las transformaciones de semejanza que se hicieron anteriormente en el capítulo 2.

Reemplazando las ecuaciones (3.6) y (3.7) en la ecuación (3.1), se obtiene:

$$\frac{1}{R_e} f_{1yyyy} + f_1 f_{0yyy} + f_{1y} f_{0yy} - f_{1yy} f_{0y} + f_{1yyy} f_0 = s f_{1yy} \quad (3.8)$$

$$H f_1 = 0 \quad (3.9)$$

De acuerdo a la definición dada en la ecuación (3.7), para el caso de $R_e > 0$ (succión), el sistema es estable cuando $s < 0$ e inestable si $s > 0$. Pero si $R_e < 0$ (inyección), el sistema es estable si $s > 0$ e inestable si $s < 0$, lo cual es consistente con la ecuación (3.2). Las ecuaciones (3.8) y (3.9) determinan los valores propios s y sus correspondientes funciones propias f_1 . Adicionalmente, f_0 se puede calcular a través de la ecuación (3.2). En nuestro procedimiento numérico el cálculo de f_0 lo realizamos a partir de la ecuación (3.1) independiente del tiempo. Por otro lado las funciones propias f_1 pueden ser simétricas o antisimétricas, dependiendo de que se satisfagan las condiciones $H_s f_1 = 0$ y $H_A f_1 = 0$ respectivamente, tanto para inyección como para succión. En el diagrama siguiente, se ilustran las diferentes posibilidades que se pueden obtener en el estudio de estos flujos y su estabilidad.



El problema de valores propios dado en las ecuaciones (3.8) y (3.9) puede ser resuelto para flujos simétricos o asimétricos, entendiéndose aquí por flujos simétricos a aquellos en donde el centro del canal divide a dos imágenes especulares del fluido. Terril (1964) para el caso de los flujos simétricos, encontró que si $R_e \ll 1$, la solución de equilibrio puede obtenerse a través de una serie de potencias de R_e , esto es,

$$f_0(y, R_e) = F_0(y) + R_e F_1(y) + \dots \quad \text{con } R_e \rightarrow 0 \quad (3.10)$$

Sustituyendo la ecuación (3.10) en la ecuación (3.1) independiente del tiempo se obtiene la siguiente solución para el equilibrio:

$$f_0(y, R_e) = -\frac{1}{2}y(3-y^2) + \frac{R_e(2-3y^2+y^4)}{280} + \dots \quad (3.11)$$

Zaturska, Drazin y Banks- ZDB (1988), utilizando el mismo método de Terril (1964) encontraron soluciones analíticas para los valores propios y las funciones propias en el límite cuando $R_e \ll 1$, que sirven de base para obtener soluciones numéricas, por incrementos sucesivos de R_e , para los números de Reynolds más grandes.

El procedimiento analítico para encontrar las funciones propias y sus correspondientes valores propios, en el límite $R_e \ll 1$, es similar al utilizado para derivar la ecuación (3.11), es decir, expandiendo en series de potencias a f_1 y s de la siguiente manera:

$$f_1(y, R_e) = f_{10}(y) + R_e f_{11}(y) + \dots \quad R_e \rightarrow 0 \quad (3.12)$$

$$s(R_e) = R_e^{-1} s_{-1} + s_0 + R_e s_1 + \dots \quad R_e \rightarrow 0 \quad (3.13)$$

Sustituyendo las ecuaciones (3.11), (3.12) y (3.13) en las ecuaciones de valores propios (3.8) y (3.9) e igualando potencias sucesivas de R_e , se obtienen a primer orden las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$f_{10}''' + s_{-1} f_{10}'' = 0 \quad (3.14)$$

$$f_{11}^{(4)} + s_{-1} f_{11}'' = -s_0 f_{10}'' - F_0 f_{10}^{(4)} + F_0' f_{10}'' + F_0'' f_{10} \quad (3.15)$$

Las condiciones de frontera del sistema de ecuaciones dadas en (3.14) y (3.15) son: $H_A f_{1j} = 0$ en el caso de los modos asimétricos y $H_S f_{1j} = 0$ para el caso de los modos simétricos, en donde el subíndice toma los valores $j=1, 2, 3...$ etc. Para distinguir las familias de los dos modos que aparecen, se toma $s_n = q_n$ para los modos antisimétricos y $s_n = r_n$ para los modos simétricos. Este esquema lo utilizaremos en el estudio de la estabilidad para el caso MHD que describiremos en el capítulo 5.

Basándose en las condiciones anteriores, las soluciones de las ecuaciones (3.14) y (3.15), en el caso de los modos simétricos, son :

$$s_n = r_n = -\frac{\gamma_n^2}{R_e} + \frac{55}{8\gamma_n^2} + \frac{5}{2} \dots \quad (3.16)$$

$$f_1 = y - \frac{\text{sen}(\gamma_n y)}{\text{sen} \gamma_n} + \mathfrak{O}(R_e) \quad (3.17)$$

En donde se define a γ_n , como la n -ésima raíz positiva de $\tan(\gamma) = \gamma$, las cuales se encuentran tabuladas por Abramowitz y Stegun (1964). Para el caso de los modos antisimétricos, se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$s_n = q_n = -\frac{n^2 \pi^2}{R_e} - \frac{21}{8n^2 \pi^2} \dots \quad (3.18)$$

$$f_1 = \cos(n\pi y) - (-1)^n + \mathfrak{O}(R_e) \quad (3.19)$$

Para $R_e = 0.1$, las ecuaciones (3.16) y (3.17) dan los siguientes valores propios: $q_1 = -96.462$, $r_1 = -199.067$, $q_2 = -392.350$, y $r_2 = -594.180$, ZDB utilizando como técnica numérica para resolver la ecuación de valores propios (ecuación (3.8)) el método de shooting obtienen los valores $q_1 = -96.474$, $r_1 = -199.08$, $q_2 = -392.303$ y

$r_2 = -594.184$ mientras que con nuestro cálculo numérico utilizando el método matricial (ver apéndice A) encontramos que $q_1 = -96.4679$, $r_1 = -199.0712$, $q_2 = -392.3545$, $r_2 = -594.183$, mostrando un gran acuerdo con los resultados previos. En el cálculo anterior hemos utilizado una grilla uniforme de 250 puntos entre el centro del canal y la pared. La figura 3.4 muestra los resultados obtenidos para las soluciones tipo I, en el caso de los modos simétricos tanto para inyección como para succión en el rango $-25 \leq R_e \leq 25$. En esta gráfica se puede observar que las curvas correspondientes a r_1 y r_2 se juntan en $R_e = -11$, indicando que para el intervalo $-25 \leq R_e \leq -11$ aparecen un par de valores complejos conjugados para r_1 y r_2 . También se puede inferir que las ramas r_3 y r_4 coalescen para un número de Reynolds inferior a -25. Dado que ninguna de las curvas corta el eje R_e , los modos simétricos siempre son estables en el caso hidrodinámico. Por otro lado en la misma figura se observa que $r_1 \rightarrow 0$, $r_2 \rightarrow -2$, $r_3 \rightarrow -4$ y $r_4 \rightarrow -6$ en el límite de $R_e \rightarrow \infty$, en el caso de succión. Adicionalmente en el caso de inyección, r_1 y $r_2 \rightarrow 7.8$ y r_3 y $r_4 \rightarrow 12.5$ cuando $R_e \rightarrow -\infty$ lo cual coincide con los resultados asintóticos reportados por ZDB (ver sección 3 y 5 de ese trabajo).

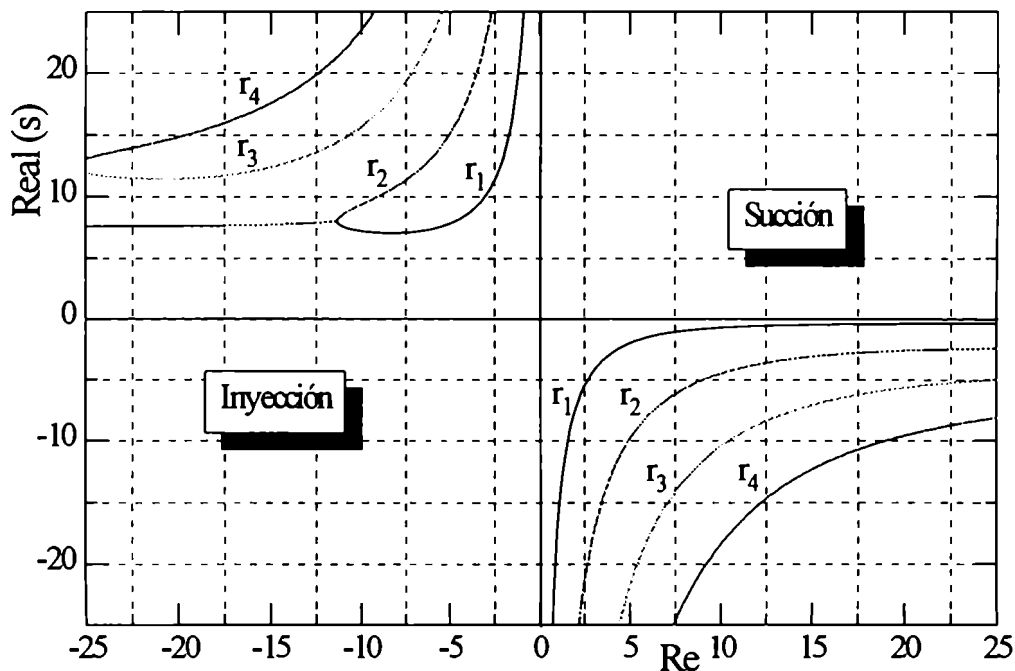


Fig. 3.4 Ilustra, para los flujos simétricos, las curvas obtenidas de la parte real de los valores propios, que corresponden al caso de los modos propios simétricos en función de R_e tanto para inyección como para succión

Nosotros, en el presente trabajo, no sólo comprobamos numéricamente la validez de los resultados teóricos por ellos presentados, sino que aún más, hemos extendido el cálculo numérico, para obtener las curvas correspondientes a los valores propios r_3 y r_4 .

En la figura 3.5 se muestran los resultados obtenidos para las soluciones tipo I en el caso de los modos antisimétricos en el intervalo $-25 \leq R_e \leq 25$. Aquí, los modos son estables para inyección mientras que para succión los modos se vuelven inestables en $a=R_e = 6.0014$. Por otro lado, $q_1 \rightarrow 1$, $q_2 = -1$, $q_3 = -3$ y $q_4 = -5$, cuando $R_e \rightarrow \infty$. Para la primera raíz q_1 de los flujos II y III, ZDB encontraron que éstos siempre son inestables. También puede observarse que, cuando $R_e \rightarrow \infty$, la solución $q_1 \rightarrow 0$ para los flujos del tipo II, es decir existe una bifurcación tipo cúspide entre estas soluciones y las del modo I. Por otro lado, la segunda raíz q_2 en $b=R_e = 15.4146$ es cero. Un fenómeno similar ocurre en $R_e = 12.16$, donde también se marca un punto separación entre las soluciones II y III. Del cambio de estabilidad en a y b se puede inferir que existen otras soluciones asimétricas en las vecindades de estos puntos. Lo anterior ha sido comprobado por ZDB.

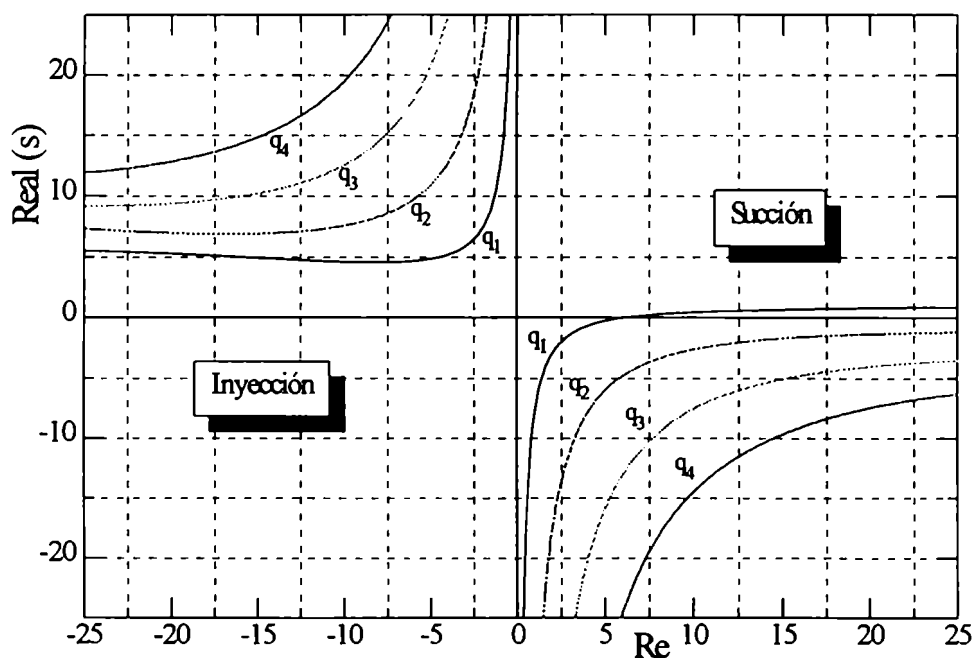


Fig. 3.5 Para los flujos simétricos, se ilustran las curvas obtenidas de la parte real de los valores propios en función de R_e , cuando los modos propios son antisimétricos.

En general, de los resultados obtenidos se puede finalmente concluir lo siguiente: El flujo es estable para las soluciones del tipo I, en el intervalo $-\infty \leq R_e \leq 6.0014$ e inestable $R_e > 6.0014$. En este punto existe una bifurcación de tipo *pitchfork*, dando lugar a la aparición de dos soluciones asimétricas estables denominadas I_1 y I'_1 . Estas soluciones son imágenes especulares una de la otra con respecto al centro del canal. Pero a su vez se vuelven inestables en $R_e = 12.963$, originando una bifurcación Hopf supercrítica, es decir, son soluciones periódicas en el tiempo de la ecuación (3.1). Las soluciones del tipo II y III siempre son inestables y existen sólo en el rango $2.165 < R_e < \infty$; sin embargo, existe una bifurcación de *pitchfork* para las soluciones tipo III en $R_e = 15.145$. En el capítulo 5 se discute en detalle, el tipo de bifurcación local que aparece cuando hay un cambio de estabilidad. Resumiendo la anterior discusión: El flujo es simétrico estable para el caso de inyección, continúa siendo estable y simétrico para el caso de succión hasta $R_e = 6.0014$, pasa en este punto a un estado asimétrico estable (soluciones I_1 y I'_1) hasta $R_e = 12.963$ en donde las soluciones son periódicas hasta $R_e = 14$, después las soluciones son cuasi periódicas y finalmente se vuelve caótico en $R_e = 20$.

3.3 Evolución temporal para el caso hidrodinámico.

Para el estudio de la evolución temporal de la ecuación (3.1), hemos implementado un método numérico implícito en diferencias finitas. Para la variable temporal, utilizamos diferencias adelantadas a segundo orden, o sea que utilizamos tres niveles. Para la variable espacial se utilizan diferencias centradas, también tomando términos hasta el segundo orden.

A fin de comprobar que efectivamente el flujo evoluciona a un estado asimétrico para números de Reynolds un poco mayores que el valor umbral, en la figura 3.6 ilustramos un ejemplo de la evolución temporal de la función que representa la

velocidad en la dirección del eje y , para $Re=7$. Observe que el flujo es inicialmente simétrico pero como se dijo anteriormente inestable y evoluciona hasta un estado estable asimétrico. En esta gráfica se utilizó un paso temporal $t=0.01$ unidades de tiempo característico (T.C). El sistema alcanza el equilibrio, en una solución asimétrica para un tiempo $t \approx 3TC$ y la integración se hizo en el intervalo $-1 < y < 1$. Obsérvese que siempre se mantienen las condiciones de frontera en la pared.

En un trabajo experimental realizado por Raithby y Knudsen (1974), quienes construyeron un canal poroso, encontraron que no hay soluciones simétricas para el rango $0 < Re < 20$ y, específicamente en $Re = 15$, no existen soluciones asimétricas ni periódicas. Lo cual coincide con el hecho de que para $Re=15$, el flujo es cuasiperiódico, (ver ZDB).

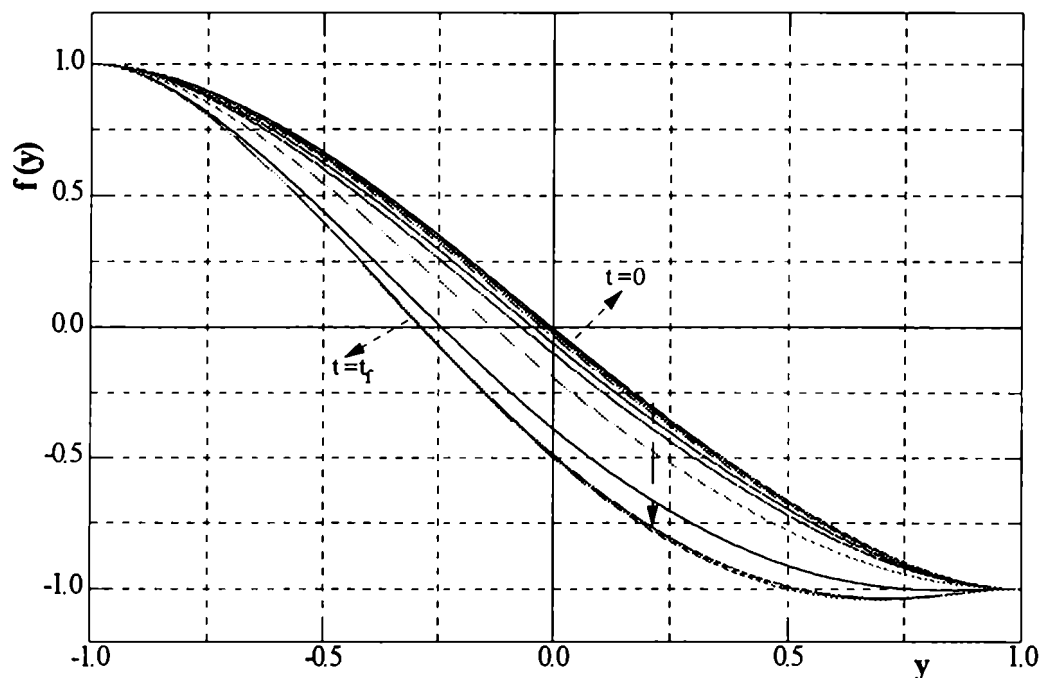


Fig. 3.6 Ilustra la evolución temporal de las curvas que representan la velocidad de un flujo según el eje y , desde un estado simétrico e inestable hasta un estado asimétrico estable en el caso de $Re=7.0$.

Otros resultados importantes obtenidos se pueden resumir en la siguiente forma: Existe un sólo punto de estancamiento para el caso de los flujos simétricos tipo I en el centro de las placas, mientras que los flujos II (algunos) y III tienen otros dos puntos de

estancamiento adicionales, es decir, el flujo se revierte cerca del centro del canal. (Ver figura 3.3).

Por otro lado el problema estacionario para el caso en donde la inyección no es la misma en cada pared, ha sido tratado particularmente por Proudman (1967), Terril (1967), Shrestha y Terril (1968) Cox (1991). También, Taylor et al (1991) estudiaron la estabilidad del problema en tres dimensiones únicamente para $R_e > 0$ dado que el problema es estable para $R_e < 0$. También encontraron que para el caso particular de placas circulares y paralelas, para los flujos simétricos, tanto para inyección como para succión, el problema es siempre estable.

4. PROBLEMA MAGNETOHIDRODINAMICO

Cuando se tiene en cuenta la presencia de un campo magnético perpendicular a las placas y en el caso estacionario, el sistema estará descrito por el siguiente sistema de ecuaciones:

$$-\frac{1}{R_e} f''' = C + ff'' - f'^2 - \frac{1}{M_A^2} (pp'' - p'^2) \quad (4.1)$$

$$-\frac{1}{R_m} p'' = fp' - pf' \quad (4.2)$$

Vamos a resolver el anterior sistema de ecuaciones en forma numérica utilizando técnicas convencionales, tales como método de Runge-Kutta en algunos casos como métodos en diferencias finitas en otros (más exactamente se utiliza un método de relajación, el cual está ilustrado en el apéndice A). Haremos también una discusión de las propiedades de estas ecuaciones en aproximaciones asintóticas para valores grandes y pequeños de los parámetros sin dimensiones involucrados en este problema, lo cual nos permitirá también poner en evidencia los mecanismos físicos que intervienen en el movimiento del fluido conductor. Sin especificar en detalle las diferentes capas límites que aparecen, estos casos asintóticos son ilustrados en los cuadros 1 y 2 de la sección 4.1, para diferentes valores asintóticos de R_e , R_m y M_A . Estudiaremos solo algunos casos teniendo en cuenta que el tratamiento para los otros es similar. Adicionalmente, en este

capítulo regresaremos a la convención normal de números de Reynolds positivos en todos los casos, es decir los casos succión e inyección se diferencian al cambiar las condiciones de frontera en las paredes.

Debido a las condiciones de contorno, es decir, inyección o succión a través de paredes perforadas, la velocidad del fluido en estas situaciones está relacionada con el gradiente de presiones según x , o sea, con la constante C y la componente x del campo magnético, tal como se demuestra en sección 4.5. En cada caso, dada la velocidad y los demás parámetros físicos, hay que determinar el valor de C , como un valor característico del problema de condiciones de contorno del sistema de ecuaciones (4.1) y (4.2).

4.1 Aproximaciones asintóticas para diferentes valores de R_e , R_m y M_A .

Cuadro N^o 1

$$R_e \gg 1$$

$$-C = -(f'^2 - ff'') + \frac{1}{M_A^2} (p'^2 - pp'')$$

	$M_A^2 \ll 1$	$M_A^2 \gg 1$
$R_m \ll 1$	1A $-CM_A^2 = p'^2 - pp''$ Salvo que $f'' \gg 0$ $-\frac{1}{R_m} p'' = fp' - pf'$	1B $C = f'^2 - ff''$ Salvo que $p'' \gg 0$ $-\frac{1}{R_m} p'' = fp' - pf'$
$R_m \gg 1$	1C Aparece una capa límite en la región central $-CM_A^2 = p'^2 - pp''$ $fp' - pf' = 0$ Salvo que $p'' \gg 0$	1D $C = f'^2 - ff''$ $fp' - pf' = 0$ Salvo que $p'' \gg 0$

Cuadro No. 2.

$$R_e \ll 1$$

	$M_A^2 \ll 1$	$M_A^2 \gg 1$
$R_m \ll 1$	2A $-\frac{1}{R_e} f''' = C + \frac{1}{M_A^2} (p'^2 - pp'')$ $-\frac{1}{R_m} p'' = fp' - pf'$	2B $-\frac{1}{R_e} f''' = C$ $-\frac{1}{R_m} p'' = fp' - pf'$
$R_m \gg 1$	2C $-\frac{1}{R_e} f''' = C + \frac{1}{M_A^2} (f'^2 - ff'')$ $fp' - pf' = 0$	2D $-\frac{1}{R_e} f''' = C$ $fp' - pf' = 0$

4.2 Régimen de conductividad alta: Flexión de las líneas magnéticas.

Cuando el número de Reynolds magnético es muy grande, es decir $R_m \gg 1$, la ecuación (4.2) implica que:

$$\frac{f'}{f} = \frac{p'}{p} \quad (4.3)$$

Excepto en un entorno de $y = 0$, donde p'' puede tomar valores muy grandes, ya no es válida en esta región la ecuación (4.3). Debido a que el campo magnético debe ser continuo, se forma una capa límite resistiva alrededor de $y = 0$ en el centro del canal. Cualquier solución de (4.1), en este régimen, necesita que $p = \mp f$ en la parte externa de la capa límite. Los signos \mp se deben a que el valor del campo magnético B_y está siempre orientado hacia arriba (o hacia abajo) mientras que, por ejemplo, en el caso de succión $f(\pm 1) = \mp 1$ en la frontera. La ecuación (4.3) indica que las líneas del campo magnético son arrastradas por el fluido, tanto que llegan a ser paralelas en la región externa a la capa límite.

Por otra parte en la capa límite, las líneas del campo magnético no pueden acompañar más a las líneas de corriente, que representan la salida del fluido en la dirección x , dichas líneas del campo magnético muestran una fuerte curvatura y dejan de ser colineales con el flujo (región interna de la capa límite). Las líneas del campo magnético deben ser continuas en la línea de separación entre las regiones externa e interna, de modo que las soluciones encontradas deberán ser empalmadas con continuidad. En general, las soluciones para la región externa que se obtienen de las

ecuaciones diferenciales (4.1) y (4.2), pueden ser resueltas numéricamente o también, para este régimen asintótico, de las aproximaciones correspondientes a los cuadros 1C, 1D, 2C, 2D, que pasamos a examinar (ver cuadro 1).

4.2.1 Soluciones asintóticos de $R_m \gg 1$ y $R_e \gg 1$

Consideraremos primero el caso de baja viscosidad en el cual $R_e \gg 1$, entonces la ecuación de transporte se reduce a la siguiente expresión:

$$-C = -(f'^2 - ff'') + \frac{1}{M_A^2} (p'^2 - pp'') \quad (4.4)$$

Reemplazando la ecuación (4.3) en la ecuación anterior, se obtiene el siguiente resultado:

$$\frac{C}{1 - \frac{1}{M_A^2}} = f'^2 - ff'' \quad (4.5)$$

4.2.2 Caso inyección

Para esta situación, la solución de acuerdo con las condiciones de frontera dadas en el capítulo 2, es de la forma:

$$f = \sin\left[\left(\frac{\pi}{2}\right)y\right] \quad (4.6)$$

Luego la ecuación (4.5) implica que C debe satisfacer la siguiente relación:

$$C = \left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{M_A^2}\right) \quad (4.7)$$

Es decir, la constante C toma un valor positivo en el caso en que $M_A > 1$, o sea cuando la energía cinética es mayor que la energía magnética. Cuando $M_A \gg 1$, se obtiene el caso límite de un flujo laminar no viscoso con $C = (\pi/2)^2$, en donde la influencia del campo magnético es prácticamente despreciable. Cuando M_A se aproxima a 1 por encima, C disminuye a cero. Físicamente, la curvatura de las líneas del campo magnético ocasionan una fuerza adicional hacia afuera, entonces para mantener un estado estacionario la constante C debe tomar valores pequeños. En la situación en que $M_A < 1$ (en este caso la energía magnética es mayor que la energía cinética), C es negativa (ver apéndice A), lo que equivale a decir que existe un gradiente de presiones que ejerce una fuerza hacia el centro de las placas, la cual puede ser equilibrada por la componente B_x del campo magnético, pero si $C > P'^2/2M_A^2$ no existirá un estado estacionario con C positiva. Esto se debe a que la curvatura de las líneas magnéticas ejerce una fuerza que favorece la salida del fluido. Adicionalmente, cuando $M_A < 1$ (y en ausencia de esfuerzos viscosos), solo es posible equilibrar la acción del campo magnético, a menos de revertir la dirección del gradiente de presiones, cuando $C < P'^2/2M_A^2$. En este caso la fuga de fluido se debe exclusivamente a la curvatura de las líneas magnéticas. Nótese que cuando $M_A = 1$, el escape del fluido se produce sin la acción del término correspondiente al gradiente de presiones $C = 0$ y la salida del fluido es controlada únicamente por los efectos de las fuerzas magnéticas (véase la ecuación 4.47). Además si $M_A \ll 1$, las ecuaciones dadas en 1C (ver cuadro N°1) se satisfacen con valores muy grandes de C . En la figura 4.1 se relaciona la constante C , con el número de Mach Alfvénico M_A , relacionados en la ecuación (4.7).

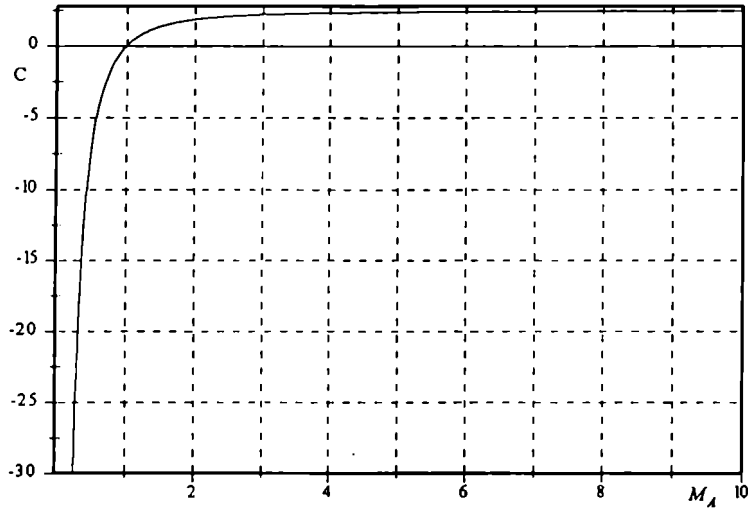


Fig. 4.1 En esta figura se muestra la variación de la constante C con respecto a M_A para el caso de $R_e \gg 1$ y $R_m \gg 1$. Observe que para M_A grandes se obtiene el límite laminar no viscoso, debido a la poca influencia del campo magnético.

La solución para la parte interna, se puede obtener tomando una aproximación para la función f , en la vecindad de $y = 0$, es decir, en la capa límite resistiva central, que se presenta cuando $R_e \gg 1$. Entonces, bajo las actuales circunstancias y tomando únicamente el primer término de la expansión de la función del seno, que representa a f , en el interior de esta capa límite, la solución será:

$$f = \frac{\pi}{2} y \tag{4.8}$$

Para obtener el valor de la función p utilizamos la ecuación completa (4.2), la cual conduce, luego de reemplazar en ella la ecuación (4.8), a la siguiente ecuación diferencial:

$$-\frac{1}{R_m} p'' = \frac{\pi}{2} y p' - \frac{\pi}{2} p \quad (4.9)$$

La (4.9) tiene como solución:

$$p = \left(-\frac{\pi}{2}\right) \int_0^y \text{Erf}(\sqrt{\pi R_m/4} y) dy - B_c \quad (4.10)$$

Aquí Erf es la función error y $B_c = -\frac{1}{\sqrt{R_m}}$ es el valor de la componente B_y del campo magnético en el centro de las placas. La solución (4.10) se obtiene imponiendo que las soluciones externas e internas para p' , empalmen con continuidad (es decir la componente x del campo magnético B_x debe ser continua en el punto de separación de los dos medios):

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} p'(interna) = \lim_{y \rightarrow 0} p'(externa) \quad (4.11)$$

donde $p'(externa) = \pm \frac{\pi}{2} \cos(\frac{\pi}{2} y)$ y $p'(interna)$ se obtiene de la ecuación (4.10).

Las soluciones numéricas del sistema de ecuaciones (4.1), (4.2) son ilustradas en las figuras 4.2 y figura 4.3 donde se muestran el perfil de velocidades y el perfil del campo magnético para los valores $R_e=441.18$, $R_m=555.227$, $M_A=2.59383$ y $C=2.11384$. Además estas figuras nos permiten comprobar la validez de las soluciones analíticas obtenidas asintóticamente.

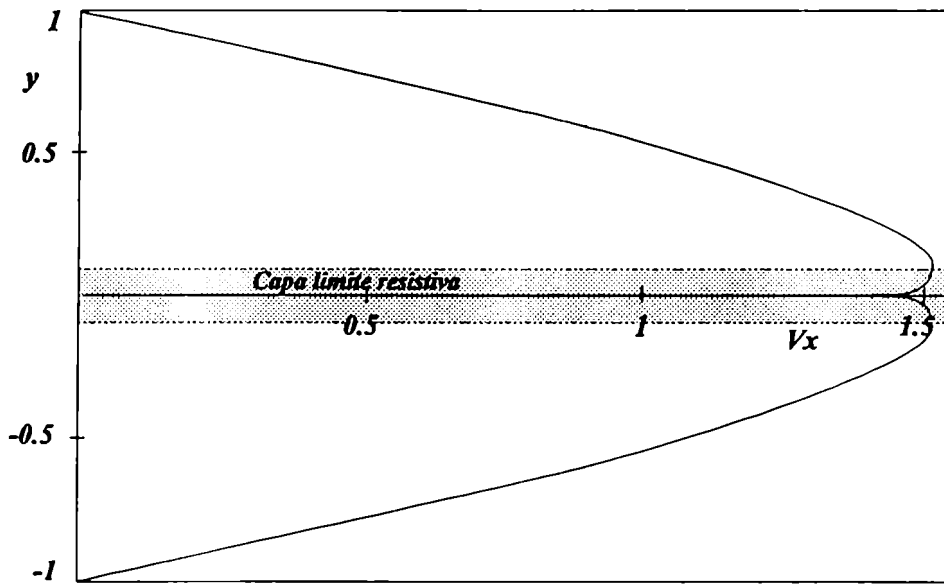


Fig. 4.2 En esta figura se ilustra el perfil del campo magnético para el caso $R_e=441.18$, $R_m=555.227$, $M_A=2.5938$ y $C=2.11384$. Obsérvese la aparición de una capa resistiva central.

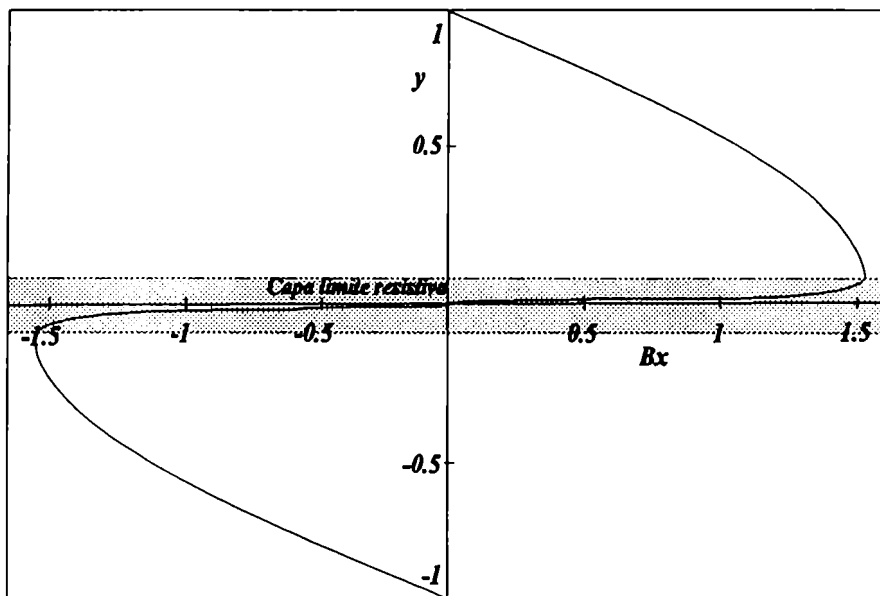


Fig. 4.3 En esta figura se ilustra el perfil del campo magnético para el caso $R_e=441.18$, $R_m=555.227$, $M_A=2.5938$ y $C=2.11384$. Obsérvese la aparición de una capa resistiva central.

La figura 4.4 ilustra las líneas de corriente y del campo magnético. Estas soluciones coinciden cuando se toma el sistema de ecuaciones (4.1) y (4.2) y se resuelven numéricamente utilizando el método de Runge-Kutta, para valores $R_e=441.18$, $R_m=555.227$, $M_A=2.59383$ y $C=2.11384$. Al utilizar la ecuación (4.7), el valor de la constante C es 2.100066, lo cual indica una buena correlación entre los resultados numéricos de las ecuaciones diferenciales completas y las expresiones asintóticas de las mismas. En la misma gráfica además puede observarse que en la capa límite central la curvatura del campo magnético frena la salida del fluido, poco viscoso en este caso particular.

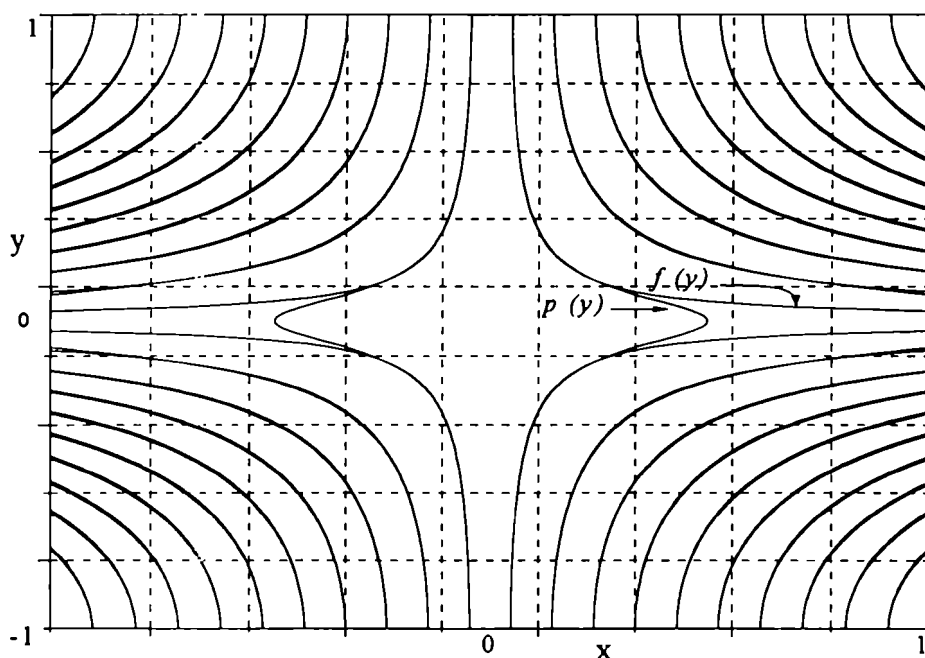


Fig. 4.4 En esta figura se observan las líneas de contorno de la velocidad y el campo magnético para R_m y R_e grandes. Obsérvese que $p \cong f$ en la región externa a la capa límite.

Por otro lado, la energía disipada por efecto Joule en la capa límite, se puede calcular teniendo en cuenta la ley de Ampere:

$$\mathbf{J} = \frac{c}{4\pi} \nabla \times \mathbf{B} \quad (4.12)$$

dado que el problema es plano, únicamente tomamos la componente J_z de la densidad de corriente, esto es:

$$J_z = \frac{c}{4\pi} \left(-\frac{\partial B_x}{\partial y} \right) \quad (4.13)$$

Con ella, la disipación de energía puede obtenerse a partir de la siguiente expresión,

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_z^2}{\sigma} dy \quad (4.14)$$

Reemplazando la ecuación (4.13) en la anterior, se obtiene la siguiente expresión para la disipación en el centro del canal:

$$I = \frac{1}{2} \frac{x^2 \pi^2}{\sqrt{R_m}} \quad (4.15)$$

donde puede observarse que la capa límite que se genera debido al movimiento del plasma es poco disipativa, en el límite $R_m \gg 1$, ya que disminuye el valor de la disipación Joule en ausencia de movimiento por un factor $1/\sqrt{R_m}$. Entonces, la mayor disipación de energía ocurre por fuera de la capa límite debido a la amplificación del campo magnético, como se aprecia en la figura 4.4 en donde la componente B_x del campo crece a medida que se separa de las paredes.

4.3 Aproximaciones Asintóticas $R_e \ll 1$ y $R_m \ll 1$

4.3.1 Caso inyección.

En este caso de números de Reynolds bajos, las líneas de campo magnético son ahora rígidas salvo por una pequeña perturbación, la cual es ocasionada por el movimiento del fluido, que a su vez es muy viscoso en este límite ($R_e \ll 1$). Dicho campo magnético se puede escribir de la siguiente manera:

$$p = p_0 + p_1, \quad (4.16)$$

en donde p_0 es el valor del campo que asumimos constante y por razones de simplificación se puede tomar igual a la unidad. Por otro lado p_1 es una pequeña perturbación, la cual tal como se dijo anteriormente, es ocasionada por el movimiento del fluido. Así las ecuaciones (4.1) y (4.2), previamente linealizadas, se pueden escribir de la siguiente manera: (ver cuadro N^o 2),

$$-\frac{1}{R_e} f''' = C - \frac{1}{M_A^2} p_0 p_1' \quad (4.17)$$

$$\frac{1}{R_m} p_1' = f' p_0 \quad (4.18)$$

En las expresiones anteriores se han suprimido los términos de segundo orden, es decir, tomamos los dos primeros términos de la expansión $p = 1 + R_m p_1 + \dots$.

Por otro lado, el término $1/R_m$ es muy grande, pero p_1'' es muy pequeño, de tal forma que la ecuación (4.18) es válida. Al reemplazarla en la ecuación (4.17), se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$f''' = -CR_e + H_a^2 p_0^2 f' \quad (4.19)$$

Esta ecuación a su vez tiene como solución (con $p_0=1$):

$$f = \left(y - \frac{\text{Senh}(H_a y)}{H_a \text{Cosh}(H_a)} \right) / \left(1 - \frac{\text{Tanh}(H_a)}{H_a} \right) \quad (4.20)$$

y consecuentemente, reemplazando en la ecuación (4.18), se obtiene la siguiente expresión para p_1 :

$$p_1 = - \frac{R_m ((H_a y^2 / 2) - \text{Cosh}(H_a y) / H_a \text{Cosh}(H_a))}{H_a - \text{Tanh}(H_a)} + D \quad (4.21)$$

Aquí, H_a es el número de Hartmann, definido anteriormente en el capítulo 2. Además, la constante de integración D se calcula teniendo en cuenta que la perturbación en la pared debe anularse, entonces queda definida como:

$$D = \frac{R_m (H_a / 2 - 1/H_a)}{H_a - \text{Tanh}(H_a)} \quad (4.22)$$

La figura 4.5 muestra el comportamiento de la componente de la velocidad según la dirección del eje x para diferentes valores del número de Hartmann. Obsérvese que cuando el número de Hartmann crece, es decir el campo magnético se hace muy fuerte ($M_A \ll 1$), el comportamiento del fluido es similar al que tiene el flujo de Hartmann, en donde la velocidad es constante en el centro del canal y varía fuertemente cerca de las placas hasta disminuir a cero exactamente sobre la pared. De las ecuaciones generales dadas en el capítulo 2 (ver ecuaciones 2.10 a 2.13), se puede resolver el problema del flujo de Hartmann, el cual será resuelto más adelante en la sección 4.6.

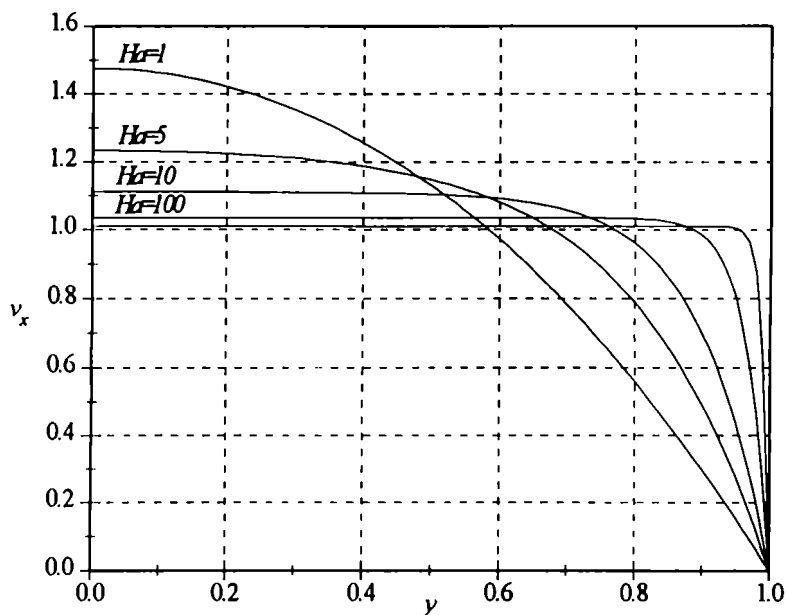


Fig. 4.5 En esta figura se ilustra el perfil de la velocidad y su comportamiento para diferentes valores del número de Hartmann. Obsérvese cuando $H_a \gg 1$ aparece una capa límite en la pared.

Por otro lado, teniendo en cuenta la condición de frontera en la pared $f(y=1)=1$, se encuentra que la constante C está relacionada con las otras constantes a través de la siguiente fórmula:

$$C = \frac{H_a^3}{R_e} \left(\frac{1}{H_a - \text{Tanh}(H_a)} \right) \tag{4.23}$$

La figura 4.6 ilustra la relación que existe entre la constante C , H_a y R_e dada en la ecuación (4.23). Adicionalmente, tenemos que si $H_a \gg 1$ (por ejemplo, $M_A \ll (R_e R_m)^{(1/2)} \ll 1$), implica que $C \approx H_a^2 / R_e$, por lo tanto se puede deduce que debe existir un fuerte gradiente que mueve hacia afuera al fluido. La rigidez del campo magnético controla entonces el movimiento del fluido, impidiendo la salida de éste. Por otro lado, si $H_a \ll 1$, las líneas de campo magnético son "menos rígidas" y en este caso, se cumple la condición $CR_e \approx 3$, por lo tanto, los efectos viscosos son ahora los que controlan el movimiento del fluido.

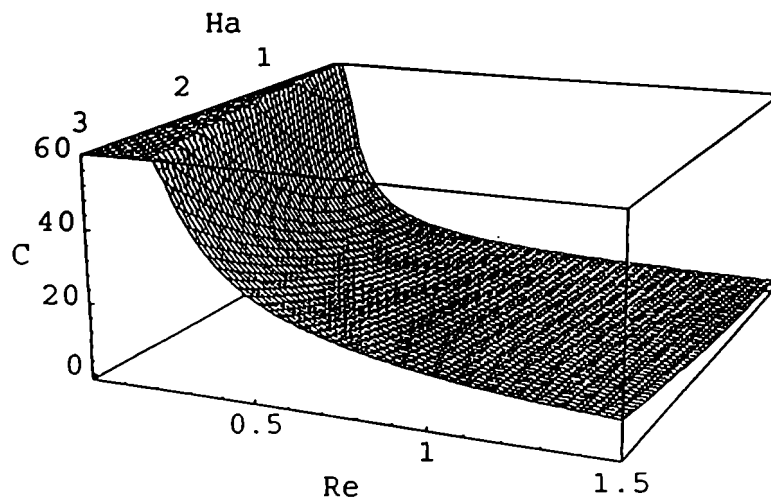


Fig. 4.6 En esta figura se muestra la relación entre C , Ha y Re en el caso asintótico de $R_m \ll 1$ y $Re \ll 1$.

Por otro lado, la figura 4.7 ilustra las líneas de corriente y de campo magnético, obtenidas por la integración numérica de las ecuaciones básicas. Nótese la rigidez de las líneas de campo magnético como también que en la pared la componente B_x no se anula. En esta gráfica es difícil de ser apreciado, debido a la escala con la cual fue construida. Sin embargo, este efecto puede apreciarse claramente en la figura 4.8.

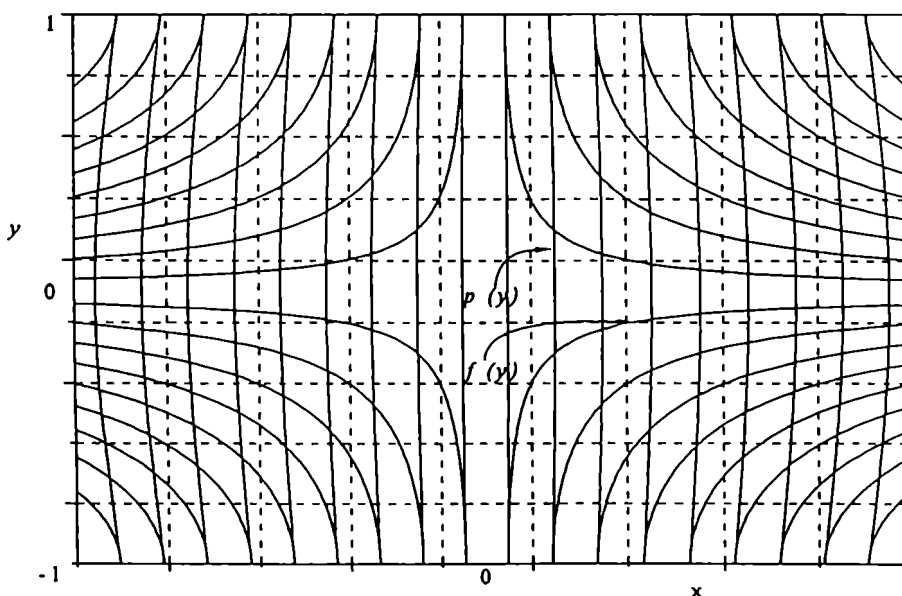


Fig. 4.7 Para el caso asintótico de $R_m \ll 1$ y $Re \ll 1$, se muestran en esta figura las líneas de campo para la velocidad y el campo magnético. Para este caso $R_m = Re = 0.1$, $Ma = 0.3$ y $C = 31.3254$.

La figura 4.8 ilustra los perfiles de velocidad y del campo, en donde se pone de manifiesto la aparición de la capa límite antes mencionada. Análogamente, como se hizo en el caso asintótico anterior, las soluciones obtenidas al integrarse numéricamente las ecuaciones (4.1) y (4.2) por el método de Runge-Kutta, para los valores $R_e = 0.1$, $R_m = 0.1$, $M_A = 0.3$ y $C = 31.3254$, coinciden con los obtenidos a través de la ecuación (4.23), en donde el valor que se obtiene es $C = 31.3326$. Así se muestra nuevamente un buen acuerdo entre los resultados asintóticos y los numéricos encontrados al integrar el sistema de ecuaciones completas. Por otro lado, en las integraciones numéricas que fueron realizadas para diferentes valores del número de Reynolds, no muestran variaciones apreciables, para ambos perfiles de la velocidad y del campo magnético, en el rango $0.1 \leq R_e \leq 30$, como puede verificarse en la figura 4.8.

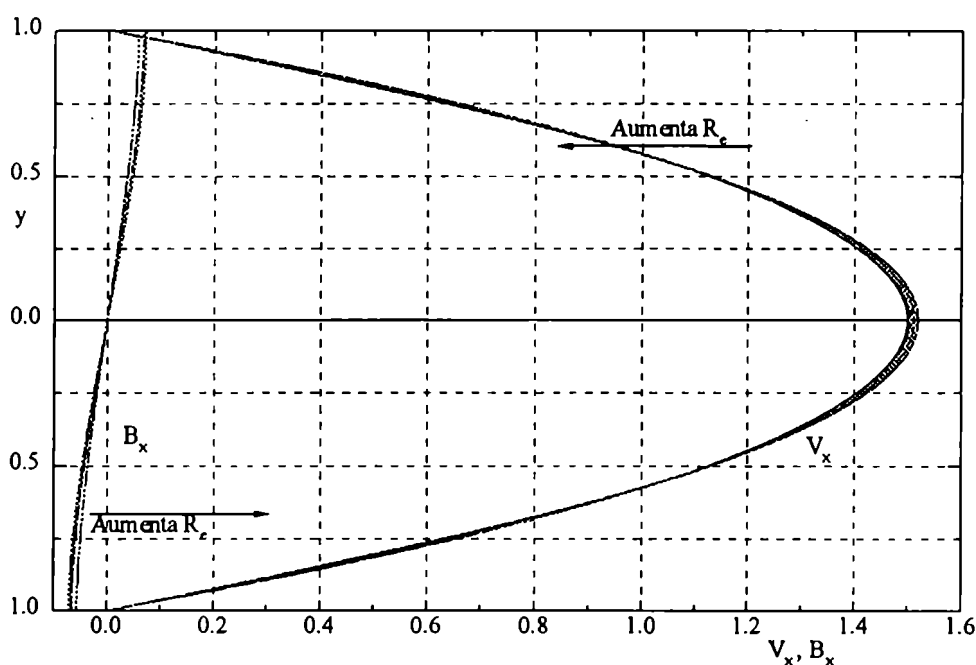


Fig. 4.8 Para el caso asintótico de $R_m \ll 1$ y $R_e \ll 1$, se muestra en esta figura el perfil de velocidades y del campo magnético. Obsérvese que el campo no se anula en la pared.

4.4 Solución con capa límite en la pared para $R_e \gg 1$, $R_m \gg 1$ y $M_A \ll 1$ ($HA \gg 1$)

Para el caso dado en el cuadro 1A, o sea cuando $R_e \gg 1$, $R_m \gg 1$ y si $M_A^2 \ll 1$, las ecuaciones a resolver son ahora:

$$C + \frac{1}{M_A^2} (p'^2 - pp'') \approx 0 \quad (4.24)$$

$$-\frac{1}{R_m} p'' = fp' - pf' \quad (4.25)$$

La ecuación (4.25) se puede escribir también de la siguiente forma:

$$f = -\frac{p}{R_m} \int_0^y \frac{p''}{p^2} dy \quad (4.26)$$

La ecuación (4.24) indica esencialmente que el campo magnético está en equilibrio con la presión, y que los efectos viscosos e inerciales son despreciables, lo cual conduce a que la ecuación (2.1) se pueda escribir de la siguiente forma:

$$\nabla P + \frac{1}{c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \approx 0 \text{ y } \mathbf{V} \approx 0 \quad (4.27)$$

La solución a la ecuación (4.24) es:

$$p = -\frac{\cosh(ky)}{\cosh(k)} \quad (4.28)$$

Además, con las condiciones de frontera $p(\pm 1) = -1$ y $B_x(\pm 1) = 0$, y con p dado por (4.28), se obtiene:

$$B_x = xp' = -kx \frac{\sinh(ky)}{\cosh(k)} \quad (4.29)$$

Sin embargo, $B_x(\pm 1) \neq 0$, lo cual indica que las paredes son materiales dieléctricos (o están recubiertos de una delgada capa dieléctrica). Así es que para este régimen no existe solución en el caso de paredes conductoras, a menos que se desarrolle

una capa límite en la pared. La velocidad del flujo consistente con la solución dada en la ecuación (4.29), está descrita por la siguiente relación:

$$-V_y = f(y) = \frac{k^2}{R_m} \cosh(ky) gd(y) \quad (4.30)$$

que de hecho resuelve la ecuación (4.26) y adicionalmente satisface la condición de punto de estancamiento $f(0) = 0$. En la expresión anterior, la función de Gudermannian $gd(y)$ (ver Tablas de Grandshteyn-Ryzhik (1980)), representa la integral:

$$gd(y) = \int_0^y \frac{d\xi}{\cosh(k\xi)} \quad (4.31)$$

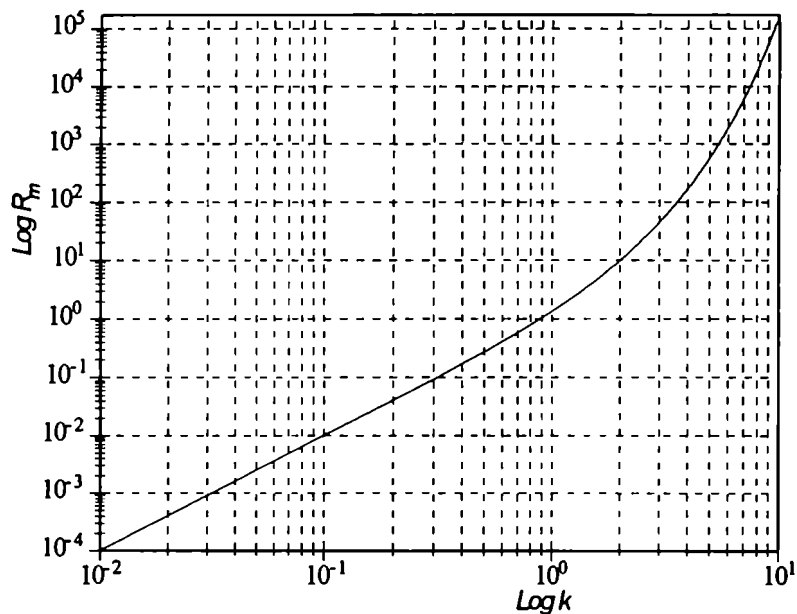


Fig. 4.9. En una escala logarítmica se ilustra el comportamiento de R_m , con respecto a la constante k .

Como en las paredes, en el caso de inyección, se debe satisfacer $f(\pm 1)=1$, k deberá ser determinada por las raíces de la ecuación trascendental:

$$1 = \frac{k^2}{R_m} \text{Cosh}(k) \int_0^y \frac{d\xi}{\cosh(k\xi)} \quad (4.32)$$

La figura 4.9 muestra el comportamiento de la constante k con respecto a R_m dada por la ecuación (4.32). De la ecuación (4.30), se obtiene:

$$f'(y) = -\frac{k^2}{R_m} + \tanh(ky)f(y) \quad (4.33)$$

Entonces, de la condición $f'(\pm 1) \neq 0$, se observa que siempre se genera una capa límite viscosa en las paredes, ya que no se cumple la condición,

$$V_x = xf' = 0 \quad (4.34)$$

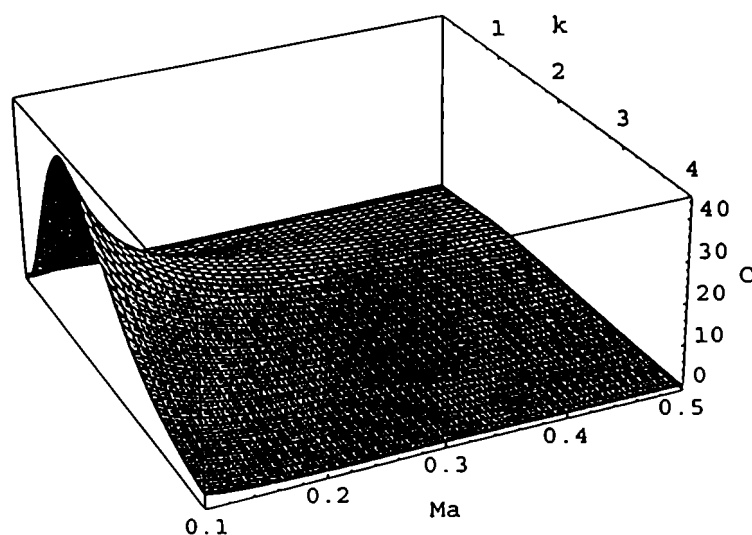


Fig. 4.10. Se ilustra la variación de la constante C con respecto a k y M_A cuando $R_m \gg 1$ y $R_e \gg 1$ y $M_A < 1$.

Adicionalmente, el parámetro k no es arbitrario, debe satisfacer la ecuación:

$$CM_A^2 = \frac{k^2}{\cosh^2(k)} \quad (4.35)$$

es decir, C está determinado por los valores de k , tal como se ilustra en la figura 4.10, en donde se observa un máximo de C para $k=1.2$ y tiende a cero cuando $k \gg 1$ y para valores pequeños de M_A .

4.5 Determinación del campo de presión

En esta sección deduciremos una expresión para el gradiente de presiones y la relación que existe con la constante de integración C . Esta constante aparece al integrar la ecuación de grado cuarto, que representa el movimiento del fluido. También mostraremos como están relacionados entre si, el gradiente de presiones, la fuerza magnética y la constante C . La ecuación del movimiento dependiente del tiempo, en términos de las funciones similares f , p y la constante C está dada por la expresión: (ecuación (2.20))

$$f_{ty} - \frac{1}{R_e} f_{yyy} = C + (ff_{yy} - (f_y)^2) - \frac{1}{M_A^2} (pp_{yy} - (p_y)^2) \quad (4.36)$$

Por otro lado, la ecuación del movimiento en su forma básica, ecuación (2.1) es :

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} \right) + \frac{1}{\rho c} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \nabla^2 \mathbf{V} \quad (4.37)$$

En la ecuación anterior la velocidad, el campo magnético y la densidad de corriente se pueden escribir, en términos de las funciones similares f y p , de la siguiente forma:

$$\mathbf{V} = (xf', -f, 0) \quad (4.38)$$

$$\mathbf{B} = (xp', -p, 0) \quad (4.39)$$

$$\mathbf{J} = (0, 0, -\frac{c}{4\pi} xp'') \quad (4.40)$$

Entonces, la ecuación (4.37) se transforma en el siguiente sistema de ecuaciones para las componentes x e y :

$$x \frac{\partial f}{\partial t} - xff'' + xf'^2 + \frac{xpp''}{4\pi\rho} - vxf''' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = cx + xh(y) \quad (4.41)$$

$$-\frac{\partial f}{\partial t} + ff' + \frac{x^2}{4\pi\rho} pp'' - vf'' = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} = \pi'(y) + \frac{x^2 h'(y)}{2} \quad (4.42)$$

De las ecuaciones anteriores se obtiene, por simple inspección, la forma general para la presión, en el caso de flujos bidimensionales, viscosos, conductores en canales porosos y en presencia de un campo magnético transversal a las paredes. Dicha presión se puede escribir como:

$$P(x, y, t) = -c\rho x^2 / 2 - x^2 h(y, t) / 2 - \Pi(y, t) + P_0 + \rho \int \frac{\partial f(y, t)}{\partial t} dy \quad (4.43)$$

La anterior expresión independiente del tiempo, queda en la forma:

$$P(x, y) = -c\rho x^2 / 2 - x^2 h(y) / 2 - \Pi(y) + P_0 \quad (4.44)$$

en donde se define:

$$h(y) = \frac{p'^2}{4\pi\rho} \quad \text{y} \quad \Pi(y) = \frac{f^2}{2} + vf' \quad (4.45)$$

Utilizando las definiciones dadas en (4.45) y adimensionalizando todas las variables, de igual forma a la utilizada en el capítulo 2, la ecuación (4.44) se puede escribir de la siguiente manera:

$$P - P_i = -\frac{1}{2}Cx^2 - \left(\frac{f^2}{2} + \frac{f'}{R_e}\right) - \frac{p'^2 x^2}{2M_A^2} \quad (4.46)$$

Nuevamente, por razones de simplicidad en la notación, hemos suprimido la tilde en todas las variables de la ecuación anterior, sin embargo, todas estas variables son adimensionales. El gradiente de presión en la dirección x , se podrá escribir entonces como:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = -Cx - \frac{p'^2 x}{2M_A^2} \quad (4.47)$$

En la ecuación anterior es importante notar que no hay componente y del campo magnético (es decir no aparece p), esto es debido esencialmente a que la ecuación del movimiento es del tipo:

$$\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} = -\nabla \left(\frac{P}{\rho} + \frac{|\mathbf{B}|^2}{8\pi\rho} \right) + \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}{4\pi\rho} \quad (4.48)$$

El primer término del lado derecho en la anterior expresión, asocia la fuerza debida a la presión total y el segundo representa la fuerza ocasionada por la curvatura de las líneas del campo magnético. En este caso, las líneas de fuerza del campo magnético actúan como una banda elástica que hace presión sobre el flujo. Esta "fuerza elástica" se puede escribir en términos de p y p' de la siguiente manera:

$$\mathbf{F}_c = \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B}}{4\pi\rho} = \frac{1}{4\pi\rho} \left(xp' \frac{\partial}{\partial x} - p \frac{\partial}{\partial y} \right) (xp', -p, 0) \quad (4.49)$$

Donde F_c es la fuerza debida a la curvatura del campo magnético. Las componentes x e y de esta fuerza están dadas por:

$$F_{cx} = \frac{1}{4\pi\rho} x(p'^2 - pp'') \quad (4.50)$$

$$F_{cy} = \frac{pp''}{4\pi\rho} = \frac{d}{dy} \frac{p^2}{8\pi\rho} \quad (4.51)$$

La aceleración total en la dirección del eje x será entonces la suma de las componentes debidas a la presión total y la debida a la curvatura del campo magnético:

$$a_x = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - x \frac{pp''}{4\pi\rho} \quad (4.52)$$

Reemplazando la ecuación (4.47) en (4.52), se obtiene la siguiente expresión adimensionalizada:

$$a_x = \left[C + \frac{p'^2}{M_A^2} - \frac{pp''}{M_A^2} \right] x \quad (4.53)$$

A manera de ejemplo, en las figuras 4.11, 4.12 y 4.13 se ilustran las líneas de contorno de la presión para $Re=441.182$, $R_m=555.22$ y $M_A=0.9, 1.2$ y 2.0 . Aquí se han usado las expresiones asintóticas calculadas para el campo y la velocidad en el caso en que ambos números de Reynolds sean altos, (ver capítulo 4, ecuaciones (4.6) y (4.10)). De estas gráficas se observa que en la región de la capa límite el gradiente de la presión es mucho más intenso. Adicionalmente, cuando aumenta el número de Reynolds magnético, esta intensidad comienza a disminuir hasta obtenerse el caso hidrodinámico no viscoso. Cuando $M_A < 1$ se observa el cambio de dirección del gradiente de presiones.

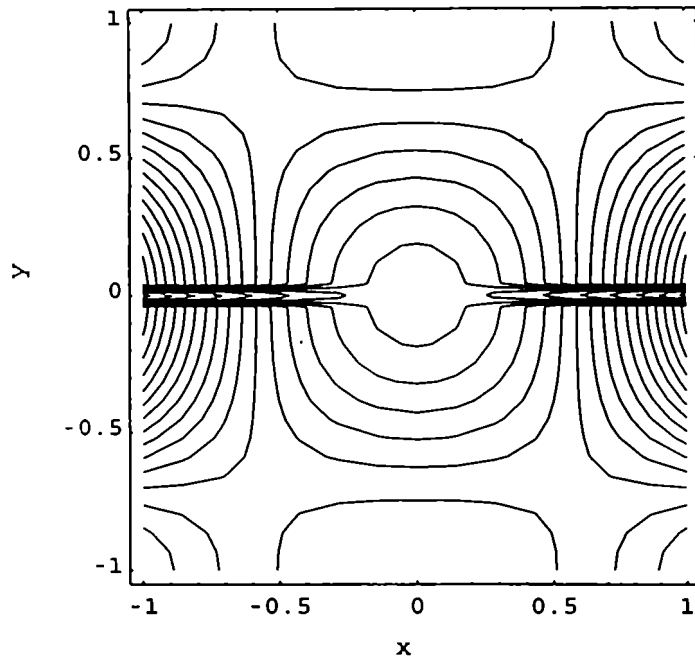


Fig. 4.11. Se ilustran las líneas de contorno de la presión total para $R_e=555.22$, $M=441.18$ y $M_A=0.9$. Aquí la constante C es negativa (Ver ecuación 4.7).

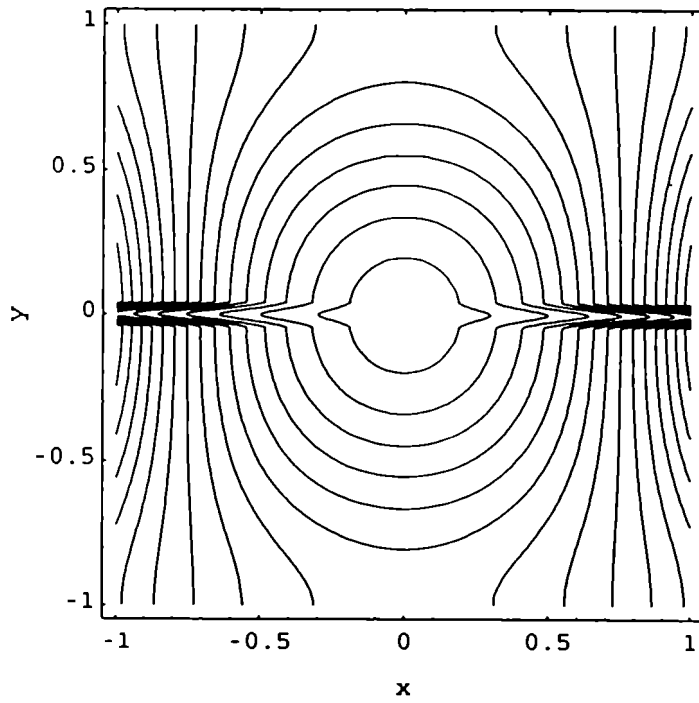


Fig. 4.12. Se ilustran las líneas de contorno de la presión total para $R_e=555.22$, $R_M=441.18$ y $M_A=1.2$.

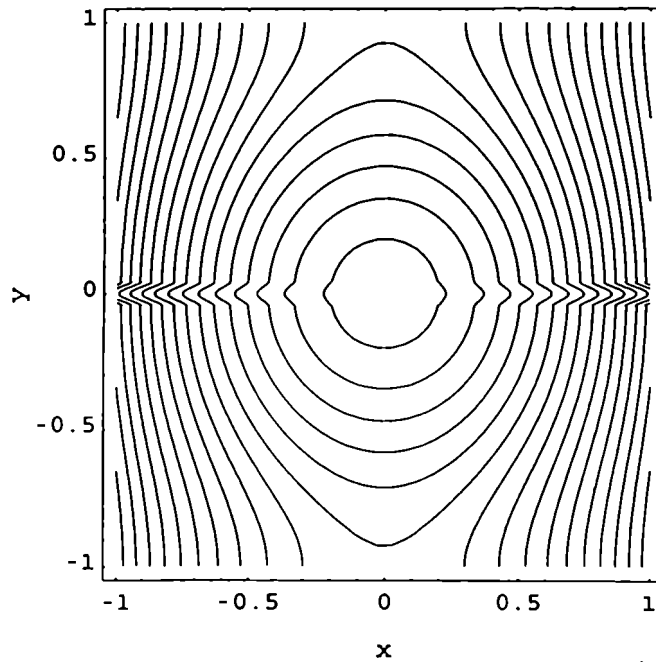


Fig. 4.13. Se ilustran las líneas de contorno de la presión total para $R_e=555.22$, $R_M=441.18$ y $M_A=2$.

En este límite de números de Reynolds grandes, para el caso de inyección, ilustramos en la figura 4.14 la variación de la componente x de la aceleración, dada en la ecuación (4.53), con respecto al ancho del canal. Se puede observar que por fuera de la capa límite a_x es constante y posee un mínimo en el centro del canal. Esta componente de la aceleración representa una parte de la fuerza de curvatura y la fuerza asociada con la presión total.

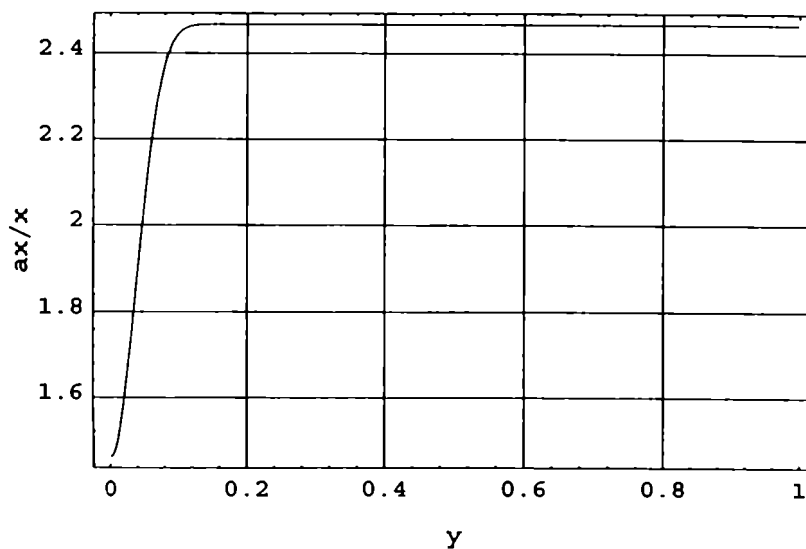


Fig. 4.14. Se ilustra la variación de la componente x de la aceleración para valores de $R_e=555.22$, $R_M=441.18$ y $M_A=2.0$.

4.6 Solución clásica para el flujo de Hartmann.

La solución presentada en la sección 4.31 admite una interpretación física en términos de solución de Hartmann, la cual es bien conocida en la literatura sobre flujos magnetohidrodinámicos. Nos referimos explícitamente al flujo de Hartmann en el cual un fluido se mueve en un canal según la dirección del eje x , aquí las paredes ciegas, es decir no hay succión ni inyección. Adicionalmente existe un campo magnético, el cual en principio es perpendicular a la dirección del fluido.

Retornamos nuevamente el sistema de ecuaciones dado en (2.11) y (2.13) independientes del tiempo, para resolver este caso y teniendo en cuenta que ahora $f=p'=0$. Nótese que este problema es uniforme a lo largo del canal y que ya no tiene solución de semejanza. Las ecuaciones pueden escribirse en forma adimensional de la siguiente manera (para este caso este caso $v_x=g'$, $v_y=0$, $B_x=q'$ y $B_y=p=B_0$):

$$-\frac{1}{R_e} g_{yyy} = C_H + \frac{1}{M_A} q_{yy} \quad (4.54)$$

$$-\frac{1}{R_m} q_{yy} = -g_y + c'E_z \quad (4.55)$$

Aquí se ha tomado $p=-B_0$ y $c'=c/u_0B_0$ y C_H está relacionada con el gradiente de presiones según el eje x . Reemplazando (4.55) en (4.54), se obtiene la siguiente expresión:

$$-g_{yyy} = R_e C_H + H_a^2 (-g_y - c'E_z) \quad (4.56)$$

Ahora, si en la ecuación anterior hacemos el cambio de variable $v_x = u = g_y$, obtenemos la siguiente ecuación:

$$-u_{yy} = R_e C_H + H_a^2 (-u - c' \dot{E}_z) \quad (4.57)$$

la cual tiene como solución a:

$$u = A \text{Cosh}(H_a y) + \frac{R_e C_H}{H_a^2} - \frac{c' \dot{E}_z}{H_a^2} \quad (4.58)$$

en donde la constante A se define:

$$A = \left(\frac{-R_e C_H}{H_a^2} + \frac{c' \dot{E}_z}{H_a^2} \right) / \text{Cosh}(H_a) \quad (4.59)$$

Entonces la ecuación (4.58), se puede escribir entonces de la siguiente forma:

$$u = \left(\frac{R_e C_H}{H_a^2} - \frac{c' \dot{E}_z}{H_a^2} \right) \left(1 - \frac{\text{Cosh}(H_a y)}{\text{Cosh}(H_a)} \right) \quad (4.60)$$

que es la solución clásica al flujo de Hartmann. Notesé la analogía que existe entre la ecuación (4.60) y $v_x = x f'$ obtenida a partir de la ecuación (4.20), para el caso de inyección. Observese que en este caso de paredes porosas, para cada valor x , se obtiene un perfil v_x de Hartmann. Por otro lado, la función q queda ahora determinada de la siguiente forma:

$$q_{yy} = -R_m u - R_m c' E_z \quad (4.61)$$

La ecuación anterior es una corrección, la cual tiene que anularse en las paredes, esto es, el campo eléctrico tiene que ser nulo en dichas paredes. En caso contrario, nunca se podrá desarrollar una capa límite, ya que aunque se esté muy lejos de las

paredes, los efectos de éste no desaparecen en el fluido, toda vez que la influencia electromagnética es de largo alcance y afectará entonces a todo el fluido. Como, en la frontera se debe satisfacer la condición $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ con $\mathbf{E} = E_z \hat{k} = cte$, de tal forma que $\partial E_z / \partial y = 0$. Esto sólo es posible, si y solo si, las paredes son dieléctricas, en cuyo caso la corriente producida por E_z es totalmente transportada por el fluido. Otra posibilidad es que las paredes laterales sean conductoras y estén cortocircuitadas, de tal forma que $E_z = 0$ en la región interior (ver figura 2.1). En definitiva E_z es creado por el flujo y depende solo del estado eléctrico de las paredes, reflejándose en la aparición o no de una capa límite sobre dichas paredes.

Como el flujo externo debe empalmarse con el interno de tal forma que $\nabla^2 \psi^{ext} = 0$, lo cual implica que $q_y^{ext} = 0$, es decir el campo debe ser nulo en las paredes, pero $q_{yy} = -R_m c' E_z$ en la pared de acuerdo a la ley de Ohm, la única posibilidad es que $\psi^{ext} = -x$, para asegurarse de que $q_y = 0$.

Finalmente, la ecuación (4.56) puede integrarse una vez para obtener la componente x del campo magnético, el cual puede escribirse en la siguiente forma:

$$-\frac{q_y}{R_m} = \left(\frac{R_a C_H}{H_a^2} - \frac{c' E_z}{H_a^2} \right) \left[y - \frac{\text{Sinh}(H_a y)}{H_a \text{Cosh}(H_a)} \right] + c' E_z y + k_1 \quad (4.62)$$

La constante k_1 se determina teniendo en cuenta que $B_x = 0$ en el centro del canal.

4.7 Caso succión cuando $Re \ll 1$ y $Rm \ll 1$.

En esta situación, las soluciones son similares a las obtenidas para el caso de inyección, salvo que ahora las condiciones de frontera cambian, entonces la solución para f viene dada por la expresión:

$$f = - \left(y - \frac{\text{Senh}(H_a y)}{H_a \text{Cosh}(H_a)} \right) / \left(1 - \frac{\text{Tanh}(H_a)}{H_a} \right) \quad (4.63)$$

en donde se ha asumido que el campo magnético se puede escribir también como $p = p_0 + p_1$, entonces la perturbación p_1 para el campo magnético puede escribirse de la siguiente manera (Aquí también asumimos que $p_0 = 1$):

$$p_1 = \frac{R_m ((H_a y^2 / 2) - \text{Cosh}(H_a y) / H_a \text{Cosh}(H_a))}{H_a - \text{Tanh}(H_a)} + D \quad (4.64)$$

dado que la perturbación tiene que anularse en la pared, entonces la constante D viene dada por la expresión :

$$D = - \frac{R_m (H_a / 2 - 1 / H_a)}{H_a - \text{Tanh}(H_a)} \quad (4.65)$$

De acuerdo a lo anterior y siendo consistentes con la ecuación (4.23), también la constante de integración C cambia de signo:

$$C = \frac{H_a^3}{R_e} \left(\frac{1}{-H_a + \text{Tanh}(H_a)} \right) \quad (4.66)$$

Por otro lado la figura 4.15, ilustra las líneas de corriente y del campo magnético, obtenidas a partir de la integración numérica de las ecuaciones básicas para $R_m=0.1$, $M_A=10$ y $R_e=0.1$. Obsérvese que las líneas del campo magnético continúan siendo rígidas pero debido a la succión del fluido por las paredes, la curvatura de estas líneas, son contrarias a las del caso de inyección.

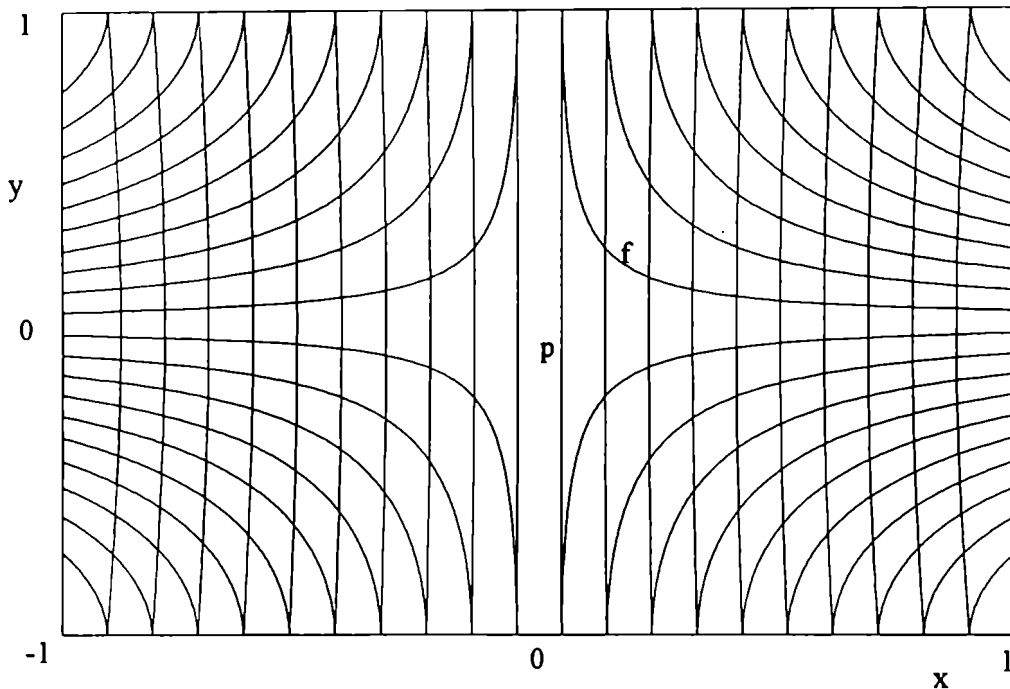


Fig. 4.15 en esta figura se ilustran las líneas de contorno de la velocidad y el campo magnético para $R_m=0.1$, $M_A=10$ y $R_e=0.1$. La flexión de las líneas magnéticas es contraria a la obtenidas para el caso de inyección.

Adicionalmente, para los mismos valores anteriores de $M_A=10$, y $R_m=0.1$, se muestra en la figura 4.16 los perfiles de velocidad y del campo magnético en este régimen asintótico. En esta gráfica se ilustran los perfiles para valores de Re variando entre 0.3 y 27.3 y con un incremento de 3 . Como se puede notar a medida que el flujo se hace menos viscoso, el efecto del campo magnético se hace mas notorio, haciendo que disminuya apreciablemente la velocidad de salida del fluido en el centro del canal, y como consecuencia este fluye con mas velocidad cerca a las paredes. A medida que este mas cerca se encuentre de las paredes mayor va a ser el cambio de velocidad, por ejemplo en $y=0.96$ la velocidad v_x varia de 0.4 a 0.8 , cuando el numero de Reynolds

cambia de 0.1 a 30 . Sin embargo, la componente x del campo magnético, va aumentando de valor en la pared evidenciando de esta forma la aparición de una capa limite, en el caso de paredes conductoras, o las paredes podrían ser dieléctricas (al menos deben de estar recubiertas por una delgada capa dieléctrica). Lo anterior es razonable si se tiene en cuenta de que el fluido tiene que venir de algún deposito colocado lejos del centro del canal y salir, por las placas pero debido al fuerte campo magnético y a medida que el fluido se vuelve menos viscoso este fluye menos por el centro del canal. En este punto es conveniente aclarar que en nuestro calculo numérico hemos omitido la condición de que p' sea cero en la pared y se deja que este valor se ajuste libremente a las demás condiciones del problema.

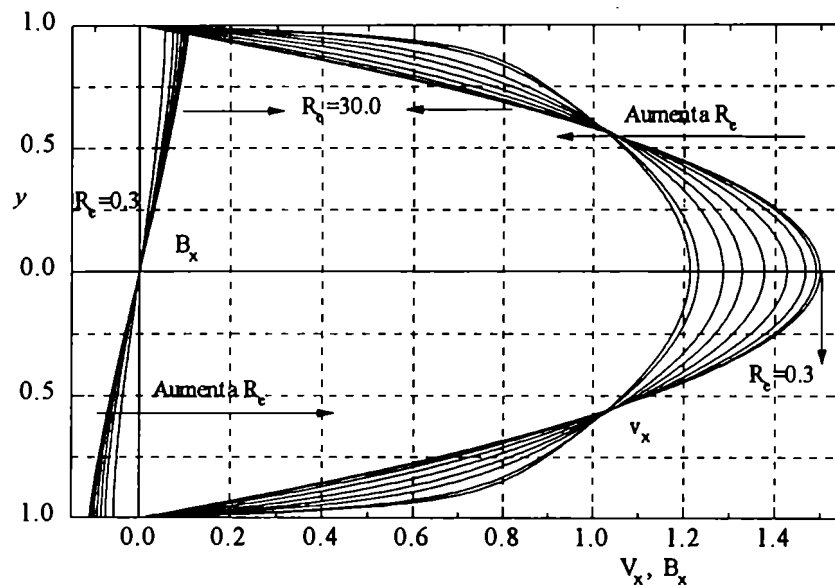


Fig. 4.16 En esta figura se muestra el comportamiento del perfil de velocidad y campo magnético cuando aumenta el número de Reynolds Re para $R_m=0.1$, y $M_A=10$ en el caso de succión.

Por otro lado la figura 4.17 ilustra los valores de la vorticidad en la pared en función del número de Reynolds Re , cuando se toman $R_m=0.1$ y $M_A=10$. Se observa en esta gráfica que la vorticidad varía muy lentamente para el caso inyección y aumenta considerablemente en el caso de succión a medida que el número de Reynolds crece, evidenciando de esta forma la aparición de una capa limite en la pared para el caso de $Re \gg 1$. Adicionalmente, si se compara el efecto del campo magnético, con respecto al

caso fluidístico puro, se nota que en inyección la vorticidad en la pared aumenta levemente, mientras que para succión, dicha vorticidad disminuye considerablemente a medida que el número de Reynolds crece. Es de notar que cuando el número de Reynolds es nulo, entonces $f'' = 2.984$ con o sin campo magnético.

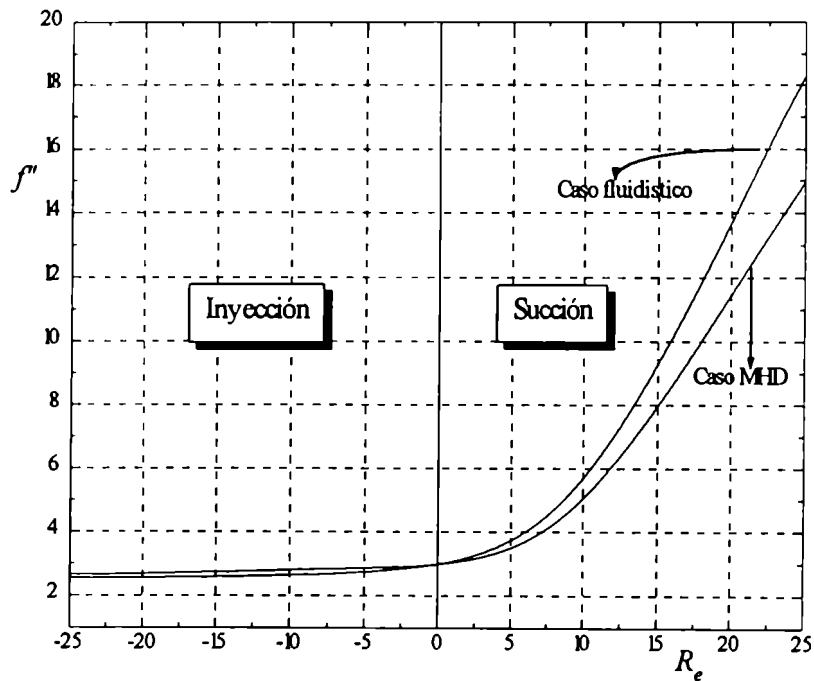


Fig. 4.17 Gráfica de la vorticidad en la pared en función del número de Reynolds. Obsérvese que para el caso de succión el efecto del campo magnético hace que se disminuya la vorticidad en la pared.

5. Estudio de la estabilidad para el problema MHD en placas perforadas y paralelas.

5.1 Introducción

Como se demostró anteriormente en el capítulo 2, las ecuaciones para el momento y la ley de Ohm en forma reducida se pueden escribir como:

$$(\partial_t - \nu \nabla^2) \nabla^2 \xi - [\xi, \nabla^2 \xi] - \frac{1}{4\pi\rho} [\nabla^2 \psi, \psi] = 0 \quad (5.1)$$

$$(\partial_t - \nu_m \nabla^2) \psi - [\xi, \psi] = 0 \quad (5.2)$$

En donde las componentes de la velocidad y el campo magnético, de:

$$\begin{aligned} V_x &= \partial_y \xi & V_y &= -\partial_x \xi \\ B_x &= \partial_y \Psi & B_y &= -\partial_x \Psi \end{aligned} \quad (5.3)$$

Las funciones $\xi(x,y)$ y la función del flujo $\psi(x,y)$, que definimos en el capítulo 2, son para el caso estacionario las siguientes:

$$\begin{aligned} \xi_0 &= x f(y) \\ \Psi_0 &= x p(y) \end{aligned}$$

Para el estudio de la estabilidad del sistema descrito por las ecuaciones (5.1) y (5.2), asumimos con el fin de linealizarlas, que las funciones ξ y ψ , pueden escribirse de la siguiente forma:

$$\xi = \xi_0 + \xi_1(x, y, t) \quad (5.4)$$

$$\Psi = \Psi_0 + \Psi_1(x, y, t) \quad (5.5)$$

en donde ξ_1 y Ψ_1 son las pequeñas perturbaciones de las funciones que representan el caso del equilibrio representados por ξ_0 y Ψ_0 . Teniendo en cuenta las definiciones anteriores, y suponiendo perturbaciones para el tiempo de la forma $\xi_1 = \xi_1(x, y)e^{st}$, entonces de las ecuaciones (5.1) y (5.2), se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$(s - \gamma \nabla^2) \nabla^2 \xi_1 - [\xi_0, \nabla^2 \xi_1] - [\xi_1, \nabla^2 \xi_0] - \frac{1}{4\pi\rho} \{[\nabla^2 \Psi_0, \Psi_1] + [\nabla^2 \Psi_1, \Psi_0]\} = 0 \quad (5.6)$$

$$(s - \gamma_m \nabla^2) \Psi_1 - [\xi_0, \Psi_1] - [\xi_1, \Psi_0] = 0 \quad (5.7)$$

En el problema tratado en este trabajo, solo conocemos las condiciones de frontera para la variable y , por lo tanto suponemos que también para este caso particular, dichas perturbaciones se pueden escribir de la siguiente forma autosimilar:

$$\xi_1(x, y, t) = x f_1(y, t) \quad (5.8)$$

$$\Psi_1(x, y, t) = x p_1(y, t) \quad (5.9)$$

Reemplazando las ecuaciones (5.8) y (5.9) en el sistema de ecuaciones dado en (5.6) y (5.7) y adimensionalizado (ver capítulo 3, obtenemos:

$$\begin{aligned} s \begin{pmatrix} f_{1,yy} \\ p_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_{11} & \mathfrak{I}_{11} \\ \mathfrak{I}_{11} & \mathfrak{I}_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \\ &= \mathfrak{I} \begin{pmatrix} f_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.10)$$

En donde los elementos de la matriz \mathfrak{I} , se definen como:

$$\begin{aligned}\mathfrak{I}_{11} &= \frac{\partial^4}{\partial y^4} + R_e \left(\frac{\partial^3 f_0}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} + f_0 \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{\partial f_0}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ &\equiv \frac{\partial^4}{\partial y^4} + R_e \mathfrak{I}_{1F}\end{aligned}\quad (5.11)$$

$$\mathfrak{I}_{12} = -\frac{R_e}{M_A^2} \left(\frac{\partial^3 p_0}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 p_0}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} + p_0 \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{\partial p_0}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \equiv -\frac{R_e}{M_A^2} \mathfrak{I}_{1P} \quad (5.12)$$

$$\mathfrak{I}_{21} = R_m \left(\frac{\partial p_0}{\partial y} - p_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \equiv -R_m \mathfrak{I}_{2P} \quad (5.13)$$

$$\mathfrak{I}_{22} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + R_m \left(f_0 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial f_0}{\partial y} \right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + R_m \mathfrak{I}_{2F} \quad (5.14)$$

La solución de la ecuación (5.10) da los valores propios s y vectores propios f_I y p_I asociados con las soluciones que representan el equilibrio f_0 y p_0 . Nuevamente retornamos, al esquema planteado en el capítulo 3, es decir se obtiene el caso de succión para ambos números de Reynolds positivos e inyección para ambos números negativos. En otras palabras, el sistema es estable para inyección si $s > 0$ y para succión si $s < 0$, en caso contrario el sistema siempre será inestable, lo anterior puede resumirse en el siguiente cuadro.

Para	Estable	Inestable
$R_e > 0$ y $R_m > 0$	$Real(s) < 0$	$Real(s) > 0$
$R_e < 0$ y $R_m < 0$	$Real(s) > 0$	$Real(s) < 0$

Por otro lado las perturbaciones f_I y p_I para que se satisfaga la ecuación (5.10) no pueden ser ambas simétricas o antisimétricas. Obligatoriamente tiene que ser una

combinación de ellas: simétrica f_I y antisimétrica p_I , o viceversa. Por otro lado, en general se fijaron valores para R_m y M_A y se obtuvieron resultados para diferentes valores de R_e , utilizando para ello el mismo esquema con el que se trabajó en el capítulo 3, es decir se utiliza el método de relajación para el cálculo de funciones del equilibrio, en el cual se parte de las soluciones asintóticas para $R_e \ll 1$ y $R_m \ll 1$, se obtienen de esta forma las soluciones para un par de valores fijos de M_A y R_m dados previamente. El cálculo se inicia con un valor de $R_e = 0.1$. Después se calculan otras soluciones del equilibrio por incrementos sucesivos de R_e . Finalmente estos valores de equilibrio son reemplazados en la ecuación (10), cuya solución da los valores propios y las funciones propias asociadas con las perturbaciones, tanto para f_I como para p_I .

5. 2 Estabilidad para perturbaciones: simétrica f_I y antisimétrica p_I .

La figura 5.1 ilustra los resultados obtenidos en el caso de perturbaciones simétrica f_I y antisimétrica p_I (perturbaciones S-A), para $R_m = 0.1$ y $M_A = 10$ tanto en inyección como en succión. Igualmente en la figura 5.2 se ilustran los resultados cuando $R_m = 0.1$ y $M_A = 0.5$, también en los casos de succión e inyección. Los resultados obtenidos pueden resumirse en los siguientes puntos:

a) La presencia del campo magnético en ningún momento desestabiliza el flujo. Este continua siendo estable en los casos de succión e inyección, tal como sucede en el caso hidrodinámico.

b) En succión, la primera raíz r_I siempre tiende asintóticamente a cero, en este régimen de $R_m \ll 1$. Sin embargo el efecto del campo magnético hace que para números de Mach Alfvénicos cada vez más bajos, el sistema sea menos estable en el sentido de que r_I tiende más rápidamente a cero, cuando $R_e \rightarrow \infty$. En este mismo sentido si se comparan estos resultados con los obtenidos para el problema en donde no existe el

campo magnético, tratado en el capítulo 3 (ver figura 3.4), se observa que la presencia de dicho campo magnético hace que la curva correspondiente a r_1 , tienda más rápidamente a cero, cuando $R_e \rightarrow \infty$.

c). También se observa que la segunda raíz r_2 , en el caso de succión, ya no tiende asintóticamente a -2 como ocurre en el caso fluidístico (ilustrado en la figura 3.4). Cuando $R_e \rightarrow \infty$ atraviesan ese valor, tanto que cuando $R_e=25$, se tiene que $r_2=-1.45$ con $R_m=0.1$ y $M_A=10$, además se tiene que $r_2=-1.53$ cuando se toman $R_m=0.1$ y $M_A=0.5$.

Por otro lado las curvas correspondientes a r_3 y r_4 que tienden a -4 y -6 cuando $R_e \rightarrow \infty$ en el caso fluidístico, sin embargo se juntan o coalescen en $R_e=-15.3$ para $R_m=-0.1$ y $M_A=10$ y en $R_e=-15.6$ para $R_m=-0.1$ y $M_A=0.5$, dando entonces lugar a la aparición de valores complejos conjugados a partir del momento en que se juntan.

d) En el caso inyección, para el tipo de perturbaciones S-A, las curvas correspondientes a r_1 y r_2 coalescen en $R_e=-9.5$ y las curvas r_3 y r_4 en $R_e=-12.6$ para $R_m=-0.1$ y $M_A=0.5$.

e) Por otro lado las curvas r_1 y r_2 coalescen en $R_e=-9.1$ y las curvas r_3 y r_4 en $R_e=12.3$ para los valores de $R_m=0.1$ y $M_A=10$, mientras que para el problema sin campo magnético las curvas r_1 y r_2 coalescen en $R_e=-11$ pero las curvas r_3 y r_4 no se juntan en el rango de R_e entre 0 y -25.

f) Adicionalmente se tiene que en el caso fluidístico, el valor correspondiente a la primera raíz, en $r_1(R_e=0.1) \approx -199.067$, toma ahora los valores $r_1(R_e=0.1) \approx -97.088$ ($M_A=10, R_M=0.1$) y $r_1(R_e=0.1) \approx -97.0942$ ($M_A=0.5, R_M=0.1$).

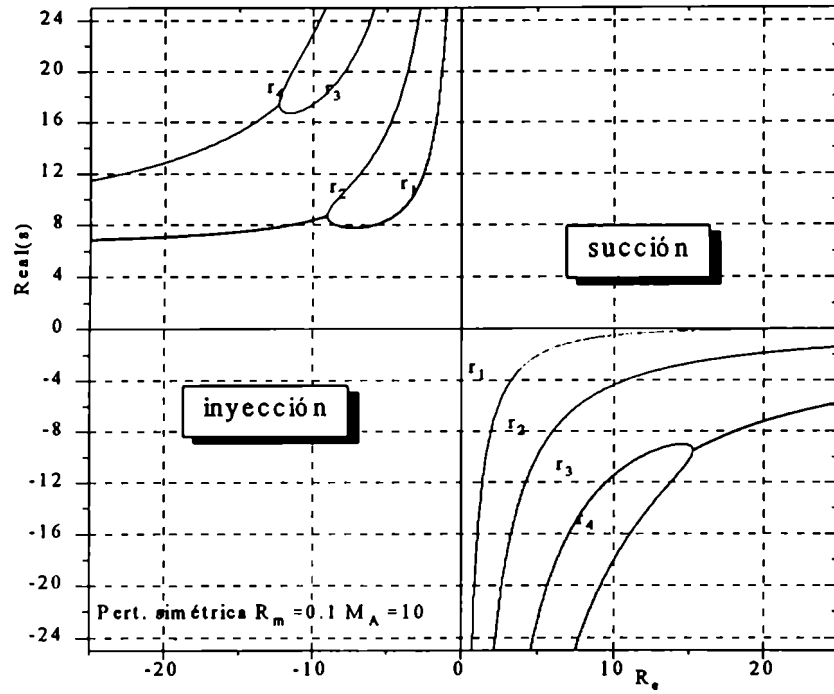


Fig. 5.1 Se ilustra para el caso de perturbaciones S-A, los autovalores en función del número de Reynolds, tanto para succión como inyección, con $R_m=0.1, M_A=10$.

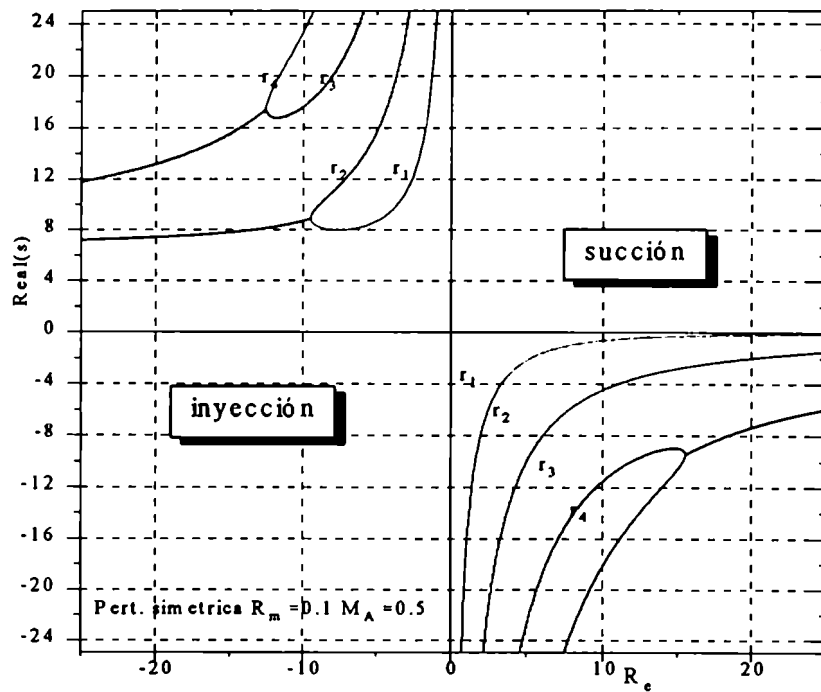


Fig. 5.1 Se ilustra para el caso de perturbaciones S-A los autovalores en función del número de Reynolds, tanto para succión como inyección, con $R_m=0.1, M_A=0.5$.

La figura 5.3 ilustra el caso de inyección para $R_m=1$ y $M_A=0.5$ en donde se presenta una gran variedad de efectos importantes. El aumento de la difusividad magnética hace que el flujo sea "más estable", incluso si se compara con el caso fluidístico puro. El valor de $r_1(R_e=0.1) = -8.365$, que es muy superior al encontrado en los casos anteriores. la tendencia de la curva r_1 es a tomar un valor asintótico diferente de cero a medida que se aumenta el número de Reynolds magnético, R_m , para este caso particular la curva tiende al valor de -0.6 . Por otro lado las curvas correspondientes a r_2 y r_3 son las que se juntan en $R_e=5.25$, para posteriormente separarse en $R_e=7.2$.

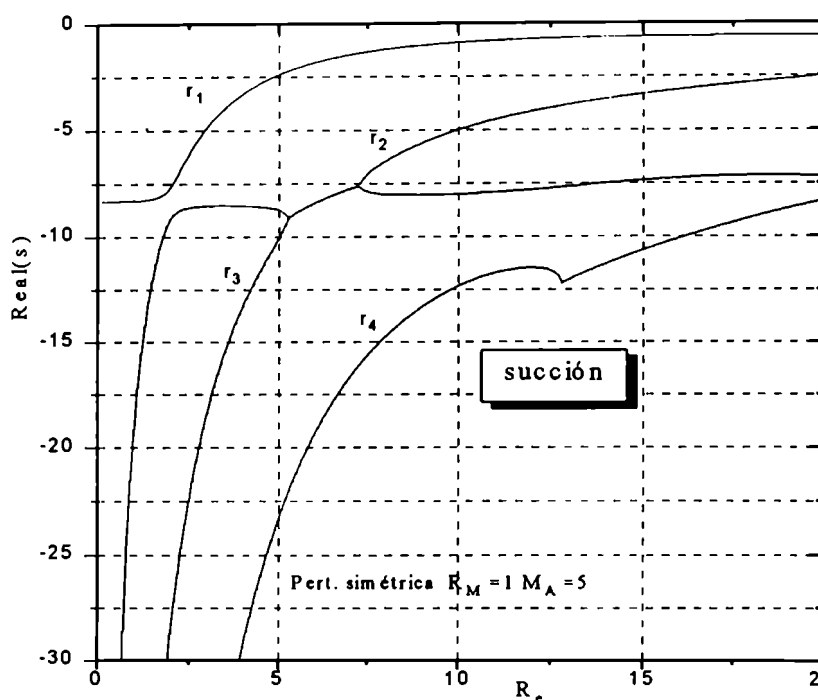


Fig. 5.3 Se ilustra en el caso de perturbaciones S-A, los autovalores en función del número de Reynolds para succión, con $R_m=1$, $M_A=5$.

Por otro lado en el caso de inyección y para valores altos del número de Reynolds magnético se observa que las curvas r_1 y r_2 siempre se juntan, por ejemplo cuando $R_m=-100$ y $M_A=5$, estas curvas coalescen en $R_e=-1.29$. En este mismo caso, los valores correspondientes a la primera y segunda raíz son prácticamente constante a partir de $Re=-10$, tal como puede verificarse en la figura 5.4. Las curvas correspondientes a r_3 y r_4 , cualescen para todos los valores de R_e . Por otro cuando se disminuye el número de Reynolds magnético aparece una amplia red de separaciones y uniones de las curvas r_2 ,

r_3 y r_4 , y se puede inferir de los resultados obtenidos, que otras raíces también participan en la formación de la mencionada red.

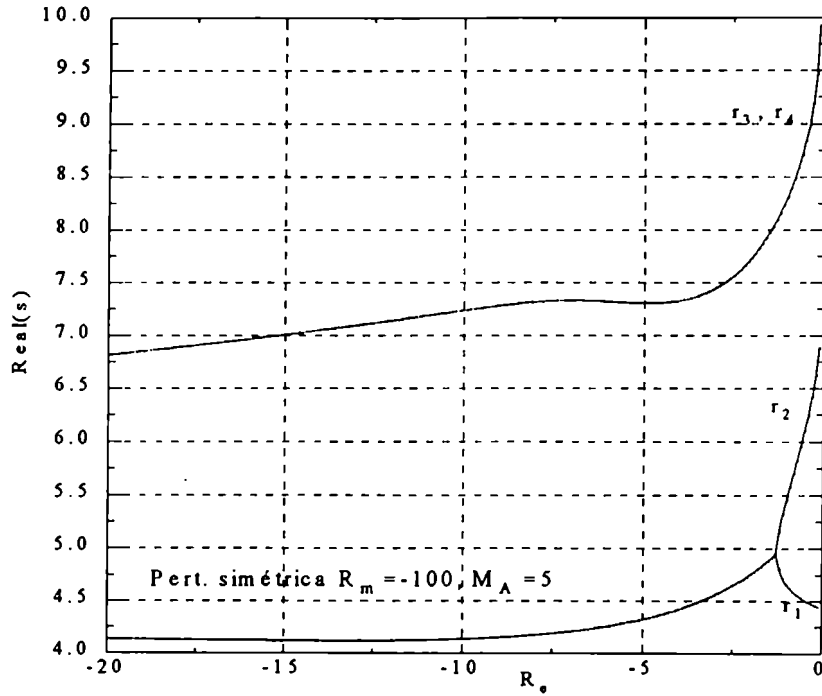


Fig. 5.4 Se ilustra en el caso de perturbaciones S-A, los autovalores en función del número de Reynolds, con $R_m = -100$ y $M_A = 5$.

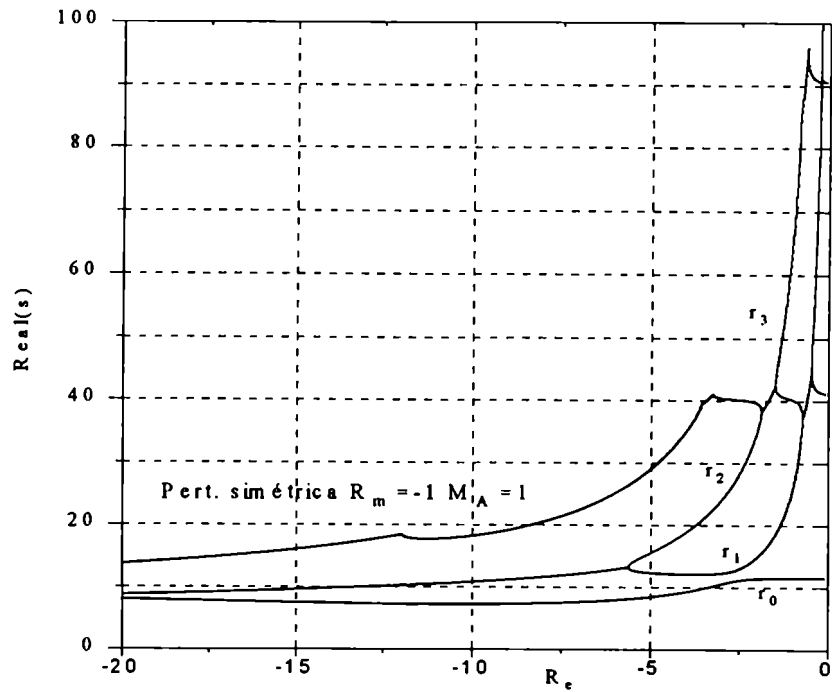


Fig. 5.5 Se ilustra en el caso de perturbaciones S-A, los autovalores en función del número de Reynolds con $R_m = -1$ y $M_A = 1$.

5.3 Estabilidad para perturbaciones: antisimétrica f_1 y simétrica p_1 .

En el caso de perturbaciones antisimétricas para f_1 y simétrica p_1 , también hemos variado R_e de la misma manera como se hizo en los casos anteriores y hemos dejando constantes a R_m y M_A . Cuando $R_m=0.1$ hemos obtenido resultados numéricos para valores de $M_A=0.4, 0.5, 1.0$ y 10.0 los cuales son ilustrados en la figuras 5.5 a 5.8 tanto en los casos de succión como de inyección. Los resultados obtenidos se pueden resumir en lo siguiente puntos:

a) El flujo continua siendo estable para inyección de igual manera como sucede el caso las perturbaciones S-A en MHD y en el caso fluidístico puro, salvo en el detalle de que si $R_m=0.1$, las curvas correspondientes a q_2 y q_3 se unen en $R_e=-12.4, -13.6, -17.2$, para $M_A=0.4, 0.5$ y 1 , respectivamente. Para $M_A=10$ y $R_m=0.1$ el esquema es muy similar al correspondiente obtenido para el caso sin campo magnético, tal como se puede verificar si se comparan las figuras 5.5 y la figura 3.5; Recordemos que, en el caso hidrodinámico, el flujo se hace inestable a partir de $R_e=6.0014$, mientras que en este caso particular MHD el cambio de la estabilidad ocurre para el número de Reynolds $Re=6.144$.

b) En el caso de succión para $R_m=0.1$ y $M_A=0.4, 0.5, 1.0$ y 10 se encuentra que para $Re \rightarrow \infty$, las raíces q_1, q_2, q_3 y q_4 tampoco tienden a los valores asintóticos del caso fluidístico puro, tal como sucede en el caso anterior de perturbaciones S-A cuando se comparan con el problema fluidístico puro. En la tabla 5.1 se muestran los valores de q_1 obtenidos para $R_e=20$. Se puede apreciar en esa tabla, la influencia del campo magnético, el cual tiende a estabilizar el flujo a medida que dicho campo magnético se hace más intenso.

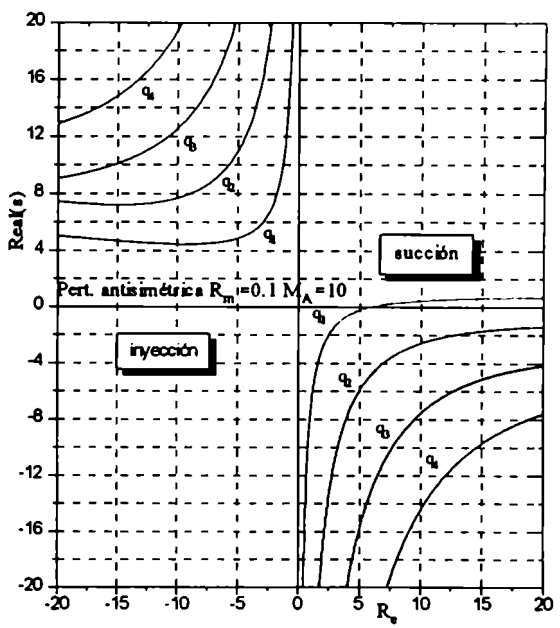
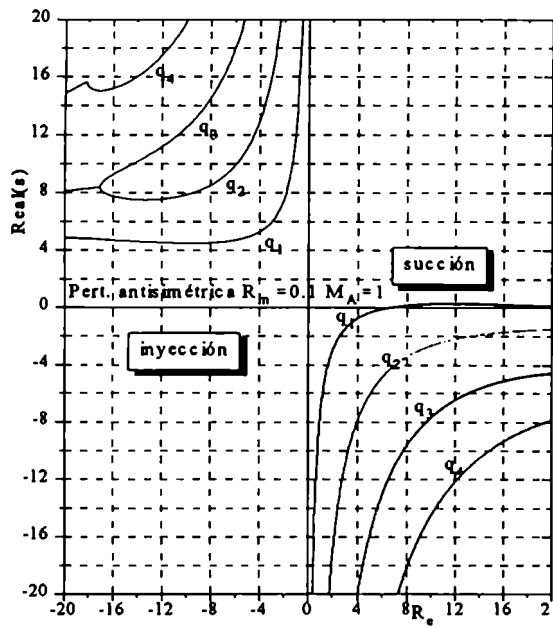
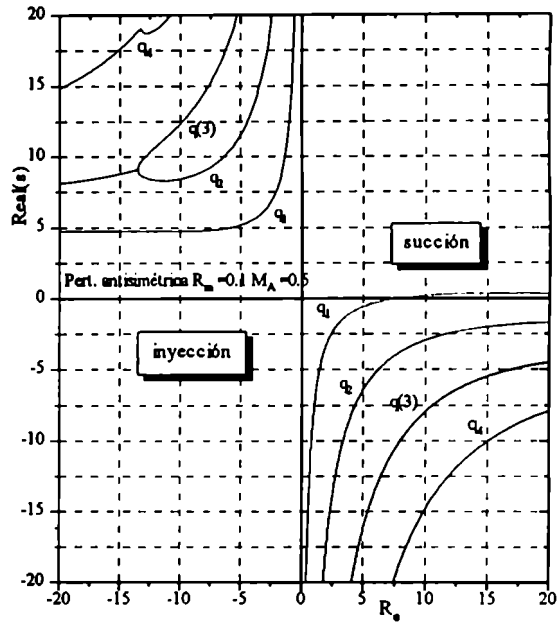
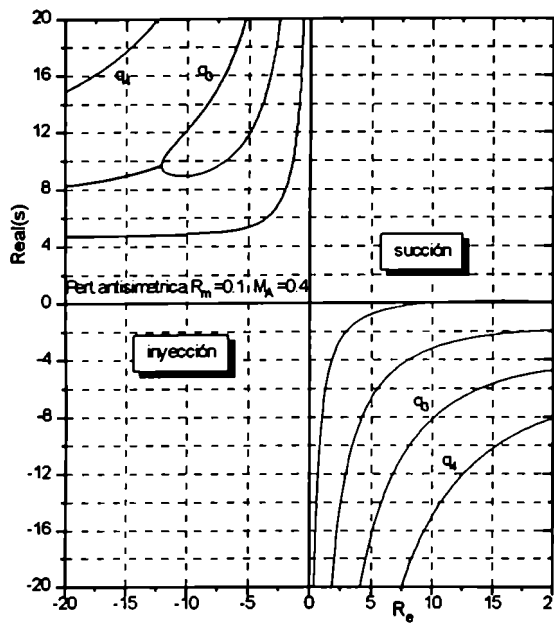


Tabla 5.1

M_A	q_1	q_2	q_3	q_4
Sin campo	1	-1	-3	-5
0.4	0.101	-1.928	-4.710	-8.114
0.5	0.313	-1.715	-4.527	-7.921
1	0.133	-1.507	-4.570	-7.831
10	0.662	-1.437	-4.172	-7.592

El hecho de que para $q_1(R_e=20)$, si $M_A=1$, sea menor que $q_1(R_e=20)$, si $M_A=0.5$ se debe a que la curva correspondiente para $M_A=1$, que tiene un máximo en $R_e=11.4$, como puede verificarse en la figura 5.9, en la cual adicionalmente se han dibujado las primeras raíces q_1 para diferentes valores del número de Mach Alfvénico. En esta última gráfica se manifiesta aun mejor el efecto del campo magnético ya que, como se había dicho anteriormente, a medida que disminuye M_A se estabiliza más el fluido para números de $R_m \ll 1$.

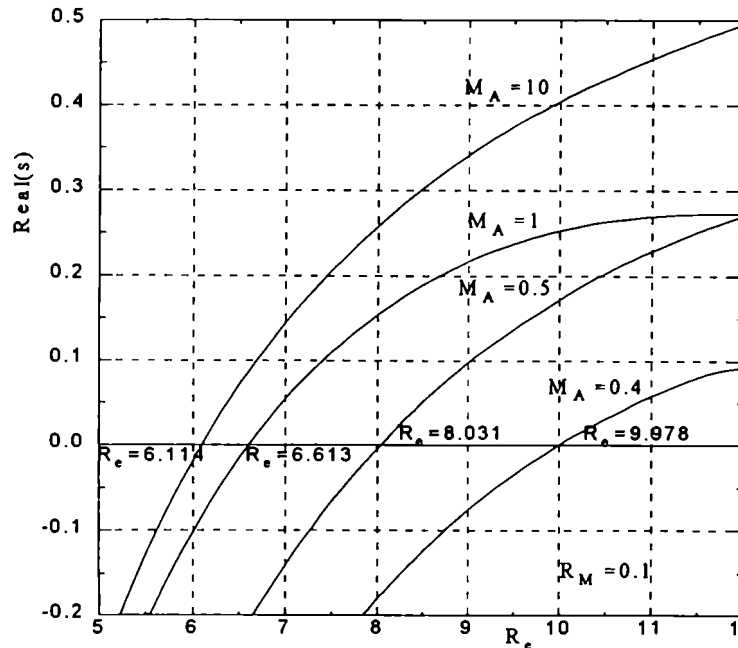


Fig. 5.9 En succión, se muestran los valores reales de las primeras raíces q_1 , donde aparece el cambio de estabilidad para diferentes valores de M_A en función de R_e . Aquí se ha tomado $R_m=0.1$.

En resumen cuando se intensifica el campo magnético el flujo se estabiliza, mientras que cuando se debilita dicho campo y con alta difusividad magnética, el flujo presenta las características del caso fluidístico puro.

Por otro lado cuando aumentamos el número de Reynolds magnético, por ejemplo si tomamos $R_m=1$ observamos que para el caso de succión este se vuelve inestable a partir de $R_e=7.752$ cuando $M_A=10$ y en $R_e=24.23$ cuando $M_A=5$, nuevamente se corrobora el hecho de que el efecto del campo magnético es el de tratar de remover la inestabilidad, estos resultados son ilustrados en las figuras 5.10 y 5.11.

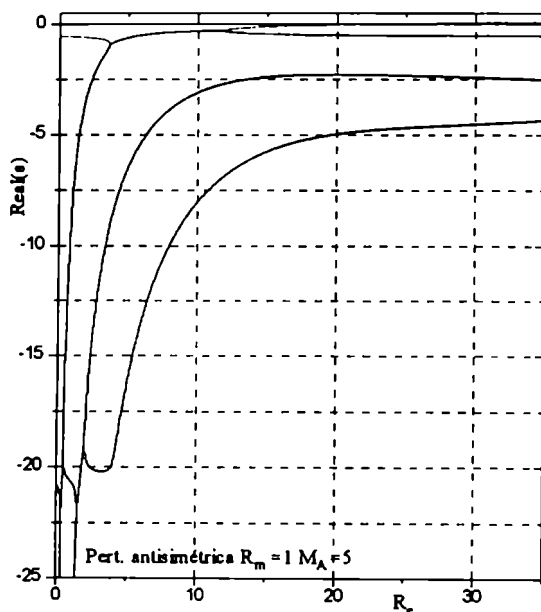


Fig. 5.10 Se ilustra el caso de succión para pert. A-S. Aquí se ha tomado $R_m=1$ y $M_A=5$.

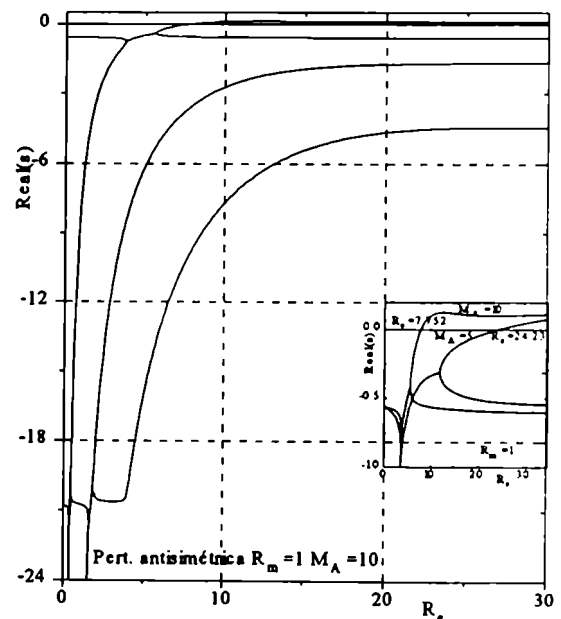


Fig. 5.11 Se ilustra el caso de succión para pert. A-S. Aquí se ha tomado $R_m=1$ y $M_A=10$.

De todas maneras, el hecho de aumentar únicamente el número de Reynolds magnético, hace que el flujo se trate de estabilizar como puede observarse sin se comparan las figuras 5.9 y 5.11 (ver recuadro de esta figura), ya que para $R_m=0.1$ y $M_A=10$, el flujo se vuelve inestable a partir de $R_e=6.114$, mientras que para el mismo $R_m=1$ y $M_A=10$ la inestabilidad empieza en $R_e=7.752$.

De las figuras 10 y 11 también puede observarse que cerca del eje $s=0$, las ramas correspondientes a q_1 y q_2 al incrementar el valor de R_m , se unen en $R_e=3.635$ ($M_A=5$) y $R_e=3.801$ ($M_A=10$) para posteriormente separarse de nuevo $R_e=11.843$ ($M_A=5$) y $R_e=5.589$ ($M_A=10$). El tramo que permanecen unidas depende del valor que tome M_A , a medida que se disminuye este valor, la curva q_1 tiende a permanecer unida un tramo más largo a q_2 , sin que estas se vuelvan inestables.

5.4 Análisis del tipo de bifurcación local.

Para investigar el tipo de bifurcación locales que aparece en los casos MHD, y en especial, en aquellos donde el autovalor s cambia de signo retomaremos las ecuaciones (5.10) a (5.14). Necesitamos definir el operador adjunto de \mathfrak{I} el cual se consigue con la identidad generalizada de Lagrange, es decir utilizamos la siguiente definición: $(v, \mathfrak{I}u) - (u, \mathfrak{I}^+v) = I|_{-1}$, luego con base en lo anterior los elementos del operador adjunto \mathfrak{I}^+ se pueden escribir de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_{11}^+ &= \frac{\partial^4}{\partial y^4} - R_e \left(4 \frac{\partial^2 f_0}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} + f_0 \frac{\partial^3}{\partial y^3} + 4 \frac{\partial f_0}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ &\equiv \frac{\partial^4}{\partial y^4} + \mathfrak{I}_{1p}^+ \end{aligned} \quad (5.20)$$

$$\mathfrak{I}_{12}^+ = \frac{R_e}{M_A^2} \left(4 \frac{\partial^2 p_0}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} + p_0 \frac{\partial^3}{\partial y^3} + 4 \frac{\partial p_0}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \equiv -\frac{R_e}{M_A^2} \mathfrak{I}_{1p}^+ \quad (5.21)$$

$$\mathfrak{I}_{21}^+ = R_m \left(p_0 \frac{\partial}{\partial y} + 2 \frac{\partial p_0}{\partial y} \right) \equiv -R_m \mathfrak{I}_{2p}^+ \quad (5.22)$$

$$\mathfrak{I}_{22}^+ = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - R_m \left(f_0 \frac{\partial}{\partial y} + 2 \frac{\partial f_0}{\partial y} \right) \equiv \frac{\partial^2}{\partial y^2} + R_m \mathfrak{I}_{2f}^+ \quad (5.23)$$

Por otro lado, como estamos interesados en estudiar el tipo de bifurcación que aparece cuando hay un cambio de estabilidad, por ejemplo en el caso de succión cuando $R_m=1$, $M_A=10$ y $Re=24.23$, entonces hacemos una perturbación inicialmente de R_e , definiendo para ello a $\varepsilon = R_e - R_{e0}$, dejando fijos los valores de R_m y M_A . Suponemos que ya se conocen las soluciones del equilibrio f_0 y p_0 para una terna de valores R_{e0} , R_{m0} y M_{A0} . Se sabe además que una expansión en términos de ε es apropiada para un punto regular, mientras que para un punto de retorno o de bifurcación tipo *pitchfork*, es apropiado expandir en términos de $\varepsilon^{1/2}$ (Ver Zaturka et al (1988, sec 5.4)). Entonces podemos escribir las soluciones del equilibrio de la siguiente manera:

$$F(y, R_e) = F_0(y) + \varepsilon^{1/2} F_{1/2}(y) + \varepsilon F_1(y) + \varepsilon^{3/2} F_{3/2}(y) + \dots \quad (5.24)$$

$$P(y, R_e) = P_0(y) + \varepsilon^{1/2} P_{1/2}(y) + \varepsilon P_1(y) + \varepsilon^{3/2} P_{3/2}(y) + \dots \quad (5.25)$$

Las expansiones anteriores al reemplazarlas en el sistema de ecuaciones diferenciales básicas independientes del tiempo dadas en (2.28) y (2.29), dan origen las siguientes resultados (El cambio en la notación se debe a que esto nos permite hacer una mejor diferenciación, con los resultados expuestos anteriormente):

Para la solución de orden ε^0

$$F_0^{IV} + R_{e0}(F_0 F_0'' - F_0' F_0'') - \frac{R_m}{M_A^2} (P_0 P_0'' - P_0' P_0'') = 0 \quad (5.26)$$

$$P_0'' + R_m (F_0 P_0' - F_0' P_0) = 0 \quad (5.27)$$

Las cuales deben satisfacer las condiciones de contorno:

$$HF_0 = 0 \text{ y } KP_0 = 0 \quad (5.28)$$

Dado que el flujo es en principio simétrico, la función F_0 que lo representa es una función impar, mientras que el campo magnético siempre esta representado por una función par.

La solución de orden $\epsilon^{1/2}$

$$\mathfrak{I}_{1/2} \begin{pmatrix} F_{1/2} \\ P_{1/2} \end{pmatrix} = 0 \quad \text{y} \quad HF_{1/2} = 0; \quad HP_{1/2} = 0 \quad (5.29)$$

en donde $\mathfrak{I}_{1/2}$ esta definido como

$$\mathfrak{I}_{1/2} = \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_{11/2} & \mathfrak{I}_{12/2} \\ \mathfrak{I}_{21/2} & \mathfrak{I}_{22/2} \end{pmatrix} \quad (5.30)$$

y los elementos de la ecuación anterior vienen definidos como:

$$\mathfrak{I}_{11/2} = \frac{\partial^4}{\partial y^4} + R_{0\epsilon} \left(F_0 \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{\partial F_0}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 F_0}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial^3 F_0}{\partial y^3} \right) \quad (5.31)$$

$$\mathfrak{I}_{12/2} = -\frac{R_{0\epsilon}}{M_A^2} \left(\frac{\partial^3 P_0}{\partial y^3} - \frac{\partial^2 P_0}{\partial y^2} \frac{\partial}{\partial y} + P_0 \frac{\partial^3}{\partial y^3} - \frac{\partial P_0}{\partial y} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (5.32)$$

$$\mathfrak{I}_{21/2} = R_m \left(\frac{\partial P_0}{\partial y} - P_0 \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (5.33)$$

$$\mathfrak{I}_{22/2} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + R_m \left(F_0 \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial P_0}{\partial y} \right) \quad (5.34)$$

Comparando el sistema de ecuaciones anterior con el sistema dado en las ecuaciones 5.16 a 5.19 se observa que coinciden los operadores $\mathfrak{I}_{1/2}$ y \mathfrak{I} ($f_0=F_0$ y $p_0=P_0$) luego se deduce de inmediato que para los puntos regulares donde $s \neq 0$, solo es posible una solución trivial $F_{1/2}=0$ y $P_{1/2}=0$. Se puede demostrar, que bajo estas circunstancias, no es posible que aparezcan bifurcaciones. Entonces para la búsqueda de los diferentes tipos de bifurcaciones, se asume que $s=0$, como ocurre por ejemplo

en un cambio de estabilidad,. Con base en lo anterior y utilizando la alternativa de Fredholm, suponemos entonces que F y P no son únicas para R_ϵ cerca de $R_\epsilon=R_0$, lo que nos permite escribir

$$\begin{pmatrix} F_{1/2} \\ P_{1/2} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} G \\ Q \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} f_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

en donde α es una constante que determinaremos más adelante. Sustituyendo las ecuaciones anteriores en las soluciones de orden ϵ^1 obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} \mathfrak{S}_{11}^0 F_1 + \mathfrak{S}_{12}^0 P_1 &= (F_0' F_0'' - F_0 F_0''') - \frac{1}{M_A} (P_0' P_0'' - P_0 P_0''') + \\ & \alpha^2 R_{\epsilon_0} \left(G' G'' - G G''' - \frac{1}{M_A} (Q' Q'' - Q Q''') \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

$$\mathfrak{S}_{21}^0 F_1 + \mathfrak{S}_{22}^0 P_1 = -\alpha^2 R_m (G Q' - Q G') \quad (5.37)$$

que en forma resumida se puede escribir como:

$$\mathfrak{S}^0 \begin{pmatrix} F_1 \\ P_1 \end{pmatrix} = \mathfrak{S}^0 \Gamma_1 \quad (5.38)$$

De acuerdo a la identidad generalizada de Lagrange definida anteriormente y tomando $\hat{\Omega} = \begin{pmatrix} \hat{G} \\ \hat{Q} \end{pmatrix}$, para que exista solución diferente de la trivial, se debe cumplir que:

$\mathfrak{S}^0 \Gamma_1 = \mathbf{r}$ con $(\mathbf{r}, \hat{\Omega}) = [I(\Gamma_1, \hat{\Omega})]_1$, además $\mathfrak{S}^{0+} \hat{\Omega} = 0$ y $K \hat{\Omega} = 0$, (K representa el operador para las condiciones de frontera sobre las perturbaciones F_1 y P_1 , definidas en el capítulo 2). En nuestro cálculo dadas las condiciones de frontera para Γ_1 y $\hat{\Omega}$, se tiene que $I(\Gamma_1, \hat{\Omega}) = 0$, entonces de lo anterior se obtiene que $(\mathbf{r}, \hat{\Omega}) = 0$. Por lo tanto se deduce que:

$$\int_{-1}^1 \hat{G} \left\{ (F_0' F_0'' - F_0 F_0''') - \frac{1}{M_A} (P_0' P_0'' - P_0 P_0''') \right\} dy + a^2 \left[R_{e0} \int_{-1}^1 \hat{G} \left(G' G'' - G G''' - \frac{1}{M_A} (Q' Q'' - Q Q''') \right) dy - \int_{-1}^1 \hat{Q} (G Q' - Q G') dy \right] = 0 \quad (5.39)$$

que de una manera resumida se puede escribir:

$$\beta_1 + a^2 \beta_2 = 0 \quad (5.40)$$

Podemos entonces distinguir tres casos de acuerdo a los valores que tomen β_1 y β_2 :

I) $s=0$, $\beta_1 \neq 0$ y $\beta_2 \neq 0$. En este caso la bifurcación en $R_e = R_{e0}$ es un punto de retorno, F se puede determinar con los términos del orden $\varepsilon^{1/2}$ dando origen a dos soluciones :si $R_e > R_{e0}$ y $R_e < R_{e0}$ y ninguna si $R_e < R_{e0}$ y $R_e > R_{e0}$, respectivamente.

II) $s=0$, $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 \neq 0$. Luego F se puede determinar con los términos del orden ε^0 , la única solución posible es que a sea nula, En este caso la bifurcación es transcítica. En $R_e = R_{e0}$ hay una sola solución y dos para puntos cercanos a R_{e0} .

III) $s=0$, $\beta_1 = 0$ y $\beta_2 = 0$. Entonces a esta indeterminada. En este caso la bifurcación en $R_e = R_{e0}$ es del tipo *pitchfork*.

Dado que F_0 es una función impar, mientras que P_0 es par y dado que \hat{G} y \hat{Q} son contrarias y conservan la misma paridad de G y Q , entonces las integrales dadas en la ecuación (5.42) se anulan. Por lo tanto podemos concluir de que en este tipo de cambios de estabilidad aparece una bifurcación del tipo *pitchfork*. Nosotros comprobamos numéricamente las paridades de las funciones \hat{G} y \hat{Q} , utilizando el mismo método que utilizamos en el calculo de las perturbaciones G y Q

Por otro lado podemos examinar el tipo de bifurcación que aparece cuando examinamos en puntos alrededor de $R_m=R_{m0}$. Procedemos de igual forma como se hizo en el caso anterior, en cuyo caso la ecuación (5.38) se transforma en:

$$\int_{-1}^1 \hat{G} \left\{ (F'_0 F''_0 - F_0 F''_0) - \frac{1}{M_A} (P'_0 P''_0 - P_0 P''_0) \right\} dy + \alpha^2 \left[R_{e_0} \int_{-1}^1 \hat{G} \left(G'G'' - GG'' - \frac{1}{M_A} (Q'Q'' - QQ'') \right) dy - \int_{-1}^1 \hat{Q} (GQ' - QG') dy \right] = 0 \quad (5.41)$$

Nuevamente, si tenemos en cuenta la paridad de las funciones involucradas en la ecuación (5.41), vemos que cuando perturbamos alrededor de R_M también se tiene una perturbación tipo *pitchfork*.

6 CONCLUSIONES

Presentamos una descripción sistemática del movimiento y estabilidad de un fluido conductor en canales con paredes porosas, controlado por la presencia de un campo magnético externo. Desde el punto de vista de las aplicaciones industriales hemos señalado que este modelo puede ser aplicado a problemas que involucren retención de fluidos conductores, por ejemplo casos de lubricación, enfriamiento o metalurgia.

Desde un punto de vista matemático, hemos usado variables autosimilares para transformar un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden con dos incógnitas espaciales y una temporal, descrito por las ecuaciones de Navier-Stokes y la ley de Ohm, en un sistema de ecuaciones diferenciales no lineal de cuarto orden con una sola variable espacial y una temporal, representado por las ecuaciones (2.10) a (2.13). El sistema de ecuaciones encontrado facilita el estudio de una gran cantidad de configuraciones físicas de interés tanto en la física teórica como en el campo de las aplicaciones tecnológicas. Las condiciones de frontera mecánicas y electromagnéticas han sido discutidas para el caso de paredes dieléctricas y conductoras. Particularmente hemos revisado y ampliado los resultados obtenidos por ZDB (1988), Sobey et al (1986) para el caso fluidístico. El espectro de estabilidad ha sido ampliado, calculando numéricamente nuevas curvas del espectro de autovalores. Además hemos mostrado explícitamente que, para un número $R_e=7.0$ el sistema evoluciona desde un estado inestable simétrico (el punto de estancamiento está en el centro del canal), a cualquiera de otros dos estados estables asimétricos (con punto de estancamiento en la parte superior o inferior del canal respectivamente), debido a la bifurcación en $R_e=6.0014$.

En general hemos estudiado el caso de flujos MHD simétricos, es decir, con un punto de estancamiento en el centro del canal. El problema para flujos en canales calados magnetohidrodinámicos ha sido tratado en general para los casos de inyección y succión. Hemos encontrado soluciones para diferentes regímenes asintóticos. En dichas soluciones, halladas tanto analítica como numéricamente, hemos visto la formación de capas límites viscosas y resistivas para los casos de $R_m \gg 1$ y $R_e \gg 1$. Encontramos que hay configuraciones que retienen la salida del fluido como también existen otras configuraciones que lo ayudan a escapar. Mostramos también, la formación de una lamina de corriente en la región central, esta aparece cuando la presión decrece y el campo magnético es débil, ya que bajo estas circunstancias el fluido arrastra las líneas del campo magnético de la región exterior a la capa límite central que se forma. Por otro lado cuando el número de Mach Alfvénico es grande, la curvatura de las líneas del campo magnético ayuda a la salida del fluido.

Por otro lado hemos encontrado que en la capa límite central que se forma para números de Reynolds altos se disipa muy poca energía dependiendo del número de Reynolds magnético, en la forma $1/R_m$. La mayor parte de la energía es disipada por fuera de esta capa límite. No obstante cuando el número de Mach Alfvénico es pequeño en el caso de succión casi la totalidad del fluido escapa por las paredes en donde se forma una capa límite sobre ella, por lo tanto en el centro del canal hay muy poco fluido, ya que el fuerte campo magnético hace que este sea retenido y este sólo escapa por los poros de la pared.

En el caso de la estabilidad MHD, hemos comprobado como la estabilidad depende de los tres parámetros R_m , R_e y M_A . En otras palabras desde un punto de vista físico, la estabilidad del sistema depende de la intensidad del campo magnético, la resistividad, la viscosidad del fluido, pero también, si tenemos en cuenta las definiciones dadas para los anteriores parámetros, dependerá también del ancho del canal y la velocidad de entrada o salida del fluido en el canal. Similarmente el valor del campo magnético en la pared es un parámetro que también determina la estabilidad del fluido. Adicionalmente el estudio de la estabilidad muestra para los casos simétricos y

antisimétricos, que la acción del campo magnético modifica la estructura de los puntos donde existen bifurcaciones.

En el calculo de las bifurcaciones para el problema MHD, para el caso de flujos simétricos, hemos encontrado que existe una bifurcación del tipo *pitchfork* cuando hay el cambio de estabilidad. Nosotros hemos encontrado la aparición de ese tipo de bifurcaciones, haciendo expansiones en puntos cercanos al sitio del cambio de estabilidad tanto para R_e como para R_m .

Para la configuración estudiada en este trabajo, hemos encontrado que los modos perturbativos de semejanza, en el caso de inyección son estables igual a como sucede en el modelo hidrodinámico. Por otro lado para el caso de succión en los modelos MHD el flujo continua siendo inestable a partir de un valor critico del número de Reynolds viscoso, pero ahora dicho valor crítico es modificado tanto por la intensidad del campo magnético como también por la conductividad del fluido. Sin embargo en general, hemos visto la acción estabilizadora del campo magnético, ya que el valor critico del número de Reynolds para el cual el flujo se vuelve inestable, siempre ha sido mayor que el obtenido para el caso hidrodinámico. Sólo cuando el campo magnético es débil y el número $R_m \gg 1$, el espectro de estabilidad del caso MHD se asemeja al del caso fluidístico.

En esta tesis se ha resuelto el caso simétrico MHD, sin embargo queda la posibilidad de investigar otro tipo de soluciones, similares a las del tipo II y III, que aparece en el caso fluidístico. También la evolución temporal de las soluciones encontradas es un tema para futuras investigaciones.

Como hemos podido constatar partiendo de las ecuaciones básicas de la MHD hemos obtenido, con base en soluciones autosimilares, una serie de resultados que tienen una amplia aplicación a problemas en canales con diferentes configuraciones geométricas y de contorno, con las cuales se pueden resolver una gran variedad de problemas, no solo hidrodinámicos como caso particular, sino también problemas

MHD. Los métodos desarrollados por nosotros son aplicables a los escenarios donde existen fluidos en canales, por ejemplo problemas como el flujo de Hartmann (capítulo 4) pueden ser abordados por este esquema. Los flujos hidrodinámicos en canales han sido objeto de muchos experimentos. Dada la creciente importancia en procesos industriales, el caso MHD ha comenzado a tener una serie de importantes experimentos prácticos, y de simulación numérica en la literatura reciente. La combinación de flujos confinados magnéticamente con campos magnéticos variables ofrece también una amplia perspectiva de aplicación industrial.

APENDICE A.

El cálculo numérico de las funciones f y p , que representan el equilibrio, se realizaron en algunas ocasiones utilizando el método de Runge-Kutta, utilizando la técnica de shooting, sin embargo, la mayor cantidad de los cálculos se hicieron utilizando el método de relajación, del cual describiremos sus aspectos más esenciales en este apéndice.

Dado que el método de relajación utilizado, es similar tanto en el caso fluidístico como en el caso MHD, por razones de brevedad, describimos únicamente el caso fluidístico.

Regresamos nuevamente a la ecuación 3.1 independiente del tiempo:

$$-\frac{1}{R_e} f_{yyyy} = ff_{yy} - f_y f_{yy} \quad (A1)$$

Aunque podría discretizarse directamente la ecuación (A1), desde el punto de vista del cálculo numérico, es mejor trabajar con ecuaciones diferenciales del menor grado posible. La ecuación anterior, puede escribirse entonces, como el siguiente sistema de ecuaciones:

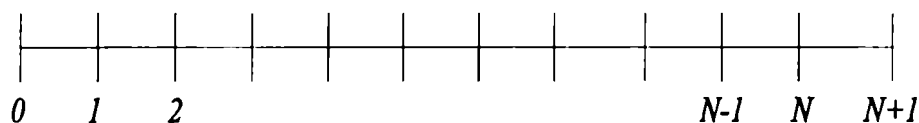
$$w = f_{yy} \quad (A2)$$

$$w_{yy} + R_e(fw_y - f_y w) = 0 \quad (A3)$$

El sistema de ecuaciones diferenciales dado en A2 y A3 tiene las siguientes condiciones de frontera:

$$f(0) = 0 \quad f(1) = \alpha \quad w(0) = 0 \quad f_y(1) = 0 \quad (\text{A4})$$

Para utilizar diferencias finitas, es necesario discretizar el sistema de ecuaciones anteriores tomamos una grilla uniforme de N puntos, tal como se ilustra en el diagrama siguiente:



Las ecuaciones diferenciales se resuelven numéricamente para cada uno de los N puntos interiores, los cuales están separados una distancia $h = \Delta x = 1/N + 1$, de tal forma que si se toman diferencias centradas, se obtiene:

para $j = 2, 3, \dots, N-1$

$$w_j = \frac{1}{h^2} (f_{j+1} + f_{j-1} - 2f_j) \quad (\text{A5})$$

$$\frac{1}{R_e h^2} (w_{j+1} + w_{j-1} - 2w_j) + \frac{f_j}{2h} (w_{j+1} - w_{j-1}) - \frac{w_j}{2h} (f_{j+1} - f_{j-1}) = 0 \quad (\text{A6})$$

Despejando de las ecuaciones anteriores f_j y w_j obtenemos:

$$f_j = \frac{1}{2} (f_{j+1} + f_{j-1} - h^2 w_j) \quad (\text{A7})$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{2}{R_e} + \frac{h}{2}(f_{j+1} - f_{j-1})\right]w_j &= \left(\frac{1}{R_e} + \frac{hf_j}{2}\right)w_{j+1} + \\ &\left(\frac{1}{R_e} + \frac{hf_j}{2}\right)w_{j-1} \end{aligned} \quad (A8)$$

Utilizando las condiciones de frontera, se tiene que:

en $j=N+1$:

$$f(1)=f_{N+1}=\alpha \quad f'(1)=0 \rightarrow (f_{N+2} - f_N) = 0 \quad (A9)$$

$$w(1)=w_{N+1} \quad w_{N+1} = \frac{1}{h^2}(f_{N+2} + f_N - 2f_{N+1}) = \frac{2}{h^2}(f_N - \alpha) \quad (A10)$$

luego para el término $j=N$, se tiene:

$$f_N = \frac{1}{2}(\alpha + f_{N-1} - 2w_N - h^2w_N) \quad (A11)$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{2}{R_e} + \frac{h}{2}(\alpha - f_{N-1})\right]w_N &= \left(\frac{1}{R_e} + \frac{hf_N}{2}\right)w_{N+1} + \\ &\left(\frac{1}{R_e} + \frac{hf_N}{2}\right)w_{N-1} \end{aligned} \quad (A12)$$

en $j=1$

$$f_1 = \frac{1}{2}(f_2 - h^2w_1) \quad (A13)$$

$$\left[\frac{2}{R_e} + \frac{h}{2}f_2\right]w_1 = \left(\frac{1}{R_e} + \frac{hf_1}{2}\right)w_2 \quad (A14)$$

observese que para succión si $\alpha=-1$ y dado que $v_x=-f$, entonces $f<0$. El caso de inyección se obtiene para números de R_e negativos.

Para el cálculo de la función f y w , se da una función de prueba inicial, y se deja que el sistema relaje hasta una solución cuyo grado de precisión es impuesto previamente. Esto es, se comparan dos soluciones consecutivas y cuando el diferencia entre todos los puntos calculados es menor que el grado de precisión tomado, entonces se asumen estos últimos valores como la solución a las ecuaciones diferenciales. En nuestro cálculo numérico la precisión siempre fue menor que $2 \cdot 10^{-5}$.

Por otro lado para el análisis de la estabilidad, en el caso fluidístico, utilizamos la ecuación 3.8 y la escribimos en forma matricial. Los operadores diferenciales son reemplazados por sus correspondientes operadores matriciales. La forma de estos operadores dependen del tipo de diferencias que se tomen, ya que estas pueden ser, atrasadas, adelantadas o centradas. En general la forma de los operadores matriciales es estándar, en el sentido de que un operador que represente alguna derivada, su correspondiente operador matricial es similar. Las diferencias aparecen con las condiciones de contorno de cada problema particular, en donde los primeros y últimos elementos matriciales, varían de acuerdo a las mencionadas condiciones de frontera. A manera de ejemplo mostramos como se construye matricialmente el termino $f_{1,y}$, dado en la ecuación (3.8). Utilizando diferencias centradas, entonces podemos escribir:

$$f_{yy_j} = \frac{1}{h^2}(f_{j+1} + f_{j-1} - 2f_j) \quad (\text{A15})$$

Por razones de simplificación en la notación hemos suprimido el subíndice 1, sin pérdida de generalidad,. Si $j=1, 2, \dots, N-1, N$ se obtiene:

$$f_{yy_1} = \frac{1}{h^2}(f_2 + f_0 - 2f_1)$$

$$f_{yy_2} = \frac{1}{h^2}(f_3 + f_1 - 2f_2)$$

$$f_{yy_{N-1}} = \frac{1}{h^2}(f_N + f_{N-2} - 2f_{N-1})$$

$$f_{yy_N} = \frac{1}{h^2}(f_{N+1} + f_{N-1} - 2f_N)$$

luego los términos anteriores se pueden escribir, en forma matricial de la siguiente manera:

$$f_{yy_j} = \frac{1}{h^2} \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{pmatrix} \quad (\text{A16})$$

la anterior ecuación toma la forma:

$$f_{yy_j} = \frac{1}{h^2} MF \quad (\text{A17})$$

Análogamente, se construyen las matrices para los otros términos de la ecuación (3.8). Finalmente se forma una gran matriz B que contiene todos los términos de los operadores, de tal manera que en forma resumida dicha ecuación (3.8) se puede expresar de la siguiente forma:

$$sMF = BF \quad (\text{A18})$$

La solución a la anterior ecuación, nos permite calcular los autovalores s y las autofunciones F para el problema fluidístico. En la literatura existen, subrutinas de cálculo numérico para evaluar directamente la ecuación (A18), nosotros utilizamos el programa Matlab. Con este mismo esquema se hallaron las autofunciones y los autovalores para el caso MHD.

Referencias Bibliográficas.

- 1.) **Banks W.H.H. Drazin P.G. Zaturka M. B.** On Perturbation of Jeffrey-Hammel flow. *J. Fluid Mech.* 186, (1988) pp 559-581.
- 2.) **Banks W.H.H. Zaturka M. B.** On flow through a porous annular pipe. *Phys. Fluids A* 4(6) (1992) pp 1131-1141.
- 3.) **Berman A.S.** Laminar flow in channels with porous walls. *J. Appl. Phys.* 24 (1953) pp 1232-1235.
- 4.) **Biskamp D.** Nonlinear Magnetohydrodynamics. Cambridge Univ. Press, UK (1993).
- 5.) **Brady J. F. Acrivos A.** Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity. An exact solution to the Navier Stokes equation with reverse flow. *J. Fluids Mech.* 112 (1981) pp 127-150.
- 6.) **Brady J. F.** Flow development in a porous channel and tube. *Phys. Fluids* 27 (1984) pp 1061-1067.
- 7.) **Cox, S. M.** Two dimensional flow of a viscous fluid in a channel with porous walls. *J. fluids Mech* vol 227 (1991) pp 1-33.
- 8.) **Durlofsky L. Brady J.F.** The spatial stability of a class of similarity solutions. *Phys. Fluids* 27 (1984) pp 1068-1076.
- 9.) **Gradshteyn I. S. Ryzhik I. M.** Table of integrals, series, and products. Academic Press 1980.

- 10.) **Gratton F. T. Gnavi G. Bender L.** Development of strongly dissipative mhd structures. *IEEE Trans. Plasma Science* 20 (1992) pp 262.
- 11.) **Gratton F.T. Bender L.** In *Current Research on Fusion, Laboratory and Astrophysical Plasma*, Eds Kulin S. Schöpf and Schritterieser World Scient., Singapore, (1993) pp 155-180.
- 12.) **Gratton F.T. Gnavi G. Heyn M. Biernat H.K. Rijnbeek H.K.** Pressure drive and viscous dragging: a reply, *J. Geophys. Res* 95 (1990) pp 261-263.
- 13.) **Gratton F.T. Bender L. Gnavi G.** Fast MHD dissipative processes. *Brazilian J.Phys.* Vol 26-3 (1996) pp 637-676.
- 14.) **Gratton F.T. Heyn M. Biernat H.K. Rijnbeek H.K. Gnavi G.** Mhd stagnation point flows in the presence of resistivity and viscosity, *J. Geophys. Res* 93 (1988) pp 7318-7324.
- 15.) **Hocking L. M.** Non linear instability of the asymptotic suction velocity profile. *Quart. J. Appl. Math.* 28 (1975) pp 341-353.
- 16.) **Kenny R. G.,** Liquid-metal flows near a magnetic neutral point. *J. fluids Mech.*, vol. 244 (1982) pp 201-224.
- 17.) **Kuzma D.C. Maki E.R. Donnely R.J.** The magnetohydrodynamic squeeze film. *J. fluids Mech.*, vol. 19 (1964) pp 395-401.
- 18.) **Maki E.R. Kuzma D.C. Donnely R.J.** Magnetohydrodynamic lubrication flow between parallel plates. *J. fluids Mech.*, vol. 26 (1966) pp 537-543.
- 19.) **Moffat H.K.** Electromagnetic starrng. *Phys. Fluids A* 3 (1991) pp 1336-1343.
- 20.) **Priest E.R.** The magnetohydrodynamics of current sheets. *Rep. prog. phys.* 48 (1985) pp 955-1090.
- 21.) **Proudman I.** An example of steady laminar flow at large Reynolds number. *Fluids Mech.* 9 (1960) pp 593-602.

- 22.) **Raithby G. D. Knudsen D. C.** Hydrodynamic development in a duct with suction and blowing. *Trans ASME J. Appl. Mech.* 41 (1974) pp 896-902.
- 23.) **Robinson W. A.** The existence of multiple solutions for the laminar flow in a uniformly porous channel with suction at the both walls. *SIAM J. Appl. Math.* 10 (1987) pp 526- 533.
- 24.) **Sellars J. R.** Laminar flow in channel with porous walls at high suction Reynolds number. *J. Appl. Phys.* 26 (1955) pp 489-490.
- 25.) **Shrestha G. M** Perturbation techniques in laminar flow. *Q. J. Mech. and Appl. Math.* 20 (1967) pp 233-246.
- 26.) **Skalak F. M. Wang C. Y.** On the nonunique solutions of laminar flow through a porous tube or channel. *SIAM J. Appl. Math.* 34 (1978) pp 535-544.
- 27.) **Sobey I. J. Drazin P.J.** Bifurcations in two dimensional channel flow. *J. Fluid Mech.* 171 (1986) pp 263-287.
- 28.) **Sonnerup B.U.O. Priest E.R.** Resistive mhd stagnation-point flows at a current sheet. *J. plasma phys.* 14 (1975) pp 283-294.
- 29.) **Sterl A.** Numerical simulation of liquid-metal MHD flows in rectangular ducts. *J. fluids Mech.*, 216 (1990) pp 161-191.
- 30.) **Talmage G. Walker J.S. Brown S. H. Sondergaard N.A. Branover H. Sukoriansky S.** Liquid-metal flows in sliding electrical contacts with arbitrary magnetic-field orientations. *Phys. fluids* A3 (1991) pp 1657-1665.
- 31.) **Taylor C. L. Banks W.H.H. Zatorska M. B. And Drazin P.G.,** Three dimensional flow in a porous channel. *Q. J. Mech. Appl. Math.* vol. 44 (1991) pp 105-133.
- 32.) **Terril R. M.** Laminar flow in a uniformly porous channel. *Aeronaut. Quart.* 15 (1964) pp 299-310.

33.) **Terril R. M.** On some exponentially small terms arising in flow through a porous pipe. *Q. J. Mech. and Appl. Math.* 26 (1973) pp 347-354.

34.) **Ueno K.** Inertia effect in two-dimensional MHD channel flow under a traveling sine wave magnetic field. *Phys. Fluids A* 3 (12)(1991) pp 3107-3116.

35.) **Watson E.B.B. Banks W.H.H. Zaturka M. B. And Drazin P.G.,** On transition to chaos in two-dimensional channel flow symmetrically driven by accelerating walls. *J. fluids Mech.* vol. 212 (1990) pp 451-485.

36.) **Yuang S. W.** Further investigation of laminar flow in channel with porous walls. *J. Appl. Phys.* 27 (1956) pp 267-269.

37.) **Zaturka M. B. Drazin P.G. And Banks W.H.H.** On the flow of a viscous fluid driven along a channel by suction at porous walls. *Fluid Dyn. Res.* 4,(1988) pp 151-178.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer al Dr. Fausto T. Gratton, director de esta tesis, por sus invaluable enseñanzas y constante colaboración. A la Dra. Graciela Gnavi, por las sugerencias y discusiones académicas, durante la realización de este trabajo. Al Dr. Fernando Minotti, y a los licenciados: Laurence Bender, Claudio Vigo y Sergio Ferro, por la constante colaboración y apoyo.

También agradezco a todos los miembros del Instituto de Física del Plasma por su compañerismo y calidez humana.

Finalmente quiero agradecer a la Universidad Nacional de Colombia Seccional Manizales, al Instituto Colombiano para el Avance de la Ciencia (Colciencias), al Consejo Nacional de Investigaciones Científico y Técnicas (Conicet), por el soporte económico brindado a este trabajo.

