Reticulados distributivos con un operador y álgebras de De Morgan monádicas

Petrovich, Alejandro

1997

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES.
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Reticulados distributivos con un operador y álgebras de De Morgan monádicas

Autor: Alejandro Petrovich.
Director: Roberto Cignoli.

Trabajo presentado para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Buenos Aires.

1997

ij2

Distributive lattices with an operator and monadic De Morgan algebras

Abstract

It was shown in [12] (see also [19]) that there is a duality between the category of bounded distributive lattices and join-homomorphisms and the category of Priestley spaces and Priestley relations. In this paper, bounded distributive lattices endowed with a join homomorphism are considered as algebras, which are called *modal lattices*. We characterize the congruence lattice of modal lattices in terms of the mentioned duality and certain closed subsets of Priestley spaces. This enables us to characterize the simple and subdirectly irreducible modal lattices. By means of this characterization, we give a detailed study of the variety generated by the totally ordered modal lattices. More precisely, we find for each subvariety of this variety, a set of equations which determine it.

In the second part of this paper we introduce the notion of quantifiers on De Morgan algebras. A De Morgan algebra endowed with a quantifier is called a *De Morgan monadic algebra*. We use the results obtained in the first part to characterize the conguence lattice of monadic De Morgan algebras and we characterize the simple and subdirectly irreducible monadic De Morgan algebras. We also give a construction of the De Morgan spaces of free monadic De Morgan algebras.

In the third part of this paper we extend the duality obtained in [12] and we obtain a duality for order-preserving maps into bounded distributive lattices. Finally, we give in the appendix a duality for partially ordered sets.

Key words: Distributive lattice, Priestley duality, Priestley relations, De Morgan algebras, quantifiers, order-preserving maps.

Reticulados distributivos con un operador y álgebras de De Morgan monádicas

Resumen

En [12] (ver también [19]) se probó que existe una dualidad entre la categoía de los reticulados distributivos acotados y homomorfismos superiores y la categoría de los espacios de Priestley y las relaciones de Priestley. En este trabajo, los reticulados distributivos acotados asociados con un homomorfismo superior son considerados como álgebras que se denominan *reticulados modales*. En este trabajo caracterizamos el reticulado de congruencias de los reticulados modales en términos de la dualidad mencionada y ciertos subconjuntos cerrados de los espacios de Priestley. Esto nos permite caracterizar los reticulados simples y subdirectamente irreducibles. Por medio de esta caracterización hacemos un estudio detallado de la variedad generada por los reticulados modales totalmente ordenados. Más precisamente, encontramos para cada subvariedad de esta variedad, un conjunto de ecuaciones que determinan dicha subvariedad.
En la segunda parte de este trabajo introducimos la noción de cuantificador sobre álgebras de De Morgan. Un álgebra de De Morgan asociada con un cuantificador se denomina *álgebra de De Morgan monádica.* Usamos los resultados obtenidos en la primera parte para caracterizar el reticulado de conguencias de las álgebras de De Morgan monádicas y caracterizamos las álgebras de De Morgan monádicas simples y subdirectamente irreducibles. También damos una construcción del espacio de De Morgan de las álgebras de De Morgan monádicas libres.
En la tercer parte de este trabajo extendemos la dualidad obtenida en [12] y obtenemos una dualidad para funciones monótonas entre reticulados distributivos acotados. Finalmente, damos en el apéndice una dualidad para conjuntos parcialmente ordenados.

Palabras claves: Reticulados distributivos, dualidad de Priestley, relaciones de Priestley, álgebras de De Morgan, cuantificadores, funciones monótonas.

Introducción

La clásicas dualidades de Stone para álgebras de Boole y de Birkhoff para reticulados distributivos finitos ha sido generalizada por H. A. Priestley ([36], [37]), mostrando que existe una dualidad entre la categoría cuyos objetos son los reticulados distributivos acotados y cuyos morfismos son los homomorfismos de reticulados acotados, y la categoría cuyos objetos son ciertos espacios topológicos ordenados denominados *espacios de Priestley* y cuyos morfismos son funciones monótonas y continuas entre dichos espacios.
En [12] (ver también [19]) se extiende la dualidad de Priestley mostrando que existe una dualidad entre la categoría cuyos objetos son los reticulados distributivos acotados y cuyos morfismos son homomorfismos superiores, y la categoría cuyos objetos son los espacios de Priestley y cuyos morfismos son ciertas relaciones binarias llamadas *relaciones de Priestley.*
Si L es un reticulado distributivo acotado, entonces todo homomorfismo superior $j : L \to L$ define una operación unaria que verifica las ecuaciones:

(1) $j(0) = 0$.

(2) $j(a \vee b) = j(a) \vee j(b)$.

Por lo tanto, todo reticulado distributivo acotado asociado con un homomorfismo superior determina un álgebra, la que llamaremos *reticulado modal.* De las ecuaciones (1) y (2) inferimos que la clase de los reticulados modales *es una variedad de álgebras.*

Uno de los hechos importantes de la dualidad de Priestley es que existe un isomorfismo entre el reticulado de las congruencias de un reticulado distributivo acotado y el reticulado dual de los subconjuntos cerrados de su espacio de Priestley ([36], [37], [39]).
En este trabajo generalizaremos este resultado, mostrando que existe un isomorfismo entre el reticulado de congruencias de un reticulado modal y el reticulado dual de ciertos subconjuntos cerrados de su espacio de Priestley, utilizando la dualidad obtenida en [12].
Por medio de esta caracterización, determinaremos en forma sistemática las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en la variedad de los reticulados modales, y en ciertas subvariedades conocidas de esta variedad. Esto nos permite también hacer un estudio detallado del reticulado de las subvariedades de la variedad generada por los reticulados modales totalmente ordenados. Más precisamente, encontraremos un conjunto de ecuaciones que caracteriza cada subvariedad de la variedad mencionada.

La caracterización de las congruencias mencionada nos permite en particular, dar también una caracterización del reticulado de las congruencias de los Q-reticulados distributivos considerados en [10]. Observemos que la dualidad considerada en [10] es obtenida en términos del rango del quantificador, suficiente para obtener las álgebras simples y subdirectamente irreducibles, pero no para caracterizar las congruencias.
Todos estos resultados están contenidos en los dos primeros capítulos.

La noción de cuantificador sobre álgebras de Boole fue introducida por Halmos in [24]. Esta noción algebraica se corresponde con la noción lógica de cuantificador existencial de la lógica clásica.
Esta noción algebraica fue extendida a álgebras correspondientes a diferentes lógicas no clásicas (ver por ejemplo [10], [12] y las referencias dadas allí)).
En el capítulo 3 se introduce la noción de cuantificador existencial sobre *álgebras de De Morgan.* Estas álgebras están relacionadas con ciertas lógicas no clásicas y han sido estudiadas por varios autores (ver [5], [25], [3], [32]). En particular, están relacionadas con una lógica cuatrovalente desarrollada por Belnap en [2].
Como en el caso de las álgebras de Boole, con cada cuantificador existencial sobre un álgebra de De Morgan está asociado un *cuantificador universal.* Por lo tanto, las álgebras de De Morgan asociadas con un cuantificador son llamadas *álgebras de De Morgan monádicas.*
Los cuantificadores son homomorfismos superiores y están caracterizados por su rango. Por lo tanto, como en el caso de los reticulados distributivos acotados (ver [12]), podemos asociarle a cada cuantificador sobre un álgebra de De Morgan A, dos relaciones diferentes sobre el conjunto de filtros primos de A: una *relación de Priestley* y una *relación de equivalencia.*
Las relaciones de Priestley nos van a servir para caracterizar *el reticulado de las congruencias de un álgebra de De Morgan monádica*, utilizando los resultados obtenidos en los capítulos anteriores. En particular, caracterizaremos las álgebras de De Morgan monádicas simples y subdirectamente irreducibles.
Las relaciones de equivalencia serán utilizadas para dar una construcción de las *álgebras de De Morgan monádicas libres.* Esta construcción se basa en la construcción dada por Halmos en [24] para construir el espacio dual de un álgebra de Boole monádica libre.
Para esto, usaremos el hecho que toda álgebra de De Morgan A se puede representar como el álgebra de De Morgan de las funciones continuas del conjunto de filtros primos de A en un álgebra de De Morgan fija con cuatro

elementos [17].

En [30] se prueba que el reticulado de las subvariedades de la variedad de las álgebras de Boole monádicas es una cadena isomorfa a la cadena que se obtiene agregando un último elemento a los números naturales. Esta propiedad también la satisface la variedad de los Q-reticulados distributivos considerados por Cignoli en [10].

En este trabajo mostraremos que la estructura de las subvariedades de la variedad de las álgebras de De Morgan monádicas es mucho más compleja que la de las variedades de las álgebras de Boole monádicas y los Q-reticulados distributivos.

En el capítulo cuatro extenderemos la dualidad obtenida en [12], obteniendo una dualidad para reticulados distributivos acotados y funciones monótonas. En este caso, mostraremos que los duales de las funciones monótonas son ciertas funciones de la forma $f : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$, donde X e Y son espacios de Priestley. Esta extensión es natural en el sentido que en la dualidad de Priestley el dual de un homomorfismo entre reticulados distributivos acotados es una función monótona y continua $f : X \rightarrow Y$; mientras que en la dualidad obtenida en [12], el dual de un homomorfismo superior es una relación de Priestley entre X e Y. Como toda relación binaria entre dos conjuntos X e Y se puede identificar con una función $f : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$, resulta natural que para extender la dualidad obtenida en [12], tengamos que ir un paso más y considerar funciones de la forma $f : X \rightarrow \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$.

Un clásico resultado debido a Birkhoff establece que todo conjunto parcialmente ordenado finito es isomorfo al conjunto parcialmente ordenado de los filtros primos de un reticulado finito. Este resultado es consecuencia inmediata de la dualidad de Priestley.

En [21], se introduce la noción de átomo en un álgebra de Heyting y se generaliza el resultado de Birkhoff mostrando que todo conjunto parcialmente ordenado es isomorfo al conjunto parcialmente ordenado determinado por los *átomos de un álgebra de Heyting atómica y completa*. Como todo reticulado distributivo finito es un álgebra de Heyting y la noción de átomo se reduce en este caso a la noción de elemento primo, se obtiene una generalización del Teorema de Birkhoff.

En el apéndice, mostraremos otra generalización del resultado de Birkhoff y obtendremos una dualidad para conjuntos parcialmente ordenados. Esta dualidad tiene dos aspectos que conviene destacar.

Uno de ellos es que existe una notable apariencia con la dualidad de

Priestley.
La otra es que tiene una íntima conección con los resultados obtenidos por Guillaume en [21], y con ciertos reticulados denominados *bialgebraicos* [20].
Los resultados obtenidos en el capítulo cuatro fueron expuestos en el XI Coloquio Latinoamericano de Algebra realizado en Mendoza en agosto de 1994.
Quiero agradecer al Dr. Cignoli por todo lo que me enseño y me apoyó durante todos estos años.

Capítulo 1

Preliminares.

Expondremos en esta sección las nociones básicas y los resultados principales sobre reticulados distributivos, espacios de Priestley y álgebra universal que nos serán necesarios más adelante. Comencemos estableciendo algunas notaciones.

El conjunto de números naturales será notado con N.

Sean X e Y conjuntos y sea $R \subseteq X \times Y$ una relación binaria. R^{-1} denotará la relación inversa de R y si $S \subseteq X$, $R(S)$ denotará la imagen de S por R, es decir:

$R(S) = \{y \in Y \mid \text{existe } x \in S \text{ tal que } (x, y) \in R\}$.

Si $S = \{x\}$, escribiremos $R(x)$ en lugar de $R(\{x\})$. El dominio de R será denotado con $domR$. Es fácil ver que $domR = R^{-1}(Y)$.

Si $X = Y$, notaremos con R^i la composición $R \circ R \circ \ldots \circ R$ de i factores, para todo $i \in$ N.

Denotaremos con $\mathcal{P}(X)$ al conjunto de las partes de X y si A es un subconjunto de X, C_A denotará su función característica.

1.1 Reticulados distributivos

Un estudio detallado de la teoría de reticulados puede verse, por ejemplo, en [4] y [1].

Un reticulado L es un conjunto parcialmente ordenado en el cual todo subconjunto de L de dos elementos $\{a, b\}$, posee supremo, notado $a \vee b$, e ínfimo, notado $a \wedge b$. L se dice distributivo si se cumple la igualdad:

$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$
para todo a, b, c en L. Si el reticulado tiene mínimo, éste se notará cero 0, y si tiene máximo, éste se notará con 1. L se dice acotado si tiene 0 y 1. Notaremos con **2** al reticulado con dos elementos $\{0, 1\}$.

Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. El *dual* de P es el conjunto parcialmente ordenado cuyos elementos son los elementos de P y cuyo orden parcial es el orden inverso del orden $\leq$. Notaremos con $P^{\geq}$ al dual de P. En otras palabras, $P^{\geq}$ es el conjunto parcialmente ordenado $(P, \geq)$.
Es inmediato ver que si L es un reticulado, entonces $L^{\geq}$ también lo es. Al orden $\geq$ lo llamaremos *orden dual de* $\leq$.

Dado un reticulado acotado L, se dice que un elemento $a \in L$ es un *complemento* del elemento $b \in L$, si $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$. Si L es distributivo, es fácil ver que el complemento de un elemento es único, siempre que éste exista. En este caso $\neg a$ denotará el complemento de a.
Un reticulado distributivo acotado se dice un *álgebra de Boole* si todo elemento tiene complemento.
El ejemplo típico de álgebra de Boole es el conjunto de las partes de un conjunto. Ejemplos típicos de reticulados distributivos acotados que no son álgebras de Boole son los reticulados de los abiertos de un espacio topológico no discreto, como así también los conjuntos totalmente ordenados acotados con más de 2 elementos.

Un reticulado distributivo acotado L se dice un *álgebra de Heyting* si verifica la siguiente propiedad: para todo par de elementos $a, b \in L$, el conjunto $\{x \in L \mid a \wedge x \leq b\}$ tiene último elemento. Éste elemento se denomina *pseudocomplemento relativo* de a respecto a b y será denotado por $a \rightarrow b$. Por lo tanto, el pseudocomplemento relativo posee la siguiente propiedad:
Para todo $x \in L$, $a \wedge x \leq b$ si y sólo si $x \leq a \rightarrow b$.
Si $L^{\geq}$ es un álgebra de Heyting, entonces L se denomina un *álgebra de Brouwer*.
Así como existe una estrecha relación entre las álgebras de Boole y el cálculo proposicional de la lógica clásica, las álgebras de Heyting son los modelos algebraicos correspondientes al cálculo proposicional de la lógica intuicionista. (Ver por ejemplo [40]).
Toda álgebra de Boole A es un álgebra de Heyting donde $a \rightarrow b = \neg a \vee b$ para todo $a, b \in A$. Es claro que todo reticulado distributivo finito es un álgebra de Heyting.

Los abiertos de un espacio topológico X forman un álgebra de Heyting, donde el pseudocomplemento relativo está dado por $U \to V = Int((X\backslash U) \cup V)$, para todo par de abiertos U, V contenidos en X e Int es la operación de interior. Otro ejemplo es el álgebra de Heyting formada por todos los subconjuntos crecientes de un conjunto parcialmente ordenado P. En este caso, el pseudocomplemento relativo de dos subconjuntos crecientes S y T de P es el mayor conjunto creciente contenido en $(P\backslash S) \cup T$.

Es inmediato ver que si L es un reticulado acotado, entonces todo subconjunto finito tiene ínfimo y supremo. No ocurre lo mismo si el subconjunto es infinito (tomar por ejemplo como L al conjunto de los números racionales entre 0 y 1).
Un reticulado L se dice *completo* si todo subconjunto de L tiene supremo e ínfimo. Por ejemplo, $\mathcal{P}(X)$ es siempre un reticulado completo para todo conjunto X, como también lo es todo reticulado finito.
Una relación importante entre los reticulados distributivos completos y las álgebras de Heyting es la siguiente:

Un reticulado distributivo completo L es un álgebra de Heyting si y sólo si L satisface la ley distributiva generalizada :

$x \wedge (\bigvee_{i \in I} x_i) = \bigvee_{i \in I}(x \wedge x_i)$,

para todo $x \in L$ y toda familia de elementos x_i de L.

Sea L un reticulado distributivo. Un subconjunto no vacío F de L es un *filtro* si y sólo si es un conjunto creciente y es cerrado por la operación de ínfimo. Un filtro F se llama *primo* si es distinto de L y además verifica la siguiente propiedad:

Si $a \vee b \in F$, entonces $a \in F$ o $b \in F$.

Si L es acotado, un conjunto creciente F es no vacío si y sólo si $1 \in F$.
Notaremos con $X(L)$ al conjunto de los filtros primos de L.
Un filtro F de L se dice *maximal*, si $F \neq L$ y si F' es un filtro que contiene a F, entonces $F = F'$ o $F' = L$.
En un reticulado distributivo todo filtro maximal es primo, pero no vale la recíproca, basta tomar por ejemplo la cadena con tres elementos $0 < a < 1$ y $F = \{1\}$.
Un resultado importante a destacar, es que si L es un álgebra de Boole, entonces un filtro de L es primo si y sólo si es maximal. Más aún, esta propiedad caracteriza a las álgebras de Boole. En efecto, un conocido teorema

de Nachbin ([1]) establece que *si en un reticulado distributivo acotado L todo filtro primo es maximal, entonces L es un álgebra de Boole.*

Un subconjunto I de L es un *ideal* si I es un filtro de $L^{\geq}$.
Sea S un subconjunto de L. Notaremos por $[S)$ el filtro generado por S y con $(S]$ el ideal generado por S. Es fácil ver que

$[S) = \{x \in L \mid$existe $n \in \mathbf{N}$ y elementos $s_1, \ldots, s_n$ de S tales que $s_1 \wedge \ldots \wedge s_n \leq x\}$.
La descripción de $(S]$ es la misma cambiando $\wedge$ por $\vee$ y $\leq$ por $\geq$.

El siguiente teorema es fundamental en la teoría de reticulados distributivos y será usado con frecuencia:

Teorema de Birkhoff-Stone. *Sea L un reticulado distributivo. Si F e I son un filtro y un ideal de L respectivamente tales que $F \cap I = \emptyset$, entonces existe un filtro primo $P \subseteq L$ tal que $F \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$.*
Sea L un reticulado distributivo acotado y sea a un elemento de L distinto de 0. Se dice que a es *irreducible* si $a \leq b \vee c$ implica que $a \leq b$ o $a \leq c$ para todo $b, c \in L$.
Se dice que a es *átomo* si $x \leq a$ implica $x = 0$ o $x = a$ para todo $x \in L$.
Un filtro F de L se dice *principal* si existe $a \in L$ tal que $F = [a)$. Es fácil ver que un filtro primo es principal si y sólo si a es un elemento irreducible de L y que un filtro es maximal si y sólo si a es un átomo de L.

Sean L, M reticulados distributivos. Una aplicación $h : L \to M$ se dice un *homomorfismo* si preserva las operaciones de reticulados, esto es $h(a \wedge b) = h(a) \wedge h(b)$ y $h(a \vee b) = h(a) \vee h(b)$ para todo $a, b \in L$. Si L y M son acotados, entonces h es un *homomorfismo acotado* si h es un homomorfismo de reticulados que preserva el 0 y el 1.
Vale la pena notar que existe una correspondencia biunívoca entre filtros primos de L y homomorfismos acotados de L en $\mathbf{2}$. Más precisamente, esta correspondencia está dada por la aplicación $P \mapsto \mathrm{C}_P$, donde P es un filtro primo de L.

Sean L, M reticulados acotados. Una aplicación $j : L \to M$ se denomina un *homomorfismo superior* si verifica: $j(a \vee b) = j(a) \vee j(b)$ y $j(0) = 0$ $\forall a, b \in L$. La noción de homomorfismo inferior se define dualmente. Así como existe una correspondencia biunívoca entre los filtros primos de L y homomorfismos de L en $\mathbf{2}$, también existe una correspondencia biunívoca entre los ideales de L y los homomorfismos superiores de L en $\mathbf{2}$, siendo esta correspondencia la que a cada ideal I de L le asigna la función característica del complemento de I. Un ejemplo importante de homomorfismo superior proviene de las relaciónes binarias, más precisamente:

(hs) Sean X e Y conjuntos y sea $R \subseteq X \times Y$ una relación binaria. Entonces la aplicación que a cada subconjunto S de Y le asigna $R^{-1}(S)$ define un homomorfismo superior de $\mathcal{P}(Y)$ en $\mathcal{P}(X)$ que será denotado por $R^{\bullet}$.

1.2 Espacios de Priestley y relaciones de Priestley

Un *espacio topológico totalmente disconexo en el orden* es una terna $(X, \leq, \tau)$ tal que $(X, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, (X, τ) es un espacio topológico, y dados x, y en X tales que $x \not\leq y$, existe un conjunto abierto, cerrado y creciente U tal que $x \in U$ e $y \notin U$.
Un *espacio de Priestley* es un espacio topológico compacto y totalmente disconexo en el orden.
Si X es un espacio de Priestley, $D(X)$ denotará el reticulado distributivo acotado de los subconjuntos de X que son abiertos, cerrados y crecientes.
Observación. Sea L un reticulado distributivo acotado. Si consideramos al conjunto $\mathbf{2}$ como un espacio topológico, con la topología discreta, éste resulta ser un espacio de Priestley. Por el teorema de Tychonoff, $\mathbf{2}^L$ es compacto, y por lo tanto un espacio de Priestley, donde el orden está definido coordenada a coordenada y la topología es la topología producto.
Es fácil ver que el conjunto $Hom(L, \mathbf{2})$ de los homomorfismos acotados de L en $\mathbf{2}$ es un subconjunto cerrado de $\mathbf{2}^L$, y por lo tanto un espacio de Priestley. De este resultado, se deduce fácilmente que $X(L)$, con el orden de la inclusión, y con la topología determinada tomando como subbase los conjuntos de la forma $\sigma_L(a) = \{P \in X(L) \mid a \in L\}$ y $X(L) \backslash \sigma_L(a)$ para cada $a \in L$, es un espacio de Priestley. En efecto, es fácil verificar que la aplicación que a cada filtro primo P le asigna su función característica C_P, define un homeomorfismo y un isomorfismo de conjuntos ordenados entre $X(L)$ y $Hom(L, \mathbf{2})$.

Sea L un reticulado distributivo acotado, y sea X un espacio de Priestley. Priestley probó en [36], [37] que $\sigma_L : L \to D(X(L))$ es un isomorfismo de reticulados y que la aplicación $\varepsilon_X : X \to X(D(X))$ definida por la fórmula:

$\varepsilon_X(x) = \{U \in D(X) \mid x \in U\}$ es un homeomorfismo y un isomorfismo de orden.
Esto nos dice que todo reticulado distributivo acotado puede considerarse como el reticulado de los abiertos cerrados crecientes de un espacio de Priestley y que todo espacio de Priestley se lo puede considerar como el conjunto de filtros primos de un reticulado distributivo acotado.

Sea $\mathcal{L}$ la categoría cuyos objetos son los reticulados distributivos acotados y cuyos morfismos son los homomorfismos acotados; y sea $\mathcal{P}$ la categoría cuyos objetos son los espacios de Priestley y cuyos morfismos son las funciones monótonas continuas. En [36], [37] se prueba que existe una dualidad entre ambas categorías definiendo funtores contravariantes $\psi : \mathcal{P} \to \mathcal{L}$ y $\phi : \mathcal{L} \to \mathcal{P}$ como sigue. Si X es un objeto en $\mathcal{P}$, entonces $\psi(X) = D(X)$. Si $f \in \mathcal{P}(X, X')$ y $U \in D(X')$, entonces $\psi(f)(U) = f^{-1}(U)$.
Si L es un objeto en $\mathcal{L}$, entonces $\phi(L) = X(L)$. Si $h \in \mathcal{L}(M, N)$ y $P \in X(N)$, entonces $\phi(h)(P) = h^{-1}(P)$.
Las composiciones $\psi \circ \phi$ y $\phi \circ \phi$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidad sobre $\mathcal{L}$ y $\mathcal{P}$ respectivamente, debido a que los isomorfismos $\sigma_L : L \to D(X(L))$ y $\varepsilon_X : X \to X(D(X))$ son las componentes de las transformaciones naturales, es decir el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{h} & M \\ \downarrow{\scriptstyle \sigma_L} & & \downarrow{\scriptstyle \sigma_M} \\ D(X(L)) & \xrightarrow{\psi(\phi(h))} & D(X(M)) \end{array}$$

es conmutativo para todo morfismo $h \in \mathcal{L}(M, N)$, y el siguiente diagrama:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & X' \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_X} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_X} \\ X(D(X)) & \xrightarrow{\bar{f}} & X(D(X')) \end{array}$$

es conmutativo para todo morfismo $f \in \mathcal{P}(X, X')$.

Sea L un reticulado distributivo acotado y sea X un espacio de Priestley. Teniendo en cuenta la dualidad de Priestley, llamaremos también a $X(L)$ *el dual de* L, y a $D(X)$ *el dual de* X.

De acuerdo a la observación anterior, podemos identificar al dual de L con el conjunto de los homomorfismos acotados de L en $\mathbf{2}$.

Análogamente, podemos identificar al dual de X de otra manera como sigue. Sea $C(X)$ el conjunto de las funciones monótonas y continuas de X en $\mathbf{2}$. Entonces es fácil ver que $C(X)$ es un reticulado distributivo acotado, donde el orden está dado puntualmente, es decir, si $f, g \in C(X)$, entonces $f \leq g$ si y sólo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Por lo tanto: $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$ y $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$.
Es fácil ver que $D(X)$ es isomorfo a $C(X)$, donde el isomorfismo está dado por la correspondencia $U \mapsto C_U$ para todo $U \in D(X)$. Por lo tanto podemos identificar al dual de X como el reticulado de las funciones monótonas y continuas de X en $\mathbf{2}$.
Sea $f \in \mathcal{P}(X, X')$. Una propiedad importante de la dualidad de Priestley es que $\psi(f)$ es un homomorfismo acotado y suryectivo si y sólo si f es un monomorfismo de orden, es decir f es inyectiva y para todo $x, y \in X$ se tiene que $x \leq y$ si y sólo si $f(x) \leq f(y)$. Análogamente, $\psi(f)$ es inyectivo si y sólo si f es suryectiva.

Un espacio *Booleano* o espacio de *Stone*, es un espacio de Priestley cuyo orden es la igualdad. Esta definición proviene del hecho que cuando L es un álgebra de Boole, todo filtro primo de L es maximal y por lo tanto $X(L)$ es un espacio Booleano.
Si X es un espacio Booleano, entonces todo subconjunto abierto cerrado de X es creciente. Por lo tanto $D(X)$ es un álgebra de Boole, donde el complemento de un elemento de $D(X)$ es el complemento conjuntista.

Las definiciones y resultados siguientes están contenidos en [12] y serán básicos para el desarrollo de este trabajo.

Sean X e Y dos espacios de Priestley y sea $R \subseteq X \times Y$. R se dice una *relación de Priestley* de X en Y ([12]) si verifica las siguientes condiciones:

(1) $R(x)$ es un subconjunto cerrado y decreciente de Y, para todo $x \in X$.

(2) Si $V \in D(Y)$, entonces $R^{\bullet}(V) \in D(X)$.

Si $X = Y$, una relación de Priestley de X en X se dirá simplemente una relación de Priestley sobre X.
De acuerdo a la definición (hs) de $R^{\bullet}$ dada antes de esta sección, la condición (2) nos dice que la restricción de $R^{\bullet}$ a $D(Y)$ es un homomorfismo superior entre $D(Y)$ y $D(X)$. Como $dom R = R^{\bullet}(Y)$, resulta que el dominio de R es un abierto cerrado creciente.

Sean L y M reticulados distributivos acotados y sea $j : L \to M$ un homomorfismo superior. Entonces:

$j^* = \{(P,Q) \in X(M) \times X(L) \mid Q \subseteq j^{-1}(P)\}$

es una relación de Priestley y $domj^* = \sigma_L(j(1))$. Más aún, para todo $a \in L$:

$(j^{**}(\sigma_L(a)) = \sigma_L(j(a))$

Si X es un espacio de Priestley y R es una relación de Priestley sobre X, se tiene que:

$(x,y) \in R$ si y sólo si $(\varepsilon_X(x), \varepsilon_X(y)) \in R^{**}$ para todo $x, y \in X$.

En [12] hemos probado que existe una dualidad entre la categoría $\mathcal{LS}$ cuyos objetos son los reticulados distributivos acotados y cuyos morfismos son los homomorfismos superiores; y la categoría cuyos objetos son los espacios de Priestley y cuyos morfismos son las relaciones de Priestley. Más aún, cuando restringimos la categoría $\mathcal{LS}$ a la categoría $\mathcal{L}$, se obtiene escencialmente la dualidad de Priestley descripta anteriormente. Éste último hecho se basa en lo siguiente:

Sean X e Y espacios de Priestley. Una relación de Priestley $R \subseteq X \times Y$ se dice *funcional* si $domR = X$ y $R(x)$ tiene un último elemento para todo x en X. Este último elemento será denotado con $f_R(x)$ para todo $x \in X$.

Por lo tanto, a cada relación de Priestley funcional tenemos asociada la aplicación $x \mapsto f_R(x)$. Esta aplicación es una función monótona y continua entre X e Y. Recíprocamente, si $f : X \to Y$ es una función monótona y continua, entonces

$R_f = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \leq f(x)\}$

es una relación de Priestley funcional. En particular, si $X = Y$ y f es la identidad sobre X, R_f es el orden dual de $\leq$ y será denotado con $\geq_X$.

Sean L, M reticulados distributivos acotados. Entonces $h : L \to M$ *es un homomorfismo acotado, si y sólo si h^* es una relación de Priestley funcional entre $X(M)$ y $X(L)$, y para cada $P \in X(M)$, $h^{-1}(P)$ es el último elemento de $h^*(P)$.*

Por medio de la dualidad obtenida en [12], deducimos de esta propiedad que las relaciones de Priestley funcionales son las que provienen de los homomorfismos acotados.

Sea X un espacio de Priestley y sea S un subconjunto de X. Denotaremos con $Cl(S)$ a la clausura de S en X, con $\max S$ al conjunto de elementos maximales de S y con $\min S$ al conjunto de elementos minimales de S. Además, $C(X)$ denotará el reticulado distributivo acotado formado por los subcon-

juntos cerrados de X.
Los siguientes resultados serán usados frecuentemente en este trabajo, donde las propiedades (iii), (iv) y (v) han sido demostradas en [12]:

(i) Sea X un espacio de Priestley y sea S un subconjunto cerrado de X. Para cada $x \in S$ existe $z \geq x$ tal que $z \in \max S$. En particular, $\max S \neq \emptyset$ si $S \neq \emptyset$. (Ver por ejemplo [38]).

(ii) Sea X un espacio de Priestley y sea $x \in X$. Los conjuntos $U_x = \{y \in X \mid y \not\leq x\}$ y $V_x = \{y \in X \mid y \not\geq x\}$ son abiertos.

(iii) Sea L un reticulado distributivo acotado y sea $j : L \to L$ un homomorfismo superior. Si F es un filtro de L y $P \in X(L)$ es tal que $F \subseteq j^{-1}(P)$, entonces existe un filtro primo Q de L tal que $F \subseteq Q \subseteq j^{-1}(P)$.

Sea X un espacio de Priestley y sea R una relación de Priestley sobre X.

(iv) Sean $x, y \in X$. Entonces $x \leq y$ implica $R(x) \subseteq R(y)$.

(v) Sean $x, y \in X$. Si $y \notin R(x)$ entonces existe $V \in D(X)$ tal que $y \in V$ y $V \cap R(x) = \emptyset$, es decir, $x \notin R^{*}(V)$.

1.3 Algebra Universal

Expondremos en esta sección las nociones básicas de álgebra universal que nos serán necesarios más adelante. Referencias sobre el tema pueden encontrarse por ejemplo en [6].

Sea A un conjunto y n un número natural. Una *operación n-aria sobre A* es una función $f : A^n \to A$, donde n es la *ariedad o rango* de f. Si $n = 0$, un operación 0-aria es una constante de A. Una *operación finitaria* sobre A es una operación de rango n para algún número natural n.

Un *lenguaje o tipo* de álgebras es un conjunto $\mathcal{F}$, cuyos elementos se llaman *símbolos de función*, tal que a cada miembro de $\mathcal{F}$ se le asigna un número natural n, llamado ariedad o rango de f, y f se denomina símbolo de función n-ario. En términos de la lógica de primer orden, un lenguaje de álgebras es un lenguaje de primer orden con igualdad sin símbolos de relación.
Si $\mathcal{F}$ es un lenguaje de álgebras, entonces un *álgebra* de tipo $\mathcal{F}$ es un par (A, F), donde A es un conjunto no vacío y F es una familia de operaciones finitarias sobre A indexada por $\mathcal{F}$, tal que a cada símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$, le corresponde una operación n-aria $f^{\mathbf{A}}$ sobre A que pertenece a F.

El conjunto A se llama el *universo o conjunto asociado* al álgebra $\mathbf{A} = (A, F)$. En lo que sigue, cuando no haya posibilidad de confusión, escribiremos f en lugar de $f^{\mathbf{A}}$, y si $\mathcal{F}$ es finito, escribiremos $(A, f_1, \ldots, f_k)$ en lugar de (A, F), donde $\mathcal{F} = \{f_1, \ldots, f_k\}$. En este caso, si n_i es el rango de f_i para $1 \leq i \leq k$, diremos también que $\mathbf{A}$ es de tipo $(n_1, \ldots, n_k)$. En términos de la lógica de primer orden, un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ es lo que se llama una *interpretación o estructura adecuada* del lenguaje $\mathcal{F}$.

Todo reticulado distributivo acotado $\mathbf{L}$ es un álgebra $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 0, 0)$ que verifica las siguientes identidades:

(I1) $x \vee y = y \vee x$, $x \wedge y = y \wedge x$.

(I2) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$, $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$.

(I3) $x \vee x = x$, $x \wedge x = x$.

(I4) $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$.

(I5) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$.

(I6) $x \wedge 1 = x$, $x \vee 0 = x$.

Otro ejemplo importante de álgebras que trataremos son las álgebras de Boole. El lenguaje de estas álgebras es el lenguaje de los reticulados distributivos acotados más el símbolo unario $\neg$.
Como en el caso de los reticulados distributivos acotados, las álgebras de Boole también se pueden definir axiomáticamente; donde las identidades son las seis identidades de arriba más las tres identidades:

(I7) $x \vee \neg x = 1$.

(I8) $\neg\neg x = x$.

(I9) $\neg(x \vee y) = \neg x \wedge \neg y$.

Es importante destacar que la estructura algebraica de las álgebras de Boole está íntimamente ligada al orden en el sentido que si un reticulado distributivo admite una estructura de álgebra de Boole, ésta es única; o sea no puede definirse en dicho reticulado dos operaciones unarias diferentes que cumplan con las identidades de las álgebras de Boole.

Este hecho no ocurre en general con otras estructuras ordenadas como son por ejemplo las *álgebras de De Morgan* que trataremos más adelante.

Otro ejemplo de álgebras axiomatizables que trataremos son las álgebras de Heyting. Toda álgebra de Heyting $\mathbf{H}$ es un álgebra $(H, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ de tipo $(2,2,2,0,0)$, donde $(H, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un reticulado distributivo acotado y $\rightarrow$ verifica las siguientes identidades: (ver [1])

(h1) $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y$.

(h2) $x \wedge (y \rightarrow z) = x \wedge (x \wedge y \rightarrow x \wedge z)$.

(h3) $z \wedge (x \wedge y \rightarrow x) = z$.

Con el objetivo de simplificar la notación, algunas álgebras que serán de uso frecuente, como los reticulados distributivos acotados, álgebras de Boole, etc; serán denotadas muchas veces por sus universos en lugar de usar la notación que involucra al universo y a los símbolos del lenguaje.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Una función $h : A \rightarrow B$ se dice un *homomorfismo* si para cada símbolo de función n-ario $f \in \mathcal{F}$, $h(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = g^{\mathbf{B}}(h(a_1), \ldots, h(a_n))$ para toda n-upla $(a_1, \ldots, a_n)$ de elementos de A. Si h es inyectiva, entonces h se dice una *inmersión*, si h es biyectiva, entonces h se denomina *isomorfismo*. En el caso que h sea sobreyectiva, diremos que $\mathbf{B}$ es *imagen homomorfa* de $\mathbf{A}$.

Sean $\mathbf{A}$ y $\mathbf{B}$ dos álgebras del mismo tipo $\mathcal{F}$. Entonces $\mathbf{B}$ es una *subálgebra* de $\mathbf{A}$ si $B \subseteq A$ y para cada símbolo de función $f \in \mathcal{F}$, $f^{\mathbf{B}}$ es la restricción de $f^{\mathbf{A}}$ a B.

Sean $(\mathbf{A_j})_{j \in J}$ una familia de álgebras de tipo $\mathcal{F}$. Entonces el *producto directo* $\mathbf{A} = \prod_{j \in J} \mathbf{A}_j$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ cuyo universo es el producto cartesiano $\prod_{j \in J} A_j$, y si $f \in \mathcal{F}$ es un símbolo de operación n-ario, se define $f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)(j) = f^{\mathbf{A_j}}(a_1(j), \ldots, a_n(j))$, donde $a_1, \ldots, a_n \in \prod_{j \in J} A_j$, y si $1 \leq k \leq n$, $a_k(j)$ denota la j-ésima coordenada del vector a_k.

Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$ y sea $\equiv \subseteq A \times A$ una relación de equivalencia. Entonces diremos que $\equiv$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$ si satisface la siguiente relación de compatibilidad:
Si f es un símbolo de función n-ario en $\mathcal{F}$, $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n \in A$, y $(a_i, b_i) \in \equiv$, para todo $1 \leq i \leq n$, entonces:
$(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)) \in \equiv$.

Por lo tanto, para cada símbolo de función n-ario en $\mathcal{F}$, tenemos definido en el conjunto cociente $A/\equiv$ una operación n-aria $f^{\mathbf{A}}/\equiv$ que a cada n-upla de clases de equivalencias $a_1/\equiv, \ldots, a_n/\equiv$ de elementos de $A/\equiv$ le asigna el elemento $f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)/\equiv$. Luego el *álgebra cociente* es el álgebra de tipo $\mathcal{F}$ cuyo universo es $A/\equiv$ y las operaciones son las operaciones $f^{\mathbf{A}}/\equiv$ para cada símbolo de función f en $\mathcal{F}$. De esta definición resulta que la proyección canónica $p : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\equiv$ es un homomorfismo.

Si $\mathbf{A}$ es un álgebra, $Con(\mathbf{A})$ denotará el conjunto de todas las congruencias sobre $\mathbf{A}$. Notaremos con id_A a la relación de identidad sobre A. Un resultado importante es el siguiente:

Si $\mathbf{A}$ *es un álgebra, entonces* $Con(\mathbf{A})$ *con el orden de la inclusión es un reticulado acotado cuyo primer elemento es* id_A *y cuyo último elemento es* $A \times A$.

El reticulado de congruencias de un reticulado es siempre distributivo aunque el reticulado original no lo sea. Sin embargo $Con(\mathbf{A})$ puede no ser distributivo en general, basta tomar por ejemplo el reticulado de congruencias del grupo abeliano de los enteros.

Un álgebra $\mathbf{A}$ se dice simple si $Con(\mathbf{A}) = \{id_A, A \times A\}$. Es decir $Con(\mathbf{A})$ tiene solamente dos relaciones de congruencia.

Un álgebra $\mathbf{A}$ se dice que es *producto subdirecto* de una familia de álgebras $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$ si verifica las siguientes condiciones:

(c1) Existe una inmersión $h : \mathbf{A} \to \prod_{j \in J} \mathbf{A}_j$.

(c2) Si $\pi_j : \prod_{j \in J} \mathbf{A}_j \to \mathbf{A}_j$ es la proyección sobre la j-ésima coordenada, entonces la composición $\pi_j \circ h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_j$ es sobreyectiva.

Un álgebra $\mathbf{A}$ se denomina *subdirectamente irreducible* si verifica la siguiente condición:

Si $\mathbf{A}$ *es producto subdirecto de una familia de álgebras* $(\mathbf{A}_i)_{i \in I}$, *entonces existe* $i \in I$ *tal que* $\pi_i \circ h : \mathbf{A} \to \mathbf{A}_i$ *es un isomorfismo, donde* h *es cualquier aplicación verificando (c1) y (c2).*

Una propiedad importante que usaremos con frecuencia es la siguiente:

Un álgebra $\mathbf{A}$ *es subdirectamente irreducible si y sólo si* $Con(\mathbf{A}) \setminus \{id_A\}$ *tiene primer elemento.*

Es decir, existe una congruencia $\equiv$ sobre $\mathbf{A}$ diferente de la identidad, tal que si $\equiv_1$ es una congruencia sobre $\mathbf{A}$, también diferente de la identidad, entonces

$\equiv \subseteq \equiv_1$; o equivalentemente, la intersección de todas las congruencias que son distintas de la identidad, es una congruencia distinta de la identidad.
Toda álgebra simple es subdirectamente irreducible, pero la recíproca no es cierta, basta tomar por ejemplo como álgebra un grupo cíclico con 4 elementos. Un teorema fundamental del Algebra Universal debida a Birkhoff es el siguiente:

Toda álgebra es isomorfa a un producto subdirecto de álgebras subdirectamente irreducibles.

Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras del mismo tipo. Diremos que $\mathcal{K}$ es una *variedad* si es una clase cerrada por imágenes homomorfas, subálgebras y productos directos. Si $\mathcal{V}$ y $\mathcal{W}$ son variedades tales que todo miembro de $\mathcal{V}$ es un miembro de $\mathcal{W}$, entonces se dice que $\mathcal{V}$ es una *subvariedad* de $\mathcal{W}$.

Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras del mismo tipo. Notaremos por $V(\mathcal{K})$ a la variedad generada por $\mathcal{K}$, esto es, a la menor variedad de álgebras que contiene a $\mathcal{K}$. Si $\mathcal{K} = \{A_1, \ldots, A_n\}$ es una clase finita de álgebras, notaremos a $V(\mathcal{K})$ como $V(A_1, \ldots, A_n)$ en lugar de $V(\{A_1, \ldots, A_n\})$.
$V(\mathcal{K})$ está caracterizada de la siguiente forma:

$A \in V(\mathcal{K})$ *si y sólo si* A *es imagen homomorfa de una subálgebra de un producto directo de álgebras de* $\mathcal{K}$.

Del Teorema de Birkhoff mencionado arriba, se obtiene como corolario que *toda variedad está generada por la álgebras subdirectamente irreducibles pertenecientes a la variedad.*

Sea X un conjunto cuyos elementos se llaman *variables* y sea $\mathcal{F}$ un lenguaje de álgebras. El conjunto $T(X)$ de *términos de tipo* $\mathcal{F}$ *sobre* X es el menor conjunto que contiene a las variables, a los símbolos de función 0-arios y tal que si $p_1, \ldots, p_n \in T(X)$ y f es un símbolo de función n-ario, entonces la expresión $f(p_1, \ldots, p_n) \in T(X)$. En la terminología de los lenguajes de primer orden, $T(X)$ son los términos del lenguaje $\mathcal{F}$.
Por ejemplo, si $\mathcal{F}$ consiste de un solo símbolo de función binario $\cdot$ y $X = \{x, y, z\}$, entonces usando la notación $p_1 \cdot p_2$ en lugar de $\cdot(p_1, p_2)$, tenemos que:

$x, y, z, x \cdot y, x \cdot (y \cdot z)$

son ejemplos de términos sobre X.

Sean $x_1, \ldots, x_n$ variables en X y sea $p(x_1, \ldots, x_n)$ un término de tipo $\mathcal{F}$ sobre las variables $x_1, \ldots, x_n$. Entonces, si $\mathbf{A}$ es un álgebra de tipo $\mathcal{F}$, se define una aplicación $p^{\mathbf{A}} : \mathbf{A}^n \to \mathbf{A}$ como sigue:

(1) Si p es una variable x_i, entonces $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$.

(2) Si p es de la forma: $f(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n))$, donde f es un símbolo de función k-ario, entonces:
$p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_k^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n))$.
En la termino;ogía de los lenguajes de primer orden, $p^{\mathbf{A}}$ no es otra cosa que la interpretación del término $p(x_1, \ldots, x_n)$ en la estructura (A, F).

Una *identidad* de tipo $\mathcal{F}$ sobre X es una expresión de la forma $p = q$, donde p y q son términos de tipo $\mathcal{F}$ sobre X. Se dice que un álgebra $\mathbf{A}$ de tipo $\mathcal{F}$ satisface la identidad $p(x_1, \ldots, x_n) = q(x_1, \ldots, x_n)$, si para toda n-upla $a_1, \ldots, a_n$ de elementos de A, $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)$. En el lenguaje de primer orden $\mathcal{F}$, las identidades son las denominadas *fórmulas atómicas* del lenguaje $\mathcal{F}$.
Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras de tipo $\mathcal{F}$ se dice *ecuacional* si existe un conjunto Σ de identidades de tipo $\mathcal{F}$, tal que un álgebra está en $\mathcal{K}$ si y sólo si satisface todas las identidades de Σ. Un teorema fundamental del Algebra Universal debido a Birkhoff es el siguiente:

Una clase $\mathcal{K}$ es ecuacional si y sólo si $\mathcal{K}$ es una variedad.

De acuerdo a los ejemplos dados anteriormente, la clase de los reticulados distributivos acotados, la clase de las álgebras de Boole y la clase de las álgebras de Heyting son ejemplos de clases ecuacionales. La clase de los dominios de integridad es un ejemplo de una clase no ecuacional.

Sea $\mathcal{V}$ una variedad y sea $\mathcal{W}$ una subvariedad de $\mathcal{V}$. Es claro que las identidades que definen a $\mathcal{V}$ son satisfechas por cualquier álgebra de $\mathcal{W}$. Si $\mathcal{W}$ es una subvariedad propia de $\mathcal{V}$, existen identidades que son válidas en $\mathcal{W}$ y no en $\mathcal{V}$. Por lo tanto las identidades que definen a $\mathcal{W}$ van a ser las de $\mathcal{V}$ y algunas más. En lo que sigue, cuando nos refiramos a las identidades que caracterizan una subvariedad propia de una variedad dada, nos referiremos a las identidades que son válidas en la subvariedad y no en la variedad.

Capítulo 2

Reticulados distributivos asociados con un operador

Un *álgebra modal* es un álgebra $\mathbf{A} = (A, \vee, \wedge, \neg, m, 0, 1)$, en el que $(A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Boole y m es un homomorfismo inferior definido en A.
Es importante notar que en un álgebra modal podemos definir un homomorfismo superior j a partir del operador m, definiendo $j(a) = \neg m(\neg a)$ para todo $a \in A$. Recíprocamente, si A es un álgebra de Boole y j es un homomorfismo superior sobre A, entonces definiendo $m(a) = \neg j(\neg a)$ para todo $a \in A$, resulta que m es un homomorfismo inferior y por lo tanto $(A, \vee, \wedge, \neg, m, 0, 1)$ resulta un álgebra modal.

Observación 2.0.1 En [28] las álgebras modales son llamadas álgebras modales normales. En este trabajo, el autor define un álgebra modal como un álgebra $(A, \vee, \wedge, \neg, *, 0, 1)$, donde $(A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ es un álgebra de Boole y $*$ es una operación unaria cualquiera.
Así como existe una estrecha relación entre las álgebras de Boole y el cálculo proposicional de la lógica clásica, las álgebras modales están en relación con la denominada lógica modal (ver por ejemplo [40]). En esta lógica se definen dos conectivos, llamados símbolos de necesidad y de posibilidad, que se corresponden, en las álgebras modales, con los operadores m y j respectivamente.

Sea L un reticulado distributivo acotado y sea $j : L \rightarrow L$ un homomorfismo superior. Es claro que j define una operación unaria sobre L que verifica las identidades $j(a \vee b) = j(a) \vee j(b)$ y $j(0) = 0$. Por lo tanto la clase de los reticulados distributivos acotados asociados con un homomorfismo superior determinan una clase ecuacional. Esto nos lleva a la siguiente definición:

2.1 Reticulados modales y dualidad

Definición 2.1.1 Un *reticulado modal* es un álgebra $\mathbf{L_j} = (L, \vee, \wedge, j, 0, 1)$ tal que $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un reticulado distributivo acotado, y $j : L \to L$ es un homomorfismo superior.

Notar que el lenguaje de éstas álgebras es el lenguaje de los reticulados distributivos acotados más un símbolo de operación unario j. El término *modal* se debe a que cuando el reticulado es un álgebra de Boole, se obtiene la noción dual de álgebra modal.
A toda álgebra modal le podemos asociar un reticulado modal en donde el reticulado subyacente es un álgebra de Boole. Recíprocamente, si $\mathbf{L_j} = (L, \vee, \wedge, j, 0, 1)$ es un reticulado modal, entonces j resulta ser un homomorfismo inferior sobre $L^{\geq}$. Por lo tanto, si L es un álgebra de Boole, entonces $\mathbf{L_j^{\geq}} = (L^{\geq}, \vee, \wedge, , \neg, j, 0, 1)$ es un álgebra modal.

Notaremos por $\mathbf{J}$ a la variedad de los reticulados modales. Denotaremos por $\mathcal{J}$ la categoría cuyos objetos son los reticulados modales y cuyos morfismos son los homomorfismos de reticulados modales.

Sean t_1 y t_2 términos del lenguaje de los reticulados modales. Es claro que la fórmula $t_1 \wedge t_2 = t_1$ es satisfecha por un álgebra $\mathbf{A}$ en $\mathbf{J}$ si y sólo si $\mathbf{A}$ satisface la desigualdad $t_1^{\mathbf{A}} \leq t_2^{\mathbf{A}}$. Por lo tanto, abusando del lenguaje, a las identidades de la forma $t_1 \wedge t_2 = t_1$ las notaremos con $t_1 \leq t_2$.

Definición 2.1.2 Un *espacio modal* es un par (X, R) tal que X es un espacio de Priestley y R es una relación de Priestley sobre X.
Si (X_1, R_1) y (X_2, R_2) son espacios modales, $\varphi : X_1 \to X_2$ es un *morfismo* de espacios modales si φ es una función monótona y continua que satisface la igualdad:
$$\varphi^{-1}(R_2^{*}(V)) = R_1^{*}(\varphi^{-1}(V))$$
para todo $V \in D(X_2)$.
La categoría cuyos objetos son espacios modales y cuyos morfismos son los morfismos de espacios modales será denotada por $\mathcal{JM}$.

Observación 2.1.3 En [19], R. Goldblatt desarrolla una dualidad de tipo Priestley para reticulados asociados con dos aplicaciones f y g n-arias y m-arias respectivamente, tales que fijadas $n-1$ coordenadas de f y $m-1$ coordenadas de g, f resulta un homomorfismo superior en la coordenada variable y g resulta un homomorfismo inferior en la coordenada variable.
El autor obtiene la dualidad mencionada asociando a los operadores f y g dos relaciones, $n+1$-arias y $m+1$-arias respectivamente, sobre el espacio de Priestley del reticulado. Si $n=1$ y R_f es la relación asociada a f, entonces R_f^{-1} es una relación de Priestley. Por lo tanto las relaciones de Priestley coinciden escencialmente con las relaciones obtenidas en [19]. Sin embargo, la dualidad obtenida por Goldblatt es diferente de la dualidad obtenida en [12].
De la definición de morfismo dada en ([19, página 192]), es inmediato ver que si (X_1, R_1) y (X_2, R_2) son espacios modales, entonces $\varphi : X_1 \to X_2$ es un morfismo si y sólo si satisface las siguientes condiciones :

(a) *φ es monótona y continua.*

(b) *Si $(x,y) \in R_1$ entonces $(\varphi(x), \varphi(y)) \in R_2$.*

(c) *Si $(\varphi(x), z) \in R_2$ entonces existe $y \in X_1$ tal que $(x,y) \in R_1$ y $z \leq \varphi(y)$.*

Probaremos ahora que existe una dualidad entre las categorías $\mathcal{J}$ y $\mathcal{JM}$.

Sean $\phi : \mathcal{J} \to \mathcal{JM}$ y $\psi : \mathcal{JM} \to \mathcal{J}$ los siguientes funtores.
Si $\mathbf{L_j}$ es un objeto en $\mathcal{J}$, definimos
$\phi(\mathbf{L_j}) = (X(L), j^*)$.
Si $\mathbf{L_j}$ y $\mathbf{M_k}$ son objetos en $\mathcal{J}$ y $h : \mathbf{L_j} \to \mathbf{M_k}$ es un homomorfismo, definimos $\phi(h)$ como la función de $X(M)$ en $X(L)$ definida por
$\phi(h)(P) = h^{-1}(P)$
para todo $P \in X(M)$. De la dualidad obtenida por Priestley, se tiene que $\phi(h)$ es monótona y continua, y para cada $a \in L$, $\phi(h)^{-1}(\sigma_L(a)) = \sigma_M(h(a))$. Teniendo en cuenta que $h(j(a)) = k(h(a))$ y que $(j^*)^*(\sigma_L(a)) = \sigma_L(j(a))$, inferimos que $\phi(h)$ es un morfismo de espacios modales. De estos hechos, se deduce fácilmente que ϕ es un funtor contravariante de $\mathcal{J}$ en $\mathcal{JM}$.
Si (X, R) es un objeto en $\mathcal{JM}$, definimos
$\psi(X, R) = (D(X), R^*)$.

Si (X_1, R_1) y (X_2, R_2) son objetos en $\mathcal{JM}$ y $\varphi : X_1 \to X_2$ es un morfismo, definimos $\psi(\varphi)$ como la función de $D(X_2)$ en $D(X_1)$ definida por

$$\psi(\varphi)(V) = \varphi^{-1}(V)$$

para todo $V \in D(X_2)$. De la definición de morfismo, inferimos que $\psi(\varphi)$ es un homomorfismo de reticulados modales. Por lo tanto ψ es un funtor contravariante de $\mathcal{JM}$ en $\mathcal{J}$.
El siguiente teorema es una consecuencia inmediata de la dualidad de Priestley descripta en los Preliminares, y del hecho que las aplicaciones σ_L y ε_X son isomorfismos en las categorías $\mathcal{J}$ y $\mathcal{JM}$ respectivamente ([12]).

Teorema 2.1.4 *Las composiciones $\psi \circ \phi$ y $\phi \circ \psi$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidad sobre $\mathcal{J}$ y $\mathcal{JM}$ respectivamente, y por lo tanto las dos categorías son dualmente equivalentes.*

2.2 Operadores de clausura, cuantificadores y homomorfismos

Sea L un reticulado distributivo acotado. Un *operador de clausura* sobre L es una operación unaria j sobre L tal que:

(1) $a \leq j(a)$ para todo $a \in L$.

(2) $j(j(a)) = j(a)$ para todo $a \in L$.

(3) Si $a, b \in L$, entonces $a \leq b$ implica $j(a) \leq j(b)$.

Si j es además un homomorfismo superior, entonces j se denomina un *operador de clausura aditivo*. Es fácil ver que en este caso la condición (3) se deduce del hecho que j preserva el supremo.
Sea X es un espacio topológico. El ejemplo típico de operador de clausura aditivo definido sobre $\mathcal{P}(X)$, es la función que a cada subconjunto de X le asigna su clausura. Un ejemplo de operador de clausura no necesariamente aditivo es el siguiente. Sea $\mathbf{A}$ un álgebra de tipo $\mathcal{F}$, sea $L = \mathcal{P}(A)$ y sea j el operador que a cada subconjunto S de A le asigna la subálgebra generada por A.

Es importante destacar que los operadores de clausura aditivos están determinados por su imagen en el siguiente sentido (ver por ejemplo [1]):

(c1) Si j es un operador de clausura aditivo sobre L entonces su imagen $j(L)$ es un subreticulado de L tal que si $a \in L$, entonces $j(a)$ es el primer elemento del conjunto $[a) \cap j(L)$.

(c2) Si S es un subreticulado de L tal que $S \cap [a)$ tiene primer elemento para todo $a \in L$, entonces la aplicación $j : L \rightarrow L$ que a cada $a \in L$ le asigna el primer elemento de $S \cap [a)$, es un operador de clausura aditivo tal que $j(L) = S$.

Un subreticulado S de L que verifica la condición (c2) se denomina *relativamente completo*. Por ejemplo, si S es un subreticulado completo de L, entonces S es la imagen de un operador de clausura sobre L.
En [12] hemos probado el siguiente resultado:

(c) j es un operador de clausura aditivo sobre L si y sólo si j^* es un preorden sobre $X(L)$.

La clase ecuacional de los reticulados modales donde j es un operador de clausura aditivo sobre L será denotada por C, y la correspondiente categoría por $\mathcal{C}$.

Un $\mathcal{C}$-*espacio modal* es un espacio modal (X, R) donde R es una relación de Priestley de preorden sobre X. Denotaremos con $\mathcal{CM}$ a la subcategoría completa de $\mathcal{JM}$ cuyos objetos son $\mathcal{C}$-espacios modales.
Del Teorema 2.1.4 y de la condición (c) dada arriba, deducimos que:
Las restricciones de los funtores ϕ y ψ a las subcategorías $\mathcal{C}$ de $\mathcal{J}$ y $\mathcal{CM}$ de $\mathcal{JM}$ respectivamente, establecen una dualidad entre $\mathcal{C}$ y $\mathcal{CM}$.

Un operador de clausura aditivo j sobre L se denomina un *cuantificador* si verifica la identidad adicional $j(j(a) \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$ para todo a, b en L.
Un cuantificador j sobre L se llama *simple* si y sólo si verifica: $j(0) = 0$ y $j(a) = 1$ para todo $a \neq 0$.
Un Q-*reticulado distributivo* es un reticulado modal donde j es un cuantificador sobre L. La noción de cuantificador definido sobre reticulados distributivos fué introducida por Cignoli en [10], generalizando la dada por Halmos en [22] para las álgebras de Boole. Esta noción algebraica se corresponde con la noción de *cuantificador existencial* en la lógica de primer orden en el siguiente sentido.
Sean P y Q son dos predicados que dependen de una variable x. Entonces la fórmula $\exists x(P(x) \wedge \exists x Q(x))$ es equivalente a la fórmula $\exists x P(x) \wedge \exists x Q(x)$.

Esta equivalencia se traduce algebraicamente en la identidad $j(j(a) \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$.
Es fácil ver que si X es un espacio topológico, el operador de clausura asociado es un cuantificador si y sólo si todo conjunto abierto es un conjunto cerrado, o equivalentemente, el conjunto determinado por los subconjunto abiertos de X es una subálgebra completa del álgebra de Boole $\mathcal{P}(X)$.
En [10] Cignoli dió la siguiente caracterización del rango de un cuantificador definido sobre un reticulado distributivo acotado:

Proposición 2.2.1 *([10], Proposiciones 1.2 y 1.3). Sea L un reticulado distributivo acotado.*

(q1) *Sea ∇ un cuantificador sobre L. Si $a, b \in \nabla(L)$ y $a \rightarrow b$ existe en L, entonces $a \rightarrow b \in \nabla(L)$.*

(q2) *Si S es un subreticulado de L tal que:*

(i) *$S \cap [x)$ tiene primer elemento para todo $x \in L$.*

(ii) *$a \rightarrow b$ existe en L para todo par $a, b \in S$ y además $a \rightarrow b \in S$.*

Entonces la aplicación $\nabla : L \rightarrow L$ que a cada $x \in L$ le asigna el primer elemento de $S \cap [x)$, es un cuantificador sobre L y $\nabla(L) = S$.

De esta proposición se deduce el siguiente resultado de Monteiro y Varsavsky [31]:
Sea $\mathbf{H} = (H, \vee, \wedge, \rightarrow, 0, 1)$ un álgebra de Heyting y sea $\mathbf{S} = (S, \vee, \wedge, 0, 1)$ un subreticulado de $(H, \vee, \wedge, 0, 1)$. Entonces $\mathbf{S}$ es la imagen de un cuantificador si y sólo si $\mathbf{S}$ es una subálgebra de $\mathbf{H}$ y S satisface la condición (q2) (ii).
En particular, si $\mathbf{H}$ es un álgebra de Heyting finita, entonces un subreticulado de $(H, \vee, \wedge, 0, 1)$ es la imagen de un cuantificador sobre H si y sólo si es una subálgebra de $\mathbf{H}$, pues la condición (q2) (ii) se satisface trivialmente.

Observación 2.2.2 Afirmamos que la recíproca de la Proposición 2.2.1 (q1) también se cumple. Esto es, si $a, b \in \nabla(L)$ y $a \rightarrow b$ existe en $\nabla(L)$, entonces $a \rightarrow b$ existe en L y coincide con $a \rightarrow b$. En efecto, es claro que $a \wedge a \rightarrow b \leq b$. Sea $c \in L$ tal que $a \wedge c \leq b$. Como ∇ es un cuantificador y $a, b \in \nabla(L)$, inferimos que $a \wedge \nabla c \leq b$, y por lo tanto $\nabla c \leq a \rightarrow b$. Luego $c \leq a \rightarrow b$.

La clase de los Q-reticulados distributivos forman una subvariedad de $\mathbf{C}$ que denotaremos por $\mathbf{Q}$, y la correspondiente subcategoría por $\mathcal{Q}$. Nuestro próximo paso será caracterizar las relaciones de Priestley que provienen de los cuantificadores.

Definición 2.2.3 Sea $(X, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado y sea R una relación binaria definida sobre X. Diremos que R es de *cuasiequivalencia* si se verifican las siguientes condiciones:

(i) R es un preorden.

(ii) Si $(x, y) \in R$ entonces existe $z \in X$ tal que $y \leq z$, $(x, z) \in R$ y $(z, x) \in R$.

Notar que cuando la relación de orden $\leq$ es la igualdad, una relación es de cuasiequivalencia si y sólo si es de equivalencia.

Observación 2.2.4 Una relación de Priestley R definida sobre un espacio de Priestley X es una cuasiequivalencia si y sólo si R es un preorden, y para todo $x \in X$, $\max R(x) \subseteq R^{-1}(x)$. Para probar esta propiedad, supongamos primero que R es una cuasiequivalencia y sea $y \in \max R(x)$. De (ii) y la maximalidad de y inferimos que $(y, x) \in R$ y por lo tanto $y \in R^{-1}(x)$.
Para ver la recíproca, sea $(x, y) \in R$. Como R es una relación de Priestley, existe $z \geq y$ tal que $z \in \max R(x)$. Luego $(x, z) \in R$ y $(z, x) \in R$.

Teorema 2.2.5 *Sea X un espacio de Priestley, y sea R una relación de Priestley sobre X. Entonces R es una cuasiequivalencia si y sólo si $R^{\bullet}$ es un cuantificador sobre $D(X)$.*

Demostración. Sea R una cuasiequivalencia sobre X. Como R es un preorden, entonces $R^{\bullet}$ es un operador de clausura aditivo sobre $D(X)$. Luego debemos probar que $R^{\bullet}(U \cap R^{\bullet}(V)) = R^{\bullet}(U) \cap R^{\bullet}(V)$ para todo U, V en $D(X)$. La inclusión $R^{\bullet}(U \cap R^{\bullet}(V)) \subseteq R^{\bullet}(U) \cap R^{\bullet}(V)$ es una consecuencia inmediata del hecho que $R^{\bullet}$ es un operador de clausura sobre $D(X)$. Para probar la otra inclusión, sea $x \in X$ tal que $R(x) \cap U \neq \emptyset$ y $R(x) \cap V \neq \emptyset$. Luego existen elementos $y_1 \in U$, $y_2 \in V$ tales que $(x, y_1) \in R$ y $(x, y_2) \in R$. Como R es una cuasiequivalencia, deducimos que existen elementos z_1 y z_2 tales que, $(x, z_1) \in R$, $(z_1, x) \in R$, $(x, z_2) \in R$, $(z_2, x) \in R$, $y_1 \leq z_1$ e $y_2 \leq z_2$. Como R es transitiva, obtenemos que $(z_1, z_2) \in R$, y como U y V

son subconjuntos crecientes de X, inferimos también que $z_1 \in U$ y $z_2 \in V$. Por lo tanto $z_1 \in R(x) \cap (U \cap R^{\bullet}(V)$. Luego $x \in R^{\bullet}(U) \cap R^{\bullet}(V)$ y la igualdad está probada.
Para probar la recíproca, supongamos que $\mathbf{L_j} \in \mathbf{Q}$. Como j es un operador de clausura aditivo sobre L, $j^{\bullet}$ es un preorden sobre $X(L)$. Luego por la Observación 2.2.4, debemos probar que $\max j^{\bullet}(P) \subseteq (j^{\bullet})^{-1}(P)$, para todo $P \in X(L)$. Sea $P \in X(L)$ y sea $Q \in \max j^{\bullet}(P)$. Entonces $Q \subseteq j^{-1}(P)$, lo que implica $j^{-1}(Q) \subseteq j^{-1}(P)$. Veamos que la otra inclusión también es válida. Sea $a \in j^{-1}(P)$. Como j es un cuantificador, tenemos que para cada $q \in Q$ $j(q \wedge j(a)) = j(q) \wedge j(a)$ y como $Q \subseteq j^{-1}(P)$, inferimos que el filtro $F = [Q \cup j(a))$ está contenido en $j^{-1}(P)$. De la propiedad (iii) dada en los preliminares, resulta que existe un filtro primo F' tal que $F \subseteq F' \subseteq j^{-1}(P)$ y como Q es un elemento maximal en $j^{\bullet}(P)$ obtenemos $F' = Q = F$. En particular tenemos que $a \in j^{-1}(Q)$. Por lo tanto $j^{-1}(P) = j^{-1}(Q)$ y como $P \subseteq j^{-1}(P)$, resulta que $Q \in (j^{\bullet})^{-1}(P)$. Luego $j^{\bullet}$ es una cuasiequivalencia. Por lo tanto, si $L = D(X)$ y $j = R^{\bullet}$, $R^{\bullet\bullet}$ es de cuasiequivalencia sobre $X(D(X))$, y como ε_X es un isomorfismo en la categoría $\mathcal{JM}$, resulta que R es también de cuasiequivalencia.□

Un *Q-espacio modal* es un espacio modal (X, R) donde R es una relación de Priestley de cuasiequivalencia sobre X. Denotaremos por $\mathcal{QM}$ la subcategoría completa de $\mathcal{JM}$ cuyos objetos son Q-espacios modales. Deducimos del Teorema 2.1.4 y del Teorema 2.2.5 el siguiente resultado

las restricciones de los funtores ϕ y ψ a las subcategorías $\mathcal{Q}$ de $\mathcal{J}$ y $\mathcal{QM}$ de $\mathcal{JM}$ respectivamente, establecen una dualidad entre $\mathcal{Q}$ y $\mathcal{QM}$.

Un *H-espacio modal* es un espacio modal (X, R) donde R es una relación de Priestley funcional sobre X. Denotaremos por $\mathcal{HM}$ la subcategoría completa de $\mathcal{JM}$ cuyos objetos son H-espacios modales. Denotaremos por $\mathbf{H}$ a la subvariedad de $\mathbf{J}$ formada por las álgebras $\mathbf{L_j}$ donde j es un homomorfismo acotado, y la correspondiente categoría por $\mathcal{H}$. De la dualidad obtenida en [12], deducimos del Teorema 2.1.4 el siguiente resultado:

las restricciones de los funtores ϕ y ψ a las subcategorías $\mathcal{H}$ de $\mathcal{J}$ y $\mathcal{HM}$ de $\mathcal{JM}$ respectivamente, establecen una dualidad entre $\mathcal{H}$ y $\mathcal{HM}$.

Sea L un reticulado distributivo acotado y sea $j : L \to L$ un homomorfismo superior. Supongamos que j sea un homomorfismo no necesariamente acotado. Luego j verifica las identidades $j(0) = 0, j(a \vee b) = j(a) \vee j(b)$ y $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$.

Si $j(1) \neq 1$ entonces existe un filtro primo P tal que $j(1) \notin P$, lo que implica que $P \notin domj^{*}$. Por otra parte, es un hecho bien conocido que si P es un filtro primo, entonces $j^{-1}(P)$ es un filtro primo si y sólo si $j(1) \in P$. De ésto deducimos que si $P \in domj^{*}$, entonces $j^{-1}(P)$ es el último elemento de $j^{*}(P)$.

Definición 2.2.6 Sea X un espacio de Priestley. Una relación de Priestley sobre X se dice *parcialmente funcional* si $R(x)$ tiene último elemento para todo $x \in domR$. Como en el caso funcional, notaremos con $f_R(x)$ al último elemento de $R(x)$ para todo $x \in domR$.

Es claro que R es una relación de Priestley funcional si y sólo si R es parcialmente funcional y $domR = X$.
De la observación dada arriba y de la dualidad obtenida en [12], deducimos el siguiente resultado:

Proposición 2.2.7 (i) *Sea L un reticulado distributivo acotado y sea $j : L \rightarrow L$ un homomorfismo superior. Entonces j es un homomorfismo si y sólo si $j^{*}(P)$ tiene último elemento, para todo $P \in domj^{*}$.*

En términos del espacio dual, tenemos:

(ii) *Sea X un espacio de Priestley y sea R una relación de Priestley sobre X. Entonces $R^{*} : D(X) \rightarrow D(X)$ es un homomorfismo si y sólo si $R(x)$ tiene último elemento para todo $x \in domR$.*

2.3 Congruencias de reticulados modales y conjuntos R-saturados

Sea L un reticulado distributivo acotado. Uno de los hechos importantes de la dualidad de Priestley es que existe una correspondencia biunívoca entre las congruencias de L y los subconjuntos cerrados de $X(L)$. Más precisamente, H. A. Priestley probó el siguiente resultado ([36],[37],[39], ver también [11]):

Teorema 2.3.1 *(Priestley) Si Y es un subconjunto de $X(L)$, entonces:*
$\theta(Y) = \{(a, b) \in L \times L : \sigma_L(a) \cap Y = \sigma_L(b) \cap Y\}$

es una congruencia sobre L, y la correspondencia $Y \mapsto \theta(Y)$ establece un isomorfismo entre $C(X(L))$ y $Con(\mathbf{L})^{\geq}$. Más aún:
$\theta(Y) = \theta(Cl(Y))$ y dada una congruencia θ sobre L, si X_θ denota el espacio de Priestley del reticulado cociente L/θ, $p : L \to L/\theta$ denota la proyección natural y $Z = \{p^{-1}(Q) \mid Q \in X_\theta\}$, entonces $\theta = \theta(Z)$ y $Z \in C(X(L))$.

Observación 2.3.2 Sean A y B álgebras de Boole y sea $h : A \to B$ una función que preserva el supremo, el ínfimo, el 0 y el 1; es decir h es un homomorfismo de reticulados acotados. Entonces h también preserva el complemento y por lo tanto h es un homomorfismo de álgebras de Boole. Luego, si *L es un álgebra de Boole y θ es una congruencia de reticulados sobre L, entonces tomando $A = L$, $B = L/\theta$ y $h : L \to L/\theta$ la proyección canónica, resulta que θ es una congruencia de álgebras de Boole.*
En particular deducimos también que si $\mathbf{A} = (A, \vee, \wedge, \neg, m, 0, 1)$ *es un álgebra modal, entonces $Con(\mathbf{A})$ es igual al reticulado de congruencias del reticulado modal $(A, \vee, \wedge, j, 0, 1)$, donde $j(x) = \neg m(\neg x)$.*

En esta sección daremos una generalización del Teorema 2.3.1 , para el caso de los reticulados modales.

Definición 2.3.3 Sea X un espacio de Priestley y sea $R \subseteq X \times X$ una relación de Priestley. Diremos que un subconjunto $Y \subseteq X$ es *R-saturado* si $x \in Y$ implica $\max R(x) \subseteq Y$ para todo $x \in X$. Denotaremos por $Sat_R(X)$ al conjunto de los subconjuntos R-saturados de X.

Sea R una relación de Priestley funcional sobre X. Entonces es claro que para cada $x \in X$, $\max R(x)$ es el conjunto unitario $\{f_R(x)\}$. Luego *un subconjunto $Y \subseteq X$ es R-saturado si $x \in Y$ implica $f_R(x) \in Y$ para todo $x \in X$, o equivalentemente $Y \subseteq f_R^{-1}(Y)$.* Recordemos que cuando R es el orden dual $\geq_X$, f_R es la identidad , y por lo tanto en este caso $Sat_R(X) = \mathcal{P}(X)$.

Es fácil verificar de la Definición 2.3.3 que la intersección y la unión de toda familia de conjuntos R-saturados es un conjunto R-saturado. Por lo tanto, como X y $\emptyset$ son claramente R-saturados , deducimos que $Sat_R(X)$ es un subreticulado completo de $\mathcal{P}(X)$. En particular, los subconjuntos de X que son cerrados y R-saturados, ordenados por inclusión, forman un subreticulado de $C(X)$ cerrado por intersecciones arbitrarias que será denotado por $C_R(X)$. Observar que $C_R(X) = C(X) \cap Sat_R(X)$. Consecuentemente:

$$\tau_R = \{X \backslash Y \mid Y \in C_R(X)\}.$$

define una topología sobre X cuyos conjuntos cerrados son exactamente los miembros de $C_R(X)$. Si $R = \geq_X$, entonces τ_R coincide con la topología de Priestley y para cada relación de Priestley R, la topología original es más fina que τ_R.

Sea S un subconjunto de X. Denotaremos por $Cl_R(S)$ la clausura de S, respecto a la topología τ_R. Diremos que S es R-cerrado (R-denso), si S es cerrado (denso) en X respecto a la topología τ_R. Observemos que si $R = \geq_X$, entonces $Cl_R(S) = Cl(S)$.

El siguiente teorema es uno de los principales resultado de esta sección.

Teorema 2.3.4 *Sea $\mathbf{L_j}$ un reticulado modal, y sea $R = j^*$. Entonces la correspondencia $Y \mapsto \theta(Y)$ establece un isomorfismo entre $C_R(X(L))$ y $Con(\mathbf{L_j})^{\geq}$.*

Demostración. Sea $Y \in C_R(X(L))$. Por el Teorema 2.3.1, tenemos que $\theta(Y)$ es una congruencia de reticulados, luego debemos probar que $\theta(Y)$ preserva j. Sea $(a, b) \in \theta(Y)$ y sea $Q \in \sigma_L(j(a)) \cap Y$. Como $[a) \subseteq j^{-1}(Q)$, entonces existe un filtro primo P de L tal que $a \in P$ y $P \subseteq j^{-1}(Q)$. Como R es una relación de Priestley, tenemos que $R(Q)$ es un subconjunto compacto de $X(L)$, lo que implica que existe $P' \in X(L)$ tal que $P \subseteq P'$ y $P' \in \max R(Q)$. Como Y es R-saturado, tenemos que $P' \in Y \cap \sigma_L(a) = Y \cap \sigma_L(b)$. Luego $b \in P' \subseteq j^{-1}(Q)$ y por lo tanto $Q \in \sigma_L(j(b))$. Luego $\sigma_L(j(a)) \cap Y \subseteq \sigma_L(j(b)) \cap Y$. La prueba de la otra inclusión es similar.
Como $C_R(X(L))$ es un subreticulado de $C(X(L))$, inferimos que la aplicación $Y \mapsto \theta(Y)$ es inyectiva y un homomorfismo de reticulados entre $C_R(X(L))$ y $Con(\mathbf{L_j})^{\geq}$. Para probar que esta aplicación es suryectiva, sea $\theta \in Con(\mathbf{L_j})$ y sea Z el subconjunto cerrado de $X(L)$ del Teorema 2.3.1. Como θ es una congruencia de reticulados, tenemos que $\theta(Z) = \theta$. Por lo tanto, para completar la prueba debemos probar que $Z \in C_R(X(L))$. Sea $P \in Z$ y sea $Q \in \max R(P)$. Supongamos que $Q \notin Z$. Como Z es un subconjunto cerrado de $X(L)$, existen a, b en L tales que $Q \in \sigma_L(a) \backslash \sigma_L(b)$ y $(\sigma_L(a) \backslash \sigma_L(b)) \cap Z = \emptyset$, lo que implica que $(*)$ $(a, a \wedge b) \in \theta$. Por otra parte, como Q es maximal en $R(P)$ y $b \notin Q$, inferimos que el filtro $[Q \cup \{b\})$ no está contenido en $j^{-1}(P)$. Esto implica que existe $q \in Q$ tal que $(**)$ $j(q \wedge b) \notin P$. De $*$ resulta que $(a \wedge q, a \wedge q \wedge b) \in \theta$. Luego $(j(a \wedge q), j(a \wedge q \wedge b)) \in \theta$. Consecuentemente,

como $Q \subseteq j^{-1}(P)$ y $a \wedge q \in Q$, tendríamos que $P \in \sigma_L(j(a \wedge q)) \cap Z = \sigma_L(j(a \wedge q \wedge b)) \cap Z$. Luego $j(a \wedge q \wedge b) \in P$ y por lo tanto $j(q \wedge b) \in P$, lo que contradice (**). Luego hemos probado que Z es R-saturado, y como $Z \in C(X(L))$, deducimos que $Z \in C_R(X(L))$.□

Vale la pena destacar que si j es la identidad sobre L, el Teorema 2.3.4 se reduce al Teorema 2.3.1, pues en este caso todo conjunto cerrado es trivialmente j^* saturado.

Corolario 2.3.5 *Sea X un espacio de Priestley y sea R una relación de Priestley sobre X. Entonces la clausura de todo subconjunto R-saturado de X es R-saturado . En particular, para todo $Y \in Sat_R(X)$ se tiene la identidad $Cl(Y) = Cl_R(Y)$.*

Demostración. Esto es una consecuencia inmediata del Teorema 2.3.4 y el hecho que $\theta(Y) = \theta(Cl(Y))$ para todo $Y \in \mathcal{P}(X)$.□

Observaciones 2.3.6 Sea X un espacio de Priestley, sea R una relación de Priestley sobre X y sea $S \in \mathcal{P}(X)$.

i) Como ha sido mencionado anteriormente, la intersección de cualquier familia de conjuntos R-saturados es R-saturado. Luego tenemos que existe el menor conjunto R-saturado que contiene a S. La construcción de este conjunto es como sigue:

Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos por inducción el conjunto H_n del modo siguiente:

a)$H_0 = S$.

b)

$$H_{n+1} = \bigcup_{x \in H_n} \max R(x)$$

Definamos ahora

$$H = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} H_i$$

Es claro que H es un subconjunto R-saturado de X que contiene a S. Sea $T \in Sat_R(X)$ tal que $S \subseteq T$. Es obvio que $H_0 \subseteq T$. Supongamos que $H_i \subseteq T$, y sea $y \in H_{i+1}$. Esto significa que existe $x \in H_i$ tal que $y \in \max R(x)$. Como T es R-saturado y $x \in T$, $y \in T$. Luego $H_{i+1} \subseteq T$, y por consiguiente $H \subseteq T$. Esto prueba que H es el menor R-saturado que contiene a S. Más aún, por el Corolario 2.3.5 tenemos que $Cl_R(S) = Cl(H)$.

ii) Es fácil ver que $\bigcup_{i\in N} R^i(S)$ es siempre un subconjunto R-saturado de X que contiene a S. En particular, si R es un preorden, deducimos de la igualdad $\bigcup_{i\in N} R^i(S) = R(S)$ que $R(S)$ es R-saturado.

iii) Si X es un espacio Booleano, entonces $\bigcup_{i\in N} R^i(S)$ es el menor R-saturado que contiene a S. En efecto, como X es Booleano, tenemos que $\max T = T$ para todo $T \in \mathcal{P}(X)$. Por lo tanto, un subconjunto $Y \subseteq X$ será R-saturado si $x \in Y$ implica $R(x) \subseteq Y$, para todo $x \in X$. De i) inferimos que para todo $i \in N$, $H_{i+1} = \bigcup_{x\in H_i} R(x)$, lo que implica que $H_{i+1} = R(H_i)$, y por un argumento inductivo obtenemos la identidad $R(H_i) = R^i(S)$. En particular, obtenemos la identidad:

$Cl_R(S) = Cl(\bigcup_{i\in N} R^i(S))$

(iv) Supongamos que R es funcional Tomando $S = \{x\}$

Supongamos que R es parcialmente funcional y sea $x \in X$. Si $f_R^i(x) \notin domR$ para algún i, entonces tomando $S = \{x\}$ en (i) nos queda $Cl_R(\{x\}) = Cl(\bigcup_{i=0}^{j}\{f_R^i(x)\}) = \{x, f_R(x), \ldots, f_R^j(x)\}$, donde j el menor número natural tal que $f_R^j(x) \notin domR$.

Si $f_R^i(x) \in domR$ para todo i deducimos que:

$Cl_R(\{x\}) = Cl(\bigcup_{i\in N}\{f_R^i(x)\})$

(v) Es fácil ver que $R = X \times X$ si y sólo si R^* es el cuantificador simple sobre $D(X)$. Luego, si $S \neq \emptyset$, inferimos que $Cl_R(S) = Cl(S \cup \max X)$.

Un hecho importante que satisface la variedad de los reticulados distributivos acotados es que el reticulado con 2 elementos es la única álgebra subdirectamente irreducible en la variedad, y lo mismo ocurre con las álgebras de Boole. El próximo teorema muestra que la variedad de los reticulados modales es mucho más compleja que la variedad de los reticulados distributivos acotados, pues la estructura de las álgebras subdirectamente irreducibles lo es. Dicho teorema nos da una desripción de las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en J en términos topológicos, utilizando la dualidad obtenida en el sección 2.

Teorema 2.3.7 *Sea (X, R) un espacio modal. Entonces:*

(i) *$\psi(X, R)$ es simple si y sólo si o bien $domR = X$ y $\max R(x)$ es R-denso en X para todo $x \in X$, o bien $domR = \emptyset$ y X es un conjunto* *unitario. En este último caso $D(X)$ es el reticulado con dos elementos $2 = \{\emptyset, X\}$, y $R^*(X) = \emptyset$.*

(ii) *$\psi(X, R)$ es subdirectamente irreducible y no simple si y sólo si se verifica una y solamente una de las siguientes condiciones:*

(a) *$\{x \in X \mid \max R(x)$ es R-denso en $X\}$ es un abierto no vacío y diferente de X.*

(b) *Existe $x \in domR$ tal que $x \notin Cl_R(\max R(x))$ y $\{x\} \cup Cl_R(\max R(x)) = X$.*

Demostración. Sea (X, R) un espacio modal.

(i) Del Teorema 2.3.4 inferimos que $\psi(X, R)$ es simple si y sólo si los únicos subconjuntos R-cerrados de X son X y $\emptyset$. De éste resultado se deduce la suficiencia de la proposición. Para probar la necesidad, supongamos que $\psi(X, R)$ es un álgebra simple en $\mathbf{J}$, y supongamos primero que existe $x \in X \setminus domR$. Luego $R(x) = \emptyset$ lo que implica que $\{x\}$ es un subconjunto R-cerrado de X. Por lo tanto, como $\psi(X, R)$ es simple, tenemos que $\{x\} = X$ y luego $domR = \emptyset$. Supongamos ahora que $domR = X$ y sea $x \in X$. Como $R(x)$ es un subconjunto compacto no vacío de X, $\max R(x)$ es no vacío. Como $\psi(X, R)$ es simple, debe ser $\max R(x)$ R-denso, lo que completa la demostración de (i).

(ii) Probemos primero que las condiciones (a) y (b) son incompatibles. Supongamos que no. Luego existen elementos x, y en X tales que $\max R(x)$ es R-denso, $y \in domR$, $y \notin Cl_R(\max R(y))$ e $\{y\} \cup Cl_R(\max R(y)) = X$. Por lo tanto $x \neq y$, lo que implica que $x \in Cl_R(\max R(y))$. Como $Cl_R(\max R(y))$ es R-saturado, inferimos que $\max R(x) \subseteq Cl_R(\max R(y))$, en contradicción con el hecho que $\max R(x)$ es R-denso y $Cl_R(\max R(y))$ es R-cerrado y distinto de X. Luego (a) y (b) son incompatibles.
Del Teorema 2.3.4 tenemos que $\psi(X, R)$ es subdirectamente irreducible si y sólo si $C_R(X) \setminus \{X\}$ tiene un último elemento.
Supongamos que $\psi(X, R)$ es subdirectamente irreducible y no simple. Sea Y el último elemento de $C_R(X) \setminus \{X\}$ y definamos:

$T = \{x \in X \mid \max R(x)$ no es R-denso en $X\}$.

Como Y es R-cerrado y diferente de X, deducimos que $Y \subseteq T$. Supongamos primero que $Y = T$. Luego $X \setminus Y$ es un abierto no vacío, y de acuerdo a

la definición de T obtenemos (a). Supongamos ahora que existe $x \in T \backslash Y$. Luego $Cl_R(\max R(x))$ es un subconjunto R-cerrado de X diferente de X. Por lo tanto $Cl_R(\max R(x)) \subseteq Y$. Por otra parte es fácil verificar que $\{x\} \cup Cl_R(\max R(x))$ es un subconjunto cerrado y R-saturado de X. Consecuentemente, como $x \notin Y$ tenemos que $\{x\} \cup Cl_R(\max R(x)) = X$. Como $\psi(X, R)$ no es simple deducimos también que $x \in domR$ y por lo tanto probamos la parte (b).
Para la recíproca asumamos primero que se cumple (a), y sea T el conjunto definido arriba. Como se cumple (a), deducimos que T es diferente de X y que $\psi(X, R)$ no es simple. Sea $x \in T$ y sea $y \in Cl_R(\max R(x))$. Como $Cl_R(\max R(x))$ es R-saturado y diferente de X, inferimos que $\max R(y)$ no es R-denso. Por lo tanto T es R-cerrado. Para ver que T es el mayor elemento de $C_R(X) \backslash \{X\}$, sea $Y' \in C_R(X) \backslash \{X\}$ y sea $y \in Y'$. Luego $\max R(y) \subseteq Y'$ y por lo tanto $Cl_R(\max R(y)) \subseteq Y'$. Como $Y' \neq X$ deducimos que $y \in T$. Entonces se tiene que $Y' \subseteq T$. Asumamos ahora que se cumple (b). Es claro que $\psi(X, R)$ no es simple. Definamos $Y = Cl_R(\max R(x))$. Es obvio que Y es R-cerrado y diferente de X. Sea $Y' \in C_R(X) \backslash \{X\}$ y sea $y \in Y'$. Supongamos que $y = x$. Por lo tanto, como Y' es un subconjunto cerrado y R-saturado de X, deducimos que $X = \{x\} \cup Cl_R(\max R(x)) \subseteq Y'$ lo que es una contradicción. Por lo tanto $Y' \subseteq Y$. □

2.4 Aplicaciones

Como aplicación del Teorema 2.3.7, daremos en esta sección una caracterización de las cadenas simples y subdirectamente irreducibles en J; esto es, las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en J cuyos reticulados subyacentes forman una cadena, como así también las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en las variedades C, Q y H.
Cuando se consideran estas variedades mencionadas y las cadenas, las condiciones (a) y (b) del teorema mencionado quedan expresadas en una forma más simle. Esto es debido a que el operador R^* verifica más ecuaciones, y por lo tanto la relación R verifica más condiciones.

Sea $\mathrm{L_j} \in \mathrm{J}$ tal que L es una cadena. Como el orden en L es total resulta que j es un homomorfismo de reticulados y por lo tanto j^* es una *relación de Priestley parcialmente funcional.*
Comencemos estableciendo las siguientes notaciones. Sea k un número entero

positivo. Notaremos con A_k, B_k y C_k las siguientes álgebras en **J**.
El reticulado subyacente a las tres álgebras es la cadena con $k+1$ elementos $0 < \frac{1}{k} < \frac{1}{k-1} < \ldots < \frac{1}{2} < 1$, y el operador j está definido en cada álgebra de la siguiente forma:
(a) En A_k, $j(\frac{1}{i}) = \frac{1}{i-1}$ si $1 < i \leq k$, $j(1) = 1$ y $j(0) = 0$.
(b) En B_k, $j(\frac{1}{i}) = \frac{1}{i+1}$ si $1 < i < k$, $j(\frac{1}{k}) = j(0) = 0$ y $j(1) = 1$.
(c) En C_k, $j(\frac{1}{i}) = \frac{1}{i+1}$ si $1 \leq i < k$ y $j(\frac{1}{k}) = j(0) = 0$.
Observemos que el reticulado subyacente a las álgebras A_1, B_1 y C_1 es **2**, j es la identidad en A_1 y en B_1, mientras que en C_1 el operador j está definido por $j(1) = j(0) = 0$.
Notaremos con A_∞ y B_∞ las siguientes álgebras en **J**:
(d) El reticulado subyacente a A_∞ es la cadena infinita:
$L_1 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \cup \{0\}$,
y j está definido como sigue:
$j(1) = 1$, $j(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n-1}$ para $n \geq 2$ y $j(0) = 0$.
(e) El reticulado subyacente a B_∞ es la cadena infinita:
$L_2 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\} \cup \{1\}$,
y j está definido como sigue:
$j(1) = 1$, $j(\frac{n}{n+1}) = \frac{n-1}{n}$ para $n \geq 1$ y $j(0) = 0$.

Observaciones 2.4.1 (a) Como L_1 es una cadena, entonces $X(L_1)$ también es una cadena. En este caso es fácil ver que $P \in X(L_1)$ si y sólo si $P = P_0 = L_1 \backslash \{0\}$ o bien existe $n > 0$ tal que $P = P_n = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}\}$. Observemos que P_0 es el último elemento de $X(L_1)$ y P_1 es el primer elemento de $X(L_1)$. De esto deducimos que $X(L_1)$ es homeomorfo e isomorfo como conjuntos ordenados al siguiente subconjunto de los números reales, con la topología heredada de **R**:
$X_1 = \{0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\} \cup \{1\}$
Como j es un homomorfismo acotado sobre L_1, resulta que j^* es una relación de Priestley funcional sobre $X(L_1)$ y por lo tanto $j^{-1}(P)$ es el último elemento de $j^*(P)$ para todo $P \in X(L_1)$.
De la definición de j, tenemos que $j^{-1}(P_0) = P_0$ y $j^{-1}(P_n) = P_{n+1}$. Por lo tanto podemos identificar al espacio dual de A_∞ con el H-espacio modal (X_1, R_1), donde $f_1 = f_{R_1} : X_1 \to X_1$ está definida como sigue:
$f_1(\frac{n}{n+1}) = \frac{n+1}{n+2}$ y $f_1(1) = 1$
En forma análoga, deducimos que el dual de B_∞ es el H-espacio modal (X_2, R_2), donde X_2 es el siguiente subespacio de la recta real:

$X_2 = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\} \cup \{0\}$
y $f_2 = f_{R_2} : X_2 \to X_2$ está definida por:
$f_2(\frac{1}{n}) = \frac{1}{n+1}$ y $f_2(0) = 0$

(b) Sea k un entero positivo. En forma análoga al caso (a), deducimos que el espacio dual de las álgebras A_k, B_k y C_k es como sigue:
El espacio de Priestley del reticulado subyacente a las tres álgebras es homoeomorfo e isomorfo como conjuntos ordenados a la cadena con k elementos $X = \{\frac{1}{k}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\}$.

(b1) Si el álgebra es A_k, la relación de Priestley R definida sobre X es funcional, y $f_R : X \to X$ está definida por:
$f_R(\frac{1}{i}) = \frac{1}{i-1}$ si $1 < i \leq k$ y $f_R(1) = 1$

(b2) Si el álgebra es B_k, la relación de Priestley R definida sobre X es funcional, y $f_R : X \to X$ está definida por:
$f_R(\frac{1}{i}) = \frac{1}{i+1}$ si $1 \leq i < k$ y $f_R(\frac{1}{k}) = \frac{1}{k}$

(b3) Si el álgebra es C_k, la relación de Priestley R definida sobre X es parcialmente funcional pero no funcional pues $j(1) \neq 1$. En este caso $domR = \{\frac{1}{k-1}, \ldots, \frac{1}{2}, 1\}$ y $f_R : domR \to X$ está definida por
$f_R(\frac{1}{i}) = \frac{1}{i+1}$ si $1 \leq i < k$

Lema 2.4.2 *Sea X un espacio de Priestley, sea R una relación de Priestley parcialmente funcional y sea $x \in domR$ tal que* $\max R(x)$ *es R-denso. Si x es comparable con $f_R(x)$, entonces X es el conjunto unitario $\{x\}$ y por lo tanto $(D(X), R^*)$ es isomorfa a $A_1 = B_1$.*

Demostración. Como x es comparable con $f_R(x)$, entonces $x \leq f_R(x)$ o $f_R(x) \leq x$.
Supongamos primero que $x \leq f_R(x)$. Como $\max R(x) = \{f_R(x)\}$ resulta que $\{f_R(x)\}$ es R-denso. De la Observación 2.3.6 (iv) deducimos que $X = Cl_R(\{f_R(x)\}) = \{f_R(x), \ldots, f_R^j(x)\})$ para algún $j \geq 1$, o bien $X = Cl_R(\{f_R(x)\}) = Cl(\bigcup_{i\geq 1}\{f_R^i(x)\})$. Supongamos que $f_R(x) \not\leq x$. Luego $\{y \in X \mid y \not\geq f_R(x)\}$ es un entorno de x que debe intersecar a $(\bigcup_{i=0}^{j}\{f_R^i(x)\})$ o a $(\bigcup_{i\geq 1}\{f_R^i(x)\})$. En ambos casos llegamos a que existe $j \geq 1$ tal que $f_R^j(x) \not\geq f_R(x)$. Por otra parte, como $x \leq f_R(x)$ y f_R es creciente, deducimos que $x \leq f_R(x) \leq \ldots \leq f_R^j(x)$, lo que es una contradicción. Luego $f_R(x) = x$,

lo que implica que toda las potencias de f_R aplicadas al elemento x son iguales, luego $X = \{x\}$.
Si $x \geq f_R(x)$, la demostración es análoga.□

Lema 2.4.3 *Sea X un espacio de Priestley, sea $f : X \to X$ una función monótona y continua.*

(a) Si $x \in X$ es tal que $x < f(x) < f^2(x) < \ldots < f^n(x) < \ldots$ y $Cl(\bigcup_{i\in N}\{f^i(x)\}) = X$, entonces existe $t \in X$ que verifica las siguientes condiciones:

(i) $t > f^i(x)$ para todo $i \in N$.

(ii) $X = \{t\} \cup \bigcup_{i\in N}\{f^i(x)\}$.

(iii) $f(t) = t$.

(b) Si $x \in X$ es tal que $x > f(x) > f^2(x) > \ldots > f^n(x) > \ldots$ y $Cl(\bigcup_{i\in N}\{f^i(x)\}) = X$, entonces existe $t \in X$ que verifica (ii), (iii) y:

(i') $t < f^i(x)$ para todo $i \in N$.

Demostración. Para cada $i \in N$, sea
$A_i = \{y \in X \mid y \geq f^i(x)\}$.
Es claro que A_i es un subconjunto cerrado de X y que $A_j \subseteq A_i$ si $i \leq j$. Por lo tanto, como $A_i \neq \emptyset$ para todo i, la familia $(A_i)_{i\geq 1}$ es una familia de conjuntos cerrados que verifica la propiedad de la intersección finita, y X es compacto, inferimos que existe $t \in X$ tal que $f^i(x) \leq t$ para todo $i \in N$.
Como $f^i(x) < f^j(x)$ si $i < j$, resulta que t no puede ser igual a ningún $f^i(x)$. Esto prueba la parte (i).
Para demostrar (ii) sea $S = \bigcup_{i\in N}\{f^i(x)\}$ y sea $t' \in X\setminus S$. Supongamos que existe $i \in N$ tal que $f^i(x) \not\leq t'$. Sea i_0 el menor natural con esta propiedad. Si $i_0 = 0$ entonces $x \not\leq t'$. Luego $\{y \in X \mid y \not\geq x\}$ es un entorno de t'. Como S es denso en X, tenemos que dicho entorno debe intersecar a S. Luego existe j tal que $f^j(x) \not\geq x$, lo que es un absurdo. Consecuentemente, $i_0 \geq 1$. Por la minimalidad de i_0 y el hecho que $t' \notin S$, deducimos que $f^{i_0-1}(x) < t'$ y $f^{i_0}(x) \not\leq t'$.
Luego $\{y \in X \mid y \not\leq f^{i_0-1}(x)\} \cap \{y \in X \mid y \not\geq f^{i_0}(x)\}$ es un entorno de t' que debe intersecar a S. Por lo tanto existe $j \in N$ tal que $f^j(x) \not\leq f^{i_0-1}(x)$ y $f^j(x) \not\geq f^{i_0}(x)$, lo que implica que $f^{i_0-1}(x) < f^j(x) < f^{i_0}(x)$. Luego $i_0 - 1 < j < i_0$, lo que es una contradicción. Esto demuestra que $t' > f^i(x)$ para todo $i \in N$.

Si $t' \not\leq t$, entonces $\{y \in X \mid y \not\leq t\}$ es un entorno de t', lo que implica que existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k(x) \not\leq t$, absurdo. Análogamente, el caso $t \not\leq t'$ no es posible, lo que demuestra que $S \cup \{t\} = X$ y la parte (ii) queda probada. La demostración de (iii) es consecuencia inmediata de (i) y (ii) y omitiremos la prueba y la demostración de (b) es análoga. □

Teorema 2.4.4 *Sea* $\mathbf{L_j}$ *un álgebra en* $\mathbf{J}$ *tal que* L *una cadena. Entonces:*

(i) $\mathbf{L_j}$ *es simple si y sólo si* $\mathbf{L_j}$ *es isomorfa a* $A_1 = B_1$ *o isomorfa a* C_1.

(ii) $\mathbf{L_j}$ *es un álgebra subdirectamente irreducible y no simple si y sólo si es isomorfa a* A_∞ *o isomorfa a* B_∞*, o bien es isomorfa a alguna de las álgebras* A_k*,* B_k *o* C_k *para algún* $k > 1$.

Demostración. Sea $R = j^*$ y sea $X = X(L)$.

(i) Del Teorema 2.3.7 (i), es fácil ver que $A_1 = B_1$ y C_1 son álgebras simples. Supongamos ahora que $\mathbf{L_j}$ es un álgebra simple no isomorfa a C_1. Del Teorema 2.3.7 (i) deducimos que $domR = X$, y que $\max R(x)$ es R-denso para todo $x \in X$. Consecuentemente, R es una relación de Priestley funcional. Como X es una cadena, tenemos que x es comparable con $f_R(x)$ para todo $x \in X$. Por lo tanto, deducimos del Lema 2.4.2 que X tiene un solo elemento, lo que implica que $\mathbf{L_j}$ es isomorfa a $A_1 = B_1$.

(ii) De (i), deducimos que A_∞ no es simple. Veamos que A_∞ es subdirectamente irreducible. De la Observación 2.4.1 (a) tenemos que el espacio dual de A_∞ es (X_1, R_1). Sea $x \in X_1$. Como R es funcional, tenemos que $\max R(x) = \{f_R(x)\}$. Tomando $x = 0$, resulta de la Observación 2.3.6 (iv) que

$\{0\} \cup Cl_R(\max R(0)) = \{0\} \cup Cl_R(\{f_R(0)\}) = \{0\} \cup Cl_R(\{\frac{1}{2}\} = \{0\} \cup Cl(\bigcup_{i \geq 0}\{f_R^i(\frac{1}{2})\} = \{0\} \cup Cl(\{\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \ldots, \frac{n}{n+1}, \ldots\} = X_1$.

Por lo tanto $x = 0$ satisface la condición (ii) (a) del Teorema 2.3.7, lo que implica que A_∞ es subdirectamente irreducible.

En forma análoga se deduce de las Observaciones 2.4.1 que B_∞, A_k, B_k y C_k son subdirectamente irreducibles y no simples, con $k > 1$.

Sea $\mathbf{L_j}$ un álgebra subdirectamente irreducible y no simple. Supongamos que se cumple la condición (a) en el Teorema 2.3.7. Entonces se tiene que existe $x \in X$ tal que $\max R(x)$ es R-denso. Por el Lema 2.4.2 obtenemos que X tiene un solo elemento, lo que contradice el hecho que $\mathbf{L_j}$ no es simple. Por lo tanto $\mathbf{L_j}$ satisface la condición (b) del Teorema 2.3.7. Consideraremos tres casos:

(c1) $j(1) = 1$ y L es finito. Luego R es una relación de Priestley funcional. Sea $x \notin Cl(\bigcup_{i\geq 1}\{f_R^i(x)\})$ tal que $\{x\} \cup Cl(\bigcup_{i\geq 1}\{f_R^i(x)\}) = X$. X es finito y con la topología discreta, luego existe $n \geq 1$ tal que $X = \{x, f_R(x), f_R^2(x), \ldots, f_R^n(x)\}$. Como L no es simple, debe ser $x \neq f_R(x)$.
Supongamos primero que $x < f_R(x)$. Como f_R es monótona, deducimos de esta desigualdad que $x < f_R(x) < f_R^2(x) < \ldots < f_R^n(x)$ y $f_R^{n+1}(x) = f_R^i(x)$, para algún i entre 0 y n. Como $f_R^{n-1}(x) < f_R^n(x)$, inferimos que $f_R^n(x) \leq f_R^{n+1}(x) = f_R^i(x)$. Si $i \neq n$ entonces $f_R^i(x) < f_R^n(x)$ lo que es un absurdo. Luego $i = n$ y por lo tanto $f_R^{n+1}(x) = f_R^n(x)$. De la Observación 2.4.1 (b1) resulta que (X, R) es el espacio dual de A_{n+2}.
Si $f_R(x) < x$ deducimos en forma análoga que (X, R) es el espacio dual de B_{n+2}.

(c2) $j(1) \neq 1$. Luego R es una relación de Priestley parcialmente funcional y no funcional.
Sea $x \in domR$ tal que $\{x\} \cup Cl_R(\max R(x)) = \{x\} \cup Cl_R(\{f_R(x)\}) = X$. Supongamos que $f_R^i(x) \in domR$ para todo i. Como $domR$ es un subconjunto cerrado de X, deducimos de la Observación 2.3.6 (iv) que

$$X = \{x\} \cup Cl(\bigcup_{i\geq 1}\{f_R^i(x)\}) \subseteq domR$$

Luego $domR = X$, lo que es un absurdo. Por lo tanto existe $n \geq 1$ tal que $f_R^n(x) \notin domR$ y n es el menor número natural con esta propiedad. Por lo tanto $X = \{x, f_R(x), \ldots, f_R^n(x)\}$ y $f_R^n(x) \notin domR$.
Supongamos que $x \leq f_R(x)$. Como $domR$ es un conjunto creciente y f_R es una función monótona, tendríamos que $f_R^i(x)$ está en el dominio de R para todo i, lo que es una contradicción. Luego tenemos que $x > f_R(x) > \ldots > f_R^n(x)$ y $f_R^n(x) \notin domR$. De la Observación 2.4.1 (b3) inferimos que (X, R) es el dual de C_{n+2}.

(c3) L es una cadena infinita. Sea x satisfaciendo la condición (b) del Teorema 2.3.7. Teniendo en cuenta que X es infinito y razonando como en (c2) deducimos que $domR = X$. Luego R es una relación de Priestley funcional. Si $x = f_R(x)$, entonces $X = \{x\}$, lo que es imposible. Supongamos primero que $x < f_R(x)$. Luego $f_R^i(x) \leq f_R^j(x)$ si $i \leq j$. Supongamos que $f_R^i(x) = f_R^j(x)$ para algún par i, j con $i < j$. Luego $f_R^{j-1}(x) = f_R^j(x)$ para algún $j \geq 1$\$. Luego $S = \{x, f_R(x), \ldots, f_R^{j-1}(x)\}$, y $f_R^j(x) = f_R^{j-1}(x)$. Por lo tanto S sería finito, lo que implicaría que X es finito, absurdo. Por lo tanto $f_R^i(x) < f_R^j(x)$ si $i < j$.
Del Lema 2.4.3, deducimos que existe $t \in X$ que satisface las tres condiciones

del mencionado lema con $f = f_R$. Por lo tanto, deducimos de la Observación 2.4.1 (a), que (X, R) es el dual de A_∞. Si $f_R(x) < x$ deducimos también del Lema 2.4.3 y de la Observación 2.4.1 (a) que (X, R) es el dual de B_∞.□

Como aplicación del Teorema 2.3.4, daremos una condición necesaria, en términos algebraicos, para que un reticulado modal sea simple o subdirectamente irreducible.

Teorema 2.4.5 *Si* $\mathbf{L}_j$ *es un reticulado modal subdirectamente irreducible, entonces existen elementos* a *y* b *en* L *tales que* $a \not\leq b$ *y que verifican la siguiente propiedad:*

(l) Para todo $x \in L\backslash\{0\}$ *existe un número natural* n *tal que* $a \leq b \vee x \vee j(x) \vee j^2(x) \ldots \vee j^n(x)$.

Más aún, si $\mathbf{L}_j$ *es simple, entonces* $a = 1$ *y* $b = 0$ *satisfacen (l), y por lo tanto* $1 = x \vee j(x) \vee j^2(x) \ldots \vee j^n(x)$.

Demostración. Sea Y el último elemento de $C_{j^\bullet}(X(L))\backslash\{X(L)\}$. Como $X(L)\backslash Y$ es un abierto no vacío contenido en $X(L)$, inferimos que $X(L)\backslash Y$ contiene un abierto básico de la topología de Priestley. Por lo tanto existen elementos a, b en L tales que $a \not\leq b$ y

$(*)$ $\sigma_L(a)\backslash\sigma_L(b) \subseteq X(L)\backslash Y$.

Afirmamos que a y b satisfacen (l). Sea $x \in L\backslash\{0\}$ y definamos $S = \{c \in L \mid c = j^i(x)$ para algún $i \in \mathbb{N}\}$. Para terminar la demostración, es suficiente ver que $a \in I$, donde I es el ideal generado en L por $S \cup \{b\}$. Supongamos que no. Luego por el Teorema de Birkhoff-Stone existe un filtro primo P de L tal que $a \in P$ y $P \cap I = \emptyset$. En particular tenemos que $P \in \sigma_L(a)\backslash\sigma_L(b)$. Por la Observación 2.3.6 (ii), tenemos que $H = (\bigcup_{i\in\mathbb{N}}(j^\bullet)^i(P))$ es un subconjunto $j^\bullet$-saturado de $X(L)$. Luego, por el Corolario 2.3.5, resulta que $Cl(H)$ es un conjunto $j^\bullet$-cerrado. Como $P \in \sigma_L(a)\backslash\sigma_L(b)$ y $P \in Cl(H)$, deducimos de $(*)$ que $Cl(H) \not\subseteq Y$. Luego $Cl(H) = X(L)$, pues Y es el último elemento de $C_{j^\bullet}(X(L))\backslash\{X(L)\}$.

Como $x \neq 0$, tenemos que $\sigma_L(x)$ es un abierto no vacío que tiene que intersectar a H. Luego habría un filtro primo Q y un número natural i tal que $x \in Q$ y $Q \in (j^\bullet)^i(P)$. Consecuentemente, como $(j^\bullet)^i = (j^i)^\bullet$, existiría $x \in Q \subseteq (j^i)^{-1}(P)$, lo que implicaría que $j^i(x) \in P \cap I$, contradiciendo la igualdad $P \cap I = \emptyset$. Luego a y b satisfacen (l).

Finalmente, si $\mathbf{L_j}$ es simple tenemos que $Y = \emptyset$. Luego $a = 1$ y $b = 0$ satisfacen (l) pues obviamente satisfacen (*). □

Sea L un reticulado distributivo acotado. Es fácil ver que si L es un álgebra de Brouwer, el teorema anterior toma la siguiente forma:
Si $\mathbf{L_j}$ es subdirectamente irreducible, entonces:

(m) Existe $c \in L\backslash\{0\}$ tal que para todo $x \in L\backslash\{0\}$ existe $n \in \mathrm{N}$ tal que $c \leq x \vee j(x) \vee j^2(x) \ldots \vee j^n(x)$.

Por ejemplo, si $\mathbf{L_j}$ es subdirectamente irreducible y L es un álgebra de Boole o un reticulado distributivo finito, entonces se verifica (m).

Observaciones 2.4.6 (i) Sea L la cadena con cuatro elementos $0 < a < b < 1$ y sea j el homomorfismo superior definido como: $j(0) = 0, j(a) = j(b) = j(1) = 1$. Del Teorema 2.4.4 inferimos que $\mathbf{L_j}$ no es subdirectamente irreducible. Por otra parte, $x \vee j(x) = 1$ para todo $x \neq 0$, lo que implica que $\mathbf{L_j}$ satisface la condición (l) del Teorema 2.4.5. Luego *la recíproca del Teorema 2.4.5 no es válida.*

(ii) Observemos que si a y b satisfacen la condición (l) del Teorema 2.4.5, entonces para cada $x \neq 0$, el número natural n que verifica la desigualdad del teorema depende en general de x como muestra el siguiente ejemplo:
Sea $\mathbf{L_j} = A_\infty$. Como A_∞ es un álgebra de Brouwer, existe un elemento $c \neq 0$ que satisface la condición (m). En este ejemplo es fácil verificar que podemos tomar $c = 1$.
Supongamos que exista un número natural n que verifique esta desigualdad para todo $x \neq 0$. Como $x < j(x)$ para todo $x \neq 0$, tendríamos que $1 = j^n(x)$ para todo $x \neq 0$, lo que implicaría que $1 = j^n(\frac{1}{n+2}) = \frac{1}{2}$, absurdo.

La próxima proposición muestra que la recíproca del Teorema 2.4.5 es válida si L es un álgebra de Boole. Este resultado ha sido demostrado originalmente por Makinson en [28]. Nuestra demostración se basa en el Teorema 2.3.7.

Proposición 2.4.7 *Sea* $\mathbf{L_j} \in \mathbf{J}$, *y supongamos que* L *es un álgebra de Boole. Entonces:*

$\mathbf{L_j}$ *es subdirectamente irreducible si y sólo si* L *satisface (m) . Más aún,* $\mathbf{L_j}$ *es simple si y sólo si verifica :*
(m') $1 = x \vee j(x) \vee j^2(x) \ldots \vee j^n(x)$.

Demostración. Como toda álgebra de Boole es un álgebra de Brouwer, la condición es necesaria. Supongamos ahora que existe $c \in L\backslash\{0,\}$ satisfaciendo la condición (m). Consideraremos dos casos:

Caso 1. $j(c) \neq 0$. Veamos que se verifica la condición (ii) (a) del Teorema 2.3.7.

Por la Observación 2.3.6 (iii) tenemos que para todo $P \in X(L)$, $\max j^*(P)$ es j^* denso si y sólo si $Cl(\bigcup_{i\geq 1}(j^*)^i(P)) = X(L)$. Luego debemos probar que

$U = \{P \in X(L) \mid Cl(\bigcup_{i\geq 1}(j^*)^i(P)) = X(L)\}$

es un subconjunto abierto no vacío de $X(L)$. Veamos que $U = \bigcup_{i\geq 1} \sigma_L(j^i(c))$. Sea $P \in U$. Como $\sigma_L(c)$ es un subconjunto abierto no vacío de $X(L)$, inferimos que existe $i \geq 1$ y un filtro primo Q tal que $c \in Q$ y $Q \in (j^*)^i(P)$. Luego $Q \subseteq (j^i)^{-1}(P)$. Por lo tanto $P \in \sigma_L(j^i(c))$. Luego hemos probado que $U \subseteq \bigcup_{i\geq 1} \sigma_L(j^i(c))$. Supongamos que la otra inclusión no vale. Luego tendríamos un filtro primo P, y un número natural $k \geq 1$ tal que $j^k(c) \in P$ y $P \notin U$. Como $X(L)$ es Booleano, los abiertos básicos son de la forma $\sigma_L(a)$. Por lo tanto existe un elemento a en $L\backslash\{0\}$ tal que

(1) $\sigma_L(a) \cap (j^*)^i(P) = \emptyset$ para todo $i \geq 1$.

Por otra parte existe $p \in \mathrm{N}$ tal que $c \leq a \vee j(a) \vee j^2(a) \ldots \vee j^p(a)$, lo que implica que $j^k(c) \leq j(a) \vee j^2(a) \ldots \vee j^{k+p}(a)$, pues $k \geq 1$. Como P es un filtro primo y $j^k(c) \in P$, deducimos que existe $l \in \{1, \ldots, k+p\}$ tal que $j^l(a) \in P$. Luego existe un filtro primo Q tal que $a \in Q$ y $Q \subseteq (j^l)^{-1}(P)$, en contradicción con (1). Luego $U = \bigcup_{i\geq 1} \sigma_L(j^i(c))$, y como $\bigcup_{i\geq 1} \sigma_L(j^i(c))$ es un abierto no vacío inferimos que $\mathbf{L_j}$ es subdirectamente irreducible.

Caso 2. $j(c) = 0$. Afirmamos que c es un átomo de L. En efecto, sea $x \in L\backslash\{0\}$ tal que $x \leq c$. Luego $j^k(x) = 0$ para todo $k \geq 1$. Por otra parte, como $x \neq 0$, deducimos que existe $n \in \mathrm{N}$ tal que $c \leq x \vee j(x) \vee j^2(x) \ldots j^n(x)$, lo que implica que $c \leq x$, y por lo tanto $c = x$.

Sea $P = [c)$. Veamos que P verifica la condición (ii) (b) del Teorema 2.3.7. Como c es un átomo de L, entonces P es el único filtro primo que contiene a c. En efecto, si $Q \in X(L)$ contiene a c, entonces $P \subseteq Q$. Como P es maximal, se tiene que $P = Q$. Luego $\sigma_L(c)$ es el conjunto unitario $\{P\}$.

Si $c = 1$, entonces $L = \mathbf{2}$ y por lo tanto $\mathbf{L_j}$ es subdirectamente irreducible. Si $c \neq 1$, entonces $\neg c \neq 0$; y de la condición (m) inferimos que existe $n \in \mathrm{N}$ tal que $c \leq \neg c \vee j(\neg c) \vee \ldots \vee j^n(\neg c)$. Como c es irreducible y $c \nleq \neg c$, deducimos que $c \leq j^i(\neg c)$ para algún i entre 1 y n. Por un argumento inductivo es fácil ver que esto implica $c \leq j(1)$. Luego $1 \in j^{-1}(P)$, y por lo tanto existe

$Q \in X(L)$ tal que $Q \subseteq j^{-1}(P)$. Luego $P \in dom j^*$.
Supongamos que $P \in Cl(\bigcup_{i\geq 1}(j^*)^i(P))$. Luego $\sigma_L(c) \cap \bigcup_{i\geq 1}(j^*)^i(P) \neq \emptyset$, lo que implica que existe $i \geq 1$ tal que $P \subseteq j^{-i}(P)$. Por lo tanto, como $i \geq 1$, tendríamos que $j^i(c) = 0 \in P$, lo que es un absurdo. Para terminar la demostración debemos probar que $\{P\} \cup Cl(\bigcup_{i\geq 1}(j^*)^i(P)) = X(L)$.
Sea $Q \in X(L)$ y sea $a \in L$ un elemento distinto de cero tal que $Q \in \sigma_L(a)$. Si $c \in Q$ entonces $Q = \{P\}$. Si $c \notin Q$ entonces $\neg c \in Q$, lo que implica que $\neg c \wedge a \in Q$. Sea n un número natural tal que $c \leq c \wedge a \vee j(c \wedge a) \vee \ldots \vee j^n(c \wedge a)$. Luego existe i entre 1 y n tal que $c \leq j^i(c \wedge a)$, lo que implica que $c \wedge a \in j^{-i}(P)$. Consecuentemente existe $Q' \in X(L)$ tal que $c \wedge a \in Q'$ y $Q' \subseteq j^{-i}(P)$. Como $a \in Q'$, hemos demostrado que $\sigma_L(a) \cap (\bigcup_{i\geq 1}(j^*)^i(P)) \neq \emptyset$.
La prueba de (m') es similar y la omitiremos.□

Por una *estructura* se entiende un par (X, R) donde X es un conjunto arbitrario y R es una relación binaria sobre X. Una estructura $G_1 = (X_1, R_1)$ se llama una *subestructura interna* de $G_2 = (X_2, R_2)$ si y sólo si la inclusión $X_1 \mapsto X_2$ es un morfismo acotado de G_1 en G_2 (ver [19, page 200]).
Si z es un elemento en una estructura G, sea $G_z = (X_z, R_z)$, donde X_z es la intersección de todas las subestructuras internas de G que contienen a z y R_z es la restricción de R a X_z. Se probó en [19] que $y \in X_z$ si y sólo si existe una sucesión $(y_1, \ldots, y_p)$ en X tal que $(y_0, y_1) \in R, (y_1, y_2) \in R, \ldots, (y_{p-1}, y_p) \in R$, donde $y = y_0$ y $z = y_p$; o equivalentemente $z \in R^p(y)$. Por lo tanto $X_z = \bigcup_{p\in \mathbf{N}} R^p(z)$.
De la proposición anterior deducimos, tomando $c = \{z\}$, el siguiente resultado probado por Goldblatt en [19] de un modo diferente:

$(\mathcal{P}(X_z), \exists_{R_z}, \cup, \cap, \emptyset, X_z)$ *es subdirectamente irreducible.*

Donde $\exists_{R_z} = (R_z^{-1})^*$.

Nuestro próximo paso será caracterizar las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en $\mathbf{C}, \mathbf{Q}$ y $\mathbf{H}$.

Sea $\mathrm{L_j} \in \mathbf{C}$. Del Teorema 2.4.5 deducimos el siguiente resultado:

Si $\mathrm{L_j}$ *es subdirectamente irreducible, entonces existen* $a, b \in L$ *tales que* $a \not\leq b$ *y tal que* $a \leq b \vee j(x)$ *para todo* $x \neq 0$.

Un *álgebra de clausura* es un reticulado modal $\mathrm{L_j}$, donde L es un álgebra de Boole y j es un operador de clausura.
Las álgebras de clausura han sido estudiadas por varios autores, ver por ejemplo [26, 40]. De la Proposición 2.4.7 deducimos el siguiente resultado, establecido por Blok y Dwinger en [5]:

Un álgebra de clausura $\mathbf{L_j}$ *es subdirectamente irreducible si y sólo si* $j(L)\backslash\{0\}$ *tiene un primer elemento.*

Teorema 2.4.8 *Sea* (X, R) *un* C*-espacio modal. Entonces:*

(i) $\psi(X, R)$ *es simple si y sólo si* $Cl(\max X) = X$ *y* $R = X \times X$.

(ii) $\psi(X, R)$ *es subdirectamente irreducible y no simple si y sólo si se cumple una y solamente una de las siguientes condiciones:*

  (ac) $\max X$ *es un subconjunto* R*-denso de* X *y el conjunto de los elementos no nulos de la imagen de* $R^{\bullet}$ *tiene primer elemento y dicho elemento es diferente de* X.

  (bc) *Existe* $x \notin Cl_R(\max X)$ *tal que* $\{x\} \cup Cl_R(\max X) = X$, *y* $R(x) = X$.

Demostración. Como R es un preorden, resulta que $\bigcup_{i\in\mathbf{N}} R^i(x) = R(x)$, y por lo tanto $R(x)$ es R-cerrado para todo $x \in X$. Sea $x \in X$ y supongamos que $\max R(x)$ sea R-denso. Como $\max R(x) \subseteq R(x)$, resulta que $R(x)$ es R-denso y R-cerrado, lo que implica que $R(x) = X$ y por lo tanto $\max X$ es R-denso. Obviamente si $R(x) = X$ y $\max X$ es R-denso entonces $\max R(x)$ es R-denso. Así hemos demostrado la siguiente propiedad:

(p) Sea $x \in X$, entonces $\max R(x)$ es R-denso si y sólo si $R(x) = X$ y $\max X$ es R-denso.

(i) Como $domR = X$, deducimos del Teorema 2.3.7 (i) que $\psi(X, R)$ es simple si y sólo si $\max R(x)$ es R-denso para todo $x \in X$. Por la propiedad (p) esto es equivalente a decir que $R = X \times X$ y $\max X$ es R-denso.
Es inmediato ver que si $R = X \times X$ entonces $\max X$ es R-saturado y por el Corolario 2.3.5 resulta que $\max X$ es R-denso si y sólo si es un subconjunto denso de X.

(ii) Demostraremos que las condiciones (ac) y (bc) son equivalentes a las condiciones (a) y (b) del Teorema 2.3.7.
Sea $S = \{x \in X \mid R(x) = X\}$. De la propiedad (p) deducimos que $\{x \in X \mid \max R(x)$ es R-denso en $X\}$ es un abierto no vacío diferente de X si y sólo si S es un abierto no vacío diferente de X y $\max X$ es R-denso. Veamos

que S es un conjunto cerrado y creciente. Para ver esto, sea $y \in Cl(S)$ y supongamos que $y \notin S$. Luego existe $z \in X$ tal que $z \notin R(y)$. Por lo tanto, existe $V \in D(X)$ tal que $z \in V$ y $V \cap R(y) = \emptyset$. Luego $y \notin R^{\bullet}(V)$, y como $R^{\bullet}(V) \in D(X)$, tenemos que $X \backslash R^{\bullet}(V)$ es un entorno de y que debe intersecar a S. Luego existe $s \in S$ tal que $R(s) \cap V = \emptyset$, lo que es un absurdo pues $R(s) = X$ y $z \in V$.
Falta probar que S es creciente. Pero esto es consecuencia inmediata del hecho que $s \leq t$ implica $R(s) \subseteq R(t)$ para todo par de elementos s, t en X. Así hemos probado que la condición (a) del Teorema 2.3.7 es equivalente al hecho que $S \in D(X)$, $S \neq \emptyset$, $S \neq X$ y $\max X$ es R-denso.
Para ver la equivalencia con (ac) debemos probar que $S \in D(X)$ es no vacío y distinto de X si y sólo si $R^{\bullet}(D(X)) \backslash \{\emptyset\}$ tiene primer elemento y dicho elemento es distinto de X.
Supongamos primero que S es un abierto cerrado no vacío distinto de X. Es fácil ver de la definición de S que $S = R^{\bullet}(S)$, lo que implica que S pertenece a la imagen de $R^{\bullet}$. Sea $U \in D(X)$ no vacío. Veamos que $S \subseteq R^{\bullet}(U)$. Sea $s \in S$. Luego $R(s) = X$, lo que implica que $s \in R^{\bullet}(U)$. Luego S es el primer elemento de $R^{\bullet}(D(X)) \backslash \{\emptyset\}$.
Supongamos ahora que V sea el primer elemento de $R^{\bullet}(D(X)) \backslash \{\emptyset\}$ con $V \neq X$. Como $R^{\bullet}$ es un operador de clausura, tenemos que $R^{\bullet}(V) = V$. Afirmamos que $V = S$. Sea $x \in V$ y supongamos que $z \notin R(x)$ para algún $z \in X$. Luego existe $U \in D(X)$ tal que $z \in U$ y $x \notin R^{\bullet}(U)$. Como $U \subseteq R^{\bullet}(U)$ deducimos que $z \in R^{\bullet}(U)$. Por lo tanto $R^{\bullet}(U)$ es no vacío lo que implica que $V \subseteq R^{\bullet}(U)$, absurdo pues $x \in V$ y $x \notin R^{\bullet}(U)$. Luego $V \subseteq S$. Para probar la otra inclusión, sea $s \in S$. Como $R(s) = X$ y V es no vacío inferimos que $s \in R^{\bullet}(V) = V$. Así hemos probado que $S = V$ lo que implica que S es un abierto cerrado no vacío.
Sea $x \notin Cl_R(\max R(x))$ tal que $\{x\} \cup Cl_R(\max R(x)) = X$.
Como $\max R(x) \subseteq R(x)$ y $R(x)$ es R-cerrado, deducimos que $Cl_R(\max R(x)) \subseteq R(x)$ lo que implica que $\{x\} \cup R(x) = X$. Como $x \in R(x)$ deducimos que $R(x) = X$ y esto prueba la equivalencia entre la condición (b) del Teorema 2.3.7 y la condición (bc).□

Del Teorema 2.4.8 y de la Observación 2.3.6 (v) obtenemos:

Corolario 2.4.9 *Las álgebras simples y finitas en* C *son las álgebras de Boole finitas donde el operador de clausura asociado es el cuantificador simple.*

Observemos que toda álgebra de clausura subdirectamente irreducible verifica la condición (ac). Un ejemplo de un álgebra subdirectamente irreducible en C que verifica (bc) es A_2. Más aún, es inmediato ver que si $\mathbf{L_j} \in \mathbf{C}$ es subdirectamente irreducible y L es una cadena, entonces $\mathbf{L_j}$ es A_1 o A_2.

En [10], Cignoli ha caracterizado las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en **Q**. Nuestro próximo paso será deducir este resultado como corolario del teorema anterior:

Proposición 2.4.10 *Sea X un espacio de Priestley y sea R una relación de Priestley de cuasiequivalencia sobre X. Entonces:*

(i) $\max X$ *es un subconjunto R-saturado de X.*

(ii) Si $\max X$ *es R-denso y $R^{\bullet}(D(X))\backslash\{\emptyset\}$ tiene primer elemento, entonces $R^{\bullet}$ es el cuantificador simple sobre $D(X)$. En particular la condición (ac) del teorema 2.4.8 no se puede dar.*

(iii) La condición (bc) del Teorema 2.4.8 es equivalente a la siguiente condición:

(bq) $R^{\bullet}$ es el cuantificador simple y existe $x \notin Cl(\max X)$ tal que $X = Cl(\max X) \cup \{x\}$.

Demostración. (i) Sea $x \in \max X$ y sea $y \in \max R(x)$. Como R es de cuasiequivalencia, deducimos de la Observación 2.2.4 que $\max R(x) \subseteq R^{-1}(x)$ lo que implica que $x \in R(y)$ y como $y \in R(x)$, deducimos que $R(x) = R(y)$ pues R es transitiva. Veamos que y es maximal en X. Sea $z \in X$ tal que $y \leq z$. Luego $R(y) \subseteq R(z)$ lo que implica que $x \in R(z)$. Como R es de cuasiequivalencia, tenemos que existe $x' \in X$ tal que $x \leq x'$, $(z, x') \in R$ y $(x', z) \in R$. De la maximalidad de x, inferimos que $x = x'$ y por lo tanto $R(x) = R(z)$. Como y es maximal en $R(x)$, entonces es maximal en $R(z)$. Pero $y \leq z$ y como $z \in R(z)$ deducimos que $y = z$. Luego $\max R(x) \subseteq \max X$.

(ii) Si $\max X$ es R-denso, entonces por (i) y por el Corolario 2.3.5 deducimos que $\max X$ es un subconjunto denso de X. Sea V el primer elemento de $R^{\bullet}(D(X))\backslash\{\emptyset\}$. Luego $R^{\bullet}(V) = V$ pues $R^{\bullet}$ es un operador de clausura. Supongamos que $V \neq X$. Como $\max X$ es denso en X, deducimos que existe $y \in \max X$ tal que $y \notin V$. Por lo tanto, si $v \in V$, entonces $y \not\leq v$ lo que implica que existe $U_v \in D(X)$ tal que $y \in U_v$ y $v \notin U_v$. Por un argumento de compacidad resulta que existen finitos elementos $v_1, \ldots, v_n \in V$ tales que $V \subseteq X\backslash U_{v_1} \cup \ldots \cup X\backslash U_{v_n}$ e $y \in U_{v_1} \cap \ldots \cap U_{v_n} = U$. Luego

$V \cap U = \emptyset$. Por el Teorema 2.2.5, $R^{\bullet}$ es un cuantificador lo que implica que $\emptyset = R^{\bullet}(V \cap U) = R^{\bullet}(R^{\bullet}(V) \cap U) = R^{\bullet}(V) \cap R^{\bullet}(U) = V \cap R^{\bullet}(U)$. Por otra parte, como $U \neq \emptyset$ y V es el primer elemento de $R^{\bullet}(D(X))\backslash\{\emptyset\}$, entonces $V \subseteq R^{\bullet}(U)$ y por la igualdad de arriba deducimos que $V = \emptyset$ lo que es una contradicción. Luego el primer elemento de $R^{\bullet}(D(X))\backslash\{\emptyset\}$ es X y obviamente esto implica que $R^{\bullet}$ es el cuantificador simple.

(iii) Es claro que la condición (bq) implica (bc) pues $R = X \times X$. Veamos ahora que (bc) implica (bq). Sea $x \in X$ tal que x verifica (bc). Como $\max X$ es R-saturado, entonces $Cl_R(\max X) = Cl(\max X)$. Luego falta ver que $R^{\bullet}$ es el cuantificador simple, lo que equivale a ver que $R = X \times X$. Por hipótesis tenemos que $R(x) = X$. Sea $y \in X$ distinto de x. Como R es de cuasiequivalencia, entonces $\max X = \max R(x) \subseteq R^{-1}(x)$ por la Observación 2.2.4. Como $R^{-1}(x)$ es cerrado resulta que $Cl(\max X) \subseteq R^{-1}(x)$. Luego $y \in R^{-1}(x)$ lo que implica que $x \in R(y)$. Luego $X = R(x) \subseteq R(R(y)) = R(y)$ y por lo tanto $R(y) = X$ lo que prueba que $R = X \times X$.□

De ésta proposición y el hecho que **Q** es una subvariedad de **C** obtenemos del Teorema 2.4.8 el siguiente resultado probado por Cignoli en [10] por un método diferente:

Teorema 2.4.11 *Sea (X, R) un Q-espacio modal. Entonces:*

(i) *$\psi(X, R)$ es simple si y sólo si $R^{\bullet}$ es el cuantificador simple y* $Cl(\max X) = X$.

(bq) *$\psi(X, R)$ es subdirectlamente irreducible y no simple si y sólo si $R^{\bullet}$ es el cuantificador simple y existe $x \notin Cl(\max X)$ tal que* $X = Cl(\max X) \cup \{x\}$.

Sea X un espacio de Priestley y sea R una relación de Priestley funcional sobre X. Del Teorema 2.3.7 y de la Observación 2.3.6 (iv), deducimos el siguiente teorema:

Teorema 2.4.12 *Sea (X, R) un H-espacio modal. Entonces:*

(i) *$\psi(X, R)$ es simple si y sólo si $Cl(\bigcup_{i\geq 1}\{f_R^i(x)\}) = X$ para todo $x \in X$.*

(ii) *$\psi(X, R)$ es subdirectamente irreducible y no simple si y sólo si se cumple una y solamente una de las siguientes condiciones:*

(ah) $\{x \in X \mid Cl(\bigcup_{i\geq 1}\{f_R^i(x)\}) = X$ *es un abierto no vacío diferente de* X.

(bh) *Existe* $x \notin Cl(\bigcup_{i\geq 1}\{f_R^i(x)\})$ *tal que* $\{x\} \cup Cl(\bigcup_{i\geq 1}\{f_R^i(x)\}) = X$.

Sea A un conjunto finito con n elementos y sea $\sigma : A \to A$ una permutación. Recordemos que σ se dice *cíclica* de orden n si y sólo si existe $a \in A$ tal que $A = \{a, \sigma(a), \sigma^2(a), \ldots, \sigma^{n-1}(a)\}$, o equivalentemente, n es el menor natural tal que σ^n es la identidad sobre A.

Corolario 2.4.13 *Un álgebra finita* $\mathbf{L_j}$ *en* $\mathbf{H}$ *es simple si y sólo si* L *es un álgebra de Boole finita y* j *es una permutación cíclica sobre el conjunto de los átomos de* L.

Demostración. Sea $\mathbf{L_j}$ un álgebra finita y simple en $\mathbf{H}$ y sea $X = X(L)$. Como L es finito entonces X también lo es. Sea $x \in X$ y sea n el número de elementos de X.
Por el Teorema 2.4.12 (i) resulta que $X = \{f_R(x), \ldots, f_R^n(x)\}$. De esta igualdad deducimos que f_R es sobreyectiva y como X es finito, resulta que f_R es biyectiva. Como $x \in X$, entonces existe i entre 1 y n tal que $x = f_R^i(x)$. Luego $X = \{x, f_R(x), \ldots, f_R^{i-1}(x)\}$ lo que implica que $i = n$. Por lo tanto deducimos que f_R es una permutación cíclica de orden n y por lo tanto $X = \{x, f_R(x), \ldots, f_R^{n-1}(x)\}$ y $f_R^n(x) = x$. Como f_R^n es la identidad sobre X y f_R^{n-1} es creciente, inferimos que f_R es un isomorfismo de orden.
Afirmamos que X es un espacio Booleano. Para ver esto observemos primero que de la igualdad $X = \{x, f_R(x), \ldots, f_R^{n-1}(x)\}$ inferimos que vale la igualdad $X = \{y, f_R(y), \ldots, f_R^{n-1}(y)\}$ para todo $y \in X$ pues f_R es una permutación cíclica de orden n. Sea $y \in \max X$. Como f_R es un isomorfismo de orden, entonces $f_R(y) \in \max X$ y por un argumento inductivo inferimos que $f_R^i(y) \in \max X$ para todo i entre 1 y n. Luego $X = \max X$, y por lo tanto L es un álgebra de Boole finita con n átomos. Por otro lado, como f_R es un homeomorfismo, inferimos de la dualidad de Priestley que j es un isomorfismo y es fácil ver que j es también una permutación cíclica de orden n sobre el conjunto de los átomos de L. Recíprocamente, si j es una permutación cíclica de orden n sobre el conjunto de los átomos de L entonces es inmediato ver del teorema anterior que $\mathbf{L_j}$ es simple. □

Notemos que del Teorema 2.4.4, deducimos que existen álgebras finitas y subdirectamente irreducibles en **H** que no son álgebras de Boole.
De lo visto hasta ahora hemos probado que si $\mathbf{L_j}$ es un álgebra finita y simple en **C**, en **H** o si es una cadena, entonces L es un álgebra de Boole. Sin embargo, esto no es verdadero en general como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 2.4.14 Sea K la cadena con tres elementos $0 < a < 1$ y sea $L = K \times K$ asociado con el siguiente homomorfismo superior:
$j((0,a)) = (1,0)$, $j((a,0)) = (0,a)$, $j((a,a)) = (1,a)$ y $j((1,a)) = j((a,1)) = j((1,0)) = j((0,1)) = j((1,1)) = (1,1)$. Es claro que L no es un álgebra de Boole y es fácil ver que $\mathbf{L_j}$ es simple.

Nuestro próximo paso será hacer un estudio detallado de la subvariedad de **J** generada por las cadenas, esto es, por los reticulados modales $\mathbf{L_j}$ donde L es una cadena. Denotemos con **CH** a esta subvariedad.

Proposición 2.4.15 *(i) Sean k y m números naturales positivos, con $k < m$. Entonces A_k es una subálgebra de A_m, B_k es isomorfo a una subálgebra de B_m y C_k es imagen homomorfa de C_m.*
(ii) A_k es subálgebra de A_∞ y B_k es isomorfa a una subálgebra de B_∞ para todo $k > 0$.

Demostración. (i) Como $A_k = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, 0\}$ está contenida en $A_m = \{1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{k}, \frac{1}{k+1}, \ldots, \frac{1}{m}, 0\}$ debemos ver que A_k es cerrado por el operador j definido en A_m.
Sea $x \in A_k$. Si $x = 0$ o $x = 1$, claramente $j(x) \in A_k$. Si $x = \frac{1}{i}$ con $1 < i \leq k$, entonces $j(x) = \frac{1}{i-1}$ y obviamente $\frac{1}{i-1} \in A_k$.
Observemos que el mismo razonamiento no vale para las álgebras B_k. Sin embargo, es fácil ver que la aplicación $f : B_k \to B_m$ definida por $f(\frac{1}{i}) = \frac{1}{m-k+i}$ para $i = 2, \ldots, k$, $f(1) = 1$ y $f(0) = 0$, es un homomorfismo inyectivo.
Para terminar la demostración, veamos que C_k es imagen homomorfa de C_m. Definamos la siguiente aplicación $f : C_m \to C_k$:

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in C_k \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Es claro que f es un homomorfismo de reticulados acotados. Para ver que f preserva el operador j, sea i un número natural entre 1 y m. Si $i < k$

entonces $f(j(\frac{1}{i})) = f(\frac{1}{i+1}) = \frac{1}{i+1} = j(\frac{1}{i}) = j(f(\frac{1}{i})$. Si $i \geq k$, entonces $f(j(\frac{1}{i})) = f(\frac{1}{i+1}) = 0$. Si $i = k$ entonces $j(f(\frac{1}{k})) = j(\frac{1}{k}) = 0$. Si $i > k$ entonces $j(f(\frac{1}{i})) = j(0) = 0$.
La demostración de (ii) es análoga y la omitiremos.□

De ahora en más usaremos con frecuencia el siguiente resultado que es un consecuencia inmediata del hecho que toda variedad está generada por las álgebras subdirectamente irreducibles que contiene:

Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras subdirectamente irreducibles de una variedad $\mathcal{V}$ y sea σ un conjunto de identidades del mismo tipo que tienen las álgebras de $\mathcal{V}$. Entonces σ caracteriza a la variedad generada por $\mathcal{K}$ si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

(i) Toda álgebra en $\mathcal{K}$ verifica todas las identidades de σ.

(ii) Si un álgebra subdirectamente irreducible en $\mathcal{V}$ verifica todas las identidades de σ entonces dicha álgebra pertenece a $V(\mathcal{K})$.

Teorema 2.4.16 (1) CH *está generada por las cadenas subdirectamente irreducibles , es decir por las álgebras A_k, B_l, C_m, A_∞ y B_∞, con k, l, m enteros positivos.*

(2) CH *está caracterizada por las siguientes identidades:*

(c1) $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$.

(c2) $(a \wedge j(b)) \vee (b \wedge j(a)) \leq (a \wedge b) \vee (j(a) \wedge j(b))$.

(3) *Las álgebras subdirectamente irreducibles en* CH *son exactamente las álgebras A_k, B_l, C_m, A_∞ y B_∞, con k, l, m enteros positivos.*

Demostración. (1) Es claro que la variedad $\mathcal{V}$ generada por las álgebras A_k, B_l, C_m, A_∞ y B_∞, está contenida en CH. Por lo tanto, debemos ver que si $\mathbf{L_j} \in \mathbf{J}$ y L es una cadena, entonces $\mathbf{L_j} \in \mathcal{V}$.
Por el Teorema de Birkhoff, $\mathbf{L_j}$ es producto subdirecto de álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathbf{J}$. Sea $\mathbf{M_j}$ cualquiera de éstas álgebras. Como el reticulado M es imagen homomorfa del reticulado L y L es una cadena, entonces es fácil ver que M también es una cadena. Luego, por el Teorema 2.4.4, $\mathbf{L_j}$ es producto subdirecto de álgebras pertenecientes a $\mathcal{V}$, lo que implica que $\mathbf{L_j} \in \mathcal{V}$. Por lo tanto, CH $= \mathcal{V}$.
(2) Sea $\mathbf{L_j} \in \mathbf{J}$ y supongamos que L es una cadena. Claramente j satisface (c1). Afirmamos que j también verifica la condición (c2). Para ver esto,

sean $a, b \in L$. Supongamos sin pérdida de generalidad que $a \leq b$. Luego $j(a) \leq j(b)$, lo que implica que $(a \wedge b) \vee (j(a) \wedge j(b)) = a \vee j(a)$. Como $(a \wedge j(b)) \vee (b \wedge j(a)) \leq a \vee (j(a)$ la afirmación queda probada. Por lo tanto toda álgebra en **CH** verifica (c1) y (c2).
Veamos ahora que toda álgebra subdirectamente irreducible en **J** que verifica (c1) y (c2) es necesariamente una cadena. Demostraremos primero que si un álgebra verifica (c2) entonces el reticulado L subyacente verifica la siguiente condición:

(c) Si $P \in X(L)$ entonces $P \subseteq j^{-1}(P)$ o $j^{-1}(P) \subseteq P$.

Supongamos que esta condición no se cumple para algún filtro primo P. Luego existirían elementos $a, b \in L$ tales que $a \in P, j(a) \notin P, j(b) \in P$ y $b \notin P$. Luego $a \wedge j(b) \in P$. Por (c2) esto implica que $(a \wedge b) \vee (j(a) \wedge j(b)) \in P$, lo que se deduce que $a \wedge b \in P$ o $j(a) \wedge j(b) \in P$, lo que contradice el hecho que $b \notin P$ y $j(a) \notin P$.
Sea $\mathbf{L_j}$ un álgebra subdirectamente irreducible que verifica las condiciones (c1) y (c2). Sea $X = X(L)$ y sea $R = j^*$. Como j es un homomorfismo de reticulados entonces R es parcialmente funcional. La condición (c) de arriba queda expresada entonces de la siguiente forma:

Si $x \in domR$, entonces $x \leq f_R(x)$ o $f_R(x) \leq x$.

Es decir x es comparable con $f_R(x)$. Si X es un conjunto unitario, entonces $D(X)$ es la cadena con 2 elementos, y luego se cumple la tesis. Si X tiene más de un elemento, deducimos del Lema 2.4.2 que la condición (a) del Teorema 2.3.7 no se puede dar.
Sea $x \in domR$ tal que verifica la condición (ii) (b) del Teorema 2.3.7. Supongamos que exista $i \geq 1$ tal que $f_R^i(x) \notin domR$. Si j es el menor natural con esta propiedad, deducimos de la Observación 2.3.6 (iv) que $X = \{x, f_R(x), \ldots, f_R^j(x)\}$. Como x es comparable con $f_R(x)$ y f_R es creciente deducimos que X es una cadena y por lo tanto L también.
Usando el mismo argumento que en el caso (c2) del Teorema 2.4.4, deducimos que si $f_R^i(x) \in domR$ para todo $i \geq 1$, entonces R es funcional.
Si X es finito, deducimos como arriba que L es una cadena. Si X es infinito entonces $i \neq j$ implica $f_R^i(x) \neq f_R^j(x)$ y del Lema 2.4.3 deducimos que $\mathbf{L_j}$ es isomorfa a A_∞ o a B_∞.
(3) Sea $\mathbf{L_j}$ un álgebra subdirectamente irreducible en **CH**. Por (2), $\mathbf{L_j}$ satisface las ecuaciones (c1) y (c2). Por lo demostrado arriba, esto implica que L es una cadena y del Teorema 2.4.4 deducimos (3).□

Notemos con **CH1** y con **CH2** a las subvariedades de CH generadas por las álgebras A_∞ y B_∞ respectivamente. Sea **CH3** la subvariedad de CH generada por las álgebras C_k. Notemos también con CHij la subvariedad de CH generada por CHi y por CHj, con $i \neq j$, $1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq 3$; es decir la variedad generada por las álgebras que pertenecen a CHi o a CHj.

Sean (X_1, R_1) y (X_2, R_2) espacios modales y sea $\varphi : X_1 \to X_2$ un morfismo. Supongamos que R_1 y R_2 sean relaciones de Priestley parcialmente funcionales. Como $R_1^*(X_1) = domR_1$, $R_2^*(X_2) = domR_2$ y φ es un morfismo, resulta que para todo $x \in X_1$ $x \in domR_1$ si y sólo si $\varphi(x) \in domR_2$. Más aún, es fácil verificar que φ es un morfismo si y sólo si es monótona, continua y verifica la igualdad $\varphi(f_{R_1}(x)) = f_{R_2}(\varphi(x))$ para todo $x \in domR_1$.

Teorema 2.4.17 CH, CH1 *y* CH2 *están generadas por las álgebras finitas y subdirectamente irreducibles que contienen. Más precisamente,* CH1 $= V(A_\infty) = V(\{A_k : k > 0\})$, CH2 $= V(B_\infty) = V(\{B_k : k > 0\})$.

Demostración. Veamos que A_∞ es imagen homomorfa del álgebra $A = \prod_{k \geq 1} A_k$. Sea n un número natural mayor que 0 y sea c_n el elemento de A que tiene un 1 en las primeras n coordenadas y $\frac{1}{2}$ a partir de la $n+1$ ésima coordenada.
De la definición de los c_n, resulta que el ideal I generado por los c_n es propio. Sea P un filtro primo tal que $P \cap I = \emptyset$.
Como cada A_k verifica la desigualdad $x \leq j(x)$, inferimos que A también la verifica y es fácil ver que esto implica que $P \subseteq j^{-1}(P) \subseteq j^{-2}(P) \subseteq \ldots j^{-i}(P)$ para todo $i \geq 1$. Afirmamos que cada inclusión es propia. De la definición de los c_n resulta que $j(c_n) = 1$ para todo n. Más aún, c_i está en la imagen del operador j^{i-1} para todo $i \geq 1$. Esto es claro si $i = 1$. Por otra parte, $c_2 = j(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots) = j(d_2), c_3 = j^2(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \ldots) = j^2(d_3), \ldots, c_n = j^{n-1}(1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}, \ldots) = j^{n-1}(d_n)$.
Por lo tanto, como $j^i(d_i) = 1$ y $j^{i-1}(d_i) = c_i$, tenemos que $c_1 \in j^{-1}(P) \backslash P, d_2 \in j^{-2}(P) \backslash j^{-1}(P), \ldots, d_i \in j^{-i}(P) \backslash j^{i-1}(P)$ y la afirmación está probada.
Sea $Q = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} j^{-i}(P)$. Como Q es una unión de una cadena de filtros primos resulta que Q es un filtro primo, y es claro que $j^{-1}(Q) = Q$. Sea (X_1, R_1) el dual de A_∞ dado en la Observación 2.4.1 (a). Sea $X = X(A)$, $x = P$, $y = Q$ y $f = j^{-1}$. Es fácil verificar que la aplicación $\mu : X_1 \to X$ dada por $\mu(\frac{n}{n+1}) = f^n(x)$ para todo $n \geq 0$ y $\mu(1) = y$ define un monomorfismo de H-espacios modales. De la dualidad obtenida en el capítulo I, deducimos

que μ define un homomorfismo suryectivo $\mu^* : (D(X), f_R) \to (D(X_1, f_{R_1})$. Por lo tanto A_∞ es imagen homomorfa de A.
Análogamente se prueba que B_∞ es imagen homomorfa de $\mathbf{B} = \prod_{k\geq 1} B_k$. Esto prueba que **CH** está generada por las álgebras finitas y subdirectamente ireducibles que contiene.
Como A_∞ es imagen homomorfa de A deducimos que $A_\infty \in V(\{A_k : k > 0\})$. Por la Proposición 2.4.15 (ii) deducimos que $A_k \in V(A_\infty)$ lo que prueba que **CH1** $= V(A_\infty) = V(\{A_k : k > 0\})$. La prueba que **CH2** $= V(B_\infty) = V(\{B_k : k > 0\})$ es análoga. □.

Proposición 2.4.18 $B_k \in$ **CH3** *para todo* $k > 0$.

Demostración. Mostraremos que si $k > 0$ entonces B_k es imagen homomorfa de una subálgebra de $C = \prod_{n\geq 1} C_n$. Calculemos primero las distintas potencias del operador j aplicadas al último elemento de C. $j(1) = (0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \ldots)$, $j^2(1) = (0, 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \ldots), \ldots, j^k(1)$ es el vector que se anula en las primeras k coordenadas y es $\frac{1}{k+1}$ a partir de la $k+1$ ésima coordenada. De esto deducimos que $1 > j(1) > j^2(1) > \ldots j^k(1) \ldots$.
Sea $S = \{0\} \cup \{j^i(1) : i \in \mathrm{N}\}$. Es inmediato ver que S es una subálgebra de C, pues S es una cadena. Sea $h : S \to B_1$ la aplicación definida por $h(j^i(1)) = 1$ para todo $i \in \mathrm{N}$ y $h(0) = 0$. Es fácil ver que h es un homomorfismo suryectivo de reticulados modales. Por lo tanto B_1 es imagen homomorfa de S.
Sea $k > 1$. Definamos el siguiente elemento c de C:

$$c_1 = c_2 = \ldots = c_{k-1} = 0, c_k = 1, c_{k+1} = \tfrac{1}{2}, \ldots, c_{k+i} = \tfrac{1}{i+1} \text{ para todo } i.$$

De la definición de c resulta que $c > j(c) > j^2(c) > \ldots > j^{k-1}(c)$ y que $j^k(c) = 0$. Sea T_k la subálgebra de C generada por S y por los elementos $c, j(c), \ldots, j^{k-1}(c)$. Veamos que B_k es imagen homomorfa de T_k. Sea $d_1 = c, d_2 = j(c) = j(d_1), \ldots, d_k = j^{k-1}(c) = j(d_{k-1})$. Es fácil verificar que $x \in T_k$ si y sólo si existen elementos $s, s_1, s_2, \ldots, s_k \in S$ tales que $x = s \vee (s_1 \wedge d_1) \vee (s_2 \wedge d_2) \vee \ldots \vee (s_k \wedge d_k)$.
De la definición de los d_i resulta que $d_i \wedge s \neq 0$ para todo $s \in S$ no nulo. De esta propiedad y del hecho que S es una cadena, inferimos fácilmente que $P = T_k \backslash \{0\}$ es un filtro de T_k. Es claro que P es un filtro maximal en T_k y por lo tanto un filtro primo de T_k. Como j es un homomorfismo de reticulados y $j^i(1) \in P$ para todo i, deducimos que $j^{-i}(P)$ es un filtro primo de T_k para todo i.

Como $j(x) \leq x$, tenemos que $j^{-1}(P) \subseteq P$, lo que implica que $j^{-k}(P) \subseteq j^{-k+1}(P) \subseteq \ldots \subseteq j^{-1}(P) \subseteq P$. Como $j(d_k) = 0$, $d_i = j(d_{i-1})$ si $1 < i \leq k$ y $d_k \in P$, tenemos que $d_k \in P \backslash j^{-1}(P), d_{k-1} \in j^{-1}(P) \backslash j^{-2}(P), \ldots, d_{k-i} \in j^{-i}(P) \backslash j^{-i-1}(P), \ldots, d_1 \in j^{-k+1}(P) \backslash j^{-k}(P)$. Por lo tanto tenemos que

$j^{-k}(P) \subset j^{-k+1}(P) \subset \ldots \subset j^{-1}(P) \subset P$

y es fácil ver que:

$j^{-k}(P) = \{x \in T_k \mid$ existen elementos $s, s_1, \ldots, s_k \in S$ tales que $s \neq 0$ y $x = s \vee s_1 \wedge d_1 \vee \ldots s_k \wedge d_k\}$,

lo que implica que $j^{-1}(j^{-k}(P)) = j^{-k}(P)$, pues si $s \in S$ es distinto de cero entonces también $j(s) \neq 0$. Sea $X = X(T_k), x = P$ y $j^* = R$. Como j es un homomorfismo de reticulados, tenemos que R es parcialmente funcional y verifica las siguientes condiciones: $f_R^i(x) \in domR$ para todo i, $x > f_R(x) > \ldots f_R^k(x)$ y $f_R(f_R^k(x)) = f_R^k(x)$. Por lo tanto, deducimos de la Observación 2.4.1 (b2) que X contiene una copia del dual de B_k, lo que implica que B_k es imagen homomorfa de T_k. □

Observación 2.4.19 De las proposición 2.4.18 y del teorema 2.4.17 deducimos que **CH2** es una subvariedad de **CH3**. Por lo tanto $(*)$ **CH23** = **CH3**. Más aún, **CH13** = **CH**. En efecto, del Teorema 2.4.17 deducimos que **CH** está generada por A_∞, B_∞ y por las álgebras C_k. De la igualdad $(*)$ inferimos que $B_\infty \in$ **CH13** y de la definición de **CH13** resulta que A_∞ y C_k pertenecen a **CH13** lo que implica que **CH13** = **CH**.

Nuestro próximo paso será dar para cada subvariedad de **CH**, un conjunto de identidades que caracterizan dicha subvariedad.

Observemos que si $\mathcal{V}$ es una subvariedad de **CH**, entonces del Teorema 2.4.16 se deduce que las únicas álgebras subdirectamente irreducibles en $\mathcal{V}$ son algunas de las álgebras $A_\infty, B_\infty, A_k, B_l$ y C_m, para $k, l, m = 1, 2, \ldots$.

Teorema 2.4.20 *$\mathcal{V}$ es una subvariedad propia de* **CH** *si y sólo si es algunas de las siguientes clases ecuacionales:*

(1) $\mathcal{V} = V(A_\infty) =$ **CH1** *está caracterizada por la ecuación:*

(e1) $x \leq j(x)$.

(2) $\mathcal{V} = V(B_\infty) =$ **CH2** *está caracterizada por las ecuaciones:*

(e2) $j(x) \leq x$.

(e3) $j(1) = 1$.

(3) $\mathcal{V} = V(\{C_m : m > 0\}) = \mathbf{CH3}$ *está caracterizada por la ecuación:*

(e4) $j(x) \leq x$.

(4) $\mathcal{V} = V(A_\infty, B_\infty) = \mathbf{CH12}$ *está caracterizada por la ecuación:*

(e5) $j(1) = 1$.

(5) *Sea k un entero positivo. Entonces $\mathcal{V} = V(A_k)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e6) $x \leq j(x)$.

(e7) $j^k(x) = j^{k-1}(x)$.

(6) *Sea l un entero positivo. Entonces $\mathcal{V} = V(B_l)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e8) $j(x) \leq x$.

(e9) $j(1) = 1$.

(e10) $j^l(x) = j^{l-1}(x)$.

(7) *Sea m un entero positivo. Entonces $\mathcal{V} = V(C_m)$ está caracterizada por la ecuación:*

(e11) $j^m(1) = 0$.

(8) *Sean k, l enteros positivos, con $k > l$. Entonces $\mathcal{V} = V(A_k, B_l)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e12) $j^l(x) \vee j^k(x) = j^{l-1}(x) \vee j^{k-1}(x)$.

(e13) $j(1) = 1$.

(9) *Sean k, l enteros positivos, con $k \leq l$. Entonces $\mathcal{V} = V(A_k, B_l)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e14) $j^l(x) \wedge j^k(x) = j^{l-1}(x) \wedge j^{k-1}(x)$.

(e15) $j(1) = 1$.

(10) *Sean k, m enteros positivos. Entonces $\mathcal{V} = V(A_k, C_m)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e16) $j^k(x) \wedge j^m(1) = j^{k-1}(x) \wedge j^m(1)$.

(e17) $x \wedge j^m(1) \leq j(x)$.

(11) *Sean l, m enteros positivos. Entonces $\mathcal{V} = V(B_l, C_m)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e18) $j^l(x) \wedge j^m(1) = j^{l-1}(x) \wedge j^m(1)$.

(e19) $j(x) \wedge j^m(1) \leq x$.

(e20) $j^{m+1}(1) = j^m(1)$.

(12) *Sean k, l, m enteros positivos, con $k > l$. Entonces $\mathcal{V} = V(A_k, B_l, C_m)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e21) $j^l(x) \vee j^k(x) = j^{l-1}(x) \vee j^{k-1}(x)$.

(e22) $j^{m+1}(1) = j^m(1)$.

(13) *Sean k, l, m enteros positivos, con $k \leq l$. Entonces $\mathcal{V} = V(A_k, B_l, C_m)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e23) $j^l(x) \wedge j^k(x) = j^{l-1}(x) \wedge j^{k-1}(x)$.

(e24) $j^{m+1}(1) = j^m(1)$.

(14) *Sea l un entero positivo. Entonces $\mathcal{V} = V(A_\infty, B_l)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e25) $j^{l-1}(x) \leq j^l(x)$.

(e26) $j(1) = 1$.

(15) *Sea m un entero positivo. Entonces $\mathcal{V} = V(A_\infty, C_m)$ está caracterizada por la ecuación:*

(e27) $x \wedge j^m(1) \leq j(x)$.

(16) *Sean l, m enteros positivos. Entonces $\mathcal{V} = V(A_\infty, B_l, C_m)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e28) $j^{l-1}(x) \wedge j^m(1) \leq j^l(x)$.

(e29) $j^{m+1}(1) = j^m(1)$.

(17) *Sea k un entero positivo. Entonces $\mathcal{V} = V(B_\infty, A_k)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e30) $j^k(x) \leq j^{k-1}(x)$.

(e31) $j(1) = 1$.

(18) *Sea m un entero positivo. Entonces $\mathcal{V} = V(B_\infty, C_m)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e32) $j(x) \leq x$.

(e33) $j^{m+1}(1) = j^m(1)$.

(19) *Sean k, m enteros positivos. Entonces $\mathcal{V} = V(B_\infty, A_k, C_m)$ está caracterizada por las ecuaciones:*

(e34) $j^k(x) \wedge j^m(1) \leq j^{k-1}(x)$.

(e35) $j^{m+1}(1) = j^m(1)$.

(20) *Sea k un entero positivo. Entonces $\mathcal{V} = V(\{C_m : m > 0\}, A_k))$ está caracterizada por la ecuación:*

(e36) $j^k(x) \leq j^{k-1}(x)$.

(21) *Sea m un entero positivo. Entonces $\mathcal{V} = V(A_\infty, B_\infty, C_m)$ está caracterizada por la ecuación:*

(e37) $j^{m+1}(1) = j^m(1)$.

Demostración. De la Proposición 2.4.15 deducimos que si $\mathcal{V}$ es una subvariedad de **CH** que contiene infinitas álgebras A_k, entonces contiene a todas las álgebras A_k y por lo tanto contiene a A_∞. Análogamente, si $\mathcal{V}$ contiene infinitas álgebras B_l o infinitas álgebras C_m, debe contener a B_∞ en el primer caso, y debe contener a todas las álgebras C_m en el segundo caso. De la Proposición 2.4.15 deducimos que $\mathcal{V}$ contiene un número finito de álgebras A_k, $A_{k_1}, \ldots, A_{k_n}$ con $k_1 < \ldots < k_n$, si y sólo si contiene a A_{k_n}; y la misma propiedad vale para las álgebras B_l y C_m. De éstas propiedades , de la Observación 2.4.19 y del Teorema 2.4.16 (3) deducimos que $\mathcal{V}$ es una subvariedad propia de **CH** si y sólo si $\mathcal{V}$ está generada por las álgebras subdirectamente irreducibles que corresponden a uno de los 21 tipos dados arriba. Pasaremos a demostrar ahora que las ecuaciones dadas arriba caracterizan a cada uno de estos tipos de subvariedades.
(1) Es inmediato ver que A_∞ verifica la ecuación $x \leq j(x)$ lo que implica que toda álgebra de **CH1** verifica la ecuación (e1). Supongamos ahora que A sea un álgebra subdirectamente irreducible en **CH** verifica la ecuación (e1). Es inmediato ver que tanto B_∞ como B_l no satisfacen (e1) para ningún $l > 1$, tomando $x = \frac{1}{2}$. Análogamente, es inmediato ver que ningún C_m satisface

(e1), tomando $x = 1$. Por lo tanto A es A_k para algún $k > 0$ o es A_∞, lo que implica que A pertenece a CH1.

(2) La demostración es análoga a (1) y la omitiremos.

(3) Como C_m verifica la ecuación (e4) para todo $m > 0$, inferimos que toda álgebra de **CH3** también la verifica. Es fácil ver que si A un álgebra subdirectamente irreducible en **CH** verifica (e4), entonces A no puede ser A_∞ ni tampoco ningún A_k, con $k > 1$. Por lo tanto, deducimos de la igualdad **CH23** = **CH3** que $A \in$ **CH3**.

(4) Como las álgebras A_∞ y B_∞ satisfacen la ecuación (e5), deducimos que toda álgebra en **CH12** también la verifica; y es obvio que si un álgebra subdirectamente irreducible en **CH** verifica la ecuación $j(1) = 1$ entonces dicha álgebra no puede ser C_m para ningún $m > 0$.

(5) Es claro que A_k verifica (e6) y es fácil ver de la definición de j que si $x \in A_k$ es distinto de 0, entonces $j^k(x) = j^{k-1}(x) = 1$. Luego A_k verifica (e6) y (e7) lo que implica que toda álgebra de $\mathcal{V}$ verifica ambas ecuaciones. Sea A un álgebra subdirectamente irreducible en **CH** verifica (e6) y (e7). Es claro que A no puede ser ningún C_k y ningún B_l con $l > 1$. Por lo tanto A es A_n para algún $n > 0$. Si $n > k$, deducimos de la proposición 2.4.15 que A_{k+1} verificaría (e7) pues A_{k+1} es una subálgebra de A_n. Luego $x = \frac{1}{k+1}$ verificaría (e7). Pero $j^k(\frac{1}{k+1}) = 1$ y $j^{k-1}(\frac{1}{k+1}) = \frac{1}{2}$ lo que es un absurdo. Por lo tanto $n \leq k$. Por la proposición 2.4.15 deducimos que $A_n \in \mathcal{V}$.

(6) La demostración es muy similar al caso (5) y la omitiremos.

(7) Es fácil ver que C_m verifica la ecuación (e11), lo que implica que toda álgebra de $\mathcal{V}$ la verifica. Supongamos ahora que un álgebra subdirectamente irreducible en **CH** la verifica. Es claro que dicha álgebra no puede verificar la igualdad $j(1) = 1$, lo que implica que dicha álgebra debe ser C_n para algún $n > 0$. Si $n > m$ entonces por la Proposición 2.4.15 C_{m+1} verificaría (e11) . Pero en C_{m+1} $j^m(1) = \frac{1}{m+1}$, lo que es un absurdo. Por lo tanto $n \leq m$ y por la Proposición 2.4.15 deducimos que $C_n \in \mathcal{V}$.

(8) Por los casos (5) y (6) tenemos que A_k y B_l verifican las ecuaciones (e7) y (e10) respectivamente. Veamos que A_k verifica (e12). Sea $x \in A_k$. Como $x \leq j(x)$ y $k > l$ resulta que $j^l(x) \leq j^k(x)$ y $j^{l-1}(x) \leq j^{k-1}(x)$, lo que implica que $j^l(x) \vee j^k(x) = j^k(x) = j^{k-1}(x) = j^{l-1}(x) \vee j^{k-1}(x)$. Por lo tanto, A_k verifica (e12) y obviamente (e13). En forma análoga se demuestra que B_l verifica (e12) y (e13) lo que implica que toda álgebra en $\mathcal{V}$ verifica estas ecuaciones. Supongamos ahora que un álgebra subdirectamente irreducible

A las verifica. Como $j(1) = 1$ deducimos que A no puede ser ningún C_m. Si A es A_n para algún $n > 0$, veamos que $n \leq k$. Como $k > l$ y $x \leq j(x)$ entonces A_n verifica (e12) si y sólo si verifica la ecuación $j^k(x) = j^{k-1}(x)$ y por (5), esto implica que $n \leq k$. Por lo tanto A_n pertenece a $\mathcal{V}$. El mismo argumento muestra que A no puede ser A_∞. Si A es de la forma B_n deducimos análogamente que $B_n \in \mathcal{V}$, y también inferimos que A no puede ser B_∞.

(9) La demostración es muy similar al caso (8) y la omitiremos.

(10) Por (5) y (7) es inmediato ver que A_k y C_m verifican (e16) y (e17). Luego toda álgebra en $\mathcal{V}$ la verifica. Sea A un álgebra subdirectamente irreducible que verifica (e16) y (e17). Es claro que A no puede ser B_∞ y si A fuese A_∞, satisfacería (e7), absurdo pues B_∞ pertenecería a $V(A_k)$. Supongamos que A es C_n para algún $n > 0$. Si $n > m$, entonces por la Proposición 2.4.15 C_{m+1} debe satisfacer (e16) y (e17). Tomando $x = j^m(1)$ en (e17), llegaríamos a que $j^m(1) \wedge j^m(1) = j^m(1) \leq j^{m+1}(1) = 0$. Luego $j^m(1)$ sería 0 en C_{m+1}, absurdo. Luego $n \leq m$ y por lo tanto $A \in \mathcal{V}$. Supongamos ahora que A es B_l para algún $l > 0$. Entonces B_l verificaría la ecuación $x \leq j(x)$ pues $j(1) = 1$, lo que implica que $l = 1$ y por lo tanto $B_1 = A_1$. Luego A pertenece a $\mathcal{V}$. Finalmente, si A es A_n con $n > 0$ deducimos de (e16) que A_n verifica la ecuación $j^k(x) = j^{k-1}(x)$ y por (5) deducimos que $k \leq n$. Por lo tanto A pertenece a $\mathcal{V}$.

(11) La demostración es muy similar al caso (10) y la omitiremos.

(12) Es consecuencia inmediata de los casos (7) y (8) que toda álgebra en $\mathcal{V}$ satisface las ecuaciones (e21) y (e22). Sea A un álgebra subdirectamente irreducible en CH que satisface (e21) y (e22). Supongamos primero que A es C_n para algún $n > 0$. Si $n > m$, entonces C_{m+1} satisfacería (e22). Pero en C_{m+1} $j^m(1) = \frac{1}{m+1}$ y $j^{m+1}(1) = 0$, absurdo. Luego $n \leq m$ y por lo tanto A pertenece a $\mathcal{V}$. Del caso (7) deducimos que A no puede ser A_∞ ni tampoco B_∞. Si A es A_n o B_p con $n, p > 0$, entonces del caso (7) deducimos que A pertenece a $\mathcal{V}$.

(13) La demostración es análoga al caso anterior y la omitiremos.

(14) Como A_∞ verifica la ecuación $x \leq j(x)$ y j^{l-1} es creciente deducimos que A_∞ verifica (e25) y obviamente (e26). Análogamente, inferimos del caso (6) que B_l verifica (e25) y (e26) lo que implica que toda álgebra de $\mathcal{V}$ verifica estas ecuaciones. Sea A un álgebra subdirectamente irreducible que verifica (e25) y (e26). Es claro que A no puede ser ningún C_m pues A verifica (e26). Supongamos que A sea algún B_n. Si $n > l$, entonces B_{l+1} verificaría

(e25) . En particular, $x = \frac{1}{2}$ verificaría esta ecuación, lo que implicaría que $j^{l-1}(x) = \frac{1}{l+1} \leq j^l(x) = 0$, absurdo. Luego $n \leq l$, lo que implica que A pertenece a $\mathcal{V}$. Es fácil ver que A no puede ser B_∞ y es claro que si A es A_∞ o algún A_k entonces A pertenece a $\mathcal{V}$.
(15) Como A_∞ verifica la ecuación $x \leq j(x)$ y C_m verifica la ecuación $j^m(1) = 0$ deducimos que toda álgebra en $\mathcal{V}$ verifica (e27). Sea A un álgebra subdirectamente irreducible en **CH** que verifica (e27). Es claro que A no puede ser B_∞. Supongamos que A es B_l para algún $l > 0$. Como en este caso $j(1) = 1$, deducimos que B_l verifica la ecuación $x \leq j(x)$, lo que implica que $l = 1$. Como $B_1 = A_1$ deducimos que A está en $\mathcal{V}$. Supongamos ahora que A sea algún C_n. Si $n > m$, entonces C_{m+1} verificaría (e27). En particular, $x = j^m(1)$ verificaría esta ecuación, lo que implica que $j^m(1) = j^m(1) \wedge j^m(1) \leq j^{m+1}(1) = 0$, lo que contradice el hecho que $j^m(1) \neq 0$ en C_{m+1}. Luego $n \leq m$, y por lo tanto A pertenece a $\mathcal{V}$. Por último, es claro que si A es A_∞ o algún A_k entonces A pertenece a $\mathcal{V}$.
(16) De los casos (6), (7) y el hecho que A_∞ verifica la ecuación $x \leq j(x)$ deducimos que toda álgebra en $\mathcal{V}$ verifica (e28) y (e29). Sea A un álgebra subdirectamente irreducible en **CH** que verifica (e28) y (e29). Es fácil ver que A no puede ser B_∞. Supongamos que A sea B_n para algún $n > 0$. Como en este caso $j(1) = 1$, deducimos que B_n verifica la ecuación $j^{l-1}(x) \leq j^l(x)$ y por lo tanto la ecuación $j^{l-1}(x) = j^l(x)$, pues $j(x) \leq x$. Del caso (6) deducimos que $n \leq l$ y por lo tanto A pertenece a $\mathcal{V}$. Supongamos ahora que A sea algún C_n. Si $n > m$, entonces C_{m+1} verificaría (e29), y esto es una contradicción pues $j^m(1) \neq 0$ en C_{m+1}. Por lo tanto $n \leq m$, lo que implica que A pertenece a $\mathcal{V}$. Por último, es claro que si A es A_∞ o algún A_k entonces A pertenece a $\mathcal{V}$.
(17) La demostración es análoga al caso (14) y la omitiremos.
(18) Razonando como en los casos anteriores es inmediato ver que toda álgebra en $\mathcal{V}$ verifica (e32) y (e33). Sea A un álgebra subdirectamente irreducible en CH que verifica (e32) y (e33). Es claro que A no puede ser A_∞. Supongamos que A sea A_k para algún $k > 0$. Como A satisface (e32) deducimos que $k = 1$ lo que implica que A pertenece a $\mathcal{V}$ pues $A_1 = B_1$. Si A es C_n para algún $n > 0$, veamos que $n \leq m$. Si $n > m$, entonces C_{m+1} verificaría (e33). En particular $x = j^m(1)$ satisfacería (e33), absurdo pues $j^m(1) \neq 0$. Por lo tanto $n \leq m$ lo que implica que A está en $\mathcal{V}$. Por último, es claro que si A es B_∞ o algún B_l entonces A pertenece a $\mathcal{V}$.
(19) La demostración es análoga al caso (16) y la omitiremos.

(20) De los casos (3) y (5) y del hecho que j es creciente deducimos que toda álgebra en $\mathcal{V}$ verifica (e36). Supongamos ahora que A es un álgebra subdirectamente irreducible en **CH** que verifica (e36). Supongamos que A sea A_n para algún $n > 0$. Por el caso (5) deducimos que $n \leq k$ lo que implica que A pertenece a $\mathcal{V}$. Es obvio que A no puede ser A_∞. En cualquier otro caso A pertenece a **CH3**, pues **CH2** es una subvariedad de **CH3**, lo que implica que A pertenece a $\mathcal{V}$.
(21) Razonando como en los casos anteriores es fácil ver que toda álgebra en $\mathcal{V}$ verifica (e37). Sea A un álgebra subdirectamente irreducible en **CH** que satisface (e37). Si A es C_n para algún $n > 0$, entonces como en el caso (18) deducimos que $n \leq m$. Por lo tanto A pertenece a $\mathcal{V}$. Por último es claro que si A es uno de los otros tipos de álgebras subdirectamente irreducibles, entonces A pertenece a $\mathcal{V}$.□

Daremos ahora una descripción del reticulado de subvariedades de **CH** . Denotemos con $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$ la cadena que se obtiene agregando al conjunto de los números naturales un último elemento ∞ y sea M el siguiente reticulado:
$M = \{(x, y, z) \in \mathbf{N} \cup \{\infty\} \times \mathbf{N} \cup \{\infty\} \times \mathbf{N} \mid x \neq 1\}$
Denotemos con A_0, B_0 y C_0 al álgebra trivial $\{0\}$. En este caso $0 = 1$ y $j(0) = 0$. El próximo resultado es un consecuencia inmediata del teorema anterior.

Corolario 2.4.21 *Sea S el reticulado de las subvariedades de* CH *y sea $M \cup \{\infty\}$ el reticulado que se obtiene agregándole a M un último elemento ∞. Entonces la función $f : M \cup \{\infty\} \to S$ definida por:*

$$f(m) = \begin{cases} V(A_x, B_y, C_z) & si\ m = (x, y, z) \in M \\ \mathbf{CH} & si\ m = \infty \end{cases}$$

es un isomorfismo de reticulados acotados.

Capítulo 3

Algebras de De Morgan monádicas

3.1 Algebras de De Morgan y teoremas de representación

Un *álgebra de De Morgan* es un álgebra $\mathbf{A} = (A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ de tipo $(2, 2, 1, 0, 0)$ tal que $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un reticulado distributivo acotado y la operación unaria $\sim$ verifica las identidades:

(m1) $\sim (x \vee y) = \sim x \wedge \sim y$.

(m2) $\sim\sim x = x$.

A la operación $\sim$ la llamaremos *negación de De Morgan.*
Como en el caso de los reticulados distributivos acotados, las álgebras de De Morgan serán también notadas por sus universos. Un álgebra de De Morgan A se dice un *álgebra de Kleene* si verifica la condición:

(k) $x \wedge \sim x \leq y \vee \sim y$ para todo $x, y \in A$.

Un estudio detallado de las álgebras de De Morgan y las álgebras de Kleene puede encontrarse en [1] y en [41]. En el libro de Rasiowa ([41]) las álgebras de De Morgan son llamadas álgebras *casi-Booleanas.* Estas álgebras están relacionadas con ciertas lógicas no clásicas y han sido estudiadas por varios autores ([1],[25],[3],[32]). En particular, están relacionadas con una lógica cuatro-valente desarrollada por Belnap en [2].

Si $(A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ es un álgebra de De Morgan, entonces $\mathbf{L}(A)$ denotará el reticulado distributivo acotado subyacente $(A, \vee, \wedge, 0, 1)$. Para simplificar, denotaremos con $X(A)$ al conjunto de filtros primos de $\mathbf{L}(A)$, en lugar de $X(\mathbf{L}(A))$. A la aplicación $\sigma_{\mathbf{L}(A)}$ la notaremos también con σ_A.
Denotaremos con $\mathbf{3}$ el álgebra de Kleene con tres elementos $0 < c < 1$, donde $\sim c = c$.

Sea L un reticulado distributivo acotado. Denotaremos con $A(L)$ al álgebra de De Morgan construída de la siguiente forma: el reticulado distributivo acotado subyacente es el producto cartesiano $L \times L^{\geq}$, la negación de De Morgan está definida por: $\sim (x, y) = (y, x)$ para todo $(x, y) \in L \times L^{\geq}$. Observemos que $A(L)$ no es un álgebra de Kleene, a menos que L sea el reticulado trivial con un elemento. En efecto, sea $x = (0,0)$ y sea $y = (1,1)$. Entonces $x \wedge \sim x = (0,0) \wedge (0,0) = (0,0)$, $y \vee \sim y = (1,1) \vee (1,1) = (1,1)$ y $(0,0) \not\leq (1,1)$, pues en la segunda coordenada el primer elemento es el 1 y el último elemento es el 0. Si $L = \mathbf{2}$, $a = (0,0)$ y $b = (1,1)$, entonces $A(\mathbf{2})$ es el álgebra de De Morgan con cuatro elementos $\{0, a, b, 1\}$ caracterizada por $\sim a = a, \sim b = b, \sim 0 = 1, \sim 1 = 0, a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$.
Observemos que $\mathbf{2} \times \mathbf{2}^{\geq}$ es un álgebra de Boole. Por lo tanto, *tenemos definida en* $\mathbf{2} \times \mathbf{2}^{\geq}$ *dos negaciones de De Morgan*; una es el complemento $\neg$, y la otra la negación $\sim$ definida arriba.

Sea A un álgebra de De Morgan. Diremos que $a \in A$ es un *punto fijo* si $\sim a = a$. En la literatura de álgebras de De Morgan, los puntos fijos también son llamados *centros*. Toda álgebra de Kleene tiene a lo sumo un punto fijo. Esta propiedad no vale en general en las álgebras de De Morgan. Por ejemplo, los puntos fijos de $A(L)$ son los pares (x, x), con $x \in L$. Por lo tanto, si L no es trivial, deducimos que $A(L)$ tiene por lo menos dos puntos fijos que son el $(0,0)$ y el $(1,1)$.

Toda *álgebra de De Morgan A es isomorfa a una subálgebra de $A(L)$* para algún reticulado distributivo acotado L. En efecto, sea $L = \mathbf{L}(A)$ y sea $f : A \to A(\mathbf{L}(A))$ la aplicación definida por:

$f(a) = (a, \sim a)$ para todo $a \in A$.

Es fácil ver que f define un homomorfismo inyectivo de A en $A(\mathbf{L}(A))$. La próxima proposición muestra qué condiciones debe verificar un álgebra de De Morgan A para que sea isomorfa a $A(L)$ para algún reticulado distributivo acotado L.

Proposición 3.1.1 *Sea A un álgebra de De Morgan. Entonces A es isomorfa a $A(L)$ para algún reticulado distributivo acotado L si y sólo si A tiene una subálgebra isomorfa a $A(\mathbf{2})$.*

Demostración. La necesidad de la proposición es obvia. Para probar la suficiencia, supongamos que $A(\mathbf{2})$ sea isomorfa a una subálgebra de A. Luego existen $a, b \in A$ tales que $\sim a = a$, $\sim b = b$, $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$. Sea $L = \{x \in \mathrm{L}(A) \mid x \leq a\}$. Es claro que L es un reticulado distributivo acotado, con último elemento a. Afirmamos que A es isomorfa a $A(L)$. Para probar la afirmación, demostraremos que la aplicación $f : A \rightarrow A(L)$ definida por:

$f(x) = (x \wedge a, \sim x \wedge a)$

es un isomorfismo de álgebras de De Morgan.

(i) f es inyectiva. Sean $x, y \in A$ tales que $f(x) = f(y)$. Luego $x \wedge a = y \wedge a$ y $\sim x \wedge a = \sim y \wedge a$. De la segunda igualdad deducimos que $x \vee a = y \vee a$ pues a es un punto fijo. De ésta última igualdad y de la primera resulta que $x = y$.

(ii) f es suryectiva. Sean $x, y \in A$ tales que $x \leq a$ e $y \leq a$. Sea $x' = x \vee (\sim y \wedge b)$. Como $a \wedge b = 0$ resulta que $x' \wedge a = x \wedge a$. Además, como b es un punto fijo y $a \leq \sim x$, tenemos que $\sim x' \wedge a = \sim x \wedge (y \vee b) \wedge a = (y \vee b) \wedge a = y \wedge a = y$. Luego $f(x') = (x, y)$.

(iii) f es un isomorfismo de conjuntos ordenados y f preserva la negación de De Morgan. Esto es de fácil verificación y omitiremos la prueba.$\square$

Toda álgebra de Boole es un álgebra de Kleene donde la negación de De Morgan coincide con el complemento $\neg$. Es fácil ver que toda álgebra de De Morgan A en el que el orden subyacente es total, o equivalentemente, $\mathrm{L}(A)$ es una cadena, es un álgebra de Kleene. Más aún, toda cadena finita con n elementos admite una única estructura de álgebra de Kleene. En efecto, supongamos que la cadena es $0 < 1 < \ldots < n$. Entonces definiendo $\sim i = n - i$ para todo $0 \leq i \leq n$, resulta que $\sim$ es una negación de De Morgan y es fácil ver que esta es la única negación de De Morgan que se puede definir en la cadena.

Este resultado no es válido para cadenas infinitas. Tomemos por ejemplo la cadena $[0, 1]_Q$ determinada por los números racionales entre 0 y 1. Esta cadena tiene una estructura de álgebra de Kleene, definiendo $\sim a = 1 - a$ para todo número racional a entre 0 y 1. Sin embargo es posible definir otra negación de De Morgan en esta cadena de modo tal que, con esta nueva

negación, se obtiene otra álgebra de De Morgan no isomorfa a la original. En efecto, sea $A = [0,1]_Q \setminus \frac{1}{2}$. Como $\frac{1}{2}$ es el punto fijo de $[0,1]_Q$, resulta que A es un álgebra de De Morgan. Por el Teorema de Cantor, $\mathbf{L}(A)$ es isomorfo a $\mathbf{L}([0,1]_Q)$ pues A es un subconjunto denso de $[0,1]_Q$. Sea $f : [0,1]_Q \to A$ un isomorfismo de conjuntos ordenados. Entonces definiendo $\sim_1 (a) = f^{-1}(\sim f(a))$ para todo $a \in [0,1]_Q$ se obtiene sobre $[0,1]_Q$ otra estructura de álgebras de De Morgan no isomorfa a la original, pues esta nueva álgebra de De Morgan no tiene punto fijo.
También es posibie que una cadena acotada no admita ninguna estructura de álgebra de De Morgan. Tomemos por ejemplo la cadena $C = \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ de los números naturales agregándole un último elemento ∞. Si fuese posible definir alguna negación de De Morgan $\sim$ sobre C, entonces ~ 1 sería el penúltimo elemento de $\mathbf{N} \cup \{\infty\}$, pues $\sim$ es un isomorfismo de orden de C sobre $C^{\geq}$ y 1 es un átomo de C, absurdo.
Notaremos con $\mathcal{A}$ a la categoría cuyos objetos son las álgebras de De Morgan y cuyos morfismos son los homomorfismos de álgebras de De Morgan.

La dualidad de Priestley puede ser extendida a las álgebras de De Morgan y álgebras de Kleene como sigue. Los detalles sobre esta dualidad puede ser encontrada en [14] y en [15]. (Ver también [7]).
Un *espacio de De Morgan* es un par (X, g) donde X es un espacio de Priestley y $g : X \to X$ es un homeomorfismo involutivo (es decir g^2 es la identidad sobre X) que es además un isomorfismo de orden de X sobre $X^{\geq}$. Esta aplicación se denomina *involución de De Morgan.*
Si $U \in D(X)$ y definimos $\sim U = X \setminus g(U)$ se tiene que $(D(X), \cup, \cap, \sim, \emptyset, X)$ es un álgebra de De Morgan que será denotada con $M(X, g)$.
Sean (X, g) y (X', g') espacios de De Morgan. Una aplicación $f : X \to X'$ se denomina *función de De Morgan* si es monótona, continua y satisface la igualdad $f(g(x)) = g'(f(x))$ para todo $x \in X$. Sea $\mathcal{DM}$ la categoría cuyos objetos son los espacios de De Morgan y cuyos morfismos son las funciones de De Morgan.
Sea $\psi_M : \mathcal{DM} \to \mathcal{A}$ el siguiente funtor. Si (X, g) es un objeto en $\mathcal{DM}$, entonces $\psi_M(X, g) = M(X, g)$. Si (X', g') es un espacio de De Morgan y $f : X \to X'$ es una función de De Morgan, entonces definiendo $\psi_M(f)(U) = f^{-1}(U)$ para todo $U \in D(X)$, resulta que $\psi_M : M(X', g') \to M(X, g)$ es un homomorfismo de álgebras de De Morgan.
Por lo tanto ψ_M es un funtor contravariante entre las categorías $\mathcal{DM}$ y $\mathcal{A}$.

Sea A un álgebra de De Morgan y sea $g : X(A) \to X(A)$ la siguiente aplicación:

$g(P) = A \setminus \{\sim p : p \in P\}$.

Entonces $(X(A), g)$ es un espacio de De Morgan que será denotado por $S(A)$.
Sea $\phi_A : \mathcal{A} \to \mathcal{DM}$ el siguiente funtor. Si A es un álgebra de De Morgan, entonces $\psi_A(A) = (X(A), g)$.
Si A' es un álgebra de De Morgan y $h : A \to A'$ es un homomorfismo, entonces definiendo $\phi_A(h)(P) = h^{-1}(P)$ para todo $P \in X(A)$, resulta que $\phi_A : (X(A), g) \to (X(A'), g')$ es una función de De Morgan.
Por lo tanto ϕ_A es un funtor contravariante entre las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{DM}$.

Las aplicaciones $\sigma_A : A \to M(S(A), g)$ y $\varepsilon_X : X \to S(M(X, g))$ son isomorfismos en las categorías $\mathcal{A}$ y $\mathcal{DM}$ respectivamente. Por lo tanto los funtores ψ_M y ϕ_A establecen una dualidad entre ambas categorías.

Un espacio de De Morgan (X, g) se dice un *espacio de Kleene* si para todo $x \in X$ se tiene que $x \leq g(x)$ o $g(x) \leq x$. Es fácil probar que la restricción de los funtores ψ_M y ϕ_A a las categorías de los espacios de Kleene y álgebras de Kleene respectivamente, establecen una dualidad entre ambas categorías.

Recordemos que $\mathcal{L}$ es la categoría de los reticulados distributivos acotados.
Sean $L : \mathcal{A} \to \mathcal{L}$ y $AM : \mathcal{L} \to \mathcal{A}$ los siguientes funtores.
Si A es un álgebra de De Morgan, entonces $L(A) = \mathbf{L}(A)$. Si B es un álgebra de De Morgan y $h : A \to B$ es un homomorfismo, entonces definimos $L(h) : \mathbf{L}(A) \to \mathbf{L}(B)$ como $L(h) = h$. Es claro que $L(h)$ está bien definida pues todo homomorfismo de álgebras de De Morgan es un homomorfismo de reticulados acotados.
Si L es un reticulado distributivo acotado, entonces $AM(L) = A(L)$. Si L' es un reticulado distributivo acotado y $h : L \to L'$ es un homomorfismo, entonces definimos $AM(h) : A(L) \to A(L')$ como

$AM(h)(a, b) = (h(a), h(b))$,

para todo $a, b \in L$. Es claro que $AM(h)$ es un homomorfismo de álgebras de De Morgan.
Por lo tanto L y AM son *funtores covariantes*. Más ún:

Proposición 3.1.2 *L es un adjunto a izquierda de AM.*

Demostración. Basta ver que existen transformaciones naturales $u : I \to AM \circ L$, $v : L \circ AM \to I$ tales que

$AM(v_L) \circ u_{A(L)} = id_{A(L)}$ y $v_{\mathbf{L}(A)} \circ L(u_A) = id_{\mathbf{L}(A)}$.

para todo par de objetos A y L en $\mathcal{A}$ y $\mathcal{L}$ respectivamente, donde I es el funtor identidad, $id_{\mathbf{L}(A)}$ es la identidad sobre $\mathbf{L}(A)$ y $id_{A(L)}$ es la identidad sobre $A(L)$. (ver por ejemplo [29]).
Definamos u como sigue. Si A es un álgebra de De Morgan, entonces $u_A : A \to A(\mathbf{L}(A))$ está definida por la fórmula:

$u_A(a) = (a, \sim a)$

para todo $a \in A$. Veamos que u es una transformación natural. Para ver esto debemos probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u_A} & A(\mathbf{L}(A)) \\ \downarrow h & & \downarrow AM \circ L(h) \\ B & \xrightarrow{u_B} & A(\mathbf{L}(B)) \end{array}$$

para toda álgebra de De Morgan B y todo homomorfismo $h : A \to B$. Sea $a \in A$. Entonces $u_B(h(a)) = (h(a), \sim h(a)) = (h(a), h(\sim a))$ y $AM \circ L(h)(u_A(a)) = AM \circ L(h)(a, \sim a) = (L(h)(a), L(h)(\sim a)) = (h(a), h(\sim a))$. Luego el diagrama es conmutativo.

Definamos v como sigue. Si L es un reticulado distributivo acotado, entonces $v_L : \mathbf{L}(A(L)) \to L$ está definida por la fórmula:

$v_L(a, b) = a$

Para todo $a \in L$. Es decir, v_L es la proyección sobre la primer coordenada. Veamos que v es una transformación natural. Para ver esto debemos probar que el siguiente diagrama es conmutativo:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{L}(A(L)) & \xrightarrow{v_L} & L \\ \downarrow L(AM(h)) & & \downarrow h \\ \mathbf{L}(A(L') & \xrightarrow{v_{L'}} & L' \end{array}$$

para todo reticulado distributivo acotado L' y todo homomorfismo $h : L \to L'$. Sean $a, b \in L$. Entonces $v_{L'}(L(AM(h))(a, b)) = v_{L'}((h(a), h(b)) = h(a)$ y $h(v_L(a, b)) = h(a)$. Por lo tanto el diagrama es conmutativo. Luego u y v son transformaciones naturales. Para completar la demostración, debemos verificar las igualdades:

$AM(v_L) \circ u_{A(L)} = id_{A(L)}$ y $v_{\mathbf{L}(A)} \circ L(u_A) = id_{\mathbf{L}(A)}$.

Verifiquemos primero la igualdad de la izquierda. Sea L un reticulado distributivo acotado y sean $a, b \in L$. Luego

$AM(v_L) \circ u_{A(L)}((a, b)) = AM(v_L)((a, b), (b, a)) = v_L(a, b) = (a, b)$.

Verifiquemos ahora la otra igualdad. Sea A un álgebra de De Morgan y sea $a \in A$. Luego $v_{\mathbf{L}(A)} \circ L(u_A)(a) = v_{\mathbf{L}(A)}(u_A(a)) = v_{\mathbf{L}(A)}(a, \sim a) = a$. □
Es claro que las transformaciones naturales u y v de la proposición anterior no son isomorfismos. Por lo tanto no se obtiene una equivalencia natural entre las categorías $\mathcal{L}$ y $\mathcal{A}$.

Observación 3.1.3 Sean L y M reticulados distributivos acotados. Es un hecho bien conocido que P es un filtro primo de $L \times M$ si y sólo si existe $Q \in X(L)$ tal que $P = Q \times M$ o bien existe $R \in X(M)$ tal que $P = L \times R$. En términos de la dualidad de Priestley, esta propiedad significa que el espacio de Priestley del producto directo $L \times M$ es homeomorfo e isomorfo como conjuntos ordenados a la unión disjunta $X(L) \times \{0\} \cup X(M) \times \{1\}$, donde un subconjunto de esta unión disjunta es un abierto si y sólo si es de la forma $U \times \{0\} \cup V \times \{1\}$, con U abierto de $X(L)$ y V abierto de $X(M)$; y el orden está dado del siguiente modo.
Sean $(x,i),(y,j) \in X(L) \times \{0\} \cup X(M) \times \{1\}$. Entonces $(x,i) \leq (y,j)$ si y sólo si $i = j$ y $x \leq y$.
Este espacio de Priestley se denomina *el coproducto* de $X(L)$ y $X(M)$.
Recíprocamente, si X e Y son espacios de Priestley disjuntos, entonces $X \cup Y$ es un espacio de Priestley, donde la topología y el orden están dados en la forma que recién mencionamos. En este caso el reticulado dual de $X \cup Y$ es $D(X) \times D(Y)$.
En el caso que $Y = X^{\geq}$, definimos $g : X \times \{0\} \cup X^{\geq} \times \{1\} \to X \times \{0\} \cup X^{\geq} \times \{1\}$ por $g(x,0) = (x,1)$ y $g(x,1) = (x,0)$. Es fácil verificar que $(X \times \{0\} \cup X^{\geq} \times \{1\}, g)$ es un espacio de De Morgan cuya álgebra dual es $A(D(X))$.
Recíprocamente, para cada reticulado distributivo acotado L, el espacio dual de $A(L)$ es el espacio de De Morgan $(X \times \{0\} \cup X^{\geq} \times \{1\}, g)$, donde $X = X(L)$ y g está definida como arriba.

Sean X, Y y Z conjuntos y sea $f : X \to Y \times Z$ una función. Denotaremos con f_1 y f_2 las composiciones $\pi_1 \circ f$ y $\pi_2 \circ f$ respectivamente, donde π_1 y π_2 son las proyecciones de $Y \times Z$ sobre Y y Z respectivamente.

Sea L un reticulado distributivo acotado y sea X un espacio de Priestley. Como ha sido observado en los preliminares, $X(L)$ es homeomorfo e isomorfo como conjuntos ordenados al espacio de Priestley de los homomorfismos acotados de L en $\mathbf{2}$; y $D(X)$ es isomorfo al reticulado $C(X)$ de las funciones monótonas y continuas de X en $\mathbf{2}$. De este último caso y de la dualidad de Priestley, se deduce que todo reticulado distributivo acotado se puede representar como el reticulado de las funciones monótonas y continuas de un espacio de Priestley en $\mathbf{2}$. Observemos que en la dualidad de Priestley, el conjunto $\mathbf{2}$ juega un doble papel, el de reticulado y el de espacio topológico ordenado.

Davey y Werner [17] desarrollaron una teoría de dualidad para clases de álgebras que son producto subdirecto de subálgebras de un álgebra finita y subdirectamente irreducible $\mathbf{P}$. En dicha dualidad, el dual de un álgebra es un espacio topológico asociado con una familia de relaciones, donde en particular, el dual de $\mathbf{P}$ tiene el mismo universo que P. En este sentido, $\mathbf{P}$ juega un doble papel al igual que el álgebra $\mathbf{2}$ en la variedad de los reticulados distributivos acotados. Davey y Werner prueban que toda álgebra $\mathbf{A}$ de la clase se puede representar como el álgebra de los morfismos continuos del dual de $\mathbf{A}$ en el dual de $\mathbf{P}$, donde los morfismos son aplicaciones que respetan las relaciones. Como caso particular, prueban que esta dualidad se aplica a las álgebras de De Morgan, donde en este caso $\mathbf{P} = A(\mathbf{2})$. Nuestro próximo paso será probar que la dualidad para álgebras de De Morgan descripta al principio de esta sección coincide escencialmente con la dualidad obtenida en [17] y veremos que esta equivalencia se obtiene directamente de la dualidad de Priestley.

En [17], se muestra que el dual de $A(\mathbf{2})$ es $\mathbf{2}\times\mathbf{2}$, con la topología producto y el orden definido coordenada a coordenada; y la involución de De Morgan es la función definida por:

(g) $g(x,y) = (1-y, 1-x)$.

Notaremos con $\mathbf{4}$ a este espacio de De Morgan.

Sea A un álgebra de De Morgan. Notaremos con $H(A)$ al conjunto de los homomorfismos de A en $A(\mathbf{2})$. El próximo lema es consecuencia de la Proposición 3.1.2.

Lema 3.1.4 *Sea A un álgebra de De Morgan, sea L un reticulado distributivo acotado y sea $h : A \to A(L)$ una aplicación. Entonces h es un homomorfismo de álgebras de De Morgan si y sólo si h_1 es un homomorfismo de reticulados acotados de* $\mathrm{L}(A)$ *en L y $h(a) = (h_1(a), h_1(\sim a))$ para todo $a \in A$.*

Sea A un álgebra de De Morgan y sea $h \in H(A)$. Por el lema anterior, $h(a) = (h_1(a), h_1(\sim a))$ para todo $a \in A$. Como $h_1 : \mathbf{L}(A) \to \mathbf{2}$ es un homomorfismo de reticulados acotados, entonces h_1 es la función característica de un filtro primo P. Por lo tanto, h queda definido como sigue:

$$h(a) = \begin{cases} (1,0) & \text{si } a \in P \cap g(P) \\ (1,1) & \text{si } a \in P \setminus g(P) \\ (0,0) & \text{si } a \in g(P) \setminus P \\ (0,1) & \text{si } a \notin P \cup g(P) \end{cases}$$

Recíprocamente, dado un filtro primo P de $\mathbf{L}(A)$, es fácil ver que la aplicación $h_P : A \to A(\mathbf{2})$ definida como arriba es un homomorfismo de álgebras de De Morgan, y es claro que si P y Q son dos filtros primos distintos de $\mathbf{L}(A)$, entonces $h_P \neq h_Q$. Por otra parte, como $(\mathbf{4}, g)$ es un espacio de De Morgan, entonces $(\mathbf{4}^A, g^A)$ es un espacio de De Morgan donde $\mathbf{4}^A$ es el espacio de Priestley en el que el orden está definido coordenada a coordenada, la topología es la topología producto y g^A está definida por la fórmula:
$g^A(f)(a) = g(f(a))$ para toda $f \in \mathbf{4}^A$ y para todo $a \in A$.

Es fácil ver que $H(A)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbf{4}^A$ y que la aplicación $P \mapsto h_P$ es un homeomorfismo entre $X(A)$ y $H(A)$. Más aún, afirmamos que $H(A)$ es cerrado bajo la operación g^A, o sea, si $h \in H(A)$, entonces $g^A(h) \in H(A)$. En efecto, del Lema 3.1.4, resulta que $h(a) = (h_1(a), h_1(\sim a))$ para todo $a \in A$. Luego $g^A(h)(a) = g(h(a)) = (1 - h_1(\sim a), 1 - h_1(a))$. Como la correspondencia $a \mapsto 1 - h_1(\sim a)$ define un homomorfismo de reticulados acotados, deducimos del Lema 3.1.4 que $g^A(h)$ es un homomorfismo de álgebras de De Morgan, como queríamos demostrar. Por lo tanto, $(H(A), g^A)$ es un espacio de De Morgan.

De estas consideraciones deducimos el siguiente resultado:

Teorema 3.1.5 *Sea A un álgebra de De Morgan. Entonces la correspondencia $P \mapsto h_P$ es un isomorfismo de espacios de De Morgan entre $(X(A), g)$ y $(H(A), g^A)$.*

Sea (X, g) un espacio de De Morgan. Notaremos con $C(X, g)$ al conjunto de las funciones de De Morgan X en $\mathbf{4}$. Como los elementos del álgebra de De Morgan $A(\mathbf{2})$ son los elementos del conjunto $\mathbf{4}$, deducimos que $C(X, g)$ es un subconjunto de $A(\mathbf{2})^X$, más aún:

Teorema 3.1.6 *Sea (X,g) un espacio de De Morgan. Entonces:*

(1) *$f \in C(X,g)$ si y sólo si $f_1 : X \to \mathbf{2}$ es monótona y continua y $f_2(x) = 1 - f_1(g(x))$ para todo $x \in X$.*

(2) *$C(X,g)$ es una subálgebra de $A(\mathbf{2})^X$ isomorfa a $M(X,g)$.*

Demostración. Es fácil ver que si f_1 es una función monótona y continua de X en $\mathbf{2}$, entonces $f(x) = (f_1(x), 1 - f_1(g(x)) \in C(X,g)$. Sea ahora $f \in C(X,g)$. Es claro que $f_1 : X \to \mathbf{2}$ es monótona y continua. Como f es una función de De Morgan, resulta que $f(g(x)) = (f_1(g(x)), f_2(g(x))) = g(f(x)) = (1 - f_2(x), 1 - f_1(x))$ para todo $x \in X$, lo que implica que $f_2(x) = 1 - f_1(g(x))$ y luego $f(x) = (f_1(x), 1 - f_1(g(x)))$ para todo $x \in X$. Esto prueba (1). De (1) es fácil ver que $C(X,g)$ es una subálgebra de $A(\mathbf{2})^X$. Sea $\mu : M(X,g) \to C(X,g)$ la siguiente aplicación:

$\mu(U) = (C_U, 1 - C_{g(U)})$ para todo $U \in D(X)$.

Afirmamos que μ es un isomorfismo de álgebras de De Morgan. Como g es una involución, resulta que $C_{g(U)}(x) = C_U(g(x))$ para todo $x \in X$. Por lo tanto μ está bien definida. Sea $f \in C(X,g)$. Luego $f(x) = (f_1(x), 1 - f_1(g(x)))$. Por lo tanto $\mu(U) = f$, donde $f_1 = C_U$. Es inmediato ver que μ es un homomorfismo inyectivo. Veamos que μ preserva la negación de De Morgan. Sea $U \in D(X)$ y sea $U^c = X \backslash U$. Entonces $\mu(\sim U) = \mu(g(U)^c) = (C_{g(U)^c}, 1 - C_{U^c} = (1 - C_{g(U)}, C_U) = \sim \mu(U)$.□

Es importante destacar que de la condición (1) del teorema anterior, deducimos que toda función de De Morgan de X en $\mathbf{4}$ está determinada por la primer coordenada.

3.2 Cuantificadores en álgebras de De Morgan

Definición 3.2.1 Sea A un álgebra de De Morgan. Un *cuantificador sobre A* es un cuantificador sobre L(A) que satisface la ecuación:

(n) $\nabla \sim \nabla a = \sim \nabla a$ para todo $a \in A$.

Un *álgebra de De Morgan monádica* es un álgebra $(A, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 0, 1)$ de tipo $(2,2,1,1,0,0)$ tal que $(A, \vee, \wedge, \sim, 0, 1)$ es un álgebra de De Morgan y ∇ es un cuantificador sobre A.

La variedad de las álgebras de De Morgan monádicas será denotada por **M**. A los miembros de **M** lo denotaremos simplemente con (A, ∇). Denotaremos con $\mathcal{M}$ a la categoría cuyos objetos son las álgebras de De Morgan monádicas y cuyos morfismos son los homomorfismos de álgebras de De Morgan monádicas.

Sea A un álgebra de De Morgan y sea $\nabla : A \to A$ una operación unaria que satisface las ecuaciones $\nabla 0 = 0, a \leq \nabla a, \nabla(a \wedge \nabla b) = \nabla a \wedge \nabla b$ y la ecuación (n). Afirmamos que ∇ es un cuantificador sobre A. Para probar la afirmación debemos ver que ∇ preserva el supremo. Tomando $a = b$ en la tercer ecuación deducimos que ∇ es un operador de clausura. De las ecuaciones (n) y $\sim (a \wedge b) = \sim a \vee \sim b$ deducimos que el rango de ∇, $\nabla(A)$, es cerrado bajo la operación del supremo. Por lo tanto *la ecuación* $\nabla(a \vee b) = \nabla a \vee \nabla b$ *es consecuencia de las ecuaciones dadas arriba.*

Sea L un reticulado distributivo acotado. Un *cuantificador dual* sobre L es una aplicación $\Delta : L \to L$ tal que Δ es un cuantificador sobre $L^{\geq}$; o equivalentemente, Δ satisface las ecuaciones: $\Delta 1 = 1$, $\Delta a \leq a, \Delta(a \wedge b) = \Delta(a) \wedge \Delta b$, y $\Delta(a \vee \Delta b) = \Delta a \vee \Delta b$. Sea A un álgebra de De Morgan. Un *cuantificador dual sobre* A es un cuantificador dual sobre $L(A)$ que satisface la ecuación adicional $\Delta \sim \Delta a = \sim \Delta a$. En la nomenclatura de Halmos (ver [22]), nuestros cuantificadores corresponden a *cuantificadores existenciales*, y nuestros cuantificadores duales a *cuantificadores universales*.
Si ∇ es un cuantificador sobre A y definimos, para cada $a \in A$, $\Delta a = \sim \nabla \sim a$, entonces Δ es un cuantificador dual sobre A. Recíprocamente, si Δ es un cuantificador dual sobre A, y definimos $\nabla a = \sim \Delta \sim a$, resulta que ∇ es un cuantificador sobre A y en ambos casos $\nabla(A) = \Delta(A)$.

Observaciones 3.2.2 (i) Si A es un álgebra de Boole y $\sim = \neg$, obtenemos la noción de álgebra de Boole monádica introducida por Halmos en [22]. En este caso la ecuación (n) se deduce de las ecuaciones que caracterizan a la variedad de los Q-reticulados distributivos. Esto no es necesariamente verdadero si A no es un álgebra de Boole como muestra el siguiente ejemplo: Sea A la cadena con cinco elementos $0 < a < b = \sim b < \sim a < 1$, y definamos $\nabla 0 = 0, \nabla a = \nabla b = b, \nabla \sim a = \sim a, \nabla 1 = 1$. Como la imagen de ∇ es un subreticulado de L(A) que además es cerrado por la implicación de Heyting, resulta que ∇ es un cuantificador sobre L(A) pero ∇ no satisface n pues $\nabla \sim \nabla \sim a = b$ y $\sim \nabla \sim a = a$.

(ii) Para cada álgebra de De Morgan A, un cuantificador ∇ sobre $\mathbf{L}(A)$ es un cuantificador sobre A si y sólo si su rango, $\nabla(A)$, es una subálgebra of A. Una subálgebra S de un álgebra de De Morgan A se dice *relativamente completa* si S es un subreticulado relativamente completo de $\mathbf{L}(A)$. Si ∇ es un cuantificador sobre A, entonces es claro que $\nabla(A)$ es una subálgebra relativamente completa de A. Por otra parte, si S es una subálgebra relativamente completa de A, y para cada $a \in A$ definimos ∇a como el primer elemento de $[a) \cap S$, entonces ∇ es un operador de clausura sobre $\mathbf{L}(A)$ que satisface la ecuación (n) pero no necesariamente la ecuación $\nabla(a \wedge \nabla b) = \nabla a \wedge \nabla b$.

(iii) Sea S es una subálgebra finita de un álgebra de De Morgan A. Luego $a \rightarrow b$ existe en S para todo $a, b \in S$. De la Observación 2.2.2, de la Proposición 2.2.1 y de (ii) deducimos que S es el rango de un cuantificador sobre A si y sólo si *existe en A el pseudocomplemento relativo de a respecto a b y coincide con $o \rightarrow b$ para todo $a, b \in S$.*

(iv) Un álgebra de De Morgan A tal que el pseudocomplemento relativo $a \rightarrow b$ está definido para todo $a, b \in A$ se denomina un *álgebra de Heyting simétrica*([33]). De la Proposición 2.2.1 obtenemos fácilmente que en un álgebra de Heyting simétrica A, la correspondencia $\nabla \mapsto \nabla(A)$ define una biyección entre el conjunto de los cuantificadores sobre el álgebra de De Morgan A y el conjunto de las subálgebras relativamente completas de A. En particular, si A es un álgebra de Boole, obtenemos la bien conocida correspondencia entre cuantificadores y subálgebras relativamente completas establecida por Halmos en [22]. Otra consecuencia es que los cuantificadores sobre un álgebra de De Morgan finita A están en correspondencia biunívoca con las subálgebras de A cerradas por pseudocomplementación relativa.

Ejemplos 3.2.3 Sea A un álgebra de De Morgan.

(i) Sea ∇ el cuantificador simple sobre $\mathbf{L}(A)$. Como el rango de ∇ es $\mathbf{2}$ y $\mathbf{2}$ es una subálgebra de A, inferimos que *el cuantificador simple es un cuantificador sobre A*. En este capítulo el cuantificador simple se llamará también *cuantificador de tipo* 0.

(ii) Sea a un punto fijo de A. Por la Observación 3.2.2 (iii), la subálgebra $\{0, a, 1\}$ es el rango de un cuantificador sobre A si y sólo si $a \rightarrow 0 = 0$ en A, o equivalentemente, $\{x \in A \mid x \wedge a = 0\} = \{0\}$. En este caso, el cuantificador asociado a ésta subálgebra será llamado *cuantificador de tipo* 1 y está dado por la siguiente fórmula:

$$\nabla b = \begin{cases} 1 & \text{si } b \not\leq a \\ a & \text{si } 0 < b \leq a \\ 0 & \text{si } b = 0 \end{cases}$$

(iii) Sean a y b puntos fijos de A tales que $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$; es decir A contiene una subálgebra isomorfa a $A(\mathbf{2})$. De la Proposición 2.2.1 deducimos que $S = \{0, a, b, 1\}$ es el rango de un cuantificador sobre $\mathbf{L}(A)$ y como S es una subálgebra de A, resulta que ∇ es un cuantificador sobre A que será llamado *cuantificador de tipo 2* y está dado por la siguiente fórmula:

$$\nabla c = \begin{cases} 1 & \text{si } c \not\leq a \text{ y } c \not\leq b \\ a & \text{si } 0 < c \leq a \\ b & \text{si } 0 < c \leq b \\ 0 & \text{si } c = 0 \end{cases}$$

(iv) Como ha sido observado anteriormente, toda álgebra de Boole monádica es un álgebra de De Morgan monádica. Es claro que la variedad de las álgebras de Boole monádicas es una subvariedad de $\mathbf{M}$ caracterizada por la ecuación $a \vee \sim a = 1$.

(v) Toda *álgebra de Lukasiewicz trivalente* es un álgebra de De Morgan monádica que es también un álgebra de Kleene y satisface las ecuaciones $a \wedge \sim a = \nabla a \wedge \sim a$, $\sim a \vee \nabla a = 1$ y $\nabla(a \wedge b) = \nabla a \wedge \nabla b$. Estas álgebras se corresponden con ciertas lógicas trivalentes desarrollada por Lukasiewicz y por Post. ([27], [35]).

(vi) Las *álgebras de Stone involutivas* consideradas por Cignoli y por de Gallego en [8] son también ejemplos de álgebras de De Morgan monádicas. Estas álgebras coinciden con la clase de las álgebras de De Morgan monádicas que satisfacen las ecuaciones: $\nabla a \wedge \sim \nabla a = 0$ y $\nabla(a \wedge b) = \nabla a \wedge \nabla b$.

(vii) Sea L un reticulado distributivo acotado y sean ∇ y Δ un cuantificador y un cuantificador dual sobre L respectivamente tales que $\nabla(L) = \Delta(L)$. Definamos $\overline{\nabla} : A(L) \to A(L)$ como sigue:

$\overline{\nabla}(a, b) = (\nabla a, \Delta b)$ para todo $a, b \in L$.

Es fácil verificar que $\overline{\nabla}$ es un cuantificador sobre $A(L)$. Más aún, afirmamos que toda álgebra de De Morgan monádica (A, ∇) es isomorfa a una subálgebra del álgebra de De Morgan monádica $A(\mathbf{L}(A)),\overline{\nabla})$, donde en este caso $\Delta a = \sim \nabla \sim a$. En efecto, es fácil ver que la correspondencia $a \mapsto (a, \sim a)$ define un homomorfismo inyectivo de álgebras de De Morgan monádicas de A en $A(\mathbf{L}(A))$.

Estos ejemplos muestran que las álgebras de De Morgan monádicas aparecen en diferentes situaciones.

Un *reticulado monádico* es un álgebra $(L, \vee, \wedge, \nabla, \Delta, 0, 1)$, tal que $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un reticulado distributivo acotado, ∇ es un cuantificador sobre L y Δ es un cuantificador dual sobre L que verifica la igualdad $\nabla(L) = \Delta(L)$. Sea $\mathcal{LM}$ la categoría cuyos objetos son los reticulados monádicos y cuyos morfismos son los homomorfismos de reticulados monádicos. A los objetos de $\mathcal{LM}$ lo denotaremos simplemente por $(L, \nabla, \Delta$.
Sean $LM : \mathcal{M} \to \mathcal{LM}$ y $AMM : \mathcal{LM} \to \mathcal{M}$ los siguientes funtores.
Si (A, ∇) es un álgebra de De Morgan, entonces $LM(A, \nabla) = (\mathbf{L}(A), \nabla, \Delta)$, donde $\Delta(a) =\sim \nabla \sim a$. Si (B, ∇) es un álgebra de De Morgan monádica y $h : A \to B$ es un homomorfismo de álgebras de De Morgan monádicas, entonces definimos $LM(h) : \mathbf{L}(A) \to \mathbf{L}(B)$ como $LM(h) = h$. Es claro que $LM(h)$ está bien definida pues todo homomorfismo de álgebras de De Morgan monádicas es un homomorfismo de reticulados monádicos.
Si (L, ∇, Δ) es un reticulado monádico y $\overline{\nabla}$ es el cuantificador definido en el Ejemplo 3.2.3 (vii), entonces $AMM(L, \nabla, \Delta) = (A(L), \overline{\nabla})$.
Si (L', ∇) es un reticulado monádico y $h : L \to L'$ es un homomorfismo de reticulados monádicos, entonces definimos

$AMM(h) : (A(L), \overline{\nabla}) \to (A(L'), \overline{\nabla})$ como

$AMM(h)(a, b) = (h(a), h(b))$,

para todo $a, b \in L$. Es claro que $AMM(h)$ es un homomorfismo de álgebras de De Morgan monádicas.
Por lo tanto LM y AMM son *funtores covariantes*. La siguiente proposición se demuestra en forma similar que la Proposición 3.1.2 y omitiremos la prueba.

Proposición 3.2.4 *LM es un adjunto a izquierda de AMM.*

Definición 3.2.5 Sea (X, g) un espacio de De Morgan. Una relación de Priestley R sobre X se denomina *relación de De Morgan* si $(x, y) \in R$ implica $(g(y), g(x)) \in R$ para todo $x, y \in X$.

El próximo teorema nos muestra que el Teorema 2.2.5 se puede extender a las álgebras de De Morgan monádicas.

Teorema 3.2.6 *Sea (X, g) un espacio de De Morgan. Entonces R es una relación de De Morgan de cuasiequivalencia sobre X si y sólo si R^* es un cuantificador sobre $M(X, g)$.*

Demostración. Sea (X, g) un espacio de De Morgan. Supongamos primero que R es una relación de De Morgan de cuasiequivalencia sobre X. Del Teorema 2.2.5 inferimos que R^* es un cuantificador sobre $D(X)$. Por lo tanto debemos probar que $R^*(\sim R^*(U)) = \sim R^*(U)$ para todo $U \in D(X)$. Como R^* es un operador de clausura, reulta que $\sim R^*(U) \subseteq R^*(\sim R^*(U))$. Para probar la otra inclusión, sea $x \in R^*(\sim R^*(U))$. Luego $R(x) \cap \sim R^*(U) \neq \emptyset$. Por lo tanto existe $y \in X$ tal que $(x, y) \in R$ e $y \notin g(R^*(U))$, lo que implica que $R(g(y)) \cap U = \emptyset$. Supongamos que $x \notin \sim R^*(U)$. Luego existe $z \in R(g(x)) \cap U$, y como R es una relación de De Morgan deducimos que $(g(z), x) \in R$. Como R es transitiva y $(x, y) \in R$, tenemos que $(g(z), y) \in R$ y luego $(g(y), z) \in R$. Por lo tanto $z \in R(g(y)) \cap U$, lo que es una contradicción. Supongamos ahora que R^* es un cuantificador sobre $M(X, g)$. Del Teorema 2.2.5 deducimos que R es una relación de Priestley de cuasiequivalencia sobre X. Por lo tanto, nos resta probar que R es una relación de De Morgan. Sea $(x, y) \in R$ y supongamos que $(g(y), g(x)) \notin R$. Luego $g(x) \notin R(g(y))$ lo que implica que existe $U \in D(X)$ tal que $g(x) \in U$ y $U \cap R(g(y)) = \emptyset$. Por lo tanto $x \in g(U)$ e $y \in \sim R^*(U)$. Luego $y \in R(x) \cap \sim R^*(U) = R(x) \cap R^*(\sim R^*(U))$. Por lo tanto, $x \in R^*(\sim R^*(U)) = \sim R^*(U)$ lo que implica que $g(x) \notin R^*(U)$, absurdo pues $g(x) \in U$ y $U \subseteq R^*(U)$. Por lo tanto R es una relación de De Morgan. □

En base al Teorema 2.1.4, el Teorema 3.2.6 y la dualidad de Priestley para álgebras de De Morgan descripta al principio de este capítulo, es fácil ver que existe una dualidad entre la categoría $\mathcal{M}$ y la categoría cuyos objetos son los espacios de De Morgan asociados con una relación de De Morgan de cuasiequivalencia, y cuyos morfismos son los morfismos de espacios modales que son además funciones de De Morgan.

3.3 Algebras simples y subdirectamente irreducibles en M

El Teorema 2.3.1 ha sido extendido por Cornish y Fowler [14],[15] para las álgebras de De Morgan como sigue. Sea (X, g) un espacio de De Morgan. Un subconjunto $Y \subseteq X$ se llama *involutivo* si $g(Y) = Y$. Entonces *para cada álgebra de De Morgan A, el reticulado $Con(\mathbf{A})$ es isomorfo al reticulado dual de los subconjuntos cerrados e involutivos de $X(A)$*. Más precisamente, la correspondencia $Y \mapsto \theta(Y)$ dada en el Teorema 2.3.1 es un isomorfismo entre ambos reticulados.
Sea R una relación de De Morgan de cuasiequivalencia sobre X. Notaremos con $CI_R(X)$ al reticulado distributivo acotado de los subconjuntos cerrados, involutivos y R-saturados de X.

Sea $(A, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 0, 1)$ un álgebra de De Morgan monádica. Teniendo en cuenta que $(A, \vee, \wedge, \nabla, 0, 1)$ es un reticulado modal, obtenemos fácilmente el siguiente resultado, cuya prueba sigue exactamente las mismas líneas del Teorema 2.3.4.

Teorema 3.3.1 *Sea $\mathbf{A} = (A, \vee, \wedge, \sim, \nabla, 0, 1)$ un álgebra de De Morgan monádica y sea $R = \nabla^{*}$. Entonces la correspondencia $Y \mapsto \theta(Y)$ establece un isomorfismo entre $C_{RI}(X(A))$ y $Con(\mathbf{A})^{\geq}$.*

Nuestro próximo paso será caracterizar las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en M.

Lema 3.3.2 *Sea A un álgebra de De Morgan tal que todo elemento de A distinto de 0 y distinto de 1 es un punto fijo. Entonces A es isomorfa a* **2**, *o a* **3**, *o a $A(\mathbf{2})$.*

Demostración. Sean $a, b \in A \backslash \{0, 1\}$. Supongamos que $a \vee b \neq 1$. Como $a \vee b \neq 0$, inferimos que $a \vee b$ es un punto fijo. Luego $a \vee b = \sim (a \vee b) = \sim a \wedge \sim b = a \wedge b$, pues a y b son puntos fijos. Por lo tanto $a \vee b = a \wedge b$ lo que implica que $a = b$. Análogamente inferimos que $a = b$ si suponemos que $a \wedge b \neq 0$. Por lo tanto, A satisface la siguiente propiedad:

(p) Si a y b son elementos de A diferentes de 0 y de 1 entonces $a \neq b$ implica $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$.

Como $\mathbf{L}(A)$ es un reticulado distributivo deducimos de (p) que $A\backslash\{0,1\}$ tiene a lo sumo dos elementos a y b que verifican $a \vee b = 1$ y $a \wedge b = 0$. Consecuentemente, A es isomorfa a $\mathbf{2}$, a $\mathbf{3}$ o a $A(\mathbf{2})$. □

Las álgebras de De Morgan subdirectamente irreducibles son las álgebras $\mathbf{2}, \mathbf{3}$ y $A(\mathbf{2}$. (ver por ejemplo [1]). El próximo resultado da una condición necesaria para que un álgebra de De Morgan monádica sea subdirectamente irreducible.

Proposición 3.3.3 *Sea (A, ∇) un álgebra de De Morgan monádica subdirectamente irreducible. Entonces $\nabla(A)$ es un álgebra de De Morgan subdirectamente irreducible.*

Demostración. Para cada $a \in \nabla(A)\backslash\{0,1\}$ definamos las siguientes relaciones binarias sobre A:

$\alpha(a) = \{(b,c) \in A \times A \mid b \wedge a = c \wedge a \text{ y } \sim b \wedge a = \sim c \wedge a\}$.

$\beta(a) = \{(b,c) \in A \times A \mid (b \vee a) \wedge \sim a = (c \vee a) \wedge \sim a\}$.

Es fácil verificar que $\alpha(a)$ y $\beta(a)$ son congruencias de álgebras de De Morgan monádicas. Como $(0,a) \in \beta(a)$ y $(1,a) \in \beta(\sim a)$, resulta que $\beta(a)$ y $\beta(\sim a)$ son congruencias diferentes de la identidad. Sea $(b,c) \in \beta(a) \cap \alpha(a)$. Luego $(b \vee a) \wedge \sim a = (c \vee a) \wedge \sim a$, $b \wedge a = c \wedge a$ y $\sim b \wedge a = \sim c \wedge a$. De esta última igualdad, inferimos que $b \vee \sim a = c \vee \sim a$. Por lo tanto $b \vee a \vee \sim a = c \vee a \vee \sim a$ y $(b \vee a) \wedge \sim a = (c \vee a) \wedge \sim a$ lo que implica que $b \vee a = c \vee a$. De ésta igualdad y de la igualdad $b \wedge a = c \wedge a$ deducimos que $b = c$. Por lo tanto $\alpha(a) \cap \beta(a)$ es la identidad. Como (A, ∇) es subdirectamente irreducible entonces existe una congruencia sobre (A, ∇) distinta de la identidad tal que está contenida en toda congruencia distinta de la identidad. Por lo tanto $\alpha(a)$ es la identidad o $\beta(a)$ es la identidad. Como ya vimos que $\beta(a)$ no es la identidad, debe ser $\alpha(a)$ la identidad. Análogamente vemos que $\alpha(\sim a)$ es la identidad. Como $(a \wedge \sim a, \sim a) \in \alpha(a)$ y $(a \wedge \sim a, a) \in \alpha(\sim a)$ inferimos que $a = \sim a$. Como esta igualdad vale para todo $a \in \nabla(A)$ distinto de 0 y de 1, deducimos del Lema 3.3.2 que $\nabla(A)$ es un álgebra de De Morgan subdirectamente irreducible.□

Observación 3.3.4 Los argumentos usados en la demostración de la Proposición 3.3.3 pueden ser fácilmente adaptados para demostrar en una forma más simple que la dada en [1], el hecho que las álgebras de De Morgan subdirectamente irreducibles son $\mathbf{2}, \mathbf{3}$ y $A(\mathbf{2})$.

De la Proposición 3.3.3 y de los Ejemplos 3.2.3 (i), (ii) y (iii) obtenemos el siguiente resultado:

Corolario 3.3.5 *Sea (A, ∇) un álgebra subdirectamente irreducible en* $\mathbf{M}$. *Entonces ∇ es un cuantificador de tipo* 0, *o de tipo* 1 *o de tipo* 2.

Observaciones 3.3.6 (i) Es fácil probar del Corolario 3.3.5 que la subvariedad de $\mathbf{M}$ generada por las álgebras de De Morgan monádicas asociadas con el cuantificador de tipo 0 está caracterizada por la ecuación $\sim a \vee \nabla a = 1$. Análogamente, la subvariedad de $\mathbf{M}$ generada por las álgebras de De Morgan monádicas (A, ∇), donde ∇ es de tipo 0 o de tipo 1, está caracterizada por la ecuación $\nabla a \wedge \sim \nabla a \leq \nabla b \vee \sim \nabla b$, que equivale a decir que el rango de ∇ es un álgebra de Kleene.

(ii) Sean $(A, \nabla) \in \mathbf{M}$, $X = X(A)$ y $R = \nabla^{\bullet}$.
(a) De la Observación 2.3.6 (v) y del hecho que $g(\max X) = \min X$, deducimos que si ∇ es un cuantificador de tipo 0, entonces un subconjunto cerrado, involutivo y no vacío $Y \subseteq X$ es R-saturado si y sólo si $Cl(\max X \cup \min X) \subseteq Y$.

(b) Supongamos que ∇ es un cuantificador de tipo 1. Sea a el punto fijo de $\nabla(A)$ y sea $P \in \sigma_A(a)$. Como ∇b es a o 1 para todo $b \neq 0$, deducimos que $R(P) = X$. Si $a \notin P$, entonces $Q \in R(P)$ si y sólo si $a \notin Q$. Por lo tanto:

$$(*) R(P) = \begin{cases} X & \text{si } a \in P \\ X \setminus \sigma_A(a) & \text{si } a \notin P \end{cases}$$

Por otra parte, como a es un punto fijo, tenemos que:
$(**)$ $g(\sigma_A(a)) = X \setminus \sigma_A(a)$.
Supongamos que Y sea un subconjunto cerrado, involutivo y R-saturado de X. Sea $P \in Y$. Si $a \in P$, entonces deducimos de $(*)$ y del hecho que Y es R-saturado, que $\max X \subseteq Y$. Como Y es involutivo y $g(\max X) = \min X$, también $\min X \subseteq Y$. Como $a \in P$ y a es un punto fijo, entonces $a \notin g(P)$, y teniendo en cuenta $**$ resulta que
$Cl(\max(X \setminus \sigma_A(a)) \cup \min \sigma_A(a)) \subseteq Y$.
Por lo tanto un subconjunto cerrado, involutivo y no vacío $Y \subseteq X$ es R-saturado si y sólo si:
$Cl(\max X \cup \min X \cup \max(X \setminus \sigma_A(a)) \cup \min \sigma_A(a)) \subseteq Y$.

(c) Supongamos que ∇ es un cuantificador de tipo 2. Sean a y b los puntos fijos de $\nabla(A)$. Como $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$, entonces $X \setminus \sigma_A(a) = \sigma_A(b)$ y:

$$R(P) = \begin{cases} \sigma_A(a) & \text{si } a \in P \\ \sigma_A(b) & \text{si } a \notin P \end{cases}$$

De las igualdades $a \wedge b = 0$ y $a \vee b = 1$ deducimos que para cada $P \in X$, $a \in P$ o $a \in g(P)$ y $\max X = \max \sigma_A(a) \cup \max \sigma_A(b)$. Por lo tanto deducimos como en (b) que un subconjunto cerrado, involutivo y no vacío $Y \subseteq X$ es R-saturado si y sólo si:
$Cl(\max X \cup \min X) \subseteq Y$.

Teorema 3.3.7 *Sean* $(A, \nabla) \in \mathbf{M}$, $X = X(A)$ *y* $R = \nabla^{*}$.

(1.1) *Si* ∇ *es un cuantificador de tipo* 0 *o de tipo* 2, *entonces* (A, ∇) *es simple si y sólo si* $Cl(\max X \cup \min X) = X$.

(1.2) *Si* ∇ *es un cuantificador de tipo* 1 *y* a *es el punto fijo de* $\nabla(A)$, *entonces* (A, ∇) *es simple si y sólo si* $Cl(\max X \cup \min X \cup \max(X \setminus \sigma_A(a)) \cup \min \sigma_A(a)) = X$.

(1.3) *Si* ∇ *es un cuantificador de tipo* 0 *o de tipo* 2, *entonces* (A, ∇) *es subdirectamente irreducible y no simple si y sólo si existe* $P \notin Cl(\max X \cup \min X)$ *tal que* $Cl(\max X \cup \min X) \cup \{P, g(P)\} = X$.

(1.4) *Si* ∇ *es un cuantificador de tipo* 1, *entonces* (A, ∇) *es subdirectamente irreducible y no simple si y sólo si existe* $P \notin Cl(\max X \cup \min X \cup \max(X \setminus \sigma_A(a)) \cup \min \sigma_A(a))$ *tal que* $Cl(\max X \cup \min X \cup \max(X \setminus \sigma_A(a)) \cup \min \sigma_A(a)) \cup \{P, g(P)\} = X$.

Demostración. Sea $(A, \nabla) \in \mathbf{M}$. Por el Teorema 3.3.1, tenemos que (A, ∇) es simple si y sólo si $C_{RI}(X)$ tiene dos elementos que son $\emptyset$ y X. Por lo tanto, (1.1) y (1.2) son consecuencias inmediatas de la Proposición 3.3.3 y las Observaciones 3.3.6 (iii) (a) y (c). Para probar (1.3) y (1.4), supongamos primero que (A, ∇) es subdirectamente irreducible y no simple. Por el Teorema 3.3.1, $C_{RI}(X) \setminus \{X\}$ tiene último elemento Y diferente de $\emptyset$. Sea $P \in X \setminus Y$. Por la Proposición 3.3.3, ∇ es de tipo 0, o de tipo 1, o de tipo 2. Si ∇ es de tipo 0 o de tipo 2, entonces de las Observaciones 3.3.6

(iii) (a) y (c) inferimos que $Cl(\max X \cup \min X) \cup \{P, g(P)\}$ es un elemento de $C_{RI}(X)$, y como $P \notin Y$ resulta que $Cl(\max X \cup \min X) \cup \{P, g(P)\} = X$. Como (A, ∇) no es simple, resulta que $P \notin Cl(\max X \cup \min X)$. Si ∇ es de tipo 1 la prueba es análoga. Recíprocamente, supongamos primero que $Cl(\max X \cup \min X) \cup \{P, g(P)\} = X$ con $P \notin Cl(\max X \cup \min X)$. Sea $Y = Cl(\max X \cup \min X)$. Por las Observaciones 3.3.6 (iii) (a) y (c), deducimos que $Y \in C_{RI}(X)$ y es claro que Y es no vacío y distinto de X. Veamos que Y es el último elemento de $C_{RI}(X) \setminus \{X\}$. Sea $Y' \in C_{RI}(X) \setminus \{X\}$ y supongamos que existe $Q \in Y' \setminus Y$. Como $Y \cup \{P, g(P)\} = X$, tendríamos que $Q \in \{P, g(P)\}$ y como Y' es involutivo, deducimos que $\{P, g(P)\} \subseteq Y'$. Como Y' es R-saturado y no vacío, inferimos de las Observaciones 3.3.6 (iii) (a) y (c), que $Y \subseteq Y'$. Luego $Y \cup \{P, g(P)\} = X \subseteq Y'$ lo que es una contradicción. La demostración para el caso (1.4) es análoga. □

Es importante destacar que en base al Teorema 3.2.6, es posible expresar el Teorema 3.3.7 solamente en términos del espacio dual de un álgebra de De Morgan monádica, en forma análoga como enunciamos el Teorema 2.3.7. La razón por el cual no hicimos esto es que sería más difícil visualizar la estructura de las álgebras simples y subdirectamente irreducibles en M, sobre todo en los casos (1.2) y (1.4).

Ejemplos 3.3.8 i) Sea L un reticulado distributivo acotado, $X = X(L)$ y sean ∇ y Δ un cuantificador y un cuantificador dual sobre L respectivamente tales que $\nabla(L) = \Delta(L)$. Afirmamos que el álgebra de De Morgan monádica $(A(L), \overline{\nabla})$ definido en el Ejemplo 3.2.3 (vii) es simple si y sólo si ∇ es de tipo 0 sobre L y $\max X \cup \min X$ es un subconjunto denso de X.
En efecto, supongamos primero que $(A(L), \overline{\nabla})$ es simple. De la Proposición 3.3.3 deducimos que $\overline{\nabla}$ debe ser de tipo 0, 1 ó 2. Como $\nabla 1 = \Delta 1 = 1$ y $\nabla 0 = \Delta 0 = 0$, inferimos que $(1,1), (0,0), (1,0)$ y $(0,1)$ son elementos del rango de $\overline{\nabla}$, lo que implica que $\overline{\nabla}$ es de tipo 2 y que el rango de $\overline{\nabla}$ es la subálgebra de $A(L)$ formada por estos cuatro elementos. Por lo tanto, ∇ es un cuantificador de tipo 0 sobre L. Por otra parte, como el espacio de Priestley de $A(L)$ es $X \times \{0\} \cup X^{\geq} \times \{1\}$, deducimos que $\max(X \times \{0\} \cup X^{\geq} \times \{1\}) = \max X \times \{0\} \cup \min X \times \{1\}$ y $\min(X \times \{0\} \cup X^{\geq} \times \{1\}) = \min X \times \{0\} \cup \max X \times \{1\}$. De éstas igualdades inferimos del Teorema 3.3.7 (1.1) que $\max X \cup \min X$ es un subconjunto denso de X. La recíproca se prueba en forma análoga y omitiremos la demostración.

Por ejemplo, es fácil ver que si L es una cadena, entonces $(A(L), \overline{\nabla})$ es un álgebra simple si y sólo si L tiene a lo sumo 3 elementos, ∇ es de tipo 0 sobre L y Δ es de tipo 0 sobre $L^{\geq}$.

(ii) Sea $A = \mathbf{3} \times \mathbf{3}$ y sea ∇ el cuantificador de tipo 0 sobre A. Como todo filtro primo de A es maximal o minimal, deducimos que (A, ∇) es un álgebra simple. Notemos que A no es isomorfa a $A(\mathbf{L}(\mathbf{3}))$, pues A tiene un único puto fijo. Sea S la cadena $(0,0) < (c,0) < (c,c) < (c,1) < (1,1)$. Es fácil ver que (S, ∇) es una subálgebra de (A, ∇) y por el Teorema 3.3.7 (1.1) deducimos que (S, ∇) no es simple. Por lo tanto la variedad de las álgebras de De Morgan monádicas *no es hereditariamente simple.*

(iii) Sea $(A, \nabla) \in \mathbf{M}$ y supongamos que $\mathbf{L}(A)$ es una cadena.
Luego $\max X(A)$ es el conjunto unitario $\{\{x \in A \mid x \neq 0\}\}$ y $\min X(A)$ es el conjunto unitario $\{1\}$. Más aún, si $a \in A$, entonces $\max(X(A) \setminus \sigma_A(a))$ es el conjunto unitario $\{\{x \in A \mid x > a\}\}$ y $\min \sigma_A(a)$ es el conjunto unitario $\{\{x \in A \mid x \geq a\}\}$. Por lo tanto, deducimos del Teorema 3.3.7 que *si (A, ∇) es subdirectamente irreducible entonces A es finita.* De los incisos (1.1) y (1.3) deducimos que si ∇ es el cuantificador de tipo 0, entonces *(A, ∇) es subdirectamente irreducible si y sólo si $\mathbf{L}(A)$ es una cadena con a lo sumo cinco elementos.* En particular, si $\mathbf{L}(A)$ es la cadena con cinco elementos, resulta que (A, ∇) es subdirectamente irreducible y no simple. Por lo tanto $\mathbf{M}$ *no es una variedad semisimple.*
Como $\mathbf{L}(A)$ es una cadena, entonces ∇ no puede ser de tipo 2. Supongamos que ∇ es de tipo 1. Del Teorema 3.3.7 (1.2) y (1.4) resulta que *(A, ∇) es subdirectamente irreducible si y sólo si $\mathbf{L}(A)$ tiene a lo sumo siete elementos.* Más aún, como ∇ es de tipo 1, entonces A tiene un punto fijo. Por lo tanto, si A es finita y $\mathbf{L}(A)$ es una cadena, entonces dicha cadena debe tener un número impar de elementos lo que implica que *(A, ∇) es subdirectamente irreducible si y sólo si $\mathbf{L}(A)$ es una cadena con tres, cinco o siete elementos.*

(iv) Sea $\mathcal{B}$ la variedad de las álgebras de Boole monádicas. Una importante propiedad que satisface $\mathcal{B}$ es la siguiente: *el reticulado de las subvariedades de $\mathcal{B}$ es una cadena isomorfa a la cadena de los números naturales con un último elemento agregado (ver [30]).* Esta propiedad también la satisface la variedad de los Q-reticulados distributivos (ver [10]). El próximo ejemplo muestra que dicha propiedad no es satisfecha por $\mathbf{M}$.
Sea $\mathcal{L}$ la variedad de las álgebras de Lukasiewicz trivalentes. Es un hecho conocido que $\mathcal{L}$ está generada por el álgebra $\mathbf{3}$ asociada con el cuantificador de

tipo 0. Como $\mathbf{3}$ no es un álgebra de Boole, entonces $\mathcal{L}$ no es una subvariedad de $\mathcal{B}$. Del Ejemplo 3.2.3 (v) tenemos que un álgebra pertenece a $\mathcal{L}$ si y sólo si satisface la ecuación $(*)$ $\nabla(a \wedge b) = \nabla a \wedge \nabla b$. Como el álgebra de Boole con cuatro elementos asociada con el cuantificador de tipo 0 no satisface $(*)$, inferimos que $\mathcal{B}$ no es una subvariedad de $\mathcal{L}$. Por lo tanto el reticulado de las subvariedades de M no es una cadena.

Sea $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un conjunto finito con n elementos y sea A una matriz simétrica de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbf{2}$ tal que $A_{ii} = 1$ para todo $1 \leq i \leq n$. Notemos con Y_A al conjunto parcialmente ordenado $(Y, \leq_A)$, donde:

$Y = X \times \{0\} \cup X \times \{1\}$ y $\leq_A)$ está definido por:

$(x_i, 0) \leq_A (x_j, 1)$ si y sólo si $A_{ij} = 1$, y

$\leq_A$ es la identidad sobre $X \times \{0\}$ y sobre $X \times \{1\}$.

Es fácil ver que $\leq_A$ es una relación de orden sobre Y. Más aún, si definimos $g : Y \to Y$ como:

$g(x, 0) = (x, 1)$ y $g(x, 1) = (x, 0)$,

entonces es una consecuencia inmediata de la simetría de A que g es una involución de De Morgan sobre Y_A. Como Y es finito, entonces Y_A es un espacio de Priestley con la topología discreta. Por lo tanto (Y_A, g) es un espacio de De Morgan. Por la construcción de $\leq_A$, resulta además que todo elemento de Y_A es maximal o minimal, donde $\max Y_A = X \times \{1\}$ y $\min Y_A = X \times \{0\}$. Más aún, como $A_{ii} = 1$ para todo i, resulta que $(x_i, 0) < (x_i, 1)$ para todo i, lo que implica que $\max Y_A \cap \min Y_A = \emptyset$. Del Teorema 3.3.7 (1.1) deducimos que $(M(Y_A, g), \nabla)$ es un álgebra simple, donde ∇ es el cuantificador de tipo 0.

Supongamos ahora que A y B son dos matrices simétricas de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbf{2}$ y con unos en la diagonal. Es fácil ver que los espacios de De Morgan (Y_A, g) y (Y_B, g) son isomorfos si y sólo si B se obtiene a partir de A aplicando a la matriz A la siguiente operación un número finito de veces: *si se permuta la fila i-ésima por la fila j-ésima, entonces también se debe permutar la columna i-ésima por la columna j-ésima.*

Esta operación entre matrices define una relación de equivalencia sobre el conjunto de matrices simétricas de $n \times n$ con coeficientes en $\mathbf{2}$ y con unos en la diagonal. Por lo tanto, *el cardinal del conjunto cociente coincide con el número de álgebras simples finitas no isomorfas entre sí, con el cuantificador de tipo* 0 *y tales que no contienen ningún filtro primo que sea simultáneamente maximal y minimal.*

Por ejemplo, si $n = 2$ es fácil ver que sólo hay dos matrices en las condiciones anteriores que son no equivalentes a saber, la identidad y la matriz cuyos coeficientes son todos iguales a uno.

Problema: Encontrar el cardinal del conjunto cociente para todo $n > 2$.

Nuestro próximo paso será ver como es la estructura de la subvariedad de **M** generada por las cadenas; o sea; la subvariedad de **M** generada por las álgebras de De Morgan monádicas cuyo reticulado subyacente es una cadena. Notaremos con **MC** a esta subvariedad. Siguiendo la prueba del Teorema 2.4.16, es fácil ver que **MC** está generada por las cadenas subdirectamente irreducibles en **M**. Del Ejemplo (iii) dado arriba, sabemos que hay un número finito de cadenas subdirectamente ireducibles y por lo tanto el número de subvariedades de MC es finito. Sean M_1, M_2, M_3 y M_4 las cadenas subdirectamente irreducibles asociadas con el cuantificador de tipo 0 con dos, tres, cuatro y cinco elementos respectivamente; y sean N_1, N_2 y N_3 las cadenas subdirectamente irreducibles asociadas con un cuantificador de tipo 1 con tres, cinco y siete elementos respectivamente. Notemos que en este último caso, el cardinal es siempre un número impar pues todas tienen punto fijo. La siguiente proposición es de fácil verificación y omitiremos la prueba:

Proposición 3.3.9 a) *M_1 es subálgebra de M_i y de N_j para todo $2 \leq i \leq 4$ y para todo $1 \leq j \leq 3$.*

b) *M_i es subálgebra de M_{i+1} para todo $1 \leq i \leq 3$ y N_i es subálgebra de N_{i+1} para todo $1 \leq i \leq 2$.*

c) MC *está caracterizada por la ecuación $\nabla(x \wedge y) = \nabla(x) \wedge \nabla(y)$.*

d) *El reticulado de las subvariedades de* MC *es isomorfo al reticulado que se obtiene agregándole un nuevo 0 al reticulado* $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$.

3.4 Algebras de De Morgan monádicas libres

Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras del mismo tipo. Un álgebra $\mathbf{A} \in \mathcal{K}$ se dice *libre en* $\mathcal{K}$ si existe un subconjunto $S \subseteq A$ tal que:

(1) S genera A.

(2) Si $\mathbf{B} \in \mathcal{K}$ y $f : S \to B$ es una función, entonces existe un homomorfismo $g : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ que extiende a f.
El conjunto S se llama un *conjunto de generadores libres.*
Por ejemplo, si $\mathcal{K}$ es la clase de los espacios vectoriales, entonces toda álgebra en $\mathcal{K}$ es libre, pues todo espacio vectorial tiene una base. Este fenómeno no ocurre en general, basta tomar por ejemplo la clase de los grupos o la clase de las álgebras de Boole. En éste último caso, las álgebras de Boole libres y finitas son las álgebras que tienen 2^{2^n} elementos. Un resultado importante del álgebra universal es que si $\mathcal{V}$ es una variedad, entonces *para cada cardinal α existe en $\mathcal{V}$ un álgebra libre que tiene un subconjunto de generadores libres de cardinal α.*

En esta sección, daremos una caracterización de los espacios duales de las álgebra libres en M. Esta caracterización generaliza una construcción de las álgebras de Boole monádicas libres dada por Halmos en [23]. Esta construcción de Halmos fue adaptada por Cignoli en [13] para caracterizar los espacios duales de los Q-reticulados distributivos libres. Tanto en [23] como en [10], los espacios duales de las álgebras de Boole monádicas y de los Q-reticulados distributivos, son espacios Booleanos y espacios de Priestley respectivamente asociados con una relación de equivalencia que verifica ciertas condiciones. Para obtener la caracterización mencionada anteriormente, utilizaremos la dualidad obtenida en [10], en lugar de la dualidad obtenida en [12].

Definición 3.4.1 Una *MQ-estructura* es una terna (X, g, E) tal que (X, g) es un espacio de De Morgan y E es una relación de equivalencia sobre X que satisface las siguientes condiciones:

(C1) *$E(U) \in D(X)$ para todo $U \in D(X)$.*

(C2) *Las clases de equivalencias de E son subconjuntos cerrados de X.*

(C3) *Si $(x, y) \in E$, entonces $(g(x), g(y)) \in E$.*

Definición 3.4.2 Sean (X, g, E) y (Y, h, F) MQ-estructuras. Diremos que una función de De Morgan $f : X \to Y$ es un *MQ-morfismo* si $E(f^{-1}(V)) = f^{-1}(F(V)$ para todo $V \in D(Y)$.

La categoría de las MQ-estructuras y MQ-morfismos será denotada con $\mathcal{M}^{\bullet}$. De la dualidad obtenida en [10], es fácil probar que exise una dualidad entre $\mathcal{M}$ y $\mathcal{M}^{\bullet}$. Más precisamente, ésta dualidad está dada por los funtores contravariantes $\mathbf{MQ}^{\bullet} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\bullet}$ y $\mathbf{MQ} : \mathcal{M}^{\bullet} \to \mathcal{M}$ como sigue.

En [10] se demostró que para todo cuantificador ∇ sobre un reticulado distributivo L, se tiene que:

$$E(\nabla) = \{(P,Q) \in X(L) \times X(L) \mid P \cap \nabla(L) = Q \cap \nabla(L)\}$$

es una relación de equivalencia sobre $X(L)$ que satisface (C1) y (C2) en la Definición 3.4.1. Si ∇ es un cuantificador sobre un álgebra de De Morgan A, entonces es fácil ver que $E(\nabla)$ satisface también la condición (C3).
Por lo tanto, definimos para cada objeto (A, ∇) en $\mathcal{M}$,
$\mathbf{MQ}^{\bullet}(A,\nabla) = (X(A), E(\nabla))$;
y para cada morfismo h en $\mathcal{M}$,
$\mathbf{MQ}^{\bullet}(h) = \phi_S(h)$.
Si (X, g, E) es un objeto en $\mathcal{M}^{\bullet}$ y f es un morfismo f en $\mathcal{M}^{\bullet}$, entonces definimos
$\mathbf{MQ}(X, g, E) = (M(X, g), E)$ y
$\mathbf{MQ}(f) = \psi_M(f)$.

Como ha sido probado en [10], E es un cuantificador sobre $D(X)$. De la condición (C3), es fácil ver además que E es un cuantificador sobre $M(X, g)$. Luego, deducimos de [10, Teorema 2.10] el siguiente resultado:

Teorema 3.4.3 *Los funtores contravariantes* $\mathbf{MQ} : \mathcal{M}^{\bullet} \to \mathcal{M}$ *y* $\mathbf{MQ}^{\bullet} : \mathcal{M} \to \mathcal{M}^{\bullet}$ *definen una equivalencia natural entre la categoría* $\mathcal{M}^{\bullet}$ *y la categoría opuesta de* $\mathcal{M}$.

Definición 3.4.4 Sea A un álgebra de De Morgan. Una *extensión monádica libre de* A es un álgebra de De Morgan monádica (M, ∇) que satisface las siguientes condiciones:

(1) *A es isomorfa a una subálgebra S de M.*

(2) *S genera el álgebra de De Morgan monádica (M, ∇).*

(3) *Si $(B, \nabla) \in$ M y $h : S \to B$ es un homomorfismo de álgebras de De Morgan, entonces h se puede extender (en forma única) a un homomorfismo de álgebras de De Morgan monádicas de (M, ∇) en (B, ∇).*

Es claro que dos extensiones monádicas libres de un álgebra de De Morgan A son isomorfas. Sea $\mathbf{FM}(S)$ el álgebra de De Morgan libre sobre un conjunto S. Como toda aplicación de S en un álgebra de De Morgan A se extiende en forma única a un homomorfismo de $\mathbf{FM}(S)$ en A, entonces *la extensión monádica libre dc* $\mathbf{FM}(S)$ *es el álgebra de De Morgan monádica libre sobre* S.

Lema 3.4.5 *Sean $(X_1, g_1), (X_2, g_2)$ espacios de De Morgan y sea $d : X_1 \to X_2$ una función de De Morgan suryectiva. Si d transforma conjuntos abiertos crecientes de X_1 en abiertos crecientes de X_2, entonces la relación de equivalencia $E = Ker(d) = \{(s,t) \in X_1 \times X_1 \mid d(s) = d(t)\}$ satisface las condiciones (C1), (C2) y (C3) de la Definición 3.4.1. Más aún, si identificamos a $M(X_1, g_1)$ con el álgebra de De Morgan $C(X_1, g_1)$ del Teorema 3.1.6, entonces:*

(i) $(\nabla f)_1(x) = max\{f_1(u) \mid u \in E(x)\}$,

para todo $f \in C(X_1, g_1)$.

Demostración. Sea $U \in D(X_1)$. Como $E(U) = d^{-1}(d(U))$ y $d \circ g_1 = g_2 \circ d$, entonces es inmediato verificar las condiciones (C1), (C2) y (C3). Sea $f \in C(X_1, g_1)$, sea $U \in D(X_1)$ tal que $f_1 = C_U$ y sea $x \in X_1$. Como $(\nabla f)_1 = C_{E(U)}$, entonces $(\nabla f)_1(x) = 1$ si y sólo si existe $u \in U$ tal que $(x, u) \in E$, si y sólo si $f_1(u) = 1$ y $u \in E(x)$, si y sólo si $max\{f_1(u) \mid u \in E(x)\} = 1$ como queríamos demostrar. □.

Definición 3.4.6 Sea L un reticulado distributivo acotado y sean $m : L \to \mathbf{2}$ y $j : L \to \mathbf{2}$ un homomorfismo inferior y un homomorfismo superior respectivamente. Diremos que j es un m-homomorfismo si j satisface las siguientes condiciones:

(m1) $m(a) \leq j(a)$ *para todo* $a \in L$.

(m2) $j(a \wedge b) = j(a) \wedge j(b)$ *para todo* $a \in L$ *y para todo* $b \in m^{-1}(\{1\})$.

Análogamente, diremos que m es un j-homomorfismo si se cumplen las siguientes condiciones:

(j1) $m(a) \leq j(a)$ *para todo* $a \in L$.

(j2) $m(a \vee b) = m(a) \vee m(b)$ *para todo* $a \in L$ *y para todo* $b \in j^{-1}(\{0\})$.

Sea j un m-homomorfismo. Como $m(a) \leq j(a)$, deducimos que $m(a) = 1$ implica $j(a) = 1$. Por lo tanto, *la igualdad (m2) es equivalente a la igualdad* $j(a \wedge b) = j(a)$. Análogamente, si m es un j-homomorfismo, resulta que *la igualdad (j2) es equivalente a la igualdad* $m(a \vee b) = m(a)$.

Observación 3.4.7 Sea A un álgebra de De Morgan y sea ∇ un cuantificador sobre A. Para cada homomorfismo de reticulados acotados $h : \mathbf{L}(A) \to \mathbf{2}$, definimos $j(a) = h(\nabla a)$ y $m(a) = h(\sim \nabla \sim a)$. Es claro que j y m son un homomorfismo superior y un homomorfismo inferior respectivamente. Más aún, afirmamos que j es un m-homomorfismo y que m es un j-homomorfismo. En efecto, es fácil ver que j satisface la condición (m1) en la Definición 3.4.6. Para probar que j satisface la condición (m2), sea $b \in A$ tal que $m(b) = 1$. Como $m(b) \leq j(b)$, entonces $j(b) = 1$; y como $\sim \nabla \sim b \leq b$, tenemos que $j(a \wedge b) = h(\nabla(a \wedge b)) \geq h(\nabla(a \wedge \sim \nabla \sim b)) = h(\nabla a \wedge \sim \nabla \sim b) = h(\nabla a) \wedge h(\sim \nabla \sim b) = h(\nabla a) \wedge m(b) = h(\nabla a)$. Por lo tanto, $j(a \wedge b) \geq j(a)$. Como j es creciente , tenemos que $j(a \wedge b) \leq j(a)$. En forma análoga se prueba que m es un j-homomorfismo y la afirmación queda demostrada.

Nuestro próximo paso será construir la MQ-estructura que corresponde a la extensión monádica libre de un álgebra de De Morgan. Esta construcción se basa sobre la construcción del espacio Booleano de la extensión monádica libre de un álgebra de Boole dada por Halmos en [23].

Sea A un álgebra de De Morgan y sea $j : A \to A(2)$ un homomorfismo superior. Como $A(2) = \mathbf{2} \times \mathbf{2}^{\geq}$, inferimos que $j_1 : A \to \mathbf{2}$ es un homomorfismo superior y $j_2 : A \to \mathbf{2}$ satisface las igualdades $j_2(a \vee b) = j_2(a) \wedge j_2(b)$ y $j_2(0) = 1$. Por lo tanto, la aplicación $j_2^* : A \to \mathbf{2}$ definida por $j_2^*(a) = j_2(\sim a)$ *es un homomorfismo inferior*. Denotaremos con $J(A)$ al siguiente conjunto:
$J(A) = \{j : A \to A(2) \mid j$ es un homomorfismo superior, j_1 es un j_2^*-homomorfismo, y j_2^* es un j_1- homomorfismo $\}$.
Es fácil ver que $J(A)$ es un subconjunto cerrado de $(4)^A$ y que $J(A)$ es cerrado por g^A. Por lo tanto, $(J(A), g^A)$ es un espacio de De Morgan, lo que implica que $(H(A) \times J(A), g^A \times g^A)$ es también un espacio de De Morgan, donde $(g^A \times g^A)(y, j) = (g^A(y), g^A(j))$. Sea $K(A)$ el siguiente conjunto:
$K(A) = \{(h, j) \in H(A) \times J(A) \mid j_2^*(a) \leq h_1(a) \leq j_1(a)$ para todo $a \in A\}$.

Es claro que $K(A)$ es un subconjunto cerrado de $H(A) \times V(A)$. Veamos que $K(A)$ es cerrado por la aplicación $g^A \times g^A$. Sea $(h,j) \in K(A)$ y sea $a \in A$. Luego $g^A \times g^A(h,j) = (g^A(h), g^A(j))$. Por lo tanto, $g^A(h)_1(a) = 1 - h_1(\sim a), g^A(j)_1(a) = 1 - j_2(a)$, y $g^A(j)_2(a) = 1 - j_1(a)$, lo que implica que $g^A(j)_2^*(a) = 1 - j_1(\sim a)$. Como $j_2(a) = j_2^*(\sim a) \leq h_1(\sim a) \leq j_1(\sim a)$, entonces $1 - j_1(\sim a) \leq 1 - h_1(\sim a) \leq 1 - j_2(a)$, lo que implica que $g^A \times g^A(h,j) \in K(A)$. Luego $(K(A), g^A \times g^A)$ es también un espacio de De Morgan.

Para cada número natural k y cada sucesión de elementos $a, b_1, \ldots, b_k, c \in A$, definimos:

$W_{a,b_1,\ldots,b_k,c} = \{(h,j) \in K(A) \mid h_1(a) = j_1(b_1) = \ldots = j_1(b_k) = j_2(c) = 1\}$.

Afirmamos que los conjuntos $W_{a,b_1,\ldots,b_k,c}$ forman una base para la topología determinada por los subconjuntos abiertos crecientes de $K(A)$. Para demostrar esto, sea $U \subseteq K(A)$ un abierto creciente no vacío y sea $(h,j) \in U$. Sea k un número natural y sea $T_k = \{(a, b_1, \ldots, b_k, c) \in A^{k+2} \mid h_1(a) = j_1(b_1) = \ldots = j_1(b_k) = j_2(c) = 1\}$. Supongamos que para todo número natural k y para toda sucesión $(a, b_1, \ldots, b_k, c) \in T_k$, $W_{a,b_1,\ldots,b_k,c} \cap K(A) \setminus U \neq \emptyset$. Como $K(A) \setminus U$ es compacto y:

$W_{a,b_1,\ldots,b_k,c} \cap W_{a',b'_1,\ldots,b'_{k'},c'} = W_{a\wedge a',b_1,\ldots,b_k,b'_1,\ldots,b'_{k'},c\vee c'}$,

entonces la familia determinada por los conjuntos de la forma $W_{a,b_1,\ldots,b_k,c} \cap K(A) \setminus U$ es una familia de subconjuntos cerrados de $K(A)$ que satisface la propiedad de la intersección finita. Luego existe $(h', j') \in K(A) \setminus U$ tal que $(h', j') \in W_{a,b_1,\ldots,b_k,c}$ para todo k y para toda sucesión $(a, b_1, \ldots, b_k, c) \in T_k$. De esta propiedad es inmediato verificar que $(h,j) \leq (h',j')$. Como $(h,j) \in U$ y U es creciente, deducimos que $(h',j') \in U$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, existe k y elementos $a, b_1, \ldots, b_k, c \in A$ tales que $(h,j) \in W_{a,b_1,\ldots,b_k,c}$ y $W_{a,b_1,\ldots,b_k,c} \subseteq U$ lo que prueba la afirmación.

Lema 3.4.8 *Sea A un álgebra de De Morgan, sea $j \in J(A)$ y sea $b \in A$. Entonces existe $h \in H(A)$ tal que $(h,j) \in K(A)$ y $j_1(b) = h_1(b)$.*

Demostración. Sea $I = \{a \in A \mid j_1(a) = 0\}$ y sea $F = \{a \in A \mid j_2^*(a) = 1\}$. Es fácil ver que I y F son un ideal y un filtro de $\mathrm{L}(A)$ respectivamente. Como $j_2^*(a) \leq j_1(a)$ para todo $a \in A$, resulta que $I \cap F = \emptyset$. Luego existe un filtro primo P tal que $P \cap I = \emptyset$ y $F \subseteq P$. Si $j_1(b) = 0$, entonces definiendo $h_1 : A \to 2$ como la función característica de P, resulta que el homomorfismo $h : A \to A(2)$ definido por $h(a) = (h_1(a), h_1(\sim a))$, satisface la condiciones

$(h,j) \in K(A)$ y $j_1(b) = h_1(b)$. Supongamos ahora que $j_1(b) = 1$. Sea $F' = [F \cup \{b\})$. Supongamos que $F' \cap I \neq \emptyset$. Luego habría un elemento $a \in F$ tal que $j_1(a \wedge b) = 0$. Como j_1 es un j_2^*-homomorfismo y $j_2^*(a) = 1$, entonces $j_1(a) \wedge j_1(b) = j_1(a) = 0$, lo que implica que $j_2^*(a) = 0$, pues $j_2^*(a) \leq j_1(a)$, lo que es un absurdo. Luego $F' \cap I = \emptyset$. Sea $P \in X(A)$ tal que $F' \subseteq P$, y $P \cap I = \emptyset$. Definiendo h_1 y h como en el caso anterior, resulta que h verifica la tesis.□

Es claro que la aplicación $d : K(A) \rightarrow J(A)$ definida por $d((h,j)) = j$ es una función de De Morgan. Del Lema 3.4.8 y del hecho que $(h,j) \in K(A)$ implica $h_1(a) \leq j_1(a)$ para todo $a \in A$, deducimos la siguiente igualdad:

$d(W_{a,b_1,\ldots,b_k,c}) = \{j \in V \mid j_1(a) = j_1(b_1) = \ldots = j_1(b_k) = j_2(c) = 1\}$.

Como los conjuntos $W_{a,b_1,\ldots,b_k,c}$ son una base para la topología determinada por los abiertos crecientes de $K(A)$, resulta de la igualdad de arriba que d transforma abiertos crecientes de $K(A)$ en abiertos crecientes de $J(A)$. Más aún, del Lema 3.4.8 deducimos que d es suryectiva. Por lo tanto, deducimos del Lema 3.4.5, que $(K(A), g^A \times g^A, Ker(d))$ es una MQ-estructura.
Sea MDA el álgebra de De Morgan monádica dual de $(K(A), g^A \times g^A, Ker(d)$ considerada como el conjunto de las funciones de De Morgan de $K(A)$ en 4.

Es obvio que la aplicación $c : K(A) \rightarrow H(A)$ definida por $c(h,j) = h$ es también una función de De Morgan. Además c es suryectiva pues $(h,h) \in K(A)$ para todo $h \in H(A)$. Por lo tanto, el dual de c es un homomorfismo inyectivo de álgebras de De Morgan $c^* : A \rightarrow$ MDA, donde c^* está dada por la fórmula:

(1) $c^*(a)(h,j) = h(a)$ para todo $a \in A$ y para todo $(h,j) \in K(A)$.

Por otra parte, deducimos del Lemma 3.4.5 (i) y del Lema 3.4.8 que:

(2) $\nabla c^*(a)((h,j)) = j(a)$ para todo $a \in A$ y para todo $(h,j) \in K(A)$.

Sea $m \in$ MDA y sea $U \in D(K(A))$ tal que $m((h,j)) = (C_U((h,j)), 1 - C_{g^A \times g^A(U)}((h,j)))$ para todo $(h,j) \in K(A)$. Como los conjuntos $W_{a,b_1,\ldots,b_k,c}$ forman una base para la topología determinada por los abiertos crecientes de $K(A)$ y U es un abierto compacto, deducimos que existen elementos a_i, c_i y b_{ij} en A, con $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, k_i$ tal que

$$U = W_{a_1,b_{11},\ldots,b_{1k_1},c_1} \cup \ldots \cup W_{a_k,b_{k1},\ldots,b_{kk_k},c_k}$$

Luego, si $(h,j) \in K(A)$, tenemos que

$C_U((h,j)) = (h_1(a_1) \wedge j_1(b_{11}) \wedge \ldots \wedge j_1(b_{1k_1}) \wedge j_2(c_1)) \vee$
$\ldots \vee (h_1(a_k) \wedge j_1(b_{k1}) \wedge \ldots \wedge j_1(b_{kk_k}) \wedge j_2(c_k))$
Por lo tanto, deducimos de (1) y (2) que:

(3) $m_1 = C_U = (c^*(a_1)_1 \wedge (\nabla c^*(b_{11}))_1 \wedge \ldots \wedge (\nabla c^*(b_{1k_1}))_1 \wedge (\nabla c^*(c_1))_2) \vee$
$\ldots \vee (c^*(a_k)_1 \wedge (\nabla c^*(b_{k1}))_1 \wedge \ldots \wedge (\nabla c^*(b_{kk_k})_1 \wedge (\nabla c^*(c_k))_2)$
Por otra parte, es fácil ver que:

$g^A \times g^A(W_{a,b_1,\ldots,b_k,c}) = \{(h,j) \in K(A) \mid h_1(\sim a) = j_2(b_1) =$
$= \ldots = j_2(b_k) = j_1(c) = 0\}$
Por lo tanto, tenemos que:

(4) $m_2 = 1 - C_{g^A \times g^A(U)} = (c^*(\sim a_1)_1 \vee (\nabla c^*(b_{11}))_2 \vee \ldots \vee (\nabla c^*(b_{1k_1}))_2 \vee$
$\vee (\nabla c^*(c_1))_1) \wedge \ldots \wedge (c^*(\sim a_k)_1 \vee (\nabla c^*(b_{k1}))_2 \vee \ldots \vee (\nabla c^*(b_{kk_k}))_2 \vee (\nabla c^*(c_k))_1)$

Por lo tanto, deducimos de (3), (4) y del hecho que el orden en la segunda coordenada es el orden dual de **2**, la siguiente igualdad:

$m = (c^*(a_1) \wedge \nabla c^*(b_{11}) \wedge \ldots \wedge \nabla c^*(b_{1k_1}) \wedge \sim \nabla c^*(c_1)) \vee$
$\ldots \vee (c^*(a_k) \wedge \nabla c^*(b_{k1}) \wedge \ldots \wedge \nabla c^*(b_{kk_k}) \wedge \sim \nabla c^*(c_k))$
Luego hemos demostrado que **MDA** está generada por $c^*(A) \cup \nabla(c^*(A))$. Por lo tanto, **MDA** satisface las condiciones (1) y (2) de la Definición 3.4.4. Veamos ahora que **MDA** verifica la condición (3). Sea (B,∇) un álgebra de Morgan monádica y sea $h : A \rightarrow B$ un homomorfismo de álgebras de De Morgan. Sea Z el espacio dual de B considerado como el conjunto de los homomorfismos de álgebras de De Morgan de B en $A(\mathbf{2})$. Sea $z \in Z$. Es claro que la composición $z \circ h$ es obviamente un elemento de $H(A)$. De la Observación 3.4.7, deducimos que la correspondencia $a \mapsto z(\nabla(h(a))$ es un elemento de $J(A)$. Más aún, es fácil ver que $(z \circ h, z \circ \nabla \circ h) \in K(A)$ y que la correspondencia $z \mapsto (z \circ h, z \circ \nabla \circ h)$ define una función de De Morgan $\theta : Z \rightarrow K(A)$.
Sea $F = E(\nabla)$, donde ∇ es el cuantificador definido sobre B. Del Teorema 3.1.5 tenemos que $(z,z') \in F$ si y sólo si $z \circ \nabla = z' \circ \nabla$. Afirmamos que:
$F(\theta^{-1}(W_{a,b_1,\ldots,b_k,c})) =$
$\{z \in Z \mid z_1(\nabla(h(a))) = z_1(\nabla(h(b_1))) = \ldots = z_1(\nabla(h(b_k))) = z_1(\sim \nabla(h(c))) = 1\}$.
En efecto, $F(\theta^{-1}(W_{a,b_1,\ldots,b_k,c})) =$
$F(\{z \in Z \mid z_1(h(a)) = z_1(\nabla(h(b_1))) = \ldots = z_1(\nabla(h(b_k))) = z_1(\sim \nabla(h(c))) = 1\} \subseteq$

$\{z \in Z \mid z_1(\nabla(h(a))) = z_1(\nabla(h(b_1))) = \ldots = z_1(\nabla(h(b_k))) = z_1(\sim \nabla(h(c))) = 1\}$.

pues $a \leq \nabla a$. Para probar la otra inclusión, sea $z \in Z$ tal que $z_1(\nabla(h(a))) = z_1(\nabla(h(b_1))) = \ldots = z_1(\nabla(h(b_k))) = z_1(\sim \nabla(h(c))) = 1$. Sea $F' = \{b \in \nabla(B) \mid z_1(b) = 1\}$, sea F'' el filtro generado por $F' \cup \{h(a)\}$ y sea I el ideal generado por $\nabla(B) \setminus F'$. Supongamos que $F'' \cap I \neq \emptyset$. Luego habrían elementos $b_1, \ldots, b_n$ en B y un elemento $f \in F'$ tal que $\nabla b_1 \vee \ldots \vee \nabla b_n \in \nabla(B) \setminus F'$ y $f \wedge h(a) \leq \nabla b_1 \vee \ldots \vee \nabla b_n$. Como ∇ es un cuantificador y $f \in \nabla(B)$, deducimos que $f \wedge \nabla h(a) \leq \nabla b_1 \vee \ldots \vee \nabla b_n$ y como $\nabla h(a) \in F$, tendríamos que $f \wedge \nabla h(a) \in F'$. Luego $\nabla b_1 \vee \ldots \vee b_n \in F'$, y como F' es un filtro primo en $\nabla(B)$, tenemos que $\nabla b_i \in F'$ para algún $i \in \{1, \ldots, n\}$, lo que contradice el hecho que $\nabla b_i \in \nabla(B) \setminus F'$. Por lo tanto hemos probado que $F'' \cap I = \emptyset$. Sea P un filtro primo de B tal que $F'' \subseteq P$ y $P \cap I = \emptyset$. Sea $z'_1 = C_P$. Es fácil ver de la definición de z'_1 que el homomorfismo de álgebras de De Morgan $z' \in H(B)$, definido por $z'(b) = (z'_1(b), z'_1(\sim b))$ para todo $b \in B$, satisface la igualdad $z \circ \nabla = z' \circ \nabla$ y que $z' \in \theta^{-1}(W_{a,b_1,\ldots,b_k,c})$, y esto prueba la otra inclusión.

Como:

$$d(W_{a,b_1,\ldots,b_k,c}) = \{j \in J(A) \mid j_1(a) = j_1(b_1) = \ldots = j_1(b_k) = j_2(c) = 1\}$$

.

deducimos que:

$\theta^{-1}(E(W_{a,b_1,\ldots,b_k,c})) = \theta^{-1}(\{(h,j) \in K(A) \mid j_1(a) = j_1(b_1) = \ldots = j_1(b_k) = j_2(c) = 1\}) = F(\theta^{-1}(W_{a,b_1,\ldots,b_k,c}))$.

y como los abiertos cerrados crecientes de $K(A)$ son uniones finitas de abiertos de la forma $W_{a,b_1,\ldots,b_k,c}$, resulta que $F(\theta^{-1}(U)) = \theta^{-1}(E(U))$ para todo $U \in D(X)$. Por lo tanto θ es un MQ-morfismo de la MQ-estructura (Z, g, F) en la MQ-estructura $(K(A), g^A \times g^A, E)$. Consecuentemente, el dual de θ es un homomorfismo de álgebras de De Morgan monádicas $\theta^* :$ MDA $\to B$. Es fácil ver que esta aplicación está dada por la correspondence $m \mapsto m((z \circ h, z \circ \nabla \circ h))$ para todo $m \in$ **MDA** y para todo $z \in Z$. De la dualidad de Priestley resulta que $\theta^*(m)$ es el elemento de B que corresponde a la función $m((z \circ h, z \circ \nabla \circ h))$. Supongamos que $m \in c^*(A)$, o sea $m = c^*(a)$ para algún $a \in A$. Como $c^*(a)((z \circ h, z \circ \nabla \circ h)) = z(h(a))$ para todo $z \in Z$, tenemos que $\theta^*(c^*(a)) = h(a)$ para todo $a \in A$, y esto prueba que MDA satisface la propiedad (3) de la Definición 3.4.4. Por lo tanto, MDA es la extensión monádica libre de A.

Como aplicación de esta construcción, veamos como es la estructura del espacio de Priestley del álgebra de De Morgan monádica libre con un generador. Este espacio de Priestley es $K(\mathbf{FM}(1))$, donde recordemos que $\mathbf{FM}(1)$ es el álgebra de De Morgan libre con un generador x.

Calculemos primero $J(\mathbf{FM}(1))$. Como $\mathbf{FM}(1)$ es un álgebra finita, resulta que los ideales y filtros de $\mathbf{FM}(1)$ son principales. Por lo tanto podemos identificar a los elementos de $J(\mathbf{FM}(1))$ como pares de elementos de $\mathbf{FM}(1)$ de la siguiente manera.

Sea j_1 un homomorfismo superior y sea j_2^{*} un homomorfismo inferior. Sea $I = \{a \in \mathbf{FM}(1) \mid j_1(a) = 0\}$ y sea $F = \{a \in \mathbf{FM}(1) \mid j_2^{*}(a) = 1\}$. Como I y F son un ideal y un filtro principales, tenemos que existen $a, b \in \mathbf{FM}(1)$ tales que $I = (a]$ y $F = [b)$. Más aún, es fácil ver que $(j_1, j_2^{*}) \in J(\mathbf{FM}(1))$ si y sólo si a y b verifican las siguientes propiedades:

(i) $a \not\geq b$.

(ii) $b \rightarrow a = a$.

(iii) $b \leftarrow a = b$.

Donde $\leftarrow$ es la implicación de Brouwer.

Sean $(j_1, j_2^{*}), (k_1, k_2^{*}) \in J(\mathbf{FM}(1))$ y sean a_1, b_1, a_2, b_2 los elementos determinados por j_1, j_2^{*}, k_1 y k_2^{*} respectivamente. Es fácil ver que $(j_1, j_2^{*}) \leq (k_1, k_2^{*})$ si y sólo si $a_1 \geq a_2$ y $b_1 \leq b_2$. Por lo tanto, identificando a $J(\mathbf{FM}(1))$ como pares ordenados (a, b) que cumplen (i), (ii) y (iii), resulta que:

$J(\mathbf{FM}(1)) = \{(x\vee \sim x, 1),\ (x, 1),\ (\sim x, 1),\ (x\wedge \sim x, 1),\ (x, \sim x),$
$(\sim x, x),\ (x\wedge \sim x, x\vee \sim x),\ (0, 1),\ (0, x\vee \sim x),\ (0, x),$
$(0, \sim x),\ (0, x\wedge \sim x)\}$

Donde el orden está dado por la relación $(a, b) \leq (c, d)$ si y sólo si $a \geq c$ y $b \leq d$.

Análogamente, se puede ver que los elementos de $K(\mathbf{FM}(1))$ se pueden identificar con ternas de elementos (a, c, b) de $\mathbf{FM}(1)$ tales que $(a, b) \in J(\mathbf{FM}(1))$ y c es un elemento irreducible de $\mathbf{FM}(1))$ tal que

(iv) $c \leq b$.

(v) $a \not\geq c$.

Donde el orden está dado por:

$(a, c, b) \leq (a', c', b')$ si y sólo si $a \geq a', c \leq c'$ y $b \leq b'$.

Por lo tanto:

$K(\mathbf{FM}(1)) = \{(x\vee \sim x, 1, 1),\ (x, 1, 1),\ (x, \sim x, 1),\ (\sim x, 1, 1),$
$(\sim x, x, 1),\ (x\wedge \sim x, 1, 1),\ (x\wedge \sim x, x, 1),\ (x\wedge \sim x, \sim x, 1),\ (x, \sim x, \sim x),$

$(\sim x, x, x)$, $(x \wedge \sim x, x, x \vee \sim x)$, $(x \wedge \sim x, \sim x, x \vee \sim x)$,
$(0, x, 1)$, $(0, \sim x, 1)$, $(0, x \wedge \sim x, 1)$, $(0, x, x \vee \sim x)$, $(0, \sim x, x \vee \sim x)$,
$(0, x \wedge \sim x, x \vee \sim x)$, $(0, x, x)$, $(0, x \wedge \sim x, x)$, $(0, \sim x, \sim x)$,
$(0, x \wedge \sim x, x)$, $(0, x \wedge \sim x, x \wedge \sim x)\}$

Capítulo 4

Dualidad de Priestley para reticulados distributivos y funciones monótonas

Como hemos mencionado en los preliminares, la dualidad de Priestley entre la categoría $\mathcal{L}$ de los reticulados distributivos acotados y homomorfismos y la categoría $\mathcal{P}$ de los espacios de Priestley y funciones monótonas continuas, ha sido extendida en [12] obteniendo una dualidad entre la categoría $\mathcal{LS}$ de los reticulados distributivos acotados y homomorfismos superiores y la categoría $\mathcal{PS}$ de los espacios de Priestley y las relaciones de Priestley. Como dar una relación binaria R entre dos conjuntos X e Y, es equivalente a dar una función $R^* : X \to \mathcal{P}(Y)$, definiendo $R^*(x) = R(x)$ para todo $x \in X$, resulta que podemos identificar a los morfismos de la categoría $\mathcal{PS}$ con funciones de X en $\mathcal{P}(Y)$, mientras que en la categoría $\mathcal{P}$ los morfismos son funciones de X en Y, con X e Y espacios de Priestley.
La categoría de los reticulados distributivos acotados y funciones monótonas que preservan el 0 será denotada con $\mathcal{MO}$. En este capítulo veremos que se puede extender la dualidad obtenida en [12], a una dualidad entre la categoría $\mathcal{MO}$ y la categoría cuyos objetos son espacios de Priestley y cuyos morfismos serán ciertas funciones de la forma $f : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$. Esto muestra que en las categorías $\mathcal{L}$, $\mathcal{LS}$ y $\mathcal{MO}$, la estructura de los morfismos de la categoría dual es más compleja en la medida que los morfismos de las categorías respectivas cumple menos condiciones.
En [18] también se obtiene una dualidad para reticulados distributivos aco-

tados y funciones monótonas, aunque esta dualidad es diferente de la que obtendremos aqui.

Sean X e Y conjuntos. A cada función $f : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ le asociaremos una aplicación $f^{\bullet} : \mathcal{P}(Y) \to \mathcal{P}(X)$ definida de la siguiente forma; para todo $V \in \mathcal{P}(Y)$:

$f^{\bullet}(V) = \{x \in X \mid A \cap V \neq \emptyset$ para todo $A \in f(x)\}$,

Observemos que para cada $x \in X$, $f(x)$ es una familia $\{A_i \mid i \in I_x\}$ de subconjuntos de Y, donde el conjunto de índices I_x depende de x. En lo que sigue, $f(x)$ será denotado con $\{A_i \mid i \in I_x\}$ para todo $x \in X$.

Observación 4.0.9 Sean X e Y conjuntos. A toda familia de relaciones binarias $(R_i)_{i\in I}$ de X en Y, le podemos asociar una aplicación $RI : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ definiendo $RI(x) = \{R_i(x) \mid i \in I\}$ para todo $x \in X$. Recíprocamente, toda aplicación $f : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ proviene de una familia de relaciones binarias de X en Y. En efecto, sea $I_f = \prod_{x\in X} I_x$. Definiendo, para cada $j \in I_f$, $R_j = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in A_{j_x}\}$, es fácil ver que $f = RI_f$. Esto prueba que la correspondencia $(R_i)_{i\in I} \mapsto RI$ es una función sobreyectiva del conjunto formado por la familia de relaciones binarias de X en Y, sobre el conjunto de las funciones de X en $\mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$. Sin embargo, esta correspondencia no es inyectiva. Tomemos por ejemplo un conjunto X con dos elementos x_1 y x_2. Supongamos que $Y = X$ y sea $I = \{1,2,3\}$. Definimos $R_1 = S_1 = \{(x_2,x_2),(x_2,x_1),(x_1,x_2)\}$, $R_2 = \{(x_1,x_1)\}$, $S_2 = \{(x_1,x_2)\}$ y $R_3 = S_3$ como la identidad. Es fácil verificar que $RI = SI$ y claramente las familias son distintas.

Definición 4.0.10 Sean X e Y espacios de Priestley. Una aplicación $f : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ se llama *descomposición de Priestley* de X en Y, si se verifican las siguientes condiciones:

(1) *A_i es un subconjunto cerrado y decreciente de Y, para todo $x \in X$ y para todo $i \in I_x$*

(2) *Si $x \in X$, entonces la familia $\{A_i \mid i \in I_x\}$ es una anticadena de subconjuntos de Y.*

(3) *Si $V \in D(Y)$, entonces $f^{\bullet}(V) \in D(X)$.*

(4) *Si* $x \in X$, *y* $(V_i)_{i\in I_x}$ *es una familia de abiertos cerrados crecientes de* Y *tales que* $V_i \cap A_i \neq \emptyset$ *para todo* $i \in I_x$, *entonces existe un número finito de índices,* $i_1, i_2, \ldots, i_n \in I_x$, *tales que* $x \in f^{*}(V_{i_1} \cup V_{i_2} \ldots \cup V_{i_n})$.

Notaremos con $\mathcal{D}(X,Y)$ al conjunto de todas las decomposiciones de Priestley de X en Y.

Sean X e Y espacios de Priestley y sea $f : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ una alicación tal que $f(x)$ es un conjunto unitario: $f(x) = \{A_x\}$, para todo $x \in X$. Podemos pensar a f como una función de X en $\mathcal{P}(Y)$, o equivalentemente, como una relación binaria R_f de X en Y, donde:

$R_f = \{(x,y) \in X \times Y \mid y \in A_x\}$.

En este caso las condiciones (2) y (4) de la Definición 4.0.10 se satisfacen trivialmente, y de las condiciones (2) y (3), deducimos que f *es una descomposición de Priestley si y sólo si* R_f *es una relación de Priestley.*

Definición 4.0.11 Sea L un reticulado distributivo acotado y sea $S \subseteq L$ un subconjunto decreciente de L. Diremos que un ideal I de L es un S-*ideal* si I verifica las siguientes condiciones:

(s1) $I \subseteq S$.

(s2) *Si* J *es un ideal de* L *tal que* $I \subseteq J \subseteq S$, *entonces* $I = J$.

En otras palabras, un S-ideal es un ideal que es maximal en el conjunto de los ideales que están contenidos en S. Observemos que si S es un ideal de L, entonces I es un S-ideal si y sólo si $I = S$. Si T_S denota al conjunto de todos los S-ideales, es fácil probar, usando el lema de Zorn, que $S = \bigcup T_S$.

Teorema 4.0.12 *Sean* L, M *reticulados distributivos acotados y sea* $m \in \mathcal{MO}(L,M)$. *Para cada* $P \in X(M)$, *sea* $S_P = L \setminus m^{-1}(P)$ *y sea* $I_P = \{I \in \mathcal{P}(L) \mid I$ *es un* S_P*-ideal*$\}$. *Definimos para cada* $I \in I_P$, $A_I = \{Q \in X(L) \mid Q \cap I = \emptyset\}$. *Entonces la aplicación* $m^{*} : X(M) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X(L)))$ *definida por:*

$m^{*}(P) = \{A_I \mid I \in I_P\}$ *para todo* $P \in X(M)$

es una descomposición de Priestley.

Demostración. Sea $P \in X(M)$. Como m es una función monótona, resulta que $m^{-1}(P)$ es un conjunto creciente, y por lo tanto S_P es decreciente. Es fácil ver que m^{*} satisface las condiciones (1) y (2) de la Definición 4.0.10. Veamos que m^{*} satisface la condición (3). Afirmamos que $m^{**}(\sigma_L(a)) = \sigma_M(m(a))$ para todo $a \in L$. Sea $P \in m^{**}(\sigma_L(a))$ y supongamos que $m(a) \notin P$. Luego $a \notin m^{-1}(P)$, lo que implica que a pertenece a algún S_P-ideal I. Como $P \in m^{**}(\sigma_L(a))$, tenemos que $A_I \cap \sigma_L(a) \neq \emptyset$. Luego existe $Q \in A_I$ tal que $a \in Q$. De la definición de A_I inferimos que $Q \cap I = \emptyset$, absurdo, pues $a \in Q \cap I$. Por lo tanto hemos probado que $m^{**}(\sigma_L(a)) \subseteq \sigma_M(m(a))$. Para probar la otra inclusión, sea $P \in \sigma_M(m(a))$ y sea $I \in I_P$. Luego $a \in m^{-1}(P)$ y por lo tanto $a \notin I$. Sea $Q \in X(L)$ tal que $Q \cap I = \emptyset$ y $a \in Q$. Entonces, $A_I \cap \sigma_L(a) \neq \emptyset$, lo que implica que $P \in m^{**}(\sigma_L(a))$. Para terminar la demostración, veamos que m^{*} satisface la condición (4) de la Definición 4.0.10. Sea $P \in X(M)$ y sea $(V_I)_{I \in I_P}$ una familia de abiertos cerrados crecientes de $X(L)$ tal que $V_I \cap A_I \neq \emptyset$ para todo $I \in I_P$. Esto significa que para todo $I \in I_P$ existe un elemento $a_I \in L$ y un filtro primo Q_I de L tal que $V_I = \sigma_L(a_I)$, $a_I \in Q_I$ y $Q_I \cap I = \emptyset$. Sea $J = (a_I]$. Supongamos que $J \subseteq S_P$. Luego existiría $J' \in I_P$ tal que $J \subseteq J'$, lo que implica que $a_{J'} \in J' \cap Q_{J'}$, lo que es una contradicción. Por lo tanto, $J \not\subseteq S_P$ y como S_P es decreciente, deducimos que existen elementos $a_{I_1}, \ldots, a_{I_n}$ tal que $m(a_{I_1} \vee \ldots \vee a_{I_n}) \in P$. Luego $P \in \sigma_M(m(a_{I_1} \vee \ldots \vee a_{I_n})) = m^{**}(\sigma_L(a_{I_1}) \cup \ldots \cup \sigma_L(a_{I_n})) = m^{**}(V_{I_1} \cup \ldots \cup V_{I_n})$.□

Teorema 4.0.13 *Sean X e Y espacios de Priestley. Entonces la correspondencia $f \mapsto f^{*}$ define una biyección entre $\mathcal{D}(X,Y)$ y $\mathcal{MO}(D(Y), D(X))$.*

Demostración. Sean $f, g \in \mathcal{D}(X,Y)$ tales que $f^{*} = g^{*}$ y sea $x \in X$. Pongamos $f(x) = \{A_i \mid i \in I_x\}$ y $g(x) = \{B_j \mid j \in J_x\}$. Sea $j \in J_x$. Supongamos que $A_i \not\subseteq B_j$ para todo $i \in I_x$. Como B_j es un subconjunto cerrado y decreciente de Y, inferimos que para cada $i \in I_x$ existe $a_i \in A_i \setminus B_j$. Como B_j es decreciente resulta que $a_i \not\leq b_j$ para todo $b_j \in B_j$, lo que implica que existe $V_{b_j} \in D(Y)$ tal que $a_i \in V_{b_j}$ y $b_j \notin V_{b_j}$. Por lo tanto $\bigcup_{b_j \in B_j} Y \setminus V_{b_j}$ es un cubrimiento de abiertos de B_j, y como B_j es compacto, inferimos que existe un número finito de índices $j_1, \ldots, j_n$ tales que $B_j \subseteq (Y \setminus V_{b_{j_1}}) \cup \ldots (Y \setminus V_{b_{j_n}})$. Sea $V_i = V_{b_{j_1}} \cap \ldots \cap V_{b_{j_n}}$. Luego $V_i \in D(Y)$, $a_i \in V_i$ y $V_i \cap B_j = \emptyset$. Por lo tanto tenemos que para cada $i \in I_x$ existe $V_i \in D(Y)$ tal que $A_i \cap V_i \neq \emptyset$ y $V_i \cap B_j = \emptyset$. Como f es una decomposición de Priestley, deducimos que existen $i_1, \ldots, i_n \in I_x$ tales que $x \in f^*(V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_n}) = g^*(V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_n})$. Luego $B_j \cap (V_{i_1} \cup \ldots \cup V_{i_n}) \neq \emptyset$, lo que es un absurdo. Por lo tanto, existe $i_j \in I_x$ tal que $A_{i_j} \subseteq B_j$. Análogamente se prueba que para todo $i \in I_x$ existe $j \in J_x$ tal que $B_j \subseteq A_i$. En particular tenemos que existe $j_{i_j} \in J_x$ tal que $B_{j_{i_j}} \subseteq A_{i_j}$ lo que implica que $B_{j_{i_j}} \subseteq B_j$. Como los conjuntos B_j forman una anticadena de subconjuntos of Y, deducimos que $B_j = B_{j_{i_j}} = A_i$. Esto prueba que $\{B_j \mid j \in J_x\} \subseteq \{A_i \mid i \in I_x\}$ y el mismo argumento sirve para probar que vale la otra inclusión. Por lo tanto la correspondencia $f \mapsto f^*$ es inyectiva. Para terminar la demostración resta probar que ésta correspondencia es suryectiva. Sea $m \in \mathcal{MO}(D(Y), D(X))$. Por el Teorema 4.0.12 $m^* \in \mathcal{D}(X(D(X)), X(D(Y)))$. Definamos para cada $x \in X$, $f(x) = \{\varepsilon_Y^{-1}(A_i) \mid i \in I_x$, donde $m^*(\varepsilon_X(x)) = \{A_i \mid i \in I_x\}$. Es fácil ver que f es una descomposición de Priestley y que $f^* = m$.□

Observaciones 4.0.14 (i) Notemos que si Y es un espacio de Priestley finito, entonces la condición (4) de la Definición 4.0.10 se cumple siempre para toda aplicación $f : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$. Por lo tanto, f es una descomposición de Priestley si y sólo si f satisface las condiciones (1) y (3).
(ii) El siguiente ejemplo muestra que si precindimos de la condición (4), entonces la aplicación $f \mapsto f^*$ no es necesariamente inyectiva cuando Y es infinito.
Sea $A = \mathcal{P}(\mathrm{N})$, sea $X = Y = X(A)$ y sean f_1 y f_2 las siguientes aplicaciones de X en $\mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$. En ambos casos el conjunto de índices no depende de x, esto es, para f_1, $I_x = \mathrm{N}$ para todo $x \in X$; y para f_2, $I_x = \{I \in \mathcal{P}(A)$ tal que I es un ideal maximal de $A\}$ para todo $x \in X$. Para cada $x \in X$, definimos $f_1(x) = \{\sigma_A(\{n\}) \mid n \in \mathrm{N}\}$ y $f_2(x) = \{A_I \mid I \in I_x\}$, donde $A_I = \{A \setminus I\}$. Es fácil ver que f_1 y f_2 satisfacen las condiciones (1) y (3) de la Definición 4.0.10 y que $f_1^*(V) = f_2^*(V) = \emptyset$ para todo $V \in D(X)$ distinto de X, y $f_1^*(X) = f_2^*(X) = X$. Sea $I = \{B \in \mathcal{P}(\mathrm{N})$ tal que B es finito $\}$. Es fácil ver que I es un ideal propio de A. Sea J un ideal maximal de A que contenga a I. Supongamos que $A_J = \sigma_A(\{n\})$ para algún n. Luego $\{n\} \in A \setminus J$, absurdo, pues los conjuntos finitos son elementos de J. Luego $A_J \neq \sigma_A(\{n\})$ para todo $n \in \mathrm{N}$, lo que implica que $f_1 \neq f_2$.
(iii) Sea n un número natural y sea A el álgebra de Boole $\mathbf{2}^n$. Como $X(2)$ es el conjunto unitario $\{1\}$ y $X(A)$ es un espacio Booleano finito con n elementos, entonces toda descomposición de Priestley $f : X(2) \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X(A)))$ se puede

identificar con una familia de subconjuntos de $X(A)$ que satisface la condición (2), pues las condiciones (1), (3) y (4) se satisfacen trivialmente. Por lo tanto, deducimos del Teorema 4.0.13 y del hecho que $\sigma_A : A \to D(X(A))$ es un isomorfismo de álgebras de Boole, el siguiente resultado conocido:
Sea X un conjunto con n elementos. Entonces el número de anticadenas del conjunto parcialmente ordenado $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es igual al número de funciones monótonas de $\mathbf{2}^n$ en $\mathbf{2}$, y que es igual al número de elementos del reticulado distributivo libre con n generadores.

Nuestro próximo paso será definir la categoría $\mathcal{D}$ cuyos objetos son los espacios de Priestley y cuyos morfismos son las descomposiciones de Priestley. Para hacer esto debemos definir la composición de dos morfismos. Sean X, Y y Z conjuntos y sean $f : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Y))$ y $g : Y \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Z))$ dos aplicaciones. Definamos $f \odot g : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(Z))$ como sigue:

$$g \odot f(x) = \{A \in \mathcal{P}(Z) \mid A \in g(y) \text{ para algún } y \in \bigcup f(x)\}.$$

Es fácil ver que si f y g son relaciones binarias, o equivalentemente, $f(x)$ y $g(y)$ son conjuntos unitarios para todo $x \in X$ y para todo $y \in Y$, entonces $g \odot f$ no es otra cosa que la composición de relaciones. Aunque parece natural definir la composición de los morfismos en $\mathcal{D}$ de esta manera, el próximo ejemplo muestra que esta composición no es la adecuada

Ejemplo 4.0.15 Sea X un espacio Booleano con tres elementos x, y y z. Definamos $f : X \to \mathcal{P}(\mathcal{P}(X))$ por la fórmula:

$f(x) = \{\{x, y\}, \{y, z\}\}$,
$f(y) = \{\{x\}\}$, y
$f(z) = \{\{x, y\}\}$

Es claro que f es una descomposición de Priestley y es fácil verificar que $f \odot f(x) = \{\{x\}, \{x, y\}, \{y, z\},\}$. Luego $f \odot f(x)$ no es una anticadena de subconjuntos de X y por lo tanto $f \odot f$ no es una descomposición de Priestley.

Del Teorema 4.0.13, deducimos que hay una forma de definir la composición de dos descomposiciones de Priestley de modo tal que el exista un funtor contravariante entre las categorías $\mathcal{MO}$ y $\mathcal{D}$ como sigue. Sean X e Y espacios de Priestley y sea $\mu : \mathcal{D}(X, Y) \to \mathcal{MO}$ la aplicación definida por $\mu(f) = f^*$ para toda $f \in \mathcal{D}(X, Y)$. Sea $f \in \mathcal{D}(X, Y)$ y sea $g \in \mathcal{D}(Y, Z)$. Definamos $g \oplus f = \mu^{-1}(f^* \circ g^*)$. Es fácil ver que con ésta composición, $\mathcal{D}$ es una categoría y que $\mathcal{D}$ es dualmente equivalente a la categoría opuesta de

$\mathcal{MO}$. Esta categoría no es interesante desde el punto de vista que ésta ley de composición *no parece una operación natural de morfismos en la categoría* $\mathcal{D}$.

Apéndice

Dualidad para conjuntos parcialmente ordenados

Un resultado debido a G. Birkhoff es que todo conjunto parcialmente ordenado finito es isomorfo al conjunto parcialmente ordenado de los filtros primos de un reticulado distributivo finito. Este resultado ha sido generalizado por M. Guillaume en [21] como sigue.

Sea H un álgebra de Heyting. Un elemento $a \in H$ se dice un *átomo de H* si existe un elemento $a^- \in H$ que verifica las siguientes condiciones:

(i) $a^- < a$

(ii) Si $b \in H$ es tal que $b < a$, entonces $b \leq a^-$.

Es decir, el conjunto de los elementos menores que a tiene último elemento. Esta noción de átomo generaliza la dada para reticulados distributivos acotados en el sentido que si a es un átomo del reticulado subyacente a H, entonces a es un átomo de H, donde en este caso $a^- = 0$. Más aún, si H es un álgebra de Boole, ambas nociones coinciden.

En [21], Guillaume prueba el siguiente resultado:

Lema .0.16 *([21]). Sea H un álgebra de Heyting y sea $a \in H$. Entonces son equivalentes:*

(i) a es un átomo de H.

(ii) $H \setminus [a) = (a \to a^-]$.

(iii) $a \neq 0$ y para todo subconjunto S de H tal que existe el supremo $\bigvee S$ entonces $a \leq \bigvee S$ si y sólo si $a \leq s$ para algún $s \in S$.

(iv) $a \neq 0$ y para todo subconjunto S de H tal que existe el supremo $\bigvee S$ entonces $a = \bigvee S$ implica que $a \in S$.

De la condición (ii) del lema de arriba se deduce que si a es un átomo de H, entonces el complemento del fitro primo generado por a es un ideal principal y generado por el pseudocomplemento $a \to a^-$.

Un álgebra de Heyting H se dice *atómica* si para todo par de elementos x e y de H tales que $x \not\leq y$ existe un átomo a de H tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$. Guillaume ha probado el siguiente resultado:

Todo conjunto parcialmente ordenado es isomorfo al conjunto parcialmente ordenado formado por los átomos de un álgebra de Heyting completa y atómica., más precisamente

Teorema .0.17 *([21].) Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces P es isomorfo al conjunto parcialmente ordenado formado por los átomos del álgebra de Heyting de los conjuntos crecientes de P*

Es fácil ver que si el conjunto parcialmente ordenado es finito, éste resultado coincide con el resultado de Birkhoff mecionado al principio del apéndice, pues los átomos se identifican con los filtros primos del reticulado de los conjuntos crecientes de P.

Nuestro objetivo será mostrar demostrar que el Teorema .0.17 puede ser expresado en términos topológicos y veremos que existe una interesante analogía con la dualidad de Priestley para reticulados distributivos acotados.

Definición .0.18 Un *reticulado de Priestley* es un sistema $(L, \tau, \vee, \wedge, 0, 1)$ tal que $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$ es un reticulado distributivo acotado, y τ es una topología sobre L tal que:

(1) *L es compacto.*

(2) *Si $x, y \in L$ y $x \not\leq y$, entonces existe un filtro primo P de L abierto y cerrado tal que $x \in P$ e $y \notin P$.*

Notaremos con $P(L)$ al conjunto de los filtros primos de L que son abiertos y cerrados. Si $(P, \leq)$ es un conjunto parcialmente ordenado, notaremos con $\mathrm{M}(P)$ el conjunto de las funciones monótonas de P en $\mathbf{2}$.

Como veremos más adelante, el próximo ejemplo es el ejemplo más general de reticulado de Priestley:

Ejemplo .0.19 Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado.
Es fácil ver que $\mathrm{M}(P)$ es un subconjunto cerrado de $\mathbf{2}^P$ con la topología producto, y por lo tanto es compacto. Por otra parte es claro que $\mathrm{M}(P)$ es un subreticulado de $\mathbf{2}^P$. Veamos que $\mathrm{M}(P)$ satisface la condición (2) de la definición anterior. Sean $f, g \in \mathrm{M}(P)$ tales que $f \not\leq g$. Luego existe $a \in P$ tal que $f(a) = 1$ y $g(a) = 0$. Sea $Q = \{h \in \mathrm{M}(P) \mid h(a) = 1\}$.
Es fácil ver que Q es un filtro primo abierto cerrado de $\mathrm{M}(P)$ tal que $f \in Q$ y $g \notin Q$. Por lo tanto hemos probado que $\mathrm{M}(P)$ *es un reticulado de Priestley.*

Un *reticulado topológico* [4] es un sistema $(L, \tau, \vee, \wedge)$ tal que $(L, \vee, \wedge)$ es un reticulado y τ es una topología sobre L tal que las operaciones $\vee$ y $\wedge$ son continuas. Como *todo reticulado de Priestley L es un espacio de Priestley*, deducimos que los abiertos cerrados crecientes y los abiertos cerrados decrecientes de L son una subbase para la topología de L.
Sea U un abierto cerrado creciente de L. Por medio de un argumento de compacidad, es fácil mostrar que U es intersección finita de uniones finitas de elementos de $P(L)$. De este hecho es también fácil probar que *todo reticulado de Priestley es un reticulado topológico.*
Es claro que todo reticulado distributivo finito es un reticulado de Priestley con la topología discreta. Si X es un conjunto infinito, entonces $\mathbf{2}^X$ es un ejemplo de un reticulado de Priestley infinito con la topología producto.

Un elemento no nulo a de un reticulado L que cumpla la condición (iii) del Lema .0.16 se denomina *completamente irreducible.* Si a verifica la condición (iv) de dicho lema, entonces a se denomina *completamente coprimo.* La noción de elemento primo se define dualmente ([1],[20]).
Un elemento a de un reticulado L se llama *compacto* si verifica la siguiente propiedad:

Si $(x_i)_{i\in I})$ es una familia de elementos de L que tiene supremo $\bigvee_{i\in I} x_i$, entonces $a \leq \bigvee_{i\in I} x_i$ implica que existe un número finito de elementos $x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}$ de la familia $(x_i)_{i\in I})$ tal que $a \leq x_{i_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}$.
Como se puede ver, la noción de elemento compacto es una abstracción de la noción de subconjunto conjunto compacto de un espacio topológico.
Es claro que todo elemento completamente irreducible es completamente coprimo y que todo elemento completamente irreducible es compacto. Si L es un reticulado distributivo acotado que verifica la ley distributiva generalizada $x \wedge (\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I}(x \wedge x_i)$, todo elemento completamente coprimo es completamente irreducible y por lo tanto también compacto.
Un reticulado completo L se llama *algebraico* si todo elemento es supremo de elementos compactos. Si L y $L^{\geq}$ son algebraicos, entonces L se llama *bialgebraico.* Las siguientes son propiedades básicas de los reticulados algebraicos:

Proposición .0.20 *([20]). Sea L un reticulado.*

(i) Si L es distributivo y algebraico entonces L es un álgebra de Heyting.

(ii) Si L es algebraico, entonces todo elemento de L es ínfimo de elementos completamente primos.

Proposición .0.21 *Sea L un reticulado de Priestley. Entonces L satisface las siguientes propiedades:*

(1) Todo filtro cerrado de L es principal.

(2) Todo ideal cerrado de L es principal.

(3) L es completo.

(4) Todo filtro primo abierto cerrado de L es principal generado por un elemento completamente irreducible.

(5) L es bialgebraico.

(6) L es un álgebra de Heyting y un álgebra de Brower.

Demostración.
(1) Sea $a \in L$. Afirmamos que $[a)$ y $(a]$ son subconjuntos cerrados de L. Sea b un elemento de la clausura de $[a)$ y supongamos que $a \not\leq b$. Luego existe $P \in P(L)$ tal que $a \in P$ y $b \notin P$. Como $L \setminus P$ es un entorno de b, deducimos que $L \setminus P$ debe intersecar a $[a)$. Sea x un elemento de ésta intersección. Como $a \leq x$ y $a \in P$, inferimos que $x \in P$, lo que es un absurdo. En forma análoga se demuestra que $(a]$ es cerrado.
Sea F un filtro cerrado de L. Sean $a_1, \ldots, a_n$ elementos de F. Es claro que $F \cap (a_1] \cap \ldots \cap (a_n] \neq \emptyset$, pues $a_1 \wedge \ldots \wedge a_n \in F$. Luego la familia $\{F \cap (a] \mid a \in F\}$ es una familia de cerrados que satisface la propiedad de la intersección finita. Como L es compacto, deducimos que existe $f \in F$ tal que $f \leq a$ para todo $a \in F$, o sea $F = [f)$.
(2) La demostración es análoga a (1) y omitiremos la prueba.
(3) Sea $(a_i)_{i \in I}$ una familia de elementos de L y sea $F = \{x \in L \mid x \geq a_i$ para todo $i \in I\}$. Es fácil ver que F es un filtro cerrado de L. Por (1), F es principal. Sea $a \in L$ tal que $F = [a)$. Es inmediato ver que a es el supremo de los a_i.
(4) Sea P un filtro primo abierto cerrado de L. Por (1) P es principal generado por un elemento $a \in L$. Sea $(a_i)_{i \in I}$ una familia de elementos de L tal que $a \leq \bigvee_{i \in I} a_i$. Supongamos que $a \not\leq a_i$ para todo $i \in I$. Como P es un filtro primo, resulta que ningún supremo finito de los a_i pertenece a P. Luego $(L \setminus P) \cap [a_{i_1}) \cap \ldots [a_{i_n}) \neq \emptyset$ para todo subconjunto finito $\{a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}\}$ del conjunto $\{a_i \mid i \in I\}$. Por compacidad deducimos que la familia $(L \setminus P) \cap [a_i)$ tiene intersección no vacía, lo que implica que existe $b \notin P$ tal que $b \geq a_i$ para todo $i \in I$. Por lo tanto, $b \geq \bigvee_{i \in I} a_i$. Como $\bigvee_{i \in I} a_i \in P$ deducimos que $b \in P$, absurdo.

(5) De (1) y (4) deducimos que si a y b son elementos de L, entonces $a \not\leq b$ implica que existe un elemento completamente irreducible c tal que $c \leq a$ y $c \not\leq b$. Como c es compacto y L es completo deducimos de esta propiedad de separación que L es algebraico. Es fácil ver que $L^{\geq}$ es un reticulado de Priestley y por lo tanto $L^{\geq}$ es algebraico.
(6) Es consecuencia de la Proposición .0.20. □

El próximo teorema es una generalización del teorema de Birkhoff mencionado al principio y muestra también que todo reticulado de Priestley es de la forma $\mathrm{M}(P)$ para algún conjunto parcialmente ordenado P. Más precisamente:

Teorema .0.22 *(a) Sea $(P, \leq)$ un conjunto parcialmente ordenado. Entonces $(P, \leq)$ es isomorfo al conjunto parcialmente ordenado $(P(\mathrm{M}(P)), \subseteq)$.*

(b) Sea L un reticulado de Priestley. Entonces L es homeomorfo e isomorfo al reticulado de Priestley $\mathrm{M}(P(L))$.

Demostración.
(a) Sea $\mu_P : P \to P(\mathrm{M}(P))$ la siguiente aplicación:
$\mu_P(a) = \{f \in \mathrm{M}(P) \mid f(a) = 1\}$.
Como hemos dicho anteriormente, es fácil ver que $\mu_P(a)$ es un filtro primo abierto cerrado de $\mathrm{M}(P)$, lo que implica que μ_P está bien definida. Veamos que μ_P es suryectiva.
Sea Q un filtro primo abierto y cerrado de $\mathrm{M}(P)$. Para cada $f \in Q$, definimos:
$T_f = \{a \in P \mid f(a) = 1\}$.
Supongamos que para toda sucesión finita $a_1, \ldots, a_n \in T_f$, $\mu_P(a_1) \cap \ldots \cap \mu_P(a_n) \not\subseteq Q$. Luego $\mu_P(a_1) \cap \ldots \cap \mu_P(a_n) \cap (\mathrm{M}(P) \setminus Q) \neq \emptyset$. Por lo tanto la familia $\{\mu_P(a) \cap (\mathrm{M}(P) \setminus Q) : a \in T_f\}$ es una familia de cerrados de $\mathrm{M}(P)$ que satisface la propiedad de la intersección finita. Como $\mathrm{M}(P)$ es compacto, resulta que existe $g \in \mathrm{M}(P) \setminus Q$ tal que $g(a) = 1$ para todo $a \in T_f$. Como esta condición implica que $f \leq g$ y $f \in Q$, deducimos que $g \in Q$, lo que es un absurdo.
Por lo tanto existe un número finito $a_1, \ldots, a_n$ de elementos de T_f tales que $\mu_P(a_1) \cap \ldots \cap \mu_P(a_n) \subseteq Q$, y es fácil ver que esto implica que existe i entre 1 y n tal que $\mu_P(a_i) \subseteq Q$, pues los $\mu_P(a_i)$ son filtros. Así hemos demostrado que para todo $f \in Q$ existe $a \in T_f$ tal que $\mu_P(a) \subseteq Q$.

Sea $T = \{a \in T_f$ tal que $\mu_P(a) \subseteq Q$ para algún $f \in Q\}$. Por lo demostrado arriba resulta que $Q \subseteq \bigcup_{a \in T} \mu_P(a)$. Como Q es compacto, resulta que existen $a_1, \ldots, a_k \in T$ tales que $Q \subseteq Q_1 \cup \ldots Q_n$, donde $Q_i = \mu_P(a_i)$, para $i = 1, \ldots, k$. Otra vez, es fácil ver que existe i entre 1 y k tal que $Q \subseteq Q_i$, pues $Q, Q_1, \ldots, Q_k$ son filtros. Luego $Q \subseteq \mu_P(a_i)$, y como $a_i \in T$, resulta que $\mu_P(a_i) \subseteq Q$. Por lo tanto $Q = \mu_P(a_i)$, lo que prueba la suryectividad de μ. Falta probar que μ_P es inyectiva y que es un isomorfismo de orden, pero esto es de fácil verificación y omitiremos la prueba.

(b) Sea $\theta_L : L \to \mathrm{M}(P(L))$ la siguiente aplicación:

$$\theta_L(a)(P) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in P \\ 0 & \text{si } a \notin P \end{cases}$$

Veamos primero que θ_L es suryectiva. Sea $f \in \mathrm{M}(P(L))$ y sea $T = \{P \in P(L) \mid f(P) = 1\}$. Afirmamos que para todo $P \in T$ existe $a \in P$ tal que $\theta_L(a)^{-1}(\{1\}) = \{Q \in P(L) \mid a \in Q\} \subseteq T$. Supongamos que no. Luego existe $P \in T$ tal que para todo $a \in P$ existe $Q_a \in P(L)$ tal que $a \in Q_a$ y $Q_a \notin T$. Por lo tanto $P \subseteq \bigcup_{a \in P} Q_a$. Como P es compacto, resulta que P está contenido en una unión finita $Q_{a_1} \cup \ldots \cup Q_{a_n}$. Como P es un filtro, tenemos que existe i entre 1 y n tal que $P \subseteq Q_{a_i}$, lo que es un absurdo, pues esto implicaría que $Q_{a_i} \in T$ al ser T creciente y $P \in T$. Luego la afirmación queda probada.

Sea $S = \{a \in L \mid \theta_L(a)^{-1}(\{1\}) \subseteq T\}$. Por la Proposición .0.21 sabemos que L es completo, lo que implica que existe el supremo de S. Sea b este supremo. Veamos que $\{Q \in P(L) \mid b \in Q\} = T$.

Sea $Q \in P(L)$ tal que $b \in Q$. Por la Proposición .0.21, Q está generado por un elemento completamente irreducible, lo que implica que existe $a \in S$ tal que $a \in Q$. Luego $Q \in \theta_L(a)^{-1}(\{1\})$ y por la definición de S, esto implica que $Q \in T$. Luego $\{Q \in P(L) \mid b \in Q\} \subseteq T$. Para probar la otra inclusión, sea $Q \in T$. De acuerdo a lo que probamos arriba, existe $a \in Q$ tal que $\theta_L(a)^{-1}(\{1\}) \subseteq T$. Luego $a \in S$, y como $a \leq b$, resulta que $b \in Q$. Por lo tanto $\{Q \in P(L) \mid b \in Q\} = T$. De ésta igualdad es inmediato ver que $\theta_L(b) = f$ y esto prueba la suryectividad.

Del hecho que los filtros primos abiertos cerrados de L separan puntos, resulta que θ_L es un monomorfismo de conjuntos ordenados. Veamos que θ_L es continua. Como los conjuntos de la forma $\{f \in \mathrm{M}(P(L)) \mid f(Q) = 1\}$ y de la forma $\{f \in \mathrm{M}(P(L)) \mid f(Q) = 0\}$ forman una subbase para la topología

de $M(P(L))$, con $Q \in P(L)$, basta ver que la imagen inversa de θ_L por estos conjuntos es un abierto en L.
Sea $Q \in P(L)$. Luego, $\theta_L^{-1}(\{f \in M(P(L)) \mid f(Q) = 1\}) = \{a \in L \mid a \in Q\} = Q$. Análogamente, $\theta_L^{-1}(\{f \in M(P(L)) \mid f(Q) = 0\}) = \{a \in L \mid a \notin Q\} = L \setminus Q$. Como Q es un abierto cerrado, deducimos que θ_L es continua. Luego θ_L es una biyección continua entre L y $M(P(L))$, y como L es compacto y de Hausdorfff, resulta que θ_L es un homeomorfismo.□

De acuerdo a la Proposición .0.21y al Lema .0.16, todo reticulado de Priestley es bialgebraico y es un álgebra de Heyting atómica y completa. Observemos también, que de la parte (a) del anterior teorema, deducimos el Teorema .0.17. Nuestro próximo paso será ver que la clase de los reticulados de Priestley coincide con la clase de las álgebras de Heyting completas y atómicas y con la clase de los reticulados distributivos bialgebraicos.

Teorema .0.23 *Sea L un reticulado distributivo acotado. Las siguientes condiciones son equivalentes:*
(i) L es un reticulado de Priestley.
(ii) L es un álgebra de Heyting atómica y completa.
(iii) L es bialgebraico.

Demostración. (i) $\Rightarrow$ (ii). Sea L un reticulado de Priestley. De acuerdo a la Proposición .0.21, L es un álgebra de Heyting completa. Sean $x, y \in L$ tales que $x \not\leq y$ y sea $P \in P(L)$ tal que $x \in P$ e $y \notin P$. Como P está generado por un elemento completamente irreducible a, deducimos del Lema .0.16 que a es un átomo de álgebras de Heyting tal que $a \leq x$ y $a \not\leq y$. Por lo tanto L es un álgebra de Heyting atómica y completa.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Sea L un álgebra de Heyting completa y atómica. En [21] se prueba que L es isomorfa al álgebra de Heyting de los conjuntos crecientes del conjunto parcialmente ordenado determinado por los átomos de L. Si identificamos a los conjuntos crecientes con funciones monótonas, deducimos de Ejemplo .0.19 que L es un reticulado de Priestley, donde la topología está dada tomando como subbase los conjuntos de la forma $[a)$ y sus complementarios, con a un átomo de H.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Sea L un reticulado distributivo bialgebraico.
Como L y $L^{\geq}$ son un álgebra de Heyting y un álgebra de Brouwer respectivamente, se tiene que valen las leyes distributivas $a \vee (\bigwedge_{i\in I} x_i) = \bigwedge_{i\in I}(a \vee x_i)$ y $a \wedge (\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I}(a \wedge x_i)$. De la primer ley distributiva tenemos que un

elemento es completamente coprimo si y sólo si es completamente irreducible. Como $L^{\geq}$ es algebraico, deducimos de la Proposición .0.20 (ii) que

(*) Todo elemento de L es supremo de elementos completamente irreducibles.

Por otra parte, es un hecho conocido que si un reticulado es algebraico, entonces L es compacto, con la topología definida en L tomando como subbase los conjuntos de la forma $[k)$ y los complementarios de los conjuntos de la forma $L \setminus [x)$, con k compacto y $x \in L$. Esta topología se denomina la *topología de Lawson* ([20]).

Veamos que L es un reticulado de Priestley con la topología de Lawson. Como L es compacto, falta ver la propiedad de separación. Sean $a, b \in L$ tales que $a \not\leq b$. Por (*), existe un elemento completamente irreducible c tal que $c \leq a$ y $c \not\leq b$. Como c es compacto, resulta que $P = [c)$ es un filtro primo abierto cerrado de L.

(i) $\Rightarrow$ (iii) es la Proposición .0.21.□

Notaremos con $\mathcal{PO}$ a la categoría de los conjuntos parcialmente ordenados y funciones monótonas. La categoría de los reticulados de Priestley y homomorfismos acotados continuos será denotada con $\mathcal{RT}$. Nuestro próximo paso será probar que existe una dualidad entre $\mathcal{PO}$ y $\mathcal{RT}$. Sean $\alpha : \mathcal{PO} \to \mathcal{RT}$ y $\beta : \mathcal{RT} \to \mathcal{PO}$ los siguientes funtores. Si $(P, \leq)$ es un objeto en $\mathcal{PO}$, entonces $\alpha(P, \leq) = \mathrm{M}(P)$. Si $(P_1, \leq_1)$,$(P_2, \leq_2)$ son conjuntos parcialmente ordenados y $f : P_1 \to P_2$ es una función monótona, definimos $\alpha(f) : \mathrm{M}(P_2) \to \mathrm{M}(P_1)$ como sigue: $\alpha(f)(g) = g \circ f$ para todo $g \in \mathrm{M}(P_2)$. Es fácil ver que $\alpha(f)$ es un homomorfismo acotado y continuo y que α es un funtor contravariante. Si L es un objeto en $\mathcal{RT}$, entonces $\beta(L) = (P(L), \subseteq)$. Si L_1 y L_2 son reticulados de Priestley y $h : L_1 \to L_2$ es un homomorfismo acotado y continuo, definimos $\beta(h) : P(L_2) \to P(L_1)$ como $\beta(h)(Q) = h^{-1}(Q)$ para todo $Q \in P(L_2)$. Es inmediato ver que $\beta(h)$ es una función monótona y es claro que β es un funtor contravariante.

Afirmamos que $\alpha \circ \beta : \mathcal{RT} \to \mathcal{RT}$ y que $\beta \circ \alpha : \mathcal{PO} \to \mathcal{PO}$ son naturalmente equivalentes a los funtores identidad en las respectivas categorías, siendo éstas equivalencias dadas por lo isomorfismos θ_L y μ_P del teorema anterior. Veamos primero que si $(P_1, \leq_1)$ y $(P_2, \leq_2)$ son conjuntos parcialmente ordenados y $f : P_1 \to P_2$ es una función monótona, entonces:

* $\beta(\alpha(f)) \circ \mu_{P_1} = \mu_{P_2} \circ f$.

Sea $a \in P_1$. Luego $\beta(\alpha(f))(\mu_{P_1}(a)) = \beta(\alpha(f))(\{g \in \mathrm{M}(P_1) \mid g(a) = 1\}) = \alpha(f)^{-1}(\{g \in \mathrm{M}(P_1) \mid g(a) = 1\} = \{h \in \mathrm{M}(P_2) \mid h(f(a)) = 1\}$. Por otra parte, $\mu_{P_2} \circ f(a) = \mu_{P_2}(f(a)) = \{h \in \mathrm{M}(P_2) \mid h(f(a)) = 1\}$, y luego hemos probado la igualdad $*$.

Veamos ahora que si L_1 y L_2 son reticulados topoloógicos y $h : L_1 \to L_2$ es un homomorfismo acotado y continuo, entonces:

$\alpha(\beta(h)) \circ \theta_{L_1} = \theta_{L_2} \circ h.$

Sea $a \in L_1$. Luego $\alpha(\beta(h))(\theta_{L_1}(a)) = \theta_{L_1}(a) \circ \beta(h)$. Luego debemos ver que

$(i)\ \theta_{L_1}(a) \circ \beta(h) = \theta_{L_2}(h(a))$.

Sea $Q \in P(L_2)$. Luego $\theta_{L_1}(a) \circ \beta(h)(Q) = 1$ si y sólo si $a \in h^{-1}(Q)$, si y sólo si $h(a) \in Q$ si y sólo si $\theta_{L_2}(h(a))(Q) = 1$ y esto prueba la igualdad (i). Por lo tanto *existe una dualidad entre la categoría $\mathcal{PO}$ y la categoría opuesta de $\mathcal{RT}$.*

Bibliografía

[1] R. Balbes and P. Dwinger, **Distributive Lattices**, University of Missouri Press, Columbia, Missouri, 1974.

[2] N. D. Belnap, Jr. *A useful four-valued logic*, **Modern uses of multiple-valued logic**, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht-Holland / Boston - U. S. A., 1975.

[3] A. Bialynicki-Birula and H. Rasiowa, *On the representation of Quasi-Boolean algebras*, **Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys.** 5 (1957), pp. 259-261.

[4] G. Birkhoff, *Lattice theory*, edición revisada, A.M.S. Colloquium Publ. XXV, Nueva York (1948).

[5] W. J. Blok and PH. Dwinger, *Equational classes of closure algebras.*, **Ind. Math.** 37 (1975), pp.189-198.

[6] S. Burris and H. P. Sankappanavar, **A Course in Universal Algebra**, Springer Verlag, New York, 1981.

[7] R. Cignoli, *Coproducts in the category of Kleene and three-valued Lukasiewicz algebras*, **Studia Logica** 38 (1979) pp. 237-245.

[8] R. Cignoli and M. S. De Gallego, *Dualities for some De Morgan algebras with operators and Lukasiewicz algebras*, **J. Austral. Math. Soc.** 34 (1983), pp. 377-393.

[9] R. Cignoli, *The class of Kleene algebras satisfying an interpolation property and Nelson algebras*, **Algebra Universalis** 23 (1986) pp. 262-292.

[10] R.Cignoli, *Quantifiers on distributive lattices*, **Discrete Math.** 96 (1991) pp. 183-197.

[11] R. Cignoli, *Distributive lattice congruences and Priestley spaces*, **Actas del primer congreso Dr. Antonio Monteiro**, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca (1991) pp. 81-84.

[12] R.Cignoli, S.Lafalce and A.Petrovich, *Remarks on Priestley duality for distributive lattices*, **Order** 8 (1991), pp. 299-315.

[13] R. Cignoli, *Free Q-distributive lattices*, **Studia Logica** 56 (1996) pp. 23-29.

[14] W.H. Cornish and P. R. Fowler, *Coproducts of De Morgan algebras*, **Bull. Austral. Math. Soc.**, 16 (1977), pp. 1-13.

[15] W.H. Cornish and P. R. Fowler, *Coproducts of Kleene algebras*, **Bull. Austral. Math. Soc.** (Series A), 27 (1979), pp. 209-220.

[16] B.A. Davey and H. A. Priestley, **Introduction to lattices and order**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.

[17] B.A. Davey and H. Werner, *Dualities and equivalences for varieties of algebras*, **Contributions to lattice theory**, Colloquia Mathematica, Societatis Janos Bolyai, 33 (1983), pp. 101-275.

[18] J.D.Farley, *Priestley duality for order-preserving mappings*, **Order**, 13 (1996), pp. 65-98.

[19] R.Goldblatt, *Varieties of Complex algebras*, **Ann. Pure Appl. Logic.** 44 (1989), pp. 173-242.

[20] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D. Lawson, M. Mislove, D.S. Scott, *A Compendium of Continuous lattices*, **Springer-Verlag**, 1980.

[21] M. Guillaume, *On some representations of monadic Heyting algebras, with a theorem on constants*, submitido a publicación.

[22] P.R. Halmos, *Algebraic logic. I. Monadic Boolean algebras.*, **Compositio Math.** 12 (1955), pp. 217-249. Reproduced in [24].

[23] P.R.Halmos, *Free monadic algebras*, **Proc. Amer. Math. Soc.** 10 (1959), pp. 219-227. Reproduced in [24].

[24] P.R. Halmos, *Algebraic logic*, Chelsea, New York, 1962.

[25] J. Kalman, *Lattices with involution*, **Trans. Amer. Math. Soc.** 87 (1958), pp. 485-491.

[26] McKinsey, J. C. C. and A. Tarski, *The algebra of topology*, **Ann. of Math.** 45 (1944), pp. 141-191.

[27] J. Lukasiewicz, *O logike trojwartosciowej*, **Ruch Filozoficzny** 5 (1920).

[28] D. Makinson, *Aspectos de la lógica modal*, **Notas de Lógica Matemática**, Instituto de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, 28 (1971).

[29] S. MacLane and G. Birkhoff, *Algebra*, **The Macmillan Company** (1967).

[30] J. D. Monk. *On equational classes of algebraic versions of logic*, **I, Math. Scan.** 27 (1970), pp. 53-71.

[31] A Monteiro y O. Varsavsky, *Algebras de Heyting monádicas*, **Actas de las X Jornadas de la Unión matemática Argentina**, Bahía Blanca, 1957, pp. 52-62.

[32] A. Monteiro, *Matrices de De Morgan caractéristiques pour le calcul propositional classique*, **An. Acad. Brasil Ci** 52 (1960), pp. 1-7.

[33] A. Monteiro, *Sur les algèbres de Heyting symétriques*, **Portug. Math.**, 39 (1980), pp. 1-237.

[34] A. Petrovich, *Distributive lattices with an operator*, **Studia Logica**, 56 (1996), pp. 205-224.

[35] E. L. Post, *Introduccion to a general theory of elementary propositions*, **Amer. J. Math.** 43 (1921), 163-185.

[36] H.A.Priestley, *Representation of distributive lattices by means of ordered Stone spaces*, **Bull. London Math. Soc.** 2 (1970), pp. 186-190.

[37] H.A.Priestley, *Ordered topological spaces and the representation of distributive lattices*, **Proc. London Math. Soc.** 2(4) (1972), pp. 507-530.

[38] H.A.Priestley, *Stone lattices: a topological approach*, **Fund. Math.** 84 (1974), pp. 127-143.

[39] H.A.Priestley, *Ordered sets and duality for distributive lattices*, **Ann. Discrete Math.** 23 (1984), pp. 39-60.

[40] Rasiowa, H. and R. Sikorski, *The mathematics of metamathematics*, Warszawa (1963)

[41] H. Rasiowa, *An algebraic Approach to non-Classical Logics*, North-Holland, Amsterdam 1974.

[42] A. Urquart, *Distributive lattices with a dual homomorphic operation*, **Studia Logica** 38 (1979), pp. 201-209.

Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires
Ciudad Universitaria
1428 Buenos Aires — Argentina
e-mail: apetrov@mate.dm.uba.ar