

Tesis de Posgrado

Teorías modales para el estudio del scattering electromagnético por superficies corrugadas

Skigin, Diana Carina

1997

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Skigin, Diana Carina. (1997). Teorías modales para el estudio del scattering electromagnético por superficies corrugadas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2945_Skigin.pdf

Cita tipo Chicago:

Skigin, Diana Carina. "Teorías modales para el estudio del scattering electromagnético por superficies corrugadas". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1997. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2945_Skigin.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física
Grupo de Electromagnetismo Aplicado

**TEORIAS MODALES PARA EL ESTUDIO DEL SCATTERING
ELECTROMAGNÉTICO POR SUPERFICIES CORRUGADAS**

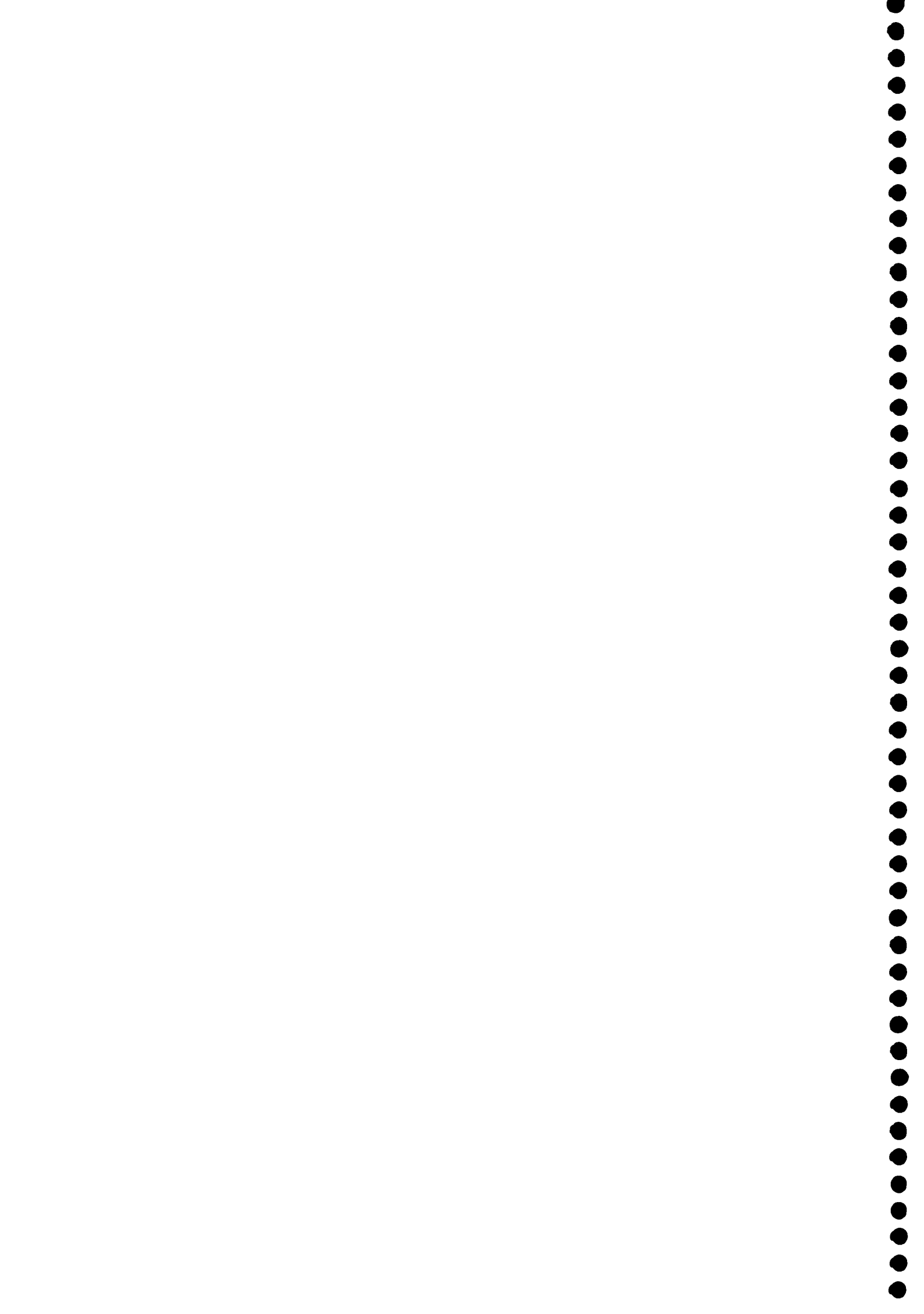
Diana Carina Skigin

Director: Dr. Ricardo A. Depine

Tesis presentada para optar por el título de Doctora en Ciencias Físicas

Agosto 1997

2234
hje



A mis padres



Agradecimientos

Quisiera agradecer en primer lugar a Ricardo, por haberme dado tanto esperando tan poco. Por haber confiado en mí desde el principio y por transmitirme el sentimiento de disfrutar del trabajo. Por el entusiasmo contagiado y por sostenerme en los momentos duros. Por tener siempre la respuesta justa, el gesto adecuado y la palabra necesaria. Por hacerme sentir colega más que alumna, y por ser mi mejor maestro, a la vez que un gran amigo.

A Angela, por ayudarme a sobrellevar momentos difíciles, estando siempre dispuesta a ofrecer una palabra o un gesto de aliento, y por tener mucha buena onda.

A Claudio, compañero de alegrías y bajones. Por la amistad nacida y compartida en estos años.

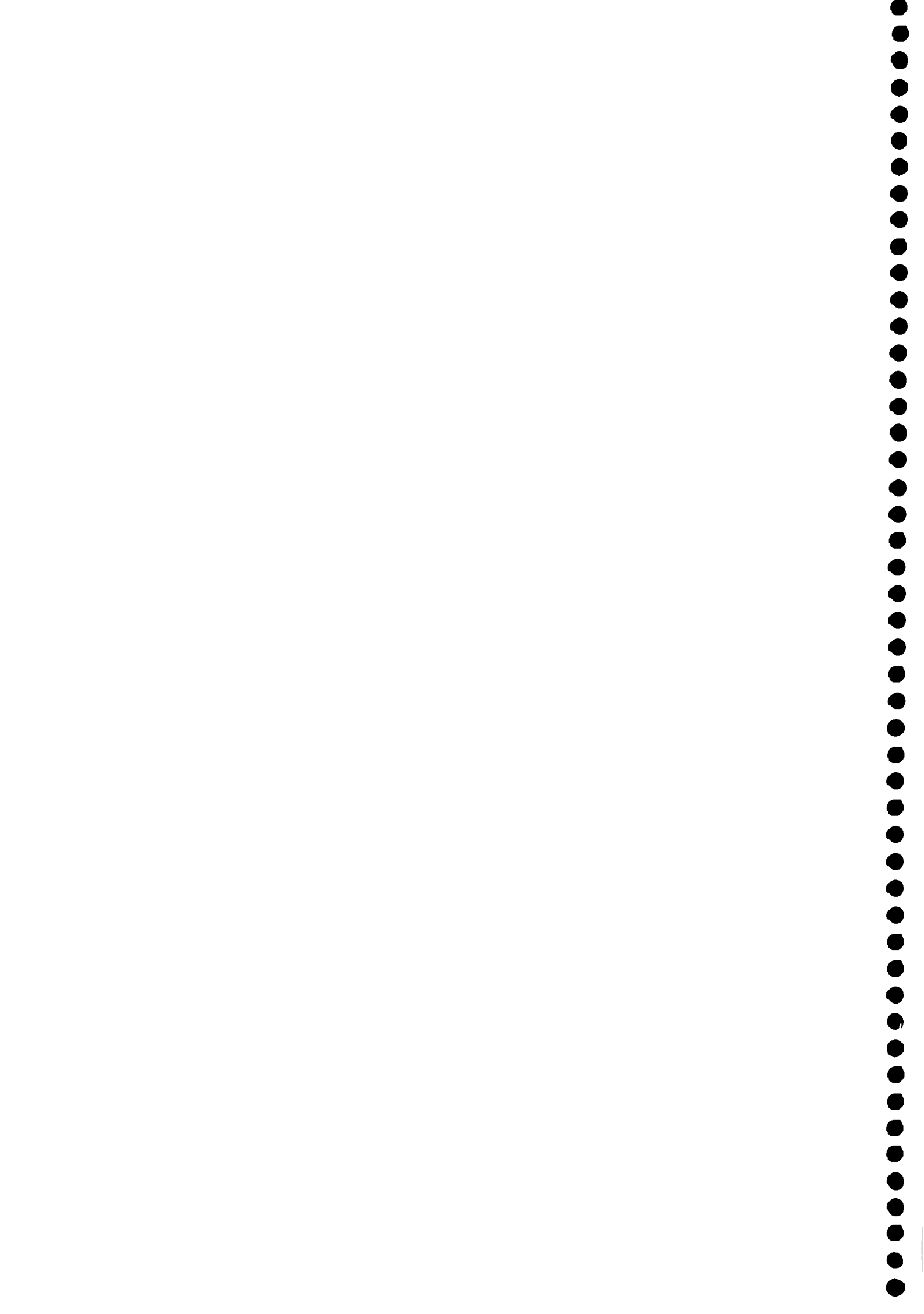
A Marina, mi amiga de siempre.

A todo el Grupo de Electromagnetismo Aplicado, por el apoyo y la colaboración.

Al Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, por proporcionarme un lugar de trabajo para poder llevar a cabo esta Tesis, y a todo su personal, que colaboró de alguna manera en la concreción de la misma.

Al CONICET, por las becas recibidas en estos años, sin las cuales este trabajo no hubiese sido posible.

A Dani, por ser mi apoyo permanente. Por darme fuerzas para no caer y por alentarme en todo momento. Por sus palabras optimistas, por tenerme paciencia y por contenerme. Por solucionar todos los problemas relacionados con la computadora, y otros también. Y fundamentalmente, por ser el marido ideal.



Resumen

En esta tesis se desarrollan nuevos métodos modales para el estudio del scattering por superficies con corrugados localizados. Se estudian superficies rugosas dieléctricas y metálicas con geometrías arbitrarias. Se utiliza la aproximación de multicapas para representar la verdadera forma de las interfases, y el algoritmo de la Matriz R para propagar los campos a través de las sucesivas capas. El formalismo se implementó numéricamente como programas FORTRAN, los cuales han sido sometidos a varios controles para asegurar su correcto funcionamiento. Se muestran resultados correspondientes a situaciones de interés que ilustran fenómenos como la excitación de ondas superficiales y la intensificación del pico de retrorreflexión. También se presentan ejemplos para estructuras con forma de cuña, y para superficies metálicas con surcos de perfil bivaluado.

Abstract

New modal methods for the scattering from rough surfaces of finite extent are developed. Dielectric and metallic corrugated surfaces with arbitrary geometry are treated. The multilayer approximation is used to generate the actual shape of the interfaces, and the R -matrix algorithm is employed to propagate the fields through the layers. The formalism developed was implemented as FORTRAN programs, which had been carefully tested. Results corresponding to interesting situations are shown, which illustrate phenomena like the excitation of surface waves and the backscattering enhancement. Examples for structures with wedge profiles are also included, as well as curves for metallic surfaces with a bivalued shape of the grooves.

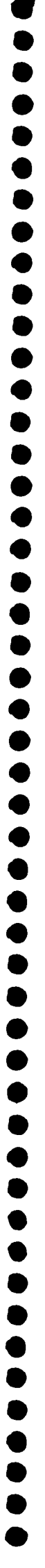
Título en inglés: "Modal theories for the electromagnetic scattering from rough surfaces".

Palabras claves: difracción, scattering, superficies rugosas, método modal, red finita.



Indice

1	Introducción	3
2	Fundamentos de la teoría modal	9
2.1	Generalidades de la teoría electromagnética	9
2.2	Red infinita perfectamente conductora	14
2.3	Red infinita rectangular dieléctrica	22
3	Redes finitas metálicas	29
3.1	Método modal tradicional: surcos rectangulares	29
3.2	Perfiles arbitrarios: Método de la Matriz R	34
3.3	Método de la Matriz R para metales reales	48
3.4	Resultados	56
3.4.1	Validación de resultados	56
3.4.2	Comparación con un método integral	65
3.4.3	Aplicaciones	69
4	Estructuras dieléctricas	81
4.1	Desarrollo teórico	81
4.2	Resultados	95
5	Estructuras de materiales absorbentes	105
5.1	Metales	106
5.2	Dieléctricos con pérdidas	111
6	Aplicaciones	119
6.1	Estructuras bivaluadas	119
6.2	Cuñas dieléctricas	128
7	Conclusiones	135
	Apéndice A	137
	Bibliografía	139



Capítulo 1

Introducción

La dispersión de la luz por superficies corrugadas ha sido un tema de gran interés dentro del electromagnetismo. Muchos autores se han dedicado a estudiar este tipo de problemas desde principios de siglo, pero recién a partir de los años 60, con los avances de la computación, se han podido realizar algunos cálculos que antes eran impensables. Se comenzó estudiando estructuras infinitamente periódicas (redes de difracción), para luego pasar a considerar superficies con corrugados finitos determinísticos o incluso con variaciones aleatorias de la profundidad.

En los últimos años se ha incrementado el interés por el estudio del scattering por superficies rugosas debido fundamentalmente a dos razones. Por un lado, la detección de ciertos fenómenos interesantes como la intensificación del pico de retroreflexión en superficies con corrugados aleatorios y la propagación de ondas superficiales. Por otro lado, las numerosas aplicaciones que ofrecen estos estudios, desde el censado remoto de superficies, la detección de objetos mediante radares, hasta la medición de micro-rugosidades de una superficie mediante técnicas de scattering inverso, han motivado un avance significativo de los estudios en esta área.

Los avances en las técnicas de microfabricación han permitido la realización de estructuras ópticas cada vez más complejas, diseñadas para lograr efectos específicos determinados. La fabricación y el control de dichas estructuras ha impulsado el desarrollo de métodos de simulación numérica eficientes y confiables. En muchas aplicaciones, las di-

mensiones típicas de la estructura son comparables a la longitud de onda de la radiación empleada. En esta región, llamada zona de resonancia, aproximaciones tales como la aproximación de Kirchhoff o la Óptica de Fourier no describen correctamente la dinámica de la difracción, por lo cual es necesario emplear métodos basados en la resolución rigurosa de las ecuaciones de Maxwell. El mayor problema surge del hecho de que sólo para muy pocas y determinadas geometrías se conocen soluciones analíticas de las ecuaciones de Maxwell. Por consiguiente, se ha desarrollado una gran cantidad de métodos numéricos para obtener soluciones a dichas ecuaciones, para los casos de las geometrías más usadas [1].

Dentro de los métodos más usuales para el tratamiento de problemas de scattering electromagnético se encuentran los métodos integrales [2]-[12] -que se caracterizan por resolver el problema mediante una ecuación integral basada en el teorema de Green-, los métodos diferenciales [13] -que resuelven directamente el sistema de ecuaciones que resulta de combinar las ecuaciones de Maxwell- y los métodos modales [14]- [16], que son los que utilizamos en este trabajo. Estos últimos resultan ser atractivos y eficaces dado que permiten obtener expresiones para los campos en términos de las autofunciones de la ecuación de Helmholtz, que son combinaciones lineales de funciones analíticas conocidas y simples de tratar matemáticamente. De este modo, los únicos parámetros numéricos a calcular son los autovalores de la ecuación de Helmholtz, que incluso es evitable para el caso de conductor perfecto [17]. Así se facilita la comprensión física de ciertos fenómenos que tienen lugar fundamentalmente en el caso de superficies no periódicas. Un ejemplo reciente de aplicación en un problema tecnológico, puede verse en las referencias [18], donde el control de calidad de los elementos dispersivos empleados por los satélites destinados a estudiar fuentes estelares de rayos X se realiza eficientemente empleando simulaciones basadas en un método modal.

Previamente a este trabajo de tesis, el método modal había sido aplicado únicamente a superficies con corrugado perfectamente periódico [18]-[23]. El objetivo del presente trabajo es generalizar el método modal al caso de superficies con corrugados de extensión

finita y con geometría y material arbitrarios. Cabe destacar que el tratamiento de superficies corrugadas no periódicas presenta un mayor grado de complejidad con respecto a las redes periódicas infinitas. En todos los métodos rigurosos empleados para estudiar el scattering electromagnético en superficies, las mayores dificultades surgen al imponer las condiciones de contorno en el corrugado. Se entiende así que las rugosidades periódicas resulten apreciablemente más sencillas de tratar que las no periódicas, pues en un caso el problema se reduce a asegurar que las condiciones de contorno se satisfacen en sólo un período, mientras que en el otro caso deben satisfacerse en regiones que se extienden a lo largo de muchas longitudes de onda. Por otra parte, cuando la estructura es periódica, la intensidad se distribuye en direcciones discretas determinadas, llamadas órdenes de difracción. Sin embargo, cuando el corrugado deja de ser periódico, la distribución de intensidades pasa a ser un continuo. Por lo tanto, además de imponer nuevas dificultades metodológicas, el abandono de la condición de periodicidad también se traduce en mayores demandas de almacenamiento numérico y de tiempo de cómputo.

En una primera etapa se aplicó el método modal al estudio de superficies con un número finito de surcos de perfil rectangular y distribuidos en forma arbitraria [17, 24]. Esta geometría presenta la ventaja de permitir la descripción del campo electromagnético en todo el espacio en función de unos pocos parámetros: las amplitudes modales de las autofunciones más importantes. Se optimizó el algoritmo numérico para obtener soluciones estables aún para cavidades profundas, las cuales presentan mayor interés en la actualidad. De este modo, se logró obtener una herramienta eficaz para el estudio sistemático de la dependencia de ciertos fenómenos con la profundidad del corrugado, la distancia entre surcos y el material.

Sin embargo, el hecho de imponer la forma rectangular de los surcos limitaba el estudio más general del tema, que debiera considerar una geometría arbitraria. Para ello, se ha implementado luego el Método Modal de Multicapas [23], que se basa en la aproximación del perfil real por un perfil escalonado. Es decir, que la zona interior de cada cavidad queda representada por una sucesión de capas de forma rectangular dentro de

las cuales se pueden desarrollar los campos en la base de funciones modales correspondientes a dicha geometría, que deben obtenerse previamente. Luego, se van empalmando los campos en cada una de las interfases mediante las condiciones de contorno, hasta obtener una relación entre las amplitudes modales de la capa inferior y los coeficientes de Rayleigh. Esta idea había sido aplicada por algunos autores para el tratamiento de redes infinitas periódicas, utilizando el algoritmo de propagación de los campos conocido como Matriz T [25, 26], que resulta numéricamente inestable, sobre todo en casos de superficies profundas, en las cuales estamos principalmente interesados. En los últimos años Li ha demostrado que el algoritmo conocido como Matriz R , ampliamente utilizado en el campo de la Físico-química [27, 28] pero poco conocido dentro de la Óptica y el Electromagnetismo, no presenta ningún tipo de inestabilidades numéricas, incluso cuando las cavidades son muy profundas. Este algoritmo de propagación ha sido aplicado a distintos métodos de resolución de problemas de difracción por redes infinitas, evidenciando su eficiencia en todos los casos [29]-[32].

Por consiguiente, en este trabajo se ha combinado el algoritmo de la Matriz R y el método modal, para el caso de superficies corrugadas no periódicas. Se verá que esto permite obtener una descripción eficiente de los fenómenos que ocurren cuando una onda electromagnética interactúa con estructuras rugosas de perfiles variados. Así se completa el desarrollo teórico y la implementación numérica de un formalismo útil y eficaz para el estudio de superficies con cavidades profundas de geometría arbitraria.

La organización de este trabajo es la siguiente. En el Capítulo 2 se presentan generalidades y fundamentos de la teoría electromagnética, que conforman el punto de partida del presente trabajo. Asimismo, se describen las características de las ondas incidentes que serán utilizadas para iluminar las estructuras tratadas. También se presenta el método modal en su caso más simple, es decir, redes de difracción infinitamente periódicas de perfil rectangular, tanto para el caso ideal de un material perfectamente conductor como así también para redes dieléctricas. Si bien esto no constituye un tema central dentro de esta Tesis, ayudará a comprender los conceptos básicos de los métodos modales que se

desarrollarán en los capítulos subsiguientes.

En el Capítulo 3 se presenta el formalismo del método modal aplicado a superficies rugosas no periódicas perfectamente conductoras. Se trata en primer lugar el caso de surcos con perfil rectangular, para luego pasar al tratamiento de geometrías arbitrarias. Este último paso se desarrolló implementando el algoritmo de la Matriz R , lo cual ha dado lugar al Método Modal de Multicapas, que se presenta en el mismo capítulo. Se tratan los dos modos fundamentales de polarización incidente s (campo eléctrico paralelo a la dirección de los surcos) y p (campo eléctrico perpendicular a la dirección de los surcos), presentando así una solución completa del problema. Se muestran resultados que validan el método presentado para distintas situaciones, se ilustran fenómenos de interés como la excitación de ondas superficiales, la intensificación del pico en la dirección de retroreflexión y se muestran curvas de intensidad de campo cercano.

El Capítulo 4 está dedicado a estructuras de materiales dieléctricos. Este tipo de materiales agrega un grado de complejidad adicional al método, dado que requiere hallar las raíces de una ecuación trascendente, las cuales no se pueden obtener mediante las técnicas numéricas habituales. La técnica de búsqueda de autovalores, como así también la aplicación del algoritmo de la Matriz R al caso de superficies dieléctricas son explicadas en este capítulo. Se presentan resultados correspondientes a estructuras dieléctricas con uno y dos surcos.

Cuando el material considerado tiene pérdidas óhmicas, ya sea un metal real o un dieléctrico con pérdidas, la ecuación de autovalores que debe resolverse es además compleja, dificultando aun más su resolución. Este caso es considerado en el Capítulo 5, donde se dan ejemplos ilustrativos.

A modo de aplicaciones del formalismo desarrollado se muestran en el Capítulo 6 algunos ejemplos correspondientes a situaciones de interés como son las estructuras bivaluadas y las cuñas dieléctricas. Finalmente se expresan las conclusiones extraídas del presente trabajo, como así también las futuras líneas de investigación que surgen a partir del mismo.



Capítulo 2

Fundamentos de la teoría modal

En este capítulo se dan los elementos fundamentales de la teoría electromagnética en los cuales se basa el presente trabajo, como así también una introducción al método modal, mediante la aplicación del mismo al caso de redes infinitas.

2.1 Generalidades de la teoría electromagnética

Clásicamente, el campo electromagnético se describe en términos de los vectores campo eléctrico \vec{E} e inducción magnética \vec{B} . Para incluir las propiedades del medio en el que éstos actúan, se introducen además los vectores \vec{D} y \vec{H} , llamados desplazamiento eléctrico y campo magnético, respectivamente. Los campos \vec{E} , \vec{B} , \vec{D} , y \vec{H} son funciones del punto, y satisfacen las ecuaciones de Maxwell. En ausencia de fuentes libres y utilizando el sistema de unidades gaussiano, dichas ecuaciones se escriben de la siguiente forma:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}, t) = -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}(\vec{r}, t)}{\partial t} , \quad (2.1)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}(\vec{r}, t)}{\partial t} , \quad (2.2)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}, t) = 0 , \quad (2.3)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}, t) = 0 , \quad (2.4)$$

donde c es la velocidad de la luz en el vacío. La ecuación (2.1) es la expresión de la Ley de Faraday en su forma diferencial, mientras que la ec. (2.2) es la generalización de la

Ley de Ampère al caso de campos dependientes del tiempo. En este trabajo, se considera que la dependencia temporal de los campos es del tipo armónico: $\exp(-i\omega t)$, donde i es la unidad imaginaria y ω es la frecuencia de la onda. En este caso, las ecuaciones de Maxwell se pueden escribir de manera más sencilla:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E}(\vec{r}) = i \frac{\omega}{c} \vec{B}(\vec{r}) , \quad (2.5)$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H}(\vec{r}) = -i \frac{\omega}{c} \vec{D}(\vec{r}) , \quad (2.6)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B}(\vec{r}) = 0 , \quad (2.7)$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D}(\vec{r}) = 0 . \quad (2.8)$$

A las ecuaciones de Maxwell debemos agregar las ecuaciones constitutivas, que describen los efectos que produce el campo electromagnético en el medio en cuestión. Para un medio lineal, isótropo y homogéneo, las ecuaciones constitutivas son las siguientes:

$$\vec{D}(\vec{r}) = \epsilon \vec{E}(\vec{r}) , \quad (2.9)$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \mu \vec{H}(\vec{r}) , \quad (2.10)$$

donde ϵ y μ son números complejos llamados permitividad eléctrica y permeabilidad magnética, respectivamente.

Combinando las ecuaciones (2.5) y (2.6), y utilizando la (2.7) y la (2.8), resulta la ecuación de ondas que deben satisfacer los campos:

$$(\nabla^2 + k^2) \begin{Bmatrix} \vec{E}(\vec{r}) \\ \vec{B}(\vec{r}) \end{Bmatrix} = 0 , \quad (2.11)$$

donde $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}/c$ es el número de onda. La ecuación (2.11) se conoce también con el nombre de ecuación de Helmholtz. En el presente trabajo sólo consideraremos medios no magnéticos, en los cuales $\mu = 1$ y por consiguiente $\vec{B} = \vec{H}$.

Si el espacio está dividido en dos regiones (1 y 2) por una superficie S , los campos deben satisfacer las siguientes condiciones de contorno en la interfase:

$$\hat{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1)|_S = 0 , \quad (2.12)$$

$$\hat{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)|_S = \frac{4\pi}{c} \vec{K} \quad , \quad (2.13)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1)|_S = 4\pi \Sigma \quad , \quad (2.14)$$

$$\hat{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1)|_S = 0 \quad , \quad (2.15)$$

donde \vec{K} es la corriente superficial, Σ es la densidad de cargas superficiales y \hat{n} es el versor normal a la superficie S que apunta del medio 1 al medio 2. Es decir, que se debe garantizar la continuidad de la componente tangencial de \vec{E} y de la componente normal de \vec{B} . Por

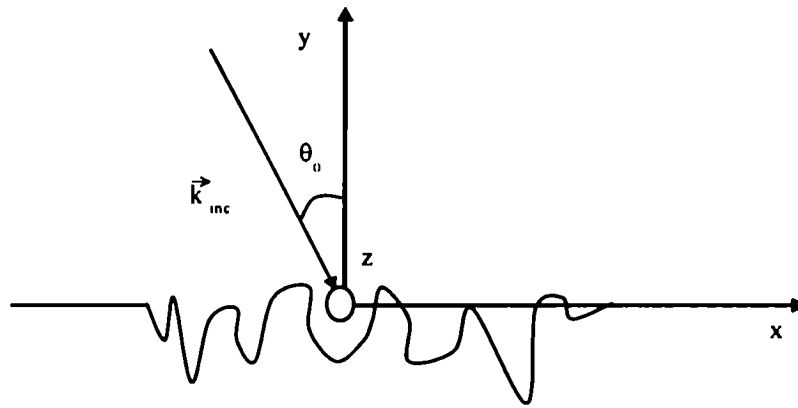


Figura 2.1: Esquema de la configuración utilizada

lo tanto, dado un haz incidente sobre una estructura que separa el espacio en regiones, debe resolverse la ecuación de Helmholtz (2.11) sujeta a las condiciones de contorno (2.12)-(2.15) en las interfases. Las incógnitas son las tres componentes cartesianas de los campos eléctrico y magnético, en todo punto del espacio. En este trabajo consideramos únicamente estructuras y haces incidentes con simetría de traslación a lo largo de un eje que denominaremos eje z (ver Figura 2.1). Si además, la dirección del haz incidente está contenida en la sección principal de la estructura, es decir, en el plano (x, y) , los campos no dependerán de la variable z . En dicho caso, haciendo uso de las ecuaciones (2.5) y (2.6),

podemos escribir todas las componentes cartesianas de los vectores \vec{E} y \vec{H} en función de sólo dos de ellas: las componentes $E_z(x, y)$ y $H_z(x, y)$, de la siguiente manera:

$$E_x(x, y) = \frac{i}{k} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial y} , \quad (2.16)$$

$$E_y(x, y) = -\frac{i}{k} \frac{\partial H_z(x, y)}{\partial x} , \quad (2.17)$$

$$H_x(x, y) = -\frac{i}{k} \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial y} , \quad (2.18)$$

$$H_y(x, y) = \frac{i}{k} \frac{\partial E_z(x, y)}{\partial x} . \quad (2.19)$$

De esta forma, reducimos el número de incógnitas de seis a dos, ya que los vectores campo eléctrico y magnético quedan totalmente determinados al hallar $E_z(x, y)$ y $H_z(x, y)$. En los casos en que las condiciones de contorno no mezclen a estas dos componentes, podemos separar el problema en dos modos fundamentales de polarización: *s* (también llamada TE, donde el campo eléctrico es paralelo a la dirección \hat{z} y luego $H_z = 0$) y *p* (también llamada TM, donde el campo magnético es paralelo a la dirección \hat{z} y luego $E_z = 0$). Estos dos modos pueden tratarse separadamente, y la solución para un caso general estará dada por una combinación de ambas soluciones. Por lo tanto, en este trabajo resolveremos ambos modos para cada una de las estructuras estudiadas.

Debe recordarse que los campos electromagnéticos deben satisfacer el balance energético. En problemas de scattering por superficies corrugadas, dicha condición impone que el promedio temporal del flujo del vector de Poynting \vec{S} a través de una superficie cerrada debe ser nulo [33]:

$$\oint \vec{S} \cdot \hat{n} \, da = 0 , \quad (2.20)$$

donde

$$\vec{S} = \frac{c}{8\pi} \text{Re}(\vec{E} \times \vec{H}^*) , \quad (2.21)$$

el asterisco denota complejo conjugado y \hat{n} es el versor normal a la superficie. Si la superficie se extiende desde $-\infty$ a $+\infty$, como es el caso de las estructuras consideradas

en este trabajo, se puede expresar la condición (2.20) de la siguiente manera:

$$\int \vec{S}_{\text{inc}} \cdot \hat{n} \, dl = \int \vec{S}_{\text{ref}} \cdot \hat{n} \, dl + \int \vec{S}_{\text{trans}} \cdot \hat{n} \, dl \quad , \quad (2.22)$$

donde \vec{S}_{inc} , \vec{S}_{ref} y \vec{S}_{trans} están definidos en (2.21) utilizando los campos incidentes, reflejados y transmitidos, respectivamente.

En los problemas desarrollados en este trabajo, se consideran dos tipos de iluminación de la superficie: mediante a) ondas planas y b) haces limitados espacialmente. Las primeras representan haces de energía infinita, lo cual se condice con el carácter infinito de las redes de difracción periódicas, y por lo tanto resultan ser físicamente significativas en ese caso.

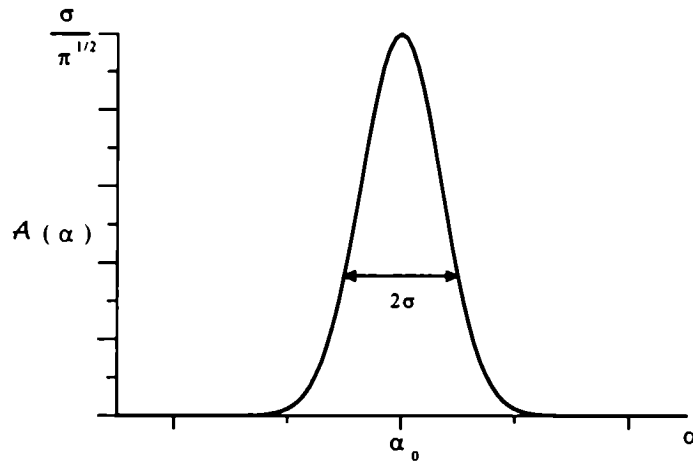


Figura 2.2: Distribución espectral de intensidades para un haz Gaussiano.

Los haces limitados representan distribuciones de energía dependientes del ángulo de incidencia, y son más adecuados para el estudio de algunas estructuras con corrugados localizados. En este caso, el campo incidente $f_{\text{inc}}^{\gamma}(x, y)$ (con $\gamma=s$ o p según el modo de polarización) se representa como una superposición de ondas planas:

$$f_{\text{inc}}^{\gamma}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} A(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_{r\gamma} y)} d\alpha \quad , \quad (2.23)$$

donde:

$$\beta_r = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \alpha^2} & \text{si } k^2 > \alpha^2 \\ i\sqrt{\alpha^2 - k^2} & \text{si } k^2 < \alpha^2 \end{cases} \quad (2.24)$$

i es la unidad imaginaria y $\mathcal{A}(\alpha)$ es la función de distribución espectral de amplitudes, que consideraremos como una Gaussiana de ancho $\sigma = 2/w$ (w es el ancho espacial del haz) centrada en $\alpha_0 = k \sin \theta_0$:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left\{-\frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{\sigma^2}\right\}, \quad (2.25)$$

donde θ_0 es el ángulo de incidencia alrededor del cual está centrado el haz (ver Figura 2.2).

El caso límite de la onda plana se obtiene reemplazando la función $\mathcal{A}(\alpha)$ en (2.23) por la función delta de Dirac: $\delta(\alpha - \alpha_0)$.

A modo de introducción al método modal, y para presentar los conceptos fundamentales del mismo, daremos a continuación la aplicación de dicho método al caso de redes rectangulares infinitamente periódicas [19, 22]. Si bien esto no constituye un tema central dentro de esta tesis, servirá para familiarizarse con la técnica y los conceptos básicos.

2.2 Red infinita perfectamente conductora

En esta sección, se presenta el método modal en su forma más sencilla, que corresponde al caso de redes infinitamente periódicas. La configuración es la esquematizada en la Figura 2.3.

La red es de período d , profundidad h y ancho de los surcos c . Los surcos se encuentran a lo largo de la dirección \hat{z} , y la dirección \hat{y} es normal a la superficie media de la red. El origen de coordenadas está ubicado en la superficie superior, en el centro de la cavidad, como se puede observar en la Figura 2.3. Como se ha explicado en la Sección 2.1, consideraremos que la superficie es iluminada por una onda plana de longitud de onda λ desde la zona $y > 0$, formando un ángulo θ_0 con el eje y . Por lo tanto, el plano de incidencia queda determinado como el plano (x, y) en nuestro sistema de coordenadas. El problema consiste

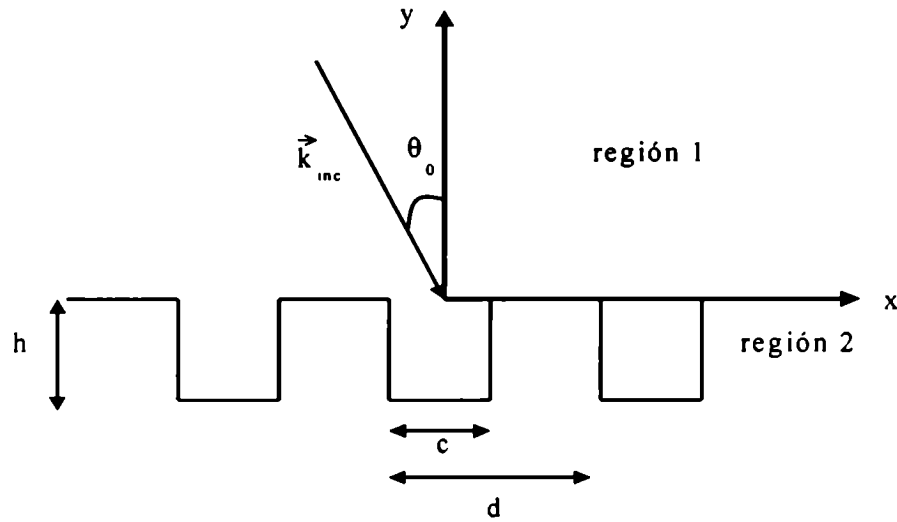


Figura 2.3: Red infinitamente periódica.

en resolver la ecuación de Helmholtz sujeta a las correspondientes condiciones de contorno. Para ello, dividiremos al problema en dos regiones: la región 1 ($y > 0$), en la cual los campos difractados se pueden representar mediante desarrollos de Rayleigh, y la región 2 ($-h < y < 0$), que es la zona modulada en la cual los campos serán representados mediante desarrollos modales.

Comenzaremos considerando una estructura metálica perfectamente conductora, para luego considerar el caso de un material dieléctrico isótropo. Dadas las características del problema, y teniendo en cuenta lo expresado en la sección anterior, separaremos el problema en dos casos fundamentales de polarización: s y p . Llamaremos $f_j^\gamma(x, y)$ a la componente z del campo eléctrico ($\gamma = s$) o del campo magnético ($\gamma = p$) en la región j . Entonces, debemos pedir que $f_j^\gamma(x, y)$ satisfaga la ecuación de Helmholtz (2.11) en cada una de las regiones, es decir:

$$(\nabla^2 + k_j^2) f_j^\gamma(x, y) = 0 \quad , \quad (2.26)$$

donde $k_j = \omega \sqrt{\epsilon_j}/c = 2\pi \sqrt{\epsilon_j}/\lambda$ es el módulo del vector de onda correspondiente a la

región j . Consideraremos por simplicidad que el medio superior es vacío, con lo cual $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$.

En la región 1, el campo total es la suma del campo incidente más el reflejado, es decir:

$$f_1^\gamma(x, y) = f_{\text{inc}}^\gamma(x, y) + f_{\text{refl}}^\gamma(x, y) . \quad (2.27)$$

Como se dijo más arriba, el campo incidente está representado por una onda plana:

$$f_{\text{inc}}^\gamma(x, y) = e^{i(\vec{k}_{\text{inc}} \cdot \vec{r})} = e^{i(\alpha_0 x - \beta_{1,0} y)} , \quad (2.28)$$

donde

$$\vec{k}_{\text{inc}} = \alpha_0 \hat{x} - \beta_{1,0} \hat{y} , \quad (2.29)$$

$$\alpha_0 = k_{\text{inc}} \sin \theta_0 , \quad (2.30)$$

$$\beta_{1,0} = k_{\text{inc}} \cos \theta_0 , \quad (2.31)$$

y

$$k_{\text{inc}} = |\vec{k}_{\text{inc}}| . \quad (2.32)$$

En principio, la ecuación (2.26) puede tener soluciones incompatibles con la física del problema en cuestión. Para asegurar la existencia de una única solución aceptable físicamente, debe imponerse la condición de radiación:

$$f_1^\gamma(x, y) - f_{\text{inc}}^\gamma(x, y) \xrightarrow{y \rightarrow \infty} \text{ondas salientes} . \quad (2.33)$$

Haciendo uso de la propiedad de pseudoperiodicidad de los campos [1], se obtiene la forma general de la solución:

$$f_{\text{refl}}^\gamma(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_n^\gamma e^{i(\alpha_n x + \beta_{1,n} y)} , \quad (2.34)$$

donde

$$\alpha_n = \alpha_0 + n \frac{2\pi}{d} , \quad (2.35)$$

$$\beta_{1,n} = \begin{cases} \sqrt{k_1^2 - \alpha_n^2} & \text{si } k_1^2 > \alpha_n^2 \\ i \sqrt{\alpha_n^2 - k_1^2} & \text{si } k_1^2 < \alpha_n^2 \end{cases} , \quad (2.36)$$

y \mathcal{R}_n^γ es una amplitud compleja, llamada coeficiente de Rayleigh del orden reflejado n -ésimo.

En el caso particular de la superficie perfectamente conductora, la región 2 consta sólo de las cavidades, o sea $-c/2 + nd < x < c/2 + nd$, con $n \in \mathbb{Z}$, ya que dentro del conductor perfecto el campo eléctrico debe anularse. En esta zona representaremos al campo total mediante una combinación lineal de funciones modales:

$$f_2^\gamma(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^\gamma \phi_m^\gamma(x, y) . \quad (2.37)$$

Cada una de las funciones $\phi_m^\gamma(x, y)$ debe satisfacer la ecuación de ondas (2.26) y las condiciones de contorno. De ahí el nombre de funciones modales, ya que son modos propios de la estructura, en este caso la cavidad rectangular. La forma general de las funciones $\phi_m^\gamma(x, y)$ se puede hallar utilizando el método de separación de variables para resolver la ecuación de Helmholtz (2.26). Si suponemos que

$$\phi_m^\gamma(x, y) = X_m^\gamma(x) Y_m^\gamma(y) , \quad (2.38)$$

y reemplazamos esta expresión en la ecuación (2.26), resulta que $X_m^\gamma(x)$ y $Y_m^\gamma(y)$ son combinaciones lineales de senos y cosenos:

$$X_m^\gamma(x) = A_m^\gamma \sin(u_m^\gamma x) + B_m^\gamma \cos(u_m^\gamma x) , \quad (2.39)$$

$$Y_m^\gamma(y) = C_m^\gamma \sin(v_m^\gamma y) + D_m^\gamma \cos(v_m^\gamma y) , \quad (2.40)$$

donde

$$(u_m^\gamma)^2 + (v_m^\gamma)^2 = k_2^2 . \quad (2.41)$$

Las cantidades $(u_m^\gamma)^2$ y $(v_m^\gamma)^2$ son constantes de separación en x y en y respectivamente, que quedarán determinados al imponer las condiciones de contorno en las paredes del surco. Las amplitudes A_m^γ , B_m^γ , C_m^γ y D_m^γ se hallan a través de la aplicación de las condiciones de contorno en las paredes de los surcos y en la superficie superior de la red, que dependen del modo de polarización considerado. Dada la periodicidad de la estructura considerada, se puede reducir el tratamiento del problema a un único período, y por lo tanto sólo es

necesario hallar las funciones modales en una de las cavidades. Consideremos entonces el surco central. En las paredes del mismo deben cumplirse las condiciones (2.12)-(2.15). Sin embargo, sólo usaremos dos de ellas para la resolución del problema (2.12 y 2.15), dado que éstas son suficientes y las otras dos (2.13 y 2.14) agregan incógnitas al mismo.

En el caso de polarización s , el campo eléctrico es tangencial a la superficie, y por lo tanto la condición (2.12) implica la continuidad del campo eléctrico. Como las paredes de la cavidad son perfectamente conductoras, esto es equivalente a pedir que el campo eléctrico se anule en las mismas, es decir:

$$f_2^s(x = -c/2, y) = f_2^s(x = c/2, y) = f_2^s(x, y = -h) = 0 \quad . \quad (2.42)$$

Se puede ver que la condición (2.15) se satisface automáticamente si se cumple (2.12), y por lo tanto, podemos escribir las funciones modales para este caso como sigue:

$$\phi_m^s(x, y) = \sin[v_m(y + h)] \begin{cases} \sin\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{para } m \text{ par} \\ \cos\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{para } m \text{ impar} \end{cases} \quad (2.43)$$

donde

$$v_m = \begin{cases} \sqrt{k_2^2 - \left(\frac{m\pi}{c}\right)^2} & \text{si } k_2^2 > \left(\frac{m\pi}{c}\right)^2 \\ i\sqrt{\left(\frac{m\pi}{c}\right)^2 - k_2^2} & \text{si } k_2^2 < \left(\frac{m\pi}{c}\right)^2 \end{cases} \quad (2.44)$$

Notemos que las constantes de separación en x han quedado determinadas por la ec. (2.42): $u_m^\gamma = m\pi/c$, y por consiguiente, también los v_m^γ .

Para polarización p , la condición (2.12) implica la continuidad de la derivada normal de $H_z(x, y)$ en cada una de las paredes del surco, ya que el campo eléctrico se obtiene mediante la ecuación (2.6), aplicando rotor a $H_z(x, y)$. Por otra parte, en este modo la condición (2.15) se satisface automáticamente por ser el campo magnético tangencial a todas las superficies en cuestión. Entonces, imponiendo en este caso que:

$$\frac{\partial f_2^p}{\partial x}(x = -c/2, y) = \frac{\partial f_2^p}{\partial x}(x = c/2, y) = \frac{\partial f_2^p}{\partial y}(x, y = -h) = 0 \quad , \quad (2.45)$$

se hallan las funciones modales:

$$\phi_m^p(x, y) = \cos[v_m(y + h)] \begin{cases} \cos\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{para } m \text{ par} \\ \sin\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{para } m \text{ impar} \end{cases} \quad (2.46)$$

Notemos que los autovalores han sido hallados analíticamente, y que para ambos casos de polarización se han obtenido los mismos, por lo cual se ha suprimido el supraíndice γ que denota el caso de polarización. Esto se debe al carácter particular de la condición de contorno para conductor perfecto. Se verá más adelante que esto no sucede en general.

Una vez halladas las expresiones de las autofunciones, se deben empalmar los campos en la superficie $y = 0$. Las condiciones de contorno se reducen a pedir la continuidad de $f^\gamma(x, y)$ y de su derivada normal sobre la superficie, para ambas polarizaciones. Mediante este empalme es posible hallar las amplitudes modales a_m^γ y las amplitudes de Rayleigh \mathcal{R}_n^γ .

Para polarización s , se obtienen las siguientes ecuaciones, que deben satisfacerse para cada valor de x :

$$e^{i\alpha_0 x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_n^s e^{i\alpha_n x} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m^s \sin(v_m h) \begin{cases} \sin\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{si } m \text{ es par} \\ \cos\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.47)$$

$$-i \beta_{1,0} e^{i\alpha_0 x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \beta_{1,n} \mathcal{R}_n^s e^{i\alpha_n x} = \sum_{m=1}^{\infty} a_m^s v_m \cos(v_m h) \begin{cases} \sin\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{si } m \text{ es par} \\ \cos\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.48)$$

Hay muchas maneras de resolver el problema a partir de aquí. El método de momentos [34] es el que usaremos, y consiste de los siguientes pasos. En primer lugar, se elige una base de proyección, es decir, un conjunto completo de funciones linealmente independientes. Luego, los dos miembros de cada ecuación son proyectados en dicha base, formando los productos escalares apropiados con las funciones de la base. Este paso elimina la dependencia en x de las ecuaciones y genera un sistema de ecuaciones algebraicas de dimensión infinita. Finalmente, debe truncarse el sistema hasta un orden finito, y se

halla su solución mediante técnicas numéricas estándar. Utilizaremos aquí un método de proyección híbrido, que consiste en proyectar cada una de las ecuaciones anteriores en una base diferente, según convenga. En este caso, la ecuación (2.47) se proyecta en la base de funciones $\{e^{-i\alpha_n x}\}$, que son ortogonales en el intervalo $[-d/2, d/2]$, y la ecuación (2.48) se proyecta en la base $\{X_m^s(x)\}$, que son ortogonales en el intervalo $[-c/2, c/2]$. Así se obtienen dos sistemas de ecuaciones para las amplitudes incógnitas, que son los siguientes:

$$\mathcal{R}_n^s = -\delta_{n,0} + \frac{1}{d} \sum_{m=1}^{\infty} a_m^s \sin(v_m h) J_{mn}^* , \quad (2.49)$$

$$\frac{c}{2} a_m^s v_m \cos(v_m h) = -i \beta_{1,0} J_{m0} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \mathcal{R}_n^s \beta_{1,n} J_{mn} , \quad (2.50)$$

donde

$$J_{mn} = \int_{-c/2}^{c/2} dx e^{i\alpha_n x} \begin{cases} \sin\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{si } m \text{ es par} \\ \cos\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.51)$$

$\delta_{n,m}$ es la función delta de Kronecker y el asterisco denota complejo conjugado. Nótese que la suma en m en las ecuaciones (2.47), (2.48) y (2.49) va desde $m = 1$. Esto se debe a que la función modal correspondiente a $m = 0$ es la función nula para polarización s , por lo que no es tenida en cuenta. Reemplazando la igualdad (2.49) en (2.50), se obtiene un sistema de ecuaciones para las amplitudes modales incógnitas a_m^s .

Un procedimiento análogo es llevado a cabo para el modo p , obteniéndose las siguientes ecuaciones:

$$e^{i\alpha_0 x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_n^p e^{i\alpha_n x} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^p \cos(v_m h) \begin{cases} \cos\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{si } m \text{ es par} \\ \sin\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases} , \quad (2.52)$$

$$-i \beta_{1,0} e^{i\alpha_0 x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} i \beta_{1,n} \mathcal{R}_n^p e^{i\alpha_n x} = \sum_{m=0}^{\infty} -a_m^p v_m \sin(v_m h) \begin{cases} \cos\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{si } m \text{ es par} \\ \sin\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.53)$$

Se proyecta la ecuación (2.52) en el conjunto $\{X_m^p(x)\}$ y la ecuación (2.53) en el conjunto

$\{e^{-i\alpha_n x}\}$, y se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones:

$$C_m a_m^p \cos(v_m h) = I_{m0} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_n^p I_{mn} , \quad (2.54)$$

$$\mathcal{R}_n^p = \delta_{n,0} + \sum_{m=0}^{\infty} i v_m a_m^p \sin(v_m h) \frac{I_{mn}^*}{\beta_{1,n} d} , \quad (2.55)$$

donde

$$C_m = \begin{cases} c & \text{si } m = 0 \\ c/2 & \text{si } m \neq 0 \end{cases} \quad (2.56)$$

y

$$I_{mn} = \int_{-c/2}^{c/2} dx e^{i\alpha_n x} \begin{cases} \cos\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{si } m \text{ es par} \\ \sin\left(\frac{m\pi x}{c}\right) & \text{si } m \text{ es impar} \end{cases} \quad (2.57)$$

En el caso de polarización p , se reemplaza la ec. (2.55) en (2.54) para obtener un sistema de ecuaciones que tiene las amplitudes modales a_m^p como incógnitas. Una vez hallados los coeficientes modales a_m^p , las amplitudes de Rayleigh se obtienen fácilmente reemplazando en la ec. (2.49) o bien en la (2.55) según corresponda.

La eficiencia del orden n reflejado e_n se define como el cociente entre la potencia reflejada y la incidente, y representa la fracción de la potencia incidente, en valor medio temporal, que transporta el orden n reflejado:

$$e_n = Re \left\{ |\mathcal{R}_n^p|^2 \frac{\beta_{1,n}}{\beta_{1,0}} \right\} . \quad (2.58)$$

Dado que el sistema que se obtiene es infinito (tanto la serie modal como la de Rayleigh son infinitas), éste debe truncarse para ser resuelto numéricamente. Para ello, deben tenerse en cuenta algunos criterios: 1) el número de términos de Rayleigh considerados (NMAX) debe ser como mínimo igual al doble del número de órdenes propagantes que tiene la red estudiada; 2) tanto NMAX como el número de funciones modales (MMAX) deben elegirse tales que la solución converja; 3) debe garantizarse el cumplimiento de las condiciones de contorno en $y = 0$ y el balance de energía, es decir, que la suma de las eficiencias sea igual a 1.

2.3 Red infinita rectangular dieléctrica

Consideremos ahora el caso de una red dieléctrica, como se indica en la Figura 2.4.

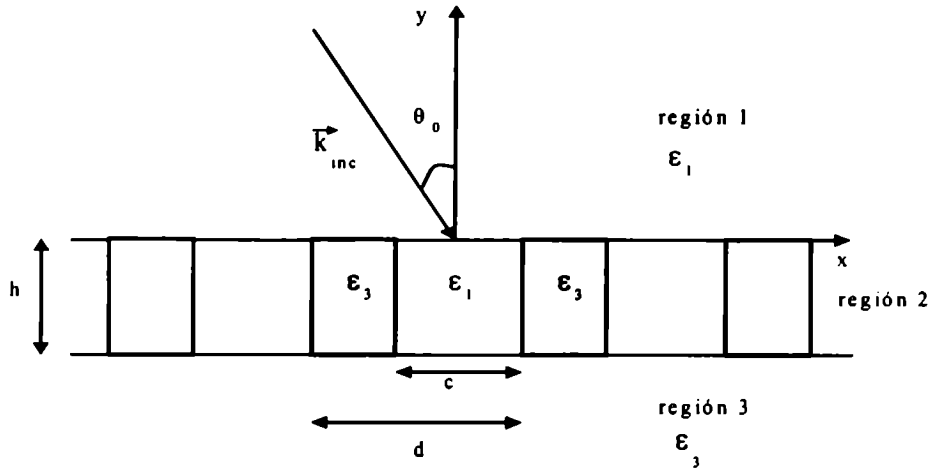


Figura 2.4: Esquema de la red dieléctrica.

En este caso, la región 2 abarca todo el período, el cual está dividido en dos zonas homogéneas de índices de refracción $\nu_1 = \sqrt{\epsilon_1}$ y $\nu_3 = \sqrt{\epsilon_3}$ (ver figura). Debe considerarse además una región 3 adicional ($y < -h$), donde habrá campos transmitidos.

En las regiones 1 y 3, son válidos los desarrollos de Rayleigh para describir los campos, que en esta última se expresan de la siguiente manera:

$$f_3^\gamma(x, y) = \sum_{-\infty}^{\infty} T_n^\gamma e^{i(\alpha_n x - \beta_{3,n} y)}, \quad (2.59)$$

donde $T^\gamma(\alpha)$ son amplitudes complejas a determinar, y $\beta_{3,n}$ está definido en (2.36) reemplazando el subíndice que denota la región (1) por 3.

En la zona modulada, debe resolverse la ecuación de ondas (2.26) para un valor de k_2 que depende de x , es decir:

$$k_2 = k_2(x) = \begin{cases} k_1 = \frac{2\pi}{\lambda} \nu_1 & \text{para } -c/2 < x < c/2 \\ k_3 = \frac{2\pi}{\lambda} \nu_3 & \text{para } c/2 < x < d - c/2 \end{cases} \quad (2.60)$$

siendo $\nu_j = \sqrt{\epsilon_j}$ el índice de refracción del medio j . La solución $Y_m^\gamma(y)$ se puede escribir también en este caso como:

$$Y_m^\gamma(y) = a_m^\gamma \cos(\nu_m^\gamma y) + b_m^\gamma \sin(\nu_m^\gamma y) . \quad (2.61)$$

De este modo, la ecuación para x queda:

$$\zeta^\gamma \frac{d}{dx} \left(\frac{1}{\zeta^\gamma} \frac{d}{dx} X^\gamma(x) \right) + (k_2^2(x) - (v^\gamma)^2) X^\gamma(x) = 0 . \quad (2.62)$$

donde

$$\zeta^\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = s \\ \epsilon(x) & \text{si } \gamma = p \end{cases} \quad (2.63)$$

A su vez, debe imponerse la condición de pseudoperiodicidad de la solución:

$$\begin{aligned} X^\gamma(d/2) &= \exp(i\alpha_0 d) X^\gamma(-d/2) \\ \frac{d[X^\gamma]}{dx}(d/2) &= \exp(i\alpha_0 d) \frac{d[X^\gamma]}{dx}(-d/2) . \end{aligned} \quad (2.64)$$

La ecuación de Helmholtz (2.62) con las condiciones de pseudoperiodicidad (2.64) determinan un problema de Sturm-Liouville. Se puede verificar que las siguientes son dos soluciones linealmente independientes de dicho problema [22]:

$$\varphi_{\text{par}}^\gamma(x) = \begin{cases} \cos(u_1^\gamma x) & \text{para } -c/2 < x < c/2 \\ \cos(u_1^\gamma c/2) \cos(u_3^\gamma(x - c/2)) - \rho^\gamma \sin(u_1^\gamma c/2) \sin(u_3^\gamma(x - c/2)) & \text{para } c/2 < x < d - c/2 \end{cases} , \quad (2.65)$$

$$\varphi_{\text{impar}}^\gamma(x) = \begin{cases} \frac{1}{u_1^\gamma} \sin(u_1^\gamma x) & \text{para } -c/2 < x < c/2 \\ \frac{1}{u_1^\gamma} [\sin(u_1^\gamma c/2) \cos(u_3^\gamma(x - c/2)) + \rho^\gamma \cos(u_1^\gamma c/2) \sin(u_3^\gamma(x - c/2))] & \text{para } c/2 < x < d - c/2 \end{cases} \quad (2.66)$$

donde

$$(u_j^\gamma)^2 = k_j^2 - (v^\gamma)^2 , j = 1, 3 , \quad (2.67)$$

y

$$\rho^\gamma = \frac{\zeta_3^\gamma u_1^\gamma}{\zeta_1^\gamma u_3^\gamma} . \quad (2.68)$$

Por lo tanto, la solución general de (2.62) es una combinación lineal de $\varphi_{\text{par}}^{\gamma}(x)$ y $\varphi_{\text{impar}}^{\gamma}(x)$:

$$X^{\gamma}(x) = A \varphi_{\text{par}}^{\gamma}(x) + B \varphi_{\text{impar}}^{\gamma}(x) , \quad (2.69)$$

donde A y B son constantes arbitrarias. Reemplazando (2.69) en las condiciones de contorno (2.64), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\cos(u_1^{\gamma}c) \cos(u_3^{\gamma}(d-c)) - \frac{1}{2} \left(\frac{\zeta_3^{\gamma}u_1^{\gamma}}{\zeta_1^{\gamma}u_3^{\gamma}} + \frac{\zeta_1^{\gamma}u_3^{\gamma}}{\zeta_3^{\gamma}u_1^{\gamma}} \right) \sin(u_1^{\gamma}c) \sin(u_3^{\gamma}(d-c)) - \cos(\alpha_0d) = 0 . \quad (2.70)$$

Esta es una ecuación trascendente para u_1^{γ} , cuyas soluciones son en general números complejos. En la misma reside la diferencia fundamental entre el caso de conductor perfecto, tratado en la Sección 2.2 (los autovalores correspondientes al caso de conductor perfecto se obtuvieron analíticamente y están dados por $u_{1m}^{\gamma} = m\pi/c$, como fue explicado previamente), y el presente caso de materiales dieléctricos. Además de que éstos no dependen del modo de polarización, los u_{3m}^{γ} no se calculan, ya que corresponden al interior del conductor, región en la cual se sabe que los campos son nulos. Al resolver la ec. (2.70), se obtienen infinitos valores numerables, los u_{1m}^{γ} , que son los autovalores correspondientes a la parte de la función modal que depende de x , para la zona de índice de refracción ν_1 . A cada uno de ellos le corresponde un v_m^{γ} y un u_{3m}^{γ} , que se obtienen reemplazando en (2.67).

La resolución de la ecuación (2.70) constituye la parte central para una resolución exitosa del problema. Dado que es una ecuación trascendente compleja, la misma no puede resolverse en forma analítica, por lo cual se recurre a técnicas numéricas. Por consiguiente, es de vital importancia contar con un método numérico eficaz, confiable y preciso para la resolución de dicha ecuación característica. Antecedentes en la literatura demuestran que los algoritmos estándar de búsqueda de raíces no funcionan adecuadamente para este caso, debido a lo cual se desarrollaron algoritmos más especializados [21], [26], [35]-[38]. En este trabajo se utiliza la rutina CROOT publicada en la revista *Computer Physics Communications* [36], la cual encuentra sistemáticamente todas las raíces de la ecuación (2.70) en una dada región del plano complejo alrededor del origen.

Las autofunciones están dadas por:

$$X^\gamma(x) = \begin{cases} i C \varphi_{\text{impar}}^\gamma(x) & \text{si } \kappa = 1 \text{ y } \varphi_{\text{impar}}^\gamma(d/2) = 0 \\ i C \varphi_{\text{par}}^\gamma(x) & \text{si } \kappa = -1 \text{ y } \varphi_{\text{par}}^\gamma(d/2) = 0 \\ C [(1 + \kappa) \varphi_{\text{impar}}^\gamma(d/2) \varphi_{\text{par}}^\gamma(x) - \\ (1 - \kappa) \varphi_{\text{par}}^\gamma(d/2) \varphi_{\text{impar}}^\gamma(x)] & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (2.71)$$

donde $\kappa = \exp(i\alpha_0 d)$ y C es una constante de normalización que se halla pidiendo que las funciones $X_m^\gamma(x)$ satisfagan la relación de ortonormalidad:

$$\int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{\zeta^\gamma(x)} X_m^\gamma(x) (X_n^\gamma(x))^* dx = \delta_{mn} . \quad (2.72)$$

Luego, el campo en la región 2 está descrito por el siguiente desarrollo:

$$f_2^\gamma(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} X_m^\gamma(x) Y_m^\gamma(y) , \quad (2.73)$$

donde

$$Y_m^\gamma(y) = [a_m^\gamma \cos(v_m^\gamma y) + b_m^\gamma \sin(v_m^\gamma y)] , \quad (2.74)$$

y a_m^γ y b_m^γ son amplitudes complejas incógnitas.

Teniendo las expresiones de las funciones modales en la zona modulada (región 2), estamos en condiciones de escribir el sistema de ecuaciones que determinará las amplitudes de los campos reflejados (\mathcal{R}_n^γ), transmitidos (\mathcal{T}_n^γ), y en la zona de índice de refracción variable (a_m^γ y b_m^γ). Para ello deben empalmarse los mismos en las interfases $y = 0$ (entre regiones 1 y 2) e $y = -h$ (entre regiones 2 y 3) mediante la imposición de las dos condiciones siguientes: la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico (ec. (2.12)) y de la componente tangencial del campo magnético (ec. (2.13) con $\vec{K} = 0$, ya que no puede haber corrientes superficiales). Las ecuaciones de empalme son las siguientes:

$$e^{i\alpha_0 x} + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_n^\gamma e^{i\alpha_n x} = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^\gamma X_m^\gamma(x) , \quad (2.75)$$

$$-\frac{i\beta_{1,0}}{\zeta_1^\gamma} e^{i\alpha_0 x} + \frac{i}{\zeta_1^\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{1,n} \mathcal{R}_n^\gamma e^{i\alpha_n x} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\zeta_2^\gamma(x)} X_m^\gamma(x) v_m^\gamma b_m^\gamma , \quad (2.76)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^\gamma e^{i\alpha_n x} e^{i\beta_{3,n} h} = \sum_{m=0}^{\infty} X_m^\gamma(x) [a_m^\gamma \cos(v_m^\gamma h) - b_m^\gamma \sin(v_m^\gamma h)] , \quad (2.77)$$

$$-\frac{i}{\zeta_3^\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{3,n} T_n^\gamma e^{i\alpha_n x} e^{i\beta_{3,n} h} = \frac{1}{\zeta_2^\gamma(x)} \sum_{m=0}^{\infty} X_m^\gamma(x) v_m^\gamma [a_m^\gamma \sin(v_m^\gamma h) + b_m^\gamma \cos(v_m^\gamma h)] \quad (2.78)$$

Dado que las ecuaciones (2.75)-(2.78) ya están desarrolladas en términos de bases ortogonales de funciones, es conveniente tomar las conjugadas de dichas funciones como base de testeo, de forma tal que la resolución numérica subsiguiente se simplifique. Para cada una de las ecuaciones, tenemos dos posibles bases: $\{(X_m^\gamma)^*(x)\}$ y $\{e^{-i\alpha_n x}\}$. Por consiguiente, hay varias posibilidades de elección de las bases para todo el sistema. Suratteau *et al.* [26] demostraron que utilizando una de las bases para las ecuaciones de continuidad de las componentes z y la otra para las ecuaciones de continuidad de las componentes x , las soluciones numéricas satisfacen automáticamente el balance de energía y las relaciones de reciprocidad [37], independientemente del número de términos retenidos en las series; mientras que un método homogéneo que utiliza una única base para todas las ecuaciones no lo hace. Por consiguiente, este último es más útil para corroborar la convergencia del método y su correcto funcionamiento. Elegimos entonces la base de funciones modales $\{(X_m^\gamma)^*(x)\}$. Para emplear adecuadamente la relación de ortonormalidad, multiplicamos las ecuaciones (2.75) y (2.77) por $\{(X_m^\gamma)^*(x)/\zeta_2^\gamma(x)\}$ y las ecuaciones (2.76) y (2.78) por $\{(X_m^\gamma)^*(x)\}$, obteniendo:

$$I_{m,0}^\gamma + \sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathcal{R}_n^\gamma I_{m,n}^\gamma = a_m^\gamma , \quad (2.79)$$

$$-\frac{i\beta_{1,0}}{\zeta_1^\gamma} J_{m,0}^\gamma + \frac{i}{\zeta_1^\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{1,n} \mathcal{R}_n^\gamma J_{m,n}^\gamma = v_m^\gamma b_m^\gamma , \quad (2.80)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_n^\gamma e^{i\beta_{3,n} h} I_{m,n}^\gamma = [a_m^\gamma \cos(v_m^\gamma h) - b_m^\gamma \sin(v_m^\gamma h)] , \quad (2.81)$$

$$-\frac{i}{\zeta_3^\gamma} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_{3,n} T_n^\gamma e^{i\beta_{3,n} h} J_{m,n}^\gamma = v_m^\gamma [a_m^\gamma \sin(v_m^\gamma h) + b_m^\gamma \cos(v_m^\gamma h)] , \quad (2.82)$$

donde

$$I_{m,n}^\gamma = \int_{-d/2}^{d/2} \frac{1}{\zeta_2^\gamma(x)} (X_m^\gamma)^*(x) e^{i\alpha_n x} dx , \quad (2.83)$$

y

$$J_{m,n}^\gamma = \int_{-d/2}^{d/2} (X_m^\gamma)^*(x) e^{i\alpha_n x} dx \quad (2.84)$$

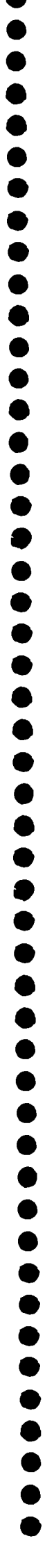
Reemplazando las expresiones para las amplitudes modales a_m^γ y b_m^γ de las ecuaciones (2.79) y (2.80) en (2.81) y (2.82), se obtiene:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[T_n^\gamma e^{i\beta_{3,n}h} I_{m,n}^\gamma + \mathcal{R}_n^\gamma \left(-I_{m,n}^\gamma \cos(v_m^\gamma h) + \frac{i \sin(v_m^\gamma h)}{\zeta_1^\gamma} \frac{\beta_{1,n}}{v_m^\gamma} J_{m,n}^\gamma \right) \right] = I_{m,0}^\gamma \cos(v_m^\gamma h) + \frac{i\beta_{1,0}}{\zeta_1^\gamma} \frac{\sin(v_m^\gamma h)}{v_m^\gamma} J_{m,0}^\gamma \quad (2.85)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[-\frac{i}{\zeta_3^\gamma} \beta_{3,n} T_n^\gamma e^{i\beta_{3,n}h} J_{m,n}^\gamma - \mathcal{R}_n^\gamma \left(I_{m,n}^\gamma v_m^\gamma \sin(v_m^\gamma h) + \frac{i \cos(v_m^\gamma h)}{\zeta_1^\gamma} \beta_{1,n} J_{m,n}^\gamma \right) \right] = I_{m,0}^\gamma v_m^\gamma \sin(v_m^\gamma h) - \frac{i\beta_{1,0}}{\zeta_1^\gamma} \cos(v_m^\gamma h) J_{m,0}^\gamma \quad (2.86)$$

Al igual que en el caso de la red perfectamente conductora, deben truncarse las series para poder resolver numéricamente este sistema infinito de ecuaciones. Se obtiene así un sistema matricial de rango $2*NMAX$, con $2*NMAX$ incógnitas: las amplitudes de Rayleigh reflejadas y transmitidas. Una vez invertida la matriz (compleja) del sistema, queda resuelto el problema. Nótese que el tamaño de la matriz no depende del número de términos retenidos en los desarrollos modales (MMAX), lo cual implica que el tiempo de cómputo no dependerá fuertemente de dicho número. La inversión de la matriz se realiza mediante una subrutina que utiliza el método de pivoteo parcial, y que ha resultado ser eficaz aún para rangos muy grandes de la matriz.

Hasta aquí se han presentado los fundamentos de la teoría modal, aplicados al caso más simple que corresponde a superficies con corrugado *rectangular periódico*. La idea central de este formalismo modal será empleada en los capítulos siguientes para el tratamiento de estructuras con rugosidades *localizadas y de forma arbitraria*, tema central de esta Tesis.



Capítulo 3

Redes finitas metálicas

En este capítulo se presentan los primeros desarrollos originales del trabajo: la aplicación del método modal a superficies metálicas que tienen un número finito de cavidades. En la Sección 3.1 se tratan surcos de perfil rectangular [17], cuyo tratamiento servirá como base para las secciones 3.2 y 3.3, en las que se consideran geometrías arbitrarias de los surcos [39].

3.1 Método modal tradicional: surcos rectangulares

Consideremos un plano infinito perfectamente conductor, con L surcos de igual profundidad h y anchos c_l ($l = 1, 2, \dots, L$).

Los surcos se extienden a lo largo de la dirección \hat{z} , y el origen de coordenadas está ubicado en la superficie superior, al comienzo del primer surco, como se indica en la Figura 3.1. La cavidad $(l - 1)$ -ésima está separada una distancia Δ_l de la l -ésima. Una onda plana de longitud de onda λ incide sobre la superficie desde la región $y > 0$, formando un ángulo θ_0 con el eje y , siendo el plano (x, y) el plano de incidencia. Para la resolución completa del problema se separan los dos casos fundamentales de polarización, como en el caso de la red infinita.

A pesar de que este problema tiene muchos puntos en común con el de la red infinita, aparecen aquí algunas diferencias. En primer lugar, la estructura deja de ser periódica, lo cual tiene varias implicancias. Como ya no se deben satisfacer las condiciones de

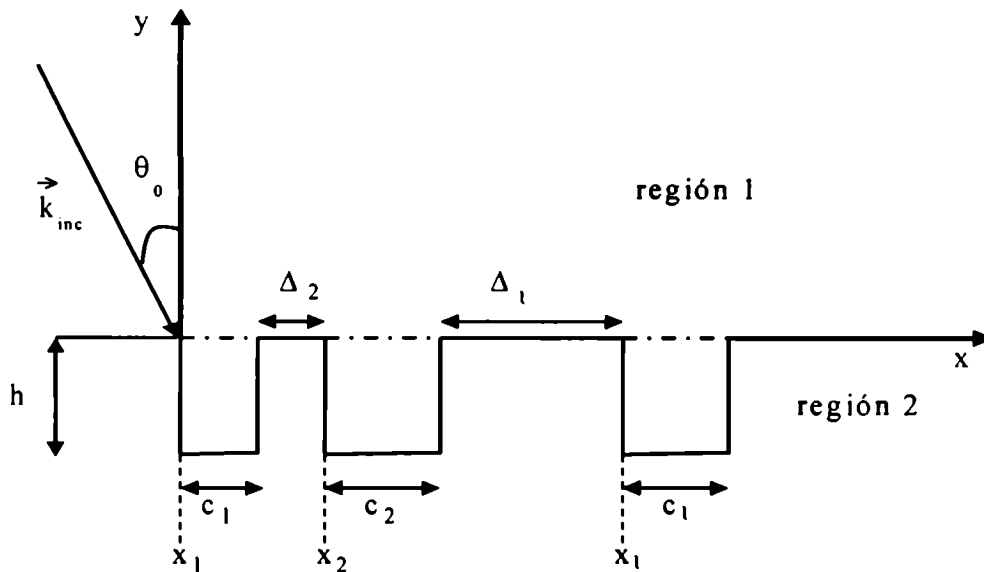


Figura 3.1: Estructura con un número finito de rugosidades rectangulares, distribuidas aleatoriamente.

pseudoperiodicidad (2.64), la resolución del problema no puede reducirse a un período. Esto significa que deben hallarse las expresiones para los desarrollos modales en *cada uno* de los surcos, y que el empalme final de los campos debe extenderse a lo largo de toda la estructura, es decir, en $[-\infty, \infty]$. Otra de las diferencias fundamentales es el hecho de que al considerar corrugados localizados, los campos reflejados son dispersados por la superficie en todas direcciones. Ya no hay órdenes de difracción que se propagan en direcciones discretas particulares, sino que se tiene un continuo de amplitudes reflejadas. En términos de las representaciones utilizadas significa reemplazar la sumatoria de la ecuación (2.34) por una integral, donde las amplitudes de Rayleigh pasen a ser una función continua del ángulo de reflexión. Esto acarrea un incremento considerable en el volumen de cálculo involucrado, como se verá más adelante.

Separamos el espacio en dos regiones: región 1 ($y > 0$) y región 2, en el interior de los surcos (ver Figura 3.1). En la región superior, los campos se describen de la siguiente

manera:

$$f_1^\gamma(x, y) = f_{\text{inc}}(x, y) + f_{\text{espec}}^\gamma(x, y) + f_{\text{scatt}}^\gamma(x, y) , \quad (3.1)$$

donde

$$f_{\text{inc}}(x, y) = e^{i(\alpha_0 x - \beta_{1,0} y)} , \quad (3.2)$$

$$f_{\text{espec}}^\gamma(x, y) = (-1)^j e^{i(\alpha_0 x - \beta_{1,0} y)} ; \quad j = \begin{cases} 1 & \text{para polarización } s \ (\gamma = s) \\ 0 & \text{para polarización } p \ (\gamma = p) \end{cases} \quad (3.3)$$

y

$$f_{\text{scatt}}^\gamma(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}^\gamma(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_1 y)} d\alpha , \quad (3.4)$$

son el campo incidente, el reflejado especularmente por el plano infinito, y el dispersado, respectivamente; las funciones incógnitas $\mathcal{R}^\gamma(\alpha)$ dan la distribución espectral de amplitudes y por analogía con el problema periódico se conocen como amplitudes de Rayleigh; α_0 y $\beta_{1,0}$ han sido definidos en las ecuaciones (2.30) y (2.31) respectivamente y los β_1 están dados por:

$$\beta_1 = \sqrt{k_{\text{inc}}^2 - \alpha^2} . \quad (3.5)$$

Cabe señalar que en este caso se eligió una onda plana y no un haz limitado como medio de excitación de la superficie, debido a que uno de los objetivos del presente cálculo fue el de comparar los resultados obtenidos con los correspondientes a la red infinita. Sin embargo, la onda plana incidente introduce un problema numérico que se evita separando el campo reflejado en dos términos: el reflejado especularmente por un plano infinito perfectamente conductor $f_{\text{espec}}^\gamma(x, y)$ y el originado por la presencia de las rugosidades $f_{\text{scatt}}^\gamma(x, y)$. De todos modos, el caso más realista de un haz Gaussiano incidente es análogo al aquí presentado, y también ha sido implementado numéricamente.

Dentro de las cavidades, describiremos los campos mediante sus desarrollos modales. El procedimiento de separación de variables llevado a cabo para resolver la ecuación de ondas (2.26) en el caso de la red infinita, es igualmente aplicable a este caso. Incluso las condiciones de contorno en las paredes de cada surco son las mismas, dado que el campo se anula dentro del conductor perfecto. Por lo tanto, teniendo en cuenta la posición de cada

cavidad y su ancho, podemos escribir el campo dentro del surco l -ésimo de la siguiente manera:

$$f_2^s(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,l}^s \sin [v_{m,l} (y + h)] \sin \left[\frac{m\pi}{c_l} (x - x_l) \right] ; \text{ para } x_l < x < x_l + c_l , \quad (3.6)$$

y

$$f_2^p(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,l}^p \cos [v_{m,l} (y + h)] \cos \left[\frac{m\pi}{c_l} (x - x_l) \right] ; \text{ para } x_l < x < x_l + c_l . \quad (3.7)$$

donde x_l marca el comienzo del surco l -ésimo, $v_{m,l} = \sqrt{k_2^2 - (m\pi/c_l)^2}$ y $a_{m,l}^{\gamma}$ son las amplitudes complejas incógnitas que hallaremos más adelante.

Una vez que se cuenta con las expresiones de los campos en todo el espacio, se procede al empalme de las mismas a través de las condiciones de contorno. Como se explicó en la Sección 2.2, del empalme de dichas expresiones en la superficie $y = 0$ se obtienen dos ecuaciones para cada modo de polarización:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}^s(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,l}^s \sin \left[\frac{m\pi}{c_l} (x - x_l) \right] \sin(v_{m,l} h) \text{ rect} \left(\frac{x - x_l}{c_l} \right) , \quad (3.8)$$

$$-2i\beta_{1,0} e^{i\alpha_0 x} + i \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}^s(\alpha) \beta_1 e^{i\alpha x} d\alpha = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,l}^s v_{m,l} \sin \left[\frac{m\pi}{c_l} (x - x_l) \right] \cos(v_{m,l} h) , \quad (3.9)$$

para $x_l < x < x_l + c_l$. Para polarización p se obtiene:

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}^p(\alpha) \beta_1 e^{i\alpha x} d\alpha = - \sum_{l=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,l}^p v_{m,l} \cos \left[\frac{m\pi}{c_l} (x - x_l) \right] \sin(v_{m,l} h) \text{ rect} \left(\frac{x - x_l}{c_l} \right) , \quad (3.10)$$

$$2 e^{i\alpha_0 x} + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}^p(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \sum_{l=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,l}^p \cos \left[\frac{m\pi}{c_l} (x - x_l) \right] \cos(v_{m,l} h) , \quad (3.11)$$

para $x_l < x < x_l + c_l$. La dependencia en x de las ecuaciones (3.8)-(3.11) se elimina proyectando las mismas en bases convenientes de funciones. En este caso, es útil proyectar las ecuaciones que provienen de la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico, es decir, (3.8) y (3.10), en la base $\{e^{i\alpha x}\}$, dado que las mismas son ortogonales en $x \in [-\infty, \infty]$, que es el intervalo en el cual dichas condiciones de contorno deben satisfacerse. Por otro lado, las ecs. (3.9) y (3.11) se proyectan en la base de funciones

modales correspondientes a cada modo de polarización, es decir, $\left\{ \sin \left[\frac{q\pi}{c_l} (x - x_l) \right] \right\}$ para polarización s y $\left\{ \cos \left[\frac{q\pi}{c_l} (x - x_l) \right] \right\}$ para polarización p , que son ortogonales en $[x_j, x_j + c_j]$. De esta manera se obtienen dos ecuaciones cuyas incógnitas son las amplitudes modales $a_{m,l}^\gamma$ y la función $\mathcal{R}^\gamma(\alpha)$, para cada una de las polarizaciones:

$$2\pi \mathcal{R}^s(\alpha) = \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\infty} a_{m,l}^s \sin(v_{m,l}h) e^{-i\alpha x_l} J_{m,l}(-\alpha) , \quad (3.12)$$

$$-2i\beta_{1,0} e^{i\alpha_0 x_l} J_{k,l}(\alpha_0) + i \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}^s(\alpha) \beta_1 e^{i\alpha x_l} J_{k,l}(\alpha) d\alpha = \frac{c_l}{2} v_{k,l} a_{k,l}^s \cos(v_{k,l}h) . \quad (3.13)$$

$$2 e^{i\alpha_0 x_l} I_{k,l}(\alpha_0) + \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}^p(\alpha) e^{i\alpha x_l} I_{k,l}(\alpha) d\alpha = C_{k,l} a_{k,l}^p \cos(v_{k,l}h) , \quad (3.14)$$

$$2\pi i \beta_1 \mathcal{R}^p(\alpha) = - \sum_{l=1}^L \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,l}^p v_{m,l} \sin(v_{m,l}h) e^{-i\alpha x_l} I_{m,l}(-\alpha) , \quad (3.15)$$

donde se han definido las cantidades $J_{m,l}$ e $I_{m,l}$ análogamente al caso de redes infinitas:

$$J_{m,l}(\alpha) = \int_0^{c_l} e^{i\alpha x} \sin \left[\frac{m\pi x}{c_l} \right] dx , \quad (3.16)$$

$$I_{m,l}(\alpha) = \int_0^{c_l} e^{i\alpha x} \cos \left[\frac{m\pi x}{c_l} \right] dx , \quad (3.17)$$

y

$$C_{m,l} = \begin{cases} c_l & \text{si } m = 0 \\ c_l/2 & \text{si } m \neq 0 \end{cases} \quad (3.18)$$

Reemplazando la ec. (3.13) en (3.12) y la (3.14) en (3.15), se eliminan las amplitudes modales y se obtiene una ecuación integral para las amplitudes de Rayleigh $\mathcal{R}^\gamma(\alpha)$, para cada uno de los modos de polarización:

$$2\pi \mathcal{R}^s(\alpha') = i \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}^s(\alpha) \beta_1 \sum_{l=1}^L e^{i(\alpha-\alpha')x_l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 J_{m,l}(\alpha) J_{m,l}(-\alpha') \tan(v_{m,l}h)}{c_l v_{m,l}} d\alpha \\ - 2i\beta_{1,0} \sum_{l=1}^L e^{i(\alpha_0-\alpha')x_l} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 J_{m,l}(\alpha_0) J_{m,l}(-\alpha') \tan(v_{m,l}h)}{c_l v_{m,l}} , \quad (3.19)$$

$$2\pi i \beta_1' \mathcal{R}^p(\alpha') = - \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}^p(\alpha) \sum_{l=1}^L e^{i(\alpha-\alpha')x_l} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v_{m,l}}{C_{m,l}} I_{m,l}(\alpha) I_{m,l}(-\alpha') \tan(v_{m,l}h) d\alpha \\ - 2 \sum_{l=1}^L e^{i(\alpha_0-\alpha')x_l} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{v_{m,l}}{C_{m,l}} I_{m,l}(\alpha_0) I_{m,l}(-\alpha') \tan(v_{m,l}h) . \quad (3.20)$$

A diferencia del caso periódico, donde el método modal conducía a la resolución de un sistema de ecuaciones algebraicas lineales acopladas, vemos que el caso no periódico requiere resolver ecuaciones integrales que se pueden llevar a la forma

$$\mathcal{R}(\alpha') = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{N}(\alpha', \alpha) \mathcal{R}(\alpha) d\alpha + \mathbf{F}(\alpha') \quad (3.21)$$

donde $\mathbf{N}(\alpha', \alpha)$ (núcleo de la ecuación integral) y $\mathbf{F}(\alpha')$ (término independiente) son funciones conocidas y $\mathcal{R}(\alpha')$ es la función incógnita. Este tipo de ecuaciones integrales se conocen como ecuaciones de Fredholm de segunda especie.

Cada ecuación integral debe resolverse por separado, para hallar las amplitudes de Rayleigh, y con ellas el campo reflejado por la estructura, como así también el campo en el interior de las cavidades, a través de las amplitudes modales, las cuales pueden hallarse utilizando las ecs. (3.13) y (3.14). Para resolver numéricamente dichos sistemas se debe: 1) truncar los desarrollos modales hasta un MMAX, el cual debe elegirse de forma tal que los resultados converjan; 2) discretizar las integrales en α para permitir el tratamiento de la ecuación integral como una ecuación matricial. La elección de la mínima división en el eje α ($\Delta\alpha$) está relacionada con el cociente (longitud de onda/longitudes espaciales típicas de la estructura), y es de vital importancia para obtener resultados correctos. También es fundamental la elección de los valores máximo y mínimo de α , donde se truncarán las integrales. Si bien los valores de α que representan ondas propagantes están contenidos en el intervalo $[-k_{inc}, k_{inc}]$, deben extenderse las integrales más allá de estos límites, para tener en cuenta las ondas evanescentes, las cuales tienen $|\alpha| > k_{inc}$. Estos límites dependen de la estructura estudiada, y en particular, de la polarización de la onda incidente.

3.2 Perfiles arbitrarios: Método de la Matriz R

En esta sección se describe el primer método modal aplicado a superficies con rugosidades localizadas de perfiles arbitrarios [39]. El método desarrollado hace uso de la aproximación

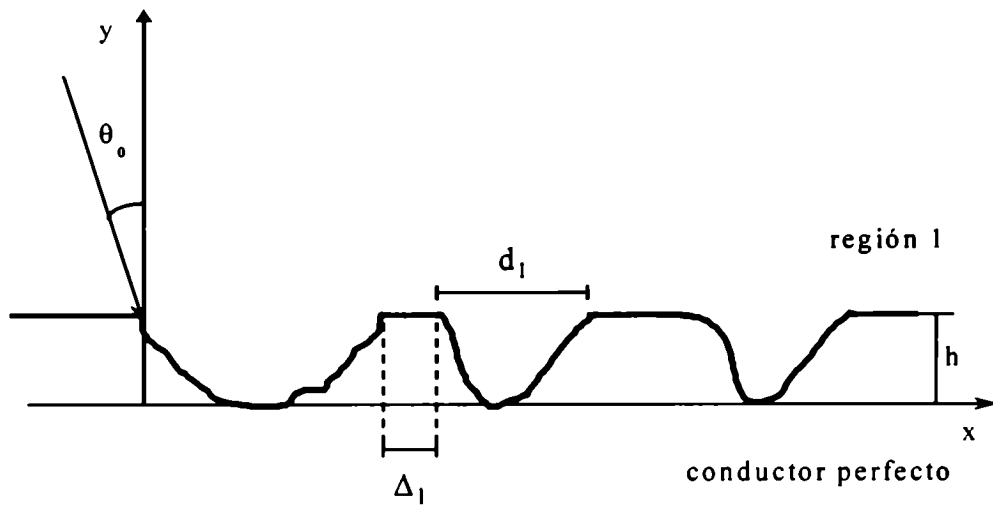


Figura 3.2: Estructura con un número finito de surcos de perfil arbitrario.

de multicapas [25], [40, 41], que consiste en aproximar el verdadero perfil de la cavidad por una sucesión de capas rectangulares. En cada una de ellas se desarrollan los campos en la base de sus autofunciones, las cuales se hallan mediante la imposición de las condiciones de contorno, al igual que para redes infinitas. Luego de empalmar los campos en cada interfase horizontal que separa dos capas, se aplica el algoritmo de la Matriz R para propagar los campos desde la capa inferior hasta la superior, para hallar así una solución completa del problema.

Se considera una estructura del tipo de la Figura 3.2. La misma es iluminada por un haz Gaussiano, como el representado en la Figura 2.2, y definido mediante la ecuación (2.23), el cual incide formando un ángulo θ_0 con el eje y . El eje x se hace coincidir con la superficie inferior de las cavidades, de forma tal que la superficie superior está ubicada en $y = h$ (ver Figura 3.2). Los surcos se numeran de 1 a L mediante el supraíndice l , y cada uno es caracterizado por su ancho d_l y su propio perfil, es decir, que se pueden considerar tantas geometrías diferentes como número de surcos tenga la superficie. Las

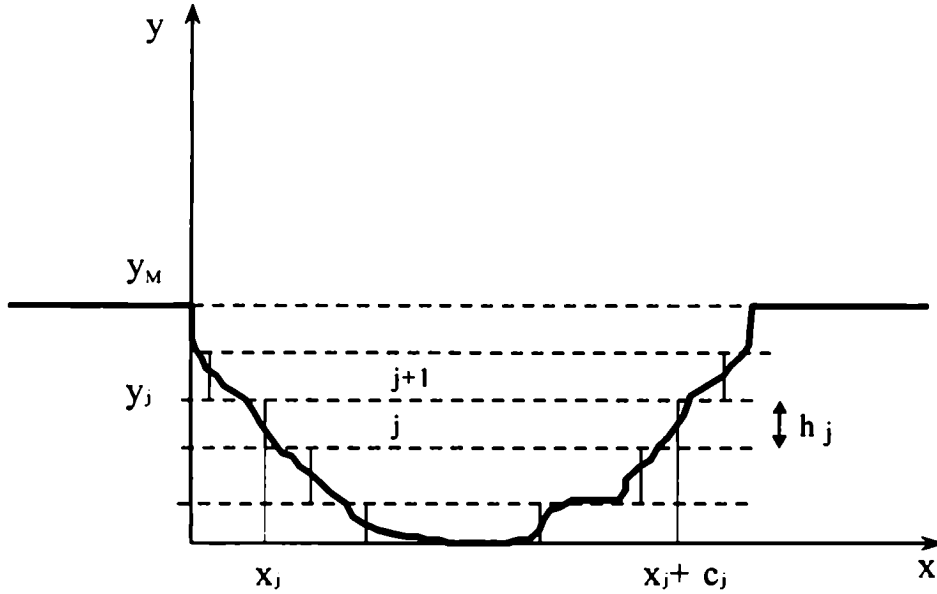


Figura 3.3: Aproximación de multicapas.

cavidades l -ésima y $l+1$ -ésima están separadas una distancia Δ_{l+1} , la cual también puede ser elegida arbitrariamente para cada surco.

La Figura 3.3 muestra la aproximación de multicapas utilizada en la región interior de cada surco. Esta región es dividida en M capas, cada una de altura h_j^l (el subíndice j denota la capa y el supraíndice l denota el surco), y limitada por las interfaces y_{j-1}^l y y_j^l . Las posiciones x_j^l y $x_j^l + c_j^l$ se definen de manera tal que el perfil del surco bisecta a las líneas verticales y c_j^l es el ancho de la capa j del surco l -ésimo.

Se divide el plano (x, y) en dos regiones principales: sobre la estructura (región 1, $y > h$) y dentro de los surcos (región 2, $0 < y < h$). En ambas regiones se busca una descripción de los campos que satisfaga la ecuación de Helmholtz (2.26). El campo total en la región 1 es la suma del campo incidente más el dispersado por la superficie:

$$f_{\text{total}}^\gamma(x, y) = f_{\text{inc}}(x, y) + f_{\text{scatt}}^\gamma(x, y) \quad , \quad (3.22)$$

donde $f^\gamma(x, y)$ representa a $E_z(x, y)$ para $\gamma = s$ y a $H_z(x, y)$ para $\gamma = p$. El campo

incidente está representado por un haz Gaussiano centrado en $\alpha_0 = k \sin \theta_0$ (2.23), donde $\mathcal{A}(\alpha)$ está dado por:

$$\mathcal{A}(\alpha) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\frac{(\alpha - \alpha_0)^2}{\sigma^2} \right\} \exp [-i(\alpha - \alpha_0)\delta] \quad (3.23)$$

donde $\sigma = 2/w$ y

$$\delta = \frac{\alpha_0 y_M + \beta_0 x_0}{k} \quad (3.24)$$

(x_0, y_M) son las coordenadas del punto del plano de incidencia donde se ubica el centro del haz. Al igual que en la Sección 3.1, el campo dispersado se puede escribir como:

$$f_{\text{scatt}}^\gamma(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{R}^\gamma(\alpha) e^{i(\alpha x + \beta_1 y)} d\alpha \quad (3.25)$$

siendo $\mathcal{R}^\gamma(\alpha)$ amplitudes complejas incógnitas.

Como se dijo anteriormente, utilizamos aquí la aproximación de multicapas, que consiste en generar el perfil real de la superficie dividiendo el espacio interior de cada surco en capas de forma rectangular. Por lo tanto, el perfil obtenido reproducirá mejor la verdadera forma de la superficie cuanto mayor sea el número de capas (ver Figura 3.3). Dado que se utiliza el mismo procedimiento para todos los surcos, omitiremos el supraíndice l para evitar confusión y sobrecarga de notación. En cada capa de cada surco, se describen los campos mediante desarrollos modales:

$$f_j^\gamma(x, y) = \sum_{m=0}^{\infty} X_{m,j}^\gamma(x) Y_{m,j}^\gamma(y) \quad (3.26)$$

donde:

$$X_{m,j}^\gamma(x) = \begin{cases} \sin \left[\frac{m\pi}{c_j} (x - x_j) \right] & \text{para } \gamma = s \\ \cos \left[\frac{m\pi}{c_j} (x - x_j) \right] & \text{para } \gamma = p \end{cases} \quad (3.27)$$

$$Y_{m,j}^\gamma(y) = a_{m,j}^\gamma \cos(v_{m,j}y) + b_{m,j}^\gamma \sin(v_{m,j}y) \quad (3.28)$$

$$v_{m,j} = \begin{cases} \sqrt{k^2 - \left[\frac{m\pi}{c_j}\right]^2} & \text{si } k^2 > \left[\frac{m\pi}{c_j}\right]^2 \\ i \sqrt{\left[\frac{m\pi}{c_j}\right]^2 - k^2} & \text{si } k^2 < \left[\frac{m\pi}{c_j}\right]^2 \end{cases} \quad (3.29)$$

y $a_{m,j}^\gamma$ y $b_{m,j}^\gamma$ son amplitudes complejas incógnitas. Cada una de las funciones $X_{m,j}^\gamma(x)$ satisface las condiciones de contorno correspondientes en las paredes verticales de cada capa, es decir, en $x = x_j$ y en $x = x_j + c_j$. Comenzaremos empalmado los campos en las interfases $j = 1, \dots, M - 1$, sobre lo que luego se aplicará el algoritmo de la Matriz R .

Para polarización s , la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico en $[x_{j+1}, x_{j+1} + c_{j+1}]$ implica:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left[\frac{m\pi}{c_j} (x - x_j) \right] [a_{m,j}^s \cos(v_{m,j} y_j) + b_{m,j}^s \sin(v_{m,j} y_j)] \text{rect} \left(\frac{x - x_j}{c_j} \right) = \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left[\frac{m\pi}{c_{j+1}} (x - x_{j+1}) \right] [a_{m,j+1}^s \cos(v_{m,j+1} y_j) + b_{m,j+1}^s \sin(v_{m,j+1} y_j)] \times \\ & \text{rect} \left(\frac{x - x_{j+1}}{c_{j+1}} \right) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Proyectando la ecuación (3.30) en la base de funciones $\{\sin[m\pi(x - x_{j+1})/c_{j+1}]\}$, que son ortogonales en el intervalo $[x_{j+1}, x_{j+1} + c_{j+1}]$, se obtiene la siguiente ecuación:

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{m',m}^{(j)s} Y_{m,j}^s(y_j) = Y_{m',j+1}^s(y_j) \quad , \quad (3.31)$$

donde

$$A_{m',m}^{(j)s} = \frac{2}{c_{j+1}} \int_{x_j}^{x_j+c_j} \sin \left[\frac{m\pi}{c_j} (x - x_j) \right] \sin \left[\frac{m'\pi}{c_{j+1}} (x - x_{j+1}) \right] dx \quad . \quad (3.32)$$

La continuidad de la componente tangencial del campo magnético en el intervalo $[x_j, x_j + c_j]$, impone:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left[\frac{m\pi}{c_j} (x - x_j) \right] v_{m,j} [-a_{m,j}^s \sin(v_{m,j} y_j) + b_{m,j}^s \cos(v_{m,j} y_j)] = \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left[\frac{m\pi}{c_{j+1}} (x - x_{j+1}) \right] v_{m,j+1} [-a_{m,j+1}^s \sin(v_{m,j+1} y_j) + b_{m,j+1}^s \cos(v_{m,j+1} y_j)] \end{aligned} \quad (3.33)$$

Proyectando la ec. (3.33) en la base $\{\sin[m\pi(x - x_j)/c_j]\}$, se obtiene:

$$\frac{c_j}{c_{j+1}} \sum_{m=1}^{\infty} (A^{(j)s})_{m,m'}^{-1} \chi_{m,j}^s(y_j) = \chi_{m',j+1}^s(y_j) \quad (3.34)$$

donde

$$\chi_{m,j}^\gamma(y) = \frac{d[Y_{m,j}^\gamma(y)]}{dy} \quad (3.35)$$

Para polarización p , la continuidad de H_z en cada interfase j y en el intervalo $[x_j + x_{j+1} + c_j]$ implica:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left[\frac{m\pi}{c_j} (x - x_j) \right] [a_{m,j}^p \cos(v_{m,j} y_j) + b_{m,j}^p \sin(v_{m,j} y_j)] = \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left[\frac{m\pi}{c_{j+1}} (x - x_{j+1}) \right] [a_{m,j+1}^p \cos(v_{m,j+1} y_j) + b_{m,j+1}^p \sin(v_{m,j+1} y_j)] \quad , \quad (3.36) \end{aligned}$$

la cual al ser proyectada en la base $\{\cos[m\pi(x - x_j)/c_j]\}$, se reduce a:

$$\frac{C_{m,j}}{C_{m',j+1}} \sum_{m=0}^{\infty} (A^{(j)p})_{m,m'}^{-1} Y_{m,j}^p(y_j) = Y_{m',j+1}^p(y_j) \quad , \quad (3.37)$$

donde

$$A_{m',m}^{(j)p} = \frac{1}{C_{m,j+1}} \int_{x_j}^{x_j+c_j} \cos \left[\frac{m\pi}{c_j} (x - x_j) \right] \cos \left[\frac{m'\pi}{c_{j+1}} (x - x_{j+1}) \right] dx \quad (3.38)$$

y

$$C_{m,j} = \begin{cases} c_j & \text{si } m = 0 \\ c_j/2 & \text{si } m \neq 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

Finalmente, la continuidad de E_x en $[x_{j+1}, x_{j+1} + c_{j+1}]$, implica:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left[\frac{m\pi}{c_j} (x - x_j) \right] v_{m,j} [-a_{m,j}^p \sin(v_{m,j} y_j) + b_{m,j}^p \cos(v_{m,j} y_j)] \text{rect} \left(\frac{x - x_j}{c_j} \right) = \\ & \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left[\frac{m\pi}{c_{j+1}} (x - x_{j+1}) \right] v_{m,j} [-a_{m,j+1}^p \sin(v_{m,j+1} y_j) + b_{m,j+1}^p \cos(v_{m,j+1} y_j)] \times \\ & \text{rect} \left(\frac{x - x_{j+1}}{c_{j+1}} \right) \quad (3.40) \end{aligned}$$

Al proyectar la ec. (3.40) en la base $\{\cos[m\pi(x - x_{j+1})/c_{j+1}]\}$ se obtiene:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A_{m',m}^{(j)p} \chi_{m,j}^p(y_j) = \chi_{m',j+1}^p(y_j) \quad , \quad (3.41)$$

donde $\chi_{m,j}^p(y)$ está definido en (3.35).

Hasta aquí, hemos obtenido una relación entre los campos eléctrico y magnético a ambos lados de cada interfase y_j , la cual puede expresarse como sigue:

$$\begin{pmatrix} W_{j+1}^\gamma(y_j) \\ \tilde{W}_{j+1}^\gamma(y_j) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(j)\gamma} & 0 \\ 0 & M_{22}^{(j)\gamma} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_j^\gamma(y_j) \\ \tilde{W}_j^\gamma(y_j) \end{pmatrix}. \quad (3.42)$$

donde

$$M_{11}^{(j)\gamma} = \begin{cases} A_{m,m'}^{(j)s} & \text{para } \gamma = s \\ (A_{m',m}^{(j)p})^{-1} \frac{C_{m',j}}{C_{m,j+1}} & \text{para } \gamma = p \end{cases} \quad (3.43)$$

y

$$M_{22}^{(j)\gamma} = \begin{cases} (A_{m',m}^{(j)s})^{-1} \frac{c_j}{c_{j+1}} & \text{para } \gamma = s \\ A_{m,m'}^{(j)p} & \text{para } \gamma = p \end{cases} \quad (3.44)$$

$W_j^\gamma(y)$ es el vector que contiene las funciones $Y_{m,j}^\gamma(y)$ y $\tilde{W}_j^\gamma(y)$ es el vector que contiene las funciones $\chi_{m,j}^\gamma(y)$. Por otro lado, es conocida la relación entre los campos en uno y otro extremo de una misma capa [42]:

$$\begin{pmatrix} W_j^\gamma(y_j) \\ \tilde{W}_j^\gamma(y_j) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11}^j & -S_{12}^j \\ S_{21}^j & C_{11}^j \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_j^\gamma(y_{j-1}) \\ \tilde{W}_j^\gamma(y_{j-1}) \end{pmatrix} \quad (3.45)$$

donde C_{11}^j , S_{12}^j y S_{21}^j son matrices diagonales cuyos elementos están dados por:

$$\begin{aligned} C_{11}^j{}_{m,m'} &= \cos(v_{m,j}h_j)\delta_{ij} , \\ S_{12}^j{}_{m,m'} &= (1/v_{m,j}) \sin(v_{m,j}h_j)\delta_{ij} , \\ S_{21}^j{}_{m,m'} &= v_{m,j} \sin(v_{m,j}h_j)\delta_{ij} . \end{aligned} \quad (3.46)$$

Con las ecuaciones de empalme (3.31, 3.34, 3.37 y 3.41) y la ecuación (3.45), se puede expresar una relación entre los campos de una capa y de la siguiente, es decir, se pueden propagar los campos de una capa a la siguiente:

$$\begin{pmatrix} W_{j+1}^\gamma(y_j) \\ \tilde{W}_{j+1}^\gamma(y_j) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11}^{(j)\gamma} & t_{12}^{(j)\gamma} \\ t_{21}^{(j)\gamma} & t_{22}^{(j)\gamma} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_j^\gamma(y_{j-1}) \\ \tilde{W}_j^\gamma(y_{j-1}) \end{pmatrix} \quad (3.47)$$

Las matrices $t^{(j)}$ se denominan matrices de transferencia para la capa j -ésima, y están dadas por:

$$\begin{bmatrix} t_{11}^{(j)\gamma} & t_{12}^{(j)\gamma} \\ t_{21}^{(j)\gamma} & t_{22}^{(j)\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11\ mm'}^{(j)\gamma} \cos(v_{m',j} h_j) & -M_{11\ mm'}^{(j)\gamma} \sin(v_{m',j} h_j)/v_{m',j} \\ M_{22\ mm'}^{(j)\gamma} v_{m',j} \sin(v_{m',j} h_j) & M_{22\ mm'}^{(j)\gamma} \cos(v_{m',j} h_j) \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

Hasta aquí se han expresado en forma matricial las condiciones de empalme en cada interfase. El paso siguiente será propagar los campos desde la capa inferior ($j = 1$) hasta la superior ($j = M$). A simple vista, dicho procedimiento parece ser directo: utilizando sucesivamente la ec. (3.47) para escribir los campos en cada capa en función de los campos en la capa anterior, se puede obtener la relación buscada. Este procedimiento directo es conocido como Método de la Matriz T, y ha sido utilizado en algunos trabajos [25, 26]. Su ventaja es que no involucra inversiones de matrices, lo cual lo hace más rápido. Dicho algoritmo parece funcionar correctamente para superficies con rugosidades de baja profundidad. Sin embargo, a medida que éstas se hacen más pronunciadas, aparecen inestabilidades numéricas imposibles de salvar [23]. El origen de estos problemas numéricos reside en el hecho de que en las matrices involucradas aparecen factores del tipo $\sin(v_m^\gamma h)$ y $\cos(v_m^\gamma h)$, los cuales no presentan inconvenientes cuando $v_m^\gamma \in \mathfrak{R}$. Sin embargo, para valores complejos de v_m^γ , los valores que toman los senos y cosenos dejan de estar acotados, y se hacen muy grandes para alturas grandes de la estructura. Dado que la computadora tiene una capacidad limitada de operar con cifras grandes, la situación descrita conduce a un overflow. La solución a este problema es el reemplazo del Método de la Matriz T por el Algoritmo de la Matriz R. Dicho algoritmo había sido utilizado en el campo de la físico-química [27, 28], pero recién en los últimos años ha comenzado a usarse en mayor proporción dentro de la óptica y el electromagnetismo para redes infinitas [23], [30]-[32], [43]. En este trabajo se generalizó dicho algoritmo para tratar superficies corrugadas no periódicas [39],[44]-[48].

El procedimiento comienza reescribiendo la ecuación (3.47) de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_j(y_{j-1}) \\ \mathcal{E}_{j+1}(y_j) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^{(j)\gamma} & r_{12}^{(j)\gamma} \\ r_{21}^{(j)\gamma} & r_{22}^{(j)\gamma} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_j(y_{j-1}) \\ \mathcal{H}_{j+1}(y_j) \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

donde

$$\mathcal{E}_j(y) = \begin{cases} W_j^s(y) & \text{para } \gamma = s \\ \tilde{W}_j^p(y) & \text{para } \gamma = p \end{cases} \quad (3.50)$$

$$\mathcal{H}_j(y) = \begin{cases} \tilde{W}_j^s(y) & \text{para } \gamma = s \\ W_j^p(y) & \text{para } \gamma = p \end{cases} \quad (3.51)$$

Nótese que con las definiciones anteriores (3.50) y (3.51), \mathcal{E}_j representa a la componente tangencial del campo eléctrico (E_z para polarización s y E_x para polarización p), y \mathcal{H}_j representa a la componente tangencial del campo magnético (H_x para polarización s y H_z para polarización p). $r^{(j)\gamma}$ es la matriz r de la capa j y para polarización s está dada por:

$$\begin{bmatrix} r_{11}^{(j)s} & r_{12}^{(j)s} \\ r_{21}^{(j)s} & r_{22}^{(j)s} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(t_{21}^{(j)s})^{-1} t_{22}^{(j)s} & (t_{21}^{(j)s})^{-1} \\ t_{12}^{(j)s} - t_{11}^{(j)s} (t_{21}^{(j)s})^{-1} t_{22}^{(j)s} & t_{11}^{(j)s} (t_{21}^{(j)s})^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.52)$$

Para polarización p , la matriz $r^{(j)}$ se define como:

$$\begin{bmatrix} r_{11}^{(j)p} & r_{12}^{(j)p} \\ r_{21}^{(j)p} & r_{22}^{(j)p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(t_{12}^{(j)p})^{-1} t_{11}^{(j)p} & (t_{12}^{(j)p})^{-1} \\ t_{21}^{(j)p} - t_{22}^{(j)p} (t_{12}^{(j)p})^{-1} t_{11}^{(j)p} & t_{22}^{(j)p} (t_{12}^{(j)p})^{-1} \end{bmatrix} \quad (3.53)$$

De esta manera, la matriz r de cada capa j juega el papel de impedancia superficial para ambos modos de polarización, dado que relaciona las componentes tangenciales de los campos. Utilizando la propiedad de ortogonalidad y completitud de la base de autofunciones $\{X_{m,j}^\gamma(x)\}$ [22], las expresiones de los elementos de matriz de las matrices $r^{(j)}$ se pueden hallar analíticamente, sin necesidad de invertir numéricamente las matrices t_{21}^s y

t_{12}^p . Las expresiones de los mismos se dan a continuación:

$$\begin{aligned}
 r_{11\ mm'}^{(j)s} &= -\cot(v_{m,j}h_j) \delta_{m,m'} / v_{m,j} \ , \\
 r_{12\ mm'}^{(j)s} &= \frac{c_{j+1}}{c_j} A_{m',m}^{(j)s} / [v_{m,j} \sin(v_{m,j}h_j)] \ , \\
 r_{21\ mm'}^{(j)s} &= -A_{m,m'}^{(j)s} / [v_{m',j} \sin(v_{m',j}h_j)] \ , \\
 r_{22\ mm'}^{(j)s} &= \frac{c_{j+1}}{c_j} \sum_{k=1}^{\infty} A_{m,k}^{(j)s} A_{m',k}^{(j)s} \cot(v_{k,j}h_j) / v_{k,j} \ .
 \end{aligned} \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned}
 r_{11\ mm'}^{(j)p} &= v_{m,j} \cot(v_{m,j}h_j) \delta_{m,m'} \ , \\
 r_{12\ mm'}^{(j)p} &= -\frac{C_{m',j+1}}{C_{m,j}} A_{m',m}^{(j)p} v_{m,j} / [\sin(v_{m,j}h_j)] \ , \\
 r_{21\ mm'}^{(j)p} &= A_{m,m'}^{(j)p} v_{m',j} / \sin(v_{m',j}h_j) \ , \\
 r_{22\ mm'}^{(j)p} &= -C_{m',j+1} \sum_{k=1}^{\infty} A_{m,k}^{(j)p} A_{m',k}^{(j)p} v_{k,j} \cot(v_{k,j}h_j) / C_{k,j} \ .
 \end{aligned} \tag{3.55}$$

Una vez definidas las matrices $r^{(j)}$, estamos en condiciones de definir las matrices globales $R^{(j)}$, que relacionarán los campos en la capa inferior con los campos en cualquier capa j :

$$\begin{pmatrix} \mathcal{E}_1(y_0) \\ \mathcal{E}_{j+1}(y_j) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} R_{11}^{(j)\gamma} & R_{12}^{(j)\gamma} \\ R_{21}^{(j)\gamma} & R_{22}^{(j)\gamma} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathcal{H}_1(y_0) \\ \mathcal{H}_{j+1}(y_j) \end{pmatrix} \tag{3.56}$$

Aplicando la ecuación (3.49) para $j = 1$ y para $j = j + 1$, se puede demostrar que las matrices globales $R^{(j)\gamma}$ satisfacen la siguiente relación de recurrencia:

$$\begin{aligned}
 R_{11}^{(j)\gamma} &= R_{11}^{(j-1)\gamma} + R_{12}^{(j-1)\gamma} Z^{(j)\gamma} R_{21}^{(j-1)\gamma} \ , \\
 R_{12}^{(j)\gamma} &= -R_{12}^{(j-1)\gamma} Z^{(j)\gamma} r_{12}^{(j)\gamma} \ , \\
 R_{21}^{(j)\gamma} &= r_{21}^{(j)\gamma} Z^{(j)\gamma} R_{21}^{(j-1)\gamma} \ , \\
 R_{22}^{(j)\gamma} &= r_{22}^{(j)\gamma} - r_{21}^{(j)\gamma} Z^{(j)\gamma} r_{12}^{(j)\gamma} \ ,
 \end{aligned} \tag{3.57}$$

donde

$$Z^{(j)\gamma} = [r_{11}^{(j)\gamma} - R_{22}^{(j-1)\gamma}]^{-1} \ . \tag{3.58}$$

Se desea conocer las matrices $R^{(M-1)\gamma}$, mediante las cuales se obtendría la relación deseada entre las amplitudes modales de las capas inferior y superior. Para ello, deben aplicarse

las relaciones de recurrencia (3.57). Comparando las ecuaciones (3.49) y (3.56) para $j = 1$, se observa que:

$$\begin{bmatrix} R_{11}^{(1)\gamma} & R_{12}^{(1)\gamma} \\ R_{21}^{(1)\gamma} & R_{22}^{(1)\gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11}^{(1)\gamma} & r_{12}^{(1)\gamma} \\ r_{21}^{(1)\gamma} & r_{22}^{(1)\gamma} \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Por lo tanto, partiendo de las matrices $r^{(1)}$, y utilizando las relaciones (3.57), se obtiene la matriz global $R^{(M-1)\gamma}$. Teniendo en cuenta que la componente tangencial del campo eléctrico debe anularse en el fondo del surco, se pueden expresar las amplitudes modales de la capa superior ($j = M$) en función de las amplitudes modales de la capa inferior ($j = 1$):

$$a_{m,M}^{\gamma} = -\cos(v_{m,M} y_{M-1}) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{N}_{mk}^{\gamma} \tilde{a}_k, \quad (3.60)$$

$$b_{m,M}^{\gamma} = -\sin(v_{m,M} y_{M-1}) \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{M}_{mk}^{\gamma} \tilde{a}_k, \quad (3.61)$$

donde

$$\tilde{M}_{mk}^{\gamma} = \begin{cases} \{(R_{22}R_{12}^{-1}R_{11} - R_{21}) - R_{12}^{-1}R_{11} \cot(v_{m,M} y_{M-1})/v_{m,M}\}_{mk}^{M-1} & \text{para } \gamma = s \\ \{(R_{21} - R_{22}R_{12}^{-1}R_{11}) \cot(v_{m,M} y_{M-1})/v_{m,M} + R_{12}^{-1}R_{11}\}_{mk}^{M-1} & \text{para } \gamma = p \end{cases} \quad (3.62)$$

$$\tilde{N}_{mk}^{\gamma} = \begin{cases} \{(R_{22}R_{12}^{-1}R_{11} - R_{21}) + R_{12}^{-1}R_{11} \tan(v_{m,M} y_{M-1})/v_{m,M}\}_{mk}^{M-1} & \text{para } \gamma = s \\ \{(R_{22}R_{12}^{-1}R_{11} - R_{21}) \tan(v_{m,M} y_{M-1})/v_{m,M} + R_{12}^{-1}R_{11}\}_{mk}^{M-1} & \text{para } \gamma = p \end{cases} \quad (3.63)$$

y

$$\tilde{a}_k = \begin{cases} b_{k,1}^s & \text{para polarización } s \\ a_{k,1}^p & \text{para polarización } p \end{cases} \quad (3.64)$$

El supraíndice $M - 1$ denota que todas las matrices R involucradas en las ecs. (3.62) y (3.63) corresponden a $j = M - 1$.

El último paso en la resolución del problema consiste en hallar las amplitudes de Rayleigh complejas $\mathcal{R}^{\gamma}(\alpha)$. Para ello, se aplican las condiciones de empalme en el plano superior de la superficie, es decir, en la interfase $y = y_M$. Se obtendrá así un sistema de ecuaciones para cada modo de polarización, cuyas incógnitas serán las (infinitas) amplitudes modales en la capa superior de cada uno de los L surcos (es decir, $a_{m,M}^{\gamma}$ ó $b_{m,M}^{\gamma}$) y la

función $\mathcal{R}^s(\alpha)$. A continuación se agrega el supraíndice l , que denota el surco. Trataremos por separado cada modo de polarización. Para el modo s , la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico en $[-\infty, \infty]$ implica:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\infty} \sin \left[\frac{m\pi}{c_M^l} (x - x_M^l) \right] [a_{m,M}^{sl} \cos(v_{m,M}^l y_M) + b_{m,M}^{sl} \sin(v_{m,M}^l y_M)] \text{rect} \left(\frac{x - x_M^l}{c_M^l} \right) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} [\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^s(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] d\alpha . \quad (3.65)$$

La continuidad de la componente tangencial del campo magnético en $[x_M^l, x_M^l + c_M^l]$ exige que:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sin \left[\frac{m\pi}{c_M^l} (x - x_M^l) \right] v_{m,M}^l [-a_{m,M}^{sl} \sin(v_{m,M}^l y_M) + b_{m,M}^{sl} \cos(v_{m,M}^l y_M)] = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \beta_1 [-\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^s(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] d\alpha . \quad (3.66)$$

Análogamente al caso de surcos rectangulares detallado en la Sección 3.1, se proyecta la ecuación (3.65) en la base de funciones exponenciales $\{e^{i\alpha x}\}$ y la ec. (3.66) en la base de autofunciones de la capa M $\{X_{m,M}^{sl}(x)\}$, obteniendo:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\infty} [a_{m,M}^{sl} \cos(v_{m,M}^l y_M) + b_{m,M}^{sl} \sin(v_{m,M}^l y_M)] e^{-i\alpha x_M^l} J_m^l(-\alpha) = 2\pi [\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^s(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] , \quad (3.67)$$

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \beta_1 [-\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^s(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] e^{i\alpha x_M^l} J_m^l(\alpha) d\alpha = \frac{c_M^l}{2} v_{m,M}^l [-a_{m,M}^{sl} \sin(v_{m,M}^l y_M) + b_{m,M}^{sl} \cos(v_{m,M}^l y_M)] , \quad (3.68)$$

donde

$$J_m^l(\alpha) = \int_0^{c_M^l} e^{i\alpha x} \sin \left[\frac{m\pi x}{c_M^l} \right] dx . \quad (3.69)$$

Para polarización p , la continuidad de la componente tangencial del campo magnético en $[x_M^l, x_M^l + c_M^l]$ y del campo eléctrico en $[-\infty, \infty]$ se expresan:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \cos \left[\frac{m\pi}{c_M^l} (x - x_M^l) \right] [a_{m,M}^{pl} \cos(v_{m,M}^l y_M) + b_{m,M}^{pl} \sin(v_{m,M}^l y_M)] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} [\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^p(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] d\alpha . \quad (3.70)$$

$$\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\infty} \cos \left[\frac{m\pi}{c_M^l} (x - x_M^l) \right] v_{m,M}^l [-a_{m,M}^{pl} \sin(v_{m,M}^l y_M) + b_{m,M}^{pl} \cos(v_{m,M}^l y_M)] \times \\ \text{rect} \left(\frac{x - x_M^l}{c_M^l} \right) = i \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} \beta_1 [-\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^p(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] d\alpha . \quad (3.71)$$

Proyectando la ecuación (3.70) en la base de funciones exponenciales $\{e^{i\alpha x}\}$ y la ec. (3.71) en la base de autofunciones de la capa M $\{X_{m,M}^{pl}(x)\}$, se obtiene:

$$\int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^p(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] e^{i\alpha x_M^l} I_m^l(\alpha) d\alpha = \\ C_{m,M}^l [a_{m,M}^{pl} \cos(v_{m,M}^l y_M) + b_{m,M}^{pl} \sin(v_{m,M}^l y_M)] , \quad (3.72)$$

$$\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\infty} [-a_{m,M}^{pl} \sin(v_{m,M}^l y_M) + b_{m,M}^{pl} \cos(v_{m,M}^l y_M)] e^{-i\alpha x_M^l} I_m^l(-\alpha) v_{m,M}^l = \\ 2\pi i \beta_1 [-\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^p(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] , \quad (3.73)$$

donde

$$I_m^l(\alpha) = \int_0^{c_M^l} e^{i\alpha x} \cos \left[\frac{m\pi x}{c_M^l} \right] dx . \quad (3.74)$$

Las relaciones (3.60) y (3.61) son útiles ahora para reducir el número de vectores incógnita a $L+1$, es decir, las amplitudes modales de la capa inferior y los coeficientes de Rayleigh. Se reemplaza la ec. (3.68) en (3.67) y la ec. (3.72) en (3.73), y se utilizan las relaciones (3.60) y (3.61). Luego, discretizando las integrales y reacomodando los términos se obtiene una ecuación matricial para cada polarización, que tiene a los coeficientes de Rayleigh como incógnitas:

$$\mathcal{M}_{ij}^{\gamma} \mathcal{R}_j^{\gamma} = \mathcal{V}_i^{\gamma} , \quad (3.75)$$

donde

$$\mathcal{M}_{ij}^s = 2i \Delta\alpha \beta_{1,j} e^{i\beta_{1,j} y_M} \sum_{l=1}^L \frac{1}{c_M^l} e^{i(\alpha_j - \alpha_i) x_M^l} \sum_{m'} J_{m'}^l(\alpha_j) \sum_m J_m^l(-\alpha_i) \\ \times \sum_k \left[\frac{\sin(v_{m,M}^l h_M)}{v_{m,M}^l} (R_{12}^{-1} R_{11})_{mk} + \cos(v_{m,M}^l h_M) (R_{21} - R_{22} R_{12}^{-1} R_{11})_{mk} \right] (\mathcal{P}^{(l)})_{km'}^{-1} \\ - 2\pi e^{i\beta_{1,j} y_M} \delta_{ij} , \quad (3.76)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i^s &= 2i \Delta\alpha \sum_j \beta_{1,j} \mathcal{A}_j e^{-i\beta_{1,j} y_M} \sum_{l=1}^L \frac{1}{c_M^l} e^{i(\alpha_j - \alpha_i) x_M^l} \sum_{m'} J_{m'}^l(\alpha_j) \sum_m J_m^l(-\alpha_i) \\ &\times \sum_k \left[\frac{\sin(v_{m,M}^l h_M)}{v_{m,M}^l} (R_{12}^{-1} R_{11})_{mk} + \cos(\mu_{m,M}^l h_M) (R_{21} - R_{22} R_{12}^{-1} R_{11})_{mk} \right] (\mathcal{P}^{(l)})_{km'}^{-1} \quad (3.77) \\ &+ 2\pi A_i e^{-i\beta_{1,i} y_M} \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{ij}^p &= \Delta\alpha e^{i\beta_{1,j} y_M} \sum_{l=1}^L e^{i(\alpha_j - \alpha_i) x_M^l} \sum_{m'} \frac{1}{C_{m',M}^l} I_{m'}^l(\alpha_j) \sum_m I_m^l(-\alpha_i) v_{m,M}^l \\ &\times \sum_k \left[\sin(v_{m,M}^l h_M) (R_{12}^{-1} R_{11})_{mk} - \frac{\cos(v_{m,M}^l h_M)}{v_{m,M}^l} (R_{21} - R_{22} R_{12}^{-1} R_{11})_{mk} \right] (\mathcal{Q}^{(l)})_{km'}^{-1} \quad (3.78) \\ &- 2\pi i \beta_{1,i} e^{i\beta_{1,i} y_M} \delta_{ij} \quad , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}_i^p &= -\Delta\alpha \sum_j \mathcal{A}_j e^{-i\beta_{1,j} y_M} \sum_{l=1}^L e^{i(\alpha_j - \alpha_i) x_M^l} \sum_{m'} \frac{I_{m'}^l(\alpha_j)}{C_{m',M}^l} \sum_m I_m^l(-\alpha_i) v_{m,M}^l \\ &\times \sum_k \left[\sin(v_{m,M}^l h_M) (R_{12}^{-1} R_{11})_{mk} - \frac{\cos(v_{m,M}^l h_M)}{v_{m,M}^l} (R_{21} - R_{22} R_{12}^{-1} R_{11})_{mk} \right] (\mathcal{Q}^{(l)})_{km'}^{-1} \quad (3.79) \\ &- 2\pi i \beta_{1,i} \mathcal{A}_i e^{-i\beta_{1,i} y_M} \quad , \end{aligned}$$

donde

$$\mathcal{P}_{km'}^{(l)} = \cos(v_{k,M}^l h_M) (R_{12}^{-1} R_{11})_{km'} - \sin(v_{k,M}^l h_M) v_{k,M}^l (R_{21} - R_{22} R_{12}^{-1} R_{11})_{km'} \quad , \quad (3.80)$$

$$\mathcal{Q}_{km'}^{(l)} = -\cos(v_{k,M}^l h_M) (R_{12}^{-1} R_{11})_{km'} - \frac{\sin(v_{k,M}^l h_M)}{v_{k,M}^l} (R_{21} - R_{22} R_{12}^{-1} R_{11})_{km'} \quad , \quad (3.81)$$

\mathcal{A}_j es $\mathcal{A}(\alpha_j)$, $\Delta\alpha$ es el intervalo de discretización y δ_{ij} es la delta de Dirac.

La formulación aquí presentada ha sido implementada numéricamente como un programa FORTRAN. Una de las maneras de verificar el correcto funcionamiento del mismo, es calcular el balance energético. En el caso de redes infinitas, esto supone pedir que la suma de eficiencias sea igual a 1 (ver Sección (2.2)). En el presente caso, esto implica que $e_r = 1$, siendo e_r :

$$e_r = \frac{\int_{-k}^k \mathcal{R}^\gamma(\alpha) \frac{\beta_1}{\beta_{1,0}} d\alpha}{\int_{-k}^k \mathcal{A}(\alpha) \frac{\beta_1}{\beta_{1,0}} d\alpha} \quad . \quad (3.82)$$

En los resultados obtenidos, esta relación se cumple con un error menor al 3%.

3.3 Método de la Matriz R para metales reales

Dado que el caso de conductor perfecto es en cierto modo un caso ideal, es necesario considerar superficies metálicas reales para poder comparar los resultados con los obtenidos experimentalmente. La manera más simple de tener en cuenta que los metales reales son penetrables, es utilizar la condición de contorno de la impedancia superficial (CCIS) [49]. Dicha condición ha sido utilizada para el caso de una red infinita de alambres con gran éxito [50]-[52], y requiere la resolución de una ecuación de autovalores que, si bien no es tan simple como la correspondiente al conductor perfecto, es fácil de resolver numéricamente, aún para materiales de alta conductividad. Se ha demostrado que el uso de la CCIS en la zona infrarroja del espectro da resultados correctos para redes de alambres de oro de cualquier perfil [50]-[52]. Dicha condición permite hallar los campos reflejados por la estructura sin tener que encontrar la solución del problema en el interior del metal. Este hecho reduce significativamente el número de incógnitas del problema y por lo tanto simplifica el tratamiento numérico.

En esta sección se aplica el algoritmo de la Matriz R al caso de superficies metálicas reales con un número finito de surcos de forma arbitraria.

La configuración del problema es la misma que la considerada en la Sección 3.2, con la única diferencia de que en la actual se reemplaza al conductor perfecto por un metal que tiene un índice de refracción ν complejo, cuya parte imaginaria da cuenta de la absorción de energía que se produce en el mismo. Las condiciones de incidencia también son las mismas, ya que también en este caso se considera un haz limitado incidente. Al igual que en la Sección 3.2, en la región 1, el campo total se escribe como:

$$f_{\text{total}}^{\gamma}(x, y) = f_{\text{inc}}(x, y) + f_{\text{scatt}}^{\gamma}(x, y) \quad , \quad (3.83)$$

donde $f_{\text{inc}}(x, y)$ y $f_{\text{scatt}}^{\gamma}(x, y)$ están dados por las ecuaciones (2.23) y (3.4) respectivamente. Dentro de cada cavidad, se utilizarán desarrollos modales para cada capa rectangular en

las que se divide el perfil real:

$$f_j^\gamma(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,j}^\gamma(x) Y_{m,j}^\gamma(y) . \quad (3.84)$$

Las funciones modales deben satisfacer ahora la CCIS [49] en las paredes verticales de los surcos, es decir, en x_j y en $x_j + c_j$:

$$\vec{E}_\parallel = \mathcal{Z} \hat{n} \times \vec{H}_\parallel , \quad (3.85)$$

donde \vec{E}_\parallel y \vec{H}_\parallel son las componentes tangenciales del campo eléctrico y magnético respectivamente, \hat{n} es la normal exterior a la superficie y \mathcal{Z} es la impedancia superficial. Para materiales altamente conductores, $\mathcal{Z} \approx 1/\nu$ [53]. De esta manera, dichas funciones pueden expresarse como sigue:

$$X_{m,j}^s(x) = \sin(u_{m,j}^s(x - x_j)) + \eta^s u_{m,j}^s \cos(u_{m,j}^s(x - x_j)) , \quad (3.86)$$

$$X_{m,j}^p(x) = \frac{\eta^p}{u_{m,j}^p} \sin(u_{m,j}^p(x - x_j)) + \cos(u_{m,j}^p(x - x_j)) , \quad (3.87)$$

$$Y_{m,j}^\gamma(y) = a_{m,j}^\gamma \cos(v_{m,j}^\gamma y) + b_{m,j}^\gamma \sin(v_{m,j}^\gamma y) , \quad (3.88)$$

donde

$$(v_{m,j}^\gamma)^2 = k_{\text{inc}}^2 - (u_{m,j}^\gamma)^2 , \quad (3.89)$$

$$\eta^s = \frac{i\mathcal{Z}}{k_{\text{inc}}} , \quad (3.90)$$

$$\eta^p = \frac{k_{\text{inc}}\mathcal{Z}}{i} , \quad (3.91)$$

y $a_{m,j}^\gamma$ y $b_{m,j}^\gamma$ son amplitudes complejas a determinar. Nótese que los valores de $v_{m,j}^\gamma$ dependen ahora de la polarización incidente. Esto se debe a que la CCIS quiebra la simetría que presenta el caso ideal de conductor perfecto, determinando para cada una de las polarizaciones una ecuación de autovalores diferente. Los mismos ($u_{m,j}^s$ y $u_{m,j}^p$), quedan determinados por las siguientes ecuaciones de autovalores:

$$\tan(u_{m,j}^s c_j) = \frac{2\eta^s u_{m,j}^s}{(\eta^s u_{m,j}^s)^2 - 1} \quad \text{para polarización } s \quad (3.92)$$

$$\tan(u_{m,j}^p c_j) = \frac{2\eta^p u_{m,j}^p}{(u_{m,j}^p)^2 - (\eta^p)^2} \quad \text{para polarización } p$$

Estas ecuaciones se resuelven numéricamente, siguiendo el mismo procedimiento usado en [50], teniendo en cuenta que en este caso deben resolverse tantas ecuaciones como anchos diferentes de las capas (c_j) se hayan considerado.

Al igual que para conductor perfecto, el proceso de aplicación de las condiciones de contorno consta de tres pasos principales: aplicación de la CCIS en $y = 0$, empalme y propagación de los campos en las interfases intermedias ($j = 1, \dots, M - 1$) y empalme en la superficie superior $y = h$. De la aplicación de la CCIS a la superficie inferior de cada cavidad, resulta que:

$$a_{m,1}^s = \eta^s v_{m,1}^s b_{m,1}^s \quad , \quad (3.93)$$

$$\eta^p a_{m,1}^p = v_{m,1}^p b_{m,1}^p \quad . \quad (3.94)$$

Estas relaciones se utilizarán más adelante, en la etapa final de la resolución.

El segundo paso consiste en empalmar los desarrollos modales de los campos en cada interfase y_j : el campo y su derivada normal deben ser continuos en el intervalo $[x_j, x_j + c_j]$, y la CCIS debe satisfacerse en los intervalos $[x_{j+1}, x_j]$ y $[x_j + c_j, x_{j+1} + c_{j+1}]$. Consideraremos cada modo de polarización por separado.

Polarización s

La CCIS en la interfase y_j se expresa como:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,j+1}^s(x) Y_{m,j+1}^s(y_j) = \\ = & \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,j}^s(x) Y_{m,j}^s(y_j) & \text{para } x_j < x < x_j + c_j \\ \eta^s \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,j+1}^s(x) \chi_{m,j+1}^s(y_j) & \text{para } x_{j+1} < x < x_j \text{ y } x_j + c_j < x < x_{j+1} + c_{j+1} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.95)$$

donde $\chi_{m,j}^s(y)$ está definido en la ec. (3.35). Proyectando la ec. (3.95) en la base $\{X_{m,j+1}^s(x)\}$, que es ortogonal en el intervalo $[x_{j+1}, x_{j+1} + c_{j+1}]$, se obtiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{m',m}^{s(j)} Y_{m,j}^s(y_j) + \sum_{m=1}^{\infty} B_{m',m}^{s(j)} \chi_{m,j+1}^s(y_j) = Y_{m',j+1}^s(y_j) \quad , \quad (3.96)$$

donde

$$A_{m',m}^{s(j)} = \frac{1}{F_{m',j+1}^s} \int_{x_j}^{x_j+c_j} X_{m,j}^s(x) X_{m',j+1}^s(x) dx \quad , \quad (3.97)$$

$$B_{m',m}^{s(j)} = \frac{-\eta^s}{F_{m',j+1}^s} \int_{x_j+c_j}^{x_{j+1}+c_{j+1}} X_{m,j+1}^s(x) X_{m',j+1}^s(x) dx \quad (3.98)$$

$$F_{m,j}^\gamma = \int_{x_j}^{x_j+c_j} [X_{m,j}^\gamma(x)]^2 dx \quad (3.99)$$

La continuidad de la derivada normal del campo eléctrico en el intervalo $[x_j, x_j + c_j]$ implica:

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_{m,j+1}^s(x) \chi_{m,j+1}^s(y_j) = \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,j}^s(x) \chi_{m,j}^s(y_j) \quad (3.100)$$

que proyectada en la base $\{X_{m,j}^s(x)\}$ resulta:

$$\sum_{m=1}^{\infty} F_{m,j+1}^s A_{m,m'}^{s(j)} \chi_{m,j+1}^s(y_j) = F_{m',j}^s \chi_{m',j}^s(y_j) \quad (3.101)$$

Análogamente al caso de conductor perfecto, se aplica aquí el algoritmo de la Matriz R . Para ello, deben armarse las matrices de transferencia $t^{(j)}$, para luego poder hallar las $r^{(j)}$ y finalmente las matrices globales $R^{(j)}$. Haciendo la misma asignación que en la Sección 3.2, es decir, llamando $W_j^s(y)$ al vector que contiene las funciones $w_{m,j}^s(y)$ y $\tilde{W}_j^s(y)$ al vector que contiene las funciones $\chi_{m,j}^s(y)$, se puede escribir la siguiente relación entre los campos a un lado y a otro de cada interfase:

$$\begin{pmatrix} W_{j+1}^s(y_j) \\ \tilde{W}_{j+1}^s(y_j) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11}^{(j)s} & M_{12}^{(j)s} \\ M_{21}^{(j)s} & M_{22}^{(j)s} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} W_j^s(y_j) \\ \tilde{W}_j^s(y_j) \end{pmatrix} \quad (3.102)$$

Nótese que en el presente caso, las matrices $M_{12}^{(j)s}$ y $M_{21}^{(j)s}$ son distintas de cero, a diferencia del caso de conductor perfecto.

Teniendo en cuenta que la relación (3.45) entre los campos a un lado y a otro de cada capa sigue siendo válida, las matrices de transferencia quedan definidas mediante la ec. (3.47), donde ahora:

$$\begin{aligned} t_{11}^{(j)s}{}_{mm'} &= A_{m,m'}^{(j)s} \cos(v_{m',j}^s h_j) + C_{m,m'}^{(j)s} v_{m',j}^s \sin(v_{m',j}^s h_j) \quad , \\ t_{12}^{(j)s}{}_{mm'} &= -A_{m,m'}^{(j)s} \sin(v_{m',j}^s h_j) / v_{m',j}^s + C_{m,m'}^{(j)s} \cos(v_{m',j}^s h_j) \quad , \\ t_{21}^{(j)s}{}_{mm'} &= \frac{F_{m',j}^s}{F_{m,j+1}^s} (A_{m',m}^{(j)s})^{-1} \sin(v_{m',j}^s h_j) v_{m',j}^s \quad , \\ t_{22}^{(j)s}{}_{mm'} &= \frac{F_{m',j}^s}{F_{m,j+1}^s} (A_{m',m}^{(j)s})^{-1} \cos(v_{m',j}^s h_j) \quad , \end{aligned} \quad (3.103)$$

siendo

$$C_{m,m'}^{(j)\gamma} = F_{m',j}^\gamma \sum_{k=1}^{\infty} B_{m,k}^{(j)\gamma} (A_{m',k}^{(j)\gamma})^{-1} / F_{k,j+1}^\gamma . \quad (3.104)$$

Las matrices $r^{(j)}$ se definen en base a las matrices $t^{(j)}$, según la ecuación (3.52):

$$\begin{aligned} r_{11\ mm'}^{(j)s} &= -\cot(v_{m,j}^s h_j) \delta_{m,m'} / v_{m,j}^s , \\ r_{12\ mm'}^{(j)s} &= \frac{F_{m',j+1}^s}{F_{m,j}^s} A_{m',m}^{(j)s} / [v_{m,j}^s \sin(v_{m,j}^s h_j)] , \\ r_{21\ mm'}^{(j)s} &= -A_{m,m'}^{(j)s} / [v_{m',j}^s \sin(v_{m',j}^s h_j)] , \\ r_{22\ mm'}^{(j)s} &= F_{m',j+1}^s \sum_{k=1}^{\infty} [A_{m,k}^{(j)s} \cot(v_{k,j}^s h_j) / v_{k,j}^s + C_{m,k}^{(j)s}] A_{m',k}^{(j)s} / F_{k,j}^s . \end{aligned} \quad (3.105)$$

Utilizando las relaciones de recurrencia (3.57) se hallan las matrices globales $R^{(j)s}$, hasta obtener las $R^{(M-1)s}$.

Polarización p

La continuidad del campo magnético en el intervalo $[x_j, x_j + c_j]$ implica:

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_{m,j+1}^p(x) Y_{m,j+1}^p(y_j) = \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,j}^p(x) Y_{m,j}^p(y_j) . \quad (3.106)$$

Proyectando la ec. (3.106) en la base $\{X_{m',j}^p(x)\}$ se obtiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} F_{m,j+1}^p A_{m,m'}^{p(j)} Y_{m,j+1}^p(y_j) = F_{m',j}^p Y_{m',j}^p(y_j) , \quad (3.107)$$

donde

$$A_{m,m'}^{p(j)} = \frac{1}{F_{m,j+1}^p} \int_{x_j}^{x_j+c_j} X_{m',j}^p(x) X_{m,j+1}^p(x) dx , \quad (3.108)$$

y $F_{m,j}^p$ está definido por la ec. (3.99).

La CCIS en este modo de polarización se expresa así:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,j+1}^p(x) \chi_{m,j+1}^p(y_j) = \\ & = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,j}^p(x) \chi_{m,j}^p(y_j) & \text{para } x_j < x < x_j + c_j \\ \eta^p \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,j+1}^p(x) Y_{m,j+1}^p(y_j) & \text{para } x_{j+1} < x < x_j \text{ y } x_j + c_j < x < x_{j+1} + c_{j+1} \end{cases} \end{aligned} \quad (3.109)$$

que proyectada en la base $\{X_{m',j+1}^p\}$ resulta:

$$\sum_{m=1}^{\infty} A_{m',m}^{p(j)} \chi_{m,j}^p(y_j) + \sum_{m=1}^{\infty} B_{m',m}^{p(j)} Y_{m,j+1}^p(y_j) = \chi_{m',j+1}^p(y_j) , \quad (3.110)$$

donde

$$B_{m',m}^{p(j)} = \frac{-\eta^p}{F_{m',j+1}^p} \int_{x_j+c_j}^{x_{j+1}+c_{j+1}} X_{m,j+1}^p(x) X_{m',j+1}^p(x) dx \quad (3.111)$$

Al igual que para polarización s, las matrices $t^{(j)}$ se obtienen como producto de dos matrices. Las expresiones de sus elementos de matriz son las siguientes:

$$\begin{aligned} t_{11\ mm'}^{(j)p} &= \frac{F_{m',j}^p}{F_{m,j+1}^p} (A_{m',m}^{(j)p})^{-1} \cos(v_{m',j}^p h_j) , \\ t_{12\ mm'}^{(j)p} &= -\frac{F_{m',j}^p}{F_{m,j+1}^p} (A_{m',m}^{(j)p})^{-1} \sin(v_{m',j}^p h_j) / v_{m',j}^p , \\ t_{21\ mm'}^{(j)p} &= A_{m,m'}^{(j)p} \sin(v_{m',j}^p h_j) v_{m',j}^p + C_{m,m'}^{(j)p} \cos(v_{m',j}^p h_j) , \\ t_{22\ mm'}^{(j)p} &= A_{m,m'}^{(j)p} \cos(v_{m',j}^p h_j) - C_{m,m'}^{(j)p} \sin(v_{m',j}^p h_j) / v_{m',j}^p , \end{aligned} \quad (3.112)$$

donde $C_{m,m'}^{(j)p}$ está definido en (3.104).

Para esta polarización, las matrices $r^{(j)}$ se forman utilizando la relación (3.53):

$$\begin{aligned} r_{11\ mm'}^{(j)p} &= v_{m,j}^p \cot(v_{m,j}^p h_j) \delta_{m,m'} , \\ r_{12\ mm'}^{(j)p} &= -\frac{F_{m',j+1}^p}{F_{m,j}^p} A_{m',m}^{(j)p} v_{m,j}^p / [\sin(v_{m,j}^p h_j)] , \\ r_{21\ mm'}^{(j)p} &= A_{m,m'}^{(j)p} v_{m',j}^p / \sin(v_{m',j}^p h_j) , \\ r_{22\ mm'}^{(j)p} &= F_{m',j+1}^p \sum_{k=1}^{\infty} [-A_{m,k}^{(j)p} v_{k,j}^p \cot(v_{k,j}^p h_j) + C_{m,k}^{(j)p}] A_{m',k}^{(j)p} / F_{k,j}^p . \end{aligned} \quad (3.113)$$

Una vez halladas las matrices $r^{(j)}$, se está en condiciones de construir las matrices globales $R^{(j)p}$, para obtener finalmente la matriz $R^{(M-1)p}$.

Se cuenta entonces con la relación deseada entre las amplitudes modales de la capa superior y las de la capa inferior. Unificando ambos modos de polarización, se puede expresar dicha relación tal como se hizo en la Sección 3.2 (ver ec. (3.56)). De ésta, se deriva una relación explícita entre las amplitudes modales. Si se reemplaza en ella las relaciones entre las amplitudes modales de la capa inferior halladas previamente (ecs.

(3.93) y (3.94)) se obtiene un relación entre las amplitudes modales de la capa superior:

$$\sum_k \mathbf{A}_{m,k}^\gamma a_{k,M}^\gamma = \sum_k \mathbf{B}_{m,k}^\gamma b_{k,M}^\gamma, \quad (3.114)$$

donde

$$\mathbf{A}_{m,k}^\gamma = \begin{cases} [-R_{21}(R_{11} + \eta^s I)^{-1} R_{12} + R_{22}]_{m,k}^{M-1} v_{k,M}^s \sin(v_{k,M}^s y_{M-1}) & - \cos(v_{k,M}^s y_{M-1}) \delta_{m,k} \\ & \text{para polarización } s \\ [-R_{21}(R_{11} + \eta^p I)^{-1} R_{12} + R_{22}]_{m,k}^{M-1} \cos(v_{k,M}^p y_{M-1}) & - \sin(v_{k,M}^p y_{M-1}) v_{k,M}^p \delta_{m,k} \\ & \text{para polarización } p \end{cases} \quad (3.115)$$

$$\mathbf{B}_{m,k}^\gamma = \begin{cases} [-R_{21}(R_{11} + \eta^s I)^{-1} R_{12} + R_{22}]_{m,k}^{M-1} v_{k,M}^s \cos(v_{k,M}^s y_{M-1}) & + \sin(v_{k,M}^s y_{M-1}) \delta_{m,k} \\ & \text{para polarización } s \\ [-R_{21}(R_{11} + \eta^p I)^{-1} R_{12} + R_{22}]_{m,k}^{M-1} \sin(v_{k,M}^p y_{M-1}) & + \cos(v_{k,M}^p y_{M-1}) v_{k,M}^p \delta_{m,k} \\ & \text{para polarización } p \end{cases} \quad (3.116)$$

I es la matriz identidad. La relación (3.114) debe reemplazarse en las ecuaciones que derivan del empalme de los campos en la superficie $y = y_M$.

Para polarización s , la CCIS se escribe:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} [\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^s(\alpha) e^{i\alpha y_M}] d\alpha =$$

$$\begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,M}^{sl}(x) Y_{m,M}^{sl}(y_M) & \text{para } x_M^l < x < x_M^l + c_M^l \\ \eta^s i \int_{-\infty}^{\infty} \beta_1 e^{i\alpha x} [-\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^s(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] d\alpha & \text{para } x \text{ sobre la superficie metálica} \end{cases} \quad (3.117)$$

que proyectada en la base de funciones $\{e^{i\alpha x}\}$ resulta:

$$\begin{aligned} & \sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\infty} Y_{m,M}^{sl}(y_M) J_{m,M}^{sl}(\alpha') + \eta^s i 2\pi \beta_1' [-\mathcal{A}(\alpha') e^{-i\beta_1' y_M} + \mathcal{R}^s(\alpha') e^{i\beta_1' y_M}] - \\ & \eta^s i \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \beta_1 [-\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^s(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] \mathbf{S}(\alpha, \alpha') = \\ & 2\pi [\mathcal{A}(\alpha') e^{-i\beta_1' y_M} + \mathcal{R}^s(\alpha') e^{i\beta_1' y_M}], \end{aligned} \quad (3.118)$$

donde

$$J_m^{sl}(\alpha) = \int_{x_M^l}^{x_M^l + c_M^l} X_{m,M}^{sl}(x) e^{-i\alpha x} dx, \quad (3.119)$$

y

$$\mathbf{S}(\alpha, \alpha') = \sum_{l=1}^L \int_{x_M^l}^{x_M^l + c_M^l} e^{i(\alpha - \alpha')x} dx \quad . \quad (3.120)$$

Debe pedirse también la continuidad de la componente tangencial del campo magnético en el intervalo $[x_M^l, x_M^l + c_M^l]$:

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_{m,M}^{sl}(x) v_{m,M}^{sl} \chi_{m,M}^{sl}(y_M) = i \int_{-\infty}^{\infty} \beta_1 e^{i\alpha x} [-\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^s(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] d\alpha \quad , \quad (3.121)$$

La ecuación (3.121) se proyecta en la base de funciones modales, y resulta:

$$F_{m,M}^{sl} v_{m,M}^{sl} \chi_{m,M}^{sl}(y_M) = i \int_{-\infty}^{\infty} \beta_1 [-\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^s(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] K_m^{sl}(\alpha) d\alpha \quad , \quad (3.122)$$

donde

$$K_m^{\gamma l}(\alpha) = \int_{x_M^l}^{x_M^l + c_M^l} X_{m,M}^{\gamma l}(x) e^{i\alpha x} dx \quad . \quad (3.123)$$

Reemplazando (3.122) en (3.118), y utilizando la relación (3.114), se obtiene una ecuación para $\mathcal{R}^s(\alpha)$. Para resolverla, se discretizan las integrales en α y se obtiene así una ecuación matricial para $\mathcal{R}_j^s = \mathcal{R}^s(\alpha_j)$:

$$\sum_{j=1}^{\infty} M_{i,j}^s \mathcal{R}_j^s = V_i^s \quad (3.124)$$

donde

$$\begin{aligned} M_{i,j}^s &= i \Delta \alpha \beta_{1,j} e^{i\beta_{1,j} y_M} \left\{ \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{sl}(\alpha_j) \sum_{m=1}^{\infty} J_{m,l}^s(\alpha_i) \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^{\infty} [(\mathbf{A}^s)^{-1} \mathbf{B}^s]_{m,k} \cos(v_{m,M}^{sl} y_M) + \sin(v_{m,M}^{sl} y_M) \delta_{mk} \right] (\mathbf{T}_{k,n}^l)^{-1} - \eta^s \mathbf{S}(\alpha_j, \alpha_i) \left\} - \right. \\ &\quad \left. 2\pi e^{i\beta_{1,i} y_M} (1 - \eta^s \beta_{1,i} i) \delta_{ij} \quad , \quad (3.125) \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_i^s &= i \Delta \alpha \sum_{j=1}^{\infty} \beta_{1,j} \mathcal{A}_j e^{-i\beta_{1,j} y_M} \left\{ \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{sl}(\alpha_j) \sum_{m=1}^{\infty} J_{m,l}^s(\alpha_i) \right. \\ &\quad \left. \sum_{k=1}^{\infty} [(\mathbf{A}^s)^{-1} \mathbf{B}^s]_{m,k} \cos(v_{m,M}^{sl} y_M) + \sin(v_{m,M}^{sl} y_M) \delta_{mk} \right] (\mathbf{T}_{k,n}^l)^{-1} + \eta^s \mathbf{S}(\alpha_j, \alpha_i) \left\} + \right. \\ &\quad \left. 2\pi e^{-i\beta_{1,i} y_M} \mathcal{A}_i (1 + \eta^s \beta_{1,i} i) \quad , \quad (3.126) \right. \end{aligned}$$

$$\mathbf{T}_{k,n}^l = F_{k,M}^{sl} v_{k,M}^{sl} [-((\mathbf{A}^s)^{-1} \mathbf{B}^s)_{k,n} \sin(v_{k,M}^{sl} y_M) + \cos(v_{k,M}^{sl} y_M) \delta_{k,n}] \quad . \quad (3.127)$$

La matriz M^s debe invertirse para hallar las amplitudes de Rayleigh, y así obtener el campo reflejado por la estructura. Si se está interesado en conocer el campo en el interior de cada surco, debe usarse la ecuación (3.122) para hallar las amplitudes modales correspondientes a la capa superior. Luego, utilizando las matrices $r^{(j)}$ pueden ir obteniéndose las amplitudes correspondientes a cada una de las capas. Dado que para reproducir resultados es suficiente considerar un número pequeño de modos (del orden de 20), el proceso de recurrencia no resulta muy costoso en términos de tiempo de cómputo, lo cual hace que el método aquí presentado sea útil y eficaz para calcular los campos reflejados por una superficie metálica real con un número finito de surcos.

Para polarización p el proceso de empalme en la superficie superior y_M es análogo al detallado para polarización s , y se encuentra en el Apéndice A.

3.4 Resultados

Se darán a continuación algunos de los resultados obtenidos mediante la implementación numérica de los formalismos desarrollados en las secciones 3.1-3.3 para superficies con cavidades metálicas de perfiles variados. En la Sección 3.4.1 se presentan los controles realizados para asegurar el correcto funcionamiento de los programas y se ilustran casos límite cuyos resultados son conocidos de la óptica física; en la Sección 3.4.3 se muestran resultados aplicados al estudio de algunos fenómenos físicos que tienen lugar en este tipo de estructuras, como la intensificación del pico de retroreflexión y la excitación de ondas superficiales.

3.4.1 Validación de resultados

Para asegurar el correcto funcionamiento de los programas implementados, como primer paso se efectuaron algunos chequeos elementales, que se detallan a continuación:

- Se controlan las inversiones de todas las matrices involucradas (A), mediante un algoritmo que calcula los controles 1 (c_1) y 2 (c_2): $c_1 = \|A \cdot A^{-1} - I\|$ y $c_2 =$

$\|A^{-1} \cdot A - I\|$, donde I es la matriz identidad. c_1 y c_2 dan una medida del error cometido en la inversión, el cual de ser grande puede tener graves consecuencias en los resultados. En todos los resultados presentados, tanto c_1 como c_2 fueron siempre menores que 10^{-12} , lo cual asegura el correcto funcionamiento de la subrutina de inversión de matrices complejas.

- Balance de energía: el cociente entre la potencia reflejada más la absorbida (que es nula si la superficie es perfectamente conductora) y la potencia incidente debe ser igual a la unidad. Es decir:

$$\frac{P_{\text{ref}}}{P_{\text{inc}}} + \frac{P_{\text{abs}}}{P_{\text{inc}}} = 1 \quad , \quad (3.128)$$

donde P_{inc} , P_{ref} y P_{abs} deben calcularse como el flujo del vector de Poynting \vec{S}_{inc} , \vec{S}_{ref} y \vec{S}_{abs} respectivamente, a través de la superficie correspondiente (ver ec. (2.20)). Esta condición se cumple con un error menor al 3% en todos los cálculos presentados.

- Para $h \rightarrow 0$, es decir, para el caso de superficie plana, se comprobó que sólo se obtiene campo reflejado en la dirección especular ($\theta = \theta_0$), como era de esperar.
- Para $\theta_0 = 0^\circ$, es decir, para incidencia normal sobre la superficie, se obtienen diagramas simétricos de intensidad en función del ángulo de observación.
- Para $\text{Im}(\nu) \rightarrow \infty$, es decir, cuando la superficie tiende a ser perfectamente conductora, los resultados obtenidos deben tender a los correspondientes al conductor perfecto.
- Cuando el número de surcos de la superficie se hace grande, el patrón de intensidad debe tender al correspondiente a una red infinita, es decir, a una curva con picos discretos muy pronunciados, ubicados en las posiciones correspondientes a los máximos de interferencia: $\sin \theta_{\text{max}} = m\lambda/d$.

Para implementar numéricamente el formalismo desarrollado más arriba, deben transformarse las integrales en sumas (es decir, discretizarlas), y luego truncarlas. Este es

	NR=151	NR=251	NR=451
NM=50	3.217959	3.140012	3.135363
NM=100	3.217962	3.140020	3.135370
NM=150	3.217963	3.140022	3.135371

Tabla 3.1: Evolución de $\mathcal{R}^p(\alpha_0)$ a medida que se varían NR y NM.

un punto importante en la implementación numérica, dado que determina los $\mathcal{R}^r(\alpha)$, es decir, las amplitudes de Rayleigh que representan al campo reflejado. Cuanto más densa sea la selección de los α_n , mejor será la representación del campo obtenida. Por consiguiente, el intervalo de discretización ($\Delta\alpha$) debe elegirse dos a tres veces menor que la inversa de la longitud máxima involucrada en el cálculo, que típicamente corresponde a la longitud total de la zona corrugada. Esta condición asegura que todos los picos y valles esperados en la figura de intensidad reflejada en función de α/k puedan ser reproducidos. También es importante la determinación del intervalo a tener en cuenta en las integrales, ya que las mismas tienen límites infinitos. En efecto, se elige el intervalo de integración centrado en α_0 , y de manera tal que contenga a todos los valores de α que representan ondas propagantes, es decir, $|\alpha| \leq k$. Sin embargo, es conveniente tomar un intervalo aún mayor, para tener en cuenta valores de α correspondientes a ondas evanescentes, los cuales eventualmente pueden modificar el campo reflejado por la estructura. La elección adecuada de este intervalo depende fuertemente de la polarización del haz incidente, ya que está íntimamente ligada con la excitación de ondas superficiales.

Por otra parte, los desarrollos modales también deben truncarse, determinando el número de autofunciones de relevancia presentes en la cavidad. Tanto el número de términos de Rayleigh considerado (NR) como el número de modos (NM) fueron elegidos de manera tal que la solución converja. Por ejemplo, en la Tabla 3.1 se muestra la evolución del valor de $\mathcal{R}^p(\alpha_0)$ a medida que se varían NR y NM, para una estructura con 21 cavidades rectangulares en una superficie perfectamente conductora. En este caso se considera $\alpha \in [\alpha_0 - 2k, \alpha_0 + 2k]$. Se puede observar que la solución ha convergido para NR=251,

y que el número de modos NM parece no afectar demasiado los resultados. En este caso entonces sería suficiente tomar $NR=251$ y $NM=50$ para obtener resultados precisos con un error menor al 0.4%. Tal como fue explicado más arriba, una extensión del intervalo de integración ocasiona un aumento de NR, si se desea mantener el mismo $\Delta\alpha$. Sin embargo se ha comprobado que una extensión de dicho intervalo mayor a $4k$ no modifica apreciablemente los resultados, lo cual representa un ahorro considerable de tiempo de cómputo.

Una manera de chequear cualitativamente los resultados es graficar la intensidad reflejada en función de $\sin\theta$, para estructuras con surcos rectangulares equiespaciados de baja profundidad. En este caso, el resultado de la óptica física indica que debe haber máximos principales de interferencia en:

$$\sin\theta_{\max} = m\frac{\lambda}{d}, \quad (3.129)$$

donde d representa la distancia entre los centros de dos surcos contiguos. Además, entre dos máximos principales consecutivos debe haber $N-1$ mínimos, siendo N el número de surcos de la superficie. Estos resultados han sido reproducidos utilizando el método presentado aquí, y algunas de las figuras que lo ilustran son las 3.4-3.9.

En las Figuras 3.4 y 3.5 se muestran curvas de intensidad $|\mathcal{R}^\gamma(\alpha)|^2$ en función del seno del ángulo de observación ($\sin(\theta)$) para una superficie con dos surcos rectangulares iguales. Los parámetros son $\lambda/c = 0.4$, $h/c = 0.01$, $\Delta/c = 1$ y $\theta_0 = 0^\circ$. Se puede ver que para ambas polarizaciones los máximos están ubicados en $\sin(\theta) = m \times 0.2$, tal como predice la teoría escalar (en este caso $d = c + \Delta$). Como $c = d/2$, desaparecen los órdenes correspondientes a m par, ya que corresponden también a mínimos de difracción. Para una estructura con tres surcos, manteniendo los demás parámetros iguales a los de la Figura 3.4, las curvas correspondientes a polarización s y p son las de las Figuras 3.6 y 3.7 respectivamente. En este caso aparece un máximo secundario entre dos máximos principales. Cabe notar que en las figuras correspondientes a polarización p , se observan picos de intensidad para $\sin(\theta) = \pm 1$. Esto se debe a que en superficies corrugadas

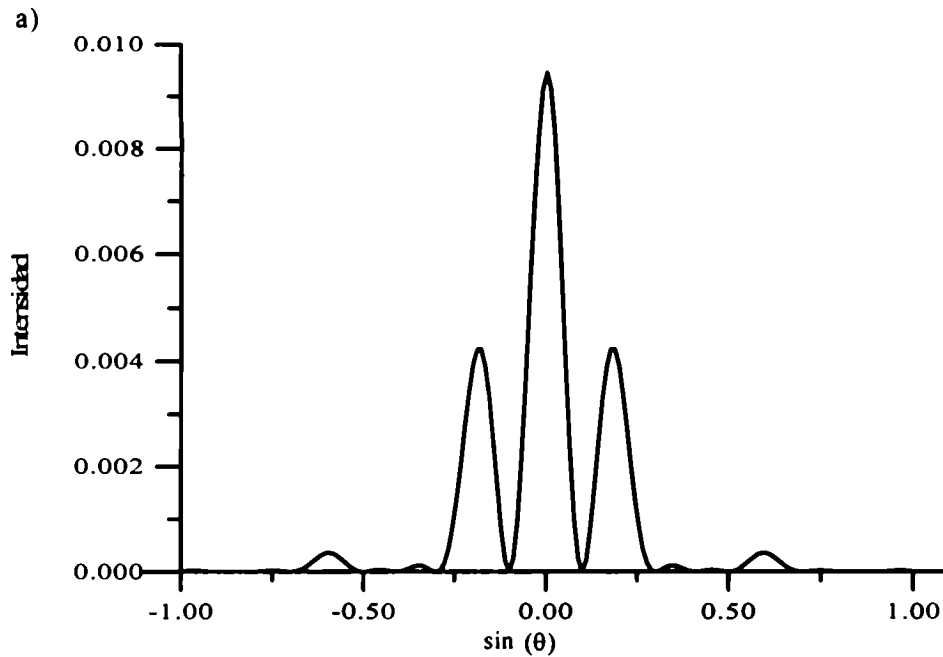


Figura 3.4: Intensidad vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con dos surcos rectangulares. $\lambda/c = 0.4$, $h/c = 0.01$, $\Delta/c = 1$ y $\theta_0 = 0^\circ$. Polarización s .

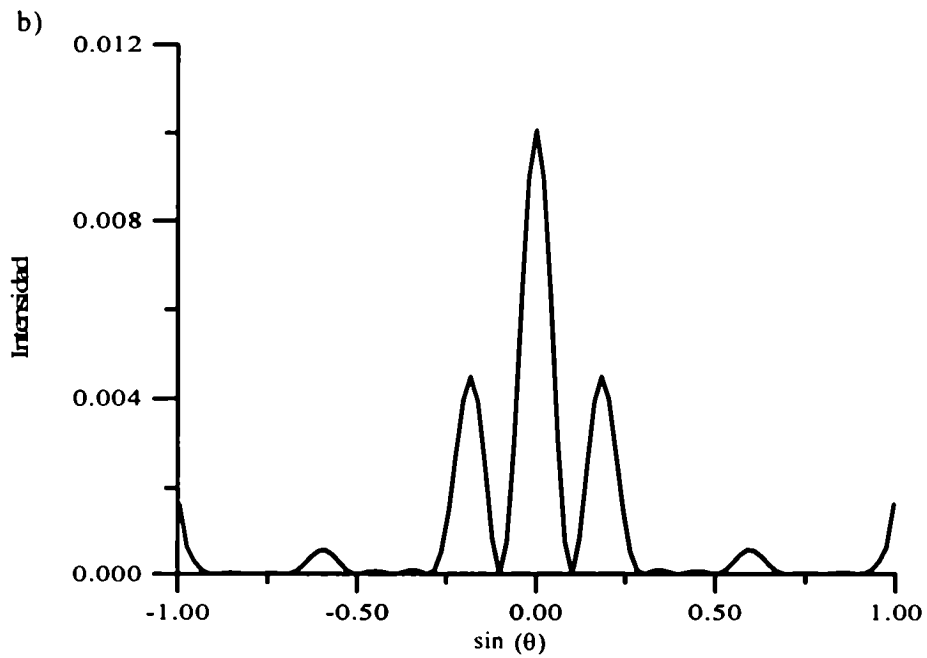


Figura 3.5: Intensidad vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con dos surcos rectangulares. $\lambda/c = 0.4$, $h/c = 0.01$, $\Delta/c = 1$ y $\theta_0 = 0^\circ$. Polarización p .

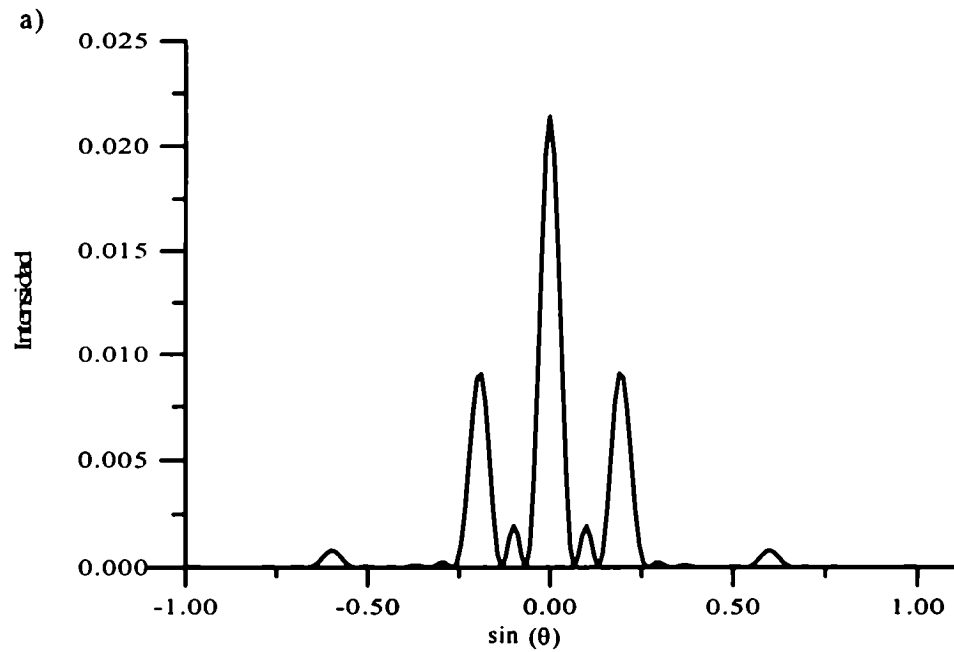


Figura 3.6: Intensidad vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con tres surcos rectangulares. $\lambda/c = 0.4$, $h/c = 0.01$, $\Delta/c = 1$ y $\theta_0 = 0^\circ$. Polarización *s*.

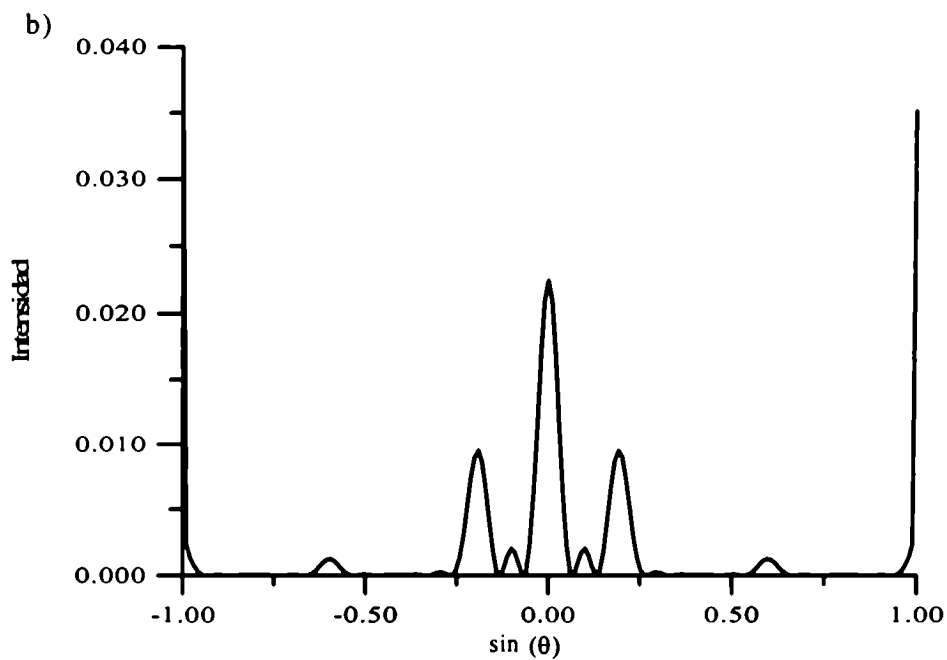


Figura 3.7: Intensidad vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con cinco surcos rectangulares. $\lambda/c = 0.4$, $h/c = 0.01$, $\Delta/c = 1$ y $\theta_0 = 0^\circ$. Polarización *p*.

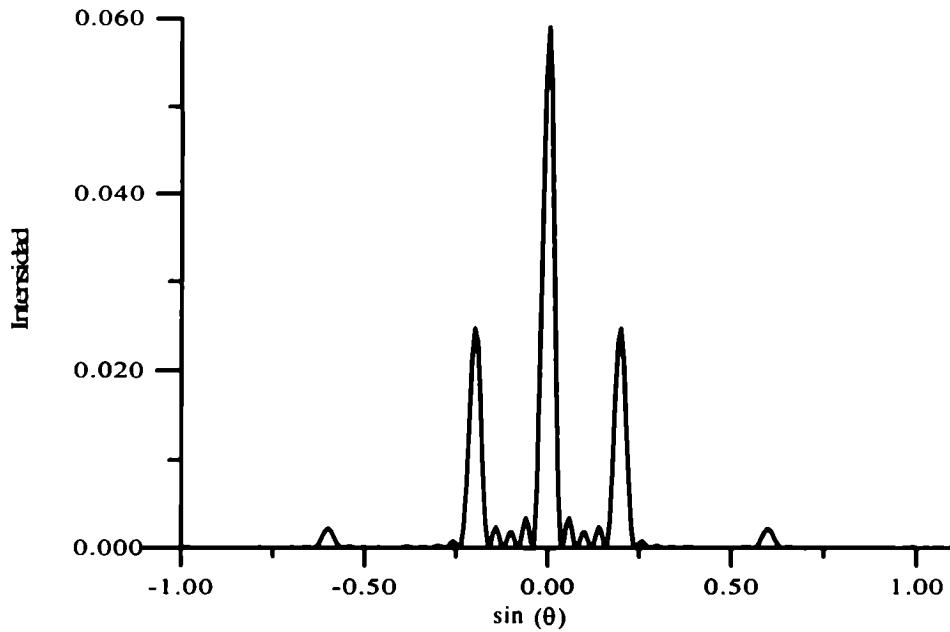


Figura 3.8: Intensidad vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con cinco surcos rectangulares. $\lambda/c = 0.4$, $h/c = 0.01$, $\Delta/c = 1$ y $\theta_0 = 0^\circ$. Polarización s .

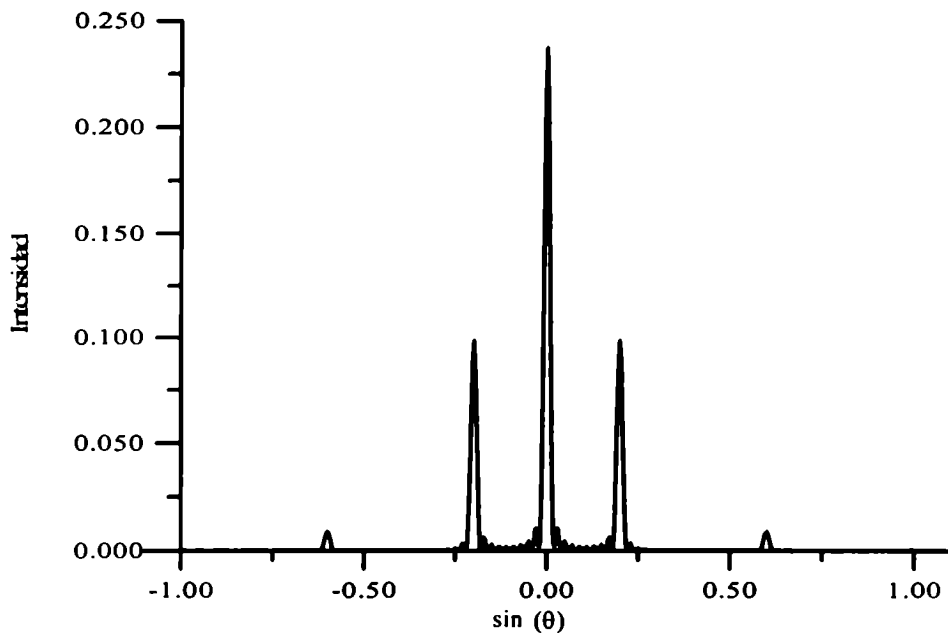


Figura 3.9: Intensidad vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con diez surcos rectangulares. $\lambda/c = 0.4$, $h/c = 0.01$, $\Delta/c = 1$ y $\theta_0 = 0^\circ$. Polarización s .

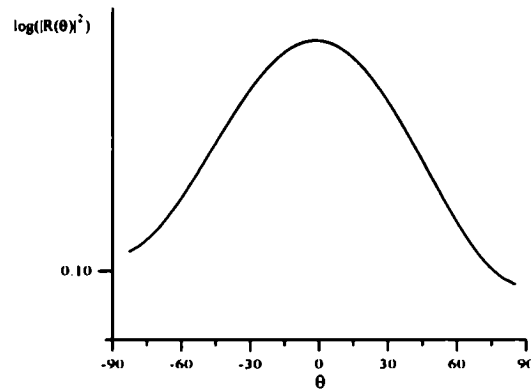


Figura 3.10: $\log(|R(\theta)|^2)$ vs. θ para una onda plana incidente con polarización s , $\lambda/c = 1.725$, $\theta_0 = 19.5^\circ$ sobre una superficie con 1 surco de $h/c = 1.029$.

metálicas de baja profundidad se propaga una onda superficial con esta polarización. Este fenómeno se ilustra en otros ejemplos más adelante. En las Figuras 3.8 y 3.9 se muestran curvas correspondientes a estructuras con cinco y diez surcos respectivamente. Se observa que a medida que el número de surcos aumenta, los picos de intensidad se van afinando y separando, como corresponde a una red infinita.

Otro de los controles realizados fue la comparación de los resultados obtenidos con los estudiados por Park *et al.* en la Ref. [16]. En las Figuras 3.10-3.12 se grafica $\log(|R^s(\theta)|)$ como función del ángulo de observación para una onda plana con polarización s y longitud de onda $\lambda/d = 0.666$ incidente sobre una superficie con surcos rectangulares de ancho $c/d = 0.386$ y altura $h/d = 0.3973$. La distancia entre surcos contiguos es fija $\Delta/d = 0.614$ y el ángulo de incidencia $\theta_0 = 19.5^\circ$. $d = c + \Delta$ es el “período” de la red finita en el caso en que la superficie sea periódica finita. Este conjunto de parámetros es el mismo que el correspondiente a las curvas de las figuras 4a, 4b y 4c en la Ref. [16] para superficies con 1, 3 y 21 surcos respectivamente. Nótese que ambas curvas no son comparables en la dirección especular, ya que en el presente tratamiento se ha sustraído el campo reflejado especularmente en la expresión de $f_1^2(x, y)$ (ver ec. (3.1)). Teniendo en cuenta que en el presente trabajo se ha considerado una onda plana incidente mientras que en la Ref. [16]

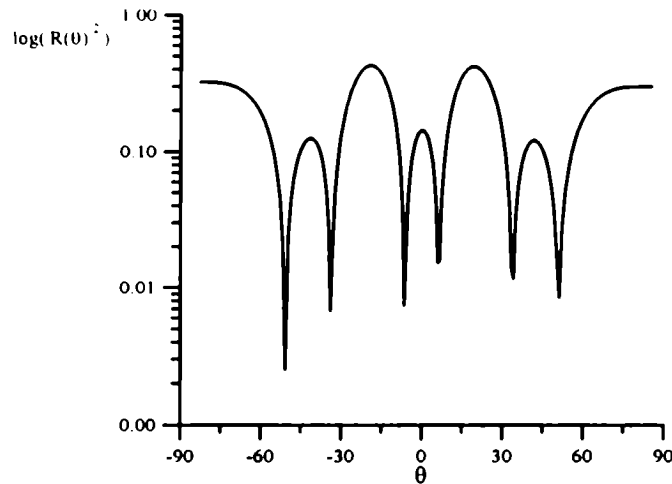


Figura 3.11: $\log(|R(\theta)|^2)$ vs. θ para una onda plana incidente con polarización s , $\lambda/d = 0.666$. $\theta_0 = 19.5^\circ$ sobre una superficie con 3 surcos de $c/d = 0.386$, $\Delta/d = 0.614$ y $h/d = 0.3973$.

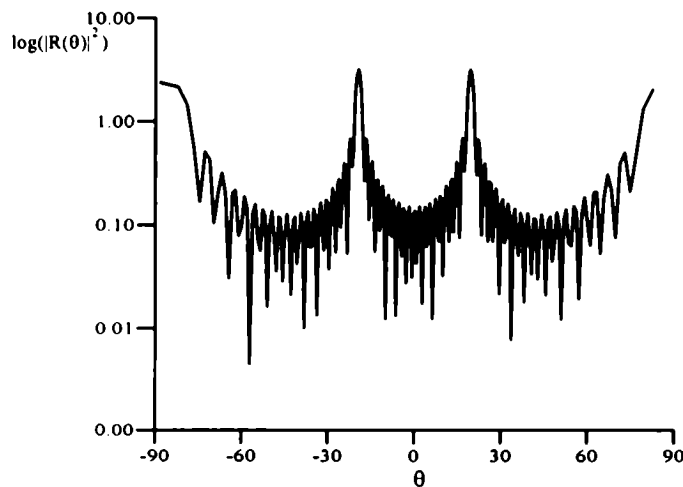


Figura 3.12: $\log(|R(\theta)|^2)$ vs. θ para una onda plana incidente con polarización s , $\lambda/d = 0.666$. $\theta_0 = 19.5^\circ$ sobre una superficie con 21 surcos de $c/d = 0.386$, $\Delta/d = 0.614$ y $h/d = 0.3973$.

se considera un haz Gaussiano, las figuras coinciden bastante bien.

3.4.2 Comparación con un método integral

Para controlar los resultados obtenidos con los nuevos algoritmos presentados en esta Tesis, se ha implementado numéricamente un método integral basado en identidades de Green [5]. Este último consiste en hallar el valor de la componente tangencial del campo magnético sobre la superficie dispersora, a partir del cual se puede conocer el campo en todo punto del espacio. Por consiguiente, debe considerarse un número grande de puntos para describir la superficie. Esto hace que las matrices a invertir sean de tamaños muy grandes, acarreando mayor volumen de cálculo y por consiguiente, más tiempo de cómputo.

En la Tabla 3.2 se comparan los tiempos de cómputos que llevan los dos métodos, para una estructura con un surco de perfil sinusoidal de profundidades $h/d = 0.1, 1$ y 10 , y para $\lambda/d = 0.8$. Se observa que el método modal es más rápido que el integral, y que la diferencia se hace más marcada a medida que se aumenta la profundidad del surco. Esto confirma que el método presentado en este trabajo es más conveniente para el tratamiento de estructuras con corrugados profundos.

	$h/d = 0.1$	$h/d = 1$	$h/d = 10$
Método integral	3' 9"	4' 54"	13' 55"
Método modal	1' 21"	1' 23"	2' 64"

Tabla 3.2: Comparación de tiempos de cómputo entre el método modal y el método integral.

A continuación se muestran algunas comparaciones entre ambos métodos.

En las Figuras 3.13 y 3.14 se muestra la comparación entre los resultados obtenidos con el método integral (línea llena) y los obtenidos con el método modal (línea punteada). Las curvas de intensidad en función de $\sin \theta$ corresponden a superficies con un surco sinusoidal de ancho d y profundidades $h/d = 0.1$ y 0.2 (Figuras 3.13 y 3.14 respectivamente).

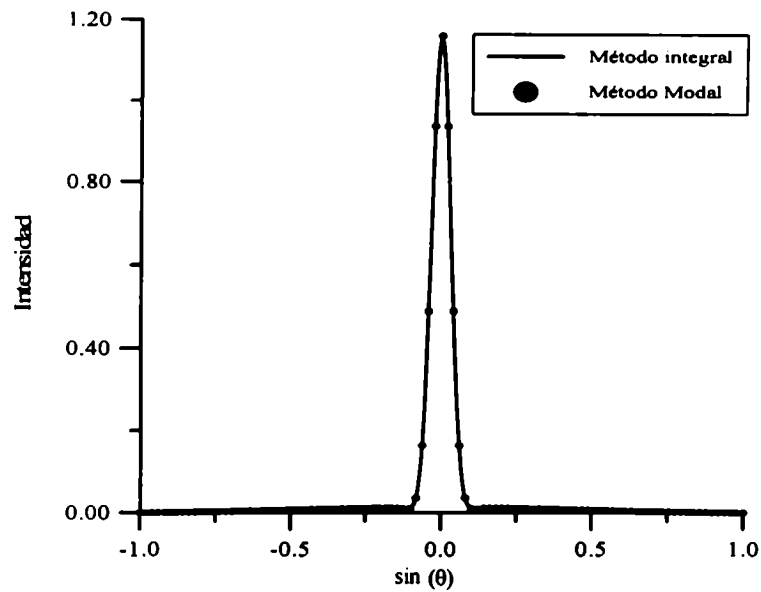


Figura 3.13: Comparación entre el método integral y el método modal para una superficie con un surco sinusoidal de $h/d = 0.1$, $w/d = 4$, $\lambda/d = 0.8$, $\theta_0 = 0$ y polarización s .

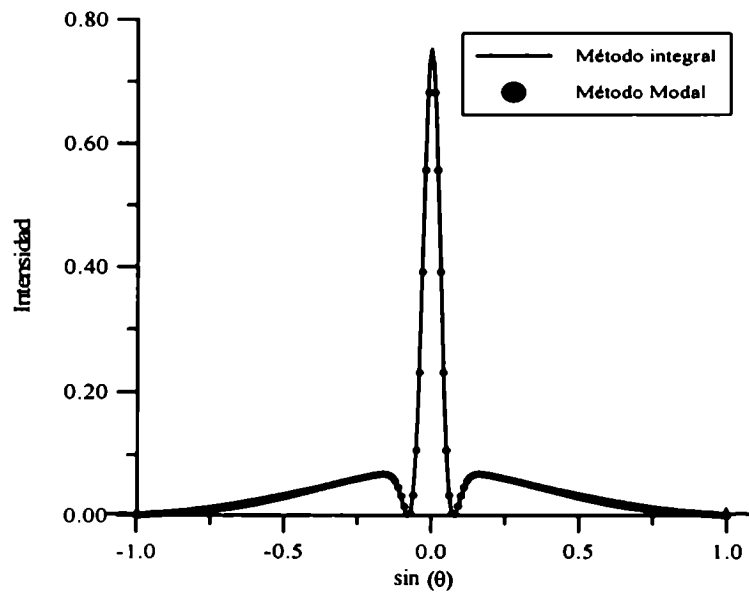


Figura 3.14: Comparación entre el método integral y el método modal para una superficie con un surco sinusoidal de $h/d = 0.2$, $w/d = 4$, $\lambda/d = 0.8$, $\theta_0 = 0$ y polarización s .

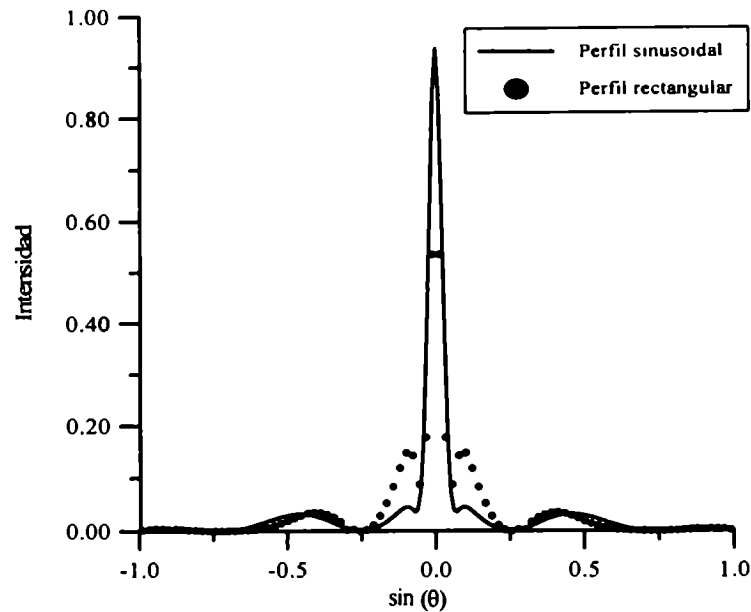


Figura 3.15: Comparación entre el perfil sinusoidal y el rectangular para una superficie con 2 surcos. $\lambda/d = 0.6$, $h/d = 0.1$, $\Delta/d = 0.2$, $w/d = 4$, $\theta_0 = 0$ y polarización s .

iluminadas normalmente por un haz Gaussiano de polarización s , $\lambda/d = 0.8$ y $w/d=4$. Es notable la coincidencia entre ambos métodos. La gran ventaja del Método Modal de Multicapas presentado aquí sobre el método integral se evidencia cuando las cavidades se hacen más profundas. Esto se debe a que el tamaño de la matriz a invertir en el caso del método integral depende de la profundidad del surco, mientras que en el caso del método modal sólo depende del número de autofunciones consideradas en cada capa. En este último, un incremento en la profundidad del corrugado provoca un aumento del número de capas utilizado para aproximar el perfil, pero no el tamaño de la matriz.

En la Figura 3.15 se muestran curvas de intensidad vs. $\sin \theta$ para una superficie con un número finito de surcos idénticos: la Figura 3.15 corresponde a una superficie con dos surcos ($h/d = 0.1$) y la Figura 3.16 a una superficie con cinco surcos equiespaciados ($h/d = 0.5$). La superficie se ilumina mediante un haz Gaussiano de ancho $w/d = 4$ y longitud de onda $\lambda/d = 0.6$. La línea punteada corresponde a surcos rectangulares y

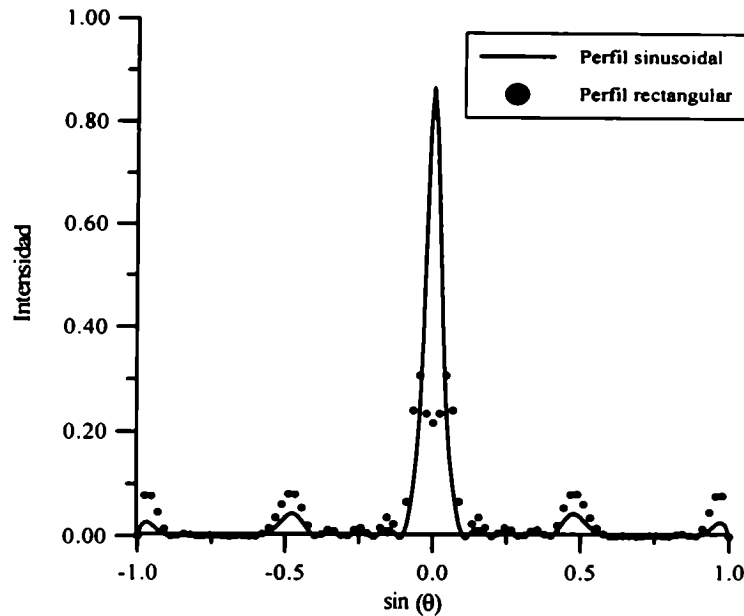


Figura 3.16: Comparación entre el perfil sinusoidal y el rectangular para una superficie con 5 surcos. $\lambda/d = 0.6$, $h/d = 0.5$, $\Delta/d = 0.2$, $w/d = 4$, $\theta_0 = 0$ y polarización s .

la llena a surcos sinusoidales. Se ve que en ambos casos, a medida que se aumenta la cantidad de surcos, los picos ubicados en las posiciones de los órdenes de difracción se hacen más pronunciados.

El método modal presentado en esta Tesis presenta una ventaja importante frente al método integral, para superficies con surcos profundos: si bien ambos métodos requieren de la inversión de una matriz, el tamaño de la matriz correspondiente al método integral depende de la profundidad de la estructura (dado que debe aumentarse el número de puntos con que se describe la superficie, y es del orden de 400×400), mientras que el tamaño de la matriz en el caso del método modal (del orden de 20×20) sólo depende del número de funciones modales consideradas en cada capa. Esto se traduce en un ahorro de tiempo de cómputo considerable, lo cual es muy importante si se debe resolver el problema muchas veces, para distintas condiciones de incidencia.

3.4.3 Aplicaciones

Entre las aplicaciones del método desarrollado, se encuentran las siguientes:

- Estudio de la excitación de ondas superficiales.
- Estudio de la intensificación del pico de retroreflexión.
- Cálculo de campo cercano.

A continuación se presentan algunos ejemplos ilustrativos de estas tres aplicaciones.

Es sabido que ondas superficiales (plasmones) de polarización p (y no s) pueden propagarse en la interfase entre el vacío y un metal. Si la superficie es perfectamente plana, la variación espacial de los campos a lo largo de la dirección de propagación es de la forma $\exp(i\alpha x)$, siendo α la constante de propagación, que está dada por [54]:

$$\frac{\alpha}{k} = \sqrt{\frac{\nu^2}{1 + \nu^2}} \quad (3.130)$$

Como para metales la parte real de α/k es mayor que la unidad, la luz no se puede acoplar a un plasmón a lo largo de una única interfase plana. Sin embargo, una propiedad importante de estas ondas superficiales es su acoplamiento con la luz a través de superficies corrugadas [54]. Este fenómeno se ilustra en las Figuras 3.17 y 3.18 para polarización s y en las 3.19 y 3.20 para polarización p , donde se grafican curvas de $|R^\gamma(\alpha)|^2$ vs. α/k para una red finita de tres surcos, $\lambda/d = 0.666$, $c/d = 0.386$, $h/d = 0.3973$, $\Delta x/d = 0.614$ y $\theta_0 = 19.5^\circ$.

Se observa que el patrón de difracción correspondiente a polarización s (Fig. 3.17) reproduce las características que predice la teoría escalar de óptica física y que sólo la intensidad, y no la posición espectral de los máximos y mínimos, es alterada cuando se considera un metal real de conductividad finita. Esto ocurre tanto en la zona radiativa ($|\alpha|/k < 1$) como en la no radiativa ($|\alpha|/k > 1$). El comportamiento de las curvas de $|R^p(\alpha)|^2$ vs. α/k para polarización p es bastante diferente, como se muestra en la Figura

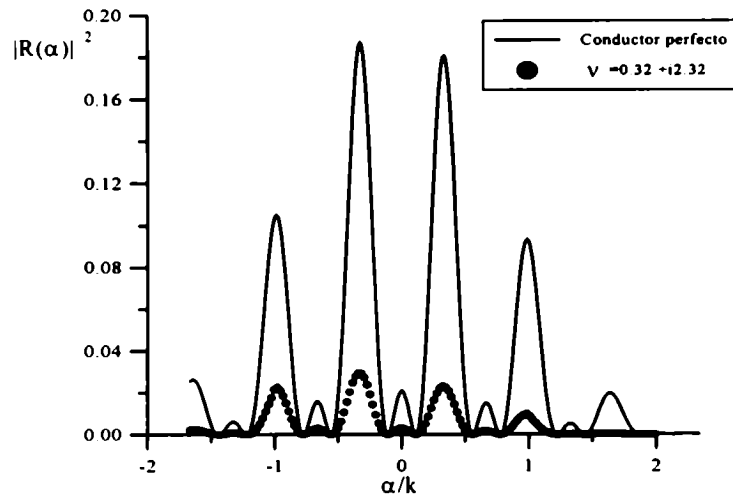


Figura 3.17: $|R(\alpha)|^2$ vs. α/k para una onda plana incidente con polarización s , $\lambda/d = 0.666$, $\theta_0 = 19.5^\circ$ sobre una superficie con 3 surcos de $c/d = 0.386$, $\Delta/d = 0.614$ y $h/d = 0.3973$.

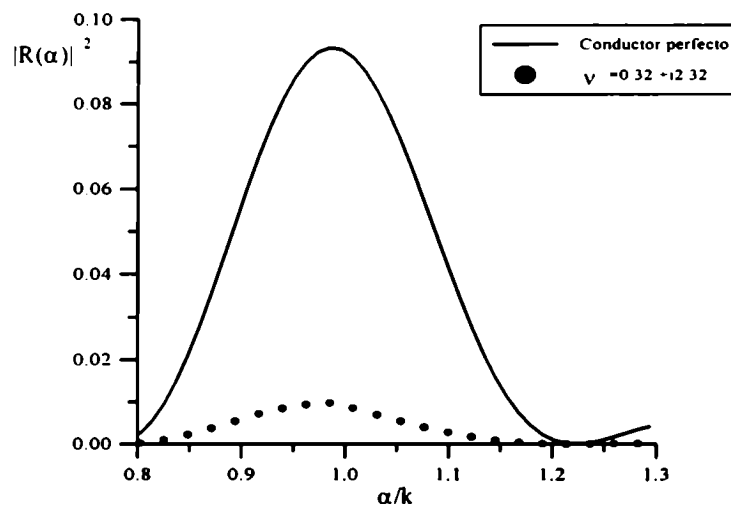


Figura 3.18: $|R(\alpha)|^2$ vs. α/k para una onda plana incidente con polarización s , $\lambda/d = 0.666$, $\theta_0 = 19.5^\circ$ sobre una superficie con 3 surcos de $c/d = 0.386$, $\Delta/d = 0.614$ y $h/d = 0.3973$. Ampliación de la Figura 3.17.

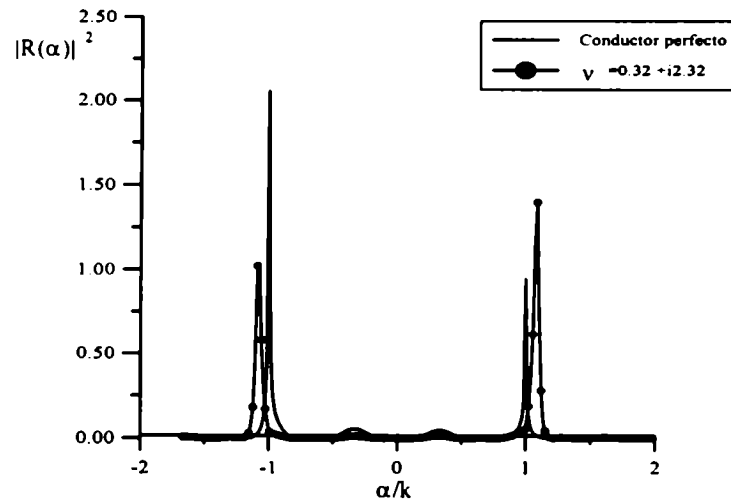


Figura 3.19: $|R(\alpha)|^2$ vs. α/k para una onda plana incidente con polarización p , $\lambda/d = 0.666$, $\theta_0 = 19.5^\circ$ sobre una superficie con 3 surcos de $c/d = 0.386$, $\Delta/d = 0.614$ y $h/d = 0.3973$.

3.19, donde se grafica dicha cantidad para los mismos parámetros considerados en la Figura 3.17.

Las diferencias más notorias entre las Figuras correspondientes a polarización s y p aparecen en la zona no radiativa: mientras que para polarización p se observan picos bien marcados que impiden observar variaciones de $|R^p(\alpha)|^2$ en la zona radiativa, para polarización s las contribuciones más importantes a $|R^s(\alpha)|^2$ están en la zona radiativa. Además, de la comparación de las curvas amplificadas 3.18 y 3.20 se nota que la posición y el ancho de los picos para polarización p dependen del índice de refracción del metal, mientras que para polarización s estas cantidades no se ven alteradas. El hecho de que los picos intensos que aparecen para polarización p en la zona no radiativa corresponde a la excitación de ondas superficiales a lo largo de la estructura se confirma al notar que para $\nu = 0.32 + i2.32$ (oro a $550nm$), la ec. (3.130) da $\alpha/k = 1.10$, valor que coincide con las posiciones del pico en la Figura 3.20.

La intensificación del pico de retrorreflexión en superficies aleatorias ha sido observada en experimentos con estructuras de variados tipos, por ejemplo soluciones de pequeñas

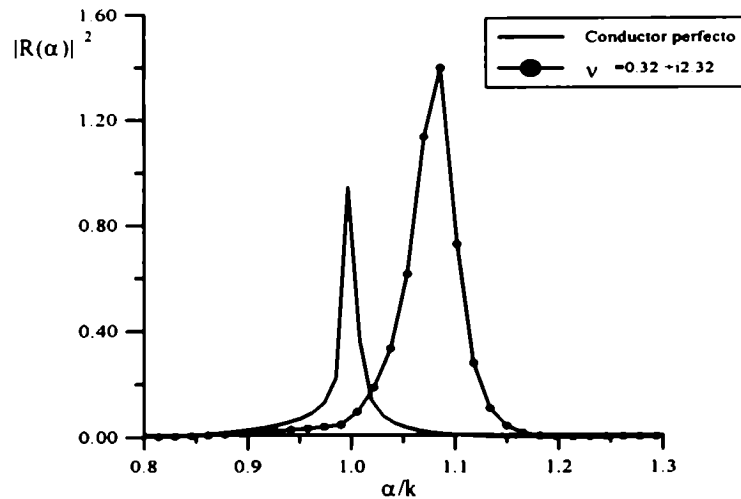


Figura 3.20: $|R(\alpha)|^2$ vs. α/k para una onda plana incidente con polarización p , $\lambda/d = 0.666$, $\theta_0 = 19.5^\circ$ sobre una superficie con 3 surcos de $c/d = 0.386$, $\Delta/d = 0.614$ y $h/d = 0.3973$. Ampliación de la Figura 3.19.

partículas [55] o superficies rugosas metálicas o dieléctricas [56]. Soto-Crespo y Nieto-Vesperinas demostraron [6, 57] que la luz difractada por redes sinusoidales profundas perfectamente conductoras presenta una intensificación en el orden de difracción que se propaga en la dirección antiespecular. También sugirieron que esta intensificación es un fenómeno general para cualquier perfil y número de órdenes difractados, y que está íntimamente relacionado con la intensificación del pico de retroreflexión en superficies corrugadas aleatoriamente. A continuación se presentan algunas curvas que evidencian dicha relación para el caso de superficies con cavidades rectangulares. Para una red rectangular infinita metálica de índice de refracción $\nu = 0.15 + i4.65$ (corresponde a oro a $800nm$) con $c/d = 0.5$, $h/d = 1.5$, y longitud de onda $\lambda/d = 0.562$, el orden -1 reflejado se propaga en la dirección antiespecular para un ángulo de incidencia $\theta_0 = 16.31^\circ$. y se observa que en esa dirección, la curva de eficiencia tiene un máximo para ambas polarizaciones. Por lo tanto, en las Figuras 3.21- 3.24 se muestran curvas de intensidad en función del ángulo de observación, para $\theta_0 = 16.31^\circ$, para una superficie metálica de las mismas características, pero con un número finito de surcos.

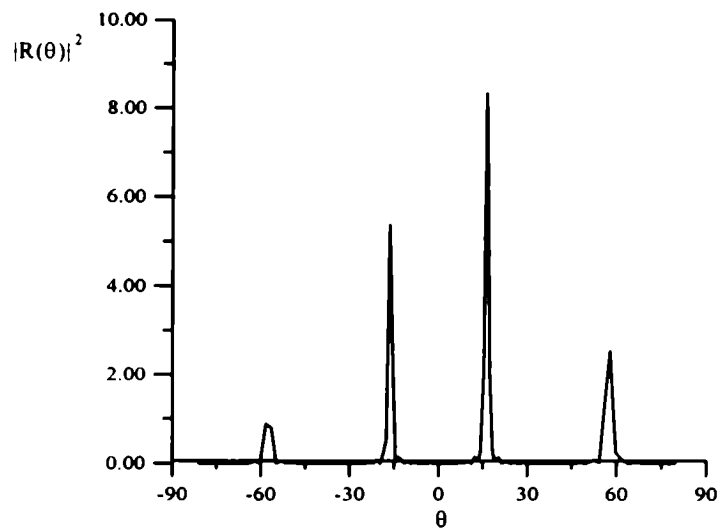


Figura 3.21: $|R(\theta)|^2$ vs. θ para una onda plana incidente con polarización s , $\lambda/d = 0.562$, $\theta_0 = 16.31^\circ$, $c/d = 0.5$, $h/d = 1.5$ sobre una superficie de $\nu = 0.15 + i4.65$, con 20 surcos.

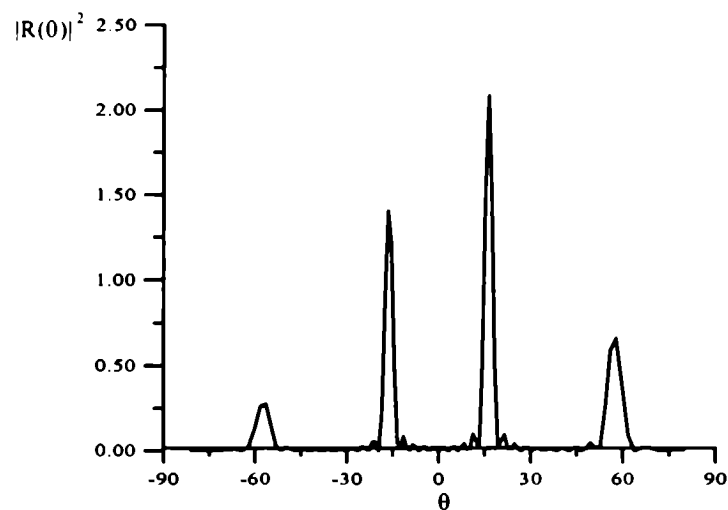


Figura 3.22: $|R(\theta)|^2$ vs. θ para una onda plana incidente con polarización s , $\lambda/d = 0.562$, $\theta_0 = 16.31^\circ$, $c/d = 0.5$, $h/d = 1.5$ sobre una superficie de $\nu = 0.15 + i4.65$, con 10 surcos.

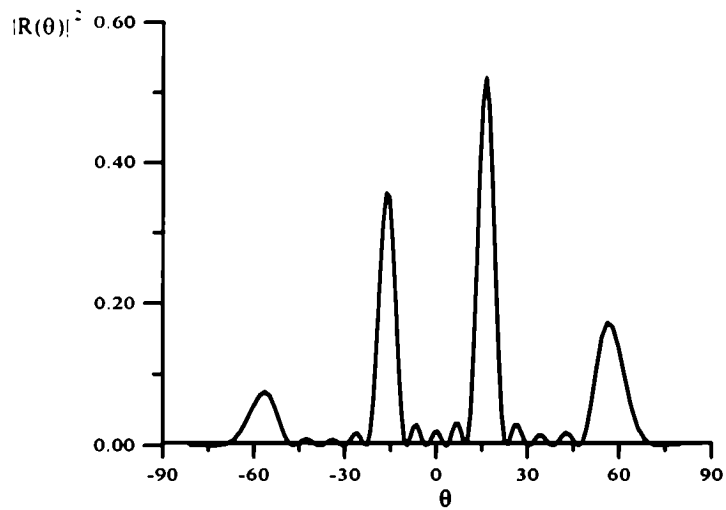


Figura 3.23: $|R(\theta)|^2$ vs. θ para una onda plana incidente con polarización s , $\lambda/d = 0.562$, $\theta_0 = 16.31^\circ$, $c/d = 0.5$, $h/d = 1.5$ sobre una superficie de $\nu = 0.15 + i4.65$, con 5 surcos.

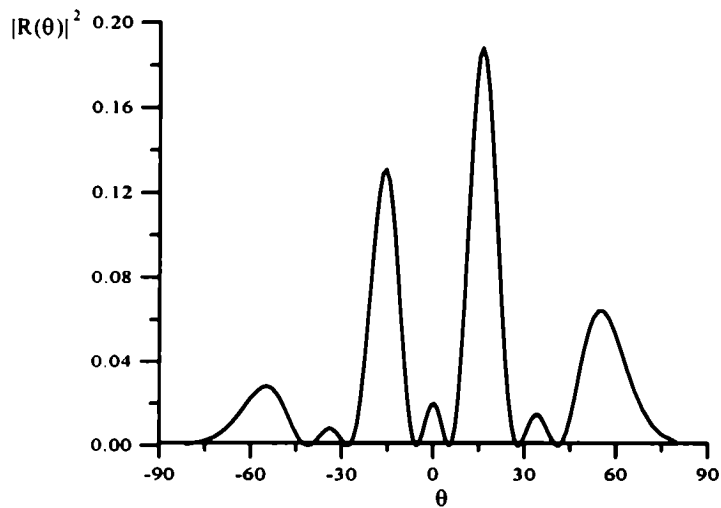


Figura 3.24: $|R(\theta)|^2$ vs. θ para una onda plana incidente con polarización s , $\lambda/d = 0.562$, $\theta_0 = 16.31^\circ$, $c/d = 0.5$, $h/d = 1.5$ sobre una superficie de $\nu = 0.15 + i4.65$, con 3 surcos.

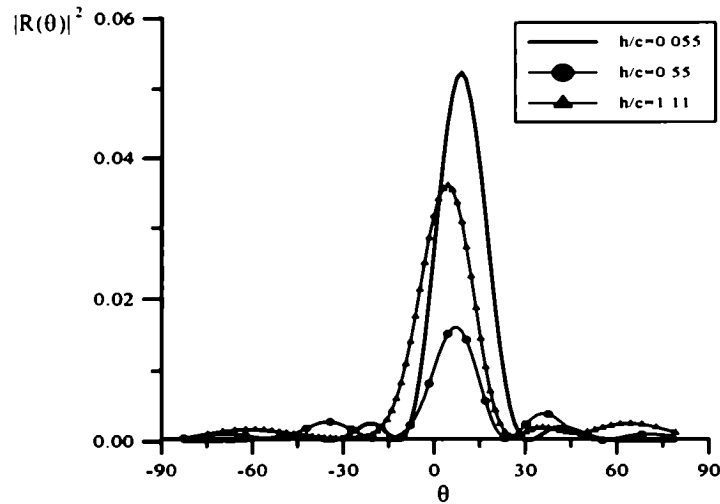


Figura 3.25: $|R(\theta)|^2$ vs. θ para una onda plana incidente con polarización s , $\lambda/c = 0.344$, $\theta_0 = 8.91^\circ$, sobre una superficie de $\nu = 0.15 + i4.65$ con un surco, para distintos valores de h/c .

De esta manera, las superficies consideradas en las Figuras 3.21-3.24 son cuasiperiódicas. Se grafica la intensidad ($|R^s(\alpha)|^2$) en la zona radiativa en función del ángulo de observación θ (en esta zona $\alpha = k \sin \theta$). Se muestran los resultados obtenidos para el ángulo de incidencia en el cual el orden -1 se propaga en la dirección antiespecular en la red infinita análoga, para superficies con 20, 10, 5 y 3 surcos. Se ve que la intensificación en la dirección antiespecular se mantiene aún para redes finitas, que es lo que se quería mostrar. Este fenómeno ha sido observado también para el caso de montaje cónico, es decir, cuando el plano de incidencia no pertenece a la sección principal de la estructura [58].

El hecho de que la intensificación en la dirección antiespecular esté presente aún para estructuras con pocos surcos, hace pensar que este fenómeno no siempre es un fenómeno colectivo, sino que también se debe a un efecto de un sólo surco. Para investigar esta posibilidad se han efectuado cálculos para una superficie con un único surco, de diferentes alturas, cuyos resultados se muestran en las Figuras 3.25-3.27.

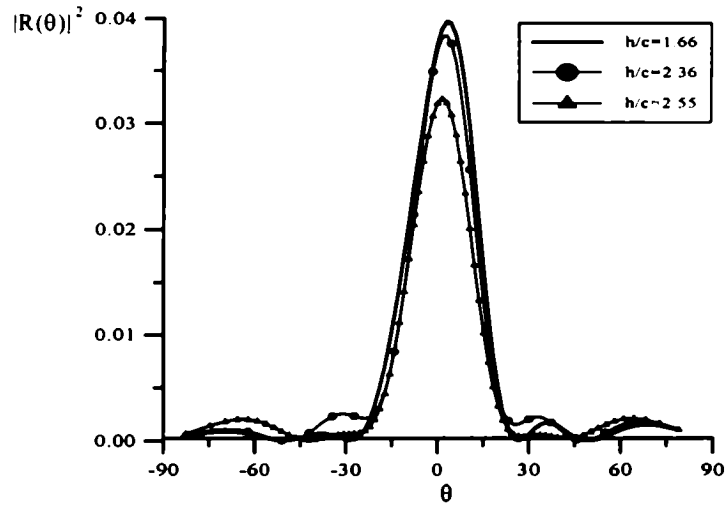


Figura 3.26: $|R(\theta)|^2$ vs. θ para una onda plana incidente con polarización s , $\lambda/c = 0.344$, $\theta_0 = 8.91^\circ$, sobre una superficie de $\nu = 0.15 + i4.65$ con un surco, para distintos valores de h/c .

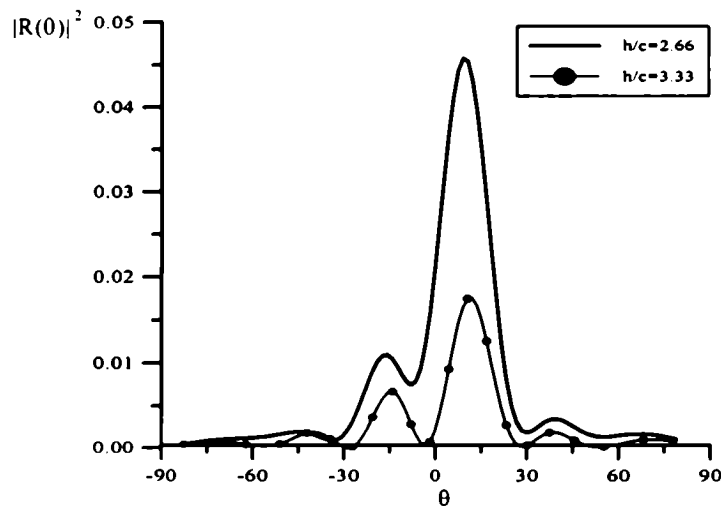


Figura 3.27: $|R(\theta)|^2$ vs. θ para una onda plana incidente con polarización s , $\lambda/c = 0.344$, $\theta_0 = 8.91^\circ$, sobre una superficie de $\nu = 0.15 + i4.65$ con un surco, para distintos valores de h/c .

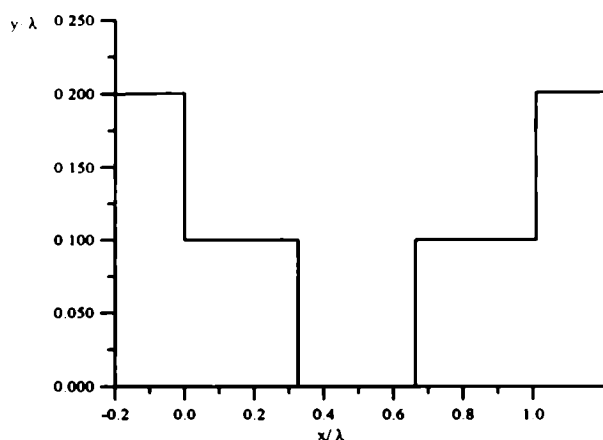


Figura 3.28: Perfil del surco que se utiliza para las Figuras 3.29-3.33.

Se puede observar que para alturas bajas de la rugosidad, se obtiene un patrón similar al que predice la óptica física, con el máximo en la dirección especular. Sin embargo, a medida que se aumenta la profundidad, este máximo se va moviendo hacia la dirección antiespecular, hasta que para $h/c = 2.66$ aparece un pico secundario en dicha dirección (ver Fig. 3.27). Este efecto podría estar relacionado con la intensificación en la dirección de retrorreflexión que tiene lugar en superficies con corrugados aleatorios profundos [6].

Con las técnicas de campo cercano empleadas en microscopía óptica es posible obtener imágenes de rugosidades superficiales con resolución menor que la longitud de onda de la radiación empleada. Esta posibilidad de superresolución se logra detectando la radiación dispersada por la superficie mediante un sensor colocado muy cerca (a una distancia menor que la longitud de onda) de la muestra, y que puede coleccionar las componentes no radiativas (evanescentes) del campo. Por lo tanto, se muestran a continuación las imágenes de campo cercano [59] para un surco del perfil graficado en la Figura 3.28. Se grafica $|\vec{E}(x, y_c)|$ vs. x para una superficie con $c/\lambda = 1$, $w/\lambda = 20$ y $h/\lambda = 0.2$, iluminada por luz con polarización s . Los valores de y_c donde se evalúa el campo eléctrico son: $h + 1.3\lambda$, $h + 0.5\lambda$, $h + 0.2\lambda$, $h + 0.1\lambda$ y $h + 0.05\lambda$. Se observa en las Figuras 3.29-3.33 que para una distancia ($y_c - h$) mayor que la longitud de onda, el campo muestra una intensificación dentro de la

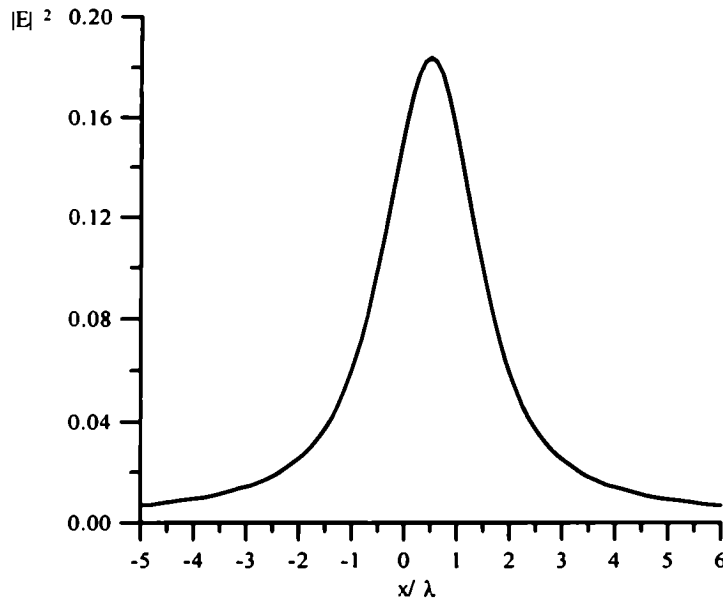


Figura 3.29: $|E(x, y_c)|^2$ vs. x para un surco de dos capas como el de la Figura 3.28, con $c/\lambda = 1$, $h/\lambda = 0.2$, $\theta_0 = 0$, $w/\lambda = 20$ y $y_c = h + 1.3\lambda$.

corrugada, pero la imagen no parece proveer información acerca de las rugosidades de tamaño $c/3$, menor a la longitud de onda. Sin embargo, al acercarse a la superficie, las curvas exhiben variaciones en distancias menores a la longitud de onda, anunciando la presencia de dichos detalles en la estructura dispersora. Cabe aclarar que para obtener una imagen de campo cercano de la cual sea posible inferir datos concretos acerca de la superficie, es necesario calcular la intensidad de campo cercano para un gran número de ángulos de incidencia, y la imagen final es el promedio de las curvas obtenidas. Por lo tanto, el Método Modal de Multicapas se presenta como una técnica conveniente para este tipo de simulaciones, ya que demanda poco tiempo de cómputo.

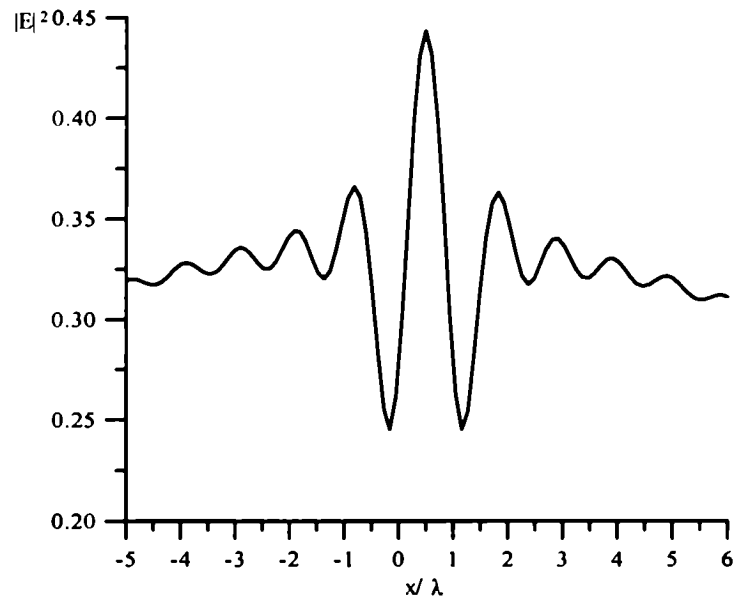


Figura 3.30: $|E(x, y_c)|^2$ vs. x para un surco de dos capas como el de la Figura 3.28, con $c/\lambda = 1$, $h/\lambda = 0.2$, $\theta_0 = 0$, $w/\lambda = 20$ y $y_c = h + 0.5\lambda$.

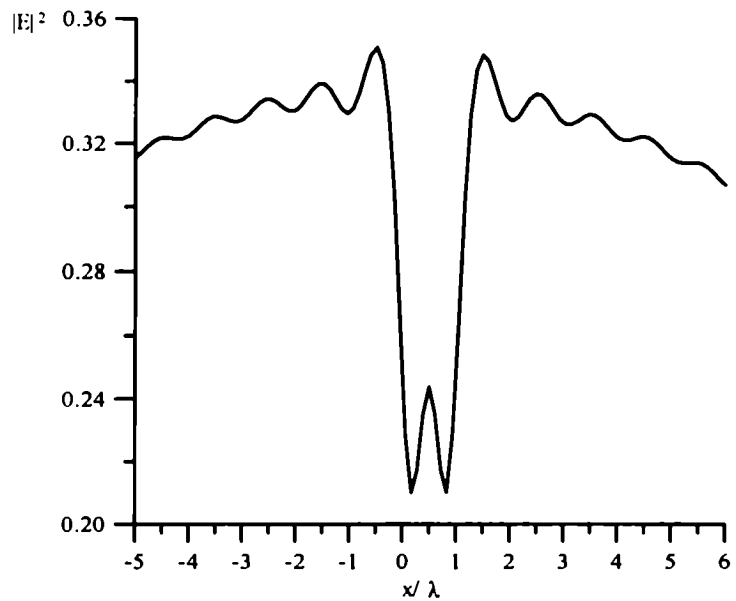


Figura 3.31: $|E(x, y_c)|^2$ vs. x para un surco de dos capas como el de la Figura 3.28, con $c/\lambda = 1$, $h/\lambda = 0.2$, $\theta_0 = 0$, $w/\lambda = 20$ y $y_c = h + 0.2\lambda$.

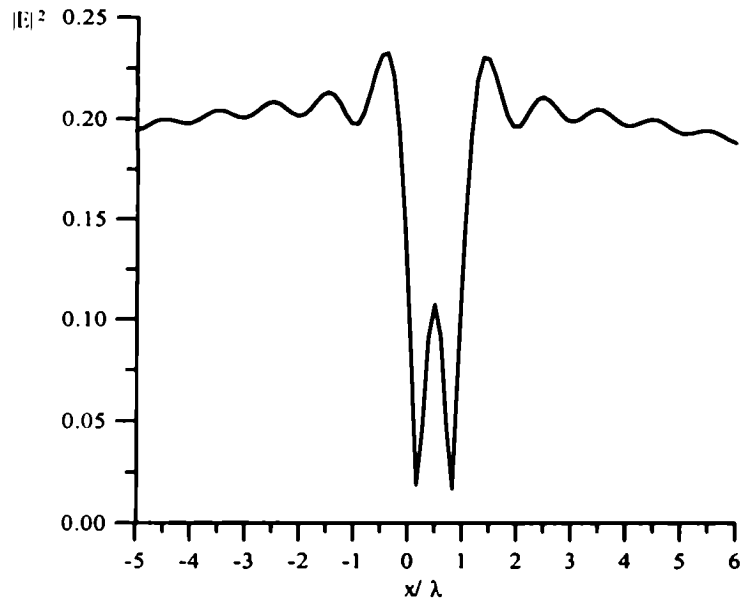


Figura 3.32: $|E(x, y_c)|^2$ vs. x para un surco de dos capas como el de la Figura 3.28, con $c/\lambda = 1$, $h/\lambda = 0.2$, $\theta_0 = 0$, $w/\lambda = 20$ y $y_c = h + 0.1\lambda$.

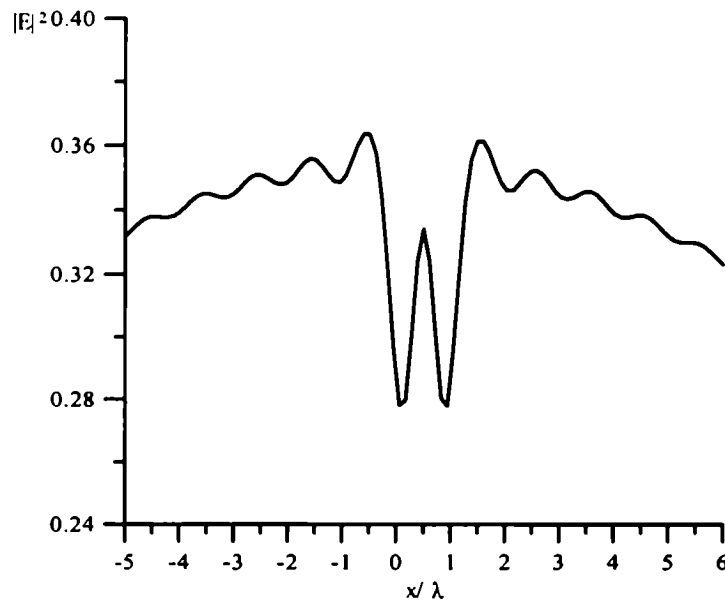


Figura 3.33: $|E(x, y_c)|^2$ vs. x para un surco de dos capas como el de la Figura 3.28, con $c/\lambda = 1$, $h/\lambda = 0.2$, $\theta_0 = 0$, $w/\lambda = 20$ y $y_c = h + 0.05\lambda$.

Capítulo 4

Estructuras dieléctricas

En este capítulo se desarrolla la teoría modal para el caso de superficies corrugadas de materiales dieléctricos. Esta extensión del método modal, permite el estudio de los campos reflejados y transmitidos por una gran variedad de estructuras, que no habían sido estudiadas con anterioridad. Si bien los métodos integrales que derivan del Teorema de Green han sido aplicados a estructuras dieléctricas no periódicas [4], [6], [60]-[64], sólo se han utilizado para problemas particulares. En este sentido, el método modal de multicapas presentado aquí constituye una aplicación novedosa de los métodos modales a superficies dieléctricas con rugosidades de forma arbitraria, la cual goza de la simplicidad y rapidez que caracterizan a este tipo de métodos.

4.1 Desarrollo teórico

La configuración del presente problema se encuentra esquematizada en la Figura 4.1. Es sabido que para estructuras dieléctricas no periódicas, las funciones modales no forman un conjunto discreto, lo cual dificulta el tratamiento del problema. Por consiguiente, en este trabajo se introducen paredes perfectamente conductoras en los bordes, las cuales provocan la discretización de los modos y permiten así la aplicación de la teoría modal. Además, al asumir que el haz incidente está limitado espacialmente, se puede elegir el tamaño de la apertura lo suficientemente grande como para no obstruir la iluminación y poder estudiar el caso de una estructura dieléctrica no periódica con el método modal,

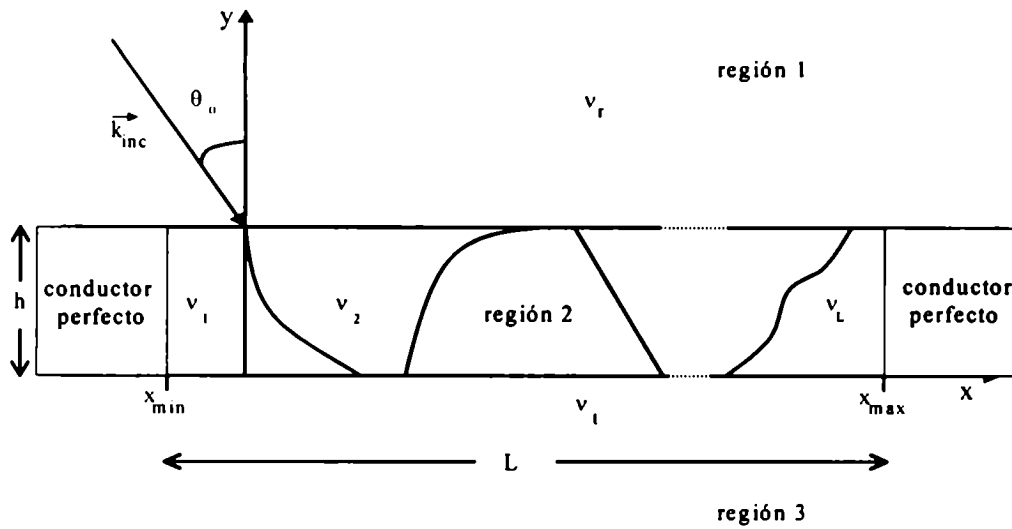


Figura 4.1: Configuración de la estructura dieléctrica considerada.

sin tener que utilizar un conjunto continuo de autofunciones. Por otra parte, este caso es interesante en sí mismo, ya que permite la descripción de microelementos en óptica integrada, como por ejemplo las microlentes.

La estructura consiste en una cavidad dieléctrica de longitud L practicada en una superficie perfectamente conductora de profundidad h . Dicha superficie es iluminada mediante un haz Gaussiano de ancho espacial w , longitud de onda λ , que forma un ángulo θ_0 con el eje y . Tanto la estructura como el haz son invariantes ante traslaciones a lo largo de la dirección z , que es perpendicular al plano de la figura. Este hecho, sumado a que las condiciones de contorno no acoplan las componentes z de los campos, permite tratar ambos casos de polarización por separado, como se ha hecho en los capítulos anteriores. Se divide el espacio en tres regiones: las regiones 1 y 3 son homogéneas, y poseen índices de refracción ν_r y ν_t , respectivamente; la región 2 tiene índice variable y está formada por sucesivas zonas con índice de refracción constante, numeradas del 1 al L mediante el subíndice l , las cuales están separadas por interfases de perfil arbitrario (ver Fig. 4.2).

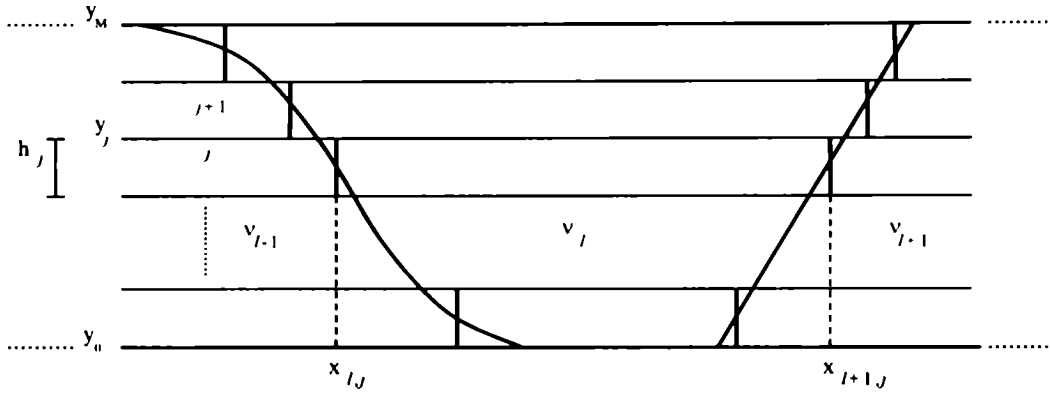


Figura 4.2: La región 2, de índice de refracción variable.

Para aplicar el algoritmo de la Matriz R , la región 2 es dividida en M capas horizontales, cada una de altura h_j (el subíndice j denota la capa). Las posiciones $x_{l+1,j}$ son tales que el perfil de la interfase l -ésima bisecta a la línea vertical en la capa j -ésima; y_j es la ordenada de la interfase horizontal j -ésima.

El campo $f_1^\gamma(x, y)$ en la región 1, que representa a $E_z(x, y)$ para $\gamma = s$ y a $H_z(x, y)$ para $\gamma = p$, consta de dos términos, al igual que en el problema de la Sección 3.2:

$$f_1^\gamma(x, y) = f_{\text{inc}}(x, y) + f_{\text{scatt}}^\gamma(x, y) , \quad (4.1)$$

donde $f_{\text{inc}}(x, y)$ y $f_{\text{scatt}}^\gamma(x, y)$ están definidos en (2.23) y (3.25) respectivamente. En la región 3, el campo transmitido está representado por un desarrollo en ondas planas, al igual que el campo reflejado, con amplitudes complejas $T^\gamma(\alpha)$:

$$f_{\text{transm}}(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} T^\gamma(\alpha) e^{i(\alpha x - \beta_t y)} d\alpha , \quad (4.2)$$

donde

$$\beta_t = \sqrt{k_t^2 - \alpha^2} , \quad (4.3)$$

y $k_t = k_{inc} \nu_t$.

Para representar la forma de la interfase que separa dos zonas contiguas de la región 2, se utiliza la aproximación de multicapas. Cuanto mayor sea el número de capas M considerado, mejor será la descripción obtenida. Dentro de cada capa j , se utilizan desarrollos modales para describir los campos:

$$f_j^\gamma(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,j}^\gamma(x) Y_{m,j}^\gamma(y) \text{rect} \left\{ \frac{x - x_{\min}}{L} \right\}, \quad (4.4)$$

donde

$$Y_{m,j}^\gamma(y) = a_{m,j}^\gamma \cos(v_{m,j}^\gamma y) + b_{m,j}^\gamma \sin(v_{m,j}^\gamma y), \quad (4.5)$$

$$X_{m,j}^\gamma(x) = A_{m,j,l}^\gamma \cos(u_{m,j,l}^\gamma(x - x_{l,j})) + B_{m,j,l}^\gamma \sin(u_{m,j,l}^\gamma(x - x_{l,j})) \quad \text{para } x_{l,j} < x < x_{l+1,j}, \quad (4.6)$$

y

$$u_{m,j,l}^\gamma = \sqrt{k_l^2 - (v_{m,j}^\gamma)^2}. \quad (4.7)$$

Estas expresiones para las funciones modales surgen de la aplicación del método de separación de variables a la ecuación de Helmholtz (2.26). Nótese que la parte dependiente de y ($Y_{m,j}^\gamma(y)$) es la misma para toda la región 2, mientras que la parte dependiente de x ($X_{m,j}^\gamma(x)$) es una función partida, que tiene diferentes expresiones según la zona en cuestión, por lo cual aparece el subíndice l , que denota la zona dieléctrica dentro de la región 2. Dichas expresiones están relacionadas con el ancho y el índice de refracción de cada zona, como así también con las condiciones de contorno a ambos lados de la misma. Los autovalores $v_{m,j}^\gamma$ y los coeficientes $A_{m,j,l}^\gamma$ y $B_{m,j,l}^\gamma$ serán determinados imponiendo las condiciones de contorno en las paredes verticales en x_{\min} , x_{\max} y $x_{l,j}$, y teniendo en cuenta la teoría de medios estratificados [42]. Por consiguiente, al empalmar los campos en las interfases horizontales, las funciones modales $X_{m,j}^\gamma(x)$ se conocerán completamente, mientras que las amplitudes complejas $a_{m,j}^\gamma$ y $b_{m,j}^\gamma$ permanecerán incógnitas hasta que la solución completa del problema sea hallada. Definiendo $\tilde{X}_{m,j}^\gamma(x)$ como:

$$\tilde{X}_{m,j}^\gamma(x) = u_{m,j,l}^\gamma [-B_{m,j,l}^\gamma \cos(u_{m,j,l}^\gamma(x - x_{l,j})) + A_{m,j,l}^\gamma \sin(u_{m,j,l}^\gamma(x - x_{l,j}))], \quad (4.8)$$

para $x_{l,j} < x < x_{l+1,j}$, se observa que:

$$\begin{aligned} X_{m,j}^\gamma(x) &= X_{m,j}^\gamma(x_{l,j}) \cos(u_{m,j,l}^\gamma(x - x_{l,j})) - \tilde{X}_{m,j}^\gamma(x_{l,j}) \sin(u_{m,j,l}^\gamma(x - x_{l,j}))/u_{m,j,l}^\gamma, \\ \tilde{X}_{m,j}^\gamma(x) &= \tilde{X}_{m,j}^\gamma(x_{l,j}) \cos(u_{m,j,l}^\gamma(x - x_{l,j})) + X_{m,j}^\gamma(x_{l,j}) u_{m,j,l}^\gamma \sin(u_{m,j,l}^\gamma(x - x_{l,j})). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Nótese que $\tilde{X}_{m,j}^\gamma(x)$ es proporcional a la derivada normal del campo en las interfaces verticales, es decir que representa a la componente tangencial del campo magnético (eléctrico) en el caso de polarización s (p). Esto será considerado al aplicar el algoritmo de propagación de la Matriz R . Las ecuaciones (4.9) nos proveen de una relación entre los campos a ambos lados de cada zona homogénea limitada por las interfaces en $x_{l,j}$ y en $x_{l+1,j}$. Dicha relación puede expresarse en forma matricial como:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_j^\gamma(x_{l+1,j}) \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^\gamma(x_{l+1,j}) \end{pmatrix} = \mathbf{M}_{l,j}^\gamma((v_j^\gamma)^2) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_j^\gamma(x_{l,j}) \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^\gamma(x_{l,j}) \end{pmatrix}, \quad (4.10)$$

donde $\mathbf{M}_{l,j}^\gamma((v_j^\gamma)^2)$ es una matriz dada por:

$$\mathbf{M}_{l,j}^\gamma((v_j^\gamma)^2) = \begin{bmatrix} \cos(u_{j,l}^\gamma \Delta_{l,j}) & -\sin(u_{j,l}^\gamma \Delta_{l,j}) \zeta_{l,j}^\gamma / u_{j,l}^\gamma \\ \sin(u_{j,l}^\gamma \Delta_{l,j}) u_{j,l}^\gamma / \zeta_{l,j}^\gamma & \cos(u_{j,l}^\gamma \Delta_{l,j}) \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\zeta_{l,j}^\gamma = \begin{cases} 1 & \text{si } \gamma = s \\ \epsilon_{l,j} & \text{si } \gamma = p \end{cases} \quad (4.12)$$

$\epsilon_{l,j}$ es la permitividad de la capa j en la zona l -ésima y $\Delta_{l,j} = x_{l+1,j} - x_{l,j}$. $\mathbf{X}_j^\gamma(x)$ y $\tilde{\mathbf{X}}_j^\gamma(x)$ son vectores que contienen a las funciones modales $X_{m,j}^\gamma(x)$ y $\tilde{X}_{m,j}^\gamma(x)$ respectivamente. El subíndice m que denota el modo fue suprimido para no sobrecargar la notación, dado que se entiende que las relaciones anteriores son válidas para cada uno de los modos. Este procedimiento puede aplicarse L veces hasta obtener una relación entre los campos en las paredes perfectamente conductoras en x_{\min} y en x_{\max} , en cuyo caso se tiene una relación de la forma:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_j^\gamma(x_{\max}) \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^\gamma(x_{\max}) \end{pmatrix} = \tilde{\mathbf{M}}_j^\gamma((v_j^\gamma)^2) \begin{pmatrix} \mathbf{X}_j^\gamma(x_{\min}) \\ \tilde{\mathbf{X}}_j^\gamma(x_{\min}) \end{pmatrix}, \quad (4.13)$$

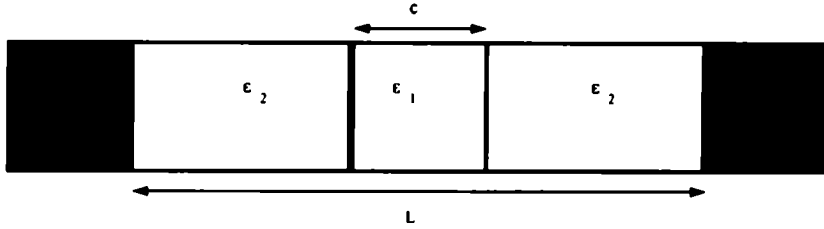


Figura 4.3: Estructura dieléctrica formada por 3 zonas.

donde $\tilde{\mathbf{M}}_j^\gamma((v_j^\gamma)^2)$ es un producto de matrices:

$$\tilde{\mathbf{M}}_j^\gamma((v_j^\gamma)^2) = \mathbf{M}_{L,j}^\gamma((v_j^\gamma)^2) \mathbf{M}_{L-1,j}^\gamma((v_j^\gamma)^2) \dots \mathbf{M}_{2,j}^\gamma((v_j^\gamma)^2) \mathbf{M}_{1,j}^\gamma((v_j^\gamma)^2) . \quad (4.14)$$

$\tilde{\mathbf{M}}_j^\gamma((v_j^\gamma)^2)$ es una matriz de 2×2 bloques. Este es un resultado conocido de la teoría de medios estratificados [42].

Imponiendo las condiciones de contorno en x_{\min} y en x_{\max} , es decir, que la componente tangencial del campo eléctrico debe anularse sobre la superficie, se obtiene una condición sobre los bloques de matrices extradiagonales:

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_{j,12}^s((v_j^s)^2) &= 0 \quad \text{para } \gamma = s \\ \tilde{\mathbf{M}}_{j,21}^p((v_j^p)^2) &= 0 \quad \text{para } \gamma = p. \end{aligned} \quad (4.15)$$

Estas condiciones constituyen ecuaciones de autovalores para $(v_{m,j}^\gamma)^2$. Las mismas se van tornando más complicadas a medida que el número de zonas L en la región 2 se incrementa, tal como se deduce de la cc. (4.14). Por ejemplo, para una estructura formada por tres zonas se tiene (ver Figura 4.3):

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{M}}_{12}^s((v^s)^2) &= \sin(u_1 c) \left\{ u_1 \sin \left[u_2 \left(\frac{L-c}{2} \right) \right]^2 - \frac{u_2^2}{u_1} \cos \left[u_2 \left(\frac{L-c}{2} \right) \right]^2 \right\} \\ &\quad - 2u_2 \sin \left[u_2 \left(\frac{L-c}{2} \right) \right] \cos \left[u_2 \left(\frac{L-c}{2} \right) \right] \cos(u_1 c) = 0 , \end{aligned} \quad (4.16)$$

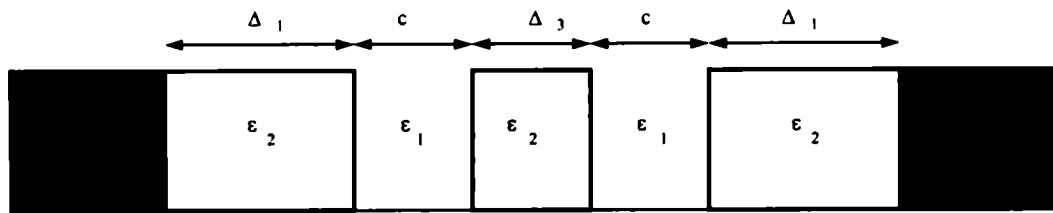


Figura 4.4: Estructura dieléctrica formada por 5 zonas.

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{21}^p((v^p)^2) = \sin(u_1 c) \left\{ \frac{u_1}{\epsilon_1} \cos \left[u_2 \left(\frac{L-c}{2} \right) \right]^2 - \frac{u_2^2 \epsilon_1}{u_1 \epsilon_2^2} \sin \left[u_2 \left(\frac{L-c}{2} \right) \right]^2 \right\} \\ + \frac{2u_2}{\epsilon_2} \sin \left[u_2 \left(\frac{L-c}{2} \right) \right] \cos \left[u_2 \left(\frac{L-c}{2} \right) \right] \cos(u_1 c) = 0, \quad (4.17) \end{aligned}$$

donde u_1 y u_2 están definidos en (4.7), y corresponden al medio 1 y 2 respectivamente. Se han omitido los subíndices m y j ya que se sobreentiende que hay una ecuación de este tipo para cada capa, que determina infinitos autovalores.

Si la estructura tiene cinco zonas, como la que se muestra en la Figura 4.4, las ecuaciones de autovalores son las siguientes:

$$\begin{aligned} \tilde{M}_{12}^s((v^s)^2) = & 2 \sin(u_2 \Delta_1) \sin(u_2 \Delta_3) \sin(u_1 c) \cos(u_1 c) \cos(u_2 \Delta_1) \left(\frac{1}{u_1} + \frac{u_1}{u_2^2} \right) \\ & + \cos(u_2 \Delta_1)^2 \sin(u_2 \Delta_3) \left(\frac{u_2}{u_1^2} \sin(u_1 c)^2 - \frac{\cos(u_1 c)^2}{u_2} \right) \\ & + \frac{2}{u_2} \cos(u_2 \Delta_3) \cos(u_2 \Delta_1) \sin(u_2 \Delta_1) (\sin(u_1 c)^2 - \cos(u_1 c)^2) \\ & + 2 \cos(u_2 \Delta_3) \cos(u_1 c) \sin(u_1 c) \left(\frac{u_1}{u_2^2} \sin(u_2 \Delta_1)^2 - \frac{\cos(u_2 \Delta_1)^2}{u_1} \right) \end{aligned}$$

$$+ \sin(u_2\Delta_1)^2 \sin(u_2\Delta_3) \left(\frac{\cos(u_1c)^2}{u_2} - \frac{u_1^2}{u_2^3} \sin(u_1c)^2 \right) = 0 \quad (4.18)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_{21}^p((v^p)^2) &= -2 \sin(u_2\Delta_1) \sin(u_2\Delta_3) \sin(u_1c) \cos(u_1c) \cos(u_2\Delta_1) \left(\frac{u_1}{\epsilon_1} + \frac{u_2^2\epsilon_1}{u_1\epsilon_2^2} \right) \\ &+ \cos(u_2\Delta_1)^2 \sin(u_2\Delta_3) \left(\frac{u_2}{\epsilon_2} \cos(u_1c)^2 - \frac{\epsilon_2 u_1^2}{\epsilon_1^2 u_2} \sin(u_1c)^2 \right) \\ &+ \frac{2u_2}{\epsilon_2} \cos(u_2\Delta_3) \cos(u_2\Delta_1) \sin(u_2\Delta_1) (\cos(u_1c)^2 - \sin(u_1c)^2) \\ &+ 2 \cos(u_2\Delta_3) \cos(u_1c) \sin(u_1c) \left(\frac{u_1}{\epsilon_1} \cos(u_2\Delta_1)^2 - \frac{u_2^2\epsilon_1}{u_1\epsilon_2^2} \sin(u_2\Delta_1)^2 \right) \\ &+ \sin(u_2\Delta_1)^2 \sin(u_2\Delta_3) \left(\frac{\epsilon_1^2 u_2^3}{\epsilon_2^2 u_1^2} \sin(u_1c)^2 - \frac{u_2}{\epsilon_2} \cos(u_1c)^2 \right) = 0 \quad (4.19) \end{aligned}$$

Para hallar los autovalores deben emplearse técnicas numéricas. Muchos autores se han ocupado del cálculo de los autovalores para el caso de redes infinitamente periódicas [20], [65]-[68]; sin embargo, sólo Kuittinen y Turunen [69] aplicaron el método al caso particular de una apertura dieléctrica. La resolución de la ecuación de autovalores requiere de especial atención, dado que la misma no puede resolverse mediante las técnicas numéricas estándar. Esto se debe, por un lado, al comportamiento de la función, que tiene oscilaciones muy bruscas en una zona del eje, y adquiere valores muy grandes, dificultando su representación en una computadora. Por otro lado, para obtener una solución válida del problema, es imprescindible hallar *todas* las raíces en una dada región, lo cual requiere de un proceso de búsqueda exhaustivo.

Una vez hallados los autovalores, los coeficientes modales $A_{m,j,l}^\gamma$ y $B_{m,j,l}^\gamma$ se obtienen fácilmente mediante la aplicación sucesiva de las ecs. (4.9), teniendo así una expresión explícita para los campos en cada capa. Luego, se está en condiciones de empalmar los campos en las interfases horizontales y_j , lo cual se realiza utilizando el algoritmo de la Matriz R .

En primer lugar, se impone la continuidad de las componentes tangenciales de los campos eléctrico (en el intervalo $[-\infty, \infty]$) y magnético (en $[x_{\min}, x_{\max}]$) en la superficie

$y_0 = 0$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^s(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,1}^s(x) a_{m,1}^s \text{rect} \left\{ \frac{x - x_{\min}}{L} \right\} , \quad (4.20)$$

y

$$-i \int_{-\infty}^{\infty} \beta_t T^s(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,1}^s(x) v_{m,1}^s b_{m,1}^s , \quad (4.21)$$

para polarización s , y

$$-\frac{i}{\epsilon_t} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_t T^p(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,1}^p(x) v_{m,1}^p b_{m,1}^p \frac{1}{\epsilon_2(x)} \text{rect} \left\{ \frac{x - x_{\min}}{L} \right\} , \quad (4.22)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} T^p(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha = \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,1}^p(x) a_{m,1}^p , \quad (4.23)$$

para polarización p . Las ecuaciones (4.20) y (4.22) se proyectan en la base de funciones $\{e^{i\alpha x}\}$, mientras que las ecs. (4.21) y (4.23) se proyectan en la base de autofunciones modales correspondientes $\{X_{m,1}^\gamma(x)\}$, obteniendo:

$$2\pi T^s(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} I_m^s(-\alpha) a_{m,1}^s , \quad (4.24)$$

$$b_{m,1}^s = -\frac{i}{C_{m,1}^s v_{m,1}^s} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_t T^s(\alpha) I_m^s(\alpha) d\alpha , \quad (4.25)$$

$$-\frac{2\pi i}{\epsilon_t} \beta_t T^p(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} v_{m,1}^p I_m^p(-\alpha) b_{m,1}^p , \quad (4.26)$$

$$a_{m,1}^p C_{m,1}^p = \int_{-\infty}^{\infty} T^p(\alpha) I_m^p(\alpha) d\alpha , \quad (4.27)$$

donde

$$I_m^\gamma(\alpha) = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{1}{\zeta_1^\gamma(x)} X_{m,1}^\gamma(x) e^{i\alpha x} dx , \quad (4.28)$$

$$\zeta_j^\gamma(x) = \begin{cases} 1 & \text{para } \gamma = s \\ \epsilon_j(x) & \text{para } \gamma = p \end{cases} \quad (4.29)$$

y

$$C_{m,j}^\gamma = \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{1}{\zeta_j^\gamma(x)} \left(X_{m,j}^\gamma(x) \right)^2 dx . \quad (4.30)$$

Las ecuaciones (4.24)-(4.27) son útiles para expresar las amplitudes transmitidas $T^\gamma(\alpha)$ y los coeficientes modales $b_{m,1}^s$ ($a_{m,1}^p$) en términos de $a_{m,1}^s$ ($b_{m,1}^p$) para polarización s (p).

Dichas expresiones son:

$$T^s(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} I_m^s(-\alpha) a_{m,1}^s , \quad (4.31)$$

$$b_{m,1}^s = \sum_{k=1}^{\infty} S_{m,k} a_{k,1}^s , \quad (4.32)$$

$$a_{m,1}^p = \sum_{k=1}^{\infty} P_{m,k} b_{k,1}^p , \quad (4.33)$$

$$T^p(\alpha) = \frac{i \epsilon_t}{2\pi \beta_t} \sum_{m=1}^{\infty} I_m^p(-\alpha) v_{m,1}^p b_{m,1}^p , \quad (4.34)$$

donde

$$S_{m,k} = \frac{-i}{2\pi C_{m,1}^s v_{m,1}^s} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_t I_m(\alpha) I_k(-\alpha) d\alpha , \quad (4.35)$$

$$P_{m,k} = \frac{i \epsilon_t v_{k,1}^p}{2\pi C_{m,1}^p} \int_{-\infty}^{\infty} I_m(\alpha) I_k(-\alpha) \frac{1}{\beta_t} d\alpha . \quad (4.36)$$

Las ecuaciones (4.31)-(4.34) serán utilizadas en la etapa final del cálculo. Ahora se procede a la aplicación del algoritmo de propagación de la Matriz R .

El procedimiento es esencialmente el mismo que se describe en la Sección 3.2 para una superficie perfectamente conductora. Las diferencias residen en:

- 1) en el presente caso las condiciones de empalme en cada interfase y_j deben pedirse en el intervalo $[x_{\min}, x_{\max}]$, mientras que antes debían imponerse en cada uno de los surcos considerados;
- 2) tanto la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico como del campo magnético deben imponerse en el mismo intervalo, ya que los límites de la región 2 son verticales, mientras que en el caso anterior los límites estaban dados por un perfil escalonado originado por la aproximación de multicapas;
- 3) las autofunciones de cada capa son funciones partidas, lo cual requiere mayor cuidado a la hora de proyectar las ecuaciones, ya que debe tenerse en cuenta que las posiciones que delimitan zonas de igual índice de refracción dependen de cada capa. Esto se verá reflejado en el hecho de que cuanto mayor sea el número de zonas en que se divide la región 2, mayor será el número de integrales, y por consiguiente el volumen de cálculo involucrado.

Por consiguiente, se darán a continuación los pasos fundamentales del proceso de propagación, y los resultados finales obtenidos. De las ecuaciones de empalme en la interfase j ,

proyectadas en las bases correspondientes resulta:

$$\sum_{m=1}^{\infty} D_{m',m}^{(j)s} Y_{m,j}^s(y_j) = Y_{m',j+1}^s(y_j) , \quad (4.37)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{m,j}^s}{C_{m',j+1}^s} (D_{m,m'}^{(j)s})^{-1} \chi_{m,j}^s(y_j) = \chi_{m',j+1}^s(y_j) , \quad (4.38)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} (D_{m,m'}^{(j)p})^{-1} Y_{m,j}^p(y_j) = Y_{m',j+1}^p(y_j) , \quad (4.39)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{m,j}^p}{C_{m',j+1}^p} D_{m',m}^{(j)p} \chi_{m,j}^p(y_j) = \chi_{m',j+1}^p(y_j) , \quad (4.40)$$

donde

$$\chi_{m,j}^{\gamma}(y) = \frac{d(Y_{m,j}^{\gamma}(y))}{dy} , \quad (4.41)$$

$$D_{m,m'}^{(j)s} = \frac{1}{C_{m,j+1}^s} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} X_{m',j}^s(x) X_{m,j+1}^s(x) dx , \quad (4.42)$$

y

$$D_{m,m'}^{(j)p} = \frac{1}{C_{m',j}^p} \int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \frac{1}{\epsilon_j(x)} X_{m',j}^p(x) X_{m,j+1}^p(x) dx . \quad (4.43)$$

Con las ecuaciones (4.37)-(4.40) se puede escribir una relación matricial del tipo (3.42) entre los campos a ambos lados de la interfase y_j , siendo en este caso:

$$M_{11}^{(j)\gamma}{}_{mm'} = \begin{cases} D_{m,m'}^{(j)s} & \text{para } \gamma = s \\ (D_{m',m}^{(j)p})^{-1} & \text{para } \gamma = p \end{cases} \quad (4.44)$$

y

$$M_{22}^{(j)\gamma}{}_{mm'} = \begin{cases} (D_{m',m}^{(j)s})^{-1} \frac{C_{m',j}^s}{C_{m,j+1}^s} & \text{para } \gamma = s \\ D_{m,m'}^{(j)p} \frac{C_{m',j}^p}{C_{m,j+1}^p} & \text{para } \gamma = p \end{cases} \quad (4.45)$$

De esta manera, haciendo uso de la ecuación (3.46), se definen las matrices $t^{(j)}$ y luego las $r^{(j)}$ (ver Sección 3.2), cuyos elementos de matriz están dados por:

Polarización s

$$\begin{aligned}
r_{11}^{(j)}{}_{m,m'} &= -\cot(v_{m,j}^s h_j) \delta_{m,m'} / v_{m,j}^s , \\
r_{12}^{(j)}{}_{m,m'} &= \frac{C_{m',j+1}^s}{C_{m,j}^s} D_{m',m}^{(j)s} / [v_{m,j}^s \sin(v_{m,j}^s h_j)] , \\
r_{21}^{(j)}{}_{m,m'} &= -D_{m,m'}^{(j)s} / [v_{m',j}^s \sin(v_{m',j}^s h_j)] , \\
r_{22}^{(j)}{}_{m,m'} &= C_{m',j+1}^s \sum_{k=1}^{\infty} D_{m,k}^{(j)s} D_{m',k}^{(j)s} \cot(v_{k,j}^s h_j) / [v_{k,j}^s C_{k,j}^s] .
\end{aligned} \tag{4.46}$$

Polarización p

$$\begin{aligned}
r_{11}^{(j)}{}_{m,m'} &= v_{m,j}^p \cot(v_{m,j}^p h_j) \delta_{m,m'} , \\
r_{12}^{(j)}{}_{m,m'} &= -v_{m,j}^p D_{m',m}^{(j)p} / [\sin(v_{m,j}^p h_j)] , \\
r_{21}^{(j)}{}_{m,m'} &= C_{m',j}^p D_{m,m'}^{(j)p} v_{m',j}^p / [\sin(v_{m',j}^p h_j) C_{m,j+1}^p] , \\
r_{22}^{(j)}{}_{m,m'} &= -\frac{1}{C_{m,j+1}^p} \sum_{k=1}^{\infty} D_{m,k}^{(j)p} D_{m',k}^{(j)p} v_{k,j}^p \cot(v_{k,j}^p h_j) C_{k,j}^p .
\end{aligned} \tag{4.47}$$

Las matrices globales $R^{(j)}$ se obtienen a partir de las $r^{(j)}$ mediante las relaciones de recurrencia (3.57) utilizando la inicialización (3.59), hasta obtener las R^{M-1} , que relacionan las amplitudes modales de las capas inferior y superior a través de las siguientes ecuaciones:

$$b_{m,M}^s = \sum_{m'=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m,m'}^s a_{m',1}^s , \tag{4.48}$$

$$a_{m,M}^s = \sum_{m'=1}^{\infty} \mathcal{N}_{m,m'}^s a_{m',1}^s , \tag{4.49}$$

donde

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{m,m'}^s &= -\cos(v_{m,M}^s y_{M-1}) (R_{12}^{(M-1)-1}{}_{m,m'} + \mathcal{Q}_{m,m'}^s) / v_{m,M}^s + \\
\sin(v_{m,M}^s y_{M-1}) \sum_{k=1}^{\infty} & \left[R_{22}^{(M-1)}{}_{mk} (R_{12}^{(M-1)-1}{}_{k,m'} + \mathcal{Q}_{k,m'}^s) - R_{21}^{(M-1)}{}_{mk} v_{k,1}^s \mathcal{S}_{k,m'} \right] ,
\end{aligned} \tag{4.50}$$

$$\mathcal{N}_{m,m'}^s = \frac{[R_{12}^{(M-1)-1}{}_{mm'} + \mathcal{Q}_{m,m'}^s]}{v_{m,M}^s \sin(v_{m,M}^s y_{M-1})} + \cot(v_{m,M}^s y_{M-1}) \mathcal{M}_{m,m'}^s , \tag{4.51}$$

$$\mathcal{Q}_{m,m'}^s = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} R_{12}^{(M-1)-1}{}_{ml} R_{11}^{(M-1)}{}_{lk} v_{k,1}^s \mathcal{S}_{k,m'} , \tag{4.52}$$

y $\mathcal{S}_{k,m'}$ está definido en (4.35). Para polarización p se tiene:

$$b_{m,M}^p = \sum_{m'=1}^{\infty} \mathcal{M}_{m,m'}^p b_{m',1}^p \quad (4.53)$$

$$a_{m,M}^p = \sum_{m'=1}^{\infty} \mathcal{N}_{m,m'}^p b_{m',1}^p \quad (4.54)$$

donde

$$\mathcal{M}_{m,m'}^p = -\sin(v_{m,M}^p y_{M-1}) (R_{12\ mm'}^{(M-1)-1} v_{m',1}^p + Q_{m,m'}^p) + \frac{\cos(v_{m,M}^p y_{M-1})}{v_{m,M}^p} \sum_{k=1}^{\infty} \left[-R_{22\ mk}^{(M-1)} (R_{12\ km'}^{(M-1)-1} v_{m',1}^p + Q_{k,m'}^p) + R_{21\ mk}^{(M-1)} \mathcal{P}_{k,m'} \right] \quad (4.55)$$

$$\mathcal{N}_{m,m'}^p = -\frac{[R_{12\ mm'}^{(M-1)-1} v_{m',1}^p + Q_{m,m'}^p]}{\cos(v_{m,M}^p y_{M-1})} - \tan(v_{m,M}^p y_{M-1}) \mathcal{M}_{m,m'}^p \quad (4.56)$$

$$Q_{m,m'}^p = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} R_{12\ ml}^{(M-1)-1} R_{11\ lk}^{(M-1)} \mathcal{P}_{k,m'} \quad (4.57)$$

y $\mathcal{P}_{k,m'}$ está definido en (4.36).

La etapa final del cálculo consiste en el empalme de los campos en la superficie superior, es decir, en $y = y_M$. Las condiciones de contorno en esta interfase nos proveen de las relaciones necesarias para hallar las amplitudes complejas $\mathcal{R}^\gamma(\alpha)$ y $\mathcal{T}^\gamma(\alpha)$. Tal como para la interfase $y_0 = 0$, se obtienen en este caso dos sistemas de ecuaciones para cada modo de polarización, que proyectados en bases convenientes dan relaciones entre las amplitudes modales de la capa superior, es decir, la capa M -ésima ($a_{m,M}^\gamma$ y $b_{m,M}^\gamma$) y las amplitudes reflejadas $\mathcal{R}^\gamma(\alpha)$. Usando las ecuaciones obtenidas mediante el algoritmo de la Matriz R ((4.48) y (4.49) para polarización s y (4.53) y (4.54) para polarización p), se obtiene una ecuación matricial de la forma:

$$\sum_k \mathbf{B}_{m,k}^\gamma g_{k,1}^\gamma = V_m^\gamma \quad (4.58)$$

donde

$$\mathbf{B}_{m,k}^s = \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_r I_m^M(\alpha) \sum_{l=1}^{\infty} I_l^M(-\alpha) \mathcal{F}_{l,k}^s d\alpha - v_{m,M}^s C_{m,M}^s \mathcal{G}_{m,k}^s \quad (4.59)$$

y

$$V_m^s = 2i \int_{-\infty}^{\infty} \beta_r \mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_r y_M} I_m^M(\alpha) d\alpha \quad (4.60)$$

para polarización s . Para el modo p se obtiene:

$$\mathbf{B}_{m,k}^p = \frac{i\epsilon_r}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I_m^M(\alpha)}{\beta_r} \sum_{l=1}^{\infty} I_l^M(-\alpha) \mathcal{F}_{l,k}^p d\alpha + C_{m,M}^p \mathcal{G}_{m,k}^p \quad (4.61)$$

y

$$V_m^p = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_r y_M} I_m^M(\alpha) d\alpha \quad (4.62)$$

El vector $g_{m,1}^\gamma$ representa a $a_{m,1}^s$ o a $b_{m,1}^p$, según el modo de polarización; los elementos de matriz de $\mathcal{F}_{m,k}^\gamma$ y $\mathcal{G}_{m,k}^\gamma$ son:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{m,k}^s &= -\frac{\sin(v_{m,M}^s h_M)}{v_{m,M}^s} \left[\sum_{l=1}^{\infty} R_{12\ ml}^{(M-1)-1} \left(\delta_{l,k} + \sum_{i=1}^{\infty} R_{11\ li}^{(M-1)} v_{i,1}^s \mathcal{S}_{i,k} \right) \right] + \\ &\cos(v_{m,M}^s h_M) \left[\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} R_{22\ ml}^{(M-1)} R_{12\ li}^{(M-1)-1} \left(\delta_{i,j} \delta_{j,k} + R_{11\ ij}^{(M-1)} v_{j,1}^s \mathcal{S}_{j,k} \right) \right] - \\ &\cos(v_{m,M}^s h_M) \sum_{l=1}^{\infty} R_{21\ ml}^{(M-1)} v_{l,1}^s \mathcal{S}_{l,k} \quad , \end{aligned} \quad (4.63)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{m,k}^p &= -v_{m,M}^p \sin(v_{m,M}^p h_M) \left[\sum_{l=1}^{\infty} R_{12\ ml}^{(M-1)-1} \left(v_{l,1}^p \delta_{l,k} + \sum_{i=1}^{\infty} R_{11\ li}^{(M-1)} \mathcal{P}_{i,k} \right) \right] + \\ &\cos(v_{m,M}^p h_M) \left[\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} R_{22\ ml}^{(M-1)} R_{12\ li}^{(M-1)-1} \left(v_{l,1}^p \delta_{i,j} \delta_{j,k} + R_{11\ ij}^{(M-1)} \mathcal{P}_{j,k} \right) \right] - \\ &\cos(v_{m,M}^p h_M) \sum_{l=1}^{\infty} R_{21\ ml}^{(M-1)} \mathcal{P}_{l,k} \quad , \end{aligned} \quad (4.64)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_{m,k}^s &= \sin(v_{m,M}^s h_M) \sum_{l=1}^{\infty} R_{21\ ml}^{(M-1)} v_{l,1}^s \mathcal{S}_{l,k} \\ &- \sin(v_{m,M}^s h_M) \sum_{l=1}^{\infty} R_{22\ ml}^{(M-1)} \sum_{i=1}^{\infty} R_{12\ li}^{(M-1)-1} \left(\delta_{i,k} + \sum_{j=1}^{\infty} R_{11\ ij}^{(M-1)} v_{j,1}^s \mathcal{S}_{j,k} \right) \\ &- \frac{\cos(v_{m,M}^s h_M)}{v_{m,M}^s} \sum_{l=1}^{\infty} R_{12\ ml}^{(M-1)-1} \left[\delta_{l,k} + \sum_{i=1}^{\infty} R_{11\ li}^{(M-1)} v_{i,1}^s \mathcal{S}_{i,k} \right] \quad , \end{aligned} \quad (4.65)$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}_{m,k}^p &= \frac{\sin(v_{m,M}^p h_M)}{v_{m,M}^p} \left[\sum_{l=1}^{\infty} R_{21\ ml}^{(M-1)} \mathcal{P}_{l,k} - \sum_{l=1}^{\infty} R_{22\ ml}^{(M-1)} \sum_{i=1}^{\infty} R_{12\ li}^{(M-1)-1} (v_{i,1}^p \delta_{i,k} + R_{11\ li}^{(M-1)} \mathcal{P}_{i,k}) \right] \\
&- \cos(v_{m,M}^p h_M) \sum_{l=1}^{\infty} R_{12\ ml}^{(M-1)-1} \left[v_{i,1}^p \delta_{l,k} + \sum_{i=1}^{\infty} R_{11\ li}^{(M-1)} \mathcal{P}_{i,k} \right]. \quad (4.66)
\end{aligned}$$

Para completar la resolución del problema, las series modales y los desarrollos de Rayleigh para los campos reflejados y transmitidos deben truncarse. Luego, la matriz \mathbf{B} es invertida para hallar los coeficientes modales, a partir de los cuales se pueden conocer los campos en todo el espacio.

4.2 Resultados

El formalismo desarrollado en este Capítulo ha sido implementado numéricamente para estructuras con un surco (tres zonas) y dos surcos (cinco zonas), las cuales se ilustran en las Figuras 4.5 y 4.6, respectivamente. Estos casos son útiles para validar el método con los resultados conocidos de la óptica física para bajas profundidades de las cavidades, y para estudiar los diagramas de scattering generados por estructuras más profundas. Tal como fue expresado más arriba, para hallar las funciones modales en cada capa, es necesario resolver una ecuación de autovalores, es decir, hallar las raíces $(v_{m,j}^\gamma)^2$ de una dada función que depende de la longitud de onda, el largo de la cavidad, el número de zonas dentro de la región 2, el ancho y el índice de refracción de cada zona dieléctrica homogénea y de la polarización.

Esta es una función oscilante, ya que es una combinación de senos y cosenos. Se demuestra que para índices de refracción reales (que es el presente caso), los autovalores son reales [69]. En el intervalo $\min(k_l^2) < (v_{m,j}^\gamma)^2 < \max(k_l^2)$, las fluctuaciones se hacen muy bruscas y puede haber dos o tres raíces muy cercanas entre sí, las cuales pueden ser fácilmente salteadas por los métodos habituales de búsqueda de raíces, lo cual ocasionaría errores con graves consecuencias en el cálculo subsiguiente [67, 69].

Por ejemplo, en la Figura 4.7 se grafica la función $\tilde{M}_{12,j}^s((v_j^s)^2)$ vs. $(v_j^s)^2$ para una capa

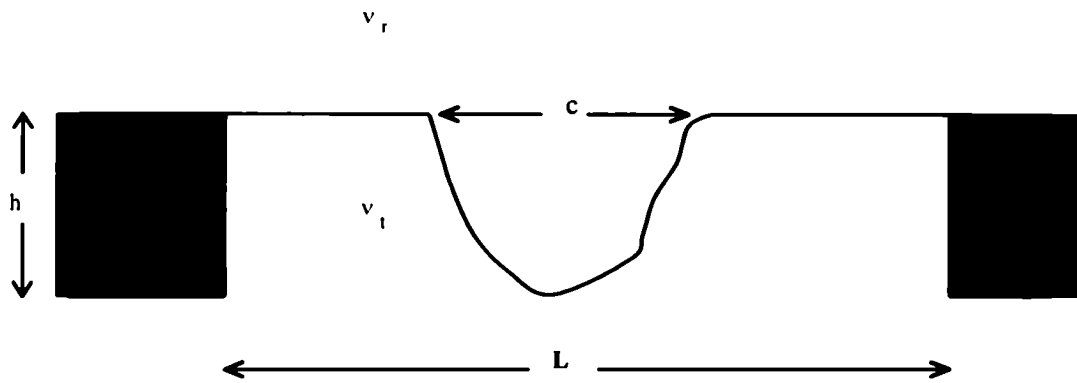


Figura 4.5: Estructura dieléctrica de 3 zonas (un surco).

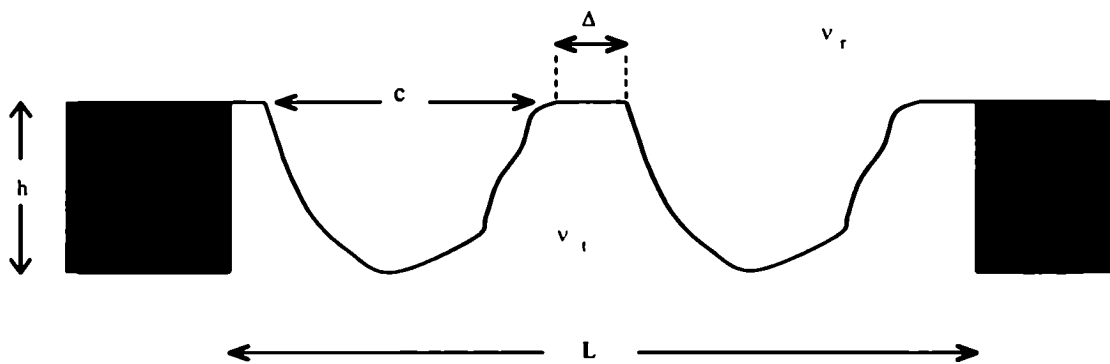


Figura 4.6: Estructura dieléctrica de 5 zonas (2 surcos).

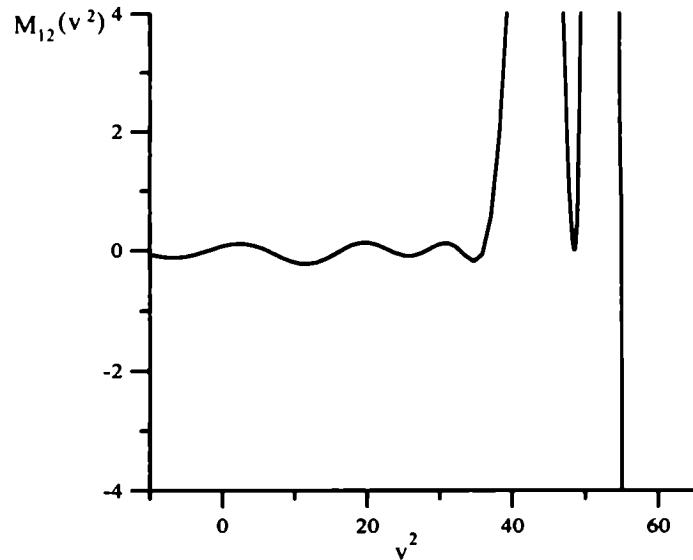


Figura 4.7: $\tilde{M}_{12j}^s((v_j^s)^2)$ vs. $(v_j^s)^2$ para una capa de 5 zonas con $L/\lambda = 5$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 1.3$, $c/\lambda = 1$ y $\Delta_3/\lambda = 1$.

dividida en cinco zonas, como se ilustra en la Figura 4.4. Los parámetros son $L/\lambda = 5$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 1.3$, $c/\lambda = 1$ y $\Delta_3/\lambda = 1$. Se observa que el comportamiento de la función es suave hasta que la variable toma el valor $(2\pi\nu_1/\lambda)^2$. A partir de allí, las oscilaciones se hacen más pronunciadas y se dificulta el tratamiento numérico ya que la función toma valores muy grandes en módulo (de hecho, no se muestra el gráfico completo porque se va de escala). Cabe aclarar que los modos más importantes son los que poseen los mayores valores de $(v_j^s)^2$, y por lo tanto es indispensable hallar *todas* las raíces de la función en el semieje positivo. En la Figura 4.8 se muestra la ampliación de una pequeña zona de la curva de la Figura 4.7, donde hay dos autovalores muy cercanos entre sí: 62.0090 y 62.0087. Debido a la naturaleza de la función, es necesario tomar al menos diez cifras decimales para obtener los autovalores con errores despreciables.

Por lo tanto, se desarrolló un algoritmo apropiado para este tipo de funciones, que consiste en evaluar la función $\tilde{M}_{12j}^\gamma((v_j^\gamma)^2)$ para $\gamma = s$ o $\tilde{M}_{21j}^\gamma((v_j^\gamma)^2)$ para $\gamma = p$, en una grilla densa de puntos. Si se hallan valores cercanos a cero pero del mismo lado del eje en

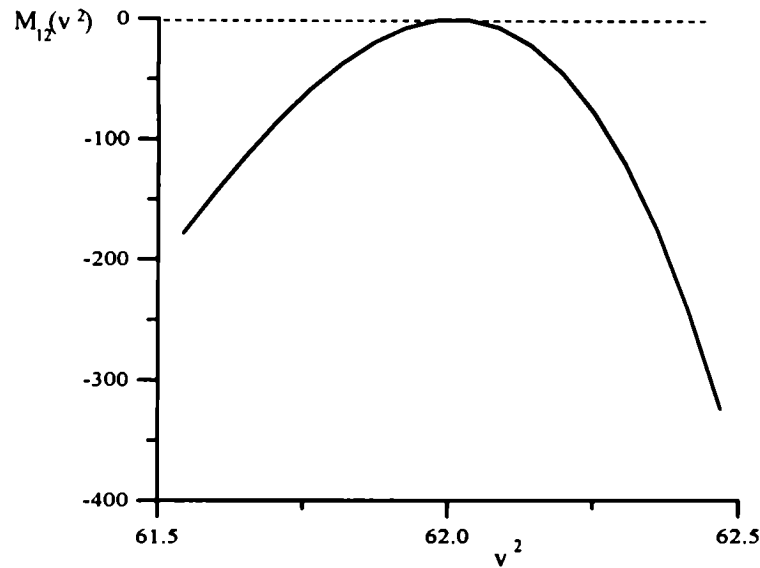


Figura 4.8: Ampliación de una zona de la Figura 4.7.

dos puntos contiguos de la grilla, se estudia si hay un máximo o un mínimo de la función entre ambos puntos, casos en los que eventualmente podría suceder que la función cruzara al eje dos veces dentro del intervalo. Si, por el contrario, la función cambia de signo, se verifica si se trata de una raíz simple o triple entre los dos puntos.

Es importante destacar que debe resolverse una ecuación de autovalores del tipo (4.15) para cada una de las capas que se utilizan para aproximar el verdadero perfil de las interfases. Una vez hallados los mismos, deben tomarse para el cálculo los MM autovalores de mayor valor, donde deben incluirse todos los positivos y algunos de los negativos. Este número (MM) varía según las características de la estructura considerada, pero para todos los casos que se presentan en este trabajo es siempre menor a 40. La cantidad de autovalores considerados debe ser la misma para todas las capas, para poder realizar el proceso de propagación de los campos de la manera descrita más arriba. Para los desarrollos de Rayleigh, en cambio, es conveniente tomar algunos cientos de términos, de manera tal de obtener una mejor representación de los campos reflejados y transmitidos. Este número (N) no agrega tiempo de cómputo significativo al cálculo, ya que no deben

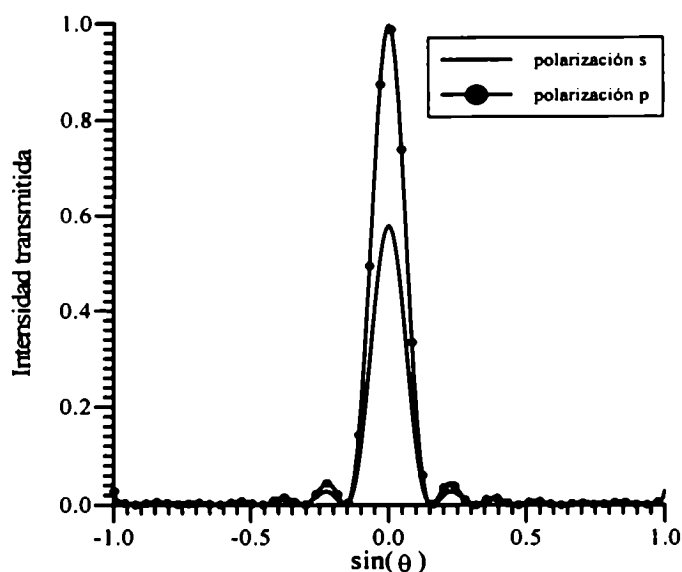


Figura 4.9: Intensidad transmitida vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con un surco rectangular y ambas polarizaciones. $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$, $c/\lambda = 1$, $L/\lambda = 5$, $\nu_r = 1$, $\nu_t = 1.3$, $h/\lambda = 0.1$.

invertirse matrices de $N \times N$.

En los siguientes ejemplos, se muestran curvas de intensidad transmitida $I_t^\gamma(\theta_t)$ vs. $\sin(\theta_t)$ para diferentes estructuras y condiciones de incidencia. La intensidad transmitida por la abertura se define:

$$I_t^\gamma(\theta_t) = |T^\gamma(\theta_t)|^2 \frac{\beta_t}{\beta_0} . \quad (4.67)$$

La conservación de la energía se satisface con un error menor al 0.5% en todos los casos.

En la Figura 4.9 se grafica $I_t(\theta_t)$ para una estructura con un surco rectangular de ancho $c/\lambda = 1$. El haz polarizado según s incide normalmente desde el vacío y tiene un ancho espacial $w/\lambda = 10$. La longitud total de la zona modulada es $L/\lambda = 5$, y el índice de refracción del dieléctrico es $\nu = \nu_t = 1.3$. Se observa que para $h/\lambda = 0.1$ (ver Fig. 4.9), se obtiene el patrón de difracción de una abertura de ancho L en una pantalla perfectamente conductora, y se verifica que las posiciones de los mínimos coinciden con las que predice la óptica física:

$$\sin(\theta_{t,\min}) = m \times \frac{\lambda}{L} \frac{1}{\nu_t} = m \times 0.1538 . \quad (4.68)$$

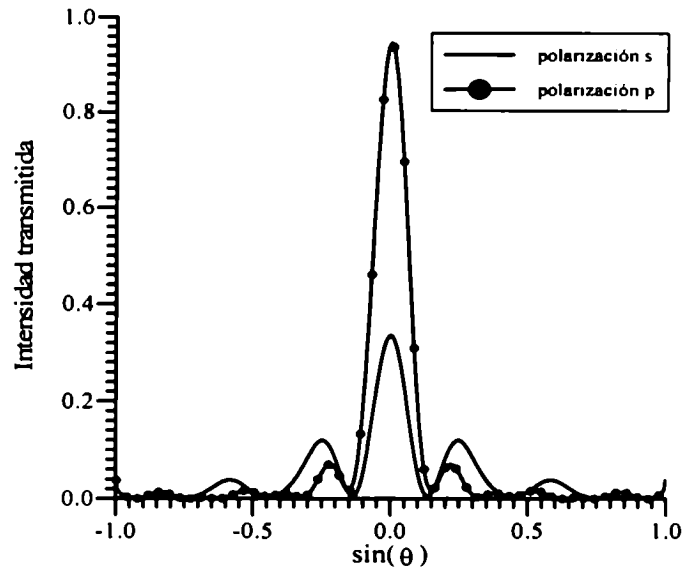


Figura 4.10: Intensidad transmitida vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con un surco rectangular y ambas polarizaciones. $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$, $c/\lambda = 1$, $L/\lambda = 5$, $\nu_r = 1$, $\nu_t = 1.3$, $h/\lambda = 1$.

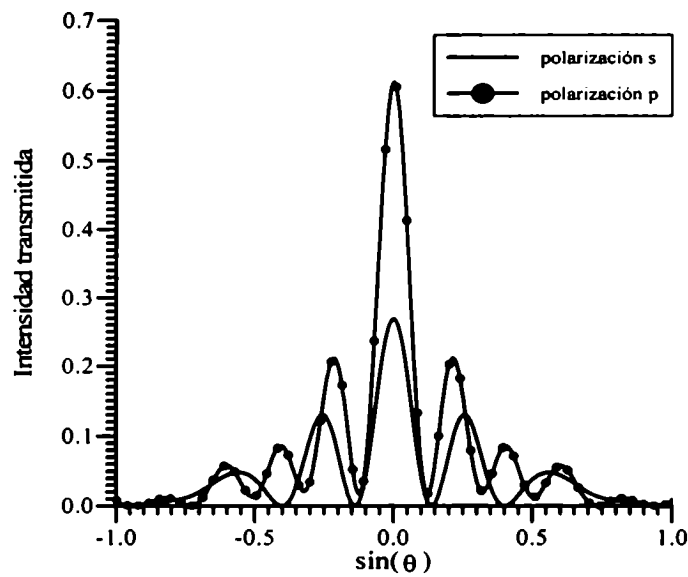


Figura 4.11: Intensidad transmitida vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con un surco rectangular y ambas polarizaciones. $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$, $c/\lambda = 1$, $L/\lambda = 5$, $\nu_r = 1$, $\nu_t = 1.3$, $h/\lambda = 10$.

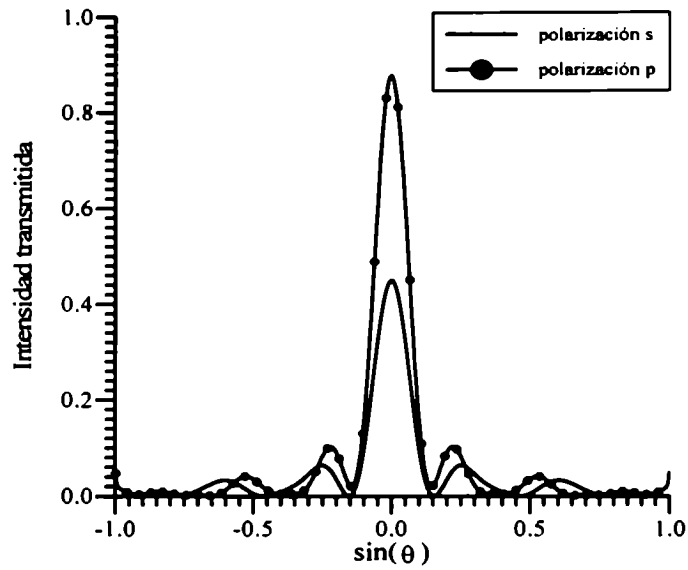


Figura 4.12: Intensidad transmitida vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con un surco sinusoidal y ambas polarizaciones. $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$, $c/\lambda = 1$, $L/\lambda = 5$, $\nu_r = 1$, $\nu_t = 1.3$, $h/\lambda = 1$.

La figura cambia radicalmente cuando se aumenta la profundidad del corrugado (ver Figs. 4.10 y 4.11): dos máximos adicionales aparecen a ambos lados de la dirección de incidencia. Estos picos pueden relacionarse con el efecto de interferencia entre las zonas dieléctricas a ambos lados del surco. De hecho, estos picos deberían estar ubicados en posiciones dadas por:

$$\sin(\theta_{t,\max}) = m \times \frac{\lambda}{d} \frac{1}{\nu_t} = m \times 0.2564 \quad , \quad (4.69)$$

tal como lo predice la teoría escalar (d es la distancia entre los centros de las partes que interfieren). Se ve que los picos están ubicados cerca de las posiciones dadas por (4.69). Una curva muy parecida se obtiene para un altura baja en el caso de polarización p , tal como era de esperar; en cambio, para profundidades mayores, aparecen diferencias que demuestran la dependencia de los campos con el modo de polarización.

En la Figura 4.12 se considera un surco de perfil sinusoidal. Las condiciones de incidencia son las mismas que en la Figura 4.10. Comparando con la Figura 4.10, se observa que si bien las posiciones de los máximos y mínimos son las mismas, las curvas correspon-

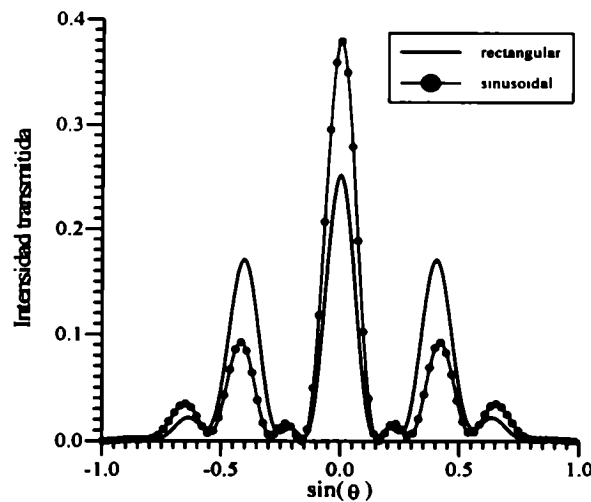


Figura 4.13: Intensidad transmitida vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con dos surcos y polarización s . $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$, $c/\lambda = 1$, $L/\lambda = 5$, $\Delta/\lambda = 1$, $\nu_r = 1$, $\nu_t = 1.3$, $h/\lambda = 1$.

dientes a perfiles diferentes son diferentes, lo cual evidencia la influencia de la geometría de la estructura en el patrón de difracción.

Consideremos ahora una estructura compuesta por dos surcos, como se muestra en la Figura 4.6. Para bajas profundidades del corrugado, se obtienen para ambas polarizaciones curvas esencialmente iguales a las obtenidas para un surco (Fig. 4.9), por lo que no se muestran aquí. Esto se debe a que el largo total L es el mismo en ambos casos, y la modulación dieléctrica no tiene relevancia para una capa tan fina. Sin embargo, para $h/\lambda = 1$ aparecen importantes picos que se relacionan con los máximos de interferencia de dos ranuras. Para los parámetros considerados aquí, éstos están ubicados en $\sin(\theta_{t,\max}) = m \times 0.384$, que son aproximadamente las posiciones de los picos en la figura, tanto para perfil rectangular como para sinusoidal. Para polarización p , los picos no son tan pronunciados como para polarización s , pero aparece también una leve intensificación en dichas direcciones (ver Fig. 4.14).

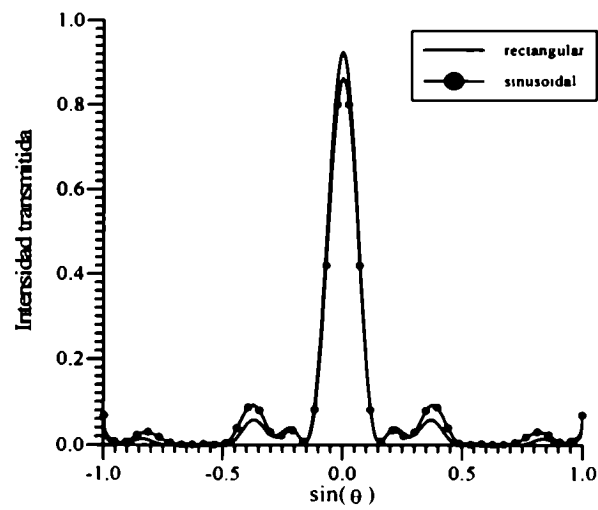
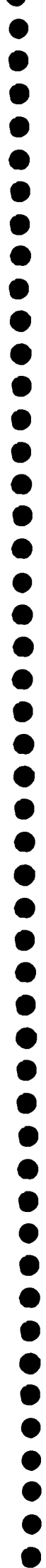


Figura 4.14: Intensidad transmitida vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con dos surcos y polarización p . $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$, $c/\lambda = 1$, $L/\lambda = 5$, $\Delta/\lambda = 1$, $\nu_r = 1$, $\nu_t = 1.3$, $h/\lambda = 1$.



Capítulo 5

Estructuras de materiales absorbentes

En este capítulo se aplica el formalismo desarrollado en el Capítulo 4 al caso de materiales absorbentes. Estos materiales se caracterizan por tener un índice de refracción complejo, cuya parte imaginaria da cuenta de la absorción de energía que se produce en el mismo. Por consiguiente, el tratamiento es análogo al desarrollado para dieléctricos ideales, aunque la característica compleja del índice introduce dos modificaciones fundamentales:

- 1) las funciones modales $\{X_{m,j}^\gamma(x)\}$ dejan de formar una base ortogonal y completa, lo cual hace necesaria la introducción de las funciones adjuntas para formar una base bi-ortogonal [22];
- 2) los autovalores dejan de ser reales, lo cual hace imposible la utilización del algoritmo descrito en la Sección 4.1 para la búsqueda de raíces. Esto conduce a utilizar el método de Botten *et al.* [36], que encuentra sistemáticamente todas las raíces de una ecuación trascendente en una región dada del plano complejo. La rutina publicada en [36], que corresponde al caso de una red infinita, fue adaptada a la estructura considerada en este trabajo.

En las secciones 5.1 y 5.2 se dan algunos resultados correspondientes a estructuras metálicas y dieléctricas con pérdidas respectivamente, para el caso en que la apertura está dividida en dos zonas, como se muestra en la Figura (5.1).

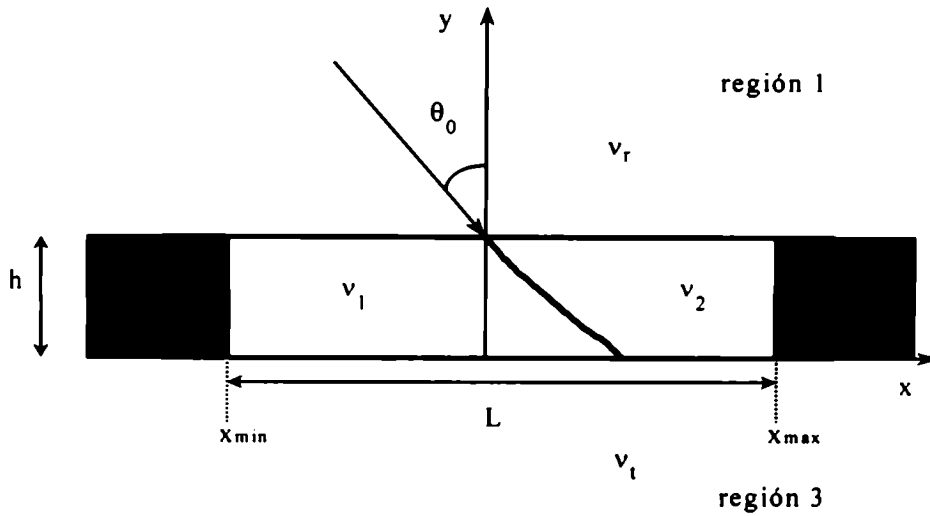


Figura 5.1: Estructura de dos zonas considerada en los ejemplos de este capítulo.

5.1 Metales

Tal como fue expresado en el Capítulo 4, uno de los puntos más importantes a tener en cuenta para garantizar una correcta solución del problema es la estimación precisa de los autovalores determinados por las ecs. (4.15). Se utiliza el método de Botten *et al.* [36], para hallar sistemáticamente todas las raíces de las ecuaciones trascendentes (4.15) en una región determinada del plano complejo, que para el caso de dos zonas considerado aquí se escriben:

$$\frac{1}{u_{m,1,j}^s} \cos(u_{m,2,j}^s \Delta 2_j) \sin(u_{m,1,j}^s \Delta 1_j) + \frac{1}{u_{m,2,j}^s} \sin(u_{m,2,j}^s \Delta 2_j) \cos(u_{m,1,j}^s \Delta 1_j) = 0 \quad , \quad (5.1)$$

para polarización s , y

$$\frac{u_{m,2,j}^p}{\epsilon_2} \sin(u_{m,2,j}^p \Delta 2_j) \cos(u_{m,1,j}^p \Delta 1_j) + \frac{u_{m,1,j}^p}{\epsilon_1} \cos(u_{m,2,j}^p \Delta 2_j) \sin(u_{m,1,j}^p \Delta 1_j) = 0 \quad , \quad (5.2)$$

para polarización p .

La rutina publicada en [36] corresponde al caso de una red infinita, y fue adaptada

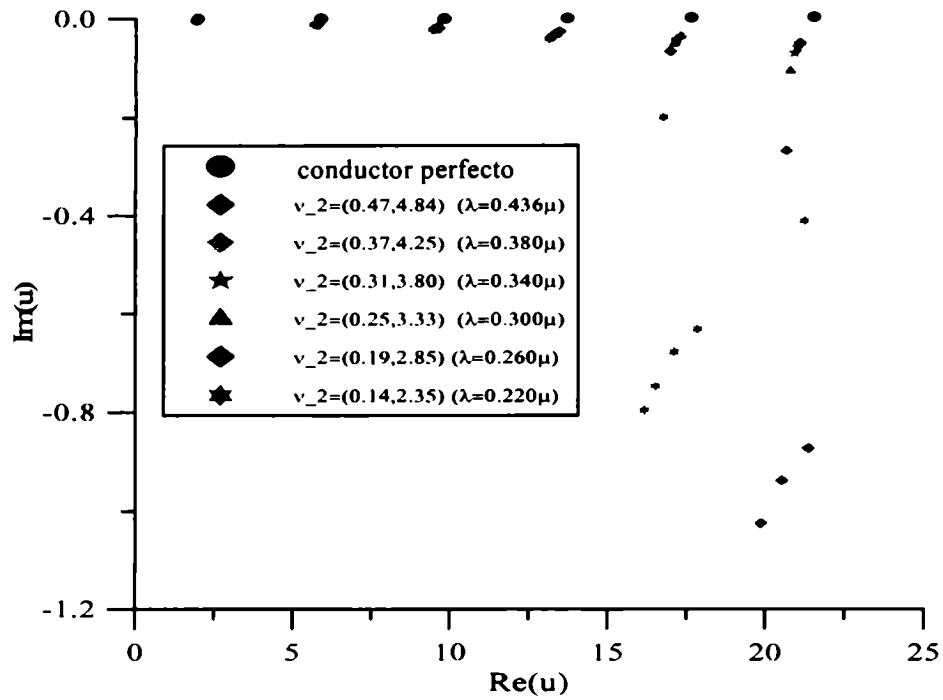


Figura 5.2: $\text{Im}(u^s)$ vs. $\text{Re}(u^s)$ para una capa de ancho $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = 1$ y varios valores de ν_2 correspondientes a aluminio a diferentes longitudes de onda. Polarización s .

al presente problema, demostrando que es un algoritmo eficiente y rápido. Esto es muy importante en este caso, ya que las ecuaciones deben resolverse tantas veces como capas se tienen en cuenta para reproducir el verdadero perfil de la interfase, y cuanto mayor sea este número, mejor será la aproximación obtenida.

En la Figura 5.2 se muestra la evolución de algunos de los autovalores con el índice de refracción ν_2 , para una capa de ancho total $L/\lambda = 3.2$ y $\Delta_1/\lambda = 1.6$. El índice de la zona 1 es $\nu_1 = 1$. Se consideran índices de refracción correspondientes al aluminio en longitudes de onda que varían entre 220nm y 436nm , para polarización s (Fig. 5.2) y p (Fig. 5.3). Estos autovalores se comparan con los correspondientes al conductor perfecto, los cuales son reales y están dados por [17]:

$$u_m^{\gamma(p.c.)} = \frac{m\pi}{\Delta_1} \quad (5.3)$$

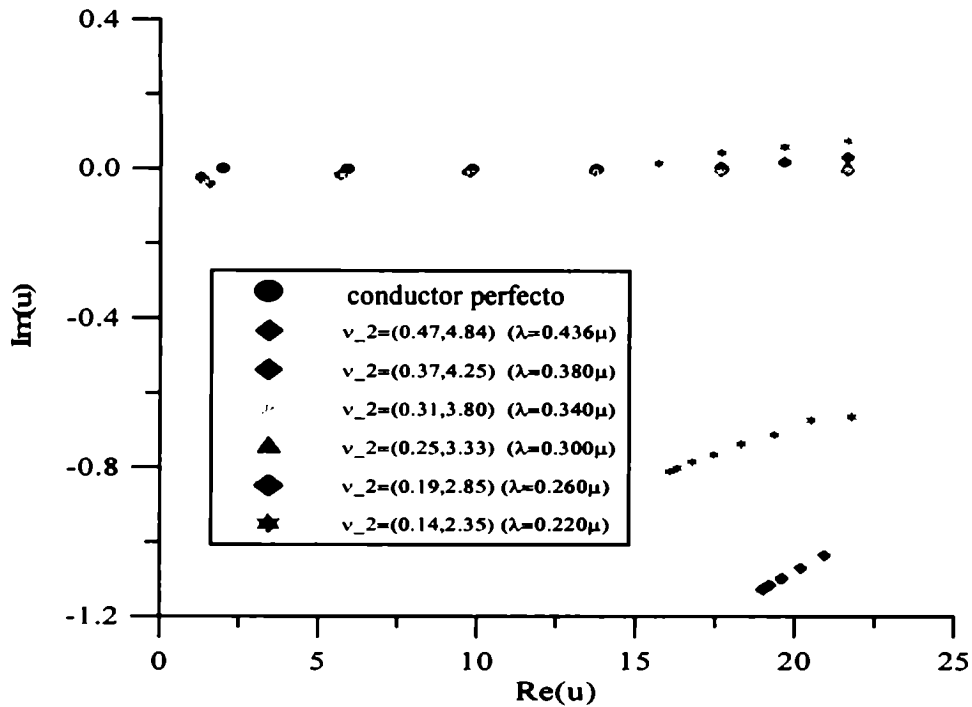


Figura 5.3: $\text{Im}(u^p)$ vs. $\text{Re}(u^p)$ para una capa de ancho $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = 1$ y varios valores de ν_2 correspondientes a aluminio a diferentes longitudes de onda. Polarización p .

A medida que la parte imaginaria del índice de refracción disminuye, es decir, al alejarse del caso de conductor perfecto, la parte imaginaria de los autovalores aumenta en módulo. Además, la densidad de autovalores se incrementa, dificultando el seguimiento de la trayectoria de cada uno de los puntos en el plano complejo. El comportamiento es similar para polarización p , aunque en algunos casos los autovalores toman partes imaginarias positivas.

Es interesante calcular la potencia absorbida por la estructura cuando se consideran materiales absorbentes. Además, este cálculo constituye una manera adicional de verificar el funcionamiento del programa, dado que el balance de energía impone:

$$\frac{P_{\text{ref}}}{P_{\text{inc}}} + \frac{P_{\text{trans}}}{P_{\text{inc}}} + \frac{P_{\text{abs}}}{P_{\text{inc}}} = 1 \quad , \quad (5.4)$$

donde P_{ref} , P_{trans} y P_{abs} representan la potencia reflejada, transmitida y absorbida, res-

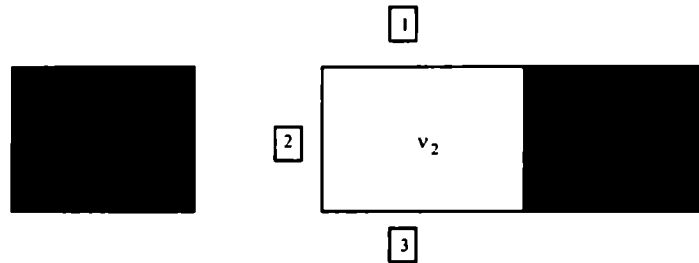


Figura 5.4: Zonas de integración para el cálculo de la potencia absorbida.

pectivamente.

Es pertinente hacer un comentario acerca del cálculo de la potencia absorbida. Como es sabido, el mismo se efectúa mediante la integración de la componente del vector de Poynting normal a la superficie, a lo largo de toda la estructura (ver ec. (2.20)). En este caso, se reduce a una integral en una única variable ya que la estructura es invariante ante traslaciones en la dirección \hat{z} . Luego, la integral se puede separar en tres términos (ver Fig. 5.4): una en la superficie horizontal superior (1), una a lo largo de la interfase entre las zonas 1 y 2 (2), y una en la superficie inferior (3).

Los términos 1 y 3 se calculan utilizando las amplitudes reflejadas y transmitidas calculadas por el programa. Sin embargo, para calcular el término 2 son necesarias las expresiones de los campos en el interior de la apertura, y por consiguiente las amplitudes modales en cada una de las capas. Esto precisamente es lo que evita el algoritmo de la Matriz R que se usa para propagar los campos. Por lo tanto, sólo se presentan cálculos de potencia absorbida en el caso de una interfase vertical entre las zonas 1 y 2, en el cual las amplitudes modales son las mismas en todas las capas. El cálculo de las amplitudes modales en cualquier otro caso trae aparejado inestabilidades, particularmente en el caso

ν_2	p_{ref}	p_{trans}	p_{abs}	suma
$0.5 + i1.$	0.79851	0.12600	0.07546	0.99998
$0.32 + i2.32$	0.98093	0.00013	0.02086	1.00179
$0.3 + i3.$	0.98857	$1.8 \cdot 10^{-13}$	0.01101	0.99959

Tabla 5.1: Cocientes de potencia para una estructura con una interfase vertical entre las zonas 1 y 2, para varios valores de ν_2 . $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = \nu_r = \nu_t = 1$, $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$ y polarización s .

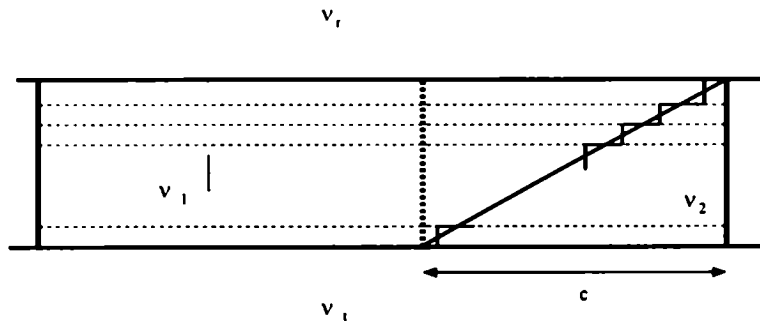


Figura 5.5: Estructura de cuña utilizada para la Tabla 5.2.

de estructuras profundas, las cuales son evitadas por el método modal de multicapas utilizado aquí para la resolución del problema.

En la Tabla 5.1, se muestran los cocientes de potencia para distintos índices de refracción ν_2 , para una estructura con una interfase vertical entre las zonas 1 y 2. p_{ref} , p_{trans} y p_{abs} son los cocientes de las potencias respecto de la incidente. El haz incidente tiene polarización s , ancho $w/\lambda = 10$ y $\theta_0 = 0^\circ$; $L/\lambda = 3.2$, $h/\lambda = 1$ y $\nu_1 = \nu_r = \nu_t = 1$. A medida que la conductividad del medio 2 aumenta, la potencia reflejada también, lo cual es consistente con el hecho de que para el caso límite de conductor perfecto, toda la energía se refleja.

El siguiente ejemplo corresponde a la estructura esquematizada en la Figura 5.5, donde

c/λ	p_{ref}	p_{trans}
0.1	0.76786	0.23183
0.5	0.76969	0.22769
1.	0.79204	0.20051

Tabla 5.2: Cocientes de potencia para la estructura de la Figura 5.5, para distintos valores de c . El haz incidente está centrado en la zona 2. $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = \nu_r = \nu_t = 1$, $w/\lambda = 10$, $\nu_2 = 0.32 + i2.32$, $\theta_0 = 0^\circ$ y polarización s .

se grafica el perfil real, y la aproximación del mismo que se utiliza para el cálculo. El ejemplo corresponde a una cuña de índice $\nu_2 = 0.32 + i2.32$, y los demás parámetros son los mismos que para el caso anterior, con la diferencia de que ahora el haz está centrado en $x = c/2$, es decir, en el centro de la zona 2. Como era de esperar, la potencia reflejada aumenta con el ancho de la cuña c (ver Tabla 5.2).

5.2 Dieléctricos con pérdidas

En la Figura 5.6 se considera la evolución de los autovalores al variar el índice de refracción ν_2 desde 2 (real) hasta $2 + i0.3$, que representa un dieléctrico con pérdidas. En este caso es más ilustrativo observar la evolución de $(\nu_m^{\gamma})^2$ a medida que aumenta la parte imaginaria del índice, ya que se sabe que estos autovalores toman valores reales (positivos y negativos) en el caso de índice de refracción real (dieléctrico ideal) [69]. El comportamiento de las trayectorias de los autovalores para ambas polarizaciones es similar, aumentando su parte imaginaria a medida que se aumenta la parte imaginaria del índice. A diferencia del caso del metal considerado en la Figura 5.2, el número de autovalores presentes en una región determinada del plano complejo es fijo. Este hecho tiene importantes consecuencias al utilizar los autovalores en el cálculo de los campos reflejados y transmitidos.

En la Tabla 5.3 se muestra la evolución de los cocientes de potencias respecto de la incidente, a medida que se aumenta la parte imaginaria del índice de refracción, para una

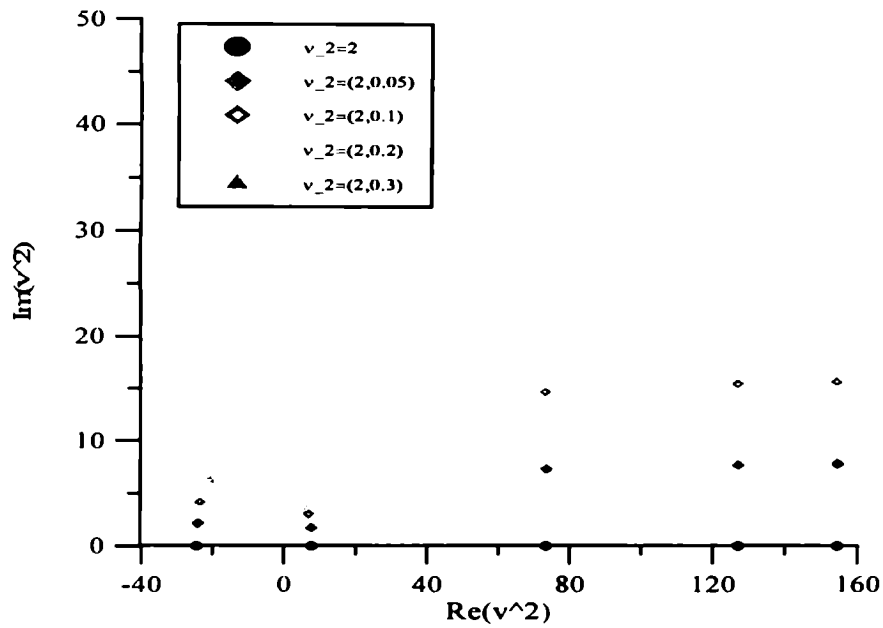


Figura 5.6: $\text{Im}(v^2)$ vs. $\text{Re}(v^2)$ para una capa de ancho $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = 1$ y varios valores de ν_2 correspondientes a dieléctricos con pérdidas. Polarización s .

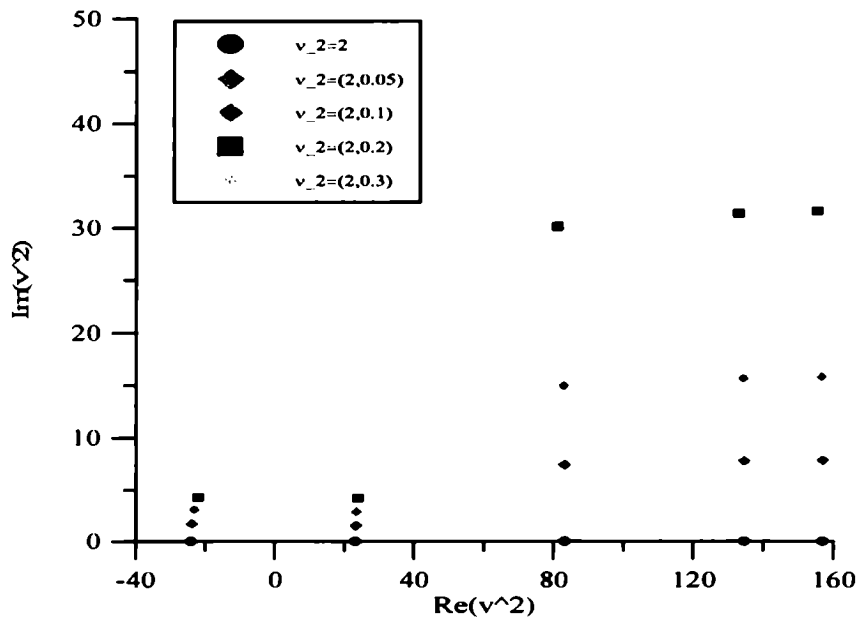


Figura 5.7: $\text{Im}(v^2)$ vs. $\text{Re}(v^2)$ para una capa de ancho $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = 1$ y varios valores de ν_2 correspondientes a dieléctricos con pérdidas. Polarización p .

ν_2	p_{ref}	p_{trans}	p_{abs}	suma
2	0.76106	0.23895	-	1.00000
$2 + i0.05$	0.76116	0.15991	0.07810	0.99918
$2 + i0.1$	0.76024	0.13123	0.10777	0.99926
$2 + i0.2$	0.76100	0.11065	0.12543	0.99709
$2 + i0.3$	0.76267	0.10726	0.13132	1.00126

Tabla 5.3: Cocientes de potencia para una estructura con una interfase vertical entre las zonas 1 y 2, para varios valores de ν_2 . $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = \nu_r = \nu_t = 1$, $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$ y polarización s .

$\theta_0(^{\circ})$	p_{ref}	p_{trans}	$p_{\text{abs}}^{(1)+(3)}$	$p_{\text{abs}}^{(2)}$	sum
0	0.76267	0.10726	0.10781	0.02350	1.00126
30	0.76561	0.06606	0.10663	0.06204	1.00036
60	0.78667	0.01398	0.12135	0.08168	1.00369

Tabla 5.4: Cocientes de potencia para una estructura con una interfase vertical entre las zonas 1 y 2, para varios valores de θ_0 . $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = \nu_r = \nu_t = 1$, $\nu_2 = 2 + i0.3$, $w/\lambda = 10$ y polarización s .

estructura en la cual la región 2 está dividida en dos zonas de la misma longitud. Los parámetros de la estructura son: $L/\lambda = 3.2$, $h/\lambda = 1$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$ y $\nu_1 = \nu_r = \nu_t = 1$.

El haz incidente tiene polarización s y ancho $w/\lambda = 10$. Como era de esperar, la potencia absorbida aumenta con la parte imaginaria del índice. La conservación de la energía se satisface con un error menor al 0.5%. La misma estructura es considerada en la Tabla 5.4, donde $\nu_2 = 2 + i0.3$ es fijo, y el ángulo de incidencia θ_0 varía. En este ejemplo se han separado las contribuciones a la potencia absorbida en dos partes: por un lado los términos 1+3, y por el otro el término 2 (ver Fig. 5.4). Nótese el incremento en la potencia absorbida por la interfase vertical (término 2) al aumentar el ángulo de incidencia, es decir, cuando la onda incide más de lleno sobre dicha superficie. La potencia reflejada también aumenta, y la transmitida disminuye notablemente.

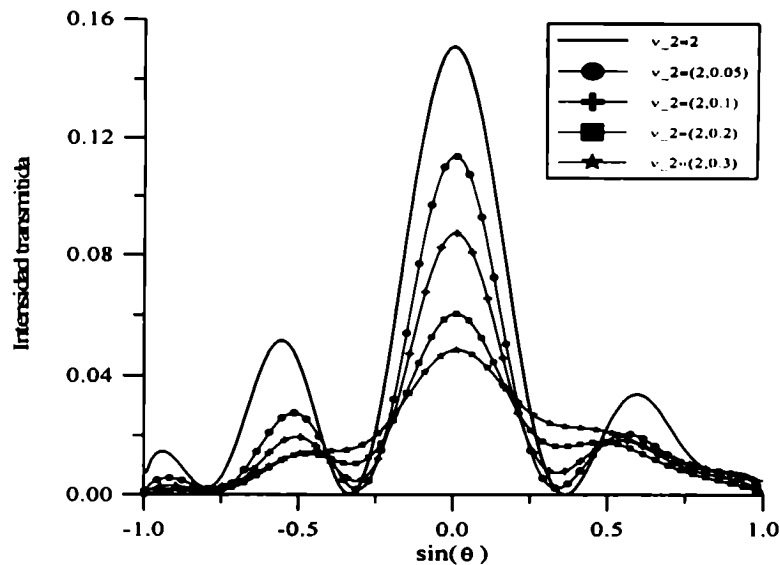


Figura 5.8: Intensidad transmitida vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con una interfase vertical entre las zonas 1 y 2, para diferentes valores de ν_2 . $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = \nu_r = \nu_t = 1$, $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$ y polarización s .

En la Figura 5.8 se grafica la intensidad transmitida definida como:

$$I_t(\alpha) = |T^\gamma(\alpha)|^2 \beta_t, \quad (5.5)$$

como función de $\sin(\theta)$, siendo θ el ángulo de observación, para la estructura considerada en las Tablas 5.3 y 5.4, y diferentes índices ν_2 . Se observa en la figura la disminución de la potencia transmitida cuando la parte imaginaria del índice aumenta.

En la Figura 5.9, se muestra la evolución de la intensidad transmitida al variar el ángulo de incidencia, para $\nu_2 = 2 + i0.05$. Se observa que la posición del máximo siempre está cerca de la dirección de incidencia.

Se considera ahora una estructura con forma de cuña, como se esquematiza en la Figura 5.10. Los parámetros geométricos de la superficie y los de incidencia son los mismos que los considerados en los ejemplos anteriores, a diferencia de la interfase entre las zonas 1 y 2. El verdadero perfil de dicha interfase es aproximado por diez capas ($M=10$), habiéndose comprobado previamente que los resultados son convergentes para este número.

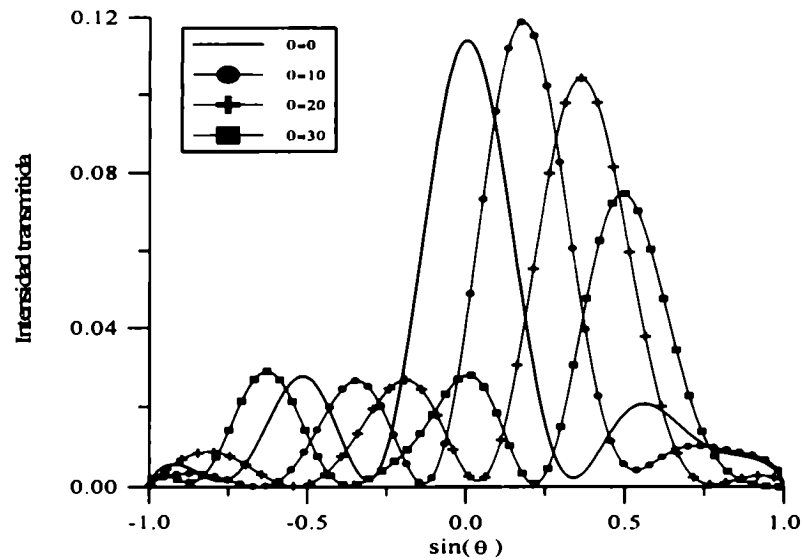


Figura 5.9: Intensidad transmitida vs. $\sin(\theta)$ para una estructura con una interfase vertical entre las zonas 1 y 2, para diferentes ángulos de incidencia. $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = \nu_r = \nu_t = 1$, $\nu_2 = 2 + i0.05$, $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$ y polarización s .

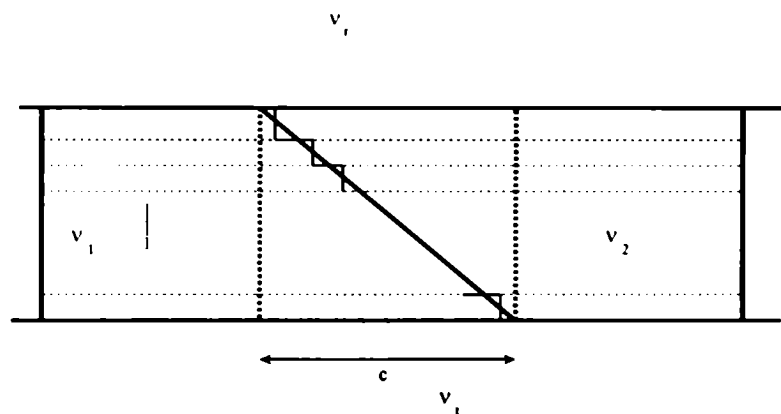


Figura 5.10: Estructura considerada para la Tabla 5.5 y las Figuras 5.11-5.12.

c	p_{ref}	p_{trans}
0.6	0.76527	0.11019
1.	0.76754	0.10468
2.	0.77219	0.11665
3.2	0.78703	0.09401

Tabla 5.5: Cocientes de potencia para la estructura de la Figura 5.10, para varios valores de c . $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = \nu_r = \nu_t = 1$, $\nu_2 = 2 + i0.1$, $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$ y polarización s .

A medida que se aumenta la zona ocupada por el dieléctrico, la potencia reflejada aumenta (ver Tabla 5.5), lo cual es consistente con el hecho de que sólo una parte de la potencia incidente (dada por el coeficiente de transmisión) es transmitida por el dieléctrico, mientras que la zona vacía no presenta ningún obstáculo a la luz incidente. Las Figuras 5.11-5.12 muestran los patrones de transmisión para este tipo de estructuras.

En la Figura 5.11 se grafica la intensidad transmitida vs. $\sin \theta$, para una cuña de ancho $c/\lambda = 0.6$. La intensidad transmitida, representada por el área bajo la curva, disminuye a medida que aumenta la parte imaginaria de ν_2 . En la Figura 5.12, se muestra la intensidad transmitida para los casos considerados en la Tabla 5.5. Es notable que en el caso en que la interfase entre las zonas 1 y 2 abarca todo el ancho de la abertura, es decir, cuando ésta se extiende desde x_{min} hasta x_{max} , (ver Fig. 5.10), el máximo de la curva está en $\sin \theta \approx 0.33$, que corresponde a $\theta = 19.23^\circ$. Este ángulo es el obtenido si se aplica la Ley de Snell a las dos interfases que atraviesa la luz al pasar por la cuña.

En la Tabla 5.6 se considera una estructura con una interfase vertical entre las zonas 1 y 2, pero para luz incidente con polarización p y $\nu_2 = 2 + i0.1$. Aquí se varía el ancho espacial del haz w y la posición x_0 donde está centrado. Como era de esperar, la potencia reflejada aumenta a medida que el centro del haz se mueve hacia la zona 2 (que tiene índice ν_2). Además, al disminuir el ancho del haz, es decir, al concentrar la energía en una zona más restringida del espacio alrededor de la cavidad, disminuye la potencia reflejada. Esto

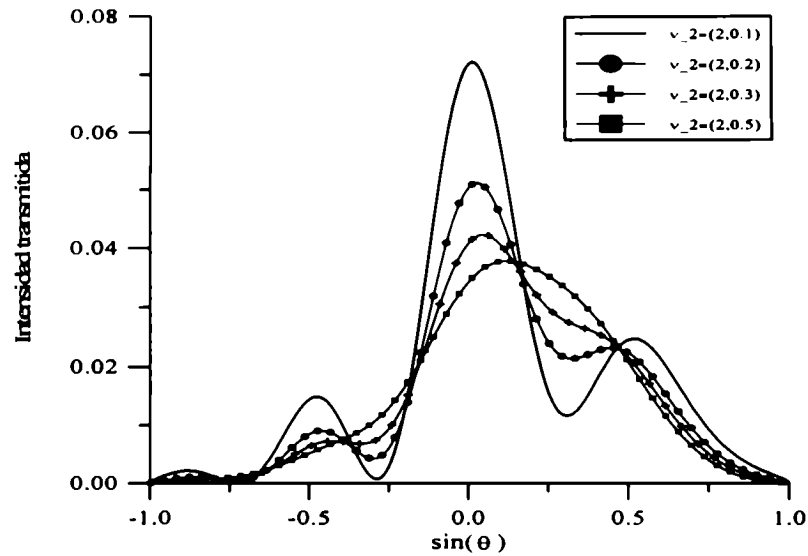


Figura 5.11: Intensidad transmitida vs. $\sin(\theta)$ para la estructura de la Figura 5.10, para diferentes valores de ν_2 . $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = \nu_r = \nu_t = 1$, $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$ y polarización s .

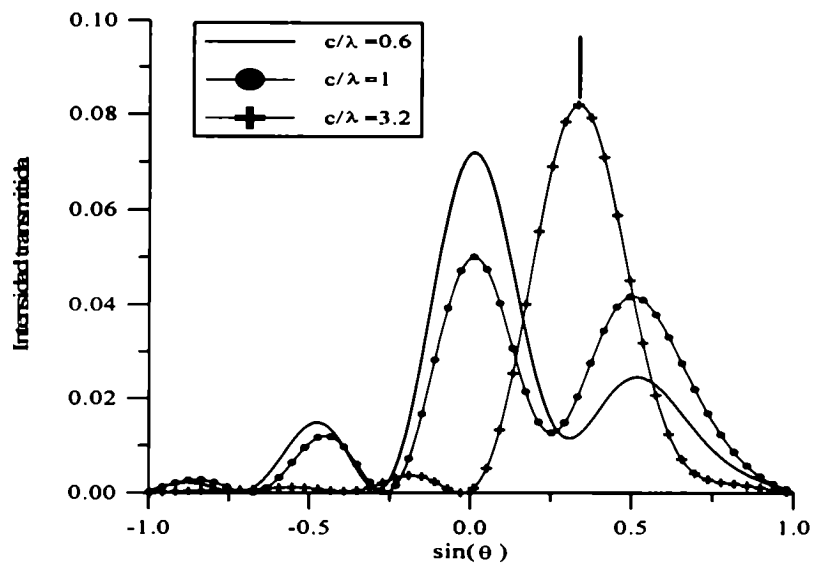


Figura 5.12: Intensidad transmitida vs. $\sin(\theta)$ para la estructura de la Figura 5.10, para diferentes valores del ancho c . $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = \nu_r = \nu_t = 1$, $\nu_2 = 2$, $w/\lambda = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$ y polarización s .

w/λ	x_0/λ	P_{ref}	P_{trans}
4	0	0.47832	0.42576
4	0.8	0.52017	0.37703
2	0.8	0.33558	0.47384

Tabla 5.6: Cocientes de potencia para una estructura con interfase vertical entre las zonas 1 y 2, para varios valores de w y x_0 . $L/\lambda = 3.2$, $\Delta_1/\lambda = 1.6$, $\nu_1 = \nu_r = \nu_t = 1$, $\nu_2 = 2 + i0.1$, $\theta_0 = 0^\circ$ y polarización p .

se debe a que para un haz más ancho, la mayor parte de la energía se refleja en la parte perfectamente conductora de la estructura. Esta contribución disminuye al focalizar el haz en la apertura.

Capítulo 6

Aplicaciones

El método modal de multicapas desarrollado en esta tesis para superficies con corrugados localizados tiene múltiples aplicaciones, fundamentalmente a estructuras para las cuales otros métodos no son convenientes o demandan mucho esfuerzo numérico. Por ejemplo, el caso de superficies rugosas descritas por funciones multivaluadas de las coordenadas no ha sido tratado aún con profundidad. Algunos trabajos sobre el tema incluyen las Refs. [70, 71], donde se utiliza el teorema de extinción para el estudio del scattering por un cilindro sobre un plano, ambos perfectamente conductores, el trabajo de Mendoza *et al.* [72], donde se presenta una teoría sistemática basada en el método integral para el estudio de perfiles multivaluados fractálicos, y las Refs. [73, 74], que presentan métodos integrales para el estudio de la interacción muestra-punta de prueba en las técnicas de óptica de campo cercano. Por lo tanto, en la Sección 6.1 se presenta el método modal de multicapas para el estudio del scattering por superficies bivaluadas. En la Sección 6.2 se considera una aplicación del formalismo desarrollado en la Sección 4.1, para el caso particular en que la región 2 está dividida en dos zonas. De esta manera, la estructura forma una especie de cuña de perfil arbitrario.

6.1 Estructuras bivaluadas

Se considera una estructura como la de la Figura 6.1, que contiene un número finito de cavidades de perfil bivaluado sobre una superficie perfectamente conductora.

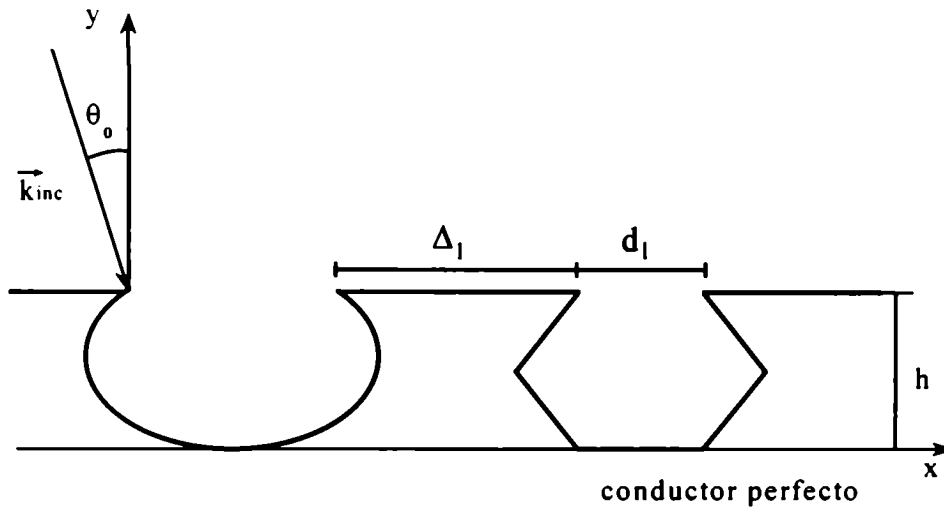


Figura 6.1: Superficie con cavidades de perfil bivaluado.

Los surcos se numeran de 1 a L mediante el supraíndice l , y tienen profundidad h y ancho d_l en el tope de la superficie. La separación entre cavidades contiguas es Δ_l . Para cada uno de los perfiles que se consideren, hay que dar además un conjunto de parámetros geométricos que lo caracterizan. La estructura es iluminada desde el vacío por un haz Gaussiano de longitud de onda λ y ancho espacial w , que forma un ángulo θ_0 con el eje y . Tanto las expresiones para los campos en la región 1 como en la región 2 son las mismas que las utilizadas en la Sección 3.2 (ecs. 3.22, 3.25, 3.27 y 3.28).

La región 2 es dividida en dos zonas monovaluadas, que denominaremos zonas 1 y 2, cuyas alturas son h_1 y h_2 respectivamente. La zona 1 se subdivide en M_1 capas de alturas h_{1j}^l y la zona 2 se subdivide en M_2 capas de alturas h_{2j}^l (j denota la capa), dando un total de $M = M_1 + M_2$ capas, como se muestra en la Figura 6.2. Luego, la capa j -ésima del surco l -ésimo está limitada por las interfaces horizontales y_{j-1}^l y y_j^l y las interfaces verticales en x_j^l y en $x_j^l + c_j^l$.

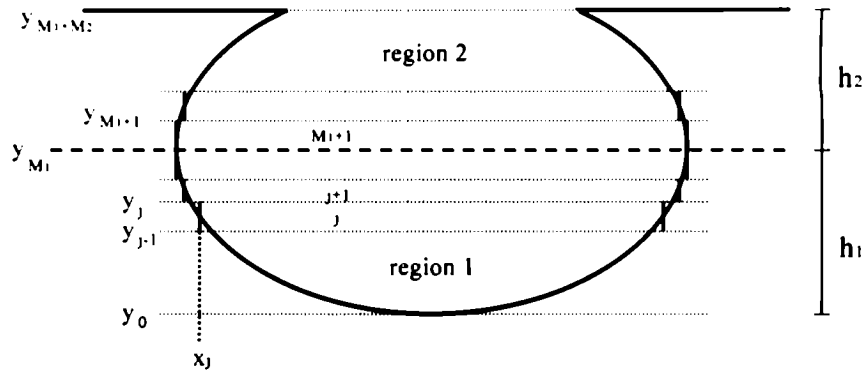


Figura 6.2: Aproximación del perfil mediante capas rectangulares.

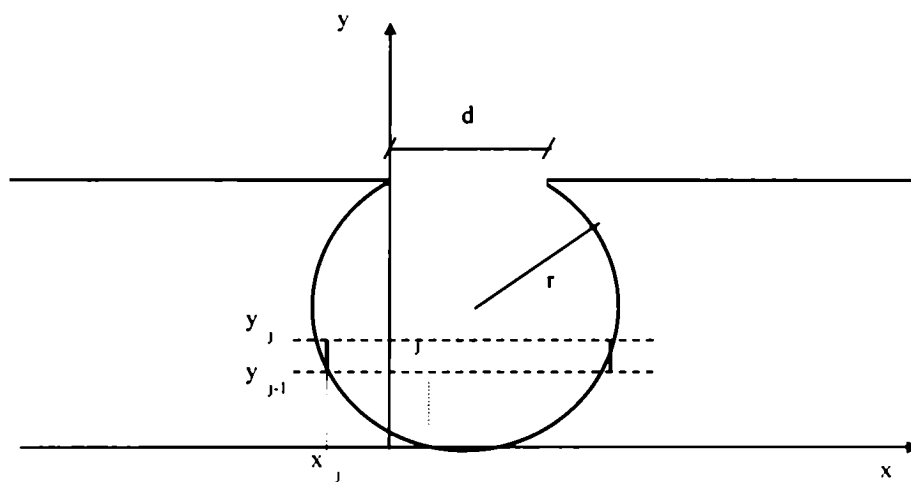


Figura 6.3: Perfil circular.

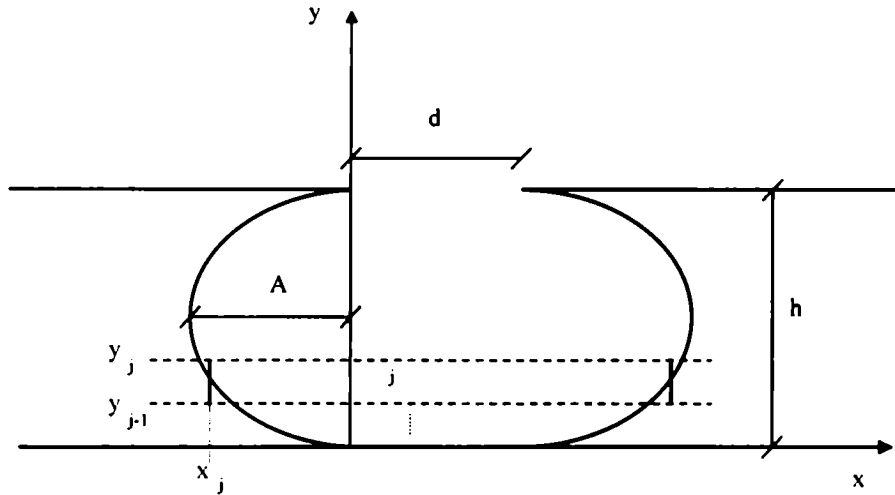


Figura 6.4: Perfil elíptico.

Por ejemplo, para un único surco circular se tiene (ver Fig. 6.3):

$$x_j = -\sqrt{r^2 - \left[\frac{y_j + y_{j-1}}{2} - r\right]^2} + \frac{d}{2}, \quad (6.1)$$

donde r es el radio del círculo. Otro tipo de perfil considerado aquí es el elíptico, esquematizado en la Figura 6.4.

Para dicho perfil se tiene:

$$x_j = -A \sqrt{1 - \left[\frac{y_j + y_{j-1} - h}{h}\right]^2}, \quad (6.2)$$

donde A es el semieje de la elipse en la dirección \hat{x} .

Si se tiene un surco hexagonal (Fig. 6.5), deben definirse los x_j mediante una función partida:

$$x_j = \begin{cases} -(y_j + y_{j-1}) \tan(\gamma_0)/2 & \text{para la zona 1} \\ [(y_j + y_{j-1})/2 - h] \tan(\gamma_0) & \text{para la zona 2} \end{cases} \quad (6.3)$$

donde γ_0 es el ángulo entre el lado del hexágono y el eje vertical.

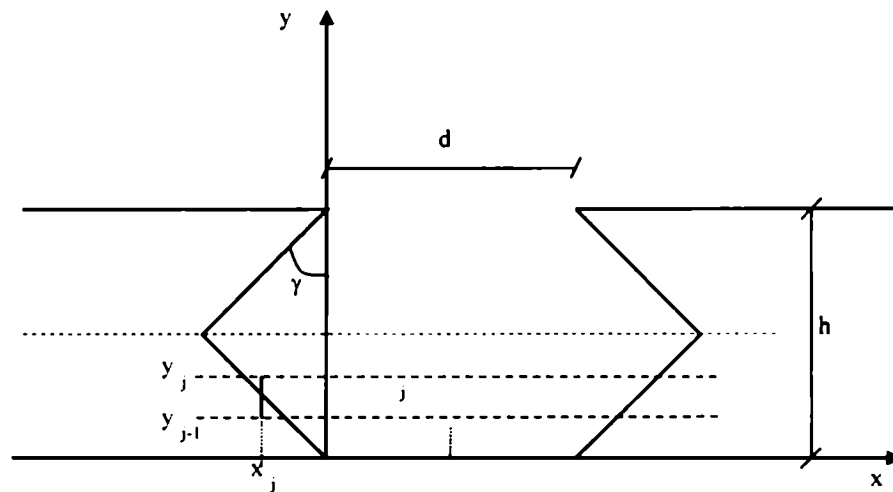


Figura 6.5: Perfil hexagonal.

En la región de los surcos, los campos se describen mediante desarrollos modales en cada capa, tal como se hizo en la Sección 3.2, y las expresiones de dichas funciones están dadas en (3.27) y (3.28). Con las expresiones de los campos en todo el espacio, se imponen las condiciones de contorno en las interfases horizontales, ya que el cumplimiento de las condiciones de contorno en las interfases verticales está garantizado por la definición de las autofunciones de cada capa. El empalme en las interfases inferior ($y = 0$) y superior ($y = h$) es análogo al descrito en la Sección 3.2. Sin embargo, el proceso de propagación de los campos dentro de cada cavidad presenta algunas diferencias originadas por la característica bivaluada del perfil. Debido a esto, este proceso es detallado a continuación. Se considera en primer lugar la zona inferior, es decir, la zona 1.

Debe imponerse la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico a lo largo de cada interfase y_j , $j = 1, \dots, M_1$. Esta ecuación se proyecta en la base de funciones

modales $\{X_{m,j+1}^\gamma(x)\}$, y resulta:

$$\sum_{m=0}^{\infty} A2_{m',m}^{\gamma j} \mathcal{E}_{m,j}^\gamma(y_j) = \mathcal{E}_{m',j+1}^\gamma(y_j) , \quad (6.4)$$

donde

$$A2_{m,m'}^{sj} = \frac{2}{c_{j+1}} \int_{x_j}^{x_j+c_j} \sin \left[\frac{m'\pi}{c_j}(x-x_j) \right] \sin \left[\frac{m\pi}{c_{j+1}}(x-x_{j+1}) \right] dx , \quad (6.5)$$

$$A2_{m,m'}^{pj} = \frac{1}{C_{m,j+1}^p} \int_{x_j}^{x_j+c_j} \cos \left[\frac{m'\pi}{c_j}(x-x_j) \right] \cos \left[\frac{m\pi}{c_{j+1}}(x-x_{j+1}) \right] dx , \quad (6.6)$$

$C_{m,j}^p$ está definido en (3.39) y $\mathcal{E}_{m,j}^\gamma(y)$ representa a la parte dependiente de y de la componente tangencial del campo eléctrico, es decir, $Y_{m,j}^s(y)$ para polarización s y $\chi_{m,j}^p(y)$ para polarización p . La continuidad de la componente tangencial del campo magnético y su posterior proyección en la base $\{X_{m,j}^\gamma(x)\}$ resulta:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{m,j}^\gamma}{C_{m',j+1}^\gamma} (A2^{\gamma j})_{m,m'}^{-1} \mathcal{H}_{m,j}^\gamma(y_j) = \mathcal{H}_{m',j+1}^\gamma(y_j) , \quad (6.7)$$

donde $C_{m,j}^s = c_j$, y $\mathcal{H}_{m,j}^\gamma(y)$ representa a la parte dependiente de y del campo magnético, es decir, $\chi_{m,j}^s(y)$ para polarización s y $Y_{m,j}^p(y)$ para polarización p .

En la zona superior, es decir, la zona 2, la continuidad de la componente tangencial del campo eléctrico en y_j , $j = M_1 + 1, \dots, M_1 + M_2$ se proyecta en la base $\{X_{m,j}^\gamma(x)\}$ dando:

$$\sum_{m=0}^{\infty} (A1^{\gamma j})_{m,m'}^{-1} \mathcal{E}_{m,j}^\gamma(y_j) = \mathcal{E}_{m',j+1}^\gamma(y_j) , \quad (6.8)$$

donde

$$A1_{m,m'}^{sj} = \frac{2}{c_j} \int_{x_{j+1}}^{x_{j+1}+c_{j+1}} \sin \left[\frac{m\pi}{c_{j+1}}(x-x_{j+1}) \right] \sin \left[\frac{m'\pi}{c_j}(x-x_j) \right] dx , \quad (6.9)$$

y

$$A1_{m,m'}^{pj} = \frac{2}{C_{m',j}^p} \int_{x_{j+1}}^{x_{j+1}+c_{j+1}} \cos \left[\frac{m'\pi}{c_j}(x-x_j) \right] \cos \left[\frac{m\pi}{c_{j+1}}(x-x_{j+1}) \right] dx . \quad (6.10)$$

La continuidad de la componente tangencial del campo magnético se proyecta en la base $\{X_{m,j+1}^\gamma(x)\}$. La ecuación obtenida es la siguiente:

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{m,j}^\gamma}{C_{m',j+1}^\gamma} A1_{m',m}^{\gamma j} \mathcal{H}_{m,j}^\gamma(y_j) = \mathcal{H}_{m',j+1}^\gamma(y_j) . \quad (6.11)$$

Habiendo hecho la distinción entre ambas zonas, el tratamiento subsiguiente se unifica, de manera tal de llevar las ecuaciones de empalme proyectadas a una forma matricial del tipo (3.42), a partir de la cual se aplica el algoritmo de propagación de la Matriz R en su forma habitual, como ha sido explicado en la Sección 3.2.

A continuación se presentan algunos ejemplos ilustrativos de este tipo de estructuras, en los cuales se evidencia la influencia de la concavidad de los surcos en los patrones de difracción. El número de modos NM necesario para obtener resultados precisos es en todos los casos menor que 30. Este hecho es crucial para garantizar que el proceso de propagación, que involucra inversiones de matrices de $NM \times NM$, no demande demasiado tiempo de cómputo. Esto es muy importante porque para mejorar la representación del verdadero perfil debe aumentarse el número total de capas $M_1 + M_2$, y como consecuencia, el número de matrices que deben invertirse. En los gráficos presentados se considera $M_1 = M_2 = 10$, lo cual es suficiente para apreciar los efectos provocados por la concavidad del surco. La conservación de la energía se satisface en forma exacta teniendo en cuenta la precisión de la computadora. En las figuras 6.6-6.9 se grafica la intensidad reflejada en función de $\alpha/k = \sin \theta$, siendo θ el ángulo de observación. Cabe recordar que las figuras no incluyen el campo reflejado especularmente por la superficie plana, término que se separó en la expresión del campo reflejado (3.22).

En la Figura 6.6 se comparan curvas para una estructura con un único surco, para dos geometrías diferentes: rectangular (que es un caso límite de superficies multivaluadas) y elíptico con $A/d=0.088$ (ver Fig. 6.4). La luz incidente es de polarización s y los demás parámetros son: $h/d = 1$, $\lambda/d = 0.5$, $w/d = 10$ y $\theta_0 = 0^\circ$. Se observan notables diferencias entre los patrones, a pesar de que los perfiles no difieren mucho entre sí para este valor de A/d . Este efecto se intensifica al aumentar la concavidad del surco, como se observa en las Figuras 6.7 y 6.8. En la Figura 6.7 se muestran curvas correspondientes a tres cavidades elípticas. Se observan dos importantes picos, uno a cada lado del máximo central. Estas intensificaciones parecen estar relacionadas con un efecto de interferencia entre los dos huecos elípticos que contiene la cavidad. A medida que el semieje de la

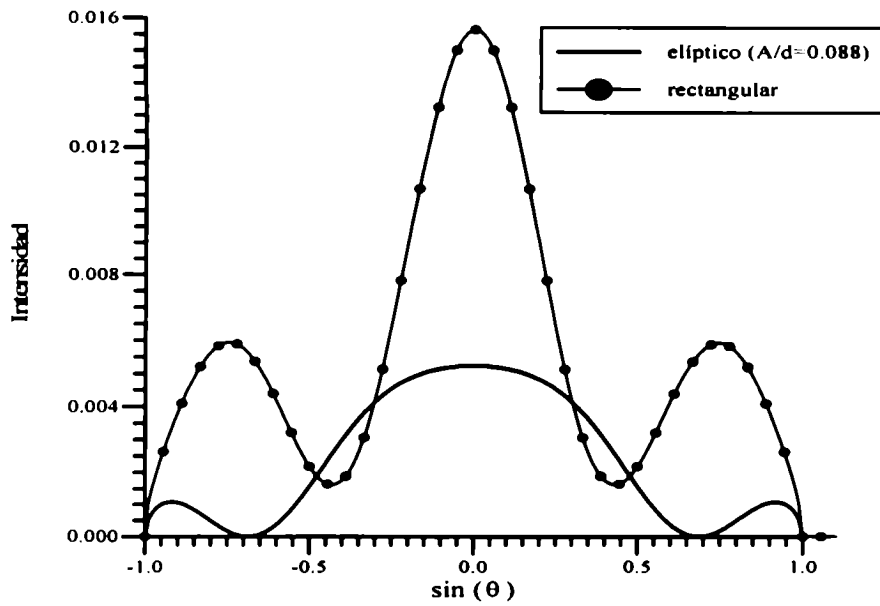


Figura 6.6: Intensidad vs. $\sin(\theta)$ para una superficie con un surco de dos perfiles diferentes con $h/d = 1$, $\lambda/d = 0.5$, $w/d = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$ y polarización s .

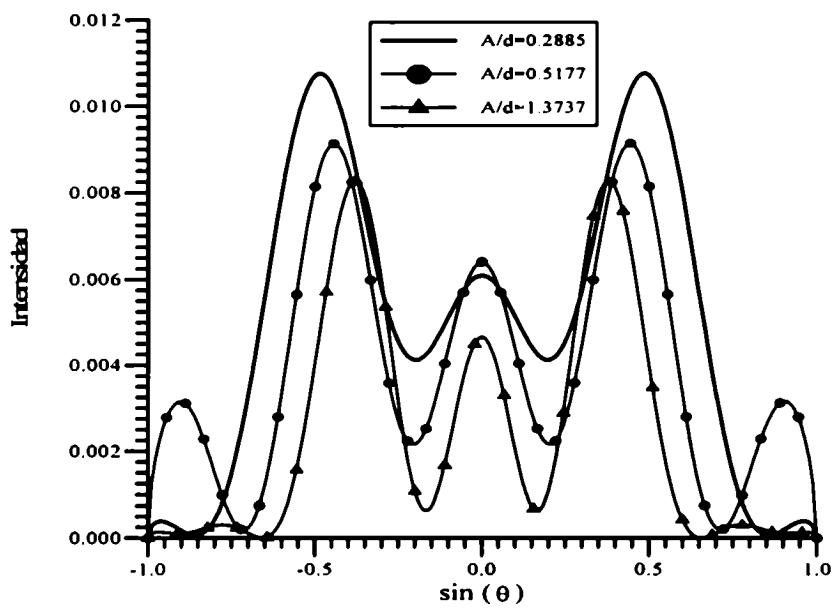


Figura 6.7: Intensidad vs. $\sin(\theta)$ para una superficie con un surco elíptico con $h/d = 1$, $\lambda/d = 0.5$, $w/d = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$, polarización s , y para tres valores de A/d : 0.088, 0.5177 y 1.3737.

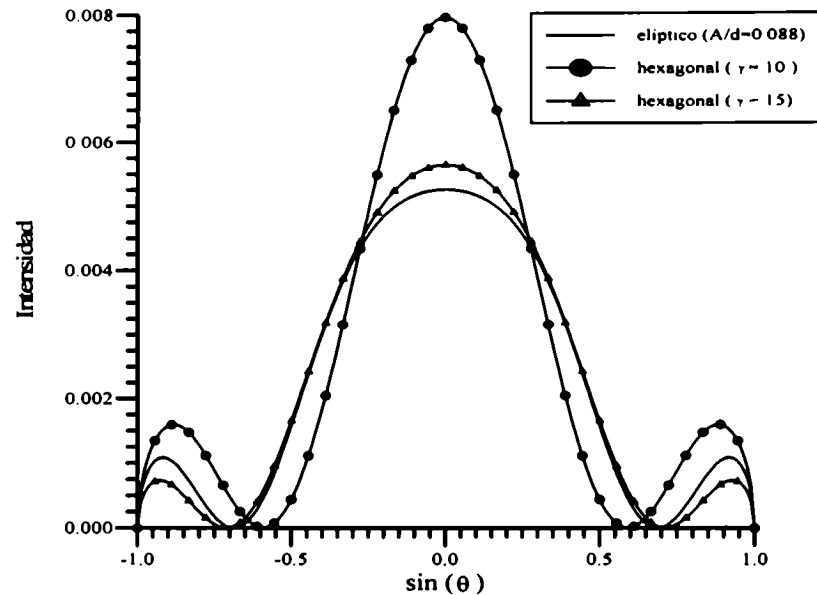


Figura 6.8: Intensidad vs. $\sin(\theta)$ para una superficie con un surco de dos perfiles diferentes con $h/d = 1$, $\lambda/d = 0.5$, $w/d = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$ y polarización s .

elipse (A) aumenta, es decir, al agrandar las distancias entre los huecos, los picos se van acercando entre sí, lo cual es consistente con las predicciones de la teoría escalar. En la Figura 6.8 se comparan curvas correspondientes a un surco elíptico con $A/d=0.088$ (línea llena), a un surco hexagonal de igual ancho máximo ($\gamma_0 = 10^\circ$, línea con círculos) y a un surco hexagonal de ancho mayor ($\gamma_0 = 15^\circ$, línea con triángulos). Se observa que la curva que corresponde a la elipse se asemeja a la del hexágono con mayor ancho máximo. Esto se puede deber a que la concavidad de una elipse es mayor que la de un hexágono de igual ancho máximo, y por lo tanto, el surco elíptico presenta un ancho efectivo mayor que el hexagonal. El mismo fenómeno se verifica para anchos mayores del surco.

El ejemplo de la Figura 6.9 ilustra el patrón de difracción para una superficie con dos surcos hexagonales de $h/d = 1$ y para dos valores de γ_0 : 5° y 45° . El haz de polarización s incide normalmente y tiene longitud de onda $\lambda/d = 0.5$ y ancho $w/d = 10$. La distancia entre surcos en la superficie superior es $\Delta_2/d = 1$, y el haz está centrado en $x_0 = \Delta_2/2$, es

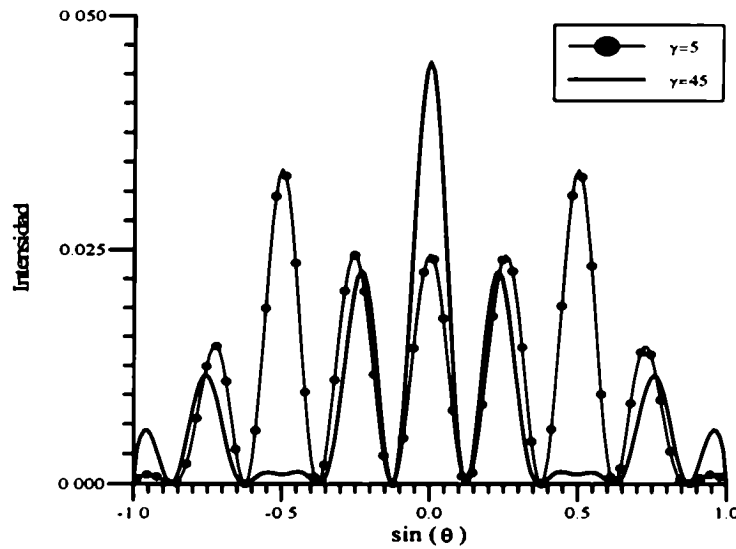


Figura 6.9: Intensidad vs. $\sin(\theta)$ para una superficie con dos surcos hexagonales de $h/d = 1$, $\lambda/d = 0.5$, $w/d = 10$, $\theta_0 = 0^\circ$, $\Delta_2/d = 1$ y polarización s , para dos valores de γ_0 : 5° y 45° .

decir, en el eje de simetría de la estructura. Se observa que los máximos están ubicados en las posiciones que predice la óptica física para los máximos de interferencia. Si bien las intensidades relativas varían con γ_0 , el ancho de los picos se mantiene, mostrando que en una estructura de dos surcos los efectos de interferencia prevalecen frente a los de difracción en cada surco.

6.2 Cuñas dieléctricas

Otra de las aplicaciones del método desarrollado en esta Tesis es el cálculo de los campos para estructuras inhomogéneas transparentes, como es el caso de una cuña de vidrio en aire. Por otra parte, es posible estudiar los cambios que se producen en el patrón de difracción cuando el perfil de la interfase se varía levemente, lo cual podría utilizarse para la determinación de imperfecciones en superficies. El formalismo matemático correspondiente a este caso está descrito en el Capítulo 4. La única diferencia reside en la ecuación de autovalores, que para una capa de dos zonas se escribe:

$$\frac{1}{u_{m,1,j}^s} \cos(u_{m,2,j}^s \Delta 2_j) \sin(u_{m,1,j}^s \Delta 1_j) + \frac{1}{u_{m,2,j}^s} \sin(u_{m,2,j}^s \Delta 2_j) \cos(u_{m,1,j}^s \Delta 1_j) = 0 \quad , \quad (6.12)$$

para polarización s , y

$$\frac{u_{m,2,j}^p}{\epsilon_2} \sin(u_{m,2,j}^p \Delta 2_j) \cos(u_{m,1,j}^p \Delta 1_j) + \frac{u_{m,1,j}^p}{\epsilon_1} \cos(u_{m,2,j}^p \Delta 2_j) \sin(u_{m,1,j}^p \Delta 1_j) = 0 \quad , \quad (6.13)$$

para polarización p , donde $\Delta 1_j$ y $\Delta 2_j$ son los anchos de las zonas de índices ν_1 y ν_2 respectivamente, en la capa j -ésima.

Como es de esperar, para el caso de una estructura asimétrica como las que se utilizan en los ejemplos de esta Sección, la figura de difracción tampoco exhibe simetría. Por lo tanto, además de los controles descritos en la Sección 3.4.1, se verificó en este caso que si la estructura se hace homogénea, es decir, $\nu_1 = \nu_2$, se obtienen curvas simétricas correspondientes a una cavidad dieléctrica rectangular en una pantalla perfectamente conductora.

En la Figura 6.10 se muestra la intensidad transmitida por una estructura en forma de cuña como la de la Figura 5.10 en función del ángulo de transmisión θ_t , para un haz incidente de polarización p de ancho espacial $w/\lambda = 20$. Se verificó que para este ejemplo ($h/\lambda = 1$ y $c/\lambda = 0.8$), no hay diferencias importantes entre los resultados obtenidos al variar el número de capas con que se describe el perfil entre 10 y 40, lo cual implica que la forma de la interfase está bien descrita con un número relativamente pequeño de capas. Las curvas correspondientes a otros valores de c no son muy diferentes entre sí, por lo cual no se muestran. En la Figura 6.11 se grafica el caso de polarización s , para tres valores diferentes del ancho de la cuña c .

En la Figura 6.12 se grafica la intensidad transmitida por la estructura considerada en los ejemplos anteriores, para dos ángulos de incidencia.

Se puede observar que para $\theta_0 = 30^0$, el máximo de la curva está ubicado exactamente en la dirección de incidencia, es decir, en $\theta_t = 30^0$. Esto se debe a que para dicho ángulo

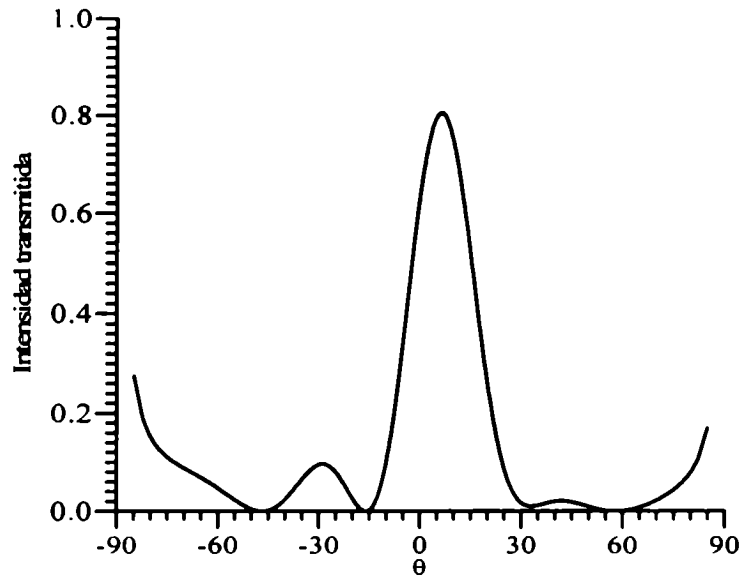


Figura 6.10: Intensidad transmitida vs. θ_t para la estructura de la Figura 5.10 aproximada por 40 capas. El haz incidente tiene polarización p , $w/\lambda = 20$ y $\theta_0 = 0$. $L/\lambda = 2.4$, $h/\lambda = 1$, $c/\lambda = 0.8$, $\nu_1 = 1.3$, $\nu_2 = 1.5$ y $\nu_r = \nu_t = 1$.

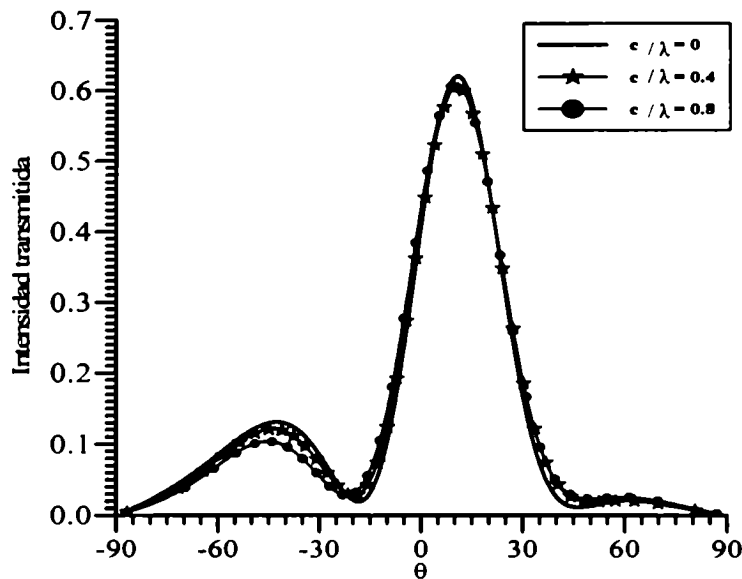


Figura 6.11: Intensidad transmitida vs. θ_t para la estructura de la Figura 5.10 aproximada por 40 capas y para tres valores de c . El haz incidente tiene polarización s , $w/\lambda = 20$ y $\theta_0 = 0$. $L/\lambda = 2.4$, $h/\lambda = 1$, $\nu_1 = 1.3$, $\nu_2 = 1.5$ y $\nu_r = \nu_t = 1$.

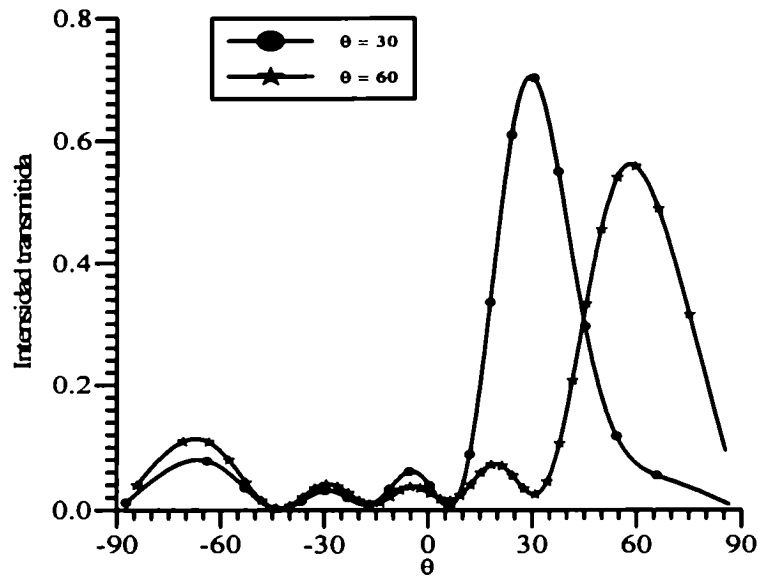


Figura 6.12: Intensidad transmitida vs. θ_t para la estructura de la Figura 5.10 aproximada por 40 capas y para dos ángulos de incidencia. El haz incidente tiene polarización s , $w/\lambda = 20$ y $\theta_0 = 0$. $L/\lambda = 2.4$, $h/\lambda = 1$, $c/\lambda = 0.4$, $\nu_1 = 1.3$, $\nu_2 = 1.5$ y $\nu_r = \nu_t = 1$.

las únicas contribuciones son las de los rayos que atraviesan la estructura sin pasar por la interfase entre las zonas 1 y 2 (los rayos que inciden en la misma se reflejan en la cara de abajo por reflexión total). Para $\theta_0 = 60^\circ$, el pico está en un ángulo θ_t un poco menor que 60° , ya que en este caso sólo hay contribuciones adicionales provenientes de la reflexión en la cara izquierda de la interfase, que salen con un ángulo de 49.22° .

En la Figura 6.13 se muestra una familia de curvas aproximadas a las generadas mediante funciones exponenciales, que corresponden a perfiles de la interfase utilizados en los ejemplos siguientes. Se observa que para los perfiles 1 y 2 aparecen pequeñas diferencias que se muestran en la Figura 6.14, mientras que para los perfiles 4 y 5, las curvas de intensidad se asemejan a las obtenidas para el perfil recto (3) (ver Fig.6.15) .

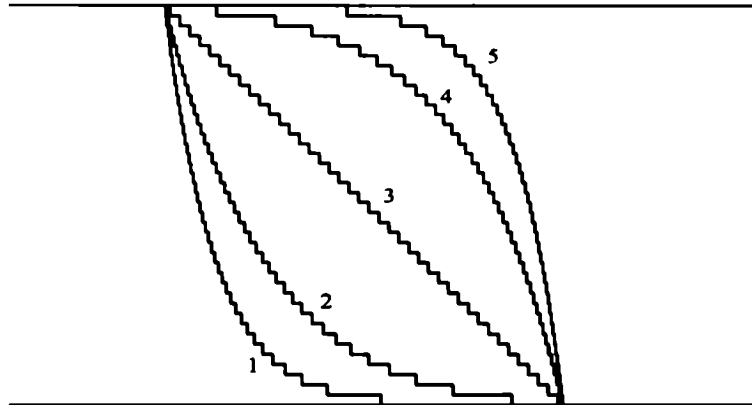


Figura 6.13: Aproximación de los perfiles exponenciales utilizados en las Figuras 6.14-6.15. mediante 40 capas.

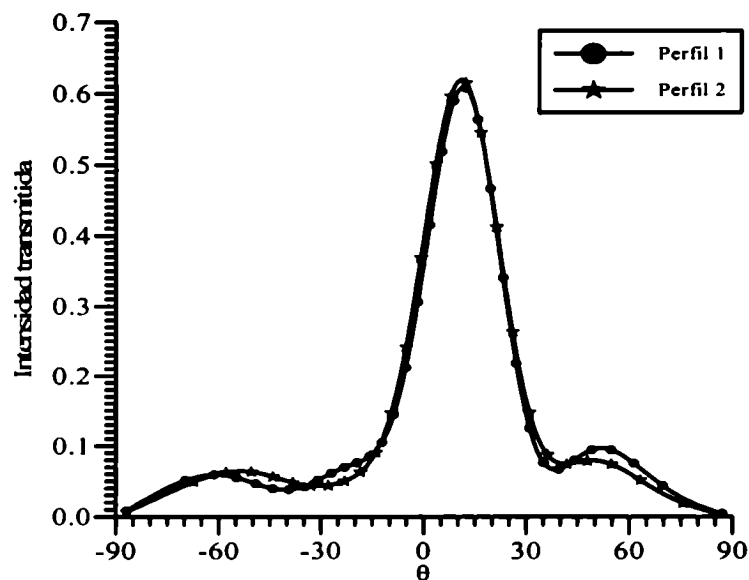


Figura 6.14: Intensidad transmitida vs. θ_t para los perfiles 1 y 2 de la estructura de la Figura 6.13. El haz incidente tiene polarización s , $w/\lambda = 20$ y $\theta_0 = 0$. $L/\lambda = 2.4$, $h/\lambda = 1$, $c/\lambda = 0.8$, $\nu_1 = 1.3$, $\nu_2 = 1.5$ y $\nu_r = \nu_t = 1$.

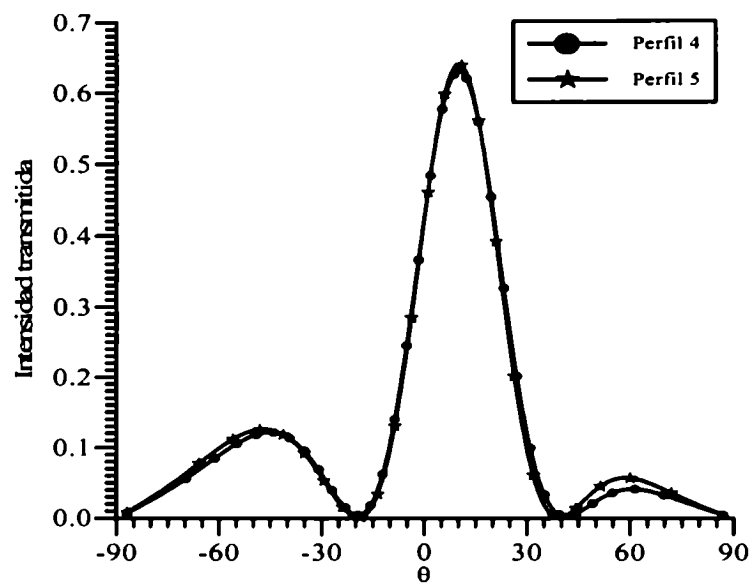


Figura 6.15: Intensidad transmitida vs. θ_t para los perfiles 4 y 5 de la estructura de la Figura 6.13. El haz incidente tiene polarización s , $w/\lambda = 20$ y $\theta_0 = 0$. $L/\lambda = 2.4$, $h/\lambda = 1$, $c/\lambda = 0.8$, $\nu_1 = 1.3$, $\nu_2 = 1.5$ y $\nu_r = \nu_t = 1$.



Capítulo 7

Conclusiones

En esta tesis se presentó el método modal para el estudio del scattering de ondas electromagnéticas por superficies corrugadas no periódicas. El formalismo desarrollado constituye la primera aplicación del método modal al caso de estructuras con corrugados localizados. El Método Modal de Multicapas es un método riguroso, y permite el estudio de superficies de muy variados tipos. La aproximación de multicapas permite el tratamiento de cavidades con perfiles arbitrarios, y el algoritmo de la Matriz R constituye una herramienta útil y eficaz para la propagación de los campos, aún para estructuras de gran profundidad.

Se estudiaron superficies metálicas con un número finito de surcos, donde se consideró el caso ideal de un conductor perfecto, como así también el caso de un metal real. En un comienzo se realizó el tratamiento de cavidades rectangulares, que ha servido como base para el estudio de surcos de perfil arbitrario. Se detallaron los controles realizados para convalidar el método, y se ilustraron algunos fenómenos interesantes como la excitación de ondas superficiales de polarización p . También la herramienta desarrollada ha permitido obtener nuevos resultados, como la confirmación de la intensificación en la dirección antiespecular relacionada con fenómeno conocido para redes infinitas.

Se presentó la aplicación del Método Modal de Multicapas al caso de estructuras dieléctricas ideales, que consisten en una apertura de índice de refracción constante de a trozos, dentro de una pantalla perfectamente conductora. Estas estructuras introducen

en el formalismo una ecuación trascendente que debe resolverse numéricamente. Por consiguiente, se implementó un algoritmo numérico adecuado para las funciones en cuestión. Los resultados obtenidos confirman la validez del método presentado y sugieren la variedad de estructuras a las cuales se puede aplicar.

También se consideraron materiales absorbentes, es decir, con índice de refracción complejo. En este caso se hizo un estudio de la evolución de los autovalores para diferentes casos. Se realizaron cálculos de la potencia absorbida, reflejada y transmitida por la estructura, como también algunas curvas que ilustran el método para estructuras de dos zonas dieléctricas.

Una de las aplicaciones presentada es la correspondiente a estructuras de perfil multivaluado. El método modal ha demostrado ser eficaz y rápido para el cálculo de los campos reflejados por superficies con surcos de perfil bivaluado, y los resultados obtenidos evidencian el efecto producido por la concavidad de los surcos en el campo reflejado.

En conclusión, el método desarrollado en esta Tesis constituye la primera aplicación de un método modal para el estudio de estructuras con corrugados localizados, y proporciona una herramienta útil y eficaz para el estudio sistemático de fenómenos físicos que tienen lugar en este tipo de estructuras. Por lo tanto, una de las futuras líneas de investigación se orienta en este sentido. En particular, el estudio de los campos cercanos presentan particular interés en la actualidad debido a recientes desarrollos de nuevas técnicas de microscopía conocidas como óptica de campo cercano (NFO en la literatura inglesa).

Otra de las posibilidades que surge a partir del trabajo realizado es la de extender el Método Modal de Multicapas al caso de superficies con corrugados en dos direcciones (bidimensionales). Esto permitiría el estudio sistemático de la existencia de fenómenos como la intensificación o la propagación de ondas superficiales en este tipo de estructuras, lo cual no ha sido realizado aún y es de sumo interés en la actualidad. Por ejemplo, podría estudiarse la dispersión de la luz por una superficie plana con protuberancias. Siguiendo dentro de esta línea, se aspira también a desarrollar un método útil para el cálculo de los campos dispersados por objetos tridimensionales.

Apéndice A

Se detalla aquí el proceso de empalme de los campos en la superficie superior para una superficie metálica con un número finito de surcos, considerada en la Sección 3.3, polarización p .

La continuidad del campo magnético en el intervalo $[x_M^l, x_M^l + c_M^l]$ se escribe:

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_{m,M}^{pl}(x) Y_{m,M}^{pl}(y_M) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} [\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^p(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] d\alpha \quad (7.1)$$

La ecuación (7.1) se proyecta en la base de funciones modales, y resulta:

$$F_{m,M}^{pl} Y_{m,M}^{pl}(y_M) = \int_{-\infty}^{\infty} [\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^p(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] K_m^{pl}(\alpha) d\alpha \quad (7.2)$$

donde $F_{m,M}^{pl}$ y $K_m^{pl}(\alpha)$ están definidos por las ecuaciones (3.99) y (3.123) respectivamente.

La condición de contorno de la impedancia superficial se escribe:

$$i \int_{-\infty}^{\infty} \beta_1 e^{i\alpha x} [-\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^p(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] d\alpha = \begin{cases} \sum_{m=1}^{\infty} X_{m,M}^{pl}(x) v_{m,M}^{pl} \chi_m^{pl}(y_M) & \text{para } x_M^l < x < x_M^l + c_M^l \\ \eta^p \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} [\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^p(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] d\alpha & \text{para } x \text{ sobre la superficie metálica} \end{cases} \quad (7.3)$$

que proyectada en la base de funciones $\{e^{i\alpha x}\}$ resulta:

$$\sum_{l=1}^L \sum_{m=1}^{\infty} \chi_m^{pl}(y_M) v_{m,M}^{pl} J_m^{pl}(\alpha') + \eta^p 2\pi [-\mathcal{A}(\alpha') e^{-i\beta_1' y_M} + \mathcal{R}^p(\alpha') e^{i\beta_1' y_M}] - \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha [-\mathcal{A}(\alpha) e^{-i\beta_1 y_M} + \mathcal{R}^p(\alpha) e^{i\beta_1 y_M}] \mathbf{S}(\alpha, \alpha') = 2\pi i \beta_1' [-\mathcal{A}(\alpha') e^{-i\beta_1' y_M} + \mathcal{R}^p(\alpha') e^{i\beta_1' y_M}] \quad (7.4)$$

donde $J_m^{pl}(\alpha)$ está definido en (3.119) intercambiando el supraíndice s por p , y $\mathbf{S}(\alpha, \alpha')$ en (3.120).

Reemplazando la ec. (7.2) en (7.4), y utilizando la relación (3.114) entre las amplitudes modales de la capa superior, se obtiene una ecuación, en la cual se discretizan las integrales, para transformarla en una ecuación matricial para las amplitudes de Rayleigh:

$$\sum_{j=1}^{\infty} M_{i,j}^p \mathcal{R}_j^p = V_i^p \quad (7.5)$$

donde

$$\begin{aligned} M_{i,j}^p = & \Delta\alpha e^{i\beta_{1,j}y_M} \left\{ \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{pl}(\alpha_j) \sum_{m=1}^{\infty} J_{m,l}^p(\alpha_i) v_{m,M}^{pl} \right. \\ & \sum_{k=1}^{\infty} [(\mathbf{A}^p)^{-1} \mathbf{B}^p]_{m,k} \sin(v_{m,M}^{pl} y_M) + \cos(v_{m,M}^{pl} y_M) \delta_{mk}] (\mathbf{T}_{k,n}^l)^{-1} - \eta^p \mathbf{S}(\alpha_j, \alpha_i) \left. \right\} + \\ & 2\pi e^{i\beta_{1,j}y_M} (\eta^p - \beta_{1,i} i) \delta_{ij} , \end{aligned} \quad (7.6)$$

$$\begin{aligned} V_i^p = & -\Delta\alpha \sum_{j=1}^{\infty} \mathcal{A}_j e^{-i\beta_{1,j}y_M} \left\{ \sum_{l=1}^L \sum_{n=1}^{\infty} K_n^{pl}(\alpha_j) \sum_{m=1}^{\infty} J_{m,l}^p(\alpha_i) v_{m,M}^{pl} \right. \\ & \sum_{k=1}^{\infty} [(\mathbf{A}^p)^{-1} \mathbf{B}^p]_{m,k} \sin(v_{m,M}^{pl} y_M) + \cos(v_{m,M}^{pl} y_M) \delta_{mk}] (\mathbf{T}_{k,n}^l)^{-1} - \eta^p \mathbf{S}(\alpha_j, \alpha_i) \left. \right\} + \\ & 2\pi e^{-i\beta_{1,j}y_M} \mathcal{A}_i (\eta^p - \beta_{1,i} i) , \end{aligned} \quad (7.7)$$

$$\mathbf{T}_{k,n}^l = F_{k,M}^{pl} [-((\mathbf{A}^p)^{-1} \mathbf{B}^p)_{k,n} \cos(v_{k,M}^{pl} y_M) + \sin(v_{k,M}^{pl} y_M) \delta_{k,n}] . \quad (7.8)$$

La matriz M^p debe invertirse para hallar las amplitudes de Rayleigh, y así poder conocer los campos reflejados.

Bibliografía

- [1] R. Petit, "Electromagnetic theory of gratings", Springer-Verlag New York, 1980.
- [2] K. K. Mei and J. G. van Bladel, "Scattering by perfectly-conducting rectangular cylinders", IEEE Trans. Antennas Propag. 11, 185-192 (1963).
- [3] D. Maystre, "Electromagnetic scattering from perfectly conducting rough surfaces in resonance region", IEEE Trans. Antennas Propag. 31, 885-894 (1983).
- [4] D. Maystre, "Rigorous theory of light scattering from rough surfaces", J. Optics (Paris) 15, 43-51 (1984).
- [5] A. A. Maradudin, T. Michel, A. McGurn and E. R. Méndez, "Enhanced backscattering from a random grating", Ann. Phys. 203, 255-307 (1990).
- [6] J. M. Soto-Crespo and M. Nieto-Vesperinas, "Electromagnetic scattering from very rough random surfaces and deep reflection gratings", J. Opt. Soc. Am. A6, 367-384 (1989).
- [7] T. C. Rao and R. Barakat, "Plane wave scattering by a conducting cylinder partially buried in a ground plane 1: TM case", J. Opt. Soc. Am. A6, 1270-1280 (1989).
- [8] T. C. Rao and R. Barakat, "Plane wave scattering by a conducting cylinder partially buried in a ground plane 2: TE case", J. Opt. Soc. Am. A8, 1986-1990 (1991).
- [9] K. Barkeshli and J. L. Volakis, "TE Scattering by a two-dimensional groove in a ground plane using higher order boundary conditions", IEEE Trans. Antennas Propag. 38, 1421-1428 (1990).

- [10] S. -K. Jeng. "Scattering from a cavity-backed slit in a ground plane-TE case", IEEE Trans. Antennas Propag. 38, 1529-1532 (1990).
- [11] T.-M. Wang and H. Ling, "A connection algorithm on the problem of EM scattering from arbitrary cavities", J. EM Waves and Applics. 5, 301-314 (1991).
- [12] T. B. Hansen and A. D. Yaghjian, "Low-frequency scattering from two-dimensional perfect conductors", IEEE Trans. Antennas Propag. 40, 1389-1402 (1992).
- [13] A. Benali, J. Chandezon and J. Fontaine, "A new theory for scattering of electromagnetic waves from conducting or dielectric rough surfaces", IEEE Trans. Antennas Propag. 40, 141-148 (1992).
- [14] Y. -L. Kok, "Boundary value solution to electromagnetic scattering by a rectangular groove in a ground plane", J. Opt. Soc. Am. A9, 302-311 (1992).
- [15] Y. -L. Kok, "General solution to the multiple-metallic-grooves scattering problem: the fast-polarization case", Appl. Opt. 32, 2573-2581 (1993).
- [16] T. J. Park, H. J. Eom and K. Yoshitomi, "Analysis of TM scattering from finite rectangular grooves in a conducting plane", J. Opt. Soc. Am A10, 905-911 (1993).
- [17] R. A. Depine and D. C. Skigin, "Scattering from metallic surfaces having a finite number of rectangular grooves", J. Opt. Soc. Am. A11, 2844-2850 (1994).
- [18] ver referencias [50]-[52], o consultar sobre el Proyecto AXAF (Advanced X-ray Astrophysics Facility) en la página de Web: <http://www.rosat.mpe-garching.mpg.de/axaf>
- [19] J. R. Andrewartha, J. R. Fox and I. J. Wilson, "Resonance anomalies in the lamellar grating", Optica Acta 26, 69-89 (1977).
- [20] L. C. Botten, M. S. Craig, R. C. McPhedran, J. L. Adams and J. R. Andrewartha, "The dielectric lamellar grating", Optica Acta 28, 413-428 (1981).

- [21] L. C. Botten, M. S. Craig, R. C. McPhedran, J. L. Adams and J. R. Andrewartha. "The finitely conducting lamellar diffraction grating", *Optica Acta* 28, 1087-1102 (1981).
- [22] L. Li, "A modal analysis of lamellar diffraction gratings in conical mountings", *J. Mod. Opt.* 40, 553-573 (1993).
- [23] L. Li, "Multilayer modal method for diffraction gratings of arbitrary profile, depth and permittivity", *J. Opt. Soc. Am.* A10, 2581-2591 (1993).
- [24] D. C. Skigin and R. A. Depine, "Enhancement of antispecular orders from metallic gratings with rectangular grooves", *Optik* 101, 63-72 (1995).
- [25] S. T. Peng, T. Tamir and H. L. Bertoni, "Theory of periodic dielectric waveguides", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 23, 123-133 (1975).
- [26] J. Y. Suratteau, M. Cadilhac and R. Petit, "Sur la détermination numérique des efficacités de certains réseaux diélectriques profonds", *J. Optics (Paris)* 14, 273-288, (1983).
- [27] D. J. Zvijak and J. C. Light, "*R*-matrix theory for collinear chemical reactions", *Chem. Phys.* 12, 237-251 (1976).
- [28] J. C. Light and R. B. Walker, "An *R*-matrix approach to the solution of coupled equations for atom-molecule reactive scattering", *J. Chem. Phys.* 65, 4272-4282 (1976).
- [29] L. F. Desandre and J. M. Elson, "Extinction-theorem analysis of diffraction anomalies in overcoated gratings", *J. Opt. Soc. Am.* A8, 763-777 (1991).
- [30] L. Li, "Multilayer-coated diffraction gratings: differential method of Chandezon *et al.* revisited", *J. Opt. Soc. Am.* A11, 2816-2828 (1994).
- [31] L. Li, "Bremmer series, *R*-matrix propagation algorithm, and numerical modelling of diffraction gratings", *J. Opt. Soc. Am.* A11, 2829-2836 (1994).

- [32] F. Montiel and M. Nevière, "Differential theory of gratings: extension to deep gratings of arbitrary profile and permittivity through the R-matrix propagation algorithm". J. Opt. Soc. Am. A11, 3241-3250 (1994).
- [33] J. D. Jackson, *Electrodinámica Clásica*, Ed. Alhambra, Madrid, 1966.
- [34] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, New York: Macmillan, 1968.
- [35] L. C. Botten, M. S. Craig and R. C. McPhedran, "Highly conducting lamellar diffraction gratings", *Optica Acta* 28, 1103-1106 (1981).
- [36] L. C. Botten, M. S. Craig and R. C. McPhedran, "Complex zeros of analytic functions", *Computer Phys. Commun.* 29, 245-259 (1983).
- [37] D. Maystre and R. C. McPhedran, "Use of the reciprocity theorem for finite conductivity diffraction gratings: demonstration and applications", *Opt. Commun.* 12, 164-167 (1974)
- [38] G. Tayeb and R. Petit, "On the numerical study of deep conducting lamellar diffraction gratings", *Optica Acta* 31, 1361-1365 (1984).
- [39] D. C. Skigin and R. A. Depine, "R-matrix method for a surface with one groove of arbitrary profile", *Opt. Commun.* 130, 4-6, 307-316 (1996).
- [40] M. G. Moharam and T. K. Gaylord, "Diffraction analysis of dielectric surface-relief gratings", *J. Opt. Soc. Am.* 72, 1385-1392 (1982).
- [41] D. M. Pai and K. A. Awada, "Analysis of dielectric gratings of arbitrary profiles and thickness", *J. Opt. Soc. Am.* A8, 755-762 (1991).
- [42] L. M. Brekhovskikh, *Waves in Layered Media*, Academic, New York, 1960.
- [43] D. C. Skigin and R. A. Depine, "The R-matrix method applied to the SIBC for diffraction gratings of arbitrary profile", *Optik* (en prensa).

- [44] D. C. Skigin and R. A. Depine, "The multilayer modal method for electromagnetic scattering from surfaces with several arbitrarily shaped grooves", *J. Mod. Opt.* 44, 1023-1036 (1997).
- [45] R. A. Depine and D. C. Skigin, "Multilayer modal method for diffraction from dielectric inhomogeneous apertures", *J. Opt. Soc. Am. A* (Julio 1997, aceptado con pequeñas modificaciones).
- [46] D. C. Skigin and R. A. Depine, "Modal theory for diffraction from a dielectric aperture with arbitrarily shaped corrugations", *Opt. Commun.* (Mayo 1997, enviado).
- [47] D. C. Skigin and R. A. Depine, "Modal method for scattering by arbitrarily shaped multivalued surfaces", *J. Mod. Opt.* (Julio 1997, enviado)
- [48] R. A. Depine and D. C. Skigin, "Scattering by lossy inhomogeneous apertures: a multilayer approach", *J. Opt. Soc. Am. A* (Agosto 1997, enviado).
- [49] R. A. Depine, "Surface impedance boundary conditions used to study light scattering from metallic surfaces", in *Scattering in Volumes and Surfaces*, 239-253, M. Nieto-Vesperinas and J. C. Dainty, eds., North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [50] H. Lochbihler and R. A. Depine, "Diffraction from highly conducting wire gratings". *Appl. Opt.* 32, 3459-3465 (1993).
- [51] H. Lochbihler and R. A. Depine, "Characterization of highly conducting wire gratings using an electromagnetic theory of diffraction", *Opt. Commun.* 100, 231-239 (1993).
- [52] H. Lochbihler and R. A. Depine, "Diffraction from highly conducting wire gratings of arbitrary cross section", *J. Mod. Opt.* 48, 1273-1298 (1993).
- [53] R. A. Depine, "Scattering of a wave at a periodic boundary. Analytical expression for the surface impedance", *J. Opt. Soc. Am. A* 5, 507-510 (1988).
- [54] H. Raether, *Surface plasmons on smooth and rough surfaces and on gratings*, Heidelberg, Springer, 1988.

- [55] Y. Kuga and A. Ishimaru, "Retroreflectance from a dense distribution of spherical particles". *J. Opt. Soc. Am. A1*, 831-835 (1984).
- [56] E. R. Méndez and K. A. O'Donnell, "Observation of Depolarization and Backscattering enhancement in light scattering from gaussian rough surfaces", *Opt. Commun.* 61, 91-95 (1987).
- [57] J. M. Soto-Crespo and M. Nieto-Vesperinas, "Enhancement of all antispecular orders from deep gratings", *Opt. Commun.* 69, 185-188 (1989).
- [58] R. A. Depine and D. C. Skigin, "Antispecular effects in conical diffraction from deep reflection gratings", *J. Mod. Opt.* 43, 453-468 (1996).
- [59] D. Courjon and C. Bainer, "Near field microscopy and near field optics", *Rep. Prog. Phys.* 57, 989-1028 (1994).
- [60] M. Nieto-Vesperinas and J. M. Soto-Crespo, "Monte Carlo simulations for scattering of electromagnetic waves from perfectly conductive random surfaces", *Opt. Lett.* 12, 979-981 (1987).
- [61] D. T. Auckland and R. F. Harrington, "A non-modal formulation for electromagnetic transmission through a filled slot of arbitrary cross section in a thick conducting screen", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 28, 548-555 (1980).
- [62] O. M. Méndez, M. Cadilhac and R. Petit, "Diffraction of a two-dimensional electromagnetic beam wave by a thick slit pierced in a perfectly conducting screen", *J. Opt. Soc. Am.* 73, 328-331 (1983).
- [63] A. Roberts, "Electromagnetic theory of diffraction by a circular aperture in a thick, perfectly conducting screen", *J. Opt. Soc. Am. A4*, 1970-1983 (1987).
- [64] S. J. Bever and J. P. Allenbach, "Multiple scattering by a planar array of parallel dielectric cylinders", *Appl. Opt.* 31, 3524-3532 (1992).
- [65] K. Knop, "Rigorous diffraction theory for transmission gratings with deep rectangular grooves", *J. Opt. Soc. Am.* 68, 1206-1210 (1978).

- [66] P. Sheng, R. S. Stepleman and P. N. Sanda, "Exact eigenfunctions for square wave gratings: application to diffraction and surface-plasmon calculations", *Phys. Rev. B* 26, 2907-2916 (1982).
- [67] J. M. Miller, J. Turunen, E. Noponen, A. Vasara and M. R. Taghizadeh, "Rigorous modal theory for multiply grooved lamellar gratings", *Opt. Commun.* 111, 526-535 (1994).
- [68] R. H. Morf, "Exponentially convergent and numerically efficient solution of Maxwell's equations for lamellar gratings", *J. Opt. Soc. Am.* A12, 1043-1056 (1995).
- [69] M. Kuittinen and J. Turunen. "Exact-eigenmode model for index-modulated apertures", *J. Opt. Soc. Am.* A13, 2014-2020, (1996).
- [70] F. Moreno, F. González, J. M. Saiz, P. J. Valle and D. L. Jordan, "Experimental study of copolarized light scattering by spherical metallic particles in conducting flat substrates", *J. Opt. Soc. Am.* A10, 141-149 (1993).
- [71] P. J. Valle, F. González and F. Moreno, "Electromagnetic wave scattering from conducting cylindrical structures on flat surfaces: study by means of the extinction theorem", *Appl. Opt.* 33, 512-523 (1994).
- [72] A. Mendoza-Suárez and E. R. Méndez, "Light scattering by a reentrant fractal surface", *Appl. Opt.* 36, 3521-3531 (1997).
- [73] R. Carminati, A. Madrazo and M. Nieto-Vesperinas, "Electromagnetic wave scattering from a cylinder in front of a conducting surface-relief grating", *Opt. Commun.* 111, 26-33 (1994).
- [74] A. Madrazo and M. Nieto-Vesperinas, "Reconstruction of corrugated dielectric surfaces with a model of a photon scanning tunnelling microscope: influence of the tip on the near field", *J. Opt. Soc. Am.* A14, 618-628 (1997).

