Comportamiento asintótico para sistemas de ecuaciones parabólicas con condiciones de borde no lineales

Rossi, Julio Daniel

1995

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

COMPORTAMIENTO ASINTOTICO PARA SISTEMAS DE ECUACIONES PARABOLICAS CON CONDICIONES DE BORDE NO LINEALES

Autor : Julio Daniel Rossi

Directora : Noemi Wolanski

Trabajo presentado para optar al título de Doctor en Ciencias Matemáticas

Buenos Aires
1995

COMPORTAMIENTO ASINTOTICO PARA SISTEMAS DE ECUACIONES PARABOLICAS CON CONDICIONES DE BORDE NO LINEALES

ASYPTOTIC BEHAVIOUR FOR PARABOLIC SYSTEMS
WITH NONLINEAR
BOUNDARY CONDITIONS

Ams subject classification: 35B35, 35K55, 35B05

Key words : asymptotic behaviour, parabolic systems, nonlinear boundary conditions, blow up, global existence.

Palabras clave : Comportamiento asintotico, sistemas parabolicos, condiciones de borde no lineales, blow-up, existencia global

Abstract : We study the behaviour of positive solutions of the system

$u_t=\mathrm{div}(a(u)\nabla u) + f(u,v) \qquad v_t=\mathrm{div}(b(v) \nabla (v)) + g(u,v)$

in a bounded domain with the boundary conditions

$\partial u / \partial n=r(u,v) \qquad \partial v / \partial n=s(u,v)$

and positive initial data $(u_0(x), v_0(x))$.

Resumen : Estudiamos el comportamiento asintotico de soluciones positivas del sistema

$u_t=\mathrm{div}(a(u)\nabla u) + f(u,v) \qquad v_t=\mathrm{div}(b(v) \nabla (v)) + g(u,v)$

en un dominio acotado con condiciones de borde

$\partial u / \partial n=r(u,v) \qquad \partial v / \partial n=s(u,v)$

y datos iniciales positivos $(u_0(x), v_0(x))$.

AGRADECIMIENTOS

En pocas líneas hay que nombrar a mucha gente, espero no olvidar a nadie ni quedar corto de palabras.

Primero, a Noemi Wolanski por ser una jefa de primera, aguantando todas las que le hice con una enorme paciencia.

Después, a Julio Bouillet esperando haber aprendido aunque sea la décima parte de lo que intentó enseñarme.

A Ricardo Durán, por su buen humor permanente.

A Diego Rial (Tico), por compartir tantos buenos momentos juntos. Sin él este trabajo no hubiera sido posible.

A Gabriel, por su coraje al atreverse a trabajar conmigo.

A Mariano, por compartir una filosofía "toque, gol y fiesta".

A Enrico, Alicia, Demetrio, Willy, Gustavo, Segovia, Teresa, Liliana, Cristina por el entusiasmo en la matemática.

A los españoles: Miguel, Juan José, Juan Luis, Manuela, Manolo, Coco (es uruguayo) y Fernando; por los buenos momentos que me dieron en Madrid.

A los compañeros que siempre estuvieron a mi lado: Nancy, Julián, Guillermo, Gustavo, Carlos, Daniel, Andrés, Johnny.

Por último quiero dedicar este trabajo a Sandra. Sin compartir con ella la vida yo no hubiera hecho este trabajo. Gracias por tantos buenos momentos, perdón por tantos nervios. Gracias también por enseñarme a trabajar de Biólogo.

INDICE

Capítulo 1. Introducción. pag. 1

Capítulo 2. Resultados Previos. pag. 8

Capítulo 3. Existencia y regularidad. pag. 12

Capítulo 4. Blow-up. pag. 24

Capítulo 5. Blow-up para potencias. pag. 34

Capítulo 6. Blow-up en sistemas más generales. pag. 48

Capítulo 7. Localización. pag. 61

Capítulo 8. Comportamiento asintótico. pag. 78

Referencias. pag. 91

CAPITULO 1

Introducción.

En este primer capítulo daremos una introducción al tema a desarrollar y haremos una descripción del contenido de los restantes capítulos.

El reciente desarrollo de los sistemas del tipo reacción-difusión en biología, ecología, bioquímica y la tradicional importancia en física e ingeniería llevaron a un extenso estudio de varios aspectos de ecuaciones parabólicas no lineales (ver [P]).

En el estudio de ecuaciones ($u_t = A(u)$) , ($u(0) = u_0$) que describen fenómenos físicos que evolucionan en el tiempo resulta natural, después de encontrar existencia y regularidad de una solución local, preguntarse por el intervalo maximal de definición de dicha solución. Es decir, la pregunta a formular es: la solución $u(t)$ existe y es regular para todo t positivo ?

Por ejemplo si consideramos soluciones positivas de

$$u_t = u^p$$

con $p > 1$, resolviendo la ecuación en forma exacta se observa que existe un tiempo T finito tal que la solución existe en $[0, T)$ y ademas $\lim_{t \nearrow T} u(t) = +\infty$ mientras que con $p \leq 1$ todas las soluciones estan definidas en $[0, +\infty)$.

Si el intervalo de existencia maximal de la solución es finito, $[0, T)$, y alguna norma de la solución u tiende a infinito cuando $t \nearrow T$ diremos que la solución tiene blow-up en esa norma en el tiempo T. Si en cambio la solución existe y es regular en $[0, +\infty)$ diremos que se trata de una solución global.

El blow-up de ecuaciones diferenciales (ordinarias y en derivadas parciales) no lineales ha sido objeto de gran interés.

En particular estos problemas de blow-up estan bien estudiados en el caso de una sola ecuación de la forma

$$u_t = f(u)$$

y se obtiene que, suponiendo que la f es regular y positiva, la existencia de una solución global (existencia para todo $t > 0$) se verifica si y sólo si

$$\int^{+\infty} \frac{1}{f} = +\infty$$

en caso contrario (si la integral anterior converge) se observa que existe un T finito tal que

$$\lim_{t \nearrow T} u(t) = +\infty$$

(u(t) tiene blow-up en tiempo T).

Para una ecuación ordinaria ($u_t = f(u)$) si la solución $u(t)$ se mantiene acotada para un intervalo $[0, T)$ se puede extender la solución más allá de T.

Es decir, o nada pasa y se puede continuar la solución más allá de T o bien esta solución se vuelve infinita en ese instante T.

Este fenómeno se ha observado tambien en el estudio de ecuaciones en derivadas parciales como por ejemplo

$$u_t = \Delta u + f(u)$$

Si $f(u) = u^p$ se tiene una idea, no sólo de cuando hay blow-up, sino de donde se produce y del comportamiento asintótico de la solución. (ver [H.V.1], [H.V.2], [V], [C.E 1], [C.E 2], [P.V] para $f(u) = e^u$, o bien [G1] [G2] y [S.G.K.M])

Cuando la nolinealidad aparece como una condición de borde hay trabajos que estudian el problema de la aparición o no de blow-up.

En [L.P] Levine y Payne demuestran que una solución positiva de

$$\text{(1.1.1)} \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(u) & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

tiene blow-up para ciertos datos iniciales positivos $u_0(x)$ si $f(u) = u^{1+\delta} h(u)$, con $\delta > 0$ y h no decreciente.

En [W], Walter probó que, para f convexa, (1.1.1) tiene soluciones globales para cualquier u_0 positivo si y solo si $\int^{+\infty} \frac{1}{ff'} = +\infty$ y reciprocamente, si la integral es finita toda solución positiva tiene blow-up. La técnica empleada en este trabajo es la comparación con super y sub soluciones que también serán usadas en esta tesis.

M. Fila ([F]) utiliza métodos de concavidad para obtener resultados similares.

López Gomez, Márquez y Wolanski [LG.M.W] probaron algunos resultados de blow-up y localizaron el conjunto de puntos de blow-up de soluciones radiales de (1.1.1) en el borde de una bola $B \subset \mathbb{R}^n$. En [R.R], en colaboración con D. F. Rial, encontramos un resultado de blow-up que permite tomar f creciente sin pedir convexidad con la hipotesis $\int^{+\infty} \frac{1}{f} < +\infty$ (mas restrictiva que la de Walter [W]) usada en [LG.M.W] en el caso radial. Además localizamos el conjunto donde se produce el blow-up en el borde de un dominio Ω general con las condiciones $\Delta u_0 \geq \alpha > 0$ y f convexa.

Si $f(u) = u^p$ $(p > 1)$ en [H.Y] se obtiene el resultado de localización de los puntos de blow-up usando ideas totalmente distintas a las anteriores y particulares para esa funcion $f(u) = u^p$ (ver capítulo 2).

Allí también se obtiene una idea clara del comportamiento asintótico cerca de un punto de blow-up (pero en este caso con restricciones sobre p y el dato inicial u_0). (ver [F.Q] para el comportamiento asintótico de soluciones radiales).

Para una ecuación más general que la del calor ver [B.C.E], [Wo] y [W.W].

Como se observa después de lo dicho, existen resultados que permiten comprender el fenomeno de blow-up para el problema (1.1.1) con algo de profundidad.

En el caso de sistemas de ecuaciones parabólicas se sabe considerablemente menos y las dificultades son mayores pues los teoremas de comparación en general no se conocen. También hay ejemplos de no unicidad ([E.L], [E.H.1]).

En este trabajo estamos interesados en obtener resultados de existencia global o bien de blow-up de soluciones positivas de sistemas parabólicos con condiciones de borde no lineales, así como analizar la localización de los puntos de blow-up y el comportamiento asintótico de las soluciones con blow-up.

Primero un poco de historia para sistemas parabólicos cuasilineales.

En [E.H.1] Escobedo y Herrero analizaron el sistema

$$(1.1.2) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + v^p \\ v_t = \Delta v + u^q \end{cases}$$

en $\Omega = \mathbb{R}^N$, con dato inicial (u_0, v_0) positivo.

Y en [E.H.2] el sistema (1.1.2) en Ω un dominio acotado con datos de borde $u\mid_{\partial\Omega} = v\mid_{\partial\Omega} = 0$ para todo tiempo.

En estos trabajos los autores caracterizan la aparición o no de blow-up en términos de los parámetros p, q y los datos iniciales (u_0, v_0).

Otro trabajo en esta linea es [E.L]. Allí los autores caracterizan la existencia o no de soluciones globales de

$$(1.1.3) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + u^{p_1} v^{q_1} \\ v_t = \Delta v + u^{p_2} v^{q_2} \end{cases}$$

en terminos de los p_i, q_i en $\mathbb{R}^N$ o en conos.

En [R.W], con N. Wolanski, estudiamos el siguiente sistema parabólico semilineal

$$(1.1.4) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + v^p e^u & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ v_t = \Delta v + u^q e^v & \text{en } \Omega \times (0,T) \end{cases}$$

Con las condiciones de borde

$$(1.1.5) \qquad \begin{cases} u\big|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0 \\ v\big|_{\partial\Omega \times (0,T)} = 0 \end{cases}$$

y los datos iniciales

$$(1.1.6) \qquad \begin{cases} u(x,0) = u_0(x) \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

Para este sistema se encontraron resultados que demuestran que la aparición del fenómeno del blow-up depende, no sólo del dato inicial, p y q sino también del dominio Ω. (ver [R.W]).

Aquí estudiaremos sistemas parabólicos donde las condiciones de borde son no lineales.

Nos referimos a sistemas de la forma

$$(1.1.7) \qquad \begin{cases} u_t = \operatorname{div}(a(u)\nabla u) + r(u,v) & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ v_t = \operatorname{div}(b(v)\nabla v) \ + s(u,v) & \text{en } \Omega \times (0,T) \end{cases}$$

donde $r(\cdot,\cdot)$ y $s(\cdot,\cdot)$ son positivas, $C^{2-}_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0})$ no decrecientes y $a(\cdot), b(\cdot)$ son positivas ($a \geq c > 0, b \geq c > 0$), no decrecientes, $C^{2-}_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_{>0})$ y convexas.
Con condiciones de borde

$$(1.1.8) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(u,v) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = g(u,v) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

donde $f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot)$ son positivas, no decrecientes en cada variable y $C^{2-}_{\text{Loc}}(\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0})$.
Y datos iniciales

$$(1.1.9) \qquad \begin{cases} u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

u_0, v_0 son $C^2(\overline{\Omega})$ y positivas

La existencia local de una solución regular fue estudiada por Amann ([Am1], [Am2] y [Am3]) para el caso de funciones uniformemente $C^{2-}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Amann demostró, en ese caso, en [Am3] que la solución puede extenderse más allá de T si se tiene una acotación uniforme de la misma en norma infinito para $t \in [0, T)$ (ver capítulo 2).

Estos resultados son utilizados en el Capítulo 3 para demostrar existencia y unicidad de solución local con las hipótesis antes mencionadas

A partir de aquí, resolvemos el problema de la existencia global asegurando cotas en L^∞ de la solución (u, v) o bien probamos que la norma L^∞ de (u, v) debe ir a infinito en tiempo finito (blow-up).

Para estos fines buscamos una definición de supersolución. una de subsolución y un teorema de comparación. En este trabajo encontramos super y subsoluciones de la forma

$$u(x, t) = \varphi(\alpha(x) + \beta(t))$$

$$v(x, t) = \psi(\alpha(x) + \beta(t))$$

Donde (φ, ψ) son soluciones del siguente sistema de ecuaciones ordinarias

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi'(\sigma) = f(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) \\ \psi'(\sigma) = g(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) \end{array} \right. \tag{1.1.10}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(0) = \varphi_0 \\ \psi(0) = \psi_0 \end{array} \right. \tag{1.1.11}$$

Estas super y sub soluciones permiten tener una descripcion bastante clara de qué se puede esperar de las soluciones de (1.1.7)-(1.1.9).

Así se observa que el blow-up o la existencia global de soluciones de (1.1.7)-(1.1.9) se relaciona con el comportamiento de las soluciones del sistema ordinario (1.1.10)-(1.1.11).

Estos sistemas son de carácter demasiado general y surge pues la necesidad de empezar por algunos ejemplos.

Si simplificamos las ecuaciones y acoplamos el sistema solo en la condicion de borde tenemos,

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \Delta u \\ v_t = \Delta v \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(v) \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = g(u) \\ u(x,0) = u_0(x) \\ v(x,0) = v_0(x) \end{array} \right. \tag{1.1.12}$$

Veremos esto con detalle en el capítulo 4.

Por ejemplo. si $f(s) = s^p$ y $g(s) = s^q$, entonces vale que las soluciones positivas son globales si y solo si $pq \leq 1$ (y si $pq > 1$ hay blow-up).

Otro ejemplo. si $f(v) = (1+v)\log(1+v)$ y $g(u) = (\frac{(p+1)}{2})^2(1+u)^p \log(1+u)$ en (1.1.12) entonces si $p < 1$ toda solución positiva es global pero si $p \geq 1$ toda solución positiva tiene blow up.

Estos ejemplos muestran que el resultado obtenido permite dar descripciones completas del fenomeno de blow-up en ciertos casos con dependencia de parametros (p, q).

En esta línea nos interesamos por el siguiente problema:

$$\begin{cases} (u_i)_t = \Delta u_i \\ \frac{\partial u_i}{\partial \eta} = \prod_{j=1}^{N} (u_j)^{p_{ij}} \end{cases} \tag{1.1.13}$$

Las ideas desarrolladas hasta ahora nos llevaron a plantear la existencia global o el blow-up del sistema ordinario

$$\begin{cases} z_i'(s) = \prod_{j=1}^{N} (z_j)^{p_{ij}}(s) \\ z_i(0) = z_{i,0} > 0 \end{cases} \tag{1.1.14}$$

Con los resultados obtenidos para (1.1.14) se logra una caracterizacion del comportamiento de las soluciones positivas de (1.1.13) en términos de la matriz p_{ij}. (ver capítulo 5).

En el capítulo 6 nos dedicamos al sistema en su forma más general (1.1.7)-(1.1.9) así como a considerar algunos ejemplos más.

Por ejemplo analizamos el caso en que las funciones consideradas sean potencias.

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(u^{n-1}\nabla u) + u^{q_{11}} v^{q_{12}} & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ v_t = \operatorname{div}(v^{m-1}\nabla v) + u^{q_{21}} v^{q_{22}} & \text{en } \Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{1.1.15}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} = u^{p_{11}} v^{p_{12}} & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = u^{p_{21}} v^{p_{22}} & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases} \tag{1.1.16}$$

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases} \tag{1.1.17}$$

donde p_{ij} y q_{ij} son no negativos y $n, m \geq 1$.

Queremos destacar que estas ideas se pueden aplicar. en todos los casos a sistemas de N ecuaciones y se obtienen condiciones para existencia global o blow-up de soluciones positivas.

En cuanto a la localización del conjunto de puntos de blow-up obtuvimos un resultado de localización en el borde del dominio para (1.1.12) con hipótesis adicionales sobre f y g usando técnicas similares a las de [R.R].
Estos resultados se detallan en el capítulo 7.

Por último se atacó el problema del comportamiento asintótico de la solución cerca de un punto de blow-up.
Para el problema $u_t = \Delta u + u^p$ ver [G.K.1] , [G.K.2] y [G.K.3]. Para un sistema de ecuaciones semilineal ver [A.H.V], [C.M].
Se consideraron datos iniciales simétricos en la bola unitaria (radiales) para el sistema (1.1.13) de dos ecuaciones con hipótesis adicionales sobre la matriz $P = (p_{ij})$ (estas hipótesis son justo las que garantizan el blow-up) y se obtuvo que

$$u_i(1,t) \sim (T-t)^{\frac{\alpha_i}{2}} \tag{1.1.18}$$

donde los α_i son negativos y dependen únicamente de los p_{ij}. (ver el capítulo 8).

La restricción en el dominio y los datos iniciales se debe a que el comportamiento asintótico no está completamente estudiado en el caso de una sola ecuación.

Para estas soluciones, de las cuales conocemos que su comportamiento asintótico es de la forma (1.1.18), se puede deducir el resultado de localización del capítulo 7 usando un resultado de [H.Y].

Para comodidad del lector hemos intentado que cada capítulo sea autocontenido, de forma tal que el lector interesado en alguna idea en particular (por ejemplo, la localización del conjunto de puntos de blow-up) pueda leer directamente el capítulo correspondiente (capítulo 7 en este caso). Esta forma de escribir nos llevó a hacer muchas reiteraciones innecesarias, que aquel que lea de corrido sabrá disculpar.

CAPITULO 2

Resultados previos.

En este capítulo enunciaremos algunos resultados previos que usaremos a lo largo de este trabajo.

Empezamos por un resultado de localización de los puntos de blow-up debido a Bei Hu y Hong-Ming Yin ([H.Y])

Si consideramos el problema

$$(2.1.1) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = u^p \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

con $p > 1$, hay blow-up de toda solución positiva (ver [W], [LG.M.W], [L.P], [R.R]).

Veamos que el conjunto de puntos de blow-up se localiza en el borde de Ω si se tiene una cota del crecimiento de u de la forma

$$u(x,t) \leq \frac{c}{(T-t)^{\alpha}}$$

para algún $\alpha > 0$.

Lema 2.1. *Sea w(x,t) una solución de*

$$\begin{cases} w_t = \Delta w \\ w(x,t) \leq \frac{c}{(T-t)^{\alpha}} \\ w(x,0) = w_0(x) \end{cases}$$

con blow-up a tiempo T, donde c y α son constantes positivas.

Entonces, dado $\Omega' \subset\subset \Omega$, existe una constante finita K tal que

$$sup_{0<t<T} \|w(x,t)\|_{L^\infty(\Omega')} < K$$

Es decir el conjunto de puntos de blow-up está incluído en el borde de Ω.

Demostración. (ver [H.Y])

Para facilitar la lectura de este trabajo, como la demostración es corta y elegante, la reproduciremos aquí.

Si el $\partial\Omega$ es C^2 entonces

$$b(x) = d^2(x) = dist(x, \partial\Omega)^2$$

es C^2 y satisface para todo $\alpha > 0$

$$\Delta b - \frac{(\alpha+1)\|\nabla b\|^2}{b} > -4(\alpha+1)$$

cerca del borde de Ω .

Extendemos b a una función C^2 en todo $\overline{\Omega}$ tal que $b > c_0 > 0$ lejos del borde de Ω.

Entonces vale, para algún $C_1 > 0$ dependiente de α

$$\Delta b - \frac{(\alpha+1)\|\nabla b\|^2}{b} > -C_1$$

Sea

$$a(x,t) = \frac{C_2}{[b(x) + C_1(T-t)]^\alpha}$$

Con esta elección se obtiene para todo $C_2 > 0$,

$$a_t \geq \Delta a$$

Ahora tomemos C_2 grande para verificar

$$a(x,t) = \frac{C_2}{[C_1(T-t)]^\alpha} > \frac{c}{(T-t)^\alpha} \qquad \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \qquad \text{y}$$

$$a(x,0) > w(x,0)$$

El principio del máximo nos dice que $w(x,t) \leq a(x,t)$ y con esto terminamos el teorema pues b se mantiene estrictamente positiva lejos del borde de Ω y de esta forma $a(x,t)$ se mantiene acotada si $x \in \Omega'$. □

A continuación enunciaremos un teorema de Amann [Am3] que nos será de gran utilidad. Este teorema nos garantiza la existencia local de soluciones y nos da una condición necesaria y suficiente para tener soluciones globales: tener cotas en norma L^∞ en conjuntos de la forma $\overline{\Omega} \times [0,T)$. Se podría afirmar que este es el punto de partida de nuestro trabajo, la solución existe y es regular mientras no se vuelva infinita, en los próximos capítulos nos dedicaremos a encontrar condiciones que nos garanticen existencia global o bien blow-up de la solución.

Empecemos por dar alguna notación para poder enunciar el Teorema.

$$\delta = diag\{\delta^1, ..., \delta^N\} : \partial\Omega \mapsto \mathbb{R}^{N \times N} \qquad \delta^r \in C(\partial\Omega, \{0, 1\})$$

Pongamos G un abierto no vacío de $\mathbb{R}^N$ y J un subintervalo de $\mathbb{R}^+$ que contiene al cero.

Por C^{2-} entendemos el conjunto de funciones que poseen derivadas Lipchitz. Supondremos que

$$a_{ij} \in C^{2-}(\overline{\Omega} \times J \times G, \mathbb{R}^{N \times N}) \qquad 1 \leq j, i \leq n$$
$$b_0 \in C^{2-}(\partial\Omega \times J \times G, \mathbb{R}^{N \times N})$$
$$f \in C^{2-}(\overline{\Omega} \times J \times G, \mathbb{R}^N)$$

Llamaremos

$$C_B^s = \{u \in C^s(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N); (1 - \delta)\gamma u = 0\}$$

donde γ es la función traza.

$$G^s = \{u \in C^s{}_B; u(\overline{\Omega}) \subset G\}$$

Con todo esto definimos un "problema normalmente elíptico con valores de frontera" tomando (ver [Am 3] para la definición de "normalmente elíptico")

$$A(t, v) = -\frac{\partial}{\partial x^j}(a_{jk}(\cdot, t, v)\frac{\partial}{\partial x^k}\cdot)$$

$$B(t, v) = \delta(a_{jk}(\cdot, t, v)\eta^j\gamma\frac{\partial}{\partial x^k} + b_0(\cdot, t, v)\gamma) + (1 - \delta)\gamma$$

Ahora podemos enunciar el siguiente Teorema de existencia y unicidad

Teorema 2.1. *Dado $u_0 \in G^2$ existe una única solución maximal clásica*

$$u \in C(J(u_0), G) \cap C(\dot{J}(u_0), C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)) \cap C^1(\dot{J}(u_0), C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N))$$

del problema parabólico

$$u_t + A(t, u)u = f(\cdot, t, u)$$
$$B(t, u)u = 0$$
$$u(\cdot, 0) = u_0$$

El intervalo de definición J es abierto a derecha y contiene al cero.

Demostración.

Ver [Am2] Teorema 7.3 y Corolario 9.3. □

Con algunas suposiciones sobre la estructura de la matriz a_{ij}, que se verifican en todos los casos que estudiaremos en este trabajo (nuestras matrices a son siempre diagonales), podemos enunciar

Teorema 2.2. *Si* $u(J(u_0) \cap [0,T])$ *está acotado en* $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^N)$ *y además está lejos del* ∂G *para todo* $T \in \dot{J}$ *entonces* u *resulta ser una solución global.*

Demostración.

Ver [Am3] Teorema 3. □

Nota. En el siguiente capítulo utilizaremos estos Teoremas para desarrollar resultados de existencia. positividad y regularidad local.

CAPITULO 3

Existencia, positividad y regularidad de soluciones de un sistema de dos ecuaciones parabólicas con condiciones de borde no lineales.

En este capítulo abordaremos el problema de la existencia, positividad y regularidad de las soluciones de:

$$(3.1.1)\qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + r(u,v) & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ v_t = \Delta v + s(u,v) & \text{en } \Omega \times (0,T) \end{cases}$$

$$(3.1.2)\qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(u,v) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = g(u,v) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

$$(3.1.3)\qquad \begin{cases} u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

para luego. en el capítulo siguiente, pasar a estudiar sus intervalos de existencia maximales en el caso particular en que $r = s = 0$.

Estaremos interesados, pues en teoremas de existencia y regularidad local de soluciones positivas que serán el objetivo de este capítulo.

Nos interesa el caso en que las funciones (f,g) consideradas en la condición de borde puedan no ser regulares en el origen, en concreto estamos pensando en potencias menores que uno. En esos casos veremos que es suficiente con pedir que los datos iniciales sean estrictamente positivos en el borde de Ω para tener existencia, regularidad y positividad de la solución. En el caso en que r o s tuvieran problemas en el origen supondremos que los datos iniciales son estrictamente positivos en todo Ω.

Por eso de aquí en más supondremos que las funciones r y s son $C^{2-}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ y no negativas.

En el Capítulo 2 hemos enunciado unos resultados de Amann (ver [Am1], [Am2], [Am3] o bien Teoremas 2.1 y 2.2) que nos serán de gran utilidad para deducir existencia local de soluciones de (3.1.1)-(3.1.3).

Estos resultados de Amann nos permiten considerar operadores más generales que Δu (por ejemplo $\mathrm{div}(a(u)\nabla u)$) pero por razones de claridad, preferimos desarrollar el capítulo considerando soluciones de (3.1.1).

Ahora enunciamos con precisión el resultado que utilizaremos a lo largo de este capítulo.

Empezamos con un dato inicial estrictamente positivo y funciones r, s, f y g regulares.

Teorema 3.0. *Sean u_0, $v_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ y estrictamente positivas en $\overline{\Omega}$. Sean f y g dos funciones uniformemente Lipschitz en $\mathbb{R}_{\geq\gamma} \times \mathbb{R}_{\geq\gamma}$ para todo $\gamma > 0$, con sus derivadas también uniformemente Lipschitz y estrictamente positivas ahí. Entonces existe un tiempo $T > 0$ tal que existe una única solución clásica de (3.1.1)-(3.1.3) en $C(\overline{\Omega} \times [0, T))$.*

Además si T es el tiempo maximal de existencia de dicha solución y $T < +\infty$, se tiene que

$$\{||u||_{L^\infty(\Omega)} + ||v||_{L^\infty(\Omega)}\} \nearrow \infty \qquad \textit{cuando} \quad t \nearrow T$$

<u>*Observación 3.1*</u>. Este Teorema es consecuencia del Teorema 3 de [Am 3] (ver cap. 2 Teoremas 2.1 y 2.2) pues si u_0, $v_0 \geq \gamma$ obtenemos una solución $u(x,t)$, $v(x,t) \geq \gamma$ para todo $t > 0$ en que la solución exista, reemplazando a f y a g por funciones $C^{2-}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ que coincidan con f y g para $u \geq \gamma/2$, $v \geq \gamma/2$.

Demostraremos esta acotación inferior en el Lema 3.1.

Además veremos que suponiendo que exista una solución continua con datos iniciales no idénticamnete nulos, ésta se vuelve estrictamente positiva para cualquier $\tau > 0$.

Lema 3.1. *Sea (u, v) una solución continua de (3.1.1)-(3.1.3) con f y g no negativas en $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$.*

Entonces el mínimo de u y de v en $\Omega \times [0, T)$ se alcanza en $t = 0$.

Además si u_0 y v_0 son funciones no negativas y no son ambas idénticamente cero, (suponiendo que existe una solución continua en $\overline{\Omega}$ para $t \geq 0$), si $f(u, v) > 0$, $g(u, v) > 0$ si $u, v \geq 0$ y $u > 0$ o $v > 0$, dado $\tau > 0$ existe un $\gamma_\tau > 0$ tal que

$$u(x,t) \geq \gamma_\tau$$

$$v(x,t) \geq \gamma_\tau$$

para todo $t \geq \tau$.

Demostración.

Como tanto u como v son supersoluciones de la ecuación del calor no pueden alcanzar un mínimo en el interior a menos que sean constantes.

Por otra parte tampoco pueden alcanzar un mínimo en las paredes laterales a menos que sean constantes. Para ver este hecho supongamos que u alcanzara un mínimo en un punto del borde lateral y que u no es constante, entonces $\frac{\partial u}{\partial \eta} < 0$ en ese punto. Pero allí $\frac{\partial u}{\partial \eta} = f(u, v) \geq 0$. (una contradicción).

Así queda probado que ambas funciones alcanzan sus mínimos en tiempo $t = 0$.

Ahora sea $\tau > 0$. Entonces $\min_{t \geq \tau} u(x,t) \geq \min u(x,\tau)$ por el razonamiento anterior empezando en tiempo τ, y por la misma razón, $\min_{t \geq \tau} v(x,t) \geq \min v(x,\tau)$.

Veamos que existe un $\gamma_\tau > 0$ tal que $u(x,\tau) \geq \gamma_\tau$ y $v(x,\tau) \geq \gamma_\tau$.

Para esto es suficiente probar que ambas funciones u y v son estrictamente positivas en $\overline{\Omega} \times (0, T)$. Sabemos de la parte anterior que, gracias a no ser negativas inicialmente, estas funciones son no negativas. Si u_0 no es identicamente nula, u es estrictamente positiva para todo $t > 0$. En particular $\frac{\partial v}{\partial \eta} > 0$ y podemos asegurar que v no es idénticamente cero, aún si su dato inicial lo es. Así ambas funciones u y v son estrictamente positivas en $\overline{\Omega}$ para $t > 0$ y basta tomar γ_τ como el mínimo de ambas a tiempo τ. □

Ahora probaremos un resultado de comparación para super y sub soluciones de (3.1.1)-(3.1.3) que nos será muy útil para demostrar los resultados del capítulo siguiente.

Definición 3.1.

Un par de funciones continuas en $\overline{\Omega} \times [0, T)$ $(\overline{u}, \overline{v})$ es una supersolución clásica de (3.1.1)-(3.1.3) si $u \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T))$, $v \in C^{2,1}(\Omega \times (0,T))$ y verifican,

$$\begin{cases} \overline{u}_t \geq \Delta \overline{u} + r(\overline{u}, \overline{v}) \\ \overline{v}_t \geq \Delta \overline{v} + s(\overline{u}, \overline{v}) \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta} \geq f(\overline{u}, \overline{v}) \\ \frac{\partial \overline{v}}{\partial \eta} \geq g(\overline{u}, \overline{v}) \end{cases}$$

Análogamente diremos que $(\underline{u}, \underline{v})$ es una subsolución si satisface las desigualdades opuestas.

Lema 3.2. *Sean f y g dos funciones localmente Lipschitz en $\mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \setminus \{0\}$ y no decrecientes en $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$, si $(\underline{u}, \underline{v})$ es una subsolución clásica y no negativa de (3.1.1)-(3.1.3) y $(\overline{u}, \overline{v})$ es una supersolución clásica no negativa que verifica $\underline{u}(x, 0) < \overline{u}(x, 0)$ y $\underline{v}(x, 0) < \overline{v}(x, 0)$ en $\overline{\Omega}$ la misma relación se mantendrá para todo $t > 0$.*

Demostración.

Sean $(w_1, w_2) = (\overline{u} - \underline{u}, \overline{v} - \underline{v})$. Entonces ambas w_i $(i = 1, 2)$ son supersoluciones de la ecuación del calor. Estas funciones satisfacen en las paredes laterales para $t \leq T < \min(T(\underline{u}_0, \underline{v}_0), T(\overline{u}_0, \overline{v}_0))$,$(T(\underline{u}_0, \underline{v}_0), T(\overline{u}_0, \overline{v}_0)$ son los tiempos maximales de existencia),

$$\frac{\partial w_1}{\partial \eta} \geq A(x, t) \qquad\qquad \frac{\partial w_2}{\partial \eta} \geq B(x, t)$$

donde

$$A = f(\overline{u}, \overline{v}) - f(\underline{u}, \underline{v})$$

$$B = g(\overline{u}, \overline{v}) - g(\underline{u}, \underline{v})$$

Sea $\delta > 0$ tal que $w_i(x, 0) \geq \delta$ en Ω. Entonces $w_i > \frac{\delta}{2}$ para todo $t > 0$.

Supongamos que esto no es verdad y tomemos $t_0 > 0$ de forma que ambas funciones sean mayores que $\frac{\delta}{2}$ para $t < t_0$ pero que exista un x_0 tal que, o bien $w_1(x_0, t_0) = \frac{\delta}{2}$ o bien $w_2(x_0, t_0) = \frac{\delta}{2}$. Sin pérdida de generalidad supondremos que esto pasa con w_1.

Como w_1 es supercalorica $x_0 \notin \Omega$.

Además x_0 no puede pertenecer al $\partial\Omega$ pues en este caso tendríamos

$$\frac{\partial w_1}{\partial \eta}(x_0, t_0) < 0$$

pero por otra parte $A(x_0, t_0)$ es no negativa pues como f es no decreciente

$$A = f(\overline{u}, \overline{v}) - f(\overline{u}, \underline{v}) + f(\overline{u}, \underline{v}) - f(\underline{u}, \underline{v}) \geq 0$$

lo que fuerza una contradicción. $\square$

Corolario 3.1. *Sean u_0 , $v_0 \in C^2(\overline{\Omega})$ y no negativas en $\overline{\Omega}$, f y g estrictamente positivas en $\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$ y $\{0\} \times \mathbb{R}_{>0}$, no decrecientes en $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ con sus derivadas localmente Lipschitz en $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Entonces existe T positivo tal que el problema (3.1.1)-(3.1.3) tiene una solución positiva en $\Omega \times (0, T)$. Más aún existe una única solución maximal (u, v). Sea $T(u_0, v_0)$ el tiempo de existencia de esta única solución maximal. Si resulta que $T(u_0, v_0) < \infty$, entonces*

$$\lim_{t \nearrow T(u_0, v_0)} \{||u(\cdot, t)||_{L^\infty(\Omega)} + ||v(\cdot, t)||_{L^\infty(\Omega)}\} = +\infty$$

Además si $r = s = 0$ y f es función solo de v y g solo de u entonces

$$\lim_{t \nearrow T(u_0, v_0)} ||u(\cdot, t)||_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$$

$$\lim_{t \nearrow T(u_0, v_0)} ||v(\cdot, t)||_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$$

Es decir u y v van a infinito simultáneamente.

Demostración.

Supongamos, para empezar, que u_0 y v_0 son estrictamente positivas.

Sea $M \geq 2(||u_0||_{L^\infty(\Omega)}+||v_0||_{L^\infty(\Omega)})$. Y tomemos f_M, g_M estrictamente positivas en $\mathbb{R}\setminus\{0\}\times\mathbb{R}\setminus\{0\}$ y tales que coincidan con las f y g originales para todo $|u,v| < M$ y además sus derivadas sean uniformemente Lipschitz.

Sea (u_M, v_M) la solución de (3.1.1)-(3.1.3) con f y g reemplazadas por f_M y g_M. Como u_M y v_M son continuas en $\overline{\Omega} \times [0,\infty)$ existe un instante $T > 0$ tal que

$$||u_M||_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} + ||v_M||_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} \leq M$$

De esta forma (u_M, v_M) es una solución del problema (3.1.1)-(3.1.3) con f y g en el dominio $\Omega \times (0,T)$.

La unicidad de la solución maximal es una consecuencia de los resultados de [Am3].

Por el Teorema 3.0 y una construcción similar a la anterior pero con

$$M \geq 2(||u||_{L^\infty(\Omega\times(0,T))} + ||v||_{L^\infty(\Omega\times(0,T))})$$

es claro que si u y v permanecen acotadas en $\Omega \times (0,T)$ pueden ser extendidas más allá de $t = T$.

Entonces si $T(u_0, v_0) < \infty$ alguna de las dos, u o v debe ser no acotada en norma L^∞.

Ahora bien si $r = s = 0$, $f = f(v)$, $g = g(u)$ y u permanece acotada hasta tiempo T, v resulta ser una solución de

$$\begin{cases} v_t = \Delta v \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = H(x,t) \end{cases}$$

donde $H(x,t)$ y $v(x,0)$ estan acotadas. Se sabe que en este caso v permanece acotada hasta $t = T$ lo que entra en contradicción con los resultados de Amann [Am3] si $T = T(u_0, v_0) < \infty$.

Entonces en este caso ambas funciones deben tener blow-up al mismo tiempo.

Ahora supongamos que u_0 y v_0 son no negativas.

Tomemos (u_n, v_n) como la solución de,

$$(3.1.4) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u + r(u,v) \\ v_t = \Delta v + s(u,v) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(u,v) \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = g(u,v) \\ u(x,0) = u_0(x) + \frac{1}{n} \\ v(x,0) = v_0(x) + \frac{1}{n} \end{cases}$$

Del principio de comparación (Lema 3.2) se deduce que las sucesiones u_n y v_n son decrecientes, en particular $T_n \geq T_1$ para $n > 1$.

Como $u_n \geq 0$, $v_n \geq 0$ existe el límite

$$u = \lim_{n \nearrow \infty} u_n \qquad v = \lim_{n \nearrow \infty} v_n$$

en $\Omega \times (0, T)$ para $T = T_1$.

Sea $G(x, t; y, \tau)$ la función de Green para la ecuación del calor con condiciones de tipo Neumann. Entonces

$$u_n(x,t) = \int_\Omega (u_0(y) + \frac{1}{n}) G(x, t; y, 0)\, dy +$$
$$+ \int_0^t \int_{\partial\Omega} f(u_n(y,\tau), v_n(y,\tau)) G(x,t;y,\tau)\, dS_y\, d\tau +$$
$$+ \int_0^t \int_\Omega r(u_n(y,\tau), v_n(y,\tau)) G(x,t;y,\tau)\, dy\, d\tau$$

Pasando al límite observamos que u satisface una ecuación integral similar.

Veamos ahora que ambas u y v resultan continuas en $\overline{\Omega} \times [0, T_1)$. Para esto es suficiente con ver que la convergencia es uniforme en $\overline{\Omega} \times [0, T_1 - \varepsilon]$ para cualquier $\varepsilon > 0$. Sean $u_{nm} = u_n - u_m$, $v_{nm} = v_n - v_m$ y $w_{nm} = u_{nm} + v_{nm}$. Entonces si $n < m$

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial t} w_{nm} \geq \Delta w_{nm} - M w_{nm} - K w_{mn} & \text{en } \Omega \times (0, T_1) \\ \frac{\partial w_{nm}}{\partial \eta} = f(u_n, v_n) - f(u_m, v_m) + g(u_n, v_n) - g(u_m, v_m) & \text{en } \partial\Omega \times (0, T_1) \\ w_{nm}(x, 0) = \frac{2}{n} - \frac{2}{m} & \text{en } \Omega \end{array}$$

Como para $t \leq T_1 - \varepsilon$, $u_n \leq u_1 \leq C$, $v_n \leq v_1 \leq C$ y f y g son localmente Lipschitz,

$$0 \leq f(u_n, v_n) - f(u_m, v_m) = f(u_n, v_n) - f(u_n, v_m) + f(u_n, v_m) - f(u_m, v_m) \leq L w_{nm}$$

$$0 \leq g(u_n, v_n) - g(u_m, v_m) = g(u_n, v_n) - g(u_n, u_m) + g(u_n, v_m) - g(u_m, v_m) \leq L w_{nm}$$

L, M, K son cotas para las derivadas de f, g, r y s. Entonces,

$$0 \leq \frac{\partial w_{nm}}{\partial \eta} \leq L w_{nm}$$

y de esta forma,

$$0 \leq w_{nm} \leq C(L, T_1, \varepsilon)(\frac{2}{n} - \frac{2}{m}) \tag{3.1.5}$$

para todo $t \leq T_1 - \varepsilon$.

Como u_{nm} y v_{nm} son no negativas (3.1.5) también vale para estas funciones y entonces resulta que las sucesiones u_n y v_n son uniformemente de Cauchy.

Hemos demostrado que u_n y v_m son uniformemente convergentes para $t \leq T_1 - \varepsilon$ y u y v resultan continuas en $\overline{\Omega} \times [0, T_1)$.

Así u es una solución de,

$$\begin{array}{ll} u_t = \Delta u + r(u,v) & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(u,v) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \end{array}$$

Análogamente para v.
Entonces (3.1.1)-(3.1.3) tiene una solución continua en $\overline{\Omega} \times [0,T)$.

A partir del lema 2.1 observamos que, si u_0 y v_0 no son ambas idénticamente cero, u y v se vuelven estrictamente positivas para todo $t > 0$. Y así los resultados sobre existencia global o blow-up que se obtengan para datos iniciales estrictamente positivos valen en este caso. □

Obtenemos ahora un resultado en el caso en que las derivadas de f y/o g tengan una singularidad en el origen.

Corolario 3.2. *Sean f y g estrictamente positivas en $\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$ y $\{0\} \times \mathbb{R}_{>0}$, continuas en $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$, no decrecientes en $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ con sus derivadas localmente Lipschitz en $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$. Sean u_0 y v_0 estrictamente positivas en $\partial\Omega$ y pertenecientes a $C^2(\overline{\Omega})$. Entonces existe una única solución maximal clásica de (3.1.1)-(3.1.3) que es continua en $\overline{\Omega} \times [0,T)$. Sea $T(u_0,v_0)$ su tiempo de existencia. Si $T(u_0,v_0) < \infty$,*

$$\lim_{t \nearrow T(u_0,v_0)} \{||u(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)} + ||v(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)}\} = +\infty$$

Además en el caso en que $r = s = 0$, f es función solo de v y g solo de u,

$$\lim_{t \nearrow T(u_0,v_0)} ||u(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$$

$$\lim_{t \nearrow T(u_0,v_0)} ||v(\cdot,t)||_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$$

Es decir u y v van a infinito al mismo tiempo.

<u>*Demostración.*</u>

De hecho, sea γ tal que $u_0 \geq \gamma$ y $v_0 \geq \gamma$ en $\partial\Omega$. Sean f_γ y g_γ estrictamente positivas en $\mathbb{R}_{>0} \times \{0\}$ y $\{0\} \times \mathbb{R}_{>0}$, no decrecientes en $\mathbb{R}_{>0} \times \mathbb{R}_{>0}$ e iguales a f y a g para $|s| \geq \frac{\gamma}{2}$ tales que sus derivadas son localmente Lipschitz en $\mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}_{\geq 0}$. Sean (u_γ, v_γ) la solución de (3.1.1)-(3.1.3) con f, g reemplazadas por f_γ, g_γ. Como u_γ y v_γ son continuas hasta $t = 0$ existe $T > 0$ tal que $u_\gamma \geq \frac{\gamma}{2}$ y $v_\gamma \geq \frac{\gamma}{2}$ en $\partial\Omega$ para todo $0 \leq t \leq T$. Y así (u_γ, v_γ) es una solución de (3.1.1)-(3.1.3) con f y g para $t < T$.

Sea $(\overline{u}, \overline{v})$ una solución continua. Como para algún $\overline{T} > 0$ tenemos $\overline{u} \geq \frac{\gamma}{2}$, $\overline{v} \geq \frac{\gamma}{2}$ en $\partial\Omega$ para todo $0 \leq t \leq \overline{T}$, $(\overline{u}, \overline{v})$ es una solución clásica con f_γ y g_γ en $\Omega \times (0,\overline{T})$. Por la unicidad de estas soluciones se tiene $\overline{u} = u_\gamma$, $\overline{v} = v_\gamma$ en $\Omega \times (0, \min(T,\overline{T}))$. Por otra parte existe $\delta > 0$ tal que $\overline{u} = u_\gamma \geq \delta$, $\overline{v} = v_\gamma \geq \delta$ en

$\overline{\Omega}$ para $0 < \tau \leq t < \min(T, \overline{T})$. De esta forma $(\overline{u}, \overline{v})$ y (u_γ, v_γ) son soluciones de (3.1.1)-(3.1.3) con f y g reemplazadas por f_δ y g_δ suaves en el origen e iguales a f y a g para $|s| \geq \min(\frac{\gamma}{2}, \delta)$. De esta forma se consigue $u_\gamma = \overline{u}$ y $v_\gamma = \overline{v}$ para todo su tiempo de existencia.

Los argumentos anteriores nos permiten aplicar el Corolario 3.1 para deducir que si el intervalo de tiempo de existencia de una solución maximal es finito, $[0, T)$, entonces u o v tienen blow up en norma L^∞ en ese instante T. $\square$

También usaremos en los capítulos 7 y 8 un resultado de regularidad para soluciones de (3.1.1)-(3.1.3) con $r = s = 0$ y $f(v)$, $g(u)$ (f es función solo de v y g solo de u) cuyos datos iniciales verifiquen una condición de compatibilidad inicial de la forma

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} = f(v_0) \\ \frac{\partial v_0}{\partial \eta} = f(u_0) \end{cases}$$

Podemos conseguir resultados de regularidad semejantes para el sistema (3.1.1)-(3.1.3) sin pedir restriciones sobre r, s, f y g pero por simplicidad (y por que estos son justamente los resultados que se necesitan) preferimos enunciar los Teoremas para el caso en que r, s, f y g sean como arriba.

Primero introduciremos alguna notación.

Notación.

Llamaremos $\overline{Q}_T$ al conjunto $\overline{\Omega} \times [0, T]$.

$C^{(2+\alpha),(1+\alpha/2)}(\overline{Q}_T)$ es el espacio de Banach de funciones $w(x,t)$ que son continuas en $\overline{Q}_T$ con sus derivadas primeras w_{x_i} y w_t y sus segundas derivadas espaciales $w_{x_i x_j}$ y satisfacen para $\|x - x'\| \leq 1$, $| t - t' | \leq 1$,

$$\begin{cases} | w_{x_i}(x,t) - w_{x_i}(x,t') | \leq C_i \, | t - t' |^{(1+\alpha)/2} \\ | w_t(x,t) - w_t(x',t') | \leq C_{n+1} \{ \|x - x'\|^\alpha + | t - t' |^{\alpha/2} \} \\ | w_{x_k x_j}(x,t) - w_{x_k x_j}(x',t') | \leq C_{kj} \{ \|x - x'\|^\alpha + | t - t' |^{\alpha/2} \} \end{cases} \tag{3.1.6}$$

Sean

$$\overline{C}_0 = \max_{\overline{Q}_T} | w |$$

$$\overline{C}_i = \max_{\overline{Q}_T} | w_{x_i} |$$

$$\overline{C}_{n+1} = \max_{\overline{Q}_T} | w_t |$$

y

$$\overline{C}_{kj} = \max_{\overline{Q}_T} | w_{x_k x_j} |$$

entonces

$$| w |_{2+\alpha}= \max\{C_i, C_{kj}, \overline{C}_0, \overline{C}_i, \overline{C}_{kj}\}$$

donde el máximo se toma sobre las menores constantes que verifican (3.1.6).

$C^{(1+\alpha),(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)$ se define en una forma similar como el espacio de funciones que son continuas en $\overline{Q}_T$ junto con sus derivadas primeras espaciales y satisfacen para $\|x - x'\| \leq 1$, $| t - t' |\leq 1$,

$$(2.2) \qquad \begin{cases} | w(x,t) - w(x,t') |\leq C \mid t - t' \mid^{(1+\alpha)/2} \\ | w_{x_i}(x,t) - w_{x_i}(x',t') |\leq K_i(\|x - x'\|^{\alpha} + | t - t' |^{(\alpha)/2}) \end{cases}$$

La norma de w en este espacio $| w |_{1+\alpha}$ se define en una forma similar a la anterior.

Para $F_T \subset \overline{S}_T$, $C^{1+\alpha,(1+\alpha)/2}(F_T)$ es el espacio de funciones definidas en F_T que son restriciones de funciones pertenecientes a $C^{(1+\alpha),(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)$ con la norma

$$\|v\|_{1+\alpha} = \inf\{| w |_{1+\alpha}; w \in C^{(1+\alpha),(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T), w |_{F_T}= v\}$$

$C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ es el espacio de funciones $w = w(x)$ que son continuas junto a sus derivadas primeras, y cuyas derivadas segundas son continuas Holder de orden α en $\overline{\Omega}$. La norma $\|w\|_{2+\alpha}$ está definida como en el caso del espacio $C^{(1+\alpha),(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)$.

Para terminar con las definiciones tomamos en el espacio producto

$$H = C^{(1+\alpha),(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T) \times C^{(1+\alpha),(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)$$

la norma

$$\max\{| u |_{(1+\alpha),(1+\alpha)/2}, | v |_{(1+\alpha),(1+\alpha)/2}\}$$

Usaremos el siguiente resultado clásico de [L.S.U],

Teorema 3.1. *Sea Ω un dominio acotado con borde $C^{2+\alpha}$.*
Sea $h \in C^{(1+\alpha),(1+\alpha)/2}(\overline{S}_T)$ y $u_0 \in C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ tales que

$$\frac{\partial u_0}{\partial \eta} = h(x,0)$$

Entonces existe una única solución $w \in C^{(2+\alpha),(1+\alpha/2)}(\overline{Q}_T)$ del problema

$$(3.1.7) \qquad \begin{cases} w_t = \Delta w \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = h \\ w(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

Además existe una constante C independiente de h y de u_0 tal que

$$| w |_{2+\alpha}\leq C\{\|u_0\|_{2+\alpha}+ | h |_{1+\alpha}\}$$

La demostración del siguiente Teorema es similar a una de [LGMW] para una sola ecuación.

Teorema 3.2. *Sea Ω un dominio acotado con borde $C^{2+\alpha}$.*

Sean f, g funciones de clase $C^{1+\alpha}$, y los datos iniciales (u_0, v_0) en $C^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$ tales que

$$(3.1.8)\qquad \begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} = f(v_0) & \text{en } \partial\Omega \\ \frac{\partial v_0}{\partial \eta} = g(u_0) \end{cases}$$

Entonces existe un tiempo $T > 0$ tal que el problema (3.1.1)-(3.1.3) tiene una solución (u, v) con la regularidad

$$(u, v) \in C^{(2+\alpha),(1+\alpha/2)}(\overline{Q}_T)$$

<u>*Demostración*</u>.

Haremos uso de un argumento de punto fijo.

Sea $(u, v) \in H$ tal que $u(x, 0) = u_0(x)$, $v(x, 0) = v_0(x)$ en Ω. Entonces las funciones u_0, $g_1(x, t) = f(v(x, t))$ y v_0, $g_2(x, t) = g(u(x, t))$, satisfacen la condición requerida para obtener la regularidad del problema (3.1.7) respectivamente. Además es fácil ver que $g_1, g_2 \in C^{(1+\alpha),((1+\alpha)/2)}$.

Sea w_1 (w_2) la única solución del problema (3.1.7) con g_1 (g_2) en el rol de h. Entonces

$$(3.1.9)\qquad \begin{cases} |\, w_1 \,|_{2+\alpha} \leq C\{\|u_0\|_{2+\alpha} + |\, f(v) \,|_{1+\alpha}\} \\ |\, w_2 \,|_{2+\alpha} \leq C\{\|v_0\|_{2+\alpha} + |\, g(u) \,|_{1+\alpha}\} \end{cases}$$

Definamos el siguiente operador en el espacio H, $A(u, v) = (w_1, w_2)$. Probaremos que A tiene un punto fijo en H si T es pequeño.

Primero probaremos que A manda conjuntos acotados en conjuntos relativamente compactos de H.

Para ver este hecho, sea $B \subset H$ un conjunto acotado y sea $M > 0$ una cota del $\max\{|\, u \,|_{1+\alpha}, |\, v \,|_{1+\alpha}\}$ para todo $(u, v) \in B$. Entonces por (3.1.9) existe una constante $\overline{M}$ tal que $(u, v) \in B$ implica $|\, A(u, v) \,|_{2+\alpha} \leq \overline{M}$. Como los conjuntos acotados en $C^{(2+\alpha),(1+\alpha/2)} \times C^{(2+\alpha),(1+\alpha/2)}$ son relativamente compactos se concluye que la imagen de B es relativamente compacta.

Probaremos ahora que A es contínuo.

Sea $(u_n, v_n) \mapsto (u, v)$ en H, como $A(u_n, v_n)$ es relativamente compacto lo único que debemos probar es que $A(u, v)$ es el único posible punto de acumulación. Sea (w_1, w_2) uno de esos puntos límites. Entonces existe una subsucesión $(u_{n'}, v_{n'})$ tal que $A(u_{n'}, v_{n'}) \mapsto (w_1, w_2)$ en H. Pasando al límite se comprueba que (w_1, w_2) satisfacen

$$(3.1.10)\qquad \begin{cases} (w_1)_t = \Delta w_1 & \text{en } Q_T \\ (w_2)_t = \Delta w_2 \\ \frac{\partial w_1}{\partial \eta} = f(v) & \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \\ \frac{\partial w_2}{\partial \eta} = g(u) \\ w_1(x, 0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ w_2(x, 0) = v_0(x) \end{cases}$$

Y por la unicidad de (3.1.7) obtenemos $(w_1, w_2) = A(u,v)$.

Para aplicar el Teorema del punto fijo de Leray-Schauder debemos probar que si T es suficientemente chico, $M \geq 2\|(u_0, v_0)\|_{2+\alpha}$ y

$$B = \{(u,v) \in H / \mid (u,v) \mid_{1-\alpha} \leq M, u(x,0) = u_0(x), v(x,0) = v_0(x)\}$$

entonces $A(B) \subset B$.

Sea $\overline{M} > 0$ tal que (u,v) en B implica $\mid A(u,v) \mid_{2+\alpha} \leq \overline{M}$.
Sea (u,v) en B y $(w_1, w_2) = A(u,v)$, se tiene (con $w = w_i$, $i = 1,2$)

$$\mid w \mid \leq \mid u_0 \mid + \|w_t\|_{L^\infty} \leq \frac{M}{2} + T\overline{M} \tag{3.1.11}$$

$$\mid w(x,t) - w(x,t') \mid \leq \|w_t\|_{L^\infty} \mid t - t' \mid \leq T^{(1-\alpha)/2}\overline{M} \mid t - t' \mid^{(1+\alpha)/2} \tag{3.1.12}$$

$$\mid w_{x_i}(x,t) \mid \leq \mid (u_0)_{x_i} \mid + \mid w \mid_{2+\alpha} t^{(1+\alpha)/2} \leq \frac{M}{2} + T^{(1+\alpha)/2}\overline{M} \tag{3.1.13}$$

$$\mid w_{x_i}(x,t) - w_{x_i}(x,t') \mid \leq \mid w \mid_{2+\alpha} \mid t - t' \mid^{(1+\alpha)/2} \leq T^{1/2}\overline{M} \mid t - t' \mid^{\alpha/2} \tag{3.1.14}$$

como

$$\mid w_{x_i x_j}(x,t) \mid \leq \mid (u_0)_{x_i x_j} \mid + \mid w \mid_{2+\alpha} t^{\alpha/2} \leq \frac{M}{2} + T^{\alpha/2}\overline{M}$$

se verifica

$$\mid w_{x_i}(x,t) - w_{x_i}(x',t) \mid \leq (\frac{M}{2} + T^{\alpha/2}\overline{M}) \mid x - x' \mid^\alpha \tag{3.1.15}$$

Es claro de estas desigualdades que si tomamos T suficientemente chico nos aseguramos que

$$\mid A(u,v) \mid_{1+\alpha} \leq M$$

Entonces $A(B) \subset B$ y A tiene un punto fijo en B.

Ahora bien, si (u,v) es un punto fijo de A , $(u,v) \in C^{(2+\alpha),1+\alpha/2}(\overline{Q}_T)$ y es una solución del problema (3.1.1)-(3.1.3). □

<u>*Observación 3.2*</u>. Para obtener soluciones más regulares se puede pedir que los datos iniciales verifiquen una compatibilidad mayor (por ejemplo una condición de compatibilidad de orden k que enunciamos a continuación (ver [L.S.U])).

Con la notación

$$u^{(k)}(x) = \frac{\partial^k u(x,t)}{\partial t^k} \mid_{t=0}$$

Si la función h del Teorema 3.1 y el dato inicial satisfacen

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k}(\frac{\partial u}{\partial \eta}) \mid_{t=0}= h^{(k)}(x)$$

es decir

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i \frac{\partial u^{(k)}}{\partial x_i} = h^{(k)}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \nu_i \frac{\partial \Delta^{(k)} u_0}{\partial x_i} = h^{(k)}$$

diremos que se satisface una condición de compatibilidad de orden k.

Usando el mismo argumento del Teorema 3.2 se consigue mayor regularidad para la solución gracias al Teorema 5.3 Cap.IV de [L.S.U] que nos da el análogo del Teorema 3.1 si los datos verifican una condición de compatibilidad de orden $[(l+1)/2]$ pero esta vez con una única solución w en el espacio

$$C^{l+2,l/2+1}(\overline{Q}_T)$$

que además verifica

$$\mid w \mid_{l+2} \leq C\{\|u_0\|_{l+2} + \mid h \mid_{l+1}\}$$

Es decir que con una condición de compatibilidad de orden uno para un dato inicial de clase $C^{3+\alpha}$ se obtiene una regularidad $C^{3+\alpha,1+(1+\alpha)/2}(\overline{Q}_T)$ que es lo que nos hará falta en el Capítulo 8.

CAPITULO 4

Blow-up y existencia global para un sistema de dos ecuaciones del calor con condiciones de borde no lineales.

En este capitulo vamos a considerar soluciones del siguiente sistema de ecuaciones parabólicas.

$$(4.1.1) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ v_t = \Delta v & \text{en } \Omega \times (0,T) \end{cases}$$

$$(4.1.2) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(v) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = g(u) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

$$(4.1.3) \qquad \begin{cases} u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

es decir de (3.1.1)-(3.1.3), estas soluciones existen y son únicas si nos encontramos en las hipótesis del capítulo anterior.

Nuestro objetivo será probar teoremas de blow-up o existencia global en terminos de las funciones f y g.

La idea fundamental para probar blow-up o existencia global es la de construir super y sub soluciones que, o bien empujen a la solucion al blow-up o bien la mayoren y fuercen a que ésta permanezca acotada en intervalos de la forma $[0,T)$.

Esta idea también será usada en los dos capítulos siguientes.

La aparición del fenómeno de blow-up depende esencialmente del crecimiento en el infinito de ciertas funciones derivadas de f y g.

Enunciemos esto con precisión.

Supongamos que para cada $s_0 > 0$, existe $\varkappa$ tal que :

$$\text{(4.1.4(a))} \qquad \frac{g'(s)}{g^2(s)} \leq \varkappa \frac{f'(F^{-1}(G(s)))}{f^2(F^{-1}(G(s)))} \qquad \text{para } s > s_0$$

Definamos $p(z)$ como la siguiente función,

$$p(z) := \frac{f'(F^{-1}(G(z)))g(z)}{f(F^{-1}(G(z)))}$$

y supongamos que es monótona (creciente o decreciente). Llamaremos a esta hipótesis condición (4.1.5).

Si además

$$\int^{\infty} \frac{ds}{f(F^{-1}(G(s)))} = \int^{\infty} \frac{ds}{g(s)f'(F^{-1}(G(s)))} = +\infty$$

Entonces cualquier solución de (4.1.1)-(4.1.3) es global.

Por otra parte, si una de las dos integrales es finita y además

$$\text{(4.1.4(b))} \qquad \frac{g'(s)}{g^2(s)} \geq \varkappa^{-1} \frac{f'(F^{-1}(G(s)))}{f^2(F^{-1}(G(s)))} \qquad \text{para } s > s_0$$

entonces toda solucion positiva tiene blow-up en tiempo finito.

(En este enunciado F y G son primitivas positivas de f y g respectivamente con $F(0) = G(0) = 0$).

Dividiremos la demostración de estos hechos en dos teoremas, Teorema 4.1 (Teorema de existencia global) y Teorema 4.2 (Teorema de blow-up).

Para empezar, debemos recordar un teorema de comparación (Lema 3.2) y definiciones precisas de lo que entendemos por super y sub solución (Definiciones 3.1). Con esto tenemos que si $(\underline{u}, \underline{v})$ es una subsolución clásica y no negativa de (3.1.1)-(3.1.3) y $(\overline{u}, \overline{v})$ es una supersolución clásica no negativa que verifica $\underline{u}(x,0) < \overline{u}(x,0)$ y $\underline{v}(x,0) < \overline{v}(x,0)$ en $\overline{\Omega}$ la misma relación se mantendrá para todo $t > 0$ es decir

$$\text{(4.1.5)} \qquad \begin{cases} \underline{u}(x,t) < \overline{u}(x,t) \\ \underline{v}(x,t) < \overline{v}(x.t) \end{cases}$$

Ahora, con este resultado de comparación, nos dedicaremos a probar los resultados principales de este capítulo.

Comencemos por la existencia global.

4.I. Existencia Global.

Teorema 4.1. *Sean f y g localmente Lipschitz en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ y crecientes en $\mathbb{R}_+$. Sean F y G tales que valen 0 en 0 y $F' = f$ y $G' = g$. Supongamos además que existen constantes $\varkappa$ y s_0 tales que (4.1.4(a)) vale. Si además*

$$\int^{\infty} \frac{ds}{f(F^{-1}(G(s)+c))} = \int^{\infty} \frac{ds}{g(s)f'(F^{-1}(G(s)+c))} = +\infty$$

y la condición de monotonía (4.1.5) vale, entonces toda solución positiva de (4.1.1)-(4.1.3) es global.

<u>*Demostración*</u>.

Gracias al resultado de comparación (Lema 3.2), para probar el teorema, es suficiente con construir supersoluciones que sean inicialmente más grandes que cualquier constante positiva. (sólo hay que observar que podemos tomar una solución de (4.1.1)-(4.1.3) como subsolución en el Lema 3.2).

Sean $\overline{u}(x,t) = \psi(a(x)+b(t))$ y $\overline{v}(x,t) = \alpha(a(x)+b(t))$. Este es nuestro candidato a supersolución. Ahora debemos elegir ψ, α, a y b para que lo sea y además verificar que esta elección es tal que inicialmente es tan grande como queramos y que es global.

Comencemos eligiendo (ψ, α) como una solución de,

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi' = f(\alpha) \\ \alpha' = g(\psi) \end{array} \right. \tag{4.1.6}$$

Multiplicando la primera ecuación por $g(\psi)$ y la segunda por $f(\alpha)$ y restando se obtiene

$$g(\psi)\psi' - f(\alpha)\alpha' = 0$$

Integrando tenemos,

$$F(\alpha(s)) - G(\psi(s)) = c \tag{4.1.7}$$

para alguna constante arbitraria c. Elijamos la condicion inicial (ψ_0, α_0) tan grande como nos guste pero de forma que $F(\alpha_0) = G(\psi_0)$ para que c sea igual a 0.

Ahora observamos que, como f y g son positivas para $s \neq 0$, F y G son estrictamente crecientes y así (4.1.7) es equivalente a

$$\alpha(s) = F^{-1}(G(\psi(s)))$$

De esta forma se obtiene la siguiente ecuación para ψ

$$\psi' = f(F^{-1}(G(\psi)))$$

Como por hipotesis

$$\int^{\infty} \frac{ds}{f(F^{-1}(G(s)))} = +\infty$$

$\psi(s)$ existe globalmente para cualquier dato inicial y de aqui que ψ y α esten definidas globalmente.

Observemos que $\lim_{s\nearrow\infty} \psi(s) = \infty$ y lo mismo vale para α. Para ver esto basta observar que ψ y α son estrictamente crecientes y asi vale $\alpha(s) > \alpha(0) > 0$, entonces $\psi'(s) \geq f(\alpha(0)) > 0$ y $\lim_{s\nearrow\infty} \psi(s) = \infty$. Analogamente para α.

Calculemos

$$\begin{cases} \overline{u}_t(x,t) = \psi'(s)b'(t) \\ \frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta}(x,t) = \psi'(s)\frac{\partial a}{\partial \eta}(x) \\ \Delta\overline{u} = \psi'(s)\Delta a + \psi''(s) \mid \nabla a \mid^2 \end{cases}$$

Donde $s = a(x) + b(t)$ (valen formulas análogas para $\overline{v}$).

Ahora observamos que las condiciones de borde se satisfacen si ponemos $a(x)$ como una función que verifica

$$\frac{\partial a}{\partial \eta} = 1$$

en $\partial\Omega$. pues queda

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial \eta} = \psi'(a(x) + b(t))\frac{\partial a}{\partial \eta}(x) = f(\alpha(a(x) + b(t))) = f(\overline{v})$$

(y análogamente para $\frac{\partial \overline{v}}{\partial \eta}$).

Entonces $(\overline{u}, \overline{v})$ es una supersolución si y solo si,

$$(4.1.8) \qquad \begin{cases} b'(t) \geq |\nabla a|^2 \dfrac{\psi''(s)}{\psi'(s)} + L \\ b'(t) \geq |\nabla a|^2 \dfrac{\alpha''(s)}{\alpha'(s)} + L \end{cases}$$

con $s = a(x) + b(t)$ y L una cota de Δa. (recordemos que sólo falta elegir b).

Asípara conseguir una supersolución que sea mayor que cualquier constante positiva, es suficiente encontrar una función globalmente definida $b(t)$ que verifique (4.1.8) con $b(0)$ arbitrariamente grande.

Recordemos que $\lim_{s\nearrow\infty} \psi(s) = \infty$ y lo mismo vale para α.

Por otro lado,

$$(4.1.9) \qquad \frac{\psi''(s)}{\psi'(s)} = \frac{f'(\alpha(s))g(\psi(s))}{f(\alpha(s))} = \frac{f'(F^{-1}(G(\psi(s))))g(\psi(s))}{f(F^{-1}(G(\psi(s))))} = p(\psi(s))$$

y

$$\frac{\alpha''(s)}{\alpha'(s)} = \frac{g'(\psi(s))f(F^{-1}(G(\psi(s))))}{g(\psi(s))}$$

De la condición de monotonía (4.1.5) y la hipótesis (4.1.4(a)) se deduce que para verificar (4.1.8) es suficiente con tomar una función b tal que

$$b'(t) \geq kp(\psi(N + b(t)) \tag{4.1.10}$$

donde la constante N es cero si $p(z)$ es decreciente y $N = \max_\Omega a(x)$ si es creciente.

Ahora bien, como

$$\int^\infty \frac{ds}{p(\psi(s))} = \int^\infty \frac{dz}{g(z)f'(F^{-1}(G(z)))} = \infty$$

existe una solución global de (4.1.10) para cualquier dato b_0.

Esto termina la demostración. □

4.II. Blow-up.

Ahora nos dedicaremos a probar el resultado de blow-up.

Teorema 4.2. *Sean f y g como en el enunciado del Teorema 4.1. Supongamos de nuevo que la condición de monotonía vale (condición (4.1.5)), y que la condición (4.1.4(b)) tambien vale. Entonces si alguna de las dos integrales siguentes es finita*

$$\int^\infty \frac{dz}{f(F^{-1}(G(z)))} < \infty \tag{4.2.1}$$

o

$$\int^\infty \frac{dz}{g(z)f'(F^{-1}(G(z)))} < \infty \tag{4.2.2}$$

toda solución positiva de (4.1.1)-(4.1.3) tiene blow-up en tiempo finito.

<u>*Demostración*</u>.

La idea de la prueba es conseguir subsoluciones con datos iniciales tan chicos como se quiera y volver a aplicar el lema de comparación.

Como en el teorema anterior elegiremos nuestro candidato a subsolución de la forma

$$\begin{cases} \underline{u}(x,t) = \psi(a(x) + b(t)) \\ \underline{v}(x,t) = \alpha(a(x) + b(t)) \end{cases}$$

De nuevo, sean (ψ, α) como en el teorema anterior (Teorema 4.1). Si vale (4.2.1) ambas funciones ψ y α tienen blow up en tiempo finito para cualquier dato inicial positivo. Si no vale (4.2.1) estas (ψ, α) son globales.

Sea $a(x) = \varepsilon|x - x_0|^2$ donde $x_0 \notin \overline{\Omega}$. Si ε es suficientemente pequeño la condición de borde,

$$\begin{cases} \frac{\partial \underline{u}}{\partial \eta} \leq f(\underline{v}) \\ \frac{\partial \underline{v}}{\partial \eta} \leq g(\underline{u}) \end{cases}$$

vale. (Además ε, $b(0)$, $c(0)$ y $\alpha(0)$ deben ser chicos para tener $\underline{u}(x,\tau) < \gamma_\tau$ and $\underline{v}(x,\tau) < \gamma_\tau$) (ver Capítulo 3).

Entonces, para lograr una subsolución es suficiente con verificar

$$\begin{cases} b'(t) \leq 2n\varepsilon + (2n\varepsilon\, d)^2 \dfrac{\psi''}{\psi'}(a(x) + b(t)) \\ \\ b'(t) \leq 2n\varepsilon + (2n\varepsilon\, d)^2 \dfrac{\alpha''}{\alpha'}(a(x) + b(t)) \end{cases}$$

donde $d = dist(x_0, \Omega)$.

Las condiciones (4.1.4(b)) y (4.1.5) (condición de monotonía) y las identidades (4.1.6) nos permiten ver que es suficiente con pedir

$$b' = (2n\varepsilon\, d)^2 \varkappa^{-1} p(\psi(N + b)) \tag{4.2.3}$$

con $N = 0$ si p es creciente y $N = \max_\Omega a(x)$ si es decreciente.

Si la condición (4.2.1) no vale, entonces, por nuestra hipótesis, vale (4.2.2). Así toda solución de (4.2.3) tiene blow up en tiempo finito y no hay nada mas que decir pues $\psi \nearrow \infty$ y $\alpha \nearrow \infty$. (Recordemos que, gracias a los resultados del capítulo anterior, si $t \geq \tau > 0$ entonces $u(x,t) \geq \gamma_\tau > 0$ y $v(x,t) \geq \gamma_\tau$).

Si vale (4.2.1), en vez de tomar b como una solución de (4.2.3) la tomamos como solución de $b' = 2n\varepsilon$ y así b se vuelve mas grande que cualquier constante positiva en tiempo finito y $\underline{u} \nearrow \infty$ y $\underline{v} \nearrow \infty$.

El teorema está demostrado. $\square$

III. Ejemplos.

Los teoremas anteriores valen en muchas situaciones. En algunas de ellas nos permiten dar una descripción de la existencia o no del fenomeno del blow-up en términos de parámetros que aparecen en los sistemas considerados.

Veamos primero que las condiciones (4.1.4(a)) y (4.1.4(b)) ocurren a menudo. Para ello sean $F' = f$, $G' = g$ con $F(0) = G(0) = 0$ y supongamos que,

$$F(z) = G(z^\beta) \tag{4.3.1}$$

Si esto sucede, entonces derivando obtenemos

$$f(z) = \beta z^{\beta-1} g(z^\beta)$$

y si $\beta \geq 1$.

(4.3.2) $$\frac{\psi''}{\psi'} \geq \frac{\alpha''}{\alpha'}$$

Que resulta equivalente a la condición (4.1.4(a)) con $\varkappa = 1$ pues (4.3.2) vale para cualquier dato inicial.

Por otra parte, si $\beta < 1$ (4.1.4(b)) vale por el mismo argumento anterior.

Además, si $\beta \geq 1$ y $\frac{g(z)}{z} \leq Kg'(z)$ ambas condiciones (4.1.4(a)) y (4.1.4(b)) valen.

Si por ejemplo miramos el sistema (4.1.1)-(4.1.3) cuando $f(v) = (p+1)v^p$, $g(u) = (q+1)u^q$, obtenemos que la aparición o no de blow-up solo depende de p y q. No depende ni de Ω ni de lo datos iniciales mientras estos sean positivos (cf. [R.W] para ver un ejemplo donde el blow-up depende del dominio y de los datos iniciales).

Corolario 4.1. *Sean $f(v) = (p+1)v^p$, $g(u) = (q+1)u^q$ en (4.1.2) entonces si $pq \leq 1$ toda solución positiva de (4.1.1)-(4.1.3) es global mientras que si $pq > 1$ toda solución positiva tiene blow-up en tiempo finito.*

Demostración.

En este caso tenemos $\beta = \frac{(p+1)}{(q+1)}$ y $\frac{g(z)}{z} = (q+1)z^{q-1}$, $g'(z) = (q+1)qz^{q-1}$, entonces valen (4.1.4(a)) y (4.1.4(b)) para $p \geq q > 0$. (Como el problema es simétrico siempre podemos suponer que este es el caso).

También la condición de monotonía vale aquí. De hecho se tiene $p(z) = p(q+1)$ $z^{\frac{pq-1}{p+1}}$.

Ahora sólo resta analizar la convergencia de las integrales

(4.3.3) $$\int^{\infty} \frac{ds}{f(F^{-1}(G(s)))} = \int^{\infty} \frac{ds}{(p+1)z^{p\frac{q+1}{p+1}}}$$

y

(4.3.4) $$\int^{\infty} \frac{ds}{g(s)f'(F^{-1}(G(s)))} = \int^{\infty} \frac{ds}{p(p+1)(q+1)z^{\frac{2pq+p-1}{p+1}}}$$

y vale que ambas (4.3.3) y (4.3.4) son finitas si y solo si $pq > 1$. $\square$

Miremos otro ejemplo.

Sean $f(v) = (1+v)\log(1+v)$ y $g(u) = (\frac{(p+1)}{2})^2(1+u)^p\log(1+u)$ en (4.1.2) entonces en este ejemplo se tiene que si $p < 1$ todas las soluciones son globales pero si $p \geq 1$ toda solución positiva tiene blow-up en tiempo finito.

En este punto creemos de importancia señalar que si $u_0 = v_0$ y $f = g$ se tiene $u(x,t) = v(x,t)$ para todo (x,t). Así u resulta ser una solución del problema

$$\begin{cases} u_t = \Delta u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(u) \end{cases}$$

Se sabe que (ver [W]) en este caso si f es convexa u tiene blow up en tiempo finito si y solo si

$$\int^{\infty} \frac{ds}{f(s)f'(s)} < \infty$$

Y así se confirma que el caso $p = 1$ no debería estar en el rango de existencia global del sistema.

Primero hacemos un cambio de variables para poder considerar que $f(z) = z\log z$ y $g(z) = (\frac{p+1}{2})^2 z^p \log z$ (ahora debemos suponer que los datos iniciales son mayores o iguales a 1 en todo Ω).

Nos queda $\frac{1}{\beta} = \frac{(p+1)}{2}$ y asi $\beta \geq 1$ si y solo si $p \leq 1$. Entonces (4.1.4(a)) vale para $p \leq 1$ y (4.1.4(b)) para $p \geq 1$.

Por otra parte $p(z) = \frac{(p+1)}{2} z^{\frac{p-1}{2}} \left[\frac{(p+1)}{2}\log z + 1\right]$.

Y la condición de monotonía vale si $p \geq 1$ pero si $p < 1$, $p(z)$ crece para $z \leq z_0$ y despues decrece. Vamos a hacer entonces una pequeña modificación de nuestro argumento para tratar este caso.

Corolario 4.2. *Sean $f(z) = z\log z$ y $g(z) = (\frac{p+1}{2})^2 z^p \log z$ con $p > 0$ y $u_0 \geq 1$, $v_0 \geq 1$ en (4.1.1)-(4.1.3). Si $p < 1$ toda solución es global mientras que si $p \geq 1$ toda solución tiene blow up en tiempo finito.*

Demostración.

Si $p \geq 1$ la función $p(z)$ de la condición (4.1.5) es monotona creciente y sólo resta analizar la convergencia de las integrales.

$$(4.3.5) \qquad \int^{\infty} \frac{ds}{f(F^{-1}(G(s)))} = \frac{2}{p+1}\int^{\infty} \frac{ds}{s^{\frac{p+1}{2}}\log s} = \frac{2}{p+1}\int^{\infty} \frac{e^{\frac{1-p}{2}z}}{z}\,dz$$

$$\int^{\infty}\frac{ds}{g(s)f'(F^{-1}(G(s)))}=(\frac{2}{p+1})^2\int^{\infty}\frac{ds}{s^p\log s(\frac{p+1}{2}\log s+1)}=$$

$$=(\frac{2}{p+1})^2\int^{\infty}\frac{e^{(1-p)z}}{z(\frac{p+1}{2}z+1)}\,dz \tag{4.3.6}$$

Si $p>1$ ambas integrales convergen. Si $p=1$ (4.3.5) es divergente pero (4.3.6) converge.

Entonces si $p\geq 1$ toda solución tiene blow-up en tiempo finito.

Sea ahora $p<1$, en este caso $p(z)$ es creciente si $z\leq z_0$ y decreciente luego.

Vamos a ver que toda solución es global. Para esto solo necesitamos construir supersoluciones que sean inicialmente mayores que cualquier constante positiva. Entonces podemos suponer que $\psi(b(0))>z_0$ y elegir b como la solución de,

$$b'=kp(\psi(N+b))$$

pues $p(z)$ es decreciente en el rango en que se mueve $\psi(a(x)+b)$.

Como para $p<1$ ambas integrales en (4.3.5) y (4.3.6) divergen y vale (4.1.4(a)), toda solución resulta ser global. □

Veamos ahora un caso donde el sistema ordinario (4.1.6) tiene blow-up.

En este caso siempre hay blow-up para el sistema (4.1.1)-(4.1.3).

Corolario 4.3. *Si las soluciones positivas de (4.1.6) tienen blow-up en tiempo finito, lo mismo sucede con las soluciones de (4.1.1)-(4.1.3)*

Demostración.

Basta con repasar la demostración del teorema 4.2 y elegir $b(t)=\delta t$ con δ chico. ($b'\leq 2n\varepsilon$). □

Veamos pues un ejemplo donde el sistema ordinario (4.1.6) tiene blow-up.

Lema 4.2. *Sean $x(t)$, $y(t)$ una solución positiva de*

$$\begin{cases} x'(t)\geq f(y(t)) \\ y'(t)\geq g(x(t)) \end{cases} \tag{4.3.7}$$

$$\begin{cases} x(0)=x_0>0 \\ y(0)=y_0>0 \end{cases} \tag{4.3.8}$$

con f y g dos funciones positivas, crecientes, tales que $f(s) \geq g(s)$, $s \geq s_0$ y $\int^{+\infty} \frac{1}{g(s)} ds < +\infty$. Además supongamos que las condiciones iniciales (4.3.8) son positivas. Entonces $(x(t), y(t))$ tiene blow-up.

<u>*Demostración.*</u>

Basta observar que, como ambas funciones $x(t)$, $y(t)$ tienen derivada mayor que una constante positiva, siempre puedo suponer que ambas son mayores que $2s_0$ para algún tiempo τ y a partir de ese instante las puedo comparar con una solución de

$$\begin{cases} w'(t) = g(z(t)) \\ z'(t) = g(w(t)) \\ w(0) = z(0) = s_0 \end{cases}$$

Ahora sólo falta observar que como $w(0) = z(0)$ resulta $w(t) = z(t)$ y como $\int^{+\infty} \frac{1}{g(s)} ds < +\infty$ ambas w, z tienen blow-up en tiempo finito. (resultan ser soluciones de $w' = g(w)$). $\square$

CAPITULO 5

Existencia o blow-up para un sistema N-dimensional de ecuaciones del calor con condiciones de borde aclopladas por potencias.

En este capítulo nos ocuparemos de analizar el comportamiento de las soluciones positivas del siguiente problema:

$$(u_i)_t = \Delta u_i \qquad \text{en } \Omega \times (0, T) \tag{5.1.1}$$

Con las condiciones de borde dadas por :

$$\frac{\partial u_i}{\partial \eta} = \prod_{j=1}^{N} (u_j)^{p_{ij}} \qquad \text{en } \partial\Omega \times (0, T) \tag{5.1.2}$$

Y datos iniciales

$$u_i(x, 0) = u_{i,0}(x) \qquad \text{en } \Omega \tag{5.1.3}$$

$$(i = 1, ..., N)$$

Es decir, estamos mirando un sistema formado por N ecuaciones del calor con un acoplamiento en la condicion de borde dado por potencias (cf. el capítulo anterior donde se da un ejemplo de este tipo).

A lo largo de este capítulo $P = (p_{ij})$ es una matriz con entradas no negativas ($p_{ij} \geq 0$). Y los datos iniciales $u_{i,0}$ son $C^2(\overline{\Omega})$ y positivos (estrictamente) en Ω.

Bajo estas hipótesis la existencia local de una solución clásica hasta algún tiempo t_0 fue demostrada por Amann en [Am2] (ver el capítulo 2). En ese trabajo se demuestra además que una condición necesaria y suficiente para la existencia global es la acotación de $\{u_i(t)\}$ en norma L^∞.

Como en el capítulo anterior, estamos interesados en la existencia global o el blow-up de estas soluciones.

El resultado que presentamos ahora dice que el comportamiento de las soluciones de (5.1.1)-(5.1.3) depende de la existencia global (o no) de las soluciones del siguiente sistema de ecuaciones ordinarias:

$$(5.1.4) \qquad \begin{cases} z_i'(s) = \prod_{j=1}^{N}(z_j)^{p_{ij}}(s) \\ z_i(0) = z_{i,0} > 0 \end{cases}$$

En este caso se puede dar una descripción de la aparición (o no) del fenómeno de blow-up en terminos de los coeficientes de la matriz P.

Con mayor precisión:

Teorema 5.1. *Sea $\{z_i(s)\}$ una solución positiva de (5.1.4) entonces*

a) Si algún coeficiente de la diagonal de P , (p_{ii}), es mayor que 1, el sistema (5.1.4) tiene blow-up.

b) Si todos los p_{ii} son menores o iguales que 1 y $P - Id$ no es singular, sea $(\alpha_1, \ldots.., \alpha_N)$ la solución de

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

entonces
b1) Si $\min_{1 \leq i \leq N}(\alpha_i) > 0$, (5.1.4) tiene una solución global de la forma

$$z_i(s) = c_i(s + s_0)^{\alpha_i}$$

b2) Si $\min_{1 \leq i \leq N}(\alpha_i) < 0$, toda solución positiva de (5.1.4) tiene blow-up.

c) Si todos los p_{ii} son menores o iguales que 1 y $P - Id$ es singular, entonces

c1) Si existe un vector $\beta = (\beta_1, \ldots.., \beta_N)$ con todos los $\beta_i > 0$ tal que

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

(es decir $\beta \in Nu(P - Id)$), toda solución positiva de (5.1.4) es global.
Y además (5.1.4) tiene una supersolución de la forma

$$w_i(s) = c_i e^{\overline{\beta}_i s}$$

c2) Si no ocurre c1) y todos los $p_{ij} > 0$ $(i \neq j)$ (caso estrictamente cooperativo (ver [F.T])), toda solución positiva de (5.1.4) tiene blow-up.

Como consecuencia de este resultado para ecuaciones ordinarias se obtiene, aplicando ideas similares a las del capítulo anterior, una caracterización de cuando las soluciones de (5.1.1)-(5.1.3) son globales en términos de los coeficientes de la matriz $P = (p_{ij})$ (en este caso, como en el capítulo anterior, esto no depende ni de Ω ni de los datos iniciales, siempre que estos sean positivos).

Enunciamos, por fin, el Teorema que constituye el objetivo de este capítulo:

Teorema 5.2. *a) Si para algun $i = 1, \ldots, N$, $p_{ii} > 1$ entonces toda solución positiva de (5.1.1)-(5.1.3) tiene blow-up en tiempo finito.*

b) Si $0 \leq p_{ii} \leq 1$ para todo i y $P - Id$ no es singular. Sea $(\alpha_1, \ldots\ldots \alpha_N)$ la solución de

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

entonces

b1) Si $\min_{1\leq i\leq N}(\alpha_i) > 0$ toda solucion positiva de (5.1.1)-(5.1.3) es global.

b2) Si $\min_{1\leq i\leq N}(\alpha_i) < 0$ toda solución positiva de (5.1.1)-(5.1.3) tiene blow-up.

c) Si $0 \leq p_{ii} \leq 1$ para todo i y $P - Id$ es singular.

c1) Si existe $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_N)$, con todos los $\beta_i > 0$, solución de

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

entonces toda solución de (5.1.1)-(5.1.3) es global.

c2) Si no ocurre c1) y todos los $p_{ij} > 0$ $(i \neq j)$ (caso estrictamente cooperativo (ver [F.T])), entonces toda solución positiva de (5.1.1)-(5.1.3) tiene blow-up en tiempo finito.

Observación.

El Teorema 5.2 se podría enunciar de la siguiente forma :

Teorema 5.2 '. *Bajo las hipótesis del Teorema 5.1 sobre la matriz P o sea, si la matriz P es estrictamente cooperativa, el sistema (5.1.1)-(5.1.3) tiene soluciones positivas globales si y solo si las soluciones positivas del sistema ordinario (5.1.4) lo son.*

Debemos mencionar que las hipótesis de ambos Teoremas (Teorema 5.1 y Teorema 5.2) son fácilmente verificables en términos de los coeficientes de la matriz P (con un poco de algebra lineal basta).

Ahora vamos a probar el Teorema 5.1.

5.I. Un resultado de blow-up para un sistema ordinario .

Demostración del Teorema 5.1

La demostración del teorema 5.1 la dividiremos en partes.

Empezamos por la parte *a)* del Teorema 5.1.

Parte a) del Teorema 5.1 *Si algún p_{ii} es mayor que 1 entonces el sistema ordinario (5.1.4) tiene blow-up.*

Demostración.

Supongamos que $p_{11} > 1$.
Como estamos hablando de soluciones positivas, resulta que todas las z_i son estrictamente crecientes en t y así se obtiene que z_1 satisface

$$z_1'(t) \geq c(z_1(t))^{p_{11}}$$

donde $c = \prod_{i\neq 1}(z_{i0})^{p_{1i}}$.
Y como $p_{11} > 1$ se concluye que z_1 no puede ser global. $\square$

Así pues en lo que resta de esta sección vamos a suponer que todos los elementos de la diagonal de P son menores o iguales que 1.

Ahora probaremos la parte *b1)* del Teorema 5.1.

Parte b1) del Teorema 5.1 *Si* $\min_{1\leq i\leq N}(\alpha_i) > 0$ *entonces (5.1.4) tiene soluciones globales de la forma*

$$z_i(s) = c_i(s+s_0)^{\alpha_i}$$

Demostración.

Tenemos que verificar que se pueden elegir constantes c_i tales que $c_i(s+s_0)^{\alpha_i}$ es una solución de (5.1.4).
Queremos

$$c_i\alpha_i(s+s_0)^{\alpha_i-1} = \prod_{j=1}^{N}(c_j(s+s_0)^{\alpha_j})^{p_{ij}}$$

Y por esto, lo que necesitamos es:

$$\alpha_i - 1 = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j p_{ij} \tag{5.1.5}$$

y

$$(5.1.6) \qquad \alpha_i c_i = \prod_{j=1}^{N} (c_j)^{p_{ij}}$$

(5.1.5) es una consecuencia directa de nuestra elección de los α_i como una solución de

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \alpha_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

(5.1.6) es equivalente a

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \ln c_1 \\ \ln c_2 \\ \\ \ln c_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(\alpha_1) \\ \ln(\alpha_2) \\ \vdots \\ \ln(\alpha_N) \end{pmatrix}$$

De aquí que sea suficiente con elegir $c_i = e^{\gamma_i}$, donde γ_i son las soluciones de

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \\ \gamma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ln(\alpha_1) \\ \ln(\alpha_2) \\ \vdots \\ \ln(\alpha_N) \end{pmatrix}$$

(todos los c_i's resultan positivos) $\square$

Ahora haremos una observación que nos permite reducir el tamaño de los sistemas a considerar.

Podemos considerar subsistemas de la forma

$$(5.1.7) \qquad \begin{cases} v'_{i_r}(s) = c\prod_{l=1}^{k}(v_{i_l})^{p_{i_l j_l}} \\ 0 < v_{i_r}(0) < z_{i_r,0} \end{cases}$$

donde $\{i_1, ..., i_k\} \subset \{1, ..., N\}$ y $c > 0$, y emplear un argumento de comparación usando que todas las z_i son positivas y acotadas inferiormente por una constante positiva (ver la demostración del Lema 5.1) para obtener $v_{i_l} < z_{i_l}$. Así hemos llegado a demostrar el siguiente Lema.

Lema 5.1. *Si toda solución positiva de (5.1.7) tiene blow-up, lo mismo ocurre con todas las soluciones positivas de (5.1.4).*

Ahora veremos una manera de obtener resultados de blow-up para este tipo de sistemas fabricando una subsolución.

Lema 5.2. *Si la matriz $P - Id$ es tal que existe un vector $(\gamma_1, ..., \gamma_N)$ con todos los $\gamma_i < 0$ tal que*

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \\ \gamma_N \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \\ -1 \end{pmatrix}$$

(la desigualdad se entiende coordeneda a coordenada) entonces toda solución de (5.1.4) tiene blow-up

<u>*Demostración.*</u>

Veamos que se pueden elegir constantes c_i de forma que $w_i(s) = c_i(s_0 - s)^{\gamma_i}$ sea una subsolución de (5.1.4). Para esto necesitamos:

$$-c_i\gamma_i(s_0 - s)^{\gamma_i - 1} \leq \prod_{j=1}^{N}(c_j(s_0 - s)^{\gamma_j})^{p_{ij}}$$

Y por esto pedimos (asumimos que elegimos $s_0 < 1$):

$$\gamma_i - 1 \geq \sum_{j=1}^{N} \gamma_j p_{ij} \tag{5.1.8}$$

$$-\gamma_i c_i \leq \prod_{j=1}^{N}(c_j)^{p_{ij}} \tag{5.1.9}$$

(5.1.8) se deduce directamente de nuestra hipótesis sobre los γ_i,

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \\ \gamma_N \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

y (5.1.9) es equivalente a

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \ln c_1 \\ \ln c_2 \\ \\ \ln c_N \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \ln(-\gamma_1) \\ \ln(-\gamma_2) \\ \\ \ln(-\gamma_N) \end{pmatrix}$$

De aquí que sea suficiente con elegir $c_i = e^{-k\gamma_i}$ con k grande, pues $-k\gamma_i$ son soluciones de

$$(P - Id)\begin{pmatrix} -k\gamma_1 \\ -k\gamma_2 \\ \vdots \\ -k\gamma_N \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} k \\ k \\ \vdots \\ k \end{pmatrix} \geq \begin{pmatrix} \ln(\gamma_1) \\ \ln(\gamma_2) \\ \vdots \\ \ln(\gamma_N) \end{pmatrix}$$

(todos los c_i's resultan positivos)

Ahora basta observar que, del hecho de ser las soluciones de (5.1.4) estrictamente crecientes, si suponemos que estas son globales, en algún instante τ tendremos $z_i(\tau) > c_i(s_0)^{\gamma_i}$. A partir de esto sólo resta aplicar un argumento de comparación para obtener $z_i(\tau + s) > c_i(s_0 - s)^{\gamma_i}$ y así lograr el blow-up de nuestra solución z_i. □

Ahora veremos la parte *b2)* del Teorema 5.1.

<u>*Parte b2) del Teorema 5.1*</u> *Si valen las hipótesis de la parte b2) del Teorema 5.1 entonces toda solución de (5.1.4) tiene blow-up.*

<u>*Demostración*</u>.

Podemos suponer que los primeros $\alpha_1, ..., \alpha_r$ son negativos (< 0) y los últimos $\alpha_{r+1}, ..., \alpha_N$ son positivos (≥ 0).

Si llamamos Q a la matriz formada por los p_{ij} con $1 \leq i, j \leq r$ y R a la formada por p_{ij} con $1 \leq i \leq r$, $r + 1 \leq j \leq N$, entonces se verifica

$$(Q - Id)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \\ \alpha_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix} - R\begin{pmatrix} \alpha_{r+1} \\ \alpha_{r+2} \\ \\ \alpha_N \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

y podemos aplicar el Lema 5.2 para obtener el blow-up del sistema

$$\text{(5.1.10)} \qquad \begin{cases} v_i'(s) = c\prod_{l=1}^{r}(v_l)^{p_{il}} \\ 0 < v_i(0) < z_{i,0} \end{cases}$$

con $i = 1, ..., r$ (la constante c puede eliminarse facilmente tomando cs en lugar de s como variable).

Ahora sólo resta aplicar el Lema 5.1 para obtener el blow-up de (5.1.4) y de esta forma concluir la demostración del Lema. □

Por ahora hemos probado las partes *a)* y *b)* de nuestro Teorema 5.1 , sólo nos queda pendiente *c)*.

Empecemos por *c1)*,

<u>Parte c1) del Teorema 5.1</u> Si se verifican las hipótesis de la parte c1) del Teorema 5.1 entonces las soluciones positivas de (5.1.4) son globales.

<u>Demostración</u>.

Podemos suponer que todos los β_i son mayores que 1. (en caso contrario hay que multiplicarlos por k con $k > 0$ grande).

Vamos a construir una supersolución de la forma $w_i(s) = c_i e^{\beta_i s}$.

Queremos

$$c_i \beta_i e^{\beta_i s} \geq \prod_{j=1}^{N} (c_j e^{\beta_j s})^{p_{ij}}$$

y por ello pedimos

$$(P - Id) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{5.1.11}$$

y

$$c_i \beta_i \geq \prod_{j=1}^{N} (c_j)^{p_{ij}} \tag{5.1.12}$$

(5.1.11) es nuestra hipótesis.

Para ver que podemos elegir c_i verificando (5.1.12) tomemos logaritmos. Se obtiene

$$(P - Id) \begin{pmatrix} \ln c_1 \\ \ln c_2 \\ \\ \ln c_N \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} \ln(\beta_1) \\ \ln(\beta_2) \\ \vdots \\ \ln(\beta_N) \end{pmatrix}$$

Y ahora solo queda tomar $c_i = e^{\beta_i}$ y observar que habíamos supuesto que todos los β_i eran mayores que 1 para que los términos de la derecha sean positivos.

Como tengo una supersolución global que tiende a infinito uniformemente, se deduce que toda solución positiva es global. □

Vamos a probar el último resultado de esta sección.

<u>Parte c2) del Teorema 5.1</u> Si estamos bajo las hipótesis de la parte c2) del Teorema 5.1 entonces toda solución positiva de (5.1.4) tiene blow-up.

<u>Demostración</u>.

Podemos suponer que tenemos un vector $(\beta_1, ...\beta_N)$ tal que

$$(5.1.13) \qquad (P - Id)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con $\beta_1, ..., \beta_r$ positivos (≥ 0) y $\beta_{r+1}, ..., \beta_N$ negativos (< 0).

Así $\beta_1, ..., \beta_r$ satisfacen ($Q = (p_{ij})$ con $1 \leq i, j \leq r$ y $R = (p_{ij})$ con $1 \leq i \leq r$, $r + 1 \leq j \leq N$, como antes)

$$(Q - Id)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_r \end{pmatrix} = -R\begin{pmatrix} \beta_{r+1} \\ \beta_{r+2} \\ \vdots \\ \beta_N \end{pmatrix}$$

El vector del lado derecho tiene sus entradas mayores que cero. Pues los coeficientes p_{ij} son mayores que cero (por hipótesis) y los β_k ($k = r + 1, ..., N$) son estrictamente negativos.

Ahora arreglamos los r primeros β_i de la siguiente forma: tomamos $\overline{\beta}_i = \beta_i + \varepsilon$ con ε chico para preservar el signo estricto del lado derecho y luego multiplicamos por $-k$ con k grande para obtener

$$(Q - Id)\begin{pmatrix} -k\overline{\beta}_1 \\ -k\overline{\beta}_2 \\ \vdots \\ -k\overline{\beta}_r \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ \vdots \\ -1 \end{pmatrix}$$

y así caemos en las hipótesis del Lema 5.2.

Conseguimos el blow-up que queríamos para el sistema (5.1.4) gracias a una observación anterior (ver Lema 5.1 pues tenemos un subsistema con blow-up). $\square$

Observación 5.1.

Podemos observar que bajo las hipótesis del Teorema 5.1 se tiene que o bien el sistema ordinario (5.1.4) tiene blow-up. o bien tiene una supersolución de la forma $w_i(s) = c_i e^{\beta_i t}$ o de la forma $w_i(s) = c_i(s + s_0)^{\alpha_i}$ (para ciertos c_i, β_i o α_i mayores que cero).

5.II. El resultado para el sistema de ecuaciones del calor .

Como en el capítulo anterior para empezar necesitamos un Lema de comparación.

Las ideas empleadas para la demostración de este Lema son análogas a las del Lema 3.2, pero la incluímos en este capítulo para que sea autocontenido.

Lema 5.3. *Si* $\underline{u}_i$, $\overline{u}_i$ *son soluciones de*

$$(\underline{u}_i)_t \leq \Delta \underline{u}_i \qquad (\overline{u}_i)_t \geq \Delta \overline{u}_i$$

$$\frac{\partial \underline{u}_i}{\partial \eta} \leq \prod_{j=1}^{N} (\underline{u}_j)^{p_{ij}} \qquad \frac{\partial \overline{u}_i}{\partial \eta} \geq \prod_{j=1}^{N} (\overline{u}_j)^{p_{ij}}$$

con $\underline{u}_i(x,0) < \overline{u}_i(x,0)$ *y* $\underline{u}_i, \overline{u}_i$ *son continuas hasta* $t = 0$, $(i = 1, ..., N)$.

Entonces $\underline{u}_i(x,t) < \overline{u}_i(x,t)$ *(siempre que ambas esten definidas).*

<u>*Notación*</u>. Llamaremos a $\underline{u}_i$ una subsolución de (5.1.1)-(5.1.3) y a $\overline{u}_i$ una supersolución.

<u>*Demostración*</u>.

$w_i = (\overline{u}_i - \underline{u}_i)(x,t)$ satisface

$$(w_i)_t \geq \Delta w_i$$

$$\frac{\partial w_i}{\partial \eta} \geq \prod_{j=1}^{N} (\overline{u}_j)^{p_{ij}} - \prod_{j=1}^{N} (\underline{u}_j)^{p_{ij}}$$

$$w_i(x,0) > \delta$$

para algún $\delta > 0$.

Supongamos que el resultado sea falso.

Sea t_0 el supremo del siguiente conjunto $\{t > 0; w_i(\tau) > \delta/2 \ \ \tau \in [0,t)\}$. Resulta que $t_0 > 0$ debido a la desigualdad inicial, $w_i(x,0) > \delta$ y a la continuidad de w_i hasta $t = 0$.

Si t_0 es menor que el tiempo de existencia de w, en t_0 tenemos $w_{i_0}(x_0, t_0) = \delta/2$ para algún $1 \leq i_0 \leq N$ y algún $x_0 \in \overline{\Omega}$. Como w_{i_0} es supercalorica, su mínimo en $Q_{t_0} = \{(x,t); x \in \overline{\Omega}, 0 \leq t \leq t_0\}$ se alcanza en el borde parabólico , $\partial_p Q_{t_0}$, pero no puede ser en $t = 0$ ($w_{i_0} > \delta$) y el las paredes laterales de $\partial_p Q_{t_0}$ se tiene

$$\frac{\partial w_{i_0}}{\partial \eta} \geq \prod_{j=1}^{N} (\overline{u}_j)^{p_{i_0 j}} - \prod_{j=1}^{N} (\underline{u}_j)^{p_{i_0 j}} > 0$$

lo que fuerza una contradicción. (el punto x_0 debe pertenecer a $\partial_p Q_{t_0}$ pero no puede estar en $t = 0$ ni en las paredes laterales).

Deducimos entonces que ese tiempo t_0 no puede existir y de aquí que

$$w_i(x,t) > \delta/2$$

para todo $(i = 1, ..., N)$, $x \in \overline{\Omega}$, $0 \leq t \leq T$ (si $\underline{u}_i, \overline{u}_i$ estan todas definidas hasta T). □

Con este Lema de comparación podemos aplicar las ideas del capítulo anterior para construir super y subsoluciones adecuadas que nos den el resultado buscado.

<u>*Demostración del Teorema 5.2*</u>.

Empezamos por *a)*

Supongamos que $p_{11} > 1$ entonces u_1 satisface

$$(5.2.1) \qquad \begin{cases} (u_1)_t = \Delta u_1 \\ \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = (u_1)^{p_{11}} \prod_{j=2}^{N} (u_j)^{p_{ij}} \\ u_1(x,0) = u_{1,0}(x) > 0 \end{cases}$$

Aplicando el principio del mínimo a las $\{u_i\}, i = 2,...,N$ concluímos que $u_i \geq c > 0, i = 2,...,N$ $(\min(u_i) \geq \min(u_{i0}))$. Por lo tanto u_1 es una solución de

$$(5.2.2) \qquad \begin{cases} w_t = \Delta w \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \geq c^{N-1} w^{p_{11}} \\ w(x,0) > 0 \end{cases}$$

Y se sabe que cualquier solución positiva de (5.2.2) tiene blow-up en tiempo finito (ver por ejemplo [R.R] o [LG.M.W] (también ver el capítulo 2)).
Hemos demostrado el item *a)* del Teorema 5.2.

En el resto de esta demostración vamos a asumir que todos los p_{ii} son menores o iguales que 1 , (i=1,...,N).

Como en el capítulo anterior vamos a buscar super y subsoluciones de la forma

$$(5.2.3) \qquad w_i(x,t) = \phi_i(a(x) + b(t))$$

Ahora calculamos.

$$(5.2.4) \qquad \begin{cases} \nabla w_i(x,t) = \phi_i'(s)\nabla a(x) \\ \Delta w_i(x,t) = \phi_i'(s)\Delta a(x) + \phi_i''(s)\|\nabla a(x)\|^2 \\ (w_i)_t(x,t) = \phi_i'(s)b'(t) \end{cases}$$

$$s = a(x) + b(t)$$

Comencemos construyendo supersoluciones globales (asumimos que estamos en los casos *b1)* y *c1)* del Teorema 5.2).
De nuevo siguiendo las ideas del capítulo anterior elegimos $\phi_i(s)$ como una supersolución del siguiente sistema de ecuaciones ordinarias

(5.2.5) $$\begin{cases} z_i'(s) = \prod_{j=1}^N (z_j(s))^{p_{ij}} \\ z_i(0) = z_{i,0} > 0 \end{cases}$$

(i.e. ϕ_i es una supersolución de (5.4.1))

Observamos que, gracias a la observación 5.1, podemos elegir $\phi_i(s) = c_i(s+s_0)^{\alpha_i}$ si estamos en el caso *b1)* o bien $\phi_i(s) = c_i e^{\beta_i t}$ si estamos en el caso *c1)*.

Ahora probaremos que podemos elegir a y b para lograr que nuestro candidato (5.2.3) sea una supersolución global de (5.1.1)-(5.1.3) que tiende a infinito uniformemente cuando t crece.

Debemos verificar, para $1 \le i \le N$

(5.2.6) $$\phi_i'(s)b'(t) \ge \phi_i'(s)\Delta a(x) + \phi_i''(s)\|\nabla a(x)\|^2$$

(5.2.7) $$\phi_i'(s)\frac{\partial a(x)}{\partial \eta} \ge \prod_{j=1}^N (\phi_j(s))^{p_{ij}}$$

Para satisfacer (5.2.7) tomamos $a(x)$ una función $C^2(\overline{\Omega})$ tal que $\frac{\partial a}{\partial \eta} \ge 1$ en $\partial\Omega$ (por ejemplo una extensión de la distancia al borde). Siempre podemos suponer que la función a que elegimos es estrictamente positiva en $\overline{\Omega}$ (pues si no lo es, basta con sumarle una constante).

Con esta elección de a sólo resta elegir $b(t)$ tal que

$$b'(t) \ge L(1 + \frac{\phi_i''(s)}{\phi_i'(s)})$$

donde L es una cota de $\mid \Delta a \mid$ y $\|\nabla a\|^2$.

Ahora observamos que

$$\frac{\phi_i''(s)}{\phi_i'(s)} = \frac{c}{s+s_0} \qquad , \ c > 0$$

(si estamos en el caso *b1)*)
y

$$\frac{\phi_i''(s)}{\phi_i'(s)} = c \qquad , \ c > 0$$

(si estamos en el caso *c1)*)
Y así nos queda (caso *b1)*),

$$\frac{\phi_i''(a(x)+b(t))}{\phi_i'(a(x)+b(t))} = \frac{c}{a(x)+b(t)+s_0}$$

o bien

$$\frac{\phi_i''(a(x)+b(t))}{\phi_i'(a(x)+b(t))} = c$$

(caso *c1)*.
y podemos elegir $b(t)$ como una solución de

$$b'(t) = L(1 + \frac{c}{b(t)+s_0})$$

o bien de

$$b'(t) = L(1+c)$$

Esta $b(t)$ es global y tiende a infinito y como las $\phi_i(s)$ tambien tienden a infinito con s resulta que $w_i(x,t)$ es una supersolución global de (5.1.1)-(5.1.3) que tiende a infinito uniformemente en $\overline{\Omega}$.

Ahora sólo resta aplicar el Lema de comparación (Lema 5.3) para obtener

$$u_i(x,t) < w_i(x,t+\tau)$$

(suponiendo que $w_i(x,\tau) > u_{i,0}(x)$)

Y deducimos que cualquier solución positiva de (5.1.1)-(5.1.3) es global si estamos bajo las hipótesis *b1)* o *c1)* del Teorema 5.2.

Para probar lo que resta del Teorema 5.2 (partes *b2)* y *c2)*), vamos a construir una subsolución de (5.1.1)-(5.1.3) con dato inicial arbitrariamente pequeño. Como antes proponemos como candidato a

(5.2.8) $$w_i(x,t) = \phi_i(a(x)+b(t))$$

Empezamos observando que si elegimos ϕ_i como una solución de (5.1.4), ésta $\phi_i(s)$ tiene blow-up en tiempo finito para cualquier dato inicial positivo.

Tenemos que elegir $a(x)$, $b(t)$ para hacer de esta $w_i(x,t)$ una subsolución de (5.1.1)-(5.1.3) con datos iniciales $w_i(x,0) < u_{i0}(x)$.
Debemos verificar

(5.2.9) $$\phi_i'(s)b'(t) \le \phi_i'(s)\Delta a(x) + \phi_i''(s)\|\nabla a\|^2$$

y

(5.2.10) $$\phi_i'(s)\frac{\partial a}{\partial \eta} \le \prod_{j=1}^{N}(\phi_j(s))^{p_{ij}}$$

Sea pues $b(t) = \varepsilon t$ y $a(x) = \delta \sum_{i=1}^{N} (x_i)^2 = \delta \|x\|^2$. Entonces, si δ es chico. (5.2.10) vale. gracias a nuestra elección de ϕ_i como soluciones de (5.1.4).

Ahora observamos que $\frac{\phi_i''(s)}{\phi_i'(s)} \geq 0$ y entonces basta tomar ε de forma tal que

$$\varepsilon = b'(t) \leq \Delta a(x) = 2\delta$$

(En particular alcanza con tomar $\varepsilon = 2\delta$).

Debemos observar que si δ es pequeñito ϕ_i esta definido en $s = a(x)$ para $x \in \Omega$. Además si $\phi_i(0)$ y δ son chicos se cumple $w_i(x, 0) < u_{i,0}(x)$ y podemos aplicar el Lema de comparación para obtener

$$w_i(x, t) < u_i(x, t)$$

Para concluir observemos que, como $b(t) = \varepsilon t$ y $\phi_i(s)$ tiene blow-up en tiempo finito, $w_i(x, t)$ tiene blow-up y, por la comparación, $u_i(x, t)$ no puede ser global.

Hemos concluído con el Teorema 5.2. $\square$

CAPITULO 6

Existencia global o blow-up para un sistema de ecuaciones parabólicas no lineales con condiciones de borde no lineales.

En este capítulo nos dedicaremos a extender las ideas de los dos capítulos anteriores para analizar la existencia global o el blow-up del siguiente sistema:

$$(6.1.1) \qquad \begin{cases} u_t = \operatorname{div}(a(u)\nabla u) + r(u,v) & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ v_t = \operatorname{div}(b(v)\nabla v) + s(u,v) & \text{en } \Omega \times (0,T) \end{cases}$$

Con condiciones de borde

$$(6.1.2) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(u,v) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = g(u,v) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

y datos iniciales

$$(6.1.3) \qquad \begin{cases} u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Aquí u_0, v_0 son $C^2(\overline{\Omega})$ y positivas. Las funciones $r(\cdot,\cdot)$ y $s(\cdot,\cdot)$ son no negativas, C^{2-}_{loc} y no decrecientes en cada variable por separado. $a(\cdot), b(\cdot)$ son positivas, ($a \geq c > 0, b \geq c > 0$), no decrecientes y C^{2-}_{loc}. Por último, $f(\cdot,\cdot), g(\cdot,\cdot)$ son positivas, nodecrecientes en cada variable por separado y, nuevamente, C^{2-}_{loc} .

Todas estas condiciones sobre las funciones que aparecen en este capítulo nos permiten tener la existencia y unicidad de una solución local regular (solución clásica) (ver capítulo 3, Lema 3.1 y Corolario 3.1).

Como ya hemos dicho, Amann ([Am3]) da una condición necesaria y suficiente para que la solución local sea, en realidad, una solución global: la acotación de (u,v) en norma L^∞ en intervalos de la forma $[0,T)$.

De nuevo estamos interesados en teoremas de existencia global o blow-up. Para obtener estos resultados usaremos las técnicas de los dos capítulos anteriores, para construir super y subsoluciones convenientes.

El teorema que presentamos ahora nos muestra que, como antes (capítulos 4 y 5), la existencia de solución global se relaciona con el comportamiento de las soluciones positivas del sistema ordinario

$$(6.1.4)\qquad \begin{cases} \varphi'(\sigma) = f(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) \\ \psi'(\sigma) = g(\varphi(\sigma), \psi(\sigma)) \\ \varphi(0) = \varphi_0 \\ \psi(0) = \psi_0 \end{cases}$$

Más concretamente probamos:

Teorema 6.1. *a) Si toda solución positiva de (6.1.4) tiene blow-up en tiempo finito entonces toda solución positiva de (6.1.1)-(6.1.3) también tiene blow-up en tiempo finito.*

b) Supongamos ahora que las soluciones positivas de (6.1.4) son todas globales, y además supongamos que $\frac{F(\sigma)}{\varphi'(\sigma)}, \frac{G(\sigma)}{\psi'(\sigma)}$ *son monótonas, crecientes o decrecientes, simultáneamente, donde*

$$\{b(\psi(\sigma))\psi'(\sigma) + (b(\psi(\sigma))\psi'(\sigma))' + s(\varphi(\sigma), \psi(\sigma))\} = G(\sigma)$$

y

$$\{a(\varphi(\sigma))\varphi'(\sigma) + (a(\varphi(\sigma))\varphi'(\sigma))' + r(\varphi(\sigma), \psi(\sigma))\} = F(\sigma)$$

entonces vale,

b1) Si

$$\int^{+\infty} \frac{1}{\min\left\{\frac{F(\sigma)}{\varphi'(\sigma)}, \frac{G(\sigma)}{\psi'(\sigma)}\right\}} \, d\sigma < +\infty$$

toda solución positiva de (6.1.1)-(6.1.3) tiene blow-up.

b2) Si

$$\int^{+\infty} \frac{1}{\max\left\{\frac{F(\sigma)}{\varphi'(\sigma)}, \frac{G(\sigma)}{\psi'(\sigma)}\right\}} \, d\sigma = +\infty$$

toda solución positiva de (6.1.1)-(6.1.3) es global.

Observación 6.1. La monotonía requerida en el item *b)* del Teorema 6.1 puede reemplazarse por

b'1) Si F y G son crecientes y para algún $k > 0$

$$\int^{+\infty} \frac{1}{\min\left\{\frac{F(\sigma)}{\varphi'(\sigma+k)}, \frac{G(\sigma)}{\psi'(\sigma+k)}\right\}} \, d\sigma < +\infty$$

entonces vale la conclusión b1).

b'2) Si F y G son crecientes y para todo $d > 0$

$$\int^{+\infty} \frac{1}{\max\left\{\frac{F(\sigma+d)}{\varphi'(\sigma)}, \frac{G(\sigma+d)}{\psi'(\sigma)}\right\}}\, d\sigma = +\infty$$

entonces vale b2).

La demostración de esta observación es fácil y se deduce de los argumentos usados en la demostración del Teorema 6.1.

Observación 6.2. El hecho de pedir en *b)* en un item el máximo y en otro el mínimo se podría reemplazar por una condición del tipo

$$\frac{F(\sigma)}{\varphi'(\sigma)} \leq \gamma \frac{G(\sigma)}{\psi'(\sigma)}$$

y proceder como en el capítulo 4.

Observación 6.3. Si $f = g$, $a = b$ y $r = s$ nos queda que si empezamos con $\varphi_0 = \psi_0$ en (6.1.4), entonces $\varphi(s) = \psi(s)$ y de allí que

$$\frac{F(\sigma)}{\varphi'(\sigma)} = \frac{G(\sigma)}{\psi'(\sigma)}$$

y entonces el item *b)* se reduce a

$$\int^{+\infty} \frac{1}{F/\varphi'} < +\infty$$

si y sólo si la solución (u, v) tiene blow-up.

Como corolario inmediato podemos examinar una generalización del resultado del capítulo 5. El problema a estudiar es el siguiente:

$$(6.1.5) \qquad \begin{cases} u_t = \operatorname{div}(u^{n-1}\nabla u) + u^{q_{11}}v^{q_{12}} & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ v_t = \operatorname{div}(v^{m-1}\nabla v) + u^{q_{21}}v^{q_{22}} & \text{en } \Omega \times (0,T) \end{cases}$$

$$(6.1.6) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} = u^{p_{11}}v^{p_{12}} & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = u^{p_{21}}v^{p_{22}} & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

$$(6.1.7) \qquad \begin{cases} u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

donde p_{ij} y q_{ij} son no negativos y $n, m \geq 1$.

Vamos a usar un resultado que presentamos en el capítulo 5 para el caso especial del sistema de dos ecuaciones ordinarias:

$$(6.1.8) \qquad \begin{cases} z_1' = (z_1)^{p_{11}}(z_2)^{p_{12}} \\ z_2' = (z_1)^{p_{21}}(z_2)^{p_{22}} \\ z_1(0) = z_{1,0} > 0 \qquad z_2(0) = z_{2,0} > 0 \end{cases}$$

con todos los $p_{ij} \geq 0$. Volvemos a copiar el resultado para hacer que el capítulo sea autocontenido

Teorema 5.1 (caso 2×2). *Sea $\{z_i(s)\}$ una solución positiva de (5.1.8) entonces*

a) Si algún coeficiente de la diagonal de P , (p_{11} o p_{22}), es mayor que 1, el sistema (5.1.8) tiene blow-up.

b) Si todos los p_{ii} son menores o iguales que 1 y $P - Id$ no es singular, sea (α_1, α_2) la solución de

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

entonces
b1) Si $\min\{\alpha_1, \alpha_2\} > 0$, (6.1.8) tiene una solución global de la forma

$$z_i(s) = c_i(s + s_0)^{\alpha_i}$$

b2) Si $\min\{\alpha_1, \alpha_2\} < 0$, toda solución positiva de (6.1.8) tiene blow-up.

c) Si todos los p_{ii} son menores o iguales que 1, $P - Id$ es singular y el sistema es estrictamente cooperativo ($p_{ij} > 0$, $i \neq j$), entonces
c1) existe un vector $\beta = (\beta_1, \beta_2)$ con todos los $\beta_i > 0$ tal que

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(es decir $\beta \in Nu(P - Id)$) y entonces toda solución positiva de (6.1.8) es global. Y además (6.1.8) tiene una supersolución de la forma

$$w_i(s) = c_i e^{\overline{\beta}_i s}$$

<u>Observación 6.3</u>. En el item *c)* del teorema anterior no puede darse el caso *c2)* del Teorema 5.1 pues estamos asumiendo que la matriz P es estrictamente cooperativa. Si hay un vector β en el núcleo de $P - Id$ éste tiene sus dos coordenadas negativas o positivas simultáneamente.

Con todo esto (Teorema 6.1 y Teorema 5.1 (para 2×2)) podemos demostrar lo siguiente

Teorema 6.2. *a) Si las soluciones positivas de (6.1.8) tienen blow-up en tiempo finito entonces las soluciones de (6.1.5)-(6.1.7) también. (el Teorema 5.1 (caso* 2×2*) nos da una idea clara de cuándo esto sucede).*

b) Si tenemos una solución global de (6.1.8) como en la parte b2) del Teorema 5.1. Sean

$$M_1 = \max\{\alpha_1(n-1), (\alpha_1(q_{11}-1) + \alpha_2 q_{12}) + 1\}$$

$$M_2 = \max\{\alpha_2(m-1), (\alpha_1 q_{21} + \alpha_2(q_{22}-1)) + 1\}$$

b1) Si $M_1 > 1$ *y* $M_2 > 1$*, toda solución de (6.1.5)-(6.1.7) tiene blow-up.*
b2) Si $M_1 \leq 1$ *y* $M_2 \leq 1$*, toda solución de (6.1.5)-(6.1.7) es global.*

c) Si tenemos una solución global de (6.1.8) como en la parte c1) del Teorema 5.1. Sean

$$K_1 = \max\{\beta_1(n-1), (\beta_1(q_{11}-1) + \beta_2 q_{12})\}$$

$$K_2 = \max\{\beta_2(m-1), (\beta_1 q_{21} + \beta_2(q_{22}-1))\}$$

c1) Si $K_1 > 0$ *y* $K_2 > 0$*, todas las soluciones positivas de (6.1.5)-(6.1.7) tienen blow-up.*
c2) Si $K_1 \leq 0$ *y* $K_2 \leq 0$*, toda solución de (6.1.5)-(6.1.7) es global.*

Observación 6.4. En el item *c)* del Teorema anterior cabe destacar que si $m \neq 1$ y $n \neq 1$ entonces toda solución de (6.1.5)-(6.1.7) tiene blow-up en tiempo finito sin importar quienes sean los coeficientes q_{ij}, pues en ese caso resulta $K_1 > 0$ y $K_2 > 0$.

Podemos aplicar el Teorema 6.2 al siguiente problema: supongamos que los coeficientes de la matriz $P = (p_{ij})$ están fijos y caen dentro de las hipótesis de la parte *b)* o *c)* del Teorema 6.2. Además supongamos que $m = n = 1$ y los coeficientes q_{ij} dependen de un parámetro r (asumimos que $q_{ij} = q_{ij}(\lambda)$ son funciones crecientes no negativas).

En este contexto podemos probar el siguiente Teorema:

Teorema 6.3. *Consideremos el problema (6.1.5)-(6.1.7) con los* p_{ij} *de forma que valgan el item b) o c) del Teorema 6.2,* $m = n = 1$ *y* $q_{ij}(\lambda)$ *crecientes con* λ*.*

Entonces existe un valor crítico $\lambda_0 \in [0, +\infty]$ *tal que si* $\lambda < \lambda_0$ *las soluciones positivas son globales y si* $\lambda > \lambda_0$ *toda solución positiva tiene blow-up en tiempo finito.*

Con este resultado en mente podemos usar el Teorema 6.2 para obtener cotas superiores e inferiores para λ_0.

Si estamos en el caso *b)* definimos

$$\Gamma_1(\lambda) = \alpha_1(q_{11}(\lambda) - 1) + \alpha_2 q_{12}(\lambda)$$
$$\Gamma_2(\lambda) = \alpha_1 q_{21}(\lambda) + \alpha_2(q_{22}(\lambda) - 1)$$

y en el caso *c)*

$$\Gamma_1(\lambda) = \beta_1(q_{11}(\lambda) - 1) + \beta_2 q_{12}(\lambda)$$
$$\Gamma_2(\lambda) = \beta_1 q_{21}(\lambda) + \beta_2(q_{22}(\lambda) - 1)$$

Las funciones Γ_i son crecientes con λ y si definimos

$$\underline{\lambda} = \sup\{\lambda/\Gamma_1(\lambda) \leq 0, \Gamma_2(\lambda) \leq 0\}$$
$$\overline{\lambda} = \inf\{\lambda/\Gamma_1(\lambda) > 0, \Gamma_2(\lambda) > 0\}$$

entonces tenemos que $\underline{\lambda} \leq \lambda_0 \leq \overline{\lambda}$.

<u>*Ejemplos*</u>. : (suponemos que los p_{ij} caen en el caso *b)*)

1) Si $q_{11} = q_{22} = \lambda$, $q_{21} = q_{12} = 0$, entonces $\lambda_0 = 1$.

2) Si $q_{11} = q_{22} = q_{21} = q_{12} = \lambda$, entonces $\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2} \leq \lambda_0 \leq \frac{\alpha_2}{\alpha_1+\alpha_2}$

En el caso en que $r = s$, $a = b$ y $f = g$ en el sistema (6.1.1)-(6.1.3) podemos reducir el problema a una sola ecuación. Obtenemos el siguiente Teorema como consecuencia inmediata del Teorema 6.1.

Teorema 6.4. *Sean $f > 0$, $a \geq c > 0$ y $r > 0$ funciones C^{2-} no decrecientes. Sea u una solución positiva del problema*

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div}(a(u)\nabla u) + r(u) \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(u) \end{cases}$$

Si φ es una solución positiva de

$$\varphi'(\sigma) = f(\varphi(\sigma))$$

el Teorema 6.1 nos dice que

a) Si $\int^{+\infty} \frac{1}{f} < +\infty$, φ tiene blow-up en tiempo finito, y entonces la solución u también tiene blow-up.

b) Si $\int^{+\infty} \frac{1}{f} < +\infty$, entonces φ es global, y si además

$$a(s)\{1 + f'(s)\} + a'(s)f(s) + \frac{r(s)}{f(s)} = F(s)$$

es monótona (creciente o decreciente), entonces la existencia de soluciones globales u depende de la convergencia de la integral

$$\int^{+\infty} \frac{1}{F(s)}\, ds$$

Como corolario se obtiene

Corolario 6.1. *Si $a(s) = s^{m-1}$, $r(s) = s^q$ y $f(s) = s^p$ ($m \geq 1$, $p, q \geq 0$) en el Teorema 6.4 se obtiene*

a) Si $p > 1$ entonces toda solución positiva u tiene blow-up.

b) Si $p < 1$, sea

$$M = \max\left\{\frac{(m-1)}{(1-p)}, \frac{(q-1)}{(1-p)} + 1\right\}$$

b1) Si $M > 1$ entonces las soluciones positivas u tienen blow-up.

b2) Si $M \leq 1$ entonces toda solución positiva es global.

c) Si $p = 1$, sea

$$K = \max\{(m-1), (q-1)\}$$

c1) Si $K > 0$ toda solución positiva u tiene blow-up.

c2) Si $K \leq 0$ toda solución positiva es global.

I. Blow-up o existencia global para un sistema parabólico general.

Como antes empezamos dando una definición de lo que entenderemos por super y subsolución.

Definición 6.1.1.
Si $(\overline{u}, \overline{v})$ es una solución clásica de

$$\text{(6.1.9)} \qquad \begin{cases} \overline{u}_t \geq \operatorname{div}(a(\overline{u})\nabla\overline{u})) + r(\overline{u}, \overline{v}) + \varepsilon \\ \overline{v}_t \geq \operatorname{div}(b(\overline{v})\nabla\overline{v})) + s(\overline{u}, \overline{v}) + \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{(6.1.10)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial\overline{u}}{\partial\eta} \geq f(\overline{u}, \overline{v}) \\ \frac{\partial\overline{v}}{\partial\eta} \geq g(\overline{u}, \overline{v}) \end{cases}$$

$$\text{(6.1.11)} \qquad \begin{cases} \overline{u}(x, 0) = \overline{u}_0(x) \\ \overline{v}(x, 0) = \overline{v}_0(x) \end{cases}$$

diremos que es una ε-supersolución de (6.1.1)-(6.1.3).

Definición 6.1.2.
Si $(\underline{u}, \underline{v})$ es una solución clásica de

$$\text{(6.1.12)} \qquad \begin{cases} \underline{u}_t \leq \operatorname{div}(a(\underline{u})\nabla\underline{u})) + r(\underline{u}, \underline{v}) - \varepsilon \\ \underline{v}_t \leq \operatorname{div}(b(\underline{v})\nabla\underline{v})) + s(\underline{u}, \underline{v}) - \varepsilon \end{cases}$$

$$\text{(6.1.13)} \qquad \begin{cases} \frac{\partial\underline{u}}{\partial\eta} \leq f(\underline{u}, \underline{v}) \\ \frac{\partial\underline{v}}{\partial\eta} \leq g(\underline{u}, \underline{v}) \end{cases}$$

$$\text{(6.1.14)} \qquad \begin{cases} \underline{u}(x, 0) = \underline{u}_0(x) \\ \underline{v}(x, 0) = \underline{v}_0(x) \end{cases}$$

diremos que es una ε-subsolución de (6.1.1)-(6.1.3).

Los siguientes Lemas de comparación justifican las definiciones anteriores

Lema 6.1. *Si una ε−supersolución $(\overline{u},\overline{v})$ verifica*

$$(6.1.15) \qquad \overline{u}_0(x) > u_0(x) \qquad \overline{v}_0(x) > v_0(x)$$

entonces

$$\overline{u}(x,t) > u(x,t) \qquad \overline{v}(x,t) > v(x,t)$$

(siempre que ambas esten definidas)

Demostración.

Razonando por el absurdo, supongamos que existe un tiempo τ tal que $\overline{u}(x,\tau) \leq u(x,\tau)$ para algún $x \in \Omega$. Sea t_0 el mínimo del siguiente conjunto

$$\{t/\overline{u}(x(t),t) \leq u(x(t),t) \text{ o } \overline{v}(x(t),t) \leq v(x(t),t)\}$$

(donde $x(t) \in \overline{\Omega}$). Primero observamos que $t_0 > 0$ a causa de (6.1.15) y de la continuidad de $\overline{u},\overline{v},u$ y v hasta $t = 0$.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que en ese instante t_0 existe un $x(t_0)$ tal que, en $(x(t_0),t_0)$, $\overline{u}(x(t_0),t_0) = u(x(t_0),t_0)$, y entonces $(\overline{u}-u)(x(t_0),t_0) = \min_{0<t<t_0}(\overline{u}-u)(t)$.

Ahora observamos que $x(t_0)$ no puede pertenecer al $\partial\Omega$ porque esto contradice el principio fuerte del maximo, debido a

$$\frac{\partial(\overline{u}-u)}{\partial\eta}(x(t_0),t_0) \geq (f(\overline{u},\overline{v}) - f(u,v))(x(t_0),t_0) \geq 0$$

y a que $(\overline{u}-u)$ no es constante.

Y si $x(t_0) \in \Omega$ restando (6.1.1) a (6.1.9) se obtiene

$$(\overline{u}-u)_t(x(t_0),t_0) \geq (\operatorname{div}(a(\overline{u})\nabla\overline{u}) - \operatorname{div}(a(u)\nabla u) + r(\overline{u},\overline{v}) - r(u,v) + \varepsilon)(x(t_0),t_0)$$

$$\geq (a(\overline{u})\Delta\overline{u} - a(u)\Delta u + a'(\overline{u}) \mid \nabla\overline{u} \mid^2 - a'(u) \mid \nabla u \mid^2 + \varepsilon)(x(t_0),t_0)$$

Pero $\nabla\overline{u}(x(t_0),t_0) = \nabla u(x(t_0),t_0)$ y $\Delta\overline{u}(x(t_0),t_0) \geq \Delta u(x(t_0),t_0)$ entonces $(\overline{u}-u)_t(x(t_0),t_0) \geq \varepsilon$, lo que es una contradicción.

Entonces un tal τ no puede existir y con esto se termina la demostración del Lema. □

Lema 6.2. *Si $(\underline{u},\underline{v})$ es una ε−subsolución y*

$$(6.1.16) \qquad \underline{u}_0(x) < u_0(x) \qquad \underline{v}_0(x) < v_0(x)$$

entonces

$$\underline{u}(x,t) < u(x,t) \qquad \underline{v}(x,t) < v(x,t)$$

(siempre que ambas esten definidas)

Demostración.

La demostración es análoga a la del Lema anterior. □

Con estos resultados podemos encarar la prueba del Teorema 6.1.

<u>*Demostración del Teorema 6.1.*</u>

La idea central, como en los capítulos anteriores, es construir una ε−subsolución (o una ε−supersolución) de (6.1.1)-(6.1.3) que tenga blow-up en tiempo finito (o bien que exista globalmente) y después usar los lemas previos de comparación (Lemas 6.2 y 6.2).

Como siempre proponemos

$$(6.1.17)\qquad \begin{cases} w(x,t) = \varphi(\alpha(x) + \beta(t)) \\ z(x,t) = \psi(\alpha(x) + \beta(t)) \end{cases}$$

donde el par (φ, ψ) es una solución de (6.1.4), como la deseada ε−subsolución (o ε−supersolución).

Ahora calculamos

$$(6.1.18)\qquad \begin{cases} w_t(x,t) = \varphi'(\sigma)\beta'(t) \\ z_t(x,t) = \psi'(\sigma)\beta'(t) \end{cases}$$

$$(6.1.19)\qquad \begin{cases} \frac{\partial w}{\partial \eta}(x,t) = \varphi'(\sigma)\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}(x) \\ \frac{\partial z}{\partial \eta}(x,t) = \psi'(\sigma)\frac{\partial \alpha}{\partial \eta}(x) \end{cases}$$

$$(6.1.20)\qquad \begin{cases} \operatorname{div}(a(w)\nabla w) = a'(\varphi(\sigma))(\varphi'(\sigma))^2 \mid \nabla\alpha(x) \mid^2 \\ +a(\varphi(\sigma)) \left\{ \varphi'(\sigma)\Delta\alpha(x) + \varphi''(\sigma) \mid \nabla\alpha(x) \mid^2 \right\} \end{cases}$$

$$(6.1.21)\qquad \begin{cases} \operatorname{div}(b(z)\nabla z) = b'(\psi(\sigma))(\psi'(\sigma))^2 \mid \nabla\alpha(x) \mid^2 \\ +b(\psi(\sigma)) \left\{ \psi'(\sigma)\Delta\alpha(x) + \psi''(\sigma) \mid \nabla\alpha(x) \mid^2 \right\} \end{cases}$$

donde $\sigma = \alpha(x) + \beta(t)$.

Con todo esto empecemos por el item *a)*. En consecuencia suponemos que (φ, ψ) tiene blow-up en algún tiempo finito T para cualquier dato inicial positivo.

Debemos elegir $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ y ε para lograr que (w, z) sea una ε−subsolución de (6.1.1)-(6.1.3) que verifique (6.1.16).

Para esto elegimos $\beta(t) = \kappa t$ y $\alpha(x) = \delta\|x - x_0\|^2$ $(x_0 \notin \overline{\Omega})$. Por (6.1.19) y por nuestra elección de (φ, ψ) como una solución de (6.1.4), es fácil ver que tomando δ pequeño tenemos (6.1.13).

Además, tomando (φ_0, ψ_0) y δ suficientemente chicos nos aseguramos (6.1.16).

Para verificar (6.1.12), usando (6.1.18), (6.1.20) y (6.1.21), resulta suficiente elegir ε y κ tales que

$$\kappa + \frac{\varepsilon}{\varphi'(0)} \leq 2c\delta$$

$$\kappa + \frac{\varepsilon}{\psi'(0)} \leq 2c\delta$$

donde c es una constante positiva tal que $a \geq c > 0$, $b \geq c > 0$.

Esta $\varepsilon-$subsolución tiene blow-up en tiempo finito debido a que (φ, ψ) lo tiene y a nuestra posibilidad de elegir $\kappa > 0$.

Aplicando el lema de comparación entre esta $\varepsilon-$subsolución y una solución de (6.1.1)-(6.1.3) se completa la demostración de la parte *a)* del Teorema 6.1.

Sigamos con la parte *b1)*.

Nuevamente debemos elegir $\alpha(\cdot)$, $\beta(\cdot)$ y ε para conseguir que (w, z) sea una $\varepsilon-$subsolución.

Como en la parte anterior nos será útil elegir $\alpha(x) = \delta\|x - x_0\|^2$. Ahora observamos que si δ, φ_0, ψ_0 son suficientemente pequeños se cumple (6.1.13) y (6.1.16).

Para verificar (6.1.12) es suficiente (gracias a (6.1.20)-(6.1.21))

$$\beta'(t) \leq \frac{C\left\{a'(\varphi(\sigma))(\varphi'(\sigma))^2 + a(\varphi(\sigma))\varphi'(\sigma) + a(\varphi(\sigma))\varphi''(\sigma) + r(\varphi(\sigma), \psi(\sigma))\right\} - \varepsilon}{\varphi'(\sigma)}$$

y

$$\beta'(t) \leq \frac{C\left\{b'(\psi(\sigma))(\psi'(\sigma))^2 + b(\psi(\sigma))\psi'(\sigma) + b(\psi(\sigma))\psi''(\sigma) + s(\varphi(\sigma), \psi(\sigma))\right\} - \varepsilon}{\psi'(\sigma)}$$

Observamos que la hipótesis *b1)* y la condición de monotonía nos muestran que $\frac{F}{\varphi'}$ y $\frac{G}{\psi'}$ deben ser crecientes y entonces podemos elegir $\beta(t)$ como una función creciente y positiva tal que

$$\beta'(t) = \min\left\{\frac{CF(\beta(t))}{\varphi'(\beta(t))} - \varepsilon_1, \frac{CG(\beta(t))}{\psi'(\beta(t))} - \varepsilon_2\right\}$$

donde $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{\varphi'(0)}$ y $\varepsilon_2 = \frac{\varepsilon}{\psi'(0)}$.

Como estamos suponiendo que vale *b1)* entonces $\beta(t)$ tiene blow-up en tiempo finito y así , como las funciones φ y ψ son crecientes y van a infinito, obtenemos una $\varepsilon-$subsolución con blow-up en las condiciones del lema 6.2 y entonces la solución de (6.1.1)-(6.1.3) no puede ser global.

Terminamos la parte *b1)*.

Ahora veamos *b2)*.

Buscamos $\varepsilon-$supersoluciones globales que tiendan a infinito uniformemente con t.

Empezamos con $\alpha(x)$ una función C^2 tal que $\frac{\partial \alpha}{\partial \eta} \geq 1$ sobre $\partial\Omega$ (por ejemplo se puede tomar una extensión suave de la distancia al $\partial\Omega$). Podemos suponer que

$\alpha(x) > 0$ en $\overline{\Omega}$ (si no lo es, basta con sumar una constante). Con esta α verificamos (6.1.10).

Para verificar (6.1.15) es suficiente con tomar φ_0 y ψ_0 grandes.

Sólo resta elegir $\beta(t)$ como una solución de

$$\beta'(t) = L \max \left\{ \frac{F(\beta(t+k))}{\varphi'(\beta(t+k))} + \varepsilon_1, \frac{G(\beta(t+k))}{\psi'(\beta(t+k))} + \varepsilon_2 \right\}$$

donde $k = 0$ o $k = \max(\alpha)$ dependiendo de la monotonía de $\frac{F}{\varphi'}$ y $\frac{G}{\psi'}$,

$$L = \max\{| \nabla\alpha |^2, \Delta\alpha, 1\}$$

ε_1, ε_2 como antes.

Para terminar observamos que $\beta(t)$ es global gracias a nuestra hipótesis y así la solución se mantiene acotada en intervalos de la forma $[0, T]$ gracias al lema de comparación. Este hecho nos permite usar el resultado de Amann ([Am3] ver cap. 2) para deducir que la solución en cuestión debe ser global. $\square$

Ahora daremos algunos ejemplos.

<u>*Ejemplos*</u>.

1- Si $f(u,v) = g(u,v) = 1$ entonces $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) = \sigma$. Si a , b son convexas y $b'(\sigma) + b(\sigma) + s(\sigma,\sigma) \geq a'(\sigma) + a(\sigma) + r(\sigma,\sigma)$ para todo $\sigma \geq \sigma_0$ se obtiene que

b1). Si $\int^{+\infty} \frac{1}{a'(\sigma)+a(\sigma)+r(\sigma,\sigma)} d\sigma < +\infty$, (u, v) tiene blow-up.

b2). Si $\int^{+\infty} \frac{1}{b'(\sigma)+b(\sigma)+s(\sigma,\sigma)} d\sigma = +\infty$ entonces (u, v) es global.

2- Si $f(u,v) = u$, $g(u,v) = v$ entonces $\varphi(\sigma) = \psi(\sigma) = e^{\sigma}$. Y si elegimos $a = b = 1$ y $\frac{s(s,s)}{s}$, $\frac{r(s,s)}{s}$ son crecientes y verifican $r(s,s) \geq s(s,s)$ para todo s suficientemente grande, la existencia de soluciones globales de (6.1.1)-(6.1.3) queda garantizada por $\int^{+\infty} \frac{1}{r(s,s)}\, ds = +\infty$ y por otra parte si $\int^{+\infty} \frac{1}{s(s,s)}\, ds < +\infty$ toda solución de (6.1.1)-(6.1.3) tiene blow-up.

Si en vez de elegir $a = b = 1$ tomamos $a(s) = b(s) = s$ entonces toda solución de (6.1.1)-(6.1.3) tiene blow-up.

<u>*Demostración del Teorema 6.2*</u>.

La parte *a)* es una consecuencia inmediata del item *a)* del Teorema 6.1.

Para ver el item *b)* definimos

$$\theta_1(\sigma) = \sigma^{\alpha_1(n-1)} + \sigma^{(\alpha_1(q_{11}-1)+\alpha_2 q_{12}+1)}$$

y

$$\theta_2(\sigma) = \sigma^{\alpha_2(m-1)} + \sigma^{(\alpha_1 q_{21}+\alpha_2(q_{22}-1)+1)}$$

Ahora observamos que existen constantes $C, c > 0$ y σ_0 tales que, para todo $\sigma > \sigma_0$ valen

$$c\theta_1(\sigma) \leq \frac{F(\sigma)}{\varphi'(\sigma)} \leq C\theta_1(\sigma)$$

$$c\theta_2(\sigma) \leq \frac{G(\sigma)}{\psi'(\sigma)} \leq C\theta_2(\sigma)$$

Y para terminar sólo resta observar que la convergencia de las integrales involucradas en el item *b)* del Teorema 6.1 son justo nuestras hipótesis sobre los exponentes que aparecen en las funciones θ_i.

Para terminar nos queda el item *c)*. Su demostración es análoga a la del item anterior, sólo que ahora debemos tomar

$$\theta_1(\sigma) = e^{\beta_1(n-1)\sigma} + e^{(\beta_1(q_{11}-1)+\beta_2 q_{12})\sigma}$$

$$\theta_2(\sigma) = e^{\beta_2(m-1)\sigma} + e^{(\beta_1(q_{21})+\beta_2(q_{22}-1))\sigma}$$

y, como antes, observar que existen constantes $C, c > 0$ y σ_0 tales que, para todo $\sigma > \sigma_0$ valen

$$c\theta_1(\sigma) \leq \frac{F(\sigma)}{\varphi'(\sigma)} \leq C\theta_1(\sigma)$$

$$c\theta_2(\sigma) \leq \frac{G(\sigma)}{\psi'(\sigma)} \leq C\theta_2(\sigma)$$

La convergencia o no de las integrales requerida en el item *b)* del Teorema 6.1 es justo la hipótesis requerida en la parte *c)*. $\square$

Ahora nos vamos a concentrar en demostrar el Teorema 6.3.

En esta última parte del capítulo vamos a suponer que los p_{ij} estan fijos y son tales que el item *b)* o el item *c)* valen. $m = n = 1$ y los $q_{ij} = q_{ij}(\lambda)$ son funciones de λ positivas y no decrecientes.

Primero necesitamos un Lema auxiliar.

Lema 6.3. *Dado λ, si para algún dato inicial positivo (u_0, v_0) el problema (6.1.5)-(6.1.7) tiene blow-up (o bien tiene existencia global) entonces lo mismo vale para todo dato inicial positivo.*

Demostración.

Podemos aplicar un argumento de comparación para mostrar que si (w_0, z_0) es tal que $w_0 > u_0$ y $z_0 > v_0$ las mismas desigualdades son válidas para (w, z) (la solución con dato inicial (w_0, z_0)) y (u, v) siempre que ambas soluciones existan. Entonces (w, z) tiene blow-up si (u, v) lo tiene.

Si (w_0, z_0) no son mayores que (u_0, v_0) entonces observamos que $\inf w$ y $\inf z$ son estrictamente crecientes y tienden a infinito con t pues w es una solución de

$$w_t \geq \Delta w + c_1$$
$$\frac{\partial w}{\partial \eta} \geq c_2$$

para algunas constantes positivas c_1, c_2, y entonces $w \geq c_1 t$. Entonces existe un tiempo τ tal que $w(\tau) > u_0$ y $z(\tau) > v_0$ y ahora podemos usar nuevamente el pricipio de comparación para concluir que (w, z) tiene blow-up en tiempo finito. □

Con este Lema podemos probar el Teorema 6.3.

Demostración del Teorema 6.3.

Tomemos $\lambda_1 < \lambda_2$, λ_2 tal que toda solución positiva con λ_2 sea global. Queremos probar que una solución con λ_1 es global.

Pongamos $u_0 > 1$ y $v_0 > 1$ y tomemos (u, v), (w, z) las soluciones de (6.1.5)-(6.1.7) con λ_1, λ_2 y datos iniciales (u_0, v_0), $(u_0 + \delta, v_0 + \delta)$ respectivamente. Nos basta con probar que $u < w$ y $v < z$ pues entonces (u, v) debe ser global y por lo tanto toda solución con λ_1 también lo será como consecuencia del Lema 6.3.

Para ver este hecho supongamos que es falso y tomemos el primer tiempo, t_0, tal que exista $x_0 \in \overline{\Omega}$ con $(w - u)(x_0, t_0) = \delta/2$ o $(z - v)(x_0, t_0) = \delta/2$. Podemos suponer que esto sucede para $(w - u)$. Entonces $x_0 \notin \partial\Omega$ pues en ese punto (x_0, t_0)

$$\frac{\partial (w - u)}{\partial \eta} = w^{p_{11}} z^{p_{12}} - u^{p_{11}} v^{p_{12}} > 0$$

y si $x_0 \in \Omega$,

$$(w - u)_t = \Delta(w - u) + w^{q_{11}(\lambda_2)} z^{q_{12}(\lambda_2)} - u^{q_{11}(\lambda_1)} v^{q_{12}(\lambda_1)} > 0$$

una contradicción. (Estamos usando la monotonía de los $q_{ij}(\lambda)$ como funciones de λ).

Hemos demostrado entonces que si las soluciones positivas con λ_2 son globales lo mismo vale para todo $\lambda < \lambda_2$. Con el mismo tipo de argumento podemos concluir que si para algún λ_1 las soluciones positivas tienen blow-up lo mismo ocurre para cualquier $\lambda > \lambda_1$.

De estos enunciados deducimos la existencia del valor crítico λ_0 lo que termina la demostración del Teorema 6.3. □

CAPITULO 7

Localización del conjunto de puntos donde se produce el blow-up para un sistema de dos ecuaciones del calor con condiciones de borde no lineales.

En este capítulo nos dedicaremos a estudiar el conjunto de puntos de blow-up del siguiente problema

$$(7.1.1) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u & \text{en } \Omega \times (0,T) \\ v_t = \Delta v & \text{en } \Omega \times (0,T) \end{cases}$$

$$(7.1.2) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \eta} = f(v) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \\ \frac{\partial v}{\partial \eta} = g(u) & \text{en } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

$$(7.1.3) \qquad \begin{cases} u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \Omega \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{en } \Omega \end{cases}$$

es decir retomamos el estudio de las soluciones de (3.1.1)-(3.1.3) o de (4.1.1)-(4.1.3).

Estas soluciones existen y son únicas si nos encontramos en las hipótesis del capítulo 3 y además tienen la regularidad $C^{(2+\alpha),(1+\alpha/2)}$ si los datos iniciales verifican

$$\begin{cases} \frac{\partial u_0}{\partial \eta} = f(v_0) \\ \frac{\partial v_0}{\partial \eta} = g(u_0) \end{cases}$$

Del capítulo 4 sabemos que la existencia del blow-up depende del comportamiento de ciertas funciones derivadas a partir de f y g (cf. Teorema 4.1).
En particular demostramos que si el sistema ordinario

$$\begin{cases} \psi' = f(\alpha) \\ \alpha' = g(\psi) \end{cases}$$

tiene blow-up en tiempo finito también lo tienen las soluciones de (7.1.1)-(7.1.3) y esto sucede si y sólo si (despejando como en el capítulo 4)

$$\psi' = f(F^{-1}(G(\psi)))$$

tiene blow-up (F y G son primitivas de f y g respectivamente). Sabemos que esto es equivalente a

$$\int^{+\infty} \frac{ds}{f(F^{-1}(G(s)))} < +\infty \tag{7.1.4}$$

que es la hipótesis que asumiremos a lo largo de todo este capítulo.

Además supondremos que f y g satisfacen las siguientes hipótesis:

(7.1.5) - Dado $\lambda > 0$, existe un $k > 0$ tal que

$$\frac{f(s+\lambda)}{f(s)+\lambda} \leq k$$

$$\frac{g(s+\lambda)}{g(s)+\lambda} \leq k$$

(7.1.6) - f y g con convexas.

(7.1.7) - F^{-1} o G es convexa.

Nuestro objetivo será probar teoremas que localicen los puntos donde la solución se vuelve infinita (puntos de blow-up).

Es decir, puntos $x \in \overline{\Omega}$ tales que existan $t_n \nearrow T$ y $x_n \mapsto x$ de forma que

$$\lim_{n \mapsto \infty} \{u(x_n, t_n) + v(x_n, t_n)\} = +\infty$$

Como en el caso de una ecuación, esperamos que el blow-up se produzca sólo en el borde de Ω (ver [R.R], [LG.M.W] o [H.Y]), y así es como sucede.

Teorema 7.1. *Sea (u, v) una solución de (7.1.1)-(7.1.3) con f y g como arriba (se verifican (7.1.4)-(7.1.7)) con dato inicial compatible y tal que verifica $\Delta u_0, \Delta v_0 \geq c > 0$. Entonces dado un subdominio $\Omega' \subset\subset \Omega$ existe una constante $K = K(u_0, v_0, \Omega')$ tal que*

$$\sup_{0<t<T} \left(\|u(x,t)\|_{L^\infty(\Omega')} + \|v(x,t)\|_{L^\infty(\Omega')} \right) < K$$

es decir el conjunto de puntos de blow-up de las soluciones de (7.1.1)-(7.1.3) está incluído en el borde de Ω.

En el caso particular en que el dominio Ω sea una bola ($\Omega = B(0,1)$) podemos demostrar la localización sin la hipótesis $\Delta u_0, \Delta v_0 \geq c > 0$ y obtener el siguiente resultado,

Teorema 7.2. *Si* $\Omega = B(0,1)$ *y* f *y* g *son como en el Teorema 7.1 también se obtiene la conclusión del Teorema 7.1 sin pedir* $\Delta u_0, \Delta v_0 \geq c > 0$.

Observación 7.1. La solución considerada en una bola no necesariamente debe ser radial.

El siguiente Lema nos da una cierta "comparación" entre u y v que nos será muy útil.

Lema 7.1. *Existe una constante* $C > 0$ *tal que*

$$Cv \geq F^{-1} \circ G(u)$$

Demostración.

Queremos usar un argumento de comparación.

Sean $\alpha = Cv$ y $\beta = F^{-1}(G(u))$, entonces, usando (7.1.1) y la hipótesis (7.1.7), α y β satisfacen

$$\begin{cases} \alpha_t = \Delta\alpha \\ \beta_t = \Delta\beta - (F^{-1} \circ G)''(u) \mid \nabla u \mid^2 \leq \Delta\beta \end{cases} \tag{7.1.8}$$

y sobre el $\partial\Omega$

$$\frac{\partial(\alpha - \beta)}{\partial\eta} = Cg(u) - (F^{-1} \circ G)'(u)\ f(v) \tag{7.1.9}$$

$$= Cg(G^{-1}(F(\beta))) - (F^{-1} \circ G)'(G^{-1}(F(\beta)))\ f(\frac{\alpha}{C})$$

Para empezar elegimos C grande para obtener $Cv_0 > F^{-1}(G(u_0))$.

Supongamos ahora que la conclusión del Lema es falsa y sea

$$t_0 = \sup\left\{t > 0 : (\alpha - \beta)(x,\tau) > 0,\ \ 0 < \tau < t\ ,\ x \in \overline{\Omega}\right\}$$

Para ese tiempo t_0, gracias a (7.1.8), existe un $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\alpha(x_0,t_0) = \beta(x_0,t_0)$. En ese punto (x_0, t_0) se verifica, por (7.1.9)

$$\frac{\partial(\alpha - \beta)}{\partial\eta} = Cg(G^{-1}(F(\alpha))) - (F^{-1} \circ G)'(G^{-1}(F(\alpha))\ f(\frac{\alpha}{C})$$

$$= g(G^{-1}(F(\alpha)))(C - \frac{1}{f(\alpha)}f(\frac{\alpha}{C}))$$

y, tomando $C \geq 1$, podemos suponer que el último término es positivo, lo que fuerza una contradicción. □

Para comodidad del lector empezamos por el Teorema 7.2 (localización en bolas) pues creemos que las ideas de estas demostraciones son más claras en una bola que en un dominio general, donde debemos usar algunos tecnicismos.

7.I. Resultados de localización para $\Omega = B(0,1)$.

Primero probaremos algunos Lemas donde (u,v) es una solución de (7.1.1) con $\Omega = B(0,1)$ (no estamos suponiendo que la solución sea radial).

Lema 7.2. *Sean*

$$W(r,t) = \frac{1}{| S^{n-1} |} \int_{S^{n-1}} u(r\xi,t)\ d\sigma(\xi)$$

$$Z(r,t) = \frac{1}{| S^{n-1} |} \int_{S^{n-1}} v(r\xi,t)\ d\sigma(\xi)$$

entonces (W,Z) *satisfacen*

$$\text{(7.1.10)} \qquad \begin{cases} W_t = W_{rr} + \frac{n-1}{r} W_r \\ Z_t = Z_{rr} + \frac{n-1}{r} Z_r \\ W_r \geq f(Z) \qquad en \qquad r = 1 \\ Z_r \geq g(W) \end{cases}$$

<u>*Demostración*</u>.

Calculamos W_t usando (7.1.1).

$$\text{(7.1.11)} \qquad W_t(r,t) = \frac{1}{| S^{n-1} |} \int_{S^{n-1}} \Delta u(r\xi,t)\ d\sigma(\xi)$$

Por otra parte calculamos W_r

$$W_r(r,t) = \frac{1}{| S^{n-1} | \, r^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \nabla u(r\xi,t)\xi r^{n-1}\ d\sigma(\xi)$$

y, usando el Teorema de Gauss,

$$W_r(r,t) = \frac{1}{| S_r |} \int_{B_r} \Delta u(x,t) dx$$

pasando a coordenadas esféricas,

$$\text{(7.1.12)} \qquad W_r(r,t) = \frac{1}{| S^{n-1} | \, r^{n-1}} \int_0^r \left(\int_{S^{n-1}} \Delta u(\rho\xi,t)\rho^{n-1}\ d\sigma(\xi) \right) d\rho$$

con todo esto podemos calcular W_{rr},

$$\text{(7.1.13)} \qquad W_{rr}(r,t) = \frac{1}{| S^{n-1} | \, r^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \Delta u(r\xi,t) r^{n-1}\ d\sigma(\xi)$$

$$+ \frac{1-n}{| S^{n-1} | \, r^{n}} \int_0^r \left(\int_{S^{n-1}} \Delta u(\rho\xi,t)\rho^{n-1}\ d\sigma(\xi) \right) d\rho$$

Ahora de (7.1.11), (7.1.12) y (7.1.13) obtenemos

$$W_t = W_{rr} + \frac{n-1}{r} W_r$$

Y del cálculo de W_r con $r = 1$

$$W_r(1,t) = \frac{1}{| S^{n-1} |} \int_{S^{n-1}} \frac{\partial u}{\partial \eta}(\xi,t)\ d\sigma(\xi)$$

aplicando (7.1.2),

$$W_r(1,t) = \frac{1}{| S^{n-1} |} \int_{S^{n-1}} f(v(\xi,t))\ d\sigma(\xi)$$

y ahora podemos aprovechar el hecho de que f sea convexa y obtener (vía la desigualdad de Jensen),

$$W_r(1,t) \geq f(Z(1,t))$$

Las cuentas necesarias para verificar lo que resta del enunciado (ecuación de Z y su condición de borde) son análogas a las anteriores. □

Lema 7.3. *Dado $x \in B(0,1)$ sean*

$$w(r,t) = \frac{1}{| B_r |} \int_0^r \left(\int_{S^{n-1}} u(x + \rho\xi, t)\rho^{n-1}\ d\sigma(\xi)\right)\ d\rho$$

y

$$z(r,t) = \frac{1}{| B_r |} \int_0^r \left(\int_{S^{n-1}} v(x + \rho\xi, t)\rho^{n-1}\ d\sigma(\xi)\right)\ d\rho$$

entonces (z, w) satisfacen

$$w_t = w_{rr} + \frac{(n+1)}{r} w_r \qquad 0 < r < 1 - \|x\|$$

$$z_t = z_{rr} + \frac{(n+1)}{r} z_r \qquad 0 < r < 1 - \|x\|$$

Demostración.

Primero calculamos w_t

$$w_t(r,t) = \frac{1}{| B | r^n} \int_0^r \left(\int_{S^{n-1}} \Delta u(x + \rho\xi, t)\rho^{n-1}\ d\sigma(\xi)\right)\ d\rho$$

después w_r

(7.1.14) $$w_r(r,t) = \frac{1}{| B | r} \int_{S^{n-1}} u(x + r\xi, t)\ d\sigma(\xi) -$$

$$-\frac{n}{|B| r^{n+1}} \int_0^r \left(\int_{S^{n-1}} u(x+\rho\xi, t)\rho^{n-1}\, d\sigma(\xi)\right) d\rho$$

y w_{rr},

$$w_{rr}(r,t) = \frac{1}{|B| r} \int_{S^{n-1}} \nabla u(x+r\xi, t)\xi\, d\sigma(\xi) - \frac{1}{|B| r^2} \int_{S^{n-1}} u(x+r\xi, t)\, d\sigma(\xi) -$$

$$-\frac{n}{|B| r^2} \int_{S^{n-1}} u(x+r\xi, t)\, d\sigma(\xi) + \frac{n(n+1)}{|B| r^{n+2}} \int_0^r \left(\int_{S^{n-1}} u(x+\rho\xi, t)\rho^{n-1}\, d\sigma(\xi)\right) d\rho$$

usando el teorema de la divergencia en el primer término obtenemos.

$$w_{rr}(r,t) = \frac{1}{|B| r^n} \int_{B_r} \Delta u(x+y, t) dy -$$

$$-\frac{(n+1)}{r} \left\{ \frac{1}{|B| r} \int_{S^{n-1}} u(x+r\xi, t)\, d\sigma(\xi) \right\}$$

$$-\frac{n(n+1)}{|B| r^{n+2}} \left\{ \int_0^r \left(\int_{S^{n-1}} u(x+\rho\xi, t)\rho^{n-1}\, d\sigma(\xi)\right) d\rho \right\}$$

de esto se obtiene la conclusión del Lema tomando coordenadas esféricas y usando (7.1.14). □

Lema 7.4. *Si w, z son como en el Lema 7.3 entonces*

$$u(x,t) \le \max\left\{ \|u_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \sup_t \{w(r,t)\} \right\}$$

$$v(x,t) \le \max\left\{ \|v_0\|_{L^\infty(\Omega)}, \sup_t \{z(r,t)\} \right\}$$

para cualquier $r \in (0, 1 - \|x\|)$.

Demostración.

Podemos considerar que $w(r,t)$ es una solución radial de la ecuación del calor en $\mathbb{R}^{n+2}$ y entonces el principio del máximo implica

$$w(0,t) \le \max\left\{ \sup_{0<\rho<r} \{w(\rho, o)\}, \sup_t \{w(r,t)\} \right\} \qquad \text{con } 0 < r < 1 - \|x\|$$

Ahora bien, de la definición de $w(r,t)$, $w(0,t) = u(x,t)$ y $\sup_{0<\rho<r} w(\rho, 0) \le \|u_0\|_{L^\infty(B)}$ y se concluye el Lema para u. El mismo argumento también es aplicable a v. □

Lema 7.5. *Sea $\lambda > 0$ tal que $(W_0)_r, (Z_0)_r > -\lambda$, entonces se mantiene la desigualdad $W_r, Z_r > -\lambda$ siempre que ambas funciones estén definidas.*

Demostración.

Sea $\widetilde{W} = W_r + \lambda$, esta función satisface, gracias al Lema 7.2,

$$\begin{cases} \widetilde{W}_t = \widetilde{W}_{rr} + \frac{n-1}{r}\widetilde{W}_r - \frac{n-1}{r^2}\widetilde{W} + \frac{n-1}{r^2}\lambda \\ \widetilde{W}(0,t) = \lambda \\ \widetilde{W}(1,t) = W_r + \lambda \geq f(Z) + \lambda \geq \lambda \\ \widetilde{W}(r,0) > 0 \end{cases}$$

y gracias al principio del mínimo obtenemos $\widetilde{W} > 0$, es decir $W_r + \lambda > 0$. Lo mismo es aplicable a Z. □

Lema 7.6. *Existe un $\varepsilon > 0$ tal que*

$$\begin{cases} a = r^{n-1}(W_r + \lambda) - \varepsilon r^{n+1} f(Z + \lambda r) \geq 0 \\ b = r^{n-1}(Z_r + \lambda) - \varepsilon r^{n+1} g(W + \lambda r) \geq 0 \end{cases}$$

Demostración.

Podemos ver que a verifica (usando el Lema 7.2 y tomando ε suficientemente pequeño).

$$\begin{aligned} a_t = a_{rr} - \frac{n-1}{r}a_r + \lambda(n-1)r^{n-3} \\ +\varepsilon r^n f'(Z + \lambda r)(4(Z_r + \lambda) + \lambda(n-1)) \\ +\varepsilon r^{n+1} f''(Z + \lambda r)(Z_r + \lambda)^2 \\ \geq a_{rr} - \frac{n-1}{r}a_r \end{aligned}$$

Es decir,

$$\begin{cases} a_t \geq a_{rr} - \frac{n-1}{r}a_r \\ a(r,0) \geq 0 \\ a(0,t) = 0 \\ a(1,t) = f(Z) + \lambda - \varepsilon f(Z + \lambda) \end{cases}$$

Gracias a la hipótesis (7.1.5) tenemos que $a(1,t) \geq 0$ si ε es chico. Análogamente se prueba el enunciado para b usando, nuevamente, (7.1.5). □

Con todos estos Lemas estamos en condiciones de probar el Teorema 7.2.

Demostración del Teorema 7.2.

Empecemos localizando el conjunto de puntos de blow-up de u.

Gracias al Lema 7.4 es suficiente con controlar $\sup_t\{w(r,t)\}$.

Se verifica

$$w(r,t) \leq \frac{|S^{n-1}|}{|B| r^n} \int_0^{r+\|x\|} W(\rho,t)\rho^{n-1}\, d\rho$$

lo que nos lleva a controlar $W(\rho,t)$ con $0 \leq \rho \leq r + \|x\| < 1$. W y Z satisfacen, gracias al Lema 7.6,

$$W_r + \lambda \geq \varepsilon r^2 f(Z + \lambda r)$$

Usando el Lema 7.1 y la desigualdad de Jensen vemos que $CZ \geq (F^{-1} \circ G)(W)$, entonces

$$(7.1.15) \quad W_r + \lambda \geq \varepsilon r^2 f(Z + \lambda r) \geq \varepsilon r^2 f \circ F^{-1} \circ G(W) \geq \varepsilon r^2 f \circ F^{-1} \circ G(\frac{W + \lambda r}{D})$$

donde $D > 1 + \lambda / \min u_0$. Podemos escribir (7.1.15) como

$$(7.1.16) \qquad \frac{W_r + \lambda}{D} \geq \frac{\varepsilon r^2}{D}(f \circ F^{-1} \circ G)(\frac{W + \lambda r}{D})$$

integrando desde r hasta 1, tenemos

$$H(\frac{W + \lambda r}{D}) =$$

$$\int_{\frac{W+\lambda r}{D}}^{\infty} \frac{1}{(f \circ F^{-1} \circ G)(s)} ds \geq \frac{\varepsilon}{3D}(1 - r^3)$$

donde $H(s) = \int_s^\infty \frac{1}{f \circ F^{-1} \circ G}$. Usando (7.1.4) H está bien definida.

Usando esta última desigualdad se obtiene que

$$W \leq DH^{-1}(\frac{\varepsilon}{3D}(1 - r^3))$$

De donde $W(\rho,t)$ esta acotado para $0 < t < T$, $0 \leq \rho \leq r + \|x\| < 1$.

Nos queda por localizar el conjunto de puntos de blow-up de v. Para esto es suficiente con controlar $Z(\rho,t)$ para $0 < t < T$, $0 \leq \rho \leq r + \|x\| < 1$ (usando un argumento similar al usado para u).

Integrando (7.1.15) desde r_1 hasta r_2 obtenemos

$$\int_{r_1}^{r_2} (W_r + \lambda) dr \geq \varepsilon \int_{r_1}^{r_2} r^2 f(Z + \lambda r) dr$$

$$W(r_2,t) - W(r_1,t) + \lambda(r_2 - r_1) \geq \varepsilon r_1^2 f(Z(r_1,t) + \lambda r_1)(r_2 - r_1)$$

y el control que obtuvimos sobre W implica que Z está acotado para $0 < t < T$, $0 \leq \rho \leq r + \|x\| < 1$. $\square$

7.II. Resultados de localización para Ω general.

Primero introducimos alguna notación. Para sortear la carencia de un "radio" usaremos pequeñas deformaciones de Ω a lo largo que la componente normal al borde.

Si Ω es un dominio acotado con borde suave $\partial\Omega$ llamaremos

$$\Omega_r = \{x \in \Omega; \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) > r\}$$

$$\partial\Omega_r = \{x \in \Omega; \operatorname{dist}(x, \partial\Omega) = r\}$$

Usaremos la siguiente construcción. Definimos

$$\Phi(r, \xi) = \xi - r\eta(\xi)$$

donde $\eta(\xi)$ es el vector unitario normal exterior al $\partial\Omega$ en el punto $\xi \in \partial\Omega$. Si R es suficientemente chico

$$\Phi : \partial\Omega \times (0, R) \mapsto \Omega - \overline{\Omega}_R$$

y gracias a la suavidad de Ω. Φ es un difeomorfismo. También usaremos la existencia de una función $\mu(r, \xi)$ tal que

$$\int_{\partial\Omega_r} u \, d\sigma = \int_{\partial\Omega} u(\Phi(r, \xi))\mu(r, \xi) \, d\sigma(\xi)$$

$$\int_{\Omega - \overline{\Omega}_r} u(x)dx = \int_0^r \int_{\partial\Omega} u(\Phi(\rho, \xi)\mu(\rho, \xi) \, d\sigma(\xi) \, d\rho$$

(si Ω es una bola $\mu(r, \xi) = (1 - r)^{n-1}$ como en la sección anterior). $\partial\Omega_r = S_{1-r}$ en este caso.

Como en la demostración de la localización en bolas necesitaremos algunos Lemas previos.

El objetivo final es probar la desigualdad (7.2.3) similar a la (7.1.16) del caso radial.

Lema 7.7. *Si* $(u, v) \in C^{2+\alpha, 1+\alpha/2}(\overline{\Omega} \times [0, T))$ *es una solución de (7.1.1)-(7.1.3) con* $\Delta u_0, \Delta v_0 \geq c > 0$ *entonces* $\Delta u, \Delta v \geq c > 0$.

<u>*Demostración*</u>.

Sea $0 < b < c$. Existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que si $\varepsilon < \varepsilon_0$ entonces

$$\begin{cases} u(x, \varepsilon) > u(x, 0) + b\varepsilon \\ v(x, \varepsilon) > v(x, 0) + b\varepsilon \end{cases}$$

Sean $u_\varepsilon(x,t) = u(x,t+\varepsilon) - b\varepsilon$ y $v_\varepsilon(x,t) = v(x,t+\varepsilon) - b\varepsilon$. u_ε y v_ε resultan ser soluciones de la ecuación del calor en $\Omega \times (0, T - \varepsilon)$ y verifican

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x,0) > u(x,0) \\ v_\varepsilon(x,0) > v(x,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial \eta}(x,t) = f(v(x,t+\varepsilon)) = f(v_\varepsilon(x,t) + b\varepsilon) \geq f(v_\varepsilon(x,t))$$

análogamente

$$\frac{\partial v_\varepsilon}{\partial \eta}(x,t) \geq g(u_\varepsilon(x,t))$$

usando el principio de comparación obtenemos

$$\begin{cases} u_\varepsilon(x,t) > u(x,t) \\ v_\varepsilon(x,t) > v(x,t) \end{cases}$$

Esto implica que $u_t \geq b$, $v_t \geq b$ en $\overline{\Omega} \times [0, T)$. Como $b < c$ es arbitrario se concluye que

$$\Delta u = u_t \geq c$$

$$\Delta v = v_t \geq c$$

lo que constituye nuestra afirmación. □

Lema 7.8. *Sea $u(x,t)$ una solución positiva de la ecuación del calor. Entonces $z(r,t) = \int_{\Omega_r} u(x,t)dx$ satisface*

$$z_t(r,t) \geq z_{rr}(r,t) + Az_r(r,t)$$

donde

$$A = \max_{[0,r_0]\times\partial\Omega} \frac{|\mu_r(r,\xi)|}{\mu(r,\xi)}$$

Demostración.

Primero calculamos z_t,

$$z_t(r,t) = \int_{\Omega_r} u_t(x,t)dx = \int_{\Omega_r} \Delta u(x,t)dx \tag{7.2.1}$$

Ahora observamos que,

$$z(r,t) = \int_{\Omega_r} u(x,t)dx = \int_{\Omega} u(x,t)dx - \int_{\Omega\setminus\Omega_r} u(x,t)dx$$

$$= \int_{\Omega} u(x,t)dx - \int_0^r \int_{\partial\Omega} u(\Phi(\rho,\xi),t)\mu(\rho,\xi)\, d\sigma(\xi)\, d\rho$$

Calculamos z_r,

$$z_r(r,t) = -\int_{\partial\Omega} u(\Phi(r,\xi),t)\mu(r,\xi)\; d\sigma(\xi) \tag{7.2.2}$$

$$\begin{aligned}
z_{rr}(r,t) &= \int_{\partial\Omega} < \nabla u(\Phi(r,\xi),t);\eta(\xi) > \mu(r,\xi)\; d\sigma(\xi) - \int_{\partial\Omega} u(\Phi(r,\xi),t)\mu_r(r,\xi)\; d\sigma(\xi) \\
&= \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial\eta}(\Phi(r,\xi),t)\mu(r,\xi)\; d\sigma(\xi) - \int_{\partial\Omega} u(\Phi(r,\xi),t)\mu(r,\xi)\{\frac{\mu_r}{\mu}\}\; d\sigma(\xi) \\
&= \int_{\Omega_r} \Delta u(x,t)dx - \int_{\partial\Omega} u(\Phi(r,\xi),t)\mu(r,\xi)\{\frac{\mu_r}{\mu}\}\; d\sigma(\xi)
\end{aligned}$$

usando (7.2.1),

$$= z_t(r,t) - \int_{\partial\Omega} u(\Phi(r,\xi),t)\mu(r,\xi)\{\frac{\mu_r}{\mu}\}\; d\sigma(\xi)$$

lo que implica, gracias a (7.2.2) y la expresión de A,

$$\begin{aligned}
z_t(r,t) &= z_{rr}(r,t) + \int_{\partial\Omega} u(\Phi(r,\xi),t)\mu(r,\xi)\{\frac{\mu_r}{\mu}\}\; d\sigma(\xi) \\
&\geq z_{rr}(r,t) + Az_r(r,t)
\end{aligned}$$

□

Corolario 7.1. *Sean u, z como en el Lema 7.8, $a = \frac{A}{2}$ y $b = a^2 - Aa$. Entonces $\overline{z}(r,t) = \exp(ar - bt)\int_{\partial\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial\eta} d\sigma$ y $\overline{w}(r,t) = \exp(ar - bt)\int_{\partial\Omega_r} \frac{\partial u}{\partial\eta}\, d\sigma$ satisfacen*

$$\overline{w}_t \geq \overline{w}_{rr}$$
$$\overline{z}_t \geq \overline{z}_{rr}$$

Demostración.

Observemos que $\overline{v}(r,t) = \int_{\partial\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial\eta}\, d\sigma = \int_{\Omega_r} \Delta v(x,t)dx$. Y ahora aplicamos el Lema 7.8 al Δv que es una solución de la ecuación del calor. Se obtiene,

$$\overline{v}_t \geq \overline{v}_{rr} + A\overline{v}_r$$

Ahora calculamos,

$$\overline{z}_t = \exp(ar - bt)[\overline{v}_t - b\overline{v}]$$
$$\overline{z}_r = \exp(ar - bt)[\overline{v}_r + a\overline{v}]$$
$$\overline{z}_{rr} = \exp(ar - bt)[\overline{v}_{rr} + 2a\overline{v}_r + a^2\overline{v}]$$

y de esta forma se obtiene,

$$\overline{z}_t \geq \overline{z}_{rr} + (A - 2a)\overline{z}_r + (-b + a^2 - Aa)\overline{z}$$

Gracias a nuestra elección de a y b,

$$\overline{z}_t \geq \overline{z}_{rr}$$

Análogamente para $\overline{w}$. □

Lema 7.9. *Se verifica la siguiente desigualdad*

$$\frac{\partial}{\partial r}(\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} u\ d\sigma) \leq -\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r}\frac{\partial u}{\partial\eta}\ d\sigma$$

Demostración.

$$\frac{\partial}{\partial r}(\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} u\ d\sigma) = -A\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} u\ d\sigma + \epsilon^{-Ar}\frac{\partial}{\partial r}(\int_{\partial\Omega_r} u\ d\sigma)$$

$$= -A\epsilon^{-Ar}(\int_{\partial\Omega_r} u\ d\sigma) + \epsilon^{-Ar}\frac{\partial}{\partial r}(\int_{\partial\Omega} u(\Phi(r,\xi))\mu(r,\xi)\ d\sigma(\xi))$$

$$= \epsilon^{-Ar}\left\{-A\int_{\partial\Omega_r} u\ d\sigma + \int_{\partial\Omega} u(\Phi(r,\xi))\frac{\mu_r}{\mu}\mu\ d\sigma(\xi)\right\}$$

$$-\epsilon^{-Ar}\left\{\int_{\partial\Omega} < \nabla u(\Phi(r,\xi)); \eta(\xi) > \mu(r,\xi)\ d\sigma(\xi)\right\}$$

$$\leq -\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r}\frac{\partial u}{\partial\eta}\ d\sigma$$

□

Lema 7.10. *Existe una constante* $C = C(\Omega)$ *tal que, para cualquier* $u(x)$ *positiva con* $\Delta u \geq 0$,

$$\int_{\Omega} u\ dx \leq C\int_{\partial\Omega} u\ d\sigma$$

en particular

$$\int_{\Omega_r} f(u)\ dx \leq C\int_{\partial\Omega_r} f(u)\ d\sigma$$

Demostración.

A lo largo de esta demostración C denota una constante que depende sólo de Ω. Para $0 \leq r \leq r_0 < R$ definimos

$$v(r) = \int_{\partial\Omega_r} u\ d\sigma = \int_{\partial\Omega} u(\Phi(r,\xi))\mu(r,\xi)\ d\sigma(\xi)$$

Calculemos $v'(r)$

$$v'(r) = -\int_{\partial\Omega_r}\frac{\partial u}{\partial\eta}\ d\sigma + \int_{\partial\Omega} u\mu_r\ d\sigma = -\int_{\Omega_r}\Delta u\ dx + \int_{\partial\Omega} u\mu_r\ d\sigma$$

$$\leq \int_{\partial\Omega} u\{\frac{\mu_r}{\mu}\}\mu\ d\sigma \leq Av(r)$$

Donde $A = \max_{[0,r_0]\times\partial\Omega} \frac{|\mu_r(r,\xi)|}{\mu(r,\xi)}$. Por el lema de Gronwall se tiene,

$$v(r) \leq Cv(0)$$

Y entonces

$$\int_{\Omega\setminus\Omega_{r_0}} u\ dx = \int_0^{r_0}\int_{\partial\Omega_\rho} u\ d\sigma\ d\rho \leq Cv(0)$$

Ahora observamos que, si $x \in \partial\Omega_{r_0/2}$ entonces $B = B(x, r_0/4) \subset \Omega \setminus \Omega_{r_0}$ y por ende

$$u(x) \leq \frac{1}{|B|}\int_B u \leq C\int_{\Omega\setminus\Omega_{r_0}} u \leq Cv(0)$$

Obtenemos

$$\max_{\partial\Omega_{r_0/2}} u(x) \leq Cv(0)$$

y entonces

$$\int_\Omega u\ dx \leq \int_{\Omega\setminus\Omega_{r_0}} u\ dx + \int_{\Omega_{r_0/2}} u\ dx \leq Cv(0) + |\Omega| \max_{\partial\Omega_{r_0/2}} u(x)$$

$$\leq Cv(0) = C\int_{\partial\Omega} u\ d\sigma$$

El último enunciado es consecuencia de ser $\Delta f(u) \geq 0$ (pues f es convexa) y del hecho de que podemos reemplazar Ω por Ω_r para $0 \leq r \leq r_0/2$ cambiando un poco la constante C. □

Lema 7.11. *Sea* $\widetilde{w}(r,t) = \int_{\partial\Omega_r} f(v)\ d\sigma$ *y* $\widetilde{z}(r,t) = \int_{\partial\Omega_r} g(u)\ d\sigma$. *Se verifica*

$$\begin{cases} \widetilde{w}_t \leq \widetilde{w}_{rr} + B\widetilde{w}_r + C\widetilde{w} \\ 0 \leq \int_{\partial\Omega_r} \Delta(f(v))dx \leq A\widetilde{w} - \widetilde{w}_r \end{cases}$$

$$\begin{cases} \widetilde{z}_t \leq \widetilde{z}_{rr} + B\widetilde{z}_r + C\widetilde{z} \\ 0 \leq \int_{\partial\Omega_r} \Delta(g(u))dx \leq A\widetilde{z} - \widetilde{z}_r \end{cases}$$

<u>*Demostración.*</u>

Empezamos por $0 \leq \int_{\partial\Omega_r} \Delta(f(v))dx \leq A\widetilde{w} - \widetilde{w}_r$.

$$\widetilde{w}_r(r,t) = \frac{\partial}{\partial r}\left\{\int_{\partial\Omega} f(v(\Phi(r,\xi),t))\mu(r,\xi)\ d\sigma(\xi)\right\}$$

$$= -\left\{\int_{\partial\Omega} < \nabla(f(v)); \eta(\xi) > (\Phi(r,\xi),t)\mu(r,\xi)\ d\sigma(\xi)\right\} +$$

$$\left\{\int_{\partial\Omega} f(v(\Phi(r,\xi),t))\frac{\mu_r}{\mu}(r,\xi)\mu(r,\xi)\ d\sigma(\xi)\right\}$$

Se sigue que,

$$\widetilde{w}_r(r,t) \leq -\int_{\partial\Omega_r} \frac{\partial(f(v))}{\partial\eta}\, d\sigma + A\int_{\partial\Omega_r} f(v)\, d\sigma$$

y usando el teorema de la divergencia obtenemos la segunda desigualdad, la primera es trivial pues f es convexa y $\Delta v \geq 0$).

$$\widetilde{w}_r(r,t) \leq -\int_{\Omega_r} \Delta(f(v))dx + A\widetilde{w}$$

Para demostrar la primera desigualdad, reescribimos $\widetilde{w}_r$ como sigue,

$$\widetilde{w}_r(r,t) = -\int_{\Omega} \Delta(f(v))dx + \int_0^r \int_{\partial\Omega} \Delta(f(v))(\Phi(\rho,\xi),t)\mu(\rho,\xi)\, d\sigma(\xi)\, d\rho +$$

$$+\int_{\partial\Omega} f(v(\Phi(r,\xi),t))\mu_r(r,\xi)\, d\sigma(\xi)$$

Ahora calculamos $\widetilde{w}_{rr}$,

$$\widetilde{w}_{rr} = \int_{\partial\Omega} \Delta(f(v))(\Phi(r,\xi),t)\mu(r,\xi)\, d\sigma(\xi) -$$

$$-\int_{\partial\Omega} < \nabla(f(v)); \eta(\xi) > (\Phi(r,\xi),t)\frac{\mu_r}{\mu}\mu(r,\xi)\, d\sigma(\xi) +$$

$$+\int_{\partial\Omega} f(v(\Phi(r,\xi),t))\frac{\mu_{rr}}{\mu}\mu(r,\xi)\, d\sigma(\xi)$$

Ahora tomemos θ una función $C^2(\overline{\Omega})$ que verifique $\theta(\Phi(r,\xi)) = \frac{\mu_r}{\mu}(r,\xi)$ para $(r,\xi) \in [0,r_0] \times \partial\Omega$. Con esta función θ podemos calcular, usando que $(\Delta f(v) \geq 0)$ y el Lema 7.10,

$$\int_{\partial\Omega_r} \frac{\partial f(v)}{\partial\eta}\theta\, d\sigma = \int_{\Omega_r} \Delta(f(v))\theta dx - \int_{\Omega_r} f(v)\Delta\theta dx + \int_{\partial\Omega_r} f(v)\frac{\partial\theta}{\partial\eta}\, d\sigma$$

$$\left| \int_{\partial\Omega_r} \frac{\partial f(v)}{\partial\eta}\theta\, d\sigma \right| \leq C_1 \int_{\Omega_r} \Delta(f(v)) + C_2\int_{\partial\Omega_r} f(v)\, d\sigma$$

$$\left| \int_{\partial\Omega_r} \frac{\partial f(v)}{\partial\eta}\theta\, d\sigma \right| \leq C_1(A\widetilde{w} - \widetilde{w}_r) + C_2\widetilde{w}$$

Se sigue que,

$$\widetilde{w}_{rr}(r,t) \geq \int_{\partial\Omega_r} \Delta(f(v))\, d\sigma - B\widetilde{w}_r - C\widetilde{w} \geq \int_{\partial\Omega_r} f'(v)\Delta v\, d\sigma - B\widetilde{w}_r - C\widetilde{w}$$

$$\widetilde{w}_t(r,t) = \int_{\partial\Omega_r} f'(v)\Delta v\, d\sigma$$

Y finalmente,

$$\widetilde{w}_t \leq \widetilde{w}_{rr} + B\widetilde{w}_r + C\widetilde{w}$$

que es la desigualdad buscada. □

Corolario 7.2. *Sea* $\beta < -\max\{A, \frac{|B|}{2}\}$ *y* $\gamma = C + \beta^2 - B\beta$. *Entonces* $\underline{z}(r,t) = \exp(\beta r - \gamma t)\widetilde{z}(r,t)$ *y* $\underline{w}(r,t) = \exp(\beta r - \gamma t)\widetilde{w}(r,t)$ *satisfacen*

$$\begin{cases} \underline{z}_r < 0 \\ \underline{z}_t \leq \underline{z}_{rr} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \underline{w}_r < 0 \\ \underline{w}_t \leq \underline{w}_{rr} \end{cases}$$

<u>*Demostración*</u>.

$$\underline{w}_r = \exp(\beta r - \gamma t)[\beta\widetilde{w} + \widetilde{w}_r] = \exp(\beta r - \gamma t)[(A + \beta)\widetilde{w} + (\widetilde{w}_r - A\widetilde{w})]$$

Y cada uno de estos términos es negativo y así se obtiene la primera desigualdad de este Corolario.

Ahora calculamos

$$\underline{w}_t = \exp(\beta r - \gamma t)[\widetilde{w}_t - \gamma\widetilde{w}]$$

$$\underline{w}_r = \exp(\beta r - \gamma t)[\widetilde{w}_r + \beta\widetilde{w}]$$

$$\underline{w}_{rr} = \exp(\beta r - \gamma t)[\widetilde{w}_{rr} + 2\beta\widetilde{w}_r + \beta^2\widetilde{w}]$$

Entonces, gracias al Lema 7.11 tenemos,

$$\underline{w}_t \leq \underline{w}_{rr} + (B - 2\beta)\underline{w}_r + (-\gamma + C + \beta^2 - B\beta)\underline{w}$$

y sólo resta recordar nuestra elección de β y γ, para obtener el enunciado para $\underline{w}$.

De forma análoga se consiguen las afirmaciones para $\underline{z}$. $\square$

Proposición 7.1. *Existe una función* $h \in C^2([0, r_0])$, *no negativa, decreciente y convexa con* $h(r_0) = 0$ *y* $h(0) < L = \inf_{0 \leq t \leq T} \frac{e^{-bt}}{e^{-\gamma t}}$ *tal que*

$$\int_{\partial\Omega_r} \frac{\partial u}{\partial \eta}\, d\sigma \geq Ch(r) \int_{\partial\Omega_r} f(v)\, d\sigma$$

y además

$$\int_{\partial\Omega_r} \frac{\partial v}{\partial \eta}\, d\sigma \geq Ch(r) \int_{\partial\Omega_r} g(u)\, d\sigma$$

<u>*Demostración*</u>.

Vamos a emplear un argumento de comparación.

Primero elegimos una función C^2, no negativa, decreciente y convexa, h, tal que $\overline{z}(r,0) \geq h(r)\underline{z}(r,0)$ y $\overline{w}(r,0) \geq h(r)\underline{w}(r,0)$ con $h(r_0) = 0$ y $h(0) < L$. A continuación observamos que $h(r)\underline{z}(r,t)$ es una subsolución de la ecuación del calor (usamos las propiedades de h y el Corolario 7.2) y, por el Corolario 7.1, $\bar{z}$ es una supersolución. Para concluir con el argumento de comparación observamos que en $r = 0$ tenemos $\bar{z} \geq h(0)\underline{z}(0,t)$ pues hemos elegido h de forma que $h(0) < L$, y en $r = r_0$, $\int_{\partial\Omega_{r_0}} \frac{\partial u}{\partial \eta}\, d\sigma \geq 0$. Concluímos que $\bar{z} \geq h(r)\underline{z}$.

Terminamos la demostración de la Proposición recordando las definiciones de $\bar{z}$ y de $\underline{z}$.

El mismo argumento se puede usar para demostrar la segunda desigualdad.

Demostración del Teorema 7.1.

Del Lema 7.9 tenemos

$$\frac{\partial}{\partial r}(\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} u\, d\sigma) \leq -e^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} \frac{\partial u}{\partial \eta}\, d\sigma$$

Y ahora usando la Proposición 7.1 y la desigualdad de Jensen

$$\frac{\partial}{\partial r}(\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} u\, d\sigma) \leq -Ch(r)f(\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} v\, d\sigma/K)$$

$$\frac{\partial}{\partial r}(\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} v\, d\sigma) \leq -Ch(r)g(\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} u\, d\sigma/K)$$

Ahora podemos usar la desigualdad del Lema 7.1 para obtener

$$C_1\int_{\partial\Omega_r} v\, d\sigma \geq (F^{-1}\circ G)\left(C_2\int_{\partial\Omega_r} u\, d\sigma\right)$$

y entonces

$$\frac{\partial}{\partial r}(\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} u\, d\sigma/K) \leq -Ch(r)(f\circ F^{-1}\circ G)(\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} u\, d\sigma/K) \tag{7.2.3}$$

un argumento sencillo (integrando respecto a r) nos muestra que

$$\int_{(\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} u\, d\sigma/K)}^{+\infty} \frac{1}{f\circ F^{-1}\circ G} \geq \int_r^0 \frac{\frac{\partial}{\partial r}(e^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} u\, d\sigma/K)}{(f\circ F^{-1}\circ G)(\epsilon^{-Ar}\int_{\partial\Omega_r} u\, d\sigma/K)}$$

$$\geq C\int_0^r h(s)ds$$

de donde

$$\int_{\partial\Omega_r} u\, d\sigma \leq Ke^{Ar}H^{-1}(C\int_0^r h(s)ds)$$

llamamos $H(s) = \int_s^\infty \frac{1}{f\circ F^{-1}\circ G}$.

Ahora observamos que debido a que u verifica $\Delta u > 0$ entonces si $x \in \Omega_{2r_0} \setminus \Omega_{3r_0}$, con $\delta = r_0$

$$u(x,t) \leq \frac{1}{\mid B(x,\delta) \mid} \int_{B(x,\delta)} u \leq \frac{1}{\mid B(x,\delta) \mid} \int_{r_0}^{4r_0} \int_{\partial\Omega_r} u \, d\sigma$$

Y el último término está acotado por una expresión que sólo depende de r_0, entonces podemos contrololar u en $\Omega_{2r_0} - \Omega_{3r_0}$ y luego en Ω_{3r_0} recordando, nuevamente que $\Delta u \geq 0$. Usando un argumento similar al usado en la demostración del teorema 7.2 obtenemos que el conjunto de puntos de blow-up de v está localizado en el borde de Ω, $\partial\Omega$.

CAPITULO 8

Comportamiento asintótico de las soluciones de un sistema de ecuaciones del calor con condiciones de borde no lineales.

En este capítulo volvemos a considerar soluciones positivas de (5.1.1)-(5.1.3) en 2×2, esto es de:

$$(8.1.1) \qquad \begin{cases} (u_1)_t = \Delta u_1 & \text{en } B(0,1) \times (0,T) \\ (v_2)_t = \Delta u_2 & \text{en } B(0,1) \times (0,T) \end{cases}$$

$$(8.1.2) \qquad \begin{cases} \frac{\partial u_1}{\partial \eta} = (u_1)^{p_{11}}(u_2)^{p_{12}} & \text{en } \partial B(0,1) \times (0,T) \\ \frac{\partial u_2}{\partial \eta} = (u_1)^{p_{21}}(u_2)^{p_{22}} & \text{en } \partial B(0,1) \times (0,T) \end{cases}$$

$$(8.1.3) \qquad \begin{cases} u_1(x,0) = u_{1,0}(x) & \text{en } B(0,1) \\ u_2(x,0) = u_{2,0}(x) & \text{en } B(0,1) \end{cases}$$

A lo largo de este capítulo supondremos que la matriz $P = (p_{ij})$ satisface las siguientes hipótesis.

P1) $P = (p_{ij})$ es una matriz con entradas no negativas, en la diagonal menores que 1 ($p_{11} < 1$. $p_{22} < 1$) tal que $P - \text{Id}$ es no singular y existe un vector (α_1, α_2) con todos los $\alpha_i < 0$ tal que

$$(P - Id)\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Esto es equivalente a pedir que

$$\det(P - \text{Id}) = (p_{11} - 1)(p_{22} - 1) - p_{21}p_{12} < 0$$

Supondremos también que los datos iniciales, u_{i0}, son $C^2(\overline{B})$, positivos, y radiales (i.e. $u_{i0}(x) = v_{i0}(\|x\|)$) con tres derivadas positivas. Bajo estas hipótesis la solución u_i también es radial, es decir $u_i(x,t) = v_i(\|x\|,t)$ donde las funciones $v_i : [0,1] \times [0,T) \mapsto \mathbb{R}$ son una solución del problema

$$(8.1.4) \qquad \begin{cases} (v_i)_t = (v_i)_{rr} + \frac{N-1}{r}(v_i)_r \\ (v_i)_r(0,t) = 0 \qquad (v_i)_r(1,t) = (v_1)^{p_{i1}}(1,t)(v_2)^{p_{i2}}(1,t) \\ (v_i)(r,0) = v_{i0}(r) \end{cases}$$

$$i = 1,2$$

Bajo la hipótesis **P1)** se probó en el capítulo 5 que las soluciones consideradas tienen blow-up en tiempo finito T, pues $\alpha_1, \alpha_2 < 0$ (cf. Teorema 5.2).

En ese tiempo T tenemos, gracias al resultado de Amann [Am3] (ver capítulo 2)

$$\limsup_{t \nearrow T} \sum_{i=1}^{2} \|u_i(x,t)\|_{L^\infty(\Omega)} = +\infty$$

Además del hecho de ser p_{11} y p_{22} menores que uno se puede deducir que ambas funciones u_i se van a infinito simultáneamente en ese instante T. Pues si, por ejemplo, u_1 estuviera acotada en $\overline{\Omega} \times [0,T)$ también lo estaría u_2 ya que sería una solución de

$$\begin{cases} (u_2)_t = \Delta(u_2) \\ \frac{\partial u_2}{\partial \eta} \le K(u_2)^{p_{22}} \end{cases}$$

donde K es una cota para $(u_1)^{p_{21}}$.

En este capítulo estamos interesados en el comportamiento asintótico de las soluciones. Caracterizamos la velocidad con que estas soluciones van a infinito en el tiempo T de la siguente forma:

Teorema 8.1. *Si las hipótesis sobre la matriz P (**P1**)) se verifican y la solución v del problema (8.1.4) es tal que v_r, v_t y v_{tr} no son negativas entonces*

$$v_1(1,t) \sim (T-t)^{\alpha_1/2} \qquad (t \nearrow T)$$

$$v_2(1,t) \sim (T-t)^{\alpha_2/2} \qquad (t \nearrow T)$$

donde los α_1, α_2 están dados por **P1)**.

Es decir

$$\max_{\overline{B}} u_1(t) \sim (T-t)^{\alpha_1/2} \qquad (t \nearrow T)$$

$$\max_{\overline{B}} u_2(t) \sim (T-t)^{\alpha_2/2} \qquad (t \nearrow T)$$

Como corolario inmediato obtenemos la localización del conjunto de puntos de blow-up en el borde de la bola B, gracias al resultado de [H.Y] (ver capítulo 2). (cf. capítulo 7 para ver otras ideas para lograr localización).

Corolario 8.1. *Sea v_i una solución que verifica*

$$\max_{\overline{\Omega}} u_1(t) \leq (T-t)^{\alpha_1/2} \qquad (t \nearrow T)$$

$$\max_{\overline{\Omega}} u_2(t) \leq (T-t)^{\alpha_2/2} \qquad (t \nearrow T)$$

(Bajo las hipótesis del Teorema 8.1 se verifica lo pedido)
Si $r < 1$ existe una constante $C = C(r)$ tal que

$$u_1(r,t) < C \qquad t \in [0,T)$$

$$u_2(r,t) < C \qquad t \in [0,T)$$

Para probar el Teorema 8.1 necesitaremos un resultado auxiliar que nos da el comportamiento asintótico de las soluciones de

$$(8.1.5) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{u^k}{(T-t)^s} \\ u(x,0) = u_0(x) > 0 \end{cases}$$

con $(s > 1/2,\ k < 1)$ en $B(0,1) \times [0,T)$.
El resultado al que nos referimos es

Proposición 8.1. *Toda solución positiva de (8.1.5) tiene blow-up en tiempo finito T y además verifica que*

$$\max_{\overline{B}} u(\cdot,t) \sim (T-t)^{\frac{k-1}{s-1/2}} \qquad (t \nearrow T)$$

Creemos que esta Proposición tiene interés independiente.

I. Comportamiento asintótico de una ecuación.

Empezamos esta sección con un resultado de [F.Q] adaptado a nuestros fines.

Lema 8.1. *Sea v una solución positiva de*

$$(8.1.6) \qquad \begin{cases} v_t = v_{rr} + \frac{N-1}{r} v_r \\ v_r(0,t) = 0 \qquad v_r(1,t) \geq (v(1,t))^p \\ v(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

si v cumple que v_r, v_t, v_{tr} no son negativas entonces existe $c > 0$ tal que

$$v(1,t)(T-t)^{\frac{1}{2(p-1)}} \leq c$$

Demostración.

De la ecuación deducimos que

$$v_t \geq v_{rr}$$

Usando este hecho e integrando por partes se obtiene

$$\frac{1}{2}v^{2p}(1,t) \leq \frac{1}{2}(v_r)^2(1,t) = \int_0^1 v_{rr}v_r(s,t)ds \leq \int_0^1 v_t v_r(s,t)ds =$$

$$= v_t(1,t)v(1,t) - v_t(0,t)v(0,t) - \int_0^1 v_{tr}v(s,t)ds \leq$$

$$\leq v_t(1,t)v(1,t)$$

entonces

$$v_t(1,t) \geq \frac{1}{2}v^{2p-1}(1,t)$$

o lo que es lo mismo

$$\frac{v_t(1,t)}{v^{2p-1}(1,t)} \geq \frac{1}{2}$$

integrando esta desigualdad se consigue el resultado buscado. □

A continuación adaptaremos un resultado de [H.Y] para lograr la acotación en el sentido contrario, destacamos que para esto no se necesita pedir que la solución sea radial ni tenga derivadas no negativas.

Lema 8.2. *Sea u una solución positiva de*

$$(8.1.7) \qquad \begin{cases} u_t = \Delta u \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \leq u^p \\ u(x,0) = u_0(x) \end{cases}$$

que tiene blow-up a tiempo T, entonces existe una constante positiva c tal que el comportamiento asintótico de u viene dado por

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x,t) \geq \frac{c}{(T-t)^{\frac{1}{2(p-1)}}}$$

Demostración.

Usaremos la ecuación integral de u.

Sea $\Gamma(x,t)$ la solución fundamental de la ecuación del calor, es decir

$$\Gamma(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \exp[\frac{-\|x\|^2}{4t}]$$

entonces para $0 < z < t < T$ y $x \in \Omega$ se tiene de la identidad de Green:

$$u(x,t) \leq \int_\Omega \Gamma(x-y,t-z)u(y,z)dy+$$

$$+\int_z^t \int_{\partial\Omega} u^p(y,\tau)\Gamma(x-y,t-\tau)dS_y d\tau-$$

$$-\int_z^t \int_{\partial\Omega} u(y,\tau)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x-y,t-\tau)dS_y d\tau$$

Si hacemos $x \to \partial\Omega$ se obtiene, usando el Teorema 1 del capítulo 5 de [Fr]

$$\frac{1}{2}u(x,t) \leq \int_\Omega \Gamma(x-y,t-z)u(y,z)dy+$$

$$+\int_z^t \int_{\partial\Omega} u^p(y,\tau)\Gamma(x-y,t-\tau)dS_y d\tau- \tag{8.1.8}$$

$$-\int_z^t \int_{\partial\Omega} u(y,\tau)\frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x-y,t-\tau)dS_y d\tau$$

Sean

$$M(t) = \max_{x\in\overline{\Omega}} u(x,t) \qquad M_b(t) = \max_{x\in\partial\Omega} u(x,t)$$

Como el borde de Ω es suave ($C^{1+\alpha}$) la función Γ satisface, para $x,y \in \partial\Omega$ (ver [Fr] Lema 1 del capítulo 5)

$$\mid \frac{\partial\Gamma}{\partial\eta}(x-y,t-\tau) \mid \leq \frac{C}{(t-\tau)^\mu \mid x-y \mid^{n+1-2\mu-\alpha}}$$

Fijamos μ tal que $1-\frac{\alpha}{2} < \mu < 1$. Entonces (8.1.8) nos da

$$\frac{1}{2}M_b(t) \leq M(z) + C\int_z^t \frac{(M_b(\tau))^p}{(t-\tau)^{1/2}}d\tau + C\int_z^t \frac{M_b(\tau)}{(t-\tau)^\mu}d\tau \leq$$

$$\leq M(z) + C(\max_{z\leq\tau\leq t} M_b(\tau))^p 2(t-z)^{1/2} + C(\max_{z\leq\tau\leq t} M_b(\tau))(t-z)^{1-\mu} \leq$$

$$\leq M(z) + C(\max_{z\leq\tau\leq t} M_b(\tau))^p 2(T-z)^{1/2} + C(\max_{z\leq\tau\leq t} M_b(\tau))(T-z)^{1-\mu} \leq$$

Para cualquier $z \leq \eta \leq t$ vale

$$\frac{1}{2}M_b(\eta) \leq M(z) + C(\max_{z\leq\tau\leq\eta} M_b(\tau))^p 2(T-\eta)^{1/2} + C(\max_{z\leq\tau\leq\eta} M_b(\tau))(T-\eta)^{1-\mu} \leq$$

$$\leq M(z) + C(\max_{z\leq\tau\leq t} M_b(\tau))^p 2(T-z)^{1/2} + C(\max_{z\leq\tau\leq t} M_b(\tau))(T-z)^{1-\mu}$$

lo que implica que

$$(8.1.9) \qquad \frac{1}{2}\max_{z\le\tau\le t} M_b(\tau) \le M(z)$$

$$+C(\max_{z\le\tau\le t} M_b(\tau))^p 2(T-z)^{1/2} + C(\max_{z\le\tau\le t} M_b(\tau))(T-z)^{1-\mu}$$

Por hipótesis T es el tiempo de blow-up y entonces

$$h_z(t) = \max_{z\le\tau\le t} M_b(\tau) \to \infty \qquad (t \nearrow T)$$

Como $h_z(z) = M_b(z) \le M(z)$ podemos elegir $t < T$ tal que

$$\max_{z\le\tau\le t} M_b(\tau) = 4M(z)$$

de aquí que la desigualdad (8.1.9) implique

$$M(z) \le C2^{2p+1}(T-z)^{1/2}(M(z))^p + 4C(T-z)^{1-\mu}M(z)$$

Si $T - z$ es pequeño se tiene que

$$M(z) \le C2^{2p+2}(T-z)^{1/2}(M(z))^p$$

A partir de esta última desigualdad se deduce el resultado

$$\max_{x\in\overline{\Omega}} u(x,z) \ge \frac{c}{(T-z)^{\frac{1}{2(p-1)}}}$$

que es lo que deseábamos probar. □

La Proposición 8.1 nos dice cual es el comportamiento asintótico de las soluciones positivas de (8.1.5). Para su demostración necesitamos los resultados anteriores Lemas 8.1 y 8.2 y usar un argumento de comparación. También nos hará falta la siguiente observación.

Observación 8.1. Dados $\kappa > 1$ y $T > 0$ existe z_0 radial con tres derivadas positivas tal que la solución de

$$\begin{cases} z_t = \Delta z \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} = z^\kappa \\ z(x,0) = z_0(x) \end{cases}$$

tiene blow-up en el tiempo T. Además podemos elegir z_0 de forma que satisfaga una condición de compatibilidad de orden uno. De esta forma la solución z tendrá tres derivadas radiales continuas hasta $t = 0$ y así sus primeras tres devivadas radiales serán positivas.

En efecto si la solución z es regular (ver Capítulo 3) podemos derivar la ecuación (en coordenadas radiales) y obtener aplicando el principio del maximo varias veces que z, z_r, z_t y z_{rt} se mantienen positivas.

Llamando nuevamente z a la solución radial ($z = z(r,t)$) se tiene

$$\begin{cases} z_t = z_{rr} + \frac{N-1}{r} z_r \\ z_r(0,t) = 0 \qquad z_r(1,t) = z^{\kappa}(1,t) \end{cases}$$

de esto sale que z se mantiene positiva.

$$\begin{cases} (z_r)_t = (z_r)_{rr} + \frac{N-1}{r}(z_r)_r + \frac{1-N}{r^2}(z_r) \\ z_r(0,t) = 0 \qquad z_r(1,t) = z^{\kappa}(1,t) \end{cases}$$

de aquí que z_r sea positiva.

Y ahora derivando respecto a t

$$\begin{cases} (z_t)_t = (z_t)_{rr} + \frac{N-1}{r}(z_t)_r \\ (z_t)_r(0,t) = 0 \qquad (z_t)_r(1,t) = \kappa z^{\kappa-1}(1,t) z_t(1,t) \end{cases}$$

se deduce que z_t es positiva.

Y, por último

$$\begin{cases} (z_{rt})_t = (z_{rt})_{rr} + \frac{N-1}{r}(z_{rt})_r + \frac{1-N}{r^2}(z_{rt}) \\ z_{rt}(0,t) = 0 \qquad z_{rt}(1,t) = \kappa z^{\kappa-1}(1,t) z_t(1,t) \end{cases}$$

de donde z_{rt} es positiva.

Ahora veamos que si el dato inicial es suficientemente chico entonces el tiempo de blow-up de la solución es mayor a T.

Para este fin consideremos soluciones de

$$\begin{cases} b_t = \Delta b \\ \frac{\partial b}{\partial \eta} = h(b) \\ b(x,0) = b_0(x) > 0 \end{cases}$$

con $h(b)$ una función regular acotada tal que coincida con b^{κ} para todo $b \leq 1$.

Como este nuevo problema es regular y no tiene blow-up (h es acotada) se sabe que si b_0 es chico entonces la solución $b(x,t)$ se mantendrá menor que uno para cualquier t en el intervalo $[0,T]$.

Si miramos la solución z del problema anterior que tiene un dato inicial menor o igual a b_0 se observa que hasta tiempo T será menor o igual que b y así su tiempo de blow-up será mayor que T.

Para ver que efectivamente podemos exigir que la solución tenga blow-up exactamente en el tiempo T es suficiente con elegir $\overline{z}_0$ compatible de orden uno, radial, con tres derivadas radiales positivas y suficientemente chico para que $T_{\overline{z}_0}$ (su tiempo de blow-up) sea mayor o igual que T (esto se puede hacer por la observación anterior). Si llamamos $\overline{z}$ a la solución con dato inicial $\overline{z}_0$ basta tomar $z_0(x) = \overline{z}(x, T_{\overline{z}_0} - T)$.

Demostración de la Proposición 8.1.

Empecemos considerando soluciones de

$$(8.1.10)\qquad \begin{cases} w_t = \Delta w \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} = c\frac{w^r}{(T-t)^s} \\ w(x,0) = w_0(x) \end{cases}$$

Probaremos que si c y w_0 son suficientemente chicos, entonces la solución w tiene blow-up a tiempo T y además

$$w \leq \frac{c}{(T-t)^{\frac{s-1/2}{1-r}}}$$

Primero elijamos z una solución de

$$\begin{cases} z_t = \Delta z \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} = z^\kappa \\ z(x,0) = z_0(x) \end{cases}$$

con $\kappa = \frac{2s-r}{2s-1} > 1$ y z_0 radial con tres derivadas positivas tal que la solución z tenga blow-up en el tiempo T. (ver la observación 8.1).

De uno de los Lemas anteriores (Lema 8.1) sabemos que

$$z(x,t) \leq \frac{C}{(T-t)^{\frac{1}{2(\kappa-1)}}}$$

Ahora observemos que, si w_0 y c son chicos, resulta $w < z$, pues $(z-w)$ es positivo inicialmente y satisface

$$\begin{cases} (z-w)_t = \Delta(z-w) \\ \frac{\partial(z-w)}{\partial \eta} = z^\kappa - c\frac{w^r}{(T-t)^s} \end{cases}$$

Si existe un primer tiempo t_0 tal que existe x_0 de forma que $z(x_0,t_0) = w(x_0,t_0)$, x_0 debe pertenecer al $\partial\Omega$ y en ese punto se tiene

$$\frac{\partial(z-w)}{\partial \eta} = z^r(z^{\kappa-r} - \frac{c}{(T-t)^s})$$

Gracias al Lema 8.2 se sabe que $z^{\kappa-r}(1,t) \geq \frac{c_1}{(T-t)^{\frac{\kappa-r}{2(\kappa-1)}}} > \frac{c}{(T-t)^s}$ (pues por nuestra elección de κ los exponentes de $(T-t)$ son iguales y basta elegir la constante c chica. Esto entra en contradicción con el principio del máximo.

Entonces tenemos

$$w \leq z \leq \frac{C}{(T-t)^{\frac{1}{2(\kappa-1)}}}$$

pero por nuestra elección de κ vale

$$\frac{1}{2(\kappa-1)} = \frac{s-1/2}{1-r}$$

y tenemos que si c y w_0 son chicos vale una de las acotaciones del enunciado.

Para ver la acotación anterior para cualquier dato inicial sea $\overline{w}$ una solución de (8.1.10) con dato inicial y constante c arbitrarias.

Multiplicamos $\overline{w}$ por k con k chico para lograr que $k\overline{w}$ entre dentro de las hipótesis de lo anterior (o sea que verifique (8.1.5) con constante y dato inicial chicos). Por lo anterior se tiene que

$$k\overline{w} \leq \frac{C}{(T-t)^{\frac{s-1/2}{1-r}}}$$

y listo.

Observemos que la conclusión anterior sigue valiendo si se toma como dato de borde

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} \leq c\frac{w^r}{(T-t)^s}$$

en (8.1.10)

Con un razonamiento análogo al anterior (comparando con z por debajo) se puede ver la desigualdad opuesta

$$\max_{\overline{\Omega}} w(t) \geq \max_{\overline{\Omega}} z(t) \geq \frac{c}{(T-t)^{\frac{s-1/2}{1-r}}} \tag{8.1.11}$$

Y también podemos observar que se puede cambiar la condición de borde por

$$\frac{\partial w}{\partial \eta} \geq c\frac{w^r}{(T-t)^s}$$

en (8.1.10) y obtener la misma conclusión (8.1.11). □

II. Comportamiento asintótico del sistema.

Para empezar probaremos un resultado de comparación entre las soluciones de (8.1.1)-(8.1.3), u_i, que será la clave para poder reducirnos a estudiar el comportamiento de soluciones de (8.1.5) que conocemos gracias a la Proposición 8.1.

Podemos suponer que los α_i vienen ordenados de la siguiente forma

$$\alpha_1 \leq \alpha_2 < 0$$

Entonces vale el siguiente Lema:

Lema 8.3. *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$Cu_1 \geq (u_2)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$$

Demostración.

Comencemos pidiendole a C que sea suficientemente grande para cumplir con

$$Cu_1(x,0) > (u_2)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}(x,0)$$

Ahora observemos que Cu_1 es una solución de la ecuación del calor y, por ser $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} \geq 1$ se tiene que $(u_2)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$ es una subsolución.

De esta forma si existe un primer tiempo t_0 con un $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que ambas funciones son iguales en (x_0, t_0) se tiene que $x_0 \in \partial\Omega$ y allí, en (x_0, t_0), se tiene que (llamando $w = Cu_1$, $z = (u_2)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$)

$$\frac{\partial(w-z)}{\partial\eta} = C^{1-p_{11}} w^{p_{11}} z^{p_{12}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} - \frac{\alpha_1}{C^{p_{21}}\alpha_2} w^{p_{21}} z^{\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(p_{22}-1)+1} =$$

$$= C^{1-p_{11}} w^{p_{11}+p_{12}\frac{\alpha_2}{\alpha_1}} - \frac{\alpha_1}{C^{p_{21}}\alpha_2} w^{p_{21}+\frac{\alpha_2}{\alpha_1}(p_{22}-1)+1}$$

se verica que los exponentes que aparecen son iguales pues usando **P1)** se verifica

$$p_{11} + p_{12}\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = p_{21} + \frac{\alpha_2}{\alpha_1}(p_{22}-1) + 1$$

y si además le pedimos a C que verifique

$$C^{1-p_{11}} - \frac{\alpha_1}{C^{p_{21}}\alpha_2} > 0$$

obtenemos que $\frac{\partial(w-z)}{\partial\eta} > 0$ en (x_0, t_0) lo cual es una contradicción.

Deducimos entonces que ese tal t_0 no puede existir y por ende

$$Cu_1 \geq (u_2)^{\frac{\alpha_1}{\alpha_2}}$$

que es lo que deseabamos probar. □

Demostración del Teorema 8.1.

Empecemos por acotar u_2 por arriba.

Gracias a la conclusión del Lema 8.3 vemos que u_2 satisface

$$(u_2)_t = \Delta(u_2)$$

$$\frac{\partial(u_2)}{\partial\eta} = (u_1)^{p_{21}}(u_2)^{p_{22}} \geq C(u_2)^{\gamma}$$

donde

$$\gamma = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}p_{21} + p_{22} =$$

$$= 1 - \frac{1}{\alpha_2} > 1$$

Ahora observamos que estamos en las hipótesis del Lema 8.1 ([F.Q]) pues la función u_2 es radial y tiene tres derivadas positivas por hipótesis y entonces concluímos que existe una constante c de forma que se verifica

$$u_2 \leq \frac{c}{(T-t)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}}$$

Ahora bien

$$\frac{1}{2(\gamma-1)} = -\frac{\alpha_2}{2}$$

y entonces

$$u_2 \leq \frac{c}{(T-t)^{-\frac{\alpha_2}{2}}}$$

Usando esta acotación para u_2 y la Proposición 8.1 obtendremos la acotación correspondiente para u_1.

u_1 satisface

$$(u_1)_t = \Delta(u_1)$$

$$\frac{\partial(u_1)}{\partial\eta} = (u_1)^{p_{11}}(u_2)^{p_{12}} \leq$$

$$\leq C\frac{(u_1)^r}{(T-t)^s}$$

en este caso

$$r = p_{11}$$

$$s = -\frac{\alpha_2 p_{12}}{2}$$

y resulta de nuestra hipótesis **P1)** que $s > 1/2$ y $r < 1$ y entonces caemos dentro de las hipótesis de la Proposición 8.1.

Obtenemos

$$(u_1) \leq \frac{c}{(T-t)^{\frac{s-1/2}{1-r}}}$$

observemos que

$$\frac{s-1/2}{1-r}=\frac{-\alpha_1}{2}$$

y así hemos obtenido la acotación por arriba de u_1

$$u_1 \leq \frac{c}{(T-t)^{\frac{-\alpha_1}{2}}}$$

y con esto hemos terminado la mitad de la demostración.

Veamos las desigualdades opuestas, para terminar con el Teorema 8.1.

Ahora empezamos por u_1.

Usando el Lema 8.3. u_1 satisface

$$(u_1)_t = \Delta(u_1)$$
$$\frac{\partial(u_1)}{\partial\eta} = (u_1)^{p_{11}}(u_2)^{p_{12}} \leq C(u_1)^{\gamma}$$

donde

$$\gamma = \frac{1}{\alpha_1}\{\alpha_1 p_{11} + \alpha_2 p_{12}\} =$$
$$= \frac{-1}{\alpha_1} + 1 > 1$$

entonces el Lema 8.2 nos dice que, como el máximo de $u_1(x,t) = v_1(\|x\|,t)$ se alcanza en $\|x\| = 1$,

$$v_1(1,t) \geq \frac{c}{(T-t)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}}$$

es decir

$$\max_{\overline{\Omega}} u_1(t) \geq \frac{c}{(T-t)^{\frac{1}{2(\gamma-1)}}}$$

pero

$$\frac{1}{2(\gamma-1)} = \frac{-\alpha_1}{2}$$

y entonces

$$\max_{\overline{\Omega}} u_1(t) \geq \frac{c}{(T-t)^{-\frac{\alpha_1}{2}}}$$

Pasemos a u_2.

Gracias a la acotación anterior u_2 satisface

$$(u_2)_t = \Delta(u_2)$$

$$\frac{\partial(u_2)}{\partial\eta} = (u_1)^{p_{21}}(u_2)^{p_{22}} \geq C\frac{(u_2)^r}{(T-t)^{\frac{-\alpha_1 p_{21}}{2}}} =$$

$$= C\frac{(u_2)^r}{(T-t)^s}$$

en este caso

$$r = p_{22}$$

$$s = \frac{-\alpha_1 p_{21}}{2}$$

y por nuestra hipótesis **P1)** tenemos $s > 1/2$ y $r < 1$ y entonces, usando la Proposición 8.1 obtenemos

$$(v_2)(1,t) \geq \frac{c}{(T-t)^{\frac{s-1/2}{1-r}}}$$

observemos que

$$\frac{s-1/2}{1-r} = \frac{-\alpha_2}{2}$$

y así u_2 satisface

$$\max_{\overline{\Omega}} u_2(t) \geq \frac{c}{(T-t)^{\frac{-\alpha_2}{2}}}$$

Esto, junto a las acotaciones por arriba nos da la conclusión deseada

$$v_i(1,t) \sim (T-t)^{\alpha_i/2} \quad (t \nearrow T)$$

es decir

$$\max_{\overline{\Omega}} u_j(t) = u_j(x,t)\mid_{\|x\|=1} \sim (T-t)^{\alpha_j/2} \quad (t \nearrow T)$$

Ahora pasamos a localizar el conjunto de puntos de blow-up de las soluciones que se ajusten al comportamiento asintótico que da el Teorema 8.1.

Demostración del Corolario 8.1.

Basta con observar que estamos en las hipótesis del Teorema de localización del Capítulo 2. $\square$

REFERENCIAS

[A.H.V] D. Andreucci, M. A. Herrero y J. J. L. Velazquez, *Liouville theorems and blow-up behaviour in semilinear diffusion systems*. Preprint.

[Am1] H. Amann. *Dynamic Theory of Quasilinear Parabolic Systems I. Abstract evolution equations*, Nonlinear Anal **12 (9)** (1988), 895–919.

[Am2] H. Amann, *Dynamic Theory of Quasilinear Parabolic Systems II. Reaction - Diffusion Systems*, Diff. and Integral Eq. **3(1)** (1990), 13–75.

[Am3] H. Amann, *Dynamic Theory of Quasilinear Parabolic Systems III. Global Existence*, Math. Z **202(2)** (1989), 219–254.

[B.C.E] Ph. Benilan, C. Cortazar y M. Elgueta, *On the behaviour of the solutions of the third initial-boundary value problem for the one dimensional porous medium equation*, Preprint.

[C.E 1] C. Cortazar y M. Elgueta, *Large time behaviour of solutions of a non linear reaction-diffusion equation*, Houston Jour. of Math. **13(4)** (1987), 487–497.

[C.E 2] C. Cortazar y M. Elgueta, *Unstability of the steady solution of a nonlinear reaction-diffusion equation*, Houston Jour. of Math. **17(1)** (1991), 1–7.

[C.M] G. Caristi y E. Mitidieri, *Blow-up estimates of positive solutions of a parabolic system*, Jour. Diff. Eq **113** (1994), 265–271.

[H.Y] Bei Hu y Hong-Ming Yin, *The Profile Near Blow-up Time for the Solution of the Heat Equation with a Nonlinear Boundary Condition*, Trans. Amer. Math. Soc **346 (1)** (1994), 117–135.

[E.H.1] M. Escobedo y M. A. Herrero, *Boundedness and Blow-up for a Semilinear Reaction-Diffusion System*, Jour. Diff. Eq **89** (1991), 176–202.

[E.H.2] M. Escobedo y M. A. Herrero, *A Semilinear Parabolic System in a Bounded Domain*, Annali di Matematica pura ed applicata **CLXV** (1993), 315–336.

[E.L.] M. Escobedo y H. A. Levine, *Critical Blow-up and Global Existence Numbers for a Weakly Coupled System of Reaction-Diffusion Equations*, Arch. Rat. Mech. Anal **129** (1995), 47–100.

[F] M. Fila, *Boundedness of global solutions for the heat equation with nonlinear boundary conditions*, Comment. Math. Univ. Carol **30** (1989), 479–484.

[F.Q] M. Fila y P. Quitter, *The Blow-up Rate for the Heat Equation with a Nonlinear Boundary Condition*, Mathematical Methods in the Applied Sciences **14** (1991), 197–205.

[F.T] J. Fleckinger-Pelle y P. Takac, *Uniqueness of positive solutions for nonlinear cooperative systems with the p-laplatian*, Indiana Univ. Math. Jour **43(4)** (1994), 1227–1252.

[Fr] A. Friedmen, *Partial differential equations of parabolic type*, Prentice-Hall (1964).

[G1] V. A. Galaktionov, *Blow-up for quasilinear heat equations with critical Fujita's exponents*, Proc. Roy. Soc. of Edimb. **124(A)** (1994), 517–525.

[G2] V. A. Galaktionov, *On asymptotic self-similar behaviour for a quasilinear heat equation: single point blow-up*, SIAM J. Math. Anal **26(3)** (1995), 675–693.

[G.K 1] Y. Giga y R. V. Kohn, *Nondegeneracy of blow-up for semilinear heat equations*, Comm. in Pure and Appl. Math **XLII** (1989), 845–884.

[G.K 2] Y. Giga y R. V. Kohn, *Characterizing blow-up using similarity variables*, Indiana Univ. Math. Jour **36** (1987), 1–40.

[G.K 3] Y. Giga y R. V. Kohn, *Asymptotically self-similar blow-up of semilinear heat equations*, Comm. in Pure and Appl. Math **XXXVIII** (1985), 297–319.

[H.V.1] M. A. Herrero y J. J. L. Velazquez, *Blow-up behaviour of one dimensional semilinear parabolic equations*, Ann. Inst. H. Poincare **10 (2)** (1993), 131–189.

[H.V.2] M. A. Herrero y J. J. L. Velazquez, *Flat blow-up in one dimensional semilinear heat equations*, Diff. and Integral Eq **5** (1992), 973–998.

[L] O. Ladyzenskaja, V. Solonnikov y N. Uralceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Trans. Math. Monographs **23** (1968).

[L.P] H. A. Levine y L. E. Payne, *Nonexistence Theorems for the Heat Equation with Nonlinear Boundary Conditions and for the Porous Medium Equation backward in time*, Jour. Diff. Eq **16** (1974), 319–334.

[LG.M.W] J. Lopez Gomez, V. Marquez y N. Wolanski, *Blow-up Results and Localization of Blow-up Points for the Heat Equation with a Nonlinear Boundary Condition*, Jour. Diff. Eq **92(2)** (1991), 384–401.

[P] C. V. Pao, *Nonlinear parabolic and elliptic equations*, Plenum Press (1992).

[P.V] I. Peral y J. L. Vazquez, *On the stability or instability of the singular solution of the semilinear heat equation with exponential reaction term*, Preprint (1993).

[R.R.] D. F. Rial y J. D. Rossi, *Blow-up Results and Localization of Blow-up Points in an N-Dimensional Smooth Domain*, Preprint n^0S3. Depto. de Matemática. FCEyN. UBA. (1995).

[R.W.] J. D. Rossi y N. Wolanski, *Global Existence and Nonexistence for a Parabolic System with Nonlinear Boundary Conditions*, Preprint $n^0$79. Depto. de Matemática. FCEyN. UBA. por aparecer en Comm. in Par. Diff. Eq (1994).

[S.G.K.M] A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyunov y A. P. Mikhailov, *Blow-up in quasilinear parabolic equations*, Walter de Gruyter , Berlin (1995).

[V] J. L. Vazquez, *Comportamiento asitótico de las ecuaciones parabólicas no lineales*, Preprint (1994).

[W] W. Walter, *On Existence and Nonexistence in the Large of Solutions of Parabolic Differential Equations with a Nonlinear Boundary Condition*, SIAM J. Math. Anal **6(1)** (1975), 85–90.

[W.W] M. Wang y Y. Wu, *Global existence and blow-up problems for quasilinear parabolic equations with nonlinear boundary conditions*, SIAM J. Math. Anal **24 (6)** (1993), 1515–1521.

[Wo] N. Wolanski, *Global behaviour of positive solutions to nonlinear diffusion problems with nonlinear absorption through the boundary*, SIAM J. Math. Anal **24 (2)** (1993), 317–326.