

## Tesis de Posgrado

# Disminución nocturna de la temperatura

Figuerola, Patricia Irene

1995

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias de la Atmósfera de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Figuerola, Patricia Irene. (1995). Disminución nocturna de la temperatura. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2770\\_Figuerola.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2770_Figuerola.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Figuerola, Patricia Irene. "Disminución nocturna de la temperatura". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1995.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2770\\_Figuerola.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2770_Figuerola.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales  
Departamento de Ciencias de la Atmósfera

" DISMINUCION NOCTURNA DE LA TEMPERATURA "

Trabajo de Tesis elaborado por la Licenciada Patricia Irene Figuerola, para acceder al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires.

Director de Tesis: Dr. Nicolás A. Mazzeo

Lugar de Trabajo: Departamento de Ciencias de la Atmósfera

J'2

# INDICE

	Pág.	
CAPITULO I		
INTRODUCCION		
	1	
CAPITULO II		
EFECTOS DE LAS TEMPERATURAS BAJAS SOBRE LAS PLANTAS		
II.1.	Introducción	6
II.2.	Daños por enfriamiento	7
II.3.	Daños por congelamiento	8
II.4.	Tipos de heladas	9
II.5.	Protección de los cultivos de la helada	10
II.6.	Heladas en la República Argentina	12
CAPITULO III		
TRANSPORTE DE CALOR		
III.1.	Generalidades	14
III.2.	Ecuación de transporte de calor	15
III.3.	Teoría del flujo gradiente (Teoría "K")	17
III.4.	Clausura de segundo orden	18
III.5.	Balance de calor	21
III.6.	Ley potencial del viento	25
III.6.1.	Ley de las potencias conjugadas de Schmidt	26
CAPITULO IV		
ANTECEDENTES		
IV.1.	Introducción	28
IV.2.	Modelo de Brünt	28
IV.2.1.	Generalidades	28
IV.2.2.	El modelo	29
IV.2.3.	Ejemplificación	31
IV.3.	Modelo inicial de Gröen	33
IV.3.1.	Generalidades	33
IV.3.2.	El modelo	33
IV.3.3.	Ejemplificación	34

IV.4.	Modelo de Gröen modificado	36
IV.4.1.	El modelo	36
IV.4.2.	Ejemplificación	37
IV.5.	Modelo de Jaeger (coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire constante)	39
IV.5.1.	El modelo	39
IV.5.2.	Ejemplificación	41
IV.6.	Modelo de Jaeger (coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire variable con la altura)	43
IV.6.1.	El modelo	43
IV.6.2.	Ejemplificación	45
IV.7.	Modelo de Reuter	48
IV.7.1.	El modelo	48
IV.7.2.	Ejemplificación	50
IV.8.	Modelo de Anfossi y otros	53
IV.8.1.	El modelo	53
IV.8.2.	Ejemplificación	55
IV.9.	Análisis de los modelos presentados	56

## CAPITULO V

### CAPA LIMITE PLANETARIA

V.1.	Generalidades	59
V.2.	Características de la capa límite estable nocturna	61
V.3.	Características de la capa de superficie	63

## CAPITULO VI

### DESARROLLO DEL MODELO

VI.1.	Introducción	67
VI.2.	La ecuación de difusión de calor en el aire	69
VI.3.	El flujo turbulento de calor en el aire	69
VI.4.	La ecuación de difusión de calor en el suelo	69
VI.5.	El flujo de calor en el suelo	70
VI.6.	Condiciones iniciales	71
VI.7.	Condiciones límites	71
VI.8.	Desarrollo del modelo	72

## CAPITULO VII

### PARAMETROS UTILIZADOS EN EL MODELO PROPUESTO

VII.1.	La radiación neta	81
VII.2.	El gradiente de temperatura en el suelo	83
VII.3.	El coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire	84
VII.4.	El parámetro m	88
VII.5.	El momento inicial	89
VII.6.	La temperatura de la superficie terrestre	90

## CAPITULO VIII

### DESCRIPCION DE LOS EXPERIMENTOS UTILIZADOS

VIII.1.	Introducción	92
VIII.2.	Experimento " Wangara "	92
VIII.2.1.	Introducción	92
VIII.2.2.	Descripción del área de observación	93
VIII.2.3.	Características del suelo	95
VIII.2.4.	Datos meteorológicos en superficie	95
VIII.2.5.	Datos micrometeorológicos	96
VIII.2.6.	Selección de los días utilizados en la verificación del modelo	98
VIII.3.	Experimento " Great Plains "	98
VIII.3.1.	Introducción	98
VIII.3.2.	Descripción del área de observación	98
VIII.3.3.	Características del suelo	100
VIII.3.4.	Datos meteorológicos en superficie	100
VIII.3.5.	Datos micrometeorológicos	101
VIII.3.6.	Selección de los días utilizados en la verificación del modelo	101

## CAPITULO IX

### EVALUACION DE LOS PARAMETROS UTILIZADOS EN EL MODELO

IX.1.	La radiación neta	103
IX.2.	El gradiente inicial de temperatura en el suelo	106
IX.3.	El coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire	107
IX.4.	La temperatura "observada" en superficie	108
IX.5.	Valores de los parámetros correspondientes al experimento " Wangara "	110
IX.5.1.	Generalidades	110

IX.5.2.	La longitud de rugosidad	110
IX.5.3.	El coeficiente de conductividad y la difusividad térmica en el suelo	110
IX.5.4.	La difusividad térmica en el aire	111
IX.5.4.1.	El coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire	111
IX.5.4.2.	El parámetro m	113
IX.6.	Valores de los parámetros correspondientes al experimento " Great Plains "	116
IX.6.1.	Generalidades	116
IX.6.2.	La longitud de rugosidad	117
IX.6.3.	El coeficiente de conductividad y la difusividad térmica en el suelo	117
IX.6.4.	La difusividad térmica en el aire	118
IX.6.4.1.	El coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire	118
IX.6.4.2.	El parámetro m	119

## CAPITULO X

### APLICACION DEL MODELO PROPUESTO

X.1.	Resumen de los parámetros de entrada del modelo	121
X.1.1.	Generalidades	122
X.2.	Análisis de los resultados	122
X.2.1.	Experimentos " Wangara "	122
X.2.1.1.	La noche del día 1	123
X.2.1.2.	La noche del día 6	124
X.2.1.3.	La noche del día 7	126
X.2.1.4.	La noche del día 12	127
X.2.1.5.	La noche del día 13	128
X.2.1.6.	La noche del día 31	130
X.2.1.7.	La noche del día 32	132
X.2.1.8.	La noche del día 33	133
X.2.2.	Experimento " Great Plains "	134
X.2.2.1.	La noche del día 18/8	135
X.2.2.2.	La noche del día 24/8	136
X.2.2.3.	La noche del día 31/8	138
X.2.2.4.	La noche del día 7/9	139
X.3.	Comentario de los resultados	140

CAPITULO XI  
EVALUACION DE DIFERENTES MODELOS

XI.1.	Introducción	141
XI.1.2.	Técnicas de evaluación	142
XI.2.	Comparación entre los valores obtenidos mediante diferentes modelos y los datos observados	146
XI.2.1.	Introducción	146
XI.2.2.	El modelo de Brünt	147
XI.2.3.	El modelo de Gröen (1)	148
XI.2.4.	El modelo de Gröen modificado (2)	150
XI.2.5.	El modelo de Jaeger (1)	151
XI.2.6.	El modelo de Jaeger (2)	152
XI.2.7.	El modelo de Jaeger (3)	154
XI.2.8.	El modelo de Reuter	155
XI.2.9.	El modelo de Anfossi y otros	157
XI.2.10.	El modelo propuesto	159
XI.2.11.	Análisis de los parámetros estadísticos	161
XI.3.	Comparación entre los valores de temperatura mínima obtenidos mediante diferentes modelos y los datos observados	161
XI.4.	Comparación entre los valores de temperatura luego de la salida del sol obtenidos mediante el modelo propuesto y los datos observados	165

CAPITULO XII  
ANALISIS DE LA SENSIBILIDAD DEL MODELO PROPUESTO

XII.1.	Introducción	166
XII.2.	El parámetro $\alpha$	167
XII.2.1.	Límite de validez de $\alpha$	167
XII.2.2.	Análisis dimensional de $\alpha$	169
XII.2.3.	Valores observados de $\alpha$	170
XII.3.	Método de propagación de errores	170
XII.3.1.	Influencia del error de $\chi_a$ sobre $\Delta T$	170
XII.3.2.	Influencia del error de $\lambda_a$ sobre $\Delta T$	172
XII.3.3.	Influencia del error de $K_a$ sobre $\Delta T$	173
XII.3.4.	Influencia del error de $K_b$ sobre $\Delta T$	174
XII.3.5.	Influencia del error de $F_n$ sobre $\Delta T$	175
XII.3.6.	Influencia del error de $\beta$ sobre $\Delta T$	176
XII.3.7.	Influencia del error de $t$ sobre $\Delta T$	177
XII.3.8.	Influencia del error de $m$ sobre $\Delta T$	178
XII.4.	Resumen de los resultados	180

CAPITULO XIII  
CONCLUSIONES

181

APENDICE 1

LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

1.	Introducción	184
2.	Propiedades fundamentales	184
3.	La Transformada Inversa de Laplace	186
4.	Algunas Transformadas Inversas de Laplace	187

APENDICE 2

RESOLUCION DE LA ECUACION DE DIFUSION DE CALOR

1.	Sólidos homogéneos	189
2.	Sólidos no homogéneos: Ecuación de Bessel	190
2.1.	Caso particular	191
3.	Propiedades de las funciones modificadas de Bessel	192
4.	La función de Whittaker	193

ANEXO I:	MODELO DE BRUNT (1941)	194
ANEXO II:	MODELO DE GRÖEN (1947)	199
ANEXO III:	MODELO DE JAEGER (1945)	205
ANEXO IV:	MODELO 2 DE JAEGER (1945)	209
ANEXO V:	MODELO 3 DE JAEGER (1945)	221
ANEXO VI:	MODELO DE REUTER (1951)	224
ANEXO VII:	MODELO DE ANFOSSI Y OTROS (1976)	229
ANEXO VIII:	EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $\chi_a$	236
ANEXO IX:	EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $\chi_b$	238
ANEXO X:	EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $K_a$	239
ANEXO XI:	EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $K_b$	240
ANEXO XII:	EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $F_n$	242
ANEXO XIII:	EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $\beta$	243
ANEXO XIV:	EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $t$	244

REFERENCIAS

246



## TABLAS

	Pág
TABLA II.I: Resistencia de algunos cultivos a la helada en diferentes fases del desarrollo (Ventaskevich, 1958).	252
TABLA II.II: Temperaturas críticas de algunos frutales (Young, 1940).	252
TABLA II.III: Temperaturas de congelamiento de algunos frutos y vegetales (Whiteman, 1957).	252
TABLA VII.I: Valores de $\lambda_n$ ( $m^2/h$ ) derivados del análisis de la onda diurna de temperatura para días claros (Best, 1935).	253
TABLA VIII.I: Valores medios de velocidad del viento y nubosidad entre las 21 hs. y las 8 hs. Experimento "Wangara" (Clarke y otros, 1971).	253
TABLA VIII.II: Valores medios de velocidad del viento y nubosidad entre las 20 hs. 30 min. y 6 hs. 30 min. Experimento "Great Plains" (Lettau y Davidson 1957).	253
TABLA VIII.III: Nubosidad y velocidad del viento correspondientes a las noches del experimento "Wangara", y características de la atmósfera a las 9 hs. del día siguiente de la experiencia.	254
TABLA IX.I.a: Valores de radiación neta ( $F_n$ ) observados para el experimento "Wangara" en $mW/cm^2$ .	259
TABLA IX.I.b: Valores de radiación neta ( $F_n$ ) observados para el experimento "Great Plains" en $mW/cm^2$ .	260
TABLA IX.II: Valores normalizados de la conductividad térmica ( $K_s$ ) y capacidad calórica por unidad de volumen $(\rho_s C_s)_m$ , de la capa de superficie del suelo (Cellier, 1993).	261

TABLA IX.III: Valores observacionales del experimento "Wangara" donde: $u_{0,5}$ es la velocidad del viento a 0,5 m. de altura; $u_1$ es la velocidad del viento a 1 m. y $u_4$ es la velocidad del viento a 4 m.; $\Delta T_1$ la diferencia de temperatura entre 2 y 1 metros de altura; $\Delta T_2$ la diferencia de temperatura entre 4 y 2 metros de altura; $T_0$ es la temperatura en el abrigo meteorológico.	261
TABLA IX.IV: Valores de $u^*T^*$ , $\chi_a$ y $m$ , correspondientes al experimento "Wangara".	264
TABLA IX.V: Valores medios de conductividad, capacidad calórica por unidad de volumen y difusividad térmica del suelo correspondientes al experimento "Great Plains"	266
TABLA IX.VI: Valores observacionales del experimento "Great Plains" donde: $u_{0,8}$ y $T_{0,8}$ son la velocidad del viento y la temperatura del aire a 0,8 m. de altura; $u_{1,6}$ y $T_{1,6}$ son la velocidad del viento y la temperatura del aire a 1,6 m. y $u_{3,2}$ y $T_{3,2}$ son la velocidad del viento y la temperatura del aire a 3,2 m., $T_{6,4}$ temperatura a 6,4 metros; $T_{0,1}$ es la temperatura del aire a 10 cm sobre el suelo.	267
TABLA IX.VII: Valores de $u^*T^*$ , $\chi_a$ y $m$ , correspondientes al experimento "Great Plains"	268
TABLA IX.VIII: Valores observados de velocidad del viento a las 21 hs. correspondientes a la altura de 8 m. (Experimento "Wangara")	269
TABLA IX.IX: Valores observados de velocidad del viento a las 20 hs. 35 min. correspondientes a la altura de 6,4 m. (Experimento "Great Plains")	269
TABLA X.I: Parámetros de entrada del modelo estimados para el experimento "Wangara"	270
TABLA X.II: Parámetros de entrada del modelo estimados para el experimento "Great Plains"	270

TABLA XI.I: Parámetros estadísticos de evaluación correspondientes a cada modelo.	271
TABLA XI.II: El coeficiente de determinación ( $r^2\%$ ), la pendiente (a) y la ordenada al origen de la recta (b) definidas entre la temperatura calculada y la temperatura observada, respectivamente, para cada modelo.	271
TABLA XI.III.a: Parámetros de entrada del modelo de Brünt, correspondientes a las condiciones del experimento "Wangara".	272
TABLA XI.III.b: Parámetros de entrada del modelo de Brünt, correspondientes a las condiciones del experimento "Great Plains".	272
TABLA XI.IV.a: Parámetros de entrada para el modelo de Gröen (1) y (2) correspondientes a las condiciones del experimento "Wangara".	273
TABLA XI.IV.b: Parámetros de entrada para el modelo de Gröen (1) y (2) correspondientes a las condiciones del experimento "Great Plains".	273
TABLA XI.V.a: Parámetros de entrada de los modelos de Jaeger (1) y Reuter correspondientes a las condiciones del experimento "Wangara".	274
TABLA XI.V.b: Parámetros de entrada de los modelos de Jaeger (1) y Reuter correspondientes a las condiciones del experimento "Great Plains".	274
TABLA XI.VI.a: Pendiente de la recta definida por la relación logarítmica entre $u/u_1$ y $z/z_1$ , para las condiciones del experimento "Wangara".	275
TABLA XI.VI.b: Pendiente de la recta definida por la relación logarítmica entre $u/u_1$ y $z/z_1$ , para las condiciones del experimento "Great Plains".	275

TABLA XI.VII.a: Parámetros de entrada del modelo de Jaeger (2) correspondientes a las condiciones del experimento "Wangara".	275
TABLA XI.VII.b: Parámetros de entrada del modelo de Jaeger (2) correspondientes a las condiciones del experimento "Great Plains".	276
TABLA XI.VIII: Valores de difusividad del aire estimados por Cowling y White (1941)(ver expresión (IV.29)).	276
TABLA XI.IX.a: Parámetros de entrada del modelo de Anfossi y otros (1976) correspondientes a las condiciones del experimento Wangara.	277
TABLA XI.IX.b: Parámetros de entrada del modelo de Anfossi y otros(1976) correspondientes a las condiciones del experimento Great Plains.	277
TABLA XI.X: Parámetros estadísticos correspondientes a cada modelo para la temperatura mínima.	278
TABLA XII.I: Valores de $\alpha$ (ver expresión XII.5) con $\kappa_{\text{a}} \lambda_{\text{a}}^{-0.5} = 0,14 \times 10^5 \text{ cal/h}^{-0.5} \text{ m}^{1.5} \text{ } ^\circ\text{C}$ ( $\beta = \psi - 0,5$ )	278
TABLA XII.II.a: Valores de $\alpha$ , expresión (XII.5), "observados" para el experimento " Wangara ".	280
TABLA XII.II.b: Valores de $\alpha$ , expresión (XII.5), "observados" para el experimento " Great Plains ".	281
TABLA XII.III: Valores extremos de los coeficientes de los errores relativos de cada variable.	281

## RESUMEN

La disminución de la temperatura del aire después de la puesta del sol es una consecuencia de la pérdida de radiación de la superficie terrestre. Cuando el cielo está despejado y los vientos son débiles se presenta un marcado descenso de la temperatura.

Se define la ocurrencia de la helada cuando la temperatura del aire es igual o inferior a  $0^{\circ}\text{C}$ . Los cultivos padecen daños por efecto de las bajas temperaturas aún por encima de  $0^{\circ}\text{C}$ . Las etapas de floración y formación de los frutos son, en general, las más sensibles a las bajas temperaturas causando daños que algunas veces son irreversibles.

La implementación de técnicas de protección de los cultivos requiere de un pronóstico preciso de la temperatura mínima. Algunos métodos de predicción están basados en relaciones estadísticas, mientras que otros consideran los procesos físicos que directamente determinan la temperatura mínima.

En este trabajo, se desarrolla y evalúa un modelo de predicción de la temperatura nocturna, que considera los procesos de conducción de calor en el suelo y de difusión de calor en el aire.

El modelo se basa en la ecuación bidimensional de difusión de calor en el aire y en el suelo y en el balance de calor en la interfase suelo-atmósfera.

Las expresiones correspondientes a los flujos de calor en los dos medios se obtienen aplicando la teoría del flujo gradiente. Se propone un coeficiente turbulento de difusividad térmica que varía con la altura y con la estabilidad atmosférica. Para obtener el flujo inicial de calor sensible se utiliza la hipótesis de la semejanza de Monin-Obukhov.

El sistema de ecuaciones planteado es resuelto analíticamente utilizando el método de la Transformada de Laplace y se obtiene una expresión de la evolución temporal de la temperatura en superficie.

Conocer anticipadamente el período de tiempo durante el cual un cultivo estará sometido a bajas temperaturas también resulta de interés para la agricultura. El modelo desarrollado permite obtener la predicción del valor de la temperatura luego de ocu-

rrido su valor mínimo o sea cuando los valores térmicos aumentan.

El modelo propuesto es evaluado y comparado con datos observados, obteniéndose resultados satisfactorios.

Asimismo, se efectúa un análisis de sensibilidad del modelo a variaciones de los parámetros de entrada.

En este trabajo, también, se evalúan otros modelos de predicción de temperatura obtenidos por diferentes autores y los valores son comparados con datos observacionales. Además, se realiza un análisis comparativo del modelo propuesto con respecto a los diferentes modelos.

# CAPITULO I

## INTRODUCCION

Una de las adversidades climáticas de mayor impacto en la producción agrícola regional es la helada y/o la temperatura perjudicial para el cultivo, que puede ocasionar la destrucción total o parcial de un sembrado.

La Argentina produce anualmente entre tres y cuatro millones de toneladas de frutas. En las zonas más importantes de frutales de pepita y de carozo, las heladas causan los daños más severos casi todos los años, no habiendo región frutícola en el país donde esta adversidad no pueda alcanzar, en algún año, una intensidad con consecuencias casi catastróficas para las especies y variedades predominantes. Así, por ejemplo, entre otras son memorables las heladas de 1938 en Mendoza, cuyos daños fueron apreciados en el 90% de la producción, y las de 1933 y 1944 que infligieron perjuicios severos en las plantaciones de citrus de las provincias de Entre Ríos, Buenos Aires, etc.

Los efectos de las bajas temperaturas varían marcadamente durante la vida de las plantas y es diferente según el estado de crecimiento y desarrollo. Las etapas de mayor riesgo, en muchos cultivos, es el estado de floración y formación del fruto. Los órganos de las plantas, o los individuos completos, mueren cuando son sometidos a la acción de un frío suficientemente intenso y prolongado. Existen especies tropicales, que sufren daños por enfriamiento a temperaturas superiores a 0°C. Otras, de regiones templadas padecen daños cuando la temperatura del aire desciende a una temperatura igual o inferior a 0°C.

Desde el punto de vista meteorológico se considera la ocurrencia de heladas cuando la temperatura del aire observada en un termómetro instalado dentro de la casilla de observaciones meteorológicas y a una altura de 1,5 m sobre el nivel del suelo es igual o inferior a 0°C. Pero, teniendo en cuenta el cultivo no se puede considerar helada a la ocurrencia de una determinada temperatura y esto se debe a la existencia de vegetales que sufren las consecuencias de las bajas temperaturas sin que éstas lleguen a

0°C. (por ejemplo algunas plantas tropicales como el café, las orquídeas, el cacao).

Las heladas se generan por la acción de factores sinópticos extendiendo su influencia sobre extensas superficies y de factores micrometeorológicos, o sea cuya área de influencia son localizadas y comparativamente reducidas.

Las condiciones de la atmósfera más favorables para la formación de heladas se presentan cuando el cielo está totalmente despejado y el viento es débil. La sequedad del aire y del suelo aumentan la pérdida de calor, produciendo el enfriamiento de las superficies irradiantes. En las zonas bajas de los valles, la posibilidad de que se produzcan heladas es mayor que sobre los cerros debido a que el aire frío por ser más denso, se desliza por las laderas y se estaciona en las zonas más bajas. La importancia del fenómeno depende de la fecha de ocurrencia del mismo, es decir que una helada en pleno invierno en la zona pampeana no es trascendente y los daños que produce son nulos, excepto que sea de gran magnitud y de mucha duración. Pero si esa helada en igual fecha se produce en Misiones o en Paraguay ocasionaría daños más severos. Las heladas que mayor daño causan a las plantas no son aquéllas que se producen dentro del período normal de aparición del fenómeno, sino las que ocurren fuera de éste.

La pérdida de la producción agrícola puede ser prevenida aplicando métodos prácticos activos o pasivos de protección. El método pasivo se refiere al planeamiento de implementación de un cultivo en una región, al manejo del suelo, a la utilización de agroquímicos. Mientras que, el método activo usualmente modifica el microclima nocturno directamente, empleando calefactores, cubiertas plásticas, riego por aspersión, etc. Con el objeto de implementar eficiente y económicamente algún método activo de protección se requiere un oportuno y preciso pronóstico de la temperatura mínima.

Los métodos objetivos de pronóstico de heladas desarrollados son variados y diversos. En su mayoría, se basan en las condiciones locales, que determinan la intensidad del enfriamiento nocturno por radiación que tienen una influencia decisiva en el valor de la temperatura mínima registrada en las noches en que ocurre helada. Otras técnicas pueden dar una apreciación del enfriamiento por advección que, a veces también llega a modificar profundamente la condiciones locales del balance de radiación. En este sentido puede distinguirse los métodos empíricos y teóricos. El primero de ellos utiliza la correlación observada entre dife-



rentes parámetros locales indirectos y las temperaturas mínimas registradas durante varios años. Los métodos teóricos de pronóstico de temperaturas mínimas son aquéllos que se han establecido considerando el proceso físico de los elementos que directamente determinan las temperaturas mínimas.

En los métodos empíricos de pronóstico de heladas la previsión del fenómeno se determina mediante fórmulas algebraicas o técnicas gráficas elaboradas según las relaciones existentes entre la ocurrencia e intensidad del fenómeno y las condiciones meteorológicas indirectas, simples o complejas, que le anteceden y que han sido comprobadas para un número suficiente de casos. Debido al marcado carácter microclimático del enfriamiento nocturno, la mayoría de los métodos empíricos de pronóstico de heladas o de temperaturas mínimas se elaboran con los parámetros meteorológicos locales que determinan ese enfriamiento, dado la poca exactitud de estos pronósticos muchos autores introdujeron además parámetros advectivos.

Un ejemplo de un método empírico es el desarrollado por Hagood (1967) (citado en W.M.O., 1978) quien estableció el enfriamiento máximo que puede ocurrir en una localidad dada con condiciones ideales de radiación, utilizando registros climatológicos.

Usando un radiómetro neto, Georg (1970) emplea un método semi-objetivo de predicción local de la temperatura mínima utilizando datos observados dos horas después de la puesta del sol. La técnica no puede ser usada en noches con advección de aire frío o caliente. No se obtienen buenos resultados, si las características atmosféricas durante la noche cambian considerablemente.

Los métodos teóricos surgidos a mediados de la década del cincuenta se basan en la aplicación de las leyes de transferencia de calor, mostrando que la temperatura nocturna de la superficie terrestre está relacionada con la de la capa de aire adyacente. La temperatura de superficie puede ser obtenida utilizando la solución analítica de la ecuación de conducción de calor en el suelo. La primera solución fue presentada por Brünt (1941). En este caso, el suelo desempeña el principal rol en el descenso de la temperatura y la expresión obtenida puede ser fácilmente aplicada. También, fueron obtenidas otras expresiones a partir de la resolución analítica del sistema formado por las ecuaciones de difusión de calor en el aire y en el suelo (Jaeger, 1945).

Durante los últimos veinte años se han desarrollado modelos más sofisticados que resuelven numéricamente el sistema formado

por las ecuaciones de conducción de calor en el suelo, de balance de calor en superficie y de balance de energía en el aire. Estos incorporan un conocimiento más amplio de los procesos físicos que ocurren en la capa límite nocturna. Sutherland (1980) y Cellier (1993), por ejemplo, utilizan el cierre de primer orden para el tratamiento de la turbulencia en el aire. El modelado con técnicas de cierre de segundo orden permiten la descripción física en mayor detalle y requieren un mayor tiempo computacional. Los modelos numéricos tienen la ventaja de poder incorporar procesos físicos complejos y pueden simular diferentes condiciones meteorológicas, topografía compleja, tipo de suelo. Pero, estos modelos no son accesibles para ser utilizados por los servicios de extensión agrícola o los centros meteorológicos locales. También, los datos de entrada no son fácilmente disponibles para una operación a escala local.

Este trabajo de tesis tiene por objeto obtener un modelo de pronóstico de la temperatura de superficie para noches de enfriamiento radiativo a partir de la solución analítica de la ecuación de difusión de calor en el aire y en el suelo. Se plantea el transporte de calor en el aire y en el suelo utilizando la teoría del flujo gradiente.

El transporte de calor en la capa más baja de la atmósfera se debe principalmente a la difusión vertical turbulenta. En este trabajo, se propone un coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire que varía con la altura y con la estabilidad de la atmósfera.

Se resolvió el sistema de ecuaciones utilizando como condición de contorno: la ecuación de balance de calor en un nivel próximo al suelo, donde la pérdida de radiación de la superficie es balanceada por el flujo de calor del suelo hacia la atmósfera y el aporte (en menor medida) de calor sensible desde el aire hacia la superficie. Las condiciones iniciales que se proponen son: isoterma en la capa de la atmósfera y un gradiente inicial de temperatura en el suelo. Se resuelve el sistema de ecuaciones para dos medios semi-infinitos (la atmósfera y el suelo). Para su resolución se utiliza el método de la Transformada de Laplace, aplicando la metodología que corresponde a un medio no homogéneo.

Se utiliza la hipótesis de la semejanza de Monin-Obukhov para determinar el flujo inicial de calor sensible en la capa de superficie, a partir de observaciones de velocidad del viento y temperatura a diferentes alturas.

El flujo de radiación neta tiene un valor aproximadamente

constante durante la noche en condiciones de enfriamiento radiativo. Luego de la salida del sol, el flujo de radiación aumenta debido al aporte de radiación de onda corta proveniente del sol. El modelo propone un primer período donde el flujo de radiación neta es constante y un segundo, luego de la salida del sol, en el cual el flujo aumenta linealmente con el tiempo, hasta dos horas después de la salida del sol. Este planteo permite obtener la temperatura de superficie luego de ocurrida la temperatura mínima.

Se evalúa las soluciones analíticas obtenidas por Brünt (1941), Gröen (1947), Jaeger (1945), Reuter (1951) y Anfossi y otros (1976) con datos observacionales y se comparan con el modelo propuesto.

Con el objeto de verificar el modelo propuesto se utilizaron datos observacionales de dos experimentos con diferentes tipo de suelo y condiciones climáticas.

También, se realiza un análisis de sensibilidad del modelo propuesto a la variación de los valores de los distintos parámetros que componen el modelo.

## CAPITULO II

### EFFECTOS DE LAS TEMPERATURAS BAJAS SOBRE LAS PLANTAS

#### II.1. INTRODUCCION

La sensibilidad de los distintos procesos vitales de las plantas a las bajas temperaturas presenta una gran variación. Algunas plantas como las tropicales y subtropicales padecen daños por efecto de las bajas temperaturas por encima de 0°C., que se agrava cuando se mantiene durante más de media hora (daños por enfriamiento). Otras, las de regiones templadas sufren daños severos y hasta la muerte cuando la temperatura desciende por debajo de 0°C., en cuanto comienza a formarse hielo en sus tejidos (daños por congelación). En tanto, aquellas plantas propias de regiones polares son capaces de tolerar temperaturas por debajo de 0°C. durante períodos prolongados, sin que aparentemente sufran daños.

La razón de la diferencia en la sensibilidad de las plantas a las bajas temperaturas, que cambia con el transcurso del tiempo, las condiciones ambientales y las de las plantas y también con los diferentes órganos de las mismas, no esta todavía totalmente comprendida.

Algunos de los factores del suelo, como la presión osmótica de la solución hídrica del suelo, la disponibilidad de agua y la temperatura, entre otros, tienen una influencia considerable sobre la vida de las plantas. Con temperaturas por debajo de 0°C cesa por completo la absorción de agua, produciéndose una marcada deshidratación de los tejidos como resultado de la transpiración de las plantas. Esta pérdida no es fácil de reponer por haber quedado, debido al frío reinante paralizada la circulación. Además, la alternancia del congelamiento y descongelamiento del suelo en la proximidad de la superficie, sobre todo en suelo desnudo o mal drenado, somete a los agregados y trozos del suelo a presiones diferenciales que alteran su intercambio físico y lesionan el sistema radicular de las plantas.

Las bajas temperaturas afectan a las plantas durante el período de latencia y en su etapa de desarrollo activo. Por el hecho de afectar el metabolismo, la temperatura baja influye en el crecimiento de las plantas. La tasa de crecimiento es lenta a temperaturas cercanas a 0°C, disminuyendo con el descenso de la misma hasta llegar al crecimiento nulo y a la muerte cuando se alcanza la temperatura mínima letal.

La generalidad de las plantas, ante estos hechos, se agrava en la medida que el descenso de la temperatura se acerca a los niveles críticos y aumenta el tiempo de exposición, hasta ocasionar la muerte por inanición o agotamiento de los alimentos de reserva.

## II.2. DAÑOS POR ENFRIAMIENTO

El daño por enfriamiento es el que sufren ciertas especies de plantas tropicales y subtropicales cuando quedan expuestas a temperaturas bajas cercanas a 0°C (entre 1 y 5 °C. y a veces más). En algunas de ellas, los daños se producen al cabo de pocos minutos (begonias, bananos) y en otras, el daño en hojas, flores y frutos se hace visible (marchitamiento, obscurecimiento, caída de órganos) al cabo de un tiempo mayor de exposición.

Se considera que el frío desarregla la fisiología de las plantas sensibles. La membrana protoplasmática padecería una variante del estado físico al alcanzarse la temperatura crítica de enfriamiento, alterándose su estructura lipoproteica. Este hecho originaría contorsiones y aberturas en la membrana, que terminarían trastornando su aptitud de permeabilidad diferencial. A ello, podría agregarse una alteración de la actividad de las enzimas propias de la membrana que originaría interferencias en los procesos metabólicos en los que intervienen.

En general, los efectos negativos del enfriamiento en las plantas sensibles son reversibles mientras no se alcancen los niveles térmicos críticos, ni se excedan los límites tolerables de exposición. En las Tablas II.I (Ventskewich, 1958) y II.II (Young, 1940) se presentan algunos valores de temperaturas críticas de plantas dependiendo de su estado de desarrollo.

### II.3. DAÑOS POR CONGELAMIENTO

Cuando la temperatura desciende por debajo de 0°C. y se mantiene en esos niveles durante cierto tiempo, es posible que algunas clases de plantas muestren síntomas de daños como marchitamiento y necrosis en hojas, flores y frutos, marcas en frutos, pérdida de la estructura celular, caída prematura de órganos, y hasta pueden morir.

Se considera que el daño y aún la muerte por congelamiento son la consecuencia de la formación de hielo en el interior o en el exterior de las células y no un efecto de la temperatura de helada. Se sugiere que ciertas características propias de las plantas y del ambiente externo podrían constituir factores a tener en cuenta en la consideración de la capacidad de tolerancia de aquéllas al congelamiento.

La tolerancia al daño por congelamiento varía marcadamente a lo largo de la vida de las plantas. Es diferente según el estado de crecimiento y desarrollo alcanzado por la planta, por el órgano considerado e incluso por sus partes componentes. Varía con los cambios de la temperatura ambiente y el tiempo de exposición de la planta a la misma.

Los estudios realizados muestran invariablemente una cierta tolerancia de los tejidos a la formación de hielo (extracelular) en el exterior de las células. En tanto, la formación de hielo en el interior (intracelular) de las células llevaría frecuentemente a daños severos y hasta la muerte de los tejidos afectados.

Se supone que la mayor disposición del líquido extracelular para congelarse en comparación con el intracelular se debe a la mayor cantidad de agua contenida en los espacios entre células (intercelulares) y, a la vez, a la mayor resistencia natural del protoplasto. Una vez constituido el núcleo de hielo extracelular considerado como la primera etapa del proceso, ésta proseguirá con la extracción de agua desde el interior de la célula que aumentaría el tamaño de los cristales de hielo extracelulares y los que casi simultáneamente, o algo más tarde se pueden formar en el interior de las células.

En general, se considera que la formación de hielo extracelular podría conducir a una deshidratación de las células, a una contracción de los tejidos y a daños por efecto de la tensión mecánica por presión de los cristales de hielo, con creciente deterioro de la permeabilidad de la membrana citoplasmática y de la

estructura celular (Scarth y Levitt, 1937). Levitt (1972) sugirió que los daños severos y la muerte de las células se deberían primordialmente a la formación de cristales de hielo intracelular. Este hecho conduciría irreversiblemente a la desnaturalización de las proteínas.

En la Tabla II.III (Whiteman, 1957) se presentan temperaturas de congelamiento de plantas basadas en determinaciones de laboratorio.

#### II.4. TIPOS DE HELADAS

La helada es definida en el *Glossary of Meteorology* como la condición que existe cuando la temperatura de la superficie terrestre o los objetos en la tierra desciende por debajo del congelamiento ( 0°C.).

La helada de radiación ocurre en noches claras y con calma, cuando la radiación terrestre hacia el espacio no está inhibida, debido a la ausencia de nubes y bajo contenido de vapor de agua. La intensidad de las heladas de radiación varía considerablemente con diferencias topográficas locales y de vegetación.

La helada blanca es causada por la sublimación de cristales de hielo sobre objetos tales como ramas de árboles, alambres, etc. Estos objetos están a una temperatura inferior a la de congelamiento, mientras que el aire tiene un punto de rocío menor que el punto de congelamiento, el aire sobre la superficie es llevado entonces a la saturación por enfriamiento.

La helada negra ocurre cuando la vegetación es congelada por una reducción en la temperatura del aire que no contiene suficiente humedad para la formación de helada blanca.

Biel (1961) diferencia la helada radiativa, que es esencialmente local, de la helada advectiva, que resulta del transporte de masas de aire frío en escala sinóptica. Las denominaciones helada radiativa y advectiva son arbitrarias. Aire frío y seco advectando en una región no obstruye la emisión de calor radiativo desde el suelo y plantas. Simultáneamente, los procesos radiativos contribuyen al intercambio de calor durante una helada advectiva.

Existe una mejor diferenciación entre ambas heladas. En condiciones de helada radiativa los vientos son normalmente débiles y se desarrolla una inversión de temperatura tal que el aire en

contacto con una superficie fría irradiante se enfría y aumenta su densidad. En una helada advectiva los vientos son fuertes, y no se desarrolla una inversión de temperatura.

## II.5 PROTECCION DE LOS CULTIVOS DE LA HELADA

La temperatura mínima registrada dentro de un abrigo meteorológico se encuentra a 1,5 m. de altura sobre el nivel del suelo. En ocasiones, como por ejemplo cuando ocurren escarchas estivales, la temperatura en el abrigo puede ser superior a 0°C. y registrarse daños en los cultivos comunes de regiones templadas. Por otra parte, las temperaturas registradas a 0,1 m. ó 0,5 m. del suelo en los termómetros expuestos no pueden generalizarse geográficamente por su dependencia microclimática pudiendo variar a los pocos metros de distancia horizontal. La temperatura en abrigo no coincide en todos los casos con la ocurrencia de daños en los cultivos, no obstante constituye una medida relativa para fines prácticos.

Las heladas primaverales u otoñales son las más perjudiciales pues una pequeña diferencia en la fecha de ocurrencia de una temperatura mínima bajo 0°C. puede sorprender a las plantas en su momento de mayor o menor sensibilidad (ver Tabla II.I y Tabla II.II) y por lo tanto, ocasionar o no daño.

Los cultivos podrían ser protegidos del efecto de la helada. Sin embargo, la protección de la helada advectiva es más difícil de llevar a cabo que la de la helada radiativa.

La helada advectiva puede ser de gran duración y usualmente con vientos fuertes, por lo que el número de técnicas de protección es más limitado. Los métodos de protección contra la helada radiativa son más efectivos y de mayor practicidad.

El aire se enfría durante la noche y se hace más denso por lo que el aire frío drena hacia las áreas más bajas y se acumula en las zonas de depresiones. Hocevar y Martsolf (1971) encontraron que transversalmente al valle de Pennsylvania (E.E.U.U.) existía un aumento de aproximadamente 6,2°C. por cada 100 m. de elevación desde el fondo del valle. Se debería seleccionar entonces, la variedad de cultivo más resistente según el sitio. El drenaje del aire frío puede ser bloqueado con la ubicación de filas de cercas, rompevientos, relleno de pozos o colocando una vegetación densa que impida que el aire frío llegue a las áreas



cultivadas.

La radiación de onda larga emitida por la superficie terrestre podría ser interceptada de tal forma que exista una efectiva contrarradiación hacia la superficie. La generación de nubes artificiales por inyección de agua o humo son algunas veces usadas para interceptar la radiación de la superficie y de esta forma aumentar la temperatura del aire.

Las plantas pueden ser protegidas de la helada cubriéndolas con algún tipo de material, generalmente cubiertas de plásticos. El material debe ser de baja emisividad y de baja conductividad. Si la helada no es prolongada o de gran intensidad este tipo de protección es usualmente efectivo.

En las noches con helada radiativa la inversión térmica desde superficie puede ser reducida o eliminada por agitación y mezcla del aire más caliente instalado por encima del aire más frío. Especialmente, en cultivos de frutales como citrus, manzanos, etc., se utilizan ventiladores. De este modo se conduce aire caliente de las capas más altas a las capas más bajas.

Otra forma, es calentar el aire próximo al suelo, que se inestabiliza y se eleva hasta el nivel en que la masa de aire tiene la misma temperatura que su entorno. Entonces el volumen de aire debajo de ese nivel estará calentado. La temperatura del aire puede ser mantenida más alta que el congelamiento por una continua entrada de calor. Muchos tipos de calentadores han sido desarrollados para emplazarlos en huertas o bosques. Estos usualmente utilizan querosen o nafta.

El agua es efectiva para impedir el daño de las heladas. La irrigación de la tierra es utilizada para mantener la temperatura uniformemente mayor que la temperatura de congelación. También, se suma el efecto de la cantidad de calor liberado en la congelación del agua. Este método puede ser ineficiente cuando existen vientos fuertes.

Otro procedimiento más eficiente es la aspersion de agua sobre los cultivos. Al congelar el agua sobre las partes de la planta el calor de fusión es liberado aumentando la temperatura del órgano. Por lo tanto, si la temperatura del aire continúa descendiendo a valores menores que el punto de congelamiento, el órgano de la planta permanecerá alrededor de 0°C. La aspersion deber ser continua hasta después de la salida del sol o hasta que la temperatura haya aumentado lo suficiente para derretir todo el hielo.

Un correcto manejo del suelo puede aumentar la conductividad

térmica y la difusividad térmica del suelo, siendo útil para prevenir el daño causado por la helada. La irrigación del suelo antes de la ocurrencia de una helada también da buenos resultados. Los suelos compactos tienen el efecto de aumentar la conductividad al reducir el volumen de aire en el suelo. Por otra parte, la existencia de pasto que cubre el suelo puede reducir la eficiencia del suelo como una fuente de calor en las noches con heladas. La vegetación entorpece la transferencia de energía que debe alcanzar el aire a mayor altura.

## II.6. HELADAS EN LA REPUBLICA ARGENTINA

Las heladas normalmente tienen lugar en presencia de aire seco y frío, con alta presión atmosférica, viento en calma y cielo despejado. Por lo común, se extienden entre las 3 y 8 horas que es el horario en el que se registran las temperaturas mínimas.

En la Argentina las situaciones meteorológicas que favorecen la ocurrencia de heladas intensas o primaverales, son las que se resumen a continuación (Celemín, 1984). Primero, ocurre una entrada de aire polar seco, que produce heladas aisladas. Luego, una nueva entrada de aire polar, como consecuencia de la acción conjunta de los vientos de un intenso anticiclón en el sur de Chile y una profunda baja al este de Malvinas. Se instala un sistema de alta presión en el centro y norte del país, en la Provincia de Buenos Aires y en el Uruguay. Este anticiclón aparece asociado con una cuña o alta presión en niveles medio y altos de la troposfera, con intensa subsidencia y secado del aire en todos los niveles. Entonces, con las condiciones de vientos en calma, aire seco y frío y cielo despejado, se verifican heladas intensas en invierno o heladas tardías en primavera.

La gran dispersión de fechas de heladas otoñales y primaverales en Argentina es consecuencia de la distribución temporal inhomogénea del traslado de las masas de aire en el sentido Norte-Sur e inverso. Además, una relativa pequeña amplitud anual de variación térmica se debe a la gran influencia oceánica que se verifica en nuestro país. En el Hemisferio Norte, en cambio, los sistemas orográficos por su dirección, resultan más eficaces de contener los ya débiles empujes de aire frío en estas estaciones y la continentalidad predomina netamente en la amplitud de varia-

ción anual de la temperatura produciéndose heladas invernales más intensas que en nuestro hemisferio (Burgos, 1963).

Uno de los parámetros utilizados para caracterizar el comportamiento de las heladas en una región es el estudio del período libre de heladas. A los fines agrícolas, un cultivo que es sensible a las heladas durante un período de 150 días se alejará *menos* del ecuador que otro que sea sensible durante un período de 45 días. En la Argentina no existe ninguna región netamente libre de heladas invernales, lo que imposibilita el cultivo de árboles muy sensibles al frío, tales como son aquéllos que producen la quina, el caucho y el cacao. Esta característica del clima argentino es de una consecuencia económica agrícola innegable.

Burgos (1963) presenta un mapa de período medio libre de heladas de la República Argentina, comprobándose que más de la tercera parte del territorio del país posee un período medio libre de heladas, que supera los 240 días. En la zona patagónica el período libre de heladas está entre 100 y 140 días, por lo que pueden ocurrir heladas en cualquier mes del año. Esta razón determina el estancamiento de la agricultura en esta región. Al norte de la Patagonia, en la región típicamente agrícola del país, con períodos libres de heladas de 180 a 300 días, han ocurrido heladas estivales que han ocasionado daños a la agricultura.

Un análisis reciente realizado en 34 localidades de la Argentina muestra que en los últimos 90 años se ha producido una disminución en la amplitud térmica mensual como consecuencia del aumento de las temperaturas mínimas más que por la disminución de las máximas (Damarío y Pascale, 1994)

## CAPITULO III

### EL TRANSPORTE DE CALOR

#### III.1. GENERALIDADES

Los procesos mediante los cuales se transfiere calor a través de un medio son la conducción, la convección y la radiación.

La conducción de calor es el proceso mediante el cual se transfiere energía cinética entre átomos y moléculas que chocan entre sí con distintas velocidades. Por ejemplo, al calentar el extremo de una barra de metal, los átomos que se encuentran en el sector más caliente comenzarán a moverse alrededor de su posición de equilibrio con mayor velocidad que los que se encuentran en la zona más fría y chocarán con éstos transfiriéndoles parte de su energía cinética. Estos últimos átomos, a su vez, transmitirán energía por contacto a otros más alejados y en consecuencia la energía será transportada paulatinamente hacia el extremo frío de la barra. Finalmente se establece un gradiente térmico.

La convección (ocurre sólo en gases y en líquidos) es la transferencia de energía que se produce por un desplazamiento físico de materia. Esto implica la mezcla de volúmenes relativamente grandes del fluido con diferentes temperaturas como resultado de su movimiento. La convección es denominada libre si el movimiento del fluido en un campo gravitacional es mantenido por diferencias en la densidad causada por una desigualdad local de temperaturas. La convección es llamada forzada cuando el movimiento del fluido es debido a un gradiente de presión. En ambos casos el flujo puede ser laminar o turbulento.

La radiación ocurre cuando existen varios cuerpos a distintas temperaturas y con vacío en el interior de un recipiente. Manteniendo los cuerpos separados se alcanza finalmente un estado en que ellos adquieren la misma temperatura. El mecanismo del proceso que conduce al equilibrio térmico en este caso es la absorción y emisión de radiación térmica por todos los cuerpos de forma tal que los más calientes emiten mayor radiación que los

más fríos. La radiación transporta energía que entrega al cuerpo que absorbe y es de naturaleza electromagnética. Una diferencia fundamental entre la propagación de energía por radiación y por conducción, además que esta última necesita la interposición de materia y la primera no, reside en que en la conducción la temperatura en un punto de un cuerpo es función del estado térmico del entorno y puede caracterizarse por un vector. Por el contrario, en la radiación el estado de un punto no depende del inmediatamente próximo.

Estos procesos (conducción, convección y radiación) pueden ocurrir simultáneamente en la atmósfera y es difícil o imposible separarlos. En los sólidos la convección está ausente y la radiación generalmente es despreciable.

### III.2. ECUACION DE TRANSPORTE DE CALOR

No resulta simple describir el movimiento del aire próximo a una superficie pues, en general, un fluido viscoso que se mueve en la cercanía de un cuerpo no seguirá una línea de corriente uniforme ni reconocible, excepto en circunstancias muy especiales en las que se produce un flujo laminar. El movimiento del fluido está determinado por el movimiento de partículas individuales que es extremadamente complicado de seguir, aunque es posible reconocer un movimiento medio relativo superpuesto con un movimiento secundario complicado o torbellino oscilatorio pero, de carácter aperiódico.

Si el fluido es considerado incompresible, esto es válido en las capas bajas de la atmósfera, la ecuación de transferencia de calor por procesos turbulentos es una extensión natural de la ecuación de difusión molecular. Despreciando la disipación por viscosidad la ecuación de transferencia de calor en un gas incompresible es (ver Sutton, 1977):

$$C_p \rho \left( \frac{\partial T}{\partial t} + u_j \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) - \kappa_m \nabla^2 T \quad (\text{III.1})$$

donde  $\kappa_m$  es la conductividad térmica molecular,  $\rho$  es la densidad del medio,  $T$  es la temperatura del medio,  $C_p$  es el calor específico a presión constante,  $x_j$  son los ejes coordenados y  $u_j$  son las componentes ( $j=1,2,3$ ) de la velocidad del viento;  $t$  es el tiempo.

Para el aire, el número de Prandtl ( $PR = \mu C_p / \kappa_m$ ) es aproximadamente uno ( $\mu$  es la viscosidad molecular dinámica) entonces  $\kappa_m = \mu C_p$ .

En un movimiento turbulento una variable puede ser expresada como la suma del valor medio de la variable y una fluctuación instantánea con respecto al promedio (Reynolds, 1895):

$$T = \bar{T} + T' \quad u_j = \bar{u}_j + u'_j \quad (\text{III.2})$$

La ecuación de continuidad establece que (ver Sutton, 1977) para un fluido incompresible es:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (\text{III.3})$$

Aplicando (III.2) en (III.1) y promediando con el tiempo se obtiene:

$$\rho \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} + \rho \bar{u}_j \frac{\partial \bar{T}}{\partial x_j} = \mu \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x_j^2} - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\bar{u}'_j T') \quad (\text{III.4})$$

La turbulencia produce un incremento de la transferencia de calor cuya magnitud es  $F_a = -\rho \bar{u}'_j T'$ , que se denomina flujo turbulento de calor.

Sutton (1977) reconoce que en un medio turbulento, tal como la baja atmósfera los procesos de difusión de masa, calor y cantidad de movimiento son dominados por la acción de los torbellinos, por lo que la expresión (III.4) se puede generalizar estableciendo que la difusión de una propiedad  $Q$ , como el calor, se puede expresar mediante:

$$\frac{dQ}{dt} = -\nabla \cdot F + S \quad (\text{III.5})$$

donde:  $F$  representa el flujo de la propiedad  $Q$ , siendo  $F = (F_x, F_y, F_z)$ , con  $F_x, F_y, F_z$  los flujos turbulentos de la propiedad en las tres direcciones  $(x, y, z)$ , por lo que

$$F_x = \rho \overline{u'_1 Q'}; F_y = \rho \overline{u'_2 Q'}; F_z = \rho \overline{u'_3 Q'} \quad \text{y } S \text{ representa las fuentes o}$$

sumideros de la propiedad.

### III.3. TEORIA DEL FLUJO GRADIENTE (TEORIA "K")

La teoría del flujo gradiente o teoría "K" (ver entre otros Sutton, 1977; Panofsky y Dutton, 1984) establece que el flujo ( $F_\alpha$ ) de cantidad de movimiento, calor o masa en la dirección  $\alpha$  está dado por el producto entre el gradiente relacionado con la propiedad que fluye ( $\bar{Q}$ ) en la dirección  $x_j$ , y el coeficiente de proporcionalidad  $K_{\alpha j}$ :

$$F_\alpha = -K_{\alpha j} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_j} \quad (\text{III.6})$$

donde:  $K_{\alpha j}$  puede ser función, entre otras variables, de la altura, de la estabilidad de la atmósfera, de la velocidad del viento, de la rugosidad de la superficie. Este tipo de clausura se denomina de primer orden.

El coeficiente  $K_{\alpha j}$  está relacionado con la longitud de mezcla de Prandtl aplicada a las tres dimensiones, que expresa que los torbellinos actúan sobre distintos volúmenes cuyo comportamiento pueden tener semejanza con el de las moléculas en la teoría cinética de los gases. En un flujo turbulento, la longitud de mezcla es la distancia que recorren las masas del fluido antes que pierdan su individualidad por mezcla con el fluido que las rodea que está en estado turbulento.

El torbellino considerado como un volumen discreto de fluido parte de un nivel  $z$  con una determinada propiedad  $Q$  y llega a un nuevo nivel ( $z + l$ ), donde se mezcla con el flujo principal. La absorción del torbellino dentro del nuevo nivel aumentará en una fluctuación  $Q'$  respecto del valor medio ( $\bar{Q}$ ). Esta fluctuación estará determinada por:

$$Q' = -l_j \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_j} \quad (\text{III.7})$$

donde  $l_j$  es la longitud de mezcla en la dirección  $j$ .

Si  $u'_\alpha$  es la componente de la fluctuación turbulenta de la velocidad en la dirección  $\alpha$ , multiplicada por (III.7), resulta:

$$F_\alpha = \overline{u'_\alpha Q'} = -\overline{u'_\alpha l_j} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_j} = -K_{\alpha j} \frac{\partial \bar{Q}}{\partial x_j} \quad (\text{III.8})$$

donde  $K_{\alpha j} = \overline{u'_\alpha l_j}$  es un tensor de segundo orden. El tensor  $K_{\alpha j}$  es simétrico (Calder, 1965) si los ejes coordenados son perpendiculares entre sí y se desprecian los términos fuera de la diago-

nal:

$$K_{\alpha j} = \begin{vmatrix} K_1 & 0 & 0 \\ 0 & K_2 & 0 \\ 0 & 0 & K_3 \end{vmatrix} \quad (\text{III.9})$$

Por lo tanto resulta:

$$F_j = -K_j \frac{\partial \bar{Q}}{\partial X_j} \quad (\text{III.10})$$

Si se reemplaza (III.10) en (III.5), con  $S=0$  resulta:

$$\frac{d\bar{Q}}{dt} = \frac{\partial}{\partial X} (K_1 \frac{\partial \bar{Q}}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial Y} (K_2 \frac{\partial \bar{Q}}{\partial Y}) + \frac{\partial}{\partial Z} (K_3 \frac{\partial \bar{Q}}{\partial Z}) \quad (\text{III.11})$$

o también:

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial t} + u \frac{\partial \bar{Q}}{\partial X} + v \frac{\partial \bar{Q}}{\partial Y} + w \frac{\partial \bar{Q}}{\partial Z} = \frac{\partial}{\partial X} (K_1 \frac{\partial \bar{Q}}{\partial X}) + \frac{\partial}{\partial Y} (K_2 \frac{\partial \bar{Q}}{\partial Y}) + \frac{\partial}{\partial Z} (K_3 \frac{\partial \bar{Q}}{\partial Z}) \quad (\text{III.12})$$

La teoría  $K$  ó clausura de primer orden es particularmente útil cerca de superficie. Las dificultades aumentan a alturas mayores. Por ejemplo, la expresión (III.10) implica que el gradiente determina el flujo, pero esto no es cierto si los torbellinos son más grandes que la escala de curvatura del perfil. Una razón de algunos fracasos de la teoría "  $K$  ", incluye aquellos casos en los cuales la propiedad transportada tiene fuente o sumidero en la región de mezcla, pues la teoría esta basada en la suposición que la partícula mantiene su propiedad durante el proceso de mezcla en su trayecto. Los mejores resultados de la teoría "  $K$  " se alcanzan con variables promediadas durante una hora cerca de superficie donde  $K$ , para propiedades conservativas, puede ser especificada en función de la altura, de la rugosidad de la superficie y de variables meteorológicas (Panosky y Dutton, 1984).

#### III.4. CLAUSURA DE SEGUNDO ORDEN

La temperatura no es una variable conservativa donde prevalecen movimientos generados por calentamiento o enfriamiento adiabáticos, pero la temperatura potencial media ( $\theta$ ) puede con-



siderarse conservativa. Entonces, es necesario incluir en la expresión (III.4) un término que contemple la difusión por enfriamiento o calentamiento radiativo, además de la difusión molecular, siendo  $\chi_m$  el coeficiente de difusión molecular, resultando:

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{\theta' u_j'}) + \left( \frac{\partial \theta}{\partial t} \right)_R + \chi_m \nabla^2 \theta \quad (\text{III.13})$$

donde el segundo término de la derecha corresponde a la difusión por enfriamiento o calentamiento radiativo, que no es totalmente conocido.

La ecuación (III.4) contiene un término de correlación "doble" que puede escribirse en función de cambios temporales de los flujos y varianzas en la pequeña escala. Para obtener ello se desarrolla la metodología expuesta a continuación para  $u'_k$ .

La ecuación correspondiente a la fluctuación turbulenta de la temperatura puede escribirse:

$$\rho \frac{\partial T'}{\partial t} + \rho \left( \overline{u_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial T'}{\partial x_j} - \overline{u'_j \frac{\partial T'}{\partial x_j}} \right) - \mu \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2} \quad (\text{III.14})$$

Por ejemplo, para obtener una expresión para una correlación del tipo  $u'_k T'$  (Donalson, 1973) se multiplica la expresión (III.14) por  $u'_k$  y se promedia en el tiempo:

$$\overline{\rho u'_k \frac{\partial T'}{\partial t}} + \rho \left( \overline{u_j u'_k} \frac{\partial T'}{\partial x_j} + \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} + \overline{u'_k u'_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} - \overline{u'_k u'_j \frac{\partial T'}{\partial x_j}} \right) - \mu \overline{u'_k \frac{\partial^2 T'}{\partial x_j^2}} \quad (\text{III.15})$$

Por otro lado, la expresión de la fluctuación de la velocidad es:

$$\rho \frac{\partial u'_k}{\partial t} + \rho \left[ \overline{u_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} - \overline{u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} \right] - \mu \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_j^2} - \frac{\partial p'}{\partial x_k} + \frac{\rho}{T'} g_k T' \quad (\text{III.16})$$

que multiplicada por  $T'$  y promediada en el tiempo se obtiene:

$$\overline{\rho T' \frac{\partial u'_k}{\partial t}} + \rho \left[ \overline{u_j T'} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + \overline{T' u'_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} + \overline{T' u'_j} \frac{\partial u'_k}{\partial x_j} - \overline{T' u'_j \frac{\partial u'_k}{\partial x_j}} \right] - \mu \overline{T' \frac{\partial^2 u'_k}{\partial x_j^2}} - \overline{T' \frac{\partial p'}{\partial x_k}} + \frac{\rho}{T'} g_k \overline{T'^2} \quad (\text{III.17})$$

También:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\overline{u'_k T'}) = \overline{u'_k \frac{\partial T'}{\partial t}} + \overline{T' \frac{\partial u'_k}{\partial t}} \quad (\text{III.18})$$

Sumando (III.15) y (III.17) y reordenando, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \rho \left[ \frac{\partial (\overline{u'_k T'})}{\partial t} + u_j \frac{\partial (\overline{u'_k T'})}{\partial x_j} \right] - \\
& = \rho \frac{d}{dt} (\overline{u'_k T'}) = -\rho \overline{u'_j u'_k} \frac{\partial T'}{\partial x_j} - \rho \overline{u'_j T'} \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_j} - \rho \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_j u'_k T'}) - \\
& \qquad \qquad \qquad (a) \qquad \qquad \qquad (b) \qquad \qquad \qquad (c) \\
& - \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{p' T'}) + \overline{p' \frac{\partial T'}{\partial x_k}} + \frac{\rho}{T'} g_k \overline{T'^2} + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\overline{u'_k T'}) - 2\mu \frac{\partial \overline{u'_k}}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} \\
& \qquad \qquad \qquad (d) \qquad (e) \qquad \qquad (f) \qquad \qquad (g) \qquad \qquad (h) \quad (III.19)
\end{aligned}$$

Los términos (a) y (b) son términos de producción, que representan producción de  $\overline{u'_k T'}$  por la interacción de las velocidades turbulentas y el gradiente de la temperatura media del campo, mientras que (b) es la producción debida a la interacción entre el transporte de calor y el gradiente de la velocidad media del campo. El término (c) es el gradiente de la advección de  $\overline{u'_k T'}$  por la velocidad turbulenta. El (d) representa la difusión por acción de la presión. El término (e) tiende a que las fluctuaciones de la presión eliminen alguna correlación entre  $u'_k$  y  $T'$ . El (f) representa la producción del flujo de temperatura en la dirección de la aceleración de la gravedad debido a la fluctuación en la temperatura. El (g) representa la difusión de  $u'_k T'$ , por acción molecular. El (h) incluye el rol que desempeña la viscosidad molecular en la correlación o no correlación entre las fluctuaciones de temperatura y de la velocidad. Este término no siempre es disipativo.

Simultáneamente con la expresión (III.19) se puede obtener la correspondiente a la  $\overline{T'^2}$ . Multiplicando (III.14) por  $2 \cdot T'$  y promediando resulta:

$$\rho \frac{d}{dt} (\overline{T'^2}) - 2 \rho \overline{u'_j T'} \frac{\partial T'}{\partial x_j} - \rho_0 \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_j T'^2}) + \mu \frac{\partial^2}{\partial x_j^2} (\overline{T'^2}) - 2\mu \frac{\partial \overline{T'}}{\partial x_j} \frac{\partial T'}{\partial x_j} \quad (III.20)$$

Es necesario que los términos de la ecuación (III.19) sean expresados en función de valores medios o correlaciones de segundo orden de las variables.

Aquí como ejemplo, se presentará un método de clausura de segundo orden, para el triple producto incluido en la ecuación (III.19), desarrollado por Donaldson (1973), pero existen también otros procedimientos (ver por ejemplo, André y otros,

1978).

Al modelar el tensor  $\overline{u'_j u'_k T'}$  en función de la correlación de segundo orden  $\overline{u'_k T'}$ , el tensor más simple que se puede obtener desde la correlación de segundo orden es:  $\delta(\overline{u'_k T'})/\delta x_j$ .

El tensor,  $T_{jk}$ , es simétrico:

$$T_{jk} = \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_k T'}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_j T'}) \quad (\text{III.21})$$

como  $T_{jk}$  no tiene las dimensiones de  $\overline{u'_j u'_k T'}$  se postula:

$$\overline{u'_j u'_k T'} = \Lambda_2 q \left[ \frac{\partial}{\partial x_j} (\overline{u'_k T'}) + \frac{\partial}{\partial x_k} (\overline{u'_j T'}) \right] \quad (\text{III.22})$$

donde  $\Lambda_2$  es una longitud escalar relativa a la escala de movimiento medio o a la escala de la turbulencia y  $q$  es un escalar, para expresar  $T_{jk}$  en la dimensión correcta:

$$q = (\overline{u'_n u'_n})^{\frac{1}{2}} \quad (\text{III.23})$$

Se podrían derivar ecuaciones para otros flujos y para las varianzas de todos los productos de pequeña escala, que contendrán aún productos de orden mayor. Esta cadena obviamente continuará con la eliminación del estadístico de orden  $n$  dependiendo de los estadísticos de orden  $(n + 1)$ .

La técnica de clausura de segundo orden permite reproducir el comportamiento de la capa límite atmosférica diurna y nocturna y además relacionar los parámetros estadísticos turbulentos con variables meteorológicas. El inconveniente del método es que requiere considerable tiempo de computación y mediciones precisas.

### III.5. BALANCE DE CALOR

La ecuación de difusión permite conocer la variación temporal de una propiedad en un volumen. En ese volumen entra y sale energía que modifica la propiedad considerada. Se supone que no existen sumideros y fuentes de esa propiedad.

Considerando una capa delgada de aire adyacente a la superficie del suelo horizontal e infinita y de espesor próximo a cero, existen flujos verticales de energía y masa hacia arriba y hacia abajo de ese nivel, en la que no hay sumideros y fuentes por lo cual la suma de los flujos que entran es igual a la suma

de los que salen.

Al aplicar estos conceptos a la difusión de calor en una capa de aire próxima al suelo, los flujos principales que atraviesan  $z = 0$  son:

$F_K$  : flujo neto de radiación de onda corta. Este flujo es la diferencia entre la radiación directa - difusa solar y la reflejada por la superficie.

$F_L$  : flujo neto de radiación de onda larga. Se debe al proceso radiativo. Este flujo es la diferencia del flujo de radiación de onda larga proveniente de la atmósfera y el flujo de radiación de onda larga hacia arriba a nivel del suelo y proveniente de la superficie terrestre.

$F_a$  : flujo de calor sensible en el aire. Este flujo se debe a la mezcla turbulenta del aire.

$F_l$  : flujo de calor latente en el aire. Este se debe al transporte turbulenta de vapor de agua.

$F_s$  : flujo de calor en el suelo, proveniente de las capas altas del suelo, y se produce por el proceso de conducción.

$F_m$  : flujo molecular, que se debe al proceso de conducción del aire. El aire es un conductor poco eficiente cuyo coeficiente de difusión molecular es cinco órdenes de magnitud menor que el coeficiente turbulento, en general  $F_m \ll F_a$  por lo que se puede considerar  $F_m = 0$ .

Entonces, la ecuación de balance puede escribirse:

$$F_K + F_L + F_a + F_l + F_s - 0 \quad (\text{III.24})$$

La componente vertical del movimiento turbulento aunque es más pequeña que las horizontales es muy importante, debido que proporciona un mecanismo de transporte vertical de todas las propiedades del aire. En consecuencia, al plantear los flujos en la capa límite planetaria, éstos generalmente son sólo función del gradiente vertical de la propiedad (Panosfky y Dutton, 1984).

Considerando la teoría " K " (ecuación (III.10)) se puede escribir la siguiente expresión genérica:

$$F_z = -K_z \frac{\partial Q}{\partial z} = \rho \overline{u'_3 Q'} \quad (\text{III.25})$$

donde:  $K_z = -\overline{u'_3 l'_z}$ ,  $K_z$  es el coeficiente de intercambio turbulento de  $Q$  en la dirección  $z$ .

En la Figura III.1 se presenta la dirección de los flujos en relación al gradiente vertical de la propiedad media.

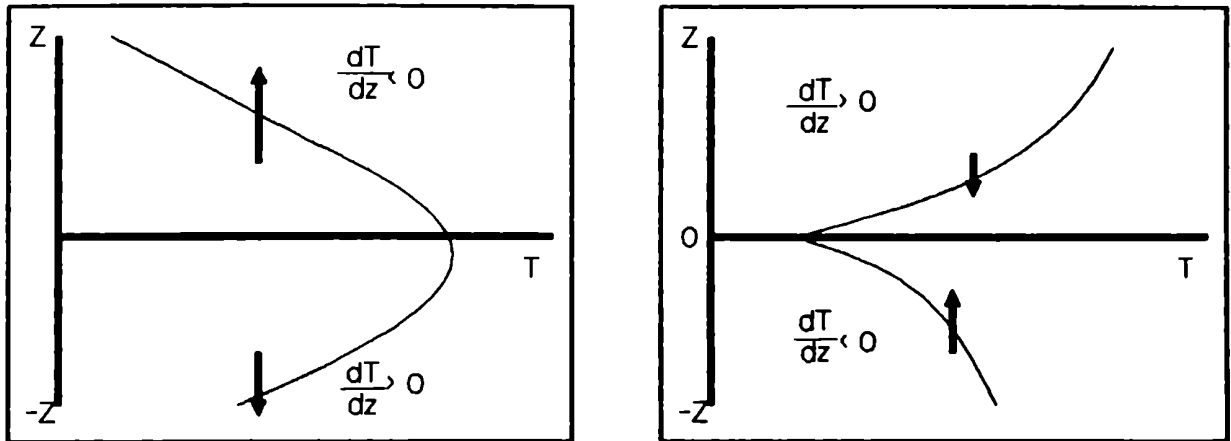


Figura III.1: Dirección de los flujos verticales de calor con relación al gradiente vertical de temperatura.

Siendo la cantidad de calor  $Q = \rho_a C_p T_a$ , aplicada a (III.25) para un fluido incompresible, resulta:

$$F_a = -\rho_a C_p \lambda_a \frac{\partial T_a}{\partial z} = \rho_a C_p \overline{u'_3 T'_a} \quad (\text{III.26})$$

donde:  $F_a$  es el flujo turbulento de calor sensible en la atmósfera,  $\lambda_a$  es el coeficiente turbulento de difusividad térmica,  $\rho_a$  es la densidad del aire y  $T_a$  es la temperatura del aire.

El flujo de calor por conducción molecular en el suelo es:

$$F_s = -\rho_s C_s \lambda_s \frac{\partial T_s}{\partial z} \quad (\text{III.27})$$

donde:  $\lambda_s$  es el coeficiente molecular de difusividad térmica en el suelo,  $\rho_s$  es la densidad del suelo,  $C_s$  es el calor específico del suelo, y  $K_s = \lambda_s C_s \rho_s$  es la conductividad del suelo que depende de sus características y composición.

La conducción molecular de calor también existe en el aire y tiene una forma análoga a (III.26). En general, no es significativa excepto en la capa de aire próxima al suelo y se supone que

la expresión (III.26) incluye el flujo de calor por conducción molecular y turbulenta en el aire.

El calor latente por condensación o evaporación es  $Q = \rho_a L_v q$ , que gana o pierde la atmósfera por cambio de estado del vapor de agua. Aplicando a (III.25) resulta:

$$F_1 = -\rho_a L_v \chi_q \frac{\partial q}{\partial z} \quad (\text{III.28})$$

donde:  $q$  es la humedad específica,  $\chi_q$  es el coeficiente turbulento de difusividad del aire para el calor latente,  $L_v$  es el calor latente por condensación o evaporación. El flujo de calor latente es función de la radiación disponible y del gradiente de humedad específica entre el suelo y el aire subyacente. Durante el día en general, se produce evaporación de agua del suelo, debido a que el límite tierra-atmósfera absorbe calor, y durante la noche puede existir condensación en la interfase tierra-atmósfera.

Convencionalmente, se utilizará la siguiente regla: los flujos que salen de superficie hacia la atmósfera se considerarán con signo negativo, y aquéllos que llegan a la superficie se supondrán positivos. En el límite tierra-atmósfera considerado como una capa infinita no existe fuente de calor. De acuerdo con la ley de conservación de energía se puede aplicar la expresión (III.24).

En condiciones nocturnas,  $F_k = 0$  y la expresión (III.24) resulta:

$$F_L + F_a + F_1 + F_s = 0 \quad (\text{III.29})$$

La dirección de los flujos típicos en el día y en la noche se presentan en la Figura III.2.

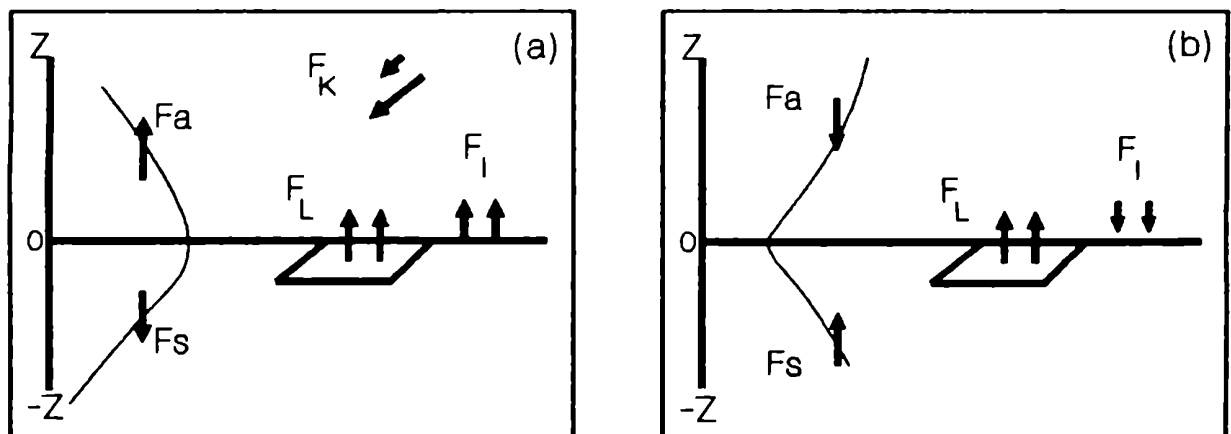


Figura III.2: Esquema de flujos de calor típicos (a) durante el día; (b) durante la noche.

En las expresiones (III.24) y (III.29) no se tuvieron en cuenta los procesos advectivos, ni la ocurrencia de precipitación que puede alterar la pérdida o ganancia de calor en la superficie. Estas ecuaciones son planteadas para una superficie plana y sin vegetación. En esos casos deberán considerarse nuevos factores.

En realidad pocas superficies son planas o pueden ser consideradas homogéneas y ninguna es infinita. Por ejemplo, al considerar el caso de un campo destinado a la agricultura en el que pueden existir zonas aradas, desnudas, abandonadas o cultivadas, cada una posee su propia combinación de radiación, temperatura, humedad y propiedades aerodinámicas, conductividad y humedad del suelo, rugosidad, etc. Estas diferencias se manifiestan en los valores de perfiles de temperatura, humedad y viento, influyendo en la existencia de una discontinuidad espacial de climas y de gradientes horizontales de propiedades.

Los procesos advectivos no conciernen a la superficie terrestre sino a la capa de aire que se encuentra sobre ella. Entonces, dependiendo de la naturaleza del entorno debería incorporarse a las ecuaciones (III.24) y (III.29) un término advectivo ( $\Delta Q_A$ ) por ganancia o pérdida neta de energía debido a los transportes horizontales de calores sensible y latente.

Al plantear la ecuación de balance en el volumen definido por el sistema suelo-planta-aire, extendiéndose desde el tope de la planta hasta una profundidad en el suelo donde no exista flujo vertical de calor, deberá incluirse en (III.24) y (III.29) un término ( $\Delta Q_S$ ) que es el almacenaje de calor por los objetos que forman el sistema. Las variaciones de este almacenaje resultan de la absorción o liberación de calor por el aire, suelo y biomasa de las plantas, y otro término ( $\Delta Q_P$ ) de almacenaje de calor bioquímico debido a la fotosíntesis de las plantas.

### III.6. LEY POTENCIAL DEL VIENTO

Uno de los aspectos vinculados con el comportamiento del viento en la capa de la atmósfera cercana al suelo es la determinación de la forma funcional del perfil vertical de la velocidad del viento. En trabajos de ingenieriles es común representar el perfil del viento mediante una ley potencial (ver Sutton, 1977):

$$U(z) = u_1 \left( \frac{z}{z_1} \right)^m \quad (\text{III.30})$$

que es aplicable más allá de la capa de superficie de la atmósfera, siendo válida en el aire sobre un terreno uniforme y con predominio de un mecanismo turbulento. En la ecuación (III.30),  $u(z)$  es la velocidad media del viento en el nivel  $z$ ;  $u_1$  es la velocidad media del viento en el nivel  $z_1$  y  $m$  es función de la estabilidad atmosférica y la rugosidad del terreno.

Durante condiciones estables el exponente ( $m$ ) de la ley potencial es principalmente una función de la estabilidad atmosférica y depende poco de la rugosidad de la superficie. En condiciones inestables, sin embargo, el exponente es principalmente función de la rugosidad del terreno. La dependencia sugerida del exponente de la ley potencial de la rugosidad, como también de la estabilidad atmosférica parece explicar las diferencias con los valores experimentales (ver Irwin, 1979).

Esta ley potencial fue introducida en 1925 (ver Kampe de Fériet, 1974). De acuerdo con los datos experimentales  $m$  varía entre 0 y 1. El caso de  $m=0$  representa una atmósfera en la que la turbulencia es significativamente crítica y  $m=1$  implica un perfil tipo Couette y pertenece a un movimiento laminar sobre una superficie plana y donde el gradiente de presión es despreciable (ver de Garin y otros, 1983). El mayor rango de variación de  $m$  fue encontrado por Barkat Ali (1932) y es  $0.02 < m < 0.87$ . Frost (1947) efectuó mediciones de velocidades del perfil vertical del viento en alturas comprendidas entre 1.5 y 122 m. y entre 1.2 y 305 m, comprobando que la ley potencial se adapta a una variedad de gradientes verticales de temperatura. En condiciones neutrales, Frost encontró que  $m=0.149$ .

### III.6.1. Ley de las potencias conjugadas de Schmidt

En la capa de superficie los flujos turbulentos verticales de cantidad de movimiento, calor y vapor de agua pueden variar aproximadamente el 10 %. La dirección del viento es constante ya que de lo contrario, variaría la tensión turbulenta ( $\tau$ ) y por lo tanto, el flujo vertical de la cantidad de movimiento. Suponiendo que el eje  $x$  coincide con la dirección de la tensión turbulenta y que la densidad es constante ya que la capa es pequeña, según lo



planteado en la expresión (III.10), pero para la cantidad de movimiento:

$$(\overline{u'w'})_o = -K_M \frac{\partial U(z)}{\partial z} \quad (\text{III.31})$$

$$\tau_o = -\rho (\overline{u'w'})_o \quad (\text{III.32})$$

$$\tau_o = \rho K_M \frac{\partial U(z)}{\partial z} \quad (\text{III.33})$$

donde: el subíndice o corresponde al valor en superficie,  $K_M$  es el coeficiente turbulenta de intercambio de cantidad de movimiento;  $\rho$  la densidad del medio. Como  $\tau_o$  es constante en la capa de superficie, entonces:

$$\frac{\partial \tau_o}{\partial z} = 0 = \rho \frac{\partial K_M}{\partial z} \frac{\partial U}{\partial z} + \rho K_M \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \quad (\text{III.34})$$

o también:

$$\frac{1}{K_M} \frac{\partial K_M}{\partial z} = - \frac{1}{\frac{\partial U}{\partial z}} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (\text{III.35})$$

integrando y aplicando logaritmo es:

$$\ln \left( \frac{K_M}{K_1} \right) = \ln \left| \frac{\left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_1}{\frac{\partial U}{\partial z}} \right| \quad (\text{III.36})$$

Utilizando la expresión (III.30) resulta:

$$K_M = K_1 \left( \frac{z}{z_1} \right)^{1-n} \quad (\text{III.37})$$

donde  $K_1$  es la coeficiente turbulenta de intercambio de cantidad de movimiento a la altura  $z_1$ . Las ecuaciones (III.30) y (III.37), son conocidas como la ley de las potencias conjugadas de Schmidt (ver Sutton, 1977).

# CAPITULO IV

## ANTECEDENTES

### IV.1. INTRODUCCION

La disminución de la temperatura del aire después del anochecer y los factores que la afectan son importantes en relación con la formación de nieblas y heladas. Las mayores variaciones en el enfriamiento del aire ocurrirán en noches con poca o ninguna nubosidad y con aire relativamente seco que favorecen una marcada pérdida de calor desde la superficie terrestre. Otro factor importante es la velocidad del viento. El calor perdido por la superficie es parcialmente reemplazado por la conducción de calor desde el suelo, pero también por el enfriamiento del aire. Con vientos moderados o fuertes, el aporte de calor desde el aire proviene de una capa más profunda determinando que la disminución de la temperatura en la superficie sea relativamente pequeña. Sin embargo, en noches despejadas con poco o sin viento, se forma rápidamente una inversión en superficie (ver esquema de la Figura III.2 (b)), disminuyendo marcadamente el transporte turbulento de calor desde el aire a la superficie. En estas circunstancias, la mayor parte de la pérdida de calor desde la superficie ocurre cuando la velocidad del viento a 2 metros de altura es igual o menor que 0.5 m/s., y el valor mínimo de temperatura no se encuentra inmediatamente sobre el suelo (Monteith, 1957).

### IV.2. MODELO DE BRÜNT

#### IV.2.1. Generalidades

Uno de los primeros autores que planteó el problema del descenso de temperatura nocturna desde un punto de vista determinístico fue Brünt (1941).

El modelo introducido por Brünt se desarrolla teniendo en cuenta las siguientes condiciones:

- La transferencia de calor se produce en las primeras capas del suelo, considerado como un medio semi-infinito, en ausencia de la atmósfera.
- El mecanismo de transferencia es la conducción de calor en el suelo, considerando un suelo homogéneo, en el que su coeficiente de conductividad y su densidad son constantes.
- El aire está relativamente seco, lo que posibilita que no exista flujo de calor latente desde o hacia superficie.
- Existen condiciones de calma, evitándose la presencia de mezcla turbulenta mecánica del aire, lo que hace despreciable el flujo turbulento de calor desde la atmósfera hacia el suelo.
- Estudia los casos en los que durante la noche existe cielo despejado o nubes altas. De este modo, no considera el flujo de radiación de onda larga hacia superficie desde las nubes y la radiación de onda larga es emitida sólo por la superficie del suelo y el vapor de agua de las capas bajas de la atmósfera.
- El flujo neto de radiación es constante durante toda la noche y su valor es igual al del momento de la puesta del sol ( $F_n$ ).
- El campo inicial de temperatura (a la puesta del sol) en el suelo es isotérmico.

#### IV.2.2. El modelo

Para obtener la variación temporal de la temperatura a partir la puesta del sol y sólo considerando el volumen del suelo próximo a superficie, Brünt (1941) utiliza la ecuación de conducción de calor en el suelo.

La ecuación de conducción de calor para  $z < 0$  y  $t > 0$  es:

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left( \chi_s \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \right) \quad (\text{IV.1})$$

donde:  $t$  es el tiempo,  $T(z,t)$  es la temperatura del suelo a la profundidad  $z$  y en el tiempo  $t$ ,  $\chi_s$  es el coeficiente de difusividad térmica del suelo.

Si se considera  $\chi_s$  constante, resulta:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial t} - \chi_s \frac{\partial^2 T(z,t)}{\partial z^2} \quad (IV.2)$$

La condición inicial es:

$$T(z,0) = T_0 = \text{cte} \quad (IV.3)$$

Las condiciones límites son las siguientes:

- la ecuación de balance de calor, en un nivel de superficie próximo a  $z = 0$ , para  $t > 0$ , resulta:

$$F_n + F_s = 0 \quad (IV.4)$$

Durante la noche en las capas del suelo cercanas a la superficie existe un gradiente térmico positivo y el flujo de calor en el suelo está balanceado por la pérdida de radiación neta por lo que la expresión (IV.4) queda:

$$F_n(z,t) + \kappa_s \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} = 0 \quad z=0, t>0 \quad (IV.5)$$

donde:  $F_n(z,t) = \text{constante}$ ,  $\kappa_s$  es el coeficiente de conducción de calor del suelo,  $\kappa_s = \chi_s C_s \rho_s$ ,  $\chi_s$  es el coeficiente de difusividad térmica del suelo,  $\rho_s$  es la densidad del suelo,  $C_s$  es el calor específico del suelo.

En lo sucesivo se escribirá, por simplificación,  $F_n$  en lugar de  $F_n(z,t)$

- el gradiente vertical de temperatura para  $z$  suficientemente grande es cero, adaptándose al gradiente inicial, entonces es:

$$\frac{\partial T(z,t)}{\partial z} = 0, \quad z \rightarrow \infty \quad t > 0 \quad (IV.6)$$

Resolviendo la ecuación (IV.2) con las condiciones planteadas, considerando  $z > 0$  para el suelo, se obtiene (ver Anexo I):

$$T(z, t) = -\frac{F_n}{K_s} \left[ 2 \sqrt{\frac{\lambda_s t}{\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{4\lambda_s t}\right) - z \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4\lambda_s t}}\right) \right] + T_0 \quad (\text{IV.7})$$

donde  $\operatorname{erfc}$  es el complemento de la función error (ver Spiegel, 1965).

Para el nivel de superficie ( $z = 0$ ) la (IV.7) queda:

$$T(0, t) = -\frac{2 \cdot F_n}{K_s \lambda_s^{1/2}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + T_0 \quad (\text{IV.8})$$

### V.2.3. Ejemplificación

Con el objeto de ejemplificar la aplicación del modelo se consideraron los datos del Experimento Wangara (Clarke y otros, 1971), correspondiente a la noche del día 32.

Se considera que el momento inicial para correr el modelo es la hora 18 (local), pues la puesta del sol ocurrió aproximadamente entre las 17:30 hs. y 18 hs. La temperatura inicial ( $T_0$ ) en superficie es 10,5 °C. La radiación neta ( $F_n$ ) es evaluada como el promedio entre las 18 hs. y las 7 hs. (hora de salida del sol), resultando un valor de  $F_n = 64200 \text{ cal/h m}^2$ . Las constantes del suelo son las consideradas por Cellier y Itier (1984):  $\lambda_s = 1,8 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{h}$  y  $K_s$  es 602,028 cal/m h °C.

La Figura IV.1.(a) presenta la evolución de la temperatura de superficie obtenida mediante la aplicación de la fórmula de Brünt (ecuación (IV.8)) hasta la salida del sol y de la temperatura observada.

La Figura IV.1.(b) corresponde al perfil de temperatura del suelo para diferentes horas nocturnas estimados mediante la expresión (IV.7).

En general, el modelo subestima entre 2°C y 6°C. (Figura IV.1.(a)). Deacon (1983) presenta un ejemplo para una noche clara de Junio prediciendo la expresión (IV.8) una acentuada caída de temperatura en superficie de casi 4°C. mayor que la temperatura observada. También, mediciones realizadas en Florida entre 1966 - 1967 (W.M.O., 1978) muestran que la temperatura mínima estimada aplicando la fórmula de Brünt se apartan de la temperatura mínima observada con diferencias que alcanzan hasta 10°C.

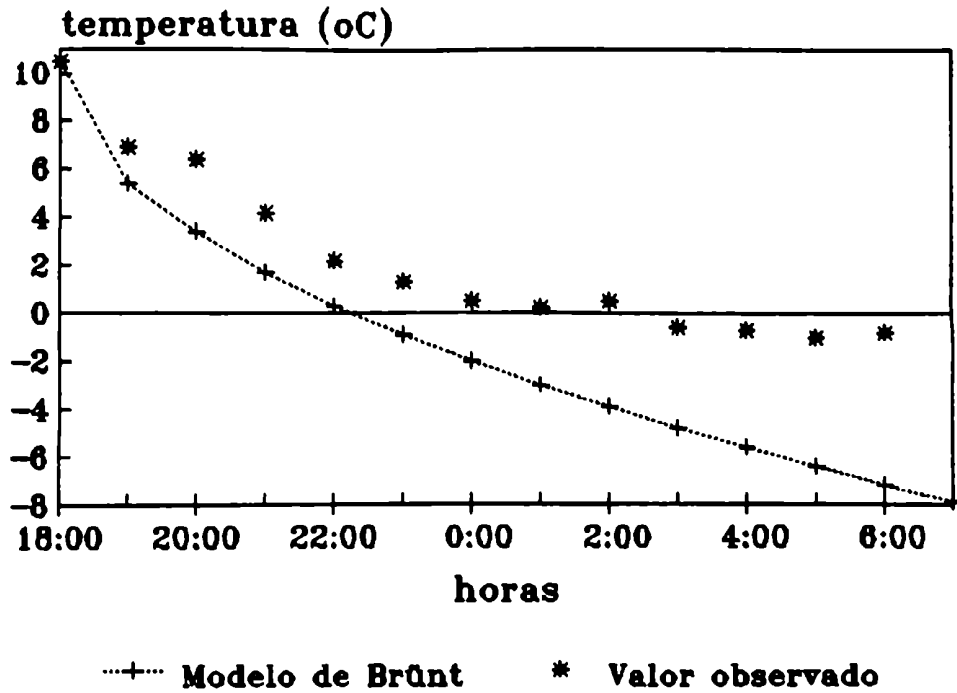


Figura IV.1.(a): Variación horaria de la temperatura en superficie.

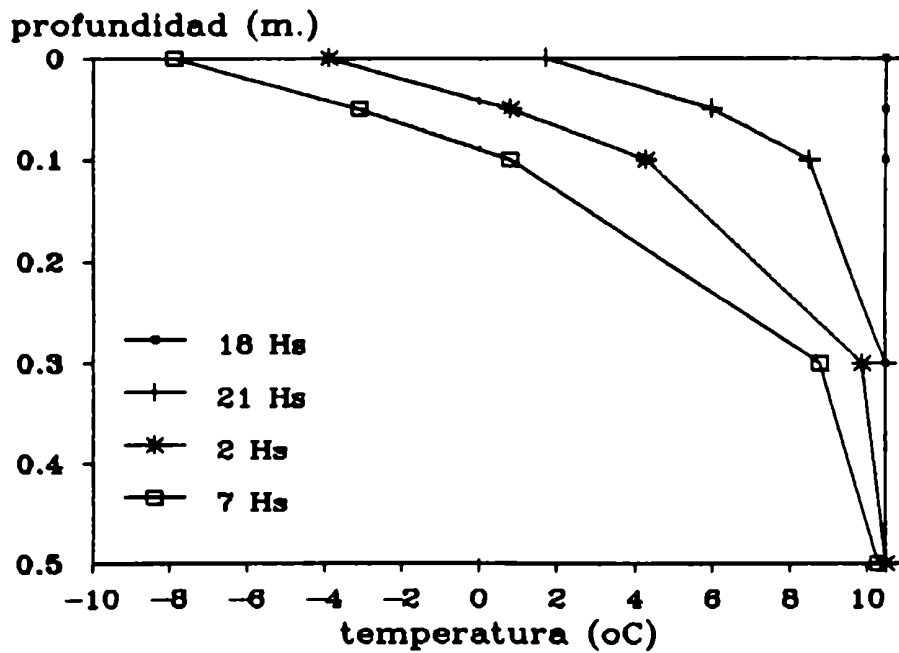


Figura IV.1.(b) : Perfil de temperatura con la profundidad calculado mediante la expresión (IV.7).

La fórmula de Brünt está limitada, pues es muy sensible a la estimación del déficit de radiación, produciendo errores del orden del 20% al 30% (ver Cellier, 1991).

La expresión de Brünt es, a veces, aplicada realizando previamente algún ajuste. Gerbier y Pedeau (1974) proponen un procedimiento otorgando diversos valores a las constantes térmicas del suelo según la humedad del suelo, luego utilizan la fórmula de Brünt para estimar el déficit de radiación y finalmente, aplican una corrección debido a las condiciones nocturnas. Los resultados obtenidos son satisfactorios pero, la pendiente entre los datos calculados y observados difiere sensiblemente de uno.

### IV.3. MODELO INICIAL DE GRÖEN

#### IV.3.1. Generalidades

Gröen (1947) cuestiona las suposiciones en las que se sustenta la expresión obtenida por Brünt manifestando que considerar el flujo de radiación neta nocturna constante es demasiado restrictivo. Gröen analiza el flujo de radiación tipo Elsasser para un caso típico, y concluye que  $F_n$  decrece desde 0.15 a 0,09 cal/cm<sup>2</sup> min. en el curso de la noche cuando la temperatura cae 12°C.

#### IV.3.2. El modelo

La variación de  $F_n$  está íntimamente relacionada con los cambios temporales de temperatura en superficie, la cual se desea determinar. Para ello, Gröen (1947) propone la siguiente modificación al planteo de Brünt:

- Considera que  $F_n$  es función de la temperatura de superficie ( $z=0$ ) introduciéndola en la condición límite, y utilizando los dos primeros términos del desarrollo de  $F_n$  en serie de Taylor:

$$F_n(T(z, t)) = F_{no} + \frac{dF_n}{dT(z, t)}(T(z, t) - T_o) \quad (IV.9)$$

donde:  $T_0$  y  $F_{n0}$  son los valores de  $T(z,t)$  y de  $F_n$  en  $t = 0$ , y consecuentemente  $(dF_n/dT)$  es supuesto constante.

La condición límite es la ecuación de balance de calor en superficie, que se modifica de la siguiente forma:

$$F_{n0} + f(T(z,t) - T_0) + \kappa_s \frac{\partial T(z,t)}{\partial z} = 0 \quad (\text{IV.10})$$

con  $dF_n/dT(z,t) = f = \text{constante}$ .

La condición inicial es la utilizada por Brünt (1941), o sea la expresión (IV.3).

La ecuación de conducción de calor expresión (IV.2) es resuelta (considerando  $z > 0$ ) en el suelo y se obtiene el siguiente resultado, (ver Anexo II):

$$T(z,t) = \frac{F_{n0}}{f} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{\sqrt{4\chi_s t}} \right) - \exp \left( \frac{fz}{\kappa_s} + \frac{\chi_s f^2 t}{\kappa_s^2} \right) \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{\sqrt{4\chi_s t}} + f \frac{\sqrt{\chi_s t}}{\kappa_s} \right) \right] + T_0 \quad (\text{IV.11})$$

Cuando  $z = 0$  resulta:

$$T(0,t) = \frac{F_{n0}}{f} \left[ 1 - \exp \left( \frac{\chi_s f^2 t}{\kappa_s^2} \right) \cdot \operatorname{erfc} \left( f \frac{\sqrt{\chi_s t}}{\kappa_s} \right) \right] + T_0 \quad (\text{IV.12})$$

### IV.3.3. Ejemplificación

Para aplicar la expresión de Gröen es necesario definir previamente el parámetro  $f$ . Según la metodología propuesta por el autor se obtiene:

$$f = \frac{F_{n\tau} - F_{n0}}{T_\tau - T_0} \quad (\text{IV.13})$$

donde:  $F_{n0}$  y  $T_0$  son respectivamente la radiación neta y la temperatura en el momento de la puesta del sol (18 hs.),  $F_{n\tau}$  y  $T_\tau$  son la radiación neta y la temperatura en el momento de la salida del sol (7 hs.).

Los valores observados para la noche del día 32 del Experimento Wangara (Clarke, 1971) son:  $F_{n0} = 71383,32 \text{ cal/m}^2 \text{ h}$ ;  $F_{n\tau} = 60202,8 \text{ cal/m}^2 \text{ h}$ ;  $T_0 = 10,5^\circ\text{C}$ ; y  $T_\tau = -0,8^\circ\text{C}$ . Los parámetros restantes son los mismos que se presentaron en IV.2.3.

La Figura IV.2.(a) grafica la evolución de la temperatura de superficie durante la noche, y la Figura IV.2.(b) el perfil de



temperatura en el suelo.

El parámetro  $f$  ignora la variación de  $F_n$  con la velocidad del viento y la cantidad de vapor de agua en la atmósfera que considera constantes durante la noche (Sutton, 1977).

No existe grandes diferencias entre el Modelo de Brünt (1941) y el de Grøen (1947) para períodos nocturnos en latitudes medias o bajas. En ambos casos, se subestima el valor observado (Figura IV.2.(a) y Figura IV.1.(a)). Pero, para la noche polar la divergencia entre ambos modelos podría ser considerable, más específicamente porque la baja conductividad de la nieve tendería a reducir el valor del coeficiente de difusividad del suelo (ver Sutton, 1977).

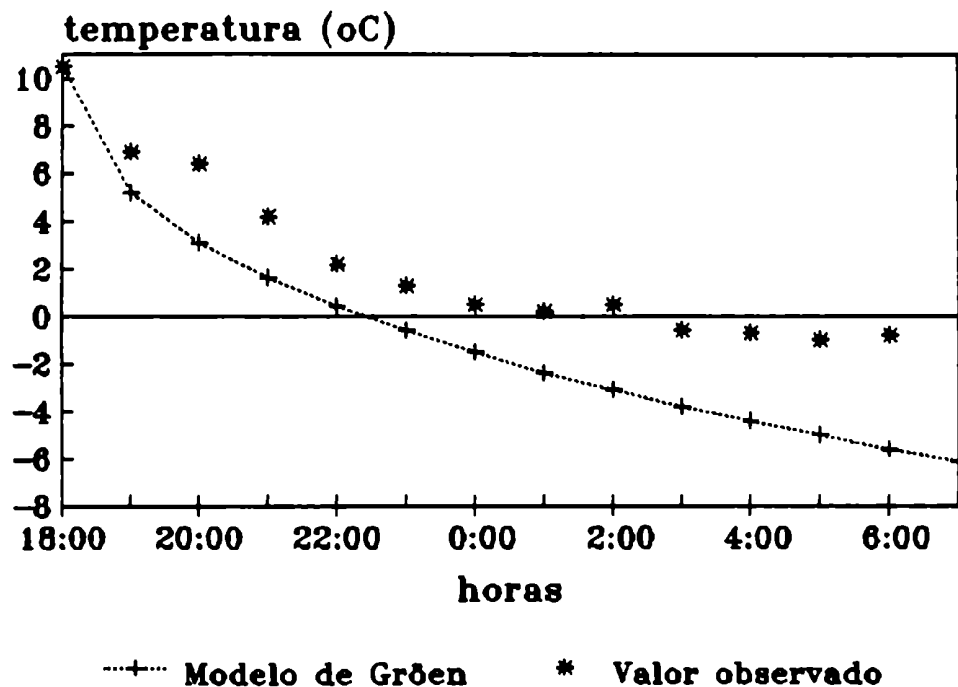


Figura IV.2.(a): Variación horaria de la temperatura en superficie.

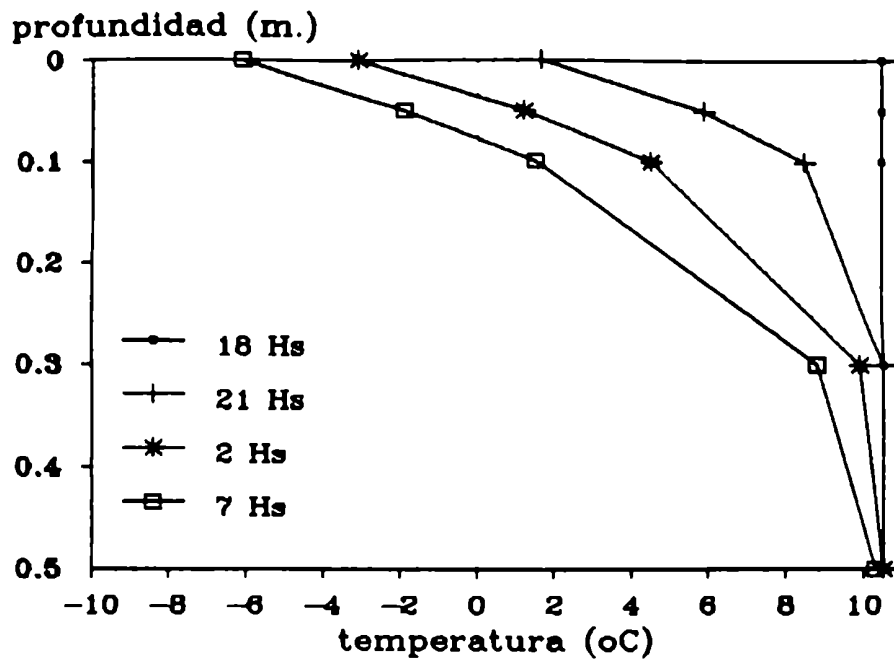


Figura IV.2.(b): Perfil de temperatura con la profundidad calculado mediante la expresión (IV.11).

#### IV.4. MODELO DE GRÖEN MODIFICADO

##### IV.4.1. El modelo

La condición inicial de isothermia (expresión (IV.3)) implica que no existe flujo de calor a través de la superficie. Gröen (1947) plantea que experimentalmente se encuentra una distribución inicial de la temperatura del suelo, por lo que propone eliminar la condición isotérmica impuesta por Brünt y considera la siguiente condición inicial:

$$T(z, 0) = T_0 + \beta \cdot z \quad ; \quad t = 0 \quad z < 0 \quad (IV.14)$$

donde:  $\beta$  es el gradiente de temperatura inicial del suelo.

La condición límite (IV.6) se modifica de la siguiente manera

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = \beta \quad z \rightarrow -\infty \quad t > 0 \quad (IV.15)$$

o sea el gradiente vertical de temperatura en el suelo se adapta al gradiente inicial para  $z$  suficientemente grande.

Con estas condiciones inicial y límite, y la (IV.10), se resuelve la ecuación de conducción de temperatura para el suelo,

(ver Anexo II), resultando:

$$T(z, t) = \frac{(F_{no} + \kappa_s \beta)}{f} \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{\sqrt{4\kappa_s t}} \right) \exp \left( \frac{fz}{\kappa_s} + \frac{\kappa_s f^2 t}{\kappa_s^2} \right) + \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{\sqrt{4\kappa_s t}} + \frac{f\sqrt{\kappa_s t}}{\kappa_s} \right) \right] + T_0 - \beta z \quad (IV.16)$$

Cuando  $z = 0$  es:

$$T(0, t) = \frac{(F_{no} + \kappa_s \beta)}{f} \left[ 1 - \exp \left( \frac{\kappa_s f^2 t}{\kappa_s^2} \right) \cdot \operatorname{erfc} \left( \frac{f\sqrt{\kappa_s t}}{\kappa_s} \right) \right] + T_0 \quad (IV.17)$$

#### IV.4.2. Ejemplificación

El flujo de calor del suelo fue medido en el Experimento Wangara (Clarke y otros, 1971) a 5 mm. de profundidad, y para el momento inicial,  $t = 0$  (18 hs) correspondiente a la noche 32, y es de 27521,28 cal/m<sup>2</sup> h.

A partir de la definición de flujo de calor del suelo:

$$F_s = -\kappa_s \frac{\Delta T}{\Delta z}$$

se obtiene el gradiente térmico inicial para el suelo  $\beta = 0,46^\circ\text{C/cm.}$ , tomando el valor del coeficiente de conductividad del suelo dado en IV.2.3., y las constantes incluidas en la sección IV.3.3., se evaluaron las expresiones (IV.15) y (IV.16). En las Figuras IV.3.(a) y IV.3.(b) se presentan los valores calculados y los observados.

Al reemplazar la radiación neta real ( $F_n$ ) por una "radiación aparente" ( $F_n + \kappa_s \beta$ ), se incorpora el efecto de la conducción de calor inicial desde el suelo.

Se observa en la Figura IV.3.(a) una sobrestimación del valor observado. En las Figuras IV.3.(a) y IV.3.(b) se presenta una caída más suave de la temperatura calculada que las incluidas en las Figuras IV.2.(a) y IV.2.(b)

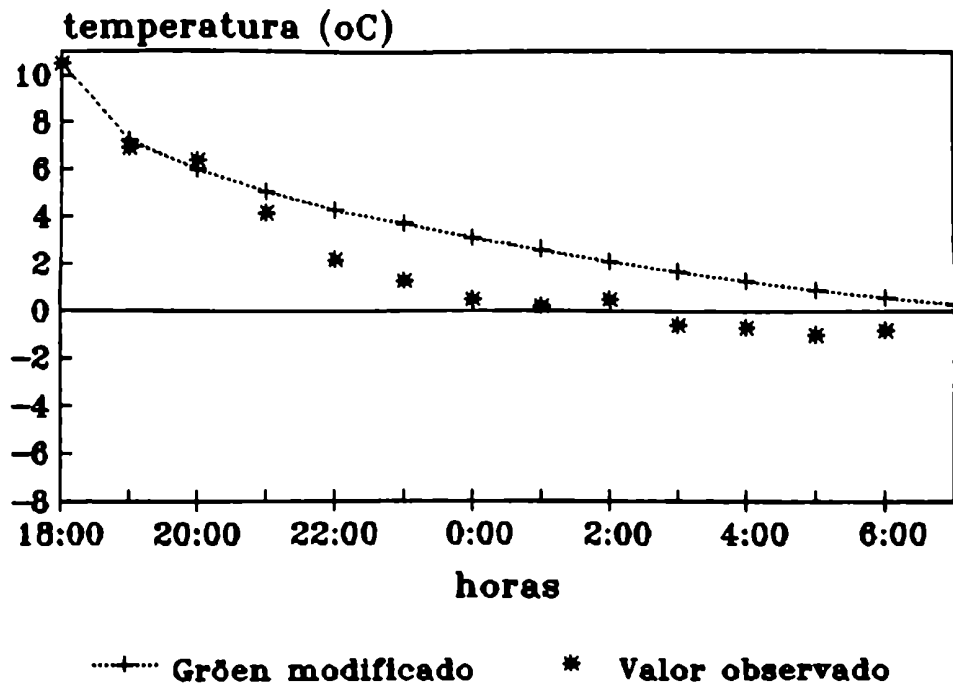


Figura IV.3.(a): Variación horaria de la temperatura en superficie.

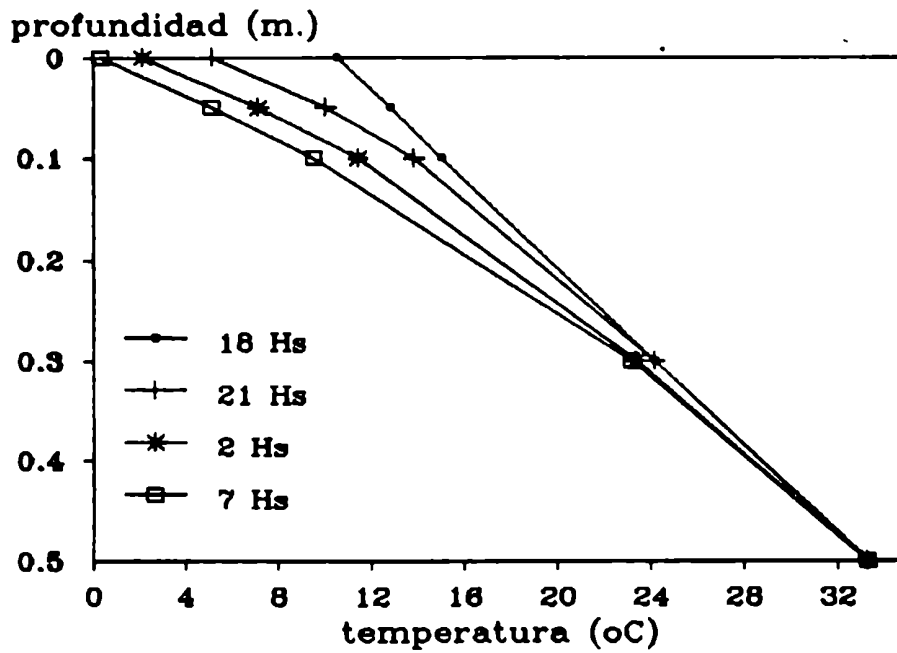


Figura IV.3.(b): Perfil de temperatura con la profundidad calculado mediante la expresión (IV.16).

#### IV.5. MODELO DE JAEGER ( COEFICIENTE TURBULENTO DE DIFUSIVIDAD EN EL AIRE CONSTANTE )

Jaeger (1945) es uno de los primeros autores que tuvo en cuenta la influencia de la atmósfera en la disminución nocturna de la temperatura. Por simplicidad consideró que no existe advección y que hay homogeneidad en el plano (x,y).

##### IV.5.1. El modelo

Jaeger plantea las mismas condiciones que utilizó Brünt (1941) en su modelo, pero agrega las siguientes:

- En la capa de la atmósfera próxima a la superficie existe transporte de calor sensible desde el aire hacia el suelo durante la noche. Esto se debe a que se presenta una inversión de temperatura que se desarrolla con cielo despejado y con vientos débiles.

- Para la atmósfera (  $z > 0$  ) supone que el coeficiente turbulento de conductividad térmica (  $K_a$  ) es constante y por lo tanto el coeficiente turbulento de difusividad térmica (  $\chi_a$  ) será constante, siendo  $\chi_a = K_a / \rho_a C_p$ , donde  $\rho_a$  es la densidad del aire y  $C_p$  es el calor específico del aire a presión constante.

A partir de las condiciones planteadas en las regiones semi-infinitas (  $z > 0$  y  $z < 0$  ), el transporte de calor está expresado por:

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial t} - \chi_a \frac{\partial^2 T_a(z, t)}{\partial z^2} ; z > 0 \text{ y } t > 0 \quad (\text{IV.18})$$

$$\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial t} - \chi_s \frac{\partial^2 T_s(z, t)}{\partial z^2} ; z < 0 \text{ y } t > 0 \quad (\text{IV.19})$$

Las condiciones límites son las siguientes:

- la ecuación de balance de calor en superficie es modificada al incluir el flujo de calor sensible del aire ( $F_a$ ), resultando:

$$F_a - F_s + F_n = 0 ; z = 0 \text{ y } t > 0 \quad (\text{IV.20})$$

- por continuidad entre los dos volúmenes semi-infinitos (aire y suelo) se debe cumplir que en  $z = 0$  la temperatura del aire sea igual a la temperatura del suelo.

$$T_a(0, t) = T_s(0, t) \quad ; \quad z = 0 \text{ y } t > 0 \quad (\text{IV.21})$$

- los gradientes verticales de temperatura del aire y del suelo deben cumplir:

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} = 0 \quad ; \quad z \rightarrow \infty \quad (\text{IV.22})$$

$$\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} = 0 \quad ; \quad z \rightarrow -\infty \quad (\text{IV.23})$$

La condición inicial es la siguiente:

- existe isotermita tanto en el aire como en el suelo en el momento inicial:

$$T_a(z, 0) = T_s(z, 0) = T_0 \quad (\text{IV.24})$$

Resolviendo las ecuaciones de difusión para el aire (expresión (IV.18) y para el suelo (IV.19), según la metodología desarrollada en el Anexo III, se obtiene:

$$T_a(z, t) = \frac{-2F_n}{\kappa_a \lambda_a^{\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ \exp\left(-\frac{z^2}{4\lambda_a t}\right) - \frac{z \pi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\lambda_a t}} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4\lambda_a t}}\right) \right] + T_0 \quad (\text{IV.25})$$

$$T_s(z, t) = \frac{-2F_n}{\kappa_a \lambda_a^{\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ \exp\left(-\frac{z^2}{4\lambda_s t}\right) - \frac{z \pi^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\lambda_s t}} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4\lambda_s t}}\right) \right] + T_0 \quad (\text{IV.26})$$

Cuando  $z = 0$  encuentra:

$$T_s(0, t) = \frac{2F_n}{\kappa_a \lambda_a^{\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + T_0 \quad (\text{IV.27})$$

#### IV.5.2. Ejemplificación

Con el objeto de obtener los coeficientes turbulentos de conductividad y difusividad térmica en el aire, en la capa próxima a superficie, se utiliza la expresión del flujo de calor sensible en el aire:

$$\frac{F_a}{C_p \rho_a} = -\chi_a \frac{\partial T}{\partial z} = -\chi_a \frac{\Delta T}{\Delta z} \quad (\text{IV.28})$$

Pero:

$$-\frac{F_a}{C_p \rho_a} = u \cdot T.$$

puede evaluarse utilizando los datos del Experimento Wangara (Clarke y otros, 1971).

Para la noche del día 32, en el instante inicial (18 h) se observa que la diferencia de temperatura entre 4 metro y 1 metro es de 0,30 °C. y  $T^*u^* = 20,4336 \text{ m} \cdot \text{°K/h}$ . Se despeja de la expresión (IV.28) el coeficiente turbulento de difusividad térmica resultando  $\chi_a = 204,336 \text{ m}^2/\text{h}$ . y se obtiene  $K_a = 66450 \text{ cal/m h } \text{°K}$ .

En la Figura IV.4.(a) se grafica la disminución de la temperatura en superficie, y en las Figuras IV.4.(b) y IV.4.(c) se representan los perfiles de temperatura para el aire y para el suelo, para distintas horas nocturnas.

Al compararse las Figuras IV.1.(a) y IV.4.(a), se observa que el aporte de calor sensible de la atmósfera hacia superficie produce una disminución de la temperatura menor que la obtenida mediante el modelo de Brünt (1941), y por otra parte el modelo aproxima mejor a los datos observados.

Según Sutton (1977): Los resultados de los diferentes trabajos muestran que la suposición de  $\chi_a$  constante no es consistente con los datos y un rápido aumento de  $\chi_a$  con la altura indica que la hipótesis de conductividad constante no es aceptable excepto, como una aproximación "primaria". Frecuentemente, se suele mencionar que la difusividad térmica del aire está entre  $10^3$  y  $10^4 \text{ cm}^2/\text{seg.}$ , que puede ser una gran sobrestimación si es aplicada muy cerca de superficie.

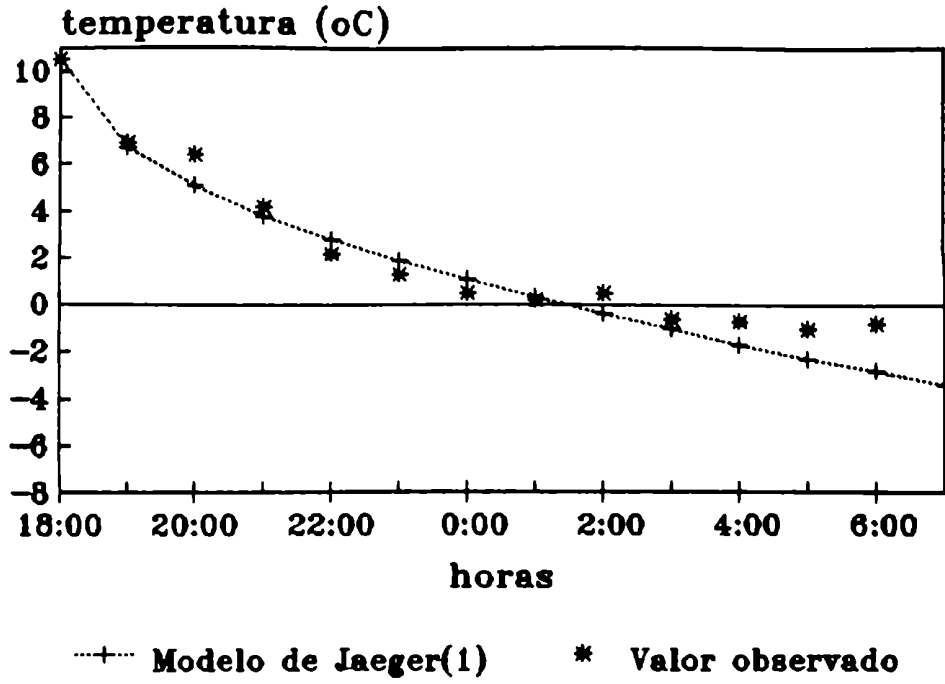


Figura IV.4.(a): Variación horaria de la temperatura en superficie

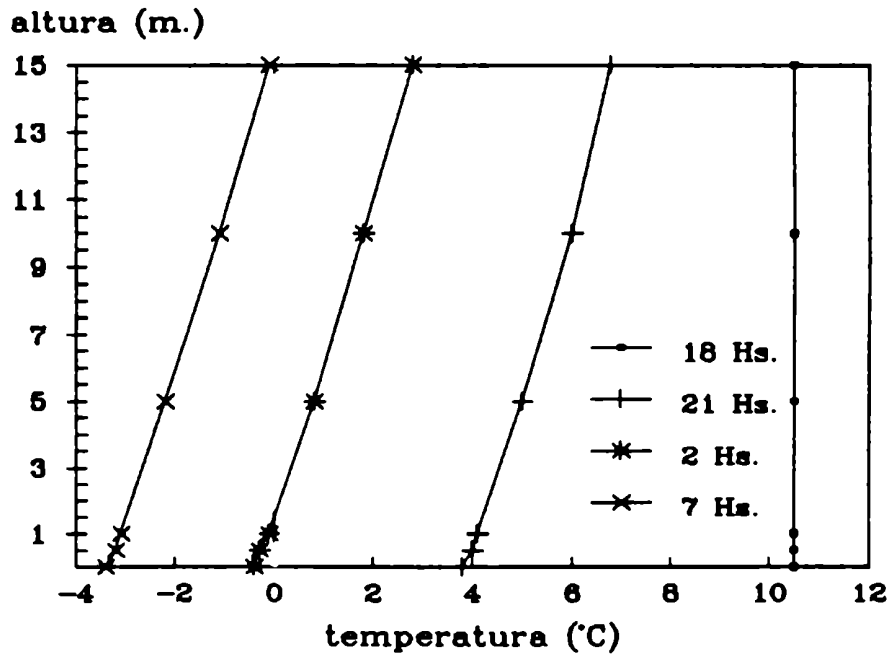


Figura IV.4.(b): Perfil de temperatura en el aire calculado mediante la expresión (IV.25).



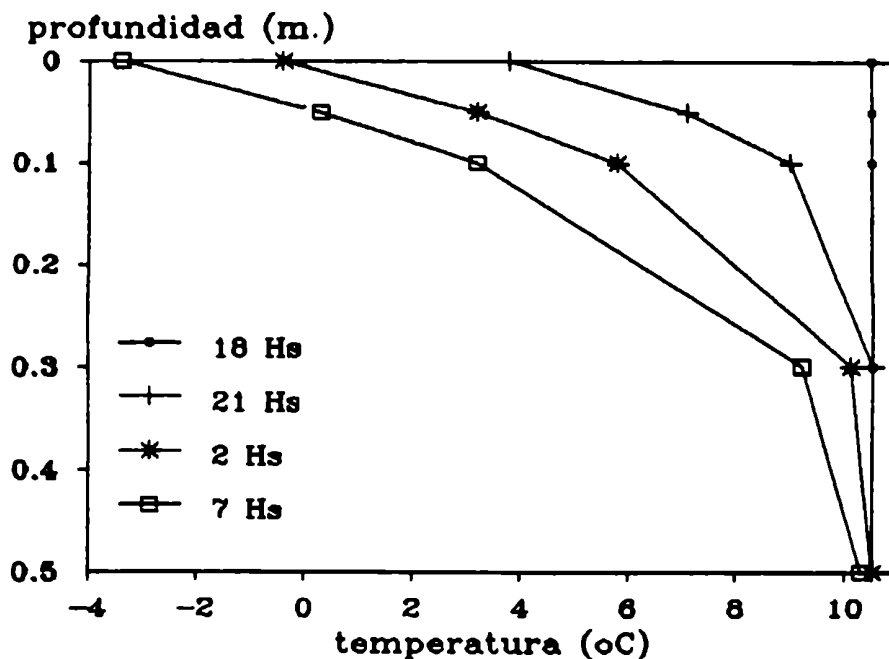


Figura IV.4.(c): Perfil de temperatura en el suelo calculado mediante la expresión (IV.20).

#### IV.6. MODELO DE JAEGER ( COEFICIENTE TURBULENTO DE DIFUSIVIDAD EN EL AIRE VARIABLE CON LA ALTURA).

##### IV.6.1. El modelo

Jaeger (1945) utiliza la analogía de Reynolds, quien sugiere que los transportes turbulentos de cantidad de movimiento y de calor son producidos por procesos similares. De esta manera, los coeficientes de intercambios turbulentos de cantidad de movimiento y de calor son iguales. Esto conduce a que en la capa límite los perfiles de velocidad y temperatura sean similares (Sutton,1977).

Utilizando estos conceptos, Jaeger (1945) plantea las siguientes condiciones:

- El coeficiente turbulento de conductividad térmica en la atmósfera varía potencialmente con la altura (III.37):

$$\kappa_h = \kappa_a z^{1-n} \quad (IV.29)$$

$K_h$  es el coeficiente turbulento de conductividad térmica, tal que  
 $K_h = \chi_a \rho_a C_p$

$$\chi_a = a u_1^{\beta} \quad (\text{IV.30})$$

con  $\beta = \frac{(1-m)}{(1+m)}$ ,  $a$  es una constante definida por Sutton (1934),  
 $u_1$  es la velocidad media del viento en el nivel  $z_1$ .

Las ecuaciones de difusión de calor para el aire y para el suelo son:

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \chi_a z^{(1-m)} \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} \right] ; z > 0 \text{ y } t > 0 \quad (\text{IV.31})$$

$$\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial t} = \chi_s \frac{\partial^2 T_s(z, t)}{\partial z^2} ; z < 0 \text{ y } t > 0 \quad (\text{IV.32})$$

siendo  $T_a$  y  $T_s$  la temperatura del aire y del suelo respectivamente.

Las condiciones límites e iniciales consideradas son las siguientes:

$$\kappa_s \frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} = \kappa_a z^{(1-m)} \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} + F_n = 0 \quad z=0, t>0 \quad (\text{IV.33})$$

$$T_a(0, t) = T_s(0, t) \quad (\text{IV.34})$$

$$T_a(z, 0) = T_s(z, 0) = T_0 \quad t=0, \forall z \quad (\text{IV.35})$$

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} = 0 \quad ; z \rightarrow \infty \quad t > 0 \quad (\text{IV.36})$$

$$\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} = 0 \quad ; z \rightarrow -\infty \quad t > 0 \quad (\text{IV.37})$$

La resolución de las expresiones (IV.31) y (IV.32) se encuentra en el Anexo IV, resultando para el aire:

$$T_a(z, t) = \frac{F_n \chi_a^{\frac{(1-\nu)}{2}} z^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{a}{z}\right]}{\kappa_s \chi_s^{\frac{1}{2}} \Gamma(\nu) (1+m)^{(\nu-1)}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k t^{\nu} W_{(-\nu; \frac{\nu}{2}}(a) + T_0 \quad (\text{IV.38})$$

donde:

$$\nu = \frac{m}{1+m} ; \psi = \left[ \frac{1-\nu}{z} \right] k - \frac{\nu}{z} + 1 ; a = \frac{z^{(1+m)}}{\chi_a (1+m)^2 t} ; \alpha = \frac{\kappa_a \chi_a^{\nu} (1+m)^{1-2\nu} \Gamma(1-\nu)}{\kappa_s \chi_s^{\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)}$$

siendo  $W_{(-\nu; \frac{\nu}{2})}(a)$  la función de Whittaker (ver Spain y otros, 1970).

Para el suelo:

$$T_s(z, t) = \frac{F_n a^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{a}{z}\right)}{\sqrt{\pi \kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}}} \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k t^{k-1} W_{(-\frac{1}{2}; \frac{1}{4})}(a) + T_0 \quad (\text{IV.39})$$

donde:  $\xi = \left(\frac{1}{2} - \nu\right)k + \frac{3}{2}$      $a = \frac{z^2}{4\chi_s t}$  , considerando  $z > 0$ .

Si  $z = 0$  es:

$$T(0, t) = \frac{F_n}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\varphi + \frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\varphi + \frac{3}{2}\right)} + T_0 \quad (\text{IV.40})$$

donde:  $\varphi = \left(\frac{1}{2} - \nu\right)k$

La expresión (IV.38) es complicada para su aplicación, por lo cual Jaeger (1945) propone una aproximación más simple. Resuelve la ecuación de difusión (IV.31) con la condición que la temperatura de superficie ( $z = 0$ ) está representada por una expresión potencial:

$$T(0, t) = T_0 - K t^r ; \quad r > -1 \text{ y } t \geq 0 \quad (\text{IV.41})$$

que constituye una forma generalizada de la ecuación obtenida por Brünt (1941) (expresión (IV.8)).

Según la metodología desarrollada en el Anexo V se obtiene la siguiente expresión para el aire:

$$T_a(z, t) = \frac{K z^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{A}{z}\right) t^\theta \Gamma(r+1)}{(1+m)^{2\beta} \Gamma(\nu) \chi_a^\beta} W_{(-\theta; \frac{\nu}{2})}(A) + T_0 \quad (\text{IV.42})$$

donde:  $\theta = r - \frac{\nu}{2} + \frac{1}{2}$  ;  $A = \frac{z^{(1+m)}}{\chi_a (1+m)^2 t}$  ;  $\beta = \frac{\nu-1}{2}$

#### IV.6.2. Ejemplificación.

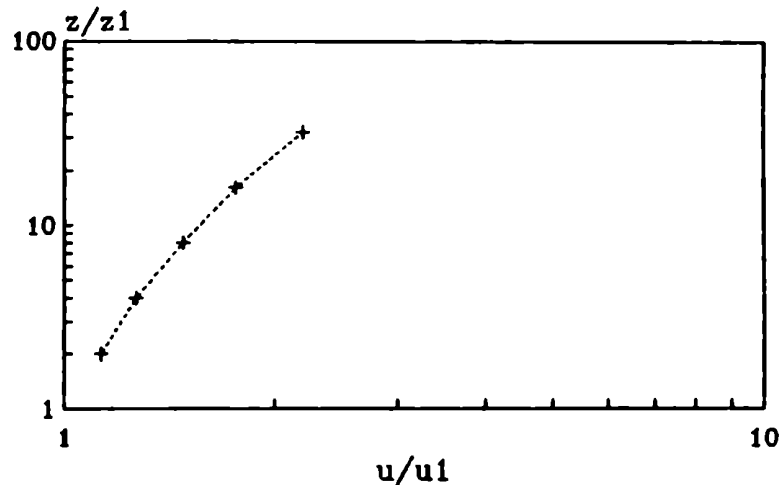
Reemplazando (IV.30) en (IV.29) resulta:

$$\kappa_n = a u^{\beta} \rho_a C_p z^{(1-m)} \quad (\text{IV.43})$$

la constante  $a$  es definida por Sutton (1934) mediante la teoría del intercambio turbulento:

$$a = \frac{1+m}{1-m} \cdot \left[ \frac{1,004 \text{ m}}{(2m-2)^2} \right]^{\beta} \cdot \frac{\nu \frac{2m}{z_1^m}}{z_1^m} \quad (\text{IV.44})$$

donde:  $\nu$  es la viscosidad cinemática de la atmósfera,  $\nu = 0.036 \text{ m}^2/\text{h.}$ ,  $z_1$  altura de referencia,  $u_1$  es la velocidad en el nivel  $z_1$  y  $m$  es el exponente de la expresión (III.30).



---+--- Noche del día 32

Figura IV.5: Variación de la velocidad del viento con la altura (expresión (III.30)).

Utilizando los datos de velocidad del viento del día 32 del Experimento Wangara (Clarke y otros, 1971), para  $t = 0$  (18 hs.), correspondientes a 0,5 m., 1 m., 2 m., 4 m., 8 m. y 16 m. de altura, se obtiene el perfil vertical del viento según expresión (III.30), siendo  $z_1 = 0,5$  metros, y  $u_1 = 1,89 \text{ m/s}$  (ver Figura IV.5). A partir de los datos se obtiene que  $m = 0,2086$ . Luego, reemplazando los valores en la expresión (IV.44), resulta  $a = 0,10497 \text{ m}^\alpha/\text{h}^\sigma$  (siendo los exponente de las unidades  $\alpha = 0,5538$  y  $\sigma = 0,3452$ ) y sustituyendo en (IV.30)  $\chi_a = 33,579 \text{ m}^\tau/\text{h.}$  ( $\tau = 1,2086$ ), luego  $K_a = 10919,9 \text{ cal/h}^\circ\text{K.m}^\phi$  (el valor del exponente  $\phi = -1,7914$ ).

Las constantes del suelo y el valor de radiación neta son los utilizados en IV.2.3.

En la Figura IV.6.(a) se muestra que el valor calculado por el modelo subestima el dato observacional, aunque en menor medida que los modelos anteriores. Las Figuras IV.6.(b) y IV.6.(c) presentan los perfiles de temperatura en el aire y en el suelo.

Los perfiles de temperatura graficados en Figura IV.6.(b) se aproxima mejor a la realidad que el de la Figura IV.4.(b), en donde se consideró un coeficiente de conductividad turbulenta constante con la altura.

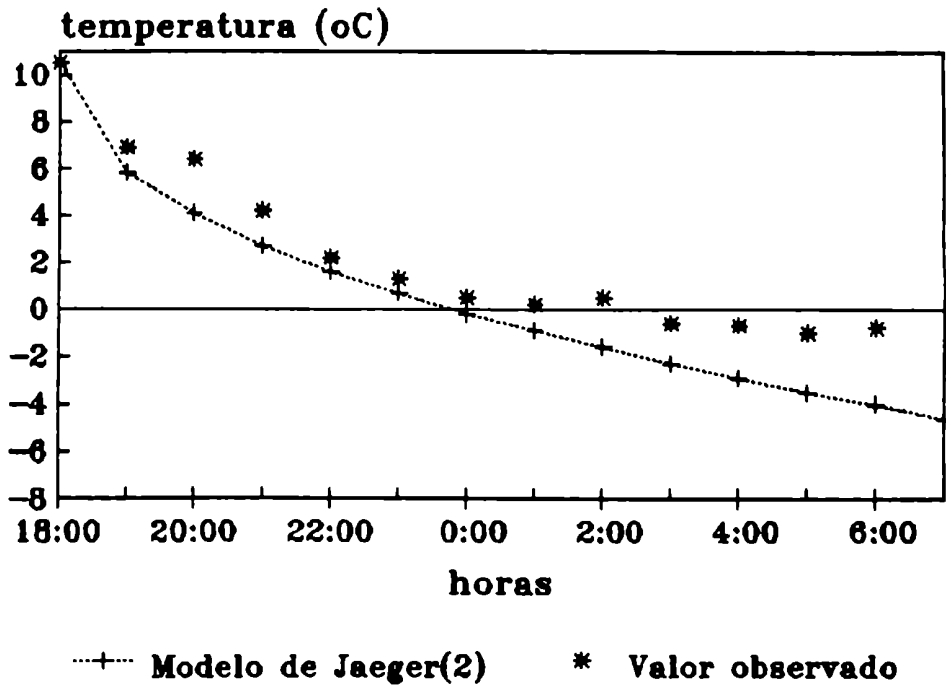


Figura IV.6.(a): Variación horaria de la temperatura en superficie.

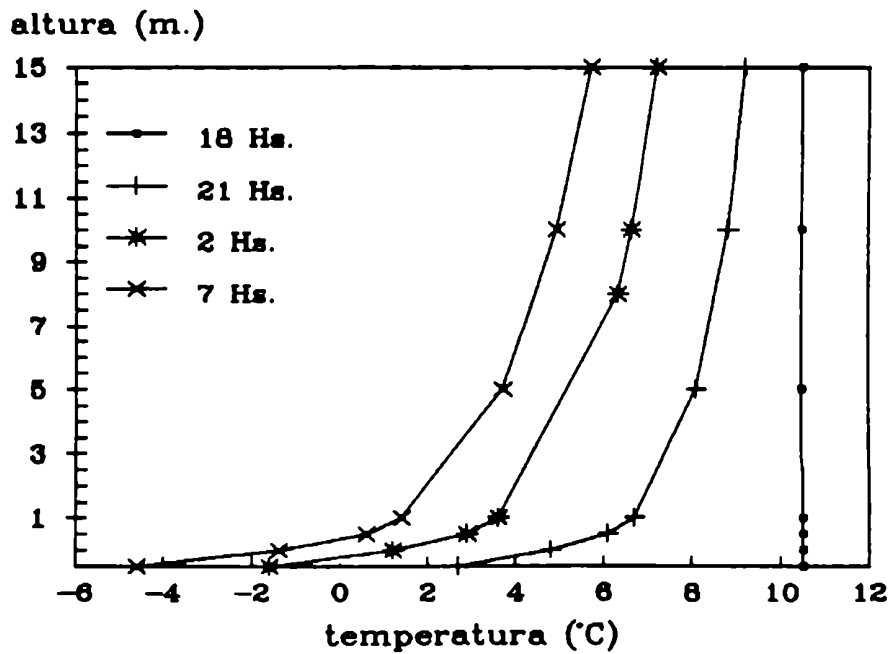


Figura IV.6.(b): Perfil de temperatura en el aire calculado mediante la expresión (IV.38).

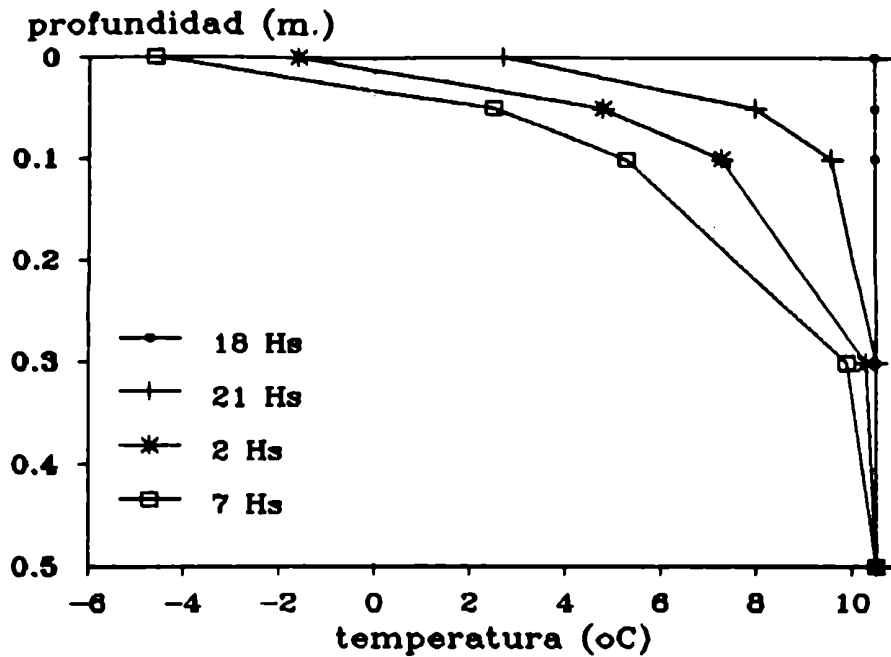


Figura IV.6.(c): Perfil de temperatura en el suelo calculado mediante la expresión (IV.39).

La expresión (IV.30) es obtenida por Sutton (1934) a partir de la definición de la longitud de mezcla y en similitud a lo que es el coeficiente turbulento de cantidad de movimiento. Si bien Reynolds sugirió que podría suponerse una igualdad para la cantidad de movimiento y el calor existen algunos aspectos en los que esta suposición puede cuestionarse. La cantidad de movimiento en un fluido puede transferirse mediante fuerzas de presión un mecanismo con el que no existe semejanza en la transferencia de calor. Esto puede ser muy importante en la transferencia vertical en un entorno muy estable, caso en el que las masas de fluido tiende a oscilar verticalmente, y por consiguiente, efectúan alguna transferencia de cantidad de movimiento mediante fuerzas de presión, pero sin mezclar las propiedades (Panofsky y Dutton, 1984).

#### IV.7. MODELO DE REUTER

##### IV.7.1. El modelo

El flujo de calor sensible desde el aire hacia la superficie en las expresiones usadas anteriormente es función del gradiente

de temperatura. Reuter (1951) modifica este término utilizando el gradiente isoentrópico. La temperatura del aire no se conserva cuando este se calienta y enfría adiabáticamente, pero se conserva la temperatura potencial, ( $\theta$ ), durante cualquier proceso adiabático y es probable que el calor se difunda por turbulencia de una manera similar a la transferencia de calor en un sólido.

Utilizando una aproximación de la temperatura potencial mediante la ecuación:

$$\Theta(z, t) = T(z, t) + \gamma_d \Delta z \quad (\text{IV.45})$$

$\gamma_d$  es el gradiente adiabático. Siendo esta expresión válida para pequeños apartamientos ( $\Delta z$ ), donde  $\theta$  es la temperatura que tendría una parcela de aire si es trasladada isoentrópicamente a un nivel  $z$ . En consecuencia, el transporte de calor debe adoptar la siguiente forma:

$$F_a = -\kappa_a \frac{\partial \Theta}{\partial z} = -\kappa_a \left( \frac{\partial T}{\partial z} + \gamma_d \right) \quad (\text{IV.46})$$

donde  $\kappa_a = \chi_a \rho_a C_p$

Reuter (1951) considera un coeficiente de difusividad turbulenta de calor para el aire constante. De esta manera, la ecuación de difusión de calor para el aire resulta:

$$\frac{\partial}{\partial t} T_a(z, t) = \chi_a \frac{\partial^2 T_a(z, t)}{\partial z^2} \quad ; z > 0 \quad t > 0 \quad (\text{IV.47})$$

La ecuación de difusión del calor en el suelo es la ecuación (IV.32).

Las condiciones iniciales son:

$$T_s(z, 0) = T_0 - \beta(-z) \quad ; z < 0 \quad t = 0 \quad (\text{IV.48})$$

donde  $T_0$  y  $\beta$  son la temperatura y gradiente de temperatura del suelo a la hora de la puesta del sol ( $t=0$ ).

$$T_a(z, 0) = T_0 - \gamma z \quad z > 0 \quad t = 0 \quad (\text{IV.49})$$

donde  $\gamma$  es el gradiente de temperatura de la atmósfera a la hora de la puesta del sol.

Las condiciones límites son:

- la ecuación de balance de calor se expresa de la siguiente forma:

$$F_n + \kappa_s \frac{\partial T_s}{\partial z} - \kappa_a \left( \frac{\partial T_a}{\partial z} + \gamma_d \right) = 0 \quad ; z = 0 \quad t > 0 \quad (\text{IV.50})$$

- por continuidad en la interfase suelo-atmósfera:

$$T_s(0, t) - T_a(0, t) \quad ; z = 0 \quad t > 0 \quad (\text{IV.51})$$

- para  $z$  suficientemente grande es:

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} = -\gamma \quad z \rightarrow \infty \quad t > 0 \quad (\text{IV.52})$$

$$\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} = -\beta \quad z \rightarrow \infty \quad t > 0 \quad (\text{IV.53})$$

Resolviendo las ecuaciones de difusión para el aire y el suelo con las condiciones enunciadas (ver Anexo VI) se obtiene para el aire:

$$T_a(z, t) = \frac{-2(F_n + \beta \kappa_s + (\gamma - \gamma_d) \kappa_a)}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}} + \kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ \exp(-\alpha) - z \sqrt{\frac{\pi}{4 \lambda_a t}} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}) \right] + T_o - \gamma z \quad (\text{IV.54})$$

donde:  $\alpha = \frac{z^2}{4 \lambda_a t}$  y  $\operatorname{erfc}$  es el complemento de la función error.

Para el suelo, es:

$$T_s(z, t) = \frac{-2(F_n + \beta \kappa_s + (\gamma - \gamma_d) \kappa_a)}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}} + \kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ \exp(-\alpha) - z \sqrt{\frac{\pi}{4 \lambda_s t}} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}) \right] + T_o - \beta z \quad (\text{IV.55})$$

donde:  $\alpha = \frac{z^2}{4 \lambda_s t}$ , considerando  $z > 0$ .

Cuando  $z = 0$ , queda:

$$T_s(0, t) = \frac{2(F_n + \beta \kappa_s + (\gamma - \gamma_d) \kappa_a)}{(\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}} + \kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}})} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + T_o \quad (\text{IV.56})$$

#### IV.7.2. Ejemplificación

El gradiente inicial (18 hs) en el aire, para el día 32, es  $\gamma = 0,004^\circ\text{C/m}$ . Las restantes variables intervinientes en el modelo son las consideradas en el punto IV.5.2. y el gradiente inicial en el suelo es el incluido en el punto IV.4.2.

En las Figuras IV.7.(a), IV.7.(b) y IV.7.(c) se muestran los perfiles respectivos. En este caso el modelo sobrestima el valor observado según se puede apreciar en la Figura IV.7.(a).

Geiger (1965) realizó el cálculo de la disminución de la temperatura mediante la ecuación (IV.56). Consideró un lapso de tiempo de 10 hs., correspondiente a un suelo arenoso y un coefi-



ciente turbulento de conductividad térmica en el aire ( $K_a$ ) del orden de  $2,4 \text{ cal/cm seg } ^\circ\text{C}$ ., con un gradiente inicial  $\gamma=0,01^\circ\text{C/m}$ . resulta un  $\Delta T(10 \text{ hs}) = 12,3 \text{ } ^\circ\text{C}$ . Mientras, con una inversión de  $\gamma=-0,03^\circ\text{C/m}$ . obtuvo  $\Delta T(10\text{hs})= 7,0^\circ\text{C}$ . Si el coeficiente turbulento ( $K_a$ ) es aproximado a  $0,24\text{cal/cm seg } ^\circ\text{C}$ , las disminuciones de temperatura para uno y otro gradiente son  $\Delta T(10 \text{ hs})=22,5^\circ\text{C}$ . y  $\Delta T(10\text{hs})=21,5^\circ\text{C}$ . Por lo tanto, si la mezcla turbulenta es intensa y existe una marcada inversión de temperatura se puede debilitar la caída de temperatura.

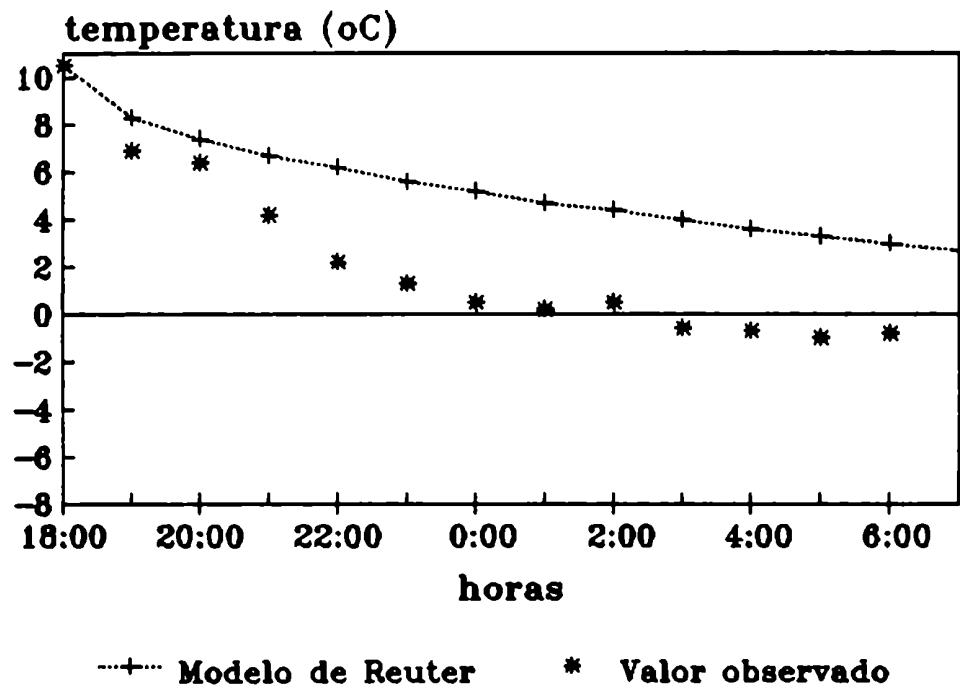


Figura IV.7.(a): Variación horaria de la temperatura en superficie.

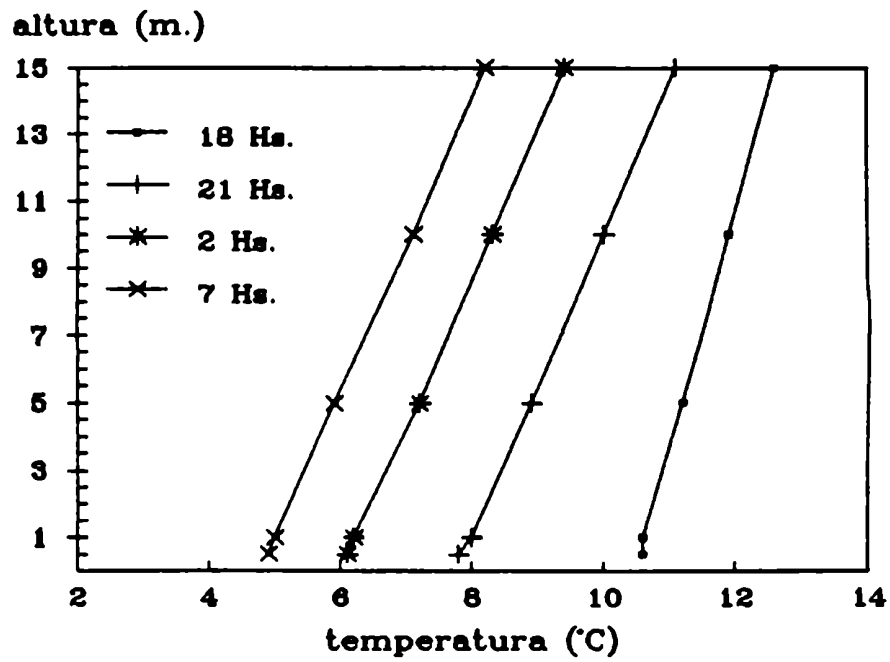


Figura IV.7.(b): Perfil de temperatura en el aire calculado mediante la expresión (IV.54).

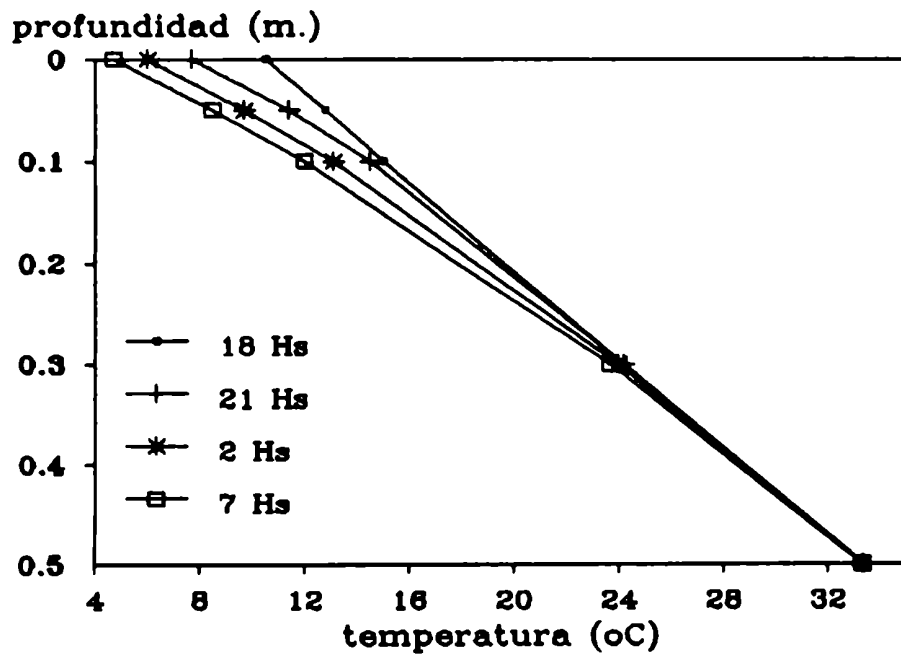


Figura IV.7.(c): Perfil de temperatura en el suelo calculado mediante la expresión (IV.55).

## IV.8. MODELO DE ANFOSSI

Anfossi y otros (1976) plantean un modelo teórico destinado a obtener la evolución de la distribución vertical de la temperatura del aire para las capas bajas de la atmósfera nocturna en condiciones de calma, siendo desarrollado a partir de una modificación de las condiciones límites del modelo clásico de Brünt (1941) (ver punto IV.2).

### IV.8.1. El modelo

Las suposiciones realizadas son:

- El coeficiente de difusividad térmica ( $\chi_a$ ) en la atmósfera es constante.

- La evolución de la altura ( $z_1$ ) de la capa límite estable sigue una ley parabólica con el tiempo:

$$z_1 = (4 \chi_a t)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{IV.57})$$

donde  $z_1$  es la altura en la cual  $\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ , o sea es la altura en la cual finaliza la inversión, y sería la capa influenciada por el enfriamiento en superficie.

- Por encima del nivel  $z_1$  el efecto radiativo de superficie se reduce en un valor pequeño. En el modelo se considera que el flujo de calor en  $z_1$  es nulo, por lo tanto se cumple:

$$f(z_1, t) = 0$$

- El modelo se aplica desde el momento en que la onda de temperatura diurna tiene su máximo valor. En ese momento la temperatura inicial del aire es:

$$T_a(z, 0) = -\gamma z + \text{cte} .$$

- Cerca de la superficie no hay condensación de vapor de agua.

- Es necesario que se presente una estratificación estable hasta el amanecer, prevaleciendo velocidades de viento que no excedan 7 m/seg. a 120 m. de altura y con poca nubosidad.

La expresión (IV.57) fue comprobada por observaciones reali-

zadas por Anfossi y otros (1974), en el Valle del Río Po (Italia) en noches favorables para el desarrollo de una inversión radiativa, en las cuales el valor medio aproximado de  $\chi_a$  es  $3 \times 10^3$  cm<sup>2</sup>/seg.

El flujo de calor (f) a través de un nivel z, en la atmósfera está definido por:

$$f(z, t) = \kappa_a \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} \quad (\text{IV.58})$$

donde  $\kappa_a$  es el coeficiente de conductividad térmica en el aire.

El modelo es planteado como la difusión de calor en el aire considerando la superficie terrestre hacia arriba, resultando "inverso" al propuesto por Brünt (1941).

La transferencia de calor en la atmósfera está dada por:

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \chi_a \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \quad (\text{IV.59})$$

la expresión (IV.58) satisface la ecuación (IV.59) resultando:

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = \chi_a \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial z^2} \quad (\text{IV.60})$$

Las condiciones límites son:

$$f(0, t) = f_0 = \text{cte} \quad (\text{IV.61})$$

$$f(z_1, t) = 0 \quad (\text{IV.62})$$

La condición inicial es:

$$f(z, 0) = -\gamma = \text{cte} \quad (\text{IV.63})$$

Resolviendo (IV.60) con las condiciones planteadas resulta (Anexo VII):

$$T(z, t) = T_0 - \frac{2f_0}{\kappa_a \Phi} \sqrt{\frac{\chi_a t}{\pi}} \left[ \exp\left[-\left(\frac{z}{z_1}\right)^2\right] - \frac{z\sqrt{\pi}}{z_1} \text{erfc}\left(\frac{z}{z_1}\right) + \frac{z\sqrt{\pi}}{z_1} \text{erfc}(1) \right] \quad (\text{IV.64})$$

donde  $\Phi = [1 - \text{erfc}(1)]$  y  $\text{erfc}$  es el complemento de la función error.

Cuando  $z = 0$  es:

$$T(0, t) = T_0 - \frac{2f_0}{\kappa_a [1 - \text{erfc}(1)]} \sqrt{\frac{\chi_a t}{\pi}} \quad (\text{IV.65})$$

#### IV.8.2. Ejemplificación

Los resultados presentados por Anfossi y otros (1985) muestran que  $f_0$ , en valores medios, despejado de la ecuación (IV.65), se aproxima en forma aceptable al flujo de calor en el suelo observado en el Experimento de Wangara.

Se consideró que el momento inicial coincide con las 15 horas para el día 32, del Experimento Wangara (Clarke y otros, 1971), siendo éste el momento en que comienza a disminuir la temperatura. Con el objeto de obtener el valor de  $F_s$ , se promediaron los valores del flujo de calor del suelo desde las 15 hs hasta 7 hs, resultando  $F_s = -27960 \text{ cal/h}^\circ\text{K m}^2$ .

El valor del coeficiente de difusividad en el aire fue estimado para el Experimento Wangara (ver Anfossi, 1989) en  $\chi_a = 1404 \text{ m}^2/\text{h}$ ., cuando se conoce la disminución de temperatura y de la expresión (IV.65). En las Figuras IV.8.(a) y IV.8.(b) se presentan los resultados obtenidos.

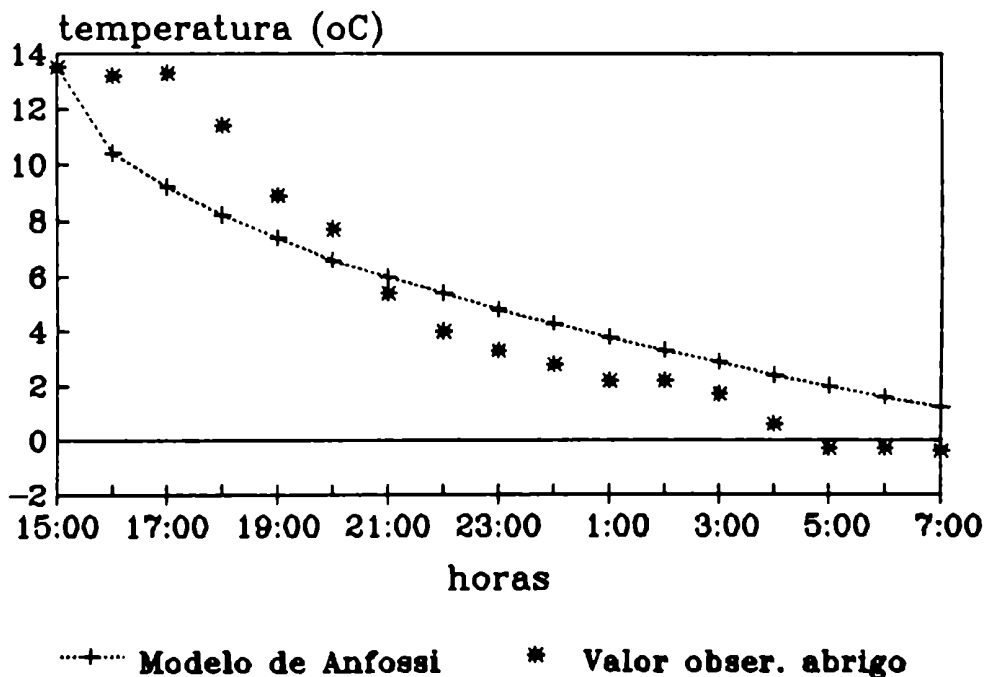


Figura IV.8.(a): Variación horaria de la temperatura en el abrigo meteorológico.

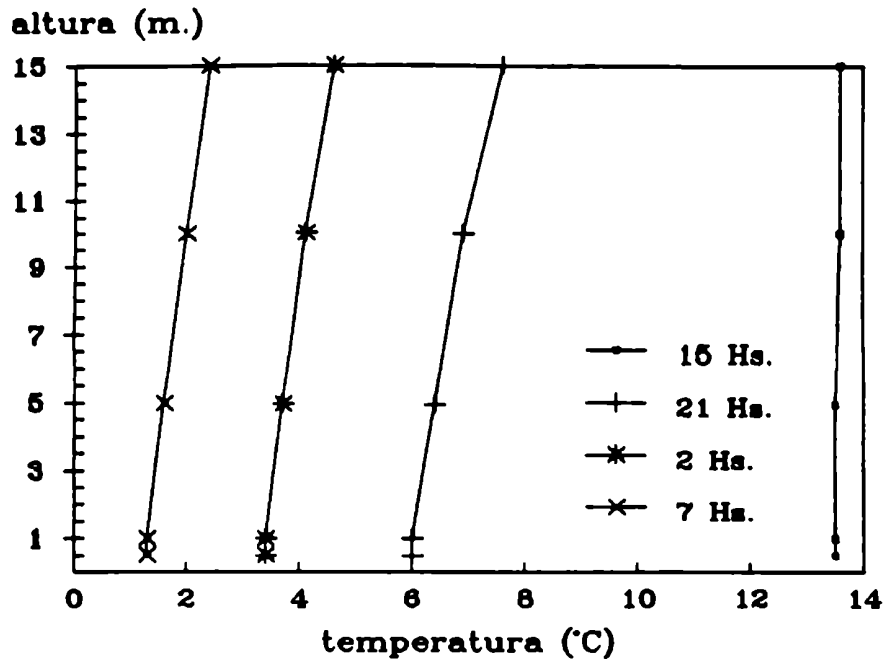


Figura IV.8.(b): Perfil de la temperatura en el aire calculado mediante la expresión (IV.64).

La disminución de la temperatura estimada por el modelo presenta una buena coincidencia con la temperatura observada a la altura del abrigo y no en superficie (Figura IV.8.(a)) (ver Anfossi, 1989).

Los autores encuentran que el coeficiente de correlación entre la velocidad del viento a 100 m. de altura y el coeficiente de difusividad turbulenta del aire  $\chi_a$  fue aproximadamente cero. Anfossi (1989) concluye que este modelo reproduce bien los perfiles medios de temperatura del experimento Wangara, especialmente en la parte superior del perfil.

#### IV.9. ANALISIS DE LOS MODELOS PRESENTADOS

Los modelos presentados en este Capítulo fueron desarrollados a partir de la teoría del flujo gradiente (o teoría "K") con parámetros de entrada accesibles y de fácil ejecución.

El modelo teórico desarrollado por Brünt (1941) supone que el déficit de radiación neta en superficie es balanceado sólo por el flujo de calor del suelo, estableciéndose este equilibrio

después de la puesta del sol. Este planteo conduce a una disminución pronunciada de la temperatura en superficie. Luego de transcurridas las primeras horas la caída de la temperatura es amortiguada por el aporte de calor sensible, lo cual no es considerado en el modelo de Brünt (1941) y tampoco en el modelo de Gröen (1947).

El modelo de Gröen (1947) propone una caída nocturna de  $F_n$  en función de la  $T_s$  (temperatura de superficie). Si bien esta situación se presenta en las primeras horas después de la puesta del sol (ver Figuras IX.1 y IX.2), luego  $F_n$  toma un valor constante a través de la noche en condiciones de enfriamiento radiativo y en latitudes medias.

El gradiente vertical inicial de temperatura del suelo incluido en el modelo de Gröen modificado puede mejorar los resultados.

El modelo de Jaeger (1945) contempla el aporte de calor sensible hacia la superficie considerando un coeficiente turbulento de difusividad térmica constante con la altura.

El transporte turbulento de calor y el enfriamiento radiativo interactúan en el desarrollo de la inversión nocturna de superficie (ver André y Mahrt, 1982). Mientras, el flujo radiativo afecta a toda la capa de inversión, el transporte turbulento de calor es mayor en superficie que en el tope de la capa límite estable (ver Stull, 1989). André y Mahrt (1982) infieren que una curvatura fuertemente negativa del perfil de temperatura es esperada en los casos en que la capa de inversión es dominada por el enfriamiento radiativo. Con turbulencia fuerte es esperado una curvatura positiva en asociación con la formación de una capa límite bien mezclada.

Considerar un coeficiente difusividad térmica constante con la altura define un gradiente vertical de temperatura casi constante en la capa baja de la atmósfera (ver Figura IV.4.(b)). De esta manera, la capa estaría afectada por el mismo transporte turbulento, condición que no se presenta siempre en noches de enfriamiento radiativo.

Plantear un coeficiente turbulento variable con la altura (ver Figura IV.6.(b)) permite la homogeneidad en las capas superiores y las capas bajas estarían afectadas por la mezcla turbulenta, por lo que se observaría una curvatura del perfil de temperatura vertical fuertemente negativo. El coeficiente turbulento planteado por Jaeger (1945) (ecuación (IV.29)) no parece ser el más adecuado. Actualmente, es posible plantear otros coe-

ficientes de difusividad térmica en el aire como el presentado por Rao y Snodgrass (1979) o el desarrollado en este trabajo.

El modelo de Anfossi (1976) define la altura de la inversión de temperatura ( $z_1$ ) (ecuación (IV.57)). Esto es criticado por Surridge (1979) (citado por Surridge, 1986 (B)) quien registra por medio de sondeo acústico que el tope de la inversión generalmente no aumenta durante la noche con la raíz cuadrada del tiempo.

Luego de la hora de la puesta del sol existe un estado de transición en la atmósfera hasta que esta alcanza el equilibrio. Correr un modelo en un momento de transición donde los parámetros no alcanzan un estado de casi estacionalidad puede llevar a resultados errores y a una mala determinación de los valores iniciales.

Plantear medios semi-infinitos pareciera no ser estrictamente adecuado. La dificultad de determinar previamente la altura de la capa lo justificaría. Por otra parte, Pasquill (1943) ha mostrado que la teoría de difusión atmosférica de vapor de agua y calor en una región semi-infinita tiene una buena coincide con la experimentación.



## CAPITULO V

### LA CAPA LIMITE PLANETARIA DE LA ATMOSFERA

#### V.1. GENERALIDADES

La tropósfera se extiende desde la superficie terrestre hasta aproximadamente 11 km. de altura pero solamente los primeros kilómetros cercanos al suelo son afectados por la superficie.

Stull (1989) define la capa límite planetaria (CLP) como aquella parte de la tropósfera que está influenciada directamente por la presencia de la superficie terrestre y responde a los forzantes con escala de tiempo de aproximadamente una hora o menos. Estos forzantes incluyen la fricción, la evaporación, la transpiración, la transferencia de calor, la emisión de contaminantes y el transporte de cantidad de movimiento.

La altura de la CLP varía con el tiempo y el espacio. La turbulencia es uno de los procesos importantes que influyen en los transportes de propiedades y a veces, es utilizada para definir la capa límite planetaria. Por encima de la CLP se encuentra la atmósfera libre donde la fricción es despreciable y es válido el balance geostrofico.

Durante el día, la capa límite planetaria puede alcanzar alturas comprendidas entre 1 y 2 km. y es típicamente turbulenta. En la noche con vientos débiles, el espesor de la capa turbulenta puede ser menor que 100 m. La influencia del enfriamiento, generalmente, alcanza alturas mayores pero el mecanismo de este enfriamiento es la radiación infrarroja, no los procesos turbulentos.

En condiciones ventosas, particularmente, con mucha nubosidad, la capa límite planetaria es completamente turbulenta y su altura está determinada por la velocidad del viento y la rugosidad del terreno. Generalmente, se define la altura de la capa límite planetaria como el espesor de la capa en donde las propiedades atmosféricas están bien mezcladas.

La capa límite planetaria, especialmente en días con presión

alta en superficie, tiene una estructura bien definida, y se pueden distinguir la capa de mezcla, la capa residual y la capa límite estable. Cuando nubosidad en la capa de mezcla ésta se subdivide en una subcapa nubosa.

La capa de superficie es la región inferior de la capa límite planetaria donde los flujos turbulentos y las tensiones turbulentas varían menos que el 10% de su magnitud en superficie. En algunos casos, el 10% de la capa límite es denominada capa de superficie, a pesar que ésta forma parte de una capa de mezcla ó de la capa límite estable. También, una delgada capa es identificada a pocos centímetros de la superficie terrestre donde el transporte molecular domina sobre el turbulento.

La capa de mezcla está caracterizada por una mezcla intensa en condiciones estáticamente inestables, donde las corrientes térmicas de aire caliente se elevan desde superficie. La capa de mezcla alcanza su máximo espesor al finalizar la tarde. La turbulencia tiende a mezclar verticalmente en forma uniforme el calor, el vapor de agua y la cantidad de movimiento. En el tope de la capa de mezcla existe una capa estable que actúa como techo, reteniendo la turbulencia dominante.

Aproximadamente media hora antes de la puesta del sol las térmicas cesan y comienza a disminuir la turbulencia. La resultante es la denominada capa residual. La capa residual es de estratificación neutral y la turbulencia tiene igual intensidad en todas las direcciones. El ritmo de enfriamiento es más o menos uniforme en esta capa y el perfil vertical de la temperatura potencial es casi adiabático. La capa residual no tiene contacto directo con la superficie terrestre. Durante la noche, la altura de la capa estable crece gradualmente modificando la parte inferior de la capa residual. De esta manera, la capa residual no es afectada por el transporte turbulento que se desarrolla desde superficie (Stull, 1989).

En la noche, una inversión térmica se extiende desde superficie pues la tierra se enfría marcadamente por radiación infrarroja desarrollándose una capa límite estable. En noches con vientos fuertes, aparecen mecanismos turbulentos y el calor es cedido a la superficie por mezcla turbulenta en toda la capa límite. En noches despejadas y con vientos débiles, solamente la parte inferior de la capa límite es turbulenta, la porción superior es enfriada por divergencia del flujo de radiación infrarroja.

## V.2. CARACTERISTICAS DE LA CAPA LIMITE ESTABLE NOCTURNA

En la capa límite estable nocturna, la velocidad del viento a nivel de la superficie terrestre es frecuentemente débil o nula, y en altura la velocidad puede acelerarse desarrollándose un "jet" nocturno. El aire estáticamente estable tiende a suprimir la turbulencia, mientras el desarrollo nocturno del "jet" tiende a generar turbulencia. A menos que el enfriamiento de la superficie terrestre sea excesivo, en la zona del "jet" se crea turbulencia y el aire es volcado, produciendo en altura un enfriamiento y un calentamiento cerca de superficie. Esto, también, causa una generación de movimientos turbulentos cerca de superficie. La turbulencia reduce ambos, el "jet" y el gradiente vertical de temperatura. Luego, la turbulencia gradualmente desaparece y el aire cerca de la superficie terrestre se enfría nuevamente, la velocidad del viento en altura puede aumentar y el vuelco de la turbulencia puede repetirse.

Por otra parte, cerca de la superficie existe un flujo de aire que drena. Estos vientos son causados por el aire frío adyacente a la superficie que fluye corriente abajo de una colina por influencia de la gravedad.

La mayor estabilidad se encuentra cerca de superficie y decrece con la altura tendiendo a la neutralidad. Por lo tanto, con suficiente estabilidad cerca de la superficie se origina una inversión de temperatura. En noches despejadas con vientos débiles, la parte inferior de la capa de inversión es continuamente turbulenta, siendo ésta la región en la cual el número de Richardson tiene un valor menor que el crítico ( $R_{10} = 0.25$ ). Esta es la capa en la cual los contaminantes son mezclados y el tope puede ser detectado por sondeo acústico. El tope de la capa de inversión es, algunas veces, tomado como el tope de la capa límite planetaria, pero la altura de la inversión ( $z_1$ ) puede ser mucho mayor que la altura de la capa de mezcla. Mahrt (1983) ha realizado una recopilación de trabajos sobre este tema.

Mahrt y otros (1979) reconocen tres capas dentro de la parte de la atmósfera enfriada durante la noche. En la parte inferior de la inversión de superficie se encuentra una capa de mezcla de espesor  $h$ , donde el enfriamiento es debido a la turbulencia. Por encima de ésta hay una región sin turbulencia o con una turbulencia intermitente en la cual el calor es transferido principalmente por radiación. Más arriba existe una delgada capa turbulen-

ta que es dominada por la cortante de viento. Esta estructura de tres capas ha sido modelada por André y otros (1978).

El enfriamiento radiativo se extiende desde la inversión de superficie a niveles más altos que la capa turbulenta, siendo ésta una región sin turbulencia con un enfriamiento radiativo máximo cerca del tope de la capa de inversión. Esto, no sólo actúa para profundizar en un futuro la altura de la capa de inversión sino que también reduce la estratificación. Consecuentemente, la inversión se profundiza en el transcurso de la noche, aunque la altura de la capa turbulenta no presenta esa tendencia. La estratificación es más débil en la capa de enfriamiento radiativo que en la capa turbulenta (André y Mahrt, 1982)

Con un modelo de clausura de segundo orden André y otros (1978) determinaron los flujos turbulento y radiativo, comparando los resultados con datos del proyecto Wangara (Clarke y otros, 1971) para una noche en particular. El resultado que obtienen es interesante en cuanto a que durante la noche el transporte turbulento es más importante que el radiativo en las capas bajas (aproximadamente en los primeros 100 m). El transporte turbulento es inhibido por encima de esta altura donde un perfil térmico estable se desarrolla demasiado rápidamente y es muy fuerte impidiendo una propagación vertical de la turbulencia generada en superficie (ver Figura V.1). Este resultado coincide con otros (ver por ejemplo Wyngaard, 1975) para condiciones nocturnas estables.

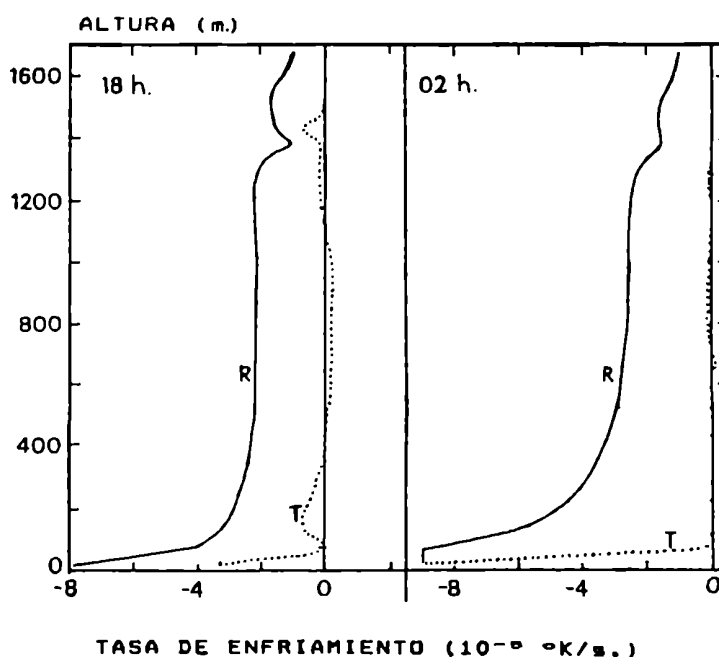


Figura V.1: Calentamiento de la capa límite planetaria (André y otros, 1978). A las 18 h. y 02 h. durante la noche 33-34 del proyecto Wangara (R es la transferencia radiativa; T es el transporte turbulento).

### V.3 CARACTERISTICAS DE LA CAPA DE SUPERFICIE

La capa de superficie es la porción más baja de la capa límite planetaria. Cualitativamente, la capa de superficie es aquella parte de la capa límite ubicada por encima de la superficie terrestre, donde la variación vertical de los flujos turbulentos puede ser despreciada. Por lo tanto, los flujos de cantidad de movimiento, de calor y de vapor de agua generalmente son considerados constantes en esta capa. Aunque en realidad existe una variación de los flujos con la altura, se tolera hasta el 10%.

Una de las derivaciones de la constancia del flujo de cantidad de movimiento es que la dirección del viento no varía con la altura. Además, las variables medias son sólo función de la altura sobre un terreno homogéneo.

Los forzantes mecánico y térmico influyen sobre la turbulencia y, por lo tanto sobre la variación vertical de las variables medias. Monin y Obukhov (1954) mediante la teoría de la semejanza superponen el efecto de estos dos forzantes, en condiciones de estacionalidad y homogeneidad horizontal. Para ello, introducen parámetros de escala independientes de la altura en la capa de superficie. Estos parámetros son:

- la velocidad de fricción:

$$u_* = \sqrt{\frac{\tau_0}{\rho}} \quad (V.1)$$

donde  $\tau_0$  es la tensión de la cortante en superficie,  $\rho$  es la densidad del aire.

- la escala de temperatura o temperatura característica:

$$T_* = \frac{F_a}{C_p \rho u_*} \quad (V.2)$$

donde  $F_a$  es el flujo de calor sensible,  $C_p$  es el calor específico del aire a presión constante.

- la escala de longitud:

$$L = \frac{u_*^2 \bar{T}}{k g T_*} \quad (V.3)$$

donde  $k$  es la constante de von-Karman,  $g$  es la constante de gravedad y  $\bar{T}$  la temperatura media de la capa.

Durante el día, la relación  $z/L$  representa la importancia relativa de la convección térmica y de la turbulencia mecánica, mientras, que durante la noche  $z/L$  describe la importancia relativa del amortiguamiento de los mecanismos turbulentos por la estratificación del aire:

- $z/L \ll 0$  existe predominancia de la convección térmica,
- $z/L < 0$  domina la turbulencia mecánica,
- $z/L = 0$  sólo existe turbulencia mecánica,
- $z/L > 0$  hay turbulencia mecánica levemente amortiguada por la estratificación térmica,
- $z/L \gg 0$  existe turbulencia mecánica fuertemente reducida por la estratificación térmica.

Cerca de la superficie, donde la atmósfera responde rápidamente a las variaciones de las propiedades de la superficie, es aplicable la teoría de la semejanza, y los gradientes verticales de las magnitudes físicas son funciones solamente de la altura,  $z$ , y de  $z/L$ . Los gradientes verticales adimensionales de la velocidad del viento y la temperatura del aire pueden ser escritos de las siguientes formas (Monin y Obukhov, 1954):

$$\frac{k z}{u_*} \frac{\partial \bar{U}}{\partial z} = \Phi_M \left( \frac{z}{L} \right) \quad (V.4)$$

$$\frac{k z}{T_*} \frac{\partial \bar{T}}{\partial z} = \Phi_H \left( \frac{z}{L} \right) \quad (V.5)$$

donde:  $\Phi_M$  y  $\Phi_H$  son perfiles adimensionales y universales y son funciones de  $z/L$ , correspondientes a la cantidad de movimiento y al calor. Las formas funcionales de los perfiles adimensionales utilizados en este trabajo son los propuestos por Businger (1971):

$$\Phi_H = 0,74 + 4,7 \frac{z}{L} ; \frac{z}{L} > 0 \quad (V.6)$$

$$\Phi_H = 0,74 \left(1 - 9 \frac{z}{L}\right)^{-\frac{1}{2}} ; \frac{z}{L} < 0 \quad (V.7)$$

$$\Phi_H = 1 + 4,7 \frac{z}{L} \quad \frac{z}{L} > 0 \quad (V.8)$$

$$\Phi_H = \left[1 - 15 \frac{z}{L}\right]^{-\frac{1}{2}} \quad \frac{z}{L} < 0 \quad (V.9)$$

con un valor de la constante de von Karman ( $k=0,35$ ).

Introduciendo (V.6) a (V.9) en (V.4) y (V.5) e integrando desde  $z_0$  (la longitud de rugosidad) hasta un nivel  $z$ , se obtienen:

$$u(z) = \frac{u_*}{k} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) - \Psi_H \left( \frac{z}{L} \right) + \Psi_H \left( \frac{z_0}{L} \right) \right] \quad (V.10)$$

$$T(z) - T(z_0) = R \frac{T_*}{k} \left[ \ln \left( \frac{z}{z_0} \right) - \Psi_H \left( \frac{z}{L} \right) + \Psi_H \left( \frac{z_0}{L} \right) \right] \quad (V.11)$$

donde  $R = 0,74$ .

Utilizando las funciones propuestas por Businger (1971), Paulson (1970) y Barker y Baxter (1975) obtuvieron las siguientes formas de las funciones ( $\Psi$ ):

$$\Psi_H \left( \frac{z}{L} \right) = \ln \left[ \left( \frac{1+x}{2} \right)^2 \left( \frac{1+x^2}{2} \right) \right] - 2 \operatorname{arctg} x + \frac{\pi}{2} , \quad \frac{z}{L} < 0 \quad (V.12)$$

con  $x = \left(1 - 15 \frac{z}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\Psi_H \left( \frac{z}{L} \right) = -4,7 \frac{z}{L} \quad \frac{z}{L} > 0 \quad (V.13)$$

$$\Psi_H \left( \frac{z}{L} \right) = 2 \cdot \ln \left( \frac{1+y}{2} \right) ; \quad \frac{z}{L} < 0 \quad (V.14)$$

con  $y = \left(1 - 9 \frac{z}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$

$$\Psi_H \left( \frac{z}{L} \right) = -\frac{4,7}{R} \frac{z}{L} \quad \frac{z}{L} > 0 \quad (V.15)$$

Los términos que incluyen las funciones  $\Psi$  representan la corrección debida a la estabilidad atmosférica. Debido a que el espesor de la capa de superficie, decrece en general, con el aumento de la estabilidad atmosférica, las relaciones de los perfiles sólo serían válidos para alturas inferiores a L.

La capa de superficie real se aparta de las condiciones de Monin-Obukhov, cuando existen cambios en las condiciones límites, en la homogeneidad horizontal, por efecto de la radiación y por cambios en la rugosidad de superficie.



## CAPITULO VI

### EL MODELO PROPUESTO

#### VI.1. INTRODUCCION

Los modelos determinísticos destinados a la evaluación de la disminución nocturna de la temperatura desarrollados utilizando la aproximación de Brünt (1941) han aportado una mejor comprensión al proceso del enfriamiento radiativo que se genera durante la noche (ver Capítulo IV).

El suelo desempeña el principal rol en la disminución de la temperatura de superficie dependiendo de su naturaleza y de su estado, tal como lo planteó Brünt (1941). Pero, además existe un aporte de calor sensible desde el aire hacia la superficie terrestre. En la capa más baja de la atmósfera ese transporte de calor se efectúa en forma turbulenta (ver Capítulo V). La suposición de un coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire constante no parece real (Sutton, 1977). En este modelo se propone la siguiente variación potencial del coeficiente turbulento de difusividad con la altura (ver Capítulo VII):

$$\chi_h = \chi_a z^m \quad (\text{VI.1})$$

donde  $m$  es un factor que depende de la estabilidad de la atmósfera ( $m < 1$  en condiciones de inversión de temperatura);  $\chi_h$  es el coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire,  $\chi_a$  es el coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire a 1 m. de altura. Esta variación difiere de la propuesta por Jaeger (1947) pues no se obtiene de la cortante de viento, sino utilizando el perfil de temperatura (ver Capítulo IX).

Las Figuras IX.1 a IX.3 del Capítulo IX muestran la evolución del flujo de radiación neta en superficie durante las noches correspondientes a los días del experimento "Wangara" (Clarke, 1971) y "Great Plains" (Lettau y Davidson, 1957). En general, se encuentra que en horas posteriores a la puesta del sol y en condiciones de vientos débiles existe una casi constancia del flujo

de radiación neta,  $F_n$  (ver Capítulo VII). La condición de variación temporal de  $F_n$  en el modelo de Gröen (1947) muestra que los resultados no presentan una diferencia significativa con respecto a los del modelo de Brünt donde  $F_n$  es constante (ver Capítulo IV).

El aumento de la temperatura luego de la ocurrencia de la temperatura mínima es de importancia en cuanto permitiría conocer cuanto tiempo la planta podría estar sometida a bajas temperaturas. Luego de la salida del sol hay un incremento aproximadamente lineal de  $F_n$ , durante un período no superior a las 2 horas. Este parámetro es el de mayor peso en el aumento de la temperatura, por lo que se propone una variación lineal del flujo de radiación neta después de la salida del sol.

En la Figura VI.1, se presentan esquemas de las direcciones de los flujos de calor en la interfase suelo-atmósfera durante la noche y después de la salida del sol. En el modelo no se tiene en cuenta el flujo de vapor de agua.

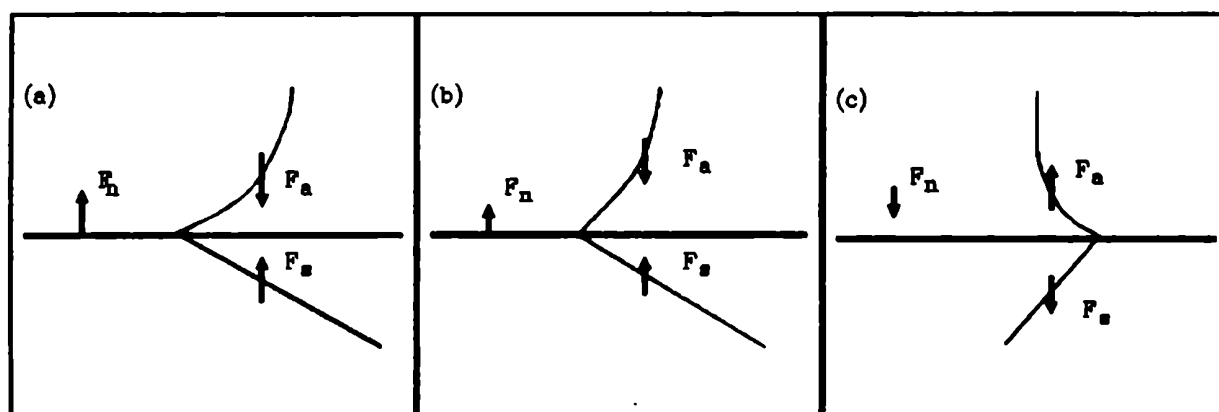


Figura VI.1: Esquemas de las direcciones de los flujos de calor en la interfase suelo-atmósfera: (a)  $F_n(0,t) = cte.$  ; (b)  $F_n(0,t) = variable < 0$ ; (c)  $F_n(0,t) = variable > 0$  ( $F_n$  es el flujo neto de radiación;  $F_s$  es el flujo de calor en el suelo;  $F_a$  es el flujo de calor sensible en el aire ).

La situación (a) describe la dirección de los flujos desde  $t > 0$ , cuando  $F_n(0,t)$  tiene un valor constante y con signo negativo, hasta el momento que éste deja de serlo ( $t_a$ ).

La situación (b): donde  $F_n(0,t)$  deja de ser constante, pero mantiene la misma dirección que en la situación (b). Es el momento en el cual sale el sol y existe un flujo de radiación de onda corta que disminuye el valor negativo de  $F_n(0,t)$ . Se plantea un

incremento lineal con el tiempo del siguiente tipo:

$$F_n(0, t) = a t - b \quad \text{con } F_n(0, t) < 0 \quad t_a < t \leq t_b \quad (\text{VI.2})$$

donde:  $t_b = \frac{b}{a}$ , a y b son constantes.

La situación (c): es el momento a partir del cual  $F_n$  es positivo, pues el flujo neto de radiación de onda corta supera el flujo neto de radiación de onda larga y se plantea que:

$$F_n(0, t) = a t - b \quad \text{con } F_n(0, t) > 0 \quad t > t_b \quad (\text{VI.3})$$

En este modelo se propone un perfil inicial de temperatura en el suelo. Esto también fue considerado por Gröen (1947) y Reuter (1951) (ver Capítulo IV). Esta condición inicial en el suelo es más real que plantear un gradiente isotérmico.

Como condición inicial en el aire se considerará una isoterμία, un gradiente térmico en el aire generaría una sobrestimación de los valores.

El objeto es obtener una solución analítica de las ecuaciones de difusión de calor en dos medios semi-infinitos, el aire y el suelo, con condiciones iniciales y límites adecuadas

## VI.2. LA ECUACION DE DIFUSION DE CALOR EN EL AIRE

Se reemplaza la expresión (VI.1) en la ecuación (III.12), considerando advección nula y como el proceso de mezcla vertical turbulenta tiene mayor importancia que en las otras direcciones, la ecuación de difusión de calor en el aire resulta:

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \chi_a z \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} \right] \quad (\text{VI.4})$$

donde:  $T_a$  es la temperatura del aire, t es el tiempo y z es la altura.

## VI.3. EL FLUJO TURBULENTO DE CALOR EN EL AIRE

El flujo turbulento de calor en el aire está dado por la expresión (III.26) con el coeficiente turbulento de difusividad

térmica expresado por (VI.1), resulta:

$$F_a(z, t) = -\chi_a \rho_a C_p z \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} \quad (\text{VI.5})$$

Definiendo:

$$\kappa_h = \kappa_a z \quad \text{con} \quad \kappa_a = \chi_a \rho_a C_p \quad (\text{VI.6})$$

donde  $\kappa_h$  es el coeficiente turbulento de conductividad térmica en el aire,  $C_p$  es el calor específico del aire a presión constante y  $\rho_a$  es la densidad del aire, la ecuación (VI.5) se puede escribir:

$$F_a(z, t) = -\kappa_a z \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} \quad (\text{VI.7})$$

#### VI.4. LA ECUACION DE DIFUSION DE CALOR EN EL SUELO

Si  $\chi_s$  es el coeficiente de difusividad térmica en el suelo, constante con la profundidad, la ecuación de difusión de calor en el suelo es:

$$\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial t} = \chi_s \frac{\partial^2 T_s(z, t)}{\partial z^2} \quad (\text{VI.8})$$

donde:  $T_s$  es la temperatura del suelo.

#### VI.5. EL FLUJO DE CALOR EN EL SUELO

El flujo de calor en el suelo está dado por (III.27). Si se define  $\kappa_s$  como el coeficiente de conductividad térmica en el suelo, donde  $\kappa_s = (\rho_s C_s)_m \chi_s$ ;  $(\rho_s C_s)_m$  es la capacidad de calor del suelo por unidad de volumen ( $\rho_s$  es la densidad del suelo,  $C_s$  calor específico del suelo) resulta:

$$F_s(z, t) = \kappa_s \frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} \quad z < 0 \quad (\text{VI.9})$$

## VI.6. CONDICIONES INICIALES

Se considera el siguiente perfil de temperatura inicial en el suelo:

$$T_s(z, 0) = T_0 + \beta z \quad z \leq 0 \quad (\text{VI.10})$$

donde:  $\beta$  es el gradiente inicial de temperatura en el suelo.

La condición de isoterμία en el aire está representada por:

$$T_a(z, 0) = T_0 \quad z \geq 0 \quad (\text{VI.11})$$

donde:  $T_0$  es la temperatura en  $z = 0$  y  $t = 0$ .

## VI.7. CONDICIONES LIMITES

Las condiciones límites está dada por la ecuación de balance de calor (ecuación (III.29)) en superficie en la noche. Considerando que el flujo turbulento de calor latente ( $F_l$ ) es despreciable, resulta:

$$F_n + F_a + F_s = 0$$

En lo sucesivo se escribirá, por simplificación,  $F_n$  en lugar de  $F_n(z, t)$ .

Teniendo en cuenta la dirección de los flujos y las expresiones (IV.7) y (IV.9) para cada momento la ecuación de balance en superficie ( $z = 0$ ) resulta:

con  $F_n = \text{cte}$  (situación (a)) es:

$$-F_n + \kappa_a z = \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} - \kappa_s \frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} = 0 \quad 0 < t \leq t_a \quad (\text{VI.12})$$

con (VI.2) (situación (b)) queda:

$$a t - b + \kappa_a z = \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} - \kappa_s \frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} = 0 \quad t_a < t \leq t_b \quad (\text{VI.13})$$

con (VI.3) (situación (c)) resulta:

$$-a t + b + \kappa_a z = \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} - \kappa_s \frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} = 0 \quad t > t_b \quad (\text{VI.14})$$

La segunda condición límite es la condición de continuidad de la temperatura entre los dos medios (el aire y el suelo) en superficie ( $z=0$ ), para toda la noche:

$$T_a(0, t) - T_s(0, t) = 0 \quad t \geq 0 \quad (\text{VI.15})$$

Será considerado el límite para  $z \rightarrow \infty$  (en el aire), tal que es el tope de la inversión de temperatura de superficie, donde el flujo de calor es nulo:

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} = 0 \quad z \rightarrow \infty, \quad t > 0 \quad (\text{VI.16})$$

La condición límite en  $z \rightarrow -\infty$ , en el suelo, es que el gradiente de temperatura se adapta al gradiente inicial, condición que se cumple pues el enfriamiento ocurre sólo en la capa próxima a superficie. Entonces, resulta:

$$\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} = \beta \quad z \rightarrow -\infty, \quad t > 0 \quad (\text{VI.17})$$

donde  $\beta$  es el gradiente de temperatura inicial en el suelo.

## VI.7. DESARROLLO DEL MODELO

Se aplica la metodología presentada en el Apéndice 2. Los pasos a seguir son los siguientes:

1er. PASO: Aplicación de la Transformada de Laplace a la expresión (VI.4).

Primero, se desarrollan las derivadas de la ecuación (VI.4) resultando:

$$\lambda_a m z^{-1} \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} + \lambda_a z = \frac{\partial^2 T_a(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial t}$$

Luego, se aplica la Transformada de Laplace de acuerdo con lo definido en el Apéndice 1 (ver (a1-1)):

$$\chi_a m z^{m-1} \mathcal{L} \left[ \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} \right] + \chi_a z^m \mathcal{L} \left[ \frac{\partial^2 T_a(z, t)}{\partial z^2} \right] - \mathcal{L} \left[ \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial t} \right]$$

utilizando las propiedades (a1-5) y (a1-6) y la condición (VI.11) queda:

$$\theta_a''(z, p) + \frac{m}{z} \theta_a'(z, p) - \frac{p}{\chi_a} z^{-m} \theta_a(z, p) = -\frac{T_o}{\chi_a} z^{-m} \quad (VI.18)$$

Donde  $\theta_a(z, p)$  es la Transformada de la temperatura del aire y  $\theta_a'(z, p)$  su derivada con respecto a  $z$  (ver Apéndice 1).

**2do. PASO:** Resolución de la ecuación diferencial de segundo orden (VI.18) según la metodología presentada en el Apéndice 2.

La expresión (VI.18) es una Ecuación tipo Bessel. La solución de la ecuación homogénea de (VI.18) son las funciones modificadas de Bessel (ver Apéndice 2)

$$\theta_a(z, p) = A z^{\frac{1-m}{2}} K_\nu(Y) + B z^{\frac{1-m}{2}} I_\nu(Y)$$

donde:

$$Y = \frac{2 q_a z^{\frac{2-m}{2}}}{2^{-m}} \quad \nu = \frac{1-m}{2} \quad q_a = \sqrt{\frac{p}{\chi_a}}$$

$I_\nu(Y)$  y  $K_\nu(Y)$  son las funciones modificadas de Bessel de primer y segunda clase, de orden  $\nu$  y argumento  $Y$ ;  $A$  y  $B$  son constantes a determinar.

Obtención de la solución particular de (VI.18). Se propone la siguiente solución  $\theta_{aP}(z, p) = a = \text{constante}$ . Aplicando esta a (VI.18) resulta:

$$a = \frac{T_o}{p}$$

La solución general de (VI.18) es (homogénea más particular):

$$\theta_a(z, p) = A z^{\frac{1-m}{2}} K_\nu(Y) + B z^{\frac{1-m}{2}} I_\nu(Y) + \frac{T_o}{p} \quad (VI.19)$$

donde:

$$Y = \frac{2q_a z^{\frac{1-m}{2}}}{2^{-m}} \quad \nu = \frac{1-m}{2} \quad q_a = \sqrt{\frac{p}{\lambda_a}}$$

con  $0 < m < 1$ .

**3er-PASO:** Determinación de las constantes de (VI.19)

Aplicando la Transformada de Laplace a la condición (VI.16) resulta:

$$\frac{\partial \theta_a(z, p)}{\partial z} = 0 \quad z \rightarrow \infty \quad p > 0 \quad (\text{VI.20})$$

Derivando la expresión (VI.19) respecto a  $z$ , resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta_a(z, p)}{\partial z} = & A \frac{1-m}{2} z^{-\frac{(1+m)}{2}} K_\nu(Y) + A z^{\frac{1-m}{2}} \frac{\partial K_\nu(Y)}{\partial z} + \\ & + B \frac{1-m}{2} z^{-\frac{(1+m)}{2}} I_\nu(Y) + B z^{\frac{1-m}{2}} \frac{\partial I_\nu(Y)}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{VI.21})$$

La derivada de  $K_\nu(Y)$  respecto de  $z$ , utilizando la propiedad (a2-11) es:

$$\frac{\partial K_\nu(Y)}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial K_\nu(Y)}{\partial Y} = q_a z^{-\frac{m}{2}} \left[ -\frac{\nu}{Y} K_\nu(Y) - K_{(\nu-1)}(Y) \right]$$

La derivada de  $I_\nu(Y)$  respecto de  $z$ , empleando la propiedad (a2-14) es:

$$\frac{\partial I_\nu(Y)}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial I_\nu(Y)}{\partial Y} = q_a z^{-\frac{m}{2}} \left[ -\frac{\nu}{Y} I_\nu(Y) + I_{(\nu-1)}(Y) \right]$$

Introduciendo estas dos últimas expresiones en (VI.21) y simplificando términos queda:

$$\frac{\partial \theta_a(z, p)}{\partial z} = -A q_a z^{-m+\frac{1}{2}} K_{\nu-1}(Y) + B q_a z^{-m+\frac{1}{2}} I_{\nu-1}(Y) \quad (\text{VI.22})$$

Según la expansión asintótica de las funciones modificadas de Bessel de primer y segundo orden que se incluyen en el Apéndice



ce 2 (ver (az-16) y (az-15)), resulta que  $I_{\nu-1}(Y) \rightarrow \infty$  y

$K_{\nu-1}(Y) \rightarrow 0$  cuando  $Y \rightarrow \infty$  (o sea  $z \rightarrow \infty$ ).

Luego, para que se cumpla la condición (VI.20), en la expresión (VI.22) la constante es  $B = 0$ . Entonces, la solución general (expresión (VI.19)) es:

$$\theta_a(z, p) = A z^{\frac{1-m}{2}} K_{\nu}(Y) + \frac{T_o}{p} \quad (\text{VI.23})$$

donde:

$$Y = \frac{2 q_a z^{\frac{2-m}{2}}}{2^{-m}} \quad \nu = \frac{1-m}{2} \quad q_a = \sqrt{\frac{p}{\chi_a}}$$

**4to. PASO:** Aplicación de la Transformada de Laplace a la ecuación (VI.8), siendo  $\theta_s(z, p)$  la transformada de la temperatura en el suelo, resulta:

$$\chi_s \theta_s''(z, p) - p \theta_s(z, p) = T(z, 0)$$

Utilizando la condición inicial (VI.10) y ordenando términos, queda:

$$\theta_s(z, p)'' - \frac{p}{\chi_s} \theta_s(z, p) = -\frac{T_o}{\chi_s} - \frac{\beta}{\chi_s} z \quad (\text{VI.24})$$

La solución de la ecuación homogénea de (VI.24) es de tipo exponencial.

Se propone la siguiente solución particular,  $\theta_{sp} = a z + b$ , que reemplazada en (VI.24) resulta:

$$\theta_{sp}(z, p) = \frac{T_o}{p} + \frac{\beta}{p} z$$

La solución general es (homogénea más particular):

$$\theta_s(z, p) = A \exp(-q_s z) + B \exp(q_s z) + \frac{T_o}{p} + \frac{\beta}{p} z \quad z < 0 \quad p > 0 \quad (\text{VI.25})$$

donde  $q_s = \sqrt{\frac{p}{\chi_s}}$

Aplicando la Transformada de Laplace a la condición (VI.17) resulta:

$$\frac{\partial \theta_s(z, p)}{\partial z} = \frac{\beta}{p} \quad z \rightarrow -\infty \quad (\text{VI.26})$$

Derivando la expresión (VI.25) respecto a  $z$ , luego debe cumplir la condición (VI.26) en  $z \rightarrow -\infty$ , por lo tanto  $A = 0$ . Entonces, la (VI.25) resulta:

$$\theta_s(z, p) = B \exp(q_s z) + \frac{T_o}{p} + \frac{\beta}{p} z \quad z < 0 \quad p > 0 \quad (\text{VI.27})$$

donde  $q_s = -\sqrt{\frac{p}{\chi_s}}$

**5to. PASO:** Determinación de las constantes  $A$  y  $B$  de las expresiones (VI.23) y (VI.27) utilizando las condiciones iniciales y límites propuestas.

Aplicando la Transformada de Laplace a la condición inicial (VI.15), resulta:

$$\theta_a(0, p) = \theta_s(0, p) \quad (\text{VI.28})$$

Luego, utilizando la propiedad (a2-10) presentada en el Apéndice 2 (siendo que  $m < 1$ , entonces  $\nu > 0$ , y si  $z \rightarrow 0$  es  $Y \rightarrow 0$ ) se determina  $\theta_a$  en  $z = 0$  utilizando la ecuación (VI.23), resulta:

$$\theta_a(0, p) = \lim_{z \rightarrow 0} \left[ A z^{\frac{1-m}{2}} \left[ \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left( \frac{1}{2} Y \right)^{-\nu} \right] + \frac{T_o}{p} \right] \quad (\text{VI.29})$$

donde  $\Gamma(\nu)$  es la función gamma de argumento  $\nu$ .

Reemplazando  $Y$  y  $\nu$  (expresión (VI.23)) en (VI.29) resulta:

$$\theta_a(0, p) = A \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left( \frac{z-m}{q_a} \right)^{\nu} + \frac{T_o}{p} \quad (\text{VI.30})$$

Luego, se aplica el límite a la ecuación (VI.27) para  $z \rightarrow 0$ ,

quedando:

$$\theta_s(0, p) = B + \frac{T_o}{p} \quad (\text{VI.31})$$

Igualando (VI.30) y (VI.31) según la condición (VI.28), se obtiene:

$$B = A \frac{\Gamma(\nu) (2-m)^\nu}{2 q_a^\nu} \quad (\text{VI.32})$$

6to- PASO: Con el objetivo de determinar el valor de la constante A (expresión (VI.32)) se utiliza la ecuación de balance en superficie, ecuaciones (VI.12), (VI.13), (VI.14). Aplicando a estas expresiones la Transformada de Laplace y teniendo en cuenta que  $F_n$  toma diferentes valores durante la noche, queda:

$$\begin{aligned} & -F_n \int_0^{t_a} \exp(-pt) dt + \int_{t_a}^{t_b} (at-b) \exp(-pt) dt + \int_{t_b}^{\infty} (-at+b) \exp(-pt) dt + \\ & -\kappa_s \int_0^{\infty} \frac{\partial T_s}{\partial Z} \exp(-pt) dt + \kappa_a z^m \int_0^{\infty} \frac{\partial T_a}{\partial Z} \exp(-pt) dt = 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.33})$$

resolviendo las integrales resulta:

$$\begin{aligned} & -\frac{F_n}{p} + \exp(-pt_a) \left[ \frac{F_n}{p} - \frac{b}{p} + \frac{at_a}{p} + \frac{a}{p^2} \right] - \exp(-pt_b) \left[ \frac{2at_b}{p} + \frac{2a}{p^2} - \frac{2b}{p} \right] - \\ & -\kappa_s \theta'_s(z, p) + \kappa_a z^m \theta'_a(z, p) = 0 \quad p > 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.34})$$

6.a) Determinación de la derivada de  $\theta_a(z, p)$  respecto de  $z$  ( $\theta'_a(z, p)$ ).

Se deriva la expresión (VI.23) respecto a  $z$  y se obtiene:

$$\theta'_a(z, p) = A \left[ \frac{1-m}{2} \right] z^{-\frac{1}{2}-\frac{m}{2}} K_\nu(Y) + A z^{\frac{1-m}{2}} \frac{\partial K_\nu(Y)}{\partial Z} \quad (\text{VI.35})$$

Utilizando la propiedad (a2-11), entonces la derivada de  $K_\nu(Y)$  respecto de  $z$  es:

$$\frac{\partial K_\nu(Y)}{\partial Z} = \frac{\partial Y}{\partial Z} \cdot \frac{\partial K_\nu(Y)}{\partial Y} = q_a z^{-\frac{m}{2}} \cdot \left[ -\frac{\nu}{Y} \cdot K_\nu(Y) - K_{(\nu-1)}(Y) \right]$$

Introduciendo ésta en (VI.35) resulta:

$$\theta'_a(z, p) = -A z^{\frac{1-m}{2}} q_a K_{\nu-1}(Y) \quad (\text{VI.36})$$

6.b) Determinación de la derivada de  $\theta_{\bullet}(z,p)$  respecto de  $z$  ( $\theta_{\bullet}'(z,p)$ ). Derivando (VI.23) respecto de  $z$ , se obtiene:

$$\theta_{\bullet}'(z,p) = q_s B \exp(q_s z) + \frac{\beta}{p} \quad (\text{VI.37})$$

6.c) Las expresiones (VI.36) y (VI.37), con el resultado de (VI.32), son reemplazadas en (VI.34):

$$\begin{aligned} & -\frac{F_n}{p} + \exp(-pt_a) \left[ \frac{F_n}{p} - \frac{b}{p} + \frac{at_a}{p} + \frac{a}{p^2} \right] - \exp(-pt_b) \left[ \frac{2at_b}{p} + \frac{2a}{p^2} - \frac{2b}{p} \right] - \\ & -B\kappa_s q_s \exp(q_s z) - \frac{\kappa_s \beta}{p} - \kappa_a z = \frac{2Bq_a^{\nu}}{(2-m)^{\nu} \Gamma(\nu)} \cdot z^{\frac{1}{2}-\nu} q_a K_{\nu-1}(Y) = 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.38})$$

Utilizando la propiedad (a2-12) (donde  $(1-\nu) > 0$ ) se puede aplicar la propiedad (a2-10) cuando  $z \rightarrow 0$ . Aplicando a la (VI.38) el límite cuando  $z \rightarrow 0$  y ordenando términos resultando:

$$\begin{aligned} & -\frac{F_n}{p} + \exp(-pt_a) \left[ \frac{F_n}{p} - \frac{b}{p} + \frac{at_a}{p} + \frac{a}{p^2} \right] - \exp(-pt_b) \left[ \frac{2at_b}{p} + \frac{2a}{p^2} - \frac{2b}{p} \right] - \\ & -B\kappa_s q_s - \frac{\kappa_s \beta}{p} - B \frac{\kappa_a q_a^{2\nu} \Gamma(1-\nu) (2-m)^{1-2\nu}}{\Gamma(\nu)} = 0 ; z=0 \quad p > 0 \end{aligned} \quad (\text{VI.39})$$

Despejando el valor de  $B$  de la expresión (VI.39), resulta:

$$B = \frac{-\frac{F_n}{p} + \frac{\exp(-pt_a)}{p} \left[ F_n - b + at_a + \frac{a}{p} \right] - \frac{\exp(-pt_b)}{p} \left[ 2at_b - 2b + \frac{2a}{p} \right] - \frac{\kappa_s \beta}{p}}{p^{\frac{1}{2}} \kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}} [1 + \alpha p^{\nu-\frac{1}{2}}]} \quad (\text{VI.40})$$

donde:

$$\alpha = \frac{\kappa_a \chi_a^{-\nu}}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\nu)} \cdot (2-m)^{1-2\nu} \quad (\text{VI.41})$$

Utilizando la propiedad de la serie geométrica:

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \quad ; \text{ si } |a| < 1 \quad (\text{VI.42})$$

tal que  $a = -\alpha \cdot p^{\nu - \frac{1}{2}}$

Definiendo  $\varphi = \left(\frac{1}{2} - \nu\right)k$ , el cual  $\varphi > 0$ , pues  $m > 0$ ; resulta:

$$\frac{1}{1 + \alpha p^{-(\frac{1}{2} - \nu)}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k p^{-\varphi}$$

Distribuyendo el denominador de (VI.40), queda:

$$B - C1 \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k p^{-\varphi - \frac{3}{2}} + C2 \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k p^{-\varphi - \frac{3}{2}} \exp(-pt_a) + C3 \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k p^{-\varphi - \frac{5}{2}} \exp(-pt_a) + \\ + C4 \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k p^{-\varphi - \frac{3}{2}} \exp(-pt_b) + C5 \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k p^{-\varphi - \frac{5}{2}} \exp(-pt_b) \quad (\text{VI.43})$$

con:

$$C1 = -\frac{(F_n + \kappa_s \beta)}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \quad C2 = -\frac{F_n - b + a t_a}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \quad C3 = -\frac{a}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \\ C4 = -\frac{(2b - 2a t_b)}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \quad C5 = -\frac{2a}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \quad (\text{VI.44})$$

Según lo mencionado en la sección VI.1., se cumple las siguientes relaciones:

$$F_n(0, t_a) = -F_n - a t_a - b \quad \text{y} \quad F_n(0, t_b) = 0 - a t_b - b$$

por lo tanto las constantes C2 y C4 son iguales a cero.

**7<sup>to</sup>. PASO:** Determinación de la temperatura en superficie.

Para ello se aplica la Transformada Inversa de Laplace (ver Carslaw y Jaeger, 1959) a la expresión (VI.23) pero en  $z = 0$ , con el valor de B hallado en (VI.43):

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta_s(0, p)] = T(0, t) = \mathcal{L}^{-1}[B] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{T_o}{p}\right] \quad (\text{VI.45})$$

De tabla se conoce (ver Apéndice 1) la siguiente relación:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^{r+1}}\right] = \frac{t^r}{\Gamma(r+1)} \quad ; \quad r > -1$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma.

Utilizando la segunda propiedad de traslación de la Transformada Inversa de Laplace (ver (a1-10)), tal que define Inversa por sector (ver Apéndice 1, propiedad (a1-4)), resulta:

$$T(0, t) = T_0 + C1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\varphi + \frac{1}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{3}{2})} \quad ; 0 < t \leq t_a \quad (\text{VI.46})$$

$$T(0, t) = T_0 + C1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\varphi + \frac{1}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{3}{2})} + C3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k (t - t_a)^{\varphi + \frac{3}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{5}{2})} \\ t_a < t \leq t_b \quad (\text{VI.47})$$

$$T(0, t) = T_0 + C1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\varphi + \frac{1}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{3}{2})} + C3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k (t - t_a)^{\varphi + \frac{3}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{5}{2})} + \\ + C5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k (t - t_b)^{\varphi + \frac{3}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{5}{2})} \quad t > t_b \quad (\text{VI.48})$$

donde:  $\varphi = \left[ \frac{1}{2} - \nu \right] k$

Las ecuaciones (VI.46), (VI.47) y (VI.48) corresponden a la temperatura en superficie, y dependen de  $\alpha$  de acuerdo con la expresión (VI.41), que es función de los coeficientes turbulentos de conductividad y difusividad térmica en el aire, y de los coeficientes de conductividad y difusividad térmica en el suelo. También, dependen de  $\nu$  (expresión (VI.23)) que a su vez es función del parámetro  $m$  que es un parámetro que es función de la estabilidad de la atmósfera, en condiciones de inversión térmica en el aire  $m$  (valor medio durante la noche)  $< 1$ .

## CAPITULO VII

### PARAMETROS UTILIZADOS EN EL MODELO PROPUESTO

#### VII.1. LA RADIACION NETA

El flujo neto de radiación de onda larga,  $F_L$ , es la diferencia entre el flujo de radiación de onda larga proveniente de la atmósfera,  $L\downarrow$ , y el flujo de radiación de onda larga procedente del suelo,  $L\uparrow$ . El flujo neto de radiación de onda corta,  $F_K$ , es la diferencia entre el flujo de radiación de onda corta proveniente del sol,  $K\downarrow$ , y el flujo de radiación de onda corta reflejada por la superficie,  $K\uparrow$ , que depende del albedo de la superficie terrestre.

Durante el día se puede plantear la siguiente ecuación de balance de radiación:

$$F_n - F_L + F_K - L\downarrow - L\uparrow + K\downarrow - K\uparrow \quad (\text{VII.1})$$

y en la noche:

$$F_n - F_L - L\downarrow - L\uparrow \quad (\text{VII.2})$$

En la Figura VII.1, se grafican los valores de los términos del balance de radiación (Oke, 1983) para la localidad Matador (EE.UU) ubicada a 50°N de latitud.

La entrada de radiación de onda corta a la superficie,  $K\downarrow$ , consiste de radiación directa y difusa. En un día despejado la radiación difusa es aproximadamente entre 15 - 25 % de la radiación de onda corta,  $K\downarrow$ , que llega a superficie.  $K\downarrow$  depende del acimut y altitud del sol y a la vez es reducida por la absorción y la reflexión desde el tope de las nubes. Por otra parte  $K\uparrow$  depende del valor de  $K\downarrow$  y del albedo de la superficie terrestre.

La entrada de radiación de onda larga emitida por la atmósfera ( $L\downarrow$ ) en ausencia de nubes depende de la temperatura de la atmósfera y de la emisividad (que es función de la distribución de temperatura, vapor de agua y dióxido de carbono). Estas pro-

piedades no fluctúan marcadamente y  $L\downarrow$  es prácticamente constante durante el día. La radiación de onda larga emitida por la superficie,  $L\uparrow$ , es afectada similarmente por la temperatura y emisividad, resultando  $L\uparrow$  mayor en magnitud y más variable que  $L\downarrow$ .

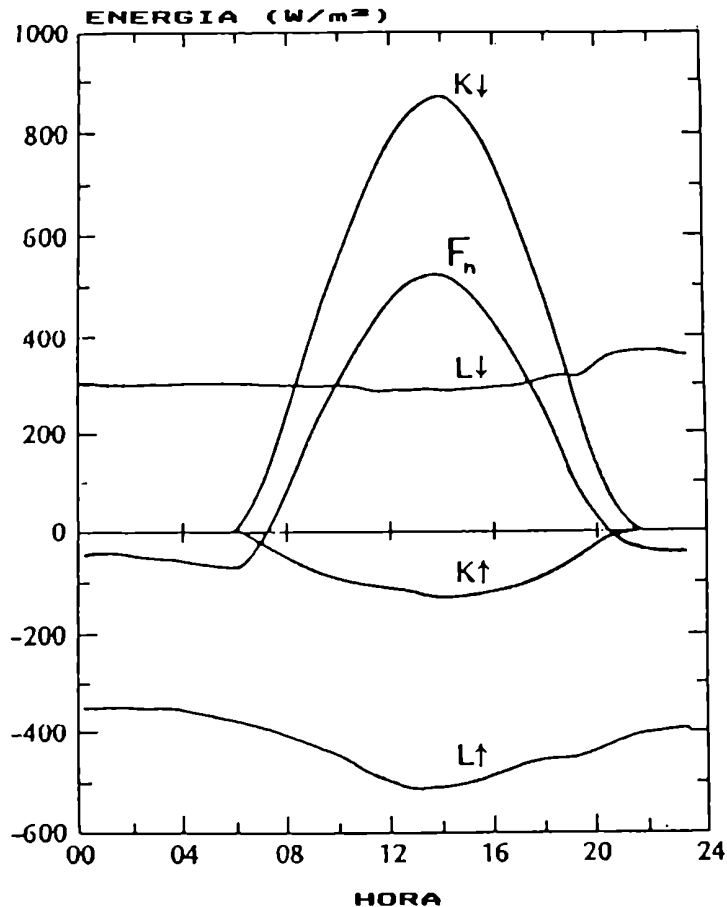


Figura VII.1: Componentes del balance de radiación para el 30/7/71 en Matador (50°N) EE.UU. (Oke, 1983)

Si la temperatura del aire y del suelo no son significativamente diferentes el valor de  $F_L$  generalmente es negativo y relativamente pequeño.  $F_L$  es afectado marcadamente por las nubes que pueden ser consideradas también cuerpos negros, y absorben y emiten radiación muy eficientemente. El aumento de nubosidad luego de las 18 hs. explica el incremento de  $L\downarrow$  en la Figura VII.1.

$L\downarrow$  es proporcional a las cantidades de vapor de agua, dióxido de carbono y ozono. Esto se debe a la capacidad de absorción selectiva que tienen estos elementos. Cada capa de la atmósfera toma parte en  $L\downarrow$ , pero la contribución de cada capa es diferente. Estimaciones realizadas por Czepa y Reuter (1950) (citado por Geiger, 1965) muestran, que en el caso de una atmósfera normal



que aproximadamente contiene 14.25 mm. de agua precipitable, la capa de aire de los primeros 87 metros ubicada por encima de superficie contribuye alrededor del 72 % de la radiación total de onda larga ( $L\downarrow$ ) que llega a tierra.

En una localidad,  $K\downarrow$  y  $L\downarrow$  no tienen una variabilidad significativa, porque dependen de los movimientos atmosféricos de gran escala.

La constancia de  $L\downarrow$  y  $L\uparrow$  durante la noche es una buena aproximación siempre que no exista nubosidad, que el vapor de agua sea constante y no se alteren las condiciones del terreno.

La constancia de  $F_n$  no se alcanza en el momento de la puesta del sol como sugiere Brünt (1941), pues existe una paulatina disminución de  $F_n$  hasta poder alcanzar, en condiciones favorables, un valor constante.

## VII.2. EL GRADIENTE DE TEMPERATURA EN EL SUELO

La superficie terrestre afecta las condiciones de la capa de aire adyacente, debido a que absorbe y emite radiación, evapora y condensa agua y retarda el movimiento del aire. El estado de la superficie varía espacial y temporalmente.

El suelo experimenta temperaturas máximas y mínimas que se amortiguan con la profundidad. La profundidad a la cual llega la fluctuación térmica depende de la conductividad térmica del suelo ( $K_s$ ) que a su vez es función de la conductividad térmica de las partículas del suelo, la porosidad y el contenido de humedad del suelo. El espesor medio del amortiguamiento térmico para un suelo es 50 cm. La mayor profundidad a la que llega el flujo de calor en un suelo con alta conductividad significa mayor almacenaje de calor durante el día y por lo tanto, liberación de calor desde una capa más profunda del suelo en la noche. En un suelo con poca conductividad los intercambios térmicos envuelven una capa poco profunda. Los suelos con alta conductividad tienen temperaturas máximas menores y temperaturas mínimas más altas que los de baja conductividad.

La variación diaria de la temperatura del suelo a diferentes profundidades se puede observar tomando valores a diferentes niveles. Los perfiles varían entre dos extremos. En primer lugar con un fuerte balance positivo de radiación: la temperatura máxima es alcanzada en superficie y disminuye con la profundidad en

los primeros niveles rápidamente y luego más lentamente. En segundo lugar, con un balance de radiación negativo: la temperatura mínima se observa en superficie y aumenta con la profundidad. Durante el día los perfiles varían entre estos dos extremos. En los períodos intermedios, el calor a distintas profundidades puede fluir en diferentes direcciones. A primera hora de la noche cuando la temperatura de superficie comienza a disminuir puede registrarse la temperatura máxima a pocos centímetros de profundidad; por debajo de este punto el flujo de calor es hacia abajo (como ocurre durante el día), pero por encima de éste el flujo de calor es hacia la superficie compensando en algún grado la pérdida de calor por radiación de la superficie del suelo.

### VII.3. EL COEFICIENTE TURBULENTO DE DIFUSIVIDAD TERMICA EN EL AIRE

La temperatura (T) de la superficie terrestre durante un día despejado puede ser representada por una serie de Fourier (ver Sutton, 1977):

$$T(0, t) = T_0 + \sum_{n=1}^N T_n \cos(n \omega t - \epsilon_n) \quad (\text{VII.3})$$

donde: t es el tiempo, w es la frecuencia, n es el número de armónica,  $\epsilon_n$  es el desfase de la armónica n,  $T_0$  es la temperatura inicial y  $T_n$  es la amplitud de la armónica n. La solución de la ecuación de difusión de calor (ecuación (III.12) en una dimensión y sin términos advectivos) en la atmósfera es (ver Sutton, 1977):

$$T(z, t) = T_0 + \sum_{n=1}^N T_n \exp\left[-z \sqrt{\frac{n \omega}{2 \chi_h}}\right] \cos\left[n \omega t - \left(\epsilon_n + z \sqrt{\frac{n \omega}{2 \chi_h}}\right)\right] \quad (\text{VII.4})$$

en la que se define  $\chi_h$  como el coeficiente turbulento de difusividad térmica en la atmósfera. Esta solución fue aplicada con n=1 o 2, por Johnson (1929), Best (1935), Johnson y Heywood (1938) (citados por Sutton, 1977). El método empleado ha sido evaluar  $\chi_h$  a diferentes capas cuyo espesor es generalmente la distancia entre termómetros ubicados en una torre en la cual se realizan las mediciones. Esta solución tendrá resultados consistentes si se realizan las mediciones de temperatura en un período cálido y sin nubosidad, tal que se presenta una gran variación diurna. Tales circunstancias están asociadas frecuentemente a vientos leves o calma, y si los procesos de transferencia de calor pueden

ser representados por la ecuación de difusión o si la convección libre desempeña un rol importante.

Best (1935) utilizó dos armónicas y obtuvo el valor de  $\chi_h$  por las siguientes técnicas: (1) desde el momento de observación de temperatura máxima, (2) desde el rango diurno de temperatura, (3) desde las amplitudes y fases de dos armónicas separadamente.

Los resultados de Best (1935) graficados en la Figura VII.2 muestran (ver Tabla VII.I) la siguiente forma de  $\chi_h$  como una función de la altura:

$$\chi_h = a z^m \quad (\text{VII.5})$$

donde  $a$  y  $m$  son constantes. El coeficiente turbulento de conductividad térmica en el aire se define de la siguiente manera (ver Sutton, 1977):

$$K_h = \rho_a C_p \chi_h \quad (\text{VII.6})$$

donde:  $\rho_a$  densidad del aire,  $C_p$  coeficiente de calor específico del aire a presión constante.

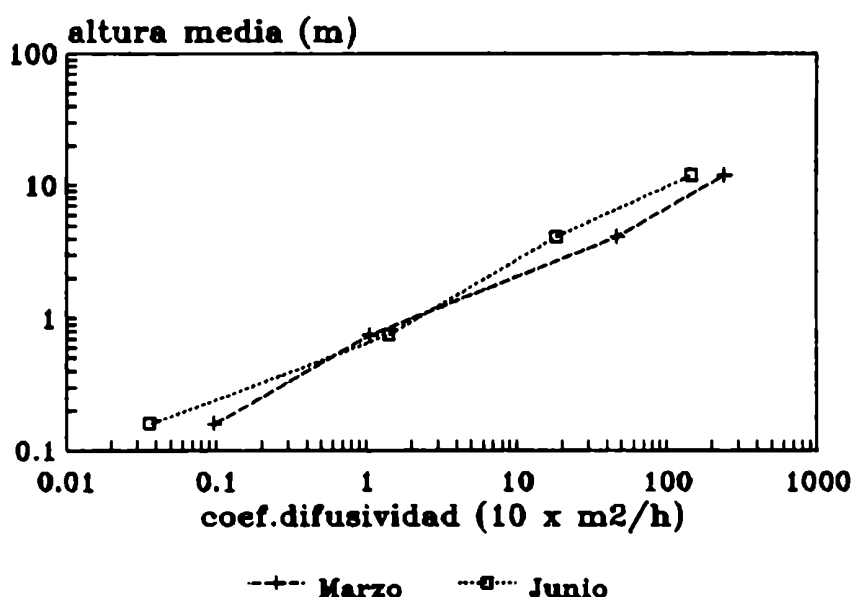


Figura VII.2: Valores de  $\chi_h$  (coeficiente turbulento de difusividad térmica) en función de la altura media de la capa, Best (1935) (ver Tabla VII.I)

Los resultados obtenidos en la Figura VII.2 muestran que la suposición de  $\chi_h$  constante no es consistente con los datos, debido a que parece existir un incremento de  $\chi_h$  con la altura.

Si se aplica la ley potencial, ecuación (VII.5), a los valores de la Tabla VII.I, se obtiene  $a = 2,68 \text{ m}^{-0.13} \text{ h}^{-1}$ . y  $m = 1.87$ , para Junio;  $a = 3,23 \text{ m}^{-0.14} \text{ h}^{-1}$ . y  $m = 1,86$  para Marzo; con coefi-

cientes de correlación de 0.9955 y 0,9970, respectivamente.

Cowling y White (1941) encuentran una variación diurna de  $\chi_n$  y además manifiestan que la variación vertical de temperatura potencial no puede ser explicada únicamente utilizando el concepto de difusividad turbulenta y que existe algún otro factor, posiblemente la radiación, que desempeña un rol significativo en el transporte de calor.

En particular, los procesos de difusión turbulenta y de pérdida de radiación de la superficie, son responsables del enfriamiento nocturno de la capa límite estable. Existe cierta controversia en cuanto a la magnitud que tiene cada proceso. Kondo y Haginoya (1985) encontraron que la relación entre el flujo de calor sensible ( $F_a$ ) y el flujo neto de radiación ( $F_n$ ), en condiciones estables con cielo despejado es:  $F_a/F_n = 1.4 u_*$  ( $u_*$  es la velocidad de fricción expresada en m/s.).

Stull (1983) estimó que el 77% del enfriamiento integrado verticalmente en la capa límite estable nocturna se debe a la turbulencia y el 23% a la divergencia de radiación inducida desde superficie.

En el caso en que la mezcla turbulenta sea pequeña, lo cual es usual durante la noche y cerca de superficie, la acción predominante de la radiación influye para que la temperatura mínima sea encontrada a 10 cm por encima de la superficie. Con movimientos pequeños del aire, producidos por mezcla, puede llevar a un hundimiento del aire frío forzando a que el mínimo descienda a superficie o aparezca sólo como un mínimo secundario, y finalmente desaparezca (ver Oke, 1970).

Teniendo en cuenta esto es interesante obtener cuantitativamente el valor del coeficiente turbulento de conductividad térmica en el aire (expresión (VII.6)) en función de la altura. El cálculo de  $K_n$  tiene bastante incertidumbre, pero a pesar de esto existen algunas observaciones que pueden ser usadas para su evaluación. Ellas están basadas en diferentes métodos de medición y cálculo. La Figura VII.3, es un resumen de las mismas (Geiger, 1965).

La línea M: son valores de  $K_n$  desde mitad de la noche calculados por Möller (1955), utilizando observaciones realizadas por Thornthwaite en Seabrook (Alemania) en la primavera de 1952.

La línea H: son valores obtenidos por Hoinker y Untersteiner (1953) en Agosto de 1950 en Vernagtferner (Alemania), promediados desde la hora 18:00 hasta 7:00, cuando la velocidad de viento se encontró entre 1 a 3 m/s. a la altura de 28 cm.

La línea S: son mediciones realizadas por Sverdrup (1936) en Isachsens Plateau en Spitsbergen (Alemania), durante un período de siete semanas del verano de 1934. Computó  $K_h$  a partir de la distribución de temperatura y viento. El promedio fue agrupado para la más bajas velocidades de viento (0,44 m/s.) correspondientes a condiciones nocturnas.

La línea K: Geiger (1965) utiliza los datos obtenidos por Kraus (1958) correspondiente a la noche del 23-24 de septiembre de 1954, sin nubosidad y con fuerte pérdida de radiación, desde las 18:30 hasta 01:00 hora, en el aeropuerto de Munich-Riem (Alemania). El valor medio de la velocidad del viento a 2 metros fue de 0,74 m/s.

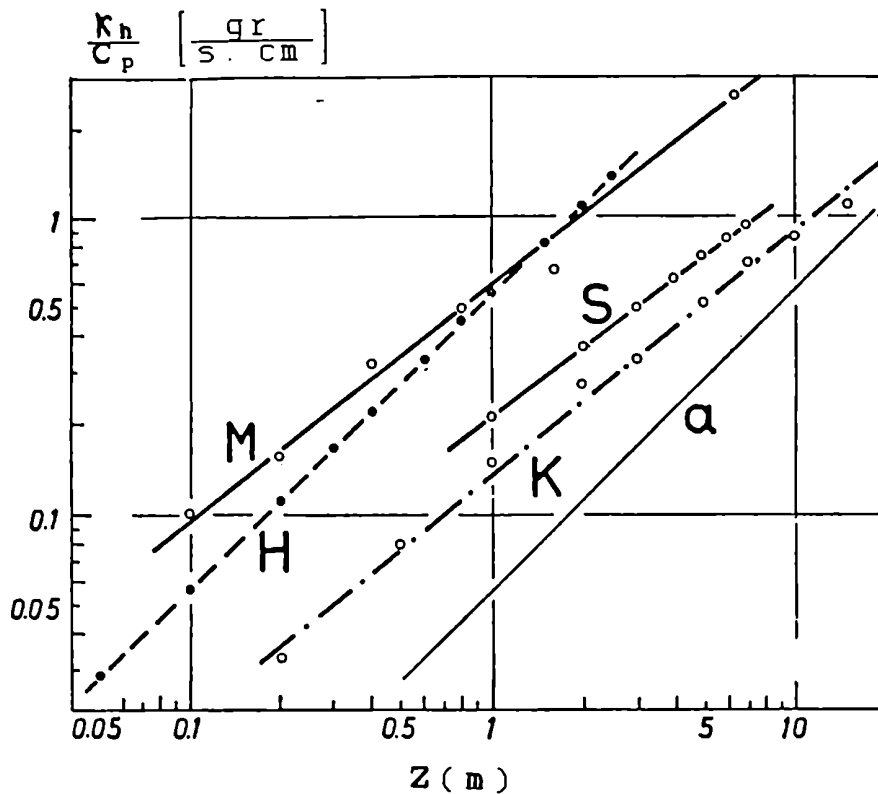


Figura VII.3: Valores del coeficiente  $K_h$  a la noche en función de la altura (Geiger, 1965)

Como puede apreciarse existe una dispersión en los valores de  $K_h$ , aproximadamente por un factor de 10. Esto podría deberse a la influencia de la velocidad del viento. En la Figura VII.3 los valores de  $K_h$  más elevados son los que corresponde a noches con mayores velocidades de viento. En todos los casos, los valores computados se encuentran en una misma línea recta (en un papel doble logarítmico). En la capa estable nocturna el exponente de  $z$  es pequeño y está entre 0,75 y 0,99 según Geiger (1965).

En la Figura VII.3 el valor de  $K_h$  no continúa aumentando potencialmente con la altura a niveles más altos. Al extrapolar hacia la superficie hasta  $z = 1$  mm. por encima de superficie  $K_h/C_p \approx 0,5 \times 10^{-3}$  a  $2,4 \times 10^{-3}$  gr/cm s. lo cual es aproximadamente entre 2,5 a 12 veces el valor correspondiente a la conducción molecular ( $2 \times 10^{-4}$  gr/cm s.). Esto significa que existe un gradual cambio desde una fuerte difusión turbulenta a una altura de 1 a 2 m. a un transporte molecular de calor en la vecindad de la superficie (ver Geiger, 1965).

#### VII.4. EL PARAMETRO $m$

En días con cielo despejado, el perfil de temperatura en los primeros metros exhibe una marcada variación cuya característica se manifiesta en el gradiente vertical de temperatura ( $dT/dz$ ).

Después del amanecer y hasta una hora antes de la caída del sol, la temperatura decrece con la altura, rápidamente en las capas más bajas de la atmósfera y más lentamente a mayores alturas. Durante la noche, el aumento de la temperatura con la altura es mayor en las capas más bajas. Por lo tanto, la curvatura del perfil de temperatura es más pronunciada en esas capas. Existe un breve período después de la salida del sol y antes de la puesta del sol en el cual la capa más baja de la atmósfera es isotérmica o con gradiente pequeño. Con cielo cubierto el gradiente es pequeño en todas las alturas. Similares variaciones se observan en desiertos y zonas tropicales, y la magnitud de los gradientes muestran diferencias con las condiciones locales.

Sutton (1977) comenta que debido a la variabilidad de la temperatura cerca de superficie es difícil obtener una expresión matemática que describa el perfil térmico, por lo que es conveniente aislar ciertos períodos del día cuando las condiciones son cuasi-constantes y el perfil podría tener una relación simple.

Similar conclusión encuentra Brocks (1948), según lo menciona Geiger (1965), analizando observaciones realizadas en Europa Central y Egipto, con la que concluye que por encima de la superficie hay una capa donde el gradiente de temperatura puede ser representado por una ley potencial y encima de ésta se encuentra una segunda capa donde el gradiente es constante con la altura, su valor es mayor que el gradiente adiabático y es llamada capa intermedia adiabática. Esta subcapa, tal como la define Brocks

(1948) no supera los 20 metros, mientras que la altura de la inversión es mayor que 100 metros.

Por lo tanto, los perfiles de la temperatura en las capas más bajas de la atmósfera satisfacen la relación siguiente:

$$\frac{d\theta}{dz} = a z^{-b} \quad (\text{VII.7})$$

donde  $\theta$  es la temperatura potencial del aire,  $a$  es una constante empírica,  $b < 1$  en los períodos de inversión y  $b > 1$  en períodos sin inversión (Sutton, 1977).

En las capas bajas de la atmósfera para alturas pequeñas sobre la superficie  $\theta \approx T$  ( $T$  temperatura del aire).

Geiger (1965) concluye que entre la superficie terrestre fría o caliente y la atmósfera libre hay una capa de aire donde la temperatura, tanto durante el día como en la noche, es una función uniforme de la altura. Durante el día la inestabilidad aumenta en proporción a la radiación incidente. La diferencia de temperatura entre la superficie terrestre y el aire es, en principio, retenida dentro de esta capa y cuando el sol alcanza una elevación de  $30^\circ$  pasa a niveles más altos debido a los movimientos del aire que transportan calor. Durante la noche, la subcapa de inversión tiene aproximadamente la misma intensidad y el gradiente de temperatura en el primer metro de altura alcanza su máximo dos horas después de la puesta del sol; la profundidad de la subcapa aumenta y luego se mantiene casi constante (ver Geiger, 1965).

Teniendo en cuenta lo mencionado anteriormente, en el modelo propuesto se utiliza la siguiente expresión para el gradiente de temperatura en el aire:

$$\frac{dT}{dz} = \frac{F_a}{\chi_a} z^{-n} \quad (\text{VII.8})$$

## VII.5. EL MOMENTO INICIAL

Brünt (1941) consideró  $F_n$  constante desde el momento de la puesta del sol. Esto parecería no ser real. Yamada (1978) utilizó cinco noches radiativas tomadas de la experiencia de Wangara, y observó que existe una rápida disminución del flujo de calor del

suelo después de la puesta del sol (18 hs.) y permanece aproximadamente constante luego de las 21 (hora local).

Será considerado como momento inicial de corrida del modelo cuando el flujo neto de radiación comienza a ser constante durante la noche.

## VII.6. LA TEMPERATURA DE LA SUPERFICIE TERRESTRE

Es difícil definir la temperatura de la superficie terrestre, excepto cuando no existe vegetación. El principal interés es conocer la variación de esta temperatura que puede ser la de la tierra o la hoja de una planta. El método adoptado para medir la temperatura debería permitir el pasaje de radiación libremente desde o hacia el suelo, y el instrumento debería estar protegido de la radiación directa.

Algunos experimentos han ubicado el termómetro con el elemento sensible mitad en la tierra y mitad en el aire, otros han sido instalados en un sitio con una leve depresión en la tierra con el elemento sensible cubierto con una delgada capa de tierra. Actualmente se puede contar con mediciones instantáneas de temperatura a diferentes niveles realizadas con termómetros sensibles.

Oke (1970) realizó mediciones de la temperatura en las capa baja de la atmósfera ubicando termómetros desde 0 hasta 100 cm. sobre el nivel del suelo, en superficies con suelo desnudo, rugoso, con nieve y con pasto corto. Oke (1970) encuentra que en noches con baja velocidad del viento, la temperatura más baja en la atmósfera ocurre algunos centímetros por encima de la superficie del suelo y no sobre la superficie. Este hecho se debe esencialmente a la influencia de fenómenos no turbulentos (condensación, radiación).

Por otra parte, esta situación da lugar a que se encuentre, a pocos centímetros del suelo, aire más frío sobre aire más caliente y menos denso (ubicado sobre la superficie). Por lo tanto, el equilibrio es inestable y puede ser sensible a una mezcla turbulenta.

Oke (1970) sugiere que la longitud de rugosidad ( $z_0$ ) ejerce el principal control sobre la velocidad umbral para que genere la convección forzada, dando lugar a la iniciación de la inversión de temperatura. Esto explicaría la diferente influencia que ejerce una superficie con suelo liso y otra rugosa sobre la determi-



nación de la temperatura mínima.

Melgarejo y Deardoff (1975) y Sutherland (1980) definen la temperatura de superficie como aquella que se obtiene en el nivel  $z_0$ , utilizando la forma integrada de la relación flujo térmico gradiente. Es posible que la rafagosidad frecuentemente cause una rápida fluctuación en la temperatura, lo que no sería detectado en las observaciones generándose errores adicionales.

## CAPITULO VIII

### DESCRIPCION DE LOS EXPERIMENTOS UTILIZADOS

#### VIII.1. INTRODUCCION

Con el fin de verificar el modelo propuesto en diferentes condiciones fueron utilizados los datos observados de dos experimentos: "Wangara" (Clarke y otros, 1971) y "Great Plains" (Lettau y Davidson, 1957).

Las observaciones en el experimento "Wangara" se realizaron en los meses de invierno y el clima es afectado en forma continua por el aporte de masas de aire provenientes del océano Indico. Además, el suelo del experimento "Wangara" es tipo arcilloso mientras que en el experimento "Great Plains" es arenoso. En el experimento "Great Plains" las observaciones corresponden a meses de verano y su clima es continental.

A continuación se describen las características principales de cada uno de los experimentos.

#### VIII.2. EXPERIMENTO " WANGARA "

##### VIII.2.1. Introducción

El experimento observacional micrometeorológico "Wangara" fue realizado entre el 15 de Julio al 27 de Agosto de 1967, en la localidad de Hay (34° 30'S, 144° 56'E) al WSW de Australia, por la División de Física Meteorológica (CSIRO) y el Servicio Meteorológico de Australia (Clarke y otros, 1971).

El principal objetivo del experimento fue encontrar los procesos atmosféricos correspondientes a la gran escala, a la mesoescala y a la pequeña escala. Un objetivo secundario fue adquirir datos para una más adecuada descripción de la capa límite

atmosférica en diferentes condiciones meteorológicas.

Los datos obtenidos fueron de gran importancia científica, las mediciones proveyeron las bases para la determinación de las formas de las funciones de semejanza de Monin-Obukhov (ver Capítulo V). También, fueron utilizados para calcular los valores de las funciones universales de la teoría de semejanza de la Capa Límite Planetaria. Los datos obtenidos durante el día 33 de la experiencia fueron utilizados para evaluar modelos numéricos de la capa límite atmosférica (André y otros, 1978). Finalmente, los resultados del experimento " Wangara " señalan las dificultades y limitaciones en la obtención de determinaciones exactas del viento térmico, de la velocidad vertical y del promedio espacial de los flujos turbulentos.

#### VIII.2.2. Descripción del área de observación

El área elegida, en los alrededores de Hay, es llana con vegetación baja y un declive de 2,5 en 10000. La vegetación predominante es pasto muy espaciado cuya altura en general no excede los 2 a 3 cm. y algunos arbustos de algodón (*Kochia Aphylla*) de 25 a 40 cm. de altura. Normalmente existe un rápido crecimiento de legumbres en el mes de agosto, pero en 1967 una severa sequía afectó al área, con lo cual resultó que no hubo una cubierta vegetal durante la experiencia.

Cuatro sitios fueron elegidos para la localización de sensores de medición, ubicados en las esquinas de un cuadrado de 60 km. y una quinta estación fue instalada en el centro del mismo. En la Figura VIII.1 se muestra la ubicación de las estaciones, las localidades más cercanas, la distribución de los ríos e hileras de árboles.

Alrededor de la quinta estación no existe casi vegetación, excepto algunos arbustos aproximadamente a 1 km. al este y una comunidad de árboles a lo largo del Río Mumbidgee a 5 km. al sur (ver en detalle en la Figura VIII.2).

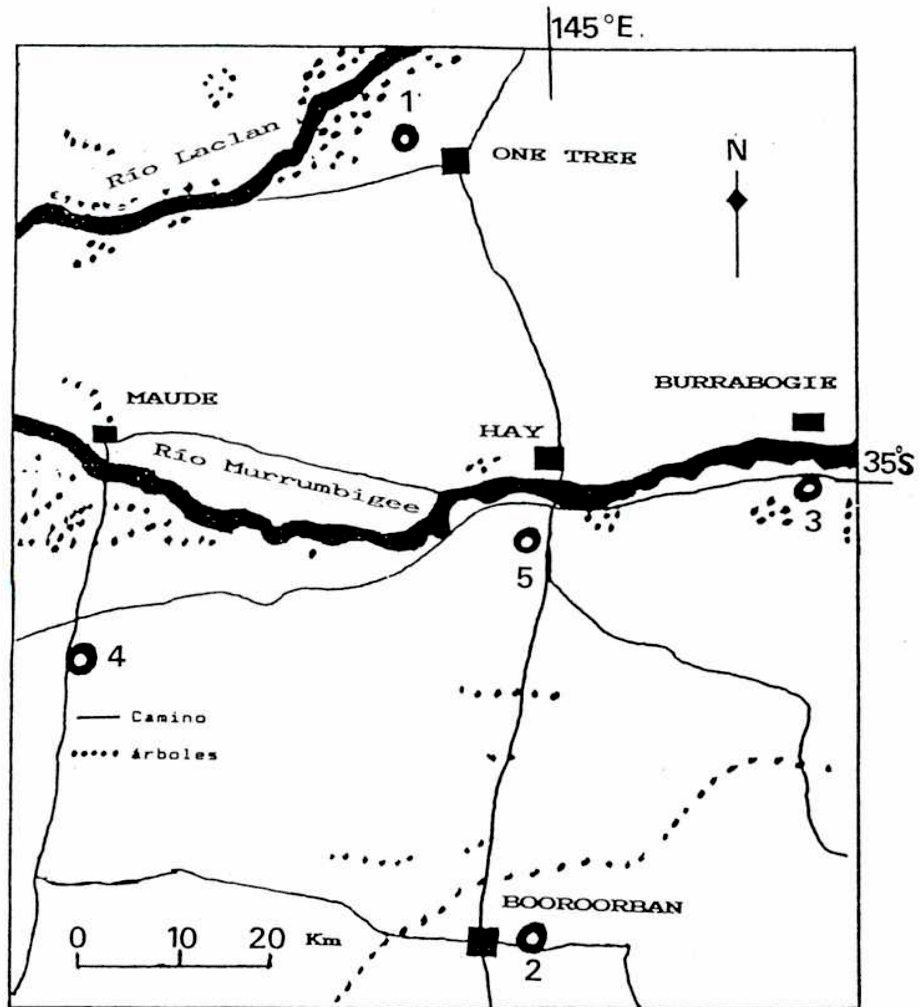


Figura VIII.1: Localización de las cinco estaciones (ver números).

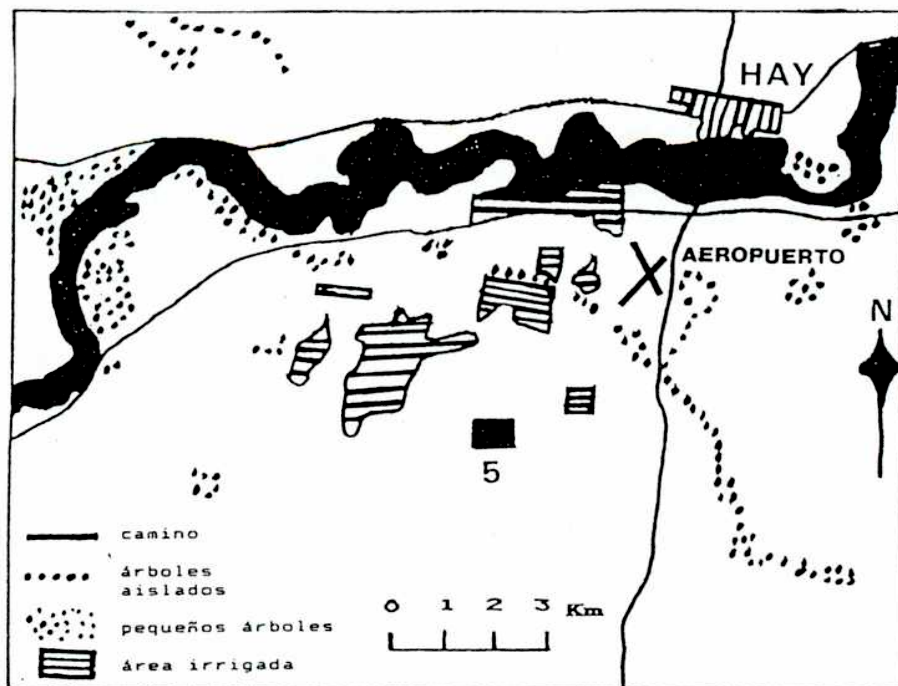


Figura VIII.2: Detalle de los alrededores de la estación 5.

### VIII.2.3. Características del suelo

El suelo consiste de marga de 5 a 20 cm. de espesor y un subsuelo de arcilla. El contenido de humedad del suelo no fue medido. Desde una observación visual del terreno este parece muy seco excepto los días de lluvia y subsiguientes (días 10, 11, 12, 15, 17, 18, 27, 36, 37, 38 y 39). La falta de crecimiento de las plantas durante la experiencia sugirió que la humedad del suelo coincidiría con el punto de marchitez.

Estimaciones de la conductividad y difusividad térmica en el suelo es posible obtener a partir de los gráficos de Vries (1967) (citado por Clarke, 1971). Un valor promedio del coeficiente de difusividad térmica en el suelo estaría entre 0,005 a 0,006 cm<sup>2</sup>/seg.

### VIII.2.4. Datos meteorológicos en superficie

Las temperaturas del bulbo seco y húmedo en superficie fueron medidas antes de cada hora, en la estación quinta, en un termómetro estándar de mercurio instalado dentro de una casilla meteorológica.

El estado del tiempo fue informado cuando alguna de las cinco estaciones mostró un estado significativo del mismo. Si una de las estaciones registró lluvia y otra tormenta se consideró esta última. La nubosidad se presenta en octavos de cielo cubierto para nubosidad baja y total. Se realiza un promedio de las cinco estaciones, y el tipo de nubosidad es seleccionada desde la descripción efectuada por el observador.

El registro diario de lluvia en la Oficina Postal de Hay, cerca del centro del área, para las 24 horas, entre las 9 horas de un día y las 9 horas del día siguiente fue:

Nº de día	10	15	17	27	28	31	36
lluvia(mm.)	5	1	2	2	1	1	14

La lluvia en el resto de los días fue cero o menor que 0,125mm. La lluvia caída no difirió significativamente en diferentes puntos del área.

### VIII.2.5. Datos micrometeorológicos

Observaciones micrometeorológicas fueron realizadas en la quinta estación. Todos los datos micrometeorológicos fueron promediados durante media hora centrados en cada hora.

Los perfiles de viento fueron obtenidos mediante anemómetros de copelas, realizándose mediciones a 1, 2, 4, 8 y 16 metros de altura, con un anemómetro adicional a una altura de 0,5 metros. Sucesivas recalibraciones de los instrumentos indicaron que no existió un serio deterioro en las observaciones.

Diferencias de temperaturas fueron medidas entre 1 y 2 metros, y entre 2 y 4 metros de altura, en un mástil con pares de termómetros de resistencia. Un puente de corriente alterna de 400 Hz. fue utilizado para detectar las diferencias. Luego de la amplificación y rectificación de la fase-sensible fue aplicado el motor de integración de corriente continua. De este modo las diferencias de temperaturas fueron integradas continuamente en cada ronda. Los sensores fueron ventilados por un extractor convencional ajustado para dar una velocidad de ventilación de 3 m/s.

La radiación neta fue medida mediante un radiómetro FUNK, con un registro continuo desde el cual se obtuvo un valor medio por integración.

Se obtuvo el flujo de calor en el suelo utilizando tres plaquetas conectados en serie y ubicadas apenas por debajo de la superficie terrestre. El espesor (0,5 cm.) de la capa de suelo sobre las placas impide la llegada de la radiación solar. Este instrumento fue frecuentemente inspeccionado.

### VIII.2.6. Selección de los días utilizados en la verificación del modelo

Para evaluar el modelo fueron descartadas las noches en las que existieron sistemas de baja presión, frentes o con nubosidad baja mayor que 1/8. También, aquellas noches en la que se registró lluvia o tormenta en los alrededores y existió probable error instrumental, no fueron considerados.

Un criterio de selección más estricto es el planteado por André y Mahrt (1982) quienes clasifican una noche despejada cuan-

do la nubosidad baja es menor que  $1/8$ , la nubosidad total menor que  $2/8$  y el flujo de radiación neta mayor que  $6 \text{ W/m}^2$ . Estos dos últimos puntos no fueron considerados estrictamente en este trabajo por que no afectan significativamente al modelo.

En la Tabla VIII.III se presentan las condiciones de nubosidad y viento correspondientes a las noches del experimento "Wangara" y características atmosféricas a las 9 hs del día siguiente de la experiencia. Noches con cantidad de nubes bajas mayor que  $1/8$  fueron excluidas, debido a que éstas disminuyen la radiación neta ( $F_n$ ) alterando la constancia de  $F_n$  durante la noche. También, pueden contribuir a un aporte de vapor de agua en la atmósfera debido a lo cual se apartarían de las condiciones de enfriamiento radiativo.

De esta manera resultaron seleccionadas ocho noches. Estas son las correspondientes de los días números 1; 6; 7; 12; 13; 31; 32 y 33. Los mismos días también fueron seleccionadas por Stull (1982) y André y Mahrt (1982).

Los datos utilizados fueron los correspondientes a los días mencionados desde las 21 horas hasta las 8 horas del día siguiente hora local ( hora de Greenwich + 10 horas ).

Las noches mencionadas se caracterizaron por tener valores medios de nubosidad total menor que  $5/8$  y velocidad media del viento a 8 metros de altura inferior a  $5 \text{ m/seg}$ .(ver Tabla VIII-.I).

Las noches de los días 11, 18, 30 no fueron consideradas aquí aunque fueron seleccionadas por Stull (1982), quien obtuvo simplemente una expresión exponencial empírica del perfil de temperatura. Estas noches fueron posteriores a días con un pasaje de un frente frío ó lluvia, esto modifica las constantes térmica del suelo, además de presentar un valor del parámetro de estabilidad  $m > 1$  en valor medio (ver Capítulo IX) apartándose de las condiciones del modelo.

En la noche del día 39 (ver Tabla VIII.III) se verifican  $7/8$  de nubes medias que afectan al balance de radiación neta ( $F_n$ ), por lo cual no fue seleccionada. La noche del día 42 faltan datos de radiación neta hasta las 02 hs.

Entre las 13 hs del día 21 hasta las 14 hs del día 25 no se realizaron mediciones debido a dificultades de los observadores (ver Clarke y otros, 1971).

### VIII.3. EXPERIMENTO " GREAT PLAINS "

#### VIII.3.1. Introducción

El experimento " Great Plains " fue realizado aproximadamente a 8 km al E.N.E de la localidad de O'Neill, Nebraska (Estados Unidos) entre el 1 de Agosto y el 10 de Setiembre de 1953 (42° 28'N, 98° 32'W) (Lettau y Davidson, 1957).

El experimento proporcionó de una cantidad importante de información, incluyendo información sinóptica, características del subsuelo, perfiles de viento y temperatura del aire hasta 16 metros de altura y observaciones de la atmósfera libre.

Los datos permitieron obtener una mejor descripción de la capa límite atmosférica, posibilitó el estudio del fenómeno del "jet" nocturno y fueron utilizados para evaluar las funciones universales de la teoría de la semejanza de la Capa Límite Planetaria.

Las mediciones fueron realizadas por integrantes de grupos de investigación de distintas universidades e institutos bajo la dirección del Geophysics Research Directorate (GRD), ubicados en el área del experimento según se muestra en la Figura VIII.4. Las instituciones que participaron fueron la Universidad de New Mexico (U.New Mex.), Massachusetts Inst. Tech.(MIT), Iowa State College (IOWA SC), Universidad de California (UCLA), Universidad de Texas (U.TEX.), Universidad Johns Hopkins (JH), Universidad de Wisconsin (U.WISC.).

#### VIII.3.2. Descripción del área de observación

La topografía en gran escala de los alrededores de O'Neill se presenta en la Figura VIII.3. La inclinación media del terreno es 2 en 1000.

Colinas de arena se ubican al oeste, sur y este, a aproximadamente 16 a 32 km del sitio de observación; cerca de O'Neill estas son menos elevadas. Una línea de árboles a 8 km al sur del sitio es el obstáculo más prominente.

La topografía del área de observación dentro de un radio de 800 m., fue relativamente plana (ver Figura VIII.4).



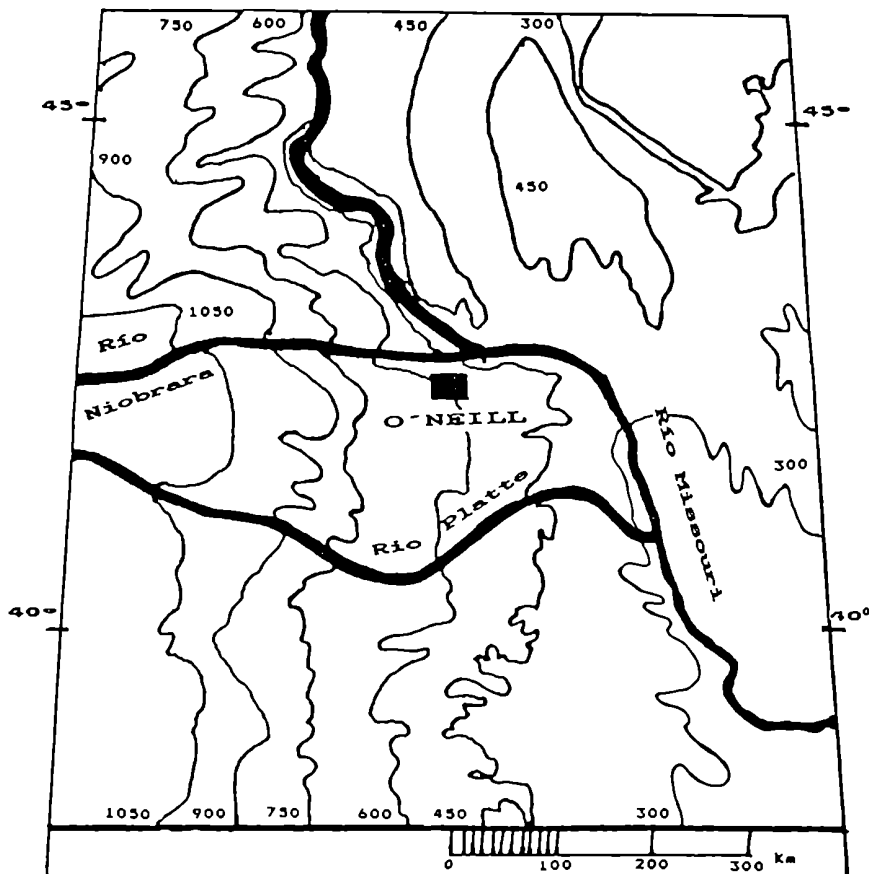


Figura VIII.3: Topografía de la zona de la experiencia (en metros).

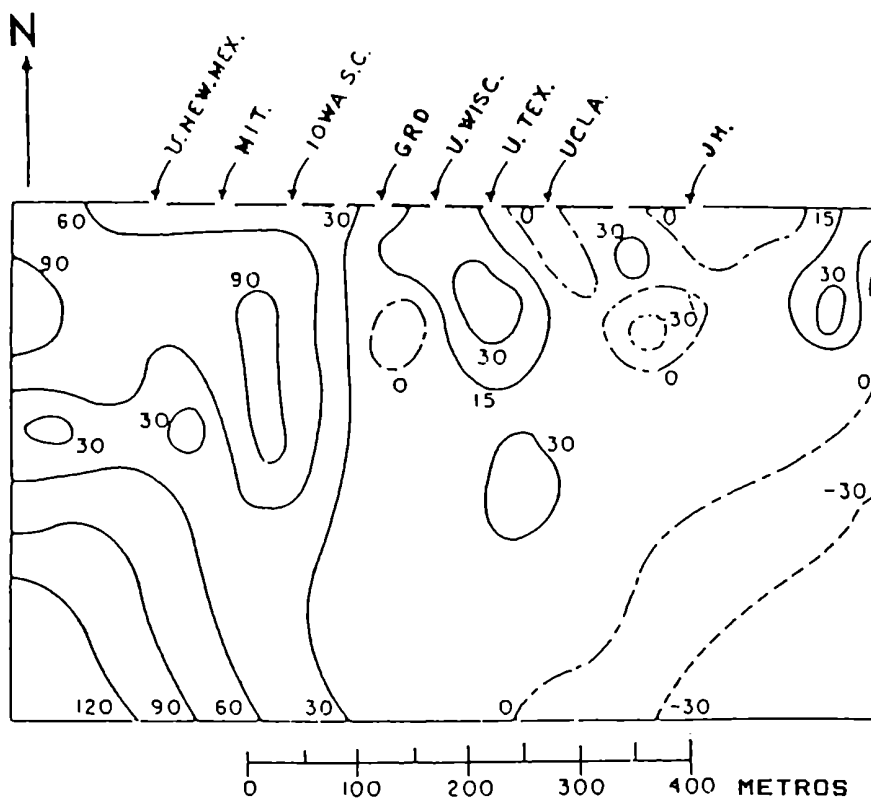


Figura VIII.4: Ubicación de los instrumentos correspondientes a cada grupo de investigación, y topografía del lugar (cm).

### VIII.3.3. Características del suelo

El suelo se caracterizó por la presencia de grava que limita el contenido de humedad, además de distintos tipos de pasto corto. La densidad de la vegetación varió notablemente, presentándose una densa vegetación rodeada de manchones de suelo desnudo distribuidos aleatoriamente en el campo. Esta inhomogeneidad es importante para interpretar las mediciones de los parámetros del suelo.

Antes del comienzo del experimento el pasto fue cortado, y un segundo corte se realizó el 12 de Agosto observándose una altura media de la hierba de 6 cm. con algunos sectores ocasionalmente esparcidos, de 10 a 15 cm. de altura.

El subsuelo es de marga arenosa, tiene una humedad limitada entre la capacidad de campo y el punto de marchitez.

La escasa precipitación durante el mes de agosto de 1953 y por lo tanto, la disminución general del contenido de humedad del suelo, durante la experiencia, parecería ser la responsable de la marchitez de la vegetación en el sitio de la observación. En los primeros días, el pasto presentó un aspecto fresco mientras que al finalizar se notó amarillento. El crecimiento del pasto luego del segundo corte fue despreciable presentando un aspecto más suave hacia la finalización del experimento que al principio.

### VIII.3.4. Datos meteorológicos en superficie

La información sinóptica, de la temperatura del aire y la precipitación fue suministrada por el Servicio Meteorológico de los Estados Unidos y correspondió a la estación ubicada en O'Neill, Nebraska.

Los coordinadores del proyecto, durante la experiencia, disponían del pronóstico meteorológico de 24 y 36 hs, suministrado por el Servicio Meteorológico. Con esta información, las mediciones se realizaron cuando las condiciones meteorológicas pronosticadas eran de nubosidad parcial al mediodía o noches claras, con advección aproximadamente nula y un gradiente uniforme de presión. Teniendo en cuenta este criterio sólo siete períodos de observaciones fueron realizados. Dos durante un período diurno y cinco durante un período nocturno.

### VIII.3.5. Datos micrometeorológicos

Las mediciones de la conductividad térmica del suelo fueron realizadas por la Universidad de Texas, computada desde termistores ubicados en el suelo.

La capacidad de calor del suelo fue medida por la Universidad de Wisconsin por determinación calorimétrica desde una muestra de suelo de una capa entre 0 y 10 cm. de profundidad.

Las mediciones del flujo de calor en el suelo realizadas por la Universidad de Wisconsin fue por el método de integración del perfil de temperatura del suelo, obteniéndose un valor promedio durante 60 minutos centrado en la hora. La radiación neta fue medida con dos radiómetros tipo GIER y DUNKLE. Los valores son promedios horarios centrados en la hora.

Con el objeto de evaluar el modelo propuesto se eligieron las mediciones micrometeorológicas llevadas a cabo por la Universidad Johns Hopkins pues las mediciones de temperatura del aire y la velocidad del viento fueron realizadas a niveles más próximos a superficie que las de otras instituciones (ver Figura VIII.4).

Las velocidades medias horarias del viento fueron medidas mediante anemómetros de copelas a 0.4, 0.8, 1.6, 3.2 y 6.4 metros de altura. Los valores son centrados en la hora.

Las temperaturas medias del aire fueron observadas a 0.1, 0.2, 0.4, 0.8, 1.6, 3.2 y 6.4 metros de altura, mediante termocuplas protegidas. Los valores fueron promedios de 20 lecturas en cada nivel durante 5 minutos de intervalo, centrados en la hora.

### VIII.2.6. Selección de los días utilizados en la verificación del modelo

Con el fin de realizar la evaluación del modelo fueron seleccionados los períodos de observación entre las 20 hs. 35 min. y 6 hs. 35 min., correspondientes a las noches de los días 18, 24, 31 de Agosto y 7 de Septiembre (ver Capítulo X). La noche del 8/8 no fue incluida pues presentó entre 4/8 y 5/8 de Altocumulus con relámpagos observados hacia el este y ráfagas de viento durante toda la noche.

Las noches seleccionadas fueron con cielo despejado excepto el 18 de agosto donde la nubosidad aumenta a partir de las 2 hs.

30 min. siendo del tipo Altocumulus (ver Tabla VIII.II).

Las velocidades medias del viento (Tabla VIII.II) durante las noches son mayores que las observadas en el experimento "Wangara" (Tabla VIII.I)

## CAPITULO IX

### EVALUACION DE LOS PARAMETROS UTILIZADOS EN EL MODELO

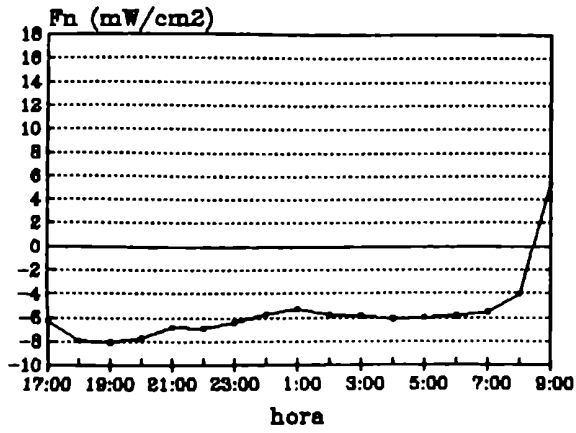
#### IX.1. LA RADIACION NETA

En los experimentos "Wangara" y "Great Plains" se realizaron mediciones de radiación neta ( $F_n$ ). En las Figuras IX.1, y IX.2 (cuyos valores se incluyen en la Tabla IX.I.a) y b) ) se muestran los valores horarios observados de  $F_n$  correspondientes a los dos experimentos. Se puede apreciar que  $F_n$  tiene un valor aproximadamente constante durante las horas nocturnas.

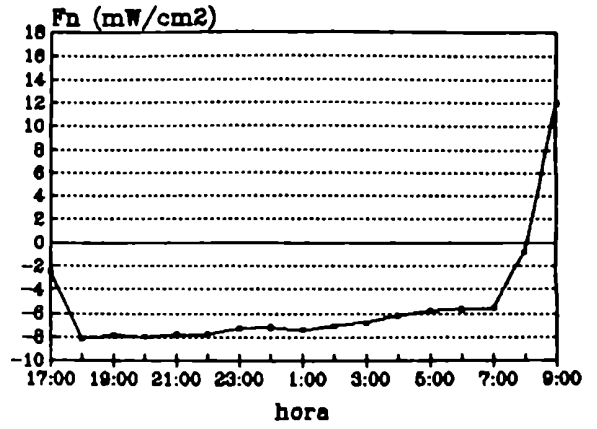
La radiación neta es el único parámetro que fue obtenido a partir de los datos observados durante la noche. Esto se realiza solamente con el objeto de verificar el modelo, pero indudablemente para la aplicación operativa del modelo deberá utilizarse el valor de  $F_n$  obtenido con anticipación (ver, por ejemplo, Holstag y van Ulden, 1985).

El modelo considera un primer período en el cual la radiación neta tiene un valor constante, para el cual se promediaron los valores observados de  $F_n$  desde la hora en que se inicia la corrida del modelo hasta la salida del sol, para cada una de las noches.

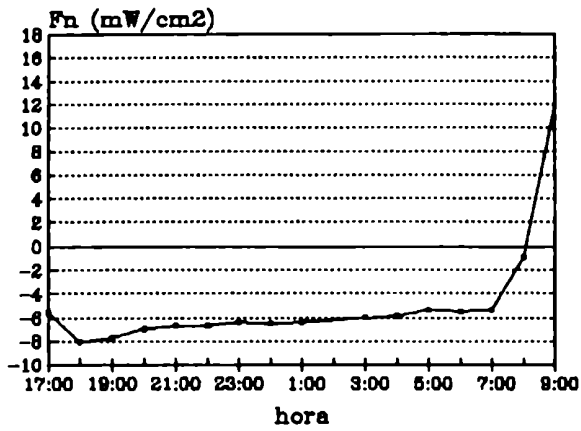
Luego de la hora de la salida del sol, el modelo considera un segundo período donde la radiación neta tiene un incremento lineal con el tiempo.



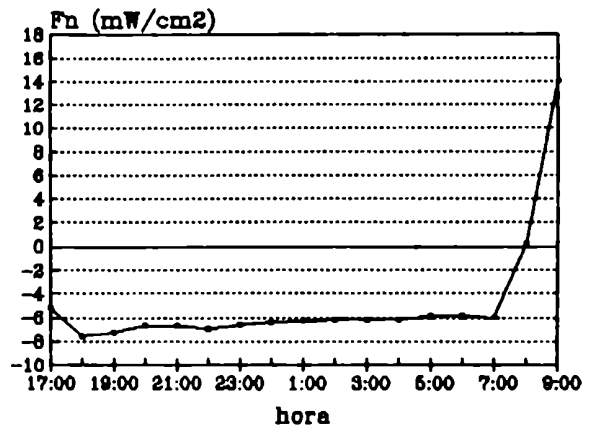
Noche del día 1



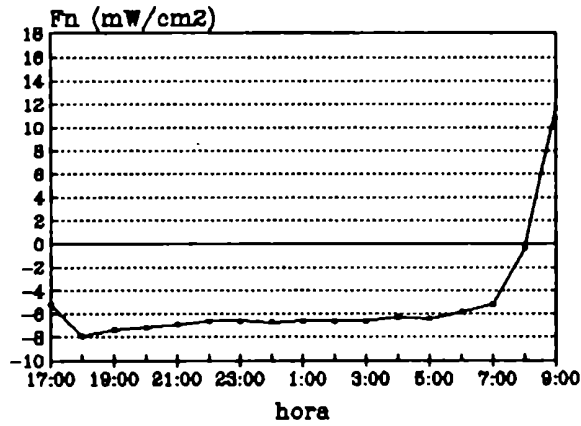
Noche del día 6



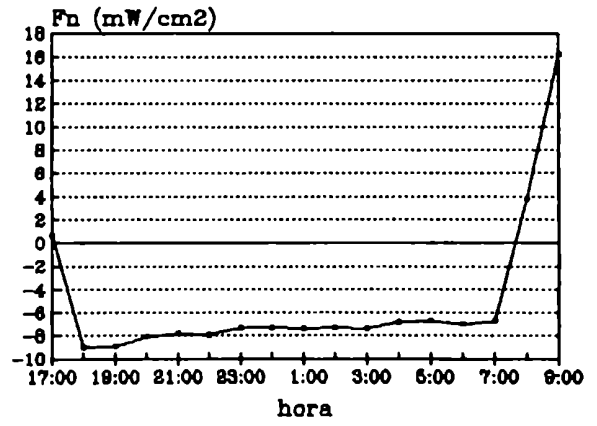
Noche del día 7



Noche del día 12

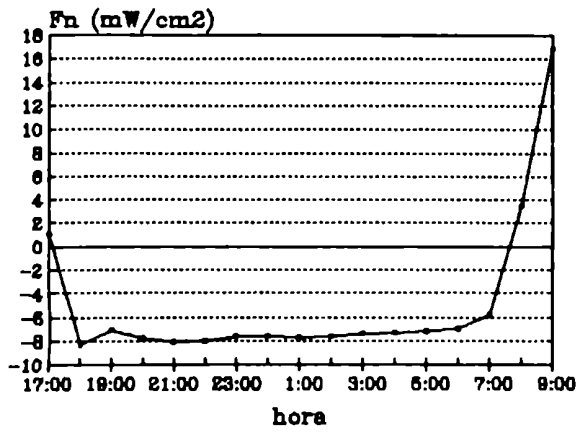


Noche del día 13

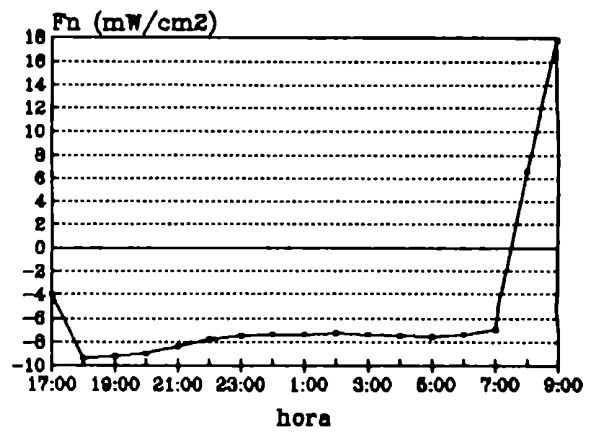


Noche del día 31

Figura IX.1: Valores horarios observados de  $F_n$  (Experimento "Wangara")

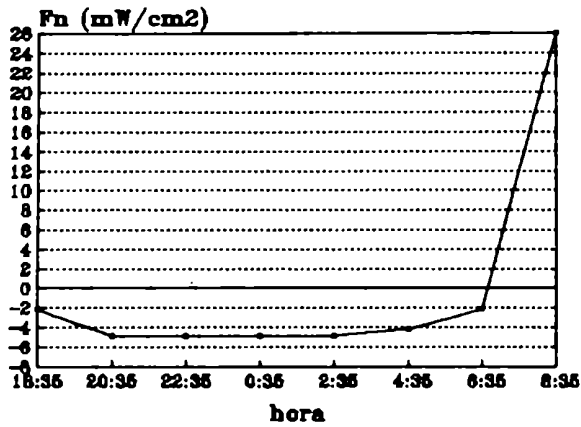


Noche del día 32

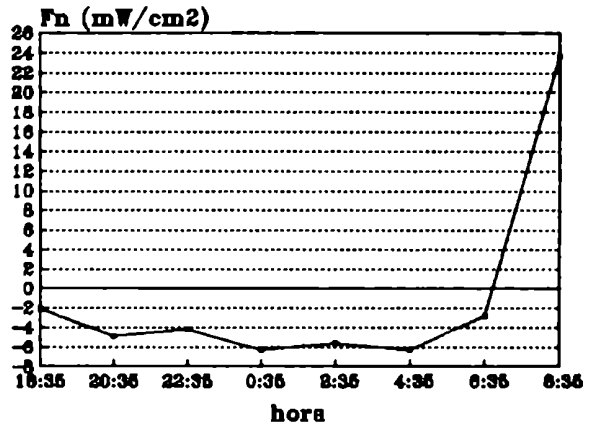


Noche del día 33

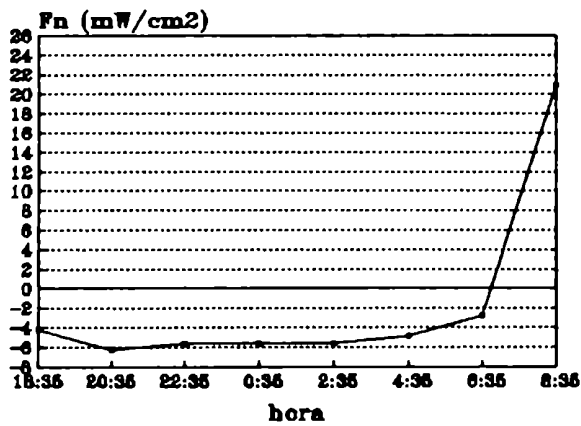
Figura IX.1: Valores horarios observados de  $F_n$  (Experimento "Wangara") (continuación).



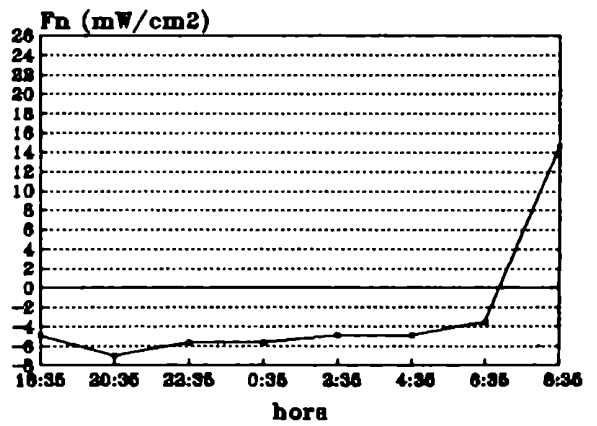
Noche del día 18 de Agosto



Noche del día 24 de Agosto



Noche del día 31 de Agosto



Noche del 7 de Septiembre

Figura IX.2: Valores horarios observados de  $F_n$  (Experimento "Great Plains")

Aproximado mediante una recta se obtiene la expresión de  $F_n(0,t)$ , en función del tiempo ( $t$ ). Para definir la recta es necesario elegir un segundo punto ( $t_1$ ). Para ello, se utilizó el valor de  $F_n(0,t)$  correspondiente a 1 ó 2 horas después de la salida del sol. De esta manera, la expresión de  $F_n(0,t)$  en función del tiempo resulta (para  $t > t_a$ ):

$$F_n(0,t) - t \left( \frac{F_n(0,t_1) - F_n(0,t_a)}{t_1 - t_a} \right) - t_a \left( \frac{F_n(0,t_1) - F_n(0,t_a)}{t_1 - t_a} \right) + F_n(0,t_a) \quad (\text{IX.1})$$

donde  $t$  es el tiempo transcurrido desde el momento en que se inicia la corrida del modelo;  $t_1$  es el tiempo elegido para definir la recta, válido desde el momento  $t = 0$ ;  $t_a$  es el tiempo en el cual  $F_n(0,t)$  deja de ser constante (hora de la salida del sol) y  $F_n(0,t_a)$  y  $F_n(0,t_1)$  son los valores de radiación neta observados (con su signo).

La pendiente  $a$  está expresada por:

$$a = \left( \frac{F_n(0,t_1) - F_n(0,t_a)}{t_1 - t_a} \right) \quad (\text{IX.2})$$

y la ordenada al origen  $b$  es:

$$b = - t_a \left( \frac{F_n(0,t_1) - F_n(0,t_a)}{t_1 - t_a} \right) + F_n(0,t_a) \quad (\text{IX.3})$$

Se define el instante de tiempo ( $t_b$ ) en el cual la radiación neta es nula, para luego ser positiva, que se determina igualando la expresión (IX.1) a cero, de la siguiente forma:

$$t_b - t_a = \frac{F_n(0,t_a) [t_1 - t_a]}{F_n(0,t_1) - F_n(0,t_a)} \quad (\text{IX.4})$$

## IX.2. EL GRADIENTE INICIAL DE TEMPERATURA EN EL SUELO

En los experimentos "Wangara" y "Great Plains" se realizaron observaciones del flujo de calor del suelo ( $F_s$ ) cerca a la superficie terrestre. La expresión de  $F_s$  es la siguiente (Sutton, 1977):

$$F_s(0,0) = -\kappa_s \frac{\Delta T}{\Delta Z} \quad (\text{IX.5})$$



los valores del coeficiente de conductividad térmica ( $K_s$ ) en el suelo son incluidos en la sección (IX.5.3) y (IX.6.3) respectivamente. Por lo tanto, es posible obtener el gradiente inicial de temperatura del suelo utilizando la ecuación (IX.5).

### IX.3. EL COEFICIENTE TURBULENTO DE DIFUSIVIDAD TÉRMICA EN EL AIRE

El modelo propone un coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire que varía potencialmente con la altura (ver expresión (VI.1)):

$$\chi_h = \chi_a Z^n$$

A continuación se desarrolla el procedimiento utilizado para evaluar  $\chi_h$ .

El flujo de calor sensible en la capa de superficie puede ser expresado mediante (ver Capítulo V):

$$F_a = -\rho_a C_p u_* T_* \quad (IX.6)$$

donde  $C_p$  es el calor específico del aire a presión constante,  $\rho_a$  es la densidad del aire,  $u_*$  es la velocidad de fricción y  $T_*$  es la temperatura característica en la capa de superficie de la atmósfera. Sus valores fueron obtenidos utilizando los perfiles verticales del viento y de la temperatura del aire (ver Capítulo V).

También, el flujo de calor sensible puede ser definido en función del gradiente térmico vertical de la atmósfera (ver ecuación (VI.5)):

$$F_a = -\chi_h \rho_a C_p \frac{\partial T}{\partial Z} \quad (IX.7)$$

Se utiliza la siguiente aproximación:

$$\frac{\partial T}{\partial Z} \approx \frac{\Delta T}{\bar{Z}} = \frac{T_2 - T_1}{Z_2 - Z_1} \quad (IX.8)$$

donde:  $\bar{Z} = \frac{Z_1 + Z_2}{2}$

Igualando (IX.6) y (IX.7) y utilizando (VI.1) se obtiene:

$$\frac{u \cdot T_s}{\Delta T} = \chi_b - \chi_a (\bar{z}')^m \quad (\text{IX.9})$$

Aplicando logaritmos a la (IX.9) se obtiene:

$$\ln[\chi_b] - \ln[\chi_a] + m \ln[\bar{z}'] \quad (\text{IX.10})$$

Conocida la diferencia de temperaturas entre dos niveles y el perfil del viento se puede obtener el valor de  $m$  y  $\chi_a$  correspondiente a una hora determinada.

El coeficiente turbulento de conductividad térmica para el aire está dado por una expresión similar a la (VI.1):

$$\kappa_b = \kappa_a z^m \quad (\text{IX.11})$$

donde  $\kappa_a = C_p \rho_a \chi_a$

#### IX.4. LA TEMPERATURA "OBSERVADA" EN SUPERFICIE

La temperatura en superficie fue calculada para todas las horas nocturnas de los distintos días siguiendo el procedimiento utilizado por Melgarejo y Deardorff (1975).

Primero, se calculó el número de Richardson ( $Ri$ ) a partir de los datos observacionales según la expresión:

$$Ri = \frac{g \cdot \beta \cdot (T_2 - T_1) \cdot \sqrt{z_1 \cdot z_2}}{\bar{T} \cdot (u_2 - u_1)^2} \cdot \ln\left(\frac{z_2}{z_1}\right) \quad (\text{IX.12})$$

donde:  $T_2$  y  $u_2$  son la temperatura y velocidad del viento a la altura  $z_2$ ;  $T_1$  y  $u_1$  son la temperatura y velocidad del viento a la altura  $z_1$  y  $\bar{T}$  es la temperatura media de la capa. La altura media geométrica está dada por:

$$z_a = \sqrt{z_1 \cdot z_2} \quad (\text{IX.13})$$

Luego, se encontró  $z_a/L$  ( $L$  es el parámetro de estabilidad de Monin-Obukhov definido por la expresión (V.3)) mediante la rela-

ción relación semi-empírica (Businger, 1971):

$$R_1 = \frac{z_a}{L} \cdot \frac{\Phi_H}{\Phi_M^2} \quad (\text{IX.14})$$

donde:  $\Phi_H$  y  $\Phi_M$  son los gradientes verticales adimensionales de la temperatura y de la velocidad del viento introducidos en el Capítulo V.

Despejando el valor de  $z_a/L$  de (IX.14), se obtiene (para  $z_a/L > 0$ ) para el caso estable:

$$\frac{z_a}{L} = \frac{-9,4 \cdot R_1 + 0,74 - \sqrt{4,88 \cdot R_1 + 0,5476}}{44,18 \cdot R_1 - 9,4} \quad (\text{IX.15})$$

Si  $R_1$  es menor que cero, caso inestable, el valor de  $z_a/L$  se obtiene aplicando un método iterativo a la expresión siguiente:

$$R_1 = \frac{z_a}{L} 0,74 \sqrt{\frac{1 - 15 \frac{z_a}{L}}{1 - 9 \frac{z_a}{L}}} \quad (\text{IX.16})$$

El tercer paso consistió en calcular  $T_*$  (temperatura característica), mediante la forma funcional del perfil adimensional de la temperatura (Capítulo V), utilizando las mediciones de temperatura realizadas en  $z_1$  y  $z_2$ .

$$T_* = \frac{k \cdot (T_2 - T_1)}{\ln \left[ \frac{z_2}{z_1} \right] + \Psi_H \left( \frac{z_2}{L} \right) + \Psi_H \left( \frac{z_1}{L} \right)} \quad (\text{IX.17})$$

Por lo tanto, la temperatura "observada" en superficie en la longitud de rugosidad ( $z_0$ ) se obtiene utilizando la temperatura a una altura de referencia ( $z_R$ ):

$$T(z_0) = T(z_R) - \frac{T_*}{k} \left[ 0,74 \ln \left[ \frac{z_R}{z_0} \right] - \Psi_H \left( \frac{z_R}{L} \right) \right] \quad (\text{IX.18})$$

donde:  $k$  es la constante de von-Karman,  $\Psi_H$  es el apartamiento del perfil de temperatura respecto de las condiciones neutrales (ver Capítulo V).

## IX.5. VALORES DE LOS PARAMETROS CORRESPONDIENTES AL EXPERIMENTO " WANGARA "

### IX.5.1. Generalidades

La puesta del sol en el período del experimento "Wangara" fue aproximadamente a las 18 hs. mientras la salida del mismo ocurrió cerca de las 7 hs.

El criterio para decidir el momento inicial de corrida del modelo es aquél en el cual la radiación neta comienza a tener un valor constante durante la noche y las características atmosféricas sean representativas de la condiciones nocturnas. En el experimento "Wangara" ese momento coincidió con las 21 hs.

### IX.5.2. La longitud de rugosidad ( $z_0$ )

En el experimento "Wangara" fue determinado el valor de  $z_0$  en la estación quinta y fue analizado una posible dependencia de la dirección del viento.

Diferentes perfiles de viento en condiciones neutral y casi neutral fueron encontrados en el momento de transición desde el estado inestable al estable aproximadamente a las 17 hs. Se seleccionaron los días en los que el gradiente vertical de temperatura potencial fue nulo en la estación quinta. En esta estación se encontró que no existe una significativa dependencia de  $z_0$  con la dirección del viento. El valor calculado y presentado en el experimento "Wangara" para la estación quinta es de (ver Clarke y otros, 1971):

$$z_0 = ( 1,20 \pm 0,1 ) \text{ mm}$$

### IX.5.3. El coeficiente de conductividad y la difusividad térmica en el suelo

En el experimento "Wangara" no se realizaron mediciones directas de la difusividad térmica en el suelo. La evaluación de las características térmicas del suelo pueden ser obtenidas conociendo la naturaleza del suelo, humedad y porosidad.

Cellier (1984) evaluó las características térmicas medias del suelo utilizando las relaciones de de Vries (1963) correspondientes al experimento "Wangara" obteniendo los siguientes valores.

Conductividad térmica:  $\kappa_{\bullet} = 602,028 \text{ cal/m.h.}^{\circ}\text{K}$   
Capacidad calórica  
por unidad de volumen:  $(\rho_{\bullet} C_{\bullet})_{\text{m}} = 334460 \text{ cal/m}^3 \text{ }^{\circ}\text{K}$   
Difusividad térmica:  $\chi_{\bullet} = 1,8 \times 10^{-03} \text{ m}^2/\text{h.}$

En algunas regiones templadas durante la primavera el suelo puede ser considerado en capacidad de campo a varios centímetros debajo de superficie. Utilizando datos publicados (Bruckler y otros, 1987) se tienen valores medios de 1032,04 cal/m h  $^{\circ}\text{K}$  y 597250 cal/m<sup>3</sup>  $^{\circ}\text{K}$ , respectivamente, para la conductividad térmica  $(\kappa_{\bullet})_{\infty}$  y capacidad calórica  $((\rho_{\bullet} C_{\bullet})_{\text{m}})_{\infty}$ , utilizados para diferentes suelos minerales con capacidad de campo debajo de 0,20 m de profundidad.

Utilizando observaciones de humedad del suelo realizadas en estaciones meteorológicas, Cellier (1993) presenta una tabla tal que relaciona conductividad térmica del suelo en superficie y en profundidad. También, relaciona la capacidad calórica en superficie y en profundidad. En la Tabla IX.II se muestra estas relaciones clasificadas según la humedad del suelo (Cellier, 1993).

Con el fin de obtener las constantes térmicas del suelo se utilizan los valores de  $(\kappa_{\bullet})_{\infty}$  y  $((\rho_{\bullet} C_{\bullet})_{\text{m}})_{\infty}$ , y las relaciones presentadas en la Tabla IX.II para un suelo húmedo, obteniéndose los siguientes valores en superficie:

Conductividad térmica:  $\kappa_{\bullet} = 928,83 \text{ cal/m.h.}^{\circ}\text{K}$   
Capacidad calórica  
por unidad de volumen:  $(\rho_{\bullet} C_{\bullet})_{\text{m}} = 537525 \text{ cal/m}^3 \text{ }^{\circ}\text{K}$   
Difusividad térmica:  $\chi_{\bullet} = 1,73 \times 10^{-03} \text{ m}^2/\text{h.}$

#### **IX.5.4. La difusividad térmica en el aire**

##### **IX.5.4.1. El coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire**

En el experimento "Wangara" se realizaron mediciones de diferencias de temperaturas en el aire entre 1 y 2 metros y entre 2

y 4 metros de altura (datos incluidos en la Tabla IX.III).

La expresión (IX.9) se aplicó a las diferencias de temperaturas entre 1 y 2 m. obteniéndose un valor de  $\chi_h(z')$  para la altura  $z' = 1,5$  m. De igual manera se aplica a las diferencias de temperaturas entre 2 y 4 m. donde  $z' = 3$  m. En la Figura IX.3 se presentan los valores de  $\chi_h$  a  $z = 1,5$  m. y 3 m. en el momento inicial (21 hs.) correspondiente a los días seleccionados.

Los coeficientes turbulentos de difusividad ( $\chi_a$ , ver Tabla IX.IV) y conductividad ( $K_a$ ) térmicas a un metro de altura en el aire correspondientes al momento inicial (21 hs.) fueron obtenidos utilizando las ecuaciones (IX.10) y (IX.11).

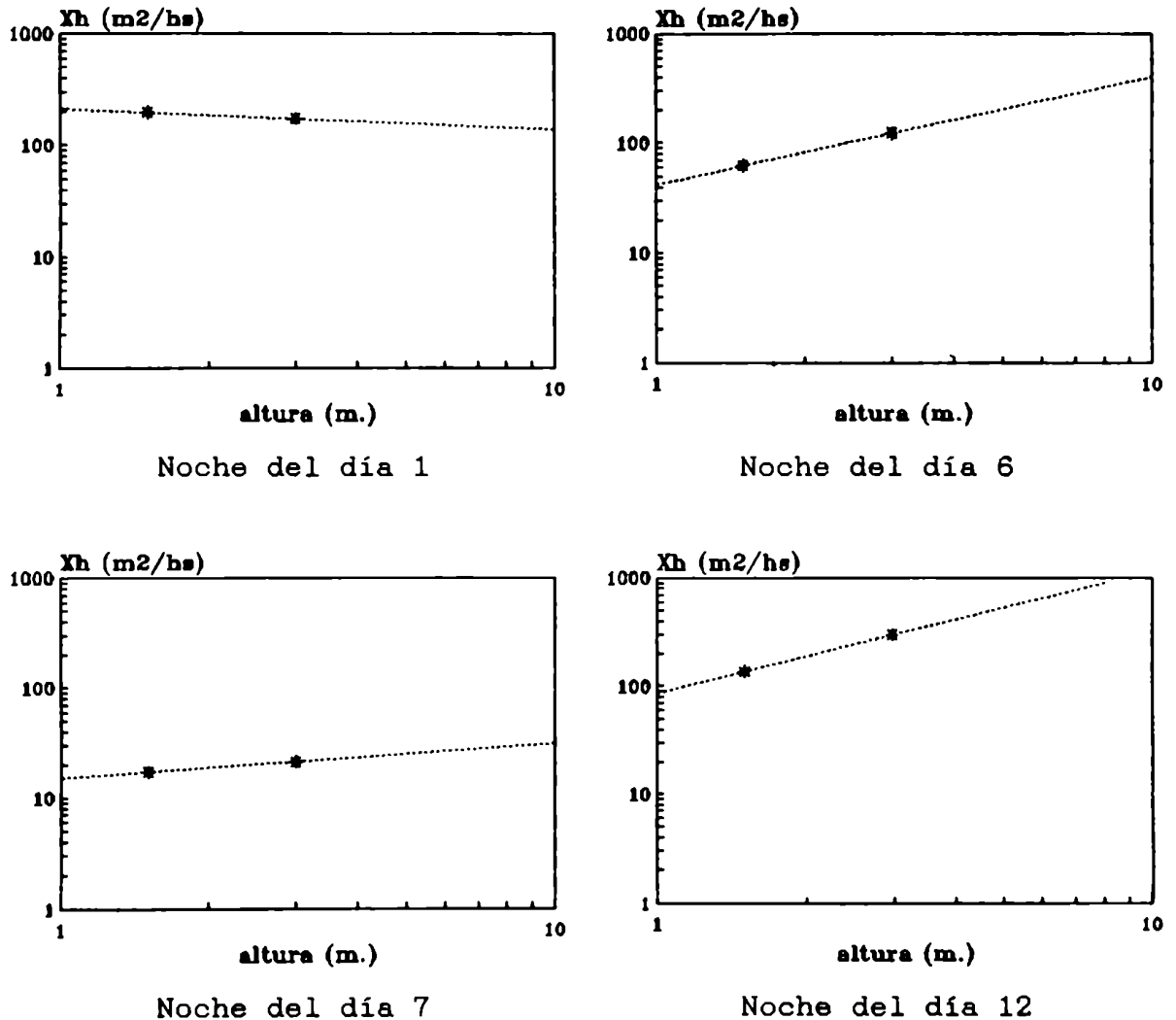
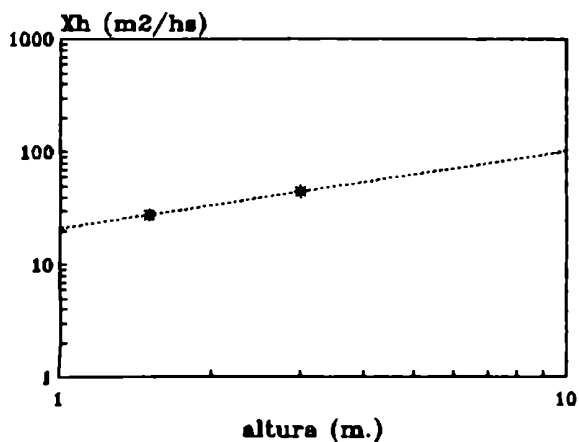
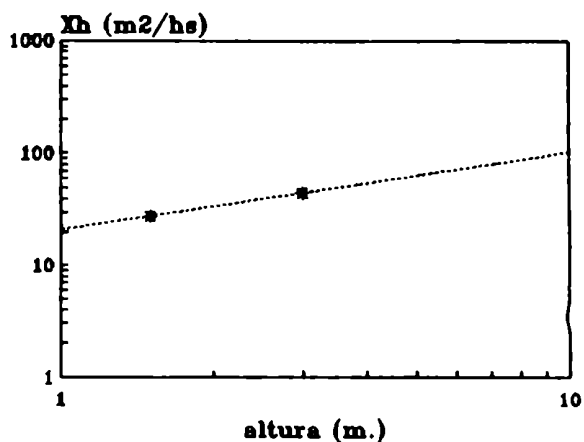


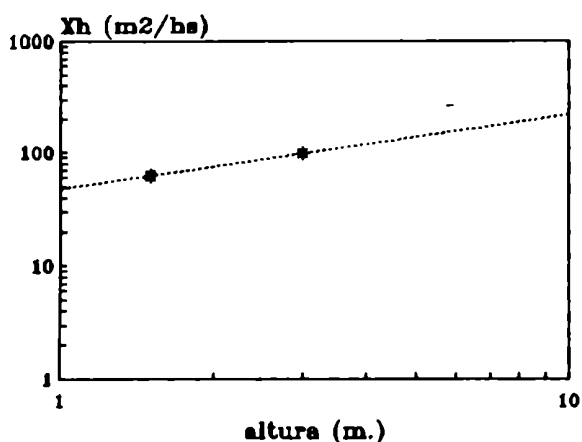
Figura IX.3: Valores del coeficiente turbulento de difusividad térmica ( $\chi_h(z)$ ) a las 21 hs., (.....) es la recta que pasa por los valores.



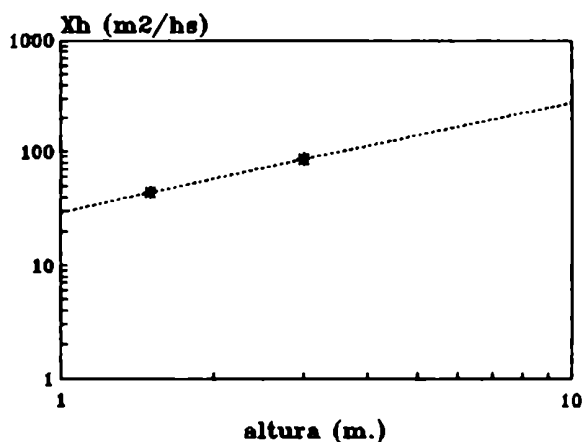
Noche del día 13



Noche del día 31



Noche del día 32



Noche del día 33

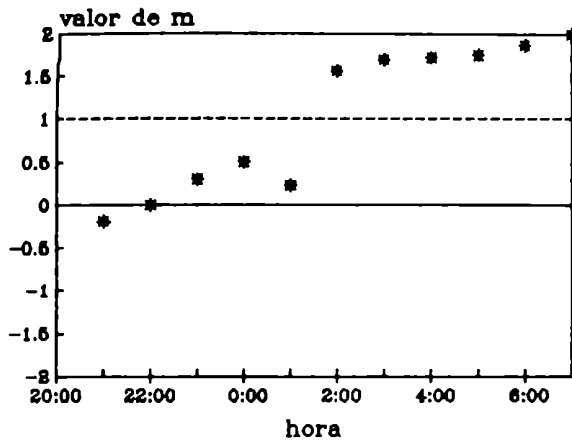
Figura IX.3: Valores del coeficiente turbulento de difusividad térmica ( $\chi_h(z)$ ) a las 21 hs., (.....) es la recta que pasa por los valores (continuación).

#### IX.5.4.2. El parámetro $m$

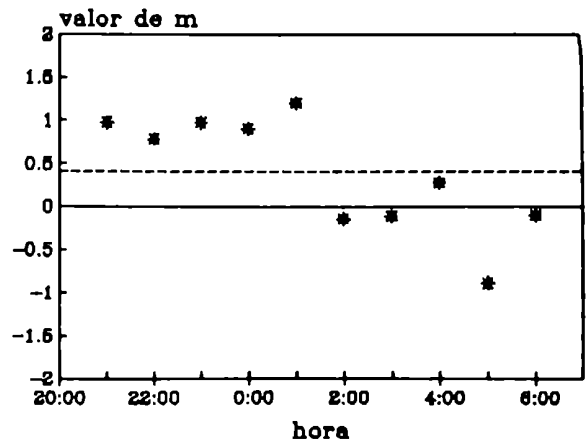
En la sección (IX.3) se describió la metodología para evaluar  $m$  y  $\chi_a$ . Estos parámetros fueron calculados para cada hora en las noches seleccionadas del experimento "Wangara", utilizando los datos de temperatura del aire y velocidad del viento presentados en la Tabla IX.III.

En la Figura IX.4 se grafican los valores de  $m$  en función de las horas (cuyos valores se presentan en la Tabla IX.IV). La línea horizontal punteada corresponde al valor medio de  $m$  entre las 21 a 7 hs. Se observa que el valor medio se encuentra en

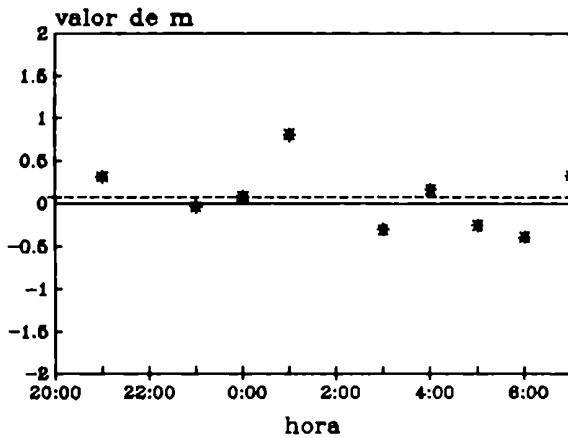
todos los casos entre 0 y 1, que concuerda con los resultados obtenidos por Geiger (1965) para otra zona (ver Capítulo VII). Por otra parte, se cumple la condición impuesta en el modelo  $0 < m < 1$  (ver Capítulo VI).



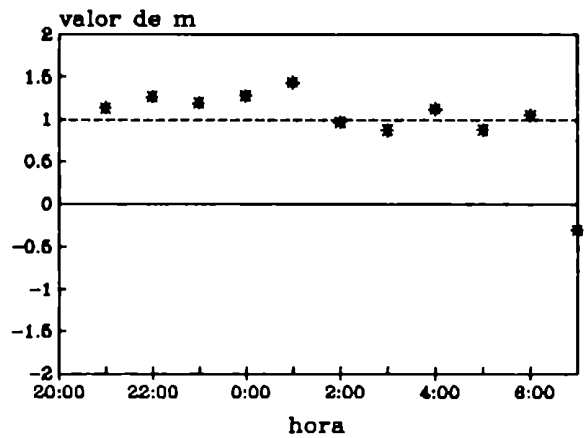
Noche del día 1, ---  $\bar{m} = 1,03$



Noche del día 6, ---  $\bar{m} = 0,41$



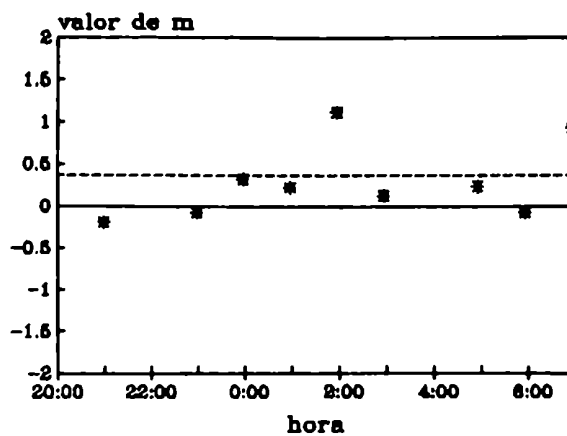
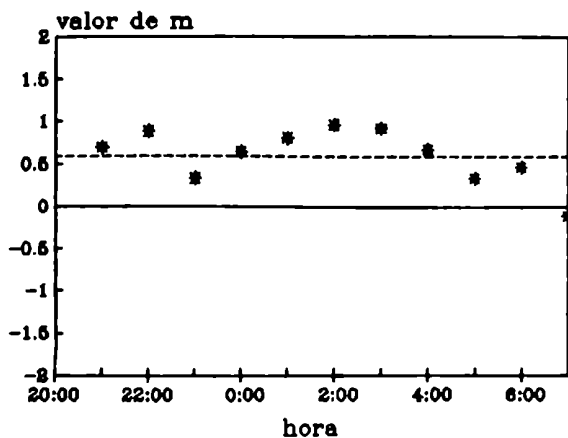
Noche del día 7, ---  $\bar{m} = 0,07$



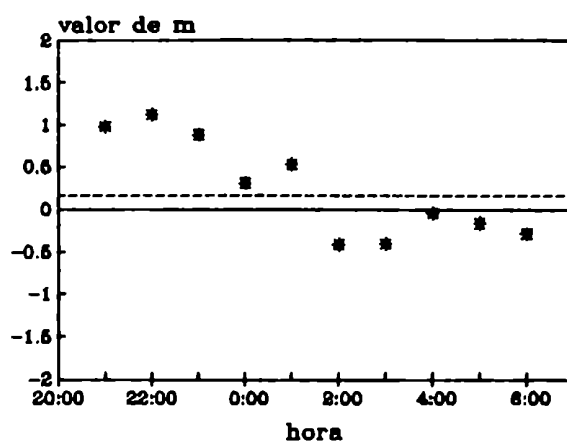
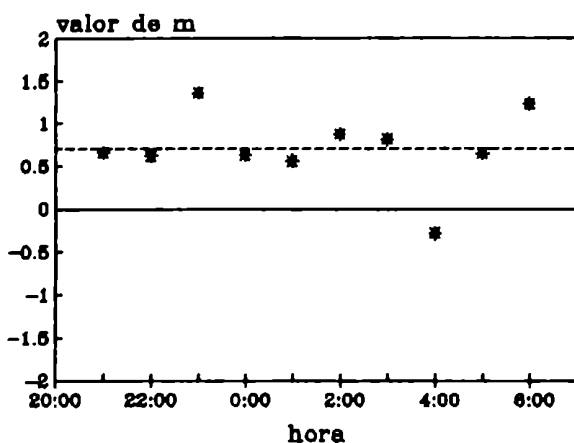
Noche del día 12, ---  $\bar{m} = 0,98$

Figura IX.4: Valores horarios calculados del parámetro  $m$  (----) es el valor medio de  $m$ .





Noche del día 13, ---  $\bar{m} = 0,59$  Noche del día 31, ---  $\bar{m} = 0,36$



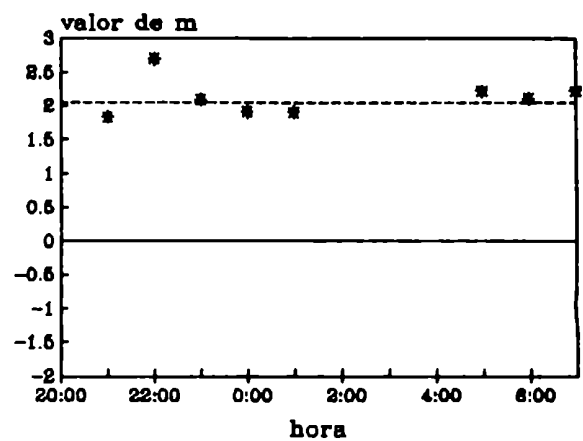
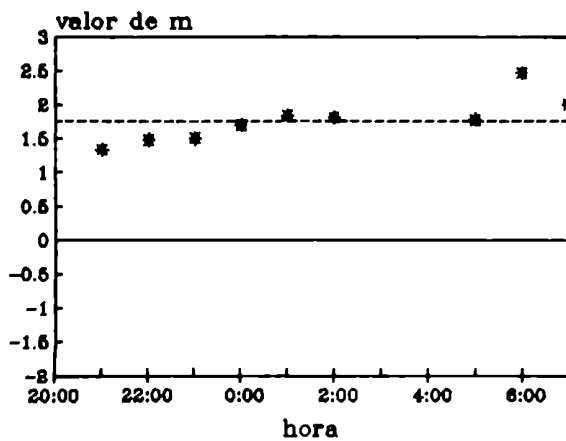
Noche del día 32, ---  $\bar{m} = 0,70$  Noche del día 33, ---  $\bar{m} = 0,16$

Figura IX.4: Valores horarios calculados del parámetro  $m$  (----) es el valor medio de  $m$  (continuación).

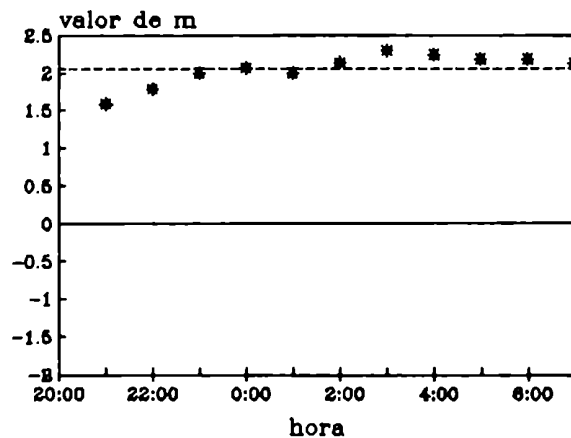
Con el fin de correr el modelo y debido a que "a priori" no es posible conocer la evolución de  $m$ , se utilizó el valor de  $m$  calculado en el momento inicial de corrida del modelo (21 hs).

En el caso en que  $m > 1$  se utilizó  $m = 0,999$ , situación ésta que se da sólo para el día 12 a las 21 hs (ver Tabla IX.IV). Con el valor de  $m$  se obtuvo  $\lambda_*$ . En el caso en que  $m < 0$  se utilizó  $m = 0$ , tal como ocurre sólo en los días 1 y 31 a las 21 hs.

En la Figura IX.5, se presentan los valores de  $m$  en función de las horas correspondientes a los días 11, 18 y 30. En las mismas se aprecia que el valor de  $m$  medio es  $\gg 1$  en los tres casos por lo cual estos días se apartan de las condiciones del modelo (ver Capítulo VI) y en consecuencia no fueron considerados para la verificación del mismo.



Noche del día 11, ---  $\bar{m} = 1,76$     Noche del día 18, ---  $\bar{m} = 2,05$



Noche del día 30, ---  $\bar{m} = 2,05$

Figura IX.5: Valores horarios calculados del parámetro  $m$  (----) es el valor medio de  $m$ .

## IX.6. VALORES DE LOS PARAMETROS CORRESPONDIENTES AL EXPERIMENTO " GREAT PLAINS "

### IX.6.1. Generalidades

En el experimento Great Plains se obtuvieron mediciones de diferentes variables cada dos horas. La puesta del sol se verificó aproximadamente a las 19 hs. 20 min. y la salida del sol a las 5 hs. 50 min. El momento inicial para la corrida del modelo fue definido a las 20 hs 35 min.

### IX.6.2. La longitud de rugosidad ( $z_0$ )

El valor de  $z_0$  no fue determinado en el área de realización del experimento " Great Plains " .

En condición de neutralidad atmosférica en la ecuación (V.10) la función  $\Psi_M(z/L)=0$ . En consecuencia es válida la siguiente expresión logarítmica del viento:

$$u(z) = \frac{u_*}{k} \ln[z] - \frac{u_*}{k} \ln[z_0] \quad (\text{IX.19})$$

La pendiente de la recta define el valor  $u_*/k$  y la ordenada al origen el valor  $z_0$ .

Con el objeto de evaluar  $z_0$  se seleccionaron las observaciones en las cuales el número de Richardson ( $Ri$ ) es próximo a cero (casi neutral). Los valores de  $Ri$  fueron evaluados por la Universidad de Johns Hopkins con datos simultáneos de diferencias de temperatura y de velocidad del viento centrado en la hora (ecuación IX.12).

Se seleccionaron los datos de velocidad de viento del 31/8 a las 6 hs. 35 min. ( $Ri=0,001$ ); 31/8 a las 18 hs. 35 min. ( $Ri=0,002$ ) y el 1/9 a las 6 hs. 35 min. ( $Ri=0,002$ ). Se determinó el valor de  $z_0$  para los tres momentos seleccionados y el valor medio es:

$$z_0 = (7,9 \pm 1,3) \text{ mm.}$$

### IX.6.3. El coeficiente de conductividad y la difusividad térmica en el suelo

La conductividad térmica en el suelo fue medida por la Universidad de Texas cada dos horas. Se determinó un valor medio de este parámetro para cada una de las noches seleccionadas (presentados en la Tabla IX.V). También se calcularon los valores del coeficiente de difusividad térmica del suelo.

El valor medio de la capacidad de calor por unidad de volumen,  $(\rho \cdot C_p)_m$ , en las cuatro noches fue de  $4 \times 10^5 \text{ cal/m}^3 \text{ } ^\circ\text{K}$ .

#### IX.6.4. La difusividad térmica en el aire

##### IX.6.4.1. El coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire

Con los valores observados de temperatura a 0.8, 1.6, 3.2 y 6.4 m. de altura (incluidos en la Tabla IX.VI) se obtuvieron los coeficientes turbulentos de difusividad térmica ( $\chi_h$ ) en el aire para cada una de los siguientes pares de alturas 1,2; 2,4 y 4,8 m., utilizando la expresión (IX.9) y los valores de  $u_* T_*$  de la Tabla IX.VII correspondientes al momento inicial para cada una de las noches.

En la Figura IX.6. se muestran los valores obtenidos de  $\chi_h(z)$  a las 20 hs. 35 min. para cada noche del experimento.

Los valores de  $\chi_h$  son más altos que los observados en el experimento "Wangara" (ver Figura IX.3). Los valores de velocidad del viento correspondientes al momento inicial de los experimentos "Wangara" y "Great Plains" se presentan en las Tablas IX.VIII. y IX.IX. Los valores más altos de  $\chi_h(z)$  están asociados con velocidades del viento elevadas. Esto coincide con el resultado de la Figura VII.3 (ver Capítulo VII) mencionado por Geiger (1965).

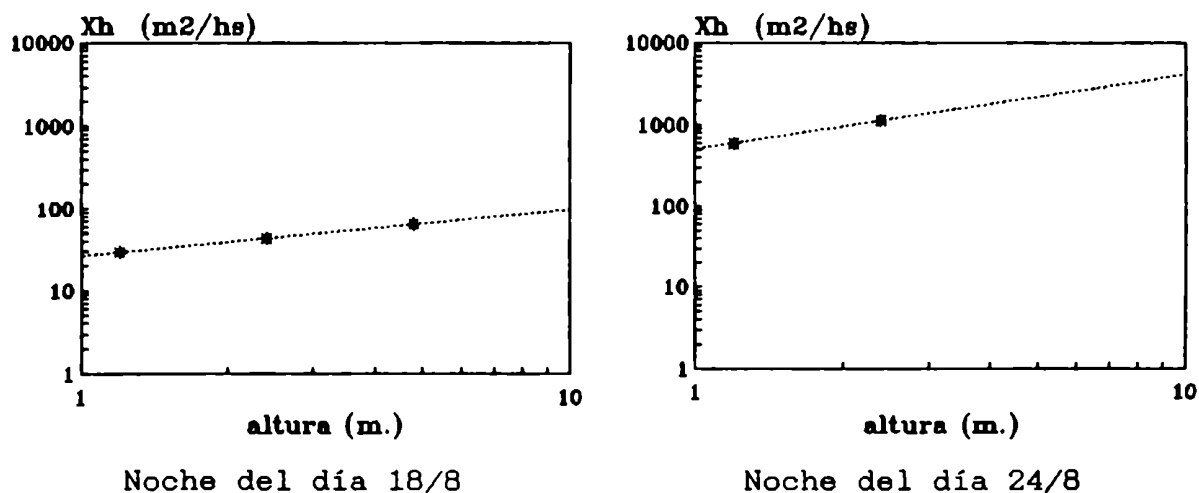


Figura IX.6: Valores del coeficiente turbulento de difusividad térmica ( $\chi_h(z)$ ) a las 20 hs. 35 min. (.....) es la recta que mejor ajusta a los valores.

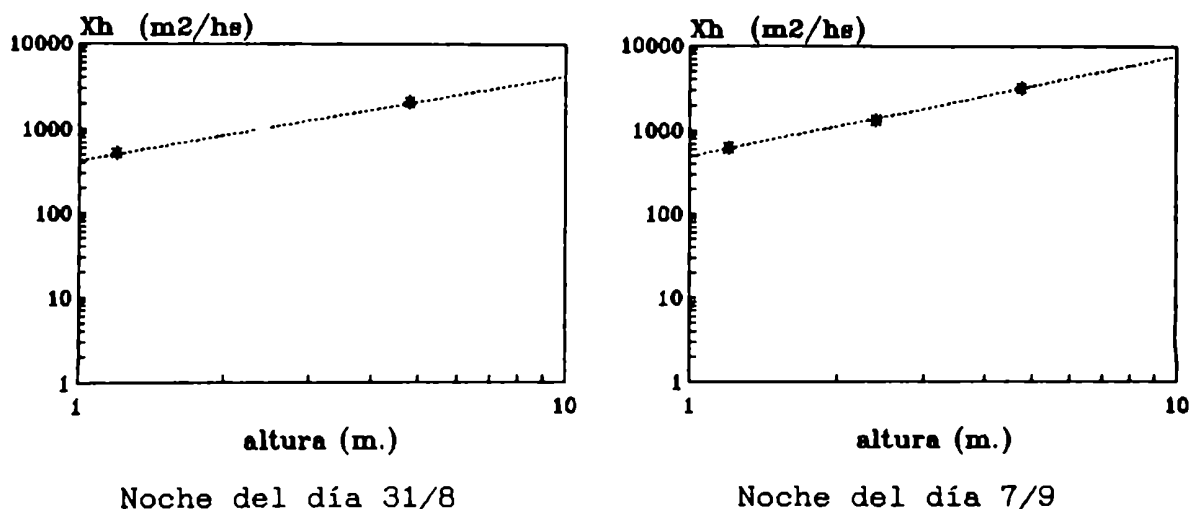


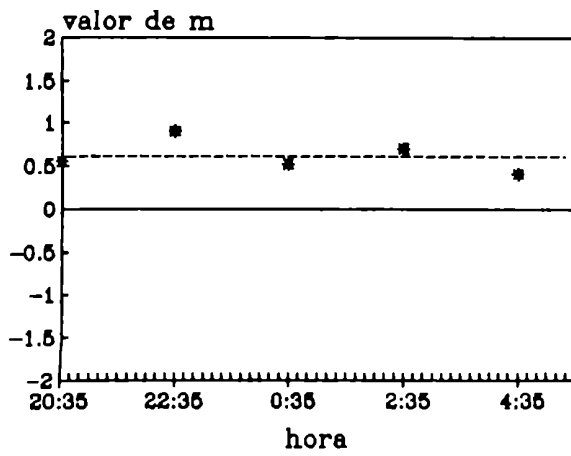
Figura IX.6: Valores del coeficiente turbulento de difusividad térmica ( $\chi_h(z)$ ) a las 20 hs. 35 min. (.....) es la recta que mejor ajusta a los valores (continuación).

#### IX.6.4.2. El parámetro $m$

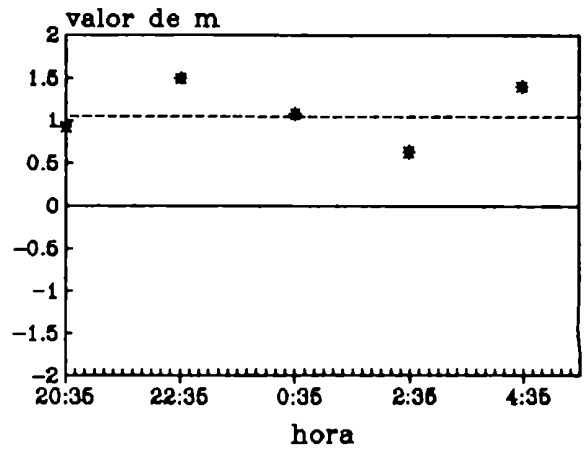
Utilizando la ecuación (IX.10) y empleando los datos de la velocidad del viento y de la temperatura del aire incluidos en la Tabla IX.VI se calcularon los valores horarios de  $m$  y  $\chi_h$  para las noches del experimento "Great Plains", presentados en la Tabla IX.VII.

En la Figura IX.7 se muestran los valores de  $m$  en función de las horas. La línea horizontal punteada es el valor medio de  $m$  entre las 20 hs 35 min. y las 4 hs 35 min. Los valores medios de  $m$  son mayores que los obtenidos en el experimento "Wangara" (ver Figura IX.4).

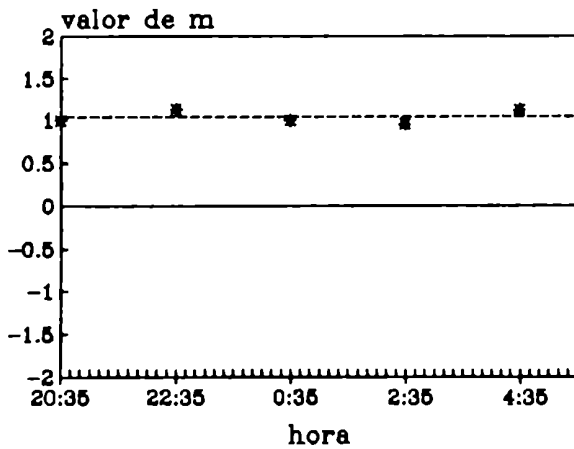
Las noches con un valor medio de  $m \approx 1$  representa una condición atmosférica media de estabilidad casi neutral durante la noche, entonces la temperatura tiene una expresión logarítmica con la altura.



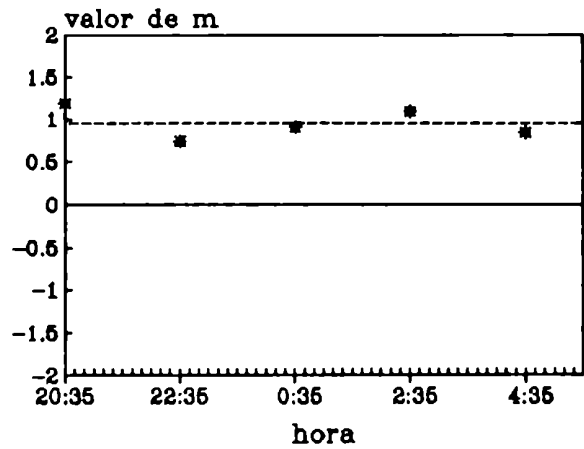
Noche del día 18/8, ---  $\bar{m}=0,62$



Noche del día 24/8, ---  $\bar{m}=1,09$



Noche del día 31/8, ---  $\bar{m}=1,04$



Noche del día 7/9, ---  $\bar{m}=0,95$

Figura IX.7: Valores horarios calculados del parámetro  $m$ .  
 (----) es el valor medio de  $m$ .

# CAPITULO X

## APLICACION DEL MODELO PROPUESTO

### X.1. RESUMEN DE LAS PARAMETROS DE ENTRADA DEL MODELO

Los parámetros de entrada del modelo propuesto son (ver Capítulo VI):

- $\chi_s$  el coeficiente de difusividad térmica en el suelo,
- $K_s$  el coeficiente de conductividad térmica en el suelo,
- $\chi_a$  el coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire a un metro de altura,
- $K_a$  el coeficiente turbulento de conductividad térmica en el aire a un metro de altura,
- $m$  el exponente de la variación vertical del coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire,
- $F_n$  el valor medio de radiación neta desde el momento inicial de corrida del modelo hasta la salida del sol,
- $a$  la pendiente de la recta definida por  $F_n(0,t)$ , para  $t > t_a$ ,
- $\beta$  el gradiente inicial de temperatura en el suelo.
- $t_a$  la cantidad de horas transcurridas desde la corrida del modelo hasta la salida del sol,
- $t_b$  la cantidad de horas transcurridas desde la corrida del modelo hasta el momento en que  $F_n$  es nulo,

La metodología para evaluar cada parámetro fue descripta en el Capítulo IX. Los valores de entrada para los diferentes días del experimento " Wangara " y " Great Plains " se incluyen en las Tablas X.I y X.II, respectivamente.

### **X.1.1. Generalidades**

En este Capítulo se presentan los valores horarios de temperatura de superficie calculados por el modelo y "observados", correspondientes a las noches seleccionadas de los experimentos "Wangara" y "Great Plains".

Los valores horarios observados de la temperatura presentan fluctuaciones. Esto podría ser ocasionado por un aumento de la velocidad del viento y/o un momentáneo incremento de la mezcla iniciada en la atmósfera produciendo un aumento de la temperatura, aunque también podría existir otros períodos de alta velocidad de viento lo cual no exhibe un cambio comparable en el campo de la temperatura (ver Surridge, 1986 (A)). Otras razones para una variación momentánea de la temperatura podría deberse a variaciones en la nubosidad y/o en la humedad del aire.

Las fluctuaciones de la temperatura de superficie "observada" parecen estar asociadas principalmente con las fluctuaciones en la velocidad del viento. Por otra parte, los valores calculados de las temperaturas no responden a estas fluctuaciones ya que el modelo es corrido con las características atmosféricas de la hora inicial.

## **X.2. ANALISIS DE LOS RESULTADOS**

### **X.2.1. Experimento "Wangara"**

El período en el cual se realizaron las observaciones en el experimento "Wangara", la puesta del sol estuvo comprendida entre las 18 hs. y las 18 hs. 30 min. La salida del sol estuvo entre las 7 hs. y las 6 hs. 30 min.

El modelo se corrió entre las 21 hs. y 8 hs. del día siguiente. Los valores observados de la velocidad del viento (son promedio de media hora centrados en cada hora) son los correspondientes a las alturas de 0,5 metros y 8 metros. La fluctuación del viento en un período de tiempo ( $\Delta t$ ) es evaluada como el cociente entre la variación de la velocidad ( $\Delta v$ ) y  $\Delta t$ .



### X.2.1.1. La noche del día 1

La velocidad media horaria del viento a 8 m. de altura durante la noche del día 1 es superior a 4 m/s. (Figura X.1.a).

La nubosidad (Altostratus (As) y Cirrus (Ci)) se incrementa de 4 a 7,5 octavos entre las 21 h. y 1 h. de la mañana, disminuyendo a 2 octavos a las 2 h. de la mañana (Figura X.1.b). El aumento de la nubosidad podría ser responsable del crecimiento de la temperatura de superficie "observada" entre las 22 y 2 h. (Figura X.1.c) que a partir de las 3 h. disminuye casi linealmente.

La temperatura de superficie calculada por el modelo (Figura X.1.c) se adapta a la disminución de temperatura "observada", excepto entre las 22 h. y 3 h. de la mañana.

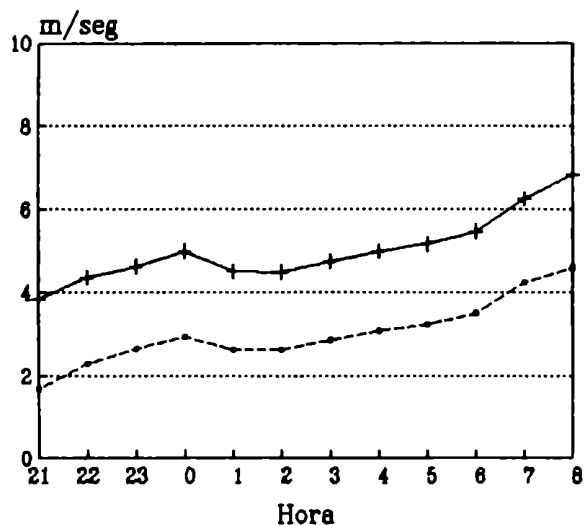


Figura X.1.a: Día 1, velocidad del viento a -- 0,5 m, +- 8 m

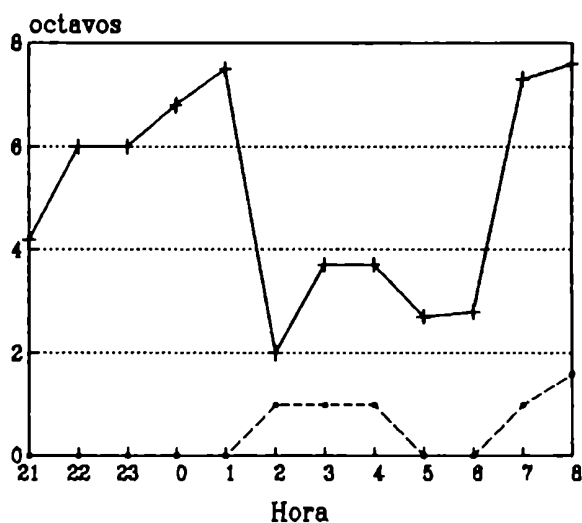


Figura X.1.b: Día 1, +- nubosidad total, -.- nubosidad baja

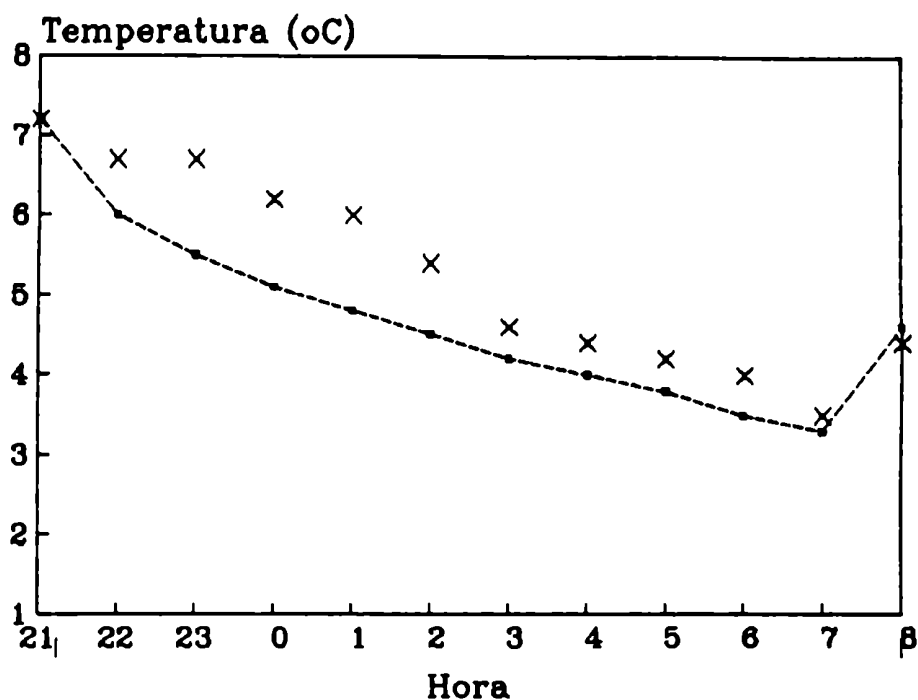


Figura X.1.c: Día 1, X temperatura de superficie "observada"  
 - - - - temperatura de superficie calculada.

#### X.2.1.2. La noche del día 6

La velocidad del viento durante la noche del día 6 es menor que 4 m/s. excepto a la 01 h. que alcanza su valor máximo con 4,6m/s (Figura X.2.a). La fluctuación de la velocidad entre las 23 h. y 02 h. de la mañana esta asociada con la nubosidad baja observada (Figura X.2.b). Esta fluctuación del viento podría producir el aumento de la temperatura "observada" (Figura X.2.c).

A las 3 h. la velocidad del viento, a 8 metros de altura, disminuyó a 2,66 m/s. permaneciendo casi constante hasta las 7 hs. A las 8 hs. se observó un marcado incremento hasta llegar a 4,02 m/s.

La nubosidad es casi constante a partir de las 23 hs. del tipo Cirrostratus (Cs) hasta la 7 hs. (Figura X.2. b).

La temperatura calculada por el modelo (Figura X.2.c) se ajusta mejor a los valores observados al finalizar la noche, cuando la velocidad del viento y la nubosidad son aproximadamente constantes con las horas.

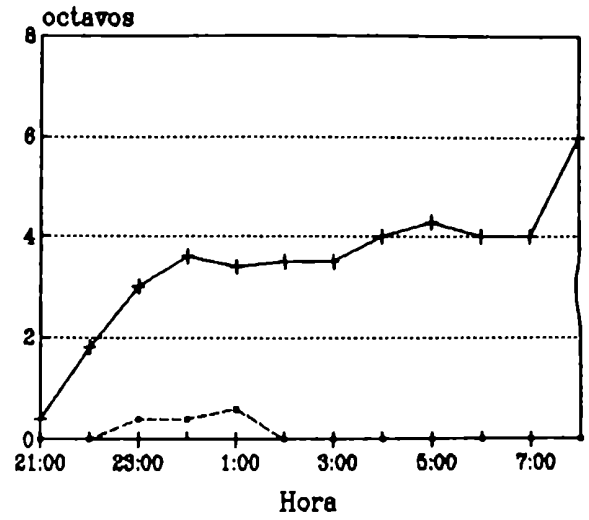
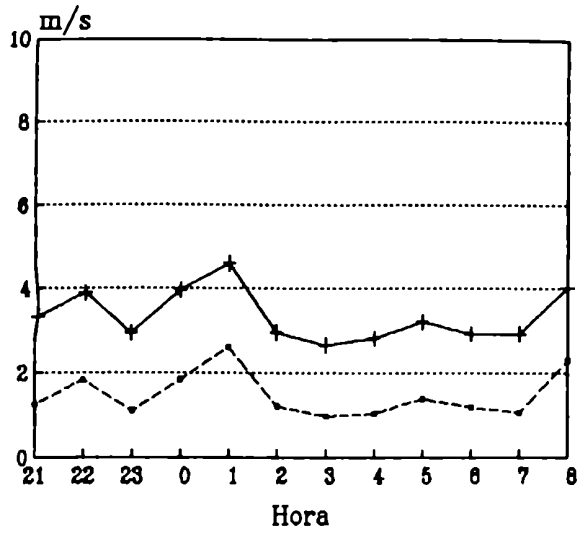


Figura X.2.a: Día 6, velocidad del viento a -- 0,5 m, +- 8 m

Figura X.2.b: Día 6, +- nubosidad total, -- nubosidad baja

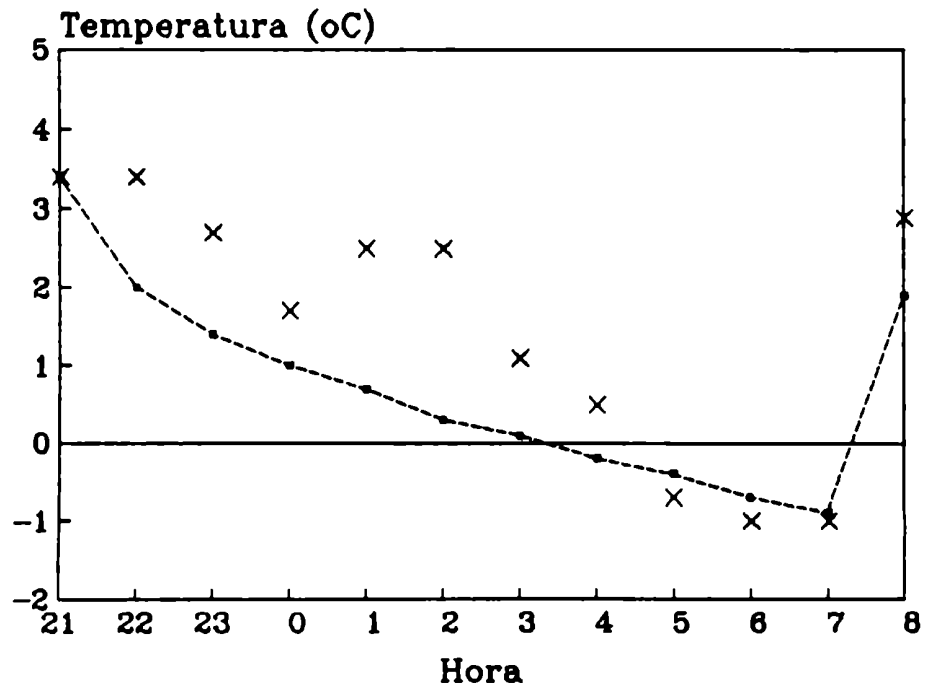


Figura X.2.c: Día 6, X temperatura de superficie "observada" --- temperatura de superficie calculada.

### X.2.1.3. La noche del día 7

Durante la noche del día 7 se presenta un valor máximo de velocidad del viento a las 24 h. resultando en un aumento de la temperatura observada a esa hora (ver Figuras X.3.a. y X.3.c.). Entre las 6 h. y 7 h. se observa una aceleración de la velocidad del viento a 0,5 metros de altura de 0,011  $\text{cm/s}^2$ . Esta aceleración es mayor que a 8 metros de altura (que es de 0,008  $\text{cm/s}^2$ ).

La nubosidad es del tipo Altocumulus (Ac) y Cirrus (Ci) (Figura X.3.b), no superando 1/8 de cielo cubierto.

Los mayores apartamientos de las temperaturas calculadas por el modelo y las observadas ocurren en momentos que se verificaron valores máximos de velocidad del viento a las 24 y 7 h. (ver Figura X.3.c)

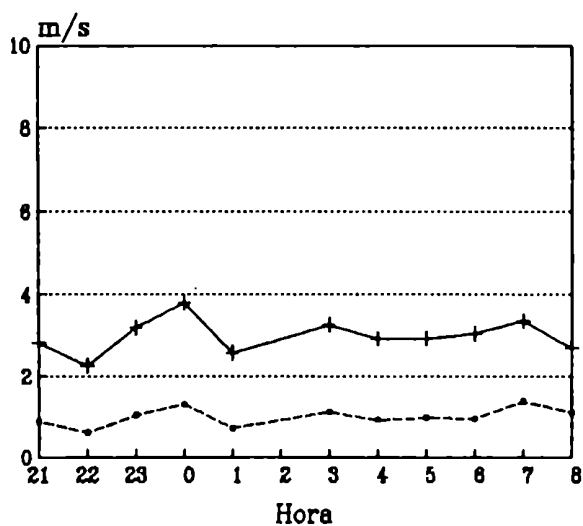


Figura X.3.a: Día 7, velocidad del viento a -- 0,5 m, +- 8 m

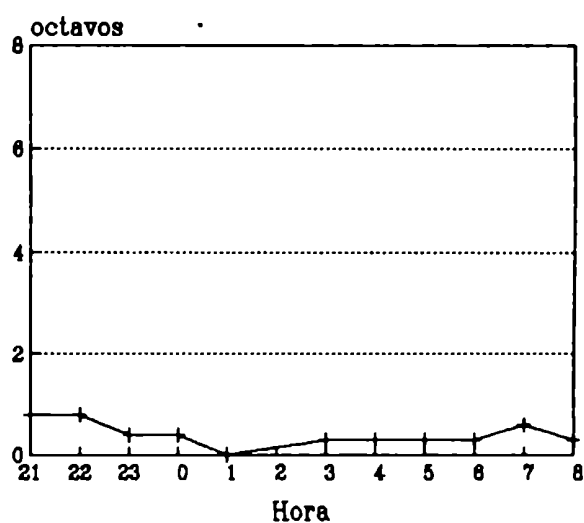


Figura X.3.b: Día 7, +- nubosidad total.

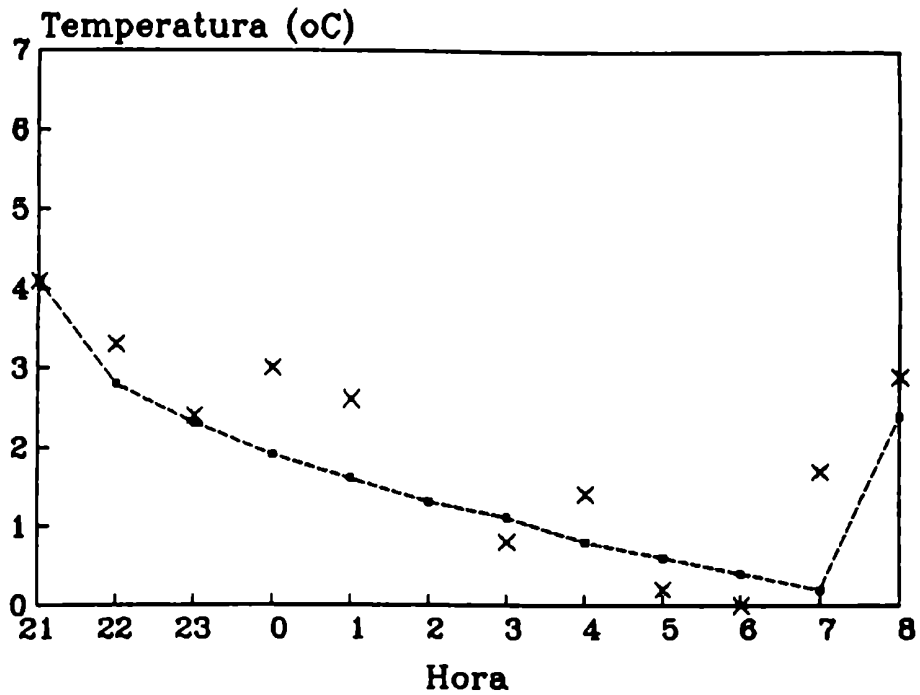


Figura X.3.c: Día 7, X temperatura de superficie "observada"  
 -.-.-temperatura de superficie calculada.

#### X.2.1.4. La noche del día 12

En la noche del día 12 a las 01 h. se observó un incremento de la velocidad del viento (ver Figura X.4.a) asociado con un aumento de la temperatura de superficie "observada" a la misma hora (Figura X.4.b). Mientras que la desaceleración de la velocidad del viento entre las 3 y 4 h. fue de  $0,027 \text{ cm/s}^2$  podría producir un descenso de la temperatura "observada" a partir de las 04 h. (Figura X.4.b).

Durante la noche del día 12 el cielo estuvo despejado.

El apartamiento entre la temperatura calculada y la "observada" en superficie en la Figura X.4.b. es importante entre las 0 y 4 h., período en el cual existió fluctuación de la velocidad del viento.

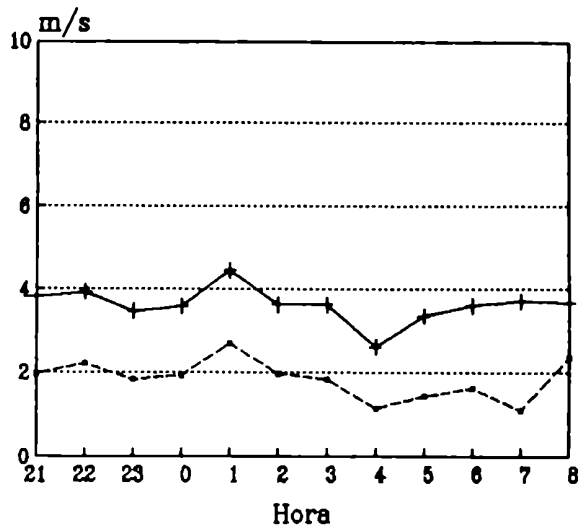


Figura X.4.a: Día 12, velocidad del viento a -- 0,5 m, +- 8 m

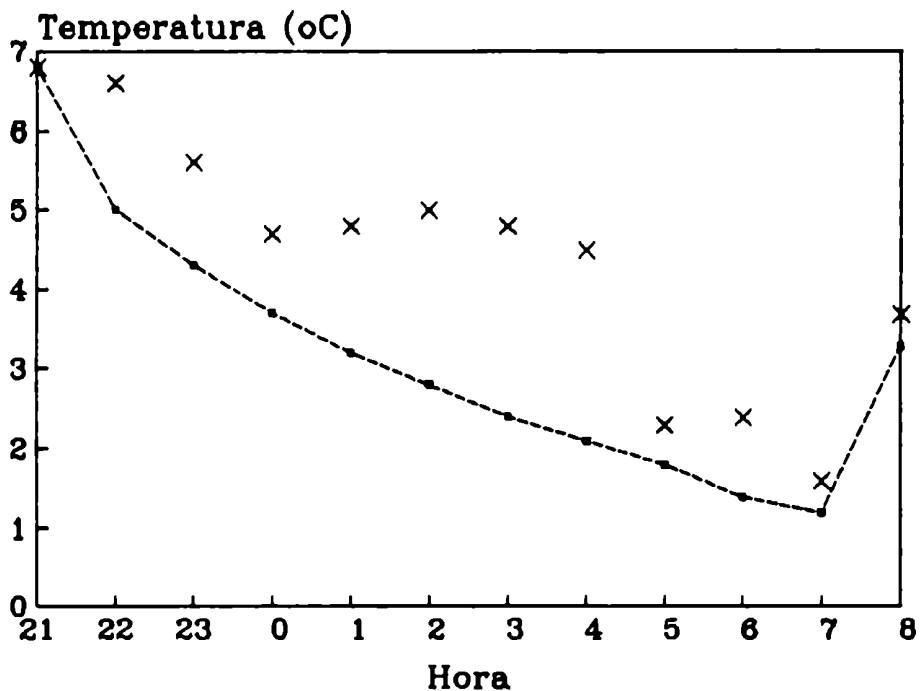


Figura X.4.b: Día 12, X temperatura de superficie "observada", --- temperatura de superficie calculada.

#### X.2.1.5. La noche del día 13

La velocidad del viento fue máxima a las 06 h. con una aceleración de la velocidad entre las 05 h. y 06 h. de  $0,032 \text{ cm/s}^2$  (Figura X.5.a). Esta está asociada con el aumento de la nubosidad baja tipo *Alto cumulus* (Ac) a las 06 h. (ver Figura X.5.b). También a esta hora se presenta un valor de la temperatura "obser-

vada" mayor que los inmediatos anterior y posterior (Figura X.5.c).

A partir de las 3 h. hay un aumento de la nubosidad tipo Cirrus (Ci) (Figura X.5.b) que no parece afectar al comportamiento de la temperatura "observada"

Los valores de temperatura calculada por el modelo sobrestiman en menos de 1°C los valores observados. Por otra parte, la disminución nocturna parece estar bien representada por el modelo.

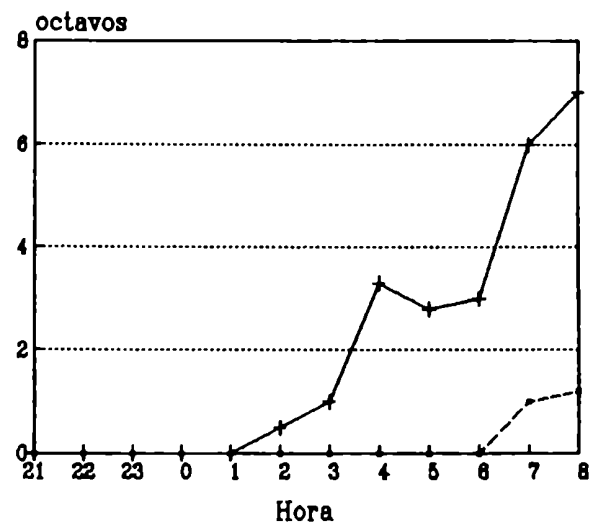
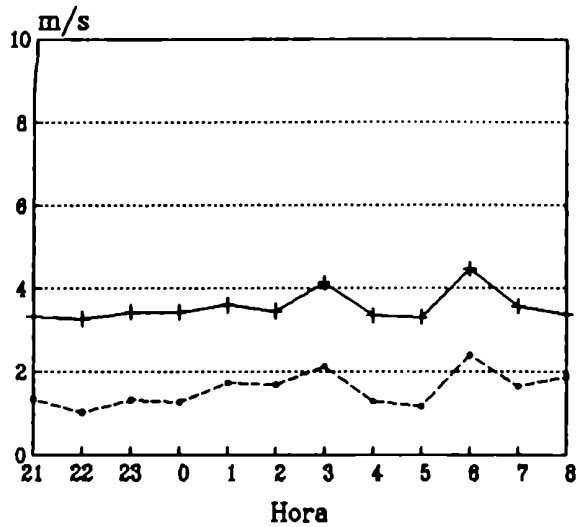


Figura X.5.a: Día 13, velocidad del viento a -- 0,5 m, +- 8 m

Figura X.5.b: Día 13, +- nubosidad total, -- nubosidad baja

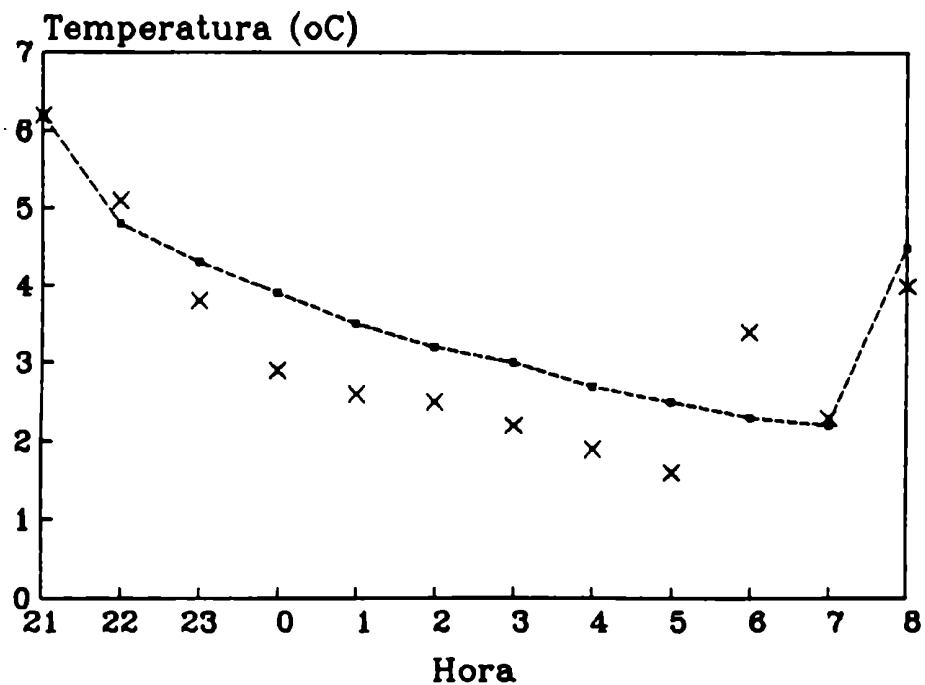


Figura X.5.c: Día 13, X temperatura de superficie "observada" -- temperatura de superficie calculada.

### X.2.1.6. La noche del día 31

La máxima velocidad media del viento que se presenta a las 01 h. está asociada a un aumento de la temperatura "observada" a esa hora (Figuras X.6.a y X.6.c). La nubosidad es escasa durante la noche (Figura X.6.b).

A partir de la 04 h., la velocidad del viento a 0,5 m. de altura disminuye a valores de 0,5 m/s. Esto favorece el desarrollo de nieblas a las 07 h. contribuyendo a un aumento de la temperatura de superficie como se observa en la Figura X.6.c.

La diferencia entre la temperatura calculada por el modelo y la "observada" (ver Figura X.6.c) podría deberse a que durante el día 31 llovió 1 mm. aumentando levemente la conductividad del suelo. Debido a ello se corrió el modelo con un coeficiente de conductividad de suelo húmedo (ver Capítulo IX). Un mayor coeficiente de conductividad en el suelo determina que la disminución nocturna de temperatura sea menor. El comportamiento los valores calculados que se muestran en la Figura X.6.d. parece ajustarse mejor a los valores "observados".

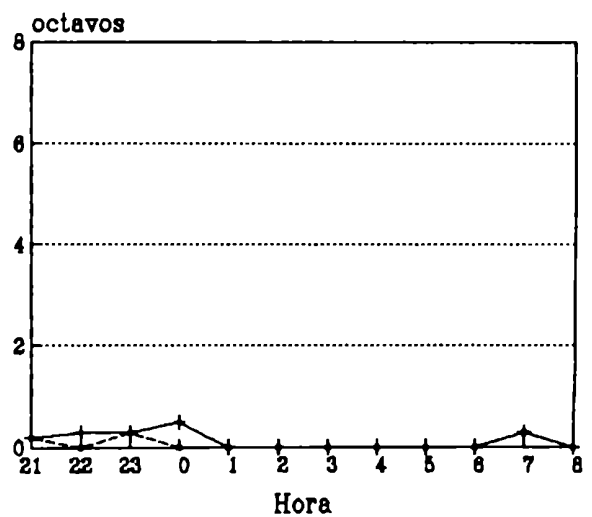
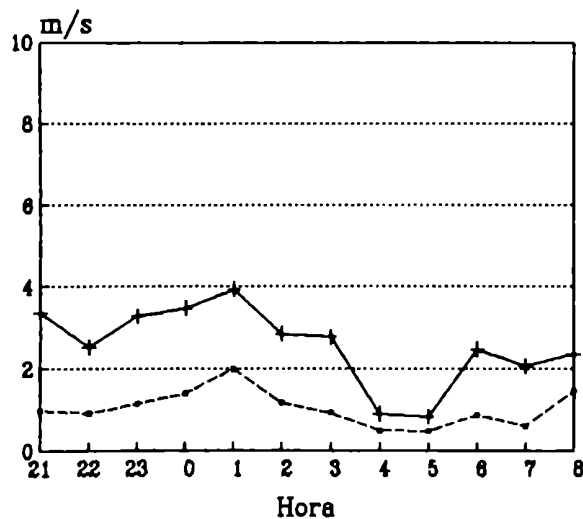


Figura X.6.a: Día 31, velocidad del viento a -- 0,5 m, +- 8 m

Figura X.6.b: Día 31, +- nubosidad total, -. nubosidad baja



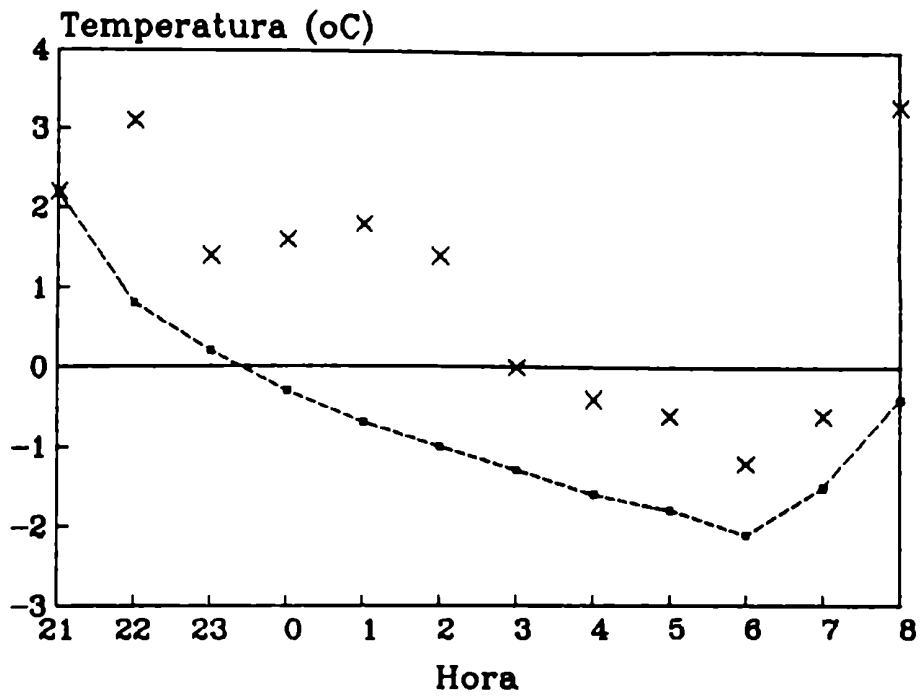


Figura X.6.c: Día 31, X temperatura de superficie "observada" --temperatura de superficie calculada.

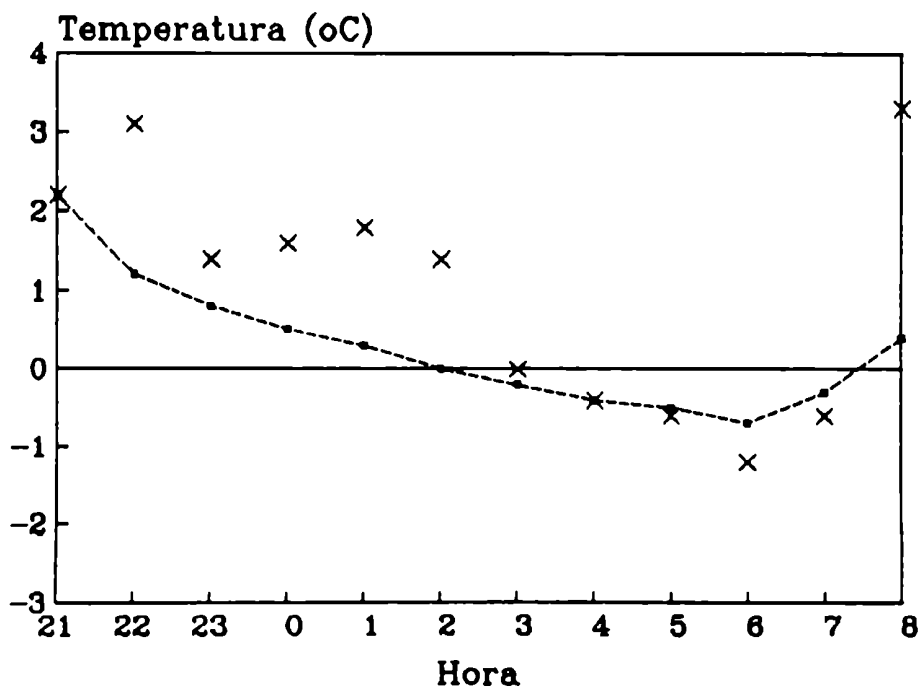


Figura X.6.d: Día 31, X temperatura de superficie "observada" --temperatura de superficie calculada.

### X.2.1.7. La noche del día 32

Se presenta una leve variación de la velocidad del viento entre las 01 y 04 h. (Figura X.7.a) produciéndose un pequeño aumento de la temperatura "observada" a las 02 h. y 03 h. (Figura X.7.c). La disminución de la velocidad del viento después de las 05 h. está asociado a la presencia de niebla entre las 07 h. y 08 h. Esto podría producir un incremento de la temperatura de superficie "observada" a esa hora (Figura X.7.c)

A las 23 h. se observaron algunos Cumulus (Cu) y a las 7 h. Stratocumulus (Sc), pero la nubosidad fue escasa durante la noche (Figura X.7.b).

En la Figura X.7.c. se presentan los valores de temperatura calculados por el modelo y "observados".

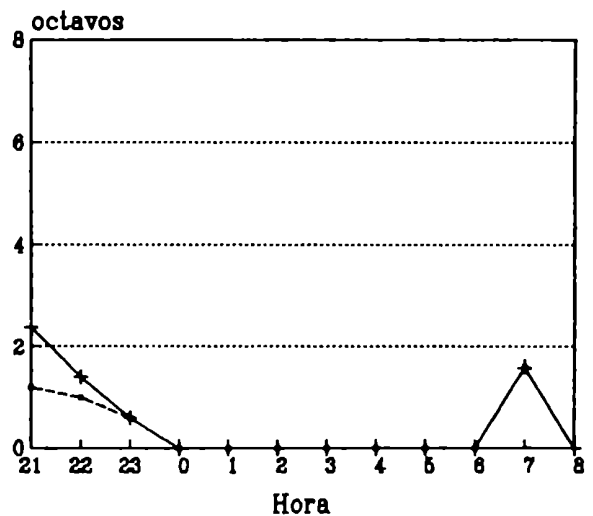
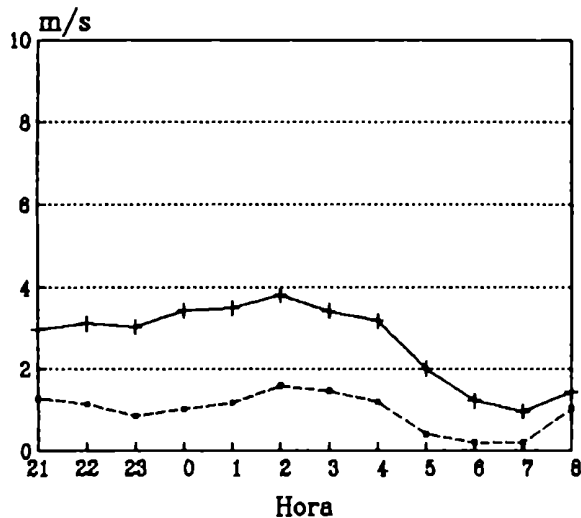


Figura X.7.a: Día 32, velocidad del viento a -- 0,5 m, +- 8 m

Figura X.7.b: Día 32, +- nubosidad total, - - nubosidad baja

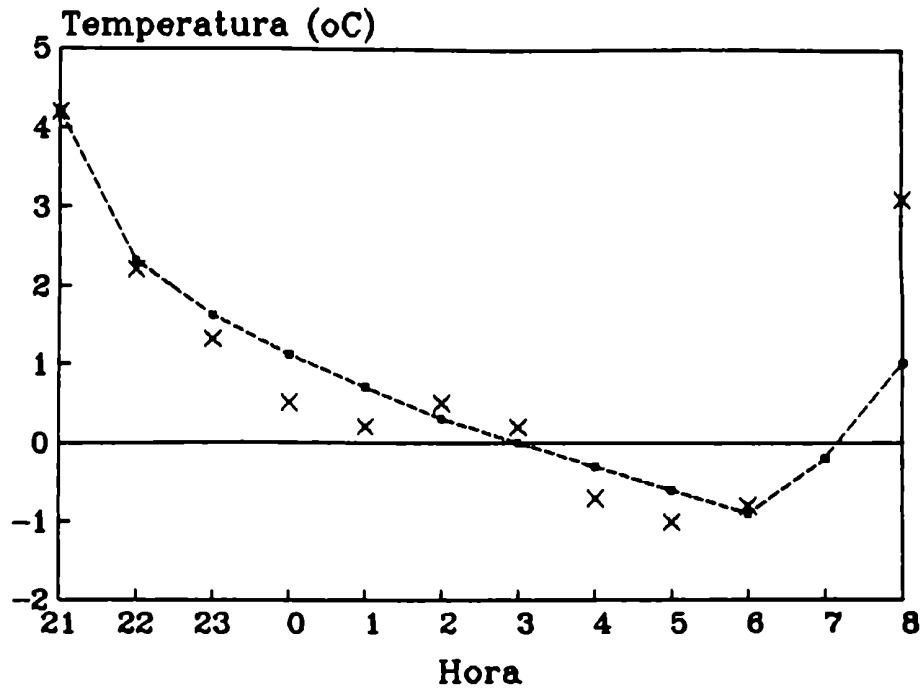


Figura X.7.c: Día 32, X temperatura de superficie "observada", -- temperatura de superficie calculada.

#### X.2.1.8. La noche del día 33

Durante la noche del día 33 no existió nubosidad. Entre las 05 y 07 h. hubo un abrupto incremento de la velocidad media del viento (Figura X.8.a). La temperatura de superficie "observada" (Figura X.8.b) aumenta a las 05 h.

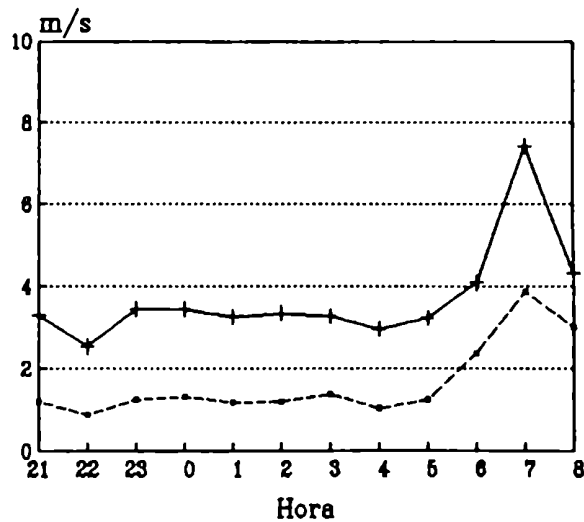


Figura X.8.a: Día 33, velocidad del viento a -- 0,5 m, -+ 8 m

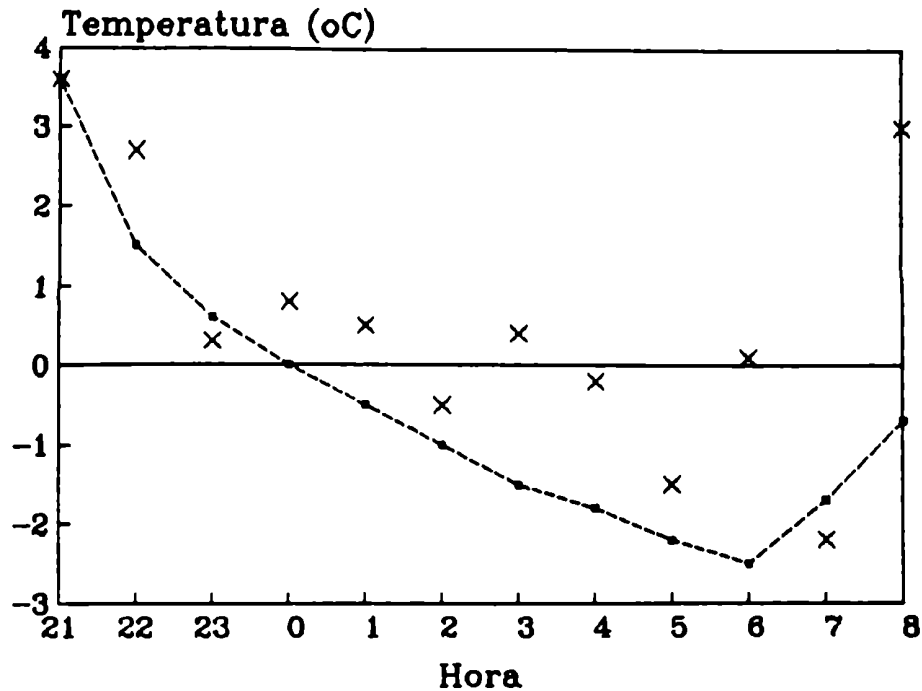


Figura X.8.b: Día 33, X temperatura de superficie "observada", -- temperatura de superficie calculada.

### X.2.2. Experimento " Great Plains "

Los parámetros de entrada correspondientes al experimento "Great Plains" están detallados en la Tabla X.II

El período en el cual se realizaron las observaciones corresponden al verano del Hemisferio Norte, mientras que en el experimento "Wangara" fue el invierno del Hemisferio Sur. Esto posibilita que la pérdida de radiación neta sea menor (ver Tabla X.I), y que la caída de temperatura no sea intensa.

Los valores de temperatura constituyen los promedios de dos horas de observación mientras que la velocidad del viento es la media horaria, centrada en la hora. Los valores observados son registrados cada dos horas.

La salida del sol en el período del experimento ocurrió entre las 5 h. 39 min. y las 6 de la mañana. La puesta del sol fue aproximadamente a las 7 h. 30 min. de la tarde. El modelo fue corrido entre las 20 h. 35 min. hasta las 6 h. 35 min. Los registros cada dos horas no permiten analizar en forma detallada las variaciones de las velocidades medias del viento y de la nubosidad.

### X.2.2.1. La noche del día 18/8

En la noche del día 18/8 la velocidad media horaria del viento registrada a 6,4 metros de altura no fue superior a 4 m/s (Figura X.9.a).

Durante la noche del día 18/8 la nubosidad fue Altostratus (As) y Cirrus (Ci) en las primeras horas. A partir de las 2:30 h. hubo un aumento de nubes medias tipo Altocumulus (Ac) (ver Figura X.9.b).

Según se observa en la Figura X.9.c. la temperatura de superficie "observada" tiene un incremento en las primeras dos horas, para luego disminuir a las 2:35 de la mañana. Este comportamiento de la temperatura podría estar relacionado con la variación de la nubosidad.

La temperatura calculada por el modelo (Figura X.9.c) no experimenta la misma caída que la "observada".

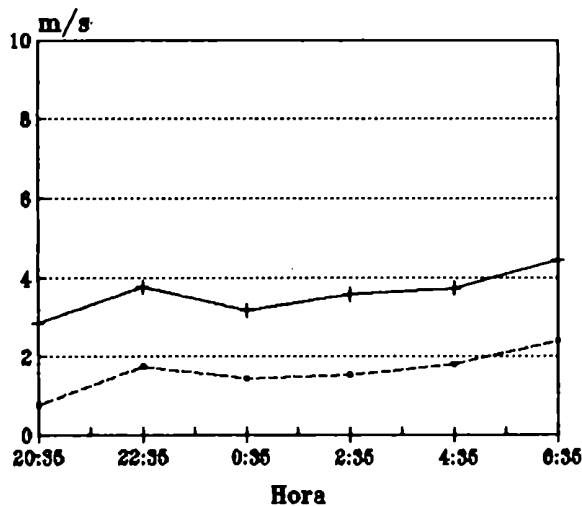


Figura X.9.a: Día 18, velocidad del viento a -- 0,4m, +- 6.4m

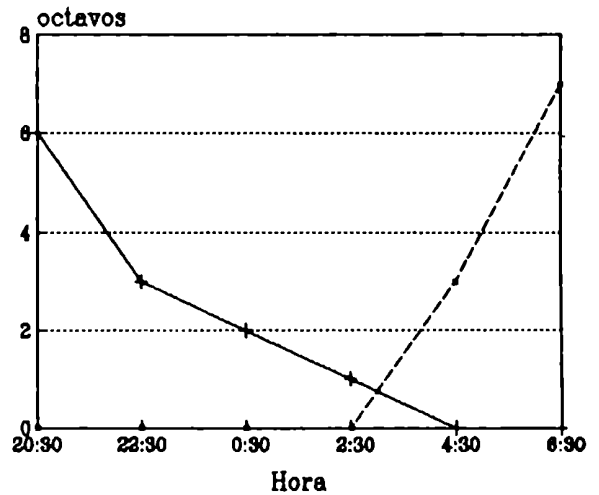


Figura X.9.b: Día 18, -- nubosidad alta, -. - nubosidad media

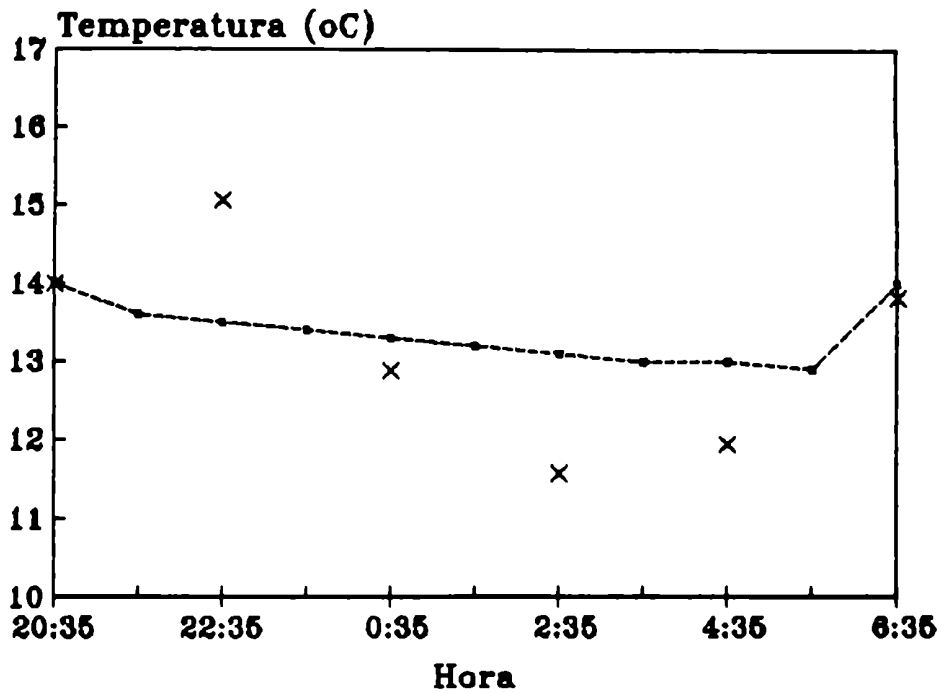


Figura X.9.c: Día 18, X temperatura de superficie "observada", --- temperatura de superficie calculada.

#### X.2.2.2. La noche del día 24/8

La velocidad media horaria del viento observada a 6,4 metros de altura durante la noche del 24/8 se presenta en la Figura X.10.a, siendo mayor que 8 m/s después de las 22:35 h.

La nubosidad es escasa presentándose algunos Altocumulus (Ac) a las 22:35 de la noche (Figura X.10.b).

La alta velocidad del viento registrada parecería no permitir una caída de la temperatura de superficie "observada", (Figura X.10.c), que es de 3,5°C entre las 20 y 4 h.

La temperatura calculada por el modelo sobrestima la "observada" en las primeras horas de la mañana.

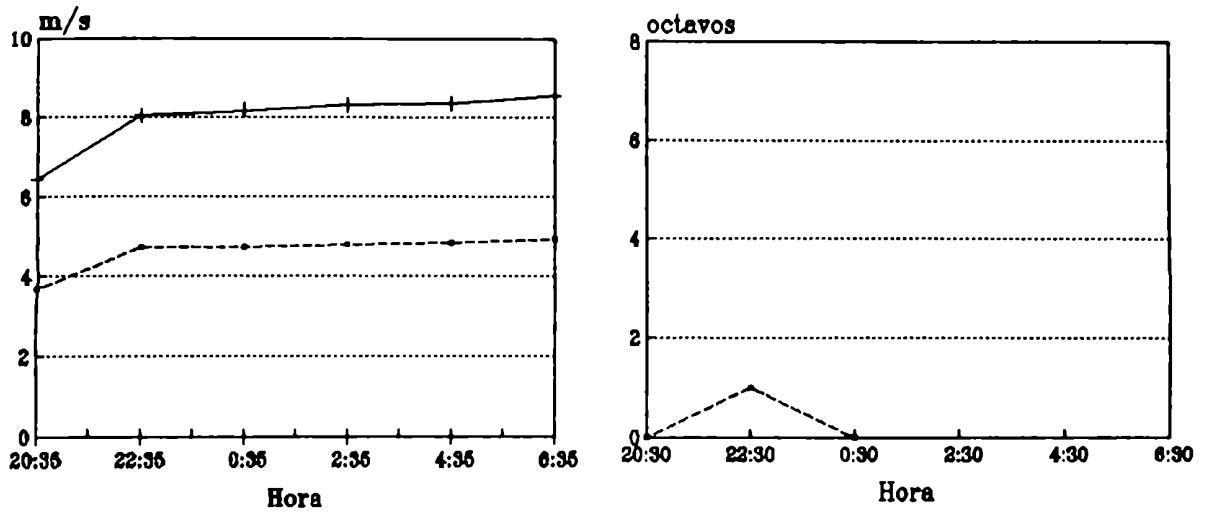


Figura X.10.a: Día 24, velocidad del viento a -- 0,4m, +- 6.4m Figura X.10.b: Día 24, -- nubosidad media

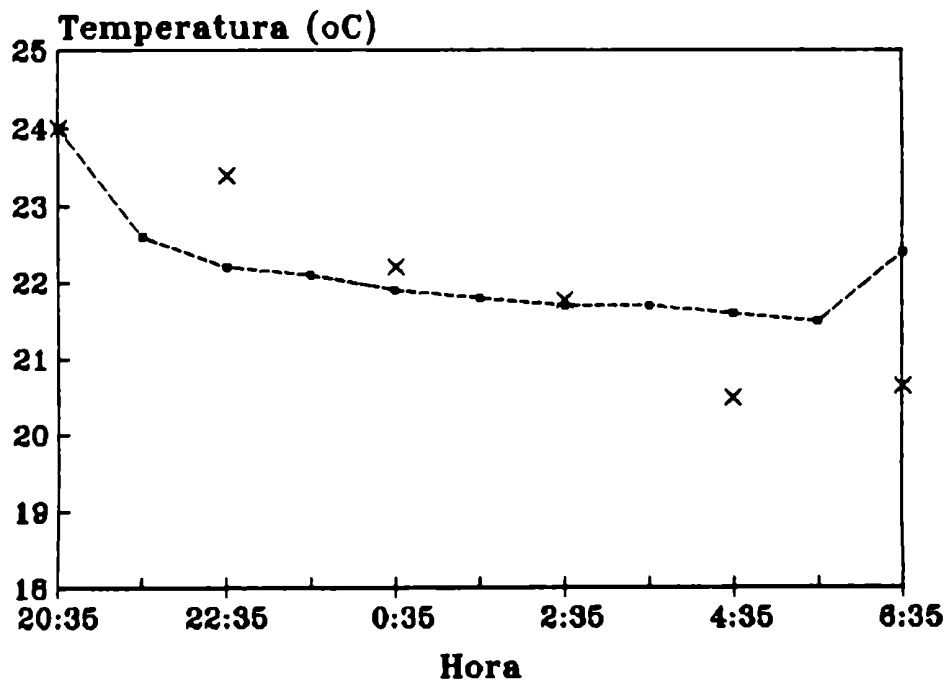


Figura X.10.c: Día 24, X temperatura de superficie "observada", -- temperatura de superficie calculada.

### X.2.2.3. La noche del día 31/8

La velocidad horaria media del viento (Figura X.11.a) se mantiene levemente mayor que 6 m/s a 6,4 metros de altura.

Algunos Cumulonimbus (Cb) lejanos se observaron en las primeras horas de la noche. En el lugar existió cielo claro (Figura X.11.b). En las primeras hora de la mañana se observaron Alto-cumulus (Ac) y Cirrus (Ci).

La disminución de la velocidad y la escasa nubosidad a las 2:30 de la mañana favorecería una disminución de la temperatura "observada" a esa hora (Figura X.11.c).

La variación de la temperatura está relativamente bien representada por el modelo. El mayor apartamiento se observa al comienzo de la noche, momento en que podría estar influenciada por la nubosidad baja.

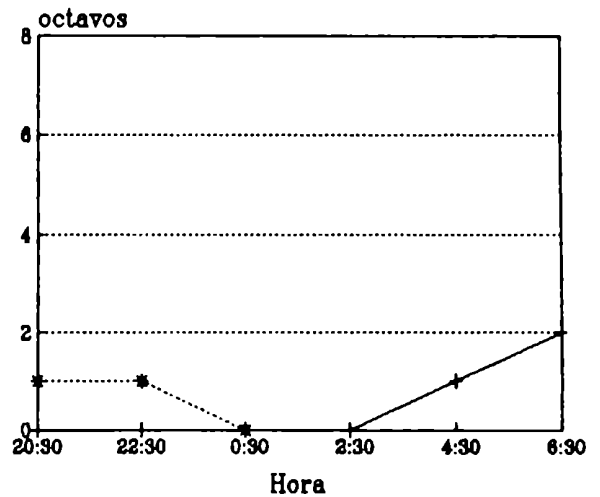
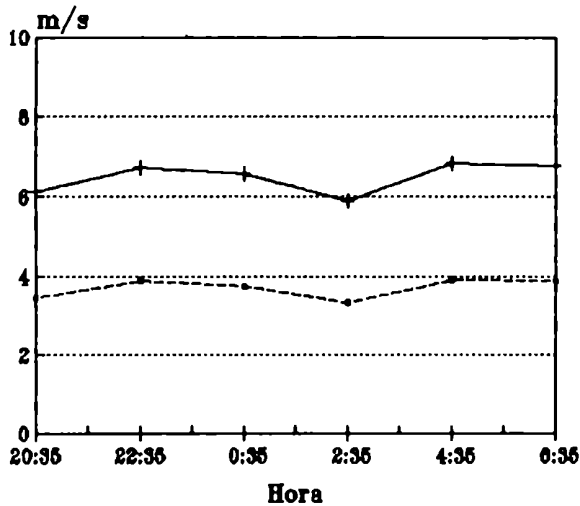


Figura X.11.a: Día 31, velocidad del viento a -- 0,4m, +- 6.4m  
Figura X.11.b: Día 31, -\*-\* nubosidad baja, +- nubosidad media



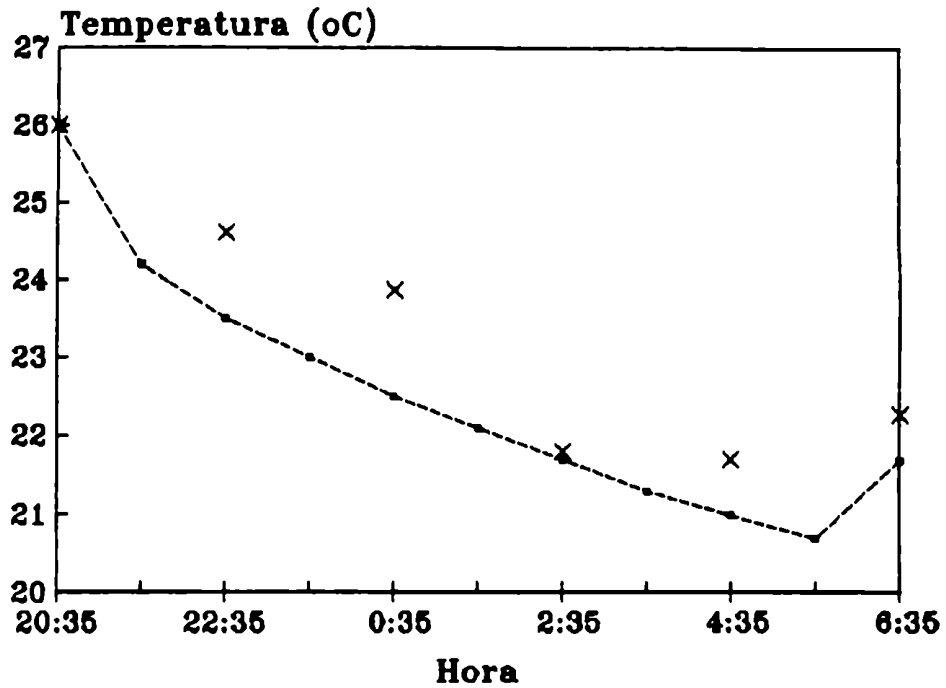


Figura X.11.c: Día 31, X temperatura de superficie "observada", -- temperatura de superficie calculada.

#### X.2.2.4. La noche del día 7/9

En la noche del día 7/9 no existió nubosidad. La velocidad media del viento fue disminuyendo con el transcurso de la noche (Figura X.12.a).

La caída de la temperatura de superficie "observada" (Figura X.12.b) fue importante. La temperatura calculada se ajusta relativamente bien a los valores "observados".

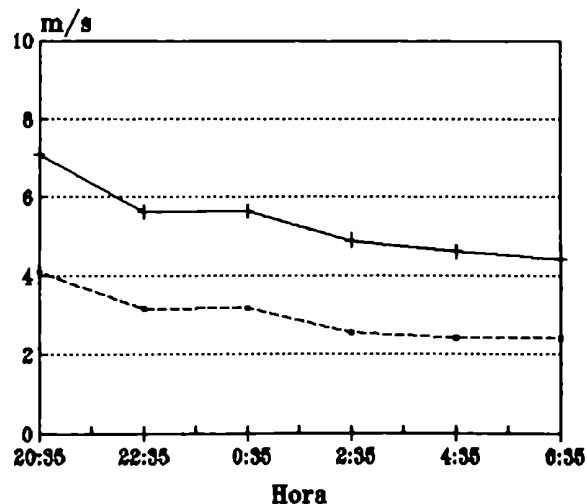


Figura X.12.a: Día 7, velocidad del viento a -- 0,4m, +- 6.4m

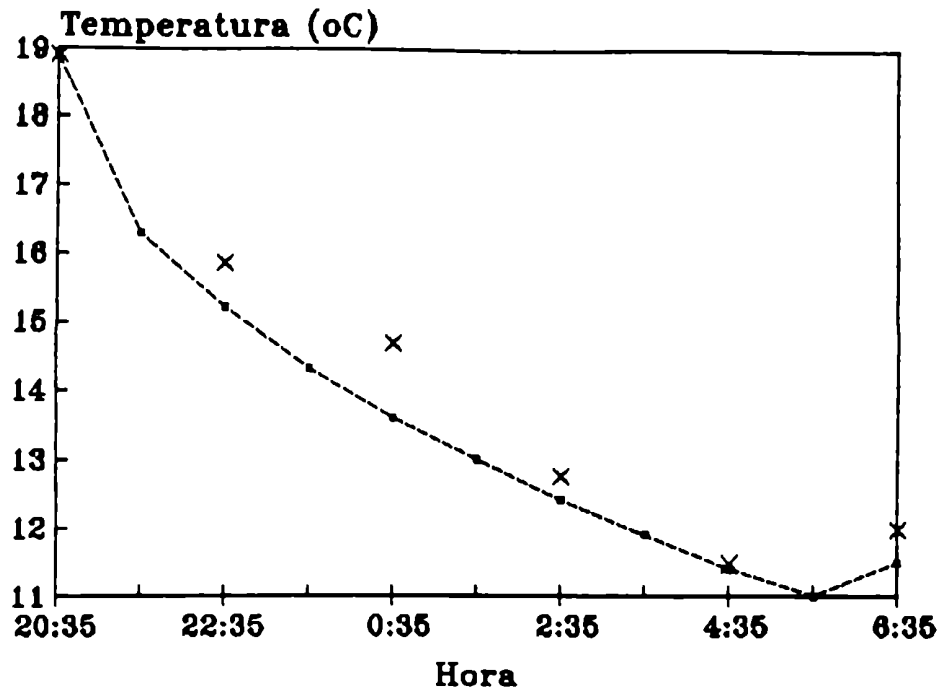


Figura X.12.c: Día 7, X temperatura de superficie "observada", -- temperatura de superficie calculada.

### X.3. COMENTARIO DE LOS RESULTADOS

En las noches seleccionadas para correr el modelo se observó escasa nubosidad o nubes altas. La nubosidad alta no afectarían la temperatura observada.

Algunas noches se midieron velocidades de viento elevadas. Los mayores apartamientos entre los valores observados y calculados de temperatura ocurrieron cuando existió variación de la velocidad del viento.

El modelo puede ser corrido con velocidades elevadas pero en este caso se obtienen mayores errores que en noches con vientos leves.

En general, parece que las mejores condiciones para correr el modelo son nubes altas y velocidad del viento (a 8 m. de altura) menor que 4 m/s.

# CAPITULO XI

## EVALUACION DE DIFERENTES MODELOS

### XI.1. INTRODUCCION

El creciente desarrollo de las técnicas de modelado en las ciencias de la atmósfera, plantea la necesidad de establecer un conjunto de métodos destinados a validar los modelos obtenidos.

La complejidad del funcionamiento del sistema físico atmosférico requiere establecer la capacidad de un modelo para representar las condiciones reales de ese sistema. En el proceso de la evaluación de un modelo deben tenerse en cuenta diversos aspectos. Un modelo debe examinarse para determinar si sus suposiciones *son consistentes con principios físicos fundamentales*. Es importante establecer un juicio de valor con respecto a la representación física de los componentes específicos del modelo. Los algoritmos y parámetros del modelo deben ser apropiados para su aplicación y la técnica computacional utilizada no debe contribuir a incrementar los errores de las estimaciones. Un componente importante en la evaluación científica de un modelo es *un análisis de su sensibilidad de los resultados a las variaciones en los parámetros de entrada* (ver Capítulo XII).

Otra etapa de la verificación es la *comparación de las estimaciones* con las provenientes de otros modelos y con datos observacionales. Los datos deben ser representativos de las condiciones para las que el modelo está diseñado. El conjunto de datos debe ser confiable y lo más completo posible. Asimismo, debe existir independencia entre el grupo de datos utilizado en el desarrollo del modelo y el utilizado para su evaluación.

La identificación de los límites de un modelo para una aplicación puede establecer si es o no razonablemente aplicable al problema. Esta información ayudará a seleccionar modelos para una aplicación específica.

### XI.1.2. Técnicas de evaluación

Fox (1981) examinó técnicas cuantitativas para evaluar en una forma consistente el funcionamiento de modelos de calidad de aire. Asimismo, Willmott (1982) sostuvo que la aplicabilidad de los métodos propuestos por Fox puede ampliarse a otros campos de las ciencias atmosféricas, proponiendo ciertas modificaciones al sistema original. Su propuesta se dirige principalmente a analizar la utilidad general y el contenido informativo de las medidas de diferencias y de correlación. Presentó además, un conjunto complementario de indicadores globales y examinó brevemente el problema de las pruebas de hipótesis y la contribución de los gráficos a la evaluación de los modelos.

Los procedimientos de análisis empleados se resumen a continuación, comentándose brevemente su significado.

Se denominan  $O_1$  al valor observado y  $P_1$  al valor calculado mediante el modelo, siendo  $N$  el número total de pares de datos. El tratamiento de los pares de los valores estimados y los correspondientes observados es la metodología que Fox (1981) considera como la prueba más exigente de un modelo.

Los parámetros globales de posición y escala cuyo cálculo recomienda Willmott (1982), son los promedios de los valores observados ( $\bar{O}$ ) y calculados por el modelo ( $\bar{P}$ ), y las respectivas desviaciones estándares,  $S_o$  y  $S_p$ . Estas cantidades tienen las ventajas de ser conocidas y a partir de ellas se pueden calcular otros parámetros.

No sólo  $O$ ,  $P$ ,  $S_o$  y  $S_p$  describen globalmente las variables, sino que la ordenada al origen ( $a$ ) y la pendiente ( $b$ ) de la regresión lineal obtenidas mediante cuadrados mínimos ( $P_1 = a + b O_1$ ) proporcionan más información que el coeficiente de correlación ( $r$ ) o el de determinación ( $r^2$ ) con respecto a la naturaleza de la covarianza lineal entre  $O_1$  y  $P_1$ .

Las medidas de las diferencias son derivadas de la cantidad fundamental  $R_1 = O_1 - P_1$  denominada residuo, aunque cada una se calcula o adimensionaliza de una forma diferente para describir o destacar rasgos particulares.

Willmott (1982) recomienda esencialmente el cálculo de las siguientes medidas de diferencias:

- El error cuadrático medio (ECM) o su raíz cuadrada (RECM):

$$\text{RECM} = (\text{ECM})^{1/2} = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{1-N} (O_i - P_i)^2}{N} \right]^{1/2} \quad (\text{XI.1})$$

- El error absoluto medio (EAM):

$$\text{EAM} = \frac{\sum_{i=1}^{1-N} |O_i - P_i|}{N} \quad (\text{XI.2})$$

Willmott (1982) considera que de estos índices, basta calcular el EAM y la RECM cuando se los acompaña con algunos parámetros adicionales, en base a los argumentos presentados a continuación.

Ambos, contienen la diferencia media en unidades de  $O_i$  y  $P_i$ . El EAM es menos sensible a los valores extremos que la RECM. Por otra parte, el ECM o la RECM son más tratables matemáticamente que el EAM. Por lo tanto, aunque son medidas similares, es apropiado evaluar ambos índices.

Las medidas EAM y RECM dan una idea del error medio pero, ninguna provee información acerca de la naturaleza o el tipo de las diferencias que incluyen y de la medida relativa de la diferencia promedio.

Dado que un modelo debe explicar la mayor parte de las características presentes en  $O_i$ , es importante conocer qué parte de RECM es de naturaleza sistemática y que parte es no sistemática.

Los errores sistemáticos son determinados por causas que ocurren consistentemente. Los errores no sistemáticos constituyen un número de pequeños efectos, tal como por ejemplo la inclusión de una constante. Esos efectos pueden ser positivos o negativos y afectan al valor final.

Por lo tanto, el modelo más apropiado debe tener una diferencia sistemática ( $\text{ECM}_s$ ) que se aproxime a cero, mientras que la diferencia no sistemática ( $\text{ECM}_n$ ) debe aproximarse al ECM.

Si el ECM está compuesto enteramente o en gran parte por el  $\text{ECM}_n$ , puede significar que el modelo es tan bueno como se lo permiten las condiciones y no requiere mayores modificaciones (Ku y otros, 1987).

Para realizar estimaciones cuantitativas de estos tipos de errores, Willmott (1982) propone que el error sistemático, que es causado por aspectos aditivos o proporcionales del modelo, puede

describirse mediante:

$$ECM_s = \frac{\sum_{i=1}^{1-N} (\hat{P}_1 - O_1)^2}{N} \quad (XI.3)$$

donde  $\hat{P}_1$  se obtiene mediante la relación  $\hat{P}_1 = a + b \cdot O_1$ , con  $a$  como la ordenada al origen y  $b$  la pendiente de la relación lineal.

Dado que las diferencias descritas por  $ECM_s$  pueden expresarse mediante una función lineal, deberían ser fáciles de amortiguar mediante una nueva parametrización del modelo.

El error no sistemático se calcula mediante:

$$ECM_n = \frac{\sum_{i=1}^{1-N} (P_1 - \hat{P}_1)^2}{N} \quad (XI.4)$$

Como el sistema es conservativo, debe verificarse:

$$ECM = ECM_s + ECM_n \quad (XI.5)$$

La proporción del ECM que es debida a los errores sistemáticos es descrita por  $ECM_s/ECM$  y la no sistemática por  $ECM_n/ECM$ . Asimismo, las diferencias sistemáticas y no sistemáticas pueden interpretarse en las unidades de  $P_1$  y  $O_1$ , tomando sus raíces cuadradas  $RECM_s$  y  $RECM_n$  respectivamente.

Como medida relativa de la diferencia promedio, Willmott (1982), propone la utilización de un índice de concordancia. A partir del error cuadrático medio (ver Willmott, 1981), se obtiene la siguiente expresión para el índice de concordancia:

$$d = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{1-N} (P'_1 - O'_1)^2}{\sum_{i=1}^{1-N} (|P'_1| + |O'_1|)^2}, \quad 0 \leq d \leq 1 \quad (XI.6)$$

donde:  $P'_1 = P_1 - \bar{O}$ , y  $O'_1 = O_1 - \bar{O}$ .

El índice de concordancia puede ser interpretado como una medida del grado de exactitud de las estimaciones del modelo.

El índice  $d$  especifica el grado con que las desviaciones observadas alrededor de  $\bar{O}$  corresponden, tanto en magnitud como en signo, a las desviaciones predichas respecto de  $\bar{O}$ . Si  $d=1$  indica que existe una concordancia perfecta entre los valores de  $O_1$  y  $P_1$ . El parámetro  $d$  se presenta como una medida descriptiva y al ser relativa o adimensional puede aplicarse para efectuar compa-

raciones entre modelos.

El índice de concordancia se inestabiliza cuando el denominador es pequeño. Por este motivo se recomienda utilizarlo conjuntamente con otros indicadores de diferencia.

Otro de los parámetros usados es el error fraccional (EF), ver Horst, 1979, Irwin, 1983, Stern y otros, 1984), que se obtiene mediante la siguiente expresión:

$$EF_1 = \frac{2(O_1 - P_1)}{(O_1 + P_1)} \quad (XI.7)$$

El error fraccional es insesgado logarítmicamente y tiene el mismo valor numérico, aunque con signo opuesto, para sobrestimación de  $n$  veces el valor medido o una subestimación de  $1/n$  veces dicho valor. La sobrestimación por un factor 2 es indicada por un error fraccional  $EF = -0,67$  y la subestimación por un factor  $1/2$  está dada por un  $EF = 0,67$ .

El error fraccional medio (EFM), se calcula mediante:

$$EFM = \frac{\sum_{i=1}^{1-N} (EF_1)}{N} \quad (XI.8)$$

Un índice cuantitativo de correlación entre una variable observada ( $O_1$ ) y estimada mediante un modelo ( $P_1$ ) puede tomar varias formas, aunque el coeficiente de correlación ( $r$ ) es el más utilizado. También, se suele consignar el coeficiente de determinación ( $r^2$ ) que proporciona una información adicional, dado que indica la proporción de la varianza explicada por  $P$ . Willmott (1982) opina, contrariamente a Fox (1981), que las magnitudes de  $r$  o  $r^2$  no están relacionadas consistentemente con la exactitud de la predicción, es decir con el grado en que las predicciones del modelo se aproximan a las magnitudes de sus contrapartes observadas. Willmott (1982) demuestra que el coeficiente de correlación entre datos estimados y observados muy diferentes puede acercarse fácilmente a 1. Asimismo, una comparación entre modelos de radiación solar, ilustra que  $r$  y  $r^2$  son insuficientes para efectuar distinciones significativas entre modelos (Willmott, 1982).

Willmott y Wicks (1980) han observado que valores grandes o estadísticamente significativos de  $r$  o  $r^2$ , pueden ser engañosos, debido a que frecuentemente no están relacionados con la medida de las diferencias entre  $O_1$  y  $P_1$  y que también es posible que se den pequeñas diferencias entre  $O_1$  y  $P_1$  con valores bajos o nega-

tivos de  $r$ . Asimismo, Willmott (1982) menciona que también es inapropiado asegurar que tales medidas sean estadísticamente significativas. Esto se debe a que raramente  $O_1$  y  $P_1$  (en especial esta última) cumplen las suposiciones que son prerequisites para la aplicación adecuada de inferencias estadísticas.

Fox (1981) y Willmott (1982) sugieren acompañar los índices cuantitativos con gráficos que pueden ser de mucha ayuda en la identificación del comportamiento de las diferencias, así como los casos extremos. Los gráficos de dispersión pueden representar adecuadamente la relación entre  $O_1$  y  $P_1$  y ser útiles para un examen visual.

## **XI.2. COMPARACION ENTRE LOS VALORES OBTENIDOS MEDIANTE DIFERENTES MODELOS Y LOS DATOS OBSERVACIONALES**

### **XI.2.1. INTRODUCCION**

A continuación se compararan los valores "observados" de temperaturas ( $O_1$ ) de los Proyectos "Wangara" y "Great Plains" (ver Capítulo VIII) y los valores calculados de temperaturas ( $P_1$ ) por los diferentes modelos. Los modelos presentados son los desarrollados por Brünt (1941), de Gröen (1947), de Jaeger (1945), de Reuter (1951), de Anfossi y otros (1976) y el propuesto en este trabajo.

A tal fin se calcularon ECM (ecuación (XI.1)); EAM (ecuación (XI.2));  $ECM_m$  (ecuación (XI.3)) y  $ECM_n$  (ecuación (XI.4)); el índice de concordancia  $d$  (ecuación (XI.6)) y EFM (ecuación (XI.8)). En la Tabla XI.I se presentan los valores de estos parámetros correspondientes a cada modelo.

También, se graficarán los valores calculados por cada modelo y los observados de temperaturas, permitiendo visualizar la dispersión de los valores con respecto a una recta ideal (entre el calculado y observado) de pendiente uno y ordenada cero. En la Tabla XI.II se incluyen los valores de los coeficientes de determinación, las pendientes y las ordenadas al origen de las rectas definidas entre las temperaturas calculadas y las observadas.

También, se graficarán, en líneas punteadas, las rectas definidas por  $P_1 = 2.O_1$  y  $P_1 = O_1/2$  delimitando la zona donde los valores estimados no sobreestiman o subestiman el valor observado



en un factor mayor que 2, según el concepto de error fraccional (ver expresión (XI.7)).

### XI.2.2. El modelo de Brünt

El modelo de Brünt (1941) (presentado en el Capítulo IV) determina la evolución de la temperatura en superficie mediante la siguiente expresión (ver ecuación (IV.8)):

$$T(0, t) = -\frac{2 F_n}{\kappa_s \chi_s^2} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + T_0$$

Se supone un valor constante de radiación neta ( $F_n$ ) durante la noche, para lo cual se consideró el valor medio observado desde la puesta hasta la salida del sol, correspondientes a las noches seleccionadas de los experimentos "Wangara" y "Great Plains". El momento inicial, según Brünt (1941) corresponde a la hora de la puesta del sol. En las Tablas XI.III.a) y b), se incluyen los datos de entrada del modelo correspondientes a los días analizados de cada experimento.

En la Figura XI.1 se presentan las temperaturas calculadas mediante (IV.8) y las temperaturas "observadas" en superficie. En general, el modelo subestima los valores "observados". Se aprecia una subestimación apreciable de los valores de temperaturas "observadas" menores a 0 °C.

El error cuadrático medio (ECM) es de 26°C<sup>2</sup>, con un valor del índice de concordancia  $d=0,87$  (ver Tabla XI.I).

Se encuentra que el 64% de los valores calculados subestiman o sobrestiman por un factor 2 el valor observado o sea se apartan de la zona delimitada por las líneas punteadas.

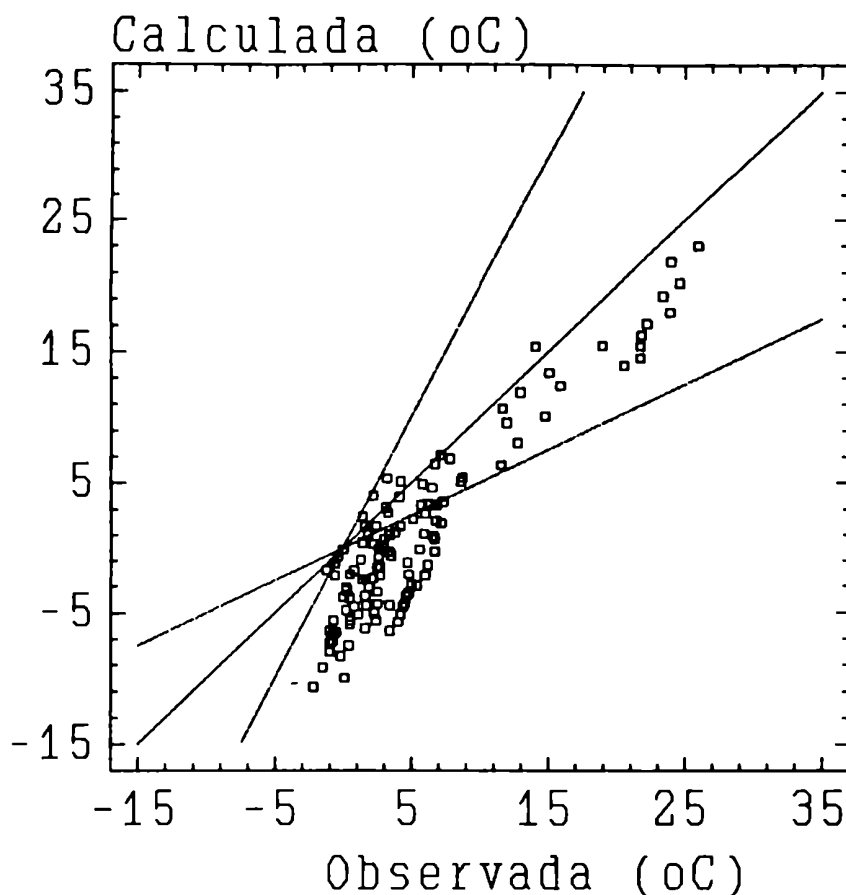


Figura XI.1: Temperaturas de superficie calculadas por el modelo de Brünt y "observadas".

### XI.2.3. El modelo de Gröen (1)

El modelo de Gröen (1947) propone una variación lineal de la radiación neta con la temperatura de superficie. La expresión obtenida por Gröen es (ver ecuación (IV.12)):

$$T(0, t) = \frac{F_{no}}{f} \left[ 1 - \exp \left[ -\frac{\chi_s f^2 t}{\kappa_s^2} \right] + \operatorname{erfc} \left( f \frac{\sqrt{\chi_s t}}{\kappa_s} \right) \right] + T_o$$

donde  $f$  es (ecuación IV.13):

$$f = \frac{F_{nf} - F_{no}}{T_f - T_o}$$

$F_{no}$  y  $T_o$  son, respectivamente, la radiación neta y la temperatura al momento de la puesta del sol,  $F_{nf}$  y  $T_f$  son la radiación neta y la temperatura en el momento de la salida del sol.

Los datos de entrada del modelo son el parámetro  $f$  y el

valor observado de la radiación neta inicial ( $F_{no}$ ), que se incluyen en las Tablas XI.IV.a) y b).

En la Figura XI.2 se presentan las temperaturas de superficie calculadas por la expresión (IV.12) y los valores "observados". Se nota que el modelo subestima los resultados.

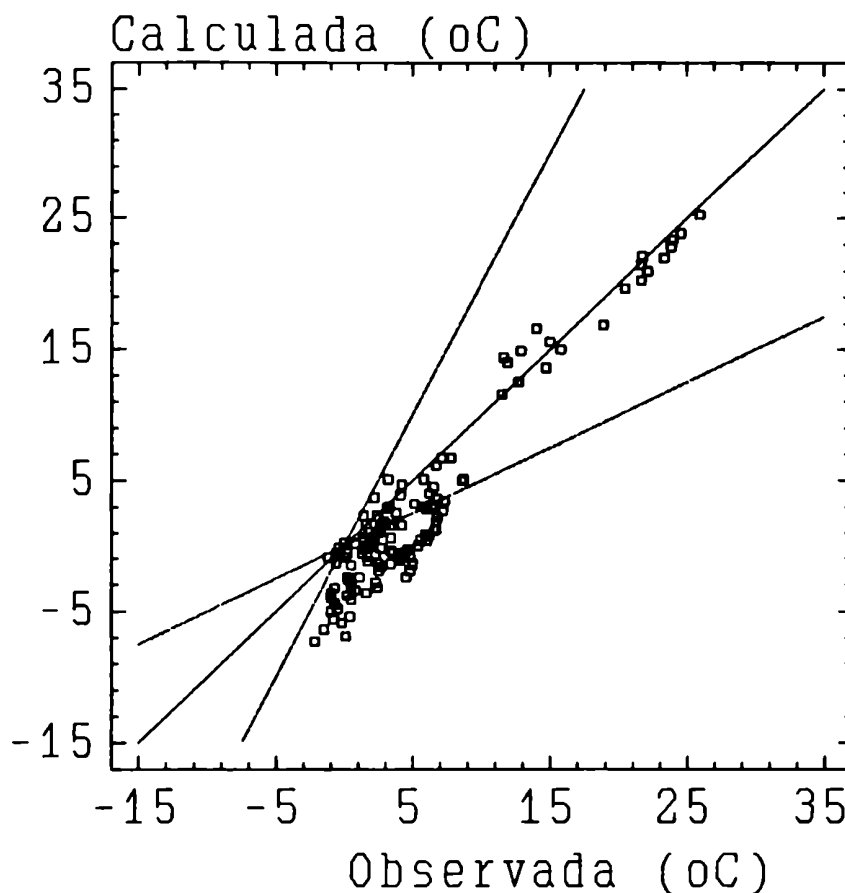


Figura XI.2: Temperaturas de superficie calculadas por el modelo de Gröen y "observadas"

El índice de concordancia (ver Tabla XI.I) es 0,94 y es más alto que el correspondiente al modelo de Brünt. El error cuadrático medio es  $11,0^{\circ}\text{C}^2$ , y el error sistemático es  $6,5^{\circ}\text{C}^2$ .

El 59% de los valores se apartan de la zona definidas por las rectas punteadas en las Figura. Este porcentaje es menor que en el modelo de Brünt.

#### XI.2.4. El modelo de Gröen modificado (2)

La siguiente expresión (ecuación IV.16):

$$T(0, t) = \frac{(F_{no} + K_s \beta)}{F} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\lambda_s f^2 t}{K_s^2}\right) \right] \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{f \sqrt{\lambda_s t}}{K_s}\right) + T_o$$

incluye la influencia de un gradiente inicial del suelo ( $\beta$ ). También, los parámetros de entrada están en las Tablas XI.IV.a) y b), para cada una de las noches de los experimentos "Wangara" y "Great Plains".

En la Figura XI.3 se presentan las temperaturas calculadas mediante (IV.16) y las temperaturas observadas, notándose una tendencia a la sobrestimación.

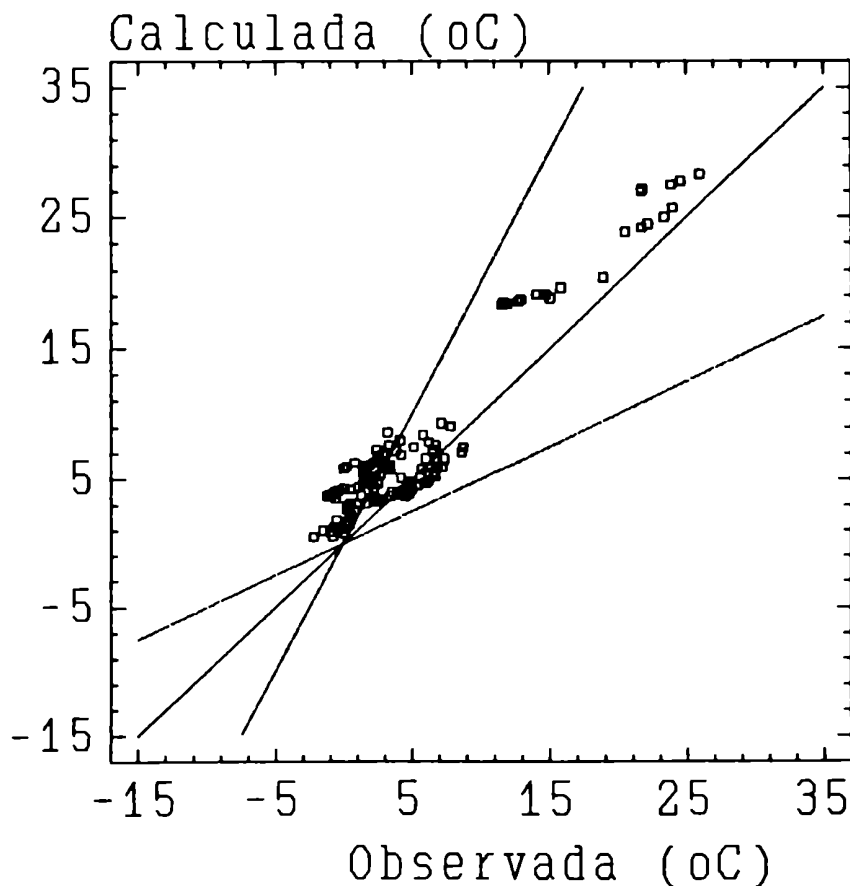


Figura XI.3: Temperaturas de superficie calculadas por el modelo de Gröen (2) y "observadas"

Al incluir  $\beta$  este modelo comparativamente con el de Gröen (1) disminuye el error cuadrático medio (ECM), el error sistemático medio y el error fraccional medio (EFM) (ver Tabla XI.I). También, el 40% de los valores se apartan de la zona delimitada por las rectas definidas en la Figura.

La pendiente de la recta entre la temperatura calculada y observada (ver Tabla XI.II) es de 1,01 y la ordenada al origen es 2,3°C son más apropiadas que en el modelo de Gröen (1).

#### XI.2.5. El modelo de Jaeger (1)

El modelo de Jaeger (1945) plantea una modificación al modelo de Brünt (1941) incluyendo el aporte de calor turbulento desde la atmósfera hacia superficie terrestre. La expresión de este modelo es la siguiente (ver ecuación IV.27):

$$T_s(0, t) = \frac{2F_n}{\left[ \kappa_a \chi_a^{-1/2} + \kappa_s \chi_s^{-1/2} \right]} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + T_0$$

Con el objeto de obtener los coeficientes turbulentos de conductividad y difusividad térmica en el aire, en la capa próxima a superficie, se utiliza la expresión del flujo de calor sensible en el aire (ver ecuación (III.26)):

$$\frac{F_a}{C_p \rho_a} = -\chi_a \frac{\Delta T}{\Delta Z}$$

El primer término de esta expresión es igual al producto de la temperatura característica por la velocidad de fricción ( $T \cdot u^*$ ), que puede evaluarse utilizando los datos observados (ver ecuación (IX.6)).

Los valores de  $\chi_a$  son presentados en las Tablas XI.V.a) y b), mientras los de  $F_n$  se incluyen en las Tablas XI.III.a) y b).

El error cuadrático medio obtenido es 9,57°C<sup>2</sup> y el error sistemático es 4,38°C<sup>2</sup> (ver Tabla XI.I). Estos valores son menores que en el modelo de Brünt. Parecería que la inclusión del flujo de calor sensible en la atmósfera, en el modelo, tiende a disminuir estos errores. El índice de concordancia,  $d = 0,95$ , es más alto que el del modelo de Brünt.

En la Figura XI.4, se representan las temperaturas de superficie calculadas y las temperaturas observadas. El 53% de los

valores estimados subestiman o sobrestiman en un factor 2 el valor observado.

El coeficiente de determinación entre las temperaturas obtenidas por el modelo y las observadas es  $r^2 = 91\%$  (Tabla XI.II) que mejora el correspondiente al modelo de Brünt ( $r^2=0.84\%$ ). La pendiente resulta ser 1,17, pero su ordenada al origen es  $-2,7^\circ\text{C}$  apartándose del valor ideal.

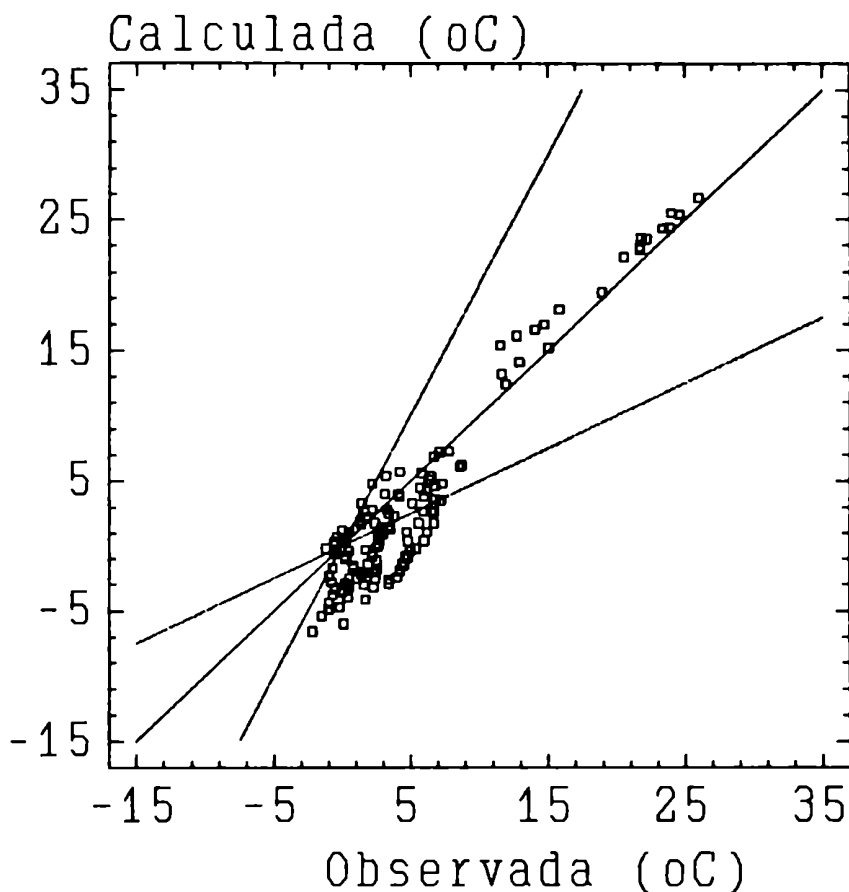


Figura XI.4: Temperaturas en superficie calculadas por el modelo de Jaeger (1) y "observadas"

#### XI.2.6. El modelo de Jaeger(2)

Jaeger (1945) modificó el planteo anterior proponiendo un coeficiente de conductividad turbulenta para el calor en el aire que varía con la altura, resultando (ecuación IV.40):

$$T(0, t) = -\frac{F_n}{\kappa_s \chi_s^{-1/2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\alpha}}{\Gamma\left[\frac{k}{2} - \nu k + \frac{3}{2}\right]} + T_0$$

donde:  $\theta = \frac{k}{z} - vk + \frac{1}{z}$

A partir de los perfiles de la velocidad del viento se determina el coeficiente  $K_h$  mediante la expresión siguiente (ecuación IV.43):

$$K_h = a u_1^{\frac{1-m}{1+m}} \rho_a C_p z^{1-m}$$

En la expresión anterior  $m$  es la pendiente de la recta definida por la relación logarítmica entre  $u/u_1$  y  $z/z_1$  (ver Capítulo IV) cuyos valores se incluyen en las Tablas XI.VI.a) y b).

Los valores de  $F_h$  se incluyen en las Tablas XI.III.a) y b) y los de  $K_a$  y  $\chi_a$  están en las Tablas XI.VII.a) y b).

En la Figura XI.5 están las temperaturas calculadas por el modelo y "observadas". Se nota una subestimación mayor que en el modelo de Jaeger (1). El 60% de los valores se apartan de la zona delimitada por las rectas punteadas.

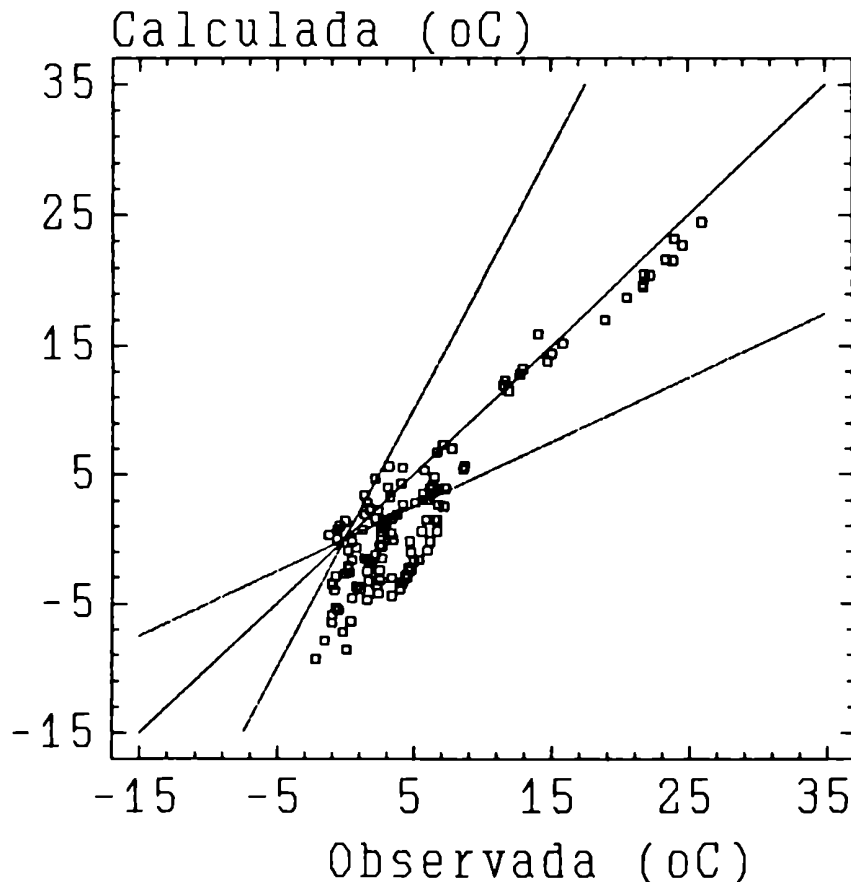


Figura XI.5: Temperaturas de superficie calculadas por el modelo de Jaeger (2) y "observadas"

El error cuadrático medio (ECM) es 15,58 °C<sup>2</sup> y el error sistemático es 8,59 °C<sup>2</sup> (ver Tabla XI.I) aumentando en relación a los valores correspondientes al modelo Jaeger (1). Los restantes parámetros estadísticos no mejoran el rendimiento del modelo respecto del de Jaeger (1).

### XI.2.7. El modelo de Jaeger(3)

El método de determinación de  $K_h$  (ecuación IV.43) no parece ser el más adecuado. Knighting (1950), obtuvo la variación de  $K_h$  con la altura utilizando las mediciones realizadas por Cowling y White (1941), según las siguientes expresiones (IV.29):

$$K_h = \chi_a Q_a C_p z^{(1-m)}$$

con lo que sería aplicable la siguiente relación:

$$\chi_h = \chi_a z^{(1-m)}$$

Cowling y White (1941) suponen que la variación diurna de la temperatura en cada nivel puede ser expresada en función de armónicas, y  $\chi_h$  puede ser evaluado en diferentes niveles (ver Capítulo VII).

Cowling y White (1941) obtienen los valores de  $\chi_h$ , a distintas alturas a partir de datos observados de temperatura para días con cielo despejado del mes de Junio en Leafield (Londres) correspondientes al finalizar la noche, cuyos valores son incluidos en la Tabla XI.VIII.

Aplicando logaritmo en ambos miembros de la expresión (IV.29) y con los datos presentados en la Tabla XI.VIII, se determinó el valor de  $\chi_a$  (0,0855 metro<sup>2-m</sup>/seg.) y de  $m$  (0,3232) con estos valores se aplicó la expresión (IV.40).

En la Figura XI.6 se presentan las temperaturas calculadas conjuntamente con las temperaturas observadas. El modelo sobrestima los valores observados. Pero, existe una menor dispersión con respecto a las Figuras XI.4 y XI.5. Además, el 39% de los valores subestima o sobrestima en un factor 2 los valores observados. Esto es menor que en el caso anterior.

El índice de concordancia es de 0,96 (ver Tabla XI.I), resultando ser más alto que 0,92 correspondiente al modelo de



Jaeger(2). El error cuadrático medio (ECM) disminuyó a  $6,2^{\circ}\text{C}^2$ , por lo cual parecería que una adecuada determinación de la difusividad del aire mejora el valor calculado de la temperatura.

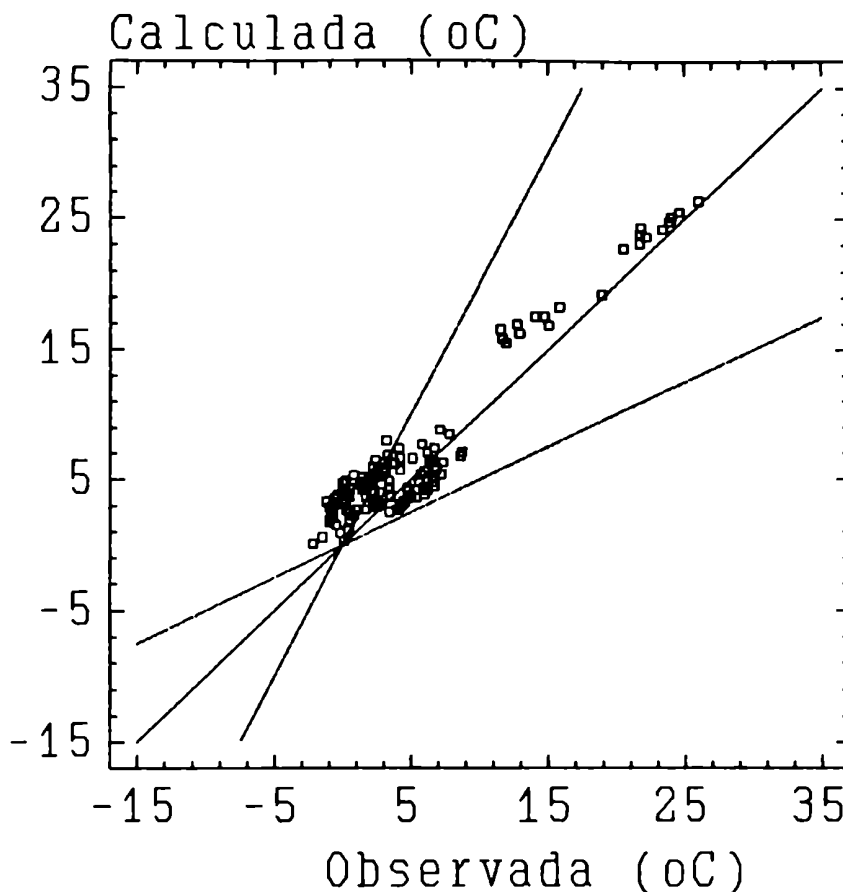


Figura XI.6: Temperaturas en superficie calculadas por el modelo de Jaeger (3) y "observadas".

#### XI.2.8. El modelo de Reuter

Reuter (1951) considera un coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire constante. Además, incluye el gradiente de temperatura inicial del aire ( $\gamma$ ) y del suelo ( $\beta$ ), resultando la siguiente expresión (ver ecuación IV.56):

$$T_s(0, t) = \frac{2(F_n + \beta\kappa_s + (\gamma - \gamma_d)\kappa_a)}{(\kappa_s\lambda_s^{-1/2} + \kappa_a\lambda_a^{-1/2})} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + T_0$$

Los valores de los coeficientes turbulentos de difusividad y

conductividad térmica en el aire son los presentados en las Tablas XI.V.a) y b), y de  $F_n$  se incluyen en las Tablas XI.III.a) y b).

El gradiente inicial de temperatura del aire fue evaluado como la diferencia entre las temperaturas del aire medidas en la casilla y a la altura del tope de la inversión, representando las capas bajas de la atmósfera (Tablas V.a) y b)).

En la Figura XI.7 se observa que los resultados del modelo sobrestiman los valores observados.

El error cuadrático medio es  $17,2^{\circ}\text{C}^2$  (ver Tabla XI.I). El error absoluto medio (EAM) es  $3,6^{\circ}\text{C}$  mayor que el correspondiente al modelo de Jaeger(1).

En la Tabla XI.II se presenta el coeficiente de determinación entre las temperaturas calculadas y observadas, que es 91%, con una ordenada al origen de  $3,66^{\circ}\text{C}$  apartándose del valor ideal.

La inclusión de los gradientes iniciales de temperatura del aire y del suelo, con un coeficiente de difusividad térmica en el aire constante parecerían conducir a una sobrestimación de los valores estimados de temperatura.

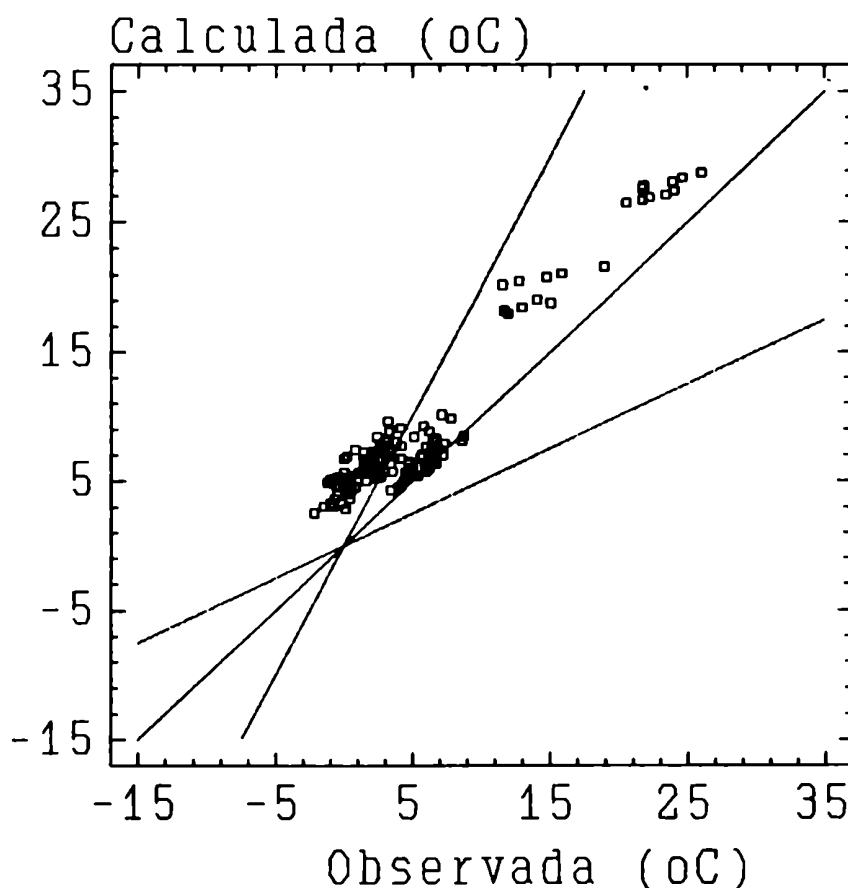


Figura XI.7: Temperaturas en superficie calculadas por el modelo de Reuter y "observadas"

### XI.2.9. El modelo de Anfossi y otros

El modelo de Anfossi y otros (1976) calcula el enfriamiento nocturno que alcanzaría una capa de altura  $z_1$  y utiliza un coeficiente de difusividad térmica en el aire constante con la altura ( $\chi_a$ ). La expresión es la siguiente (ver ecuación IV.65):

$$T(0, t) - T_o - \frac{2f_o}{\kappa_a [1 - \operatorname{erfc}(1)]} \sqrt{\frac{\chi_a t}{\pi}}$$

El valor de  $\chi_a$  fue estimado por Anfossi y otros (1989), despejando  $\chi_a$  de la expresión (IV.65) y conociendo la disminución de la temperatura. De esta forma obtuvieron valores de  $\chi_a$  utilizando observaciones realizadas en Philipsburg (Alemania) (1980) y Hay (Australia) (1971). Ellos sugieren que  $\chi_a$  varía entre 0,3 y 0,4  $\text{m}^2/\text{s}$ , coincidiendo con mediciones realizadas en el Valle del Río Po (Italia) (Anfossi y otros, 1974).

Por otra parte, Anfossi y otros (1985) observan que el valor de  $f_o$  despejado de la expresión (IV.65) para varias experiencias, incluyendo las de "Wangara", coincide en promedio con el flujo de calor en el suelo ( $f_o \approx F_s$ ).

Anfossi y otros (1985) señalan que los mejores resultados se obtienen al comparar los valores calculados por (IV.65) con la temperatura observada en el abrigo meteorológico. El modelo es corrido desde el momento en el cual la temperatura diurna tiene su valor máximo.

En las Tablas XI.IX.a) y b) se incluyen los parámetros de entrada correspondientes a la expresión (IV.65). Se obtuvo el valor medio del flujo de calor del suelo ( $F_s$ ) desde la hora inicial hasta la hora de la salida del sol.

Los valores de los parámetros estadísticos de evaluación son presentados en la Tabla XI.I, el valor observado ( $O_1$ ) es el correspondiente a la temperatura en el abrigo. En la Figura XI.8 se comparan los resultados. Se obtiene que el 11% de los valores estimados subestiman o sobreestiman por un factor 2 el valor observado.

El valor de  $\chi_a$  utilizado es 0,39  $\text{m}^2/\text{s}$  (Anfossi y otros, 1989) para el experimento "Wangara", el cual también fue utilizado en el experimento "Great Plains" (los autores sugieren que es un valor aceptable para noches con alta irradiación). Esto podría explicar el apartamiento de los valores mayores que  $15^\circ\text{C}$  en la Figura XI.8.

El índice de concordancia es 0,97, el error cuadrático medio (ECM) es 6,36 y el sistemático es 0,77. En la Tabla XI.II se presenta el coeficiente de correlación entre los valores observados y calculados (91%), la ordenada al origen es 0,74 °C difiriendo algo de 0°C. y la pendiente es 1,01.

La evaluación del modelo de Anfossi permite concluir que los resultados son aceptables. Pero la suposición de un  $\chi_a$  constante, la aproximación de  $f_o \approx F_a$  se apartan de las bases físicas incluidas en el proceso de enfriamiento. Por otra parte, no se encuentra justificación a la comparación con los datos observados de temperatura en el abrigo meteorológico.

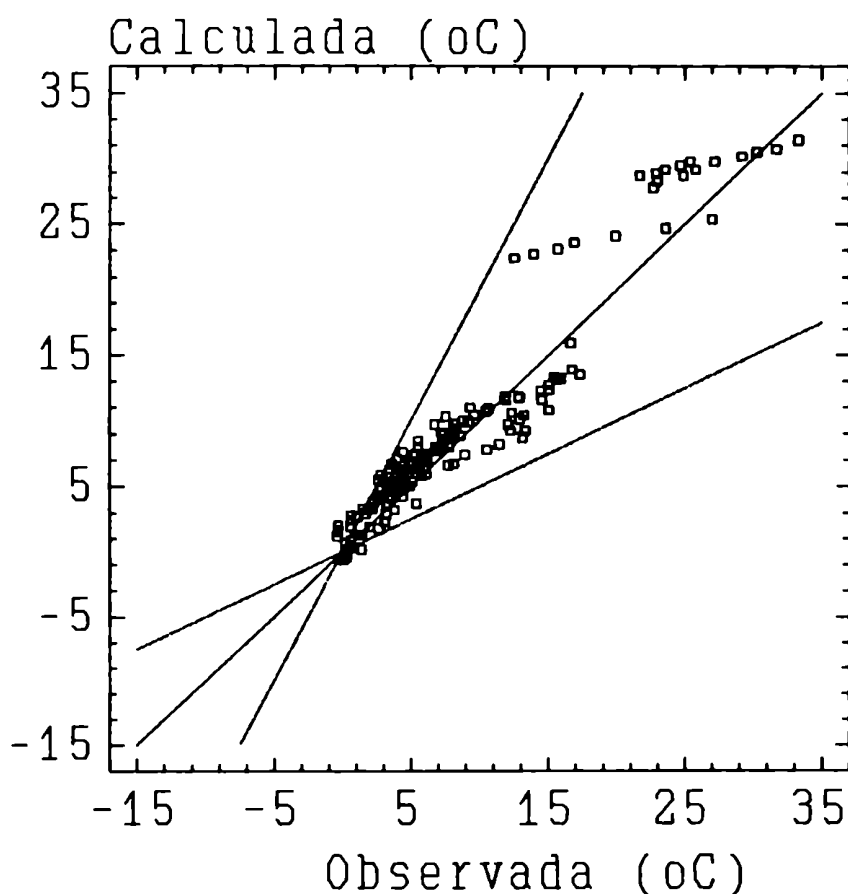


Figura XI.8: Temperatura calculada por el modelo de Anfossi y otros y temperatura observada de la casilla.

### XI.2.10. El modelo propuesto

El modelo propuesto determina la temperatura de superficie suponiendo un coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire variable con la altura, un gradiente inicial de temperatura en el suelo y permite calcular la temperatura de superficie después de la salida del sol. Las expresiones son las deducidas en el Capítulo VI:

$$T(0, t) - T_0 + C1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\varphi + \frac{1}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{3}{2})} \quad ; 0 < t \leq t_a \quad (\text{VI.46})$$

$$T(0, t) - T_0 + C1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\varphi + \frac{1}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{3}{2})} + C3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k (t - t_a)^{\varphi + \frac{3}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{5}{2})}$$

$$t_a < t \leq t_b \quad (\text{VI.47})$$

$$T(0, t) - T_0 + C1 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\varphi + \frac{1}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{3}{2})} + C3 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k (t - t_a)^{\varphi + \frac{3}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{5}{2})} +$$

$$+ C5 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k (t - t_b)^{\varphi + \frac{3}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{5}{2})} \quad t > t_b \quad (\text{VI.48})$$

donde:  $\varphi = \left(\frac{1}{2} - v\right)k$

Los parámetros de entrada del modelo fueron determinados en el Capítulo IX, cuyos valores para los experimento "Wangara" y "Great Plains" se incluyen en las Tablas X.I. y X.II.

Los parámetros evaluadores se presentan en la Tabla XI.I: el índice de concordancia es 0,99, el error cuadrático medio (ECM) es 1,23 °C<sup>2</sup>, el error sistemático medio (ECM<sub>s</sub>) es 0,27 y el error absoluto medio es 0,87°C.

La pendiente es 1,00 y la ordenada al origen es de -0,5°C. (ver Tabla XI.II). En la Figura XI.9 se presenta el diagrama de dispersión entre los valores calculados y los observados. El 22% de los valores estimados subestiman o sobrestiman los valores observados.

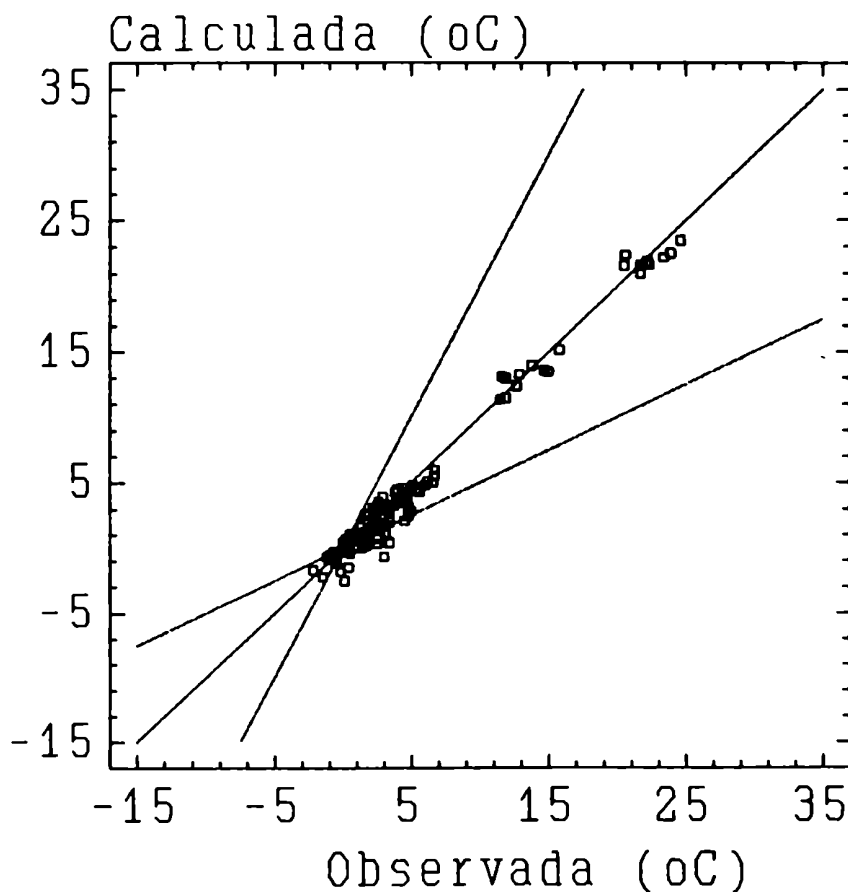


Figura XI.9: Temperatura de superficie calculada por el modelo propuesto y "observada"

### XI.2.11. ANALISIS DE LOS PARAMENTROS ESTADISTICOS

En la Tabla XI.I se presentan los valores de los parámetros estadísticos (ver punto XI.1.2) donde  $P_1$  es el valor de temperatura calculada en cada modelo.

Teóricamente el error sistemático ( $ECM_m$ ) debería tender a cero. Este error fue disminuyendo desde el modelo más simple, como el de Brünt ( $ECM_m=18,2^{\circ}C^2$ ), hasta el modelo propuesto ( $ECM_m = 0,27^{\circ}C^2$ ). Por lo tanto, la incorporación de procesos físicos parecería mejorar los resultados.

El índice de concordancia,  $d$ , se inestabiliza si existe valores pequeños de  $O_1$  y  $P_1$  (Willmott, 1982). Por lo tanto las conclusiones deberán ser tomadas con prudencia. Teóricamente  $d$  tiende a 1 para una concordancia perfecta. El valor de  $d$  correspondiente al modelo de Brünt es 0,87, comparado con el valor del modelo de Gröen (2) ( $d=0,94$ ) y Jaeger (1) ( $d=0,95$ ) resultan estos últimos mejores. Por otro lado, el modelo propuesto (0,99) y el modelo de Anfossi (0,97) tienen altos valores de  $d$ .

El error fraccional medio, EFM, indica el desvío medio. Si  $EF_1$  está fuera del rango  $-0,67 \leq EF_1 \leq 0,67$ , los resultados se apartan de los observados en un factor de 2. Por lo tanto, en general, los modelos de Reuter y Jaeger (3) sobrestiman el valor observado (ver Tabla XI.I) y los modelos de Brünt y Jaeger(2) subestiman por un factor mayor que 2 al valor observado. Los valores estimados por el modelo propuesto están en relación con los observados en una constante de 0,7.

El EAM y RECM tienen valores menores en el modelo propuesto que en el modelo de Anfossi.

El coeficiente de determinación y la ordenada al origen de la recta definida entre los valores calculados por el modelo propuesto y los observados son relativamente más adecuados que para los otros modelos (Tabla XI.II).

### XI.3. COMPARACION ENTRE LOS VALORES DE TEMPERATURA MINIMA OBTENIDOS MEDIANTE DIFERENTES MODELOS Y LOS DATOS OBSERVADOS

Los valores de la temperatura mínima calculados mediante los diferentes modelos serán contrastados con los de temperatura mínima observadas correspondiente a los días seleccionados de los

experimentos "Wangara" y "Great Plains".

Un análisis de la Tabla XI.I. permite concluir que los modelos de Gröen(2), Jaeger(1), Anfossi y el modelo propuesto tienen menores EFM, EAM y ECM que el resto de los modelos. Por lo tanto, estos cuatro modelos serán utilizados para evaluar estadísticamente el cálculo de las temperaturas mínimas.

Los parámetros estadísticos para la evaluación son presentados en la Tabla XI.X.

La Figura XI.10 presenta los valores de la temperatura mínima obtenida con el modelo de Gröen(2) y la mínima observada en superficie notándose una sobrestimación. En tanto, en la Figura XI.11, los resultados del modelo de Jaeger (1) presentan una subestimación de la temperatura mínima.

Los  $ECM_n$  correspondientes a los modelos de Gröen (2) y Jaeger(1), son mayores que los  $EFM_n$  (Tabla XI.X). Por lo tanto, en estos modelos no se disminuyen los errores sistemáticos; ocurre lo contrario con los modelos de Anfossi y el propuesto.

La Figura XI.12 presenta los valores de la temperatura mínima obtenida con el modelo de Anfossi y la observada en el abrigo meteorológico. El 33% de los valores subestiman o sobrestiman por un factor 2 el valor observado.

La Figura XI.13 muestra los valores de la temperatura mínima calculada por el modelo propuesto y la observada en superficie. Se observa una mejor relación lineal que en la Figura XI.12. En este, caso el 8% de los valores subestiman o sobrestiman los valores observados. Los valores de EAM, ECM y EFM son menores para el modelo propuesto que los correspondientes a los otros modelos (ver Tabla XI.X). El modelo propuesto calcula en forma relativamente adecuada la temperatura mínima.



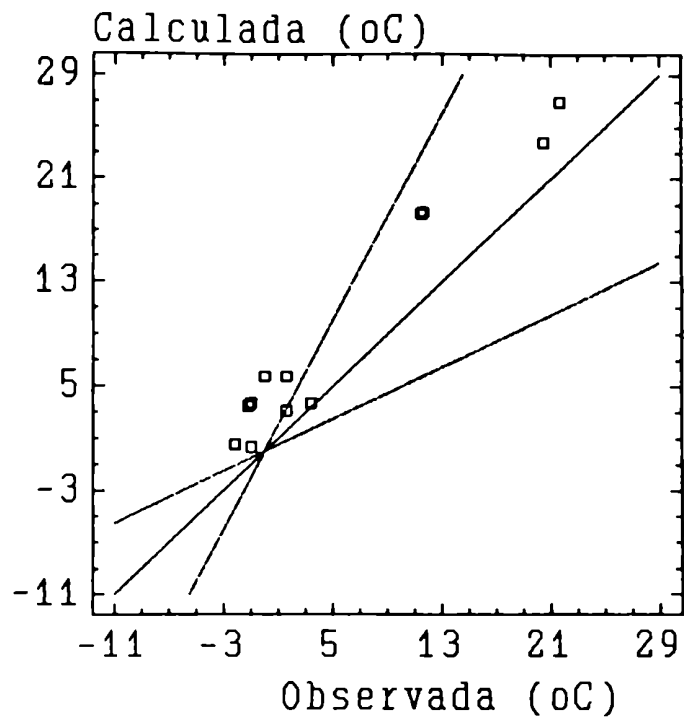


Figura XI.10: Temperatura mínima en superficie calculada por el modelo de Gröen (2) y observada.

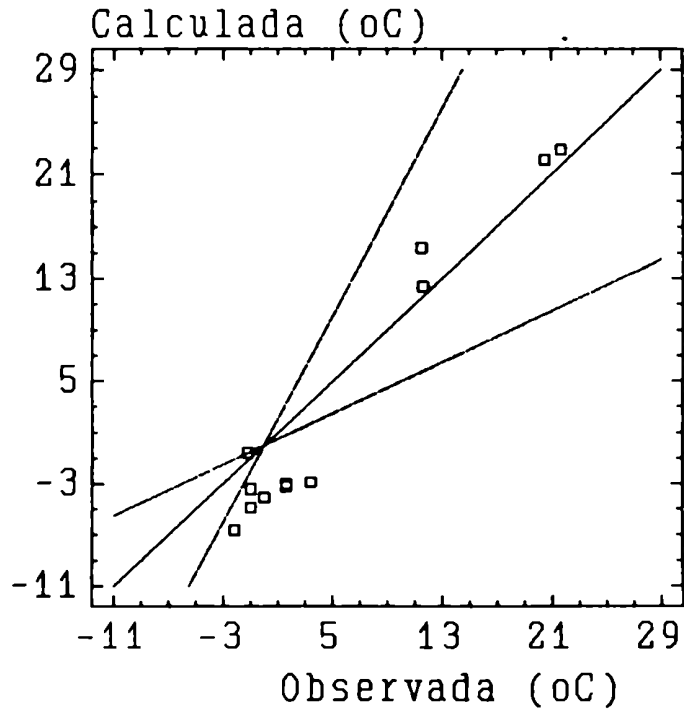


Figura XI.11: Temperatura mínima en superficie calculada por el modelo de Jaeger(1) y observada.

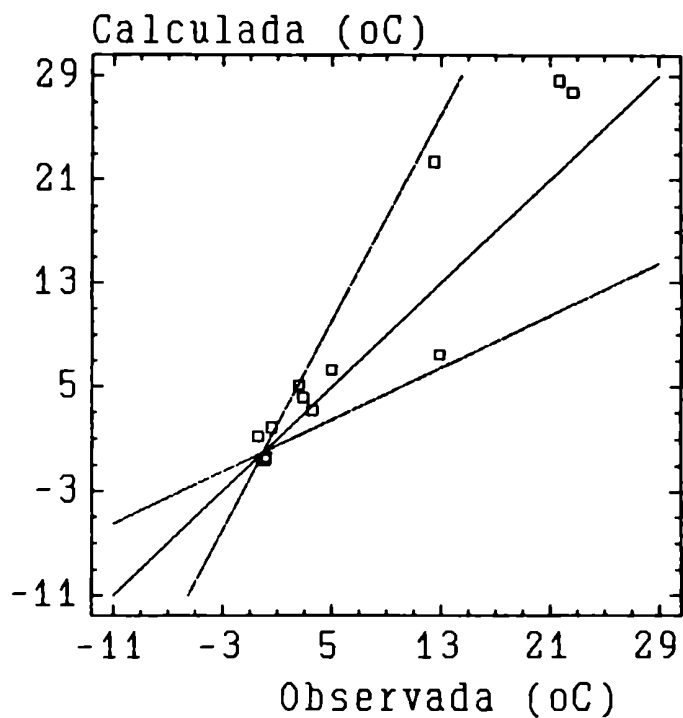


Figura XI.12: Temperatura mínima calculada en el abrigo meteorológico por el modelo de Anfossi y observada.

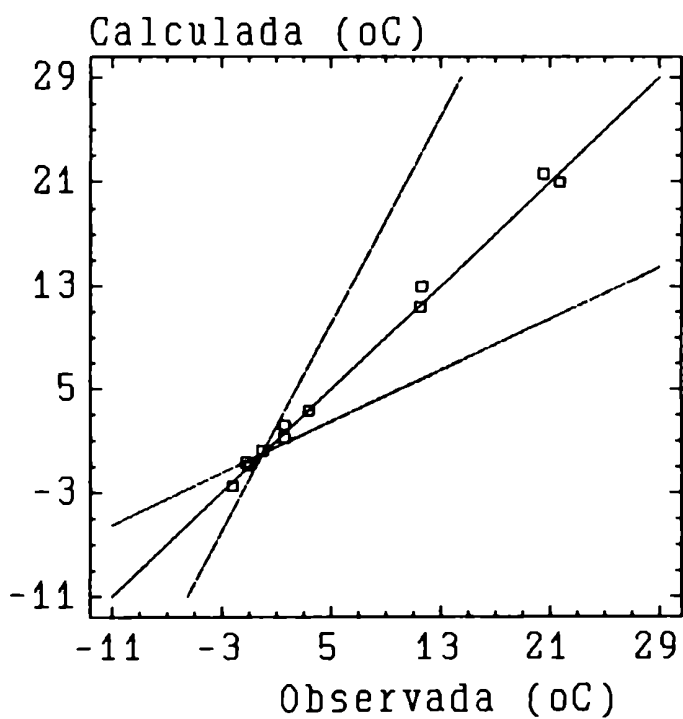


Figura XI.13: Temperatura mínima calculada en superficie por el modelo propuesto y observada.

#### XI.4 COMPARACION ENTRE LOS VALORES DE TEMPERATURA LUEGO DE LA SALIDA DEL SOL OBTENIDOS MEDIANTE EL MODELO PROPUESTO Y LOS DATOS OBSERVADOS

El modelo propuesto permite determinar la temperatura de superficie después de ocurrido su valor mínimo (ecuaciones (VI.47) y (VI.48)). En la Figura XI.14 se muestran los valores de temperatura obtenida por el modelo y la observada en superficie.

Los parámetros estadísticos son en este caso:  $EAM = 0,71$ ;  $ECM = 0,85$ ;  $ECM_e = 0,07$ ;  $ECM_n = 0,78$ ;  $EFM = 0,20$  y  $d = 0,99$ . El comportamiento del modelo, en este caso, parece satisfactorio.

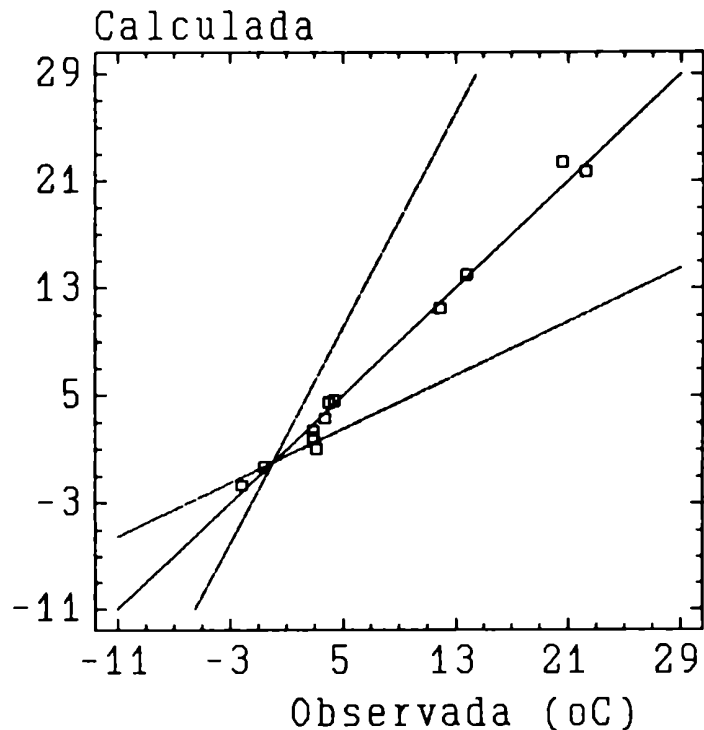


Figura XI.14: Temperatura luego de ocurrida la temperatura mínima, calculada con el modelo propuesto y observada

## CAPITULO XII

### ANALISIS DE LA SENSIBILIDAD DEL MODELO PROPUESTO

#### XII.1. INTRODUCCION

Todas las mediciones de variables en las ciencias naturales son en alguna medida inexactas, tal que el valor real de una cantidad física no puede ser encontrado, y es razonable estimar los límites entre los cuales se puede encontrar el valor real.

Una vez que ha sido estimado el error de una cantidad medida es posible calcular el valor del error de otra cantidad de la cual ésta depende. El método de propagación de errores nos permite ello.

Si una variable  $Q$  es función de varias variables medidas  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,... el error de  $Q$  debido a los errores  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$ ... de  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , respectivamente, está dado por:

$$\delta Q = \frac{\partial Q}{\partial x} \delta x + \frac{\partial Q}{\partial y} \delta y + \frac{\partial Q}{\partial z} \delta z \quad (\text{XII.1})$$

El primer término del segundo miembro,  $\frac{\partial Q}{\partial x} \delta x$ , es el error de  $Q$  debido a un error  $\delta x$  en  $x$  solamente (si  $\delta y$ ,  $\delta z$  son nulos) y similarmente el segundo término,  $\frac{\partial Q}{\partial y} \delta y$ , es el error en  $Q$  debido a un error  $\delta y$  en  $y$  solamente.

Se supone que  $\delta x$ ,  $\delta y$  y  $\delta z$  pueden tener algún valor entre  $-e_1$  y  $+e_1$ ;  $-e_2$  y  $+e_2$ ;  $-e_3$  y  $+e_3$  respectivamente, siendo  $e$  el error cuadrático medio de la magnitud. Entonces, el error más probable ( $\delta Q$ ) de  $Q$  está dado por:

$$\delta Q = \left[ \left( \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot \delta x \right)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial y} \cdot \delta y \right)^2 + \left( \frac{\partial Q}{\partial z} \cdot \delta z \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \quad (\text{XII.2})$$

Dividiendo ambos términos de la expresión (XII.2) por  $Q$  se obtendrá el error cuadrático relativo. Por otra parte, es sufi-

ciente aproximación la sustitución de la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de la expresión (XI.2) por la suma de los valores absolutos de los términos, resultando:

$$\left| \frac{\delta Q}{Q} \right| = \left| \frac{\partial Q}{\partial X} \cdot \frac{\delta X}{X} \right| + \left| \frac{\partial Q}{\partial Y} \cdot \frac{\delta Y}{Y} \right| + \left| \frac{\partial Q}{\partial Z} \cdot \frac{\delta Z}{Z} \right| \quad (\text{XII.3})$$

Siguiendo este esquema, se evaluará el error relativo de la expresión:

$$\Delta T = - \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \alpha^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)} \quad (\text{XII.4})$$

donde:

$$\alpha = \frac{\kappa_a \chi_a^{-\nu}}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(\nu)} \cdot (2-m)^{(1-2\nu)} \quad (\text{XII.5})$$

$$\nu = \frac{1-m}{2-m} \quad (\text{XII.6})$$

$$\Phi = k \left[ \frac{1}{2} - \nu \right] + \frac{1}{2} \quad (\text{XII.7})$$

## XII.2. EL PARAMENTRO $\alpha$

El parámetro  $\alpha$  (expresión (XII.5)) debe ser siempre menor que uno para asegurar la convergencia de la serie incluida en la expresión (XII.4). En forma general, se puede escribir:

$$\alpha = f(\kappa_a, \chi_a, \kappa_s, \chi_s, m) \quad (\text{XII.8})$$

### XII.2.1. Límite de validez de $\alpha$

El modelo impone que los valores de  $m$  estén comprendidos por:

$$0 < m < 1 \quad (\text{XII.9})$$

Por lo tanto según (XII.6) resulta que:

si  $m \approx 0$  entonces  $\hat{v}$  tiende a 0,5

si  $m \approx 1$  entonces  $\hat{v}$  tiende a 0

Definiendo el siguiente parámetro  $f$  (ver expresión (XII.5)):

$$f = (2-m)^{(1-2v)} \cdot \frac{\Gamma(1-v)}{\Gamma(v)} \quad (\text{XII.10})$$

y graficando  $f$  en función de  $m$  se obtiene la Figura XII.1. De acuerdo con la misma, se encuentra que:

si  $m \approx 0$  entonces  $f$  tiende a 1

si  $m \approx 1$  entonces  $f$  tiende a 0

Por lo tanto se obtiene que el valor de  $\alpha$  varía entre los siguientes límites:

$$0 < \alpha \leq \frac{\kappa_a \chi_a^{-\frac{1}{2}}}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} < 1 \quad (\text{XII.11})$$

Con esta condición se establece que la serie de la expresión (XII.4) sea convergente.

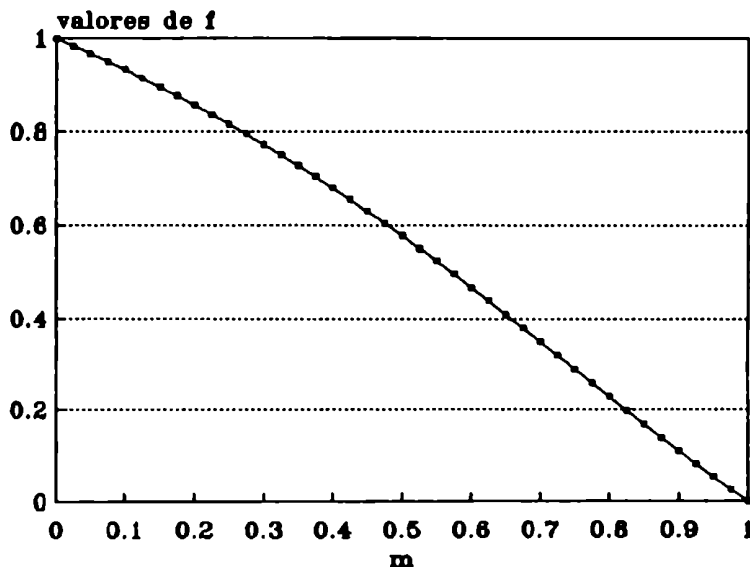


Figura XII.1: Valores de la función  $f$

En la Tabla XII.I se presentan los valores de  $\alpha$ , para un valor determinado de constantes del suelo ( $\kappa_a \chi_a^{-0.5} = 0,14 \times 10^5$  cal/h<sup>-0.5</sup> m<sup>1.5</sup> °C., valor correspondiente al experimento "Wangara"), tal que cumple la condición (XII.11). En la Figura XII.2 se grafican estos valores de  $\alpha$  en función de  $m$ . En la misma Figura se indican con una cruz los valores de  $\alpha$  que serán utilizados a fin de analizar los errores.

Grandes valores del coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire ( $\chi_a$ ) están asociado con mayor mezcla y con valores de  $\alpha$  más elevados.

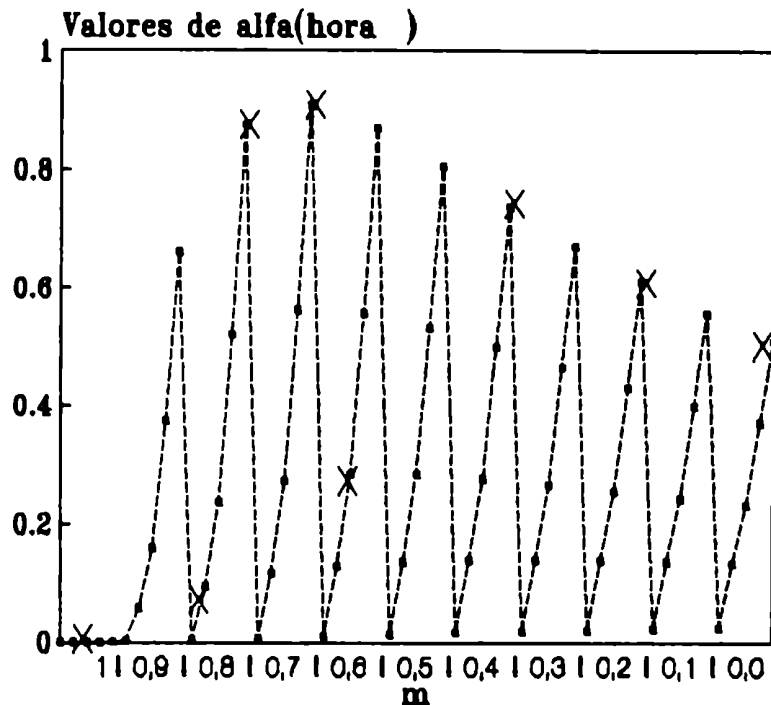


Figura XII: Valores de  $\alpha$ , correspondientes a la Tabla XII.I. Son señalados con X los valores de  $\alpha$  seleccionados.

### XII.2.2. Análisis dimensional de $\alpha$

Utilizando unidades de tiempo, longitud, temperatura y de calor, resulta (expresión (XII.5)):

$$[\alpha] = \frac{[\kappa_a][\chi_a^v]}{[\kappa_s][\chi_s^{\frac{1}{2}}]} [f] = \frac{\text{caloría}}{\text{tiempo} \cdot \text{long} \cdot \text{temp} \cdot \left(\frac{\text{long}^{2-n}}{\text{tiempo}}\right)^{\left(\frac{1}{2}-n\right)}} \cdot \frac{\text{caloría}}{\text{tiempo} \cdot \text{long} \cdot \text{temp} \cdot \left(\frac{\text{long}^2}{\text{tiempo}}\right)^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{XII.12})$$

donde  $f$  no tiene unidades (ver expresión (XII.10)).

Por lo tanto,  $\alpha$  tiene la siguiente dimensión:

$$[\alpha] = \text{tiempo}^{(v-\frac{1}{2})} \quad (\text{XII.13})$$

### XII.2.3. Valores "observados" de $\alpha$

En la Tablas XII.II.a) y b) se presentan los valores de  $\alpha$  obtenidos, mediante la expresión (XII.5), utilizando los datos observacionales de los experimentos "Wangara" y "Great Plains". Los valores experimentales de  $\alpha$  son generalmente pequeños, pues están asociados con valores pequeños del coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire a un metro de altura,  $\chi_a$ , correspondientes a noches con calma o vientos leves. El coeficiente turbulento de conductividad térmica en el aire a un metro de altura está determinado por:

$$\kappa_a = \rho_a C_p \chi_a \quad (\text{XII.14})$$

donde  $\rho_a$  es la densidad del aire y  $C_p$  es el calor específico a presión constante.

### XII.3. METODO DE PROPAGACION DE ERRORES

Aplicando el método de propagación de errores a la expresión (XII.4), y dividiendo por  $\Delta T$  resulta:

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\delta(\Delta T)}{\Delta T} \right| = \left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \chi_s} \frac{\delta \chi_s}{\chi_s} \right| + \left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \kappa_s} \frac{\delta \kappa_s}{\kappa_s} \right| + \left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \kappa_a} \frac{\delta \kappa_a}{\kappa_a} \right| + \left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \chi_a} \frac{\delta \chi_a}{\chi_a} \right| \\ & + \left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial F_n} \frac{\delta F_n}{F_n} \right| + \left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \beta} \frac{\delta \beta}{\beta} \right| + \left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} \frac{\delta t}{t} \right| + \left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial m} \frac{\delta m}{m} \right| \quad (\text{XII.15}) \end{aligned}$$

Los errores relativos de cada variable están acompañados por un coeficiente, que dependiendo de las variables incluidas tendrán distinta influencia relativa en el error de  $\Delta T$ . A continuación se analizarán estos coeficientes.

#### XII.3.1. Influencia del error de $\chi_a$ sobre el error de $\Delta T$

En el Anexo VIII se determinó el error relativo de  $\Delta T$  debido a variaciones del coeficiente de difusividad térmica en el suelo,  $\chi_a$ , cuya expresión es la siguiente:



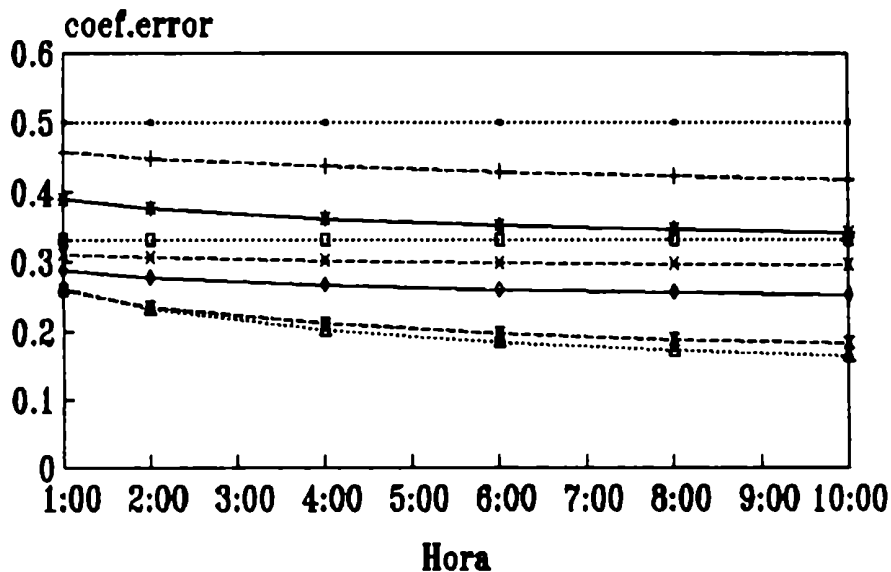
$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \chi_s} \frac{\delta \chi_s}{\Delta T} \right| = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^{\phi}}{\Gamma(\phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\phi}}{\Gamma(\phi+1)}} \right] \frac{\delta \chi_s}{\chi_s} \quad (\text{XII.16})$$

Por lo tanto, el coeficiente que acompaña al error relativo de  $\chi_s$  es:

$$\text{coeficiente} = \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^{\phi}}{\Gamma(\phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\phi}}{\Gamma(\phi+1)}} \right] \quad (\text{XII.17})$$

En la Figura XII.3 se representa este coeficiente para algunos valores de  $\alpha$  de la Tabla XII.I.

Para  $\alpha=2 \times 10^{-3}$  ( $m=1$ ) el valor del coeficiente se mantiene constante con el tiempo, mientras para  $\alpha=0,8752$  ( $m=0,8$ ) este coeficiente alcanza el mínimo valor. Por lo tanto, podría establecerse que el coeficiente decrece con el tiempo, variando entre 0,1 y 0,5.



valores de alfa

0,0002 ---+--- 0,0952 —◆— 0,2844 ---□--- 0,5063  
 ---x--- 0,6081 —◆— 0,7354 ---▲--- 0,8752 ---x--- 0,9080

Figura XII.3: Valores del coeficiente del error relativo de  $\chi_s$ .

### XII.3.2. Influencia del error de $\chi_a$ sobre el error de $\Delta T$

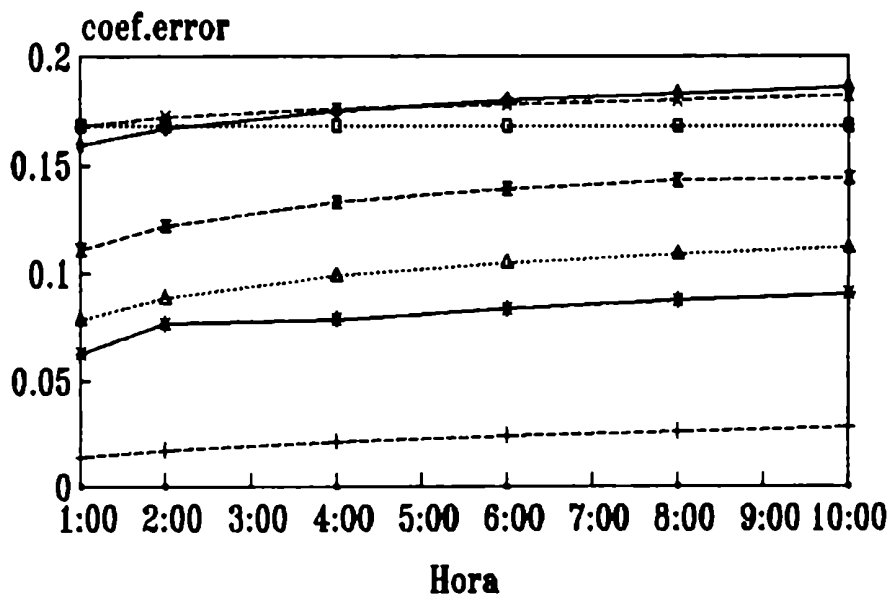
En el Anexo IX se presenta la obtención del error relativo de  $\Delta T$  cuando varía el coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire,  $\chi_a$ , cuya expresión es:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \chi_a} \frac{\delta \chi_a}{\Delta T} \right| = \left[ \nu \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)}} \right] \frac{\delta \chi_a}{\chi_a} \quad (\text{XII.18})$$

Por lo tanto, el coeficiente que acompaña al error relativo de  $\chi_a$  es:

$$\text{coeficiente} = \left[ \nu \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)}} \right] \quad (\text{XII.19})$$

En la Figura XII.4, se representa la variación temporal de este coeficiente, con valores que podrían encontrarse entre 0 y 0,2.



valores de alfa

0,0002 ---+--- 0,0952 —◆— 0,2844 ---□--- 0,5063

---\*--- 0,6081 —◆— 0,7354 ---△--- 0,8752 ---■--- 0,9080

Figura XII.4: Valores del coeficiente del error relativo de  $\chi_a$

### XII.3.3. Influencia del error de $K_a$ sobre el error de $\Delta T$

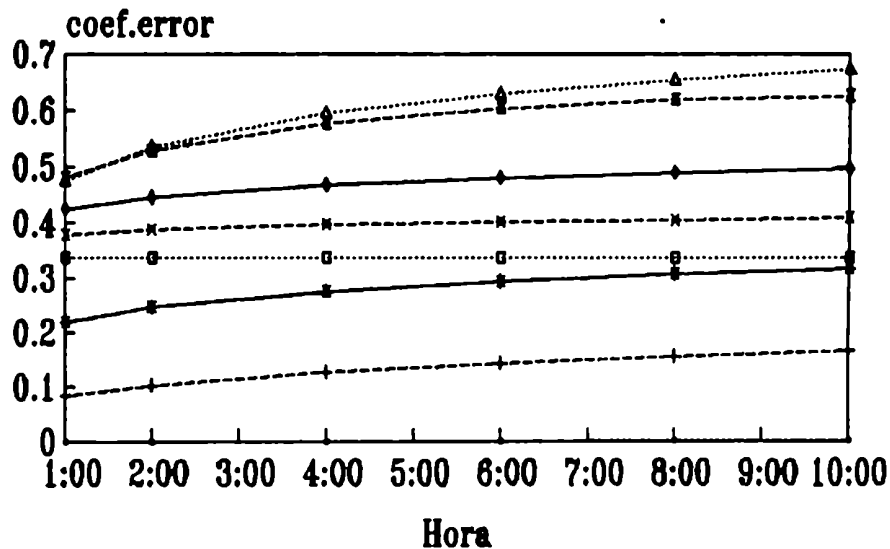
En el Anexo X, se determinó el error relativo de  $\Delta T$  originado por la variación del coeficiente turbulento de conductividad en el aire,  $K_a$ , resultando:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial K_a} \frac{\delta K_a}{\Delta T} \right| = \left[ \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)}} \right] \frac{\partial K_a}{K_a} \quad (\text{XII.20})$$

En consecuencia, el coeficiente que acompaña al error relativo de  $K_a$  es:

$$\text{coeficiente} = \left[ \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)}} \right] \quad (\text{XII.21})$$

En la Figura XII.5, está graficada la variación horaria de este coeficiente. Para  $\alpha=2 \times 10^{-3}$  ( $m=1$ ) el coeficiente es cero, mientras que para  $\alpha=0,8752$  ( $m=0,8$ ) tiene su valor máximo. En consecuencia el coeficiente aumentaría con el tiempo, con valores comprendidos entre 0 y 0,7.



valores de alfa

0,0002 ---+--- 0,0952 —●— 0,2844 ---□--- 0,5063

---x--- 0,6081 —●— 0,7354 ---▲--- 0,8752 ---■--- 0,9080

Figura XII.5: Valores del coeficiente del error relativo de  $K_a$

### XII.3.4. Influencia del error de $K_s$ sobre el error de $\Delta T$

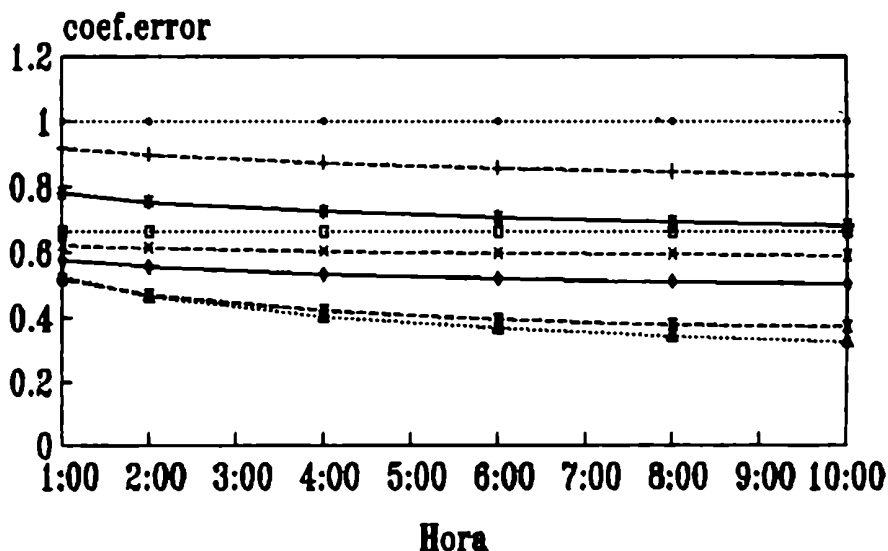
En el Anexo XI se presenta la deducción del error relativo de  $\Delta T$  determinado por el error del coeficiente de conductividad del suelo,  $K_s$ , representado por:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial K_s} \frac{\delta K_s}{\Delta T} \right| = \left[ \frac{1}{1 + \frac{K_s \beta}{F_n}} + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)}} \right] \frac{\delta K_s}{K_s} \quad (\text{XII.22})$$

El coeficiente que acompaña al error relativo de  $K_s$  es:

$$\text{coeficiente} = \left[ \frac{1}{1 + \frac{K_s \beta}{F_n}} + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)}} \right] \quad (\text{XII.23})$$

Este coeficiente se analizó para dos casos extremos. Si  $\beta = 0$ , por lo tanto  $[K_s \beta / F_n] = 0$ , el coeficiente decrece con el tiempo y tendría valores comprendidos entre 0,3 y 1,0 (ver Figura XII.6.a).



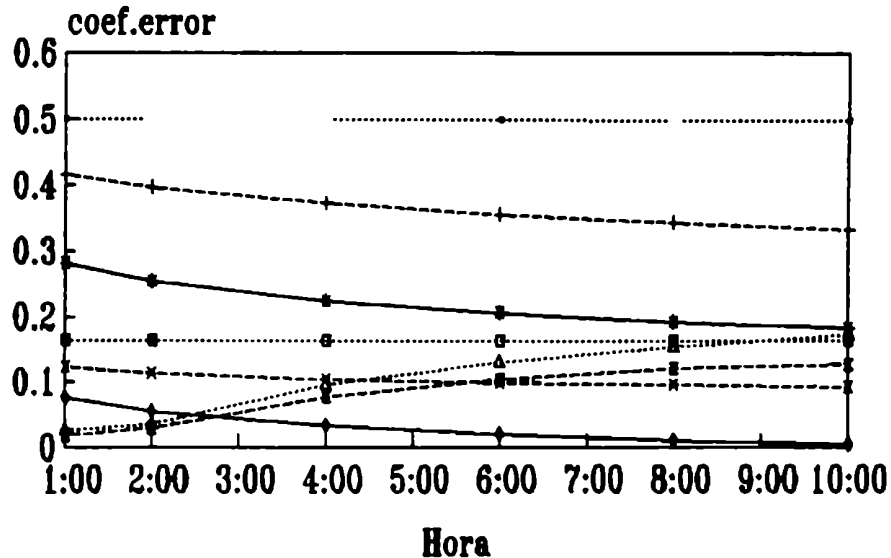
valores de alfa

0,0002 ---+--- 0,0952 —◆— 0,2844 ---□--- 0,5063  
 ---x--- 0,6081 —◆— 0,7354 ---▲--- 0,8752 ---■--- 0,9080

Figura XII.6.a: Valores del coeficiente del error relativo de  $K_s$ , con  $\beta = 0$

Si  $[ \kappa_s \beta / F_n ] = 1$  el coeficiente (expresión (XII.23)) tiene valores comprendidos entre 0 y 0,5 (ver Figura XII.6.b). Al incluir  $\beta$  el error se distribuye entre otras variables.

Por lo tanto, en general, podría establecerse que el coeficiente toma valores entre 0 y 1,0



valores de alfa

0,0002 ---+--- 0,0952 —●— 0,2844 —□— 0,5063

---\*--- 0,6081 —■— 0,7354 —▲— 0,8752 —◆— 0,9080

Figura XII.6.b: Valores del coeficiente del error relativo de  $\kappa_s$ , con  $( \beta \kappa_s / F_n ) = 1$

### XII.3.5. Influencia del error de $F_n$ sobre el error de $\Delta T$

En el Anexo XII se presenta la deducción de la influencia del error relativo de  $F_n$  sobre el error de  $\Delta T$ , cuya expresión es:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial F_n} \cdot \frac{\delta F_n}{\Delta T} \right| = \left| \frac{1}{1 + \frac{\beta \kappa_s}{F_n}} \right| \frac{\delta F_n}{F_n} \quad (\text{XII.24})$$

Por lo tanto, el coeficiente que acompaña al error relativo de  $F_n$  es:

$$\text{coeficiente} = \left| \frac{1}{1 + \frac{\beta \kappa_s}{F_n}} \right| \quad (\text{XII.25})$$

Con el objeto de determinar cuáles son los límites de variación del coeficiente que acompaña al error relativo de  $F_n$ , se recurre a la ecuación de balance de calor para  $t = 0$  y  $z \approx 0$ :

$$F_n = -\kappa_s \frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} ; \quad t=0 \text{ y } z=0 \quad (\text{XII.26})$$

cuando existe una isoterma en la atmósfera ( $\gamma = 0$ ).

El gradiente térmico en el suelo es:

$$-\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} = \beta \quad (\text{XII.27})$$

con (XII.26) y (XII.27) se encuentra:

$$\frac{\beta \kappa_s}{F_n} = 1 \quad (\text{XII.28})$$

Por lo tanto, el cociente de la expresión (XII.25) puede tomar valores entre 0 y 1,0. Luego, el coeficiente que acompaña al error relativo de  $F_n$  estaría comprendido entre 0,5 y 1,0.

$$0,5 \leq \left| \frac{1}{1 + \frac{\beta \kappa_s}{F_n}} \right| \leq 1 \quad (\text{XII.29})$$

### XII.3.6. Influencia del error de $\beta$ sobre el error de $\Delta T$

En el Anexo XIII se presenta el error relativo de  $\Delta T$  por influencia del gradiente vertical inicial de temperatura del suelo ( $\beta$ ):

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \beta} \cdot \frac{\delta \beta}{\Delta T} \right| = \left| \frac{\frac{\beta \kappa_s}{F_n}}{1 + \frac{\beta \kappa_s}{F_n}} \right| \frac{\delta \beta}{\beta} \quad (\text{XII.30})$$

El coeficiente que acompaña al error relativo de  $\beta$  es:

$$\text{coeficiente} = \left| \frac{\frac{\beta \kappa_s}{F_n}}{1 + \frac{\beta \kappa_s}{F_n}} \right| \quad (\text{XII.31})$$

Similarmente a lo realizado en XII.3.5, resulta:

$$0 < \frac{\beta \kappa_s}{F_n} < 1 \quad (\text{XII.32})$$

Por lo tanto, los valores de la expresión (XII.31) variarán entre 0 y 0,5.

$$0 \leq \left| \frac{\frac{\beta \kappa_s}{F_n}}{1 + \frac{\beta \kappa_s}{F_n}} \right| \leq 0,5 \quad (\text{XII.33})$$

### XII.3.7. Influencia del error de t sobre el error de $\Delta T$

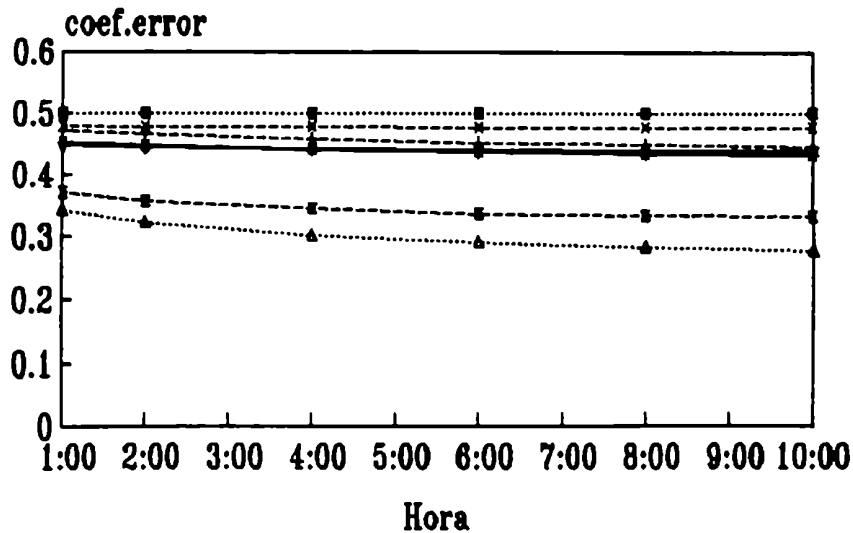
En el Anexo XIV, se determinó el error relativo de  $\Delta T$  cuando varia  $\Delta t$ , resultando:

$$\left| \frac{\delta(\Delta T)}{\Delta T} \frac{\delta t}{\Delta t} \right| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^\phi}{\Gamma(\phi)} \cdot \frac{\delta t}{t}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^\phi}{\Gamma(\phi+1)}} \right| \quad (\text{XII.34})$$

El coeficiente que acompaña al error relativo del tiempo es:

$$\text{coeficiente} = \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^\phi}{\Gamma(\phi)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^\phi}{\Gamma(\phi+1)}} \right| \quad (\text{XII.35})$$

En la Figura XII.7, se representa la variación temporal del el coeficiente del error relativo de t, (XII.35). Este coeficiente decrece con el tiempo, con valores que podrían estar comprendidos entre 0,2 y 0,5.



valores de alfa

0,0002    ---+    0,0952    —●—    0,2844    .....    0,5063

---\*    0,8081    —●—    0,7354    .....    0,8752    ---+    0,9080

Figura XII.7: Valores del coeficiente del error relativo del tiempo.

### XII.3.8. Influencia del error de m sobre el error de ΔT

El error relativo de ΔT por variación de m se obtuvo a partir de discretizar las variables. Esto se debe a las dificultades que presenta la derivación con respecto a m de la expresión (XII.4).

Reemplazando las derivadas parciales por diferencia finitas, resulta:

$$\frac{\delta(\Delta T)}{\delta(m)} \cdot \frac{\delta(m)}{\Delta T} = K \frac{\delta m}{m} \quad (\text{XII.36})$$

Despejando de (XII.36) se obtuvo el coeficiente que acompaña al error relativo de m:

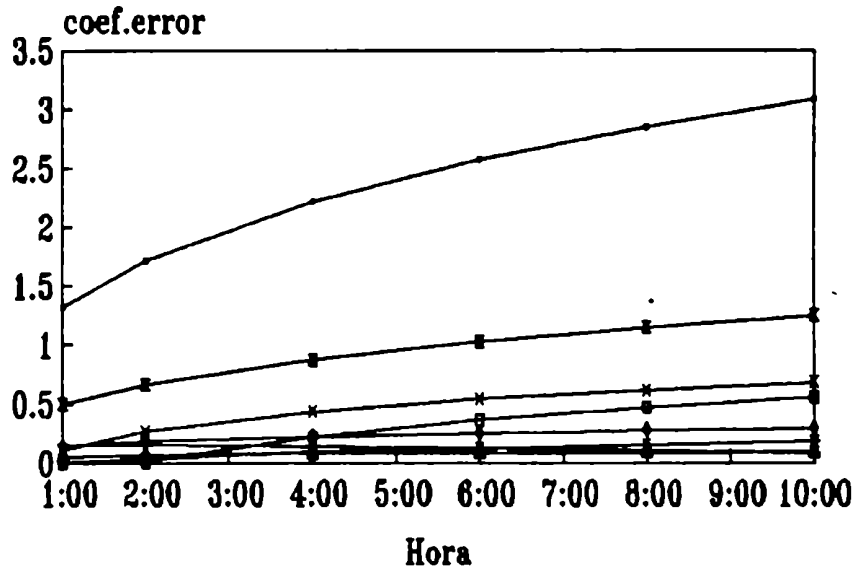
$$K = \frac{\delta(\Delta T)}{\Delta T} \cdot \frac{\delta(m)}{m} \quad (\text{XII.37})$$

Se evaluó la expresión (XII.37) para un  $\delta(m) = 0,1$  y para valores sucesivos de m entre 0,999 a 0. Para valores fijos de m y  $\chi_a$  (ver Tabla XII.I) se determinó ΔT (expresión (XII.4)).



En la Figura XII.8 se grafican los valores del coeficiente K de la expresión (XII.37) en función de las horas para distintos valores de  $\alpha$ . Este coeficiente adquiere valores mayores que 1 para los casos en que  $\alpha$  es 0,00022 y 0,00007 y según la Tabla XII.I corresponden a  $m = 0,9999$  con  $\chi_a$  igual a 90 y  $30m^{(2-m)}/h.$ , respectivamente.

Cuando  $\chi_a > 30$  y está asociado con un gradiente neutral de temperatura, el error relativo de  $\Delta T$  respecto de  $m$  es mayor que 1. Esta situación no está asociada con condiciones de fuerte enfriamiento radiativo, sino con altas velocidades de viento. Por lo tanto, pequeñas variaciones en  $m$  producen un error significativo en  $\Delta T$



valores de alfa

— 0.0002 —+ 0.0952 —\* 0.2844 —□ 0.8752  
 —x 0.9080 —◇ 0.7354 —▲ 0.6080 —■ 0.00007

Figura XII.8: Valores del coeficiente del error relativo de  $m$

### XII.3.9. Resumen de los resultados

En la Tabla XII.III se resumen los límites de variación de los coeficientes de los errores de cada variable que influye sobre el error de  $\Delta T$ . Los mayores efectos se encuentran para las variaciones de  $K_a$  y  $F_n$ , y luego las de  $K_b$ . Mientras, que si  $\chi_a$  es mayor que  $30 m^{(2-m)}/h$ . con  $m = 0,999$  el error es importante.

## CAPITULO XIII

### CONCLUSIONES

Después de la puesta del sol y cuando el flujo de radiación neta comienza a tener un valor casi constante, en la interfase suelo-atmósfera el flujo de radiación neta es balanceado por el flujo de calor sensible y el flujo de calor del suelo (en nuestro caso se desprecia el flujo de calor latente). En la atmósfera, en noches con escasa nubosidad y vientos débiles, se desarrolla una inversión de temperatura con base en superficie debido al enfriamiento radiativo. El flujo turbulento de calor puede dominar el enfriamiento en la capa baja de la inversión aumentando la estratificación estable de la capa.

El modelo propuesto permite obtener la predicción del descenso nocturno de la temperatura de superficie, en noches de enfriamiento radiativo.

El modelo propuesto se obtiene a partir de la resolución analítica de la ecuación de difusión de calor en el aire y en el suelo. La condición límite es la ecuación de balance de calor en superficie, y las condiciones iniciales son: una isoterma térmica en la atmósfera y un gradiente inicial de temperatura en el suelo.

*Las diferencias entre el modelo propuesto y los otros modelos presentados son:*

- El modelo de Brünt no incorpora el flujo de calor sensible desde la atmósfera. Como condición inicial utiliza isoterma en el suelo. Además, plantea un flujo de radiación neta constante desde la hora de la puesta del sol. El modelo propuesto, en cambio, es corrido 2 horas después de la puesta del sol cuando la irradiación puede ser considerada constante.
- El modelo de Gröen tiene similares consideraciones que el de Brünt, pero con la condición que el flujo de radiación neta varía con la temperatura de superficie. Esta situación se presenta solamente en las primeras horas del atardecer.
- El modelo de Gröen modificado, utiliza como condición inicial un gradiente vertical de temperatura del suelo, lo cual mejora los resultados del modelo anterior. Esta condición, también es

considerada en el modelo propuesto.

- El modelo de Jaeger (1), tiene condiciones semejantes al modelo de Brünt, pero incorpora el flujo de calor sensible desde el aire hacia la superficie terrestre, utilizando un coeficiente turbulento de difusividad térmica constante. Las condiciones iniciales son isotérmicas en el aire y en el suelo.
- El modelo de Jaeger (2), propone un coeficiente turbulento de difusividad térmica variable con la altura obtenido a partir de la cortante de viento. El modelo propuesto utiliza un coeficiente turbulento de difusividad térmica que varía potencialmente con la altura y es función de la estabilidad de la atmósfera.
- En el modelo de Reuter, el planteo es similar al modelo de Jaeger (1), pero las condiciones iniciales son: un gradiente vertical de temperatura en el aire y en el suelo. Este modelo no mejora los resultados obtenidos por Jaeger (1).
- El modelo de Anfossi, considera solamente el enfriamiento de la atmósfera cuyo límite superior es la altura de la inversión, utilizando un coeficiente de difusividad térmica en el aire constante. Las estimaciones son comparadas con la temperatura a la altura del abrigo meteorológico, y utiliza el flujo de calor del suelo como una aproximación al flujo de calor en superficie. Las aproximaciones constituyen un aspecto débil de este modelo.

*De la comparación entre los valores estimados por los modelos y los observados se encuentra:*

- El modelo de Brünt, subestima significativamente los valores observados.
- El modelo de Gröen (1), tiende también a una subestimación, pero en menor medida que el de Brünt.
- El modelo de Gröen modificado, sobrestima los valores observados, con errores menores comparativamente con el modelo de Brünt y el de Gröen (1).
- El modelo de Jaeger (1) subestima, en menor medida, los valores observados al ser comparando con los modelos anteriores.
- En tanto el modelo de Jaeger (2) no mejora los resultados.
- El modelo de Reuter, sobrestima significativamente y los errores son mayores que en los otros modelos.
- Los resultados del modelo de Anfossi son aceptables, particularmente para los datos del experimento Wangara.
- De la comparación entre los valores estimados por el modelo propuesto y los observados se obtienen los mejores resultados.
- El modelo propuesto calcula en forma satisfactoria la tempe-

ratura mínima observada.

- La comparación entre los valores observados de temperatura después de ocurrido el valor mínimo y los calculados por el modelo propuesto resulta satisfactoria.

*De la sensibilidad del modelo se determinó lo siguiente:*

- El mayor error relativo de la caída de la temperatura calculada es debido al error relativo de la radiación neta y al coeficiente de conductividad térmica del suelo.

- Un error relativo pequeño en la radiación neta (o valores altos de radiación neta) podría producir un error relativo pequeño en la caída de temperatura. Esto se debe a que está multiplicado por un factor menor o igual a uno.

- Según el análisis realizado, el error relativo de la caída de la temperatura debido al coeficiente turbulento de conductividad en el aire tiene menor peso que los mencionados anteriormente.

- La influencia del error de los restantes parámetros involucrados sobre el error de la disminución de la temperatura son menores a los ya mencionados.

- La excepción está dada respecto a la influencia del error de  $m$  sobre el error de la caída de temperatura que podrá tener valores grandes si  $m$  es igual a 1 y está asociado con un coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire elevado. Pero esta situación no parecería acompañar al enfriamiento radiativo.

Las condiciones en las cuales se obtienen los mejores resultados del modelo, a partir de los experimentos utilizados, puede establecerse que son: velocidades de viento menores que 4 m/s a 8 m. de altura con nubosidad alta o sin nubosidad.

La condición más restrictiva del modelo es la exigencia respecto a  $m$  (es el exponente de la variación vertical del coeficiente turbulento de difusividad térmica en el aire) que debe ser  $< 1$ . Desde un punto de vista matemático esta condición es necesaria para obtener la solución analítica hallada. Desde un punto de vista físico  $m > 1$ , implicaría un rápido incremento de la turbulencia con la altura, que generalmente no es frecuente en condiciones nocturnas.



# APENDICE 1

## LA TRANSFORMADA DE LAPLACE

### 1. INTRODUCCION

El método de la Transformada de Laplace se adapta a la resolución de problemas de conducción de calor. Una ventaja del método es que a una mayor complejidad del problema es más fácilmente resuelto con éste que con otros procedimientos.

Este método fue desarrollado por Heaviside a fines del siglo pasado quien lo aplicó a la resolución de un sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias con coeficientes constantes, que aparece en la teoría de circuitos eléctricos. Luego, se extendió a la resolución de ecuaciones diferenciales con derivadas parciales aplicadas al electromagnetismo y a la conducción de calor. Una teoría matemática más rigurosa fue desarrollada por Bromwich (1916). Carslaw y Jaeger (1948) presentan una amplia discusión de este tema.

En los últimos años, la Transformada de Laplace se ha convertido en una herramienta importante utilizada por ingenieros, físicos y otros científicos. Esto se debe a que este método provee un fácil y efectivo medio de solución de muchos problemas.

### 2. PROPIEDADES FUNDAMENTALES

En este resumen, será analizado el caso concerniente a la temperatura ( $T$ ) de un sólido la cual es una función del tiempo ( $t$ ) y de las coordenadas espaciales,  $x, y, z$  (aquí solamente de  $z$ ).

Se define la Transformada de Laplace de la función  $T(z, t)$  denotada por el operador  $\mathcal{L}[T(z, t)]$  como (ver Spiegel, 1965):

$$\mathcal{L}[T(z, t)] = \int_0^{\infty} T(z, t) \exp(-pt) dt = \theta(z, p) \quad (a_1-1)$$

donde  $p$  es un número cuya parte real es positiva y suficientemente grande para hacer que la integral (a1-1) converja.  $\theta(z,p)$  es la función Transformada de la Laplace de  $T(z,t)$  en la variable  $t$ . La integral (a1-1) es una función de  $p$  y de la variable espacial  $z$ .

Se presentarán brevemente algunas propiedades, las que serán necesarias para la resolución de las ecuaciones (ver Spiegel, 1965).

- Propiedad de linealidad:

$$\mathcal{L}[c_1 T_1 + c_2 T_2] = c_1 \mathcal{L}[T_1] + c_2 \mathcal{L}[T_2] \quad (a1-2)$$

siendo  $T_1$  y  $T_2$  dos funciones continuas, y  $c_1$  y  $c_2$  dos constantes diferentes.

- Primera propiedad de traslación:

$$\mathcal{L}[\exp(a \cdot t) \cdot T(z, t)] = \theta(z, p - a) \quad (a1-3)$$

- Segunda propiedad de traslación, donde  $G(z,t)$  es tal que:

$$G(z, t) = \begin{cases} T(z, t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \rightarrow$$

$$\mathcal{L}[G(z, t)] = \exp(-a \cdot p) \theta(z, p) \quad (a1-4)$$

- Transformada de Laplace de la derivada con respecto al tiempo:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial T(z, t)}{\partial t}\right] = p \theta(z, p) - T(z, 0) \quad (a1-5)$$

- Transformada de Laplace de la derivada  $n$ -enésima de  $T$  con respecto a la coordenada espacial  $z$ :

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^n T}{\partial z^n}\right] = \frac{\partial^n \theta}{\partial z^n} \quad (a1-6)$$

- Teorema de convolución: si existen

$$\mathcal{L}[T_1(z, t)] = \theta_1(z, p)$$

$$\mathcal{L}[T_2(z, t)] = \theta_2(z, p)$$

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t T_1(z, u) T_2(z, t-u) du\right] = \theta_1(z, p) \theta_2(z, p) \quad (a1-7)$$

### 3. LA TRANSFORMADA INVERSA DE LAPLACE

El teorema de Inversión para la Transformada de Laplace es:

$$T(z, t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma-i\infty}^{\gamma+i\infty} \exp(\lambda t) \theta(z, \lambda) d\lambda$$

donde  $\gamma$  es tan grande que todas las singularidades de  $\theta(z, \lambda)$  están a la izquierda de la línea  $(\gamma-i\infty, \gamma+i\infty)$ .

El método más directo es buscar  $\theta$  en tablas de Transformada Inversa tal que:

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta(z, p)] = T(z, t)$$

entonces  $T(z, t)$  se denomina Transformada Inversa de Laplace de  $\theta(z, p)$ .

Se presentarán brevemente algunas propiedades (Spiegel, 1965)

- Propiedad de linealidad

$$\mathcal{L}^{-1}[c_1 \theta_1 + c_2 \theta_2] = c_1 \mathcal{L}^{-1}[\theta_1] + c_2 \mathcal{L}^{-1}[\theta_2] \quad (a1-8)$$

siendo  $\theta_1$  y  $\theta_2$  dos funciones Transformadas, y  $c_1$  y  $c_2$  dos constantes diferentes.

- Primera propiedad de traslación. Si  $\mathcal{L}^{-1}[\theta(z, p)] = T(z, t)$

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta(z, p-a)] = \exp(at) T(z, t) \quad (a1-9)$$

- Segunda propiedad de traslación. Si  $\mathcal{L}^{-1}[\theta(z, p)] = T(z, t)$

$$\mathcal{L}^{-1}[\exp(-a \cdot p) \theta(z, p)] = \begin{cases} T(z, t-a) & t > a \\ 0 & t < a \end{cases} \quad (a1-10)$$



- Transformada Inversa de Laplace de la derivada. si  $\mathcal{L}^{-1}[\theta(z, p)] = T(z, t)$  entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{d^n}{dp^n}\theta(z, p)\right] = (-1)^n t^n T(z, t) \quad (a1-11)$$

- Si  $\mathcal{L}^{-1}[\theta(z, p)] = T(z, t)$  y  $T(z, 0) \neq 0$ , entonces:

$$\mathcal{L}^{-1}[p\theta(z, p) - T(z, 0)] = \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \quad (a1-12)$$

- Teorema de convolución: si existen

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta_1(z, p)] = T_1(z, t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta_2(z, p)] = T_2(z, t)$$

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta_1(z, p)\theta_2(z, p)] = \int_0^t T_1(z, u)T_2(z, t-u)du \quad (a1-13)$$

#### 4. ALGUNAS TRANSFORMADAS INVERSAS DE LAPLACE

Se mencionarán las Transformadas Inversas utilizadas en este trabajo presentadas en Carslaw y Jaeger (1959), Abrabramowitz y Stegun (1964), Spiegel (1965).

Las variables  $x$  y  $p$  son siempre reales y positivas. La constante  $k$  es real y positiva en tanto que la constante  $h$  no tiene restricciones.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right] = 1 \quad (a1-14)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^{r+1}}\right] = \frac{t^r}{\Gamma(r+1)} \quad r > -1 \quad (a1-15)$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma.

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-qx)}{p}\right] = \operatorname{erfc}\left[\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right] \quad (a1-16)$$

donde  $q = \sqrt{\frac{p}{k}}$  y  $\text{erfc}$  es el complemento de la función error.

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\exp(-qx)}{p^{\frac{1}{2}}} \right] = \sqrt{\frac{4t}{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4kt}\right\} - \frac{x}{\sqrt{k}} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \quad (\text{a1-17})$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\exp(-qx)}{pq} \right] = \sqrt{\frac{4kt}{\pi}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4kt}\right\} - x \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) \quad (\text{a1-18})$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\exp(-qx)}{p(q+h)} \right] = \frac{1}{h} \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}}\right) - \frac{1}{h} \exp(hx + kth^2) \text{erfc}\left(\frac{x}{\sqrt{4kt}} + h\sqrt{kt}\right) \quad (\text{a1-19})$$

$$\mathcal{L}^{-1} [\exp(-qx)] = \frac{x}{\sqrt{4\pi kt^3}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4kt}\right\} \quad (\text{a1-20})$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ p^{\frac{\nu}{2}} K_{\nu}(x\sqrt{p}) \right] = \frac{x^{\nu}}{(2t)^{\nu+1}} \exp\left\{-\frac{x^2}{4t}\right\} \quad (\text{a1-21})$$

donde  $K_{\nu}(x\sqrt{p})$  es la función modificada de Bessel, de orden  $\nu$  y argumento  $x\sqrt{p}$

## APENDICE 2

### RESOLUCION DE LA ECUACION DE DIFUSION DE CALOR

#### 1. SOLIDOS HOMOGENEOS

Es posible obtener la solución de la ecuación de difusión de calor por el método de la Transformada de Laplace de la siguiente manera.

Se supone que se necesita resolver la siguiente ecuación siendo  $K$  una constante, en una región finita.

$$\frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} - \frac{1}{K} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = 0, \quad ; a < z < b \quad (a_2-1)$$

con  $T(z, 0) = T_0(z)$  ,  $t = 0$  para  $a < z < b$

Con las siguientes condiciones límites:

$$T(z, t) = T_1(a, t) \quad , z = a \quad t > 0$$

$$T(z, t) = T_2(b, t) \quad , z = b \quad t > 0$$

Multiplicando (a<sub>2</sub>-1) por  $\exp(-pt)$  e integrando con respecto al tiempo desde 0 a  $\infty$ , resulta:

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \exp(-pt) dt - \frac{1}{K} \int_0^{\infty} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \exp(-pt) dt = 0$$

por definición (ver (a<sub>1</sub>-1)) resulta:

$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right] - \frac{1}{K} \mathcal{L}\left[\frac{\partial T}{\partial t}\right] = 0$$

Utilizando las propiedades (a<sub>1</sub>-5) y (a<sub>1</sub>-6) resulta:

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - \frac{p}{K} \theta = -\frac{T_0(z)}{K}, \quad a < z < b \quad (a_2-2)$$

La Transformada de Laplace así reduce la ecuación diferencial parcial (a<sub>2</sub>-1) a una ecuación diferencial ordinaria (a<sub>2</sub>-2). Esta ecuación para  $\theta$  derivada de esta manera es referida como una "ecuación auxiliar".

Las condiciones límites aplicando la Transformada de Laplace resultan:

$$\theta - \theta_1 \quad z - a$$

$$\theta - \theta_2 \quad z - b$$

Se pueden plantear ecuaciones diferenciales y condiciones límites más generales.

Supongamos que la "ecuación auxiliar" ha sido resuelta con las correspondientes condiciones límites, así  $\theta$  es conocida como una función de  $p$  (y las variables espaciales), entonces es necesario encontrar  $T$  como una función del tiempo ( $t$ ) desde  $\theta$ , y así se tendrá la solución del problema original (ecuación (a2-1)).

El método más simple es encontrar  $\theta$  en tablas de Transformada Inversa tal que (ver Apéndice 1):

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta(z, p)] = T(z, t)$$

En el caso de una región semi-infinita,  $z > 0$ , la ecuación auxiliar es:

$$\frac{d^2 \theta}{dz^2} - q^2 \theta = -\frac{T_0(z)}{K}, \quad z > 0 \quad (a2-3)$$

donde  $T_0(z)$  es la temperatura inicial y se escribirá por simplicidad  $q^2 = p/K$ .

Si  $T_0(z)$  es una constante la solución es trivial, si  $T_0(z)$  es una función simple de  $z$ , la solución es encontrada fácilmente. Si  $T_0(z)$  es una función arbitraria debe ser resuelta por el método de Variación de Parámetros. En todos los casos,  $T$  y  $\theta$  están acotadas cuando  $z \rightarrow \infty$ , tal que de las dos soluciones  $B \exp(qz)$  y  $A \exp(-qz)$  se deberá usar solamente  $A \exp(-qz)$  (Carslaw y Jaeger, 1959).

## 2. SÓLIDOS NO HOMOGÉNEOS: ECUACION DE BESSEL

Si las propiedades térmicas de un medio varían con la posición, la ecuación de conducción de calor a resolver es:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[ K(z) \frac{\partial T}{\partial z} \right] = \frac{\partial T}{\partial t}$$

K en este ejemplo es función de z solamente.

Por lo tanto, la correspondiente "ecuación auxiliar" es:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{1}{K(z)} \frac{dK(z)}{dz} \cdot \frac{d\theta}{dz} - \frac{p}{K(z)} \cdot \theta = 0 \quad (a2-4)$$

Esta expresión puede llevarse a un aspecto más general que es la Ecuación de Bessel, cuya forma es (Carslaw y Jaeger, 1959):

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{2\alpha - 2\beta\nu + 1}{z} \cdot \frac{d\theta}{dz} + \frac{\beta^2\gamma^2 z^{2\beta} + \alpha(\alpha - 2\beta\nu)}{z^2} \cdot \theta = 0$$

donde  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\nu$  y  $\gamma$  son constantes. Es una ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes variables, cuya solución es:

$$z^{(\beta\nu - \alpha)} \cdot C_\nu(\gamma z^\beta)$$

donde  $C_\nu$  es la función cilíndrica (Abramowitz y Stegun, 1965)

que esta definida por:

$$C_\nu(x) = A \cdot J_\nu(x) + B \cdot Y_\nu(x)$$

donde A y B son dos constantes,  $J_\nu$  y  $Y_\nu$  son las funciones de Bessel de primera y segunda clase, respectivamente.

## 2.1. Caso particular

El caso que es de interés en este trabajo es cuando  $K(z) = K_0 z^n$  ( $K_0$  es una constante). Por lo tanto la "ecuación auxiliar" (a2-4) es:

$$\frac{d^2\theta}{dz^2} + \frac{n}{z} \cdot \frac{d\theta}{dz} - \frac{p}{K_0} \cdot \frac{\theta}{z^n} = 0 \quad (a2-5)$$

Las soluciones de esta ecuación son (Carslaw y Jaeger, 1959):

$$\theta(z, p) = A z^{\frac{1}{2}(1-n)} \cdot I_{\nu} \left( \frac{2qz^{1-\frac{1}{2}n}}{2-n} \right) + B z^{\frac{1}{2}(1-n)} \cdot K_{\nu} \left( \frac{2qz^{1-\frac{1}{2}n}}{2-n} \right) \quad (a2-6)$$

$$\text{con } q = \sqrt{\frac{p}{K_0}} \quad \nu = \frac{1-n}{2-n}$$

donde  $I_{\nu}$  y  $K_{\nu}$  son las funciones modificadas de Bessel de primera y segunda clase (ver Abramowitz y Stegun, 1965).

La solución de (a2-5) para  $0 < n < 1$ , en un medio semi-infinito donde la solución debe ser acotada es:

$$\theta(z, p) = B \cdot z^{\frac{1}{2}(1-n)} \cdot K_{\nu} \left( \frac{2qz^{1-\frac{1}{2}n}}{2-n} \right) \quad (a2-7)$$

pues  $I_{\nu} \rightarrow \infty$  para  $z \rightarrow \infty$ , entonces  $A = 0$  y  $B$  es una constante diferente de cero (ver Carslaw y Jaeger, 1959; Luikov, 1968).

Para  $n > 1$  la solución (a2-6) es discontinua en  $z \rightarrow 0$ .

### 3. PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES MODIFICADAS DE BESSEL

Se presentarán las propiedades que serán utilizadas en este trabajo. Abramowitz y Stegun (1964) incluyen otras propiedades de las funciones modificadas de Bessel.

$$K_{\nu}(x) = \frac{\pi}{2} \frac{I_{-\nu}(x) - I_{\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} \quad (a2-8)$$

$$I_{\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}x\right)^{\nu+2k}}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \quad (a2-9)$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma.

$$K_{\nu}(x) \sim \frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}x\right)^{\nu} \quad \text{cuando } x \rightarrow 0 \quad (\nu > 0) \quad (a2-10)$$

$$\frac{dK_{\nu}(x)}{dx} = -\frac{\nu}{x} K_{\nu}(x) - K_{(\nu-1)}(x) \quad (a2-11)$$

$$K_{(\nu-1)}(x) = K_{(1-\nu)}(x) \quad (a2-12)$$

$$I_\nu(x) = \left(\frac{1}{2}x\right)^\nu \frac{1}{\Gamma(\nu+1)} \quad \text{cuando } x \rightarrow 0 \quad (\nu = -1, -2, -3, \dots)$$

(a2-13)

$$\frac{dI_\nu(x)}{dx} = -\frac{\nu}{x} I_\nu(x) + I_{(\nu-1)}(x) \quad \text{(a2-14)}$$

- Expansión asintótica (ver Abramowitz y Stegun, 1965) cuando  $\nu$  es fijo y  $x$  es grande y  $\mu = 4\nu^2$

$$K_\nu(x) = \exp(-x) \sqrt{\frac{\pi}{2x}} \left[ 1 + \frac{\mu-1}{8x} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2(8x)^2} + \dots \right]$$

(a2-15)

$$I_\nu(x) = \frac{\exp(x)}{\sqrt{2\pi x}} \left[ 1 - \frac{\mu-1}{8x} + \frac{(\mu-1)(\mu-9)}{2(8x)^2} - \dots \right]$$

(a2-16)

#### 4. LA FUNCION DE WHITTAKER

La función de Whittaker para valores de  $b$  reales y mayores que cero, está definida por (ver Spain y Smith, 1970):

$$W_{(\nu, \mu)}(b) = \frac{\exp(-\frac{b}{2}) b^{-\nu}}{\Gamma(\frac{1}{2} - \nu + \mu)} \int_0^\infty \exp(-y) y^{-\nu - \frac{1}{2}} \left(\frac{y}{b} + 1\right)^{(\nu - \mu - \frac{1}{2})} dy$$

(a2-17)

es regular en todo plano  $b$  que corta a lo largo del eje real negativo. La expresión  $W_{(\nu, \mu)}(b)$  es solución de la ecuación diferencial siguiente:

$$u''(b) + \left[ \frac{1}{4} - \frac{1}{b} - \frac{1-4\mu^2}{4b^2} \right] u(b) = 0 \quad \text{(a2-18)}$$

y la otra solución independiente de (a2-18) es  $W_{(-1, \mu)}(-b)$ .

La expresión (a2-17) tiende exponencialmente a cero cuando  $b \rightarrow \infty$ .

## ANEXO I

### MODELO DE BRUNT (1941)

Utilizando el método de la Transformada de Laplace, según lo descrito en el Apéndice 2, se obtendrá la solución de la ecuación de difusión de calor en el suelo (expresión (IV.2)):

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} - \chi_s \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}$$

Con la condición inicial ecuación (IV.3):

$$T(z, 0) = T_0 - \text{cte}$$

Con las condiciones límites ecuación (IV.5):

$$F_n + \kappa_s \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = 0 \quad z=0 \quad t > 0$$

y la ecuación (IV.6):

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = 0 \quad z \rightarrow \infty \quad t \geq 0$$

1er. PASO: Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación (IV.2):

$$\int_0^{\infty} \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \exp(-pt) dt - \chi_s \int_0^{\infty} \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \exp(-pt) dt$$

resulta:

$$\mathfrak{L} \left[ \frac{\partial T(z, t)}{\partial t} \right] - \chi_s \mathfrak{L} \left[ \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2} \right]$$

Por la propiedad (a1-5) y la condición inicial  $T(z, 0) = T_0$  (ecuación (IV.3)) el primer miembro de la expresión resulta:



$$\mathcal{L}\left[\frac{\partial T(z,t)}{\partial t}\right] - p\theta(z,p) - T_0$$

Aplicando la propiedad (a1-6) al segundo miembro de la expresión y definiendo  $\theta''(z,p) = \frac{\partial^2 \theta(z,p)}{\partial z^2}$ , la Transformada de (IV.2) es:

$$p\theta(z,p) - T_0 = \chi_s \theta''(z,p)$$

reordenando términos queda:

$$\theta''(z,p) - \frac{p}{\chi_s} \theta(z,p) = -\frac{T_0}{\chi_s} \quad (A1-1)$$

**2do. PASO:** Resolución de la ecuación diferencial (A1-1):

a) La ecuación homogénea de (A1-1) es:

$$\theta''(z,p) - \frac{p}{\chi_s} \theta(z,p) = 0 \quad ; z < 0, \quad p > 0$$

cuya solución es del tipo exponencial:  $\theta_h(z,p) = \exp(rz)$

Aplicando ésta a la ecuación homogénea resulta:

$$r^2 \exp(rz) - \frac{p}{\chi_s} \exp(rz) = 0 \quad \Rightarrow \quad r = \pm \sqrt{\frac{p}{\chi_s}}$$

con  $q_s = \sqrt{\frac{p}{\chi_s}}$

Por lo tanto:

$$\theta_h(z,p) = A \exp(+q_s z) + B \exp(-q_s z)$$

donde A y B son dos constantes cuyas formas deben ser determinadas.

b) Obtención de la solución particular. Para ello se propone una solución constante,  $\theta_p(z, p) = a = \text{constante}$ , que aplicada a la expresión (A1-1) se obtiene:

$$-\frac{p}{\chi_s} a - \frac{T_o}{\chi_s} \Rightarrow a = -\frac{T_o}{p}$$

c) La solución general de (A1-1) es (homogénea más particular):

$$\theta(z, p) = A \exp(q_s z) + B \exp(-q_s z) + \frac{T_o}{p} ; \quad z < 0, \quad p > 0 \quad (A1-2)$$

3<sup>er</sup>- PASO: Determinación de las constantes incluidas en (A1-2).

Aplicando la Transformada de Laplace a la condición (IV.6) resulta:

$$\frac{\partial \theta(z, p)}{\partial z} = 0 \quad z \rightarrow -\infty \quad p \geq 0 \quad (A1-3)$$

La derivada de la expresión (A1-2) respecto de z, es:

$$\frac{\partial \theta(z, p)}{\partial z} = A q_s \exp(q_s z) - B q_s \exp(-q_s z)$$

Cuando  $z \rightarrow -\infty$ , debe cumplir la condición (A1-3) para lo cual  $B = 0$ . Entonces, la solución general de (A1-1) es:

$$\theta(z, p) = A \exp(+q_s z) + \frac{T_o}{p} \quad z < 0 \quad (A1-4)$$

con  $q_s = \sqrt{\frac{p}{\chi_s}}$

4<sup>er</sup>- PASO: Determinación de la constante A incluida en (A1-4).

Se aplica la Transformada de Laplace a la condición límite, ecuación (IV.5):

$$\int_0^{\infty} F_n \exp(-pt) dt + \kappa_s \frac{\partial}{\partial z} \left( \int_0^{\infty} T(z, t) \exp(-pt) dt \right) = 0$$

Se resuelven las integrales. En el segundo término, la integral es la Transformada de Laplace de  $T(z,t)$ . Luego, resulta:

$$-\frac{F_n \exp(-pt)}{p} \Big|_0^{\infty} + \kappa_s \theta'(z,p) = 0$$

finalmente se aplican los límites, y ordenando términos resulta:

$$\frac{F_n}{p} = -\kappa_s \theta'(z,p)$$

La función  $\theta'(z,p)$  se obtiene derivando la expresión (A1-4) respecto de  $z$  y luego reemplazando, queda:

$$\frac{F_n}{p} = -\kappa_s [A q_s \exp(q_s z)]$$

cuando  $z \rightarrow 0$  (la expresión (IV.5) es para  $z=0$ ) queda:

$$\frac{F_n}{p} = -\kappa_s A \sqrt{\frac{p}{\chi_s}}$$

Despejando la constante  $A$  resulta:

$$A = -\frac{F_n}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{p^{\frac{1}{2}}}$$

El valor de la constante  $A$  es reemplazado en la expresión (A1-4) resultando:

$$\theta(z,p) = -\frac{F_n}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\exp(q_s z)}{p^{\frac{1}{2}}} + \frac{T_0}{p} \quad z < 0 \quad (A1-5)$$

Esta expresión es la solución de la ecuación diferencial (A1-1).

5to. PASO: Aplicación de la Transformada Inversa de Laplace a la expresión (A1-5).

La Transformada Inversa de Laplace es una función tal que (definida sólo para  $z$  real y positivo) (ver Apéndice 1) es:

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta(z,p)] = T(z,t)$$

que se puede obtener mediante tablas (Spiegel, 1965).

La expresión (A1-5) se redefine para  $z > 0$  y se escribe  $p^{\frac{3}{2}} - p \cdot p^{\frac{1}{2}}$  resulta ( $q_s$  fue definido en (A1-4)):

$$\theta(z, p) = -\frac{F_n}{\kappa_s} \cdot \frac{\exp(-q_s z)}{p q_s} + \frac{T_o}{p}$$

Aplicando la Transformada Inversa de Laplace a esta última:

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta(z, p)] = -\frac{F_n}{\kappa_s} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-q_s z)}{p q_s}\right] + T_o \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p}\right]$$

De la Tabla de la Transformada Inversa (ver (a1-14) y (a1-18)) (Carslaw y Jaeger, 1959), resulta:

$$T(z, t) = -\frac{F_n}{\kappa_s} \left[ 2 \sqrt{\frac{\lambda_s t}{\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{z^2}{4\lambda_s t}\right) - z \cdot \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{\sqrt{4\lambda_s t}}\right) \right] + T_o \quad (\text{A1-6})$$

siendo  $\operatorname{erfc}$  el complemento de la función error. La (A1-6) es la ecuación (IV.7).

Cuando  $z = 0$

$$T(0, t) = -\frac{2F_n}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} + T_o \quad (\text{A1-7})$$

que es la ecuación (IV.8).

## ANEXO I I

### MODELO DE GRÖEN (1947)

Se resuelve la ecuación de difusión de calor en el suelo (IV.2), pero con la modificación en la ecuación de balance de calor en superficie (condición límite) planteada por Gröen (1947) expresada por (ecuación (IV.10)):

$$F_{no} + f(T(z, t) - T_o) + \kappa_s \frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = 0 \quad z=0 \quad t>0$$

Los pasos 1<sup>er.</sup>, 2<sup>do.</sup> y 3<sup>ro.</sup> del Anexo I se aplican similarmente, ya que no se modificaron otras condiciones en el modelo. Para los otros pasos resulta lo siguiente:

**4<sup>er.</sup> PASO:** Determinación de la constante A de la expresión (A1-4)

Aplicando la Transformada de Laplace a la condición (IV.10),

$$\int_0^{\infty} F_{no} \exp(-pt) dt + f \int_0^{\infty} T(z, t) \exp(-pt) dt - f \int_0^{\infty} T_o \exp(-pt) dt + \kappa_s \frac{\partial}{\partial z} \left[ \int_0^{\infty} T(z, t) \exp(-pt) dt \right] = 0$$

se desarrollan las integrales resultando (ver Apéndice 1):

$$\frac{F_{no}}{p} + f \cdot \theta(z, p) - \frac{f T_o}{p} + \kappa_s \theta'(z, p) = 0 \quad (A2-1)$$

reemplazando la expresión de  $\theta(z, t)$  (ecuación (A1-4)) y su derivada en (A2-1) se obtiene:

$$\frac{F_{no}}{p} + f \cdot \left( A \exp(q_s z) + \frac{T_o}{p} \right) - \frac{f T_o}{p} + \kappa_s A q_s \exp(q_s z) = 0$$

cuando  $z \rightarrow 0$ , y despejando el valor de A queda:

$$A = - \frac{F_{no}}{p \left( q_s + \frac{f}{\kappa_s} \right) \cdot \kappa_s}$$

donde:  $q_s = \sqrt{\frac{p}{\lambda_s}}$  .

Reemplazando el valor de A en (A1-4) queda:

$$\theta(z, p) = - \frac{F_{no}}{\kappa_s} \cdot \frac{\exp(q_s z)}{p \left( q_s + \frac{f}{\kappa_s} \right)} + \frac{T_o}{p} \quad z < 0 \quad t > 0$$

(A2-2)

Esta expresión es la solución de (A1-1) con la condición límite (A2-1).

5<sup>to</sup>- PASO: Obtención de T(z,t) aplicando la Transformada Inversa de Laplace a la expresión (A2-2).

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta(z, p)] = - \frac{F_{no}}{\kappa_s} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\exp(-q_s z)}{p \left( q_s + \frac{f}{\kappa_s} \right)} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{T_o}{p} \right] \quad z > 0 \quad t > 0$$

De Tabla (Carslaw y Jaeger, 1959) (ver expresión (a1-19)) se obtiene:

$$T(z, t) = - \frac{F_{no}}{f} \cdot \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{\sqrt{4\lambda_s t}} \right) - \exp(\xi) \operatorname{erfc}(\zeta) \right] + T_o$$

donde:  $\xi = \frac{f \cdot z}{\kappa_s} + \frac{\lambda_s f^2 t}{\kappa_s^2}$        $\zeta = \frac{z}{\sqrt{4\lambda_s t}} + f \cdot \frac{\sqrt{\lambda_s \cdot t}}{\kappa_s}$       y

erfc es el complemento de la función error. Esta expresión es el perfil de temperatura en el suelo, que es similar a la expresión (IV.11) del texto.

Cuando z = 0 resulta:

$$T(0, t) = - \frac{F_{no}}{f} \cdot [1 - \exp(\alpha) \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha})] + T_o$$

donde:  $\alpha = \frac{\lambda_s \cdot t \cdot f^2}{\kappa_s^2}$  . Esta corresponde a la expresión (IV.12)

del texto

## Modificación de la condición inicial según Gröen (1947)

La condición inicial de isoterμία en el suelo (IV.3), puede ser modificada suponiendo un gradiente inicial de temperatura en el suelo (expresión (IV.14)):

$$T(z, 0) = T_0 + \beta \cdot z \quad z < 0 \quad t = 0$$

La condición límite para  $z \rightarrow -\infty$  es la expresión (IV.15):

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial z} = \beta \quad , \quad z \rightarrow -\infty \quad t > 0$$

El 1<sup>er</sup>. Paso del Anexo I se modifica de la siguiente forma:

1<sup>er</sup>. PASO: Aplicación de la Transformada de Laplace a la ecuación (IV.2) resultando (ver Apéndice 2):

$$p\theta(z, p) - T(z, 0) - \chi_s \theta''(z, p)$$

Teniendo en cuenta la condición (IV.14) queda:

$$p\theta(z, p) - T_0 - \beta z - \chi_s \theta''(z, p)$$

ó también:

$$\theta''(z, p) - \frac{p}{\chi_s} \theta(z, p) = -\frac{T_0}{\chi_s} - \frac{\beta}{\chi_s} \cdot z \quad (A2-5)$$

2<sup>do</sup>. PASO: Obtención de la solución de la ecuación diferencial (A2-5):

a) la solución de la ecuación homogénea de (A2-5) (ver Anexo I) es:

$$\theta(z, p) = A \exp(q_s z) + B \exp(-q_s z) \quad z < 0$$

$$\text{donde: } q_s = \sqrt{\frac{p}{\chi_s}}$$

b) para obtener la solución particular de (A2-5) se propone  $\theta(z, p) = az + b$  que aplicada a (A2-5) resulta:

$$a = \frac{\beta}{p}, \quad b = \frac{T_o}{p}$$

Por lo tanto, la solución particular es:

$$\theta_p(z, p) = \frac{T_o}{p} + \frac{\beta}{p} \cdot z \quad z < 0$$

c) la solución general de (A2-5) (homogénea más particular) es:

$$\theta(z, p) = A \cdot \exp(q_s z) + B \cdot \exp(-q_s z) + \frac{T_o}{p} + \frac{\beta}{p} \cdot z \quad z < 0$$

(A2-6)

**3er. PASO:** Determinación de las constantes de (A2-6).

Aplicando la Transformada de Laplace a la condición (IV.15) resulta:

$$\frac{\partial \theta(z, p)}{\partial z} = \frac{\beta}{p} \quad z \rightarrow -\infty \quad p > 0 \quad (A2-7)$$

Derivando la expresión (A2-6) respecto de z, queda:

$$\frac{\partial \theta(z, p)}{\partial z} = A q_s \exp(q_s z) - B q_s \exp(-q_s z) + \frac{\beta}{p}$$

Cuando  $z \rightarrow -\infty$ , y debiendo cumplir con la condición (A2-7) debe ser  $B = 0$ . Por lo tanto, (A2-6) queda:

$$\theta(z, p) = A \cdot \exp(q_s z) + \frac{T_o}{p} + \frac{\beta}{p} \cdot z \quad z < 0 \quad p > 0$$

(A2-8)

Esta es la solución general de (A2-5).

**4er. PASO:** Determinación de la constante A de la expresión (A2-8)

Derivando la expresión (A2-8) respecto de z y reemplazando en la condición límite (A2-1), se obtiene:

$$\frac{F_{20}}{p} + f \cdot \left[ A \cdot \exp(q_s z) + \frac{T_o}{p} + \frac{\beta}{p} \cdot z \right] - \frac{f \cdot T_o}{p} + \kappa_s \cdot \left[ A \cdot q_s \exp(q_s z) + \frac{\beta}{p} \right] = 0$$



cuando  $z \rightarrow 0$ , resulta:

$$\frac{F_{n0}}{p} + f A + \kappa_s q_s A + \frac{\kappa_s \beta}{p} = 0$$

Despejando el valor de A se obtiene:

$$A = - \frac{F_{n0} + \kappa_s \beta}{p \left( q_s + \frac{f}{\kappa_s} \right) \cdot \kappa_s}$$

Reemplazando este valor de A en la expresión (A2-8), resulta:

$$\theta(z, p) = - \frac{(F_{n0} + \kappa_s \beta) \cdot \exp(-q_s z)}{\kappa_s p \left( q_s + \frac{f}{\kappa_s} \right)} + \frac{T_0}{p} - \frac{\beta}{p} z \quad (A2-9)$$

donde:  $q_s = \sqrt{\frac{p}{\lambda_s}}$ , para  $z > 0$ .

5<sup>to</sup> PASO: Obtención de la función  $T(z, t)$  mediante la aplicación de la Transformada Inversa a la ecuación (A2-9).

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta(z, p)] = - \frac{F_{n0} + \kappa_s \beta}{\kappa_s} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\exp(-q_s z)}{p \left( q_s + \frac{f}{\kappa_s} \right)} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{T_0}{p} \right] - \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\beta}{p} z \right]$$

De Tabla se encuentra (ver (a1-14) y (a1-19)) (Carslaw y Jaeger, 1959):

$$T(z, t) = - \frac{F_{n0} + \kappa_s \beta}{\kappa_s} \cdot \left[ \operatorname{erfc} \left( \frac{z}{\sqrt{4\lambda_s t}} \right) + \exp(\xi) \cdot \operatorname{erfc}(\zeta) \right] + T_0 - \beta z$$

donde:  $\xi = \frac{z \cdot f}{\kappa_s} + \frac{\lambda_s t f^2}{\kappa_s^2}$ ,  $\zeta = \frac{z}{\sqrt{4\lambda_s t}} + f \cdot \frac{\sqrt{\lambda_s \cdot t}}{\kappa_s}$  y  $\operatorname{erfc}$  es el

complemento de la función error. Esta ecuación es la (IV.16) mencionada en el texto.

Cuando  $z = 0$  resulta:

$$T(0, t) = \frac{F_{no} + K_s \beta}{f} \cdot [1 - \exp(-\alpha) \cdot \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha})] + T_0$$

donde:  $\alpha = \frac{\lambda_s t f^2}{K_s^2}$

Esta es la expresión (IV.17) del texto.

## ANEXO III

### MODELO DE JAEGER (1945)

Jaeger (1945) obtiene las soluciones de las ecuaciones de difusión de calor en el aire y en el suelo expresiones (IV.18) y (IV.19):

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial t} - \chi_a \frac{\partial^2 T_a(z, t)}{\partial z^2}$$

$$\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial t} - \chi_s \frac{\partial^2 T_s(z, t)}{\partial z^2}$$

$T_a$  es la temperatura del aire,  $T_s$  es la temperatura del suelo.

La condición inicial es (ecuación (IV.24)):

$$T_a(z, 0) - T_s(z, 0) - T_0 - \text{cte}$$

Las condiciones límites son (ecuación (IV.21)):

$$T_a(0, t) - T_s(0, t) \quad z=0 \quad t > 0$$

y (ecuación (IV.20)):

$$F_a - F_s - F_n = 0 \quad z=0 \quad t > 0$$

A partir de la definición flujo en función del gradiente vertical se tiene:

$$-k_a \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} + k_s \frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} + F_n = 0 \quad z=0 \quad t > 0$$

También, las condiciones límites (ecuación (IV.22)) son:

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} = 0 \quad , \quad z \rightarrow \infty \quad t \geq 0$$

y ecuación (IV.23):

$$\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} = 0 \quad , \quad z \rightarrow -\infty \quad t \geq 0$$

1<sup>er</sup>. PASO: Aplicación de la Transformada de Laplace a las expresiones (IV.18) y (IV.19).

Siguiendo la metodología presentada en el Anexo I, correspondientes a los pasos 1<sup>er</sup>., 2<sup>do</sup>. y 3<sup>er</sup>. se obtiene lo siguiente:

$$\theta_a(z, p) = A \cdot \exp(-q_a z) + \frac{T_o}{p} \quad z > 0, p > 0 \quad (A3-1)$$

$$\theta_s(z, p) = B \cdot \exp(q_s z) + \frac{T_o}{p} \quad z < 0, p > 0 \quad (A3-2)$$

donde:  $q_a = \sqrt{\frac{p}{\chi_a}}$        $q_s = \sqrt{\frac{p}{\chi_s}}$

2<sup>do</sup>. PASO: Determinación de las constantes A y B. Para ello se utilizan las condiciones iniciales y límites propuestas:

a) Se aplica la Transformada de Laplace a la ecuación (IV.21):

$$\int_0^{\infty} T_a(0, t) \exp(-pt) dt = \int_0^{\infty} T_s(0, t) \exp(-pt) dt$$

De (A1-1) resulta:

$$\theta_a(0, p) = \theta_s(0, p)$$

Igualando (A3-1) y (A3-2) en  $z = 0$  se obtiene:

$$A = B \quad (A3-3)$$

b) Aplicando la Transformada de Laplace a la condición de balance en superficie (ecuación (IV.20)), resulta:

$$-\kappa_a \theta'_a(z, p) + \kappa_s \theta'_s(z, p) + \frac{F_n}{p} = 0 \quad (A3-4)$$

Se obtienen las derivadas de las expresiones (A3-1) y (A3-2) respecto de  $z$  y luego, se las reemplaza en (A3-4) resultando:

$$A \cdot \kappa_a q_a \exp(-q_a z) + B \cdot \kappa_s q_s \exp(q_s z) + \frac{F_n}{p} = 0 \quad (A3-5)$$

Utilizando (A3-3) y aplicando a la expresión (A3-5) el límite para  $z \rightarrow 0$ , luego despejando B, resulta:

$$B = \frac{F_n}{p \cdot (\kappa_a q_a + \kappa_s q_s)}$$

o también:

$$B = \frac{F_n}{p^{\frac{3}{2}} \cdot \left[ \kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}} \right]} \quad (\text{A3-6})$$

c) Reemplazando el valor de la constante B en (A3-1) y (A3-2) queda:

$$\theta_a(z, p) = \frac{F_n}{(\kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}})} \cdot \frac{\exp(-q_a z) + \frac{T_0}{p}}{p^{\frac{3}{2}}} \quad z > 0 \quad (\text{A3-7})$$

$$\theta_s(z, p) = \frac{F_n}{(\kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}})} \cdot \frac{\exp(q_s z) + \frac{T_0}{p}}{p^{\frac{3}{2}}} \quad z < 0 \quad (\text{A3-8})$$

3er. PASO: Obtención de las funciones  $T_a(z, t)$  y  $T_s(z, t)$  a partir de  $\theta_a(z, p)$  y  $\theta_s(z, p)$ .

Para llevar la expresión (A3-7) a una Transformada conocida se multiplica y divide por  $\lambda_a^{-1/2}$ , entonces  $\theta_a$  es:

$$\theta_a(z, p) = \frac{F_n \lambda_a^{-\frac{1}{2}}}{(\kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}})} \cdot \frac{\exp(-q_a z) + \frac{T_0}{p}}{p q_a} \quad z > 0 \quad (\text{A3-9})$$

Aplicando la Transformada Inversa de Laplace a (A3-9) y de tablas (ver (a1-14) y (a1-18) (Carslaw y Jaeger, 1959), resulta:

$$T_a(z, t) = \frac{-2 \cdot F_n}{(\kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}})} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ \exp(-\alpha) - z \sqrt{\frac{\pi}{4 \lambda_a t}} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}) \right] + T_0$$

donde:  $\alpha = \frac{z^2}{4 \lambda_a t}$ . Esta es la expresión (IV.25) del texto.

En forma similar se procede para (A3-8) obteniéndose:

$$T_s(z, t) = \frac{-2 \cdot F_n}{(\kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}})} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ \exp(-\alpha) - z \sqrt{\frac{\pi}{4 \lambda_s t}} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}) \right] + T_0$$

donde:  $\alpha = \frac{z^2}{4 \lambda_s t}$ , considerando  $z > 0$ . Esta es la expresión

(IV.26) del texto.

Cuando  $z = 0$  resulta:

$$T_s(0, t) = \frac{2 F_n}{(\kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}})} \cdot \sqrt{\frac{t}{\pi}} + T_0$$

Esta es la ecuación (IV.27) del texto.

## ANEXO IV

### MODELO 2 DE JAEGER (1945)

El modelo 2 de Jaeger (1945) plantea una variación potencial del coeficiente turbulento de conductividad térmica (ver ecuación IV.29):

$$\kappa_h = \kappa_a z^{1-m}$$

por lo tanto la ecuación de difusión de calor para el aire es (ecuación IV.31)):

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \kappa_a z^{(1-m)} \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} \right] ; \quad z > 0 \quad t > 0$$

donde  $T_a$  es la temperatura del aire, que se determinará a partir de la aplicación de la metodología presentada en el Apéndice 2.

La ecuación de difusión de calor para el suelo es la siguiente (IV.32):

$$\frac{\partial T(z, t)}{\partial t} = \chi_s \frac{\partial^2 T(z, t)}{\partial z^2}$$

La condición inicial es (expresión IV.35)):

$$T_a(z, 0) = T_s(z, 0) = T_0 = \text{cte} \quad t=0 \quad \forall z$$

Las condiciones límites son, la ecuación de balance de calor (expresión IV.33)):

$$\kappa_s \frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} - \kappa_a z^{(1-m)} \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} + F_n = 0 \quad , \quad z=0 \quad , \quad t > 0$$

y la expresión (IV.34):

$$T_a(0, t) = T_s(0, t) \quad z=0 \quad t \geq 0$$

También, son condiciones límites la ecuación (IV.36):

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} = 0 \quad , \quad z \rightarrow \infty \quad t \geq 0$$

y la ecuación (IV.37):

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} = 0, \quad z \rightarrow \infty, \quad t \geq 0$$

1<sup>er</sup>- PASO: Aplicación de la Transformada de Laplace a la expresión (IV.31).

Desarrollando la ecuación (IV.31) resulta:

$$\chi_a(1-m)z^{-m} \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} + \chi_a z^{(1-m)} \frac{\partial^2 T_a(z, t)}{\partial z^2} - \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial t}$$

luego se aplica la Transformada de Laplace (ver (a1-1)):

$$\chi_a(1-m)z^{-m} \mathcal{L} \left[ \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} \right] + \chi_a z^{(1-m)} \mathcal{L} \left[ \frac{\partial^2 T_a(z, t)}{\partial z^2} \right] - \mathcal{L} \left[ \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial t} \right]$$

Utilizando las propiedades (a1-5) y (a1-6) queda:

$$\chi_a(1-m)z^{-m} \theta'_a(z, p) + \chi_a z^{(1-m)} \theta''_a(z, p) - p \theta_a(z, p) - T_a(z, 0)$$

Aplicando la condición (IV.35) y ordenando términos resulta:

$$\theta''_a(z, p) + \frac{(1-m)}{z} \theta'_a(z, p) - \frac{p}{\chi_a} z^{(m-1)} \theta_a(z, p) - \frac{T_a(z, 0)}{\chi_a} z^{(m-1)} \quad (A4-1)$$

esta es una ecuación de tipo Bessel, con coeficientes variables (ver Apéndice 2).

2<sup>do</sup>- PASO: Resolución de la ecuación diferencial de segundo orden (A4-1) según la metodología presentada en el Apéndice 2.

a) la ecuación homogénea de (A4-1) es:

$$\theta''_a(z, p) + \frac{(1-m)}{z} \theta'_a(z, p) - \frac{p}{\chi_a} z^{(m-1)} \theta_a(z, p) = 0$$

que es una ecuación tipo Bessel, cuya solución es (ver (a2-6)):

$$\theta_a(z, p) = A z^{\frac{m}{2}} K_\nu(Y) + B z^{\frac{m}{2}} I_\nu(Y)$$



donde  $I_\nu(Y)$  y  $K_\nu(Y)$  son funciones modificadas de Bessel de primero y segundo órdenes, A y B son dos constantes. Con:

$$\nu = \frac{m}{1+m} \quad Y = \frac{2 \cdot q_a}{1+m} \cdot z^{\frac{1+m}{2}} \quad q_a = \sqrt{\frac{p}{\lambda_a}}$$

b) se propone la solución particular siguiente,  $\theta_{a,p}(z,p) = a =$  constante, que aplicada a (A4-1) resulta:

$$a = \frac{T_0}{p}$$

c) la solución general de (A4-1) (homogénea más particular) es:

$$\theta_a(z,p) = Az^{\frac{m}{2}} K_\nu(Y) + Bz^{\frac{m}{2}} I_\nu(Y) + \frac{T_0}{p} \quad (A4-2)$$

**3er-PASO:** Determinación de las constantes de (A4-2)

Aplicando la Transformada de Laplace a la condición (IV.36) resulta:

$$\frac{\partial \theta_a(z,p)}{\partial z} = 0 \quad z \rightarrow \infty \quad p > 0 \quad (A4-3)$$

Derivando la expresión (A4-2) respecto a z, resulta:

$$\frac{\partial \theta_a(z,p)}{\partial z} = A \frac{m}{2} z^{\frac{m}{2}-1} K_\nu(Y) + A z^{\frac{m}{2}} \frac{\partial K_\nu(Y)}{\partial Y} + B \frac{m}{2} z^{\frac{m}{2}-1} I_\nu(Y) + B z^{\frac{m}{2}} \frac{\partial I_\nu(Y)}{\partial Y} \quad (A4-4)$$

La derivada de  $K_\nu(Y)$  respecto de z, valiéndose de la propiedad (a2-11) es:

$$\frac{\partial K_\nu(Y)}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial K_\nu(Y)}{\partial Y} = q_a z^{\frac{m-1}{2}} \left[ -\frac{\nu}{Y} \cdot K_\nu(Y) - K_{(\nu-1)}(Y) \right]$$

La derivada de  $I_\nu(Y)$  respecto de z, utilizando la propiedad (a2-14) es:

$$\frac{\partial I_\nu(Y)}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial I_\nu(Y)}{\partial Y} = q_a z^{\frac{m-1}{2}} \left[ -\frac{\nu}{Y} \cdot I_\nu(Y) + I_{(\nu-1)}(Y) \right]$$

Introduciendo estas dos últimas expresiones en (A4-4), y simplificando queda:

$$\frac{\partial \theta_a(z, p)}{\partial z} = -A q_a z^{n-\frac{1}{2}} K_{\nu-1}(Y) + B q_a z^{n-\frac{1}{2}} I_{\nu-1}(Y) \quad (A4-5)$$

Según la expansión asintótica de las funciones modificadas de Bessel de primero y segundo órdenes que están en el Apéndice 2 (ver (a2-16) y (a2-15)), resulta que  $I_{\nu-1}(Y) \rightarrow \infty$  y  $K_{\nu-1}(Y) \rightarrow 0$  cuando  $Y \rightarrow \infty$  (o sea  $z \rightarrow \infty$ ).

Luego, para que se cumpla la condición (A4-3), en la expresión (A4-5) la constante B debe ser cero. Entonces, la solución general (expresión (A4-2)) es:

$$\theta_a(z, p) = A z^{\frac{n}{2}} K_{\nu}(Y) + \frac{T_0}{p} \quad (A4-6)$$

**4er. PASO:** Aplicación de la Transformada de Laplace a la ecuación de difusión de calor para el suelo, expresión (IV.32), procediendo en igual forma que en el Anexo I.

Se busca la solución de la ecuación diferencial:

$$\chi_s \theta_s''(z, p) = p \theta_s(z, p) - T_0$$

cuya solución es de tipo exponencial, igual que (A1-2), resultando

$$\theta_s(z, p) = B \exp(q_s z) + \frac{T_0}{p} \quad z < 0 \quad p > 0 \quad (A4-7)$$

donde:  $q_s = \sqrt{\frac{p}{\chi_s}}$

**5to. PASO:** Determinación de la constante A de la expresión (A4-6) a partir de la condición inicial, ecuación (IV.34).

a) Primero, se aplica la Transformada de Laplace a la condición (IV.34) resultando:

$$\theta_a(0, p) - \theta_s(0, p) \quad (A4-8)$$

b) Luego, se determina a partir de (A4-6),  $\theta_a(z, p)$  cuando en  $z=0$ . Se utiliza la propiedad (A2-7) (siendo que  $m > 0 \Rightarrow \nu > 0$ , y cuando  $z \rightarrow 0 \Rightarrow Y \rightarrow 0$ ) queda:

$$\theta_a(0, p) - A z^{\frac{m}{2}} \left[ \frac{1}{z} \cdot \Gamma(\nu) \cdot \left( \frac{1}{z} Y \right)^{-\nu} \right] + \frac{T_o}{p}$$

Reemplazando en ésta la definiciones de  $Y$  y  $\nu$  dadas en el 2<sup>do</sup> Paso y ordenando términos resulta:

$$\theta_a(0, p) - A \cdot \frac{\Gamma(\nu)}{z} \cdot \left( \frac{1+m}{q_a} \right)^{\nu} + \frac{T_o}{p} \quad (A4-9)$$

Aplicando a la expresión (A4-4) ( $\theta_s(z, p)$ ) cuando  $z = 0$  queda:

$$\theta_s(0, p) - B + \frac{T_o}{p}$$

Igualando ésta y la (A4-9) según condición (A4-8) resulta:

$$A - B \cdot \frac{z}{\Gamma(\nu)} \cdot \left( \frac{1+m}{q_a} \right)^{-\nu} \quad (A4-10)$$

**5<sup>to</sup> PASO:** Determinación de la constante  $B$  de la expresión (A4-7) a partir de la condición inicial, ecuación (IV.33).

a) Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación de balance (expresión (IV.33)) queda:

$$\kappa_s \theta'_s(z, p) - \kappa_a z^{(a-1)} \theta'_a(z, p) + \frac{F_n}{p} - 0 \quad z \rightarrow 0 \quad (A4-11)$$

Por lo tanto, se deberán determinar  $\theta_a'(z, p)$  y  $\theta_s'(z, p)$

b) Para encontrar  $\theta_a'(z, p)$  se deriva (A4-3) respecto de  $z$  de la siguiente manera:

$$\theta'_a(z, p) = A \cdot \frac{m}{z} \cdot z^{\frac{m}{2}-1} \cdot K_\nu(Y) + A \cdot z^{\frac{m}{2}} \cdot \frac{\partial K_\nu(Y)}{\partial z} \quad (A4-12)$$

la derivada de  $K_\nu(Y)$  respecto de  $z$ , teniendo en cuenta la propiedad (a2-11), es:

$$\frac{\partial K_\nu}{\partial z} = \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial K_\nu(Y)}{\partial Y} = q_a z^{\frac{m-1}{2}} \left[ -\frac{\nu}{Y} \cdot K_\nu(Y) - K_{(\nu-1)}(Y) \right]$$

Reemplazando ésta en la (A4-12) y ordenando resulta:

$$\theta'_a(z, p) = -A q_a z^{m-\frac{1}{2}} K_{(\nu-1)}(Y)$$

c) La  $\theta'_a(z, p)$  se obtiene derivando la expresión (A4-4) respecto de  $z$ . Entonces,  $\theta'_a(z, p)$  y  $\theta'_a(z, p)$  son reemplazadas en la expresión (A4-11) resultando:

$$\kappa_s B q_s \exp(q_s z) + \kappa_a A q_a z^{\frac{1}{2}} K_{(\nu-1)}(Y) = -\frac{F_n}{p}$$

Utilizando la propiedad (a2-12) (donde  $(1-\nu) > 0$ ) se puede aplicar (a2-10) cuando  $z \rightarrow 0$ . Reemplazando ésta en la última ecuación resulta:

$$\kappa_s B q_s + \kappa_a A q_a z^{\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{z} \Gamma(1-\nu) \left[ \frac{1}{z} Y \right]^{-(1-\nu)} \right] = -\frac{F_n}{p}$$

Empleando la definición de  $Y$ , y ordenando términos queda:

$$\kappa_s B q_s + \frac{1}{z} \kappa_a A q_a^\nu \Gamma(1-\nu) (1+m)^{1-\nu} = -\frac{F_n}{p}$$

Reemplazando en ésta el valor de  $A$  obtenido en (A4-7) y despejando resulta:

$$B = -\frac{F_n p^{-\frac{3}{2}}}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \cdot \left[ \frac{1}{1-a} \right] \quad (A4-13)$$

donde:

$$a = -\frac{\kappa_a \chi_a^\nu (1+m)^{1-2\nu}}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)} \cdot \Gamma(1-\nu) \cdot p^{\nu-\frac{1}{2}}$$

tal que  $a = -\alpha \cdot p^{\nu-\frac{1}{2}}$

donde

$$\alpha = \frac{\kappa_a \lambda_a^{-\nu} (1+m)^{1-2\nu} \Gamma(1-\nu)}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)}$$

d) Utilizando la definición de serie geométrica:

$$\frac{1}{1-a} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \quad \text{si } |a| \leq 1$$

(La condición  $|a| \leq 1$  es analizada en el Capítulo XII),  
reemplazando en (A4-13) y ordenando términos queda:

$$B = - \frac{F_n}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k p^{-\nu - \frac{3}{2}}$$

donde:  $\varphi = (\frac{1}{2} - \nu) k$

En la expresión de  $\theta_s(z, p)$ , (A4-4), reemplazando el valor de B obtenido pero definido cuando  $z > 0$  (pues no se puede aplicar la Transformada Inversa a valores negativos de  $z$ ), resulta:

$$\theta_s(z, p) = - \frac{F_n}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k p^{-\nu - \frac{3}{2}} \exp(-q_s z) + \frac{T_0}{p}$$

(A4-14)

La constante A es obtenida a partir de (A4-10) resultando:

$$A = - \frac{2F_n \lambda_a^{-\frac{\nu}{2}}}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu) (1+m)^\nu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k p^{-\nu - \frac{3}{2} + \frac{\nu}{2}}$$

En la expresión (A4-6), reemplazando el valor de la constante A obtenida resulta:

$$\theta_a(z, p) = \frac{-2F_n \lambda_a^{-\frac{\nu}{2}} z^{\frac{\nu}{2}}}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu) (1+m)^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k p^{-\nu - \frac{3}{2} + \frac{\nu}{2}} K_\nu(\gamma) + \frac{T_0}{p}$$

(A4-15)

6<sup>to</sup>. PASO: Determinación de la temperatura en superficie (z=0)

La expresión (A4-14) cuando  $z = 0$ , con el valor B obtenido resulta:

$$\theta(0, p) = -\frac{F_n}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k p^{-\varphi - \frac{3}{2}} + \frac{T_o}{p}$$

donde:  $\varphi = (\frac{1}{2} - \nu)k$

Aplicando la Antitransformada a ésta y utilizando los valores de la Tabla (ver (a1-15)) (Carslaw y Jaeger, 1959), la temperatura en superficie es:

$$T(0, t) = -\frac{F_n}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\varphi + \frac{1}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{3}{2})} + T_o$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma. Esta ecuación es la (IV.40) del texto.

7<sup>mo</sup>. PASO: Determinación de la temperatura en el suelo.

Aplicando la Transformada Inversa de Laplace a (A4-14) queda:

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta_s(z, p)] = -\frac{F_n}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k \mathcal{L}^{-1}[p^{-\varphi - \frac{3}{2}} \exp(-q_s z)] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{T_o}{p}\right] \quad (A4-16)$$

Con el objeto de obtener la Transformada Inversa de (A4-16) se utiliza el Teorema de Convulsión para la Transformada Inversa de Laplace (ver (a1-13)) (Spiegel, 1965).

De Tabla (Carslaw y Jaeger, 1959) la Transformada Inversa de (ver (a1-15)) es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{p^{\varphi + \frac{3}{2}}}\right] = \frac{t^{\varphi + \frac{1}{2}}}{\Gamma(\varphi + \frac{3}{2})}$$

donde:  $\varphi = (\frac{1}{2} - \nu)k$  y  $\varphi + \frac{3}{2} > 0$  pues  $m < 1$

También, de Tabla (ver (a1-20)) es:

$$\mathcal{L}^{-1}[\exp(-q_s z)] = \frac{z \exp(-\frac{z^2}{4\lambda_s t})}{\sqrt{4\pi\lambda_s t^3}}$$

Entonces la Transformada Inversa de (A4-13) es:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[p^{-\varphi-\frac{3}{2}} \exp(-q_s z)\right] = \int_0^t \frac{z \exp(-\frac{z^2}{4\lambda_s u}) (t-u)^{\varphi-\frac{1}{2}}}{\sqrt{4\pi\lambda_s u^3} \Gamma(\varphi+\frac{3}{2})} du$$

Para resolver la integral se realizó el siguiente cambio de variable  $u = \frac{z^2}{4\lambda_s w}$  y por simplicidad se expresa  $a = \frac{z^2}{4\lambda_s t}$  resultando:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[p^{-\varphi-\frac{3}{2}} \exp(-q_s z)\right] = \frac{t^{\varphi-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\varphi+\frac{3}{2})} \int_0^1 \exp(-w) (w-a)^{\varphi-\frac{1}{2}} w^{-\varphi-1} dw$$

si  $y=w-a \rightarrow dy = dw$  entonces:

$$= \frac{t^{\varphi-\frac{1}{2}} \exp(-a) a^{-\varphi-1}}{\sqrt{\pi} \Gamma(\varphi+\frac{3}{2})} \int_0^1 \exp(-y) y^{\varphi-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{a}+1\right)^{-\varphi-1} dy \quad (A4-17)$$

La función de Whittaker,  $W_{(k,n)}(b)$ , (ver Apéndice 2) se define como:

$$W_{(k,n)}(b) = \frac{\exp(-\frac{b}{2}) b^k}{\Gamma(\frac{1}{2}-k+n)} \int_0^\infty \exp(-y) y^{-k+n-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{b}+1\right)^{k+n-\frac{1}{2}} dy$$

por lo tanto, cambiando de miembro la integral resulta:

$$\int_0^1 \exp(-y) y^{-k+n-\frac{1}{2}} \left(\frac{y}{b}+1\right)^{k+n-\frac{1}{2}} dy = \frac{\Gamma(\frac{1}{2}-k+n) W_{(k,n)}(b)}{\exp(-\frac{b}{2}) b^k}$$

Este reemplazo de la integral por la función  $W_{(k,n)}(b)$  es sólo para una presentación sencilla de la integral. Los valores

que corresponden a (A4-14) son:

$$n = \frac{1}{4} ; k = -\rho - \frac{3}{4} \quad \text{entonces la integral de la expresión}$$

(A4-14) se puede escribir como sigue:

$$\int_0^{\infty} \exp(-y) y^{\rho + \frac{1}{2}} \left(\frac{y}{a} + 1\right)^{-\rho - 1} dy = \frac{\Gamma\left(\rho + \frac{3}{2}\right) W_{\left(-\rho - \frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)}(a)}{\exp\left[-\frac{a}{2}\right] a^{-\rho - \frac{1}{2}}}$$

Luego, reemplazando en (A4-14) queda:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[p^{-\rho - \frac{3}{2}} \exp(-q_s z)\right] = \frac{t^{\rho + \frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{a}{2}\right] a^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} W_{\left(-\rho - \frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)}(a)$$

Entonces, reemplazando en (A4-16), la temperatura para el suelo, resulta:

$$T_s(z, t) = \frac{F_n a^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{a}{2}\right]}{\sqrt{\pi \kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}}} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k t^{\rho + \frac{1}{2}} W_{\left(-\rho - \frac{3}{2}; \frac{1}{4}\right)}(a) + T_0$$

donde:  $a = \frac{z^2}{4\lambda_s t}$   $\rho = \left(\frac{1}{2} - \nu\right)k$ . Esta es la expresión (IV.39) del texto.

**8<sup>mo</sup>- PASO:** Determinación de la temperatura del aire.

Aplicando la Transformada Inversa de Laplace a (A4-15) para obtener la temperatura del aire, queda:

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta_a] = \frac{-2F_n \lambda_s^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1}{2}}}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu) (1+m)^\nu} \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k \mathcal{L}^{-1}\left[p^{-\rho - \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2}} K_\nu(\gamma)\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{T_0}{p}\right]$$

(A4-18)

Con el objeto de obtener la Transformada Inversa de (A4-18) se utiliza el Teorema de Convulsión para la Transformada Inversa de Laplace (ver (a1-13)) (Spiegel, 1965).

Desde tabla la Transformada Inversa de (Carslaw y



Jaeger, 1959) (ver (a1-21)) es:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ p^{-\frac{\nu}{2}} K_{\nu}(X\sqrt{p}) \right] = \frac{X^{\nu}}{(2t)^{\nu+1}} \exp \left( -\frac{X^2}{4t} \right)$$

donde:  $Y = X\sqrt{p}$        $X = \frac{2\chi_a^{-\frac{1}{2}}}{1+h} z^{\frac{1+m}{2}}$

También, de tabla (ver (a1-15)) es:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{1}{p^{\varphi+\frac{3}{2}}} \right] = \frac{t^{\varphi+\frac{1}{2}}}{\Gamma(\varphi+\frac{3}{2})}$$

donde:  $\varphi = (\frac{1}{2} - \nu)k$     y  $\varphi + \frac{3}{2} > 0$     pues  $m < 1$

Entonces, la Transformada Inversa de (A4-18) (Spiegel, 1965) es:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ p^{-\varphi-\frac{3}{2}} p^{-\frac{\nu}{2}} K_{\nu}(X\sqrt{p}) \right] = \frac{X^{\nu}}{\Gamma(\varphi+\frac{3}{2})} \int_0^{\infty} \frac{\exp \left[ -\frac{X^2}{4u} \right]}{(2u)^{\nu+1}} (t-u)^{\varphi+\frac{1}{2}} du$$

De manera similar al Paso anterior, con el fin de resolver la integral se hace el siguiente cambio de variable  $u = \frac{X^2}{4w}$  y

se define  $a = \frac{X^2}{4t}$  resultando:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ p^{-\varphi-\frac{3}{2}} p^{-\frac{\nu}{2}} K_{\nu}(X\sqrt{p}) \right] =$$

$$= \frac{2^{\nu-1} X^{-\nu} t^{\varphi+\frac{1}{2}} \exp(-a) a^{-\varphi-\frac{3}{2}\nu}}{\Gamma(\varphi+\frac{3}{2})} \int_0^{\infty} \exp(-y) \left( \frac{y}{a} + 1 \right)^{-\varphi-\frac{3}{2}\nu} y^{\varphi+\frac{1}{2}} dy$$

A partir de la definición de la función de Whittaker (ver Apéndice 2) se obtiene:

$$t^{-1} [ p^{-\nu-\frac{3}{2}} p^{\frac{\nu}{2}} K_{\nu}(X\sqrt{p}) ] - 2^{\nu-1} X^{-\nu} t^{\nu-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{a}{2}\right) a^{-\nu} W_{(-\nu-1, \frac{\nu}{2}; \frac{\nu}{2})(a)}$$

Por lo tanto, reemplazando en (A4-18) resulta:

$$T_a(z, t) = \frac{-F_n \chi_a^{\frac{1}{2}-\frac{\nu}{2}} z^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{a}{2}\right)}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu) (1+m)^{\nu-1}} \sum_{k=0}^{\infty} (-\alpha)^k t^{\psi} W_{(-\nu; \frac{\nu}{2})(a)} + T_0$$

donde:  $\psi = \left(\frac{1}{2} - \nu\right)k - \frac{\nu}{2} + 1$  ;  $a = \frac{X^2}{4t}$  ;  $X = \frac{2\chi_a^{-\frac{1}{2}} z^{\frac{1+m}{2}}}{1+m}$

Esta es la expresión (IV.38) presentada en el texto.

## ANEXO V

### MODELO 3 DE JAEGER (1945)

El modelo 3 de Jaeger (1945) presenta una simplificación de la ecuación (IV.38) a partir de la resolución de la ecuación de difusión de calor para el aire (ecuación (IV.31)):

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \chi_a z^{(1-m)} \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} \right] \quad z > 0 \quad t > 0$$

con la condición límite (expresión (IV.41)):

$$T(0, t) = T_0 - K t^r \quad r > -1, t > 0$$

Esta reemplaza a las condiciones iniciales y límites planteados en el Anexo IV (expresiones (IV.33) y (IV.34)).

La ecuación (IV.31), igual que en el Anexo IV, tiene la "ecuación auxiliar" (A4-1) cuya solución es (A4-6):

$$\theta_a(z, p) = A z^{\frac{1}{2}} K_v(Y) + T_0 \quad z > 0 \quad p > 0$$

que corresponde a la Transformada de Laplace para la temperatura del aire.

**1er. PASO:** Determinación de la constante A de (A4-6) a partir de la condición (IV.41).

a) Aplicando la Transformada de Laplace a la condición (IV.41) es:

$$\theta(0, t) = T_0 \int_0^{\infty} \exp(-pt) dt - K \int_0^{\infty} t^r \exp(-pt) dt$$

y resolviendo las integrales resulta:

$$\theta(0, t) = \frac{T_0}{p} - \frac{K \Gamma(r+1)}{p^{r+1}} \quad (A5-1)$$

donde  $\Gamma$  es la función gamma.

b) Luego, la expresión (A4-6) se aplica cuando  $z \rightarrow 0$ , resultando la ecuación (A4-9) deducida en el Anexo IV, que es:

$$\theta_a(0, p) = A \cdot \frac{\Gamma(\nu)}{2} \cdot \left( \frac{1+m}{q_a} \right)^\nu + \frac{T_o}{p}$$

Igualando ésta a (A5-1) queda:

$$A \frac{\Gamma(\nu)}{2} \frac{(1+m)^\nu}{q_a^\nu} + \frac{T_o}{p} = \frac{T_o}{p} - \frac{K \Gamma(r+1)}{p^{r+1}}$$

despejando A se obtiene:

$$A = - \frac{2 \cdot k \Gamma(r+1) p^{\frac{\nu}{2}-r-1}}{(1+m)^\nu \chi_a^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu)} \quad (A5-2)$$

Reemplazando en (A4-6) resulta:

$$\theta_a(z, p) = - \frac{2 \cdot k \Gamma(r+1) z^{\frac{\nu}{2}} p^{\frac{\nu}{2}-r-1}}{(1+m)^\nu \chi_a^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu)} K_\nu(Y) + \frac{T_o}{p} \quad (A5-3)$$

Esta es la solución de la "ecuación auxiliar" con la condición límite (A5-1).

**2ºº- PASO:** Determinación de la temperatura del aire, a partir de (A5-3).

a) Aplicando la Antitransformada de Laplace a (A5-3) es:

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta_a(z, p)] = - \frac{2 \cdot k z^{\frac{\nu}{2}}}{(1+m)^\nu \chi_a^{\frac{\nu}{2}} \Gamma(\nu)} \cdot \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\Gamma(r+1)}{p^{r+1}} p^{\frac{\nu}{2}} K_\nu(Y) \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{T_o}{p} \right] \quad (A5-4)$$

Con el objeto de obtener la Transformada Inversa de (A5-4) se utiliza el Teorema de Convolución para la Transformada Inversa de Laplace (ver (a1-13)) (Spiegel, 1965).

De Tabla (ver (a1-15)) (Carslaw y Jaeger, 1959) se obtiene la Transformada Inversa de:

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{\Gamma(r+1)}{p^{r+1}} \right] = t^r; \quad r > -1$$

También, de Tabla se encuentra la Transformada Inversa de (ver (A1-21)):

$$\mathcal{L}^{-1}\left[p^{\frac{\nu}{2}} \cdot K_{\nu}(X\sqrt{p})\right] = \frac{X^{\nu}}{(2t)^{\nu+1}} \cdot \exp\left(-\frac{X^2}{4t}\right)$$

donde:  $x = \frac{Z \cdot z^{\frac{1+m}{2}} \chi_a^{-\frac{1}{2}}}{1+m}$

Entonces, resulta:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\Gamma(r+1)}{p^{r+1}} p^{\frac{\nu}{2}} \cdot K_{\nu}(X\sqrt{p})\right] = \int_0^t \frac{(t-u)^r X^{\nu}}{(2u)^{\nu+1}} \cdot \exp\left[-\frac{X^2}{4u}\right] du \quad (A5-5)$$

b) Resolución de la integral (A5-5). Reemplazando por  $u = \frac{X^2}{4w}$

y siguiendo la metodología desarrollada en el Anexo IV, utilizando la definición de la función Whittaker (Apéndice 2) queda:

$$\int_0^t \frac{(t-u)^r X^{\nu}}{(2u)^{\nu+1}} \cdot \exp\left(-\frac{X^2}{4u}\right) du = \frac{2^{\nu-1} t^r}{X^{\nu}} \exp\left(-\frac{a}{2}\right) a^{\phi} \Gamma(r+1) W_{(\phi-r; \frac{1}{2})}(a)$$

donde:  $\phi = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2}$

Reemplazando en (A5-4), ordenando y simplificando se obtiene:

$$T_a(z, t) = \frac{K \cdot z^{-\frac{1}{2}} t^{r+\phi} \exp\left(-\frac{a}{2}\right) \Gamma(r+1)}{(1+m)^{\nu-1} \chi_a^{\phi} \Gamma(\nu)} \cdot W_{(\phi-r; \frac{\nu}{2})}(a) + T_0$$

donde:  $a = \frac{Z^{1+m}}{\chi_a (1+m)^2 t}$        $\phi = \frac{\nu}{2} - \frac{1}{2}$

Esta es la expresión (IV.42) correspondiente al texto.

## ANEXO VI

### MODELO DE REUTER (1951)

Se resuelve la ecuación de difusión de calor para el aire y para el suelo (expresiones (IV.47) y (IV.32)), respectivamente:

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial t} - \chi_a \frac{\partial^2 T_a(z, t)}{\partial z^2} \quad z > 0 \quad t > 0$$

$$\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial t} - \chi_s \frac{\partial^2 T_s(z, t)}{\partial z^2} \quad z < 0 \quad t > 0$$

donde  $T_a$  es la temperatura del aire y  $T_s$  es la temperatura del suelo.

Las condiciones iniciales (ecuación (IV.48)) son:

$$T_s(z, 0) = T_0 + \beta z \quad z < 0 \quad t = 0$$

y la ecuación (IV.49):

$$T_a(z, 0) = T_0 - \gamma z \quad z > 0 \quad t = 0$$

Las condiciones límites, son la ecuación (IV.50):

$$F_n + \kappa_s \frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} - \kappa_a \left( \frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} + \gamma \right) = 0 \quad z = 0 \quad t > 0$$

y la ecuación (IV.51):

$$T_s(0, t) = T_a(0, t) \quad z = 0 \quad t > 0$$

También, son condiciones límites, la ecuación (IV.52):

$$\frac{\partial T_a(z, t)}{\partial z} = -\gamma \quad z \rightarrow \infty \quad t \geq 0$$

y la ecuación (IV.53):

$$\frac{\partial T_s(z, t)}{\partial z} = -\beta \quad z \rightarrow -\infty \quad t \geq 0$$

1er. PASO: Determinación de la Transformada de Laplace de  $T_a$ . La ecuación de difusión tiene coeficiente constante. Por lo tanto, se resuelve según lo expuesto en el Apéndice 2.

a) Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación de difusión de calor para el aire (ecuación (IV.47)), resulta:

$$p\theta_a(z, p) - T_a(z, 0) - \chi_a\theta_a''(z, p)$$

Introduciendo la condición (IV.51) y ordenando, queda:

$$\theta_a''(z, p) - \frac{p}{\chi_a}\theta_a(z, p) = \frac{T_o}{\chi_a} - \frac{\gamma}{\chi_a}z \quad (Ae-1)$$

La solución de la ecuación homogénea de (Ae-1) es del tipo exponencial.

Se propone la siguiente solución particular,  $\theta_{ap} = a z + b$ , que reemplazada en (Ae-1) resulta:

$$\theta_{ap}(z, p) = \frac{T_o}{p} - \frac{\gamma}{p}z$$

La solución general de (Ae-1) es (homogénea más particular):

$$\theta_a(z, p) = A \exp(-q_a z) + B \exp(q_a z) + \frac{T_o}{p} - \frac{\gamma}{p}z \quad z > 0 \quad p > 0 \quad (Ae-2)$$

Aplicando la Transformada de Laplace a la condición (IV.52) resulta:

$$\frac{\partial \theta_a(z, p)}{\partial z} = -\frac{\gamma}{p} \quad \text{cuando } z \rightarrow \infty \quad (Ae-3)$$

Derivando la expresión (Ae-2) respecto a  $z$ , con la condición (Ae-3) en  $z \rightarrow \infty$ , se encuentra que  $B = 0$ . Entonces, la (Ae-2) resulta:

$$\theta_a(z, p) = A \exp(-q_a z) + \frac{T_o}{p} - \frac{\gamma}{p}z \quad z > 0 \quad p > 0 \quad (Ae-4)$$

**2<sup>do</sup> PASO:** Determinación de la Transformada de Laplace de  $T_s$ . La ecuación de difusión tiene coeficiente constante por lo que se resuelve según lo expuesto en el Apéndice 2.

a) Aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación de difusión de calor en el suelo (ecuación (IV.32)) la Transformada de Laplace, resulta:

$$p\theta_s(z, p) - T_s(z, 0) - \chi_s \theta_s''(z, p)$$

empleando la condición (IV.50) y ordenando términos, queda:

$$\theta_s''(z, p) - \frac{p}{\chi_s} \theta_s(z, p) - \frac{T_o}{\chi_s} + \frac{\beta}{\chi_s} z$$

Se obtiene la solución general de esta expresión procediendo de igual manera que en el paso anterior y resulta:

$$\theta_s(z, p) = B \exp(q_s z) + \frac{T_o}{p} + \frac{\beta}{p} z \quad z < 0 \quad p > 0$$

(As-5)

**3<sup>er</sup> PASO:** Determinación de las constantes A y B de las expresiones (As-3) y (As-5), a partir de las condiciones límites propuestas.

a) Utilizando la condición (IV.49) y aplicando la Transformada de Laplace resulta:

$$\theta_s(0, p) = \theta_a(0, p)$$

Igualando (As-4) y (As-5) cuando  $z = 0$ , se obtiene:

$$A = B \quad (As-6)$$

b) Luego, aplicando la Transformada de Laplace a la ecuación de balance energético (expresión (IV.48)) resulta:

$$\frac{F_n}{p} + \kappa_s \theta_s'(z, p) - \kappa_a \theta_a'(z, p) - \frac{\kappa_a \gamma_d}{p} = 0 \quad (As-7)$$



Derivando las expresiones (Ae-4) y (Ae-5) respecto de  $z$ , reemplazando en (Ae-7) y aplicando el límite cuando  $z \rightarrow 0$ , queda:

$$\frac{F_n}{p} + \kappa_s q_s B + \frac{\beta \kappa_s}{p} + \kappa_a q_a A + \frac{\kappa_a \gamma}{p} - \frac{\kappa_a \gamma_d}{p} = 0$$

Utilizando (Ae-6) y despejando el valor de  $B$  de la expresión anterior, se obtiene:

$$B = - \frac{(F_n + \beta \kappa_s + (\gamma - \gamma_d) \kappa_a)}{p (\kappa_s q_s + \kappa_a q_a)}$$

c) Reemplazando en (Ae-4) el valor obtenido resulta:

$$\theta_a(z, p) = - \frac{(F_n + \beta \kappa_s + (\gamma - \gamma_d) \kappa_a)}{(\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}} + \kappa_a \chi_a^{-\frac{1}{2}})} \cdot \frac{\exp(-q_a z)}{p^{\frac{3}{2}}} + \frac{T_o}{p} - \frac{\gamma}{p} z \quad (\text{Ae-8})$$

Reemplazando  $B$  en (Ae-5) pero para valores de  $z > 0$ , (de lo contrario no es aplicable la Transformada Inversa), queda:

$$\theta_s(z, p) = - \frac{(F_n + \beta \kappa_s + (\gamma - \gamma_d) \kappa_a)}{(\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}} + \kappa_a \chi_a^{-\frac{1}{2}})} \cdot \frac{\exp(-q_s z)}{p^{\frac{3}{2}}} + \frac{T_o}{p} - \frac{\beta}{p} z \quad (\text{Ae-9})$$

4to. PASO: Determinación de  $T_a$  y  $T_s$  a partir de  $\theta_a$  y  $\theta_s$ .

Aplicando la Transformada Inversa de Laplace a la expresión (Ae-8) queda:

$$\mathcal{L}^{-1}[\theta_a(z, p)] = - \frac{F_n + \beta \kappa_s + (\gamma - \gamma_d) \kappa_a}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}} + \kappa_a \chi_a^{-\frac{1}{2}}} \cdot \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\exp(-q_a z)}{p^{\frac{3}{2}}}\right] + \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{T_o}{p}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\gamma}{p} z\right]$$

De Tabla de Transformada Inversa (ver (a1-17)) (Carslaw y Jaeger, 1959) se obtiene:

$$T_a = \frac{-2(F_n + \beta \kappa_s + (\gamma - \gamma_d) \kappa_a)}{\kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ \exp(-\alpha) - z \sqrt{\frac{\pi}{4 \lambda_a t}} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}) \right] + T_o - \gamma z$$

donde:  $\alpha = \frac{z^2}{4 \lambda_a t}$  y  $\operatorname{erfc}$  es el complemento de la función error.

Esta expresión corresponde a la (IV.54) del texto.

De igual forma se procede para obtener  $T_s$  a partir de la expresión (A8-9) resultando:

$$T_s = \frac{-2(F_n + \beta \kappa_s + (\gamma - \gamma_d) \kappa_a)}{(\kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}})} \sqrt{\frac{t}{\pi}} \left[ \exp(-\alpha) - z \sqrt{\frac{\pi}{4 \lambda_s t}} \operatorname{erfc}(\sqrt{\alpha}) \right] + T_o - \beta z$$

donde:  $\alpha = \frac{z^2}{4 \lambda_s t}$ , (con  $z > 0$ ). Esta expresión es la (IV.55) del

texto.

Cuando  $z = 0$  resulta:

$$T_s(0, t) = \frac{2(F_n + \beta \kappa_s + (\gamma - \gamma_d) \kappa_a)}{\kappa_a \lambda_a^{-\frac{1}{2}} + \kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{t}{\pi}} + T_o$$

Esta es la expresión (IV.56) del texto.

## ANEXO VII

### MODELO DE ANFOSSI Y OTROS (1976)

Anfossi y otros (1976) plantean que el flujo de calor,  $f$ , a través de un nivel  $z$ , en la atmósfera está definido por (ecuación IV.58):

$$f(z, t) = \kappa_a \frac{\partial T(z, t)}{\partial z}$$

Diferenciando la ecuación de difusión de calor respecto a  $z$ , expresión (IV.59), queda (ecuación (IV.60)):

$$\frac{\partial f(z, t)}{\partial t} = \chi_a \frac{\partial^2 f(z, t)}{\partial z^2}$$

Las condiciones límites consideradas son, ecuación (IV.61):

$$f(0, t) = f_0$$

y ecuación (IV.62):

$$f(z_1, t) = 0$$

donde  $z_1 = \sqrt{4\chi_a t}$  (expresión (IV.57))

La condición inicial es (ecuación IV.63):

$$f(z, 0) = \gamma$$

**1er. PASO:** Aplicación de Transformada de Laplace a la ecuación (IV.60). Para ello se define la Transformada,  $F(z, p)$ , de la función  $f(z, t)$  como (ver (a1-1)):

$$F(z, p) = \int_0^\infty f(z, t) \exp(-pt) dt$$

Aplicando la Transformada de Laplace a la (IV.60) y utilizando las propiedades (a1-5) y (a1-6) resulta:

$$pF(z, p) - f(z, 0) - \lambda_a F''(z, p)$$

donde  $F''(z, p)$  es la derivada segunda de  $F(z, p)$  respecto de  $z$ .

Con la condición (IV.63) y ordenando términos queda:

$$F''(z, p) - \frac{p}{\lambda_a} F(z, p) = \frac{\gamma}{\lambda_a} \quad (A7-1)$$

**2do. PASO:** Obtención de la solución de la ecuación (A7-1).

La solución de la ecuación homogénea de (A7-1) es de tipo exponencial:

$$F(z, p) = A e^{-qz} + B e^{qz}$$

donde  $q = \sqrt{\frac{p}{\lambda_a}}$

La solución particular es  $F_p(z, p) = a = \text{cte.}$ , que reemplazando en (A7-1), resulta:

$$F_p(z, p) = \frac{\gamma}{p}$$

La solución general de (A7-1) es (homogénea más particular):

$$F(z, p) = A e^{-qz} + B e^{qz} - \frac{\gamma}{p} \quad (A7-2)$$

**3er. PASO:** Determinación de las constantes A y B de la ecuación (A7-2).

a) Aplicando de la Transformada de Laplace a la condición (IV.61) resulta:

$$F(0, p) = \frac{f_0}{p} \quad (A7-3)$$

También, aplicando la Transformada de Laplace a la condición (IV.62) se obtiene:

$$F(z_1, t) = 0 \quad (A7-4)$$

Usando (A7-2) cuando  $z=0$  e igualando con la condición (A7-3) resulta:

$$A + B - \frac{\gamma}{p} = \frac{f_0}{p}$$

despejando A queda:

$$A = \frac{f_0}{p} + \frac{\gamma}{p} - B \quad (A7-5)$$

Aplicando  $z_1$  a la ecuación (A7-2) e igualando a la condición (A7-4), resulta:

$$A \cdot e^{-qz_1} + B \cdot e^{qz_1} - \frac{\gamma}{p} = 0$$

Utilizando la (A7-5) y ordenando términos resultan:

$$B = \frac{-f_0 e^{-qz_1} - \gamma [e^{-qz_1} - 1]}{p [e^{qz_1} - e^{-qz_1}]}$$

$$A = \frac{f_0 e^{qz_1} + \gamma [e^{qz_1} - 1]}{p [e^{qz_1} - e^{-qz_1}]}$$

Reemplazando A y B en (A7-2) queda:

$$F(z, p) = \frac{f_0 [e^{q(z_1-z)} - e^{-q(z_1-z)}] + \gamma [e^{q(z_1-z)} - e^{-q(z_1-z)}] + e^{qz} - e^{-qz}}{p [e^{qz_1} - e^{-qz_1}]} - \frac{\gamma}{p} \quad (A7-6)$$

ó también:

$$F(z, p) = \frac{f_0 \text{Senh}(q(z_1-z)) + \gamma [\text{Senh}(q(z_1-z)) + \text{Senh}(qz)]}{p \text{Senh}(qz_1)} - \frac{\gamma}{p}$$

Con el fin de simplificar la expresión (A7-6) y poder encontrar su Transformada Inversa se procede de la siguiente forma.

El denominador de (A7-6) se puede desarrollar en serie como sigue (ver Carslaw y Jaeger, 1959):

Entonces escribiendo (A7-6) en función de una serie queda:

$$\begin{aligned}
 F(z, p) = & \frac{f_0}{p} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-q(z+2nz_1)} - e^{-q(2z_1+2nz_1-z)}] + \\
 & + \frac{\gamma}{p} \sum_{n=0}^{\infty} [e^{-q(2nz_1+z)} - e^{-q(2nz_1+2z_1-z)} + e^{-q(2nz_1+z_1+z)} - e^{-q(2nz_1+z_1-z)}] - \frac{\gamma}{p}
 \end{aligned}
 \tag{A7-7}$$

4<sup>to</sup>. PASO: Determinación de la Transformada Inversa de (A7-7) para obtener el flujo,  $f(z, t)$ .

De Tabla se tiene lo siguiente (ver (a1-16)) (ver Carslaw y Jaeger, 1959):

$$\mathcal{L}^{-1} \left[ \frac{e^{-qx}}{p} \right] = \text{erfc} \left[ \frac{x}{\sqrt{4\lambda_a t}} \right]$$

Por la expresión (IV.57)  $z_1 = \sqrt{4\lambda_a t}$ . Aplicando la Transformada Inversa a cada término de (A7-7) se obtiene:

$$\begin{aligned}
 f(z, t) = & f_0 \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \text{erfc} \left[ 2n + \frac{z}{z_1} \right] - \text{erfc} \left[ 2n+2 - \frac{z}{z_1} \right] \right] + \\
 & + \gamma \sum_{n=0}^{\infty} \left[ \text{erfc} \left[ 2n + \frac{z}{z_1} \right] - \text{erfc} \left[ 2n+2 - \frac{z}{z_1} \right] - \text{erfc} \left[ 2n+1 + \frac{z}{z_1} \right] + \text{erfc} \left[ 2n+1 - \frac{z}{z_1} \right] \right] - \gamma
 \end{aligned}
 \tag{A7-8}$$

Reordenado, resulta:

$$f(z, t) = f_0 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \text{erfc} \left[ 2n + \frac{z}{z_1} \right] - \sum_{n=0}^{\infty} \text{erfc} \left[ 2n - \frac{z}{z_1} \right] \right] + f_0 \cdot \text{erfc} \left[ -\frac{z}{z_1} \right] +$$

$$+\gamma \left[ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \operatorname{erfc} \left[ n + \frac{z}{z_1} \right] + \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \operatorname{erfc} \left[ n - \frac{z}{z_1} \right] \right] + \gamma \operatorname{erfc} \left[ -\frac{z}{z_1} \right] - \gamma \quad (\text{A7-9})$$

Cuando  $z/z_1 \leq 1$  las series de (A7-9) convergen rápidamente. Esto siempre se cumple debido a que  $z_1$  es la altura de la inversión de temperatura.

Desarrollando los dos primeros términos de las series de (A7-9) queda:

$$f(z, t) - f_0 \left[ \operatorname{erfc} \left[ \frac{z}{z_1} \right] + \operatorname{erfc} \left[ 2 + \frac{z}{z_1} \right] - \operatorname{erfc} \left[ -\frac{z}{z_1} \right] - \operatorname{erfc} \left[ 2 - \frac{z}{z_1} \right] + \operatorname{erfc} \left[ -\frac{z}{z_1} \right] \right] + \gamma \left[ \operatorname{erfc} \left[ \frac{z}{z_1} \right] - \operatorname{erfc} \left[ 1 + \frac{z}{z_1} \right] - \operatorname{erfc} \left[ -\frac{z}{z_1} \right] + \operatorname{erfc} \left[ 1 - \frac{z}{z_1} \right] + \operatorname{erfc} \left[ -\frac{z}{z_1} \right] \right] - \gamma \quad (\text{A7-10})$$

Acotando los segundos términos de las series queda:

$$\phi_1 - \operatorname{erfc} \left[ 2 + \frac{z}{z_1} \right]; \quad \phi_2 - \operatorname{erfc} \left[ 2 - \frac{z}{z_1} \right]; \quad \phi_3 - \operatorname{erfc} \left[ 1 + \frac{z}{z_1} \right]; \quad \phi_4 - \operatorname{erfc} \left[ 1 - \frac{z}{z_1} \right]$$

La función  $\operatorname{erfc}$  es monótona decreciente. Por lo tanto:

$$0 \leq \frac{z}{z_1} \leq 2 \leq 2 + \frac{z}{z_1} \Rightarrow \operatorname{erfc} \left[ 2 + \frac{z}{z_1} \right] \leq \operatorname{erfc} (2) = 0.0046 \quad \therefore \phi_1 = 0$$

$$\frac{z}{z_1} \leq 1 \quad \therefore 1 \leq 2 - \frac{z}{z_1} \Rightarrow \operatorname{erfc} \left[ 2 - \frac{z}{z_1} \right] \leq \operatorname{erfc} (1) = 0.1572 \quad \phi_2 = \operatorname{erfc} (1)$$

$$0 \leq \frac{z}{z_1} \leq 1 \leq 1 + \frac{z}{z_1} \Rightarrow \operatorname{erfc} \left[ 1 + \frac{z}{z_1} \right] \leq \operatorname{erfc} (1) = 0.1572 \quad \phi_3 = \operatorname{erfc} (1)$$

$$\frac{z}{z_1} \leq 1 \quad \therefore 0 \leq 1 - \frac{z}{z_1} \Rightarrow \operatorname{erfc} \left[ 1 - \frac{z}{z_1} \right] \leq \operatorname{erfc} (0) = 1 \quad \phi_4 = 1$$

Reemplazando los  $\phi$  en (A7-10) queda:

$$f(z, t) - f_0 \left[ \operatorname{erfc} \left[ \frac{z}{z_1} \right] - \operatorname{erfc} (1) \right] + \gamma \left[ \operatorname{erfc} \left[ \frac{z}{z_1} \right] - \operatorname{erfc} (1) \right] \quad (\text{A7-11})$$

La expresión (A7-11) deberá cumplir con las condiciones límites (IV.61) y (IV.62), para lo cual se fuerza a la constante  $\gamma$  a que tenga una determinada forma.

Con la condición (IV.61) y aplicando (A7-11) cuando  $z = 0$ , resulta:

$$f_0 - f_0 [\operatorname{erfc}(0) - \operatorname{erfc}(1)] - \gamma [\operatorname{erfc}(0) - \operatorname{erfc}(1)]$$

Despejando  $\gamma$  se obtiene:

$$\gamma = \frac{f_0 \cdot \operatorname{erfc}(1)}{1 - \operatorname{erfc}(1)}$$

Reemplazando en (A7-11), queda:

$$f(z, t) = \frac{f_0}{1 - \operatorname{erfc}(1)} \cdot \left[ \operatorname{erfc} \left[ \frac{z}{z_1} \right] - \operatorname{erfc}(1) \right] \quad (\text{A7-12})$$

La expresión (A7-12) es la presentada por Anfossi y otros (1976).

**5<sup>to</sup>. PASO:** Obtención de la temperatura del aire.

A partir de la integración de la ecuación (IV.58) se obtiene la temperatura del aire en un nivel  $z$ , reemplazando  $f(z, t)$  con el valor obtenido en (A7-12). Para ello es necesario resolver la integral que aparece en la siguiente expresión:

$$\Delta T(z, t) = \frac{f_0}{\kappa_a (1 - \operatorname{erfc}(1))} \left[ \int \operatorname{erfc} \left[ \frac{z}{z_1} \right] dz - \int \operatorname{erfc}(1) dz \right]$$

La primera integral se resuelve por partes, resultando finalmente:

$$T(z, t) = \frac{-2f_0}{\kappa_a \Theta} \sqrt{\frac{\lambda_a t}{\pi}} \left[ e^{-\left(\frac{z}{z_1}\right)^2} - \frac{z\sqrt{\pi}}{z_1} \operatorname{erfc} \left[ \frac{z}{z_1} \right] + \frac{z\sqrt{\pi}}{z_1} \operatorname{erfc}(1) \right] + T(0, 0)$$

donde  $\Theta = [1 - \operatorname{erfc}(1)]$ . Esta es la expresión (IV.64) del texto.



Cuando  $z = 0$  resulta:

$$T(0, t) = \frac{-2f_0}{\kappa_a(1 - \operatorname{erfc}(1))} \sqrt{\frac{\lambda_a t}{\pi}} + T_0$$

Esta es la expresión (IV.65) del texto.

## ANEXO VIII

### EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $\lambda_s$

Determinación de:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \lambda_s} \cdot \frac{\delta \lambda_s}{\Delta T} \right| \quad (\text{As-1})$$

$$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial \lambda_s} = - \frac{\partial}{\partial \lambda_s} \left[ \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \right] \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^r t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)} - \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{\partial(\alpha)^r}{\partial \lambda_s} \frac{t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)}$$

(As-2)

donde:  $\Phi = k \left( \frac{1}{2} - \nu \right) + \frac{1}{2}$

En primer lugar, se resuelve la derivada del segundo miembro, resultando:

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_s} \left[ \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \right] = \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2 \lambda_s} \quad (\text{As-3})$$

Luego, se obtiene la segunda derivada presente en el segundo miembro de la expresión (As-2):

donde:  $\alpha = \frac{\kappa_s \lambda_s^{-\nu} \Gamma(1-\nu)}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)} \cdot (2-n)^{(1-2\nu)}$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_s} [(\alpha)^r] = k(\alpha)^{r-1} \frac{\partial(\alpha)}{\partial \lambda_s} = \frac{k}{2 \lambda_s} (\alpha)^r \quad (\text{As-4})$$

Reemplazando (As-3) y (As-4) en (As-2), y obteniendo el valor absoluto, resulta:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \lambda_s} \right| = \left| \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{2 \lambda_s} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^r t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)} + \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{2 \lambda_s} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{k(-\alpha)^r t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)} \right|$$

(As-5)

Multiplicando la expresión (As-5) por  $\delta\chi_s / \Delta T$  resulta:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial\chi_s} \frac{\delta\chi_s}{\Delta T} \right| = \left[ \frac{1}{Z} + \frac{1}{Z} \frac{\sum_{k=0}^{\infty} k (-\alpha)^k t^\Phi}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)}} \right] \frac{\delta\chi_s}{\chi_s}$$

(As-6)

## ANEXO IX

### EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $\lambda_a$

Determinación de:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \lambda_a} \cdot \frac{\delta \lambda_a}{\Delta T} \right| \quad (A\theta-1)$$

$$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial \lambda_a} = - \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\partial(\alpha)^k}{\partial \lambda_a} \frac{t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)} \quad (A\theta-2)$$

donde:  $\Phi = k \left( \frac{1}{2} - \nu \right) + \frac{1}{2}$

El primer lugar, se resuelve la derivada del segundo miembro de la expresión (A $\theta$ -2):

donde:  $\alpha = \frac{\kappa_a \lambda_a^{-\nu} \Gamma(1-\nu)}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)} \cdot (2 - m)^{(1-2\nu)}$

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_a} [(\alpha)^k] = k (\alpha)^{k-1} \frac{\partial(\alpha)}{\partial \lambda_a} = - \frac{k \nu}{\lambda_a} (\alpha)^k \quad (A\theta-3)$$

Reemplazando (A $\theta$ -3) en (A $\theta$ -2), y tomando el valor absoluto resulta:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \lambda_a} \right| = \left| \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \frac{\nu}{\lambda_a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)} \right| \quad (A\theta-4)$$

Multiplicando la expresión (A $\theta$ -4) por  $\delta \lambda_a / \Delta T$  queda:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \lambda_a} \frac{\delta \lambda_a}{\Delta T} \right| = \left[ \nu \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)}} \right] \frac{\delta \lambda_a}{\lambda_a} \quad (A\theta-5)$$

## ANEXO X

### EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $K_a$

Determinación de:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial K_a} \cdot \frac{\delta K_a}{\Delta T} \right| \quad (A10-1)$$

$$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial K_a} = - \frac{F_n + \beta K_s}{K_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\partial(\alpha^k)}{\partial K_a} \frac{t^{\phi}}{\Gamma(\phi+1)} \quad (A10-2)$$

donde:  $\phi = k \left[ \frac{1}{2} - \nu \right] + \frac{1}{2}$

El primer paso consiste en resolver la derivada del segundo miembro de la expresión (A10-2):

donde:  $\alpha = \frac{K_a \lambda_s^{-\nu} \Gamma(1-\nu)}{K_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)} \cdot (2-n)(1-2\nu)$

$$\frac{\partial}{\partial K_a} [(\alpha)^k] = k (\alpha)^{k-1} \frac{\partial(\alpha)}{\partial K_a} = \frac{k}{K_a} (\alpha)^k \quad (A10-3)$$

Reemplazando (A10-3) en (A10-2) resulta:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial K_a} \right| = \left| \frac{F_n + \beta K_s}{K_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{K_a} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^{\phi}}{\Gamma(\phi+1)} \right| \quad (A10-4)$$

Al multiplicar la expresión (A10-4) por  $\delta K_a / \Delta T$ , queda:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial K_a} \frac{\delta K_a}{\Delta T} \right| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^{\phi}}{\Gamma(\phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\phi}}{\Gamma(\phi+1)}} \frac{\delta K_a}{K_a} \right| \quad (A10-5)$$

## ANEXO XI

### EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $K$ .

Determinación de:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial K_s} \cdot \frac{\delta K_s}{\Delta T} \right| \quad (A11-1)$$

$$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial K_s} = - \frac{\partial}{\partial K_s} \left[ \frac{F_n + \beta K_s}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)} - \frac{F_n + \beta K_s}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{\partial(\alpha^k)}{\partial K_s} \frac{t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)} \quad (A11-2)$$

donde:  $\Phi = k \left( \frac{1}{2} - \nu \right) + \frac{1}{2}$

Como primer paso se resuelve la siguiente derivada:

$$\frac{\partial}{\partial K_s} \left[ \frac{F_n + \beta K_s}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \right] = - \frac{F_n}{\kappa_s^2 \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \quad (A11-3)$$

Luego, se obtiene la segunda derivada presente en la expresión (A11-2):

donde:  $\alpha = \frac{\kappa_s \lambda_s^{-\nu} \Gamma(1-\nu)}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}} \Gamma(\nu)} \cdot (2-n)(1-2\nu)$

$$\frac{\partial}{\partial K_s} [(\alpha)^k] = k(\alpha)^{k-1} \frac{\partial(\alpha)}{\partial K_s} = - \frac{k}{\kappa_s} (\alpha)^k \quad (A11-4)$$

Reemplazando (A11-3) y (A11-4) en (A11-2) resulta:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial K_s} \right| = \left| \frac{F_n}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\kappa_s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)} + \frac{F_n + \beta K_s}{\kappa_s \lambda_s^{-\frac{1}{2}}} \frac{1}{\kappa_s} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k(-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)} \right| \quad (A11-5)$$

Multiplicando la expresión (A11-5) por  $\delta K_s / \Delta T$ , queda:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \kappa_s} \frac{\delta \kappa_s}{\Delta T} \right| = \left[ \frac{F_n}{F_n + \kappa_s \beta} + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)}} \right] \frac{\delta \kappa_s}{\kappa_s} \quad (A_{11}-6)$$

o también:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \kappa_s} \frac{\delta \kappa_s}{\Delta T} \right| = \left[ \frac{1}{1 + \frac{\kappa_s \beta}{F_n}} + \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k (-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)}} \right] \frac{\delta \kappa_s}{\kappa_s} \quad (A_{11}-7)$$

## ANEXO XII

### EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $F_n$

Determinación de:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial F_n} \cdot \frac{\delta F_n}{\Delta T} \right| \quad (A12-1)$$

$$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial F_n} = \frac{\partial}{\partial F_n} \left( \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \chi_s^{\frac{1}{2}}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)} \quad (A12-2)$$

donde:  $\Phi = k \left( \frac{1}{Z} - \nu \right) + \frac{1}{2}$

Se resuelve la derivada de la expresión (A12-2) resultando:

$$\frac{\partial}{\partial F_n} \left( \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \chi_s^{\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1}{\kappa_s \chi_s^{\frac{1}{2}}} \quad (A12-3)$$

Reemplazando (A12-3) en (A12-2) resulta:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial F_n} \right| = \left| \frac{1}{\kappa_s \chi_s^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)} \right| \quad (A12-4)$$

Al multiplicar la expresión (A12-4) por  $\delta F_n / \Delta T$  queda:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial F_n} \cdot \frac{\delta F_n}{\Delta T} \right| = \left| \frac{1}{F_n + \beta \kappa_s} \right| \delta F_n \quad (A12-5)$$

o también:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial F_n} \cdot \frac{\delta F_n}{\Delta T} \right| = \left| \frac{1}{1 + \frac{\beta \kappa_s}{F_n}} \frac{\delta F_n}{F_n} \right| \quad (A12-6)$$



## ANEXO XIII

### EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $\beta$

Determinación de:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \beta} \cdot \frac{\delta \beta}{\Delta T} \right| \quad (A13-1)$$

$$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial \beta} = \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)} \quad (A13-2)$$

donde:  $\Phi = k \left( \frac{1}{2} - \nu \right) + \frac{1}{2}$

Se resuelve la derivada de la expresión (A13-2) resultando:

$$\frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \chi_s^{-\frac{1}{2}}} \right) = \frac{1}{\chi_s^{-\frac{1}{2}}} \quad (A13-3)$$

Reemplazando (A13-3) en (A13-2) se obtiene:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \beta} \right| = \frac{1}{\chi_s^{-\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\Phi}}{\Gamma(\Phi+1)} \quad (A13-4)$$

Al multiplicar la expresión (A13-4) por  $\delta \beta / \Delta T$ , queda:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \beta} \cdot \frac{\delta \beta}{\Delta T} \right| = \left| \frac{\kappa_s}{F_n + \beta \kappa_s} \delta \beta \right| \quad (A13-5)$$

o también:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial \beta} \cdot \frac{\delta \beta}{\Delta T} \right| = \left| \frac{\frac{\beta \kappa_s}{F_n}}{1 + \frac{\beta \kappa_s}{F_n}} \frac{\delta \beta}{\beta} \right| \quad (A13-6)$$

## ANEXO XIV

### EL ERROR DE $\Delta T$ DEBIDO A VARIACIONES DE $t$

Determinación de:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} \cdot \frac{\delta t}{\Delta T} \right| \quad (\text{A14-1})$$

$$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} = \left( \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \lambda_s^{\frac{1}{2}}} \right) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k}{\Gamma(\Phi+1)} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (t^\Phi) \quad (\text{A14-2})$$

donde:  $\Phi = k \left( \frac{1}{2} - \nu \right) + \frac{1}{2}$

Se encuentra la derivada de la expresión (A14-2), resultando:

$$\frac{\partial}{\partial t} (t^\Phi) = \Phi t^{(\Phi-1)} \quad (\text{A14-3})$$

Reemplazando (A14-3) en (A14-2), resulta:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} \right| = \frac{F_n + \beta \kappa_s}{\kappa_s \lambda_s^{\frac{1}{2}}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k \Phi t^{(\Phi-1)}}{\Gamma(\Phi+1)} \quad (\text{A14-4})$$

Al multiplicar la expresión (A14-4) por  $\delta t / \Delta T$ , queda:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} \cdot \frac{\delta t}{\Delta T} \right| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k \Phi t^{(\Phi-1)}}{\Gamma(\Phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^\Phi}{\Gamma(\Phi+1)}} \cdot \delta t \right| \quad (\text{A14-5})$$

o también:

$$\left| \frac{\partial(\Delta T)}{\partial t} - \frac{\delta t}{\Delta T} \right| = \left| \frac{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\phi}}{\Gamma(\phi)} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\phi}}{\Gamma(\phi+1)}}{\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\alpha)^k t^{\phi}}{\Gamma(\phi+1)}} \cdot \frac{\delta t}{t} \right| \quad (\text{A14-8})$$

## REFERENCIAS

- Abramowitz, M. y I. Stegun, 1965:** Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables. Ed. Washington National Bureau of Standards.
- André, J.C., G. De Moor, P. Lacarrère, G. Therry y R. Du Vachat, 1978:** Modeling the 24-hour evolution of the mean and turbulent structures of the planetary boundary layer. *J. Atmos. Sci.* 35, 1861-1883.
- André, J.C. y L. Mahrt, 1982:** The nocturnal surface inversion and influence of clear-air radiative cooling. *J. Atmos. Sci.* 39, 864-878.
- Anfossi, D., 1989:** A discussion on nocturnal temperature profiles. *Atmos. Env.* 23, No. 6, 1177-1186.
- Anfossi, D. y A. Longhetto, 1985:** Cooling processes and temperature profiles during nocturnal inversions. *Il Nuovo Cimento*, Vol 8C, No. 6, 605-620.
- Anfossi, D., P. Bacci y A. Longhetto, 1976:** Forecasting of vertical temperature profiles in the atmosphere during nocturnal radiation inversions from air temperature trend at screen height. *Quar. J. R. Met. Soc.* 102, 173-180.
- Anfossi, D., P. Bacci y A. Longhetto, 1974:** An application of Lidar technique to the study of the nocturnal radiation inversion. *Atmos. Env.* 8, 537-541.
- Barkat, A., 1932:** in *Quart. J. R. Met. Soc.* 58, 285 (citado por Sutton, 1977)
- Barker E. M. y T. L. Baxte, 1975:** A note on the computation of atmospheric surface layer fluxes for use in numerical modeling. *J. Appl. Met.*, 14, 620-622.
- Best, A. C., 1935:** in *Geophys. Mem.* 46 (citado por Sutton, 1977)
- Biel, E. R., 1961:** Microclimate, Bioclimatology and notes on comparative dynamic climatology. *Amer. Scientist* 49, 327-357.
- Brocks, K., 1948:** Ubel den tägl. u. jährl. Gang der Höhenabhängigkeit der Timp. in den untersten 300 m.d. Atmosphäre U. ihren Zusammenhang mit d. Konvektion Ber. DWD-US zone 1, Nr 5 (citado por Geiger, 1965).
- Bromwich, T. G., 1916:** On normal coordinates in dynamical systems. *Proc. Lond. Math. Soc.* 2, 15, 401.
- Bruckler, L. y R. Renault y F. Arier, 1987:** Laboratory estimation

- of apparent soil thermal conductivity using a numerical approach. *Soil Sci.*, 143, 387-397.
- Brünt, D.**, 1941: *Physical and Dynamical Meteorology*, 2d. ed. Cambridge, University Press. New York.
- Burgos, J. J.**, 1963: *Las heladas en la Argentina*. Colección científica del I.N.T.A.
- Businger, J. A., J. C. Wyngaard, Y. Izumi y E. F. Bradley**, 1971: Flux profile relationships in the atmospheric surface layer. *J. Atmos. Sci.*, 28, 181-189.
- Calder, K.L.**, 1965: On the equation of atmospheric diffusion, *Quart. J. R. Met. Soc.*, 91, 514-517.
- Carslaw, H. S. y J. C. Jaeger**, 1948: *Operational methods in Applied mathematics*. Oxford.
- Carslaw, H. S. y J. C. Jaeger**, 1959: *Conduction of heat in solids*. 2da. Ed. Oxford University Press.
- Celemín, A. H.**, 1984: *Meteorología Práctica*, Edición del Autor.
- Cellier, P.**, 1993: An operational model for prediction minimum temperatures near the soil surface under clear sky conditions. *J. Appl. Met.*, 32, 5, 871-883.
- Cellier, P.**, 1991: La prévision des gelées de printemps. *C.R. Acad. Agric. Fr.*, 77, N° 6, 55-64.
- Cellier, P. y B. Itier**, 1984: Un modèle de prévision de la température minimale nocturne sous abri et a la surface du sol en conditions de gelées radiatives. *J. Rech. Atmos.*, 18, N° 1, 11-22.
- Clarke, R. H., A. J. Dyer, R. R. Brook, D. Reid y A. J. Troup**, 1971: The Wangara experiment. *Boundary-layer data Pap. N° 19*, Div. Meteor. Phys., CSIRO, Australia.
- Cowling, T.G. y A. White**, 1949: The eddy diffusivity and the temperature of the lower layer of the atmosphere. *Quart. J. R. Met. Soc.*, 76, 276-285.
- Czepa, O., y H. Reuter**, 1950: Uber den Betrag der effktiven Ausstrahlung in Bodennahe bei Klarem Himmel, *Arch. J. Met (B)* 2, 250 - 258 (citado por Geiger, 1965).
- Damario, E. A. y A. J. Pascale**, 1994: Disminución de la amplitud térmica en la Argentina. VI Reunión Argentina de Agrometeorología, 75-76.
- de Garin, A., S. Golberg, J. Gardiol y N. Mazzeo**, 1983: Método para la obtención del perfil vertical de la velocidad del viento en la capa de superficie atmosférica a partir de observaciones meteorológicas convencionales, *Meteorologica*, Vol. XIV No. 1 y 2, 723.

- de Vries, D. A., 1963:** Thermal properties of soils. In Physics of plant environment, W. R. Van Wijk, (Ed.) North Holland Publ. Co., Amsterdam, 210-235.
- Deacon, E. L., 1983:** World Survey of Climatology, Vol. 2, General Climatology 2, Bonn 2 ed.
- Donaldson, Coleman duP., 1973:** Construction of a dynamic model of the production of atmospheric turbulence and the dispersal of atmospheric pollutants. Workshop on Micrometeorology A.M.S..
- Fox, D., 1981:** Judging air quality model performance: A summary of the A.M.S. Workshop on Dispersion model Performance. Bull. Am. Meteorol. Soc., 62, 599-609.
- Frost, R., 1947:** Meteorological Mag., Vol. 76, 14 (citado por Sutton, 1977).
- Geiger, R., 1965:** The climate near the ground, Massachusetts, 3 ed
- Gerbier, N. y R. Pédeau, 1974:** Contribution a l'étude des gelées. Notice d'informations techniques, Météorologie nationale (Ed) Section VIII, Piece No. 21,25.
- Georg, J. G., 1970:** An objective minimum temperature forecasting technique using the economical net radiometer. J. Appl. Meteorol., 9, No. 4, 711-713.
- Gröen, P., 1947:** Note on the theory of nocturnal radiational cooling of the earth's surface. J. Met., 4, 63-68.
- Hagood, L. B., 1967:** An empirical method for forecasting radiation temperatures in the Lower Rio Grande Valley of Texas, Southern Regional Technical Memo., 33, National Weather Service (citado por W.M.O. 1978)
- Hocevar, A. y J. D. Martsolf, 1971:** Temperature distribution under radiation frost conditions in a central Pennsylvania valley. Agr. Meteorol. 8, 371-383.
- Hoinkes, H. y N. Untersteiner, 1953:** Wärmeumsatz u. Ablation auf Alpengltschern I. Ebenda, 34, 99-158 (citado por Geiger, 1965).
- Holtzlag, A. A. y A. P. Van Ulden, 1983:** A simple scheme for daytime estimates of the surface fluxes from routine weather data. J. Climate and Appl. Met., 22, 4, 517-529.
- Horst, T. W., 1979:** Lagrangian Similarity of vertical diffusion from a Gaussian plume, Atmos. Env., 11, 41-46.
- Irwin, J. S., 1983:** Estimating Plume dispersion - A comparison of several sigma schemes, J. Climate and Appl. Met., 22, 92-114.
- Irwin, J. S., 1979:** A theoretical variation of the wind profile power law exponent as a function of surface roughness and stability. Atmos. Env., 13, 191-194.
- Jaeger, J.C., 1945:** Note on the effect of wind on nocturnal.

- Quart. J. R. Met. Soc., 71, 388-390.
- Johnson, N.K.**, 1929: in Geophys. Mem. 46 (citado por Sutton, 1977).
- Johnson, N.K. y G. S. Heywood**, 1938: in Geophys. Mem. 77 (citado por Sutton, 1977).
- Kampe de Feriet, J.**, 1974: Turbulent atmospheric diffusion the first twenty-five years, 1920-1945; Advances in Geophysics 18.A.
- Knighting, E.**, 1950: A note on nocturnal cooling. Quart. J. Roy. Meteorol. Soc., 76, 173-181.
- Kondo, J., y S. Hagiya**, 1985: Observational study on the transitional boundary layer. J. Met. Soc. Japan, 60, 461-471.
- Kraus, H.**, 1958: Untersuchungen uber den nachtlischen Energietransport und Energiehaushalt in der bodennahen Luftschicht bei der Bildung von Strahlungsnebeln. Ber. DWD 7 No. 48 (citado por Geiger, 1965).
- Lettau, H. y Ben Davidson**, 1957: Exploring the atmosphere's first mile. Vol II. Geophysics Research Directorate. Symposium Publications Division.
- Levitt, J.**, 1972: Responses of Plants to Environmental Stresses. Academic Press. New York and London.
- Luikov, A. V.**, 1968: Analytical heat diffusion theory. Academic Press. New York and London.
- Mahrt, L.**, 1983: Atmospheric boundary layers. Rev. Geophys. Space Phys. 21, 5, 1042-1048.
- Mahrt, L., R. C. Heald, D. H. Lenschow, B.B. Stankov, IB Troen**, 1979: An observational study of the structure of the nocturnal boundary layer. Bound. Lay. Met., 17, 247-264.
- Melgarejo, J. W. y J. W. Deardorff**, 1975: Revision to "Stability functions for the boundary layer resistance laws based upon observed boundary-layer heights". J. Atmos. Sci., 32, 837-839.
- Moller, F.**, 1955: Strahlungsvorgange in Bodennahe. Z. f. Met. 9, 47-53 (citado por Geiger, 1965).
- Monin A. S. y A. M. Obukhov**, 1954: Dimensionless characteristics of turbulence in the atmospheric surface layer. Dokl. Akad. Nank. SSSR 93, 223-226.
- Monteith, J. L.**, 1957: Dew. Quart. J. R. Met. Soc., 83, 322-341
- Oke, T. R.**, 1983: Boundary Layer Climates. Halsted Press, New York.
- Oke, T. R.** 1970: The temperature profile near the ground on calm clear night. Quart. J. R. Met. Soc., 96, 14-23.
- Panofsky, H. y J. Dutton**, 1984: Atmospheric turbulence, models and methods for engineering applications. John Wiley & Sons New

York.

- Pasquill, F., 1943:** Evaporation from a plane, free-liquid surface into a turbulent air stream. Proc. Roy. Soc.(A), 182, 75.
- Paulson C. A., 1970:** The mathematical representation of wind and temperature profiles in the unstable atmospheric surface layer. J. Appl. Met., 9, 857-861.
- Rao, K. S. y H. F. Snodgrass, 1979:** Some parameterizations of the nocturnal boundary layer. Bound. Layer Meteor., 17, 15-28.
- Reuter, H., 1951:** Forecasting Minimum Temperatures. Tellus, 3, No. 3., 141-147
- Reynolds, O., 1895:** On the dynamical Theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterion. Phil. Trans. Roy. Soc., London, 186
- Scarth, G. W., y J. Levitt, 1937:** The frost-hardening mechanism of plant cells. Pl. Physiol., 12. 51-78.
- Spain, B., y M. G. Smith, 1970:** Functions of mathematical physics. Van Nostrand Reinhold Company, London.
- Spiegel Murray R., 1965:** Theory and problems of Laplace Transforms. Schaum Publishing Company, New York.
- Stern, A., R. Boubel, B. Turner y D. Fox, 1984:** Fundamentals of air pollution, 2<sup>nd</sup> edition, Academic Press. Inc., London.
- Stull, R. B., 1989:** An introduction to boundary layer Meteorology. 2er. ed. Atmospheric Sciences Library, U.S.A.
- Stull, R., 1983:** A heat-flux history length scale for the nocturnal boundary layer. Tellus 35A, 219-230.
- SurrIDGE, A. D., 1986 (A):** The evolution of the nocturnal temperature inversion. Bound. Layer Meteorol. 36, 295-305.
- SurrIDGE, A. D., 1986 (B):** Extrapolation of the nocturnal temperature inversion from ground-based measurements. Atmosp. Env., 20, 4, 803-806.
- SurrIDGE, A. D., 1979:** Acoustic sounder operation in Christchurch, New Zealand in 1978, N.Z.J. Sci. 82, 77-86.
- Sutherland, 1980:** A short-range objective nocturnal temperature forecasting model. J. Appl. Met., 19, 247-255.
- Sutton, O. G., 1977:** Micrometeorology. McGraw-Hill Book Company.
- Sutton, O. G., 1934:** Wind structure and evaporation in a turbulent atmosphere. Proc. R. Soc. (A), 146-701.
- Sverdrup, H. U., 1936:** Austausch u. Stabilität in der untersten Luftschicht. Met. Z. 53, 10-15 (citado por Geiger, 1965).
- Ventskevich, G. Z., 1958:** Agrometeorology. Translated from Russian by the Israel Program for Scientific Translation for National Science Foundation. OTS 60-51044, 1961.



- Whiteman, T. M., 1957:** Freezing points of fruits, vegetables, and florist stocks. U. S. Dept. of Agr. Marketing Res. Report No. 196. 32.
- Willmott, C. J., 1982:** Some comments on the evaluation of model Performance. Bull. Am. Meteorol. Soc. 66, 1309-1313.
- Willmott, C. J. y D. E. Wicks, 1980:** An empirical method for the spatial interpolation of monthly precipitation within California. Phys. Geogr. 1, 59-73.
- W.M.O., 1978:** Techniques of frost prediction and methods of frost and cold protection. Technical Note N° 157. World Meteorological Organization.
- Wyngaard, 1975:** Modeling the planetary boundary layer-Extension to the stable case. Bound. Lay. Met., 9, 441-460.
- Yamada, T., 1978:** Prediction of the nocturnal surface inversion height. J. Appl. Met., 18, 526-531.
- Young, F.D., 1940:** Frost and the prevention of frost damage. U.S. Dept. Agriculture. Farmers' Bulletin No. 1588, 66 pp.

**TABLA II.I: Resistencia de algunos cultivos a la helada en diferentes fases del desarrollo (Ventskevich, 1958).**

Cultivos	Temperatura de daño (por debajo de 0°C)		
	Germinación	Floración	Fruto
Trigo	9-10	1-2	2-4
Haba	5-6	2-3	3-4
Soja	3-4	2-3	2-3
Maíz	2-3	1-2	2-3
Tabaco	0-1	0-1	0-1

**TABLA II.II: Temperaturas críticas de algunos frutales (Young, 1940).**

Frutal	En descanso	Yema cerrada	En flor	Frutos chicos
Durazno	-34.4 °C	-3.9 °C	-2.8 °C	-1.1 °C
Ciruela	-34.4 °C	-3.4 °C	-2.2 °C	-1.1 °C
Pera	-28.9 °C	-3.9 °C	-2.2 °C	-1.1 °C
Manzano	-34.4 °C	-3.9 °C	-2.2 °C	-1.7 °C
Viña	-15.0 °C	-1.1 °C	-0.6 °C	-0.6 °C

**TABLA II.III: Temperatura de congelamiento de algunos frutos y vegetales (Whiteman, 1957).**

Cultivo	Temperatura de enfriamiento (°C)	
	más baja	más alta
Manzana, Jonathon	-2,5	-1,9
Banana, Guatemala	-1,1	-1,1
Naranja, Jaffa	-3,2	-1,5
Mango, Keitt	-2,0	-1,4
Poroto	-1,2	-0,8
Tomate	-0,9	-0,5

**TABLA VII.I:** Valores de  $\lambda_h$  ( $m^2/h$ ) derivados del análisis de la onda diurna de temperatura (para días claros) Best (1935).

Período	0,025-0,3 m	0,3-1,2 m	1,2-7,1 m	7,1-17,1 m
Junio	0,36	14,04	183,6	1476
Marzo	0,97	10,44	471,6	2448

**TABLA VIII.I:** Valores medios de velocidad del viento y de nubosidad entre las 21 hs. hasta las 8 hs. correspondientes al experimento "Wangara" (Clarke y otros, 1971).

Nº. DE DIA	VELOCIDAD DEL VIENTO MEDIA A 8 METROS DE ALTURA	NUBOSIDAD MEDIA	
	[m/s]	CANTIDAD [octavos]	TIPO
1	5,00	5	As, Ci
6	3,35	3	Cs, Ci
7	3,00	0	
12	3,62	0	
13	3,55	2	Ci
31	2,57	0	
32	2,67	0	
33	3,72	0	

**TABLA VIII.II:** Valores medios de velocidad del viento y nubosidad entre las 20 hs. 30 min. y 6 hs. 30 min. correspondientes al experimento "Great Plains" (Lettau y Davidson, 1957).

DIA	VELOCIDAD DEL VIENTO MEDIA A 6,4 METROS	NUBOSIDAD MEDIA	
	[m/s]	CANTIDAD [octavos]	TIPO
18/8	3,6	4	Ci, Ac
24/8	7,9	0	
31/8	6,4	0	
7/9	5,4	0	

**TABLA VIII.III:** Nubosidad y velocidad del viento correspondientes a las noches del experimento "Wangara", y características de la atmósfera a las 09 hs del día siguiente de la experiencia.

Día	Nubosidad	Velocidad del viento a 8 metros de altura	Características de la atmósfera a las 9 hs del día siguiente de la experiencia	Observaciones
1	ver Figura X.1.b)	ver Figura X.1.a)	Un frente frío se encuentra a 43 km al SW de Hay	Seleccionado
2	Cielo cubierto desde las 21 hasta las 24 con As, con Cb menos de 1/8 de nubes bajas. A las 02 hs. 3/8 de Cu.	> 6m/s hasta las 01 hs.	Entre las 9 hs del día 2 y las 9 hs del día 3 pasó un frente frío sobre Hay. Se encuentra el frente a 30 km al ENE de Hay	No seleccionado, por tener cielo cubierto en las primeras horas y con nubes bajas
3	Lluvia entre las 21 y 24 hs, con más de 4/8 de nubes bajas y Cb. a las 23 hs.	> 5 m/s	Un centro de alta presión ubicado a 120 km al NW de Hay	No seleccionado, por la ocurrencia de lluvia
4	Nubes bajas tipo Sc aprox. con 7/8 de cielo cubierto durante la noche, con Cb a las 05 hs.	< 3 m/s durante la noche.	Un centro de alta presión a 30 km al NW de Hay y un frente frío a 40 km al WSW de Hay	No seleccionado, por tener más de 1/8 de nubes bajas:
5	A las 21 hs 5/8, de nubes bajas, disminuyendo a 1/8 a las 03 hs, tipo Cu, y niebla desde las 06 hs.	< 2 m/s	Un centro de alta presión en Hay	No seleccionado, por tener más de 1/8 de nubes bajas.
6	ver Figura X.2.b)	ver Figura X.2.a)	Un frente frío se encuentra a 60 km al SW de Hay existiendo un centro de alta presión a 60 km al NE	Seleccionado
7	ver Figura X.3.b)	ver Figura X.3.a)	Un frente frío a 6 km al W de Hay	Seleccionado
8	Entre las 18 y 01 hs. Cb, con 7/8 de nubes bajas, llovizna entre las 23 y 24 hs.	> 2 m/s	Un centro de alta presión ubicado a 20 km al NNW de Hay y un frente frío a 100 km al W de Hay	No seleccionado, debido a la ocurrencia de lluvia

9	Después de las 01 hs aumenta la nub. baja más de 3/8, con cielo cubierto de Ac y Sc.	> 3 m/s	un frente frío, ubicado a 60 km al W de Hay	No seleccionado, debido a la presencia de más de 1/8 de nubes bajas
10	Aumenta la nub. baja a 6/8 después de las 02 hs. y cielo cubierto	> 2 m/s	Entre las 9 hs del día 10 y las 9 hs del día 11 pasó un frente frío sobre Hay, ubicándose el frente a 60 km al SE de Hay	No seleccionado, por la presencia de nubosidad durante toda la noche
11	Luego de las 21 hs sin nubes bajas	> 4 m/s	Un centro de alta presión a 60 km al S de Hay	No seleccionado, faltan datos entre las 03 y 04 hs. Ver Figura IX.5 ( $\bar{m} > 1$ )
12	Sin nubosidad	ver Figura X.4.a)	Un centro de alta presión a 90 km al S de Hay	Seleccionado
13	ver Figura X.5.b)	ver Figura X.5.a)	Se encuentra un frente frío a 90 km al W de Hay	Seleccionado
14	A las 04 hs Cb, con 5/8 de nubes bajas, llueve entre las 05 y 07 hs.	> 5 m/s	Entre las 9 hs del día 14 y las 9 hs del día 15 pasó un frente frío sobre Hay, ubicándose a 10 km al E	No seleccionado, debido a la ocurrencia de lluvia
15	Entre las 21 y 1 hs disminuye de 4/8 a 0,5 octavos de nubes bajas, a las 05 hs Cb. luego 2/8 de nubes bajas toda la noche	> 3 m/s	Un frente frío se encuentra a 90 km al WSW de Hay	No seleccionado, por la presencia de nubes bajas durante la noche
16	Entre las 02 hs y 07 hs aumenta la nubosidad baja de 1/8 a 6/8 y a las 07 hs llueve en los alrededores	Velocidad del viento entre 2 y 4 m/s	Un frente frío a 10 km al W Hay	No seleccionado, debido que existe más de 1/8 de nubes bajas
17	Llueve entre las 15 hs y 18 hs., también entre las 22 y 24 hs con cielo cubierto	Después de las 23 hs es > 7 m/s	Entre las 9 hs del día 17 y las 9 hs del día 18 pasó un frente frío sobre Hay, ubicándose a 100 km al E	No seleccionado, por la ocurrencia de lluvia

18	Entre las 17 hs y 21 hs disminuye de 4 a 0,4 octavos de nubes bajas, luego cielo sin nubosidad	entre 3 m/s y 5 m/s durante la noche	Un frente frío a 120 km al W, y una cuña sobre Hay	No seleccionado, ver Figura IX.5 ( $\bar{m} > 1$ )
19	Entre las 05 hs y 10 hs, 7/8 de nubes bajas tipo Sc.	< 2 m/s	Un frente frío a 80 km a W de Hay y un centro de alta presión a 60 km al NE de Hay.	No seleccionado, por estar el cielo cubierto de nubosidad.
20	Toda la noche aproximadamente 4/8 de nubes bajas y nubosidad total de 6/8 a 7/8 durante la noche	> 4 m/s	Un frente frío a 30 km al W de Hay.	No seleccionado, por estar el cielo cubierto
<b>Desde las 13 hs del día 21 se realizaron mediciones</b>			<b>hasta las 14 hs del día 25 no</b>	
25	Durante toda la noche más de 7/8 de nubes medias y altas tipo Ac y Cs.	> 2 m/s	Un centro de alta presión a 60 km al N y un frente frío a 100 km al W de Hay	No seleccionado, por cielo cubierto
26	A las 02 hs 3/8 de nubes bajas, llueve entre las 05 a 07 hs	> 3 m/s	A las 9 hs del día 27 existe un frente frío sobre Hay	No seleccionado, por la ocurrencia de lluvia
27	Entre las 18 y 19 hs existe Cb, 1,4 octavos de nubes bajas (llovió entre las 14 y 15 hs)	> 5 m/s	Una cuña sobre Hay y a 60 km al SW un frente frío	No seleccionado, por la ocurrencia de lluvia en las primeras horas de la tarde
28	Entre las 17 y 19 hs llueve a los alrededores de Hay, con más de 2/8 de nubes bajas toda la noche y Cb después de las 03 hs	> 4 m/s	Un frente frío a 40 km a SW de Hay	No seleccionado, por la ocurrencia de lluvia
29	Entre las 18 y 01 hs aumenta de 2,8 a 4,3 octavos de nubes bajas, tipo Sc, llueve a las 03 hs con Cb.	Entre las 21 y 01 hs la veloc. del viento es mayor que 6 m/s luego disminuye a valores menores que 4 m/s	Entre las 9 hs del día 29 y las 9 hs del día 30 pasó un frente frío sobre Hay, ubicándose a 12 km al NE de Hay	No seleccionado, por la ocurrencia de lluvia

30	Entre las 18 y 19 hs existe Cb, y después de las 23 hs despejado	Entre las 22 y 02 hs, vel. viento > 5 m/s	Un centro de alta presión a 130 km al W de Hay	No seleccionado, ver Figura IX.5 ( $\bar{m}>1$ )
31	ver Figura X.6.b)	ver Figura X.6.a)	Un centro de alta presión a 55 km al WSW de Hay	Seleccionado
32	ver Figura X.7.b)	ver Figura X.7.a)	Un centro de alta presión a 40 km al S de Hay	Seleccionado
33	noche sin nubosidad	ver Figura X.8.a)	Un centro de alta presión a 90 km al SE y un frente frío a 100 km al W de Hay	Seleccionado
34	A las 22 hs existe Cb, con más de 2/8 de nubes bajas a las 24 hs tipo Sc, después de las 05 hs cielo despejado	> 8 m/s después de las 05 hs.	Disminuye la presión en Hay, un centro de alta presión a 100 km al S de Hay	No seleccionado, por cielo cubierto casi toda la noche
35	Entre las 17 hs y 02 hs lluvia y tormenta		Una vaguada sobre Hay	No seleccionado, por la ocurrencia de lluvia
36	Entre las 19 hs y 20 hs tormenta, y a las 03 hs la nub. baja es de 4/8 y aumenta a 8/8 a las 06 hs.		Un centro de baja presión a 40 km al SE de Hay	No seleccionado, por la ocurrencia de lluvia
37	LLueve entre las 18 y 19 hs, luego a las 01 hs, luego con cielo cubierto.		Existe un centro de baja presión a 80 km al SE y un centro de alta presión a 86 km al W de Hay	No seleccionado, por la ocurrencia de lluvia
38	LLueve a las 18 hs, con 7/8 de nubes bajas, con Cb a las 20 hs disminuyendo a 0,4 octavos después de las 24 hs.	vel. del viento entre 4 y 5 m/s	un frente frío a 90 km al NNW de Hay	No seleccionado, por la ocurrencia de lluvia.
39	Entre las 18 y 21 hs 2/8 de nubes bajas, entre las 01 y 03 hs existe 6 a 7/8 de nubes media tipo Ac.	< 0,6 m/s a las 21 hs.	Un frente frío a 35 km al W de Hay y un centro de alta presión sobre Hay	No seleccionado, pues la nubosidad afecto a $F_n$ significat. entre las 01 y 03 hs

40	Toda la noche entre 3/8 y 4/8 de nubes bajas, con nubosidad total más de 7/8	> 3 m/s	Un frente frío a 40 km al SW de Hay	No seleccionado, por estar el cielo cubierto
41	A las 21 hs tormenta, de 04 a 07 hs existe 1,8 octavos de nubes bajas y de 4/8 y 6/8 de nubosidad total	> 2 m/s	un frente frío a 90 km al W de Hay y una cuña en Hay	No seleccionado, por la existencia de nubosidad que afecta a F <sub>n</sub>
42	Sin nubosidad hasta las 06 hs de 2,6 octavos de nubes bajas	> a 6 m/s después de las 04 hs.	Un frente frío cerca de Hay	No seleccionado, no hay dato de F <sub>n</sub> hasta las 02 hs
43	A las 18 hs llueve, después de las 03 hs. cielo sin nubosidad	A las 24 hs > 10 m/s, y a las 03 hs es > 7 m/s	Entre las 9 hs del día 42 y las 9 hs del día 43 paso un frente frío sobre Hay, ubicándose a 80 km a E de Hay	No seleccionado, debido a que ocurre velocidades elevadas de viento.



**TABLA IX.I.a:** Valores de radiación neta ( $F_n$ ) observados para el experimento "Wangara" en  $mW/cm^2$

Hora	día 1	día 6	día 7	día 12
17	-6.3	-2.5	-5.6	-5.2
18	-7.9	-8.2	-8.1	-7.6
19	-8.1	-7.9	-7.7	-7.3
20	-7.7	-8.0	-7.0	-6.7
21	-6.8	-7.8	-6.7	-6.7
22	-6.9	-7.8	-6.7	-7.0
23	-6.4	-7.3	-6.4	-6.6
24	-5.7	-7.2	-6.5	-6.4
01	-5.3	-7.4	-6.4	-6.3
02	-5.8	-7.1	----	-6.2
03	-5.9	-6.8	-6.0	-6.2
04	-6.1	-6.2	-5.9	-6.2
05	-6.0	-5.8	-5.4	-5.9
06	-5.9	-5.7	-5.5	-5.9
07	-5.6	-5.6	-5.4	-6.0
08	-4.1	-0.8	-0.9	0.2
09	5.4	12.0	11.8	14.0
Hora	día 13	día 31	día 32	día 33
17	-5.2	0.7	1.1	-4.0
18	-7.9	-9.0	-8.3	-9.4
19	-7.4	-8.9	-7.1	-9.2
20	-7.2	-8.1	-7.8	-9.0
21	-6.9	-7.8	-8.1	-8.4
22	-6.6	-7.9	-8.0	-7.8
23	-6.6	-7.3	-7.6	-7.5
24	-6.7	-7.3	-7.6	-7.5
01	-6.6	-7.4	-7.7	-7.4
02	-6.6	-7.3	-7.6	-7.3
03	-6.6	-7.4	-7.4	-7.4
04	-6.3	-6.8	-7.3	-7.5
05	-6.4	-6.7	-7.2	-7.6
06	-5.8	-7.0	-7.0	-7.4
07	-5.2	-6.7	-5.8	-7.0
08	-0.4	3.8	3.5	6.6
09	11.7	16.2	16.8	17.8

**TABLA IX.I.b:** Valores de radiación neta ( $F_n$ ) observados para el experimento "Great Plains" en  $mW/cm^2$

Hora	día 18/8	día 24/8	día 31/8	día 7/9
18:35	-2.10	-2.10	-4.18	-4.88
20:35	-4.88	-4.88	-6.28	-6.97
22:35	-4.88	-4.18	-5.58	-5.58
0:35	-4.88	-6.28	-5.58	-5.58
2:35	-4.88	-5.58	-5.58	-4.88
4:35	-4.18	-6.28	-4.88	-4.88
6:35	-2.10	-2.79	-2.79	-3.48
8:35	26.50	23.70	20.92	14.65

**TABLA IX.II:** Valores normalizados de la conductividad térmica ( $K_s$ ) y capacidad calórica por unidad de volumen  $(\rho_s C_s)_m$ , de la capa de superficie del suelo (Cellier, 1993).

Condición del suelo	Evento meteorológico	$\frac{K_s}{K_{scc}}$	$\frac{(\rho_s C_s)_m}{(\rho_s C_s)_{mcc}}$
suelo saturado	importante lluvia en días previos	1.0	1.0
suelo húmedo	superficie no libre de agua	0.9	0.9
suelo seco	tres días o más sin lluvia	0.5	0.6
suelo muy seco	cinco días o más sin lluvia	0.3	0.5

**TABLA IX.III: Valores observacionales del experimento "Wangara"**  
donde:  $u_{0,5}$  es la velocidad del viento a 0,5 m. de altura;  $u_1$  es la velocidad del viento a 1 m. y  $u_4$  es la velocidad del viento a 4 m.;  $\Delta T_1$  la diferencia de temperatura entre 2 y 1 metros de altura;  $\Delta T_2$  la diferencia de temperatura entre 4 y 2 metros de altura;  $T_c$  es la temperatura en el abrigo meteorológico.

Día	Hora	$u_{0,5}$	$u_1$	$u_4$	$\Delta T_1$	$\Delta T_2$	$T_c$
		m/s	m/s	m/s	°C	°C	°C
1	18	1.65	1.99	3.01	0.33	0.62	11.9
1	19	1.75	2.06	3.10	0.17	0.44	10.6
1	20	1.38	1.65	2.98	0.16	0.60	9.6
1	21	1.69	2.03	3.00	0.21	0.48	9.2
1	22	2.29	2.63	3.55	0.16	0.32	8.3
1	23	2.65	2.94	3.80	0.16	0.26	8.1
2	0	2.94	3.29	4.23	0.17	0.24	7.7
2	1	2.62	2.95	3.82	0.14	0.24	7.3
2	2	2.62	2.99	3.82	0.34	0.23	6.9
2	3	2.86	3.20	4.05	0.34	0.21	6.1
2	4	3.08	3.43	4.31	0.33	0.20	6.0
2	5	3.23	3.59	4.50	0.32	0.19	5.8
2	6	3.51	3.88	4.81	0.31	0.17	5.6
2	7	4.23	4.57	5.58	0.30	0.15	5.0
2	8	4.59	5.06	6.15	0.28	0.12	6.0
6	18	1.13	1.38	2.44	0.51	0.64	12.0
6	19	1.19	1.42	2.38	0.51	0.58	8.6
6	20	0.85	1.08	1.99	0.58	0.62	7.8
6	21	1.25	1.47	2.51	0.56	0.57	5.9
6	22	1.83	2.04	2.91	0.38	0.44	5.1
6	23	1.11	1.28	2.16	0.57	0.58	4.3
7	0	1.84	2.13	3.01	0.44	0.47	3.5
7	1	2.61	2.90	3.76	0.38	0.33	4.2
7	2	1.21	1.49	2.21	0.28	0.62	3.4
7	3	0.98	1.16	1.99	0.38	0.82	2.3
7	4	1.04	1.21	2.04	0.51	0.84	1.5

7	5	1.39	1.58	2.36	0.17	0.63	0.6
7	6	1.18	1.36	2.20	0.28	0.60	0.6
7	7	1.06	1.23	2.34	0.31	99.99	0.6
7	8	2.30	2.59	3.37	0.31	0.06	4.1
7	18	0.89	1.23	2.33	1.28	1.38	12.9
7	19	0.90	1.20	2.30	1.44	1.41	9.3
7	20	0.75	1.02	2.42	0.84	1.89	7.5
7	21	0.89	1.17	2.36	0.94	1.51	6.7
7	22	0.61	1.02	1.87	0.84	99.99	7.2
7	23	1.05	1.31	2.56	0.82	1.69	5.5
8	0	1.31	1.60	2.64	0.45	0.88	5.5
8	1	0.72	1.04	2.03	1.10	1.26	4.4
8	2	99.99	99.99	99.99	99.99	99.99	4.0
8	3	1.13	1.37	2.48	0.42	1.04	3.6
8	4	0.93	1.15	2.20	0.68	1.22	3.4
8	5	0.99	1.15	2.21	0.36	0.86	2.8
8	6	0.96	1.17	2.26	0.43	1.13	2.6
8	7	1.38	1.66	2.50	0.30	0.48	3.3
8	8	1.10	1.27	1.88	0.09	0.16	3.6
12	18	1.28	1.54	2.49	0.34	0.45	11.8
12	19	1.73	2.02	2.90	0.34	0.39	10.5
12	20	1.68	1.99	2.81	0.27	0.29	8.8
12	21	1.97	2.30	3.10	0.24	0.22	8.1
12	22	2.20	2.51	3.30	0.24	0.20	7.9
12	23	1.83	2.09	2.84	0.24	0.21	6.8
13	0	1.93	2.21	2.94	0.23	0.19	5.8
13	1	2.69	3.02	3.83	0.27	0.20	6.2
13	2	1.97	2.30	2.99	0.34	0.35	6.0
13	3	1.83	2.14	2.92	0.41	0.45	6.1
13	4	1.15	1.37	1.99	0.38	0.35	5.1
13	5	1.44	1.66	2.51	0.32	0.35	3.9
13	6	1.62	1.96	2.78	0.34	0.33	3.9
13	7	1.70	2.02	2.79	0.19	0.47	2.9
13	8	2.36	2.66	3.24	0.14	0.02	4.3
13	18	1.14	1.42	2.29	0.64	0.64	12.8
13	19	0.63	0.92	1.98	0.68	0.59	10.4
13	20	1.10	1.34	2.36	0.50	0.57	8.2
13	21	1.34	1.62	2.41	0.46	0.57	7.4
13	22	1.03	1.23	2.22	0.58	0.63	7.3

13	23	1.32	1.53	2.36	0.39	0.62	5.3
14	0	1.27	1.53	2.46	0.42	0.54	4.9
14	1	1.73	2.00	2.90	0.34	0.39	4.4
14	2	1.68	1.91	2.70	0.34	0.35	3.9
14	3	2.13	2.36	3.25	0.31	0.33	3.9
14	4	1.29	1.51	2.38	0.39	0.49	3.6
14	5	1.16	1.36	2.30	0.34	0.54	3.6
14	6	2.39	2.73	3.71	0.29	0.42	5.4
14	7	1.64	1.87	2.72	0.18	0.39	3.8
14	8	1.88	2.11	2.76	0.19	0.10	4.9
31	18	3.05	3.38	4.23	0.08	0.12	10.5
31	19	1.68	1.98	2.79	0.24	0.24	8.1
31	20	0.76	0.97	1.81	0.24	0.52	5.8
31	21	0.98	1.19	2.28	0.38	0.87	4.9
31	22	0.92	1.14	1.94	0.44	0.56	4.4
31	23	1.15	1.37	2.28	0.27	0.57	3.3
32	0	1.39	1.64	2.53	0.20	0.32	3.2
32	1	1.99	2.33	3.16	0.14	0.24	3.1
32	2	1.16	1.41	2.17	0.40	0.37	2.7
32	3	0.93	1.11	1.84	0.18	0.33	1.2
32	4	0.49	0.56	0.91	0.57	0.68	0.6
32	5	0.48	0.61	0.99	0.59	1.00	0.6
32	6	0.87	1.04	1.89	0.38	0.80	0.2
32	7	0.60	0.74	1.38	0.35	0.37	0.1
32	8	1.46	1.63	1.95	-0.10	-0.05	2.2
32	18	1.86	2.10	2.75	0.14	0.16	11.4
32	19	1.67	1.95	2.71	99.99	0.25	8.9
32	20	1.24	1.46	2.20	0.26	0.32	7.7
32	21	1.26	1.47	2.19	0.26	0.33	5.4
32	22	1.15	1.35	2.24	0.33	0.43	4.0
32	23	0.86	1.05	2.00	0.50	0.39	3.3
33	0	1.02	1.24	2.24	0.44	0.57	2.8
33	1	1.17	1.39	2.33	0.39	0.53	2.2
33	2	1.59	1.87	2.76	0.32	0.35	2.2
33	3	1.47	1.72	2.53	0.29	0.33	1.7
33	4	1.18	1.39	2.17	0.14	0.34	0.6
33	5	0.41	0.56	1.17	0.25	0.32	-0.3
33	6	0.19	0.27	0.66	0.34	0.29	-0.3

33	7	99.99	99.99	0.32	0.47	0.44	-0.4
33	8	1.03	1.11	1.28	-0.12	-0.07	0.9
33	18	0.97	1.23	2.71	0.47	0.52	12.3
33	19	1.45	1.71	2.76	0.29	0.57	8.1
33	20	1.09	1.32	2.10	0.57	0.62	6.8
33	21	1.19	1.44	2.39	0.52	0.58	5.6
33	22	0.87	1.07	1.95	0.64	0.59	4.3
33	23	1.24	1.45	2.49	0.57	0.62	2.8
34	0	1.31	1.51	2.39	0.34	0.55	2.6
34	1	1.17	1.40	2.22	0.41	0.57	1.9
34	2	1.19	1.42	2.29	0.29	0.77	1.1
34	3	1.37	1.60	2.47	0.30	0.79	2.0
34	4	1.03	1.24	2.11	0.35	0.72	1.4
34	5	1.24	1.47	2.36	0.35	0.78	0.2
34	6	2.37	2.68	3.46	0.14	0.34	1.4
34	7	3.88	4.41	5.96	0.14	0.45	0.3
34	8	3.01	3.01	3.36	0.00	-0.14	2.2

\*\*observación: el valor 99.99 indica que falta dato

**TABLA IX.IV:** Valores de  $u^*T^*$ ,  $\chi_a$  y  $m$ , correspondientes al experimento "Wangara"

Día	hora	$u^*T^*$	$\chi_a$	$m$
		[m °K/h]	[m <sup>a</sup> /h]	
1	21	0.4147E+02	213.53	-.192
1	22	0.4608E+02	288.00	0.000
1	23	0.4662E+02	258.04	0.299
2	0	0.5576E+02	267.55	0.502
2	1	0.4439E+02	289.71	0.222
2	2	0.4774E+02	74.46	1.564
2	3	0.5386E+02	79.66	1.695
2	4	0.6052E+02	91.21	1.722
2	5	0.6545E+02	100.51	1.752
2	6	0.7110E+02	107.59	1.866
2	7	0.8302E+02	122.98	2.000

6	21	0.3501E+02	42.11	0.974
6	22	0.3531E+02	67.48	0.788
6	23	0.1612E+02	19.05	0.975
7	0	0.3459E+02	54.47	0.904
7	1	0.5051E+02	81.59	1.203
7	2	0.7448E+01	28.23	-.146
7	3	0.7729E+01	21.26	-.109
7	4	0.3183E+01	5.57	0.280
7	5	0.1830E+02	154.40	-.888
7	6	0.1899E+02	70.60	-.099
7	21	0.1614E+02	15.10	0.316
7	23	0.2622E+02	32.54	-.043
8	0	0.3430E+02	73.72	0.082
8	1	0.5119E+02	3.35	0.804
8	3	0.3364E+02	90.75	-.308
8	4	0.1256E+02	17.34	0.156
8	5	0.2800E+02	86.30	-.256
8	6	0.2510E+02	68.48	-.394
8	7	0.2439E+02	71.35	0.322
12	21	0.3261E+02	86.08	1.125
12	22	0.3531E+02	88.16	1.263
12	23	0.2711E+02	69.64	1.192
13	0	0.2694E+02	69.83	1.275
13	1	0.4540E+02	94.04	1.433
13	2	0.1865E+02	37.19	0.958
13	3	0.2294E+02	39.39	0.865
13	4	0.3202E+01	5.35	1.118
13	5	0.2728E+02	59.90	0.870
13	6	0.2828E+02	54.49	1.043
13	7	0.1625E+02	96.85	-.306
31	21	0.2995E+02	85.29	-.195
31	22	0.9947E+01	17.35	0.652
31	23	0.2456E+02	93.89	-.078
32	0	0.2739E+02	120.18	0.321
32	1	0.3186E+02	207.95	0.222
32	2	0.1451E+02	23.10	1.112
32	3	0.1281E+02	67.64	0.125
32	4	0.1845E+01	2.39	0.745
32	5	0.2300E+01	3.54	0.238

32	6	0.8878E+01	24.07	-.074
32	7	0.2570E+01	5.05	0.919
32	21	0.1632E+02	48.10	0.656
32	22	0.2381E+02	56.15	0.618
32	23	0.2014E+02	23.22	1.358
33	0	0.2628E+02	46.32	0.626
33	1	0.2634E+02	53.87	0.557
33	2	0.3285E+02	72.13	0.870
33	3	0.2494E+02	61.84	0.813
33	4	0.1851E+02	148.09	-.280
33	5	0.2550E+01	7.85	0.643
33	6	0.3607E+00	0.64	1.229
33	21	0.2487E+02	29.38	0.975
33	22	0.1092E+02	10.84	1.117
33	23	0.3357E+02	41.24	0.878
34	0	0.2482E+02	64.48	0.306
34	1	0.1489E+02	29.36	0.524
34	2	0.1805E+02	73.45	-.408
34	3	0.2006E+02	78.52	-.396
34	4	0.1544E+02	44.86	-.040
34	5	0.1896E+02	57.71	-.156
34	6	0.3726E+02	298.15	-.280
34	7	0.1292E+03	1218.43	-.684

**TABLA IX.V:** Valores medios de conductividad, capacidad calórica por unidad de volumen y difusividad térmica del suelo correspondientes al experimento " Great Plains "

día	$K_s$ [cal/m hs. °K]	$(\rho_s C_s)_m$ [cal/m <sup>3</sup> °K]	$\chi_s$ [m <sup>2</sup> /hs]
18/8	392,4	4 x 10 <sup>5</sup>	0,98x10 <sup>-3</sup>
24/8	273,6	4 x 10 <sup>5</sup>	0,68x10 <sup>-3</sup>
31/8	288,7	4 x 10 <sup>5</sup>	0,72x10 <sup>-3</sup>
7/9	260,7	4 x 10 <sup>5</sup>	0,65x10 <sup>-3</sup>



**TABLA IX.VI:** Valores observacionales del experimento "Great Plains" donde:  $u_{0,8}$  y  $T_{0,8}$  son la velocidad del viento y la temperatura del aire a 0,8 m. de altura;  $u_{1,6}$  y  $T_{1,6}$  son la velocidad del viento y la temperatura del aire a 1,6 m. y  $u_{3,2}$  y  $T_{3,2}$  son la velocidad del viento y la temperatura del aire a 3,2 m.,  $T_{6,4}$  temperatura a 6,4 metros;  $T_{0,1}$  es la temperatura del aire a 10 cm sobre el suelo.

día	hora	$T_{0,8}$	$T_{1,6}$	$T_{3,2}$	$T_{6,4}$	$u_{0,8}$	$u_{1,6}$	$u_{3,2}$	$T_{0,1}$
		°C	°C	°C	°C	m/s	m/s	m/s	°C
18/08	18:35	21.31	21.60	21.98	22.28	2.35	2.72	3.14	20.58
18/08	20:35	16.07	16.64	17.42	18.47	1.06	1.40	1.93	14.58
18/08	22:35	16.88	17.29	17.69	18.16	2.13	2.51	3.04	15.81
19/08	00:35	14.24	14.54	14.89	15.47	1.72	2.05	2.49	13.43
19/08	02:35	12.67	12.94	13.21	13.62	1.87	2.21	2.74	12.18
19/08	04:35	12.98	13.13	13.37	13.71	2.19	2.53	3.02	12.44
19/08	06:35	14.57	14.66	14.85	14.88	2.90	3.32	3.81	14.23
24/08	18:35	29.08	29.20	29.36	29.42	4.83	5.55	6.34	28.69
24/08	20:35	25.20	25.39	25.55	25.99	4.35	5.02	5.76	24.61
24/08	22:35	24.51	24.71	24.83	24.93	5.57	6.45	7.29	23.94
25/08	00:35	23.39	23.59	23.80	23.98	5.62	6.49	7.36	22.90
25/08	02:35	22.76	22.88	23.00	23.20	5.72	6.62	7.54	22.19
25/08	04:35	21.50	21.71	21.82	21.94	5.76	6.64	7.50	21.05
25/08	06:35	21.00	21.04	21.09	21.12	5.90	6.80	7.70	20.81
31/08	18:35	30.25	30.33	30.37	30.45	5.55	6.36	7.16	30.03
31/08	20:35	27.00	27.17	27.36	27.53	4.13	4.73	5.41	26.62
31/08	22:35	25.63	25.81	25.97	26.12	4.66	5.30	5.99	25.17
01/09	00:35	24.86	24.98	25.13	25.25	4.52	5.20	5.90	24.32
01/09	02:35	22.82	22.99	23.16	23.34	3.99	4.58	5.26	22.36
01/09	04:35	22.61	22.74	22.88	22.99	4.70	5.37	6.09	22.17
01/09	06:35	22.57	22.60	22.64	22.67	4.66	5.33	6.09	22.42

07/09	18:35	23.54	23.63	23.79	23.91	4.91	5.62	6.38	23.12
07/09	20:35	19.78	19.91	20.03	20.13	4.85	5.57	6.34	19.34
07/09	22:35	16.82	16.96	17.12	17.32	3.76	4.35	4.93	16.34
08/09	00:35	15.61	15.75	15.90	16.06	3.76	4.35	4.95	15.15
08/09	02:35	13.75	13.92	14.09	14.24	3.06	3.56	4.15	13.27
08/09	04:35	12.41	12.53	12.75	12.90	2.92	3.40	99.99	11.98
08/09	06:35	12.43	12.52	12.60	12.66	2.90	3.32	99.99	12.20

**TABLA IX.VII:** Valores de  $u^*T^*$ ,  $\chi_a$  y  $m$ , correspondientes al experimento "Great Plains"

día	hora	$u^*T^*$	$\chi_a$	$m$
		[m °K/h]	[m <sup>α</sup> /h]	
18/8	20:35	0.2113E+02	26.71	0.559
18/8	22:35	0.6318E+02	107.88	0.901
19/8	00:35	0.3503E+02	90.00	0.524
19/8	02:35	0.5782E+02	161.69	0.698
19/8	04:35	0.4886E+02	236.95	0.409
24/8	20:35	0.1244E+03	504.17	0.924
24/8	22:35	0.1494E+03	480.32	1.500
25/8	00:35	0.1889E+03	600.43	1.076
25/8	02:35	0.1242E+03	803.76	0.631
25/8	04:35	0.1528E+03	509.13	1.403
31/8	20:35	0.1103E+03	416.74	0.999
31/8	22:35	0.1120E+03	408.58	1.131
1/9	00:35	0.9763E+02	503.50	0.999
1/9	02:35	0.1037E+03	413.57	0.958
1/9	04:35	0.9853E+02	469.01	1.120
7/9	20:35	0.1008E+03	491.11	1.189
7/9	22:35	0.8322E+02	421.58	0.742
8/9	00:35	0.8330E+02	403.39	0.903
8/9	02:35	0.8054E+02	304.28	1.090
8/9	04:35	0.7072E+02	343.11	0.839

\*\*observación:  $\alpha=1-m$

**TABLA IX.VIII:** Valores observados de velocidad del viento a las 21 hs. correspondientes a la altura de 8 m. (Experimento "Wangara")

día	u [m/s]
1	3,84
6	3,34
7	2,82
12	3,81
13	3,32
31	3,35
32	2,99
33	3,30

**TABLA IX.IX:** Valores observados de velocidad del viento a las 20 hs. 35 min. correspondientes a la altura de 6,4 m. (Experimento "Great Plains")

día	u [m/s]
18/8	2,86
24/8	6,45
31/8	6,11
7/9	7,10

TABLA X.I: Parámetros de entrada del modelo estimados para el experimento "Wangara"

Día	Temp. inicial [°C]	$\lambda_a$ [m <sup>2</sup> -m/s.]	$K_a$ [cal/s. m <sup>2</sup> +m. °K]	m	$F_n$ [mW/cm <sup>2</sup> ]	a [mW/cm <sup>2</sup> h]	$\beta$ [°C/cm]	$t_a$ [hora]	$t_b$ [hora]
1	7,2	0,0514	16,724	≈0,0000	6,03	4,25	-0,53	10,04	11,46
6	3,4	0,0117	3,804	0,9745	6,79	9,35	-0,67	9,99	10,72
7	4,1	0,0042	1,364	0,3162	6,09	8,85	-0,58	9,98	10,66
12	6,8	0,0263	8,554	≈0,9999	6,31	9,81	-0,53	9,93	10,57
13	6,2	0,0058	1,887	0,6907	6,39	8,65	-0,60	9,91	10,65
31	2,2	0,0205	6,669	≈0,0000	7,10	9,95	-0,42	9,66	10,36
32	4,2	0,0133	4,345	0,6560	7,55	10,32	-0,63	9,64	10,37
33	3,6	0,0081	2,653	0,9749	7,52	10,64	-0,63	9,62	10,32

TABLA X.II: Parámetros de entrada del modelo estimados para el experimento "Great Plains"

Día	Temp. inicial [°C]	$\lambda_a$ [m <sup>2</sup> -m/seg]	$K_a$ [cal/seg m <sup>2</sup> +m. °K]	m	$F_n$ [mW/cm <sup>2</sup> ]	a [mW/cm <sup>2</sup> h]	$\beta$ [°C/cm]	$t_a$ [hora]	$t_b$ [hora]
18/8	14,0	0,0074	2,413	0,5593	4,74	3,18	-0,91	9,17	10,65
24/8	24,0	0,1400	45,543	0,9242	5,44	3,69	-0,83	9,28	10,75
31/8	26,0	0,1157	37,645	0,9999	5,58	4,65	-1,08	9,40	10,60
7/9	18,9	0,1620	52,684	0,9999	5,58	4,48	-0,92	9,53	10,77

**TABLA XI.I:** Parámetros estadísticos de evaluación correspondientes a cada modelo

MODELOS	*N	EAM °C	ECM °C <sup>2</sup>	ECM <sub>s</sub> °C <sup>2</sup>	ECM <sub>n</sub> °C <sup>2</sup>	d	EFM
Brünt	122	4,4	26,01	18,20	7,81	0,87	1,03
Gröen(1)	122	2,7	11,00	6,54	4,51	0,94	0,35
Gröen(2)	122	2,6	10,05	5,54	4,51	0,94	-0,20
Jaeger(1)	122	2,5	9,57	4,38	5,18	0,95	-0,20
Jaeger(2)	122	3,2	15,58	8,59	6,98	0,92	3,00
Jaeger(3)	122	2,1	6,23	2,70	3,52	0,96	-0,70
Reuter	122	3,6	17,25	13,14	4,10	0,91	-1,18
Anfossi	149	1,8	6,36	0,77	5,58	0,97	-0,28
Modelo	106	0,8	1,23	0,27	0,95	0,99	0,38

\*N cantidad de datos utilizados.

**TABLA XI.II:** El coeficiente de determinación ( $r^2\%$ ), la pendiente (a) y la ordenada al origen de la recta (b) definidas entre la temperatura calculada y la temperatura observada, respectivamente, para cada modelo.

MODELOS	$r^2\%$	a	b [°C]
Brünt	85	1,01	-4,34
Gröen(1)	92	1,10	-3,05
Gröen(2)	91	1,01	2,30
Jaeger(1)	91	1,17	-2,69
Jaeger(2)	87	1,08	-3,35
Jaeger(3)	91	0,94	1,91
Reuter	91	0,99	3,66
Anfossi	91	1,01	0,74
Modelo	98	1,00	-0,54

**TABLA XI.III.a):** Parámetros de entrada del modelo de Brünt, correspondientes a las condiciones del experimento Wangara

Día	$F_n$ [mW/cm <sup>2</sup> ]	$T_{eo}$ [°C]
1	6,43	9,5
6	7,06	9,4
7	6,43	11,5
12	6,50	9,8
13	6,63	11,3
31	7,54	9,7
32	7,46	10,5
33	7,87	8,7

$F_n$ : radiación neta media nocturna entre las 18 y 7 hs.

$T_{eo}$ : temperatura inicial en superficie "observada" (18 hs)

**TABLA XI.III.b):** Parámetros de entrada del modelo de Brünt, correspondientes a las condiciones del experimento Great Plains

Día	$F_n$ [mW/cm <sup>2</sup> ]	$T_{eo}$ [°C]
18/8	4,30	20,0
24/8	4,88	28,2
31/8	5,35	29,8
7/9	5,46	22,7

$F_n$ : radiación neta media nocturna entre las 18:35 y las 4:35 hs.

$T_{eo}$ : temperatura inicial en superficie "observada" (18 hs y 35 min)

**TABLA XI.IV.a):** Parámetros de entrada para el modelo de Grøen (1) y (2) correspondientes a las condiciones del experimento Wangara

Día	f [mW/cm <sup>2</sup> °C]	F <sub>no</sub> [mW/cm <sup>2</sup> ]	β [°C/cm]
1	0,37	7,9	-0,52
6	0,25	8,2	-0,67
7	0,27	8,1	-0,62
12	0,19	7,6	-0,54
13	0,30	7,9	-0,60
31	0,22	9,0	-0,55
32	0,11	8,3	-0,46
33	0,22	9,4	-0,65

$$f = \frac{F_{nf} - F_{no}}{T_f - T_o}$$

F<sub>no</sub>: radiación neta inicial (18hs)  
β: gradiente inicial del suelo (18hs).

**TABLA XI.IV.b):** Parámetros de entrada para el modelo de Grøen (1) y (2) correspondientes a las condiciones del experimento Great Plains

Día	f [mW/cm <sup>2</sup> °C]	F <sub>no</sub> [mW/cm <sup>2</sup> ]	β [°C/cm]
18/8	0,30	3,9	-0,64
24/8	0,23	4,6	-0,70
31/8	0,18	4,2	-0,83
7/9	0,13	4,9	-0,96

$$f = \frac{F_{nf} - F_{no}}{T_f - T_o}$$

F<sub>no</sub>: radiación neta inicial (18hs y 35 min)  
β: gradiente inicial del suelo (18hs y 35min)

**TABLA XI.V.a):** Parámetros de entrada de los modelos de Jaeger (1) y Reuter correspondientes a las condiciones del experimento "Wangara"

Día	$K_a$ [cal/seg m.°K]	$\chi_a$ [m <sup>2</sup> /seg]	* $\gamma$ [°C/m]
1	13,23	0,04	0,00
6	8,00	0,02	-0,028
7	0,04	0,0004	0,045
12	10,7	0,03	-0,050
13	2,78	0,008	-0,016
31	9,94	0,03	0,016
32	18,46	0,05	0,004
33	12,38	0,038	-0,010

\* $\gamma$  es el gradiente inicial de temperatura del aire (18 hs)

**TABLA XI.V.b):** Parámetros de entrada de los modelos de Jaeger (1) y Reuter correspondientes a las condiciones del experimento "Great Plains"

Día	$K_a$ [cal/seg m.°K]	$\chi_a$ [m <sup>2</sup> /seg]	* $\gamma$ [°C/m]
18/8	20,81	0,064	0,019
24/8	169,16	0,520	-0,008
31/8	143,51	0,441	-0,004
7/9	135,74	0,417	-0,002

\* $\gamma$  es el gradiente inicial de temperatura del aire (18 h y 35min)



**TABLA XI.VI.a):** Pendiente de la recta definida por la relación logarítmica entre  $u/u_1$  y  $z/z_1$ , para las condiciones del experimento Wangara.

Día	m
1	0,299
6	0,360
7	0,394
12	0,351
13	0,353
31	0,170
32	0,208
33	0,394

**TABLA XI.VI.b):** Pendiente de la recta definida por la relación logarítmica entre  $u/u_1$  y  $z/z_1$ , para las condiciones del experimento Great Plains.

Día	m
18/8	0,213
24/8	0,181
31/8	0,169
7/9	0,180

**TABLA XI.VII.a):** Parámetros de entrada del modelo de Jaeger (2) correspondientes a las condiciones del experimento "Wangara"

Día	$K_a$ [cal/seg $m^{(2-m)}$ °K]	$\chi_a$ [ $m^{(1+m)}$ /seg]	m
1	1,59	0,004	0,299
6	0,91	0,0028	0,360
7	0,67	0,002	0,394
12	1,02	0,003	0,351
13	0,95	0,003	0,353
31	5,36	0,016	0,170
32	3,03	0,009	0,208
33	0,69	0,002	0,394

**TABLA XI.VII.b):** Parámetros de entrada del modelo de Jaeger (2) correspondientes a las condiciones del experimento "Great Plains"

Día	$\kappa_a$ [cal/seg m <sup>(2-m)</sup> °K]	$\chi_a$ [m <sup>(1+m)</sup> /seg]	m
18/8	3,18	0,0097	0,213
24/8	6,30	0,0194	0,181
31/8	6,81	0,0209	0,169
7/9	6,41	0,0197	0,180

**TABLA XI.VIII:** Valores de difusividad del aire estimados por Cowling y White (1941)(ver expresión (IV.29))

z	$\chi_h$
[m]	[m <sup>2</sup> /s]
1,20	0,10
12,40	0,45
30,50	0,85
57,40	1,20
87,70	2,00

**TABLA XI.IX.a):** Parámetros de entrada del modelo de Anfossi y otros (1976) correspondientes a las condiciones del experimento Wangara.

Día	Hora inicial	To [°C]	F <sub>s</sub> [mW/cm <sup>2</sup> ]
1	15	15,6	2,47
6	15	15,7	3,65
7	15	16,8	3,08
12	16	16,2	3,28
13	16	16,7	3,68
31	16	12,6	3,62
32	15	13,5	3,24
33	17	14,6	4,24

To es la temperatura en la casilla a la hora inicial  
F<sub>s</sub> es el flujo medio de calor del suelo durante el período de corrida del modelo (entre la hora inicial hasta las 7 hs)

**TABLA XI.IX.b):** Parámetros de entrada del modelo de Anfossi y otros(1976) correspondientes a las condiciones del experimento Great Plains.

Día	Hora inicial [hs]	To [°C]	F <sub>s</sub> [mW/cm <sup>2</sup> ]
18/8	18:35	21,6	4,30
24/8	14:35	31,9	0,90
31/8	14:35	33,6	1,63
7/8	14:35	27,3	1,39

To es la temperatura en la casilla a la hora inicial  
F<sub>s</sub> es el flujo medio de calor del suelo durante el período de corrida del modelo (entre la hora inicial hasta las 7 hs)

**TABLA XI.X:** Parámetros estadísticos correspondientes a cada modelo para la temperatura mínima

MODELO	*N	EAM	ECM	ECM <sub>e</sub>	ECM <sub>n</sub>	d	EFM
Gröen(2)	12	3,94	19,74	16,06	3,67	0,93	-0,48
Jaeger(1)	12	3,20	13,43	8,25	5,18	0,96	0,61
Anfossi	12	2,99	17,13	7,66	9,46	0,95	-1,13
Modelo	12	0,46	0,38	0,05	0,33	0,99	-0,12

\*N cantidad de datos utilizados

**TABLA XII.I:** Valores de  $\alpha$  (ver expresión XII.5) con  $\kappa_a \chi_a^{-0.5} = 0,14 \times 10^5 \text{ cal/h}^{-0.5} \text{ m}^{1.5} \text{ }^\circ\text{C}$  ( $\beta = \psi - 0,5$ )

m	$\psi$	$\chi_a$	$\alpha$
		$[\text{m}^{(2-m)}/\text{h}]$	$[\text{h }^\circ\text{C}]$
0.999	0.0001	1.	0.000002
0.999	0.0001	30.	0.00007
0.999	0.0001	90.	0.0002
0.999	0.0001	230.	0.0005
0.999	0.0001	430.	0.0010
0.900	0.0909	1.	0.0026
0.900	0.0909	30.	0.0587
0.900	0.0909	90.	0.1594
0.900	0.0909	230.	0.3741
0.900	0.0909	430.	0.6608
0.800	0.1667	1.	0.0056
0.800	0.1667	30.	0.0951
0.800	0.1667	90.	0.2377
0.800	0.1667	230.	0.5196
0.800	0.1667	430.	0.8752

m	$\psi$	$\chi_m$	$\alpha$
		$[m^{(2-m)}/h]$	$[h \beta]$
0.700	0.2308	1.	0.0085
0.700	0.2308	30.	0.1171
0.700	0.2308	90.	0.2726
0.700	0.2308	230.	0.5611
0.700	0.2308	430.	0.9080
0.600	0.2857	1.	0.0114
0.600	0.2857	30.	0.1297
0.600	0.2857	90.	0.2843
0.600	0.2857	230.	0.5558
0.600	0.2857	430.	0.8690
0.500	0.3333	1.	0.0141
0.500	0.3333	30.	0.1364
0.500	0.3333	90.	0.2837
0.500	0.3333	230.	0.5303
0.500	0.3333	430.	0.8049
0.4000	0.3750	1.	0.0166
0.4000	0.3750	30.	0.1392
0.4000	0.3750	90.	0.2767
0.4000	0.3750	230.	0.4974
0.4000	0.3750	430.	0.7354
0.3000	0.4118	1.	0.0188
0.3000	0.4118	30.	0.1396
0.3000	0.4118	90.	0.2665
0.3000	0.4118	230.	0.4628
0.3000	0.4118	430.	0.6688
0.2000	0.4444	1.	0.0209
0.2000	0.4444	30.	0.1385
0.2000	0.4444	90.	0.2550
0.2000	0.4444	230.	0.4295
0.2000	0.4444	430.	0.6080

0.1000	0.4737	1.	0.0227
0.1000	0.4737	30.	0.1364
0.1000	0.4737	90.	0.2432
0.1000	0.4737	230.	0.3985
0.1000	0.4737	430.	0.5539
0.0000	0.5000	1.	0.0244
0.0000	0.5000	30.	0.1337
0.0000	0.5000	90.	0.2316
0.0000	0.5000	230.	0.3703
0.0000	0.5000	430.	0.5063

**TABLA XII.II.a:** Valores de  $\alpha$ , expresión (XII.5), "observados" para el experimento " Wangara "

DIA	m	$\chi_a$ [ $m^{(2-m)}/h$ ]	$\alpha$ [h $\beta$ ]
1	0,0000	185,14	0,312
6	0,9745	42,12	0,023
7	0,3162	15,10	0,087
12	0,9999	94,69	0,0002
13	0,6907	20,89	0,084
31	0,0000	73,83	0,125
32	0,6560	48,10	0,165
33	0,9749	29,37	0,016

$$+ \beta = \psi - 0,5$$

**TABLA XII.II.b:** Valores de  $\alpha$ , expresión (XII.5), "observados" para el experimento " Great Plains "

DIA	m	$\chi_a$ [ $m^{(2-m)}/h$ ]	$\alpha$ [ $h^\beta$ ]
18/8	0,5593	26,71	0,130
24/8	0,9242	504,17	0,821
31/8	0,9999	416,738	0,0012
7/9	0,9999	583,220	0,0018

$$+ \beta = \psi - 0,5$$

**TABLA XII.III:** Valores extremos de los coeficientes de los errores relativos de cada variable

	$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial \chi_s}$	$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial \chi_a}$	$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial \kappa_a}$	$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial \kappa_s}$	$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial F_n}$	$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial \beta}$	$\frac{\partial(\Delta T)}{\partial t}$
Valor máximo	0,5	0,2	0,7	1	1	0,5	0,5
Valor mínimo	0,1	0	0	0	0,5	0	0,2