

## Tesis de Posgrado

# Estudio cuántico y semiclásico de billares clásicamente caóticos

Vergini, Eduardo Germán

1995

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Vergini, Eduardo Germán. (1995). Estudio cuántico y semiclásico de billares clásicamente caóticos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2769\\_Vergini.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2769_Vergini.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Vergini, Eduardo Germán. "Estudio cuántico y semiclásico de billares clásicamente caóticos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1995.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2769\\_Vergini.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2769_Vergini.pdf)

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

# Estudio Cuántico y Semiclásico de Billares Clásicamente Caóticos

Eduardo Germán Vergini

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires.  
Area: Ciencias Físicas  
Director de Tesis: Dr. Marcos Saraceno  
Lugar de Trabajo: Departamento de Física, Comisión Nacional de Energía Atómica.  
Septiembre de 1995

7301  
12



# Índice

<b>Prólogo</b>	<b>2</b>
<b>1 Cuantización Usando Scaling</b>	<b>5</b>
1.1 Introducción . . . . .	5
1.2 Propiedades de las soluciones y métodos de resolución . . . . .	6
1.3 Cuantización usando Scaling . . . . .	8
1.4 Aplicaciones del Método de Scaling	11
1.5 Conclusiones . . . . .	22
1.6 Apéndice . . . . .	23
<b>2 Efectos de Difracción</b>	<b>25</b>
2.1 Introducción . . . . .	25
2.2 Ondas planas Evanescentes . . . . .	26
2.3 Soluciones estacionarias del estadio como superposición de ondas planas reales . . . . .	27
2.4 Soluciones estacionarias del estadio arbitrariamente precisas	30
2.5 Difracción en el límite semiclásico .	36
2.6 Conclusiones . . .	41
<b>3 Autoestados en el Límite Semiclásico</b>	<b>42</b>
3.1 Introducción . . . . .	42
3.2 Funciones de onda semiclásicas	42
3.3 Representación Estelar y Scars . . . . .	45
3.4 Resultados y Conclusiones	47
<b>Bibliografía</b>	<b>55</b>

# Prólogo

Luego de casi un siglo, la relación entre la mecánica cuántica y la mecánica clásica no es aún completamente entendida. Esta incompreensión se extiende a la fundamentación de la cuántica: no se sabe en general si o cómo es posible especificar unívocamente la mecánica cuántica de un sistema cuya mecánica clásica es dada.

Sin embargo, este problema fundamental de cuantización no es el que ocupa al "Caos Cuántico". En realidad, el estudio se realiza habitualmente sobre sistemas bastante simples, donde se sabe plantear la mecánica cuántica. En estos sistemas, se intenta entender el límite semiclásico; es decir, el comportamiento de las funciones de onda y los niveles de energía cuando la constante de Planck  $\hbar$  tiende a cero. Este límite no es igual al límite clásico, para el cual  $\hbar$  es precisamente cero pues, en general, las funciones de onda cuánticas no son analíticas en  $\hbar$  para  $\hbar \rightarrow 0$ . Es así que el límite semiclásico no se puede relacionar al límite clásico, teoría de perturbaciones mediante; por el contrario, retiene una rica e interesante estructura en su seno. No obstante, debe haber una suerte de principio de correspondencia, de acuerdo con el cual, el límite semiclásico refleje la naturaleza del movimiento clásico subyacente. Lo que ha quedado bien establecido en estas últimas décadas de exitosas y prolíferas investigaciones en la materia, es que la mecánica semiclásica depende crucialmente del tipo de movimiento clásico; si éste es regular (predecible, integrable) o irregular (impredicible, caótico, no integrable).

Desde luego, estos problemas tienen una amplia variedad de aplicaciones en mecánica cuántica, y más generalmente en todas las ramas de la física y matemática aplicada que trabajen en el límite de onda corta. Por ejemplo, el espectro de vibración de moléculas no simétricas, los modos de oscilación acústica en habitaciones con formas típicas y la óptica de las guías de onda [1]. Sin embargo, sólo nos ocuparemos de los aspectos más formales del problema, sin buscar aliados que nos resguarden de revelar nuestro más oculto propósito, el entendimiento.

Los sistemas que vamos a estudiar son los billares, y como su nombre lo indica estamos hablando de "billares", aunque nos vamos a permitir cambiar el contorno rectangular típico por formas menos recomendables para los ases de las tres bandas. Entre los sistemas hamiltonianos conservativos, los billares planos constituyen una subcategoría que ha recibido especial atención. En primer lugar, a nivel clásico cubren un amplio espectro de comportamientos, desde completamente integrables a totalmente caóticos, pudiéndose observar además la estructura tan intrincada que presenta la transición. En segundo lugar, son más simples que los hamiltonianos suaves pues la interacción se concentra en el borde del billar y esto permite plantear de manera natural una formulación unidimensional.

El trabajo de investigación presentado en esta tesis ha consistido en el estudio de métodos de cuantización, que permitan obtener las propiedades estacionarias de billares planos en el límite semiclásico. Es decir, obtener autoestados con longitudes de onda varios órdenes de magnitud inferior a la longitud típica del sistema. Disponer de tal herramienta nos permitirá estudiar efectos de difracción en el borde del billar y efectos de localización alrededor de trayectorias periódicas, en regiones de energía muy elevadas.

Los efectos de difracción son tenidos en cuenta mediante la incorporación de ondas planas evanescentes a las soluciones estacionarias del sistema. Las ondas evanescentes se caracterizan por oscilar rápidamente según una dirección y tener un decaimiento exponencial en la dirección ortogonal. Se estudiará la posibilidad de representar dichas soluciones como superposición de ondas planas reales. Dicha representación constituye una generalización en dos dimensiones de funciones superoscilantes de una variable.

Hemos observado las autofunciones en la representación estelar, recientemente introducida en este contexto. Los ceros de esta representación caracterizan completamente a las funciones de onda. Verificamos ciertas conjeturas respecto a la distribución de ceros en la regiones clásicamente permitida y prohibida.

Los efectos de localización conocidos con el nombre de "scars" se caracterizan por un aumento de la densidad de probabilidad, en un entorno de ciertas trayectorias periódicas inestables. Según una conjetura de Berry y Voros, dichos efectos tienden a desaparecer en el límite semiclásico. Se estudiará la validez de dicha conjetura.

En este trabajo de investigación hemos obtenido dos resultados de relevancia. Desarrollamos un método novedoso para hallar los autoestados de billares clásicamente

caóticos, el cual esperamos poder generalizarlo a hamiltonianos suaves y conectarlo con la teoría de las trayectorias periódicas. Pudimos entender más profundamente la naturaleza de las soluciones estacionarias al separar la contribución debida a la difracción; esto nos permitió probar que no es posible alcanzar el límite semiclásico sin tener en cuenta los efectos de difracción.

En cuanto a los fenómenos de localización, las conclusiones al presente son solo cualitativas. Sin embargo, hemos ajustado y dispuesto la maquinaria pesada necesaria, estando en inmejorables condiciones para tratar de ensamblar las piezas de este rompecabezas clásico-cuántico.

Si bien este trabajo se ha sustentado en gran cantidad de estudios analíticos y numéricos, hemos intentado una presentación concisa, en un lenguaje coloquial que esperamos sea amena y clara (al menos en líneas generales) al lector.

# Capítulo 1

## Cuantización Usando Scaling

### 1.1 Introducción

Consideremos un billar cuántico plano; es decir, un pozo bidimensional con paredes infinitas y potencial nulo en su interior. La posición de las paredes queda especificada por una curva cerrada  $\mathcal{C}$ , y el interior por un dominio  $\mathcal{D}$ . Este sistema es ligado para cualquier energía. Las soluciones estacionarias deben satisfacer la ecuación de Schrödinger estacionaria en el interior del pozo y anularse en el borde. Si expresamos la energía en términos del número de onda  $k = \sqrt{2mE}/\hbar$ , resulta la conocida ecuación de Helmholtz con condición de Dirichlet en el borde

$$\Delta\phi = -k^2 \phi \quad \text{en } \mathcal{D} \quad \text{y} \quad \phi = 0 \quad \text{en } \mathcal{C}. \quad (1.1)$$

Esta ecuación también gobierna la vibración de una membrana elástica fijada en el borde, siendo  $\phi$  un modo normal de vibración. O la propagación de ondas (ya sean acústicas o eléctricas) en una guía de ondas con sección transversal  $\mathcal{D}$  [3]. La versión eléctrica ha recibido gran atención recientemente, debido a la posibilidad de realizar experimentos en cavidades de microonda muy delgadas [4]. Los resultados de estos experimentos, ya sean las frecuencias de resonancia o la densidad de probabilidad de  $\phi$  (que en este caso representa un modo transversal magnético), pueden compararse directamente con los obtenidos por los métodos numéricos.

Dada la variedad de aplicaciones de la ecuación (1.1), ésta ha sido muy estudiada desde el siglo pasado. La teoría de las vibraciones libres de una membrana elástica rectangular, fue resuelta por Poisson [5]; y el caso circular por Clebsch [6]. Sin embargo, la posibilidad de explotar una formulación unidimensional, ha cobrado ímpetu



en las últimas dos décadas, cuando apareció la necesidad de obtener soluciones altamente excitadas que permitan entender el límite semiclásico de sistemas caóticos [7]. En lo que sigue presentaremos algunas propiedades generales de las soluciones y haremos una breve revisión de los métodos más conocidos para obtenerlas numéricamente. Luego presentaremos el método de scaling que hemos desarrollado [2] y mostraremos algunos resultados. Finalmente, discutiremos las ventajas del método y la posibilidad de extenderlo a casos más generales.

## 1.2 Propiedades de las soluciones y métodos de resolución

El espectro de un billar cuántico consiste en un número infinito de autovalores positivos  $0 < k_1^2 \leq k_2^2 \leq \dots$ , sin puntos de acumulación finitos [8]. Las autofunciones asociadas  $\phi_1, \phi_2, \dots$ , pueden ser normalizadas y constituyen un conjunto ortonormal completo para las funciones cuadrado integrables. Cada autofunción  $\phi_n$  es infinitamente diferenciable ( $C^\infty$ ) en los puntos interiores [16]. En un segmento recto del borde,  $\phi_n$  puede ser reflejada como una función impar a través del contorno. La función resultante satisface (1.1) en una vecindad completa de esa porción del borde; luego es  $C^\infty$  a través del borde sobre tramos rectos. Cuando en el borde se unen dos tramos rectos, formando un ángulo interior  $\pi/m$  con  $m$  entero, la función  $\phi_n$  puede ser reflejada  $m$  veces, resultando una función  $C^\infty$  en una vecindad del vértice. Por el contrario, cuando  $m$  no es un entero, la función no es analítica en el vértice y aparecen fenómenos de difracción [10]. El conjunto de puntos en donde  $\phi_n$  se anula, es el conjunto nodal. Éste consiste en curvas  $C^\infty$  en el interior  $\mathcal{D}$ . Cuando  $m$  líneas nodales  $C^\infty$  se cruzan en un punto, lo hacen formando ángulos iguales ( $\pi/m$ ) [11].

El  $n$ -ésimo autovalor satisface el siguiente principio [12]

$$k_n^2 \leq \int_{\mathcal{D}} [(\partial_x \psi)^2 + (\partial_y \psi)^2] d\sigma / \int_{\mathcal{D}} \psi^2 d\sigma ,$$

para cualquier función  $\psi$  (continua y diferenciable por trozos) que se anula en el borde y es ortogonal a las primeras  $n-1$  autofunciones. Una consecuencia importante de este principio es el método de Rayleigh-Ritz [13] que da una cota superior para los autovalores. Conceptualmente el método es muy simple. Se elige una base de funciones  $\phi_i$  continuas y diferenciables por trozos, que se anulan en el borde. Se

construyen las formas cuadráticas

$$A_{i,j} = \int_{\mathcal{D}} (\partial_x \phi_i \partial_x \phi_j + \partial_y \phi_i \partial_y \phi_j) d\sigma \quad y \quad B_{i,j} = \int_{\mathcal{D}} \phi_i \phi_j d\sigma ,$$

y se resuelve el siguiente problema de autovalores generalizados  $(A - \lambda B)\xi = 0$ . Los autovalores satisfacen  $k_n^2 \leq \lambda_n$ . Los coeficientes de la  $n$ -ésima autofunción en la base propuesta, son las componentes del vector  $\xi^n$ . Los primeros autovalores pueden ser muy próximos al autovalor exacto, pero el error crece con  $n$ . Una conclusión, es que para obtener el  $n$ -ésimo autovalor, hay que diagonalizar una matriz cuya dimensión es del orden de  $n$ . Además, recordando la fórmula semiclásica de Weyl para el número de autoestados hasta un  $k$  dado ( $N \simeq k^2 Area/4\pi$ ), la dimensión del problema resulta del orden de  $k^2$ . Ésta es una limitación crucial cuando se desean estudiar estados altamente excitados. Otros métodos que adolecen del mismo problema y que solo mencionaremos son: elementos finitos, métodos intermedios, diferencia finita, desigualdades a priori, a posteriori, Galerkin y cualquier otro método que se base en una formulación sobre el dominio. Una revisión de las propiedades y métodos antes mencionados puede encontrarse en [14].

En una formulación sobre el contorno, la dimensión del problema será del orden de  $k$ . La idea es reducir el problema a un problema de autovalores para un operador integral sobre el borde. Esto se puede hacer de varias maneras [15, 16, 17, 18]; por ejemplo, usando el teorema de Green y la condición de contorno, resulta [16]

$$\varphi(q') = \oint_{\mathcal{C}} dq K(k, q', q) \varphi(q) , \quad (1.2)$$

con  $K(k, q', q) = -i/2 \partial_n H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}_{q'} - \mathbf{r}_q|)$ , la derivada normal sobre el borde de la función de Green libre (para el plano es una función de Hankel de primera clase y orden cero [19]). La función desconocida  $\varphi(q)$ , es la derivada normal sobre el borde de la autofunción; y a partir de ésta, se puede recobrar la autofunción en todo el dominio mediante el mapeo

$$\phi(\mathbf{r}) = -\frac{i}{4} \oint_{\mathcal{C}} dq H_0^{(1)}(k|\mathbf{r}_q - \mathbf{r}|) \varphi(q) .$$

El precio que hay que pagar por esta reducción en la dimensión del problema, es que ahora la energía entra como un parámetro; es decir, los autovalores serán aquellos valores de  $k$  para los cuales la ecuación integral (1.2) tiene solución. Una manera simple de resolver (1.2), es elegir  $N$  puntos  $q_i$  equiespaciados sobre el contorno (de

longitud  $\mathcal{L}$ ) y evaluar la matriz  $M$ , de elementos

$$M_{i,j} = \delta_{i,j} + \frac{i\mathcal{L}}{2N} \partial_n H_o^{(1)}(k|\mathbf{r}_{q_i} - \mathbf{r}_{q_j}|) .$$

Los autovalores serán aquellos valores de  $k$  para los cuales el determinante de  $M$  se anula. La búsqueda de los ceros de  $M$  es una tarea difícil dado que la función determinante es un polinomio de grado  $N$  ( $N$  crece linealmente con  $k$ ); es decir, el cálculo se hace tedioso y muy ineficiente. Por otro lado, la condición de cuantización (que consiste en detectar cuando la matriz  $M$  se hace singular) es crítica; esto último está asociado a que las matrices grandes se hacen singulares debido al error de redondeo [20]. El resultado es que los ceros espurios, reducen la precisión del cálculo.

El método de scaling que presentaremos en la próxima sección, resuelve ambos problemas al proponer una ecuación de autovalores generalizados como condición de cuantización. Es decir, tiene todas las ventajas de las formulaciones sobre el dominio (ver el método de Rayleigh-Ritz), pero usando matrices cuya dimensión es del orden de  $k$ .

### 1.3 Cuantización usando Scaling

La idea del método de scaling consiste en parametrizar con la energía a las funciones de prueba del problema variacional, para luego poder expandir alrededor de un valor cualquiera. Equivalentemente, se puede pensar que la energía está fijada y el parámetro de scaling permite variar el tamaño del billar (manteniendo su forma). Entonces se buscan los diferentes tamaños alrededor de uno dado para los cuales la energía, que había sido fijada, es un autovalor.

Sea  $\phi(\mathbf{r})$  una función que satisface la ecuación de Helmholtz  $\Delta\phi(\mathbf{r}) = -k_0^2 \phi(\mathbf{r})$ , con  $k_0 > 0$ . Asociamos a  $\phi$  la función de scaling  $\phi(k, \mathbf{r}) \equiv \phi(k\mathbf{r}/k_0)$ . Es fácil ver que esta familia de funciones de un parámetro verifica las siguientes propiedades:

$$i) \quad \Delta\phi(k, \mathbf{r}) = -k^2\phi(k, \mathbf{r}) \quad (1.3)$$

$$ii) \quad \phi(k, \mathbf{r}) = \phi(k', k\mathbf{r}/k') \quad (1.4)$$

$$iii) \quad \frac{\partial\phi}{\partial k}(k, \mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{k} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} \phi(k, \mathbf{r}) . \quad (1.5)$$

La propiedad i), nos asegura que la ecuación de Helmholtz siempre se verifica para las funciones de scaling; es decir que para resolver el problema solo hay que preocuparse

por la condición de contorno. Las propiedades ii) y iii), relacionan las dos interpretaciones del scaling que hemos mencionado al principio de esta sección, y serán de utilidad en las deducciones que haremos en el apéndice.

Sea  $\mathcal{C}$  una curva cerrada que define un dominio estrellado  $\mathcal{D}$ . Esta condición asegura que para algún punto interior (que tomaremos como origen de coordenadas), el contorno queda unívocamente definido en función del ángulo polar. Matemáticamente se expresa por  $r_n \equiv \mathbf{n} \cdot \mathbf{r} > 0, \forall \mathbf{r} \in \mathcal{C}$  ( $\mathbf{n}$  es el versor exterior, normal a  $\mathcal{C}$ ). Diremos entonces que una función de scaling  $\phi_\mu$ , es una *autofunción de scaling* del billar definido por  $\mathcal{C}$ , si existe  $k_\mu$  tal que  $\phi_\mu(k_\mu, \mathbf{r}) = 0, \forall \mathbf{r} \in \mathcal{C}$ ; esto es,  $\phi_\mu(k_\mu, \mathbf{r})$  (como función de  $\mathbf{r}$ ) es una autofunción del billar con condición de Dirichlet en el borde.

Pedir que una función se anule en todos los puntos del borde, es equivalente a pedir que la norma sobre el contorno de dicha función sea cero. En la definición de la norma, cambiaremos la medida usual de integración; esto nos permitirá utilizar una condición de cuasi-ortogonalidad que es esencial para el método. Definimos la norma sobre el contorno de la función de scaling  $\phi$ , como sigue

$$f_{[\phi]}(k) = \oint_{\mathcal{C}} \phi^2(k, \mathbf{r}) \frac{d\ell}{r_n}. \quad (1.6)$$

$f$  es en general una funcional de  $\phi$ ; sin embargo, para *autofunciones de scaling* normalizadas a uno sobre el dominio, en el apéndice probamos la siguiente expansión independiente de  $\phi_\mu$  hasta tercer orden (ver (1.18))

$$f_{[\phi_\mu]}(k_\mu + \delta) = 2 \delta^2 (1 + \delta/k_\mu) + \mathcal{O}(\delta^4). \quad (1.7)$$

A partir de (1.7), evaluando la norma y su derivada en  $k_0 = k_\mu + \delta_\mu$ , obtenemos

$$f_{[\phi_\mu]}(k_0) - \frac{\delta_\mu}{2} \frac{df_{[\phi_\mu]}(k_0)}{dk} - \frac{\delta_\mu^3}{k_\mu} + \mathcal{O}(\delta_\mu^4) = 0, \quad (1.8)$$

Ahora bien, el parámetro de expansión  $\delta$  es independiente de  $k$ ; se abre una ventana de ancho  $\delta_{max}$  fijo en el espectro  $k$  (por ejemplo, para el estadio que veremos en la próxima sección, utilizamos una ventana de ancho  $\delta_{max} \simeq 0.1$ ). Luego, para  $\delta_{max}/k < 1$ ,  $\mathcal{O}(\delta_\mu^4)$  absorbe el término  $\delta_\mu^3/k_\mu$  en (1.8).

Despreciando términos de orden  $\mathcal{O}(\delta_\mu^4)$ , proponemos a (1.8) como una condición para la cuantización. Entonces, para hallar las autofunciones de scaling resolvemos el siguiente problema de autovalores generalizados

$$\left[ \frac{dF}{dk}(k_0) - \lambda_\mu F(k_0) \right] \xi^\mu = 0, \quad (1.9)$$

donde  $F$  es la forma cuadrática (definida positiva) asociada a  $f$ . Para el cálculo numérico se evalúa en una base de funciones de scaling  $\{\varphi_i(k, \mathbf{r}); i = 1, \dots, N\}$

$$F_{ij}(k_0) = \oint_C \varphi_i(k_0, \mathbf{r}) \varphi_j(k_0, \mathbf{r}) \frac{d\ell}{r_n} \quad (1.10)$$

Las autofunciones de scaling resultan ser  $\phi_\mu(k, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \varphi_i(k, \mathbf{r})$ , y los autovalores (a segundo orden en  $\delta$ )  $k_\mu = k_0 - 2/\lambda_\mu$ .

La ecuación (1.9) es a primera vista una simple aproximación lineal de la forma cuadrática  $F$  alrededor de  $k_0$ . Notemos sin embargo, que si las autofunciones de scaling fueran exactamente ortogonales para todo  $k$ , las formas  $d^n F/dk^n(k_0)$  ( $n = 0, 1, 2, \dots$ ), serían diagonales en la base de autofunciones de scaling. Luego, la base que diagonaliza simultáneamente a  $F(k_0)$  y a  $dF/dk(k_0)$  (como lo exige (1.9)), es la base que diagonaliza a todas las derivadas de  $F$ ; es decir, (1.9) sería una ecuación exacta para hallar los coeficientes  $\xi_i^\mu$ . Por ejemplo, las autofunciones del círculo con distinto número cuántico angular  $\ell$  son exactamente ortogonales sobre el contorno, mientras que para el mismo  $\ell$  tienen overlap uno. Por otro lado, el número de funciones de prueba mínimo necesario para resolver el problema variacional es  $N = \mathcal{L}k/\pi$  [39], y el número de estados entre dos estados con igual  $\ell$  es  $\mathcal{L}k/4$  (expresión asintótica); es decir, en una secuencia de  $\mathcal{L}k/\pi$  autoestados, habrá  $(\pi/2 - 1) \mathcal{L}k/\pi$  exactamente ortogonales a todos los demás. Luego, aplicando el método de scaling al círculo, obtenemos de manera "exacta"  $(\pi/2 - 1) \mathcal{L}k/\pi$  autofunciones de scaling.

En el apéndice demostramos que las autofunciones de scaling (para cualquier contorno) satisfacen una relación de cuasi-ortogonalidad, la cual se deteriora para autovalores alejados en el espectro  $k$ . El rango de validez de esta relación, define la ventana  $\delta_{max}$  donde las soluciones poseen precisión comparable.

Por lo dicho anteriormente, es posible obtener los autovalores con mayor precisión. Un criterio es calcular el valor de  $k$  para el cual, la norma de la autofunción de scaling hallada es un mínimo. Para que el cálculo sea eficiente, seleccionamos aquellas autofunciones que caen en una ventana  $\delta_{max}$  alrededor de  $k_0$ ; y luego expandimos  $f_{[\phi_\mu]}$  en  $k_0$  (hasta cuarto orden o más), usando la siguiente expresión para la enésima derivada

$$\frac{d^n f_{[\phi_\mu]}(k_0)}{dk^n} = \sum_{l=0}^n C_{n,l} \oint_C \frac{\partial^l \phi_\mu}{\partial k^l}(k_0, \mathbf{r}) \frac{\partial^{n-l} \phi_\mu}{\partial k^{n-l}}(k_0, \mathbf{r}) \frac{d\ell}{r_n}, \quad (1.11)$$

$$\text{con } \frac{\partial^l \phi_\mu}{\partial k^l}(k_0, \mathbf{r}) = \sum_{i=1}^N \xi_i^\mu \frac{\partial^l \varphi_i}{\partial k^l}(k_0, \mathbf{r})$$

y  $C_{n,l}$  el combinatorio  $n, l$ . Minimizando la aproximación polinómica de  $f_{[\phi_\mu]}$ , obtenemos  $k_\mu$  con mayor precisión. También podemos evaluar la derivada segunda de  $f$  en  $k_\mu$  y obtener la norma sobre el dominio de acuerdo a la siguiente expresión (ver (1.16) y (1.17))

$$\int_{\mathcal{D}} \phi_\mu^2(k_\mu, \mathbf{r}) d\sigma = \frac{1}{4} \frac{d^2 f_{[\phi_\mu]}(k_\mu)}{dk^2}.$$

Usando funciones normalizadas a uno en el dominio, la norma sobre el contorno  $f_{[\phi_\mu]}(k_\mu)$  provee una estimación de la exactitud de  $\phi_\mu$ . Si  $\phi_\mu$  vive en el subespacio expandido por las funciones de prueba  $\varphi_i$ , su norma es nula (en el capítulo II nos dedicaremos al estudio de las funciones de prueba adecuadas a cada contorno).

Cuando derivamos la ecuación (1.8), asumimos que  $f_{[\phi_\mu]}(k_\mu) = 0$  en (1.7). Luego, el método funcionará si  $f_{[\phi_\mu]}(k_0) \sim 2\delta_\mu^2$  es mayor que  $f_{[\phi_\mu]}(k_\mu)$ ; dicho de otra manera, si el valor de  $k_0$  elegido no es muy próximo a un aútoestado. Para el estadio, con la base elegida en la próxima sección, dicha distancia mínima es  $\sim 10^{-4}$ ; con la base elegida en el capítulo II se reduce a  $\sim 10^{-7}$ . Es decir, si se elige adecuadamente la base, el método puede fallar solo en casos excepcionales. Una manera simple de asegurar la confiabilidad y exactitud del cálculo, es aplicar el método para dos valores de  $k_0$  cuya distancia sea inferior a  $\delta_{\max}$ , y comparar los resultados. La tabla I provee un ejemplo.

## 1.4 Aplicaciones del Método de Scaling

Hemos aplicado el método de scaling, presentado en la sección anterior, al estadio de Bunimovich, el billar de Sinai (estos billares son ergódicos clásicamente [22, 23]) y al Sinai cuadrado o región L [24] (pseudointegrable [25]). Por supuesto, los autoestados y autovalores del cuadrado y el círculo (billares integrables), fueron computados para verificar las bondades del método. En ambos casos, se obtuvieron los autovalores con la precisión (16 dígitos decimales) utilizada por la computadora.

El estadio consiste en dos segmentos rectos iguales y paralelos, unidos por dos semicírculos de forma tal que el contorno sea una curva diferenciable. A este sistema lo hemos estudiado con gran detalle y prácticamente todos los resultados presentados se basan en él. El billar de Sinai es un cuadrado con un círculo centrado en su interior y el Sinai cuadrado, reemplaza el círculo por otro cuadrado con lados paralelos al cuadrado exterior. En la figura 1.1 dibujamos las versiones desimetrizadas de los

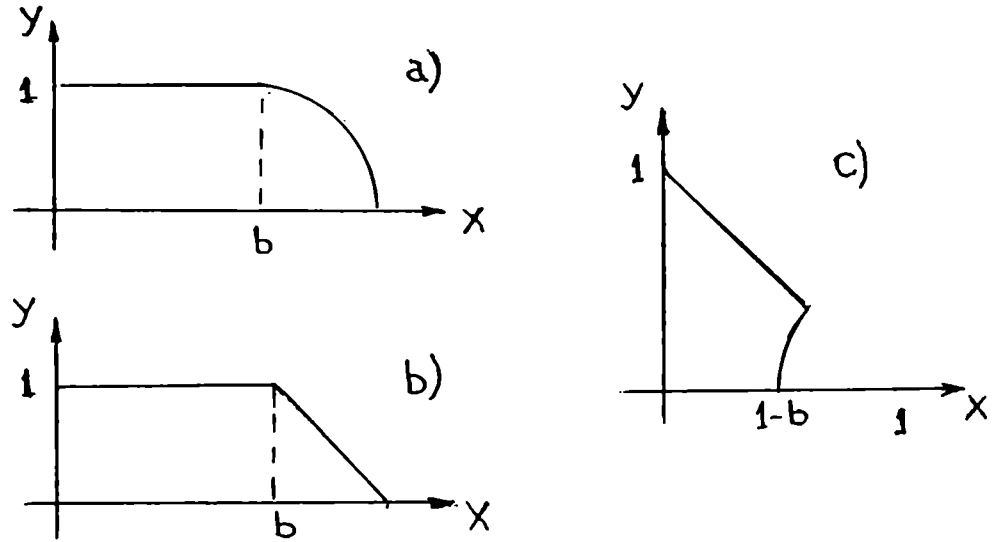


Figura 1.1: Versiones desimetrizadas de los siguientes billares: (a) Estadio de Bunimovich, (b) Sinai cuadrado o región L y (c) Sinai.

tres billares antes mencionados, situándolos en un sistema de coordenadas. Como se puede apreciar en la figura, los tres sistemas dependen de un parámetro, que hemos designado con la letra  $b$ .

Para los tres billares, hemos elegido la misma base de funciones de scaling (en el cap. II la base será mejorada por la inclusión de modos evanescentes), a saber

$$\varphi_n(k, x, y) = \text{sen}(kx \cos \theta_n) \text{sen}(ky \text{sen} \theta_n) \quad (1.12)$$

con  $0 < \theta_n < \pi/2$ . Para el estadio y el Sinai cuadrado hemos utilizado la siguiente distribución angular

$$\theta_n = \frac{\pi}{2N}(n - 1/2)[1 + \frac{b}{4}(1 - n/N)] \quad n = 1, \dots, N. \quad (1.13)$$

El factor entre corchetes aparta a la distribución angular de una distribución uniforme; en realidad, la mejoría que introduce (1.13), solo se aprecia cuando las matrices que hay que diagonalizar son muy grandes (del orden de  $1000 \times 1000$ ). Para obtener la expresión (1.13), hemos calculado (a segundo orden en la diferencia entre ángulos) el overlap sobre el contorno entre funciones vecinas  $\varphi_n$  y  $\varphi_{n+1}$  de la base, y pedimos que el mismo sea independiente de  $n$ .

El número de funciones relevantes que se pueden introducir es proporcional a  $k$  y a la longitud  $\mathcal{L}$  del contorno (dado que trabajamos con funciones simetrizadas,  $\mathcal{L}$  es un cuarto de perímetro). Trabajando en doble precisión resulta (ver (2.4))  $N = N_o + 4,7N_o^{0,3}$  con  $N_o = \mathcal{L}k/\pi$ . Sin embargo, por un fenómeno de compactificación ligado a las bases no ortogonales [26], aumentamos el valor de  $N$  un siete por ciento. Valores de  $N$  aún mayores no mejoran el cálculo pues la dimensión de la base truncada (ver próximo párrafo) satura.

Los valores de  $\mathcal{L}$  y  $r_n$  para los tres billares son:

- i) Estadio.  $\mathcal{L} = b + \pi/2$ ;  $r_n = 1$  si  $x \leq b$  y  $r_n = 1 + (x - b)b$  si  $x > b$ .
- ii) Sinai.  $\mathcal{L} = \sqrt{2} + b(\pi/4 - 1)$ ;  $r_n = 1/\sqrt{2}$  si  $y > b/\sqrt{2}$  y  $r_n = (1 - x)/b - b$  si  $y < b/\sqrt{2}$ .
- iii) Sinai cuadrado.  $\mathcal{L} = b + \sqrt{2}$ ;  $r_n = 1$  si  $x \leq b$  y  $r_n = (1 + b)/\sqrt{2}$  si  $x > b$ .

Para resolver el problema de autovalores generalizados (ver (1.9)), primero diagonalizamos la matriz de overlaps  $F$  (una matriz real y simétrica), y para descartar el subespacio numéricamente nulo, elegimos las autofunciones  $\psi_\gamma$  (de  $F$ ) cuyos autovalores  $\gamma$  satisfagan  $\gamma/\gamma_{max} > 10^{-16}$  (trabajando en doble precisión), siendo  $\gamma_{max}$  el autovalor más grande. En la base  $\{\psi_\gamma/\sqrt{\gamma}\}$ ,  $F$  es la matriz identidad. Luego, diagonalizamos  $dF/dk$  en la nueva base truncada. Para obtener los autovalores con mayor precisión, expandimos  $f_{[\phi_\mu]}(k_0 + \delta)$  hasta 8<sup>th</sup> orden en  $\delta$ . Los resultados varían muy poco si la expansión se hace solo hasta 6<sup>th</sup> orden. Para explicar este hecho, hemos estudiado numéricamente cómo se deteriora la norma sobre el contorno, a medida que nos alejamos de  $k_0$ . Obtuvimos la siguiente cota superior

$$\frac{\langle \phi_\mu^2 \rangle_c}{\langle \phi_\mu^2 \rangle_D} \equiv \frac{Area f_{[\phi_\mu]}}{\int dl/r_n} < \left( \frac{\mathcal{L}\delta_\mu}{\pi} \right)^6 \quad (1.14)$$

es decir, el cociente entre los valores medios de las densidades de probabilidad sobre el contorno y el dominio, está acotado por una potencia sexta de la distancia a  $k_0$ . Para justificar (1.14), en la figura 1.2 hemos graficado las normas de las autofunciones del estadio para tres valores distintos del parámetro  $b$ ; las rectas horizontales satisfacen la relación de igualdad en (1.14).

La relación (1.14) confirma las bondades de la cuasi-ortogonalidad para obtener soluciones precisas. También permite estimar a priori la ventana a seleccionar de acuerdo con la precisión requerida.



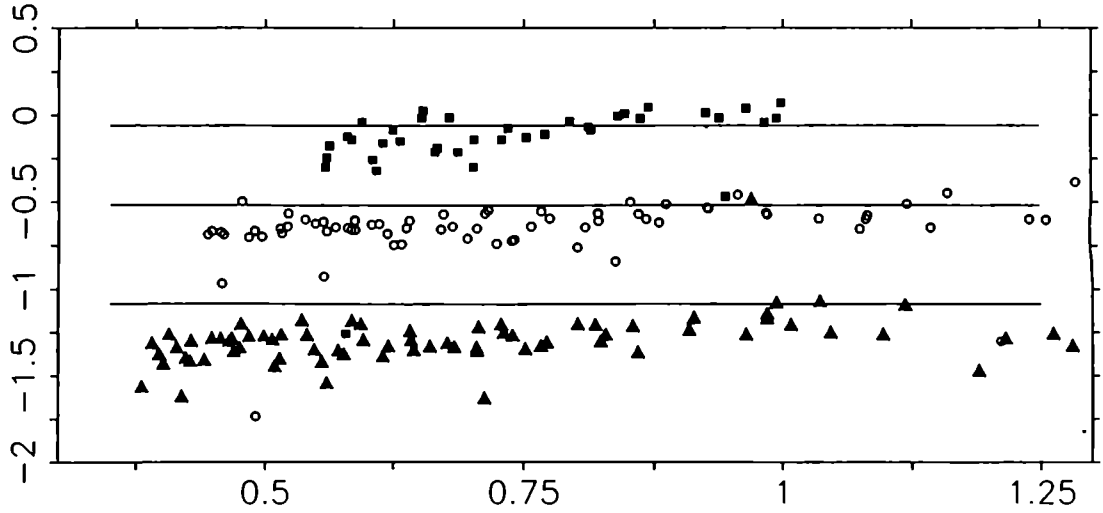


Figura 1.2: Gráfico de  $\log\{Area f_{[\phi_\mu]} / \int dl / \tau_n\} - \log \delta_\mu^6$  versus  $-\log |\delta_\mu|$  para las autofunciones del estadio de Bunimovich halladas por el método de scaling. Los triángulos que ajustan la recta inferior corresponden a  $b=0,5$ ,  $k \sim 500$ ; los círculos a  $b=1$ ,  $k \sim 400$  y los cuadrados a  $b=1,5$ ,  $k \sim 300$ . Las rectas horizontales tienen un valor de la ordenada igual a  $\log(\mathcal{L}/\pi)^6$ .

En la tabla I presentamos los autoestados obtenidos para el estadio  $2 \times 4$  ( $b = 1$ ) [27], usando dos valores diferentes de  $k_0$  (1000, 3848 y 1000, 4446) y una base de 920 funciones. Estos proveen dos cálculos independientes de cada autovalor en esa región de energía. La diferencia entre ellos, da una idea de la precisión obtenida. Cálculos en distintas regiones del espectro nos han permitido observar que la norma  $f_{[\phi_\mu]}$  de la autofunción, es una muy buena estimación del error en  $k_\mu$  (esto mismo se observa en la tabla I).

Los estados presentados en la tabla I son realmente muy excitados. Esto se puede observar en la figura 1.3, donde hemos graficado la densidad de probabilidad en espacio de configuración del estado 1000, 3425 0853. Las zonas oscuras, representan las regiones de mayor densidad. La figura 1.4 es una ampliación de una pequeña región de la figura 1.3.. El tamaño lineal de los gránulos observados, es la semilongitud de onda ( $\pi/k$ ). Si bien la energía de este estado es inferior al rango de energía que aparece en en la tabla I, lo hemos elegido pues presenta trazos rectos notorios que simulan trayectorias clásicas (esto será discutido en el capítulo III). Con excepción de esos trazos que parecen ubicarse sobre una trayectoria periódica 'scars', no es posible

(al menos a simple vista) observar ninguna otra regularidad en la función de onda. Por el contrario, el estado  $k = 1000,3623\ 3417$  que mostramos en la figura 1.5 es mucho más regular y pertenece a la familia de los estados llamados "bouncing ball"; lo hemos elegido pues posee una excitación muy grande en la dirección  $x$ , no predicha en la literatura [28].

Los autoestados del Sinai cuadrado ( $b=1$ ), presentan en promedio un valor de la norma sobre el contorno, superior por dos órdenes de magnitud al obtenido para el estadio, exceptuando aquellos que corresponden a los autoestados impares del cuadrado. Esto está asociado, como veremos en el capítulo II, a que en este billar los efectos de difracción son más importantes que en el estadio pues posee una discontinuidad de primer orden en un punto del borde (el estadio posee una discontinuidad de segundo orden). Una consecuencia directa, es que no se pueden obtener estados tan excitados como los presentados en la tabla I (con la base elegida en (1.12)). En la figura 1.6 presentamos dos estados del Sinai cuadrado. Uno completamente regular, que corresponde a un estado impar del cuadrado de lado unidad con números cuánticos 9 y 127. El otro presenta como única regularidad algunas cicatrices de trayectorias clásicas.

Los problemas computacionales se hacen todavía más críticos en el billar de Sinai. Los autoestados de este billar (para  $b = 0,4$ ), poseen una norma que es en promedio cuatro ordenes de magnitud superior a la obtenida en el estadio. La difracción en este billar es producida por el círculo, el cual genera una zona de sombras (como lo hace en general cualquier borde cóncavo). Como ejemplo, en la figura 1.7 mostramos dos autoestados de este billar; el primero de los cuales, es un estado bouncing ball asociado a la familia de trayectorias parabólicas con igual módulo del momento lineal en las direcciones  $x$  e  $y$ .

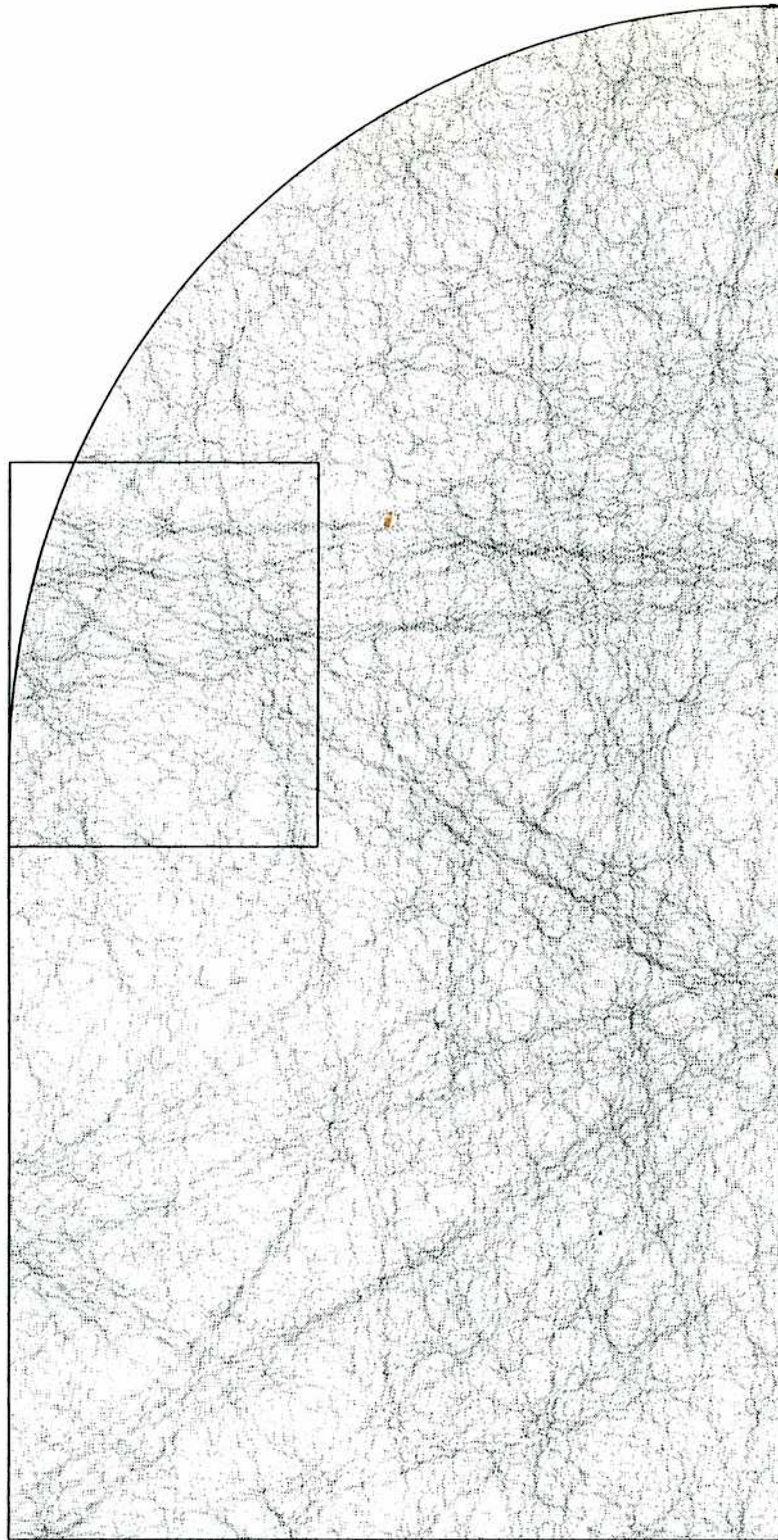


Figura 1.3: Densidad lineal del cuadrado de la autofunción impar-impar  $k = 1000,3425\ 0853$  del  $2 \times 4$  estadio ( $b = 1$ ).



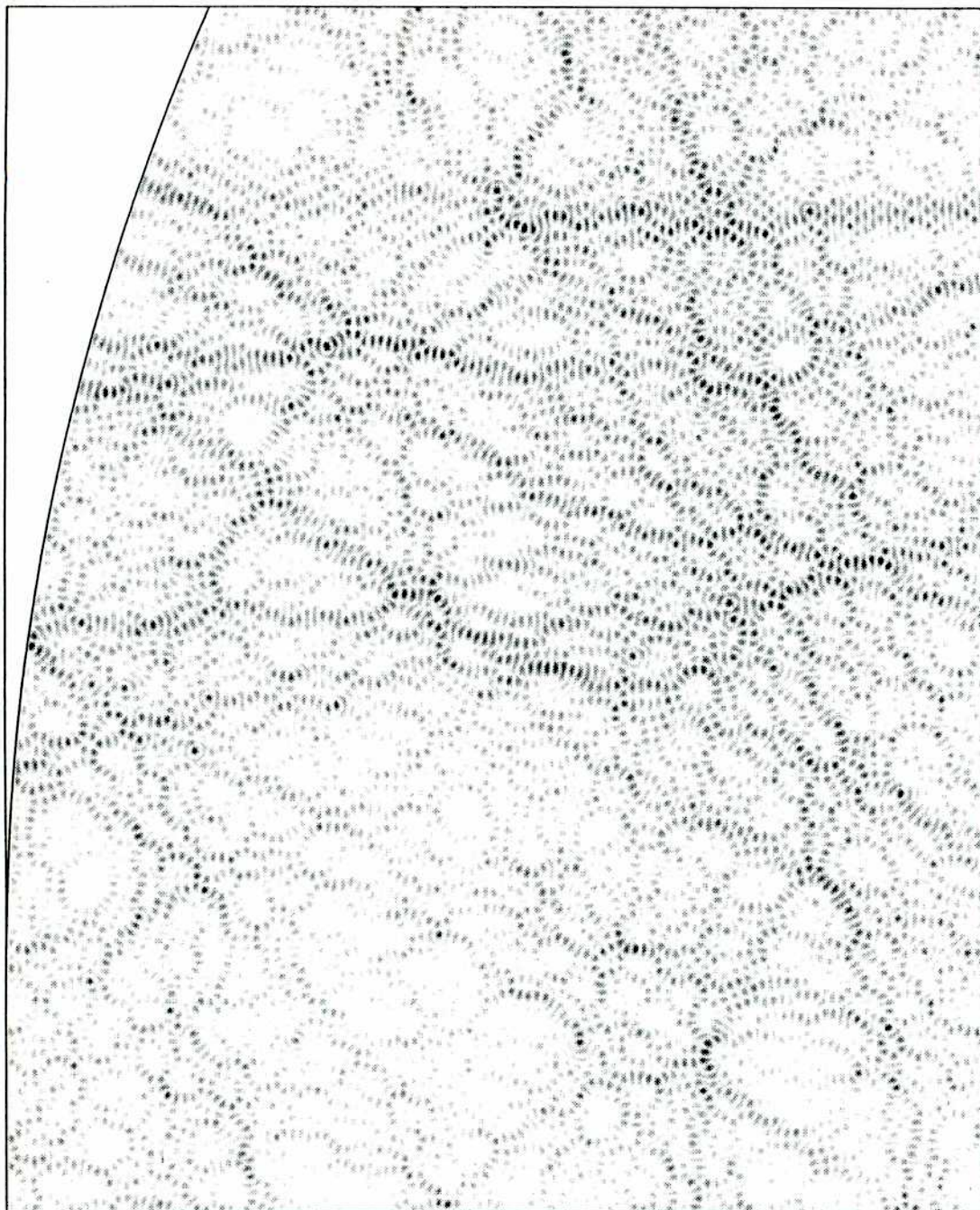


Figura 1.4: Detalle de la autofunción presentada en Fig. 1.1.

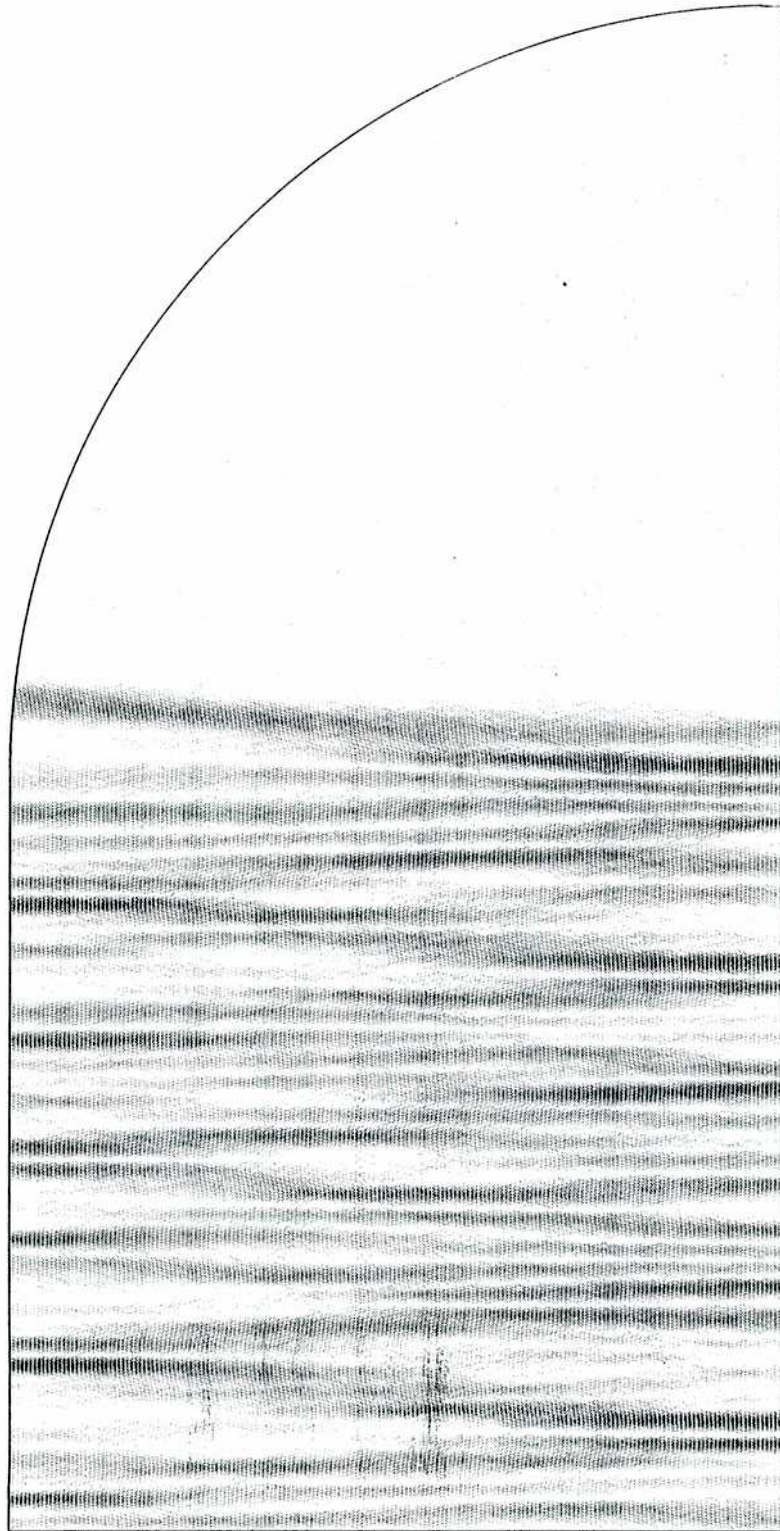


Figura 1.5: Idem Fig. 1.1. para la autofunción  $k=1000,3623\ 3417$ .



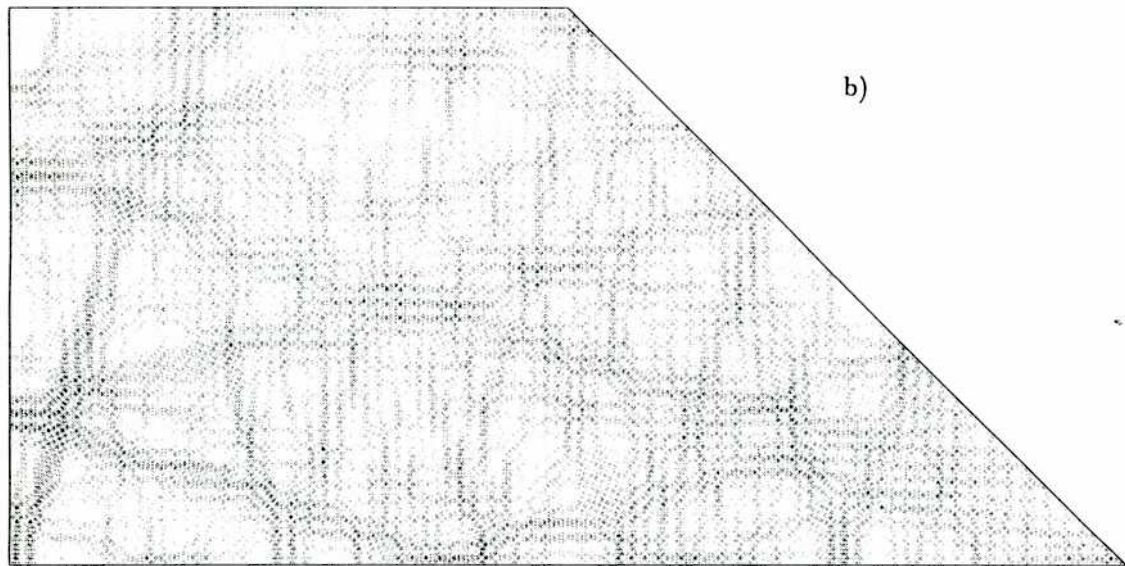
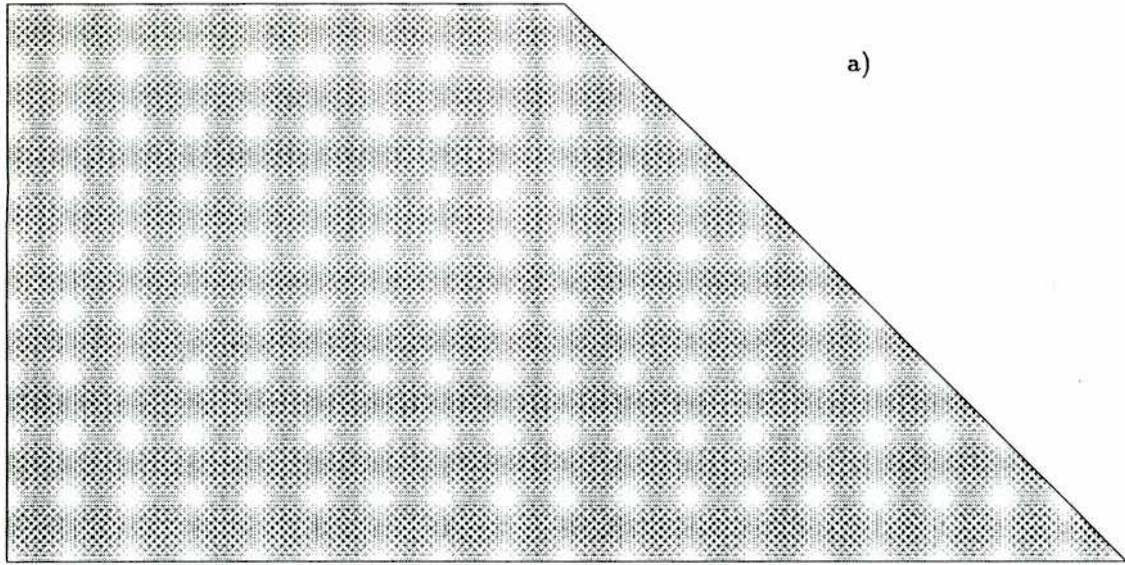


Figura 1.6: Idem Fig. 1.1. para las autofunciones: (a)  $(k/\pi)^2 = 16210$  ; (b)  $k = 399.99222$  . Sinai cuadrado o región L ( $b = 1$ ).

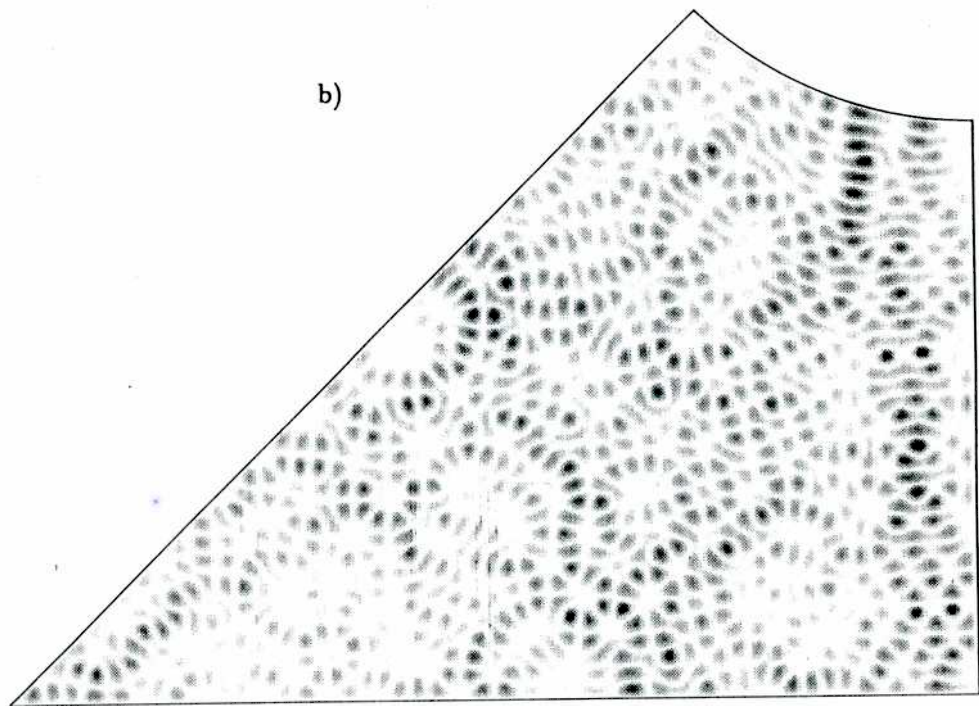
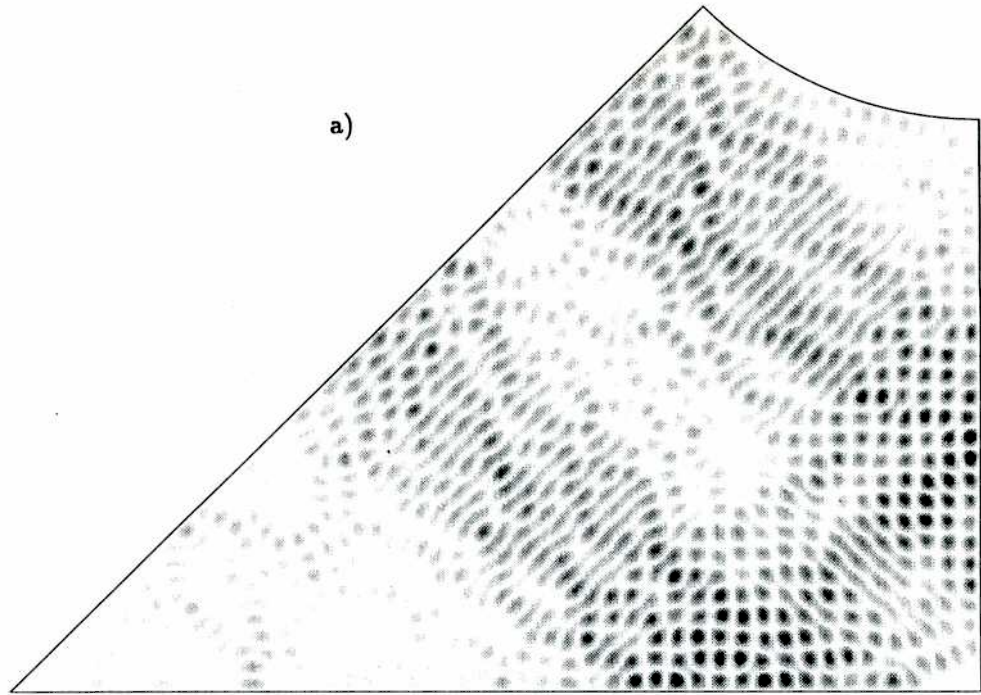


Figura 1.7: Idem Fig. 1.1. para las autofunciones: (a)  $k = 200, 13$  ; (b)  $k = 199, 90$  .  
Sinai ( $b = 0, 4$ ).

#	$k_o = 1000.4446$		$k_o = 1000.3848$	
	$k_\mu - 1000$	$f_{[\phi_\mu]}$	$k_\mu - 1000$	$f_{[\phi_\mu]}$
1	0.3526 0546	51	0.3526 0538	35
2	0.3532 8248	29	0.3532 8258	10
3	0.3543 3137	21	0.3543 3128	7
4	0.3615 1870	27	0.3615 1858	18
5	0.3623 3423	2	0.3623 3417	1
6	0.3641 6747	44	0.3641 6752	36
7	0.3678 4862	14	0.3678 4878	8
8	0.3751 7669	72	0.3751 7715	69
9	0.3762 6453	14	0.3762 6456	11
10	0.3787 2382	29	0.3787 2387	26
11	0.3807 3937	15	0.3807 3930	↙13
12	0.3908 4998	27	0.3908 4988	↘26
13	0.3937 9236	7	0.3937 9232	7
14	0.3965 2540	1	0.3965 2540	1
15	0.3987 2502	20	0.3987 2491	20
16	0.4019 9517	40	0.4019 9497	39
17	0.4050 9341	1	0.4050 9340	1
18	0.4082 4168	93	0.4082 4126	91
19	0.4111 3959	30	0.4111 3950	30
20	0.4164 8365	3	0.4164 8363	3
21	0.4179 6140	6	0.4179 6137	7
22	0.4219 2258	18	0.4219 2251	18
23	0.4288 7515	112	0.4288 7453	112
24	0.4317 2625	1	0.4317 2625	1
25	0.4344 4466	13	0.4344 4461	14
26	0.4396 1987	9	0.4396 1988	10
27	0.4419 7909	↙6	0.4419 7902	7
28	0.4478 3881	↘4	0.4478 3881	6
29	0.4512 8229	42	0.4512 8209	46
30	0.4523 4251	48	0.4523 4314	50
31	0.4587 3014	52	0.4587 3037	56
32	0.4606 5467	26	0.4606 5491	30
33	0.4674 7615	1	0.4674 7633	10
34	0.4699 5195	8	0.4699 5186	18
35	0.4716 0621	140	0.4716 0687	150
36	0.4761 0049	11	0.4761 0105	20
37	0.4769 2259	4	0.4769 2227	19

Tabla I. Autovalores del estado  $2 \times 4$  (calculados usando scaling) para  $k_o = 1000.3848$  y  $k_o = 1000.4446$  ( $N = 920$ ). Además damos la norma sobre el contorno (multiplicada por  $10^8$ ) de cada autofunción. Las flechas indican en cada caso la posición de  $k_o$  en el espectro.



## 1.5 Conclusiones

Hemos desarrollado una herramienta muy poderosa, para obtener las soluciones estacionarias de billares cuánticos. Si bien el tratamiento se ha restringido a dos dimensiones, el formalismo es aplicable a cualquier dimensión. Desde luego, en billares planos, el método de scaling potencia su eficacia, pues reduce el problema a una formulación sobre el contorno, con las siguientes ventajas respecto a los métodos disponibles hasta el presente:

i) Cálculo simultáneo de un conjunto de soluciones estacionarias, cuyo número es proporcional al número de onda en la región de energía elegida.

ii) Obtención de *todas* las soluciones en una ventana del espectro, no resultando problemática la existencia de estados degenerados.

iii) Eliminación simple y efectiva del subespacio numéricamente nulo, generado por los errores de redondeo. Esto permite mucha mayor precisión en el cálculo.

iv) Otra propiedad muy importante, que será desarrollada en el próximo capítulo, es la posibilidad de incluir aquellas ondas planas evanescentes que sean requeridas por el contorno, para suplir los efectos de difracción. Este hecho permitirá obtener estados arbitrariamente excitados, con arbitraria precisión.

La única desventaja que presenta el método de scaling, es que su aplicación se restringe a billares con dominio estrellado. Sin embargo, hay que destacar que prácticamente todos los billares utilizados en el estudio del caos cuántico pertenecen a esta categoría.

El método de scaling es muy superior a las otras formulaciones sobre el contorno, pues hace uso de propiedades generales que poseen las autofunciones del sistema. La posibilidad de extender este método a sistemas hamiltonianos, está limitada a la posibilidad de encontrar una métrica (en billares es la norma sobre el contorno), que sea mucho más sencilla de evaluar que la métrica usual que define el espacio de Hilbert (en billares es la norma sobre el dominio) y que admita una relación de cuasi-ortogonalidad entre autoestados próximos en el espectro. Tal relación de cuasi-ortogonalidad, tendrá asociado un operador hermítico (en billares es la forma cuadrática  $dF/dk$ , y en el espacio de Hilbert es el hamiltoniano), cuyos autovalores y autofunciones definen los autovalores y autofunciones del sistema.

## 1.6 Apéndice

a) Mostraremos que la norma sobre el contorno de la autofunción de scaling  $\phi_\mu$ , tiene una expansión alrededor de  $k_\mu$ , que es independiente de  $\phi_\mu$  hasta tercer orden. En lo que sigue, omitiremos el argumento  $(k_\mu, \mathbf{r}_C)$ , para  $\mathbf{r}_C$  un punto en  $C$ ; además definimos  $\mathbf{r}_t \equiv \mathbf{r} \cdot \mathbf{t}$  ( $\mathbf{t}$  es el versor tangente a  $C$ ). Usando (1.4) y que  $\Delta\phi_\mu = 0$  y  $\partial\phi_\mu/\partial t = 0$ , expandimos  $\phi_\mu$  como sigue

$$\phi_\mu(k_\mu + \delta, \mathbf{r}_C) = \frac{\delta}{k_\mu} r_n \frac{\partial\phi_\mu}{\partial n} + \frac{\delta^2}{k_\mu^2} [r_n r_t \frac{\partial^2\phi_\mu}{\partial n \partial t} + \frac{(r_t^2 - r_n^2)}{2} \frac{\partial^2\phi_\mu}{\partial t^2}] + \mathcal{O}(\delta^3) ; \quad (1.15)$$

entonces,

$$f_{[\phi_\mu]}(k_\mu + \delta) = \frac{\delta^2}{k_\mu^2} \oint_C r_n \left( \frac{\partial\phi_\mu}{\partial n} \right)^2 d\ell + \frac{\delta^3}{k_\mu^3} \oint_C [r_n r_t \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial\phi_\mu}{\partial n} \right)^2 + \frac{\partial\phi_\mu}{\partial n} (r_t^2 - r_n^2) \frac{\partial^2\phi_\mu}{\partial t^2}] d\ell + \mathcal{O}(\delta^4) . \quad (1.16)$$

Usando (1.16) y la siguiente relación [29, 30]

$$\oint_C r_n \left( \frac{\partial\phi_\mu}{\partial n} \right)^2 d\ell = 2 k_\mu^2 \int_D \phi_\mu^2(k_\mu, \mathbf{r}) d\sigma , \quad (1.17)$$

obtenemos

$$f_{[\phi_\mu]}(k_\mu + \delta) = [2 \delta^2 (1 - \delta/k_\mu) + \mathcal{O}(\delta^4)] \int_D \phi_\mu^2(k_\mu, \mathbf{r}) d\sigma \quad (1.18)$$

El coeficiente de tercer orden en  $\delta$  fue obtenido, integrando por partes. Para lograrlo, hay que tener en cuenta i)  $\partial/\partial t = d/d\ell$ , ii)  $\partial(r_n r_t)/\partial t = r_n$  y iii) si  $C$  tiene vértices, la integración hay que hacerla de a pedazos entre vértices, teniendo en cuenta que la diferencial de  $\phi_\mu$  en un vértice es cero.

b) Mostraremos que las *autofunciones de scaling* son cuasi-ortogonales sobre el contorno. Sean  $\phi_\mu$  y  $\phi_\nu$  autofunciones de scaling (normalizadas a uno sobre el dominio) con autovalores  $k_\mu$  y  $k_\nu$  respectivamente. Entonces, expandiendo las autofunciones como en (1.15),

$$\oint_C \phi_\mu(k, \mathbf{r}) \phi_\nu(k, \mathbf{r}) \frac{d\ell}{r_n} \simeq \frac{\delta_\mu \delta_\nu}{k_\mu k_\nu} \oint_C r_n \frac{\partial\phi_\mu}{\partial n} \frac{\partial\phi_\nu}{\partial n} d\ell \quad (1.19)$$

Por otro lado, en c) demostramos la siguiente relación

$$\oint_C r_n \frac{\partial \phi_\mu}{\partial n} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial n} dl = \frac{(k_\mu^2 - k_\nu^2)}{2} \int_D (\phi_\nu \mathbf{r} \cdot \nabla \phi_\mu - \phi_\mu \mathbf{r} \cdot \nabla \phi_\nu) d\sigma \quad (1.20)$$

Entonces, usando (1.18), (1.19) y (1.20), obtenemos el overlap sobre el contorno, el cual resulta independiente de  $k$  al orden más bajo en la expansión

$$\oint_C \phi_\mu(k, \mathbf{r}) \phi_\nu(k, \mathbf{r}) \frac{dl}{r_n} / \sqrt{f_{[\phi_\mu]}(k) f_{[\phi_\nu]}(k)} \simeq \text{sgn}(\delta_\mu \delta_\nu) B (k_\mu^2 - k_\nu^2) / 4k_\mu k_\nu ;$$

donde  $B$  es la integral de dominio que aparece en (1.20).  $B$  es de orden unidad si asumimos que las funciones no están correlacionadas. En billares integrables, donde las funciones de onda están labeladas por dos números cuánticos, es posible encontrar autofunciones que estén fuertemente correlacionadas si uno de los dos números cuánticos coincide. Sin embargo, la distancia (en el espectro  $k$ ) entre dichas autofunciones es mucho mayor que la distancia  $\delta_{max}$ , donde el método de scaling es aplicable. En la sección 4 hacemos una discusión de este punto para el círculo.

c) Demostraremos (1.20). Para ello haremos uso de las siguientes identidades vectoriales (la primera y la última hacen uso de la ecuación de Helmholtz)

$$\nabla \cdot (\phi_\mu \nabla \phi_\nu) = \nabla \phi_\mu \cdot \nabla \phi_\nu - k_\mu^2 \phi_\mu \phi_\nu \quad (1.21)$$

$$2\nabla \phi_\mu \cdot \nabla \phi_\nu = \nabla \cdot [\mathbf{r}(\nabla \phi_\mu \cdot \nabla \phi_\nu)] - \mathbf{r} \cdot \nabla (\nabla \phi_\mu \cdot \nabla \phi_\nu) \quad (1.22)$$

$$\mathbf{r} \cdot \nabla (\nabla \phi_\mu \cdot \nabla \phi_\nu) = \nabla \phi_\mu \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \phi_\nu + \nabla \phi_\nu \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \phi_\mu \quad (1.23)$$

$$\nabla \phi_\mu \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \phi_\nu = \nabla \cdot (\phi_\mu (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \phi_\nu) - \phi_\mu \nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \phi_\nu \quad (1.24)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} \cdot \nabla) \nabla \phi_\nu = -k_\nu^2 (1 + \mathbf{r} \cdot \nabla) \phi_\nu \quad (1.25)$$

Reemplazando (1.25) en (1.24), (1.24) y su simétrica en (1.23), (1.23) en (1.22), (1.22) en (1.21), integrando sobre el dominio la ecuación resultante y pasando a una integral de contorno aquellos términos que sean una divergencia global, resulta

$$0 = \oint_C r_n \frac{\partial \phi_\mu}{\partial n} \frac{\partial \phi_\nu}{\partial n} dl - k_\mu^2 \int_D \phi_\nu \mathbf{r} \cdot \nabla \phi_\mu d\sigma - k_\nu^2 \int_D \phi_\mu \mathbf{r} \cdot \nabla \phi_\nu d\sigma . \quad (1.26)$$

Si  $k_\mu$  y  $k_\nu$  fueran iguales en (1.26), los últimos dos términos se cancelan. Esto surge de integrar sobre el dominio la siguiente igualdad vectorial

$$\nabla \cdot (\mathbf{r} \phi_\mu \phi_\nu) = 2\phi_\mu \phi_\nu + \phi_\mu (\mathbf{r} \cdot \nabla) \phi_\nu + \phi_\nu (\mathbf{r} \cdot \nabla) \phi_\mu .$$

Luego, en (1.26) solo sobrevive la parte antisimétrica de los últimos dos términos; decir, obtenemos (1.20).

# Capítulo 2

## Efectos de Difracción

### 2.1 Introducción

Dedicamos el primer capítulo al estudio de métodos de resolución de la ecuación de Helmholtz con condiciones de contorno, y muy especialmente al método de scaling que hemos desarrollado. Estos métodos, como cualquier método variacional, resultan incompletos sin un estudio de la base de funciones de prueba adecuadas a cada sistema. Es decir, no es posible obtener las soluciones estacionarias de un sistema, si éstas no viven en el subespacio generado por la base elegida.

Incorporaremos a la base de funciones de prueba, familias uniparamétricas de ondas planas evanescentes. De todas maneras, nuestro objetivo no se limita a obtener autoestados arbitrariamente precisos; además, deseamos que las soluciones estén representadas en una base de ondas planas. Por ejemplo, para el sector circular  $0 \leq \theta \leq \alpha\pi$ , las soluciones se expresan en términos de las funciones de Bessel de orden fraccionario  $\ell\pi/\alpha$  para  $\ell = 0, 1, \dots$ ; es decir, conocemos exactamente las autofunciones. Sin embargo, solo para  $\ell\pi/\alpha$  entero, se conoce una representación analítica en término de ondas planas.

Nuestro interés está centrado en la posibilidad de expresar las soluciones estacionarias, como suma de dos contribuciones. Una se extiende a todo el plano en forma acotada; esta contribución que se expresa como suma de ondas planas reales, está tenida en cuenta por el término de Gutzwiller [31] en la teoría de las trayectorias periódicas. La otra contribución, representada por modos evanescentes y que da cuenta de la difracción, ha sido introducida recientemente en la teoría de las trayectorias periódicas mediante la incorporación de trayectorias difractadas [32]. Sin

embargo, no es clara la importancia de esta segunda contribución. Se ha sugerido [33] que los efectos de la difracción son despreciables en el límite semiclásico.

En la próxima sección describiremos las soluciones de onda plana e introduciremos las soluciones simetrizadas, adecuadas al estadio. Luego, discutiremos la posibilidad de una representación en términos de ondas planas reales. En la cuarta sección estudiaremos familias uniparamétricas de ondas evanescentes, las cuales nos permiten obtener autoestados arbitrariamente precisos del estadio. En la quinta sección determinaremos la contribución de la difracción como función del número de onda y estudiaremos su importancia asintótica. La última sección está dedicada a las conclusiones.

## 2.2 Ondas planas Evanescentes

Las soluciones de onda plana a la ecuación de Helmholtz (1.1), están caracterizadas por su vector de onda  $\mathbf{k}$ . Si las componentes del vector de onda son reales, estas soluciones representan ondas planas que oscilan (con longitud de onda  $\lambda = 2\pi/k$ ) según la dirección definida por  $\mathbf{k}$  y son constantes a lo largo de frentes de onda perpendiculares a  $\mathbf{k}$ . Estas soluciones, que de ahora en más llamaremos reales, son acotadas en su espacio de definición, y constituyen una base completa. Cuando las componentes del vector de onda son complejas, se obtienen soluciones que oscilan con una longitud de onda inferior a  $\lambda$  en la dirección de propagación y varían exponencialmente en la dirección perpendicular. Si bien estas soluciones son no acotadas en su espacio de definición, las utilizaremos en regiones acotadas. En el plano, usando coordenadas cartesianas  $\mathbf{r} = (x, y)$ , las soluciones de onda plana son

$$\psi_{\theta, \alpha}(\mathbf{r}) = \exp[ikx \cos(\theta + i\alpha)] \exp[iky \sin(\theta + i\alpha)] , \quad (2.1)$$

con  $\theta$  y  $\alpha$  reales. Es fácil verificar que (2.1) satisface la ecuación de Helmholtz. Separando las partes real e imaginaria del exponente en (2.1), resulta

$$\psi_{\theta, \alpha}(\mathbf{r}) = \exp(ikx' \cosh \alpha) \exp(-ky' \sinh \alpha) , \quad (2.2)$$

donde la dirección de propagación  $x' = x \cos \theta + y \sin \theta$ , forma un ángulo  $\theta$  con el eje positivo de las  $x$  en sentido antihorario. En esta dirección, la onda oscila con longitud de onda  $2\pi/(k \cosh \alpha)$ . En la dirección perpendicular  $y' = y \cos \theta - x \sin \theta$ , la onda varía exponencialmente con exponente  $-k \sinh \alpha$  (ver (2.2)). Haciendo  $\alpha = 0$ , obtenemos las ondas planas reales. Si  $\pi/2 \leq \theta < 0$  y  $\alpha < 0$ , el máximo valor del

módulo de  $\psi_{\theta,\alpha}$  en el estadio ocurre en el punto ( $x_o = b - \sin \theta$ ,  $y_o = \cos \theta$ ) sobre el semicírculo en el primer cuadrante (esta relación uno a uno entre los puntos del círculo y el ángulo  $\theta$ , será válida en general para cualquier billar convexo). Como el módulo crece exponencialmente según el eje  $y'$ , normalizamos la función para que su módulo valga 1 en el punto ( $x_o, y_o$ ); es decir, multiplicamos a la función (2.2) por  $\exp[k(1 - b \sin \theta) \sinh \alpha]$ . A partir de (2.2), construiremos las funciones de onda simétricas respecto a los ejes coordenados. Sea  $S_x = +1(-1)$  para una función par (impar) respecto al eje x. Idem  $S_y$  para el eje y. La función simetrizada con simetría ( $S_x, S_y$ ), se obtiene fácilmente por aplicación de las operaciones de simetría del grupo  $C_{2v}$  [34]

$$\psi_{\theta,\alpha}^{sim}(x, y) = \sum_{t,s=\pm 1} S(t, s) \psi_{\theta,\alpha}(tx, sy), \quad (2.3)$$

con  $S(t, s) = [(1 + t) + S_x(1 - t)][(1 + s) + S_y(1 - s)]/4$ .

Dado que las soluciones estacionarias son reales (invariancia temporal de la ecuación de ondas), para no tener que trabajar con coeficientes complejos en el cálculo variacional, descomponemos la función (2.3) en sus partes real e imaginaria.

## 2.3 Soluciones estacionarias del estadio como superposición de ondas planas reales

Se ha demostrado recientemente que las soluciones estacionarias del estadio no pueden extenderse a todo el plano como funciones reales, analíticas y acotadas [35]. La consecuencia inmediata de esta afirmación es que no es posible expresar las autofunciones del estadio como superposición de ondas planas reales. Luego, dado que el conjunto de todas las ondas planas es completo, se concluye que las autofunciones deben contener modos evanescentes.

Sorprendentemente, M. Berry [36] ha mostrado que una onda plana evanescente, la cual oscila según su dirección de propagación más rápido que el número de onda  $k$ , puede ser construida con arbitraria precisión en términos de ondas planas reales. Esto constituye una generalización a dos dimensiones de las funciones superoscilantes de una variable, introducidas recientemente por Aharonov *et. al.* [37]. Estas funciones oscilan en un rango arbitrario, arbitrariamente más rápido que cualquiera de sus componentes de Fourier. Veamos el siguiente ejemplo unidimensional.

Sea una función que oscila con número de onda  $k \cosh \alpha$  en un rango finito  $L$ . En el espacio de momentos, la representamos por una gaussiana centrada en  $k \cosh \alpha$ , con ancho fijado por la relación de incerteza  $\sigma L = 2\pi$ . Se muestra en [37] que esta función puede ser representada por una superposición de  $N$  gaussianas centradas en  $k_n = k(1 - 2n/N)$ , para  $n = 1, \dots, N$  (sus componentes de Fourier) con coeficientes dados por la relación

$$c_n = \frac{N!}{n!(N-n)!} \frac{(-1)^n}{2^N} (\cosh \alpha + 1)^n (\cosh \alpha - 1)^{N-n}$$

$N$  es proporcional a  $L$  y al factor  $\cosh \alpha$  de incremento de la oscilación [38].

De la expresión anterior, observamos lo siguiente:

i) Los coeficientes cambian de signo en forma alternada, manteniéndose su suma acotada (para este ejemplo particular  $\sum c_n = 1$ ).

ii)  $\gamma \equiv \sum c_n^2$  crece en forma singular con  $\cosh \alpha$ .

Estos dos hechos siguen siendo válidos en el caso bidimensional [36], y si bien en principio son cualitativos, nos permitirán detectar de manera inequívoca la presencia de ondas evanescentes en las soluciones del estadio.

Por supuesto, cuando se desean expresar las soluciones del estadio como superposición de ondas planas reales, los coeficientes  $c_n$  no se conocen a priori. Los mismos se obtendrán por un método variacional. En tal caso, el valor de  $\gamma$  está limitado por la precisión con la cual se trabaja. Pero si  $\gamma$  está limitado, también está limitada la posibilidad de representar ondas evanescentes. Solo aquellas que oscilan levemente más rápido que  $k$ , podrán ser representadas. En lo que sigue, cuantificaremos estas ideas, utilizando el método de scaling para cuantizar el estadio.

En el capítulo I hemos calculado las autofunciones del estadio como superposición de ondas planas reales. Diagonalizamos la matriz de overlaps  $F$  (ver (1.10)). Luego, truncamos la base a aquellas autofunciones de  $F$ , cuyos autovalores  $\gamma_n$  (ordenados en forma decreciente) satisfacen  $\gamma_n/\gamma_{max} > \text{precisión}$ . Habíamos observado un fenómeno de saturación en el número de funciones que puede contener la base truncada. Este hecho se puede apreciar en la figura 2.1, donde hemos graficado (para distintos valores de  $k$ ) el número de cifras decimales necesarias en el cálculo  $N_{cd} = -\log_{10}(\gamma_n/\gamma_{max})$  como función de la fracción  $n/N_0$  de ondas planas reales de la base truncada. En el límite semiclásico,  $N_0 \equiv \mathcal{L}k/\pi$  representa el número de ondas planas reales relevantes [39]; es decir, el número necesario para construir un autoestado. En la figura se han

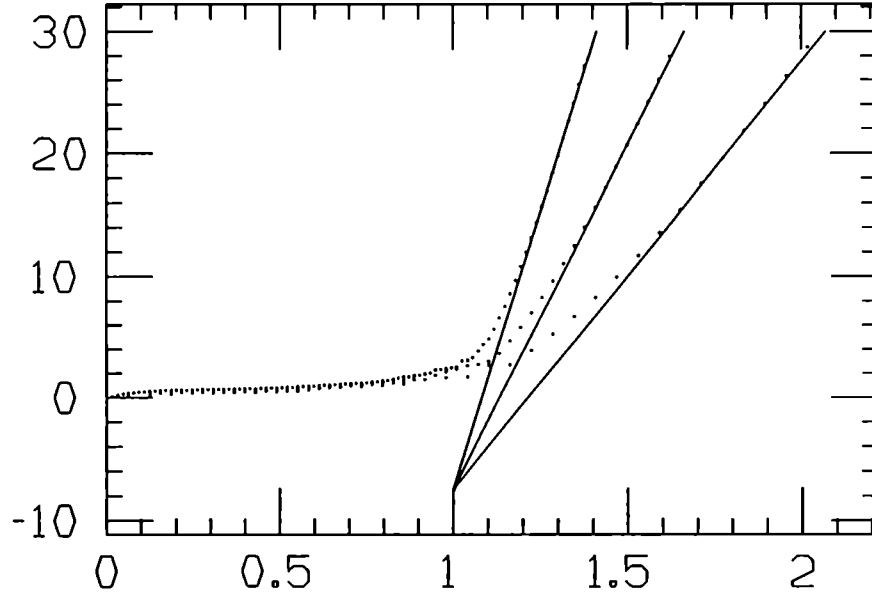


Figura 2.1: Gráfico del número de cifras decimales  $N_{cd} = -\log(\gamma_n/\gamma_{max})$  en función de la fracción  $n/N_0$  para  $k = 20, 40$  y  $80$ . Los autovalores  $\gamma_n$  de la matriz de overlaps  $F$  corresponden al estadio  $2 \times 4$  ( $b=1$ ).

trazado además, rectas que ajustan el comportamiento de  $N_{cd}$  cuando la fracción es superior a uno y que satisfacen la siguiente relación

$$N_{cd} = 5,09 N_0^{0,69} \left( \frac{n}{N_0} - 1 \right) - 7,5 \quad (2.4)$$

Haciendo  $N_{cd} \sim 16,5$  en (2.4), obtenemos el número de ondas que se pueden incluir en doble precisión  $N_{dp} = N_0(1 + 4,7 N_0^{-0,69})$ . Es decir que en doble precisión solo se podrán representar ondas evanescentes que oscilan no mucho más rápido que  $k$  ( $\cosh \alpha \leq N_{dp}/N_0$ ). Por otro lado, si se desea representar ondas evanescentes que oscilan  $\cosh \alpha$  veces más rápido que  $k$ , es necesario incluir  $N_0 \cosh \alpha$  ondas planas reales y trabajar con aproximadamente  $5 (\cosh \alpha - 1) N_0^{0,69} - 7,5$  dígitos decimales.

En conclusión, si bien es formalmente posible representar ondas evanescentes como superposición de ondas planas reales, dicha representación deja de tener sentido en el límite semiclásico. Pero entonces, en el límite semiclásico, la única manera de obtener soluciones estacionarias que incluyan modos evanescentes, es incorporando dichos modos en el problema variacional. En la próxima sección estudiaremos cuáles son los modos evanescentes relevantes a las autofunciones del estadio.



## 2.4 Soluciones estacionarias del estadio arbitrariamente precisas

De la sección anterior sabemos que es necesario incluir modos evanescentes en las soluciones estacionarias del estadio. La siguiente cuestión es saber qué ondas evanescentes debemos incluir en el problema variacional. Para ello hacemos las siguientes observaciones:

i) La demostración que da cuenta de la imposibilidad de extender a todo el plano los autoestados del estadio como funciones reales, analíticas y acotadas [35], se basa en la no analiticidad del contorno en los puntos de unión de los segmentos rectos con los semicírculos.

ii) Recordemos que el campo electromagnético en el vacío y en dos dimensiones (no depende de una de las coordenadas cartesianas), está regido por la ecuación de Helmholtz (para alguna de las componentes del campo) con número de onda  $k = \omega/c$  (si asumimos una dependencia temporal armónica), donde  $\omega$  es la frecuencia angular y  $c$  es la velocidad de la luz [40]. Luego, de la teoría geométrica de la difracción [41], la incidencia de una onda plana sobre un borde metálico (conductor perfecto, para que se tenga que satisfacer la condición de Dirichlet) con una discontinuidad de orden superior en algún punto, genera difracción. En un entorno de la discontinuidad, la intensidad de la onda difractada puede llegar a ser del orden de la onda incidente.

Los puntos antes mencionados nos sugieren que los modos evanescentes relevantes, son aquellos que tienen una contribución significativa en un entorno de las discontinuidades. Basándonos en esta idea, construiremos familias uniparamétricas de ondas planas evanescentes.

Definiremos la familia uniparamétrica  $\beta$ , por la siguiente relación entre  $\theta$  y  $\alpha$  (los dos parámetros que definen una onda plana)

$$\sin \theta = \frac{1}{\beta} \sqrt{\frac{2}{k \sinh |\alpha|}} \quad (2.5)$$

Con esta relación, el módulo de la onda evanescente tiene una longitud de atenuación igual a  $\beta\theta$  sobre el semicírculo, a partir del punto de módulo máximo ( $x_0 = b - \sin \theta$ ,  $y_0 = \cos \theta$ ). Para  $\beta = 3$ , la longitud de atenuación sobre el semicírculo y sobre el segmento recto son iguales. Para  $\beta > 3$ , la longitud de atenuación es mayor sobre el segmento recto. En la figura 2.2 mostramos cómo se ve sobre el contorno la parte real de una onda evanescente para  $\beta = 2$  y  $\beta = 10$ .

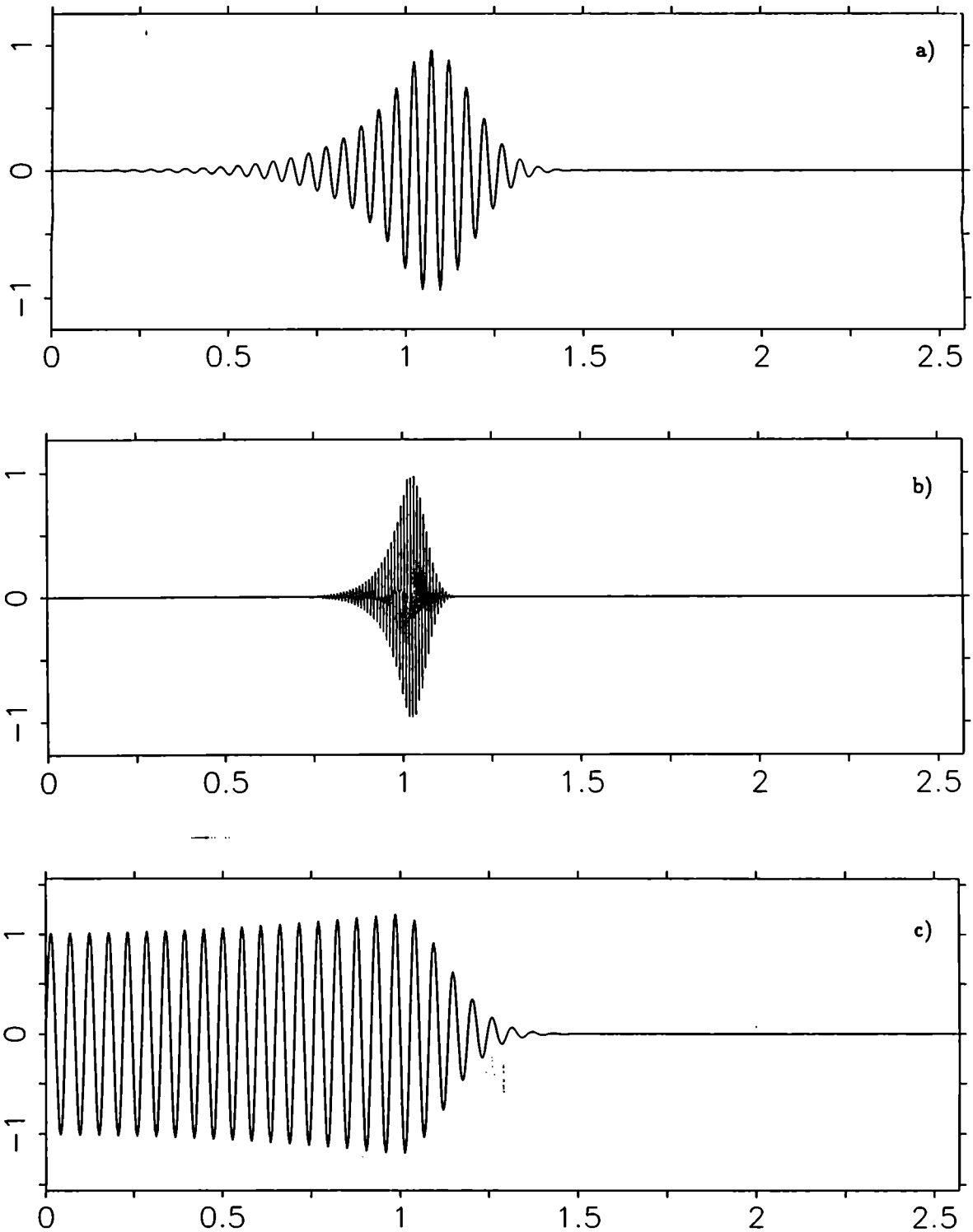


Figura 2.2: Parte real de las ondas planas evanescentes sobre el borde del estadio  $2 \times 4$  para: (a)  $\beta = 2$ ,  $\cosh \alpha = 1,27$ ; (b)  $\beta = 2$ ,  $\cosh \alpha = 6$ ; (c)  $\beta = 10$ ,  $\cosh \alpha = 1,15$ . En todos los casos  $k = 100$ .

El número de oscilaciones por unidad de longitud sobre el contorno, en un entorno del punto  $(x_0, y_0)$  es  $k \cosh \alpha$ . Luego, el overlap sobre el contorno entre dos ondas pertenecientes a la misma familia, disminuye con la diferencia de oscilación entre ambas y con la longitud de decaimiento. Pidiendo overlap constante entre ondas vecinas pertenecientes a una misma familia, resulta una distribución uniforme en  $\sinh \alpha$ , que escala con  $k^{-1/3}$ . Estudios numéricos nos han permitido observar que la familia  $\beta = 2$  es la más importante, y para la misma hemos elegido la distribución  $\alpha_n = (3 + n)k^{-1/3}/2$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). En la región  $k \sim 100$ , hemos reducido la norma sobre el contorno cuatro órdenes de magnitud, por la inclusión de las primeras ocho ondas evanescentes de la familia  $\beta = 2$ . Incluyendo además la familia  $\beta = 10$  con distribución  $\sinh \alpha_n = (3, 5 + n)k^{-1/3}/2$ , hemos reducido la norma entre seis y siete órdenes de magnitud respecto a lo obtenido en el capítulo I, que ya era un resultado muy bueno.

Disponemos de soluciones estacionarias arbitrariamente precisas, expresadas como suma de dos contribuciones; una en términos de ondas planas reales y la otra en términos de ondas planas evanescentes. ¿Se puede garantizar que la contribución de ondas planas reales no está representando parte de la contribución evanescente?. Recordemos que la base de ondas planas no es ortogonal (sobre un dominio finito). En realidad, es un punto delicado que merece la siguiente discusión.

Dado que estamos trabajando con una precisión fijada (doble precisión), el número de ondas planas reales que se puede introducir en el problema variacional es limitado (ver (2.4)). Luego, la representación de un modo evanescente en términos de ondas reales es pobre, tanto más pobre cuanto más evanescente ( $\cosh \alpha$  grande) sea. Es decir que si en la base de funciones de prueba incluimos una onda evanescente relevante, el método variacional preferirá dicha onda a una representación aproximada de la misma.

Veamos el siguiente ejemplo. Sea el primer autoestado impar-impar del estadio con número de onda mayor que  $32\pi$ . Eligiendo una base de 96 ondas planas reales y realizando el tipo de cálculo presentado en el capítulo I, obtenemos (cálculo A)  $k = 100,544687$ ,  $f_{[\phi]} = 2 \times 10^{-6}$  y  $\gamma \equiv (Area/4) \sum c_n^2 \simeq 3 \times 10^5$ . Recordemos de la sección anterior que  $\gamma$  crece de manera singular con  $\cosh \alpha$  y cuanto menor es  $\gamma$ , menos evanescentes son los modos representados. Hemos multiplicado a la expresión de  $\gamma$  por un factor que tiene en cuenta el hecho de que las funciones de la base no están normalizadas a uno sobre el dominio; de esta manera, si la base fuera ortogonal

en el dominio,  $\gamma$  valdría uno. Para las autofunciones del círculo (que no poseen modos evanescentes), bajo condiciones similares, el valor medio de  $\gamma$  resulta 0,85. Agregando a la base antes elegida tres ondas evanescentes obtenemos (cálculo B)  $f_{[\phi]} \simeq 1 \times 10^{-7}$  y  $\gamma \simeq 2 \times 10^4$ . Finalmente, incluyendo un total de 45 ondas evanescentes, obtenemos  $k = 100,54468\ 82862\ 7$ ,  $f_{[\phi]} \simeq 9 \times 10^{-13}$  y  $\gamma \simeq 0,95$ . El valor de  $\gamma$  en el último cálculo, nos sugiere que la contribución de ondas planas reales, no contiene modos evanescentes. La figura 2.3 muestra esta contribución en un dominio extendido, más allá de los límites del billar. La presencia de un modo evanescente se observaría nítidamente en el dominio extendido (recordar que las ondas evanescentes crecen exponencialmente). Para ejemplificar, en el ángulo superior izquierdo de la figura 2.3 mostramos cómo se extiende más allá de los límites del billar, la combinación de ondas reales obtenida en el primer cálculo (A). En este caso, las ondas planas reales están representando algunos modos evanescentes.

Por otro lado, la contribución de las ondas evanescentes al estado en cuestión tiene relevancia en el borde del billar, con una longitud de penetración igual a la semilongitud de onda del estado (en la región exterior diverge rápidamente). A esta contribución, que llamaremos "campo difractado estacionario", la hemos graficado sobre el borde del billar (fig. 2.4a). Se puede apreciar que el número de oscilaciones sobre el tramo recto (entre cero y uno) es 17, uno más que el número de longitudes de onda típica del estado en el mismo tramo; esto concuerda con la idea de que el campo difractado contiene todas aquellas oscilaciones que sean más rápidas que la oscilación típica del estado. Es claro que en el borde, ambas contribuciones deben coincidir para que su suma se anule; en (fig. 2.4b) graficamos dicha suma (observar el cambio de escala respecto a Fig. 2.4a). Por último, en (Fig. 2.4c) graficamos el autoestado obtenido con una base de 96 ondas reales; el número de oscilaciones en el tramo recto no llega a 18. Esto quiere decir que se han podido representar ondas evanescentes  $\cosh \alpha \simeq 1,05$  veces más rápidas que  $k$  usando doble precisión; es decir, la posibilidad de representar ondas evanescentes es muy limitada.

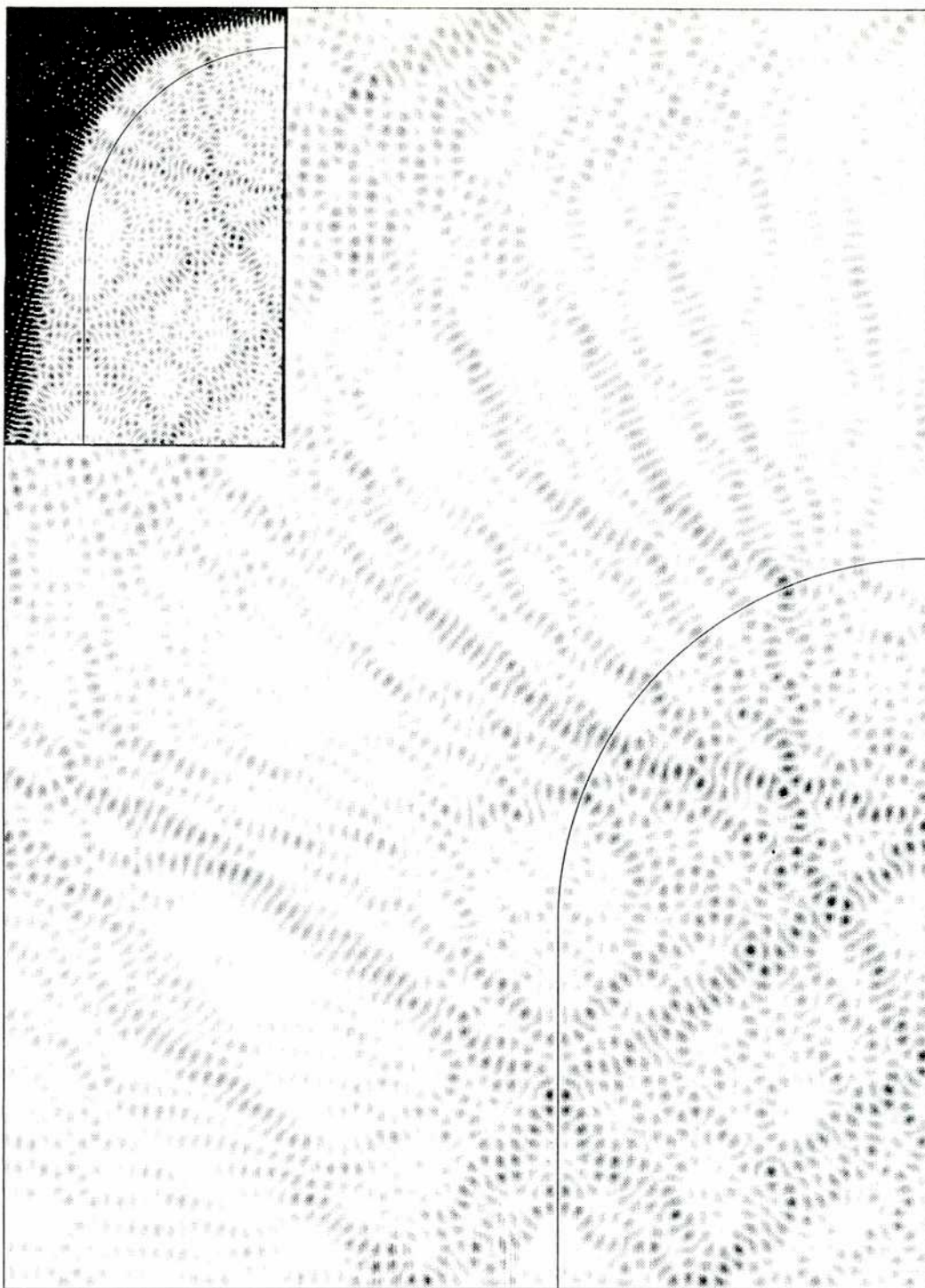


Figura 2.3: Representación en un dominio extendido de la contribución de ondas planas reales al estado impar-impar  $k = 100,54468\ 82862\ 7$  del estadio  $2 \times 4$  (cálculo B). En el ángulo superior izquierdo se representa el mismo estado (cálculo A).

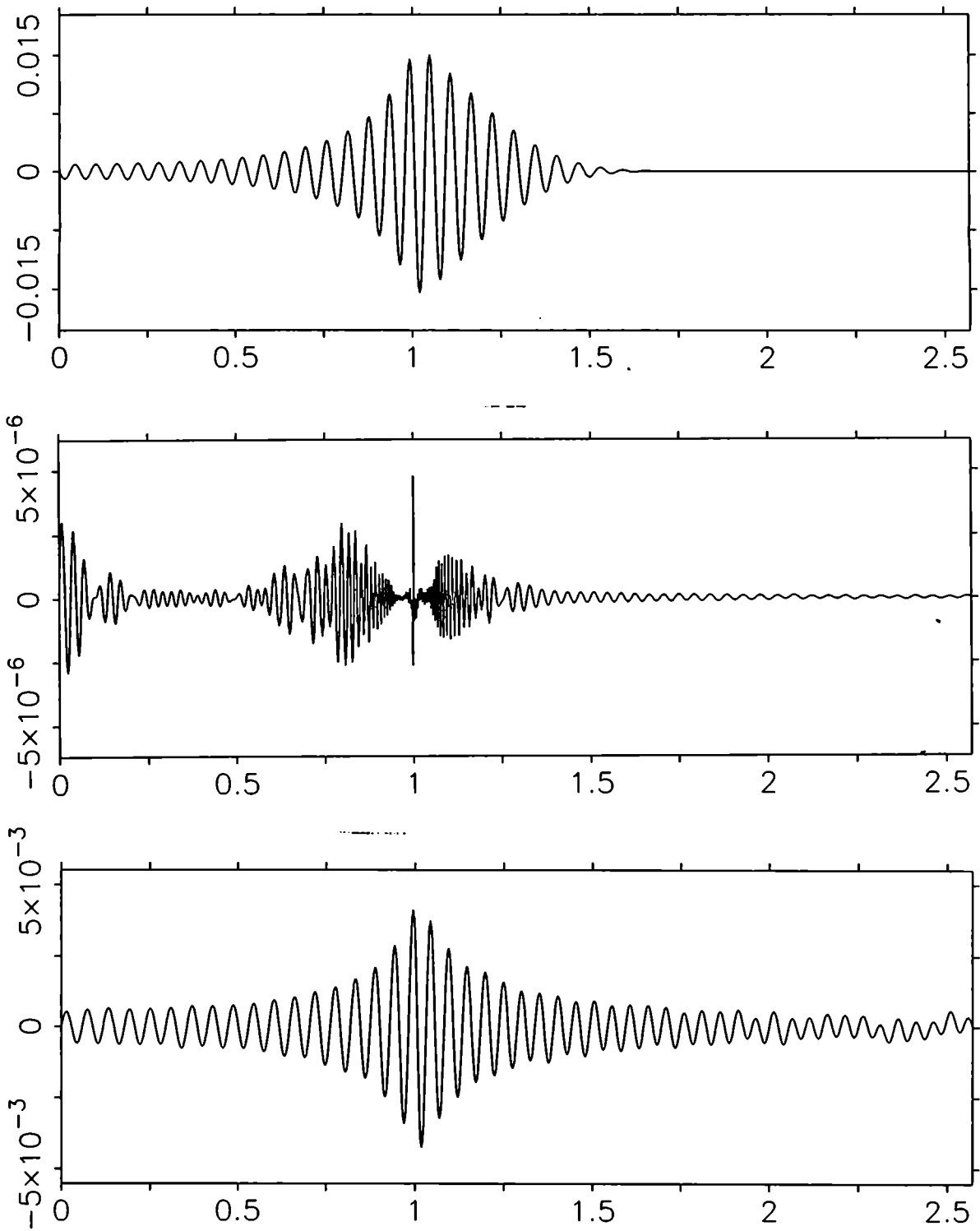


Figura 2.4: (a) Campo difractado estacionario del estado representado en Fig. 2.3.; (b) autofunción en el borde (cálculo B); (c) autofunción en el borde (cálculo A).

## 2.5 Difracción en el límite semiclásico

En la sección anterior presentamos la manera de separar, en las soluciones estacionarias del estadio, la contribución asociada a las ondas planas reales, de la debida a los modos evanescentes (el campo difractado estacionario). En base a esos cálculos, en esta sección nos dedicaremos a estudiar la importancia relativa del campo difractado en el límite semiclásico. Para ello calcularemos ciertas propiedades medias del campo difractado en distintas regiones del espectro y haremos una extrapolación para estimar su importancia asintótica.

La cantidad que vamos a evaluar es la norma sobre el contorno del campo difractado  $f_d$  como función de  $k$ . Esta cantidad fluctúa de estado a estado; sin embargo, hemos observado que su logaritmo (alrededor de un  $k$  dado) lo hace de acuerdo con una distribución gaussiana. Además, hemos excluido los estados bouncing ball debido a que su norma es inferior y el peso relativo de los mismos tiende a cero (como  $k^{-1/2}$ ) en el límite semiclásico. En la figura 2.5 mostramos la contribución de las ondas reales al estado  $k = 289,08589\ 66840\ 3$  en un dominio extendido; es un bouncing ball muy puro con un campo difractado extremadamente pequeño ( $f_d \simeq 6,8\ 10^{-8}$ ). En la figura 2.6 mostramos el estado  $k = 100,72212\ 20213$ ; es uno de los estados con mayor  $f_d$  ( $\simeq 1,9\ 10^{-4}$ ) en la región  $32 < k/\pi < 33$ . Esta autofunción tiene un scar sobre una trayectoria periódica pegada al borde (una *whispering gallery* [42]). En la figura 2.7 mostramos el estado  $k = 102,35558\ 43972\ 7$  con  $f_d \simeq 1,3\ 10^{-7}$  (uno de los valores más pequeños en esta región de energía); se observa un trazo que partiendo del centro del círculo, atraviesa el borde del mismo sin quebrarse. Esta observación es muy sugestiva; parecería que los scars no solo se reflejan en el borde, sino que también se refractan. Lo mismo ocurre en la figura 2.3 donde un conjunto de trazos casi paralelos que impactan sobre el borde (desde la región exterior), convergen a un punto que está a mitad de camino entre el borde y el centro del círculo (¿ un punto focal ?). De hecho, es bien conocida la dualidad que existe entre el problema interior (que hemos investigado en este trabajo) y el problema exterior (se piensa al billar como un obstáculo y se estudia la matriz de scattering [43]). Rescatemos un hecho; la difracción (como era de esperar) depende de la distribución angular (de las ondas planas reales) asociada al estado estacionario; pero más aún, depende fuertemente de la distribución angular de ondas localizadas (paquetes de onda) que impactan en el punto de discontinuidad (esto se observa claramente en la representación estelar que

veremos en el capítulo III). Sin embargo, dejaremos este punto como un tema abierto a futuras investigaciones.

Realizamos un estudio numérico de la norma (del campo difractado) en las regiones de energía  $k \sim 100, 300$  y  $1000$ . Este cálculo (bastante delicado por cierto) nos permitió obtener la siguiente expresión asintótica

$$f_d \rightarrow (1,3 \pm 0,2) 10^{-3} k^{-(1,0 \pm 0,1)} \text{ para } k \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

En lo que sigue, vamos a ver cómo se deteriora la determinación de los autoestados por la no inclusión del campo difractado estacionario. Sabemos que la norma de un autoestado (exacto) como función de  $k$  satisface  $f_{\{\phi_\mu\}}(k) \simeq 2(k - k_\mu)^2$  (ver (1.7)). Sean  $k_\mu$  y  $k_\nu$  dos autovalores vecinos. Afirmamos que el mínimo valor que puede alcanzar la norma en el espacio de todas las ondas planas (reales más evanescentes) para  $k_\mu < k < k_\nu$ , cae sobre la parábola que define  $\phi_\mu$  si  $k$  está más cerca de  $k_\mu$ ; en caso contrario cae sobre la parábola definida por  $\phi_\nu$ . Esta afirmación sería exacta si las autofunciones de scaling fueran exactamente ortogonales. De todos modos, la corrección que introduce la cuasiortogonalidad es muy pequeña, consiste en suavizar la punta afilada que definen las dos parábolas en el punto de intersección, reduciendo su altura en un factor  $1 - \mathcal{O}(1)/(Area k^2)$ . Luego, es posible distinguir entre los estados  $\phi_\mu$  y  $\phi_\nu$  debido a que la norma mínima define una barrera entre ambos.

Supongamos ahora que no tenemos en cuenta la difracción; es decir, minimizamos la norma en el espacio de ondas planas reales. En ese caso, el mínimo valor que puede alcanzar la norma está acotado inferiormente por  $f_d$ . ¿Esto hace que desaparezca la barrera para valores grandes de  $f_d$ ? ¿No será posible que el esquema de parábolas que hemos descrito en el párrafo anterior, solo sufra una traslación en  $f_d$ ? En tal caso la norma mínima seguiría siendo un buen criterio para individualizar los autoestados. Sin embargo, tal posibilidad no existe; los campos difractados no conservan la propiedad de cuasiortogonalidad que tienen los autoestados exactos, por el contrario tienen un overlap grande. Por ejemplo, si el overlap de los campos difractados de  $\phi_\mu$  y  $\phi_\nu$  es 1 sobre la barrera, éstos se cancelan y la altura de la barrera no se ve modificada por realizar la minimización en la base de ondas reales.

Luego, se podrá distinguir entre  $k_\mu$  y  $k_\nu$  si y solo si  $f_d$  es inferior (o del orden) que la altura de la barrera

$$f_d < \frac{(k_\mu - k_\nu)^2}{2}$$



Es claro que la condición anterior no se puede satisfacer para valores arbitrariamente grandes de  $k$  pues el término de la derecha tiende a cero como  $k^{-2}$  y el de la izquierda como  $k^{-(1\pm 0,1)}$ . Reemplazando  $k_\mu - k_\nu$  por su valor medio y  $f_d$  por la expresión obtenida en (2.6), encontramos para el estadio un valor máximo  $k \sim 15,000$  para el cual es posible resolver los autoestados individuales sin tener en cuenta la difracción.

¿Qué ocurrirá en otros billares si no se tiene en cuenta la difracción ?.

En principio, para responder a esta pregunta habría que hacer un estudio del campo difractado estacionario similar al que hemos hecho para el estadio. Sin embargo, haremos las siguientes observaciones:

i) Para poder despreciar los efectos de difracción en el límite semiclásico es necesario que  $f_d$  tienda a cero al menos como  $k^{-2}$ .

ii) En el estadio, la intensidad del campo difractado en el punto de discontinuidad es máxima e independiente de  $k$ . A medida que nos alejamos del punto de discontinuidad (por el borde), la intensidad decae con una longitud de decaimiento proporcional a  $k^{-1/2}$ . De este comportamiento resulta  $f_d \propto k^{-1}$ .

iii) De lo expuesto en ii), es razonable suponer que aquellos billares con discontinuidades puntuales en su borde tengan la misma ley de decaimiento del campo, dependiendo su intensidad del tipo de discontinuidad y del valor de la misma. Por ejemplo, el Sinai cuadrado o cualquier polígono con algún ángulo interior distinto de  $\pi/m$  ( $m$  entero), poseen una discontinuidad de primer orden (recordemos que el estadio tiene una discontinuidad de segundo orden); es decir, la intensidad del campo difractado debería ser mayor que la correspondiente al estadio. Luego, estos billares deberían tener un  $k$  máximo menor que el obtenido para el estadio.

iv) En el billar de Sinai, donde la difracción es producida por el círculo central, esperamos que la intensidad del campo difractado sea constante sobre el círculo e independiente de  $k$ . En tal caso  $f_d$  no dependería de el  $k$ , y el máximo valor de  $k$  debería ser mucho menor en comparación con los casos anteriores (para comparar el  $k$  de uno y otro billar hay que igualar las áreas).

Concluimos que si no se tiene en cuenta la difracción, no será posible resolver los autoestados de billares caóticos para valores arbitrariamente grandes de  $k$ , como lo exige el límite semiclásico.

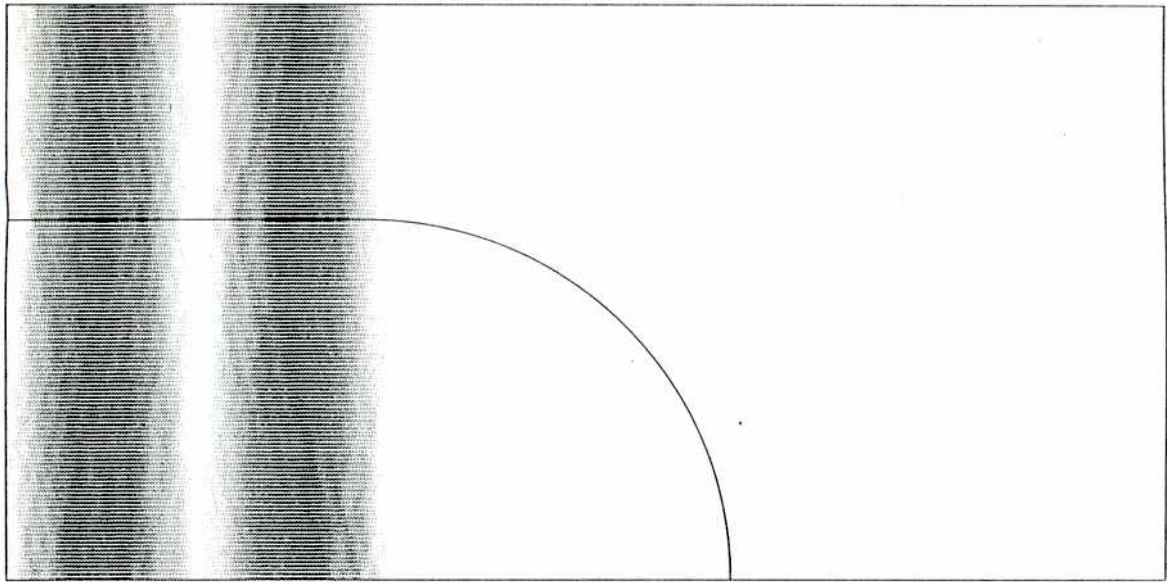


Figura 2.5: Contribución de las ondas planas reales al estado impar-impar  $k = 289,08589\ 66840\ 3$  del estadio  $2 \times 4$ .

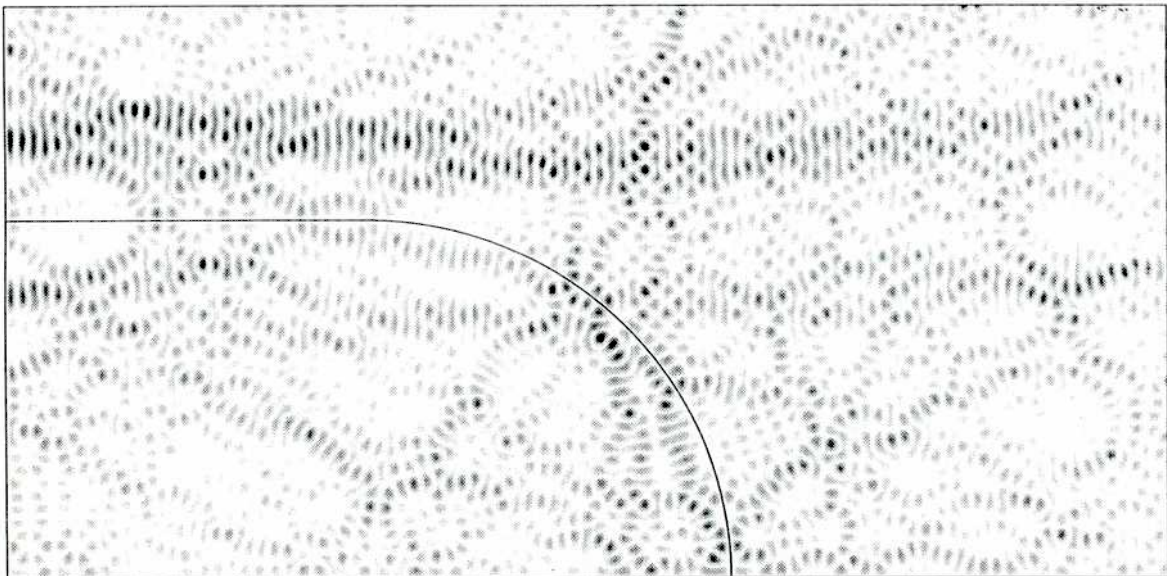


Figura 2.6: Idem Fig. 2.5 para el estado  $k = 100,72212\ 20213$ .

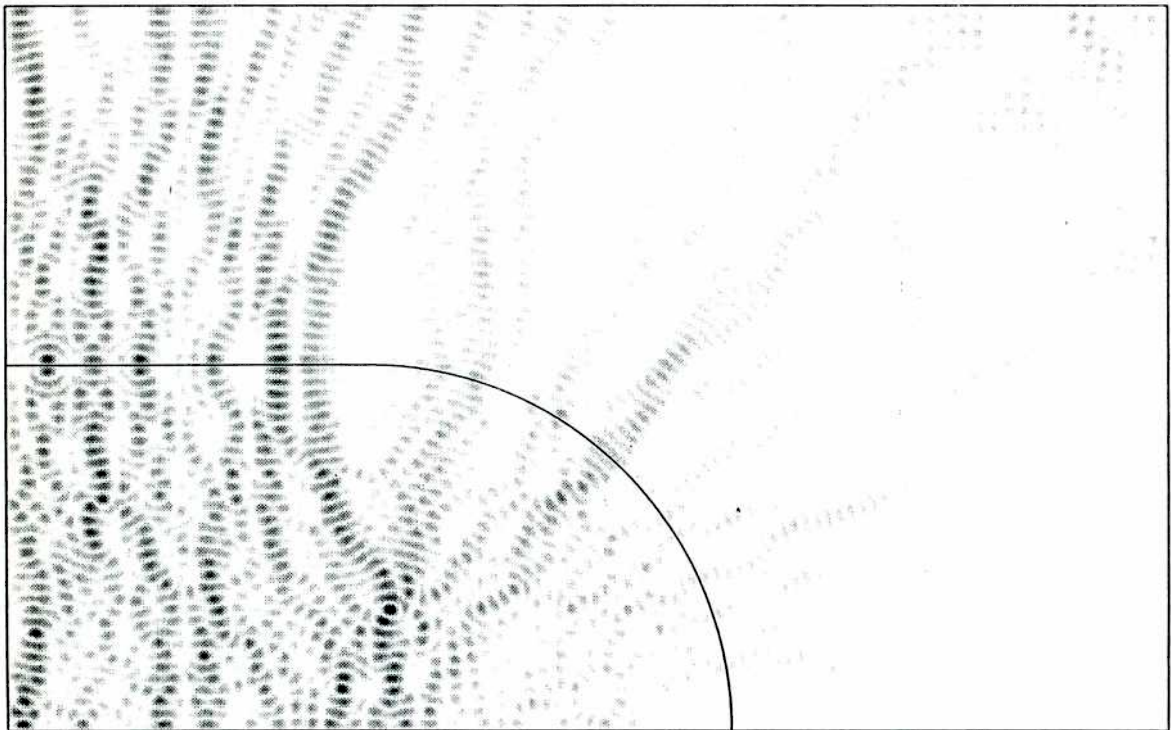


Figura 2.7: Idem Fig. 2.5 para el estado  $k = 102,35558\ 43972\ 7$ .

## 2.6 Conclusiones

En este capítulo estudiamos la naturaleza de las soluciones estacionarias del estadio. Hemos visto que las mismas se pueden expresar como suma de dos contribuciones. Una que se extiende a todo el plano como una función real, analítica y acotada, representada en términos de ondas planas reales. En el límite semiclásico (el límite de la óptica geométrica), esta contribución es tomada en cuenta por el término de Gutzwiller [31].

La segunda contribución (el campo difractado estacionario), que diverge fuera de los límites del billar siendo importante solo en el borde (con longitud de penetración inferior a la longitud de onda del autoestado), la hemos representado en términos de familias uniparamétricas de ondas planas evanescentes. Si bien la importancia relativa de esta contribución tiende a cero en el límite semiclásico, es de vital importancia; es decir, llegamos a la siguiente conclusión muy importante: "En el límite semiclásico, hay que incluir los efectos de difracción para poder resolver estados individuales".

Desde el punto de vista práctico, concluimos que la incorporación de ondas planas evanescentes permiten obtener autoestados arbitrariamente excitados, con arbitraria precisión. Para el estadio, con la inclusión de dos familias uniparamétricas, hemos obtenido los autovalores con la precisión admitida por la computadora. El criterio seguido para la elección de los modos evanescentes relevantes, fue en parte privilegiar las zonas del borde donde se espera a priori haya difracción; otro tanto lo hizo el estudio numérico. Esperamos que una guía más sistemática sea provista por las trayectorias periódicas difractadas [32]. La posibilidad de incluir ondas planas evanescentes que sean significativas en cualquier punto del borde, se limita a billares convexos. Sin embargo, actualmente estamos trabajando en el billar de Sinai y la inclusión de algunas ondas planas evanescentes, nos han permitido obtener resultados alentadores.

✿

# Capítulo 3

## Autoestados en el Límite Semiclásico

### 3.1 Introducción

Los métodos desarrollados en los capítulos previos, nos permiten obtener autoestados altamente excitados con arbitraria precisión, y además nos permiten separar la contribución acotada de la contribución evanescente. Haciendo uso de estas herramientas, en este capítulo estudiaremos los autoestados del estadio en una región de energía no explorada previamente.

En particular, estudiaremos la veracidad de ciertas conjeturas recientemente formuladas en conexión con la naturaleza de los autoestados en el límite semiclásico [52]. Por último, investigaremos la presencia de cicatrices de trayectorias periódicas (*scars*) en las autofunciones, la cual no ha sido investigada en una región de energía tan alta.

En la próxima sección describiremos el comportamiento asintótico de las funciones de onda y su representación en espacio de fases. En la tercera sección describiremos la representación estelar y las herramientas necesarias para estudiar los fenómenos de *scarring*. En la última sección presentaremos los resultados y conclusiones del estudio realizado en una región de energía muy excitada.

### 3.2 Funciones de onda semiclásicas

Un problema aún no resuelto en mecánica semiclásica es entender y poder predecir el comportamiento asintótico de los autoestados de sistemas ligados cuando éstos son

clásicamente caóticos. Veamos primero qué se puede decir sobre este tema cuando el sistema es clásicamente integrable.

Un sistema clásico con  $N$  grados de libertad es integrable, cuando posee  $N$  constantes de movimiento en involución (el corchete de Poisson para cada par es cero). En el límite semiclásico se puede conocer con gran detalle las autofunciones (sin necesidad de resolver la ecuación de Schrödinger independiente del tiempo), debido a que la mecánica clásica es muy simple [44, 45]; en espacio de fases ( $2N$ -dimensional), las trayectorias están confinadas a toros  $N$ -dimensionales [46]. Dado que el espacio de fases está organizado en toros, existe una transformación canónica tal que los nuevos momentos  $I_k$  son constantes sobre cada toro, y las variables conjugadas  $\theta_k$  evolucionan linealmente con el tiempo. En esta descripción tan simple del espacio de fases (aún cuando puede ser muy complicado hallar la transformación canónica que nos lleve a las variables de ángulo acción), es posible obtener semiclásicamente los autoestados del sistema cuántico de acuerdo con la siguiente construcción [47]:

Sea un toro en espacio de fases caracterizado por las acciones  $\mathbf{I}$ . Sobre el toro, los momentos  $p_i$  se pueden expresar en función de las coordenadas  $q_i$ . Como esta función es multivaluada, identificamos cada una de las ramas. Sobre el toro se satisface  $\partial p_i / \partial q_j = \partial p_j / \partial q_i$  (variedad lagrangiana); luego, la acción clásica  $S(\mathbf{q}, \mathbf{I}) = \int_{q_0}^q \mathbf{p}(\mathbf{q}', \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{q}'$  no depende del camino seguido sobre el toro. Eligiendo una densidad uniforme de puntos sobre el toro, la amplitud de la función de onda  $\Psi_{\mathbf{I}}$  será la raíz cuadrada de la densidad de puntos proyectada en espacio de configuración; la fase está dada por la acción. Sumando las contribuciones de cada rama, resulta

$$\Psi_{\mathbf{I}}(\mathbf{q}) = \sum_{n(\text{ramas})} \left| \det \frac{\partial^2 S_n}{\partial q_i \partial I_k} \right|^{1/2} \exp \left( \frac{i S_n(\mathbf{q}, \mathbf{I})}{\hbar} - \frac{i \mu \pi}{2} \right) \quad (3.1)$$

El último término en la exponencial proviene de que hay puntos en donde la amplitud diverge (caústicas) y los valores de las distintas ramas deben ser unidos suavemente. A  $\mu$  (solo puede tomar valores enteros) se lo conoce con el nombre de índice de Maslov [48].

Finalmente, la cuantización de la energía se obtiene de pedir que la función de onda sea univaluada

$$\oint_{C_k} \mathbf{p}(\mathbf{q}, \mathbf{I}) \cdot d\mathbf{q} = 2\pi \hbar \left( n_k + \frac{\mu_k \pi}{2} \right) \equiv 2\pi I_k$$

donde  $C_k$  es el  $k$ -ésimo circuito irreducible alrededor del toro e  $I_k$  es la acción cuantizada.

Hemos obtenido las autofunciones semiclásicas en representación de coordenadas. Sin embargo, el espacio de configuración no es tan claro como el espacio de fases. En espacio de fases las trayectorias no se cruzan, el volumen se conserva y las estructuras invariantes son identificables sin ambigüedad.

Para expresar una función de onda en espacio de fases, podemos recurrir a la función de Wigner [49]

$$W(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \int d\mathbf{q}' \exp(-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}'/\hbar) \Psi^*(\mathbf{q} - \mathbf{q}'/2) \Psi(\mathbf{q} + \mathbf{q}'/2).$$

Dado que la función de Wigner puede hacerse negativa, ésta no representa una densidad de probabilidad en espacio de fases. Sin embargo, integrándola sobre  $\mathbf{p}$ , se obtiene la densidad de probabilidad usual en espacio de coordenadas. De otro modo, si se hace un suavizado gaussiano para matar las oscilaciones rápidas, la función de Wigner se pica sobre los objetos clásicos que uno espera. Por ejemplo, la función de Wigner asociada a la función de onda semiclásica (3.1) se puede calcular en la aproximación de fase estacionaria [53]. La distribución es una delta sobre el correspondiente toro cuantizado  $\mathbf{I}_k$

$$W_k(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \delta(\mathbf{I}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) - \mathbf{I}_k). \quad (3.2)$$

Otra manera de observar las funciones de onda en espacio de fases es la distribución de Husimi [51], definida como el overlap entre un estado coherente y la función de onda:

$$\mathcal{H}_\Psi = | \langle \mathbf{q}, \mathbf{p} | \Psi \rangle |^2$$

donde el estado  $|\mathbf{q}, \mathbf{p}\rangle$  es un paquete de onda de mínima incerteza. La distribución de Husimi es definida positiva y por lo tanto puede asociarse directamente a una densidad de probabilidad en espacio de fases.

Tenemos la representación semiclásica (para los autoestados de un sistema integrable) en espacio de coordenadas (3.1) y en espacio de fases (3.2). La expresión (3.1) no se puede generalizar a sistemas caóticos pues su construcción requiere de la existencia de toros. Podemos generalizar lo que sabemos sobre la función de Wigner: éstas deberían estar localizadas sobre regiones del espacio de fases cubiertas por una trayectoria típica. En particular, para sistemas ergódicos, una trayectoria típica cubre la superficie de energía constante. Luego, como fue conjeturado (en forma indepen-

diente) por Berry [53] y Voros [54], la función de Wigner debería ser

$$W_{\Psi}(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = \frac{\delta[E - H(\mathbf{q}, \mathbf{p})]}{\int d\mathbf{q}' d\mathbf{p}' \delta[E - H(\mathbf{q}', \mathbf{p}')]}. \quad (3.3)$$

Proyectando (3.3) sobre el espacio de coordenadas, resulta una densidad de probabilidad constante en la región clásicamente permitida. Las expresiones (3.2) y (3.3) no proveen las oscilaciones rápidas características de la Wigner; estas expresiones deben interpretarse como un promedio sobre pequeñas regiones en espacio de fases.

Los primeros trabajos numéricos sobre autoestados de sistemas caóticos fueron hechos por McDonald y Kaufman [7]. Trabajando en el estadio, ellos observaron estocasticidad en muchos autoestados; sin embargo, algunos estaban localizados sobre trayectorias periódicas de período corto. Este fenómeno fue un enigma en su trabajo.

Heller [55] llamó a este fenómeno "scarring", explicándolo de la siguiente manera:

Si dejamos evolucionar semiclásicamente un paquete de ondas sobre una trayectoria periódica inestable, la función de autocorrelación  $\langle \Psi(t) | \Psi(0) \rangle$  define dos escalas (relevantes a esta discusión) de tiempo; el tiempo de recurrencia  $T$  de la órbita (el período), y el tiempo de decaimiento de la recurrencia  $1/(\lambda v)$  debido a que el paquete se escapa por la variedad inestable ( $\lambda$  es el exponente de Lyapunov de la órbita y  $v$  la velocidad). Transformando Fourier la función de autocorrelación, se obtiene el espectro de potencias con escalas de energía inversas a las de tiempo. La recurrencia a un período genera picos equiespaciados y el tiempo de decaimiento define el ancho de esos picos. Luego, un autoestado que tenga un overlap mayor que el estadístico con el paquete de onda inicial, tendrá una densidad de probabilidad mayor que la estadística sobre la trayectoria periódica siempre y cuando  $T\lambda v < 1$ .

### 3.3 Representación Estelar y Scars

En la sección anterior vimos que las funciones de onda se pueden representar en espacio de fases mediante la distribución de Wigner o la de Husimi. Sin embargo, el espacio de fases de billares planos tiene dimensión cuatro. Este problema se resuelve mediante el empleo de una sección de Poincaré. En billares planos, el movimiento clásico está especificado por el movimiento libre (en línea recta) de un punto en el interior, con reflexiones especulares en el borde. Un punto del espacio de fases, admite el par  $(k^2, t)$  y  $(q, p)$  de coordenadas canónicas.  $k^2$  es la energía,  $t$  el tiempo



computado a partir del último choque contra el borde,  $q$  la longitud de arco del punto donde ocurrió el choque y  $p$  la fracción de momento paralela al borde orientado ( $p = \sin \theta$ ), donde  $\theta$  es el ángulo entre el rayo y la normal interior. La dinámica a lo largo de los rayos es trivial (velocidad constante) y escala con la energía. La dinámica interesante es la de las variables puramente geométricas ( $q, p$ ) (coordenadas de Birkhoff).

A nivel cuántico vimos en el capítulo I que la autofunción  $\phi$  de un billar queda completamente especificada por su derivada normal en el borde  $\varphi(q) = \partial\phi(\mathbf{r})/\partial\mathbf{n}$ , siendo  $q$  una de las coordenadas de Birkhoff.

La representación estelar [52] consiste en representar, vía una transformación de Bargmann [56], las funciones reducidas  $\varphi(q)$  por medio de funciones analíticas con respecto a una estructura compleja en espacio de fases. La idea es simple; en la sección anterior vimos que es posible parametrizar una función de onda en espacio de fases mediante el overlap con estados coherentes. Nuestro espacio de fases reducido es la superficie de sección  $(q, p)$  y si además tenemos el cuidado de elegir estados coherentes parametrizados analíticamente, obtenemos la representación estelar usando la siguiente expresión

$$\Psi(z) = (\pi\hbar\sigma)^{-1/4} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\{k[-(z^2 + q'^2/\sigma)/2 + \sqrt{2/\sigma}zq']\} \varphi(q') dq'. \quad (3.4)$$

con  $z = (\sigma^{-1/2}q - i\sigma^{1/2}p)/\sqrt{2}$ , y  $\sigma > 0$  un parámetro arbitrario.

Por ser  $\varphi(q)$  periódica de período 1 (normalizamos a 1 el perímetro del billar), la transformación de Bargmann mapea el espacio de Hilbert  $L^2(\mathbf{R}/\mathbf{Z})$  sobre el espacio de funciones enteras que satisfacen la siguiente relación de cuasi-periodicidad

$$\Psi\left(z + \frac{1}{\sqrt{2\sigma}}\right) = \exp\left\{k\left(\frac{z}{\sqrt{2\sigma}} + \frac{1}{4\sigma}\right)\right\} \Psi(z).$$

La función  $\Psi$  queda completamente especificada por sus ceros (por ser entera [57]), o equivalentemente los ceros de la correspondiente función de Husimi

$$\mathcal{H}_\Psi = |\Psi(z)|^2 / \langle z|z \rangle$$

Para estudiar los fenómenos de scarring, disponemos de un código de computación que nos permite obtener de manera sistemática las trayectorias periódicas del estado.

El método se basa en una dinámica simbólica con poda (*pruning*) [58]; es decir, una trayectoria periódica tiene asociada una única secuencia de símbolos pero no toda secuencia corresponde a una trayectoria periódica. Los símbolos definen el tramo del borde donde golpea la partícula, y para el estadio completo son: 0 (segmento recto inferior), 1 (semicírculo izquierdo), 2 (segmento recto superior) y 3 (semicírculo derecho). Si en la secuencia aparecen dos o más *unos* seguidos, estos se reemplazan por *cuatros* cuando la partícula recorra el semicírculo izquierdo en sentido antihorario. Si aparecen dos o más *tres* seguidos, estos se reemplazan por *cinco*s cuando la partícula recorra el semicírculo derecho en sentido horario. En la figura 3.1 mostramos las trayectorias de orden más bajo y en la figura 3.2 su correspondiente representación en el plano  $q - p$ ; esto último nos permite una comparación directa con las autofunciones en representación estelar.

No existe actualmente un criterio que permita identificar claramente scars de trayectorias periódicas. Lo que se suele hacer [59] es cuantificar la contribución de una trayectoria periódica (a un autoestado) por el valor de la Husimi en los puntos fijos del plano  $q - p$  que caracterizan a la trayectoria. Sin embargo, este criterio no tiene en cuenta los efectos de coherencia (efectos cuánticos) asociados a la fase dinámica (en una descripción semiclásica es la acción clásica) que acompaña a un paquete de ondas en su evolución. No obstante, hemos utilizado el criterio antes descrito para estudiar los fenómenos de scarring en la región  $319 < k/\pi < 320$ .

### 3.4 Resultados y Conclusiones

Hemos evaluado en representación estelar, las 894 autofunciones impar-impar con  $319 < k/\pi < 320$  (la fórmula de Weyl da 894, 6). Graficamos sus ceros (puntos) y las curvas de nivel de la Husimi para 4, 6, 8 ... veces el valor medio. Los ceros contienen toda la información cuántica y las curvas de nivel nos permiten apreciar la existencia de scars. En las figuras 3.3 y 3.4 mostramos las primeras 50 autofunciones de la serie. El eje  $q$  es paralelo al número que indica el valor  $k$  del autoestado; comienza en  $q = 0$  ( $x = 0, y = 1$ ) sobre el tramo recto y termina en  $q = 1/4$  ( $x = 2, y = 0$ ). Hemos trazado una línea segmentada asociada al punto de discontinuidad. El eje  $p$  comienza en cero y se extiende hasta  $p \sim 1,3$ ; en  $p = 1$  trazamos otra línea segmentada que indica el límite de la región clásicamente permitida ( $p \leq 1$ ). Si bien la Husimi puede ser no nula para cualquier valor de  $p$ , hay un decaimiento exponencial de la misma



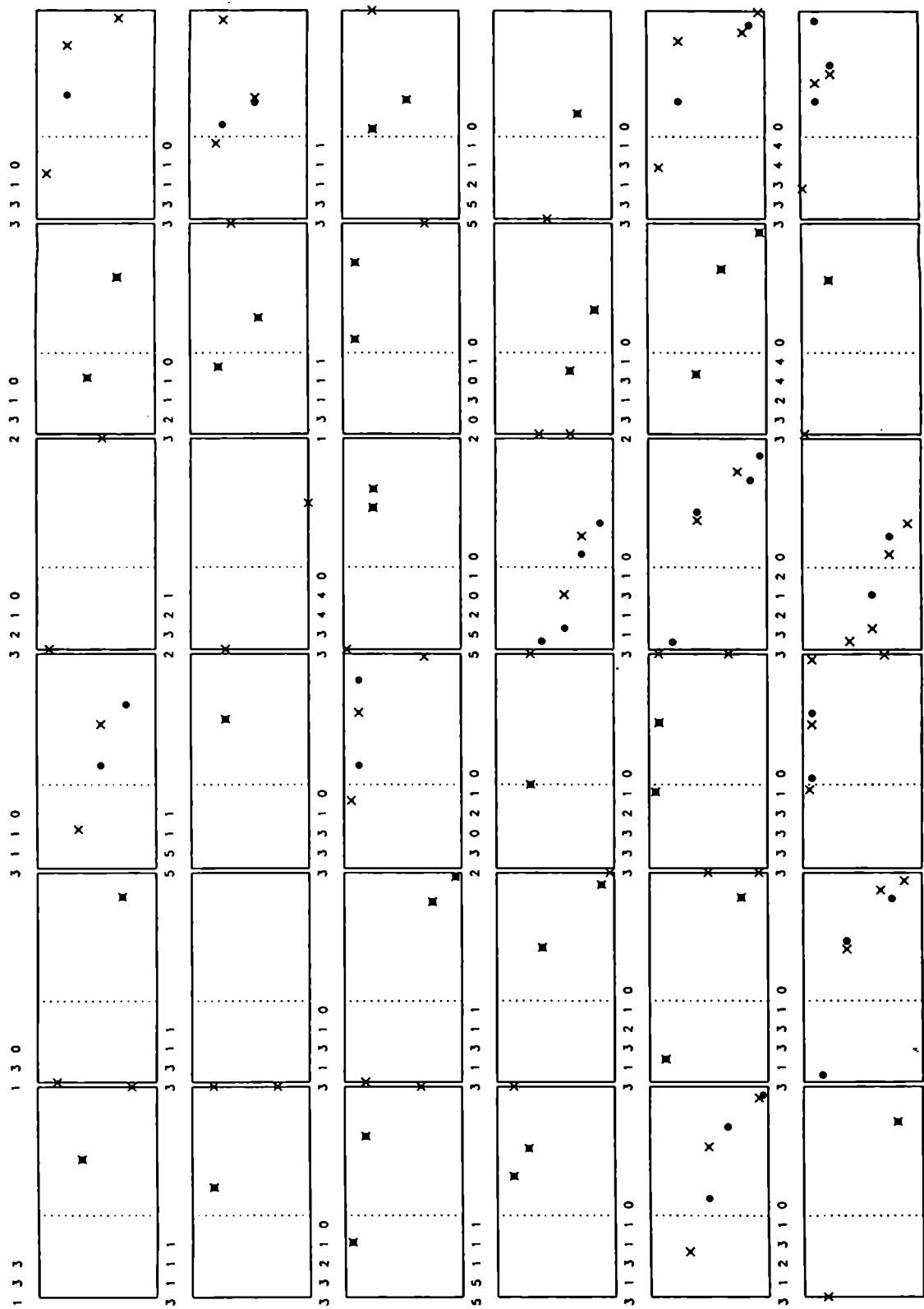


Figura 3.2: Representación en coordenadas de Birkhoff  $q - p$  de las trayectorias periódicas mostradas en Fig. 3.1.

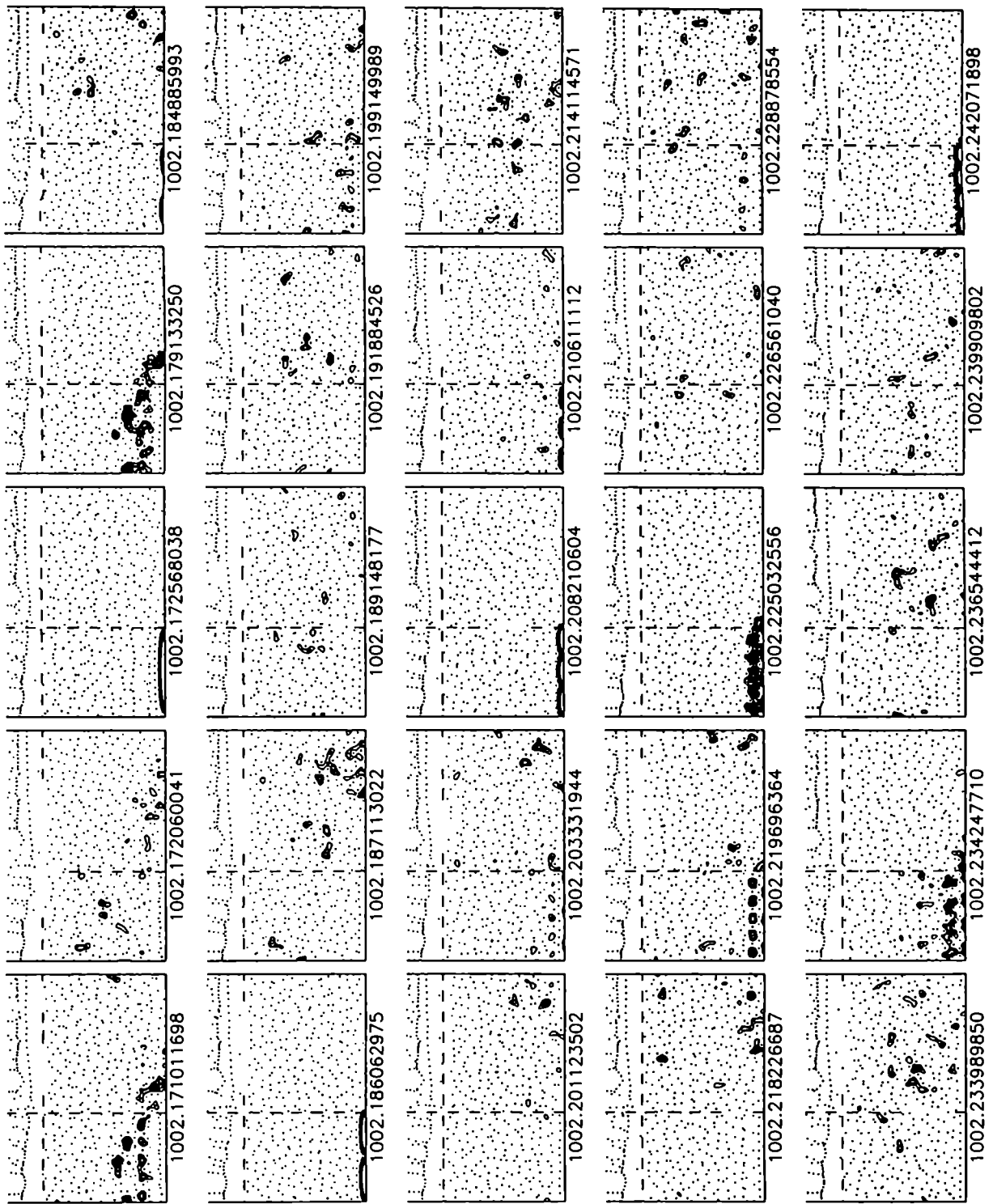


Figura 3.3: Las primeras 25 autofunciones del estadio  $2 \times 4$  mayores que  $319 \pi$ , en representación estelar. Los puntos indican los ceros de la Husimi y las curvas de nivel corresponden a 4, 6, 8, .. veces el valor medio sobre la región clásicamente permitida.

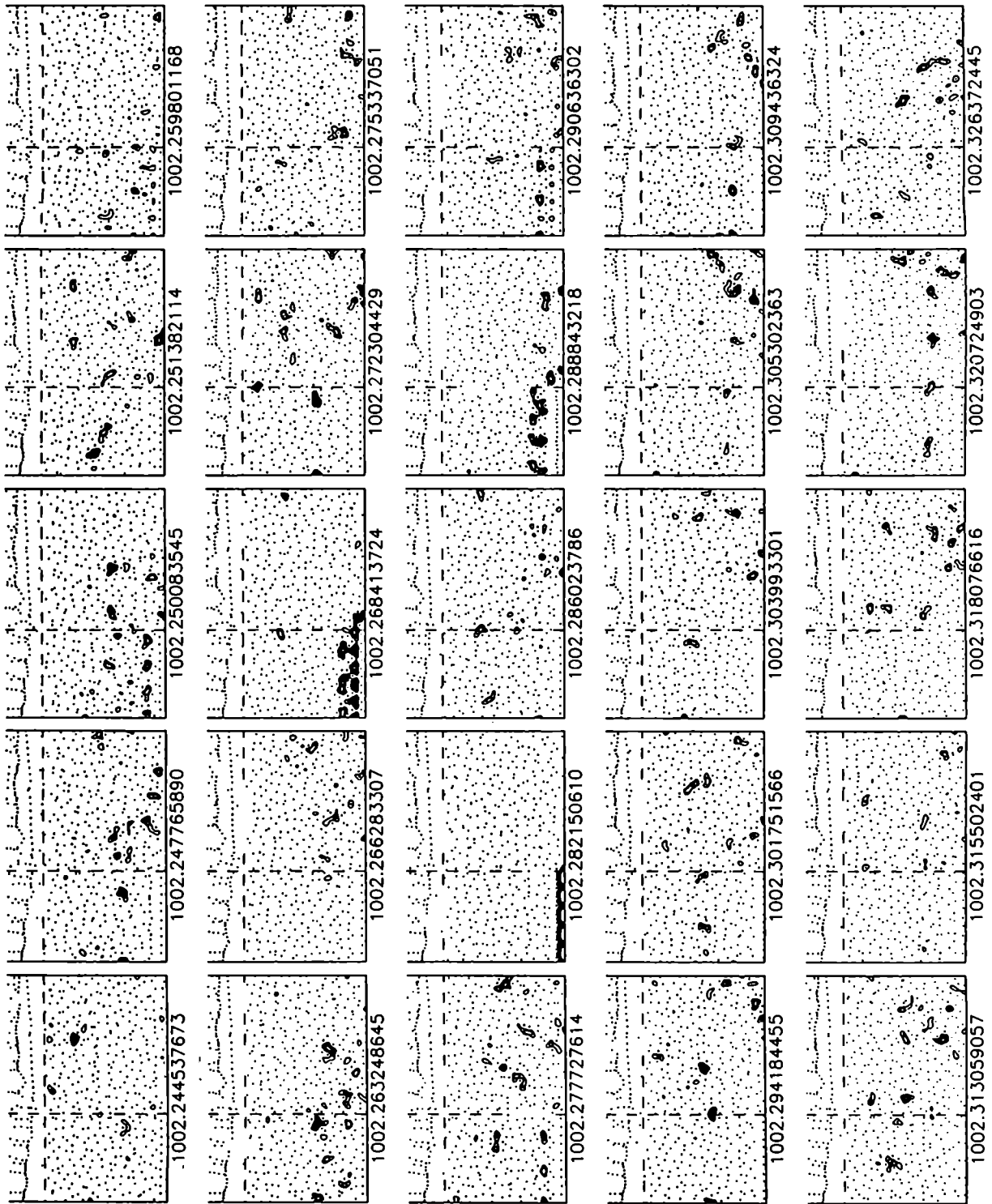


Figura 3.4: Idem Fig 3.3 para las siguientes 25 autofunciones.

en la región clásicamente prohibida ( $p > 1$ ).

Hemos observado que la distribución de ceros posee las siguientes características generales:

i) En la región clásicamente permitida podemos distinguir dos zonas. En el sector  $q \leq 1/\mathcal{L}$ ,  $p \leq 5/\sqrt{k}$  correspondiente a los estados bouncing ball, los ceros se alinean paralelamente al eje  $q$ . En la región complementaria, la distribución de ceros es uniforme. El número de ceros que hay en la zona clásicamente permitida es en promedio  $(1 - 0,78/\sqrt{k}) \mathcal{L}k/\pi$ . Estos ceros están gobernados por la contribución de ondas planas reales al autoestado.

ii) Hay una franja que prácticamente no contiene ceros, limitada por la línea segmentada  $p = 1$  y por una línea de ceros a una distancia  $\mathcal{O}(k^{-1/2})$  de  $p = 1$ . Esta línea de ceros depende tanto de la contribución de ondas planas reales como del campo difractado estacionario.

iii) En la región clásicamente prohibida, luego de la línea de ceros descrita en ii), los ceros tienden a ubicarse sobre líneas paralelas al eje  $p$ . La posición de las líneas sobre las cuales se ubican los ceros solo dependen del campo difractado estacionario. No se observan líneas paralelas a  $p$  para valores grandes de  $q$ ; esto se debe a que no hemos incluido ondas evanescentes que puedan describir la difracción sobre todo el círculo.

En cuanto a los scars, no hemos encontrado estados que tengan una trayectoria notoriamente predominante; en el mejor de los casos son tres o cuatro las trayectorias periódicas más importantes. Esto posiblemente tenga que ver con el criterio elegido para cuantificar un scar y por otro lado que solo disponemos actualmente de trayectorias periódicas hasta orden 10 (diez choques contra el borde). Por ejemplo, para el autoestado de la figura 1.3 hemos podido identificar una trayectoria periódica de orden 14. Un ejemplo más claro lo presenta el estado graficado en la figura 3.5 donde se aprecia el scar de una trayectoria de orden bastante grande (probablemente 24) con exponente de Lyapunov bajo (observar que entre dos rebotes contra el círculo, la trayectoria recorre una gran distancia). En definitiva, podemos afirmar que en la región de energía estudiada hay una fracción importante de autoestados que presentan cicatrices de trayectorias periódicas. Obviamente, queda pendiente un estudio cuantitativo más fino.

En cuanto a los estados bouncing ball (impar-impar), hemos observado que apare-

cen hasta excitaciones en la dirección  $x$  del orden de  $n_x \sim \sqrt{k/\pi}$  (en la figura 2.5  $n_x = 2$ ); es decir,

$$(k/\pi)^2 \simeq n_y^2 + n_x^2 (1 - 0,9 n_y^{-0,42}) \quad \text{con } n_x = 1, 2, \dots \leq \sqrt{n_y}.$$

Finalmente, hemos observado que los autoestados se dividen en: i) aquellos que se encuentran localizados en la región de bouncing ball  $q \leq 1/\mathcal{L}$ ,  $p \leq 5/\sqrt{k}$  y ii) aquellos (incluidos los que presentan cicatrices de trayectorias periódicas) que evitan la región de bouncing ball. Esta observación, generalizaría la conjetura de Percival [60], según la cual en un espacio de fases mixto los autoestados se encuentran en la zona regular (o elíptica) o en la zona caótica, pero no en ambas a la vez. En el estadio, la zona regular es de medida nula a nivel clásico y corresponde a la familia de trayectorias parabólicas (las trayectorias verticales que solo chocan contra los segmentos rectos). A nivel cuántico, principio de incerteza mediante, dicha zona adquiere un peso relativo que tiende a cero como  $k^{-1/2}$  en el límite semiclassical (es el área de la zona de bouncing ball respecto al área total).



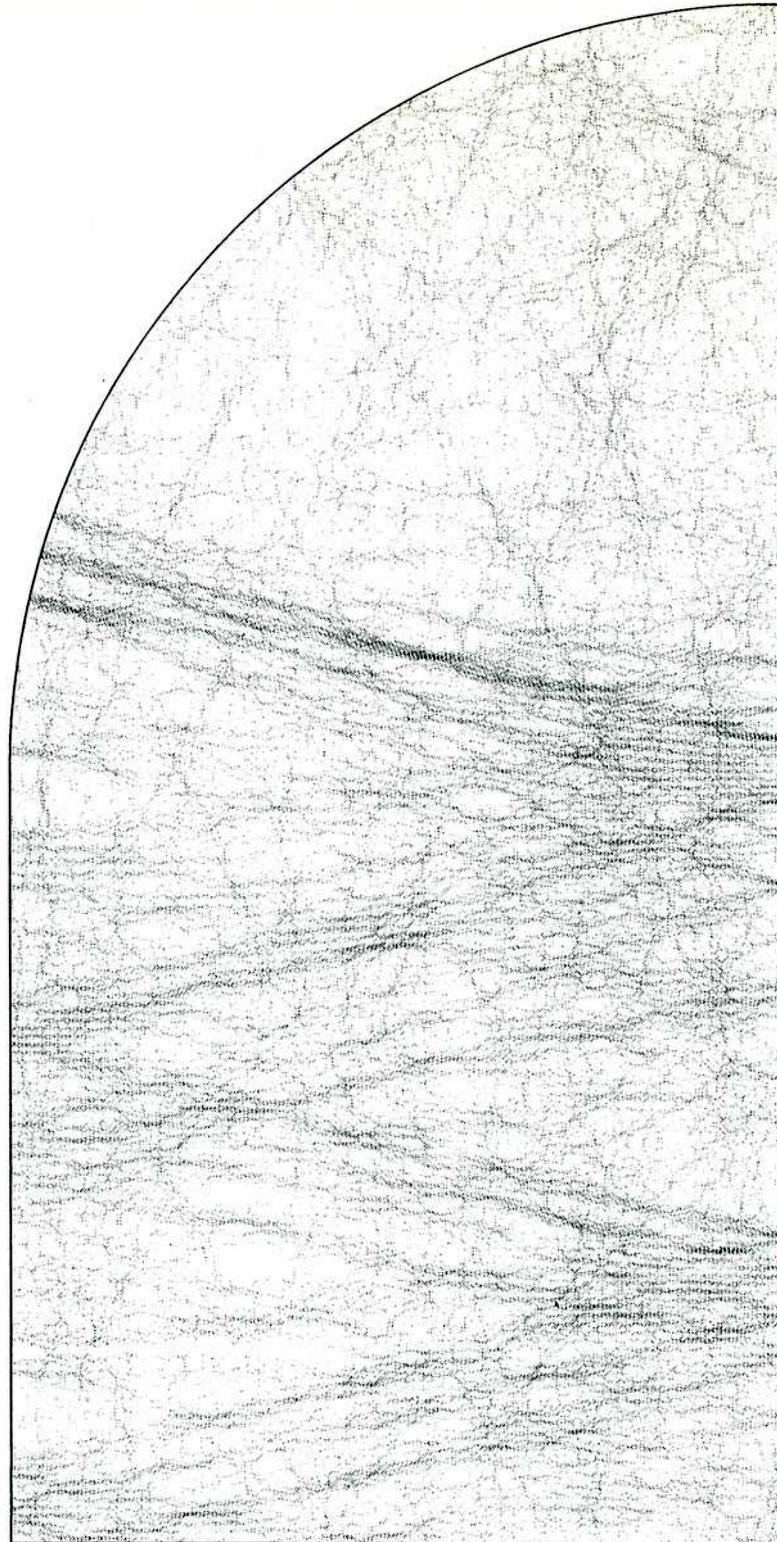


Figura 3.5: Densidad lineal del cuadrado de la autofunción impar-impar  $k = 1002, 17913\ 3250\ 3$  del estadio  $2 \times 4$ .

# Bibliografía

- [1] La idea expuesta sobre lo que es caos cuántico, es debida a M. Berry, in *Semiclassical mechanics of regular and irregular motion*, Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics, Les Houches, 1981, edited by G. Iooss, R. Helleman and R. Stora (North-Holland, Amsterdam, 1981).
- [2] E. Vergini and M. Saraceno, *Phys. Rev. E* **52**, 2204 (1995).
- [3] R. E. Collin, *Field Theory of Guided Waves*, McGraw-Hill, New York (1960).
- [4] S. Sridhar, *Phys. Rev. Lett.* **67**, 785 (1991); H. Graf *et. al.*, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1296 (1992).
- [5] S. D. Poisson, *Sur l'équilibre et le mouvement des corps élastiques*, *Mem. Acad. Sci. Paris*, **8** (1829).
- [6] A. Clebsch, *Theorie der Elastizität der fester Körper*, Leipzig (1862).
- [7] S. W. McDonald and A. N. Kaufman, *Phys. Rev. Lett.* **42**, 1189 (1979).
- [8] F. Pockels, *Über die partielle Differentialgleichung  $\Delta\phi + k^2\phi = 0$  und deren Auftreten in die mathematischen Physik*, Teubner, Leipzig (1891).
- [9] D. L. Bernstein, *Existence Theorems in Partial Differential Equations*, *Annals of Math. Studies* **23**, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ (1950).
- [10] G. L. James, *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves*, Perginunus, Stevenage (1976).
- [11] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. I, Interscience, New York (1953).
- [12] A. Weinstein and W. Stenger, *Methods of Intermediate Problems for Eigenvalues*, Academic Press, New York (1972).
- [13] A. Weinstein, *Some numerical results in intermediate problems for eigenvalues*, en *Numerical Solutions of Partial Differential Equations*, J. H. Bramble, ed., Academic Press, New York (1966).

- [14] J. R. Kuttler and V. G. Sigillito, *SIAM Review* **26**, 163 (1984).
- [15] R. Balian and C. Bloch, *Ann. Phys. (NY)* **60**, 401 (1970); R. E. Kleinman and G. F. Roach, *SIAM Review* **16**, 214 (1974).
- [16] M. V. Berry and M. Wilkinson, *Proc. Roy. Soc. A* **392**, 15 (1984).
- [17] E. B. Bogomolny, *Nonlinearity* **5**, 805 (1992).
- [18] E. Doron and U. Smilansky, *Nonlinearity* **5**, 1055 (1992).
- [19] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, National Bureau of Standards, Washington DC (1972).
- [20] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling and B. Flannery, *Numerical Recipes in C: the art of scientific computing*, 2nd ed., Cambridge University press, Cambridge (1992).
- [21] B. Dietz and U. Smilansky, *Chaos* **3**, 581(1993).
- [22] Ya. G. Sinai, *Russ. Math. Surv.* **25**, 137 (1970).
- [23] L. A. Bunimovich, *Commun. Math. Phys.* **65**, 295 (1979).
- [24] M. G. Milsted and J. R. Hutchinson, *J. Sound and Vibration* **32**, 327 (1974):
- [25] P. J. Richens and M. V. Berry, *Physica 2D*, 495 (1981).
- [26] M. J. Davis and E. J. Heller, *J. Chem. Phys.* **71** 3383 (1979).
- [27] E. J. Heller, in *Wavepacket dynamics and Quantum Chaology*, Proceedings of the Les Houches Summer School of Theoretical Physics, Les Houches, 1989, edited by M. J. Giannoni, A. Voros, and J. Zinn-Justin (North-Holland, Amsterdam, 1989).
- [28] P. W. O'Connor and E. J. Heller, *Phys. Rev. Lett.* **61** , 2288 (1988).
- [29] M. V. Berry and M. Wilkinson, *Proc. R. Soc. London A* **392**, 15 (1984).
- [30] P. A. Boasman, *Nonlinearity* **7**, 485 (1994).
- [31] M. C. Gutzwiller, *J. Math. Phys.* **12**, 343 (1971).
- [32] N. Pavloff and C. Schmit, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 61 (1995).
- [33] B. Dietz, J.-P. Eckmann, C.-A. Pillet, U. Smilansky and I. Ussishkin, *Inside-Outside Duality for Planar Billiards- A Numerical Study*, Preprint, red CHAO-DYN (1995).

- [34] L. M. Falicov, in *Group Theory and Its Physical Applications*, Chicago Lectures in Physics, The University of Chicago Press. (1966).
- [35] R.J. Iorio and T. Kato, The S-matrix and the Interior Eigenvalue Problem, Preprint, Univ. do Estado do Rio de Janeiro.
- [36] M. V. Berry, J. Phys. A: Math. Gen. **27**, L391 (1994).
- [37] Y. Aharonov, J. Anandan, S. Popescu and L. Vaidman, Phys. Rev. Lett. **64**, 2965 (1990).
- [38] Y. Aharonov and L. Vaidman, Phys. Rev. A **41**, 11 (1990).
- [39] B. Dietz and U. Smilansky, Chaos, 3:581 (1993).
- [40] M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon Press, London 1959.
- [41] V. M. Babic and V. S. Buldyrev, *Short-Wavelength Diffraction Theory*, Springer-Verlag, Berlin (1991).
- [42] M. Sieber, U. Smilansky, S. C. Creagh, and R. G. Littlejohn, J. Phys. A: Math. Gen. **26**, 6217 (1993).
- [43] B. Dietz and U. Smilansky, Chaos **3**, 581 (1993).
- [44] M. Tabor, *Chaos and Integrability in Nonlinear Dynamics* (Wiley, New York, 1989); A. M. Ozorio de Almeida, *Hamiltonian Systems: Chaos and Quantization* (Cambridge University Press, Cambridge, 1988); L. E. Reichl, *The transition to Chaos in Conservative Classical Systems: Quantum Manifestations* (Springer-Verlag, Berlin, 1992); M. C. Gutzwiller, *Chaos in classical and Quantum Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1990); B. Eckhardt, Phys. Rep. **163**, 205 (1988).
- [45] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1978); A. J. Lichtenberg and M. A. Leiberman, *Regular and Stochastic Motion* (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [46] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics* (Springer-Verlag, New York, 1978), Chapter 10.
- [47] J. H. Van Vleck, *Proc. Natl. Acad. Sci. USA* **14**, 178 (1928); M. V. Berry and K. E. Mount, *Rep. Prog. Phys.* **35**, 315 (1972).
- [48] V. P. Maslov and M. V. Fedoriuk, *Semiclassical Approximation in Quantum Mechanics* (Reidel, Dordrecht, 1981).
- [49] E. P. Wigner, Phys. Rev. **40**, 749 (1932).

- [50] M. V. Berry, in *Chaotic Behavior of Deterministic Systems*, G. Iooss, R. G. H. Helleman, and R. Stora, eds. (North-Holland, Amsterdam, 1983).
- [51] K. Husimi, *Proc. Phys. Math. Soc. Jpn.* **22**, 264 (1940).
- [52] J. M. Tualle and A. Voros, *Chaos, Solitons and Fractals* **5**, 1085 (1995).
- [53] M. Berry, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* **287**, 237 (1977); *J. Phys. A* **10**, 2083 (1977).
- [54] A. Voros, in *Stochastic Behavior in Classical and Quantum Hamiltonian Systems*, G. Casati and J. Ford, eds. (Springer, Berlin, 1979).
- [55] E. J. Heller, *Phys. Rev. Lett.* **53**, 1515 (1984).
- [56] V. Bargmann, *Comm. Pure Appl. Math.* **14**, 187 (1961); **20**, 1 (1967).
- [57] A. S. B. Holland, in *Introduction to the Theory of Entire Functions*, Academic Press, New York (1973).
- [58] O. Biham and M. Kvale, *Phys. Rev. A* **46**, 6334 (1992).
- [59] M. Saraceno, *Ann. Phys.* **199**, 37 (1990).
- [60] I. C. Percival, *J. Phys. B* **6**, L229 (1973).

## Agradecimientos

En primer lugar agradezco a mi esposa Judith por haberme bancado durante todos estos años y por haber corregido la ortografía de este trabajo.

A Marcos Saraceno y a Cristina Cambiagio por haberme permitido tomarme mi tiempo.

A Hugo Sofia y a Roberto Perazzo por darme una mano siempre que se las he pedido.

A Andre Voros por exigirme el título de doctor para viajar a Paris.

A los viejos y nuevos amigos del TANDAR: Orchi, Mauricio, Gloria, el Chapa, Fermín, Alejandro, Raúl, Eduardo, Gabriel, Esteban, Cacho, Gabriela, Dardo, Gãd, Martín, Juan, Fernando, Ignacio, Guillermo y Fabricio. Y seguramente me estoy olvidando de alguno.