

## Tesis de Posgrado

# Estudio de la estabilidad de diferentes configuraciones de plasma y fluidos

Gonzalez, Rafael

1995

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Gonzalez, Rafael. (1995). Estudio de la estabilidad de diferentes configuraciones de plasma y fluidos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2715\\_Gonzalez.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2715_Gonzalez.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Gonzalez, Rafael. "Estudio de la estabilidad de diferentes configuraciones de plasma y fluidos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1995.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2715\\_Gonzalez.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2715_Gonzalez.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE FISICA

**ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD DE DIFERENTES CONFIGURACIONES  
DE PLASMAS Y FLUIDOS**

RAFAEL GONZALEZ

Trabajo de Tesis presentado para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas

1995

Director de Tesis: Dr. Constantino Ferro Fontán

**A la memoria siempre viva de mi madre.**

# INDICE

<b>I- INTRODUCCION</b>	1
<b>II- FORMAS DE ESTUDIAR LA ESTABILIDAD DE UN SISTEMA</b>	6
Teoría de las pequeñas oscilaciones.	6
Principio de energía.	6
Criterio termodinámico general de estabilidad.	9
Aplicación al plasma de Vlasov	12
<b>III- TEORIA TERMODINAMICA DE MINARDI DE LA ESTABILIDAD DEL PLASMA</b>	14
Energía colectiva.	17
Criterio termodinámico de estabilidad, principio de mínima energía.	18
Plasma de Vlasov.	19
<b>IV- UNA FUNDAMENTACION RIGUROSA DE LA TEORIA TERMODINAMICA APLICADA POR MINARDI AL ESTUDIO DE LA ESTABILIDAD EN PLASMAS</b>	22
Conclusiones.	33
<b>V- TURBULENCIA EN MODO "FLUTE" DE UN PLASMA Y PROCESO DE CASCADA</b>	34
Ecuaciones básicas.	35
Invariantes globales, saturación no lineal y cálculo perturbativo.	42
Efectos de ruido.	49
Terna físicamente más importante, y proceso de cascada.	52
Conclusiones.	58
<b>VI- EQUILIBRIOS DE FLUJOS HELICOIDALES EN UN CONDUCTO CILINDRICO</b>	60

<b>VII- FLUJO HELICOIDAL DE SECCION ELIPTICA Y TORSION PEQUEÑA</b>	67
Estudio de la solución exterior.	68
Estudio de la solución interior.	72
Conclusiones.	73
<b>VIII- FLUJOS HELICOIDALES EN UN EXPANSOR</b>	75
Análisis de las condiciones de contorno y de la estabilidad en el caso $n=1$ .	79
Discusión y conclusiones.	89
<b>APENDICE 1</b>	93
<b>APENDICE 2</b>	94
<b>REFERENCIAS</b>	96
<b>AGRADECIMIENTOS</b>	100

# CAPITULO I

## Introducción

La mayor parte del universo se compone de materia en estado de plasma. La fusión nuclear controlada, permitirá en el futuro obtener una fuente de energía ilimitada. Debido a esto, el estudio de la física del plasma y de la estabilidad de sus diferentes configuraciones de equilibrio, adquiere una importancia fundamental.

Igualmente importante es la física de fluidos, que se aplica no sólo a dispositivos tecnológicos, sino a diversas ramas de la física incluyendo modelos cosmológicos.

Ambas disciplinas tienen muchos aspectos comunes, y muchas veces una misma técnica puede aplicarse al estudio de la estabilidad. Tanto en plasmas como en fluidos, las “no linealidades” conducen a estados turbulentos cuyos primeros estadios pueden enfocarse como sucesivas bifurcaciones entre diferentes estados de equilibrio dinámico (equilibrios estacionarios). Por otro lado, estos equilibrios se encuentran alejados del equilibrio termodinámico. Para estudiar su estabilidad, en general se recurre a un análisis de modos normales o a principios de energía. El primer método consiste en un estudio de la estabilidad lineal, alrededor del equilibrio. En cuanto al segundo método, en general se obtiene para configuraciones particulares que no pueden generalizarse.

En el estudio de la evolución no lineal, los resultados de la “dinámica no lineal” pueden aplicarse cuando las ecuaciones dinámicas de una configuración dada, adquieren las “formas normales” conocidas. Pero muchas veces estas ecuaciones son muy complejas y no es posible clasificarlas. Es necesario entonces recurrir a técnicas que generalicen el estudio de la estabilidad dinámica a diferentes configuraciones.

En física del plasma se han desarrollado últimamente, dos técnicas que permiten dar respuesta a esta cuestión. La primera [3] está basada en la “*termodinámica de los procesos*

*irreversibles*, y consiste en construir una función de Lyapunov a partir de ecuaciones de regresión de Onsager desarrolladas alrededor del equilibrio estacionario, que determine la estabilidad del sistema.

La segunda técnica, desarrollada por Minardi [10-14], consiste en construir usando la *teoría de la información*, la entropía del sistema sujeta a *vínculos dinámicos*, y cuyos máximos determinan los equilibrios colectivos estables del plasma. En esta teoría es posible, en base a analogías con la termodinámica, obtener un principio de energía que determine la estabilidad de los equilibrios estacionarios.

Mientras la primera técnica toma en cuenta la evolución del sistema a través de sus ecuaciones de movimiento, escritas como relaciones de regresión de Onsager, la segunda técnica utiliza sólo los estados de equilibrio en su formulación, verificándose sin embargo, que el criterio de estabilidad que construye tiene carácter dinámico, siempre que se respeten los vínculos dinámicos del problema.

El objeto de esta tesis puede dividirse en dos partes. En primer lugar se muestra que la teoría termodinámica de Minardi, puede fundamentarse rigurosamente en su aplicación a un plasma de Vlasov, mediante la primera técnica que toma en cuenta las ecuaciones de movimiento microscópicas [Vlasov , Maxwell]. En segundo lugar, se estudian el equilibrio y la estabilidad de diferentes configuraciones de plasmas y de fluidos , en las cuales se aplicarán las técnicas mencionadas así como las técnicas de la dinámica no lineal, cuando sea posible y conveniente hacerlo.

Se muestra que ciertas configuraciones de equilibrio de plasmas y de fluidos son semejantes, y que este isomorfismo permite aplicar indistintamente los resultados obtenidos para una de ellas, siempre que se respeten los vínculos dinámicos de cada configuración, que es lo que las diferencia. Esta idea ya fue explorada por Moffatt [58] hace una década.

En síntesis, se quiere mostrar que las técnicas basadas en las distintas aproximaciones termodinámicas (termodinámica irreversible , teoría de la información), así como en la

dinámica no lineal, son poderosas herramientas para el estudio del equilibrio y la estabilidad de plasmas y fluidos.

En el capítulo *II* se repasan los dos métodos tradicionales utilizados en el estudio de la estabilidad, y se resume el criterio termodinámico de estabilidad basado en el *principio de balance de potencia* de Lavenda [8], y su aplicación a un plasma de Vlasov.

En el capítulo *III* se presenta la teoría termodinámica de Minardi de la estabilidad del plasma y el principio de energía que de allí se deduce, aplicándose también al plasma de Vlasov.

En el capítulo *IV* se desarrolla una fundamentación de la aplicación de la técnica de Minardi al plasma de Vlasov, partiendo de las ecuaciones de movimiento microscópicas del plasma, y mostrando que se obtienen las mismas expresiones de la entropía en el caso de los equilibrios electrostático y magnetostático, siempre que se fije el mismo nivel de fluctuaciones para el sistema. Luego se justifica el éxito obtenido por Minardi en el estudio de la estabilidad dinámica, en base a un método desarrollado por Haken [18], quién utiliza la teoría de la información usando como vínculos dinámicos los dos primeros momentos de la variable que sigue la evolución dinámica.

En el capítulo *V* se estudia la turbulencia en modo “flute” de un plasma con radio de Larmor iónico despreciable (RLD) y radio de Larmor iónico finito (RLF). Esta turbulencia se debe a la inestabilidad de intercambio que se produce por separación de cargas en el plasma. Y puede ser estabilizada cuando el radio de Larmor es finito [4,27,37]. En general su estudio se realiza sin tomar en cuenta disipación y fuerza externa [25]. Nosotros desarrollamos en base a un modelo de derivas [26], las ecuaciones básicas del problema que contienen disipación y fuerza externa. Luego se realiza un análisis de Fourier de las mismas, que se trunca en tres modos principales (modelo de tres modos o tres ondas), obteniéndose un sistema de ecuaciones no lineal, del que se estudia la bifurcación entre dos estados de equilibrio estacionario posibles, cuando varía el parámetro de control del



problema que resulta ser la intensidad de la fuerza externa aplicada. A través de un análisis no lineal, se obtiene la evolución del modo inestable que surge, cuando pierde estabilidad el primer estado de equilibrio. Y finalmente se consideran los modos restantes (el resto de los modos que se desecharon en el análisis de Fourier, luego de tomar sólo tres de ellos considerados principales), modelándolos como una contribución de *ruido blanco*. Según se trate de (RLF) o (RLD) aparecen uno o dos invariantes ideales, que resultan ser la energía y la enstrofía. Y se analiza su distribución entre los diferentes modos (proceso de cascada), la cual conduce a la formación de estructuras coherentes, que en el caso de (RLF) justifica la estabilización del plasma.

En el capítulo *VI* se plantea el equilibrio de flujos helicoidales FH en un conducto cilíndrico, tanto hidromagnéticos como hidrodinámicos, mostrando el isomorfismo entre ambas situaciones. Isomorfismo que no se mantiene en la evolución dinámica. Se plantea la ecuación de Grad-Shafranov que satisfacen en forma general estos equilibrios, y se muestra que cuando en el caso axisimétrico el flujo de equilibrio es un vórtice de Rankine [cap. *VIII*], el FH más general que se puede obtener es la suma de un flujo tipo Rankine  $\psi = a + br^2$  (donde  $\psi$  es la función de corriente) y un flujo de Beltrami  $\vec{\omega} = \gamma\vec{v}$ , donde  $\vec{\omega}$  es la vorticidad y  $\vec{v}$  es la velocidad.

En el capítulo *VII* se estudia una configuración de FH de sección elíptica y torsión pequeña. Se obtienen expresiones analíticas para el flujo rotacional e irrotacional, y se introduce un parámetro que mide la relación entre la fuerza de Coriolis y la fuerza inercial en el núcleo rotacional, el cual determina la estabilidad del mismo y es el número de Rossby del problema.

En el capítulo *VIII* se estudian los flujos helicoidales en un expansor. Se describe la forma más general del FH aguas abajo, cuando el flujo aguas arriba es un vórtice de Rankine, mostrándose que dicho FH es la suma de un flujo de Rankine más uno de Beltrami. Luego se perturba linealmente el flujo axisimétrico (FA) en el expansor mediante una per-

turbación con simetría helicoidal, y se obtiene un flujo de Beltrami rotando con velocidad angular constante. Se plantean las condiciones de vínculo y continuidad en la frontera rotacional-irrotacional y aguas arriba-aguas abajo en función del número de Rossby. De las primeras se obtiene el paso de la hélice como función del número de Rossby. Finalmente se aplica la técnica de Minardi para el estudio de la estabilidad del FA, la cual está emparentada con los criterios variacionales examinados por Moffatt [58] en el caso de campos de Beltrami, y que lo llevaron a sugerir que tales flujos son inestables al desarrollo de perturbaciones helicoidales de gran escala con el mismo signo de helicidad que el flujo de base. Esta conclusión es compartida por el trabajo numérico que cierra esta tesis.

## CAPITULO II

### Formas de estudiar la estabilidad de un sistema

Existen dos métodos básicos para estudiar la estabilidad o inestabilidad de un sistema, que ilustraremos en el sencillo caso en que las ecuaciones de movimiento son del tipo:

$$\sum_{ij} (M_{ij} \ddot{\tilde{\alpha}}_j + S_{ij} \tilde{\alpha}_j) = 0 , \quad (II - 1)$$

en el cual las  $\tilde{\alpha}_j$  representan el apartamiento a primer orden de la posición de equilibrio de las magnitudes  $\hat{q}_j$  características del sistema (por ejemplo el desplazamiento  $\vec{\xi}$ , el campo eléctrico  $\vec{E}$ , etc.), M es un operador hermítico definido positivo y S un operador hermítico, que pueden contener derivadas espaciales pero no temporales (asociados a la inercia y a la fuerza, respectivamente).

#### Teoría de las pequeñas oscilaciones. [1- 2]

Si se realiza un análisis de Fourier en el tiempo de este sistema de ecuaciones, o sea si se buscan soluciones con dependencia temporal del tipo  $\propto e^{i\omega t}$ , resolviendo la correspondiente relación de dispersión, se hallan las frecuencias características  $\omega$  de los distintos modos normales que satisfacen al sistema de ecuaciones (II - 1), hallándose que estas frecuencias  $\omega$  son reales o imaginarias puras, viniendo estas últimas de a pares conjugados, por lo cual una de ellas corresponde necesariamente a un modo inestable. Para que haya estabilidad es necesario y suficiente que todas las  $\omega$  sean reales, o sea que las matrices  $M_{ij}$ ,  $S_{ij}$  sean ambas definidas positivas . (Como  $M_{ij}$  lo es por hipótesis, la condición de estabilidad es que  $S_{ij}$  lo sea).

#### Principio de energía:

Dado el sistema (II - 1) se puede definir la variación de la “energía potencial gene-

realizada” del mismo debida a a la perturbación como

$$\delta Q = \frac{1}{2} \int d^3 r \tilde{\alpha}_i S_{ij} \tilde{\alpha}_j, \quad \forall \tilde{\alpha}_i, \tilde{\alpha}_j. \quad (II - 2)$$

(La energía cinética está asociada a M como  $\delta Q$  a S, pero como M es definida positiva, lo que define la estabilidad es el signo de  $\delta Q$ ). Se prueba que si  $\delta Q > 0$  el sistema es estable y que si  $\delta Q < 0$ , el sistema es inestable. (en efecto, en teoría de ecuaciones diferenciales se demuestra que si el operador S es hermitico, el signo de esta energía generalizada determina la estabilidad del sistema).

Este es un principio variacional que, como luego veremos, resulta como caso particular del criterio de estabilidad termodinámico que expondremos. Estos dos métodos pueden generalizarse a ecuaciones más complejas que (II - 1).

El primer método es estandar, pero involucra cálculos más complicados que el segundo método. Este último se aplica habitualmente en la literatura magnetohidrodinámica, como en el ejemplo, pero recientemente se ha encontrado en base a la termodinámica irreversible un principio variacional, que generaliza este tratamiento a situaciones más amplias [3]. Este será uno de los métodos usados en este trabajo para el estudio de la estabilidad.

Un ejemplo de aplicación de ambos métodos es el siguiente: un plasma frío situado en un campo magnético uniforme  $\vec{B}_0 \parallel \hat{z}$  y un campo gravitatorio  $\vec{g} \parallel \hat{x}$ . Bajo la influencia de estos campos las partículas se moverán perpendicularmente a  $\vec{B}_0$  y  $\vec{g}$ , con una velocidad de deriva

$$\vec{v}_{gi} = -\frac{g}{\omega_{ci}} \hat{y}, \quad \vec{v}_{ge} = \frac{g}{\omega_{ce}} \hat{y}, \quad \omega_{c(i,e)} = \frac{B_0 q}{cm_{(i,e)}}, \quad (II - 3)$$

donde  $\omega_{ci}$ ,  $\omega_{ce}$  son la frecuencia de ciclotrón del ión y el electrón respectivamente y  $m_{(i,e)}$  indica las masas de ambos respectivamente.

Esta velocidad de deriva, no es igual para iones y electrones, siendo  $|\vec{v}_{gi}| \gg |\vec{v}_{ge}|$ ; luego hay un movimiento relativo de iones y electrones, lo cual origina la “ inestabilidad de intercambio”.

Consideremos perturbaciones de baja frecuencia  $\omega \ll \omega_c$ , con  $k_z = 0$ . Utilizando un modelo fluidístico para el plasma tipo MHD ideal, obtenemos ([4], vol.2, ec(6-10)).

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\rho_0 \vec{v}') = 0, \quad \rho_0 \frac{\partial \vec{v}'}{\partial t} = \rho' \vec{g}, \quad \vec{v}' = c[\vec{E}, \hat{z}]/B_0, \quad (II - 4)$$

donde  $\rho' = m_i n'$ ,  $\rho_0 = m_i n_0$ : son las densidades perturbada y de equilibrio respectivamente,  $\vec{v}'$  es la velocidad perturbada.

Definiendo el desplazamiento del plasma  $\xi$  como:

$$\vec{v}' = \frac{\partial \vec{\xi}}{\partial t}, \quad (II - 5)$$

obtenemos

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{\xi}}{\partial t^2} = -\hat{K} \vec{\xi}, \quad \hat{K} \vec{\xi} = \vec{g} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi}). \quad (II - 6)$$

Si ahora ponemos  $\vec{\xi} = e^{-i\omega t} e^{ik_y y} \vec{\xi}(x, z)$  (método de las pequeñas oscilaciones) resulta:

$$-\omega^2 \rho_0 \vec{\xi} + [\vec{g} \nabla \cdot (\rho_0 \vec{\xi})] = 0, \quad (II - 7)$$

que equivale a:

$$[-\omega^2 \rho_0 + (\nabla \rho_0) \cdot \vec{g}] \vec{\xi} + (\nabla \rho_0) \times (\vec{g} \times \vec{\xi}) + \rho_0 \vec{g} (\nabla \cdot \vec{\xi}) = 0. \quad (II - 8)$$

Considerando ahora un fluido incompresible, o sea que  $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ , y suponiendo  $\nabla \rho_0 \parallel \vec{g} \parallel \hat{x}$ ; obtenemos:

$$\rho_0 \omega^2 = \vec{g} \cdot \nabla \rho_0; \quad (II - 9)$$

de aquí resulta que la perturbación es inestable si  $\vec{g} \cdot \nabla \rho_0 < 0$ , o sea si el gradiente de densidad se opone a la dirección de campo gravitatorio.

Por otro lado, aplicando el principio de energía en este caso, donde el operador S es igual al operador  $\hat{K}$  y el operador M es el operador  $\rho_0 Id$  ( $Id = identidad$ ), como resulta de reducir (II - 6) a la forma (II - 1), se obtiene la energía potencial generalizada

$$\delta Q = \frac{1}{2} \int d^3 r \vec{\xi} \hat{K} \vec{\xi}, \quad (II - 10)$$

donde la integral es extendida al volumen del plasma.

Asumiendo nuevamente una dependencia en el tiempo del tipo  $\propto e^{-i\omega t}$  y utilizando (II - 6), obtenemos:

$$\omega^2 = \delta Q / \int \rho_0 |\vec{\xi}|^2 d^3 r , \quad (II - 11)$$

Habr  estabilidad si para todo  $\vec{\xi}$  es  $\delta Q > 0$ . En nuestro caso y teniendo en cuenta que  $\nabla \cdot \vec{\xi} = 0$ , es

$$\delta Q = \frac{1}{2} \int d^3 r (\vec{\xi} \cdot \vec{g})(\vec{\xi} \cdot \nabla \rho_0) , \quad (II - 12)$$

y por lo tanto habrá estabilidad si es

$$\vec{g} \cdot \nabla \rho_0 > 0 , \quad (II - 13)$$

lo cual coincide con el resultado anterior.

### Criterio termodinámico general de estabilidad. [3-5]

La idea básica de Glansdorff y Prigogine [6, 7] de construirse a partir de la entropía una función de Lyapunov que determine la estabilidad de un sistema, ha sido la base del desarrollo en la termodinámica irreversible de un poderoso método para el estudio de la estabilidad, que describiremos ahora. Este resumen sigue principalmente a Lavenda [8].

Definiremos primeramente el concepto matemático de función de Lyapunov. Sea una ecuación diferencial (o sistema de ecuaciones)

$$\dot{\hat{q}} = \hat{K}(\hat{q}) \quad (II - 14)$$

que admite una solución estacionaria  $\hat{q} = \hat{q}_0$  o sea  $\hat{K}(\hat{q}_0) = 0$ , donde  $\hat{q}$  puede ser un vector de dimensión n (que podría también cumplir una ecuación de segundo orden en el tiempo, en lugar de (II-14)), y donde  $\hat{K}(\hat{q})$  puede depender no sólo de  $\hat{q}$ , sino además de sus derivadas espaciales. Una función  $\hat{V}(\hat{q})$ , definida en un entorno de  $\hat{q}_0$ , que cumpla para

todo punto  $\hat{q}$  de dicho entorno

$$\tilde{V}(\hat{q}_0) = 0, \quad \frac{d}{dt}\tilde{V}(\hat{q}) = \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \hat{q}} \dot{\hat{q}} \leq 0 \quad (\forall \hat{q} \in U(\hat{q}_0) = \text{entorno de } \hat{q}_0), \quad (II - 15)$$

es por definición una función de Lyapunov para (II-14).

La teoría de ecuaciones diferenciales demuestra que si además se cumple

$$\tilde{V}(\hat{q}) \geq 0, \quad \forall \hat{q} \in U(\hat{q}_0), \quad \tilde{V}(\hat{q}) = 0 \Leftrightarrow \hat{q} = \hat{q}_0, \quad (II - 16)$$

entonces  $\hat{q}_0$  es estable, mientras que  $\hat{q}_0$  es inestable si en todo entorno suyo existen puntos  $\hat{q}$  para los cuales  $\tilde{V}(\hat{q})$  es negativa. Se demostrará que el exceso de entropía cambiado de signo  $-(\delta^2\eta)$  (variación a segundo orden de la entropía producida por la perturbación) es una función de Lyapunov, siempre que se cumplan ciertas condiciones, en un entorno tal que las ecuaciones de movimiento pueden tomarse linealizadas alrededor de  $\hat{q}_0$ . En lo que sigue se tomará, por sencillez,  $\hat{q}_0 = 0$ .

En el caso más general, en que  $\hat{q}$  cumple ecuaciones de segundo orden en el tiempo, la versión linealizada de (II-14) es

$$M_{ij}\ddot{\hat{q}}_j + \tilde{R}_{ij}\dot{\hat{q}}_j + S_{ij}\hat{q}_j = 0, \quad (II - 17)$$

donde se utiliza la convención de Einstein.

Para un sistema fuera del equilibrio termodinámico, sean  $\hat{q}$  variables extensivas que representan un apartamiento del estado estacionario  $\hat{q}_0$ :  $\hat{q}_j = q_j - q_{j_0}$ . Entonces (II - 17) son ecuaciones de regresión de Onsager. Sean,  $\eta$  la entropía del sistema por unidad de masa, y  $P$  la potencia que el sistema cede al medio ambiente (en forma de trabajo) por unidad de masa y de temperatura. Entonces, si en lugar de igualar a cero las ecuaciones (II - 17), se las iguala a las componentes de una fuerza externa, resulta que

$$P = -\dot{\hat{q}}_i(M_{ij}\ddot{\hat{q}}_j + \tilde{R}_{ij}\dot{\hat{q}}_j + S_{ij}\hat{q}_j). \quad (II - 18)$$

Esta potencia es una cantidad de segundo orden y  $\dot{q}_i$  es el flujo de la cantidad  $\hat{q}_i$ . La disipación del sistema se define como

$$\tilde{\phi} = \frac{1}{2} \tilde{R}_{ij}^{(H)} \dot{q}_i \dot{q}_j = \frac{1}{4} (\tilde{R}_{ij} + \tilde{R}_{ji}) \dot{q}_i \dot{q}_j, \quad (II - 19)$$

Entonces el “*principio de balance de potencia*” de Lavenda [8], establece que la potencia debe ser la diferencia entre la producción de entropía del sistema  $\dot{\eta}$  y la disipación del mismo, es decir

$$P = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\delta^2 \eta) - 2\tilde{\phi}. \quad (II - 20)$$

siempre que se mantenga constante la energía interna del sistema, y donde  $\delta^2 \eta$  es una cantidad de segundo orden, ya que es la suma de dos términos de segundo orden. De (II - 18), (II - 19) y (II - 20) se deduce que

$$\delta^2 \eta = -[M_{ij} \dot{q}_i \dot{q}_j + S_{ij} \hat{q}_i \hat{q}_j], \quad (II - 21)$$

es el exceso de entropía del sistema.

Lavenda mostró [8] que si las matrices  $S_{ij}$  y  $M_{ij}$ , son hermíticas, una condición suficiente de estabilidad es que, para toda perturbación se cumpla que el exceso de entropía sea

$$\delta^2 \eta \leq 0, \quad (II - 22)$$

Si la matriz  $\tilde{R}_{ij}$  es nula, o bien tiene parte hermítica definida positiva, la condición de estabilidad (II-22) no sólo es suficiente sino también necesaria, estando la parte hermítica de dicha matriz asociada a la disipación del sistema, mientras que la parte antihermítica es debida, en cambio, a fuerzas giroscópicas, que, si no hay disipación, pueden estabilizar el sistema, por lo cual, en el caso de que la matriz  $\tilde{R}_{ij}$  sea antihermítica y no nula, (II-22), es sólo condición suficiente pero no necesaria de estabilidad. Si no se cumple la condición de que la matriz  $S_{ij}$  sea hermítica, aparecen fuerzas circulatorias y el exceso de entropía no



es ya función de Lyapunov, pues en este caso la estabilidad del sistema no puede depender de un potencial escalar.

Para que una perturbación se desarrolle espontáneamente se debe cumplir para ella  $P \geq 0$ , luego si  $\tilde{\phi}$  dada en (II-19) es no negativa, o sea la parte hermítica de  $\tilde{R}_{ij}$  es semidefinida positiva, se obtiene de (II-20) que se cumple

$$\frac{d}{dt}(-\delta^2 \eta) = -2P - 4\tilde{\phi} \leq 0 . \quad (II - 23)$$

y luego el exceso de entropía cumple la propiedad de Lyapunov (II-15) , siendo entonces válido el criterio de estabilidad (II-22). En efecto, si se cumple (II-22), por (II-16) y (II-23), el sistema es estable; reciprocamente, si el sistema es estable y la parte hermítica de  $\tilde{R}_{ij}$  es estrictamente positiva, o bien si  $\tilde{R}_{ij} = 0$ , se cumplen simultáneamente (II-23) y (II-22).

### Aplicación al plasma de Vlasov. [3-5]

Como se dijo antes, estas técnicas facilitan el estudio de las inestabilidades en el plasma. Para verlo, consideremos un plasma no disipativo que se puede describir mediante la ecuación de Vlasov, el cual llamaremos "Plasma de Vlasov". Esta ecuación, una vez linealizada en la perturbación, se puede poner en la forma

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} + L_o f_1 = -[f_0, \vec{J} \cdot \vec{\Psi}] , \quad (II - 24)$$

y debe considerarse una por cada especie de partículas del plasma.

En (II - 24), [ , ] es un corchete de Poisson,  $\vec{\Psi}$  representa los campos (por ejemplo  $\vec{\Psi} = (\phi_1, \vec{A}_1)$  donde  $\vec{A}_1$  es el potencial vector a primer orden,  $\phi_1$  el potencial eléctrico) que responden a una ecuación del tipo:

$$\hat{\Lambda} \vec{\Psi} = \int d^3 p \vec{J} f_1 , \quad (II - 25)$$

donde en general  $\hat{\Lambda}$  es del tipo

$$\hat{\Lambda} \vec{\Psi} = \Lambda_o \vec{\Psi} + \Lambda_1 \dot{\vec{\Psi}} + \Lambda_2 \ddot{\vec{\Psi}} + \Lambda_{-1} \int \vec{\Psi} dt , \quad (II - 26)$$

siendo  $\hat{\Lambda}_1$  ,  $\hat{\Lambda}_{-1}$  operadores antihermíticos y  $\hat{\Lambda}_0$  ,  $\hat{\Lambda}_2$  operadores hermíticos (por ser el sistema considerado no disipativo).  $\vec{J}$  es una corriente generalizada y es

$$L_o f_1 = [f_1, H_o] , \quad (II - 27)$$

donde  $f_1$  representa la perturbación a primer orden de la función de distribución  $f_o$  del plasma y  $H_o$  es el hamiltoniano de una partícula del plasma en ausencia de perturbación (la perturbación en H es  $H_1 = \vec{J} \cdot \vec{\Psi}$  ,  $\vec{J}$  y  $\vec{\Psi}$  son vectores de la misma dimensión). El operador  $L_o$  , es antihermítico y puede probarse [9] que existe por lo menos una base de funciones propias  $W_\nu(\vec{r}, \vec{p})$  de  $L_o$  en el espacio de las funciones definidas en el espacio de las fases de las partículas del plasma, de modo que cualquiera sea  $f_1$ , se cumpla

$$f_1(\vec{r}, \vec{p}, t) = \sum_{\nu} \gamma_{\nu}(t) W_{\nu}(\vec{r}, \vec{p}) , \quad (II - 28)$$

$$L_o W_{\nu}(\vec{r}, \vec{p}) = i\mu_{\nu} W_{\nu}(\vec{r}, \vec{p}) , \quad \langle W_{\nu} | W_{\nu'} \rangle = \int d^3 r d^3 p W_{\nu}^* W_{\nu'} = \delta_{\nu\nu'}$$

Por ser  $L_o$  antihermítico sus autovalores son imaginarios puros ( $i\mu_{\nu}$ ). Como además  $L_o$  conmuta con  $[ , f_o]$  operador también antihermítico, la base definida en (II - 28) se puede elegir común a los dos operadores o sea que satisfaga (además de (II - 28))

$$[W_{\nu} , f_o] = iK_{\nu} W_{\nu} . \quad (II - 29)$$

Luego partiendo de (II - 24) y (II - 25) se puede mostrar que [3]

$$\delta^2 \eta = [ \langle \dot{\vec{\Psi}} | \hat{\Lambda}_2 | \dot{\vec{\Psi}} \rangle + \langle \vec{\Psi} | \hat{\Lambda}_0 | \vec{\Psi} \rangle + \langle \vec{\mathcal{J}} | \vec{\Psi} \rangle + \langle \vec{\Psi} | \vec{\mathcal{J}} \rangle ] + \sum , \quad (II - 30)$$

$$\sum = \sum \left[ \frac{\mu_{\nu}}{K_{\nu}} |\gamma_{\nu}|^2 - \gamma_{\nu} \langle \vec{J} \cdot \vec{\Psi} | W_{\nu} \rangle - \gamma_{\nu}^* \langle W_{\nu} | \vec{J} \cdot \vec{\Psi} \rangle \right] , \quad \vec{\mathcal{J}} = \hat{\Lambda}_{-1} \int \vec{\Psi} dt ,$$

lo que como se muestra en [3], permite obtener como casos particulares del criterio de estabilidad  $\delta^2 \eta \leq 0$ , los “principios de energía” conocidos en física del plasma.

## CAPITULO III

### Teoría termodinámica de Minardi de la estabilidad del plasma

Minardi [10,11,12,13,14], desarrolló un modelo estadístico para el equilibrio sin colisiones o semicolisional de un plasma confinado magnéticamente, así como del equilibrio colectivo de un plasma de Vlasov, que permite construir una funcional o entropía que caracterice el equilibrio de tal forma que las propiedades variacionales de la misma están relacionadas a la estabilidad “dinámica” de dicho equilibrio.

Para ello, (como veremos en este capítulo), Minardi se basa en el uso de la “teoría de la información”, y en analogías con el equilibrio termodinámico, pero como él mismo reconoce, este método no se encuentra debidamente fundamentado, ya que no es clara su conexión con las ecuaciones de movimiento del sistema (ecuaciones de Vlasov, ecuaciones de Maxwell, etc.), aunque conduce a resultados correctos.

En el próximo capítulo, desarrollaremos una fundamentación rigurosa de esta conexión y por lo tanto del método utilizado por Minardi para el estudio de la estabilidad del equilibrio del plasma.

Consideremos en primer lugar un plasma en estado de equilibrio “colectivo” magnético definido por una densidad de corriente  $\vec{j}(\vec{x})$  en el volumen  $V$ , y por un potencial vector  $\vec{A}(\vec{x})$ . Asumimos que dicho equilibrio se superpone con un medio uniforme y neutro o “background” de iones y electrones fluctuando libremente. El volumen  $V$ , se subdivide en  $N$  celdas  $\Delta V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) de tal forma que cada celda contenga muchas partículas. Luego la corriente total  $\vec{j}_i$  en  $\Delta V_i$ , está formada por una contribución aleatoria  $\vec{j}_i$  relacionada a las partículas individuales en  $\Delta V_i$ , y una parte colectiva  $\vec{j}(\vec{x}_i)$ . Se supone que  $\vec{j}(\vec{x}_i)$  es aproximadamente constante en  $\Delta V_i$ .

Luego un equilibrio colectivo, puramente magnético, queda definido por un potencial

magnético  $\vec{A}(\vec{x})$ , el cual está totalmente descorrelacionado a través del volumen  $V$  con las fluctuaciones individuales  $\vec{j}_i$ . Para formular este hecho consideremos el conjunto de celdas  $\Delta V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) como un sistema estadístico y definamos  $P(\vec{j})$  como la probabilidad de que el sistema de celdas tome el conjunto de valores  $(\vec{j}_1, \vec{j}_2, \dots, \vec{j}_N)$  de la corriente fluctuante. Se asume equiprobabilidad para las posiciones que cada celda puede ocupar en el volumen  $V$ . La descorrelación se expresa entonces como

$$\int P(\vec{j}) \sum_i \vec{j}_i \cdot \vec{A}(\vec{x}_i) \Delta V_i d\Gamma = 0, \quad (III - 1)$$

con  $d\Gamma = (V/N)^N d\vec{j}_1 d\vec{j}_2 \dots d\vec{j}_N$ , volumen en el espacio  $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_N, \vec{j}_1, \vec{j}_2, \dots, \vec{j}_N)$ , accesible al conjunto de celdas.

La ecuación (III-1) se considera un “vínculo” para la función de probabilidad  $P(\vec{j})$ . Para determinarla definimos la entropía del conjunto de celdas, de acuerdo a la teoría de la información [15].

$$S = - \int P(\vec{j}) \ln P(\vec{j}) d\Gamma. \quad (III - 2)$$

La condición de equilibrio estadístico implica que  $P(\vec{j})$  debe ser tal que  $S$  sea máxima sujeta a los “vínculos” del sistema.

Otro vínculo aparece en el modelo, el cual caracteriza el nivel de las fluctuaciones. Se asume para esto que  $\vec{j}_i$  son variables aleatorias con una varianza promedio  $\overline{\Delta j^2}$ , en cada celda de volumen  $\Delta V_i$ . Luego la variancia promedio de la variable aleatoria  $\vec{j}_i = \vec{j}_i + \vec{j}(\vec{x}_i)$ , es

$$\overline{\Delta j^2} = \overline{\Delta j^2} + \overline{\Delta j_c} + \frac{1}{V} \int_{V_i} (\vec{j}(\vec{x}) - \vec{j}_o)^2 dV, \quad (III - 3)$$

donde  $\vec{j}_o$  es el promedio de  $\vec{j}(\vec{x})$  sobre el volumen  $V_i$  en el que se encuentra localizada y  $\overline{\Delta j_c}$  representa la posible correlación entre  $\vec{j}_i$  y  $\vec{j}(\vec{x}_i)$ . En este modelo, la variancia se obtiene como promedio canónico de la cantidad  $N^{-1} \sum_i (\vec{j}_i + \vec{j}(\vec{x}_i) - \vec{j}_o)^2$ , y el siguiente

vínculo se impone a  $P(\vec{j})$

$$N^{-1} \int P(\vec{j}) \sum_i (\vec{j}_i + \vec{j}(\vec{x}_i) - \vec{j}_o)^2 d\Gamma = \overline{\Delta j^2} = \text{constante}. \quad (III - 4)$$

Un último vínculo viene dado por la condición de normalización para  $P(\vec{j})$

$$\int P(\vec{j}) d\Gamma = 1. \quad (III - 5)$$

Se asume que el volumen  $V_1$  es mucho menor que el volumen total  $V$  que incluye al medio fluctuante de partículas libres. Luego tomamos el límite  $V \rightarrow \infty$ ,  $N \rightarrow \infty$ , pero con  $\frac{V}{N}$  fijo. Usando el método de los multiplicadores de Lagrange [10], obtenemos para la función de probabilidad  $P(\vec{j})$  que maximiza  $S$  sujeta a los vínculos ((III - 1), (III - 4), (III - 5))

$$P(\vec{j}) = P_o \exp\left[-\alpha \sum_i (\vec{j}_i + \vec{j}(\vec{x}_i) - \vec{j}_o)^2 + \frac{\Delta V}{4\pi\mathcal{T}} \sum_i \vec{j}_i \cdot \vec{A}(\vec{x}_i)\right], \quad (III - 6)$$

Donde  $\alpha$  y  $\mathcal{T}$  son los multiplicadores de Lagrange, que se determinan insertando (III - 6) en (III - 1) y en (III - 4) dando

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{2\overline{\Delta j^2}} \left(3 - \frac{2\Phi}{N\mathcal{T}}\right); \\ \mathcal{T} = \frac{-\overline{\Delta j^2} V \int_{V_1} A^2(\vec{x}) dV}{96\pi^2 N\Phi}, \end{cases} \quad (III - 7)$$

$$\Phi = (8\pi)^{-1} \int_{V_1} (\vec{j}(\vec{x}) - \vec{j}_o) \cdot \vec{A}(\vec{x}) dV \quad (III - 8)$$

Finalmente obtenemos la siguiente expresión para la entropía

$$S(\overline{\Delta j^2}, \mathcal{T}, \Phi) = N \ln\left[\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi}{3} \overline{\Delta j^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right] + \frac{\Phi}{\mathcal{T}}. \quad (III - 9)$$

Observamos que si definimos

$$F = -\mathcal{T} N \ln\left[\frac{V}{N} \left(\frac{2\pi}{3} \overline{\Delta j^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right], \quad (III - 10)$$

la ecuación (III - 9) se escribe como

$$\mathcal{T} S = -F + \Phi. \quad (III - 11)$$

$F$  puede interpretarse como una energía libre, y  $\Phi$  como una energía interna del plasma, mientras que  $\mathcal{T}$  cumple el papel de una temperatura. Luego  $\overline{\Delta j^2}$ ,  $\mathcal{T}$ , y  $\Phi$  son los parámetros que caracterizan el equilibrio.

### Energía colectiva

La funcional

$$\Phi[\vec{j}(\vec{x})] = (8\pi)^{-1} \int_{V_1} (\vec{j}(\vec{x}) - \vec{j}_o) \cdot (\vec{A}(\vec{x}) - \vec{A}_o) dV, \quad (III - 12)$$

representa la energía del equilibrio colectivo del sistema, y como veremos nos dará un criterio termodinámico de estabilidad. La elección de la variable de información caracterizando un sistema físico y su energía de equilibrio colectivo  $\Phi$ , dependen no sólo del equilibrio sino del proceso físico en estudio.

Sea por ejemplo un plasma en un campo magnético homogéneo  $\vec{B} = (0, 0, B_z)$  y un campo gravitacional  $\vec{g} = (g, 0, 0)$  en un modelo plano. Si el proceso de interés es la “deriva gravitacional”, la variable de información es la corriente de deriva [Cap. V, ec. V - 16]

$$\vec{j}_g = (0, -4\pi \sum_s \frac{n_s m_s g}{B_z}, 0) \quad (\vec{j}_g \times \vec{B} \propto \vec{f}_{grav}), \quad (III - 13)$$

En efecto, si existe una inhomogeneidad suave de la densidad en la dirección  $x$ , entonces la ecuación (III - 12) puede escribirse

$$\Phi(j_g) = (8\pi)^{-1} \int_{V_1} \sum_s \Delta j_{gy} \Delta A_y dV \approx -V_1/8\pi \sum_s \Delta j_{gy} \Delta A_y = -\frac{V_1}{2} \sum_s g m_s \Delta n_s \Delta x, \quad (III - 14)$$

con  $\Delta x \rightarrow 0$ , ya que  $\Delta A_y = B_z \Delta x$ , siendo  $-\Phi(j_g)$  la variación de la energía gravitacional luego del intercambio de elementos de volumen a lo largo del campo gravitacional.

### Criterio termodinámico de estabilidad, principio de mínima energía

Suponemos un sistema aislado en el sentido de que no puede ser desarrollado trabajo externo sobre, ni por el sistema, ni puede entregarse calor al sistema a través de una fuente externa. Pero sí se permite al sistema entregar calor al medio, cuando este es capaz de interactuar con el sistema y este último se encuentra en un equilibrio inestable.

De acuerdo a la analogía establecida anteriormente, el primer principio resulta

$$\delta\Phi + \delta W = \delta Q, \quad (III - 15)$$

donde  $\delta W$  es el trabajo realizado por el sistema y  $\delta Q$  la cantidad de calor ( $\delta Q > 0$ ) entregada al sistema. En este caso  $\delta W = 0$  y  $\delta\Phi = \delta Q$ . Luego  $\delta F = -T\delta S + \delta Q$  y para procesos reversibles es  $\delta F = 0$  y por (III - 10) esto significa que  $\overline{\Delta j^2} = \text{constante}$ . Este proceso es pues isotérmico, disipativo, y la disipación es esencialmente fluctuante.

Un proceso termodinámico será posible si  $\delta S \geq 0$

(i) Si  $T > 0$  o bien  $\Phi < 0$ , entonces  $\delta S > 0$  sólo si  $\delta Q > 0$ . Pero en ausencia de fuente externa, este proceso no es posible y luego el equilibrio colectivo es termodinámicamente estable.

(ii) Si  $T < 0$  o bien  $\Phi > 0$ , un proceso con  $\delta Q = \delta\Phi < 0$ , es posible, y el sistema entrega calor al medio: las fluctuaciones crecen mientras la energía colectiva decae. El equilibrio termodinámico es inestable.

Por ejemplo, para la inestabilidad de intercambio anteriormente mencionada tenemos, de acuerdo a (III - 14), que si  $dn_s < 0$ , o sea la densidad decrece con  $x$  (es decir, en la dirección de la gravedad),  $\Phi(j_g) > 0$  y el equilibrio es inestable. En el capítulo (II) mostramos (fórmula (II - 9)) a través de un análisis dinámico esta condición de inestabilidad, como así también a través de un principio de energía (ec. (II - 12)), lo cual muestra que el análisis de estabilidad es también dinámico.

En los procesos descritos, los únicos que son termodinámicamente posibles con  $\mathcal{T} > 0$ , son tales que  $\delta Q = \delta\Phi > 0$ , pero no son posibles en ausencia de fuentes externas. Un equilibrio con  $\Phi > 0$ , es inestable respecto a esta clase de procesos siempre que  $\Phi$  no sea mínimo, pues de lo contrario sólo los procesos con  $\delta\Phi > 0$  serían posibles, pero estos como ya vimos no pueden realizarse. Luego un equilibrio colectivo estable corresponde a un mínimo de  $\Phi$ .

### Plasma de Vlasov

Para un plasma de Vlasov, las inestabilidades se deben no a las colisiones, sino a las excitaciones colectivas del plasma. En el caso de un equilibrio electrostático, el equilibrio colectivo está determinado por la densidad de carga  $\sigma(\vec{x})$  y por el potencial electrostático  $\varphi(\vec{x})$ . El procedimiento descrito inicialmente, se aplica idénticamente en este caso y los vínculos correspondientes son

$$\int P(\tilde{\sigma}) \sum_i \tilde{\sigma}_i (\varphi(\vec{x}_i) - \varphi_o) \Delta V_i d\Gamma = 0, \quad (III - 16)$$

que expresa que el equilibrio colectivo está descorrelacionado de las fluctuaciones y

$$N^{-1} \int P(\tilde{\sigma}) \sum_i (\tilde{\sigma}_i + \sigma(\vec{x}_i) - \sigma_o)^2 d\Gamma = \overline{\Delta\sigma^2} = \text{constante}, \quad (III - 17)$$

que fija el nivel de las fluctuaciones. Luego, en el límite termodinámico la entropía es

$$S = -\frac{N}{2\Delta\sigma^2 V} \int_{V_1} (\sigma(\vec{x}) - \sigma_o)^2 dV - \frac{1}{8\pi\mathcal{T}} \int_{V_1} (\sigma(\vec{x}) - \sigma_o)(\varphi(\vec{x}) - \varphi_o) dV, \quad (III - 18)$$

con  $\frac{1}{\mathcal{T}}$ , multiplicador de Lagrange ( $\mathcal{T} = \frac{V\Delta\sigma^2\lambda_d^2}{4\pi N}$ ,  $\lambda_d$  longitud de Debye).

Y definiendo

$$\frac{\mathcal{T}}{2} = \frac{\lambda^2 \overline{\Delta\sigma^2} \Delta V}{8\pi}, \quad (III - 19)$$



se ve que (III – 17) se cumple si

$$\lambda^2 = - \frac{\int_{V_1} (\varphi(\vec{x}) - \varphi_o) dV}{\int_{V_1} (\sigma(\vec{x}) - \sigma_o)(\varphi(\vec{x}) - \varphi_o) dV} . \quad (III - 20)$$

Como  $|T/2|$  puede interpretarse como una energía fluctuante en una celda  $\Delta V$  con fluctuaciones  $\tilde{\sigma}$  y con longitud de onda  $2\pi|\lambda|$ ,  $T$  adquiere el significado de una temperatura generalizada.

Si introducimos  $-\vec{E}(\vec{x}) = \nabla\varphi(\vec{x})$  y  $\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = \sigma(\vec{x})$ , la entropía (III – 18), puede ponerse en la forma (haciendo  $\sigma_o = 0$ )

$$S(\vec{E}'(\vec{x}), \vec{E}(\vec{x})) = - \frac{1}{4\pi} \frac{N}{2\Delta\sigma^2 V} \left[ \int_{V_1} (\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}))^2 d^3x + \lambda^{-2} \int_{V_1} \vec{E}^2(\vec{x}) d^3x \right] , \quad (III - 21)$$

donde  $\vec{E}'$  indica que  $S$  depende de las derivadas espaciales de  $\vec{E}$ . Considerando variaciones isotérmicas, la ecuación de Euler correspondiente conduce a

$$\nabla^2 \vec{E}(\vec{x}) - \lambda^{-2} \vec{E}(\vec{x}) = 0 . \quad (III - 22)$$

Si  $\lambda^2 < 0$ , es siempre posible construir soluciones oscilatorias y luego la solución de (III – 22) no es única y  $S$  no es máxima.

Considerando un equilibrio de Vlasov, descrito por una función de distribución del tipo  $f = f(\epsilon)$ ,  $\epsilon = \frac{1}{2}mv^2 + q\varphi(x)$ , y aplicando  $\nabla$  a la ecuación de Poisson

$$\nabla \cdot \vec{E}(\vec{x}) = 4\pi \sum_s q_s \int f(\epsilon_s) d^3v , \quad (III - 23)$$

que junto a (III – 22) conduce a

$$\lambda^{-2} = -4\pi \sum_s q_s^2 \int \frac{\partial f_s(\epsilon_s)}{\partial \epsilon_s} d^3v . \quad (III - 24)$$

Un análisis lineal, muestra inestabilidad para funciones de distribución tales que  $\lambda^2 < 0$ . En cambio si  $\lambda^2 > 0$ , existe una única solución no oscilatoria, que maximiza  $S$ , y que a su vez es dinámicamente estable [16].

El equilibrio magnético tiene una estructura completamente similar y la entropía (III - 9) se puede reescribir en la forma

$$S = -\frac{3N}{2\Delta\vec{j}^2V} \left[ \int_{V_1} (\vec{j}(\vec{x}) - \vec{j}_o)^2 dV + \lambda^{-2} \int_{V_1} (\vec{j}(\vec{x}) - \vec{j}_o) \cdot (\vec{A}(\vec{x}) - \vec{A}_o) dV \right], \quad (III - 25)$$

que puede ponerse como

$$S(\vec{B}'(\vec{x}), \vec{B}(\vec{x})) = -\frac{3N}{2\Delta\vec{j}^2V} \left[ \int_{V_1} (\nabla \times \vec{B}(\vec{x}) - \vec{j}_o)^2 d^3x + \lambda^{-2} \int_{V_1} \vec{B}^2(\vec{x}) d^3x \right], \quad (III - 26)$$

donde  $\vec{B}'(\vec{x})$  representa a las derivadas espaciales de  $\vec{B}$  contenidas en el segundo miembro.

Las variaciones de S conducen a la ecuación

$$\nabla^2 \vec{B}(\vec{x}) + \lambda^{-2} \vec{B}(\vec{x}) = 0, \quad (III - 27)$$

con

$$\lambda^2 = \frac{12\pi NT}{\Delta\vec{j}^2V} = -\frac{\int_{V_1} (\vec{A}(\vec{x}) - \vec{A}_o) dV}{\int_{V_1} (\vec{j}(\vec{x}) - \vec{j}_o) (\vec{A}(\vec{x}) - \vec{A}_o) dV}. \quad (III - 28)$$

Los extremos corresponden a una configuración libre de fuerza  $\vec{B} = |\lambda|\vec{j}$  [10].

## CAPITULO IV

### Una fundamentación rigurosa de la teoría termodinámica aplicada por Minardi al estudio de la estabilidad en plasmas [17]

Como ya vimos en el capítulo anterior, Minardi [10-14] desarrolló una teoría termodinámica del plasma, basada en el uso de la teoría de la información, y analogías con el equilibrio termodinámico que, como el mismo reconoce, no se encuentra debidamente fundamentada, ya que no es clara su conexión con las ecuaciones de movimiento del sistema (ecs.de Vlasov,ecs de Maxwell), aunque en la práctica conduce a resultados correctos.

Independientemente, recientemente se ha desarrollado [3], en base a la termodinámica irreversible, una teoría rigurosa para la estabilidad del plasma, basada en considerar las ecuaciones de movimiento ( $\dot{\vec{q}} = \vec{K}(\vec{q})$  Vlasov,Maxwell), a las que se añaden términos fluctuantes, como ecuaciones de Langevin, que describen un movimiento Browniano, en un espacio de las fases generalizado de las variables fluctuantes  $\vec{q}$ . Una de las variables fluctuantes, puede ser la función de distribución de Vlasov  $f$ , que no debe entonces confundirse con la función de probabilidades  $P(\vec{q})$ , que asigna valores a las variables fluctuantes  $\vec{q}$  (entre ellas  $f$ ), siendo esta  $P$  una superfunción de distribución.

Se prueba que las ecuaciones de Langevin en cuestión

$$\dot{\vec{q}} = \vec{K}(\vec{q}) + \vec{\xi}, \quad (IV - 1)$$

son equivalentes a una ecuación de Fokker-Planck de la forma:

$$\dot{P} = \nabla_q \{K P\} + \frac{1}{2} \sum_{ij} Q_{ij} \frac{\partial^2 P}{\partial q_i \partial q_j} \quad (IV - 2)$$

donde  $Q$  en general cumple

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = Q_{ij} \delta(t - t') \quad (IV - 3)$$

La solución asintótica de (IV - 2) para  $t \rightarrow \infty$ , es:

$$P \propto e^{-S} \quad (IV - 4)$$

con

$$S = \frac{F}{2T} \quad (IV - 5)$$

donde S es una entropía generalizada y T un término que depende del tamaño de las fluctuaciones (“temperatura”).

Se prueba que esta S es una función de Liapunov para el problema, que determina la estabilidad, es decir que los equilibrios estables del plasma corresponden a los máximos de S. En este trabajo se comparan ambas teorías y se muestra que la teoría de Minardi, es un caso particular de la primera teoría. Se justifica asimismo el procedimiento de Minardi, de usar una teoría de la información con “vínculos dinámicos”, a pesar de que la situación descrita está alejada del equilibrio termodinámico. Para ello se usará un método descrito por Haken [18]. Comencemos considerando un plasma descrito por la ecuación de Vlasov:

$$(\partial_t + L)f = 0. \quad (IV - 6)$$

donde L es el Liouvilliano.

$$L = \vec{v} \cdot \nabla_r + \frac{q}{m}(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \cdot \nabla_v \quad (IV - 7)$$

Si consideramos una perturbación de la situación de equilibrio mecánico, vale la descomposición:

$$L = L_o + \delta L \quad ; \quad f = f_o + \delta f . \quad (IV - 8)$$

Luego de (IV - 6) resulta [19]:

$$(\partial_t + L_o)\delta f = \kappa(\vec{J} \cdot \vec{\Psi}) \quad ; \quad \kappa = [ , f] \quad (IV - 9)$$

que se complementa con las ecuaciones de Maxwell, las que pueden compactarse:

$$\Lambda \vec{\Psi} = \int \vec{J} \delta f d^3 v. \quad (IV - 10)$$

Donde  $\Lambda$  denota operadores ( $-\nabla^2$  en el caso eléctrico,  $\nabla \times \nabla$  en el caso magnético),  $\vec{\Psi}$  campos ( $\phi$  o  $\vec{A}$  respectivamente) y  $\vec{J}$  corrientes generalizadas ( $q$  o  $q\vec{v}$ ).

En el caso magnético, despreciamos la corriente de desplazamiento (aproximación de bajas frecuencias). Aquí (IV - 9) cumple el papel de ecuación de movimiento, mientras que (IV - 10) es un vínculo entre  $\vec{\Psi}$  y  $f$  en cada instante. Con estas ecuaciones y basándonos en el método anteriormente expuesto (Cap. (II), [3]), obtenemos la entropía del sistema (para la cual  $P = \Re e^{-s}$  en el sentido termodinámico).

$$S = \frac{F}{2T} \quad (IV - 11)$$

donde

$$F = \langle \delta f | L_o \kappa^{-1} | \delta f \rangle - \langle \delta f | \vec{J} \cdot \vec{\Psi} \rangle, \quad (IV - 12)$$

siendo

$$\langle a | b \rangle = \int (a^* b) d^3 x d^3 v, \quad (IV - 13)$$

el producto escalar en el espacio de las fases. En efecto, obtenemos esta expresión si notamos que en la fórmula (II - 30),  $\Lambda_o = \Lambda$  (correspondiente al operador espacial de las ecuaciones de Maxwell), que el término  $\sum \frac{\mu_\nu}{\kappa_\nu} |\gamma_\nu|^2$ , representa a  $\langle \delta f | L_o \kappa^{-1} | \delta f \rangle$ ,  $\sum \gamma_\nu \langle \vec{J} \cdot \vec{\Psi} | W_\nu \rangle = \langle \delta f | \vec{J} \cdot \vec{\Psi} \rangle$ ,  $\Lambda_2 = \Lambda_{-1} = 0$ , y usamos explícitamente (IV - 10).

Suponiendo una  $f$  que dependa de la energía  $f(H_o)$ , o tenga una dependencia tipo rotor rígido  $f(H_o - \Omega P_\theta)$ , resulta [3]:

$$L_o \kappa^{-1} = \frac{1}{\frac{\partial f_o}{\partial H_o}}. \quad (IV - 14)$$

En efecto, dado que

$$L_o f_o = 0, \quad (IV - 15)$$

se puede ver que  $L_o$  y  $\kappa$  conmutan, luego si  $f_o = f_o(H_o)$ , resulta

$$\kappa = \frac{\partial f_o}{\partial H_o} [ , H_o ] = \frac{\partial f_o}{\partial H_o} L_o , \quad (IV - 16)$$

de donde se deduce (IV - 14).

Luego F puede colocarse en la forma:

$$F = \int d^3 x d^3 v \left[ \frac{|\delta f|^2}{\left(\frac{\partial f_o}{\partial H_o}\right)} - \delta f (\vec{J} \cdot \vec{\Psi}) \right] , \quad (IV - 17)$$

$$S = \int d^3 x d^3 v (2T)^{-1} \left[ \frac{|\delta f|^2}{\left(\frac{\partial f_o}{\partial H_o}\right)} - \delta f (\vec{J} \cdot \vec{\Psi}) \right] . \quad (IV - 18)$$

Como  $f_o$  es maxwelliana:

$$\frac{\partial f_o}{\partial H_o} = -\frac{f_o}{T_o} , \quad (IV - 19)$$

entonces, fijando el mismo nivel de fluctuaciones a través de la temperatura, reobtenemos los resultados de Minardi expuestos en el capítulo (III). Para ello, reproduciremos las expresiones de la entropía (III-21) y (III-26) en el caso electrostático y magnetostático respectivamente. En el caso electrostático si definimos

$$T = T_o \lambda^2 , \quad (IV - 20)$$

$$\lambda^{-2} = -4\pi \int q^2 \left( \frac{\partial f_o}{\partial H_o} \right) d^3 v ,$$

la expresión de la entropía resulta

$$2S = \int d^3 x d^3 v T_o^{-1} \left[ \lambda^{-2} \left( \frac{\partial f_o}{\partial H_o} \right)^{-1} (\delta f)^2 - \lambda^{-2} q \delta f \right] , \quad (IV - 21)$$

Si se asume la validez de (IV - 22), lo que implica, en conformidad con la teoría macroscópica de Minardi, que de la distribución  $\delta f$  sólo son relevantes las componentes de Fourier de orden más bajo en el espacio de las velocidades (las de variación más suave)

$$\int d^3 v \frac{(\delta f)^2}{f_o} = \left[ \int d^3 v \delta f \right]^2 \quad (IV - 22)$$

entonces el primer término de (IV – 21) se escribe

$$\int d^3v \left( \frac{\partial f_o}{\partial H_o} \right)^{-1} (\delta f)^2 = \int d^3v \left( -\frac{T_o}{f_o} \right) (\delta f)^2 = -T_o \left( \int d^3v \delta f \right)^2 = \frac{(\int d^3v \delta f)^2}{\int d^3v \frac{\partial f_o}{\partial H_o}} \quad (IV - 23)$$

ya que

$$\int d^3v \frac{\partial f_o}{\partial H_o} = -T_o , \quad (IV - 24)$$

y luego

$$\int d^3x d^3v \lambda^{-2} \left( \frac{\partial f_o}{\partial H_o} \right)^{-1} (\delta f)^2 = \int d^3x \lambda^{-2} \frac{(\int d^3v \delta f)^2}{\int d^3v \frac{\partial f_o}{\partial H_o}} . \quad (IV - 25)$$

Por otro lado, utilizando la ecuación de Poisson

$$\nabla \cdot \vec{E} = 4\pi q \int \delta f d^3v , \quad (IV - 26)$$

y (IV – 20), el primer término de la entropía toma la forma

$$-\frac{1}{4\pi} \int d^3x (\nabla \cdot \vec{E})^2 . \quad (IV - 27)$$

El segundo término de la entropía puede escribirse

$$-\int d^3x d^3v \lambda^{-2} q \delta f \varphi = \frac{1}{4\pi} \lambda^{-2} \int \varphi \nabla^2 \varphi d^3x , \quad (IV - 28)$$

ya que  $\vec{E} = -\nabla \varphi$ , donde se usó (IV – 26). Y como

$$-\int \varphi \nabla^2 \varphi d^3x = \int d^3x (\nabla \varphi)^2 , \quad (IV - 29)$$

entonces el segundo término de la entropía se escribe

$$-\frac{1}{4\pi} \lambda^{-2} \int |\vec{E}|^2 d^3x , \quad (IV - 30)$$

y luego, la entropía en el caso eléctrico resulta

$$2S = -\frac{1}{4\pi T_o} \int [(\nabla \cdot \vec{E})^2 + \lambda^{-2} |\vec{E}|^2] d^3x , \quad (IV - 31)$$

que coincide con (III - 21) si fijamos el nivel de fluctuaciones a través de  $T_o$

$$T_o = \overline{\Delta\sigma^2} \Delta V . \quad (IV - 32)$$

En el caso magnético si definimos

$$T = T_o \lambda^2 ,$$

$$(IV - 33)$$

$$\lambda^{-2} = -\frac{4\pi}{c} \int q^2 v^2 \left( \frac{\partial f_o}{\partial H_o} \right) d^3v ,$$

la entropía es

$$2S = \int d^3x d^3v T_o^{-1} \left[ \lambda^{-2} \left( \frac{\partial f_o}{\partial H_o} \right)^{-1} (\delta f)^2 - \lambda^{-2} q \vec{v} \cdot \vec{A} \delta f \right] , \quad (IV - 34)$$

y utilizando (IV - 19) y (IV - 22) resulta

$$\int d^3v \left( \frac{\partial f_o}{\partial H_o} \right)^{-1} (\delta f)^2 = \frac{(\int d^3v v \delta f)^2}{\int d^3v v^2 \frac{\partial f_o}{\partial H_o}} . \quad (IV - 35)$$

Luego, el primer término de (IV - 34) es

$$\int d^3x d^3v T_o^{-1} \lambda^{-2} \left( \frac{\partial f_o}{\partial H_o} \right)^{-1} (\delta f)^2 = -\frac{4\pi}{c} T_o^{-1} \int d^3x j^2 , \quad (IV - 36)$$

y dado que

$$\nabla \times \vec{B} = \frac{4\pi}{c} \vec{j} , \quad (IV - 37)$$

(IV - 36) adquiere la forma

$$-\frac{c}{4\pi} \int d^3x (\nabla \times \vec{B})^2 , \quad (IV - 38)$$



en tanto que el segundo término de (IV - 34) es

$$- \int d^3x T_o^{-1} \lambda^{-2} \left( \int d^3v q \vec{v} \delta f \right) \cdot \vec{A} = -\lambda^{-2} \frac{c}{4\pi} T_o^{-1} \int d^3x \vec{j} \cdot \vec{A}, \quad (IV - 39)$$

y como

$$\int d^3x \vec{j} \cdot \vec{A} = \frac{c}{4\pi} \int d^3x (\nabla \times \vec{B}) \cdot \vec{A} = \frac{c}{4\pi} \int d^3x B^2, \quad (IV - 40)$$

entonces la entropía en el caso magnético resulta

$$2S = -\frac{c}{4\pi T_o} \int [(\nabla \times \vec{B})^2 + \lambda^{-2} |\vec{B}|^2] d^3x, \quad (IV - 41)$$

y la expresión resulta idéntica a (III - 26) con  $\vec{j}_o = 0$ , si fijamos el nivel de fluctuaciones como

$$T_o = \overline{\Delta \vec{j}^2} \Delta V / 3, \quad (IV - 42)$$

salvo el factor  $\frac{c}{4\pi}$  que Minardi no toma en cuenta en sus ecuaciones.

Vemos que si bien ambos resultados coinciden, el primer método sigue las ecuaciones de movimiento. Para explicar el éxito obtenido por Minardi, usando teoría de la información con “vínculos dinámicos”, podemos recurrir al método desarrollado por Haken [18]. Este autor define la probabilidad condicional  $P(q_{t+\tau}/q_t)$  de obtener  $q_{t+\tau}$  en el tiempo  $t + \tau$ , dado que se obtuvo  $q_t$  en  $t$ , para la variable fluctuante  $q$ . Para obtener esta probabilidad, maximiza la entropía definida en el sentido de Jaynes:

$$S = - \int \mathcal{D}q P(q) \ln P(q), \quad (IV - 43)$$

donde  $\mathcal{D}q$  es el elemento de volumen de integración, sobre el espacio expandido de la variable fluctuante  $q$ , sujeta a los “vínculos”

$$\mathcal{F}_1 = \overline{q_{t+\tau} q_t}$$

$$(IV - 44)$$

$$\mathcal{F}_2 = \overline{q_{t+\tau}^2 q_t}$$

definidos por

$$\mathcal{F}_k = \int P(q_{t+\tau}/q_t) q_{t+\tau}^k dq_{t+\tau} , \quad (IV - 45)$$

o sea, los dos primeros momentos de  $q$  en el tiempo  $t + \tau$ , bajo la condición de que  $q_t$  fue medido en el tiempo  $t$ .

El principio de máxima entropía conduce a

$$P(q_{t+\tau}/q_t) = \exp \{ \mu + \mu_1 q_{t+\tau} + \mu_2 q_{t+\tau}^2 \} , \quad (IV - 46)$$

con la condición de normalización

$$\int P(q_{t+\tau}/q_t) dq_{t+\tau} = 1 . \quad (IV - 47)$$

Además se requiere que

$$\tau \rightarrow 0 , P(q_{t+\tau}/q_t) \rightarrow \delta(q_{t+\tau} - q_t) , \quad (IV - 48)$$

o sea  $P$  se comporta como una función delta, siempre que integremos en  $dq_{t+\tau}$ . Ahora reescribimos (IV - 46) en la forma

$$P(q_{t+\tau}/q_t) = \text{Nexp} \left\{ -|\mu_2| \left( q_{t+\tau} - \frac{\mu_1}{2|\mu_2|} \right)^2 \right\} . \quad (IV - 49)$$

Para que (IV - 49) cumpla (IV - 48) es necesario que

$$|\mu_2| = \frac{G}{\tau} , \tau \rightarrow 0 . \quad (IV - 50)$$

De la misma condición (IV - 48) deducimos que para  $\tau \rightarrow 0$

$$q_{t+\tau} - \frac{\mu_1}{2|\mu_2|} \rightarrow q_{t+\tau} - q_t . \quad (IV - 51)$$

o equivalentemente

$$\frac{\mu_1}{2|\mu_2|} \rightarrow q_t , \tau \rightarrow 0 . \quad (IV - 52)$$

Luego de (IV – 52), se cumple a primer orden en  $\tau$  ( $\tau$  pequeño)

$$\frac{\mu_1}{2|\mu_2|} = q_t + \tau \mathcal{K}(q_t) , \quad (IV - 53)$$

es decir, requerimos que el miembro izquierdo de (IV – 53) se comporte como una función analítica de  $\tau$ . Luego de (IV – 49) y (IV – 53) se deduce

$$P(q_{t+\tau}/q_t) = \mathfrak{Nexp} \left\{ -\frac{G}{\tau} [q_{t+\tau} - q_t - \tau \mathcal{K}(q_t)]^2 \right\} . \quad (IV - 54)$$

Expresión que para  $\tau \rightarrow 0$ , se transforma en

$$P(q_{t+\tau}/q_t) = \mathfrak{Nexp} \left\{ -\tau G [\dot{q} - \mathcal{K}(q)]^2 \right\} , \quad (IV - 55)$$

o bien definiendo

$$\mathcal{L} = [\dot{q} - \mathcal{K}(q)]^2 , \quad (IV - 56)$$

que es el lagrangiano de Onsager-Maschlup, cuyas ecuaciones de movimiento

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \frac{dq}{dt}} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = 0 , \quad (IV - 57)$$

contienen la ecuación de movimiento utilizada.

Asumiendo un proceso de tipo Markoviano, puede mostrarse que [18]

$$P(q(T)/q(0)) = \int \mathcal{D}q e^{\int_0^T \mathcal{L}(t) dt} . \quad (IV - 58)$$

También puede verse que la función de probabilidad condicional corresponde a la solución de la ecuación de Fokker-Planck

$$\dot{P} = \partial_q \{ \mathcal{K}(q) P \} + \frac{1}{2} Q \partial_q^2 P , \quad (IV - 59)$$

utilizando integrales de camino, siempre que

$$Q = \frac{1}{2G} . \quad (IV - 60)$$

En nuestro caso  $q = \delta f$ , que responde a la ecuación de Vlasov con fluctuaciones [3]. Luego maximizando la entropía asociada a esta  $P$  (en el sentido de Jaynes) y usando los “vínculos”:

$$\overline{\Delta f(t + \tau)} = \overline{(\Delta f(t + \tau)\Delta f(t + \tau))}, \quad (IV - 61)$$

donde

$$\Delta f = \delta f(t + \tau) - \delta f(t), \quad (IV - 62)$$

y donde  $\overline{\mathcal{A}}$  significa tomar el promedio de  $\mathcal{A}$  con  $P(\delta f_{t+\tau}/\delta f_t)$ , entonces resulta:

$$P(\delta f_{t+\tau}/\delta f_t) = \exp \int \{\mu + \mu_1 \Delta f + \mu_2 \Delta f^2\} d^3 x d^3 v, \quad (IV - 63)$$

la cual puede transformarse en:

$$P(\delta f_{t+\tau}/\delta f_t) = \aleph \exp \int \left\{ -|\mu_2| \left( \Delta f - \frac{\mu_1}{2|\mu_2|} \right)^2 \right\} d^3 x d^3 v, \quad (IV - 64)$$

donde  $\aleph$  es un coeficiente de normalización. De donde se deduce que:

$$\frac{\mu_1}{2\mu_2} = -\tau \kappa (\vec{J} \cdot \vec{\Psi}), \quad (IV - 65)$$

lo cual significa que el promedio evoluciona según la ecuación determinista de movimiento (Esto es, sigue a la ecuación de Vlasov (IV - 9)). Recordando que para  $t \rightarrow \infty$  es:

$$P(\delta f_{t+\tau}/\delta f_t) \rightarrow \aleph e^{-S}, \quad (IV - 66)$$

ya que (como vimos) corresponde a la ecuación de Fokker-Planck asociada a la misma ecuación de movimiento con que se obtuvo  $S$ . Entonces comparando el exponente de (IV - 63) con (IV - 21) resulta:

$$\mu_2 < 0, \quad \mu_1 = \frac{\vec{J} \cdot \vec{\Psi}}{T_o \lambda^2}, \quad (IV - 67)$$

y dado que

$$\hat{\tau} = (L_o + \partial_t)^{-1}, \quad (IV - 68)$$

para  $t \rightarrow \infty$  resulta:

$$\hat{\tau} \rightarrow L_o^{-1} . \quad (IV - 69)$$

Luego de (IV - 63),(IV - 65) y (IV - 67) obtenemos:

$$\mu_2 = \left( -\frac{1}{2} \frac{1}{T_o \lambda^2} \right) \left( \frac{1}{L_o^{-1} \kappa} \right) , \quad (IV - 70)$$

o recordando (IV - 14):

$$\mu_2 = -\frac{1}{2} \frac{1}{T_o \lambda^2} \left( \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial H_o}} \right) . \quad (IV - 71)$$

Se ve entonces que es equivalente usar como "vínculos" a:

$$\overline{(\vec{J} \cdot \vec{\Psi} | \Delta f)} , \quad (IV - 72)$$

en lugar de  $\overline{\Delta f}$  y

$$\overline{\int (\vec{J} \Delta f d^3 v)^2 d^3 x} , \quad (IV - 73)$$

en lugar de  $\overline{(\Delta f)^2}$ , con los nuevos multiplicadores

$$\hat{\mu}_1 = \frac{1}{T_o \lambda^2} , \quad \hat{\mu}_2 = -\frac{1}{2T_o} . \quad (IV - 74)$$

Pero  $\langle \delta f | \vec{J} \cdot \vec{\Psi} \rangle$  equivale a  $\int \vec{j} \cdot \vec{A} d^3 x$  en el caso magnético, y a  $\int \sigma \varphi d^3 x$  en el caso eléctrico. Estos son los primeros vínculos tomados por Minardi en cada caso, en tanto la segunda condición equivale a tomar los vínculos sobre la variancia de corriente, o la variancia de densidad de carga. Luego esto completa nuestra demostración sobre la equivalencia entre los dos procedimientos.

Finalmente notemos que en nuestro caso, el lagrangiano de Onsager-Maschlup es

$$\mathcal{L} = \left( \frac{d\delta f}{dt} - \kappa \vec{J} \cdot \vec{\Psi} \right)^2 . \quad (IV - 75)$$

## Conclusiones

Basándonos en la termodinámica irreversible, y en las ecuaciones de movimiento del sistema, hemos obtenido una funcional de entropía, cuyos máximos determinan los equilibrios estables del mismo. Por otro lado, Minardi obtiene la misma funcional, utilizando teoría de la información, pero ignorando los detalles de la función de distribución de las partículas en el espacio de velocidades y con una aproximación macroscópica. Pero Minardi observa que la estabilidad de los equilibrios obtenidos es dinámica además de termodinámica (de acuerdo a la analogía que realiza con la termodinámica), siempre que se respeten los “vínculos dinámicos” del problema. Aunque su modelo no explica este carácter dinámico de la estabilidad, Minardi lo generaliza a distribuciones de equilibrio arbitrarias (y fuera del equilibrio termodinámico), permitiendo que el parámetro  $\lambda^2$  sea libre. Luego nuestra derivación muestra, que dicho modelo es un caso particular del nuestro, y explica su carácter dinámico al basarse en las ecuaciones de movimiento microscópicas.

## CAPITULO V

### Turbulencia en modo “flute” de un plasma y proceso de cascada[20]

Las ternas resonantes, constituyen el más simple “acoplamiento no lineal” de modos normales en sistemas dispersivos y no lineales. Estas juegan un papel fundamental en la transferencia de energía entre modos en variados contextos físicos, como por ejemplo fonones en sólidos, en óptica no lineal, y turbulencia en medios continuos.

Interacciones de tres modos, fueron estudiadas en una variedad de problemas de fluidos y plasmas, como en la ecuación de Navier-Stokes bidimensional [21], en la inestabilidad de deriva [22], y en las ondas planetarias de Rossby [23], .Varios análisis utilizando modelos de tres modos, fueron publicados [24,25], en relación con la inestabilidad de intercambio (ya vista en los capítulos (II) y (III)) en el modo tipo “flute”. Esta inestabilidad se origina en un mecanismo de tipo convectivo [4], por el cual la superficie del plasma se deforma produciendo una separación de cargas, las que generan un campo eléctrico, que junto al campo magnético, produce una deriva eléctrica, que tiende a deformar aún más la superficie reforzando la perturbación. Esta inestabilidad, se denomina a veces como “flute”, cuando se consideran equilibrios cilíndricos, para los cuales  $k_z = 0$ , de tal forma que sus formas perturbadas se asemejan a columnas “acanaladas” o con estrías (en ingles “flute” significa mediacaña). La formación de estructuras espaciales en la turbulencia tipo flute como resultado de una cascada directa de energía, fue analizada por Kodama y Pavlenko, siguiendo una aproximación lineal. De acuerdo a su análisis, que incluye los efectos del radio de Larmor finito para los iones, la formación del llamado “flujo zonal”, es una consecuencia de la cascada directa de energía.

Consideramos aquí, un plasma bidimensional, debilmente inhomogéneo, sujeto a fuerza

externa y disipación, el cual está inmerso en un campo magnético suavemente curvado. Esta curvatura puede representarse por un campo gravitacional ficticio  $\vec{g} = -\nabla V(x)$ . Se asume que la densidad de equilibrio del plasma  $n_0(x)$ , es una función lentamente variable, de la coordenada  $x$ . También asumimos un régimen de bajas frecuencias, esto es  $\omega/\omega_{ci} \ll 1$ , donde  $\omega_{ci} = eB_0/m_i c$ , es la frecuencia de ciclotrón del ión, y  $\omega$  es la frecuencia del modo flute ( $B_0$  es el campo magnético sin curvatura). Consideramos plasmas con  $\beta$  bajo de tal forma que sea válida la aproximación  $\vec{E} = -\nabla\tilde{\phi}(\vec{r}, t)$  y también asumimos cuasineutralidad (esta significa que  $\sum_s n_s q_s = 0$  para todas las especies  $s$  de partículas en el plasma).

Consideramos aquí los dos casos: de radio de Larmor despreciable y de radio de Larmor finito, para un sistema truncado de tres modos de Fourier. Asumiendo que sólo uno de ellos es excitado externamente, analizamos bajo qué condiciones toma lugar una transferencia no lineal de energía, o cascada de energía. Nosotros estudiamos no sólo el régimen lineal de este proceso de cascada, sino también su saturación no lineal. Finalmente, la interacción de estos tres modos con los restantes, se modela como una contribución de “*ruido blanco*”.

### Ecuaciones básicas

Desarrollaremos ahora las ecuaciones básicas del problema. Para ello, nos basamos en un modelo de “*derivadas*” [26] para la densidad de corriente que cumpla la ecuación de continuidad

$$\nabla \cdot \vec{j} = 0 . \quad (V - 1)$$

Para obtener esta ecuación, consideramos al plasma, como un fluido con una velocidad macroscópica de “*deriva eléctrica*”

$$\vec{V}_E = c(\vec{E} \times \vec{B}/B^2) = \frac{c}{B}(\vec{E} \times \hat{z}) , \hat{z} = \frac{\vec{B}}{B} . \quad (V - 2)$$

Cada electrón o ión tendrá esta velocidad promedio, que no produce por sí misma separación de cargas (ya que no depende de la misma). Sí se producirá separación de cargas



por deformación de la superficie , o por estar las cargas sometidas a otras fuerzas cuyas derivas dependen de las mismas. Si para una partícula de masa  $m$  y carga  $e$  se cumple

$$m\dot{\vec{v}} = e[\vec{E} + (\vec{v}/c) \times \vec{B}] , \quad (V - 3)$$

tomando el cambio de variables

$$\vec{v} = \vec{V}_E + \vec{v}_1 , \quad (V - 4)$$

con  $V_E$  definida por (V - 2), la ecuación (V - 3) se transforma en

$$m\dot{\vec{v}}_1 = e(\vec{v}_1/c) \times \vec{B} . \quad (V - 5)$$

Es la ecuación de movimiento de una partícula de masa  $m$  y carga  $e$  sólo en presencia de un campo magnético. Y el movimiento consiste en un movimiento circular de Larmor, superpuesto a la velocidad  $\vec{V}_E$ . El movimiento circular se produce en un plano perpendicular a las líneas de  $\vec{B}$ , y alrededor de un “centro guía” que se mueve con la velocidad de “deriva”, en este caso  $\vec{V}_E$ . Si ahora  $\vec{V}_E$  depende del tiempo (por ejemplo, por deformación temporal de la superficie u otros factores), el mismo cambio de variables conduce a la ecuación.

$$m\dot{\vec{v}}_1 + m\dot{\vec{V}}_E = e(\vec{v}_1/c) \times \vec{B} . \quad (V - 6)$$

Utilizando la misma técnica, se reemplaza en (V-3)  $e\vec{E}$  por  $-m\dot{\vec{V}}_E$ , y haciendo en (V - 6) el cambio  $\vec{v}_1 = \vec{V}_p + \vec{v}_2$  , con

$$\vec{V}_p = -\frac{mc}{e}(\dot{\vec{V}}_E \times \vec{B}/B^2) = \frac{mc^2}{eB^2} \dot{\vec{E}} , \quad (V - 7)$$

resulta

$$m\dot{\vec{v}}_2 + m\dot{\vec{V}}_p = e(\vec{v}_2/c) \times \vec{B} . \quad (V - 8)$$

Comparando  $m\dot{\vec{V}}_p$  con el segundo miembro de (V - 8), teniendo en cuenta que  $E \propto e^{i\omega t}$ , resulta

$$\frac{m\dot{\vec{V}}_p}{(e/c)v_2B} = \left(\frac{mc}{eB}\right) \frac{c\ddot{\vec{E}}}{v_2B} = \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 \frac{V_E}{v_2} , \quad (V - 9)$$

con  $\Omega = \frac{eB}{mc}$ , la frecuencia de ciclotrón. Luego si  $\omega \ll \Omega$  que es nuestro caso, (V – 8) se puede colocar en la forma

$$m\ddot{\vec{v}}_2 = e(\vec{v}_2/c) \times \vec{B} , \quad (V - 10)$$

y el movimiento consiste en un giro con la frecuencia  $\Omega$  alrededor de un centro guía con velocidad de deriva

$$\vec{V}_D = \vec{V}_E + \vec{V}_p . \quad (V - 11)$$

Dado que  $\vec{V}_p$  depende de la carga, esto conduce a una densidad de corriente:

$$\vec{j}_p = \frac{Ne}{c} \vec{V}_p = \frac{Nmc}{B^2} \dot{\vec{E}} . \quad (V - 12)$$

Esta corriente se llama de “polarización”, porque consiste en una separación de carga debida a la variación del campo eléctrico.

En general, si a (V – 3) se le añade una fuerza  $\vec{F}$ , la misma técnica aplicada a  $\vec{E}$ , puede aplicarse a  $\vec{F}/e$ , lo que conduce a una deriva de  $\vec{F}$ :

$$\vec{V}_F = (c/e)(\vec{F} \times \vec{B}/B^2) . \quad (V - 13)$$

Además de las derivas eléctrica y de polarización, nosotros consideramos otras tres derivas. Una es la deriva de la fuerza gravitatoria “ficticia” que simula la curvatura del campo magnético

$$\vec{g} = -\nabla V(x) ; \vec{V}_g = (cm/e)(\vec{g} \times \vec{B}/B^2) . \quad (V - 14)$$

Otra es la “deriva disipativa”, que corresponde a la fuerza viscosa  $-\nabla\Pi$

$$\vec{V}_\pi = (c/e)(-\nabla\Pi \times \vec{B}_0)/(B_0)^2 . \quad (V - 15)$$

Ambas producen las densidades de corriente

$$\vec{j}_g = \frac{Nm}{(B_0)^2} (\vec{g} \times \vec{B}_0) , \quad (V - 16)$$

y

$$\vec{j}_\pi = N(-\nabla\Pi \times \vec{B}_0)/(B_0)^2 \quad (V - 17)$$

También consideramos una deriva correspondiente a una “fuerza externa” (que no tiene que ver con los campos), y que se modela a través de la densidad de corriente

$$\vec{j}_{ext} = -\nabla f + \nabla \times \vec{h} , \quad (V - 18)$$

donde  $f$  y  $\vec{h}$  son los potenciales irrotacional y solenoidal asociados a la fuerza externa.

Para plasmas de  $\beta \ll 1$ , puede considerarse  $\vec{E} = -\nabla\tilde{\phi}$ , y luego

$$\dot{\vec{E}} = \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + (\vec{V}_E \cdot \nabla)\vec{E} = -\frac{\partial \nabla \tilde{\phi}}{\partial t} + \frac{c}{B}[(\nabla \tilde{\phi} \times \hat{z}) \cdot \nabla]\nabla \tilde{\phi} . \quad (V - 19)$$

Por otro lado debemos considerar la ecuación de continuidad de partículas , que por la cuasineutralidad, es la misma para ambas especies

$$\frac{\partial N}{\partial t} + (\vec{V}_E \cdot \nabla)N = 0 , \quad (V - 20)$$

y que usando la expresión (V - 2), puede reescribirse

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \frac{c}{B_0}[\tilde{\phi}, N] = 0 , \quad (V - 21)$$

donde  $[ , ]$ , representa el corchete de Poisson  $[a, b] = \hat{z} \cdot (\nabla a \times \nabla b)$ ,  $\nabla = \nabla_\perp$ .

Aquí consideramos  $\tilde{\phi}(\vec{r}, t)$ , como la perturbación producida por la separación de cargas en el plasma, a partir de su estado estacionario de equilibrio, para el cual la densidad del plasma es  $n_o(x)$ . Luego de la perturbación la densidad es  $N(\vec{r}, t) = n_o(x) + \delta n(\vec{r}, t)$ , y naturalmente cumple (V - 21). Entonces, considerando la densidad de corriente debida a los cuatro efectos considerados previamente, esto es

$$\vec{j} = \vec{j}_p + \vec{j}_g + \vec{j}_\pi + \vec{j}_{ext} , \quad (V - 22)$$

y utilizando las ecuaciones (V - 12), (V - 16), (V - 17), (V - 18) y (V - 19) la ecuación de continuidad de carga (V - 1) resulta

$$0 = \frac{c}{\omega_{ci} B_0} \nabla \cdot \left[ N \frac{\partial}{\partial t} \nabla \tilde{\phi} + \frac{Nc}{B_0} [\tilde{\phi}, \nabla \tilde{\phi}] + \frac{cT_i}{B_0} [N, \nabla \tilde{\phi}] \right] + \frac{1}{\omega_{ci}} [N, V] + \nabla \cdot \left[ N \left( -\nabla \Pi \times \frac{\vec{B}_0}{B_0^2} \right) \right] - \nabla^2 f , \quad (V - 23)$$

donde además se incluyó el efecto del radio de Larmor finito (el cual juega un papel central en la estabilización de la inestabilidad del tipo flute) [4,27] al orden más bajo, representado por el término proporcional a la temperatura de los iones del mismo modo en que lo hicieron otros autores, como Kodama y Pavlenko [25], quienes obtuvieron una ecuación similar a (V - 23), pero sin los dos últimos términos que corresponden a considerar disipación y fuerza externa respectivamente. Por ello de aquí en adelante nos referiremos a esta ecuación, como la ecuación KP.

La ecuación KP , junto a la de continuidad (V - 21), son las dos ecuaciones básicas de nuestro problema. Para estudiarlas desarrollamos las cantidades perturbadas en serie de Fourier

$$\tilde{\phi}(x, y, t) = \sum_{\vec{k}} \tilde{\phi}_k(t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} , \quad \tilde{\phi}_{k^*} = \tilde{\phi}_{-k} , \quad (V - 24a)$$

$$f(x, y, t) = \sum_{\vec{k}} f_k(t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} , \quad f_{k^*} = f_{-k} , \quad (V - 24b)$$

$$\delta n(x, y, t) = \sum_{\vec{k}} \delta n_k(t) e^{i(\vec{k} \cdot \vec{x} - \omega_k t)} , \quad \delta n_{k^*} = \delta n_{-k} . \quad (V - 24c)$$

Y para poder desarrollar nuestras ecuaciones básicas, de acuerdo a estas transformaciones, necesitamos calcular la fuerza viscosa, la cual se obtiene a partir del tensor de esfuerzos, para el caso bidimensional y con un campo magnético paralelo al eje z [28]

$$\Pi_{xx} = -\frac{1}{2} \eta_0 (W_{xx} + W_{yy}) - \frac{1}{2} \eta_1 (W_{xx} - W_{yy}) - \eta_3 W_{xy}$$

$$\Pi_{yy} = -\frac{1}{2}\eta_o(W_{xx} + W_{yy}) - \frac{1}{2}\eta_1(W_{yy} - W_{xx}) + \eta_3 W_{xy} , \quad (V - 25)$$

$$\Pi_{xy} = \Pi_{yx} = -\eta_1 W_{xy} + \frac{1}{2}\eta_3(W_{xx} - W_{yy}) ,$$

con

$$W_{\alpha\beta} = \frac{\partial V_\alpha}{\partial X_\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial X_\alpha} - \frac{2}{3}\delta_{\alpha\beta}\nabla \cdot \vec{V} \quad (V - 26)$$

Donde la viscosidad iónica es

$$\eta_o^i = .96n_i T_i \tau_i , \quad \eta_1^i = \frac{3}{10} \frac{n_i T_i}{\omega_{ci}^2 \tau_i} , \quad \eta_3^i = \frac{1}{2} \frac{n_i T_i}{\omega_i} . \quad (V - 27)$$

De acuerdo a Braginskii [28], para el caso considerado, el coeficiente relevante es  $\eta_1^i$ , y teniendo en cuenta que la velocidad que aparece en (V - 25) es la de deriva eléctrica, de modo que la fuerza viscosa depende de  $\vec{\phi}$ , entonces de las ecuaciones (V - 2), (V - 17), (V - 24) y (V - 25) se obtiene

$$(\nabla \cdot \vec{j}_\pi)_k = \nu(\eta_1^i) k^4 \vec{\phi}_k , \quad (V - 28)$$

siendo  $\nu$  un coeficiente que depende de la viscosidad iónica. De esta forma quedan modeladas nuestras dos ecuaciones básicas (V - 23) y (V - 21), y luego de aplicarles las transformaciones de Fourier (V - 24), resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_k + \nu k^2 \phi_k = f_k + \sum_{\substack{k_1, k_2 \\ \vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2}} \Lambda_{k_1, k_2}^k \phi_{k_1} \phi_{k_2} e^{i\theta t} , \quad (V - 29)$$

$$\omega_k n_k = k_y v^* \phi_k , \quad (V - 30)$$

donde

$$\Lambda_{k_1, k_2}^k = \frac{\omega_k}{2(2\omega_k + k_y v^*)} \frac{[\vec{k}_1 \times \vec{k}_2] \cdot \hat{z}}{k^2} \times \left[ [k_2^2 - k_1^2] + \left[ \vec{k} \cdot \vec{k}_2 \frac{k_{1y} v^*}{\omega_{k_1}} - \vec{k} \cdot \vec{k}_1 \frac{k_{2y} v^*}{\omega_{k_2}} \right] - \frac{k_y v_0}{\omega_k} \left[ \frac{k_{2y} v^*}{\omega_{k_2}} - \frac{k_{1y} v^*}{\omega_{k_1}} \right] \right] , \quad (V - 31)$$

$$\text{y } \theta = \omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2}.$$

Para obtener (V – 29) tomamos una aproximación lineal para la ecuación de continuidad (V – 30), la cual se utilizó luego en el desarrollo de Fourier de (V – 23) y  $\tilde{v}^* = \frac{\chi T_i}{m_i \omega_{ci}}$ , es la velocidad de deriva diamagnética del ión,  $\chi = -\frac{d \ln[n_0(x)]}{dx} > 0$ ,  $k \gg \chi$ , siendo  $v_0 = g/\omega_{ci}$  la velocidad de deriva gravitacional del ión.

Todas las cantidades relevantes, fueron escritas en unidades adimensionales:  $\phi = e\tilde{\phi}/T_i$ ,  $v^* = \frac{\tilde{v}^*}{v_{T_i}}$ ,  $v_0 = \frac{v_0}{v_{T_i}}$ ; donde  $v_{T_i}^2 = T_i/m_i$  es la velocidad térmica de los iones y las variables espacial y temporal fueron normalizadas con el radio de Larmor iónico y la frecuencia de ciclotrón iónica respectivamente. Además de aquí en adelante asumimos que  $v_0 \ll v^*$ , es decir que la velocidad de deriva gravitacional es mucho menor que la velocidad de deriva diamagnética.

La relación de dispersión (lineal) para el modo flute (que puede obtenerse linealizando (V – 21) y (V – 23) luego de transformar Fourier según (V – 24)) es

$$\omega_k = \frac{k_y \tilde{v}^*}{2} \left[ -1 \pm \left[ 1 - \frac{4\chi g}{\tilde{v}^{*2} k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right]. \quad (V - 32)$$

Analizando esta ecuación, vemos que si  $g\chi < 0$ , o sea si la densidad de equilibrio crece en la dirección de la gravedad, el plasma es estable a esta perturbación. Lo cual coincide con los análisis realizados para la inestabilidad de intercambio en los capítulos (II) y (III). En cambio si  $g\chi > 0$ , el equilibrio será inestable sólo si  $g\chi > \frac{\tilde{v}^{*2} k^2}{4}$ . Esto cambia en relación al análisis previo, para el cual la condición  $g\chi > 0$ , significaba inestabilidad en cualquier caso.

La diferencia se debe a que aquí consideramos radio de Larmor finito (RLF) es decir pequeño pero no despreciable (obsérvese que si  $T_i \rightarrow 0$ , o sea el radio de Larmor es despreciable (RLD), entonces se reobtiene la condición previa). En efecto Mikhailovskii [4] muestra que para pequeñas perturbaciones con  $k_{\perp} a \gg 1$ , donde  $a$  es la escala de inhomogeneidad del perfil de densidad y que tengan la forma  $\phi_1 \sim e^{ik_y y - i\omega t}$ ,  $k_z = 0$ , y

$\omega \ll \omega_{ci}$ , hay estabilidad si  $g\chi > 0$ , a densidades suficientemente altas y suficientemente bajas, aunque a densidades intermedias se produce inestabilidad. En cambio si  $g\chi < 0$ , hay siempre estabilidad.

Con el objeto de comprender el efecto de las interacciones no lineales, consideraremos un proceso de acoplamiento de tres modos (o tres ondas) con las condiciones

$$\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2, \theta = \omega_k - \omega_{k_1} - \omega_{k_2} = 0. \quad (V - 33)$$

### **Invariantes globales, saturación no lineal y calculo perturbativo**

Aquí analizamos la estabilidad y el proceso de cascadas de la rama negativa de la relación de dispersión. Esto corresponde a una energía de la onda positiva de acuerdo a la relación

$$W_k = \frac{\partial[\omega\epsilon(\omega k)]}{\partial\omega} k^2 |\phi_k|^2, \quad (V - 34)$$

donde  $\epsilon(\omega k)$ , es la función dieléctrica, ya que en este caso

$$W_k = (2\omega_k + k_y v^*) \omega_k^{-1} k^2 |\phi_k|^2, \quad (V - 35)$$

y como se ve es positiva si elegimos el signo menos en (V - 32). Interacciones de ondas con energías positiva y negativa conducen a una inestabilidad explosiva [24].

Los invariantes globales ideales, (es decir, sin disipación ni fuerza externa) son la energía

$$W = \int \left[ [\nabla\phi]^2 - n^2 \frac{v_0}{v^*} \right] dx dy = \sum_k \left[ k^2 |\phi_k|^2 - |n_k|^2 \frac{v_0}{v^*} \right], \quad (V - 36)$$

y la enstrofía

$$U = \int \left[ [\nabla^2\phi]^2 - [\nabla n]^2 \frac{v_0}{v^*} \right] dx dy = \sum_k \left[ k^4 |\phi_k|^2 - k^2 |n_k|^2 \frac{v_0}{v^*} \right]. \quad (V - 37)$$

Es más, en general, estas cantidades son invariantes frente a cualquier truncamiento en el espacio de Fourier. Sin embargo, decaen si hay disipación, a menos que sea compensada por una fuerza externa. Vamos entonces a excitar el sistema con una fuerza externa armónica

$$f_k e^{-i\omega_{k_0} t} = f e^{-i\omega_{k_0} t} \delta_{k, k_0}, \quad f = -f^*, \quad (V - 38)$$

y hallemos la solución de equilibrio de la ecuación (V - 29). Haciendo esto, encontramos el equilibrio trivial

$$\phi_{k_0} = \frac{1}{\nu k_0^2} f, \quad \phi_k = 0 \quad \forall k \neq k_0, \quad (V - 39)$$

del que debemos estudiar la estabilidad, para lo cual pasamos a un sistema de variables adimensionales tales que  $\nu = 1$  y  $k_0 = 1$ .

En primer lugar estudiamos la estabilidad lineal de esta solución. Realizamos entonces una perturbación de la solución de equilibrio en la forma  $\vec{\phi} + \delta\vec{\phi}$ , donde con  $\vec{\phi}$  denotamos al vector cuyas componentes son las amplitudes de Fourier  $\phi_{\vec{k}}$ , luego insertamos esta expresión en (V - 29), y retenemos términos hasta el primer orden en  $\delta\vec{\phi}$ . Este procedimiento nos conduce al siguiente conjunto de ecuaciones

$$\dot{\delta\vec{\phi}} = \mathbf{A} \delta\vec{\phi}, \quad (V - 40)$$

donde la matriz  $\mathbf{A}$  es

$$A_{ij} = \begin{cases} -k^2 & \text{si } i = j \\ \Lambda_{\vec{k}_j, \vec{k}_o}^{\vec{k}_i} f & \text{si } \vec{k}_i = \vec{k}_j + \vec{k}_o \\ \Lambda_{\vec{k}_j, -\vec{k}_o}^{\vec{k}_i} f & \text{si } \vec{k}_i = \vec{k}_j - \vec{k}_o \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases} \quad (V - 41)$$

La matriz  $\mathbf{A}$  contiene los términos disipativos en la diagonal. Los términos extradiagonales son todos nulos, salvo aquellos correspondientes al acoplamiento de tres modos que cierran un triángulo con el modo  $\vec{k}_o$ . Es decir, tomamos los modos  $\vec{k}$  y  $\vec{k}'$  tal que  $\vec{k}$ ,  $\vec{k}'$  y  $\vec{k}_o$ , cierran un triángulo ( $\vec{k} = \vec{k}_o + \vec{k}'$ ). Si la evolución de  $\vec{k}$ ,  $\vec{k}'$  y  $\vec{k}_o$ , es principalmente afectada por



el acoplamiento entre ellos, podemos despreciar la interacción con los modos exteriores a este triángulo, y el problema se reduce a la interacción entre tres modos. Sin embargo, tomamos en cuenta la influencia de los restantes acoplamientos, a través de un término de ruido agregado a las ecuaciones de evolución de los tres modos de interés.

Con el objeto de estudiar esta evolución, obtenemos los autovalores de la matriz  $\mathbf{A}$  para estudiar la estabilidad lineal del equilibrio encontrado. La ecuación característica de (V - 41) es

$$(\lambda_0 + 1) = 0, \quad (\lambda - k^2)(\lambda - k'^2) - \Lambda^k \Lambda^{k'} f^2 = 0, \quad (V - 42)$$

donde  $\Lambda^k = \Lambda_{k_1, k_2}^k$ ,  $\vec{k} = \vec{k}_1 + \vec{k}_2$  de donde se deducen

$$\lambda_0 = -1, \quad \lambda_{\pm} = -\beta \pm \sqrt{\beta^2 - \gamma}, \quad (V - 43)$$

siendo

$$\beta = \frac{k^2 + k'^2}{2}, \quad \gamma = k^2 k'^2 \left[ 1 - |f|^2 \frac{\Lambda^k \Lambda^{k'}}{k^2 k'^2} \right], \quad (V - 44)$$

y donde se utilizó que  $f = -f^*$ .

Los autovectores correspondientes son  $\delta\phi_{\vec{k}_0}$ , correspondiente al decaimiento viscoso de  $\vec{k}_0$ , y

$$\phi_{\pm} = \Lambda^k f \phi_{k'} - (\lambda_{\mp} + k^2) \phi_k. \quad (V - 45)$$

Se observa que el único autovalor que podría ser positivo, es  $\lambda_+$ , siendo  $\phi_+$  el correspondiente autovector inestable. En efecto, si  $\beta^2 - \gamma < 0$ ,  $\mathbf{A}$  tiene dos autovalores complejos  $\lambda_+$ , y  $\lambda_-$ , y un autovalor real  $\lambda_0 = -1$ , todos con parte real negativa, lo que implica la estabilidad del equilibrio (V - 39). En cambio si  $\beta^2 - \gamma > 0$ , todos los autovalores son reales, pero sólo  $\lambda_+$ , puede ser positivo y esto ocurre si y sólo si  $\gamma < 0$ . Y esto será posible sólo si

$$\Lambda^k \Lambda^{k'} > 0. \quad (V - 46)$$

Los vectores del plano  $(k_x, k_y)$ , que cumplen esta condición, determinan la región de inestabilidad del equilibrio (V – 39). Un “triángulo inestable”, o sea uno que corresponda a un bloque con autovalor  $\lambda_+$  positivo, debe necesariamente poseer sus vértices dentro de esta región. Cuando esto ocurre, el equilibrio trivial deviene inestable, y dos nuevos modos  $\vec{k}$  y  $\vec{k}'$  se desarrollan a expensas del modo fuente  $\vec{k}_0$ .

El signo del autovalor  $\lambda_+$  puede ser controlado por el valor de la amplitud  $\mu = |f|$  de la fuerza externa (de acuerdo a la ecuación (V – 44)), el cual tomamos como parámetro de control del problema. Este parámetro posee un valor crítico (en el cual se produce un cambio de estabilidad), que depende de la terna que estamos considerando. Su valor es

$$\mu_c(k, k') = kk'[\Lambda^k \Lambda^{k'}]^{-\frac{1}{2}} \quad (V - 47)$$

Luego si fijamos un valor de  $\mu$ , todas las ternas cuyos  $\mu_c$  hayan sido superados por este valor, devienen inestables. Los invariantes ideales son entonces transferidos a los nuevos modos de Fourier (proceso de cascada), conduciendo eventualmente a un régimen turbulento.

Exploramos ahora, las consecuencias de la evolución no lineal de esta inestabilidad. Asumimos entonces, que la evolución dinámica del sistema es conducida por una sola terna, mientras que las restantes pueden aproximarse por términos de ruido. Esta es quizás, una hipótesis razonable en los primeros estadios del régimen turbulento. Cuando el equilibrio trivial deviene inestable, la energía es transferida a los infinitos modos de Fourier, conduciendo de esta forma a un régimen turbulento. En cada terna de modos acoplados, la pérdida de estabilidad puede acompañarse con la transferencia de energía de un modo a los otros dos. La suma de todos estos efectos lleva a la turbulencia, luego la ecuación (V – 29), con todas las ternas acopladas resulta inmanejable, y por ello se debe tomar promedios, que producen una jerarquía de ecuaciones, que se encuentran en las teorías estadísticas de la turbulencia. La solución usual es cortar la jerarquía del conjunto de ecuaciones para los promedios estadísticos, creando un conjunto cerrado de ecuaciones, que es lo que se

conoce como “*clausura estadística*”. Existe un amplio rango de esquemas de clausuras[29-34], pero su aplicación directa presenta dificultades prácticas. Estas dificultades, tienen relación con la imposibilidad de considerar los infinitos modos de Fourier, que hace que la ecuación deba truncarse. Nuestro esquema de tres modos, elegidos convenientemente, como veremos luego, es un esquema de clausura, que puede servir para estudiar un régimen turbulento en sus primeras etapas. Más adelante veremos de que forma elegimos esta terna. Para evaluar esta evolución no lineal, cuando el equilibrio no trivial se ha vuelto inestable, recurrimos a las ecuaciones dinámicas acopladas correspondientes a la terna interactuante representada por  $(\vec{k}_0, \vec{k}, \vec{k}')$

$$\dot{\phi}_{k_0} + k_0^2 \phi_{k_0} = f + \sum_{\substack{k, k' \\ k_0 = k + k'}} \Lambda^{k_0} (\phi_{k'}^* \phi_k - \phi_{k'} \phi_k^*) , \quad (V - 48a)$$

$$\dot{\phi}_k + k^2 \phi_k = \Lambda^k \phi_{k'} \phi_{k_0} , \quad (V - 48b)$$

$$\dot{\phi}_{k'} + k'^2 \phi_{k'} = \Lambda^{k'} \phi_k \phi_{k_0}^* , \quad (V - 48c)$$

donde  $\vec{k} = \vec{k}' + \vec{k}_0$ . En las ecuaciones (V - 48b) y (V - 48c) se despreciaron otras interacciones con modos distintos a  $\vec{k}_0$ , pero luego las modelamos como una contribución de “ruido blanco”. Como ya dijimos, consideramos que en la suma de (V - 48a) existe una terna principal que conduce la evolución, correspondiente a la terna más importante físicamente (TMI). Luego para la (TMI) las ecuaciones de evolución son

$$\dot{\phi}_{k_0} + k_0^2 \phi_{k_0} = f + \Lambda^{k_0} (\phi_{k'}^* \phi_k - \phi_{k'} \phi_k^*) , \quad (V - 49a)$$

$$\dot{\phi}_k + k^2 \phi_k = \Lambda^k \phi_{k'} \phi_{k_0} , \quad (V - 49b)$$

$$\dot{\phi}_{k'} + k'^2 \phi_{k'} = \Lambda^{k'} \phi_k \phi_{k_0}^* . \quad (V - 49c)$$

El conjunto de ecuaciones no lineales (V - 49), tiene como solución de equilibrio a (V - 39). Existen nuevos equilibrios, para valores de  $\mu$  que superen el correspondiente  $\mu_c$ . Esto ocurre

simultaneamente a la desestabilización de (V - 39), y estamos entonces en presencia de una bifurcación de un equilibrio estacionario a otro.

El nuevo equilibrio es

$$|\phi_k|^2 = \frac{(\Lambda^k \Lambda^{k'})^{1/2} k'}{(-\Lambda^{k'} \Lambda^{k_0})} \frac{k'}{2k} (\mu - \mu_c), \quad (V - 50a)$$

$$|\phi_{k'}|^2 = \frac{(\Lambda^k \Lambda^{k'})^{1/2} k}{(-\Lambda^k \Lambda^{k_0})} \frac{k}{2k'} (\mu - \mu_c), \quad (V - 50b)$$

$$|\phi_{k_0}|^2 = \frac{k^2 k'^2}{\Lambda^k \Lambda^{k'}} = \mu_c^2. \quad (V - 50c)$$

Queremos ahora desarrollar la evolución temporal del sistema para valores de  $\mu > \mu_c$ ,  $\mu \sim \mu_c$ . Escribiendo el conjunto de ecuaciones para  $(\phi_{k_0}, \phi_k, \phi_{k'})$  en términos de los autovectores  $(\phi_+, \phi_-, \delta\phi_{k_0})$ , (ver ecuación (V - 45)) obtenemos

$$\partial_t \phi_{\pm} = \lambda_{\pm} \phi_{\pm} - \frac{\delta\phi_{k_0}}{f(\lambda_+ - \lambda_-)} [(\lambda_+ + k^2)(\lambda_{\mp} + \lambda_- + 2k^2)\phi_+ - (\lambda_- + k^2)(\lambda_{\mp} + \lambda_+ + 2k^2)\phi_-], \quad (V - 51a)$$

$$\partial_t \delta\phi_{k_0} = -\delta\phi_{k_0} - \frac{\Lambda^{k_0}}{(\lambda_+ - \lambda_-)^2 f \Lambda^k}$$

$$\times [2(\lambda_+ + k^2)|\phi_+|^2 + 2(\lambda_- + k^2)|\phi_-|^2 + (k'^2 - k^2)(\phi_+ \phi_{*-} - \phi_{*+} \phi_-)]. \quad (V - 51b)$$

Dado que  $\phi_-$  y  $\delta\phi_{k_0}$  son los modos que decaen, ya que sus autovalores son negativos, entonces aplicamos la aproximación adiabática, o “principio de esclavización” [35] (que es un caso especial del conocido “teorema de la variedad central”, en teoría de sistemas dinámicos)

$$\dot{\phi}_- \approx 0, \quad \dot{\delta\phi}_{k_0} \approx 0. \quad (V - 52)$$

Entonces los modos  $\phi_-$  y  $\delta\phi_{k_0}$  (los modos esclavos) pueden escribirse en términos del modo inestable  $\phi_+$ , conduciendo a la siguiente ecuación de evolución para  $\phi_+ = |\phi_+| e^{i\alpha_+}$

$$\frac{\partial}{\partial t} |\phi_+| = \lambda_+ |\phi_+| - b |\phi_+|^3, \quad \frac{\partial}{\partial t} \alpha_+ = 0. \quad (V - 53)$$

donde

$$b = \frac{4\Lambda^{k_0}\Lambda^{k'}k^2}{(k^2 + k'^2)^3} . \quad (V - 54)$$

Llegamos al mismo resultado si definimos el parámetro pequeño

$$\epsilon = (\mu - \mu_c)^{1/2} , \quad (V - 55)$$

y realizamos la expansión perturbativa

$$\phi_{\pm} = \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{\pm}^{(i)} \epsilon^i , \quad (V - 56a)$$

$$\delta\phi_{k_0} = \sum_{i=1}^{\infty} \delta\phi_{k_0}^{(i)} \epsilon^i , \quad (V - 56b)$$

escalando el tiempo de la siguiente forma

$$\tau = \epsilon^2 t . \quad (V - 57)$$

Luego, de la ecuación (V - 51a), a orden  $\epsilon^3$ , obtenemos

$$\phi_{-}^{(3)} = \frac{\delta\phi_{k_0}^{(2)}}{f\lambda_{-}^{(0)}(\lambda_{+}^{(0)} - \lambda_{-}^{(0)})} [(\lambda_{+}^{(0)} + k^2)(\lambda_{+}^{(0)} + \lambda_{-}^{(0)} + 2k^2)\phi_{+}^{(1)}] , \quad (V - 58)$$

y de la ecuación (V - 51b), a orden  $\epsilon^2$ , obtenemos

$$\delta\phi_{k_0}^{(2)} = \frac{-2\Lambda^{k_0}}{f\Lambda^{k_0}(\lambda_{+}^{(0)} - \lambda_{-}^{(0)})^2} [(\lambda_{+}^{(0)} + k^2)|\phi_{+}^{(1)}|^2] . \quad (V - 59)$$

Finalmente, reemplazando (V - 58) y (V - 59) en la ecuación (V - 51a) correspondiente a la evolución de  $\phi_{+}$ , obtenemos a orden  $\epsilon^3$  la ecuación (V - 53). Esta ecuación tiene la solución analítica,

$$|\phi(t)_{+}|^2 = \frac{\lambda_{+}}{b} \frac{1}{1 - \left[1 - \frac{\lambda_{+}}{b|\phi(0)_{+}|^2}\right] e^{-2\lambda_{+}t}} , \quad (V - 60)$$

que consiste en una relajación exponencial con una escala de tiempo  $\lambda_{+}^{-1}$  hacia su solución estacionaria

$$|\phi_{+}(\infty)|^2 = \frac{\lambda_{+}}{b} . \quad (V - 61)$$

Remarquemos que la ecuación (V – 53) fue obtenida sustituyendo la suma sobre todas las ternas en (V – 48a) por un sólo término no lineal correspondiente a la terna que consideramos más importante. La conservación de la suma, habría contribuido con términos adicionales en el miembro derecho de (V – 53), que habría sido una suma de la parte no lineal de  $\phi_+$ . La conservación de la suma transformaría (V – 53) en

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_+ = \lambda_+ \phi_+ - b \phi_+ \sum |\phi_+|^2 \quad (V - 62)$$

Ahora consideramos la siguiente aproximación: consideramos la terna (TMI) y el resto. Esto conduce a dos conjuntos de ecuaciones. El primero correspondiente a la terna (TMI), está compuesta de una sola ecuación que es justamente la (V – 53). En el segundo conjunto realizamos la aproximación de reemplazar el factor conteniendo la suma sobre las ternas en el término no lineal de (V – 62), por la terna (TMI). Luego (V – 62) se transforma en la siguiente ecuación lineal

$$\frac{\partial}{\partial t} \phi_+ = (\lambda_+ - b |\phi_+|_{TMI}^2) \phi_+ \quad (V - 63)$$

Esto conduce a una renormalización estabilizante para  $\lambda_+$ . En efecto, las ternas que no son la (TMI) tienen un tiempo de crecimiento mayor que el que les correspondería si estuvieran desacopladas. Es decir la cantidad  $\lambda_+$ , es disminuida en la cantidad positiva  $(b |\phi_+|_{TMI}^2)$ .

### **Efectos de ruido**

Como ya dijimos, debemos considerar la interacción de estos tres modos con los restantes. Para ello, postulamos que entre las ternas que no se consideraron en las ecuaciones (V – 49b, c) las principales son las ternas vecinas

$$\vec{k} = \vec{k} + \vec{k}_0, \quad \vec{k}' = \vec{k}' - \vec{k}_0. \quad (V - 64)$$

Por lo tanto debemos añadir a las ecuaciones (V - 49b, c)

$$\Lambda_{\bar{k}-k_0}^k \phi_{k_0}^* \phi_{\bar{k}}, \quad \Lambda_{\bar{k}',k_0}^k \phi_{k_0} \phi_{\bar{k}'}, \quad (V - 65)$$

respectivamente, correspondientes a los modos (V - 64), a los cuales deben asociarse las frecuencias

$$\omega_{\bar{k}} = \omega_k + \omega_{k_0}, \quad \omega_{\bar{k}'} = \omega_{k'} - \omega_{k_0}. \quad (V - 66)$$

También postulamos que las amplitudes  $\phi_{\bar{k}}, \phi_{\bar{k}'}$ , son cantidades fluctuantes, que siguen una estadística del tipo “ruido blanco”, es decir

$$\langle \phi_{\bar{k}}(t) \rangle = \langle \phi_{\bar{k}'}(t) \rangle = 0 \quad (V - 67)$$

$$\langle \phi_{\bar{k}}(t) \phi_{\bar{k}}^*(t') \rangle = \langle \phi_{\bar{k}'}(t) \phi_{\bar{k}'}^*(t') \rangle = Q \delta(t - t').$$

Si estos términos se añadieran a las ecuaciones (V - 49b, c), todo el cálculo consecutivo para determinar la evolución de  $\phi_+$  conduciría a la siguiente ecuación de Langevin

$$\frac{\partial}{\partial t} |\phi_+| = \lambda_+ |\phi_+| - b |\phi_+|^2 \phi_+ + \xi(t). \quad (V - 68)$$

donde  $\xi(t)$  es una variable aleatoria, que es una combinación lineal de  $\phi_{\bar{k}}$  y  $\phi_{\bar{k}'}$ , y por lo tanto sigue también una estadística de ruido blanco. Luego

$$\langle \xi(t) \xi^*(t') \rangle = Q \delta(t - t'). \quad (V - 69)$$

Entonces a la ecuación (V - 68), puede asociarse una ecuación de Fokker-Planck para la función de probabilidad  $P(\phi_+, t)$  definida en el espacio de  $\phi_+$ :

$$\partial_t P = -\frac{\partial}{\partial \phi_+} [(\lambda_+ \phi_+ - b |\phi_+|^2 \phi_+) P] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \phi_+ \partial \phi_+^*} [QP]. \quad (V - 70)$$

La solución asintótica para  $t \rightarrow \infty$  de esta ecuación es

$$P(\phi_+, \infty) = N \exp \left[ \frac{2S(\phi_+)}{Q} \right], \quad (V - 71)$$

donde  $N$  es un factor de normalización y

$$S(|\phi_+|) = \frac{\lambda_+}{2} |\phi_+|^2 - \frac{b}{4} |\phi_+|^4. \quad (V - 72)$$

Observamos aquí, que en ausencia de ruido se cumple

$$\partial_t |\phi_+| = \frac{\partial S}{\partial |\phi_+|}, \quad (V - 73)$$

y luego

$$\partial_t S = \frac{\partial S}{\partial |\phi_+|} \partial_t |\phi_+| = \left| \frac{\partial S}{\partial |\phi_+|} \right|^2 \geq 0. \quad (V - 74)$$

Entonces  $S$  es una función de Lyapunov [cap.II] y admite la interpretación de una entropía generalizada, cuyos máximos corresponden a las configuraciones de equilibrios estables. Por otro lado, utilizando teoría de la información si definimos

$$S = - \int d\phi_+ d\phi_{*+} (P \ln P), \quad (V - 75)$$

sujeta a los "vínculos dinámicos"  $\bar{W} = cte, \bar{U} = cte$ , entonces

$$P(\phi_+, \infty) = N \exp \left[ -\frac{W}{T_W} - \frac{U}{T_U} \right], \quad (V - 76)$$

y por lo tanto

$$S = -\frac{Q}{2} \left[ \frac{W}{T_W} + \frac{U}{T_U} \right]. \quad (V - 77)$$

Sin embargo puede verse, que cerca del punto de bifurcación,  $S$  debe ser una combinación lineal de la energía  $W$  y de la entropía  $U$ , ya que ambas son en última instancia, una combinación lineal de  $|\phi_+|^2$  y  $|\phi_+|^4$ . Por lo tanto (V - 77) es válida siempre.

Finalmente, notemos que esta función de probabilidad de tipo canónica fue obtenida sin asumir en algún momento, la hipótesis de equilibrio termodinámico, pues de hecho, permitimos la existencia de fuerza externa y disipación.



### Terna físicamente más importante, y proceso de cascada

Para estudiar cual es la terna físicamente más importante (TMI) y como se produce la transferencia de energía y enstrofia entre modos, consideramos dos casos: un plasma con radio de Larmor iónico finito (RLF), y otro con radio de Larmor iónico despreciable (RLD). Este último corresponde al límite  $T_i \rightarrow 0$ . En el caso (RLF), definimos la cantidad  $\alpha^2 = \frac{4v_0}{v^*}$ . Como ya habíamos señalado, estamos interesados en el límite  $v_0 \ll v^*$ , por lo tanto en este caso resulta  $\alpha \ll 1$ .

Para encontrar la terna (TMI), procedemos de la siguiente forma: en primer lugar alimentamos la inestabilidad, excitando al plasma con un modo  $(\vec{k}_o)$  dirigido según la inhomogeneidad del plasma en la situación de equilibrio estacionario, en este caso según  $x$ . Como ya vimos, la inestabilidad se produce si la densidad decrece en el mismo sentido que tiene el campo gravitacional, por lo cual es esperable que obtengamos una mayor inestabilidad si excitamos al plasma en esta dirección. En segundo lugar aparece la cuestión de considerar qué se entiende por "mayor inestabilidad". En trabajos previos[21-23,36], la terna (TMI), se toma como aquella terna inestable que crece más rápidamente. En nuestro trabajo, nosotros tomamos la terna (TMI), como la terna inestable que satura al nivel más alto. Esto es, aquella para la cual el valor de  $|\phi_+(\infty)|^2 = \lambda_+/b$  es máximo. Entonces, para encontrar la terna (TMI), buscamos el punto del plano  $(k_x, k_y)$  para el cual el valor de  $\lambda_+/b$  como una función de  $\mu$ , es máximo.

Veamos ahora que cuales son los invariantes en ambos casos. Para ello recurrimos a la expresión (V - 35) de la energía, que se puede reescribir como

$$W_k = \left( \frac{2r - 1}{r} \right) k^2 |\phi_k|^2, \quad (V - 78)$$

donde

$$r(k) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \left[ 1 - \frac{\alpha^2}{k^2} \right]^{\frac{1}{2}} \right], \quad (V - 79)$$

Dado que analizamos si son invariantes ideales, consideramos las ecuaciones básicas sin disipación ni fuerza externa, para lo cual se toma el límite  $\nu \rightarrow 0, f \rightarrow 0$  en la ecuación (V – 29) desapareciendo los términos correspondientes en la ecuación (V – 49a). Luego la energía de la terna es

$$W = W_k + W_{k'} + W_{k_o} , \quad (V - 80)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} \partial_t W = & \left( \frac{2r-1}{r} \right) k^2 (\phi^* \dot{\phi} + \dot{\phi}^* \phi) + \left( \frac{2r_o-1}{r_o} \right) k_o^2 (\phi_o^* \dot{\phi}_o + \dot{\phi}_o^* \phi_o) \\ & + \left( \frac{2r'-1}{r'} \right) k'^2 (\phi'^* \dot{\phi}' + \dot{\phi}'^* \phi') , \end{aligned} \quad (V - 81)$$

o bien

$$\begin{aligned} \partial_t W = & 2Re \left( \frac{2r-1}{r} k^2 \Lambda (\phi_o \phi^* \phi') + \frac{2r'-1}{r'} k'^2 \Lambda' (\phi_o^* \phi \phi'^*) \right. \\ & \left. + \frac{2r_o-1}{r_o} k_o^2 \Lambda_o (\phi_o^* \phi \phi'^* - \phi_o^* \phi^* \phi') \right) . \end{aligned} \quad (V - 82)$$

Se ve que la energía se conserva si y sólo si

$$\frac{2r-1}{r} k^2 \Lambda + \frac{2r'-1}{r'} k'^2 \Lambda' + \frac{2r_o-1}{r_o} k_o^2 \Lambda_o = 0 , \quad (V - 83)$$

y definiendo

$$\Gamma = \frac{2r-1}{r} k^2 \Lambda , \quad (V - 84)$$

la ecuación (V – 83) se reescribe

$$\Gamma + \Gamma' + \Gamma_o = 0 . \quad (V - 85)$$

Por otro lado, dado que la enstrofia cumple la relación

$$U_k = k^2 W_k , \quad (V - 86)$$

la enstrofía se conservará si y sólo si

$$k^2\Gamma + k'^2\Gamma' + k_o^2\Gamma_o = 0 . \quad (V - 87)$$

En nuestro caso

$$\Lambda_{k_1, k_2}^k = \frac{1}{2} \frac{r}{2r-1} \frac{[\vec{k}_1 \times \vec{k}_2] \cdot \hat{z}}{k^2} \times \left[ [k_2^2 - k_1^2] + \vec{k} \cdot \left[ \frac{\vec{k}_1}{r_2} - \frac{\vec{k}_2}{r_1} \right] + \frac{\alpha^2}{4r} \left[ \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right] \right] , \quad (V - 88)$$

lo que sale usando (V - 79) y la relación

$$\omega_k = -k_y v^* r(k) . \quad (V - 89)$$

Para el caso (RLD) o sea cuando  $T_i \rightarrow 0$  reobtenemos las ecuaciones de la turbulencia de Navier-Stokes, y se deduce de (V - 88) que se cumplen (V - 85) y (V - 87). En cambio para (RLF) verificamos que (V - 85) se cumple a primer orden en  $\alpha^2$ , mientras que (V - 87) no se cumple.

En los casos en los que hay conservación, tiene sentido plantearse el problema de la transferencia de la cantidad que se conserva del modo  $\vec{k}_o$  a los modos  $\vec{k}$  y  $\vec{k}'$ , o “*proceso de cascada*”. Dado que esto lo hacemos para la terna (TMI), esto será representativo de la dirección de la transferencia de energía y/o enstrofía entre modos. Diremos que un invariante  $\mathcal{I}_k$  sufre una cascada directa si para  $k > k'$  es  $\mathcal{I}_k > \mathcal{I}_{k'}$ . La cascada será inversa si para  $k > k'$  es  $\mathcal{I}_k < \mathcal{I}_{k'}$ . Esto señala una dirección de transferencia del invariante hacia la microescala o viceversa.

Para determinar el tipo de cascada que sufren la energía y la enstrofía en los casos en los que se conservan, debemos determinar primero la región de inestabilidad. Ya vimos que esta región está determinada por los puntos del plano  $(k_x, k_y)$  que cumplen  $\Lambda^k \Lambda^{k'} > 0$ . Recordando que  $k_o = 1$ , para valores pequeños de  $\alpha$  este producto es

$$\Lambda^k \Lambda^{k'} = -k_y^2 \left[ \frac{[(k_x - 1)^2 + k_y^2 - 1](k_x^2 + k_y^2 - 1)}{(k_x^2 + k_y^2)[(k_x - 1)^2 + k_y^2]} \right] = k_y^2 \frac{(k'^2 - 1)(1 - k^2)}{k^2 k'^2} , \quad (V - 90)$$

para  $\vec{k}_o = (1, 0)$  ,  $\vec{k} = (k_x, k_y)$  ,  $\vec{k}' = (k_x - 1, k_y)$  que cierran un triángulo. Luego de  $(V - 90)$  vemos que la condición  $(V - 46)$  de inestabilidad se cumple si

$$k'^2 > 1 \text{ y } k^2 < 1 \qquad k'^2 < 1 \text{ y } k^2 > 1 . \qquad (V - 91)$$

Esta región esta marcada en la figura 1, junto a los tipos de cascada de la energía y la enstrofia.

La cascada en la energía se determina calculando  $W_k$  y  $W_{k'}$  a partir de los nuevos equilibrios  $(V - 50)$ . Usando  $(V - 32)$  ,  $(V - 35)$  y  $(V - 50)$  resulta

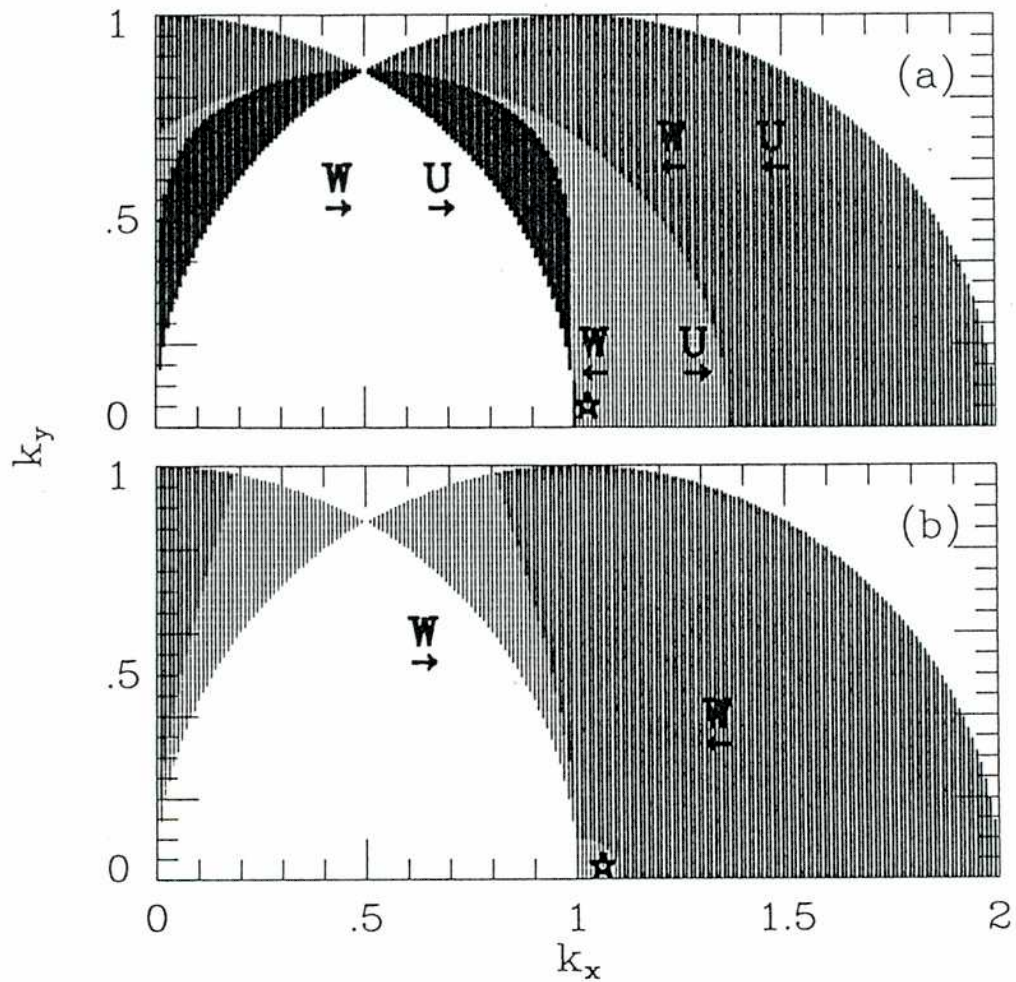
$$\frac{W_k}{W_{k'}} = \frac{\Lambda^k}{\Lambda^{k'}} , \qquad (V - 92)$$

mientras que para la enstrofia

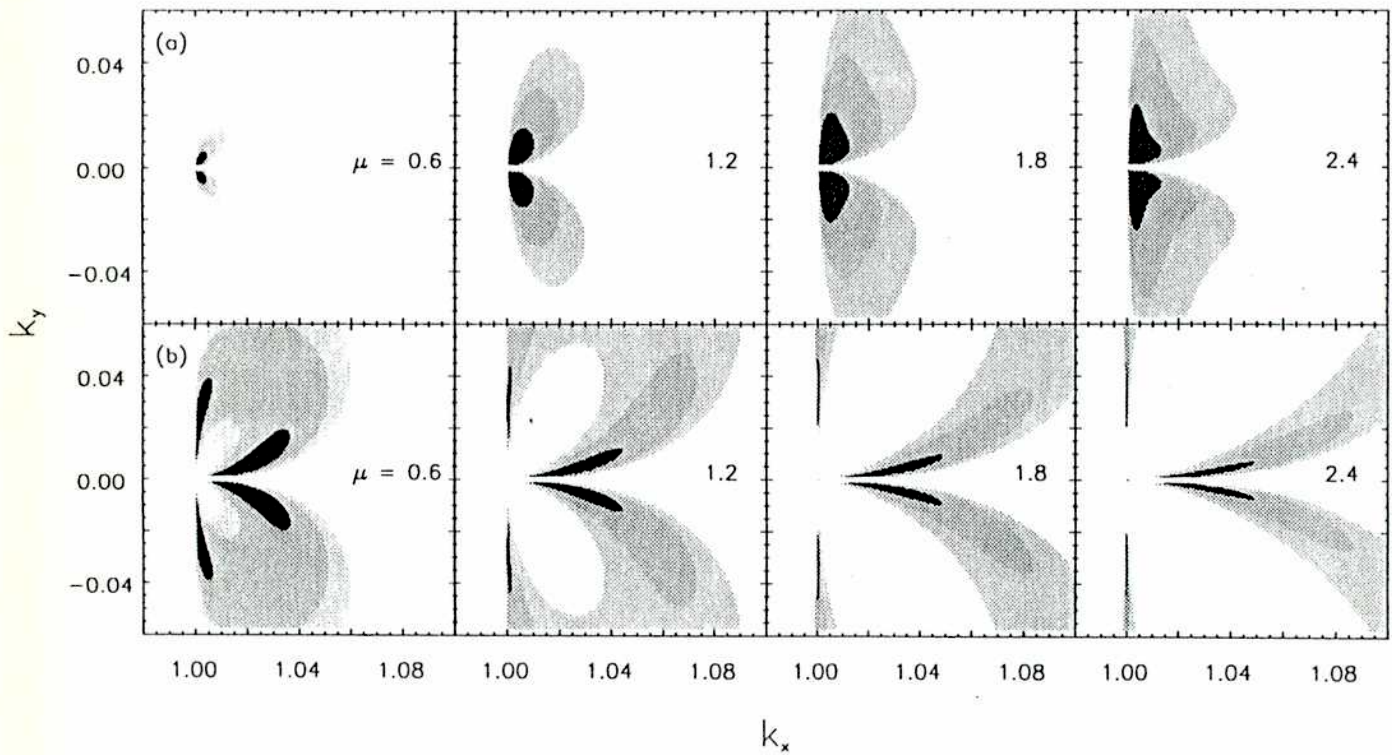
$$\frac{U_k}{U_{k'}} = \frac{k^2 \Lambda^k}{k'^2 \Lambda^{k'}} . \qquad (V - 93)$$

La figura (1a) corresponde al caso (RLD), y la figura (1b) al caso (RLF). En el último caso sólo se representa la cascada de energía, ya que no hay cascada de enstrofia. En ambas figuras se representa también la terna más inestable. Notemos que en el caso (RLD), la (TMI) se encuentra en la zona de cascada inversa de energía, mientras que en el caso (RLF), se encuentra en la zona de cascada directa de energía. La figura 2 muestra la ubicación de (TMI) para diferentes valores del parámetro de control  $\mu$ . La figura (2a) corresponde al caso (RLD) , y la figura (2b) el caso (RLF). Las regiones sombreadas representan las ternas para las que  $|\phi_+(\infty)|^2$  alcanza un valor de 0.95,0.90,.85, del valor correspondiente a la (TMI). Luego puede apreciarse que el valor asintótico de  $|\phi_+|^2$ , en ambos casos, considerado como una función de  $(k_x, k_y)$ , posee un máximo pronunciado. Cuanto más pronunciado es este máximo, la hipótesis de que una sola terna conduce la evolución, se torna más plausible.

Por último, encontramos que la (TMI) en el caso (RLF), tiende a condensar, cuando el parámetro de control  $\mu$  crece, en cierto valor de  $k$  cercano al eje  $x$ , digamos  $\vec{k}_c = (k_c, 0)$ , donde se encontró [25] que el valor  $k_c$  es del orden de la inversa del radio de Larmor. En



**Fig 1:** Las áreas sombreadas indican las regiones en el espacio  $\vec{k}$  en las cuales las ternas devienen inestables. Los diferentes sombreados indican subregiones con distintas direcciones de cascada de los invariantes ideales. Las flechas dirigidas hacia la izquierda señalan cascada inversa y las que se dirigen hacia la derecha señalan cascada directa. La estrella indica la ubicación aproximada de la terna TMI. (a) Caso RLD, (b) caso RLF (no hay cascada de enstrofia en este caso).



**Fig 2:** Ubicación en el espacio  $\vec{k}$  de las ternas TMI. Las regiones sombreadas contienen , yendo de las más oscuras a las más claras, ternas cuyos valores de saturación  $|\phi_+(\infty)|^2$  están 0.95, 0.90, .85 sobre el valor correspondiente a la terna TMI respectivamente. (a) Caso RLD, (b) caso RLF. Los niveles indican diferentes valores de  $\mu$ .

la figura (2b) para el caso (RLF), se observa la tendencia de las ternas más cercanas a la (TMI), a orientarse paralelamente al eje  $x$  a medida que  $\mu$  crece, estando casi ubicadas sobre este eje. Este resultado fue ya conjeturado por varios autores [23,25]. Esta condensación predice la formación de estructuras coherentes. De hecho la estructura espacial asociada al modo  $\vec{k} = (k_c, 0)$  esta formada por lineas de corriente paralelas al eje  $y$ .

### **Conclusiones**

En este trabajo, estudiamos el papel que juegan las interacciones de tres modos, en el desarrollo de la turbulencia de tipo flute de un plasma. Extendimos la ecuación derivada por Kodama y Pavlenko [25], incluyendo los efectos de una fuerza externa y de disipación viscosa. Elegimos una terna que juega el papel principal en el desarrollo hacia un estado turbulento. Vimos que siempre que la fuerza de excitación crece el equilibrio trivial previamente alcanzado, pierde estabilidad, dando lugar a un régimen debilmente turbulento. Esta fuerza externa  $\mu$  es el parámetro de control del problema y posee un valor crítico  $\mu_c$  que depende de la terna considerada. Todas las ternas cuyos  $\mu_c$  es sobrepasado, sufren una bifurcación nodo a nodo, hacia un nuevo estado de equilibrio estable. Durante la bifurcación, la energía (y la entropía en el caso (RLD)) se transfiere de modo en modo, de tal forma que se produce una cascada neta de energía. Esto se hace luego de elegir la terna más inestable (TMI), que es representativa, en este modelo, del efecto neto de la turbulencia sobre los distintos modos. Para elegir esta terna, se adopta el criterio de que debe ser aquella que sature al nivel más alto (maximo de  $|\phi_+(\infty)|^2$ ) y no la que crezca más rápido (máximo de  $\lambda_+$ ) como se hace usualmente, ya que un modo que crece más rapido podría decaer antes, mientras que otro más lento podría seguir creciendo.

El efecto de las ternas restantes, fue modelado como una contribución tipo ruido blanco conduciendo a una ecuación de Langevin, cuya ecuación de Fokker-Planck asociada, da la función de probabilidad para los modos inestables. La solución asintótica de esta ecuación,

es función de  $S$ , una función de Lyapunov de las ecuaciones de evolución sin ruido, que puede identificarse con la “entropía generalizada” del problema, y que fue obtenida sin recurrir a la hipótesis de equilibrio termodinámico. Es más, también mostramos que cerca del punto de bifurcación, esta distribución de “equilibrio estacionario”, se asemeja a una distribución canónica, con dos invariantes ideales que actúan como “vínculos dinámicos” del problema.

También estudiamos la dirección de las cascadas, correspondientes a los invariantes ideales. Esto se hizo para los casos de radio de Larmor iónico despreciable (RLD), y finito (RLF). En el primer caso (RLD) encontramos que hay cascada de energía y de enstrofia, y es similar a la producida en el caso de la turbulencia de Navier-Stokes. La terna (TMI) aparece en la región de cascada de energía inversa. En el caso (RLF) no hay cascada de enstrofia, ya que aquí no se conserva, pero sí de energía. En este caso la (TMI) se encuentra en la zona de cascada de energía directa, coincidiendo este resultado con (KP) [25]. Esta cascada directa ocasiona que la energía se disipe en la microescala a la vez que se observa formación de estructuras coherentes (autoorganización), o flujos zonales. Esta diferencia con el caso (RLD), nos conduce a concluir que el efecto más importante del (RLF) sería el de estabilizar la turbulencia tipo flute, como ya fue conjeturado por Kadomtsev [16], Kodama y Pavlenko [25], y Ferro Fontán *et al.* [37]



## CAPITULO VI

### Equilibrio de flujos helicoidales en un conducto cilíndrico

El problema de la ruptura de un vórtice es interesante en el dominio técnico por las aplicaciones prácticas en las que se presenta, pero también lo es para la hidrodinámica teórica, por pertenecer a una categoría de problemas físicos en los que suficiente cantidad de rotación produce bifurcaciones del equilibrio por ruptura de simetría. La clásica referencia es la de los elipsoides de equilibrio de masas fluidas autogravitantes (elipsoides de Jacobi) [38]. El mismo fenómeno se presenta en el equilibrio de chorros relativistas extragalácticos magnetizados, que actúan como radio-fuentes, en la relajación del campo magnético en un (RFP) (pinch con inversión de campo) y en turbomaquinaria donde se originan oscilaciones de presión.

En algunos dispositivos de aplicación industrial, es deseable la existencia de tales flujos, utilizándose alguna de sus propiedades en el proceso considerado. Por el contrario en otros casos, es preferible eliminarlo o al menos controlar algunos efectos del mismo. Entre los dispositivos que utilizan las propiedades de los flujos helicoidales, se pueden citar los separadores ciclónicos, utilizados para eliminar partículas pesadas de un fluido. Cámaras torsionales, utilizados como cámaras de combustión en calderas que queman combustible de bajo poder calorífico y aprovechan su excelente poder de mezcla, etc.

Entre los dispositivos en que la aparición de flujos helicoidales resulta nociva, se encuentran las turbinas hidráulicas: si bien en algunos casos de turbinas es requerido para la generación de potencia, es altamente nocivo en turbinas tipo Francis y Kaplan.

El Ingeniero Rafael Guarga, director del Instituto de Mecánica de Fluidos e Ingeniería Ambiental (IMFIA) en Montevideo, junto a un equipo de colaboradores, desarrollan [39,40] trabajos experimentales y modelos cualitativos sobre la ruptura de simetría de un flujo

rotante en un expansor, que veremos en el capítulo (VIII). En primer lugar estudiamos el equilibrio de flujos helicoidales (FH) en un conducto cilíndrico

El isomorfismo entre los equilibrios hidromagnéticos y los flujos estacionarios de un fluido ideal incompresible, fue señalado de manera relevante por Shafranov [41] en 1957. Invocando esta analogía, Shafranov calculó de manera sencilla, la velocidad de un vórtice toroidal en un gas quieto. El isomorfismo se prueba simplemente mediante las sustituciones

$$\vec{B} \rightarrow \vec{v}, \quad \vec{j} = \nabla \times \vec{B} \rightarrow \vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}, \quad -p \rightarrow H = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho}, \quad (VI-1)$$

en el balance entre la fuerza de Lorentz y el gradiente de presión en el plasma

$$\vec{j} \times \vec{B} = \nabla p. \quad (VI-2)$$

Es importante señalar que este isomorfismo no se cumple fuera del equilibrio, en el cual las dinámicas son distintas. En el caso hidrodinámico la ecuación dinámica es

$$\frac{\partial \vec{\omega}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{\omega} \times \vec{v}) = 0, \quad (VI-3)$$

y en el caso hidromagnético

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \nabla \times (\vec{B} \times \vec{v}) = 0. \quad (VI-4)$$

Sin embargo ya vimos en el capítulo (III) que es posible estudiar la estabilidad dinámica de los equilibrios estacionarios, aplicando técnicas de teoría de la información con “vínculos dinámicos”. En el capítulo (VIII) utilizaremos este isomorfismo y la técnica recién mencionada, para estudiar la estabilidad de determinadas soluciones.

Vemos de (VI-3) y (VI-4) que  $\vec{B}$  sigue la misma dinámica que  $\vec{\omega}$ , y al congelamiento de las líneas de fuerza magnéticas en un plasma perfecto, le corresponde el congelamiento de las líneas de vorticidad al fluido ideal. La ecuación de equilibrio MHD (VI-2) puede obtenerse de un principio variacional, buscando los valores estacionarios de la funcional de energía total del plasma (magnética más interna)

$$W = \int d^3x \left( \frac{B^2}{2} + \frac{p}{\gamma - 1} \right), \quad (VI-5)$$

frente a desplazamientos sin disipación (isoentrópicos), compatibles con las condiciones de contorno

$$\delta \vec{B} = \nabla \times (\vec{\xi} \times \vec{B}) , \quad \delta \rho = -\nabla \cdot (\rho \vec{\xi}) , \quad \delta p = -\vec{\xi} \cdot \nabla p - \gamma p \nabla \cdot \vec{\xi} . \quad (VI - 6)$$

Luego mediante transformaciones sencillas se prueba que  $\delta W$  tiene la forma de un trabajo

$$\delta W = \int d^3x \vec{\xi} \cdot (\nabla p - \vec{j} \times \vec{B}) + \text{términos de superficie} , \quad (VI - 7)$$

y dado que el desplazamiento  $\vec{\xi}$  es arbitrario, debe anularse la fuerza que lo multiplica y reobtenemos la ecuación (VI - 2). Para desplazamientos incompresibles  $\gamma = 0$ . Nótese que en ese caso la presión actúa en la integral (VI - 5) como un multiplicador de Lagrange, imponiendo la condición subsidiaria de volumen constante.

Es curioso que recién en 1982 aparecieran en la literatura hidrodinámica , expresiones analíticas para el campo de velocidades de un filamento vorticoso helicoidal, obtenidas por integración directa de la ley de Biot-Savart [42]. En la literatura dedicada a la fusión nuclear, el problema más complejo del equilibrio magnetohidrostático en un stellarator lineal, configuración con simetría helicoidal, fue resuelto analíticamente [43,44], en 1972, en el caso particular de una corriente con perfil rectangular. Por el isomorfismo comentado anteriormente, este caso es enteramente aplicable al equilibrio helicoidal de un vórtice de Rankine. En este caso, la ecuación de Grad-Shafranov para la función de corriente es lineal, y su solución puede expresarse como suma de una solución particular parabólica en  $r$ , más una solución del problema “libre de fuerza” ( $\vec{\omega} \parallel \vec{v}$ ), o sea un flujo de Beltrami.

Veamos ahora las fórmulas relevantes del cálculo en simetría helicoidal. Sea  $(r, \theta, z)$  un sistema de coordenadas cilíndricas. Las coordenadas helicoidales son  $(r, \phi, z)$  con  $\phi = \theta - kz$ , donde  $k = 2\pi/p$  y  $p$  es el paso de la hélice. Para un fluido incompresible

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0 , \quad (VI - 8)$$

ecuación que se puede escribir como

$$\frac{1}{r} \left[ \frac{\partial(rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \right] = 0 . \quad (VI - 9)$$

En general si en la función  $\tilde{V}(r, \theta, z)$  se realiza una transformación de las coordenadas cilíndricas a las coordenadas helicoidales, luego de lo cual se transforma en la función  $V(r, \phi, z)$ , las siguientes relaciones son válidas

$$\left. \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z} \right)_{\theta, r} = -k \left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)_{r, z} + \left. \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{r, \phi} ; \left. \frac{\partial \tilde{V}}{\partial r} \right)_{\theta, z} = \left. \frac{\partial V}{\partial r} \right)_{\phi, z} ; \left. \frac{\partial \tilde{V}}{\partial \theta} \right)_{r, z} = \left. \frac{\partial V}{\partial \phi} \right)_{r, z} . \quad (VI - 10)$$

Simetría helicoidal significa

$$\left. \frac{\partial V}{\partial z} \right)_{r, \phi} = 0 . \quad (VI - 11)$$

Por otro lado, de (VI - 9) resulta

$$v_\phi = v_\theta - kr v_z . \quad (VI - 12)$$

La solución de la ecuación (VI - 9) en términos de una función de corriente es

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \phi} , \quad v_\phi = -\frac{\partial \psi}{\partial r} . \quad (VI - 13)$$

Análogamente, dado que  $\nabla \cdot \vec{\omega} = 0$ , el procedimiento anterior se puede repetir introduciendo un flujo de vorticidad  $\chi$  tal que

$$w_r = \frac{1}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} ; \quad w_\phi = -\frac{\partial \chi}{\partial r} . \quad (VI - 14)$$

Introduciendo el potencial vector  $\vec{A}$

$$\vec{v} = \nabla \times \vec{A} , \quad (VI - 15)$$

se ve que

$$v_r = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} (A_z + kr A_\theta) . \quad (VI - 16)$$

Comparando (VI – 16) con (VI – 13) deducimos que

$$\psi = A_z + krA_\theta . \quad (VI - 17)$$

Dado que  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ , el mismo procedimiento es válido para  $\chi$  conduciendo por comparación con (VI – 14) a

$$\chi = v_z + krv_\theta . \quad (VI - 18)$$

Puede probarse [apéndice 1] que bajo la hipótesis de simetría helicoidal,  $\chi$  es un invariante dinámico. De las ecuaciones (VI – 12),(VI – 13) y (VI – 18) resultan

$$v_\theta = \frac{kr\chi - \frac{\partial\psi}{\partial r}}{1 + k^2r^2} , \quad v_z = \frac{\chi + kr\frac{\partial\psi}{\partial r}}{1 + k^2r^2} . \quad (VI - 19)$$

La ecuación de Grad-Shafranov es simplemente la componente  $z$  de la ecuación de equilibrio

$$\vec{\omega} \times \vec{v} = -\nabla H , \quad (VI - 20)$$

$$H = \frac{v^2}{2} + \frac{p}{\rho} , \quad (VI - 21)$$

la energía de Bernoulli. Las siguientes relaciones de fácil verificación, son consecuencia de la simetría y de la ecuación de equilibrio

$$\vec{v} \cdot \nabla\psi = \vec{v} \cdot \nabla H = \vec{\omega} \cdot \nabla H = \nabla H \times \nabla\psi = \nabla H \times \nabla\chi = 0 . \quad (VI - 22)$$

Elas implican que los campos  $\vec{v}$  y  $\vec{\omega}$  yacen en superficies de  $\psi = \text{constante}$ , y que tanto la función de Bernoulli  $H(\psi)$  como el flujo  $\chi(\psi)$ , son funciones de  $\psi$ . Indicando con una prima la derivada de estas cantidades con relación a  $\psi$ , la ecuación de Grad-Shafranov tiene la siguiente expresión

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r(\frac{\partial\psi}{\partial r})}{1 + k^2r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\psi}{\partial\phi^2} = H' - \frac{\chi\chi'}{1 + k^2r^2} + \frac{2k\chi}{(1 + k^2r^2)^2} . \quad (VI - 23)$$

Si bien el miembro derecho de esta ecuación puede ser una función arbitraria de  $\psi$ , la integración analítica resulta posible sólo cuando la dependencia con  $\psi$  es lineal. Entonces si elegimos

$$H(\psi) = H_o + \beta\psi, \quad \chi(\psi) = \chi_o + \gamma\psi, \quad (VI - 24)$$

en coincidencia con las formas de estas funciones en el caso axisimétrico de un vórtice de Rankine, la ecuación (VI - 23) resulta lineal e inhomogénea. Para eliminar la inhomogeneidad que es independiente de  $\phi$ , puede buscarse una solución particular de la forma  $\psi_p = a + br^2$ . Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene

$$\psi_p = -\frac{\chi_o}{\gamma} - \frac{\beta}{\gamma^2} \left( 1 + \frac{2k}{\gamma} + k^2 r^2 \right). \quad (VI - 25)$$

Una vez sustraído el término inhomogéneo, la ecuación de Grad-Shafranov se reduce al caso  $H' = 0$ ,  $\chi = \gamma\psi$ . Físicamente éste corresponde a un flujo de Beltrami en el que de (VI - 13) y (VI - 14),  $\vec{\omega} = \gamma\vec{v}$ .

Para esta clase de equilibrio resulta apropiada una técnica de integración debida a Chandrasekhar y Kendall [45]. Sea un potencial  $f$  tal que  $\vec{v} = \nabla \times \nabla \times (f\hat{z}) + \gamma\nabla \times (f\hat{z})$ . Tomando rotor es inmediato que

$$\vec{\omega} = \nabla \times (-\nabla^2 f\hat{z}) + \gamma\nabla \times \nabla \times (f\hat{z}), \quad (VI - 26)$$

y la relación buscada entre  $\vec{\omega}$  y  $\vec{v}$  se cumple si  $f$  es solución de la ecuación escalar de Helmholtz

$$\nabla^2 f + \gamma^2 f = 0. \quad (VI - 27)$$

En consecuencia, dejando de lado términos singulares en el límite  $r \rightarrow 0$ , la forma más general de  $f$  para simetría helicoidal es

$$f = \hat{c}_0 J_0(\gamma r) + \sum_{n=1}^{n=\infty} [\hat{d}_n I_n(\alpha_n r) + \hat{c}_n J_n(\alpha_n r)] \cos(n\phi - \hat{\varphi}_n), \quad (VI - 28)$$

$$\alpha_n^4 = (n^2 k^2 - \gamma^2)^2, \quad \hat{c}_{n \geq M} = \hat{d}_{n < M} = 0, \text{ con } \frac{\gamma}{k} + 1 \geq M > \frac{\gamma}{k}.$$

Aquí  $J_n$  e  $I_n$ , son las funciones de Bessel de argumento real e imaginario respectivamente.

La relación entre  $f$  y el flujo de Beltrami  $\psi_B$  puede deducirse directamente calculando  $v_\phi$

$$\psi_B = \gamma f - kr \left( \frac{\partial f}{\partial r} \right). \quad (VI - 29)$$

Las ecuaciones (VI - 25) y (VI - 29), configuran la solución más general de la ecuación de Grad-Shafranov, para el caso que nos interesa.

## CAPITULO VII

### Flujo helicoidal de sección elíptica y torsión pequeña

En fluidos no confinados no existen soluciones de la forma (VI – 28), ya que las funciones  $I_m$  divergen en el infinito. Esta afirmación está relacionada con el teorema de Taylor-Proudman [46].

Por otra parte, si se supone que el vórtice está rodeado de flujo irrotacional, no se conoce sistema de coordenadas alguno que permita a la vez la separación de variables en (VI – 23) y la conexión entre la solución interna y la externa. [47]

En cambio, sí se puede tratar analíticamente el límite  $kr \ll 1$  (longitud de onda de la hélice larga comparada con las dimensiones transversales). La ecuación (VI – 23) queda

$$\frac{(r\psi_r)_r}{r} + \frac{\psi_{\phi\phi}}{r^2} = h' - \chi\chi' + 2k\chi, \quad (VII - 1)$$

que es la ecuación de Grad-Shafranov en simetría cilíndrica, pero con una diferencia importante en el miembro derecho. Si el flujo es irrotacional ( $h' = \chi' = 0$ ) queda un rastro de la helicidad en el término no nulo  $2k\chi$ . Sea  $V_z \approx \chi = Cte$  en todo el flujo y  $\omega_z \approx -h' = Cte \neq 0$  en un dominio central de forma elíptica. Entonces es posible resolver el problema interno y externo en coordenadas elípticas  $(\nu, \nu)$ , definidas por  $x = c \cosh \nu \cos \nu, y = c \sinh \nu \sin \nu$ . En estas coordenadas la ecuación (VII – 1) se escribe

$$\frac{\psi_{\nu\nu} + \psi_{\nu\nu}}{4(\cosh 2\nu - \cos 2\nu)} = \alpha + \beta\Theta(\nu_0 - \nu), \quad (VII - 2)$$

$\Theta$  es la función escalón y  $\nu = \nu_0$ , es la separatriz entre el flujo rotacional e irrotacional. Las condiciones de contorno son : la continuidad de  $\psi$  y de la presión (o de la velocidad) en  $\nu = \nu_0$ , es decir de  $\psi_\nu$ . La solución de (VII – 2) es

$$\psi_{ext} = \alpha\psi_1(\nu, \nu) + \beta\psi_2(\nu, \nu), \quad (VII - 3)$$



$$\psi_{int} = (\alpha + \beta)\psi_1(v, \nu) , \quad (VII - 4)$$

donde

$$\psi_1(v, \nu) = \cosh 2v - \cosh 2v_o + \left(1 - \frac{\cosh 2v}{\cosh 2v_o}\right) \cos 2\nu , \quad (VII - 5)$$

$$\psi_2(v, \nu) = 2(v - v_o) \sinh 2v_o - \frac{\sinh 2v_o}{\cosh 2v_o} \sinh 2(v - v_o) \cos 2\nu . \quad (VII - 6)$$

Esta solución guarda estrecha relación con los vórtices de Kirchhoff [46],[48], aunque el comportamiento en el infinito es diferente. En la función de corriente, tanto interna como externa, puede observarse una contribución  $\alpha(\cosh 2v + \cos 2\nu) = \frac{2\alpha}{c^2}r^2$ , correspondiente a una rotación rígida con velocidad angular

$$\Omega = \frac{4\alpha}{c^2} = kV_z , \quad (VII - 7)$$

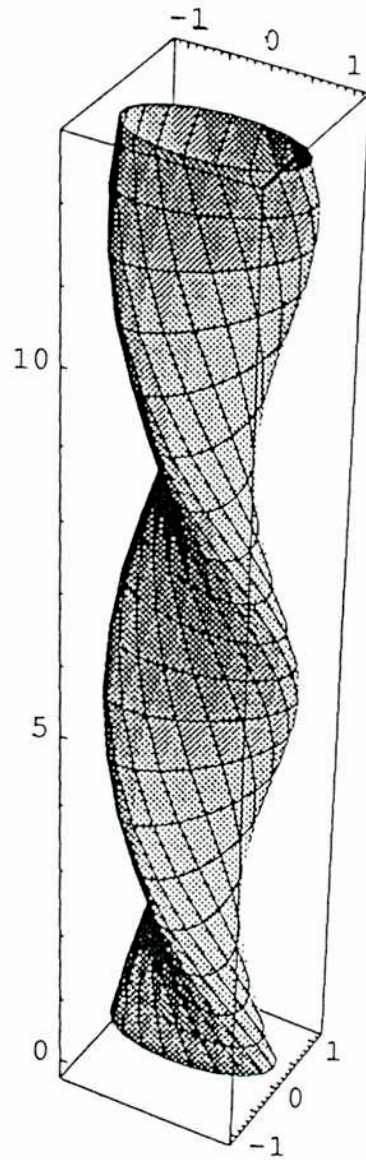
que es consecuencia de la helicidad del vórtice (que transforma parte de la velocidad axial en azimutal). La solución (VII - 6) está expresada en el referencial rotante (nótese que  $\psi_\nu = 0$  en  $v = v_o$ , es decir que la elipse que encierra la región de vorticidad es línea de corriente). En un referencial fijo, la solución externa, limitándose a los términos dominantes para  $r \rightarrow \infty$ , es de tipo cuadrupolar  $\psi_{ext} \propto x^2 - y^2$ .

La Fig. 3 muestra un vórtice de helicidad negativa tal como se lo vería en el referencial que rota solidariamente con él. La Fig.4 muestra distintos cortes transversales del vórtice y de la región irrotacional aledaña, con sus líneas de corriente ( isosuperficies de  $\psi = Cte$ ), para diferentes combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$ .

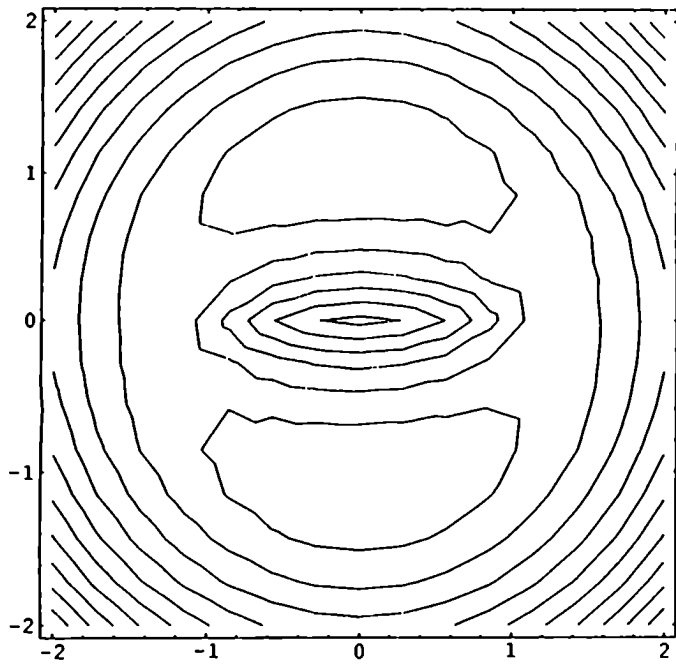
### Estudio de la solución exterior

Para fijar ideas, vamos a considerar un vórtice de helicidad  $k > 0$ , con  $V_z > 0$  y  $\omega_z > 0$ . En consecuencia,  $\alpha > 0$  y  $\beta = -c^2\omega_z/8 < 0$ . Asintóticamente, en el sistema rotante

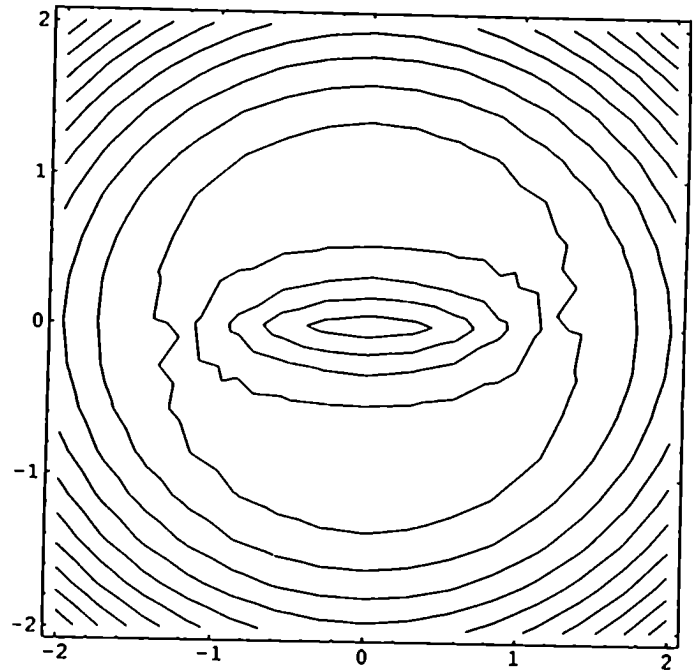
$$\psi_{ext} \approx \frac{\Omega}{2}r^2 + \frac{2}{c^2}\varepsilon_\infty(x^2 - y^2) , \quad (VII - 8)$$



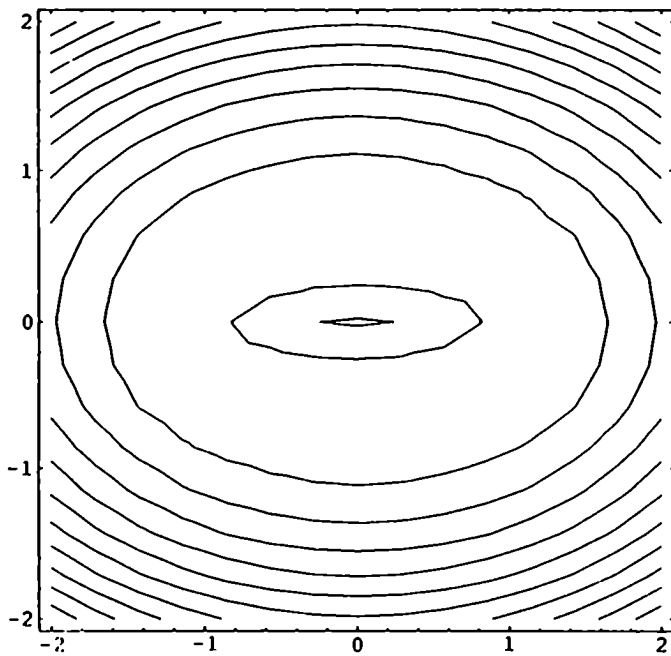
**Fig 3:** Vórtice de helicidad negativa, tal como se lo vería en un referencial que rota solidariamente con él.



(a)



(b)



(c)

**Fig 4:** Distintos cortes transversales del vórtice y de la región irrotacional aledaña, con sus líneas de corriente ( isosuperficies de  $\psi = Cte$ ), para diferentes combinaciones de  $\alpha$  y  $\beta$ . (a)  $\epsilon_\infty > 0$ ,  $\beta = -3.5$ . (b)  $\epsilon_\infty = 0$ ,  $\beta = -3$ . (c)  $\epsilon_\infty < 0$ ,  $\beta = -2$ . En todos los casos  $\alpha$  y  $v_0$  son 1.5 y .5 respectivamente.

$$\epsilon_{\infty} = \frac{\lambda^2 - 1}{\lambda^2 + 1} \left( |\beta| \frac{2\lambda}{(1 + \lambda)^2} - \alpha \right), \quad (VII - 9)$$

donde  $\lambda = a/b = \coth v_o$  es la relación entre los semiejes mayor y menor del vórtice. El signo de  $\epsilon_{\infty}$  depende, para una dada excentricidad  $\lambda$ , de la magnitud relativa de  $\Omega$  y  $\omega_z$  ( $\alpha$  y  $\beta$  respectivamente). Si  $\epsilon_{\infty} > 0$ , las líneas de corriente *lejos del vórtice* son elipses alargadas en la dirección  $y$ , con su eje mayor *ortogonal* al del vórtice (Fig.4a). Si  $\epsilon_{\infty} = 0$  las líneas de corriente son circunferencias (corresponden aproximadamente a la Fig.4b) y, finalmente, si  $\epsilon_{\infty} < 0$  el vórtice y el campo irrotacional están orientados en paralelo (Fig.4c). Puede observarse claramente en las Figs.4(a-b) (calculadas sin aproximaciones) que el vórtice se halla flanqueado por cuatro puntos de estancamiento: dos del tipo O situados arriba y abajo del mismo, y dos del tipo X, ubicados a sus costados. El rol de estos puntos es invertir el campo de velocidades, que es antihorario en el seno del vórtice y horario en la periferia. En consecuencia, un análisis de las fuerzas actuantes muestra que la fuerza de Coriolis es *centrípeta* lejos del vórtice y ayuda hasta cierto punto a mantenerlo en posición. Es sencillo calcular una presión *equivalente* a la fuerza de Coriolis; asintóticamente

$$p_C = \frac{4\Omega\rho}{c^2} [(\alpha + \epsilon_{\infty})x^2 + (\alpha - \epsilon_{\infty})y^2], \quad (VII - 10)$$

coincidiendo sus isobaras con las líneas de corriente (VII - 8). Nótese en la Fig.4a que es mayor la fuerza de Coriolis cerca de los puntos X (mayor compresión en la dirección del semieje mayor), lo que impide el aumento de la excentricidad, que traería aparejado un mayor *efecto hélice*. Esta estabilización, debida a la fuerza de Coriolis, se reduce al disminuir  $\epsilon_{\infty}$  y se convierte en *inestabilidad* si  $\epsilon_{\infty} < 0$ . En la Fig.4c hay mayor compresión en la dirección del semieje menor, lo que favorece el crecimiento de  $\lambda$  y provoca un valor más negativo de  $\epsilon_{\infty}$  según la ecuación (VII - 9), porque la expresión entre paréntesis es negativa. Esta inestabilidad se conoce en física del plasma con el nombre de *bucle*. El umbral del *bucle* es, por lo tanto,  $\epsilon_{\infty} = 0$  y la *región de estabilidad* queda delimitada por

la desigualdad

$$|\beta| \frac{2\lambda}{(1+\lambda)^2} > \alpha. \quad (VII - 11)$$

Es interesante considerar el caso de un vórtice circular que adquiere elipticidad por efecto de una perturbación con  $m = 2$ . La condición de estabilidad (VII - 11) se reduce al caso  $\lambda = 1$  y resulta ser  $\omega_z > 4\Omega$ .

### Estudio de la solución interior

El campo de velocidad en el interior del vórtice vale en el sistema rotante

$$v_x = \left(\Omega - \frac{\omega_z}{2}\right) \frac{2\lambda^2}{1+\lambda^2} y, \quad (VII - 12a)$$

$$v_y = -\left(\Omega - \frac{\omega_z}{2}\right) \frac{2}{1+\lambda^2} x. \quad (VII - 12b)$$

Este campo gira en dirección antihoraria si  $\omega_z > 2\Omega$ , y cambia de signo en caso contrario. La presión equivalente a la fuerza de Coriolis, que es anisótropa, como en la ecuación (VII - 10), resulta

$$p_C = \rho\Omega\left(\Omega - \frac{\omega_z}{2}\right) \frac{2}{1+\lambda^2} (x^2 + \lambda^2 y^2), \quad (VII - 13)$$

en tanto que la presión que soporta a las fuerzas inerciales  $\rho\vec{v} \cdot \nabla\vec{v} = -\nabla p_I$  es

$$p_I = \rho\left(\Omega - \frac{\omega_z}{2}\right)^2 \frac{2\lambda^2}{1+\lambda^2} r^2 \quad (VII - 14)$$

Obsérvese que  $p_C$  pasa de centrífuga a centrípeta cuando  $\Omega > \omega_z/2$ . Es usual en geodinámica de fluidos definir un *número de Rossby* como la relación entre las fuerzas inerciales y la de Coriolis. Para el caso  $\lambda = 1$  se puede utilizar el cociente  $p_I/p_C$ , adoptando el signo más conveniente para que el número de Rossby sea positivo en la región de interés

$$R_O = \frac{\omega_z/2 - \Omega}{2\Omega} = \frac{\omega_z}{4\Omega} - \frac{1}{2}. \quad (VII - 15)$$

Así definido,  $R_O$  es negativo para valores elevados de  $\Omega$ , pero en el régimen de estabilidad para *bucles*, discutido en la sección anterior,  $R_O > 1/2$ . Nótese que este número de Rossby difiere del utilizado por otros autores [49], y del que utilizaremos en el próximo capítulo. En particular, la longitud que interviene en (VII – 15) no es la dimensión transversal del vórtice sino el paso de la hélice, o longitud de onda característica.

### Conclusiones

Del estudio anterior resulta que la dinámica de un vórtice helicoidal de sección elíptica se puede clasificar de acuerdo a la relación entre la vorticidad  $\omega_z$  y la velocidad de rotación  $\Omega$ , dada por la ecuación VII–7 en términos de la velocidad axial y del paso de la hélice. Una manera conveniente de expresar tal relación es mediante el número de Rossby (VII – 15). Cuando  $R_O > 1/2$  el vórtice resulta estable debido a la acción de la fuerza de Coriolis en la zona irrotacional, que impide la formación de un *bucle*. En cambio, en el régimen  $R_O < 1/2$  las deformaciones con  $m = 2$ , son estimuladas por la fuerza de Coriolis, produciéndose una inestabilidad cuyo estado final, alcanzado tras un transitorio no lineal, es tal que presumiblemente  $\Omega > \omega_z/2$ , es decir que  $R_O < 0$ . En este régimen, la fuerza de Coriolis es centrípeta aun en la zona rotacional, y no se observan puntos de estancamiento internos, ya que el fluido gira en su totalidad en el mismo sentido. Esta situación de gran estabilidad, corresponde al régimen del *stellarator* en las máquinas de plasma. Representa, por supuesto, un estado en que la helicidad del vórtice se halla irreversiblemente consolidada, con elevadas velocidades de precesión angular  $\Omega$ . En el intervalo crítico  $0 < R_O < 1/2$  se produce la transición o *ruptura* del vórtice.

Si los experimentos logran confirmar cuantitativamente los distintos dominios de estabilidad representados en el parámetro  $R_O$ , la presente teoría podría explicar las observaciones de Guarga y colaboradores, quienes verificaron la ruptura de vórtices en el caso de difusores, pero no en conductos convergentes. En este último caso, el teorema de con-

servación de la circulación, permite prever un incremento aguas abajo de  $\omega_z$ , lográndose de tal modo un *anclaje* del vórtice a la configuración axisimétrica.

## CAPITULO VIII

### Flujos helicoidales en un expansor

Para establecer el problema de la aparición de FH en un expansor, consideramos un fluido perfecto e incompresible, con un núcleo rotacional [figura 5]. El flujo va de la primera región cilíndrica (aguas arriba) de radio  $b_1$ , a la segunda región (aguas abajo) de radio  $b_2$ , también cilíndrica y con el mismo eje.

En la primera región, asumimos un vórtice de Rankine, que consiste en un núcleo con rotación rígida de velocidad angular  $\Omega_o$ , rodeado por un vórtice potencial de intensidad  $\Gamma$ . La velocidad axial de ambos flujos es uniforme e igual a  $U_o$ . Luego las componentes cilíndricas del campo de velocidades  $(V_r, V_\theta, V_z)$  del vórtice de Rankine son

$$V_{r_o} = 0, \quad V_{\theta_o} = \begin{cases} \Omega_o r \\ \frac{\Gamma}{r} \end{cases}, \quad V_{z_o} = \begin{cases} U_o, & 0 \leq r \leq a_1 \\ U_o, & a_1 \leq r \leq b_1 \end{cases} \quad (VIII - 1)$$

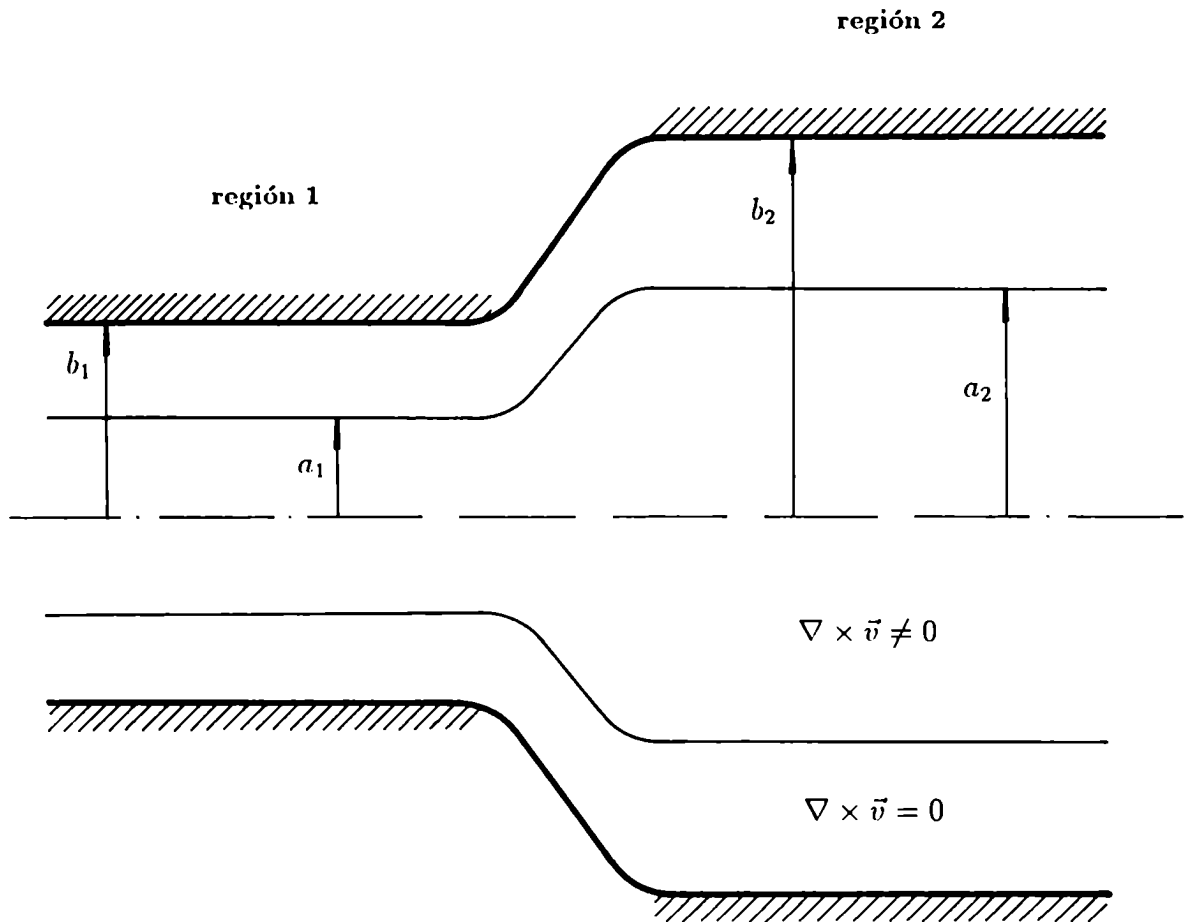
En la región aguas abajo el flujo puede ser estacionario y axisimétrico, o un flujo helicoidal, rotando con velocidad angular constante. Mientras las condiciones de existencia y la forma del primer flujo fue considerada por varios autores [39,50,51,57], aquí nos ocuparemos de la segunda clase de flujo.

De ahora en adelante diferenciaremos dos zonas en la región aguas abajo: la zona rotacional y la irrotacional. Cuando el flujo aguas abajo es axisimétrico, la forma más general de las componentes cilíndricas del campo de velocidades es [50,51]

$$V_{r_o} = 0, \quad V_{\theta_o} = \begin{cases} \Omega_o r + \gamma A J_1(\gamma r) \\ \frac{\Gamma}{r} \end{cases}, \quad V_{z_o} = \begin{cases} U_o + \gamma A J_0(\gamma r), & 0 \leq r \leq a_2 \\ BU_o, & a_2 \leq r \leq b_2 \end{cases}, \quad (VIII - 2)$$

$$A = \frac{U_o (a_1^2 - a_2^2)}{2a_2 J_1(\gamma a_2)}, \quad B = \frac{(b_1^2 - a_1^2)}{(b_2^2 - a_2^2)}, \quad \gamma = \frac{2\Omega_o}{U_o}. \quad (VIII - 3)$$





**Fig 5:** Expansor. Se distinguen dos regiones: aguas arriba o región 1 y aguas abajo o región 2. En cada región se distinguen dos zonas: rotacional ( $\nabla \times \vec{v} \neq 0$ ) e irrotacional ( $\nabla \times \vec{v} = 0$ ).

Mientras que  $a_2$  satisface la ecuación

$$\frac{(b_1^2 - a_1^2)}{(b_2^2 - a_2^2)} a_2 = a_2 + \frac{\gamma}{2} \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{J_1(\gamma a_2)} J_0(\gamma a_2) . \quad (VIII - 4)$$

En este tipo de problemas uno de los parámetros de control mide la relación entre la rotación y la traslación. Es el llamado número de Rossby que definimos como

$$\vartheta = \frac{U_o}{b_1 \Omega_o} . \quad (VIII - 5)$$

Cuando se aumenta la velocidad angular de rotación del vortice de Rankine, o más generalmente cuando se disminuye el número de Rossby, se produce el pasaje del flujo axisimétrico (FA) al FH que gira con velocidad constante [39]. Entonces para estudiar dicho FH, es conveniente introducir un sistema de referencia que rote con la misma velocidad angular  $\Omega$  de la hélice. En dicho sistema de referencia, la ecuación de equilibrio es

$$(\vec{\omega} + 2\Omega\vec{e}_z) \times \vec{v} = -\nabla H \quad (VIII - 6)$$

donde  $\vec{v}$  y  $\vec{\omega}$  representan la velocidad y la vorticidad relativa, y  $H$  es la función de Bernoulli

$$H = \frac{p}{\rho} + \frac{(v^2 - r^2 \Omega^2)}{2} \quad (VIII - 7)$$

que toma en cuenta la rotación, como un potencial centrífugo, siendo  $p$  la presión y  $\rho$  la densidad.

En la ecuación (VIII - 2) el campo de velocidades puede descomponerse en la suma de dos flujos, uno representando un vórtice de Rankine y el otro un flujo de Beltrami, representado por los términos que contienen a las funciones de Bessel. También es posible encontrar para el expansor (como ya lo habíamos señalado en el capítulo (VI) para un conducto cilíndrico), un flujo helicoidal para el cual  $\vec{\omega} = \gamma\vec{v}$ , o sea un flujo de Beltrami [52]. Entonces en nuestro problema, podríamos descomponer el FH en la suma de dos campos de velocidades, uno representando un flujo de Rankine y el otro un flujo de Beltrami.

$$\vec{v} = \vec{v}_R + \vec{v}_B, \quad \text{donde} \quad \nabla \times \vec{v}_B = \gamma\vec{v}_B . \quad (VIII - 8)$$

En el apéndice 2 demostramos que esta descomposición satisface la ecuación de Euler. Además, ya vimos que en la determinación de (VIII – 2) el valor de  $\gamma$  en cada zona es

$$\gamma = \frac{2\Omega_o}{U_o} \text{ (zona rotacional) } , \quad \gamma = 0 \text{ (zona irrotacional) } . \quad (\text{VIII} - 9)$$

La velocidad relativa  $\vec{v}$  y la vorticidad relativa  $\vec{\omega}$ , siguen cumpliendo las ecuaciones (VI – 13) y (VI – 14) en relación a la función de corriente y el flujo de vorticidad respectivamente, pero en el sistema rotante, este flujo tiene la siguiente forma

$$\chi = v_z + kr v_\theta + k\Omega r^2 \quad (\text{VIII} - 10)$$

Por lo tanto las ecuaciones equivalentes a (VI – 19) en este caso son

$$v_\theta = \frac{kr(\chi - k\Omega r^2) - \frac{\partial \psi}{\partial r}}{1 + k^2 r^2}, \quad v_z = \frac{\chi - k\Omega r^2 + kr \frac{\partial \psi}{\partial r}}{1 + k^2 r^2} . \quad (\text{VIII} - 11)$$

Las ecuaciones (VI – 13) muestran que la descomposición (VIII – 8) para el campo de velocidades, significa una separación en la función de corriente de la siguiente forma

$$\psi = \psi_R + \psi_B, \quad \text{con} \quad \psi_R = Cr^2 + D \ln(r) + E , \quad (\text{VIII} - 12)$$

donde  $C, D, E$  son constantes que toman diferentes valores en cada zona. Para el flujo de Beltrami se cumple que

$$\chi_B = \gamma \psi_B , \quad (\text{VIII} - 13)$$

lo que se demuestra a partir de (VI – 13) y (VI – 14) partiendo de su definición. Entonces la ecuación de Grad-Shafranov (VI – 23) adquiere la forma

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)}{1 + k^2 r^2} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \phi^2} = - \frac{\gamma^2 \psi}{1 + k^2 r^2} + \frac{2k\gamma\psi}{(1 + k^2 r^2)^2} , \quad (\text{VIII} - 14)$$

ya que  $\nabla H_B = 0$  [apéndice 2], con  $\gamma$  dada por (VIII – 9).

La solución de la ecuación (VIII – 14) en la zona irrotacional es [53,44]

$$\psi_B = -r \sum_{n=1}^{n=\infty} [c_n I'_n(nkr) + d_n K'_n(nkr)] \cos(n\phi) , \quad (\text{VIII} - 15)$$

donde  $I_n, K_n$  son funciones de Bessel, y la prima indica derivación, siendo  $c_n, d_n$  constantes. Mientras que la solución en la zona rotacional es [44]

$$\psi_B = \hat{c}_0 \left( J_0(\gamma r) + kr J_1(\gamma r) \right) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \hat{d}_n \left[ \gamma I_n(\alpha_n r) - k \alpha_n r I'_n(\alpha_n r) \right] \cos(n\phi), \quad (VIII - 16)$$

donde  $\hat{c}_0$  y  $\hat{d}_n$  son constantes y

$$\alpha_n^4 = (n^2 k^2 - \gamma^2)^2, \quad \hat{c}_{n \geq M} = \hat{d}_{n < M} = 0, \text{ con } \frac{\gamma}{k} + 1 \geq M > \frac{\gamma}{k}.$$

Para determinar el valor de las constantes, hay que establecer las condiciones de frontera entre ambas zonas y con la pared.

Notamos aquí que el flujo dado por (VIII - 2) puede obtenerse considerando cero todas las constantes para  $n \neq 0$  en las ecuaciones (VIII - 15) y (VIII - 16). Estos términos representan, añadiendo el correspondiente vórtice de Rankine, la forma general del equilibrio helicoidal. Más adelante mostraremos un caso particular, que puede derivarse perturbando el flujo axisimétrico.

### Análisis de las condiciones de contorno y de la estabilidad en el caso $n=1$

Vamos a perturbar linealmente la solución (VIII - 2), con el objeto de mostrar que es posible obtener un FH del tipo previamente descrito. Para ello hacemos la hipótesis de simetría helicoidal en la región aguas abajo, lo cual supone que para describir el flujo, estamos lejos de la zona de transición, y que el cilindro de radio  $b_2$  se extiende hasta el infinito. Escribiendo las ecuaciones de Euler en el sistema del laboratorio, linealizadas alrededor del equilibrio axisimétrico (VIII - 2), utilizando las relaciones (VI - 10) y (VI - 11), obtenemos

$$\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{V_{\phi_0}}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - 2 \frac{V_{\theta_0}}{r} v_\theta = - \frac{\partial \delta P}{\partial r}, \quad (VIII - 17a)$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \frac{V_{\phi_0}}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} + \left( \frac{dV_{\theta_0}}{dr} + \frac{V_{\theta_0}}{r} \right) v_r = - \frac{1}{r} \frac{\partial \delta P}{\partial \phi}, \quad (VIII - 17b)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial t} + \frac{V_{\phi_0}}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{dV_{z_0}}{dr} v_r = k \frac{\partial \delta P}{\partial \phi} , \quad (VIII - 17c)$$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} - k \frac{\partial v_z}{\partial \phi} + \frac{v_r}{r} = 0 , \quad (VIII - 17d)$$

donde  $V_{\phi_0} = V_{\theta_0} - krV_{z_0}$  ,  $P = \frac{p}{\rho}$  y (VIII - 17d) es la ecuación de continuidad.

Un análisis similar fue realizado por Lessen *et al.* [54], quién consideró como flujo de equilibrio el vórtice de Rankine, pero con un flujo irrotacional ilimitado. Luego asumimos perturbaciones con simetría helicoidal para el campo de velocidades y la presión de la forma

$$\{v_r, v_\theta, v_z, \delta P\} = \{f(r), g(r), h(r), \pi(r)\} e^{in\phi - i\beta t} . \quad (VIII - 18)$$

El factor  $\beta$ , es un coeficiente complejo, cuya parte real representa la velocidad angular de rotación de la hélice ( $\Omega$ ), mientras que la parte imaginaria determina la estabilidad del flujo axisimétrico de equilibrio. Luego las ecuaciones (VIII - 17) adquieren la forma

$$-\frac{d\pi}{dr} = if \left( \frac{nV_{\theta 0}}{r} - knV_{z_0} - \beta \right) - 2g \frac{V_{\theta 0}}{r} , \quad (VIII - 19a)$$

$$-\frac{in\pi}{r} = ig \left( \frac{nV_{\theta 0}}{r} - knV_{z_0} - \beta \right) + f \left( \frac{dV_{\theta 0}}{dr} + \frac{V_{\theta 0}}{r} \right) , \quad (VIII - 19b)$$

$$ikn\pi = ih \left( \frac{nV_{\theta 0}}{r} - knV_{z_0} - \beta \right) + f \frac{dV_{z_0}}{dr} , \quad (VIII - 19c)$$

$$iknh = \frac{1}{r} \left( \frac{d(rf)}{dr} + ing \right) . \quad (VIII - 19d)$$

La solución para la zona irrotacional, se obtiene considerando que  $v_r = 0$  para  $r = b_2$ . Esta solución está dada para ( $a_2 \leq r \leq b_2$ ) por

$$f_I = \left( \frac{i}{kn} \right) \frac{dh_I}{dr} , \quad g_I = -\frac{h_I}{kr} , \quad (VIII - 20a)$$

$$h_I = C_{2n} \left[ I_n(nkr) - \frac{I'_n(nkb_2)}{K'_n(nkb_2)} K_n(nkr) \right] . \quad (VIII - 20b)$$

En efecto, la forma general de  $h_I$  es  $h_I = C_{I_n} I_n(nkr) + D_{I_n} K_n(nkr)$ , y la condición  $v_r(b_2) = 0$  implica por (VIII-20a) que  $C_{I_n} I'_n(nkb_2) + D_{I_n} K'_n(nkb_2) = 0$ , de donde se deduce (VIII-20b).

De (VIII-19b) y (VIII-19c) obtenemos para la zona rotacional la siguiente relación

$$g_R = -\frac{h_R}{kr} - i\frac{\gamma}{kn} f_R + \frac{i}{k} \frac{[-2\Omega_o kr - \frac{\gamma}{n}(-\beta + n(\Omega_o - kU_o))r]}{n\gamma A \hat{\psi}(r) + (-\beta + n(\Omega_o - kU_o))r} f_R, \quad (VIII-21)$$

con  $\hat{\psi}(r) = J_1(\gamma r) - kr J_o(\gamma r)$ .

Si  $\beta = n\Omega_o$ , se anula el numerador del último término de (VIII-21) (tomando en cuenta (VIII-9)), entonces se verifican las siguientes soluciones para el sistema (VIII-19)

$$f_R = -iC_{R_n} \left[ \frac{\alpha_n}{k} I'_n(\alpha_n r) - \frac{\gamma}{k^2 r} I_n(\alpha_n r) \right]$$

$$g_R = C_{R_n} \left[ \frac{n}{kr} I_n(\alpha_n r) - \frac{\alpha_n \gamma}{k^2 n} I'_n(\alpha_n r) \right], \quad h_R = -C_{R_n} \frac{\alpha_n}{k^2 n} I_n(\alpha_n r), \quad (VIII-22)$$

donde las constantes  $C_{R_n}, C_{I_n}$  deben determinarse a través de las condiciones de vínculo y continuidad.

Luego desde un marco de referencia que gire con  $\Omega$  el campo de velocidad relativo

$$\vec{v} = C_{R_n} \left[ \left[ \frac{\alpha_n}{k} I'_n(\alpha_n r) - \frac{\gamma}{k^2 r} I_n(\alpha_n r) \right] \sin(n\phi) \hat{r} \right. \\ \left. + \left[ \frac{n}{kr} I_n(\alpha_n r) - \frac{\alpha_n \gamma}{k^2 n} I'_n(\alpha_n r) \right] \cos(n\phi) \hat{\theta} + \frac{\alpha_n}{k^2 n} I_n(\alpha_n r) \cos(n\phi) \hat{z} \right], \quad (VIII-23)$$

lo que se puede verificar tomando la parte real de (VIII-18). Pero esto no es otra cosa que un flujo de Beltrami [44], lo cual puede verificarse directamente.

Para poder determinar el campo, estudiamos el caso especial  $n = 1$  que junto con  $n = 0$ , parece ser el más relevante en el problema. Seguimos un procedimiento debido a Lessen [54], que consiste en expresar la coordenada que separa las dos zonas como

$$r_f = a_2 + \delta, \quad \delta = \tilde{A} e^{in\phi - i\beta t}. \quad (VIII-24)$$

En primer lugar pedimos que las presiones en la frontera sean iguales. Expresamos a la presión como la suma de la presión correspondiente al problema axisimétrico más la variación de presión debida a la perturbación. Si denominamos a la primera como  $\mathcal{P}_i$  y a la segunda como  $\Delta p_i = \rho \pi_i$ , donde  $i = R, I$  indican la zona rotacional e irrotacional respectivamente, entonces la continuidad de la presión en la frontera se expresa

$$\mathcal{P}_R(a_2 + \delta) + \Delta p_R = \mathcal{P}_I(a_2 + \delta) + \Delta p_I . \quad (VIII - 25)$$

Ahora desarrollamos  $\mathcal{P}_i$  a primer orden en  $\delta$

$$\mathcal{P}_i(a_2 + \delta) = \mathcal{P}_i(a_2) + \frac{d\mathcal{P}_i(a_2)}{dr} \delta , \quad i = R, I . \quad (VIII - 26)$$

Como  $\mathcal{P}_R(a_2) = \mathcal{P}_I(a_2)$ , de las dos ecuaciones anteriores se deduce

$$\frac{d\mathcal{P}_R(a_2)}{dr} \delta + \Delta p_R = + \frac{d\mathcal{P}_I(a_2)}{dr} \delta + \Delta p_I . \quad (VIII - 27)$$

Pero para el equilibrio axisimétrico se cumple

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathcal{P}}{dr} = \frac{V_{\theta_o}^2}{r} , \quad (VIII - 28)$$

por lo que la ecuación (VIII - 27) adquiere la forma

$$\frac{V_{\theta_o R}^2(a_2)}{a_2} \tilde{A} + \pi_R(a_2) = \frac{V_{\theta_o I}^2(a_2)}{a_2} \tilde{A} + \pi_I(a_2) . \quad (VIII - 29)$$

Notar que una variación de  $\Delta p_i$  con relación a  $\delta$ , sería de segundo orden, por lo que  $\pi_i$  debe evaluarse en  $a_2$ . La otra condición que pedimos es que la velocidad radial en cada zona sea la misma en la frontera. Dado que las velocidades radiales del FA son iguales, esta condición implica que deben igualarse la velocidad del desplazamiento de la frontera ( $\dot{\delta}$ ) y la velocidad radial perturbada en cada zona

$$\frac{d\delta}{dt} = \frac{\partial \delta}{\partial t} + (\vec{V}_o \cdot \nabla) \delta = v_r . \quad (VIII - 30)$$

Luego de la igualdad de la velocidad radial en la frontera resulta

$$-in\Omega_o\delta + (\vec{V}_{oR}(a_2) \cdot \nabla)\delta = v_{rR}(a_2) , \quad (VIII - 31a)$$

$$-in\Omega_o\delta + (\vec{V}_{oI}(a_2) \cdot \nabla)\delta = v_{rI}(a_2) . \quad (VIII - 31b)$$

El conjunto de ecuaciones (VIII-4),(VIII-29) y (VIII-31) constituyen las condiciones de vínculo. Nos interesa su dependencia con el parámetro de control del problema, que es el número de Rossby (VIII-5) . Con este propósito, adimensionalizamos todas las cantidades de la siguiente forma:  $r \rightarrow r/b_1$  ,  $\Omega \rightarrow \Omega/\Omega_o$  ,  $v \rightarrow v/U_o$ . Esto permite escribir los flujos en función de  $\vartheta$ .

$$\text{Campo sin perturbar} \begin{cases} V_{\theta_{oR}} = \frac{r}{\vartheta} + \gamma \hat{A} J_1(\gamma r) , \hat{A} = \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{2a_2 J_1(\gamma a_2)} , \gamma = \frac{2}{\vartheta} \\ V_{\theta_{oI}} = \frac{a_1^2}{r\vartheta} , \Gamma = \frac{a_1^2}{\vartheta} \\ V_{z_{oR}} = 1 + \gamma \hat{A} J_o(\gamma r) \\ V_{z_{oI}} = \frac{1 - a_1^2}{b_2^2 - a_2^2} \end{cases} \quad (VIII - 32)$$

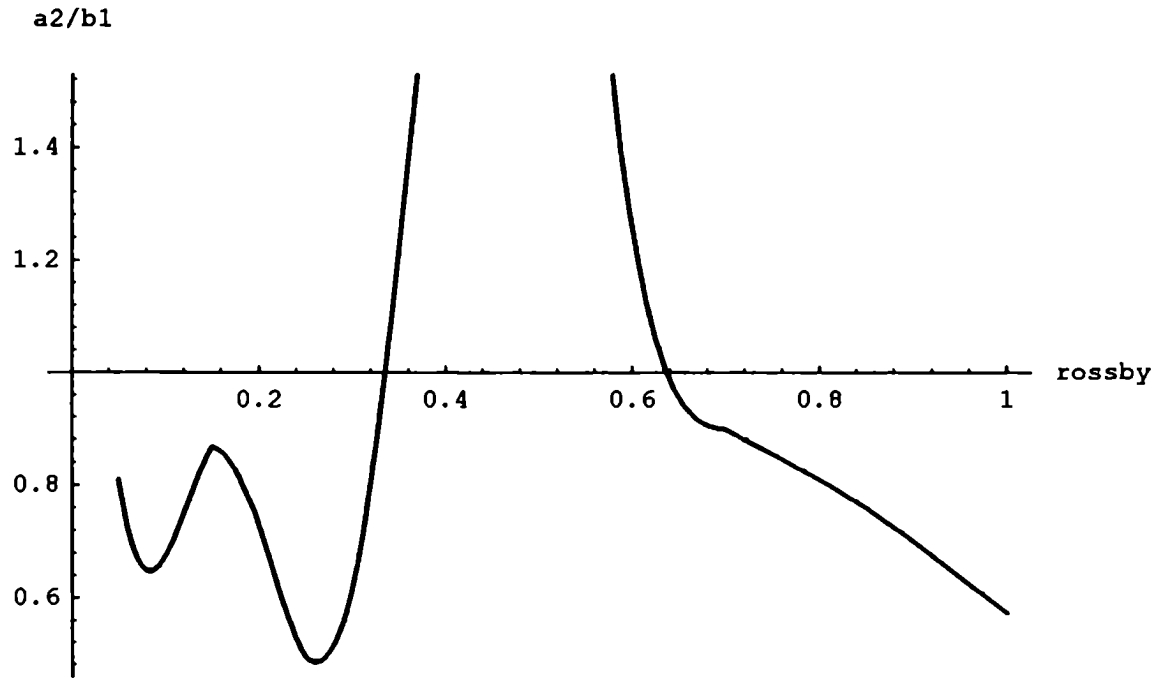
$$\text{Perturbación del campo} \begin{cases} f_R = C_R \left[ \frac{\alpha_n}{k} I_n'(\alpha_n r) - \frac{\gamma}{k^2 r} I_n(\alpha_n r) \right] \\ g_R = C_R \left[ \frac{n}{kr} I_n(\alpha_n r) - \frac{\alpha_n \gamma}{k^2 n} I_n'(\alpha_n r) \right] \\ h_R = C_R \frac{\alpha_n}{k^2 n} I_n(\alpha_n r) , \alpha_n^2 = n^2 k^2 - \frac{4}{\vartheta^2} \end{cases} \quad (VIII - 33)$$

Observamos que  $f_R, g_R, h_R$  conservan sus expresiones, es decir como es natural no dependen del número de Rossby que caracteriza a la zona rotacional. Finalmente la ecuación para  $a_2$  es

$$\frac{1 - a_1^2}{b_2^2 - a_2^2} a_2 = a_2 + \frac{\gamma}{2} \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{J_1(\gamma a_2)} J_0(\gamma a_2) . \quad (VIII - 34)$$

En la figura 6, mostramos la variación de  $a_2$  en función de  $\vartheta$ . Esto se hace para  $b_2 = 1.3, a_1 = .272$ , que son los datos que utilizan el Ingeniero Guarga *et al.* en sus experimentos. Notamos que no hay solución entre  $.35 < \vartheta < .65$ , ya que en ese caso  $a_2 > b_2$ , y no corresponde a una solución física del problema. Para obtener este gráfico, se utilizó el programa MATHEMATICA 2.2 (que es un poderoso instrumento que combina cálculo





**Fig 6:** Radio de la expansión axisimétrica del núcleo rotacional aguas arriba  $a_2$  medida en unidades de  $b_1$  (radio del cilindro aguas abajo) en función del número de Rossby  $\vartheta$ , para  $\frac{a_1}{b_1} = .272$  y  $\frac{b_2}{b_1} = 1.3$ . Se observa que para  $0.35 < \vartheta < .65$ , el radio de la expansión supera el valor del radio del cilindro aguas arriba, por lo que no corresponde a una solución física del problema.

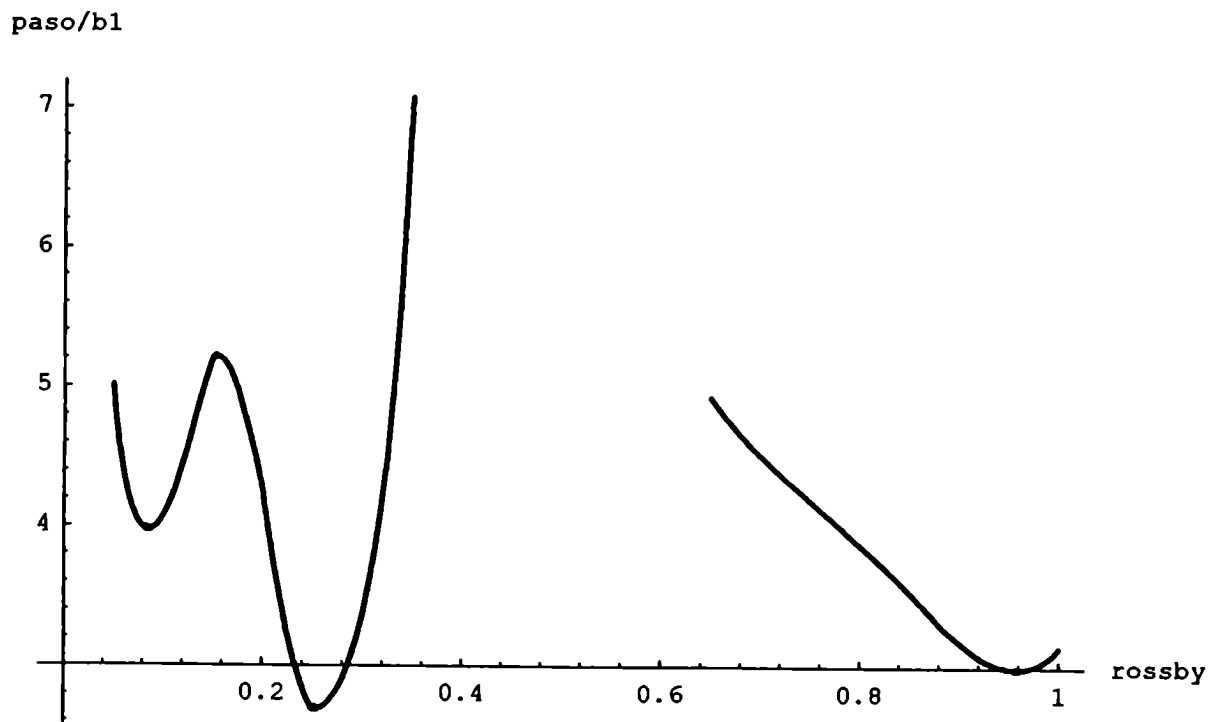
algebraico y numérico). Se definió la función  $y(a_2) = \frac{1-a_1^2}{b_2^2-a_2^2}a_2 - a_2 - \frac{\gamma}{2} \frac{(a_1^2-a_2^2)}{J_1(\gamma a_2)} J_0(\gamma a_2)$ , y se encontraron las raíces mediante el programa FindRoot que utiliza el método de Newton. Se recorrió el rango  $0.05 < \vartheta < 1$ . con un paso  $\Delta\vartheta = 0.05$ . Luego se interpolaron los valores resultantes de  $a_2$ , para obtener la función  $a_2 = a_2(\vartheta)$  que se grafica en la figura 6. Observamos que en el rango  $0.05 \leq \vartheta \leq 0.35$ , el comportamiento de  $a_2$  es oscilatorio, y ello se debe a que para números de Rossby bajos las funciones de Bessel  $J_0(2a_2/\vartheta)$  y  $J_1(2a_2/\vartheta)$  son oscilantes.

Particularizamos el conjunto de ecuaciones de vínculo, al caso  $n = 1$ , en el cual tenemos una hélice rotando con la misma velocidad angular  $\Omega_o$  que posee el vórtice de Rankine. En esa situación la figura 7 representa el paso de la hélice en función de  $\vartheta$ . Este es justamente uno de los parámetros que caracteriza el equilibrio del FH, el otro es la velocidad  $\Omega$  de rotación de la hélice. Esta figura se realizó, obteniendo las raíces del determinante del sistema lineal (VIII – 29) y (VIII – 31) en función del número de Rossby y luego se interpolaron los valores de  $p = 2\pi/k$ .

Para determinar la estabilidad de este FH, así como la del FA, se puede utilizar la técnica desarrollada en el capítulo (II). Notemos que por el isomorfismo expresado en el capítulo (VI) entre los equilibrios hidrodinámico e hidromagnético, el mismo procedimiento desarrollado por Minardi, es aplicable a  $\vec{\omega}$ . En este caso la energía colectiva (III – 12), adquiere la forma

$$\Phi[\vec{\omega}(\vec{x})] = \int_{V_1} (\vec{\omega}(\vec{x}) - \vec{\omega}_o) \cdot (\vec{A}(\vec{x}) - \vec{A}_o) dV, \quad \nabla \times \vec{A} = \vec{v}, \quad (VIII - 35)$$

y aquí la integración debe hacerse sobre un volumen igual a una sección del flujo rotacional y la unidad de longitud según  $z$ , siendo  $\vec{\omega}_o, \vec{A}_o$  la vorticidad y el potencial vector promedio en dicho volumen. En este caso  $\Phi$  es proporcional a la energía cinética más términos de superficie. Es necesario determinar  $\Phi$ , tanto para el FH como para el FA, en función de



**Fig 7:** Paso de la hélice correspondiente al modo  $n = 1$  medido en unidades de  $b_1$  (radio del cilindro aguas abajo) en función del número de Rossby  $\vartheta$ , para  $\frac{a_1}{b_1} = .272$  y  $\frac{b_2}{b_1} = 1.3$ . No se grafica en el rango  $0.35 < \vartheta < .65$ , para el cual el radio de la expansión supera el valor del radio del cilindro aguas arriba, por lo que no corresponde a una solución física del problema.

$\vartheta$ , y el signo de  $\Phi$  (ver cap (II)) correspondiente a cada equilibrio, determinará la estabilidad del mismo. Recordemos que si  $\Phi > 0$  el flujo es inestable y si  $\Phi < 0$  es estable.

Con el objeto de hallar  $\Phi$  en el caso de FH, escribimos el campo estacionario equivalente, consistente en una rotación del mismo como un rígido, más el campo relativo a un marco que rote con  $\Omega$  (aquí  $\Omega_o$ )

$$\vec{v}_{FH} = \left[ \frac{2r}{\vartheta} + \gamma \hat{A} J_1(\gamma r) \right] \hat{\theta} + \left[ 1 + \gamma \hat{A} J_o(\gamma r) \right] \hat{z} + C_R [f_R \sin \phi \hat{r} + g_R \cos \phi \hat{\theta} + h_R \cos \phi \hat{z}]. \quad (VIII - 36)$$

Notemos que es la suma de un flujo de Rankine más uno de Beltrami. A este campo le corresponde la siguiente función de corriente

$$\psi = \left( k - \frac{2}{\vartheta} \right) \frac{r^2}{2} + \hat{A} [J_o(\gamma r) + k r J_1(\gamma r)] + \frac{C_R}{k^2} [\gamma I_1(\alpha_1 r) - k \alpha_1 r I_1'(\alpha_1 r)] \cos \phi. \quad (VIII - 37)$$

De (VIII - 36) y (VIII - 37) se deducen, tomando  $A_r = 0$  (lo que significa fijar un gauge)

$$FH \begin{cases} A_{z_{FH}} = -\frac{r^2}{\vartheta} + \hat{A} J_o(\gamma r) - C_R \left[ \frac{1}{k} \left[ \int_0^r I_o(\xi) d\xi - I_1(\alpha_1 r) \right] - \frac{\gamma}{k^2} I_1(\alpha_1 r) \right] \cos \phi \\ A_{\theta_{FH}} = \frac{\psi - A_z}{kr} \\ \omega_{z_{FH}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r V_{\theta_o R} + C_R g_R \cos \phi) - \frac{1}{r} C_R f_R \cos \phi \\ \omega_{\theta_{FH}} = -k C_R f_R \cos \phi - \frac{\partial}{\partial r} [V_{\theta_o R} + C_R h_R \cos \phi] \end{cases} \quad (VIII - 38)$$

El problema de determinar las constantes  $\hat{A}, C_R, C_I$  no puede ser resuelto sólo por las condiciones de frontera que hemos utilizado para obtener el paso de la hélice. Deberíamos realizar un análisis no lineal que es muy complejo dado que debe determinarse en forma autoconsistente los campos y las coordenadas de la frontera. Otra manera de hacerlo sería plantear el empalme entre el flujo aguas arriba y el flujo aguas abajo. Puesto que el fluido es incompresible, el caudal se conserva. Por otro lado, la geometría del sistema es invariante frente a rotaciones lo cual implica que el flujo de momento angular según  $z$  se conserva (no es invariante frente a traslaciones, dado que hay un ensanchamiento en la zona de

transición, y por ello no se conserva el impulso lineal). Estas condiciones se escriben

$$\int_{C_{R1}} v_{z1} dA = \int_{C_{R2}} v_{z2} dA , \quad (VIII - 39)$$

$$\int_{C_{R1}} r v_{\theta1} v_{z1} dA = \int_{C_{R2}} r v_{\theta2} v_{z2} dA , \quad (VIII - 40)$$

donde  $C_{R1}, C_{R2}$  representan los contornos de las fronteras rotacionales aguas arriba y aguas abajo respectivamente. Nuevamente, el cálculo es muy complejo porque el contorno  $C_{R2}$  debe obtenerse simultáneamente con las constantes. Y este cálculo se hará en el futuro.

Para el FA tenemos

$$FA \begin{cases} A_{z_{FA}} = -\frac{r^2}{\vartheta} + \hat{A} J_0(\gamma r) \\ A_{\theta_{FA}} = \frac{r}{2} + \hat{A} J_1(\gamma r) \\ \omega_{\theta_{FA}} = -\gamma^2 \hat{A} \left[ J_0(\gamma r) - \frac{1}{\gamma r} J_1(\gamma r) \right] \\ \omega_{z_{FA}} = \left[ \frac{4}{\vartheta} + \hat{A} \gamma J_0(\gamma r) \right] , \quad \hat{A} = \frac{(a_1^2 - a_2^2)}{2a_2 J_1(\gamma a_2)} \end{cases} \quad (VIII - 41)$$

Desarrollamos el cálculo de  $\Phi_{FA}$  con el MATHEMATICA 2.2, llegando a los resultados de la tabla 1. Como se ve, el FA es estable para  $\vartheta$  entre .65 y 1. Puede observarse que los valores de  $\Phi_{FA}$  varían suavemente en este rango, mientras que tienen un comportamiento irregular en el rango de  $\vartheta$  por debajo de 0.35. Esto obedece a dos razones: una es el comportamiento oscilatorio de las funciones de Bessel que se encuentran en las fórmulas (VIII - 41) para números de Rossby bajos, y que cambia también los valores del límite de integración según  $r$  que es  $a_2$ . La otra razón tiene que ver con la desaparición de la solución axisimétrica para  $\vartheta \approx 0.35$  valores para los cuales  $a_2$  crece rápidamente, y esto implica que el valor de  $\Phi_{FA}$  para  $\vartheta = 0.35$  no es confiable. Una tarea para el futuro será entonces, estudiar esta transición en la que desaparece el FA, y realizar un análisis más fino de la variación de  $a_2$  con  $\vartheta$  para este rango. De todas formas, esta tabla nos permite establecer en forma cualitativa que el FA es esencialmente inestable para  $\vartheta$  por debajo de

.35, y esto sugiere que es en este rango donde podrán observarse más fácilmente FH. De hecho Guarga *et al.* observan con estos datos FH para  $\vartheta \approx 0.2$ .

$\vartheta$	$\Phi_{FA}$
0.05	819.5
0.1	783.76
0.15	13.12
0.2	63.95
0.25	-5.62
0.3	0.047
0.35	5461.77
0.65	-0.64
0.7	-0.33
0.75	-0.18
0.8	-0.1
0.85	-0.06
0.9	-0.03
0.95	-0.014
1.	-0.007

**Tabla 1**

### Discusión y conclusiones

Hemos señalado que en un expansor, el flujo axisimétrico que se obtiene aguas abajo, a partir de un vórtice de Rankine aguas arriba, se descompone en un campo de velocidades

de Rankine más uno de Beltrami ( $\vec{\omega} = \gamma\vec{v}$ ). Existe un parámetro de control en el problema, que es el número de Rossby (VIII – 5). Cuando este número disminuye [39], el FA pierde estabilidad y se transforma en un FH que gira con velocidad angular constante.

Este flujo helicoidal puede también descomponerse en un campo de Rankine y uno de Beltrami. En ese caso, los valores de  $\gamma$  son  $2\Omega_o/U_o$  y 0 para la zona rotacional e irrotacional respectivamente. Las soluciones generales de los flujos vienen dadas por las expresiones (VIII – 12), (VIII – 15) y (VIII – 16). Para poder determinar las constantes arbitrarias de tales soluciones, es necesario resolver las condiciones de vínculo y continuidad. Pero las coordenadas de la frontera se deben determinar simultáneamente con el campo de velocidades, por lo cual es un problema autoconsistente. Debe entonces, desarrollarse una aproximación perturbativa de la frontera, que permita determinar el campo de velocidades. En una primera instancia, se perturbó linealmente el FA, mediante una perturbación con simetría helicoidal del tipo  $e^{in\phi - i\beta t}$ . Encontramos que para  $\beta = n\Omega_o$  (donde  $\Omega_o$  es la velocidad angular del vórtice de Rankine aguas arriba), la perturbación adquiere la forma de un flujo de Beltrami, visto desde un marco de referencia que gira con  $\Omega = n\Omega_o$ . Particularizamos la solución al caso  $n = 1$ , que se considera el más importante junto a  $n = 0$  en este problema. En esa situación, la perturbación consiste en un flujo de Beltrami que gira con  $\Omega_o$ . El campo total resulta uno de Rankine más uno de Beltrami relativo al sistema rotante. Para plantear las condiciones de vínculo en la frontera rotacional-irrotacional, asumimos una perturbación de la misma similar a la del campo de velocidades, y las establecemos mediante un desarrollo lineal. El sistema lineal tendrá solución si su determinante se anula, y de esta condición obtenemos el paso de la hélice en función del número de Rossby. Sin embargo, para poder determinar las constantes es necesario realizar la vinculación aguas arriba-aguas abajo. Esta se traduce en la conservación del caudal y en la conservación del flujo de momento angular según  $z$ . Para realizar este cálculo es necesario conocer el contorno de la frontera rotacional-irrotacional, es decir, es un cálculo autoconsistente que

se deja para el futuro.

Se estudió la estabilidad del FA (la del FH se estudiará cuando el campo sea determinado). En el cálculo de la estabilidad se usa la técnica desarrollada por Minardi, que es idénticamente aplicable en esta configuración, debido al isomorfismo establecido entre el equilibrio hidrodinámico y el hidromagnético. Para ello hallamos los valores de la energía colectiva  $\Phi[\vec{\omega}(\vec{x})] = \int_{V_1} (\vec{\omega}(\vec{x}) - \vec{\omega}_o) \cdot (\vec{A}(\vec{x}) - \vec{A}_o) dV$ , correspondiente al FA, en función del número de Rossby. La tabla 1 muestra que el FA es inestable para  $\vartheta < 0.35$  (en virtud de los datos experimentales concretos utilizados), rango en el cual su comportamiento es muy irregular. Mientras que parece ser estable para valores de  $\vartheta$  comprendidos entre 0.65 y 1. De hecho, en los experimentos de Guarga *et al.*, se obtiene FH para  $\vartheta \approx 0.2$ . Dada la irregularidad observada en el rango  $\vartheta \leq 0.35$ , es necesario realizar un análisis más fino de esta zona y de la transición que se produce para  $\vartheta \geq 0.35$  donde el FA desaparece.

El hecho de haber obtenido un FH, perturbando un FA, y tomando en cuenta que este último es inestable en el rango donde se observa FH, permite conjeturar que se trataría de una bifurcación [56]. Dado que hemos obtenido una hélice rotante, y que hélices rotantes se observan experimentalmente, esto sugiere que la bifurcación es una bifurcación de Hopf, con  $\vartheta$  como parámetro de control. Pero también ha sido reportado [39] que dos soluciones o ninguna pueden existir para el FA, siendo una de las dos soluciones inestable, dependiendo además del cociente  $b_2/b_1$  entre los radios de los cilindros del expansor. En efecto, Guarga *et al.* definen los parámetros  $\delta_A = \frac{b_1}{a_1}$ ,  $\delta_B = \frac{b_2}{a_1}$ ,  $\beta = \frac{a_2}{a_1}$  y  $K = \frac{2a_1\Omega_e}{U_o}$ . Y muestran que para  $\delta_A = 3$  y  $K = 2$ , existen dos soluciones para  $\delta_B = 3.02$ , una con  $\beta \approx 1.02$  que es estable, y otra con  $\beta \approx 1.25$  que es inestable. Si  $\delta_B = 3.08$ , encuentran una solución estable para  $\beta \approx 1.13$  y si  $\delta_B = 3.1$ , no existe solución. Obsérvese que  $\epsilon = \frac{\delta_B}{\delta_A} = \frac{b_2}{b_1}$ , y cambiar  $\delta_B$  ( $\delta_A$  queda fijo), equivale a cambiar el parámetro  $\epsilon$ . Entonces conjeturamos que otro posible parámetro de control del problema es  $\epsilon = b_2/b_1$ , (que caracteriza la expansión) y su variación podría conducir a una bifurcación de saddle-node. Esto sugiere una bifurcación



de codimensión dos, en la cual habría que estudiar como se relacionan los dos tipos de bifurcaciones mencionados.

Los caminos sugeridos para realizar esto son dos: uno es realizar un desarrollo perturbativo de la frontera y de las relaciones de vínculo de los campos sobre ella, con el objeto de obtener el comportamiento no lineal de los flujos a través de la determinación de las constantes que los caracterizan. El otro sería realizar un procedimiento similar para las condiciones de vínculo en la frontera al realizado aquí, pero permitiendo que en  $\delta = \tilde{A}e^{in\phi - i\beta t}$ ,  $\tilde{A} = \tilde{A}(t)$  varíe temporalmente, y hacer un desarrollo no lineal en  $\tilde{A}$  para obtener la ecuación dinámica del problema [55]. Observamos que la ecuación de Grad-Shafranov (VIII – 14) es lineal, por lo que la no linealidad del problema se encuentra en la frontera y estas bifurcaciones se deberían a las condiciones de vínculo del problema. Problema que es muy complejo y donde algo se ha hecho, pero hay mucho por hacer.

## APENDICE 1

En este apéndice demostramos que bajo la hipótesis de simetría helicoidal la cantidad  $\chi = v_z + kr v_\theta$  es un invariante dinámico para un fluido ideal. La ecuación de equilibrio es  $\vec{\omega} \times \vec{v} = -\nabla H$ , con  $\vec{\omega} = \nabla \times \vec{v}$ . Utilizando las expresiones (VI-10), (VI-11) y (VI-14) la ecuación de equilibrio resulta

$$-\frac{\partial v_r}{\partial t} + \frac{v_\theta}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) + v_z \left( k \frac{\partial v_r}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) = \frac{\partial H}{\partial r}, \quad (A1-1a)$$

$$-\frac{\partial v_\theta}{\partial t} - \frac{v_r}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r}(r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) + \frac{v_z}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial H}{\partial \phi}, \quad (A1-1b)$$

$$-\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \left( -k \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) - \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} = -k \frac{\partial H}{\partial \phi}. \quad (A1-1c)$$

Multiplicando (A1-1b) por  $kr$  y sumando el resultado a (A1-1c), luego de simplificar obtenemos

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + v_r \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \phi} - k v_z \frac{\partial \chi}{\partial \phi} = 0, \quad (A1-2)$$

y tomando en cuenta la definición de simetría helicoidal  $\left. \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_{r,\phi} = 0$ , y las transformaciones (VI-10) resulta

$$\left. \frac{\partial \chi}{\partial z} \right)_{r,\theta} = -k \left. \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right)_{r,z}, \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial \phi} \right)_{r,z} = \left. \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \right)_{r,z}, \quad \left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)_{\phi,z} = \left. \frac{\partial \chi}{\partial r} \right)_{\theta,z} \quad (A1-3)$$

Luego de (A1-2) y (A1-3) resulta

$$\frac{d\chi}{dt} = \frac{\partial \chi}{\partial t} + v_r \frac{\partial \chi}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial \chi}{\partial z} = 0, \quad (A1-4)$$

que es lo que queríamos probar.

## APENDICE 2

En este apéndice mostramos que si  $\vec{v}_R$  es el campo de velocidades relativo de un vórtice de Rankine (desde el referencial rotante mencionado anteriormente) y  $\vec{v}_B$  es un flujo de Beltrami, entonces el campo compuesto  $\vec{v} = \vec{v}_B + \vec{v}_R$ , definido por la ecuación (VIII - 8), satisface la ecuación de Euler (VIII - 6).

La vorticidad del flujo de Beltrami es  $\vec{w}_B = \gamma \vec{v}_B$  y la presión  $P_B$  que le corresponde satisface  $\nabla P_B = -\rho(\vec{v}_B \cdot \nabla)\vec{v}_B$ . Sea  $H$  la función de Bernoulli para el flujo  $\vec{v}$ . Luego

$$H = \frac{P}{\rho} + \frac{(\vec{v}^2 - r^2\Omega^2)}{2} = H_B + H_R + \frac{(P - P_R - P_B)}{\rho} + \vec{v}_R \cdot \vec{v}_B, \quad (A2 - 1)$$

$$\text{con } H_R = \frac{P_R}{\rho} + \frac{(\vec{v}_R^2 - r^2\Omega^2)}{2}, \quad H_B = \frac{P_B}{\rho} + \frac{(\vec{v}_B^2)}{2},$$

mientras que

$$\nabla P_R = -\rho(\vec{v}_R \cdot \nabla)\vec{v}_R - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{r}) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_R,$$

donde  $H_R$  y  $H_B$  son las funciones de Bernoulli para  $\vec{v}_R$  y  $\vec{v}_B$ , respectivamente, siendo  $P_R$  la presión correspondiente al flujo de Rankine.

Entonces, dado que el flujo de Rankine satisface la ecuación de Euler (VIII - 6) y que el flujo de Beltrami satisface la misma ecuación con  $\Omega = 0$  siendo  $\vec{w}_B \times \vec{v}_B = 0$  (por lo cual se cumple que  $\nabla H_B = 0$ ), obtenemos

$$\nabla H = \vec{v}_R \times \vec{w}_R + \nabla \left[ \frac{(P - P_R - P_B)}{\rho} + \vec{v}_R \cdot \vec{v}_B \right] \quad (A2 - 2)$$

donde  $\vec{w}_R$  es la vorticidad del flujo de Rankine en el sistema del laboratorio. Su valor es  $2\Omega_R \vec{e}_z$  en la zona rotacional y cero en la zona irrotacional.

De la ecuación de Euler obtenemos

$$(\vec{v} \cdot \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla P}{\rho} - \Omega^2 \vec{e}_z \times \vec{e}_z \times \vec{r} - 2\Omega \vec{e}_z \times \vec{v} \quad (A2 - 3)$$

y es similar para el flujo de Rankine. Usándolas junto con la identidad vectorial

$$\nabla(\vec{v}_R \cdot \vec{v}_B) = \vec{v}_R \times (\nabla \times \vec{v}_B) + \vec{v}_B \times (\nabla \times \vec{v}_R) + (\vec{v}_R \cdot \nabla) \vec{v}_B + (\vec{v}_B \cdot \nabla) \vec{v}_R, \quad (A2 - 4)$$

es fácil ver que

$$-\vec{w}_B \times \vec{v}_R - \vec{w}_R \times \vec{v}_B = \nabla \left[ \frac{(P - P_R - P_B)}{\rho} + \vec{v}_R \cdot \vec{v}_B \right]. \quad (A2 - 5)$$

Entonces, con (A2 - 5) y (A2 - 2) probamos que  $\vec{v}$  satisface la ecuación de Euler (VIII - 6).

## REFERENCIAS

- 1- H.Goldstein : Classical Mechanics (Addison Wesley , 2 ed.1980).
- 2- L.Landau-E.Lifchitz: Mécanique (MIR , 1966).
- 3- a) Aníbal Sicardi : tesis de doctorado “Estabilidad de plasmas inhomogéneos con radio de Larmor grande” (FCEN , UBA , 1984).  
b)Sicardi-Ferro Fontán : Phys.Lett. **113A** , (5) , 263 (1985).
- 4- Mikhailovskii : Theory of Plasma Instabilities (2 Vol. Plenum 1974).
- 5- Aníbal Sicardi : Física. Año 1 , Núm. 4 (1986).
- 6- Glansdorff-Prigogine: Structure, Stability and Fluctuations (Wiley, 1971).
- 7- Glansdorff-Prigogine: Physica **46** , 344 (1970) y **30** , 351 (1964).
- 8- Lavenda: Thermodynamics of irreversible processes (Mac. Millan Press, 1978).
- 9- Lewis-Symon: J.Math.Phys. **20** (3) , 413 (1979).
- 10- E.Minardi: J.Plasma.Phys. **25** , 413 (1981).
- 11- E.Minardi: J.Plasma.Phys. **33** , 359 (1985).
- 12- E.Minardi , G.Lampis: Plasma.Phys. Control. Fusion **32** , 819 (1990).
- 13- E.Minardi: J.Plasma.Phys. **48** , 281 (1992).
- 14- E.Minardi : Plasma.Phys. Control. Fusion **35** , 819 (1993).
- 15- Khinchin, A.I. : Mathematical Foundations of Information Theory. (Dover , 1957).
- 16- Kadomtsev : Phénomènes collectifs dans les plasmas , (MIR , 1979).
- 17- A.Sicardi , R.González , C.Ferro Fontán : Physics Letters A **137** , 44 ,(1989).
- 18- H.Haken : Z.Phys. B **63** , 505 (1986).

- 19- Symon , Seyler & Lewis : J.Plasma Phys. **27** (1) ,13,25,27 (1982).
- 20- R.González , D.Gomez , C.Ferro Fontán , A.Sicardi , R.Montagne: Phys. Fluids B **5** , 1790, (1993).
- 21- A.Costa, D.Gómez, S.Ponce Dawson, C.Ferro Fontán and A. Sicardi Schifino: Phys. Rev. A **38** ,2037 (1988).
- 22- A.Hasegawa and Y.Kodama: Phys. Rev. Lett. **41**, 1470 (1978).
- 23- A.Hasegawa: Adv. Phys. **34**, 1 (1985).
- 24- V. P. Pavlenko and J. Weiland: Phys. Rev. Lett. **44**, 148 (1980).
- 25- Y.Kodama and V.P.Pavlenko: Phys. Rev. Lett.**60** ,1506 (1988).
- 26- C.L.Longmire: Elementary Plasma Physics (John Wiley, 1963).
- 27- B.B.Kadomtsev: Plasma Turbulence (Academic, N.York, 1965).
- 28- S.I.Braginskii: Rev. Plasma Phys. **1**, 205 , (1965).
- 29- R.H.Kraichnan: Phys.Rev. **108**, 1407 , (1958).
- 30- P.C.Martin , E.C.Siggia , H.A.Rose: Phys.Rev.A **8**, 423 , (1973).
- 31- F.Y.Gang , P.H.Diamond , J.A.Crotinger , A.E.Koniges: Phys.Fluids B **3**, 955 , (1991).
- 32- M.Ottaviani , J.C.Bowman , J.A.Krommes: Phys.Fluids B **3**, 2186 , (1991).
- 33- J.Qian: Phys.Fluids **26**, 2098 , (1983).
- 34- S.F.Edwards , W.S.McComb: J. Phys. A **2**, 157 , (1969).
- 35- H.Haken: Advanced Synergetics (Springer-Verlag, Berlin, 1983).
- 36- A.Hasegawa and K.Mima: Phys. Fluids, **21**, 87 (1978).
- 37- C. Ferro Fontán, A.C. Sicardi Schifino and R.González: Proc. 4 International Conference

- on Emerging Nuclear System, Madrid ( World Scientific Pub.Comp, Singapur, 1986).
- 38- S.Chandrasekhar: Ellipsoidal figures of equilibrium , (Yale Univ.Press,1969).
- 39- R. Guarga and J. Cataldo: J. Hydraulic Res. **31**, 35 (1993).
- 40- R. Guarga *et al.*: J. Gower Tech. and Sci.Press 85 , (1989).
- 41- R. V.D.Shafranov: Soviet Phys.JETP **6** , 545 (1958).
- 42- R. J.C.Hardin: Phys.Fluids **25** , 1949 , (1982).
- 43- D.Correa , D.Lortz: Nucl.Fusion **13** , 127 , (1973).
- 44- P. Barberio-Corsetti: Plasma Phys. **15** , 1131 (1973).
- 45- S.Chandrasekhar , P.C.Kendall: Ap.J. **126** , 457 (1957).
- 46- H.Lamb: Hydrodynamics , 6<sup>a</sup>. ed. , (Dover , New York , 1932).
- 47- L.E.Zakharov , V.D.Shafranov: R , Reviews of Plasma Physics , **11** 196, (Consultants Bureau , New York , 1986).
- 48- L.M.Polvani , G.R.Flierl: Phys.Fluids **29** , 2376 , (1986).
- 49- R.E.Spall , T.B.Gatski , C.E.Grosch: Phys.Fluids **30** , 3434 , (1987).
- 50- T.B. Benjamin: J. Fluid Mech. **14**, 593 (1962).
- 51- G. Batchelor, An introduction to fluid dynamics (Cambridge Univ. Press , New York, 1967).
- 52- D.G. Dritschel: J. Fluid Mech. **222**, 525 (1991).
- 53- A. I. Morozov and L. S. Solov'ev: Rev. Plasma Phys. **2**, 1 (1966).
- 54- M. Lessen, N. V. Deshpande and B. Hadji-Ohanes: J. Fluid Mech. **60**, 459 , (1973).
- 55- C.Wahlberg: Phys.Fluids B **4** , 1547 , (1992).

- 56- J. Guckenheimer and P. Holmes: Nonlinear oscillations, dynamical systems and bifurcations of vector fields, edited by F. John, J.E. Marsden, L.Sirovich (Springer-Verlag, New York, 1983).
- 57- M.Fanelli: Journal of Hydraulic Research **27** , 769 , (1989).
- 58- H.K.Moffatt: J.Fluid Mech. **166** , 359 , (1986).



## AGRADECIMIENTOS

Tengo muchas razones, y son numerosas las personas a las que debo gratitud. Podría llenar muchas páginas y no serían suficientes. Por ello expreso mi profundo agradecimiento a quienes con su trabajo o su estímulo hicieron posible esta tesis. GRACIAS:

A mi maestro y amigo Anibal Sicardi. A mi director Constantino Ferro Fontán. Al invaluable Daniel Gomez. A mi tía Nelly y al Bambú. A Lilia Romanelli, Rafael Guarga, Raul Montagne, Gustavo Sarasua, Sergio Santini, Alberto Vasquez, Nestor Rotstein, Andrea Costa, Pablo Mauas, Alejandro Fendrik, Pedro Federman, Guillermo Dussel, Oscar Martinez, Silvina Gatica, Roberto De Luca, Raul Gabellone, Guillermo Gimenez de Castro, Miriam Gigli, Fabricio Toscano, Cecilio Cofler, Alejandro Fiorito, Diego Wisniacki, Dolores Miranda, Teresa Anzuola, Fernanda Baulco, Alicia Tarantini, Matías de la Vega, Matías Zaldarriaga, Guillermo Chiappe, Guillermo Mattei, a mis compañeros de la gremial, a Josefina y Julieta, a Adri, Ani y Estrella, y a la Blusera.