

Tesis de Posgrado

Mapas cuánticos y semiclásicos para sistemas disipativos sometidos a perturbaciones periódicas

Gatica, Silvina María

1995

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Gatica, Silvina María. (1995). Mapas cuánticos y semiclásicos para sistemas disipativos sometidos a perturbaciones periódicas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2712_Gatica.pdf

Cita tipo Chicago:

Gatica, Silvina María. "Mapas cuánticos y semiclásicos para sistemas disipativos sometidos a perturbaciones periódicas". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1995.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2712_Gatica.pdf

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Mapas cuánticos y semiclásicos
para sistemas disipativos
sometidos a perturbaciones periódicas.

Por:
Silvina María Gatica

Directora:
Dra. Ester Susana Hernández

Lugar de trabajo:
Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Marzo de 1995

Trabajo de Tesis presentado para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas.

A mis padres.

Agradecimientos:

Quiero agradecer en primer lugar y muy especialmente a Susana Hernández, por haberme dirigido en este trabajo con suma paciencia y dedicación, a mis compañeros del Grupo de Física Estadística con quienes he compartido estos últimos años, en particular a Marcelo Despósito por las fructíferas discusiones, a mis compañeros de mesa, los grupos B y B', al Consejo Nacional de investigaciones Científicas y Técnicas que ha subvencionado mis estudios, a mis amigos del otro lado, los no-exactos, Alberto, Mercedes, Julia, Pato, El Chino y el más optimista, Mario Alemany, por el afecto brindado, a Darky, por las reflexiones compartidas y al genial Marcus Rothkowitz.

Indice

1	Introducción	3
2	Sistemas Cuánticos Disipativos	7
2.1	Ecuaciones maestras	7
2.2	Acoplamiento lineal	13
2.3	Reservorio Bosónico	14
2.4	Perturbación periódica	17
3	Oscilador Armónico	19
3.1	Sistema clásico	19
3.2	Sistema cuántico	21
3.2.1	Ecuación maestra para el caso disipativo	22
3.2.2	Representación semiclásica para el caso disipativo	24
3.3	Mapa cuántico para el sistema pulsado.	29
3.3.1	Mapa semiclásico para el sistema pulsado.	30
3.3.2	Perturbación armónica.	34
3.4	Límite de Acoplamiento Débil.	39
3.5	Límite clásico.	40
3.6	Límite asintótico.	42
4	Sistema con spin	43
4.1	Ecuación maestra para el caso disipativo	44
4.2	Representación semiclásica de la EMG	45
4.3	Mapa cuántico para el sistema pulsado	49
4.4	Mapa escalar	50

5	Spin 1	55
5.1	Ecuación maestra para el caso disipativo.	55
5.2	Mapa semiclásico para el sistema pulsado.	57
5.3	Análisis numérico del mapa semiclásico para el sistema pulsado.	63
5.4	Límites clásico y de acoplamiento débil.	70
6	Spin 1/2	72
6.1	Ecuación maestra para el caso disipativo.	72
6.2	Mapa Semiclásico para el sistema pulsado.	72
6.3	Mapa Escalar.	76
6.4	Análisis numérico del mapa semiclásico para el sistema pulsado	78
6.5	Límites clásico y de Acoplamiento débil.	82
7	Resumen y conclusiones	85
	Apéndice A: Transformada de Wigner	89
	Bibliografía	97

Capítulo 1

Introducción

En física clásica son abundantes las situaciones en que una dinámica continua en el espacio de fases da origen a una dinámica discreta o *mapa* cuyo análisis permite discernir importantes aspectos del sistema en estudio. Encontramos ejemplos de dinámicas discretas en la reducción de la dinámica a instantes marcados por un paso de tiempo fijado con una ley dada, o en la observación de las intersecciones de la trayectoria en el espacio de fases con una superficie elegida (*mapa de Poincaré*). Si el objeto en estudio es cuántico es cuestionable la noción de *mapa* al perder sentido el concepto de trayectoria. Una extensión natural de las ideas utilizadas en dinámica clásica remite a la investigación de *mapas semiclásicos*, es decir aquellos que se construyen discretizando de alguna de las maneras tradicionales las ecuaciones de movimiento para los valores medios de los observables de interés.

Para los sistemas cerrados el *mapa cuántico* es generado por un operador unitario U que transforma los estados $|\psi\rangle$. Esta es una transformación discreta y no es necesario imaginar una evolución continua entre estados. Sin embargo, tanto los mapas clásicos como los cuánticos se extraen de un hamiltoniano periódico en el tiempo con período τ [1] siendo el operador U en este caso el operador de evolución de un período. [1, 2, 3] El operador densidad de estados ρ del sistema cerrado evoluciona

según la ecuación de Liouville-von Neumann [4] y admite un mapa cuántico generado también por el operador U .

Si el sistema es abierto, por ejemplo si se mueve irreversiblemente bajo la influencia de otro sistema R , su dinámica no obedece a la ecuación de Liouville-von Neumann [5] y por lo tanto el mapa cuántico no está generado por un operador de evolución U asociado a un hamiltoniano.

Graham y Tél [6] han propuesto un procedimiento para la construcción del mapa cuántico de un sistema abierto que es perturbado en cada instante $n\tau$ con n entero en el cual se construye un propagador discreto para la función Wigner,[7] que representa a la densidad de estados en el espacio de fases. Este método fue aplicado por Graham *et al* [6] al estudio de la cuantificación del mapa de Hénon, que se deduce de un oscilador armónico cuántico disipativo y periódicamente perturbado, y posteriormente por Cerdeira *et al* [8] al estudio de las propiedades de los exponentes de Lyapunov. Dicho procedimiento consiste en construir dos propagadores que se aplican sucesivamente a la función de Wigner. El primero de ellos es el propagador disipativo que tiene en cuenta la evolución irreversible entre dos pulsos sucesivos, el cual se construye a partir de la ecuación de evolución para la densidad de estados del sistema abierto, mientras que el segundo es el propagador instantáneo debido a la pulsación.

Uno de los métodos más conocidos para la obtención de dicha ecuación es el de las *ecuaciones maestras*. [4, 5], [9]-[15] Este método considera al sistema de interés S acoplado al sistema R de manera que el sistema total $S+R$ es cerrado y por lo tanto su densidad satisface la ecuación de Liouville-von Neumann. A partir de esta ecuación y eliminando las coordenadas de R se deduce una ecuación de movimiento para la densidad reducida de S llamada *ecuación maestra generalizada* (EMG). Generalmente el sistema R se supone extenso de forma tal de cumplir la función de un "baño térmico".

La primera aplicación de este formalismo al problema de la relajación de un sistema debido al acoplamiento con un reservorio extenso fue realizada por Argyres y Kelly [16] en el tratamiento de la relajación del spin. Un sistema más simple pero no menos importante que ha sido extensamente estudiado es el del oscilador armónico cuántico acoplado a un baño térmico.[5], [17]-[24]

También encontramos importantes ejemplos de problemas que fueron desarrollados bajo este formalismo en la física del láser,[5], en física nuclear,[25]-[28] y el fenómeno de superradiancia.[5, 29]

En el contexto del problema de la relajación térmica del oscilador armónico cuántico, encontramos que la mayoría de los autores lo tratan bajo la denominada *Aproximación de Onda Rotante* (AOR). Esta aproximación se basa en ignorar en el hamiltoniano de interacción los términos que impliquen la creación o destrucción simultánea de excitaciones en el oscilador y el baño térmico.[30] Cuando no se realiza esta aproximación la interacción suele denominarse de *Acoplamiento Completo* (AC). Este tipo de interacción resulta ser proporcional a la coordenada del oscilador, mientras que en la interacción AOR se incluye también su momento. Sin embargo, desde tiempo atrás, en la esfera de Procesos Estocásticos, se habían formulado observaciones acerca de la validez y alcances de la AOR [30] y se proponía reemplazarla por el modelo de AC, que al ser lineal en la coordenada de la partícula que relaja, suprime algunas de las ambivalencias de la AOR basadas en la dependencia de la coordenada y el momento. En particular, el modelo AC es el que proporciona el límite clásico correcto de la representación semiclásica de la EMG, a saber, la ecuación de Kramers.[31] Además, puede demostrarse que el modelo AOR resulta ser el límite asintótico del AC si la densidad de estados del reservorio es suficientemente elevada y el espectro de excitaciones del sistema no es acotado[32]. Esto se verifica en el caso del oscilador inmerso en un baño térmico pero no vale para el problema de la relajación del spin.[33]

En el trabajo de Graham *et al* [6] se empleó el método de las EMG bajo la AOR, mientras que Cerdeira *et.al.* [8] extienden el cálculo de los exponentes de Lyapunov al AC.

En el contexto del estudio de sistemas con espectro discreto, Haake *et.al.*[3] estudian los mapas cuántico y semiclásico de un sistema con momento angular j que es periódicamente perturbado mientras tiene un movimiento de precesión alrededor de un campo magnético externo constante. Este trabajo, que apunta al análisis del comportamiento del sistema en los casos en que su análogo clásico es caótico. no incluye un mecanismo disipativo.

El objetivo de esta tesis es investigar los mapas cuánticos y semiclásicos para sis-

temas cuánticos en interacción disipativa con diversos reservorios térmicos cuando se los somete a perturbaciones periódicas pulsantes para distintos modelos del mecanismo de disipación. En este sentido, se pretende señalar las diferencias y semejanzas entre las predicciones de los modelos de acoplamiento AOR y AC.

Esta tesis se organiza de la siguiente forma. En el Capítulo 2 se presenta un resumen del método de obtención de las ecuaciones maestras y se presentan los modelos de interacción AC y AOR. Hacia el final del capítulo se muestra cómo se resolverá la dinámica al someter al sistema a la pulsación periódica que dará origen a los mapas cuántico y semiclásico. El Capítulo 3 se dedica al estudio del comportamiento irreversible del oscilador armónico cuántico perturbado periódicamente e inmerso en un baño térmico arbitrario. Se presenta la EMG correspondiente al sistema disipativo y el operador de la perturbación. El operador densidad se representa en el espacio de fases a través de la función de Wigner y siguiendo el procedimiento de Graham y Tél se obtiene el propagador que define el mapa cuántico para dicha distribución. Se construye el mapa semiclásico y se estudian sus propiedades para el caso particular de la perturbación armónica. Finalmente se comparan los mapas cuánticos obtenidos para los modelos AC y AOR en el límite clásico, de acoplamiento débil y asintótico. En el Capítulo 4 se extiende el estudio a un sistema con spin polarizado en un campo magnético externo, acoplado a un baño de osciladores y periódicamente perturbado. Se introduce la forma de la EMG y el operador de la perturbación y se muestra como construir un mapa semiclásico equivalente al mapa cuántico de la densidad de estados. En la última parte se propone un invariante semiclásico ante el mapa disipativo el cual al aplicar la perturbación genera un mapa escalar. En los Capítulos 6 y 7 se aplica la metodología anterior al caso particular de spin 1 y $1/2$. Se construyen los mapas semiclásicos correspondientes que son estudiados bajo los marcos AC y AOR y en los límites de alta temperatura y acoplamiento débil. Las conclusiones y el resumen se presentan en el Capítulo 8. Por último en el Apéndice A se realiza un resumen de las principales propiedades de la transformada de Wigner.

Capítulo 2

Sistemas Cuánticos Disipativos

Dedicaremos este capítulo a la revisión de uno de los métodos que permiten describir la evolución irreversible de los sistemas cuánticos abiertos. Ya que dicho método ha sido extensamente discutido en la literatura, en esta revisión obviaremos detalles que pueden encontrarse en las referencias [4],[5],[9]-[15].

Por último veremos la forma de aplicar esta técnica al problema general de un sistema cuántico abierto que es sometido a una perturbación periódica.

2.1 Ecuaciones maestras

Esta técnica considera a un sistema pequeño S inmerso en un reservorio extenso R , de manera tal que el sistema total es conservativo y por lo tanto satisface la ecuación de evolución cuántica de Liouville-von Neumann

$$\dot{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] = -iL\rho. \quad (2.1)$$

donde ρ y H representan los operadores de densidad y el Hamiltoniano del sistema total respectivamente.

El Hamiltoniano total se descompone como

$$H = H_S + H_R + H_{SR} \quad (2.2)$$

donde las tres partes corresponden a los sistemas S, R y a la interacción entre ambos respectivamente. Esta descomposición apunta a separar la parte relevante del problema, asociada a S de los demás grados de libertad que quedan contenidos en R.

La densidad reducida ρ_S se obtiene aplicando la operación de traza sobre las coordenadas de R,

$$\rho_S = \text{Tr}_R \rho. \quad (2.3)$$

y análogamente

$$\rho_R = \text{Tr}_S \rho. \quad (2.4)$$

Veremos ahora cómo se procede para obtener la evolución de la densidad ρ_S eliminando los grados de libertad irrelevantes. Ofreceremos una reseña del procedimiento cuyos detalles aparecen en la referencia [10].

Dados dos superoperadores de proyección ortogonales y hermíticos P y $Q = 1 - P$, $P^2 = P$, la densidad total puede escribirse como

$$\rho = P\rho + Q\rho. \quad (2.5)$$

Insertando esta descomposición de ρ en la ecuación (2.1) y aplicando los proyectores P y Q , se obtienen dos ecuaciones acopladas para $P\rho$ y $Q\rho$

$$P\dot{\rho} = P[H, P\rho + Q\rho] \quad (2.6)$$

y

$$Q\dot{\rho} = Q[H, P\rho + Q\rho]. \quad (2.7)$$

El superoperador P se elige de manera que proyecte operadores sobre el espacio de Hilbert del sistema S. A partir del sistema de ecuaciones anterior puede despejarse $P\rho$. Para ello se introduce la solución formal de la ec. (2.7) en (2.6) obteniendo

$$P\dot{\rho}(t) = -iPLP\rho(t) - iPL\{e^{-iQL(t)}Q\rho(0) - i\int_0^t dt'e^{-iQLQ'}QLP\rho(t-t')\}. \quad (2.8)$$

que es una ecuación cerrada para $P\rho$.

Definiendo el proyector P como

$$P = \rho_R(0)Tr_R \quad (2.9)$$

vemos que ρ_S se obtiene a partir de $P\rho$ como

$$\rho_S = Tr_R P\rho. \quad (2.10)$$

Reemplazando P por (2.9) y usando (2.10) la ec. (2.8) se transforma en la *ecuación maestra generalizada* (EMG)

$$\dot{\rho}_S(t) + iL_S\rho_S(t) + \int_0^t dt' Tr_R \{L_{SR}e^{-iQLQ'}QL_{SR}\rho_R(0)\}\rho_S(t-t') = 0 \quad (2.11)$$

donde $L_X = [H_X,]/\hbar$.

Es importante señalar que la ecuación integrodiferencial inhomogénea (2.11) que describe la evolución del sistema S, junto con la ecuación (2.7) forman un sistema totalmente equivalente a la ecuación de Liouville-von Neumann (2.1).

Notemos que la elección del proyector P tiene en cuenta las condiciones iniciales del problema. De hecho, si calculamos $\rho(0)$ a partir de la descomposición (2.5) vemos que resulta

$$\rho(0) = \rho_R(0)\rho_S(0) \quad (2.12)$$

que significa que las correlaciones iniciales entre los sistemas S y R son nulas. Si la densidad total inicial es $\rho(0) = \rho_R(0)\rho_S(0) + \rho_c(0)$ a la ecuación (2.11) se suma un término debido a la evolución de la densidad de correlación ρ_c . La hipótesis habitual

que conduce a una simplificación del problema consiste en suponer que el tiempo de decaimiento de $\rho_c(t)$, τ_c , es mucho menor que el tiempo característico τ_S de la densidad $\rho_S(t)$. Luego aunque la condición inicial no sea la (2.12), la ecuación (2.11) es válida para tiempos $t \gg \tau_c$. En general, esta hipótesis se cumple aceptablemente, aunque es preciso verificarla en cada caso particular.

La aplicación de la ecuación (2.11) a un problema concreto resulta poco práctica debido a la complejidad del superooperador de evolución $U(t') = \exp(-iQLQt')$.

A continuación veremos cómo se transforma esta ecuación bajo dos aproximaciones usuales, la *aproximación de Born* y la *aproximación de Markov*.

Si la interacción entre los sistemas S y R es débil, la forma de $U(t')$ puede simplificarse notablemente aplicando la *aproximación de Born* o *hipótesis de acoplamiento débil* que consiste en reemplazar $U(t')$ por

$$U_0(t') = \exp\{-it'(L_S + L_R)\}. \quad (2.13)$$

Bajo esta aproximación la ecuación (2.11) resulta

$$\dot{\rho}_S(t) + iL_S\rho_S(t) + \int_0^t dt' A(t-t')\rho_S(t') = 0. \quad (2.14)$$

donde el operador de colisiones $A(t-t')$ es

$$A(t-t') = \text{Tr}_R\{L_{SR}e^{-i(L_S+L_R)(t-t')}L_{SR}\rho_R(0)\} \quad (2.15)$$

Notemos que si $H_{SR} = 0$, $A(t-t') = 0$ y en consecuencia el tercer término en (2.14) se anula de forma tal que recuperamos la ecuación de Liouville-von Neumann para el sistema S.

El operador de colisiones provee el efecto de fricción al sistema y depende del reservorio a través de la densidad inicial solamente.

Especializaremos a continuación la ec. (2.14) para una interacción particular y para un dado estado inicial del sistema R.

Supongamos que inicialmente el reservorio se halla en equilibrio térmico, es decir que

$$\rho_R(0) \simeq \rho_R^e = \frac{e^{-\beta H_R}}{Tr_R(e^{-\beta H_R})} \quad (2.16)$$

donde $\beta = 1/k_B T$, siendo T la temperatura y k_B la constante de Boltzman. Asimismo, asumiremos que la interacción es de la forma

$$H_{SR} = \lambda \sum_k S_k R_k, \quad (2.17)$$

donde λ es un parámetro que mide la intensidad de la interacción y los operadores S_k y R_k pertenecen a los espacios de Hilbert de S y R respectivamente y son tales que el producto $S_k R_k$ es hermítico.

Introduciendo entonces la densidad de equilibrio ρ_R^e y H_{SR} dado por la ecuación anterior en (2.14) se obtiene

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) + iL_S \rho_S(t) = & \quad (2.18) \\ & - \frac{\lambda^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \sum_{i,j} [S_i, e^{-iH_S t'/\hbar} [S_j, \rho_S(t-t')] e^{iH_S t'/\hbar}] \Re \{ \Phi_{R_i, R_j}(t') \} \\ & - \frac{i\lambda^2}{\hbar^2} \int_0^t dt' \sum_{i,j} [S_i, e^{-iH_S t'/\hbar} [S_j, \rho_S(t-t')]_+ e^{iH_S t'/\hbar}] \Im \{ \Phi_{R_i, R_j}(t') \} \end{aligned}$$

donde hemos introducido la función de correlación entre operadores del reservorio. Para dos operadores A y B que evolucionan con H_R ésta se define como

$$\Phi_{A,B}(t) = \langle A(t)B \rangle_R = \langle AB(t) \rangle_R, \quad (2.19)$$

siendo $\langle X \rangle_R = Tr_R(X \rho_R^e)$ y $X(t) = e^{iH_R t/\hbar} X e^{-iH_R t/\hbar}$.

Si suponemos que el tiempo de decaimiento de las correlaciones del reservorio τ_R es mucho menor que el tiempo característico del sistema τ_S podemos reemplazar en la EMG (2.18) el límite superior de las integrales por infinito, como así también realizar la aproximación

$$\rho_S(t) \simeq e^{-iH_S\tau/\hbar} \rho_S(t - \tau) e^{iH_S\tau/\hbar} \quad (2.20)$$

Esta es la llamada *aproximación de Markov*.

Si para una dada configuración $R + S$ efectivamente se cumple la condición $\tau_R \ll \tau_S$ podemos transformar la EMG (2.18) en su versión markoviana

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) + iL_S\rho_S(t) = & \\ & - \frac{\lambda^2}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' \sum_{i,j} [S_i, S_j(-t'), \rho_S(t)] \Re\{\Phi_{R_i,R_j}(t')\} \\ & - \frac{i\lambda^2}{\hbar^2} \int_0^\infty dt' \sum_{i,j} [S_i, S_j(-t'), \rho_S(t)]_+ \Im\{\Phi_{R_i,R_j}(t')\}, \end{aligned} \quad (2.21)$$

siendo $S(-t') = e^{-iH_S t'/\hbar} S e^{iH_S t'/\hbar}$.

Debe notarse que el efecto de memoria que introducía un retardo en la densidad en la ecuación (2.18) ha sido eliminado al aplicar la aproximación de Markov.

Con respecto al decaimiento de las correlaciones del reservorio debemos mencionar que éste se debe al proceso de disipación y a las fluctuaciones. Por lo tanto el tiempo τ_R obedece a dos escalas temporales: el decaimiento asociado a la disipación tiene un tiempo característico que depende de la densidad de estados del reservorio, mientras que la escala temporal relacionada con las fluctuaciones involucra a la temperatura. En particular, si la temperatura es muy baja, el tiempo característico τ_R crece como $1/T$. [30],[35]

2.2 Acoplamiento lineal

Si bien la forma de la interacción propuesta en la ec. (2.17) es sumamente general, en las aplicaciones que presentaremos más adelante utilizaremos un acoplamiento lineal en las coordenadas del sistema S.

En la literatura concerniente a la dinámica irreversible de sistemas cuánticos [30],[36] encontramos dos tipos de interacciones lineales que aquí definiremos explícitamente para el caso en que el sistema S es un oscilador de coordenada Q y momento P o una partícula con spin.

a) *Acoplamiento Completo (AC)*

En este caso suponemos que

$$H_{SR}^{(AC)} = \lambda(\Gamma^\dagger + \Gamma)(R + R^\dagger) \quad (2.22)$$

donde los operadores R^\dagger y R contienen sumas infinitas de operadores de creación y destrucción asociados a las coordenadas del baño. Los operadores Γ^\dagger y Γ son, para el oscilador

$$\Gamma^\dagger = Q + iP$$

$$\Gamma = Q - iP,$$

y para el Spin

$$\Gamma^\dagger = J_x + iJ_y$$

$$\Gamma = J_x - iJ_y.$$

b) *Aproximación de Onda Rotante (AOR):*

Existen dos formas convencionales de aplicar esta aproximación.[19] La primera de ellas consiste en excluir de H_{SR}^{AC} los términos *antiresonantes* $\Gamma^\dagger R^\dagger$ y ΓR que corresponden a la creación o destrucción simultánea de excitaciones del baño y del sistema, y tomar un hamiltoniano de interacción de la forma

$$H_{SR}^{AOR} = \lambda(\Gamma^\dagger R + \Gamma R^\dagger) \quad (2.23)$$

La segunda, que es la que aplicaremos en este trabajo, resulta de despreciar los términos inelásticos directamente en la ecuación maestra obtenida bajo el modelo AC. Si en la EMG obtenida anteriormente reemplazamos los operadores S_i en términos de los operadores Γ^\dagger y Γ , la ecuación que resulta se puede escribir en forma compacta como

$$\dot{\rho}_S(t) = f_D(\{\Gamma\Gamma^\dagger \rho_S\}_\pi) + f_{ND}(\{\Gamma\Gamma \rho_S\}_\pi, \{\Gamma^\dagger\Gamma^\dagger \rho_S\}_\pi)$$

donde $\{ \ }_\pi$ significa tomar todas las permutaciones del producto de operadores y las funcionales f_D y f_{ND} son combinaciones lineales de dichos productos. Los elementos diagonales de ρ_S en la base $|n\rangle$ de autoestados de $\Gamma^\dagger\Gamma$ evolucionan según f_D , mientras que los no-diagonales lo hacen según f_{ND} . La AOR implica conservar sólo el primer término en la ecuación anterior resultando

$$\dot{\rho}_S(t) = f_D(\{\Gamma\Gamma^\dagger \rho_S\}_\pi) \quad (2.24)$$

En particular, si la densidad es diagonal ambas descripciones, AC y AOR coinciden.

2.3 Reservorio Bosónico

Es importante remarcar que en la deducción de la EMG (2.21) no se ha hecho referencia a ningún tipo de reservorio en particular. Sin embargo, en sus diversas aplicaciones surgen especificaciones sobre el baño térmico.

Por ejemplo, el decaimiento de modos colectivos nucleares [25]-[28], en conexión con la teoría de respuesta lineal para la descripción de las excitaciones colectivas del sistema [37], admite una descripción con el formalismo de las EMG siendo el reservorio, en este caso, fermiónico.

Por otro lado, varias aplicaciones requieren un reservorio bosónico, como por ejemplo, 1) el problema de un núcleo en un campo magnético externo interactuando con las moléculas del medio [38], 2) un sistema de dos niveles que interactúa con las vibraciones de la red en que se encuentra inmerso.[39]. Los dos últimos ejemplos tienen una descripción equivalente a la de un spin acoplado a un campo magnético externo e interactuante con un baño de osciladores, que es uno de los sistemas estudiados en esta tesis. Por esta razón, en esta sección nos ocuparemos especialmente del caso en que el reservorio está compuesto por N osciladores armónicos no interactuantes. Resumiremos los resultados que se encuentran en la referencia [36].

El hamiltoniano libre del sistema R es

$$H_R = \sum_j \hbar w_j b_j^\dagger b_j \quad (2.25)$$

donde $w_j > 0$ y b_j^\dagger y b_j son operadores de creación y destrucción respectivamente de los modos de frecuencia w_j .

Los operadores R_i en (2.21) son entonces

$$R = \sum_j c_j b_j \quad (2.26)$$

y

$$R^\dagger = \sum_j c_j^* b_j^\dagger \quad (2.27)$$

donde los parámetros c_j son arbitrarios y tienen en cuenta el espectro de frecuencias

del sistema R. En la representación de Heisenberg podemos escribir

$$R(t) = \sum_j c_j b_j e^{-i\omega_j t} \quad (2.28)$$

$$R^\dagger(t) = \sum_j c_j^* b_j^\dagger e^{i\omega_j t} \quad (2.29)$$

En la situación de equilibrio, el baño de osciladores R no contiene pares correlacionados, es decir

$$\langle b_j b_k \rangle_R = \langle b_j^\dagger b_k^\dagger \rangle_R = 0 \quad (2.30)$$

mientras que

$$\langle b_j^\dagger b_k \rangle_R = \delta_{jk} n_j \quad (2.31)$$

es el número medio de excitaciones tipo j . Definimos el espectro de frecuencias de la función de correlaciones $\Phi_{R_i, R_j}(t)$ como

$$\Phi_{R_i, R_j}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt \Phi_{R_i, R_j}(t) e^{-i\omega t} \quad (2.32)$$

En este caso resulta

$$\Phi_{R, R^\dagger}(\omega) = \sum_j |c_j|^2 (1 + n_j) \delta(\omega + \omega_j), \quad (2.33)$$

$$\Phi_{R^\dagger, R}(\omega) = \sum_j |c_j|^2 n_j \delta(\omega - \omega_j), \quad (2.34)$$

$$\Phi_{R, R}(\omega) = \Phi_{R^\dagger, R^\dagger}(\omega) = 0 \quad (2.35)$$

Como el reservorio es extenso ($N \gg 1$), se asume que su espectro de frecuencias es continuo y entonces en la ec. (2.34) la suma se transforma en una integral

$$\begin{aligned}\Phi(w) &= \int_0^\infty dw' D(w') n(w') \delta(w - w') \\ &= D(w) n(w),\end{aligned}\tag{2.36}$$

donde $D(w)$ es la densidad de estados del espectro.

2.4 Perturbación periódica

Supongamos que el hamiltoniano del sistema S depende del tiempo y es de la forma

$$H_S = H_0 - H_G(t)\tag{2.37}$$

donde

$$H_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - n\tau) G\tag{2.38}$$

representa un potencial pulsante de período τ y el operador G es hermítico y actúa sobre el espacio de Hilbert del sistema S.

Para resolver la dinámica entre dos pulsos sucesivos procedemos como Graham *et.al.* [6], dividiendo el intervalo de tiempo $(n-1)\tau^+ < t < n\tau^+$ en dos etapas sucesivas: 1) entre pulsos, $(n-1)\tau^+ < t < n\tau^-$ y 2) en el instante del pulso n -ésimo, $t = n\tau$.

Durante la primera, que llamaremos *evolución libre*, el movimiento del sistema se rige por el hamiltoniano $H_0 + H_R + H_{SR}$. Nótese que en este contexto el atributo *libre* incluye la interacción con el reservorio, es decir, se refiere a la ausencia de perturbación.

Analizaremos las condiciones que debe cumplir el período τ para poder aplicar la EMG. En primer lugar notemos que la aproximación de Markov tendrá validez si el período τ cumple la condición $\tau \gg \tau_R$. En segundo lugar, dado que después de cada pulso la densidad de correlaciones no es necesariamente cero, debe valer que $\tau \gg \tau_c$

para asegurar que el término asociado a $\rho_c(t)$ sea despreciable. Si se satisfacen estas dos condiciones entonces podemos decir que entre pulsos la dinámica obedece a la EMG (2.21).

En la segunda etapa todos los términos del hamiltoniano se hacen despreciables frente a $G\delta(t - n\tau)$ y por lo tanto el cambio en la matriz está determinado por el potencial G resultando

$$\rho_S(n\tau^+) = e^{\frac{i}{\hbar}G} \rho_S(n\tau^-) e^{-\frac{i}{\hbar}G}. \quad (2.39)$$

Capítulo 3

Oscilador Armónico

Como ejemplo de las técnicas descritas en el capítulo anterior se estudió la dinámica clásica y cuántica de una partícula en un potencial de oscilador armónico inmersa en un medio viscoso y sometida además a impulsos periódicos.

3.1 Sistema clásico

Consideremos una partícula inmersa en un fluido y en un campo externo dado por el potencial de oscilador armónico. La parte conservativa del sistema corresponde al hamiltoniano

$$h_0 = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega_0^2 q^2}{2} \quad (3.1)$$

Debido a la presencia del medio, la partícula realiza un movimiento browniano gobernado por la ecuación de Langevin [40]

$$\begin{cases} \dot{q} = p/m \\ \dot{p} = -m\omega_0^2 q - \frac{\nu}{m}p + \Gamma(t) \end{cases} \quad (3.2)$$

donde ν/m es la constante de fricción y $\Gamma(t)$ es una fuerza estocástica con media nula y δ -correlacionada, es decir, $\langle \gamma(t)\gamma(t') \rangle = 2\nu k_B T \delta(t-t')$.

La evolución de la función de distribución $F(q, p; t)$ queda determinada por la ecuación de Kramers,[40]

$$\partial_t F(q, p; t) = \left(-\partial_q \frac{p}{m} + \partial_p \left(\frac{\nu}{m} p + m\omega_0^2 q \right) + \partial_p^2 \nu k_B T \right) F(q, p; t). \quad (3.3)$$

De la ecuación anterior se obtienen un sistema de ecuaciones para los valores medios de q y p ,

$$\begin{cases} \langle \dot{q} \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle \\ \langle \dot{p} \rangle = -m\omega_0^2 \langle q \rangle - \frac{\nu}{m} \langle p \rangle \end{cases} \quad (3.4)$$

el cual es integrable y cuya solución es

$$\begin{pmatrix} \langle q(t) \rangle \\ \langle p(t) \rangle \end{pmatrix} = U(t, t_0) \begin{pmatrix} \langle q(t_0) \rangle \\ \langle p(t_0) \rangle \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

donde el operador de evolución $U(t, t_0)$ es

$$\begin{aligned} U(t, t_0) &= e^{-\frac{\nu(t-t_0)}{2m}} \begin{bmatrix} \cos w'(t-t_0) + \frac{\nu}{2mw'} \sin w'(t-t_0) & \frac{1}{mw'} \sin w'(t-t_0) \\ -\frac{mw_0^2}{w'} \sin w'(t-t_0) & \cos w'(t-t_0) - \frac{\nu}{2mw'} \sin w'(t-t_0) \end{bmatrix} \\ &\equiv U(t-t_0) \end{aligned} \quad (3.6)$$

con $w' = \sqrt{\omega_0^2 - \left(\frac{\nu}{2m}\right)^2}$.

Supongamos ahora que se perturba al sistema periódicamente con una fuerza de intensidad $g'(q)$. Esta perturbación se introduce como en la Sección 2.4, modificando el hamiltoniano mediante un término aditivo dependiente del tiempo, $h_G(t)$,

$$h = h_0 - h_G(t) \quad (3.7)$$

donde el potencial h_G es una suma de pulsos de intensidad $g(q)$ equiespaciados temporalmente por un intervalo τ ,

$$h_G(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - n\tau)g(q). \quad (3.8)$$

Debido a este término el sistema (3.4) se modifica de la siguiente manera,

$$\begin{cases} \langle \dot{q} \rangle = \frac{1}{m} \langle p \rangle \\ \langle \dot{p} \rangle = -m\omega_0^2 \langle q \rangle - \frac{\nu}{m} \langle p \rangle + \sum_{n=1}^{\infty} \delta(t - n\tau) \langle g'(q) \rangle \end{cases} \quad (3.9)$$

Para integrar la trayectoria entre $t = (n-1)\tau^+$ y $t = n\tau^+$ dividimos el intervalo de tiempo en dos intervalos sucesivos $((n-1)\tau^+, n\tau^-)$ y $(n\tau^-, n\tau^+)$. En el primer período la solución esta dada por la ecuación (3.5), mientras que la integral en el segundo intervalo resulta $(\delta q, \delta p) = (0, g'(q(n\tau)))$. Luego podemos escribir el siguiente mapa estroboscópico del movimiento entre pulsaciones sucesivas

$$\begin{pmatrix} \langle q \rangle_n \\ \langle p \rangle_n \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \langle q \rangle_{n-1} \\ \langle p \rangle_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \langle g'(q) \rangle_n \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

siendo $M = U(\tau)$ y usando la notación $\langle A \rangle_n \equiv \int dq dp A(q, p) F(q, p; n\tau^+)$.

3.2 Sistema cuántico

El problema del oscilador armónico cuántico acoplado a un baño térmico ha sido extensamente estudiado.[5], [17]-[24] Si bien en estos trabajos encontramos distintas formas de encarar el problema, en general se refieren al acoplamiento lineal con un reservorio de osciladores y la mayoría realiza la aproximación AOR.

En este capítulo aplicaremos el formalismo de las EMG al oscilador armónico pulsado acoplado a un reservorio general y bajo los acoplamientos AOR y AC. La introducción de la interacción AC es importante ya que, como se mostrará más adelante, es a través de ésta y no de la AOR que se obtiene el límite clásico correcto del problema.

El sistema S representa al oscilador y por lo tanto el hamiltoniano H_S es

$$H_S = H_0 - H_G \quad (3.11)$$

siendo H_0 y H_G la versión cuántica de (3.1) y (3.8).

El hamiltoniano total del problema es entonces

$$H = H_S + H_R + H_{SR} \quad (3.12)$$

En el marco del AC, el hamiltoniano de interacción es de la forma

$$H_{SR} = \lambda Q Q_R \quad (3.13)$$

donde Q es la coordenada del oscilador, Q_R es un operador hermítico que involucra sumas infinitas sobre los grados de libertad del reservorio y λ mide la intensidad de la interacción como en la ec. (2.22).

3.2.1 Ecuación maestra para el caso disipativo

Estudiaremos en primer término la evolución libre del oscilador. Supongamos que el período de la pulsación satisface las condiciones $\tau \gg \tau_R$ y $\tau \gg \tau_c$. Entonces, como se vio en el capítulo anterior, el movimiento del sistema S entre dos pulsos sucesivos se rige por el hamiltoniano $H_0 + H_R + H_{SR}$ y la densidad reducida ρ_S satisface la ecuación (2.21) bajo la aproximación de acoplamiento débil y en el régimen markoviano.

Teniendo en cuenta la forma (3.13) propuesta para la interacción y que $H_S = H_0$ se deduce a partir de la ec. (2.21) la siguiente ecuación de movimiento para la densidad del oscilador [41]

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) = & - \frac{i}{\hbar} [H_0, \rho_S(t)] + \frac{i}{\hbar} \frac{m\omega_r^2}{2} [Q, [Q, \rho_S(t)]_+] \\ & - \frac{i}{\hbar} \frac{\nu}{2m} [Q, [P, \rho_S(t)]_+] - \frac{C}{\hbar^2} [Q, [Q, \rho_S(t)]] - \frac{\delta}{\hbar^2} [Q, [P, \rho_S(t)]] \end{aligned} \quad (3.14)$$

donde los parámetros ν , w_r , C y δ dependen de las características del reservorio a través de la función de correlación $\Phi_R(t)$ (2.19),[41]

$$\nu = -\frac{2\lambda^2}{\hbar w_0} \int_0^\infty dt' \sin(\omega_0 t') \Im m \Phi_R(t') \quad (3.15)$$

$$w_r^2 = \frac{2\lambda^2}{\hbar m} \int_0^\infty dt' \cos(\omega_0 t') \Im m \Phi_R(t') \quad (3.16)$$

$$C = \lambda^2 \int_0^\infty dt' \cos(\omega_0 t') \Re e \Phi_R(t') \quad (3.17)$$

$$\delta = -\frac{\lambda^2}{m w_0} \int_0^\infty dt' \sin(\omega_0 t') \Re e \Phi_R(t') \quad (3.18)$$

donde introducimos la notación $\Phi_R(t) \equiv \Phi_{Q_R, Q_R}(t)$. Los coeficientes C y ν son las constantes de difusión y fricción respectivamente que están ligadas por la relación de *fluctuación -dipación cuántica* [10],[34]

$$C = \frac{\hbar w_0}{2} \coth\left(\frac{\beta \hbar w_0}{2}\right) \nu. \quad (3.19)$$

Si se aplica la AOR a la ecuación maestra (3.14) ésta resulta [41]

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) = & -\frac{i}{\hbar} \left(1 - \frac{w_r^2}{2w_0^2}\right) [H_0, \rho_S(t)] - \frac{i}{\hbar} \frac{\nu}{4m} ([Q, [P, \rho_S(t)]_+] - [P, [Q, \rho_S(t)]_+]) \\ & - \frac{C}{2\hbar^2} [Q, [Q, \rho_S(t)]] + \frac{1}{(m w_0)^2} [P, [P, \rho_S(t)]] \end{aligned} \quad (3.20)$$

donde vemos que el rol de las coordenadas Q y P es simétrico. Esto responde a que la AOR es equivalente a suponer una interacción del tipo $H_{SR} = \lambda(Q Q_R + P P_R)$ que por el contrario al modelo AC mantiene la simetría Q, P del hamiltoniano no perturbado.

Puede demostrarse que si la densidad de estados del reservorio es suficientemente elevada y el espectro de excitaciones del sistema no es acotado, el tiempo de decaimiento de la parte no-diagonal de ρ_S es mucho menor que el tiempo característico

τ_S ¹. [32] Por lo tanto, para $t \gg \tau_S$ la matriz densidad es diagonal y entonces, como se vio en el capítulo anterior, las descripciones son equivalentes. En otras palabras, en este caso la aproximación AOR es el límite asintótico del modelo AC.

3.2.2 Representación semiclásica para el caso disipativo

Describiremos el problema en el espacio de fases siguiendo el método propuesto por Graham y Tél para la cuantificación del mapa de Hénon. [6] Dicho procedimiento fue aplicado por Cerdeira *et.al.* [8] en el cálculo del coeficiente de Lyapunov para sistemas cuánticos disipativos.

Representaremos a la matriz densidad a través de la función de Wigner [7]

$$W(q, p) = \int \frac{dy}{2\pi\hbar} e^{ipy/\hbar} \langle q - y/2 | \rho | q + y/2 \rangle \quad (3.21)$$

cuyas principales propiedades están enunciadas en el Apéndice A. Aplicando la definición anterior a la ecuación maestra (3.14) y usando la regla del producto (A.14) resulta la ecuación de evolución libre para $W(q, p)$ en el caso AC, [41]

$$\partial_t W^{AC}(q, p, t) = \left(-\partial_q \frac{p}{m} + \partial_p \left(\frac{\nu}{m} p + m\Omega^2 q \right) - \delta \partial_{qp}^2 + C \partial_p^2 \right) W^{AC}(q, p, t). \quad (3.22)$$

con $\Omega = \sqrt{w_0^2 - w_r^2}$.

Análogamente, obtenemos la versión semiclásica de la ecuación (3.20), [41]

$$\begin{aligned} \partial_t W^{AOR}(q, p, t) = & \left\{ -\partial_q \left[\left(1 - \frac{w_r^2}{2w_0^2} \right) \frac{p}{m} - \frac{\nu}{2m} q \right] + \partial_p \left[m w_0^2 \left(1 - \frac{w_r^2}{2w_0^2} \right) q + \frac{\nu}{2m} p \right] \right. \\ & \left. + \frac{C}{2} \partial_p^2 + \partial_q^2 \frac{C}{2m^2 w_0^2} \right\} W^{AOR}(q, p, t). \end{aligned} \quad (3.23)$$

¹Esto puede no verificarse en el caso de sistemas que consisten en una partícula con spin 1/2 ó 1 inmersa en un baño térmico. [33]

Cabe mencionar que esta ecuación fue obtenida en variables de ángulo acción en la ref. [42]

Las ecuaciones (3.22) y (3.23) describen procesos del tipo Ornstein-Uhlenbeck [40] con matrices de difusión

$$D^{AC} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{2}\delta \\ -\frac{1}{2}\delta & C \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$D^{AOR} = C \begin{bmatrix} \frac{1}{2m^2\omega_0^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (3.25)$$

y coeficientes de deriva

$$AC \quad \begin{cases} D_q = \frac{1}{m}p \\ D_p = -m\Omega^2q - \frac{\nu}{m}p \end{cases} \quad (3.26)$$

$$AOR \quad \begin{cases} D_q = (1 - \frac{\omega_r^2}{2\omega_0^2})\frac{1}{m}p - \frac{\nu}{2m}q \\ D_p = -m\omega_0^2(1 - \frac{\omega_r^2}{2\omega_0^2})q - \frac{\nu}{2m}p \end{cases} \quad (3.27)$$

Comparando estos coeficientes con las ecuaciones (3.4) vemos que el modelo AC describe correctamente la evolución clásica salvo el corrimiento de frecuencia ω_r . En algunas aplicaciones de este modelo esta diferencia se elimina agregando al hamiltoniano H_0 el término aditivo $-m\omega_r^2Q^2/2$. Si observamos la ecuación de evolución de la función $W^{AC}(q, p, t)$ (3.22) vemos que ésta contiene un término de derivadas cruzadas $-\delta\partial_{qp}^2$ que no aparece en la ecuación clásica (3.3), pero en el límite clásico $\delta \rightarrow 0$, por lo tanto el modelo de interacción AC aporta la versión cuántica correcta del problema.

Para resolver las ecuaciones (3.22) y (3.23) es conveniente introducir la función generatriz de la función de Wigner

$$\phi(\psi, \eta, t) = \int \int dqdp W(q, p, t)e^{i(\psi q + \eta p)}. \quad (3.28)$$

a partir de la cual podemos obtener $W(q, p, t)$ mediante la transformación inversa

$$W(q, p, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int \int d\psi d\eta \phi(\psi, \eta, t) e^{-i(\psi q + \eta p)}. \quad (3.29)$$

Tanto para el caso AC como para el AOR la ecuación de evolución de $\phi(\psi, \eta, t)$ resulta ser de primer orden en derivadas parciales y puede resolverse exactamente por el método de las características [6],[40] resultando

$$\begin{aligned} \phi(\psi, \eta, t) = \exp\left\{-\frac{1}{2}[\sigma_{q\infty}^2(\psi^2 - \psi_0^2) \right. \\ \left. + \sigma_{p\infty}^2(\eta^2 - \eta_0^2)]\right\} \phi(\psi_0, \eta_0, t_0) \end{aligned} \quad (3.30)$$

donde las coordenadas (ψ_0, η_0) se relacionan con (ψ, η) a través de una transformación lineal,

$$\begin{pmatrix} \psi_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix} = M_c^\dagger(t - t_0) \begin{pmatrix} \psi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad (3.31)$$

el mapa M_c , es para el caso AC,

$$M_c^{AC}(t) = e^{-\frac{\nu t}{2m}} \begin{bmatrix} \cos \Omega' t + \frac{\nu}{2m\Omega'} \sin \Omega' t & \frac{1}{m\Omega'} \sin \Omega' t \\ -\frac{m\Omega'^2}{\Omega'} \sin \Omega' t & \cos \Omega' t - \frac{\nu}{2m\Omega'} \sin \Omega' t \end{bmatrix}, \quad (3.32)$$

con $\Omega' = \sqrt{\Omega^2 - (\frac{\nu}{2m})^2}$, y para el caso AOR

$$M_c^{AOR}(t) = e^{-\frac{\nu t}{2m}} \begin{bmatrix} \cos \omega_0(1 - \frac{w_r^2}{2w_0^2})t & \frac{1}{mw_0} \sin \omega_0(1 - \frac{w_r^2}{2w_0^2})t \\ -mw_0 \sin \omega_0(1 - \frac{w_r^2}{2w_0^2})t & \cos \omega_0(1 - \frac{w_r^2}{2w_0^2})t \end{bmatrix}, \quad (3.33)$$

y las dispersiones asintóticas que aparecen en la expresión (3.30) son

$$AC \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{q\infty}^2 = \frac{1}{m\Omega^2} \left(\frac{C}{\nu} - \delta \right) \\ \sigma_{p\infty}^2 = \frac{mC}{\nu} \end{array} \right. \quad (3.34)$$

$$AOR \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{q\infty}^2 = \frac{1}{mw_0^2} \frac{C}{\nu} \\ \sigma_{p\infty}^2 = m \frac{C}{\nu} \end{array} \right. \quad (3.35)$$

Para obtener $W(q, p, t)$ aplicamos la transformación (3.29) en (3.30) resultando

$$W(q, p, t) = \int \int dq_0 dp_0 T_{t-t_0}(q, p, q_0, p_0) W(q_0, p_0, t_0) \quad (3.36)$$

donde el propagador disipativo es de la forma

$$T_{\Delta t}(q, p, q_0, p_0) = \frac{1}{2\pi\sigma(\Delta t)} \exp\{\Lambda\} \quad (3.37)$$

con

$$\begin{aligned} \Lambda = & -\frac{1}{2\sigma^2(\Delta t)} [(q - q_c)^2 \sigma_p^2(\Delta t) \\ & + (p - p_c)^2 \sigma_q^2(\Delta t) - 2\sigma_{qp}(\Delta t)(q - q_c)(p - p_c)]. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Las coordenadas de los centros (q_c, p_c) se obtienen mapeando clásicamente las coordenadas (q_0, p_0) ,

$$\begin{pmatrix} q_c \\ p_c \end{pmatrix} = M_c(\Delta t) \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad (3.39)$$

con M_c dado por las ecs (3.32) y (3.33). Las dispersiones dependientes del tiempo son

$$AC \left\{ \begin{array}{l}
 \sigma_q^2(t) = \sigma_{q\infty}^2 - e^{\frac{\nu t}{m}} \left\{ (\cos \Omega' t + \frac{\nu}{2m\Omega'} \sin \Omega' t)^2 \sigma_{q\infty}^2 + \right. \\
 \left. (\frac{1}{m\Omega'} \sin \Omega' t)^2 \sigma_{p\infty}^2 \right\} \\
 \sigma_p^2(t) = \sigma_{p\infty}^2 - e^{\frac{\nu t}{m}} \left\{ (\frac{\Omega^2 m \sin \Omega' t}{\Omega'})^2 \sigma_{q\infty}^2 + \right. \\
 \left. (\cos \Omega' t - \frac{\nu}{2m\Omega'} \sin \Omega' t)^2 \sigma_{p\infty}^2 \right\} \\
 \sigma_{qp}(t) = -e^{\frac{\nu t}{m}} \left\{ -(\cos \Omega' t + \frac{\nu}{2m\Omega'} \sin \Omega' t) \frac{\Omega^2 m \sin \Omega' t}{\Omega'} \sigma_{q\infty}^2 + \right. \\
 \left. (\cos \Omega' t - \frac{\nu}{2m\Omega'} \sin \Omega' t) \frac{1}{m\Omega'} \sin \Omega' t \sigma_{p\infty}^2 \right\}
 \end{array} \right. \quad (3.40)$$

y

$$AOR \left\{ \begin{array}{l}
 \sigma_q^2(t) = \sigma_{q\infty}^2 (1 - e^{\frac{\nu t}{m}}) \\
 \sigma_p^2(t) = \sigma_{p\infty}^2 (1 - e^{\frac{\nu t}{m}}) \\
 \sigma_{qp}(t) = 0
 \end{array} \right. \quad (3.41)$$

Además, se tiene $\sigma^2(t) = \sigma_q^2(t)\sigma_p^2(t) - \sigma_{qp}^2(t)$.

El propagador disipativo cumple la propiedad de semigrupo

$$T_{t+\nu'}(q, p, q_0, p_0) = \int \int dq' dp' T_t(q, p, q', p') T_{\nu'}(q', p', q_0, p_0) \quad (3.42)$$

pero no satisface la relación de ortogonalidad, es decir

$$\int \int dq' dp' T_t(q, p, q', p') T_{-t}(q', p', q_0, p_0) \neq \delta(q - q_0) \delta(p - p_0). \quad (3.43)$$

Esto se debe a que el proceso disipativo-difusivo es irreversible.

3.3 Mapa cuántico para el sistema pulsado.

Para obtener el mapa de la matriz densidad resta agregar el efecto de la pulsación. Como vimos anteriormente en la Sección 2.4, el cambio en la matriz densidad en el instante $t = n\tau$ está determinado por el potencial $-g(Q)$ resultando

$$\rho(n\tau^+) = e^{\frac{i}{\hbar}g(Q)}\rho(n\tau^-)e^{-\frac{i}{\hbar}g(Q)}. \quad (3.44)$$

la cual puede ser escrita en representación semiclásica como

$$W(q, p, n\tau^+) = \int \frac{dy}{2\pi\hbar} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}py + \frac{i}{\hbar}\left[g\left(q + \frac{y}{2}\right) - g\left(q - \frac{y}{2}\right)\right]\right\} \langle q + y/2 | \rho(n\tau^-) | q - y/2 \rangle. \quad (3.45)$$

donde hemos aplicado la definición (3.21).

Usando la ecuación (A.13) obtenemos la variación instantánea de la distribución de Wigner

$$W(q, p, n\tau^+) = \int \int \frac{dy dp'}{2\pi\hbar} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(p - p')y + \frac{i}{\hbar}\left[g\left(q + \frac{y}{2}\right) - g\left(q - \frac{y}{2}\right)\right]\right\} W(q, p', n\tau^-). \quad (3.46)$$

Observemos que la ecuación anterior puede expresarse en forma similar a la ecuación (3.36),

$$W(q, p, n\tau^+) = \int \int dp_- dq_- G(q, p, q_-, p_-) W(q_-, p_-, n\tau^-) \quad (3.47)$$

definiendo el propagador instantáneo

$$G(q, p, q_-, p_-) = \int \frac{d\eta}{2\pi} \exp\left\{-\frac{i}{\hbar}(p - p_-)\hbar\eta + \frac{i}{\hbar}\left[g\left(q + \frac{\hbar\eta}{2}\right) - g\left(q - \frac{\hbar\eta}{2}\right)\right]\right\} \delta(q - q_-) \quad (3.48)$$

donde se hace evidente el comportamiento local en la coordenada de este propagador.

Finalmente, el mapa cuántico queda generado reemplazando a $W(q_-, p_-, n\tau^-)$ en (3.47) por la ecuación (3.36) tomando $t_0 = (n - 1)\tau^+$,

$$W_n(q, p) = \int \int dq_0 dp_0 K(q, p, q_0, p_0) W_{n-1}(q_0, p_0) \quad (3.49)$$

donde definimos el propagador total discreto como

$$K(q, p, q_0, p_0) = \int \int dp_- dq_- G(q, p, q_-, p_-) T_\tau(q_-, p_-, q_0, p_0) \quad (3.50)$$

e introducimos la notación $W_n(q, p) = W(q, p, n\tau^+)$

3.3.1 Mapa semiclásico para el sistema pulsado.

Si bien la ec. (3.49) expresa la solución formal del problema en algunos casos sólo interesa conocer el valor medio de los observables Q y P y de las fluctuaciones $(Q - \langle Q \rangle)^2$, $(P - \langle P \rangle)^2$ y $(Q - \langle Q \rangle)(P - \langle P \rangle)$.

Usando las ecs. (A.17) y (A.24) podemos calcular los momentos $m_{kl} = \langle \{Q^k P^l\}_\pi \rangle^2$ a partir de la función de Wigner como

$$m_{kl} = \int \int dp dq W(q, p) q^k p^l. \quad (3.51)$$

Reemplazando $W(q, p)$ por su expresión (3.49) e invirtiendo el orden de las integrales resulta

$$(m_{kl})_n = \int \int dq_0 dp_0 W_{n-1}(q_0, p_0) \int \int dq dp K(q, p, q_0, p_0) q^k p^l \quad (3.52)$$

En ausencia de la pulsación, es decir si $K(q, p, q_0, p_0) = T_\tau(q, p, q_0, p_0)$, la segunda integral puede transformarse, realizando sucesivas integrales por partes, en la siguiente expresión

²La notación $\{ \}_\pi$ implica sumar con el mismo peso todas las permutaciones posibles del producto de operadores y dividir por el número de términos.

$$\int \int dq dp K(q, p, q_0, p_0) q^k p^l = \sum_{i=0}^k \sum_{\substack{j=0 \\ (j+i) \text{ par}}}^l R_{ij} q_c^{k-i}(q_0, p_0) p_c^{l-j}(q_0, p_0) \quad (3.53)$$

$$R_{ij} = \sum_{\substack{r=0 \\ r \text{ par}}}^j 2^{-(j+i)/2} \binom{k}{i} \binom{l}{j} \binom{j}{r} \frac{r!}{(\frac{r}{2})!} \frac{(j+i-r)!}{(\frac{j+i-r}{2})!} \sigma_q^{i-j}(\tau) \sigma_{qp}^{j-r}(\tau) \sigma^r(\tau). \quad (3.54)$$

Dado que las coordenadas (q_c, p_c) son

$$\begin{pmatrix} q_c \\ p_c \end{pmatrix} = M_c \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \quad (3.55)$$

podemos aplicar la propiedad 10 del Apéndice A según la cual,

$$q_c^{k-i} p_c^{l-j} = [\{Q_c^{k-i} P_c^{l-j}\}_\pi]_W(q_0, p_0) \quad (3.56)$$

donde los operadores Q_c y P_c son

$$\begin{pmatrix} Q_c \\ P_c \end{pmatrix} = M_c \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}. \quad (3.57)$$

Reemplazando la igualdad (3.56) en (3.53) y el resultado en (3.52) obtenemos

$$(m_{kl})_n = \sum_{i=0}^k \sum_{\substack{j=0 \\ (j+i) \text{ par}}}^l R_{ij} \int dq_0 dp_0 W_{n-1}(q_0, p_0) [\{Q_c^{k-i} P_c^{l-j}\}_\pi]_W(q_0, p_0)$$

Esta suma es un mapa semiclásico que permite obtener los momentos de orden $l + k$ a partir de los de orden inferior calculados en el paso anterior:

$$(m_{l'k'})_{n-1} \longrightarrow (m_{lk})_n, \quad l' + k' \leq l + k \quad (3.59)$$

El mapa de los primeros y segundos momentos es más particular aún ya que involucra órdenes iguales

$$\begin{aligned} \langle Q \rangle_n &= \langle Q_c \rangle_{n-1} \\ \langle P \rangle_n &= \langle P_c \rangle_{n-1} \\ \langle Q^2 \rangle_n &= \langle Q_c^2 \rangle_{n-1} + \sigma_q^2(\tau) \\ \langle P^2 \rangle_n &= \langle P_c^2 \rangle_{n-1} + \sigma_p^2(\tau) \\ \frac{1}{2} \langle [Q, P]_+ \rangle_n &= \frac{1}{2} \langle [Q_c, P_c]_+ \rangle_{n-1} + \sigma_{qp}(\tau) \end{aligned} \quad (3.60)$$

Es decir que la información necesaria para conocer $(m_{kl})_n$ se limita a un número finito de cantidades $(m_{k'l'})_{n-1}$. Esta propiedad del propagador disipativo no lo es del propagador G como veremos luego.

En general, dados los momentos $m_{kl} = \langle q^k p^l \rangle$ de una distribución podemos calcular su función característica mediante la siguiente suma [40]

$$\phi(\psi, \eta, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} m_{kl} \frac{i^{k+l}}{k!l!} \psi^k \eta^l, \quad (3.61)$$

o, definiendo los cumulantes c_{kl} como

$$c_{kl} = \left[\frac{\partial^k}{\partial \psi^k} \frac{\partial^l}{\partial \eta^l} \ln \phi(\psi, \eta) \right]_{\psi=\eta=0}, \quad (3.62)$$

$\phi(\psi, \eta)$ también se expresa como

$$\phi(\psi, \eta, t) = \exp \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} c_{kl} \frac{\psi^k \eta^l}{k!l!} \right\} \quad (3.63)$$

Puede vincularse los cumulantes con los momentos igualando las ecuaciones (3.61) y (3.63). Por ejemplo, los cumulantes de primer y segundo orden son

$$\begin{aligned} c_{10} &= m_{10} \\ c_{01} &= m_{01} \\ c_{20} &= m_{20} - m_{10}^2 \\ c_{02} &= m_{02} - m_{01}^2 \\ c_{11} &= m_{11} - m_{10}m_{01} \end{aligned} \quad (3.64)$$

Supongamos que inicialmente la densidad del sistema es de la forma

$$W_0(q, p) = N \exp \{ -\alpha^2 q^2 - \beta^2 p^2 + \gamma qp \} \quad (3.65)$$

con N, α, β y γ reales. Como $W_0(q, p)$ es una función de Gauss, los cumulantes de orden > 2 son nulos y por lo tanto en (3.63) la suma se reduce a los términos con $k + l = 0, 1, 2$.

Si aplicamos el propagador disipativo, la función que resulta es también una función de Gauss. Por lo tanto, en ausencia de la pulsación podemos obtener el mapa cuántico mapeando los momentos de primer y segundo orden solamente y no es necesario conocer los de mayor orden aunque sean distintos de cero. Esto deja de valer cuando $g(Q)$ es una función no nula y por lo menos de orden tres en Q , es

decir que el pulso de potencial es no-armónico. Por ejemplo, los momentos hasta segundo orden se ven modificados como sigue,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \langle [Q, P]_+ \rangle_+ &= \frac{1}{2} \langle [Q, P]_+ \rangle_- + \langle Qg'(Q) \rangle_- \\
\langle P \rangle_+ &= \langle P + g'(Q) \rangle_- \\
\langle P^2 \rangle_+ &= \langle (P + g'(Q))^2 \rangle_- \\
\langle Q^k \rangle_+ &= \langle Q^k \rangle_- .
\end{aligned} \tag{3.66}$$

La última relación vale para cualquier orden k . Vemos que si $g(Q)$ es un polinomio de orden ≥ 3 el mapa no cumple la propiedad (3.59), pues el término $g'(Q)$ introduce un acoplamiento entre los valores medios $\langle P^i \rangle$ con los momentos de órdenes superiores $\langle Q^j \rangle$, $j > i$. Por lo tanto, no basta conocer los primeros momentos para construir el mapa de la función $W_n(q, p)$ que además deja de ser gaussiana. En este caso el mapa resulta ser la versión cuántica de un mapa no-lineal disipativo.

Por el contrario, si $g(Q)$ es cuadrática, el potencial pulsante es armónico y no introduce términos no-lineales en las ecuaciones para los momentos. En este caso los conjuntos $S_1 = \{m_{ik}, i + k = 1\}$ y $S_2 = \{m_{ik}, i + k = 2\}$ resultan invariantes ante el mapa semiclásico.

3.3.2 Perturbación armónica.

Tomemos por ejemplo $g(Q) = \mu Q^2$ con μ real. Reemplazando este valor de $g(Q)$ en las ecs. (3.66) obtenemos el mapa instantáneo para los primeros momentos:

$$x_+ = M_{1g} x_- \tag{3.67}$$

donde definimos el vector $x = (\langle Q \rangle, \langle P \rangle)$, y

$$M_{1g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2\mu & 1 \end{bmatrix}. \quad (3.68)$$

Para construir el mapa completo aplicamos M_{1g} al punto $x_{n-} = M_c x_{n-1}$ (3.60) de modo tal que finalmente obtenemos el mapa semiclásico

$$x_n = M_{1g} M_c x_{n-1}. \quad (3.69)$$

Este mapa, tanto para AC como para AOR, tiene un punto fijo en $(0, 0)$ que es estable para valores bajos de $|\mu|$, volviéndose inestable para $\mu > \mu_c^+$ o $\mu < \mu_c^-$, como se ve en la Fig. (3.1) donde graficamos el módulo de los autovalores en función de μ para el caso AOR (para AC es similar).

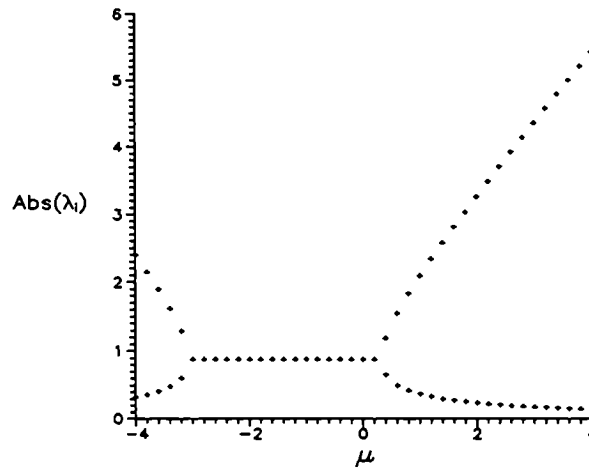


Figura 3.1: Módulo de los autovalores del mapa $M_{1g}M_c$ en función de μ para el modelo AOR y con $w_0\tau = 0.2\pi$ y $w_r = 0$.

Los valores de μ_c^\pm son

$$\mu_c^\pm(AOR) = \frac{m\Omega^*}{\sin(\Omega^*\tau)} \left(\pm \frac{E^2 + 1}{2E} - \cos(\Omega^*\tau) \right) \quad (3.70)$$

$$\mu_c^\pm(AC) = \sqrt{1 - \tau_v^2} \mu_c^\pm(AOR) \quad (3.71)$$

siendo $r_\nu = \nu/2m\Omega$, $E = e^{-\nu\tau/2m}$ y

$$\Omega^* = \begin{cases} \Omega' & (AC) \\ \omega_0(1 - \omega_\tau^2/2\omega_0^2) & (AOR). \end{cases} \quad (3.72)$$

Vemos que μ_c diverge cuando Ω^* es un múltiplo entero de π en cuyo caso los autovalores son $\lambda_{1,2} = E < 1$ para cualquier μ y la perturbación no afecta la estabilidad del punto fijo

Procediendo en forma análoga para los segundos momentos se obtiene el mapa

$$y_n = M_{2g}(M_{2c}y_{n-1} + y_\sigma) \quad (3.73)$$

con $y = (\langle Q^2 \rangle, \langle P^2 \rangle, \langle [Q, P]_+/2 \rangle)$,

$$M_{2g} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4\mu^2 & 1 & 4\mu \\ 2\mu & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.74)$$

$$M_{2c} = \begin{bmatrix} M_{c11}^2 & M_{c12}^2 & 2M_{c11}M_{c12} \\ M_{c21}^2 & M_{c22}^2 & 2M_{c22}M_{c21} \\ M_{c11}M_{c21} & M_{c12}M_{c22} & (M_{c12}M_{c21} + M_{c11}M_{c22}) \end{bmatrix}, \quad (3.75)$$

e $y_\sigma = (\sigma_q^2(\tau), \sigma_p^2(\tau), \sigma_{qp}(\tau))$.

A diferencia del caso anterior este mapa es no homogéneo y tiene un punto fijo fuera del $(0, 0, 0)$. En particular, si $\Omega^*\tau = n\pi$ el punto fijo para AOR y AC es

$$y_1 = \sigma_{q\infty}^2 \quad (3.76)$$

$$y_2 = \sigma_{p\infty}^2 + 4\mu^2\sigma_{q\infty}^2 \frac{1+E}{(1-E)^2} \quad (3.77)$$

$$y_3 = \frac{2\mu}{1-E}\sigma_{q\infty}^2. \quad (3.78)$$

donde usamos las relaciones (3.40) y (3.41). Los autovalores en este caso son $\lambda_{1,2,3} = E < 1$, por lo tanto el punto fijo es estable para cualquier valor de μ .

Si $\Omega\tau \neq n\pi$ el punto fijo pierde estabilidad cuando $|\mu|$ supera el valor crítico como se ve por ejemplo en la Fig. (3.2) para AOR. Los valores críticos de μ para este mapa son los mismos que para el mapa $M_{1g}M_c$.

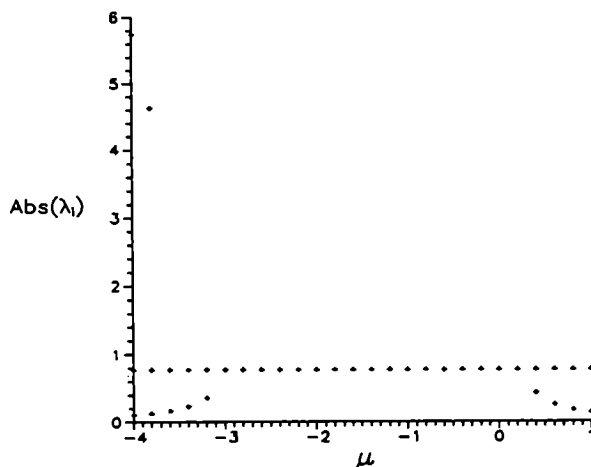


Figura 3.2: Módulo de los autovalores del mapa $M_{2g}M_{2c}$ en función de μ para el modelo AOR y con $w_0\tau = 0.2\pi$ y $w_\tau = 0$.

Cuando μ es tal que el punto fijo pierde estabilidad, sucede además que el valor de equilibrio de los segundos momentos presenta coordenadas negativas, es decir que en este caso el punto fijo no pertenece al espacio de momentos. Esto significa que si la intensidad del potencial pulsante es suficientemente alta puede contrarrestar los efectos disipativos impidiendo que el sistema alcance el equilibrio. Como vemos en la expresión (3.70) si la disipación es importante, $E \ll 1$, el valor crítico de μ diverge como $\pm 1/E$. Lo mismo sucede si $\tau \rightarrow \infty$

Cuando $\mu \rightarrow \mu_c$ los valores de equilibrio de los segundos momentos divergen.

Como fue mencionado anteriormente, si la función de Wigner inicial es una gaussiana, al aplicar el mapa con la pulsación armónica mantiene su estructura. Por lo tanto a cada paso podemos construir la distribución $W_n(q, p)$ a partir del mapa de los primeros y segundos momentos.

Para ello calculamos la función característica dada por la ec. (3.63) con los

cumulantes dados por las ecs. (3.64) que en términos de los valores medios son

$$\begin{aligned}c_{10,n} &= \langle Q \rangle_n \\c_{01,n} &= \langle P \rangle_n \\c_{20,n} &= \langle Q^2 \rangle_n - \langle Q \rangle_n^2 \\c_{02,n} &= \langle P^2 \rangle_n - \langle P \rangle_n^2 \\c_{11,n} &= \frac{1}{2} \langle [Q, P]_+ \rangle_n - \langle Q \rangle_n \langle P \rangle_n.\end{aligned}\tag{3.79}$$

La función característica es entonces

$$\begin{aligned}\phi_n(\psi, \eta) &= \exp\{i(c_{10,n}\psi + c_{01,n}\eta) \\ &\quad - \frac{1}{2}(c_{20,n}\psi^2 + c_{02,n}\eta^2 + c_{11,n}\psi\eta)\}\end{aligned}\tag{3.80}$$

Integrando esta función como indica la ec. (3.29), obtenemos la función de Wigner

$$\begin{aligned}W_n(q, p) &= \frac{1}{2\pi\sigma_n} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_n^2} [c_{02,n}(q - \langle Q \rangle_n)^2 + c_{20,n}(p - \langle P \rangle_n)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2c_{11,n}(q - \langle Q \rangle_n)(p - \langle P \rangle_n)] \right\}.\end{aligned}\tag{3.81}$$

$$\text{con } \sigma_n = \sqrt{c_{20,n}c_{02,n} - c_{11,n}^2}.$$

La distribución de equilibrio estará centrada en el origen y si μ se acerca al valor crítico se extenderá uniformemente en todo el espacio.

3.4 Límite de Acoplamiento Débil.

Como puede verse en las secciones anteriores los mapas cuánticos son sensiblemente diferentes según el modelo de interacción utilizado. Si bien la estructura de los propagadores es equivalente, los mapas M_c y las dispersiones correspondientes a AC y AOR no lo son.

Comparemos en primer término los mapas dados por las expresiones (3.32) y (3.33).

La frecuencia de los movimientos es en el caso AC

$$\Omega'^{AC} = \sqrt{w_0^2 - \left(\frac{\nu}{2m}\right)^2 - w_r^2} \quad (3.82)$$

y en el caso AOR

$$\Omega'^{AOR} = w_0 \left(1 - \frac{w_r^2}{2w_0^2}\right) \quad (3.83)$$

Si observamos las expresiones de los coeficientes ν y w_r^2 dados por (3.15) y (3.16) vemos que ambos son proporcionales al cuadrado de la intensidad de la interacción (λ^2). En consecuencia, si $\lambda \ll 1$ valen las siguientes aproximaciones

$$\Omega'^{AOR} \simeq \Omega'^{AC} \simeq w_0$$

y por lo tanto las frecuencias coinciden. Además, con el mismo argumento pueden aproximarse los términos diagonales del mapa M_c^{AC} por el $\cos(w_0\tau)$, ya que $\nu/2m\Omega' \ll 1$. Luego podemos decir que

$$M_c^{AC} \simeq M_c^{AOR}, \text{ si } \lambda \ll 1.$$

Por otro lado, las dispersiones asintóticas AC (3.34) coinciden con las correspondientes AOR (3.35) en el límite $\lambda \ll 1$, ya que en este caso $\Omega \simeq w_0$ y $\delta \ll C/\nu$, y

además vale que $\sigma_{p\infty} \simeq \sigma_{q\infty} m \omega_0$. Usando esta última aproximación y tomando el límite $\lambda \rightarrow 0$ en las ecuaciones (3.40) resulta

$$AC \begin{cases} \sigma_q^2(\tau) \simeq \sigma_{q\infty}^2 (1 - e^{-\frac{\nu\tau}{m}}) \\ \sigma_p^2(\tau) \simeq \sigma_{p\infty}^2 (1 - e^{-\frac{\nu\tau}{m}}) \\ \sigma_{qp}(\tau) \simeq 0 \end{cases}$$

las cuales coinciden con las dispersiones AOR (3.35).

Por lo tanto, concluimos que los propagadores AOR y AC coinciden en el límite $\lambda \ll 1$.

3.5 Límite clásico.

Estudiaremos ahora el límite clásico del propagador $K(q, p, q_0, p_0)$ para lo cual es conveniente reescribir la integral (3.50) en la forma

$$\begin{aligned} K(q, p, q_0, p_0) = & \int \int \frac{d\psi d\eta}{4\pi^2} \exp\left\{\frac{i}{\hbar}[\Delta g - \hbar g'(q)\eta]\right\} \\ & \exp\{-i[(q - q_c)\psi + (p - p_c - g'(q))\eta]\} \\ & \exp\left\{-\frac{1}{2}[\sigma_q^2(\tau)\psi^2 + \sigma_p^2(\tau)\eta^2 + 2\sigma_{qp}(\tau)\psi\eta]\right\}, \end{aligned} \quad (3.84)$$

donde Δg es

$$\Delta g = g\left(Q + \frac{\hbar\eta}{2}\right) - g\left(Q - \frac{\hbar\eta}{2}\right). \quad (3.85)$$

Supongamos que la función $g(Q)$ es analítica. Luego podemos desarrollar Δg en potencias de η ,

$$\frac{1}{\hbar}\Delta g = \eta g'(q) + \frac{\hbar^2 \eta^3}{4} \sum_{j \geq 0} \frac{g^{(2j+3)}(q)}{(2j+3)!} \left(\frac{\hbar \eta}{2}\right)^{2j}. \quad (3.86)$$

Luego, la fase de la primera exponencial en la ec. (3.84) es

$$\frac{1}{\hbar}(\Delta g - \hbar g'(q)\eta) = \frac{\hbar^2 \eta^3}{4} \sum_{j \geq 0} \frac{g^{(2j+3)}(q)}{(2j+3)!} \left(\frac{\hbar \eta}{2}\right)^{2j} \quad (3.87)$$

que es de orden \hbar^2 . Por lo tanto, en el límite clásico ésta puede despreciarse y el propagador puede integrarse resultando [41]

$$\begin{aligned} K(q, p, q_0, p_0) &= \frac{1}{2\pi\sigma(\tau)} \exp\left\{-\frac{1}{2\sigma^2(\tau)}[(q - q_c)^2 \sigma_p^2(\tau) \right. \\ &+ (p - p_c - g'(q))^2 \sigma_q^2(\tau) - \\ &\left. - 2\sigma_{qp}(\tau)(q - q_c)(p - p_c - g'(q))\right\} \end{aligned} \quad (3.88)$$

Observemos que en este límite el efecto de la pulsación se reduce a una corrección al valor de p_c . Esto fue observado por Graham *et.al.* para el caso AOR.[6]

La diferencia que introduce acoplamiento AC está implícita en los valores de las dispersiones y los centros p_c y q_c .

El mapa de los primeros momentos es

$$\begin{pmatrix} \langle Q \rangle_n \\ \langle P \rangle_n \end{pmatrix} = M_c \begin{pmatrix} \langle Q \rangle_{n-1} \\ \langle P \rangle_{n-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \langle g'(Q) \rangle_n \end{pmatrix} \quad (3.89)$$

que coincide con el mapa clásico (3.10) reemplazando M por el M_c^{AC} o M_c^{AOR} . El mapa M^{AC} (3.32) difiere de M (3.6) solamente en la frecuencia $\Omega' = \sqrt{w'^2 - w_r^2}$ que, como fue mencionado anteriormente sufre un corrimiento respecto a la frecuencia clásica w' .

Aún en el límite clásico, el propagador presenta un ensanchamiento de origen térmico. Si observamos las expresiones de las dispersiones asintóticas (3.34) y (3.35) vemos que son proporcionales al factor C/ν . Como fue mencionado anteriormente,

este cociente está determinado por la relación de fluctuación-disipación (3.19), que en el límite clásico resulta proporcional a la temperatura,

$$\lim_{\beta\hbar\omega_0 \rightarrow 0} \frac{C}{\nu} = \frac{1}{\beta}. \quad (3.90)$$

mientras que en el caso opuesto, es decir si $\beta\hbar\omega_0 \gg 1$, la dispersión es puramente cuántica,

$$\lim_{\beta\hbar\omega_0 \rightarrow \infty} \frac{C}{\nu} = \frac{\hbar\omega_0}{2}. \quad (3.91)$$

Es importante remarcar que, como se comentó en el capítulo anterior, para temperaturas bajas el tiempo de decaimiento de las correlaciones del reservorio τ_R crece como $1/T$. Por lo tanto, lo dicho anteriormente sobre las dispersiones tiene validez para tiempos suficientemente largos como para que la aproximación markoviana pueda aplicarse, es decir si $\tau \gg \tau_R \sim 1/T$.

3.6 Límite asintótico.

Si la frecuencia de la pulsación es suficientemente baja, es decir $\frac{\nu\tau}{m} \gg 1$ el oscilador alcanza a llegar al régimen asintótico antes de recibir un nuevo pulso. Como se adelantó en el capítulo anterior, la ecuación maestra en la aproximación AOR es el límite asintótico de la ecuación maestra AC.

Veamos como se refleja este hecho en los propagadores. En este límite las dispersiones $\sigma_q(\tau)$, $\sigma_p(\tau)$ y $\sigma_{qp}(\tau)$ toman los valores $\sigma_{q\infty}$, $\sigma_{p\infty}$ y 0. Además el punto (q_c, p_c) tiende al centro $(0,0)$ ya que los mapas M_c son proporcionales al factor de decaimiento $e^{-\nu\tau/2m}$. Por lo tanto los mapas cuánticos en este límite coinciden salvo en las dispersiones asintóticas.

Capítulo 4

Sistema con spin

En este capítulo aplicaremos el formalismo descrito en el Capítulo 2 a un sistema con spin polarizado en un campo magnético, inmerso en un baño de osciladores y periódicamente perturbado. El sistema S en este caso podrá representar a a) una partícula, b) varias con spin total j , c) un sistema de dos o más niveles que puede ser descrito con el formalismo de *quasispin*, [43] d) la densidad de spin de un líquido o la densidad de magnetización de un sólido.

Escribimos el hamiltoniano total del sistema S+R en la forma

$$H = H_S + H_R + H_{SR}. \quad (4.1)$$

El hamiltoniano correspondiente al sistema S es

$$H_S = H_0 - H_G \quad (4.2)$$

donde H_0 corresponde al spin acoplado a un campo magnético externo constante en

la dirección z y es

$$H_0 = -\Omega J_z \quad (4.3)$$

con Ω proporcional a la intensidad del campo y siendo J_z la componente z del vector de spin. El hamiltoniano H_G corresponde a la perturbación periódica y es de la forma

$$H_G = \sum_{n=1}^{\infty} G \delta(t - n\tau) \quad (4.4)$$

El operador G actúa sobre el espacio $\mathcal{E}(j)$ de estados del sistema S, de dimensión $(2j+1)^2$ y el período τ es tal que permite la aplicación de la EMG (2.21) entre dos pulsos sucesivos, es decir $\tau \gg \tau_R, \tau_c$.

El baño de osciladores es un reservorio bosónico como el descrito en la Sección 2.3, y H_R es de la forma (2.25).

Tomamos el hamiltoniano de interacción de la forma

$$H_{SR} = \lambda(J_+ + J_-)(R^\dagger + R) \quad (4.5)$$

que corresponde al modelo AC, definido en la Sección (2.2), siendo $J_+ = J_x + iJ_y$ y $J_- = J_x - iJ_y$ y donde R^\dagger y R tienen la estructura dada por las ecs. (2.26) y (2.27).

4.1 Ecuación maestra para el caso disipativo

Durante la evolución libre la densidad del sistema S cumple la EMG (2.21), que para este caso particular resulta [33]

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_S(t) = & -\frac{i}{\hbar}\Omega[J_z, \rho_S] - i\Delta^- [J_+ J_-, \rho_S] - i\Delta^+ [J_- J_+, \rho_S] \\ & -\frac{1}{2}W^+(J_- J_+ \rho_S - 2J_+ \rho_S J_- + \rho_S J_- J_+) \\ & -\frac{1}{2}W^-(J_+ J_- \rho_S - 2J_- \rho_S J_+ + \rho_S J_+ J_-) \\ & -\epsilon \left[\left(\frac{W^+}{2} + i\Delta^+ \right) [J_+, J_+ \rho_S] - \left(\frac{W^+}{2} - i\Delta^+ \right) [J_-, \rho_S J_-] \right] \end{aligned}$$

$$+\left(\frac{W^-}{2} + i\Delta^-\right)\{J_-, J_{-\rho_S}\} - \left(\frac{W^-}{2} - i\Delta^-\right)\{J_+, \rho_S J_+\} \quad (4.6)$$

donde introducimos la constante ε que toma los valores 1 ó 0. Cuando vale 1 la EMG corresponde al modelo de interacción AC, mientras que al tomar $\varepsilon = 0$ estamos realizando la aproximación AOR.

Las constantes W^\pm y Δ^\pm son las probabilidades de transición disipativas y conservativas respectivamente que se obtienen a partir de la densidad espectral del reservorio $D(w)$ definida en el Capítulo 2 (2.36) como [33]

$$W^\pm = \lambda^2 \frac{2\pi}{\hbar^2} D(\Omega) \times \begin{cases} n(\Omega) + 1 \\ n(\Omega) \end{cases} \quad (4.7)$$

y

$$\Delta^\pm = -\frac{2\lambda^2}{\hbar^2} \mathcal{P} \int_0^\infty dw D(w) \left(w \pm \Omega \coth\left(\frac{\beta\hbar w}{2}\right) \right) \frac{1}{2(w^2 - \Omega^2)} \quad (4.8)$$

donde \mathcal{P} significa tomar la parte principal de la integral.

Debe notarse que en el caso del oscilador armónico no se hizo referencia a un reservorio en particular. Los parámetros de la EMG obtenida (ν, w_r, C y δ) podrían calcularse para un reservorio bosónico reemplazando la función de correlación dada por (2.36) en las expresiones (3.15) a (3.18).

4.2 Representación semiclásica de la EMG

En el problema del oscilador la dimensión de la matriz densidad es infinita, por eso recurrimos a la representación de Wigner en el espacio de fases para transformar la EMG en una ecuación diferencial. Vimos además que en algún caso la dimensión del problema podía reducirse y la solución de dicha ecuación podía obtenerse a partir de la dinámica de un número finito de momentos.

Para el sistema de spin j el espacio de estados tiene dimensión finita y la EMG se convierte en un sistema de ecuaciones acopladas para los elementos de matriz de la densidad. En particular para el caso $j = 1/2$ la ecuación que resulta tiene solución analítica.

Veremos que para un dado valor de j la dinámica puede obtenerse a partir de la evolución temporal de $N_j = (2j + 1)^2$ momentos. Mientras el valor de j sea pequeño este sistema puede resolverse. En otro caso es posible recurrir a una representación semiclásica que permite describir el problema en el espacio de fases análogamente a la representación de Wigner. [44]

Dado un j fijo, el espacio $\mathcal{E}(j)$ es isomorfo al espacio de matrices de dimensión $(2j + 1) \times (2j + 1)$. Los llamados *operadores de polarización* [45] $T_{LM}(j)$ ($M = -L \dots L$ y $L = 0 \dots 2j$) forman una base completa (\mathcal{B}) de dicho espacio y cumplen las siguientes propiedades,[45]

$$\text{Tr}_S \{T_{LM}^\dagger(j) T_{L'M'}(j)\} = \delta_{L,L'} \delta_{M,M'} \quad (4.9)$$

$$T_{LM}^\dagger(j) = (-)^M T_{L,-M}(j) \quad (4.10)$$

Además, los mismos pueden ser construidos a partir de los productos de los operadores J_i como

$$T_{LM}(j) = N_L(j) (J \cdot \nabla)^L \{r^L Y_{LM}(\vartheta, \phi)\} \quad (4.11)$$

donde Y_{LM} son los armónicos esféricos y

$$N_L(j) = \frac{2^L}{L!} \left[\frac{4\pi(2j-L)!}{(2j+L+1)!} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

Nótese que si bien la base \mathcal{B} es completa sus elementos no son hermíticos.

Definamos los siguientes operadores: ¹

$$X_{LM} = \frac{1}{\sqrt{2}} (T_{LM} + T_{LM}^\dagger) \quad (L : 0 \dots 2j, M : 1 \dots L) \quad (4.13)$$

y

$$P_{LM} = \frac{1}{\sqrt{2}i} (T_{LM} - T_{LM}^\dagger) \quad (L : 0 \dots 2j, M : 1 \dots L) \quad (4.14)$$

¹A partir de este punto y para simplificar la notación no escribiremos la dependencia en j de T_{LM} .

El conjunto $\{T_{L0}, X_{LM}, P_{LM}\}$, $(L : 0 \dots 2j, M : 1 \dots L)$ es también una base completa (B') del espacio $\mathcal{E}(j)$ que tiene la ventaja de estar compuesta por observables. Por ejemplo, sus primeros elementos son

$$\begin{aligned} T_{00} &= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} I_j \\ T_{10} &= \sqrt{\frac{3}{j(j+1)(2j+1)}} J_z \\ X_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{j(j+1)(2j+1)}} J_x \\ P_{11} &= -\sqrt{\frac{3}{j(j+1)(2j+1)}} J_y \end{aligned}$$

donde I_j es el operador identidad en el espacio $\mathcal{E}(j)$.

Por lo tanto cualquier operador A en este espacio puede ser escrito como combinación de los elementos de B' siendo su expresión

$$A = \sum_{L=0}^{2j} \left(Tr_S\{AT_{L0}\}T_{L0} + \sum_{M=1}^L (Tr_S\{AX_{LM}\}X_{LM} + Tr_S\{AP_{LM}\}P_{LM}) \right), \quad (4.15)$$

donde hemos usado las propiedades (4.9) y (4.10) y las definiciones (4.13) y (4.14). En particular, el operador densidad se expresa como

$$\rho_S(t) = \sum_{L=0}^{2j} \left(\langle T_{L0} \rangle (t) T_{L0} + \sum_{M=1}^L (\langle X_{LM} \rangle (t) X_{LM} + \langle P_{LM} \rangle (t) P_{LM}) \right) \quad (4.16)$$

Esto significa que basta conocer la evolución de los valores medios $\langle T_{L0} \rangle (t)$, $\langle X_{LM} \rangle (t)$ y $\langle P_{LM} \rangle (t)$ para obtener la matriz densidad en el instante t .

Definamos el vector Y cuyas componentes son los N_j operadores de la base \mathcal{B}' y sea $y(t) = \langle Y \rangle (t)$. Luego $y(t)$ es un vector real que describe completamente al sistema.

Entonces, tenemos dos caminos para resolver la dinámica irreversible del spin. Por un lado la EMG permite obtener el operador densidad y conociendo $\rho(t)$ podemos calcular la evolución de los observables. Por otro lado, si multiplicamos miembro a miembro la EMG por los operadores de la base \mathcal{B}' y luego tomamos la Tr_S también miembro a miembro obtenemos un conjunto de ecuaciones lineales para las componentes de y , o lo que es equivalente, un flujo lineal autónomo homogéneo y no-conservativo que llamaremos *flujo libre*, es decir en ausencia de la pulsación

$$\dot{y} = Ay \quad (4.17)$$

el cual puede integrarse formalmente resultando

$$y(t) = e^{At}y(0). \quad (4.18)$$

Si bien los dos caminos son totalmente equivalentes, el segundo nos permite estudiar directamente el flujo de los observables como variables clásicas.

Por ejemplo para $j = 1/2$, la dimensión es 4 y los elementos de la base son $\{I_{1/2}, \vec{J}\}$, es decir que basta conocer el vector $\langle \vec{J} \rangle (t)$ para tener la solución del problema².

Si $j = 1$ debemos calcular además los valores medios de los operadores T_{20} , X_{2M} y P_{2M} . Es fácil ver que en este caso estos operadores se expresan en términos de los observables

$$Q_{ik} = \frac{1}{2}[J_i, J_k]_+ - \frac{2}{3}\delta_{ik}I_1 \quad (4.19)$$

como

²Nótese que la condición de vínculo $Tr_S \rho_S = 1$ resta un grado de libertad al problema.

$$\begin{aligned}
 T_{20} &= \sqrt{\frac{3}{2}} Q_{zz} \\
 X_{21} &= -\sqrt{2} Q_{xz} \\
 X_{22} &= \frac{1}{\sqrt{2}} (Q_{xx} - Q_{yy}) \\
 P_{21} &= -\sqrt{2} Q_{yz} \\
 P_{22} &= \sqrt{2} Q_{xy}
 \end{aligned}$$

Luego en el caso $j = 1$ la evolución de los primeros y segundos momentos determina completamente la solución del problema.

4.3 Mapa cuántico para el sistema pulsado

En la sección anterior nos ocupamos de la evolución libre del sistema. Completaremos ahora la descripción agregando el efecto de la pulsación.

En el instante $n\tau$, la variación de la densidad está dada por la ecuación (2.39), la cual, definiendo el operador

$$R = e^{\frac{i}{\hbar}G}, \quad (4.20)$$

se escribe como

$$\rho_S(n\tau^+) = R \rho_S(n\tau^-) R^\dagger. \quad (4.21)$$

En particular, si G es proporcional a la proyección del operador de spin sobre alguna dirección \hat{k} , es decir

$$G = \omega J_{\hat{k}} \quad (4.22)$$

entonces R es un operador de rotación con ángulo ω y eje \hat{k} . Si recordamos que la forma del hamiltoniano libre era $H_S = -\Omega J_z$ vemos que el pulso es una variación instantánea del campo magnético externo. En particular, si $\hat{k} = \hat{z}$ implica un cambio

de magnitud en su intensidad, mientras que en otro caso admite variaciones además en su dirección.

La variación instantánea de la densidad se traduce en un cambio lineal del vector y en la forma

$$y(n\tau^+) = Ky(n\tau^-) \quad (4.23)$$

donde la matriz K define un mapa homogéneo y autónomo.

Luego, la evolución completa del sistema entre pulsos sucesivos se obtendrá como la composición de los mapas $D = e^{A\tau}$ y K , es decir

$$y_n = U y_{n-1}, U = K D \quad (4.24)$$

donde adoptamos la notación para tiempos discretos $y_n \equiv y(n\tau^+)$.

El mapa D es disipativo, conteniendo toda la información sobre las propiedades del reservorio térmico y de la interacción y dependiendo además del período de la pulsación, mientras que el mapa K es unitario y tiene en cuenta las características del potencial G .

Es importante remarcar que a diferencia del sistema del oscilador, para un sistema en el espacio $\mathcal{E}(j)$ los mapas cuántico y semiclásico son completamente equivalentes ya que ambos están ligados por una transformación de coordenadas,

$$\begin{array}{ccc} \text{Mapa cuántico} & & \text{Mapa semiclásico} \\ \rho_{n-1} \rightarrow \rho_n & \equiv & y_{n-1} \rightarrow y_n. \end{array}$$

4.4 Mapa escalar

La identificación de invariantes clásicos y cuánticos ha sido objeto del trabajo de diversos autores para el oscilador armónico dependiente del tiempo. [46]-[50] Parte de esta tesis se dedicó al análisis de los invariantes semiclásicos cuadráticos del sistema con spin bajo la evolución disipativa enfocando el problema hacia el efecto de la pulsación sobre estas constantes de movimiento.

Antes de presentar la forma general del invariante cuadrático veamos un ejemplo trivial. Si tomamos un volumen $V_0 = 1$ del espacio de fases, éste se contrae al aplicar el mapa U debido al efecto del mapa disipativo. Si d es el valor del determinante de la matriz D , $d < 1$, el volumen después de aplicar el mapa n veces será igual a d^n .

Si consideramos entonces el mapa escalar $f_n = d^{-n} V_n$, donde V_n es el volumen ocupado por los puntos que n iteraciones atrás ocupaban V_0 , éste resulta una cantidad escalar invariante ante el mapa U , siendo además una forma de grado N_j en las coordenadas y .

Como veremos en las aplicaciones a los casos $j = 1$ y $1/2$ en los capítulos siguientes, la matriz A tiene estructura de bloques, es decir que el mapa D se puede dividir en dos mapas independientes de dimensión menor que N_j . Esto vale para cualquier j y responde a la forma de la EMG (4.6) y a las propiedades del álgebra de momento angular.

Por ejemplo, para $j = 1/2$ el espacio de fases queda dividido en dos subespacios invariantes ante D de dimensión 2 y podemos construir dos funciones cuadráticas $f_{1,2}(y)$ correspondientes a los volúmenes re-escalados en cada subespacio. Al aplicar el mapa D , las funciones $f_{1,2}$ resultan invariantes, es decir que vale la igualdad $f_{1,2}(y_n) = f_{1,2}(y_{n-1})$ para cualquier n . Esto deja de valer si aplicamos el mapa U debido a que la rotación K rompe la estructura de bloques de D .

En realidad, cualquiera sea la dimensión del problema podemos construir una familia de invariantes aunque éstos no representen precisamente al volumen. Consideremos la siguiente forma cuadrática

$$f_n = y_n^t B_n y_n \quad (4.25)$$

donde la matriz B_n pertenece a $\mathfrak{R}^{N_j \times N_j}$. Si B_n se mapea como

$$B_n = (D^{-1})^t B_{n-1} D^{-1}, \quad (4.26)$$

entonces f_n es invariante ante el mapa D , es decir, en ausencia de la pulsación

$$\begin{aligned}
f_n &= y_{n-1}^t D^t B_n D y_{n-1} \\
&= y_{n-1}^t B_{n-1} y_{n-1} = f_{n-1}
\end{aligned}$$

Si ahora aplicamos U con $G \neq 0$, f_n deja de ser constante ya que

$$\begin{aligned}
f_n &= y_{n-1}^t U^t B_n U y_{n-1} \\
&\neq f_{n-1}.
\end{aligned}$$

y así queda definido el mapa escalar f_n .

El valor inicial de la matriz B es arbitrario y por lo tanto tendremos un mapa diferente para cada elección de B_0 .

Es importante remarcar que el operador cuántico asociado al invariante clásico, definido como

$$F = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{N_j} B_{ik} [Y_i, Y_k]_+ \quad (4.27)$$

no se comporta como un invariante cuántico ante la evolución libre, es decir que, $\langle F \rangle_n \neq \langle F \rangle_{n-1}$. La correspondencia entre invariantes clásicos y cuánticos ha sido estudiada para el caso del oscilador armónico dependiente del tiempo por Hernández et.al. [46, 47] donde se ve que si las fluctuaciones no son despreciables el operador asociado con una constante de movimiento clásica no tiene valor medio estacionario. El valor medio de F se puede escribir como

$$\langle F \rangle = f + \sum_{ik} B_{ik} \xi_{ik} \quad (4.28)$$

donde ξ_{ik} son los elementos de la matriz de covariancia que representan fluctuaciones,

$$\xi_{ik} = \frac{1}{2} \langle [Y_i, Y_k]_+ \rangle - y_i y_k. \quad (4.29)$$

El término $\sum_{ik} B_{ik} \xi_{ik}$ no es necesariamente invariante ante el mapa D .

En realidad, dado que cualquier operador admite una representación en la base \mathcal{B}' según la ec. (4.15) los invariantes cuánticos son operadores de la forma

$$F_n = \sum_i Tr_S(F_n Y_i) Y_i \quad (4.30)$$

y la condición de invariancia $\langle F_n \rangle_n = \langle F_{n-1} \rangle_{n-1}$ se satisface si vale para cualquier n que

$$Tr_S(F_n Y) - (D^t)^{-1} \cdot Tr_S(F_{n-1} Y) = 0. \quad (4.31)$$

donde el punto en el segundo término implica el producto interno.

Entonces tenemos por un lado los invariantes cuánticos definidos según (4.30) y tales que a cada paso satisfacen la condición (4.31), y por otro lado, los invariantes semiclásicos definidos según (4.25) junto con la condición (4.26).

Recordemos que a través del mapa (4.26) se genera una familia de invariantes clásicos parametrizada por la matriz inicial B_0 .

Nos preguntamos ahora si existe alguna matriz B_0 no trivial que permita construir a través del mapa (4.26) una sucesión de escalares invariantes $f_0 = f_1 \dots = f_n \dots$ definidos por (4.25) tales que sus operadores cuánticos equivalentes, $F_0, F_1, \dots, F_n, \dots$ definidos por (4.27) cumplen la condición de invariancia cuántica (4.31).

Para ello reemplazemos en (4.31) el operador dado por la ec. (4.27) considerando que B se mapea como en (4.26). Luego de algunos pasos algebraicos (4.31) se transforma en

$$[(D^{-nt} B_0 D^{-n})_{ik} - (D^{-(n-1)t} B_0 D^{-(n-1)})_{ik} D^{-1t} \cdot] Tr_S\{[Y_i, Y_k]_+ Y\} = 0 \quad (4.32)$$

donde la suma sobre los índices i, k está implícita y además debe cumplirse para todo n .

Dado que el mapa D es disipativo lo podemos escribir como $d^{1/N} D'$ donde $d = \det D < 1$ y $\det D' = 1$. Viendo esto, el orden de magnitud del primer término de la resta en (4.32) es $d^{-2n/N}$, mientras que el segundo término es de orden $d^{-(2n+1)/N}$. Debido a esta diferencia en las dimensiones vemos que la suma no puede anularse para cualquier n y que la única solución es la trivial.

Por lo tanto un invariante clásico cuadrático ante la evolución disipativa deja de serlo al cuantificarse.

Como veremos en el Capítulo 6, el estudio del mapa escalar representa otro enfoque al análisis de las características del sistema disipativo bajo los efectos de los pulsos de potencial.

Capítulo 5

Spin 1

En este capítulo aplicaremos los resultados obtenidos en el capítulo anterior al caso de $j = 1$.

5.1 Ecuación maestra para el caso disipativo.

Analizaremos en primer término la evolución libre de la densidad. A partir de la EMG (4.6) en el caso $j = 1$ obtenemos las ecuaciones de evolución para los elementos de matriz de ρ_S en la base de autoestados de J_z , $\{|11\rangle, |10\rangle, |1-1\rangle\}$. La dinámica de los elementos $\{\rho_{10}, \rho_{0-1}\}$ ¹ queda desacoplada de la evolución del resto de los elementos de matriz, $\{\rho_{-1}, \rho_0, \rho_1, \rho_{1-1}\}$.²

Los dos sistemas de ecuaciones son [33]

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{10} = & -\hbar^2 [(W^+ + 2W_- - i(\frac{\Omega}{\hbar^2} + 2\Delta^+))\rho_{10} + 2W^+\rho_{0-1}^*] \\ & -\hbar^2 \varepsilon [(W^+ + W_-)\rho_{10} - 2i(\Delta^+ - \Delta^-)\rho_{10}^* + (W^+ + 2i\Delta^+)\rho_{0-1}^*] \\ \dot{\rho}_{0-1} = & \hbar^2 [2W^-\rho_{10} - (2W^+ + W^- + i(\frac{\Omega}{\hbar^2} - 2\Delta^-))\rho_{0-1}] \\ & +\hbar^2 \varepsilon [(-W^- - 2i\Delta^-)\rho_{10}^* + (W^+ + W^- + 2i(\Delta^+ - \Delta^-))\rho_{0-1}^*] \end{cases} \quad (5.1)$$

y

¹Los demás elementos se obtienen usando la hermiticidad de la densidad como $\rho_{nm} = \rho_{mn}^*$.

²Introducimos la notación siguiente para los elementos diagonales: $\rho_m \equiv \rho_{mm}$.

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\rho}_1 = -2\hbar^2 [W^- \rho_1 - W^+ \rho_0] - 2\hbar^2 \varepsilon \left[\frac{W^+ - 2i\Delta^+}{2} \rho_{1,-1} + \frac{W^+ + 2i\Delta^+}{2} \rho_{1,-1}^* \right] , \\
\dot{\rho}_0 = 2\hbar^2 [W^- \rho_1 - (W^+ + W^-) \rho_0 + W^+ \rho_{-1}] \\
+ \hbar^2 \varepsilon [(W^+ + W^- - 2i(\Delta^+ - \Delta^-)) \rho_{1,-1} \\
+ (W^+ + W^- + 2i(\Delta^+ - \Delta^-)) \rho_{1,-1}^*] , \\
\dot{\rho}_{-1} = 2\hbar^2 [W^- \rho_0 - W^+ \rho_{-1}] \\
- 2\hbar^2 \varepsilon \left[\frac{W^- + 2i\Delta^-}{2} \rho_{1,-1} + \frac{W^- - 2i\Delta^-}{2} \rho_{1,-1}^* \right] , \\
\dot{\rho}_{1,-1} = -\hbar^2 [(W^+ + W^-) - 2i\left[\frac{\Omega}{\hbar^2} + (\Delta^+ - \Delta^-)\right]] \rho_{1,-1} \\
- \hbar^2 \varepsilon [(W^- - 2i\Delta^-) \rho_1 - [(W^+ + W^-) - 2i(\Delta^+ - \Delta^-)] \rho_0 \\
+ (W^+ + 2i\Delta^+) \rho_{-1}]
\end{array} \right. \quad (5.2)$$

Si consideramos la AOR, es decir que tomamos $\varepsilon = 0$ en las ecuaciones anteriores, vemos que el segundo sistema se desacopla en los sistemas

$$\left\{ \begin{array}{l}
\dot{\rho}_1 = -2\hbar^2 [W^- \rho_1 - W^+ \rho_0] \\
\dot{\rho}_0 = 2\hbar^2 [W^- \rho_1 - (W^+ + W^-) \rho_0 + W^+ \rho_{-1}] , \\
\dot{\rho}_{-1} = 2\hbar^2 [W^- \rho_0 - W^+ \rho_{-1}] .
\end{array} \right. \quad (5.3)$$

y

$$\dot{\rho}_{1,-1} = -\hbar^2 \left[(W^+ + W^-) - 2i\left[\frac{\Omega}{\hbar^2} + (\Delta^+ - \Delta^-)\right] \right] \rho_{1,-1} \quad (5.4)$$

es decir que los elementos diagonales y no-diagonales no se mezclan en el marco AOR. Esto no es cierto en el caso AC, en el cual aunque inicialmente la densidad sea diagonal pierde esta característica al interactuar con el reservorio térmico. Veremos más adelante que esta simplificación de la dinámica bajo la aproximación AOR se traduce en cierta pérdida de sensibilidad ante modificaciones en los parámetros de la pulsación. Según la referencia [33], donde se analiza en detalle la aproximación al

equilibrio de este sistema, se muestra que el valor de equilibrio de la matriz densidad mantiene elementos no-diagonales finitos en el marco AC. Por lo tanto en este caso no podemos considerar a la AOR como un límite asintótico del modelo AC, como se mostró en el caso del oscilador armónico, sino que debe considerarse como otra forma de describir la interacción.

5.2 Mapa semiclásico para el sistema pulsado.

En este caso, y según lo expuesto en el capítulo anterior, una base del espacio $\mathcal{E}(1)$ es la compuesta por los observables

$$\{J_x, J_y, Q_{xz}, Q_{yz}, J_z, Q_{xx}, Q_{yy}, Q_{zz}, Q_{xy}\}. \quad (5.5)$$

Describiremos entonces el problema a través del vector de momentos

$$y = (m_x, m_y, m_{xz}, m_{yz}, m_z, m_{xx}, m_{yy}, m_{zz}, m_{xy}). \quad (5.6)$$

cuyas componentes son los valores medios adimensionales $m_k = \frac{1}{\hbar} \langle J_k \rangle$ y $m_{kl} = \frac{1}{2\hbar^2} \langle [J_k, J_l]_+ \rangle$. Por lo tanto, el mapa semiclásico está entonces dado por la ec. (4.24). Calcularemos a continuación las matrices A y K para el caso $j = 1$.

Dado que las componentes del vector y se relacionan con los elementos de la matriz densidad a través de una transformación lineal, la matriz A se obtiene aplicando esta transformación a las ecs. (5.2) y (5.1) resultando

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

La matriz A_1 , que pertenece a $\mathfrak{R}^{4 \times 4}$, es

$$\begin{aligned}
A_1 = \hbar^2 & \begin{bmatrix} -\frac{1}{2}(W^+ + W^-) & \frac{\Omega}{\hbar^2}(\Delta^+ - \Delta^-) & -(W^+ - W^-) & \chi\Delta^+ + \Delta^- \\ -\frac{\Omega}{\hbar^2}(\Delta^+ - \Delta^-) & -\frac{1}{2}(W^+ + W^-) & -\chi\Delta^+ + \Delta^- & -(W^+ - W^-) \\ \frac{3}{4}(W^+ - W^-) & \frac{1}{2}(\Delta^+ + \Delta^-) & -\frac{5}{2}(W^+ + W^-) & \frac{\Omega}{\hbar^2}(\Delta^+ - \Delta^-) \\ -\frac{1}{2}(\Delta^+ + \Delta^-) & \frac{3}{4}(W^+ - W^-) & -\frac{\Omega}{\hbar^2}(\Delta^+ - \Delta^-) & -\frac{5}{2}(W^+ + W^-) \end{bmatrix} \\
& + \hbar^2 \epsilon \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(W^+ + W^-) & -(\Delta^+ - \Delta^-) & (W^+ - W^-) & -2(\Delta^+ + \Delta^-) \\ -(\Delta^+ - \Delta^-) & -\frac{1}{2}(3W^+ + W^-) & -2(\Delta^+ + \Delta^-) & (W^+ + W^-) \\ -\frac{1}{4}(W^+ - W^-) & \frac{1}{2}(\Delta^+ + \Delta^-) & \frac{3}{2}(W^+ + W^-) & -3(\Delta^+ - \Delta^-) \\ \frac{1}{2}(\Delta^+ + \Delta^-) & -\frac{1}{4}(W^+ + W^-) & -3(\Delta^+ - \Delta^-) & -\frac{1}{2}(W^+ + 3W^-) \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.8}$$

mientras que A_2 pertenece a $\mathfrak{R}^{5 \times 5}$ y es

$$\begin{aligned}
A_2 = \hbar^2 & \begin{bmatrix} -(W^+ + W^-) & (W^+ - W^-) & (W^+ - W^-) & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2}(W^+ - W^-) & -(W^+ + W^-) & 0 & (W^+ + W^-) & \frac{2\Omega}{\hbar^2} + 2(\Delta^+ - \Delta^-) \\ -\frac{1}{2}(W^+ - W^-) & 0 & -(W^+ + W^-) & (W^+ + W^-) & -\frac{2\Omega}{\hbar^2} - 2(\Delta^+ - \Delta^-) \\ (W^+ - W^-) & (W^+ + W^-) & (W^+ + W^-) & -2(W^+ + W^-) & 0 \\ 0 & -\frac{\Omega}{\hbar^2} - (\Delta^+ - \Delta^-) & \frac{\Omega}{\hbar^2} + (\Delta^+ - \Delta^-) & 0 & -(W^+ + W^-) \end{bmatrix} \\
& + \hbar^2 \epsilon \begin{bmatrix} 0 & -(W^+ - W^-) & (W^+ - W^-) & 0 & 4(\Delta^+ + \Delta^-) \\ \frac{1}{2}(W^+ - W^-) & (W^+ + W^-) & 0 & -(W^+ + W^-) & -2(\Delta^+ - \Delta^-) \\ -\frac{1}{2}(W^+ - W^-) & 0 & -(W^+ + W^-) & (W^+ + W^-) & -2(\Delta^+ - \Delta^-) \\ 0 & -(W^+ + W^-) & (W^+ + W^-) & 0 & 4(\Delta^+ - \Delta^-) \\ -(\Delta^+ + \Delta^-) & -(\Delta^+ - \Delta^-) & -(\Delta^+ - \Delta^-) & 2(\Delta^+ - \Delta^-) & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{5.9}$$

La dinámica queda desacoplada en forma tal que el vector $(m_x, m_y, m_{xz}, m_{yz})$ evoluciona según A_1 independientemente del vector $(m_z, m_{xx}, m_{yy}, m_{zz}, m_{xy})$ que se rige por A_2 .

La estructura de bloques de la matriz A proviene de la forma en que quedan desacoplados los sistemas (5.1) y (5.2). Las matrices A_1 y A_2 corresponden al primer y segundo sistema respectivamente.

Si bien en general los autovalores no pueden ser calculados analíticamente, bajo la aproximación AOR los autovalores de A_2 son exactamente

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_{2,3} &= -2\nu \pm 2\hbar^2 W^+ e^{-\beta\hbar\Omega/2} \\ \lambda_{4,5} &= -\nu \pm i2(\Omega + \delta).\end{aligned}\tag{5.10}$$

donde $\delta = \hbar^2(\Delta^+ - \Delta^-)$ y $\nu = \hbar^2(W^+ + W^-)$, y los autovectores correspondientes son

$$\begin{aligned}v_1 &= (-2\alpha^2 + 2, \alpha^2 + 1 + \alpha, \alpha^2 + 1 + \alpha, 2\alpha^2 + 2, 0) \\ v_{2,3} &= (-2\sqrt{\alpha} \mp 2, -\sqrt{\alpha} \pm 1, -\sqrt{\alpha} \pm 1, 2\sqrt{\alpha} \mp 2, 0) \\ v_{4,5} &= (0, \mp i, \pm i, 0, -1)\end{aligned}$$

con $\alpha = W^-/W^+ = e^{-\beta\hbar\Omega}$.

A partir de v_1 e imponiendo la condición de normalización ³

$$m_{xx} + m_{yy} + m_{zz} = 2\tag{5.11}$$

obtenemos la solución de equilibrio,

$$\begin{aligned}m_z^{eq} &= (1 - \alpha^2)/(1 + \alpha + \alpha^2) \\ m_{xx}^{eq} &= m_{yy}^{eq} = (1 + \alpha)^2/2(1 + \alpha + \alpha^2)\end{aligned}\tag{5.12}$$

³Esta condición es equivalente a $Tr_S \rho_S = 1$.

La ecuación (5.11) define una hipersuperficie que llamaremos Π que contiene a todos los estados posibles del sistema.

Si definimos el tiempo de relajación como

$$\tau_i = | \text{Re}[\lambda_i] |^{-1} \quad (5.13)$$

puede demostrarse usando que $W_+ > W_-$ que cumplen la desigualdad siguiente

$$\tau_{2,3} < \tau_{4,5} \quad (5.14)$$

De la expresión de los autovectores surge que a los momentos m_z y m_{zz} corresponde $\tau_{2,3}$ y a m_{xx}, m_{yy}, m_{xy} corresponde $\tau_{4,5}$. Es decir que bajo la aproximación AOR los momentos m_z y m_{zz} alcanzarán los valores asintóticos más rápidamente.

Los autovalores de A_1 no pueden calcularse analíticamente pero siendo su determinante no-nulo podemos decir que la solución de equilibrio en este caso es

$$m_x^{eq} = m_y^{eq} = m_{xz}^{eq} = m_{yz}^{eq} = 0 \quad (5.15)$$

Agregaremos ahora la pulsación. Para ello debemos calcular la matriz K . Como se adelantó en la sección anterior, supondremos que el potencial G es proporcional a alguna proyección del spin y entonces la matriz densidad sufre una variación instantánea cada $t = n\tau$ dada por la ec. (4.21) donde

$$R(\omega; \hat{k}(\theta, \phi)) = e^{-\frac{i}{\hbar} \omega \hat{k} \cdot J} \quad (5.16)$$

es el operador de rotación sobre el eje $\hat{k}(\theta, \phi)$ en un ángulo ω . Usando las propiedades de las rotaciones para $j = 1$ [45] obtenemos que la variación de los momentos es

$$m_k^+ = \sum_l a_{lk} m_l^- \quad (5.17)$$

$$m_{ik}^+ = \sum_{j,l} a_{ji} m_{jl}^- a_{lk} \quad (5.18)$$

donde a es la matriz de rotación asociada a R , cuyos elementos son

$$a_{ik}(\omega, \hat{k}) = \cos(\omega) \delta_{ik} + (1 - \cos(\omega)) n_i n_k - \sin(\omega) \epsilon_{ikl} n_l \quad (5.19)$$

La matriz K se obtiene a partir de las ecs. (5.17) a (5.19) y el mapa completo es

$$Y_n = U Y_{n-1} \quad (5.20)$$

con $U = K e^{A\tau}$.

Si en particular $\hat{k} \equiv \hat{z}$, K resulta

$$K_z = \begin{bmatrix} K_1 & 0 \\ 0 & K_2 \end{bmatrix} \quad (5.21)$$

con

$$K_1 = \begin{bmatrix} c & s & 0 & 0 \\ -s & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & s \\ 0 & 0 & -s & c \end{bmatrix} \quad (5.22)$$

y

$$K_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c^2 & s^2 & 0 & 2cs \\ 0 & s^2 & c^2 & 0 & -2cs \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -cs & cs & 0 & c^2 - s^2 \end{bmatrix} \quad (5.23)$$

donde $c = \cos(\omega)$ y $s = \sin(\omega)$. Esta perturbación es una variación en la intensidad del campo externo. En este caso, el mapa U queda dividido en dos mapas independientes,

$$x_n = U_1 x_{n-1}, \quad U_1 = K_1 e^{A_1 \tau} \quad (5.24)$$

y

$$z_n = U_2 z_{n-1}, \quad U_2 = K_1 e^{A_2 \tau} \quad (5.25)$$

siendo $x = (m_x, m_y, m_{xz}, m_{yz})$ y $z = (m_z, m_{zx}, m_{yy}, m_{zz}, m_{xy})$. Esto deja de ser válido si el eje de la rotación no es paralelo al eje z .

Antes de continuar con el análisis del mapa U es importante mencionar que la matriz $A(AOR)$ conmuta con la matriz K_z , y por lo tanto el mapa de evolución libre $D(AOR)$ resulta invariante ante las rotaciones con eje z . Esta propiedad tiene su origen en la simetría del hamiltoniano de evolución libre bajo el marco AOR,

$$H = -\Omega J_z + H_R + H_{SR}^{AOR} \quad (5.26)$$

donde el hamiltoniano de interacción AOR es, según se introdujo en la Sección (2.2),

$$H_{SR}^{AOR} = \lambda(J_+ R + J_- R^\dagger) \quad (5.27)$$

con R , R^\dagger y λ definidos como en la ec. (4.5).

Usando las propiedades de las rotaciones [45] y teniendo en cuenta que H_R actúa en el espacio de Hilbert del sistema R vemos que

$$R(\omega; \hat{z}) H R^\dagger(\omega; \hat{z}) = -\Omega J_z + H_R + H'_{SR}{}^{AOR} \quad (5.28)$$

donde la nueva interacción es

$$H'_{SR}{}^{AOR} = \lambda(J_+ e^{-i\omega} R + J_- e^{i\omega} R^\dagger) \quad (5.29)$$

y difiere de la original sólo en un factor de fase en las coordenadas del reservorio. Para que esta modificación no afecte a la dinámica debe dejar intacta a la función

de correlaciones del baño $\Phi_{R^\dagger, R}$. La coordenada R es (2.26)

$$R = \sum_l c_l b_l$$

y por lo tanto el factor de fase se traslada a los coeficientes c_l ,

$$e^{-i\omega R} = \sum_l (e^{-i\omega c_l} b_l). \quad (5.30)$$

Pero como la función de correlación (2.34) depende del módulo de estos coeficientes, ésta no se ve alterada.

La deducción anterior es válida para cualquier valor de j . Por lo tanto podemos decir que la aproximación AOR agrega una simetría, no presente en el marco AC, al sistema no pulsado.

5.3 Análisis numérico del mapa semiclásico para el sistema pulsado.

Como el sistema (5.20) no puede resolverse analíticamente analizamos numéricamente el mapa U .

Dado que el modelo AOR no puede tratarse como el límite asintótico del AC, investigamos en qué forma afecta al sistema pulsante la forma de la interacción.

Para ello calculamos los coeficientes de decaimiento para distintas temperaturas del reservorio, en los marcos AC y AOR, y variando los parámetros de la rotación. Estos coeficientes se definen como

$$\Lambda_i = -\ln |\epsilon_i| \quad (5.31)$$

donde ϵ_i son los autovalores del mapa U , y el punto fijo del mapa definido como

$$\{y_0 \quad U y_0 = y_0, y_0 \in \Pi\}. \quad (5.32)$$

Nótese que la segunda condición, excluye al punto $y = 0$ que no pertenece a la hipersuperficie Π .

Para cualquier juego de parámetros, los autovalores cumplen que $|\epsilon_i| \leq 1$. La igualdad se cumple para el subespacio de equilibrio v_1 . Esto significa que el punto fijo y_0 es siempre estable y es el único atractor del mapa U . El sistema entonces decae al estado de equilibrio y_0 dado por la intersección del subespacio v_1 con la hipersuperficie Π .

Segun la definición (5.31) vemos que los autovalores se escriben como

$$\epsilon_i = e^{-\Lambda_i} e^{i\phi_i} \quad (5.33)$$

con ϕ_i real. Los coeficientes de decaimiento son siempre positivos y miden la rapidez con que el sistema decae al punto y_0 desde cada dirección v_i , o dicho de otra forma, el sistema tarda en alcanzar el equilibrio un número de pulsos

$$n_{eq} \sim (\Lambda_{min})^{-1}. \quad (5.34)$$

La dinámica libre depende de las constantes Ω , $\hbar^2 W^+$, $\hbar^2 W^-$, $\hbar^2 \Delta^+$ y $\hbar^2 \Delta^-$. La frecuencia Ω depende de la intensidad del campo externo y es absorbida en la unidad de tiempo Ω^{-1} . Las demás constantes dependen de la temperatura, de las características del reservorio y de la intensidad de la interacción λ , como se ve en las ecs. (4.7) y (4.8). En nuestros cálculos usaremos coeficientes calculados en la ref. [51] para un reservorio bosónico con disipación Ohmica y considerando una densidad espectral de la forma [36]

$$D(w) = \frac{\hbar^2}{2\pi} \kappa w f_c(w/\gamma) \quad (5.35)$$

siendo f_c la función de corte del tipo *Lorentz Drude* [36],

$$f_c(x) = 1/(1 + x^2). \quad (5.36)$$

Mostraremos los resultados encontrados para tres juegos de coeficientes que son

significativos para este problema. Nos referiremos a cada caso como los sistemas A,B y C. Los valores de los coeficientes se muestran en la siguiente tabla

	$\beta\hbar\Omega$	ν/Ω	δ/Ω	$\hbar^2(W^+ - W^-)/\Omega$	$\hbar^2(\Delta^+ + \Delta^-)/\Omega$
A	10^{-4}	0.4	$1.9 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	-0.1
B	9	$2 \cdot 10^{-5}$	$-5.3 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-5}$	-0.1
C	1	$2.2 \cdot 10^{-5}$	-10^{-5}	10^{-5}	$-5 \cdot 10^{-4}$

Los coeficientes de A y B corresponden los parámetros $\Omega/\gamma = 10^{-4}$ y $\lambda^2\kappa\hbar^2 = 2 \cdot 10^{-5}$, mientras que para C valen $\Omega/\gamma = 10^{-2}$ y $\lambda^2\kappa\hbar^2 = 10^{-5}$. Los tres sistemas mostrarán dinámicas diferentes ya que A y B corresponden a temperaturas alta y baja respectivamente mientras que C muestra el límite de acoplamiento débil.

Tomamos dos tipos de pulsaciones, paralela al campo externo ($\hat{k} = \hat{z}$) y perpendicular ($\hat{k} = \hat{x}$), a cuyas matrices nos referiremos como K_z y K_x respectivamente.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

1. Coeficientes de decaimiento.

Si aplicamos la perturbación K_z , los coeficientes del mapa AOR no dependen del ángulo de la rotación, al contrario de lo que sucede para el mapa AC. Este comportamiento puede observarse en la Fig.5.1a) donde se grafican los coeficientes Λ_i para distintos ángulos entre 0 y 2π calculados en el marco AC y para el sistema A. Las líneas llenas corresponden a los valores para AOR.

El período τ se tomó igual a ν_A^{-1} para asegurar que el sistema tenga tiempo para interactuar con el reservorio pero sin alcanzar el estado de equilibrio térmico. Para el sistema B observamos que los coeficientes AC pierden la dependencia con ω y coinciden con los coeficientes AOR.

Este comportamiento se debe a que el mapa $D(AOR)$ conmuta con la matriz de rotaciones en z , y por lo tanto los autovalores del mapa compuesto U , pueden escribirse como el producto

$$\epsilon_i = \tau_i(\omega) e^{\lambda_i\tau} \quad (5.37)$$

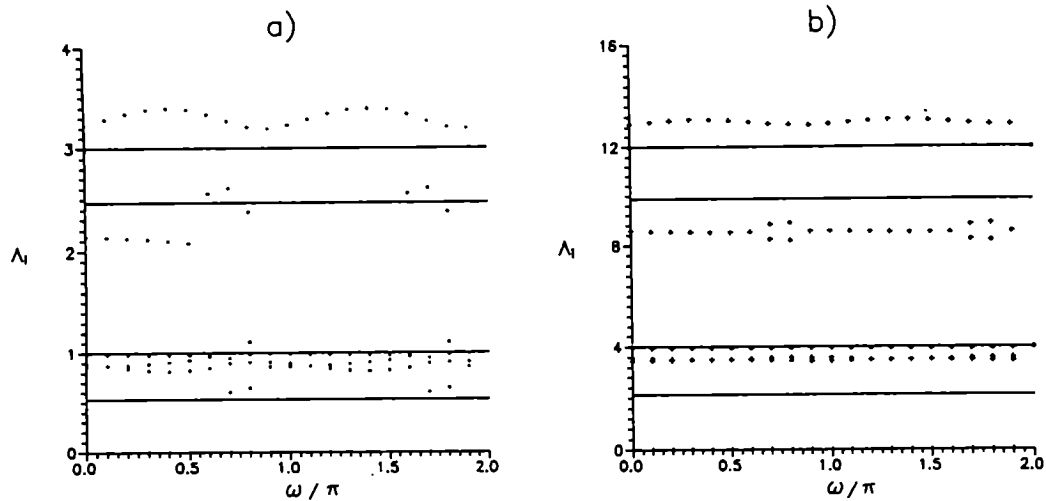


Figura 5.1: Coeficientes de decaimiento del sistema A en función del ángulo ω . La pulsación es K_z y τ es a) $1/\nu$ y b) $4/\nu$. Los puntos corresponden a los datos AC y las líneas a los valores AOR. Los coeficientes AC para cada valor de ω son los puntos sobre la vertical correspondiente. A pares de autovalores complejos corresponde el mismo coeficiente de decaimiento. Alrededor de $\omega = 0.7\pi$ y 1.7π encontramos más puntos debido a que se anula la parte imaginaria de ciertos autovalores y por consiguiente coeficientes de decaimiento que antes eran iguales se distinguen.

donde $r_i(\omega)$ es autovalor de K_z y tiene por lo tanto módulo 1. Luego el módulo del producto ϵ_i no depende de ω . Cuando la temperatura decrece se cumple que $K_z D(AC) \simeq D(AC) K_z$. Lo mismo sucede si τ aumenta como se ve en la Fig. 5.1 b) donde se muestran los coeficientes de relajación del sistema A con $\tau = 4/\nu_A$. Se observa que las variaciones con el ángulo se atenúan cuando se incrementa el período.

Si se aplica la pulsación K_z tanto para el caso AOR como para AC los coeficientes de A, B y C muestran variaciones para distintos ángulos, tomando distintos valores para cada modelo.

La dependencia de los coeficientes de relajación con el período τ es aproximadamente lineal, y por lo tanto $n_{eq} \sim 1/\tau$. En el marco AOR la relación lineal es exacta cuando se aplica la pulsación K_z debido a las propiedades de

conmutación. Lo mismo sucede para AC a temperaturas bajas.

Esto puede observarse en la Fig. 5.2 donde se muestran algunos ejemplos de Λ_i en función de τ para el sistema A, con un ángulo de rotación $\omega = 0.3\pi$ y con la pulsación K_z . Las líneas llenas representan a las funciones $\Lambda_i(\tau)(AOR)$.

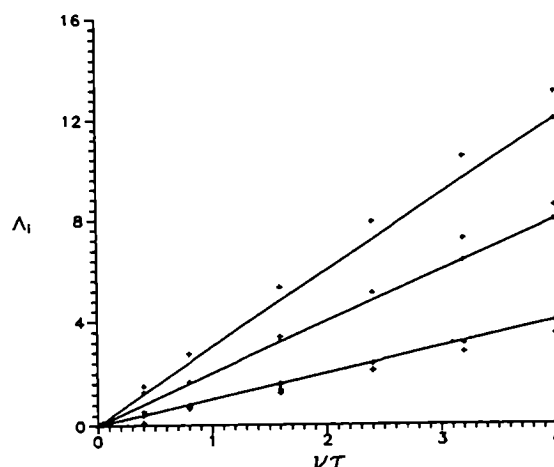


Figura 5.2: Coeficientes de decaimiento del sistema A en función de τ . La perturbación es K_z con $\omega = 0.3\pi$. Los puntos son los datos AC y las líneas los datos AOR.

Esta dependencia con τ se debe a que si los pulsos son muy espaciados actúa durante más tiempo el mecanismo disipativo responsable de la relajación del sistema. En el otro extremo, si la pulsación es muy frecuente, el mapa es casi una rotación pura que no alcanza un equilibrio. Cabe aclarar que en este caso difícilmente el período cumpla las condiciones que permiten la aplicación de la EMG.

Para el sistema C se observa que los coeficientes de decaimiento no dependen del modelo de la interacción.

2. Estado de equilibrio.

Analizaremos ahora los puntos fijos del mapa U .

Cuando la intensidad de la pulsación es nula el punto de equilibrio AOR es el del sistema libre y está dado por las expresiones (5.12) y (5.15),

$$m_z^{eq} = (1 - \alpha^2)/(1 + \alpha + \alpha^2)$$

$$m_{xx}^{eq} = m_{yy}^{eq} = (1 + \alpha)^2/2(1 + \alpha + \alpha^2)$$

$$m_{zz}^{eq} = (1 + \alpha^2)/(1 + \alpha + \alpha^2)$$

$$m_{xy}^{eq} = 0$$

$$m_x^{eq} = m_y^{eq} = m_{xz}^{eq} = m_{yz}^{eq} = 0$$

Si la temperatura es alta ($\alpha \simeq 1$) este punto coincide para los mapas $D(AC)$ y $D(AOR)$ y es tal que $m_{xx} = m_{yy} \simeq m_{zz}$, $m_z \ll 1$ y los demás momentos son cero.

Para baja temperatura ($\alpha \ll 1$) el punto fijo $y_0(AOR)$ es tal que $m_{xx} = m_{yy} \simeq 0.5$, $m_z = m_{zz} \simeq 1$ y los demás son nulos. Para AC el punto fijo no coincide con $y_0(AOR)$, y es tal que $m_z = m_{zz} < m_z(AOR)$, presenta una deformación en las dispersiones, $m_{xx} > m_{yy}$, y los demás momentos siguen siendo cero.

Cuando agregamos la pulsación K_z , el punto fijo AOR no cambia y en el marco AC no varían los valores de equilibrio de m_x , m_y , m_{xz} y m_{yz} .

Para el sistema A el punto fijo $y_0(AC)$ presenta muy leves variaciones en el valor de m_z que desaparecen si el valor de τ aumenta.

Para el sistema B, en el caso de AC los valores de m_z y m_{zz} no se ven afectados, mientras que los valores de m_{xx} , m_{yy} y m_{xy} dependen de ω . Esta característica del punto fijo AC persiste cuando τ aumenta.

El comportamiento del sistema en el marco AOR responde nuevamente a la simetría de rotación que éste presenta y que pierde el modelo AC.

Cuando se aplica la pulsación K_x , los valores de equilibrio de los momentos m_x y m_y toman valores finitos para los dos modelos y m_z disminuye hasta volverse antiparalelo al campo externo. Esto se ve en las Figs. 5.3 a) y b) donde se grafica $m_z^{eq}/m_z(T)$ vs ω para los sistemas A y B respectivamente con $\tau = 1/\nu$ y donde la línea llena corresponde al marco AOR y la punteada al AC. El factor $m_z(T)$ es el valor de equilibrio para el sistema libre AOR dado por la ecuación (5.12).

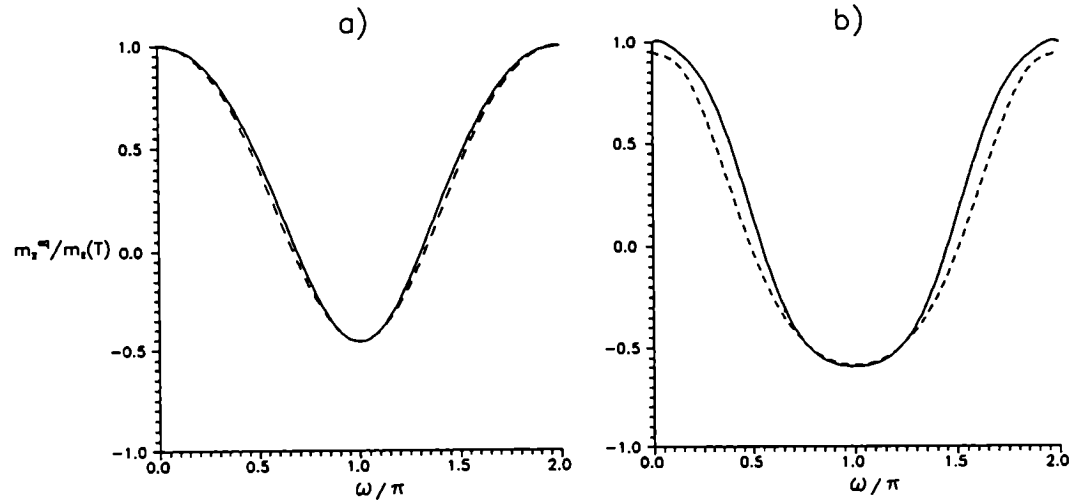


Figura 5.3: Valores de $m_z^{eq}/m_z(T)$ en función de ω para los sistemas a)A y b)B. La pulsación es K_x y $\tau = 1/\nu$. Las líneas llena y punteada corresponden a los modelos AOR y AC respectivamente.

Los valores de equilibrio de los momentos de segundo orden del sistema A no se ven alterados por la pulsación K_x .

También observamos para este sistema que cuando τ crece los puntos fijos AOR y AC coinciden. El valor de m_x tiende a cero, y los momentos m_y y m_z satisfacen la relación $m_y/m_z = -\tan(\omega)$.

En el caso B todas las coordenadas de y_0 son finitas para AC y AOR.

Si τ aumenta los momentos de equilibrio de B no coinciden para AOR y AC salvo m_x, m_{xy} y m_{xz} que tienden a cero. Sin embargo, observamos que los cocientes m_y/m_z y m_{yy}/m_{zz} toman los mismos valores para ambos modelos, dependiendo de ω . El primer cociente es nuevamente $m_y/m_z = -\tan(\omega)$.

Los puntos fijos del sistema C coinciden para ambos modelos.

3. Interacción mezcla.

Por último analizaremos cómo afecta al mapa $D(AOR)$ o $D(AC)$ una pequeña perturbación en la interacción. Para ello consideremos ε como variable permitiendo que tome valores entre 0 y 1. Esto equivale a tomar una interacción “mezcla” entre AOR y AC. Se realizó un cálculo perturbativo hasta primer orden de los autovalores de la matriz A tomando como parámetro $\varepsilon \ll 1$ (cerca del caso AOR) y $1 - \varepsilon \ll 1$ (cerca del caso AC), es decir

$$\lambda_i = \lambda_i^{AOR} + \chi_i \varepsilon \quad (\varepsilon \simeq 0) \quad (5.38)$$

$$\alpha_i = \alpha_i^{AC} + \xi_i(1 - \varepsilon) \quad (\varepsilon \simeq 1) \quad (5.39)$$

Para comparar ambos casos calculamos las cantidades

$$\bar{\chi} = \sum_{i=1}^9 \frac{|\chi_i|}{|\lambda_i|} \quad (5.40)$$

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^9 \frac{|\xi_i|}{|\alpha_i|}, \quad (5.41)$$

obteniendo para el sistema A que $\bar{\xi} \simeq 4\bar{\chi}$, es decir que el hamiltoniano $H(AC)$ se ve mas afectado que el $H(AOR)$ ante esta perturbación.

5.4 Límites clásico y de acoplamiento débil.

De los resultados anteriores vemos que para altas temperaturas, lo cual corresponde al límite clásico $k_B T \gg \hbar \Omega$, el decaimiento del sistema es diferente en los dos marcos de interacción. La dinámica bajo el acoplamiento AOR no se ve afectada cuando

el campo externo sufre variaciones instantáneas en su magnitud, mientras que el modelo AC muestra una importante dependencia con la intensidad de la pulsación en sus coeficientes de decaimiento. Esto refleja la aparición de la simetría de rotación R_z bajo el marco AOR.

En este límite el punto atractor es el mismo para AOR y AC cuando $\nu\tau \gg 1$ y para las pulsaciones K_x y K_x . Este resultado está de acuerdo con los estudios realizados en la ref [33] sobre el estado de equilibrio del sistema sin pulsación. En dicho trabajo se demuestra que para alta temperatura los valores de equilibrio de la matriz densidad $\rho_S(AOR)$ y $\rho_S(AC)$ coinciden. Tomando $\nu\tau \gg 1$ permitimos que el sistema alcance el estado asintótico entre pulsos sucesivos. Por el contrario, para baja temperatura los puntos fijos son diferentes para cada modelo aún en el caso $\nu\tau \gg 1$.

El límite de acoplamiento débil se observa en los resultados obtenidos para el sistema C, cuyos coeficientes satisfacen que $\hbar^2 W^\pm, \hbar^2 \Delta^\pm \ll \Omega$. Vemos que en este caso tanto la dinámica como el estado de equilibrio es independiente del modelo de la interacción.

Capítulo 6

Spin 1/2

La dinámica del sistema para $j = 1/2$ es mucho más simple que el caso anterior ya que el número de variables se reduce de forma tal que las ecuaciones de evolución libre tienen solución analítica.

6.1 Ecuación maestra para el caso disipativo.

La EMG (4.6) en este caso particular consiste en dos sistemas desacoplados.[33] El primero involucra los elementos diagonales de ρ

$$\begin{aligned}\dot{\rho}_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}} &= \hbar^2(W^+\rho_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} - W^-\rho_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}}) \\ \dot{\rho}_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} &= \hbar^2(-W^+\rho_{-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + W^-\rho_{\frac{1}{2},\frac{1}{2}})\end{aligned}\quad (6.1)$$

y el segundo los elementos no-diagonales,

$$\dot{\rho}_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} = \left(-\frac{\nu}{2} + i(\Omega + \delta)\right)\rho_{\frac{1}{2},-\frac{1}{2}} + \epsilon\left(\frac{\nu}{2} + i\delta\right)\rho_{-\frac{1}{2},\frac{1}{2}}\quad (6.2)$$

6.2 Mapa Semiclásico para el sistema pulsado.

El espacio de estados tiene dimensión cuatro y una base es $\{J_x, J_y, J_z, I_{1/2}\}$. Luego, describiremos el sistema a través del vector $y = (m_x, m_y, m_z, \mathcal{I})$ donde introducimos la variable $\mathcal{I} = Tr_S \rho_S$. Si bien el valor de \mathcal{I} es una constante y vale uno, no

impondremos todavía la condición de vínculo para poder efectuar un tratamiento análogo al problema de Spin 1. De otra forma nos encontraríamos con un mapa no-homogéneo.

A partir de la ec. (6.1) se obtienen las ecuaciones de evolución libre para las nuevas variables,

$$\dot{y} = Ay \quad (6.3)$$

donde la matriz A es

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{2} & \Omega + \delta & 0 & 0 \\ -(\Omega + \delta) & -\frac{\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\nu & \nu \gamma \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varepsilon \begin{bmatrix} \frac{\nu}{2} & -\delta & 0 & 0 \\ -\delta & -\frac{\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

$$\gamma = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \alpha}{1 + \alpha} \right). \quad (6.5)$$

De la estructura de bloques de A se deduce que la dinámica de m_z es independiente de los demás momentos y además es la misma para los dos acoplamientos. Los autovalores de A son exactamente

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= -\frac{\nu}{2} \pm i \sqrt{(\Omega + \delta)^2 - \varepsilon^2 \left(\frac{\nu^2}{4} + \delta^2 \right)} \\ \lambda_3 &= -\nu \\ \lambda_4 &= 0 \end{aligned} \quad (6.6)$$

y el estado de equilibrio es, usando que $\mathcal{I} = 1$,

$$m_x^{eq} = m_y^{eq} = 0$$

Los tiempos de relajación son

$$\tau_{m_x, m_y} = \frac{2}{\nu} > \tau_{m_x} = \frac{1}{\nu}$$

lo cual implica además que los elementos no-diagonales decaen más lentamente que los diagonales. Esto significa que nuevamente el modelo AOR no representa al límite asintótico del AC. [33]

Para construir el mapa semiclásico resta introducir la pulsación. En el caso $j = 1$ habíamos elegido un potencial proporcional a alguna componente del Spin. Veremos que para $j = 1/2$ este es el caso más general. Como la base del espacio $\mathcal{E}(1/2)$ es $\{J_x, J_y, J_z, I_{1/2}\}$ cualquier operador y en particular G se escribe como

$$G = \frac{1}{2}(Tr_S(G)I + Tr_S(G \vec{J}) \cdot \vec{J}).$$

Tomando $Tr_S(G) = 0$ obtenemos que el operador responsable del cambio instantáneo de la densidad según la ec. (4.21) es el operador de rotación $R(\omega; \hat{k})$ en el espacio $\mathcal{E}(1/2)$ donde el ángulo es $\omega = |Tr_S(G \vec{J})|/2$ y la dirección del eje queda determinada por el versor $\hat{k} = Tr_S(G \vec{J})/2\omega$. Con esta notación, el potencial pulsante se escribe como $G = \omega \hat{k} \cdot J$.

La matriz K será entonces

$$K = \begin{bmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

donde a es la matriz de rotación (5.19). Si fuera $Tr_S(G) \neq 0$ sólo introduciría un factor de fase en R sin ningún efecto sobre los momentos.

Luego el mapa queda determinado como

$$y_n = U y_{n-1}, U = K D \quad (6.8)$$

con $D = e^{A\tau}$. La variedad que contiene a los estados es $\Pi = \{\mathcal{I} = 1\}$ y el mapa disipativo es de la forma

$$\begin{bmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & D_2 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

donde D_1 y D_2 son las siguientes matrices de 2×2

$$D_1 = \exp\left\{\tau \begin{bmatrix} -\frac{\nu}{2}(1 - \varepsilon) & \Omega + \delta(1 - \varepsilon) \\ -\Omega - \delta(1 + \varepsilon) & -\frac{\nu}{2}(1 + \varepsilon) \end{bmatrix}\right\} \quad (6.10)$$

y

$$D_2 = \exp\left\{\tau \nu \begin{bmatrix} -1 & \gamma \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \quad (6.11)$$

En el marco AOR la matriz D_1 es de la forma

$$D_1 = e^{-\frac{\nu}{2}\tau} \begin{bmatrix} \cos(\Omega + \delta)\tau & \sin(\Omega + \delta)\tau \\ -\sin(\Omega + \delta)\tau & \cos(\Omega + \delta)\tau \end{bmatrix}, \quad (6.12)$$

y salvo el factor $e^{-\frac{\nu}{2}\tau}$ representa a una rotación en un ángulo $-(\Omega + \delta)\tau$. Esto no es cierto para AC en cuyo caso la matriz es

$$D_1 = e^{-\frac{\nu}{2}\tau} \begin{bmatrix} \cos(\Omega'\tau) + \frac{\nu}{2\Omega'} \sin(\Omega'\tau) & \frac{\Omega}{\Omega'} \sin(\Omega'\tau) \\ -\frac{\Omega}{\Omega'} \sin(\Omega'\tau) & \cos(\Omega'\tau) - \frac{\nu}{2\Omega'} \sin(\Omega'\tau) \end{bmatrix}, \quad (6.13)$$

con $\Omega' = \sqrt{(\Omega + \delta)^2 - (\frac{\nu^2}{4} + \delta^2)}$.

Si el eje de la rotación es paralelo a la dirección z , la matriz U conserva la estructura de bloques de A para los dos acoplamientos y la solución es analítica.

Los autovalores son en este caso

$$\epsilon_{3,4} = e^{-\nu\tau}, 1 \text{ (AOR y AC)}, \quad (6.14)$$

$$\text{AOR: } \epsilon_{1,2} = e^{-\frac{\kappa}{2}\tau} [\cos(\omega - (\Omega + \delta)\tau) \pm i \sin(\omega - (\Omega + \delta)\tau)], \quad (6.15)$$

y

$$\begin{aligned} \text{AC: } \epsilon_{1,2} = e^{-\frac{\kappa}{2}\tau} & \left[\cos(\omega) \cos(\Omega'\tau) + \frac{\Omega}{\Omega'} \sin(\omega) \sin(\Omega'\tau) \right. \\ & \left. \pm i \sqrt{(\sin(\omega) \cos(\Omega'\tau) - \frac{\Omega}{\Omega'} \cos(\omega) \sin(\Omega'\tau))^2 - \left(\frac{\nu}{2\Omega'}\right)^2 \sin^2(\Omega'\tau)} \right]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

El módulo de los autovalores resulta

$$|\epsilon_{1,2}| = e^{-\frac{\kappa}{2}\tau} \left(1 - \epsilon \frac{2\delta\Omega}{(\Omega')^2} \sin^2(\Omega'\tau)\right). \quad (6.17)$$

Por lo tanto, los coeficientes de decaimiento no dependen de ω si se perturba la intensidad del campo externo para ambos modelos de interacción.

En cuanto al estado de equilibrio, el punto fijo del mapa D es $(0, 0, \gamma)$ para AOR y AC y es invariante ante K_z . Luego el estado de equilibrio tampoco se ve afectado por esta perturbación.

6.3 Mapa Escalar.

Consideremos la forma cuadrática $f(y; B) = y^t B y$ y a partir de la cual construimos el mapa escalar $f_n = f(y_n; B_n)$ definido sobre el conjunto de puntos imágenes del mapa D . Como se mostró en el Capítulo 4, si vale que $B_n = (D^{-1})^t B_{n-1} D^{-1}$ entonces f_n es invariante.

Supongamos que elegimos B_0 de la forma

$$B_0 = \begin{bmatrix} \xi_0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.18)$$

La forma cuadrática correspondiente a esta matriz es $f_0 = x_0^t \xi_0 x_0$ donde $x = (m_x, m_y)$.

Al aplicar el mapa D^{-1} sucesivamente obtenemos los valores de B_n que resultan ser, como para $n = 0$, de la forma

$$B_n = \begin{bmatrix} \xi_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (6.19)$$

siendo $\xi_n = (D_1^{-1})^t \xi_{n-1} D_1^{-1}$ y generando el mapa escalar $f_n = x_n^t \xi_n x_n$ el cual representa a un paraboloide centrado en $x = (0,0)$. Las sucesivas matrices B_n definen sucesivos paraboloides. Cada curva de nivel m de f_n , $C_n(m)$, resulta ser el mapa de la curva de nivel m de f_{n-1} , es decir

$$C_n(m) = D_1 C_{n-1}(m). \quad (6.20)$$

En el caso AOR, D_1 es proporcional a una rotación y entonces no hay deformación. En cambio para AC los círculos se mapean en elipses.

Una vez construido el mapa de formas cuadráticas invariantes ante el mapa D , si aplicamos cada f_n al punto $y_n = U y_{n-1}$ éste ya no será constante definiendo el mapa escalar

$$f_n = f_n(U y_{n-1}) \neq f_{n-1} \quad (6.21)$$

cuyas propiedades serán estudiadas.

6.4 Análisis numérico del mapa semiclásico para el sistema pulsado

Si el eje de la perturbación no es paralelo al campo externo la solución del mapa no es analítica y la estudiamos numéricamente.

Consideraremos perturbaciones con \hat{k} contenido en el plano xz , analizando las propiedades del mapa, coeficientes de decaimiento y puntos fijos, y el mapa del invariante escalar.

Como en el capítulo anterior, en primer lugar estudiaremos los coeficientes Λ_i definidos por la ec. (5.31). Luego analizaremos los puntos fijos del mapa U y por último calcularemos el mapa del invariante escalar cuadrático.

A diferencia del sistema con $j = 1$, los coeficientes relevantes para resolver el problema con $j = 1/2$ son sólo ν y δ . Mostraremos los resultados obtenidos para los sistemas A y B definidos en el capítulo anterior. El sistema B ahora describe el límite de acoplamiento débil ya que $\nu_B, \delta_B \ll \Omega$.

Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

1. Coeficientes de decaimiento.

Si aplica la perturbación K_x se ve que los coeficientes Λ_i dependen del ángulo ω como se muestra para el sistema A en las Fig. 6.1 a) para AOR y AC con $\hat{k} = (1, 0, 0)$. El período τ se tomó igual a $1/\nu$. Para ambos modelos los coeficientes presentan la simetría $\Lambda(\omega) = \Lambda(2\pi - \omega)$.

Si el eje se desvía en la dirección z se pierde la simetría respecto de $\omega = \pi$ y a medida que la componente k_z aumenta, la dependencia con ω se atenúa como se ve en la Fig. 6.1b).

Para el sistema B los coeficientes para los modelos AOR y AC no presentan diferencias.

2. Estado de equilibrio.

Si la pulsación es perpendicular al campo externo, por ejemplo K_x , el valor de m_z^{eq} disminuye a medida que la intensidad ω aumenta y se vuelve antiparalelo al campo externo hasta llegar al valor mínimo en $\omega = \pi$ (como para $j = 1$), tomando valores simétricos respecto de $\omega = \pi$. Encontramos el mismo comportamiento en los sistemas A y B y para AOR y AC. Esto se muestra en la Fig. 6.2 donde graficamos m_z^{eq}/γ en función de ω con $\tau = 1/\nu$.

Si se desvía el eje en la dirección z , el valor de equilibrio de m_z tiene un mínimo para $\omega \neq \pi$ siendo la variación menor a medida que la componente k_z aumenta. Esto puede verse en las Figs. 6.3 a) y b) donde se grafica m_z^{eq}/γ con $\hat{k} = (1, 0, 1)$ para los sistemas A y B respectivamente y en las Figs. 6.4 a) y b) con el eje $(1, 0, 10)$. En todos los casos los puntos fijos AC y AOR coinciden para el sistema B mientras que son diferentes para A. Además, en el último caso $m_z^{eq}(AC)$ presenta mayores variaciones.

En el plano (m_x, m_y) , el punto fijo se corre del $(0, 0)$.

3. Invariante

Por último calculamos el mapa escalar f_n .

Cuando se aplica la rotación en z , $f_n(AOR)$ es constante. Por el contrario en el caso AC presenta oscilaciones manteniendo un valor finito.

Si el eje no es paralelo a z el invariante aumenta proporcionalmente al factor $e^{n\nu\tau}$ para AOR y AC como puede verse en la Fig. 6.5a) donde se grafica la función $\log(f_n)/\nu\tau$ para el sistema A en el marco AOR.

Esta divergencia responde a que, a través de la rotación, los momentos m_x y m_y incorporan el valor de m_z que es del orden de magnitud de γ y no lleva el factor de disipación $e^{-\nu\tau/2}$.

Para poder ver la estructura que presenta el mapa escalar calculamos la función $g_n = e^{-n\nu\tau} f_n$. Observamos que para el modelo AOR alcanza un valor fijo después de un breve transitorio. Por el contrario, en el caso AC nunca alcanza un valor constante. Esto puede verse en la Fig. 6.5b) donde se grafica g_n/g_0 vs

n para el sistema A y con $\tau = 1/2\nu$, eje x y $\omega = 0.3\pi$. Este comportamiento se mantiene siempre que el eje no sea z .

El valor asintótico promedio de g_n , g_∞ depende del ángulo ω . En las Figs. 6.6 y 6.7 se muestra g_∞/g_0 vs ω para el sistema A con distintos ejes de rotación. Si el eje es en dirección x , g_∞ es simétrico respecto de $\omega = \pi$, y presenta dos máximos en ángulos distintos para AOR o AC.(Fig 6.6).

A medida que la componente k_z del eje aumenta se rompe la simetría, los máximos se acercan hasta que se confunden en uno sólo y los valores se hacen cada vez más pequeños hasta anularse para $k_z \gg k_x$. Esto se ve en las Figs.6.7 a) y b) para ejes (3, 0, 1) y (1, 0, 10).

En todos los casos el valor asintótico g_∞ es mayor para AC que para AOR.

Para el sistema B encontramos que los mapas escalares AC y AOR coinciden.

6.5 Límites clásico y de Acoplamiento débil.

Si la temperatura es alta, es decir que nos hallamos en el límite clásico, el modelo de acoplamiento se distingue a través de la dinámica sólo para perturbaciones que no sean paralelas al campo externo y en el punto atractor cuando la orientación del eje de la pulsación no es ni paralela ni perpendicular al eje z . El mapa escalar es el que presenta una dinámica que permite diferenciar más claramente las interacciones, ya que en éste vemos reflejada la *simetría* de cada modelo.

En el límite de acoplamiento débil, que corresponde al sistema B, no se observan diferencias entre ambos modelos.

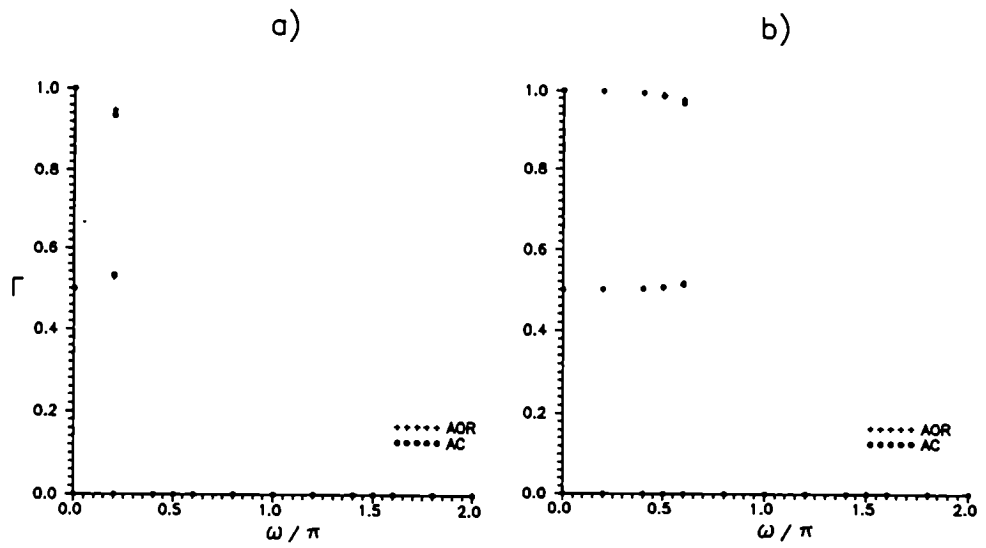


Figura 6.1: Coeficientes de decaimiento del sistema A en función de ω para la perturbación con $\tau = 1/\nu$ ejes a) $\hat{k} = (1, 0, 0)$ y b) $\hat{k} = (1, 0, 10)$.

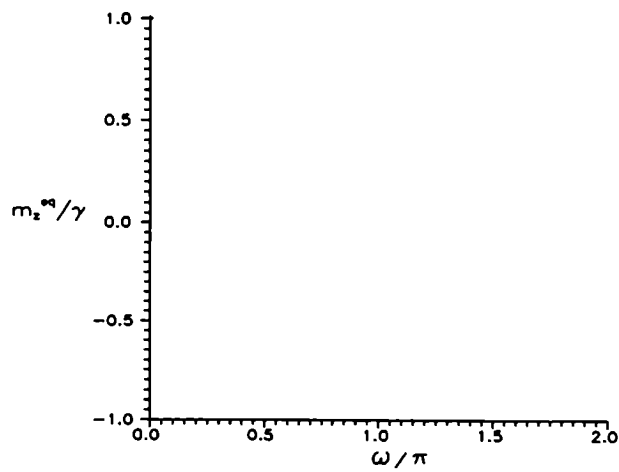


Figura 6.2: m_z^{eq}/γ en función de ω con $\hat{k} = (1, 0, 0)$ y $\tau = 1/\nu$. Los valores coinciden para AOR y AC y para los sistemas A y B.

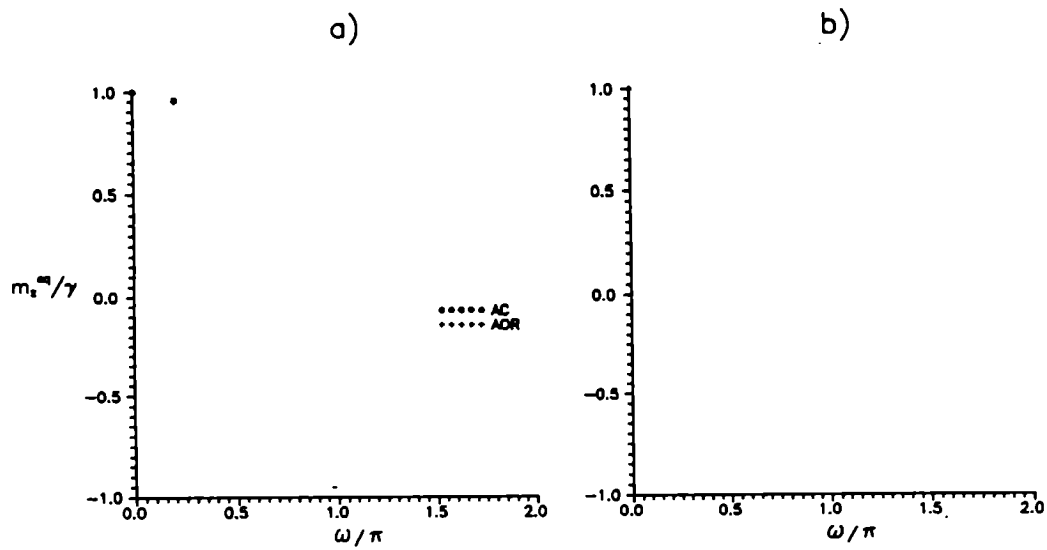


Figura 6.3: Idem Fig. anterior con $\hat{k} = (1, 0, 1)$ y para los sistemas a)A y b)B.

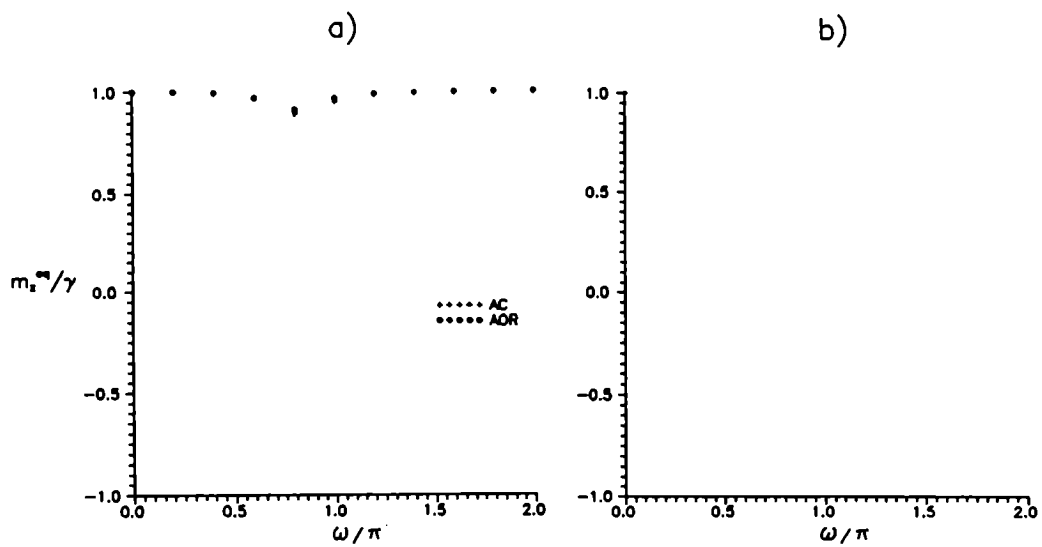


Figura 6.4: Idem Fig. anterior con $\hat{k} = (1, 0, 10)$.

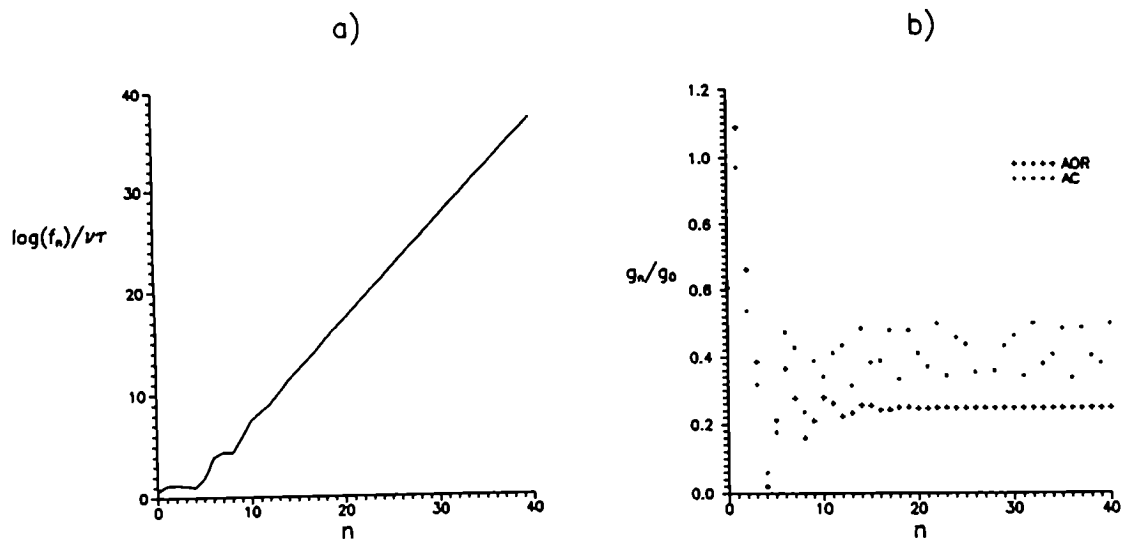


Figura 6.5: a) $\log(f_n)/\nu\tau$ vs n para el modelo AOR y el sistema A. b) g_n/g_0 vs n para el sistema A y modelos AOR y AC. El eje es $\hat{k} = (1, 0, 0)$, $\omega = 0.3\pi$ y $\tau = 1/2\nu$.

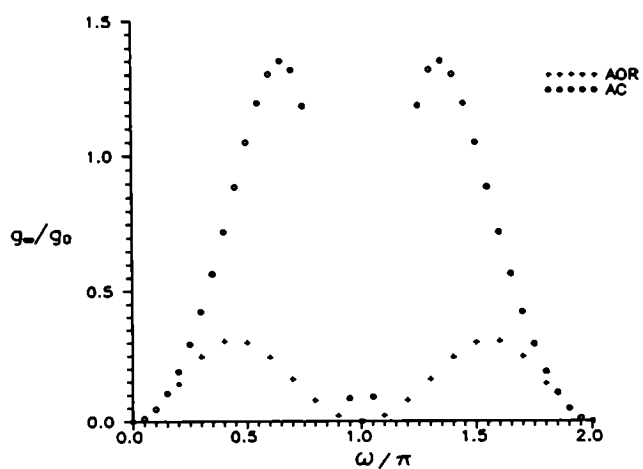


Figura 6.6: g_∞/g_0 vs ω para el sistema A con $\hat{k} = (1, 0, 0)$ y $\tau = 1/2\nu$.

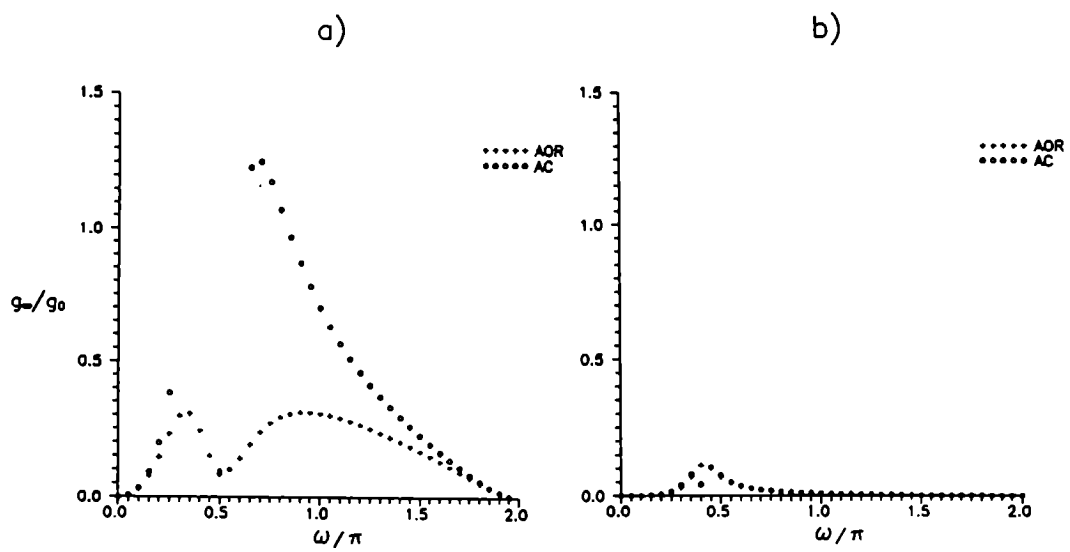


Figura 6.7: Idem Fig. anterior con ejes a) (3, 0, 1) y b)(1, 0, 10).

Capítulo 7

Resumen y conclusiones

En este trabajo hemos estudiado los mapas cuánticos y semiclásicos de sistemas sometidos a perturbaciones periódicas y acoplados a un mecanismo disipativo. En particular analizamos dos sistemas: 1) un oscilador armónico cuántico acoplado a un baño térmico arbitrario y perturbado periódicamente con un potencial dependiente de la coordenada y 2) un spin acoplado a un campo magnético externo e inmerso en un reservorio de osciladores y al cual se le aplicó periódicamente una rotación instantánea.

Para el primer sistema empleamos la representación semiclásica de Wigner y construimos el mapa cuántico de la función de Wigner, siguiendo el procedimiento de Graham y Tél, y el mapa semiclásico de los momentos.

En particular estudiamos el mapa en el caso en que se aplica una perturbación armónica. Se investigó el mapa semiclásico de los primeros y segundos momentos, que describen completamente al problema en el caso en que la distribución inicial del oscilador sea una función de Gauss. Del análisis de la estabilidad del punto fijo vimos que si la intensidad de la pulsación supera cierto valor crítico el punto fijo se vuelve hiperbólico pero sus coordenadas dejan de pertenecer al espacio de los momentos. Es decir que si la pulsación es suficientemente fuerte el sistema no

alcanza un equilibrio. El valor crítico para el caso AC es menor que para el caso AOR. Cuando la intensidad de la perturbación toma el valor crítico la distribución de equilibrio resulta ser uniforme. Cuando es menor, el estado de equilibrio en general es diferente para los modelos AOR y AC y corresponde a una gaussiana centrada en el origen del espacio (q, p) . Cuando la frecuencia de la pulsación es muy baja, o es un múltiplo de la frecuencia propia del oscilador bajo la influencia del entorno disipativo, el punto fijo no pierde su estabilidad para ningún valor de la intensidad de la pulsación.

Luego analizamos el mapa cuántico, a través del propagador de la función de Wigner, en los límites de acoplamiento débil, clásico, y asintótico para una perturbación general. Vimos que si la interacción es muy débil el modelo de acoplamiento no se distingue en el mapa. En el límite clásico encontramos que los mapas AOR y AC no coinciden y es el modelo AC el que describe correctamente, en este límite, al problema clásico. En el límite asintótico los propagadores AOR y AC se distinguen únicamente en el valor de las dispersiones.

El segundo sistema, a diferencia del anterior, tiene la particularidad de ser de dimensión finita. Esto permite construir un mapa semiclásico totalmete equivalente al mapa cuántico.

Dado que, en este caso, la perturbación es una rotación, no es posible contrarrestar los efectos del mecanismo disipativo y el sistema siempre alcanza un equilibrio. El mapa semiclásico fue analizado para los casos particulares de spin 1 y 1/2 a través de las propiedades de sus coeficientes de decaimiento y puntos fijos. Además para spin 1 realizamos un análisis perturbativo del mapa disipativo tomando una interacción mezcla de AOR y AC y calculamos la corrección de primer orden en los autovalores cuando la interacción es muy cercana a AOR o muy cercana a AC. Vimos que para temperatura alta la corrección que sufre el sistema AC es cuatro veces mayor que el AOR.

Para el sistema con spin 1 la diferencia entre los acoplamientos es muy marcada al aplicar una rotación con eje paralelo al campo externo. Tanto la dinámica como el punto fijo del mapa AOR no se ven afectados por esta rotación. En cambio, en el caso AC la dinámica depende del ángulo de la rotación a través de los coeficientes de decaimiento del mapa. Cuando la temperatura es muy baja o el acoplamiento es

muy débil esta diferencia se hace inapreciable. Los puntos fijos de los mapas AOR y AC son en general diferentes salvo cuando la temperatura es elevada y la frecuencia de la pulsación es muy baja o cuando la interacción es muy débil.

En el caso de spin $1/2$ realizamos el mismo análisis del mapa semiclásico y agregamos el estudio del mapa escalar generado al aplicar la perturbación a un invariante semiclásico del mapa disipativo. El mapa semiclásico parece ser menos sensible al modelo de la interacción en este caso que para spin 1. Los coeficientes de decaimiento muestran diferencias cuando la rotación aplicada no es paralela al campo externo. En este caso la relajación de los sistemas AOR y AC depende del ángulo de la rotación. Aunque la forma en que varían los coeficientes de decaimiento es similar para ambos modelos se observa una mayor amplitud en el caso AC. En el análisis de los puntos de equilibrio observamos que aparece alguna diferencia entre los acoplamientos cuando se perturba al sistema en una dirección ni paralela ni perpendicular al campo externo. Además, si el límite de acoplamiento débil es estricto los mapas coinciden en todos los casos. El mapa escalar sí presenta un comportamiento muy diferente según la interacción. En el caso AOR el mapa alcanza un valor constante después de un transitorio mientras que el régimen asintótico del mapa AC es oscilatorio. Además, el valor asintótico promedio del mapa, que en ambos casos depende del ángulo de la rotación aplicada, es de mayor magnitud en el caso AC.

En los dos sistemas estudiados encontramos que el modelo de interacción resulta irrelevante solamente en el límite estricto de acoplamiento débil.

Fuera de este límite, vemos que los mapas semiclásicos muestran una dinámica diferente para los casos AOR y AC. Los puntos de equilibrio del sistema del spin son independientes del modelo en el límite clásico si la frecuencia de la pulsación es muy baja. Bajo estas condiciones, la única señal del tipo de interacción que encontramos en el propagador del sistema del oscilador es un corrimiento de la frecuencia natural que afecta a las dispersiones. En el mapa escalar estudiado en el caso de spin $1/2$ siempre encontramos un comportamiento diferente para AOR y AC, ya que en éste vemos reflejada la *simetría* de cada modelo.

En los casos en que los acoplamientos se distinguen, el AC muestra una dependencia más importante con los parámetros del problema. Ya sea con la intensidad

de la pulsación ω , en el caso de spin 1 ante una perturbación en la interacción.

La diferencia fundamental entre los dos modelos de acoplamiento radica en la aparición de una simetría en el sistema no pulsado bajo el marco AOR. Para el sistema con spin, en el marco AOR, el sistema recupera la simetría de rotación propia del spin acoplado al campo magnético externo y libre del mecanismo disipativo. Con el oscilador sucede algo equivalente. La simetría recuperada en este caso es la del oscilador armónico, que también se traduce en el hecho de que el mapa semiclásico de los primeros momentos adecuadamente adimensionalizados resulta ser proporcional a una matriz de rotación.

En el caso del oscilador, el sistema posee un análogo clásico. Más aún, esta clase de mapa cuántico es muchas veces construido con el objeto de comparar las situaciones clásica y cuántica. Por lo tanto, dado que el límite clásico en el marco AC reproduce el sistema clásico, éste parece ser el modelo adecuado para introducir la disipación cuántica. En el caso del spin, el sistema representa situaciones de origen puramente cuántico y entonces no encontramos un argumento tan claro como para adoptar uno u otro modelo. Sin embargo la recuperación de la simetría del sistema libre es un aspecto a tener en cuenta en cada aplicación concreta, es decir, la simetría del problema real que se quiere describir a través de este formalismo puede indicar cuál de los dos acoplamientos es el más apropiado.

Apéndice A.

Transformada de Wigner.

Haremos un resumen de la transformada de Wigner y sus principales propiedades que han sido enunciadas y demostradas por diversos autores, por ejemplo [7],[52]-[55]

La distribución de Wigner de un sistema cuántico de N grados de libertad representado por una matriz densidad ρ se define como

$$W(q, p) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^N} \int d^N y e^{ip \cdot y / \hbar} \langle q - \frac{y}{2} | \rho | q + \frac{y}{2} \rangle \quad (\text{A.1})$$

donde $\langle q | \rho | q' \rangle$ es el elemento de matriz en la base de coordenadas y $p \cdot y = \sum_{j=1}^N p_j y_j$.

Enunciaremos sus principales propiedades para una dimensión, las cuales pueden generalizarse para cualquier N en forma directa.

1. Distribuciones marginales y normalización:

$$\int dp W(q, p) = \langle q | \rho | q \rangle, \quad (\text{A.2})$$

$$\int dq W(q, p) = \langle p | \rho | p \rangle, \quad (\text{A.3})$$

$$\int \int dq dp W(q, p) = \text{Tr}(\rho) = 1. \quad (\text{A.4})$$

2. Invariancia de Galileo: Sea $\rho = |\phi\rangle\langle\phi|$. ¹Entonces,

¹Aunque esta propiedad y la siguiente se enuncian para un estado puro valen en general para estados mixtos.

$$\phi(q) \rightarrow \phi(q + a) \Rightarrow W(q, p) \rightarrow W(q + a, p), \quad (\text{A.5})$$

$$\phi(q) \rightarrow e^{ip'q/\hbar} \phi(q) \Rightarrow W(q, p) \rightarrow W(q, p - p'). \quad (\text{A.6})$$

3. *Invariancia ante reflexiones espaciales y temporales:*

$$\phi(q) \rightarrow \phi(-q) \Rightarrow W(q, p) \rightarrow W(-q, -p), \quad (\text{A.7})$$

$$\phi(q) \rightarrow \phi^*(q) \Rightarrow W(q, p) \rightarrow W(q, -p). \quad (\text{A.8})$$

4. *Partícula libre.*

En el caso *libre de fuerzas* la ecuación de movimiento es la clásica:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{p}{m} \frac{\partial W}{\partial q}. \quad (\text{A.9})$$

5. Si $W_\phi(q, p)$ y $W_\psi(q, p)$ son las distribuciones asociadas a los estados $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$ respectivamente entonces

$$|\langle \phi | \psi \rangle|^2 = 2\pi\hbar \int dq \int dp W_\phi(q, p) W_\psi(q, p). \quad (\text{A.10})$$

Una consecuencia importante de la propiedad 5 se obtiene si elegimos $|\phi\rangle$ y $|\psi\rangle$ ortogonales. En ese caso tenemos

$$\int dq \int dp W_\phi(q, p) W_\psi(q, p) = 0, \quad (\text{A.11})$$

lo cual significa que $W(q, p)$ no siempre es positiva y por lo tanto la función de Wigner no representa una distribución de probabilidades.

Dado cualquier operador A , se define su *transformada de Wigner* como

$$A_W(q, p) = \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{ipy/\hbar} \left\langle q - \frac{y}{2} \left| A \right| q + \frac{y}{2} \right\rangle. \quad (\text{A.12})$$

Esta función es real si A es un observable, en particular

6. $W(q, p)$ es real.

Una manera de reobtener un operador a partir de su transformada es calculando sus elementos de matriz en la base de coordenadas,

$$\langle q \left| A \right| q' \rangle = \int dp e^{-ip(q'-q)/\hbar} A_W\left(\frac{q+q'}{2}, p\right). \quad (\text{A.13})$$

Esta expresión se deduce fácilmente a partir de la ec. (A.12).

7. *Regla del Producto*

Dados dos operadores A y B y sus transformadas $A_W(q, p)$ y $B_W(q, p)$ y sea $C = AB$, entonces $C_W(q, p)$ está dado por la expresión siguiente,

$$C_W(q, p) = A_W(q, p) \exp\left\{\frac{\hbar\Lambda}{2i}\right\} B_W(q, p) \quad (\text{A.14})$$

siendo Λ el operador diferencial definido como

$$\Lambda = \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} - \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial p}} \overleftarrow{\frac{\partial}{\partial q}} \quad (\text{A.15})$$

donde las flechas indican la dirección de derivación.

8. Para cualquier par de operadores A y B tenemos

$$\text{Tr}\{AB\} = h \int dq dp A_W(q, p) B_W(q, p). \quad (\text{A.16})$$

De esta última propiedad se deduce, reemplazando B por ρ , que

$$\langle A \rangle = \text{Tr}\{\rho A\} = \int dqdp W(q,p) A_W(q,p). \quad (\text{A.17})$$

En este sentido $W(q,p)$ se comporta como la función de distribución clásica en el espacio de fases.

Nos referiremos ahora a la dinámica de la función de Wigner. La dependencia temporal de $W(q,p)$ puede obtenerse a partir de la ecuación de Liouville cuántica

$$i\hbar \frac{\partial \rho}{\partial t} = [H, \rho],$$

aplicando la regla del producto (A.14) se obtiene

$$\hbar \frac{\partial W(q,p)}{\partial t} = -2H(q,p) \sin(\hbar\Lambda/2)W(q,p), \quad (\text{A.18})$$

donde $H(q,p)$ es la función correspondiente al hamiltoniano del sistema H . Nótese que tomando el límite $\hbar \rightarrow 0$ se obtiene la ecuación de Liouville clásica

$$\frac{\partial W^c}{\partial t} + \{W^c, H\} = 0$$

donde el superíndice c en W indica el límite clásico y $\{ \}$ denota los corchetes de Poisson.

Por cierto la función de Wigner no es la única representación semiclásica del operador densidad. O'Connell *et.al.* [54] comparan las distribuciones de Wigner, de *Husimi* y *Normal* y concluyen que la primera tiene la dependencia temporal de estructura más simple. Además es la única cuya dinámica en el caso libre de fuerzas corresponde a la clásica.

9. Transformación inversa

Se define la base \hat{T} o base de Weyl como el operador [55]

$$\hat{T}(u, v) = \exp\{i(uQ + vP)\} \quad (\text{A.19})$$

y la base $\hat{\Delta}$ o base de Wigner,

$$\hat{\Delta}(q, p) = \hbar/2\pi \int dudv \exp[i(uq + vp)] \hat{T}(-u, -v). \quad (\text{A.20})$$

La transformación de Wigner de un operador A dada por la ec. (A.12) también puede obtenerse como

$$A_W(q, p) = \text{Tr}\{A \hat{\Delta}(q, p)\} \quad (\text{A.21})$$

La transformación inversa que permite reobtener el operador A dada su función asociada $A_W(q, p)$ es la siguiente,

$$A = \int \frac{dqdp}{2\pi\hbar} A_W(q, p) \hat{\Delta}(q, p). \quad (\text{A.22})$$

La base $\hat{\Delta}$ está asociada al llamado *ordenamiento de Weyl*. Los efectos de este ordenamiento se aprecian fácilmente en polinomios de q y p . Supongamos que tenemos la función $A_W(q, p) = q^n p^m$. Mediante la transformación (A.22) obtenemos el operador

$$A = \{Q^n P^m\}_\pi \quad (\text{A.23})$$

donde la notación $\{ \}_\pi$ implica sumar con el mismo peso todas las permutaciones posibles del producto de operadores y dividir por el número de términos. Inversamente tenemos que

$$(\{Q^n P^m\}_\pi)_W = q^n p^m. \quad (\text{A.24})$$

$$p^2 q^2 \xrightarrow{\text{Weyl}} \frac{1}{2}(PQ + QP) \quad (\text{A.25})$$

y a la inversa

$$\frac{1}{2}(PQ + QP) \xrightarrow{\text{Wigner}} p^2 q^2. \quad (\text{A.26})$$

Finalmente demostraremos la propiedad siguiente:

10. Dada la función

$$A_W(q, p) = x^k(q, p) y^l(q, p) \quad (\text{A.27})$$

donde x e y se relacionan con (q, p) a través de un cambio de coordenadas lineal,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} \quad (\text{A.28})$$

tal que $d = \det M > 0$, entonces mediante la transformación (A.22) obtenemos que

$$A = \{X^k Y^l\}_\pi \quad (\text{A.29})$$

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}. \quad (\text{A.30})$$

Demostración: Aplicando la ec. (A.22) a A_W dado por (A.27) resulta

$$A = \int dq dp x^k(q, p) y^l(q, p) \hat{\Delta}(q, p)/h. \quad (\text{A.31})$$

Mediante el cambio de variables $(q, p) \rightarrow (x, y)$ queda

$$A = \int \frac{dx dy}{d} x^k y^l \hat{\Delta}(q(x, y), p(x, y))/h. \quad (\text{A.32})$$

Usando la definición del operador $\hat{\Delta}$ (A.20) obtenemos

$$\hat{\Delta}(q(x, y), p(x, y)) = \hbar/2\pi \int du dv \exp[i(uq(x, y) + vp(x, y))] \hat{T}(-u, -v). \quad (\text{A.33})$$

Definiendo el vector (u', v') tal que

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = M^t \begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} \quad (\text{A.34})$$

podemos reemplazar en (A.33) el exponente $i(uq(x, y) + vp(x, y))$ por $i(u'x + v'y)$ y realizando además el cambio de variables $(u, v) \rightarrow (u', v')$ resulta

$$\hat{\Delta}(q(x, y), p(x, y)) = \hbar/2\pi \int d u' dv' \exp[i(u'x + v'y)] \hat{T}(-u(u', v'), -v(u', v')). \quad (\text{A.35})$$

El operador $\hat{T}(-u(u', v'), -v(u', v'))$ es según la definición (A.19)

$$\hat{T}(-u(u', v'), -v(u', v')) = \exp\{-i(u(u', v')'Q + v(u', v')P)\}. \quad (\text{A.36})$$

Definimos los operadores Q', P' como

$$\begin{pmatrix} Q' \\ P' \end{pmatrix} = \frac{1}{d^{1/2}} M \begin{pmatrix} Q \\ P \end{pmatrix}. \quad (\text{A.37})$$

Estos operadores pueden considerarse como un operador de coordenada Q' y un operador de momento P' ya que cumplen la relación de conmutación

$$[Q', P'] = [Q, P]. \quad (\text{A.38})$$

Podemos reemplazar en (A.36) el exponente por $i(d^{1/2}u'Q' + d^{1/2}v'P')$ resultando la igualdad

$$\hat{T}(-u((u', v'), -v(u', v')) \equiv \hat{T}_{(Q', P')}(-d^{1/2}u', -d^{1/2}v') \quad (\text{A.39})$$

donde el subíndice (Q', P') implica reemplazar los operadores Q, P por los nuevos Q', P' en todas las operaciones en que esté involucrado $\hat{T}_{(Q', P')}$.

Finalmente, reemplazando $\hat{T}_{(Q', P')}$ en la ec.(A.35) y el resultado de ésta en (A.32) obtenemos que

$$A = d^{(k+l)/2} \int dx dy x^k y^l \hat{\Delta}_{(Q', P')}(x, y)/h \quad (\text{A.40})$$

$$= d^{(k+l)/2} \{(Q')^k (P')^l\}_\pi = \{X^k Y^l\}_\pi \quad (\text{A.41})$$

donde aplicamos la propiedad (A.23) con el cambio de operadores $(Q, P) \rightarrow (Q', P') = (X/d^{1/2}, Y/d^{1/2})$.

Bibliografía

- [1] M.V.Berry, N.L.Balazs, M.Tabor y A.Voros, *Ann. of Phys.* **122**, 26 (1979).
- [2] R.Artuso, D.Belluzzo y G.Casati, *Europhys. Lett.*, **25**, 181 (1994)
- [3] F. Haake, M. Kús y R. Scharf, *Z. Phys. B* **65** (1987) 381.
- [4] R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics* (Wiley Interscience, New York, 1975)
- [5] F. Haake, *Springer Tracts Mod. Phys.* **66**,98 (1973)
- [6] R. Graham y T. Tél, *Z. Phys. B***60** (1984) 127.
- [7] E.P.Wigner, *Phys.Rev.***40**, 249 (1932)
- [8] H.A.Cerdeira, K.Furuya y B.A.Huberman, *Phys.Rev.Lett* **61**, 2511 (1988)
- [9] E.S.Hernández y A. Kievsky, *Phys. Rev. A* **32**, 1810 (1985).
- [10] M. A. Despósito, Tesis Doctoral, Universidad de Buenos Aires (1992).
- [11] S. Nakajima, *Progr. Theor. Phys.* **20**, 948 (1958)
- [12] R. Zwanzig, *J. Chem. Phys.* **33**, 1338 (1960)
- [13] H. Grabert, *Springer Tracts Mod. Phys.* **95**,98 (1982)
- [14] H.M.Cataldo, *Phys.A***165**,249 (1990)

- [15] C.George, J.Prigogine y L.Rosenfeld, K.Dan. Vidensk. Selsk.Mat.-Fys.Medd. **38**, 12 (1972), J.Prigogine, C.George, F.Henin y L.Rosenfeld, Chem.Scr. **4**, 5 (1972)
- [16] P.N.Argyres y P.L.Kelley, Phys.Rev.A**134**,98 (1964)
- [17] P.Ullersma, Physica **32**,27 (1966)
- [18] R.Bonifacio y F.Haake, Z.Phys. **200**,526 (1967)
- [19] G.S.Agarwal, Springer Tracts in Mod. Phys. **70** (1974)
- [20] A.O.Caldeira y A.J.Leggett, Physica A **121**,587 (1983)
- [21] F.Haake y R.Reibold, Phys.Rev.A **32**, 2462 (1985)
- [22] P.S.Riseborough, P.Hanggi y U.Weiss, Phys.Rev.A **31**, 471 (1985)
- [23] K.H.Li, Phys.Rep. **134**,1 (1986)
- [24] G.W.Ford,J.T.Lewis y R.F.O'Connell, Phys.Rev.A **37**, 4419 (1988)
- [25] E.S.Hernández y C.O.Dorso, Phys. Rev. C **29**, 1510 (1984)
- [26] C.O.Dorso y E.S.Hernández , Phys. Rev. C **29**, 1523 (1984).
- [27] E.S.Hernández y A.Kievsky, Phys.Rev.A **32**, 1810 (1985).
- [28] H.M.Cataldo, E.S.Hernández y C.O.Dorso, Phys.A **142**, 498 (1987)
- [29] R.Bonifacio, P.Schwendimann, F.Haake, Phys.Rev.A **4**, 302 (1971)
- [30] K.Lindenberg y B.J.West, Phys.Rev.A **30**, 568 (1984)
- [31] N.G. van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North Holland, Amsterdam, 1981.
- [32] C.O.Dorso y E.S.Hernández, Phys.Rev.C **26**,528 (1982)
- [33] M.A.Despósito y E.S.Hernández, Journal of Phys.A, en prensa.

-
- [34] M.A.Despósito y E.S.Hernández, *Phys.Rev.A* **46**, 7510 (1992)
- [35] F.Haake y R.Reibold, *Phys.Rev.A* **32**, 2462 (1985)
- [36] E.S.Hernández y M.A.Despósito, *Physica A*, en prensa.
- [37] H.Heiselberg, C.J.Pethick y D.H.Ravenhall, *An.Phys* **223**,37 (1993)
- [38] R.K.Wangsness, F.Bloch, *Phys.Rev.* **89**, 728 (1953)
- [39] B.J.West y K. Lindenberg, *J.Chem.Phys* **83**, 4118 (1985)
- [40] H.Risken, *The Fokker Planck Equation* (Springer-Verlag, Berlin, 1989)
- [41] M.A.Despósito, S.M.Gatica y E.S.Hernández, *Phys. Rev. A* **46**, 3234 (1992).
- [42] E.S.Hernández y H.M.Cataldo, *Phys.Rev.A* **39**, 2034 (1989)
- [43] M.Gross y S. Haroche, *Phys.Rep.* **93**, 301 (1982)
- [44] Y.Takahashi y F.Shibata, *Journal of the Phys. Society of Japan*, **38**,656, (1975); J.R.Klauder y B.Skagerstam, *Coherent States*, (World Scientific, Singapore, 1985)
- [45] D.Varshalovich, A.Moskalev y V.Khersonskii, *Quantum Theory of Angular Momentum*, (World Scientific, Singapore, 1988)
- [46] E.S.Hernández y B.Remaud, *Phys.Lett.***75**, 269 (1980)
- [47] B.Remaud y E.S.Hernández, *Physica* **103A**, 35 (1980)
- [48] H.R.Lewis, *Phys.Rev.Lett.* **18**, 510 (1967); H.R.Lewis, *J.Math.Phys.* **9**, 1976 (1968); H.R.Lewis y W.B.Reisenfeld, *J.Math.Phys.***10**, 1458 (1969)
- [49] K.R.Symon, *J.Math.Phys.***11**, 1320 (1971)
- [50] P.G.L.Leach, *J.Math.Phys.***18**, 1608, 1902 (1977)
- [51] M.A.Despósito, sin publicar.
- [52] M.Hillery, R.F.O'Connell, M.O. Scully y E.P.Wigner, *Phys.Rep.***106**, 121 (1984)

BIBLIOGRAFIA

- [53] F.J. Narcowich y S.A. Fulling, *Wigner Distribution Functions* (Seminars in Mathematical Physics, Department of Mathematics, Texas A & M University College Station, Texas, USA)
- [54] R.F.O'Connell, Lipo Wang y H.A. Williams, Phys. Rev. A, **30**, 2187 (1984)
- [55] N.L. Balazs y B.K. Jennings, Phys. Rep **104**, 347 (1984)