Geometría de la variedad de polarizaciones

Pavón, Martín Roberto

1994

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales.

Universidad de Buenos Aires

Titulo: Geometría de la Variedad de Polarizaciones

Autor: Martín Pavón

Director: Dr. Ángel R. Larotonda

Tesis presentada para optar al título de

Doctor en Ciencias Matemáticas

Buenos Aires, Noviembre de 1993

— A Paula —

Introducción

La noción de polarización subordinada a una forma lineal dada de un álgebra de Lie L juega un papel central en la teoría de representaciones de álgebras y grupos de Lie nilpotentes y resolubles. Esta noción fue introducida por A. A. Kirillov en su célebre trabajo *Représentations unitaires de grupes de Lie nilpotentes* (Uspechi Mat. Naouk., 1962) donde establece el "método de de las órbitas" y señala que este método podría ser útil para estudiar las representaciones de otra clase de grupos. Este estudio fue realizado entre otros por Auslander, Konstant, Pukanszky y Duflo, además de Kirillov. Otros problemas en teoría de representaciones de álgebras de Lie también fueron atacados con este método, en particular el estudio del centro del álgebra envolvente y su cuerpo de fracciones.

Desde un punto de vista algebraico, la correspondencia entre polarizaciones y representaciones esta esbozada en la página 5 de este trabajo. Esencialmente, si P es una polarización de una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie L subordinada a f, entonces podemos pensar a $\mathbb{C}$ como un $\mathcal{U}(P)$ módulo y $\mathcal{U}(L) \otimes_{\mathcal{U}(P)} \mathbb{C}$ resulta un $\mathcal{U}(L)$-módulo simple (aquí $\mathcal{U}(\cdot)$ nota al álgebra envolvente).

En el presente trabajo tomamos como punto de partida una observación de M. Vergne (cf. [B-R]) que establece que el conjunto de polarizaciones subordinadas a una forma lineal dada de un álgebra de Lie L es una variedad algebraica; nos dedicaremos estudiar esta variedad en los casos en que L es un álgebra central (i.e. $[L,[L,L]] = 0$) y en algunos otros casos. Los resultados obtenidos establecen que la variedad algebraica en estos casos es "suave". Su homología se determina asimismo en forma completa.

El trabajo de tesis está dividido en cuatro capítulos. El capítulo 0 es de carácter introductorio; en él se exponen los resultados básicos de geometría y topología que serán utilizados luego y se fija la notación. En el capítulo 1 comenzamos estudiando el caso en que el álgebra de Lie es el álgebra de Heissenberg H_n ; en el mismo se prueba que la variedad de polarizaciones es una variedad compleja de dimensión $n(n+1)/2$ y se introduce una filtración conveniente que será usada en el capítulo siguiente para analizar la homología. En el capítulo 2 se establece una fórmula para la homología de la variedad de polarizaciones del álgebra de Heissenberg presentada como subvariedad de una Grassmaniana. Finalmente en el capítulo 3 se introduce la noción de álgebra de tipo Heissenberg, que incluye a algunas álgebras resolubles, y se generalizan los resultados obtenidos para este caso.

La teoría de representaciones unitarias de grupos de Lie queda bien clasificada mediante las órbitas de polarizaciones en el caso nilpotentes y resolubles. Del presente trabajo sigue que estas representaciones en los casos considerados pueden ser parametrizadas en forma "suave" por la variedad de polarizaciones.

Para terminar, quiero expresar mi agradecimiento al Dr. A.R. Larotonda, quien planteó el problema que dio origen a esta tesis y al Instituto Argentino de Matemática donde trabajé durante el desarrollo de la misma.

Capítulo 0

En este capítulo expondremos las herramientas necesarias para desarrollar el presente trabajo y fijaremos la notación a usar.

1. Álgebras de Lie.

Como referencia general para álgebras de Lie, utilizaremos $[B]$ y $[V]$; sólo trataremos aquí las definiciones y resultados básicos necesarios para el desarollo del presente trabajo.

Definición. 0.1. *Sean L un K-espacio vectorial y $[\cdot,\cdot]: L \times L \to L$ una aplicación lineal en cada variable. Diremos que $(L, [\cdot,\cdot])$ es una K-álgebra de Lie si el corchete verifica:*

i) $[x,x] = 0$, $\forall x \in L$

ii) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = 0 \quad \forall x, y, \in L$

En particular tenenos que el corchete es anticonmutativo, es decir, $[x,y] = -[y,x]$

Definición. 0.2. *Sean J y S subespacios de L. Diremos que S es una subálgebra de Lie de L si $[S,S] \subseteq S$ y que J es un ideal de L si $[J,L] \subseteq J$.*

Se deduce directamente de las definiciones que todo ideal de L es una subálgebra de L.

Definición. 0.3. *Llamaremos centro de L y lo notaremos con $Z(L)$ a*

$$Z(L) = \{ x \in L \mid [x, y] = 0, \quad \forall y \in L\}.$$

Proposición. 0.4. *$Z(L)$ es un ideal en L.*

Proposición. 0.5. *Si J es un ideal de L, entonces $[\cdot,\cdot]$ induce un corchete $[\![\cdot,\cdot]\!]$ en L/J tal que $(L/J, [\![\cdot,\cdot]\!])$ es una K-álgebra de Lie llamada el álgebra de Lie cociente de L por J.*

Dado que usaremos reiteradamente álgebras cocientes, indicaremos brevemente como se define el corchete de L/J.

Sean $\tilde{x}$, $\tilde{y} \in L/J$, definimos $[\![\tilde{x}, \tilde{y}]\!] = \widetilde{[x,y]}$ donde x y y son representantes de las clases de $\tilde{x}$ e $\tilde{y}$ respectivamente. El nuevo corchete está bien definido pues si $x = x' + z_1$ e $y = y' + z_2$ con z_1, $z_2 \in J$ tenemos $[x,y] = [x',y'] + [x',z_2] + [z_1,y'] + [z_1,z_2]$ dado que los tres últimos sumandos estan en J de donde deducimos que $\widetilde{[x,y]} = \widetilde{[x',y']}$.

Definición. 0.6. *Dada una K-álgebra de Lie L, llamaremos serie central descendente de L a la sucesión*

$$C^1(L) = L, \quad C^2(L) = [L, L], \qquad C^{k+1}(L) = [L, C^k(L)]$$

y serie derivada de L a

$$D^1(L) = L, \quad D^2(L) = [L, L], \qquad D^{k+1}(L) = [D^k(L), D^k(L)]$$

Diremos que L es nilpotente si existe k tal que $C^k(L) = 0$. Si existe k tal que $D^k(L) = 0$ diremos que L es resoluble. Si en particular tenemos que $C^2(L) = 0$ (o bien $D^2(L) = 0$) entonces diremos que el álgebra es abeliana

Notemos que toda álgebra de Lie conmutaitiva es nilpotente; por otra parte, ya que $C^2(L)$ es un ideal de L, $L/C^2(L)$ es un álgebra de Lie y podemos verificar inmediatamente que es abeliana. De la definición de álgebras nilpotentes y resolubles deducimos, dado que $D^k(L) \subseteq C^k(L)$ la siguiente proposición

Proposición. 0.7. *Si L es un álgebra de Lie resoluble, entonces L es nilpotente.*

Como ejemplo elemental de un álgebra de Lie nilpotente no abeliana tenemos

Ejemplo. 0.8.

Sean $n \in I\!N$ y $\{p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n, t\}$ la base de un espacio vectorial de dimensión $2n+1$. Podemos dotar a L de una estructura de álgebra de Lie difiniendo el corchete $[\cdot, \cdot]$ del siguiente modo

$$[p_1, q_j] = -[q_j, p_i] = \begin{cases} t & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

y

$$[q_i, t] = [q_j, t] = [p_i, p_j] = [q_i, q_j] = 0, \qquad \forall i, j$$

Este álgebra de particular importancia en física y matemática, es llamada el álgebra de Heisenberg y la notaremos H_n.

De la definición del corchete se deduce inmediatamente que $Z(H_n) = \langle t \rangle$ ($\langle \ \rangle$ nota al subespacio generado) y que H_n es un álgebra nilpotente, pues $[H_n, [H_n, H_n]] = 0$

2. Polarizaciones.[D]

Dada $f \in L^*$ una forma lineal, podemos asociarle una forma bilineal de $L \times L$ en K definida por $(x, y) \mapsto f([x, y])$.

Dado un subconjunto E de L notaremos con $E^{\perp}$ a

$$E^{\perp} = \{ y \in L \mid f[x,y] = 0, \forall x \in E\}$$

En particular, si $E = L$, a $L^{\perp}$ lo notaremos como L^{f}.

Definición. 0.9. *Dadas $f \in L^*$ y S una subálgebra de L se dice que S está subordinada a f si $f[S,S] = 0$, es decir si $S \subseteq S^{\perp}$.*

Proposición. 0.10. *Si S es una subálgebra subordinada a f, entonces*

$\dim S \leq \frac{1}{2}(\dim L + \dim L^{f})$.

Definición. 0.11. *Sean L un álgebra de Lie y $f \in L^*$. Diremos que $P \subseteq L$ es una polarización subordinada a f si*

i) P *es una subálgebra subordinada a* f.

ii) $\dim P = \frac{1}{2}(\dim L + \dim L^{f})$.

Proposición. 0.12. *Son equivalentes:*

i) P *es una polarización subordinada a* f.

ii) P *es una subálgebra subordinada a f y $P = P^{\perp}$. Además, si P es una polarización, $L^{f} \subseteq P$; en particular $Z(L) \subseteq P$.*

En general no es cierto que dadas un álgebra de Lie L y $f \in L^*$ existan polarizaciones subordinadas a f. Por ejemplo, si cosideramos la $\mathbb{R}$-álgebra L con base formada por los vectores $\{x, y, z, t\}$ y corchete definido por $[x,y] = z$, $[x,z] = -y$, $[y,z] = t$ y

$[L,t]=0$; L resulta una $\mathbb{R}$-álgebra de Lie resoluble de dimensión 4. Sea $f \in L^*$, $f(t) \not\equiv 0$, entonces no existen polarizaciones de L subordinadas a f.

No obstante tenemos el siguiente importante teorema de Vergne.([D])

Teorema. 0.13. *Si L es una $\mathbb{C}$ - álgebra de Lie resoluble; entonces para toda $f \in L^*$ existe P polarización de L subordinada a f.*

De ahora en más por un álgebra de Lie ya sea nilpotente o resoluble, entenderemos una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie. Dadas L y $f \in L^*$ notaremos al conjunto de polarizaciones de L subordinadas a f con $\mathcal{P}(L,f)$.

Ejemplo. 0.14.

Sean $L = H_n$ y $f \in H_n^*$. Si $f(t)=0$; entonces $H_n^\perp = H_n$ pues $f[H_n,H_n] = f(t) = 0$ luego H_n es una polarización subrodinada a f.

Si $f(t) \neq 0$, entonces $H_n^f = \langle t \rangle$. Por lo tanto si P es una polarización, $\dim P = n+1$. Así por ejemplo las subálgebras

$$P_1 = \langle p_1, \ldots, p_n, t \rangle$$

$$P_2 = \langle q_1, \ldots, q_n, t \rangle$$

$$P_3 = \langle p_1 + q_1, \ldots, p_n + q_n, t \rangle$$

son polarizaciones de H_n pues cada una de ellas verifica $P_i \subseteq P_i^\perp$ y $\dim P_i = n+1$.

Como se indicó en la introducción, el objeto de este trabajo es estudiar el conjunto de polarizaciones subordinadas a una forma dada. El interes de considerar ese conjunto radica en su relación con las representaciones de álgebras de Lie. Aquí esbozaremos brevemente esta relación, para un estudio más detallado las referencias son [D], [C-V] y [B-R].

Sean $f \in L^*$, $f \neq 0$ y P una polarización subordinada a f. De $f[P,P] = 0$ deducimos inmediatamente que $f\colon P \to \mathbb{C}$ es una representación de P en $\mathbb{C}$. Sean $\mathcal{U}(L)$ y $\mathcal{U}(P)$ las álgebras envolventes de L y P respectivamente; tenemos que $\mathbb{C}$ resulta un $\mathcal{U}(P)$-módulo mediante la acción

$$f\colon \mathcal{U}(P) \times \mathbb{C} \to \mathbb{C} \qquad\qquad (\mathrm{p}, \mathrm{z}) \mapsto \mathrm{f}(\mathrm{p})\mathrm{z}$$

a este módulo lo notaremos de ahora en más con $\mathbb{C}_f$. Ya que $\mathcal{U}(L)$ también es un $\mathcal{U}(P)$-módulo tiene sentido considerar el producto tensorial

$$\mathcal{U}(L) \otimes_{\mathcal{U}(P)} \mathbb{C}_f$$

que resulta un $\mathcal{U}(L)$-módulo simple en el caso en que L es resoluble. A este módulo lo notaremos $ind(f, \mathbb{C})$. Dada la correspondencia existente entre los L-módulos simples y las representaciones irreducibles de L hemos obtenido de esta manera, a partir de f y P una representación irreducible (en general de dimensión infinita) de $\mathcal{U}(L)$.

Además, si $Prim(L)$ nota al conjunto de representaciones irreducibles de L, se puede probar que la aplicación

$$Dix\colon L^* \setminus \{0\} \to Prim(\mathcal{U}(L))$$

es suryectiva (por lo tanto toda representación irreducible de $\mathcal{U}(L)$ es inducida por alguna forma f de L^* y alguna polarización subordinada a ella). Hay una teoría que topologiza a $Prim(L)$, para L arbitrario, la topología de Jacobson. Con esta topología, si damos a L^* la topología de Zariski, la aplicación $Dix : L^* \setminus \{0\} \to Prim(\mathcal{U}(L))$ resulta continua.

3. Grassmaniannas.([C])

Sea V un K-espacio vectorial ($K = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$) de dimensión n. Notaremos $Gr(n,k)$ al conjunto de todos los subespacios de V de dimeusión k. Se verifica

Proposición. 0.15. *El conjunto $Gr(n,k)$ es una K-variedad analítica compacta de dimensión $k(n-k)$.*

A $Gr(n,k)$ se la denomina la variedad grassmanianna (de subespacios de V de dimensión k). Para fijar la notación a usar describiremos brevemente una parametrización de $Gr(n,k)$.

Sean S_1, S_2 subespacios de V tales que $S_1 \oplus S_2 = V$ y $\dim S_1 = k$. Sea $U = End(S_1, S_2)$; definimos

$$\varphi: U \to Gr(n,k) \qquad T \mapsto \text{gráfico de } T$$

Claramente φ está bien definida pues $\dim(\text{gráfico de} T) = k$ ya que $\dim S_1 = k$. Notemos además que si fijamos sendas bases en S_1 y S_2 podemos identificar a U con $\mathbb{C}^{k(n-k)}$ y de este modo $\varphi^{-1}: \varphi(U) \to U \simeq \mathbb{C}^{k(n-k)}$ es una carta "clásica" de $Gr(n,k)$.

De aquí en adelante al gráfico de T lo notaremos como $S_1 + TS_1$ entendiendo por esto

"Fijada una base $v_1, \ldots, v_k$ de S_1; $S_1 + TS_1$ es el subespacio de V generado por los vectores $v_1 + Tv_1$, $v_2 + Tv_2, \ldots, v_k + Tv_k$".

Necesitaremos la siguiente

Proposición. 0.16. *Con la notción anterior, si $S \subsetneq V$ es un subespacio de dimensión k y $S_1 \cap S_2 = 0$, entonces $S \in \varphi(U)$; es decir existe $T \in U$ tal que $\varphi(T) = S$.*

Demostración: Sean $\pi_1: S_1 \oplus S_2 \to S_1$; $\pi_2: S_1 \oplus S_2 \to S_2$ las proyecciones y $\{v_1, \ldots, v_k\}$ una base de S. Si $\pi_1(v_i) = v_i'$ y $\pi_2(v_i) = v_i''$, entonces el $\{v_1', \ldots, v'_k\}$ es un conjunto linealmente independiente en S_1 pues

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \pi_1(v_i) = 0 \implies \sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i \in S_2 \cap S \implies \lambda_i = 0\,(i = 1, \dots, k)$$

Luego $\{ v'_1, \dots, v'_k \}$ es una base de S_1. Si definimos $T\colon S_1 \to S_2$ por $Tv'_i = v''_i$ tenemos que

$$\varphi(T) = S_1 + TS_1 = \langle v'_i + v''_i \rangle_{1 \le i \le k} = \langle v_i \rangle = S \qquad \square$$

Sea $K = \mathbb{C}$. Los siguientes teoremas son conocidos

Teorema. 0.17. ([C]) *La variedad $Gr(n,k)$ es compacta y simplemente conexa. Además si $H_i(Gr(n,k))$ representa el i-ésimo grupo de homología de $Gr(n,k)$ con coeficientes en $\mathbb{Z}$, entonces;*

$H_i(Gr(n,k)) = 0$ si i es impar o mayor que $2k(n-k)$ y

$H_i(Gr(n,k))$ es un $\mathbb{Z}$-módulo libre

Si nos permitimos introducir la noción de clase de Chern, podemos dar más precisión al teorema anterior. Concretamente tenemos

Teorema. 0.18. ([B-T]) *Sean S y Q los fibrados universales de $Gr(n,k)$ y $Gr(n,n-k)$ y $c_1(S), \dots, c_k(S)$ y $c_1(Q), \dots, c_{n-k}(Q)$ las respectivas clases de Chern de S y Q. Entonces*

i) Como anillo

$$H^*(Gr(n,k);\, \mathbb{Z}) = \frac{\mathbb{R}\,[c_1(S), \dots, c_k(S), c_1(Q), \dots, c_{n-k}(Q)]}{(c(S)c(Q) = 1)}$$

ii) Las clases $c_1(Q), \dots, c_{n-k}(Q)$ generan al anillo $H^*(Gr(n,k);\, \mathbb{Z})$.

De este modo el anillo $H^*(Gr(n,k))$ es isomorfo al cociente del anillo

$$\mathbb{Z}\,[x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_{n-k}] \tag{1}$$

por un ideal conveniente donde los elementos x_i , y_i tienen grado $2i$ y $H^l(Gr(n,k))$ es igual a la proyección al cociente de la componente homogénea de grado l de (1) .

Como primer paso en el estudio de la geometría del conjunto $\mathcal{P}$ tenemos

Teorema. 0.19. ([D]) *Sean L un álgebra de Lie de dimensión n y $f \in L^*$, entonces $\mathcal{P}(L,f)$ es una subvariedad algebraica compacta de $Gr(n,k)$ con* $k = 1/2(\dim L + \dim L^f)$.

4. Fibraciones ([Sp])

Sean E y B espacios topológicos y $p\colon E \to B$ una aplicación continua

Definición. 0.20. *Dado X un espacio topológico, diremos que $p\colon E \to B$ tiene la propiedad de levantamiento de homotopías respecto a X si dadas $f'\colon X \to E$ y $F\colon X \times I \to B$ tales que $F(x,0) = p \circ f'(x)$ para todo $x \in X$ existe $F'\colon X \times I \to E$ tal que $F = p \circ F'$.*

Definición. 0.21. *Diremos que $p\colon E \to B$ es una fibración si p tiene la propiedad de levantamiento de homotopía con respecto a cualquier espacio X . Si existe un cubrimiento abierto $\mathcal{U} = \{U\}$ de B tal que*

$$p|_{p^{-1}(U)}\colon p^{-1}(U) \to U \text{ es una fibración } \forall U \in \mathcal{U}$$

diremos que $p: E \to B$ es localmente una fibración.

Proposición. 0.22. *Si existen un cubrimiento abierto $\mathcal{U}$ de B y un espacio topológico F tales que para cada $U \in \mathcal{U}$ se verifica*

i) existe un homeomorfismo $f_U: p^{-1}(U) \to U \times F$

ii) $\pi \circ f = p$ donde $\pi: U \times F \to U$ es la proyección.

Entonces $p: E \to B$ es localmente una fibración.

Teorema. 0.23. *Sea B un espacio paracompacto y T_2. Entonces $p: E \to B$ es una fibración si y sólo si es localmente una fibración.*

Supongamos ahora que $p: E \to B$ es una fibración que verifica;

i) E y F son conexos por arcos.

ii) B es simplemente conexo.

Si $i: F \hookrightarrow E$ es la inclusión, tenemos la siguiente proposición que relaciona la homología de E, B y F (ver [H]).

Proposición. 0.24. *Si $H_p(B) = 0$ para $0 < p < p_0$ y $H_q(F) = 0$ para $0 < q < q_0$, entonces, si $n_0 = p_0 + q_0$, la siguiente sucesión de $\mathbb{Z}$-módulos es exacta*

$$H_{n_0-1}(F) \xrightarrow{i_*} H_{n_0-1}(E) \xrightarrow{p_*} H_{n_0-1}(B) \xrightarrow{t} H_{n_0-2}(F) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_2(B) \xrightarrow{t} H_1(F) \longrightarrow H_1(E) \longrightarrow 0$$

5. Dualidad de Lefschetz ([Sp])

Sean X un espacio topológico y (B, D) un par en X, es decir B y D son subconjuntos de X tales que $D \subseteq B$.

Definición. 0.25. *Un par (U, V) se dice un entorno de (B, D) si U y V son abiertos en X y $B \subseteq U$, $D \subseteq V$.*

Sea M un A-módulo. Notemos que a la familía de entornos de (B, D) podemos dirigirla por inclusión. Luego, si $H^q(U, V)$ es el q-ésimo grupo de cohomología con coeficientes en M; $\{ H^q(U, V; M) \mid (U, V) \text{ es un entorno de } (B, D) \}$ es un sistema dirigido y por consiguiente tiene sentido considerar su límite directo.

Sea $\overline{H}^q(B, D; M) = \lim_{\to} H^q(U, V; M)$ queda definido un morfismo

$$i: \overline{H}^q(B, D; M) \to H^q(B, D; M)$$

Definición. 0.26. *Un par (B, D) se dice "taut" en X con respecto a la cohomología singular si i es un isomorfismo para todo q y para todo A-módulo M.*

Proposición. 0.27. *Si B, D y X son poliedros compactos y $B \subseteq D$; entonces cualquier inmersión de (A, B) en X es "taut".*

Definición. 0.28. *Un par (X, Y) se dice una n-variedad relativa si X es T_2, Y es cerrado en X y $X \setminus Y$ es una variedad topológica de dimensión n.*

Para variedades relativas tenemos la siguiente proposición conocida como el teorema de dualidad de Lefschetz; este aplicado a pares "taut" es de suma utilidad pues establece un isomorfismo entre la homología de $X \setminus Y$ y la cohomología relativa del par (X, Y).

Proposición. 0.29. *Sea (X,Y) una n-variedad relativa compacta tal que $X \setminus Y$ es orientable sobre un anillo A, entonces para todo q y para todo A-módulo M existe un isomorfismo entre $H_q(X \setminus Y; M)$ y $\overline{H}^{n-q}(X,Y;M)$.*

Capítulo 1

En este capítulo nos restringiremos a trabajar con el álgebra de Heisenberg H_n de dimensión $2n+1$. Sea $f \in H_n^*$, dado que $f(t) = 0$ implica $\mathcal{P}(H_n, f) = \{H_n\}$, supondremos que $f(t) = 1$. Notaremos con $\mathcal{P}$ a $\mathcal{P}(H_n, f)$.

De acuerdo con lo visto en el capítulo anterior podemos considerar a $\mathcal{P}$ como un subconjunto de $Gr(2n+1, n+1)$. El primer paso para probar que $\mathcal{P}$ es una variedad "lisa" y establecer su dimensión consiste en demostrar que $\mathcal{P}$ puede ser cubierto por entornos coordenados convenientes. En principio, bastaría considerar la intersección de los entornos coordenados de $Gr(2n+1, n+1)$ con $\mathcal{P}$, pero esto es técnicamente inconveniente pues no siempre resultará fácil caracterizar a la intersección del entorno con $\mathcal{P}$ en $\mathbb{C}^{n(n+1)}$. No obstante en ciertos casos esto puede hacerse y es suficiente para nustras necesidades; veamos cuales son esos entornos.

Sea I un subconjunto de $\{1, \ldots, n\}$, con $\#I$ notaremos su cardinal. Conservando la notación del capítulo 0 para el álgebra de Heisenberg, consideraremos los siguientes subespacios de H_n:

i) E_I es el subespacio generado por los vectores de la base $p_{h_1}, \ldots, p_{h_l}$ con h_j en I y $q_{k_1}, \ldots, q_{k_{n-l}}$ con k_l en el complemento de I y

ii) T igual al centro de H_n

es decir

$$E_I = \langle p_{h_1}, \ldots, p_{h_l}, q_{k_1}, \ldots, q_{k_{n-l}} \rangle_{\substack{h_1, \ldots, h_l \in I \\ k_1, \ldots, k_{n-l} \in I^c}} \qquad T = \langle t \rangle \; (= Z(H_n))$$

y notaremos con U_I a

$$U_I = \mathrm{End}(\mathrm{E_I} \oplus \mathrm{T}, \mathrm{E_{I^c}})$$

Proposición. 1.1. *Sea $\mathcal{P}$ la variedad de polarizaciones de H_n subordinada a f, entonces*

$$\mathcal{P} \subseteq \bigcup_{I \subseteq \{1,\ldots,n\}} \varphi(U_I)$$

donde $\varphi\colon U_I \to Gr(2n+1, n+1)$ es la parametrización usual.

Demostración: Por la proposición 0.16 es suficiente probar que dado $P \in \mathcal{P}$ existe $J \subseteq \{1,\ldots,n\}$ tal que $P \cap E_J = 0$; en este caso resulta que $P \in \varphi(U_{J^c})$.

Sea P_0 la polarización $P_0 = \langle p_1, \ldots, p_n, t\rangle$. Dado que $\langle t\rangle \subseteq P \cap P_0$ por la proposición 0.11, si el subespacio $P \cap P_0$ tiene dimensión $k+1$ entonces existe $J \subseteq \{1,\ldots,n\}$ tal que $\#J = n-k$ y, si $S_J = \langle p_{j_1}, \ldots, p_{j_{n-k}}\rangle_{j_l \in J}$, entonces $P \cap S_J = 0$. Afirmo que $P \cap E_J = 0$.

Primero notemos que $P_0 = P \cap P_0 \oplus S_J$ y que si $x \in P \cap E_J$, entonces $x = x_1 + x_2$ donde $x_1 \in S_J$, $x_2 \in \langle q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}\rangle_{i_l \in J^c}$. Ahora bien;

$$\varphi[x, P_0] = \varphi[x, P \cap P_0] + \varphi[x, \langle q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}\rangle_{i_l \in J^c}].$$

Dado que $x \in P$ y que $P \cap P_0 \in P$, resulta $\varphi[x, P \cap P_0] = 0$. Por otra parte, $\varphi[x, S] = \varphi[x_1, S] + \varphi[x_2, S]$. Como $x_1 \in S$, resulta $\varphi[x_1, S] = 0$ y como $x_2 \in \langle q_{i_1}, \ldots, q_{i_k}\rangle_{i_l \in J^c}$, entonces $\varphi[x_2, S] = 0$. Luego $\varphi[x, P_0] = 0$; es decir $x \in P_0^{\perp} = P_0$, por lo tanto $x \in P \cap E_J \cap P_0 = S \cap P_0 = 0$. $\square$

Con la ayuda de la proposición anterior podemos enunciar el resultado central de este cápitulo, que establece la dimensión y la "suavidad" de $\mathcal{P}$.

Proposición. 1.2. *$\mathcal{P}$ es una variedad compleja de dimensión* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Demostración: Sean $P \in \mathcal{P} \cap \varphi(U_I)$ y $T \in U_I$ tal que $P = \varphi(T)$. Si notamos con p_I a $(p_{i_1}, \dots, p_{i_k})$ y con q_J a $(q_{j_1}, \dots, q_{j_{n-k}})$, (J es el complemento de I) y usamos notación matricial, T es de la forma

$$T \begin{pmatrix} p_I \\ q_J \\ t \end{pmatrix} = (p_J \; q_I) \cdot \begin{pmatrix} A_{JI} & A'_{JJ} & Z_J \\ B_{II} & B'_{IJ} & Z_I \end{pmatrix}$$

Donde A_{JI}, A'_{JJ} y Z_J son las coordenadas correspondientes a Tp_I, Tq_J y Tt respecto a la base p_J y B_{II}, B'_{IJ} y Z_I la s correspondientes a Tp_I, Tq_J y Tt respecto a q_I. Es decir

$$T(p_{i_\alpha}) = \sum_{l=1}^{n-k} A_{j_l i_\alpha} p_{j_l} + \sum_{h=1}^{k} B_{i_h i_\alpha} q_{i_h} = A_{J i_\alpha} p_J + B_{I i_\alpha} q_I$$

$$T(q_{j_\beta}) = \sum_{l=1}^{n-k} A'_{j_l j_\beta} p_{j_l} + \sum_{h=1}^{k} B'_{i_h j_\beta} q_{i_h} = A'_{J j_\beta} p_J + B'_{I j_\beta} q_I$$

$$T(t) = \sum_{l=1}^{n-k} Z_{j_l} p_{j_l} + \sum_{h=1}^{k} Z_{i_h} q_{i_h} = Z_J p_J + Z_I q_I$$

Como $\varphi(T)$ tiene dimensión $n+1 = \frac{1}{2}(\dim H_n + \dim H_n^f)$ tenemos $\varphi(T) \in \mathcal{P} \cap \varphi(U_I)$ si y sólo si $\varphi(T)$ es una subálgebra tal que $f[\varphi(T), \varphi(T)] = 0$. En particular

$$[p_{i_l} + A_{Ji_l}p_J + B_{Ii_l}q_I, p_{i_h} + A_{Ji_h}p_J + B_{Ii_h}q_I] = B_{i_li_h} - B_{i_hi_l} = 0 \qquad \forall i_l, i_k \in I$$

$$\Longrightarrow B_{II} = B_{II}^t$$

$$[q_{j_l} + A'_{Jj_l}p_J + B'_{Ij_l}q_I, q_{j_h} + A'_{Jj_h}p_J + B'_{Ij_l}q_I] = -A'_{j_lj_h} + A'_{j_hj_l} = 0 \qquad \forall j_l, j_h \in J$$

$$\Longrightarrow A'_{JJ} = {A'_{JJ}}^t$$

$$[p_{i_l} + A_{Ji_l}p_J + B_{Ii_l}q_I, q_{j_h} + A'_{Jj_h}p_J + B'_{Ij_h}q_I] = B'_{i_lj_h} + A_{j_hi_l} = 0 \qquad \forall i_l \in I, j_h \in J$$

$$\Longrightarrow B'_{IJ} = A_{JI}^t$$

$$[t + Z_Jp_J + Z_Iq_I, p_{i_l} + A_{Ji_l}p_J + B_{Ii_l}q_I] = Z_{i_l} = 0 \quad \forall i_l \in I$$

$$[t + Z_Jp_J + Z_Iq_I, q_{j_l} + A'_{Jj_l}p_J + B_{Ij_l}q_I] = Z_{j_l} = 0 \quad \forall j_l \in J$$

Luego

$$\varphi(T) \in \mathcal{P} \cap \varphi(U_I) \Longrightarrow \begin{cases} B_{II} = & B_{II}^t \\ A'_{JJ} = & {A'}^t_{JJ} \\ B'_{IJ} = & -A_{JI}^t \\ Z_I = & 0 \\ Z_J = & 0 \end{cases} \qquad (\star)$$

Por otra parte una transformación lineal $T \in U_I$ que satisfaga las cinco condiciones anteriores verifica $\varphi(T) \in \mathcal{P}$ pues en este caso $\varphi(T)$ es una subágebra – $Z(H_n) \subseteq \varphi(T)$ – $\dim \varphi(T) = n + 1$ y $f([\varphi(T), \varphi(T)]) = 0$.

Por lo tanto hemos probado; $\varphi(T) \in \mathcal{P} \cap \varphi(U_I)$ si y sólo si $(\star)$; por consiguiente $\mathcal{P} \cap \varphi(U_I) \simeq \mathbb{C}^{n(n+1)/2}$. $\square$

A la matriz

$$\begin{pmatrix} A_{JI} & A'_{JJ} \\ B_{II} & B'_{IJ} \end{pmatrix}$$

la llamaremos la *matriz asociada a* P y la notaremos por $M(P,I)$.

Corolario 1. *La variedad* $\mathcal{P}$ *es conexa por arcos.*

Demostración: Por la proposición 1.2 es claro que $\mathcal{P} \cap \varphi(U_I)$ es conexa para todo subconjunto I de $\{1,\ldots,n\}$. Además la polarización $P = \langle p_1 + q_1, \ldots, p_n + q_n, t\rangle$ pertenece a $\mathcal{P} \cap \varphi(U_I)$ para todo I. $\square$

Notemos que hemos obtenido en particular

$$H^0(\mathcal{P};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$$

donde $H^q(\mathcal{P};\mathbb{Z})$ nota al q-ésimo grupo de cohomología singular con coeficientes en $\mathbb{Z}$.

De la demostración de la proposición 1.1 podemos deducir en particular que $\{P \in \mathcal{P} \mid \dim P \cap P_0 = i+1\}$ puede ser cubierto por cartas de la forma $\varphi(U_I)$ con $\#I = i$; es decir, tenemos

Corolario 2. *Sea* $\mathcal{P}_i = \{P \in \mathcal{P} \mid \dim P \cap P_0 = i+1\}$ *entonces*

$$\mathcal{P}_i \subseteq \bigcup_{\substack{I \subseteq \{1,\ldots,n\} \\ \#I = i}} \varphi(U_I)$$

La estructura de los conjuntos $\mathcal{P}_i$ tiene un interés particular dado que gracias a ellos podremos definir una filtración que nos permitirá calcular la cohomología de $\mathcal{P}$.

La proposición siguiente nos permite caracterizar a los conjuntos $\mathcal{P}_i$; este resultado será utilizado inmediatamente después para establecer las propiedades que necesitaremos en el capítulo 2.

Los conjuntos $\mathcal{P}_i$ quedan caracterizados de la siguiente manera

Proposición. 1.3. *Sean $P \in \mathcal{P} \cap \varphi(U_I)$ y $M(P,I)$ la matriz asociada a P. Si $\#I = i$, $i > 0$, entonces se verifica:*

$$\text{“}P \in \mathcal{P}_i \cap \varphi(U_I) \text{ si y sólo si } \quad B_{II} = 0\text{”}$$

Demostración: Por la definición de P_i tenemos que $P \in \mathcal{P}_i$ si, y sólo si, la dimensión de $P \cap P_0$ es $i+1$. Para estudiar la intersección de P y P_0 utilizarenos la matriz ampliada $\tilde{M}(P,I)$ de $M(P,I)$ formada por las coordenadas de $\varphi(T)$ respecto a la base $\{p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n\}$. A $\tilde{M}(P,I)$ podemos considerarla como una matriz de dos bloques

$$\tilde{M}(P,I) = \begin{pmatrix} M_1 \\ M_2 \end{pmatrix}$$

donde M_1 esta formado por las coordenadas respecto a los vectores $p_1, \ldots, p_n$ y M_2 por las coordenadas respecto a $q_1, \ldots, q_n$.

Tenemos entonces

$$P \in \mathcal{P}_i \cap \varphi(U_I) \iff \text{rango} \begin{pmatrix} id & M_1 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = 2n - i$$

Claramente

$$\text{rango} \begin{pmatrix} id & M_1 \\ 0 & M_2 \end{pmatrix} = n + \text{rango } (M_2)$$

Ahora bien, la matriz M_2 se obtiene a partir de los bloques $(B_{II} \quad B'_{IJ})$ de $M(P,I)$ intercalando $n-i$ filas de la forma

$$(0,\ldots,0,0,\ldots,1,0,\ldots,0)$$

que corresponden a las coordenadas de los vectores $q_{j_1},\ldots,q_{j_{n_i}}$. Como el rango es invariante por la permutación de filas y columnas tenemos que

$$\text{rango}\,(M_2) = \text{rango}\begin{pmatrix} B_{II} & B'_{IJ} \\ 0 & id \end{pmatrix} = n - i + \text{rango}\, B_{II}$$

En resumen, $P \in \mathcal{P}_i \cap \varphi(U_I) \iff 2n - i = n + n - i + \text{rango}\, B_{II}$, es decir, si y sólo si $B_{II} = 0$. $\square$

Proposición. 1.4. *$\mathcal{P}_i$ es una subvariedad compleja de $\mathcal{P}$ de dimensión compleja* $\dfrac{(n-i)(n+i+1)}{2}$.

Demostración: El caso $i = n$ es trivial.

Consideremos primero $i = 0$. En este caso, dado que $P \cap P_0 = \langle t\rangle$, luego $P \cap \langle p_1,\ldots,p_n\rangle = 0$ y por la proposición 0.16 obtenemos

$$P \in \varphi(\text{End}(\langle q_1,\ldots,q_n,t\rangle, \langle p_1,\ldots,p_n\rangle)) = \varphi(U_\emptyset).$$

Por otra parte si $\varphi(T) \in \mathcal{P} \cap \varphi(U_\emptyset)$, entonces $\varphi(T) \in \mathcal{P}_0$. Por lo tanto $\mathcal{P}_0 = \varphi(U_\emptyset) \cap \mathcal{P}$ es decir $\mathcal{P}_0$ es una subvariedad abierta de $\mathcal{P}$. Además, como en $U_\emptyset$ las condiciones sobre los bloques de $M(P,I)$ se reduce a $A'_{JJ} = {A'_{JJ}}^t$; $\mathcal{P}_0 \simeq \text{Sim}_{\mathbb{C}}(n)$, deducimos entonces que $\dim \mathcal{P}_0 = n(n+1)/2$. Supongamos ahora que $i > 0$; en este caso por la proposición 1.3

$$\varphi(T) \in \mathcal{P}_i \cap \varphi(U_I) \text{ si y sólo si } \varphi(T) \in \mathcal{P} \cap \varphi(U_I) \text{ y } B_{II} = 0$$

esto es $\mathcal{P}_i$ está definida localmente por $i(i+1)/2$ ecuaciones lineales en una variedad de dimensión $n(n+1)/2$; luego $\mathcal{P}_i$ es una variedad compleja y

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_i = \frac{n(n+1)}{2} - \frac{i(i+1)}{2} = \frac{(n-i)(n+i+1)}{2} \qquad \square$$

Observación. 1.5.

De la demostración de la proposición 1.3 se deduce en particular que

$$\mathcal{P}_i \cap \varphi(U_I) = \emptyset \text{ si } \#I < i$$

En efecto, como debe ser $2n - i = n + n - \#I + \text{rango}(B_{II})$ entonces $\text{rango}(B_{II}) = \#I - i$, por lo tanto $\#I \geq i$. De esto obtenemos que

$$i_1 \leq i_2 \implies \mathcal{P}_i \subseteq \bigcup_{\substack{I \subseteq \{1,\dots,n\} \\ \#I = i_2}} \varphi(U_I)$$

Concluimos el capítulo introduciendo la filtración prometida en $\mathcal{P}$. Definimos

$$C_i = \mathcal{P}_n \cup \mathcal{P}_{n-1} \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{n-i} \qquad 0 \leq i \leq n$$

Se verifica $C_0 = \mathcal{P}_n = \{P_0\}$; $C_n = \mathcal{P}$; $C_i \subseteq C_{i+1}$ y $C_{i+1} \setminus C_i = \mathcal{P}_{n-i-1}$. Además, de acuerdo con la observación a la proposición 1.3

$$C_i \subseteq \varphi(U_{\{1,\dots,n\}}) \text{ si } 0 \leq i \leq n \text{ o bien}$$

$$C_i \subseteq \varphi(U_\emptyset) \text{ si } 1 \leq i \leq n$$

Proposición. 1.6. *Los subconjuntos $(C_i)_{1\leq i\leq n}$ forman una filtración cerrada de $\mathcal{P}$ por subvariedades algebraicas.*

Demostración: Es evidente que $(C_i)_{1\leq i\leq n}$ forma una filtración de $\mathcal{P}$. Sea $\varphi(U_I)$ un entorno coordenado con $\#I=0$ y consideremos $C_i\cap\varphi(U_I)$. Dado que

$$C_i=\{\,P\in\mathcal{P}\mid \dim P\cap P_0\geq n-i+1\,\}$$

$P\in C_i\cap\varphi(U_I)$ si y sólo si $\operatorname{rango}\tilde{M}_2\leq i-1$ y este último conjunto es una variedad algebraica pues está definido por los ceros de todos los menores de $\tilde{M}_2$ de dimensión $n\times n,(n-1)\times(n-1),\ldots,(n-i)\times(n-i)$. □

Corolario 1. *Los subconjuntos $(C_i)_{1\leq i\leq n}$ verifican :*

i) Son poliedros compactos.

ii) (C_i,C_{i-1}) es una $i(2n-i+1)$-variedad relativa compacta pues $C_i-C_{i-1}=\mathcal{P}_{n-i}$.

Capítulo 2

En este capítulo calcularemos la cohomología de la variedad de polarizaciones estudiada anteriormente. Para esto, primero estableceremos una relación entre las subvariedades $\mathcal{P}_k$ y las grassmaniannnas $Gr(n,k)$ que nos permitirá calcular su cohomología y luego la de los miembros de la filtración $(\mathcal{C}_i)_{1\leq i\leq n}$. Veamos cual es esa relación.

Sea $P_0 = \langle p_1, \ldots, p_n \rangle$. Observemos que de acuerdo con la definición de las subvariedades $\mathcal{P}_k$, tenemos bien definida una aplicación

$$p\colon \mathcal{P}_k \to Gr(n,k) \qquad P \mapsto P \cap P_0'$$

Proposición. 2.1. *La aplicación $p\colon \mathcal{P}_k \to Gr(n,k)$ es una fibración con fibra isomorfa al espacio de las matrices simétricas de $(n-k)\times(n-k)$.*

Demostración: Sea $\varphi(T) \in \mathcal{P}_k$ con $T \in U_I$ y $\#I = k$; entonces

$$\varphi(t) \cap P_0 = \langle p_I + Tp_I \rangle \oplus Z,$$

luego $\varphi(t) \cap P_0' = \langle p_I + Tp_I \rangle$.

En efecto; de la demostración de la proposición 1.3. se deduce que

$$\text{rango}\begin{pmatrix} id & \tilde{A^i}_{JJ} \\ 0 & \tilde{B^i}_{IJ} \end{pmatrix} = 2n - i$$

luego $\varphi(T) \cap P_0'$ está generado por las restantes columnas de la matriz

$$\begin{pmatrix} id & \tilde{M}_1 \\ 0 & \tilde{M}_2 \end{pmatrix}$$

es decir por las columnas de la matriz

$$\begin{pmatrix} \tilde{A}_{JI} \\ \tilde{B}_{II} \end{pmatrix}$$

las que corresponden a la coordenadas de $p_I + Tp_I$ en la base $\{p_1, \ldots, p_n, q_1, \ldots, q_n\}$. Además $\varphi(T) \in \mathcal{P}_k \cap \varphi(U_I)$ si y sólo si $B_{II} = 0$; entonces podemos identificar a $p_I + Tp_I$ con el subespacio $\varphi(T) \cap P_0'$ de de P_0'.

Sean $S_1 = \langle p_{i_1}, \ldots, p_{i_k} \rangle_{i_s \in I}$, $S_2 = \langle p_{j_1}, \ldots, p_{j_{n-k}} \rangle_{j_l \in I^c}$

y $\psi: End(S_1, S_2) \to Gr(n, k)$ la parametrización usual; entonces

$$\varphi(t) \cap P_0' = p_i + Tp_I = \psi(T\big|_{S_1}) \in \psi(V_I) \subseteq Gr(n, k)$$

por lo tanto $p(\varphi(U_I)) \subseteq \psi(V_I)$ y $\psi^{-1} \circ p \circ \varphi(T) = T\big|_{S_1}$ i.e. p es holomorfa.

Notemos que además probamos la inclusión

$$p(\varphi(U_I) \cap \mathcal{P}) \subseteq \psi(V_I).$$

Veamos que vale la igualdad, es decir que

$$\psi(V_I) \subseteq p(\varphi(U_I) \cap \mathcal{P}).$$

Sean $T' \subseteq V_I$ y A_{JI} la matriz de T' relativa a las bases $\{p_{i_1}, \ldots, p_{i_k}\}_{i_j \in I}$, $\{p_{j_1}, \ldots, p_{j_{n-k}}\}_{j_l \in J}$.

Definimos

$$T'': \langle q_{j_1}, \ldots, q_{j_{n-k}} \rangle \to \langle q_{i_1}, \ldots, q_{i_k} \rangle$$

por la matriz $-A^t_{JI}$ y $T \in U_I$ definida por $Tx = T'x_1 + T''x_2$ donde

$$x_1 = \pi_1(x), \quad \pi_1: E_I \to \langle p_{i_1}, \ldots, p_{i_k} \rangle; \qquad x_2 = \pi_2(x), \quad \pi_2: E_I \to \langle q_{j_1}, \ldots, q_{j_{n-k}} \rangle;$$

$$y \quad T(t) = 0.$$

Entonces

i) $\varphi(T) \in \mathcal{P}_k \cap \varphi(U_I)$ pues $B_{II} = 0$ y $A_{JJ} = 0$

ii) $\psi^{-1}p(\varphi(T)) = T\big|_{S_1} \equiv T'$ por lo tanto $\psi(T') = p\varphi(T)$, i.e. $\psi(V_I) \subseteq p(\varphi(U_I) \cap \mathcal{P}_k)$.

La igualdad $\psi(V_I) = p(\varphi(U_I) \cap \mathcal{P}_k)$ y las condiciones sobre los bloques de la matriz $M(P, I)$ nos permite establecer que

$$P \in p^{-1}(\psi(T')) \iff M(P, I) \text{ verifica } \begin{cases} B_{II} = 0 \quad A'_{JJ} = A'^t_{JJ} \\ \mathrm{Mat}(T') = A_{JI} = -A^t_{JI} \end{cases}$$

Por lo tanto $p^{-1}(\psi(T'))$ es biholomorfo a $\mathrm{Sim}_{\mathbb{C}}(n-k)$ a traves de la aplicación

$$g: p^{-1}(\psi(T')) \to \mathrm{Sim}_{\mathbb{C}}(n-k) \qquad \varphi(T) \mapsto A'_{JJ}$$

g claramente es holomorfa y tiene por inversa a

$$g^{-1}: \mathrm{Sim}_{\mathbb{C}}(n-k) \to p^{-1}(\psi(T')) \qquad S \mapsto \varphi(T)$$

donde $T \in U_I$ verifica $T(t) = 0$ y está definido por la matriz

$$M(\psi(T), I) = \begin{pmatrix} \mathrm{Mat}(T') & S & 0 \\ 0 & -\mathrm{Mat}(T')^t & 0 \end{pmatrix}$$

$\square$

Corolario 1. *$\mathcal{P}_i$ es una variedad conexa por arcos para $0 \leq i \leq n$.*

Demostración: Los casos $i = 0$, $i = n$ son triviales; el segundo por ser $\mathcal{P}_n = \{P_0\}$ un punto y el primero pues $\mathcal{P}_0 \simeq \mathrm{Sim}_{\mathbb{C}}(n)$ de acuerdo con lo visto en la proposición 1.4.

La justificación para los casos restantes reside en que $p: \mathcal{P}_i \rightarrow Gr(n, i)$ es una fibración y que tanto la base como la fibra tipo son conjuntos conexos por arcos. □

Usando la sucesión exacta de la proposición 0.24. y la proposición anterior podemos establecer fácilmente la homología de $\mathcal{P}$ en función de la homología de $Gr(n, i)$.

Proposición. 2.2. *Sean* $k \geq 0$ *y* $0 \leq i \leq n$ *entonces*

$$H_k(\mathcal{P}_i) = H_k\big(Gr(n, i)\big).$$

Demostración: El caso $k = 0$ se deduce ,para i entre 0 y n del corolario anterior. Asimismo, los casos $i = 0$ e $i = n$ son evidentes. En los casos restantes notemos que

i) La base de la fibración $p: \mathcal{P}_i \rightarrow Gr(n, i)$ es simplememte conexa y $H_1\big(Gr(n, i)\big) = 0$ para todo i y n.

ii) Las fibras F de p son homeomorfas a $\mathrm{Sim}_{\mathbb{C}}(n - i)$, por lo tanto son conexos por arcos y $H_q(F) = 0$, para todo q

iii) Como se estableció en el corolario anterior, $\mathcal{P}_i$ es conexo por arcos para todo i

Luego podemos aplicar a la fibración $p: \mathcal{P}_i \rightarrow Gr(n, i)$ la proposición 0.20. y obtenemos la sucesión exacta

$$\longrightarrow H_{n-1}(F) \longrightarrow H_{n-1}(\mathcal{P}_i) \longrightarrow H_{n-1}\big(Gr(n, i)\big) \longrightarrow H_{n-2}(F) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow H_2\big(Gr(n, i)\big) \longrightarrow H_1(F) \longrightarrow H_1(\mathcal{P}_i) \longrightarrow 0$$

Dado que $H_k(F) = 0$ si $k \geq 1$, resulta

$$H_k(\mathcal{P}_i) \simeq H_k\big(Gr(n, i)\big) \qquad \square$$

Hasta aquí hemos conseguido calcular la homología de las variedades $\mathcal{P}_k$; el paso siguiente consiste en calcular la de los conjuntos $\mathcal{C}_k$ ($0 \leq k \leq n$). Recordemos que

$$'\mathcal{C}_i \doteq \mathcal{P}_n \cup \mathcal{P}_{n-1} \cup \cdots \cup \mathcal{P}_{n-i} \qquad\qquad 0 \leq i \leq n$$

Tenemos la siguiente relación

Proposición. 2.3.

$$H^k(\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{s-1}) = H_{s(2n-s+1)-k}(\mathcal{P}_{n-s}).$$

Demostración: Por la proposición 1.4., tenemos $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{P}_{n-s} = s(2n-s+1)/2$, luego $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{P}_{n-s} = s(2n-s+1)$.

Dado que $(\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{s-1})$ es "taut" en $\mathcal{P}$ (prop. 0.23 y corolario a la proposición 1.5) tenemos

$$\bar{H}^k(\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{s-1}) \simeq H^k(C_s, C_{s-1})$$

Por otra parte, como el par $(\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{s-1})$ es una $s(2n-s+1)$-variedad relativa compacta y orientable (por ser compleja), por dualidad de Lefschetz resulta

$$\bar{H}^k(C_s, C_{s-1}) = H_{s(2n-s+1)-k}(\mathcal{C}_s \setminus \mathcal{C}_{s-1}) = H_{s(2n-s+1)-k}(\mathcal{P}_{n-s}) \qquad \square$$

Corolario 1.

$$H^k(\mathcal{C}_s, \mathcal{C}_{s-1}) \simeq H_{s(2n-s+1)-k}(Gr(n, n-s))$$

Gracias al corolario anterior podemos obtener la información que necesitamos sobre la cohomología de los conjuntos C_i

Proposición. 2.4. *Para todo* $k \geq 1$, $H^{2k-1}(C_i) = 0$ *y* $H^{2k}(C_i)$ *o es nulo o es libre y verifica*

$$H^{2k}(C_i) = H^{2k}(C_{i-1}) \oplus H^{2k}(C_i, C - i - 1) \tag{1}$$

Demostración: Consideremos la sucesión exacta

$$\longrightarrow H^l(C_i, C_{i-1}) \longrightarrow H^l(C_i) \longrightarrow H^l(C_{i-1}) \longrightarrow H^{l+1}(C_i, C_{i-1}) \longrightarrow$$

Veamos primero que $H^{2k+1}(C_i) = 0$.

Claramente vale para $i = 0$. Si suponemos que vale para i; enotnces la sucesión queda, ya que $H(C_i, C_{i-1})$ es la homología de una grassmanianna,

$$0 \longrightarrow H^{2k+1}(C_{i+1}) \longrightarrow 0 \quad \text{por lo tanto } H^{2k+1}(C_{i+1}) = 0$$

Para probar que $H^{2k}(C_i)$ verifica (1) hagamos inducción nuevamente, entonces, si $i = 1$ tenemos

$$\longrightarrow H^{2k}(C_1, C_0) \longrightarrow H^{2k}(C_1) \longrightarrow H^{2k}(C_0) \longrightarrow H^{2k-1}(C_1, C_0) \longrightarrow$$

o sea

$$0 \longrightarrow H^{2k}(C_1, C_0) \longrightarrow H^{2k}(C_1) \longrightarrow H^{2k}(C_0) \longrightarrow 0$$

Si $k \neq 0$, entonces $H^{2k}(C_0) = 0$ por lo tanto $H^{2k}(C - 1) \simeq H^{2k}(C_0) \oplus H^{2k}(C_1, C_0)$.

si $k = 0$, entonces $H^{2k}(C_0; A) = A$ y A es un A-módulo libre; luego la sucesión se escinde y nuevamente obtenemos (1) para $i = 1$.

Supongamos ahora que la afirmación vale para i, la sucesión exacta se reduce a

$$0 \longrightarrow H^2k(C_i + 1, C_i) \longrightarrow H^{2k}(C_{i+1}) \longrightarrow H^{2k}(C_i) \longrightarrow 0 \qquad (\star)$$

por hipótesis inductiva $H^{2k}(\mathcal{C}_i)$ es nulo o libre; si es nulo entonces

$$H^{2k}(\mathcal{C}_{i+1}) \simeq H^{2k}(\mathcal{C}_{i+1}, \mathcal{C}_i) \simeq H^{2k}(\mathcal{C}_{i+1}, \mathcal{C}_i) \oplus H^{2k}(\mathcal{C}_i)$$

y $H^{2k}(\mathcal{C}_{i+1})$ es nulo o libre según lo sea $H^{2k}(\mathcal{C}_{i+1}, \mathcal{C}_i)$.

Si $H^{2k}(\mathcal{C}_i)$ es libre; entonces la sucesión $(\star)$ se escinde y obtenemos (1). Además $H^{2k}(\mathcal{C}_{i+1})$ es libre pues es suma de dos módulos libres, o bien de un módulo libre y de uno nulo dependiendo de k. $\square$

Finalmente, por un argumento recurrencia, obtenemos la siguiente expresión para la cohomología de $\mathcal{P}$.

Proposición. 2.5.

$$H^k(\mathcal{P}) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} H_{i(2n-i+1)-k}(Gr(n, n-i)) \qquad \forall k \geq 1.$$

Demostración: La demostración se deduce inmediatamente de la proposición anterior. Recordemos que $\mathcal{P} = \mathcal{C}_n$, entonces

$$\begin{aligned} H^k(\mathcal{P}) = H^k(\mathcal{C}_n) &\simeq H^k(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n-1}) \oplus H^k(\mathcal{C}_{n-1}) \\ &\simeq H^k(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n-1}) \oplus H^k(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{C}n-2) \oplus H^k(\mathcal{C}_{n-2}) \simeq \cdots \\ &\simeq H^k(\mathcal{C}_n, \mathcal{C}_{n-1}) \oplus H^k(\mathcal{C}_{n-1}, \mathcal{C}n-2) \oplus \cdots \oplus H^k(\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_0) \oplus H^k(\mathcal{C}_0) \end{aligned}$$

Luego, si $k \geq 1$ entonces

$$H^k(\mathcal{P}; A) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} H_{i(2n-i+1)-k}(Gr(n, n-i); A) \qquad \square$$

Pasando a cohomología, por dualidad de Poincaré obtenemos el

Corolario 1.

$$H^k(\mathcal{P};A) \simeq \bigoplus_{i=1}^{n} H^k(Gr(n,n-i);A)$$

Proposición. 2.6. *Sea* $\mathcal{P} = \mathcal{P}(H_n, f)$. *Entonces* $H^0(\mathcal{P};A) = A$, $H^{2k+1}(\mathcal{P},A) = 0$ *y* $H^{2k}(\mathcal{P};A)$ *es un* A*-módulo libre.*

Observación. 2.7.

Por el teorema 0.18 y la observación que le sigue, tenemos que $H^k(\mathcal{P};\mathbb{Z})$ está generado por los monomios de grado $k-i(i+1)$ de los anillos $\mathbb{Z}[x_1^i,\ldots,x_{n-i}^i,y_1^i,\ldots,y_i^i]$ correspondientes a $H^*(Gr(n,n-i);\mathbb{Z})$.

Capítulo 3

En este capítulo extenderemos los resultados obtenidos anteriormente a una clase más amplia de álgebras de Lie,, que incluye a algunas álgebras resolubles. Para esto primero necesitamos caracterizar al subconjunto de una grassmanianna formado por todos los subespacios que contienen a un subespacio fijo. Tenemos las dos siguientes proposiciones.

Proposición. 3.1. *Sean V un $\mathbb{C}$-espacio vectorial de dimensión n, $S_0 \subseteq V$ un subespacio de dimensión r y d tal que $0 < r < d < n$. Entonces el conjunto*

$$\mathcal{S} = \{\, S \in Gr(n,d) \mid S_0 \subseteq S \,\}$$

es una variedad compleja de dimensión $(d-r)(n-d)$.

Demostración: Sea $S \in Gr(n,d)$; entonces S pertenece a un entorno coordenado de la forma $\psi(U)$ con $V = End(S_1, S_2)$, $S_1 \oplus S_2 = V$ y $\dim S_1 = d$. Si además $S \in \mathcal{S}$, podemos suponer sin perdida de generalidad que $S_0 \subseteq S_1$. Sea S_0' tal que $S_0 \oplus S_0' = S_1$; si $S = \psi(T)$, $T \in U$ consideraremos a T como $T = (T_1\ T_2)$ con

$$T_1 = T\big|_{S_0}: S_0 \to S_2 \qquad \text{y} \qquad T_2 = \big|_{S_0'}: S_0' \to S_2$$

Si $x \in S_1$ entonces existen únicos x_{S_0} y $x_{S_0'}$ tales que $x = x_{S_0} + x_{S_0'}$; luego

$$Tx = T(x_{S_0} + x_{S_0'}) = (T_1\ T_2)\begin{pmatrix} x_{S_0} \\ x_{S_0'} \end{pmatrix} = T_1 x_{S_0} + T_2 x_{S_0'}$$

Tenemos que

$\psi(T) \in \psi(U) \cap \mathcal{S}$ sii $S_0 \subseteq \psi(T)$ sii $S_0 \subseteq \langle S_0 + T_1 S_0, S_0' + T_2 S_0' \rangle$

Entonces $x \in S_0$ si y sólo si existen $x_1 \in S_0$, $x_2 \in S_0'$ tales que

$x = x_1 + T_1 x_1 + x_2 + T_2 x_2$ es decir sí y sólo sí $x - x_1 = x_2 + T_1 x_1 + T_2 x_2$

pero $x - x_1 \in S_0$ y $x_2 + T_1 x_1 + T_2 x_2 \in S_0' \oplus S_2$; como $S_0 \cap (S_0' \oplus S_2) = 0$ resulta

$$x_1 = 0, \quad x_2 = 0 \ y \quad T_1 x_1 + T_2 x_2 = 0$$

es decir

$$x = x_1, \quad x_2 = 0 \ y \quad T_1 x_1 = T_1 x = 0.$$

Luego

$$S_0 \subseteq \psi(T) \iff T_1 \equiv T\big|_{S_0} \equiv 0;$$

de donde, si consideramos $T = (T_1 \ T_2)$,

$$\psi(T) \in \psi(U) \cap \mathcal{S} \iff T = (0 \ T_2)$$

y así

$$\psi(T) \cap \mathcal{S} \simeq \mathrm{End}(\mathrm{S}_0', \mathrm{S}_2) \simeq \mathbb{C}^{(\mathrm{d-r})(\mathrm{n-d})}$$

y $\mathcal{S}$ es una subvariedad compleja de dimensión $(d-r)(n-d)$. $\square$

Proposición. 3.2. *Con las hipótesis de la proposición anterior, la proyección al cociente* $\pi: V \to V/S_0$ *induce un biholomorfismo* $\pi^{\sharp}: \mathcal{S} \to Gr(n-r, d-r)$.

Demostración: $\pi^{\sharp}$ está bien definida pues si $S \subseteq V$ y $S_0 \subseteq S$, entonces $\pi(S) = S/S_0$ y $\dim \pi(S) = d - r$.

La expresión de $\pi^\sharp$ en coordenadas es

$$\psi^{-1} \circ \pi^\sharp : \varphi(U) \cap \mathcal{S} \to W \qquad \varphi^{-1} \circ \pi^\sharp(0\ T_2) = T_2$$

donde $U = End(S_0 \oplus S_0', S_2)$ y $W = End(S_0', S_2)$ por la proposición anterior, de donde se deduce que $\pi^\sharp$ es holomorfa.

Por otro lado, de la definición misma de $\pi^\sharp$ obtenemos que es biyectiva pues

$$\pi^\sharp S_1 = \pi^\sharp S_2 \implies S_1/S_0 = S_2/S_0 \implies S_1/S_0 \oplus S_0 = S_2/S_0 \oplus S_0$$

y, dado $S' \in Gr(n-r, d-r)$, sea $S \subseteq V$ tal que $S_0 \subseteq S$ y $\pi(S) = S'$, entonces $\pi^\sharp S = S'$.

$\square$

Introduzcamos ahora la situación que nos interesa.

Definición. 3.3. *Sea L una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie resoluble, J un ideal de L y $f \in L^*$. Diremos que la terna (L, J, f) es de tipo Heisenberg si se verifica*

i) $J \subseteq \ker f$.

ii) $L/J = H_n$ para algún n.

iii) $f|_{Z(L)} \not\equiv 0$.

Ejemplos. 3.4.

i) Sean L un álgebra de Lie tal que $[L, L] \subseteq Z(L)$ y $f \in L^*$ tal que $f(x) \neq 0$ para algún $x \in [L, L]$. Sea J un ideal de L tal que $Z(L) = \langle x \rangle \oplus J$, entonces (L, J, f) es de tipo Heisenberg.

Claramente $J \subseteq \ker f$ y $f|_{Z(L)} \not\equiv 0$. Por otra parte, se puede porbar que L/J es un álgebra de Heisenberg pues $[L/J, L/J] = Z(L/J)$ y $\dim Z(L/J) = 1$ (cf. [D] pag. 147).

ii) Sean L la $\mathbb{C}$-álgebra de Lie con base p, q, t, a, b y con corchete definido por $[p, q] = t$; $[a, b] = a$ y todos los demás nulos y $f \in L^*$ tal que $f(t) = 1$. Entonces L es resoluble, $Z(L) = \langle t \rangle$, $J = \langle a, b \rangle$ es un ideal y $L/J \simeq \langle p, q, t \rangle$, $[\tilde{p}, \tilde{q}] = \tilde{t}$; luego (L, J, f) es de tipo Heisenberg.

El interes de considerar ternas tipo Heisenberg reside en que en este caso la variedad $\mathcal{P}(L, f)$ es esencialmente igual a $\mathcal{P}(H_n, \tilde{f})$ donde $\tilde{f}$ se obtiene de f al pasar al cociente. El objetivo de este capítulo consiste en demostrar esto; para ello usaremos los resultados establecidos previamente para grassmaniannas y además necesitaremos el siguiente resultado sobre polarizaciones.

Proposición. 3.5. *Sean L un álgebra de Lie, $f \in L^*$ y J un ideal tal que $J \subseteq \ker f$; entonces $J \subseteq P$ para todo $P \in \mathcal{P}(L, f)$.*

Demostración: Sea $P \in \mathcal{P}(L, f)$; entonces $J + P$ es una subálgebra de L pues

$[J+P, J+P] \subseteq [J, J] + [J, P] + [P, J] + [P, P] \subseteq J + P$ y $J + P \subseteq (J+P)^{\perp}$ pues

i) $f([J, J+P]) \subseteq \varphi(J) = 0$ dado que $J = \ker f$

ii) $f([P, J+P]) \subseteq f(J + [P, P]) = 0$ dado que $P \subseteq J + P$

Entonces

$$\frac{1}{2}(\dim L + \dim L^f) = \dim P \leq \dim(J + P) \leq \frac{1}{2}(\dim L + \dim L^f)$$

luego, $\dim P = \dim(P+J)$ y por lo tanto $J \subseteq P$. $\square$

De aquí en adelante (L, J, f) será de tipo Heisenberg. Notemos que de la definición se deduce que:

i) Si $\pi: L \to L/J$ es la proyección al cociente, $\pi(Z(L)) \neq 0$ pues existe $x \in Z(L)$ tal que $x \notin J$.

ii) $\pi(Z(L)) = Z(\pi(L))$ pues $\pi(Z(L)) \subseteq Z(\pi(L))$ y $\dim Z(\pi(L)) = 1$.

iii) $Z(\pi(L)) \subseteq \pi(P) \quad \forall P \in \mathcal{P}(L, f)$ pues $Z(L) \subseteq P$ (prop. 0.11).

iv) $\pi(P)$ es un ideal de $\pi(L)$ pues $[\pi(L), \pi(L)] \subseteq Z(\pi(L))$

Proposición. 3.6. *Si* $P \in \mathcal{P}(L, f)$; *entonces* $\pi(P) \in \mathcal{P}(L/J, \tilde{f})$.

Demostración: Notemos que $\pi(P) \subseteq \pi(P)^{\perp}$ pues $\tilde{f}[\pi(P), \pi(P)] = f[P, P] = 0$. Basta probar entonces que $\pi(P)^{\perp} \subseteq \pi(P)$. Supongamos que no; entonces existe $x \in L$ tal que $\pi(x) \in \pi(P)\perp$ y $\pi(x) \notin \pi(P)$.

Sea $P' = P \oplus \langle x \rangle$; entonces P' es una subálgebra de L. Basta ver que $[x, P] \subseteq P$. En efecto, dado que $[\pi(x), \pi(P)] \subseteq Z(L/J)$ por iv), $[x, P] \subseteq Z(L) + J \subseteq P$ pues $Z(L) \subseteq P$ y $J \subseteq P$ por la proposición 3.5.

Además $P' \subseteq P'^{\perp}$ ya que

$$f[P', P'] = \tilde{f}\pi[P', P'] = \tilde{f}[\pi(P) + \pi\langle x \rangle, \pi(P) + \pi\langle x \rangle] = 0$$

entonces $(\dim L + \dim L^f)/2 = \dim P < \dim P' \leq (\dim L + \dim L^f)/2$; absurdo.

Luego es $\pi(P)^{\perp} \subseteq \pi(P)$ y $\pi(P) \in \mathcal{P}(L/J, \tilde{f})$.

Corolario 1. *Si* (L, J, f) *es de tipo Heisenberg y* $P \in \mathcal{P}(L, f)$ *entonces*

$$\dim P = \frac{\dim L + \dim J + 1}{2}.$$

Demostración: Sean $\dim L = n$ y $\dim J = r$. Dado que $L/J \simeq H_k$, $n - r = 2k + 1$; entonces $k = (n - r - 1)/2$; luego $\dim \pi(P) = (n - r - 1)/2 + 1 = (n - r + 1)/2$. Pero $\dim P = \dim \pi(P) + r$ o sea $\dim P = (n + r + 1)/2$. $\square$

Observamos que, dado que todas las polarizaciones subordinadas a una forma dada tienen la misma dimensión, si (L, J, f) y (L, J', f) son ternas de tipo Heisenberg entonces $\dim J = \dim J'$.

La proposición 3.5 nos permite establecer una relación entre las polarizaciones de L subordinadas a f y las de L/J subordinadas a $\tilde{f}$. Para clarificar totalmente la estructura de $\mathcal{P}(L, f)$ aplicaremos los resultados obtenidos en 3.1. y en 3.2. tomando como el subespacio fijo S_0 al ideal J; de este modo $\mathcal{P}(L, f)$ está contenido en $\mathcal{S}$ y su imagen por $\pi^!$ resulta una subvariedad de la grassmanianna correspondiente.

Proposición. 3.7. *Con la notación anterior; si* $\mathcal{P} = \mathcal{P}(L, f)$, *entonces* $\mathcal{P}$ *es isomorfa a* $\mathcal{P}(H_{\frac{n-r-1}{2}}, \tilde{f})$.

Demostración: Por el corolario a la proposicón 3.5 tenemos que $\mathcal{P} \subseteq Gr(n, \frac{n-r+1}{2})$. Sean $V = L$ y $S_0 = J$. Si aplicamos las proposiciones 3.1 y 3.2 obtenemos un biholomorfismo

$$\pi^!: \mathcal{S} \to Gr(n - r, \frac{n - r + 1}{2})$$

Por la proposición 3.5 tenemos

$$\pi^{\sharp}(\mathcal{P}(L,f)) \subseteq \mathcal{P}(H_{\frac{n-r-1}{2}},\tilde{f})$$

Por otra parte, si $P' \in \mathcal{P}(H_{\frac{n-r-1}{2}},\tilde{f})$, sea $P = \pi^{\sharp^{-1}}(P')$; $P \in \mathcal{S}$. Entonces:

i) $\dim P = \dim P' + r = \frac{n-r+1}{2} + r = \frac{n+r+1}{2}$.

ii) P es una subálgebra.

Como P' es un ideal en $H_{\frac{n-r-1}{2}}$; entonces P es un ideal en L; por lo tanto una subálgebra.

iii) $f[P,P] = 0$

$f[P,P] = \tilde{f}\pi[P,P] = \tilde{f}[\pi(P),\pi(P)] = \tilde{f}[P',P'] = 0$

Luego, de i), ii) y iii) concluimos que $P \in \mathcal{P}(L,f)$ y $\pi^{\sharp}(P) = P'$. □

A partir de los resultados obtenidos queda establecido el

Teorema. 3.8. *Sean L una $\mathbb{C}$-álgebra de Lie resoluble, $f \in L^*$ y J un ideal tal que (L,J,f) tiene tipo Heisenberg; entonces*

i) $\mathcal{P}(L,f)$ es una variedad compleja compacta de dimensión $\frac{1}{8}(n-r-1)(n+r+1)$.

ii)

$$H^0(\mathcal{P}(L,f)) = \mathbb{Z}$$

$$H^{2j+1}(\mathcal{P}(L,f)) = 0$$

$$H^{2j}(\mathcal{P}(L,f)) = \bigoplus_{i=1}^{\frac{n-r-1}{2}} H_{i(n-r-i)-j}\left(Gr\left(\frac{n-r-1}{2}, \frac{n-r-1}{2} - i\right)\right)$$

en particular $H^{2j}(\mathcal{P}(L,f))$ son $\mathbb{Z}$-módulos libres.

Es un hecho conocido de la topología diferencial la relación entre los fibrados vectoriales y las grassmaniannas. Podemos describirla brevemente como sigue:

Dado un fibrado vectorial (E, p, B) de dimensión k existe n y una aplicación continua $f: B \to Gr(n,k)$ tal que E es el "pull back" del fibrado universal $\mathbf{U}$ de $Gr(n,k)$ (esto es $\mathbf{U} = \{ (S, x) \in Gr(n,k) \times \mathbb{C}^n \mid x \in S \}$ y $p: \mathbf{U} \to Gr(n,k)$ es la aplicación inducida por la proyección de la primera coordenada)

En el caso de los fibrados de polarizaciones, la variedad de polarizaciones desempeña un papel análogo. Primero necesitamos una serie de definiciones. Sean L un álgebra de Lie, $f \in L^*$ tal que $\mathcal{P}(L, f) \neq \emptyset$, X una variedad compacta y $(X \times L, p, X)$ el fibrado trivial.

Definición. 3.9. *Un subfibrado (ξ, p, X) del $(X \times L, p, X)$ se dice un fibrado de subálgebras de Lie de dimensión k si existe una trivialización local (U, φ_U, S_U) de (ξ, p, X) tal que :*

i) S_U es una subálgebra de Lie de L de dimensón k

ii) Para cada $x \in U$, existe un isomorfismo de álgebras de Lie $\Phi_{U,x}: L \to L$ tal que $\Phi_{U,x} \equiv \varphi_U|_{\xi_x}$ -

De la definición se deduce que ξ_x es una subálgebra de Lie de L para cada x.

Definición. 3.10. *Un fibrado de subálgebras de Lie de L se dice un fibrado de polarizaciones de L subordinadas a f si, con la notación anterior,*

i) *S_U es una polarización de L subordinada a f.*

ii) $\Phi_{U,x}$ verifica $f \circ \Phi_{U,x} = f$

Observación. 3.11.

Si (ξ, p, X) es un fibrado de polarizaciones de L subordinadas a f, ξ_x es una polarización de L subordinada a f.

En efecto, como $\Phi_{U,x}$ es un isomorfismo $\dim S_U = \dim \xi_x$; además

$$f[\xi_x, \xi_x] = f[\Phi_{U,x}(S_U), \Phi_{U,x}(S_U)] = f \circ \Phi_{U,x}[S_u, S_u] = f[S_U, S_U] = 0$$

Definición. 3.12. *Sean (ξ, p, X) y (ξ', p', X) dos fibrados de polarizaciones de L subordinadas a f. Un homeomorfismo $h: \xi \to \xi$ se dice un morfismo de fibrados de polarizaciones de L subordinadas a f si*

i) $p' \circ h = p$

ii) Para cada $x \in X$; existe un isomorfismo de álgebras de Lie $H_x: L \to L$ tal que $h_x|_{\xi_x} \equiv H_x$ (donde $h_x: \xi_x \to \xi_{h(x)}$) y $f \circ H_x \equiv f$

De la definición deducimos que todo fibrado de polarizaciones es localmente isomorfo a un fibrado trivial de polarizaciones.

Como $\mathcal{P} \subseteq Gr_k(L)$ para un k conveniente, podemos considerar el fibrado $\mathbf{U}_{\mathcal{P}} = \mathbf{U}|_{\mathcal{P}}$ sobre $\mathcal{P}$ con $\mathbf{U}$ el fibrado universal de $Gr_k(L)$.

Proposición. 3.13. *Dado un fibrado de polarizaciones (ξ, p, X) existe una aplicación continua $f: X \to \mathcal{P}$ tal que $\xi = f^*(\mathbf{U}_{\mathcal{P}})$.*

Demostración: . Si $\xi = X \times P$ es el fibrado trivial, basta definir $f: X \to \mathcal{P}$ por $f(x) = P \ \ \forall x \in X$ y claramente $\xi = f^*(\mathbf{U}_P)$. En el caso general definimos $f: X \to \mathcal{P}$

por $x \mapsto p^{-1}(x) = \xi_x$. f es localmente continua pues para cada U abierto trivializante $f(x) = \langle S_{U,1}(x), \ldots, S_{U,k}(x) \rangle$ con $S_{U,i}: U \to p^{-1}(U)$ secciones continuas tales que $\{ S_{U,1}(x), \ldots, S_{U,k}(x) \}$ es una base de ξ_x para cada $x \in U$ y por lo tanto es continua. Además se verifica que $f^*(\mathbf{U}_{\mathcal{P}}) = \xi$ por la definición misma de f.

Referencias

[B] Bourbaki, N., Eléments de Mathématique, Groupes et Algèbres de Lie, Chaptre I, Algèbres de Lie, Fasc. XXVI, Hermann, Paris, 1960.

[B-R] Borho, W., Rentschler, R., Primideale in Einhüllenden auflösbarer Lie- Algebren. Lecture Note in Math. 357, Springer Verlag, 1971.

[C] Chern,S.S., Complex Manifolds Whithout Potencial Theory. Van Nostrand Reinhold Co. New York, 1967.

[C-V] Conze, N., Vergne, M., Ideaux primitives des algèbres enveloppantes des algèbres resolubles. C.R. Acad. Sci. Paris 272 (1971).

[D] Dixmier, J., Enveloping Algebras, North–Holland Publ. Co., 1977.

[H] Hilton, P. J. & Wylie, S., Homolgy Theory. Cambridge University Press, 1960.

[Se] Serre, J.P., Lie Algebras and Lie Groups. Lectures given at Harvard University, 1964.

[Sp] Spanier, E., Algebraic Topology. Tata McGraw–Hill Publ. Co. Ltd. New Delhi, 1976.

[V] Varadarajan, Lie groupes, Lie algebras and their representations, Prentice–Hall, New Jersey, 1974.

[W] Warner, F., Foundations of differentiable manifolds and Lie groups. Scott, Foresman and Co., 1970.