

Tesis de Posgrado

La ruptura de simetría en modelos con solitones y su relación con el acoplamiento de Yukawa

Aldabe, Fermín

1994

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Aldabe, Fermín. (1994). La ruptura de simetría en modelos con solitones y su relación con el acoplamiento de Yukawa. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2648_Aldabe.pdf

Cita tipo Chicago:

Aldabe, Fermín. "La ruptura de simetría en modelos con solitones y su relación con el acoplamiento de Yukawa". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1994.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2648_Aldabe.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

LA RUPTURA DE SIMETRIA EN MODELOS CON SOLITONES Y SU RELACION CON EL ACOPLAMIENTO DE YUKAWA

FERMIN ALDABE

Trabajo para optar por la Tesis de Doctorado en Ciencias Físicas
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires.

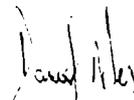
Febrero de 1994

TEMA: La ruptura de simetría en modelos con solitones y su relación con el acoplamiento de Yukawa

ALUMNO: Fermín Aldabe

LUGAR DE TRABAJO: Dpto. de Física, Laboratorio TANDAR, CNEA.

DIRECTOR DEL TRABAJO: Dr. Daniel R. Bes



FECHA DE INICIACION: octubre de 1991

FECHA DE FINALIZACION: febrero de 1994

AGRADECIMIENTOS

Comienzo por agradecer a mis viejos, y mi hermana por haberme incitado a retomar la física y alentarme durante estos años, en las buenas festejando y en las malas aguantando. A mi mujer, a quien dedico este trabajo, por hacerme tan feliz y no dejar que me pinche sobre el final dandome todo su apoyo. A ella con quien espero recorrer los futuros caminos de la vida y la física.

A Daniel, quien me enseñó a trabajar en forma sistemática. Que me mostró como tomar la iniciativa de una cuenta por más larga que sea y no achicharme en el camino. También por inculcarme este concepto: uno puede equivocarse y es humano y debe reconocerlo cuando esto sucede. Por mostrarme el placer, la angustia, y la pasión por la física: "Ese sentimiento que no puedo parar". A él le estoy eternamente agradecido.

A Willy, Hugo, y Hernán quienes me acogieron en los primeros años de tesis entusiasmandome con la física nuclear a bajas energías. A Cristina que siempre tuvo tiempo para darme y escuchar sobre mis necesidades, y cuando fue posible resolverlas lo hizo y con gusto. Gracias.

A mis compañeritos tesistas con los cuales me entretuve todos estos años. Especialmente a Ale, Eduardo, Gaby B., Esteban, Gad, Cacho y Nacho que más que compañeros han sido amigos y sin los cuales no estaría aquí escribiendo estas líneas.

A mis amigos, a mis profesores, al personal de apoyo, a los ordenanzas, y a todas las personas que para mencionarlas precisaría infinitas hojas. A todos ellos Gracias.

A Elzbieta

Resumen

El modelo de Skyrme que describe la dinámica de un campo isovectorial que representa al campo piónico en el espacio tiempo natural es el modelo más popular de estos días para describir la dinámica hadónica de energías intermedias. Este modelo tiene una interacción que sostiene, al minimizar las ecuaciones de movimiento, soluciones clásicas solitónicas. Estas soluciones representan al nucleón. Las fluctuaciones alrededor del solitón son consideradas como piones y se tratan cuánticamente. Este modelo semiclásico fue presentado a fines de los años cincuenta. Luego pasa al olvido con la aparición de QCD como la teoría hadónica. Sin embargo como es bien sabido, QCD es no lineal en el límite de bajas energías y por lo tanto resulta imposible obtener la descripción del nucleón en estos límites.

Con los trabajos de t'Hooft y de Witten quedo conjeturado que en el límite en que el número de colores en QCD tiende a infinito, QCD tiende al modelo de Skyrme. Sin embargo, el modelo de Skyrme arroja, a primer orden, resultados para las magnitudes estáticas del nucleón que coinciden con los valores empíricos dentro de un 30%. Para obtener mayor precisión es necesario tener en cuenta correcciones perturbativas de las interacciones residuales en el número de color.

Inmediatamente se encuentran, como en todo buen modelo o teoría, una serie de divergencias que impiden obtener correcciones finitas. La primer divergencia es la ultravioleta. Esta puede ser subsanada orden por orden pero no a todos los ordenes debido a la naturaleza de la interacción y a nuestros conocimientos de renormalización. Luego está la divergencia infrarroja. Esta se debe a la ruptura de simetría del vacío sobre el cual se considera las fluctuaciones. La solución clásica que describe el nucleón no posee la simetría del hamiltoniano que describe su dinámica. Entonces aparece un modo de energía cero que lleva un vacío a otro y que esta relacionado con las coordenadas colectivas que describen la dinámica del nucleón. Este modo de cero energía nos imposibilita tratar perturbativamente las correcciones a las magnitudes que deseamos conocer. Las coordenadas colectivas son angulos quirales y la simetría rota es la simetría quiral. Para restaurar la simetría rota y lograr una convergencia de la serie perturbativa es necesario utilizar ya sea el método de Dirac o el método BRST[32].

Por otro lado para poder definir el solitón necesario minimizar clásicamente el hamiltoniano. Entonces por definición no puede haber términos lineales en las fluctuaciones. Esto implica que no habrá un acoplamiento de Yukawa. Este acoplamiento es el tercer ingrediente necesario para poder jactarse de tener un modelo que describa apropiadamente

la dinámica hadónica en estos límites. Como este acoplamiento no aparece, mucha ha sido la gente que conjeturo, o aventuro, que la amplitud de probabilidad de transición esperada de tal acoplamiento podría obtenerse de la interacción cuadrática al tratar apropiadamente el modo de energía cero.

Dada la importancia de este modo, ya sea para corregir las magnitudes relevantes, como para determinar la existencia de una amplitud de probabilidad de transición, comenzamos por tratar el modo cero de un modelo simplificado que admite soluciones clásicas solitónicas. Estos modelos viven en $1 + 1$ dimensiones y poseen una ruptura de simetría translacional. Sin embargo, los resultados obtenidos pueden ser extrapolados fácilmente al modelo de Skyrme.

Comenzamos por comparar el método de Dirac con el formalismo BRST. Esto lo hacemos para diversas magnitudes como la energía del vacío de un solitón y la energía de un mesón sobre el vacío del solitón en el límite en que el solitón se desplaza con momentos del orden de la masa de los mesones. También calculamos la corrección al operador campo entre estados de un mesón y el vacío sobre el solitón con el propósito de mostrar que también se pueden corregir otras magnitudes a parte de la energía. Mostramos que en este límite ambos métodos dan los mismos resultados pero que el método de Dirac es más sencillo de implementar porque posee un número menor de vértices. Sin embargo, para implementar este último es necesario hacer uso de una transformación que, como mostramos, no es canónica. Luego renormalizamos las energías teniendo en cuenta el modo cero para asegurar que las magnitudes pueden ser renormalizadas en presencia del modo cero. Esto también lo hacemos con ambos métodos y los resultados coinciden una vez más. Luego estudiamos el límite relativista. En este límite se ven las diferencias entre los métodos al corregir la energía del vacío del solitón. Justificamos la discrepancia en la aproximación realizada para utilizar el formalismo de Dirac. Usando un modelo con solución exacta y con un vínculo similar al que surge en los modelos simplificados con solitones mostramos que los resultados obtenidos al corregir la energía del vacío con el formalismo BRST tiene la forma esperada. Por lo tanto se verifica que el formalismo BRST tiene mayor precisión que el método de Dirac.

Finalmente tratamos con ambos métodos y con un gauge no rígido el modo cero del hamiltoniano cuadrático al calcular la amplitud de probabilidad de transición. Verificamos que la conjetura que este modo daría lugar a una amplitud de probabilidad de transición del orden de la que daría una interacción de Yukawa es incorrecta. El gauge no rígido es usado para refutar las afirmaciones de autores que las magnitudes física son dependientes de la elección de gauge, algo que como es bien sabido es incorrecto. También demostramos que el sector clásico de la fórmula de reducción no contribuye, como arguyen algunos autores, a la amplitud de probabilidad de transición. Por lo tanto resulta dudosa la aptitud del modelo de Skyrme para describir la dinámica hadrónica en energía intermedias.

Contenido

Resumen .	1
Introducción .	5
1 Solitones en 1 + 1 dimensiones y el modo cero	10
1.1 El lagrangiano .	10
1.2 El sector con topología nula	14
1.3 El sector con topología uno	16
2 El formalismo de Dirac	20
2.1 El espacio \mathcal{H}_2	21
2.2 El tratamiento perturbativo	27
2.3 Renormalización .	34
2.4 El espacio \mathcal{H}_3 y el límite relativista	39
2.4.1 El tratamiento perturbativo en \mathcal{H}_3	47
3 El formalismo BRST	48
3.1 El espacio \mathcal{H}_4	49
3.2 El tratamiento perturbativo	52
3.2.1 El acoplamiento intrínseco colectivo	53
3.2.2 El hamiltoniano residual	56
3.3 Renormalización . .	62
3.4 El límite relativista . .	63
3.5 MOBOL	67
3.5.1 El tratamiento en \mathcal{H}_1 . . .	68
3.5.2 El tratamiento con coordenadas colectivas en el espacio \mathcal{H}_4 . .	71
4 La ausencia del acoplamiento de Yukawa	73
4.1 El formalismo de Dirac .	75
4.2 El formalismo BRST	80
4.3 El sector clásico de la fórmula de Reducción	89
5 Conclusiones	92

<i>Contenido</i>	4
A Algunas propiedades útiles para relacionar vértices	94
B Relaciones de ortogonalidad y completitud en el límite relativista	96
C La derivación de la fórmula de reducción	97
D El tratamiento perturbativo de la fórmula de reducción	99
Bibliografía	101

Introducción

Sobre los fines de la década de los cincuenta y comienzos de los sesentas T.H.R. Skyrme presenta un modelo para describir la física hadónica de energías intermedias[1]. El modelo consiste en un campo isovectorial en $3 + 1$ dimensiones que junto con un lagrangiano describe la dinámica de los mesones. El lagrangiano se conoce con el nombre del autor. Este lagrangiano no cuenta con un sector explícito que describa la dinámica de los bariones. Sin embargo, debido a la elección del potencial la ecuación de movimiento para los mesones no es lineal. Esta ecuación tiene mínimos clásicos independiente del tiempo que pueden clasificarse por su número topológico. Para números topológicos distintos de cero puede mostrarse que las soluciones son solitones, o sea tienen energía finita y localizada que no se dispersa en el tiempo, ni decaen. Esto lo impulsa a Skyrme a realizar un tratamiento semiclásico del modelo. Entonces la dinámica del barión es tenida en cuenta por el sector clásico del lagrangiano realizando la asociación entre el número topológico de las soluciones con el número bariónico. Las fluctuaciones alrededor del mínimo dan lugar a un sector cuántico que describe la dinámica de los mesones[29]. Ergo mediante un tratamiento semiclásico podemos describir con un solo campo la dinámica de dos partículas distintas: una bariónica, la otra mesónica.

A pesar de que la idea era atrayente en su momento, la historia no le dió crédito al autor hasta mediados de los ochenta. A mediados de los sesentas el modelo de la cromodinámica cuántica, QCD, fue presentado en sociedad y bien recibido. Este modelo es un lagrangiano de quarks y otro de gluones, campos de gauge, acoplados mediante una derivada covariante como en QED. El modelo de QCD no es lineal a bajas energías porque el acoplamiento entre gluones y quarks es de $\mathcal{O}(1)$. Sin embargo, a altas energías, la constante de acoplamiento es pequeña y puede tratarse perturbativamente. Entonces el lagrangiano de quarks se desacopla del de los gluones dando lugar a una dinámica sencilla. Al realizar un tratamiento perturbativo del acoplamiento los resultados obtenidos coinciden con los datos empíricos. Rapidamente las publicaciones en QCD aumentaron porque había mucho trabajo para hacer con este modelo. El modelo de Skyrme fue olvidado, pero no por mucho tiempo.

Si QCD describe la dinámica de los hadrones a toda energía esperamos que a bajas energías existan estados de un barión con energía de 1GeV. Sin embargo, como es bien

sabido, QCD tiene problemas a bajas energías. La razón es el orden del acoplamiento entre gluones y quarks en este rango de energías. Ergo, la posibilidad de sumar la serie perturbativa de infinitos términos resulta casi imposible. Entonces no se puede determinar si QCD es una teoría correcta para describir la dinámica de los hadrones a bajas energías analíticamente. La solución presentada a este problema fue calcular el lagrangiano en un espacio tiempo discretizado mediante el uso de computadoras. Esto se conoce como lattice QCD. Esto se lleva a cabo en un espacio con doce grados de libertad para cada partícula fermiónica (2 de spin, 2 de sabor, y 3 de color por cada punto del espacio tiempo en 3 + 1 dimensiones.) Lamentablemente, la tecnología computacional existente en el mercado, incluso ahora, impide obtener resultados convincentes.

Frustrados por estas limitaciones, a mediados de los setentas revivieron los trabajos basados en la idea de Skyrme de relacionar el número topológico del sector clásico con el número bariónico[2][3][5]. También por esta época t'Hooft[4] presenta una idea sencilla pero revolucionaria que aun hoy produce dolor de estomago entre muchos. La idea es introducir un parametro perturbativo en QCD que sea natural del modelo. El único disponible es el número de colores. QCD se basa en que el número de colores solo puede ser tres. Esto esta confirmado experimentalmente. Sin embargo, t'Hooft propone utilizar infinitos números de colores. En este límite mostró que los grados efectivos de libertad dejaban de ser gluones y quarks para pasar a ser grados efectivos de quark-antiquark. Esto grados son los utilizados en QCD para construir estados de mesones. Por lo tanto, en el límite de infinitos colores los grados de libertad son mesones. También mostró que los únicos diagramas que contribuyen en este límite son los llamados diagramas planares. Estos diagramas pueden ser sumados y por lo tanto se pueden obtener resultados para bajas energías. La idea de tener infinitos colores era la parte fea del modelo.

Eso no lo desanimó a Witten[6] que en el año 79 utilizó la aproximación realizada por t'Hooft para demostrar que QCD en este límite se convertía en un modelo de mesones con una interacción que no podia ser tratada perturbativamente. Esto junto la simetría que exhibe QCD con 2 sabores que se conoce como simtria quiral o $SU(2)_L \times SU(2)_R$ le permitió entrelazar el trabajo de t'Hooft con los de Skyrme. La justificación se basaba en que la interacción, a parte de no ser perturbativa, daría lugar a soluciones clásicas solitónicas y también que el modelo de Skyrme compartía la simetría quiral de QCD.

Junto con sus colaboradores Witten[7] revive en el 83 el trabajo de Skyrme. Haciendo uso de este modelo muestra que las propiedades estáticas bariónicas coincidían con las experimentales dentro de un 30%. Debido a que fue Witten el que revivió el modelo no faltaron aquellos que se tiraran de cabeza en el tema. El número de publicaciones sobre el modelo de Skyrme creció exponencialmente en la decada del ochenta. Los resultados eran alentadores. Sin embargo, no faltaron los problemas.

A pesar de que el lagrangiano de Skyrme tiene simetría quiral, la solución clásica que minimiza la energía en el sector con topología no trivial no tiene tal simetría. Como

es bien sabido luego del trabajo de Goldstone [8] esta ruptura de simetría esta relacionada con modos de energía cero que impiden realizar un tratamiento perturbativo sin encontrar divergencias infrarrojas. La expansión en el número de colores implica que las correcciones perturbativas son del orden del 30%. Entonces un tratamiento perturbativo es esencial[31]. O sea que para lograr una descripción más acertada que un 30%, este modo debe ser tratado en forma apropiada. En la corrección de estas magnitudes también aparecen divergencias ultravioletas. La forma del potencial impide implementar una renormalización a todo orden. Sin embargo, estas pueden ser tratadas orden por orden [9]. O sea que un tratamiento del modo de cero energía junto con la renormalización pueden dar lugar a una mejor descripción de las propiedades estáticas del barión.

Las propiedades dinámicas de los hadrones en estos regímenes de bajas energías obtenidos con el modelo de Skyrme coincidirían con la evidencia experimental. Los trabajos de Eckart et. al.[10] junto con los de Mattis y colaboradores [11] sobre colisiones entre piones y bariones muestran esto. La disposición de los números cuánticos del espectro del nucleón y la Δ obtenidos con el modelo de Skyrme con el uso de colisiones entre mesones y bariones coincide con los datos experimentales salvo excepciones. Entre estas excepciones la mas contundente es la falta de los términos de Born relacionados con la resonancia Δ en scattering nucleón-pion. Esto implica que no existe en el modelo un acoplamiento de Yukawa.

El acoplamiento de Yukawa lleva el nombre del autor que intuyo la presencia de una partícula masiva (respecto del fotón, respecto del barión esta partícula no tiene masa) que media las interacciones fuertes entre bariones. La interacción es de corto alcance porque la partícula que media es masiva. También se sabe que es lineal en el campo mesónico y que conserva el número bariónico en este rango de energías. Con el descubrimiento del pión y del acoplamiento de Yukawa entre piones y bariones quedaron sellados las propiedades necesarias para describir la física hadónica a bajas energías. Primero se necesitan dos tipos de partículas. Por un lado los bariones por el otro los piones. Luego estas partículas deben interactuar entre si mediante el acoplamiento de Yukawa. Si la masa del barión es de $\mathcal{O}(N_c)$ donde N_c es el número de colores entonces la masa del mesón es de $\mathcal{O}(1)$ y la interacción lineal en el campo mesónico y que conserva el número bariónico es de $\mathcal{O}(N_c^{\frac{1}{2}})$. Una interacción de este orden da lugar a términos de Born de $\mathcal{O}(1)$ porque el mecanismo de Heitler Bhabha cancela los términos de $\mathcal{O}(N_c)$ que aparecen al calcular el elemento de matriz de transición dejando como contribución principal a los términos de $\mathcal{O}(1)$.

La falta de un acoplamiento de Yukawa en el modelo de Skyrme fue atribuida por autores al tratamiento incorrecto del modo de cero energía en el hamiltoniano que describe la dinámica de los mesones a orden principal[30] [10][11]. Sin embargo esto fue solo una conjetura. Hay muchos trabajos donde realizan un tratamiento del modo cero y muestran de alguna forma u otra la existencia del acoplamiento [13][14]. Sin embargo, los autores también muestran resultados positivos en modelos en 1 + 1 dimensiones, los cuales en

un tratamiento semiclásico admiten solitones clásicos y que tienen grados espúreos que dan lugar al modo de energía cero. Los más conocidos son el modelo ϕ^4 y el modelo de sine-Gordon. Las asociaciones entre estos modelos y el de Skyrme son las siguientes. El número de colores que es el parámetro semiclásico en el modelo de Skyrme es reemplazado por la masa del barión en los modelos en $1 + 1$ dimensiones. El campo isovectorial en el modelo de Skyrme pasa a ser un campo escalar en los modelos en $1 + 1$ dimensiones. Los modelos en $1 + 1$ dimensiones no tienen simetría quiral, sin embargo tienen una simetría $U(1)$ que es la simetría translacional. Como veremos, las ecuaciones de movimiento dan lugar a solitones que no poseen tal invariancia. La consecuencia es la aparición de un modo de energía cero que también nos impide corregir valores como la masa del solitón y verificar la existencia del acoplamiento de Yukawa.

Nosotros presentamos estos modelos simplificados. La razón de esta elección se basa en que el modelo de Skyrme tiene vínculos que dependen de las fluctuaciones de manera similar al encontrado en los modelos simplificados. En el modelo de Skyrme se hace uso de un número mayor de coordenadas colectivas y por lo tanto surge un número mayor de vínculos que no son abelianos. Sin embargo, en los modelos simplificados solo se usa una coordenada colectiva para restituir la simetría rota. Ergo, se trabaja con un solo vínculo. El hecho de que el modelo de Skyrme los vínculos no sean abelianos no presenta problemas cuando se trabaja con el formalismo BRST[35], si, es más complicado. También, el hecho de trabajar en espacio-tiempos de menor dimensión resulta atractiva. Entonces, el trabajo necesario para tratar el modo cero y estudiar sus consecuencias parece ser menos complicado en estos modelos que en el modelo de Skyrme.

Nuestra intención es estudiar el modo cero en estos modelos mediante distintas técnicas, cada una de ellas se lleva a cabo en espacios de variables dinámicas de distinta dimensión. De esta manera mostraremos que el tratamiento BRST resulta ser el más adecuado para obtener mayor precisión. Sin embargo, veremos que este método es más complicado que el método de Dirac. Con lo cual resulta más conveniente trabajar con el método de Dirac si uno desea una descripción correcta a menor orden. También queremos mostrar que el modo cero no da lugar a un término de Born de $\mathcal{O}(1)$ como han conjeturado varios autores[11][12]. La razón para que esto suceda es que los estados asintóticos son ortogonales al modo cero por ser estados físicos.

En el primer capítulo presentamos los modelos simplificados. Con un tratamiento semiclásico estudiamos los distintos sectores topológicos que pueden originarse. Vemos que el sector con menor energía corresponde al sector con topología trivial. En este sector se muestra ausente la ruptura espontánea de simetría. También verificamos que el sector con topología no trivial tiene tal ruptura que implica la existencia de un modo de energía cero entre los estados no perturbados y de divergencias infrarrojas al realizar un tratamiento perturbativo.

El segundo capítulo presenta un espacio de variables que incluye a la coordenada

colectiva y su conjugado. En el límite de bajos momentos colectivos mostramos que en el espacio de variables existe una simetría de gauge local. Debido a esta simetría se demuestra que la dinámica en este espacio no se rige más por los corchetes de Poisson sino que se rige por los corchetes de Dirac. Con estos nuevos corchetes podemos realizar un tratamiento perturbativo sin encontrar divergencias infrarrojas. La renormalización, que es necesaria para obtener magnitudes que sean finitas, también es atacada en este espacio para estudiar como es afectada por el modo cero. Finalmente, presentamos un espacio que incluye a un multiplicador de Lagrange y su conjugado. Esto nos permitiría trabajar con momentos colectivos relativistas. En este caso encontramos que la corrección perturbativa a la energía del vacío no coincide con la obtenida con el método BRST y que por lo tanto es incorrecta.

El formalismo BRST lo presentamos en el cuarto capítulo. Allí mostramos el espacio que incluye, a parte de todas las variables presentadas en el capítulo anterior, a los fantasmas. Confirmamos que los resultados obtenidos en el límite de bajos momentos colectivos en el capítulo anterior coinciden. Los resultados renormalizados también. Los resultados en el límite relativista no coinciden. Como no se conocen los resultados exactos de estos modelos, mostramos recurriendo a un modelo cuya solución exacta se conoce que los resultados BRST coinciden con los exactos.

En el siguiente capítulo atacamos las colisiones entre mesones y bariones a orden principal. Esto lo hacemos en el sector cuántico para un gauge no-rígido. La razón se debe a que existen autores que sostienen que la elección de gauge puede modificar los resultados físicos. Esto, como es bien sabido, no es cierto. Sin embargo, lo demostramos. Presentamos primero el tratamiento de Dirac, luego el tratamiento BRST. Ambos coinciden: no hay acoplamiento del orden del acoplamiento de Yukawa. Hay autores que demuestran que el acoplamiento tan deseado está en el sector clásico de la fórmula de reducción que relaciona a la amplitud de probabilidad de transición con la función de Green para los campos. Nosotros demostramos que están equivocados.

Las conclusiones están luego, antes de los apéndices que muestran diversas cosas. Algunas necesarias para obtener resultados.

Capítulo 1

Solitones en 1 + 1 dimensiones y el modo cero

La literatura sobre los modelos con solitones en 1 + 1 dimensiones es vasta. Esta se puede remontar a los trabajos de Dashen et. al.[2]. En ese trabajo se estudiaron las fluctuaciones alrededor de los campos clásicos que minimizan el hamiltoniano. Ellos mostraron la existencia de un modo de energía cero en el sector con topología uno. El trabajo hace pie en la idea de Skyrme de relacionar el número topológico del solitón con el número bariónico del nucleón. Nosotros presentamos en este capítulo las ideas de Dashen y asociados. Primero definimos la acción para estos modelos. Luego presentamos la carga topológica y demostramos que se conserva si imponemos condiciones de contorno periódicas para las fluctuaciones. La clasificación de las soluciones clásicas la presentamos al final de la primera sección. El sector con topología trivial o nula se presenta en la segunda sección. Allí estudiamos las fluctuaciones alrededor de esta solución. Vemos que no hay modos de energía cero. Ergo, el tratamiento perturbativo de los términos residuales arroja correcciones que no poseen divergencias infrarrojas. Luego presentamos el sector con topología uno. Confirmamos la existencia de un modo de energía cero y las divergencias encontradas a causa de él. Seguimos en este capítulo las ideas presentadas por Rajaraman[15].

1.1 El lagrangiano

Consideramos la acción para un campo escalar e isoescalar ϕ en 1 + 1 dimensiones

$$S = \int d^2x \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} (\phi')^2 - V(\phi) \right). \quad (1.1)$$

Convenimos que

$$c = \hbar = 1. \quad (1.2)$$

El potencial tiene mínimos degenerados que dan lugar a una ecuación de movimiento que es no lineal en el campo. Esto garantiza la existencia de soluciones de energías finitas y localizadas en el espacio[15].

La variación de la acción respecto de una variación del campo es

$$\delta S = \int d^2x \{ \ddot{\phi} - \phi'' + V_1(\phi) \} \delta\phi + \int_{t_1}^{t_2} dt \partial_x \phi|_{-L}^L \delta\phi - \int dx \partial_t \phi \delta\phi|_{t_1}^{t_2}. \quad (1.3)$$

donde $V_i = \frac{d^i V}{d\phi^i} |_{\phi=\phi_c}$.

Suponemos que no hay variación de los campos en los instantes t_2 y t_1 . Entonces, encontramos que la ecuación de movimiento toma la forma

$$\ddot{\phi} - \phi'' + V_1(\phi) = 0 \quad (1.4)$$

al imponer como condiciones de contorno

$$\partial_x \phi|_{-L}^L = 0. \quad (1.5)$$

Usando la definición de conjugado del campo

$$p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \quad (1.6)$$

podemos escribir el hamiltoniano correspondiente a la densidad lagrangiana

$$\int dx \mathcal{H} = \int dx \left(\frac{1}{2} p^2 + \frac{1}{2} (\phi')^2 + V(\phi) \right) \quad (1.7)$$

La conmutación entre el campo y su conjugado se escribe

$$[\phi(x), p(y)] = i \delta(x - y). \quad (1.8)$$

Al optar por una descripción hamiltoniana del sistema, debemos incluir una ecuación de movimiento para p . Esta viene dada por el hamiltoniano y se escribe

$$\dot{p} = \dot{\phi}. \quad (1.9)$$

Soluciones dependientes del tiempo de las ecuaciones (1.4) y (1.9) no se conocen. Solo existen en la literatura soluciones independientes del tiempo. Dentro del marco de un tratamiento semiclásico podemos satisfacer la ecuación de movimiento para campos clásicos y estáticos y luego estudiar fluctuaciones alrededor de dicha solución. Como primera aproximación hemos dejado las fluctuaciones de lado por ser pequeñas, de $\mathcal{O}(1)$, frente a los valores semiclásicos. Estos últimos son de $\mathcal{O}(M)$ donde $M \gg 1$ es la masa del solitón, y nos concentramos en estos últimos.

Las ecuaciones satisfechas por las soluciones estáticas son

$$\begin{aligned} p_c &= 0 \\ \phi_c'' &= V_1. \end{aligned} \quad (1.10)$$

También incluimos el número carga topológica como buen número porque como veremos en el sector clásico y en el cuántico este número se conserva sin necesidad de imponer condiciones de contorno.

La corriente topológica puede definirse como

$$j^\mu = \alpha \epsilon^{\mu\nu} \partial_\nu \phi. \quad (1.11)$$

donde $\epsilon^{\mu\nu}$ es el tensor antisimétrico, con la convención $\epsilon^{01} = 1$. El orden de la constante α será determinamos a continuación para que el potencial elegido tenga un mínimo de energía finita y localizada con topología uno.

De esta manera la carga topológica queda

$$Q_T = \int dx j^0 = \alpha \{ \phi(x = \infty) - \phi(x = -\infty) \}. \quad (1.12)$$

Esto indica que Q_T no es un operador asociado a una simetría continua sino que surge como observable por las condiciones de contorno.

La evolución temporal de este operador viene dada por el hamiltoniano. Al considerar solo efectos clásicos se conserva porque

$$\partial_t Q_T = \int p'_c = 0. \quad (1.13)$$

Insistimos en que hemos despreciado efectos cuánticos. La inclusión de ellos nos mostraría que la carga solo se conserva en el tiempo a $\mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}})$ porque al incluir las fluctuaciones H con Q_T conmutan solo a $\mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}})$ si no imponemos condiciones de contorno apropiadas.

Con estas condiciones de contorno la carga topológica aparece como un nuevo número cuántico del modelo y representa al número bariónico, que como sabemos las interacciones fuertes conservan en el tiempo en este rango de energías.

La ecuación (1.10) admite varias soluciones, cada una en un sector topológico distinto. Estas soluciones pueden ser clasificadas por su número topológico y por su energía. La energía asociada al campo es mínima dentro de cada sector topológico y viene dada por el teorema virial

$$H = \int (\phi'_c)^2. \quad (1.14)$$

Debido a que la acción es invariante de Lorentz existe un algebra de Poincaré. Esto implica que el operador global hamiltoniano conmuta a todo orden con el operador momento global

$$P = \int \phi' p. \quad (1.15)$$

Este operador global es el generador de las transformaciones en el espacio. Entonces H queda invariante frente a una translación en el espacio.

Por conmutar con el hamiltoniano, el operador P nos será útil para clasificar las distintas solución en dos clases. Una clase estará formada por las soluciones que quedan

invariantes ante la acción de P . La otra clase será formada por soluciones que no son invariantes ante la acción de P .

Con esta subclasificación y con la definición de carga topológica podemos clasificar al conjunto de soluciones clásicas en (1.10). Estas son las características que se presentan en el sector con topología nula que corresponden al sector sin bariones

- El campo que minimiza la energía es de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$;
- Es la solución de menor energía, y se puede tomar como nula;
- la densidad de energía no está localizada porque el campo queda invariante ante translaciones.

En el sector clásico con topología uno que corresponden al sector con un solo barión las soluciones presentan las siguientes características

- El campo que minimiza la energía es también de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$;
- La energía es mínima dentro de este sector topológico, entonces no puede decaer a otra solución dentro del mismo sector y simultáneamente conservar el número topológico;
- No tiene momento, entonces la masa del estado es la energía;
- la energía es finita y está localizada ya que las soluciones pierden la invariancia translacional;
- según el potencial la densidad de energía de una solución puede dispersarse o no cuando está en presencia de otras soluciones.

Con los cuatro primeros atributos tenemos definido una onda solitaria con topología uno. Incluyendo el último ítem definimos un solitón con topología uno. Un solitón se diferencia de una onda solitaria en que el primero no se dispersa en el tiempo ante la presencia de otros solitones. Ergo, la densidad de energía de un solitón se conserva en el tiempo en presencia de otros solitones.

El solitón tiene los mismos atributos que un barión. El número topológico representa el número bariónico. Tiene energía finita. No decae al sector con topología nula que representa un estado sin bariones. El barión está localizado en el espacio y no se dispersa ante la presencia de otros bariones.

A continuación consideramos las fluctuaciones de $\mathcal{O}(1)$ alrededor de las soluciones clásicas del sector con topología nula y uno para ver las consecuencias aparejadas por la pérdida de invariancia translacional de las soluciones clásicas del último sector.

1.2 El sector con topología nula

Como vimos, En el tratamiento semiclásico podemos clasificar los distintos términos del hamiltoniano con el parametro semiclásico M . Cuando consideramos fluctuaciones \hat{q} de $\mathcal{O}(1)$ alrededor de la solución clásica, el campo se escribe

$$\phi = \phi_c^{B=0} + q^{B=0}. \quad (2.16)$$

Donde $\phi_c^{B=0}$ es una constante de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$ que satisface

$$V(\phi_c^{B=0}) = 0. \quad (2.17)$$

Las fluctuaciones alrededor del conjugado del campo clásico $\hat{p}_c^{B=0}$ da lugar a un conjugado que lo escribmos como

$$p = p_c + \hat{p}^{B=0} = \hat{p}^{B=0}. \quad (2.18)$$

El hamiltoniano en este sector es

$$\begin{aligned} \hat{H}^{B=0} &= \hat{H}_o^{B=0} + \hat{H}_{res}^{B=0} \\ \hat{H}_o^{B=0} &= \frac{1}{2} \int ((\hat{p}^{B=0})^2 + (\hat{q}^{B=0})'^2 + \mu^2(\hat{q}^{B=0})^2) \\ \hat{H}_{res}^{B=0} &= \sum_{i>2} \int (\hat{q}^{B=0})^i \frac{\hat{V}_i^{B=0}}{i!} \end{aligned} \quad (2.19)$$

donde $\mu^2 = V_2^{B=0}$ es una constante. El primer término describe mesones que se propagan con masa μ la cual es de $\mathcal{O}(1)$. Los mesones estan libres a $\mathcal{O}(1)$ porque no hay términos que dependan de las fluctuaciones que sean de orden superior. Esto es lo que esperamos en este sector porque no hay bariones. El segundo término son las interacciones de menor orden, $\mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}})$ y $\mathcal{O}(M^{-1})$, entre los mesones.

La ecuación de movimiento lineal en las fluctuaciones que surge de (2.19) es

$$\ddot{\hat{q}}^{B=0} - (\hat{q}^{B=0})'' + \mu^2 \hat{q}^{B=0} = 0. \quad (2.20)$$

Esta ecuación de movimiento es la muy conocida ecuación de Klein-Gordon que describe mesones libres que se propagan con masa μ .

Al expandir a las fluctuaciones en modos normales

$$\hat{q}^{B=0} = \sum_k \frac{i}{\sqrt{2\omega_k}} (\psi_k a_k - \psi_k^* a_k^+) \quad (2.21)$$

encontramos que las funciones ψ_k satisfacen la ecuación de Klein-Gordon para una partícula de masa μ

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + \mu^2 - \omega_k^2\right)\psi_k = 0 \quad (2.22)$$

donde $\omega_k = \sqrt{\mu^2 + k^2}$. Esto implica que si $\mu \neq 0$, como es nuestro caso, todos los modos tienen energías positivas. Aun más importante, se desprende que no hay modos de cero energía.

Las funciones ψ_k^* también satisfacen (2.22) debido a que esta es invariante ante conjugación compleja. Mientras que los modos a_k se relacionan con las soluciones ψ_k , los modos $a_{\bar{k}}$ se relacionan con las soluciones $\psi_k^* = \psi_{\bar{k}}$.

El operador a_k aniquila el vacío del sector con topología nula, el cual llamamos $|B = 0\rangle$. El operador a_k^\dagger (a_k) crea (aniquila) un mesón con momento k y energía ω_k . Las relaciones de conmutación distintas de cero entre estos operadores son

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'} \quad (2.23)$$

El conjugado de las fluctuaciones $\hat{q}^{B=0}$ se obtiene de la relación

$$\dot{\hat{q}}^{B=0} = -i[\hat{q}^{B=0}, \hat{H}_0] = \hat{p}^{B=0}. \quad (2.24)$$

Entonces

$$\hat{p}^{B=0} = \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (\psi_k a_k + \psi_k^* a_k^\dagger). \quad (2.25)$$

El hamiltoniano $\hat{H}_0^{B=0}$ en término de estos modos queda

$$\hat{H}_0^{B=0} = \sum_k \omega_k (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}). \quad (2.26)$$

El operador momento también queda diagonal porque conmuta a todos los ordenes con el hamiltoniano

$$\hat{p}^{B=0} = \sum_k k (a_k^\dagger a_k + \frac{1}{2}). \quad (2.27)$$

Obviamente, se verifica la conmutatividad entre $\hat{H}_0^{B=0}$ y $\hat{p}^{B=0}$. Esto nos permite clasificar a los estados de mesones sobre el vacío por la energía y el momento.

La carga topológica se escribe al hacer uso de las fluctuaciones como

$$Q_t = \alpha \sum_k \frac{i}{\sqrt{2\omega_k}} \int (\psi_k' a_k - \psi_k'^* a_k^\dagger). \quad (2.28)$$

Esto implica que el conmutador entre la carga topológica y el hamiltoniano cuadrático se conserva solo si imponemos condiciones de contorno periódicas para las fluctuaciones porque entonces

$$[\hat{H}_0, Q_t] = \alpha \sum_k \sqrt{\frac{i\omega_k}{2}} \int (\psi_k' a_k + \psi_k'^* a_k^\dagger) = 0. \quad (2.29)$$

Ergo, también podemos clasificar a los estados sobre el vacío por su número topológico. Hacemos notar que en este sector las condiciones de contorno impuestas en el sector clásico son las mismas que las impuestas en el sector cuántico.

Entonces, partiendo de estos estados con buena energía, momento y topología podemos hacer una expansión perturbativa en M de la energía y otras magnitudes haciendo uso de los términos $\hat{H}_{res}^{B=0}$. Como hemos visto, este hamiltoniano no tiene modos de frecuencia cero porque la relación de dispersión lo impide. Como veremos debido a la ausencia de estos modos espúreos no encontraremos divergencias infrarrojas. Sin embargo dejamos las correcciones de la energía para luego, donde también tendremos oportunidad de renormalizar estas magnitudes, y medirlas respecto de los sectores con topología no trivial donde también calcularemos la misma magnitud al mismo orden. Continuamos con el sector con topología uno.

1.3 El sector con topología uno

En este sector el tratamiento semiclásico nos permite como nos permitió en la sección anterior, clasificar los distintos términos del hamiltoniano con el parametro M . En el sector con topología nula cada operador estaba etiquetado con un supraíndice que indicaba el sector $B = 0$ al que pertenecía. En este sector no etiquetamos a los operadores para diferenciarlos de los operadores que pertenecen al sector con topología trivial.

Cuando consideramos fluctuaciones \hat{q} de $\mathcal{O}(1)$ alrededor de la solución clásica el campo se escribe

$$\phi = \phi_c + q. \quad (3.30)$$

Donde ϕ_c es de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$, y minimiza la energía del sector con topología uno. Como este campo pertenece a este sector sus valores en el contorno deben ser distintos (ver ec. (1.12)). Ergo, el campo ϕ_c no es una constante y su derivada en el espacio es distinta de cero

$$\phi'_c \neq 0. \quad (3.31)$$

La ec. (3.31) implica la pérdida de simetría translacional y deberemos introducir, como veremos, una coordenada colectiva para restituirla.

También consideramos fluctuaciones alrededor del conjugado

$$p = p_c + \hat{p} = \hat{p}. \quad (3.32)$$

El hamiltoniano (1.7) queda debido a (3.31)

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \hat{H}_c + \hat{H}_o + \hat{H}_{res}, \\ \hat{H}_c &= M \\ \hat{H}_o &= \frac{1}{2} \int \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}'^2 + \frac{1}{2} \int \hat{V}_2 \hat{q}^2 \\ \hat{H}_{res} &= \sum_{i>2} \int \frac{\hat{q}^i}{i!} \hat{V}_i. \end{aligned} \quad (3.33)$$

El primer término en este sector topológico, \hat{H}_c , describe la dinámica del barión. El barión está en reposo y tiene masa M . Como hemos visto, en el sector con topología nula este término no existe debido a que el campo clásico es constante. Con el hamiltoniano \hat{H}_o que es de $\mathcal{O}(1)$ describimos a los mesones que se propagan con una masa igual a la que se propagan los mesones del sector con topología nula. Sin embargo, este hamiltoniano no satisface un algebra de Poincare y por lo tanto no es invariante de Lorentz. El hamiltoniano \hat{H}_{res} define la interacción entre los mesones. Estos son todos de $\mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}})$ o inferior. Aquí vemos el primer inconveniente de los modelos soltonicos como modelos de bariones a bajas energías: no existe término de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$ lineal en las fluctuaciones en el hamiltoniano que de origen a términos de Born de $\mathcal{O}(1)$. La existencia de términos de Born de $\mathcal{O}(1)$ indicaría la existencia de un acoplamiento de Yukawa que es la interacción empírica entre mesones y bariones. No hay términos lineales de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$ porque debemos minimizar la energía para definir el solitón de menor energía dentro de cada sector topológico.

La ecuación de movimiento lineal para las fluctuaciones la determina \hat{H}_o solamente y es

$$\ddot{\hat{q}} - \hat{q}'' + V_2 \hat{q} = 0. \quad (3.34)$$

A partir de esta ecuación se definen los estados con los cuales se pueden hacer un tratamiento perturbativo convergente en M de los términos restantes del hamiltoniano. Sin embargo encontraremos divergencias infrarrojas.

La expansión de las fluctuaciones en modos normales es

$$\hat{q} = \sum_n \frac{i}{\sqrt{2\omega_n}} (\psi_n a_n - \psi_n^* a_n^+). \quad (3.35)$$

Los operadores a_n^+ (a_n) crean (destruyen) una partícula con densidad de probabilidad $|\psi_n|^2$ sobre el vacío con topología uno en el cual el campo tiene valor medio $\phi_c(x)$. Al vacío de este sector lo llamamos $|1\rangle$. La expansión (3.35) junto con la ec.(3.34) imponen que las funciones ψ_n satisfagan la ecuación

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_2\right) \psi_n = \omega_n^2 \psi_n. \quad (3.36)$$

La función V_2 no es invariante translacional, y es par. Esto último nos permite elegir las fases para que la parte real (imaginaria) de la función ψ_n sea par (impar). El reverso temporal de ψ_n es su conjugado y lo escribimos como $\psi_{\bar{n}}$ y es también autovalor de (3.36) porque esta ecuación queda invariante respecto de la conjugación compleja.

Debido a que estamos trabajando en este sector donde la invariancia translacional del hamiltonian que no es compartida por la solución clásica, la ec.(3.36) tiene como solución una función ψ_1 sin energía. Esto es

$$\psi_1 = \frac{1}{\sqrt{M}} \phi_c'; \quad \omega_1 = 0. \quad (3.37)$$

ya que se cumple que

$$\left(-\frac{d^2}{dx^2} + V_2\right) \psi_1 = \frac{1}{\sqrt{M}}(-\phi_c'' + V_1) = 0. \quad (3.38)$$

La segunda igualdad sale de hacer uso de la ecuación de movimiento del campo clásico (1.4). La constante de normalización $\frac{1}{\sqrt{M}}$ surge de la definición de la energía del campo clásico para este sector (ver ec.(1.14)). Debido a la ruptura de simetría translacional del campo clásico $\phi_c' \neq 0$. Ergo, ψ_1 es linealmente independiente respecto de las restantes ψ_n . Entonces, la función ψ_1 pertenece a la base del espacio de hilbert. Esto no sucede en el sector con topología nula donde $\phi_c' = 0$ y por lo tanto es linealmente dependiente y no pertenece a la base de tal espacio.

Es facil ver que en el caso en que el potencial es función par del campo como lo es el potencial de modelo ϕ^4 , el campo clásico es impar y por lo tanto que su derivada es par. Ergo, ψ_1 es par.

Las fluctuaciones entonces quedan

$$\begin{aligned} \hat{q} &= \sum_n \frac{i}{\sqrt{2\omega_n}}(\psi_n a_n - \psi_n^* a_n^+) + \frac{i}{\sqrt{2\omega_1}}\psi_1(a_1 - a_1^+), \\ \hat{p} &= \sum_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2}}(\psi_n a_n + \psi_n^* a_n^+) + \sqrt{\frac{\omega_1}{2}}\psi_1(a_1 + a_1^+) \end{aligned} \quad (3.39)$$

A menos que mencionemos explícitamente, el modo cero es de ahora en más excluido de todas las sumatorias sin primar. Las sumatorias primadas lo excluyen.

Entonces el hamiltoniano cuadrático en las fluctuaciones puede ser escrito

$$H^{(2)} = \sum_n \omega_n \left(a_n^+ a_n + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2M} (P^{(1)})^2. \quad (3.40)$$

Aquí el operador

$$P^{(1)} \equiv \int \phi_c' \hat{p} = \sqrt{M}(a_1 + a_1^+), \quad (3.41)$$

es lineal en el operador momento conjugado.

Es facil ver que ambos operadores, $\hat{H}^{(2)}$ y $P^{(1)}$ conmutan. Por lo tanto el modo relacionado con el operador momento lineal no tiene fuerza de restitución y entonces lo llamamos modo cero.

Por otro lado, la carga topológica en este sector se escribe

$$Q_t = 1 + \alpha \sum_n \frac{i}{\sqrt{2\omega_n}} \int (\psi_n' a_n - \psi_n'^* a_n^+). \quad (3.42)$$

Esto implica que el conmutador entre la carga topológica y el hamiltoniano cuadrático se conserva solo si imponemos condiciones de contorno periódicas para las fluctuaciones porque

$$[\hat{H}_0, Q_t] = \alpha \sum_n \sqrt{\frac{i\omega_n}{2}} \int (\psi_n' a_n + \psi_n'^* a_n^+) = 0. \quad (3.43)$$

Ergo, también podemos clasificar a los estados por su número topológico. Sin embargo, hacemos notar que en este sector las condiciones de contorno impuestas en el sector clásico son distintas a las impuestas en el sector cuántico. Las primeras son antiperiódicas mientras que las segundas son periódicas. También notamos que debido a que ϕ'_c es par, el modo cero no contribuye a la carga topológica.

Al intentar hacer un tratamiento perturbativo encontramos divergencias infrarrojas debido al tratamiento incorrecto del modo cero. El término cúbico en el hamiltoniano residual \hat{H}_{res} contribuye en el tratamiento diagramático de la corrección a la energía del vacío a $\mathcal{O}(M^{-1})$ con un vértice que crea una partícula con frecuencia cero. El diagrama que corrige la energía del vacío a segundo orden en teoría de perturbaciones tiene como denominador de energía a la energía del estado espúreo el cual no es cancelado por los elementos de matriz que aparecen en el numerador. Por lo tanto este diagrama será divergente. también el valor de expectación del término cuártico de \hat{H}_{res} contribuye a la corrección a la energía del vacío con términos que poseen como denominador a una potencia de la energía del sector espúreo. Ergo la contribución de este término también es divergente.

Entonces correcciones perturbativas a magnitudes como la energía dejan de tener sentido porque estas serán infinitas.

Capítulo 2

El formalismo de Dirac

En el capítulo anterior mostramos la existencia de un modo de cero energía en el sector con topología uno. También mostramos que este modo nos impide corregir magnitudes físicas como la energía del vacío porque al hacerlo encontramos divergencias infrarrojas. En la sección anterior hemos partido de un modelo definido en un espacio de variables que solo incluía a las fluctuaciones mesónicas. Sin hacer un tratamiento apropiado de esta variable encontramos las divergencias infrarrojas en el tratamiento perturbativo. En este capítulo mostramos que el modo de energía cero es consecuencia de incluir en el espacio de las variables a la variable colectiva X que describe la posición del campo clásico, o sea la posición del barión. Ahora agrandamos el espacio de variables para que también se incluya a la dinámica del barión.

Un tratamiento apropiado implica tratar a la variable X como una variable dinámica desde el principio y ver como contribuye a la dinámica de los restantes grados de libertad del modelo. La técnica utilizada en este capítulo se debe a Dirac. El hace uso de un espacio de variables que incluye a las variables colectivas. Alternativamente, se puede incluir variables adicionales como multiplicadores de Lagrange para partir de un mínimo distinto.

Nos dedicamos a construir y estudiar el espacio que incluye a las variables colectivas. En este espacio mostramos la existencia de un vínculo. La dinámica de las variables se rigen por el corchete de Dirac que esta definido a partir del corchete de Poisson. Sin embargo, este corchete tiene complicaciones cuando los vínculos presentan términos cuadráticos en las fluctuaciones. Para sobre pasar esto recurrimos a la transformación que no es canónica hecha por Gervais et. al.[3] y formalizada por Tomboulis[5]. Luego realizamos un tratamiento perturbativo en este espacio para el caso en que el solitón se mueve con pequeños momentos colectivos, del orden de la masa de las fluctuaciones. Para concluir, también generamos el espacio que aparte de incluir a las variable colectivas incluye al multiplicador de lagrange y su conjugado. En este espacio podemos estudiar

la masa del solitón que se propaga con momentos relativistas, del orden de la masa del barión. Sin embargo, veremos que los resultados obtenidos no coinciden con el obtenido con el tratamiento BRST debido a que la transformación no es canónica.

Existen otros métodos que se desarrollan también en el espacio que incluye a las variables colectivas. Este es el caso del método desarrollado por Gervais et. al.[3]. Este método usa técnicas similares a las usadas en el método de Faddeev-Popov: multiplicar la función de partición en el espacio original por la unidad escrita en términos de integrales de camino sobre las variables colectivas y funciones delta; actuar con una transformación local de gauge sobre esta nueva función de partición que da lugar al determinante de Faddeev Popov el cual, mediante la transformación de Gervais et. al., es llevado a un escalar.

A menudo saltaremos de un tratamiento clásico a uno cuántico. O sea que trataremos indistintamente ambos casos. Para ir de un caso al otro las trayectorias clásicas dentro del espacio de fases son reemplazadas por estados cuánticos que viven en el espacio de Hilbert asociado a las variables que forman el espacio de fases ¹. El valor de una función de las variables del espacio de fases sobre una trayectoria lo reemplazamos por el elemento de matriz del operador cuántico asociado a la función entre los estados relacionados con la trayectoria clásica. Finalmente, los corchetes de Poisson los reemplazamos por conmutadores multiplicados por una fase apropiada, $-i$. Habiendo aclarado esto, pedimos al lector que use las herramientas apropiadas al caso en cuestión.

2.1 El espacio \mathcal{H}_2

El espacio que incluye solo las variables originales q y p lo llamamos \mathcal{H}_1 . En el capítulo 1 hemos trabajado en este espacio. El espacio que también incluye la variable colectiva X y su conjugado Π lo llamamos \mathcal{H}_2 . En este espacio la simetría translacional se restaura al introducir la coordenada colectiva X y su conjugado Π . Donde X mide la posición del sistema de referencia intrínseco que se mueve respecto del sistema de referencia fijo en el laboratorio. En el primero el solitón está en reposo. La cantidad x mide las distancias relativas en el sistema intrínseco.

El campo con topología uno en el espacio \mathcal{H}_1 se puede relacionar con el campo con topología uno en el espacio \mathcal{H}_2

$$\phi_{\mathcal{H}_1}(x) = \phi_{\mathcal{H}_2}(x + X(t)). \quad (1.1)$$

En este capítulo abandonamos el subíndice que indica en que espacio vive el campo porque solo haremos uso del campo en \mathcal{H}_2 . También dejamos de mostrar la dependencia temporal de las variables colectivas.

¹suponemos que los sistemas son integrables. Por lo tanto, se puede usar el método de Bohr-Sommerfeld para cuantificar el sistema.

El lagangiano en este espacio es[34]

$$L = \int (\dot{\phi}(x+X)p(x+X) + \Pi\dot{X} - H). \quad (1.2)$$

El hamiltoniano en este espacio se define

$$H = \int \dot{\phi}(x+X)\dot{p}(x+X) + \Pi\dot{X} - L = \frac{1}{2} \int \{p^2(x+X) + \phi'^2(x+X) + V(\phi(x+X))\}. \quad (1.3)$$

De ahora en más toda función que no muestre un argumento explícito sera considerada función de $x+X$.

Como consecuencia de las propiedades de las transformaciones de Legendre el hamiltoniano no depende de la variable \dot{X} . Esto significa que el hamiltoniano no tiene información de la dinámica de la variable X . Esto es de esperarse porque en el espacio \mathcal{H}_1 el hamiltoniano también es independiente de X .

En cambio, la dinámica de los campos dada por los corchetes de Poisson depende de la variable \dot{X} [34]

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \{\phi, H\} - \dot{X}\{\phi, f\} \\ \dot{p} &= \{p, H\} - \dot{X}\{p, f\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Donde

$$f = (P - \Pi) \quad (1.5)$$

es el vínculo que se obtiene de la definición del conjugado de

$$\Pi \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{X}}. \quad (1.6)$$

La dinámica de una función arbitraria definida en este espacio es[34]

$$\dot{M} = \{M, H\} - \dot{X}\{M, (P - \Pi)\}. \quad (1.7)$$

En todos los casos la evolución temporal depende de la velocidad colectiva que aun no ha sido determinada. Para hacerlo imponemos la condición que la función de gauge se anule a todo tiempo

$$G(\hat{q}, \hat{p}, X, \dot{X}) = 0. \quad (1.8)$$

Para que (1.8) se cumpla para todo tiempo debe satisfacerse

$$\dot{G} = \{G, H\} - \dot{X}\{G, f\} = 0. \quad (1.9)$$

La función de gauge puede tomar cualquier forma mientras que no conmute con el vínculo f . Esto nos permite expresar a \dot{X} en forma unívoca como función de los corchetes del gauge con el hamiltoniano y el vínculo. Con una elección apropiada del gauge podemos asignarle el valor a \dot{X} que represente nuestro sistema. Como caso especial,

$$G = X \quad (1.10)$$

implica que $\dot{X} = 0$ porque el conmutador de (1.10) con el hamiltoniano se anula. Con este gauge recuperamos la dinámica de los campos en \mathcal{H}_1 . Reemplazando el valor de \dot{X} en (1.7) obtenemos los corchetes de Dirac[34]

$$\dot{M} \equiv \{M, H\}_D = \{M, H\} - \{M, f\} \frac{1}{\{G, f\}} \{G, H\}. \quad (1.11)$$

La transformación

$$T(\alpha(t)) = \exp(\alpha(t)\{f, \}) \quad (1.12)$$

deja invariante al lagrangiano.

Esta transformación hace una translación global de los puntos intrínsecos generada por P

$$x \rightarrow x + \alpha(t), \quad (1.13)$$

y esta acompañada de una translación apropiada del sistema intrínseco generada por $-\Pi$

$$X_o \rightarrow X_o - \alpha(t). \quad (1.14)$$

Las magnitudes físicas quedan idénticas ante una transformación de gauge porque la descripción de una magnitud física definida en \mathcal{H}_1 no puede ser afectada por las variables introducidas para definir a \mathcal{H}_2 .

La transformación (1.12) implica que la misma dinámica puede ser descripta desde sistemas intrínsecos que se mueven con distintas velocidades. O sea que podemos formar la clase de equivalencia de las infinitas trayectorias que describen la misma dinámica pero que pertenecen a sistemas intrínsecos que se mueven con distintas velocidades. Las transformaciones de gauge (1.12) son las responsables de generar a partir de una trayectoria las restantes de su clase. De todas estas trayectorias elegimos aquella que corresponde al sistema intrínseco cuya velocidad esta determinada. Esto lo hacemos con la elección de gauge. Entonces, al fijar el gauge elegimos un miembro de la clase.

En un tratamiento cuántico la imposición que las magnitudes físicas queden invariante ante la acción del vínculo es reemplazada por[34]

$$f|phys\rangle = 0 \quad (1.15)$$

$$[f, O_{phys}] = 0. \quad (1.16)$$

Entonces consideramos como estados físicos a aquellos estados que quedan invariante ante la acción del generador. Los operadores físicos se definen como aquellos operadores que también quedan invariantes ante tal transformación.

Como vimos, en este espacio, la dinámica se determina con los corchetes de Dirac en vez de ser determinada por los corchetes de Poisson. En un tratamiento cuántico los corchetes se reemplazan por conmutadores. Sin embargo los corchetes de Dirac presentan dificultades cuando el corchete de Poisson entre el vínculo y el gauge es función de alguna

variable en vez de ser un escalar. Para entender el porque expresamos al vínculo en término de las fluctuaciones y de Π

$$f = \int \phi'_c \hat{p} + \int \hat{p} \hat{q}' - \Pi. \quad (1.17)$$

Vemos que el vínculo tiene hasta términos bilineales en las fluctuaciones. El gauge más comodo para tabajar es el rígido

$$G = \frac{1}{M} \int \phi'_c \hat{q}. \quad (1.18)$$

Por gauge rígido nos referimos al gauge que solo depende de las variables espúreas, y por lo tanto no tiene modos reales que conmutan con el vínculo lineal. Se puede ver que este es el caso del gauge en (1.18) debido a que ϕ'_c es proporcional a ψ_1 . Al integrar en dx todos los modos físicos que son ortogonales a ψ_1 desaparecen y solo queda aquel proporcional a ψ_1 .

El conmutador entre f y \hat{G} es

$$i[f, \hat{G}] = 1 + \frac{1}{M} \int \phi'_c \hat{q}'. \quad (1.19)$$

Entonces, El corchete de Dirac entre dos funciones arbitrarias β y γ es

$$\begin{aligned} [\beta, \gamma]_D = & [\beta, \gamma] - [\beta, f] \frac{1}{1 + \frac{1}{M} \int \phi'_c \hat{q}'} [\gamma, \hat{G}] \\ & + [\gamma, f] \frac{1}{1 + \frac{1}{M} \int \phi'_c \hat{q}'} [\beta, \hat{G}] \end{aligned} \quad (1.20)$$

Las expresiones que aparecen en el denominador dependen de los operadores de creación y destrucción a_n^\dagger y a_n . Entonces, al no conocer sus inversas tampoco podemos conocer la inversa de (1.19). Como alternativa se puede expandir los denominadores en potencias de M . De esta manera el primer término de esta expansión es constante y de $\mathcal{O}(1)$. El siguiente término es proporcional a las fluctuaciones y de $\mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}})$. En principio este último término no puede ser descartado por ser de menor orden. Mucha de la dinámica colectiva se pierde si hacemos esta aproximación. Esta afirmación puede demostrarse teniendo en cuenta estos términos en forma aproximada.

La forma aproximada de tratar este término se debe a Gervais et. al.[3]. Los autores introducen una transformación en el espacio \mathcal{H}_2 que les permite llevar el vínculo a la forma lineal en las fluctuaciones. La transformación fue hecha de forma más elegante y sencilla por Tomboulis[5]. Esto le permitió a Tomboulis hacer un tratamiento a la Dirac sin exponenciar la unidad en término de las variables colectivas como lo hicieron Gervais et. al.

La transformación se escribe[5]

$$p = p_t - \left\{ \Pi + \int \hat{p}_t \hat{q}', \frac{\phi'_c}{M + \int \phi'_c q'} \right\}. \quad (1.21)$$

Con esta transformación el vínculo efectivo queda

$$f_{eff} = \int \phi'_c \hat{p}_t. \quad (1.22)$$

Los autores de esta transformación modifican las reglas de conmutación y piden que

$$[\hat{p}_t(x), \hat{q}(y)] = \delta(x - y). \quad (1.23)$$

Esto no es correcto. Solo es una aproximación porque

$$\hat{p}_t = \hat{p} - \Pi + \int \hat{p} \hat{q}' + \mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}}). \quad (1.24)$$

Esto implica que la relación de conmutación entre \hat{q} y \hat{p}_t es

$$[\hat{p}_t(x), \hat{q}(y)] = \delta(x - y) + \mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}}). \quad (1.25)$$

En evidente contradicción con (1.23). Ergo, las nuevas reglas de conmutación entre \hat{p} y \hat{q} es una aproximación. Sin embargo, solo cuando hacemos uso de

$$[\Pi, X] = 1 \quad (1.26)$$

con (1.23) obtenemos

$$i[p(x), \phi(y)] = \delta(x - y). \quad (1.27)$$

Entonces, esta transformación no es canónica porque es necesario implementar la aproximación (1.23) para que se verifique (1.27). Esta es la aproximación que aparece en todos los tratamientos que solo hacen uso del espacio \mathcal{H}_2 y equivale a transformar al determinante de Faddeev-Popov en un escalar. Como veremos, esta aproximación da resultados que coinciden con los obtenidos por el tratamiento BRST solo hasta $\mathcal{O}(\frac{\pi^2}{M^2})$. A $\mathcal{O}(\frac{\pi^2}{M^3})$ se encuentran las diferencias entre ambos tratamientos. La solución sin uso de coordenadas colectivas para este modelo no se conoce. Resulta difícil saber en este modelo cual de los dos tratamientos es el que falla primero en dar la descripción acertada. Como veremos el método BRST no hace uso de aproximaciones como las hechas en esta parte (ver ec.(1.23)) porque este resultado equivale a exponenciar el determinante de Faddeev-Popov. Suponemos que esta es la razón por la cual la descripción en \mathcal{H}_2 no es correcta a todo orden. Pero nos afanzamos en el modelo "MOBOL" presentado al final del siguiente capítulo. El MOBOL es el modelo de una partícula que se mueve con dos grados de libertad bajo las fuerzas de un potencial con forma de sombrero mexicano. La solución semiclásica se conoce en forma exacta al utilizar coordenadas cilíndricas. El modelo puede tratarse en \mathcal{H}_2 y en \mathcal{H}_4 cuando se utilizan coordenadas cartesianas. En el espacio \mathcal{H}_4 se puede aplicar el formalismo BRST. El vínculo que se genera al trabajar con coordenadas cartesianas es bilineal como lo es f . Como veremos, el resultado BRST coincide con el exacto a $\mathcal{O}(\text{momento colectivo}^2 / (\text{parametro semiclásico})^6)$. Recordamos que el parametro semiclásico en nuestro caso es el campo clásico el cual es de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$.

La transformación nos permite escribir al corchete de Poisson entre el gauge y el vínculo como

$$i[\hat{f}, \hat{G}] = i\left[\int \phi'_c \hat{p}_t, \frac{1}{M} \int \phi'_c \hat{q}\right] = 1. \quad (1.28)$$

Sin embargo, la dinámica sigue siendo regida por el corchete de Dirac. Haciendo uso de la ec. (1.11) es fácil ver que este corchete entre el vínculo y el gauge se anula. A nivel cuántico el conmutador de Dirac también se anula. O sea que el modo cero ya no tiene más dinámica. También se puede ver que ya no existe más incerteza en el sector espúreo y entonces podemos imponer a tiempos iguales el gauge y el vínculo. Esto es[5]

$$f = \int \phi'_c \hat{p}_t = 0 \quad (1.29)$$

$$\hat{G} = \frac{1}{M} \int \phi'_c \hat{q} = 0. \quad (1.30)$$

Entonces, el modo de energía cero desaparece de \hat{q} y de \hat{p}_t , y por lo tanto del problema.

Con el uso de esta transformación el hamiltoniano queda escrito[3]

$$\begin{aligned} \hat{H}_D &= \hat{H}_c + \hat{H}_o + \hat{H}_{coup} + \hat{H}_{res}, \\ \hat{H}_c &= M, \\ \hat{H}_o &= \frac{1}{2} \int \hat{p}_t^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}'^2 + \frac{1}{2} \int \hat{V}_2 \hat{q}^2 \\ \hat{H}_{coup} &= \frac{\Pi^2}{2M} - v^2 \int \phi'_c \hat{q}' - v \int \hat{p}_t \hat{q} + \frac{3v^2}{2M} \left(\int \phi'_c \hat{q}'\right)^2 + \dots \\ \hat{H}_{res} &= \sum_{i>2} \int \hat{q}^i \hat{V}_i - \frac{\int \psi_1'^2}{8M} + \frac{(\int \hat{p}_t \hat{q})^2}{8M} + \dots \end{aligned} \quad (1.31)$$

Donde

$$v = \frac{\Pi}{M} \quad (1.32)$$

El primer término, \hat{H}_c , lo presentamos en el espacio \mathcal{H}_1 . Describe en el límite adiabático la dinámica del barión. Tanto en \mathcal{H}_1 como en \mathcal{H}_2 cuando el barión se mueve con momento Π , la energía del barión debe variar como la segunda componente de un bivector² porque el hamiltoniano es covariante ante transformaciones de Lorentz. El primer término no adiabático de la expansión de la energía es la energía cinética no relativista (galileana). En \mathcal{H}_1 no podemos conjeturar que la corrección a la energía se comporte de tal manera debido a la existencia del modo cero que nos impide hacer un tratamiento perturbativo. Sin embargo, en \mathcal{H}_2 , donde hemos tratado en forma aproximada la contribución de este modo, el primer término no adiabático es el primer término de \hat{H}_{coup} . Los siguientes ordenes no adiabáticos de la expansión de la energía cinética deben surgir del tratamiento perturbativo de los restantes términos del hamiltoniano del acoplamiento intrínseco-colectivo, \hat{H}_{coup} .

²recordamos que estamos trabajando en 1 + 1 dimensiones.

También presentamos en la sección anterior el hamiltoniano que describe la dinámica a $\mathcal{O}(1)$ de las fluctuaciones mesónicas \hat{H}_0 . O sea que en ambos espacios \mathcal{H}_1 y \mathcal{H}_2 la dinámica de los mesones es la misma para los modos reales a este orden. El modo espúreo ha desaparecido del hamiltoniano cuadrático en \mathcal{H}_2 . El hecho de que este modo no posea dinámica es la razón por la cual en este espacio no existen divergencias infrarrojas.

Al orden siguiente, $\mathcal{O}(M^{-1})$, también hay diferencias. El modo cero de \mathcal{H}_1 se ha transformado no solo para dar lugar al acoplamiento intrínseco colectivo sino también para dar lugar al segundo y tercer término en el hamiltoniano residual. El segundo término no depende de las fluctuaciones y solo contribuye en primer orden de teoría de perturbaciones y sale del ordenamiento normal del momento. Habiendo presentado el hamiltoniano en \mathcal{H}_2 , en la siguiente sección nos proponemos realizar un tratamiento de los términos perturbativos.

2.2 El tratamiento perturbativo

En \mathcal{H}_1 la ruptura de simetría translacional del vacío con topología uno trae como consecuencia la existencia de un modo de energía cero en el hamiltoniano que describe las fluctuaciones alrededor de dicho vacío. Al intentar hacer una expansión perturbativa en M de los términos residuales del hamiltoniano encontramos divergencias infrarrojas. Recurriendo a un espacio de mayor dimensión pudimos definir un hamiltoniano efectivo que es equivalente (en este nuevo espacio) al hamiltoniano en el espacio original. En el espacio \mathcal{H}_2 donde la dinámica se rige por los corchetes de Dirac tanto el vínculo como el gauge conmutan. Entonces podemos imponerlos simultáneamente. Con este hamiltoniano efectivo pudimos desacoplar el modo cero y darle masa. Logramos de esta manera deshacernos de las divergencias infrarrojas al hacer un tratamiento perturbativo. Las desventajas que se deben afrontar por evitar las divergencias infrarrojas son tener que trabajar con más variables dinámicas que las del sistema original y también tener un mayor número de términos en el hamiltoniano perturbativo ($\hat{H}_{coup} + \hat{H}_{res}$). Este último punto implica que encontraremos un número mayor de diagramas en el tratamiento en \mathcal{H}_2 que en el tratamiento en \mathcal{H}_1 . Nos concentramos primero con los términos del acoplamiento intrínseco-colectivo para estudiar las correcciones dinámicas a la masa del solitón. Luego incluimos los términos residuales para obtener correcciones de orden superior a la masa dinámica $\mathcal{O}(1)$. Lo hacemos tanto para el vacío como para el estado de un mesón real sobre el vacío. Como veremos más adelante a este orden los resultados que obtendremos tienen divergencias ultravioleta que pueden ser tratadas con renormalización. La renormalización también puede ser hecha dentro del espacio \mathcal{H}_2 . Pero no puede llevarse a cabo sin hacer uso de un potencial particular. Por eso primero derivamos las correcciones a magnitudes físicas para potenciales arbitrarios. Finalmente, calculamos la corrección al elemento de matriz del campo ϕ , una magnitud física en el sentido de (1.16) que no es

invariante translacional como lo es el hamiltoniano, entre un vacío con momento Π y un estado de un mesón real sobre un vacío con momento $\Pi' \neq \Pi$.

Como advertimos en la sección anterior, la primer corrección a la masa estática del barión es la que se espera en el límite de bajos momentos colectivos. Avanzamos un orden mas. Para esto nos hace falta considerar solo el segundo de los términos de \hat{H}_{coup} en (1.31). La razón es que este es el único término que puede contribuir al orden que estamos interesados, $\mathcal{O}(\frac{\Pi^4}{M^3})$. Este término no tiene valor de expectación y por lo tanto no da lugar a una corrección a primer orden en teoría de perturbaciones. A segundo orden el término espúreo da una contribución que aparece en la figura 1.



Figura 1

El símbolo \square indica que el vértice es de orden $\mathcal{O}(\frac{\Pi^2}{M^3})$. Cuando este valor es agregado al primer término de \hat{H}_{coup} en (1.31) obtenemos como corrección a la masa dinámica del solitón[3]

$$\delta E_{din}^{(2)} = \frac{\Pi^2}{2M} - \frac{\Pi^4}{8M^3}. \quad (2.33)$$

Es facil ver, como hemos dicho, que esta corrección corresponde a los primeros dos términos no adiabáticos de la expansión de la energía relativista del barión

$$E = \sqrt{M^2 + \Pi^2}. \quad (2.34)$$

El tercer término de esta expansión aparece recién al considerar tercer y cuarto orden en teoría de perturbaciones. A este orden los diagramas que contribuyen salen de la combinación del segundo, tercer y cuarto término en el acoplamiento intrínseco-colectivo en (1.31) y del término cúbico las fluctuaciones encontrado también en \mathcal{H}_1 . Los diagramas son todos topológicamente equivalentes a los diagramas que aparecen en la figura 2.

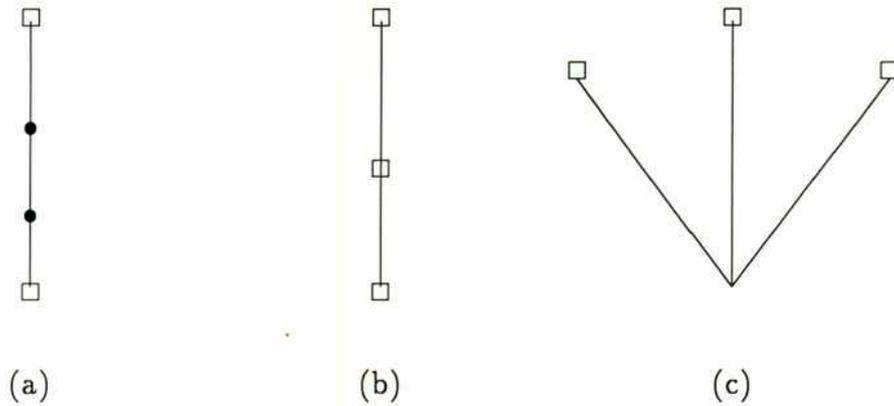


Figura 2

Aquí los vértices con el símbolo \bullet son de $\mathcal{O}(v)$ mientras que los vértices que no llevan símbolo o llevan el símbolo \times son de $\mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}})$. El valor de los diagramas es

$$\delta E_{din}^{(4)} = \frac{1 \Pi^6}{16 M^5} \tag{2.35}$$

Por supuesto este valor corresponde al tercer término obtenido de la expansión de la energía relativista (2.34).

Hasta aquí hemos hecho solo correcciones dinámicas a la masa del solitón de $\mathcal{O}(M)$. Sin embargo también existen contribuciones a la masa dinámica del solitón a $\mathcal{O}(1)$. Para obtener estas correcciones debemos considerar diagramas que son el producto de vértices del término de acoplamiento y del término residual en \hat{H}_D .

Los vértices del sector espúreo en \hat{H}_{res} junto con los vértices de \hat{H}_{coup} dan la primera corrección no adiabática de la masa dinámica a $\mathcal{O}(1)$, o sea la energía a $\mathcal{O}(\frac{\Pi^2}{M^2})$. Los diagramas de segundo orden en teoría de perturbaciones estan listados en la figura 3.

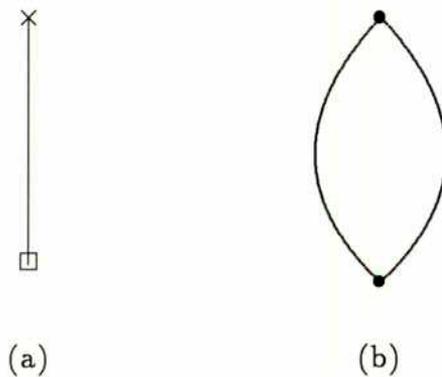


Figura 3

El valor de estos diagramas es

$$\delta E_{vac}^{(2)} = -\frac{v^2}{4} \sum_{n,m} B_{m,n}^2 \left(\frac{1}{\omega_n} - \frac{2}{\omega_n + \omega_m} \right) + \frac{v^2 \sqrt{M}}{4} \sum_{n,m} \int \hat{V}_3 \psi_n \frac{A_n |\psi_m|^2}{\omega_m \omega_n^2} \quad (2.36)$$

donde hemos hecho uso de las integrales (reales)

$$A_n \equiv i \int \psi_1' \Psi_n ; \quad B_{nm} \equiv i \int \Psi_n' \Psi_m \quad (2.37)$$

También debemos incluir los valores de expectación que contribuyen a primer orden en teoría de perturbaciones. Esto es

$$\frac{\langle (\int \hat{p}_t \hat{q})^2 \rangle}{8M} - v^2 \langle (\int \psi_1 \hat{q}')^2 \rangle = \frac{1}{16M} \sum_{n,m} \frac{(\omega_n - \omega_m)^2}{\omega_n \omega_m} B_{nm}^2 + \sum_n \frac{3v^2 A_n^2}{4\omega_n} \quad (2.38)$$

La corrección a la energía del estado fundamental que viene del sector espúreo es al considerar también el segundo término en \hat{H}_{res}

$$\Delta E_{sp,\Pi} = -\frac{1}{8M} \int (\psi_1')^2 + \frac{1}{16M} \sum_{n,m} \frac{(\omega_n - \omega_m)^2}{\omega_n \omega_m} B_{nm}^2 - \frac{\Pi^2}{2M} \frac{1}{2M} \sum_n \omega_n \quad (2.39)$$

Vemos que la corrección a la energía dinámica en (2.39) verifica que [3]

$$E_{vac}(\Pi) = E_{vac}(0) + \frac{\Pi^2}{2E_{vac}(0)} + \dots \quad (2.40)$$

donde

$$E_{vac}(0) = M + \frac{1}{2} \sum_n \omega_n \quad (2.41)$$

es la masa del solitón a $\mathcal{O}(1)$. Entonces, vemos que la masa a este orden es covariante ante transformaciones de Lorentz infinitesimales (Π pequeño.)

Obviamente también hay una contribución del sector real. Esta está presente aun cuando el sector espúreo no es tratado y viene del sector real de los términos V_3 and V_4 en el hamiltoniano residual. Los diagramas que se obtienen estan listados en la figura 4.

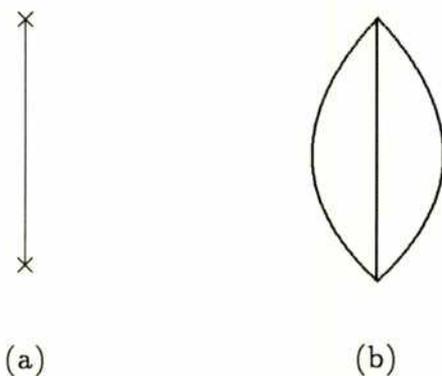


Figura 4

Entonces la contribución del sector real a la corrección de la energía es

$$\Delta M_r = \frac{1}{32} \sum_{n,m} \frac{W_{n\bar{n}m\bar{m}}}{\omega_m \omega_n} - \frac{1}{32} \sum_n \frac{1}{\omega_n^2} \left(\sum_m \frac{W_{nm\bar{m}}}{\omega_m} \right)^2 - \frac{1}{48} \sum_{n,m,l} \frac{W_{nlm}^2}{\omega_n \omega_m \omega_l (\omega_n + \omega_m + \omega_l)} \quad (2.42)$$

donde

$$W_{nlm} \equiv i \int V_3 \psi_n \psi_m \psi_l ; \quad W_{nlmk} \equiv \int V_4 \psi_n \psi_m \psi_l \psi_k. \quad (2.43)$$

Entonces, la corrección a la energía del vacío a $\mathcal{O}(M^{-1})$ y a $\mathcal{O}(\frac{\Pi^2}{M^2})$ es

$$E_{vac} = \Delta M_r = \frac{1}{32} \sum_{n,m} \frac{W_{n\bar{n}m\bar{m}}}{\omega_m \omega_n} - \frac{1}{32} \sum_n \frac{1}{\omega_n^2} \left(\sum_m \frac{W_{nm\bar{m}}}{\omega_m} \right)^2 - \frac{1}{48} \sum_{n,m,l} \frac{W_{nlm}^2}{\omega_n \omega_m \omega_l (\omega_n + \omega_m + \omega_l)} - \frac{1}{8M} \int (\psi'_1)^2 + \frac{1}{16M} \sum_{n,m} \frac{(\omega_n - \omega_m)^2}{\omega_n \omega_m} B_{nm}^2 - \frac{\Pi^2}{2M} \frac{1}{2M} \sum_n \omega_n. \quad (2.44)$$

En forma similar se puede obtener una corrección a la energía de un mesón n sobre el vacío de un solitón. Los diagramas que se logran con estos vértices están listados en la figura 5.

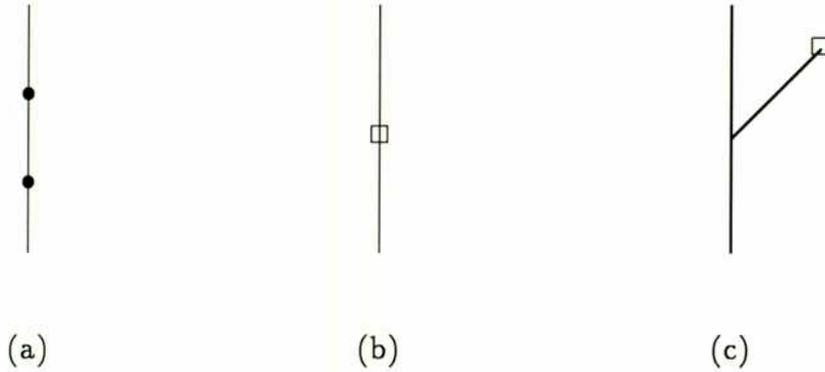


Figura 5

La corrección del sector espúreo a esta energía sobre el vacío de un solitón es

$$E_{es} = -\frac{\Pi^2}{2M^2} \omega_n. \quad (2.45)$$

También hay una contribución a primer orden en teoría de perturbaciones que corrige la masa estática a $\mathcal{O}(M^{-1})$. El diagrama está en la figura 5'



Figura 5'

y su valor es

$$E_{es} = \sum_m \frac{B_{m,n}^2 \omega_m^2 + \omega_n^2}{4M \omega_n \omega_m}. \tag{2.46}$$

El sector real contribuye con los diagramas de la figura 6

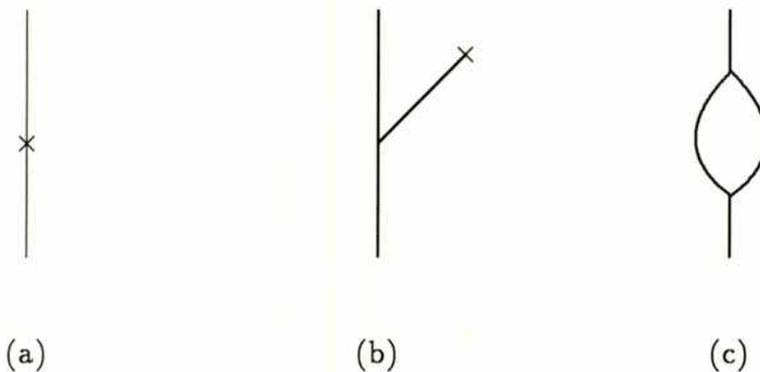


Figura 6

Vemos que el último término en (2.45) nos permite afirmar que

$$E_n(\Pi) = E_n(0) + \frac{\Pi^2}{2E_n(0)} + \dots \tag{2.47}$$

donde

$$E_n(0) = M + \omega_n + \frac{1}{2} \sum_m \omega_m \tag{2.48}$$

es la masa de un mesón n sobre el solitón a $\mathcal{O}(1)$.

La corrección del sector real es

$$E_n^{re} = \sum_{m,n} \frac{|\int V_3 \psi_l \psi_m \psi_n|^2}{4\omega_n \omega_m (\omega_n^2 - (\omega_l + \omega_m)^2)} - \frac{\int V_3 |\psi_n|^2 \psi_m \int V_3 |\psi_l|^2 \psi_m^*}{8\omega_n \omega_m^2 \omega_l}. \tag{2.49}$$

Entonces la corrección de ambos sectores es

$$E_n = \sum_{m,n} \frac{|\int V_3 \psi_l \psi_m \psi_n|^2}{4\omega_n \omega_m (\omega_n^2 - (\omega_l + \omega_m)^2)} - \frac{\int V_3 |\psi_n|^2 \psi_m \int V_3 |\psi_l|^2 \psi_m^*}{8\omega_n \omega_m^2 \omega_l} + \sum_m \frac{B_{m,n}^2}{4M} \frac{\omega_m^2 + \omega_n^2}{\omega_n \omega_m} - \frac{\Pi^2}{2M^2} \omega_n. \quad (2.50)$$

Al calcular la corrección a la energía el operador sobre el cual hacemos la corrección perturbativa, el hamiltoniano, posee invariancia translacional. También es posible hacer correcciones sobre magnitudes físicas que no poseen tal invariancia. Tomamos como ejemplo de esta clase de operadores al operador campo. Calculamos el elemento de matriz de ϕ entre el estado de un bosón real n sobre un vacío con momento Π y otro vacío con momento Π' . Debido a la diferencia de momentos colectivos entre los estados que utilizamos para evaluar el campo habrá un conjunto de diagramas desconectados que darán lugar a una contribución distinta de cero. Estos diagramas que no contribuyen para el caso en que los momentos colectivos son iguales son una excepción del teorema de Goldstone.

Si tomamos al operador $\phi = \phi(x + X)$ podemos interpretar que para operadores físicos la distancias se miden desde el sistema de referencia del laboratorio. Esta dependencia en la coordenada colectiva del operador campo garantiza que cualquier funcional de este operador conmute con el vínculo f y como consecuencia de esto tal funcional sea física. La integración sobre las coordenadas colectivas da el operador de transición en [3]

$$\phi_{eff} = \frac{1}{2\pi} \int dX e^{i(\Pi - \Pi')X} \phi(x + X) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\Pi' - \Pi)x} * (\bar{\phi}_c \sum_n \frac{i}{\sqrt{2\omega_n}} (\bar{\psi}_n a_n - \bar{\psi}_n^* a_n^+)) \quad (2.51)$$

donde la transformada de Fourier del campo clásico la escribimos con una barra ($\bar{\Phi} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Phi(x) \exp[i(\Pi - \Pi')x]$). Los diagramas que contribuyen al sector espúreo están listados en la figura 7. La contribución de este sector al elemento de matriz es

$$\begin{aligned} < \Pi'; n_n = 0 | \phi_{eff} | \Pi; n_n = 1 >_{sp, \Pi} = \frac{i}{M\sqrt{2\omega_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\Pi' - \Pi)x} * \\ & \left(\frac{1}{8\omega_n^2} \bar{\psi}_n \sum_m \frac{\omega_n^2 - \omega_m^2}{\omega_m} B_{mn}^2 + \frac{1}{2} \sum_m \sum_{l \neq n} \frac{\omega_n^2 + \omega_m^2}{\omega_m (\omega_n^2 - \omega_l^2)} B_{mn} B_{ml} \bar{\psi}_l - \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \sum_m \frac{1}{\omega_m} A_m B_{mn} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\sqrt{M}}{4} \bar{\psi}_1 \sum_m \frac{1}{\omega_m^2} B_{mn} \sum_l \frac{1}{\omega_l} W_{ml} - \frac{\sqrt{M}}{2} \bar{\psi}_1 \sum_{m,l} \frac{1}{\omega_m [\omega_n^2 - (\omega_m + \omega_l)^2]} B_{ml} W_{ml} \right. \\ & \quad \left. + (\Pi + \Pi') \left(\frac{1}{\omega_n} A_n \bar{\psi}_1 + \sum_m \frac{\omega_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2} B_{mn} \bar{\psi}_m \right) + \frac{1}{2} (\Pi - \Pi') \sum_m \frac{\omega_n^2 + \omega_m^2}{\omega_m (\omega_n^2 - \omega_m^2)} B_{mn} \bar{\psi}_m \right) \end{aligned} \quad (2.52)$$

El sector real contribuyen solo a través de los diagramas (c), (d) y (h) de la figura 7. Esta contribución es

$$\begin{aligned} < \Pi'; n_n = 0 | \phi_{eff} | \Pi; n_n = 1 >_r = \frac{i}{\sqrt{2\omega_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\Pi' - \Pi)x} * \\ & \left(-\frac{1}{16\omega_n^2} \bar{\psi}_n \sum_m \frac{1}{\omega_m} W_{m\bar{m}n\bar{n}} + \frac{1}{4} \sum_{l \neq n} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega_l^2)} \bar{\psi}_l \sum_m \frac{1}{\omega_m} W_{m\bar{m}nl} \right) \end{aligned} \quad (2.53)$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{16\omega_n^2} \bar{\psi}_n \sum_m \frac{1}{\omega_m^2} W_{n\bar{n}m} \sum_k \frac{1}{\omega_k} W_{k\bar{k}m} - \frac{1}{4} \sum_{l \neq n} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega_l^2)} \bar{\psi}_l \sum_m \frac{1}{\omega_m^2} W_{n\bar{l}m} \sum_k \frac{1}{\omega_k} W_{k\bar{k}m} \\
 & - \frac{1}{8\omega_n^2} \bar{\psi}_n \sum_{m,l} \frac{3\omega_n^2 - (\omega_l + \omega_m)^2}{\omega_m [\omega_n^2 - (\omega_l + \omega_m)^2]^2} W_{\bar{n}lm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq n} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega_k^2)} \bar{\psi}_k \sum_{m,l} \frac{1}{\omega_m [\omega_n^2 - (\omega_l + \omega_m)^2]} W_{\bar{n}lm} W_{\bar{k}lm} \Big).
 \end{aligned}$$

Como vemos, la magnitudes físicas que no poseen la invariancia translacional pero que son físicas también pueden ser corregidas.

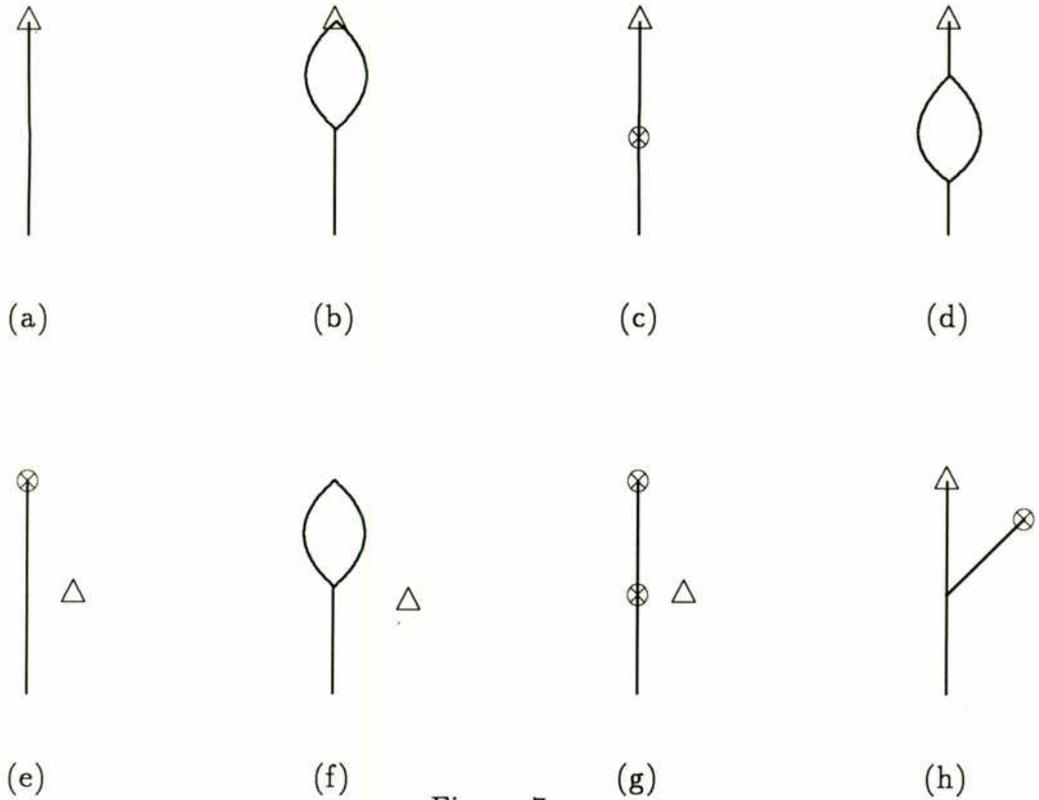


Figura 7

En la figura 7 el símbolo Δ representa al operador campo. El símbolo \otimes representa vértices de $\mathcal{O}(M^{-n})$, $n = 1, \frac{1}{2}$ y de $\mathcal{O}(v)$ y $\mathcal{O}(\frac{\Pi^2}{M^{\frac{3}{2}}})$.

2.3 Renormalización

Como hemos anunciado, las correcciones a la energía de ambos sectores topológicos tienen divergencias ultravioletas. Estas divergencias fueron corregidas con el uso de teoría de renormalización. El primer paso fue llevado a cabo por Dashen et. al.[2] en el modelo ϕ^4 . Ellos lograron deshacerse de las divergencias lineales que surgen del ordenamiento normal de hamiltoniano cuadrático teniendo en cuenta un contratérmino y mediando la energía del sector topológico uno respecto del otro sector. En este trecho los modos espúeos no

aparecen, aun cuando no se hace uso de algún formalismo para tratarlo. Al ser sumatorias de funciones lineales en la energías el modo cero no contribuye por definición. El segundo paso fue hecho por Gervais et. al. [3] a un loop, también para el mismo modelo. Ellos si se vieron forzados a utilizar un método para tratar las divergencias infrarrojas. De vuelta, midiendo las energías de un sector respecto del otro logran un resultado finito. La renormalización a dos loops fue realizada por De Vega[16] para el modelo de Sine-Gordon. El utilizó el método de Dirac para tratar el sector espúreo. Nuevamente hace uso del mismo contratérmino para renormalizar ambos sectores y luego, al comparar las energías, verifica que su resultado es finito. En ambos casos a uno y dos loops, debido a los ordenes buscados, se necesita relacionar el potencial cuyas derivadas respecto del campo aparece en los términos perturbativos con el contratérmino. La razón siendo que buscamos magnitudes finitas.

Elegimos, el modelo ϕ^4 para renormalizar a dos loops. El potencial del modelo ϕ^4 donde la masa de las fluctuaciones esta normalizada a $\sqrt{2}$ es [3]

$$V(\phi) = -\frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{4\lambda}\phi^4 + \frac{1}{4}\lambda^2. \quad (3.54)$$

Como solo podemos medir diferencias de energía respecto del vacío total debemos primero estudiar el sector topológico cero. En este sector el campo toma el valor $\phi = \lambda \in \mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$ y entonces $V(\phi) = 0$. Debido a la minimización no existen términos lineales. El campo tiene simetría translacional y entonces el hamiltoniano cuadrático

$$\hat{H}_o^{B=0} = \frac{1}{2}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}\hat{q}'^2 + \hat{q}^2 \quad (3.55)$$

no tiene modo cero. Los modos normales de las fluctuaciones que llevan este hamiltoniano a la forma diagonal se asocia con ondas planas

$$\psi_k = N_k e^{ikx} = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ikx} \quad (3.56)$$

que poseen buen momento lineal k y autovalores $\omega_k = \sqrt{k^2 + 2}$. O sea que las partículas tienen masa $\sqrt{2}$. L es el largo del segmento al cual esta acotado el movimiento de las partículas. Las fluctuaciones en términos de los modos normales se escriben

$$\hat{q} = \sum_k \frac{i}{\sqrt{2\omega_k}} (\psi_k a_k - \psi_k^* a_k^\dagger) \quad (3.57)$$

$$\hat{p} = \sum_k \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} (\psi_k a_k + \psi_k^* a_k^\dagger). \quad (3.58)$$

El hamiltoniano residual son los términos cúbicos y cuárticos. Se escribe

$$\hat{H}_{res}^{B=0} = \hat{H}_{(3)}^{B=0} + \hat{H}_{(4)}^{B=0} \quad (3.59)$$

$$\hat{H}_{(3)}^{B=0} = \frac{1}{\lambda} \hat{q}^3 \quad (3.60)$$

$$\hat{H}_{(4)}^{B=0} = \frac{1}{4\lambda} \hat{q}^4. \quad (3.61)$$

El vértice generado por esta interacción que da lugar a una corrección divergente a segundo orden en teoría de perturbaciones es el de la figura 8



Figura 8

El valor del vértice 8 es

$$(8) = -\frac{3i\delta_{k_1}}{\lambda\sqrt{2\omega_{k_1}}L} \int_0^\Lambda \frac{dk}{2\pi\omega_k} \quad (3.62)$$

El término cuártico contribuye una cantidad divergente a $\mathcal{O}(\lambda^{-2})$ a través de su valor de expectación ³

$$\langle \hat{H}_{(4)}^{B=0} \rangle = \frac{3}{4\lambda^2} \left\{ \int_0^\Lambda \frac{dk_1}{(2\pi)\omega_{k_1}} \right\}^2. \quad (3.64)$$

Para cancelar las divergencias agregamos un contra término $\hat{H}_{\delta m^2}$ al hamiltoniano

$$\hat{H}_{\delta m^2}^{B=0} = -\frac{\delta m^2}{2}(\phi^2 - \lambda^2) \quad (3.65)$$

donde

$$\delta m^2 = \frac{3}{2\pi\lambda^2} \int_0^\Lambda \frac{dk}{\omega_k}. \quad (3.66)$$

En el sector con número topológico nulo el contra término escrito en términos de las fluctuaciones queda

$$\hat{H}_{\delta m^2}^{B=0} = -\frac{\delta m^2}{2}(2\lambda\hat{q} + \hat{q}^2). \quad (3.67)$$

³Aquí hemos hecho el paso de sumatorias sobre el índice k a integrales sobre el elemento dk . En el sector $B = 0$ donde hacemos uso de ondas planas este paso es sencillo. La suma de alguna magnitud dependiendo discretamente del momento, ser f_k , puede pasarse a la forma integral usando

$$\sum_k f_k = \int_{-\Lambda}^\Lambda \frac{dk}{2\pi} Lf(k). \quad (3.63)$$

Donde $f(k)$ es una función de k .

De este contratérmino se obtiene un vértice de $\mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}})$ que contribuye a segundo orden en teoría de perturbaciones y un valor de expectación de $\mathcal{O}(M^{-1})$ que contribuye a primer orden en teoría de perturbaciones. El vértice que contribuyen a la energía del vacío a segundo orden con una cantidad divergente esta en la figura 9.



Figura 9

Este vértice cancela al vértice de la figura 8. Por lo tanto al tener en cuenta el contratérmino no hay contribución de diagramas que poseen una sola partícula.

La contribución divergente a la energía del vacío a $\mathcal{O}(M^{-1})$ cuando se tiene en cuenta el contratérmino es

$$E_{vac}^{B=0} = -\frac{3}{4\lambda^2} \left\{ \int_0^\Lambda \frac{dk_1}{2\pi\omega_{k_1}} \right\}^2. \quad (3.68)$$

Esta magnitud es divergente logarítmicamente pero la diferencia respecto del vacío del sector con un solitón será finita.

En el sector con topología uno resulta conveniente comenzar por definir el campo clásico que minimiza el hamiltoniano.

$$\phi_c = \lambda \tanh\left(\frac{x + X_0}{\sqrt{2}}\right). \quad (3.69)$$

En este mínimo la energía a orden M es

$$E = M = \frac{2\sqrt{2}\lambda^2}{3}. \quad (3.70)$$

La energía de los modos reales son los autovalores de la ecuación de movimiento para las fluctuaciones en el sector con topología uno en el capítulo anterior. Las soluciones de esta ecuación se pueden encontrar en [17]. Estas son aparte del modo cero que ya fue definido, estados de energías positivas y un estado ligado.

Las primeras son [3]

$$\psi_n = \frac{1}{N_n} e^{ik_n x} \left\{ 3 \tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 3ik_n \sqrt{2} \tanh\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 1 - 2k^2 \right\} \quad (3.71)$$

donde

$$N_n^2 = 2L(k_n^2 + 2)(2k_n^2 + 1) - 12\sqrt{2}(k_n^2 + 1), \quad (3.72)$$

y L es el intervalo de espacio. Los autovalores de estas autofunciones son $\omega_n = \sqrt{k_n^2 + 2}$. La relación entre el número de onda en el sector con número topológico cero, k , y el número de onda en el sector con número topológico uno, k_n , viene dada por la condición de contorno periódica. Esto es

$$\frac{2\pi n}{L} = k = k_n + \frac{\delta(k_n)}{L}. \quad (3.73)$$

En (3.73) las funciones δ son los corrimientos de fase de las soluciones del sector $B = 0$ respecto de las del sector $B = 1$. Se puede ver[14] que los corrimientos de fase están relacionados con la matriz S de algún estado físico el cual representamos en segunda cuantificación.

El modo ligado de energía $\omega_0^2 = \frac{3}{2}$ con función de onda

$$\psi_0 = \frac{\sinh(\frac{x}{\sqrt{2}})}{\cosh^2(\frac{x}{\sqrt{2}})} \quad (3.74)$$

está asociado en el modelo de Skyrme a la resonancia Roper.

En el sector con topología uno utilizamos el mismo contratérmino que fue utilizado en el sector con topología trivial. Sin embargo, los vértices que se generan en el primer sector son distintos de aquellos del último sector. Esto se debe a la diferencia de los campos que minimizan cada sector. Entonces el contratérmino en el sector $B = 1$ es[3]

$$\hat{H}^{\delta m^2} = -\frac{\delta m^2}{2}(\phi_c^2 - \lambda^2 + 2\phi_c \hat{q} + \hat{q}^2). \quad (3.75)$$

Se puede verificar que este término es físico porque su conmutador de Dirac con el vínculo se anula al linealizar el vínculo. De esta interacción surge el vértice (figura 10a) que cancela la parte divergente del vértice con la misma topología de la interacción residual (figura 10b).

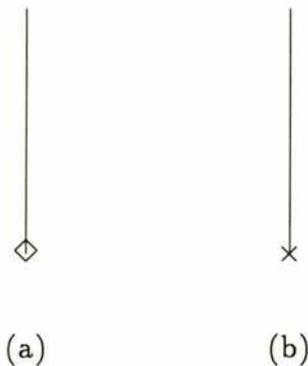


Figura 10

Los valores de estos vértices son[3]

$$(10a) = i\delta m^2 \frac{\int \psi_i^* \phi_c}{\sqrt{2\omega_l}},$$

$$(10b) = -i\delta m^2 \frac{\int \psi_i^* \phi_c}{\sqrt{2\omega_l}} - \frac{i \int V_3 \psi_n^*}{4\sqrt{2\omega_n}} \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dk_m g_m}{2\pi\omega_m}. \quad (3.76)$$

Donde

$$g_n = \frac{1}{N_n^2} \left\{ -9 \tanh^4\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) - 6 \tanh^2\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) + (-12\sqrt{2} + 4)k^2 + (-12\sqrt{2} + 3) \right\} \quad (3.77)$$

es una cantidad convergente en el límite en que $k_n \rightarrow \infty$. Por lo tanto la suma de estos vértice da lugar a un vértice que genera diagramas sin divergencias ultravioleta. Al combinar este vértice con el vértice lineal en las fluctuaciones del acoplamiento intrínseco colectivo se obtiene un diagrama que contribuye[3]

$$-\frac{1}{4}v^2\delta m^2 \int (\phi_c^2 - \lambda^2). \quad (3.78)$$

Entonces se verifica que el valor del sector clásico del contratérmino se transforma covariáblemente. El valor de expectación del contratérmino es

$$-\frac{\delta m^2}{4} \left\{ \sum_l \frac{|\psi_m|^2}{\omega_m} \right\}^2 = -\frac{\delta m^2}{4} \left\{ \int_{-\Lambda}^{\Lambda} \frac{dk g_n}{2\pi\omega_n} + \lambda^2 \frac{2\delta m^2}{3} \right\}. \quad (3.79)$$

La cual al ser sumada al valor de expectación de la interacción residual da como contribución divergente a $\mathcal{O}(M^{-1})$

$$E_{vac}^{B=1} = -\frac{3}{4\lambda^2} \left\{ \int_0^{\Lambda} \frac{dk_1}{2\pi\omega_{k_1}} \right\}^2. \quad (3.80)$$

Al comparar estas energía divergentes respecto de las del vacío con topología trivial conseguimos que las cantidades divergentes se anulen dando paso a cantidades finitas. Las divergencias ultravioletas pueden ser tratadas dentro del método de Dirac en \mathcal{H}_2 Nuevamente, el método hace uso de un mayor número de diagramas. A pesar de este inconveniente es un precio accesible si uno esta interesado en encontrar correcciones de orden superior en M .

2.4 El espacio \mathcal{H}_3 y el límite relativista

Los trabajos pioneros de mediados de los setentas [18, 3, 20, 5] centran sus esfuerzos en cuantificar solitones en $1 + 1$ solo para momentos colectivos pequeños, $\Pi \in \mathcal{O}(1)$. La suposición es que el momento del barión es mucho menor que su masa. Pero también existe el límite relativista donde el momento es del orden de la masa del solitón. Un ejemplo donde el tratamiento relativista se hace imprescindible es en scattering mesón-barión donde el barión se mueve con velocidades relativistas respecto del laboratorio. También en este límite estan las correcciones a la energía. En esta sección intetentaremos

calcular la corrección a la energía del vacío con topología uno en el límite relativista. Para esto primero describimos el espacio que nos permitirá cuantizar solitones para momentos arbitrarios. Este espacio incluye a un multiplicador de Lagrange y su conjugado. A este espacio que incluye un número mayor de variable lo llamamos \mathcal{H}_3 .

En el espacio \mathcal{H}_2 el vínculo f es un vínculo primario por que no es consecuencia de las ecuaciones de movimiento sino de la definición de momento colectivo. Para que f sea secundario, para que surja de las ecuaciones de movimiento, introducimos el multiplicador de Lagrange, Ω , y su conjugado, B , dentro del conjunto de variables dinámicas.

El campo en \mathcal{H}_3 es el mismo que el que usamos en \mathcal{H}_2 . El lagrangiano se escribe[34]

$$L = \int (\dot{\phi}p + \Pi\dot{X} + B\dot{\Omega} - H). \quad (4.81)$$

Mientras que el hamiltoniano toma la forma

$$H = \int \left(\frac{1}{2}p^2 + \phi'^2 + V(\phi(x + X)) - \Omega(P - \Pi) \right). \quad (4.82)$$

Vemos que en el caso en que imponemos el vínculo primario

$$B = 0 \quad (4.83)$$

sobre el lagrangiano en (4.81) recuperamos el lagrangiano (1.2). Por supuesto, hemos usado el vínculo f que ahora es secundario porque el vínculo primario B debe conservarse en el tiempo, es decir

$$\{H, B\} = \dot{B} = 0 = f. \quad (4.84)$$

En este espacio que incluye dos variables y sus conjugados a parte de las variables originales, los estados y operadores físicos cumplen[34]

$$\begin{aligned} f|phys\rangle &= B|phys\rangle = 0 \\ [f, O_{phys}] &= [B, O_{phys}] = 0. \end{aligned} \quad (4.85)$$

En este espacio también existe un generador de las transformaciones de gauge[34]

$$T(\beta(t)) = \exp(-\dot{\beta}\{B, \} + \beta\{f, \}). \quad (4.86)$$

El lagrangiano al igual que las magnitudes físicas quedan invariante ante la transformación (4.86) y cuando imponemos el vínculo primario B .

El vínculo B no afecta el algebra de las variables del espacio \mathcal{H}_2 . Por lo tanto, los corchetes de Dirac que utilizamos en las secciones anteriores para describir la dinámica en \mathcal{H}_2 pueden ser utilizados también en \mathcal{H}_3 . La imposición del vínculo a nivel clásico f junto con las restantes ecuaciones de movimiento, las cuales fueron usadas en \mathcal{H}_2 , nos permitirán deshacernos de términos lineales en las fluctuaciones a todos los ordenes. Este no era el caso en \mathcal{H}_2 porque allí teníamos el segundo término del acoplamiento intrínseco colectivo que en el límite relativista es de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$. No se puede esperar que este término

de lugar a una convergencia de la serie perturbativa por ser de este orden. Por ejemplo, en este límite la contribución a la energía del vacío será de $\mathcal{O}(M)$ en segundo orden de teoría de perturbaciones. A ordenes más altos en teoría de perturbaciones encontraremos correcciones del mismo orden. Por lo tanto debemos sumar todos los ordenes en teoría de perturbaciones. El precio que pagamos para sumar todos estos ordenes de manera sencilla es el uso de \mathcal{H}_3 . Por supuesto, una transformación similar a la necesaria para linealizar el vínculo en \mathcal{H}_2 también debe ser utilizada en \mathcal{H}_3 . No solo porque el corchete de Dirac se simplifica, como lo hemos visto en la sección anterior, sino también porque sino existiría un acoplamiento entre el multiplicador de lagrange y los grados intrínsecos. Este acoplamiento resulta difícil tratarlo en \mathcal{H}_3 . Sin embargo, en \mathcal{H}_4 su tratamiento es trivial.

Combinando (4.84) con las ecuaciones de movimiento del capítulo anterior obtenemos

$$\begin{aligned} p_c &= v_r \phi'_c \\ (1 - v_r^2) \phi''_c + V_1 &= 0 \\ \Omega &= v_r. \end{aligned} \tag{4.87}$$

Donde ahora debido a estudiar fluctuaciones alrededor de un nuevo mínimo queda modificada la velocidad clásica

$$v_r = \frac{\Pi}{E}. \tag{4.88}$$

La constante E la determinamos ahora. La relación entre el campo que minimiza el hamiltoniano de \mathcal{H}_3 , ϕ_{cr} , y el campo ϕ_c donde el hamiltoniano de \mathcal{H}_3 es mínimo es

$$\phi_{cr}(x) = \phi_c\left(\frac{x}{\sqrt{1 - v_r^2}}\right). \tag{4.89}$$

El índice cr es por clásico relativista.

La energía puede ser expresada en términos de la masa del barión en reposo M que depende de ϕ_c . O sea

$$E = \int (\phi'_{cr})^2 = \frac{\int (\phi'_c)^2}{\sqrt{1 - v_r^2}} = (M^2 + \Pi^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.90}$$

Entonces el término de la energía a $\mathcal{O}(M)$ tiene una dependencia en el momento colectivo es correcta a todo orden en Π . Esto implica que al sumar todos los diagramas que incluyen el vértice

$$-\frac{\Pi^2}{M} \int \phi'_c \hat{q}' \tag{4.91}$$

equivale a desplazar el mínimo del hamiltoniano en el espacio original, ϕ_c , a un nuevo mínimo ϕ_{cr} .

Ahora consideramos las fluctuaciones alrededor de los mínimos

$$\begin{aligned}\phi &= \phi'_{cr} + \hat{q} \\ p &= v_r \phi'_{cr} + \hat{p}\end{aligned}\quad (4.92)$$

Para tratar al modo cero en \mathcal{H}_3 realizamos el mismo tratamiento que el que utilizamos en \mathcal{H}_2 . El vínculo expresado en término de las fluctuaciones queda

$$f = \int \phi'_{cr}(\hat{p} + v_r \hat{q}') + \int \hat{p} \hat{q}' - \Pi \quad (4.93)$$

El vínculo en \mathcal{H}_3 es distinto del encontrado en \mathcal{H}_2 no solo por el cambio de mínimo sino también por la dependencia en las fluctuaciones. Vemos que en \mathcal{H}_3 tenemos un término adicional $v_r \int \phi'_{cr} \hat{q}'$.

La transformación que linealiza este vínculo es similar a la utilizada en el espacio \mathcal{H}_2

$$\hat{p} = p_t - \left\{ \int \hat{p}_t \hat{q}', \frac{\phi'_{cr}}{E + \int \phi'_{cr} \hat{q}'} \right\}_+ \quad (4.94)$$

Esto nos permite llevar a (4.93) a la forma

$$f = \int \phi'_{cr}(\hat{p}_t + v_r \hat{q}'). \quad (4.95)$$

Vemos que la dependencia del vínculo en este espacio es distinta a la del espacio \mathcal{H}_2 . Sin embargo es lineal y por lo tanto al elegir un gauge lineal tenemos asegurado que el determinante de Faddeev Popov es inversible en forma trivial por haber sido reducido a un escalar. Ergo, la dinámica de los corchetes de Dirac puede ser aplicada de forma sencilla.

El gauge más conveniente es el rígido el cual se escribe en este espacio

$$\hat{G} = \frac{1 - v_r^2}{E} \int \phi'_{cr} \hat{q} - \frac{v_r}{E} \int (\hat{p} + v_r \hat{q}') x \phi'_{cr} \quad (4.96)$$

En el límite en que $v \rightarrow 0$ las soluciones de (4.109) tienden a las obtenidas a comienzos de este capítulo. Esto implica que el gauge (4.96) también tiende a la expresión obtenida en el mismo capítulo.

La elección del gauge garantiza que el corchete de Poisson entre el vínculo linealizado y el gauge sea

$$[\hat{f}, \hat{G}] = i. \quad (4.97)$$

Ergo, los corchetes de Dirac para dos funciones en este espacio quedan[34]

$$[\beta, \gamma]_D = [\beta, \gamma] - i[\beta, f][\gamma, \hat{G}] + [\gamma, f][\beta, \hat{G}]. \quad (4.98)$$

Este corchete junto con el hamiltoniano serán los encargados de determinar la dinámica en \mathcal{H}_3 . Nuevamente con estos corchetes logramos por definición que

$$[\hat{f}, \hat{G}]_D = 0. \quad (4.99)$$

Entonces podemos imponer el vínculo y el gauge al mismo tiempo como fue hecho en el espacio \mathcal{H}_2 . Esto es

$$\begin{aligned} f &= 0, \\ \hat{G} &= 0. \end{aligned} \tag{4.100}$$

El modo cero ha desaparecido del tratamiento en el espacio \mathcal{H}_3 . Por lo tanto podemos realizar un tratamiento perturbativo sin encontrar divergencias.

También debemos incluir las fluctuaciones del vínculo primario y del multiplicador de lagrange. Es decir

$$\begin{aligned} B &= \hat{B} \\ \Omega &= v_r + \hat{\Omega} \end{aligned} \tag{4.101}$$

El hamiltoniano en término de las fluctuaciones queda

$$\begin{aligned} \hat{H}_D &= \hat{H}_c + \hat{H}_o + \hat{H}_{coup} + \hat{H}_{res}, \\ \hat{H}_c &= E, \\ \hat{H}_o &= \frac{1}{2} \int \hat{p}_t^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}'^2 + \frac{1}{2} \int \hat{V}_2 \hat{q}^2 - v_r \int \hat{p}_t \hat{q}' \\ \hat{H}_{coup} &= v_r \int \hat{p}_t \hat{q}' \frac{\int \phi'_{cr} \hat{q}'}{E + \int \phi'_{cr} \hat{q}'} \\ \hat{H}_{res} &= \sum_{i>2} \int \frac{\hat{q}^i}{i!} \hat{V}_i + \frac{(\int \hat{p}_t \hat{q}')^2}{8E} - \frac{1}{8E^2} \int \phi_{cr}''^2 + \dots \end{aligned} \tag{4.102}$$

Debido a que hemos impuesto el vínculo, tanto los términos que multiplican al multiplicador de Lagrange como otros no participan del tratamiento perturbativo y no los hemos mostrado en (4.102). Tanto el multiplicador y su conjugado no participan del tratamiento perturbativo, entonces resulta innecesario considerar fluctuaciones alrededor de los valores clásicos.

El primer término, \hat{H}_c , ya lo presentamos. Es la energía relativista a $\mathcal{O}(M)$ del vacío. Como dijimos era equivalente a sumar todos los diagramas de $\mathcal{O}(M)$ los cuales estaban formados por el término lineal en las fluctuaciones del acoplamiento intrínseco colectivo. Este término no figura mas, ha sido integrado y por lo tanto no hay un doble conteo de contribuciones a este orden.

El hamiltoniano cuadrático que intentamos diagonalizar no es \hat{H}_o . Hasta ahora el tercer término bilineal en las fluctuaciones fue tratado perturbativamente. Pero su orden en este límite es $\mathcal{O}(1)$. Al ser de este orden no puede ser tratado perturbativamente porque la cantidad de diagramas que contribuyen a la energía a $\mathcal{O}(1)$ son infinitos. Entonces debemos tratarlo al igual que los restantes términos de \hat{H}_o . El hamiltoniano a diagonalizar es

$$H^{(2)} \equiv \frac{1}{2} \int \hat{p}_t^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}'^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}^2 V_2 - v_r \int \hat{q}' \hat{p}_t. \tag{4.103}$$

El conmutador del hamiltoniano en (4.103) con las fluctuaciones dan la evolución temporal de ellas

$$\dot{\hat{q}} = [H, \hat{q}] = p - v_r \hat{q}' \quad (4.104)$$

$$\dot{\hat{p}} = [H, \hat{p}] = \hat{q}'' - V_2 \hat{q} - v_r \hat{p}'. \quad (4.105)$$

Entonces obtenemos la ecuación de movimiento para la fluctuación \hat{q} para momentos colectivos arbitrarios

$$[\ddot{\hat{q}} - (1 - v_r^2)\hat{q}'' + 2v_r\dot{\hat{q}}' + V_2\hat{q}] = 0. \quad (4.106)$$

A diferencia de la ecuación de movimiento para las fluctuaciones \hat{q} utilizada en el capítulo anterior esta tiene un nuevo término (el tercero) que proviene del tercer término en (4.102) en el hamiltoniano cuadrático.

La fluctuación \hat{q} en término de estos modos es

$$\hat{q} = \sum_n \frac{i}{\sqrt{2\omega_n}} (\Psi_n c_n - \Psi_n^* c_n^+). \quad (4.107)$$

Esperamos un modo de energía cero debido a la pérdida de simetría translacional del campo ϕ_{cr} , el cual por ahora lo conservamos dentro de la sumatoria.

La dependencia de \hat{p} en los modos normales se obtiene haciendo uso de la ec. (4.104) y luego haciendo uso de (4.107). Es decir

$$\hat{p} = \dot{\hat{q}} + v_r \hat{q}' = \sum_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2}} (\Psi_n c_n + \Psi_n^* c_n^+) + \frac{iv_r}{\sqrt{2\omega_n}} (\Psi_n' c_n - \Psi_n'^* c_n^+). \quad (4.108)$$

Aquí también incluimos el modo cero dentro de la sumatoria.

Al utilizar la expansión de la fluctuación \hat{q} en término de modos normales (4.107) y convinarla con la ecuación de movimiento (4.106) obtenemos la ecuación diferencial que deben satisfacer las soluciones Ψ_n para que las fluctuaciones \hat{q} satisfagan la ecuación de movimiento

$$[-(1 - v_r^2) \frac{d^2}{dx^2} - i2v_r\omega_n \frac{d}{dx} + V_2 - \omega_n^2] \Psi_n(x) = 0 \quad (4.109)$$

Esta ecuación difiere con la obtenida en el capítulo 1. La diferencia está en el segundo término de (4.109).

Notamos que las funciones Ψ_n no pueden ser consideradas autofunciones. La razón es que la ecuación (4.109) no puede escribirse como

$$(K - \gamma_n) \Psi_n = 0 \quad (4.110)$$

donde γ_n es el autovalor asociado a Ψ_n . Claro, ω_n aparece dos veces en vez de una. La primera vez aparece en forma lineal y multiplicando al operador translación. La segunda vez aparece en forma cuadrática, tal cual como aparece en la ecuación de movimiento en el capítulo 1.

La ec (4.109) tiene una solución que corresponde a la raíz con energía cero porque

$$[-(1 - v_r^2) \frac{d^2}{dx^2} + V_2 - \omega_n^2] \phi'_{cr}(x) = \frac{d}{dx} [-(1 - v_r^2) \frac{d^2 \phi_{cr}}{dx^2} + V_1] = 0. \quad (4.111)$$

Para llegar a la segunda igualdad hace falta hacer uso de la condición impuesta al campo clásico para minimizar el hamiltoniano en \mathcal{H}_3 .

Porque el hamiltoniano $\hat{H}^{(2)}$ conmuta con el término lineal de P , $\hat{P}^{(1)}$, esperamos una solución de energía cero proporcional a ϕ'_{cr}

$$\Psi_1(x) = \sqrt{\frac{1 - v^2}{E}} \exp\left(\frac{iv_r \omega_1 x}{\sqrt{1 - v_r^2}}\right) \phi'_c\left(\frac{x}{1 - v_r^2}\right), \quad \omega_1 = 0 \quad (4.112)$$

donde la constante de normalización se obtiene a través de la ecuación (0.1) del apéndice B. La exponencial que depende de ω_1 en este espacio puede ser substituida por la unidad basado en el argumento que la frecuencia es cero.

Para encontrar las restantes soluciones hacemos uso de una solución de prueba

$$\Psi_n(x) = \exp\left[-\frac{iv_r \omega_n x}{1 - v_r^2}\right] \Phi_n(x). \quad (4.113)$$

La ecuación a satisfacer por las funciones $\Phi_n(x)$ se obtiene al reemplazar la ec. (4.113) en la ecuación (4.109)

$$-(1 - v_r^2) \Phi_n'' + \left(V_2 - \frac{\omega_n^2}{1 - v_r^2}\right) \Phi_n = 0 \quad (4.114)$$

La cual puede ser facilmente llevada a la forma de la ecuación de movimiento correspondiente al caso $\Pi = 0$. Para esto debemos hacer las siguientes asociaciones

$$\omega_n \rightarrow \frac{\omega_n}{\sqrt{1 - v_r^2}} \quad (4.115)$$

$$x \rightarrow x \sqrt{1 - v_r^2}. \quad (4.116)$$

Las asociaciones son más que evidentes. La energía en reposo (la energía de los modos para $v = 0$) se comporta como la segunda componente de un bivector momento-energía. O sea se transforma de manera covariante ante una transformación de Lorentz del sistema intrínseco. Junto con el boost del sistema intrínseco aparece una contracción del espacio. Esta está reflejada en (4.116).

Las soluciones de frecuencias finitas son

$$\begin{aligned} \Phi_n(x) &= \Psi_{no}\left(\frac{x}{\sqrt{1 - v_r^2}}\right) \\ \omega_n &= \sqrt{1 - v_r^2} \omega_{no} \end{aligned} \quad (4.117)$$

donde

$$\omega_{no}^2 = m^2 + k_{no}^2; \quad k_{no} = \frac{2n\pi}{L} + \delta_n \quad (4.118)$$

La función δ_n es el corrimiento de fase entre una onda plana en el sector con topología nula con un número de onda k respecto de la solución con el mismo número de onda k_n en el sector con topología uno. Siempre suponemos condiciones periódicas de contorno en un caja de largo L . El corrimiento de fase está relacionado con la matriz de scattering, la cual también se obtiene considerando estados de segunada cuantificación.

Se desprende entonces que las soluciones $\Psi_n(x)$ de la ec.(4.109) correspondiente a los modos finitos pueden ser escritas

$$\Psi_n(x) = (1 - v_r^2)^{\frac{1}{4}} \exp\left[-\frac{iv_r\omega_n x}{1 - v_r^2}\right] \Psi_{no}\left(\frac{x}{\sqrt{1 - v_r^2}}\right) \quad (4.119)$$

Las funciones Ψ_n se muestran normalizadas cuando suponemos que las funciones Ψ_{no} también lo están. Aquí suponemos que el índice n que aparece en la función Ψ_{no} incluye el modo ligado Ψ_o que fue descrito con anterioridad.

El número de onda efectivo k_n que aparece en la fase de las funciones Ψ_n puede ser reconocido como el resultado de una transformación de Lorentz

$$k_n = \frac{k_{no}}{\sqrt{1 - v_r^2}} - \frac{v_r\omega_{no}}{\sqrt{1 - v_r^2}}. \quad (4.120)$$

Cuando la velocidad colectiva es nula en la ecuación de movimiento existen modos degenerados debido a que la ecuación que los determinaba quedaba invariante ante la conjugación compleja. Ahora, cuando la velocidad colectiva aumenta esta degeneración se rompe. La ecuación (4.109) no queda invariante ante la conjugación compleja.

Las relaciones de ortogonalidad y completitud que cumplen las soluciones Ψ_n están en el apéndice B.

Como enfatizamos, la ecuación para Ψ_n no es una de autoestados. Las relaciones que hemos derivado en el apéndice B (0.1)-(0.5) muestran que este es el caso. Habiendo hecho un estudio de las soluciones (4.109) podemos escribir el hamiltoniano en término de los modos normales.

$$H^{(2)} = \sum_n \omega_n (a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2}) + \frac{1 - v_r^2}{2E} (P^{(1)})^2 \quad (4.121)$$

$$\hat{P}^{(1)} = \sqrt{\frac{\omega_1 E}{2(1 - v_r^2)}} (a_1 + a_1^\dagger) \quad (4.122)$$

Nuevamente nos encontramos con el motivo de nuestro trabajo: un modo de energía cero que nos impide realizar tratamientos perturbativos sin divergencias infrarrojas. Sin embargo, debido al tratamiento realizado y que ha tenido en cuenta desde el principio la coordenada colectiva introducida artificialmente ya tenemos en el sector real a $\mathcal{O}(1)$

resultados gratificantes. La energía del estado fundamental para $v_r \neq 0$ sin renormalizar cambia respecto del fundamental sin renormalizar para $v_r = 0$ en la cantidad

$$\Delta E_{vac}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_n \omega_n = \sqrt{1 - v_r^2} \Delta M_{vac}^{(1)} = \frac{M}{E} \Delta M_{vac}^{(1)} \quad (4.123)$$

Donde las frecuencias ω_n están dadas por la ecuación (4.117). El término $\Delta M_{vac}^{(1)}$ es el cambio en la masa en reposo debido a las fluctuaciones cuánticas.

$$\Delta M_{vac}^{(1)} = \frac{1}{2} \sum_n \omega_{n0} \quad (4.124)$$

La ecuación (4.123) tiene la forma necesaria para satisfacer la covariancia a primer orden en la expansión en potencias de E^{-1} . Esto se debe a la relación

$$[(M + \Delta M_{vac}^{(1)})^2 + \Pi^2]^{\frac{1}{2}} = E + \frac{M}{E} \Delta M_{vac}^{(1)} + \mathcal{O}\left(\frac{\Delta(M_{vac}^{(1)})^2}{E}\right). \quad (4.125)$$

Algo similar ocurre con la energía de un mesón n sobre el vacío.

2.4.1 El tratamiento perturbativo en \mathcal{H}_3

Como enfatizamos en la introducción de este capítulo nos interesa conocer las ventajas del método BRST frente al método más tradicional de Dirac. Basta entonces con considerar una sola magnitud, aquella que muestre una diferencia entre un método y el otro. Afortunadamente, la magnitud que sirve nuestros propósitos es la corrección a la energía del estado fundamental. Esta corrección hecha a la Dirac a pesar de ser divergente y necesitar renormalización difiere con la obtenida a la BRST también sin renormalizar. Justificamos así la falta de renormalización, la cual no haremos.

Tampoco haremos un tratamiento perturbativo. No hace falta hacerlo para verificar que no dará los mismos resultados que los que encontraremos con el hamiltoniano BRST en este límite en el capítulo siguiente. La razón se debe a que solo existen términos lineales en Π en el hamiltoniano \hat{H}_{coup} en (4.102). Esto implica que a lo sumo encontraremos correcciones de $\mathcal{O}\left(\frac{\Pi^2}{E^3}\right)$. Como veremos, el hamiltoniano BRST en este límite da correcciones a la energía del vacío de ordenes superiores, por ejemplo de $\mathcal{O}\left(\frac{\Pi^6}{E^7}\right)$. Ergo, los resultados no coinciden. Al final del siguiente capítulo mostramos que las correcciones a la energía del vacío de otro modelo hechas con el formalismo BRST son correctas y por lo tanto más confiables.

Capítulo 3

El formalismo BRST

En el capítulo anterior mostramos que el modo cero es consecuencia de un agrandamiento del espacio de las variables dinámicas que incluye la variable colectiva X que describe la dinámica del campo clásico, o sea la dinámica del barión. Entonces hemos partido de un modelo definido en un espacio de variables que solo incluía a las fluctuaciones mesónicas y lo hemos agrandado para que también incluya la dinámica del barión. Con un tratamiento aproximado de esta variable en el espacio \mathcal{H}_2 encontramos contribuciones finitas en el tratamiento perturbativo. También vimos que resulta conveniente incluir a un multiplicador de Lagrange y su conjugado para poder obtener una mayor precisión de las magnitudes que se desean corregir. Al espacio que incluye también a estas variables lo llamamos \mathcal{H}_3 .

Hacia fines de los sesentas Faddeev y Popov[19] incluyen variables de Grassman con las cuales pueden exponenciar el determinante que aparece en \mathcal{H}_3 y que lleva sus nombres. De esta manera no resulta necesario linealizar el vínculo mediante transformaciones que no son canónicas. Así logran una función de partición en el espacio \mathcal{H}_4 que es función de un hamiltoniano efectivo que dependen de las variables de Grassman. El método se basa en la existencia de transformaciones locales de gauge para generar el determinante. Mas adelante, a mediados de los setentas aparece la simetría BRST [32] que solo vive en el espacio \mathcal{H}_4 y no en los presentados hasta ahora. La diferencia respecto a lo hecho por Faddeev y Popov es que para generar el hamiltoniano efectivo se utiliza una transformación global. Simultáneamente, la escuela rusa de vínculos presenta el hamiltoniano efectivo de Fradkin y Vilkovisky[21] idéntico al hamiltoniano BRST pero que no hace uso de la simetría BRST. La inclusión de esta simetría lo hacen luego, en el '77 con el trabajo de Batalin Vilkovisky [22]. La simetría BRST no es imprescindible en nuestro trabajo. Este es el caso de los sistemas con vínculos abelianos[36].

Aquí trabajamos en un espacio que incluye a los fantasmas o variable de Grassman a parte de las variables de \mathcal{H}_3 . Lo presentamos junto con sus propiedades. El trabajo

de Caloggeracos [33] no incurre en el sector cuántico. Nosotros en cambio repetimos los calculos hechos en el capítulo 2[26]. Vemos coincidencias en el límite de bajos momentos. Pero en el límite relativista tal coincidencia no existe[37]. Esta discrepancia la atribuimos a la transfomación no canónica realizada para linealizar el vínculo en el capítulo anterior. Para deteminar cual de los tratamientos es correcto utilizamos un modelo cuya solución exacta es conocida. Verificamos que el espacio \mathcal{H}_4 resulta más apropiado en este límite.

3.1 El espacio \mathcal{H}_4

Introducimos dos variables fermiónicas y hermiticas η y $\bar{\eta}$ y sus respectivos conjugados π y $\bar{\pi}$. Las relaciones de anticonmutación distintas de cero para estos fermiones son[34]

$$[\eta, \pi]_+ = [\bar{\eta}, \bar{\pi}]_+ = 1. \quad (1.1)$$

La carga BRST Q se define como[34]

$$Q \equiv -\eta f + \bar{\pi} B. \quad (1.2)$$

Es facil verificar (especialmente porque el conjunto de vínculos es abeliano) que la carga BRST es nilpotente

$$Q^2 = 0, \quad (1.3)$$

y también hermitica

$$Q^\dagger = Q. \quad (1.4)$$

Vemos que los estados definidos como físicos en los espacios anteriores cumplen

$$Q |phys\rangle = 0 \quad (1.5)$$

Mientras que los operadores que eran físicos en los espacios anteriores también satisfacen que

$$[Q, O_{phys}] = 0 \quad (1.6)$$

Sin embargo, en este espacio existen los estados $|\chi\rangle$ y operadores O_χ tal que[34]

$$\begin{aligned} |\chi\rangle &= Q |unphys\rangle \\ O_\chi &= [Q, O_{unphys}]_\pm. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Estos estados son físicos porque siendo la carga BRST nilpotente satisfacen (1.5). También los operadores O_χ son físicos porque satisfacen (1.6). Sin embargo, el estado $|\chi\rangle$ tiene norma nula debido a que la carga BRST es nilpotente

$$\langle \chi | \chi' \rangle = \langle unphys | Q^2 | unphys' \rangle = 0. \quad (1.8)$$

La acción del operador O_χ sobre un estado físico lo transforma en un estado de norma nula porque

$$O_\chi |phys\rangle = Q O_{unphys} |phys\rangle \equiv Q |\alpha\rangle. \quad (1.9)$$

Ergo, se cumple que

$$\langle phys | O_\chi | phys \rangle = 0. \quad (1.10)$$

Podemos entonces identificar la clase de equivalencias en este espacio como

$$\begin{aligned} |phys\rangle &\rightarrow |phys\rangle + |\chi\rangle \\ O_{phys} &\rightarrow O_{phys} + O_\chi \end{aligned} \quad (1.11)$$

En el caso de los estados, la clase se recorre al recorrer todos los $|\chi\rangle$. Al recorrer O_χ también recorreremos la clase de equivalencia de los operadores. La clase de equivalencia se obtiene mediante transformaciones globales generadas por la carga BRST.

Entonces en este espacio podemos reemplazar el hamiltoniano original que está embebido en \mathcal{H}_4 por otro equivalente

$$H_{BRST} = H + [\rho, Q]_+. \quad (1.12)$$

Donde el último término en la derecha de (1.12) es un operador nulo por definición. Como dijimos, al actuar sobre un estado físico lo transforma en un estado de norma nula.

Entonces los elementos de matriz de este hamiltoniano BRST son los mismos que aquellos elementos de matriz del hamiltoniano original cuando nos restringimos al espacio físico que satisface (1.5). La función ρ es arbitraria pero su conmutador con la carga BRST debe ser distinto de cero para lograr una descripción alternativa. Se puede ver que con la elección $\rho = Q$ recuperamos la descripción original porque Q es nilpotente.

Nosotros elegimos

$$\rho = \pi \Omega + \bar{\eta} \omega^2 \left(G - \frac{1}{2M} B \right). \quad (1.13)$$

La frecuencia ω es arbitraria pero debe desaparecer de cualquier resultado físico porque ha sido introducida artificialmente.

El hamiltoniano BRST queda con esta elección de función de gauge

$$\hat{H}_{BRST} = \hat{H} - \hat{\Omega} \left(\int \Phi' p - \Pi \right) + i \hat{\pi} \hat{\pi} + \omega^2 \left(\hat{B} \hat{G} - \frac{\hat{B}^2}{2M} + \hat{\eta} \hat{\eta} [G, P] \right) \quad (1.14)$$

Debido a que \hat{H}_{BRST} no conmuta con el vínculo f porque este hamiltoniano depende del gauge que por elección no conmuta con el vínculo se puede concluir que el modo cero tiene una fuerza de restitución en este espacio. O sea que en este espacio tiene masa. Entonces al considerar las fluctuaciones alrededor del campo que pertenece a \mathcal{H}_3 y que minimiza

H y también las fluctuaciones alrededor de su conjugado, el hamiltoniano BRST toma la forma

$$\begin{aligned}
\hat{H}_{BRST} &= \hat{H}_c + \hat{H}_o + \hat{H}_{coup} + \hat{H}_{res}, \\
\hat{H}_c &= M, \\
\hat{H}_o &= \frac{1}{2} \int \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}'^2 + \frac{1}{2} \int \hat{V}_2 \hat{q}^2 \\
&\quad - \hat{\Omega} \int \phi'_c \hat{p} + \omega_o^2 \hat{B} \left(\hat{G} - \frac{\hat{B}}{2\sqrt{M}} \right) + i\hat{\pi}\hat{\bar{\pi}} + i\omega_o^2 \hat{\eta}\hat{\bar{\eta}}, \\
\hat{H}_{coup} &= \Pi\Omega \\
\hat{H}_{res} &= \sum_{i>2} \int \frac{\hat{q}^i}{i!} \hat{V}_i - \hat{\Omega} \int \hat{q}' \hat{p} + \frac{i}{M} \omega_o^2 \hat{\eta}\hat{\bar{\eta}}.
\end{aligned} \tag{1.15}$$

Comparamos este hamiltoniano efectivo con el hamiltoniano original que ahora está embebido en \mathcal{H}_4 . El primer término, \hat{H}_c , queda igual a su par en el hamiltoniano original. El hamiltoniano cuadrático, \hat{H}_o , ahora incluye términos que nos permitirán darle masa al modo cero y así evitar divergencias IR. El acoplamiento entre el sector intrínseco y el sector colectivo viene dado por el término \hat{H}_{coup} . Finalmente podemos verificar que salvo por el primer término en \hat{H}_{res} los restantes no aparecen en el hamiltoniano original. Estos últimos términos son consecuencia de haberle asignado al modo cero una masa.

Al considerar la variable colectiva X como una variable dinámica algún grado de libertad original debe reemplazar su calidad de espúrea. Esto se puede hacer cuando se considera el hamiltoniano cuadrático incluyendo al modo $n = 1$ en el sector espúreo, junto con los demás términos cuadráticos que provienen de la expresión $[\rho, Q]_+$.

Haciendo uso de \hat{H}_o en (1.15) podemos escribir el hamiltoniano espúreo como

$$\begin{aligned}
H_{sp}^{(2)} &= \frac{1}{2M} (P^{(1)})^2 - \Omega P^{(1)} + i\pi\bar{\pi} + \omega^2 (BG - \frac{1}{2M} B^2 + i\eta\bar{\eta}) \\
&= \omega (c_1^+ c_1 - a_0^+ c_0 + \bar{a}a + \bar{b}b)
\end{aligned} \tag{1.16}$$

Si usamos el gauge rígido

$$G = \frac{1}{M} \int \phi'_c q \tag{1.17}$$

que no posee componentes longitudinales a los modos físicos, los modos normales bosónicos y fermiónicos espúreos pueden expresarse como

$$\begin{aligned}
c_1^+ &= \frac{P^{(1)}}{\sqrt{2M\omega}} - \sqrt{\frac{M}{2\omega}} \Omega + i\sqrt{\frac{M\omega}{2}} G \\
c_0^+ &= i\sqrt{\frac{\omega}{2M}} B + \sqrt{\frac{M}{2\omega}} \Omega - i\sqrt{\frac{M\omega}{2}} G \\
\bar{a} &= ib^+ = \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \pi + \sqrt{\frac{\omega}{2}} \bar{\eta} \\
\bar{b} &= -ia^+ = -\frac{i}{\sqrt{2\omega}} \bar{\pi} + \sqrt{\frac{\omega}{2}} \eta
\end{aligned} \tag{1.18}$$

Las relaciones de conmutación y anticonmutación distintas de cero son

$$[c_1, c_1^\dagger] = -[c_0, c_0^\dagger] = [a, \bar{a}]_+ = [b, \bar{b}]_+ = 1. \quad (1.19)$$

Como es facil ver, el modo o tiene asociada una métrica negativa. Esto no es preocupante, como no lo es el hecho que los fantasmas posean una métrica fermiónica. La razón para despreocuparnos se debe a que estamos trabajando con modos que no son físicos. En un espacio de variables que no son físicas importa poco la métrica utiliza porque la métrica de estas variables no puede afectar los obseables físicos.

El vacío para las excitaciones espúreas se define como

$$c_1 | \rangle = c_0 | \rangle = a | \rangle = b | \rangle = 0 \quad (1.20)$$

y es aniquilada por la carga BRST la cual expresada en término de estos modos toma la forma

$$Q^{(2)} = \pi \hat{B} - \hat{\eta} \left(\int \phi'_c \hat{p} - \Pi \right) = -\sqrt{M} [i(c_1^\dagger + c_0^\dagger)a + (c_1 + c_0)\bar{b}] + \hat{\eta} \Pi. \quad (1.21)$$

Este vacío de las excitaciones espúreas representa el estado no perturbado del sector espúreo para todo estado físico.

El hamiltoniano cuadrático de $\mathcal{O}(1)$ queda

$$H^{(2)} = \sum_n \omega_n (a_n^\dagger a_n + \frac{1}{2}) + \omega (c_1^\dagger c_1 - c_0^\dagger c_0 + \bar{a}a + \bar{b}b). \quad (1.22)$$

La invariancia p'erdida se recupera a nivel colectivo y por lo tanto el conjunto de estados físicos del hamiltoniano cuadrático tienen como buen número cuántico al momento colectivo Π . Los estado físicos toman la forma

$$\langle X | \Pi, n_n \rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Pi X} | n_n \rangle \quad (1.23)$$

donde n_n son los números de ocupación en el sector real y el espúreo.

En esta representación los operadores \hat{q}, \hat{p} se escriben

$$\begin{aligned} q &= \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \psi_1 (c_1 - a_1^\dagger) + \sum_n \frac{i}{\sqrt{2\omega_n}} (\psi_n a_n - \psi_n^* a_n^\dagger) \\ p &= \sqrt{\frac{\omega}{2}} \psi_1 (c_0 + c_0^\dagger + c_1 + c_1^\dagger) + \sum_n \sqrt{\frac{\omega_n}{2}} (\psi_n a_n + \psi_n^* a_n^\dagger). \end{aligned} \quad (1.24)$$

Ya que los modos de frecuencia cero no aparecen no encontraremos divergencias infrarojas cuando se haga una expansión perturbativa. Estas han sido eliminadas del problema.

3.2 El tratamiento perturbativo

Recurriendo a un espacio de mayor dimensión pudimos definir un hamiltoniano efectivo que es equivalente (en este nuevo espacio) al hamiltoniano original. Con este hamiltoniano

efectivo pudimos darle masa al modo cero logrando de esta manera deshacernos de las divergencias infrarrojas al hacer un tratamiento perturbativo. Las desventajas que se deben afrontar por evitar las divergencias infrarrojas son tener que trabajar con más variables dinámicas que las del sistema original y también tener un mayor número de términos en el hamiltoniano perturbativo ($\hat{H}_{coup} + \hat{H}_{res}$). Esto implica que encontraremos un número mayor de diagramas en el tratamiento BRST que en el tratamiento donde se hace uso de los paréntesis de Dirac. A pesar de este inconveniente la precisión de los resultados obtenidos en el primer tratamiento será mayor. Nos concentramos primero con los términos del acoplamiento intrínseco-colectivo para estudiar las correcciones dinámicas a la masa del solitón. Luego incluimos los términos residuales para obtener correcciones de orden superior.

3.2.1 El acoplamiento intrínseco colectivo

El acoplamiento intrínseco colectivo aparece en el término $\Omega\Pi$ que es de orden $\mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}})$ cuando Π es de $\mathcal{O}(1)$ porque Ω es de $\mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}})$. Entonces en este límite puede ser tratado como una perturbación. En el caso en que Π es de $\mathcal{O}(M)$ carece de sentido hacer un tratamiento perturbativo de este término. Este sería de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$ y por lo tanto no convergería la expansión. El tratamiento de este caso lo dejamos para más adelante.

El término de acoplamiento no contribuye a primer orden en teoría de perturbaciones. Su contribución a segundo orden en teoría de perturbaciones viene dado por el diagrama en la figura 1.



Figura 1

Donde el símbolo ∞ representa vértices de $\mathcal{O}(\frac{\Pi}{\sqrt{M}})$. El valor del diagrama es

$$\delta E_{din} = -\Pi^2 \frac{\langle \Omega^2 \rangle}{\omega} = \frac{\Pi^2}{2M}. \tag{2.25}$$

La última igualdad en (2.25) se debe a la elección de la métrica negativa de los operadores c_o y c_o^+ . A segundo orden en teoría de perturbaciones el término \hat{H}_{coup} contribuye a la

energía cinética esperada para un solitón que se mueve con bajo momento Π y coincide con la corrección obtenida con los paréntesis de Dirac. Correcciones relativistas superiores en Π pueden ser obtenidas a partir de diagramas que incluyen vértices del término de acoplamiento junto con vértices del término residual. Sin embargo no incurrimos en este cálculo porque resulta conveniente introducir una transformación canónica que elimine el término de acoplamiento intrínseco colectivo por otros que den lugar a una convergencia mas rápida. La transformación que logra este objetivo tiene la forma

$$T = \exp[-i\Pi R] \tag{2.26}$$

donde

$$R = \frac{B}{M} - \frac{G}{\sqrt{M}} = i\sqrt{2M\omega}(c_0 - c_0^+). \tag{2.27}$$

Esta transformación lleva la carga BRST a una carga efectiva

$$Q_e^{(2)} = \hat{\pi}\hat{B} - \hat{\eta} \int \phi'_c \hat{p} = -\sqrt{M}[i(c_1^+ + c_0^+)a + (c_1 + c_0)\bar{b}]. \tag{2.28}$$

Las magnitudes físicas tienen que ser debidamente transformadas para que conmuten con la carga efectiva.

El hamiltoniano obtenido a partir de esta transformación es igual a (1.15) salvo el reemplazo

$$\hat{H}_{coup} \rightarrow \frac{1}{2M}\Pi^2 - \frac{\Pi}{M}\Omega \int \phi'_c q' - \frac{\Pi}{M} \int q' p - \frac{\Pi^2}{M^2} \int \phi'_c q' \tag{2.29}$$

El primer término del hamiltoniano transformado es nuevamente la energía cinética del solitón que se mueve con momento Π . Los restantes términos pueden tratarse perturbativamente ya que son de menor orden que el de $\Omega\Pi$, esto es ($< \mathcal{O}(M^{-1})$). El último término en (2.29) no contribuye a primer orden en teoría de perturbaciones. A segundo orden da una contribución que aparece en la figura 2 y que es independiente del sector espúreo.



Figura 2

Cuando este valor es agregado al primer término en (2.29) obtenemos como corrección a la masa dinámica del solitón

$$\delta E_{din}^{(2)} = \frac{\Pi^2}{2M} - \frac{\Pi^4}{8M^3}. \quad (2.30)$$

Esta corrección corresponde a los primeros dos términos de la expansión de la energía relativista

$$E = \sqrt{M^2 + \Pi^2}. \quad (2.31)$$

El tercer término de esta expansión aparece solo en cuarto orden en teoría de perturbaciones. A este orden los vértices que contribuyen salen de los últimos tres términos en (2.29) y del término cúbico en las fluctuaciones.

Aquí vemos como los diagramas del tratamiento de Dirac son distintos de los utilizados en este tratamiento. Los vértices con grados espúreos generados por el término \hat{H}_{coup} conjuran para generar los diagramas que dan lugar a la misma contribución generada por el vértice del término

$$-\frac{3v^2}{2M} \left(\int \phi'_c \hat{q}' \right)^2 \quad (2.32)$$

en el tratamiento de Dirac. Por supuesto, el término (2.32) está ausente en \mathcal{H}_4 porque no hemos tenido que realizar transformaciones que no son canónicas. Los restantes términos del hamiltoniano dan una contribución idéntica a los términos perturbativos del hamiltoniano en \mathcal{H}_2 .

Los diagramas generados por los vértices espúreos del hamiltoniano \hat{H}_{coup} en \mathcal{H}_4 son todos topológicamente equivalentes a los diagramas que aparecen en la figura 3.

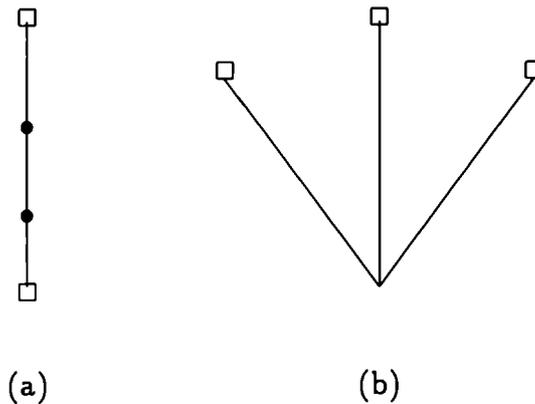


Figura 3

El valor de los diagramas es

$$\delta E_{din}^{(4)} = \frac{3\Pi^6}{32M^5}. \quad (2.33)$$

Ergo, coincide con la contribución de (2.32).

Por supuesto, la suma de todos los diagramas que contribuyen a este orden corresponde al tercer término obtenido de la expansión de la energía relativista (2.31). Esto resulta alentador para continuar la expansión perturbativa a ordenes superiores. Sin embargo, no continuamos.

Cabe destacar que muchos de los diagramas que hemos utilizado dependen de la frecuencia arbitraria ω del modo cero. A pesar de esto, la suma de los diagramas es independiente de esta magnitud orden a orden. Esto se debe, Como hemos argumentado, a que ambos hamiltonianos, el original, y (1.15), son equivalentes en el espacio en que el último puede ser definido. Sin embargo, el primero es independiente del parámetro ω mientras que el segundo no lo es.

Hasta aquí hemos hecho solo correcciones dinámicas a la masa del solitón de $\mathcal{O}(M)$. Sin embargo también existen contribuciones a la masa dinámica del solitón a $\mathcal{O}(1)$. Para obtener estas correcciones debemos considerar diagramas que son el producto de vértices del término de acoplamiento y del término residual. Esta corrección junto con la corrección estática (para $\Pi = 0$) son el motivo de la siguiente sección.

3.2.2 El hamiltoniano residual

Todos los términos del hamiltoniano residual (1.15) dan lugar a una convergencia de la serie perturbativa. Junto con los términos obtenidos en la sección anterior para el hamiltoniano de acoplamiento intrínseco-colectivo, (2.29), podemos calcular las correcciones para diversas magnitudes como la masa estática del solitón a $\mathcal{O}(M^{-1})$ y la corrección a la masa dinámica a $\mathcal{O}(\frac{\Pi^2}{M^2})$, la masa de un mesón real a $\mathcal{O}(M^{-1})$ y la energía cinética de la masa de un fonon real sobre el solitón a $\mathcal{O}(\frac{\Pi^2}{M^2})$. Como veremos más adelante todos estos resultados tienen divergencias ultravioleta que encontramos con el tratamiento de Dirac. Estas divergencias fueron tratadas con renormalización que también puede ser hecha dentro del formalismo BRST. Pero no puede llevarse a cabo sin hacer uso de un potencial particular. Por eso primero derivamos las correcciones a magnitudes físicas para potenciales arbitrarios. Luego utilizamos el modelo ϕ^4 para realizar la renormalización. Finalmente, calculamos la corrección al elemento de matriz del campo ϕ , una magnitud física en el sentido de (1.6) que no es invariante translacional como lo es el hamiltoniano porque no conmuta con el operador momento total, entre un vacío con momento Π y un estado de un mesón real sobre un vacío con momento $\Pi' \neq \Pi$.

Los vértices del sector espúreo contribuyen a la corrección de la energía dinámica del solitón a $\mathcal{O}(\frac{\Pi^2}{M^2})$ a través de los diagramas de segundo orden en teoría de perturbaciones que están listados en la figura 4. Los diagramas que corrigen la energía a $\mathcal{O}(M^{-1})$ están en la figura 5. La tabla 1 muestra los valores de estos diagramas listados en la figura 4 y en la figura 5. Esto lo hacemos para mostrar, al menos en este caso, como se cancela la dependencia en el parámetro de gauge.

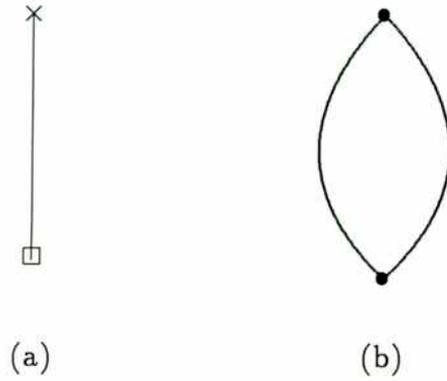


Figura 4

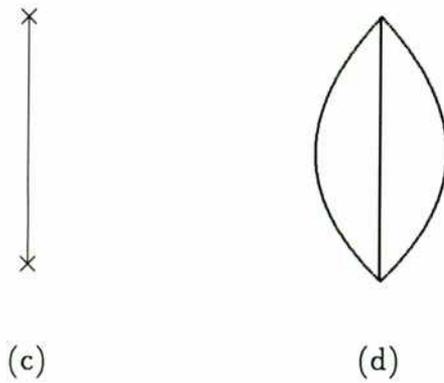


Figura 5

$$\begin{aligned}
 (a) + (c) & -\frac{1}{32M\omega^2} \sum_n \omega_n^2 A_n^2 - \frac{1}{16M\omega} \sum_n \int V_3 \phi_c'' \frac{|\psi_n|^2}{\omega_n} + \frac{\Pi^2}{4M^2} \int \left(\frac{|\psi_1'|^2}{\omega} + \sum_n \frac{|\psi_n'|^2}{\omega_n} \right) \\
 (b) & -\frac{\Pi^2}{4M^2} \sum_n \omega_n - \frac{\Pi^2}{4M^2} \sum_n \int \left(\frac{|\psi_1'|^2}{\omega} + \frac{|\psi_n'|^2}{\omega_n} \right) \\
 (d) & -\frac{1}{16M\omega} \sum_{n,m} \frac{(\omega_n - \omega_m)(\omega_n^2 - \omega_m^2)}{\omega_n \omega_m} B_{nm}^2 + \frac{1}{16M} \sum_{n,m} \frac{(\omega_n - \omega_m)^2}{\omega_n \omega_m} B_{nm}^2 \\
 & -\frac{1}{16M\omega^2} \sum_n \omega_n^2 A_n^2 + \frac{1}{8M\omega} \sum_n \omega_n A_n^2 - \frac{1}{8M} \int (\psi_1')^2 \tag{2.34}
 \end{aligned}$$

También debemos incluir los valores de expectación que contribuyen a primer orden en teoría de perturbaciones. Esto es

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{24} \int V_4 \langle q^4 \rangle & = \frac{3}{32M\omega^2} \sum_n \omega_n^2 A_n^2 - \frac{1}{8M\omega} \sum_n \omega_n A_n^2 + \frac{1}{16M\omega} \sum_n \int V_3 \phi_c'' \frac{|\psi_n|^2}{\omega_n} \\
 & + \frac{1}{16M\omega} \sum_{n,m} \frac{(\omega_n - \omega_m)(\omega_n^2 - \omega_m^2)}{\omega_n \omega_m} B_{nm}^2 \tag{2.35}
 \end{aligned}$$

La corrección a la energía del estado fundamental que viene del sector espúreo es

$$\Delta E_{sp,\Pi} = -\frac{1}{8M} \int (\psi'_1)^2 + \frac{1}{16M} \sum_{n,m} \frac{(\omega_n - \omega_m)^2}{\omega_n \omega_m} B_{nm}^2 - \frac{\Pi^2}{2M} \frac{1}{2M} \sum_n \omega_n \quad (2.36)$$

Esta corrección es independiente del parametro ω , como es de esperarse por haber sido introducido por la función que fija el gauge ρ .

Vemos que la corrección a la energía dinámica en (2.36) también verifica que

$$E(\Pi) = E^{(0)} + \frac{\Pi^2}{2E^{(0)}}. \quad (2.37)$$

donde

$$E^{(0)} = M + \frac{1}{2} \sum_n \omega_n \quad (2.38)$$

es la masa del solitón a $\mathcal{O}(1)$. Entonces, vemos que la masa a este orden es covariante ante transformaciones de Lorentz infinitesimales (Π pequeño .)

Obviamente también hay una contribución del sector real. Esta está presente aun cuando el sector espúreo no es tratado y viene del sector real de los términos V_3 and V_4 en el hamiltoniano residual. Los diagramas que se obtienen están listados en la figura 4 del capítulo anterior.

Vemos que los diagramas (d) de la figura 5 son los responsable de la contribución debido al ordenamiento normal del término $\frac{1}{2} \int \hat{p}^2$ en el tratamiento de Dirac. También es facil ver que los diagramas (d) de la figura 5 logra la contribución del valor de expectación del término en el tratamiento de Dirac

$$-\frac{(\int \hat{p}_t \hat{q})^2}{8M}. \quad (2.39)$$

Resulta claro que los resultados correctos se obtienen con menor esfuerzo mediante el tratamiento de Dirac ya que la cantidad de diagramas que debemos considerar en el tratamiento BRST es mayor al utilizado por el método de Dirac. Sin embargo, el método BRST cuenta con la ventaja de avisar cuando se han sumado todos los diagramas del sector espúreo. Esto se debe a que en general el parametro espúreo ω solo desaparece cuando se han sumado todos los diagramas de este sector.

Si realizamos la transformación de Tomboulis del hamiltoniano BRST y no forzamos ni el vínculo ni el gauge, es facil ver que tanto los grados de los fantasmas y del multiplicador de lagrange desaparecen del hamiltoniano residual y solo queda el hamiltoniano cuadrático espúreo apropiadamente diagonalizado. Al realizar un tratamiento perturbativo del hamiltoniano residual y corregir la energía del vacío a $\mathcal{O}(M^{-1})$ vemos que los términos dependientes en ω ya no son cancelados. Esto se debe a que los diagramas de los términos cúbicos y cuárticos en \hat{q} que dependen del modo a_1^+ no son cancelados por los diagramas en que participaban los grados desacoplados y que ahora están ausentes. Esto demuestra en forma alternativa la no canonicidad de la transformación, ya que si fuera canónica, la cancelación en ω de una magnitud física sería inminente.

En forma similar se puede obtener una corrección a la energía de un mesón n sobre el vacío de un solitón con momento Π . Los diagramas que se logran con los vértices de este hamiltoniano están listados en la figura 6.

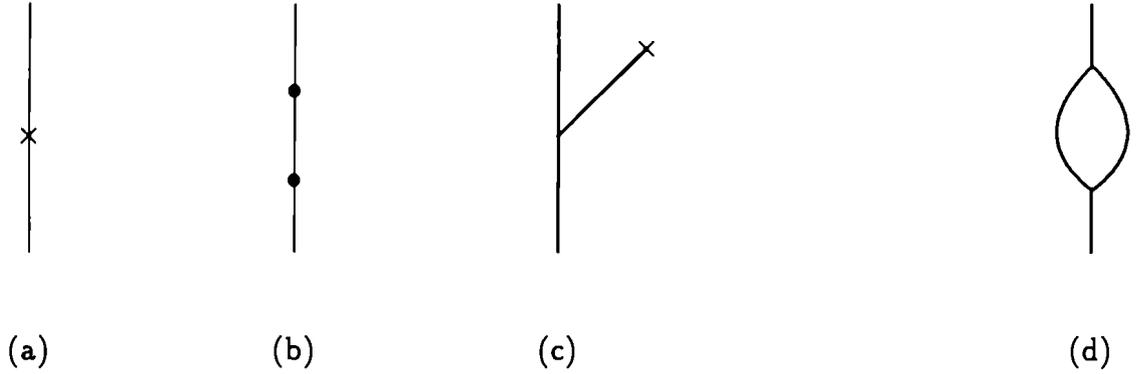


Figura 6

La corrección del sector espúreo a esta energía es

$$E_{ep} = \sum_m \frac{B_{m,n}^2 \omega_m^2 + \omega_n^2}{4M \omega_n \omega_m} - \frac{\Pi^2}{2M^2 \omega_n}. \quad (2.40)$$

Vemos que el último término en (2.40) nos permite afirmar que

$$E(\Pi) = E(0) + \frac{\Pi^2}{2E(0)}. \quad (2.41)$$

donde ahora

$$E(0) = M + \omega_n + \frac{1}{2} \sum_m \omega_m \quad (2.42)$$

es la masa de un mesón n sobre el solitón a $\mathcal{O}(1)$.

La corrección del sector real es

$$E_{re} = + \sum_{m,n} \frac{|\int V_3 \psi_l \psi_m \psi_n|^2}{4\omega_n \omega_m (\omega_n^2 - (\omega_l + \omega_m)^2)} - \frac{\int V_3 |\psi_n|^2 \psi_m \int V_3 |\psi_l|^2 \psi_m^*}{8\omega_n \omega_m^2 \omega_l}. \quad (2.43)$$

Una vez más vemos que esta cantidad, que es la corrección a una cantidad física, es independiente del parametro ω . También resulta menos dificultosa la corrección en el método de Dirac que en el formalismo BRST por contar con menos diagramas. Esta expresión también tiene divergencias ultravioletas las cuales tratamos más adelante.

Calculamos en este espacio \mathcal{H}_4 el mismo elemento de matriz de ϕ que calculamos mediante el método de Dirac. Si tomamos al operador $\phi = \phi(x + X)$ podemos interpretar que para operadores físicos la distancias se miden desde el sistema de referencia del laboratorio. Esta dependencia en la coordenada colectiva del operador campo garantiza que cualquier funcional de este operador conmute con la carga BRST (1.5) y que como consecuencia de esto tal funcional sea física. Como hemos transformado a la carga también

debemos transformar al operador campo para que este siga conmutando con ella. El campo transformado queda

$$\begin{aligned} \phi_c &\rightarrow \phi_c(x + X) + \sum_{\nu=0} \left(\frac{i}{\sqrt{2M\omega}}\right)^{\nu+1} \frac{(c_0 - c_0^+)^{\nu+1}}{(\nu + 1)!} \frac{d^\nu}{dX^\nu} \phi'_c(x + X) \\ q &\rightarrow \sum_{\nu=0} \left(\frac{i}{\sqrt{2M\omega}}\right)^{\nu+1} \frac{(c_0 - c_0^+)^{\nu}}{(\nu)!} (c_1 - a_1^+) \frac{d^\nu}{dX^\nu} \phi'_c(x + X) \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$+ \sum_n \frac{i}{\sqrt{2\omega_n}} \sum_{\nu=0} \left(\frac{i}{\sqrt{2M\omega}}\right)^{\nu} \frac{(c_0 - c_0^+)^{\nu}}{(\nu)!} \frac{d^\nu}{dX^\nu} (\psi_n(x + X)a_n - \psi_n^*(x + X)a_n^+) \quad (2.45)$$

La integración sobre las coordenadas colectivas en la base (1.23) da el operador de transición en [18]

$$\begin{aligned} \phi_{eff} &= \frac{1}{2\pi} \int dX e^{i(\Pi - \Pi')X} \phi(x + X) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\Pi' - \Pi)x} * \\ &\left(\bar{\phi}_c + i\bar{\phi}'_c \left[\frac{(c_1 - c_1^+)}{\sqrt{2M\omega}} e^{i(\Pi' - \Pi)s} + \frac{(1 - e^{i(\Pi' - \Pi)s})}{\Pi' - \Pi} \right] + \sum_n \frac{i}{\sqrt{2\omega_n}} (\bar{\psi}_n a_n - \bar{\psi}_n^* a_n^+) e^{i(\Pi' - \Pi)s} \right) \end{aligned} \quad (2.46)$$

donde la transformada de Fourier del campo clásico la escribimos con una barra ($\bar{\Phi} \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \Phi(x) \exp[i(\Pi - \Pi')x]$).

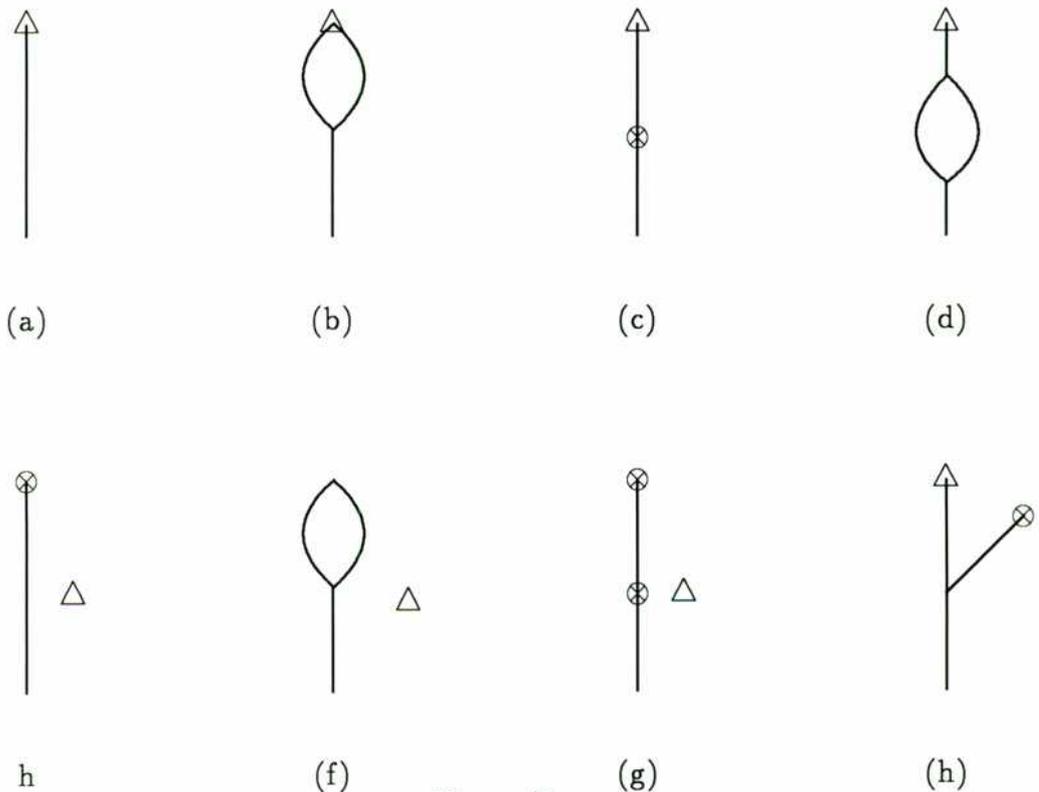


Figura 7

Los diagramas que contribuyen al sector espúreo están listados en la figura 7. La contribución de este sector al elemento de matriz es

$$\begin{aligned} \langle \Pi'; n_n = 0 | \phi_{eff} | \Pi; n_n = 1 \rangle_{sp, \Pi} &= \frac{i}{M\sqrt{2\omega_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\Pi' - \Pi)x} * \\ &\left(\frac{1}{8\omega_n^2} \bar{\psi}_n \sum_m \frac{\omega_n^2 - \omega_m^2}{\omega_m} B_{mn}^2 + \frac{1}{2} \sum_m \sum_{l \neq n} \frac{\omega_n^2 + \omega_m^2}{\omega_m(\omega_n^2 - \omega_l^2)} B_{mn} B_{ml} \bar{\psi}_l - \frac{1}{2} \bar{\psi}_1 \sum_m \frac{1}{\omega_m} A_m B_{mn} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\sqrt{M}}{4} \bar{\psi}_1 \sum_m \frac{1}{\omega_m^2} B_{mn} \sum_l \frac{1}{\omega_l} W_{mli} - \frac{\sqrt{M}}{2} \bar{\psi}_1 \sum_{m,l} \frac{1}{\omega_m(\omega_n^2 - (\omega_m + \omega_l)^2)} B_{ml} W_{mli} \right) \\ &+ (\Pi + \Pi') \left(\frac{1}{\omega_n} A_n \bar{\psi}_1 + \sum_m \frac{\omega_n}{\omega_n^2 - \omega_m^2} B_{mn} \bar{\psi}_{\tilde{n}} \right) + \frac{1}{2} (\Pi - \Pi') \sum_m \frac{\omega_n^2 + \omega_m^2}{\omega_m(\omega_n^2 - \omega_m^2)} B_{mn} \bar{\psi}_{\tilde{m}} \end{aligned} \quad (2.47)$$

El sector real contribuye solo a través de los diagramas (c), (d) y (h) de la figura 7. Esta contribución es

$$\begin{aligned} \langle \Pi'; n_n = 0 | \phi_{eff} | \Pi; n_n = 1 \rangle_r &= \frac{i}{\sqrt{2\omega_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i(\Pi' - \Pi)x} * \\ &\left(-\frac{1}{16\omega_n^2} \bar{\psi}_n \sum_m \frac{1}{\omega_m} W_{m\tilde{m}n\tilde{n}} + \frac{1}{4} \sum_{l \neq n} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega_l^2)} \bar{\psi}_l \sum_m \frac{1}{\omega_m} W_{m\tilde{m}nl} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{16\omega_n^2} \bar{\psi}_n \sum_m \frac{1}{\omega_m^2} W_{n\tilde{n}m} \sum_k \frac{1}{\omega_k} W_{k\tilde{k}m} - \frac{1}{4} \sum_{l \neq n} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega_l^2)} \bar{\psi}_l \sum_m \frac{1}{\omega_m^2} W_{n\tilde{m}l} \sum_k \frac{1}{\omega_k} W_{k\tilde{k}m} \right) \\ &\quad \left. - \frac{1}{8\omega_n^2} \bar{\psi}_n \sum_{m,l} \frac{3\omega_n^2 - (\omega_l + \omega_m)^2}{\omega_m(\omega_n^2 - (\omega_l + \omega_m)^2)^2} W_{\tilde{n}lm}^2 + \frac{1}{2} \sum_{k \neq n} \frac{1}{(\omega_n^2 - \omega_k^2)} \bar{\psi}_k \sum_{m,l} \frac{1}{\omega_m(\omega_n^2 - (\omega_l + \omega_m)^2)} W_{\tilde{n}lm} W_{\tilde{k}lm} \right) \end{aligned} \quad (2.48)$$

Nuevamente vemos que el número de diagramas es mayor en este método que el tratamiento de Dirac. La razón es la misma: un número mayor de grados de libertad da lugar a un número mayor de vértices que a su vez dan lugar a un mayor número de diagramas. Sin embargo, los resultados son equivalentes al orden en que hemos incurrido. Vale la pena mostrar otra diferencia. Esta es la transformación de los campos hecha en (2.45). Si solo consideramos la transformación a $\mathcal{O}(1)$ recuperamos el campo efectivo de \mathcal{H}_2 . O sea, los elementos de matriz del operador en (2.45) entre estados físicos a $\mathcal{O}(1)$ serán los mismos que los del operador campo definido en \mathcal{H}_2 entre los mismos estados físicos. Esto se debe a que el sector espúreo del campo a este orden es un operador que lleva estado físicos a estados de norma nula. Es fácil ver que las contribuciones de menor orden debido a la transformación hecha en (2.45) están ausentes en el tratamiento de Dirac. Esta diferencia no trae aparejadas consecuencias a $\mathcal{O}(M^{-1})$ pero a ordenes superiores es posible que las haya. No incurrimos en el cálculo explícito a orden superiores por ser sumamente tediosa la generación de diagramas e irrelevante a nuestros propósitos. Preferimos buscar otra magnitud e imponer otros límites para demostrar que los términos de $\mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}})$ marcan las diferencias.

3.3 Renormalización

Como hemos visto en el capítulo anterior, las correcciones a la energía de ambos sectores topológicos tienen divergencias ultravioletas. Estas divergencias fueron corregidas con el uso de teoría de renormalización. Continuamos con el modelo ϕ^4 para renormalizar a dos loops porque nuestro objetivo en este capítulo también es comparar los resultados obtenidos en el tratamiento BRST y en el tratamiento de Dirac.

En el sector con topología uno utilizamos el mismo contratérmino que fue utilizado en el sector con topología trivial. Entonces tenemos que el contratérmino en el sector $B = 1$ es

$$\hat{H}^{\delta m^2} = -\frac{\delta m^2}{2}(\phi_c^2 - \lambda^2 + 2\phi_c \hat{q} + \hat{q}^2). \tag{3.49}$$

Se puede verificar que este término es físico porque conmuta con la carga BRST (1.21). Sin embargo, hemos hecho una transformación canónica de la carga BRST y del hamiltoniano. Por lo tanto hemos transformado a su vez el espacio de Hilbert sobre el cual estamos trabajando. En este nuevo espacio las magnitudes físicas no son las que conmutan con la carga (1.21) sino los que conmutan con la carga efectiva (2.28). Como consecuencia de esta transformación de la carga debemos también transformar de la misma manera el contratérmino para que siga siendo físico. Esto es

$$\begin{aligned} H_{eff}^{\delta m^2} &= T H^{\delta m^2} T^{dagger} \\ &= -\frac{\delta m^2}{2}(\phi_c^2 - \lambda^2 + 2\phi_c(\hat{q} - \psi_1 \int \psi_1 \hat{q} + \frac{\psi_1 \hat{B}}{\sqrt{M}}) + (\hat{q} - \psi_1 \int \psi_1 \hat{q} + \frac{\psi_1 \hat{B}}{\sqrt{M}})^2) \end{aligned} \tag{3.50}$$

Con esta transformación introducimos nuevos vértices que garantizan que las energías renormalizadas sean independientes del parametro ω .

De esta interacción efectiva surgen los vértices que corrigen la energía del vacío



Figura 7

Al considerar el contratérmino la energía del vacío toma la forma encontrada con el método de Dirac en el capítulo anterior. Estos resultados son los mismos que los

obtenidos por el método de Dirac a pesar de haber incluido los vértices de un operador nulo, el cual como hemos argumentado no contribuye a la corrección de magnitudes físicas. Recordamos que no hay vértices del sector residual con la topología del vértice de la figura 7 y que propague un estado espúreo. Por lo tanto podemos concluir que al orden en que hemos incurrido, esto es $\mathcal{O}(M^{-1})$ y $\mathcal{O}(\frac{\Pi^2}{M^2})$, el tratamiento BRST no muestra ninguna ventaja sobre el tratamiento de Dirac. Resulta entonces conveniente a estos ordenes utilizar el método de Dirac porque es más sencillo corregir las magnitudes físicas al tener un menor número de vértices.

3.4 El límite relativista

En esta sección primero minimizamos el hamiltoniano BRST teniendo en cuenta las variables espúreas para eliminar los términos lineales en las fluctuaciones[37]. En esta sección utilizamos una función de gauge ρ modificada. Esta la escribimos como

$$\rho = \pi \Omega + \bar{\eta} \omega^2 (G - \frac{\zeta}{2M} B). \quad (4.51)$$

Con esta elección de gauge podemos escribir el hamiltoniano BRST con la forma

$$H_{BRST} = H - \Omega(P - \Pi) + i\pi\bar{\pi} + \omega^2 (BG - \frac{\zeta}{2} B^2 + \eta\bar{\eta}[G, P]) \quad (4.52)$$

Las ecuaciones de evolución temporal para las distintas variables son

$$B_c = G_c = 0 \quad (4.53)$$

$$\Pi = \int \phi'_c p_c \quad (4.54)$$

$$p_c = v_r \phi'_c \quad (4.55)$$

donde

$$v_r \equiv \Omega_c = \Pi/E \quad E \equiv \int (\phi'_{cr})^2 \quad (4.56)$$

La minimización funcional del hamiltoniano respecto del campo ϕ es

$$\phi'' - \Omega p' = V_1 \rightarrow (1 - v_r^2) \phi''_{cr} = V_1. \quad (4.57)$$

Aquí nuevamente hemos aproximado la minimización porque hemos despreciado el acoplamiento entre los fantasmas y las restantes variables. Vemos que recuperamos los resultados clásicos obtenidos para el tratamiento de Dirac en \mathcal{H}_3 . Pero esto solo lo hemos logrado a $\mathcal{O}(M)$. Para considerar ordenes inferiores debemos recurrir a las fluctuaciones alrededor de los valores clásicos.

Las fluctuaciones alrededor de estas magnitudes clásicas son

$$\begin{aligned} \phi &= \phi_{cr} + \hat{q}, \\ p &= \hat{p}_{cr} + \hat{p}, \\ \Omega &= v_r + \hat{\Omega} \\ B &= \hat{B} \end{aligned} \quad (4.58)$$

El hamiltoniano BRST queda al considerar las fluctuaciones

$$\begin{aligned}
 H_{BRST} &= E + \hat{H}_o + \hat{H}_{res} \\
 H_o &= \frac{1}{2} \int \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}'^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}^2 V_2 - v_r \int \hat{q}' \hat{p} \\
 H_{res} &= \sum_{i>2} \frac{\hat{q}^i}{i!} V_i - \hat{\Omega} \hat{P}^{(2)} + \omega^2 \hat{\eta} \hat{\eta} [\hat{G}, \hat{P}^{(2)}]
 \end{aligned} \tag{4.59}$$

Cabe destacar que debido a que no hemos minimizado el hamiltoniano en \mathcal{H}_4 , no existen términos lineales en las fluctuaciones de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$ en el límite relativista. Esto nos impedia obtener una convergencia en este límite.

El momento es el mismo que el encontrado en \mathcal{H}_3 . Este se escribe

$$\begin{aligned}
 P &= \Pi + \hat{P}^{(1)} + \hat{P}^{(2)} \\
 \hat{P}^{(1)} &= \int \phi'_{cr} (\hat{p} + v_r \hat{q}') \\
 \hat{P}^{(2)} &= \int \hat{q}' \hat{p}
 \end{aligned} \tag{4.60}$$

El modo de energía cero, el cual no tiene restitución, lo incorporamos, de la manera utilizada en el comienzo de este capítulo. Esto es con los restantes términos del hamiltoniano BRST cuadrático. Estos últimos términos son los que contribuye el término $[\rho, Q]^{(2)}$.

Trabajamos con el hamiltoniano espúreo porque el hamiltoniano cuadrático real ya ha sido diagonalizado y estudiado en la sección relativista del capítulo anterior. El hamiltoniano espúreo se escribe

$$H_{sp}^{(2)} = \frac{1 - v_r^2}{2E} (\hat{P}^{(1)})^2 - \hat{\Omega} \hat{P}^{(1)} + \omega^2 \hat{B} \hat{G} - \frac{\omega^2 \zeta}{2} \hat{B}^2 + i(\pi \bar{\pi} + \omega^2 \eta \bar{\eta}). \tag{4.61}$$

El gauge se elige para que sea el operador conjugado al término lineal del vínculo. Esto garantiza que los factores que multiplican a las fluctuaciones fermiónicas en el último término sean las que aparecen.

Los términos que solo incluyen modos espúreos con estadística fermiónica y que aparecen en la ec. (4.61) se pueden llevar a la forma diagonal haciendo una transformación idéntica a la hecha en el comienzo de este capítulo.

$$\begin{aligned}
 a &= i\bar{b}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \hat{\pi} - i\sqrt{\frac{\omega}{2}} \hat{\eta} \\
 b &= i\bar{a}^+ = \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \hat{\pi} + i\sqrt{\frac{\omega}{2}} \hat{\eta}
 \end{aligned} \tag{4.62}$$

donde los operadores de creación y destrucción cumplen con las relaciones de anticonmutación

$$[a, \bar{a}]_+ = [b, \bar{b}]_+ = 1. \tag{4.63}$$

El vacío de estos modos, $|0\rangle$, es aniquilado por los operadores a y b . Esto es

$$a|0\rangle = b|0\rangle = 0. \tag{4.64}$$

Los términos que contienen los modos espúreos con estadística bosónica se desacoplan solo si $\zeta = \frac{1-v_r^2}{E}$. Esto se ve al completar cuadrados en la ecuación (4.61).

$$\frac{1-v_r^2}{E} \left(P^{(1)} - \frac{E}{1-v_r^2} \Omega \right)^2 - \omega^2 \zeta (B - G^{(1)}) + \frac{1}{2A} (G^{(1)})^2 - \frac{E}{1-v_r^2} \Omega^2. \quad (4.65)$$

La condición para que estos dos osciladores se desacoplen es

$$\left[\left(P^{(1)} - \frac{E}{1-v_r^2} \Omega \right), (B - G^{(1)}) \right] = 0. \quad (4.66)$$

Debido a la constante que multiplica al término $\bar{\eta}\eta$ en (4.61), el gauge debe tomar la forma

$$\hat{G} = i \sqrt{\frac{1-v^2}{2\omega_1 E}} (a_1 - a_1^\dagger) \quad (4.67)$$

Este operador de gauge tiene la ventaja de tener solo modos espúreos. Esta es la definición de gauge rígido cuya alternativa es el gauge no-rígido el cual está también compuesto por modos de frecuencias finitas. El uso de un gauge rígido garantiza que los términos que aparecen en (4.61) queden desacoplados de los modos reales. Esto no sucede en general para el gauge no-rígido. El gauge definido en (4.67) en término de los modos normales puede también ser escrito en término de las fluctuaciones, las cuales están relacionados con los modos. Vease la sección relativista en el capítulo anterior.

Con esta elección de gauge se puede diagonalizar el hamiltoniano (4.61) si utilizamos las siguientes transformaciones

$$\begin{aligned} c_1 &= \sqrt{\frac{\zeta}{2\omega}} \hat{P}^{(1)} - \frac{1}{\sqrt{2\omega\zeta}} \Omega - i \sqrt{\frac{\omega}{2\zeta}} \hat{G} \\ c_0 &= -i \sqrt{\frac{\omega\zeta}{2}} \hat{B} + \frac{1}{\sqrt{2\omega\zeta}} \Omega + i \sqrt{\frac{\omega}{2\zeta}} \hat{G} \end{aligned} \quad (4.68)$$

Donde los operadores de creación y destrucción cumplen relaciones de conmutación idénticas a las satisfechas por sus pares en el comienzo de este capítulo

$$[c_1, c_1^\dagger] = [c_0^\dagger, c_0] = 1 \quad (4.69)$$

El vacío del sector espúreo también es aniquilado por los destructores bosónicos. Esto es

$$c_1 |0\rangle = c_0 |0\rangle = a |0\rangle = b |0\rangle = 0, \quad (4.70)$$

Sin embargo, los operadores en (4.70) no son los mismos operadores espúreos encontrados en la primera sección de este capítulo. Estos últimos aniquilan un vacío distinto al encontrado en (4.70) porque las transformaciones utilizadas para diagonalizar el hamiltoniano son distintas en ambos casos y estas afectan a los modos espúreos.

De esta manera llegamos a definir el hamiltoniano espúreo y el espacio en que este está definido

$$H_{sp}^{(2)} = \omega(c_1^+ c_1 - c_0^+ c_0 + \bar{a}a + \bar{b}b). \quad (4.71)$$

De vuelta se observa que la energía del vacío y de los estados con modos reales definido por (4.71) son independientes del parametro ω . Esto no hace mas que reflejar la supersimetría de (4.71), y la equivalencia del hamiltoniano original con el hamiltoniano BRST.

La carga BRST cuadrática en término de estos modos es

$$Q^{(2)} = -\sqrt{\frac{E}{1-v_r^2}}[i(c_1^+ + c_0^+)a + (c_1 + c_0)\bar{b}]. \quad (4.72)$$

Entonces es facil ver que el vacío del sector espúreo, $|0\rangle$, es aniquilado por la expresión cuadrática de la carga BRST. Esto refleja que los estados definidos por los modos normales son físicos al orden impuesto por la carga. En consecuencia, una expansión perturbativa puede ser construida a partir de esto estados. Los resultados obtenidos seran independientes del parametro ω .

Para terminar el tratamiento cuadrático expresamos a las fluctuaciones en término de los modos normales

$$\begin{aligned} \hat{q} &= i\sqrt{\frac{1-v_r^2}{2E\omega}}\phi'_{cr}(c_1 - c_1^+) + \sqrt{\frac{\omega}{2E(1-v_r^2)}}v_r x \phi'_{cr}(c_1 + c_1^+ + c_0 + c_0^+) \\ &\quad + \sum_n \left(\frac{i}{\sqrt{2\omega_n}} \Psi_n c_n + h.c. \right) \\ \hat{p} &= i\sqrt{\frac{1-v_r^2}{2E\omega}}v_r \phi''_{cr}(c_1 - c_1^+) + \sqrt{\frac{\omega}{2E(1-v_r^2)}}(\phi'_{cr} + v_r^2 \phi''_{cr} x)(c_1 + c_1^+ + c_0 + c_0^+) \\ &\quad + \sum_n \left(\left(\sqrt{\frac{\omega_n}{2}} \Psi_n + \frac{iv_r}{\sqrt{2\omega_n}} \Psi'_n \right) c_n + h.c. \right) \end{aligned} \quad (4.73)$$

Notese que la frecuencia cero ω_1 ha desaparecido de las fluctuaciones. Esta ha sido reemplazada por la frecuencia arbitraria pero finita ω . Lo mismo sucede con el hamiltoniano. Por consiguiente, podemos hacer un tratamiento perturbativo sin encontrar divergencias infrarrojas.

Los términos del hamiltoniano intrínseco-colectivo han sido incluidos en este tratamiento dentro de la base de estados que se utilizará para realizar el tratamiento perturbativo. Por lo tanto no contribuió con vértices como lo hizo a comienzos de este capítulo. Sin embargo, la contribución de este hamiltoniano en teoría de perturbaciones surge de la dependencia en v_r de los vértices utilizados para estos fines.

El hamiltoniano residual, que es independiente de v_r , contribuye a la corrección de magnitudes como la energía del fundamental en este sector topológico a $\mathcal{O}(E^{-1})$. Ya lo escribimos en (4.59). La energía del estado fundamental, a pesar de ser divergente y necesitar renormalización, difiere con la obtenida a partir de los conmutadores de Dirac sin renormalizar. Justificamos así la falta de renormalización, la cual no haremos.

La contribución de los diagramas que son generados por los vértices del hamiltoniano \hat{H}_{res} aparecen en la figura 9.

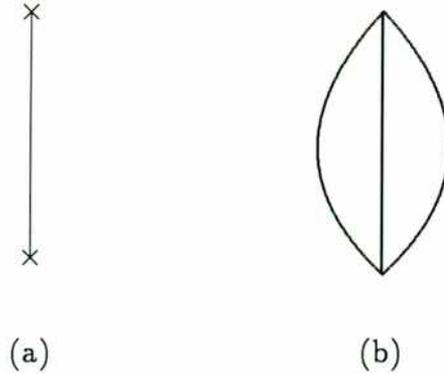


Figura 9

La suma de estos diagramas es como es de esperarse independiente del parametro ω pero dependiente de la velocidad colectiva

$$\begin{aligned}
 \Delta E^{(2)} = & -\frac{1 + 3v_r^2 - v_r^4 + 9v_r^6}{8E^2} \int (\phi''_{cr})^2 - \frac{3v_r^4(1 - v_r^2)}{2E^3} \int (\phi''_{cr})^2 \int (x\phi''_{cr})^2 \\
 & + \frac{1 - v_r^2}{8E} \sum_{n,m} \frac{|\int V_3 \Psi_n \Psi_m \phi'_{cr}|^2}{\omega_n \omega_m (\omega_n + \omega_m)^2} - \frac{iv_r}{4E} \sum_{n,m} \frac{\int V_3 \Psi_n \Psi_m \phi'_{cr} \int x V_3 \Psi_n^* \Psi_m^* \phi'_{cr}}{\omega_n \omega_m (\omega_n + \omega_m)} \\
 & - \sum_n \frac{1}{32\omega_n^2} \left| \sum_m \int V_3 \frac{|\Psi_m|^2}{\omega_m} \Psi_n \right|^2 - \frac{1}{48} \sum_{n,m,l} \frac{|\int V_3 \Psi_n \Psi_m \Psi_l|^2}{\omega_n \omega_m \omega_l (\omega_n + \omega_m + \omega_l)} \\
 & + \frac{1}{32} \int V_4 \left(\sum_n \frac{|\Psi_n|^2}{\omega_n} \right)^2
 \end{aligned} \tag{4.74}$$

Las dos últimas líneas incluyen la contribución de los modos de frecuencia finita. El modo de energía cero da una corrección que aparece en las primeras dos líneas. Debido a la dependencia intrincada de las funciones Ψ_n en la velocidad colectiva v_r , resulta difícil llevar esta expresión a la forma necesaria para que represente el último término en (4.125) del capítulo anterior. Suponemos que para el caso de un potencial particular $V(\phi)$ tal relación puede ser obtenida a partir de (4.74).

3.5 MOBOL

En el capítulo 2 utilizamos el método de Dirac en \mathcal{H}_2 para tratar el modo cero que se nos presentó al trabajar en \mathcal{H}_1 . Vimos en las secciones anteriores de este capítulo que el formalismo BRST también puede ser utilizado para tratar en el espacio \mathcal{H}_4 a este modo espúreo. En el límite de bajos momentos colectivos, $\mathcal{O}(\Pi) \sim \mathcal{O}(1)$, los tratamientos dan resultados idénticos. Sin embargo, en el límite relativista donde $\mathcal{O}(\Pi) \sim \mathcal{O}(M)$, encontramos que la corrección a la energía del vacío difiere de un tratamiento al otro.

Lamentablemente, la solución exacta donde no se hace uso de grados espúreos, esto es en \mathcal{H}_1 , no es conocida porque no podemos desacoplar los grados espúreos de los reales. Por lo tanto no podemos a priori determinar cual de los dos procedimientos es el correcto.

Una de las razones por la discrepancia entre ambos resultados es la no canonicidad de la transformación implementada en \mathcal{H}_2 y en \mathcal{H}_3 para llevar el vínculo que contiene hasta términos bilineales a otro que solo contiene un término lineal. La otra razón para justificar las diferencias de los tratamientos en este límite se basa en la retención de términos adicionales de la solución de cero energía Ψ_1 . Como vimos, para cancelar la dependencia en el parametro de gauge ω , nos hizo falta expandir la función Ψ_1 y retener hasta términos lineales en ω . Recordamos que la función Ψ_1 en \mathcal{H}_3 depende del autovalor cero ω_1 , pero que en \mathcal{H}_4 reemplazamos a ω_1 por el parametro de gauge ω . Ergo una expansión en ω_1 de la función Ψ_1 que vive en \mathcal{H}_3 no dará lugar a términos lineales en ω_1 por la sencilla razón que son proporcionales a cero. En el espacio \mathcal{H}_4 tales términos existen porque el parametro de gauge no es nulo como lo es ω_1 .

No satisfechos por estas razones buscamos un modelo cuya solución exacta sea conocida pero que guarde semejanzas con el modelo que hemos tratado hasta ahora. Escencialmente requerimos que el modelo de lugar a un vínculo que sea un polinomio de grado dos en las fluctuaciones cuando se hace uso de coordenadas colectivas para poder implementar la transformación de Tomboulis. Tal es el caso del modelo MOBOL.

El modelo MOBOL[34] describe una partícula que se mueve en $2 + 1$ dimensiones. La partícula, como hemos anticipado, se mueve bajo las fuerzas de un potencial con forma de sombrero mexicano. Al hacer uso de coordenadas cilíndricas podemos obtener resultados en \mathcal{H}_1 porque el modo cero se desacopla del modo real y entonces no hay una ruptura de simetría. Al utilizar coordenadas cartesianas el hamiltoniano exhibe un modo de cero energía junto con una ruptura de simetría. La solución clásica de las ecuaciones de movimiento no guarda las simetrías del hamiltoniano que da lugar a tales ecuaciones. Esto nos permite realizar un tratamiento en \mathcal{H}_3 y en \mathcal{H}_4 . Primero nos concentramos en presentar el tratamiento en \mathcal{H}_1 y después en \mathcal{H}_4 . Mostraremos que ambos resultados coinciden en el límite de altos momentos colectivos. Seguimos aquí el tratamiento realizado en [23].

3.5.1 El tratamiento en \mathcal{H}_1

Las coordenadas cilíndricas

En este espacio el hamiltoniano se escribe

$$\begin{aligned}
 H &= \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(r) ; \quad r^2 = q_1^2 + q_2^2 \\
 V(r) &= \frac{\omega_x^2}{8x_o^2}(r^2 - x_o^2)^2
 \end{aligned}
 \tag{5.75}$$

El parametro semiclásico es x_o y juega un papel similar al del campo clásico en los modelos con solitones. Al hacer uso de coordenadas cilíndricas podemos separar la variable

rotacional de la radial. Esto no sucede en los modelos con solitones. Entonces, el hamiltoniano radial cuando nos restringimos a un subespacio donde el conjugado de la coordenada angular, I , es constante es

$$H_I = \frac{p_r^2}{2} + \frac{(I^2 - 1/4)}{2r^2} + \frac{\omega_x^2}{8x_o^2}(r^2 - x_o^2)^2 ; \quad [r, p_r] = i \quad (5.76)$$

y actua sobre funciones redefinidas como $\Phi \rightarrow r^{-1/2}\Phi$.

El término

$$-\frac{1}{8r^2} \quad (5.77)$$

aparece por el laplaciano en polares. Los fantasmas en \mathcal{H}_4 son los encargados de generar los vértices que dan lugar a este término y por lo tanto los encargados de llevar la métrica.

El mínimo semiclásico lo llamamos x_{oI} y satisface

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{I^2}{2r^2} + \frac{\omega_x^2}{8x_o^2}(r^2 - x_o^2)^2 \right) |_{r=x_{oI}} = 0. \quad (5.78)$$

Al considerar las fluctuaciones

$$\begin{aligned} r &= x_{oI} + \hat{r} \\ p_r &= \frac{I}{x_{oI}} + \hat{p} \end{aligned} \quad (5.79)$$

alrededor del mínimo el hamiltoniano queda

$$\begin{aligned} H_I &= H_{vib} + H_{rot} + H_{anh} + H_{coup} \\ H_{vib} &= \frac{1}{2}p_r^2 + \frac{\omega_x^2}{2}r^2 \\ H_{rot} &= \frac{I^2}{2x_{oI}^2} \\ H_{anh} &= \omega_x^2 \left(\frac{r^3}{2x_{oI}} + \frac{r^4}{8x_{oI}^2} + \dots \right) \\ H_{coup} &= -\frac{2I^2r^3}{x_{oI}^5} + \frac{5I^2r^4}{2x_{oI}^6} + \dots \end{aligned} \quad (5.80)$$

El modo cero no aparece pero si surge la energía rotacional de la partícula en \hat{H}_{rot} .

La contribución principal a la energía del vacío es¹

$$E_{gs} = \frac{1}{2}\omega_{xI} + \frac{I^2}{2x_{oI}^2}(1 + I^2\sigma_I) \quad (5.81)$$

donde

$$\omega_{xI}^2 = \frac{1 + 4I^2\sigma_I}{x_{oI}^4\sigma_I} ; \quad \sigma_I \equiv \frac{x_o^2}{\omega_x^2 x_{oI}^6} \quad (5.82)$$

¹Este modelo no tiene una energía clásica como sucede con los modelos con solitones

O sea que el sistema se convierte en un vibrador más rotor con un momento de inercia que depende del momento colectivo I .

La corrección a la energía a orden siguiente puede ser obtenida en forma trivial por no existir modos de energía cero

$$\Delta_{gs} = -\frac{3 - 32I^2\sigma_I}{8x_o^2(1 + 4I^2\sigma_I)^2} \quad (5.83)$$

La expresión (5.83) es válida para valores de I del orden de x_o^2 .

Las coordenadas cartesianas

Al utilizar coordenadas cartesianas el potencial exhibe una familia de mínimos continuos tal que

$$q_{1o}^2 + q_{2o}^2 = x_o^2 \quad (5.84)$$

porque $x_o^2 > 0$.

Por la existencia de esta familia continua, podemos elegir alguno de estos mínimos como por ejemplo aquel vacío en que la partícula está a lo largo del eje x . Sin embargo, debido a la simetría cilíndrica del sistema, el vacío será transformado en otro al rotar las coordenadas cartesianas.

Este es otro ejemplo de un rompimiento espontáneo de simetría. Los vacíos no poseen la simetría del hamiltoniano.

Al minimizar el hamiltoniano, q_1 satisface la ec. (5.78) para $I = 0$.

La expansión de las fluctuaciones alrededor del mínimo son

$$\begin{aligned} q_1 &= x_o + x & q_2 &= y \\ p_1 &= p_x & p_2 &= p_y \end{aligned} \quad (5.85)$$

con

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij}. \quad (5.86)$$

El hamiltoniano se escribe

$$\begin{aligned} H &= H^{(2)} + H_{res} \\ H^{(2)} &= \frac{1}{2}(p_x^2 + \omega_x^2 x^2) + \frac{1}{2}p_y^2 \\ H_{res} &= \frac{\omega_x^2}{2x_o} x(x^2 + y^2) + \frac{\omega_x^2}{8x_o^2} (x^2 + y^2)^2. \end{aligned} \quad (5.87)$$

Claramente, debido a la elección del vacío, la fluctuación \hat{q}_2 no posee fuerza de restitución. Ergo, hay un modo cero que nos impide realizar un tratamiento perturbativo del hamiltoniano residual.

El vínculo puede ser obtenido al considerar al conjugado, I , del ángulo, φ que relaciona al sistema de laboratorio con el intrínseco. [34] Al expresar el lagrangiano en el sistema primado y considerar a φ como una variable dinámica, que depende del tiempo, la variación del lagrangiano respecto de $\dot{\varphi}$ que es la definición de su conjugado I da lugar al vínculo

$$\begin{aligned} J - I &= 0 \\ J &= q_1 p_2 - q_2 p_1. \end{aligned} \quad (5.88)$$

3.5.2 El tratamiento con coordenadas colectivas en el espacio

\mathcal{H}_4

Con el procedimiento realizado en este capítulo podemos trabajar haciendo uso solamente de los corchetes de Poisson. También, como advertimos, no hace falta recurrir a una transformación que no es canónica para linealizar el vínculo porque hemos introducido a los fantasmas. La minimización en \mathcal{H}_4 despreciando el acoplamiento entre los fantasmas y los restantes grados de libertad dan los siguientes valores de expectación clásicos

$$\begin{aligned} p_{1c} &= q_{2c} = I - J_c = B_c = 0 \\ p_{2c} &= \frac{I}{x_{oI}}; \quad q_{1c} = x_{oI}; \quad \Omega_c = \frac{I}{x_{oI}^2} \end{aligned} \quad (5.89)$$

Donde nuevamente, el mínimo x_{oI} satisface la ecuación (5.78).

Al considerar las fluctuaciones el vínculo se escribe

$$\begin{aligned} f &= f^{(1)} + f^{(2)} \\ f^{(1)} &= x_{oI} p_y + \frac{I}{x_{oI}} x \\ f^{(2)} &= x p_y - y p_x \end{aligned} \quad (5.90)$$

El hamiltoniano BRST es

$$\begin{aligned} H_{BRST} &= H_{BRST}^{(0)} + H_I^{(2)} + H^{(2')} + H_{BRST}^{res} \\ H_{BRST}^{(0)} &= \frac{I^2}{2x_{oI}^2} (1 + I^2 \sigma_I) \\ H_I^{(2)} &= \frac{1}{2} (p_x^2 + p_y^2) + \frac{1 + I^2 \sigma_I}{2x_{oI}^4} x^2 + \frac{\omega_x^2 I^2}{2x_{oI}^4} y^2 - \frac{I}{x_{oI}^2} J^{(2)} \\ H^{(2')} &= -\Omega J^{(1)} + \omega^2 B G^{(1)} - \frac{\omega^2}{2\zeta} B^2 + i\pi \bar{\pi} + \omega^2 \eta \bar{\eta} \\ H_{BRST}^{res} &= \frac{\omega_x^2 x_{oI}}{2x_o^2} x(x^2 + y^2) + \frac{\omega_x^2}{8x_o^2} (x^2 + y^2)^2 - \Omega J^{(2)} + \eta \bar{\eta} [G, J^{(2)}] \end{aligned} \quad (5.91)$$

El hamiltoniano cuadrático $H^{(2)}$ tiene un modo cero porque se puede escribir como

$$H_I^{(2)} = \frac{1}{2x_{oI}^2 (1 + 4I^2 \sigma_I)} (J^{(1)})^2 + \frac{1}{2} p_{xI}^2 + \frac{\omega_x^2 I}{2} x_I^2 \quad (5.92)$$

Donde $\omega_{x_I}^2$ y σ_I son aquellos definidos en (5.82) y

$$p_{x_I} = p_x + \frac{I}{x_{oI}^2} y ; \quad x_I = \frac{1 + 2I^2 \sigma_I}{1 + 4I^2 \sigma_I} x - \frac{2I \sigma_I x_{oI}^2}{1 + 4I^2 \sigma_I} p_y \quad (5.93)$$

Escribiendo el gauge como

$$G = \frac{1 + 2I^2 \sigma_I}{x_{oI}(1 + 4I^2 \sigma_I)} y - \frac{2I \sigma_I x_{oI}}{1 + 4I^2 \sigma_I} p_x \quad (5.94)$$

podemos darle masa ω al modo cero.

Al realizar una expansión perturbativa en $\omega_x^{-1} x_o^{-2}$ del hamiltoniano residual H^{res} obtenemos del sector espúreo los términos necesarios para que la corrección a la energía del vacío a ese orden sea la misma que la obtenida en \mathcal{H}_1 usando coordenadas cilíndricas.

Capítulo 4

La ausencia del acoplamiento de Yukawa

Los solitones, como hemos visto, tienen buen número topológico que se lo asocia al número bariónico. Entonces, los solitones representan a los bariones. Las fluctuaciones alrededor del solitón describen los mesones. El tercer ingrediente para tener un modelo que describa la física nuclear de bajas energías es el acoplamiento de Yukawa, la interacción entre bariones y mesones encontrada en la naturaleza. En este capítulo nos dedicamos a estudiar la existencia o no de este acoplamiento.

Este acoplamiento fue sugerido por Yukawa en 1934. Oportunidad en que Yukawa también planteó la existencia de partículas masivas (mesones) que mediaban las interacciones fuertes. El modelo se apoya en un hamiltoniano de Klein-Gordon para mesones sin isospin. La masa de los mesones se considera de $\mathcal{O}(1)$. Los bariones, descritos por el hamiltoniano de Dirac para fermiones con masa de $\mathcal{O}(M)$ son considerados como partículas puntuales, algo severamente objetado por los seguidores de los modelos solitónicos. La interacción lineal en el campo mesónico y que conserva el número bariónico la produce el reemplazo de la derivada en el hamiltoniano de Dirac por la derivada covariante. La constante de acoplamiento entre los bariones y los mesones se consideraba de orden $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$. Años después, con la constatación con evidencia experimental se le agrega a este modelo el isospin de los mesones. De todas maneras, el acoplamiento y restantes magnitudes conservaban sus ordenes.

De estos modelos, y con este tipo de acoplamiento se obtiene partiendo de estados de un mesón y un barión una amplitud de probabilidad de transición (ATP) para colisiones inelásticas que se conocen como los términos de Born. El orden de ellos, a pesar del orden de la interacción y debido al mecanismo de Heitler-Bhabha es de $\mathcal{O}(1)$. La existencia de términos de Born de $\mathcal{O}(1)$ es una manera alternativa de determinar la existencia o no de un acoplamiento del tipo Yukawa.

Skyrme, en sus trabajos, duda sobre la existencia de tal acoplamiento porque es necesario minimizar el hamiltoniano para justificar la estabilidad ante decaimiento del solitón. Este requisito implica que no hay términos lineales en las fluctuaciones y de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$ en el hamiltoniano. Si tal término existiese los términos de Born serían de $\mathcal{O}(1)$ y concluiríamos que el modelo de Skyrme describe todos los procesos básicos de la física hadónica a bajas energías.

Las conjeturas a las que llego Skyrme no fueron tenidas en cuenta por algunos de sus seguidores. Entre ellos figuran Mattis[11]. Luego de encontrar coincidencia con el espectro bariónico experimental, salvo por dicho acoplamiento, sugiere que tal acoplamiento puede estar oculto en el sector espúreo, y que un tratamiento adecuado de ese sector debería dar lugar a tal acoplamiento. Esta conjetura también fue apoyada por gente como Eckart et. al. [10]. Siguiendo estas conjeturas, Verschelde[27] en el modelo de Skyrme y Ohta[14] en el modelo en $1 + 1$ sugieren que para obtener los términos de Born deben sumarse todos los diagramas a todo orden en M teniendo en cuenta el modo cero. Esto según ellos da lugar a una amplitud de probabilidad de transición de $\mathcal{O}(1)$. Al mismo tiempo sostienen que esta suma de diagramas puede ser obtenida más fácilmente si se hace uso de un gauge no rígido, el cual acelera la convergencia de la serie. Ellos, entonces, concluyen que el acoplamiento de Yukawa existe en dichos modelos. Lo que si advierten es que los términos de Born solo se logran en un gauge particular. Esto por supuesto va en contra del concepto que se utiliza para demostrar la equivalencia entre el hamiltoniano original y el hamiltoniano BRST: las magnitudes físicas son independientes de los parametros de gauge. Esto fue demostrado a lo largo de todo este trabajo. Los resultados de magnitudes físicas fueron en todo momento independientes del parametro de gauge ω . En particular mostramos al corregir la masa del solitón a $\mathcal{O}(M^{-1})$ que este parametro desaparece de las magnitudes clásicas orden por orden.

Por otro lado, han sido muchos los autores que sugieren que el acoplamiento se encuentra en el sector clásico de la fórmula de reducción. Entre ellos los más destacados son Ohta[14],[28] y Uehara[13]. Haciendo uso de de ciertas aproximación cuya validez ponemos en duda obtienen los tan buscados términos de Born.

También están los trabajos de Schwesinger[12] en el modelo de Skyrme que sostienen que tal acoplamiento no existe debido a la necesidad de minimizar. Nosotros nos adherimos a esta conclusión que demostraremos. Para lograr este objetivo continuamos trabajando con nuestro modelo simplificado en $1 + 1$ dimensiones. Sin embargo, para poder refutar las conjeturas y resultados obtenidos por Verschelde y Ohta presentamos aquí la cuantificación del hamiltoniano BRST en el gauge no-rígido. El caso del gauge rígido del capítulo 2 se obtiene como límite del no-rígido.

Primero calculamos la ATP con el formalismo de Dirac en \mathcal{H}_2 y usando la definición de ATP de Joachim [24] y mostramos que no hay términos de Born. Luego calculamos la misma cantidad pero en \mathcal{H}_4 usando por supuesto el formalismo BRST. En coincidencia

con el cálculo anterior verificamos que no existe un acoplamiento de Yukawa. La ATP también se obtiene de la fórmula de reducción. Finalmente estudiamos el sector clásico de la fórmula de reducción utilizada por Uehara[13] y verificamos que sus calculos son erróneos.

4.1 El formalismo de Dirac

Aqui, en esta sección presentamos el hamiltoniano en \mathcal{H}_2 para el caso del gauge no rígido. Esto lo hacemos para mostrar que los resultados de Vershelde y Ohta son incorrectos. Luego definimos la ecuación de movimiento para las fluctuaciones que definen los estados utilizados para calcular la ATP. Finalmente calculamos la ATP y vemos que se anula a $\mathcal{O}(1)$.

El gauge no rígido lo escribimos como

$$\hat{G}_{nr} = \frac{1}{M} \int \phi'_c \hat{q} + \frac{1}{M} \sum_n \zeta_n \int \psi_n \hat{q}. \quad (1.1)$$

El segundo término estuvo ausente en nuestros tratamientos hasta ahora. Debido a la ortonormalidad de las funciones ψ_n este término tiene solo modos que son físicos. También debe notarse que los parametros de gauge ζ_n son de orden $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$. Imponiendo que los parametros de gauge ζ_n se anulen, recuperamos el gauge rígido y los resultados que este acarrea.

Recordamos que en el espacio \mathcal{H}_2 la dinámica está regida por los corchetes de Dirac. Como estos corchetes dependen de la elección de gauge, al relizar un cambio de gauge las ecuaciones de movimiento se modifican. También debe modificarse, debido al cambio de gauge la transformación para linealizar el vínculo.

El conjugado de las fluctuaciones \hat{q} lo escribimos

$$\hat{p} = \hat{p}_t - \frac{1}{2} \sqrt{M} \left\{ \psi_1 \frac{1}{\bar{M}}, \Pi + \int \hat{p} \hat{q}' \right\}_+ - \frac{1}{2} \sum_n \zeta_n \left\{ \psi_n \frac{1}{\bar{M}}, \Pi + \int \hat{p} \hat{q}' \right\}_+. \quad (1.2)$$

Donde

$$\bar{M} = M + \sqrt{M} \int \psi_1 \hat{q}' + \sum_n \zeta_n \int \psi_n \hat{q}'. \quad (1.3)$$

Con esta transformación se logra que el vínculo tome la forma

$$f_{eff} = \int \phi'_c \hat{p}_t. \quad (1.4)$$

Entonces, el corchete de Dirac entre la fluctuación \hat{q} y su nuevo conjugado \hat{p}_t es

$$i[\hat{p}_t(x), \hat{q}(y)]_D = \delta(x - y) - \psi_1(x)\psi_1(y) - \frac{1}{M} \sum_n \zeta_n \psi_n(x)\phi'_c(y). \quad (1.5)$$

El último término en (1.5) no estaba cuando trabajamos con el gauge rígido.

Recordamos que para obtener (1.5) hemos modificado los corchetes de Poisson entre \hat{p}_t y \hat{q} : consideramos a \hat{p}_t como el conjugado de \hat{q} .

El hamiltoniano que se obtiene luego de realizar esta transformación se escribe

$$\begin{aligned}
\hat{H}_D &= \hat{H}_c + \hat{H}_o + \hat{H}_{coup} + \hat{H}_{res}, \\
\hat{H}_c &= M, \\
\hat{H}_o &= \frac{1}{2} \int \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}'^2 + \frac{1}{2} \int \hat{V}_2 \hat{q}^2 \\
\hat{H}_{coup} &= +\frac{1}{8} \left\{ \Pi + \int \hat{p}_t \hat{q}', \frac{1}{M} \right\}^2 \sum_n |\zeta_n|^2 \\
&\quad - \frac{1}{4} \left\{ \left\{ \Pi + \int \hat{p}_t \hat{q}', \frac{1}{M} \right\}, \sum_n \zeta_n \int \psi_n \hat{p}_t \right\} \\
\hat{H}_{res} &= \sum_{i>2} \int \frac{\hat{q}^i}{i!} \hat{V}_i + \frac{\sum_{n,m} \int \psi'_n \psi'_m}{8\bar{M}^2} - \frac{i}{4} \sum_n \zeta_n \int \left\{ \hat{p}, \frac{1}{M} \right\} \psi'_n.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Es fácil confirmar que este hamiltoniano es más complicado que el obtenido a través del gauge rígido. Se puede verificar realizando un tratamiento perturbativo de los últimos dos términos en \hat{H}_{coup} en (1.6) que la masa dinámica del solitón tiene la forma esperada a $\mathcal{O}(\frac{\Pi^2}{M})$ y es independiente de los parámetros de gauge como es de esperarse. Esto también sucede con otras magnitudes.

Como vemos, en el límite de altos momentos colectivos, el último término de \hat{H}_{coup} en (1.6) que es de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$ garantiza una ATP de $\mathcal{O}(1)$. Sin embargo, como es bien sabido, las interacciones fuertes son independientes del momento total del sistema. Ergo, este término no puede ser considerado como el acoplamiento entre mesones y solitones. En el límite de bajos momentos colectivos, de todos los términos del hamiltoniano trabajamos solo con el hamiltoniano \hat{H}_o . La razón para esta elección se basa en que los restantes términos de orden $\mathcal{O}(M^{-\frac{1}{2}})$ o inferior no pueden contribuir a procesos de $\mathcal{O}(1)$. Ergo, en el límite de bajos momentos colectivos, el término del hamiltoniano de mayor orden es \hat{H}_o que es de $\mathcal{O}(1)$. Por ser de este orden podemos suponer que puede contribuir a la amplitud de probabilidad de transición a $\mathcal{O}(1)$ debido al modo cero.

Si consideramos el hamiltoniano \hat{H}_o como hamiltoniano de orden cero entonces los estados que diagonalizan \hat{H}_o serán los que utilizaremos para calcular la amplitud de probabilidad de transición. Las interacciones perturbativas serán todas de inferior orden a $\mathcal{O}(1)$. O sea que no podemos esperar un acoplamiento de Yukawa partiendo de estos estados.

Podemos también considerar parte del hamiltoniano \hat{H}_o como de orden cero y la parte restante como interacción. Esta interacción tiene que dar lugar a una amplitud de probabilidad de transición de $\mathcal{O}(1)$ para que podamos afirmar que hay un acoplamiento de Yukawa.

La manera de fraccionar el hamiltoniano \hat{H}_o en dos pedazos, uno de orden cero que determina los estados que utilizaremos para calcular la probabilidad de transición y otro pedazo del mismo orden que determina la interacción merece algún comentario. A simple

vista resulta conveniente pedir que los estados utilizados sean aquellos que diagonalizan el hamiltoniano en ausencia de soltiones. Pero estos estados que satisfacen la ecuación de Klein-Gordon están definidos en \mathcal{H}_1 y no en \mathcal{H}_2 . Esto implica que no pueden ser utilizados en \mathcal{H}_2 porque no son físicos. Para mostrar esto basta con escribir a los modos relacionados con ondas planas en término de las fluctuaciones de \mathcal{H}_2

$$a_k^\dagger = -i\sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \int \psi_k \hat{q} + \frac{1}{\sqrt{2\omega_2}} \int \psi_k \hat{p}, \quad (1.7)$$

y realizar el conmutador con el vínculo efectivo. Es decir

$$[a_k^\dagger, \int \phi'_c \hat{p}_c] = \sqrt{\frac{\omega_k}{2}} \int \psi_k \phi'_c. \quad (1.8)$$

Debido a que las funciones ψ_k no son ortogonales a la función ϕ'_c el conmutador no se anula. Ergo, los modos a_k^\dagger que representan ondas planas no son físicos. Esto implica que los estados asintóticos preferido por los fenomenólogos y experimentales en teorías como QED y QCD no pueden ser usados en los modelos con solitones que incluyen a la coordenada colectiva como variable dinámica.

Ya que no podemos usar los modos normales del hamiltoniano de Klein-Gordon para una partícula de masa μ nos contentamos con trabajar con ese hamiltoniano como hamiltoniano de orden cero. Esto es

$$\begin{aligned} \hat{H}_o &= \hat{H}_{KG} + \hat{V} \\ \hat{H}_{KG} &= \frac{1}{2} \int \hat{p}_t^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}'^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \int \hat{q}^2 \\ \hat{V} &= \frac{1}{2} \int (\hat{V}_2 - \mu^2) \hat{q}^2. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Con el hamiltoniano de Klein-Gordon y los corchetes de Dirac se obtienen las ecuaciones de movimiento para las fluctuaciones \hat{q}_e^{in} y \hat{q}_e^{out} que diagonalizan a \hat{H}_{KG} . Como estas fluctuaciones satisfacen la misma ecuación, solo escribimos una. Pero por simplicidad incluimos al modo cero dentro de la sumatoria

$$\begin{aligned} -\omega_s^2 \hat{q}_e^{in} + (\mu^2 - \frac{d^2}{dx^2}) \hat{q}_e^{in} + \frac{1}{M} \sum_{s'} \zeta_{s'} \psi_{s'} \int \phi'_c (\hat{q}_e^{in''} - \mu^2 \hat{q}_e^{in}) \\ - \frac{\phi'_c}{M} \sum_{s''} \int \psi_{s''} \zeta_{s''} \{ (\mu^2 - \frac{d^2}{dx^2}) \hat{q}_e^{in} + \frac{1}{M} \sum_{s'} \zeta_{s'} \psi_{s'} \int \psi_1 (\hat{q}_e^{in''} - \mu^2 \hat{q}_e^{in}) \} = 0 \end{aligned} \quad (1.10)$$

Donde hemos usado la relación

$$\sum_n \zeta_n \psi_n = \sum_s \zeta_s \psi_s. \quad (1.11)$$

Donde las funciones ψ_s forman una base del espacio expandido por las funciones ψ_n . Los coeficientes ζ_s verifican

$$\zeta_s = \sum_n \zeta_n \int \psi_s \psi_n^* \quad (1.12)$$

Las fluctuaciones satisfacen una ecuación más sencilla que (1.10). Esta se escribe

$$-\omega_s^2 \hat{q}_e^{in} + \left(\mu^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \hat{q}_e^{in} + \frac{1}{M} \sum_{s'} \zeta_{s'} \psi_{s'} \int \phi_c' (\hat{q}_e^{in''} - \mu^2 \hat{q}_e^{in}) = 0. \quad (1.13)$$

Si se cumple (1.13) entonces se verifica que

$$\begin{aligned} & -\frac{\phi_c'}{M} \sum_{s''} \psi_{s''} \zeta_{s''} \left\{ \left(\mu^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \hat{q}_e^{in} + \frac{1}{M} \sum_{s'} \zeta_{s'} \psi_{s'} \int \phi_c' (\hat{q}_e^{in''} - \mu^2 \hat{q}_e^{in}) \right\} \\ & = -\frac{\phi_c'}{M} \sum_{s''} \int \psi_{s''} \zeta_{s''} \ddot{\hat{q}}_e^{in}. \end{aligned} \quad (1.14)$$

El término a la derecha de la igualdad se anula porque $\ddot{G}_{nr} = 0$. Habiendo demostrado esto volvemos a omitir de las sumatorias al modo cero.

Las fluctuaciones que satisfacen (1.13) no son las fluctuaciones asintóticas para un gauge no rígido arbitrario. Para que los sean debe satisfacer que

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow -\infty} \hat{q} &= \hat{q}^{in} \\ \lim_{t \rightarrow +\infty} \hat{q} &= \hat{q}^{out} \end{aligned} \quad (1.15)$$

Esta es la definición formal de fluctuaciones de entrada (in) y de salida (out). A tiempos iniciales y finales los mesones se hallan a distancias muy grandes del origen (o sea del blanco) y entonces el límite $t \rightarrow \pm\infty$ implica que $x \rightarrow \pm\infty$. En este límite la ecuación para las fluctuaciones que diagonalizan el hamiltoniano \hat{H}_0 es

$$\ddot{\hat{q}} - \hat{q}'' + \mu^2 \hat{q} = 0. \quad (1.16)$$

Esta ecuación no coincide con (1.13) a menos que todos los ζ_s se anulen para los cuales no se cumple que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_s = 0. \quad (1.17)$$

Este, en general, no es el caso porque el potencial en el infinito es finito. Vemos que en este formalismo, el gauge no rígido nos impide llamar a estas fluctuaciones asintóticas. Esto no sucede con en el formalismo BRST en el espacio \mathcal{H}_4 .

Expandimos a las fluctuaciones \hat{q}_e^{in} en término de modos normales

$$\hat{q}_e^{in} = \sum_s \frac{i}{\sqrt{2\omega_s}} (\psi_s e^{-i\omega_s t} a_{s,in} - \psi_s^* e^{i\omega_s t} a_{s,in}^+). \quad (1.18)$$

Donde las funciones ψ_s satisfacen la ecuación integrodifencial

$$-\omega_s^2 \psi_s + \left(\mu^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi_s + \psi_1 \int \psi_1 (\psi_s'' - \mu^2 \psi_s) + \frac{1}{M} \sum_{s'} \zeta_{s'} \psi_{s'} \int \psi_1 (\psi_s'' - \mu^2 \psi_s) \quad (1.19)$$

No debemos conocer las soluciones de esta ecuación para obtener los resultados deseados. Lo que si debemos demostrar es que las funciones ψ_s son ortogonales al modo cero. Esto lo hacemos multiplicando por ψ_1 a (1.19) e integrando; el resultado es

$$\omega_s^2 \int \psi_1 \psi_s = 0. \quad (1.20)$$

Como veremos mas adelante la relación (1.20) es la causa de que el modo cero no de lugar a una ATP. También nos hace falta mostrar que las funciones ψ_s^* satisfacen la ec. (1.19) porque esta queda invariante ante conjugación compleja. Con esto demostrado es facil concluir, luego de paso similares al realizado por ψ_1 pero con otra función ψ_s^* , que el conjunto de funciones $\{\psi_s\}$ forma una base ortognormal porque

$$(\omega_s^2 - \omega_{s'}^2) \int \psi_s \psi_{s'}^* = 0. \quad (1.21)$$

Habiendo demostrado estas propiedades es facil verificar que el hamiltoniano \hat{H}_{KG} se puede escribir

$$\hat{H}_{KG} = \sum_s \omega_s (a_s^+ a_s + \frac{1}{2}). \quad (1.22)$$

Para calcular la amplitud de probabilidad de transición o matriz T, utilizamos la definición de Joachim[24]. Esta se escribe

$$\langle s, \Pi | T(\omega(s)) | s, \Pi \rangle = \langle s, \Pi | \hat{V} | s, \Pi \rangle + \langle s, \Pi | \hat{V} \frac{1}{\omega_s - \hat{H}_0} \hat{V} | s, \Pi \rangle \quad (1.23)$$

Los estados están etiquetados con el momento colectivo del sistema y el número intrínseco s . Los números s corresponden a estados que son físicos.

A primer orden la ATP es

$$\begin{aligned} T^{(1)} &= \langle s, \Pi | \hat{V} | s, \Pi \rangle = \langle s, \Pi | [a_s, [\hat{V}, a_s^+]_D] | s, \Pi \rangle \\ &= \sum_n (\omega_n^2 - \omega_s^2) \int \psi_s \psi_n \end{aligned} \quad (1.24)$$

La última igualdad se obtiene al utilizar

$$[a_s, a_{s'}^+]_D = \delta_{s,s'} \quad (1.25)$$

y luego de insertar la función $\delta(x-y)$ escrita en la base $\{\psi_1, \psi_n\}$. A segundo orden en teoría de perturbaciones podemos usar como estados intermedios a aquellos que diagonalizan \hat{H}_0 . Esto es equivalente al formalismo desarrollado en teoría de campos nucleares (NFT) [25].

Los vértices son

$$\begin{aligned} v_{f,s-n} &= [a_n, [\hat{V}, a_s^+]] = \frac{1}{\sqrt{2\omega_s}} (\omega_n^2 - \omega_s^2) \int \psi_n^* \psi_s \\ v_{b,s-n} &= [a_n^+, [\hat{V}, a_s^+]] = \frac{1}{\sqrt{2\omega_s}} (\omega_n^2 - \omega_s^2) \int \psi_n^* \psi_s. \end{aligned} \quad (1.26)$$

Con estos vértices se construyen los diagramas que dan a segundo orden una contribución

$$T^{(2)} = \sum_n (-\omega_n^2 + \omega_s^2) \int \psi_s \psi_n \quad (1.27)$$

La suma de (1.24) con (1.27) se anula porque los términos son de igual magnitud pero con signos opuestos. Entonces llegamos al resultado pregonado.

$$T = T^{(1)} + T^{(2)} = 0. \quad (1.28)$$

Entonces no hay amplitud de probabilidad de transición de $\mathcal{O}(1)$ debido a una interacción cuadrática cuando existe un sector espúreo y se utiliza un gauge no rígido, el cual incluye al rígido. Por lo tanto podemos decir que en este modelo no hay un acoplamiento de Yukawa entre mesones y bariones. Si las funciones ψ_s no son ortogonales al modo cero, si no son físicas como es el caso de las ondas planas, entonces existe una contribución de $\mathcal{O}(1)$ porque al insertar la delta en $T^{(1)}$ habrá un término más que no será cancelado por los términos $T^{(2)}$. Entonces la ATP hasta segundo orden en teoría de perturbaciones queda

$$T = \omega_s^2 \left| \int \psi_s \psi_1 \right|^2 + \mathcal{O}(\left\{ \int \psi_2 \psi_1 \right\}^3). \quad (1.29)$$

El segundo término a la derecha representa contribuciones de tercer orden. Entonces representan procesos de mayor orden que los términos de Born. Sin embargo, el primer término es el término de Born principal para un mesón con número s y un sistema con momento Π en el límite adiabático.

4.2 El formalismo BRST

En \mathcal{H}_4 comenzamos por escribir el hamiltoniano BRST para una función de gauge de la forma

$$\rho_{nr} = \pi\Omega + \bar{\eta}\omega_2 \left(G_{nr} - \frac{(2A+1)B}{2M} \right) \quad (2.30)$$

Cuando la constante A , que será determinada posteriormente, se anula y el gauge no rígido es reemplazado por el gauge rígido, la función de gauge ρ_{nr} toma el mismo valor que en el capítulo anterior. El gauge no rígido en este caso lo escribimos como lo hicimos con el formalismo de Dirac.

El hamiltoniano BRST efectivo con esta elección de función de gauge ρ_{nr} y gauge no rígido \hat{G}_{nr} queda

$$\begin{aligned} \hat{H}_{BRST} &= \hat{H}_c + \hat{H}_o + \hat{H}_{coup} + \hat{H}_{res}, \\ \hat{H}_c &= M, \\ \hat{H}_o &= \frac{1}{2} \int \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}'^2 + \frac{1}{2} \int \hat{V}_2 \hat{q}^2 \\ &\quad - \hat{\Omega} \int \phi'_c \hat{p} + \omega_o^2 \hat{B} \left(\hat{G}_{nr} - \frac{(2A+1)\hat{B}}{2M} \right) + i\hat{\pi}\hat{\pi} + i\omega_o^2 \hat{\eta}\hat{\eta}, \\ \hat{H}_{coup} &= \Pi\Omega \\ \hat{H}_{res} &= \sum_{i>2} \int \frac{\hat{q}^i}{i!} \hat{V}_i - \hat{\Omega} \int \hat{q}'\hat{p} + \frac{i}{M} \omega_o^2 \hat{\eta}\hat{\eta}. \end{aligned} \quad (2.31)$$

Aclaremos que las funciones ψ_n al igual que ϕ_c son las mismas que las del capítulo 1. Los parametros de gauge ζ_n son arbitrarios, y por ser esta una teoría de gauge dependiente del tiempo deben desaparecer de cualquier resultado físico, en contradicción con lo expuesto por Verschelde[27] y Ohta[14].

Las fluctuaciones en término de los modos normales que diagonalizan el hamiltoniano cuadrático \hat{H}_o en el capítulo anterior nos permiten llevar el hamiltoniano \hat{H}_o en (2.31) a la forma

$$\begin{aligned} \hat{H}_o = & \sum_n \omega_n (c_n^\dagger c_n + \frac{1}{2}) + \omega (c_1^\dagger c_1 - c_o^\dagger c_o + \bar{a}a + \bar{b}b) \\ & - \sum_n \frac{\bar{\mu}_n}{\sqrt{2}} (c_1^\dagger + c_o^\dagger - c_1 - c_o)(c_n + c_n^\dagger) + \frac{A\hat{B}}{M}. \end{aligned} \quad (2.32)$$

La transformación que debemos realizar para que los modos espúreos bosónicos se desacoplen de los reales en el hamiltoniano \hat{H}_o no atañe a los modos espúreos fermiónicos. Esta transformación es

$$\begin{aligned} c_n &= \gamma_n + \frac{\bar{\mu}_n}{\omega - \omega_n} \gamma_b + \frac{\bar{\mu}_n}{\omega + \omega_n} \bar{\gamma}_a \\ c_o &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (1 + \sum_n \frac{2|\bar{\mu}|^2 \omega \omega_n}{(\omega^2 - \omega_n^2)^2}) \gamma_b - \gamma_a - \sum_n \frac{\bar{\mu}_n^*}{\omega + \omega_n} \bar{\gamma}_n - \frac{\bar{\mu}_n}{\omega - \omega_n} \gamma_n \right\} \\ c_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (1 - \sum_n \frac{2|\bar{\mu}|^2 \omega \omega_n}{(\omega^2 - \omega_n^2)^2}) \gamma_b + \gamma_a + \sum_n \frac{\bar{\mu}_n^*}{\omega + \omega_n} \bar{\gamma}_n - \frac{\bar{\mu}_n}{\omega - \omega_n} \gamma_n \right\}. \end{aligned} \quad (2.33)$$

Aqui, las constante $\bar{\mu}_n$ están relacionadas con los parametros introducidos por el gauge no rígido

$$\bar{\mu}_n = -\frac{i\omega^{\frac{3}{2}} \zeta_n}{\sqrt{2M\omega_n}} \quad (2.34)$$

Los operadores γ_a , γ_b , y γ_n satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$\begin{aligned} [\gamma_n, \bar{\gamma}_m] &= \delta_{n,m} \\ [\gamma_a, \bar{\gamma}_a] &= 1 \\ [\gamma_b, \bar{\gamma}_b] &= -1. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Ante la conjugación hermitica esto operadores se transforman como

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_a^\dagger &= \gamma_b \\ \bar{\gamma}_n^\dagger &= \gamma_n \end{aligned} \quad (2.36)$$

El vacío de estos modos satisface

$$\gamma_a |0\rangle = \gamma_b |0\rangle = \gamma_n |0\rangle = 0. \quad (2.37)$$

El hamiltoniano cuadrático \hat{H}_o en término de estos modos toma la forma no diagonal

$$\hat{H}_o = \sum_n \omega_n (\bar{\gamma}_n \gamma_n + \frac{1}{2}) + \omega (\bar{\gamma}_a \gamma_a - \bar{\gamma}_b \gamma_b + \bar{a}a + \bar{b}b) - \left(\sum_n \bar{\mu}_n^2 \frac{\omega_n}{\omega^2 - \omega_n^2} - A \right) (\bar{\gamma}_a - \gamma_b)^2 \quad (2.38)$$

Entonces, con una elección apropiada del parametro A los dos últimos términos en (2.38) se cancelan y el hamiltoniano cuadrático queda como la suma de modos normales reales y un operador escala supersimétrico

$$\hat{H}_o = \sum_n \omega_n (\bar{\gamma}_n + \gamma_n + \frac{1}{2}) + \omega (\bar{\gamma}_a \gamma_a - \bar{\gamma}_b \gamma_b + \bar{a}a + \bar{b}b). \quad (2.39)$$

Estos modos llevan todo el hamiltoniano cuadrático a la forma diagonal. Como consecuencia de esto no hay interacción residual de $\mathcal{O}(1)$. Nuestro objetivo es definir estados asintóticos para una interacción de $\mathcal{O}(1)$. Para esto reescribimos el hamiltoniano \hat{H}_o de otra forma alternativa

$$\begin{aligned} \hat{H}_o &= \hat{H}'_{KG} + \hat{V}', \\ \hat{H}'_{KG} &= \frac{1}{2} \int \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}'^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \int \hat{q}^2 - \sqrt{M} \hat{\Omega} \int \psi_1 \hat{p} + \omega^2 \hat{B} \left(\frac{\int \psi_1 \hat{q}}{\sqrt{M}} - \frac{(2A+1)\hat{B}}{2M} \right) \\ &\quad + i\hat{\pi} \hat{\pi} + i\omega^2 \hat{\eta} \hat{\eta}, \\ \hat{V}' &= \frac{1}{2} \int (V_2 - \mu^2) \hat{q}^2. \end{aligned} \quad (2.40)$$

Los primeros tres términos de \hat{H}'_{KG} son el hamiltoniano de Klein-Gordon que describe los mesones libres en \mathcal{H}_4 . Los términos restantes son la contribución cuadrática del anticonmutador entre la función de gauge ρ_{nr} y la carga cuadrática BRST.

En los modelos y teorías donde no se hace uso de coordenadas colectivas los estados asintóticos deben ser autoestados de un hamiltoniano que describe a la partícula libre. Al introducir grados de libertad adicionales esta condición deja de ser suficiente para definir a los estados asintóticos. El nuevo requisito es que estos estados sean físico, o sea que sean aniquilados por la carga BRST efectiva. Como este requisito es demasiado fuerte utilizamos estados que son físicos a primer orden: que sean aniquilados por la parte cuadrática de la carga BRST efectiva. Los autoestados de \hat{H}'_{KG} no son físicos. Esto se debe a que este hamiltoniano no conmuta con la parte cuadrática de la carga BRST efectiva lo cual implica que existen modos normales de dicho hamiltoniano que no son físicos. Los modos normales del hamiltoniano siempre pueden ser expresados en término de las fluctuaciones \hat{q} y \hat{p} . Esto se debe a la existencia de una base completa.

Queda claro que si algunos de estas fluctuaciones no conmuta con la carga BRST efectiva a primer orden entonces los modos que pueden ser escritos en término de ellas tampoco lo serán. Para salvar este obstáculo definimos la parte real de las fluctuaciones \hat{q}_e que excluye a las componentes espúreas de forma que esta conmuta con la parte principal de la carga BRST efectiva. Es decir

$$\hat{q}_e = \hat{q} - \psi_1 \int \psi_1 \hat{q} \quad (2.41)$$

No hace falta definir una fluctuación \hat{p}_e . La fluctuación \hat{p} en el régimen de pequeños momentos colectivos conmuta con la parte cuadrática de la carga BRST efectiva principal. Entonces, los modos que solo dependan de las fluctuaciones \hat{q}_e y \hat{p} serán físicos.

Las relaciones de conmutación entre \hat{p} y \hat{q}_e se obtienen de las relaciones de conmutación entre \hat{q} y \hat{p}

$$i[\hat{p}(y), \hat{q}_e(x)] = \delta(x - y) - \psi_1(x)\psi_1(y). \quad (2.42)$$

El paso siguiente es expresar al hamiltoniano \hat{H}_o en términos de la fluctuación real \hat{q}_e . Esto se logra usando la ecuación de movimiento para \hat{q} que nos permite escribir

$$\begin{aligned} \hat{H}_o &= \hat{H}_{KG} + \hat{V}, \\ \hat{H}_{KG} &= \frac{1}{2} \int \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \int \hat{q}_e'^2 + \frac{1}{2} \mu^2 \int \hat{q}_e^2 - \sqrt{M} \hat{\Omega} \int \psi_1 \hat{p} + \omega^2 \hat{B} \left(\frac{\int \psi_1 \hat{q}}{\sqrt{M}} - \frac{(2A+1)\hat{B}}{2M} \right) \\ &\quad + i\hat{\pi}\hat{\pi} + i\omega^2 \hat{\eta}\hat{\eta}, \\ \hat{V} &= \frac{1}{2} \int (V_2 - \mu^2) \hat{q}_e^2. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Se puede verificar que el conmutador entre la carga BRST cuadrática efectiva se anula. Por lo tanto los modos normales de este hamiltoniano serán físicos porque conmutarán con dicha carga. Estos modos se obtienen a partir de las ecuaciones de movimiento para las fluctuaciones sin considerar los modos reales del gauge y el término proporcional a A . Estos son considerados más adelante como lo hicimos para llevar a \hat{H}_o a la forma diagonal. Entonces, la ecuación de movimiento es independiente de la elección de gauge. la ecuación de movimiento para \hat{q}_e^{in} es la misma que la de \hat{q}_e^{out} y se obtiene a partir de la evolución temporal de \hat{q}_e y la de \hat{p} considerando solo \hat{H}_{KG} . El sector espúreo de \hat{p} no contribuye.

$$\ddot{\hat{q}}_e^{in} + \left(\mu^2 - \frac{d^2}{dx^2} \right) \hat{q}_e^{in} + \psi_1 \int \psi_1 (\hat{q}_e^{in''} - \mu^2 \hat{q}_e^{in}) = 0. \quad (2.44)$$

La ecuación (2.44) se diferencia de la ecuación de movimiento para las fluctuaciones \hat{q} . La primera es integrodiferencial y no es local. Estas particularidades no son compartidas por la segunda. Esto traera como consecuencia una fórmula de reducción diferente a las encontradas en la literatura.

Las fluctuaciones en (2.44) son asintóticas porque la ecuación de movimiento que satisfacen es el límite de la ecuación que satisface las fluctuaciones que diagonalizan el hamiltoniano \hat{H}_o . En el límite de tiempos infinito, que implica que los mesones se hallan a distancias muy grandes del origen donde se halla el blanco de protones, se verifica que ambas ecuaciones toman la forma

$$\ddot{\hat{q}} - \hat{q}'' + \mu^2 \hat{q} = 0 \quad (2.45)$$

porque

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \psi_1(x) = 0. \quad (2.46)$$

Vemos aquí otra ventaja más del espacio \mathcal{H}_4 respecto del espacio \mathcal{H}_2 .

La fluctuación real \hat{q}_e^{in} puede ser expandida en término de los modos físicos

$$\hat{q}_e^{\text{in}} = \sum_r \frac{i}{\sqrt{2\omega_r}} (\psi_r e^{-i\omega_r t} a_{r,\text{in}} - \psi_r^* e^{i\omega_r t} a_{r,\text{in}}^+). \quad (2.47)$$

Donde los modos ψ_r satisfacen la ecuación integrodiferencial

$$-\omega_r^2 \psi_r + \left(\mu^2 - \frac{d^2}{dx^2}\right) \psi_r + \psi_1 \int \psi_1 (\psi_r'' - \mu^2 \psi_r) = 0. \quad (2.48)$$

Esta ecuación no admite como solución a la función ψ_1 que si era solución de la ecuación satisfecha por los modos normales del hamiltoniano \hat{H}_0 . Las soluciones ψ_r no son conocidas. Sin embargo, tampoco hace falta esta información para poder calcular la ATP de estados de un mesón r sobre el vacío de un solitón. Las propiedades necesarias para calcular este tipo de magnitudes son la ortogonalidad entre las funciones ψ_r y la función ψ_1 , y la ortogonalidad entre las funciones ψ_r . Para demostrar la primera de estas propiedades hace falta multiplicar (2.48) por la función ψ_r e integrar. Se obtiene

$$\omega_r \int \psi_r \psi_1 = 0. \quad (2.49)$$

Esta ecuación implica que para valores de $\omega_r \neq 0$ la integral es cero. Suponemos que se cumple que todos los modos ω_r son distintos de cero porque (2.48) no sostiene como solución al modo ψ_1 . Ergo, los modos relacionados con las funciones ψ_r son ortogonales a los modos espúreos. La segunda propiedad se obtiene multiplicando a (2.48) por ψ_r e integrando. La expresión resultante es

$$(\omega_r^2 - \omega_{r'}^2) \int \psi_r \psi_{r'} = 0. \quad (2.50)$$

Por lo tanto, la base es ortogonal y puede ser llevada a la forma ortonormal mediante una normalización, la cual suponemos de ahora en mas,

$$\int \psi_r \psi_{r'} = \delta_{r,r'}. \quad (2.51)$$

Las funciones ψ_r deben expandir el espacio ortogonal a ψ_1 . Entonces

$$\sum_r \psi_r(x) \psi_r^*(y) = \delta(x-y) - \psi_1(x) \psi_1(y). \quad (2.52)$$

La ecuación de movimiento para la fluctuación \hat{p} se obtiene combinando la evolución temporal de \hat{p} con la de \hat{q}_e y la de \hat{B}

$$\ddot{\hat{p}} = \hat{p}'' - \psi_1'' \int \psi_1 \hat{p} - \mu^2 (\hat{p} - \psi_1 \int \psi_1 \hat{p}) - \omega^2 \psi_1 \int \psi_1 \hat{p} - \psi_1 \int \psi_1 (\hat{p}'' - \psi_1'' \int \psi_1 \hat{p}). \quad (2.53)$$

Esta ecuación a diferencia de la ecuación de movimiento para la fluctuación \hat{q}_e tiene una contribución del sector espúreo. A raíz de esta contribución, esta ecuación admite como solución al modo de frecuencia cero ψ_1 . Las soluciones restantes son las mismas ψ_r que satisfacen (2.48). En término de los modos normales la fluctuación \hat{p} puede escribirse

$$\hat{p} = \sum_r \sqrt{\frac{\omega_r}{2}} (\psi_r a_{r,\text{in}} e^{-i\omega_r t} + \psi_r^* a_{r,\text{in}}^+ e^{i\omega_r t}) + \sqrt{\frac{\omega}{2}} \psi_1 (c_1 e^{-i\omega t} + c_0 e^{-i\omega t} + c_1^+ e^{i\omega t} + c_0^+ e^{i\omega t}). \quad (2.54)$$

Con esta expansión y la de \hat{q}_e en (2.47) es facil verificar que las relación de conmutación entre \hat{q}_e y \hat{p} (2.42) se satisface.

Con estas expansiones y las propiedades satisfechas por las funciones ψ_r podemos verificar que a la parte cuadrática de la carga BRST efectiva en término de los modos normales del hamiltoniano \hat{H}_{KG} es independiente de los modos físicos a_r^+ y solo depende de los modos espúreos.

A pesar de que \hat{q}_e no tiene modos espúreos, la fluctuación \hat{q} si los tiene, y su contribución al hamiltoniano \hat{H}_{KG} a través del término de gauge es vital para poder llevarlo a la forma diagonal. Por eso escribimos la ecuación de movimiento de esta fluctuación

$$\ddot{\hat{q}} + (\mu^2 - \frac{d^2}{dx^2})\hat{q}_e^{in} + \psi_1 \int \psi_1 (\hat{q}_e^{in''} - \mu^2 \hat{q}_e^{in} + \omega^2 \psi_1 \hat{q}) = 0. \quad (2.55)$$

La cual admite a ψ_1 como solución. Esto implica que esta fluctuación es dependiente del modo espúreo. Al expandir a \hat{q} en término de los modos normales esta queda

$$\hat{q}(x, t) = \sum_r \frac{i}{\sqrt{2\omega_r}} (\psi_r e^{-i\omega_r t} a_r - \psi_r^* e^{i\omega_r t} a_r^+) + \frac{i}{\sqrt{2\omega}} \psi_1 (c_1 e^{-i\omega t} - c_1^+ e^{i\omega t}). \quad (2.56)$$

El hamiltoniano \hat{H}_{KG} queda al expresarlo en término de los modos normales como

$$\begin{aligned} \hat{H}_{KG} = & \sum_r \omega_r (c_r^+ c_r + \frac{1}{2}) + \omega (c_1^+ c_1 - c_o^+ c_o + \bar{a}a + \bar{b}b) \\ & - \sum_r \frac{\bar{\mu}_r}{\sqrt{2}} (c_1^+ + c_o^+ - c_1 - c_o)(c_r + c_r^+). \end{aligned} \quad (2.57)$$

Aqui, las constante $\bar{\mu}_r$ están relacionadas con los parametros ζ_r mediante la relaciones (1.11) y (1.12). Es decir

$$\bar{\mu}_r = -\frac{i\omega^{\frac{3}{2}}\zeta_r}{\sqrt{2M\omega_r}} \quad (2.58)$$

La transformación que debemos realizar para que los modos espúreos bosónicos se desacoplen de los reales es similar a la realizada para \hat{H}_o . Esta transformación es

$$\begin{aligned} c_r &= \gamma_r + \frac{\bar{\mu}_r}{\omega - \omega_r} \gamma_b + \frac{\bar{\mu}_r}{\omega + \omega_r} \bar{\gamma}_a \\ c_o &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (1 + \sum_r \frac{2|\bar{\mu}|^2 \omega \omega_r}{(\omega^2 - \omega_r^2)^2}) \gamma_b - \gamma_a - \sum_r \frac{\bar{\mu}_r^*}{\omega + \omega_r} \bar{\gamma}_r - \frac{\bar{\mu}_r}{\omega - \omega_r} \gamma_r \right\} \\ c_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left\{ (1 - \sum_r \frac{2|\bar{\mu}|^2 \omega \omega_r}{(\omega^2 - \omega_r^2)^2}) \gamma_b + \gamma_a + \sum_r \frac{\bar{\mu}_r^*}{\omega + \omega_r} \bar{\gamma}_r - \frac{\bar{\mu}_r}{\omega - \omega_r} \gamma_r \right\}. \end{aligned} \quad (2.59)$$

Los operadores γ_a , γ_b , y γ_r satisfacen las siguientes reglas de conmutación

$$\begin{aligned} [\gamma_r, \bar{\gamma}_{r'}] &= \delta_{r,r'} \\ [\gamma_a, \bar{\gamma}_a] &= 1 \\ [\gamma_b, \bar{\gamma}_b] &= -1. \end{aligned} \quad (2.60)$$

Ante la conjugación hermitica estos operadores se transforman como

$$\begin{aligned}\bar{\gamma}_a^+ &= \gamma_b \\ \bar{\gamma}_r^+ &= \gamma_r\end{aligned}\tag{2.61}$$

El vacío de estos modos satisface

$$\gamma_a|0\rangle = \gamma_b|0\rangle = \gamma_r|0\rangle = 0.\tag{2.62}$$

El hamiltoniano \hat{H}_{KG} queda al expresarlo en término de estos modos

$$\begin{aligned}\hat{H}_{KG} &= \sum_n \omega_n \left(\bar{\gamma}_n + \gamma_n + \frac{1}{2} \right) + \omega (\bar{\gamma}_a \gamma_a - \bar{\gamma}_b \gamma_b + \bar{a}a + \bar{b}b) \\ &\quad - \left(\sum_r \bar{\mu}_r^2 \frac{\omega_r}{\omega^2 - \omega_r^2} - \sum_n \bar{\mu}_n^2 \frac{\omega_n}{\omega^2 - \omega_n^2} \right) (\bar{\gamma}_a - \gamma_b)^2.\end{aligned}\tag{2.63}$$

Para el caso en que el gauge no es rígido no se pueden llevar simultáneamente a la forma diagonal a ambos hamiltonianos \hat{H}_o y \hat{H}_{KG} . Al realizar una transformación de la base $\{\psi_n\}$ a la base $\{\psi_r\}$ se transforma también los coeficientes que multiplican a los modos reales. Como vimos al comienzo de esta sección, la constante A que aparece en la función de gauge ρ_{nr} es función de estos coeficientes. Entonces, ante un cambio de base, esta constante debe ser modificada. En el gauge rígido la constante es la misma, y el problema de llevar los hamiltonianos a la forma diagonal simultáneamente es trivial. Sin embargo, en nuestro caso debemos conformarnos con utilizar los primeros dos términos de (2.63) como hamiltoniano de orden cero y tratar el último perturbativamente a la par de \hat{V} .

Entonces escribimos al hamiltoniano como

$$\begin{aligned}\hat{H}_o &= \hat{H}_o + \hat{V} \\ \hat{H}_{KG} &= \sum_n \omega_n \left(\bar{\gamma}_n + \gamma_n + \frac{1}{2} \right) + \omega (\bar{\gamma}_a \gamma_a - \bar{\gamma}_b \gamma_b + \bar{a}a + \bar{b}b) \\ \hat{V} &= \frac{1}{2} \int V_2 \hat{q}_e^2 - \left(\sum_r \bar{\mu}_r^2 \frac{\omega_r}{\omega^2 - \omega_r^2} - \sum_n \bar{\mu}_n^2 \frac{\omega_n}{\omega^2 - \omega_n^2} \right) (\bar{\gamma}_a - \gamma_b)^2.\end{aligned}\tag{2.64}$$

El último término en \hat{V} es un operador nulo porque puede ser escrito como el anticonmutador de un operador con la carga cuadrática efectiva ya que

$$Q^{(2)} = \bar{a}\sqrt{2}\gamma_b + b\bar{\gamma}_a.\tag{2.65}$$

Entonces

$$(\bar{\gamma}_a - \gamma_b)^2 = \frac{1}{2} ([\bar{b}, Q^{(2)}]_+ - [a, Q^{(2)}]_+)^2.\tag{2.66}$$

Por lo tanto, como veremos no contribuirá a la ATP.

La matriz de colisiones o de scattering nos permite relacionar las cantidades medidas por los experimentales como la sección eficaz y las probabilidades de transición con el hamiltoniano. En el límite en que $t \rightarrow -\infty$ el estado asintótico será un estado de entrada

(in). En el otro límite $t \rightarrow +\infty$ el estado asintótico será un estado de salida (out). La amplitud de la probabilidad de empezar de un estado asintótico de entrada $|\alpha \text{ in} \rangle$ y terminar en otro de salida $|\alpha' \text{ out} \rangle$ viene dada por

$$S_{\alpha, \alpha'} = \langle \alpha' \text{ out} | \alpha \text{ in} \rangle. \quad (2.67)$$

Como vimos en la sección anterior, los estados α llevan como buenos números cuánticos el momento colectivo Π , el número r y los número espúreos. Entonces, la matriz de colisiones S que describe la colisión de un estado de un mesón en el sector con topología uno es

$$S_{r, r'} = \langle \Pi, r' \text{ out} | \Pi, r \text{ in} \rangle. \quad (2.68)$$

La fórmula de reducción relaciona a la matriz de colisiones S con la función de green de las fluctuaciones. Esta relación se obtiene siguiendo los pasos de Bjorken y Drell que seguimos en el apéndice [38]

$$S_{r, r'} = \delta_{r, r'} + i^2 \int d^2x d^2y \psi_r(x, t_x) \psi_{r'}^*(y, t_y) (\partial_{t_x}^2 + \omega_r^2) (\partial_{t_y}^2 + \omega_{r'}^2) \langle \Pi | T \hat{q}_e(x, t_x) \hat{q}_e(y, t_y) | \Pi \rangle. \quad (2.69)$$

Si la ecuación de movimiento no fuese integrodiferencial, entonces podríamos substituir a las derivadas cuadráticas en el tiempo por expresiones que podrían ser integradas por parte en las coordenadas espaciales. Esto nos permitiría obtener una expresión similar a las encontradas en la literatura. El elemento de matriz que aparece en (2.69) no es más que la función de green para las fluctuaciones reales \hat{q}_e . Ergo, hemos logrado con esta relación conocida como la fórmula de reducción relacionar a la matriz de colisiones con la función de green. Ahora podemos conocer las probabilidades de transición si sabemos la función de green. La función de green puede calcularse perturbativamente a partir de una definida por los modos normales que diagonaliza el hamiltoniano de orden cero \hat{H}_{KG} . A esta función de green se la conoce como la función de green de orden cero. Los ordenes sucesivos pueden ser calculados con el uso de las interacciones. Cuando las interacciones son cuadráticas en los campos, como es nuestro caso la función de green puede escribirse trivialmente sin hacer uso de teoría de perturbaciones. Entonces realizamos el tratamiento perturbativo de esta función en el apéndice.

Haciendo uso de la definición de ordenamiento cronológico, de la representación integral de la función escalón o Heavyside y de la expansión en modos normales de la fluctuación \hat{q}_e que diagonaliza \hat{H}_0 podemos expresar a la función de green como

$$G_e^{(2)}(x, y) \equiv \langle \Pi | T \hat{q}_e(x, t_x) \hat{q}_e(y, t_y) | \Pi \rangle = \sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(y) \int \frac{d\omega_0}{2\pi} \frac{i e^{i\omega_0(t_x - t_y)}}{\omega_0^2 - \omega_n^2 + i\epsilon} \quad (2.70)$$

Al hacer uso de esta expresión en (2.68) y evaluando las derivadas cuadráticas en el tiempo obtenemos

$$S_{r, r'} = \delta_{r, r'} + i^2 \int d^2x d^2y \psi_r(x, t_x) \psi_{r'}^*(y, t_y) \{-\omega_0^2 + \omega_r^2\} \{-\omega_0^2 + \omega_{r'}^2\} \times$$

$$\sum_n \psi_n(x) \psi_n^*(y) \int \frac{d\omega_o}{2\pi} \frac{i e^{i\omega_o(t_x - t_y)}}{\omega_o^2 - \omega_n^2 + i\epsilon}. \quad (2.71)$$

Esta expresión al integrar en t_x y en t_y se anula porque la dependencia temporal de las funciones ψ_r es una exponencial. Al integrar en el tiempo se obtienen dos deltas de Dirac

$$\delta(\omega_r - \omega_o), \quad \delta(\omega_{r'} - \omega_o) \quad (2.72)$$

Luego de integrar en ω_o uno de los términos que no es cancelado por el denominador

$$(\omega_o^2 - \omega_n^2) \quad (2.73)$$

se anula.

La fórmula de reducción para los modos s se escribe como

$$S_{s,s'} = \delta_{s,s'} + i^2 \int d^2x d^2y \psi_s(x, t_x) \psi_{s'}^*(y, t_y) (\partial_{t_x}^2 + \omega_s^2) (\partial_{t_y}^2 + \omega_{s'}^2) \langle \Pi | T \hat{q}_\epsilon(x, t_x) \hat{q}_\epsilon(y, t_y) | \Pi \rangle. \quad (2.74)$$

Entonces también con el tratamiento en \mathcal{H}_2 y (2.74) podemos verificar el resultado (1.28).

La razón de este anulamiento puede ser interpretada de otra manera. Debido a que la interacción es cuadrática la función de green que aparece en (2.69) representa el propagador de una *sola* partícula vestida. Este no sería el caso si hubiese otro tipo de interacción que no conservase el número de partículas como lo son las interacciones lineales, cúbicas, cuárticas, etc. La clave del cancelamiento es que lo propagado es una *sola* partícula y no un número distinto de uno. La matriz de colisiones S parte de estados con energía definida. Estos estados se encuentran en cascara (están on-shell). Es decir están representados diagramáticamente por líneas que se propagan desde tiempos muy distantes en el pasado (o futuro) a un tiempo finito determinado por el instante en que la interacción termina la propagación de la partícula. En el tiempo distante en el pasado (o futuro) no hay una interacción que genere la partícula, suponemos que esta estuvo siempre. A este tipo de propagadores podemos llamarlos propagadores externos porque no participan del tratamineto perturbativo de la matriz de colisiones. Al transformar la matriz de colisiones en la fórmula de reducción los propagadores externos son sacados de la cascara de energía (son puestos off-shell) y son transformados en propagadores internos. En este proceso aparecen las integrales en el tiempo. Por propagadores internos nos referimos a propagadores que comienzan y terminan en una interacción. O sea que están acotados en ambos extremos por la interacción mientras que los propagadores externos solo lo están en un extremo. Los propagadores internos contribuyen al tratamiento perturbativo. Pero si nuestro objetivo es transformar a dos propagadores externos (uno para propagar el estado *in* y otro para propagar el estado *out*) en internos dejando invariante a la expresión debemos cancelar los propagadores transformados en internos para que estos últimos no contribuyan en el tratamiento perturbativo. Esta cancelación es llevada a cabo por los dos paréntesis que incluyen a las derivadas cuadráticas en el tiempo. Los paréntesis que

incluyen a las derivadas cuadráticas en el tiempo seleccionan al volver on-shell integrando en el tiempo los estados de entrada y salida. Al existir un solo propagador vestido solo se cancelará uno de los paréntesis que incluyen a las derivadas cuadráticas en el tiempo. El otro paréntesis se anula y por lo tanto no hay contribución a la matriz de colisiones S más allá de la contribución trivial y entonces no hay una ATP de $\mathcal{O}(1)$. Ergo, no hay un acoplamiento de Yukawa.

A pesar de haber realizado un tratamiento en el gauge no rígido no hemos logrado un término de $\mathcal{O}(1)$ para la ATP. Esto se contradice con los resultados obtenidos por Verschelde[27] y Ohta[14]. Ellos llegan a una ATP de $\mathcal{O}(1)$ usando los corrimientos de fase relacionados con las soluciones de la ecuación de movimiento para las fluctuaciones \hat{q} . Sin embargo, en la ecuación (2.28) del artículo de Ohta [14], la cual se escribe

$$T = \langle k|v|k \rangle + \omega_k^2 \int |\psi_1 \psi_k|^2 + \sum_n (\omega_n^2 - \omega_k^2) \int |\psi_n \psi_k|^2, \quad (2.75)$$

el segundo término se obtiene luego de propagar un modo espúreo sin un tratamiento adecuado. Esto es incorrecto como ya hemos argumentado anteriormente.

4.3 El sector clásico de la fórmula de Reducción

Hay literatura sobre colisiones entre mesones y solitones que sostiene que el acoplamiento tan buscado está en el sector clásico de la fórmula de reducción. Los trabajos más destacados y recientes son de Uehara y colaboradores [13]. También existen trabajos que sostienen que el sector clásico de la fórmula de reducción da una contribución que no es nula. Este es el caso de Ohta [14]. El argumento usado por estos autores se basa en la sustitución de la fluctuación \hat{q}_e por el campo total ϕ en la función de green en la fórmula de reducción. Ellos encuentran que la contribución a la ATP con esta modificación no es nula. pero no mostraron como la obtienen en forma clara. Nosotros, primero mostramos que este no es el caso. Luego mostramos que la fórmula que utilizan no parte de estados físicos y que los elementos de matriz utilizados tampoco los son.

La fórmula de reducción usada por [13] y[14] que depende de los campos totales $\Phi(x, t) = \phi_c(x, t_x) + \hat{q}(x, t)$ es

$$S_{k,k'} = \delta_{k,k'} + i^2 \int d^2x d^2y e^{i(kx - \omega_k t_x)} e^{-i(k'y - \omega_{k'} t_y)} (\bar{\partial}_{t_x}^2 + \omega_k^2) (\bar{\partial}_{t_y}^2 + \omega_{k'}^2) \langle \Pi | T \Phi(x, t_x) \Phi(y, t_y) | \Pi \rangle .$$

Usando la definición del campo se puede expresar el propagador que aparece en (3.76) en término de las fluctuaciones y el campo clásico.

$$\begin{aligned} \langle \Pi | T \Phi(x, t_x) \Phi(y, t_y) | \Pi \rangle &= \langle \Pi | T \phi_c(x, t_x) \phi_c(y, t_y) | \Pi \rangle + \langle \Pi | T \phi_c(x, t_x) \hat{q}(y, t_y) | \Pi \rangle \\ &+ \langle \Pi | T \hat{q}(x, t_x) \phi_c(y, t_y) | \Pi \rangle \\ &+ \langle \Pi | T \hat{q}(x, t_x) \hat{q}(y, t_y) | \Pi \rangle . \end{aligned} \quad (3.76)$$

La contribución de los primeros tres términos en (3.76) a (3.76) se anula en contradicción con [13][14]. Damos aquí los argumentos para esta anulación y explicamos porque tal contradicción pero antes demostramos la el calculo explícito del primero de los términos en (3.76). Para los restantes términos solo argumentamos la cancelación en la fórmula de reducción.

La dependencia en el tiempo del campo clásico surge de la dependencia temporal de la coordenada colectiva $X(t)$. Esto nos permite escribir

$$\langle \Pi | \phi_c(x - X) | \Pi' \rangle = e^{i(\Pi' - \Pi)x + i(E_{\Pi'} - E_{\Pi})t} \tilde{\phi}_c(\Pi' - \Pi) \quad (3.77)$$

donde

$$\tilde{\phi}_c(k) = \int dz e^{-ikz} \phi_c(z). \quad (3.78)$$

Si insertamos la identidad $\int d\Pi' | \Pi' \rangle \langle \Pi' |$ entre los campos clásicos y usamos la relación (3.77), entonces la the contribución a la matriz de colisiones es

$$- \int \frac{d\Pi' d\omega_o}{2\pi i} |\tilde{\phi}_c(\Pi' - \Pi)|^2 \times \left\{ \frac{e^{-i(\omega_o + E_{\Pi'} - E_{\Pi})(t_a - t_b) + i(\Pi' - \Pi)(x - y)}}{\omega_o + i\epsilon} + \frac{e^{-i(\omega_o + E_{\Pi'} - E_{\Pi})(t_b - t_a) + i(\Pi' - \Pi)(y - x)}}{\omega_o + i\epsilon} \right\}. \quad (3.79)$$

La acción de los operadores que tienen las derivadas cuadráticas en el tiempo sobre esta expresión es

$$- \int \frac{d\Pi' d\omega_o}{2\pi i} |\tilde{\phi}_c(\Pi' - \Pi)|^2 \{ -(\omega_o + E_{\Pi'} - E_{\Pi})^2 + \omega_k^2 \} \{ -(\omega_o + E_{\Pi'} - E_{\Pi})^2 + \omega_{k'}^2 \} \times \left\{ \frac{e^{-i(\omega_o + E_{\Pi'} - E_{\Pi})(t_a - t_b) + i(\Pi' - \Pi)(x - y)}}{\omega_o + i\epsilon} + \frac{e^{-i(\omega_o + E_{\Pi'} - E_{\Pi})(t_b - t_a) + i(\Pi' - \Pi)(y - x)}}{\omega_o + i\epsilon} \right\}. \quad (3.80)$$

Al multiplicar esta expresión por $e^{-i(k'y - \omega_{k'} t_b)}$ y $e^{i(kx - \omega_k t_a)}$, e integrar sobre las dos coordenadas temporales nos da

$$2\pi i \int d\Pi' d\omega_o |\tilde{\phi}_c(\Pi' - \Pi)|^2 \{ -(\omega_o + E_{\Pi'} - E_{\Pi})^2 + \omega_k^2 \} \{ -(\omega_o + E_{\Pi'} - E_{\Pi})^2 + \omega_{k'}^2 \} \times \left\{ \delta(\omega_k + \omega_o + E_{\Pi'} - E_{\Pi}) \delta(\omega_{k'} + \omega_o + E_{\Pi'} - E_{\Pi}) \left\{ \frac{e^{i(\Pi' - \Pi)(x - y)}}{\omega_o + i\epsilon} + \frac{e^{i(\Pi' - \Pi)(y - x)}}{\omega_o + i\epsilon} \right\} \right\}, \quad (3.81)$$

Es facil ver que esta expresión se anula cuando integramos en $d\omega_o$.

Como mencionamos en la sección anterior la fórmula de reducción transforma los propagadores externos que aparecen en la matriz de colisiones en propagadores internos. Como consecuencia de esta transformación hecha los propagadores deben ser cancelados por los paréntesis que incluyen a las derivadas cuadráticas en el tiempo. Si estos paréntesis no son cancelados por algún propagador estos se anulan al intergrar en el tiempo. Los ordenamientos termporales que incluyen a los campos clásicos ϕ_c no generan propagadores que puedan cancelar estos paréntesis. Entonces los términos que dependen del campo clásico no contribuyen a la matriz S.

Los autores que hicieron uso de (3.76) plantean como identidad

$$K_x K_y T\{\Phi(x)\Phi(y)\} = T\{K_x K_y \Phi(x)\Phi(y)\} + \delta(t_x - t_y)[\dot{\Phi}(x), K_y \Phi(y)]. \quad (3.82)$$

Donde

$$K_x = (\square_x + \mu^2). \quad (3.83)$$

Esta expresión es incorrecta porque el ordenamiento temporal involucra a una función escalón en el tiempo cuya segunda derivada es distinta de cero y no aparece en (3.82).

La función de green que depende de $\int \psi_1 \hat{q}$ en (3.76) no es física porque no conmuta con la parte cuadrática de la carga BRST efectiva. Por lo tanto no puede decirse que en (3.76) se utilice solo cantidades físicas como es necesario para que los resultados posean sentido. También se puede ver que el sector cuántico de la expresión (3.76) es diferente a la expresión (2.69) porque las funciones $\psi_r, \psi_{r'}$ son reemplazadas por ondas planas que como hemos visto no son físicas por no ser ortogonal al modo de energía cero.

Capítulo 5

Conclusiones

En el segundo capítulo estudiamos las propiedades de los espacios en que pueden ser tratados los grados de libertad colectivos. El primero hace uso de un espacio que solo incluye a las variables colectivas. En este espacio vimos que existen dos problemas que nos impiden obtener una precisión arbitraria al corregir magnitudes físicas perturbativamente. El primer inconveniente es la necesidad de linealizar el vínculo para poder trabajar con un corchete de Dirac entre la fluctuación y su conjugado que sea constante y no dependa de las variables dinámicas. La transformación utilizada para lograrlo no es canónica y por lo tanto se pierde información sobre la dinámica. También vimos que en el hamiltoniano en este espacio tiene términos lineales en las fluctuaciones que no pueden ser tratados perturbativamente en el límite relativista.

Este último inconveniente puede ser sorteado trabajando en un espacio que incluye también al multiplicador de Lagrange y su conjugado. Con esta inclusión, todos los términos lineales del hamiltoniano desaparecen. Pero vimos que aun deshaciendonos de estos términos los resultados obtenidos no eran confiables debido a que la transformación que linealiza el vínculo no es canónica.

Esta linealización que equivale a transformar el determinante de Faddeev-Popov en un escalar, no puede ser sorteada en teorías con vínculos cuadráticos en las fluctuaciones mientras no incluyamos fantasmas. Estos nos permiten exponenciar el determinante y transformarlo en un término más del hamiltoniano. Alternativamente podemos definir la carga BRST y definir el mismo hamiltoniano. La diferencia entre un procedimiento y el otro se basa en el carácter local del primero y global del segundo de la transformación que nos lleva del hamiltoniano original al hamiltoniano efectivo. De todas maneras, para nuestro caso ambas son equivalentes. En este espacio no hace falta transformar el vínculo con transformaciones que no son canónicas y por lo tanto se logran correcciones perturbativas con precisión arbitraria.

Los modelos que describen solitones, como el modelo de Skyrme, hacen uso de la

minimización para definir el solitón estable. Dada esta condición no habrá interacciones lineales en las fluctuaciones de $\mathcal{O}(M^{\frac{1}{2}})$. La interacción de orden más alto será la cuadrática de $\mathcal{O}(1)$. Debido a que las interacciones cuadráticas, cualquiera su orden, dan lugar a ecuaciones de movimiento lineales para las fluctuaciones, los propagadores que tengan en cuenta esta interacción representarán una sola partícula que se propaga con su masa (la masa tiene en cuenta la interacción). Entonces este tipo de interacciones no producirán los dos o más propagadores necesario para que exista un elemento de matriz T de $\mathcal{O}(1)$. La falta de acoplamiento Yukawa ha sido atribuido a un tratamiento incorrecto del modo cero en el hamiltoniano cuadrático. Nuestros resultados han considerado a este modo dentro del formalismo BRST. Por lo tanto tales afirmaciones no tienen más justificativo. También se ha dicho que tal acoplamiento puede estar "oculto" en el sector clásico de la fórmula de reducción. Esperamos haber convencido al lector que este no es el caso.

Appendix A

Algunas propiedades utiles para relacionar vértices

Al trabajar en \mathcal{H}_4 no forzamos el gauge. Por lo tanto el modo de cero energía está presente. Sin embargo su energía es ahora ω , el parametro espúreo. Esto trae como consecuencia la aparición de vértices de los términos residuales encontrados también en \mathcal{H}_1 . Es decir que los términos

$$\sum_{i>2} \frac{1}{i!} \int V_i q^i \tag{0.1}$$

producen vértices que dependen de ω . Los diagramas generados por estos vértices que dependen de ω deben cancelarse con los diagramas que provienen del anticonmutador de la carga BRST con la función de gauge. Sin embargo estos últimos solo dependen de ψ_1 y ψ_n pero no de V_3 y V_4 . Ergo, debemos relacionarlos. Para esto comenzamos por diferenciar la ecuación de movimiento satisfecha por la fluctuaciones

$$-\psi_n'' + V_2 \psi_n = \omega_n^2 \psi_n. \tag{0.2}$$

Es decir

$$-\psi_n''' + V_3 \phi_c' \psi_n + V_2 \psi_n = \omega_n^2 \psi_n. \tag{0.3}$$

Al multiplicar esta expresión por ψ_m , integrar, e integrar por partes obtenemos

$$\int V_3 \psi_1 \psi_n \psi_m = (\omega_n^2 - \omega_m^2) \int \psi_m \psi_n'. \tag{0.4}$$

De esta manera podemos relacionar los vértices cúbicos en las fluctuaciones que poseen una línea de partícula espúrea que se propaga con masa ω con los diagramas que provienen del anticonmutador de la función de gauge con la carga BRST.

En forma similar podemos multiplicar a (0.3) por ψ_1 integrar e integrar por partes para obtener

$$\int V_3 \psi_1 \psi_1 \psi_m = \omega_n^2 \int \psi_m \psi_n'. \quad (0.5)$$

Entonces, podemos relacionar los vértices cúbicos que propagan dos partículas con frecuencia espúrea con los diagramas del anticonmutador.

El valor de expectación del término cuártico se relaciona con los demás términos en forma similar. las relaciones son

$$\begin{aligned} \int V_4 \psi_1^4 &= \frac{3}{M} \sum_n \omega_n^2 A_n^2 \\ \int V_4 \psi_1^2 |\psi_n|^2 &= -\frac{2}{M} \sum_n \omega_n A_n^2 - \frac{1}{M} \sum_{n,m} (\omega_n + \omega_m) B_{mn}^2 \\ &\quad + \frac{2}{M} \sum_n \frac{1}{\omega_n} \int |\psi_n''|^2. \end{aligned} \quad (0.6)$$

Para demostrar que la masa dinámica del solitón a $\mathcal{O}(1)$ se comporta correctamente en el límite galileano hacen falta las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} \sum_n \int V_3 \psi_n \frac{|\psi_m|^2}{\omega_m} \frac{A_n^2}{\omega_n^2} &= \frac{A_m^2}{\omega_m} + \sum_n \frac{B_{mn}^2}{\omega_m}, \\ B_{nm} &= \frac{1}{2} (\omega_m^2 - \omega_n^2) \int \psi_n x \psi_m \\ \sum_{nm} \frac{B_{nm}^2}{\omega_n + \omega_m} &= -\frac{1}{2} \sum_n \omega_n - 2 \sum \frac{A_n^2}{\omega_n} \end{aligned} \quad (0.7)$$

Appendix B

Relaciones de ortogonalidad y completitud en el límite relativista

Las relaciones de ortogonalidad y completitud que cumplen las soluciones Ψ_n se obtienen de la ecuación (4.109) en el capítulo 2. Al multiplicar (4.109) actuando sobre Ψ_n por una función Ψ_m^* e integrando sale

$$\delta_{n,m} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\omega_m}{\omega_n}\right) \int \Psi_n \Psi_m^* + i \frac{v_r}{\omega_n} \int \Psi_n' \Psi_m^* \quad (0.1)$$

En forma similar, multiplicamos por Ψ_m en vez de con Ψ_m^* y obtenemos

$$0 = (\omega_n - \omega_m) \int \Psi_n \Psi_m + i 2v_r \int \Psi_n' \Psi_m. \quad (0.2)$$

Las relaciones de completitud salen de las distintas relaciones de conmutación entre las fluctuaciones. Primero consideramos el conmutador entre las fluctuaciones \hat{q} y \hat{p} el cual da la relación

$$\delta(x - y) = \frac{1 - v_r^2}{E} \phi_c'(x) \phi_c'(y) + \frac{1}{2} \sum_n (\Psi_n(x) \Psi_n^*(y) + h.c.) \quad (0.3)$$

En forma análoga podemos obtener otra importante relación entre soluciones en distintos puntos del espacio. De la conmutación entre $\hat{q}(x)$ y $\hat{q}(y)$ se obtiene

$$0 = \frac{v_r}{E} (x - y) \phi_c'(x) \phi_c'(y) + \frac{1}{2} \sum_n \left(\frac{i}{\omega_n} \Psi_n(x) \Psi_n^*(y) + h.c. \right) \quad (0.4)$$

Finalmente, las relaciones de conmutación entre las fluctuaciones $\hat{p}(x)$ y $\hat{p}(y)$ dan lugar a la relación

$$0 = \frac{v_r(1 - v_r^2)}{E} (\phi_c'(x) \phi_c''(y) - \phi_c''(x) \phi_c'(y)) + \frac{1}{2} \sum_n (i\omega_n \Psi_n(x) \Psi_n^*(y) - v_r \Psi_n'(x) \Psi_n^*(y) + v_r \Psi_n(x) \Psi_n'^*(y) + h.c.). \quad (0.5)$$

Appendix C

La derivación de la fórmula de reducción

Partimos de la definición de la matriz de colisiones

$$S_{r,r'} = \langle \Pi, r'out | \Pi, r in \rangle . \quad (0.1)$$

La fórmula de reducción relaciona a la matriz de colisiones con la función de green de las fluctuaciones. Para esto reexpresamos a la ec. (0.1)

$$\begin{aligned} S_{r,r'} &= \langle \Pi, r'out | a_{r,in}^+ | \Pi \rangle , \\ &= \langle \Pi, r'out | a_{r,out}^+ | \Pi \rangle + \langle \Pi, r'out | a_{r,in}^+ - a_{r,out}^+ | \Pi \rangle . \end{aligned} \quad (0.2)$$

Como las funciones ψ_r forman una base ortonormal y perpendicular a la función ψ_1 podemos expresar a los modos $a_{r,in}^+$ y $a_{r,out}^+$ en términos de las fluctuaciones. Es decir

$$a_{r,in}^+ = i \int dx \psi_r(x, t_x) \vec{\partial}_{t_x} \hat{q}_{in}(x, t_x) \quad (0.3)$$

donde

$$\psi_r(x, t_x) = \psi_r e^{-i\omega_r t_x} . \quad (0.4)$$

Entonces (0.2) toma la forma

$$S_{r,r'} = \langle \Pi, r', -rout | \Pi \rangle + -i \langle \Pi, r'out | \int \psi_r \vec{\partial}_{t_x} (\hat{q}_{in} - \hat{q}_{out}) | \Pi \rangle . \quad (0.5)$$

El solapamiento $\langle \Pi, r', -rout | \Pi \rangle$ desaparece para $r \neq r'$ porque el índice $-r$ implica que la acción de $a_{r,out}^+$ aniquila una partícula en el bra $\langle \Pi, r' |$ con número r . Entonces si

$r \neq r'$, $a_{r'}^+$ aniquila al bra. Para el paso siguiente necesitamos hacer uso de las ecuaciones que relacionan a la fluctuación con las fluctuaciones asintóticas

$$\begin{aligned} \lim_{t_x \rightarrow \infty} \hat{q} &= \hat{q}_{out} \\ \lim_{t_x \rightarrow -\infty} \hat{q} &= \hat{q}_{in}. \end{aligned} \quad (0.6)$$

Luego de hacer uso de la identidad

$$\left(\lim_{t_x \rightarrow \infty} - \lim_{t_x \rightarrow -\infty} \right) \int dx g_1(x, t_x) \partial_{t_x} g_2(x, t_x) = \int d^2x (g_2(x, t_x) \partial_{t_x}^2 g_1(x, t_x)) \quad (0.7)$$

La expresión (0.5) queda

$$S_{r,r'} = \delta_{r,r'} - i \int d^2x \psi_r(x, t_x) (\partial_{t_x}^2 + \omega_r^2) \langle \Pi, r'out | \hat{q}_e | \Pi \rangle. \quad (0.8)$$

No podemos hacer uso de la ecuación satisfecha por ψ_r para reemplazar al término $\omega_r^2 \psi_r$ por los demás en dicha ecuación e integrar por partes como se hace habitualmente con otros campo en otros modelos. La razón es que los términos que reemplazan son integrodiferenciales en vez de ser diferenciales y no permiten llegar a una expresión más elegante integrando por partes.

Hasta aquí hemos sacado al estado r de la cascara de energía (take off shell). Ahora hacemos lo mismo para el estado r' . Reescribimos el elemento de matriz que aparece en la ec. (0.8) para que tome la forma

$$\langle \Pi, r'out | \hat{q}_e | \Pi \rangle = \langle \Pi | a_{r',out} \hat{q}_e - \hat{q}_e a_{r',in} | \Pi \rangle \quad (0.9)$$

El segundo término en (0.9) es cero escrita en forma pedante, pero nos permite escribir

$$\langle \Pi | a_{r',out} \hat{q}_e - \hat{q}_e a_{r',in} | \Pi \rangle = -i \int dx \psi_{r'}^*(y, t_y) \partial_{t_y} \langle \Pi | \hat{q}_{out} \hat{q}_e - \hat{q}_e \hat{q}_{in} | \Pi \rangle \quad (0.10)$$

$$\begin{aligned} &= \left(\lim_{t_y \rightarrow \infty} - \lim_{t_y \rightarrow -\infty} \right) \times \\ & \quad i \int dx \psi_{r'}^*(y, t_y) \partial_{t_y} \langle \Pi | T \hat{q}_e(y, t_y) \hat{q}_e(x, t_x) | \Pi \rangle \end{aligned} \quad (0.11)$$

La última igualdad surge luego de hacer uso de las relaciones (0.6). Al hacer uso de (0.7) en (0.11) e insertando esto en (0.8) obtenemos

$$S_{r,r'} = \delta_{r,r'} + i^2 \int d^2x d^2y \psi_r(x, t_x) \psi_{r'}^*(y, t_y) (\partial_{t_x}^2 + \omega_r^2) (\partial_{t_y}^2 + \omega_{r'}^2) \langle \Pi | T \hat{q}_e(x, t_x) \hat{q}_e(y, t_y) | \Pi \rangle. \quad (0.12)$$

El elemento de matriz que aparece en (0.12) no es más que la función de green para las fluctuaciones reales \hat{q}_e . Ergo, hemos logrado con esta relación conocida como la fórmula de reducción relacionar a la matriz de colisiones con la función de green. Ahora podemos conocer la amplitud de probabilidad de transición si sabemos la función de green.

Appendix D

El tratamiento perturbativo de la fórmula de reducción

La función de green se puede calcular perturbativamente a partir de una definida por los modos normales que diagonaliza el hamiltoniano de orden cero \hat{H}_{KG} . A esta función de green se la conoce como la función de green de orden cero. Los ordenes sucesivos pueden ser calculados con el uso de las interacciones.

Por lo tanto el modo Para realizar el tratamiento perturbativo es necesario expresar a la función de Green que propaga estados que diagonalizan el hamiltoniano cuadrático \hat{H}_o con la función de Green que propaga estados que diagonalizan \hat{H}_{KG} . Para esto es necesario tener en cuenta solamente la interacción \hat{V} definida en el capítulo 4. La relación es

$$G_e^{(2)}(x, y) = G_e^o(x, y) + (-i) \int d^2 z (V_2(z) - \mu^2) G_e^o(x, z) G_e^o(z, y) \quad (0.1)$$

$$+ (-i)^2 \int d^2 z d^2 z' (V_2(z) - \mu^2)(V_2(z') - \mu^2) G_e^o(x, z) G_e^o(z, z') G_e^o(z', y) + \dots$$

Aquí $G_e^o(x, y)$ es la función de Green que está asociada a la propagación de los campos r . Entonces esta se escribe

$$G_e^o(x, y) \equiv \langle \Pi | T \hat{q}_e(x, t_x) \hat{q}_e(y, t_y) | \Pi \rangle = \sum_r \psi_r(x) \psi_r^*(y) \int \frac{d\omega_o}{2\pi} \frac{i e^{i\omega_o(t_x - t_y)}}{\omega_o^2 - \omega_r^2 + i\epsilon} \quad (0.2)$$

Es posible sumar la serie en (0.1), la cual puede ser escrita siguiendo los pasos de Bes et al.[25] como

$$G_e(x, y) = G_e^o(x, y) + (-i) \int d^2 z (V_2(z) - \mu^2) G_e^o(x, z) G_e^o(z, y) \quad (0.3)$$

$$+ (-i)^2 \int d^2 z d^2 z' V_2(z) - \mu^2)(V_2(z') - \mu^2) G_e^o(x, z) G_e^o(z, z') G_e^o(z', y).$$

El primer término en (0.1) es el propagador de una sola partícula y no contribuye a la fórmula de reducción. El segundo término es

$$-2\pi i \int dz (V_2(z) - \mu^2) \psi_n \psi_r^* \int dz' \psi_n^* \psi_r \delta_{r,r'} = -2\pi i (\omega_n^2 - \omega_r^2) \int |\psi_n \psi_r^*|^2 \delta_{r,r'}. \quad (0.4)$$

El tercer término en la expresión (0.3) cancela el segundo por ser de igual magnitud pero con el signo opuesto. Ergo no hay una amplitud de probabilidad de transición de $\mathcal{O}(1)$ cuando se trata perturbativamente a la fórmula de reducción. Los resultados perturbativos coinciden con el obtenido sin hacer uso de teoría de perturbaciones.

Bibliography

- [1] T.H.R. Skyrme, Proc. R. Soc. **A260** (1961) 127.
- [2] R. Dashen, B. Hasslacher, A. Neveu, Phys.Rev.**D10** (1974) 4114; Phys.Rev.**D10** (1974) 4130.
- [3] J.L. Gervais and B. Sakita, Phys. Rev. **D11** (1975) 2943; J.L. Gervais, A. Javicki and B. Sakita, Phys. Rev. **D12** (1975) 1038.
- [4] G. t'Hooft, Nucl.Phys **B 72** (1974) 461; Nucl.Phys **B 75** (1974) 461.
- [5] E. Tomboulis, Phys. Rev. **D12** (1975) 1678.
- [6] E. Witten, Nucl. Phys **B160** (1979) 57.
- [7] E. Witten, Nucl. Phys **B223** (1983) 422; 433; G. Adkins, C. Nappi and E. Witten, Nucl. Phys. **B228** (1983) 552.
- [8] C. Itzykson, *Quantum Field Theory*, Mc Graw-Hill, New York, (1980).
- [9] D.O. Riska, comunicación privada.
- [10] A.Hayashi, G.Eckart, and G.Holtzwarth, Phys.Lett. **147B** (1984) 5; H.Walliser and G.Eckart, Nucl.Phys.**A448** (1986) 732.
- [11] M.P.Mattis and M. Karliner, Phys.Rev. **D31** (1985) 2833; M.E. Peskin and M.P. Mattis, Phys.Rev. **D32** (1985) 58.
- [12] G.B.Schwesinger, H.Weigel, G.Holtzwarth and A.Hayashi, Phys.Rep. **173** (1989) 173.
- [13] M. Uehara, Prog. Theor. Phys. **80** (1988), 768; **75** (1986) 212; A. Hayashi, S. Saito, M. Uehara, Prog. Theor. Phys. Supplement **109** (1992) 45; A. Hayashi, S. Saito, M. Uehara, Phys. Rev. **43** (1991) 1520; M. Uehara, A. Hayashi, S. Saito, Nucl. Phys. **A534** (1991) 680; A. Hayashi, S. Saito, M. Uehara, Phys. Rev. **46** (1992) 4856.
- [14] K. Ohta, Nucl.Phys. **A511** (1991) 620.
- [15] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons*, North-Holland, Amsterdam (1982).
- [16] H.J. de Vega, Nucl. Phys **B115** (1976) 411.
- [17] P. Morse, and H. Flechbach, *Methods of Mathematical Physics*, Mc Graw-Hill, New York (1953).

- [18] J. Goldstone and R. Jackiw, Phys. Rev. **D11** (1975) 1486.
- [19] L.D. Faddeev and V.N. Popov, Phys. Lett. **B 25** (1967) 29.
- [20] N.H. Christ and T.D. Lee, Phys. Rev. **D12** (1975) 1606.
- [21] E.S. Fradkin and G.A. Vilkovisky, Phys. Lett. **B55** (1975) 224.
- [22] I.A. Batalin, and G.A. Vilkovisky, Phys Lett. **B69** (1977) 309.
- [23] F.Aldabe, D.R. Bes, D.A.R. Dalvit, *Festschrift for Th. Maris*, World Scientific Co, Singapore, in print.
- [24] C.J. Joachim, *Quantum Collision Theory* North-Holland, Amsterdam, (1975).
- [25] D.R. Bes, R.A. Broglia, G.G. Dussel, R.J. Liotta, R.P.J. Perazzo, Nucl. Phys. **A260** (1976) 77.
- [26] F.Aldabe, D.R. Bes, N.N. Scoccola, Phys.Lett. **B293** (1992) 81.
- [27] H. Vershelde, Phys. Lett. **B215** (1989) 444; H. Vershelde and H. Verbeke, Nucl. Phys. **A495** (1989) 523; H. Vershelde, Phys. Lett. **B232** (1989) 15.
- [28] K. Kawarabayashi and K. Ohta, Phys. Lett. **B226** (1989) 205.
- [29] G. Brown and I. Zahed, Phys. Rep. **142** (1986) 1.
- [30] H. Walliser, Nucl. Phys. **A524** (1991) 706.
- [31] B. Moussallam and D. Kalafatis, Phys. Lett. **B272** (1991) 196.
- [32] C. Becchi, A. Rouet and S. Stora, Phys. Lett. **B52** (1974) 344; Ann. of Phys.(N.Y.) **98** (1976) 278; I.V. Tyutin, Lebedev preprint, FIAN 39 (1979), unpublished; B.L. Voronov and I.V. Tyutin, Theor. Math. Phys. USSR **50** (1982) 218.
- [33] A. Caloggeracos, Phys. Rev. **D42** (1990) 573.
- [34] D.R. Bes and J. Kurchan, *The Treatment of Collective Coordinates in Many-Body Systems*, Lecture Notes in Physics Vol. 34 (World Scientific Co, Singapore, 1990).
- [35] J. Kurchan, D.R. Bes and S. Cruz Barrios, Nucl. Phys. **A509** (1990) 306.
- [36] M. Henneaux and C. Teitelboim, *Quantization of Gauge Systems*. Princeton University Press, New Jersey (1992).
- [37] F.Aldabe, D.R. Bes, N.N. Scoccola, Phys.Lett. **B304** (1993) 98.
- [38] J.D. Bjorken and S.D. Drell, *Relativistic Quantum Fields*. Mc Graw-Hill, New York (1965).