

Tesis de Posgrado

Estudio magnetohidrodinámico de los vientos estelares y su estabilidad

Rotstein, Néstor

1993

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Rotstein, Néstor. (1993). Estudio magnetohidrodinámico de los vientos estelares y su estabilidad. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2591_Rotstein.pdf

Cita tipo Chicago:

Rotstein, Néstor. "Estudio magnetohidrodinámico de los vientos estelares y su estabilidad". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1993. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2591_Rotstein.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

**ESTUDIO MAGNETOHIDRODINAMICO DE LOS VIENTOS ESTELARES
Y SU ESTABILIDAD**

NESTOR ROTSTEIN

Trabajo de Tesis presentado para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas
1993

Director de Tesis: Dr. Constantino Ferro Fontán

Tesis
2591
y2

A mi esposa. Norma
A mis hijos, Yamila y Nahuel

INDICE

I- INTRODUCCION	1
II- VIENTOS MHD EN CAMPOS MAGNETICOS CURVOS	11
II.a- El caso $\ell = 0, j = 0$	21
II.b- El caso $\ell = 0, j \neq 0$	32
II.c- Vientos con fuerzas de frenado	40
II.d- Vientos magnetizados con rotación	53
III- SOLUCION GENERAL CON $M = M(x, \theta)$	63
III.a- El caso $\ell = 0$	64
III.b- El caso $\ell \neq 0$	71
IV- EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD DE LOS FLUJOS	84
V- COMENTARIOS Y DISCUSION DE LOS RESULTADOS	95
REFERENCIAS	102
PALABRAS FINALES	106

I-INTRODUCCION

En el año 1935 Adams y MacCormack detectaron líneas de elementos neutros y de baja ionización con corrimiento Doppler analizando el espectro de una estrella supergigante fría, α Her; la velocidad que pudo medirse del flujo era de unos pocos kilómetros por segundo, un valor de hecho por debajo de la velocidad de escape de la superficie estelar. Esto llevó a Spitzer (1939) a postular que se trataba de material que era primero ionizado y luego retornaba a la estrella. Más de veinte años después Deutsch (1956) detectó la absorción de la capa en expansión en la binaria espectroscópica compañera de la supergigante; las velocidades medidas resultaron no sólo estacionarias respecto de las fluctuaciones en la velocidad radial de la primera sino que además eran mayores que la velocidad de escape de α Her, confirmando que es desde esta estrella que el material escapa. Desde esta primera evidencia observacional los vientos estelares se han constituido en uno de los fenómenos más interesantes para ser estudiados dentro del ámbito de la Astrofísica, tanto teórica cuanto observacional.

Desde un punto de vista formal y puramente termodinámico el fenómeno es de esperar, ya que una estrella es un sistema abierto y como tal debe tener un flujo de masa, además de un flujo de energía asociado al flujo radiativo; lo que habrá de variar según las condiciones termodinámicas en la fotosfera y de acuerdo al estado evolutivo de la estrella, esto es, a lo largo del diagrama H-R, es la tasa de pérdida de masa y la forma en que la materia es expulsada, estando este último aspecto condicionado por la manera en que la atmósfera se relaciona con el medio interestelar. Por lo demás, el evento de eyección de masa debe ser común a todas las estrellas y, en lo que sigue, llamaremos viento estelar a la expansión continua de las capas exteriores de la atmósfera de estos objetos.

Si los vientos son suficientemente masivos para ser ópticamente gruesos en algunas líneas de resonancia intensas y en parte del continuo, sus características pueden ser estudiadas a partir del espectro emergente de la estrella. Del análisis de esta información se infiere (teniendo en cuenta que los valores calculados dependen fuertemente del modelo de viento que se adopte) que las pérdidas de masa podrían llegar a ser del orden de $10^{-5} M_{\odot} a^{-1}$ para estrellas tempranas y de alrededor de $10^{-14} M_{\odot} a^{-1}$ para estrellas tardías, en tanto que las velocidades terminales del viento variarían entre 1000 y 3500 $km \text{ seg}^{-1}$ en las primeras y entre 10 y 100 $km \text{ seg}^{-1}$ en los tipos espectrales K-M (Casinelli, 1979).

De estos valores se desprende que los mecanismos inherentes al transporte de masa debieran ser diferentes para distintos tipos espectrales; por otro lado, se ha observado que

las consecuencias de este transporte varían según el estado evolutivo de la estrella, pues si bien en las estrellas tardías la pérdida de masa es comparativamente pequeña, el viento puede alterar su movimiento de rotación ya que lleva consigo parte del impulso angular primigenio (cfr. por ejemplo, Weber y Davies, 1967, para el viento solar y Belcher y Mac Gregor, 1976, para estrellas F5 y más tardías).

Si tomamos los valores medios del viento solar, esto es, $\dot{M} \approx 10^{-14} M_{\odot} a^{-1}$ y $V_{\infty} \approx 400 km\ seg^{-1}$ (Watanabe, 1991) como representativos de los flujos eyectados por objetos tardíos, concluiremos que los valores de la columna de átomos son muy bajos como para dar un efecto espectroscópico considerable. Resulta, por lo tanto, que la pérdida de masa en estrellas frías de la secuencia principal no es fácilmente observable en forma directa. Más aún, para una masa estelar del orden de la solar, el tiempo característico de pérdida de masa sería $\tau_M \sim M_{\odot} / \dot{M} \sim 10^{14}$ años, un tiempo excesivamente largo si se lo compara con tiempos típicos de evolución estelar ($10^7 - 10^9$ años).

En general, los tenues vientos de las estrellas tardías se manifiestan observacionalmente en forma débil en diferentes regiones del espectro, particularmente en las regiones visible e infrarroja. La mayoría de las observaciones en el óptico se basan en la espectroscopía de muy alta resolución para detectar asimetrías en líneas metálicas intensas de muy baja excitación (energías menores que 1 eV). Estas líneas presentan una componente en absorción, originada en la fotosfera de la estrella, y una componente en emisión generada en las capas exteriores de la atmósfera; pero si la atmósfera se halla en expansión el pico de emisión se desplaza por efecto Doppler y hace que la componente en absorción se vea corrida al violeta, pues en tanto ésta proviene sólo de la parte de la estrella directamente enfrentada al observador, las emisiones llegan de toda la envoltura (excepto, desde luego, de la región oculta de la estrella). Este tipo de perfiles (perfiles P-Cygni) permite estimar no sólo la velocidad de expansión de la región de formación de la especie sino también la densidad de la misma.

Se ha observado también que las envolturas gaseosas que rodean a las estrellas tardías dan origen a un incremento (exceso) en la absorción infrarroja de la misma. Los granos de polvo que conforman su envoltura se calientan por la absorción continua de los fotones provenientes del interior y ese exceso de energía es reirradiado en la región del infrarrojo; la magnitud de este exceso depende directamente de la composición química de la propia estrella.

El corrimiento Doppler de las líneas que se hallan en emisión, respecto de la frecuencia esperada para una atmósfera en reposo, es una medida de la velocidad con que son eyectadas las capas donde estas líneas se forman. Dentro del rango de las estrellas tardías algunas líneas

en emisión se presentan como verdaderos patrones: entre los más claramente identificados podemos mencionar la línea en emisión de 9.7μ para estrellas ricas en oxígeno que forman granos de silicatos, y el patrón de emisión en 11.5μ característico de partículas de SiC comunes en las estrellas de carbón.

La emisión máser de algunas envolturas revela también en forma indirecta la presencia de vientos. En algunas supergigantes tardías (tipo espectral M) se ha detectado emisión máser de moléculas de OH y SiO, estimulada a partir del polvo circumestelar por la radiación infrarroja: el polvo convierte la radiación ultravioleta proveniente de la estrella en radiación infrarroja, que a su vez excita las moléculas de polvo de la envoltura circumestelar invirtiendo la población de los niveles de energía más bajos. La emisión máser que se origina por este mecanismo ha convertido ahora la radiación infrarroja en microondas (típicamente, la longitud de onda para las moléculas de OH es de 18 cm) provenientes de dos regiones en expansión: una se acerca al observador (la que está directamente enfrentada a éste) y otra, ubicada alrededor de la parte oculta de la estrella, se aleja (pero emite radiación en la dirección del observador). Se obtienen de esta forma dos picos desplazados por efecto Doppler, uno al rojo y el otro al violeta, que permiten estimar la velocidad de expansión de la envoltura. La fracción de estrellas que son fuentes máser se incrementa con la disminución de la temperatura efectiva y el aumento de la abundancia de polvo: de tal forma, la emisión máser estaría estrechamente relacionada a las características termodinámicas de la envoltura y su estado evolutivo y, por ende, a la velocidad del viento, en particular en estrellas de carbón y tipo espectral S (Hagen, 1978).

En cuanto a la descripción cualitativa, a partir del trabajo de Parker (1958), que describe la expansión transónica, unidimensional y en ausencia de campos magnéticos de la corona solar en el medio interestelar, la teoría de los vientos en estrellas tardías ha sido desarrollada exhaustivamente (Weber y Davies, 1967; Casinelli, 1979; Holzer, 1979; Mullan, 1980; Haisch et al. 1980; Hartmann y Avrett, 1982; Sakurai, 1985; Rieke y Rieke, 1989; Tamano, 1991; Watanabe, 1991; Dryer, 1991 y las referencias que en éste se mencionan). En una forma un tanto general, estos modelos pueden ser clasificados en "solares" (en los cuales se considera la existencia de una cromósfera rodeada por una delgada región de transición, en la que la temperatura se eleva hasta los valores coronales) y los "no solares", que dan cuenta de la presencia de líneas que se forman a temperaturas no mayores de 20000K, evidenciando de esta manera la presencia de tan sólo una cromósfera.

Esta división se propone a partir del trabajo de Watanabe (1981), quien estudió la estructura termodinámica de las atmósferas exteriores de objetos tardíos proponiendo vientos

governados térmicamente. El calentamiento no radiativo, conjuntamente con una longitud de amortiguamiento característica extendida hasta las regiones de baja densidad, produciría una región de transición y coronas con temperaturas del orden de 10^6K similar a la atmósfera solar; en cambio, cuando la longitud de disipación es menor que la escala de variación de la densidad, los términos no radiativos pueden producir picos de temperatura estrechos que no llevarían a la formación de una corona pero podrían acelerar el viento estelar.

Se han sugerido diferentes mecanismos para explicar el calentamiento no radiativo que, por lo dicho, dentro de este contexto se supone es el responsable de la estructuración atmosférica y del viento estelar. Kuperus (1965), Ulmschneider (1967) y Nariai (1969) estudiaron la disipación viscosa de las ondas acústicas generadas en la región de convección turbulenta como posible fuente de energía adicional.

Cuntz (1987) y Cuntz y colaboradores (1989) propusieron como mecanismo de gobierno del viento de estrellas tardías la propagación de ondas de choque. Considerando el espectro de una onda con períodos que cambian estocásticamente se encuentran soluciones para el viento estelar con múltiples puntos críticos y pérdida episódica de masa. La combinación de ondas monocromáticas de distinta frecuencia producirían una región convectiva que podría dar lugar a la eyección de masa observada.

Originalmente propuesta por Parker (1965) para modelar el viento solar, la teoría de vientos gobernados por ondas de Alfvén ha sido luego aplicada a todo el rango de estrellas tardías. Hartmann y MacGregor (1980) estudiaron este mecanismo en estrellas gigantes y supergigantes de tipo espectral M mostrando que las velocidades terminales serían mucho mayores que las observadas a menos que se considere algún mecanismo de amortiguamiento de las ondas en escalas comparables con el radio estelar. El balance entre el calentamiento provocado por mecanismos magnéticos y el enfriamiento radiativo permite determinar en este formalismo la temperatura máxima del viento que, junto a la velocidad terminal, se incrementa con la masa de la estrella.

La presencia de campos magnéticos en la atmósfera exterior de las estrellas supone el agregado de una estructura para el viento y juega un importante rol en el balance energético del flujo. Por otro lado, es importante destacar que la inclusión de campos magnéticos en el tratamiento de la expansión atmosférica lleva a resultados cualitativamente diferentes respecto de los modelos no magnéticos. En primer lugar, la condición de congelamiento de las líneas de campo al viento provoca la corrotación de las capas circumestelares hasta distancias de varios radios estelares (Weber y Davies, 1967; Belcher y MacGregor, 1976; Sheeley y Wang, 1991). Como consecuencia, el tiempo propio de pérdida de momento angular

es comparable al tiempo de vida del astro en secuencia principal. Las observaciones indican que la velocidad de rotación de las estrellas en secuencia principal decrece abruptamente para tipos más tardíos que F5 y que esta velocidad es una función decreciente de la edad estelar: de tal forma, las enanas tardías podrían perder no solo masa sino también momento angular a través de vientos magnéticamente acoplados. Esto se debería a que la región convectiva de la superficie de las estrellas tardías de secuencia principal serían la fuente tanto del campo magnético (a través del efecto dínamo) cuanto de la estructuración de la corona: el viento magnético originado en este tipo de configuración ejerce un momento de frenado mucho mayor que el que se espera en un modelo no magnético y, por lo tanto, asocia debidamente el problema del viento al estado evolutivo de la estrella (Schatzman, 1962).

A diferencia de los tipos tardíos, las estrellas de muy alta luminosidad (tipo espectral O-OB) muestran vientos muy masivos empujados por la presión de radiación. Espectroscópicamente, éste se manifiesta en fuertes y muy marcadas asimetrías en los perfiles de algunos elementos, neutros o ionizados. Las características alas notablemente desplazadas al violeta que muestran ciertas líneas sugerirían que los iones a que corresponden se forman en regiones que se desplazan rápidamente hacia afuera de la estrella; el ancho del ala asimétrica es a su vez una medida de la velocidad con que la capa de formación es expulsada. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que la velocidad terminal que se mide de esta forma depende de dónde se ubique el nivel del continuo para determinar en qué punto el perfil termina o, en otros términos, la incerteza en la determinación del nivel de emisión continua de la estrella se traduce en una marcada fuente de error al determinar la velocidad al infinito del viento.

El análisis cualitativo del fenómeno sufrió un vuelco espectacular una vez que los registros se obtuvieron fuera de la atmósfera terrestre. En efecto, desde las primeras observaciones de los perfiles P Cygni de líneas de resonancia en el espectro ultravioleta de supergigantes tempranas, realizadas por Morton (1967) y por Morton y colegas (1969) con datos obtenidos desde satélite, se postuló que los fuertes flujos máxicos en los objetos tempranos tendrían su origen en esta región espectroscópica, siendo varias las teorías que se han propuesto para justificarlos.

En los modelos por presión de radiación se postula que la transferencia de momento del campo de radiación al gas se efectúa a través de la opacidad de las líneas de resonancia más intensas en la región del ultravioleta (que es la región del espectro en la cual es máximo el flujo continuo de las estrellas tempranas) provocando un corrimiento Doppler progresivo en el coeficiente de absorción que podría llevar el material a altas velocidades. Este modelo

fue propuesto originalmente por Lucy y Solomon (1970) y desarrollado posteriormente por Castor, Abbott y Klein (1975).

Las altas tasas de pérdida de masa requieren del orden de cien líneas intensas para que la transferencia de momento sea eficiente en los tipos tempranos; Lamers y Morton (1976), para la misma época en que lo hicieron Castor, Abbott y Klein (1976), estimaron que la abundancia de líneas de resonancia en la región de los 228 Å a los 912 Å podría ser suficiente para proveer la presión de radiación que explique los valores de \dot{M} para las estrellas tipo O. Este modelo sugiere, además, que la temperatura del viento es la temperatura de borde de la fotosfera ($T_e \sim 0.8 - 0.95T_{eff}$) debido a que los tiempos de equilibrio térmico involucrados son mucho menores que el tiempo requerido por el flujo para atravesar las distancias típicas de variación.

Los modelos coronales postulaban que las estrellas que tienen zonas de convección o alguna otra fuente de ondas acústicas o mecánicas podrían tener regiones coronales como resultado de la disipación de la energía de esas ondas (a similitud de la teoría que intentaba explicar en esa época la formación de la corona solar). De esta manera podía producirse la expansión de la atmósfera como resultado del desbalance de presión entre la corona (de origen térmico) y el medio interestelar. Este modelo fue propuesto por Thomas (1973) y Hearn (1975). Las pérdidas radiativas en la corona podían provocar un decrecimiento rápido de la temperatura de manera tal que la envoltura externa ($r \geq 2R_*$) sería fría, con una temperatura electrónica del orden de $0.8T_{eff}$.

Sin embargo, las observaciones ultravioletas de un gran número de envolturas estelares de tipo espectral hasta B1 realizadas por el Copernicus pusieron de manifiesto la existencia de especies altamente ionizadas tales como O VI y N V (Snow y Morton, 1976; Lamers y Snow, 1978). El origen de estas especies se explicaba por la ionización provocada por el campo de radiación si éste tiene una temperatura de brillo del orden de los 40.000 K en la región del continuo de He II o por colisiones si la temperatura efectiva es del orden de los 200.000 K. Ninguno de los modelos anteriores podía incluir estas condiciones, por lo que debieron proponerse modelos alternativos.

Lamers y Rogerson (1978) propusieron un modelo en el cual la disipación de energía mecánica calienta las regiones superiores de la fotosfera. El viento se inicia debido a la presión de radiación que brinda la gran abundancia de O VI y N V en la región donde $T_{eff} \sim 2.10^5 K$. El mismo flujo evita el calentamiento de las capas subsiguientes pues a medida que la velocidad aumenta (llegando a valores del orden de $1000 km seg^{-1}$) la temperatura decrece.

En la misma época, Casinelli, Olson y Stalio (1978) desarrollaron la idea de un viento originado térmicamente en una capa de espesor del orden de unas décimas de radio estelar, a una temperatura de aproximadamente $10^6 - 10^7$ K, rodeada por una capa fría con $T_c \sim 0.8T_{eff}$ donde se formarían las especies O VI y N V por efecto Auger debido al bremsstrahlung de los electrones en la corona. Cannon y Thomas (1977) desarrollaron un modelo en el cual el viento se origina por inestabilidades en el interior de la estrella: el viento es también inestable y calienta el gas en la región transónica por ondas de choque.

Malborough y Zamir (1975) analizaron los efectos de la rotación de la estrella sobre los vientos originados por presión de radiación en tanto Friend y MacGregor (1984) extendieron este análisis incluyendo campos magnéticos. Los resultados mostraron que el incremento en la fuerza de Lorentz aumenta la velocidad terminal del viento en tanto que la rotación principalmente incrementa la fuerza centrífuga en la base del viento, provocando de esta manera una mayor tasa de pérdida de masa. Poe y Friend (1986) analizaron las consecuencias de tratar a la estrella no como un objeto puntual sino como un disco de dimensiones finitas, y hallaron que los efectos del campo magnético sobre la velocidad terminal no serían tan marcados como sugerían Friend y MacGregor (1984), en tanto \dot{M} sería prácticamente independiente del valor de B .

Todos los modelos mencionados, sin embargo, adolecen de un mismo problema: los cálculos se realizan dentro de la aproximación de Sobolev, para lo cual deben eludir el tratamiento del problema del transporte de la radiación en estrellas en las cuales éste constituye justamente uno de los problemas fundamentales. El método de Sobolev es un método puramente geométrico que permite asignar a cada punto del perfil de una línea un valor de radio estelar y de velocidad. Si se trata el problema de transporte esta correlación deja de ser válida y, por tanto, velocidad terminal, gradientes en la ley de velocidades y velocidad inicial guardan débiles relaciones con los puntos de los perfiles de las líneas que tradicionalmente se eligen.

Esta incompatibilidad desaparece si se trata adecuadamente la ecuación de transporte (Catalá, 1988). En estas condiciones se reproducen todas las líneas del espectro y sus variaciones, y se encuentra que las velocidades de expansión no son necesariamente tan grandes como se creía.

Por otro lado, ninguno de estos modelos prevé la formación de una estructura cromosférica en la envoltura exterior, un fenómeno que, en principio, sería común a todas las estrellas (Praderie, 1970, 1973; Lamers y Rogerson, 1975). La existencia de una cromósfera es fundamental para reproducir las observaciones y el problema que surge es, desde el punto

de vista teórico, dónde colocar el máximo de temperatura. Por ello se hace importante la introducción de campos magnéticos, ya que estos determinan la ubicación del punto de Alfvén que, de acuerdo a los cálculos realizados por algunos autores (Mihalas y Conti, 1980; Rotstein y Ringuelet, 1988), coincidiría con el punto de temperatura máxima.

En el plano H-R, entre las estrellas tardías y las gobernadas por la fuerza radiativa existe, además, un grupo de objetos estelares en los cuales la presión de radiación no es dominante y para los cuales los campos magnéticos pueden, todavía, considerarse globales (a diferencia de los tipos fríos que poseen estructuras magnéticas de tipo solar, es decir, localizadas): son las estrellas de tipo espectral B tardío y las A, caracterizadas por luminosidades intermedias y reconocidas como los rotadores más rápidos a lo largo del diagrama evolutivo (Allen, 1973). Sin embargo, a pesar que conforman un importante subgrupo, este tipo de estrellas ha comenzado a ser estudiado sólo en épocas recientes. La dificultad en el tratamiento teórico de los vientos en este caso surge de la compleja estructura magnética que deviene de la alta rotación. Por un lado, se presentan tres "puntos" críticos: son las superficies donde el flujo alcanza la velocidad de tres ondas MHD (los modos magnetosónico lento, de Alfvén y magnetosónico rápido, respectivamente). Por otro lado, las dificultades se incrementan cuando se atienden las observaciones espectroscópicas, que sugieren que las estructuras atmosféricas de las estrellas del grupo que consideramos no serían esféricamente simétricas: hay que agregar, además, que no se conoce exactamente qué tipo de configuración magnética poseen los objetos que analizamos. Generalmente se acepta que, debido a la fuerte presión de radiación que empuja al viento y a la condición de congelamiento del plasma al campo magnético, la estructura de éstos sería globalmente radial en los tipos estelares tempranos. En cambio, para las estrellas de tipo tardío se consideran configuraciones magnéticas del tipo solar, esto es, campos magnéticos originados en estructuras locales (tal el caso de las manchas solares) que, en general, no guardan una estrecha relación entre ellas. De alguna manera, como discutiremos en los capítulos siguientes, el subgrupo que analizamos constituye una transición no sólo en la marcha de temperatura entre tipos tempranos y tardíos sino también en lo que a estructuras magnéticas respecta.

En parte por estos motivos, salvo el tratamiento formal y general de este tipo de problema realizado por Heyvaerts y Norman (1989), en el cual se concluye que todo viento estacionario, magnetizado y con simetría axial tiende asintóticamente a colimarse en la dirección del eje de simetría, y su extensión al campo relativista por Chiueh y Begelman (1991), sólo unos pocos modelos se han desarrollado (Sakurai, 1985, 1990; Tsinganos y Trussoni, 1991) que tengan en cuenta, además, la globalidad de la atmósfera estelar. Sin embargo, cabe

mencionar que si bien los trabajos de Sakurai (1985, 1990) son soluciones numéricas auto-consistentes, están desarrollados con un índice politrópico constante y para velocidades de rotación baja; en tanto, el trabajo de Tsinganos y Trussoni (1991) da cuenta de las soluciones que se obtienen para configuraciones magnéticas puramente radiales que, en principio, no coliman completamente hacia el polo como sería de esperar de acuerdo a los resultados de Heyvaerts y Norman (1989).

Estas razones llevan a la necesidad de desarrollar una teoría para los vientos de este grupo intermedio de estrellas que, por un lado, soslaye parte de las dificultades matemáticas mencionadas permitiendo la resolución analítica de las ecuaciones y, por otro, permita una adecuada comprensión de los principales fenómenos asociados al evento de eyección de masa. Por este motivo habremos de introducir estructuras magnéticas generales que no sólo permitan la descripción detallada de las observaciones, sino que además estén dentro del contexto del resultado genérico de Heyvaerts y Norman (1989).

Pero aún cuando ciertas configuraciones magnéticas permiten la obtención de diversas soluciones queda en pie el interrogante acerca de su estabilidad. En la literatura se hallan muy pocos antecedentes acerca de la discusión de este problema en diferentes objetos astrofísicos (Ray, 1980; Chiuderi et.al, 1989; Corbelli y Torricelli-Ciamponi, 1990; Lakhina et.al, 1990a,b). Sin importar cuál es el origen de una dada estructura magnética, se torna fundamental saber bajo qué condiciones las fuerzas gravitatoria, centrífuga y magnética pueden sustentar el flujo en equilibrio. Si el equilibrio es linealmente inestable, el estado final de estabilidad del sistema debe hallarse analizando la saturación no lineal de los modos linealmente inestables. La complejidad del problema es abrumadora: la dificultad principal proviene del hecho de que los equilibrios con flujo no permiten una formulación autoadjunta como en el caso estático y, por ende, la poderosa herramienta que supone un principio de energía no es aplicable.

Por este motivo, no será posible, en general, encontrar condiciones de estabilidad que sean a la vez necesarias y suficientes y, por otro lado, la investigación de la estabilidad lineal deberá restringirse a algunas partes del espectro. En particular, es de primordial interés el análisis de la región del continuo conocida como continuo de Alfvén y cuspidal. Es sabido que el rico espectro de excitaciones lineales de la MHD ideal puede ser causa de inestabilidad debido a que cuatro ondas, dos de Alfvén y dos magnetosónicas lentas, pueden interactuar a lo largo de las líneas de fuerza; luego, se trata de perturbaciones que involucran modos localizados sobre las isosuperficies de flujo magnético y pueden modificar en forma sustantiva el equilibrio de la atmósfera estelar.

Como ya hemos mencionado, en los equilibrios con flujo de masa la energía potencial del plasma no puede ser definitivamente positiva; esto obedece al hecho de que su operador es hiperbólico, debido a que las líneas de corriente, en general, no coinciden con las líneas de fuerza. Sin embargo, en un sistema con simetría axial es posible alinear localmente la velocidad v con el campo magnético \mathbf{B} pasando a un referencial en corrotación con una dada isosuperficie de flujo magnético. Luego, la estabilidad del plasma ante modos localizados puede ser estudiada mediante un criterio suficiente dado por la integral, a lo largo de una línea de fuerza, de una expresión en la que intervienen distintos parámetros del equilibrio: la curvatura del campo \mathbf{B} , la cizalla del campo de velocidades en la dirección azimutal, el perfil de densidad, etc. (Hameiri, 1983).

En síntesis, el objetivo de este trabajo es, por un lado, desarrollar modelos de vientos estelares en presencia de campos magnéticos y alta rotación, sin presión de radiación, para dar cuenta de los fenómenos observados en uno de los más importantes subgrupos del diagrama H-R y al que poca o ninguna atención se le ha prestado aún: los rápidos rotadores que constituyen los tipos B tardío y A. Por el otro lado, una vez obtenidos los flujos másicos de equilibrio, se discutirá la estabilidad lineal no sólo de éstos sino también de los otros modelos desarrollados para este tipo de objetos estelares.

A tal efecto, en la sección II trataremos la formulación del problema de los vientos estelares y de las estructuras magnéticas en que se hallan inmersos, desarrollaremos las ecuaciones MHD sobre las que basamos los modelos y discutiremos sus posibles simetrías y las soluciones en los casos de superficies Alfvénicas esféricas. En el apartado III habremos de presentar las soluciones que surgen cuando se está en presencia de superficies de Mach-Alfvén obladas o proladas y perfiles de densidad másica no esféricos. El análisis pormenorizado del criterio de estabilidad lineal, en relación a los diversos modelos de viento, habrá de desarrollarse en el capítulo IV de este trabajo, dejando para el capítulo V el resumen de los resultados y la discusión de las implicaciones físicas a que nuestros modelos habrán de conducir.

II-VIENTOS MHD EN CAMPOS MAGNETICOS CURVOS

Los vientos estelares han sido extensamente estudiados desde el pionero trabajo de Parker (1958) que describe la expansión unidimensional, no magnética y esféricamente simétrica de la corona solar. Desde entonces, la investigación de este fenómeno se ha realizado en conexión con diferentes objetos astrofísicos: el viento de estrellas tardías y su relación con la pérdida de momento angular (Weber y Davies, 1967; Mestel y Selley, 1970; Pneumann y Kopp, 1972; Belcher y MacGregor, 1976; Sakurai, 1985; Barkhudarov, 1991); flujos de estrellas tempranas asociados a la fuerte presión de radiación que los provoca (Castor, Abbot y Klein, 1975; Abbott, 1978; Long y White, 1980; Panagia y Macchetto, 1981; Uchida, 1985; Arnaud y Rothenflug, 1985; Poe y Friend, 1986; Sakurai, 1990); jets relativísticos asociados a la magnetósfera de los púlsares (Ray, 1980; Beskin y colegas, 1986) o chorros de materia acoplados a objetos galácticos compactos (Chiuderi y colaboradores, 1989).

La presencia de campos magnéticos en el tratamiento del viento se ha mostrado como un factor de ineludible peso, pues no sólo ofrece una cierta estructura al viento (esto es, determina la geometría del problema) sino que además juega un importantísimo rol en el frenado de la estrella y en el balance energético global del flujo. Si bien originados por mecanismos físicos diferentes, es de esperar que los campos magnéticos se hallen presentes a lo largo de todo el diagrama H-R. Sólo excepcionalmente medibles (Glagolevskij et al. 1986) los valores de estos campos serían en general del orden de una decena a unas pocas centenas de gauss (Nerney, 1980).

Cuando se trata de rotadores rápidos, las corrientes toroidales serían las responsables de la generación de un campo magnético globalmente dipolar, posteriormente distorsionado por los esfuerzos magnéticos ejercidos por la componente azimutal del mismo campo (véase, por ejemplo, Zeldovich y colaboradores, 1990). Pero este es justamente uno de los mayores problemas en la dinámica del viento estelar: resolver autoconsistentemente la interacción del plasma con el campo magnético a lo largo de toda la atmósfera de la estrella de manera de encontrar la geometría del flujo.

Es por este motivo que algún tipo de simplificación habrá de realizarse si es que se quiere trabajar un problema pasible de integración analítica (o numérica sencilla). Ni falta hace mencionar que aún los más sofisticados códigos numéricos hacen uso de algunas de estas simplificaciones.

La primera consideración, y la que se presenta en forma casi evidente, es la de suponer simetría de rotación; si bien la introducción de simetría axial no permite analizar los casos de estrellas que presentarían regiones peculiares ("spots") que podrían dar origen a líneas particulares (Ringuelet y Rotstein, 1987) la generalidad que se pierde es muy poca. Por este motivo, todos los casos que se analizarán a lo largo de este trabajo suponen simetría rotacional.

Habremos de trabajar, además, dentro del formalismo de la magnetohidrodinámica compresible. Una revisión completa de esta aproximación puede hallarse, por ejemplo, en Krall y Trivelpiece (1973) pero mencionaremos ahora que todas las situaciones de interés que tratamos se encuentran justificadas dentro de este marco teórico.

Con estas consideraciones, escribamos entonces las ecuaciones MHD para analizar ulteriores simetrías que pudieran ser atingentes al problema. En el caso de la interacción de un fluido estacionario, no viscoso y con alta conductividad eléctrica con campos magnéticos, en presencia de un objeto central que provee un campo gravitatorio esféricamente simétrico, las ecuaciones MHD se reducen a :

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (II.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (II.2)$$

$$\nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = 0 \quad (II.3)$$

$$\rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\nabla \mathcal{P} + \mu_0^{-1}(\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} - \rho g \hat{e}_r \quad (II.4)$$

$$\frac{3}{2} \frac{k_B}{m} \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)T + \mathcal{P} \nabla \cdot \mathbf{v} = Q(r, \theta) \quad (II.5)$$

Donde \mathbf{v} denota el campo de velocidades, \mathbf{B} el campo magnético, ρ la densidad media, $\mathcal{P} = k_B \rho T / m$ la presión del gas y $g = \frac{GM_\star}{r^2}$ la aceleración gravitatoria. G, M_\star, k_B, m, T denotan la constante de gravitación, la masa de la estrella, la constante de Boltzmann, el peso molecular medio del fluido y la temperatura, respectivamente. $Q(r, \theta)$ representa, al igual que en el trabajo de Low y Tsinganos (1986), la tasa de intercambio de energía de un elemento de flujo con el medio que lo rodea, por unidad de volumen y de tiempo. Este término, que en principio puede representar fuentes de calentamiento o de enfriamiento, es agregado para cerrar el sistema de ecuaciones. Desde ya, esto pudo haberse hecho especificando un valor constante del índice politrópico γ cerrando el sistema a través de una ecuación de estado

$$\mathcal{P} = Q(S) \rho^\gamma$$

que es equivalente a especificar los mecanismos de intercambio de calor a lo largo del flujo y dejar como incógnita la geometría del mismo (esto es, la forma de las líneas de campo).

Sin embargo, fenomenológicamente parece más viable el camino inverso: fijar la geometría de las líneas de campo y, a posteriori, calcular el valor de $Q(r, \theta)$ para cada punto de la atmósfera. Esto es lo que haremos, imponiendo como única restricción sobre esta función que sea compatible con la física del problema.

Obsérvese que la función

$$\gamma = 1 + \left. \frac{\partial \ln T}{\partial \ln \rho} \right]_{S=cte}$$

también es posible de ser hallada una vez que el problema dinámico está resuelto, pudiendo analizarse su comportamiento en relación a la función $Q(r, \theta)$.

Las ecuaciones (II.1) y (II.2) pueden ser inmediatamente integradas con simetría axial (Tsinganos, 1982; Heyvaerts y Norman, 1986); en este caso se reducen a:

$$\mathbf{B} = \frac{1}{r \sin \theta} \nabla A(r, \theta) \wedge \hat{e}_\phi + B_\phi \hat{e}_\phi \quad (II.6)$$

$$\rho \mathbf{v} = \frac{1}{r \sin \theta} \nabla \Lambda_0(r, \theta) \wedge \hat{e}_\phi + \rho v_\phi \hat{e}_\phi \quad (II.7)$$

en términos del flujo magnético $A(r, \theta)$ y de la función de flujo másico $\Lambda_0(r, \theta)$. Puede demostrarse (Tsinganos, 1982) que las superficies de flujo magnético constante coinciden con las superficies de $\Lambda_0(r, \theta)$ constante, esto es, $\Lambda_0 = \Lambda_0(A)$ o, en otras palabras, dado que las líneas de campo magnético son las curvas del plano (r, θ) para las cuales es $A(r, \theta) = cte$, $\Lambda_0(A)$ es constante sobre cada línea de campo. Por lo demás, $\Lambda_0(A)$ es una función libre de $A(r, \theta)$.

La integración de la ecuación (II.3) conduce también a una función libre del flujo magnético, el potencial electrostático Ω_0

$$\mathbf{v} \wedge \mathbf{B} = \nabla \Omega_0(A) = \frac{\partial \Omega_0}{\partial A} \nabla A(r, \theta) \quad (II.8)$$

Definamos ahora las funciones

$$\Omega = \frac{\partial \Omega_0}{\partial A} \quad (II.9.a)$$

$$\Lambda = \frac{\partial \Lambda_0}{\partial A} \quad (II.9.b)$$

De la ecuación (II.8) obtenemos

$$v_\phi B_r - v_r B_\phi = \frac{\Omega}{r} \frac{\partial A}{\partial \theta} \quad (II.10)$$

Luego, podemos escribir

$$v_\phi = \frac{\Lambda}{\rho} B_\phi + \Omega r \sin \theta \quad (II.11)$$

de manera tal que si tenemos en cuenta las expresiones (II.6) y (II.7) obtenemos finalmente

$$\mathbf{v} = \frac{\Lambda}{\rho} \mathbf{B} + \Omega r \sin \theta \hat{z}_\phi \quad (II.12)$$

Si ahora sustituimos las expresiones de las componentes poloidales de los campos de velocidad y magnético y la ecuación para v_ϕ , dada por (II.10), en la componente \hat{e}_ϕ de la ecuación (II.4) obtenemos las expresiones de v_ϕ y B_ϕ en términos de funciones libres del flujo magnético

$$v_\phi = \frac{\Omega r^2 \sin^2 \theta + \mu_0 \Gamma \Lambda / \rho}{r \sin \theta (1 - \frac{\mu_0 \Lambda^2}{\rho})} \quad (II.13)$$

$$B_\phi = \mu_0 \frac{\Omega \Lambda r^2 \sin^2 \theta + \Gamma}{r \sin \theta (1 - \frac{\mu_0 \Lambda^2}{\rho})} \quad (II.14)$$

donde $\Gamma(A)$ es una nueva función libre de $A(x, \theta)$ que representa un momento angular por unidad de volumen y de flujo magnético. Definamos entonces la función

$$L(A) = -\frac{\Gamma(A)}{\Lambda(A)} \quad (II.15)$$

Obsérvese que definido de esta forma $L(A)$ representa un momento angular por unidad de masa. En términos de $L(A)$ y $\Omega(A)$ las expresiones de v_ϕ y B_ϕ dadas por (II.13) y (II.14) se transforman en:

$$v_\phi = \frac{1}{r \sin \theta} \left[L + \frac{\Omega r^2 \sin^2 \theta - L}{(1 - \frac{\mu_0 \Lambda^2}{\rho})} \right] \quad (II.16)$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 \Lambda}{r \sin \theta} \left[\frac{\Omega r^2 \sin^2 \theta - L}{(1 - \frac{\mu_0 \Lambda^2}{\rho})} \right] \quad (II.17)$$

Ahora bien: si observamos la ecuación (II.12) vemos que $\mu_0 \Lambda^2 / \rho$ no es otra cosa que el número de Mach-Alfvén poloidal definido por

$$M_A^2(r, \theta) \equiv M(r, \theta) = \frac{v_p^2}{v_A^2} = \frac{\mu_0 \rho v_p^2}{B_p^2} \quad (II.18)$$

donde un subíndice p indica componente poloidal del flujo. Notemos entonces que si el fluido abandona la superficie estelar con una velocidad subalfvénica y en la región del viento llega a ser $M > 1$, debe existir un punto $r = r_A$ en el cual sea $M = 1$; para que las variables v_ϕ y B_ϕ permanezcan finitas en este punto, los numeradores de las ecuaciones (II.16) y (II.17) deben anularse también, esto es, debe cumplirse

$$L(A) = \Omega(A) r_A^2 \sin^2 \theta_A \quad (II.19)$$

con lo cual las expresiones de las componentes azimutales de los campos se transforman en

$$v_\phi = \frac{L}{r \sin \theta} \left(\frac{\epsilon^2 - M}{1 - M} \right) \quad (II.20)$$

$$B_\phi = \frac{\mu_0 L \Lambda}{r \sin \theta} \left(\frac{\epsilon^2 - 1}{1 - M} \right) \quad (II.21)$$

donde hemos definido

$$\epsilon = \frac{r \sin \theta}{r_A \sin \theta_A} \quad (II.22)$$

Utilizando las ecuaciones (II.6), (II.7), (II.12), (II.20) y (II.21) las componentes \hat{e}_r y \hat{e}_θ de la ecuación (II.4) se transforman en

$$\begin{aligned} & \frac{\partial_\theta A}{\mu_0 r^2 \sin \theta} \partial_r \left(\frac{M \partial_\theta A}{r^2 \sin \theta} \right) - \frac{\partial_r A}{\mu_0 r^2 \sin \theta} \partial_\theta \left(\frac{M \partial_\theta A}{r^2 \sin \theta} \right) - \frac{M}{\mu_0 r} \left(\frac{\partial_r A}{r \sin \theta} \right)^2 - \frac{\mu_0 \Lambda^2}{r M} \frac{L^2}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\epsilon^2 - M}{1 - M} \right)^2 = \\ & = -\partial_r \mathcal{P} - \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{B_\phi}{r} \partial_r (r B_\phi) + \frac{B_\theta}{r} (\partial_r (r B_\theta) - \partial_\theta B_r) \right] - \frac{\mu_0 \Lambda^2}{M} \frac{GM_\star}{r^2} \end{aligned} \quad (II.23)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\partial_\theta A}{\mu_0 r^2 \sin \theta} \partial_r \left(\frac{M \partial_r A}{r \sin \theta} \right) + \frac{\partial_r A}{\mu_0 r^2 \sin \theta} \partial_\theta \left(\frac{M \partial_r A}{r \sin \theta} \right) - \frac{M}{\mu_0 r} \frac{\partial_r A \partial_\theta A}{(r^2 \sin \theta)^2} - \frac{\mu_0 \Lambda^2}{M} \frac{L^2 \cos \theta}{r^3 \sin^3 \theta} \left(\frac{\epsilon^2 - M}{1 - M} \right)^2 = \\ & = -\frac{1}{r} \partial_\theta \mathcal{P} + \frac{1}{\mu_0} \left[\frac{B_r}{r} (\partial_r (r B_\theta) - \partial_\theta B_r) - \frac{B_\phi}{r \sin \theta} \partial_\theta (B_\phi \sin \theta) \right] \end{aligned} \quad (II.24)$$

En principio, la función flujo magnético podría ser desarrollada en polinomios de Legendre, a condición de asegurar que ninguna componente de los campos diverja en punto alguno. Pero la geometría correcta del campo magnético queda garantizada con una expresión de la forma

$$A(r, \theta) = \mathcal{W}(r) \sin^2 \theta \quad (II.25)$$

pues no sólo nos permitirá construir flujos que coliman en la dirección del eje de simetría, sino que además anula las componentes radiales de los campos en el ecuador y a las componentes polares en el polo. Por otro lado, habremos de garantizar que las condiciones de contorno sean también de variables separables.

Podemos ahora adimensionalizar las ecuaciones. Para ello definamos

$$x = r/R_\star \quad \Psi = \mathcal{W}(x_0)/r_0^2$$

donde x_0, r_0 se referirán al punto de Alfvén en los casos en que éste se encuentre en la región del viento o al radio estelar en aquellas situaciones en las cuales los flujos sean superalfvénicos. Claramente, hemos definido el flujo magnético a través de la superficie de referencia como

$\Psi = B_r(x = x_0, \theta = 0)/2$ (véase la ecuación (II.6) que define las componentes del campo magnético).

Obsérvese que es inmediata la forma adimensional de $\mathcal{W}(x)$

$$\mathcal{W}(x) = \frac{W(x)}{\Psi R_\star^2} = \frac{W(x)}{W(x_0)} x_0^2 \quad (II.26)$$

Si observamos las ecuaciones (II.23) y (II.24) vemos que pueden ser reducidas a ecuaciones desacopladas si escribimos

$$L^2(A) \Lambda^2(A) \left(\frac{\mu_0}{\Psi R_\star} \right)^2 = c_1 \sin^2 \theta + c_2 \sin^4 \theta \quad (II.27)$$

$$\Lambda^2(A) = c_3 + c_4 \sin^2 \theta \quad (II.28)$$

De esta forma, resulta

$$L^2 = \left(\frac{\Psi R_\star}{\mu_0} \right)^2 \frac{c_1 \sin^2 \theta + c_2 \sin^4 \theta}{c_3 + c_4 \sin^2 \theta} = \left(\frac{\Psi R_\star}{\mu_0} \right)^2 A \left(\frac{\hat{c}_1 + \hat{c}_2 A}{\hat{c}_3 + \hat{c}_4 A} \right) \quad (II.29)$$

Pero veamos las ecuaciones (II.16) y (II.17); pueden ser combinadas para expresar una relación entre las componentes azimutales de los campos de la forma

$$\frac{B_\phi}{\Lambda} - v_\phi = -\frac{L}{r \sin \theta} = \left(\frac{\Psi R_\star}{\mu_0} \right) \frac{W^{1/2}(x)}{r} \left(\frac{\hat{c}_1 + \hat{c}_2 A}{\hat{c}_3 + \hat{c}_4 A} \right)^{1/2} \quad (II.30)$$

Pero el miembro izquierdo de (II.30) debe anularse en el polo, de manera tal que \hat{c}_1 debe ser nula. Con esta consideración escribiremos

$$L(A) = \ell \left(\frac{\Psi R_\star}{\mu_0} \right) \frac{W(x) \sin^2 \theta}{\Lambda(A)} \quad (II.31a)$$

$$\Lambda(A) = \lambda (1 + j W(x) \sin^2 \theta)^{1/2} \quad (II.31b)$$

donde λ y j son dos constantes arbitrarias.

Finalmente, remplazando en las expresiones (II.23) y (II.24) obtenemos, por simple sustitución algebraica, las ecuaciones que gobiernan el viento en la forma

$$\begin{aligned} -\partial_x P = & \frac{4W'}{x^2} \partial_x \left(\frac{MW'}{x^2} \right) \cos^2 \theta - \frac{2WW'}{x^4} (-M \sin^2 \theta + \sin \theta \cos \theta \partial_\theta M) - \frac{MW'^2}{x^3} \sin^2 \theta - \\ & - \frac{\ell^2 W'}{x^2} \left[\frac{W'}{Mx} \left(\frac{\epsilon^2 - M}{1 - M} \right)^2 - \left(\frac{\epsilon^2 - 1}{1 - M} \right) \partial_x \left(\frac{W(\epsilon^2 - 1)}{1 - M} \right) \right] \sin^2 \theta + \\ & + \frac{W'}{x^2} (W'' - \frac{2W}{x^2}) \sin^2 \theta + \frac{Z^2}{Mx^2} (1 + j W \sin^2 \theta) \end{aligned} \quad (II.32)$$

$$\begin{aligned}
-\partial_\theta P = & -\frac{2W'}{x} \partial_x \left(\frac{MW'}{x} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{W'^2}{x^2} (M \sin \theta \cos \theta + \sin^2 \theta \partial_\theta M) - \\
& - \frac{2W'W''}{x^3} M \sin \theta \cos \theta + \frac{2W'}{x^2} (W''' - \frac{2W'}{x^2}) \sin \theta \cos \theta - \\
& - \frac{\ell^2 W'^2}{x^2} \left[\frac{1}{M} \left(\frac{\epsilon^2 - M}{1 - M} \right)^2 \sin \theta \cos \theta - \left(\frac{\epsilon^2 - 1}{1 - M} \right) \partial_\theta \left(\frac{\sin^2 \theta (\epsilon^2 - 1)}{1 - M} \right) \right]
\end{aligned} \tag{II.33}$$

donde una variable primada indica que ha sido derivada respecto a la distancia radial y hemos definido

$$\begin{aligned}
P &= \mathcal{P} \left(\frac{\mu_0}{\Psi^2} \right) \\
Z^2 &= \frac{GM_\star}{R_\star} \left(\frac{\lambda \mu_0}{\Psi} \right)^2 = 2 \left(\frac{V_e}{v_{r_0}} \right)^2 (M_0 W'(1))^2 \\
v_{r_0} &= v_r(x=1, \theta=0)
\end{aligned}$$

siendo M_0 el valor del número de Mach-Alfvén en la base del viento, V_e la velocidad de escape de la estrella y $W'(1)$ el valor de la función $W(x)$ en la fotosfera.

Notemos que una considerable simplificación del problema se logra si suponemos que las superficies alfvénicas son esféricamente simétricas, esto es, si proponemos $\partial_\theta M = 0$. En este caso el sistema puede ser efectivamente reducido a dos ecuaciones desacopladas, razón por la cual en lo que resta del capítulo habremos de explotar esta nueva simetría.

Integremos la ecuación (II.33) respecto de θ ; ante todo, observemos de (II.25) y (II.26) que la expresión (II.22) puede ser escrita como

$$\epsilon = \frac{r}{r_A} \sqrt{\frac{W'(r_A)}{W'(r)}}$$

Al ser $\partial_\theta r_A = 0$, resulta $\partial_\theta \epsilon = 0$. Luego, a partir de su forma es evidente que la presión puede ser escrita como

$$P(x, \theta) = \Pi_1(x) + \Pi_2(x) \sin^2 \theta \tag{II.34}$$

donde

$$\begin{aligned}
\Pi_2(x) = & M' \left(\frac{W'W''}{x^2} \right) + M \left[\frac{W'W'''}{x^2} - \frac{W'^2}{2x^2} \right] + \frac{\ell^2 W'^2}{x^2} \left[\frac{1}{2M} \left(\frac{\epsilon^2 - M}{1 - M} \right)^2 - \left(\frac{\epsilon^2 - 1}{1 - M} \right)^2 \right] - \\
& - \frac{W'}{x^2} (W''' - \frac{2W'}{x^2})
\end{aligned} \tag{II.35}$$

Si ahora derivamos la ecuación (II.34) respecto de la variable radial, teniendo en cuenta (II.35), e igualamos a la expresión (II.32) (con $\partial_\rho M = 0$) obtenemos, luego de un sencillo pero tedioso manipuleo algebraico

$$\partial_x \Pi_1(x) = -\frac{4W'^2}{x^4} M' - 2M \partial_x \left(\frac{W'^2}{x^4} \right) - \frac{Z^2}{Mx^2} \quad (II.36)$$

$$\begin{aligned} M'' \left(\frac{W'W''}{x^2} \right) - M' \left[\frac{\ell^2 W'^2}{2x^2 M(1-M)^2} (M^2 - 2M\epsilon^4 + \epsilon^4) + G(W') \right] - \\ - \frac{2\ell^2 W'^2}{x^3 M(1-M)} [\epsilon^3(\epsilon - x\epsilon') - M] - \frac{\ell^2 W'W''}{x^2 M(1-M)^2} [(M - \epsilon^4)(1-M) + M(\epsilon^2 - 1)^2] - \\ - F(W')(1-M) + \frac{Z^2}{Mx^2} jW = 0 \end{aligned} \quad (II.37)$$

donde hemos definido

$$G[W(x)] = \frac{4W'^2}{x^4} + \frac{2W'W''}{x^3} - \frac{2W'W'''}{x^2} - \frac{W''^2}{2x^2} \quad (II.38)$$

$$F[W(x)] = \frac{W'}{x^2} \left(\frac{8W'}{x^3} - \frac{2W''}{x^2} - \frac{2W'''}{x} + W'''' \right) \quad (II.39)$$

Notemos que si tomamos constante el valor de la función $W(x)$, las ecuaciones (II.36) y (II.37) se reducen a las de Low y Tsinganos (1986) para $\ell = 0$ y $j = 0$ (esto es, rotación nula y densidad esféricamente simétrica) y a las de Tsinganos y Trussoni (1991) cuando estas dos constantes son no nulas.

Ahora bien: estamos interesados en analizar las situaciones que pueden presentarse cuando los campos no son puramente radiales, como en los casos que acabamos de mencionar. sino que sus líneas están deflectadas hacia el polo; en principio, y de acuerdo a lo discutido al comenzar este capítulo, los campos magnéticos asociados a los rotadores rápidos son globalmente dipolares (Monaghan y Robson, 1971; Borra y Landstreet, 1977; Stepien, 1978) con sus líneas abiertas y curvadas hacia el eje de rotación por efecto del viento. Para simular esta configuración introducimos la función

$$\Psi R_*^2 W(x) = \frac{d}{x} + a + b \ln x \quad (II.40)$$

donde a, b, d , son constantes arbitrarias. Si $b = 0$ reobtenemos el flujo magnético propuesto originalmente por Low y Tsinganos (1986) que lleva a la superposición de un campo dipolar con uno puramente radial. Pero si bien esta forma funcional del flujo conduce a campos de

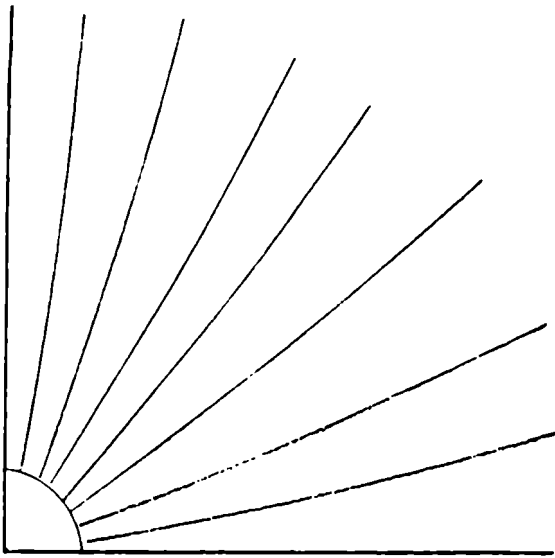
líneas abiertas, la colimación del viento requiere que éstas se curven hacia el polo y no hacia el ecuador (Heyvaerts y Norman, 1986). Por este motivo hemos incluido el término logarítmico en la expresión de $W(x)$: lejos de la estrella este factor domina y, para valores apropiados de la constante b , permite una curvatura suave de las líneas (como sugiere el trabajo de Sakurai, 1985).

Pero obsérvese que los últimos dos términos del miembro derecho de (II.40) pueden representarse adecuadamente con una única función de la forma $k x^q$ siempre que los valores del exponente q se mantengan próximos a cero: de esta manera el problema de cálculo se reduce en forma notable. Formalmente haremos este remplazo pero permitiremos, en principio, que el parámetro q adopte todos los valores que le están teóricamente permitidos, esto es, $0 \leq q < 2$ (téngase en cuenta que el valor marginal $q = 2$ llevaría a las variables dinámicas a tener valores constantes hasta el infinito).

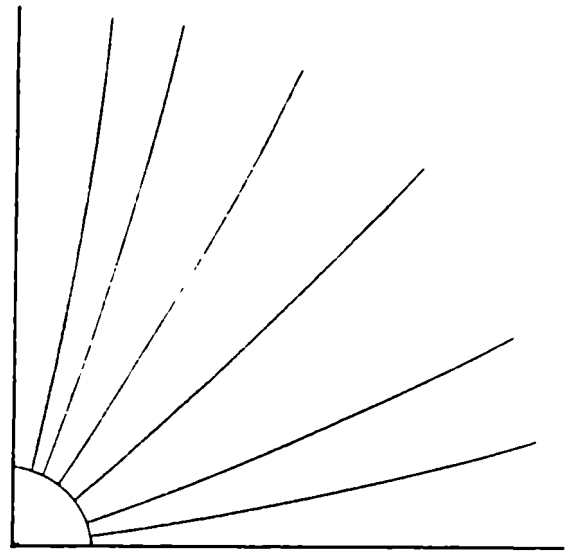
En las regiones alejadas de la superficie estelar este término es dominante (como lo es el logarítmico) y en las cercanías de la fotosfera compite con el campo dipolar; en la figura 1 mostramos diferentes configuraciones que resultan de dar distintos valores a los parámetros d, k, q : vemos que si $qd > k$ existe una "zona muerta" fuera de la estrella y en los alrededores del ecuador donde las líneas cerradas sostienen una parte de la atmósfera en equilibrio estático. En cualquier otra situación las líneas son abiertas más allá de $x = 1$.

De todas formas es necesario comentar que las líneas de campo abiertas están en realidad relacionadas con la condición de congelamiento al plasma: cuando el flujo tiene lugar arrastra a las líneas estirándolas, y una vez que la energía cinética del plasma es mayor que la magnética es imposible mantenerlas cerradas. Es de esta manera que las líneas de campo se abren, permitiendo que la materia estelar escape al infinito.

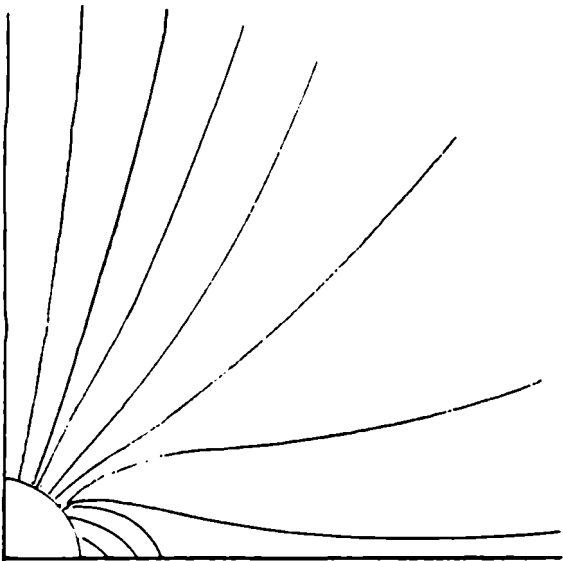
Dado que el interés práctico reside en la región del viento, habremos de concentrarnos en la parte de la atmósfera estelar que presenta una configuración de líneas abiertas. Por otro lado, en tanto nos motive el análisis de un flujo que colima en la dirección del eje de simetría, habremos de simplificar en lo posible la expresión del campo magnético. Pasemos, entonces, a estudiar algunos casos particulares.



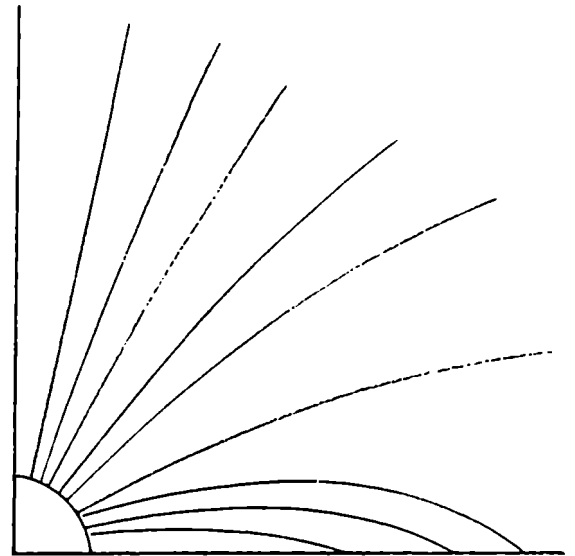
(a)



(b)



(c)



(d)

Figura 1: cuatro representaciones del campo magnético propuesto. En (a) se adoptaron los valores $d = 1; k = 2; q = 0.1$ en tanto que en (b) se tomó $d = 1; a = 1; b = 0.5$. La curvatura de las líneas es evidente en el gráfico (c), para el cual se adoptó $d = 4; k = 1; q = 1/2$; finalmente, para (d) se tomaron los valores $d = 1; a = 1; b = 0$.

II.a) El caso $l = 0, j = 0$

Esta es una primera aproximación al problema completo, que nos permite analizar las situaciones que se presentan frente a la curvatura de los campos comparando las soluciones con las de un campo puramente radial (Low y Tsinganos, 1986). A efectos de simplicidad, elijamos por el momento $W(x) = (\frac{k}{\Psi R_*^2}) x^q \equiv K' x^q$. En este caso escribiremos las ecuaciones (II.36) y (II.37) como

$$\partial_x \Pi_1(x) = -\frac{4K'^2}{x^{4-2q}} M' - \frac{2(2q-4)K'^2}{x^{5-2q}} M - \frac{Z^2}{Mx^2} \quad (II.41)$$

$$qM'' - \frac{\alpha(q)}{x} M' + \frac{\beta(q)}{x^2} M = \frac{\beta(q)}{x^2} \quad (II.42)$$

Las restantes variables del problema, al igual que las funciones $\alpha(q)$ y $\beta(q)$, quedan entonces definidas de la siguiente manera:

$$B_r(x, \theta) = \frac{2\Psi K'}{x^{2-q}} \cos \theta \quad (II.43)$$

$$B_\theta(x, \theta) = -\frac{q\Psi K'}{x^{2-q}} \sin \theta \quad (II.44)$$

$$v_r(x, \theta) = \frac{2V_0}{M_0} \frac{M}{x^{2-q}} |\cos \theta| \quad (II.45a)$$

$$v_\theta(x, \theta) = -\frac{qV_0}{M_0} \frac{M}{x^{2-q}} \sin \theta \quad (II.45b)$$

$$V_0 = \frac{M_0 \Psi K'}{\mu_0 \lambda} \quad (II.46)$$

$$\frac{\alpha(q)}{x} = \frac{x^2 G(W)}{W' W'} = \frac{1}{x} (4 + 4q - \frac{5}{2}q^2) \equiv \frac{q\alpha_1}{x} \quad (II.47)$$

$$\frac{\beta(q)}{x^2} = \frac{x^2 F(W)}{W' W'} = \frac{1}{x^2} [8 - 2q^2 + q(q-1)(q-2)] \equiv \frac{q\beta_1}{x^2} \quad (II.48)$$

Si estamos trabajando con estrellas simples habremos de requerir que el flujo sea saliente en todo punto de la atmósfera (este podría no ser el caso en sistemas múltiples); por este motivo, en la expresión (II.45) de la velocidad radial no hemos escrito $\cos \theta$ sino su módulo: de este forma garantizamos que más allá del ecuador el flujo también está dirigido hacia fuera de la estrella. En todo caso, las ecuaciones seguirán siendo las mismas, pues son invariantes frente a transformaciones $\mathbf{v} \rightarrow -\mathbf{v}$.

La ecuación (11.42) puede integrarse inmediatamente para obtener finalmente

$$M(x) = C x^{s_1} + D x^{s_2} + 1 \quad (11.49)$$

donde C y D son constantes y s_1, s_2 están definidas (para $q \neq 0$) por

$$s_1 = \frac{1 + \alpha - \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 4\beta}}{2} \quad (11.50a)$$

$$s_2 = \frac{1 + \alpha + \sqrt{(1 + \alpha)^2 - 4\beta}}{2} \quad (11.50b)$$

Obsérvese que $M(x) \geq 1 \quad \forall x$, de manera tal que dentro de este contexto los flujos son superalfvénicos; en concordancia tomaremos como superficie de referencia la superficie estelar (pues la de Alfvén ha quedado dentro de la estrella) y, de acuerdo a (11.26), será $x_0 = R_*$ y, luego, $K = 1$.

En la figura 2 hemos graficado las variables s_1 y s_2 en función del parámetro q , incluyendo el caso marginal $q = 2$.

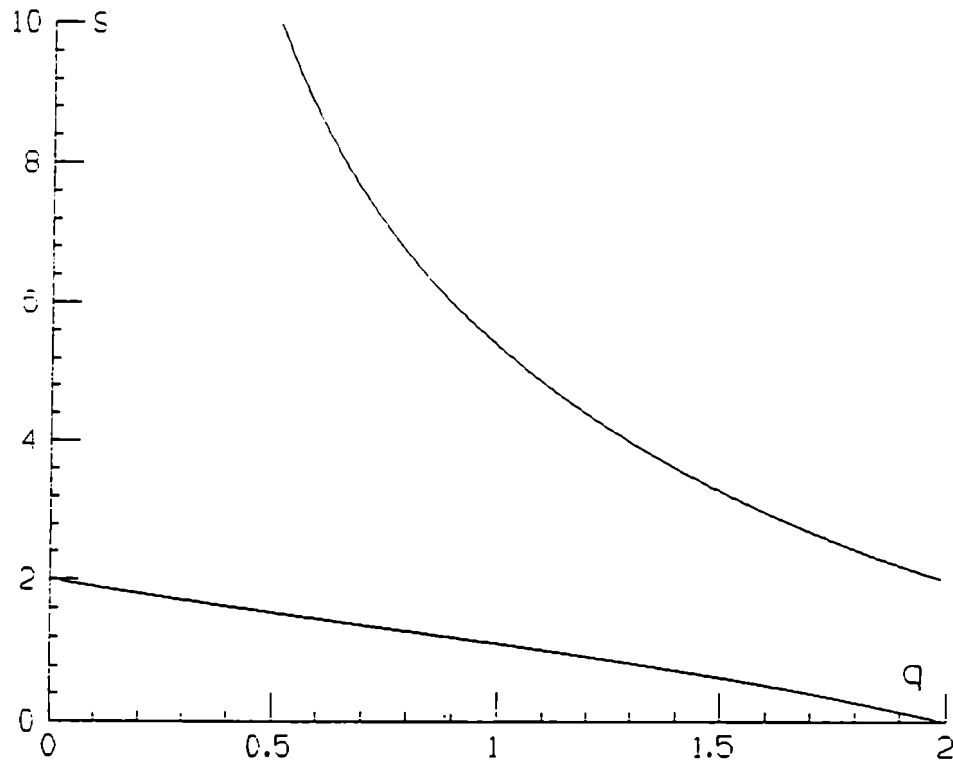


Figura 2: exponentes s_1 (curva inferior) y s_2 (curva superior) en función de q . Obsérvese que, salvo en los puntos extremos, resulta $s_1 + q > 2$.

Teniendo en cuenta las ecuaciones (II.43)-(II.46) y la solución (II.49) escribamos ahora explícitamente la ecuación (II.5) para la función $Q(x, \theta) = Q(x, \theta) R_{\star} V_0^{-1} (\frac{\mu_0}{\psi^2})$; fácilmente se llega a

$$\begin{aligned} Q(x, \theta) &= Q_1(x) \cos \theta + Q_2(x) \sin^2 \theta \cos \theta = \\ &= \frac{1}{M_0} [3Mx^{q-2} \Pi'_1 + 5M' \Pi_1 x^{q-2}] \cos \theta + \\ &+ \frac{1}{M_0} [3Mx^{q-2} \Pi'_2 - 3qMx^{q-3} \Pi_2 + 5M' \Pi_2 x^{q-2}] \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (II.51)$$

Integremos formalmente la ecuación (II.41) para obtener la forma funcional de la presión $\Pi_1(x)$. Con $M(x)$ dada por (II.49) aquella resulta ser

$$\Pi_1(x) = C \frac{\delta - 4q - 4s_1}{s_1 + 2q - 4} x^{s_1+2q-4} + D \frac{\delta - 4q - 4s_2}{s_2 + 2q - 4} x^{s_2+2q-4} - \frac{2}{x^{4-2q}} - Z^2 I_1 \quad (II.52)$$

donde hemos definido

$$I_1 = \int \frac{dx}{M(x)x^2} \quad (II.53)$$

Notemos ahora que en el polo la presión está determinada sólo por la función $\Pi_1(x)$. De la figura 2 podemos ver que $s_2 + 2q > 4$ y que $2 - q - s_2 < 0$ para todos los posibles pares $(q; s_2)$. Luego, si la constante D es positiva, resulta que más allá de un punto límite, digamos x_l , la presión Π_1 es negativa - una situación, por cierto, físicamente inaceptable.

Si, por otro lado, la constante D fuera negativa, en el polo la función $Q(x)$ sería negativa y de módulo creciente: pero una tal situación representa un enfriamiento del flujo de plasma, de manera tal que la fuerza gravitatoria llegaría a ser mayor que el gradiente de presión polar, desaceleraría el viento y en algún punto, digamos x_c , su velocidad sería nula. En esta situación no habría suficiente energía en la base para escapar a la atracción gravitatoria y sería imposible que el viento se desarrolle. Luego, la única situación favorable es aquella para la cual es $D = 0$.

Analícemos brevemente qué significa esta condición. De la expresión (II.35) obtenemos formalmente una relación entre el valor de la derivada del número de Mach-Alfvén y la presión $\Pi_2(x)$; derivando entonces (II.49) e igualando a (II.35) para el caso $W(x) = x^q$ obtenemos finalmente:

$$M_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{q}{s_1} - \frac{1}{s_1}\right) = 1 + \frac{1}{s_1} \left(\frac{\Pi_{2_0}}{q} + q - 1 - \frac{2}{q}\right) \quad (II.53)$$

o, equivalentemente

$$\Pi_{2_0} = \left\{ \mu_0 \rho_0 \frac{v_{r_0}^2}{B_{r_0}^2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{q}{s_1} - \frac{1}{s_1}\right) \right\} q s_1 + 2 + q - q^2 \quad (II.54)$$

donde hemos convenido en subindicar con un 0 los valores de las variables en la base del viento ($x = 1$).

La expresión (II.54) muestra la relación que debe existir entre una parte de la presión total y los parámetros iniciales del viento para que éste pueda desarrollarse. Esta restricción en los valores iniciales tiene su origen en la condición de congelamiento del plasma al campo magnético: cuando las líneas de campo son curvadas la presión $\Pi_2(x)$ no sólo tiene que compensar la componente polar de la fuerza de Lorentz sino que además debe suministrar la necesaria aceleración hacia el polo de manera tal que los elementos de fluido permanezcan sobre una determinada línea. Para una dada configuración inicial, esto es, un conjunto de valores iniciales y una determinada curvatura, si Π_{20} es menor que el valor requerido por la dinámica del sistema, la componente radial de la velocidad será forzada a adoptar un valor menor de manera tal que el elemento de fluido continúe sobre la línea, pero en este caso la energía en la base del viento será insuficiente para vencer la barrera de potencial gravitatorio.

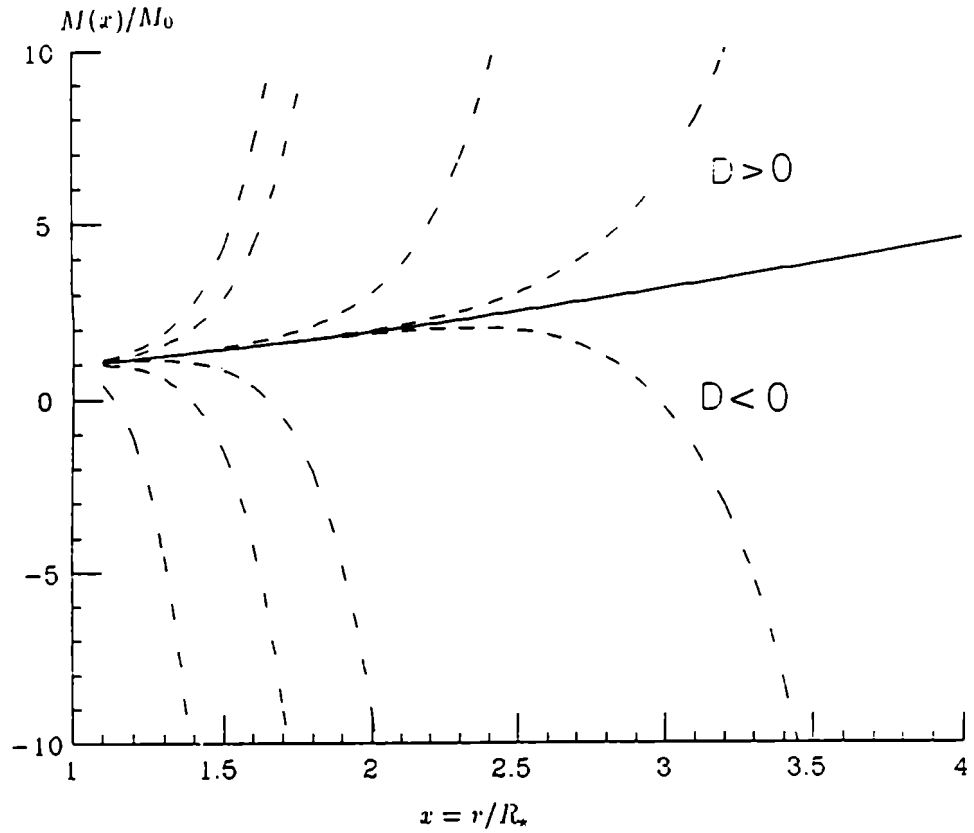
Por otro lado, si Π_{20} es mayor que el valor permitido, una aceleración radial extra ha de surgir para sustentar el flujo sobre una línea; pero esta situación lleva a la necesidad de enfriamientos infinitamente elevados (o presiones negativas) de manera que el viento no alcance velocidades arbitrariamente grandes.

En la figura 3 hemos graficado las soluciones de viento (esto es, con $D = 0$) de $M(x)$ para tres valores distintos del parámetro q , a saber, $q \approx 0.55$; 1.12 y 1.62 respectivamente, junto a las soluciones tipo brisa ($D < 0$, debajo de la línea llena) y las soluciones tipo explosivo ($D > 0$, por encima de la línea llena). Los valores del parámetro q fueron seleccionados porque, por un lado, cubren ampliamente el rango de valores permitidos y, por el otro, permiten la integración analítica de la expresión (II.41) (Véase el gráfico 2: en estos casos los valores de s_1 son racionales).

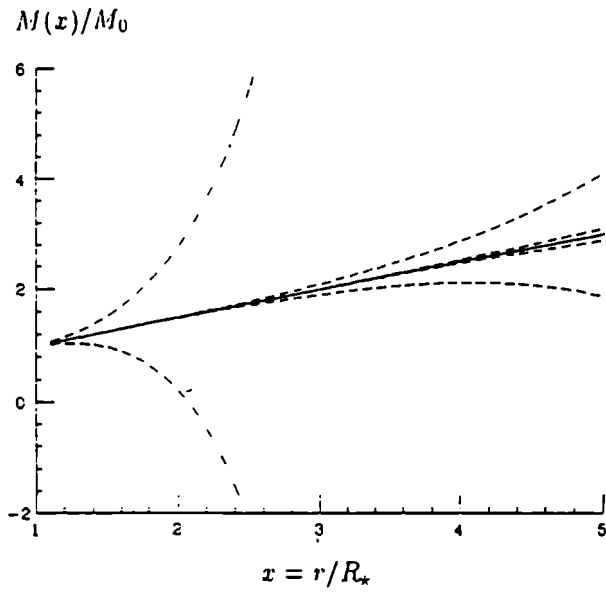
En la figura 4 se muestra la marcha de la velocidad poloidal para diferentes líneas de campo; recordemos que una línea queda definida por la región del plano meridional donde el flujo magnético es constante o, en otras palabras, donde se verifica

$$W(x) \sin^2 \theta = \omega \qquad 0 < \omega < 1, \quad x \geq 1$$

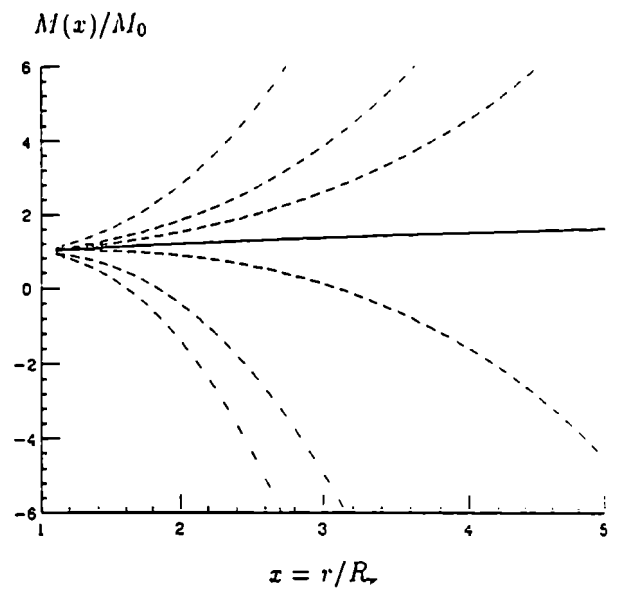
Se ha graficado para $\omega = 0; 0.1; 0.8$ y los tres valores de q arriba mencionados, manteniendo en cada caso fijo el valor de la intensidad de campo magnético ($B_{r_0}^2 = \frac{1}{8} \rho_0 v_{r_0}^2$)



(a)



(b)



(c)

Figura 3: soluciones de tipo viento (línea continua) de la función $M(x)$ para (a) $q = 0.55$; (b) $q = 1.12$ y (c) $q = 1.62$; en (a) se han marcado explícitamente las regiones $D > 0$ (solución "explosiva") y $D < 0$ (brisa).

Obsérvese que los perfiles son cualitativamente diferentes según nos movemos de línea. Esto es debido a la adición de las presiones; en efecto, en el polo ($\omega = 0$) la única presión que actúa es $\Pi_1(x)$ en tanto hacia el ecuador la presión total aumenta por efecto de $\Pi_2(x)$. Si analizamos la expresión (11.35) para $\Pi_2(x)$ concluiremos en que ésta es siempre positiva y decrece más lentamente cuanto más curvado es el campo magnético, es decir, cuanto mayor es el valor de q . Por este motivo el gradiente de presiones es mayor hacia el ecuador, resultando en una más efectiva aceleración del flujo contra la componente poloidal del campo gravitatorio. Notemos además que, para un dado ω , el perfil de velocidad poloidal depende de la curvatura del campo magnético; este efecto es particularmente visible en las líneas $\omega = 0.1$.

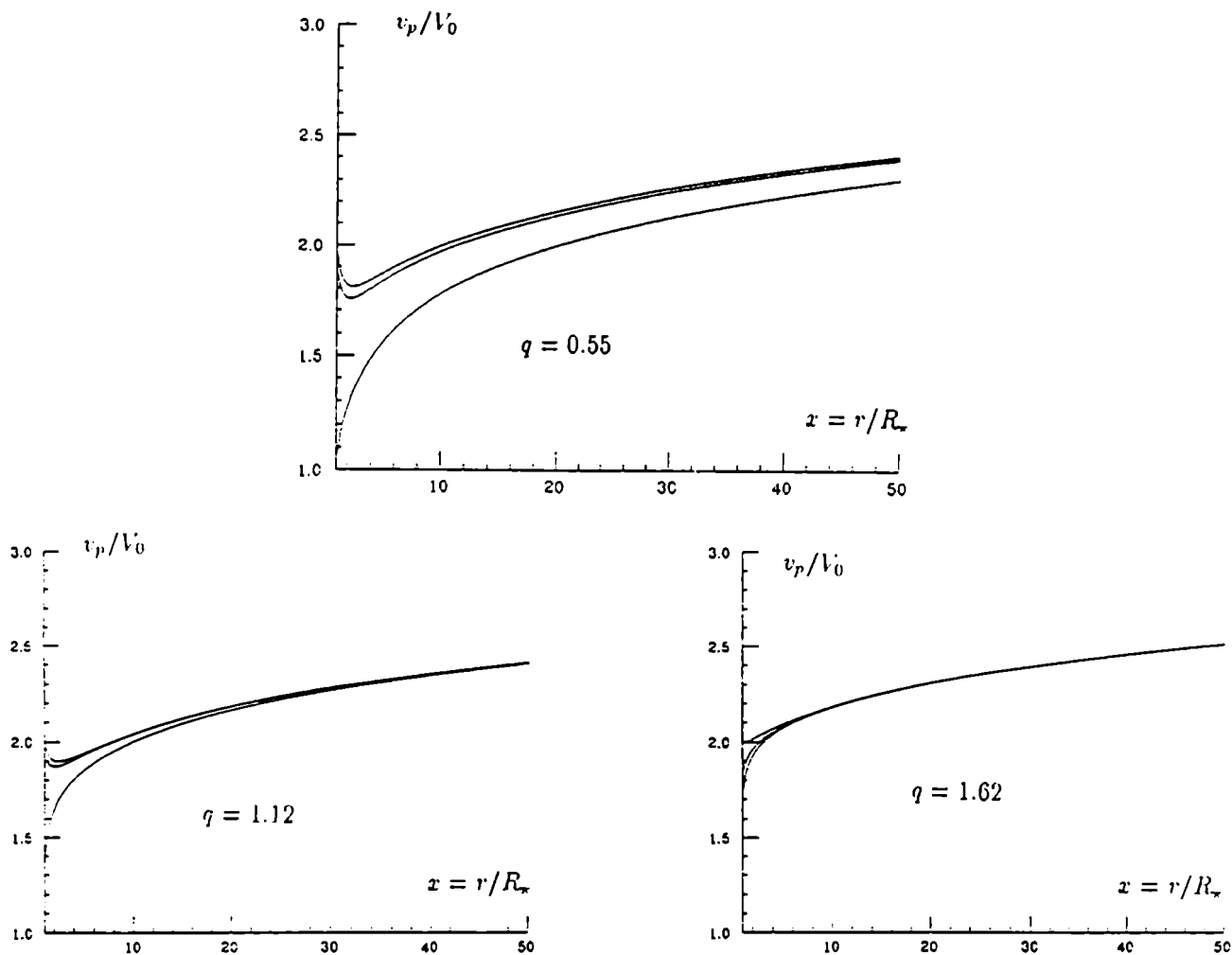


Figura 4: *marcha de la velocidad poloidal sobre distintas líneas de campo, $\omega = 0$ (curva superior); 0.1 (curva intermedia) y 0.8 (curva inferior) para diferentes valores del parámetro de curvatura. $q = 0.55; 1.12; 1.62$. En este último caso la curva intermedia corresponde a $\omega = 0.5$. Obsérvese que la velocidad poloidal, a diferencia del caso puramente radial, tiende a un mismo valor independientemente de la línea que se considere.*

La contribución neta a la aceleración debida a la componente radial de la fuerza de Lorentz , para $W(x) = x^q$, resulta ser

$$F_{Lr} = \left(\frac{\Psi^2}{\mu_0 R_*}\right)q(2 + q - q^2)x^{2q-5} \sin^2 \theta \quad (11.55)$$

Para una dada intensidad de campo, esta componente tiene un máximo alrededor del valor $q \approx 1.21$, se anula para $q = 0$ y $q = 2$ y la fuerza magnética radial es menor para $q = 1.62$ que para $q = 1.15$; a su vez, es fácil ver que la componente polar de la fuerza de Lorentz tiene un máximo en $q = 1/2$ y también se anula para el valor extremo $q = 2$. Obviamente, sobre las isosuperficies de flujo la fuerza magnética es nula. Por otro lado, la expresión (11.55) indica que para un valor fijo de q la componente radial de la fuerza de Lorentz decrece para valores decrecientes de $\Psi = B_{r0}/2$; dado que para los valores permitidos de q ($0 < q < 2$) esta fuerza es positiva, la disminución de B_{r0} conduce a un crecimiento más rápido de la función de Mach-Alfvén pero a un decremento de la aceleración efectiva. Esta situación se ve con mayor claridad en la figura 5, donde hemos graficado $M(x)$ en función de la variable radial para diferentes valores de B_{r0} y q fijo, conjuntamente con la velocidad radial (en el polo).

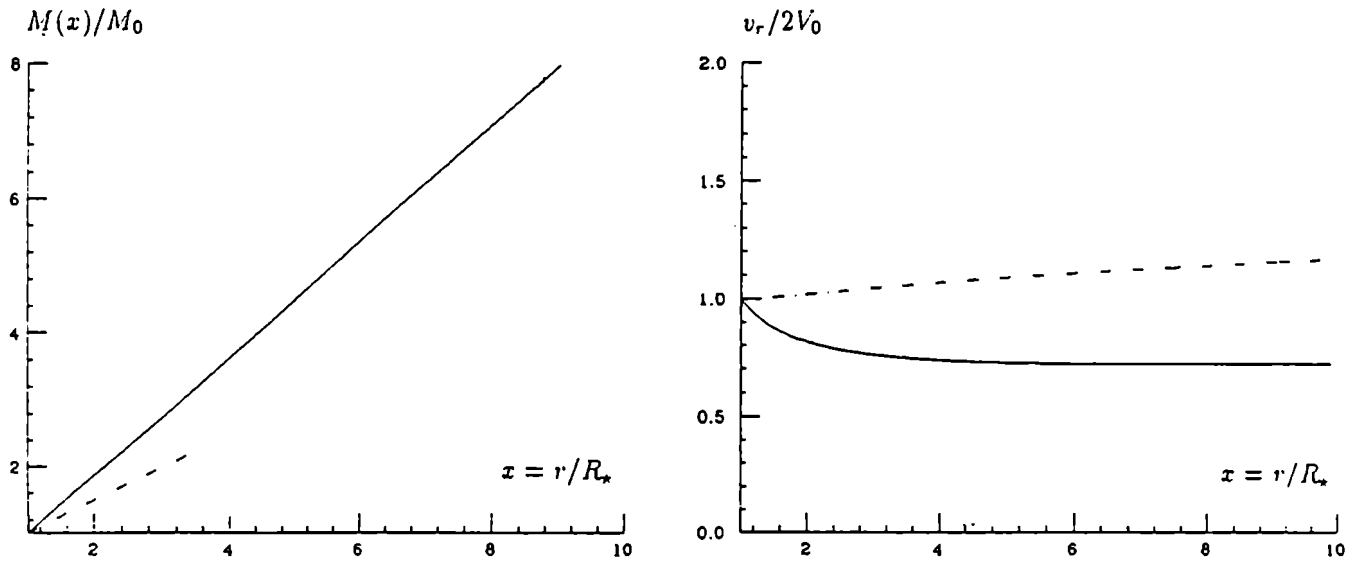


Figura 5: $M(x)$ y velocidad radial en el polo en función del valor inicial del campo magnético. La línea llena corresponde a un valor B_{r0} y en la curva de trazo discontinuo este valor se ha duplicado.

Calculemos ahora la presión $\Pi_1(x)$ para los valores de q que antes hemos mencionado. Luego de una sencilla integración estándar y calculando el valor de la constante de integración de manera tal que la presión caiga a cero en el infinito. obtenemos

$$i) q = 0.55. \quad s_1 = 1.5$$

$$\begin{aligned} \Pi_1(x) = & \frac{2C}{7x^{1.4}} - \frac{2}{x^{2.8}} + Z^2 \left[\frac{1}{x} + \frac{C^{2/3}}{3} \ln \left(\frac{(x^{1/2} + C^{-1/3})^2}{x - x^{1/2}C^{-1/3} + C^{-2/3}} \right) \right] + \\ & + \frac{2C^{2/3}}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2x^{1/2} - C^{-1/3}}{C^{-1/3}\sqrt{3}} \Big] + \Pi_0 \end{aligned} \quad (II.56)$$

$$\Pi_0 = -Z^2 \frac{C^{2/3}\pi}{\sqrt{3}}$$

$$ii) q = 1.12. \quad s_1 = 1$$

$$\Pi_1(x) = \frac{0.86C}{x^{0.7}} - \frac{2}{x^{1.7}} + Z^2 \left[\frac{1}{x} - C \ln \left(\frac{Cx + 1}{x} \right) \right] + \Pi_0 \quad (II.57)$$

$$\Pi_0 = Z^2 C \ln C$$

$$iii) q = 1.62. \quad s_1 = 0.5$$

$$\Pi_1(x) = \frac{1.85C}{x^{1/4}} - \frac{2}{x^{3/4}} - Z^2 \left[\frac{2Cx^{1/2} - 1}{2x} + 2C^2 \ln \left(\frac{x^{1/2}}{Cx^{1/2} + 1} \right) \right] + \Pi_0 \quad (II.58)$$

$$\Pi_0 = -2Z^2 C^2 \ln C$$

En la figura 6 hemos graficado la presión $\Pi_1(x)$ dada por las expresiones (II.56)-(II.58) variando los valores iniciales de los diferentes parámetros del viento.

Pasemos a analizar el comportamiento de la función $Q(x, \theta)$. Para ello retornemos a la expresión (II.51) utilizando la solución de $M(x)$ dada por (II.49). Concentremos nuestra atención, por el momento, en la región polar del viento analizando la expresión de $Q_1(x)$: por simple remplazo obtenemos

$$\begin{aligned} Q_1(x) = & \frac{1}{M_0} \left\{ C^2 (2 - q - s_1) \left(12 + \frac{20s_1}{s_1 + q - 4} \right) x^{2s_1 + 3q - 7} + \right. \\ & + C \left[12(4 - 2q - \frac{11s_1}{6}) x^{2s_1 + 3q - 7} - Z^2 \left(\frac{3}{M_0} x^{s_1 + q - 4} + 5s_1 I_{10} x^{s_1 + q - 3} \right) \right] + \\ & \left. + 12(2 - q) x^{3q - 7} - \frac{3Z^2}{M_0 x^{q - 4}} \right\} \end{aligned} \quad (II.59)$$

Si calculamos su valor en la fotosfera, esto es, en $x = 1$, reordenando términos obtenemos

$$Q_1(x = 1) > 0 \implies C^2(2 - q - s_1)\left(12 + \frac{20s_1}{s_1 + q - 4}\right) + 12C\left(4 - 2q - \frac{11s_1}{6}\right) + 12(2 - q) > Z^2(3 + 5Cs_1I_{10}) \quad (II.60)$$

Vemos entonces que, dado un cierto conjunto de parámetros iniciales, existe una relación límite entre la velocidad radial y la velocidad de escape de manera tal que la cantidad de calor entregada al viento sea positiva, negativa o nula. Sin embargo, la dinámica del flujo sugiere que en la base es necesaria una fuente de calentamiento que suministre la energía necesaria para sustentar la aceleración del viento (véase la discusión sobre el comportamiento de la presión del plasma renglones abajo): por este motivo habremos de trabajar sólo dentro del rango de parámetros estelares que permitan este comportamiento. En general, en las regiones cercanas al ecuador, el valor de $Q(x, \theta)$ se hace ligeramente negativo debido, fundamentalmente, a que la presión $\Pi_2(x)$ es siempre positiva y a los valores de M_0 que son comparativamente altos: dentro de este marco teórico, es este enfriamiento el que autoconsistentemente permite que el flujo se expanda. Sin embargo, debido a la simetría esférica de la densidad y la dependencia angular que tiene la velocidad, el flujo es máximo en el polo y es en esta región donde el evento de eyección de masa es más importante.

Paralelamente, tanto el comportamiento de la presión $\Pi_1(x)$ cuanto de su derivada dependen de la relación entre v_e y v_{r0} : en efecto, en la fotosfera se verifican las igualdades (véanse las expresiones (II.41) y (II.52))

$$\Pi_1(x = 1) = 4C \frac{2 - q - s_1}{s_1 + 2q - 4} - 2 - Z^2 I_1 \quad (II.61)$$

$$\Pi'_1(x = 1) = -4Cs_1 + 4(2 - q)(C + 1) - \frac{Z^2}{M_0} \quad (II.62)$$

Obsérvese que en tanto debemos garantizar que la presión polar sea positiva, el signo de su derivada cerca de la estrella está relacionado con el comportamiento de la temperatura. En general, en los objetos que estamos estudiando ésta presenta un máximo cerca de la fotosfera y luego decrece. Este perfil de temperatura está íntimamente relacionado con la existencia de una cromósfera, y los modelos lo reproducen sólo para valores positivos de $Q(x, \theta)$: en la figura 6 hemos graficado la presión $\Pi_1(x)$ y la energía $Q_{pol}(x)$ para diferentes valores de los parámetros del viento, pero siempre asegurando un calentamiento del flujo en esta región. Nótese también que el valor de $\Pi_1(x = 1)$ crece a medida que se incrementa la curvatura del

campo: cuanto mayor es el valor de q más fuertemente están las líneas deflectadas hacia el polo, aumenta la densidad de campo magnético y es más estrecha la sección eficaz del canal de flujo; en estas condiciones disminuye la eficiencia en la aceleración del viento y mayores presiones son necesarias, para un dado valor de M_0 , de manera que se alcance la velocidad terminal.

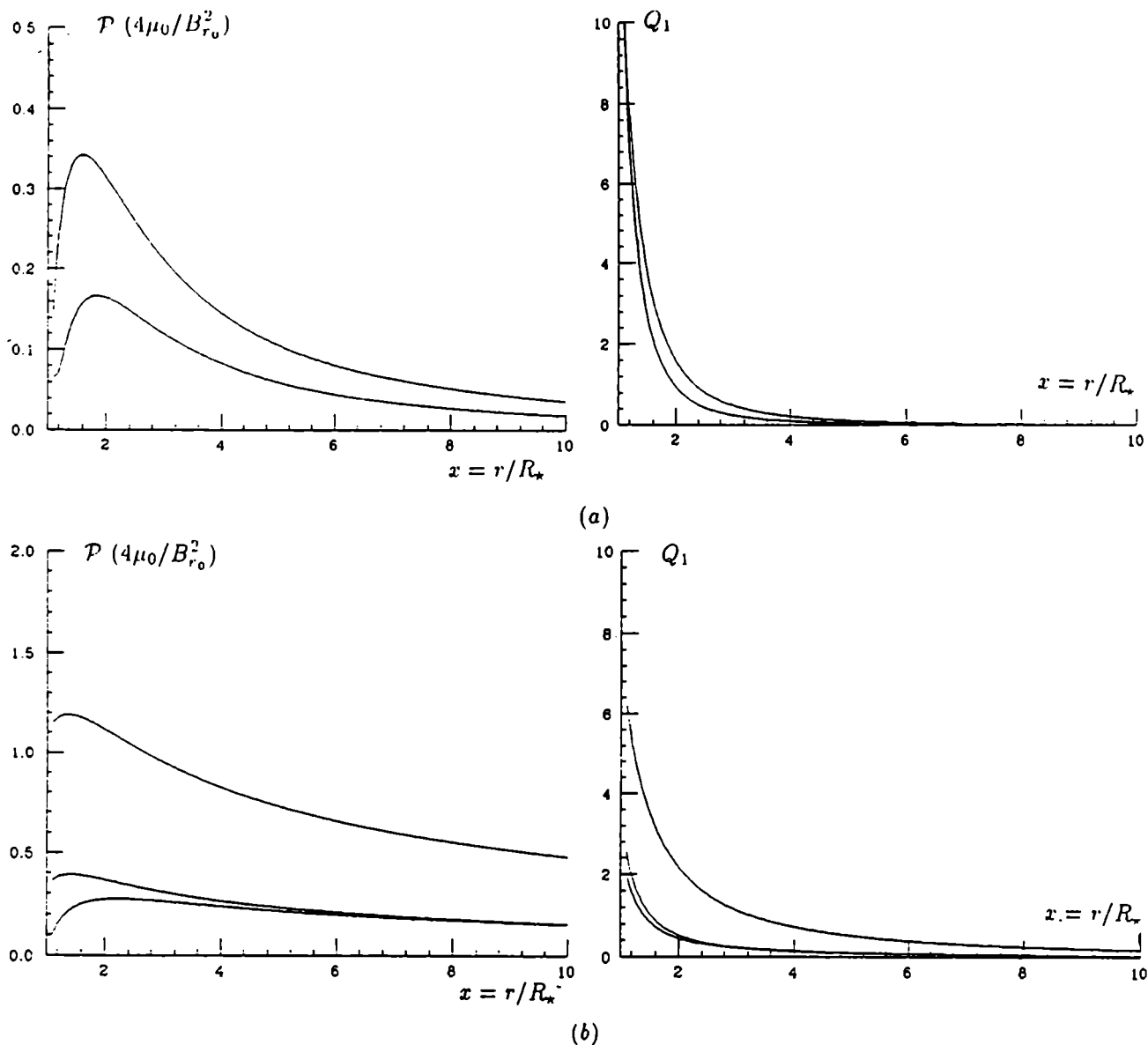


Figura 6: perfiles de presión y calor intercambiado para $q = 0.55$ (gráfico a) y $q = 1.12$ (gráfico b). En (a) se ha tomado $Z^2 = 8.9$ para $M_0 = 4$ (curva superior) y $M_0 = 2$. En (b) la curva superior corresponde a $Z^2 = 3.8$, $M_0 = 4$; en la curva intermedia se ha tomado $Z^2 = 3.8$ y $M_0 = 2$; la curva inferior corresponde a $Z^2 = 4.8$ y $M_0 = 2$. Los perfiles para $q = 1.62$ no se incluyen pues son cualitativamente similares. Obsérvese que para campos magnéticos del orden 10-20 Gauss, la presión inicial resulta del orden de 1 din cm^{-2}

La figura 7 muestra la marcha de la temperatura polar, $T_{polar}(x) = \frac{m v_c^2}{\mu_0 k_B} \frac{\Pi_1(x)}{\rho(x)}$.

Podemos ver que una vez que alcanza un valor máximo comienza a decrecer: muy lejos de la fotosfera (del orden de algunas centenas de radios estelares) su valor vuelve a incrementarse. En rigor, debemos mencionar que dentro del rango de valores asignados a los parámetros estelares (típicos de estrellas B), el valor de temperatura en la base es del orden de 50 veces el esperado para una estrella con esos parámetros; como veremos más adelante, esto se debe a los valores superalfvénicos del flujo inicial, que en este caso se relacionan directamente con la simetría esférica de la densidad másica y, fundamentalmente dentro de este contexto, a la ausencia de rotación. Si analizamos el comportamiento asintótico de la temperatura vemos que diverge como $x^{2(s_1+q)-4}$ (recuérdese que $s_1 + q > 2$, excepto en los extremos de la curva de la figura 2). Este comportamiento está estrechamente relacionado con el del índice politrópico efectivo γ , dado por la relación

$$d \ln T = (\gamma - 1) d \ln \rho \quad (11.63)$$

Para una densidad monótona decreciente, $\gamma > 1$ representa un enfriamiento y un calentamiento en caso contrario. En los casos que hemos analizado puede verse que $\gamma \rightarrow \frac{4-s_1-2q}{s_1}$, de forma tal que sólo para los valores extremos de q la atmósfera se torna isoterma lejos de la estrella. Más aún: lejos de la base también la velocidad radial comienza a crecer. En estas regiones el gradiente de presiones es mayor que la fuerza gravitatoria y el flujo es reacelerado: paralelamente, no toda la energía interna es absorbida por la expansión y la temperatura aumenta.

Pasemos a estudiar entonces cómo se modifica este comportamiento cuando alguna simetría es modificada en las ecuaciones.

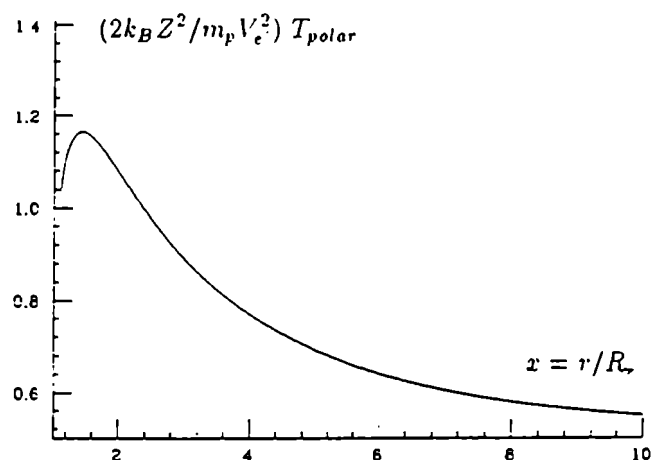


Figura 7: perfil de temperatura polar para $q = 0.55$. En ambos casos se ha tomado $M_0 = 2$; la curva de trazo continuo corresponde a $Z^2 = 9$ y la de rayas a $Z^2 = 19$. El comportamiento para diferentes valores de q es cualitativamente similar, pero el máximo relativo se desplaza hacia afuera con el incremento de este parámetro. La temperatura en este modelo comienza a crecer nuevamente aproximadamente a los $500 R_*$

II.b) El caso $l = 0, j \neq 0$

El problema de un flujo en presencia de un campo puramente radial y densidad dependiente de la colatitud ha sido ampliamente estudiado por Hu y Low (1989). Nos proponemos ahora comparar los resultados obtenidos en ese trabajo con los que surgen de suponer que el plasma está embebido en un campo magnético que defleca más rápidamente hacia el polo. Como veremos más adelante, las soluciones obtenidas con la hipótesis de densidad másica asimétrica son de capital importancia, pues representan adecuadamente el comportamiento asintótico del viento en los casos en que, además, se incluye velocidad de rotación.

Las ecuaciones (II.36) y (II.37), con $j \neq 0$ en la expresión de la función de flujo másico (ecuación (II.31.b)), se transforman en

$$\partial_x \Pi_1(x) = -\frac{4K^2}{x^{4-2q}} M' - \frac{2(2q-4)K^2}{x^{5-2q}} M - \frac{Z^2}{Mx^2} \quad (II.64)$$

$$qM'' - \frac{\alpha(q)}{x} M' + \frac{\beta(q)}{x^2} M = \frac{\beta(q)}{x^2} - \frac{Z^2}{K^2 M x^{q-1}} jK \quad (II.65)$$

donde $\alpha(q)$ y $\beta(q)$ están definidas en las expresiones (II.47) y (II.48) respectivamente.

Al mismo tiempo, la expresión de la velocidad radial será

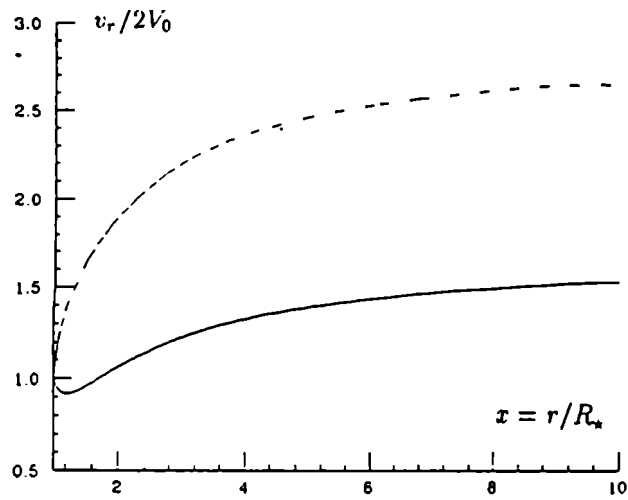
$$v_r(x, \theta) = \frac{2V_0}{M_0} \frac{M}{x^{2-q}} \frac{|\cos \theta|}{(1 + jK \sin^2 \theta)^{1/2}} \quad (II.66)$$

$$V_0 = \frac{M_0 \Psi K}{\mu_0 \lambda}$$

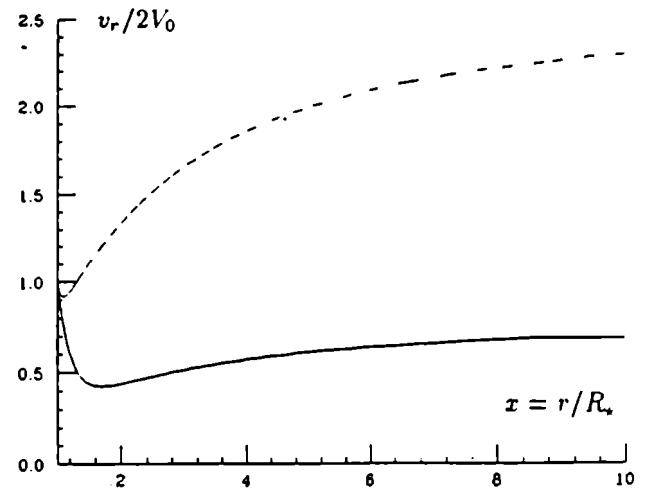
Adoptemos $W(x) = K x^q$ y discutamos brevemente el caso $q = 0$, esto es, $W(x) = \text{constante}$. Para ello observemos la figura 8, en la cual reproducimos las funciones $M(x)$ y $v_r(x, \theta = 0)$ para distintos valores del parámetro $\xi = \frac{Z^2}{4K} j$. Puede verse que para ciertos valores de ξ el perfil de velocidades presenta un mínimo. En rigor, este valor mínimo se da en el interior de la estrella si se verifica (Hu y Low, 1989)

$$jK M_0 \left(\frac{v_e}{v_{r0}} \right)^2 > 4 \quad (II.67)$$

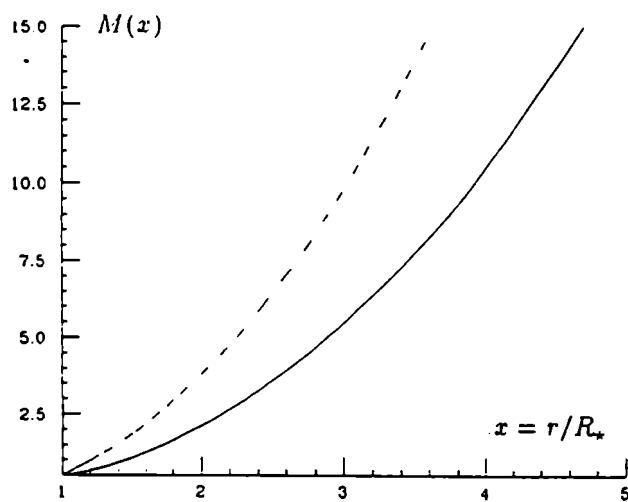
donde v_e , como antes, es la velocidad de escape de la estrella. Si se cumple (II.67) la velocidad es monótona creciente, fenómeno éste relacionado con el hecho de que el gradiente de presión es mayor que la fuerza gravitatoria en toda la región $x > 1$ (Hu y Low, 1989).



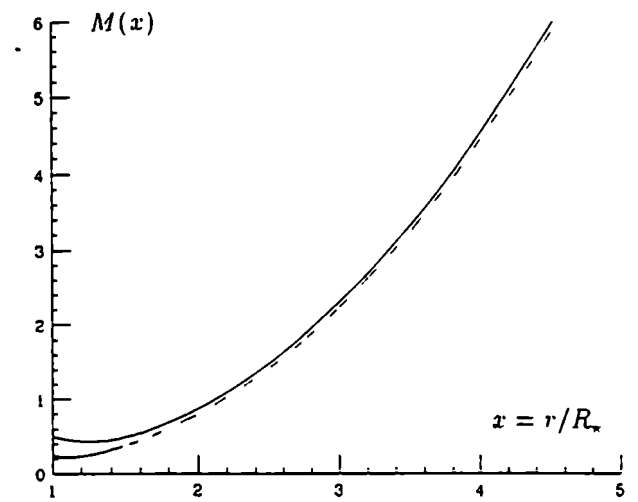
(a)



(b)



(c)



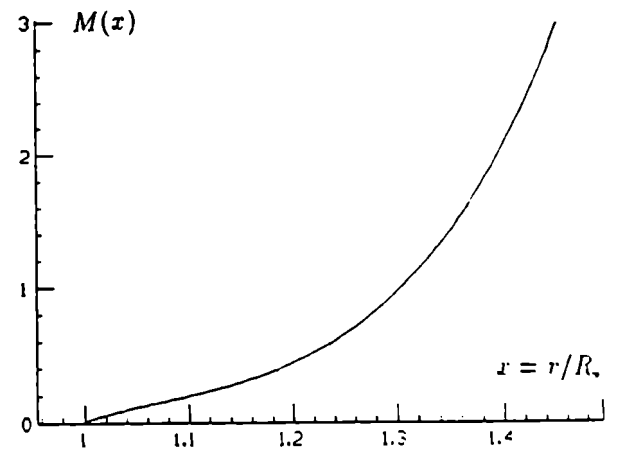
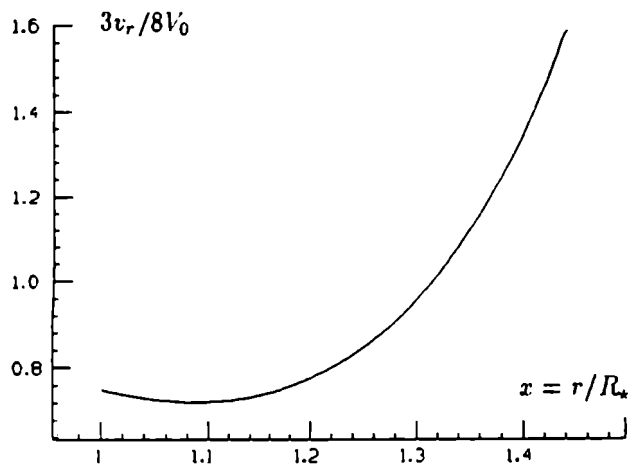
(d)

Figura 8: velocidad polar y función de Mach-Alfvén para diferentes configuraciones. En a) y c) se ha tomado $M_0 = 0.5$, la línea llena corresponde a $\xi = 0.75$ y la de trazos a $\xi = 1.75$. En b) y d) vale $\xi = 0.25$, pero la línea continua representa el caso $M_0 = 0.5$ y la de trazos $M_0 = 0.15$.

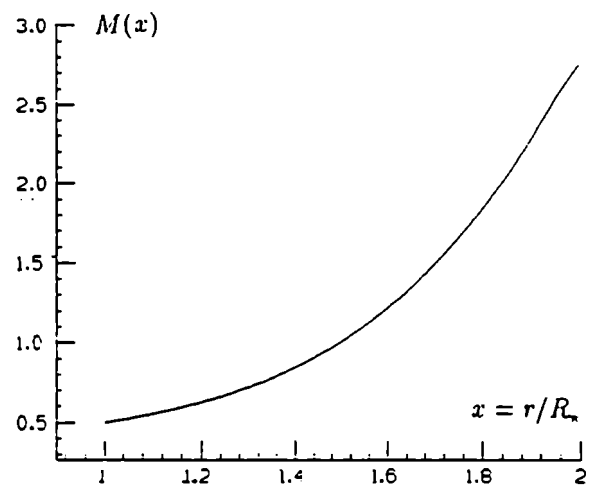
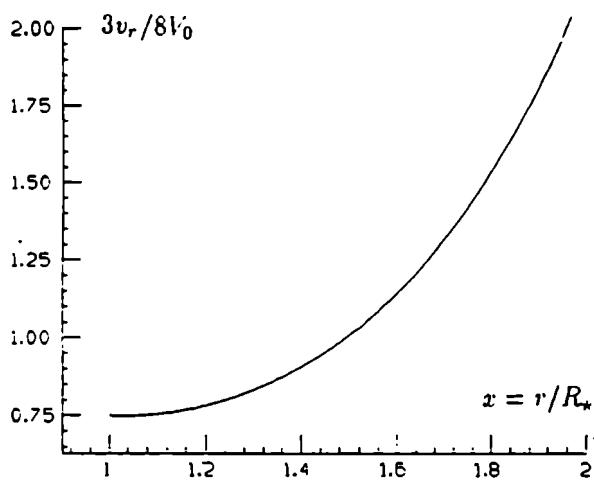
Pero si comparamos el gráfico 8b con la figura 5 notamos que la marcha de velocidad es cualitativamente similar: en ambos casos el flujo es reacelerado en algún punto más allá de la fotosfera debido, esencialmente, a que la presión decrece más lentamente que la aceleración gravitatoria y en algún punto $x_c > 1$ gobierna el balance de fuerzas. En la configuración que estamos analizando la energía cinética en la base tiene la misma distribución que en el caso en que la densidad no depende de la colatitud, de manera tal que para sustentar columnas de plasma cada vez más densas hacia el ecuador (si $j > 0$) es necesario incrementar la presión: si se mantiene el mismo valor de campo magnético, la única parte de la presión que puede aumentarse es $\Pi_1(x)$, induciéndose de esta forma un crecimiento de la energía interna del gas (vía la temperatura) que conlleva a un aumento neto de la aceleración.

Fijemos el valor $K > 1$ (situamos el punto de Mach-Alfvén fuera de la estrella): cuanto menor sea M_0 mayor ha de ser la presión necesaria para que el flujo pase por este punto precisamente con la velocidad de Alfvén. En virtud de lo expuesto líneas arriba la aceleración aumenta y en consecuencia se incrementa el valor de la velocidad terminal del viento (véase la figura 8). Podría pensarse que este mecanismo es capaz de llevar el flujo saliente a velocidades arbitrariamente grandes, pero recordemos que un aumento de presión conduce a uno de temperatura, de manera tal que para acelerar flujos que abandonan la superficie estelar con un valor inicial $M_0 \ll 1$ se requerirían temperaturas que no pueden alcanzarse ni siquiera en el centro de la estrella.

Cuando el campo magnético se curva siguiendo la ley $W(x) = K x^q$, con $q > 0$, la asimetría en la densidad lleva también a un aumento de la energía interna del plasma permitiendo una aceleración más eficaz: el punto de Mach-Alfvén puede entonces desplazarse desde el interior de la estrella hacia la región del viento (en términos de la expresión (11.26) y el campo magnético que proponemos esto significa que puede ser $K > 1$, a diferencia del caso $j = 0$ en que debe ser $K < 1$). En la figura 9 mostramos el perfil de velocidad y la marcha de $M(x)$ en las cercanías de la fotosfera para diferentes valores de los parámetros, pero manteniendo $K = 1.5$, valor éste que sitúa el punto de Mach-Alfvén en $x_A = 1.31$ y $x_A = 1.5$ para $q = 0.5$ y $q = 1$ respectivamente.



(a)



(b)

Figura 9: velocidad polar y función de Mach-Alfvén para a) $q = 1/2$ y b) $q = 1$. En ambos casos se han adoptado los valores $K = 1.5$ y $Z^2 j/K = 2.88$. Obsérvese el comportamiento de la velocidad al incrementarse la curvatura.

Como en el caso $j = 0$, existe una única solución del tipo viento, es decir, existe una única relación entre la presión $\Pi_2(x)$ y la función $M(x)$ en la base para la cual la solución ni es una brisa ni deviene explosiva. Cuando hay simetría en la densidad este vínculo se obtiene en forma inmediata pues es posible integrar analíticamente las ecuaciones. Como ya mencionamos, con $j = 0$ la (II.42) es en definitiva una ecuación para la variable $M(x) - 1$; dado que esta variable es definida positiva en todo punto $x \geq 1$ (caso contrario una solución tipo viento es imposible) el flujo inicial debe ser superalfvénico.

Cuando el factor de asimetría jK es no nulo la ecuación a resolver es no lineal y ya no es posible hallar una solución analítica: en cambio, sigue siendo factible determinar el punto de Mach-Alfvén fijando el valor de K (a partir de la expresión (II.26) es fácil ver que resulta $K = x_A^{2-q}$), pues en este caso este punto no es singular y no constituye un autovalor del problema y, por otro lado, no está relacionado con el valor inicial de ninguna variable; de esta manera se transforma en un parámetro libre y es posible hallar, como antes, la solución tipo viento de $M(x)$ conociendo sus valores en dos puntos (este resultado adelanta la conclusión de que el viento, dentro de este contexto, no es gobernado por el campo magnético; éste contribuye fijando los tubos de flujo por los que el viento se desarrolla y modifica sólo indirectamente la dinámica de la atmósfera).

Obsérvese que el perfil de velocidad puede mostrar un valor mínimo como en el caso $q = 0$: si mantenemos fijos los restantes parámetros estelares, el mínimo desaparece incrementando el valor de la curvatura, pues en este caso aumenta la densidad de campo magnético y el mayor gradiente de presión que es necesario en la base para acelerar el flujo gobierna luego el balance de fuerzas a lo largo de toda la atmósfera. Físicamente, el origen del mínimo es similar al caso $q = 0$ pero, como discutiremos más adelante, a partir de este extremo la evolución del viento es cualitativamente diferente.

Como en el caso $q = 0$ el valor de la presión $\Pi_1(x)$ en la base se incrementa en tanto más subalfvénico es el flujo inicial; pero autoconsistentemente lo hace también la presión $\Pi_2(x)$, pues de otra manera un elemento de fluido no podría permanecer sobre una línea de campo. Definida positiva como las dos presiones sobre toda la atmósfera cercana a la superficie estelar, la función $Q(x, \theta)$ también es inversamente proporcional a M_0 : hemos estudiado numéricamente su comportamiento y hallamos que, a diferencia del caso $j = 0$, la función $Q_2(x)$ es ahora siempre positiva. Este hecho produce un cambio cualitativo en el comportamiento de la fuente de calor, que debe acompañar las variaciones angulares del flujo de momento poloidal.

En el caso de densidad esférica el flujo es máximo en el polo al igual que la función $Q(x, \theta)$ (pues $Q_2(x) < 0 \forall x$). Cuando la distribución de masa deviene asimétrica el flujo desplaza su máximo a algún punto intermedio entre el polo y el ecuador dado por

$$(1 + jK \sin^2 \theta)(q^2 - 4) + jK(4 \cos^2 \theta + q^2 \sin^2 \theta)^{3/2} = 0 \quad (II.68a)$$

En particular, para $q \rightarrow 0$ el extremo se localiza alrededor del ángulo

$$\theta_M = \frac{1}{2} \arccos \frac{1}{jK} \quad (II.68b)$$

Obviamente, para $jK < 1$ el extremo está localizado en el polo.

Pero observamos de la definición de $Q(x, \theta)$ que esta función alcanza su valor máximo sobre la superficie estelar para un ángulo dado por

$$\theta_M = \frac{1}{2} \arccos \frac{2Q_1 - Q_2}{3Q_2} \quad (II.69)$$

Para $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$ dados por (II.51) podemos encontrar numéricamente sus valores sobre la superficie de la estrella: el resultado obtenido en los casos analizados es que, como era de esperar, el máximo flujo se da alrededor del ángulo para el cual es máxima la cantidad de calor entregada al viento: por ejemplo, para $q = 1/2$ esto ocurre en $\theta_M \sim \frac{\pi}{5}$.

Analicemos ahora el comportamiento del viento lejos de la estrella. El número de Mach-Alfvén debe ir a infinito en tanto lo hace la coordenada x , pues de otra forma la densidad polar sería divergente. Supongamos, sin perder generalidad, que $M(x)$ crece como x^n , con $n > 0$. La ecuación (II.65), con $W(x) = K x^q$, puede escribirse formalmente en forma absolutamente general como

$$f(x^{n+2q-5}) + g(x^{2q-5}) = h(x^{q-2-n}) \quad (II.70)$$

Para $x \gg 1$ los términos dominantes son los que varían como x^{n+2q-5} y x^{q-2-n} ; notemos que una solución sólo puede darse si se verifica

$$n + 2q - 5 \geq q - 2 - n \equiv n \geq \frac{3-q}{2} \quad (II.71)$$

Cuando la desigualdad es estricta debe ser $n = s_1$ (s_1 dada por la expresión (II.50)) pues esto significa que el término que contiene la asimetría decrece más rápidamente que los restantes. Pero si son comparables la única solución se da para $n = \frac{3-q}{2}$.

Observemos que existe un valor de q para el cual es $s_1 = \frac{3-q}{2}$ o, equivalentemente, $2(s_1 + q) = 3 + q$. De la figura 2 puede verse que, excepto en los extremos, $s_1 + q > 2$ y

para valores intermedios de q es $s_1 + q \sim 2.1$; luego, $q \approx 1.2$ representa el valor de curvatura para el cual la función $M(x)$ ya no crece como en el caso $j = 0$ sino que ahora lo hace como $x^{\frac{3-q}{2}}$. A modo de ilustración analicemos los casos extremos.

Para $q = 0$ $M(x)$ debe crecer como x^2 ; de la figura 8 puede verse que para $x \gg 1$ todas las curvas son parábolas (por ejemplo, para $\xi = 2.5$ y $M_0 = 0.01$ es $M(x) = 1.75x^2 - 0.28x - 1.31$). Para $q = 2$ debemos resolver la ecuación

$$M'' - \frac{M'}{x} + \frac{\xi}{Mx} = 0 \quad (11.72)$$

Por simple inspección puede verse que una solución está dada por

$$M(x) = E x^{1/2} \quad E = \sqrt{\frac{2\xi}{3K}} \quad (11.73)$$

como esperábamos a partir de la discusión previa.

Si calculamos ahora la energía cinética en el polo, utilizando para v_r la expresión dada por (11.66), vemos que crece como $x^{\frac{3q-5}{2}}$: evidentemente, para $q > 5/3$ resulta una energía divergente (a diferencia del caso $j = 0$ en el cual, si bien la velocidad diverge en forma logarítmica, la energía cinética tiende a cero al infinito). Con $M(x) = x^{\frac{3-q}{2}}$ las expresiones asintóticas de $\Pi_1(x)$, $\Pi_2(x)$ y $Q(x, \theta)$ son inmediatas a partir de sus definiciones: puede verse que las dos primeras divergen (en forma negativa y positiva respectivamente), en tanto la cantidad de calor crece infinitamente en forma negativa (como era de esperar, pues es la única manera de sustentar tal flujo). También puede verse fácilmente que para $q = 5/3$ $\Pi_1(x) \rightarrow -\infty$ en forma logarítmica para $x \rightarrow \infty$.

La razón de este comportamiento divergente podemos encontrarla en el aumento que se produce en la presión inicial por el hecho de romper la simetría en la distribución de masa, sumada al efecto de angostamiento del canal de flujo: el viento es acelerado constantemente sin compensación de la fuerza gravitatoria ni de un enfriamiento adicional.

Estos resultados, en síntesis, sugieren que dentro de este marco teórico los campos magnéticos deben tener un límite superior de curvatura ($q < 5/3$): más allá de este valor las velocidades y energías en juego se tornan rápidamente divergentes.

Sin embargo, dos aspectos merecen especial énfasis: por un lado debemos tener en cuenta que si las líneas no deflecan propiamente hacia el polo el problema del calentamiento inicial puede llegar a ser crucial. En particular, para la misma asimetría másica que trabajamos y una función $W(x) = \frac{d}{x} + a$, con d y a constantes arbitrarias, es necesario colocar un

sumidero $Q < 0$ en la superficie estelar para que el viento se desarrolle (Hu y Low, 1989). Este sumidero podría estar asociado a mecanismos de enfriamiento radiativo que, dada la extensión (en términos del radio estelar) de la región de enfriamiento, serían fotosféricos; por lo demás, rápidamente la función $Q(r, \theta)$ se transforma en positiva. Sólo en estas condiciones un enfriamiento inicial sería plausible, pero no podría ser aceptado si la región de enfriamiento se extendiera flujo abajo en la región del viento.

Por otro lado, analicemos el número de Reynolds $Re = UL/\nu$, donde U , L , ν se refieren a valores de velocidad, longitud y viscosidad turbulenta características. Claramente, si la velocidad crece sin límite en algún momento el flujo deja de ser laminar (si por mucho lo es cuando abandona la estrella). Es de esperar, entonces, que los movimientos turbulentos se tornen importantes en algún lugar, modificando de esta forma el transporte de momento, e inhiban el crecimiento arbitrario de la energía.

Por este motivo es interesante incluir en las ecuaciones algún tipo de fuerza disipativa que nos permita, al menos, la posibilidad de comparar el balance de energía respecto de los casos no disipativos. Esto es lo que formalmente realizaremos en la próxima subsección.

II.c) Vientos con fuerzas de frenado

En las subsecciones anteriores hemos visto que lejos de la estrella la velocidad comienza a ser una función creciente de la posición: en parte, esto se debe a que nuestras ecuaciones permiten que el momento radial se transporte libremente a lo largo de las líneas. Sin embargo, como ya hemos mencionado, el flujo ha de tornarse turbulento en estas condiciones.

Como es bien sabido, los movimientos turbulentos pueden contribuir significativamente al transporte de momento, masa y calor a lo largo del flujo, influyendo en forma determinante en la distribución de velocidad y temperatura. Desafortunadamente, la inclusión formal de turbulencia en las ecuaciones MHD llevan el problema a un estadio tan complejo que no existe hasta el presente un modelo que pueda dar cuenta de todos los rasgos importantes de los flujos turbulentos (véase, por ejemplo, Canuto 1992 y las referencias que se mencionan en ese trabajo). De todas formas, cierta comprensión del problema puede lograrse si se incorporan a las ecuaciones fuerzas disipativas que nos permitan discutir las nuevas distribuciones de las variables dinámicas y termodinámicas a lo largo del viento.

Introduzcamos, entonces, una densidad de fuerza que disminuya la cantidad de movimiento radial, en el tiempo en que un elemento de fluido es desviado de modo de permanecer sobre una línea, en la forma:

$$\mathcal{F}_k = \nu \rho v_r v_k \frac{\mathcal{L}^{n-1}}{r^n} \hat{e}_k \quad (II.74)$$

donde ν es una constante negativa y \mathcal{L} representa una distancia típica de disipación. Variando el índice n podemos buscar diferentes soluciones de la función $M(x)$, y una vez que hallemos v_r y v_θ podremos analizar el tipo de fuerza que da origen a esas soluciones.

Investiguemos el caso $n = 1$. En ausencia de rotación y la función flujo magnético dada por $A(x, \theta) = K x^q \sin^2 \theta$, las componentes de la fuerza se transforman en

$$\mathcal{F}_r(x, \theta) = \nu \left(\frac{\mu_0 \Lambda^2}{M_0^2 R_*} \right) (2V_0)^2 \frac{M}{x^{5-2q}} \cos^2 \theta (\hat{e}_r) \equiv f_0 \frac{M}{x^{5-2q}} \cos^2 \theta \hat{e}_r \quad (II.75)$$

$$\mathcal{F}_\theta = -\frac{1}{2} f_0 q \frac{M}{x^{5-2q}} \sin \theta \cos \theta (\hat{e}_\theta) \quad (II.76)$$

$$f_0 < 0$$

Una vez incluídas en las expresiones (II.36) y (II.37), éstas se escriben como

$$\partial_x \Pi_1(x) = -\frac{4W^2}{x^4} M' - M \left[2\partial_x \left(\frac{W^2}{x^4} \right) - \frac{4\nu W^2}{x^4} \right] - \frac{Z^2}{Mx^2} \quad (II.77)$$

$$qM'' - [\alpha(q) + q\nu] \frac{M'}{x} + [\beta(q) + \nu(4 - \Gamma_1)] \frac{M}{x^2} = \frac{\beta(q)}{x^2} \quad (II.78)$$

donde $\alpha(q)$ y $\beta(q)$ están determinadas por las expresiones (II.47) y (II.48), respectivamente: hemos definido

$$\Gamma_n(q) = 2q^2 - (3 + n)q \quad (II.79)$$

y las variables primadas indican que han sido derivadas respecto de la variable x . Es evidente que para $\nu = 0$ se recupera el formalismo de la subsección IIa.

La integración de (II.78) es inmediata y obtenemos

$$M(x) = Cx^{s_1} + Dx^{s_2} + m \quad (II.80)$$

donde m es una constante de integración y ahora s_1 y s_2 están dadas por

$$s_1 = \frac{q(1 + \alpha_1 + \nu) - \sqrt{q^2(1 + \alpha_1 + \nu)^2 - 4q(q\beta_1 + \nu(4 - \Gamma_1))}}{2q} \quad (II.81a)$$

$$s_2 = \frac{q(1 + \alpha_1 + \nu) + \sqrt{q^2(1 + \alpha_1 + \nu)^2 - 4q(q\beta_1 + \nu(4 - \Gamma_1))}}{2q} \quad (II.81b)$$

Teniendo en cuenta estas soluciones reescribamos las expresiones de las otras variables de interés en el problema. Para densidad esféricamente simétrica, esto es, $\Lambda = \lambda = \text{constante}$, serán, en forma general

$$v_r = \frac{2V_0}{M_0} \frac{M(x)}{x^{2-q}} |\cos \theta| \hat{e}_r \quad (II.82)$$

$$v_\theta = -q \frac{V_0}{M_0} \frac{M(x)}{x^{2-q}} \sin \theta \hat{e}_\theta \quad (II.83)$$

donde hemos definido como antes

$$V_0 = \frac{M_0 K \Psi}{\mu_0 \lambda}$$

Dado que el flujo en este formalismo es superalfvénico, habremos de tomar $K = 1$.

Por otro lado, la tasa de energía absorbida por el medio adopta la forma

$$\begin{aligned} Q_T(x, \theta) \equiv Q_\nu(x, \theta) + Q_0(x, \theta) &= Q_\nu(x, \theta) + \frac{1}{M_0} x^{q-2} [3M(x)\Pi'_1(x) + 5M'(x)\Pi_1(x)] \cos \theta + \\ &+ \frac{1}{M_0} x^{q-2} [3M(x)(\Pi'_2(x) - q \frac{\Pi_2(x)}{x}) + 5M'(x)\Pi_2(x)] \sin^2 \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (II.84)$$

En la expresión (II.84) hemos introducido las cantidades $Q_0(x, \theta)$ y $Q_\nu(x, \theta)$: la primera indica la energía entregada por la estrella, en tanto la segunda da cuenta de la cantidad de calor entregada al medio ambiente por la fuerza disipativa.

Antes de continuar, notemos que, de acuerdo a las expresiones (II.77) y (II.80), $\Pi'_1(x)$ es proporcional a x^{s_2+2q-5} : un análisis completo de la curva $\{q; s(q, \nu)\}$ muestra que $s_2 + 2q - 5 > 0$ para todos los valores admisibles de q y ν . Luego, como en los casos discutidos en §§IIa-b, las únicas soluciones físicas compatibles con un viento son aquellas con $D = 0$, pues de no ser este el caso la derivada radial de la presión (y luego la presión misma) sería divergente en el polo: si la divergencia es positiva estamos frente al caso de vientos "explosivos" (una solución físicamente inaceptable), en tanto que la divergencia negativa carece de interés práctico pues se trata de situaciones en las que la energía inicial disponible no es suficiente para desarrollar el viento y $M(x)$ (y por lo tanto la velocidad) se anula en algún punto $x_c < \infty$.

Con $D = 0$ escribamos explícitamente la función $M(x)$:

$$M(x) = C x^{s_1} + h \quad (II.85)$$

donde definimos

$$h = \frac{q\beta}{q\beta + \nu(4 - \Gamma_1)} \quad (II.86)$$

Para la solución tipo viento las componentes de la presión serán

$$\Pi_1(x) = C \frac{8 - 4q + 4\nu - 4s_1}{s_1 + 2q - 4} x^{s_1+2q-4} - \frac{(8 - 4q + 4\nu)}{(2q - 4)x^{4-2q}} - Z^2 I_1 \quad (II.87)$$

$$\Pi_2(x) = x^{2q-4} \left[qC s_1 x^{s_1} + (C x^{s_1} + h) \left(-\frac{q^2}{2} + 2 - \nu q \right) \right] \quad (II.88)$$

donde Z^2 e I_1 tienen el mismo significado que en las secciones anteriores.

En la figura 10 hemos graficado la curva $\{\nu, s_1\}$ para distintos valores del parámetro q . Observemos que, en principio, la constante ν puede tomar el valor $\nu_0 = -q\beta/(4 - \Gamma_1)$ provocando la divergencia del parámetro h y $s_1 = 0$. Esta situación corresponde a un viento que en ningún momento llega a desarrollarse pues requiere valores iniciales infinitos de velocidad para lograr vencer la barrera de potencial gravitatorio y la fuerza de frenado. Por debajo de ν_0 los valores de s_1 son siempre negativos, pero esta configuración corresponde a soluciones tipo brisa pues h es también negativo y por ende existe un punto $x_c < \infty$ para el cual $M(x) = 0$. En síntesis, los únicos valores posibles de ν son aquellos que hacen $s_1 > 0$.

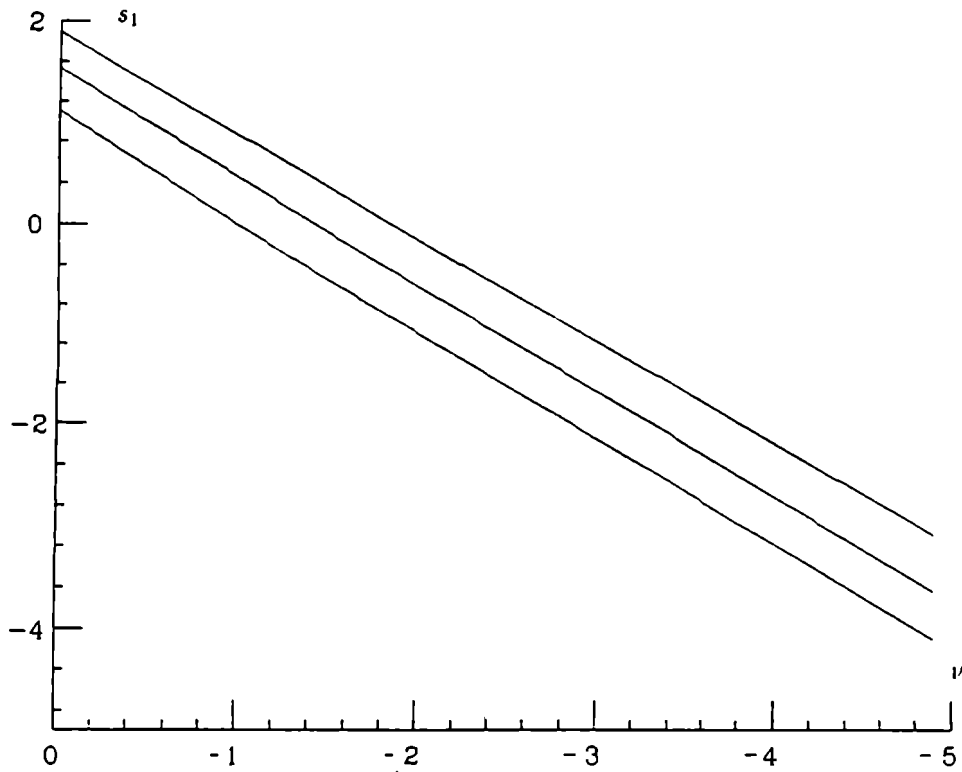


Figura 10: soluciones s_1 en función de ν para $q = 0.1$ (curva superior), $q = 0.5$ (curva intermedia) y $q = 1$ (curva inferior). Sobre cada curva puede hallarse el valor límite ν_0 que hace negativo al exponente de las soluciones.

En la figura 10 se ve que existe un valor ν_1 para el cual resulta $s_1 = 2 - q$; asimismo, de las expresiones (II.82) y (II.83) puede verse que las velocidades radial y polar son de la forma

$$v \sim \frac{Cx^{s_1} + h}{x^{2-q}} \quad (II.89)$$

para $\nu = \nu_1$ es inmediato que las velocidades decrecen asintóticamente a un valor constante (de orden $V_0 C/M_0$) cuando $x \rightarrow \infty$. En general, es casi evidente que para $\nu_0 < \nu < \nu_1$ el valor terminal de la velocidad del viento es cero.

Pasemos a analizar ahora el comportamiento de la presión $P(x, \theta)$ y la temperatura $T(x, \theta)$. La función más sencilla de determinar es $\Pi_2(x)$, pues reordenando la expresión (II.88) se obtiene

$$\Pi_2(x) = Cx^{2q+s_1-4} \left[qs_1 + \frac{q^2}{2} - (1 + \nu)q \right] + hx^{2q-4} \left[2 - \frac{q^2}{2} - \nu q \right] \quad (II.90)$$

De la ecuación (II.77) vemos que la presión $\Pi_1(x)$ presenta derivada inicial positiva toda vez que se verifique:

$$4M_0^2(2 - q + \nu) - Cs_1M_0 - Z^2 > 0 \quad (II.91)$$

Por lo demás, $\Pi_1(x)$ debe ir a cero en tanto $x \rightarrow \infty$ y en general su expresión final debe ser hallada numéricamente. Por supuesto, las excepciones las constituyen los casos en los cuales s_1 es racional. La forma funcional de $\Pi_1(x)$ queda entonces determinada por

$$\Pi_1(x) = 4C \left(\frac{2-q-s_1+\nu}{s_1+2q-4} \right) x^{s_1+2q-4} - 4h \frac{2-q+\nu}{2q-4} x^{2q-4} - Z^2 I_1 + \Pi_0 \quad (II.92)$$

donde I_1 está definida por la expresión (II.53) y Π_0 es una constante aditiva que permite satisfacer la condición de contorno en el infinito.

Analicemos la temperatura polar: su expresión general está dada por

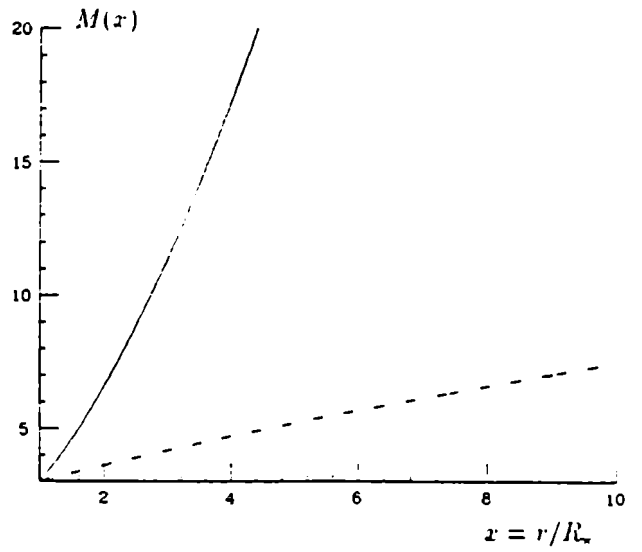
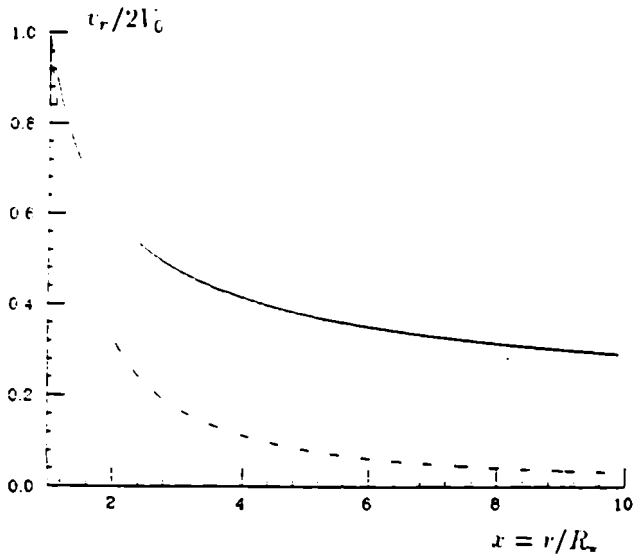
$$T_p(x) = \frac{T_0}{M_0} \left\{ C \frac{8-4q+4\nu-4s_1}{s_1+2q-4} (C x^{2s_1+2q-4} + h x^{s_1+2q-4}) - \frac{(8-4q+4\nu)}{(2q-4)} (C x^{2q+s_1-4} + h x^{2q-4}) - Z^2 I_1 (C x^{s_1} + h) \right\} \quad (II.93)$$

donde $T_0 = \frac{m\Psi^2}{k_B\mu_0}$, siendo m la masa molecular media del fluido y k_B la constante de Boltzmann. Si consideramos el caso $s_1 = 2 - q$ (o sea $\nu = \nu_1$) se ve que

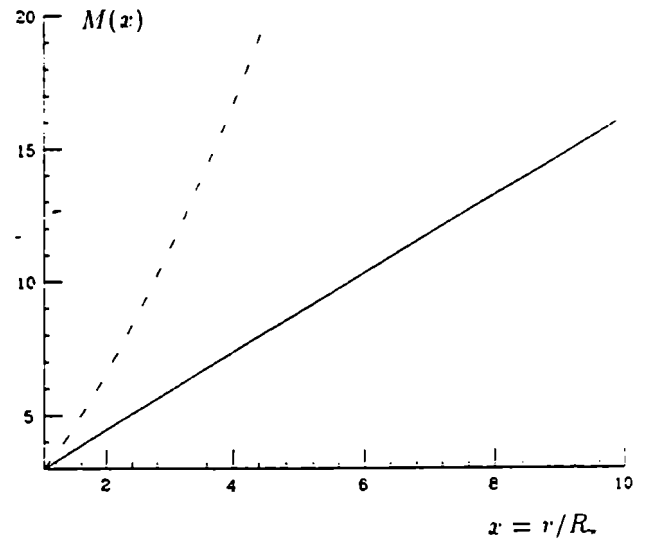
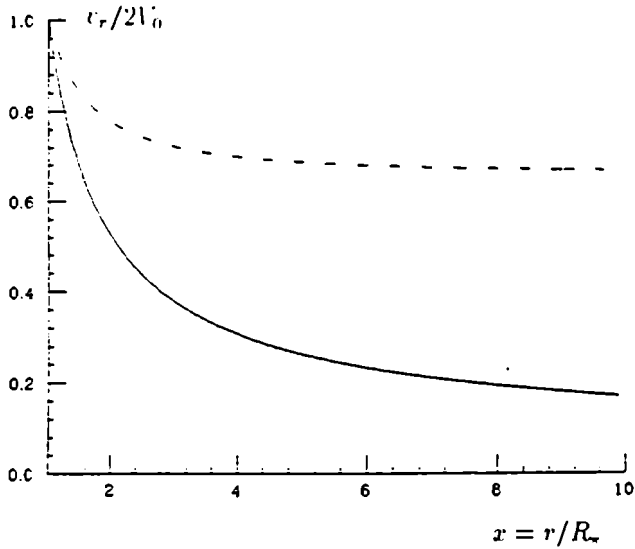
$$\lim_{x \rightarrow \infty} T_p = \frac{T_0}{M_0} \left\{ 4C^2 \frac{|\nu|}{s_1} - Z^2 \lim_{x \rightarrow \infty} [I_1(Cx^{s_1} + h)] \right\} \quad (II.94)$$

En cambio, para $\nu_0 < \nu < \nu_1$, $T(\infty) = 0$ pues el valor límite del último término en (II.93) es nulo (nótese que $I_1 M(x) \sim M(x) \int \frac{dx}{M(x)x^2} \sim \frac{1}{x} \rightarrow 0$ para $x \rightarrow \infty$). Como es fácil de verificar, $T(\infty)$ alcanza un valor no nulo cuando no se anula $v(\infty)$, esto es, para $\nu \geq \nu_1$. A su vez, esto sugiere que la expansión puede no ser eficiente para absorber enteramente la energía interna del plasma: para valores $\nu_1 < \nu < 0$ una parte queda en forma de energía cinética y otra parte permite la elevación de la temperatura; aunque en forma muy lenta, ambas variables crecen al infinito.

Este comportamiento era al menos esperable: si el valor del parámetro ν es suficientemente pequeño la fuerza agregada es insuficiente para desacelerar el flujo. En la figura 11 hemos graficado la función $M(x)$ y la velocidad polar $v_r(x,0)$ para diferentes valores de los parámetros q y ν , en tanto la figura 12 muestra la marcha de la presión $\Pi_1(x)$ y la temperatura polar con ella asociada.



(a)



(b)

Figura 11: velocidad radial en el polo y función de Mach-Alfvén para distintos valores de q y ν . En (a) se ha graficado para $q = 0.1$ y $M_0 = 3$; la curva llena corresponde $\nu = -0.25$ y la de trazo discontinuo a $\nu = -1$. En (b) se ha tomado $q = 0.5$ y el mismo valor de M_0 ; la curva continua representa el valor $\nu = -0.5$ y la de trazos corresponde a $\nu = -0.0395$, valor este que hace $s_1 = 2 - q$. En este último caso la velocidad radial tiende asintóticamente a $0.66v_{r_0}$.

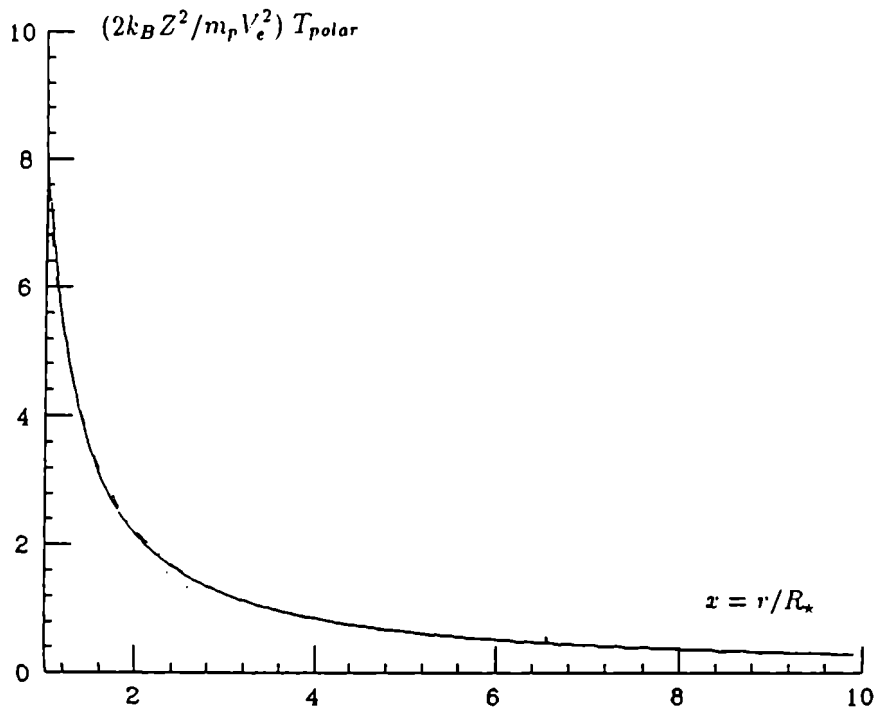
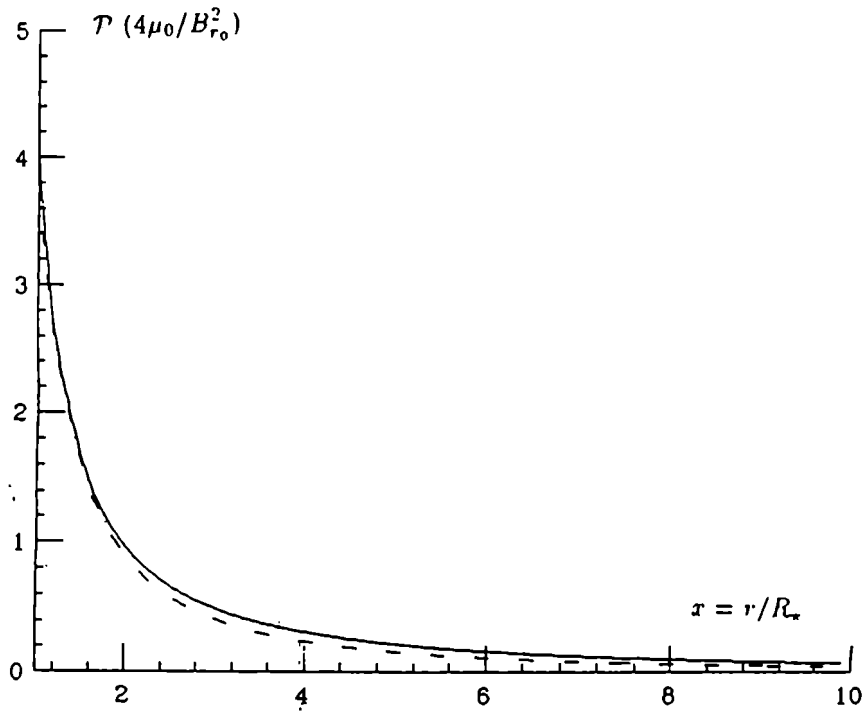


Figura 12: presión isotropa y temperatura polar para $q = 0.5, \nu = -0.5$ (línea discontinua) y $q = 0.1, \nu = -0.766$ (línea llena). En todas las curvas se adoptaron los valores $M_0 = 2$ y $Z^2 = 5$. Obsérvese que las diferencias entre curvas son mínimas (en particular las de temperatura son prácticamente indistinguibles) debido a que en ambos casos resulta $s_1 = 1$.

Regresemos ahora a la expresión (II.84) para estudiar la cantidad de calor intercambiada $Q_T(x, \theta)$. La energía $Q_0(x, \theta)$ tiene, como antes, origen en la estrella, en tanto $Q_\nu(x, \theta)$ proviene de la fuerza de frenamiento. Calculemos explícitamente esta última en el polo, esto es, con la contribución sólo de \mathcal{F}_r , esta componente de la fuerza de frenado evaluada a partir de la expresión (II.75) utilizando la solución tipo viento de $M(x)$ dada por (II.87).

$$Q_\nu(x, 0) = -\phi \int_1^x \mathcal{F}_r(\chi) d\chi (-\hat{e}_r) \cdot (\hat{e}_r) = \phi |f_0| \int_1^x d\chi (C\chi^{s_1+2q-5} + h\chi^{2q-5}) \quad (II.95)$$

donde $\phi = \mu_0 R_\star / \Psi^2$ (Ψ definida en II.26) es una constante definida positiva. Obsérvese que la función $Q(x, 0)$ diverge sólo en los casos en que $s_1 + 2q = 5$ o $2q = 4$, pero éstos no son de interés práctico; por simple integración directa de (II.95) obtenemos

$$Q_\nu(x, 0) = 4|\nu| \left[\frac{C}{4-2q-s_1} \left(1 - \frac{1}{x^{4-2q-s_1}}\right) + \frac{h}{4-2q} \left(1 - \frac{1}{x^{4-2q}}\right) \right] \quad (II.96)$$

de manera tal que debe cumplirse $s_1 + 2q < 4$ si la energía puesta en juego por la fuerza $\mathcal{F}(x, \theta)$ ha de estar acotada y ser positiva. Obsérvese que esta condición está garantizada en todas las situaciones de interés práctico.

La función $Q_0(x, 0)$ la obtenemos a partir de las expresiones (II.87), (II.90) y (II.92) y resulta ser

$$\begin{aligned} Q_0(x, 0) = & \frac{1}{M_0} \left\{ C^2 x^{2s_1+3q-7} \left[4(2-q-s_1+\nu)(3q + \frac{5s_1}{s_1+2q-4}) \right] + \right. \\ & + C x^{3q+s_1-7} \left[12h(4-2q-s_1+\nu) - 20hs_1 \left(\frac{2-q+\nu}{4-2q} \right) - Z^2 x^{4-2q} \left(\frac{3}{Mx} + 5s_1 I_1 \right) \right] + \\ & \left. + \left[12h^2(2-q+\nu)x^{3q-7} - \frac{3hZ^2}{M} x^{q-4} \right] \right\} \end{aligned} \quad (II.97)$$

En la figura 13 hemos graficado la tasa de energía intercambiada en el caso $q = 1/2$, $\nu = -1/2$, valores estos que implican $s_1 = 1$, en función de la distancia radial para distintos valores de los restantes parámetros. Debemos mencionar que el índice politrópico efectivo γ , definido a partir de (II.63) como

$$\gamma = -\frac{M'(x)\Pi_1(x)}{M(x)\Pi_1'(x)} \quad (II.98)$$

en los casos analizados tiende asintóticamente al valor $\gamma = 1$, es decir, lejos de la superficie estelar la atmósfera se torna isoterma. Este no es necesariamente el caso; recordemos que

para $\nu_1 < \nu < 0$ la función temperatura muestra un mínimo relativo en algún punto $1 < x_c < \infty$ para comenzar luego a incrementarse. Dado que la densidad es monótona decreciente, resulta que en estos casos γ tiende a un valor menor que la unidad.

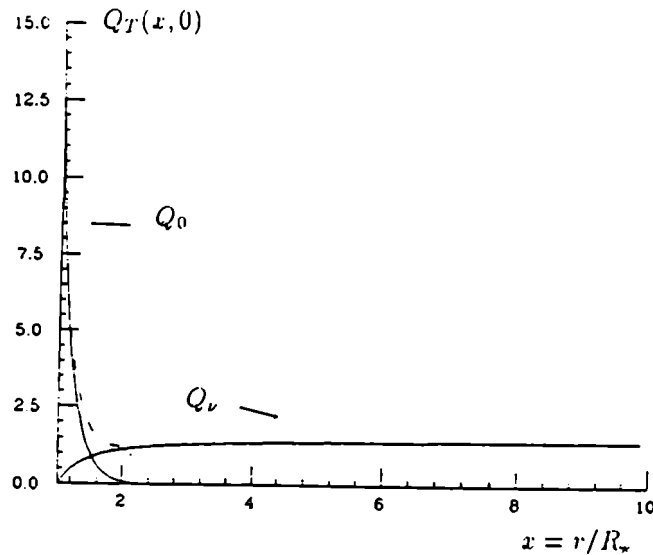


Figura 13: energía total intercambiada en función de la distancia. La curva de trazos es la suma $Q_T = Q_0 + Q_\nu$. Obsérvese que más allá de $2R_*$ todas las curvas se hacen prácticamente constantes.

Finalmente, analicemos la fuerza de frenado $\mathcal{F}(x, \theta)$. Ante todo regresemos sobre un punto interesante: la solución tipo viento se da para $D = 0$ (véase la expresión (II.80)) pues de otra manera, como ya hemos mencionado, sería divergente la función presión $\Pi_1(x)$. Esto se debe a que la solución multiplicada por D crece como x^{s_2+2q-5} , y para todos los valores físicamente aceptables de los parámetros q y ν el exponente es mayor que cero. La fuerza $\mathcal{F}(x, \theta)$ sería también divergente (véanse las expresiones (II.75) y (II.76)) pero no alcanzaría jamás a drenar la energía suficiente para evitar que el flujo aumente su velocidad indefinidamente.

Cabe preguntarse ahora qué tipo de fuerza es la que resulta de las soluciones. Aunque introducida en una forma un tanto heurística, la expresión de la fuerza $\mathcal{F}(x, \theta)$ dada por (II.74) recuerda el formalismo de la "mixing length" (cfr. por ejemplo, Cox y Giuli, 1968): específicamente, en esta teoría se trata de renormalizar la viscosidad cinemática, proponiendo

$\nu \rightarrow \nu + \nu_t$, donde ν_t se interpreta como una viscosidad turbulenta. El problema se reduce ahora a determinar ν_t .

En analogía con el tensor de esfuerzos viscosos, en esta teoría el tensor de Reynolds se escribe

$$\langle V_i V_j \rangle - \frac{2}{3} \delta_{ij} \langle \frac{1}{2} V_i V_i \rangle = -2\nu_t S_{ij} \quad (II.99)$$

donde se define

$$2S_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_j} U_i + \frac{\partial}{\partial x_i} U_j \quad (II.100)$$

$$v_i = U_i + V_i \quad (II.101)$$

siendo v_i la velocidad total, U_i el campo medio de velocidad y V_i la parte fluctuante del campo de velocidades.

Análogamente a como se hace con los flujos no turbulentos, dado que la viscosidad cinemática es el producto de una velocidad promedio y un camino libre medio, Prandtl (1925) sugirió la idea de escribir la viscosidad turbulenta como

$$\nu_t \sim V \ell \quad (II.102)$$

siendo en este caso V una velocidad cuadrática media de turbulencia y ℓ la distancia característica (mixing length) que un torbellino puede desplazarse antes de decaer. Más aún, la variación propuesta para V es de la forma

$$V = \ell S \quad (II.103)$$

de manera tal que

$$\nu_t = \ell^2 S \quad (II.104)$$

siendo S la cizalladura del campo de velocidades definida por

$$S^2 = 2S_{ij}S_{ij} \quad (II.105)$$

Las ecuaciones (II.99) a (II.105) constituyen la base de la teoría de la "mixing length", que se ha tornado popular no sólo por su relativa simplicidad sino porque además ha sido aplicada con éxito al cálculo de algunos tipos de flujos (Schlichting, 1969; Rodi, 1984) [cabe mencionar que, por extensión, en Astronomía suele postularse la existencia de velocidades de microturbulencia para explicar el exceso en el ancho equivalente de las líneas; normalmente, el perfil de una línea se ve ensanchado por diferentes mecanismos, entre los cuales el más

importante es el efecto Doppler estadístico. Cuando el ancho Doppler resultante es insuficiente para dar cuenta del perfil de la línea, se introduce una velocidad de microturbulencia (también estadística y de perfil gaussiano) pues se supone que en la región de formación de la especie en estudio podrían existir movimientos turbulentos de pequeña escala (cfr. por ejemplo, Jefferies, 1968)].

También está ampliamente generalizado el cálculo de coeficientes de viscosidad turbulenta multiplicando por una constante característica (típicamente un valor entre 100 y 1000) el coeficiente de viscosidad molecular (Canuto, 1992).

Por lo pronto, la fuerza $\mathcal{F}(x, \theta)$ decrece como $\frac{v_r T^m}{x^2}$, donde $1.5 < m < 3$, de manera tal que resulta plausible compararla con una fuerza de tipo viscoso (que, recordemos, son proporcionales a $\partial_x(T^{5/2}\partial_x v_r)$).

En este espíritu escribiremos entonces (basándonos en Braginskii, 1965)

$$\Phi(x) = \frac{V_0}{R_\star^2} \frac{\partial}{\partial x} \left(\eta \frac{\partial v_r}{\partial x} \right) \quad (11.106)$$

donde

$$\eta = c_1 T^{5/2}, \quad c_1 = \text{constante}$$

es el coeficiente de viscosidad molecular. Con esta definición de η la expresión (11.106) se reduce a

$$\Phi(x) = c_2 \frac{\partial}{\partial x} (T^{5/2} \frac{\partial v_r}{\partial x}) \quad (11.107)$$

$$c_2 = \frac{V_0}{R_\star^2} \frac{m^{1/2} k_B^{5/2}}{(2\pi)^{1/2} \epsilon^4 \ln \Lambda} \sim 3 \cdot 10^{-12} \quad (11.108)$$

donde c_2 está evaluada en unidades MKS. m es la masa del protón, k_B la constante de Boltzmann, ϵ representa la carga electrónica y $\ln \Lambda$ es el logaritmo de Coulomb. Para el cálculo de c_2 hemos adoptado valores característicos de estrellas B de secuencia principal, esto es, $V_0 \sim 10 \text{ km/seg}$ y $R_\star \sim 7 R_\odot$ (Underhill y Doazan, 1982).

En la figura 14 hemos graficado $\frac{\mathcal{F}_r}{\mathcal{F}_r(1)}$ conjuntamente con $\frac{\Phi(x)}{\Phi(1)}$ para un conjunto dado de parámetros típicos del viento. Obsérvese que el comportamiento de las dos fuerzas es similar, particularmente a partir de $x = 2$. Por otro lado, si evaluamos $\mathcal{F}(x = 1)$ y $\Phi(x = 1)$ para los valores típicos de densidad y velocidad superficiales que estamos trabajando, encontramos que su cociente resulta ser

$$\mathcal{F}(x = 1)/\Phi(x = 1) \sim 300$$

En otras palabras, la fuerza que hemos introducido al principio de este capítulo es absolutamente análoga a las fuerzas turbulentas que se proponen dentro del marco teórico de la "mixing length" si el coeficiente de viscosidad molecular es multiplicado por un factor del orden de 300.

Resumiendo lo discutido hasta aquí, es de esperar que las variables del viento no muestren comportamiento divergente alguno debido a que la dinámica misma del flujo originaría fuerzas turbulentas que serían capaces de drenar la energía en exceso; de esta manera el viento podría alcanzar un régimen asintótico (como el mostrado por las soluciones (II.82) y (II.93)) dentro de un campo magnético curvado hacia el polo estelar.

Mencionemos finalmente que, en general, para $q \neq 0$ la ecuación (II.78) debe ser resuelta numéricamente, excepto en los casos en que el índice n es entero, para los cuales la función $M(x)$ puede ser desarrollada en series alrededor de algún punto singular. Sin embargo, el caso $n = 1$ es completo en el sentido que muestra el comportamiento que es dable esperar de parte de la atmósfera cuando estas fuerzas son incluidas en el tratamiento. En el caso $q = 0$ existen soluciones analíticas aún para valores del parámetro n no necesariamente enteros, pero todas ellas muestran que la velocidad del flujo, al igual que la temperatura, es una función monótona decreciente que tiende asintóticamente a un valor final nulo. De hecho, puede demostrarse que la expresión general de la velocidad es

$$v_r(x, \theta) = A_1 e^{\frac{1}{n-1}(\frac{\mathcal{L}}{x})^{n-1}} [1 + A_2(1-n)^{3-n/n-1} \int dz (\ln z)^{3-n/n-1}] \cos \theta \quad (II.109)$$

donde A_1 y A_2 son dos constantes que dependen de las condiciones iniciales del viento, \mathcal{L} y n tienen el significado asignado en (II.74) y se define z como

$$z = \exp\left[\frac{1}{1-n}\left(\frac{\mathcal{L}}{x}\right)^{n-1}\right] \quad (II.110)$$

Se genera así toda una familia de funciones cuyos componentes tienen el mismo comportamiento asintótico y no ofrecen ninguna dificultad en su análisis.

Por consiguiente, dejaremos por el momento este tratamiento para pasar a investigar el comportamiento del viento cuando se tiene en cuenta la velocidad de rotación en las ecuaciones MHD.

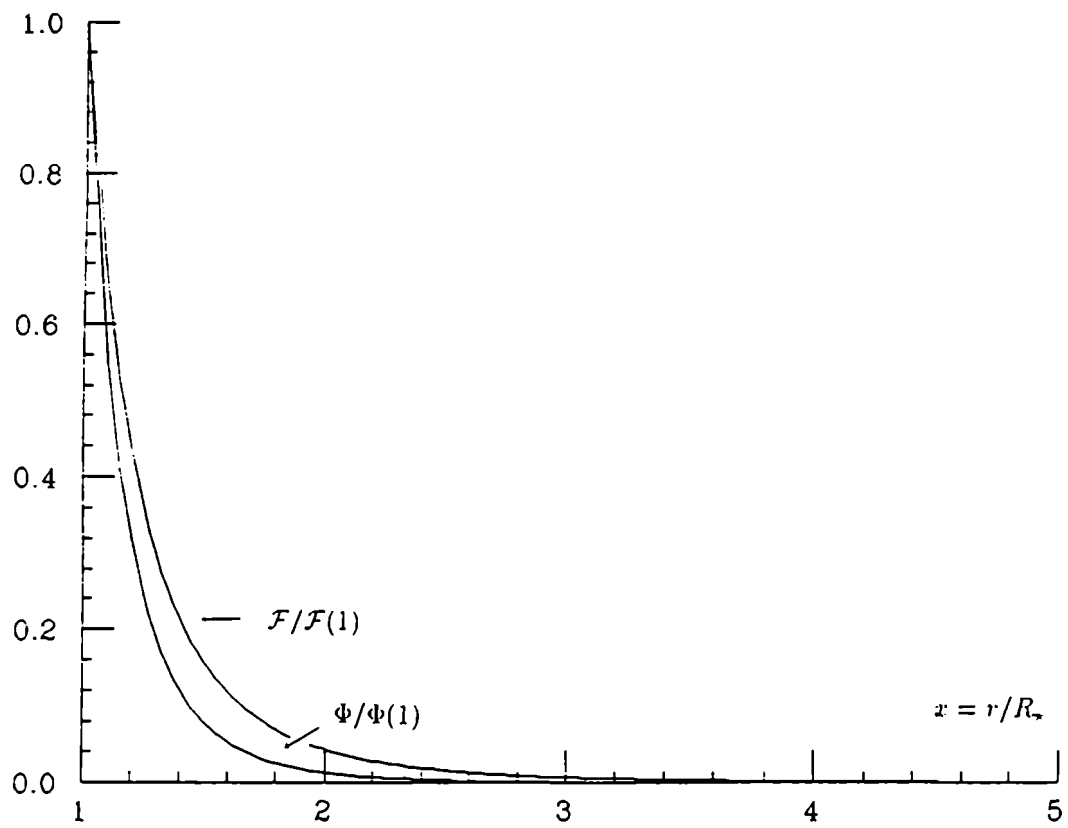


Figura 14: la curva superior representa $\mathcal{F}/\mathcal{F}(1)$ en tanto la curva inferior corresponde a $\Phi/\Phi(1)$
 Obsérvese que la máxima diferencia entre ambas se da en $x \sim 1.1$

ii.d) Vientos magnetizados con rotación

En las secciones anteriores hemos analizado en forma exhaustiva los vientos magnetizados adoptando diferentes simetrías para el flujo, lo que nos ha permitido analizar las principales características de un viento que colina hacia el polo. El procedimiento matemático resultó sencillo debido, fundamentalmente, a que eludimos el problema de la rotación.

Los términos con velocidad (y campo magnético) azimutal poseen la característica de que pueden llegar a ser singulares (y con ellos la ecuación) en uno o más puntos. Es ampliamente conocido el hecho que en los casos en que la termodinámica del sistema queda fijada a través de una politrópica estos "puntos" corresponden a las superficies en las cuales la velocidad del flujo iguala la de tres ondas MHD, a saber, la de los modos magnetosónico lento, de Alfvén y magnetosónico rápido, respectivamente. Esta situación es de hecho más complicada que la que se presenta en los modelos no magnéticos, en los cuales existe un único punto crítico correspondiente al punto sónico (cfr. por ejemplo, Parker, 1958).

En el caso de un plasma rotante inmerso en un campo magnético puramente radial, como el tratado por Tsinganos y Trussoni (1991), las ecuaciones no lineales a resolver son de primer orden: este hecho constituye una ventaja a la hora de calcular la posición de las singularidades de la función de Mach-Alfvén, pues su derivada puede ser escrita como el cociente de dos funciones que dependen, ambas, de la posición, del propio número de Mach-Alfvén y de los parámetros iniciales del viento, digamos

$$M'(x) = \frac{F[x, M(x), \{c_i\}]}{G[x, M(x), \{c_i\}]}$$

donde $\{c_i\}$ indica el conjunto de valores iniciales a que hacíamos referencia. Pueden ahora trazarse las gráficas $F[x, M(x), \{c_i\}] = 0$ y $G[x, M(x), \{c_i\}] = 0$: los puntos de intersección de ambas curvas representan la localización de los puntos críticos.

Este método sencillo de determinación de las singularidades ya no es aplicable cuando tratamos con campos que deflectan hacia el polo, pues ahora el problema a resolver es de segundo orden. Más aún, como discutimos en la sección II.a, la solución general de la función de Mach-Alfvén contiene un término que, recordemos, lleva a situaciones físicamente inaceptables (pues la velocidad del flujo crece sin límite bajo presiones negativas). Es fácil ver que esta solución "explosiva" todavía ha de estar presente cuando se considere el problema de la rotación.

En el caso $l = 0, j = 0$ (atmósfera esféricamente simétrica sin rotación) pudimos obtener la solución analítica del problema y así impusimos las condiciones de contorno necesarias de forma tal que una solución tipo viento tuviera lugar. Cuando tratamos el caso $l = 0, j \neq 0$ (densidad de masa anisótropa sin rotación) pudo verse que en estas condiciones el punto de Mach-Alfvén es regular y que, por lo tanto, las ecuaciones no lineales se integran en forma inmediata.

Cuando la velocidad azinutal es no nula ($l \neq 0$), debemos buscar numéricamente la solución tipo viento que pase a través de los puntos singulares con derivada continua y ajuste las condiciones de contorno. Como hemos mencionado líneas arriba, si el flujo se expande congelado a un campo magnético radial, las dificultades en el cálculo disminuyen pues al ser $W(x) = \text{constante}$ resulta automáticamente una ecuación de primer orden para $M(x)$. En esta situación se halla que las funciones $F[x, M(x), \{c_i\}] = 0$ y $G[x, M(x), \{c_i\}] = 0$ se intersectan en dos puntos (Tsinganos y Trussóni, 1991): próximo a la superficie estelar se localiza el primero de ellos y corresponde al punto de Alfvén, y hacia afuera de éste se cortan en un punto de tipo X en el cual el valor de la velocidad no coincide con ninguna velocidad característica del viento (este comportamiento es de esperar, toda vez que el índice politrópico depende de la posición y no puede quedar bien definida ninguna velocidad característica).

Sin embargo, el punto de Alfvén no es crítico en el sentido que no filtra ninguna solución, pues todas las curvas pasan por él con regularidad: en el punto externo, en cambio, sólo dos pendientes están permitidas y una sola de éstas resulta en una solución capaz de ajustar, además, las condiciones de contorno.

Pasemos a analizar el caso más general, en el cual el flujo rotante se expande en un campo magnético curvado presente en una atmósfera con densidad de masa asimétrica ($l \neq 0, W(x) \neq cte, j \neq 0$). Si las superficies de Alfvén son esféricamente simétricas las ecuaciones que gobiernan esta situación son las (II.36) y (II.37). En esta última se ve que el punto de Alfvén (el punto, recordemos, en el cual $M = 1$) es en apariencia singular (pues $\lim_{x \rightarrow x_A} \epsilon = 1$).

Sin embargo, desarrollando la expresión en series de Taylor alrededor del punto $M(x) = 1$ se ve que todas las soluciones lo atraviesan pues no impone condición alguna sobre las pendientes de las curvas.

Más aún, en el caso $W(x) = Kx^q$ la posición del punto de Alfvén podría ser determinada en forma sencilla como sigue. Retornemos por un momento a la expresión (II.20) para

la velocidad azimutal

$$v_\phi = \frac{L}{r \sin \theta} \left(\frac{\epsilon^2 - M}{1 - M} \right) \quad (II.111)$$

donde ϵ está definida por (II.22). Recordemos que esta función no depende de la colatitud y reescribamos aquí por comodidad aquel resultado: teniendo en cuenta que $\sin^2 \theta = \omega/W(x)$, resulta

$$\epsilon = \frac{r \sin \theta}{r_A \sin \theta_A} = \frac{x}{x_A} \sqrt{\frac{W(x_A)}{W(x)}} \quad (II.112)$$

Ahora bien: dado que adimensionalizamos respecto del radio de Alfvén, la expresión (II.26) nos dice que $W(x_A) = x_A^2$, de forma tal que obtenemos finalmente

$$\epsilon^2 = \frac{x^2}{W(x)} \quad (II.113)$$

La expresión (II.111) evaluada en la base del viento (esto es, en $x = 1$) luego de unos pocos pasos algebraicos conduce a

$$x_A^{q-2} = \frac{2v_{\phi 0} \ell}{v_{r 0}} M_0 \left(\frac{\rho_{e 0}}{\rho_{p 0}} \right)^{1/2} (1 - M_0) + M_0 \quad (II.114)$$

donde $\rho_e = \rho_p(1 + jW)$ y ρ_p denotan las densidades ecuatorial y polar, respectivamente, y un subíndice 0 indica que la variable ha sido evaluada en la base de la atmósfera.

Formalmente, pueden ahora integrarse las ecuaciones hasta el punto de Alfvén; hallar la solución que pasa por este punto y ajusta las condiciones iniciales en la superficie de la estrella consiste, básicamente, en encontrar la derivada inicial de la función $M(x)$ o, de acuerdo a (II.35), hallar el valor inicial de $\Pi_2(x)$. Recordemos que hemos adimensionalizado las ecuaciones respecto del radio de Alfvén, que es equivalente a trabajar con flujos inicialmente subalfvénicos. Sin embargo, este método es incómodo en el sentido que fija la localización del punto en el cual se igualan las energías cinética y magnética; luego, cualquier variación en las condiciones iniciales lleva a recalcular un autovalor ($M'(x = 1)$) que, por otro lado, debe ser ajustado en forma muy precisa si es que la curva obtenida ha de pasar por $x = x_A$ con la pendiente adecuada para empalmar con la solución al infinito.

Consecuentemente, el método adoptado es ligeramente distinto: en lugar de adimensionalizar la distancia al centro de la estrella en términos del radio estelar lo hemos hecho en función del radio de Alfvén, de forma tal que la superficie alfvénica queda automáticamente situada en $x = 1$. El procedimiento consiste ahora en integrar las ecuaciones "hacia adentro"; la superficie estelar se encuentra allí donde los valores de las variables corresponden a los de la base del viento. En la figura 15 se muestra el resultado de la integración de la ecuación (II.37)

desde el punto de Alfvén hacia la estrella utilizando un parámetro $q = 0.1$; obsérvese que dicha integración puede continuarse sin dificultad hasta valores arbitrariamente pequeños de la posición x , hecho este que sugiere que el punto MHD lento desaparece como singularidad.

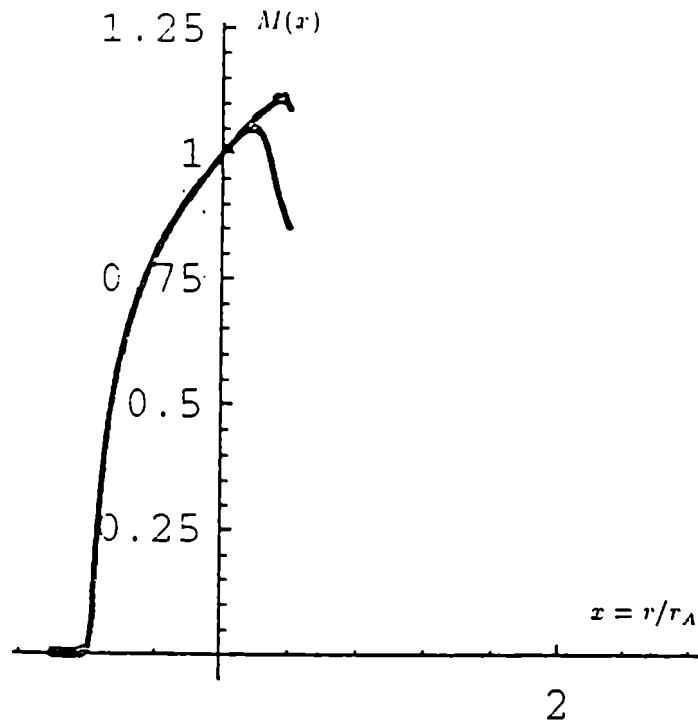


Figura 15: función de Mach-Alfvén en términos de la distancia radial, integrada desde la superficie alfvénica hacia la fotosfera; ésta se encuentra en el punto donde las variables alcanzan los valores iniciales del modelo. En este caso se ha integrado con $q = 0.1$ y $v_{\phi_0} = 200 \text{ km seg}^{-1}$

Comentemos, sin embargo, que la aceleración inicial del viento se ve fuertemente afectada por los valores de la rotación y del número de Mach-Alfvén; en la base. Este hecho es fácil de comprender en virtud de la igualdad (II.112): para un dado conjunto de parámetros iniciales la derivada de la función $M(x)$ (esto es, la aceleración) debe incrementarse a medida que se reducen v_{ϕ_0} y M_0 si es que dicha función ha de valer 1 en el punto $x = x_A$.

Analicemos un poco más en detalle este comportamiento peculiar; en el polo la aceleración efectiva está gobernada por el balance entre el gradiente de presión $\Pi_1(x)$ y la fuerza gravitatoria solamente, en tanto en el ecuador se agregan la componente radial de la fuerza de Lorentz y la aceleración centrífuga, siendo ambas positivas en los casos que analizamos (respecto de la fuerza magnética, nótese que a la expresión (II.55) debe ahora sumársele la contribución debida a B_ϕ ; en los casos de interés práctico esta suma es positiva). El balance ecuatorial es tal que allí la velocidad radial es nula (pues varía angularmente como $|\cos \theta|$), es decir, cuanto más se incrementa la velocidad azimutal mayor debe ser la contribución

negativa o, dicho en otros términos, disminuye la presión $\Pi_1(x)$. Pero en el polo, por lo dicho líneas arriba, este balance resulta desfavorable en lo que a velocidad radial respecta y, dado que hemos adoptado superficies alfvénicas isótropas y el valor de $M(x)$ ha de ser el mismo para todo valor de la colatitud, el resultado neto es una velocidad terminal del viento menor cuanto mayor es la velocidad de rotación.

Pasemos ahora a integrar las ecuaciones en la región exterior al punto de Alfvén. Debemos mencionar, para ello, que cuando las ecuaciones se integran desde el infinito hacia la estrella se encuentra que las curvas deflecan en un punto próximo a $x = 1$ debido a la presencia de una singularidad. Por otro lado, sin un conocimiento de muchos dígitos en el valor de la derivada de $M(x)$ en el punto de Alfvén, es imposible continuar la integración numérica hacia afuera de este punto más allá de unas pocas décimas de x (y sin poder llegar a la singularidad) pues las soluciones se tornan brisas o devienen rápidamente divergentes.

Debemos, pues, hallar una asíntota intermedia que empalme correctamente las dos soluciones, la interna al punto de Alfvén y la externa al punto crítico. La física del problema sugiere por sí misma la funcional adecuada: si la curvatura del campo es leve y el punto de Mach-Alfvén se halla próximo a la fotosfera (como parecen indicar las observaciones de diferentes objetos estelares) resulta plausible comenzar la integración en la región externa anulando $M''(x)$ en (II.37), pues es de esperar que este término adquiera importancia recién en puntos muy alejados de la superficie de Alfvén. En efecto, comparemos el término $M'' W W' / x^2$ frente a uno característico que contenga la derivada primera, digamos, $G(W) M'$.

De la ecuación (II.37) vemos que en las cercanías de $x = 1$ se verifica

$$q \frac{\Delta M'}{\Delta x} \ll 4M'$$

o, equivalentemente

$$\Delta \ln M' \ll 4$$

aún adoptando $\Delta x = q = 0.1$, pues las variaciones de $M'(x)$ son muy rápidas sólo en la fotosfera, donde el flujo es fuertemente acelerado. Por otro lado, si pensamos que ya muy alejada de la superficie estelar la función de Mach-Alfvén crece como, digamos, x^n (con $n > 0$, obviamente) y comparemos el término que contiene la derivada segunda con, por ejemplo, $F(W) M(x)$, vemos que resulta

$$nq(n-1)x^{n+q-5} \sim 8x^{n-5}$$

y, por consiguiente, a distancias grandes no puede ser despreciado.

Numéricamente también se halla esta correlación. En la figura 16 se muestra el resultado de la integración numérica de una solución exterior aproximada (despreciando el término con derivada segunda) contra la solución exacta (con igual derivada en el punto de Alfvén) hacia la superficie estelar: ambas curvas se superponen salvo en las proximidades de la base. La función interpoladora permite localizar inmediatamente el punto crítico de tipo X: aplicando la regla de L'Hospital alrededor de la posición donde deflectan las soluciones externas que provienen de infinito, se hallan las dos pendientes que admite este punto. La solución tipo viento es integrada "hacia atrás" y se acopla a la solución exacta en el punto de Alfvén. Como por otro lado la integración en las regiones alejadas de la segunda singularidad no ofrece ninguna dificultad, puede buscarse, integrando hacia la estrella, la solución asintótica exacta que empalma correctamente con la aproximada en las cercanías del punto crítico (esto es, que no provoca saltos ni en las variables ni en sus derivadas).

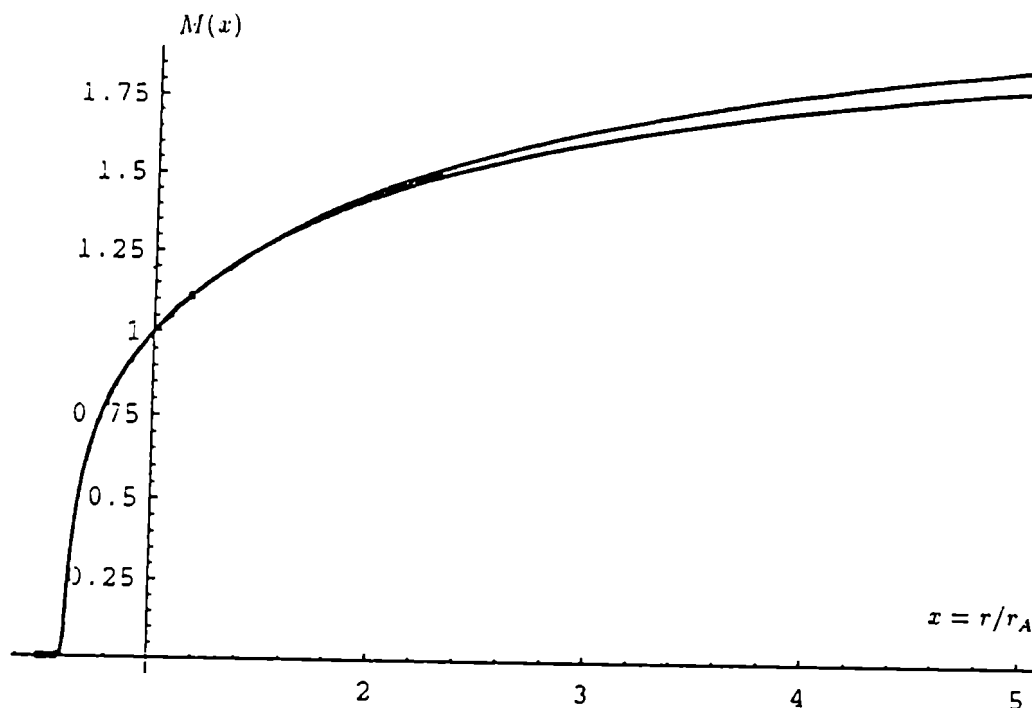


Figura 16: soluciones aproximada (curva inferior) y exacta (curva superior) para la función de Mach-Alfvén utilizando $q = 0.1$. Obsérvese que sólo a partir de $x \sim 2.5$ las soluciones son distinguibles. Para $x = 0$ se ha graficado la solución exacta.

Los resultados obtenidos con este método para la función de Mach-Alfvén son evidentes: la curva inferior es la aproximante y la superior es la solución asintótica exacta. Obsérvese la pequeña discrepancia entre ambas curvas, que se debe a la diferencia entre los exponentes asintóticos de ambas expresiones. Podemos analizar el error que se cometería si el término con derivada segunda es despreciado sin más.

Si convenimos en llamar n_e y n_a a los exponentes exacto y aproximado, respectivamente, hemos hallado que sus expresiones quedan determinadas por

$$n_e = 2.4 + \frac{2}{q} - \frac{1}{4q}(64 + 32q - 12q^2 - 20q^3 + 9q^4)^{1/2} \quad (II.115)$$

$$n_a = \frac{-2(8 + 2q - 5q^2 + q^3)}{-8 - 8q + 5q^2} \quad (II.116)$$

En la figura 17 se muestran n_a y n_e en función de q ; puede verse que la máxima diferencia se da para $q \sim 0.4$, valor para el cual los exponentes asintóticos difieren en aproximadamente 6%. Mencionemos, de paso, que esta diferencia porcentual es la que se observa entre los respectivos números de Mach en $x = 100$.

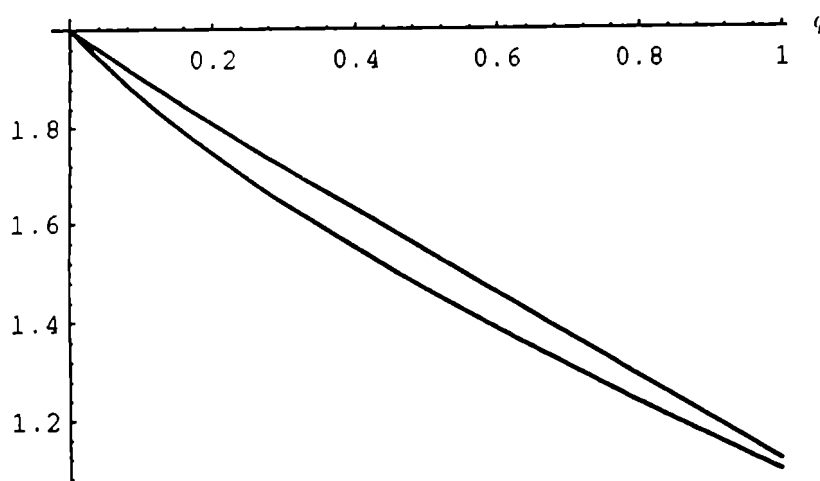


Figura 17: exponentes aproximado (curva superior) y exacto (curva inferior) en función del parámetro q . La máxima diferencia se verifica para $q \sim 0.4$.

Aunque mínima, esta diferencia tiene efectos considerables. Líneas arriba hemos discutido el orden de magnitud de los diferentes términos de la ecuación (II.37) y vimos que

lejos de la fotosfera son todos de igual grado. Aparentemente, la diferencia que encontramos entre los números de Mach en $x = 100$ pareciera decir lo contrario, pero tengamos en cuenta que con el exponente asintótico exacto la velocidad diverge en forma muy suave (a similitud del caso $q = 0$ en que lo hace como $(\ln x)^{1/3}$, véase Tsinganos y Trussoni, 1991) en tanto con el exponente n_a la velocidad converge en forma absoluta.

Hemos analizado la marcha de la presión isotrópica $\Pi_1(x)$ y la tasa de energía polar $Q_0(x)$ entregada al viento. Comentemos aquí que esta última muestra el mismo comportamiento que en el caso $q = 0$ (Tsinganos y Trussoni, 1991) en el sentido que acompaña las variaciones de temperatura a lo largo de la atmósfera. Por lo demás, las curvas obtenidas son cualitativamente similares a las que resultan en los casos analizados previamente, razón por la cual no las hemos incluido. Hemos hallado, además, que las curvas que se obtienen son cualitativamente similares entre sí variando los parámetros iniciales del viento. Sin embargo cabe mencionar que la velocidad terminal del viento se incrementa con el parámetro q , pues la presión $\Pi_2(x)$ muestra un decrecimiento más gradual a medida que la curvatura aumenta, resultando en una más efectiva aceleración del flujo. Por otro lado, para flujos subalfvénicos como los que estamos discutiendo, la parte anisótropa de la presión se incrementa en la base como consecuencia de la rotación y la componente azimutal del campo magnético (véase la ecuación (II.35)).

Pasemos ahora a analizar el comportamiento asintótico de las variables dinámicas del viento. Para ello, sin pérdida alguna de generalidad, supongamos como antes que la función $M(x)$ crece como x^n cuando $x \rightarrow \infty$. Para un flujo magnético cuya parte radial está dada por $W(x) = K x^q$ escribamos las expresiones límites de las variables sobre una línea caracterizada por la constante ω , teniendo en cuenta la identidad (II.113).

De (II.20) obtenemos

$$v_{\phi_\omega} \sim x^{\frac{q}{2}-1} \left(\frac{x^{2-q} - x^n}{x^n} \right) \quad (II.117)$$

A partir de (II.21) escribimos

$$B_{\phi_\omega} \sim x^{\frac{q}{2}-1} \left(\frac{x^{2-q}}{x^n} \right) \quad (II.118)$$

En tanto las expresiones de v_{r_ω} y v_{θ_ω} serán

$$v_{r_\omega} \sim x^{n+q-2} \left(1 - \frac{\omega}{x^n} \right)^{1/2} \quad (II.119)$$

$$v_{\theta_\omega} \sim x^{n+\frac{q}{2}-2} \quad (II.120)$$

Las condiciones para que estas variables sean finitas en infinito se obtienen en forma inmediata: en efecto, de (II.117) y (II.118) resulta

$$\frac{q}{2} - n + 1 \leq 0 \quad (II.121)$$

en tanto que de (II.119) obtenemos

$$n + q - 2 \leq 0 \quad (II.122)$$

y de la expresión (II.120) surge

$$n + \frac{q}{2} - 2 \leq 0 \quad (II.123)$$

Combinando (II.121)-(II.123) resulta finalmente que las variables dinámicas han de permanecer acotadas siempre que el exponente n esté dentro del intervalo

$$1 + \frac{q}{2} \leq n \leq 2 - q \quad (II.124)$$

Para valores del parámetro q próximos a cero el valor del índice n se hallará alrededor de $2 - q$ (véase la figura 18). Luego, la parte azimutal decrece más rápidamente que las otras componentes de la velocidad y, lejos de la estrella, el comportamiento del viento debe ser similar al del caso $l = 0$, $j \neq 0$ discutido en la sección II.b (mencionemos brevemente que, incluso, éste es análogo al del viento isótropo (véase la discusión que sigue a la ecuación (II.71)) pues la asimetría se acopla al término gravitatorio, que decrece rápidamente).

Recordemos aquí que trabajamos con un valor pequeño de q pues nuestro interés radica en representar un flujo magnético de la forma $W(x) = a + b \ln x$ (véase la expresión (II.40) y la discusión que le sigue). Notemos de paso que aunque hemos ampliado el tratamiento teórico permitiendo $0 \leq q < 2$, de (II.120) surge que el valor límite del parámetro q ha de ser $2/3$ si es que las variables dinámicas han de permanecer finitas. Nuevamente encontramos un límite natural al valor de la curvatura del campo magnético: éste sólo participa indirectamente en el gobierno del viento: brinda la estructura geométrica por la que el viento se desarrolla y, de esta manera, fija el valor de presión necesaria para que el flujo permanezca sobre una línea de campo.

Dado que el comportamiento asintótico del viento es similar al discutido en la sección II.b, es de esperar que la velocidad terminal se incremente con el valor del parámetro de asimetría de masa como en ese caso, resultado éste que está en completo acuerdo con el obtenido por Tsinganos y Trussoni (1991).

Por último, mencionemos otro hecho saliente. La ecuación (II.114) muestra que el punto de Mach-Alfvén (y luego el punto crítico, que se ubica siempre en la región externa) se desplaza hacia fuera de la estrella si se incrementa la velocidad de rotación (o disminuye el valor de M_0) sin importar el valor del ángulo polar como directa consecuencia de haber adoptado superficies alfvénicas isótropas. Sin embargo, sería de esperar que las superficies de Alfvén reflejen de alguna manera la complicada dinámica que resulta de la incorporación de la rotación y la componente azimutal del campo magnético en las ecuaciones magneto-hidrodinámicas. En términos cualitativos, sabemos que, salvo en el polo, la fuerza centrífuga y la diferencia en la componente radial de la fuerza de Lorentz debida a la presencia de B_ϕ han de incorporarse al balance total de fuerzas. Más aún, de la competencia entre estas dos fuerzas depende el valor de la parte isótropa de la presión; en efecto, la dependencia angular asignada a la velocidad radial impone que se anule en el ecuador, de manera tal que un exceso de fuerza centrífuga sobre la de Lorentz conduce a un decremento de $\Pi_1(x)$ (pues la fuerza gravitatoria se mantiene fija) si el flujo ecuatorial ha de ser estático, y viceversa.

Este balance ecuatorial se ve luego reflejado en el polo, pues en esta región la aceleración proviene del gradiente de presión $\Pi_1(x)$ y de la fuerza gravitatoria tan sólo, y sus valores quedaron fijados en el ecuador. Por consiguiente, sería esperable que, si por caso, se produjera un desbalance ecuatorial a favor de la fuerza magnética con su consiguiente correlato de aumento de $\Pi_1(x)$, el flujo fuera más rápidamente impulsado (y un dado valor del número de Mach-Alfvén más rápidamente alcanzado) en la zona polar, resultando de esta forma una superficie alfvénica oblada. Por supuesto, en caso contrario la superficie sería prolada.

Estos argumentos sugieren la necesidad de analizar la situación que se presenta cuando la dependencia angular de la función de Mach-Alfvén no es eliminada, que es lo que haremos en el próximo capítulo.

III-SOLUCION GENERAL CON $M = M(x, \theta)$

En la sección II hemos analizado el comportamiento de los vientos magnetohidrodinámicos sobre la hipótesis de superficies de Mach-Alfvén esféricamente simétricas. La dependencia con la colatitud se introdujo a través del parámetro de asimetría de masa jK , pero la anisotropía en la distribución de energía cinética poloidal en la base depende de la velocidad radial (para convencernos basta con observar la expresión (II.12)). Si bien este formalismo nos permite acceder a una primera solución de los vientos asimétricos, presenta algunas características que merecen ser revisadas.

En primer lugar, notemos que una vez que se fija el parámetro jK la asimetría queda "congelada" a lo largo de todo el flujo, es decir, la densidad de masa conserva el perfil con que abandona la estrella (al igual que las isosuperficies de energía cinética poloidal). Este comportamiento es especialmente molesto cuando pensamos que no existe razón física alguna para que, muy lejos de la estrella, el flujo conserve la memoria de su origen (dicho en otros términos, en un universo extrañamente caracterizado por la isotropía a gran escala, resulta poco alentador un modelo de viento que conserva la anisotropía original).

Por otro lado, la tasa de pérdida de masa de la estrella, \dot{M}_\star , queda arbitrariamente determinada ahora por dos parámetros, a saber, λ y jK . Para fijar ideas analicemos el caso de un campo puramente radial; si las superficies alfvénicas son esféricamente simétricas, de la ecuación (II.1) (teniendo en cuenta la expresión (II.12)) obtenemos inmediatamente por simple integración en el ángulo θ

$$\Lambda_0 = \lambda \quad \frac{\dot{M}_\star}{4} = 2\lambda K$$

$$\Lambda_0 = \lambda(1 + jK \sin^2 \theta) \quad \frac{\dot{M}_\star}{4} = 2\lambda K(1 + \frac{1}{3}jK)$$

Estos resultados indican que, en principio, una estrella que presente algún tipo de asimetría debe perder más masa que una de tipo isótropo (recordemos que las únicas soluciones se dan para $j > 0$); pero nuestras observaciones no contienen ningún elemento para sostener esta conclusión.

Cuando el problema se plantea fijando la termodinámica del mismo, cerrando el sistema de ecuaciones a través de una polítropa (Sakurai, 1985) se encuentra que son las superficies de Mach las que adquieren una forma prolada y, sobre estas superficies, se redistribuye anisotrópicamente la densidad másica. Este resultado sugiere, consecuentemente, que en

nuestra formulación (en la que, recordemos, fijamos la geometría del campo) debiéramos postular una dependencia angular del número de Mach-Alfvén y no del perfil de densidad.

En virtud de lo expuesto hasta aquí, en el resto de este capítulo supondremos que la función de Mach-Alfvén puede ser escrita, en forma absolutamente general, como

$$M(x, \theta) = \sum_{n \geq 0} M_n(x) \sin^{2n} \theta \quad (III.1)$$

y analizaremos las consecuencias de esta dependencia adoptando $j = 0$ en la expresión (II.31b) para el flujo másico $\Lambda(x, \theta)$.

Cuando la expresión (III.1) es remplazada en las ecuaciones (II.23) y (II.24) (o, equivalentemente, en (II.32) y (II.33)) se genera un problema numérico formidable debido, como antes, a los términos asociados a la rotación. Pero la base del método que habremos de desarrollar y sus consecuencias sobre la dinámica del viento pueden discutirse con mayor claridad si eliminamos, en una primera etapa, la dificultad matemática asociada a la velocidad azimutal. Como por otro lado ya hemos visto (§II.d) que las soluciones asintóticas de un viento magnetizado y rotante son similares (salvo un factor de corrección) a las del viento sin rotación, pasaremos directamente ahora a analizar el caso $v_\phi = 0$.

III.a) El caso $\ell = 0$

Las expresiones que deben ser integradas para hallar las funciones $M_n(x)$ se obtienen luego de tediosos aunque directos pasos algebraicos que no son incluidos por razones de espacio; sin embargo, mencionaremos aquí que en el término gravitatorio $\frac{Z^2}{Mx^2}$ hemos desarrollado $M^{-1}(x, \theta)$ en series de Taylor, escribiendo

$$\frac{1}{M(x, \theta)} = \frac{1}{M_0(x)} \left[1 - \sum_{n \geq 1} \mathcal{M}_n \sin^{2n} \theta + \left(\sum_{n \geq 1} \mathcal{M}_n \sin^{2n} \theta \right)^2 - \dots \right] \quad (III.2)$$

donde definimos

$$\mathcal{M}_n = \frac{M_n(x)}{M_0(x)} \quad (III.3)$$

Por supuesto, este desarrollo será válido sólo en la región de la atmósfera en la que se verifique $\sum_{n \geq 1} \mathcal{M}_n \sin^{2n} \theta < 1$. Si desarrollamos los coeficientes $\sin^{2n} \theta$ en términos de $\sin n\theta$ y explotamos la ortogonalidad de los términos del desarrollo de Fourier que se obtiene, llegamos a armar una cadena de ecuaciones que puede ser escrita en forma sintetizada como

$$\begin{aligned}
& \left\{ M_n'' \frac{W'W''}{(n+1)x^2} - \frac{M_n'}{(n+1)x^2} \left[\frac{2n-1}{2} W'^2 - 2W'W'' - \frac{2W'W''}{x} + \frac{4(n+1)W^2}{x^2} \right] - \right. \\
& - \frac{M_n}{(n+1)x^3} [2nxW'W'' - nW'^2 + 2W'W'' + 2(n+1)(1-2n)\frac{W'W''}{x} - 8(n+1)\frac{W^2}{x^2} - \\
& \left. - W'W'''] x \right\} \sin^{2(n+1)} \theta - F(W) \sin^2 \theta + \Pi_1'(x) = \\
& = \left\{ \frac{4W}{x^4} \left(W'(n-1) + \frac{2W}{x} \right) M_n - \frac{4W^2}{x^4} M_n' \right\} \sin^{2n} \theta - \frac{Z^2}{M_0 x^2} (1 - \xi(M))
\end{aligned} \tag{III.4}$$

En (III.4) hemos definido $\Pi_1(x)$ y $F(W)$ de la misma manera que en la sección II (ecuaciones (II.34) y (II.39), respectivamente). Z^2 y $W(x)$ tienen los mismos significados que antes, y la función $\xi(M)$ tiene en cuenta la cantidad de términos del desarrollo de Taylor (III.2) que han sido incluidos en la expresión de los $M_n(x)$ (es decir, de alguna manera representa el grado de exactitud de la aproximación).

La cadena infinita de ecuaciones generada habrá de ser cortada, como es habitual, con alguna hipótesis adicional. Escribamos, por ejemplo, las tres primeras expresiones del desarrollo (III.4)

$$\partial_x \Pi_1(x) = -\frac{4W^2}{x^4} M_0' - 2M_0 \partial_x \left(\frac{W^2}{x^4} \right) - \frac{Z^2}{M_0 x^2} \tag{III.5}$$

$$\begin{aligned}
& M_0'' \left(\frac{W'W''}{x^2} \right) - M_0' G(W) - F(W)(1 - M_0) = \\
& = \frac{4W}{x^2} \left[\frac{2W}{x^3} M_1 - \frac{W}{x^2} M_1' \right] + \frac{Z^2}{M_0^2 x^2} M_1
\end{aligned} \tag{III.6}$$

$$\begin{aligned}
& M_1'' \left(\frac{W'W''}{x^2} \right) - M_1' \frac{H(W)}{x^2} + M_1 \frac{J(W)}{x^3} = \\
& = \frac{16M_2}{x^4} \left[W'W'' - \frac{W^2}{x} \right] - \frac{16W^2}{x^4} M_2' + \frac{Z^2}{M_0^2 x^2} \left(M_2 - \frac{M_1^2}{M_0} \right)
\end{aligned} \tag{III.7}$$

donde $G(W)$ está definida como en la ecuación (II.38) y hemos introducido las funciones $H(W)$ y $J(W)$ definidas por

$$H(W) = \frac{2}{3} \left[\frac{3}{4} W'^2 - W'W'' - \frac{W'W''}{x} + 6 \frac{W^2}{x^2} \right] \tag{III.8}$$

$$J(W) = -\frac{2}{3} (W'^2 - W'W'') - 6 \frac{W'W''}{x} + 8 \frac{W^2}{x^2} + \frac{4}{3} W'W''x \tag{III.9}$$

A modo de ilustración del método, resolveremos el sistema de ecuaciones (III.4) bajo el siguiente conjunto de suposiciones

$$\mathcal{M}_n = 0 \quad \forall n \geq 2 \quad (III.10a)$$

$$\mathcal{M}_1 \ll 1 \quad (III.10b)$$

$$W(x) = a \quad (III.10c)$$

donde a es una constante, es decir, habremos de trabajar con un campo puramente radial. Observemos que la hipótesis (III.10a) permite cortar la cadena en la tercera ecuación (pues suponemos que los términos de orden superior en la colatitud son infinitésimos de grado creciente y, por consiguiente, pueden ser despreciados), en tanto (III.10b) permite desacoplar las ecuaciones: en efecto, en este caso basta con tomar el primer término del desarrollo en series de Taylor (III.2) para trabajar con buen grado de aproximación, de forma tal que el factor $\frac{M_i^2}{M_0^2}$ no aparecerá en la ecuación (III.7) y ésta se convierte automáticamente en una ecuación lineal y de primer orden para $M_1(x)$, a saber

$$\frac{4a^2}{x^4} M_1' - \frac{8a^2}{x^5} M_1 = 0 \quad (III.11)$$

La integración de (III.11) es elemental y resulta

$$M_1(x) = C \cdot x^2 \quad (III.12)$$

donde C es una constante a determinar. Introduciendo ahora la solución (III.12) en la ecuación (III.6) obtenemos para $M_0(x)$

$$M_0' - 2\frac{M_0}{x} + \frac{CV_\epsilon^2 M^2(1)}{2v_{r_0}^2} \frac{x^4}{M_0^2} = -\frac{2}{x} \quad (III.13)$$

donde $M(1)$ se refiere al valor inicial del número total de Mach-Alfvén. Las únicas soluciones de (III.13) se dan para $C < 0$, de manera tal que las superficies alfvénicas resultan oblatas y la densidad de masa se distribuye en forma creciente hacia el ecuador (en forma análoga a como encontramos en la sección II.b). Dentro de este contexto era un resultado esperable, pues si observamos la expresión (III.13) vemos que es análoga (salvo por la dependencia funcional en el último término del miembro izquierdo) a la ecuación (II.65) para $q = 0$. Si las únicas soluciones en esta última se dan para $jK > 0$, las únicas soluciones en este nuevo formalismo sólo pueden darse para una situación similar, y esto sólo ocurre si las superficies alfvénicas son oblatas.

En la figura 18 mostramos la solución de $M_0(x)$ que surge de (III.13) comparada con la que se obtiene suponiendo que el parámetro de asimetría de masa jK toma el mismo valor de $|C|$ (pero con $M_1 \equiv 0$). Obsérvese que en el segundo caso la aceleración inicial del viento es mayor; la razón es casi evidente si comparamos las ecuaciones (II.65) para el caso $q = 0$ y la (III.13): la aceleración gravitatoria efectiva en la base se ve ahora multiplicada por el factor $|C|/M_0(1)$ que, de acuerdo a la hipótesis (III.10b), es menor que la unidad. Luego, la derivada inicial de la función de Mach-Álvén se reduce y con ella la aceleración, de manera tal que la velocidad terminal del viento resulta en este formalismo menor que la que se obtiene en el modelo de Hu y Low (1989).

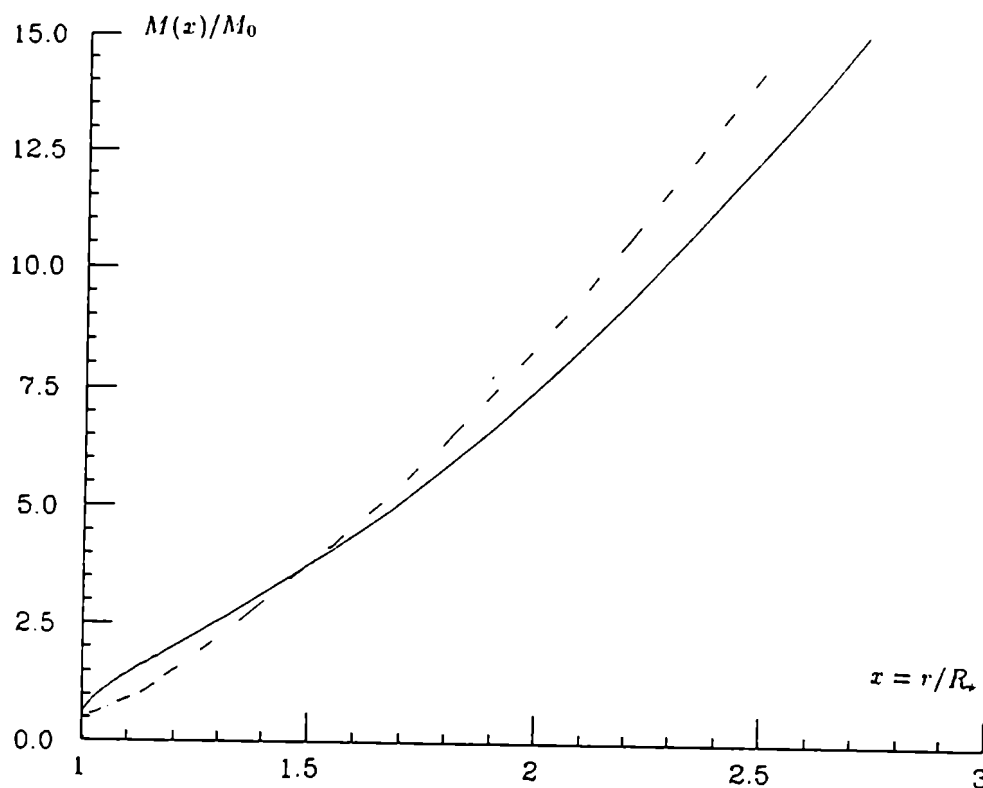


Figura 18: soluciones para la función $M(x)$ anisótropa (curva de trazo continuo) y $M(x)$ esféricamente simétrica (curva discontinua). En ambos casos se tomó $M(1) = 0.55$ y $|C| = jK = 0.05$.

Hemos adoptado los valores iniciales $M(1) = 0.55$ y $|C| = 0.05$ de forma tal que se cumpla la hipótesis (III.10b); a poco de observar la figura 18 vemos que (III.10b) no sólo se verifica en toda la atmósfera sino que además $M_0(x)$ crece más rápidamente que $M_1(x)$. En conclusión, las superficies de Mach-Alfvén tienden a tornarse isotropas a medida que el flujo se aleja de la estrella, como se muestra en la figura 19.

Los gráficos de la figura 20 muestran $M_0(x)$ y la velocidad en el polo $v_r(x,0)$ para distintos valores de los parámetros iniciales del viento, en tanto en la figura 21 se representan la presión $\Pi_1(x)$ y el cociente $Q_0(x)R_\star/3\sigma T_{eff\star}^4$ (σ es la constante de Stefan-Boltzmann y $T_{eff\star}$ se refiere a la temperatura efectiva de una estrella B-A) esto es, la tasa de energía polar por unidad de superficie en términos de la potencia irradiada por la estrella considerada como un cuerpo negro. Obsérvese que prácticamente la fuente de calor no se extiende más allá de la superficie estelar, a diferencia del caso $j \neq 0$ en el cual se debe depositar energía a lo largo de algunos radios estelares para que el flujo pueda expandirse.

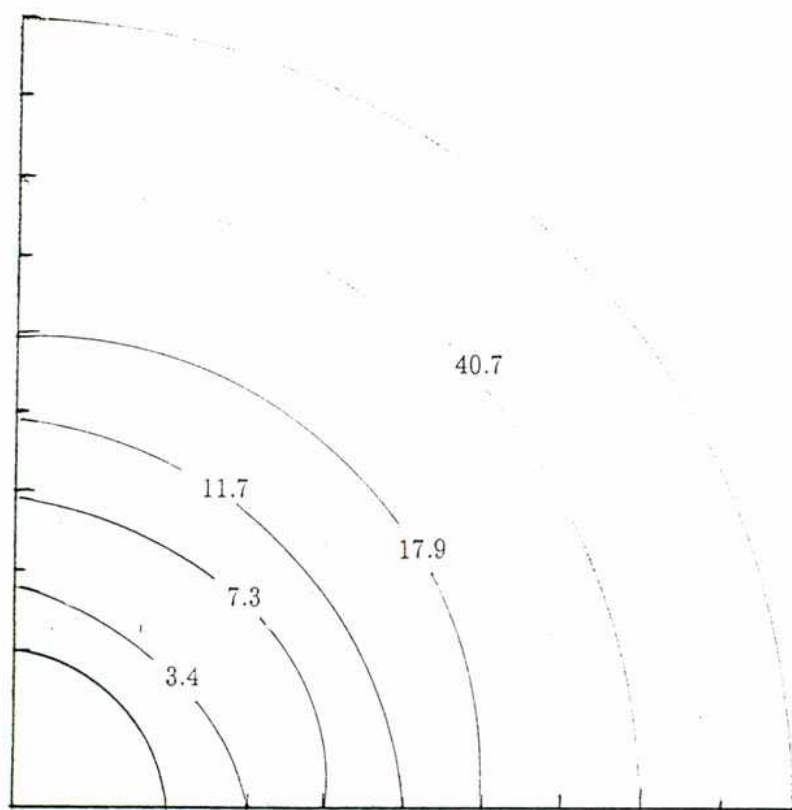


Figura 19: isosuperficies de Mach-Alfvén en función de la distancia radial. Los valores de la función $M(x)$ son los indicados en cada curva. Nótese que para $x > 5$ la oblicuidad prácticamente ha desaparecido.

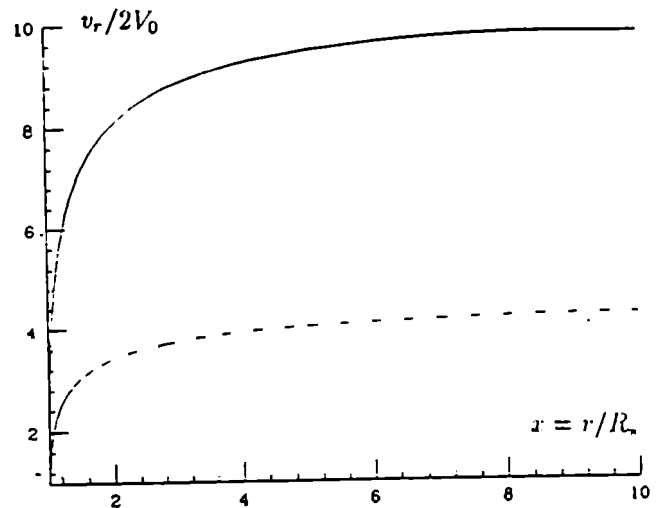
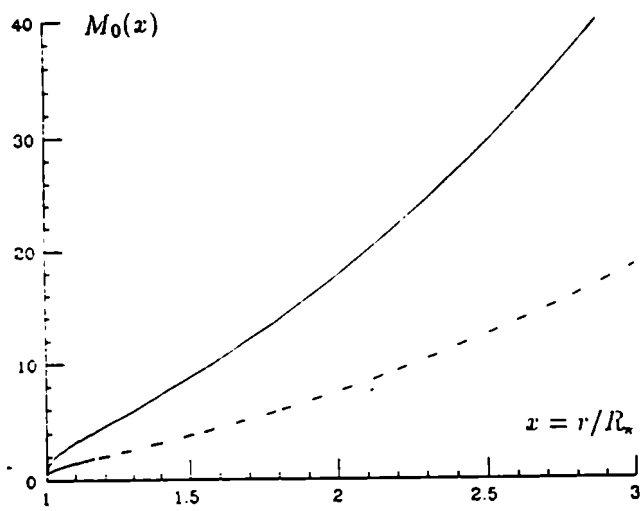


Figura 20: función de Mach-Alfvén y velocidad radial polares. La curva de trazo discontinuo corresponde a $Z^2 = 600$ y en la de trazo lleno se ha tomado $Z^2 = 6000$. Puede verse que en ambos casos el flujo es fuertemente acelerado en aproximadamente 2 radios estelares.

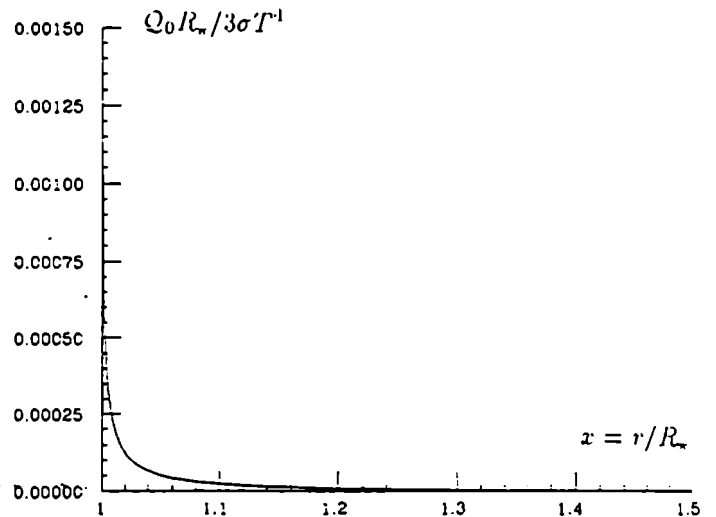
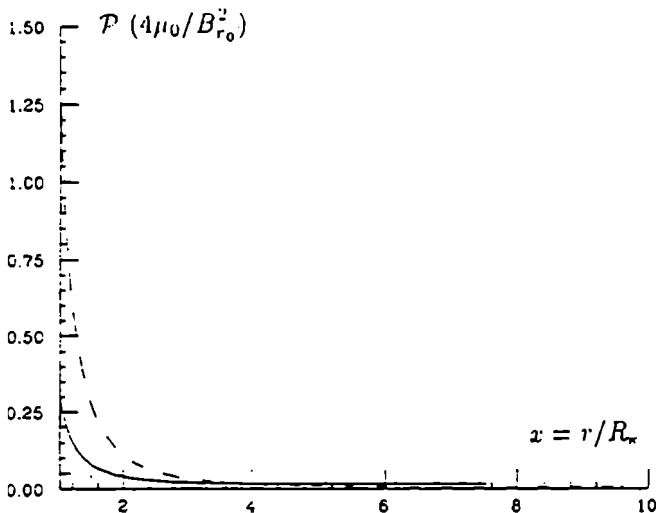


Figura 21: parte isótropa de la presión y tasa de energía intercambiada en el polo. En la primera, la curva de trazo continuo corresponde a $Z^2 = 600$ y la de rayas a $Z^2 = 6000$. La curva de energía que se observa corresponde a $Z^2 = 6000$, pues con $Z^2 = 600$ resulta dos órdenes de magnitud menor.

Notemos ahora que el flujo de masa varía con la colatitud en la forma $|\cos \theta|$, a diferencia de la complicada dependencia angular que se da en los casos con $j \neq 0$ en los que resulta ser proporcional a $|\cos \theta|(1 + ja \sin^2 \theta)^{1/2}$. En efecto, basta ver que la expresión de la velocidad resulta, para $\Lambda = \lambda = \text{constante}$

$$v_r(x, \theta) = \frac{2V_0}{M(1)} \frac{M_0 - M_1 \sin^2 \theta}{x^2} |\cos \theta| \quad (III.14)$$

donde la cantidad $M(1)$ indica el valor del número de Mach-Alfvén total en la base del viento y, como en la sección II.b. definimos

$$V_0 = \frac{M_0 \Psi a}{\mu_0 \lambda}$$

Dado que la densidad es inversamente proporcional a $M(x)$ resulta inmediata la dependencia como $|\cos \theta|$. De esta forma encontramos, como en el caso absolutamente isótropo, que el flujo másico es máximo en el polo. Observemos, de paso, que la energía cinética presenta un máximo : en efecto, es fácil verificar que este máximo se ubica en el ángulo definido por

$$\theta_M = \arcsin \sqrt{\frac{|M_1| + M_0}{2|M_1|}} \quad (III.15)$$

Otra característica saliente es que la presión $\Pi_2(x)$ decrece como x^{-4} , como resulta de la ecuación (II.35) para un campo magnético radial sin rotación, en tanto la presión $\Pi_1(x)$ cae aproximadamente como x^{-3} ; luego, lejos de la estrella la presión es también isótropa y se acopla rápidamente al valor de presión interestelar.

En cuanto al comportamiento asintótico del viento en este caso, es casi evidente que, salvo un factor de corrección, es similar al del caso $\ell = 0$, $j = 0$, pero las consecuencias son interesantes: en primer lugar, como ya hemos mencionado, lejos de la estrella el flujo se torna isótropo, de manera tal que la tasa de pérdida de masa es la que corresponde a una estrella simétrica, resultando que su valor puede ser fijado ahora por un único parámetro, a saber, λ . Por otro lado, ya hemos dicho también que la velocidad terminal del viento es menor que la que predice el modelo de Hu y Low (1989); pero este resultado es de capital importancia toda vez que las soluciones se dan para valores relativamente altos de la velocidad inicial (comparada con la velocidad de escape) de manera tal que los valores obtenidos con este formalismo ajustarían mejor las observaciones.

Por lo demás, los resultados son cualitativamente similares a los de la sección II.a, por lo que habremos de pasar directamente a estudiar los casos con rotación.

III.b) El caso $\ell \neq 0$

En el desarrollo realizado en la subsección anterior encontramos en forma particularmente sencilla el desarrollo de la función de Mach-Alfvén debido, fundamentalmente, al hecho de que sólo en el término gravitatorio aparece la inversa de dicha función. En este caso pudimos arribar a las ecuaciones (III.5)-(III.8) suponiendo, a través de la hipótesis (III.10b), que la anisotropía no es muy marcada .

Cuando se incluyen los términos de rotación de las ecuaciones generales (II.32) y (II.33) las dificultades se multiplican y nuevas hipótesis habrá que agregar para mantener el problema dentro de un marco numérico sencillo. A poco de estudiar este sistema de ecuaciones diferenciales se ve que una notable simplificación se logra si los desarrollos se realizan para flujos que sean superalfvénicos en el origen. Recordemos que el número de Mach-Alfvén poloidal es una relación entre las energías cinética poloidal y magnética, de manera tal que si atendemos a los valores típicos de densidad y velocidad fotosféricas para el grupo de estrellas que estamos analizando (véase, por ejemplo, Underhill y Doazan, 1982) concluiremos que esta no es una restricción severa.

Si el flujo es superalfvénico, la forma funcional de la variable ϵ ya no se obtiene de la forma en que se hizo en la sección II d y que condujo a la expresión (II.113). Para su redefinición debemos partir de las expresiones (II.16) y (II.17) que definen las formas funcionales de v_ϕ y B_ϕ , respectivamente. A partir de éstas se ve que, en forma absolutamente general, ϵ queda determinada por

$$\epsilon^2 = \frac{\Omega(A)}{L(A)} r^2 \sin^2 \theta \quad (III.16)$$

Si definimos ahora

$$\Omega(A) = \frac{L(A)}{A} \quad (III.17)$$

resulta finalmente

$$\epsilon^2 = x^2/W(x) \quad (III.18)$$

es decir, obtenemos la misma dependencia que en (II.113), pero obsérvese que ahora la forma funcional de $\Omega(A)$ es, en general, diferente respecto de su definición dada en (II.19).

Los pasos necesarios para arribar a las expresiones formales de los diferentes términos de la función de Mach-Alfvén son puramente algebraicos y han sido obviados por razones de compacidad: escribiremos a continuación las tres primeras ecuaciones del desarrollo general

que resulta de agregar los términos con $(\epsilon^2$ en (II.32) y (II.33), pero tomando por válidas desde ahora las hipótesis (III.10a) y (III.10b).

$$\partial_r \Pi_1(x) = -\frac{4W^2}{x^4} M_0' - 2M_0 \partial_r \left(\frac{W^2}{x^4} \right) - \frac{Z^2}{M_0 x^2} \quad (III.19)$$

$$\begin{aligned} & M_0'' \left(\frac{W W'}{x^2} \right) - M_0' G(W) - F(W)(1 - M_0) - \\ & - \frac{\epsilon^2}{x^2} (2W W' - \frac{2W^2}{x}) \left[\frac{(\epsilon^2 - 1)^2}{M_0^2} - \frac{\epsilon^4}{2M_0^3} + \frac{\epsilon^2}{M_0^2} - \frac{1}{2M_0} \right] - \\ & - \frac{\epsilon^2 W^2}{x^2} \left[4\epsilon \epsilon' \frac{(\epsilon^2 - 1)}{M_0^2} - 2 \frac{(\epsilon^2 - 1)^2}{M_0^3} M_0' - \frac{2\epsilon^3 \epsilon'}{M_0^3} + \frac{3\epsilon^4}{2M_0^4} M_0' + \frac{2\epsilon \epsilon'}{M_0^2} - \frac{2\epsilon^2}{M_0^3} M_0' + \frac{M_0'}{2M_0^2} \right] = \\ & = -\frac{\epsilon^2 W}{x^2} \left[\frac{(\epsilon^2 - 1)^2}{M_0^2} W' + 2\epsilon \epsilon' \frac{(\epsilon^2 - 1)}{M_0^2} W - \frac{(\epsilon^2 - 1)^2}{M_0^3} W M_0' - \right. \\ & \left. - \frac{(\epsilon^2 - M_0)^2}{x M_0^3} W \right] + \frac{4W}{x^2} \left[\frac{2W}{x^3} M_1 - \frac{W}{x^2} M_1' \right] + \frac{Z^2}{M_0^2 x^2} M_1 \end{aligned} \quad (III.20)$$

$$\begin{aligned} & M_1'' \left(\frac{W W'}{x^2} \right) - M_1' \frac{H(W)}{x^2} + M_1 \frac{J(W)}{x^3} - \\ & - \frac{\epsilon^2}{x^2} (2W W' - \frac{2W^2}{x}) \left[-\frac{3(\epsilon^2 - 1)^2}{2M_0^3} M_1 + \frac{3\epsilon^4 M_1}{4M_0^4} - \frac{\epsilon^2 M_1}{M_0^3} + \frac{M_1}{4M_0^2} \right] - \\ & - \frac{\epsilon^2 W^2}{x^2} \left[-6\epsilon \epsilon' \frac{(\epsilon^2 - 1)}{M_0^3} M_1 - \frac{3(\epsilon^2 - 1)^2}{2M_0^3} M_1' + \frac{9(\epsilon^2 - 1)^2}{2M_0^4} M_0' M_1 + \frac{3\epsilon^3 \epsilon'}{M_0^4} M_1 + \right. \\ & \left. + \frac{3\epsilon^4}{4M_0^4} M_1' - \frac{3\epsilon^4}{M_0^3} M_1 M_0' - \frac{2\epsilon \epsilon'}{M_0^3} M_1 + \frac{3\epsilon^2}{M_0^4} M_1 M_0' + \frac{M_1'}{4M_0^2} - \frac{M_1 M_0'}{2M_0^3} \right] = \\ & = \frac{\epsilon^2 W}{x^2} \left[2 \frac{(\epsilon^2 - 1)^2}{M_0^3} W' M_1 + 4\epsilon \epsilon' \frac{(\epsilon^2 - 1)}{M_0^3} W M_1 + \frac{W(\epsilon^2 - 1)^2}{M_0^4} (-3M_1 M_0 + M_0 M_1') - \right. \\ & \left. - \frac{3\epsilon^4}{x M_0^4} W M_1 + \frac{4\epsilon^2}{x M_0^3} W M_1 - \frac{W M_1}{x M_0^2} \right] \end{aligned} \quad (III.21)$$

En lo que sigue adoptaremos también la hipótesis (III.10c), es decir, habremos de resolver las ecuaciones para un campo radial. Recordemos que estamos trabajando en la suposición de flujos superalfvénicos, de forma tal que la adimensionalización se realiza respecto del radio de la estrella y, en virtud de (II.26), resulta $a = 1$. Notemos de paso que en este

caso la expresión (III.17) se reduce a (II.19), pero téngase en cuenta que esto es producto de haber adoptado un campo magnético puramente radial y un flujo cuya velocidad de salida es mayor que la de Alfvén.

En este caso las ecuaciones (III.20) y (III.21) se reducen a la forma

$$\begin{aligned} M_0' \left[1 - \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 x^2 \left(\frac{x^4}{M_0^3} \left(1 - \frac{3}{2M_0} \right) + \frac{1}{M_0^2} \left(\frac{1}{M_0} - \frac{1}{2} \right) \right) \right] - M_1' &= \\ = -\frac{2}{x} (1 - M_0 + M_1) + 2 \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \frac{x}{M_0} \left(\frac{1}{M_0} - 1 \right) - \frac{Z^2 M_1 x^2}{4M_0^2} & \end{aligned} \quad (III.22)$$

$$\begin{aligned} M_0' \left[\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \frac{x^2 M_1}{M_0^3} \left(\frac{3x^4}{M_0} \left(1 - \frac{1}{M_0} \right) + \frac{3}{2M_0} - \frac{1}{2} \right) \right] + \\ + M_1' \left[1 + \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \frac{x^2}{2M_0^2} \left(\frac{x^4}{M_0} \left(\frac{3}{2M_0} - 1 \right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{M_0} \right) \right] &= \\ = \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \frac{x M_1}{M_0^2} \left[\frac{x^4}{M_0} \left(\frac{3}{2M_0} - 1 \right) + \frac{3}{2} - \frac{3}{M_0} \right] & \end{aligned} \quad (III.23)$$

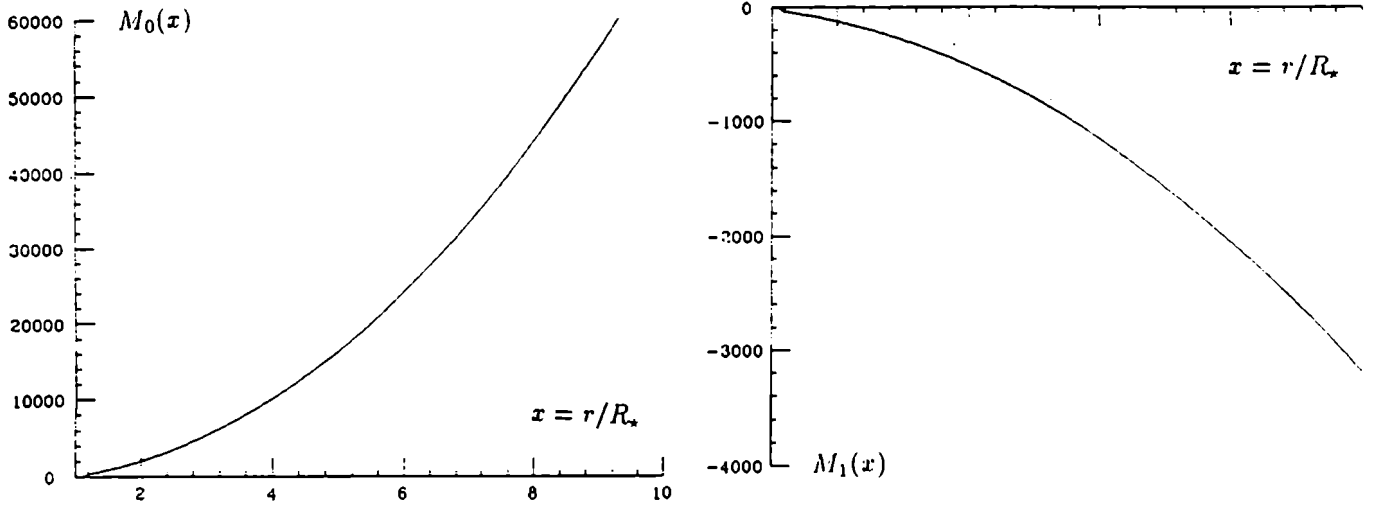
Hemos escrito el sistema de ecuaciones en la forma explícita

$$A_1 M_0' + B_1 M_1' = C_1 \quad (III.24)$$

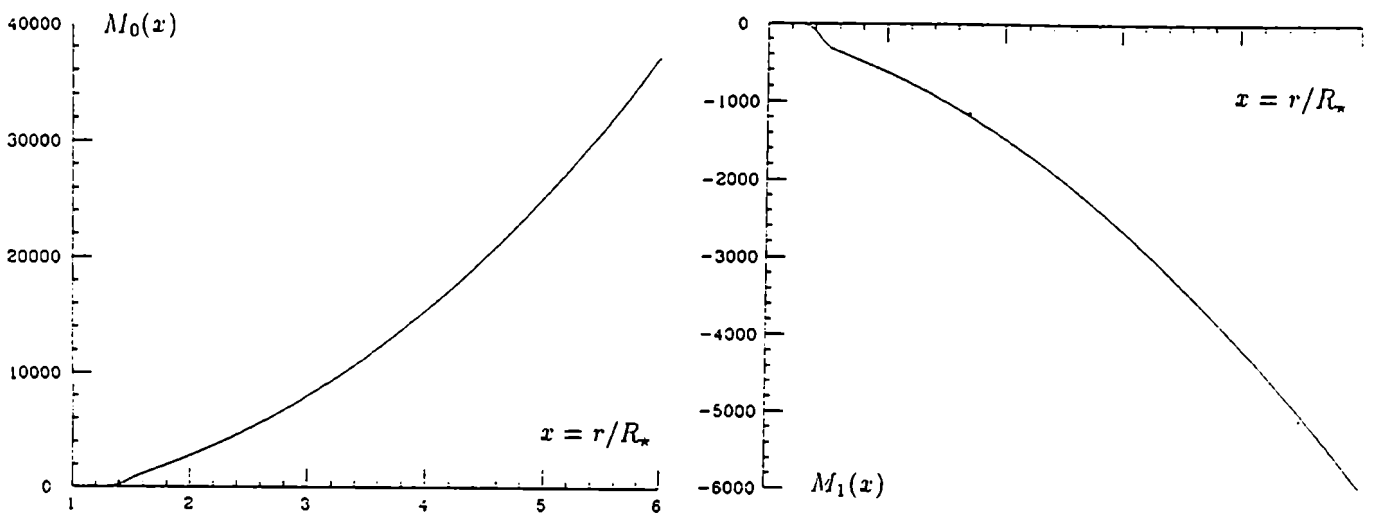
$$A_2 M_0' + B_2 M_1' = C_2 \quad (III.25)$$

donde los A_k, B_k, C_k son los funcionales correspondientes en las expresiones (III.22) y (III.23): se ve inmediatamente que la integración numérica puede realizarse de manera sencilla utilizando procedimientos estándar. En las figuras 22 a 25 se muestran los resultados de esta integración para las diferentes variables dinámicas y termodinámicas del problema.

En la figura 22a se grafican las funciones $M_0(x)$ y $M_1(x)$ para un dado conjunto de valores iniciales, como así también las superficies de Mach-Alfvén a diferentes distancias de la fotosfera. Debemos mencionar ante todo que las únicas soluciones posibles dentro de las hipótesis (III.10a)-(III.10c) se dan para valores iniciales negativos de la parte anisótropa del número de Mach-Alfvén o, lo que es igual, las superficies iniciales deben ser obladas. Nótese que, como en el caso $\ell = 0$, la parte isótropa de la función de Mach-Alfvén crece más rápido que la anisótropa, de forma tal que la superficie tiende a tornarse esférica lejos de la estrella. En la figura 22b se han mantenido constantes todos los parámetros salvo el valor inicial de la rotación, que ha sido duplicado.

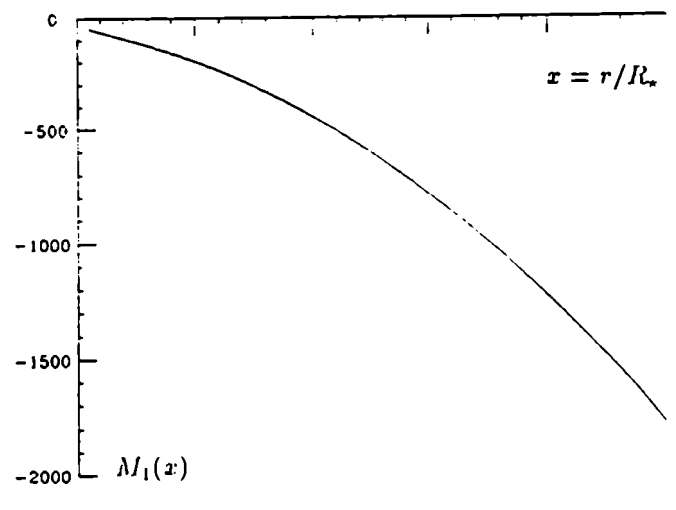
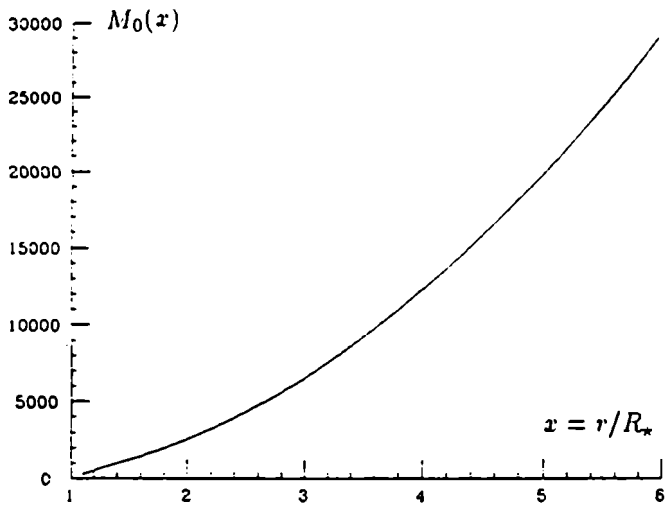


(a)

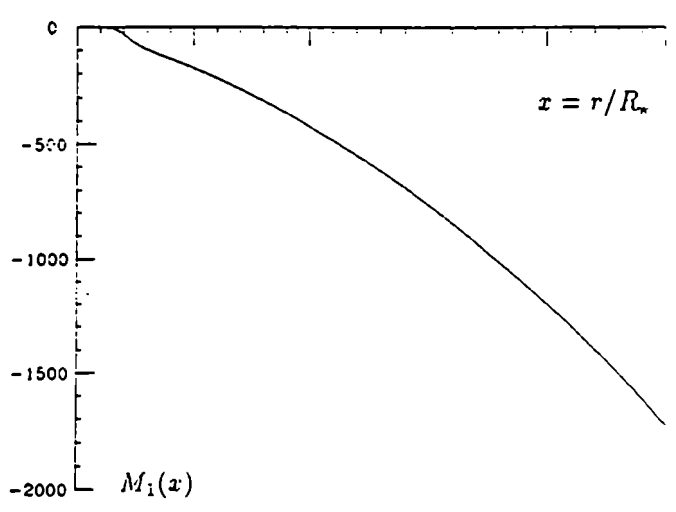
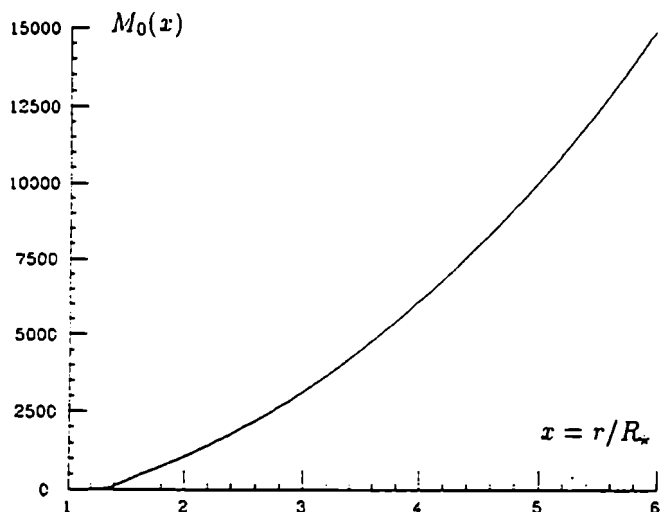


(b)

Figura 22: funciones $M_0(x)$ y $M_1(x)$ para diferentes valores de los parámetros. En (a) se ha tomado $\ell = 200$ (que corresponde a una rotación de 100 km seg^{-1}) y una velocidad radial inicial $v_{r_0} = 0.12 \text{ km seg}^{-1}$. Los parámetros restantes son los típicos de estrellas B. En (b) se duplica el valor inicial de la rotación, en (c) se retorna al valor de velocidad azimutal de (a) pero se duplica la relación inicial M_0/M_1 ; finalmente, en (d) se retorna a los valores de la parte (a) pero se disminuye la velocidad de escape, esto es, se representa la situación para una estrella supergigante. En cada situación, la escala horizontal de $M_1(x)$ se corresponde con la de $M_0(x)$.



(c)



(d)

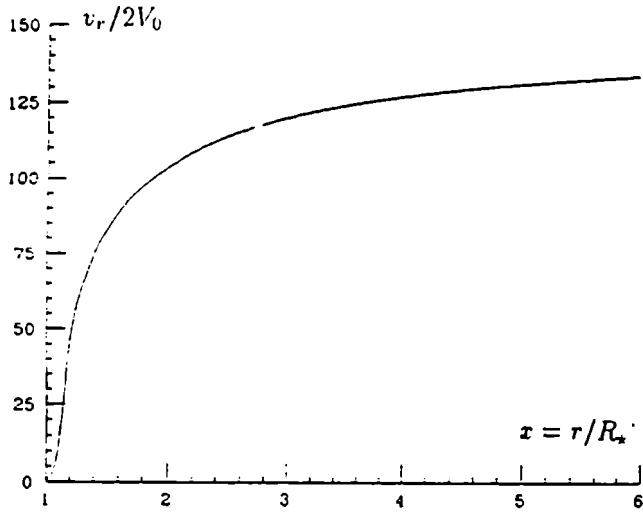
Figura 22: continuación.

Obsérvese que las dos funciones, $M_0(x)$ y $M_1(x)$ incrementan sus valores finales (la segunda de ellas en valor absoluto) pero la tendencia a la esfericidad es más lenta. La dependencia tanto de $M'_0(x)$ cuanto de $M'_1(x)$ con el valor de ℓ , como resulta de las ecuaciones (III.22) y (III.23), es tal que un incremento en el valor de la rotación conduce a un aumento menor del número de Mach-Alfvén total cerca de la fotosfera. Como consecuencia, la densidad decrece más lentamente, provocando un incremento del peso de la columna de plasma ecuatorial y el consiguiente aumento del gradiente de presiones de forma tal que la velocidad radial sea nula en esa región. En las figuras 23a,b se muestran las consecuencias sobre la velocidad radial; obsérvese que el crecimiento inicial de la misma es menor en el caso con mayor rotación, si bien lejos de la estrella los efectos del aumento de la presión (y de la parte isótropa de $M(x)$) se dejan sentir, pues la velocidad terminal del viento es mayor en este caso. Debemos mencionar que, con todo, el decrecimiento de la presión hacia el valor final se hace más lento con el aumento del parámetro ℓ .

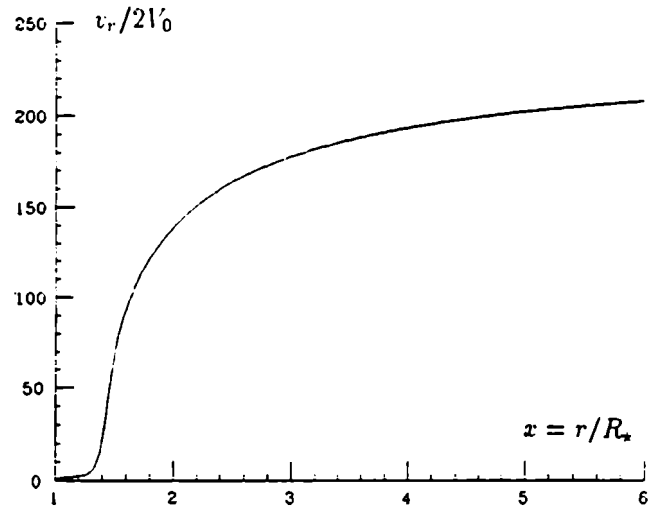
En la figura 22c se retorna a los valores iniciales de la figura 22a, pero se ha duplicado ahora la relación inicial entre M_0 y M_1 (llevando M_1 a la mitad de su valor original). Al ser menores la oblicuidad de la atmósfera y la densidad ecuatorial, disminuye consecuentemente el valor de la presión inicial, pues para mantener en equilibrio estático la región del ecuador es necesario ahora un empuje menor. En la figura 23c se muestra la curva de velocidad radial en el polo; se ve claramente el efecto de la disminución del gradiente de presión $\Pi_1(x)$, pues la velocidad terminal del flujo ha disminuido. La figura 24c muestra las gráficas de las presiones en este caso, que deben ser comparadas con los de la figura 24a.

Finalmente, en la figura 22d se muestran las curvas de la función de Mach-Alfvén con los valores iniciales de la figura 22a pero donde se ha disminuido un 75% el cociente v_e/v_{r_0} entre la velocidad de escape y la velocidad inicial en el polo. Sin embargo, si se mantiene invariante la velocidad de rotación en la base del viento (que es directamente proporcional al valor de ℓ y v_{r_0}) esta disminución se traslada en forma automática a v_e . Dos fenómenos son especialmente notables: en primer lugar, debido a que es necesario un menor gradiente de presión ecuatorial, $\Pi_1(x)$ disminuye y, luego, lo hace también la velocidad terminal del viento.

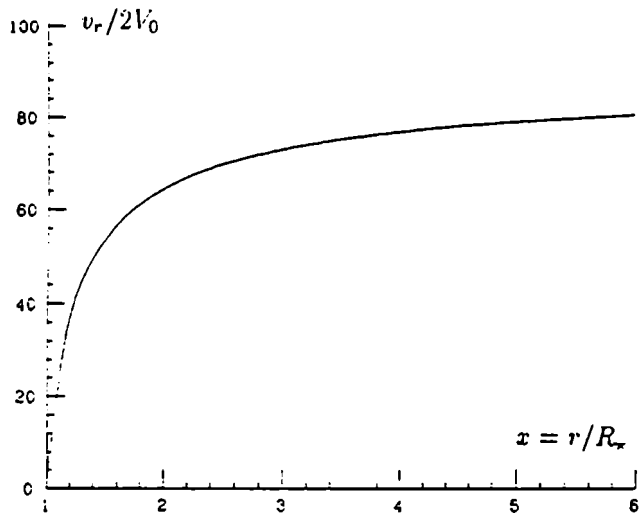
Por otro lado, dado que el término gravitatorio tiende a tornar isótropas las superficies alfvénicas, un decremento en su valor se traduce en un aumento en el valor absoluto de $M_1(x)$ (para una misma posición) y un menor aumento en el valor de $M_0(x)$, de forma tal que la esfericidad se recupera en posiciones más alejadas de la fotosfera (respecto del caso que se muestra en la figura 22a).



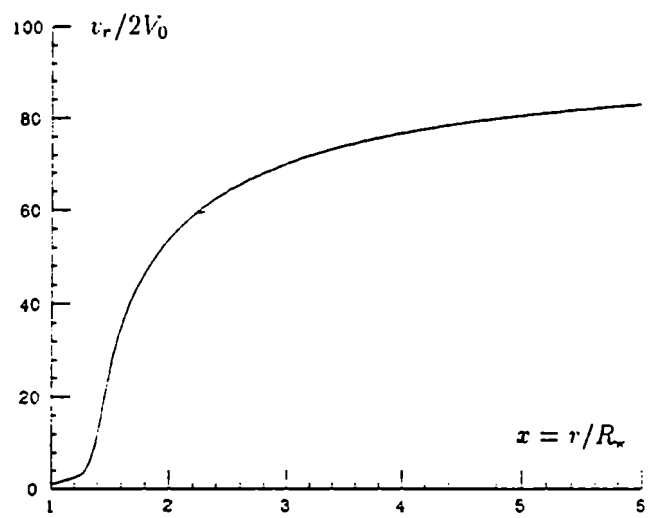
(a)



(b)

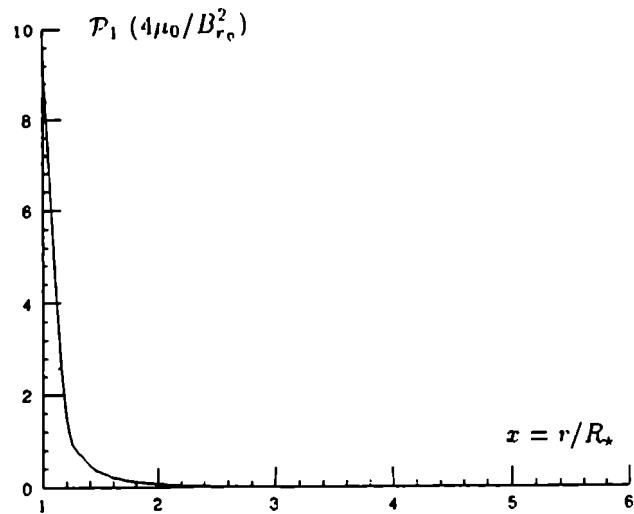
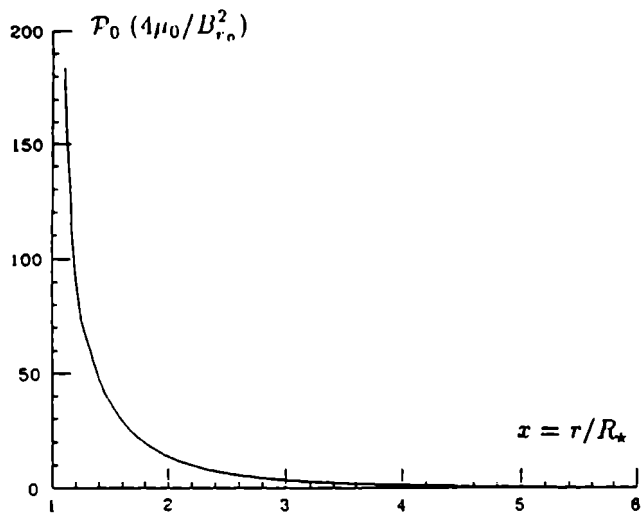


(c)

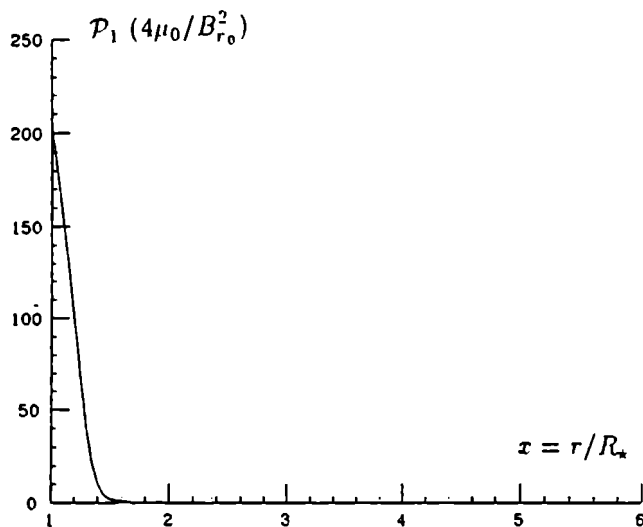
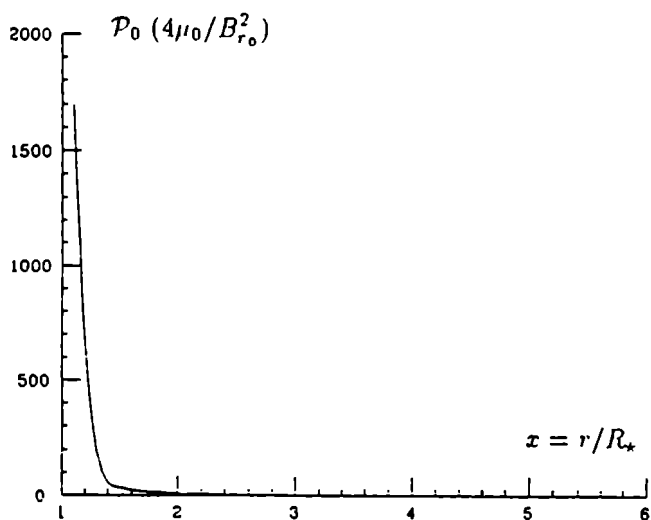


(d)

Figura 23: velocidad radial en el polo. Las situaciones (a), (b), (c) y (d) están explicadas en la figura 22.

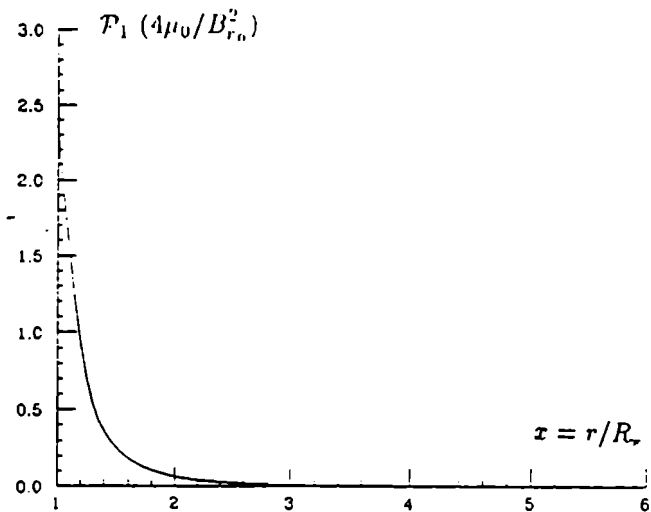
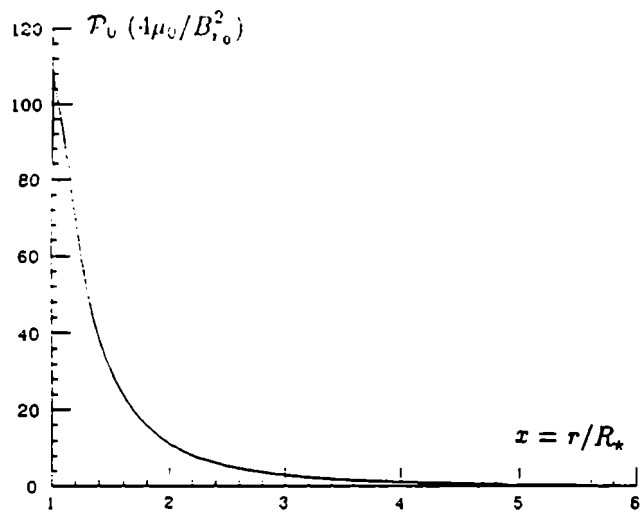


(a)

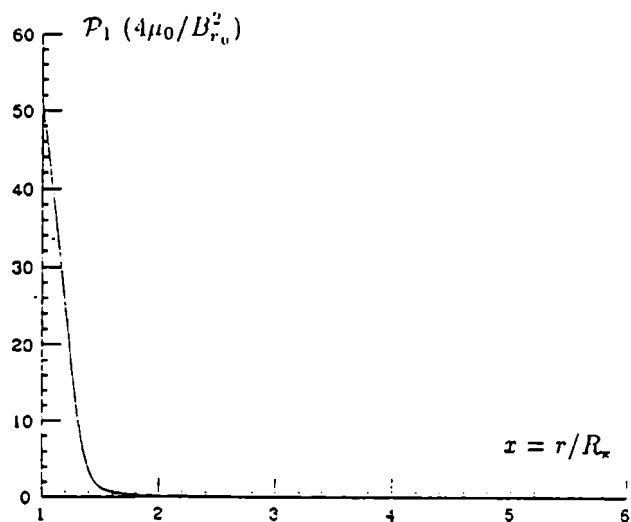
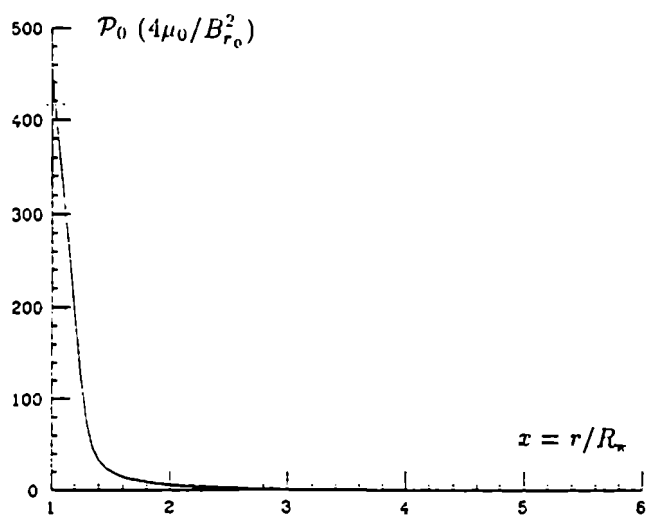


(b)

Figura 24: presiones \mathcal{P}_0 y \mathcal{P}_1 (ésta última en el ecuador). Obsérvese que en todos los casos se verifica $\mathcal{P}_1 \ll \mathcal{P}_0$; por otro lado, la parte anisótropa de la presión decrece rápidamente y la presión total se acopla a la interestelar en pocos radios estelares. Las situaciones (a), (b), (c) y (d) están explicadas en la figura 22.



(c)



(d)

Figura 24: continuación.

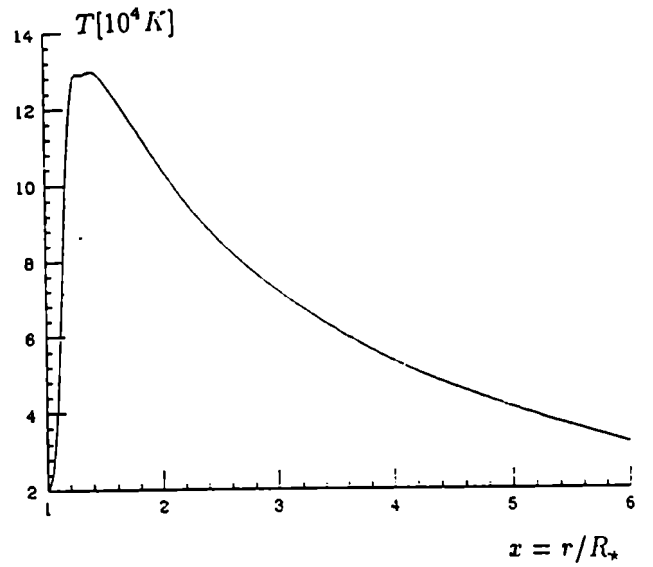
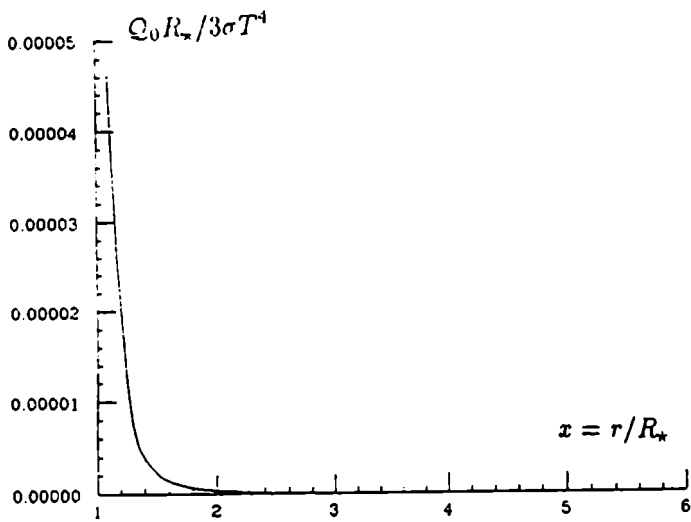
En todos los casos analizados la velocidad de rotación v_ϕ decrece monótonamente hasta un valor final nulo: esto ocurre en aproximadamente diez radios estelares, de manera tal que el flujo tiende rápidamente al régimen asintótico, que es similar al discutido en la sección IIIa. La figura 25 muestra a su vez las curvas de temperatura polar en cada uno de los casos analizados previamente, como así también las curvas $Q_0(x)R_*/3\sigma T_{eff}^4$ en función de la distancia radial, esto es, la tasa de energía suministrada al viento en términos de la potencia disipada por la estrella como cuerpo negro; obsérvese que los perfiles de temperatura muestran un pico cerca de la fotosfera, que se corresponde con el de los gráficos de energía. Es interesante mencionar que los perfiles de temperatura que se obtienen en los modelos (b) y (d) están en concordancia con el esquema de Thomas (1983) y Stalio (1985) de la estructura cromosférica.

Hemos investigado la distribución de energía con la rotación, y hemos hallado que disminuye en la base del viento con el incremento del parámetro ζ ; sin embargo, si observamos la figura 25 vemos que el depósito de energía se realiza en este caso hasta regiones más alejadas, en concordancia con el hecho de que la velocidad terminal del viento se incrementa con la velocidad de rotación.

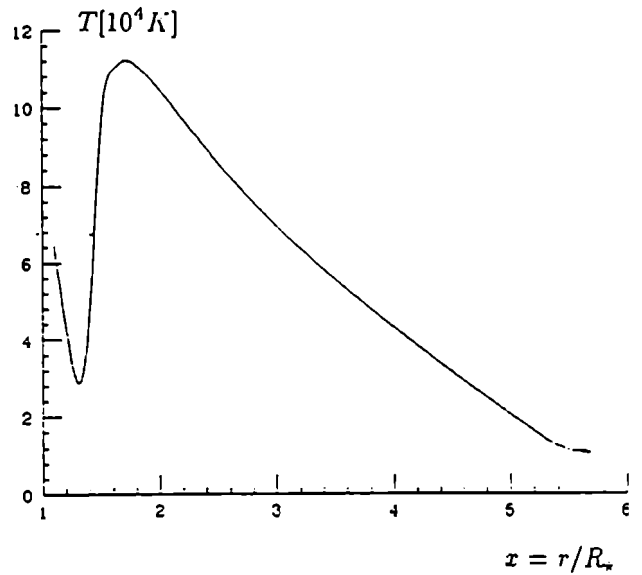
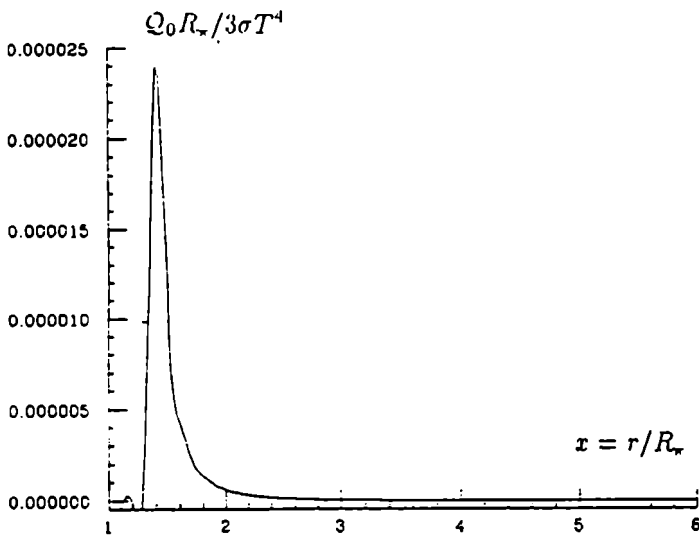
Analicemos, por último, el comportamiento del índice politrópico efectivo, γ . De la expresión (II.63) es inmediato que resulta

$$\gamma(x) = 1 + \frac{\rho}{T} \frac{dT}{d\rho} \quad (III.26)$$

De los gráficos de la figura 22 es evidente que $\frac{d\rho}{dx} < 0 \quad \forall x$, de manera tal que resulta $\gamma < 1$ hasta el pico de temperatura (véase la figura 25). Es justamente hasta esa posición que la energía interna del plasma no es enteramente absorbida por la expansión, pasando en parte a aumentar la temperatura. Lejos de la superficie estelar el índice γ tiende al valor unidad (que indica, de paso, que la temperatura se hace prácticamente constante al cabo de unos pocos radios estelares) y la atmósfera entra en un régimen aproximadamente isotérmico. En otros términos; en regiones alejadas de la fotosfera la presión y la densidad másica decrecen al mismo ritmo, pero cerca de aquella la variación relativa permite un pico de temperatura; éste, a su vez, es consistente con la curva de energía, que básicamente se reduce a una fuente colocada en la base del viento. De esta manera resultan naturales las comparativamente altas velocidades terminales que se observan.

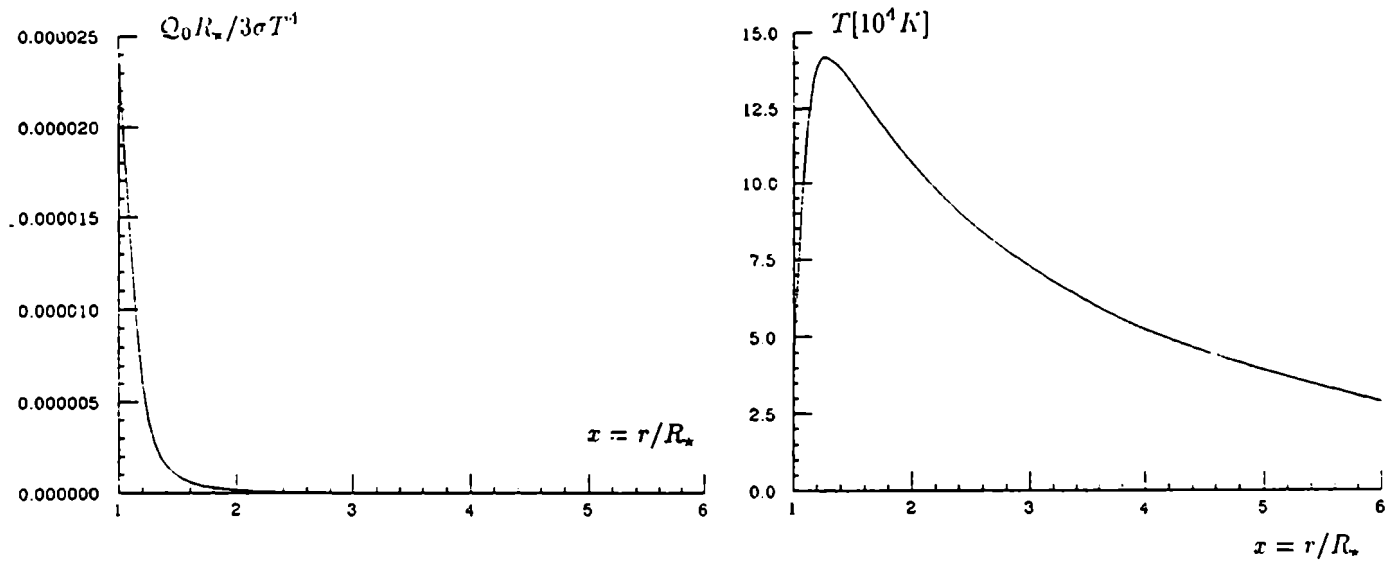


(a)

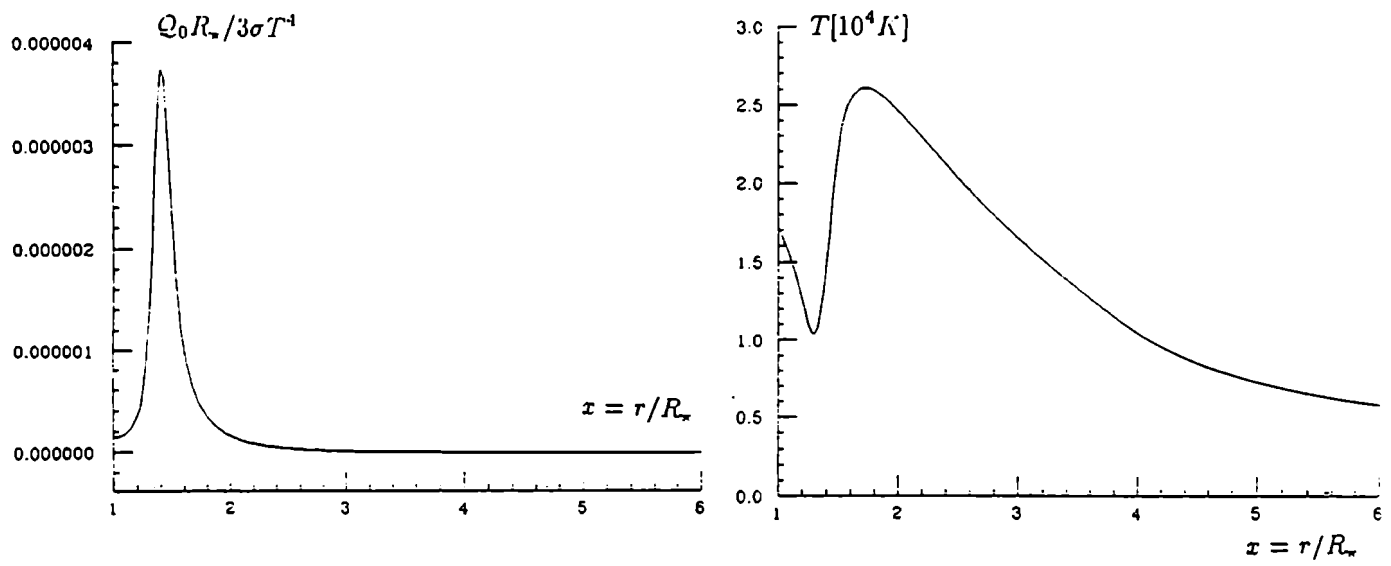


(b)

Figura 25: curvas de energía y perfiles de temperatura. Obsérvese que la tasa de energía entregada al viento es al menos cinco órdenes de magnitud menor que la potencia disipada por la estrella como cuerpo negro. Particularmente interesantes son los perfiles de temperatura (b) y (d), pues ambos ajustan considerablemente las observaciones. Las situaciones (a), (b), (c) y (d) están explicadas en la figura 22.



(c)



(d)

Figura 25: continuación.

Al respecto, cabe mencionar que de los gráficos se desprende que, en general, la velocidad terminal del viento disminuye a medida que aumenta el grado de esfericidad de la atmósfera inicial: esto se debe a que la parte isótropa de la presión está directamente emparentada con la geometría de las capas superiores de la envoltura estelar a través de la distribución de masa. Desde ya que esta parte de la presión total también aumenta (y con ella la velocidad final) con el incremento de la aceleración gravitatoria superficial. En principio, si se comparan las superficies obladas que resultan este formalismo con las superficies proladas que surgen del modelo de Sakurai (1985, de aquí en adelante MS) pareciera que los resultados son contradictorios. En rigor, sólo son diferentes.

El método que hemos utilizado para integrar las ecuaciones es fijar la geometría del campo magnético, dejando libre el valor del índice politrópico γ (exactamente a la inversa del procedimiento MS). Como consecuencia de ello, el flujo másico por unidad de flujo magnético $\Lambda(A)$ pudo suponerse una constante global del problema en nuestro caso, en tanto que es variable en MS ($\Lambda(A)$ crece hacia el ecuador) donde resulta un menor gradiente polar de la densidad de masa. Luego, la presión no se incrementa en forma tan marcada como en nuestro modelo, reflejándose este hecho en un menor aumento polar de la función de Mach-Alfvén (respecto del ecuador) y provocando la forma prolada de las superficies críticas.

Mencionemos, por último, que sería de esperar que las características de nuestro modelo se presenten también cuando el campo magnético se curva adoptando una geometría más complicada. Sin embargo, el problema computacional que se origina excede en mucho el marco de presentación del tema que se ha asignado a este capítulo (aunque se trabaja en él como parte de un programa global de investigación de vientos estelares), razón por la cual pasaremos directamente a estudiar la estabilidad de los modelos que hasta aquí hemos discutido.

IV-EQUILIBRIO Y ESTABILIDAD DE LOS FLUJOS

En los capítulos anteriores hemos tenido oportunidad de discutir en detalle diversos modelos estacionarios de vientos MHD; para ello centramos el interés en diferentes situaciones de equilibrio, estudiando las principales características de los flujos másicos resultantes. Sin embargo, es bien conocido el hecho de que estos mismos flujos pueden modificar significativamente el equilibrio estacionario del plasma toda vez que este sea perturbado; por tal motivo, dedicaremos esta sección al análisis del preponderante papel que juegan en su estabilidad magnetohidrodinámica.

En general, el tratamiento de los equilibrios con flujo es muy limitado si se lo compara con los sistemas estáticos debido, esencialmente, a que la estabilidad de la configuración ya no puede ser analizada utilizando un principio de energía (Bernstein y colegas, 1958) como en el caso de velocidad inicial nula. El problema de autovalores que surge es no lineal y, aún más, el estado de equilibrio queda determinado por ecuaciones que no siempre son elípticas (Grad, 1960; Hameiri, 1983).

Dado que tratamos con un problema que no es autoadjunto, no será posible dar, en general, condiciones que sean a la vez necesarias y suficientes para la estabilidad lineal del plasma. En parte por este motivo, estudiar conjuntamente el amplio espectro de excitaciones lineales de la MHD ideal resulta imposible. Del extenso rango de perturbaciones, es sin embargo interesante el análisis de su parte continua, pues no sólo constituye la porción más sencilla de estudiar analíticamente sino que además permite una rápida aplicación a problemas de interés práctico (por ejemplo, la absorción de energía por resonancias locales en presencia de oscilaciones de baja frecuencia: cfr. por ejemplo, Tataronis y Grossman, 1973).

El espectro continuo magnetohidrodinámico tiene su origen en la existencia de superficies características en las ecuaciones que gobiernan el estado del sistema (tanto en las perturbadas cuanto en las de equilibrio pues, como veremos, son sistemas del mismo tipo). En términos más rigurosos, existe una de tales superficies, a saber, la de normal $\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}$ (donde \mathbf{v} y \mathbf{B} denotan los campos de velocidad y magnético estacionarios, respectivamente) que determina los estados de equilibrio: esta situación no debe resultar llamativa, pues recordemos que la condición de congelamiento que surge de la ecuación (II.3) hace que el flujo másico esté contenido en las superficies de flujo magnético constante (y, lo que es más, es paralelo a éste a menos de la rotación rígida de cada superficie).

Sobre las superficies comunes a los flujos másico y magnético existen modos localizados, que resultan de la interacción de cuatro ondas, dos de Alfvén y dos magnetosónicas lentas, a lo largo de las líneas de fuerza que, en el caso de flujos con simetría de rotación, es lo mismo que decir sobre las isosuperficies de flujo magnético a que hicimos referencia renglones arriba. El espectro resultante es conocido como el continuo de Alfvén y cuspidal; si bien el último tiene su contraparte hidrodinámica, el primero de ellos es genuinamente magnetohidrodinámico y resulta por demás plausible que estos modos se exciten en los vientos estelares. En el caso estático se ha encontrado que es siempre estable (Pao, 1975; Goedbloed, 1975; Hameiri y Hammer, 1979) pero en ciertos equilibrios con velocidad inicial no nula puede devenir inestable (Hellsten y Spies, 1979). Cabe mencionar que además de la posible inestabilidad propia, esta región del espectro continuo puede contener puntos de acumulación de modos inestables discretos conocidos como modos de Mercier (1962).

Si bien una discusión detallada de los aspectos matemáticos del origen del continuo MHD puede hallarse en los trabajos de Hameiri y Hammer (1979) o de Hellsten y Spies (1979), mencionaremos aquí que, de las ocho magnitudes del problema que han sido apartadas del equilibrio, sólo dos de ellas, la presión total perturbada y una componente de la velocidad fluctuante, son diferenciadas *a través* de la superficie característica; las otras seis permanecen *sobre ésta*, de forma tal que el espectro continuo de modos localizados sobre las isosuperficies de flujo puede hallarse resolviendo seis ecuaciones diferenciales ordinarias a lo largo de cada línea de flujo, cada una de ellas caracterizada por una función de flujo, digamos, A . Igualando a cero las variables en la dirección ∇A , los autovalores del sistema determinan el espectro, que resulta continuo cuando A es considerado un parámetro continuo.

Para estudiar la estabilidad lineal de un estado de equilibrio con flujo, habremos de linealizar el sistema de ecuaciones perturbadas alrededor de la solución estacionaria. Para ello escribamos nuevamente aquí las expresiones que gobiernan la evolución de la envoltura estelar.

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \quad (IV.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (IV.2)$$

$$\partial_t \mathbf{B} + \nabla \wedge (\mathbf{v} \wedge \mathbf{B}) = 0 \quad (IV.3)$$

$$\rho [\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v}] = -\nabla P + (\nabla \wedge \mathbf{B}) \wedge \mathbf{B} - \rho g \hat{\mathbf{e}}_r \quad (IV.4)$$

$$P = S \rho^\gamma \quad (IV.5)$$

Los significados de las variables son los mismos que en la sección II, y hemos definido S como una función de la entropía específica; cerramos ahora el sistema de ecuaciones con la expresión

(IV.5), que será luego utilizada como ecuación auxiliar, en la cual $\gamma = C_p/C_v$ representa la constante adiabática. esto es. habremos de trabajar con perturbaciones adiabáticas.

Linealizaremos el sistema (IV.1)-(IV.5) suponiendo que la perturbación tiene una dependencia temporal de la forma $e^{-i\omega t}$. Esto da lugar a una ecuación de autovalores para ω y se sigue que el sistema es estable si el espectro es real.

Si expresamos las variables Eulerianas perturbadas en términos del vector desplazamiento Lagrangiano $\xi(\mathbf{r}, t)$, podemos modificar el principio de Frieman y Rotenberg (1960) de manera tal de introducir el término gravitatorio en las ecuaciones del sistema apartado del equilibrio; de esta forma, resulta

$$\begin{aligned} \rho\omega^2\xi + 2i\omega\rho\mathbf{v} \cdot \nabla\xi = \nabla p_1 - \mathbf{B} \cdot \nabla\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_1 \cdot \nabla\mathbf{B} - \\ - \nabla[\rho\xi(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} - \rho\mathbf{v}(\mathbf{v} \cdot \nabla)\xi] - \frac{GM_\star}{r^2}\hat{\mathbf{e}}_r \nabla \cdot (\rho\xi) \end{aligned} \quad (IV.6)$$

donde hemos definido

$$\mathbf{B}_1 = \nabla \wedge (\xi \wedge \mathbf{B}) \quad (IV.7)$$

$$p_1 = -\gamma P \nabla \cdot \xi - \xi \cdot \nabla P + \mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_1 \quad (IV.8)$$

$$\rho_1 = -\nabla \cdot (\rho\xi) \quad (IV.9)$$

$$\mathbf{v}_1 = -i\omega\xi + \mathbf{v} \cdot \nabla\xi - \xi \cdot \nabla\mathbf{v} \quad (IV.10)$$

como las perturbaciones del campo magnético, de la presión total (cinética más magnética), de la densidad de masa y del campo de velocidades, respectivamente.

Definamos ahora

$$\mathbf{b} = \mathbf{B} \cdot \nabla\xi - \rho\xi \cdot \nabla\left(\frac{\mathbf{B}}{\rho}\right) \quad (IV.11)$$

$$s = \left(\frac{P}{S}\right)\xi \cdot \nabla S \quad (IV.12)$$

de manera tal que las expresiones (IV.7)-(IV.9) puedan expresarse en la forma

$$\rho_1 = \frac{\rho}{\gamma P + \mathbf{B}^2}(s - \mathbf{B} \cdot \mathbf{b} + p_1) \quad (IV.13)$$

$$\mathbf{B}_1 = \left(1 - \frac{1}{\gamma P + \mathbf{B}^2}\mathbf{B}\mathbf{B}\right) : \mathbf{b} + \frac{1}{\gamma P + \mathbf{B}^2}(s + p_1)\mathbf{B} = \mathbf{b} + \frac{\rho_1}{\rho}\mathbf{B} \quad (IV.14)$$

$$p_1 = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla\xi - \xi \cdot \nabla\mathbf{B}) - \xi \cdot \nabla P - (\gamma P + \mathbf{B}^2)\nabla \cdot \xi \quad (IV.15)$$

donde $\mathbf{1}$ es el operador identidad. La ecuación de momentos linealizada se transforma de esta manera en una ecuación cuadrática de autovalores dada por

$$-\rho\omega^2\xi - 2i\rho\omega\mathbf{v} \cdot \nabla\xi + F(\xi) + G(p_1) = 0 \quad (IV.16)$$

donde los operadores $F(\xi)$ y $G(p_1)$, en forma análoga a Hameiri (1983), quedan definidos por las expresiones

$$F(\xi) = \rho \mathbf{v} \cdot \nabla (\mathbf{v} \cdot \nabla \xi - \xi \cdot \nabla \mathbf{v}) + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla \xi - \xi \cdot \nabla \mathbf{v}) \cdot \nabla \mathbf{v} + \hat{\rho}_1 \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{B} \cdot \nabla \hat{\mathbf{B}}_1 - \hat{\mathbf{B}}_1 \cdot \nabla \mathbf{B} - \hat{\rho}_1 \frac{GM_\star}{r^2} (-\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \xi) \quad (IV.17)$$

$$G(p_1) = \nabla p_1 + \frac{p_1}{\gamma p + \mathbf{B}^2} \rho \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \mathbf{B} \cdot \nabla \left(\frac{p_1}{\gamma p + \mathbf{B}^2} \mathbf{B} \right) - \frac{p_1}{\gamma p + \mathbf{B}^2} \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{B} \quad (IV.18)$$

El pico sobre las variables ρ_1 y \mathbf{B}_1 indica que la presión total perturbada p_1 debe ser igualada a cero en las definiciones (IV.13) y (IV.14).

Sin el término gravitatorio, se demuestra (Frieman y Rotenberg, 1960) que $F(\xi) + G(p_1)$ es un operador hermitico, en tanto $\rho \mathbf{v} \cdot \nabla$ es antihermitico respecto de la condición de contorno $\xi \cdot \mathbf{n} = 0$ y del producto interno

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \int \xi_1 \xi_2^* d^3 \mathbf{r}$$

Sin embargo, usando la expresión (IV.15) puede demostrarse (Hameiri, 1983) que

$$\langle G[p_1(\xi)], \xi \rangle = \int \frac{|p_1|^2}{\gamma P + \mathbf{B}^2} d^3 \mathbf{r} \quad (IV.19)$$

Luego, esta forma cuadrática es siempre positiva: en tanto, el operador $F(\xi)$ puede escribirse como

$$\begin{aligned} \langle F(\xi), \xi \rangle = & \int \left\{ \frac{-1}{\rho} |\mathbf{v} \cdot \nabla \xi - \xi \cdot \nabla \mathbf{v}|^2 + Q \hat{\mathbf{B}}_1 \hat{\mathbf{B}}_1^* - \frac{1}{\gamma S} (\xi \cdot \nabla S) (\xi^* \cdot \nabla P) + \right. \\ & + \mathbf{b} \wedge \xi^* \cdot \nabla \wedge \mathbf{B} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla \xi - \xi \cdot \nabla \mathbf{v}) \wedge \xi^* \cdot \nabla \wedge \mathbf{v} - \\ & \left. - \frac{GM_\star}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \xi^* \nabla \cdot (\rho \xi) \right\} d^3 \mathbf{r} \end{aligned} \quad (IV.20)$$

donde Q es un operador definido positivo cuya expresión es

$$Q = 1 + \frac{1}{\gamma p} \mathbf{B} \mathbf{B} \quad (IV.21)$$

y la expresión (IV.20) es válida sólo si la función $\Omega(A)$ es constante sobre cada isosuperficie de flujo (condición que está garantizada en nuestro tratamiento del problema). Utilizando argumentos similares a los de Hameiri y Laurence (1984) puede demostrarse que el operador $F(\xi)$ es hermitico, con lo cual vuelve a serlo la suma $F(\xi) + G(p_1)$ como en el caso en que no se incluye aceleración gravitatoria.

Introduciremos ahora para su posterior utilización el operador Q^{-1} , también definido positivo y determinado por la expresión

$$Q^{-1} = \mathbf{1} - \frac{1}{\gamma p + \mathbf{B}^2} \mathbf{B} \mathbf{B} \quad (IV.22)$$

Como mencionamos al principio de esta sección, el espectro continuo de Alfvén puede obtenerse igualando a cero las variables que están derivadas en la dirección del gradiente de flujo magnético ∇A , es decir, haciendo $p_1 \rightarrow 0$, tomando sólo las componentes de la perturbación ξ que están contenidas en la superficie de flujo magnético constante y considerando solamente las componentes de la expresión (IV.16) que están dentro de la isosuperficie (Hameiri, 1983). Formalmente, este procedimiento consiste en proyectar (IV.16) sobre la superficie $A = \text{constante}$ para obtener una ecuación de autovalores en dicha superficie de la forma

$$P[-\rho\omega^2\zeta - 2i\omega\rho\mathbf{v} \cdot \nabla\zeta + F(\zeta)] = 0 \quad (IV.23)$$

en donde P es un operador de proyección que elimina la componente en la dirección ∇A y ζ es el vector ξ proyectado sobre la superficie de flujo. Como habremos de trabajar sobre la líneas de campo restringiremos consistentemente el producto interno a la forma

$$\langle \zeta_1, \zeta_2 \rangle = \int \zeta_1 \zeta_2^* \frac{d\ell}{|\mathbf{B}|}$$

donde $d\ell$ es el elemento de arco de la línea de campo magnético que estamos considerando.

Ahora bien: puede demostrarse (Hameiri, 1983) que en el caso general en que \mathbf{v} no es paralelo a \mathbf{B} , el operador $F(\zeta)$ no puede ser definido positivo pues es hiperbólico y no elíptico. Sin embargo, esta dificultad puede ser soslayada en los casos que presentan simetría de rotación, pues en éstos es posible alinear los campos localmente sobre cada isosuperficie. Para ello considérese un modo simple de Fourier m , de manera tal que sea $\zeta \propto e^{im\phi}$, y definamos

$$\sigma = \omega - m\Omega \quad (IV.24)$$

En (IV.23) reemplazamos ahora ∂_ϕ por la cantidad im sólo cuando la derivada proviene de los términos $\Omega r \sin \theta \hat{e}_\phi \cdot \nabla$

Obsérvese que esto es formalmente similar a estudiar el sistema desde un marco de referencia que rote en la dirección azimutal con una frecuencia angular Ω . El sistema de ecuaciones (IV.1)-(IV.5) permanece inalterado excepto que ahora la velocidad debe transformarse:

$$\mathbf{v} \rightarrow \mathbf{v} - \Omega r \sin \theta \hat{e}_\phi$$

y, por supuesto, quedarán incluidos los términos correspondientes a las fuerzas centrífuga y de Coriolis que dependen de Ω : en síntesis, hemos alineado localmente los campos de velocidad y magnético sobre cada superficie de flujo.

En términos de σ , la expresión (IV.23) se transforma en

$$P[-\rho\sigma\zeta^2 - 2i\sigma\Upsilon\zeta + F_m\zeta] = 0 \quad (IV.25)$$

donde $\Upsilon = \rho\Omega(\cos\theta, -\sin\theta, 0)\wedge \equiv \rho\Omega \hat{z}\wedge$ es un operador antihermítico y \hat{z} es el vector unitario en la dirección del eje de rotación de la estrella. $F_m(\zeta)$ queda definido por

$$F_m\zeta = F\zeta - 2im\Omega\rho\mathbf{v} \cdot \nabla\zeta - \rho\Omega^2 m^2\zeta \quad (IV.26)$$

Obsérvese que los coeficientes de σ en la ecuación (IV.25) son nuevamente hermíticos, y la estabilidad del sistema queda garantizada toda vez que se verifique $\langle F_m\zeta, \zeta \rangle \equiv \delta W \geq 0$, donde, como es habitual, δW representa la energía potencial perturbada. Luego de un tedioso aunque sencillo manipuleo algebraico, la condición de estabilidad se reduce a la forma

$$\begin{aligned} \langle F_m\zeta, \zeta \rangle = \int \frac{d\ell}{|\mathbf{B}|} \{ [Q\hat{\mathbf{B}}_1]\hat{\mathbf{B}}_1^* - \frac{\Lambda^2}{\rho} |\mathbf{b}|^2 - \frac{GM_\star}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \zeta^* \nabla \cdot (\rho\zeta) - \\ - \frac{1}{\gamma S} (\zeta \cdot \nabla S)(\zeta^* \cdot \nabla P) \} \geq 0 \end{aligned} \quad (IV.27)$$

donde Λ es la función de flujo másico introducida en la sección II a través de la ecuación (II.7) y la integral debe ser evaluada a lo largo de toda la línea de campo.

Analicemos el último término de la expresión (IV.27). Este es responsable de las posibles inestabilidades convectivas. En general, en los modelos que hemos discutido en las secciones anteriores, la entropía del viento crece hacia afuera, pues a medida que aumenta la temperatura la densidad decrece junto con la presión. En este sentido este término se transforma en positivo y, luego, tiene un efecto estabilizador.

Recordemos que no siempre es este el caso: algunos modelos muestran que, en la región próxima a la superficie estelar, el gradiente de presiones es positivo. Sin embargo, si comparamos el término convectivo con el gravitatorio vemos que se verifica

$$\frac{\frac{GM_\star}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \zeta^* \nabla \cdot (\rho\zeta)}{\frac{1}{\gamma S} (\zeta \cdot \nabla S)(\zeta^* \cdot \nabla P)} \sim \frac{V_e^2}{c_s^2}$$

donde V_e y c_s representan la velocidad de escape y local del sonido, respectivamente. Ahora bien, en las estrellas que estamos analizando resulta $\frac{V_e}{c_s} \sim 50 - 100$, con lo cual los efectos del término convectivo son despreciables frente a los de la parte gravitatoria, sobre todo

si tenemos en cuenta que los efectos de esta última son importantes a lo largo de toda la envoltura, en tanto el primero deja sentir sus efectos sólo en la superficie de la estrella.

Esta última observación es muy importante. Los modelos que hemos desarrollado muestran que las fuentes de energía están ubicadas, básicamente, en la fotosfera estelar: dicho de otra manera, más allá de esta región la escala típica de variación de la entropía es mucho mayor que las distancias en las cuales la densidad y la presión cambian en forma apreciable, de manera tal que, con esta consideración y teniendo en cuenta los altos valores relativos de gravedad superficial, podemos tomar $\nabla S \approx 0$ y simplificar la expresión (IV.27). Obsérvese que en este caso resulta $s = 0$ (ecuación (IV.12)) de manera tal que $\hat{\mathbf{B}}_1 = Q^{-1}\mathbf{b}$: en síntesis, la expresión (IV.27) se reduce a la forma

$$\langle F_m \zeta, \zeta \rangle = \int \frac{d\ell}{|\mathbf{B}|} \left\{ [Q^{-1}\mathbf{b}] \mathbf{b}^* - \frac{\Lambda^2}{\rho} |\mathbf{b}|^2 - \frac{GM_\star}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \zeta^* \nabla \cdot (\rho \zeta) \right\} \geq 0 \quad (IV.28)$$

como la condición suficiente de estabilidad para los modos del continuo de Alfvén.

Podemos escribir la expresión (IV.28) en una forma ligeramente distinta, de manera tal de expresar la proyección de la perturbación en componentes paralela y perpendicular a las líneas de campo sobre la superficie de flujo. Para ello, en forma análoga a Hameiri y Laurence (1984), expresaremos la perturbación como $\zeta = \alpha_1 \hat{\eta} + \alpha_2 \varpi$, donde

$$\hat{\eta} \propto \nabla A \wedge \mathbf{B}$$

es un vector normal a \mathbf{B} sobre la superficie de flujo y $\varpi = \mathbf{B}/\rho$. En este nuevo sistema de coordenadas la expresión del campo magnético perturbado resulta en forma inmediata

$$\mathbf{b} = (\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha_1) \hat{\eta} + [\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha_2 + \nabla \cdot (\hat{\eta} \rho) \alpha_1] \varpi \quad (IV.29)$$

y el criterio se reduce a

$$\delta W = \int \frac{d\ell}{|\mathbf{B}|} \left\{ (\beta - M) \frac{B^2}{\rho^2} [\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha_2 + \nabla \cdot (\hat{\eta} \rho) \alpha_1]^2 + (1 - M) |\hat{\eta}|^2 |\mathbf{B} \cdot \nabla \alpha_1|^2 - \frac{GM_\star}{r^2} \hat{\mathbf{e}}_r \cdot (\alpha_1 \hat{\eta} + \alpha_2 \varpi) [\nabla \cdot (\rho \alpha_1 \hat{\eta}) + \mathbf{B} \cdot \nabla \alpha_2] \right\} \geq 0 \quad (IV.30)$$

donde hemos definido

$$\beta = \frac{\gamma P}{\gamma P + B^2}$$

Obsérvese que sin el término gravitatorio el criterio se reduce al familiar resultado de que, en tanto el número de Mach-Alfvén se mantenga menor que β , el continuo de Alfvén es estable (Hameiri, 1983).

Este resultado es de capital importancia en plasmas de laboratorio y algunas aplicaciones a la plasmopausa terrestre (Vinas y Madden, 1986; Bondeson et al. 1987) pero carece de mayor interés cuando se trata de plasmas astrofísicos pues, como hemos visto en los capítulos anteriores, el número de Mach-Alfvén crece indefinidamente y $\beta \rightarrow 1$ en los vientos estelares. En tal caso la integral (IV.30) debe ser evaluada una vez que se dispone de las formas funcionales de $M(r, \theta)$ y $P(r, \theta)$.

Dos aspectos merecen especial atención; en primer lugar, la función de Mach-Alfvén aparece en la expresión (IV.30) como resultado de la existencia de un flujo saliente, esto es, como consecuencia de tomar $\Lambda(A) \neq 0$. En general, el tratamiento de este problema se reduce a los casos de plasmas puramente rotantes (para los cuales es $\Lambda(A) = 0$). Con todo, nuestro interés está centrado en los plasmas con velocidad poloidal no nula, pues estos se manifiestan a lo largo de toda la secuencia evolutiva de la estrella (con excepción, tal vez, de su etapa primigenia), razón por la cual en ningún caso podemos obviar esta consideración.

En segundo lugar, conviene recalcar que si no se verifica la condición $\delta W \geq 0$ no significa que el sistema sea inestable, sino más bien que es probable que existan modos inestables, pues el nuestro es un criterio que ofrece sólo una condición suficiente de estabilidad. Por otro lado, aún cuando para una dada perturbación se verificara (IV.30), sólo podríamos asegurar la estabilidad del sistema frente a esa función de prueba.

En este sentido, la búsqueda de condiciones necesarias y suficientes de estabilidad nos conduciría a la aplicación del método de modos normales, pero este formalismo no sólo recién ahora está comenzando a ser aplicado a equilibrios con flujos (véase por ejemplo Wilson, 1993) sino que además su desarrollo excedería en mucho los contenidos de este capítulo.

Sin embargo, un criterio suficiente de estabilidad nos brinda la oportunidad de estudiar formalmente el rol que juega en la misma cada una de las variables del sistema. Para poder asimismo analizar el efecto de la curvatura de las líneas de campo sobre la estabilidad de la configuración, hagamos la transformación $(r, \theta, \phi) \rightarrow (\alpha, \psi, \phi)$, donde α es la coordenada en la dirección poloidal del campo magnético, ψ marca la dirección del gradiente de flujo magnético y ϕ sigue siendo la coordenada azimutal. El elemento de arco queda ahora definido por

$$ds^2 = h_1^2 d\alpha^2 + h_2^2 d\psi^2 + h_3^2 d\phi^2 \quad (IV.32a)$$

donde

$$h_1^2 = \frac{1}{|\nabla\alpha|^2} = J^2 B_p^2 \quad (IV.32b)$$

$$h_2^2 = \frac{1}{B_p^2 r^2 \sin^2 \theta} \quad (IV.32c)$$

$$h_3^2 = r^2 \sin^2 \theta \quad (IV.32d)$$

siendo $J = h_1 h_2 h_3 = \frac{1}{|\mathbf{B} \nabla \alpha|}$ el Jacobiano de la transformación y B_p es la componente poloidal del campo magnético. La ortogonalidad del sistema impone, además, las relaciones

$$\frac{\partial \theta}{\partial \alpha} = -\frac{h_2}{h_1} \frac{\partial r}{\partial \psi} \quad (IV.33a)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \psi} = \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial r}{\partial \alpha} \quad (IV.33b)$$

Por un simple cambio del sistema de coordenadas resulta en forma casi inmediata la relación entre \hat{e}_α y los versores de la base esférica

$$\hat{e}_\alpha = \frac{2 \cos \theta}{\sqrt{(q^2 - 4) \sin^2 \theta + 4}} \hat{e}_r - \frac{q \sin \theta}{\sqrt{(q^2 - 4) \sin^2 \theta + 4}} \hat{e}_\theta \quad (IV.33c)$$

En términos de las nuevas coordenadas, las componentes de la perturbación del campo magnético sobre la superficie serán

$$b_\alpha = (\mathbf{B} \cdot \nabla - A_{\alpha\alpha}) \zeta_\alpha \quad (IV.34a)$$

$$b_\phi = (\mathbf{B} \cdot \nabla - A_{\phi\phi}) \zeta_\phi + (B_\phi \zeta_\alpha - B_\alpha \zeta_\phi) \frac{h_2}{J} \partial_\alpha h_3 \quad (IV.34b)$$

donde hemos definido

$$A_{\alpha\alpha} = \frac{\rho}{h_1} \partial_\alpha \left(\frac{B_\alpha}{\rho} \right) \quad (IV.35a)$$

$$A_{\phi\phi} = \frac{\rho}{h_1} \partial_\alpha \left(\frac{B_\phi}{\rho} \right) \quad (IV.35b)$$

En estas condiciones, el criterio (IV.30) se reduce a

$$\begin{aligned} \delta W = \int \frac{d\ell}{|\mathbf{B}|} \{ (\beta - M) (|b_\alpha|^2 + |b_\phi|^2) + \Gamma |B_\phi b_\alpha - B_\alpha b_\phi|^2 - \\ - \frac{GM_\star}{r^2} (\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\alpha) \zeta_\alpha^* \nabla \cdot (\rho \zeta) \} \geq 0 \end{aligned} \quad (IV.36)$$

donde Γ está definida como

$$\Gamma = \frac{1}{\gamma P + B^2}$$

En lo que sigue, y sin pérdida alguna de generalidad, habremos de trabajar con perturbaciones incompresibles, de forma tal que $\nabla \cdot \zeta = 0$ y la expresión (IV.36) puede ser reducida si tenemos en cuenta que en todos los modelos que hemos analizado en las secciones previas

la densidad es una función monótona decreciente sobre una línea de campo. De tal forma, resulta

$$\delta W = \int \frac{d\ell}{|\mathbf{B}|} \{(\beta - M)(|b_\alpha|^2 + |b_\phi|^2) + \Gamma|B_\phi b_\alpha - B_\alpha b_\phi|^2 + \frac{GM_\star}{r^2}(\hat{e}_r \cdot \hat{e}_\alpha)|\zeta|^2 \frac{\partial_\alpha \rho}{h_1}\} \geq 0 \quad (IV.37)$$

En (IV.37) hemos usado el hecho de que la derivada azimutal de la densidad es nula y ζ no tiene componente en la dirección \hat{e}_ϕ . De esta manera, el último sumando es positivo, aleja de la superficie estelar el punto en el cual el integrando puede hacerse negativo y, luego, tiende a estabilizar la configuración. El comportamiento estabilizador de este término se debería a que la energía inyectada al plasma en la fotosfera es necesaria para vencer la barrera de potencial gravitatorio; cuanto mayor sea este potencial menor sería la cantidad de energía libre que quedaría disponible para excitar inestabilidades, como resulta del hecho de que el punto donde se anularía el integrando se desplaza al infinito con el aumento de la masa estelar. El integrando es una función que decae rápidamente con la distancia, y dado que la integral debe ser evaluada a lo largo de toda una línea de campo, los altos valores relativos de gravedad superficial de las estrellas B ($\log g_{sup} \sim 4$) garantizarían la estabilidad de la estructura.

Notemos de paso que cuando el campo es curvado la función de Mach-Alfvén $M(x)$ crece en forma más lenta y la componente poloidal del campo magnético decae más lentamente, de manera tal que el gradiente de densidad sobre una línea es más marcado y el efecto neto es un corrimiento hacia afuera del punto en el cual la integral puede hacerse negativa. es decir, la curvatura del campo magnético tiene también un efecto estabilizador sobre la configuración para los modos que estamos analizando.

Para analizar la contribución de la rotación a la estabilidad, regresemos al problema de campos magnéticos puramente radiales (esto es, tomaremos $q = 0$, que inmediatamente lleva a $\alpha \equiv r$). Dentro de este contexto, propongamos como función de prueba

$$\zeta = \frac{\zeta_0 g(\theta)}{r^2} e^{im\phi} (1, 0, 0) \quad (IV.38)$$

La función $g(\theta)$ es en principio arbitraria; es inmediato que la perturbación es incompresible y resulta

$$\delta W = \int \frac{d\ell}{|\mathbf{B}|r^6} |\zeta_0|^2 g^2(\theta) \{(\beta - M)[(2B_r + r\rho\partial_r \frac{B_r}{\rho})^2 + B_\phi^2(1 + \frac{m^2}{\sin^2 \theta})] + \Gamma[(B_\phi(3B_r + r\rho\partial_r \frac{B_r}{\rho}))^2 + (m\frac{B_\phi^2}{\sin \theta})^2] + GM_\star|\partial_r \rho|\} \geq 0 \quad (IV.39)$$

Ahora bien: la expresión (II.21) para la componente azimutal del campo magnético dice que ésta puede escribirse como $f(r)\sin\theta$, donde $f(r)$ es una función negativa. Si ahora analizamos el comportamiento de la integral (IV.39) en el polo, vemos que la condición de estabilidad puede ser escrita como

$$m^2 \leq \frac{I_1}{I_2} \quad (IV.40)$$

donde las integrales I_1 e I_2 están definidas por

$$I_1 = \int \frac{d\ell}{|\mathbf{B}|r^6} |\zeta_0|^2 g^2(\theta) [GM_\star |\partial_r \rho| - (M - \beta)(2B_r + r\rho \partial_r \frac{B_r}{\rho})^2] \quad (IV.41)$$

$$I_2 = \int \frac{d\ell}{|\mathbf{B}|r^6} |\zeta_0|^2 g^2(\theta) (M - \beta) f^2(r) \quad (IV.42)$$

Las configuraciones más estables serán aquellas que permitan que el número de onda m sea más grande; en este sentido, cuanto menor sea el valor absoluto de la componente B_ϕ más estable será el sistema; recordemos que un decremento del valor de la componente azimutal del campo magnético conduce a un aumento del valor de v_ϕ (como puede deducirse de la expresión (II.30), teniendo en cuenta que $f(r)$, y luego B_ϕ , es negativa y $L(A)$ es una función definida positiva) de manera tal que hallamos que el aumento de velocidad rotacional tiene efecto estabilizador sobre el plasma, resultado este que está de acuerdo con el sugerido por Hameiri y Chun (1990).

Por otro lado, mencionemos que en todos los casos que hemos analizado la integral (IV.41) es positiva debido, como ya hemos mencionado, a los valores de gravedad relativamente altos de las estrellas que estudiamos. Asimismo, los modelos que introducen la anisotropía en la densidad de masa a través de la función de Mach-Alfvén tienden, dentro de las restricciones impuestas por el modelo, a ser más estables, debido fundamentalmente a la menor aceleración inicial impuesta por $M(x, \theta)$ (véase el capítulo III).

Por último, debemos recalcar que bien vale la pena el esfuerzo por hallar condiciones de estabilidad que sean a la vez necesarias y suficientes para analizar los equilibrios con expansión y rotación. En este sentido, este capítulo deja abierto el tema para futuras investigaciones que permitan una comprensión más detallada del problema de la estabilidad en los vientos estelares.

V-COMENTARIOS Y DISCUSION DE LOS RESULTADOS

A través de los capítulos anteriores hemos tenido oportunidad de estudiar diferentes características de los vientos magnetohidrodinámicos, colimados y con simetría axial; para ello hemos fijado la geometría del campo magnético y hallamos *a posteriori* la termodinámica del viento que es consistente con aquella configuración. La elección de este camino no es arbitraria; la forma de las líneas de campo está fenomenológicamente sugerida no sólo por un amplio conjunto de observaciones sino también por la dinámica misma de la atmósfera estelar en estudio.

Tradicionalmente se ha sugerido que el campo magnético de las estrellas B fuera de la región ecuatorial está constituido por una componente radial y una azimutal (Sakurai, 1985; Tsinganos y Trussoni, 1990); en este trabajo hemos incluido en la función flujo magnético un término que crece logarítmicamente con la distancia radial; de esta manera se introduce una componente polar en los campos. el viento colima hacia el polo y está dentro del contexto del teorema de Heyvaerts y Norman (1989) que asegura que todo viento magnetizado y con simetría azimutal debe colimar en la dirección del eje de rotación. Por otro lado, incluye adecuadamente las soluciones autoconsistentes de Sakurai (1985) obtenidas para rotadores lentos.

La dificultad adicional en el tratamiento matemático del problema se ha soslayado en parte representando los términos constante y logarítmico de la función flujo magnético por una única función de la forma kx^q . Obsérvese que si bien nuestro interés radica en los valores comparativamente pequeños del parámetro q (pues son éstos los adecuados para la representación mencionada), hemos extendido el tratamiento de manera de incluir todo el rango de valores que le son permitidos ($0 \leq q < 2$); de esta forma fue posible analizar en detalle las características esenciales de un plasma que se expande congelado a un campo magnético curvo.

Justamente, uno de los resultados obtenidos es que dentro de este contexto teórico la curvatura del campo no puede superar un cierto valor límite. En rigor, el parámetro de curvatura q puede tomar valores arbitrariamente próximos al límite superior sólo en el caso de densidad esféricamente simétrica y rotación nula. Toda vez que esta simetría es modificada, se verifica un aumento de presión (necesario para sustentar columnas de plasma ecuatoriales más densas) que sumado al efecto de angostamiento del canal polar de flujo provoca una continua aceleración del viento; si el valor de q es suficientemente elevado esta aceleración

no puede ser compensada por la fuerza gravitatoria (que decrece más rápidamente que el gradiente de presión) y el plasma alcanzaría velocidades terminales arbitrariamente grandes.

Este resultado no hace más que poner de manifiesto que en nuestro tratamiento el campo magnético no gobierna al viento sino en forma indirecta (a través de la fuerza de Lorentz). No hemos incluido en el formalismo mecanismos que sean capaces de contribuir en el balance energético (calentamiento resistivo, o propagación y disipación de ondas magnetohidrodinámicas, por ejemplo) de manera tal que el campo magnético sólo fija los tubos de flujo por los que el plasma se expande. Por supuesto, la dinámica del problema se modifica sustancialmente con la geometría del campo.

En primer lugar, hemos visto que dado un conjunto de valores iniciales del resto de las variables, existe un único valor inicial de la presión $\Pi_2(x)$ que permite una solución tipo viento; esta característica obedece sólo a la curvatura del campo pues, a diferencia de un campo radial, esta parte de la presión no sólo debe compensar la componente polar de la fuerza de Lorentz, sino que además debe brindar el empuje necesario para que un elemento de fluido permanezca sobre una línea de campo magnético.

Por otro lado, la existencia de una componente radial de la fuerza de Lorentz modifica el balance de fuerzas ecuatorial y, con éste, la evolución del flujo a través de toda la atmósfera estelar. El análisis realizado en la subsección IIa permitió poner de manifiesto estas propiedades, en particular el hecho de que la velocidad poloidal no muestra el comportamiento monótono decreciente que presenta en el caso de campos radiales. Más aún, como la energía interna del plasma no es enteramente absorbida por la expansión, hemos visto que muy lejos de la superficie estelar la temperatura también se eleva.

Este comportamiento está íntimamente relacionado con la energía inyectada al viento en la base; recordemos que en todos los casos hemos adoptado valores de los parámetros estelares que permitan que la función $Q(x, \theta)$ sea positiva. Al respecto, algunas consideraciones merecen ser mencionadas.

Si bien existen mecanismos físicos que posibilitarían un enfriamiento inicial del plasma (enfriamiento radiativo, por ejemplo) resulta en principio más plausible que el viento se expanda por efecto de una fuente de calor colocada en la región fotosférica que no por un sumidero que drene parte de la energía inicial del viento. En rigor, no se trató de una elección arbitraria; una vez que las ecuaciones dinámicas fueron resueltas, hemos regresado a la ecuación de energía para preguntarnos cuál es la distribución de fuentes capaz de sostener

aquel flujo. Como hemos tenido oportunidad de discutir, existe una relación entre la velocidad radial y la de escape que determina la cantidad de calor entregada al viento y, en cada caso, los perfiles de temperatura que se obtienen en las cercanías de la superficie estelar pueden ser contrastados con las observaciones.

De esta manera hemos encontrado que una distribución de fuentes positivas en la base del viento es la que mejor ajusta las curvas de temperatura, aunque los mecanismos que pueden dar origen a esta distribución no forman parte del modelo. Obsérvese, con todo, que la función $Q(x, \theta)$ no se extiende, en general, más allá de la región fotosférica, hecho este que sugiere que los mecanismos de calentamiento provienen de la región interna de la estrella. La elección de valores positivos de $Q(x, \theta)$ sólo es posible para valores de $V = V_e/v_{r_0}$ próximos a la unidad (recordemos que V_e y v_{r_0} se refieren a la velocidad de escape y a la velocidad radial en la base de la fotosfera, respectivamente). En principio, y en base a las observaciones disponibles, este valor de velocidad inicial es comparativamente elevado para el grupo de objetos que hemos analizado; pero no debiera llamar la atención que el ajuste de las restantes variables deba realizarse a expensas de la energía inicial de expansión, toda vez que en la subsección IIa no hemos considerado aún el efecto de la rotación.

De la misma forma, los valores de temperatura inicial cuando no se incluyen los términos de rotación en las ecuaciones, resultan comparativamente elevados. En general, esto ocurre siempre que los valores iniciales del número de Mach-Alfvén esféricamente simétrico son mayores que la unidad. Cuando esta simetría es dejada de lado, aún los flujos inicialmente superalfvénicos reproducen adecuadamente los perfiles de temperatura.

En todos los casos analizados hasta el capítulo III hemos hallado que la variación angular de la energía añadida al viento es tal que se maximiza en las regiones donde el flujo másico es máximo. Este hecho no debe resultar llamativo, pues al tratar con superficies alfvénicas esféricamente simétricas la distribución de energía cinética poloidal en la base resulta isótropa. Más adelante retornaremos sobre este punto, para recalcar ahora que en este tipo de configuraciones la asimetría en el perfil de densidad debe ser introducida a través del parámetro de asimetría jK .

La primera consecuencia de que este parámetro sea no nulo es que el punto de Mach-Alfvén puede desplazarse hacia la región del viento, esto es, el flujo puede ser inicialmente subalfvénico. Pero las superficies alfvénicas no son singulares, en el sentido de que todas las soluciones pasan a través de ella con regularidad. La existencia de un punto singular en la región externa al punto de Mach-Alfvén es la que garantiza una solución única tipo viento. Pudiera parecer sorprendente que, en principio, no aparezca el punto magnetosónico lento

como singularidad de las ecuaciones. En rigor, este comportamiento se debe a que hemos adoptado un índice politrópico variable con la posición a lo largo de toda la atmósfera y, en consecuencia, carece de sentido definir la velocidad del sonido en toda la envoltura. De hecho, la velocidad del flujo en el punto singular externo no coincide con ninguna velocidad característica del plasma.

Cuando se trata el caso de vientos rotantes, tanto el valor inicial del número de Mach-Alfvén cuanto el de la velocidad de rotación afectan en forma determinante el valor de la velocidad terminal. En efecto, el balance ecuatorial de fuerzas incluye ahora la fuerza centrífuga, y a la fuerza de Lorentz debe agregarse la contribución debida a la componente azimutal del campo magnético. Dado que estas contribuciones son positivas y la velocidad radial es nula en el ecuador, el efecto neto es una disminución en el valor de la parte isótropa de la presión, provocándose así una disminución de la velocidad final del viento respecto a los casos sin rotación.

Esta velocidad, con todo, a grandes distancias de la estrella diverge logarítmicamente como en los casos sin rotación. Sin embargo, dos aspectos son de importancia. En primer lugar, hemos discutido la posibilidad de que el flujo se torne turbulento en puntos alejados de la superficie, modificando de esta manera el transporte de momento y el crecimiento arbitrario de la energía cinética.

Si bien un tratamiento completo del problema excedería por mucho los alcances de la subsección IIc, en ésta hemos introducido fuerzas disipativas dentro del marco de la teoría de la longitud de mezcla ("mixing length"); este formalismo mostró que el crecimiento de los perfiles de velocidad y temperatura queda automáticamente inhibido cuando los coeficientes de viscosidad turbulenta son tenidos en cuenta. En rigor, el procedimiento consistió en introducir una fuerza *ad hoc* y luego compararla con fuerzas turbulentas; el resultado concreto es que si se partiera de la teoría de la "mixing length" arribaríamos a resultados similares.

Pero aún si no consideráramos el apartamiento del régimen laminar, podríamos permitir el crecimiento de las variables dinámicas a condición de que sus valores permanezcan dentro de valores físicamente plausibles, esto es, si podemos garantizar que lejos de la estrella el modelo no entra en contradicción con las observaciones. Para tener una idea concreta, en los casos con rotación que hemos estudiado, en puntos alejados de la superficie estelar la función de Mach-Alfvén crece como $M(x) = \psi(\ln x)^{1/3} x^{1.9}$ y la velocidad radial como $\psi(\ln x)^{1/3} x^{0.1}$, siendo ψ una constante. Para $M_0 = 10^{-2}$ y $x = 10^8$ encontramos $v_r \approx 280 V_{r_0}$, siendo $V_{r_0} \sim 10 \text{ km/seg}$. Si estas consideraciones las aplicáramos al Sol, $10^8 R_\odot$ representa la distancia a α Centauri, la estrella más cercana.

Todos estos análisis se han realizado sobre la hipótesis de superficies alfvénicas esféricamente simétricas. Como ya hemos dicho, la dependencia con la colatitud se introdujo a través del parámetro de asimetría de masa jK , manteniendo isótropa la distribución de energía cinética poloidal en la base del viento. Como mencionamos en el capítulo III, la anisotropía en la distribución de masa permanece congelada al flujo, de forma tal que el viento tiende al infinito conservando cierta memoria de su origen. Desde ya que la isotropía a gran escala no se vería modificada por esta razón, pero no es menos cierto que sería esperable que a grandes distancias el viento se torne isótropo, tal cual sugieren las observaciones de algunos objetos astrofísicos (nebulosas planetarias, estrellas Wolf-Rayet, etc).

Por este motivo hemos cambiado el enfoque tradicional y trasladamos la anisotropía a la función de Mach-Alfvén. De esta manera se elimina un parámetro libre (el de asimetría de masa) pensando la función de flujo másico como una constante global del problema.

Con este formalismo, en un primer paso aplicado a campos radiales, hemos hallado que las superficies alfvénicas pueden originalmente ser oblatas y tender asintóticamente a la esfericidad. Este punto es de importancia, toda vez que modifica el valor de la pérdida de masa de la estrella, tornándola más baja que lo que predicen los modelos anteriores y modificando de esta forma los tiempos característicos de evolución.

Por otro lado, la dinámica del viento cambia también en forma sustantiva. En particular, el modelo predice el aumento de la velocidad terminal del viento con la rotación, a diferencia del caso de superficies de Alfvén isótropas en el que la situación es inversa. Esto se debe fundamentalmente a la presencia de un término anisótropo ecuatorial en la función $M(x, \theta)$, que provoca un indirecto aumento de la presión isótropa debido al aumento de la columna de plasma en el ecuador.

Además, debemos hacer hincapié en dos aspectos fundamentales; en primer lugar, la velocidad terminal del viento del modelo anisótropo no diverge al infinito y, lo que también es importante, la cantidad de energía inyectada al viento resulta menor que en el caso isótropo. Si bien estos resultados fueron desarrollados para vientos originalmente radiales y superalfvénicos, es de esperar que su aplicación a campos curvos conduzca de la misma manera a resultados igualmente alentadores.

Debemos recordar que la discrepancia de la geometría de las superficies de Mach-Alfvén respecto de la que resulta de la integración autoconsistente de Sakurai (1985) se debe, fundamentalmente, al enfoque diferente que se hace del problema. En nuestro caso hemos fijado la geometría del campo magnético y no permitimos que las líneas se curven;

para ello hemos debido dejar libre el índice politrópico γ , transformándolo en una función de la posición (con lo cual carece de sentido hablar de velocidades características del fluido).

Por otro lado, hemos trabajado con flujos inicialmente superalfvénicos, con lo cual la superficie donde $M = 1$ queda, al igual que las otras "superficies críticas", dentro de la estrella. Fijar la geometría del campo es fijar el valor del flujo másico por unidad de flujo magnético $\Lambda(A)$, y esto se traduce en un marcado aumento de la densidad de masa hacia el ecuador (a diferencia del modelo de Sakurai, 1985, donde $\Lambda(A)$ crece hacia el ecuador junto con el valor de la función de Mach-Alfvén y el gradiente de densidad másica es leve). Por otro lado, la componente radial de la densidad de fuerza magnética $\mathbf{J} \wedge \mathbf{B}$ es negativa y crece con la rotación, llevando a un fuerte incremento de la presión ecuatorial para mantener en equilibrio estático esta región.

Aún cuando la participación en el valor de la presión total de $\Pi_2(x)$ aumenta con la rotación, el incremento de $\Pi_1(x)$ es muy marcado, resultando en una más efectiva aceleración polar del flujo (pues, recordemos, en esta región el balance de fuerzas está determinado tan solo por el gradiente de presión isotropa y la fuerza gravitatoria). En las regiones próximas al ecuador, por el contrario, el mismo régimen debe posponerse hasta distancias mayores, resultando de esta manera la geometría oblada de las superficies.

Finalmente, vale la pena hacer algunos comentarios sobre la estabilidad de todos estos modelos. En el capítulo IV hemos discutido las posibles inestabilidades que podrían surgir en los plasmas en expansión sujetos a rotación y fuerte atracción gravitatoria. Hasta donde sabemos, este es el primer intento en tal sentido.

Si bien no hemos agotado la búsqueda de los posibles modos que pudieran dar lugar a inestabilidades, el tratamiento es suficientemente amplio en lo que a perturbaciones localizadas sobre las isosuperficies de flujo respecta. Por otro lado, vale la pena recordar aquí que en el desarrollo que nos permitió arribar a la expresión (IV.30) adoptamos $\gamma = C_p/C_v$ para las perturbaciones adiabáticas, esto es, no modificamos las fuentes de energía.

Mencionemos también que el criterio al que arribamos sólo brinda condiciones suficientes de estabilidad. Este punto es de importancia pues no permite asegurar que un dado modelo sea o no linealmente inestable frente a una perturbación dada. Lo que sí permite es analizar las condiciones más favorables de estabilidad, y estudiar el papel que dentro de la estabilidad del plasma juega cada una de las variables dinámicas.

En este sentido, esta parte del trabajo debe ser considerada como el primer intento de un estudio más profundo que no sólo permita ampliar nuestro conocimiento sobre los

vientos estelares, sino que además nos permita dilucidar qué condiciones iniciales debieran verificarse para que, en forma más segura, nuestros modelos ajusten las observaciones. Por lo demás, creemos que bien vale el esfuerzo de extender los formalismos y los resultados obtenidos en este trabajo a configuraciones magnéticas que, aunque más complicadas, nos permitan acceder a situaciones más realistas.

REFERENCIAS

- Abbott. D.C: 1978: Ap.J. **225**, 893
- Adams. W.S; MacCormack. K.E: 1935: Ap.J. **81**, 119
- Allen, C.W; 1973: Astrophysical Quantities, tercera edición, Atholon Press
- Arnaud, M; Rothenflug, R; 1985: Astron.Astrophys.Suppl, **60**, 425
- Barkhudarov, M; 1991: Solar Phys, **135**, 131
- Belcher. J.W; MacGregor. K.B: 1976: Ap.J. **210**, 498
- Bernstein. I.B; Frieman, E.A; Kruskal, M.D; Kulsrud, R.M; 1958: Proc.R.Soc.London Ser.A. **224**, 1
- Beskin. V.S; Gurevich. A.V; Istomin. Ya.N; 1986: Soviet Phys.Usp. **29**, 946
- Bondeson. A; Iacono. R; Bhattacharjee. A: 1987: Phys.Fluids. **30**, 2167
- Borra.E.F; Landstreet, J.D: 1977: Ap.J, **212**, 141
- Braginskii, S.I; 1965: Rev.Plasma Phys, **1**, 205
- Cannon. M; Thomas. R.N: 1977: Ap.J. **211**, 910
- Canuto. V.M: 1992: Ap.J. **392**, 218
- Casinelli. J.P: 1979: Ann.Rev.Astron.Astrophys. **17**, 275
- Castor. J.L; Abbott. D.C; Klein. R.I: 1975: Ap.J. **195**, 157
- Castor. J.L; Abbott. D.C; Klein. R.I: 1976: en Physique des Mouvements dans les Atmospheres Stellaires: ed R.Cayrell, M.Steinberg; París, Cent.Nat.Reach.Sci, pág 453.
- Catalá. C: 1988: Astron.Astrophys. **193**, 222
- Corbelli. E; Torricelli-Ciamponi: G: 1990: Phys.Fluids B, **2**, 828
- Cox,J.P; Giuli, R.T: 1968: Principles of Stellar Structure, Gordon and Breach
- Cuntz, M: 1987: Astron.Astrophys. **188**, L5
- Cuntz, M; Hartmann. L; Ulmschneider, P; 1989: en Circumstellar Matter. Proc.IAU Symp.122
- Chiuderi, C; Pietrini, P; Torricelli-Ciamponi, G; 1989: Ap.J, **339**, 70
- Chiueh, T.Li Z-Y; Begelman, M; 1991: Ap.J, **377**, 462
- Deutsch, A.J; 1956: Ap.J, **123**, 210
- Dryer, M; 1991; Solar Phys. **132**, 353
- Frieman, E; Rotenberg. M; 1960: Rev.Mod.Phys, **32**, 898
- Friend, B.B; MacGregor, K.B; 1984: Ap.J, **282**, 591
- Glagolevskij. Yu.V; Klochkova, V.G; Kopylov, I.M; 1986: en Upper Main Sequence Stars

- with Anomalous Abundances, ed. Cowley, D.Reidel Publishing Company, pág.29.
- Goedbloed. J.P: 1975: Phys.Fluids. **18**. 1258
 - Grad. H: 1960: Rev.Mod.Phys. **32**. 830
 - Hagen. E: 1978: Ap.J.Suppl. **38**. 1
 - Haish, B: Linski. J: Basri. G: 1980: Ap.J. **235**. 519
 - Hameiri, E: 1983: Phys.Fluids, **26**, 230
 - Hameiri, E: Chun, S.T; 1990: Phys.Rev. A, **41**, 1186
 - Hameiri. E: Hammer. J.H; 1979: Phys.Fluids, **22**. 1700
 - Hameiri. E: Laurence, P; 1984: J.Math.Phys. **25**. 396
 - Hartmann. L: Avrett. E: 1982: Smithsonian Special Reports, **293**
 - Hartmann. L: MacGregor. K.B: 1980: Ap.J. **242**. 260
 - Hearn, A.G; 1975: Astron.Astrophys, **40**. 355
 - Heyvaerts. J; Norman. C.A; 1989: Ap.J, **347**, 1055
 - Holzer, T.E: 1979: en Solar System Plasma Physics, vol I, ed. E.N.Parker, C.F.Kennel y L.J.Lanzerotti. Amsterdam- North Holland.
 - Hu, Y.Q; Low. B.C; 1989: Ap.J, **342**, 1049
 - Jefferies. J: 1968: Spectral Line Formation. Waltham Mas Blaisdel.
 - Krall, N.A: Trievelpiece, A.W: 1973: Principles of Plasma Physics, McGraw-Hill Book Company
 - Kuperus. M: 1965: Rech.Astron.Obs.Utrecht, **17**, 1
 - Lakhina. G.S: Mond, M; Hameiri, E: 1990a: J.Geophys.Res. **95**, 4007
 - Lakhina. G.S; Hameiri. E; Mond, M; 1990b: J.Geophys.Res, **95**. 10441
 - Lamers, H.G.J.L.M; Morton, D.C: 1976: Ap.J.Suppl, **32**, 715
 - Lamers, H.G.J.L.M; Rogerson, J.B; 1978: Astron.Astrophys, **66**, 417
 - Lamers, H.G.J.L.M; Snow, T.P; 1978: Ap.J, **219**, 504
 - Long, K.S; White. R.L; 1980: Ap.J, **239**, L65
 - Low, B.C; Tsinganos, K; 1986: Ap.J, **302**, 163
 - Lucy, L.B; Solomon, P.M; 1970: Ap.J. **159**, 879
 - Marlborough, J; Zamir, M; 1975: Ap.J. **195**, 145
 - Mercier, C; 1962: Nucl.Fusion Suppl, **2**, 801
 - Mestel, L; Selley, C.S; 1970: M.N.R.A.S, **149**, 197
 - Mihalas, D; Conti. P; 1980: Ap.J, **235**, 515

- Monaghan, J.J; Robson, K.W; 1971: M.N.R.A.S, **155**, 231
- Morton. D.C; 1967: Ap.J, **150**. 535
- Morton. D.C; Jenkins. E.B; Brooks. N.H; 1969: Ap.J. **195**. 145
- Mullan. D.J; 1980: Smithsonian Astrophys.Obs.Spec.Rep. **389**, 189
- Nariai, K; 1969: Astrophys.Space Sci. **3**, 150
- Nerney, S; 1980: Ap.J, **242**, 723
- Pao, Y.P; 1975: Nucl.Fusion, **18**, 621
- Panagia. N; Macchetto, F; 1981: en Proc.IAU Coll 59. ed C.Chiosi y R.Stalio, Dordrecht Reidel, pág 173
- Parker, E.N; 1958: Ap.J, **128**. 664
- Parker. E.N; 1965: Ap.J. **139**. 93
- Poe. C.H; Friend. D.B; 1986: Ap.J. **311**. 317
- Pneumann. G.W; Kopp. R.A; 1972: Solar Phys, **18**. 258
- Praderie. F; 1970: en Spectrum Formation in Stars with Steady State Extended Atmospheres, ed H.P.Groth y P.Wellman, NBS Spec.Publ. N332
- Praderie. F; 1973: en Stellar Chromospheres, ed. S.D.Jordan y F.H.Avrett. NASA Sp.Publ. SP 317, pág 79.
- Prandtl, L; 1925: Zs.Angew.Math.Mec. **5**. 136
- Ray, A; 1980: Phys.Fluids, **23**. 898
- Rieke. G; Rieke, M; 1989: Ap.J, **344**, L5
- Ringuelet, A.E; Rotstein. N.O; 1990: Proceedings of the ESO Workshop on O and B Stars. Munich, Alemania.
- Rodi, W; 1984: Turbulence Models and their Application in Hydraulics. A State of Art Review IAHR. The Netherlands.
- Rotstein, N.O; Ringuelet, A.E; 1988: Symp.XXV Aniv. of the Cerro Tololo IAU Observatory, ed.M.Blanco y M.Phillips, pág 364.
- Sakurai, T; 1985: Astron.Astrophys, **152**, 121
- Sakurai, T; 1990: Computer Physics Report, **12**, 247
- Schatzman, E; 1962: Ann.Astrophys, **25**, 18
- Schlichting, H; 1969: Boundary Layer Theory, McGraw-Hill Book Company.
- Sheeley, N; Wang, M; 1991: Solar Phys, **134**, 187
- Snow, T.P; Morton. D.C; 1976: Ap.J.Suppl, **32**, 429
- Spitzer, L; 1939: Ap.J, **90**, 494

- Stalio, R;1985: Relations Between Chromospheric-Coronal Heating, ed. R.Stalio y M.Zirker.
Stepien. K: 1978: Astron.Astrophys, **70**, 509
- Tamano. T: 1991: Solar Phys. **134**. 187
- Tataronis. J.A: Grossmann, W: 1973: Z.Phys. **261**. 203
- Thomas. R.N: 1973: Astron.Astrophys, **29**, 297
- Thomas, R.N; 1983:Stellar Atmospheric structural Patterns, NASA Sp. Publications, NASA SP 471
- Tsinganos, K: 1982: Ap.J, **252**. 775
- Tsinganos. K: Trussoni, E; 1990: Astron.Astrophys. **231**. 270
- Uchida. Y: 1985: en The Origin of Nonradiative Heating/Momentum in Hot Stars. NASA CP 2358. ed.A.Underhill y A.Michalitsianos. pág 199.
- Ulmschneider. P: 1967: Z.Astrophys. **67**. 193
- Underhill. A: Doazan, V: 1982: B Stars With and Without Emission Lines, NASA Sp.Publ, SP 456
- VinasA.F: Madden. T.R: 1986: J.Geophys.Res. **91**. 1519
- Watanabe. J; 1991: Solar Phys, **132**, 397
- Weber, E.J; Davies. L: 1967: Ap.J, **148**, 217
- Zeldovich. Ya.B: Ruzmaikin, A.A; Sokoloff, D.D: 1990: Magnetic Fields in Astrophysics, Vol.3. Gordon and Breach.

*...que lo que el árbol tiene de florido
vive de lo que tiene sepultado*
F.L.Bernárdez

PALABRAS FINALES

Desarrollarse solo en la vida es una tarea por demás difícil. Sospecho que en mi caso hubiera sido redondamente imposible.

Constituye para mí un esfuerzo mayúsculo tratar de imaginar qué hubiera sido de este trabajo sin la colaboración de la Dra.Costa.y el Lic.El Hasi, sin el encuadre persistente del Dr.Ferro Fontán o los jugosos comentarios del Dr.Gómez.

No puedo tampoco imaginar el curso que hubiera seguido sin el amor con que mi familia soportó (en sus dos acepciones) esta tarea.

Estoy convencido que quienes estudiamos Física tenemos el raro privilegio de poder disfrutar dos veces de la Naturaleza: una vez contemplándola, otra interpretándola. Quiero recordar aquí a los que me inculcaron esta forma de ver la Ciencia.

Con toda esta gente y mucha más siento que tengo una enorme deuda. Ojalá haya aprendido algo más que a resolver ecuaciones como para poder pagarla algún día.

INFORME SOBRE LA TESIS DOCTORAL PRESENTADA POR EL LIC. NESTOR ROTSTEIN.

El objetivo de la presente tesis es contribuir a un mejor conocimiento de los vientos estelares desde el punto de vista de la magnetohidrodinámica compresible no resistiva, en particular con referencia a estrellas de tipo B tardío o A, para las cuales la influencia de la presión de radiación sobre el viento es poco importante, pero sí es dominante la presencia del campo magnético y de la rotación estelar. En estas estrellas los campos magnéticos pueden considerarse globales, a diferencia de las familias espectrales más frías, cuyas estructuras magnéticas son más parecidas a las del sol, es decir localizadas. La presencia de campos magnéticos en la atmósfera exterior de las estrellas supone el agregado de una estructura para el viento y juega un importante rol en el balance energético. Además, la inclusión de campos magnéticos en el tratamiento de la expansión atmosférica lleva a resultados cualitativamente diferentes respecto de los modelos no magnéticos; por ejemplo, la condición de congelamiento de las líneas de campo al viento implica la corrotación de las capas vecinas a la superficie hasta varios radios estelares. Si bien el grupo de estrellas considerado conforma un conjunto importante, su estudio sólo data de épocas recientes. La dificultad en el tratamiento teórico de sus vientos surge de la estructura magnética compleja que deviene de su elevada velocidad de rotación. Por un lado la magnetohidrodinámica impone la presencia de tres puntos críticos: dos magnetosónicos y uno de Alfvén. Además las observaciones espectroscópicas sugieren que la atmósfera no es esféricamente simétrica en estos casos. Un tratamiento formal y general, aunque restringido a ecuaciones de estado politrópicas, señala que todo viento estacionario, magnetizado y con simetría axial tiende asintóticamente a colimarse en la dirección del eje de simetría (Heyvaerts y Norman, 1989). Soluciones numéricas de las ecuaciones MHD estacionarias, obtenidas por Sakurai (1985), anticiparon este resultado teórico. Más recientemente, y trabajando analíticamente, Tsinganos y Trussoni (1991) obtuvieron soluciones globales con rotación y asimetría de la distribución másica que, sin embargo, corresponden a configuraciones magnéticas puramente radiales, justificables solamente en los tipos estelares tempranos con fuerte presión de radiación. Visto el estado de la teoría, el tesista se abocó a la tarea de obtener soluciones analíticas más generales, que permitieran la inclusión de estructuras magnéticas de transición entre los tipos estelares tempranos y tardíos y que, además, reprodujeran los flujos asintóticamente colimados de Heyvaerts-Norman y Sakurai. Se adoptó para ello el enfoque de Tsinganos y colaboradores, que consiste en imponer la geometría de la solución en vez de postular, como es habitual, una politrópica como ecuación de estado. Frente al desconocimiento cabal de los procesos de deposición e intercambio de energía en el plasma, lo que lleva a usar la politrópica sin más fundamento que el de ser la ecuación de estado "menos comprometida" y permitir un cierre termodinámico simple de las ecuaciones, el procedimiento adoptado es más realista y sus consecuencias termodinámicas pueden justificarse a posteriori. Esta parte de la tesis pudo ser resuelta en dos etapas sucesivas: en la primera se planteó que las superficies de Alfvén-Mach del flujo sí tienen simetría esférica, hipótesis que permite separar en las ecuaciones la dependencia con el ángulo de colatitud. La consistencia del esquema lleva a una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden para el número de Mach-Alfvén, con coeficientes que dependen de un potencial magnético arbitrario que permite reproducir todas las características deseadas del campo. El Capítulo II de la tesis está dedicado a la obtención de soluciones para distintos valores de los

parámetros libres, reflejando situaciones de mayor o menor simetría, o el caso más general, integrado numéricamente con un procedimiento de tipo "capa límite", en el que el término con mayor orden de derivación (el que da cuenta de la colimación del campo magnético) es suprimido cerca de la estrella y del punto transónico de Alfvén, lográndose un adecuado empalme asintótico que permitió eludir divergencias de la solución numérica.

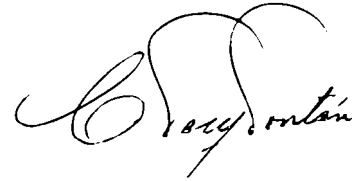
Una consideración digna de mencionarse, pues no siempre se la encuentra en este tipo de estudios, es que a consecuencia de que la velocidad del viento resulta ser una función débilmente creciente de la distancia (dependencia logarítmica), el tesista exploró la posibilidad de que se desarrollara turbulencia en el viento mediante un sencillo modelo del tipo "longitud de mezcla", verificando que en tal caso el viento puede alcanzar un régimen asintótico en el que las fuerzas turbulentas, representadas por coeficientes de viscosidad plausibles en el sentido de una teoría *a la Prandtl*, son capaces de inhibir el crecimiento de los perfiles de velocidad y temperatura.

En la segunda etapa de la búsqueda de soluciones analíticas, el candidato propone en el Capítulo III un esquema perturbativo por el cual las superficies de Alfvén-Mach dejan de ser esféricas y pasan a depender débilmente de la colatitud. Es la primera vez que se efectúa un planteo analítico para intentar explicar las características de las soluciones numéricas bidimensionales obtenidas por Sakurai. Hay conclusiones interesantes y originales de este cálculo, que se completa a primer orden, es decir para superficies de Alfvén-Mach obladas o proladas y perfiles de densidad no esféricos. Por ejemplo, si las superficies de Alfvén-Mach se suponen isótropas, la anisotropía de la distribución másica queda congelada al flujo y el viento conserva en el infinito una memoria de su condición periestelar. Invertiendo roles y admitiendo, en cambio, anisotropía de las superficies e isotropía de la distribución másica, la teoría desarrollada muestra que las superficies tienden asintóticamente a la esfericidad, que disminuye la tasa de pérdida másica y que aumenta la velocidad terminal del viento con la rotación.

Finalmente, en el Capítulo IV, el tesista aborda otra importante cuestión formulada en el plan de tesis. Aún cuando ciertas configuraciones magnéticas permiten la obtención de diversas soluciones, queda en pie el interrogante acerca de su estabilidad. En la literatura se encuentran muy pocos antecedentes de la discusión de estabilidad en objetos astrofísicos, seguramente debido a que el tratamiento de los equilibrios con flujo conduce a un problema no autoadjunto. En casi todos los casos hallados, se trata de configuraciones con dos coordenadas ignorables (*jets*). El tesista aborda en su trabajo un planteo aplicable a plasmas en expansión sujetos a rotación y fuerte atracción gravitatoria, sirviéndose para ello de una transformación a un referencial corrotante utilizada por Hameiri (1983) y colaboradores, que permite tratar las perturbaciones localizadas sobre las isosuperficies de flujo mediante un criterio suficiente de estabilidad. Se ha podido comprobar de esta forma el efecto estabilizante del campo gravitatorio, especialmente intenso en las estrellas del grupo considerado, así como el papel estabilizador de la componente toroidal del viento.

En conclusión, se trata de un trabajo de mucho mérito, con varios resultados originales y una valiosa extensión del conjunto de soluciones integrables de la MHD con flujo de masa. El tesista ha insumido en su realización un ponderable esfuerzo. Encaminado en un principio hacia el tema con una orientación astronómica, que le sirvió para familiarizarse con la información observacional y los modelos más tradicionales, profundizó luego en el estudio de la magnetohidrodinámica y la teoría de la estabilidad, adquiriendo conocimientos suficientes para realizar pasos originales,

extendiendo en varias direcciones importantes los aportes de autores reconocidos como Tsinganos, Low y su escuela. Culmina este trabajo con el envío de dos artículos a publicación y una experiencia en el tema que me permite prever la realización de nuevas contribuciones. Considero, por lo tanto, que este trabajo de tesis tiene mérito suficiente para acceder al título de Doctor en Física.

A handwritten signature in black ink, appearing to read 'C. Ferro Fontán', written in a cursive style.

Dr. C. Ferro Fontán
Director de Tesis