Diseño óptimo para la torsión elástica : Resolución mediante un problema de mínimo con frontera libre

Lederman, Claudia Beatriz

1993

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

DISEÑO OPTIMO PARA LA TORSION ELASTICA.

Resolución mediante un problema de mínimo con frontera libre.

CLAUDIA BEATRIZ LEDERMAN

DIRECCIÓN DE TESIS

Dr. Enrique Lami Dozo – Dr. Luis Caffarelli

LUGAR DE TRABAJO

Instituto Argentino de Matemática (CONICET)

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO DE:

Doctora en Ciencias Matemáticas

1993

Quisiera agradecer al Dr. Enrique Lami Dozo, por dirigirme y orientarme a lo largo de estos años.

Al Dr. Luis Caffarelli, por sus sugerencias y aportes para la elaboración de esta tesis.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas, por otorgarme becas que hicieron posible mis estudios de doctorado.

Al Instituto Argentino de Matemática y a cada uno de sus miembros por el apoyo que me brindaron permanentemente.

Claudia Beatriz Lederman.

INDICE.

CAPÍTULO 6: SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ORIGINAL.

APÉNDICE.

INTRODUCCION.

El problema que se estudia en el presente trabajo, se encuentra estrechamente vinculado a dos problemas clásicos de la mecánica del sólido.

El más antiguo de ellos, es la conjetura de Saint-Venant (1856). Este autor afirmaba: "entre todas las barras cilíndricas, con sección transversal del mismo área, la de sección circular es la más resistente a la torsión". La demostración matemática de esta conjetura fue dada por Polya en 1948 (ver [**17**]), mediante técnicas de simetrización.

El segundo problema, que generaliza al anterior, es el siguiente: entre todas las barras cilíndricas huecas de material elástico, que tienen su sección transversal del mismo área, y mismo área conjunta de sus agujeros, hallar la más resistente a la torsión. Polya y Weinstein lo resolvieron en 1949 (ver [**18**]), y la barra óptima es aquella cuya sección es un anillo bordeado por círculos concéntricos.

El propósito de esta tesis es resolver el siguiente problema abierto (a nuestro conocimiento): entre todas las barras cilíndricas de material elástico, que tienen su sección transversal del mismo área, y un agujero H dado, hallar aquella que sea más resistente a la torsión.

Este problema fue tratado en [**19**] y en otras referencias allí citadas. Estos autores lo abordaron - aunque sin resolverlo - en casos particulares, usando técnicas de aplicaciones conformes. También fue tratado en [**20**] mediante el estudio de un problema relajado. Sin embargo, ninguno de estos artículos demuestra existencia o propiedades de la solución.

Describamos brevemente los principales resultados de nuestro trabajo:

1) Para "agujeros" $H \subset I\!R^n$ con frontera C^2, se encuentran condiciones necesarias y suficientes que aseguran existencia y regularidad de la solución.
2) Se hallan relaciones que vinculan la geometría del "agujero" con la existencia de solución del problema.
3) Se halla una clase $\mathcal{F}$ de "agujeros" $H \subset I\!R^n$, en la cual se prueba existencia, regularidad (la sección de la barra tiene frontera localmente analítica) y estabilidad de la solución.

Breve descripción del trabajo.

Llamando D a la sección transversal, H al agujero, $D\setminus\overline{H}$ a la región ocupada por el material y w_0 su área, matemáticamente, el problema considerado es el siguiente:

Dado $H \subset \mathbb{R}^n$, un dominio acotado de clase C^2, con $\mathbb{R}^n \setminus \overline{H}$ conexo, y dado $0 < w_0 < +\infty$, se quiere hallar entre todos los abiertos $D \subset \mathbb{R}^n$ tales que $D \supset \overline{H}$, con $\mathbb{R}^n \setminus D$ conexo, y $|D \setminus \overline{H}| = w_0$, aquel que tenga energía elástica mínima, es decir

$$P_F(H): \quad \min_{\substack{D\supset\overline{H} \\ \mathbb{R}^n\setminus D \text{ conexo} \\ |D\setminus\overline{H}|=w_0}} \quad \min_{\substack{v\in H_0^1(D) \\ v=\text{ const. en} H}} \frac{1}{2}\int_D |\nabla v|^2 - 2\int_D v.$$

Nuestra manera de atacar $P_F(H)$ es la siguiente. Fijado un domino admisible D, observamos que el segundo mínimo en $P_F(H)$ se alcanza en una función v que satisface $D = \{v > 0\}$. Pensamos a v como elemento del conjunto

$$K(H) = \{v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n),\ v = \text{ const. en } H,\ |\{x \notin H \ /\ v(x) > 0\}| = w_0\},$$

y proponemos el problema auxiliar

$$P(H): \min_{v\in K(H)} \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 - 2\int_{\mathbb{R}^n} v.$$

La complejidad de $P(H)$ nos lleva a resolverlo en varios pasos. Tomamos primero las funciones de $K(H)$ que valen una constante fija $c > 0$ en H. Luego penalizamos el funcional de modo de eliminar la restricción sobre el volumen de $\{v > 0\}$ (inspirándonos en [**11**]), de la siguiente manera

$$J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{H}} |\nabla v|^2 - 2\int_{\mathbb{R}^n\setminus\overline{H}} v + f_\varepsilon(|\{x \notin H \ /\ v(x) > 0\}|)$$

donde

$$f_\varepsilon(s) = \begin{cases} \varepsilon(s - w_0) & s \le w_0, \\ \frac{1}{\varepsilon}((s - w_0) + (s - w_0)^2) & s \ge w_0, \end{cases}$$

y notamos $P_\varepsilon^c(H)$ al problema de minimización asociado. Como el dominio de las funciones admisibles es no acotado, minimizamos el funcional penalizado con la restricción suplementaria de que las funciones tengan soporte en una bola de radio R (problema $P_{\varepsilon,R}^c(H)$).

Mostramos que el mínimo se alcanza, y probamos propiedades preliminares de regularidad para todo mínimo u, en la línea de [**2**], en particular: $u \ge 0$, u es lipschitz,

$\Delta u = -2$ en $\{u > 0\}$, u tiene crecimiento lineal cerca de la frontera libre $\partial\{u > 0\}$. Probamos por otra parte, el hecho importante de que para R suficientemente grande, $\{u > 0\}$ es conexo y acotado independientemente de R (sección 3.1).

Esto permite resolver el problema $P_\varepsilon^c(H)$ y probar que sus soluciones satisfacen propiedades análogas a las que cumplen las soluciones de $P_{\varepsilon,R}^c(H)$. Finalmente probamos que ambos problemas son equivalentes para R grande (sección 3.2).

Posteriormente obtenemos propiedades preliminares de regularidad de la frontera libre, en la línea de [2] y [11] (capítulo 4).

Probamos luego - extendiendo las técnicas desarrolladas en [2] - que la frontera libre es localmente analítica si $n = 2$, y que si $n \geq 3$ la frontera libre es localmente analítica a excepción, de a lo sumo, un subconjunto cerrado de medida de Hausdorff $n-1$ dimensional cero (capítulo 5). Por lo tanto, si u es solución de $P_\varepsilon^c(H)$, u resuelve el problema de frontera libre

$$\text{(0.1)} \qquad \begin{array}{lll} \Delta u = -2 & \text{en } \overline{H}^c \cap \{u > 0\}, & \\ u = 0, \;\; \partial_{-\nu} u = \lambda & \text{sobre } \overline{H}^c \cap \partial\{u > 0\} & (\lambda > 0, \text{ constante}) \end{array}$$

Definimos el problema $P^c(H)$, que consiste en fijar la constante $c > 0$ en $P(H)$. Nuestro principal resultado en la sección 6.1 es mostrar que para $\varepsilon > 0$ pequeño las soluciones de $P_\varepsilon^c(H)$ coinciden con las de $P^c(H)$, o sea que no hay necesidad de pasar al límite en ε, porque el volumen de $\{u > 0\}$ se ajusta automáticamente a w_0 para ε pequeño. Este fenómeno es similar al que ocurre en [11].

A continuación, probamos que $P(H)$ tiene solución. Si el valor c de la solución u en H es positivo, entonces u resuelve $P_\varepsilon^c(H)$ para ε pequeño, y por lo tanto hereda las propiedades ya establecidas. Finalmente, si una solución u de $P(H)$ satisface $c \equiv u|_H > 0$ y $I\!R^n \setminus \{u > 0\}$ es conexo, entonces $D = \{u > 0\}$ es solución del problema físico original $P_F(H)$. Además, si el dominio H es tal que toda solución de $P(H)$ vale 0 en H, entonces $P_F(H)$ no tiene solución (sección 6.2).

Por último, determinamos una clase $\mathcal{F}$ de dominios regulares H (agujeros) para los cuales $P_F(H)$ tiene solución, y esta tiene frontera localmente analítica. Luego definimos una noción de cercanía en la clase $\mathcal{F}$ y establecemos un teorema de estabilidad: si H está en la clase $\mathcal{F}$, todo $\widetilde{H}$ cercano también está, y además sus energías son cercanas y sus soluciones también (sección 6.3).

Principales Contribuciones.

Las contribuciones principales de este trabajo, para obtener los resultados 1) a 3) ya citados, son - a nuestro entender - las siguientes:

a) Se resuelve un problema de minimización en un dominio no acotado, haciéndolo primero para cada bola de radio R, y probando luego que la solución no depende de R, para R grande.

b) Aunque en este trabajo nos restringimos al estudio de un problema de frontera libre particular, se podría proceder en forma similar para estudiar la regularidad de la frontera libre de un problema de minimización, cuya solución satisfaga (0.1), pero reemplazando el miembro derecho de la ecuación por una f regular, acotada y negativa.

c) Las técnicas de estabilidad desarrolladas podrían aplicarse a otros problemas. En particular a [2] y [11], para probar, por ejemplo, que si para un dominio dado los mínimos del problema no tienen singularidades en su frontera libre, tampoco las tendrán los mínimos correspondientes a dominios suficientemente cercanos.

d) Por otra parte, los resultados de estabilidad obtenidos motivan la aplicación de métodos numéricos para la resolución aproximada del problema estudiado, a la vez que proveen elementos que servirían para la justificación teórica de dichos métodos. También juega un papel importante el hecho de que no es necesario pasar al límite en ε para obtener la solución del problema.

Cabe destacar también:

e) Los resultados se obtienen en $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, aunque el problema que se estudia tenga sentido físico sólo en $\mathbb{R}^2$.

f) Se prueba que el problema planteado no tiene solución si se admite que las barras tengan otros agujeros en su sección además del prefijado.

g) Las técnicas desarrolladas en este trabajo podrían aplicarse al estudio del problema "inverso", es decir, con la frontera exterior de la sección fija y la interior libre.

h) En forma similar podría abordarse el mismo problema que el estudiado, pero permitiendo la aparición de zonas con deformación plástica.

CAPITULO 1: PRELIMINARES.

En este capítulo introducimos algunas de las herramientas matemáticas que serán necesarias posteriormente.

1.1. Simetrización de Schwarz. (ver [6], [13]).

1.1.1. Definición.

Sea $\Omega \subset I\!R^n$ un dominio acotado, entonces, se define el dominio simetrizado Ω^* como la bola $\{x \ / \ |x| < \rho\}$ con el mismo volumen que Ω.

Sea u una función a valores reales definida en un dominio acotado $D \subset I\!R^n$. Se asocia a u una nueva función $u^* : D^* \to I\!R$ del siguiente modo. Se define

$$D(\mu) := \{x \in D \ / \ u(x) \geq \mu\},$$

$$u^*(x) := \sup \{\mu \ / \ x \in D(\mu)^*\} \qquad \text{si } x \in D^*.$$

La función u^* es llamada la simetrizada Schwarz de u.

1.1.2. Propiedades.

1) u^* es una función radialmente simétrica, es decir $u^*(x) = u^*(|x|)$, y $u^*(|x|)$ es una función no decreciente de $|x|$.
2) $|\{x \in D \ / \ u(x) \geq \mu\}| = |\{x \in D^* \ / \ u^*(x) \geq \mu\}|$, para todo $\mu \in I\!R$.
3) $\sup_{x \in D^*} u^*(x) = \sup_{x \in D} u(x)$.
4) Si $\psi : I\!R \to I\!R$ es una función continua, entonces

$$\int_D \psi(u(x))\, dx = \int_{D^*} \psi(u^*(x))\, dx.$$

5) Si u es no negativa y $u \in W_0^{1,p}(D)$ con $1 < p < \infty$ entonces $u^* \in W_0^{1,p}(D^*)$ y se cumple

$$\int_D |\nabla u|^p \, dx \geq \int_{D^*} |\nabla u^*|^p \, dx. \tag{1.1.1}$$

1.1.3. Teorema. *Sea $D \subset I\!R^n$ un dominio acotado con frontera analítica a trozos, y sea $u : D \to I\!R_0^+$ analítica en D, $u = 0$ en ∂D. Entonces la igualdad estricta en* (1.1.1) *se verifica si y sólo si u es igual a u^* (módulo traslación).*

1.2. Algunos resultados de la teoría del potencial.

1.2.1. Teorema. *(Desigualdad de Harnack)* (ver [3], 2.3).

Sea $u \in C^2(B_r(x_0))$ una función armónica no negativa y sea $0 < \alpha < 1$. Entonces

$$\sup_{B_{\alpha r}(x_0)} u \leq C \inf_{B_{\alpha r}(x_0)} u \qquad C = C(n, \alpha)$$

1.2.2. Fórmula de representación de Green (ver [3], 2.4).

Sean $B_r(x_0) \subset I\!R^n$, $y \in B_r(x_0)$.

Notaremos G_y a la función de Green positiva para el laplaciano en $B_r(x_0)$ con polo en y. Se tiene entonces que G_y es una función armónica en $B_r(x_0) \setminus \{y\}$ que satisface:

$$\begin{aligned}
&G_y \in C^\infty\left(\overline{B}_r(x_0) \setminus \{y\}\right) \\
&G_y(x) > 0 \quad \text{si} \quad x \in B_r(x_0) \setminus \{y\}, \quad \lim_{x \to y} G_y(x) = +\infty \\
&G_y(x) = 0 \quad \text{si} \quad x \in \partial B_r(x_0).
\end{aligned}$$

Además $G_y \in L^1(B_r(x_0))$.

Para $u \in C^2(B_r(x_0)) \cap C^1\left(\overline{B}_r(x_0)\right)$ tenemos la fórmula de la representación de Green:

$$\int_{B_r(x_0)} G_y \Delta u dx = -u(y) + \int_{\partial B_r(x_0)} u \partial_{-\nu} G_y d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{1.2.1}$$

Cuando $x_0 = 0$, (1.2.1) toma la forma

$$\int_{B_r(0)} G_y \Delta u \, dx = -u(y) + \frac{r^2 - |y|^2}{n w_n r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{u}{|x-y|^n} d\mathcal{H}_x^{n-1}, \tag{1.2.2}$$

y además es posible estimar a G_y en $B_r(0)$ del siguiente modo:

$$G_y(x) \leq \begin{cases} \dfrac{1}{n(n-2)w_n}|x-y|^{2-n} & n > 2, \\ \dfrac{1}{2\pi}\log\left(\dfrac{2r}{|x-y|}\right) & n = 2. \end{cases}$$

1.2.3. Fórmula de representación de Poisson (ver [3], 2.5).

Si $u \in C^2(B_r(0)) \cap C^1(\overline{B}_r(0))$ es armónica, de (1.2.2) obtenemos la fórmula de representación de Poisson:

$$u(y) = \frac{r^2 - |y|^2}{n w_n r} \int_{\partial B_r(0)} \frac{u}{|x-y|^n} d\mathcal{H}_x^{n-1},$$

que sigue valiendo aún cuando $u \in C^2(B_r(0)) \cap C^0(\overline{B}_r(0))$.

1.3. Algunos resultados sobre distribuciones y medidas de Radón.

1.3.1. Lema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio, $v \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\alpha \geq 0$, y supongamos que $\Delta v \geq -\alpha$ en el sentido de las distribuciones.*

Entonces podemos asumir que

$$v(x) = \lim_{r \downarrow 0} \fint_{B_r(x)} v \qquad \forall x \in \Omega \qquad y$$

v es semicontinua superiormente.

Además, si $B_r(x) \subset\subset \Omega$ se tiene

$$\fint_{\partial B_r(x)} v \leq \lim_{\epsilon \downarrow 0} \fint_{\partial B_{r+\epsilon}(x)} v, \quad \lim_{\epsilon \downarrow 0} \fint_{\partial B_{r-\epsilon}(x)} v \leq \fint_{\partial B_r(x)} v.$$

Demostración. Si $\alpha = 0$, el resultado es conocido (ver por ejemplo [**10**], p. 90), pues se deduce del hecho de que si $B_r(x) \subset\subset \Omega$ y $r' < r$, entonces

$$\fint_{B_{r'}(x)} v \leq \fint_{B_r(x)} v, \quad \fint_{\partial B_{r'}(x)} v \leq \fint_{\partial B_r(x)} v.$$

Si $\alpha > 0$, la demostración se obtiene aplicando primero el resultado a la función subarmónica $w(x) := v(x) + \alpha \frac{|x|^2}{2n}$, y deduciendo luego el resultado para v. □

1.3.2. Lema. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio, μ una medida de Radón en Ω. Entonces si $B_R(x) \subset \Omega$ se cumple que $\mu(\partial B_r(x)) = 0$ para casi todo $r \in [0, R]$.*

Demostración. Se deduce del hecho que $|\mu|(K) < +\infty$ para todo compacto $K \subset \Omega$. $\square$

1.3.3. Teorema. *Sea $(\mu_k)_{k\in \mathbb{N}}$ una sucesión de medidas de Radón no negativas tales que $\mu_k(\mathbb{R}^n) \leq M \quad \forall k \in \mathbb{N}$, M independiente de k. Entonces, existe una medida de Radón μ y una subsucesión $\left(\mu_{k_j}\right)_{j\in \mathbb{N}}$ tal que*

$$\lim_{j\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu_{k_j} = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi d\mu$$

para toda $\varphi \in C_0(\mathbb{R}^n)$ y $\lim\limits_{j\to\infty} \mu_{k_j}(E) = \mu(E)$ para todo conjunto borcliano E acotado, tal que $\mu(\partial E) = 0$.

Demostración. Ver apéndice A de [4]. $\square$

Si consideramos $(\rho_k)_{k\in \mathbb{N}}$ una sucesión regularizante, es decir, una sucesión de funciones satisfaciendo

$$\rho_k \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n),\ \text{sop}\, \rho_k \subset B_{1/k}(0),\ \int_{\mathbb{R}^n} \rho_k dx = 1,\ \rho_k \geq 0, \tag{1.3.1}$$

tendremos

1.3.4. Corolario. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un dominio, $v \in H^1_{\text{loc}}(\Omega)$, $\alpha \geq 0$ y supongamos que $\Delta v \geq -\alpha$ en el sentido de las distribuciones.*

Entonces $\nu := \Delta v$ es una medida de Radón (con signo). Además, si $v_k := \rho_k * v$, ρ_k como en (1.3.1) se tiene

$$\lim_{k\to\infty} \int_\Omega \varphi \Delta v_k dx = \int_\Omega \varphi d\nu$$

para toda $\varphi \in C_0(\Omega)$, y

$$\lim_{k\to\infty} \int_E \Delta v_k dx = \int_E d\nu$$

para todo boreliano $E \subset\subset \Omega$, tal que $|\partial E| = \nu(\partial E) = 0$.

En consecuencia, si $B_R(x) \subset\subset \Omega$ resultará

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_\rho(x)} \Delta v_k dx = \int_{B_\rho(x)} d\nu \qquad \text{para casi todo } \rho \in [0, R].$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos $w(x) = v(x) + \alpha \frac{|x|^2}{2n}$ y $w_k = \rho_k * w$, con ρ_k como en (1.3.1). Entonces w_k son subarmónicas y $\mu_k := \Delta w_k$ es una sucesión de medidas de Radón positivas en cada abierto $D \subset\subset \Omega$, para k grande. Aplicando en consecuencia el teorema 1.3.3 y el lema 1.3.2 obtenemos el resultado para las funciones w_k, de donde se deduce luego el resultado deseado. □

1.3.5. Teorema. *Sea μ una medida de Radón en $\mathbb{R}^n$ y f una función localmente integrable en $\mathbb{R}^n$ respecto de μ. Entonces*

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} |f(y) - f(x)| d\mu(y) = 0$$

para μ-casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACIÓN. Ver teorema 1.3.8 de [7]. □

1.4. Medida de Hausdorff (ver [7]).

1.4.1. Definición. Para $A \subset \mathbb{R}^n$, $k > 0$ y $\alpha > 0$, sea

$$\mathcal{H}^k_\alpha(A) = w_k 2^{-k} \inf \left\{ \sum_{j=1}^{\infty} (\text{diam } S_j)^k : A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} S_j, \text{ diam } S_j < \alpha \right\}, \tag{1.4.1}$$

donde w_k es una constante positiva, que cuando $k \in \mathbb{N}$ coincide con el volumen de la bola unitaria de $\mathbb{R}^k$.

Dado que $\mathcal{H}^k_\alpha$ aumenta cuando α disminuye, se define la medida de Hausdorff k-dimensional de A como

$$\mathcal{H}^k(A) = \lim_{\alpha\to 0} \mathcal{H}^k_\alpha(A) = \sup_{\alpha>0} \mathcal{H}^k_\alpha(A). \tag{1.4.2}$$

1.4.2. Observación. Si $k \in \mathbb{N}$, $k \leq n$, $\mathcal{H}^k(E)$ coincide con la noción de área k-dimensional en $\mathbb{R}^n$, bajo hipótesis adecuadas sobre E.

1.5. Distancia de Hausdorff. (ver [21]).

1.5.1. Definición. Se define la distancia de Hausdorff $d(A, B)$ entre los conjuntos $A,\ B \subset I\!R^n$ como

$$d(A, B) = \inf \{\varepsilon > 0 : A \subset B^\varepsilon \text{ y } B \subset A^\varepsilon\}$$

donde notamos para un conjunto $D \subset I\!R^n$ y $\varepsilon > 0$

$$D^\varepsilon = \{x \in I\!R^n :\ d(x, D) < \varepsilon\}.$$

1.5.2. Teorema. *Sea $K \subset I\!R^n$ un compacto. Entonces el conjunto $F(K)$ formado por todos los subconjuntos compactos de K es un espacio métrico compacto con la distancia de Hausdorff.*

1.6. Conjuntos de perímetro finito (ver [1], [4], [7])

1.6.1. Definición. Sea $\Omega \subset I\!R^n$ un abierto y sea $f \in L^1(\Omega)$. Definamos

$$\int_\Omega |\nabla f| = \sup\left\{\int_\Omega f \text{ div } g\, dx : g \in C_0^1(\Omega; I\!R^n),\ |g(x)| \leq 1 \text{ para } x \in \Omega\right\}. \tag{1.6.1}$$

Si $\displaystyle\int_\Omega |\nabla f| < +\infty$, diremos que f tiene variación acotada, y llamaremos

$$BV(\Omega) = \left\{f \in L^1(\Omega) :\ \int_\Omega |\nabla f| < +\infty\right\}.$$

Se observa que si $f \in BV(\Omega)$ las derivadas de f en el sentido de las distribuciones son medidas de Radón en Ω.

1.6.2. Definición. Dado $E \subset I\!R^n$ un conjunto boreliano, definimos el perímetro de E en un abierto Ω como

$$P(E, \Omega) = \int_\Omega |\nabla \chi(E)|,$$

y diremos que E es un conjunto de perímetro finito en Ω si $\chi(E) \in BV(\Omega)$. Si $P(E, \Omega)) < +\infty$ para todo abierto Ω acotado, diremos que E es un conjunto de perímetro localmente finito.

1.6.3. Teorema. *Sea $E \subset I\!R^n$ un conjunto de perímetro localmente finito. Entonces*

$$\int_A |\nabla \chi(E)| \leq \mathcal{H}^{n-1}(A \cap \partial E) \quad \textit{para todo abierto } A \subset I\!R^n.$$

1.6.4. Teorema. *Sea $E \subset I\!R^n$ un boreliano y supongamos que $\mathcal{H}^{n-1}(K \cap \partial E) < +\infty$ para cada compacto $K \subset I\!R^n$. Entonces E tiene perímetro localmente finito.*

1.6.5. Definición. Sea E un conjunto medible Lebesgue. Dado $x \in I\!R^n$, diremos que el vector unitario ν es la normal exterior a E en x en medida, si

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{B_r(x)} |\chi(E) - \chi(\{y : (y-x).\nu < 0\})| = 0.$$

Observamos que si un tal ν existe, será único y lo notaremos $\nu(x, E)$. Entonces definimos

$$\partial^* E = \{x : \nu(x, E) \text{ existe }\}$$

y se tiene que $\partial^* E \subset \partial E$.

1.6.6. Observación. Si $E \subset I\!R^n$ es un dominio acotado de clase C^1, se cumple que $P(E, \Omega) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial E)$ y por lo tanto E tiene perímetro localmente finito. Además $\partial^* E = \partial E$, y $\nu(x, E)$ es la normal exterior a E en x en el sentido usual.

Si E es de clase C^2, se cumple que $P(E, \Omega) = \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial E)$.

1.6.7. Teorema. *Sea $E \subset I\!R^n$ un conjunto de perímetro localmente finito. Entonces*

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^{n-1}(B_r(x_0) \cap \partial E)}{w_{n-1} r^{n-1}} = 1 \quad \textit{para } \mathcal{H}^{n-1} - \textit{casi todo } x_0 \in \partial^* E.$$

1.6.8. Teorema. *Sea $E \subset I\!R^n$ de perímetro localmente finito y supongamos que para todo $x \in \partial E$ se cumple*

$$\limsup_{r \to 0} \frac{|B_r(x) \cap E|}{|B_r(x)|} > 0, \quad \limsup_{r \to 0} \frac{|B_r(x) \cap I\!R^n \setminus E|}{|B_r(x)|} > 0.$$

Entonces $\mathcal{H}^{n-1}(\partial E \setminus \partial^* E) = 0$.

1.6.9. Teorema. *Sea $E \subset I\!R^n$ de perímetro localmente finito. Entonces para todo $v \in C_0^1(I\!R^n; I\!R^n)$*

$$\int_E \textit{div } v \, dx = \int_{\partial^* E} v(x).\nu(x, E) d\mathcal{H}^{n-1}(x).$$

CAPITULO 2: PLANTEO DEL PROBLEMA.

En este capítulo formulamos matemáticamente nuestro problema: en 2.1 describimos el modelo de la torsión elástica de una barra, probamos que la energía elástica está bien definida y la calculamos en dos ejemplos particulares. En 2.2 efectuamos algunas estimaciones que serán necesarias posteriormente. En 2.3 planteamos en términos matemáticos el problema $P_F(H)$ que se quiere resolver. En 2.4 se propone, a fin de resolver $P_F(H)$, un problema variacional auxiliar $P(H)$.

2.1. La torsión elástica de una barra.

2.1.1. Introducción.

Se considera una barra cilíndrica en $\mathbb{R}^3$ de material elástico, de sección transversal uniforme. Se supone que el material del cilindro es homogéneo e isotrópico, y que la sección transversal del mismo es perpendicular a su eje.

El problema de la torsión es el siguiente: un extremo de la barra se mantiene fijo y en el otro extremo se aplica una fuerza (torque) que lo hace rotar un ángulo dado.

La teoría de la torsión elástica indica, que si la barra es larga en relación a las dimensiones de su sección, y en ausencia de otras fuerzas, cada una de las secciones de la misma efectúa un movimiento rígido de rotación en su propio plano (de ángulo proporcional a la distancia al extremo fijo), y a su vez se deforma en la dirección perpendicular.

Por su simetría, puede pensarse como un problema plano.

Sea $D \subset \mathbb{R}^2$ la sección de la barra (antes de deformarse). Si la barra es maciza, es decir, si D es simplemente conexo, su energía una vez deformada, viene dada por

$$E(D) = \min_{v \in H_0^1(D)} \frac{1}{2} \int_D |\nabla v|^2 - 2 \int_D v.$$

La función que alcanza dicho mínimo, llamada función de torsión, permite conocer las tensiones en el interior de la barra en su estado deformado.

Por otra parte, se define la rigidez torsional de la barra $T(D)$, como la fuerza (torque) requerida para rotar la barra en un ángulo $\theta = 1$ por unidad de longitud. Se cumple que $E(D) = -\frac{T(D)}{2}$, lo cual indica que cuanto menos energía tenga una barra, mayor será su resistencia a la torsión.

Si la barra es hueca, es decir, si la sección transversal de la misma es multiplemente conexa, con agujeros $H_1, \ldots, H_n$, $\bigcup_{i=1}^{n} \overline{H}_i \subset D$, donde $D \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{H}_i$ es la región ocupada por material, la energía viene dada por

$$E(D \setminus \bigcup_{i=1}^{n} \overline{H}_i) = \min_{\substack{v \in H_0^1(D) \\ v = c_i \text{ en } H_i}} \frac{1}{2} \int_D |\nabla v|^2 - 2 \int_D v, \qquad c_i \text{ constantes},$$

y su interpretación es la misma que en el caso anterior.

Una descripción detallada del modelo puede hallarse por ejemplo en [15], [16], [22].

Aunque la energía elástica, en el caso de la torsión, sólo tiene sentido físico cuando se la calcula para un abierto de $\mathbb{R}^2$, su definición podrá extenderse a abiertos de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Para eso necesitaremos:

2.1.2. Definición. Sea $n \geq 2$. Para $v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n)$ definimos

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla v|^2 - 2 \int_{\mathbb{R}^n} v, \tag{2.1.1}$$

observando que, definido de este modo, el funcional no depende del abierto del cual calculamos la energía.

El teorema que probaremos a continuación, muestra que bajo ciertas hipótesis sobre el abierto de $\mathbb{R}^n$, la energía elástica (de torsión) está bien definida, a la vez que caracteriza a la función de torsión.

2.1.3. Teorema. *Sea $D \subset \mathbb{R}^n$ un abierto de medida finita tal que $\mathbb{R}^n \setminus D$ es conexo. Sean $H_i \subset \mathbb{R}^n$ dominios acotados de clase C^2, $1 \leq i \leq k$, tales que $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{H}_i \subset D, k \in \mathbb{N}_0$ (con $k = 0$ notaremos $\bigcup_{i=1}^{k} \overline{H}_i = \emptyset$).*

Entonces el problema

$$\begin{aligned} &\min J(v) \\ &v \in H_0^1(D) \\ &v = c_i \text{ en } H_i \quad 1 \leq i \leq k \\ &(c_i \text{ constantes arbitrarias}) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

tiene un único mínimo u, *y por lo tanto podemos definir la energía elástica (de torsión) del abierto* $D \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{H}_i$

$$E(D \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{H}_i) := J(u).$$

Además, u *es la única función que satisface*

$$
\begin{aligned}
&u \in H_0^1(D)\\
(2.1.3)\qquad &\Delta u = -2 \text{ en } D \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{H}_i\\
&u = c_i^* \text{ en } H_i,\ c_i^* \text{ constantes},\ 1 \le i \le k
\end{aligned}
$$

$$(2.1.4)\qquad -\int_{\partial H_i} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{n-1} = 2|H_i|,\ \nu \text{ normal exterior a } H_i,\ 1 \le i \le k,$$

y se cumple que $u > 0$ *en* D.

DEMOSTRACIÓN. Por el teorema de Stampacchia ([5], p. 83) existe un único mínimo u del problema (2.1.2).

Tomando funciones φ satisfaciendo

$$(2.1.5)\qquad \varphi \in H_0^1(D) \text{ con } \varphi = c_i \text{ en } H_i,\ c_i \text{ constantes},\ i = 1, \ldots, k$$

tenemos que $J(u + \varepsilon\varphi) \ge J(u) \quad \forall \varepsilon \in I\!R$. Entonces

$$(2.1.6)\qquad \int_D \nabla u \nabla \varphi - 2\int_D \varphi = 0 \quad \forall \varphi \text{ satisfaciendo (2.1.5)}$$

y por lo tanto

$$(2.1.7)\qquad \Delta u = -2 \text{ en } D \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{H}_i.$$

Por otra parte, la función $u^+ := \max\{u, 0\}$ es admisible para (2.1.2), con $J(u^+) \le J(u)$ y entonces $u \ge 0$ en D, lo que junto con (2.1.7) y el principio fuerte del mínimo nos da

$$u > 0 \quad \text{en} \quad D \setminus \bigcup_{i=1}^{k} \overline{H}_i.$$

Si $k = 0$ el teorema está probado.

Para el caso $k \geq 1$ procedamos del siguiente modo. Fijemos j, $1 \leq j \leq k$, tomemos en (2.1.6) funciones $\varphi \in H_0^1(D)$ con $\varphi = 1$ en H_j, $\varphi = 0$ en H_i, $i \neq j$ y apliquemos la fórmula de Green. Entonces

$$
\begin{aligned}
0 &= -\int_{D\setminus\bigcup_{i=1}^k \overline{H}_i} \varphi\Delta u + \int_{\partial H_j} \frac{\partial u}{\partial \nu}\varphi d\mathcal{H}^{n-1} - 2\int_D \varphi \\
&= \int_{\partial H_j} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\mathcal{H}^{n-1} - 2|H_j|
\end{aligned}
\tag{2.1.8}
$$

con ν normal interior a H_j.

Para ver que $u > 0$ en D, notemos $c_i^* = u|_{H_i}$, $i = 1, \ldots, k$. Sabemos que $c_i^* \geq 0$. Si existiera algún j tal que $c_j^* = 0$, tendríamos $\frac{\partial u}{\partial \nu} \leq 0$ en ∂H_j (ν normal interior a H_j), lo que contradice (2.1.8). Por lo tanto $u > 0$ en D. Para finalizar la demostración observemos que para cada elección de las constantes c_i^* habrá una única solución de (2.1.3) y que la condición (2.1.4) impone los valores de dichas constantes. □

2.1.4. Corolario. *(energía elástica de una bola) Sea $B = B_R \subset I\!R^n$ una bola. Existe un único $u \in H_0^1(B)$ tal que*

$$\min_{v\in H_0^1(B)} J(v) = J(u).$$

Además $u > 0$ en B y

$$E(B) = J(u) = -C(n)|B|^{\frac{n+2}{n}}, \tag{2.1.9}$$

$$C(n) := \frac{2}{n(n+2)w_n^{2/n}}. \tag{2.1.10}$$

Demostración. Se deduce del teorema 2.1.3, observando que en este caso

$$u(x) = \begin{cases} -\dfrac{|x|^2}{n} + \dfrac{R^2}{n} & |x| \leq R \\ 0 & \text{sino} \end{cases}$$

es el mínimo buscado. □

2.1.5. Corolario. *(energía elástica de dos anillos concéntricos)*

Sean $0 < R_1 < R_2 < R_3 < R_4$,

$$H_1 := \{x/|x| < R_1\}$$
$$H_2 := \{x/R_2 < |x| < R_3\}$$
$$D := \{x/|x| < R_4\}$$

y llamemos

$$h_1 = |H_1|, \quad h_2 = |H_2|$$

$$\mu_1 = |\{x/R_1 \leq |x| \leq R_2\}|\,, \; \mu_2 = |\{x/R_3 \leq |x| \leq R_4\}|\,.$$

Entonces

$$(2.1.11) \qquad E\Big(D \setminus \bigcup_{i=1}^{2} \overline{H}_i\Big) =$$
$$= -C(n)\left((\mu_1 + h_1)^{\frac{n+2}{n}} - h_1^{\frac{n+2}{n}} + (\mu_1 + \mu_2 + h_1 + h_2)^{\frac{n+2}{n}} - (\mu_1 + h_1 + h_2)^{\frac{n+2}{n}}\right),$$

con $C(n) > 0$ *dada por* (2.1.10).

DEMOSTRACIÓN. Se deduce del teorema 2.1.3 observando que si tomamos

$$u(x) = \begin{cases} c_1 & |x| \leq R_1 \\ -\dfrac{|x|^2}{n} + d_1 & R_1 \leq |x| \leq R_2 \\ c_2 & R_2 \leq |x| \leq R_3 \\ -\dfrac{|x|^2}{n} + d_2 & R_3 \leq |x| \leq R_4, \end{cases}$$

con c_i, d_i, $i = 1, 2$ elegidos de modo tal que u resulte continua, y $u(x) = 0$ si $|x| = R_4$, obtenemos el mínimo buscado. □

2.2. Algunas estimaciones preliminares.

En la presente sección obtendremos cotas vinculadas con el funcional J definido en (2.1.1), que serán muy usadas en el resto del trabajo.

2.2.1. Lema. *Se cumple que*

$$(2.2.1) \qquad J(v) \geq -C(n)\,|\{v > 0\}|^{\frac{n+2}{n}} \qquad \forall v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n),$$

con $C(n) > 0$ *dada por* (2.1.10).

En consecuencia, si $|\{v > 0\}| < +\infty$, *y si* B *es una bola con* $|B| = |\{v > 0\}|$, *se tiene*

$$J(v) \geq E(B).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $v \in H^1(I\!R^n) \cap L^1(I\!R^n)$, $v^+ := \max\{v, 0\}$. Como $J(v) \geq J(v^+)$ y $|\{v > 0\}| = |\{v^+ > 0\}|$, bastará probar el lema suponiendo que $v \geq 0$.

Para el caso en que $\{v > 0\}$ es acotado, tomamos B^* una bola tal que $|B^*| = |\{v > 0\}|$ y $v^* \in H_0^1(B^*)$ la función que se obtiene a partir de v por simetrización de Schwarz. Entonces por el corolario 2.1.4 tenemos

$$J(v) \geq J(v^*) \geq \min_{w \in H_0^1(B^*)} J(w) = -C(n)\, |\{v > 0\}|^{\frac{n+2}{n}},$$

$C(n)$ como en (2.1.10).

Si $\{v > 0\}$ no es acotado, procedemos del siguiente modo:

Fijamos una función $\eta \in C_0^1(I\!R^n)$, con $0 \leq \eta \leq 1$, satisfaciendo

$$\eta(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 2, \end{cases}$$

y definimos $\eta_k(x) = \eta\left(\dfrac{x}{k}\right)$, $\quad k \in I\!N$. Llamando $v_k := \eta_k v$ resulta

$$v_k \geq 0, \qquad \{v_k > 0\} \text{ acotado}$$

$$v_k \to v \text{ en } H^1(I\!R^n), \qquad |\{v_k > 0\}| \to |\{v > 0\}|.$$

Entonces si aplicamos el resultado a las v_k y tomamos $k \to \infty$, obtenemos (2.2.1).

El lema se completa finalmente observando (2.1.9) y (2.2.1). $\square$

2.2.2. Lema. *Existe una constante* $C = C(n) > 0$ *tal que si* $v \in H_0^1(D)$, *con* D *algún abierto de* $I\!R^n$, *entonces*

$$\|v\|_{H^1(I\!R^n)} \leq C(n)\left(1 + |D|^{1/n}\right)\left(J(v) + |D|^{\frac{n+2}{n}}\right)^{1/2}.$$

DEMOSTRACIÓN. Basta probar el resultado para $v \in C_0^1(D)$.

Supongamos primero que D es acotado. Como $v \in H_0^1(D)$, por la desigualdad de Poincaré ([3], p. 164) existe una constante $C(n) > 0$ tal que

$$\left(\int_D v^2\right)^{1/2} \leq C(n)|D|^{1/n}\left(\int_D |\nabla v|^2\right)^{1/2} \tag{2.2.2}$$

Entonces, usando la desiguladad de Hölder y (2.2.2) tenemos

$$\int_D v \leq C(n)|D|^{\frac{2+n}{2n}}\left(\int_D |\nabla v|^2\right)^{1/2}$$

y por lo tanto para $\lambda > 0$ arbitrario

$$\int_D |\nabla v|^2 = 2J(v) + 4\int_D v \leq 2J(v) + \frac{2}{\lambda}C(n)|D|^{\frac{2+n}{n}} + 2\lambda\int_D |\nabla v|^2.$$

Si fijamos $\lambda = \dfrac{1}{4}$ obtenemos

$$\left(\int_D |\nabla v|^2\right)^{1/2} \leq C(n)\left(J(v) + |D|^{\frac{2+n}{n}}\right)^{1/2}$$

lo que junto con (2.2.2) da la desigualdad buscada, para el caso en que D es acotado.

Para el caso en que D no es acotado, definamos $v_k := \eta_k v$, con η_k como en el lema 2.2.1 y $D_k := D \cap B_{2k}$. Entonces

$$v_k \in H_0^1(D_k) \text{ con } D_k \text{ acotado}, \qquad v_k \to v \text{ en } H^1(I\!R^n),$$

y por lo tanto si aplicamos el resultado para v_k en D_k y tomamos $k \to \infty$, obtenemos el lema. □

2.2.3. Lema. *Sean $v \in H^1(I\!R^n) \cap L^1(I\!R^n)$, D un dominio de $I\!R^n$, y $s \in H^1(I\!R^n) \cap L^1(I\!R^n)$ la función que satisface*

$$\begin{aligned} \Delta s &= -2 \quad \text{en } D \\ s &= v \text{ en } I\!R^n \setminus D \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

Entonces,

$$J(v) - J(s) = \frac{1}{2}\int_D |\nabla(v-s)|^2 = \frac{1}{2}\int_{I\!R^n} |\nabla(v-s)|^2.$$

Demostración. De (2.2.3) se deduce que

$$-\int_{I\!R^n} \nabla s \nabla\varphi = -2\int_{I\!R^n} \varphi \qquad \forall\varphi \in H_0^1(D). \tag{2.2.4}$$

Tomando entonces $\varphi = v - s$ en (2.2.4) obtenemos el resultado deseado. $\square$

2.3. Problema $P_F(H)$.

2.3.1. Introducción.

El problema que se estudiará es el siguiente:

Entre todas las barras cilíndricas huecas, de material elástico, que tienen su sección transversal del mismo área y un mismo agujero H dado, se busca aquella que sea más resistente a la torsión.

En otras palabras, se supone dada una superficie cilíndrica, y una cantidad fija de material elástico, y se quiere saber de que forma rodear a la superficie, de modo tal de obtener un cilindro hueco de material elástico de sección uniforme, que resulte más rígido para la torsión.

El problema, en consecuencia, consistirá en minimizar la energía elástica definida en la sección 2.1, entre aquellos cilindros que sean admisibles.

Notemos, por otra parte, que si en el ejemplo de los dos anillos concéntricos (corolario 2.1.5), mantenemos la cantidad de material $|D \setminus \bigcup_{i=1}^{2} H_i|$ constante, fijamos el agujero interior H_1 y variamos el agujero H_2, haciendo $|H_2| \to +\infty$, la energía tiende a $-\infty$. Esto muestra que el problema con un agujero fijo, no tiene solución si se permiten otros agujeros arbitrarios. Por lo tanto, impondremos que las barras admisibles no tengan otros agujeros además de aquel que se fija.

2.3.2. Datos del problema.

Supondremos dados los siguientes datos

- $H \subset \mathbb{R}^n$ un dominio acotado de clase C^2, con $\mathbb{R}^n \setminus \overline{H}$ conexo, $n \geq 2$.
- $0 < w_0 < +\infty$.

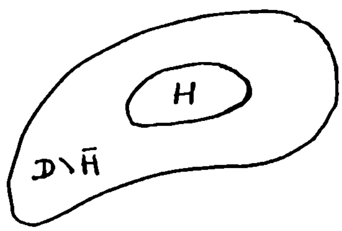
2.3.3. Planteo del problema $P_F(H)$.

Definamos el conjunto de los abiertos admisibles para nuestro problema

$$\text{Ad }(H) = \{D \subset \mathbb{R}^n, D \text{ abierto}, D \supset \overline{H}, \mathbb{R}^n \setminus D \text{ conexo}, |D \setminus \overline{H}| = w_0\},$$

y observemos que para $D \in \text{Ad }(H)$ la energía elástica se define como

$$E(D \setminus \overline{H}) = \min_{\substack{v \in H_0^1(D) \\ v = \text{ const. en } H}} J(v). \tag{2.3.1}$$



H : agujero

$D \setminus \overline{H}$: material

Notemos que si definimos

$$E^*(H) = \inf_{D \in \text{Ad }(H)} E(D \setminus \overline{H}),$$

tendremos que $E^*(H) > -\infty$ por el lema 2.2.1. Entonces planteamos el problema

$$P_F(H) : \min_{D \in \text{Ad }(H)} E(D \setminus \overline{H}).$$

Cuando no se preste a confusión usaremos Ad y P_F para notar Ad (H) y $P_F(H)$ respectivamente.

2.3.4. Lema. *Sea $D \in Ad\,(H)$. Entonces existe una única función de torsión $u \in H_0^1(D)$ con $u =$ const. en H, tal que*

$$\min_{\substack{v \in H_0^1(D) \\ v = \text{const. en } H}} J(v) = J(u) = E(D \setminus \overline{H}).$$

Además se cumple que

$$u \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n), \qquad D = \{u > 0\},$$

$$|D \setminus \overline{H}| = |\{x \notin H \ / \ u(x) > 0\}| = w_0.$$

DEMOSTRACIÓN. Se deduce en forma trivial del teorema 2.1.3. □

2.4. Problema $P(H)$.

2.4.1. Introducción.

El problema $P_F(H)$ consiste en minimizar la energía elástica sobre los abiertos admisibles Ad (H). Basándonos en el lema 2.3.4, plantearemos un problema variacional $P(H)$, consistente en minimizar el funcional J sobre un conjunto de funciones, que contiene a las funciones de torsión de todos los abiertos de Ad (H).

2.4.2. Datos del problema.

Supondremos dados H y w_0 como en 2.3.2.

2.4.3. Planteo del problema $P(H)$.

Definamos

$$K(H) = \left\{ v \in H^1(\mathbb{R}^n) \cap L^1(\mathbb{R}^n), v = \text{ const. en } H, |\{x \notin H \ / \ v(x) > 0\}| = w_0 \right\}.$$

Observemos que si definimos

$$J^*(H) = \inf_{v \in K(H)} J(v),$$

tendremos, aplicando los lemas 2.3.4 y 2.2.1, que

(2.4.1) $$E^*(H) \geq J^*(H) > -\infty.$$

Entonces planteamos el problema

$$P(H): \min_{v \in K(H)} J(v).$$

Cuando no se preste a confusión usaremos K y P para notar $K(H)$ y $P(H)$ respectivamente.

2.4.4. Observación. La resolución del problema $P(H)$ presenta los siguientes inconvenientes:

1) Las funciones de $K(H)$ están definidas en todo $\mathbb{R}^n$, con lo cual, en principio, las sucesiones minimizantes no tienen por que converger a un mínimo del problema .

2) La condición $v =$ const. en H, cumple el papel de condición de contorno, y ésta es variable, ya que el valor de la constante en H es una de las incógnitas del problema.

3) El hecho de fijar la medida de $\{x \notin H \;/\; v(x) > 0\}$ para las v admisibles, complica el problema variacional.

CAPITULO 3: EL PROBLEMA PENALIZADO.

Con el propósito final de resolver el problema $P(H)$, estudiamos los problemas penalizados $P^c_{\varepsilon,R}(H)$ y $P^c_\varepsilon(H)$.

En 3.1 planteamos el problema $P^c_{\varepsilon,R}(H)$. Mostramos que existe solución y probamos propiedades preliminares de regularidad para toda solución u. En particular: $u \geq 0$, u es lipschitz, $\Delta u = -2$ en $\{u > 0\}$, u tiene crecimiento lineal cerca de la frontera libre $\partial\{u > 0\}$. Además estudiamos detalladamente la dependencia de los distintos parámetros del problema, definiendo a tal fin, parámetros auxiliares μ y δ.

En 3.2 planteamos el problema $P^c_\varepsilon(H)$ y probamos - gracias a los resultados de 3.1 - que este problema tiene solución. Además sus soluciones satisfacen propiedades análogas a las que cumplen las soluciones de $P^c_{\varepsilon,R}(H)$. Finalmente probamos que ambos problemas son equivalentes para R grande.

3.1. Problema $P^c_{\varepsilon,R}(H)$.

3.1.1. Datos del problema.

Fijamos H y w_0 como en 2.3.2 y además fijamos los siguientes parámetros

$$(3.1.1) \qquad \begin{cases} r^* > 0, \text{ tal que } H \text{ satisface la propiedad de la esfera} \\ \qquad\qquad \text{interior uniforme de radio } r^* \\ R_0 > 0, \text{ tal que } \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, H) \leq 1\} \subset B_{R_0}(0). \end{cases}$$

3.1.2. Planteo del problema $P^c_{\varepsilon,R}(H)$.

Fijemos $\varepsilon > 0$, $c > 0$, $R \geq R_0$.

Sea $\Omega = \mathbb{R}^n - \overline{H}$ y para $v \in H^1(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ definamos

$$J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - 2\int_\Omega v + f_\varepsilon\left(|\{x \in \Omega / v(x) > 0\}|\right)$$

donde

$$f_\varepsilon(s) = \begin{cases} \varepsilon(s-w_0) & s \le w_0, \\ \dfrac{1}{\varepsilon}\left((s-w_0)+(s-w_0)^2\right) & s \ge w_0. \end{cases}$$

Definamos

(D.1) $$K_R^c = K_R^c(H) = \left\{ v \in H_0^1(B_R),\ v = c \text{ en } H \right\}.$$

Claramente $K_R^c(H) \subset H^1(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, entonces planteamos

$$P_{\varepsilon,R}^c = P_{\varepsilon,R}^c(H) : \min_{v \in K_R^c} J_\varepsilon(v).$$

Por otra parte, fijamos una función $u^c = u_H^c \in H_0^1(B_{R_0})$ satisfaciendo

$$u^c = c \text{ en } H, \qquad u^c \ge 0, \qquad |\{x \notin H \ / \ u^c(x) > 0\}| \le w_0.$$

Entonces, si definimos

(3.1.2) $$l = l_H^c := \|\nabla u^c\|^2_{L^2(\mathbb{R}^n)},$$

tendremos que $J_\varepsilon(u^c) \le l$, y como $R \ge R_0$, resultará

(3.1.3) $$u^c \in K_R^c \quad \text{y por lo tanto} \quad \inf_{v \in K_R^c} J_\varepsilon(v) \le l.$$

Observación importante.

Definamos $\Omega_R = B_R - \overline{H}$. Entonces si $v \in K_R^c$, también $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ y se tiene

(Δ) $$v \in H^1(\Omega_R), \qquad v = c \text{ en } \partial H \quad \text{y} \quad v = 0 \text{ en } \partial B_R \quad (\text{en el sentido } H^1)$$

A su vez, dada una función satisfaciendo (Δ), podremos pensarla definida en todo $\mathbb{R}^n$, si asumimos

$$v(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}^n - B_R, \\ c & \text{si } x \in H \end{cases}$$

y tendremos entonces que $v \in H^1(\mathbb{R}^n)$ y además $v \in K_R^c$.

Por tal razón, asumiremos de acá en más que

(D.2) $$K_R^c = K_R^c(H) = \left\{ v \in H^1(\Omega_R),\ v = c \text{ en } \partial H,\ v = 0 \text{ en } \partial B_R \right\},$$

observándose que si bien las definiciones (D.1) y (D.2) son equivalentes, esta última resultará más adecuada para el estudio de propiedades locales.

En consecuencia se tendrá

$$J_\varepsilon(v) = \frac{1}{2}\int_{\Omega_R} |\nabla v|^2 - 2\int_{\Omega_R} v + f_\varepsilon\left(|\{x \in \Omega_R / v(x) > 0\}|\right) \qquad \forall v \in K_R^c.$$

La definición (D.1) será usada sólo cuando se lo aclare explícitamente.

3.1.3. Teorema. *Existe una solución u de $P_{\varepsilon,R}^c$.*

DEMOSTRACIÓN. Pensando a K_R^c como en (D.1), y definiendo para $v \in K_R^c$, $s(v) := |\{x \notin H / v(x) > 0\}|$, tenemos

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + 2c|H| + f_\varepsilon(s(v)), \tag{3.1.4}$$

con J definido en (2.1.1). Observando que

$$f_\varepsilon(s(v)) \geq -\varepsilon w_0 \qquad \forall v \in K_R^c, \tag{3.1.5}$$

y usando el lema 2.2.1, tenemos para $v \in K_R^c$ que

$$J_\varepsilon(v) \geq -C + 2c|H| - \varepsilon w_0, \qquad C \text{ constante},$$

y entonces $\gamma := \inf_{v \in K_R^c} J_\varepsilon(v) > -\infty$.

Tomemos u_k una sucesión minimizante. De (3.1.4), (3.1.5) y como $c > 0$ resulta

$$J(u_k) - \varepsilon w_0 \leq J_\varepsilon(u_k) \leq J_\varepsilon(u_1) \quad \text{para } k \text{ grande}$$

es decir,

$$J(u_k) \leq C, \qquad C \text{ independiente de } k$$

y usando el lema 2.2.2 obtenemos

$$\|u_k\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C, \qquad C \text{ independiente de } k.$$

Por lo tanto existe $u \in H_0^1(B_R)$ y una subsucesión u_k tal que

$$\nabla u_k \longrightarrow \nabla u \text{ débilmente en } L^2(B_R)$$
$$u_k \longrightarrow u \text{ en } L^1(B_R) \text{ y c.t.p. en } B_R.$$

En consecuencia $u = c$ en H y entonces $u \in K_R^c$. Además

$$\begin{aligned} s(u) &\leq \liminf_{k\to\infty} s(u_k) \\ f_\epsilon\left(s(u)\right) &\leq \liminf_{k\to\infty} f_\epsilon\left(s(u_k)\right) \\ \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2 &\leq \liminf_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_k|^2 \end{aligned}$$

con lo cual

$$J_\epsilon(u) \leq \liminf_{k\to\infty} J_\epsilon(u_k) = \lim_{k\to\infty} J_\epsilon(u_k) = \gamma$$

lo que prueba el teorema. □

Estudiemos propiedades de regularidad de las soluciones de $P_{\epsilon,R}^c$.

3.1.4. Lema. *Si u es una solución de $P_{\epsilon,R}^c$ entonces $\Delta u \geq -2$ en el sentido de las distribuciones en Ω_R.*

Por lo tanto podemos asumir que u satisface

$$u(x) = \lim_{r\downarrow 0} \fint_{B_r(x)} u \qquad \forall x \in \Omega_R,$$

y u es semicontinua superiormente.

DEMOSTRACIÓN. Sea $\eta \in C_0^\infty(\Omega_R)$, $\eta \geq 0$ y sea $t > 0$. Entonces $u - t\eta$ es admisible para $P_{\epsilon,R}^c$, con

$$|\{x \in \Omega_R/(u - t\eta)(x) > 0\}| \leq |\{x \in \Omega_R/u(x) > 0\}|$$

y por lo tanto

$$0 \leq \frac{1}{t}\left(J_\epsilon(u - t\eta) - J_\epsilon(u)\right) \leq \frac{1}{t}\left(\frac{1}{2}\int_{\Omega_R} |\nabla(u - t\eta)|^2 - \frac{1}{2}\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 + 2t\int_{\Omega_R} \eta\right).$$

Tomando límite superior para $t \to 0$ resulta

$$\int_{\Omega_R} (-\nabla u \nabla\eta + 2\eta) \geq 0,$$

de donde concluimos que $\Delta u \geq -2$ en el sentido de las distribuciones en Ω_R.

Finalmente, el resultado se completa aplicando el lema 1.3.1. □

3.1.5. Lema. *Sea u una solución de $P_{\epsilon,R}^c$. Entonces $u \geq 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $u(x_0) < 0$ para algún $x_0 \in \Omega_R$.

Entonces, definiendo $v := \max(u, 0)$, obtenemos una función admisible para $P^c_{\epsilon,R}$ y por el lema 3.1.4. tendremos que

$$\int_{\Omega_R} |\nabla v|^2 < \int_{\Omega_R} |\nabla u|^2, \qquad \int_{\Omega_R} v > \int_{\Omega_R} u.$$

Como además

$$|\{x \in \Omega_R / u(x) > 0\}| = |\{x \in \Omega_R / v(x) > 0\}|$$

resultará $J_\epsilon(v) < J_\epsilon(u)$, lo que es un absurdo. □

3.1.6. Lema. *Sea $D \subset I\!R^n$ un dominio, $v \in H^1(D)$ una función no negativa semicontinua. Existe una constante $C = C(n) > 0$ tal que si $B_r(x) \subset\subset D$, y si s es una función satisfaciendo $\Delta s = -\alpha$ en $B_r(x)$, $s = v$ en $\partial B_r(x)$, con $\alpha \geq 0$, entonces*

$$\left(\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r(x)} v d\mathcal{H}^{n-1} \right)^2 \cdot |\{y \in B_r(x), v(y) = 0\}| \leq C \int_{B_r(x)} |\nabla(v - s)|^2 \, dy.$$

DEMOSTRACIÓN. Supongamos que $B_r(x) = B_1(0)$ y notemos que podemos acotar a s del siguiente modo: Si h es la función armónica en B_1 con $h = s = v \geq 0$ en ∂B_1, usando el principio del máximo y la fórmula de representación de Poisson

$$s(y) \geq h(y) \geq C(n)(1 - |y|) \fint_{\partial B_1} v, \quad y \in B_1. \tag{3.1.6}$$

Fijemos ahora z tal que $|z| \leq \frac{1}{2}$ y consideremos la transformación $x \longmapsto (1 - |x|)z + x$ de B_1 en sí misma, donde z se convierte en el nuevo origen, y sean

$$v_z(x) := v\left((1 - |x|)z + x\right) \quad s_z(x) := s\left((1 - |x|)z + x\right),$$

donde observamos que $v_z = s_z$ en ∂B_1.

Dado $\xi \in \partial B_1$ definimos

$$r_\xi = \inf \left\{ r / \frac{1}{8} \leq r \leq 1 \text{ y } v_z(r\xi) = 0 \right\},$$

si el conjunto es no vacío y $r_\xi = 1$ si el conjunto es vacío. Para $\mathcal{H}^{n-1}$-casi todo $\xi \in \partial B_1$, $v_z(r\xi)$ está en H^1 en r, $r \in [\frac{1}{8}, 1]$. Entonces, si fijamos $\xi \in \partial B_1$ tal que v_z tenga esta propiedad y tal que $r_\xi < 1$ obtenemos

$$s_z(r_\xi\xi) = s_z(r_\xi\xi) - v_z(r_\xi\xi) = \int_{r_\xi}^1 \frac{d}{dr}(v_z - s_z)(r\xi)dr \leq$$
$$\leq \sqrt{1 - r_\xi}\left(\int_{r_\xi}^1 |\nabla(v_z - s_z)(r\xi)|^2 \, dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

Entonces por definición de s_z y por (3.1.6) resulta

$$\left(\fint_{\partial B_1} v\right)(1 - r_\xi) \leq C(n)\sqrt{1 - r_\xi}\left(\int_{r_\xi}^1 |\nabla(v_z - s_z)(r\xi)|^2 \, dr\right)^{\frac{1}{2}},$$

o bien

$$\left(\fint_{\partial B_1} v\right)^2 (1 - r_\xi) \leq C(n)\int_{r_\xi}^1 |\nabla(v_z - s_z)(r\xi)|^2 \, dr, \tag{3.1.7}$$

desiguladad que también es válida cuando $r_\xi = 1$.

Recordando la definición de r_ξ resulta

$$\int_{B_1 - B_{1/8}} \chi_{\{v_z = 0\}} dx \leq \int_{|\xi|=1}\int_{r_\xi}^1 r^{n-1} dr d\mathcal{H}_\xi^{n-1} \leq \int_{|\xi|=1}(1 - r_\xi)d\mathcal{H}_\xi^{n-1},$$

y por lo tanto si integramos (3.1.7) sobre ξ obtenemos

$$\left(\fint_{\partial B_1} v\right)^2 \int_{B_1 - B_{1/8}} \chi_{\{v_z = 0\}} dx \leq C(n)\int_{B_1(0)} |\nabla(v_z - s_z)|^2 \, dx,$$

es decir,

$$\left(\fint_{\partial B_1} v\right)^2 \int_{B_1 - B_{1/4}(z)} \chi_{\{v = 0\}} dy \leq C(n)\int_{B_1(0)} |\nabla(v - s)|^2 \, dy. \tag{3.1.8}$$

Si consideramos ahora (3.1.8) para z_1 y z_2 en $B_{1/2}$ con $B_{1/4}(z_1) \cap B_{1/4}(z_2) = \emptyset$ y sumamos, obtenemos el resultado buscado en $B_1(0)$.

Finalmente, haciendo el cambio de variable correspondiente, se obtiene el lema para $B_r(x) \subset\subset D$ arbitraria. $\square$

3.1.7. Teorema. *Existen constantes positivas* $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n)$ *y* C *tales que toda solución* u *de* $P^c_{\varepsilon,R}$*, con* $\varepsilon \le \varepsilon_0$ *satisface*

$$|\{x \in \Omega_R / u(x) > 0\}| \le C$$

donde $C = C(n, |H|, l)$*,* l *dada por* (3.1.2). *Además* C *varía en forma continua cuando* $|H|$ *ó* l *varían en* $I\!R_{>0}$.

Demostración. Sea $h = |H|$. Para v admisible definamos $s(v) := |\{x \in \Omega_R / v(x) > 0\}|$.

Si para toda solución u de $P^c_{\varepsilon,R}$ se cumple que $s(u) \le \max\{1-h, w_0\}$, el lema resulta trivial.

Sino, existe una solución u de $P^c_{\varepsilon,R}$ satisfaciendo

(3.1.9) $$s(u) \ge \max\{1-h, w_0\}.$$

Pensando a $u \in H^1_0(B_R)$, tomando $u = c > 0$ en H, por el lema 2.2.1, tenemos

(3.1.10) $$J_\varepsilon(u) > -C(n)(s(u)+h)^{\frac{n+2}{n}} + f_\varepsilon(s(u))$$

y por lo tanto de (3.1.9), (3.1.10) y (3.1.3)

(3.1.11) $$s(u) \in \{s / s \ge 0,\ F(s) < 0\} \ne \emptyset,$$

con $F(s) = -\varepsilon C(n)(s+h)^2 + (s-w_0)^2 - \varepsilon l.$

Entonces si $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, con $\varepsilon_0 := \dfrac{1}{2C(n)}$, F resulta una función cuadrática en s con coeficiente principal positivo, y de (3.1.11) se concluye que

$$\text{existen } s_1,\ s_2 \text{ raíces reales de } F,\ s_1 < s_2,\ s_2 > 0, \text{ y } s(u) \in [0, s_2).$$

No es difícil ver de la definición de F que

$$s_2 = s_2(n, \varepsilon, h, l) \le C(n, h, l) \quad \text{para } 0 < \varepsilon \le \varepsilon_0(n),$$

donde C es una constante que varía en forma continua cuando h ó l varían en $I\!R_{>0}$. Esto concluye la demostración. $\square$

3.1.8. Observación. De acá en más, asumiremos $\varepsilon \leq \varepsilon_0$, con $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(n)$ dado por el teorema 3.1.7. Además, fijaremos una constante $\mu > 0$, parámetro del problema $P^c_{\varepsilon,R}$, con la siguiente propiedad

$$|\{x \in \Omega_R / u(x) > 0\}| \leq \mu \quad \text{para toda solución } u \text{ de } P^c_{\varepsilon,R}, \tag{3.1.12}$$

observando que una tal μ existe por el teorema 3.1.7.

Por otra parte, el citado teorema nos asegura que de ser necesario , podremos elegir dicha μ de modo tal que resulte independiente de ε ó de R.

De esta observación y del lema 3.1.5, concluimos que si u es solución de $P^c_{\varepsilon,R}$ y R es grande existirá una región de Ω_R donde $u \equiv 0$, y también una frontera $\Omega_R \cap \partial\{u > 0\}$ que llamaremos la frontera libre.

3.1.9. Lema. *Existe una constante $C = C(\varepsilon) > 0$ tal que si u es solución de $P^c_{\varepsilon,R}$ y si s es una función satisfaciendo $\Delta s = -2$ en D, $s = u$ en ∂D, con $D \subset \Omega_R$ un abierto, entonces*

$$\int_D |\nabla(u-s)|^2 \leq C(\varepsilon)\,(1 + \mu + |D|)\,|\{y \in D / u(y) = 0\}|,$$

donde μ viene dado por (3.1.12).

DEMOSTRACIÓN. Sean $D \subset \Omega_R$ un abierto y u una solución de $P^c_{\varepsilon,R}$. Sea $s \in H^1(\Omega_R)$ la función que satisface

$$\Delta s = -2 \text{ en } D, \quad s = u \text{ en } \Omega_R - D,$$

entonces s es una función admisible para $P^c_{\varepsilon,R}$, y como $u \geq 0$, por el principio del máximo tenemos

$$\{s > 0\} = \{u > 0\} \cup \{y \in D / u(y) = 0\}.$$

Por lo tanto, por definición de f_ε y por (3.1.12) se tiene

$$\begin{aligned} f_\varepsilon(|\{s>0\}|) - f_\varepsilon(|\{u>0\}|) &\leq \sup_{0 \leq s \leq \mu + |D|} f'_\varepsilon(s)\,(|\{s>0\}| - |\{u>0\}|) \\ &= c(\varepsilon)\,(1 + \mu + |D|)\,|\{y \in D / u(y) = 0\}|. \end{aligned} \tag{3.1.13}$$

Además, por ser u solución de $P^c_{\varepsilon,R}$ y por el lema 2.2.3 tenemos

$$0 \leq J_\varepsilon(s) - J_\varepsilon(u) = -\frac{1}{2}\int_D |\nabla(u-s)|^2 + f_\varepsilon(|\{s>0\}|) - f_\varepsilon(|\{u>0\}|),$$

lo que junto con (3.1.13) prueba el lema. $\square$

3.1.10. Lema. *Existe una constante positiva C, tal que para cada solución u de $P^c_{\epsilon,R}$ y para cada bola $B_r(x) \subset \Omega_R$ con $r < 1$, se cumple la siguiente propiedad:*

$$\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r(x)} u \geq C \quad \textit{implica } u > 0 \textit{ en } B_r(x)$$

donde $C = C(n, \epsilon, \mu)$, μ viene dada por (3.1.12).

Demostración. Sean u una solución de $P^c_{\epsilon,R}$ y $B_r(x) \subset \Omega_R$ con $r < 1$. Sea s la función satisfaciendo

$$\Delta s = -2 \text{ en } B_r(x), \quad s = u \text{ en } \partial B_r(x),$$

entonces por el principio del máximo y como s es continua en $B_r(x)$, resulta

$$s > 0 \text{ en } B_r(x), \quad \lim_{\rho \downarrow 0} \fint_{B_\rho(y)} s = s(y) \quad \text{si} \quad y \in B_r(x). \tag{3.1.14}$$

Por el lema 3.1.6

$$\left(\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r(x)} u \right)^2 \cdot |\{y \in B_r(x),\, u(y) = 0\}| \leq C(n) \int_{B_r(x)} |\nabla(u - s)|^2$$

y por el lema 3.1.9, usando que $r < 1$ tenemos

$$\int_{B_r(x)} |\nabla(u - s)|^2 \leq C(n, \epsilon, \mu)\, |\{y \in B_r(x),\, u(y) = 0\}|\,. \tag{3.1.15}$$

Es decir, existe una constante positiva $C = C(n, \epsilon, \mu)$ tal que

$$\left(\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r(x)} u \right) \cdot |\{y \in B_r(x),\, u(y) = 0\}|^{\frac{1}{2}} \leq C\, |\{y \in B_r(x),\, u(y) = 0\}|^{\frac{1}{2}}\,.$$

Por lo tanto, si se cumple que $\dfrac{1}{r} \displaystyle\fint_{\partial B_r(x)} u \geq 2C$, deberá ocurrir que $u > 0$ c.t.p. en $B_r(x)$, con lo cual, de (3.1.15) y de la desigualdad de Poincaré obtenemos que $u = s$

c.t.p. en $B_r(x)$. Entonces por (3.1.14) y por el lema 3.1.4, tenemos $u = s > 0$ en $B_r(x)$. □

3.1.11. Lema. *Sea u una solución de $P^c_{\varepsilon,R}$. Entonces $\Delta u = -2$ en el conjunto abierto $\{x \in \Omega_R \;/\; u(x) > 0\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Veremos primero que $\{x \in \Omega_R \;/\; u(x) > 0\}$ es un abierto.

Sean $x_0 \in \Omega_R$ tal que $u(x_0) > 0$ y α tal que $u(x_0) > \alpha > 0$. Por el lema 3.1.4

$$\lim_{r \downarrow 0} \fint_{B_r(x_0)} u = u(x_0) > \alpha,$$

con lo cual para un $r_1 > 0$ chico se tiene $B_{r_1}(x_0) \subset \Omega_R$ y además

$$\int_0^r \int_{\partial B_\rho(x_0)} (u - \alpha)\, d\mathcal{H}^{n-1} d\rho > 0, \qquad \forall r \leq r_1.$$

En consecuencia, existe una sucesión $\rho_k \to 0$ tal que

$$\int_{\partial B_{\rho_k}(x_0)} (u - \alpha)\, d\mathcal{H}^{n-1} > 0, \qquad \rho_k > 0, \quad \forall k \in I\!N.$$

Entonces, si C es la constante del lema 3.1.10, podremos encontrar un $k_0 \in I\!N$ con la propiedad de que

$$\frac{1}{\rho_k} \fint_{\partial B_{\rho_k}(x_0)} u\, d\mathcal{H}^{n-1} > \frac{\alpha}{\rho_k} > C, \qquad \forall k > k_0,$$

y por lo tanto $u > 0$ en $B_{\rho_{k_0}}(x_0)$.

El resultado se completa aplicando el lema 3.1.9 en $B_{\rho_{k_0}}(x_0)$. □

Para $0 < \delta < 1$ definamos

(3.1.16) $$D_\delta = D_\delta(H) := \{x \in I\!R^n \;/\; 0 < d(x, H) < \delta\}.$$

Entonces, como $R \geq R_0$, con R_0 dado en (3.1.1), se tiene que

$$D_\delta \subset \{x \in I\!R^n \;/\; 0 < d(x, H) \leq 1\} \subset \Omega_R.$$

Probaremos ahora que la frontera libre $\Omega_R \cap \partial\{u > 0\}$ se mantiene uniformemente alejada de ∂H.

3.1.12. Teorema. *Existe una constante* δ_0, $0 < \delta_0 < 1$, *tal que toda solución* u *de* $P^c_{\varepsilon,R}$ *cumple*

$$D_{\delta_0} \subset \{x \in \Omega_R / u(x) > 0\}$$

con $\delta_0 = \delta_0(n, \varepsilon, c, r^*, \mu)$, r^* *y* μ *dadas por* (3.1.1) *y* (3.1.12) *respectivamente. Además* δ_0 *varía en forma continua cuando* c *varía en* $\mathbb{R}_{>0}$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in \partial H$, y sea $0 < \delta < \min\{1, r^*\}$, r^* como en (3.1.1) y consideremos B_δ la bola de radio δ tangente interior a H en x_0. Sin pérdida de la generalidad supondremos $B_\delta = B_\delta(0)$.

Observamos entonces que $B_{2\delta} = B_{2\delta}(0)$ satisface

$$B_{2\delta} \cap \Omega_R \neq \emptyset \qquad \overline{B}_{2\delta} \subset \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ d(x, H) \leq 1\} \subset \Omega_R \cup \overline{H},$$

hecho que nos permitirá extender u a todo $B_{2\delta}$, tomando $u = c$ en $B_{2\delta} - \Omega_R$ y de este modo $u \in H^1(B_{2\delta})$.

Sea s la función definida en $B_{2\delta}$ satisfaciendo:

$$\Delta s = -2 \text{ en } \Omega_R \cap B_{2\delta}, \qquad s = u \text{ en } \partial(\Omega_R \cap B_{2\delta}), \qquad s = u \text{ en el resto de } B_{2\delta}.$$

Además construyamos la barrera w del siguiente modo:

$$\Delta w = 0 \text{ en } B_{2\delta} - B_\delta, \qquad w = c \text{ en } \partial B_\delta, \qquad w = 0 \text{ en } \partial B_{2\delta},$$

es decir

$$w(x) = cC(n) f(|x|), \qquad \delta \leq |x| \leq 2\delta, \qquad C(n) > 0,$$

$$f(\rho) = \begin{cases} \ln(2\delta/\rho) & n = 2, \\ \delta^{n-2}\left(\frac{1}{\rho^{n-2}} - \frac{1}{(2\delta)^{n-2}}\right) & n > 2. \end{cases} \tag{3.1.17}$$

Entonces, como

$$\Delta(s - w) = -2 \text{ en } \Omega_R \cap B_{2\delta}, \qquad s - w \geq 0 \text{ en } \partial(\Omega_R \cap B_{2\delta}),$$

tenemos por el principio del máximo que

$$s - w \geq 0 \text{ en } \Omega_R \cap B_{2\delta}. \tag{3.1.18}$$

Razonaremos en forma similar al lema 3.1.6:

Dado $\xi \in \partial B_1$ definimos

$$r_\xi = \inf\{r \;/\; \delta \le r \le 2\delta,\; u(r\xi) = 0\},$$

si el conjunto es no vacío, y $r_\xi = 2\delta$ si el conjunto es vacío. Para $\mathcal{H}^{n-1}-$ casi todo $\xi \in \partial B_1$, $u(r\xi)$ está en H^1 en r, $r \in [\delta, 2\delta]$. Entonces, si fijamos $\xi \in \partial B_1$ tal que u tenga esta propiedad y tal que $r_\xi < 2\delta$ obtenemos

$$\begin{aligned} s(r_\xi\xi) = s(r_\xi\xi) - u(r_\xi\xi) &= \int_{r_\xi}^{2\delta} \frac{d}{dr}(u-s)(r\xi)\,dr \\ &\le \sqrt{2\delta - r_\xi}\left(\int_{r_\xi}^{2\delta} |\nabla(u-s)(r\xi)|^2\,dr\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

Observando que $r_\xi\xi \in \Omega_R \cap B_{2\delta}$, de (3.1.18) y (3.1.17) resulta

$$s(r_\xi\xi) \ge w(r_\xi\xi) = w(r_\xi\xi) - w(2\delta\xi) \ge c\frac{C(n)}{\delta}(2\delta - r_\xi),$$

lo que junto con (3.1.19) conduce a

$$\frac{c^2}{\delta^2}(2\delta - r_\xi) \le C(n)\int_{r_\xi}^{2\delta} |\nabla(u-s)(r\xi)|^2\,dr, \tag{3.1.20}$$

desigualdad también válida cuando $r_\xi = 2\delta$.

Recordando la definición de r_ξ se tiene

$$\begin{aligned} |\{x \in \Omega_R \cap B_{2\delta} \;/\; u(x) = 0\}| &\le \int_{|\xi|=1}\int_{r_\xi}^{2\delta} r^{n-1}\,dr\,d\mathcal{H}_\xi^{n-1} \\ &\le C(n)\delta^{n-1}\int_{|\xi|=1}(2\delta - r_\xi)\,d\mathcal{H}_\xi^{n-1} \end{aligned}$$

y si ahora integramos (3.1.20) sobre $\xi \in \partial B_1$ obtenemos

$$\frac{c^2}{\delta^2}\,|\{x \in \Omega_R \cap B_{2\delta} \;/\; u(x) = 0\}| \le C(n)\int_{\Omega_R \cap B_{2\delta}} |\nabla(u-s)|^2\,dx. \tag{3.1.21}$$

Por el lema 3.1.9, usando que $\delta < 1$

$$\int_{\Omega_R \cap B_{2\delta}} |\nabla(u-s)|^2\,dx \le C(n,\varepsilon,\mu)|\{x \in \Omega_R \cap B_{2\delta} \;/\; u(x) = 0\}|, \tag{3.1.22}$$

lo que junto con (3.1.21) resulta en

$$\frac{c^2}{\delta^2}\,|\{x \in \Omega_R \cap B_{2\delta}/u(x) = 0\}| \le C(n,\varepsilon,\mu)|\{x \in \Omega_R \cap B_{2\delta} \;/\; u(x) = 0\}|, \tag{3.1.23}$$

Si ahora fijamos un δ tal que $\delta^2 < \frac{c^2}{C(n,\epsilon,\mu)}$, de (3.1.23) obtendremos que $u > 0$ c.t.p en $\Omega_R \cap B_{2\delta}$. Entonces por (3.1.22) y razonando como al final del lema 3.1.10, se tiene que $u > 0$ en $\Omega_R \cap B_{2\delta}$. Recordando como habíamos construído $B_{2\delta}$, y observando que el razonamiento hecho es independiente del punto $x_0 \in \partial H$ del que partimos, se concluye que $D_\delta \subset \{u > 0\}$. □

3.1.13. Observación. De acá en más fijaremos una constante δ, $0 < \delta < 1$, parámetro del problema $P^c_{\epsilon,R}$ con la siguiente propiedad

$$D_\delta \subset \{x \in \Omega_R \ / \ u(x) > 0\} \quad \text{para toda solución } u \text{ de } P^c_{\epsilon,R}, \tag{3.1.24}$$

observando que una tal δ existe por el teorema 3.1.12.

Dada u una solución de $P^c_{\epsilon,R}$, notaremos para $x \in \Omega_R$, tal que $u(x) > 0$

$$d(x) = d_u(x) := d(x, \Omega_R \cap \partial\{u > 0\}). \tag{3.1.25}$$

En particular tendremos $d(x) > 0$ y $B_{d(x)}(x) \cap \Omega_R \subset \{u > 0\}$.

El próximo lema muestra que u tiene crecimiento lineal cerca de la frontera libre.

3.1.14. Lema. *Existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que si u es solución de $P^c_{\epsilon,R}$, $x \in \{u > 0\}$, $B_{d(x)}(x) \subset\subset \Omega_R$ y $d(x) < 1$, entonces*

$$C_1 d(x) \leq u(x) \leq C_2 d(x)$$

donde $C_1 = C_1(n,\epsilon)$, $C_2 = C_2(n,\epsilon,\mu)$, μ dada por (3.1.12).

Demostración. Sea u una solución de $P^c_{\epsilon,R}$. Tomemos x_0 satisfaciendo

$$x_0 \in \{u > 0\}, \qquad B_r := B_{d(x_0)}(x_0) \subset\subset \Omega_R, \qquad d(x_0) < 1. \tag{3.1.26}$$

Llamemos $v(x) := u(x) + \frac{|x-x_0|^2}{n}$. Por definición de $d(x_0)$

$$\partial B_r \quad \text{contiene un punto de la frontera libre,} \tag{3.1.27}$$

$u > 0$ y entonces $\Delta u = -2$ en B_r,

$$\Delta v = 0 \quad \text{y} \quad v \geq u > 0 \text{ en } B_r \tag{3.1.28}$$

PASO I. (primera desigualdad). Tomemos α tal que

(3.1.29) $$u(x_0) < \alpha r, \quad \alpha > 0.$$

De (3.1.28) y la desigualdad de Harnack resulta

(3.1.30) $$\sup_{B_{r/2}} v \leq C(n) v(x_0) = C(n) u(x_0), \qquad C(n) > 0$$

y entonces de (3.1.28), (3.1.30) y (3.1.29) concluimos

(3.1.31) $$u(x) \leq C(n)\, \alpha\, r \qquad \text{en } \overline{B_{r/2}}.$$

Fijemos una función $\psi \in C^\infty(I\!R^n)$ satisfaciendo

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } |x| \leq 1, \\ 1 & \text{si } |x| \geq 2, \end{cases}$$

$$\psi(x) > 0 \qquad \text{si } 1 < |x| < 2,$$

y definamos $\Phi(x) = \psi(\frac{4x}{r})$. Sea

$$w := \begin{cases} \min\{u, C(n)\alpha r \Phi\} & \text{en } B_{r/2} \\ u & \text{en } \Omega_R - B_{r/2} \end{cases}$$

entonces por (3.1.31) w resulta admisible para $P^c_{\varepsilon,R}$ y observando además, que $w = 0$ en $B_{r/4}$ y $w > 0$ en $B_{r/2} - B_{r/4}$, se tiene

$$\frac{1}{2}\int_{\Omega_R} |\nabla w|^2 - \frac{1}{2}\int_{\Omega_R} |\nabla u|^2 \leq \widetilde{C}(n)\alpha^2 r^n, \qquad \widetilde{C}(n) > 0$$

$$-2\int_{\Omega_R} w + 2\int_{\Omega_R} u \leq \alpha \widetilde{C}(n) r^{n+1},$$

$$f_\varepsilon(|\{w > 0\}|) - f_\varepsilon(|\{u > 0\}|) \leq -\overline{C}(\varepsilon, n) r^n, \qquad \overline{C}(\varepsilon, n) > 0.$$

Recordando que $r < 1$, concluímos que existe $C_1 = C_1(n, \varepsilon) > 0$ tal que

$$J_\varepsilon(w) - J_\varepsilon(u) < 0 \quad \text{si} \quad \alpha \leq C_1,$$

lo que es un absurdo.

Es decir, todo α satisfaciendo (3.1.29), cumple que $\alpha > C_1$, y por lo tanto

$$C_1 d(x_0) = C_1 r \leq u(x_0)$$

PASO II. (segunda desigualdad). Por (3.1.26) tendremos para $\rho > 0$ chico, que $B_{r+\rho} \subset \Omega_R$, con $r+\rho < 1$. Entonces de (3.1.27) y del lema 3.1.10 se deduce

$$\frac{1}{r+\rho} \fint_{\partial B_{r+\rho}} u < C, \qquad C = C(n,\varepsilon,\mu) > 0$$

y si tomamos limite para $\rho \to 0$, por el lema 1.3.1 obtenemos

$$\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r} u \leq C. \tag{3.1.32}$$

Finalmente, recordando la definición de v, tendremos por (3.1.28), (3.1.32) y como $r < 1$ que

$$u(x_0) = v(x_0) = \fint_{\partial B_r} v = \fint_{\partial B_r} u + \frac{r^2}{n} \leq C_2 r = C_2 d(x_0),$$

donde $C_2 = C_2(n,\varepsilon,\mu)$, lo que completa el lema. □

3.1.15. Lema. *Existe una constante positiva L tal que si u es solución de $P^c_{\varepsilon,R}$, $x_0 \in \Omega_R \cap \partial\{u > 0\}$ y $B_{2r}(x_0) \subset\subset \Omega_R$, con $0 < r < 1$, entonces u es Lipschitz en $B_r(x_0)$ con constante L, donde $L = L(n,\varepsilon,\mu)$, μ dada por* (3.1.12).

Por lo tanto $u \in C^{0,1}(\Omega_R)$.

DEMOSTRACIÓN. Sean u, x_0 y r como en el enunciado. Fijemos $x \in B_r = B_r(x_0)$ con $u(x) > 0$, entonces

$$x \in \{u > 0\}, \qquad B_{d(x)}(x) \subset\subset \Omega_R, \qquad d(x) < 1$$

y por el lema 3.1.14

$$0 < u(x) \leq C d(x) \leq C \qquad C = C(n,\varepsilon,\mu). \tag{3.1.33}$$

Razonando como en el paso II del mismo lema, obtenemos que si $d = d(x)$

$$\frac{1}{d} \fint_{\partial B_d(x)} u \leq C \qquad C = C(n,\varepsilon,\mu). \tag{3.1.34}$$

Además, como $u > 0$ y en consecuencia $\Delta u = -2$ en $B_d(x)$, resulta

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \text{en } B_d(x), \qquad 1 \leq i \leq n,$$

de donde, para $\rho < d$

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}(x) = \frac{1}{w_n \rho^n} \int_{B_\rho(x)} \frac{\partial u}{\partial x_i} = \frac{1}{w_n \rho^n} \int_{\partial B_\rho(x)} u\, n_i, \tag{3.1.35}$$

donde n es la normal exterior a $B_\rho(x)$. Por lo tanto, haciendo $\rho \to d$, de (3.1.34) y (3.1.35) obtenemos

$$|\nabla u(x)| \leq L \qquad L = L(n, \varepsilon, \mu). \tag{3.1.36}$$

Como tenemos (3.1.33) y (3.1.36) para $x \in B_r \cap \{u > 0\}$ arbitrario y observando que $\nabla u = 0$ c.t.p. en $\{u = 0\}$, concluímos que

$$u \in W^{1,\infty}(B_r), \qquad \|\nabla u\|_{L^\infty(B_r)} \leq L,$$

lo que completa el lema. □

3.1.16. Lema. *Existen constantes* $C > 0$, $0 < r_0 < 1$ *tales que si* u *es solución de* $P^c_{\varepsilon,R}$, $x_0 \in \Omega_R \cap \partial\{u > 0\}$, $B_{2r}(x_0) \subset\subset \Omega_R$, $0 < r < r_0$ *entonces*

$$\sup_{B_r(x_0)} u \geq Cr$$

donde $C = C(n, \varepsilon, \mu)$, $r_0 = r_0(n, \varepsilon, \mu)$, μ *dada por* (3.1.12).

DEMOSTRACIÓN. Fijemos u una solución de $P^c_{\varepsilon,R}$, $x_0 \in \Omega_R \cap \partial\{u > 0\}$ y $B_{2r}(x_0) \subset\subset \Omega_R$ con $0 < r < 1$. Por definición de $d(x)$ tendremos

$$d(x) \leq |x - x_0| \leq r \qquad \forall x \in B_r(x_0) \cap \{u > 0\} \tag{3.1.37}$$

y entonces por el lema 3.1.14 resulta

$$C_1 d(x) \leq u(x) \leq C_2 d(x) \qquad \forall x \in B_r(x_0) \cap \{u > 0\}, \tag{3.1.38}$$

donde $C_i = C_i(n, \varepsilon, \mu) > 0$, $i = 1, 2$, y por el lema 3.1.15, existe una constante $L = L(n, \varepsilon, \mu) > 0$ tal que

(3.1.39) $\qquad u$ es lipschitz en $B_r(x_0)$ con constante L.

PASO I. (parte principal de la demostración). Probaremos que bajo nuestras hipótesis existen $\delta_0 = \delta_0(n,\varepsilon,\mu)$, $r_0 = r_0(n,\varepsilon,\mu)$ constantes positivas, con $r_0 < 1$ tales que si tomábamos arriba $r \le r_0$ y

$$(3.1.40)\quad \begin{cases} \text{si } x \text{ es tal que } u(x) > 0, \quad B_{d(x)}(x) \subset\subset B_r(x_0), & \text{entonces} \\ \text{existe } z = z(x) \text{ con } |z-x| = d(x), & u(z) \ge (1+\delta_0)u(x) > 0 \end{cases}$$

Para demostrarlo, tomemos x_1, con $u(x_1) > 0$ y $B_d(x_1) = B_{d(x_1)}(x_1) \subset\subset B_r(x_0)$. Entonces por definición de $d(x_1)$, $\partial B_d(x_1)$ contiene un punto y_1 de la frontera libre, y $u > 0$ en $B_d(x_1)$. Por lo tanto si $v(x) := u(x) + \frac{|x-x_1|^2}{n}$, tenemos que

$$(3.1.41)\qquad \Delta v = 0 \quad \text{en } B_d(x_1) \text{ y } v \text{ es continua en } \overline{B_d}(x_1).$$

Veamos que existen $\alpha = \alpha(n,\varepsilon,\mu)$, $r_1 = r_1(n,\varepsilon,\mu)$, $0 < \alpha$, $r_1 < 1$, tales que si $r \le r_1$ y

$$(3.1.42)\qquad \text{si } x \in \partial B_d(x_1) \text{ con } |x-y_1| < \alpha d, \text{ entonces } v(x) \le \frac{v(x_1)}{2}.$$

En efecto, definiendo $\alpha := \min\{1, \frac{C_1}{4L}\}$ y $r_1 := \min\{1, \frac{C_1 n}{4}\}$, tendremos por (3.1.37) y por (3.1.38) que

$$(3.1.43)\qquad L\alpha d + \frac{d^2}{n} < \frac{C_1}{2} d \le \frac{u(x_1)}{2} = \frac{v(x_1)}{2}.$$

Además los x considerados cumplirán, por (3.1.39)

$$(3.1.44)\qquad |v(x) - v(y_1)| = |u(x) - u(y_1)| \le L|x-y_1| \le L\alpha d.$$

Entonces por elección de y_1, y por (3.1.43) y (3.1.44) obtendremos

$$v(x) \le L\alpha d + v(y_1) \le \frac{v(x_1)}{2},$$

que prueba (3.1.42).

Sea $z_1 \in \partial B_d(x_1)$ tal que $v(z_1) = \max_{\partial B_d(x_1)} v$. Si $r_0 \le r_1$ de (3.1.41) y (3.1.42) resulta

$$v(x_1) = \fint_{\partial B_d(x_1)} v \le \frac{v(x_1)}{2}\lambda + v(z_1)(1-\lambda), \qquad \lambda = \lambda(n,\varepsilon,\mu), \quad 0 < \lambda < 1,$$

y definiendo $\delta_0 := \frac{\lambda/4}{1-\lambda} > 0$, tendremos que

$$v(z_1) \geq (1 + 2\delta_0)v(x_1). \tag{3.1.45}$$

Finalmente, de (3.1.45), (3.1.38) y (3.1.37), eligiendo $r_0 := \min\{r_1, \delta_0 n C_1\}$ obtenemos

$$u(z_1) \geq (1 + 2\delta_0)v(x_1) - \frac{d^2}{n} \geq (1 + 2\delta_0)u(x_1) - u(x_1)\frac{d}{nC_1} \geq (1 + \delta_0)u(x_1),$$

lo que completa el paso I.

Paso II. (iteración). De acá en más supondremos $r \leq r_0$ dado en el paso I.

Fijemos x_1 satisfaciendo

$$|x_1 - x_0| < r/8, \qquad u(x_1) > 0 \tag{3.1.46}$$

Dado $x \in \overline{B_{d(x_1)}}(x_1)$, por (3.1.37)

$$|x - x_0| \leq d(x_1) + |x_1 - x_0| \leq 2|x_1 - x_0| < r,$$

y entonces

$$B_{d(x_1)}(x_1) \subset\subset B_r(x_0) \tag{3.1.47}$$

Por lo tanto es posible hallar $x_2 := z(x_1)$ como en (3.1.40), y entonces por (3.1.37) y por elección de x_1 tendremos

$$|x_2 - x_1| = d(x_1) \leq |x_1 - x_0| < r/8. \tag{3.1.48}$$

Por otra parte, usando argumentos similares, no es difícil ver lo siguiente: Si para $k \in I\!N$, luego de aplicar iterativamente (3.1.40), se tiene que

$$\begin{cases} u(x_i) > 0, \quad B_{d(x_i)}(x_i) \subset\subset B_r(x_0), \quad x_{i+1} := z(x_i), \quad 1 \leq i \leq k, \text{ y} \\ \sum_{i=1}^{k} |x_{i+1} - x_i| < r/8, \end{cases} \tag{3.1.49}$$

entonces,

$$u(x_{k+1}) > 0, \qquad B_{d(x_{k+1})}(x_{k+1}) \subset\subset B_r(x_0),$$

y por lo tanto será posible definir $x_{k+2} := z(x_k + 1)$ como en (3.1.40).

Como (3.1.49) es válido para $k=1$ (debido a (3.1.46), (3.1.47) y (3.1.48)), hemos probado que podemos comenzar un proceso iterativo partiendo de x_1, obteniendo así puntos $x_{i+1}=z(x_i)$.

Sin embargo, tomando $k \in I\!N$ tal que (3.1.49) valga, tendremos que por (3.1.40) y (3.1.38)

$$\sum_{i=1}^{k}|x_{i+1}-x_i| = \sum_{i=1}^{k} d(x_i) \geq \frac{1}{C_2}\sum_{i=1}^{k} u(x_i) \geq \frac{(1+\delta_0)}{C_2}\sum_{i=1}^{k} u(x_1),$$

y entonces por (3.1.49) resulta

$$ku(x_1) \leq \frac{C_2 r}{8(1+\delta_0)} = C, \qquad C \text{ independiente de } k,$$

lo que nos muestra que es posible realizar la iteración sólo un número finito de veces.

Paso III. (fin de la demostración). El proceso iterativo nos permitió hallar $k_0>1$, y puntos x_i, $1 \leq i \leq k_0+1$ satisfaciendo

$$|x_1-x_0|<r/8, \qquad \sum_{i=1}^{k_0-1}|x_{i+1}-x_i|<r/8 \tag{3.1.50}$$

pero

$$\sum_{i=1}^{k_0}|x_{i+1}-x_i| \geq r/8. \tag{3.1.51}$$

Además por construcción tendremos para $1 \leq i \leq k_0$

$$B_{d(x_i)}(x_i) \subset\subset B_r(x_0) \tag{3.1.52}$$

$$u(x_{i+1})-u(x_i) \geq \delta_0 u(x_i) > 0 \tag{3.1.53}$$

$$|x_{i+1}-x_i| = d(x_i) \tag{3.1.54}$$

Llamemos $\bar{x} := x_{k_0+1}$. Entonces de (3.1.53), (3.1.38) y (3.1.54) se tiene

$$u(x_1)+\sum_{i=1}^{k_0}(u(x_{i+1})-u(x_i)) \geq \delta_0\sum_{i=1}^{k_0} u(x_i) \geq \delta_0 C_1 \sum_{i=1}^{k_0}|x_{i+1}-x_i|$$

con lo cual por (3.1.51)

$$u(\bar{x}) \geq \frac{\delta_0 C_1 r}{8}. \tag{3.1.55}$$

Además por (3.1.54), (3.1.37) y (3.1.50)

$$|\bar{x} - x_0| \leq |\bar{x} - x_{k_0}| + |x_{k_0} - x_0| = d(x_{k_0}) + |x_{k_0} - x_0| \leq 2|x_{k_0} - x_0|, \tag{3.1.56}$$

$$|x_{k_0} - x_0| \leq \sum_{i=1}^{k_0-1} |x_{i+1} - x_i| + |x_1 - x_0| < \frac{r}{4}. \tag{3.1.57}$$

Por lo tanto, se tiene por (3.1.37)

$$|x - x_0| \leq d(\bar{x}) + |\bar{x} - x_0| \leq 2|\bar{x} - x_0| \qquad \text{si } x \in B_{d(\bar{x})}(\bar{x}), \tag{3.1.58}$$

y entonces de (3.1.55), (3.1.58), (3.1.56) y (3.1.57) concluímos que

$$\begin{cases} \text{existe } \bar{x} \text{ satisfaciendo} \\ u(\bar{x}) \geq Cr \quad B_{d(\bar{x})}(\bar{x}) \subset B_r(x_0) \cap \{u > 0\}, \quad C = C(n, \varepsilon, \mu) > 0 \end{cases} \tag{3.1.59}$$

y por lo tanto

$$\sup_{B_r(x_0)} u \geq Cr,$$

lo que prueba el lema. □

3.1.17. Lema. *Dado $0 < \kappa < 1$, existen constantes positivas C_κ y r_κ, tales que para cada solución u de $P^c_{\varepsilon,R}$, y para cada bola $B_r(x_0) \subset \Omega_R$, con $d(x_0, \partial\Omega_R) \geq \delta/2$ y $0 < r < r_\kappa$, se cumple la siguiente propiedad:*

$$\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r(x_0)} u \leq C_\kappa \qquad \textit{implica} \qquad u \equiv 0 \textit{ en } B_{\kappa r}(x_0)$$

donde $C_\kappa = C(n, \varepsilon, \mu, \delta, \kappa)$, $r_\kappa = r(n, \varepsilon, \mu, \delta, \kappa)$, μ y δ dadas por (3.1.12) y (3.1.24) respectivamente.

DEMOSTRACIÓN.

PASO I. Probaremos que dado $0 < \kappa < 1$, existen constantes positivas $C = C(n, \varepsilon, \mu, \delta, \kappa)$, $r_1 = r_1(n, \varepsilon, \mu, \delta)$ tales que si

$$u \text{ es solución de } P^c_{\varepsilon,R}, \quad B_r(x_0) \subset \Omega_R, \quad d(x_0, \partial\Omega_R) \geq \frac{\delta}{2}, \quad r > 0 \tag{3.1.60}$$

y si además $B_{\kappa r}(x_0) \cap \{u > 0\} \neq \emptyset$, $r < r_1$, entonces

$$\sup_{B_{\sqrt{\kappa}r}(x_0)} u \geq Cr.$$

Para demostrarlo, tomemos u y $B_r(x_0)$ como en (3.1.60). Entonces

$$B_{\delta/2}(x_0) \subset \Omega_R. \tag{3.1.61}$$

i) Supongamos primero que $B_{\kappa r}(x_0) \subset \{u > 0\}$ y $d(x_0) < \delta/2$. Entonces por (3.1.61) y por definición de $d(x_0)$ tendremos

$$B_{d(x_0)}(x_0) \subset\subset \Omega_R, \qquad \kappa r \leq d(x_0) < 1,$$

con lo cual por el lema 3.1.14

$$u(x_0) \geq C_1 d(x_0), \qquad C_1 = C_1(n, \varepsilon, \mu).$$

En consecuencia

$$\sup_{B_{\sqrt{\kappa}r}(x_0)} u \geq u(x_0) \geq C_1 \kappa r = Cr \qquad C = C(n, \varepsilon, \mu, \kappa).$$

ii) Supongamos ahora que $B_{\kappa r}(x_0) \subset \{u > 0\}$ y $d(x_0) \geq \delta/2$. Entonces por (3.1.60) y por definición de $d(x_0)$ tendremos

$$B_{\delta/2}(x_0) \subset \Omega_R \cap \{u > 0\}$$

y definiendo $v(x) := \frac{\delta^2}{4n} - \frac{|x-x_0|^2}{n}$ resultará $\Delta(u - v) = 0$ en $B_{\delta/2}(x_0)$, $u - v \geq 0$ en $\partial B_{\delta/2}(x_0)$, y por el principio del máximo

$$u(x_0) \geq v(x_0) = \frac{\delta^2}{4n}.$$

Entonces, tomando $r < r_1 \leq \delta$ tendremos

$$\sup_{B_{\sqrt{\kappa}r}(x_0)} u \geq u(x_0) \geq \frac{\delta r}{4n} = Cr \qquad C = C(n, \delta).$$

iii) Finalmente, supongamos que existe $x_1 \in B_{\kappa r}(x_0) \cap \partial\{u > 0\}$. Definiendo $\bar{r} = (\sqrt{\kappa} - \kappa)r/2$, tendremos $0 < \bar{r} < r$ y $B_{2\bar{r}}(x_1) \subset B_{\sqrt{\kappa}r}(x_0)$ y por lo tanto

$$(3.1.62) \qquad B_{\bar{r}}(x_1) \subset B_{\sqrt{\kappa}r}(x_0), \qquad B_{2\bar{r}}(x_1) \subset\subset \Omega_R.$$

Tomando $r < r_1$, con $r_1 = r_1(n, \varepsilon, \mu)$ suficientemente chico, podremos aplicar el lema 3.1.16 y entonces

$$\sup_{B_{\bar{r}}(x_1)} u \geq C\bar{r} \qquad C = C(n, \varepsilon, \mu).$$

En consecuencia, por (3.1.62) y por definición de $\bar{r}$ tendremos

$$\sup_{B_{\sqrt{\kappa}r}(x_0)} u \geq Cr \qquad C = C(n, \varepsilon, \mu, \kappa),$$

lo que completa el paso I.

Paso II. Fijemos $0 < \kappa < 1$. Sean u y $B_r(x_0)$ como en (3.1.60). Si tomamos $w(x) := u(x) + \frac{|x-x_0|^2}{n}$ y h tal que

$$(3.1.63) \qquad \Delta h = 0 \text{ en } B_r(x_0), \qquad h = w \text{ en } \partial B_r(x_0),$$

tendremos que

$$(3.1.64) \qquad h(x_0) = \fint_{\partial B_r(x_0)} w = \fint_{\partial B_r(x_0)} u + \frac{r^2}{n}.$$

Además como $\Delta(w - h) \geq 0$ en $B_r(x_0)$ y $h = w$ en $\partial B_r(x_0)$, obtendremos por el principio del máximo y por definición de w

$$h \geq w \geq u \qquad \text{en } B_r(x_0).$$

Aplicando finalmente la desigualdad de Harnack resulta

$$(3.1.65) \qquad \sup_{B_{\sqrt{\kappa}r}(x_0)} u \leq \sup_{B_{\sqrt{\kappa}r}(x_0)} h \leq C(n, \kappa) h(x_0).$$

Sean r_1 y C las constantes que se obtienen para κ en el paso I. Definamos $:= \min\left\{r_1, \frac{nC}{2C(n,\kappa)}\right\}$, $C_\kappa := \frac{C}{2C(n,\kappa)}$, y supongamos que se cumple

$$\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r(x_0)} u \leq C_\kappa, \qquad r < r_\kappa.$$

Entonces, por (3.1.65) y (3.1.64) resultará

$$\sup_{B_{\sqrt{\kappa}r}(x_0)} u < Cr,$$

lo cual implica, por el resultado probado en el paso I, que $B_{\kappa r}(x_0) \cap \{u > 0\} = \emptyset$ y por lo tanto prueba el lema. □

3.1.18. Teorema. *Existen constantes* $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$, $0 < r_0 < 1$ *tales que si* u *es solución de* $P^c_{\varepsilon,R}$, $x_0 \in \Omega_R \cap \partial\{u > 0\}$, $B_{2r}(x_0) \subset\subset \Omega_R$, $0 < r < r_0$, *y* $d(x_0, \partial\Omega_R) \geq \delta/2$ *entonces*

$$\lambda_1 \leq \frac{|B_r(x_0) \cap \{u > 0\}|}{|B_r(x_0)|} \leq \lambda_2$$

donde $\lambda_i = \lambda_i(n, \varepsilon, \mu, \delta)$, $i = 1, 2$, $r_0 = r_0(n, \varepsilon, \mu, \delta)$, μ *y* δ *dadas por* (3.1.12) *y* (3.1.24) *respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea u una solución de $P^c_{\varepsilon,R}$ y $x_0 \in \Omega_R \cap \partial\{u > 0\}$, con $B_{2r}(x_0) \subset\subset \Omega_R$ y $d(x_0, \partial\Omega_R) \geq \delta/2$.

PASO I. (primera desigualdad). Tomando $r_0 = r_0(n, \varepsilon, \mu)$ como en el lema 3.1.16 y $r < r_0$, estamos en las hipótesis de dicho lema y por lo tanto podremos hallar $\bar{x}$ como en (3.1.59), es decir satisfaciendo

$$u(\bar{x}) \geq Cr, \qquad B_{d(\bar{x})}(\bar{x}) \subset B_r(x_0) \cap \{u > 0\}, \qquad C = C(n, \varepsilon, \mu) > 0. \tag{3.1.66}$$

Entonces por el lema 3.1.14 tendremos

$$C_2 d(\bar{x}) \geq u(\bar{x}), \qquad C_2 = C_2(n, \varepsilon, \mu) > 0 \tag{3.1.67}$$

y en consecuencia de (3.1.66) y (3.1.67) concluimos

$$\frac{|B_r(x_0) \cap \{u > 0\}|}{|B_r(x_0)|} \geq \frac{|B_{d(\bar{x})}(\bar{x})|}{|B_r(x_0)|} \geq \left(\frac{C}{C_2}\right)^n,$$

que nos da la primera desigualdad para $\lambda_1 := \left(\frac{C}{C_2}\right)^n$.

PASO II. (segunda desigualdad). Sin pérdida de la generalidad supondremos $x_0 = 0$. Consideremos s la función que satisface

$$\Delta s = -2 \text{ en } B_r, \qquad s = u \text{ en } \partial B_r,$$

y sea v la función armónica en B_r, dada por $v(y) = s(y) + \frac{|y|^2}{n}$. Tomemos $r < r_0 < 1$. Entonces por el lema 3.1.9, y la desigualdad de Poincaré tenemos

$$(3.1.68) \quad |\{y \in B_r \;/\; u(y) = 0\}| \geq C(n,\varepsilon,\mu) \int_{B_r} |\nabla(s-u)|^2 \geq \frac{C(n,\varepsilon,\mu)}{r^2} \int_{B_r} (s-u)^2.$$

Fijemos $0 < \alpha < 1$ y acotemos $(s-u)$ en $B_{\alpha r}$:

Dado $y \in B_{\alpha r}$, si α es chico (dependiendo de n), se obtiene de la fórmula de representación de Poisson que

$$(3.1.69) \qquad v(y) \geq (1-2n\alpha) \fint_{\partial B_r} v$$

y si además $u(y) > 0$, será $d(y) \leq |y|$ y por lo tanto por el lema 3.1.14 tendremos

$$(3.1.70) \qquad u(y) \leq C_2 \alpha r, \qquad C_2 = C_2(n,\varepsilon,\mu),$$

desigualdad que también es válida si $u(y) = 0$. Entonces de (3.1.69) y (3.1.70), recordando las definiciones de v y s, obtendremos

$$(3.1.71) \qquad s(y) - u(y) \geq (1-2n\alpha) \fint_{\partial B_r} u - \frac{(\alpha r)^2}{n} - C_2 \alpha r \qquad \text{si } y \in B_{\alpha r}.$$

Tomemos ahora $0 < \kappa < 1$ y C_κ, r_κ las constantes dadas para κ por el lema 3.1.71. Si $r_0 < r_\kappa$, como $0 \in \Omega_R \cap \partial\{u > 0\}$, tendremos por el citado lema que

$$\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r} u > C_\kappa,$$

lo que junto con (3.1.71) nos da, eligiendo $\alpha = \alpha(n,\varepsilon,\mu,\delta)$ pequeño

$$(3.1.72) \qquad s(y) - u(y) \geq Cr \text{ en } B_{\alpha r}, \qquad \text{con } C = C(n,\varepsilon,\mu,\delta) > 0.$$

Finalmente de (3.1.68) y (3.1.72) obtenemos

$$|\{y \in B_r \;/\; u(y) = 0\}| \geq C|B_r| \qquad 0 < C = C(n,\varepsilon,\mu,\delta) < 1$$

que conduce a la segunda desigualdad para $\lambda_2 := 1 - C$. □

Dada u una solución de $P^c_{\varepsilon,R}$, sabemos que el conjunto $\{x \in \Omega_R \;/\; u(x) > 0\}$ es un abierto que contiene a $D_{\delta_0}(H)$ para algún $\delta_0 > 0$ pequeño (ver teorema 3.1.12).

En consecuencia, $\{x \in \Omega_R \ / \ u(x) > 0\}$ tiene una componente conexa $D_u \neq \emptyset$, con la propiedad de que $\partial H \subset \partial D_u$.

3.1.19. Lema. *Existe una constante $M > 0$ tal que si u es una solución de $P^c_{\varepsilon,R}$, y si D_u es la componente conexa de $\{x \in \Omega_R \ / \ u(x) > 0\}$ que satisface $\partial H \subset \partial D_u$, entonces*

$$D_u \subset B_M$$

donde $M = M(n, \varepsilon, \mu, \delta)$, μ y δ dadas en (3.1.12) y (3.1.24) respectivamente.

DEMOSTRACIÓN. Sea u una solución de $P^c_{\varepsilon,R}$ y definamos D_u como en el enunciado. Entonces por (3.1.1) tendremos que

$$B_{R_0} \cap D_u \neq \emptyset \tag{3.1.73}$$

y además por (3.1.12)

$$|D_u| \leq |\{x \in \Omega_R \ / \ u(x) > 0\}| \leq \mu. \tag{3.1.74}$$

Para $k \in I\!N$, $k \geq R_0$ definamos

$$A_k = \{x \ / \ k \leq |x| \leq k + 1/2\}$$

Entonces, $|A_k| \geq c(n)k^{n-1}$, y de (3.1.74) obtenemos que existe un $k_0 \in I\!N$ tal que

$$A_k \not\subset D_u, \qquad \forall k \geq k_0, \qquad k_0 = k_0(n, \mu) \geq R_0 \tag{3.1.75}$$

Sea $k_1 \in I\!N$ el mínimo (dependiendo de u) que satisface

$$D_u \subset B_{k_1}. \tag{3.1.76}$$

Si $k_1 < k_0 + 2$, obtenemos que $k_1 \leq C(n, \mu)$ y (3.1.76) nos da el resultado buscado.

Supongamos entonces que $k_1 \geq k_0 + 2$. Como D_u es conexo, de (3.1.73) por elección de k_1 se tiene que

$$A_k \cap D_u \neq \emptyset \qquad \text{si } k_0 \leq k \leq k_1 - 2$$

y en consecuencia, recordando (3.1.75) obtenemos que existe $x_k \in \Omega_R \cap \partial\{u > 0\}$ con $k \leq |x_k| \leq k + 1/2$, si $k_0 \leq k \leq k_1 - 2$.

Tomemos r_0 dado por el teorema 3.1.18, $r_0 = r_0(n, \varepsilon, \delta, \mu)$, y sea $:= \min\{1/8, r_0/2\}$. Entonces si $k_0 \leq k \leq k_1 - 2$

$$B_{2r}(x_k) \subset\subset \Omega_R, \qquad d(x_k, \partial\Omega_R) \geq 1/2 \geq \delta/2$$

con lo cual, por el citado teorema, resulta

$$|\{u > 0\} \cap B_r(x_k)| \geq \lambda_1 |B_r(x_k)|, \qquad k_0 \leq k \leq k_1 - 2$$

con $\lambda_1 = \lambda_1(n, \varepsilon, \delta, \mu) > 0$.

Observando que las bolas $B_r(x_k)$ resultan disjuntas tendremos

$$\mu \geq |\{x \in \Omega_R \ / \ u(x) > 0\}| \geq \sum_{k=k_0}^{k_1-2} \lambda_1 |B_r(x_k)| \geq (k_1 - 1 - k_0) C(n, \varepsilon, \delta, \mu)$$

y por lo tanto

$$k_1 \leq M(n, \delta, \varepsilon, \mu),$$

lo que junto con (3.1.76) completa el lema. □

3.1.20. Lema. *Existe $R_1 \geq R_0$ tal que si u es una solución de $P^c_{\varepsilon,R}$ con $R \geq R_1$ entonces*

$$\{x \in \Omega_R \ / \ u(x) > 0\} \text{ es conexo.}$$

Demostración. Sea u una solución de $P^c_{\varepsilon,R}$ y supongamos que

$$\{x \in \Omega_R \ / \ u(x) > 0\} = D_1 \cup D_2$$

donde D_i abiertos no vacíos disjuntos $i = 1, 2$, D_1 conexo con $\partial H \subset \partial D_1$. Entonces, si definimos

$$u_2 = \begin{cases} u & \text{en } D_2, \\ 0 & \text{en } I\!R^n - D_2, \end{cases}$$

obtenemos que $u_2 \in H^1(I\!R^n) \cap L^1(I\!R^n)$.

Por el lema 3.1.19, existe x_0 satisfaciendo

$$x_0 \in \partial D_1 \backslash \partial D \qquad D_1 \subset \{(x - x_0) \cdot e_n > 0\} \tag{3.1.77}$$

y si tomamos B^* una bola tal que

$$0 < d(x_0, B^*) < 1 \qquad B^* \subset \{(x - x_0) \cdot e_n < 0\} \qquad |B^*| = |\{u_2 > 0\}|, \tag{3.1.78}$$

tendremos por definición de u_2 y por (3.1.12) que

$$|B^*| \leq \mu. \tag{3.1.79}$$

Por el corolario 2.1.4, existe u^* satisfaciendo

$$u^* \in H_0^1(B^*), \qquad u^* > 0 \text{ en } B^*, \qquad J(u^*) = E(B^*),$$

de donde por (3.1.78) y por el lema 2.2.1 tendremos

$$J(u^*) = E(B^*) \leq J(u_2) \tag{3.1.80}$$

Entonces, si definimos $\Omega = I\!R^n - \overline{H}$ como en 3.1.2 y

$$\bar{u} = \begin{cases} u & \text{en } D_1, \\ u^* & \text{en } B^*, \\ 0 & \text{en el resto de } \Omega, \end{cases}$$

tendremos

$$\bar{u} \in H^1(\Omega) \cap L^1(\Omega), \qquad \bar{u} = c \text{ en } \partial H = \partial\Omega, \tag{3.1.81}$$

con lo cual de (3.1.80) y por construcción de $\bar{u}$ obtenemos que

$$J_\epsilon(u) \geq J_\epsilon(\bar{u}). \tag{3.1.82}$$

Fijemos ahora los parámetros μ y δ en (3.1.12) y (3.1.24) de modo que no dependan de R (lo podemos hacer por los teoremas 3.1.7 y 3.1.12). Entonces por el lema 3.1.19, y por (3.1.79) obtenemos

$$D_1 \subset B_M, \qquad |B^*| \leq C, \qquad M \text{ y } C \text{ independientes de } R$$

de donde, por construcción de $\bar{u}$, junto con (3.1.77) y (3.1.78) concluímos que existe R_1 tal que sop $\bar{u} \subset B_{R_1}$, $R_1 \geq R_0$, R_1 independiente de R.

Esto último, junto con (3.1.81) y (3.1.82) muestra que $\bar{u}$ es solución de $P^c_{\varepsilon,R}$, si asumimos que $R \geq 2R_1$. Por lo tanto, es posible aplicar el teorema 3.1.18 a $x_0 \in \Omega_R \cap \partial\{\bar{u} > 0\}$, y para r pequeño tendremos

$$0 < \lambda_1 \leq \frac{|B_r(x_0) \cap D_1|}{|B_r(x_0)|}. \tag{3.1.83}$$

Observemos, por otra parte, que podríamos haber permitido en (3.1.78) que $d(x_0, B^*) = 0$ y $x_0 \in \partial B^*$, con lo cual la solución $\bar{u}$ que se obtiene está en las hipótesis del lema A.2.4 en un entorno de x_0 y entonces

$$\frac{|B_r(x_0) \cap D_1|}{|B_r(x_0)|} \xrightarrow[r \to 0]{} 0,$$

lo que contradice (3.1.83) y prueba el lema. □

3.1.21. Corolario. *Existe una constante $M_0 > 0$ tal que si u es solución de $P^c_{\varepsilon,R}$ entonces*

$$\textit{sop}\ u \subset B_{M_0}, \qquad M_0 \textit{ independiente de } R.$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos μ y δ en (3.1.12) y (3.1.24) de modo tal que no dependan de R, y sea R_1 como en el lema 3.1.20. Entonces si u es solución de $P^c_{\varepsilon,R}$ y $R \geq R_1$ por los lemas 3.1.19 y 3.1.20 tenemos que

$$\text{sop}\ u \subset B_M, \qquad M \text{ independiente de } R.$$

Por otro lado, si u es solución de $P^c_{\varepsilon,R}$ y $R \leq R_1$

$$\text{sop}\ u \subset B_{R_1}.$$

Tomando entonces $M_0 = \max(M, R_1)$ se obtiene el resultado. □

3.2. Problema $P^c_\varepsilon(H)$.

3.2.1. Datos del problema.

Fijamos H , r^* , R_0 , w_0 como en 3.1.1.

3.2.2. Planteo del problema $P_\varepsilon^c(H)$.

Fijamos $\varepsilon > 0$, $c > 0$, definimos como antes $\Omega = I\!R^n - \overline{H}$ y para $v \in H^1(\Omega) \cap L^1(\Omega)$ definimos $J_\varepsilon(v)$ como en 3.1.2. Sea

$$K^c = K^c(H) = \{v \in H^1(\Omega) \cap L^1(\Omega), \quad v = c \text{ en } \partial\Omega\}.$$

Entonces planteamos

$$P_\varepsilon^c = P_\varepsilon^c(H): \quad \min_{v \in K^c} J_\varepsilon(v).$$

Se observa que si tomamos u^c y l como en 3.1.2, tendremos

$$\text{(3.2.0)} \qquad u^c \in K^c \qquad \text{y por lo tanto} \qquad \inf_{v \in K^c} J_\varepsilon(v) \leq l.$$

3.2.3. Teorema. *Existe una solución u de P_ε^c.*

DEMOSTRACIÓN. Sea

$$\gamma := \inf_{v \in K^c} J_\varepsilon(v) \geq -\infty$$

y tomemos una sucesión minimizante v_k. Sin pérdida de la generalidad, asumiremos que para $k \geq R_0$, sop $v_k \subset B_k$ y por lo tanto, v_k es admisible para $P_{\varepsilon,k}^c$. Si además, para cada $k \geq R_0$ elegimos u_k una solución de $P_{\varepsilon,k}^c$, tendremos que

$$\text{(3.2.1)} \qquad u_k \in K^c, \qquad J_\varepsilon(u_k) \leq J_\varepsilon(v_k), \qquad \forall k \geq R_0$$

de donde concluímos

$$\text{(3.2.2)} \qquad J_\varepsilon(u_k) \to \gamma.$$

Por otra parte, si aplicamos el corolario 3.1.21 a las u_k, tendremos

$$\text{(3.2.3)} \qquad \text{sop } u_k \subset B_{M_0} \qquad \forall k \geq R_0, \qquad M_0 \text{ independiente de } k.$$

Si fijamos ahora $R \geq M_0$, y tomamos u_R una solución de $P^c_{\epsilon,R}$, resultará

$$u_R \in K^c, \qquad \gamma \leq J_\epsilon(u_R). \tag{3.2.4}$$

De (3.2.1), (3.2.3) y por elección de R tendremos que si $k \geq R_0$, u_k es admisible para $P^c_{\epsilon,R}$, y por lo tanto

$$J_\epsilon(u_R) \leq J_\epsilon(u_k) \qquad \forall k \geq R_0. \tag{3.2.5}$$

Entonces, tomando límite para $k \to \infty$ en (3.2.5), y recordando (3.2.2) y (3.2.4) obtenemos que γ es finito y

$$J_\epsilon(u_R) = \min_{v \in K^c} J_\epsilon(v), \qquad u_R \in K^c,$$

lo que completa el teorema. □

3.2.4. Observación. El teorema anterior garantiza la existencia de solución del problema P^c_ϵ . Además de su demostración se deduce que existe una constante M_0 , tal que cada solución de $P^c_{\epsilon,R}$ también es solución de P^c_ϵ , cualquiera sea $R \geq M_0$ que elijamos.

Por otra parte, no es difícil ver que si una solución de P^c_ϵ tiene soporte compacto, será solución de $P^c_{\epsilon,R}$ con tal de tomar R suficientemente grande. Pero como, en principio, no podemos asegurar que todas las soluciones de P^c_ϵ tengan soporte compacto, podrían existir soluciones de P^c_ϵ que no son solución de $P^c_{\epsilon,R}$ para ningún R.

Sin embargo tenemos

3.2.5. Observación. Se puede ver que las soluciones de P^c_ϵ satisfacen resultados análogos a los resultados probados para las soluciones de $P^c_{\epsilon,R}$, ya que sólo hemos estudiado propiedades de caracter local.

Concretamente, podemos repetir una a una las demostraciones de la sección 3.1, desde el lema 3.1.4 en adelante, reemplazando $P^c_{\epsilon,R}$, Ω_R , K^c_R y B_R respectivamente por P^c_ϵ , Ω , K^c y $\mathbb{R}^n$. Además, si se eligen adecuadamente los parámetros en (3.1.12) y (3.1.24), es decir, de modo tal que no dependan de R, se obtendrán las mismas constantes en cada uno de los resultados.

Por esa razón asumiremos de acá en más que $\epsilon \leq \epsilon_0$, $\epsilon_0 = \epsilon_0(n)$ dado en el teorema 3.1.7.

A continuación haremos un resumen de las principales resultados que se obtienen, notando que sólo incluiremos las demostraciones del corolario 3.2.15, lema 3.2.17 y lema 3.2.18 ya que el resto de las demostraciones se basa en la sección anterior.

3.2.6. Teorema. *Sea u una solución de P_ε^c. Entonces $u \geq 0$, $u \in C^{0,1}(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})$, $\Delta u \geq -2$ en el sentido de las distribuciones en Ω y $\Delta u = -2$ en el abierto $\{x \in \Omega \ / \ u(x) > 0\}$.*

3.2.7. Teorema. *Existe una constante positiva C tal que toda solución u de P_ε^c satisface*

$$|\{x \in \Omega \ / \ u(x) > 0\}| \leq C$$

donde $C = C(n, |H|, l)$, l dado en (3.1.2), y además C varía en forma continua cuando $|H|$ ó l varían en $\mathbb{R}_{>0}$.

3.2.8. Observación. De acá en más fijaremos una constante $\mu > 0$, parámetro del problema P_ε^c, con la siguiente propiedad:

(3.2.6) $\qquad |\{x \in \Omega \ / \ u(x) > 0\}| \leq \mu \qquad$ para toda solución u de P_ε^c,

observando que una tal μ existe por el teorema 3.2.7.

Dada u una solución de P_ε^c, como $u \geq 0$, por el citado teorema concluímos que existirá una región donde $u \equiv 0$, y una frontera $\Omega \cap \partial\{u > 0\}$ que llamaremos la frontera libre.

Si para $0 < \delta < 1$, definimos $D_\delta = D_\delta(H)$ como en (3.1.16) se tiene

3.2.9. Teorema. *Existe una constante δ_0, $0 < \delta_0 < 1$, tal que toda solución u de P_ε^c cumple*

$$D_{\delta_0} \subset \{x \in \Omega \ / \ u(x) > 0\}$$

con $\delta_0 = \delta_0(n, \varepsilon, c, r^*, \mu)$; r^* y μ dadas por (3.1.1) y (3.2.6) respectivamente. Además δ_0 varía en forma continua cuando c varía en $\mathbb{R}_{>0}$.

3.2.10. Observación. De acá en más fijaremos una constante δ, $0 < \delta < 1$, parámetro del problema P_ε^c con la siguiente propiedad:

(3.2.7) $\qquad D_\delta \subset \{x \in \Omega \ / \ u(x) > 0\} \qquad$ para toda solución u de P_ε^c, observando que una tal δ existe por el teorema 3.2.9.

3.2.11. Lema. *Existe una constante positiva C, tal que para cada solución u de P_ε^c, y para cada bola $B_r(x) \subset \Omega$ con $r < 1$, se cumple la siguiente propiedad:*

$$\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r(x)} u \geq C \qquad \textit{implica} \qquad u > 0 \textit{ en } B_r(x)$$

donde $C = C(n, \varepsilon, \mu)$, μ dada por (3.2.6).

3.2.12. Lema. *Dado $0 < \kappa < 1$, existen constantes positivas C_κ y r_κ, tales que para cada solución u de P_ε^c, y para cada bola $B_r(x_0) \subset \Omega$, con $d(x_0, \partial\Omega) \geq \delta/2$ y $0 < r < r_\kappa$, se cumple la siguiente propiedad:*

$$\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r(x_0)} u \leq C_\kappa \qquad \textit{implica} \qquad u \equiv 0 \textit{ en } B_{\kappa r}(x_0)$$

donde $C_\kappa = C(n, \varepsilon, \mu, \delta, \kappa)$, $r_\kappa = r(n, \varepsilon, \mu, \delta, \kappa)$, μ y δ dadas por (3.2.6) *y* (3.2.7) *respectivamente.*

Dada u una solución de P_ε^c, notaremos para $x \in \Omega$ tal que $u(x) > 0$

$$d(x) = d_u(x) := d(x, \Omega \cap \partial\{u > 0\}).$$

3.2.13. Lema. *Existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que si u es solución de P_ε^c, $x \in \{u > 0\}$, $B_{d(x)}(x) \subset\subset \Omega$ y $d(x) < 1$, entonces*

$$C_1 d(x) \leq u(x) \leq C_2 d(x)$$

donde $C_1 = C_1(n, \varepsilon)$, $C_2 = C_2(n, \varepsilon, \mu)$, μ dada por (3.2.6).

3.2.14. Teorema. *Existen constantes $0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1$, $0 < r_0 < 1$ tales que si u es solución de P_ε^c, $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$, $0 < r < r_0$, entonces,*

$$\lambda_1 \leq \frac{|B_r(x_0) \cap \{u > 0\}|}{|B_r(x_0)|} \leq \lambda_2$$

donde $\lambda_i = \lambda_i(n, \varepsilon, \mu, \delta)$, $i = 1, 2$, $r_0 = r_0(n, \varepsilon, \mu, \delta)$, μ y δ dadas por (3.2.6) *y* (3.2.7).

DEMOSTRACIÓN. Observar que en este caso (a diferencia del teorema 3.1.18), si $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ se satisface automáticamente que $d(x_0, \partial\Omega) \geq \delta/2$. Además se tiene $B_{2r}(x_0) \subset\subset \Omega$ con tal de pedir $r < r_0 \leq \delta/2$. □

3.2.15. Corolario. *Si u es solución de P_ε^c, entonces $\Omega \cap \partial\{u > 0\}$ tiene medida de Lebesgue nula.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos primero que si S es un conjunto medible entonces

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{|B_\rho(x) \cap S|}{|B_\rho(x)|} = \lim_{\rho \to 0} \fint_{B_\rho(x)} \chi_S(y)\, dy = 1 \qquad \text{para casi todo } x \in S. \tag{3.2.8}$$

Por otra parte, dado $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ tendremos por el teorema 3.2.14 que

$$\varlimsup_{\rho \to 0} \frac{|B_\rho(x_0) \cap \partial\{u > 0\}|}{|B_\rho(x_0)|} \leq \varlimsup_{\rho \to 0} \frac{|B_\rho(x_0) \cap \{u = 0\}|}{|B_\rho(x_0)|} < 1,$$

y en consecuencia, tomando $S = \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ en (3.2.8) obtendremos el resultado deseaado. □

3.2.16. Lema. *Existe una constante $M > 0$ tal que si u es una solución de P_ε^c entonces*

$$\{x \in \Omega \;/\; u(x) > 0\} \qquad \textit{es conexo, y está contenido en } B_M\,,$$

donde $M = M(n, \varepsilon, \mu, \delta)$, μ y δ dadas en (3.2.6) *y* (3.2.7) *respectivamente.*

Ahora sí , estamos en condiciones de probar

3.2.17. Lema. *Existe una constante $R_1 \geq R_0$ tal que*

$$u \textit{ es solución de } P_\varepsilon^c \iff u \textit{ es solución de } P_{\varepsilon,R}^c \quad \forall R \geq R_1$$

donde $R_1 = R_1(n, \varepsilon, \mu, \delta)$, μ y δ dadas en (3.2.6) *y* (3.2.7) *respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN.

i) Sea u una solución de P_ε^c. Por el lema 3.2.16

$$\text{sop}\, u \subset B_{R_1} \qquad \text{con} \qquad R_1 = R_1(n, \varepsilon, \mu, \delta) \geq R_0.$$

Tomemos $R \geq R_1$. Entonces tenemos

$$u \in K_R^c, \qquad J_\varepsilon(u) = \min_{v \in K^c} J_\varepsilon(v) \leq \min_{v \in K_R^c} J_\varepsilon(v),$$

es decir, u es solución de $P_{\varepsilon,R}^c$ $\forall R \geq R_1$.

ii) Tomemos R_1 como en la parte i). Fijemos $R \geq R_1$ y u una solución de $P_{\varepsilon,R}^c$. Se tiene que $u \in K^c$.

Si tomamos ahora $\bar{u}$ una solución de P_ε^c, tendremos por la parte i) que, como $R \geq R_1$, $\bar{u}$ también es solución de $P_{\varepsilon,R}^c$, y entonces

$$J_\varepsilon(u) = J_\varepsilon(\bar{u}) = \min_{v \in K^c} J_\varepsilon(v),$$

lo que prueba que u también es solución de P_ε^c y completa la demostración. □

El próximo lema nos permite obtener cotas que serán útiles más adelante.

3.2.18. Lema. *Sea u una solución de P_ε^c.*

1) Sea x_0 satisfaciendo

$$x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}, \qquad B_{2r}(x_0) \subset\subset \Omega, \qquad 0 < r < 1.$$

Entonces

$$\|\nabla u\|_{L^\infty(B_r(x_0))} \leq L,$$

donde $L = L(n, \varepsilon, \mu) > 0$, μ dado en (3.2.6).

2) Sea D un dominio satisfaciendo

$$D \subset\subset \Omega, \qquad D \cap \partial\{u > 0\} \neq \emptyset.$$

Entonces

$$\|u\|_{L^\infty(D)} + \|\nabla u\|_{L^\infty(D)} \leq C \tag{3.2.9}$$

donde $C = C(n, \varepsilon, \mu, s, D) > 0$, con $s > 0$ satisfaciendo $d(x, \partial\Omega) \geq s$, $\forall x \in D$, μ dado en (3.2.6).

Demostración. La parte 1) se demuestra como el lema 3.1.15.

Veamos la parte 2). Sean u y D como en el enunciado, tomemos s satisfaciendo $d(x,\partial\Omega) \geq s > 0$, $\forall x \in D$, y llamemos D' al dominio que satisface $D \subset\subset D' \subset\subset \Omega$ dado por

$$D' = \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ d(x,D) < s/2\}$$

PASO I. Sea $r_0 = \min\{\frac{s}{4}, 1\}$, y tomemos z satisfaciendo

$$z \in D \cap \partial\{u > 0\}.$$

Fijemos $x \in D' \cap \{u > 0\}$. Como D' es conexo, podemos tomar puntos $x_0, \ldots, x_k$ en D' tales que

$$x_0 = x, \qquad x_k = z, \qquad |x_i - x_{i-1}| < r_0/2, \qquad 1 \leq i \leq k,$$

que pueden elegirse de modo tal que k dependa sólo de D y s. Entonces

$$x_i \in B_{r_0}(x_{i-1}) \subset\subset \Omega, \quad 1 \leq i \leq k, \qquad B_{r_0}(x_k) \subset\subset \Omega \tag{3.2.10}$$

y además, por elección de x_0 y x_k, existe $0 \leq j \leq k$ tal que

$$B_{r_0}(x_i) \subset \{u > 0\}, \qquad 0 \leq i \leq j-1, \tag{3.2.11}$$

$$B_{r_0}(x_j) \not\subset \{u > 0\}. \tag{3.2.12}$$

Para $0 \leq i \leq j-1$ consideremos la función

$$v_i(x) = u(x) + \frac{|x - x_{i+1}|^2}{n}$$

que por (3.2.11) es armónica en $B_{r_0}(x_i)$ y entonces, por la desigualdad de Harnack y por elección de los x_i resulta

$$u(x_i) \leq \sup_{B_{r_0/2}(x_i)} v_i(x) \leq C(n) \inf_{B_{r_0/2}(x_i)} v_i(x) \leq C(n) u(x_i + 1). \tag{3.2.13}$$

Por otra parte, de (3.2.10), (3.2.11) y (3.2.12) obtenemos que $u(x_j) > 0$ y $d(x_j) < r_0$, y entonces podremos aplicar el lema 3.2.13 con lo cual

$$u(x_j) \leq C r_0 \qquad C = C(n, \varepsilon, \mu). \tag{3.2.14}$$

De (3.2.13) y (3.2.14) obtendremos inductivamente que $u(x_0) \le C$, con $C = C(n, \varepsilon, \mu, s, k)$; con lo cual, por elección de k y de x_0, resultará

$$\|u\|_{L^\infty(D)} \le \|u\|_{L^\infty(D')} \le C \qquad C = C(n, \varepsilon, \mu, s, D). \tag{3.2.15}$$

Paso II. Sea $r_1 := \min\{\frac{s}{10}, \frac{1}{4}\}$ y fijemos $x \in D \cap \{u > 0\}$. Si $d(x) > r_1$, entonces $B_{r_1}(x) \subset\subset \{u > 0\} \cap D'$, y por lo tanto

$$|\nabla u(x)| \le \frac{C(n)}{r_1} \fint_{\partial B_{r_1}(x)} u \le \frac{C(n)}{r_1} \|u\|_{L^\infty(D')}. \tag{3.2.16}$$

Si $d(x) \le r_1$, tomemos y tal que

$$y \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}, \qquad |x - y| = d(x),$$

y entonces tendremos

$$B_{4r_1}(y) \subset\subset \Omega, \qquad 0 < 2r_1 < 1, \qquad x \in B_{2r_1}(y) \cap \{u > 0\}.$$

Por la parte 1) de este lema resultará

$$|\nabla u(x)| \le \|\nabla u\|_{L^\infty(B_{2r_1}(y))} \le L, \qquad L = L(n, \varepsilon, \mu)$$

lo que junto con (3.2.15), (3.2.16) conduce a (3.2.9) y por lo tanto completa el lema. □

CAPITULO 4: PROPIEDADES DE LA FRONTERA LIBRE.

En este capítulo, continuando con el estudio de las soluciones u de $P_\varepsilon^c(H)$, probamos propiedades preliminares de la frontera libre.

En 4.1 probamos que $\partial\{u>0\}$ tiene medida $\mathcal{H}^{n-1}$ finita y por lo tanto $\{u>0\}$ es un conjunto de perímetro localmente finito. Además , mostramos que $\lambda_u := \Delta u + 2\mathcal{X}_{\{u>0\}}$ es una medida de Radón con soporte en $\partial\{u>0\}$. Más precisamente, λ_u viene dada por una densidad q_u multiplicada por la medida de superficie de $\partial\{u>0\}$ (siendo $q_u = \partial_{-\nu} u$ cuando $\partial\{u>0\}$ es regular).

En 4.2 probamos estimaciones sobre $|\nabla u|$ cerca de la frontera libre, que serán necesarias en el Capítulo 5. Además probamos que existe una constante $\lambda_u > 0$ tal que $q_u = \lambda_u$, y obtenemos cotas para λ_u dependiendo de los parámetros del problema.

Las hipótesis que se asumen en este capítulo son las mismas que en la sección 3.2.

4.1. La medida λ_u y la función q_u.

4.1.1. Lema. *Sea u una solución de P_ε^c. Entonces $\lambda = \lambda_u := \Delta u + 2\mathcal{X}_{\{u>0\}}$ es una medida de Radón positiva con soporte en $\Omega \cap \partial\{u>0\}$.*

DEMOSTRACIÓN. Sea u una solución de P_ε^c, y para $\eta \in C_0^\infty(\Omega)$, $\eta \geq 0$, definamos

$$T(\eta) = -\int_\Omega \nabla u \nabla \eta + 2\int_{\{u>0\}} \eta.$$

Dado $k \in I\!N$, tomemos $\eta_k := \eta(1 - f_k(u))$, con

$$f_k(t) := \begin{cases} 1 & |t| \leq 1/k, \\ 2 - k|t| & 1/k \leq |t| \leq 2/k, \\ 0 & |t| \geq 2/k. \end{cases}$$

Por el teorema 3.2.6 obtenemos que

$$\Delta u = -2 \qquad \text{en } \{u>0\}, \tag{4.1.1}$$

y además $\eta_k \in H_0^1(\{u>0\})$. Por lo tanto

$$-\int_\Omega \nabla u \nabla \eta_k + 2\int_\Omega \eta_k = 0,$$

de donde se deduce que

$$T(\eta) = -\int_\Omega \nabla u \nabla(\eta f_k(u)) - 2\int_{\{u=0\}} \eta + 2\int_\Omega \eta f_k(u). \tag{4.1.2}$$

Por otra parte, por definición de f_k, y como $\eta \geq 0$ obtenemos

$$\int_\Omega \nabla u \nabla(\eta f_k(u)) \leq \int_{0<u<2/k} |\nabla u \nabla \eta|,$$

$$-2\int_{\{u=0\}} \eta + 2\int_\Omega \eta f_k(u) \geq 0,$$

lo que junto con (4.1.2), si hacemos $k \to \infty$, muestra que $T(\eta) \geq 0$. Es decir, probamos que $\lambda := \Delta u + 2\chi_{\{u>0\}} \geq 0$ en el sentido de las distribuciones y entonces, por el Teorema de Representación de Riesz ([12], p. 35), λ define una medida de Radón positiva.

Finalmente, si tomamos $\varphi \in C_0^\infty(\Omega \setminus \partial\{u>0\})$, tendremos que $\varphi\Big|_{\{u>0\}} \in C_0^\infty(\{u>0\})$, y entonces por (4.1.1) será $T(\varphi) = 0$, lo que completa el lema. $\square$

4.1.2. Lema. *Sea u una solución de P_ε^c. Entonces $\wedge = \wedge_u := \Delta u$ es una medida de Radón en Ω. Además si $B_R(x_0) \subset\subset D \subset\subset \Omega$, se cumple para casi todo $r \in [0,R]$ que*

$$|\nabla u| \in L^\infty(\partial B_r, \mathcal{H}^{n-1}) \quad \textit{con} \quad \|\nabla u\|_{L^\infty(\partial B_r, \mathcal{H}^{n-1})} \leq \|\nabla u\|_{L^\infty(D)}, \tag{4.1.3}$$

$$\int_{B_r} d\wedge = \int_{\partial B_r} \nabla u \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{4.1.4}$$

donde $B_r := B_r(x_0)$.

Demostración. Sean u, $B_r(x_0)$ y D como en el enunciado. Por el teorema 3.2.6 y el corolario 1.3.4 se tiene que $\wedge := \Delta u$ es una medida de Radón, y además si $u_k := \rho_k * u$, ρ_k una sucesión regularizante,

$$\lim_{k\to\infty} \int_{B_r} \Delta u_k \, dx = \int_{B_r} d\wedge, \tag{4.1.5}$$

para casi todo $r \in [0,R]$. Como $u \in C^{0,1}(\Omega)$,

$$(4.1.6) \qquad |\nabla u_k(x)| \le C \quad \forall x \in B_R, \qquad C := \|\nabla u\|_{L^\infty(D)}.$$

Por otra parte, del teorema 3.2.6 y del corolario 3.2.15 se deduce que existe A tal que

$$(4.1.7) \qquad \nabla u_k(x) \to \nabla u(x) \qquad \forall x \in B_R \cap A^c,$$

donde $A \subset B_R$, $|A| = 0$ y por lo tanto

$$(4.1.8) \qquad \mathcal{H}^{n-1}(A \cap \partial B_r) = 0,$$

para casi todo $r \in [0,R]$.

Si fijamos ahora $r \in [0,R]$ tal que se cumplan (4.1.5) y (4.1.8), tendremos de (4.1.7) que

$$\nabla u_k(x) \to \nabla u(x) \qquad \text{para } \mathcal{H}^{n-1}\text{-casi todo } x \in \partial B_r,$$

lo que junto con (4.1.6) nos da que (4.1.3) vale y permite aplicar el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue para probar que

$$(4.1.9) \qquad \lim_{k\to\infty} \int_{\partial B_r} \nabla u_k \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{\partial B_r} \nabla u \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Entonces, observando primero que como las u_k son regulares satisfacen

$$\int_{B_r} \Delta u_k \, dx = \int_{\partial B_r} \nabla u_k \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

y haciendo finalmente $k \to \infty$, tenemos por (4.1.5) y (4.1.9) que se cumple (4.1.4). □

En el lema 4.1.3 y teorema 4.1.4 usaremos resultados sobre la función de Green que se encuentran detallados en la sección 2 del Capítulo 1.

4.1.3. Lema. *Sean u una solución de P_ε^c y $\Lambda = \Delta u$. Sea $y \in B_r(x_0) \subset\subset \Omega$, tal que $u(y) > 0$.*

Entonces, si G_y es la función de Green positiva para el Laplaciano en $B_r(x_0)$ con polo en y, se tiene que

$$\int_{B_r(x_0)} G_y \, d\Lambda = -u(y) + \int_{\partial B_r(x_0)} u \partial_{-\nu} G_y \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

DEMOSTRACIÓN. Definamos $v(x) = \frac{|x|^2}{n}$, $w = u + v$, $w_k = \rho_k * w$, donde ρ_k es una sucesión regularizante. Como por el teorema 3.2.6

$$\Delta u = -2 \qquad \text{en el abierto } \{u > 0\} \tag{4.1.10}$$

y $\Delta u \geq -2$ en el sentido de las distribuciones en Ω, resulta $\Delta w \geq 0$ en el sentido de las distribuciones en Ω, y entonces $\mu := \Delta w$ es una medida de Radón.

Dado $y \in B_r(x_0) \subset\subset \Omega$, con $u(y) > 0$, por (4.1.10) existirá un entorno V de y tal que

$$\Delta w_k = 0 \qquad \text{en } V \text{ para } k \text{ grande,} \tag{4.1.11}$$

$$\Delta w = 0 \qquad \text{en } V \text{ y en consecuencia } \mu(V) = 0. \tag{4.1.12}$$

Tomemos $M > 0$ tal que $|G_y| \leq M$ en $B_r(x_0) \setminus V$, y sea $f \in C_0(\Omega)$ dada por

$$f = \begin{cases} \min(G_y, M) & \text{en } B_r(x_0) \\ 0 & \text{en } \Omega \setminus B_r(x_0) \end{cases}$$

Por el corolario 1.3.4 se tiene

$$\int_\Omega f \Delta w_k \, dx \to \int_\Omega f \, d\mu. \tag{4.1.13}$$

Además, por definición de f y por (4.1.12) tenemos $f = G_y$ en $B_r(x_0) \setminus V$ y μ-c.t.p. en $B_r(x_0)$, de donde se deduce, junto con (4.1.11) y (4.1.13) que

$$\int_{B_r(x_0)} G_y \Delta w_k \, dx \to \int_{B_r(x_0)} G_y \, d\mu. \tag{4.1.14}$$

Por otra parte, como $w_k \in C^2(\overline{B_r})$ para k grande, se tiene

$$\int_{B_r(x_0)} G_y \Delta w_k \, dx = -w_k(y) + \int_{\partial B_r(x_0)} w_k \partial_{-\nu} G_y \, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{4.1.15}$$

Entonces, como w es continua pues u lo es, y por (4.1.14), tomando límite para $k \to \infty$ en (4.1.15) obtenemos

$$\int_{B_r(x_0)} G_y \, d\mu = -w(y) + \int_{\partial B_r(x_0)} w \partial_{-\nu} G_y \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

y finalmente, notando que la fórmula de representación de Green también es válida para v, se obtiene el lema. $\square$

4.1.4. Teorema. *Sea u una solución de P_ε^c.*

Dado $D \subset\subset \Omega$, existen constantes $0 < \bar{c} \leq \overline{C}$ y $r_0 > 0$ tales que para bolas $B_r \subset D$ con centro en $\Omega \cap \partial\{u > 0\}$, $r \leq r_0$ se cumple

$$\bar{c}r^{n-1} \leq \int_{B_r} d\lambda_u \leq \overline{C}r^{n-1}$$

DEMOSTRACIÓN. Llamemos

$$c_1 = \|\nabla u\|_{L^\infty(D)}, \tag{4.1.16}$$

y consideremos $x_0 \in D \cap \partial\{u > 0\}$.

PASO I. (primera desigualdad). Fijemos $\kappa = 1/2$ y llamemos

$$c_2 = C_\kappa, \qquad r_0 = r_\kappa \tag{4.1.17}$$

con C_κ y r_κ las constantes dadas por el lema 3.2.12.

Sea $r < r_0$ tal que $B_r(x_0) \subset D$. Entonces por el citado lema tendremos

$$\fint_{\partial B_{\gamma r}(x_0)} u > c_2 \gamma r, \qquad \text{cualquiera sea } \gamma \in (0, 1]. \tag{4.1.18}$$

Tomemos $0 < \alpha < 1$. Por (4.1.18) existirá un punto y con la propiedad

$$y \in \partial B_{\alpha r}(x_0), \qquad u(y) \geq c_2 \alpha r > 0. \tag{4.1.19}$$

Por (4.1.16) y (4.1.19)

$$u(y) \leq c_1 |y - x_0| \leq c_1 \alpha r, \tag{4.1.20}$$

$$u > 0 \text{ en } B_{c(\alpha)r}(y), \qquad c(\alpha) := \frac{c_2 \alpha}{2c_1}. \tag{4.1.21}$$

Además por (4.1.19) es posible aplicar el lema 4.1.3, con lo cual

$$\int_{B_r(x_0)} G_y \, d\Lambda = -u(y) + \int_{\partial B_r(x_0)} u \partial_{-\nu} G_y \, d\mathcal{H}^{n-1}. \tag{4.1.22}$$

Como $y \in \partial B_{\alpha r}(x_0)$, si tomamos α suficientemente chico (dependiendo sólo de n) y recordamos (4.1.18), tendremos

$$\text{(4.1.23)} \qquad \int_{\partial B_r(x_0)} u\partial_{-\nu} G_y \, d\mathcal{H}^{n-1} \geq (1-2n\alpha) \fint_{\partial B_r(x_0)} u \, d\mathcal{H}^{n-1} \geq (1-2n\alpha)c_2 r.$$

Entonces de (4.1.22), (4.1.23), (4.1.20), fijando $\alpha = \alpha(c_1, c_2, n)$ adecuado resulta

$$\textit{(4.1.24)} \qquad \int_{B_r(x_0)} G_y \, d\Lambda \geq -u(y) + (1-2n\alpha)c_2 r \geq c_3 r, \qquad c_3 = c_3(c_1, c_2, n) > 0.$$

Por otra parte, por el lema 4.1.1 y por (4.1.21)

$$\begin{aligned}
\int_{B_r(x_0)} G_y \, d\lambda = \int_{B_r(x_0)\cap\{u=0\}} G_y \, d\lambda &\leq \sup_{B_r(x_0)\setminus B_{c(\alpha)r}(y)} G_y \int_{B_r(x_0)} d\lambda \\
\text{(4.1.25)} \qquad &\leq c_4 r^{2-n} \int_{B_r(x_0)} d\lambda
\end{aligned}$$

con $c_4 = c_4(c_1, c_2, n) > 0$. Finalmente de (4.1.24) y (4.1.25) resulta

$$c_3 r \leq \int_{B_r(x_0)} G_y \, d\Lambda \leq \int_{B_r(x_0)} G_y \, d\lambda \leq c_4 r^{2-n} \int_{B_r(x_0)} d\lambda,$$

lo que prueba la primera desigualdad.

Paso II. (segunda desigualdad). Por el lema 4.1.2 y por (4.1.16), sabemos que para casi todo r tal que $B_r(x_0) \subset D$ se tiene

$$\int_{B_r(x_0)} d\Lambda = \int_{\partial B_r(x_0)} \nabla u \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} \leq c_1 \mathcal{H}^{n-1}(\partial B_r).$$

Si además $r < 1$ resultará

$$\int_{B_r(x_0)} d\lambda = \int_{B_r(x_0)} d\,\Lambda + 2\int_{B_r(x_0)} \chi_{\{u>0\}} \leq \overline{C} r^{n-1},$$

desigualdad que valdrá para todo $r < 1$ tal que $B_r(x_0) \subset D$ y por lo tanto completa el teorema. □

4.1.5. Observación. Fijado $D \subset\subset \Omega$, no es difícil ver que las constantes $\bar{c}$ y $\overline{C}$ del teorema 4.1.4 dependen sólo de n y de las constantes c_1 y c_2 definidas en (4.1.16) y (4.1.17) respectivamente. Por tal razón, si x_0 es un punto satisfaciendo

$$x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}, \qquad \text{con } B_{2R}(x_0) \subset\subset \Omega, \qquad 0 < R < 1$$

y si tomamos $D = B_R(x_0)$ en el citado teorema, obtendremos (por los lemas 3.2.18 y 3.2.12) que las constantes $\bar{c}$ y $\overline{C}$ dependen sólo de n, ε, δ y μ (δ y μ definidas en (3.2.7) y (3.2.6) respectivamente).

4.1.6. Teorema. *Sea u una solución de P_ε^c. Entonces*

1) $\mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial\{u > 0\}) < +\infty$.

2) Existe una función boreliana en Ω q_u tal que

$$\Delta u + 2\chi_{\{u>0\}} = q_u \mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial\{u > 0\}$$

es decir, para toda $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tenemos

$$-\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi + 2\int_{\{u>0\}} \varphi = \int_{\Omega\cap\partial\{u>0\}} \varphi q_u \, d\mathcal{H}^{n-1} \tag{4.1.26}$$

3) Para $D \subset\subset \Omega$, existen constantes $0 < c^* \le C^*$ y $r_0 > 0$ tales que para toda bola $B_r(x) \subset D$ con $r \le r_0$ y $x \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$,

$$c^* \le q_u(x) \le C^*, \qquad c^* r^{n-1} \le \mathcal{H}^{n-1}(B_r(x) \cap \partial\{u > 0\}) \le C^* r^{n-1}.$$

4.1.7. Observación. Sea u una solución de P_ε^c y supongamos que existe una porción no vacía T de $\partial\{u > 0\}$ de clase $C^{1,\alpha}$, $0 < \alpha < 1$. Entonces por el teorema 3.2.6 tendremos

$$u \in C^\infty(\{u > 0\}) \cap C^{1,\alpha}(\{u > 0\} \cup T),$$

y por lo tanto si tomamos un abierto $D \subset \Omega$ de clase C^1 tal que $D \cap \partial\{u > 0\} \subset T$, resultará de (4.1.26) que u satisface

$$\Delta u = -2 \qquad \text{en } D \cap \{u > 0\},$$

$$u = 0, \quad \partial_{-\nu} u = q_u \qquad \text{en } D \cap \partial\{u > 0\},$$

donde ν es la normal exterior a $D \cap \{u > 0\}$, y la última igualdad se entiende $\mathcal{H}^{n-1}$ - c.t.p.

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.1.6.

Para $A \subset \Omega$, definamos $\mu(A) = \mathcal{H}^{n-1}(A \cap \partial\{u > 0\})$.

PASO I. Fijemos $D \subset\subset \Omega$, y sean r_0, $\bar{c}$, $\overline{C}$ las constantes dadas por el teorema 4.1.4 para D. Veremos que existen constantes $0 < c_1 \leq c_2$ dependiendo de n, $\bar{c}$ y $\overline{C}$ tales que

$$(4.1.27) \qquad c_1\mu(K) \leq \lambda(K) \leq c_2\mu(K) \qquad \text{para todo compacto } K \subset D.$$

Consideremos un compacto $E \subset D \cap \partial\{u > 0\}$, $r_1 := \min\left\{\frac{d(E, \partial D)}{4}, r_0\right\}$. Sea $r < r_1$ y tomemos $(B_r(y_i))_{i \in I\!N}$ un cubrimiento de $I\!R^n$ tal que

$$(4.1.28) \qquad \sum_{i \in I\!N} \chi(B_{2r}(y_i)) \leq C(n).$$

Entonces

$$(4.1.29) \qquad E \subset \bigcup_{i \in I} B_r(y_i) \qquad \text{donde } I = \{i \in I\!N \ / \ B_r(y_i) \cap E \neq \emptyset\}.$$

Si para cada $i \in I$, tomamos $x_i \in B_r(y_i) \cap E$, tendremos por elección de r, por el teorema 4.1.4 y por (4.1.28) que

$$\bar{c} \sum_{i \in I} r^{n-1} \leq \sum_{i \in I} \lambda(B_r(x_i)) \leq \sum_{i \in I} \int_{B_{4r}(E)} \chi(B_{2r}(y_i))\, d\lambda \leq C(n)\lambda(B_{4r}(E)),$$

de donde por (1.4.1) y por (4.1.29) se tiene

$$\mathcal{H}^{n-1}_{4r}(E) \leq C\lambda(B_{4r}(E)), \qquad C = C(n, \bar{c})$$

y haciendo $r \to 0$, por (1.4.2)

$$(4.1.30) \qquad \mathcal{H}^{n-1}(E) \leq C\lambda(E), \qquad C = C(n, \bar{c}).$$

Fijemos $s < r_1$ y supongamos ahora que $E \subset \bigcup_{j \in J} S_j$, con

$$S_j \cap E \neq \emptyset, \qquad d_j = \text{ diam } S_j < s, \qquad \forall j \in J \subset I\!N.$$

Si para cada $j \in J$ tomamos $x_j \in E \cap S_j$, por elección de s y por el teorema 4.1.4 tendremos

$$\lambda(E) \leq \sum_{j \in J} \lambda\left(B_{d_j}(x_j)\right) \leq \overline{C} \sum_{j \in J} (d_j)^{n-1},$$

de donde por (1.4.1) y por elección de los S_j resulta

$$\lambda(E) \leq C \mathcal{H}_s^{n-1}(E), \qquad C = C(n, \overline{C}). \tag{4.1.31}$$

Entonces por (1.4.2), haciendo $s \to 0$ en (4.1.31) y recordando (4.1.30) obtenemos

$$c_1 \mathcal{H}^{n-1}(E) \leq \lambda(E) \leq c_2 \mathcal{H}^{n-1}(E) \qquad \forall \text{ compacto } E \subset D \cap \partial\{u > 0\}, \tag{4.1.32}$$

c_1, c_2 dependiendo sólo de $\bar{c}$, $\overline{C}$ y n.

Finalmente, dado un compacto $K \subset D$ arbitrario, podremos tomar $E = K \cap \partial\{u > 0\}$ en (4.1.32), lo que por definición de μ y por el teorema 4.1.1 conduce a (4.1.27) y completa el paso I.

PASO II. Del paso anterior, podemos deducir que μ y λ son medidas de Radón mutuamente absolutamente continuas sobre los borelianos de Ω. Entonces, por el teorema de Radón Nikodym ([12], p. 113), existe una función q_u boreliana en Ω tal que

$$\lambda(A) = \int_A q_u \, d\mu = \int_{A \cap \partial\{u>0\}} q_u \, d\mathcal{H}^{n-1} \qquad \forall \text{ boreliano } A \subset \Omega \tag{4.1.33}$$

En consecuencia, si $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tendremos

$$\int_\Omega \varphi \, d\lambda = \int_{\Omega \cap \partial\{u>0\}} \varphi q_u \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

lo que, por definición de λ, prueba 2).

PASO III. Para probar 3), observemos primero que por (4.1.33) y por el teorema 1.3.5

$$\lim_{r \to 0} \frac{\lambda(B_r(x))}{\mu(B_r(x))} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\mu(B_r(x))} \int_{B_r(x)} q_u \, d\mu = q_u(x), \qquad \mu\text{-c.t.p. en } \Omega \tag{4.1.34}$$

Fijemos ahora $D \subset\subset \Omega$ y consideremos r_0, $\bar{c}$, $\overline{C}$ (para D) como en el paso I. Si tomamos una bola $B_r(x) \subset D$ con $r \leq r_0$ y $x \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$, tendremos por (4.1.27)

$$c_1 \leq \frac{\lambda(B_r(x))}{\mu(B_r(x))} \leq c_2, \qquad c_1, c_2 \text{ dependiendo de } \bar{c}, \overline{C} \text{ y } n \tag{4.1.35}$$

y además por el teorema 4.1.4 y por (4.1.27)

$$\tilde{c}_1 r^{n-1} \leq \mu(B_r(x)) \leq \tilde{c}_2 r^{n-1}, \qquad \tilde{c}_1, \tilde{c}_2 \text{ dependiendo de } \bar{c}, \overline{C} \text{ y } n,$$

lo que junto con (4.1.34) y (4.1.35) prueba 3).

Paso IV. Tomemos ahora $\delta > 0$ como (3.2.7), y $M > 0$ dado por el lema 3.2.16. Consideremos el compacto

$$K = \{x \in I\!R^n \;/\; |x| \leq M, d(x, \Pi) \geq \delta\},$$

que por construcción satisface

$$\Omega \cap \partial\{u > 0\} \subset K \subset \Omega \tag{4.1.36}$$

Sea D tal que $K \subset D \subset\subset \Omega$, entonces por (4.1.36) y por lo visto en el paso I, existe una constante C tal que

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial\{u > 0\}) = \mathcal{H}^{n-1}(K \cap \partial\{u > 0\}) \leq C\lambda(K),$$

lo que prueba 1), recordando que λ es una medida de Radón y por lo tanto concluye el teorema. □

4.1.8. Observación. Es claro que fijado $D \subset\subset \Omega$, las constantes c^* y C^* de la parte 3) del teorema 4.1.6 dependen sólo de n y de las constantes $\bar{c}$ y $\overline{C}$ que se obtienen para D en el teorema 4.1.4.

4.1.9. Observación. Notar que la función q_u definida en el teorema 4.1.6 es única en el sentido que si hay otra con la misma propiedad, ambas coincidirán para $\mathcal{H}^{n-1}$-casi todo x en $\Omega \cap \partial\{u > 0\}$.

4.1.10. Observación. Dada u una solución de P_ε^c, consideremos $E := \{u > 0\}$. De los teoremas 4.1.6 y 1.6.4 se deduce que E tiene perímetro localmente finito en Ω y en consecuencia serán aplicables los resultados sobre conjuntos con perímetro finito citados en la sección 1.6.

Definiremos entonces, la frontera reducida de E (ver 1.6.5)

$$\partial_{\text{red}} E := \Omega \cap \partial^* E.$$

Es decir $\partial_{\text{red}} E = \partial_{\text{red}}\{u > 0\}$ es el conjunto de puntos $x \in \Omega$ tales que existe la normal exterior $\nu_u(x)$ a $\{u > 0\}$ en x (en medida), donde por definición tendremos $|\nu_u(x)| = 1$ y

$$\lim_{r \to 0} \frac{1}{r^n} \int_{B_r(x)} |\chi(\{u > 0\}) - \chi(\{y : (y - x) \cdot \nu_u(x) < 0\})| = 0 \tag{4.1.37}$$

4.1.11. Límites "blow up" de soluciones.

Dada u una solución de P_ε^c y (x_k) una sucesión de puntos de Ω con $x_k \to x_0 \in \Omega$, y $u(x_k) = 0$, existe un entorno $D \subset \Omega$ de x_0 donde u satisface las propiedades (P1), (P2) y (P3) de A.2.1. (ver lema 3.2.12 y teorema 3.2.14).

Por esta razón, fijada una solución de P_ε^c, podemos definir sucesiones y límites "blow up" como en A.2.2 y podemos en lo que sigue, hacer uso de los resultados de la sección A.2.

El próximo teorema muestra que cerca de casi todo punto x_0 de la frontera reducida, u se comporta como la parte positiva de una función lineal con pendiente $q_u(x_0)$.

4.1.12. Teorema. *Sea u una solución de P_ε^c. Para $\mathcal{H}^{n-1}$-casi todo $x_0 \in \partial_{\text{red}}\{u > 0\}$ se cumple la siguiente propiedad:*

Si $B_{\rho_k}(x_0) \subset \Omega$ es una sucesión (arbitraria) de bolas con $\rho_k \to 0$ y u_k es una sucesión "blow up" respecto de $B_{\rho_k}(x_0)$ con límite u_0, entonces,

$$u_0(x) = q_u(x_0) \max(-x \cdot \nu_u(x_0), 0) \tag{4.1.38}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea u una solución de P_ε^c y sea $x_0 \in \partial_{\text{red}}\{u > 0\}$. Tomemos $B_{\rho_k}(x_0) \subset \Omega$ bolas con $\rho_k \to 0$ y u_k una sucesión "blow up" respecto de $B_{\rho_k}(x_0)$ con límite u_0. Supondremos por comodidad que $\nu_u(x_0) = e_n$.

PASO I. Veamos primero que

$$\{u_0 = 0\} = \{x_n \geq 0\}, \qquad \{u_0 > 0\} = \{x_n < 0\}. \tag{4.1.39}$$

Por definición de u_k, tendremos para $R > 0$

$$\frac{1}{R^n}\int_{B_R(0)} |\chi(\{u_k > 0\}) - \chi(\{x_n < 0\})|\,dx =$$
$$= \frac{1}{(R\rho_k)^n}\int_{B_{R\rho_k}(x_0)} |\chi(\{u > 0\}) - \chi(\{y : (y - x_0)\cdot e_n < 0\})|\,dy$$

con lo cual por (4.1.37)

$$\chi(\{u_k > 0\}) \to \chi(\{x_n < 0\}) \qquad \text{en } L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),$$

y entonces por (A.2.7), como $u_0 \geq 0$,

$$u_0 = 0 \qquad \text{c.t.p. en } \{x_n \geq 0\}, \tag{4.1.40}$$

$$u_0 > 0 \qquad \text{c.t.p. en } \{x_n < 0\}. \tag{4.1.41}$$

Como u_0 es continua, de (4.1.40) resulta $u_0 = 0$ en $\{x_n \geq 0\}$, y de (4.1.41) y (A.2.11) deducimos que $u_0 > 0$ en $\{x_n < 0\}$, lo que prueba (4.1.39) y completa el paso I.

Paso II. Fijemos $r > 0$ y notemos B'_r la bola $n-1$ dimensional de radio r y centro en el origen. Consideremos un abierto $E \subset B'_r$ y

$$\eta \in C_0^\infty(E), \qquad 0 \leq \eta \leq 1. \tag{4.1.42}$$

Definamos

$$\bar{\eta}(x) = \begin{cases} \min(2(1-|x_n|),1)\,\eta(x_1,\ldots,x_{n-1}) & \text{si } |x_n| < 1, \\ 0 & \text{si } |x_n| \geq 1. \end{cases} \tag{4.1.43}$$

Entonces por (A.2.2), (A.2.8), (4.1.39) y (1.6.1) tendremos para k grande (dependiendo sólo de r) que

$$\int_E \eta\,d\mathcal{H}^{n-1} = \int_{E\times(-1,1)} \chi(\{u_k > 0\})\,\frac{\partial}{\partial x_n}(\bar{\eta})\,dx \leq \int_{E\times(-1,1)} |\nabla\chi(\{u_k > 0\})|,$$

con lo cual, tomando supremo sobre los η que satisfacen (4.1.42) y aplicando el teorema 1.6.3 obtenemos

$$\mathcal{H}^{n-1}(E) \leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial\{u_k > 0\} \cap (E \times (-1,1))) < +\infty \qquad \forall \text{ abierto } E \subset B'_r. \tag{4.1.44}$$

PASO III. Supongamos ahora que x_0 satisface además

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\rho^{n-1}}\int_{B_\rho(x_0)\cap\partial\{u>0\}}|q_u-q_u(x_0)|\,d\mathcal{H}^{n-1}=0, \tag{4.1.45}$$

$$\lim_{\rho\to 0}\frac{\mathcal{H}^{n-1}(B_\rho(x_0)\cap\partial\{u>0\})}{w_{n-1}\rho^{n-1}}=1, \tag{4.1.46}$$

y en consecuencia, fijado $R>0$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mathcal{H}^{n-1}(B_R(0)\cap\partial\{u_k>0\})}{\mathcal{H}^{n-1}(B'_R)}=1. \tag{4.1.47}$$

Observemos que por (A.2.6) y (4.1.39), fijado $s>0$ arbitrario

$$\partial\{u_k>0\}\cap(B'_r\times(-1,1))\subset B'_r\times(-s,s)\subset B_{r+s}(0)\qquad\text{para } k \text{ grande.} \tag{4.1.48}$$

Fijemos $\eta\in C_0^\infty(B'_r)$, $\eta\geq 0$ y para cada k definamos

$$T_k(\eta)=\int_{\partial\{u_k>0\}}\bar{\eta}\,d\mathcal{H}^{n-1}-\int_{I\!R^{n-1}}\eta\,d\mathcal{H}^{n-1},\qquad \bar{\eta}\text{ como en (4.1.43)}$$

entonces por (4.1.44) y (4.1.48), tendremos que $0\leq T_k(\eta)<+\infty$ para k grande (dependiendo de r) y en consecuencia T_k define una medida de Radón en B'_r.

Por lo tanto, fijado $\varepsilon>0$ se tendrá por (4.1.48), que para k grande

$$\begin{aligned}0\leq T_k(\eta)&\leq(\sup\eta)(\mathcal{H}^{n-1}(\partial\{u_k>0\}\cap(B'_r\times(-1,1)))-\mathcal{H}^{n-1}(B'_r))\\&\leq(\sup\eta)(\mathcal{H}^{n-1}(\partial\{u_k>0\}\cap B_{r+\varepsilon}(0))-\mathcal{H}^{n-1}(B'_r))\end{aligned} \tag{4.1.49}$$

Haciendo $k\to\infty$ en (4.1.49), tendremos por (4.1.47) (observando que $\varepsilon>0$ era arbitrario) que

$$\lim_{k\to\infty}\int_{\partial\{u_k>0\}}\bar{\eta}\,d\mathcal{H}^{n-1}=\int_{I\!R^{n-1}}\eta\,d\mathcal{H}^{n-1} \tag{4.1.50}$$

De (4.1.26) obtenemos que si k es grande

$$-\int_{I\!R^n}\nabla u_k\nabla\bar{\eta}+2\rho_k\int_{\{u_k>0\}}\bar{\eta}=\int_{\partial\{u_k>0\}}\bar{\eta}(x)q_u(x_0+\rho_k x)\,d\mathcal{H}^{n-1}_x,$$

y haciendo $k\to\infty$ resultará por (A.2.3), (4.1.50) y (4.1.45) que

$$-\int_{I\!R^n}\nabla u_0\nabla\bar{\eta}=\int_{I\!R^{n-1}}q_u(x_0)\eta\,d\mathcal{H}^{n-1},\qquad \bar{\eta}\text{ como en (4.1.43),} \tag{4.1.51}$$

cualquiera sea $\eta \in C_0^\infty(B'_r)$, con $\eta \geq 0$ y $r > 0$ arbitrario. Como

$$\Delta u_0 = 0 \text{ en } \{x_n < 0\}, \qquad u_0 \equiv 0 \text{ en } \{x_n > 0\},$$

resulta entonces de (4.1.51)

$$u_0(x) = q_u(x_0)\max(-x_n, 0).$$

La demostración se completa observando que por los teoremas 1.3.5, 4.1.6 (parte 3) y 1.6.7, se tiene que (4.1.45) y (4.1.46) se cumplen para $\mathcal{H}^{n-1}$-casi todo $x_0 \in \partial_{\text{red}}\{u > 0\}$. □

4.1.13. Lema. *Si u es una solución de P_ε^c, entonces*

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial\{u > 0\} \setminus \partial_{\text{red}}\{u > 0\}) = 0.$$

DEMOSTRACIÓN. El resultado se obtiene de observar que por el teorema 3.2.14, el conjunto $E = \{u > 0\}$ se encuentra en la hipótesis del teorema 1.6.8. □

4.2. Estimaciones sobre $|\nabla u|$ y q_u.

4.2.1. Teorema. *Dada u una solución de P_ε^c, existe una constante $\lambda_u > 0$ tal que*

(4.2.1) $$\limsup_{\substack{x \to x_0 \\ u(x) > 0}} |\nabla u(x)| = \lambda_u \qquad \textit{para todo } x_0 \textit{ en } \Omega \cap \partial\{u > 0\},$$

(4.2.2) $$q_u(x_0) = \lambda_u \qquad \textit{para } \mathcal{H}^{n-1}\textit{-casi todo } x_0 \textit{ en } \Omega \cap \partial\{u > 0\}.$$

Antes de demostrar el teorema, necesitaremos probar dos lemas.

4.2.2. Lema. *Sea u una solución de P_ε^c.*

Dados x_0, $x_1 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$, supongamos que existe una sucesión (ρ_k) tal que $\rho_k > 0$, $\rho_k \to 0$, y que para $i = 0, 1$ se cumple que:
existe una sucesión de puntos (x_{ik}) en Ω con

$$x_{ik} \to x_i, \qquad u(x_{ik}) = 0, \qquad B_{\rho_k}(x_{ik}) \subset \Omega,$$

y tal que la sucesión "blow up" respecto de $B_{\rho_k}(x_{ik})$

$$u_{ik}(x) := \frac{u(x_{ik} + \rho_k x)}{\rho_k} \qquad \text{tiene límite } u_i(x) = \lambda_i \max(-x \cdot \nu_i, 0), \tag{4.2.3}$$

donde $0 < \lambda_i < +\infty$ y ν_i es un vector unitario.

Entonces $\lambda_0 = \lambda_1$.

DEMOSTRACIÓN. La idea de la demostración consiste en construir funciones admisibles para P_ε^c, que contradicen que u es solución de P_ε^c, a menos que se tenga $\lambda_0 = \lambda_1$.

Tomemos una función $\phi \in C_0^\infty((-1,1))$, $\phi \geq 0$, $\phi \not\equiv 0$ y sea $t > 0$ chico. Para $k \in I\!N$ definamos

$$\tau_k(x) := \begin{cases} x + t\rho_k \phi\left(\frac{|x - x_{0k}|}{\rho_k}\right)\nu_0 & \text{si } x \in B_{\rho_k}(x_{0k}) \\ x - t\rho_k \phi\left(\frac{|x - x_{1k}|}{\rho_k}\right)\nu_1 & \text{si } x \in B_{\rho_k}(x_{1k}) \\ x & \text{en el resto de } I\!R^n. \end{cases}$$

Entonces para t chico (dependiendo sólo de ϕ), τ_k es un difeomorfismo con

$$D\tau_k(x) = \begin{cases} I + tD\eta_i\left(\frac{x - x_{ik}}{\rho_k}\right) & \text{si } x \in B_{\rho_k}(x_{ik}) \quad i = 0, 1 \\ I & \text{en el resto de } I\!R^n \end{cases}$$

donde

$$\eta_i(y) := (-1)^i \phi(|y|)\nu_i, \qquad i = 0, 1$$

y por lo tanto, las funciones

$$v_k(x) := u(\tau_k^{-1}(x)),$$

resultan admisibles para P_ε^c para k grande.

Observemos que para $i = 0,1$ se tiene que

$$\rho_k^{-n}|\{v_k > 0\} \cap B_{\rho_k}(x_{ik})| = \int_{B_1(0)\cap\{u_{ik}>0\}} \det D\tau_k(x_{ik} + \rho_k y)\, dy \tag{4.2.4}$$
$$= \int_{B_1(0)\cap\{u_{ik}>0\}} (1 + (-1)^i t\phi'(|y|)\frac{y}{|y|} \cdot \nu_i)\, dy,$$

$$\rho_k^{-n}|\{u > 0\} \cap B_{\rho_k}(x_{ik})| = |\{u_{ik} > 0\} \cap B_1(0)|, \tag{4.2.5}$$

y además, por (4.2.3) y (A.2.7)

$$\int_{B_1(0)\cap\{u_{ik}>0\}} \phi'(|y|)\frac{y}{|y|} \cdot \nu_i\, dy \to \int_{B_1(0)\cap\{y\cdot\nu_i<0\}} \phi'(|y|)\frac{y}{|y|} \cdot \nu_i\, dy. \tag{4.2.6}$$

Entonces de (4.2.4), (4.2.5) y (4.2.6), notando que el límite obtenido en (4.2.6) no depende de la dirección de ν_i, obtenemos que

$$\rho_k^{-n}\left(|\{v_k > 0\}| - |\{u > 0\}|\right) \to 0,$$

y como $|\{u > 0\}|$ y $|\{v_k > 0\}|$ están acotados por una constante independiente de k, y f_ϵ es lipschitz en cualquier intervalo acotado, concluímos que

$$|f_\epsilon(|\{v_k > 0\}|) - f_\epsilon(|\{u > 0\}|)| \le C\,\big|\,|\{v_k > 0\}| - |\{u > 0\}|\,\big| = o(\rho_k^n). \tag{4.2.7}$$

Por otra parte, para $i = 0,1$ tenemos

$$\rho_k^{-n}\int_{B_{\rho_k}(x_{ik})} (|\nabla v_k|^2 - |\nabla u|^2) = \int_{B_1(0)} (|\nabla u_{ik}(I + tD\eta_i)^{-1}|^2 \det(I + tD\eta_i) - |\nabla u_{ik}|^2)$$
$$= t\int_{B_1(0)} |\nabla u_{ik}|^2 \operatorname{div} \eta_i - 2\nabla u_{ik} \cdot D\eta_i \nabla u_{ik}) + o(t) \tag{4.2.8}$$

y entonces por (4.2.3), (A.2.1) y (A.2.10),

$$\nabla u_{ik} \text{ están uniformemente acotados en } B_1(0),$$

$$\nabla u_{ik} \to -\lambda_i \nu_i \chi(B_1(0) \cap \{y \cdot \nu_i < 0\}) \quad \text{c.t.p. en } B_1(0),$$

con lo cual (4.2.8) converge a

$$t\int_{B_1(0)\cap\{y\cdot\nu_i<0\}} \lambda_i^2(\operatorname{div} \eta_i - 2\nu_i \cdot D\eta_i \nu_i) + o(t) =$$
$$= -t\lambda_i^2 \int_{B_1(0)\cap\{y\cdot\nu_i<0\}} \operatorname{div} \eta_i + o(t)$$
$$= -t(-1)^i\lambda_i^2 \int_{B_1(0)\cap\{y\cdot\nu_i=0\}} \phi(|y|)\, d\mathcal{H}_y^{n-1} + o(t)$$

y observando que la última integral no depende de la dirección de ν_i concluímos que

(4.2.9)
$$\int_\Omega |\nabla v_k|^2 - \int_\Omega |\nabla u|^2 = \rho_k^n \left(t(\lambda_1^2 - \lambda_0^2) \int_{B_1(0)\cap\{y_n=0\}} \phi(|y|)\, d\mathcal{H}_y^{n-1} + o(t) \right) + o(\rho_k^n).$$

Aplicando ahora el lema 3.2.13, se deduce que existe una constante C independiente de k tal que si $y \in B_{\rho_k}(x_{ik})$, $i = 0, 1$,

$$v_k(y) = u(\tau_k^{-1}(y)) \le C\rho_k, \qquad u(y) \le C\rho_k,$$

y por lo tanto

$$|\int_\Omega v_k - \int_\Omega u| \le C\rho_k^{n+1} = o(\rho_k^n). \tag{4.2.10}$$

Para finalizar, supondremos que $\lambda_1 < \lambda_0$ y en consecuencia, para t suficientemente chico (independiente de k), el término principal en (4.2.9) resultará negativo. Entonces de (4.2.7), (4.2.9) y (4.2.10) obtendremos que

$$J_\epsilon(v_k) < J_\epsilon(u), \qquad \text{para } k \text{ grande},$$

lo que es un absurdo. Como x_0 y x_1 pueden intercambiarse en la demostración, concluímos que $\lambda_1 = \lambda_0$. □

4.2.3. Lema. *Sea u una solución de P_ϵ^c. Dado $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$, llamemos*

$$\lambda = \lambda(x_0) := \limsup_{\substack{x\to x_0\\ u(x)>0}} |\nabla u(x)| \tag{4.2.11}$$

Entonces $0 < \lambda < +\infty$. Además existe una sucesión (d_k) tal que

$$d_k > 0, \qquad d_k \to 0, \tag{4.2.12}$$

y una sucesión de puntos (y_k) de Ω con

$$y_k \to x_0, \qquad y_k \in \Omega \cap \partial\{u_k > 0\}, \qquad B_{d_k}(y_k) \subset \Omega, \tag{4.2.13}$$

y tal que la sucesión "blow up" respecto de $B_{d_k}(y_k)$ tiene límite u_0 con

$$u_0 = \lambda \max(-x\cdot v, 0),$$

donde $v = v(x_0)$ *es un vector unitario.*

DEMOSTRACIÓN. Por (4.2.11) existe una sucesión $z_k \to x_0$ con

$$(4.2.14) \qquad u(z_k) > 0, \qquad |\nabla u(z_k)| \to \lambda$$

Sea y_k el punto más cercano a z_k de $\Omega \cap \partial\{u > 0\}$, y llamemos $d_k = |y_k - z_k|$. Entonces para k grande, (4.2.12) y (4.2.13) se satisfacen, y además

$$(4.2.15) \qquad B_{d_k}(z_k) \subset \{u > 0\}$$

Consideremos la sucesión "blow up" respecto de $B_{d_k}(y_k)$, y tomemos una subsucesión con límite u_0, elegida de modo tal que exista

$$v := \lim_{k\to\infty} \frac{y_k - z_k}{d_k},$$

y sin pérdida de la generalidad asumiremos que $v = e_n$. Entonces u_0 es armónica en $\{u_0 > 0\}$, y de (A.2.7), (4.2.15) y (A.2.11) se deduce que

$$(4.2.16) \qquad B_1(-e_n) \subset \{u_0 > 0\}.$$

Por otra parte, como $y_k \in \Omega \cap \partial\{u_0 > 0\}$, se tiene por (A.2.12) que $0 \in \partial\{u_0 > 0\}$ y por lo tanto $u_0(0) = 0$. Además de (4.2.11), (A.2.2) y (A.2.9) resulta

$$(4.2.17) \qquad |\nabla u_0| \le \lambda \qquad \text{en } \{u_0 > 0\},$$

y de (A.2.4), (4.2.16), (4.2.14) y (A.2.9)

$$(4.2.18) \qquad |\nabla u_0(-e_n)| = \lambda,$$

con lo cual $0 < \lambda < +\infty$.

Sea $e := \frac{-\nabla u_0(-e_n)}{|\nabla u_0(-e_n)|}$, y consideremos la función $\frac{\partial u_0}{\partial e}$. Tenemos que

$$\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial e}\right) = 0 \qquad \text{en } \{u_0 > 0\},$$

y además por (4.2.16), (4.2.17) y (4.2.18)

$$\frac{\partial u_0}{\partial e} \ge -\lambda \ \text{ en } \ B_1(-e_n), \qquad \frac{\partial u_0}{\partial e}(-e_n) = -\lambda$$

lo que implica por el principio del máximo que

$$\frac{\partial u_0}{\partial e}(x) = -\lambda \qquad \text{y} \qquad u_0(x) = -\lambda x \cdot e + \alpha \ \text{ en } \ B_1(-e_n).$$

Como $u_0(0) = 0$ y $u_0 > 0$ en $B_1(-e_n)$, tendremos que $\alpha = 0$ y $e = e_n$, con lo cual por continuación analítica resultará

$$u_0(x) = -\lambda x_n \text{ en } \{x_n \leq 0\}.$$

Recordando que $0 \in \partial\{u_0 > 0\}$ y que u_0 satisface (A.2.11) se observa que u_0 está en las hipótesis del teorema A.1.1. Entonces $u_0 \equiv 0$ en $\{x_n > 0\}$, lo que completa la demostración. □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.2.1.

Fijemos $x_1 \in \partial_{\text{red}}\{u > 0\}$ tal que x_1 satisfaga (4.1.38). Dado $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$, sea

$$\lambda(x_0) = \limsup_{\substack{x \to x_0 \\ u(x) > 0}} |\nabla u(x)|,$$

y apliquemos el lema 4.2.3 a x_0, construyendo de este modo sucesiones (d_k), (y_k) y un vector unitario $v(x_0)$. Entonces, por el lema 4.2.3 y por elección de x_1, será posible aplicar el lema 4.2.2 a x_0 y x_1 si tomamos

$$\begin{aligned} &\rho_k := d_k, \\ &\lambda_0 := \lambda(x_0), \quad x_{0k} := y_k, \quad \nu_0 := v(x_0), \\ &\lambda_1 := q_u(x_1), \quad x_{1k} := x_1, \quad \nu_1 := \nu_u(x_1), \end{aligned}$$

con lo cual $\lambda(x_0) = q_u(x_1)$.

Llamemos

$$\lambda_u := q_u(x_1),$$

y notando que x_0 era un punto arbitrario de $\Omega \cap \partial\{u > 0\}$, se tiene que (4.2.1) es válido. Como, por otra parte, x_1 era cualquier punto de $\partial_{\text{red}}\{u > 0\}$ satisfaciendo (4.1.38), tenemos por el teorema 4.1.12 que

$$q_u(x) = \lambda_u \quad \text{para } \mathcal{H}^{n-1}\text{-casi todo } x \text{ en } \partial_{\text{red}}\{u > 0\},$$

y finalmente de la aplicación del lema 4.1.13 se obtiene (4.2.2). □

4.2.4. Lema. *Sea u una solución de P_ε^c.*

Si B es una bola en $\{u=0\}$ tocando $\Omega \cap \partial\{u>0\}$ en x_0, entonces

$$\limsup_{\substack{x\to x_0\\ u(x)>0}} \frac{u(x)}{d(x,B)} = \lambda_u \tag{4.2.19}$$

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $l = l(x_0)$ al lado izquierdo de (4.2.19). Entonces existe una sucesión $z_k \to x_0$, con $u(z_k) > 0$, $d_k = d(z_k, B)$ y $\frac{u(z_k)}{d_k} \to l$.

Tomemos puntos $y_k \in \partial B$ tales que $d_k = |y_k - z_k|$ y consideremos la sucesión "blow up" respecto de $B_{d_k}(y_k)$. Elijamos una subsucesión con límite u_0 y tal que exista $v := \lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{y_k - z_k}{d_k}$.

Se tiene por construcción que

$$u_0(-v) = l, \tag{4.2.20}$$

$$u_0(x) = 0 \quad \text{si } x\cdot v \geq 0, \tag{4.2.21}$$

$$u_0(x) \leq -lx\cdot v \quad \text{si } x\cdot v \leq 0, \tag{4.2.22}$$

con lo cual, recordando (A.2.8), obtenemos que $0 < l < +\infty$. Veamos que

$$u_0(x) = l\max(-x\cdot v, 0). \tag{4.2.23}$$

Como $u_0(x) + lx\cdot v$ es armónica en $\{u_0 > 0\}$, por (4.2.20), (4.2.22) y el principio fuerte del máximo tendremos que

$$u_0(x) = -lx\cdot v \qquad \text{en un entorno de } -v.$$

En consecuencia, por extensión analítica tendremos que (4.2.23) es válido si $x\cdot v \leq 0$, y por (4.2.21) también lo es cuando $x \cdot v \geq 0$.

Para finalizar, observemos que podemos proceder como en la demostración del teorema 4.2.1, tomando para nuestro $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u>0\}$ la sucesión "blow up" recién construída, y fijando un punto $x_1 \in \partial_{\text{red}}\{u>0\}$ que satisfaga (4.1.38). De este modo resultará $l = q_u(x_1) = \lambda_u$, que es lo que queríamos demostrar. □

4.2.5. Lema. *Existen constantes positivas $c_{\min}$, $C_{\max}$ tales que si u es solución de P_ε^c, entonces*

$$c_{\min} \leq \lambda_u \leq C_{\max}$$

donde $c_{\min}$ *,* $C_{\max}$ *dependen sólo de* $n, \varepsilon, \delta, \mu$ *;* δ *y* μ *dados en* (3.2.7) *y* (3.2.6) *respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ y $0 < R < 1$ tal que $B_{2R}(x_0) \subset\subset \Omega$. Tomemos $D := B_R(x_0)$. Entonces por el teorema 4.1.6, existen constantes positivas c^*, C^* tales que para toda bola $B_r(x) \subset D$ con r chico y $x \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$

$$c^* r^{n-1} \leq \mathcal{H}^{n-1}(B_r(x) \cap \partial\{u > 0\}) \leq C^* r^{n-1}$$

y además

$$c^* \leq q_u \leq C^* \qquad \mathcal{H}^{n-1}\text{-c.t.p. en } D \cap \partial\{u > 0\},$$

donde, por las observaciones 4.1.5 y 4.1.8, las constantes c^* y C^* dependen sólo de n, ε, δ y μ. En particular tendremos para r chico

$$\mathcal{H}^{n-1}(B_r(x_0) \cap \partial\{u > 0\}) \geq c^* r^{n-1} > 0, \tag{4.2.24}$$

$$c^* \leq q_u(x) \leq C^* \quad \text{para } \mathcal{H}^{n-1}\text{-casi todo } x \in B_r(x_0) \cap \partial\{u > 0\}, \tag{4.2.25}$$

y por el teorema 4.2.1

$$q_u(x) = \lambda_u \quad \text{para } \mathcal{H}^{n-1}\text{-casi todo } x \in B_r(x_0) \cap \partial\{u > 0\}. \tag{4.2.26}$$

Entonces el resultado se deduce de (4.2.24), (4.2.25) y (4.2.26) tomando $c_{\min} = c^*$ y $C_{\max} = C^*$. □

4.2.6. Teorema. *Existen constantes positivas* C *y* r_0 *tales que si* u *es solución de* P_ε^c*,* $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ *y* $r \leq r_0$

$$\sup_{x \in B_r(x_0)} |\nabla u(x)| \leq \lambda_u(1 + Cr)$$

donde $r_0 = r_0(\delta)$ *y* $C = C(n, \varepsilon, \delta, \mu)$*,* δ *y* μ *dados en* (3.2.7) *y* (3.2.6) *respectivamente.*

DEMOSTRACIÓN. Dada u una solución de P_ε^c, se tiene que

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = 0 \quad \text{en } \{u > 0\} \qquad i = 1, \ldots, n$$

y por lo tanto

$$|\nabla u(x)| \leq \frac{1}{|\partial B(x)|} \int_{\partial B(x)} |\nabla u| \, d\mathcal{H}^{n-1},$$

para bolas $B(x) \subset\subset \{u > 0\}$. Entonces $|\nabla u|$ es subarmónica en $\{u > 0\}$.

Dado $k \in I\!N$, definamos

$$U_k := (|\nabla u| - \lambda_u - 1/k)^+.$$

Como $\Omega \cap \partial\{u > 0\}$ es compacto (lema 3.2.16), de (4.2.1) se deduce que

$$U_k = 0 \quad \text{en un entorno de } \Omega \cap \partial\{u > 0\} \tag{4.2.27}$$

con lo cual

$$U_k \quad \text{es continua y subarmónica en } \Omega. \tag{4.2.28}$$

Sea $r_0 = \delta/3$ con δ dado en (3.2.7), y tomemos $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$. Entonces por el lema 3.2.18 existe una constante $L = L(n, \varepsilon, \mu) > 0$ tal que

$$U_k \leq L \quad \text{en } B_{r_0} \cap \{u > 0\}. \tag{4.2.29}$$

Si consideramos la función armónica en $B_{r_0} \cap \{u > 0\}$ dada por

$$v(x) = u(x) + \frac{|x - x_0|^2}{n},$$

tendremos por (4.2.27) y (4.2.29), que si $C = \frac{nL}{r_0^2}$

$$U_k \leq Cv \quad \text{en } \partial(B_{r_0}(x_0) \cap \{u > 0\}). \tag{4.2.30}$$

Por lo tanto de (4.2.28), (4.2.30) y el principio del máximo obtenemos que

$$U_k \leq Cv \quad \text{en } B_{r_0}(x_0) \cap \{u > 0\}$$

y haciendo $k \to \infty$,

$$|\nabla u| \leq \lambda_u + Cv \quad \text{en } B_{r_0}(x_0) \cap \{u > 0\}. \tag{4.2.31}$$

Tomemos ahora $x \in B_r(x_0) \cap \{u > 0\}$, con $r \leq r_0$. Por el lema 3.2.13 tendremos que

$$v(x) \leq C|x - x_0| + \frac{r_0}{n}|x - x_0| \leq Cr, \tag{4.2.32}$$

donde $C = C(n, \varepsilon, \delta, \mu)$. Finalmente, de (4.2.31), (4.2.32) y del teorema 4.2.5 resulta

$$|\nabla u(x)| \leq \lambda_u(1 + Cr) \quad \text{si } x \in B_r(x_0) \cap \{u > 0\}$$

donde $C = C(n, \varepsilon, \delta, \mu)$, lo que concluye la demostración. □

CAPITULO 5: REGULARIDAD DE LA FRONTERA LIBRE.

En este capítulo estudiamos la regularidad de la frontera libre para soluciones de $P_\varepsilon^c(H)$. En 5.1 se analiza el comportamiento de la solución cerca de puntos "flat" de la frontera libre. En 5.2 obtenemos analiticidad de la frontera libre cerca de sus puntos "flat". Probamos que los puntos regulares de la frontera libre son un subconjunto abierto denso de la frontera libre, y que el resto tiene medida $\mathcal{H}^{n-1}$ cero. Mostramos además que para $n=2$ no existen puntos singulares, es decir, la frontera libre es localmente analítica.

Las hipótesis que se asumen en este capítulo son las mismas que en la sección 3.2.

5.1. Puntos "flat" de la frontera libre.

5.1.1. Definición. Sean $0<\sigma_+,\ \sigma_-\le 1$ y $\tau>0$. Diremos que u está en la clase $F(\sigma_+,\sigma_-;\tau)$ en $B_\rho(0)$ si u es una solución de P_ε^c, $B_\rho(0)\subset\Omega$, $0\in\partial\{u>0\}$ y

$$\begin{aligned} &u(x)=0 && \text{si } x_n\ge\sigma_+\rho,\\ &u(x)\ge-\lambda_u(x_n+\sigma_-\rho) && \text{si } x_n\le-\sigma_-\rho,\\ &|\nabla u|\le\lambda_u(1+\tau) && \text{en } B_\rho, \end{aligned}$$

donde λ_u es la constante del teorema 4.2.1.

Si el origen es reemplazado por x_0 y la dirección e_n es reemplazada por un vector unitario ν, diremos que u está en la clase $F(\sigma_+,\sigma_-;\tau)$ en $B_\rho(x_0)$ en dirección ν.

5.1.2. Observación. Sea u una solución de P_ε^c, y sea λ_u dado por el teorema 4.2.1. Entonces por el lema 4.2.5 existe una constante $c_{\min}$ tal que

$$0<c_{\min}\le\lambda_u, \tag{5.1.1}$$

donde $c_{\min}$ no depende de la solución de P_ε^c que elijamos (ver lema 4.2.5).

Si suponemos que $B_\rho(0)\subset\Omega$ y definimos para $x\in B_1(0)$

$$v(x):=\frac{u(\rho x)}{\lambda_u\rho},$$

tendremos que

$$v \in C^{0,1}\left(B_1(0)\right)$$

$$(5.1.2) \qquad v \geq 0, \quad \Delta v \geq \frac{-2\rho}{\lambda_u} \quad \text{en } B_1(0)$$

$$(5.1.3) \qquad \Delta v = \frac{-2\rho}{\lambda_u} \quad \text{en } \{v > 0\}.$$

Por otra parte $\{v > 0\}$ tiene perímetro finito en B_1 y del teorema 4.1.6, lema 4.1.13 y (4.2.2) deducimos que si $\eta \in C_0^\infty\left(B_1(0)\right)$ entonces

$$(5.1.4) \qquad -\int_{\{v>0\}} \nabla v \nabla \eta + \frac{2\rho}{\lambda_u}\int_{\{v>0\}} \eta = \int_{\partial_{red}\{v>0\}} \eta \, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Además se cumple que $u \in F(\sigma_+, \sigma_-; \tau)$ en $B_\rho(0)$ si y sólo si v satisface

$$(5.1.5) \qquad 0 \in \partial\{v > 0\}$$

$$(5.1.6) \qquad v(x) = 0 \quad \text{si } x_n \geq \sigma_+$$

$$(5.1.7) \qquad v(x) \geq -\left(x_n + \sigma_-\right) \quad \text{si } x_n \leq -\sigma_-$$

$$(5.1.8) \qquad |\nabla v| \leq (1 + \tau) \quad \text{en } B_1(0).$$

5.1.3. Teorema. *Existen constantes positivas $C = C(n)$ y $\sigma_0 = \sigma_0(n)$ tales que si $u \in F(\sigma, 1; \sigma)$ en B_ρ con $\sigma \leq \sigma_0$ y $\rho \leq c_{\min}\,\sigma$, entonces $u \in F(2\sigma, C\sigma; \sigma)$ en $B_{\rho/2}$, $c_{\min}$ dado en (5.1.1).*

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $\lambda = \lambda_u$ y definamos $v(x) := \dfrac{u(\rho x)}{\lambda \rho}$ para $x \in B_1(0)$. Sea

$$\eta(y) := \begin{cases} \exp\left(\dfrac{-9|y|^2}{1 - 9|y|^2}\right) & \text{para } |y| < 1/3 \\ 0 & \text{para } |y| \geq 1/3 \end{cases}$$

y tomemos $s \geq 0$ maximal tal que

$$B_1 \cap \{v > 0\} \subset D = D_{s,\sigma} := \{x \in B_1 / x_n < \sigma - s\eta(x')\}$$

donde $x = (x', x_n)$. Entonces, existe un punto $z \in B_{1/2} \cap \partial D \cap \partial\{v > 0\}$. Además $s \leq \sigma$ pues $0 \in \partial\{v > 0\}$.

Consideramos la función w_1 tal que

$$\begin{aligned}
\Delta w_1 &= \frac{-2\rho}{\lambda} \quad \text{en } D,\\
w_1 &= 0 \quad \text{en } \partial D \cap B_1,\\
w_1 &= (1+2\sigma)(\sigma - x_n) \quad \text{en } \partial D \setminus B_1.
\end{aligned}$$

Observemos primero que como w_1 satisface

$$\begin{aligned}
\Delta(w_1 - \sigma + x_n) &= -\frac{2\rho}{\lambda} \quad \text{en } D,\\
w_1 - \sigma + x_n &= -s\eta(x') \quad \text{en } \partial D \cap B_1,\\
w_1 - \sigma + x_n &= 2\sigma(\sigma - x_n) \quad \text{en } \partial D \setminus B_1,
\end{aligned}$$

tendremos por estimaciones a priori (ver [**3**] p. 98)

$$\partial_{-\nu} w_1(z) - 1 \leq \sup_{B_{1/2} \cap D} |\nabla(w_1 - \sigma + x_n)| \leq c(n)\rho/\lambda + c(n)\sigma,$$

y si tomamos $\rho \leq c_{\min}\sigma$, de (5.1.1) concluimos que

$$\partial_{-\nu} w_1(z) \leq 1 + c(n)\sigma. \tag{5.1.9}$$

Por otra parte, de (5.1.2) tendremos $\Delta(v - w_1) \geq 0$ en D, y por construcción de D y (5.1.8) será $v - w_1 \leq 0$ en ∂D, con lo cual, por el principio del máximo

$$v \leq w_1 \quad \text{en } D. \tag{5.1.10}$$

Fijemos ahora $\xi \in \partial B_{3/4}$ con $\xi_n < -1/2$ y sea w_2 (dependiendo de ξ) la función armónica en $D \setminus \overline{B}_{1/10}(\xi)$ con

$$\begin{aligned}
w_2 &= 0 \quad \text{en } \partial D\\
w_2 &= -x_n \quad \text{en } \partial B_{1/10}(\xi).
\end{aligned}$$

Entonces, si σ es chico (dependiendo de n), por el principio de Hopf ([**3**] p. 34)

$$\partial_{-\nu} w_2(z) \geq c(n) > 0. \tag{5.1.11}$$

Si suponemos que $v(x) \leq w_1(x) + d\sigma x_n$ en $B_{1/10}(\xi)$ para una constante $d > 0$, tendremos

$$\Delta(v - w_1 + d\sigma w_2) \geq 0 \quad \text{en } D \setminus \overline{B_{1/10}}(\xi)$$
$$v - w_1 + d\sigma w_2 \leq 0 \text{ en } \partial\left(D \setminus \overline{B_{1/10}}(\xi)\right)$$

y entonces $v \leq w_1 - d\sigma w_2$ en $D \setminus B_{1/10}(\xi)$, con lo cual por el lema 4.2.4 y por (5.1.9) y (5.1.11)

$$1 \leq \limsup_{x \to z} \frac{v(x)}{d(x, \partial D)} \leq \partial_{-\nu} w_1(z) - d\sigma \partial_{-\nu} w_2(z) \leq 1 + C(n)\sigma - d\sigma c(n),$$

lo que es un absurdo para d grande. Por lo tanto

$$v(x_\xi) \geq w_1(x_\xi) + C\sigma x_{\xi_n}, \tag{5.1.12}$$

para algún $x_\xi \in B_{1/10}(\xi)$ y $C = C(n)$.

Usando esto último, (5.1.12) y el hecho que $\xi_n < -\frac{1}{2}$ y

$$w_1(x) \geq -(1 + \sigma)x_n, \tag{5.1.13}$$

obtenemos para $x \in B_{1/5}(\xi)$

$$v(x) \geq v(x_\xi) - (1 + \sigma)\frac{3}{10} \geq -(1 + \sigma)x_{\xi_n} + C\sigma x_{\xi_n} - \frac{3}{10}(1 + \sigma) \geq \frac{1}{10} - C\sigma > 0,$$

si $\sigma \leq \sigma_0(n)$. Entonces por (5.1.13) $w_1 - v$ es armónica en $B_{1/5}(\xi)$, y por (5.1.10) podemos aplicar la desigualdad de Harnack con lo cual, recordando (5.1.12)

$$(w_1 - v)(\xi) \leq C(n)(w_1 - v)(x_\xi) \leq C(n)\sigma$$

y entonces por (5.1.13)

$$v(\xi) \geq -\xi_n - C\sigma.$$

Si usamos (5.1.8) otra vez, obtenemos integrando a lo largo de líneas verticales para $\alpha > 0$

$$v(\xi + \alpha e_n) \geq v(\xi) - (1 + \sigma)\alpha \geq -(\xi_n + \alpha) - C\sigma,$$

lo cual, si recordamos la definición de v, nos dice que $u \in F(2\sigma, C\sigma; \sigma)$ en $B_{\rho/2}$. □

Notaremos puntos en $\mathbb{R}^n$ como (y, h), con $y \in \mathbb{R}^{n-1}$, y bolas en $\mathbb{R}^{n-1}$ como B'_ρ, o $B'_\rho(y)$.

5.1.4. Lema. *Sea u_k una sucesión satisfaciendo*

$$(5.1.14)\qquad \begin{array}{l} u_k \text{ es de clase } F(\sigma_k, \sigma_k; \tau_k) \text{ en } B_{\rho_k}(0) \\ \text{con } \sigma_k \to 0, \ \dfrac{\tau_k}{\sigma_k^2} \to 0 \text{ y } \rho_k = O(\tau_k), \end{array}$$

sea $\lambda_k := \lambda_{u_k}$ y para $x \in B_1(0)$ definamos

$$(5.1.15)\qquad v_k(x) := \frac{u_k(\rho_k x)}{\lambda_k \rho_k}.$$

Dado $y \in B_1'$ definamos

$$f_k^+(y) := \sup\{h/(y, \sigma_k h) \in B_1 \cap \partial\{v_k > 0\}\},$$

$$f_k^-(y) := \inf\{h/(y, \sigma_k h) \in B_1 \cap \partial\{v_k > 0\}\}.$$

Entonces para una subsucesión,

$$(5.1.16)\qquad f(y) := \limsup_{\substack{z \to y \\ k \to \infty}} f_k^+(z) = \liminf_{\substack{z \to y \\ k \to \infty}} f_k^-(z),$$

para todo $y \in B_1'$. Además

$$f \text{ es continua},$$

$$(5.1.17)\qquad f_k^+ \to f,\ f_k^- \to f \text{ uniformemente en cada compacto de } B_1',$$

$$f(0) = 0 \quad \text{y} \quad |f(y)| \leq 1 \quad \text{si} \quad y \in B_1'.$$

Demostración. Definamos

$$D_k := \{(y, h)/(y, \sigma_k h) \in B_1 \cap \{v_k > 0\}\}.$$

Podemos elegir una subsucesión de las v_k de modo tal que los conjuntos $\overline{D}_k$ resulten convergentes en distancia de Hausdorff, y para esa subsucesión definamos f como en (5.1.16). Entonces, dado $y_0 \in B_1'$, existen puntos y_k para todo k en esa subsucesión con

$$(5.1.18)\qquad y_k \to y_0, \qquad f_k^+(y_k) \to f(y_0).$$

Como f resulta semicontinua superiormente, dado $\delta > 0$, existe $\alpha > 0$ tal que para k grande

$$\left(\overline{B}'_\alpha(y_k) \times \left[f_k^+(y_k) + \delta, +\infty\right)\right) \cap \overline{D}_k = \emptyset$$

y por lo tanto

$$\left(\overline{B}'_\alpha(y_k) \times \left[\sigma_k\, f_k^+(y_k) + \sigma_k\delta, +\infty\right)\right) \cap B_1 \cap \{v_k > 0\} = \emptyset. \tag{5.1.19}$$

Como $(\rho_k y_k, \rho_k\sigma_k f^+(y_k))$ está en $\partial\{u_k > 0\}$, de (5.1.19) y (5.1.14) deducimos que

$$u_k \in F(\sigma_k\delta/\alpha, 1; \tau_k) \text{ en } B_\alpha\rho_k\left((\rho_k y_k, \rho_k\sigma_k f_k^+(y_k))\right).$$

Además como $\sigma_k \to 0$, $\tau_k = o(\sigma_k)$ y $\rho_k = o(\sigma_k)$, podemos aplicar el teorema 5.1.3 para k grande, obteniendo que

$$u_k \in F(2\sigma_k\delta/\alpha, C\sigma_k\delta/\alpha; \tau_k) \text{ en } B_{\alpha\rho_k/2}\left((\rho_k y_k, \rho_k\sigma_k f^+(y_k))\right),$$

lo que implica que para k grande el conjunto

$$\left\{(y,h) \in B_1 / |y - y_k| < \alpha/4,\ h < \sigma_k\left(f_k^+(y_k) - C\delta\right)\right\}$$

está contenido en $\{v_k > 0\}$. Por lo tanto

$$f_k^-(y) \geq f_k^+(y_k) - C\delta \quad \text{si } y \in B'_{\alpha/4}(y_k),$$

y recordando (5.1.18), obtenemos para k grande

$$f_k^-(y) \geq f(y_0) - 2C\delta \quad \text{si } y \in B'_{\alpha/8}(y_0) \tag{5.1.20}$$

con lo cual $\liminf\limits_{\substack{y \to y_0 \\ k \to \infty}} f_k^-(y) \geq f(y_0)$, lo que prueba (5.1.16).

También de (5.1.20) deducimos que f es semicontinua inferiormente y por lo tanto continua. Esto último y el hecho de que los $\overline{D}_k$ converjan en distancia de Hausdorff, permite que las estimaciones del lema resulten uniformes en cada compacto de B'_1, lo que completa la demostración. □

5.1.5. Lema. *Sea f la función definida en el lema 5.1.4. Entonces f es subarmónica.*

DEMOSTRACIÓN. Si así no fuera, existiría una bola $B'_\rho(y_0) \subset\subset B'_1$ y una función armónica g en un entorno de esa bola tal que

$$(5.1.21) \qquad g > f \quad \text{en } \partial B'_\rho(y_0) \qquad \text{y} \qquad f(y_0) > g(y_0).$$

Notemos

$$Z := (B'_\rho(y_0) \times I\!R) \cap B_1(0), \qquad Z^+(\phi) := \{(y,h) \in Z \;/\; h > \phi(y)\},$$
$$Z^-(\phi) := \{(y,h) \in Z \;/\; h < \phi(y)\}, \quad Z^\circ(\phi) := \{(y,h) \in Z \;/\; h = \phi(y)\},$$

y sea $d_\delta(Z^+(\sigma_k g))$ una función test que converge cuando $\delta \to 0$ a la función característica de $Z^+(\sigma_k g)$ (por ejemplo $d_\delta(A)(x) = \min\{(1/\delta) \text{ dist } (x, I\!R^n \setminus A), 1\}$).

Por (5.1.4) tenemos

$$-\int_{\{v_k>0\}} \nabla v_k \nabla d_\delta(Z^+(\sigma_k g)) + \frac{2\rho_k}{\lambda_k}\int_{\{v_k>0\}} d_\delta(Z^+(\sigma_k g)) =$$
$$= \int_{\partial_{\text{red}}\{v_k>0\}} d_\delta(Z^+(\sigma_k g))\, d\mathcal{H}^{n-1}.$$

Tomando $\delta \to 0$ (y asumiendo que $Z^\circ(\sigma_k g) \cap \partial\{v_k > 0\}$ tiene medida $\mathcal{H}^{n-1}$ nula, sino reemplazamos g por $g + c$ para algún c pequeño), obtenemos

$$\int_{\partial(Z^+(\sigma_k g))\cap\{v_k>0\}} \nabla v_k \cdot \nu \, d\mathcal{H}^{n-1} + \frac{2\rho_k}{\lambda_k}|Z^+(\sigma_k g) \cap \{v_k > 0\}| =$$
$$= \mathcal{H}^{n-1}(Z^+(\sigma_k g) \cap \partial_{\text{red}}\{v_k > 0\}).$$

De (5.1.17) y (5.1.21) deducimos que para k grande

$$\partial(Z^+(\sigma_k g)) \cap \{v_k > 0\} = Z^\circ(\sigma_k g) \cap \{v_k > 0\},$$

y usando además que por (5.1.8), $|\nabla v_k| \le 1 + \tau_k$, obtenemos

$$(5.1.22) \quad \mathcal{H}^{n-1}(Z^+(\sigma_k g) \cap \partial_{\text{red}}\{v_k > 0\}) \le \frac{C\rho_k}{\lambda_k} + (1+\tau_k)\mathcal{H}^{n-1}(Z^\circ(\sigma_k g) \cap \{v_k > 0\}).$$

Consideremos los conjuntos

$$E_k := \{v_k > 0\} \cup Z^-(\sigma_k g)$$

que tienen perímetro finito en Z con

(5.1.23)

$$\mathcal{H}^{n-1}(Z \cap \partial_{\text{red}} E_k) \le \mathcal{H}^{n-1}(Z^+(\sigma_k g) \cap \partial_{\text{red}}\{v_k > 0\}) + \mathcal{H}^{n-1}(Z^\circ(\sigma_k g) \cap \{v_k = 0\}).$$

Si probamos la estimación

$$\mathcal{H}^{n-1}(Z \cap \partial_{\text{red}} E_k) \geq \mathcal{H}^{n-1}(Z^\circ(\sigma_k g)) + \widetilde{C}\sigma_k^2, \tag{5.1.24}$$

para k grande y $\widetilde{C} > 0$, obtendremos de (5.1.22), (5.1.23) y (5.1.24)

$$\widetilde{C}\sigma_k^2 + \mathcal{H}^{n-1}(Z^\circ(\sigma_k g)) \leq \frac{C\rho_k}{\lambda_k} + \mathcal{H}^{n-1}(Z^\circ(\sigma_k g)) + \tau_k \mathcal{H}^{n-1}(Z^\circ(\sigma_k g) \cap \{v_k > 0\})$$

y como $\mathcal{H}^{n-1}(Z^\circ(\sigma_k g) \cap \{v_k > 0\}) \leq C$ para k grande, tendremos

$$\widetilde{C} \leq \frac{C\rho_k}{\lambda_k \sigma_k^2} + C\frac{\tau_k}{\sigma_k^2},$$

lo que, por (5.1.1) y (5.1.14) es un absurdo.

Sólo resta probar (5.1.24), cuya demostración se omite pues se demuestra como en [**2**], p. 136. □

Notaremos $B_\rho^- := B_\rho(0) \cap \{h < 0\}$.

5.1.6. Lema. *Sea w una función satisfaciendo:*

$$\Delta w = 0 \qquad en\ B_1^-$$

$$w(y,0) = g(y)$$

en el sentido que $w(y,h)$ como función de y converge a g en L^1 cuando $h \uparrow 0$,

$$g \text{ es subarmónica y continua en } B_1', \quad g(0) = 0,$$

$$w(0,h) \leq C|h|,$$

$$w \geq -C.$$

Entonces

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{r^2} \left(\fint_{\partial B_r'(0)} g(y)\, d\mathcal{H}_y^{n-2} \right) dr \leq C_0$$

donde $C_0 = C_0(C, n)$.

Demostración. Ver lema 5.5 en [**9**]. □

5.1.7. Lema. *Sean*

$$w_k(y,h) := \frac{v_k(y,h)+h}{\sigma_k},$$

donde v_k *son las funciones definidas en* (5.1.15). *Entonces, existe* $C = C(n)$ *tal que para* k *grande*

$$|w_k| \le C \qquad en\ B_1^-, \tag{5.1.25}$$

y para una subsucesión

$$w := \lim_{k\to\infty} w_k \qquad existe\ para\ todo\ x \in B_1^-, \tag{5.1.26}$$

donde la convergencia es uniforme en cada compacto de B_1^- . *Además* w *satisface*

$$|w| \le C, \tag{5.1.27}$$

$$\Delta w = 0 \quad \text{en } B_1^-, \tag{5.1.28}$$

$$w(y,0) = f(y) \tag{5.1.29}$$

en el sentido que $\lim_{h\uparrow 0} w(y,h) = f(y)$, f *dada en* (5.1.16),

$$w(y,h) - w(y,0) \le 0 \qquad para\ (y,h) \in B_1^-. \tag{5.1.30}$$

DEMOSTRACIÓN. Comencemos observando que (5.1.25) se obtiene de (5.1.14) y las definiciones de w_k y v_k. Además, recordando (5.1.15) tenemos

$$\Delta w_k = -\frac{2\rho_k}{\lambda_k\sigma_k} \qquad \text{en } B_1^- \cap \{h \le -\sigma_k\}, \tag{5.1.31}$$

y por lo tanto

$$\tilde{w}_k(x) := w_k(x) + \frac{\rho_k}{\lambda_k\sigma_k}\frac{|x|^2}{n}$$

son armónicas en $B_1^- \cap \{h \le -\sigma_k\}$. Como $\frac{\rho_k}{\lambda_k\sigma_k} \to 0$, de (5.1.25) y del teorema 2.10 de [3], se deduce que $|\nabla \tilde{w}_k|$ están uniformemente acotados en cada compacto de B_1^- , y por lo tanto existe una función w tal que para una subsucesión, $\tilde{w}_k \to w$ uniformemente en cada compacto de B_1^- . Esto último prueba (5.1.28), y usando nuevamente que $\frac{\rho_k}{\lambda_k\sigma_k} \to 0$ tenemos (5.1.26) y (5.1.27).

Por otra parte, como

$$-\frac{\partial w_k}{\partial h} = -\frac{1}{\sigma_k}\left(\frac{\partial v_k}{\partial h}+1\right) \le \frac{|\nabla v_k|-1}{\sigma_k} \le \frac{\tau_k}{\sigma_k}, \tag{5.1.32}$$

tenemos que si $(y,h)\in B_1^-$ y $h<h'<0$

$$w_k(y,h)-w_k(y,h')\le |h-h'|\frac{\tau_k}{\sigma_k},$$

de donde resulta, haciendo $k\to\infty$

$$w(y,h)-w(y,h')\le 0. \tag{5.1.33}$$

Entonces, una vez probado (5.1.29), podremos tomar límite para $h'\to 0$ en (5.1.33), y de ese modo (5.1.30) se cumple. Sólo resta probar (5.1.29).

Primero probaremos que fijadas $\alpha>0$ chica y $K>0$ grande

$$w_k(y,h\sigma_k)\to f(y) \qquad \text{uniformemente en } D, \tag{5.1.34}$$

donde $D:=B'_{1-\alpha}\times[-K,-1]$. Por el lema 5.1.4, basta ver que

$$w_k(y,h\sigma_k)-f_k^+(y)\to 0 \qquad \text{uniformemente en } D. \tag{5.1.35}$$

De (5.1.32) y por definición de f_k^+, para $(y,h)\in D$ tendremos

$$\begin{aligned} w_k(y,h\sigma_k)-f_k^+(y) &\le w_k(y,\sigma_k f_k^+(y))-f_k^+(y)+(f_k^+(y)-h)\tau_k \\ &=(f_k^+(y)-h)\tau_k\le(1+K)\tau_k. \end{aligned} \tag{5.1.36}$$

Fijemos $R>0$ grande y tomemos una sucesión $(y_k,h_k)\in D$. Si definimos

$$\tilde\delta_k:=\frac{1}{R}\sup_{y\in B'_{R\sigma_k}(y_k)}(f_k^+(y)-f_k^+(y_k)),$$

tenemos por el lema 5.1.4 que $\tilde\delta_k\to 0$ (independientemente de la elección de los y_k). Consideremos v_k en $B_{R\sigma_k}(x_k)$, donde

$$x_k:=(y_k,\sigma_k f_k^+(y_k)),$$

entonces por definición de f_k^+ y $\tilde\delta_k$

$$x_k\in\partial\{v_k>0\}$$

$$v_k(y,h)=0 \quad \text{si } (y,h)\in B_{R\sigma_k}(x_k), \qquad h-\sigma_k f_k^+(y_k)>\tilde\delta_k R\sigma_k,$$

con lo cual

$$u_k \in F(\tilde{\delta}_k, 1; \tau_k) \qquad \text{en } B_{\rho_k R\sigma_k}(\rho_k x_k).$$

Como $\sigma_k \to 0$, $\frac{\tau_k}{\sigma_k^2} \to 0$, $\rho_k = O(\tau_k)$, podemos aplicar el teorema 5.1.3 para k grande y si $\delta_k := \max(\tilde{\delta}_k, \tau_k)$ tendremos

$$u_k \in F(2\delta_k, C\delta_k; \tau_k) \qquad \text{en } B_{\rho_k \frac{R}{2}\sigma_k}(\rho_k x_k).$$

En consecuencia, si $|h| < R/2$

$$v_k(x_k + h\sigma_k e_n) \geq -(h\sigma_k + C\delta_k \frac{R}{2}\sigma_k),$$

y entonces

$$w_k(x_k + h\sigma_k e_n) - f_k^+(y_k) = \frac{v_k(x_k + h\sigma_k e_n) + h\sigma_k}{\sigma_k} \geq -\frac{CR\delta_k}{2}. \tag{5.1.37}$$

Podemos elegir ahora R grande (dependiendo sólo de K) de modo que $|h_k - f_k^+(y_k)| \leq R/2$, y por (5.1.36) y (5.1.35)

$$|w_k(y_k, h_k\sigma_k) - f_k^+(y_k)| \leq a_k,$$

con $a_k \to 0$, a_k independiente de la elección de $(y_k, h_k) \in D$, lo que prueba (5.1.35).

Para ver (5.1.29), tomemos γ, $\alpha > 0$ chicos y $K > 0$ grande, elijamos g_γ una función de clase C^3 tal que

$$f - 2\gamma \leq g_\gamma \leq f - \gamma \qquad \text{en } B_1' \tag{5.1.38}$$

y sea u_γ la solución de

$$\begin{aligned} \Delta u_\gamma &= 1 && \text{en } B_{1-\alpha}^-, \\ u_\gamma &= g_\gamma && \text{en } \partial B_{1-\alpha}^- \cap \{h = 0\}, \\ u_\gamma &= \inf_{B_1^-} w && \text{en } \partial B_{1-\alpha}^- \cap \{h < 0\}. \end{aligned}$$

Por (5.1.34) y (5.1.38)

$$w_k > u_\gamma \qquad \text{en } \partial(B_{1-\alpha}^- \cap \{h < K\sigma_k\})$$

para k grande (dependiendo de K, α, γ). Recordando (5.1.31) obtenemos

$$\Delta(u_\gamma - w_k) \geq 0 \qquad \text{en } \partial B_{1-\alpha}^- \cap \{h < K\sigma_k\}$$

para k grande y por el principio del máximo $u_\gamma \leq w_k$ en $\partial B_{1-\alpha}^- \cap \{h < -K\sigma_k\}$. Por lo tanto $w(y,h) \geq u_\gamma(y,h)$ en $B_{1-\alpha}^-$ y en consecuencia

$$\varliminf_{h\uparrow 0} w(y,h) \geq g_\gamma(y) \geq f(y) - 2\gamma \qquad \text{si } y \in B'_{1-\alpha}. \tag{5.1.39}$$

Trabajando en forma análoga con $\tilde{u}_\gamma$ la solución de

$$\begin{aligned} \Delta\tilde{u}_\gamma &= -1 && \text{en } B_{1-\alpha}^-, \\ \tilde{u}_\gamma &= \tilde{g}_\gamma && \text{en } \partial B_{1-\alpha}^- \cap \{h = 0\}, \\ \tilde{u}_\gamma &= \sup_{B_1^-} w && \text{en } \partial B_{1-\alpha}^- \cap \{h < 0\}, \end{aligned}$$

donde $f + \gamma \leq \tilde{g}_\gamma \leq f + 2\gamma$, obtenemos

$$\varlimsup_{h\uparrow 0} w(y,h) \leq f(y) + 2\gamma \qquad \text{si } y \in B'_{1-\alpha}. \tag{5.1.40}$$

Como γ y α son arbitrarios, de (5.1.39) y (5.1.40) deducimos (5.1.29). □

5.1.8. Lema. *Existe $C_1 = C_1(n)$ tal que para todo $y \in B'_{1/2}$ se cumple*

$$\int_0^{1/4} \frac{1}{r^2} \left(\fint_{\partial B'_r(y)} (f - f(y))\, d\mathcal{H}^{n-2} \right) dr \leq C_1(n),$$

donde f es la función dada en (5.1.16).

Demostración. Fijemos $\bar{y} \in B'_{1/2}(0)$ y sea

$$w^*(y,h) := w(\frac{1}{2}y + \bar{y}, \frac{h}{2}) - w(\bar{y}, 0), \qquad (y,h) \in B_1^-,$$

donde w es la función definida en (5.1.26). Entonces, si

$$g^*(y) := f\left(\frac{1}{2}y + \bar{y}\right) - f(\bar{y}),$$

tendremos por el lema 5.1.7

$$\begin{aligned} &\Delta w^* = 0 \qquad \text{en } B_1^-, \\ &\lim_{h\uparrow 0} w^*(y,h) = g^*(y), \\ &w^*(0,h) \leq 0, \\ &|w^*| \leq C, \quad C = C(n), \end{aligned}$$

y además por los lemas 5.1.4 y 5.1.5, g^* es subarmónica y continua en B_1' con $g^*(0) = 0$. En consecuencia, podemos aplicar el lema 5.1.6 y obtenemos

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{r^2} \left(\fint_{\partial B_r'(0)} g^*(y)\, d\mathcal{H}^{n-2}(y) \right) dr \leq C_0, \qquad C_0 = C_0(C,n),$$

y por definición de g^* resulta

$$\int_0^{1/4} \frac{1}{r^2} \left(\fint_{\partial B_r'(\bar{y})} (f - f(\bar{y}))\, d\mathcal{H}^{n-2} \right) dr \leq C_1(n),$$

que es lo que queríamos demostrar. □

5.1.9. Lema. *Sea g una función que satisface:*

g es subarmónica y continua en B_1'

$g(0) = 0, \qquad |g| \leq 1,$

existe $C_1 > 0$ tal que si $y \in B_{1/2}'$

$$\int_0^{1/4} \frac{1}{r^2} \left(\fint_{\partial B_r'(y)} (g - g(y))\, d\mathcal{H}^{n-2} \right) dr \leq C_1.$$

Entonces

1) g es lipschitz en $\overline{B}_{1/4}'$ con constante de lipschitz que depende de C_1 y n.

2) Existen una constante $C = C(n, C_1) > 0$, y dada $0 < \theta < 1$, una constante $c_\theta = c(\theta, n) > 0$, tales que podemos hallar una bola B_r' y un vector $l \in I\!R^{n-1}$ con

$$c_\theta \leq r \leq \theta, \quad |l| \leq C, \qquad y \qquad g(y) \leq l \cdot y + \frac{\theta}{2} r \quad para\ |y| \leq r.$$

DEMOSTRACIÓN. Ver lemas 7.7 y 7.8 en [2]. □

5.1.10. Lema. *Existen una constante $C = C(n) > 0$, y dada $0 < \theta < 1$, una constante $c_\theta = c(\theta, n) > 0$, tales que podemos hallar una bola B_r' y un vector $l \in I\!R^{n-1}$ con*

$$c_\theta \leq r \leq \theta, \quad |l| \leq C, \qquad y \qquad f(y) \leq l \cdot y + \frac{\theta}{2} r \quad para\ |y| \leq r, \tag{5.1.41}$$

f la función dada en (5.1.16).

DEMOSTRACIÓN. El resultado se obtiene observando que por los lemas 5.1.4, 5.1.5 y 5.1.8, estamos en las hipótesis del lema 5.1.9 con la constante C_1 dependiendo sólo de n. □

5.1.11. Lema. *Fijemos $C^* > 0$, $0 < \theta < 1$ y consideremos C, c_θ como en el lema* 5.1.10.

Entonces existe una constante $\sigma_\theta > 0$ tal que

$$u \in F(\sigma, \sigma; \tau) \qquad \text{en } B_\rho(x_0) \text{ en dirección } \nu$$

con $\sigma \leq \sigma_\theta$, $\tau \leq \tau_\theta \sigma^2$ y $C^* \rho \leq \tau$ implica

$$u \in F(\theta\sigma, 1; \tau) \quad \text{en } B_{\bar\rho}(x_0) \text{ en dirección } \bar\nu$$

para ciertos $\bar\rho$ y $\bar\nu$ con $c_\theta \rho \leq \bar\rho \leq \theta\rho$ y $|\bar\nu - \nu| \leq C\sigma$, donde $\sigma_\theta = \sigma(\theta, n, C^*, c_{\min})$, $c_{\min}$ como en (5.1.1).

DEMOSTRACIÓN. Si el lema no fuera cierto, existiría una sucesión u_k satisfaciendo

$$u_k \in F(\sigma_k, \sigma_k; \tau_k) \qquad \text{en } B_{\rho_k}(x_k) \text{ en dirección } \nu_k$$

con $\sigma_k \leq 1/k$, $\tau_k \leq \frac{1}{k}\sigma_k^2$ y $C^* \rho_k \leq \tau_k$, pero tal que la conclusión del lema no se cumple para ningún k.

Para simplificar, supondremos primero $x_k = 0$ y $\nu_k = e_n$ para todo k. Entonces la sucesión u_k satisface (5.1.14) y si definimos f como en (5.1.16) tendremos por el lema 5.1.10

$$f(y) \leq l \cdot y + \frac{\theta}{2} r \qquad \text{para } |y| \leq r,$$

con r, l como en (5.1.41). Por lo tanto del lema 5.1.4 obtenemos para k grande

$$f_k^+(y) \leq l \cdot y + \theta r \qquad \text{para } |y| \leq r$$

con lo cual por definición de f_k^+

$$u_k(\rho_k y, \rho_k h) = 0 \qquad \text{si } (y,h) \in B_r \qquad \text{con } h \geq \sigma_k l \cdot y + \theta \sigma_k r.$$

Pero esto dice que u_k es de clase $F(\bar{\sigma}_k, 1; \tau_k)$ en $B_{\bar{\rho}_k}$ en dirección $\bar{\nu}_k$ con

$$\bar{\rho}_k := \rho_k r, \qquad \bar{\sigma}_k := \frac{\theta \sigma_k}{\sqrt{1+|\sigma_k l|^2}}, \qquad \bar{\nu}_k := \frac{(-\sigma_k l, 1)}{\sqrt{1+|\sigma_k l|^2}}.$$

Como $\bar{\sigma}_k \leq \theta \sigma_k$, $c_\theta \rho_k \leq \bar{\rho}_k \leq \theta \rho_k$ y $|\bar{\nu}_k - e_n| \leq C\sigma_k$, se cumple la conclusión del lema para u_k con k grande, lo que es un absurdo.

Para el caso x_k y ν_k arbitrarios se procede en forma análoga, definiendo en el lema 5.1.4, $v_k(x) = \frac{u_k(x_k+\rho_k T_k x)}{\lambda_k \rho_k}$, T_k una rotación con $T_k e_n = \nu_k$.

Finalmente, observando que la demostración no cambia si las funciones de la sucesión u_k son soluciones de distintos problemas $P_{\varepsilon_k}^{c_k}(H_k)$, pero todas satisfaciendo (5.1.1) con la misma constante $c_{\min}$, concluímos el lema. □

5.1.12. Lema. *Dados $0 < \theta < 1$ y $C^* > 0$, existen constantes positivas σ_θ, c_θ y C tales que si*

$$u \in F(\sigma, 1; \tau) \qquad \text{en } B_\rho \text{ en dirección } \nu \tag{5.1.42}$$

con $\sigma \leq \sigma_\theta$, $\tau \leq \sigma_\theta \sigma^2$ y $C^* \rho \leq \tau$, entonces

$$u \in F(\theta\sigma, \theta\sigma; \theta^2\tau) \qquad \text{en } B_{\bar{\rho}} \text{ en dirección } \bar{\nu}$$

para ciertos $\bar{\rho}$ y $\bar{\nu}$ con $c_\theta \rho \leq \bar{\rho} \leq \frac{1}{4}\rho$ y $|\bar{\nu} - \nu| \leq C\sigma$, donde $c_\theta = c(\theta, n)$, $C = C(n)$, $\sigma_\theta = \sigma(\theta, n, C^*, c_{\min})$, $c_{\min}$ dado en (5.1.5).

Demostración. Si σ_θ en el enunciado es suficientemente chico, podemos aplicar el teorema 5.1.3 y obtenemos

$$u \in F(C\sigma, C\sigma; \tau) \qquad \text{en } B_{\rho/2} \text{ en dirección } \nu.$$

Entonces, tomando $0 < \theta_1 \leq 1/2$ podemos aplicar el lema 5.1.11 para C^* y θ_1, si otra vez σ_θ en el enunciado es suficientemente chico, con lo cual

$$u \in F(\theta_1 C\sigma, 1; \tau) \qquad \text{en } B_{r_1\rho} \text{ en dirección } \nu_1, \tag{5.1.43}$$

para ciertos r_1, ν_1 con

$$c_{\theta_1} \leq 2r_1 \leq \theta_1, \quad \text{ y } \quad |\nu_1 - \nu| \leq C\sigma.$$

Consideremos la función

$$U_k := (|\nabla u| - \lambda - 1/k)^+,$$

donde $\lambda = \lambda_u$ y $k \in I\!N$. Se tiene que U_k es subarmónica y continua en B_ρ (ver demostración del teorema 4.2.6). Además por (5.1.42) $U_k \leq \lambda\tau$ en B_ρ, y por (5.1.43), $U_k = 0$ en

$$B := \frac{B_{r_1\rho}}{4}\left(\frac{r_1\rho}{2}\nu_1\right).$$

Como existe una constante $0 < c(n) < 1$ tal que la solución de

$$\begin{aligned} &\Delta V = 0 && \text{en } B_{2r_1\rho} \setminus \overline{B}, \\ &V = \lambda\tau && \text{en } B_{2r_1\rho}, \\ &V = 0 && \text{en } \partial B, \end{aligned}$$

satisface $V \leq (1 - c(n))\lambda\tau$ en $B_{r_1\rho}$, tenemos, aplicando el principio del máximo que

$$U_k \leq (1 - c(n))\lambda\tau \qquad \text{en } B_{r_1\rho},$$

y haciendo $k \to \infty$

$$|\nabla u| \leq \lambda(1 + \theta_0^2\tau) \qquad \text{en } B_{r_1\rho},$$

donde

$$\theta_0 := \sqrt{1 - c(n)}.$$

Esto, junto con (5.1.43) muestra que si θ_1 es elegido suficientemente chico (dependiendo sólo de n)

$$u \in F(\theta_0\sigma, 1; \theta_0^2\tau) \qquad \text{en } B_{r_1\rho} \text{ en dirección } \nu_1.$$

Como podemos repetir este argumento un número finito de veces, siempre que elijamos la constante σ_θ en el enunciado suficientemente chica para cada paso, obtenemos

$$u \in F(\theta_0^m\sigma, 1; \theta_0^{2m}\tau) \qquad \text{en } B_{r_1 \ldots r_m \rho} \text{ en dirección } \nu_m$$

con

$$c_{\theta_j} \leq 2r_j \leq \theta_j, \quad \text{y} \quad |\nu_m - \nu| \leq \frac{C}{1 - \theta_0}\sigma.$$

Tomando entonces m suficientemente grande, y usando nuevamente el teorema 5.1.3, completamos el lema. $\square$

5.2. Regularidad de la frontera libre.

5.2.1. Teorema. *Sea u una solución de P_ε^c. Entonces existen constantes positivas α, $\bar{\sigma}_0$ y $\bar{\tau}_0$ tales que*

$$u \in F(\sigma, 1; \infty) \qquad \text{en } B_\rho(x_0) \text{ en dirección } \nu$$

con $\sigma \leq \bar{\sigma}_0$ y $\rho \leq \bar{\tau}_0 \sigma^2$ implica que

$$B_{\rho/8}(x_0) \cap \partial\{u > 0\} \quad \text{es una superficie } C^{1,\alpha},$$

más precisamente un gráfico en dirección ν de una función $C^{1,\alpha}$.

Las constantes dependen sólo de n, ε, δ, μ (δ y μ dados en (3.2.7) y (3.2.6) respectivamente).

DEMOSTRACIÓN. Como $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$, si tomamos $\bar{\sigma}_0$ y $\bar{\tau}_0$ suficientemente chicos en el enunciado, tendremos por el teorema 4.2.6 que

$$\sup_{B_\rho(x_0)} |\nabla u(x)| \leq \lambda_u(1 + \widetilde{C}\rho),$$

y entonces si

$$\tau := \widetilde{C}\rho, \tag{5.2.1}$$

resultará

$$u \in F(\sigma, 1; \tau) \quad \text{en } B_\rho(x_0) \text{ en dirección } \nu \tag{5.2.2}$$

Podemos aplicar el teorema 5.1.3, si otra vez $\bar{\sigma}_0$ y $\bar{\tau}_0$ son suficientemente chicos en el enunciado, y obtenemos

$$u \in F(C\sigma, C\sigma; \tau) \quad \text{en } B_{\rho/2}(x_0) \text{ en dirección } \nu. \tag{5.2.3}$$

Fijemos ahora $x_1 \in B_{\rho/2}(x_0) \cap \partial\{u > 0\}$. De (5.2.2) y (5.2.3) deducimos que

$$u \in F(C\sigma, 1; \tau) \quad \text{en } B_{\rho/2}(x_1) \text{ en dirección } \nu,$$

y achicando $\bar{\sigma}_0$ y $\bar{\tau}_0$ podemos aplicar nuevamente el teorema 5.1.3 y por lo tanto

$$u \in F(C\sigma, C\sigma; \tau) \quad \text{en } B_{\rho/4}(x_1) \text{ en dirección } \nu.$$

Queremos aplicar el lema 5.1.12 en $B_{\rho/4}(x_1)$ para algún $0 < \theta < 1$ y para $C^* = \widetilde{C}$ la constante de (5.2.1). En efecto, si tomamos

$$\bar{\sigma}_0 \le \frac{\sigma_\theta}{C} \qquad \text{y} \qquad \bar{\tau}_0 \le \frac{\sigma_\theta C^2}{\widetilde{C}}, \tag{5.2.4}$$

podremos aplicar dicho lema. Pero además, queremos aplicar el lema 5.1.12 en forma inductiva de modo de obtener ρ_m y ν_m (dependiendo de x_1), con $\rho_0 = \rho/4$, $\nu_0 = \nu$, y

$$c_\theta \rho_m \le \rho_{m+1} \le \frac{\rho_m}{4} \qquad \text{y} \qquad |\nu_{m+1} - \nu_m| \le \theta^m C\sigma \tag{5.2.5}$$

tales que

$$u \in F(\theta^m C\sigma, \theta^m C\sigma; \theta^{2m}\tau) \quad \text{en } B_{\rho_m}(x_1) \text{ en dirección } \nu_m. \tag{5.2.6}$$

Para eso necesitaremos que en cada paso

$$\theta^m C\sigma \le \sigma_\theta, \qquad \theta^{2m}\tau \le \sigma_\theta(\theta^m C\sigma)^2, \qquad C^*\rho_m \le \theta^{2m}\tau.$$

Las dos primeras desigualdades se verifican si vale (5.2.4) y dado que $\rho_m \le \rho_0/4^m$, la tercera desigualdad se cumplirá si

$$\theta := 1/2.$$

Es decir, probamos (5.2.5) y (5.2.6) para todo $m \ge 0$ con lo cual

$$|(x - x_1) \cdot \nu_m| \le \theta^m C\sigma\rho_m \qquad \text{si } x \in B_{\rho_m}(x_1) \cap \partial\{u > 0\}. \tag{5.2.7}$$

Además, por (5.2.5)

$$\nu(x_1) := \lim_{m\to\infty} \nu_m$$

existe con

$$|\nu(x_1) - \nu_m| \le \frac{C\theta^m}{1-\theta}\sigma. \tag{5.2.8}$$

Ahora, tomemos $x \in B_{\rho/4}(x_1) \cap \partial\{u > 0\}$ y sea m tal que $\rho_{m+1} \le |x - x_1| \le \rho_m$. Entonces por (5.2.7), (5.2.8) y (5.2.5)

$$|(x - x_1)\cdot \nu(x_1)| \le C\theta^m\sigma\left(\frac{|x-x_1|}{1-\theta} + \rho_m\right) \le C\theta^m\sigma\left(\frac{1}{1-\theta} + \frac{1}{c_\theta}\right)|x - x_1|$$

y como por (5.2.5) tenemos $c_\theta^{m+1}\rho_0 \le |x - x_1|$, resulta

$$\theta^{m+1} \le \left(\frac{|x-x_1|}{\rho_0}\right)^\alpha \qquad \text{si } \alpha := \frac{\log 2}{\log c_\theta^{-1}}$$

y finalmente concluímos

$$|(x - x_1)\cdot\nu(x_1)| \le \frac{C\sigma}{\rho^\alpha}|x - x_1|^{1+\alpha} \qquad \text{si } x \in B_{\rho/4}(x_1)\cap\partial\{u > 0\}.$$

Esto último (si $\bar{\sigma}_0$ es suficientemente chico), sumado al hecho de que las constantes de la demostración dependen sólo de las constantes de los teoremas 5.1.3, 4.2.6 y 5.1.12, completa el resultado. □

5.2.2. Teorema. *Si u es una solución de P_ε^c, entonces $\partial_{\text{red}}\{u > 0\}$ es una superficie $C^{1,\alpha}$ localmente en Ω, y el resto de $\Omega \cap \partial\{u > 0\}$ tiene medida $\mathcal{H}^{n-1}$ cero.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in \partial_{\text{red}}\{u > 0\}$ y sea u_k una sucesión blow up respecto a bolas $B_{\rho_k}(x_0)$, con límite u_0.

De (4.1.39) y (A.2.8) se deduce que existe una sucesión $\sigma_k \to 0$ tal que

$$u \in F(\sigma_k, 1; \infty) \qquad \text{en } B_{\rho_k}(x_0) \text{ en dirección } \nu_u(x_0),$$

y entonces para k grande el teorema 5.2.1 puede aplicarse. □

5.2.3. Teorema. *Sea Ω un abierto, $0 \in \Gamma \subset \partial\Omega$, con Γ de clase C^1. Supongamos que $u \in C^2(\Omega)\cap C^{1,\alpha}(\Omega\cup\Gamma)$ para algún $0 < \alpha < 1$ y u satisface la ecuación elíptica*

$$F(x, u, Du, D^2u) = 0 \quad \textit{en } \Omega,$$

con

$$u = 0 \quad en\ \Gamma \qquad y \qquad g(x,\ grad\ u) = 0 \quad en\ \Gamma,$$

donde las funciones F *y* $g = g(x, p_1, \ldots, p_n)$ *son analíticas. Asumamos además que*

$$|grad\ u(0)| \neq 0 \qquad y\ \frac{\partial g}{\partial p_n}(0,\ grad\ u(0)) \neq 0.$$

Entonces Γ *es analítica.*

DEMOSTRACIÓN. Ver teorema 2 de [14]. □

5.2.4. Teorema. *Sea* u *una solución de* P_ε^c*, entonces* $\partial_{\rm red}\{u > 0\}$ *es localmente analítica.*

DEMOSTRACIÓN. De la observación 4.1.7, el toerema 4.2.1 y el teorema 5.2.2 se deduce que si $x_0 \in \partial_{\rm red}\{u > 0\}$ y ρ es suficientemente chico, u está en las hipótesis del teorema 5.2.3 en $B_\rho(x_0) \cap \{u > 0\}$, para

$$F(x, u, Du, D^2u) = \Delta u + 2, \qquad g(x,\ \text{grad}\ u) = |\text{grad}\ u|^2 - \lambda_u^2,$$

y en consecuencia $B_\rho(x_0) \cap \partial\{u > 0\}$ es analítica. □

5.2.5. Observación. Sea u una solución de P_ε^c, y $\bar{x}$ un punto de la frontera libre con $B_r(\bar{x}) \cap \partial\{u > 0\}$ regular para algún $r > 0$. Perturbemos el conjunto $\{u > 0\}$ hacia afuera cerca de $\bar{x}$ en forma suave, aumentando su volumen en $\alpha > 0$, y en el conjunto perturbado D_α que obtenemos, donde

$$B_r(\bar{x}) \cap \{u > 0\} \subset D_\alpha \subset B_r(\bar{x}),$$

consideremos la función v_α que satisface

$$\begin{aligned} \Delta v_\alpha &= -2 && \text{en } D_\alpha, \\ v_\alpha &= u && \text{en } \partial D_\alpha \cap \partial B_r(\bar{x}), \\ v_\alpha &= 0 && \text{en } B_r(\bar{x}) \setminus D_\alpha. \end{aligned}$$

Como $\partial_{-\nu} u = \lambda_u$ en $B_r(\bar{x}) \cap \partial\{u > 0\}$, no es difícil ver que

$$\int_{B_r(\bar{x})} |\nabla v_\alpha - \nabla u|^2 = \lambda_u^2 \alpha + o(\alpha).$$

También obtenemos la misma estimación si disminuímos en $\alpha > 0$ el volumen de $\{u > 0\}$ y definimos en forma análoga v'_α en el conjunto perturbado $D'_\alpha \subset B_r(\bar{x}) \cap \{u > 0\}$.

5.2.6. Teorema. *Sea $n = 2$ y sea u una solución de P_ε^c. Si $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ entonces*

$$\fint_{B_r(x_0)\cap\{u>0\}} \max(\lambda_u^2 - |\nabla u|^2, 0) \to 0 \qquad \textit{cuando } r \to 0. \tag{5.2.9}$$

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $\lambda = \lambda_u$. Sean $0 < r < \rho$ chicos. Para $t > 0$ y

$$\eta(x) := \begin{cases} \frac{\log(\rho/|x-x_0|)}{\log(\rho/r)} & x \in B_\rho(x_0) \setminus B_r(x_0), \\ 1 & x \in B_r(x_0), \\ 0 & x \in \Omega \setminus B_\rho(x_0), \end{cases}$$

definamos

$$v_0 := \max(u - t\eta, 0) = u - \min(u, t\eta).$$

Entonces

(5.2.10)

$$\frac{1}{2}\int_{B_\rho(x_0)} (|\nabla v_0|^2 - |\nabla u|^2) = \frac{1}{2}\int_{B_\rho(x_0)} |\nabla \min(u, t\eta)|^2 - \int_{B_\rho(x_0)} \nabla u \nabla \min(u, t\eta),$$

y como $\Delta u = -2$ en $B_\rho(x_0) \cap \{u > 0\} = \{\min(u, t\eta) > 0\}$

$$2\int_{B_\rho(x_0)} (u - v_0) = \int_{B_\rho(x_0)} \nabla u \nabla \min(u, t\eta) \tag{5.2.11}$$

Como $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$, tenemos por el lema 3.2.13 que $u \leq Cr$ en $B_r(x_0)$. Elijamos $t = Cr$ y sea

$$\delta_t := |\{x \in B_\rho(x_0) \;/\; 0 < u \leq t\eta\}|.$$

Tomemos un punto $x_1 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ lejano a x_0 tal que $B_{r_1}(x_1) \cap \partial\{u > 0\}$ es regular para $r_1 > 0$ chico. Perturbemos suavemente el conjunto $\{u > 0\}$ cerca de x_1 aumentando su volumen en δ_t, y considermos $v_1 = v_{\delta_t}$ definida en $B_{r_1}(x_1)$ como en la observación 5.2.5.

Entonces la función

$$:= \begin{cases} v_0 & \text{en } B_\rho(x_0), \\ v_1 & \text{en } B_{r_1}(x_1), \\ u & \text{en el resto de } \Omega, \end{cases}$$

resulta admisible para P_ϵ^c, y satisface

$$|\{v > 0\}| = |\{u > 0\}|.$$

En consecuencia de (5.2.10), (5.2.11), del lema 2.2.3 y de la observación 5.2.5 se deduce

$$0 \leq J_\epsilon(v) - J_\epsilon(u) = \frac{1}{2} \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla \min(u, t\eta)|^2 - \frac{\lambda^2}{2} \delta_t + o(\delta_t),$$

y por lo tanto, recordando la definición de δ_t

$$\int_{B_\rho(x_0) \cap \{0 < u \leq t\eta\}} (\lambda^2 - |\nabla u|^2) \leq t^2 \int_{B_\rho(x_0) \cap \{0 < u \leq t\eta\}} |\nabla \eta|^2 + o(\delta_t).$$

Entonces, por elección de t,

$$\int_{B_r(x_0) \cap \{u > 0\}} \max(\lambda^2 - |\nabla u|^2, 0) \leq \int_{B_\rho(x_0)} \max(|\nabla u|^2 - \lambda^2, 0) + \frac{C r^2}{\log(\rho/r)} + o(\delta_\rho),$$

donde $\delta_\rho := |\{x \in B_\rho(x_0) \; / \; 0 < u \leq C\rho\}|$, y si usamos el teorema 4.2.6 obtenemos

$$\fint_{B_r(x_0) \cap \{u > 0\}} \max(\lambda^2 - |\nabla u|^2, 0) \leq \frac{1}{r^2}(C\rho^3 + o(\delta_\rho)) + \frac{C}{\log(\rho/r)}.$$

Finalmente, observando que por el teorema 3.2.14, $\delta_\rho \leq C\rho^2$, y eligiendo $r = \rho f(\rho)^{1/4}$, con $f(\rho) := \max\left(\rho, \frac{o(\delta_\rho)}{\delta_\rho}\right)$, se llega a (5.2.9). □

5.2.7. Corolario. *Sea $n = 2$ y sea u una solución de P_ϵ^c. Dado $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ se cumple que si u_k es una sucesión blow up respecto de $B_{\rho_k}(x_0)$, con límite u_0, entonces*

$$u_0(x) = \lambda_u \max(-x \cdot e, 0)$$

donde $e = e(x_0)$ es un vector unitario.

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $\lambda = \lambda_u$ y sea u_k una sucesión blow up respecto de bolas $B_{\rho_k}(x_0)$ con límite u_0. Por el teorema 5.2.6 tenemos que si $k \to \infty$

$$\frac{1}{|B_1(0)|} \int_{B_1(0) \cap \{u_k > 0\}} \max(\lambda^2 - |\nabla u_k|^2, 0) \to 0,$$

y usando (A.2.7) y (A.2.10) obtenemos

$$\lambda \le |\nabla u_0| \qquad \text{en } B_1(0) \cap \{u_0 > 0\}. \tag{5.2.12}$$

Por otra parte si $y \in B_1(0) \cap \{u_0 > 0\}$ se tiene por (A.2.9)

$$|\nabla u(x_0 + \rho_k y)| = |\nabla u_k(y)| \to |\nabla u_0(y)|,$$

entonces del teorema 4.2.1 y de (5.2.12) deducimos

$$|\nabla u_0| = \lambda \qquad \text{en } B_1(0) \cap \{u_0 > 0\}. \tag{5.2.13}$$

Por (A.2.12) obtenemos que $0 \in \partial\{u_0 > 0\}$ y entonces $u_0(0) = 0$. En consecuencia existe una componente conexa D de $\{u_0 > 0\}$ tal que $0 \in \partial D$. Tomemos $y_1 \in D \cap B_1(0)$, $e := \frac{-\nabla u_0(y_1)}{|\nabla u_0(y_1)|}$ y consideremos la función $\frac{\partial u_0}{\partial e}$. Recordando que u_0 es armónica en $\{u_0 > 0\}$ tenemos

$$\Delta\left(\frac{\partial u_0}{\partial e}\right) = 0 \qquad \text{en } D \cap B_1(0)$$

y además por (5.2.13) y por definición de e

$$\frac{\partial u_0}{\partial e} \ge -\lambda \quad \text{en } D \cap B_1(0), \qquad \frac{\partial u_0}{\partial e}(y_1) = -\lambda.$$

Usando que $u_0(0) = 0$ y $D \subset \{u_0 > 0\}$ y razonando como al final del lema 4.2.3 deducimos que

$$u_0(y) = \begin{cases} -\lambda y \cdot e & \text{si } y \cdot e \le 0, \\ 0 & \text{si } y \cdot e > 0, \end{cases}$$

que es lo que queríamos probar. □

5.2.8. Teorema. *Sea $n = 2$. Si u es una solución de P_ε^c, entonces $\partial\{u > 0\}$ es una curva $C^{1,\alpha}$ localmente en Ω. En consecuencia $\partial\{u > 0\}$ es localmente analítica en Ω.*

DEMOSTRACIÓN. Sea $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ y sea u_k una sucesión blow up con límite u_0. Por el corolario 5.2.7 resulta

$$u_0(x) = \lambda_u \max(-x \cdot e, 0),$$

y de (A.2.8) deducimos que existe una sucesión $\sigma_k \to 0$ tal que

$$u \in F(\sigma_k, 1; \infty) \qquad \text{en } B_{\rho_k}(x_0) \text{ en dirección } e,$$

y entonces para k grande el teorema 5.2.1 puede aplicarse.

Finalmente, razonando como en el teorema 5.2.4 probamos que $B_\rho(x_0) \cap \partial\{u > 0\}$ es analítica para ρ chico. □

CAPITULO 6: SOLUCION DEL PROBLEMA ORIGINAL.

En este capítulo resolvemos el problema $P(H)$ y estudiamos finalmente el problema $P_F(H)$.

En 6.1 planteamos el problema $P^c(H)$, y mostramos que para ε pequeño las soluciones de $P^c_\varepsilon(H)$ coinciden con las de $P^c(H)$, o sea que no hay necesidad de pasar al límite en ε.

En 6.2 probamos que $P(H)$ tiene solución, y mostramos que si el valor de una solución u en H es positivo, entonces u resuelve $P^c_\varepsilon(H)$. Encontramos además, condiciones bajo las cuales $D := \{u > 0\}$, con u solución de $P(H)$, es solución de $P_F(H)$.

En 6.3 determinamos una clase $\mathcal{F}$ de dominios H para los cuales $P_F(H)$ tiene solución, y ésta tiene frontera localmente analítica. Además definimos una noción de cercanía y probamos un teorema de estabilidad en la clase $\mathcal{F}$.

Las hipótesis que se asumen en este capítulo son las mismas que en la sección 3.2.

6.1. Problema $P^c(H)$.

6.1.1. Lema. *Sea u una solución de P^c_ε. Entonces u satisface*

1) $\displaystyle\int_\Omega u\Delta u + \int_\Omega |\nabla u|^2 = \int_{\partial\Omega} u\partial_\nu u \, d\mathcal{H}^{n-1}$.

2) $\displaystyle\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u \, d\mathcal{H}^{n-1} + 2|\{u > 0\}| = \lambda_u \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial\{u > 0\})$,

donde ν es la normal exterior a Ω.

Demostración. Como $u \in C^\circ(\overline{\Omega}) \cap C^\infty(\{u > 0\})$, por el teorema de Sard (ver [8], p. 39) tenemos que $\{u > t\}$ es regular para casi todo $0 < t \le t_0$, y por lo tanto, si $u^t := u - t$, de la aplicación de la fórmula de Green resulta

$$\int_{\{u>t\}} u^t\Delta u + \int_{\{u>t\}} \nabla u^t \nabla u = \int_{\partial\{u>t\}} u^t \partial_\nu u = \int_{\partial\Omega} u^t \partial_\nu u, \tag{6.1.1}$$

donde ν es la normal exterior a $\{u > t\}$. Haciendo ahora $t \to 0$ en (6.1.1), obtenemos 1).

Para ver 2), fijemos $t > 0$ chico y sea φ^t una función satisfaciendo

$$\varphi^t \in C_0^\infty(\Omega), \qquad 0 \le \varphi^t \le 1 \text{ en } \Omega,$$
$$\varphi^t(x) = 1 \qquad \text{si } t < d(x, \Omega^c) < \frac{1}{t}.$$

Tenemos que $\varphi^t = 1$ en $\Omega \cap \partial\{u > 0\}$ si t es suficientemente chico, y por lo tanto de (4.1.26) y del teorema 4.2.1 deducimos que

$$-\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi^t + 2\int_{\{u>0\}} \varphi^t = \lambda_u \mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial\{u > 0\}). \tag{6.1.2}$$

Además, como para t chico $u \in C^2(\overline{\Omega}_t)$, donde $\Omega_t := \{x \ / \ 0 < d(x, \Omega^c) < t\}$, tenemos

$$-\int_\Omega \nabla u \nabla \varphi^t = -\int_{\Omega_t} \nabla u \nabla \varphi^t = \int_{\Omega_t} \Delta u \varphi^t - \int_{\{x \ / \ d(x,\Omega^c)=t\}} \partial_\nu u \, d\mathcal{H}^{n-1}, \tag{6.1.3}$$

donde ν es la normal exterior a Ω_t. Entonces tomando límite para $t \to 0$ en (6.1.2) y (6.1.3), obtenemos el resultado deseado. □

6.1.2. Lema. *Existe una constante positiva $C = C(H)$ tal que si $v \in H^1(\Omega) \cap L^1(\Omega)$, $v \ge 0$ en Ω, entonces*

$$\left(\int_{\partial\Omega} v \, d\mathcal{H}^{n-1}\right)^2 \le C(H) |\{x \in \Omega \ / \ v(x) > 0\}| \cdot \int_\Omega (v^2 + |\nabla v|^2). \tag{6.1.4}$$

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $t > 0$ chico y consideremos el conjunto

$$D = D_t(H) := \{x \ / \ 0 < d(x, H) < t\}.$$

Integrando a lo largo de líneas obtenemos

$$\int_{\partial\Omega} v \, d\mathcal{H}^{n-1} \le C(H)\left(\int_D v \, dx + \int_D |\nabla v| \, dx\right).$$

La demostración se completa usando que $v \ge 0$ en Ω y aplicando la desigualdad de Hölder. □

6.1.3. Lema. *Sea u una solución de P_ε^c. Existe una constante positiva α y un punto $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ tal que si $B_r(x_0) \subset \Omega$ y r es suficientemente pequeño, entonces*

$$\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r(x_0)} u \ge c\alpha, \tag{6.1.5}$$

donde $\alpha = \alpha(n, r^*, l, |H|)$*, con* r^* *y* l *dados en (3.1.1) y (3.1.2) respectivamente, es una función que varía en forma continua cuando* l *ó* $|H|$ *varían en* $\mathbb{R}_{>0}$.

DEMOSTRACIÓN. Sabemos que $\overline{H} \cup \{u > 0\}$ es conexo, satisfaciendo por el teorema 3.2.7

$$|\overline{H} \cup \{u > 0\}| \leq C(n, |H|, l).$$

Como además $H \subset B_{R_0}(0)$, deducimos que existe una constante R_1 y un punto y_1 satisfaciendo

$$y_1 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}, \qquad |y_1| \leq R_1, \qquad R_1 = R_1(n, |H|, l) > R_0.$$

Sean $r_1 := d(y_1, \partial H) = d(y_1, \partial\Omega)$ y r^* como en (3.1.1). Existen $y_0 \in \partial H$, $y_2 \in H$ tales que

$$\begin{aligned} &B_{r_1}(y_1) \quad \text{es tangente exterior a } H \text{ en } y_0, \\ &B_{r^*}(y_2) \quad \text{es tangente interior a } H \text{ en } y_0. \end{aligned}$$

Asumamos que la normal exterior a H en y_0 es e_n y para $0 \leq t \leq 1$ consideremos

$$D_t := \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ d(x, I_t) < r^*\},$$

donde

$$I_t := \{x \in \mathbb{R}^n \ / \ x = y_2 + s e_n, \ \ 0 \leq s \leq 2R_1 t\}.$$

Es decir, hemos construído una familia D_t de dominios regulares que varían en forma suave cuando t varía entre 0 y 1, que satisfacen $D_t \subset D_{t'}$ si $t < t'$ y además

$$D_0 = B_{r^*}(y_2), \qquad D_t \cap \Omega \neq \emptyset \quad \text{si } t > 0, \qquad y_1 \in D_1.$$

Fijemos t el primer valor para el cual D_t toca un punto de la frontera libre $x_0 \in \partial D_t \cap \Omega \cap \partial\{u > 0\}$. Se cumplirá por construcción de D_t que $0 < t < 1$ y

$$\{u > 0\} \supset D_t \cap \Omega. \tag{6.1.6}$$

Consideremos w la función que satisface

$$\begin{cases} \Delta w = 0 & \text{en } D_t - \overline{B_{r^*/2}}(y_2), \\ w = 1 & \text{en } \partial B_{r^*/2}(y_2), \\ w = 0 & \text{en } \mathbb{R}^n - D_t. \end{cases}$$

Entonces, por el principio de Hopf,

$$\partial_{-\nu} w(x_0) \geq \gamma > 0,$$

donde ν es la normal exterior a D_t en x_0 y γ una constante que depende sólo de n, r^*, R_1 y que varía en forma continua cuando R_1 varía en $\mathbb{R}_{>0}$. En consecuencia para r suficientemente chico, tendremos

$$\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r(x_0)} w \geq \alpha, \qquad \alpha = \alpha(n, r^*, R_1) > 0. \tag{6.1.7}$$

Recordando (6.1.6) obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta(u - cw) &= -2 \qquad \text{en } D_t \cap \Omega, \\ u - cw &\geq 0 \qquad \text{en } \partial(D_t \cap \Omega), \end{aligned}$$

y si aplicamos el principio del máximo, y usamos (6.1.7) resulta

$$\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r(x_0)} u \geq c\alpha,$$

lo que concluye el lema. □

6.1.4. Lema. *Existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que si u es solución de P_ε^c entonces*

$$C_1 \leq \lambda_u \leq C_2,$$

donde las constantes C_i pueden estimarse dependiendo sólo de n, $|H|$, l, c, r^* y $C(H)$ (l, r^* y $C(H)$ dados en (3.1.2), (3.1.1) y (6.1.4) respectivamente).

Además C_i varían en forma continua como función de $|H|$, l y c cuando estos parámetros varían en $\mathbb{R}_{>0}$.

DEMOSTRACIÓN.

PASO I. (Primera desigualdad). Sea $x_0 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ el punto dado por el lema 6.1.3, y para $r > 0$ chico consideremos v_0 la función que satisface $\Delta v_0 = -2$ en $B_r(x_0)$, $v_0 = u$ en $\partial B_r(x_0)$. Del lema 3.1.6 y de (6.1.5) resulta

$$\begin{aligned} \int_{B_r(x_0)} |\nabla(v_0 - u)|^2 &\geq C(n)|B_r(x_0) \cap \{u = 0\}| \left(\frac{1}{r} \fint_{\partial B_r(x_0)} u \right)^2 \geq \\ &\geq (c\alpha)^2 C(n)|B_r(x_0) \cap \{u = 0\}|. \end{aligned} \tag{6.1.8}$$

Elijamos un punto $x_1 \in \Omega \cap \partial\{u > 0\}$ lejano a x_0, tal que $B_{r_1}(x_1) \cap \partial\{u > 0\}$ es regular para un cierto $r_1 > 0$. Perturbemos el conjunto $\{u > 0\}$ hacia adentro cerca de x_1 en forma suave disminuyendo su volumen en δr, donde

$$\delta r := |B_r(x_0) \cap \{u = 0\}|,$$

y consideremos $v_1 = v'_{\delta r}$ definida en $B_{r_1}(x_1)$ como en la observación 5.2.5.

Entonces la función

$$v := \begin{cases} v_0 & \text{en } B_r(x_0), \\ v_1 & \text{en } B_{r_1}(x_1), \\ u & \text{en el resto de } \Omega, \end{cases}$$

resulta admisible para P_ε^c y satisface

$$|\{v > 0\}| = |\{u > 0\}|.$$

En consecuencia, del lema 2.2.3, de (6.1.8) y de la observación 5.2.5 se deduce que

$$0 \leq J_\varepsilon(v) - J_\varepsilon(u) \leq -(c\alpha)^2 \frac{C(n)}{2}\delta r + \frac{\lambda_u^2}{2}\delta r + o(\delta r),$$

es decir

$$(c\alpha)^2 C(n) \leq \lambda_u^2.$$

PASO II. (Segunda desigualdad). Por una desigualdad isoperimétrica (ver [O], p.1), tenemos

$$\mathcal{H}^{n-1}(\Omega \cap \partial\{u > 0\}) \geq C(n)|\{u > 0\}|^{\frac{n-1}{n}}. \tag{6.1.9}$$

Sea $D := \overline{H} \cup \{u > 0\}$, y definamos la función

$$\bar{u} := \begin{cases} u & \text{en } \Omega, \\ c & \text{en } \overline{H}. \end{cases}$$

Entonces $\bar{u} \in H_0^1(D)$ y por (3.2.0), y como $\varepsilon \leq \varepsilon_0(n)$, tenemos

$$J(\bar{u}) \leq J_\varepsilon(u) + \varepsilon w_0 \leq l + \varepsilon_0(n) w_0.$$

Además por el teorema 3.2.7

$$|\{u > 0\}| \leq |D| \leq C(n, |H|, l), \tag{6.1.10}$$

y entonces usando el lema 2.2.2 concluímos

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leq \|\bar{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^n)} \leq C(n,|H|,l). \tag{6.1.11}$$

Si ahora aplicamos el lema 6.1.2 para u, luego (6.1.11) y nuevamente la desigualdad isoperimétrica resulta

$$\widetilde{C}|\{u>0\}| \geq c^2(\mathcal{H}^{n-1}(\partial\Omega))^2 \geq c^2 C(n,|H|), \tag{6.1.12}$$

donde $\widetilde{C} = C(H)\cdot C(n,|H|,l)$.

Por otra parte, usando que $\Delta u = -2$ en $\{u>0\}$, obtenemos del lema 6.1.1, 1), y de (6.1.11) que

$$c\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u = \int_{\partial\Omega} u\partial_\nu u \leq C(n,|H|,l). \tag{6.1.13}$$

Finalmente, de 6.1.1, 2), (6.1.9) y (6.1.12) llegamos a

$$\int_{\partial\Omega} \partial_\nu u + 2|\{u>0\}| \geq \lambda_u C,$$

lo cual, junto con (6.1.13) y (6.1.10), completa el lema. □

6.1.5. Teorema. *Existe una constante positiva ε_1 tal que si u es solución de P_ε^c con $\varepsilon \leq \varepsilon_1$, entonces*

$$|\{x\in\Omega \;/\; u(x)>0\}| = w_0,$$

donde ε_1 puede estimarse dependiendo sólo de n, $|H|$, l, c, r^* y $C(H)$, y varía en forma continua como función de $|H|$, l y c cuando estos parámetros varían en $\mathbb{R}_{>0}$ (l, r^*, $C(H)$ dados en (3.1.2), (3.1.1) y (6.1.4) respectivamente).

DEMOSTRACIÓN. Sea u una solución de P_ε^c y supongamos que $|\{u>0\}| > w_0$. Tomemos un punto regular de $\Omega\cap\partial\{u>0\}$, y perturbemos $\{u>0\}$ hacia adentro en un entorno de dicho punto, de modo tal de disminuir su volumen en $\delta\mathrm{v}>0$. Construyamos una función admisible v_1, de modo tal que coincida con u en la región sin perturbar, y en la región perturbada, procedamos como en la observación 5.2.5.

Si $\delta\mathrm{v}$ es suficientemente chico, será $|\{v_1>0\}| > w_0$, y como $f_\varepsilon'(s) \geq \frac{1}{\varepsilon}$ cuando $s > w_0$, resulta

$$f_\varepsilon(|\{u>0\}|) - f_\varepsilon(|\{v_1>0\}|) \geq \frac{1}{\varepsilon}\delta\mathrm{v}. \tag{6.1.14}$$

Entonces del lema 2.2.3, de (6.1.14) y de la observación 5.2.5 obtenemos que

$$J_\varepsilon(u) - J_\varepsilon(v_1) \geq -\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u - v_1)|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\delta \mathrm{v} = (-\frac{1}{2}\lambda_u^2 + \frac{1}{\varepsilon})\delta \mathrm{v} + o(\delta \mathrm{v}).$$

Aplicando el lema 6.1.4, resulta $\lambda_u \leq C_2$, donde C_2 es positiva e independiente de ε. Entonces existe una constante $\bar{\varepsilon} > 0$ (dependiendo sólo de C_2) tal que obtendremos, *si* $\varepsilon < \bar{\varepsilon}$

$$J_\varepsilon(u) > J_\varepsilon(v_1),$$

con tal de tomar $\delta \mathrm{v}$ suficientemente chico, lo que es un absurdo. Es decir, probamos que

$$|\{u > 0\}| \leq w_0 \qquad \text{si } \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}.$$

Supongamos que $|\{u > 0\}| < w_0$ y procedamos en forma análoga. Construyamos una función admisible v_2, perturbando el conjunto $\{u > 0\}$ de modo que su volumen aumente en $\delta \mathrm{v} > 0$, con $\delta \mathrm{v}$ suficientemente chico para que $|\{v_2 > 0\}| < w_0$.

Usando que $f_\varepsilon(s) = \varepsilon(s - w_0)$ si $s < w_0$ y razonando como arriba obtenemos

$$J_\varepsilon(u) - J_\varepsilon(v_2) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla(u - v_2)|^2 - \varepsilon\delta \mathrm{v} = \left(\frac{1}{2}\lambda_u^2 - \varepsilon\right)\delta \mathrm{v} + o(\delta \mathrm{v}).$$

Como por el lema 6.1.4, $\lambda_u \geq C_1$, donde C_1 es positiva e independiente de ε, existe una constante $\tilde{\varepsilon} > 0$ (dependiendo sólo de C_1) tal que si $\varepsilon < \tilde{\varepsilon}$

$$J_\varepsilon(u) > J_\varepsilon(v_2),$$

si $\delta \mathrm{v}$ es suficientemente chico. Esto prueba que

$$|\{u > 0\}| \geq w_0 \qquad \text{si } \varepsilon \leq \tilde{\varepsilon},$$

y completa el teorema. □

6.1.6. Planteo del problema P^c.

Fijemos $c \geq 0$, y para $v \in H^1(I\!R^n) \cap L^1(I\!R^n)$ definamos $J(v)$ como en (2.1.1). Sea

$$\widetilde{K}^c = \widetilde{K}^c(H) = \{v \in H^1(I\!R^n) \cap L^1(I\!R^n),\ \ v = c \text{ en } H, |\{x \notin H \ / \ v(x) > 0\}| = w_0\}.$$

Entonces planteamos

$$P^c = P^c(H) : \min_{v \in \widetilde{K}^c} J(v).$$

Se observa que si v es admisible para P_ε^c, con $c > 0$, v puede pensarse definida en todo $I\!R^n$, si asumimos $v = c$ en H y de ese modo resulta $v \in H^1(I\!R^n) \cap L^1(I\!R^n)$ con $\{x \in \Omega \mid v(x) > 0\} = \{x \notin H \mid v(x) > 0\}$.

6.1.7. Teorema. *Sea $c > 0$. Entonces existe una solución al problema P^c. Además las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1) u es solución de P_ε^c para algún $\varepsilon \le \varepsilon_1$,

2) u es solución de P_ε^c para todo $\varepsilon \le \varepsilon_1$,

3) u es solución de P^c,

donde ε_1 es la constante dada en el teorema 6.1.5.

DEMOSTRACIÓN. Fijemos $\varepsilon \le \varepsilon_1$ y sea u_ε una solución de P_ε^c. Por el teorema 6.1.5 resulta

$$|\{x \notin H \mid u_\varepsilon(x) > 0\}| = w_0,$$

es decir $u_\varepsilon \in \widetilde{K}^c$.

Por otra parte, dada $v \in \widetilde{K}^c$, v es admisible para P_ε^c, y como $|\{x \notin H \mid v(x) > 0\}| = w_0$ y $f_\varepsilon(w_0) = 0$ deducimos que

$$J_\varepsilon(v) = J(v) + 2c|H| \qquad \forall v \in \widetilde{K}^c. \tag{6.1.15}$$

Entonces como u_ε es solución de P_ε^c tenemos

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon) \le J_\varepsilon(v) \qquad \forall v \in \widetilde{K}^c, \tag{6.1.16}$$

y como vimos que $u_\varepsilon \in \widetilde{K}^c$, de (6.1.15) y (6.1.16) concluímos que

$$J(u_\varepsilon) \le J(v) \qquad \forall v \in \widetilde{K}^c,$$

es decir, u_ε es solución de P^c.

Para completar el teorema, sólo resta ver que 3) $\Longrightarrow$ 2). Sea u una solución de P^c. Fijemos $\varepsilon \le \varepsilon_1$ y tomemos u_ε una solución de P_ε^c. Razonando como arriba obtenemos que u_ε es solución de P^c y por lo tanto

$$J(u) = J(u_\varepsilon). \tag{6.1.17}$$

Además u es admisible para P_ε^c y de (6.1.15) y (6.1.17) resulta

$$J_\varepsilon(u) = J_\varepsilon(u_\varepsilon).$$

Entonces, como u_ε es solución de P_ε^c, u también lo será. □

6.1.8. Observación. Del teorema 6.1.7 se deduce claramente que las soluciones de P^c, $c > 0$, satisfacen las propiedades probadas en los capítulos anteriores para las soluciones de P_ε^c, $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.

6.1.9. Teorema. *(Problema P^c, con $c = 0$). Existe una solución al problema P°. Además si u es solución de P° se cumple que*

$$J(u) = E(B),$$

donde B es una bola tal que $|B| = w_0$. Es decir, si $C(n)$ es la constante en (2.1.10) *se tiene*

$$J(u) = -C(n) w_0^{\frac{n+2}{n}}.$$

Demostración. Si $v \in \widetilde{K}^\circ$, será $|\{v > 0\}| = w_0$ y entonces por el lema 2.2.1 obtenemos que

$$J(v) \geq E(B) \qquad \forall v \in \widetilde{K}^\circ, \tag{6.1.18}$$

donde B es una bola tal que $|B| = w_0$. Además por el corolario 2.1.4, existe una función $u_0 \in H_0^1(B)$ tal que $u_0 > 0$ en B y

$$J(u_0) = E(B). \tag{6.1.19}$$

Entonces, si elegimos el centro de B de modo tal que $B \cap H = \emptyset$, tendremos que $u_0 \in \widetilde{K}^\circ$, y de (6.1.18) y (6.1.19) concluímos que u_0 es solución de P°. □

6.2. Solución de los problemas $P(H)$ y $P_F(H)$.

6.2.1. Teorema. *Existe una solución al problema P. Además si u es una solución de P, u satisface una de las siguientes propiedades:*

1) $u|_H = 0$ *y* u *es solución de* P°,

2) $\alpha := u|_H > 0$ *y* u *es solución de* P^α.

Antes de demostrar el teorema 6.2.1 probaremos

6.2.2. Lema. *Supongamos que u satisface: $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$, sop u compacto, $u =$ const. en H, $|\{x \notin H \,/\, u(x) > 0\}| \le w_0$, $J^*(H) = \inf_{v\in K} J(v) \ge J(u)$.*

Entonces $u \in K(H)$ y por lo tanto u es solución de $P(H)$.

DEMOSTRACIÓN. Sea $w_1 = |\{x \notin H \,/\, u(x) > 0\}|$. Si $w_1 = w_0$, entonces $u \in K$ y el lema está probado.

Supongamos $w_1 < w_0$ y tomemos B una bola tal que $|B| = w_0 - w_1$, eligiendo su centro de modo que resulte

$$B \cap \text{ sop } u = \emptyset, \qquad B \cap H = \emptyset.$$

Sea $\bar{v}$ una función satisfaciendo

$$\bar{v} \in H_0^1(B), \qquad \bar{v} > 0 \quad \text{en } B, \qquad J(\bar{v}) < 0,$$

(notemos que una tal $\bar{v}$ existe por el corolario 2.1.4). Entonces la función

$$w := \begin{cases} \bar{v} & \text{en } B \\ u & \text{en } \mathbb{R}^n - B \end{cases}$$

satisface

$$w \in K \qquad \text{y} \qquad J(w) < J(u) \le \inf_{v\in K} J(v),$$

que es una contradicción y por lo tanto prueba el lema. □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 6.2.1.

Comencemos observando que si u es solución de P, entonces $u \ge 0$, pues sino $J(u) > J(u^+)$ con $u^+ \in K$, lo que es un absurdo. Entonces, si $\alpha := u|_H$, resulta $\alpha \ge 0$ y $u \in \widetilde{K}^\alpha$, y como $\widetilde{K}^\alpha \subset K$ concluimos que u es solución de P^α.

Probemos ahora que el problema P tiene solución. Tomemos v_k una sucesión minimizante. Sin pérdida de generalidad supondremos que $v_k \geq 0$ en $I\!R^n$ (sino reemplazamos a v_k por v_k^+), y además v_k de soporte compacto. Sea

$$c_k := v_k|_H.$$

PASO I. Supongamos que

$$\liminf_{k\to\infty} c_k = 0. \tag{6.2.1}$$

Como $|\{v_k > 0\}| \leq w_0 + |H|$, podemos tomar una bola B satisfaciendo

$$|B| = w_0 + |H|, \qquad B \cap H = \emptyset, \tag{6.2.2}$$

y simetrizar Schwarz las funciones v_k, de modo tal de obtener funciones $v_k^* \in H_0^1(B)$, que satisfarán

$$J(v_k^*) \leq J(v_k) \leq J(v_1). \tag{6.2.3}$$

Entonces, por el lema 2.2.2

$$\|v_k^*\|_{H^1(I\!R^n)} \leq C, \qquad C \text{ independiente de } k,$$

y en consecuencia deducimos que existe una función $v^* \in H_0^1(B)$ y una subsucesión tal que

$$\begin{array}{lcll} \nabla v_k^* & \rightarrow & \nabla v^* & \text{débilmente en } L^2(I\!R^n), \\ v_k^* & \rightarrow & v^* & \text{en } L^1(I\!R^n), \\ v_k^* & \rightarrow & v^* & \text{c.t.p. en } I\!R^n. \end{array}$$

Además, por (6.2.1), podemos elegir la subsucesión de modo tal que $c_k \to 0$. Entonces, por definición de c_k, si fijamos $t > 0$, tendremos que $v_k < t$ en H para k grande, y por lo tanto

$$|\{v_k^* > t\}| = |\{v_k > t\}| \leq |\{x \notin H \;/\; v_k(x) > 0\}| = w_0.$$

Entonces

$$|\{v^* > t\}| \leq \liminf_{k\to\infty} |\{v_k^* > t\}| \leq w_0,$$

y como t puede tomarse arbitrariamente chico resulta

$$|\{v^* > 0\}| \le w_0.$$

Además

$$J(v^*) \le \liminf_{k\to\infty} J(v_k^*)$$

y esto junto con (6.2.3), como v_k es una sucesión minimizante, muestra que

$$\inf_{v\in K} J(v) \ge J(v^*).$$

Recordando que $v^* \in H_0^1(B)$, donde B satisface (6.2.2), concluímos que v^* está en las hipótesis del lema 6.2.2, es decir, v^* es solución de P.

PASO II. Veamos que existe solución al problema P cuando se cumple que

$$0 < \liminf_{k\to\infty} c_k \le +\infty \tag{6.2.4}$$

En este caso, podemos asumir que $c_k > 0$ para k suficientemente grande y por lo tanto v_k son admisibles para P^{c_k}. Tomando entonces, para cada k, una solución u_k de P^{c_k} tendremos $J(v_k) \ge J(u_k)$ y en consecuencia u_k resulta una sucesión minimizante del problema P.

Como $u_k \in H_0^1(\{u_k > 0\})$ y $|\{u_k > 0\}| = w_0 + |H|$, tenemos, por el lema 2.2.2

$$\|u_k\|_{H^1(I\!R^n)} \le C, \qquad C \text{ independiente de } k,$$

de donde deducimos que existe una función $u \in H^1(I\!R^n)$ y una subsucesión tal que

$$\begin{array}{lcll} \nabla u_k & \to & \nabla u & \text{débilmente en } L^2(I\!R^n), \\ u_k & \to & u & \text{en } L^1_{\text{loc}}(I\!R^n), \\ u_k & \to & u & \text{c.t.p. en } I\!R^n. \end{array}$$

Esto dice también que existe una constante $\alpha < +\infty$ (que será positiva por (6.2.4)) tal que $c_k \to \alpha$, donde $\alpha = u|_H$.

Observemos primero que si pudiéramos hallar una constante $M > 0$ tal que

$$\text{sop } u_k \subset B_M, \qquad M \text{ independiente de } k, \tag{6.2.5}$$

tendríamos $\text{sop } u \subset B_M$, $u_k \to u$ en $L^1(I\!R^n)$ y en consecuencia

$$\inf_{v\in K} J(v) = \liminf_{k\to\infty} \frac{1}{2}\int_{I\!R^n} |\nabla u_k|^2 - 2\lim_{k\to\infty}\int_{I\!R^n} u_k \ge J(u).$$

Además, como

$$|\{x \notin H \ / \ u(x) > 0\}| \leq \liminf_{k\to\infty} |\{x \notin H \ / \ u_k(x) > 0\}| = w_0,$$

sería posible aplicar el lema 6.2.2 y concluir que u es solución de P.

Veamos entonces que podemos probar (6.2.5). Elijamos funciones $u_H^{c_k}$, u_H^{α} de modo tal de tener en (3.1.2) parámetros $l = l_H^{\alpha}$, $l_k = l_H^{c_k}$, con $l_k \to l$.

Entonces aplicando el teorema 6.1.7 para cada k deducimos que u_k es solución de $P_\varepsilon^{c_k}$ para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_1^k$, donde (como en el resto de los parámetros no varía con k) $\varepsilon_1^k = \varepsilon_1(l_k, c_k)$. Usando que $l_k \to l$ y $c_k \to \alpha > 0$ tenemos que $\varepsilon_1^k \to \varepsilon_1(l, \alpha)$, y si elegimos $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ concluímos que para k grande u_k es solución de $P_{\varepsilon_0}^{c_k}$.

Por el teorema 3.2.7, usando que $l_k \to l$, podemos elegir el parámetro μ en (3.2.6) de modo tal que sirva uniformemente para los problemas $P_{\varepsilon_0}^{c_k}$.

Razonando en forma similar, vemos por el teorema 3.2.9, que como $c_k \to \alpha > 0$ y como elegimos μ uniforme para los problemas $P_{\varepsilon_0}^{c_k}$, podemos elegir el parámetro δ en (3.2.7) de modo tal que sirva uniformemente para los problemas $P_{\varepsilon_0}^{c_k}$.

Entonces, podemos aplicar el lema 3.2.16 obteniendo $M = M(n, \varepsilon_0, \mu, \delta)$, es decir, independiente de k, tal que se satisface (6.2.5), y esto concluye la demostración. □

6.2.3. Observación. Del teorema 6.2.1. se deduce que si u es una solución de P, y $\alpha := u|_H > 0$, entonces u satisface las propiedades demostradas para las soluciones de P_ε^α, $\varepsilon \leq \varepsilon_1$.

6.2.4. Lema. *Supongamos que para toda solución u de P se cumple*

$$u|_H > 0.$$

Entonces, existe una constante $R = R(H) > 0$ tal que toda solución u de P satisface

$$\{u > 0\} \subset B_R(0)$$

DEMOSTRACIÓN. Si así no fuera, sería posible hallar una sucesión u_k de soluciones de P satisfaciendo

$$\{u_k > 0\} \cap B_k^c \neq \emptyset \qquad \forall k \in I\!N. \tag{6.2.6}$$

Sea $\alpha_k := u_k|_H$ y supongamos que $\liminf_{k\to\infty} \alpha_k = 0$. Entonces podemos proceder como en el paso I del teorema 6.2.1 y hallar de ese modo una solución v^* de P con $v^*|_H = 0$, lo que contradice la hipótesis.

Entonces $\liminf_{k\to\infty} \alpha_k > 0$, y podemos razonar como en el paso II del mismo teorema. Es decir podemos hallar $M > 0$ independiente de k, tal que sop $u_k \subset B_M \ \forall k \in I\!N$, lo que contradice (6.2.6) y prueba el lema. □

Ahora sí, estamos en condiciones de estudiar la existencia de solución de P_F:

6.2.5. Teorema. *Supongamos que existe una solución u del problema P que satisface*

$$u|_H > 0, \qquad I\!R^n \setminus \{u > 0\} \quad \textit{es conexo.}$$

Entonces existe una solución $D_{\min}$ del problema P_F con

$$D_{\min} = \{u > 0\}, \qquad E(D_{\min} \setminus \overline{H}) = J(u),$$

y por lo tanto

$$E^*(H) = J^*(H).$$

DEMOSTRACIÓN. Sea $D_{\min} := \{u > 0\}$, con u una solución de P satisfaciendo las hipótesis. Claramente $D_{\min} \in \mathrm{Ad}(H)$ y además, de (2.3.1) deducimos que $J(u) \geq E(D_{\min} \setminus \overline{H})$, y por ser u solución de P será

$$J^*(H) = J(u) \geq E(D_{\min} \setminus \overline{H}) \geq E^*(H). \tag{6.2.7}$$

Entonces (2.4.1) muestra que en (6.2.7) vale la igualdad, y esto completa la demostración. □

6.2.6. Teorema. *Asumamos las mismas hipótesis del teorema* 6.2.5. *En particular el problema P_F tiene solución.*

Entonces, para cada solución D de P_F, existe una única v solución de P tal que $D = \{v > 0\}$ y por lo tanto se cumple

1) D es conexo y acotado.

2) Si $n \geq 3$, $\partial_{\mathrm{red}} D$ es localmente analítica y el resto de ∂D tiene medida $\mathcal{H}^{n-1}$ nula.

Si $n = 2$, ∂D es localmente analítica.

DEMOSTRACIÓN. Sea D una solución de P_F. Por el lema 2.3.4, existe una función $v = v(D) \in K$ satisfaciendo

$$J(v) = E(D \setminus \overline{H}) = E^*(H), \tag{6.2.8}$$

$$D = \{v > 0\}. \tag{6.2.9}$$

De (6.2.8) y del teorema 6.2.5 deducimos que

$$J(v) = J^*(H),$$

y por lo tanto v es solución de P. Por otra parte, la unicidad en el lema 2.3.4 indica que no podrá haber otra solución de P satisfaciendo (6.2.9). Además, por (6.2.9), $\alpha := v|_H > 0$ y por el teorema 6.2.1, v es solución de P^α y a su vez de P^α_ε con $\varepsilon \leq \varepsilon_1$. Entonces la conclusión de nuestro teorema se obtiene de (6.2.9), recordando los lemas 3.2.16 y 4.1.13, y los teoremas 5.2.4 y 5.2.8. □

6.2.7. Teorema. *(Solución explícita de P y P_F para H una bola).*

Si $H = B_r(0)$ con $r > 0$, existe una única u solución de $P(H)$, y u satisface

$$u|_H > 0, \qquad I\!R^n \setminus \{u > 0\} \quad \textit{es conexo.} \tag{6.2.10}$$

Por lo tanto $P_F(H)$ tiene una única solución dada por $D = \{u > 0\}$. Además

$$D = B_R(0), \qquad D \setminus \overline{H} = \{x \;/\; r < |x| < R\},$$

donde $R > 0$ es tal que $|D \setminus \overline{H}| = w_0$.

DEMOSTRACIÓN. Comencemos observando que si P tiene una única solución, y dicha solución satisface (6.2.10), $D = \{u > 0\}$ será una solución de P_F (teorema 6.2.5) y además será la única (teorema 6.2.6).

Veamos que la simetría de H nos permite calcular explícitamente una solución del problema P. Sea

$$B^* := B_R(0), \qquad R > 0 \quad \text{tal que } |B^*| = w_0 + |H|,$$

y para $c > 0$ fijo consideremos u una solución de P^c. Llamando u^* a la simetrizada Schwarz de u, con $u^* \in H_0^1(B^*)$, resulta

$$(6.2.11) \qquad J(u) \geq J(u^*),$$

y además, como $u = c$ en H, existen $0 \leq \alpha < \beta < R$ tales que $u^* = c$ en $H_{\alpha,\beta}$, donde

$$(6.2.12) \qquad H_{\alpha,\beta} := \{x \ / \ \alpha < |x| < \beta\}, \qquad |H_{\alpha,\beta}| = |H|.$$

Entonces, aplicando el teorema 2.1.3 para $D := B^*$, $H_1 := H_{\alpha,\beta}$, deducimos que

$$(6.2.13) \qquad J(u^*) \geq \min_{\substack{v \in H_0^1(B^*) \\ v = \text{ const. en } H_{\alpha,\beta}}} J(v) = J(u_{\alpha,\beta}),$$

con

$$u_{\alpha,\beta}(x) = \begin{cases} -\frac{|x|^2}{n} + \frac{\alpha^2}{n} - \frac{\beta^2}{n} + \frac{R^2}{n} & 0 \leq |x| \leq \alpha, \\ -\frac{\beta^2}{n} + \frac{R^2}{n} & \alpha \leq |x| \leq \beta, \\ -\frac{|x|^2}{n} + \frac{R^2}{n} & \beta \leq |x| \leq R, \\ 0 & R \leq |x|, \end{cases}$$

y

$$J(u_{\alpha,\beta}) = -\overline{C}(n)\left(\alpha^{n+2} - \beta^{n+2} + R^{n+2}\right),$$

donde $\overline{C}(n) = \frac{2w_n}{n(n+2)}$. Como $\beta^n - \alpha^n = r^n$ por (6.2.12), llamando $\bar{u} = u_{\alpha=0,\beta=r}$, resulta

$$(6.2.14) \qquad J(u_{\alpha,\beta}) = -\overline{C}(n)\left(\alpha^{n+2} - (r^n + \alpha^n)^{\frac{n+2}{n}} + R^{n+2}\right) \geq J(\bar{u}),$$

y

$$(6.2.15) \qquad J(u_{\alpha,\beta}) = J(\bar{u}) \qquad \Longrightarrow \qquad u_{\alpha,\beta} = \bar{u}.$$

Como

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} -\frac{r^2}{n} + \frac{R^2}{n} & 0 \leq |x| \leq r, \\ -\frac{|x|^2}{n} + \frac{R^2}{n} & r \leq |x| \leq R, \\ 0 & R \leq |x|, \end{cases}$$

deducimos que $\bar{u} \in K(H)$, y por (6.2.11), (6.2.13) y (6.2.14) resulta

$$J(\bar{u}) \leq J(u)$$

para cualquier solución u de P^c, $c > 0$ arbitrario. Observando además que

$$J(\bar{u}) = -C(n)\left((w_0 + |H|)^{\frac{n+2}{n}} - |H|^{\frac{n+2}{n}}\right) < -C(n)w_0^{\frac{n+2}{n}},$$

($C(n)$ la constante en (2.1.10)), concluímos por los teoremas 6.1.9 y 6.2.1 que $\bar{u}$ es solución de P.

Para completar la demostración supondremos que P tiene, además de $\bar{u}$, otra solución u. El último argumento muestra que $c := u|_H$ deberá ser positivo, es decir u es solución de P^c con $c > 0$. Entonces simetrizando y razonando como antes, obtenemos (6.2.11), (6.2.13) y (6.2.14), es decir

$$J(u) \geq J(u^*) \geq J(u_{\alpha,\beta}) \geq J(\bar{u}) = J(u), \tag{6.2.16}$$

y entonces de (6.2.15) y de (6.2.13), recordando que en el teorema 2.1.3 teníamos unicidad, deducimos que $u^* = \bar{u}$.

De (6.2.16) también obtenemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u^*|^2 = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2, \tag{6.2.17}$$

si usamos que u^* es la simetrizada Schwarz de u. De este último hecho deducimos además que

$$u^* = u = c \quad \text{en } H = B_r, \qquad c = \max_{\mathbb{R}^n} u^* = \max_{\mathbb{R}^n} u.$$

Como u es solución de P, u es analítica en el dominio acotado $\{0 < u < c\}$. En consecuencia podemos proceder como en la demostración del teorema 2.2 de [0], y concluir que (6.2.17) sólo será posible si $u = u^* = \bar{u}$, y entonces $\bar{u}$ es la única solución de P.

Observando que $\bar{u}$ satisface (6.2.10) finalizamos la demostración. □

6.2.8. Teorema. *Supongamos que H es tal que toda solución u de $P(H)$ cumple $u|_H = 0$ (es decir, toda solución de $P(H)$ es solución de $P^\circ(H)$).*

Entonces $P_F(H)$ no tiene solución.

DEMOSTRACIÓN. Vamos a probar que

$$E^*(H) \leq J^*(H), \tag{6.2.18}$$

y por (2.4.1) resultará $E^*(H) = J^*(H)$. Entonces, si existiera $D \in$ Ad (H) una solución de P_F, hallaríamos por el lema 2.3.4, una función u satisfaciendo

$$u \in K, \qquad u|_H > 0,$$

$$J(u) = E(D \setminus \overline{H}) = E^*(H),$$

con lo cual u resultaría solución de P y esto no es posible, por hipótesis. Entonces deducimos que si (6.2.18) es cierto, P_F no tiene solución.

Resta probar (6.2.18), y para ello, bastará ver que fijado $\gamma > 0$ pequeño, existe D^γ satisfaciendo

$$D^\gamma \in \text{ Ad } (H), \qquad E(D^\gamma \setminus \overline{H}) < J^*(H) + \gamma. \tag{6.2.19}$$

Sabemos por hipótesis, usando el teorema 6.1.9, que

$$J^*(H) = E(B), \tag{6.2.20}$$

donde B es una bola tal que $|B| = w_0$. Si fijamos $\gamma > 0$ chico, por el corolario 2.1.4, podremos hallar una bola B^γ tal que $|B^\gamma| < w_0$ y

$$E(B^\gamma) < E(B) + \gamma. \tag{6.2.21}$$

Fijemos el centro de B^γ de modo tal que B^γ resulte tangente exterior a H en algún punto y sea

$$A^\gamma := \{x \ / \ d(x, H) < t\},$$

donde elegimos $t = t(\gamma) > 0$ de modo tal que

$$D^\gamma := A^\gamma \cup B^\gamma,$$

satisfaga $|D^\gamma| = w_0 + |H|$.

Se tiene entonces que

$$D^\gamma \in \text{ Ad } (H). \tag{6.2.22}$$

Usando nuevamente el corolario 2.1.4 hallamos una función u^γ tal que

$$u^\gamma \in H_0^1(B^\gamma), \qquad J(u^\gamma) = E(B^\gamma),$$

y por construcción de D^γ y B^γ resulta

$$u^\gamma \in H_0^1(D^\gamma), \qquad u^\gamma = 0 \quad \text{en } H.$$

Entonces

$$E(D^\gamma \setminus \overline{H}) \leq J(u^\gamma) = E(B^\gamma),$$

y por (6.2.21) y (6.2.20)

$$E(D^\gamma \setminus \overline{H}) < J^*(H) + \gamma,$$

de donde obtenemos, junto con (6.2.22), que (6.2.19) se cumple, y esto completa la demostración. $\square$

El próximo teorema da una relación que vincula la geometría de H con la existencia de solución de $P_F(H)$.

6.2.9. Teorema. *Existe una constante $C = C(n) > 0$, tal que si H satisface*

$$\mathcal{H}^{n-1}(\partial H) < C|H|,$$

entonces toda solución u de $P(H)$ cumple $u|_H > 0$.

DEMOSTRACIÓN. Llamemos $p = \mathcal{H}^{n-1}(\partial H)$, $\quad h = |H|$, y supongamos que

$$p < \frac{n}{R}h \qquad \text{con} \qquad R = \left(\frac{w_0}{w_n}\right)^{1/n} \tag{6.2.23}$$

Entonces, nuestro resultado se obtendrá trivialmente de los teoremas 6.2.1 y 6.1.9, si construímos una función v satisfaciendo

$$v \in K, \qquad J(v) < E(B), \tag{6.2.24}$$

con B una bola tal que $|B| = w_0$.

A tal efecto, fijemos $\gamma > 0$ chico y llamemos

$$A^\gamma := \{x \;/\; 0 < d(x, H) < \gamma\}, \qquad \tau := |A^\gamma|.$$

Tomemos una bola B^γ satisfaciendo

$$(H \cup A^\gamma) \cap B^\gamma = \emptyset, \qquad |B^\gamma| = w_0 - \tau,$$

y w^γ la función dada por el corolario 2.1.4 que cumple

$$w^\gamma \in H_0^1(B^\gamma), \qquad J(w^\gamma) = E(B^\gamma), \qquad w^\gamma > 0 \ \text{ en } B^\gamma.$$

Fijemos $\lambda > 0$ arbitrario y considermos la función

$$v^\gamma(x) := \begin{cases} \lambda\gamma & x \in H, \\ \lambda\gamma - \lambda d(x,H) & x \in A^\gamma, \\ w^\gamma & x \in B^\gamma, \\ 0 & \text{en el resto de } I\!R^n. \end{cases}$$

Claramente $v^\gamma \in K$. Además

$$J(v^\gamma) = \frac{1}{2}\int_{A^\gamma} |\nabla v^\gamma|^2 - 2\int_{A^\gamma \cup H} v^\gamma + J(w^\gamma) \le \frac{1}{2}\lambda^2\tau - 2\lambda\gamma h + E(B^\gamma). \tag{6.2.25}$$

De (2.1.9), por construcción de B y B^γ, deducimos

$$E(B^\gamma) - E(B) = C(n)\frac{(n+2)}{n} w_0^{2/n}\tau + O(\tau^2) = \frac{2R^2\tau}{n^2} + O(\tau^2), \tag{6.2.26}$$

con R como en (6.2.23). Si usamos además la estimación

$$\tau = |A^\gamma| = p\gamma + O(\gamma^2),$$

que es válida pues H es regular, y elegimos $\lambda = \frac{2R}{n}$, obtenemos de (6.2.25) y (6.2.26) que

$$\begin{aligned} J(v^\gamma) - E(B) &\le \frac{1}{2}\lambda\gamma(\lambda p - 4h + \frac{4}{n^2}\frac{R^2 p}{\lambda}) + O(\gamma^2) \\ &= \frac{2\lambda\gamma p}{n}(R - n\frac{h}{p}) + O(\gamma^2). \end{aligned}$$

Entonces, recordando que habíamos asumido (6.2.23), deducimos que $v = v^\gamma$ satisface (6.2.24), si γ es suficientemente chico, y esto completa la demostración. □

6.2.10. Comentario sobre los resultados obtenidos.

Hemos resuelto el problema P para cualquier agujero H, y hemos encontrado condiciones bajo las cuales las soluciones de P permiten obtener soluciones de P_F (teorema (6.2.5)). Dichas condiciones resultan naturales para el problema físico que queremos resolver: la condición $u|_H > 0$ indica que H es efectivamente un agujero en la sección de la barra, es decir, H queda rodeado por material. La condición $I\!R^n \setminus \{u > 0\}$ es conexo, indica que en la sección de la barra no hay otros agujeros además de H.

Por otra parte, si para un H dado se tiene que $u|_H = 0$ (ver teorema 6.2.8), se está en la siguiente situación: la barra de sección circular (sin agujero) es más resistente a la torsión que cualquier barra que tenga en su sección al agujero H dado.

Los teoremas 6.2.7 (agujero interior circular) y 6.2.9 (agujero con área no muy chica en relación a su perímetro) dan ejemplos en donde la situación recién descripta no ocurre, es decir, en estos casos, una barra con el agujero interior H, resulta más resistente que la barra sin agujero (en la sección 6.3 probaremos que si un agujero tiene esta propiedad, también la tendrá todo agujero cercano).

Un análisis de distintos ejemplos lleva a pensar que las condiciones del teorema 6.2.5 podrían no cumplirse en ciertos casos: por ejemplo en agujeros con área muy chica en relación a su perímetro (donde fallaría $u|_H > 0$) y en agujeros altamente no convexos (donde fallaría $I\!R^n \setminus \{u > 0\}$ es conexo).

6.3. Solución del problema $P_{\mathcal{F}}(H)$ en la clase $\mathcal{F}$.

6.3.1. Definición. Diremos que $H \in \mathcal{F}$ si

(h1) H es un dominio acotado de $I\!R^n$, con $I\!R^n \setminus \overline{H}$ conexo.

(h2) H es de clase $C^{2,\alpha}$, para algún α, $0 < \alpha < 1$.

(h3) Toda solución u de $P(H)$ satisface

i) $u|_H > 0$,

ii) $\partial\{u > 0\}$ es de clase C^1,

iii) $I\!R^n \setminus \{u > 0\}$ es conexo.

Claramente, las hipótesis (h1) y (h2) garantizan la existencia de solución de $P(H)$. (ver teorema 6.2.1). Además para $n = 2$, la hipótesis (h3) i), implica automáticamente (h3) ii). (ver observación 6.2.3 y teorema 5.2.8).

6.3.2. Observación. Por el teorema 6.2.7, sabemos que $\mathcal{F}$ es no vacío.

6.3.3. Teorema. *Sea $H \in \mathcal{F}$. Entonces,*

1) *El problema $P_F(H)$ tiene solución.*
2) *D es solución de $P_F(H) \iff D = \{u > 0\}$ con u una solución de $P(H)$. Además $E^*(H) = J^*(H)$.*
3) *Si D es solución de $P_F(H)$ entonces*
   - *D es conexo,*
   - *∂D es localmente analítica.*
4) *Existe una constante $R = R(H) > 0$ tal que toda solución D de $P_F(H)$ satisface $D \subset B_R(0)$.*

Además, el teorema es válido si en lugar de (h2) tenemos como hipótesis que H es de clase C^2.

DEMOSTRACIÓN.

1) Se deduce del teorema 6.2.5.
2) Se deduce de los teoremas 6.2.5 y 6.2.6.
3) Se deduce del teorema 6.2.6, observando que (h3) ii) implica que $\partial_{\text{red}} D = \partial D$.
4) Se deduce del lema 6.2.4. □

La definición que damos a continuación nos permitirá, más adelante, establecer una noción de cercanía en la clase $\mathcal{F}$.

6.3.4. Definición. Sean H' un dominio acotado en $\mathbb{R}^n$, $0 < \alpha < 1$, y C una constante positiva. Diremos que $H \in G_{\alpha,C}(H')$ si:

1) H es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$, con $\mathbb{R}^n \setminus \overline{H}$ conexo.
2) H es de clase $C^{2,\alpha}$.

3) $H \subset\subset H'$.

4) Existe $F \in C^{2,\alpha}(\overline{H}')$ con

$$F > 0 \text{ en } H,$$
$$F = 0 \text{ en } \partial H, \ \min_{x \in \partial H} |\nabla F(x)| = 1,$$
$$F < 0 \text{ en } H' \setminus \overline{H},$$

y $\|F\|_{C^{2,\alpha}(\overline{H}')} \leq C$.

6.3.5. Observación. Sea H un dominio acotado de $I\!R^n$ con $I\!R^n \setminus \overline{H}$ conexo, H de clase $C^{2,\alpha}$ para algún $0 < \alpha < 1$. Entonces, para todo dominio acotado H' tal que $H \subset\subset H'$, existe una constante $C > 0$ tal que $H \in G_{\alpha,C}(H')$. (ver [**3**], p. 143 y p. 136).

6.3.6. Observación. Si $H \in G_{\alpha,C}(H')$ para alguna terna α, C, H' como en 6.3.4, entonces $P(H)$ tiene solución, y sus soluciones satisfacen las propiedades ya estudiadas.

Notaremos $d(A, B)$ la distancia de Hausdorff entre A, $B \subset I\!R^n$.

6.3.7. Lema. *Supongamos que H satisface* (h1) *y* (h2).

Sean $0 < \alpha < 1$ tal que $H \in C^{2,\alpha}$, H' un dominio acotado tal que $H \subset\subset H'$, y C una constante positiva.

Sea H_k una sucesión de dominios que satisfacen

$$H_k \in G_{\alpha,C}(H'), \qquad d(H_k, H) \to 0.$$

Entonces, para una subsucesión de los H_k, existen funciones g_k satisfaciendo

(6.3.1) $g_k \in C^1(I\!R^n; I\!R^n)$,

(6.3.2) $g_k(x) = x$ *si* $d(x, \partial H) \geq r_0$,

(6.3.3) $g_k \to I$ *en* $C^1(I\!R^n)$,

(6.3.4) $g_k(H_k) = H$,

donde $r_0 > 0$ es una constante fija que puede elegirse arbitrariamente pequeña.

DEMOSTRACIÓN. Por hipótesis, existen funciones $\varphi_k \in C^{2,\alpha}(\overline{H}')$ satisfaciendo

$$\begin{aligned}
&\varphi_k(x) > 0 \quad \text{si } x \in H_k, \\
&\varphi_k(x) = 0 \quad \text{si } x \in \partial H_k, \ \min_{x\in\partial H_k} |\nabla \varphi_k(x)| = 1, \\
&\varphi_k(x) < 0 \quad \text{si } x \in H' \setminus \overline{H}_k,
\end{aligned}$$

con $\|\varphi_k\|_{C^{2,\alpha}(\overline{H}')} \leq C$. Entonces, existe una función φ y una subsucesión que verifica

$$\varphi_k \to \varphi \qquad \text{en } C^{2,\beta}(H') \text{ para todo } 0 < \beta < \alpha.$$

Usando que $d(H_k, H) \to 0$, podemos hallar $r > 0$ chico y constantes positivas φ_0 y γ tales que

$$|\varphi(x)| \geq \varphi_0 \ \text{ si } \ d(x, \partial H) = r, \qquad |\nabla\varphi(x)| \geq \gamma \ \text{ si } \ x \in B_r(\partial H),$$

y además

$$\begin{aligned}
&\varphi(x) > 0 \quad \text{si } x \in H \cap B_r(\partial H), \\
&\varphi(x) = 0 \quad \text{si } x \in \partial H, \ \min_{x\in\partial H} |\nabla\varphi(x)| = 1, \\
&\varphi(x) < 0 \quad \text{si } x \in \overline{H}^c \cap B_r(\partial H).
\end{aligned} \tag{6.3.5}$$

Por otra parte, si r es suficientemente chico, podemos definir $y : B_r(\partial H) \to \partial H$, donde para cada $x \in B_r(\partial H)$, $y = y(x)$ es el único punto de ∂H tal que $|y - x| = d(x, \partial H)$. Como $\partial H \in C^{2,\alpha}$, se tiene que $y \in C^1(B_r(\partial H))$ (ver lema 14.16 en [3]).

Definamos ahora $x : \partial H \times (-\varphi_0, \varphi_0) \to B_r(\partial H)$,

$$x(y, \varphi) := y + t(y, \varphi)\frac{\nabla\varphi(y)}{|\nabla\varphi(y)|},$$

donde para y, φ fijos, $t = t(y, \varphi)$ es el único $t \in (-r, r)$ tal que $\varphi(y + t\frac{\nabla\varphi(y)}{|\nabla\varphi(y)|}) = \varphi$. Del teorema de la función implícita, deducimos que $t = t(y, \varphi) \in C^1(\partial H \times (-\varphi_0, \varphi_0))$, y en consecuencia $x = x(y, \varphi)$ también.

Por construcción se cumple

$$\varphi(x(y, \varphi)) = \varphi \quad \text{si } y \in \partial H, \ |\varphi| < \varphi_0, \tag{6.3.6}$$

$$x(y(x), \varphi(x)) = x \quad \text{si } x \in B_r(\partial H), \ |\varphi(x)| < \varphi_0. \tag{6.3.7}$$

Fijemos $0 < r_2 < r_1 < r$ y $0 < \varphi_1 < \varphi_0$ tales que

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x)| < \varphi_0/4 \quad \text{si } x \in B_{r_1}(\partial H), \\
&|\varphi(x)| > \varphi_1 \qquad \text{si } r_2 \leq d(x, \partial H) \leq r_1,
\end{aligned}$$

y tomemos $\psi \in C^1(I\!R)$, $0 \leq \psi \leq 1$ satisfaciendo

$$\psi(s) = \begin{cases} 1 & |s| < \varphi_1/4, \\ 0 & |s| > \varphi_1/2. \end{cases}$$

Consideremos las funciones

$$f_k(x) := (1 - \psi(\varphi_k(x)))\ \varphi(x) + \psi(\varphi_k(x))\ \varphi_k(x),$$

que cumplen, para k grande

$$\text{(6.3.8)} \qquad \begin{array}{ll} 0 < f_k(x) < \varphi_0 & \text{si } x \in H_k \cap B_{r_1}(\partial H), \\ f_k(x) = 0 & \text{si } x \in \partial H_k, \\ -\varphi_0 < f_k(x) < 0 & \text{si } x \in \overline{H}_k^c \cap B_{r_1}(\partial H), \end{array}$$

y además

$$\text{(6.3.9)} \qquad f_k(x) = \varphi(x) \qquad \text{si } r_2 \leq d(x, \partial H) \leq r_1.$$

Veamos que para k grande, las funciones

$$g_k(x) := \begin{cases} x(y(x), f_k(x)) & \text{si } x \in B_{r_1}(\partial H), \\ x & \text{si } x \in I\!R^n \setminus B_{r_1}(\partial H), \end{cases}$$

satisfacen las propiedades pedidas: (6.3.1) se deduce de (6.3.7) y (6.3.9); (6.3.2) es obvia. De (6.3.7), observando que $f_k \to \varphi$ en $C^1(\overline{B_{r_1}(\partial H)})$, obtenemos (6.3.3). Finalmente (6.3.4) resulta de combinar (6.3.8), (6.3.6) y (6.3.5). □

6.3.8. Observación. Consideremos un dominio H y una sucesión de dominios H_k como en el lema 6.3.7. Entonces,

1) podemos elegir una solución u_0 de $P^\circ(H)$, que a su vez sea solución de $P^\circ(H_k)$, $\forall k$ (por el teorema 6.1.9, bastará fijar una bola B tal que $|B| = w_0$, $B \cap H = \emptyset$, $B \cap H_k = \emptyset \forall k$, y tomar $u_0 \in H_0^1(B)$ tal que $J(u_0) = E(B)$). En particular, u_0 resulta admisible para los problemas $P(H)$ y $P(H_k)$ $\forall k$.

   Además se observa que para la subsucesión de los H_k construida en el lema 6.3.7

2) $|H_k| \to |H|$,

3) podemos fijar en el problema $P(H)$, las constantes R_0 y r^* en (3.1.1) y $C(H)$ en (6.1.4), de modo tal que las mismas también resulten adecuadas para los problemas $P(H_k)$, para k grande.

6.3.9. Lema. *Supongamos las mismas hipótesis del lema* 6.3.7. *Entonces*

$$\limsup_{k\to\infty} J^*(H_k) \leq J^*(H) \tag{6.3.10}$$

DEMOSTRACIÓN. Sea u_0 como en la observación 6.3.8 y supongamos que $J^*(H) = J(u_0)$. Como para k grande, u_0 es admisible para $P(H_k)$, tendremos que $J^*(H_k) \leq J(u_0)$ y por lo tanto (6.3.10) se cumple.

Si $J^*(H) < J(u_0)$, existe una solución u de $P(H)$ con $c := u|_H > 0$. Sea

$$\gamma := \limsup_{k\to\infty} J^*(H_k), \tag{6.3.11}$$

y elijamos una subsucesión de los H_k tal que

$$\lim_{k\to\infty} J^*(H_k) = \gamma. \tag{6.3.12}$$

Podemos asumir que para cada k en esta subsucesión, existe una función g_k definida como en el lema 6.3.7. Consideremos las funciones

$$v_k(x) := u(g_k(x)).$$

Por construcción de g_k tendremos

$$v_k \in H^1(I\!R^n) \cap L^1(I\!R^n), \qquad v_k = c \text{ en } H_k,$$

$$|\{x \notin H_k \ / \ v_k(x) > 0\}| = w_0 + \rho_k,$$

donde $\rho_k \to 0$. Además, por (6.3.2) tenemos

$$v_k(x) = u(x), \qquad \text{si } d(x, \partial H) \geq r_0,$$

donde elegimos $r_0 > 0$ suficientemente chico para asegurar que $v_k = u$ en un entorno de $\partial\{u > 0\}$.

Tomemos un punto $x_0 \in \partial\{u > 0\}$, tal que $B_{r_1}(x_0) \cap \partial\{u > 0\}$ es regular para algún $r_1 > 0$. Fijado k, si ρ_k es positivo, perturbemos el conjunto $\{u > 0\}$ hacia adentro cerca de x_0, en forma suave, disminuyendo su volumen en ρ_k, y consideremos v'_{ρ_k} definida en $B_{r_1}(x_0)$ como en la observación 5.2.5. (Si $\rho_k < 0$, perturbaremos aumentando el volumen en $-\rho_k$). Entonces la función

$$w_k := \begin{cases} v_k & \text{en } I\!R^n - B_{r_1}(x_0), \\ v'_{\rho_k} & \text{en } B_{r_1}(x_0), \end{cases}$$

es admisible para $P(H_k)$, si k es grande.

Además por construcción tendremos

$$\lim_{k\to\infty} J(w_k) = J(u) = J^*(H). \tag{6.3.13}$$

Si tomamos ahora para cada k, una solución u_k de $P(H_k)$, resultará

$$J^*(H_k) = J(u_k) \leq J(w_k).$$

Esto último, junto con (6.3.11), (6.3.12) y (6.3.13) completa la demostración. □

6.3.10. Lema. *Supongamos las mismas hipótesis del lema* 6.3.7. *Entonces*

$$\lim_{k\to\infty} J^*(H_k) = J^*(H). \tag{6.3.14}$$

DEMOSTRACIÓN. Para cada k, tomemos u_k una solución de $P(H_k)$ y definamos

$$c_k := u_k|_{H_k}.$$

Podemos suponer que las u_k son de soporte compacto (esto ocurre siempre si $c_k > 0$, si $c_k = 0$ podemos elegir $u_k = u_0$ como en la observación 6.3.8).

Procedamos como en el teorema 6.2.1:

PASO I. Supongamos que

$$\liminf_{k\to\infty} c_k = 0.$$

Como $|\{u_k > 0\}| \leq w_0 + |H_k|$, podemos tomar una bola satisfaciendo

$$|B| = w_0 + |H| + 1, \qquad B \cap H = \emptyset,$$

y simetrizar Schwarz las funciones u_k de modo tal de obtener, para k grande, funciones $u_k^* \in H_0^1(B)$, con

$$J(u_k^*) \leq J(u_k) = J^*(H_k).$$

Procediendo del mismo modo que en el paso I del citado teorema y usando el lema anterior, probamos que existe $u^* \in H_0^1(B)$, y una subsucesión tal que

$$\begin{array}{ll} \nabla u_k^* \to \nabla u^* & \text{débilmente en } L^2(\mathbb{R}^n), \\ u_k^* \to u^* & \text{en } L^1(\mathbb{R}^n), \\ u_k^* \to u^* & \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^n, \end{array}$$

y tal que $c_k \to 0$. Entonces, notando que para $t > 0$ y k grande

$$|\{u_k^* > t\}| \leq |\{x \notin H_k \ / \ u_k(x) > 0\}| = w_0,$$

obtenemos

$$|\{u^* > 0\}| \leq w_0.$$

Además, como por construcción de u_k^* y por el lema 6.3.9 tenemos

$$J(u^*) \leq \liminf_{k \to \infty} J(u_k^*) \leq \liminf_{k \to \infty} J^*(H_k) \leq J^*(H),$$

podemos aplicar el lema 6.2.2 y deducir que u^* es solución de $P(H)$, es decir, se tiene $J(u^*) = J^*(H)$, lo cual recordando el lema 6.3.9, prueba (6.3.14).

Observamos además que por construcción, la solución u^* de $P(H)$ hallada, satisface $u^*|_H = 0$, es decir, es solución de $P^\circ(H)$.

PASO II. Supongamos que

$$0 < \liminf_{k \to \infty} c_k \leq +\infty.$$

Resultará entonces que, para k grande, u_k es solución de $P^{c_k}(H_k)$ con $c_k > 0$. Sea

$$\gamma := \liminf_{k \to \infty} J^*(H_k) = \liminf_{k \to \infty} J(u_k), \tag{6.3.15}$$

y elijamos una subsucesión de los H_k tal que

$$\lim_{k \to \infty} J^*(H_k) = \gamma. \tag{6.3.16}$$

Llamemos $h_k = |H_k|$, $h = |H|$. Usando que

$$|\{u_k > 0\}| = w_0 + h_k, \tag{6.3.17}$$

con $h_k \leq h + 1$ para k grande, probamos del mismo modo que en el paso II del teorema 6.2.1, que existe una función $u \in H^1(\mathbb{R}^n)$ y una subsucesión tal que

$$\begin{array}{ll} \nabla u_k \to \nabla u & \text{débilmente en } L^2(\mathbb{R}^n), \\ u_k \to u & \text{en } L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \\ u_k \to u & \text{c.t.p. en } \mathbb{R}^n, \end{array}$$

y tal que $c_k \to c$, c constante, $0 < c < +\infty$, donde $c = u|_H$. Además, la subsucesión puede ser elegida de modo tal de trabajar con dominios H_k tales que la observación 6.3.8 se aplique.

Observemos primero que si pudiéramos hallar una constante $M > 0$ tal que

(6.3.18) $$\text{sop}\ u_k \subset B_M, \qquad M \text{ independiente de } k,$$

tendríamos, por (6.3.15), (6.3.16) y por el lema (6.3.9),

(6.3.19) $$J(u) \leq \liminf_{k\to\infty} J(u_k) = \gamma \leq J^*(H).$$

Tomando límite inferior en (6.3.17), obtendríamos por la observación 6.3.8 que $|\{u > 0\}| \leq w_0 + h$, y esto, junto con (6.3.19) y el lema 6.2.2 implicaría que u es solución de $P(H)$, es decir $J(u) = J^*(H)$. Finalmente de (6.3.19) y del lema 6.3.9 obtendríamos (6.3.14).

Veamos entonces que podemos probar (6.3.18). Por la observación 6.3.8 podemos tomar R_0 en (3.1.1) independiente de k. Además, podemos construir funciones $u_{H_k}^{c_k}$, u_H^c (haciendo uso de las funciones construídas en el lema 6.3.7, por ejemplo), de modo tal de tener en (3.1.2) parámetros $l = l_H^c$, $l_k = l_{H_k}^{c_k}$, con $l_k \to l$.

Entonces, aplicando el teorema 6.1.7 para cada k, deducimos que u_k es solución de $P_\varepsilon^{c_k}(H_k)$ para todo $\varepsilon \leq \varepsilon_1^k$, donde por la observación 6.3.8, $\varepsilon_1^k = \varepsilon_1(h_k, l_k, c_k)$. Como $h_k \to h$, $l_k \to l$ y $c_k \to c > 0$, tendremos que $\varepsilon_1^k \to \varepsilon_1 := \varepsilon_1(h, l, c)$, y eligiendo $\varepsilon_0 < \varepsilon_1$ concluímos que para k grande u_k es solución de $P_{\varepsilon_0}^{c_k}(H_k)$. Por el teorema 3.2.7, usando que $l_k \to l$ y $h_k \to h$, podemos elegir el parámetro μ en (3.2.6) de modo tal que sirva uniformemente para los problemas $P_{\varepsilon_0}^{c_k}(H_k)$ y $P_{\varepsilon_0}^c(H)$.

Razonando en forma similar, vemos por el teorema 3.2.9 que como $c_k \to c > 0$, como elegimos el mismo r^* para H y para todo H_k, y como elegimos μ uniforme para $P_{\varepsilon_0}^{c_k}(H_k)$ y $P_{\varepsilon_0}^c(H)$, podemos elegir el parámetro δ en (3.2.7) de modo tal que sirva uniformemente para los problemas $P_{\varepsilon_0}^{c_k}(H_k)$ y $P_{\varepsilon_0}^c(H)$.

Entonces podemos aplicar el lema 3.2.16, obteniendo $M = M(n, \varepsilon_0, \mu, \delta)$, es decir independiente de k, tal que se satisface (6.3.18), que es lo que restaba probar.

Se observa además que como u es solución de $P(H)$ con $u|_H = c > 0$, u es solución de $P^c(H)$. Entonces podemos deducir del teorema 6.1.7 y de la elección que hicimos de ε_0, que u es solución de $P_{\varepsilon_0}^{c_k}(H)$. □

6.3.11. Lema. *Supongamos las mismas hipótesis del lema* 6.3.7 *y supongamos además que H satisface* (h3) i) *y* ii).

Para cada k consideremos una solución u_k de $P(H_k)$. Entonces existen una solución u de $P(H)$ y una subsucesión de las u_k tal que

$$\partial\{u_k > 0\} \to \partial\{u > 0\} \quad \textit{en distancia de Hausdorff.}$$

Además existe una constante $\rho^* > 0$ tal que para k grande

$$\partial\{u_k > 0\} \subset B_{\rho^*}(\partial\{u > 0\}),$$

y para todo $x_0 \in \partial\{u > 0\}$, si $\nu(x_0)$ es la normal exterior a $\{u > 0\}$ en x_0, se tiene que

$$\partial\{u_k > 0\} \cap B_{\rho^*}(x_0)$$

es el gráfico en la dirección $\nu(x_0)$ de una función C^1.

DEMOSTRACIÓN.

PASO I. Sean $c_k := u_k|_{H_k}$ y supongamos que $\liminf_{k\to 0} c_k = 0$. Entonces podemos proceder como en el paso I del lema 6.3.10, y hallar una solución u^* de $P(H)$ satisfaciendo $u^*|_H = 0$, lo cual contradice que H satisface (h3) i). Por lo tanto $\liminf_{k\to\infty} c_k > 0$ y podemos proceder como en paso II del mismo lema.

Sabemos, en consecuencia, que existe una solución u de $P(H)$ y una subsucesión de las u_k con las siguientes propiedades:

1) $u_k \to u$ c.t.p. en $\mathbb{R}^n$, $c_k \to c > 0$, $c := u|_H$.

2) Existe una constante $M > 0$ independiente de k, tal que

$$\text{sop } u_k \subset B_M(0), \qquad \text{sop } u \subset B_M(0).$$

3) Existe una constante $\varepsilon_0 > 0$ independiente de k tal que

$$u_k \text{ es solución de } P_{\varepsilon_0}^{c_k}(H_k), \qquad u \text{ es solución de } P_{\varepsilon_0}^{c}(H),$$

4) Podemos fijar los parámetros $\mu > 0$ y $\delta > 0$ en (3.2.6) y (3.2.7) de modo tal que sirvan uniformemente para los problemas $P_{\varepsilon_0}^{c_k}(H_k)$ y $P_{\varepsilon_0}^{c}(H)$.

Sea $D := B_R(0) \setminus \overline{B_{\frac{3}{4}\delta}(H)}$ con $R > M$. Observemos que por elección de M y δ tenemos

$$\partial\{u > 0\} \subset D,$$

$$\partial\{u_k > 0\} \subset D, \qquad d(x, H_k) \geq \delta/2 \quad \forall x \in D,$$

si k es grande, y entonces por el lema 3.2.18, existe una constante positiva C independiente de k, tal que

$$\|u_k\|_{C^{0,1}(\overline{D})} \leq C.$$

Por lo tanto, existe una subsucesión tal que

$$u_k \to u \qquad \text{en } C^{0,\beta}(\overline{D}) \text{ para todo } 0 < \beta < 1, \tag{6.3.20}$$

de donde concluímos, usando el lema 3.2.12 y la observación A.2.6 que

$$\partial\{u_k \to 0\} \to \partial\{u > 0\} \text{ en distancia de Hausdorff.} \tag{6.3.21}$$

PASO II. Sabemos, por hipótesis que $\partial\{u > 0\}$ es de clase C^1 y entonces, por el teorema 5.2.4, es de clase C^2.

Tomemos $x_0 \in \partial\{u > 0\}$, y sea $\nu(x_0)$ la normal exterior a $\{u > 0\}$ en x_0. Por comodidad supondremos $x_0 = 0$ y $\nu(x_0) = e_n$.

Fijemos $\sigma > 0$ chico, entonces existe $\rho_0(\sigma) > 0$ tal que si $\rho \leq \rho_0(\sigma)$ se cumple que $\partial\{u > 0\} \cap B_\rho(0)$ es un gráfico en la dirección e_n,

$$u(x) = 0 \qquad \text{si } x \in B_\rho(0), \qquad x_n > \sigma\rho, \tag{6.3.22}$$

$$u(x) > 0 \qquad \text{si } x \in B_\rho(0), \qquad x_n < -\sigma\rho, \tag{6.3.23}$$

y $B_\rho(0) \subset D$. Además como $\partial\{u > 0\}$ es compacta, podemos elegir $\rho_0(\sigma)$ independiente del punto $x_0 \in \partial\{u > 0\}$ que fijamos.

En consecuencia, podemos ver que existen constantes positivas $\bar{\sigma}$ y $\bar{\rho}$, independientes de k tales que si elegimos $\sigma \leq \bar{\sigma}$ y $\rho \leq \bar{\rho}$, resulta

$$u_k(x) = 0 \qquad \text{si } x \in B_{\rho/2}(0), \qquad x_n > 2\sigma\rho, \tag{6.3.24}$$

$$u_k(x) > 0 \qquad \text{si } x \in B_{\rho/2}(0), \qquad x_n < -2\sigma\rho, \tag{6.3.25}$$

para k suficientemente grande.

En efecto, (6.3.24) se obtiene de (6.3.22) y (6.3.20), aplicando el lema 3.2.12 a las funciones u_k (eligiendo las constantes en dicho lema independientes de k). Luego obtenemos (6.3.25) de (6.3.23) y (6.3.20), aplicando el lema 3.2.13 a u.

De (6.3.24) y (6.3.25) se deduce que para k grande, existe

$$x^k \in \partial\{u_k > 0\} \cap B_{\rho/2}(0), \qquad x^k = h^k e_n, \qquad h^k \in (-2\sigma\rho, 2\sigma\rho)$$

Esto último junto con (6.3.24) implica, (si elegimos σ chico) que $u_k \in F(16\sigma, 1; \infty)$ en $B_{\rho/4}(x^k)$ en dirección e_n. Si tomamos además $16\sigma \leq \overline{\sigma_0}$, $\rho/4 \leq \overline{\tau_0}(16\sigma)^2$, con $\overline{\sigma_0}$ y $\overline{\tau_0}$ las constantes del teorema 5.2.1 (elegidas independientes de k), tendremos por dicho teorema que si $2\rho^* \leq \frac{\rho}{32}$, entonces $\partial\{u_k > 0\} \cap B_{2\rho^*}(x^k)$ es el gráfico en la dirección e_n de una función C^1.

Por (6.3.21) tenemos para k grande

$$\partial\{u_k > 0\} \subset B_{\rho^*}(\partial\{u > 0\}) \tag{6.3.26}$$

con lo cual $|x^k| < \rho^*$, y por lo tanto $\partial\{u_k > 0\} \cap B_{\rho^*}(0)$ es el gráfico en la dirección e_n de una función C^1.

Esto último, junto con (6.3.26) completa el lema, si recordamos que habíamos supuesto $x_0 = 0$ y $\nu(x_0) = e_n$, y observamos que la demostración no depende del punto $x_0 \in \partial\{u > 0\}$ elegido. □

El siguiente teorema prueba que si H está en la clase $\mathcal{F}$, todo $\widetilde{H}$ cercano también está, y además sus energías son cercanas y sus soluciones también.

6.3.12. Teorema. *Sea $H \in \mathcal{F}$. Fijemos $0 < \alpha < 1$ tal que $H \in C^{2,\alpha}$ y H' un dominio acotado tal que $H \subset\subset H'$. Entonces*

1) Dado $C > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\widetilde{H} \in G_{\alpha,C}(H'), \quad d(\widetilde{H}, H) < \delta \implies \widetilde{H} \in \mathcal{F}.$$

En particular $P_F(\widetilde{H})$ tiene solución.

2) Dados $C > 0$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$\widetilde{H} \in G_{\alpha,C}(H'), \quad d(\widetilde{H}, H) < \delta \implies |E^*(\widetilde{H}) - E^*(H)| < \varepsilon.$$

3) Dados $C > 0$ y $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\widetilde{H} \in G_{\alpha,C}(H')$, $d(\widetilde{H},H) < \delta$ y si $\widetilde{D}$ es una solución de $P_F(\widetilde{H})$ entonces $d(\widetilde{D},D) < \varepsilon$ para alguna solución D de $P_F(H)$.

DEMOSTRACIÓN DE 1). Dividiremos la demostración en tres etapas.

PASO I. *Dado $C > 0$, existen $\delta > 0$ y $c^* > 0$ tal que si $\widetilde{H} \in G_{\alpha,C}(H')$, $d(\widetilde{H},H) < \delta$ y si $\tilde{u}$ es solución de $P(\widetilde{H})$ entonces $\tilde{u}|_{\widetilde{H}} \geq c^* > 0$.*

DEMOSTRACIÓN. Si así no fuera, existirían una constante $C > 0$ y una sucesión de dominios $H_k \in G_{\alpha,C}(H')$ con $d(H_k,H) \to 0$, y para cada k una solución u_k de $P(H_k)$ con $c_k := u_k|_{H_k} < 1/k$.

Como $c_k \geq 0$ resulta $\lim\limits_{k\to\infty} c_k = 0$, y por lo tanto nos encontramos con la misma situación presentada en el paso I del lema 6.3.10, lo que permite construir una solución u^* de $P(H)$ satisfaciendo $u^*|_H = 0$. Esto contradice (h3) i), que debe cumplirse pues $H \in \mathcal{F}$, y prueba el paso I.

PASO II. *Dado $C > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\widetilde{H} \in G_{\alpha,C}(H')$, $d(\widetilde{H},H) < \delta$ y si $\tilde{u}$ es solución de $P(\widetilde{H})$ entonces $\partial\{\tilde{u} > 0\}$ es de clase C^1.*

DEMOSTRACIÓN. Si así no fuera, existirían una constante $C > 0$ y una sucesión de dominios $H_k \in G_{\alpha,C}(H')$ con $d(H_k,H) \to 0$, y para cada k, una solución u_k de $P(H_k)$ tal que $\partial\{u_k > 0\}$ no es de clase C^1.

Por el lema 6.3.11, podremos extraer de la sucesión u_k, una subsucesión que satisface que $\partial\{u_k > 0\}$ es de clase C^1. De este modo obtenemos una contradicción, probando así el paso II.

PASO III. *Dado $C > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $\widetilde{H} \in G_{\alpha,C}(H')$, $d(\widetilde{H},H) < \delta$ y si $\tilde{u}$ es solución de $P(\widetilde{H})$ entonces $\mathbb{R}^n \setminus \{\tilde{u} > 0\}$ es conexo.*

DEMOSTRACIÓN. Se procede como en el paso II por el absurdo, aplicando el lema 6.3.11, usando además que como $H \in \mathcal{F}$, toda solución u de $P(H)$ satisfará que $\mathbb{R}^n \setminus \{u > 0\}$ es conexo.

Finalmente, eligiendo δ como el mínimo de los obtenidos en los pasos I a III, completamos la demostración de 1).

DEMOSTRACIÓN DE 2). Si 2) no fuera cierto, existirían constantes positivas C y ε_0, y una sucesión de dominos $H_k \in G_{\alpha,C}(H')$ con $d(H_k, H) \to 0$ (y por lo tanto $H_k \in \mathcal{F}$ para k grande), satisfaciendo $|E^*(H_k) - E^*(H)| > \varepsilon_0$.

Bajo estas hipótesis, podemos aplicar el teorema 6.3.3 y el lema 6.3.10 y deducir que $E^*(H_k) \to E^*(H)$, lo que es un absurdo, y prueba 2).

DEMOSTRACIÓN DE 3). Si 3) no fuera cierto, existirían constantes positivas C y ε_0, y una sucesión de dominos $H_k \in G_{\alpha,C}(H')$ con $d(H_k, H) \to 0$ (y por lo tanto $H_k \in \mathcal{F}$ para k grande), y para cada k, una solución D_k de $P_F(H_k)$ satisfaciendo $d(D_k, D) > \varepsilon_0$ para toda solución D de $P_F(H)$.

Por el teorema 6.3.3, se tiene que $D_k = \{u_k > 0\}$, con u_k una solución de $P(H_k)$. Aplicando el lema 6.3.11, podemos deducir que existe una solución u de $P(H)$, tal que para una subsucesión de las u_k se tiene $\partial\{u_k > 0\} \to \partial\{u > 0\}$ en distancia de Hausdorff. Esta misma subsucesión cumplirá también que

$$\{u_k > 0\} \to \{u > 0\} \qquad \text{en distancia de Hausdorff.} \tag{6.3.27}$$

Como por el teorema 6.3.3, $D := \{u > 0\}$ es una solución de $P_F(H)$, lo obtenido en (6.3.27) es claramente una contradicción, y esto completa la demostración del teorema. $\square$

APENDICE.

Demostramos resultados usados en capítulos anteriores. En A.1 probamos un resultado sobre funciones armónicas que entre otras propiedades, tienen crecimiento lineal.

En A.2 desarrollamos resultados - en la línea de [2]- para límites "blow up" de funciones con ciertas propiedades (que son satisfechas localmente por las soluciones de los problemas que estudiamos).

A.1. Funciones armónicas con crecimiento lineal.

A.1.1. Teorema. *Sea u una función lipschitziana en $\mathbb{R}^n$ satisfaciendo*

1) $u \geq 0$ *en* $\mathbb{R}^n$, $\Delta u = 0$ *en* $\{u > 0\}$.

2) $\{x_n < 0\} \subset \{u > 0\}$, $u = 0$ *en* $\{x_n = 0\}$.

3) Existe $0 < \lambda_0 < 1$ *tal que* $\dfrac{|\{u = 0\} \cap B_R(0)|}{|B_R(0)|} > \lambda_0$, $\forall R > 0$.

Entonces

$$u \equiv 0 \qquad en \qquad \{x_n > 0\}.$$

Antes de demostrar el teorema, veamos el siguiente lema:

A.1.2. Lema. *Sea w una función que satisface*

(A.1.1) w *lipschitziana en* $\mathbb{R}^n$ *con constante* L.

(A.1.2) $w \geq 0$ *en* $\mathbb{R}^n$, $\Delta w = 0$ *en* $\{w > 0\}$.

(A.1.3) $\{x_n < 0\} \subset \{w > 0\}$, $w = 0$ *en* $\{x_n = 0\}$.

(A.1.4) *Existe* $0 < \lambda_0 < 1$ *tal que* $\dfrac{|\{w = 0\} \cap B_1(0)|}{|B_1(0)|} > \lambda_0$.

(A.1.5) *Existe* $0 \leq \alpha \leq L$ *tal que* $w(x) \leq \alpha x_n$ *en* $B_1(0) \cap \{x_n > 0\}$.

Entonces, existen constantes c_α y γ tales que

$$w(x) \leq (\alpha - c_\alpha)x_n \qquad en\ B_\gamma(0) \cap \{x_n > 0\}$$

con $\gamma = \gamma(\lambda_0, n)$, $0 < \gamma < 1$ *y* $c_\alpha = c(n, \lambda_0, L, \alpha)$ *una función continua en* α *satisfaciendo* $0 \le c_\alpha \le \alpha$,

$$c_\alpha > 0 \quad \textit{si } \alpha > 0 \qquad y \qquad \lim_{\alpha \to 0+} c_\alpha = c_\alpha \Big|_{\alpha=0} = 0$$

Demostración. Sean L, λ_0, α y w como en el enunciado. Si $\alpha = 0$, tomamos $c_\alpha = 0$ y el resultado es válido cualquiera sea γ, $0 < \gamma < 1$.

Supongamos $\alpha > 0$. De (A.1.1) y (A.1.2) se deduce que w es subarmónica en $I\!R^n$ lo cual, junto con (A.1.5) y (A.1.3) nos dice que la función v definida como $v(x) := \alpha x_n - w(x)$, satisfará:

(A.1.6)

$$v \text{ superarmónica en } I\!R^n, \qquad v \ge 0 \text{ en } B_1(0) \cap \{x_n > 0\}, \qquad v = 0 \text{ en } \{x_n = 0\}.$$

Sea $\beta := \frac{\lambda_0}{2^{n-1}} < 1$. De (A.1.3) y (A.1.4) se deduce que existe un punto x_0 tal que

(A.1.7) $$x_0 \in B_1(0), \qquad (x_0)_n > \beta, \qquad w(x_0) = 0.$$

Sea $r := |x_0| > \beta$ y consideremos la función u que satisface

(A.1.8) $$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{en } B_r(0) \cap \{x_n > 0\} \\ u = v & \text{en } \partial(B_r(0) \cap \{x_n > 0\}). \end{cases}$$

Observamos que de (A.1.6), (A.1.8) y del principio del máximo resulta

(A.1.9) $$v \ge u \qquad \text{en } B_r(0) \cap \{x_n > 0\}$$

Dado $x \in I\!R^n$, $x = (x_1, \ldots, x_n)$, notemos $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_{n-1}, -x_n)$. Entonces por (A.1.8) y (A.1.6) tenemos que si definimos

(A.1.10) $$u(x) := -u(\bar{x}) \qquad \text{si } x \in B_r(0) \cap \{x_n < 0\},$$

u resulta armónica en $B_r(0)$.

Fijemos y tal que

(A.1.11) $$|y| < \beta/2, \qquad y_n > 0.$$

Entonces por la fórmula de representación de Poisson y por (A.1.10) tendremos

$$
\begin{aligned}
u(y) &= \frac{r^2 - |y|^2}{n w_n r} \int_{|x|=r} \frac{u(x)}{|x-y|^n} \, d\mathcal{H}_x^{n-1} \\
&= \frac{r^2 - |y|^2}{n w_n r} \int_{\substack{|x|=r \\ x_n>0}} u(x) \left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^n} \right) d\mathcal{H}_x^{n-1}
\end{aligned}
$$

lo que junto con (A.1.9) y (A.1.8) nos da que

$$
v(y) \geq \frac{r^2 - |y|^2}{n w_n r} \int_{\substack{|x|=r \\ x_n>0}} v(x) \left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^n} \right) d\mathcal{H}_x^{n-1}. \tag{A.1.12}
$$

Tomemos $\delta := \frac{\alpha}{L} \frac{\beta}{4}$ y sea x tal que $|x - x_0| < \delta$. De (A.1.1), (A.1.7) y recordando que $\alpha \leq L$ tenemos que

$$
w(x) \leq L|x - x_0|, \qquad x_n > (x_0)_n - \beta/4
$$

y en consecuencia

$$
w(x) < \frac{\alpha\beta}{4}, \qquad x_n > \frac{3\beta}{4} \qquad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta \tag{A.1.13}
$$

de donde concluímos que

$$
v(x) > \frac{\alpha\beta}{2}, \qquad x_n > 0 \qquad \text{si} \quad |x - x_0| < \delta. \tag{A.1.14}
$$

Entonces, de (A.1.12) (observando que su integrando es positivo), por definición de r y por (A.1.11) y (A.1.14) tenemos

$$
\begin{aligned}
v(y) &\geq \frac{\beta^2}{2 n w_n} \int_{\substack{|x|=r \\ x_n>0 \\ |x-x_0|<\delta}} v(x) \left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^n} \right) d\mathcal{H}_x^{n-1} \\
&\geq \frac{\alpha\beta^3}{4 n w_n} \int_{\substack{|x|=r \\ |x-x_0|<\delta}} \left(\frac{1}{|x-y|^n} - \frac{1}{|\bar{x}-y|^n} \right) d\mathcal{H}_x^{n-1}
\end{aligned} \tag{A.1.15}
$$

y si recordamos (A.1.13) y (A.1.11), y las definiciones de β, r y δ tendremos de (A.1.15) que

$$
v(y) \geq C(n)\beta^4 \, \alpha \, y_n \mathcal{H}^{n-1}(\{x \ / \ |x| = r, \ |x - x_0| < \frac{\alpha\beta}{4L}\}) \geq \alpha C y_n, \tag{A.1.16}
$$

donde $C = C(n, \lambda_0, L, \alpha)$.

Entonces tomando

$$c_\alpha = \alpha C, \qquad \gamma = \beta/2 = \frac{\lambda_0}{2^n},$$

se obtiene por definición de v y por (A.1.16) que

$$0 \leq w(y) \leq (\alpha - c_\alpha)y_n \qquad \text{en } B_\gamma(0) \cap \{y_n > 0\}$$

$$0 < c_\alpha \leq \alpha, \qquad 0 < \gamma < 1 \qquad \text{y} \qquad \lim_{\alpha \to 0+} c_\alpha = 0,$$

lo que prueba el lema. □

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA A.1.1.

PASO I. Sea u como en el enunciado, y $L > 0$ su constante de lipschitz. Observamos que si notamos $x = (x', x_n)$ tendremos

$$u(x) = |u(x', x_n) - u(x', 0)| \leq Lx_n \qquad \text{en } \{x_n > 0\}. \tag{A.1.17}$$

Fijemos $r_0 > 0$ y definamos

$$w_0(x) := \frac{1}{r_0} u(r_0 x). \tag{A.1.18}$$

Entonces w_0 satisface las propiedades (A.1.1) a (A.1.4). Además llamando $\alpha_0 = L$, tenemos por (A.1.17) que

$$w_0(x) \leq \alpha_0 x_n \qquad \text{en } B_1(0) \cap \{x_n > 0\}.$$

Por lo tanto, podemos aplicar el lema A.1.2 y entonces

$$w_0(x) \leq (\alpha_0 - c_{\alpha_0})x_n \qquad \text{en } B_\gamma(0) \cap \{x_n > 0\} \tag{A.1.19}$$

donde $\gamma = \gamma(\lambda_0, n)$, $c_{\alpha_0} = c(n, \lambda_0, L, \alpha_0)$.

Definiendo

$$w_1(x) := \frac{1}{r_1} u(r_1 x), \qquad r_1 := \gamma r_0, \qquad \alpha_1 := \alpha_0 - c_{\alpha_0}$$

tenemos que w_1 satisface las propiedades (A.1.1) a (A.1.4) y entonces por (A.1.18) y (A.1.19)

$$w_1(x) \leq \alpha_1 x_n \qquad \text{en } B_1(0) \cap \{x_n > 0\},$$

donde por construcción, $0 \leq \alpha_1 \leq \alpha_0 = L$.

En general, aplicamos inductivamente el lema A.1.2 obteniendo sucesiones (α_i), (r_i) y funciones (w_i), con $i \in I\!N_0$ dadas por:

$$w_i(x) := \frac{1}{r_i} u(r_i x), \qquad r_{i+1} := \gamma r_i = \gamma^{i+1} r_0, \qquad \gamma = \gamma(\lambda_0, n) \tag{A.1.20}$$

$$\alpha_0 := L, \qquad \alpha_{i+1} := \alpha_i - c_{\alpha_i}, \qquad c_{\alpha_i} = c(n, \lambda_0, L, \alpha_i), \tag{A.1.21}$$

que satisfacen

$$0 \leq \alpha_{i+1} \leq \alpha_i \leq L, \tag{A.1.22}$$

$$w_i(x) \leq \alpha_i x_n \qquad \text{en } B_1(0) \cap \{x_n > 0\},$$

y por lo tanto

$$u(x) \leq \alpha_i x_n \qquad \text{en } B_{r_i}(0) \cap \{x_n > 0\}. \tag{A.1.23}$$

Además de (A.1.22), (A.1.21) y recordando las propiedades de c_α, deducimos que $\alpha_i \to 0$, y se observa que la sucesión (α_i) obtenida es independiente del $r_0 > 0$ con el que comenzamos la iteración.

PASO II. Probemos ahora el teorema. Supongamos que existe un punto z_0 con

$$(z_0)_n > 0 \quad \text{y} \quad u(z_0) > 0.$$

Tomemos la sucesión (α_i) definida en (A.1.21). Como $\alpha_i \to 0$, existirá un $k \in I\!N$ tal que

$$u(z_0) > \alpha_k (z_0)_n \tag{A.1.24}$$

Si construimos w_i como en (A.1.20), partiendo de un $r_0 > 0$ tal que $r_0 > \frac{|z_0|}{\gamma^k}$, tendremos que

$$z_0 \in B_{r_k}(0) \cap \{x_n > 0\},$$

y entonces por (A.1.23)

$$u(z_0) \leq \alpha_k (z_0)_n,$$

lo que contradice (A.1.24) y prueba el teorema. □

A.2. Sucesiones y límites "blow up".

A.2.1. Hipótesis.

Supondremos dado un dominio $D \subset I\!R^n$, y una función u satisfaciendo

$$(\mathrm{P1}) \begin{cases} u \text{ lipschitziana en } D \text{ con constante } L > 0 \\ u \geq 0 \text{ en } D \\ \Delta u = -2 \text{ en } D \cap \{u > 0\} \end{cases}$$

$$(\mathrm{P2}) \begin{cases} \text{Dado } 0 < \kappa < 1, \text{ existen constantes positivas } C_\kappa \text{ y } r_\kappa \\ \text{tales que para bolas } B_r(x_0) \subset D \text{ con } 0 < r < r_\kappa \text{ se cumple que} \\ \frac{1}{r} \displaystyle -\!\!\!\!\!\!\int_{\partial B_r(x_0)} u \leq C_\kappa \text{ implica } \quad u \equiv 0 \text{ en } B_{\kappa r}(x_0) \end{cases}$$

$$(\mathrm{P3}) \begin{cases} \text{Existen constantes positivas } r_0 \text{ y } 0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 < 1 \text{ tales que} \\ \text{para bolas } B_r(x_0) \subset D \text{ con } x_0 \in \partial\{u > 0\} \text{ y } 0 < r < r_0 \\ \qquad \lambda_1 \leq \dfrac{|B_r(x_0) \cap \{u > 0\}|}{|B_r(x_0)|} \leq \lambda_2 \end{cases}$$

A.2.2. Definición. Dada u como en A.2.1, tomemos $B_{\rho_k}(x_k) \subset D$ una sucesión de bolas satisfaciendo $\rho_k \to 0$, $x_k \to x_0 \in D$, $u(x_k) = 0$.

Llamaremos a la sucesión de funciones

$$u_k(x) := \frac{u(x_k + \rho_k x)}{\rho_k},$$

la sucesión "blow up" respecto de $B_{\rho_k}(x_k)$. Como

$$(\mathrm{A.2.1}) \qquad \|\nabla u_k\|_{L^\infty} \leq L \quad \text{en cada compacto de } I\!R^n, \text{ para } k \text{ grande,}$$

y como $u_k(0) = 0$, $\forall k \in I\!N$, existe una función $u_0 : I\!R^n \to I\!R$ que llamaremos límite "blow up", tal que para una subsucesión se satisface

$$(\mathrm{A.2.2}) \qquad u_k \to u_0 \qquad \text{en } C^{0,\alpha}_{\mathrm{loc}}(I\!R^n) \text{ para todo } 0 < \alpha < 1,$$

$$(\mathrm{A.2.3}) \qquad \nabla u_k \to \nabla u_0 \qquad \text{débil } * \text{ en } L^\infty_{\mathrm{loc}}(I\!R^n)$$

y además se cumple que

(A.2.4) $\qquad u_0$ lipschitziana en $I\!R^n$ con constante L.

A.2.3. Lema. *Sean* (u_k) *y* u_0 *como en* A.2.2. *Se cumplen las siguientes propiedades:*

(A.2.5) $u_0 \geq 0$ *en* $I\!R^n$ *y* $\Delta u_0 = 0$ *en* $\{u_0 > 0\}$.

(A.2.6) $\partial\{u_k > 0\} \to \partial\{u_0 > 0\}$ *localmente en distancia de Hausdorff.*

(A.2.7) $\chi(\{u_k > 0\}) \to \chi(\{u_0 > 0\})$ *en* $L^1_{\text{loc}}(I\!R^n)$.

(A.2.8) *Si* $K \subset\subset \text{int}\,\{u_0 = 0\}$, *entonces* $u_k = 0$ *en* K *para* k *grande.*

(A.2.9) *Si* $K \subset\subset \{u_0 > 0\} \cup \text{int}\,\{u_0 = 0\}$, *entonces* $\nabla u_k \rightrightarrows \nabla u_0$ *en* K.

(A.2.10) $\nabla u_k \to \nabla u_0$ *c.t.p. en* $I\!R^n$.

(A.2.11) *Existe* $0 < \lambda < 1$ *tal que* $\dfrac{|B_R(y_0) \cap \{u_0 = 0\}|}{|B_R(y_0)|} > \lambda$, $\forall R > 0$, $\forall y_0 \in \partial\{u_0 > 0\}$.

(A.2.12) *Si* $x_k \in \partial\{u > 0\}$ *entonces* $0 \in \partial\{u_0 > 0\}$.

Demostración. Es claro que $u_0 \geq 0$. Si $B \subset\subset \{u_0 > 0\}$, tendremos que $B \subset\subset \{u_k > 0\}$ para k grande, y por lo tanto $\Delta u_k = -2\rho_k$ en B. Entonces las funciones

$$v_k(x) := u_k(x) + \rho_k \frac{|x|^2}{n}$$

son armónicas en B, y además $v_k \rightrightarrows u_0$ en B, de donde se deduce (A.2.5).

Para ver (A.2.6), observemos que si $B_r(y) \cap \partial\{u_0 > 0\} = \emptyset$ y $u_0 = 0$ en $B_r(y)$, entonces u_k son uniformemente chicas en $B_r(y)$ para k grande y por (P2) $u_k = 0$ en $B_{r/2}(y)$; si $u_0 > 0$ en $B_r(y)$ entonces $u_k > 0$ en $B_{r/2}(y)$. En consecuencia $B_{r/2}(y) \cap \partial\{u_k > 0\} = \emptyset$ para k grande.

Por otra parte si $B_r(y) \cap \partial\{u_k > 0\} = \emptyset$ para k grande y para una subsucesión $u_k = 0$ en $B_r(y)$, entonces $u_0 = 0$ en $B_r(y)$. Si no, será $u_k > 0$ en $B_r(y)$ para k grande y por lo tanto u_0 armónica en $B_r(y)$. En ambos casos $B_r(y) \cap \partial\{u_0 > 0\} = \emptyset$.

De (P3) se deduce que dado un compacto K, $|K \cap \partial\{u_k > 0\}| = 0$ para k grande, y entonces por (A.2.6) obtenemos que

(A.2.13) $$|\partial\{u_0 > 0\}| = 0.$$

Por otra parte, fijados R y r positivos y razonando como lo hicimos para (A.2.6), tendremos que si k es grande

$$\int_{B_R} |\chi(\{u_k > 0\}) - \chi(\{u_0 > 0\})| \leq |\{x \in B_R \ / \ d(x, \partial\{u_0 > 0\}) \leq r\}|$$

y entonces usando (A.2.13) obtenemos (A.2.7).

Para probar (A.2.8) basta usar (P2) y para ver (A.2.9), usamos (A.2.8) cuando $u_0 = 0$, y cuando $u_0 > 0$ trabajamos con las funciones v_k como lo hicimos arriba.

Observemos ahora que (A.2.10) se deduce de (A.2.9) y (A.2.13).

Para ver (A.2.11), notemos que por (A.2.6), dado $y_0 \in \partial\{u_0 > 0\}$, existe $y_k \in \partial\{u_k > 0\}$ tal que $y_k \to y_0$. Entonces por (P3), si fijamos $R > 0$, tenemos que si k es grande

$$\lambda_1 \leq \frac{|B_R(y_k) \cap \{u_k > 0\}|}{|B_R(y_k)|} \leq \lambda_2,$$

y aplicando (A.2.7) obtenemos (A.2.11).

Finalmente (A.2.12) se deduce de (A.2.2) y (P2). □

A.2.4. Lema. *Sea u como en* A.2.1 *y supongamos además*

1) existe $x_0 \in D \cap \partial\{u > 0\}$ tal que

$$u(x) = 0 \qquad si\ x \in D,\ (x - x_0) \cdot e_n = 0,$$

2) existe una bola B tal que

$$x_0 \in \partial B, \qquad B \subset \{x \in D \ / \ (x - x_0) \cdot e_n < 0\} \qquad y\ \ u(x) > 0\ \ si\ x \in B.$$

Entonces

$$\lim_{r \to 0} \frac{|B_r(x_0) \cap \{u > 0\} \cap \{(x - x_0) \cdot e_n > 0\}|}{|B_r(x_0)|} = 0$$

DEMOSTRACIÓN. Consideremos una sucesión arbitraria (ρ_k), tal que $\rho_k \to 0$, $\rho_k > 0$ y sea u_k la sucesión "blow up" respecto de $B_{\rho_k}(x_0)$ con límite u_0.

Entonces por 1) y 2) y por el lema A.2.3 se tiene que u_0 satisface las hipótesis del teorema A.1.1 y por lo tanto $u_0 \equiv 0$ en $x_n > 0$.

Finalmente, por (A.2.7) obtenemos que si $k \to \infty$

$$\frac{1}{\rho_k^n} |B_{\rho_k}(x_0) \cap \{u > 0\} \cap \{(x - x_0) \cdot e_n > 0\}| = \int_{B_1(0) \cap \{x_n > 0\}} \chi(\{u_k > 0\})\, dx \to 0,$$

lo que completa la demostración. □

A.2.6. Observación. Supongamos dados un dominio $D \subset \mathbb{R}^n$, una función u, y funciones u_k, todas ellas satisfaciendo $(P1)$ y $(P2)$, con las mismas constantes.

Supongamos además que

$$u_k \to u \quad \text{en } C^{0,\beta}(D) \qquad \text{para todo } 0 < \beta < 1.$$

Entonces razonando en forma similar a como lo hicimos al probar (A.2.6), podemos demostrar que

$$\partial\{u_k > 0\} \to \partial\{u > 0\} \quad \text{localmente en distancia de Hausdorff.}$$

REFERENCIAS.

[1] H. FEDERER, *Geometric Mesure Theory*, Springer Verlag, Heidelberg-New York, 1969.

[2] H. ALT, L. CAFFARELLI, *Existence and regularity for a minimun problem with free boundary*, J. Reine Angew. Math. **325** (1981), pp. 105-144.

[3] D. GILBARG, N.S. TRUDINGER, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1983.

[4] E. GIUSTI, *Minimal Surfaces and Functions of Bounded Variation*, Birkhäuser, Boston (1984).

[5] H. BREZIS, *Análisis funcional. Teoría y aplicaciones*, Alianza Editorial, Madrid, 1984.

[6] C. BANDLE, *Isoperimetric Inequalities and applications*, Pitman, London, 1980.

[7] W. ZIEMER, *Weakly Differentiable Functions*, Springer Verlag, New York, 1988.

[8] V. GUILLEMIN, A. POLLACK, *Differential Topology*, Englewood Cleffs, N.J., 1974.

[9] H. ALT, L. CAFFARELLI, A. FRIEDMAN, *A free boundary problem for quasilinear elliptic equations*, Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa, Serie IV, vol XI (1984), pp. 1-44.

[10] A. FRIEDMAN, *Variational principles and free boundary problems*, Wiley, New York, 1982.

[11] N. AGUILERA, H. ALT, L. CAFFARELLI, *An Optimization problem with volume constraint*, Siam J. Control and Optimization, Vol 24, N° 2, march 1986.

[12] W. RUDIN, *Análisis Real y Complejo*, 1985, Editorial Alhambra.

[13] B. KAWOHL, *Rearrangements and Convexity of Sevel Sets in PDE*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1150, Springer-Verlag, 1985.

[14] D. KINDERLEHRER, L. NIREMBERG, *Regularity in Free Boundary Problems*, Ann. Sc. Norm. Sup., Pisa, Serie IV, Vol. IV, **1** (1977), pp. 373-391.

[15] N. MUSKHELISHVILI, *Some basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity*, Groningen-Holland, 1953.

[16] L. LANDAU, E. LIFSHITZ, *Theory of Elasticity*, London, Pergamon Press, 1959.

[17] G. POLYA, *Torsional rigidity, principal frecuency, electrostatic capacity and symmetrization*, Quarterly of Applied Mathematics **6** (1948), pp. 267-277.

[18] G. POLYA, A. WEINSTEIN, *On the Torsional Rigidity of Multiply connected cross sections*, Annals of Mathematics, Vol. 52, N° 1, July 1950.

[19] N. BANICHUK, *Problems and methods of optimal structural design*, Plenum Press, London, 1983.

[20] R. GONZALEZ DE PAZ, *On the optimal design of elastic shafts*, Model. Math. et Anal. Num., Vol. 23, N° 4, 1989.

[21] J. DUGUNDJI, *Topology*, Allyn and Bacon, Inc. Boston, 1966.

[22] G. DUVAUT, J. LIONS, *Les Inéquations en Mecánique et en Physique*, Dunord, Paris, 1972.