Convergencia de integrales singulares truncadas en espacios Lp con pesos

De Rosa, Liliana Noemí

1993

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

CONVERGENCIA DE INTEGRALES SINGULARES TRUNCADAS EN ESPACIOS L^p CON PESOS

LILIANA NOEMÍ DE ROSA

DIRECTOR DE TESIS
Dr. Carlos Segovia Fernández

LUGAR DE TRABAJO
Instituto Argentino de Matemática (CONICET)

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR AL TÍTULO DE:
Doctora en Ciencias Matemáticas
1993

Agradezco al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por concederme las becas de Iniciación y Perfeccionamiento, y al Instituto Argentino de Matemática por brindarme un lugar para desarrollar mi tarea de investigación.

Deseo agradecer al Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, por el dictado de materias que han permitido ampliar mis estudios.

Finalmente, quiero expresar mi mayor agradecimiento al Dr. Carlos Segovia Fernández cuyo apoyo ha sido fundamental para la realización de este trabajo.

Liliana Noemí de Rosa.

INDICE.

1. INTRODUCCIÓN.

§1. Notaciones y definiciones.

Indicamos con $I\!R^n$ el espacio euclídeo formado por n-uplas $x = (x_1, \ldots, x_n)$, donde cada x_i es un número real, $1 \leq i \leq n$.

Como es usual, para cada x que pertenece a $I\!R^n$, su norma es el número

$$|x| = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{1/2}$$

La bola centrada en x y de radio $t > 0$ es el conjunto $B(x,t) = \{y \in I\!R^n : |x - y| < t\}$. Cuando x es el vector nulo, escribiremos simplemente B_t.

Si $A \subset I\!R^n$ es medible Lebesgue, denotaremos su medida por $|A|$ y la función característica de A, por χ_A.

Dada una función medible f, la Función Maximal de Hardy-Littlewood de f, está definida por

$$Mf(x) = \sup_{x \in B} \left(|B|^{-1} \int_B |f(y)|\, dy \right) \tag{1.1}$$

donde B es cualquier bola en $I\!R^n$. Si en la definición anterior se consideran cubos en lugar de bolas se obtiene una función, que salvo constantes multiplicativas que sólo dependen de la dimensión, acota y está acotada puntualmente por Mf. Esto también sucede, si para definir la función maximal en el punto x, sólo se consideran bolas (o cubos) centrados en x. Para todas estas posibles definiciones usaremos la misma notación: Mf.

Si $Q \subset I\!R^n$ es un cubo y α es un número real positivo, αQ denota el cubo que tiene el mismo centro que Q y $|\alpha Q| = \alpha^n |Q|$.

Sea $w(x) \geq 0$ una función medible definida sobre $I\!R^n$ y $E \subset I\!R^n$ medible, su medida con respecto al peso w será notada $w(E) = \int_E w(x)\, dx$. Una función medible

f pertenece a $L^p(w)$, $1 \leq p < \infty$, si $\|f\|_{L^p(w)} = \left(\int_{I\!R^n} |f(x)|^p w(x)\, dx\right)^{1/p}$ es finito. El espacio $L^\infty(w)$ consiste de todas las funciones medibles y esencialmente acotadas con respecto a la medida $w(x)\, dx$. Además para $f \in L^\infty(w)$, $\|f\|_{L^\infty(w)}$ es el supremo esencial, con respecto a w, de $|f(x)|$, $x \in I\!R^n$. Cuando $w \equiv 1$, caso que corresponde a la medida de Lebesgue, como es usual escribiremos $f \in L^p$ y $\|f\|_p$, $1 \leq p \leq \infty$.

Sea w un peso en $I\!R^n$ y sea T un operador de $L^p(w)$ en $L^q(w)$ donde $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$. Se dice que T es de tipo fuerte (p,q) con respecto a w, si existe una constante $C > 0$ tal que para toda $f \in L^p(w)$ resulta

$$\|T(f)\|_{L^q(w)} \leq C\|f\|_{L^p(w)}. \tag{1.2}$$

Cuando $1 \leq q < \infty$, T es de tipo débil (p,q) con respecto a w, si existe $C > 0$ tal que para toda $f \in L^p(w)$ y todo $\lambda > 0$, vale la desigualdad

$$w\left(\{x : |T(f)(x)| > \lambda\}\right) \leq \frac{C}{\lambda^q}\|f\|^q_{L^p(w)}. \tag{1.3}$$

Para q finito, todo operador de tipo fuerte (p,q) es de tipo débil (p,q), con respecto al mismo peso; esto también vale para $q = \infty$ pues las definiciones de tipo fuerte y débil coinciden.

§2. Clases de pesos.

El par de pesos (v,u) definidos sobre $I\!R^n$ pertenece a la clase $A(p,q)$, $1 \leq p \leq \infty$ y $1 \leq q \leq \infty$, si existe una constante C tal que para toda bola (o cubo) $B \subset I\!R^n$

$$\left(|B|^{-1}\int_B u(x)^{-p'}\, dx\right)^{1/p'} \left(|B|^{-1}\int_B v(x)^q\, dx\right)^{1/q} \leq C. \tag{1.4}$$

Aquí y en lo que sigue, p' denota el exponente conjugado de p, es decir, $p' = p/(p-1)$.

Cuando $q = p$, $1 < p < \infty$, y $u(x)^p = v(x)^p = w(x)$, (1.4) equivale a afirmar que el peso w pertenece a la clase A_p introducida por B. Muckenhoupt. Con respecto a la definición (1.2) podemos observar aquí, que la función maximal de Hardy-Littlewood introducida en (1.1), es de tipo fuerte (p,p), $1 < p < \infty$ si y sólo si $w \in A_p$, (ver **[13]**).

Si $q = p = 1$, veremos que (1.4) es equivalente a la condición

$$Mv(x) \leq C\,u(x)$$

para casi todo $x \in I\!R^n$. Cuando éste sea el caso, simplemente escribiremos $(v,u) \in A_1$; y $w \in A_1$, si $v(x) = u(x) = w(x)$. La condición A_1 sobre un peso w, es necesaria y suficiente para que la función maximal sea de tipo débil $(1,1)$ con respecto a w (ver (1.3)).

Si $v(x) = 0$ para casi todo $x \in I\!R^n$, o bien $u(x) = \infty$ en casi todo punto, trivialmente el par (v,u) satisface la condición (1.4). Dichos pares serán excluídos de las clases $A(p,q)$ pues carecen de interés con respecto a los resultados que demostraremos.

Sea $S(x)$ la función definida sobre $I\!R^n$ por:

$$S(x) = (1 + |x|)^{-n} \chi_{[0,1]}(|x_n|), \tag{1.5}$$

y para cada $t > 0$, sea $S_t(x) = t^{-n} S(x/t)$. Diremos que el par de pesos (v,u) pertenece a la clase $\mathcal{A}_1$ si existe una constante C tal que

$$\sup_{t>0} (S_t * v)(x) \leq Cu(x) \tag{1.6}$$

para casi todo $x \in I\!R^n$.

La menor constante C que aparece en cada una de las definiciones (1.4) y (1.6), será llamada la constante del par de pesos (o bien, del peso) en la clase correspondiente.

§3. Clases de núcleos integrales singulares.

De aquí en adelante, el elemento de área de la esfera unitaria $\Sigma = \{x \in I\!R^n : |x| = 1\}$, será denotado por $d\sigma(x)$. El espacio $L^p(\Sigma)$, $1 \leq p \leq \infty$, es la clase de funciones medibles f, definidas sobre Σ tales que

$$\|f\|_{L^p(\Sigma)} = \left(\int_\Sigma |f(x)|^p \, d\sigma(x) \right)^{1/p} < \infty.$$

(1.7) Definición. Sea $k(x) = \Omega(x)|x|^{-n}$ una función medible definida sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Decimos que k es un núcleo integral singular si Ω satisface las siguientes condiciones,

(i) Ω es una función positivamente homogénea de grado cero, es decir, para todo $\lambda > 0$ y todo $x \neq 0$, $\Omega(\lambda x) = \Omega(x)$,

(ii) $\displaystyle\int_\Sigma \Omega(x)\, d\sigma(x) = 0$,

(iii) si

$$w(\delta) = \sup_{|h|\leq\delta} \sup_{x\in\Sigma} |\Omega(x+h) - \Omega(x)|$$

entonces vale la condición de tipo Dini,

$$\int_0^1 w(\delta)\delta^{-1}\, d\delta < \infty.$$

Observemos que (iii) implica que Ω está acotada sobre Σ.

(1.8) Definición. Una función medible $k(x) = \Omega(x)|x|^{-n}$ definda sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ es un núcleo integral singular de tipo L^r-Dini, $1 \leq r \leq \infty$, si Ω satisface (i) y (ii) de la definición anterior y la siguiente condición,

(iv) $\Omega \in L^r(\Sigma)$, y si

$$w_r(\delta) = \sup_{|\rho|\leq\delta} \left(\int_\Sigma |\Omega(\rho x) - \Omega(x)|^r\, d\sigma(x) \right)^{1/r},$$

donde ρ denota una rotación y $|\rho| = \sup_{x\in\Sigma} |\rho x - x|$, entonces

$$\int_0^1 w_r(\delta)\delta^{-1}\, d\delta < \infty.$$

Notemos que si Ω satisface la condición (iii), también verifica (iv) para todo r : $1 \leq r \leq \infty$.

Sea k un núcleo integral singular L^r-Dini, y sea $\varepsilon > 0$. Se define la integral singular truncada de una función f como

$$(1.9) \qquad K_\varepsilon(f)(x) = \int_{x-y \notin B_\varepsilon} k(x-y)f(y)\,dy,$$

y la integral singular de f asociada al núcleo k,

$$(1.10) \qquad K(f)(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} K_\varepsilon(f)(x),$$

si este límite existe.

(1.11) Definición. Un núcleo integral fuertemente singular está definido sobre $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, por

$$k^b(x) = \frac{e^{i|x|^{-b}}}{|x|^n} \chi_{[0,1]}(|x|),$$

donde $0 < b < \infty$. Para cada $\eta : 0 < \eta < 1$, la integral fuertemente singular truncada de f, es

$$(1.12) \qquad K^b_\eta(x) = \int_{\eta < |y| \leq 1} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n} f(x-y)\,dy.$$

La integral fuertemente singular de f, se define como

$$(1.13) \qquad K^b(f)(x) = \lim_{\eta \to 0} K^b_\eta(f)(x),$$

si este límite existe.

§4. Familias admisibles de intervalos de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$.

Sea $\mathcal{R} = \{R_t\}_{t>0}$ una familia de intervalos de $\mathbb{R}^n$ centrados en el origen y de lados paralelos a los ejes coordenados. Para cada $t > 0$, sea $R_t = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_i| \leq \varphi_i(t),\ 1 \leq i \leq n\}$. Entonces queda definida sobre la semirrecta $(0, \infty)$ una función $\varphi_i(t) > 0$ para cada i: $1 \leq i \leq n$.

(1.14) Definición. Decimos que la familia de intervalos $\mathcal{R} = \{R_t\}_{t>0}$ de $I\!R^n$, $n \geq 2$, es admisible, si las funciones $\varphi_i(t)$ satisfacen:

(i) existe i_0 tal que $\varphi_{i_0}(t) = t$ y para todo $i \neq i_0$, $\varphi_i(t) \geq t$,

(ii) para todo i, $\lim_{t \to 0} \varphi_i(t) = 0$, y

(iii) para cada i, $\lim_{t \to 0} \varphi_i(t)/t$, existe (puede ser infinito).

De ahora en adelante vamos a suponer que $i_0 = n$.

Sea k un núcleo integral singular. Dada una función medible f, definimos la integral singular truncada por R_t, de f

$$K_{R_t}(f)(x) = \int_{x-y \notin R_t} k(x-y) f(y)\, dy, \tag{1.15}$$

y la integral singular de f asociada a la familia $\mathcal{R} = \{R_t\}_{t>0}$, como

$$K_{\mathcal{R}}(f)(x) = \lim_{t \to 0} K_{R_t}(f)(x), \tag{1.16}$$

si este límite existe.

§5. Enunciados de los resultados.

En 1967, los núcleos integrales singulares de tipo L^1-Dini fueron introducidos por A.P. Calderón, M. Weiss y A. Zygmund en [3]. Ellos demostraron que el operador integral singular asociado K, (ver (1.10)), está bien definido en casi todo punto, es de tipo fuerte (p,p), $1 < p < \infty$, y de tipo débil $(1,1)$ con respecto a la medida de Lebesgue.

A.P. Calderón y O.N. Capri, probaron en [2] (1984) que si f es una función integrable y $K(f)$ también pertenece a L^1, entonces las integrales singulares truncadas $K_\epsilon(f)$, definidas en (1.9), pertenecen al espacio L^1; y además

$$\lim_{\epsilon \to 0} \|K_\epsilon(f) - K(f)\|_1 = 0.$$

En el trabajo de D.S. Kurtz y R.L. Wheeden [11], en 1979, se definen las clases de núcleos integrales singulares L^r-Dini, $1 < r \leq \infty$. Allí se demuestra el tipo débil

$(1,1)$ del operador asociado K con respecto a un peso w, cuando $w^{r'} \in A_1$, y el tipo fuerte (p,p), bajo la hipótesis que el peso pertenezca a una clase A_q donde el índice q depende de p y r.

Para $r > 1$, si $w^{r'} \in A_1$ y f y $K(f)$ pertenecen a $L^1(w)$, O.N. Capri y C. Segovia demostraron en 1989, (ver [4]), que para las integrales singulares truncadas vale la acotación

$$\|K_\varepsilon(f)\|_{L^1(w)} \leq C\{\|f\|_{L^1(w)} + \|K(f)\|_{L^1(w)}\}, \qquad \varepsilon > 0$$

(C es una constante independiente de f y ε) y la convergencia en la norma de $L^1(w)$ de $K_\varepsilon(f)$ a $K(f)$, cuando ε tiende a cero.

Teniendo en cuenta que no se conocen acotaciones en norma p ni desigualdades de tipo débil con pares de pesos, para estas integrales singulares con núcleos de tipo L^r-Dini, fue necesario desarrollar nuevas técnicas para probar que el operador está bien definido y que las integrales singulares truncadas están acotadas y convergen en norma. En este caso, el resultado principal que hemos obtenido es el siguiente,

Teorema A. *Sea k un núcleo integral singular L^r-Dini y $(v,u) \in A(p, p(r/p)')$, $1 \leq p \leq r < \infty$ ó $1 = p < r \leq \infty$. Si $f \in L^p(u^p)$ entonces la función $K(f)$ está bien definida en casi todo punto. Si además $K(f) \in L^p(u^p)$ resulta*

(i) $\|K_\varepsilon(f)\|_{L^p(v^p)} \leq C\{\|f\|_{L^p(u^p)} + \|K(f)\|_{L^p(u^p)}\}$,

para todo $\varepsilon > 0$, donde C es una constante independiente de ε y f. También tenemos que

(ii) $\lim_{\varepsilon \to 0} \|K_\varepsilon(f) - K(f)\|_{L^p(v^p)} = 0.$

Con respecto a los operadores integrales asociados a núcleos integrales singulares, truncaciones no estándar del tipo de (1.14) fueron consideradas por E.O. Harboure, en 1979.

Si $\mathcal{F}$ es la clase de intervalos de $\mathbb{R}^n$ centrados en el origen y con lados paralelos a los ejes coordenados, para cada $R \in \mathcal{F}$ se define la integral singular truncada por R de f

$$T_R(f)(x) = \int_{x-y \notin R} k(x-y) f(y)\, dy.$$

E.O. Harboure demostró, en [9] (1979), que el operador maximal asociado

$$T^*(f)(x) = \sup_{R\in\mathcal{F}} |T_R(f)(x)|, \tag{1.17}$$

es de tipo fuerte (p,p), $1 < p < \infty$ y de tipo débil (1,1) con respecto a la medida de Lebesgue generalizando a rectángulos el bien conocido resultado para la función maximal $K^*(f)(x) = \sup_{\epsilon>0} |K_\epsilon(f)(x)|$.

A partir de lo anterior y para truncaciones con familias $\mathcal{R} = \{R_t\}_{t>0}$ de intervalos de $\mathbb{R}^n$ admisibles, también en [9] se probó que el operador singular asociado $K_\mathcal{R}$ (ver (1.16)) es acotado en L^p, $1 < p < \infty$ y de tipo débil $(1,1)$ con respecto a la medida de Lebesgue.

H. Aimar y E.O. Harboure, en [1] (1987), obtuvieron para T^* (definido en (1.17)) el tipo fuerte (p,p) con respecto a un peso w perteneciente a A_p, $1 < p < \infty$, y el tipo débil $(1,1)$, para $w \in A_1$.

Volviendo a los pares de pesos, de acuerdo con el Teorema A, si $(v,u) \in A_1$ y además, f y $K(f)$ pertenecen a $L^1(u)$ se tiene la acotación en la norma de $L^1(v)$ de las integrales singulares truncadas $K_\epsilon(f)$ y la convergencia de ellas a la integral singular $K(f)$. Entonces el problema que se plantea, consiste en obtener resultados análogos para las integrales singulares truncadas por intervalos R_t de una familia admisible de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, (ver (1.15)).

La mayor dificultad que hallamos para resolver el problema planteado se debió al hecho que las clases de pesos consideradas no parecen ser las adecuadas. En consecuencia definimos una nueva clase: $\mathcal{A}_1$, (ver (1.6)), que como notaremos más adelante, en el caso de pares de pesos distintos está estrictamente contenida en A_1 (Proposición (3.5) y Observación (3.10)). El resultado que hemos obtenido será demostrado en el Capítulo 3 y es el siguiente,

Teorema B. *Sean $\mathcal{R} = \{R_t\}_{t>0}$ una familia de intervalos de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, admisible, (v,u) perteneciente a la clase $\mathcal{A}_1$ y k un núcleo integral singular. Entonces, si $f \in L^1(u)$ la función $K_\mathcal{R}(f)$ está bien definida en casi todo punto. Si $K_\mathcal{R}(f)$ pertenece a $L^1(u)$, resulta* *(i)* $\|K_{R_t}(f)\|_{L^1(v)} \le C\{\|f\|_{L^1(u)} + \|K_{\mathcal{R}}(f)\|_{L^1(u)}\}$,

para todo $t > 0$, *donde* C *es una constante independiente de* t *y* f; *y además*

(ii) $\lim_{t\to 0} \|K_{R_t}(f) - K_{\mathcal{R}}(f)\|_{L^1(v)} = 0$.

Si $w \in A_1$, *entonces (i) y (ii) valen con* $v = u = w$.

Dada una función θ definida sobre $\mathbb{R}$, suave, radial y tal que $\theta(x) = 1$ si $|x| \ge 1$, y $\theta(x) = 0$ si $|x| \le 1/2$, se define el multiplicador

$$\widehat{T_b f}(x) = \theta(|x|)e^{i|x|^b}|x|^{-b/2}\hat{f}(x),$$

donde $0 < b < 1$ y $\hat{g}$ denota la transformada de Fourier de $g \in L^2$.

Estos operadores fueron estudiados en el contexto de espacios L^p por I. Hirschman, S. Waigner, C. Fefferman y E.M. Stein. Ellos obtuvieron la acotación en norma

$$\|T_b f\|_p \le C_p\|f\|_p$$

para $1 < p < \infty$ y la correspondiente desigualdad de tipo débil $(1,1)$ (ver [10] y [6]).

El operador T_b está dado por la convolución con el núcleo

$$C\frac{e^{i\alpha_b|x|^{-b'}}}{|x|^n}\chi_{(|x|\le 1)} + h(x),$$

donde $b' = 1/(1-b)$, $\alpha_b = b^{b/(1-b)} - b^{1/(1-b)}$ y

$$|h(x)| \le C(1+|x|)^{-(n+1)} + C|x|^{-n+\delta}\chi_{(|x|\le 1)}$$

con δ dependiendo sólo de b. Este resultado se debe a S. Wainger y puede hallarse en [14] (1965).

La estimación de h implica la desigualdad

$$|h * f(x)| \le CMf(x)$$

donde Mf es la función maximal de Hardy-Littlewood definida en (1.1). En consecuencia el tipo fuerte (p,p), $1 < p < \infty$ y la desigualdad débil (1,1) obtenidos para T_b también valen para el operador

$$\widetilde{T}_b(f)(x) = \lim_{\eta\to 0}\int_{\eta<|x-y|\le 1}\frac{e^{i\alpha_b|x-y|^{-b'}}}{|x-y|^n}f(y)\,dy. \tag{1.18}$$

Por otro lado, teniendo en cuenta el comportamiento de la función maximal sobre $L^p(w)$, con w en la clase A_p de Muckenhoupt (ver §2), para estudiar T_b sobre estos espacios $L^p(w)$ es suficiente considerar el operador $\widetilde{T}_b$.

Las acotaciones usuales para los núcleos integrales singulares de las cuales se derivan los resultados en norma con pesos, no son adecuadas en el caso del operador $\widetilde{T}_b$. El núcleo que aparece en (1.18) satisface para $|x| \geq 2|y|$, una desigualdad del tipo

$$\left| \frac{e^{i\alpha_b|x-y|^{-b'}}}{|x-y|^n} - \frac{e^{i\alpha_b|x|^{-b'}}}{|x|^n} \right| \leq C\frac{|y|}{|x|^{n+b'+1}},$$

que comparada con la desigualdad que se tiene para los núcleos singulares de Calderón y Zygmund, donde aparece el factor $|y|/|x|^{n+1}$, pone de manifiesto la presencia de una singularidad mayor que en el caso de éstos.

Para el operador asociado a estos núcleos fuertemente singulares, en 1984, S. Chanillo (ver [5]) obtuvo la correspondiente desigualdad de tipo fuerte (p,p), $1 < p < \infty$ con respecto a pesos w de las clases A_p y el tipo débil $(1,1)$ si $w \in A_1$. Luego, el problema a estudiar consiste en obtener para las integrales fuertemente singulares truncadas una acotación en la norma de $L^1(w)$, si $w \in A_1$, y la convergencia de ellas a la integral fuertemente singular. En este caso, la buena definición en casi todo punto del operador está garantizada por el trabajo de Chanillo.

Dado que la presencia del factor α_b es irrelevante con respecto a las acotaciones obtenidas, con las definiciones introducidas en (1.12) y (1.13) enunciamos el resultado que demostraremos.

Teorema C. *Sea k^b un núcleo integral fuertemente singular y sea $w \in A_1$. Si f y $K^b(f) \in L^1(w)$, entonces*

(i) $\|K^b_\eta(f)\|_{L^1(w)} \leq C\{\|f\|_{L^1(w)} + \|K^b(f)\|_{L^1(w)}\},$

para todo η suficientemente pequeño, donde C es una constante independiente de η y f. Además

(ii) $\lim_{\eta\to 0} \|K^b_\eta(f) - K^b(f)\|_{L^1(w)} = 0.$

2. ACOTACION Y CONVERGENCIA EN NORMA DE INTEGRALES SINGULARES TRUNCADAS ASOCIADAS A NUCLEOS L^r-DINI.

§1. Núcleos integrales singulares L^r-Dini, $1 \leq r \leq \infty$.

Para los núcleos integrales singulares L^r-Dini, definidos en (1.8) el siguiente resultado obtenido por D.S. Kurtz y R.L. Wheeden (ver [11]) será usado para la demostración del segundo corolario que se deduce del próximo teorema.

(2.1) Lema. *Sea k un núcleo integral singular L^r-Dini, $1 \leq r \leq \infty$, y sea $|y| < R/2$. Entonces*

$$\left(\int_{R<|x|<2R} |k(x-y) - k(x)|^r \, dx\right)^{1/r}$$

$$\leq \frac{C}{R^{n/r'}} \left(\frac{|y|}{R} + \int_{\frac{|y|}{2R}<\delta<\frac{|y|}{R}} w_r(\delta)\delta^{-1} \, d\delta\right),$$

donde C no depende de $R > 0$.

El siguiente teorema es una generalización de un resultado de B. Muckenhoupt, que puede hallarse en [12].

(2.2) Teorema. *Sea F una función definida sobre $I\!R^n$ y para cada entero s,*

$$C_s = \left(\int_{2^s<|x|\leq 2^{s+1}} |F(x)|^r \, dx\right)^{1/r}$$

Supongamos que

$$A = \sum_{s \in \mathbb{Z}} C_s 2^{sn/r'} < \infty.$$

Entonces, si $F_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}F(x/\varepsilon)$, $1 \leq p < r \leq \infty$ ó $1 \leq p = r < \infty$, $(v,u) \in A(p, p(r/p)')$ y $f \in L^p(u^p)$, resulta *(i)* $\|F_\varepsilon * f\|_{L^p(v^p)} \le CA\|f\|_{L^p(u^p)}$

donde C es una constante que depende sólo de n, r, p y la constante que le corresponde al par de pesos por pertenecer a la clase $A(p,p(r/p)')$.

Además, si $a = \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,dx$, se tiene:

(ii) $\lim_{\varepsilon\to 0} \|F_\varepsilon * f - af\|_{L^p(v^p)} = 0.$

DEMOSTRACIÓN.

Para cada $s \in \mathbb{Z}$, sea χ_s la función característica del anillo $2^s < |x| \le 2^{s+1}$. Consideremos $\{Q_j\}_j$, una partición de $\mathbb{R}^n$ en cubos de lados paralelos a los ejes coordenados y de longitud $2^{s+1}\varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} \|(F\chi_s)_\varepsilon * f\|^p_{L^p(v^p)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_{\mathbb{R}^n} (F\chi_s)_\varepsilon(z-x) f(x)\,dx \right|^p v(z)^p\,dz \\ &\le \varepsilon^{-np} \sum_j \int_{Q_j} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(F\chi_s)((z-x)/\varepsilon)|\,|f(x)|\,dx \right)^p v(z)^p\,dz. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Para cada z en Q_j si $|z-x| \le 2^{s+1}\varepsilon$, entonces x pertenece a $3Q_j$, cubo que tiene el mismo centro que Q_j y medida igual a $3^n|Q_j|$. Por la desigualdad integral de Minkowski, (2.3) está acotado por,

$$\varepsilon^{-np} \sum_j \left[\int_{3Q_j} |f(x)| \left(\int_{Q_j} |(F\chi_s)((z-x)/\varepsilon)|^p v(z)^p\,dz \right)^{1/p} dx \right]^p$$

Aplicando la desigualdad de Hölder y mediante un cambio de variables, tenemos que

$$\left(\int_{Q_j} |F\chi_s((z-x)/\varepsilon)|^p v(z)^p\, dz\right)^{1/p}$$

$$\leq \left(\int_{Q_j} |F\chi_s((z-x)/\varepsilon)|^r\, dz\right)^{1/r} \left(\int_{Q_j} v(z)^{p(r/p)'}\, dz\right)^{1/p(r/p)'}$$

$$\leq \varepsilon^{n/r} \left(\int_{2^s<|y|\leq 2^{s+1}} |F(y)|^r\, dy\right)^{1/r} \left(\int_{Q_j} v(z)^{p(r/p)'}\, dz\right)^{1/p(r/p)'}$$

$$\leq \varepsilon^{n/r} C_s \left(\int_{3Q_j} v(z)^{p(r/p)'}\, dz\right)^{1/p(r/p)'}$$

Luego (2.3) está acotado por

$$\varepsilon^{-np/r'} C_s^p \sum_j \left(\int_{3Q_j} v(z)^{p(r/p)'}\, dz\right)^{1/(r/p)'} \left(\int_{3Q_j} |f(x)|\, dx\right)^p$$

Ahora por la desigualdad de Hölder

$$\left(\int_{3Q_j} |f(x)|\, dx\right)^p \leq \left(\int_{3Q_j} |f(x)|^p u(x)^p\, dx\right) \left(\int_{3Q_j} u(x)^{-p'}\, dx\right)^{p/p'}$$

y teniendo en cuenta que $(v,u) \in A(p, p(r/p)')$, (ver (1.4)), para cada $s \in \mathbb{Z}$,

$$\|(F\chi_s)_\varepsilon * f\|^p_{L^p(v^p)} \leq \varepsilon^{-np/r'} C_s^p \sum_j C|3Q_j|^{p-1+1/(r/p)'} \int_{3Q_j} |f(x)|^p u(x)^p\, dx$$
$$= \varepsilon^{-np/r'} C_s^p C(3\, 2^{s+1}\varepsilon)^{np/r'} 3^n \|f\|^p_{L^p(u^p)} = C' C_s^p 2^{snp/r'} \|f\|^p_{L^p(u^p)}.$$

Entonces

$$\|F_\varepsilon * f\|_{L^p(v^p)} \leq \sum_{s\in\mathbb{Z}} \|(F\chi_s)_\varepsilon * f\|_{L^p(u^p)} \leq C \left(\sum_{s\in\mathbb{Z}} C_s 2^{sn/r'}\right) \|f\|_{L^p(u^p)},$$

y queda probada la parte (i). Veamos ahora (ii).

En primer lugar, observemos que la hipótesis sobre $(C_s)_s \in \mathbb{Z}$ implica que F es una función integrable sobre $\mathbb{R}^n$. En efecto, por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned}\|F\|_1 &= \sum_{s\in\mathbb{Z}} \int_{2^s<|x|\le 2^{s+1}} |F(x)|\,dx \le C \sum_{s\in\mathbb{Z}} \left(\int_{2^s<|x|\le 2^{s+1}} |F(x)|^r\,dx \right)^{1/r} 2^{sn/r'} \\ &= C \sum_{s\in\mathbb{Z}} C_s 2^{sn/r'} < \infty.\end{aligned}$$

Supongamos que $f \in L^p(u^p)$ y es acotada y de soporte acotado. Sea $N > 0$ tal que el soporte de f está contenido en $\{x : |x| \le N\}$ y

$$\int_{|x|\le N} v(x)^p\,dx > 0, \qquad \int_{|x|\le N} u(x)^{-p'}\,dx > 0.$$

Notemos que si el par $(v,u) \in A(p, p(r/p)')$, por la desigualdad (1.4) siempre es posible hallar N en tales condiciones, salvo que $v \equiv 0$ ó $u \equiv \infty$, casos que hemos excluído.

Para cada $\varepsilon > 0$, resulta

$$\begin{aligned}\|F_\varepsilon * f - af\|^p_{L^p(v^p)} &\le \left(\int_{|x|\le 3N} + \int_{|x|>3N} \right) |F_\varepsilon * f - af|^p v^p\,dx \\ &= I_1(\varepsilon)^p + I_2(\varepsilon)^p.\end{aligned}$$

Puesto que F es integrable, dado $\eta > 0$ existe $M > 0$ tal que

$$\int_{|z|>M} |F(z)|\,dz < \eta.$$

Sabemos que v^p es localmente integrable y f es una función acotada con soporte acotado, luego cuando $|z| \le M$, si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño

$$\left(\int |f(x-\varepsilon z) - f(x)|^p v(x)^p\,dx \right)^{1/p} < \eta.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}I_1(\varepsilon) \le &\left(\int_{|x|\le 3N} \left(\int_{|z|>M} |F(z)||f(x-\varepsilon z) - f(x)|\,dz \right)^p v(x)^p\,dx \right)^{1/p} + \\ &+ \left(\int_{|x|\le 3N} \left(\int_{|z|\le M} |F(z)||f(x-\varepsilon z) - f(x)|\,dz \right)^p v(x)^p\,dx \right)^{1/p}\end{aligned}$$

aplicando la desigualdad integral de Minkowski,

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &\le 2\|f\|_\infty \int_{|z|>M} |F(z)| \left(\int_{|x|\le 3N} v(x)^p\,dx\right)^{1/p} dz \\ &\quad + \int_{|z|\le M} |F(z)| \left(\int |f(x-\varepsilon z)-f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} dz \\ &\le \left\{ 2\|f\|_\infty \left(\int_{|x|\le 3N} v(x)^p\,dx\right)^{1/p} + \|F\|_1 \right\} \eta. \end{aligned}$$

En consecuencia, $I_1(\varepsilon)$ tiende a cero, cuando ε tiende a cero.

Ahora, estimaremos $I_2(\varepsilon)$. Por la desigualdad integral de Minkowski

$$\text{(2.4)} \quad \left(\int_{|x|>3N} |(F\chi_s)_\varepsilon * f(x)|^p v(x)^p\,dx\right)^{1/p}$$

$$\le \varepsilon^{-n} \int |f(z)| \left(\int_{|x|>3N} |F\chi_s((x-z)/\varepsilon)|^p v(x)^p\,dx\right)^{1/p} dz.$$

Cuando z pertenece al soporte de f y $|x| > 3N$, se tiene que $|z| \le N$ y $|x-z| > 2N$. Entonces, el miembro derecho de (2.4) es igual a cero para $\varepsilon 2^{s+1} \le 2N$, o equivalentemente para $s \le \log_2(N/\varepsilon)$. Si $s > \log_2(N/\varepsilon)$, por la desigualdad de Hölder

$$\text{(2.5)} \quad \left(\int_{|x|>3N} |(F\chi_s)((x-z)/\varepsilon)|^p v(x)^p\,dx\right)^{1/p}$$

$$\le \varepsilon^{n/r} \left(\int_{2^s<|y|\le 2^{s+1}} |F(y)|^r\,dy\right)^{1/r} \left(\int_{|x-z|\le 2^{s+1}\varepsilon} v(x)^{p(r/p)'}\,dx\right)^{1/p(r/p)'}$$

Multiplicando y dividiendo por $\left(\int_{|x|<N} u(x)^{-p'}\,dx\right)^{1/p'}$ y teniendo en cuenta que $|x| < N$ y $|z| \le N$ implican $|x-z| < \varepsilon 2^{s+1}$, si $(v,u) \in A(p, p(r/p)')$ tenemos que (2.5) está acotado por

$$\varepsilon^{n/r} C_s C (2^{s+1}\varepsilon)^{n(1-1/p+1/p(r/p)')} \left(\int_{|x|<N} u(x)^{-p'}\,dx\right)^{-1/p'}$$

$$= C' \varepsilon^n C_s 2^{sn/r'} \left(\int_{|x|<N} u(x)^{-p'}\,dx\right)^{-1/p'}$$

Por lo tanto, para (2.4) obtenemos la cota

$$C\|f\|_1 \left(\int_{|x|<N} u(x)^{-p'} \, dx \right)^{-1/p'} C_s 2^{sn/r'}.$$

En consecuencia,

$$I_2(\varepsilon) \leq C\|f\|_1 \left(\int_{|x|<N} u(x)^{-p'} \, dx \right)^{-1/p'} \sum_{s > \log_2(N/\varepsilon)} C_s 2^{sn/r'},$$

y esto muestra que $I_2(\varepsilon)$ tiende a cero cuando ε tiende a cero.

En lo que sigue usaremos el hecho que las funciones de $L^p(u^p)$ acotadas y de soporte acotado son densas en $L^p(u^p)$. También nos conviene observar, que por el Teorema de Diferenciación de Lebesgue, la condición $(v,u) \in A(p, p(r/p)')$ implica que para casi todo x

$$v(x) \leq Cu(x).$$

Sea $f \in L^p(u^p)$. Dado $\eta > 0$, consideremos $g \in L^p(u^p)$ acotada y de soporte acotado tal que $\|f - g\|_{L^p(u^p)} < \eta$. Tenemos que

$$\|F_\varepsilon * f - af\|_{L^p(v^p)} \leq \|F_\varepsilon * (f-g)\|_{L^p(v^p)} + \|F_\varepsilon * g - g\|_{L^p(v^p)} + |a| \, \|f-g\|_{L^p(v^p)}.$$

Por la parte (i), resulta

$$\|F_\varepsilon * f - af\|_{L^p(v^p)} \leq (CA + c|a|)\eta + \|F_\varepsilon * g - g\|_{L^p(v^p)}.$$

Puesto que (ii) ya ha sido probada para funciones de $L^p(u^p)$ acotadas y de soporte acotado

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|F_\varepsilon * f - af\|_{L^p(v^p)} = 0.$$

(2.6) Corolario. *Sea H una función positivamente homogénea de grado cero que pertenece a $L^r(\Sigma)$, $1 \leq r \leq \infty$, y φ una función cuya menor mayorante radial decreciente ψ, $(\psi(|x|) = \|\varphi \cdot \chi_{\mathbb{R}^n \setminus B_{|x|}}\|_\infty)$ es integrable sobre $\mathbb{R}^n$. Si (v,u) pertenece a $A(p, p(r/p)')$ y $f \in L^p(u^p)$, $1 \leq p < r \leq \infty$ ó $1 \leq p = r < \infty$, entonces* *(i)* $\|(H\varphi)_\varepsilon * f\|_{L^p(v^p)} \le c\|H\|_{L^r(\Sigma)} \int_0^\infty \psi(t)t^{n-1}\, dt\, \|f\|_{L^p(u^p)}$,

y además si $a = \int_{\mathbb{R}^n} H(x)\varphi(x)\, dx$, *entonces*

(ii) $\lim_{\varepsilon\to 0} \|(H\varphi)_\varepsilon * f - af\|_{L^p(v^p)} = 0$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $F = H\varphi$. Para esta función F estimamos la sucesión $(C_s)_{s\in\mathbb{Z}}$ del Teorema (2.2). Resulta que

$$\begin{aligned} C_s &= \left(\int_{2^s<|x|\le 2^{s+1}} |(H\varphi)(x)|^r\, dx\right)^{1/r} \\ &\le \left(\int_{2^s}^{2^{s+1}} \psi(t)^r t^{n-1} \int_\Sigma |H(x')|^r\, d\sigma(x')\, dt\right)^{1/r} \\ &\le C_{n,r}\|H\|_{L^r(\Sigma)}\psi(2^s)2^{sn/r}. \end{aligned}$$

Luego

$$\begin{aligned} \sum_{s\in\mathbb{Z}} C_s 2^{sn/r'} &\le C_{n,r}\|H\|_{L^r(\Sigma)} \sum_{s\in\mathbb{Z}} \psi(2^s)2^{sn} \\ &\le C'_{n,r}\|H\|_{L^r(\Sigma)} \int_0^\infty \psi(t)t^{n-1}\, dt. \end{aligned}$$

Ahora (i) y (ii) se deducen del Teorema (2.2).

(2.7) Corolario. *Sea k un núcleo integral singular L^r -Dini y $\varphi \in C^1$ cuyo soporte está contenido en $\{x : |x| \le 1\}$ y tal que $\int \varphi(x)\, dx = 1$. Definimos*

$$\delta(x) = K(\varphi)(x) - k_1(x),$$

donde $k_1(x) = k(x)$ si $|x| \ge 1$ y $k_1(x) = 0$ en otro caso.

Entonces el núcleo $\delta_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\delta(x/\varepsilon)$ satisface

(i) $\|\delta_\varepsilon * f\|_{L^p(v^p)} \le C\|f\|_{L^p(u^p)}$,

(ii) $\lim_{\varepsilon \to 0} \|\delta_\varepsilon * f\|_{L^p(v^p)} = 0$,

cuando (v,u) *pertenece a* $A(p, p(r/p)')$, $1 \leq p < r \leq \infty$ *ó* $1 \leq p = r < \infty$, *y* $f \in L^p(u^p)$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $\delta^{(1)}(x) = \delta(x)$ para $|x| \leq 4$ y $\delta^{(1)}(x) = 0$ si $|x| > 4$.

Teniendo en cuenta que el soporte de φ está contenido en la bola unitaria y $\int_\Sigma k(y)\, d\sigma(y) = 0$, cuando $|x| \leq 4$ resulta

$$\delta^{(1)}(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon < |y| \leq 1+|x|} k(y)\ [\varphi(x-y) - \varphi(x)]\ dy\ -\ \frac{\Omega(x)}{|x|^n} \chi_{(1 \leq |x| \leq 4)}(x),$$

y puesto que $\varphi \in C^1$, para todo $|x| \leq 4$,

$$|\delta^{(1)}(x)| \leq C(1 + |\Omega(x)|).$$

Entonces por el Corolario (2.6) tenemos que $\delta^{(1)}$ satisface (i).

Sea $\delta^{(2)}(x) = \delta(x) - \delta^{(1)}(x)$. Dado $x : |x| > 4$, para todo y que pertenece al soporte de φ, resulta $|x - y| > 3$ y entonces

$$\delta^{(2)}(x) = \int_{|y| \leq 1} k(x-y)\varphi(y)\, dy - k(x).$$

Por la hipótesis $\int \varphi(x)\, dx = 1$, obtenemos la acotación

$$|\delta^{(2)}(x)| \leq \|\varphi\|_\infty \int_{|y| \leq 1} |k(x-y) - k(x)|\, dy.$$

Ahora estimaremos la sucesión $(C_s)_{s \in \mathbb{Z}}$ del Teorema (2.2) para $F(x) = \delta^{(2)}(x)$. Observemos que $C_s = 0$ para $s < 2$. En el caso $s \geq 2$ resulta

$$C_s \leq C \left(\int_{2^s < |x| \leq 2^{s+1}} \left(\int_{|y| \leq 1} |k(x-y) - k(x)|\, dy \right)^r dx \right)^{1/r}$$

$$\leq C \int_{|y| \leq 1} \left(\int_{2^s < |x| \leq 2^{s+1}} |k(x-y) - k(x)|^r\, dx \right)^{1/r} dy.$$

Luego, por el Lema (2.1), tenemos

$$C_s \leq C 2^{-sn/r'} \left(2^{-s} + w_r(2^{-s})\right),$$

y entonces

$$\sum_{s \in \mathbb{Z}} C_s 2^{sn/r'} \leq C \sum_{s \geq 2} (2^{-s} + w_r(2^{-s})) = C \left(1 + \int_0^1 w_r(t) t^{-1}\, dt\right) < \infty.$$

Ahora podemos aplicar el Teorema (2.2), a $F = \delta^{(2)}$ y obtener la parte (i) del Corolario (2.7) para $\delta^{(2)}$. Esto, junto con el resultado ya obtenido para $\delta^{(1)}$, prueba (i) para $\delta = \delta^{(1)} + \delta^{(2)}$.

En lo que sigue probaremos que $\int \delta(x)\, dx = 0$, lo cual es suficiente para obtener (ii). Sea $N \geq 2$. Recordando que $\int_{\Sigma} k(y) d\sigma(y) = 0$ y $\varphi \in C^1$, tenemos

$$\begin{aligned}
\int_{|x| \leq N} \delta(x)\, dx &= \int_{|x| \leq N} K(\varphi)(x)\, dx \\
&= \int_{|x| \leq N} \int_{|y| \leq N+1} k(y)\ [\varphi(x-y) - \varphi(x)]\ dy\, dx.
\end{aligned}$$

Cambiando el orden de integración, resulta

$$\begin{aligned}
\int_{|x| \leq N} \delta(x)\, dx &= \int_{|y| \leq N+1} k(y) \left(\int_{|x| \leq N} [\varphi(x-y) - \varphi(x)]\ dx\right) dy \\
&= \int_{N-1 \leq |y| \leq N+1} + \int_{|y| \leq N-1} = I_1 + I_2.
\end{aligned}$$

Para cada $y : |y| \leq N-1$, como el soporte de φ está contenido en la bola unitaria, se tiene que $\int_{|x| \leq N} \varphi(x-y)\, dx = \int \varphi(x)\, dx$, y en consecuencia $I_2 = 0$. Para I_1, vale la acotación

$$\begin{aligned}
|I_1| &\leq 2\|\varphi\|_1 \int_{N-1 \leq |y| \leq N+1} |k(y)|\, dy \\
&\leq C \|\varphi\|_1\, \|\Omega\|_{L^1(\Sigma)}\, N^{-1}.
\end{aligned}$$

Luego

$$\int_{\mathbb{R}^n} \delta(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{|x|\le N} \delta(x)\,dx = 0,$$

como queríamos probar.

§2. Resultados sobre pares de pesos de la clase $A(p,q)$, $1 \le p \le \infty$, $1 \le q \le \infty$.

Recordemos que según (1.4), el par de pesos (v,u) definidos sobre $\mathbb{R}^n$, pertenece a la clase $A(p,p(r/p)')$, $1 \le p \le r \le \infty$, si existe una constante C tal que para toda bola (o cubo) $B \subseteq \mathbb{R}^n$

$$\left(|B|^{-1}\int_B u(x)^{-p'}\,dx\right)^{1/p'} \left(|B|^{-1}\int_B v(x)^{p(r/p)'}\,dx\right)^{1/p(r/p)'} \le C. \tag{2.8}$$

Los pares (v,u), cuando $v \equiv 0$ ó $u \equiv \infty$, no serán considerados.

(2.9) Lema. *Sea* $1 < p \le r < \infty$. *Si* $(v,u) \in A(p,p(r/p)')$ *entonces*

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(x)^{-p'}(1+|x|)^{-np'/r'-p'/r}\,dx < \infty.$$

Demostración.

Dado que excluímos los casos $v \equiv 0$ y $u \equiv \infty$, existe $N > 0$ tal que

$$0 < \int_{|x|<N} v(x)^{p(r/p)'}\,dx < \infty.$$

Teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} & u(x)^{-p'}(1+|x|)^{-n\frac{p'}{r'}-\frac{p'}{r}}\,dx \\ &= \left(\int_{|x|<N} + \sum_{k\ge 1}\int_{2^{k-1}N\le|x|<2^kN}\right) u(x)^{-p'}(1+|x|)^{-n\frac{p'}{r'}-\frac{p'}{r}}\,dx\end{aligned} \tag{2.10}$$

resulta que (2.10) está acotado por

$$\int_{|x|<N} u(x)^{-p'}\,dx + \sum_{k\geq 1} \left(2^{k-1}N\right)^{-np'/r'-p'/r} \int_{|x|<2^kN} u(x)^{-p'}\,dx.$$

La condición $(v,u)\in A(p,p(r/p)')$, (ver (2.8)) implica que para toda bola B

$$\int_B u(x)^{-p'}\,dx \leq C|B|^{p'/r'} \left(\int_B v(x)^{p(r/p)'}\,dx\right)^{-\frac{p'}{p(r/p)'}}$$

Entonces (2.10) está acotado por

$$C|B_N|^{\frac{p'}{r'}} \left[\left(\int_{|x|<N} v^{p(\frac{r}{p})'}\,dx\right)^{-\frac{p'}{p(r/p)'}} + \sum_{k\geq 1}(2^{k-1}N)^{-n\frac{p'}{r'}-\frac{p'}{r}} 2^{kn\frac{p'}{r'}} \left(\int_{|x|<2^kN} v^{p(\frac{r}{p})'}\,dx\right)^{-\frac{p'}{p(r/p)'}}\right]$$

$$\leq C|B_N|^{p'/r'} \left(\int_{|x|<N} v^{p(r/p)'}\,dx\right)^{-\frac{p'}{p(r/p)'}} \left[1+(2/N)^{n\frac{p'}{r'}+\frac{p'}{r}} \sum_{k\geq 1}(2^k)^{-p'/r}\right] < \infty.$$

(2.11) Lema. *Sea* $1\leq r\leq\infty$. *Si* $(v,u)\in A(1,r')$ *entonces existe* $C>0$ *tal que para casi todo* $x\in \mathbb{R}^n$,

$$(1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}} \leq Cu(x).$$

Demostración.

Supongamos que $1<r\leq\infty$. La condición $(v,u)\in A(1,r')$ implica que para toda bola B

$$\operatorname*{sup\ esencial}_{x\in B} u(x)^{-1} \left(|B|^{-1}\int_B v(x)^{r'}\,dx\right)^{1/r'} \leq C,$$

o equivalentemente

$$\left(|B|^{-1}\int_B v(x)^{r'}\,dx\right)^{1/r'} \leq C \operatorname*{inf\ esencial}_{x\in B} u(x). \tag{2.12}$$

Veamos que a partir de (2.12) se deduce que para casi todo x,

$$M(v^{r'})(x)^{1/r'} \leq Cu(x).$$

En efecto, consideremos el conjunto

$$A = \{x : M(v^{r'})(x)^{1/r'} > Cu(x)\}.$$

Si $x \in A$ existe una bola B tal que

$$\left(|B|^{-1} \int_B v(y)^{r'}\, dy\right)^{1/r'} > Cu(x),$$

y como $v^{r'}$ es localmente integrable, podemos suponer que el centro de B es un punto de coordenadas racionales y su radio es un número racional. Puesto que por (2.12), $B \cap A$ tiene medida cero, el conjunto A queda cubierto por una unión numerable de conjuntos de medida nula y en consecuencia $|A| = 0$.

Ahora sea $N > 1$ tal que

$$0 < \int_{|y|<N} v(y)^{r'}\, dy.$$

Entonces en casi todo punto

$$\left(|B(x, N + N|x|)|^{-1} \int_{B(x,N+N|x|)} v(y)^{r'}\, dy\right)^{1/r'} \leq M(v^{r'})(x)^{1/r'} \leq Cu(x),$$

lo cual implica

$$(1 + |x|)^{-n/r'} \leq C|B_N|^{1/r'} \left(\int_{B_N} v^{r'}\, dy\right)^{-1/r'} u(x).$$

Es decir, $(1 + |x|)^{-n/r'-1/r} \leq (1 + |x|)^{-n/r'} \leq Cu(x)$ para casi todo $x \in I\!R^n$.

En el caso $r = 1$, la condición $(v, u) \in A(1, \infty)$ implica que para toda bola B

$$\sup_{x\in B} \text{esencial}\; v(x) \leq C \inf_{x\in B} \text{esencial}\; u(x). \tag{2.13}$$

Sea $N > 0$ tal que

$$0 < \sup_{|x|<N} \text{esencial}\; v(x) = \alpha < \infty.$$

Dado que para todo $k > 0$, por (2.13)

$$\alpha \leq \sup_{|x|<N+k} \text{esencial } v(x) \leq C \inf_{|x|<N+k} \text{esencial } u(x),$$

resulta que para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$\alpha \leq C u(x).$$

Entonces $(1+|x|)^{-n/r'-1/r} \leq \frac{C}{\alpha} u(x)$ en casi todo punto.

(2.14) Lema. *Si $(v,u) \in A(p, p(r/p)')$, $1 < p \leq r < \infty$ ó $1 = p \leq r \leq \infty$, entonces*

$$\|f\|_{L^1((1+|x|)^{-n/r'-1/r})} \leq C \|f\|_{L^p(u^p)}, \tag{2.15}$$

donde la constante C no depende de f.

DEMOSTRACIÓN.

Si $1 < p \leq r < \infty$ por la desigualdad de Hölder, resulta

$$\int |f(x)|(1+|x|)^{-n/r'-1/r}\,dx$$
$$\leq \left(\int |f(x)|^p u(x)^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int u(x)^{-p'}(1+|x|)^{-np'/r'-p'/r}\,dx\right)^{1/p'}$$

Entonces, por el Lema (2.9) obtenemos (2.15).

En el caso $p = 1$, (2.15) se tiene por la desigualdad dada en el Lema (2.11).

(2.16) Observación. El Lema (2.14) implica que si $f \in L^p(u^p)$ y $(v,u) \in A(p, p(r/p)')$, $1 < p \leq r < \infty$ ó $1 = p \leq r \leq \infty$, entonces f es localmente integrable.

§3. Demostración del Teorema A.

En la proposición siguiente demostraremos que las integrales singulares truncadas $K_\varepsilon(f)$ y la integral singular $K(f)$ están bien definidas en casi todo punto, si $f \in L^p(u^p)$ y $(v,u) \in A(p, p(r/p)')$, $1 < p \le r < \infty$ ó $1 = p \le r \le \infty$. Los lemas que siguen serán empleados para probar el Teorema A.

(2.17) Proposición. Sea k un núcleo integral singular L^r-Dini. Si f pertenece a $L^1((1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}})$, entonces las integrales singulares truncadas $K_\varepsilon(f)$ y la integral singular $K(f)$, definidas en (1.9) y (1.10) existen en casi todo punto. En particular, por el Lema (2.14) esto vale si $f \in L^p(u^p)$, $(v,u) \in A(p, p(r/p)')$ y $1 < p \le r < \infty$ ó $1 = p \le r \le \infty$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $T > 1 > \varepsilon$. Para $x : |x| < T$, consideramos

$$I(x) = \int_{|y| \ge 3T} |k(x-y)|\,|f(y)|\,dy.$$

Integrando $I(x)$, resulta

$$\begin{aligned}\int_{|x|<T} I(x)\,dx &\le (3/2)^n \int_{|x|<T} \left(\int_{|y|\ge 3T} \frac{|\Omega(x-y)|}{|y|^n}\,|f(y)|\,dy \right) dx \\ &= C \int_{|y|\ge 3T} \frac{|f(y)|}{|y|^n} \left(\int_{|x|<T} |\Omega(x-y)|\,dx \right) dy.\end{aligned}$$

Para cada $y : |y| \ge 3T$, por la desigualdad de Hölder y teniendo en cuenta que Ω es positivamente homogénea de grado cero, tenemos

$$\begin{aligned}\int_{|x|<T} |\Omega(x-y)|\,dx &\le |B_T|^{1/r'} \left(\int_{|y|-T<|z|<|y|+T} |\Omega(z)|^r\,dz \right)^{1/r} \\ &= C\|\Omega\|_{L^r(\Sigma)} \left(\int_{|y|-T}^{|y|+T} t^{n-1}\,dt \right)^{1/r} \\ &\le C'\|\Omega\|_{L^r(\Sigma)} |y|^{(n-1)/r}.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Luego

$$\int_{|x|<T} I(x)\,dx \le C \int_{|y|>3T} |f(y)|\,|y|^{-n+\frac{(n-1)}{r}}\,dy$$
$$\le C' \int |f(y)|(1+|y|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}}\,dy < \infty,$$

lo cual muestra que $I(x)$ es finita en casi todo $x : |x| < T$.

Por otro lado, como $f\chi_{B_{3T}}$ es integrable, por la teoría sobre integrales singulares desarrollada para la medida de Lebesgue (ver [2], Lema 2, pág. 232) para casi todo punto existe

$$\int_{\substack{|x-y|>\epsilon \\ |y|<3T}} k(x-y)f(y)\,dy$$

y también la integral singular $K(f)(x)$.

(2.19) Lema. *Si $f \in L^1((1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}})$ y g es una función acotada con soporte acotado, entonces*

$$\|f * g\|_{L^1((1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}})} \le C(g)\|f\|_{L^1((1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}})}.$$

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que el soporte de g está contenido en $\{x : |x| \le N\}$. Entonces por el Teorema de Fubini,

$$\|f * g\|_{L^1((1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}})} \le \int_{|y|\le N} |g(y)| \int |f(x-y)|(1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}}\,dx\,dy.$$

Puesto que $|y| \le N$ implica $1+|x-y| \le (1+N)(1+|x|)$, resulta

$$\|f * g\|_{L^1((1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}})} \le (1+N)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}}\|g\|_1\|f\|_{L^1((1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}})}.$$

(2.20) Lema. *Sea k un núcleo integral singular L^r-Dini. Supongamos que $f \in L^1((1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}})$ y que g es una función acotada con soporte acotado. Entonces*

$$K(f * g)(x) = (f * K(g))(x)$$

para casi todo x.

DEMOSTRACIÓN.

Sin pérdida de generalidad podemos suponer que el soporte de g está contenido en $\{z : |z| \leq 1\}$. Sean $T > 0$ y $R > 2T + 2$.

Definimos $f_1(x) = f(x)$ si $|x| \leq R$ y $f_1(x) = 0$, cuando $|x| > R$. Sea $f_2(x) = f(x) - f_1(x)$. Puesto que $f_1 \in L^1$ y $g \in L^2$, por la teoría desarrollada en L^2,

$$K(f_1 * g)(x) = (f_1 * K(g))(x),$$

en casi todo punto.

Sea $|x| < T$. Entonces la integral

$$I = \iint |k(x-y-z)|\,|g(z)|\,|f_2(y)|\,dz\,dy$$

es finita. En efecto, puesto que $|x - z| \leq T + 1 < |y|/2$ y $|x - y - z| \geq |y|/2$, por (2.18) tenemos

$$\begin{aligned} I &\leq 2^n \|g\|_\infty \int_{|y|>R} |f(y)|\,|y|^{-n} \left(\int_{|x-z|\leq T+1} |\Omega(x-y-z)|\,dz \right) dy \\ &\leq C \|g\|_\infty \|\Omega\|_{L^r(\Sigma)} \int_{|y|>R} |f(y)|\,|y|^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}}\,dy \\ &\leq C' \|g\|_\infty \|\Omega\|_{L^r(\Sigma)} \|f\|_{L^1((1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}})} < \infty. \end{aligned}$$

Luego, la integral

$$\iint k(x-y-z) g(z) f_2(y)\,dz\,dy$$

existe. Por el Teorema de Fubini y un cambio de variables

$$(f_2 * K(g))(x) = K(f_2 * g)(x)$$

para casi todo $x : |x| < T$, y como T es cualquiera la igualdad vale en casi todo punto.

Sea m un entero positivo y $s = (s_1, \ldots, s_n)$ una n-upla de enteros. El punto $2^{-m}s \in I\!R^n$ será notado y_s^m y $Q_s^m = \{y : 2^{-m}s_i \leq y_i < 2^{-m}(s_i + 1),\ 1 \leq i \leq n\}$.

Observemos que $y_s^m \in Q_s^m$ y que la longitud de los lados de Q_s^m es igual a 2^{-m}. Además para cada m fijo, la familia $\{Q_s^m : s \in \mathbb{Z}^n\}$ es una partición de $\mathbb{R}^n$. Supongamos que g es una función acotada con soporte acotado y que f es localmente integrable. Entonces para cada entero positivo m, definimos

$$C_m(f)(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^n} f(x - y_s^m) \int_{Q_s^m} g(y)\, dy. \tag{2.21}$$

Notemos que el conjunto I de índices s con la propiedad que Q_s^m tiene intersección no vacía con el soporte de g, es finito. Si el soporte de g está contenido en $\{x : |x| \leq N\}$, los puntos $\{y_s^m\}_{s \in I}$ satisfacen $|y_s^m| \leq N + 2^{-m}\sqrt{n}$. En lo que sigue suponemos que $m > n$, así que $|y_s^m| \leq N + 1$.

Una demostración del siguiente lema puede hallarse en [2], Lema 4, pág. 324.

(2.22) Lema. *Sean f una función localmente integrable y g acotada y con soporte acotado. Entonces para todo $R > 0$*

$$\lim_{m \to \infty} \int_{|x|<R} |C_m(f)(x) - (f * g)(x)|\, dx = 0.$$

(2.23) Lema. *Sea k un núcleo integral singular L^r-Dini. Supongamos que f pertenece a $L^1((1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}})$ y que $K(f)$ es localmente integrable. Entonces si g es una función acotada con soporte acotado, resulta*

$$K(f * g)(x) = (K(f) * g)(x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos que el soporte de g está contenido en $\{x : |x| \leq N\}$.

Por el Lema (2.19), $f * g$ pertenece a $L^1((1+|x|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}})$ y de acuerdo con la Proposición (2.17), $K(f * g)(x)$ está bien definida en casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Por otro lado, como $K(f)$ es localmente integrable y g es una función acotada y de soporte acotado, la convolución $(K(f) * g)(x)$ está definida para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Sean T, $\eta > 0$. Fijamos $R > 3N + 3T + 3$ tal que

$$\int_{|y|>R/2} |f(y)|(1+|y|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}}\, dy < \eta^2.$$

Por el Lema (2.22), existe $m > n$ que satisface

$$\int_{|y|\leq R} |C_m(f)(y) - (f*g)(y)|\, dy < \eta^2,$$

$$\int_{|y|\leq R} |C_m(K(f))(y) - (K(f)*g)(y)|\, dy < \eta^2.$$

Ahora sea $\chi_R(x)$ la función característica de la bola B_R. Resulta que

$$\begin{aligned}
&|\{x : |x| < T, |K(f*g)(x) - (K(f)*g)(x)| > \eta\}| \\
&\qquad \leq |\{x : |x| < T,\ |K(f*g)(x) - K(\chi_R(f*g))(x)| > \eta/4\}| \\
&\qquad\quad + |\{x : |x| < T,\ |K(\chi_R(f*g))(x) - K(\chi_R C_m(f))(x)| > \eta/4\}| \\
&\qquad\quad + |\{x : |x| < T,\ |K(\chi_R C_m(f))(x) - C_m(K(f))(x)| > \eta/4\}| \\
&\qquad\quad + |\{x : |x| < T,\ |C_m(K(f))(x) - (K(f)*g)(x)| > \eta/4\}| \\
&\qquad = \alpha + \beta + \gamma + \delta.
\end{aligned}$$

En primer lugar, estimaremos α:

$$\begin{aligned}
I &= \int_{|x|<T} |K(f*g)(x) - K(\chi_R(f*g))(x)|\, dx \\
&\leq \int_{|x|<T}\int_{|y|\geq R} |k(x-y)|\ |(f*g)(y)|\, dy\, dx \\
&\leq \left(\frac{3}{2}\right)^n \int_{|y|\geq R} \frac{|(f*g)(y)|}{|y|^n} \int_{|x|<T} |\Omega(x-y)|\, dx\, dy.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta (2.18), por Teorema de Fubini y un cambio de variables

$$\begin{aligned}
I &\leq C\|\Omega\|_{L^r(\Sigma)} \int_{|y|\geq R} |(f*g)(y)|(1+|y|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}}\, dy \\
&\leq C\|\Omega\|_{L^r(\Sigma)} \int_{|x|\leq N} |g(x)| \int |f(x-y)|(1+|y|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}}\, dy\, dx \\
&\leq C_N\|g\|_{L^1}\|\Omega\|_{L^r(\Sigma)} \int_{|z|\geq R-N} |f(z)|(1+|z|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}}\, dz.
\end{aligned}$$

Luego, por la elección de R resulta $I \le C\eta^2$, y por la desigualdad de Chebyshev debe ser $\alpha \le C\eta$.

Para estimar β sólo es necesario observar que como K es un operador de tipo débil (1.1) con respecto a la medida de Lebesgue y m es suficientemente grande

$$\beta \le \frac{C}{\eta}\int_{|x|\le R} |C_m(f)(x) - (f*g)(x)|\,dx \le C\eta.$$

De acuerdo con (2.21), tenemos

$$\begin{aligned}(2.24)\qquad & K(\chi_R C_m(f))(x) - C_m(K(f))(x)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y|>\epsilon} k(x-y)\chi_R(y)\sum_{s\in\mathbb{Z}^n} f(y-y_s^m)\int_{Q_s^m} g(z)\,dz\,dy\\ &\quad -\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y_s^m-y|>\epsilon} k(x-y_s^m-y)f(y)\,dy\int_{Q_s^m} g(z)\,dz.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que las series constan de sólo finitos términos no nulos y mediante un cambio de variables en cada sumando, (2.24) puede escribirse en la forma

$$\begin{aligned}&\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y-y_s^m|>\epsilon} k(x-y_s^m-y)\chi_R(y+y_s^m)f(y)\,dy\int_{Q_s^m} g(z)\,dz\\ &\qquad -\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x-y-y_s^m|>\epsilon} k(x-y_s^m-y)f(y)\,dy\int_{Q_s^m} g(z)\,dz.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}&K(\chi_R C_m(f))(x) - C_m(K(f))(x)\\ &\qquad = \sum_{s\in\mathbb{Z}^n}\int k(x-y_s^m-y)[\chi_R(y+y_s^m)-1]f(y)\,dy\int_{Q_s^m} g(z)\,dz.\end{aligned}$$

Luego para estimar γ, tenemos que

$$\begin{aligned}(2.25)\quad &\int_{|x|<T} |K(\chi_R C_m(f))(x) - C_m(K(f))(x)|\,dx\\ &\qquad \le \sum_{s\in\mathbb{Z}^n}\int_{|y+y_s^m|\ge R} |f(y)|\int_{|x|<T} |k(x-y_s^m-y)|\,dx\,dy\int_{Q_s^m} |g(z)|\,dz.\end{aligned}$$

Puesto que $|y+y_s^m| \geq R$ y $|y_s^m| \leq N+\sqrt{n}2^{-m} < N+1$ implican $|y| > R-N-1 > R/2$ y $|x - y_s^m - y| \geq |y|/3$, entonces (2.25) está acotado por

$$3^n \sum_{s\in \mathbb{Z}^n} \int_{|y|\geq R/2} |f(y)|\, |y|^{-n} \int_{|x|<T} |\Omega(x - y_s^m - y)|\, dx\, dy \int_{Q_s^m} |g(z)|\, dz.$$

Ahora por (2.18) resulta

$$\begin{aligned}\int_{|x|<T} |\Omega(x - y_s^m - y)|\, dx &\leq \int_{|x|<T+N+1} |\Omega(x - y)|\, dx \\ &\leq C_{T+N} \|\Omega\|_{L^r(\Sigma)} |y|^{(n-1)/r}.\end{aligned}$$

Luego (2.25) es menor o igual que

$$C \int_{|y|>R/2} |f(y)|\, |y|^{-n+(n-1)/r}\, dy \leq C' \int_{|y|>R/2} |f(y)|(1+|y|)^{-\frac{n}{r'}-\frac{1}{r}}\, dy < C'\eta^2.$$

Por la desigualdad de Chebyshev, concluímos que $\gamma \leq C\eta$.

Por último, aplicando nuevamente la desigualdad de Chebyshev y dado que $T < R$,

$$\delta \leq \frac{4}{\eta} \int_{|x|<T} |C_m(K(f))(x) - (K(f) * g)(x)|\, dx \leq 4\eta.$$

En consecuencia, dado $T > 0$

$$|\{x : |x| < T, |K(f*g)(x) - (K(f)*g)(x)| > \eta\}| \leq \alpha + \beta + \gamma + \delta \leq c\eta.$$

Puesto que η es arbitrario, resulta $K(f*g)(x) = (K(f)*g)(x)$ para casi todo $|x| < T$ y luego para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Ahora demostraremos el Teorema A que enunciamos nuevamente.

Teorema A. *Sea k un núcleo integral singular L^r-Dini y $(v,u) \in A(p, p(r/p)')$, $1 \leq p \leq r < \infty$ ó $1 = p < r \leq \infty$. Si $f \in L^p(u^p)$ entonces la función $K(f)$ está bien definida en casi todo punto. Si además $K(f) \in L^p(u^p)$ resulta*

(i) $\|K_\epsilon(f)\|_{L^p(v^p)} \leq C\{\|f\|_{L^p(u^p)} + \|K(f)\|_{L^p(u^p)}\}$,

para todo $\varepsilon > 0$, *donde* C *es una constante independiente de* ε *y* f. *También tenemos que*

(ii) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \|K_\varepsilon(f) - K(f)\|_{L^p(v^p)} = 0$.

DEMOSTRACIÓN.

De acuerdo con la Proposición (2.17), $K(f)$ está bien definida en casi todo punto. Sea δ_ε definida como en el Corolario (2.7). Puesto que $\delta_\varepsilon(x) = K(\varphi_\varepsilon)(x) - k_\varepsilon(x)$, resulta que

$$K_\varepsilon(f)(x) = (f * K(\varphi_\varepsilon))(x) - (f * \delta_\varepsilon)(x).$$

Por el Lema (2.14), Lema (2.20), Observación (2.16) y Lema (2.23)

$$K_\varepsilon(f)(x) = (K(f) * \varphi_\varepsilon)(x) - (f * \delta_\varepsilon)(x). \tag{2.26}$$

En consecuencia

$$\|K_\varepsilon(f)\|_{L^p(v^p)} \leq \|K(f) * \varphi_\varepsilon\|_{L^p(v^p)} + \|f * \delta_\varepsilon\|_{L^p(v^p)}.$$

Ahora aplicando la parte (i) de los Corolarios (2.6) y (2.7), obtenemos la parte (i) del teorema. Para probar (ii), observemos que a partir de (2.26)

$$\|K_\varepsilon(f) - K(f)\|_{L^p(v^p)} \leq \|K(f) * \varphi_\varepsilon - K(f)\|_{L^p(v^p)} + \|f * \delta_\varepsilon\|_{L^p(v^p)}.$$

Por la parte (ii) de los Corolarios (2.6) y (2.7) muestran que cada uno de los términos de la suma anterior tiende a cero cuando ε tiende a cero, tal como queríamos probar.

3. CONVERGENCIA DE INTEGRALES SINGULARES CON TRUNCACIONES NO ESTANDAR EN L^1 CON PESOS.

§1. Las clases A_1 y $\mathcal{A}_1$.

Recordemos que en (1.5), fue definida la función par

$$S(x) = (1 + |x|)^{-n} \chi_{[0,1]}(|x_n|),$$

y para cada $t > 0$

$$S_t(x) = t^{-n} S(x/t) = (t + |x|)^{-n} \chi_{[0,t]}(|x_n|). \tag{3.1}$$

En el capítulo 1, §2 establecimos que un par de pesos (v, u) pertenece a la clase $\mathcal{A}_1$ si y sólo si existe una constante C tal que

$$\sup_{t>0} (S_t * v)(x) \leq C u(x),$$

para casi todo $x \in I\!R^n$, (ver (1.6)). Ahora, en la proposición siguiente presentamos otra condición necesaria y suficiente para que un par (v, u) pertenezca a $\mathcal{A}_1$.

(3.2) Proposición. *Sea S_t la función definida en (3.1). Entonces la desigualdad*

$$\|S_t * f\|_{L^1(v)} \leq C \|f\|_{L^1(u)} \tag{3.3}$$

vale para todo $t > 0$ con una constante C independiente de t y f si y sólo si (v, u) pertenece a $\mathcal{A}_1$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $(v, u) \in \mathcal{A}_1$ y notemos que para probar (3.3) es suficiente considerar el caso $f \geq 0$. Dado que S_t es una función par, tenemos

$$\begin{aligned} \int (S_t * f)(x) v(x)\, dx &= \iint f(y) S_t(x - y) v(x)\, dy\, dx \\ &= \int f(y)(S_t * v)(y)\, dy \leq C \int f(y) u(y)\, dy, \end{aligned}$$

donde C es la constante de (v,u) en la clase $\mathcal{A}_1$.

Ahora supongamos que (3.3) vale, entonces

$$\int f(x)(S_t * v)(x)\,dx = \int (S_t * f)(x)\, v(x)\,dx$$
$$\leq C \int f(x)\, u(x)\,dx.$$

Luego $(S_t * v)(x) \leq Cu(x)$ para casi todo $x \in I\!\!R^n$. El conjunto donde la desigualdad no vale, puede depender de t. Sin embargo, puesto que para $p < q$

$$S_p(x) = (p + |x|)^{-n}\chi_{[0,p]}(|x_n|) = \left(\frac{q}{p}\right)^n \left(q + \frac{q}{p}|x|\right)^{-n} \chi_{[0,p]}(|x_n|)$$
$$\leq \left(\frac{q}{p}\right)^n (q + |x|)^{-n}\chi_{[0,q]}(|x_n|) = \left(\frac{q}{p}\right)^n S_q(x),$$

esto es, $S_p(x) \leq \left(\frac{q}{p}\right)^n S_q(x)$, resulta que $\sup_{t>0} (S_t * v)(x)$ es igual al supremo tomado sobre los números racionales. Entonces para casi todo $x \in I\!\!R^n$

$$\sup_{t>0} (S_t * v)(x) \leq Cu(x),$$

es decir $(v,u) \in \mathcal{A}_1$.

De acuerdo con (1.4) un par de pesos (v,u) pertenece a la clase $A(1,1)$ (simplemente notaremos $(v,u) \in A_1$), si existe una constante C tal que

$$|B|^{-1} \int_B v(x)\,dx \leq C \operatorname*{inf\ esencial}_{x \in B} u(x)$$

para toda bola (o cubo) B en $I\!\!R^n$. En la demostración del Lema (2.11) quedó probado que esta condición, (ver (2.12)), implica que en casi todo punto

$$Mv(x) \leq Cu(x). \tag{3.4}$$

Puesto que de la definición de la función maximal de Hardy-Littlewood (ver (1.1)) se deduce que (3.4) implica (2.12), tenemos que $(v,u) \in A_1$ si y sólo si para casi todo $x \in I\!\!R^n$ vale (3.4) donde C es una constante independiente del punto x.

En los resultados de este parágrafo que siguen, mostramos la relación que existe entre las clases $\mathcal{A}_1$ y A_1.

(3.5) Proposición. *Si el par (v,u) pertenece a $\mathcal{A}_1$ entonces también pertenece a A_1.*

DEMOSTRACIÓN.

Dado que

$$S(x) = (1+|x|)^{-n}\chi_{[0,1]}(|x_n|) \geq 2^{-n}\chi_{B_1}(x) = \varphi(x),$$

si para cada $t > 0$ consideramos $\varphi_t(x) = t^{-n}\varphi(x/t)$, resulta

$$\int \varphi_t(x-y)\, v(y)\, dy = (2t)^{-n}\int_{|x-y|<t} v(y)\, dy = 2^{-n}|B_1|\,|B(x,t)|^{-1}\int_{B(x,t)} v(y)\, dy.$$

Por lo tanto

$$Mv(x) \leq 2^n|B_1|^{-1}\sup_{t>0}\,(\varphi_t * v)(x) \leq 2^n|B_1|^{-1}\sup_{t>0}\,(S_t * v)(x),$$

y, en consecuencia, si (v,u) pertenece a $\mathcal{A}_1$, tenemos que

$$Mv(x) \leq 2^n|B_1|^{-1}Cu(x)$$

para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$. Luego (v,u) pertenece a A_1.

Recordemos que cuando el par (v,u) pertenece a A_1 y los pesos son iguales $v = u = w$, simplemente notaremos $w \in A_1$.

Para los pesos w de las clases A_p de Muckenhoupt, $1 \leq p < \infty$ sabemos que existen $\eta > 0$ y $C > 0$, que sólo depende de η y la constante de w en A_p, tal que para toda bola (o cubo) $B \subseteq \mathbb{R}^n$

(R.H.I.) $$\left(|B|^{-1}\int_B w(x)^{1+\eta}\, dx\right)^{\frac{1}{1+\eta}} \leq C|B|^{-1}\int_B w(x)\, dx,$$

(ver [8], pág. 397). En el caso $C = 1$, esta desigualdad coincide con la desigualdad de Hölder en sentido inverso. Por tal motivo, usualmente es notada R.H.I. (reverse Hölder inequality).

Es conocido que para pares de pesos distintos de las clases $A(p,p)$, una desigualdad de tipo Hölder pero en sentido inverso, no es válida.

Para la demostración del lema siguiente conviene observar que cuando $w \in A_1$, R.H.I. implica que

$$|B|^{-1} \int_B w(x)^{1+\eta}\, dx \leq C \inf \underset{x \in B}{\text{esencial}}\, w(x)^{1+\eta},$$

por lo tanto, $w^{1+\eta}$ también pertenece a A_1.

(3.6) Lema. *Sea w un peso de la clase A_1. Entonces existe r, $0 < r < 1$ tal que*

$$|R|^{-1} \int_R w(x)\, dx \leq C_w \left(\frac{|Q|}{|R|}\right)^r \mathit{inf}\ \underset{x \in Q}{\mathit{esencial}}\, w(x) \tag{3.7}$$

para todo cubo Q y todo intervalo $R \subset Q$, donde C_w es una constante que depende sólo de la constante de w en A_1 y r.

Demostración.

Puesto que $w \in A_1$, existe $\eta > 0$ tal que $w^{1+\eta} \in A_1$. Entonces por la desigualdad de Hölder

$$\begin{aligned} |R|^{-1} \int_R w(x)\, dx &\leq \left(|R|^{-1} \int_R w(x)^{1+\eta}\, dx\right)^{\frac{1}{1+\eta}} \\ &\leq \left(\frac{|Q|}{|R|}\right)^{\frac{1}{1+\eta}} \left(|Q|^{-1} \int_Q w(x)^{1+\eta}\, dx\right)^{\frac{1}{1+\eta}} \end{aligned}$$

Por la condición A_1 para el peso $w^{1+\eta}$ y si $r = \frac{1}{(1+\eta)}$, resulta

$$|R|^{-1} \int_R w(x)\, dx \leq C \left(\frac{|Q|}{|R|}\right)^r \inf \underset{x \in Q}{\text{esencial}}\, w(x).$$

(3.8) Proposición. El peso w pertenece a A_1 si y sólo si w pertenece a $\mathcal{A}_1$.

DEMOSTRACIÓN.

Si w pertenece a $\mathcal{A}_1$ por la Proposición (3.5) w pertenece a A_1.

Para todo entero no negativo s, sea R_s el intervalo centrado en el origen, con lados paralelos a los ejes coordenados de longitud $2^{s+1},\ldots,2^{s+1},2$ y sea $Q_s \supset R_s$ el cubo con lados de longitud 2^{s+1}. Notemos que

$$S(x) \leq 2^n \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-ns} \chi_{R_s}(x). \tag{3.9}$$

En efecto, dado que si x pertenece a $R_s \setminus R_{s-1}$, entonces $|x| > 2^{s-1}$, resulta

$$\begin{aligned}
(1+|x|)^{-n}\chi_{[0,1]}(|x_n|) &\leq \sum_{s=1}^{\infty}(1+|x|)^{-n}\chi_{R_s\setminus R_{s-1}}(x) + (1+|x|)^{-n}\chi_{R_0}(x)\\
&\leq \sum_{s=1}^{\infty}(2^{s-1})^{-n}\chi_{R_s\setminus R_{s-1}}(x) + \chi_{R_0}(x)\\
&\leq 2^n \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-ns}\chi_{R_s}(x).
\end{aligned}$$

Luego por (3.9)

$$S_t(x) \leq 2^n t^{-n} \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-ns} \chi_{tR_s}(x).$$

Teniendo en cuenta que $|R_s| = 2^n 2^{s(n-1)}$, se tiene

$$\begin{aligned}
(S_t * w)(x) &\leq 2^n t^{-n} \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-ns} \int_{x+tR_s} w(y)\,dy\\
&= 4^n \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-s} |x+tR_s|^{-1} \int_{x+tR_s} w(y)\,dy.
\end{aligned}$$

Aplicando el Lema (3.6) en cada término de la serie, resulta

$$\begin{aligned}
(S_t * w)(x) &\leq C_w 4^n \sum_{s=0}^{\infty} 2^{-s} 2^{sr} \operatorname*{inf\,esencial}_{y\in x+tQ_s} w(y)\\
&\leq C_w 4^n \left(\frac{2^{1-r}}{2^{1-r}-1}\right) Mw(x) \leq Cw(x)
\end{aligned}$$

para casi todo $x \in I\!R^n$. Entonces w pertenece a $\mathcal{A}_1$.

(3.10) Observaciones.

(i) Para pares de pesos, la clase $\mathcal{A}_1$ está estrictamente contenida en A_1.

En efecto, consideremos en $I\!R^2$,

$$v(x_1, x_2) = |x_1| \chi_{[-1,1]}(x_2),$$

y veamos que la función maximal

$$Mv(x_1, x_2) = \sup_{R>0} (4R^2)^{-1} \int_{x_1-R}^{x_1+R} \int_{x_2-R}^{x_2+R} |\xi| \chi_{[-1,1]}(\eta)\, d\xi\, d\eta = \sup_{R>0} P_R(x_1, x_2)$$

satisface: $Mv(x_1, x_2) \leq |x_1| + 1$.

Por la definición de $v(x_1, x_2)$, podemos suponer que $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$.

Si $x_1 - R \leq 0$, entonces

$$P_R(x_1, x_2) = (4R^2)^{-1}(x_1^2 + R^2) \int_{x_2-R}^{x_2+R} \chi_{[-1,1]}(\eta)\, d\eta \leq 1.$$

Cuando $x_1 - R > 0$, tenemos

$$P_R(x_1, x_2) = (4R^2)^{-1} 2 x_1 R \int_{x_2-R}^{x_2+R} \chi_{[-1,1]}(\eta)\, d\eta.$$

Distinguimos ahora dos casos: $0 \leq x_2 < 1$ y $1 \leq x_2$. En el primero y si $x_2 + R \leq 1$

$$P_R(x_1, x_2) = (2R)^{-1} x_1 2R = x_1.$$

Si $0 \leq x_2 < 1$, $x_2 + R > 1$ y $-1 < x_2 - R$, resulta

$$P_R(x_1, x_2) = (2R)^{-1} x_1 (1 - x_2 + R) < x_1.$$

Para $0 \leq x_2 < 1$, $x_2 + R > 1$ y $-1 \geq x_2 - R$, tenemos

$$P_R(x_1, x_2) = (2R)^{-1} x_1 2 = R^{-1} x_1 < x_1.$$

En el segundo caso, es decir cuando $1 \leq x_2$, si $P_R(x_1, x_2) \neq 0$ entonces $x_2 - R < 1$. Luego, si además es $-1 \leq x_2 - R$, vale que

$$P_R(x_1, x_2) = (2R)^{-1} x_1 (1 - x_2 + R) \leq x_1/2.$$

Por último, si $1 \leq x_2$ y $x_2 - R < -1$, resulta

$$P_R(x_1, x_2) = (2R)^{-1} x_1 2 = x_1/R < x_1/2.$$

Por lo tanto, si $u(x_1, x_2) = Mv(x_1, x_2) \leq |x_1| + 1$, y de acuerdo con la definición de A_1 (ver (3.4)), el par (v, u) pertenece a esta clase. Sea $f(x_1, x_2) = \chi_Q(x_1, x_2)$, donde $Q = [-1, 1]^2$. La función f pertenece a $L^1(u)$, sin embargo, $S * f$ no pertenece a $L^1(v)$ y por la Proposición (3.2), el par (v, u) no pertenece a $\mathcal{A}_1$. En efecto, si $|x_2| < 1/2$ entonces

$$\begin{aligned}(S * f)(x_1, x_2) &\geq \iint_{|x_2 - \xi_2| < 1} \frac{\chi_{[-1,1]}(\xi_1) \chi_{[-1,1]}(\xi_2)}{(2 + |x_1 - \xi_1|)^2} \, d\xi_1 \, d\xi_2 \\ &\geq \frac{2}{(3 + |x_1|)^2}.\end{aligned}$$

Luego

$$\iint (S * f)(x) \, v(x) \, dx_1 \, dx_2 \geq \int \frac{2|x_1|}{(3 + |x_1|)^2} \, dx_1 = +\infty.$$

(ii) Notemos que la Proposición (3.8) vale para todo par de pesos (v, u) tal que existe $r : 0 < r < 1$ y se verifica:

$$|R|^{-1} \int_R v(x) \, dx \leq C_{v,u} \left(\frac{|Q|}{|R|} \right)^r \operatorname*{inf\ esencial}_{x \in Q} u(x) \tag{3.11}$$

para todo cubo Q y todo intervalo $R \subset Q$.

La condición (3.11) coincide con (3.7) del Lema (3.6). Sin embargo, el siguiente ejemplo muestra que (3.11) no es necesaria para que un par de pesos (v, u) pertenezca a $\mathcal{A}_1$.

Sea $v(x_1,x_2) = \chi_Q(x_1,x_2)$ donde $Q = [-1,1]^2$ y $u(x_1,x_2) = Mv(x_1,x_2)$. Puede probarse que $Mv(x_1,x_2) \approx (1+|x|)^{-2}$. Por otro lado, si $R_N = [-N,N] \times [-1,1]$ y $Q_N = [-N,N]^2$, $N \geq 1$, tenemos

$$|R_N|^{-1} \int_{R_N} v(x_1,x_2)\, dx_1\, dx_2 = N^{-1},$$

$$\operatorname*{inf\ esencial}_{x \in Q_N} Mv(x) \leq C(1+N)^{-2}.$$

Entonces si suponemos que vale (3.11), resulta

$$N^{-1} \leq CN^r(1+N)^{-2} \leq CN^{r-2}.$$

Pero cualquiera sea C, esta desigualdad es falsa para N suficientemente grande. Sin embargo, mostraremos que (v,u) pertenece a la clase $\mathcal{A}_1$. En efecto, dado que

$$(S_t * v)(x_1,x_2) \leq 2 \iint \frac{\chi_{[0,t]}(|x_2-y_2|)}{(t+|x_1-y_1|+|x_2-y_2|)^2}\, \chi_Q(y_1,y_2)\, dy_1\, dy_2,$$

para $|x_2| > 1+t$, resulta $(S_t * v)(x_1,x_2) = 0$. Si $|x_2| \leq 1+t$, cuando $|x_1| \geq 3$, tenemos

$$1+|x_1|+|x_2| \leq (5/2)(t+|x_1-y_1|+|x_2-y_2|).$$

Entonces

$$\begin{aligned}(S_t * v)(x_1,x_2) &\leq 2(5/2)^2 \frac{1}{(1+|x_1|+|x_2|)^2} \iint \chi_{[0,t]}(|x_2-y_2|)\chi_Q(y_1,y_2)\, dy_1\, dy_2 \\ &\leq 50(1+|x_1|+|x_2|)^{-2}.\end{aligned}$$

Si $|x_2| \leq 1+t$ y $|x_1| < 3$, distinguimos dos casos: $t < 1$ y $t \geq 1$. En el primer caso vale que: $1+|x_1|+|x_2| \leq 6$. Luego

$$\begin{aligned}(S_t * v)(x_1,x_2) &\leq \frac{2}{t} \int_{-\infty}^{\infty} \chi_{[0,t]}(|x_2-y_2|) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2+|x_1-y_1|^2}\, dy_1 \right) dy_2 < 4\pi \\ &\leq 144\pi(1+|x_1|+|x_2|)^{-2}.\end{aligned}$$

En el segundo caso, tenemos

$$1+|x_1|+|x_2| \leq 3(t+|x_1-y_1|+|x_2-y_2|).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}(S_t * v)(x_1, x_2) &\le \frac{18}{(1+|x_1|+|x_2|)^2} \int \chi_Q(y_1, y_2)\, dy_1\, dy_2 \\ &\le 72(1+|x_1|+|x_2|)^{-2}.\end{aligned}$$

Entonces, para todo $t > 0$

$$\begin{aligned}(S_t * v)(x_1, x_2) &\le C(1+|x_1|+|x_2|)^{-2} \\ &\le C' M\chi_Q(x_1, x_2) = C' u(x_1, x_2)\end{aligned}$$

en consecuencia (v, u) pertenece a $\mathcal{A}_1$.

§2. Demostración del Teorema B.

Sea k un núcleo integral singular, definido en (1.7).

En este parágrafo, para cada $t > 0$, la integral singular truncada de f (ver (1.9)) será notada

$$K_{B_t}(f)(x) = k_{B_t} * f(x) = \int_{x-y \notin B_t} k(x-y)\, f(y)\, dy. \tag{3.12}$$

Con respecto a estas truncaciones estándar, para la integral singular de f asociada a k, definida en (1.10) usaremos la notación

$$K_{\mathcal{B}}(f)(x) = K(f)(x), \tag{3.13}$$

donde $\mathcal{B} = \{B_t\}_{t>0}$.

Por otro lado, dada una familia de intervalos de $I\!R^n$, $n \ge 2$, $\mathcal{R} = \{R_t\}_{t>0}$, según (1.15) y (1.16)

$$\begin{aligned}&K_{R_t}(f)(x) = k_{R_t} * f(x) = \int_{x-y\notin R_t} k(x-y)\, f(y)\, dy, \qquad \text{y} \\ &K_{\mathcal{R}}(f)(x) = \lim_{t\to 0} K_{R_t}(f)(x).\end{aligned}$$

Recordamos que tal como comentamos en el Capítulo 1, §5, los operadores maximales T^* y K^* (ver (1.17)) son de tipo débil (1.1) con respecto a la medida de Lebesgue.

El siguiente resultado está contenido en el trabajo de Harboure, [9].

(3.14) Lema. *Sea k un núcleo integral singular y sea $\mathcal{R} = \{R_t\}_{t>0}$ una familia de intervalos de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, admisible. Si $f \in L^1$, entonces*

$$K_B(f)(x) = K_{\mathcal{R}}(f)(x) + Lf(x), \tag{3.15}$$

en casi todo punto, donde $L = \lim_{t\to 0} \int_{R_t - B_t} k(y)\,dy$.

DEMOSTRACIÓN.

Supongamos primero que f pertenece a C_0^1. Entonces

$$\begin{aligned} k_{B_t} * f(x) &= \int_{y\notin R_t} k(y)\,f(x-y)\,dy + \int_{R_t - B_t} k(y)\,[f(x-y) - f(x)]\,dy \\ &\quad + f(x)\int_{R_t - B_t} k(y)\,dy \\ &= k_{R_t} * f(x) + I_t(f)(x) + f(x)L_t. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Ahora veremos que $I_t(f)(x)$ tiende a cero cuando t tiende a cero. En efecto, dado que f pertenece a C_0^1

$$\begin{aligned} |I_t(f)(x)| &\leq \|\nabla f\|_\infty \, \|\Omega\|_{L^1(\Sigma)} \int_t^{\left(\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)^2\right)^{1/2}} dr \\ &\leq \|\nabla f\|_\infty \, \|\Omega\|_{L^1(\Sigma)} \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)^2\right)^{1/2} \end{aligned}$$

y por la condición (ii) que satisface la familia admisible de intervalos $\mathcal{R} = \{R_t\}$, (ver (1.14)), $\lim_{t\to 0} \left(\sum_{i=1}^n \varphi_i(t)^2\right)^{1/2} = 0$. Luego por (3.16), existe $L = \lim_{t\to 0} L_t$ y además

$$K_B(f)(x) = K_{\mathcal{R}}(f)(x) + Lf(x)$$

en casi todo punto.

Sea f una función que pertenece a L^1. Dado $\varepsilon > 0$, existe $g \in C_0^1$ tal que $\|f-g\|_1 < \varepsilon^2$. En casi todo punto, tenemos

$$\begin{aligned}|K_{\mathcal{B}}(f)(x) - K_{\mathcal{R}}(f)(x) - Lf(x)| &= |K_{\mathcal{B}}(f-g)(x) - K_{\mathcal{R}}(f-g)(x) - L(f-g)(x)| \\ &\leq K^*(f-g)(x) + T^*(f-g)(x) + |L|\,|(f-g)(x)|.\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}(3.17) \qquad & |\{x : |K_{\mathcal{B}}(f)(x) - K_{\mathcal{R}}(f)(x) - Lf(x)| > \varepsilon\}| \\ & \leq |\{x : K^*(f-g)(x) > \varepsilon/3\}| + |\{x : T^*(f-g)(x) > \varepsilon/3\}| \\ & + \left|\left\{x : |(f-g)(x)| > \frac{\varepsilon}{3(|L|+1)}\right\}\right|.\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que los operadores maximales K^* y T^* son de tipo débil (1,1) y por la desigualdad de Chebyshev, (3.17) está acotado por

$$\begin{aligned}& C_1\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)\|f-g\|_1 + C_2\left(\frac{3}{\varepsilon}\right)\|f-g\|_1 + \left(\frac{3(|L|+1)}{\varepsilon}\right)\|f-g\|_1 \\ & \leq 3\,(C_1 + C_2 + |L| + 1)\varepsilon.\end{aligned}$$

Puesto que ε es arbitrario, se tiene el lema.

Sea (v,u) un par de pesos de la clase A_1. Por el Lema (2.11) y como excluímos los casos triviales $v \equiv 0$ ó $u = \infty$, existe una constante $a > 0$ tal que en casi todo punto

$$a\,(1+|x|)^{-n} \leq u(x).$$

En particular, si $f \in L^1(u)$, entonces $f \in L^1((1+|x|)^{-n})$, lo cual implica que f pertenece localmente a L^1.

(3.18) Lema. *Sean k un núcleo integral singular y $\mathcal{R} = \{R_t\}_{t>0}$ una familia de intervalos de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, admisible. Si f es una función que pertenece a $L^1((1+|x|)^{-n})$, entonces* *(i) para todo* $t > 0$, $K_{R_t}(f)(x)$ *está bien definido en casi todo punto,*

(ii) el límite $K_{\mathcal{R}}(f)(x) = \lim_{t\to 0} K_{R_t}(f)(x)$ *existe en casi todo punto,*

(iii) para casi todo x

$$K_B(f)(x) = K_{\mathcal{R}}(f)(x) + Lf(x)$$

donde $L = \lim_{t\to 0} \int_{R_t - B_t} k(y)\, dy$.

DEMOSTRACIÓN.

Sea $T > 0$. Definimos $f_1(y) = f(y)$ si $|y| \le 2T$, $f_1(y) = 0$ si $|y| > 2T$ y $f_2(y) = f(y) - f_1(y)$. Entonces

$$K_{R_t}(f)(x) = K_{R_t}(f_1)(x) + K_{R_t}(f_2)(x).$$

La integral que define $K_{R_t}(f_2)(x)$ existe para $x : |x| < T$, pues

$$|K_{R_t}(f_2)(x)| \le C \int_{\mathbb{R}^n - B_t} \frac{|f_2(y)|}{|x-y|^n}\, dy \le \left(\frac{2T+1}{T}\right)^n \int \frac{|f(y)|}{(|y|+1)^n}\, dy.$$

Notamos que $K_{R_t}(f_2)(x)$ no depende de t, para t suficientemente pequeño, entonces como $f \in L^1$, por el Lema (3.14), el límite de $K_{R_t}(f)(x)$ existe para casi todo $x : |x| < T$. Además $K_{R_t}(f_2)(x) = K_B(f_2)(x)$ y por (3.15), en casi todo $x : |x| < T$ tenemos

$$\begin{aligned} K_{\mathcal{R}}(f)(x) &= K_{\mathcal{R}}(f_1)(x) + K_B(f_2)(x) \\ &= K_B(f_1)(x) - Lf_1(x) + K_B(f_2)(x) \\ &= K_B(f)(x) - Lf(x). \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $T > 0$ es cualquiera, se tiene el lema.

(3.19) Lema. *Sean* k *un núcleo integral singular y* $\mathcal{R} = \{R_t\}_{t>0}$ *una familia de intervalos de* $\mathbb{R}^n$, $n \ge 2$, *admisible. Sea* $L = \lim_{t\to 0} L_t$, *donde* $L_t = \int_{R_t - B_t} k(y)\, dy$, *y* (v, u) *que pertenece a* $\mathcal{A}_1$. *Si* g *es una función acotada con soporte acotado, entonces*

$$\lim_{t\to 0} \|Lg - (k\chi_{R_t - B_t}) * g\|_{L^1(v)} = 0.$$

DEMOSTRACIÓN.

Puesto que $|k(y)| = |\Omega(y)|\,|y|^{-n} \leq C|y|^{-n}$ en $\mathbb{R}^n - \{0\}$, cuando $y \in R_t - B_t$ resulta $|k(y)| \leq C' S_t(y) = C'(t+|y|)^{-n}\chi_{[0,t]}(|y_n|)$. Luego, para todo $t > 0$

$$(3.20) \qquad \int_{R_t - B_t} |k(y)|\, dy \leq C' \int S(y)\, dy = C''.$$

Por otro lado, como g es una función acotada con soporte acotado, dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que si $|y| < \delta$ entonces

$$(3.21) \qquad \int |g(x-y) - g(x)|\, v(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{2C''}.$$

Ahora por (3.20) y (3.21), tenemos

$$\begin{aligned} &\|Lg - (k\chi_{R_t - B_t}) * g\|_{L^1(v)} \\ &\qquad \leq |L - L_t|\, \|g\|_{L^1(v)} + \int_{R_t - B_t} |k(y)| \left(\int |g(x-y) - g(x)|\, v(x)\, dx \right) dy \\ &\qquad \leq |L - L_t|\, \|g\|_{L^1(v)} + \varepsilon/2 < \varepsilon, \end{aligned}$$

si t es suficientemente pequeño.

Ahora demostraremos el Teorema B, cuyo enunciado volvemos a escribir.

Teorema B. *Sean $\mathcal{R} = \{R_t\}_{t>0}$ una familia de intervalos de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, admisible, (v,u) perteneciente a la clase $\mathcal{A}_1$ y k un núcleo integral singular. Entonces, si $f \in L^1(u)$ la función $K_{\mathcal{R}}(f)$ está bien definida en casi todo punto. Si $K_{\mathcal{R}}(f)$ pertenece a $L^1(u)$, resulta*

(i) $\|K_{R_t}(f)\|_{L^1(v)} \leq C\{\|f\|_{L^1(u)} + \|K_{\mathcal{R}}(f)\|_{L^1(u)}\}$,

para todo $t > 0$, donde C es una constante independiente de t y f; y además

(ii) $\lim\limits_{t \to 0} \|K_{R_t}(f) - K_{\mathcal{R}}(f)\|_{L^1(v)} = 0.$

Si $w \in A_1$, entonces (i) y (ii) valen con $v = u = w$.

DEMOSTRACIÓN.

Por el Lema (3.18), para casi todo x vale la igualdad $K_{\mathcal{R}}(f)(x) = K_B(f)(x) - Lf(x)$. Puesto que por hipótesis $K_{\mathcal{R}}(f)$ pertenece a $L^1(u)$ entonces $K_B(f)$ también pertenece a $L^1(u)$ y aplicando el Teorema A con la notación introducida en (3.12) y (3.13)

$$(3.22)\qquad \begin{array}{ll} \text{(a)} & \|K_{B_t}(f)\|_{L^1(v)} \leq C\left\{\|f\|_{L^1(u)} + \|K_B(f)\|_{L^1(u)}\right\} \quad \text{para todo } t > 0, \text{ y} \\ \text{(b)} & \lim_{t \to 0} \|K_{B_t}(f) - K_B(f)\|_{L^1(v)} = 0. \end{array}$$

Para cada $t > 0$, tenemos que

$$K_{R_t}(f)(x) = -\int_{R_t - B_t} k(y) f(x-y)\, dy + K_{B_t}(f)(x).$$

La integral anterior es igual a la convolución de f con el núcleo $k(y)\chi_{R_t - B_t}(y)$ el cual está acotado, salvo una constante, por $S_t(y)$. Entonces por la Proposición (3.2) y la parte (a) de (3.22) resulta

$$\|K_{R_t}(f)\|_{L^1(v)} \leq C\left\{\|f\|_{L^1(u)} + \|K_B(f)\|_{L^1(u)}\right\}.$$

Teniendo en cuenta el Lema (3.18), parte (iii), obtenemos la parte (i) del teorema. Para probar la parte (ii), consideramos una función g acotada, con soporte acotado y tal que $\|f - g\|_{L^1(u)} < \varepsilon$. Entonces

$$\begin{aligned} \|K_{R_t}(f) - K_{\mathcal{R}}(f)\|_{L^1(v)} &= \|K_{B_t}(f) - (k\chi_{R_t - B_t}) * f - K_B(f) + Lf\|_{L^1(v)} \\ &\leq \|K_{B_t}(f) - K_B(f)\|_{L^1(v)} + \|(k\chi_{R_t - B_t}) * (g - f)\|_{L^1(v)} \\ &\quad + |L|\, \|f - g\|_{L^1(v)} + \|Lg - (k\chi_{R_t - B_t}) * g\|_{L^1(v)}. \end{aligned}$$

Ahora, por la parte (b) de (3.22), la Proposición (3.2) y el Lema (3.19), obtenemos la parte (ii) del teorema.

4. ACOTACION Y CONVERGENCIA DE INTEGRALES FUERTEMENTE SINGULARES TRUNCADAS.

§1. Núcleos integrales fuertemente singulares.

Recordamos que según (1.11) un núcleo integral fuertemente singular está definido sobre $\mathbb{R}^n - \{0\}$, por

$$k^b(x) = \frac{e^{i|x|^{-b}}}{|x|^n}\, \chi_{[0,1]}(|x|)$$

donde $0 < b < \infty$. Para cada $\eta : 0 < \eta < 1$, la integral fuertemente singular truncada de f, es

$$K_\eta^b(f)(x) = k_\eta^b * f(x) = \int_{\eta<|y|\leq 1} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n}\, f(x-y)\, dy,$$

y la integral fuertemente singular de f, se define como

$$K^b(f)(x) = \lim_{\eta\to 0} K_\eta^b(f)(x),$$

si este límite existe.

S. Chanillo introduce en [5], el núcleo

$$\widetilde{K}_{b,q}(x) = \frac{e^{i|x|^{-b}}}{|x|^{n(2+b)/q}} \tag{4.1}$$

donde $0 < b < \infty$ y $2 < q < \infty$. En el Lema (2.1) (pág. 82), del trabajo citado, se da una demostración del siguiente resultado que nosotros emplearemos para probar el Lema (4.5) y el Teorema (4.15):

(4.2) Lema. *Sea q tal que $(2+b)/q < 1$. Entonces*

$$\|\widetilde{K}_{b,q} * f\|_q \leq C_q \|f\|_{q'}, \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Para probar el Lema (4.5) también necesitaremos el siguiente resultado:

(4.3) Lema. *Si $f \in C^1$, entonces la integral fuertemente singular $K^b(f)$ está definida en todo punto y es una función acotada. Además, $K^b(f)$ es una función de soporte acotado si f lo es.*

DEMOSTRACIÓN.

Para cada $\varepsilon > 0$, la integral fuertemente singular truncada de f, es

$$\begin{aligned} K^b_\varepsilon(f)(x) &= \int_{\varepsilon<|y|\leq 1} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n}\,[f(x-y)-f(x)]\,dy + f(x)\int_{\varepsilon<|y|\leq 1} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n}\,dy \\ &= I_\varepsilon(x) + f(x)\int_{\varepsilon<|y|\leq 1} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n}\,dy. \end{aligned}$$

Dado que $f \in C^1$, resulta $|I_\varepsilon(x)| \leq C_n\|\nabla f\|_\infty$; y por el Teorema de Convergencia Mayorada de Lebesgue

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon(x) = \int_{|y|\leq 1} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n}\,[f(x-y)-f(x)]\,dy.$$

Mediante un cambio de variables

$$\int_{\varepsilon<|y|\leq 1} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n}\,dy = (C_n/b)\int_1^{(1/\varepsilon)^b} e^{is}s^{-1}\,ds.$$

Entonces

$$K^b(f)(x) = \int_{|y|\leq 1} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n}\,[f(x-y)-f(x)]\,dy \;+\; f(x)(C_n/b)\int_1^\infty e^{is}s^{-1}\,ds. \tag{4.4}$$

A partir de (4.4), notamos que

$$\|K^b(f)\|_\infty \leq C_n\|\nabla f\|_\infty + C_{n,b}\|f\|_\infty,$$

y si el soporte de f está contenido en $\{z : |z| \leq N\}$, resulta que $\{z : |z| \leq N+1\}$ contiene al soporte de $K^b(f)$.

(4.5) Lema. *Sea k^b un núcleo integral fuertemente singular. Sea $\varphi \in C^1_0$ tal que el soporte de φ está contenido en $\{x : |x| \leq 1\}$ y $\int \varphi(x)\,dx = 1$. Notemos que si $\varepsilon > 0$ es suficientemente pequeño, verifica*

$$4\varepsilon < \varepsilon^{\frac{1}{1+b}} < 1-\varepsilon. \tag{4.6}$$

Si ese es el caso consideramos $\varphi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\varphi(x/\varepsilon)$, *y definimos el núcleo*

$$\delta_\varepsilon(x) = K^b(\varphi_\varepsilon)(x) - k^b_{\varepsilon^{1/1+b}}(x), \tag{4.7}$$

donde $k^b_{\varepsilon^{1/1+b}}(x) = k^b(x)$, *si* $|x| > \varepsilon^{\frac{1}{1+b}}$ *y* $k^b_{\varepsilon^{1/1+b}}(x) = 0$ *en otro caso. Entonces*

(i) $\|\delta_\varepsilon\|_1 \leq C$, *donde* C *es una constante independiente de* ε, *y*

(ii) para cada $\rho > 0$, $\displaystyle\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\rho} |\delta_\varepsilon(x)|\, dx = 0$.

DEMOSTRACIÓN.

Por el Lema (4.3), $K^b(\varphi_\varepsilon)$ está bien definida y el soporte de δ_ε está contenido en $\{x : |x| \leq 1+\varepsilon\}$. Luego para probar el Lema obtendremos acotaciones para $|\delta_\varepsilon(x)|$ en cada uno de los siguientes casos: $|x| < 4\varepsilon$, $4\varepsilon < |x| < \varepsilon^{\frac{1}{1+b}}$, $\varepsilon^{\frac{1}{1+b}} < |x| < 1-\varepsilon$ y $1-\varepsilon < |x| < 1+\varepsilon$.

Puesto que el soporte de φ_ε está contenido en $\{z : |z| \leq \varepsilon\}$, si $|x| < 4\varepsilon$ entonces

$$K^b_\eta(\varphi_\varepsilon)(x) = \int_{\eta<|y|\leq 5\varepsilon} k^b(y)\, \varphi_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

Ahora por (4.6), $4\varepsilon < \varepsilon^{\frac{1}{1+b}}$. Entonces $\delta_\varepsilon(x) = K^b(\varphi_\varepsilon)(x)$, y como por hipótesis $\varphi \in C^1_0$, resulta

$$\delta_\varepsilon(x) = \int_{|y|\leq 5\varepsilon} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n}\, [\varphi_\varepsilon(x-y) - \varphi_\varepsilon(x)]\, dy \;+\; \varphi_\varepsilon(x)(C_n/b)\int_{(1/5\varepsilon)^b}^{\infty} e^{is} s^{-1}\, ds.$$

Luego, cuando $|x| < 4\varepsilon$, tenemos la acotación

$$|\delta_\varepsilon(x)| \leq C_n\|\nabla\varphi\|_\infty \varepsilon^{-n} + C_{n,b,\varphi}\, \varepsilon^{-n}, \tag{4.8}$$

y entonces

$$\int_{|x|<4\varepsilon} |\delta_\varepsilon(x)|\, dx \leq C'_{n,b,\varphi}. \tag{4.9}$$

Sea $4\varepsilon < |x| < \varepsilon^{\frac{1}{1+b}}$. Si y pertenece al soporte de φ_ε, entonces $|x-y| > 3\varepsilon$. Luego, por (4.7)

$$\delta_\varepsilon(x) = K^b(\varphi_\varepsilon)(x) = \int_{3\varepsilon<|x-y|\leq 1} \frac{e^{i|x-y|^{-b}}}{|x-y|^n}\, \varphi_\varepsilon(y)\, dy.$$

Para cada q tal que $(2+b)/q < 1$, tenemos que

$$\delta_\varepsilon(x) = \int e^{i|x-y|^{-b}} |x-y|^{-n\frac{(2+b)}{q}} \left[|x-y|^{-n+n\frac{(2+b)}{q}} - |x|^{-n+n\frac{(2+b)}{q}} \right] \varphi_\varepsilon(y)\, dy$$
$$+ |x|^{-n+n\frac{(2+b)}{q}} \widetilde{K}_{b,q} * \varphi_\varepsilon(x),$$

donde $\widetilde{K}_{b,q}(y) = e^{i|y|^{-b}} |y|^{-n\frac{(2+b)}{q}}$ es el núcleo introducido en (4.1).

Dado y tal que $\varphi_\varepsilon(y) \neq 0$, por el Teorema del Valor Medio, resulta

$$\left| \, |x-y|^{-n+n\frac{(2+b)}{q}} - |x|^{-n+n\frac{(2+b)}{q}} \right| \leq C_{n,b,q}\, \varepsilon |x|^{-n(1-\frac{(2+b)}{q})-1}.$$

Luego, si $4\varepsilon < |x| < \varepsilon^{\frac{1}{1+b}}$,

$$|\delta_\varepsilon(x)| \leq C_{n,b,q}\, \varepsilon |x|^{-n-1} + |x|^{-n(1-(2+b)/q)} |\widetilde{K}_{b,q} * \varphi_\varepsilon(x)|. \tag{4.10}$$

Por la desigualdad de Hölder

$$\int_{4\varepsilon<|x|<\varepsilon^{\frac{1}{1+b}}} |\delta_\varepsilon(x)|\, dx$$
$$\leq C_{n,b,q}\, \varepsilon \int_{|x|>4\varepsilon} |x|^{-n-1}\, dx + \left(\int_{|x|<\varepsilon^{\frac{1}{1+b}}} |x|^{-n(1-\frac{(2+b)}{q})q'}\, dx \right)^{1/q'} \left(\int |\widetilde{K}_{b,q} * \varphi_\varepsilon(x)|^q\, dx \right)^{1/q}$$
$$\leq C'_{n,b,q} + C''_{n,b,q}\, \varepsilon^{n/q} \left(\int |\widetilde{K}_{b,q} * \varphi_\varepsilon(x)|^q\, dx \right)^{1/q}.$$

Teniendo en cuenta el Lema (4.2), resulta

$$\int_{4\varepsilon<|x|<\varepsilon^{\frac{1}{1+b}}} |\delta_\varepsilon(x)|\, dx \leq C_{n,b,q}(1 + \varepsilon^{n/q} \|\varphi_\varepsilon\|_{q'}) \tag{4.11}$$
$$\leq C_{n,b,q}(1 + \|\varphi\|_{q'}).$$

Si $\varepsilon^{\frac{1}{1+b}} < |x| < 1 - \varepsilon$, para cada y que pertenece al soporte de φ_ε y por (4.6) tenemos, $|x-y| > 3\varepsilon$. Entonces como por hipótesis $\int \varphi(x)\, dx = 1$,

$$\begin{aligned}
\delta_\varepsilon(x) &= K^b(\varphi_\varepsilon)(x) - k^b_{\varepsilon^{1/1+b}}(x) \\
&= \int_{3\varepsilon<|x-y|\leq 1} k^b(x-y)\varphi_\varepsilon(y)\, dy - k^b(x) \\
&= \int_{3\varepsilon<|x-y|\leq 1} \left[\frac{e^{i|x-y|^{-b}}}{|x-y|^n} - \frac{e^{i|x|^{-b}}}{|x|^n} \right] \varphi_\varepsilon(y)\, dy.
\end{aligned}$$

Por el Teorema del Valor Medio

$$\left|\frac{e^{i|x-y|^{-b}}}{|x-y|^n} - \frac{e^{i|x|^{-b}}}{|x|^n}\right| \leq C_{b,n}\ \frac{\varepsilon}{|x|^{b+n+1}}.$$

Luego, cuando $\varepsilon^{\frac{1}{1+b}} < |x| < 1-\varepsilon$, tenemos

$$|\delta_\varepsilon(x)| \leq C_{b,n}\ \varepsilon|x|^{-b-n-1}\|\varphi\|_1 = C_{b,n,\varphi}\ \varepsilon|x|^{-b-n-1}. \tag{4.12}$$

En consecuencia

$$\int_{\varepsilon^{\frac{1}{1+b}}<|x|<1-\varepsilon} |\delta_\varepsilon(x)|\, dx \leq C'_{b,n,\varphi}\varepsilon \int_{\varepsilon^{\frac{1}{1+b}}}^{\infty} t^{-b-2}\, dt = C''_{b,n,\varphi}. \tag{4.13}$$

Cuando $1-\varepsilon < |x| < 1+\varepsilon$, dado que la condición (4.6) implica que $\varepsilon < 1/4$, para todo y tal que $\varphi_\varepsilon(x-y) \neq 0$ resulta $|y| \geq |x| - |x-y| > 1/2$. Luego

$$K^b(\varphi_\varepsilon)(x) = \int_{1/2<|y|\leq 1} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n}\varphi_\varepsilon(x-y)\, dy.$$

Por lo tanto, $|K^b(\varphi_\varepsilon)(x)| \leq C_n\|\varphi_\varepsilon\|_1 = C_n$; y si $1-\varepsilon < |x| < 1+\varepsilon$

$$|\delta_\varepsilon(x)| \leq |K^b(\varphi_\varepsilon)(x)| + |k^b_{\varepsilon^{1/1+b}}(x)| \leq C'_{n,\varphi}. \tag{4.14}$$

Entonces

$$\int_{1-\varepsilon<|x|<1+\varepsilon} |\delta_\varepsilon(x)|\, dx \leq C''_{n,\varphi}\varepsilon \leq C''_{n,\varphi}.$$

Recordando que el soporte de δ_ε está contenido en $\{x : |x| \leq 1+\varepsilon\}$, por la desigualdad anterior, (4.13), (4.11) y (4.9), tenemos la parte (i) del lema.

Para demostrar la parte (ii) podemos suponer que $\rho < 1$. Sea ε suficientemente pequeño de manera que

$$4\varepsilon < \varepsilon^{\frac{1}{1+b}} < \rho < 1-\varepsilon.$$

Por las acotaciones obtenidas en (4.12) y (4.14)

$$\begin{aligned}\int_{|x|>\rho} |\delta_\varepsilon(x)|\, dx &\leq C_1\ \varepsilon \int_{\rho<|x|<1-\varepsilon} |x|^{-b-n-1}\, dx + C_2 \int_{1-\varepsilon<|x|<1+\varepsilon} dx \\ &\leq (C'_1\rho - b - 1 + C'_2)\ \varepsilon,\end{aligned}$$

de donde resulta la parte (ii) del lema.

(4.15) Teorema. *Sea k^b un núcleo integral fuertemente singular y $\delta_\varepsilon(x) = K^b(\varphi_\varepsilon)(x) - k^b_{\varepsilon^{1/1+b}}(x)$ definido como en el Lema* (4.5). *Si w es un peso de la clase A_1 y $f \in L^1(w)$ resulta*

$$\|\delta_\varepsilon * f\|_{L^1(w)} \leq C\|f\|_{L^1(w)},$$

donde C es una constante independiente de ε y f.

Demostración.

Puesto que el soporte de δ_ε está contenido en $\{x : |x| \leq 1+\varepsilon\}$, si definimos

$$\delta_\varepsilon^{(1)} = \delta_\varepsilon\, \chi_{(|x|<4\varepsilon)}, \qquad \delta_\varepsilon^{(2)} = \delta_\varepsilon\, \chi_{(4\varepsilon<|x|<\varepsilon^{1/1+b})},$$
$$\delta_\varepsilon^{(3)} = \delta_\varepsilon\, \chi_{(\varepsilon^{1/1+b}<|x|<1-\varepsilon)} \quad y \quad \delta_\varepsilon^{(4)} = \delta_\varepsilon\, \chi_{(1-\varepsilon<|x|<1+\varepsilon)},$$

para probar el teorema es suficiente demostrar que

$$\|\delta_\varepsilon^{(i)} * f\|_{L^1(w)} \leq C_i\|f\|_{L^1(w)},$$

donde cada C_i es una constante independiente de ε y f, $i = 1, 2, 3$ y 4.

Sea $\{Q_j^1\}_j$ una partición de $\mathbb{R}^n$ con cubos cuyos lados tienen longitud 8ε. Por el Teorema de Fubini,

$$\text{(4.16)} \qquad \begin{aligned} \|\delta_\varepsilon^{(1)} * f\|_{L^1(w)} &\leq \sum_j \int_{Q_j^1} \int |\delta_\varepsilon^{(1)}(x-y)|\, |f(y)|\, dy\, w(x)\, dx \\ &= \sum_j \int |f(y)| \int_{Q_j^1} |\delta_\varepsilon^{(1)}(x-y)| w(x)\, dx\, dy. \end{aligned}$$

Si $x \in Q_j^1$, cuando $x - y$ pertenece al soporte de $\delta_\varepsilon^{(1)}$, es decir $|x-y| < 4\varepsilon$, resulta que $y \in 3Q_j^1$. Luego teniendo en cuenta que por (4.8), $|\delta_\varepsilon^{(1)}(x)| \leq C_{n,b,\varphi}\, \varepsilon^{-n}$, tenemos que (4.16) está acotado por

$$C_{n,b,\varphi} \sum_j \int_{3Q_j^1} |f(y)| \left(\varepsilon^{-n} \int_{3Q_j^1} w(x)\, dx\right) dy.$$

Puesto que $w \in A_1$, en casi todo punto $Mw(y) \leq C_w w(y)$. Entonces

$$\begin{aligned}\|\delta_\varepsilon^{(1)} * f\|_{L^1(w)} &\leq C_{n,b,\varphi,w} \sum_j \int_{3Q_j^1} |f(y)|\, w(y)\, dy \\ &\leq C\|f\|_{L^1(w)}.\end{aligned}$$

Sabemos que si $w \in A_1$ entonces para todo η pequeño, $w^{1+\eta} \in A_1$. Luego podemos elegir $q > 1$ suficientemente grande de manera que

$$(2+b)/q < 1 \qquad \text{y} \qquad w^{q'} \in A_1.$$

Recordemos que el soporte de $\delta_\varepsilon^{(2)}$ está contenido en $\{z : 4\varepsilon < |z| < \varepsilon^{\frac{1}{1+b}}\}$. Sea $s_0 \geq 2$ tal que

$$2^{s_0}\varepsilon < \varepsilon^{\frac{1}{1+b}} \leq 2^{s_0+1}\varepsilon, \tag{4.17}$$

y para cada $s : 2 \leq s \leq s_0$, consideramos $\delta_{\varepsilon,s}^{(2)}(x) = \delta_\varepsilon^{(2)}(x)$ si $2^s\varepsilon < |x| < 2^{s+1}\varepsilon$, y $\delta_{\varepsilon,s}^{(2)}(x) = 0$, en otro caso. Para estimar $\|\delta_{\varepsilon,s}^{(2)} * f\|_{L^1(w)}$, sea $\{Q_j^2\}_j$ una partición de $\mathbb{R}^n$ con cubos cuyos lados miden $2^{s+2}\varepsilon$. Por el Teorema de Fubini,

$$\|\delta_{\varepsilon,s}^{(2)} * f\|_{L^1(w)} \leq \sum_j \int_{3Q_j^2} |f(y)| \int_{Q_j^2} |\delta_{\varepsilon,s}^{(2)}(x-y)|\, w(x)\, dx\, dy.$$

Teniendo en cuenta la acotación obtenida en (4.10), resulta

$$\begin{aligned}&\|\delta_{\varepsilon,s}^{(2)} * f\|_{L^1(w)} \\ &\leq C_{n,b,q}\, \varepsilon \sum_j \int_{3Q_j^2} |f(y)| \left((2^s\varepsilon)^{-n-1} \int_{Q_j^2} w(x)\, dx\right) dy \\ &\quad + (2^s\varepsilon)^{-n(1-\frac{(2+b)}{q})} \sum_j \int_{3Q_j^2} |f(y)| \left(\int_{Q_j^2} |\widetilde{K}_{b,q} * \varphi_\varepsilon(x-y)|\, w(x)\, dx\right) dy \\ &= I_1(s,\varepsilon) + I_2(s,\varepsilon),\end{aligned} \tag{4.18}$$

donde $\widetilde{K}_{b,q}(y) = e^{i|y|^{-b}}|y|^{-n\frac{(2+b)}{q}}$. Puesto que $w \in A_1$

$$\begin{aligned}I_1(s,\varepsilon) &\leq C_{n,b,q,w}\, 2^{-s} \sum_j \int_{3Q_j^2} |f(y)|\, w(y)\, dy \\ &\leq C 2^{-s}\|f\|_{L^1(w)}.\end{aligned} \tag{4.19}$$

Ahora acotaremos $I_2(s,\varepsilon)$. Por la desigualdad de Hölder y el Lema (4.2), tenemos

$$\text{(4.20)}\qquad \int_{Q_j^2} |\widetilde{K}_{b,q} * \varphi_\varepsilon(x-y)|\, w(x)\, dx$$

$$\leq \left(\int |\widetilde{K}_{b,q} * \varphi_\varepsilon(x-y)|^q\, dx\right)^{1/q} \left(\int_{Q_j^2} w(x)^{q'}\, dx\right)^{1/q'}$$

$$\leq C_q \|\varphi_\varepsilon\|_{q'} \left(\int_{3Q_j^2} w(x)^{q'}\, dx\right)^{1/q'}$$

Puesto que elegimos q de tal manera que $w^{q'} \in A_1$, para casi todo $y \in 3Q_j^2$, (4.20) está acotado por

$$C_{q,n,w}\, \|\varphi_\varepsilon\|_{q'} (2^s\varepsilon)^{n/q'} w(y) \leq C_{q,n,w}\, \varepsilon^{-n/q} \|\varphi\|_{q'} (2^s\varepsilon)^{n/q'} w(y).$$

Entonces

$$I_2(s,\varepsilon) \leq C\, 2^{sn\frac{(1+b)}{q}}\, \varepsilon^{nb/q}\, \|f\|_{L^1(w)}.$$

Luego por (4.18) y (4.19), resulta

$$\|\delta_{\varepsilon,s}^{(2)} * f\|_{L^1(w)} \leq C\,(2^{-s} + 2^{sn\frac{(1+b)}{q}}\, \varepsilon^{nb/q})\, \|f\|_{L^1(w)}.$$

A partir de (4.17), tenemos que $2^{s_0} < \varepsilon^{-\frac{b}{1+b}}$, y esto implica que $2^{s_0\frac{(1+b)}{q}}\, \varepsilon^{b/q} < 1$. Entonces por la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned}
\|\delta_\varepsilon^{(2)} * f\|_{L^1(w)} &\leq \sum_{s=2}^{s_0} \|\delta_{\varepsilon,s}^{(2)} * f\|_{L^1(w)} \\
&\leq C\left(\sum_{s\geq 2} 2^{-s} + \varepsilon^{nb/q} \sum_{s=2}^{s_0} 2^{sn\frac{(1+b)}{q}}\right) \|f\|_{L^1(w)} \\
&\leq C' \|f\|_{L^1(w)}.
\end{aligned}$$

El soporte de $\delta_\varepsilon^{(3)}$ está contenido en $\{z : \varepsilon^{\frac{1}{1+b}} < |z| < 1-\varepsilon\}$, entonces si s_0 es un entero positivo tal que $1-\varepsilon \leq 2^{s_0+1}\varepsilon^{\frac{1}{1+b}}$, podemos escribir

$$\delta_\varepsilon^{(3)} = \sum_{s=0}^{s_0} \delta_{\varepsilon,s}^{(3)},$$

donde $\delta^{(3)}_{\varepsilon,s}(x) = \delta^{(3)}_{\varepsilon}(x)$, si $2^s \varepsilon^{\frac{1}{1+\delta}} < |x| < 2^{s+1}\varepsilon^{\frac{1}{1+\delta}}$ y $\delta^{(3)}_{\varepsilon,s}(x) = 0$, en otro caso. Para estimar $\|\delta^{(3)}_{\varepsilon,s} * f\|_{L^1(w)}$, consideramos $\{Q^3_j\}_j$ una partición de $I\!R^n$ con cubos de lados de longitud $2^{s+2}\varepsilon^{\frac{1}{1+\delta}}$. Por el Teorema de Fubini, tenemos que

$$(4.21) \qquad \|\delta^{(3)}_{\varepsilon,s} * f\|_{L^1(w)} \le \sum_j \int |f(y)| \left(\int_{Q^3_j} |\delta^{(3)}_{\varepsilon,s}(x-y)|\, w(x)\, dx \right) dy.$$

Sea $x \in Q^3_j$, si $x - y$ pertenece al soporte de $\delta^{(3)}_{\varepsilon,s}$, entonces $y \in 3Q^3_j$. Luego por la desigualdad obtenida en (4.12), para (4.21) tenemos la cota

$$C_{b,n,\varphi} \sum_j \int_{3Q^3_j} |f(y)| \left(\varepsilon (2^s \varepsilon^{\frac{1}{1+\delta}})^{-b-n-1} \int_{Q^3_j} w(x)\, dx \right) dy$$
$$\le C'_{b,n,\varphi} 2^{-s(1+b)} \sum_j \int_{3Q^3_j} |f(y)| \left((2^s \varepsilon^{\frac{1}{1+\delta}})^{-n} \int_{Q^3_j} w(x)\, dx \right) dy.$$

Puesto que $w \in A_1$,

$$\begin{aligned} \|\delta^{(3)}_{\varepsilon,s} * f\|_{L^1(w)} &\le C_{b,n,\varphi,w}\, 2^{-s(1+b)} \sum_j \int_{3Q^3_j} |f(y)|\, w(y)\, dy \\ &\le C'_{b,n,\varphi,w}\, 2^{-s(1+b)} \|f\|_{L^1(w)}. \end{aligned}$$

Entonces por la desigualdad de Minkowski,

$$\begin{aligned} \|\delta^{(3)}_{\varepsilon} * f\|_{L^1(w)} &\le \sum_{s=0}^{s_0} \|\delta^{(3)}_{\varepsilon,s} * f\|_{L^1(w)} \\ &\le C \left(\sum_{s \ge 0} 2^{-s(1+b)} \right) \|f\|_{L^1(w)}. \end{aligned}$$

Recordando que $\delta^{(4)}_{\varepsilon} = \delta_\varepsilon \chi_{(1-\varepsilon<|x|<1+\varepsilon)}$, por (4.14) tenemos la acotación

$$|\delta^{(4)}_{\varepsilon}(x)| \le C_{n,\varphi}.$$

Sea $\{Q^4_j\}_j$ una partición de $I\!R^n$ con cubos cuyos lados tienen longitud 1. A partir de las desigualdades $4\varepsilon < \varepsilon^{\frac{1}{1+\delta}} < 1 - \varepsilon$ (ver (4.6)), resulta $\varepsilon < 1/2$. Luego por el Teorema de Fubini y puesto que $w \in A_1$,

$$\begin{aligned}
\|\delta_\varepsilon^{(4)} * f\|_{L^1(w)} &\leq \sum_j \int_{5Q_j^4} |f(y)| \int_{Q_j^4} |\delta_\varepsilon^{(4)}(x-y)|\, w(x)\, dx\, dy \\
&\leq C_{n,\varphi,w} \sum_j \int_{5Q_j^4} |f(y)|\, w(y)\, dy \\
&\leq C'_{n,\varphi,w} \|f\|_{L^1(w)}.
\end{aligned}$$

(4.22) Lema. *Sea* k^b *un núcleo integral fuertemente singular y* $\delta_\varepsilon(x) = K^b(\varphi_\varepsilon)(x) - k^b_{\varepsilon^{1/1+b}}(x)$ *definido como en el Lema* (4.5). *Entonces*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int \delta_\varepsilon(x)\, dx = 0.$$

Demostración.

Mediante un cambio de variables, resulta

$$\int k^b_{\varepsilon^{1/1+b}}(x)\, dx = \int_{\varepsilon^{1/1+b} < |x| \leq 1} e^{i|x|^{-b}} |x|^{-n}\, dx = (C_n/b) \int_1^{\varepsilon^{-\frac{b}{1+b}}} e^{is} s^{-1}\, ds.$$

Luego, existe

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int k^b_{\varepsilon^{1/1+b}}(x)\, dx = (C_n/b) \int_1^\infty e^{is} s^{-1}\, ds = L_b. \tag{4.23}$$

Puesto que $\varphi_\varepsilon \in C_0^1$, por la desigualdad (4.4), obtenida en el Lema (4.3),

$$K^b(\varphi_\varepsilon)(x) = \int_{|y| \leq 1} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n} [\varphi_\varepsilon(x-y) - \varphi_\varepsilon(x)]\, dy \; + \; \varphi_\varepsilon(x) L_b.$$

Entonces, teniendo en cuenta que el soporte de $K^b(\varphi_\varepsilon)$ está contenido en $\{x : |x| \leq 1 + \varepsilon\}$ y $\int_{|x| \leq \varepsilon} \varphi_\varepsilon(x)\, dx = 1$, resulta

$$\int K^b(\varphi_\varepsilon)(x)\, dx = \int_{|x| \leq 1+\varepsilon} \int_{|y| \leq 1} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n} [\varphi_\varepsilon(x-y) - \varphi_\varepsilon(x)]\, dy\, dx \; + \; L_b.$$

Ahora, por el Teorema de Fubini

$$\text{(4.24)} \qquad \int K^b(\varphi_\varepsilon)(x)\,dx$$

$$= \int_{|y|\le 1} \frac{e^{i|y|^{-b}}}{|y|^n} \int_{|x|\le 1+\varepsilon} [\varphi_\varepsilon(x-y) - \varphi_\varepsilon(x)]\,dx\,dy \;+\; L_b$$

$$= L_b.$$

Por (4.23) y (4.24) se tiene el lema.

(4.25) Lema. *Sea k^b un núcleo integral fuertemente singular y $\delta_\varepsilon(x) = K^b(\varphi_\varepsilon)(x) - k^b_{\varepsilon^{1/1+b}}(x)$ definido como en el Lema (4.5). Sea w un peso de la clase A_1. Si $f \in L^1(w)$ entonces*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \|\delta_\varepsilon * f\|_{L^1(w)} = 0.$$

Demostración.

Supongamos primero que f es una función acotada con soporte acotado. Tenemos la acotación

$$\|\delta_\varepsilon * f\|_{L^1(w)}$$

$$\le \int\left|\int \delta_\varepsilon(y)\,[f(x-y) - f(x)]\,dy\right| w(x)\,dx \;+\; \int\left|\int \delta_\varepsilon(y)\,f(x)\,dy\right| w(x)\,dx$$

$$= I_1(\varepsilon) + I_2(\varepsilon).$$

Para $I_2(\varepsilon)$ vale la desigualdad,

$$I_2(\varepsilon) \le \left|\int \delta_\varepsilon(y)\,dy\right| \|f\|_{L^1(w)},$$

y por el Lema (4.22), $I_2(\varepsilon)$ tiende a cero cuando ε tiende a cero.

Dado $\eta > 0$, como f es acotada con soporte acotado y w es localmente integrable, existe $\rho > 0$ tal que si $|y| < \rho$ entonces

$$\int |f(x-y) - f(x)|\,w(x)\,dx < \eta.$$

Sea $N > 0$ tal que el soporte de f está contenido en $\{x : |x| \leq N\}$. Por el Teorema de Fubini

$$\begin{aligned}
I_1(\varepsilon) &\leq \int_{|y|\leq\rho} |\delta_\varepsilon(y)| \int |f(x-y) - f(x)|\, w(x)\, dx\, dy \\
&\quad + \int_{|y|>\rho} |\delta_\varepsilon(y)| \int_{|x|\leq N+2} |f(x-y) - f(x)|\, w(x)\, dx\, dy \\
&\leq \eta \|\delta_\varepsilon\|_1 + 2\|f\|_\infty \left(\int_{|x|\leq N+2} w(x)\, dx \right) \int_{|y|>\rho} |\delta_\varepsilon(y)|\, dy.
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el Lema (4.5) partes (i) y (ii), $I_1(\varepsilon)$ tiende a cero cuando ε tiende a cero.

Dada una función f que pertenece a $L^1(w)$, sea g acotada con soporte acotado, tal que $\|f - g\|_{L^1(w)} < \eta$. Por el Teorema (4.15)

$$\begin{aligned}
\|\delta_\varepsilon * f\|_{L^1(w)} &\leq \|\delta_\varepsilon * (f-g)\|_{L^1(w)} + \|\delta_\varepsilon * g\|_{L^1(w)} \\
&\leq C\|f-g\|_{L^1(w)} + \|\delta_\varepsilon * g\|_{L^1(w)} \\
&\leq C\eta + \eta
\end{aligned}$$

si ε es suficientemente pequeño.

§2. Demostración del Teorema C.

Los dos lemas siguientes serán empleados para probar el Teorema C.

(4.26) Lema. *Sea k^b un núcleo integral fuertemente singular y sea $g \in C_0^1$. Si w es un peso de la clase A_1 y $f \in L^1(w)$ entonces para casi todo $x \in \mathbb{R}^n$,*

$$K^b(f * g)(x) = (f * K^b(g))(x).$$

DEMOSTRACIÓN.

Ante todo notemos que como $f \in L^1(w)$ y $w \in A_1$, resulta que f es una función localmente integrable. Luego la convolución $f * g \in C^1$ y por el Lema (4.3), $K^b(f * g)$ está bien definida en todo punto. También por el Lema (4.3), $K^b(g)$ es una función acotada con soporte acotado. Entonces $f * K^b(g)$ está bien definida en todo punto.

Supongamos que el soporte de g está contenido en $\{z : |z| \leq N\}$ y sea $T > 0$. Definimos $f_1(x) = f(x)$ si $|x| \leq N + T + 1$ y $f_1(x) = 0$ en otro caso; y sea $f_2 = f - f_1$.

Dado $x : |x| < T$, como el soporte de $f_2 * g$ está contenido en $\{z : |z| > T + 1\}$ entonces $K^b(f_2 * g)(x) = 0$. Por otro lado, también $(f_2 * K^b(g))(x) = 0$ pues $K^b(g)(y) = 0$ si $|y| > N + 1$.

Ahora puesto que $f_1 \in L^1$ y $g \in L^2$, por la teoría desarrollada por S. Chanillo (ver [5]), en casi todo punto,

$$K^b(f_1 * g)(x) = (f_1 * K^b(g))(x),$$

es decir, $K^b(f * g)(x) = (f * K^b(g))(x)$ para casi todo $x : |x| < T$.

Recordamos que dado un entero positivo m, para cada $s = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{Z}^n$, notamos $y_s^m = 2^{-m}s$ y consideramos la partición de $\mathbb{R}^n$, $\{Q_s^m\}_{s \in \mathbb{Z}^n}$ donde $Q_s^m = \{y : 2^{-m}s_i \leq y_i < 2^{-m}(s_i + 1), 1 \leq i \leq n\}$. Si g es una función acotada con soporte acotado, para cada f localmente integrable, definimos en (2.21)

$$C_m(f)(x) = \sum_{s \in \mathbb{Z}^n} f(x - y_s^m) \int_{Q_s^m} g(z)\, dz.$$

De acuerdo con el Lema (2.22) se verifica que para todo $R > 0$

$$\lim_{m \to \infty} \int_{|x| < R} |C_m(f)(x) - (f * g)(x)|\, dx = 0.$$

Antes del próximo lema, también conviene observar que si $w \in A_1$ y f es una función de $L^1(w)$, por la desigualdad de tipo débil $(1,1)$ probada por S. Chanillo (ver

Teorema C, pág. 79, en [5]) la integral fuertemente singular $K^b(f)$ está bien definida en casi todo punto.

(4.27) Lema. *Sea k^b un núcleo integral fuertemente singular. Sean $g \in C_0^1$ y w un peso de la clase A_1. Si $f \in L^1(w)$ y además $K^b(f)$ también pertenece a $L^1(w)$, entonces en casi todo punto*

$$K^b(f * g)(x) = (K^b(f) * g)(x).$$

DEMOSTRACIÓN.

Sea $T > 0$. Tenemos que

$$\begin{aligned}
&|\{x : |x| < T, |K^b(f * g)(x) - (K^b(f) * g)(x)| > \eta\}| \\
&\qquad \leq |\{x : |x| < T,\ |K^b(f * g)(x) - C_m(K^b(f))(x)| > \eta/2\}| \\
&\qquad\quad + |\{x : |x| < T,\ |C_m(K^b(f))(x) - (K^b(f) * g)(x)| > \eta/2\}| \\
&\qquad = \alpha + \beta.
\end{aligned}$$

Puesto que $K^b(f)$ es localmente integrable, por la desigualdad de Chebyshev y el Lema (2.22), resulta

$$\beta \leq \frac{2}{\eta} \int_{|x|<T} |C_m(K^b(f))(x) - (K^b(f) * g)(x)|\, dx < \eta,$$

si m es suficientemente grande.

Por otro lado, tenemos que para casi todo $x : |x| < T$,

$$\begin{aligned}
C_m(K^b(f))(x) &= \sum_{s \in \mathbb{Z}^n} K^b(f)(x - y_s^m) \int_{Q_s^m} g(z)\, dz \\
&= \sum_{s \in \mathbb{Z}^n} \lim_{\varepsilon \to 0} \int k_\varepsilon^b(x - y_s^m - y)\, f(y)\, dy \int_{Q_s^m} g(z)\, dz.
\end{aligned}$$

Cambiando variables y teniendo en cuenta que sólo finitos términos son no nulos,

$$\begin{aligned}
C_m(K^b(f))(x) &= \lim_{\varepsilon \to 0} \int k_\varepsilon^b(x - t) \sum_{s \in \mathbb{Z}^n} f(t - y_s^m) \int_{Q_s^m} g(z)\, dz\, dt \\
&= K^b(C_m(f))(x).
\end{aligned}$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned}\alpha &= |\{x : |x| < T,\ |K^b(f * g)(x) - K^b(C_m(f))(x)| > \eta/2\}| \\ &= |\{x : |x| < T,\ |K^b((f * g)\chi_{T+1})(x) - K^b(C_m(f)\chi_{T+1})(x)| > \eta/2\}|.\end{aligned}$$

La función $f * g$ es localmente integrable pues f lo es y g es acotada y de soporte acotado. Entonces puesto que K^b es de tipo débil $(1,1)$ con respecto a la medida de Lebesgue, resulta

$$\alpha \leq \frac{C}{\eta} \int_{|x|<T+1} |(f * g)(x) - C_m(f)(x)|\, dx < \eta$$

si m es suficientemente grande.

Ahora estamos en condiciones de probar el Teorema C, cuyo enunciado volvemos a escribir.

Teorema C. *Sea k^b un núcleo integral fuertemente singular y sea $w \in A_1$. Si f y $K^b(f) \in L^1(w)$, entonces*

(i) $\|K^b_\eta(f)\|_{L^1(w)} \leq C\{\|f\|_{L^1(w)} + \|K^b(f)\|_{L^1(w)}\}$,

para todo η suficientemente pequeño, donde C es una constante independiente de η y f. Además

(ii) $\lim_{\eta \to 0} \|K^b_\eta(f) - K^b(f)\|_{L^1(w)} = 0.$

DEMOSTRACIÓN.

Para simplificar la notación consideremos $\eta = \varepsilon^{\frac{1}{1+b}}$. Sea $\delta_\varepsilon(x)$ definida como en el Lema (4.5), $\delta_\varepsilon(x) = K^b(\varphi_\varepsilon)(x) - k^b_{\varepsilon^{1/1+b}}(x)$. Entonces

$$K^b_\eta(f)(x) = (f * K^b(\varphi_\varepsilon))(x) - (\delta_\varepsilon * f)(x).$$

Por los Lemas (4.26) y (4.27), resulta

$$K^b_\eta(f)(x) = (K^b(f) * \varphi_\varepsilon)(x) - (\delta_\varepsilon * f)(x). \tag{4.28}$$

De acuerdo con la parte (i) del Corolario (2.6) y el Teorema (4.15) si $4\eta^{1+b} < \eta < 1 - \eta^{1+b}$, tenemos que

$$\|K_\eta^b(f)\|_{L^1(w)} \leq C\{\|K^b(f)\|_{L^1(w)} + \|f\|_{L^1(w)}\},$$

es decir, la parte (i).

Ahora por (4.28),

$$\|K_\eta^b(f) - K^b(f)\|_{L^1(w)} \leq \|K^b(f) * \varphi_\varepsilon - K^b(f)\|_{L^1(w)} + \|\delta_\varepsilon * f\|_{L^1(w)}.$$

Entonces por la parte (ii) del Corolario (2.6) y el Lema (4.25) ambos sumandos tienden a cero cuando ε tiende a cero, y esto implica (ii) del Teorema C.

REFERENCIAS.

[1] H. AIMAR AND E.O. HARBOURE, *On weighted inequalities for non-standard truncations of singular integrals*, Rev. Un. Mat. Argentina **33** (1987), no. 1-2, pp. 21-30.

[2] A.P. CALDERÓN AND O.N. CAPRI, *On the convergence in L^1 of singular integrals*, Studia Math. **78** (1984), pp. 321-327.

[3] A.P. CALDERÓN, M. WEISS AND A. ZYGMUND, *On the existence of singular integrals*, Proc. Symp. Pure Math., vol. 10, Amer. Math. Soc., Providence, R.I. 1967, pp. 56-73.

[4] O.N. CAPRI AND C. SEGOVIA, *Behaviour of L^r-Dini singular integrals in weighted L^1 spaces*, Studia Math. **92** (1989), pp. 21-36.

[5] S. CHANILLO, *Weighted norm inequalities for strongly singular convolution operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **281** (1984), pp. 77-107.

[6] C. FEFFERMAN, *Inequalities for strongly singular convolution operators*, Acta Math. **124** (1970), pp. 9-36.

[7] C. FEFFERMAN AND E.M. STEIN, *H^p spaces of several variables*, Acta Math. **129**, (1972), pp. 137-193.

[8] J. GARCÍA CUERVA AND J.L. RUBIO DE FRANCIA, *Weighted norm inequalities and related topics*, North-Holland Math. Studies **116** (1985).

[9] E.O. HARBOURE, *Non-standard truncations of singular integrals*, Indiana Univ. Math. Journal **28** (1979), pp. 779-790.

[10] I.I. HIRSCHMAN, *Multiplier transformations*, Duke Math. **5.26** (1959), pp. 222-242.

[11] D.S. KURTZ AND R.L. WHEEDEN, *Results on weighted norm inequalities for multipliers*, Trans. Amer. Math. Soc. **255** (1979), pp. 343-362.

[12] B. MUCKENHOUPT, *Two weight function norm inequalities for the Poisson integral*, Trans. Amer. Math. Soc. **210** (1975), pp. 225-231.

[13] B. MUCKENHOUPT, *Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function*, Trans. Amer. Math. Soc. **165** (1972), pp. 207-226.

[14] S. WAINGER, *Special trigonometric series in k-dimensions*, Mem. Amer. Math. Soc. No. **59** (1965).

Carlos Segovia

Lee Rosa