

Tesis de Posgrado

Operador densidad : una aproximación al estudio de Hamiltonianos cuánticos dependientes del tiempo

Crespo, Gustavo Horacio

1992

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Crespo, Gustavo Horacio. (1992). Operador densidad : una aproximación al estudio de Hamiltonianos cuánticos dependientes del tiempo. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.

http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2500_Crespo.pdf

Cita tipo Chicago:

Crespo, Gustavo Horacio. "Operador densidad : una aproximación al estudio de Hamiltonianos cuánticos dependientes del tiempo". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1992.

http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2500_Crespo.pdf


EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires



UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tema de Tesis

Operador densidad: una aproximación al estudio de Hamiltonianos
cuánticos dependientes del tiempo.

Autor

Gustavo Horacio Crespo

Director de Tesis

Dra. Araceli Noemí Proto

Lugar de Trabajo

Laboratorio de Física

Comisión Nacional de Investigaciones Espaciales

*Tesis.
2500.*

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas

1992

A Nilda,
a Olindo,
a Fabián,
y a mí.

AGRADECIMIENTOS

Es mi deseo agradecer en primer término a la Dra. Araceli Noemí Proto, Directora de esta tesis. Puedo asegurar que durante los años que estuve bajo su dirección como doctorando descubrí una excelente profesional y ser humano, cuyas enseñanzas y amistad valoro enormemente. Gracias a su estímulo, paciencia y confianza constantes es que esta tesis pudo finalmente plasmarse, y debo mencionar que supo brindarme de manera única un afectuoso pero firme apoyo en los momentos en que dificultades personales mías podrían haber afectado mi trabajo de investigación, creando un clima de trabajo inmejorable que ayudaba a neutralizar las contingencias coyunturales generales y del ámbito científico de mi país.

Al Dr. Jorge Luis Aliaga, un excelente compañero de trabajo que me supo brindar, por un lado, su amistad, y por el otro un espíritu de trabajo y constancia dignos de admiración. A él debo agradecerle la casi infinita paciencia, completa cooperación y cordialidad que hicieron posibles los trabajos que realizamos en colaboración, así como también toda la ayuda personal, en lo profesional y humano, que siempre me ofreció.

Al Dr. Angel Plastino, por el especialísimo aporte en todo sentido que significa haber podido trabajar en colaboración con un científico de su talla.

Al Dr. Dino Otero, por su aporte en cuanto a discusiones profesionales, en especial en los primeros años de trabajo.

A todos los demás compañeros de trabajo, por su cordialidad y camaradería; en especial al Lic. Luis Irastorza.

A la Dra. Susana Hernández, Supervisora de Estudios de mi doctorado en la Universidad de Buenos Aires, por todo lo que me ha enseñado como científica y por todo el apoyo, guía y ayuda que me ha

brindado siempre.

A la Comisión de Investigaciones Científicas de la Provincia de Buenos Aires (CIC) que mediante el otorgamiento de las becas de Iniciación y Perfeccionamiento posibilitó la realización de este trabajo de tesis.

A la Comisión Nacional de Investigaciones Espaciales por haberme dado lugar de trabajo.

A las inmejorables facilidades de cómputo que la Dra. A. N. Proto supo siempre brindarme, de una manera u otra.

Particularmente, quiero agradecer a la Dra. A. N. Proto, al Dr. J. L. Aliaga y al Lic. L. Irastorza por la ayuda otorgada en las etapas finales de corrección y compaginación de esta tesis.

Muy emotivamente quiero agradecer a mis familiares, en especial a mis padres, hermano, madrina y padrinos (oficiales y honoris causa).

Finalmente, a todos mis amigos y a todos aquellos que de una manera quizás insospechada, hicieron que esta tesis sea una realidad, no animándome a nombrarlos a todos por el vértigo al infinito.

Buenos Aires, 1992.

La mecánica cuántica ha tenido un éxito tan importante en la solución de problemas físicos¹, que la mayoría de las formulaciones teóricas que se utilizan en la actualidad tratan de satisfacer sus postulados fundamentales. La Teoría de la Información no es una excepción. Fue formulada por C.E. Shannon² para ser aplicada al campo de las comunicaciones y extendida por J. Von Neumann³, a través de la matriz densidad, y fundamentalmente por E.T. Jaynes⁴, mediante el Principio de Máxima Entropía, a la mecánica estadística. Los trabajos de Y. Alhassid y R.D. Levine⁵ incorporaron la mecánica cuántica a la Teoría de la Información, ampliando por lo tanto los horizontes de esta formulación.

En la última década, J. Aliaga, D. Otero, A. Plastino y A.N. Proto utilizaron los resultados antes mencionados para conectar la Teoría de la Información y el Principio de Máxima Entropía con el teorema de Ehrenfest⁶. Posteriormente, se formuló una teoría de respuesta lineal, se desarrolló un formalismo que relaciona a la teoría de la información con los espacios de Riemann⁷ y se extendió

¹ C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics*, John Wiley & Sons, Paris, 1977.

² C.E. Shannon, *Bell. Sys. Tech. J.* **27**, 379, 623 (1948).

³ J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton U. P., Princeton, 1955).

⁴ E.T. Jaynes, *Phys. Rev.* **106**, 620 (1957); *Phys. Rev.* **108**, 171 (1957).

⁵ Y. Alhassid and R.D. Levine, *Phys. Rev. A* **18**, 89 (1978); *J. Chem. Phys.* **67**, 4321 (1977).

⁶ D. Otero, A. Plastino, A. N. Proto, and G. Zannoli, *Phys. Rev. A* **26**, 1209 (1982).

⁷ E. Duering, D. Otero, A. Plastino, and A. N. Proto, *Phys. Rev. A* **32**, 3681

de manera natural la termodinámica clásica a sistemas cuánticos cuyos operadores relevantes son no-conmutantes⁸.

En el presente trabajo, partiendo de esa base teórica, se pretenderá ampliar el formalismo, y se darán ejemplos de aplicación de dicha ampliación, así como también se discutirán modelos de disipación cuántica.

En el Capítulo II se desarrollará un resumen de los conceptos fundamentales de mecánica estadística, mecánica cuántica y Teoría de la Información que se han mencionado previamente, y sobre los cuales se basarán los capítulos siguientes.

El Capítulo III se dedicará al estudio del Hamiltoniano cuántico no lineal de Albrecht, Hasse y Süssmann, que es ampliamente conocido en la literatura como un Hamiltoniano que permite la descripción de la disipación cuántica como problema de una partícula ("Information Theory and nonlinear quantal Hamiltonians", G. Crespo, D. Otero, A. Plastino and A.N. Proto, Phys. Rev. **A** 39, 2133 (1989); "Reply to "Comment on 'Information Theory and nonlinear quantal Hamiltonians'""", G. Crespo, D. Otero, A. Plastino and A.N. Proto, Phys. Rev. **A** 41, 7068 (1990)). Además de comparar los resultados obtenidos mediante el enfoque introducido en el Capítulo II con los previamente hallados en la literatura, se verá que la supuesta no linealidad de este Hamiltoniano depende de cómo se lo "lea", dando así un enfoque alternativo al usualmente aceptado con respecto a dicho Hamiltoniano.

En el Capítulo IV se estudiará el conocido Hamiltoniano de Kanai-Caldirola, demostrándose que dicho Hamiltoniano no describe el sistema para el cual fue originalmente propuesto: el oscilador

(1985); Phys. Rev. **A** 35, 2314 (1987).

⁸ J. Aliaga, D. Otero, A. Plastino and A.N. Proto, Phys. Rev. **A** 37, 918 (1988).

armónico amortiguado ("Information-theory approach to the variable-mass harmonic oscillator", G. Crespo, A.N. Proto, A. Plastino and D. Otero, Phys. Rev. **A** 42, 3608 (1990)). Se verá también que distintas conclusiones e interpretaciones que históricamente se le han dado a este Hamiltoniano resultan también incorrectas a la luz de un examen en lo concerniente a su origen físico. Utilizando el Principio de Máxima Entropía se dará un nuevo enfoque al concepto de equivalencia física entre diferentes Lagrangianos y/o Hamiltonianos.

En el Capítulo V se tratará la imposibilidad de una descripción de la disipación en la mecánica cuántica que surja de la cuantificación directa de las ecuaciones de Hamilton generalizadas. En este sentido se analizarán en forma crítica trabajos previos de diferentes autores en los que se analizó este procedimiento para la cuantificación de la disipación.

En el Capítulo VI se estudiarán los estados coherentes y estados squeezed para temperatura distinta de cero tanto para el oscilador armónico de frecuencia variable como para el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola ("Nonzero-temperature coherent and squeezed states for the harmonic oscillator: The time-dependent frequency case", J. Aliaga, G. Crespo and A.N. Proto, Phys. Rev. **A** 42, 618 (1990); "Thermodynamics of the squeezed states for the Kanai-Caldirola Hamiltonian", J. Aliaga, G. Crespo and A.N. Proto, Phys. Rev. **A** 42, 4325 (1990)). Mediante la utilización del operador estadístico, en el contexto de la Teoría de la Información, se analizan la aparición de los estados coherentes y los estados squeezed tanto para el caso ampliamente estudiado de temperatura cero como para el caso de temperatura distinta de cero. Se establece una conexión entre la aparición de los estados squeezed y los operadores relevantes incluidos en el operador estadístico asociado al problema. Para el caso del oscilador armónico de frecuencia

variable, se estudia en detalle el caso particular de un salto repentino en la frecuencia. En el caso del Hamiltoniano de Kanai-Caldirola, se extiende fácilmente el análisis al llamado oscilador armónico generalizado y a un tipo de Hamiltoniano de dos fotones. En ambos casos se comparan los resultados, cuando es posible, con los que se han obtenido previamente utilizando la descripción de la función de onda.

En el Capítulo VII se efectúa una reformulación del Principio de Máxima Entropía en la representación de interacción ("Maximum-entropy principle in the interaction picture: Approach to time-dependent relevant operators", J. Aliaga, G. Crespo and A.N. Proto, Phys. Rev. A 44, 2066 (1991)). Se muestra la ventaja de este enfoque para el caso en el que los operadores relevantes en la representación de interacción no dependen explícitamente del tiempo. Como ejemplo, se estudia la evolución dinámica tanto de las dispersiones de los llamados operadores de cuadraturas de variación lenta para el amplificador paramétrico degenerado como de los estados squeezed asociados a este sistema.

En el Capítulo VIII se realiza una ampliación del Principio de Máxima Entropía en el contexto de la Teoría de la Información para el caso en el que los operadores relevantes dependan explícitamente del tiempo. Se plantean las ecuaciones de evolución para los multiplicadores de Lagrange asociados a dichos operadores relevantes. A manera de ejemplos, se analizan, en este contexto, la obtención de invariantes dinámicos explícitamente dependientes del tiempo para el Hamiltoniano del convertidor de frecuencia y se estudia la evolución dinámica de las dispersiones de los operadores de cuadratura de variación lenta para el convertidor de frecuencia, comprándose en este último caso los resultados con los del Capítulo VII.

Información.

II.1. Mecánica Estadística y Mecánica Cuántica.

En la representación de Schrödinger, si se realiza simultáneamente la medición con dispersión nula de los valores medios de un conjunto completo de observables que conmutan $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \dots, \hat{O}_n$, la función de onda del sistema será autofunción de $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \dots, \hat{O}_n$ con autovalores o_1, o_2, \dots, o_n ¹. De esta forma el estado del sistema queda completamente definido y se lo representa en el instante t con el vector o ket $|\psi(t)\rangle$. Este se puede escribir, en una base ortonormal y completa $\{|n\rangle\}$, como

$$|\psi(t)\rangle = \sum_n c_n(t) |n\rangle \quad (\text{II.1.1})$$

donde los coeficientes $c_n(t) = \langle \psi(t) | n \rangle$ se eligen de forma tal que el estado resulte normalizado.

El valor de expectación de un operador \hat{A} al tiempo t está dado, en función de los elementos de matriz $A_{np} = \langle n | \hat{A} | p \rangle$, por

$$\langle \hat{A} \rangle(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \sum_{n,p} c_n^*(t) c_p(t) A_{np} . \quad (\text{II.1.2})$$

La evolución temporal de $|\psi(t)\rangle$, a partir de un estado inicial $|\psi(t_0)\rangle$, para un sistema con un Hamiltoniano $\hat{H}(t)$, está determinada por la ecuación de Schrödinger

$$i \hbar \frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = \hat{H}(t) |\psi(t)\rangle . \quad (\text{II.1.3})$$

¹ C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, Quantum Mechanics, John Wiley & Sons, Paris, 1977

o bien según

$$|\psi(t)\rangle = \hat{U}(t, t_0) |\psi(t_0)\rangle$$

donde el operador evolución $\hat{U}(t, t_0)$ es tal que verifica

$$i \hbar \frac{\partial \hat{U}(t, t_0)}{\partial t} = \hat{H}(t) \hat{U}(t, t_0)$$

Luego, la ecuación de evolución para el valor de expectación de un observable \hat{A} resulta

$$\frac{d\langle \hat{A} \rangle}{dt} = \frac{1}{i \hbar} \langle [\hat{A}, \hat{H}(t)] \rangle + \langle \frac{\partial \hat{A}}{\partial t} \rangle \quad (\text{II.1.4})$$

la que para el caso particular en que $\hat{A} = \hat{x}$ ó $\hat{A} = \hat{p}$ se conoce con el nombre de teorema de Ehrenfest.

Hasta el momento se ha considerado que el estado dinámico del sistema se conoce exactamente a través de la Ec.(II.1.1) y se dice que se trata de un estado puro. Cuando se posee una información incompleta acerca del sistema, ya sea porque el conjunto de observables que conmutan es incompleto o porque los observables no conmutan, no es posible determinar $|\psi\rangle$ en forma unívoca y es necesario introducir el concepto de probabilidad en el sentido estadístico. Entonces, la información parcial disponible puede estar dada en términos de un conjunto de posibles estados $|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle, \dots, |\psi_N\rangle, \dots$ que satisfacen la ecuación de Schrödinger, cada uno de ellos con una probabilidad $P_1, P_2, \dots, P_N, \dots$. En este caso se dice que se tiene una mezcla estadística de estados en la cual el valor medio de un observable está dado por

o bien

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{A}) \quad (\text{II.1.6})$$

donde P_k es la probabilidad de que el valor medio de \hat{A} sea $A_k = \langle \Psi_k | \hat{A} | \Psi_k \rangle$ (o sea la probabilidad de que el sistema esté en el estado puro $|\Psi_k\rangle$) y $\hat{\rho}$ es el operador estadístico u operador densidad definido por

$$\hat{\rho} = \sum_k P_k |\Psi_k\rangle \langle \Psi_k| \quad (\text{II.1.7a})$$

con

$$0 \leq P_k \leq 1 \quad \sum_k P_k = 1 \quad (\text{II.1.7b})$$

La ecuación de evolución del operador estadístico se obtiene a partir de la conservación del volumen del espacio de fases, resultando la llamada ecuación de Liouville.

$$i \hbar \frac{\partial \hat{\rho}}{\partial t} = [\hat{H}(t) , \hat{\rho}] \quad (\text{II.1.8})$$

II.2. Teoría de la Información y Principio de Máxima Entropía.

La Teoría de la Información (TI) fue desarrollada por Shannon² para ser aplicada al campo de las comunicaciones. Se parte de la existencia de un conjunto de eventos numerables y de un espacio de probabilidad, en el que cada evento tiene una probabilidad definida

² C.E. Shannon, Bell. Sys. Tech. J. 27, 379, 623 (1948).

$P \equiv \{p_1, p_2, \dots, p_N\}$ que está normalizada

$$\sum_{i=1}^N p_i = 1 \quad (\text{II.2.1})$$

Es posible entonces definir la información asociada con esta distribución de probabilidad luego de conocer la misma (I), o la ignorancia relacionada con ésta antes de conocerla (S)

$$I \equiv S = k \sum_{i=1}^N p_i \ln \frac{1}{p_i} , \quad (\text{II.2.2})$$

y se la denomina entropía de Shannon (k es una constante).

Si se considera el caso de un sistema físico, y se asocia cada p_i con la probabilidad de cada estado $|\Psi_i\rangle$ descrita en la sección anterior, es posible utilizar la Ec.(II.1.7) para expresar a la entropía del sistema como

$$S = - k \text{Tr} (\hat{\rho} \ln \hat{\rho}) = - k \langle \ln \hat{\rho} \rangle \quad (\text{II.2.3})$$

donde k es una constante que se agrega a la definición dada por la Ec.(II.2.2) a los efectos de darle unidades físicas a la entropía. Von Neumann³ fue el primero en asociar S con la entropía del estado descrito por el operador $\hat{\rho}$ al tomar k igual a la constante de Boltzmann ($k_B = 1,38 \cdot 10^{-16}$ erg/°K).

Como se indicó en el párrafo anterior, el operador estadístico $\hat{\rho}$ determina el estado del sistema físico y la entropía del mismo. Dicho estado queda parcialmente caracterizado a partir del

³ J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton U. P., Princeton, 1955).

conocimiento de un cierto número de observables relevantes al problema físico de interés. Sólo en el caso que los operadores forman un conjunto completo de observables que conmutan la determinación del estado es unívoca y la entropía vale cero. En el caso de información parcial, el conocimiento de los valores medios de un número limitado de operadores implicará la existencia de distintos operadores densidad que satisfagan las condiciones impuestas por las Ecs.(II.1.6) y (II.1.7). Surge entonces el problema de la elección de uno de ellos como representación del estado físico. Es en este punto que E.T. Jaynes⁴ introduce en la teoría el Principio de Máxima Entropía (PME): dado un conjunto de observables $\{\hat{O}_1, \hat{O}_2, \dots, \hat{O}_n\}$ cuyos valores medios,

$$\langle \hat{O}_i \rangle = \text{Tr} (\hat{\rho} \hat{O}_i) , \quad i = 1, \dots, N \quad (\text{II.2.4})$$

son la única información que se tiene del sistema físico y que se denominarán operadores relevantes, el operador densidad del sistema es aquél que maximiza la entropía, definida a través de la Ec.(II.2.3). El operador densidad que satisface esta condición se obtiene por el método de multiplicadores de Lagrange,

$$\hat{\rho} = \exp \left(- \sum_{i=0}^N \lambda_i \hat{O}_i \right) , \quad (\text{II.2.5})$$

donde \hat{O}_0 es el operador identidad, que se agrega al conjunto inicial a los efectos de satisfacer la condición (II.1.7b)

$$\text{Tr} \hat{\rho} = 1 \quad (\text{II.2.6})$$

⁴ E.T. Jaynes, Phys. Rev. 106, 620 (1957); Phys. Rev. 108, 171 (1957).

Utilizando las Ecs.(II.2.3) y (II.2.5) es posible entonces relacionar la entropía del sistema con los valores medios de los operadores

$$S = k \sum_{i=0}^N \lambda_i \langle \hat{O}_i \rangle . \quad (\text{II.2.7})$$

De aquí en más se considerará $k=1$. Los valores medios y los multiplicadores de Lagrange están relacionados por la Ec.(II.2.6)

$$\lambda_0 = \ln \text{Tr} \left(\exp \left(- \sum_{i=0}^N \lambda_i \hat{O}_i \right) \right) \quad (\text{II.2.8})$$

obteniéndose

$$\langle \hat{O}_i \rangle = - \frac{\partial \lambda_0}{\partial \lambda_i} , \quad i=1, 2, \dots, N \quad (\text{II.2.9})$$

II.3. Evolución temporal de valores de expectación, multiplicadores de Lagrange y coeficientes de correlación. Invariantes dinámicos.

Los resultados expuestos en la sección anterior fueron presentados por Jaynes para ser aplicados a un conjunto de variables del sistema cuyos valores medios son de interés. Estos valores medios eran promedios de observables clásicos relacionados con el sistema. En la sección anterior se los ha denominado "operadores" porque estos resultados se pueden extender sin dificultad a operadores cuánticos. El conjunto de operadores utilizado por Jaynes se forma con las variables que a priori parecen relevantes. Si a posteriori del estudio del sistema se observa que es necesario incorporar algún operador a este conjunto para permitir una descripción más acertada se redefine el conjunto inicial. Este

método hace imposible la deducción de resultados, ya que no permite distinguir cuando un resultado no esperado es producto de la falta de algún operador o constituye un resultado nuevo del modelo en estudio. Estas limitaciones de la teoría fueron superadas por Y. Alhassid y R.D. Levine⁵ ya que la extendieron a conjuntos de operadores cuánticos que pueden o no conmutar entre sí y además elaboraron un método constructivo que permite, no sólo determinar cual es el conjunto de interés asociado con un dado sistema físico, sino también dotar a la dinámica de una estructura de grupo de Lie.

Para introducir estos nuevos conceptos es conveniente trabajar con el logaritmo del operador densidad,

$$\ln \hat{\rho} = - \sum_{i=0}^N \lambda_i \hat{O}_i , \quad (\text{II.3.1})$$

que también cumple con una ecuación del tipo (II.1.8),

$$i \hbar \frac{d \ln \hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}(t) , \ln \hat{\rho}] \quad (\text{II.3.2})$$

Reemplazando la Ec.(II.3.1) en la Ec.(II.3.2) se comprueba que esta será válida para todo tiempo t si el conmutador de los observables $\{\hat{O}_0, \hat{O}_1, \dots, \hat{O}_N\}$ con el Hamiltoniano $\hat{H}(t)$ satisface

$$[\hat{H}(t) , \hat{O}_i] = i \hbar \sum_{l=0}^N \hat{O}_l g_{li} , \quad i=0,1,\dots,N . \quad (\text{II.3.3})$$

donde g_{li} son números complejos, que se interpretan como las constantes de estructura de una semi-álgebra de Lie. Si el conjunto

⁵ Y. Alhassid and R.D. Levine, Phys. Rev. A 18, 89 (1978); J. Chem. Phys. 67, 4321 (1977).

inicial no cumple con la condición (II.3.3) se incorporarán a él todos los operadores necesarios para satisfacerla. Los $(N+1) \times (N+1)$ elementos g_{1i} se denominan matriz G , o de la dinámica del sistema físico, ya que como se verá, determinan las evoluciones temporales de los multiplicadores de Lagrange y de los valores de expectación de los observables involucrados. El agregar la condición de cierre del álgebra a la maximización de la entropía tiene un efecto importante ya que permite obtener, para un Hamiltoniano de un sistema físico de interés, un conjunto completo de operadores relevantes mediante la aplicación de un procedimiento canónico.

Se verifica, para el caso en que los operadores $\{\hat{O}_0, \hat{O}_1, \dots, \hat{O}_N\}$ no dependan explícitamente del tiempo, que las Ecs.(II.3.2) y (II.3.3) resultan equivalentes a un conjunto acoplado de ecuaciones diferenciales para los multiplicadores de Lagrange,⁶

$$\frac{d\lambda_i}{dt} = \sum_{j=0}^N g_{ij} \lambda_j \quad , \quad i = 0, \dots, N \quad . \quad (\text{II.3.4})$$

a las que se le agregan las condiciones iniciales $\lambda_i(t_0)$, compatibles con las Ecs.(II.2.4) a (II.2.9). Este conjunto de ecuaciones resultan por lo tanto equivalentes a la ecuación de Schrödinger.

Este mismo enfoque puede aplicarse a los valores de expectación de los operadores relevantes utilizando el Teorema de Ehrenfest generalizado (Ec.(II.1.4)). Si los operadores son independientes del tiempo, al utilizar la Ec.(II.3.3) se obtiene

$$\frac{d\langle \hat{O}_i \rangle}{dt} = - \text{Tr} \left(\hat{\rho} \sum_{l=0}^N \hat{O}_l g_{li} \right) = - \sum_{l=0}^N \langle \hat{O}_l \rangle g_{li} \quad (\text{II.3.5})$$

⁶ D. Otero, A. Plastino, A. N. Proto, and G. Zannoli, Phys. Rev. A 26, 1209 (1982).

es decir, el teorema de Ehrenfest generalizado en función de las constantes de estructura del álgebra g_{ij} . Resulta también de interés el estudio de la evolución dinámica de los llamados coeficientes de correlación. El coeficiente de correlación entre dos operadores se define en mecánica estadística cuántica como

$$\langle \hat{K}_{1m} \rangle = \frac{1}{2} \langle [\hat{O}_m, \hat{O}_1]_+ \rangle - \langle \hat{O}_m \rangle \langle \hat{O}_1 \rangle \quad (\text{II.3.6})$$

donde el anticonmutador contempla el caso en que los operadores no conmuten entre sí. Este coeficiente representa tanto las correlaciones cuánticas entre los operadores (a través del anticonmutador) como las correlaciones estadísticas provenientes de considerar estados mixtos descritos por una matriz densidad (Ecs. (II.1.7) y (II.2.5)).

Se puede verificar que⁷

$$\frac{\partial^2 \lambda_0}{\partial \lambda_m \partial \lambda_1} = - \frac{\partial \langle \hat{O}_1 \rangle}{\partial \lambda_m} = - \frac{\partial \langle \hat{O}_m \rangle}{\partial \lambda_1} = - \langle \hat{K}_{1m} \rangle \quad (\text{II.3.7})$$

De esta forma la información relativa a las correlaciones aparece en forma natural dentro de la teoría. Resulta por lo tanto pertinente obtener las ecuaciones de evolución de los coeficientes de correlación dentro de este marco. Aplicando las Ecs. (II.1.4), (II.3.3) y (II.3.6), se puede ver que

$$\frac{d \langle \hat{K}_{1m} \rangle}{dt} = - \sum_{s=0}^N (g_{s1} \langle \hat{K}_{sm} \rangle + g_{sm} \langle \hat{K}_{s1} \rangle) \quad (\text{II.3.8})$$

⁷ E. Duering, D. Otero, A. Plastino, and A. N. Proto, Phys. Rev. A 32, 3681 (1985); Phys. Rev. A 35, 2314 (1987).

Es importante también mencionar un tipo general de invariantes dinámicos o constantes de movimiento que se pueden obtener dentro de este marco formal. Un invariante o constante de movimiento es una magnitud cuya derivada total con respecto al tiempo es nula. A partir de la Ec.(II.1.8) se ve que cualquier función del operador $\hat{\rho}$ cumplirá con esta condición, ya que se deriva de la conservación del volumen del espacio de fases. En particular, se puede considerar la función

$$i \hbar \frac{\partial (\ln \hat{\rho})^n}{\partial t} = [\hat{H}(t) , (\ln \hat{\rho})^n] , \quad (\text{II.3.9})$$

que es válida para cualquier natural n . Se definen entonces los invariantes

$$\begin{aligned} I^{(n)} &= \langle (\ln \hat{\rho})^n / \hat{\rho} \rangle - (\langle \ln \hat{\rho} / \hat{\rho} \rangle)^n \equiv I_1^n - I_2^n \\ &= \left\langle \left(- \sum_{i=0}^N \lambda_i \hat{O}_i \right)^n \right\rangle - \left(\left\langle - \sum_{i=0}^N \lambda_i \hat{O}_i \right\rangle \right)^n \end{aligned} \quad (\text{II.3.10})$$

Para el caso particular $n = 1$, se obtiene $I_1^n = I_2^n = S$. Otro caso importante es $n = 2$, resultando

$$I^{(2)} = \sum_{r,j=0}^N \lambda_r \lambda_j \langle \hat{K}_{rj} \rangle . \quad (\text{II.3.11})$$

Por último, se puede mencionar que la inclusión de $\hat{H}(t)$ como un operador relevante más (lo que no altera la evolución dinámica del sistema, en virtud de la Ec.(II.3.3)) permite, en cambio, una descripción termodinámica cuántica del sistema⁸ ya que se puede ver

⁸ J.Aliaga, D, Otero, A.Plantino and A.N. Proto, Phys Rev. A 38, 918 (1988).

que resulta

$$s/\beta = \lambda_0/\beta \langle \hat{I} \rangle + \sum_{i=1}^N \lambda'_i \langle \hat{O}_i \rangle + \langle \hat{H} \rangle \quad (\text{II.3.12})$$

donde $\beta \equiv 1/T$ sería la inversa de la temperatura, λ'_i serían las variables intensivas y $\langle \hat{O}_i \rangle$ las variables extensivas pertenecientes al sistema termodinámico cuántico en cuestión.

III. Hamiltoniano General de Hasse.

III.1. Introducción.

Uno de los métodos históricos para el tratamiento mecánico cuántico del movimiento amortiguado de una partícula (como problema de un solo cuerpo) es la introducción de un potencial de fricción dentro del Hamiltoniano, el cual en su forma más general fuera estudiado por Hasse. Dicho potencial de fricción depende de determinados valores de expectación haciendo de la ecuación de Schrödinger una ecuación, en principio, no lineal. En este caso, el Hamiltoniano más general es de la forma^{1,2,3}

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hat{V}(\hat{x}) + \gamma \hat{W}_g \quad (\text{III.1.1})$$

donde \hat{W}_g es el potencial de fricción y γ es una constante adecuada.

En esta situación se trabaja con un momento canónico que coincide con el momento cinético usual. Esta idea surge de resolver el conjunto de ecuaciones

$$\langle \hat{H} \rangle \equiv \langle \frac{\hat{p}^2}{2m} \rangle + \langle \hat{V}(\hat{x}) \rangle \quad (\text{III.1.2})$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle + \langle \frac{\partial \hat{V}}{\partial \hat{x}} \rangle + \gamma \langle \frac{\partial \hat{W}_g}{\partial \hat{x}} \rangle = 0 \quad (\text{III.1.3})$$

$$\frac{d\langle \hat{H} \rangle}{dt} \equiv -\frac{\gamma}{m} \langle \hat{p}^2 \rangle \quad (\text{III.1.4})$$

¹ Hasse R. W.: J. Math. Phys. 16, 2005 (1975), J. Phys. 11A, 1245 (1978).

² Kan K.K., Griffin J.J.: Phys. Lett. 50B, 241 (1974).

³ Kostin M.D.: J. Stat. Phys. 12, 145 (1974), Kostin M.D.: J. Chem. Phys. 57, 3589 (1973).

donde el símbolo \cong indica que se puede agregar un término adicional asociado con $(\Delta\hat{p})^2$ (la indeterminación en el momento) (ver Ref. (1)).

La Ec.(III.1.2) es la correspondiente a la relación clásica $E = T + V$ que implica $\langle \hat{W}_g \rangle = 0$. De la misma manera la Ec. (III.1.3) se puede relacionar con

$$\frac{dp}{dt} + \frac{\partial V}{\partial x} + \gamma p = 0 \quad (\text{III.1.5})$$

lo que lleva a

$$\langle \frac{\partial \hat{W}_g}{\partial \hat{x}} \rangle = \langle \hat{p} \rangle \quad (\text{III.1.6})$$

Finalmente la Ec. (III.1.4) está asociada a la expresión clásica

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\gamma}{m} p^2 \quad (\text{III.1.7})$$

Como fuera mencionado por el propio Hasse (Ref.(1)), este enfoque presenta ciertas ambigüedades, aunque los valores de expectación de los observables que reproduce están en correspondencia con las cantidades clásicas.

Una importante dificultad asociada a los Hamiltonianos no lineales sería su aparente incompatibilidad con el principio de superposición. Este hecho lleva a la pregunta de cómo evaluar los valores medios, ya que son ellos los que proveen el único vínculo con el comportamiento clásico. No es totalmente claro cómo obtenerlos a partir del conocimiento de los correspondientes paquetes de onda.

El propósito aquí es usar los métodos de la TI^{4,5,6,7,8} para

⁴ Alhassid Y. and Levine R.D.: Chem. Phys. 67, 4321 (1977).

describir la evolución temporal de los observables, sin resolver explícitamente la ecuación de Schrödinger. De esta manera, se obtendrán resultados que dependerán únicamente de las propiedades dinámicas del Hamiltoniano.

Como ya fuera mencionado, el método está basado en el operador estadístico $\hat{\rho}$, y en este sentido los valores de expectación, aun cuando estén calculados para operadores de un solo cuerpo, reproducen el resultado final de un enfoque de muchos cuerpos.

III.2. El Hamiltoniano General de Fricción.

Se trabaja con un Hamiltoniano según la Ec.(III.1.1) y para $\hat{V}(\hat{x})$ se han considerado los siguientes casos:

$$\hat{V}(\hat{x}) = \begin{cases} 0 \\ -k \hat{x} \\ \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{x}^2 \end{cases} \quad (\text{III.2.1a-c})$$

(donde k es una constante adecuada, y m y ω_0 la masa del oscilador armónico y su frecuencia, respectivamente) y \hat{W}_g de la forma general

$$\hat{W}_g = \{ \langle \hat{p} \rangle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) + \frac{c}{2} [\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle, \hat{p} - \langle \hat{p} \rangle]_+ \} =$$

⁵ Otero D., Plastino A., Proto A.N. and Misrahi S.: Phys. Rev. A 33, 3446 (1986).

⁶ Duering E., Otero D., Plastino A., Proto A.N.: Phys. Rev A 32 (2), 2455 (1985).

⁷ Duering E., Otero D., Plastino A., Proto A.N.: Phys. Rev A 35, 2314 (1987)

⁸ Aliaga J., Negri M., Otero D., Plastino A., Proto A.N.: Phys. Rev A 36, 3427 (1987)

$$= c \left(\frac{1}{2} [\hat{x}, \hat{p}]_+ - \langle \hat{x} \rangle \hat{p} \right) + (1 - c) \langle \hat{p} \rangle (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) \quad (\text{III.2.2})$$

o, equivalentemente,

$$\hat{W}_G = (\hat{x} - \langle \hat{x} \rangle) \{c \hat{p} + (1 - c) \langle \hat{p} \rangle\} - i \hbar c/2 \quad (\text{III.2.3})$$

donde c es una constante real y $[\ ,]_+$ denota un anticonmutador.

Se puede verificar que varios potenciales de fricción mencionados en la literatura son casos especiales de (III.2.3). El valor de c determina el potencial particular con el que se está tratando. La forma (III.2.3) se debe a Süßmann y se basa en la identificación del momento clásico con el operador cuántico $p = i \hbar \frac{\partial}{\partial x}$.

Süßmann estudió el caso $c = 1$, mientras que Albrecht⁹ hizo lo mismo con el caso c nulo. Por otro lado, Hasse (Ref.(1)) estudió las situaciones en que $c = \pm 1$.

Como fue delineado en el Capítulo II, los pasos a seguir son: (a) cerrar un álgebra con \hat{H} para definir la matriz G ; (b) resolver las Ecs. (II.3.4) y (II.3.5) para encontrar la evolución temporal de los observables y los correspondientes multiplicadores de Lagrange. La relación de clausura (II.3.3) se verifica, por ejemplo, para el conjunto de operadores $\{\hat{I}, \hat{x}, \hat{p}\}$. La Tabla I muestra el resumen de los resultados obtenidos luego de seguir los pasos (a) y (b) delineados antes.

TABLA I. Matrices G y evoluciones temporales de $\langle \hat{p} \rangle$ y $\langle \hat{x} \rangle$ para diferentes potenciales: (i) $\hat{V}(\hat{x}) = 0$, (ii) $\hat{V}(\hat{x}) = -k \hat{x}$, y (iii) $\hat{V}(\hat{x}) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{x}^2$.

⁹ Albrecht K.: Phys. Lett. 56B, 127 (1975).

$$i) \hat{V}(\hat{x}) = 0,$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma c \langle \hat{x} \rangle & (c-1) \gamma \langle \hat{p} \rangle \\ 0 & -\gamma c & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} & \gamma c \end{pmatrix}$$

$$\langle \hat{p} \rangle(t) = \langle \hat{p} \rangle(0) e^{-\gamma t}$$

$$\langle \hat{x} \rangle(t) = \langle \hat{x} \rangle(0) + \frac{\langle \hat{p} \rangle(0)}{m\gamma} (1 - e^{-\gamma t})$$

$$ii) \hat{V}(\hat{x}) = -k \hat{x},$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma c \langle \hat{x} \rangle & k - \gamma (1-c) \langle \hat{p} \rangle \\ 0 & -\gamma c & 0 \\ 0 & -\frac{1}{m} & \gamma c \end{pmatrix}$$

$$\langle \hat{p} \rangle(t) = (\langle \hat{p} \rangle(0) - \frac{k}{\gamma}) e^{-\gamma t} + \frac{k}{\gamma}$$

$$\langle \hat{x} \rangle(t) = \langle \hat{x} \rangle(0) + \frac{1}{m\gamma} (\langle \hat{p} \rangle(0) - \frac{k}{\gamma}) (1 - e^{-\gamma t}) + \frac{k}{m\gamma} t$$

$$iii) \hat{V}(\hat{x}) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{x}^2,$$

$$g = \begin{pmatrix} 0 & -\gamma c \langle \hat{x} \rangle & -\gamma (1-c) \langle \hat{p} \rangle \\ 0 & -\gamma c & m \omega_0^2 \\ 0 & -\frac{1}{m} & \gamma c \end{pmatrix}$$

$$\langle \hat{x} \rangle(t) = e^{-(\gamma/2)t} \{ A \exp(\Omega t) + B \exp(-\Omega t) \}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{p} \rangle(t) = m \left[-\frac{\gamma}{2} e^{-(\gamma/2)t} \{ A \exp(\Omega t) + B \exp(-\Omega t) \} + \right. \\ \left. + e^{-(\gamma/2)t} \{ A \Omega \exp(\Omega t) - B \Omega \exp(-\Omega t) \} \right] \end{aligned}$$

$$\text{con } \Omega = i(\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}$$

$$A = \frac{\langle \hat{p} \rangle(0)}{m \gamma \Omega} + \left(\frac{\gamma}{2\Omega} + 1\right) \frac{\langle \hat{x} \rangle(0)}{2}$$

$$B = -\frac{\langle \hat{p} \rangle(0)}{m \gamma \Omega} - \left(\frac{\gamma}{2\Omega} - 1\right) \frac{\langle \hat{x} \rangle(0)}{2}$$

Son posibles otras elecciones en lo que respecta a los operadores involucrados, y esto se tratará más adelante. Nótese que la evolución temporal de $\langle \hat{x} \rangle$ y $\langle \hat{p} \rangle$ son independientes de la elección de la constante c . Las ecuaciones correspondientes resultan ser lineales.

Más aun, $\langle \hat{x} \rangle$ y $\langle \hat{p} \rangle$ evolucionan como sus correspondientes clásicos. En el caso del oscilador armónico se observa un corrimiento de frecuencia. La expresión correspondiente resulta

$$\Omega = (\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2} \quad (\text{III.2.4a})$$

independiente de c , lo que, de hecho, corresponde al valor del corrimiento en la frecuencia para el oscilador armónico amortiguado en la mecánica clásica. El valor pertinente que figura en la literatura cuando se resuelve la ecuación de Schrödinger es, sin embargo,

$$\Omega = (\omega_0^2 - c^2 \gamma^2)^{1/2} \quad (\text{III.2.4b})$$

(ver Ref.(1)). Nótese que se obtiene

$$\frac{d\langle \hat{x} \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle \hat{p} \rangle \quad (\text{III.2.5})$$

de manera tal que la identificación de \hat{p} con el momento cinético usual resulta obvia. La entropía es una constante de movimiento como resultado de haber cerrado un semiálgebra con \hat{H} , a pesar de la presencia de los valores de expectación que figuran en el Hamiltoniano. Esto se puede demostrar rápidamente reemplazando las Ecs.(II.3.4) y (II.3.5) en la derivada de (II.2.3) según

$$\begin{aligned} \frac{dS}{dt} &= \sum_{i=0}^N \left(\frac{d\lambda_i}{dt} \langle \hat{O}_i \rangle + \lambda_i \frac{d\langle \hat{O}_i \rangle}{dt} \right) \\ &= \sum_{i;1=0}^N \left(g_{i1} \lambda_1 \langle \hat{O}_i \rangle - g_{1i} \lambda_i \langle \hat{O}_1 \rangle \right) \quad (\text{III.2.6}) \\ &= \sum_{i;1=0}^N \left(g_{i1} \lambda_1 \langle \hat{O}_i \rangle - g_{i1} \lambda_1 \langle \hat{O}_i \rangle \right) \end{aligned}$$

resultando el paréntesis igual a cero en forma directa.

Se tratará ahora el problema particular del oscilador armónico amortiguado en forma más detallada. Para ello, se definen las siguientes variables adimensionales

$$\hat{Q} = \sqrt{\frac{m \omega_0}{\hbar}} \hat{x} \quad (\text{III.2.7a})$$

donde m es la masa del oscilador, ω_0 su frecuencia y \hat{x} y \hat{p} los operadores canónicos usuales.

En términos de las nuevas variables, el Hamiltoniano (III.1.1) (considerando $\hat{V}(\hat{x})$ como el de la Ec.(III.2.1c) y \hat{W}_g en su forma general) resulta

$$\begin{aligned} \hat{H} / \hbar \omega_0 = & \frac{1}{2} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} \hat{Q}^2 + c \Gamma \hat{Q} \hat{P} + (1 - c) \Gamma \langle \hat{P} \rangle \hat{Q} - \\ & - c \Gamma \langle \hat{Q} \rangle \hat{P} - (1 - c) \Gamma \langle \hat{Q} \rangle \langle \hat{P} \rangle - \frac{i}{2} c \Gamma \quad (\text{III.2.8a}) \end{aligned}$$

con $\Gamma = \gamma/\omega_0$.

El conjunto de observables $\{ \hat{I} , \hat{Q} , \hat{P} , \hat{Q}^2 , \hat{P}^2 , \hat{L} \}$, con

$$\hat{L} = \frac{\hat{Q} \hat{P} + \hat{P} \hat{Q}}{2} , \quad (\text{III.2.8.b})$$

cierra un semiálgebra con \hat{H} y resulta la siguiente matriz G

$$G = \begin{pmatrix} 0 & -2\pi c \Gamma \langle \hat{Q} \rangle & -2\pi(1-c) \Gamma \langle \hat{P} \rangle & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2\pi c \Gamma & 2\pi & 4\pi c \Gamma \langle \hat{Q} \rangle & 0 & 2\pi(1-c) \Gamma \langle \hat{P} \rangle \\ 0 & -2\pi & 2\pi c \Gamma & 0 & 4\pi(1-c) \Gamma \langle \hat{P} \rangle & 2\pi c \Gamma \langle \hat{Q} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & -4\pi c \Gamma & 0 & 2\pi \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4\pi c \Gamma & -2\pi \\ 0 & 0 & 0 & -4\pi & 4\pi & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{III.2.9})$$

a partir de la cual se pueden escribir las evoluciones temporales

como (t medido en unidades de $2\pi/\omega_0$)

$$\frac{d\langle \hat{Q} \rangle}{dt} = 2\pi \langle \hat{P} \rangle$$

$$\frac{d\langle \hat{P} \rangle}{dt} = -2\pi\Gamma \langle \hat{P} \rangle - 2\pi \langle \hat{Q} \rangle$$

$$\frac{d\langle \hat{Q}^2 \rangle}{dt} = 4\pi c \Gamma (\langle \hat{Q}^2 \rangle - \langle \hat{Q} \rangle^2) + 4\pi \langle \hat{L} \rangle \quad (\text{III.2.10})$$

$$\frac{d\langle \hat{P}^2 \rangle}{dt} = -4\pi c \Gamma (\langle \hat{P}^2 \rangle - \langle \hat{P} \rangle^2) - 4\pi\Gamma \langle \hat{P} \rangle^2 - 4\pi \langle \hat{L} \rangle$$

$$\frac{d\langle \hat{L} \rangle}{dt} = -2\pi\Gamma \langle \hat{P} \rangle \langle \hat{Q} \rangle - 2\pi \langle \hat{Q}^2 \rangle + 2\pi \langle \hat{P}^2 \rangle$$

Mientras que $\langle \hat{Q} \rangle$ y $\langle \hat{P} \rangle$ evolucionan linealmente (como fue indicado previamente), las ecuaciones para $\langle \hat{Q}^2 \rangle$, $\langle \hat{P}^2 \rangle$ y $\langle \hat{L} \rangle$ son acopladas, dependen explícitamente del parámetro c y aparentan ser no lineales. Como se verá ahora, esto no es así, con interesantes consecuencias. La idea principal es mostrar que el Hamiltoniano dado por la Ec. (III.2.8), a pesar de lo que se puede observar a primera vista, puede considerarse no lineal o lineal, dependiendo de cómo se lo "lea".

En primer lugar debe notarse que el sistema de ecuaciones diferenciales (III.2.10), donde no se ha hecho distinción entre los valores de expectación que provienen del Hamiltoniano y aquéllos que aparecen directamente por el uso del teorema de Ehrenfest generalizado, se puede desacoplar en dos subsistemas: las primeras dos ecuaciones por un lado y las últimas tres por el otro. Este desacoplamiento permite fácilmente ver que el sistema está constituido por ecuaciones diferenciales lineales aunque dependientes del tiempo. De hecho, las dos primeras ecuaciones se

pueden integrar directamente obteniéndose $\langle \hat{Q} \rangle(t)$ (y $\langle \hat{P} \rangle(t)$) que corresponden a un oscilador armónico amortiguado con frecuencia corrida $\Omega = (\omega_0^2 - \gamma^2/4)^{1/2}$. Una vez que se tiene la evolución temporal de los valores medios anteriores, se los puede reemplazar en las últimas tres ecuaciones del sistema (III.2.10) que resultan entonces ecuaciones lineales dependientes del tiempo

$$\frac{d\langle \hat{Q}^2 \rangle}{dt} = 4\pi c\Gamma \langle \hat{Q}^2 \rangle + 4\pi \langle \hat{L} \rangle - 4\pi c\Gamma (\langle \hat{Q} \rangle(t))^2$$

$$\frac{d\langle \hat{P}^2 \rangle}{dt} = -4\pi c\Gamma \langle \hat{P}^2 \rangle - 4\pi \langle \hat{L} \rangle + 4\pi\Gamma(c-1) (\langle \hat{P} \rangle(t))^2$$

$$\frac{d\langle \hat{L} \rangle}{dt} = -2\pi \langle \hat{Q}^2 \rangle + 2\pi \langle \hat{P}^2 \rangle - 2\pi\Gamma \langle \hat{P} \rangle(t) \langle \hat{Q} \rangle(t) \quad (\text{III.2.11})$$

El sistema (III.2.11) puede por lo tanto ser resuelto analíticamente (por ejemplo, a través del siguiente cambio de variables: $X = \langle \hat{Q}^2 \rangle + \langle \hat{P}^2 \rangle$ y $Y = \langle \hat{Q}^2 \rangle - \langle \hat{P}^2 \rangle$) obteniéndose evoluciones oscilatorias con frecuencia $2\pi(1-c^2\Gamma^2)^{1/2}$. La ventaja de obtener una solución analítica es por sí misma obvia.

Las soluciones que se pueden obtener a partir de este procedimiento analítico coinciden con las que pueden obtenerse aplicando el método descrito por Fernández¹⁰. Este hecho es una consecuencia directa de la linealidad intrínseca del sistema de ecuaciones diferenciales (III.2.10).

De hecho, en la Ref.(10) se trabaja en realidad en la representación de Heisenberg, suponiendo conocida de antemano la evolución temporal explícita de $\langle \hat{Q} \rangle(t)$ y $\langle \hat{P} \rangle(t)$. El paso de la representación de Heisenberg a la de Schrödinger se logra, como siempre, tomando directamente valores medios de los operadores en

¹⁰ Fernández F. M., Phys. Rev. A 41, 7066 (1990).

Heisenberg. Obviamente, y a los efectos de hacer posible que el operador de evolución \hat{U} exista, el Hamiltoniano debería ser lineal. El aspecto remarcable es que, a pesar del hecho de que el Hamiltoniano (III.2.8) es ampliamente conocido en la literatura como un Hamiltoniano no lineal debido a la presencia de $\langle \hat{Q} \rangle$ y $\langle \hat{P} \rangle$ en él, esta no linealidad desaparece si se utiliza lo que podría considerarse como la evolución temporal explícita "previamente conocida" de $\langle \hat{Q} \rangle(t)$ y $\langle \hat{P} \rangle(t)$, y así considerar al Hamiltoniano (III.2.8) como un Hamiltoniano lineal, aunque dependiente del tiempo.

Sin embargo, si se toma el Hamiltoniano (III.2.8) como lineal y dependiente del tiempo y se usa el teorema de Ehrenfest, se obtiene

$$\frac{d\langle \hat{Q} \rangle}{dt} = -2\pi c\Gamma\langle \hat{Q} \rangle(t) + 2\pi c\Gamma\langle \hat{Q} \rangle + 2\pi\langle \hat{P} \rangle$$

$$\frac{d\langle \hat{P} \rangle}{dt} = -2\pi(1-c)\Gamma\langle \hat{P} \rangle(t) - 2\pi\langle \hat{Q} \rangle - 2\pi c\Gamma\langle \hat{P} \rangle \quad (\text{III.2.12})$$

donde, al escribir $\langle \hat{Q} \rangle(t)$ y $\langle \hat{P} \rangle(t)$, se está indicando explícitamente que estos valores de expectación son los que proveen la linealidad dependiente del tiempo del Hamiltoniano (III.2.8). Si se adopta esta dependencia temporal, en lugar de simplificar los correspondientes valores de expectación con los que aparecen en el resto de las Ecs. (III.2.12), se obtiene una evolución temporal para $\langle \hat{Q} \rangle$ y $\langle \hat{P} \rangle$ igual a la obtenida para los operadores \hat{Q}_H y \hat{P}_H en la representación de Heisenberg, pero distinta a las evoluciones temporales que se obtienen a partir de las primeras dos ecuaciones en el sistema (III.2.10).

Por lo tanto, todas estas peculiaridades se pueden resumir de la siguiente manera: Si se trabaja en la representación de Schrödinger, no sería necesario conocer $\langle \hat{Q} \rangle(t)$ y $\langle \hat{P} \rangle(t)$ de antemano. Esto

aparentemente implicaría una lectura no lineal del Hamiltoniano (III.2.8), aunque, al usar el teorema de Ehrenfest generalizado, se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales (III.2.10) que resulta ser lineal, debido a la posibilidad de separarlo en dos subsistemas. Por el contrario, si se trabaja en la representación de Heisenberg, la evolución temporal explícita de $\langle \hat{Q} \rangle(t)$ y $\langle \hat{P} \rangle(t)$ debería conocerse necesariamente, lo que implicaría una lectura lineal aunque dependiente del tiempo del Hamiltoniano (III.2.8). Sin embargo, este tipo de lectura no puede ser usada en la representación de Schrödinger sin tener cuidado en reconocer que $\langle \hat{Q} \rangle(t)$ y $\langle \hat{P} \rangle(t)$ son los valores de expectación que se van a obtener para simplificar términos en las ecuaciones involucradas cuando sea posible.

Entonces, se puede concluir que el Hamiltoniano (III.2.8), evidentemente no físico, a sido construido con el propósito de obtener las primeras dos ecuaciones del sistema (III.2.10) que a su vez reproducen el comportamiento de un oscilador armónico amortiguado para $\langle \hat{Q} \rangle$ y $\langle \hat{P} \rangle$. Esta fuerte, y se podría decir, matemática restricción, podría interpretarse como la razón para la posibilidad de diferentes lecturas de lo que es conocido en la literatura como un Hamiltoniano no lineal.

De cualquier manera, y a los efectos de concluir el estudio de este tipo de Hamiltonianos, se pueden obtener, dentro del enfoque que condujo al sistema de ecuaciones (III.2.10), la evolución temporal de distintas magnitudes de interés. En particular, se puede obtener la evolución temporal de las dispersiones en la posición y el momento (i.e. $(\Delta\hat{Q})^2 = \langle \hat{Q}^2 \rangle - \langle \hat{Q} \rangle^2$ y $(\Delta\hat{P})^2 = \langle \hat{P}^2 \rangle - \langle \hat{P} \rangle^2$) a partir de identificar

$$\langle \hat{K}_{11} \rangle = (\Delta\hat{Q})^2$$

$$\langle \hat{K}_{22} \rangle = (\Delta \hat{P})^2 \quad (\text{III.2.13})$$

$$\langle \hat{K}_{12} \rangle = \langle \hat{L} \rangle - \langle \hat{Q} \rangle \langle \hat{P} \rangle$$

ya que usando la Ec. (II.3.8) se obtiene que

$$\frac{d\langle \hat{K}_{11} \rangle}{dt} = 4\pi c \Gamma \langle \hat{K}_{11} \rangle + 4\pi \langle \hat{K}_{21} \rangle$$

$$\frac{d\langle \hat{K}_{22} \rangle}{dt} = -4\pi \langle \hat{K}_{12} \rangle - 4\pi c \Gamma \langle \hat{K}_{22} \rangle \quad (\text{III.2.14})$$

$$\frac{d\langle \hat{K}_{12} \rangle}{dt} = 2\pi \langle \hat{K}_{22} \rangle - 2\pi \langle \hat{K}_{11} \rangle ,$$

sistema de ecuaciones que resulta equivalente a otro propuesto por Dekker¹¹. El sistema (III.2.14) es de resolución inmediata, por ejemplo mediante el cambio de variables $U = \langle \hat{K}_{11} \rangle + \langle \hat{K}_{22} \rangle$, $W = \langle \hat{K}_{22} \rangle - \langle \hat{K}_{11} \rangle$ y $Z = \langle \hat{K}_{12} \rangle$, obteniéndose soluciones oscilatorias con frecuencia $4\pi(1-c^2\Gamma^2)^{1/2}$. En lugar de resolver explícitamente dicho sistema, se prefiere mostrar alternativamente la forma explícita de las soluciones en la representación de Heisenberg.¹² Si se parte del Hamiltoniano (III.2.8), se obtiene que los operadores de posición y momento en dicha representación (indicada con el subíndice H) evolucionan según

$$\hat{Q}_H = q_1(t) + q_2(t) \hat{Q} + q_3(t) \hat{P} \quad (\text{III.2.15a})$$

¹¹ Dekker H., Phys. Rep. 80 (1), 1 (1980).

¹² Cohen-Tannoudji C., Diu B., Laloe F.: Quantum Mechanics, Vol I (John Wiley & Sons and Hermann, 1977).

donde

$$q_1(t) = \langle \hat{Q} \rangle(t) - \langle \hat{Q} \rangle(0) \quad q_2(t) = \langle \hat{P} \rangle(0) \quad q_3(t) \quad (\text{III.2.16a})$$

$$p_1(t) = \langle \hat{P} \rangle(t) - \langle \hat{P} \rangle(0) \quad p_3(t) = \langle \hat{Q} \rangle(0) \quad p_2(t) \quad (\text{III.2.16b})$$

$$q_2(t) = \cos(2\Pi\alpha t) + \Gamma c \sin(2\Pi\alpha t)/\alpha \quad (\text{III.2.16c})$$

$$q_3(t) = -p_3(t) = \sin(2\Pi\alpha t)/\alpha \quad (\text{III.2.16d})$$

$$p_2(t) = \cos(2\Pi\alpha t) - \Gamma c \sin(2\Pi\alpha t)/\alpha \quad (\text{III.2.16e})$$

con $\alpha = (1-c^2\Gamma^2)^{1/2}$. Cabe aquí mencionar el hecho de que al resolver en forma directa la ecuación de Schrödinger para el Hamiltoniano (III.2.8) (lo que implicaría una "lectura" no lineal del mismo) la frecuencia natural de oscilación de la función de onda reportada en la literatura (Ref.(1)) resultaba igual a α (ver Ec.(III.2.4b)). A la luz del presente análisis, se ve que dicho resultado estaba poniendo en evidencia la doble "lectura" del Hamiltoniano (III.2.8). Los valores de expectación $\langle \hat{Q} \rangle(t)$ y $\langle \hat{P} \rangle(t)$, tal como fue explicado antes, se deben obtener a partir de las dos primeras ecuaciones del sistema (III.2.10) como información previa requerida para trabajar en la representación de Heisenberg, resultando (recordar que el tiempo t está medido en unidades de $2\pi/\omega_0$)

$$\begin{aligned} \langle \hat{Q} \rangle(t) = \exp(-\Pi t) \{ \langle \hat{Q} \rangle(0) [\cos(\Gamma'\Pi t) - \Gamma \sin(\Gamma'\Pi t)/\Gamma'] + \\ + 2 \langle \hat{P} \rangle(0) \sin(\Gamma'\Pi t)/\Gamma' \} \quad (\text{III.2.17a}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{P} \rangle(t) = \exp(-\Pi t) \{ \langle \hat{P} \rangle(0) [\cos(\Gamma' \Pi t) + \Gamma \sin(\Gamma' \Pi t) / \Gamma'] + \\ - 2 \langle \hat{Q} \rangle(0) \sin(\Gamma' \Pi t) / \Gamma' \} \quad (\text{III.2.17b}) \end{aligned}$$

con $\Gamma' = (4 - \Gamma^2)^{1/2}$ (comparar con las ecuaciones correspondientes de la Tabla I). Si por ejemplo se desea partir de un estado inicial de dispersión mínima, se puede elegir $\langle \hat{Q} \rangle(0) = 1$ y $\langle \hat{P} \rangle(0) = 0$. No sería necesario en este caso especificar nada más, ya que al estar trabajando en la representación de Heisenberg resulta automáticamente de la dinámica que la restricción cuántica $[\hat{Q}_H, \hat{P}_H] = i\hat{I}$ se traduce en que $q_2(t)p_2(t) - q_3(t)p_3(t) = 1$. Es interesante destacar que si se estuviera trabajando en la representación de Schrödinger, para fijar la condición inicial de dispersión mínima sería necesario fijar no sólo los valores $\langle \hat{Q} \rangle(0)$ y $\langle \hat{P} \rangle(0)$ sino también los valores de $\langle \hat{Q}^2 \rangle(0)$ y $\langle \hat{P}^2 \rangle(0)$ de manera tal de asegurar que las respectivas dispersiones sean positivas y que conduzcan a un producto de indeterminación mínimo.

Por último, se desea hacer mención de ciertos aspectos relacionados con el valor de expectación del Hamiltoniano (III.2.8), que viene dado por

$$\langle \hat{H} / \hbar \omega_0 \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{P}^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle \hat{Q}^2 \rangle + c \Gamma (\langle \hat{L} \rangle - \langle \hat{Q} \rangle \langle \hat{P} \rangle) \quad (\text{III.2.18})$$

Como ya fuera afirmado por Dekker (Ref.(11)), resulta $\langle \hat{W}_g \rangle \neq 0$, salvo para los casos $c = 0$ ó $\langle \hat{L} \rangle = \langle \hat{Q} \rangle \langle \hat{P} \rangle$. Esto se debería contrastar con la idea original que llevó a la introducción de \hat{W}_g (ver Ref.(1)), es decir, que $\langle \hat{H} \rangle$ represente a la energía del sistema, lo que a su vez obligaba a $\langle \hat{W}_g \rangle \cong 0$. Por otro lado, se

encuentra que, dentro del presente contexto, la correspondiente a la expresión clásica

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{\gamma}{m} p^2 \quad (\text{III.2.19a})$$

está dada por

$$\frac{dE}{dt} = - 2 \pi \Gamma p^2 \quad (\text{III.2.19b})$$

donde E está identificado con $\langle \hat{H} / \hbar \omega_0 \rangle$. La evolución explícita está gobernada por

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{H} / \hbar \omega_0 \rangle = - 2 \pi \Gamma \langle \hat{P}^2 \rangle \quad (\text{III.2.20})$$

donde se utilizó las Ecs. (III.2.10).

Una forma alternativa para calcular la evolución de $\langle \hat{H} / \hbar \omega_0 \rangle$ es usando directamente el teorema de Ehrenfest generalizado

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{H} / \hbar \omega_0 \rangle = \langle [\hat{H} / \hbar \omega_0, \hat{H} / \hbar \omega_0] \rangle + \frac{1}{\hbar \omega_0} \langle \frac{\partial \hat{H}}{\partial t} \rangle \quad (\text{III.2.21})$$

Evaluando el segundo término del miembro derecho según la Ec. (III.2.8a), se vuelve a obtener la Ec. (III.2.20). De dicha ecuación, se ve que el valor de expectación del Hamiltoniano alcanza un valor asintótico para $t \rightarrow \infty$. A partir de lo expuesto antes, se puede verificar que tanto la energía cinética residual ($\sim \langle \hat{P}^2 \rangle$) y la energía potencial residual ($\sim \langle \hat{Q}^2 \rangle$) resultan iguales, respectivamente, a las correspondientes dispersiones $(\Delta \hat{P})^2$ y $(\Delta \hat{Q})^2$ debido al hecho de que, en ese límite, tanto $\langle \hat{Q} \rangle$ como $\langle \hat{P} \rangle$ se anulan como en el caso clásico. A partir de la identificación

tentativa en el equilibrio final de $\langle \hat{H} \rangle_{t \rightarrow \infty} = \hbar \omega_0 \left(\frac{1}{2} k T \right)$ se podría identificar la temperatura T del baño hacia el cual la energía del oscilador armónico es disipada (k es la constante de Boltzmann). Por supuesto, esto último debe considerarse sólo una suposición, dado los inconvenientes que presenta este modelo y que ya fueron examinados.

IV. Hamiltoniano de Kanai-Caldirola.

IV.1. Introducción.

Otro de los enfoques históricos para el estudio mecánico cuántico del movimiento disipativo como problema de un solo cuerpo, es el uso de Hamiltonianos explícitamente dependientes del tiempo, como el llamado Hamiltoniano de Kanai-Caldirola.

Idealizando el sistema que sufre la disipación como un oscilador armónico, el tipo de Hamiltoniano que lo describiría, originalmente propuesto por Kanai¹, adopta la forma

$$H(t) = \frac{p^2}{2 m(t)} + \frac{1}{2} m(t) \omega_0^2 q^2 \quad (\text{IV.1.1})$$

donde

$$m(t) = m_0 e^{\alpha t} \quad (\alpha > 0). \quad (\text{IV.1.2})$$

Alguna peculiaridades de este modelo han sido o bien ampliamente criticadas o mal interpretadas.^{2,3,4,5,6,7,8,9,10,11} (ver también la

¹ E. Kanai, Prog. Theor. Phys. 3 (1948), 440.

² R. W. Hasse, J. Phys. 11 A (1978), 1245.

³ J. R. Ray, Am. J. Phys. 47 (1979), 7.

⁴ V. V. Dodonov and V. I. Man'ko, Phys. Rev. A 20(2) (1979), 550.

⁵ R. K. Colegrave and E. Kheyrbady, Phys. Rev. A 34(5) (1986), 3634.

⁶ R. K. Colegrave and E. Kheyrbady, Lett. Nuovo Cimento 40(6) (1984), 185.

⁷ E. H. Kerner, Can. J. Phys. 36 (1958), 371.

⁸ E. N. M. Borges, O. N. Borges and L. A. Amarante Ribeiro, Can. J. Phys. 63 (1985), 600.

⁹ P. Caldirola, Lett. Nuovo Cimento 20(16) (1977), 589.

¹⁰ A. Tartaglia, Lett. Nuovo Cimento 19(6) (1977), 205.

Ref.(1)). Los numerosos intentos para obtener la cuantificación correcta del oscilador armónico amortiguado, a partir del Hamiltoniano

$$H = \frac{p^2}{2 m_0} e^{-\alpha t} + \frac{1}{2} m_0 e^{\alpha t} \omega_0^2 q^2, \quad (\text{IV.1.3})$$

se deben al hecho de que este Hamiltoniano lleva a la ecuación de movimiento

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} + \omega_0^2 q = 0, \quad (\text{IV.1.4})$$

que realmente es la ecuación de movimiento para el oscilador armónico amortiguado. Surgen varias dificultades cuando se usa el Hamiltoniano (IV.1.3), o, equivalentemente, el Lagrangiano

$$L = e^{\alpha t} \left(\frac{1}{2} m_0 \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 q^2 \right), \quad (\text{IV.1.5})$$

al tratar de cuantificar el sistema estudiado:

a) Uno de los primeros problemas que se observan está relacionado con la aparente violación del principio de indeterminación de Heisenberg. Al cuantificar la Ec.(IV.1.3) cambiando las variables dinámicas q y p por los operadores cuánticos \hat{q} y \hat{p} , se obtiene:

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2 m_0} e^{-\alpha t} + \frac{1}{2} m_0 e^{\alpha t} \omega_0^2 \hat{q}^2 \quad (\text{IV.1.6})$$

con

El conmutador dado por la Ec.(IV.1.7) tiene lugar debido al hecho de que q y p son variables canónicas conjugadas y se usó el método de cuantificación de Dirac. Trabajando en la representación de Schrödinger, se puede usar el Teorema de Ehrenfest generalizado¹², y, en términos de su matriz G (ver Ec.(II.3.3)), los valores medios de los operadores de posición y momento $\langle \hat{q} \rangle$ y $\langle \hat{p} \rangle$ resultan

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{q} \rangle = e^{-\alpha t} \frac{\langle \hat{p} \rangle}{m_0}, \quad (\text{IV.1.8})$$

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p} \rangle = -m_0 e^{\alpha t} \omega_0^2 \langle \hat{q} \rangle. \quad (\text{IV.1.9})$$

De la Ec.(IV.1.8) se obtiene

$$\langle \hat{p} \rangle = m_0 e^{\alpha t} \frac{d}{dt} \langle \hat{q} \rangle, \quad (\text{IV.1.10})$$

en lugar de obtenerse el momento mecánico que es usualmente considerado como el adecuado para este problema, i.e.

$$\langle \hat{p}_k \rangle = m_0 \frac{d}{dt} \langle \hat{q} \rangle. \quad (\text{IV.1.11})$$

Conviene mencionar que esta característica del operador $\langle \hat{p} \rangle$ también aparece en el tratamiento clásico correspondiente.

Usando el mismo procedimiento que aquél para las Ecs.(IV.1.8) y (IV.1.9), se obtiene

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{q}^2 \rangle = \frac{e^{-\alpha t}}{m_0} \langle \hat{q} \hat{p} + \hat{p} \hat{q} \rangle, \quad (\text{IV.1.12})$$

¹² D. Otero, A. Plastino, A. N. Proto and G. Zannoli, Z. für Physik A 316 (1984), 323.

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{p}^2 \rangle = -m_0 e^{\alpha t} \omega_0^2 \langle \hat{q} \hat{p} + \hat{p} \hat{q} \rangle, \quad (\text{IV.1.13})$$

y

$$\Delta \hat{q} \Delta \hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}. \quad (\text{IV.1.14})$$

Por otro lado, para \hat{p}_k se encuentra que

$$\Delta \hat{q} \Delta \hat{p}_k = \Delta \hat{q} \Delta (e^{-\alpha t} \hat{p}) = e^{-\alpha t} \Delta \hat{q} \Delta \hat{p} \geq e^{-\alpha t} \frac{\hbar}{2}, \quad (\text{IV.1.16})$$

lo que implica

$$\Delta \hat{q} \Delta \hat{p}_k \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} 0 \quad (\text{IV.1.17})$$

El resultado dado por la Ec.(IV.1.17) fue en un principio interpretado como una violación del principio de indeterminación¹³ (Ref.(2)). Más tarde¹⁴ (ver también Ref.(9)) se dio una interpretación diferente de esta situación en términos de una versión matemática más general del principio de indeterminación, es decir

$$\Delta \hat{A} \Delta \hat{B} \geq \frac{1}{2} | \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle |, \quad (\text{IV.1.18})$$

la cual indica que una medición exacta y simultánea no es posible para los operadores \hat{q} y \hat{p} debido a la Ec.(IV.1.7) pero podría ser posible para \hat{q} y \hat{p}_k ya que

¹³ R. W. Hasse, J. Math. Phys. 16 (1975), 2005.

¹⁴ J. Peslak Jr., Am. J. Phys. 47(1) (1979), 39.

$$[\hat{q}, \hat{p}_k] = [\hat{q}, e^{-\alpha t} \hat{p}] = e^{-\alpha t} [\hat{q}, \hat{p}] = e^{-\alpha t} i\hbar \quad (\text{I.19})$$

Al considerar un proceso de medición a un nivel cuántico, no resultaba claro si la cantidad medida era el momento mecánico o el momento generalizado (Ref.(9)), aunque esta ambigüedad desaparece cuando se examina cuidadosamente el significado físico real del Hamiltoniano dado por la Ec.(IV.1.3) como se verá más adelante.

Hubo también algunos intentos para agregar una fuerza estocástica al Lagrangiano (IV.1.5) o equivalentemente al Hamiltoniano (IV.1.6). El efecto de esta fuerza estocástica era la validez del principio de indeterminación para \hat{q} y \hat{p}_k .¹⁵

b) Otro problema que ha sido señalado es que el Hamiltoniano (IV.1.6) no sería el operador energía. Este problema ya está presente en el nivel clásico, ya que la energía debería definirse de acuerdo a (ver Ref.(2))

$$E = e^{-\alpha t} H . \quad (\text{IV.1.20})$$

La elección de la Ec.(IV.1.20) provee la taza "correcta" de energía disipada, es decir

$$\frac{dE}{dt} = - \alpha m_0 \dot{q}^2 . \quad (\text{IV.1.21})$$

Sin embargo, en el enfoque cuántico, esta energía decrece continuamente a cero. En un tratamiento correcto, uno esperaría que el decrecimiento se detuviera en el estado fundamental del oscilador. Esto se debe al hecho de que, a pesar de la dependencia temporal de este Hamiltoniano, existe un mínimo de energía

¹⁵ J. R. Brinati and S. S. Mizrahi, J. Math. Phys. 21(8) (1980), 2154.

compatible con el principio de indeterminación.¹⁶

Resulta interesante aislar el hecho que hace que el Hamiltoniano (IV.1.3) (o su equivalente cuántico (IV.1.6)) no sea equivalente al operador energía. Se puede demostrar que (IV.1.3) oscila sin disipación (Ref.(5)). Enseguida se verá que esta característica, lejos de ser un obstáculo, constituye un indicativo de la naturaleza real del sistema que se quiere cuantificar.

c) Finalmente, se menciona el conocido enfoque alternativo que consiste en considerar al Lagrangiano (IV.1.5), o equivalentemente al Hamiltoniano (IV.1.3), como correspondiente a un oscilador armónico de masa variable. De acuerdo con este enfoque, no existe contradicción, en el nivel clásico, al considerar que la Ec.(IV.1.5) o la Ec.(IV.1.3) representan tanto a un oscilador armónico amortiguado como a un oscilador armónico de masa variable. Sin embargo, el problema aparece a nivel cuántico, donde el Hamiltoniano (IV.1.6) representaría sólo un oscilador armónico de masa variable. Las características peculiares que fueron observadas en (IV.1.6) cuando este Hamiltoniano fue mal interpretado como un oscilador armónico sujeto a una fuerza disipativa, deberían ser reconsideradas. En este sentido, si la Ec.(IV.1.6) realmente representa un oscilador armónico de masa variable, el momento canónico (ver la Ec.(IV.1.10)) sería el momento mecánico usual. No surgiría entonces ninguna contradicción respecto de la validez del principio de indeterminación ya que se verifica la desigualdad dada por la Ec.(IV.1.14) y se refiere a la posición y al momento mecánico (usual) de la partícula. Sin embargo, todavía queda el problema de la definición de la energía ya que, si se identifica el Hamiltoniano con la energía, oscila sin disipación, y si, por el contrario, se

¹⁶ D. M. Greenberger, J. Math. Phys. 20(5) 762 (1979); Math. Phys. 20(5) 771 (1979).

identifica la Ec.(IV.1.20) con la energía, decrece monótonamente hasta cero (Ref.(16)).

La intención de este Capítulo consiste en aclarar el hecho de que el Lagrangiano (IV.1.5) (el Hamiltoniano (IV.1.3)) no representa ni un oscilador armónico amortiguado ni un oscilador armónico de masa variable, y que, en consecuencia, las conclusiones que se pueden extraer en este sentido a partir del Hamiltoniano (IV.1.6) son incorrectas. Además, debería notarse que estas consecuencias no son resultado del procedimiento de cuantificación en sí sino de las características especiales del problema que se está tratando, aun a nivel clásico, y que tiene que ver con la forma en que se obtiene el Lagrangiano (IV.1.5). Lo que se quiere resaltar es el hecho de que el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola no describe un oscilador armónico amortiguado, (Ref.(1)), y que no existe ninguna violación del principio de indeterminación o problemas con la identificación del operador energía. Más aun, se encuentra que la reinterpretación del Hamiltoniano de Kanai-Caldirola como correspondiente a un oscilador de masa variable (Ref.(16)) es incorrecta.

Es importante enfatizar el hecho de que este modelo, utilizado por muchos autores en el pasado, no corresponde realmente al problema que se quiere resolver. No debería entonces tratar de aplicárselo sin considerar cuidadosamente el problema de la cuantificación de la disipación.

IV.2. Osciladores Armónicos de Masa Variable.

IV.2.A. Descripción del oscilador armónico de masa variable en el marco Newtoniano.

De acuerdo con la mecánica de Newton, se describe un sistema formado por un oscilador armónico de masa variable definiendo el

momento como

$$p(t) = m(t) \dot{q}(t) \quad (\text{IV.2.1})$$

A partir de la segunda ley de Newton y de una fuerza del tipo de Hooke $-kq$, la elección particular de $m(t) = m_0 e^{\alpha t}$, lleva a

$$\ddot{q} + \alpha \dot{q} + \frac{k}{m_0} e^{-\alpha t} q = 0 . \quad (\text{IV.2.2})$$

Las soluciones de la Ec.(IV.2.2) han sido estudiadas en la Ref.(5). De acuerdo con esta referencia, la solución sería

$$q(t) = \exp(-\alpha t/2) \{AJ_1(\frac{2\omega_0}{\alpha} \exp(-\alpha t/2)) + BY_1(\frac{2\omega_0}{\alpha} \exp(-\alpha t/2))\} . \quad (\text{IV.2.3})$$

donde J_1 y Y_1 son polinomios de Bessel, y A y B son constantes.

Así, un oscilador armónico de masa variable no reproduce la ecuación de movimiento para un oscilador armónico amortiguado, la cual está dada por $\ddot{q} + \alpha \dot{q} + \omega_0^2 q = 0$ (ver la Ec.(IV.1.4)).

En realidad, se obtiene la Ec.(IV.1.4) a partir de la Ec.(IV.2.2), solamente si la constante elástica k deja de ser constante para valer $k(t) = m(t) \omega_0^2$.

De esta manera, se debe concluir que un sistema compuesto por una partícula de masa variable sujeta a una fuerza

$$F = - m(t) \omega_0^2 q , \quad (\text{IV.2.4})$$

con $m(t) = m_0 e^{\alpha t}$, tiene a la Ec.(IV.1.4) como su ecuación de movimiento.

La pregunta que ahora surge naturalmente es si un sistema así

es de hecho un oscilador armónico amortiguado. La idea es comenzar discutiendo el problema dentro del formalismo Newtoniano, a partir de la misma definición de energía.

Análisis de la energía para una partícula de masa variable.

Siguiendo un procedimiento de libro de texto se puede concluir que, si se trabaja con una partícula de masa variable, la "definición" usual de energía cinética como $T = \frac{1}{2} m(t) \dot{q}(t)^2$ implica que su variación no es igual al trabajo hecho por el sistema, ya que se puede probar que (ver Apéndice A)

$$W = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \dot{m} \dot{q}^2 dt . \quad (\text{IV.2.5})$$

Nótese que el último término en el miembro derecho de la Ec.(IV.2.5) está directamente relacionado con el carácter de masa variable del sistema.

A partir del análisis del comportamiento de la variación de la energía para un sistema de masa variable sujeto a fuerzas del tipo $-kq$, se puede establecer que:

a) Si $k = \text{constante}$, igualando el trabajo hecho por el sistema a la Ec.(IV.2.5), se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m(2) \dot{q}(2)^2 + \frac{1}{2} k q(2)^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \dot{m} \dot{q}^2 dt &= \\ &= \frac{1}{2} m(1) \dot{q}(1)^2 + \frac{1}{2} k q(1)^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.2.6})$$

Entonces, aunque en este caso F es una fuerza conservativa, no existe una cantidad del tipo de la energía mecánica usual, igual a

la suma de una energía cinética más una energía potencial, que debiera conservarse. Esto se debe a la presencia de la integral tanto en la Ec.(IV.2.5) como en la Ec.(IV.2.6), lo que implica que una masa dependiente del tiempo convierte al sistema en un sistema no conservativo, aunque las fuerzas que actúen sobre la partícula sean conservativas. Esta característica se puede relacionar con el hecho de que una masa dependiente del tiempo debe considerarse como un sistema abierto. Así, si se quiere estudiar la evolución de $\frac{1}{2} m(t) \dot{q}(t)^2 + \frac{1}{2} k q(t)^2$, se encuentra que, con la elección particular de $m(t) = m_0 e^{\alpha t}$, la cantidad $T + V$ disminuye.

b) Si $k = m(t) \omega_0^2$, la fuerza F no puede considerarse más como una fuerza conservativa, y entonces (ver Apéndice B)

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m(2) \dot{q}(2)^2 + \frac{1}{2} m(2) \omega_0^2 q(2)^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 (\dot{m} \dot{q}^2 - \omega_0^2 \dot{m} q^2) dt = \\ = \frac{1}{2} m(1) \dot{q}(1)^2 + \frac{1}{2} m(1) \omega_0^2 q(1)^2 \end{aligned} \quad (\text{IV.2.7})$$

Si se realiza ahora un análisis similar al hecho antes, se puede concluir que la evolución de la cantidad $\frac{1}{2} m(t) \dot{q}(t)^2 + \frac{1}{2} m(t) \omega_0^2 q(t)^2$ está exactamente determinada por la integral en la Ec.(IV.2.7). Esta cantidad no es la energía usual del sistema (a la luz de las Ecs.(IV.2.5) y (IV.2.7), no es el correspondiente de la llamada energía mecánica para sistemas conservativos o no conservativos con masa constante). Al elegir $m(t) = m_0 e^{\alpha t}$, se encuentra que esta integral oscila, lo que a su vez determina que $\frac{1}{2} m(t) \dot{q}(t)^2 + \frac{1}{2} m(t) \omega_0^2 q(t)^2$ debe oscilar. De esta manera, la oscilación de esta cantidad no debe ser considerada como un inconveniente, ya que este comportamiento es una consecuencia directa de la naturaleza de la cantidad estudiada, incluso a nivel

clásico.

IV.2.B. Oscilador Armónico de Masa Variable. Marco Lagrangiano.

Dentro del marco Lagrangiano, se cuenta con un método definido para construir el Lagrangiano L correspondiente a un dado sistema.¹⁷

Para una partícula con masa dependiente del tiempo sujeta a un potencial armónico, el uso de la conocida ecuación de Lagrange lleva a la ecuación de movimiento dada por la Ec.(IV.2.2). Si se elige

$$V(q, t) = \frac{1}{2} m(t) \omega_0^2 q^2, \quad (\text{IV.2.8})$$

se obtiene la ecuación de movimiento dad por la Ec.(IV.2.4) vía el Lagrangiano de Kanai (ver la Ec.(IV.2.5)). Finalmente, si se desea describir el oscilador armónico con disipación, se debe usar la ecuación de Lagrange generalizada (Ref.(17)). Una fuerza no conservativa expresada en términos de la función de disipación de Rayleigh, lleva a

$$R = \frac{1}{2} \frac{\alpha}{m_0} \dot{q}^2, \quad (\text{IV.2.9})$$

de manera que la ecuación de Lagrange adopta la forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial R}{\partial \dot{q}} = 0. \quad (\text{IV.2.10})$$

Se ve fácilmente a partir de la Ec.(IV.2.8), o las Ecs.(IV.2.9-10), que Lagrangianos con diferentes orígenes físicos

¹⁷ H. Goldstein, "Classical Mechanics", Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980; I. Percival and D. Richards, "Introduction to Dynamics", Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

pueden llevar a la misma ecuación de movimiento para el sistema. Esta característica, lejos de ser una desventaja, clarifica el significado real y el origen del Lagrangiano de Kanai. Ya fue visto en la Sección IV.2.A que diferentes sistemas físicos están descriptos por la misma ecuación de movimiento.

En consecuencia, no es en absoluto obvio que cualquier Lagrangiano que provea la ecuación de movimiento para el sistema que se desea describir sea el Lagrangiano correcto del sistema. Más aun, cuando tal Lagrangiano no está construido de acuerdo con el consabido método (i.e. $L = T - V$), se puede estar en realidad tratando con un sistema físico completamente diferente. De hecho, muchos Lagrangianos que conducen a la misma ecuación de movimiento pueden ser obtenidos a través de técnicas matemáticas apropiadas tales como el método del factor integrante¹⁸

Hay muchos ejemplos de sistemas físicos diferentes (con diferentes Lagrangianos) que proveen la misma ecuación de movimiento (el caso de un circuito RLC y un circuito $L(t)C(t)$ constituye un buen ejemplo (ver la Ref.(11)). Por supuesto, cuando se obtienen estos Lagrangianos "equivalentes", uno debería sorprenderse del hecho de que dos sistemas físicos diferentes puedan ser descriptos por la misma ecuación de movimiento. Sería incorrecto concluir que dos o más Lagrangianos diferentes representan el mismo sistema físico.

En el caso del Lagrangiano de Kanai, Ray (Ref.(3)) ha encontrado un sistema físico que está descripto correctamente a través de él. Entonces, la pregunta que surge naturalmente es: si Lagrangianos diferentes que proveen la misma ecuación de movimiento representan realmente sistemas diferentes, dónde se puede encontrar

¹⁸ P. Havas, Nuovo Cimento Suppl. 5 (1957), 363; P. Havas, Acta Physica Austriaca 38 (1973), 145; J. Geicke, J. Phys. A: Math. Gen. 22 (1989), 1017.

esta diferencia? La respuesta es: en la energía del sistema.

Se concluye este análisis de la descripción Lagrangiana de un sistema estudiando los cambios de coordenadas (recuérdese que se está tratando con problemas unidimensionales aquí; la extensión a más dimensiones es directa, en tanto todas las coordenadas sean independientes). Si se transforma la coordenada q para un sistema en otra coordenada Q por medio de una transformación de punto

$$Q = \exp(\alpha t/2) q, \quad (\text{IV.2.11})$$

el Lagrangiano de Kanai se transforma en

$$L_1 = L_1(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} m_0 \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} m_0 \Omega^2 Q^2 - \frac{1}{2} m_0 \alpha Q \dot{Q} \quad (\text{IV.2.12})$$

y a través de la ecuación de Lagrange, se obtiene la ecuación de movimiento para la coordenada Q

$$\ddot{Q} + \Omega^2 Q = 0. \quad (\text{IV.2.13})$$

donde $\Omega = (\omega_0^2 - \alpha^2/4)^{1/2}$.

Se puede ver fácilmente que la evolución temporal de Q que surge a partir de la Ec.(IV.2.13) daría, invirtiendo la Ec.(IV.2.11), la misma evolución para q que la obtenida directamente de la Ec.(IV.1.4). Entonces, si bien los Lagrangianos L y L_1 son diferentes, representan el mismo sistema físico pues están relacionados a través de una transformación de punto. Sin embargo, se debe reconocer que q y NO Q es la coordenada que indica la posición de la partícula. Q daría la posición real sólo por inversión de la Ec.(IV.2.11).

Se puede avanzar un poco y reconocer¹⁹ que el tercer término en el Lagrangiano (IV.2.12) se puede escribir como la derivada total respecto al tiempo de una función de la coordenada Q , i.e.

$$-\frac{1}{2} m_0 \alpha Q \dot{Q} = \frac{dF(Q)}{dt}, \quad (\text{IV.2.14a})$$

donde

$$F(Q) = -\frac{1}{4} m_0 \alpha Q^2. \quad (\text{IV.2.14b})$$

Por lo tanto, el Lagrangiano

$$L_2 = L_1 - \frac{dF(Q)}{dt} = L_2(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} m_0 \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} m_0 \Omega^2 Q^2 \quad (\text{IV.2.15})$$

daría la misma ecuación de movimiento para Q (Ec.(IV.2.13)) que el Lagrangiano L_1 . Uno podría preguntarse si ambos Lagrangianos podrían representar el mismo sistema físico. Debería notarse que aparentemente la coordenada Q sería la misma para ambos Lagrangianos. Las respuestas a todas las preguntas formuladas en esta sección se darán en las siguientes dos secciones.

IV.2.C. Oscilador Armónico de Masa Variable. Marco Hamiltoniano.

Dentro del marco hamiltoniano, el Hamiltoniano H es el generador de la evolución del sistema con el tiempo. Sin embargo, es la energía del sistema solamente si 1) el Lagrangiano del sistema es suma de funciones, cada una homogénea de grado 0, 1, y 2 en las velocidades (generalizadas), respectivamente, 2) las ecuaciones que definen las coordenadas (generalizadas) no dependen explícitamente

¹⁹ H. H. Denman, 7 (1966), 1147.

del tiempo y 3) el potencial V no depende de las velocidades (generalizadas). De cualquier forma, debe notarse que la energía a la que se hace mención está definida por

$$E = T + V \quad (\text{IV.2.16})$$

donde $T = \frac{1}{2} m(t) \dot{q}^2$ y $V = V(q, t)$.

Si una transformación canónica (el análogo de las transformaciones de punto para la descripción Lagrangiana) es independiente del tiempo, el nuevo Hamiltoniano H' se obtiene directamente sustituyendo las coordenadas en el viejo Hamiltoniano H , mientras que si es dependiente del tiempo, la transformación del Hamiltoniano es (Ref.(17))

$$H' = H + \frac{\partial F}{\partial t} \quad (\text{IV.2.17})$$

(F la función generatriz).

Ahora se quieren describir las situaciones estudiadas con los Lagrangianos (IV.1.5), (IV.1.12), y (IV.2.15). A partir del Lagrangiano

$$L = L(q, \dot{q}, t) = e^{\alpha t} \left(\frac{1}{2} m_0 \dot{q}^2 - \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 q^2 \right)$$

(Ec.(IV.1.5)), se obtiene

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = m_0 e^{\alpha t} \dot{q}$$

(correspondiente clásico de la Ec.(IV.1.10)) y

$$H = H(q, p, t) = \frac{p^2}{2 m_0} e^{-\alpha t} + \frac{1}{2} m_0 e^{\alpha t} \omega_0^2 q^2$$

(Ec.(IV.1.3)). Este Hamiltoniano es conocido como el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola (Ref.(5)).

Si el Lagrangiano de Kanai describe un sistema, este debería ser el sistema caracterizado por las Ecs.(IV.2.1), (IV.2.4), y la segunda ley de Newton. De acuerdo con la discutido previamente, el Hamiltoniano (IV.1.3) debe ser la "energía" del sistema $E = T + V$. Por lo tanto, no se debería tratar de definir esta energía como $E = e^{-\alpha t} H$ (Ec.(IV.1.20)) porque esta definición no tendría sentido físico.

Si se parte del Lagrangiano

$$L_1 = L_1(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} m_0 \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} m_0 \Omega^2 Q^2 - \frac{1}{2} m_0 \alpha Q \dot{Q}$$

(Ec.(IV.2.12)), que se obtuvo del Lagrangiano de Kanai a través de la transformación de punto dada por la Ec.(IV.2.11), se obtiene

$$p = \frac{\partial L_1}{\partial \dot{Q}} = m_0 \dot{Q} - \frac{1}{2} m_0 \alpha Q \quad (\text{IV.2.18})$$

y

$$H_1 = H_1(Q, P, t) = \frac{P^2}{2 m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 Q^2 + \frac{1}{2} \alpha P Q \quad (\text{IV.2.19})$$

Por supuesto, las ecuaciones de Hamilton aplicadas a H_1 llevan a $\dot{Q} + \Omega^2 Q = 0$ (Ec.(IV.2.13)).

Como toda transformación de punto es canónica, se puede ver que la transformación canónica que lleva de H a H_1 es

$$\begin{cases} Q = \exp(\alpha t/2) q \\ P = \exp(-\alpha t/2) p . \end{cases} \quad (\text{IV.2.20})$$

A partir del Lagrangiano

$$L_2 = L_2(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} m_0 \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} m_0 \Omega^2 Q^2$$

(Ec.(IV.2.15)), se obtiene

$$P' = \frac{\partial L_2}{\partial \dot{Q}} = m_0 \dot{Q} , \quad (\text{IV.2.21})$$

lo que resulta diferente a la Ec.(IV.2.18), y

$$H_2 = H_2(Q, P', t) = \frac{P'^2}{2 m_0} + \frac{1}{2} m_0 \Omega^2 Q^2 . \quad (\text{IV.2.22})$$

A partir de las ecuaciones de Hamilton para el Hamiltoniano $H_2(Q, P', t)$, se obtiene nuevamente la ecuación de movimiento $\ddot{Q} + \Omega^2 Q = 0$ (Ec.(IV.2.13)). De la misma manera que con los Lagrangianos L_1 (Ec.(IV.2.12)) y L_2 (Ec.(IV.2.15)), se encuentra que dos Hamiltonianos diferentes llevan a la misma ecuación de movimiento para la coordenada Q .

Si se parte de un Hamiltoniano de la forma (IV.2.19) y se trata de construir uno de la forma (IV.2.22) por medio de una transformación canónica, se encuentra que (Ref.(18))

$$H_1 = H_1(Q, P, t) = \frac{P^2}{2 m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 Q^2 + \frac{1}{2} \alpha P Q$$

(Ec.(IV.2.19)) vía

$$\begin{cases} \Pi = \frac{\Omega}{\omega_0} P \\ R = \left(\frac{\alpha}{2 m_0 \Omega \omega_0} \right) P + \frac{\omega_0}{\Omega} Q \end{cases} \quad (\text{IV.2.23})$$

se transforma en

$$H_2 = H_2 (R, \Pi) = \frac{\Pi^2}{2 m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 R^2 . \quad (\text{IV.2.24})$$

Así, se obtiene la ecuación de movimiento para la coordenada R

$$\ddot{R} + \Omega^2 R = 0 . \quad (\text{IV.2.25})$$

Por lo tanto, es obvio que, aunque los Lagrangianos L_1 (Ec.(IV.2.12)) y L_2 (Ec.(IV.2.15)) llevan a la misma ecuación de movimiento para la coordenada Q , esta coordenada no debería considerarse como idéntica para ambos Lagrangianos. A pesar del hecho de que ambos Lagrangianos dan la misma ecuación de movimiento formal para sus coordenadas respectivas (las que se dejaron sin modificar a propósito cuando se escribió el Lagrangiano L_2 (Ec.(IV.2.15))), estas coordenadas no son idénticas sino que están conectadas a través de las ecuaciones de transformación (IV.2.23). De esta manera, si el Lagrangiano L_1 (Ec.(IV.2.12)) es el Lagrangiano del sistema que se quiere describir, no debería considerarse el hecho de anular un término (aquél que representa la derivada total respecto del tiempo de una función de la coordenada y el tiempo) como sólo una simplificación del Lagrangiano pertinente sin ninguna relevancia física. La coordenada Q del Lagrangiano L_1 (Ec.(IV.2.12)) no puede ser considerada de la misma manera que la correspondiente coordenada del Lagrangiano L_2 (Ec.(IV.2.15)), ya que ello conduciría a inconsistencias físicas. Por ejemplo, si se tienen

las condiciones iniciales adecuadas para Q y \dot{Q} en L_1 , esas condiciones iniciales no deberían ser usadas directamente para la coordenada y la velocidad en L_2 , sino que deberían transformarse según la Ec.(IV.2.23).

Así, cuando se analiza el significado físico de los Lagrangianos equivalentes L_1 y L_2 dentro del marco hamiltoniano, se concluye que Lagrangianos diferentes que arrojan la misma ecuación de movimiento no deberían ser considerados como que describen el mismo sistema físico.

Se finaliza esta sección mencionando que una demostración alternativa del carácter no disipativo del Hamiltoniano de Kanai-Caldirola se puede obtener siguiendo, por ejemplo, las Refs.(17), en lo que concierne a flujos dinámicos que preservan áreas en el espacio de fases; de hecho, la demostración incluye Hamiltonianos dependientes del tiempo en general.

IV.3. Enfoque de Teoría de la Información al Problema.

Como ya fue analizado en el Capítulo II, la dinámica completa de un sistema está contenida en la matriz G (ver Ec.(II.3.3)). Por lo tanto es interesante ver cómo las transformaciones canónicas la afectan.

Se supondrá primero que el conjunto de operadores relevantes con el que se trabaja constituye el conjunto de coordenadas canónicas del sistema (lo que refleja la situación tratada aquí). Por simplicidad, se denotará al conjunto de operadores coordinados canónicos (los cuales se construyen directamente asociando las coordenadas del espacio de fases con operadores cuánticos) mediante una matriz $\hat{\eta}$, y por $\langle \hat{\eta} \rangle$ a la matriz columna que representa los valores de expectación de esos operadores. Luego, de acuerdo con la Ec.(II.3.5)

$$\frac{d \langle \hat{\eta} \rangle}{d t} = - \tilde{G} \langle \hat{\eta} \rangle , \quad (\text{IV.3.1})$$

donde \tilde{G} es la traspuesta de G .

Una transformación canónica para las coordenadas del espacio de fases se puede escribir en notación matricial como

$$\xi = M \eta , \quad (\text{IV.3.2})$$

donde M es la matriz cuadrada invertible que caracteriza la transformación canónica de las coordenadas η a las coordenadas ξ .

Sus elementos son

$$M_{ij} = \frac{\partial \xi_i}{\partial \eta_j} . \quad (\text{IV.3.3})$$

Obviamente, M dependerá del tiempo si la transformación canónica es dependiente del tiempo. La cuantificación se lleva a cabo identificando las coordenadas del espacio de fases con sus correspondientes operadores. Se obtiene

$$\langle \hat{\xi} \rangle = M \langle \hat{\eta} \rangle . \quad (\text{IV.3.4})$$

Diferenciando la Ec. (IV.3.4) con respecto al tiempo, resulta

$$\frac{d \langle \hat{\xi} \rangle}{d t} = \left(\frac{d M}{d t} \right) \langle \hat{\eta} \rangle + M \left(\frac{d \langle \hat{\eta} \rangle}{d t} \right) . \quad (\text{IV.3.5})$$

A partir de la Ec. (IV.3.4) se puede escribir

$$\langle \hat{\eta} \rangle = M^{-1} \langle \hat{\xi} \rangle \quad (\text{IV.3.6})$$

y, reemplazando la Ec.(IV.3.6) y la Ec.(IV.3.1) en la Ec.(IV.3.5), se obtiene

$$\frac{d \langle \hat{\xi} \rangle}{d t} = \left(\left(\frac{d M}{d t} \right) M^{-1} - M \tilde{G} M^{-1} \right) \langle \hat{\xi} \rangle . \quad (\text{IV.3.7})$$

Comparando la Ec.(IV.3.7) con la Ec.(IV.3.1), se ve que si se define G' como la matriz que se obtiene cerrando un álgebra de Lie parcial de los operadores relevantes denotados por $\hat{\xi}$ con el Hamiltoniano $\hat{H}' = \hat{H}'(\hat{\xi}, t)$ (que se obtendría a través de la transformación dada por la Ec.(IV.2.17)), resulta

$$\frac{d \langle \hat{\xi} \rangle}{d t} = - \tilde{G}' \langle \hat{\xi} \rangle , \quad (\text{IV.3.8})$$

y

$$\tilde{G}' = - \left(\frac{d M}{d t} \right) M^{-1} + M \tilde{G} M^{-1} . \quad (\text{IV.3.9})$$

La Ec.(IV.3.9) da la matriz transformada bajo una transformación canónica. El conocimiento explícito del nuevo Hamiltoniano $\hat{H}'(\hat{\xi}, t)$ (para calcular los elementos de la matriz G'), se hace innecesario.

Como las transformaciones canónicas forman grupo, si primero se aplica una transformación canónica (descrita por M_1) y luego una segunda transformación canónica (descrita por M_2), esto es equivalente a aplicar una única transformación canónica (descrita por $M_3 = M_2 M_1$). Ciertamente, se puede probar fácilmente que esto permite escribir

$$\tilde{G}' = - \left(\frac{d M_1}{d t} \right) M_1^{-1} + M_1 \tilde{G} M_1^{-1} , \quad (\text{IV.3.9a})$$

$$\tilde{G}'' = - \left(\frac{d M_2}{d t} \right) M_2^{-1} + M_2 \tilde{G}' M_2^{-1} , \quad (\text{IV.3.9b})$$

o, directamente

$$\tilde{G}'' = - \left(\frac{d M_2 M_1}{d t} \right) (M_2 M_1)^{-1} + (M_2 M_1) \tilde{G}' (M_2 M_1)^{-1} . \quad (\text{IV.3.9c})$$

En consecuencia, si dos matrices diferentes G y G' se supone que describen el mismo sistema físico, deben estar relacionadas de acuerdo con la Ec.(IV.3.9) de forma tal de garantizar que la transformación de los observables es canónica y por lo tanto la evolución del sistema está correctamente descrita por la Ec.(IV.3.1) o la Ec.(IV.3.8). Si dos Hamiltonianos diferentes que no están conectados por una transformación canónica describen completamente una situación física y se encuentra que conducen a diferentes matrices G , se debería concluir que estos Hamiltonianos realmente se refieren a sistemas físicos con diferentes dinámicas.

Ahora se discutirán los Hamiltonianos estudiados en la Sección IV.2.C. Si se parte del Hamiltoniano de Kanai-Caldirola (en su forma cuántica)

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = \frac{\hat{p}^2}{2 m_0} e^{-\alpha t} + \frac{1}{2} m_0 e^{\alpha t} \omega_0^2 \hat{q}^2$$

(Ec.(IV.1.6)), se ve fácilmente que el conjunto de observables $\{\hat{q}, \hat{p}\}$ cierra un semiálgebra bajo conmutación con el Hamiltoniano \hat{H} . Se encuentra que

$$G = \begin{pmatrix} 0 & m_0 e^{\alpha t} \omega_0^2 \\ -\frac{1}{m_0 e^{\alpha t}} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.10})$$

Ya se ha visto que, por medio de la transformación canónica para los observables \hat{q} y \hat{p} , se tiene que

$$\begin{cases} \hat{Q} = \exp(\alpha t/2) \hat{q} \\ \hat{P} = \exp(-\alpha t/2) \hat{p} . \end{cases} \quad (\text{IV.3.11})$$

Se obtiene el Hamiltoniano transformado

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_1(\hat{Q}, \hat{P}, t) = \frac{\hat{P}^2}{2 m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 \hat{Q}^2 + \frac{1}{4} \alpha (\hat{P} \hat{Q} + \hat{Q} \hat{P}), \quad (\text{IV.3.12})$$

donde se usó la regla de simetrización para el producto $\hat{P} \hat{Q}$.

Como era de esperarse, el conjunto $\{\hat{Q}, \hat{P}\}$ cierra un semiálgebra bajo conmutación con \hat{H}_1 , arrojando

$$G' = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} & m_0 \omega_0^2 \\ -\frac{1}{m_0} & \frac{\alpha}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.13})$$

La transformación canónica dada por la Ec.(IV.3.11) de los observables \hat{q} y \hat{p} en \hat{Q} y \hat{P} puede ser descrita por la matriz de transformación dependiente del tiempo

$$M_1 = \begin{pmatrix} \exp(\alpha t/2) & 0 \\ 0 & \exp(-\alpha t/2) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.14})$$

Entonces, como

$$M_1^{-1} = \begin{pmatrix} \exp(-\alpha t/2) & 0 \\ 0 & \exp(\alpha t/2) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.15})$$

y

$$\frac{d M}{d t} = \begin{pmatrix} -\frac{\alpha}{2} \exp(-\alpha t/2) & 0 \\ 0 & \frac{\alpha}{2} \exp(\alpha t/2) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.16})$$

se puede probar fácilmente que se verifica la igualdad

$$\tilde{G}' = - \left(\frac{d M_1}{d t} \right) M_1^{-1} + M_1 \tilde{G} M_1^{-1}$$

(Ec.(IV.3.9a)), obteniéndose directamente la matriz G' a partir de las matrices G y M .

Consecuentemente, si se parte del Lagrangiano

$$L_1 = L_1(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} m_0 \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} m_0 \Omega^2 Q^2 - \frac{1}{2} m_0 \alpha Q \dot{Q}$$

(Ec.(IV.2.12)), que a su vez conduce al Hamiltoniano dado por la Ec.(IV.2.19), se puede suprimir el último término de la Ec.(IV.2.12), como fue explicado en la Sección IV.2.B, obteniéndose

$$L_2 = L_2(Q, \dot{Q}, t) = \frac{1}{2} m_0 \dot{Q}^2 - \frac{1}{2} m_0 \Omega^2 Q^2$$

(Ec.(IV.2.15)). Si descuidadamente se supone que el Lagrangiano dado por la Ec.(IV.2.15) describe el mismo sistema físico que el Lagrangiano dado por la Ec.(IV.2.12), luego, al construir el Hamiltoniano cuántico que le corresponde, es decir

$$\hat{H}_2 = \hat{H}_2(\hat{Q}, \hat{P}', t) = \frac{\hat{P}'^2}{2 m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 \hat{Q}^2, \quad (\text{IV.3.17})$$

se encontraría que el conjunto $\{\hat{Q}, \hat{P}'\}$ cierra un álgebra de Lie parcial bajo conmutación con \hat{H}_2 , arrojando

$$G'' = \begin{pmatrix} 0 & m_0 \Omega^2 \\ -\frac{1}{m_0} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.18})$$

Se ha escrito deliberadamente \hat{P}' en lugar de \hat{P} en la Ec.(IV.3.17), debido a que denotan diferentes operadores, ya que las variables clásicas de las que provienen son diferentes, i.e., $P = m_0 \dot{Q} - \frac{1}{2} m_0 \alpha Q$ (Ec.(IV.2.18)) y $P' = m_0 \dot{Q}$ (Ec.(IV.2.21)).

Aparentemente, si no se considera lo discutido en la Sección IV.2.C, se podría pensar que \hat{Q} denota el mismo operador en las Ecs.(IV.3.16) y (IV.3.21). Pero, como G'' es diferente de G' y se asegura estar describiendo el mismo sistema físico, debe haber una transformación canónica que vincule ambos Hamiltonianos \hat{H}_1 y \hat{H}_2 . Al aplicar la Ec.(IV.3.1), se debería obtener la misma ecuación de movimiento para el valor medio del operador posición, es decir $\langle \hat{Q} \rangle$

$$\langle \ddot{\hat{Q}} \rangle + \Omega^2 \langle \hat{Q} \rangle = 0. \quad (\text{IV.3.19})$$

Como consecuencia de esta característica, y advirtiendo la diferencia entre G' y G'' , se busca ahora una transformación canónica que deje al operador posición sin modificar. Esta es de la forma

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.20})$$

La ecuación $\tilde{G}'' = M \tilde{G}' M^{-1}$ (ver Ec.(IV.3.9b)) se debe verificar. Aquí no se consideró el término que contiene la derivada temporal de la matriz M , ya que la transformación canónica que se está buscando es independiente del tiempo.

Se puede probar fácilmente que no existe ninguna matriz M de la forma de la Ec.(IV.3.20) que cumpla con la Ec.(IV.3.9b).

Si se liberan los cuatro elementos de la matriz M de cualquier restricción, se encuentra fácilmente que

$$M = \begin{pmatrix} \frac{\omega_0}{\Omega} & \frac{\alpha}{2 m_0 \Omega \omega_0} \\ 0 & \frac{\Omega}{\omega_0} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.3.21})$$

conecta G' y G'' de acuerdo con la Ec.(IV.3.9b). Resulta entonces obvio que no se está tratando con el mismo operador \hat{Q} en los Hamiltonianos dados por las Ecs.(IV.3.12) y (IV.3.17). Dentro de este contexto, aunque los Lagrangianos dados por las Ecs.(IV.2.12) y (IV.2.15) conducen a la misma ecuación de movimiento para el operador posición, no describen el mismo sistema físico.

Como un último comentario, se puede mencionar que el método del factor integrante (ver las Refs.(18)) puede ser aplicado para obtener diferentes Lagrangianos, y por lo tanto diferentes Hamiltonianos, que arrojen la misma ecuación de movimiento (IV.I.4). De hecho, en estas referencias, la posibilidad de obtener Lagrangianos (y Hamiltonianos) explícitamente independientes del tiempo, está considerada. Pero, a la luz de nuestro análisis previo, se puede concluir que, si las variables dinámicas posición y momento deben ser las mismas que aquéllas involucradas en el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola, las matrices G asociadas a estos Hamiltonianos

independientes del tiempo serán diferentes de (IV.3.10), ya sea en sus elementos o inclusive en sus dimensiones. Este hecho permite asegurar que se estaría tratando con diferentes sistemas físicos.

Finalmente, para concluir este Capítulo, se puede resumir lo expuesto de la siguiente manera:

(a) Se concluye que el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola no describe el sistema para el que fue propuesto originalmente, es decir, un oscilador armónico amortiguado de masa m_0 . En cambio, este Hamiltoniano describe en realidad una partícula de masa $m(t) = m_0 e^{\alpha t}$ sujeta a una fuerza $F = - m_0 e^{\alpha t} \omega_0^2 q$, como fue señalado en la Sección IV.2 (ver la Ref.(3)). Esta conclusión puede ser fácilmente extraída a nivel clásico. Muchas dificultades que son mencionadas en la literatura como resultado de la cuantificación de este Hamiltoniano, son en cambio simples consecuencias de considerar que el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola describe un sistema físico diferente de aquél al que realmente se refiere. Por lo tanto, se recalca que todas las modificaciones hechas a este Hamiltoniano, con el propósito de solucionar las dificultades antes mencionadas, deberían revisarse a la luz de su significado físico real. Además, muchas contribuciones recientes a la literatura que consideran este Hamiltoniano como el correspondiente a un oscilador armónico amortiguado deberían también ser revisadas.²⁰

(b) Se encuentra explícitamente que el principio de indeterminación de Heisenberg no resulta violado en el caso del Hamiltoniano de Kanai-Caldirola. De hecho, las interpretaciones previas que indican una violación de este principio surgen de una confusión respecto del significado físico de este Hamiltoniano.

²⁰ C. I. Um, K. H. Yeon, and W. H. Kahng, J. Phys. A 20, 611 (1987); K. H. Yeon, C. I. Um, and Thomas F. George, Phys. Rev. A 36, 5287 (1987); A. L. De Brito and B. Baseia, Phys. Rev. A 40, 4097 (1989).

Luego de identificar adecuadamente al sistema que este Hamiltoniano describe realmente (ver Sección IV.2)), se encuentra que el momento mecánico es exactamente $p = m(t) \dot{q}$, y que se verifica el principio de indeterminación para la coordenada q y para este momento p . Entonces, es obvio que no debería esperarse que se verifique el principio de indeterminación para la coordenada q y el así llamado momento "físico" $p_k = m_0 \dot{q}$. Además, todas las reinterpretaciones o modificaciones a este Hamiltoniano formuladas a partir de esta aparente violación del principio de indeterminación resultan ser inconducentes.

(c) También se encuentra que el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola es el operador "energía" del sistema. Por lo tanto, recurrir a definiciones espurias para el operador energía (como $E = e^{-\alpha t} H$, Ec.(IV.1.20)) se vuelve innecesario, y, consecuentemente, se evitan las dificultades relativas a la energía del estado fundamental y los niveles de energía cuánticos. No existe problema en la cuantificación del Hamiltoniano de Kanai-Caldirola, mientras se tenga en mente la naturaleza del sistema físico real que se está cuantificando. Así, el comportamiento del sistema cuantificado coincide con lo que debería esperarse: niveles de energía bien definidos y evolución oscilatoria del valor medio del Hamiltoniano. Estas son sólo propiedades del sistema cuantificado, y no problemas del proceso de cuantificación. Debido a que el sistema no es en absoluto disipativo, no debería tratarse de buscar disipación a nivel cuántico, o, lo que resulta más erróneo, forzar la disipación de cualquier manera. De todas formas, debería notarse que la "energía" a la que el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola se está refiriendo debe ser analizada a la luz de la discusión en la Sección IV.2, teniendo en cuenta que ésta no es una dificultad que surge cuando se cuantifica el sistema.

(d) Como una de las principales conclusiones de este Capítulo, se cree que se ha originado una gran cantidad de confusión por haber perdido de vista la forma en que se puede obtener el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola. Se debería revisar cuidadosamente el uso de Hamiltonianos y Lagrangianos "equivalentes". en este sentido, se encontró un método simple y directo para analizar la equivalencia real de diferentes Hamiltonianos (y en consecuencia Lagrangianos) dentro del contexto de la Teoría de la Información (TI), sin necesidad de enredarse con aspectos secundarios del problema en cuestión. Sobre todo, la TI tiene la posibilidad de obtener resultados objetivos.

(e) Finalmente, se menciona, al final de la Sección IV.2, que, siguiendo por ejemplo, las Refs.(17), un Hamiltoniano que describa completamente un sistema físico (inclusive un Hamiltoniano dependiente del tiempo) no puede conducir a disipación. Aunque el análisis que se puede encontrar en estas referencias está hecho a nivel clásico (el marco del espacio de fases), se llega a la misma conclusión a nivel cuántico, ya que la suposición fundamental que se hace es la validez de las ecuaciones de Hamilton (en oposición a las ecuaciones de Hamilton generalizadas que incluyen fuerzas que no se pueden derivar de un potencial). Se puede probar que las ecuaciones de Hamilton están directamente conectadas a la ecuación de Schrödinger, de la misma manera en que el teorema de Liouville está relacionado con el teorema de Ehrenfest (ver Capítulo II). La existencia de un álgebra de Lie finita asociada a este Hamiltoniano lineal dependiente del tiempo parece ser el aspecto correspondiente dentro del enfoque de la TI para evidenciar el carácter no disipativo del sistema.

Como breve comentario final, se puede decir que, debido a la oscilación en el tiempo de Hamiltoniano de Kanai-Caldirola, no se lo

puede considerar un Hamiltoniano disipativo en el sentido de que no representa una función decreciente. Esta oscilación, como fue mostrado en la Sección IV.2, se debe al carácter abierto del sistema y que está explícitamente indicado en la función dependiente del tiempo $m(t)$, la que a su vez permite una evolución dinámica fuera de fase para la posición decreciente y el momento creciente.

Apéndice A.

Se quiere evaluar

$$W = \int_1^2 F \, dq \quad (\text{A.1})$$

donde (ver la Ec. (IV.2.1))

$$F = \frac{dp}{dt} = m(t) \dot{q}(t) + \dot{m}(t) q(t) \quad (\text{A.2})$$

(De ahora en más, se omitirá escribir la dependencia explícita del tiempo en las diferentes variables).

A partir de (A.1) y (A.2) se puede escribir

$$W = \int_1^2 (m \dot{q} + \dot{m} q) \, dq \quad (\text{A.3})$$

Como $dq = \dot{q} \, dt$, entonces

$$W = \int_1^2 m \dot{q} \dot{q} \, dt + \int_1^2 \dot{m} q^2 \, dt \quad (\text{A.4})$$

Integrando por partes la primera integral en el miembro derecho de la Ec. (A.4), se obtiene

$$\int_1^2 m \dot{q} \dot{q} \, dt = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \Big|_1^2 - \frac{1}{2} \int_1^2 \dot{m} \dot{q}^2 \, dt \quad (\text{A.5})$$

Reemplazando (A.5) en (A.4)

$$W = \frac{1}{2} m \dot{q}^2 \Big|_1^2 + \frac{1}{2} \int_1^2 \dot{m} \dot{q}^2 dt \quad (\text{A.6})$$

Apéndice B.

Se quiere evaluar

$$W = \int_1^2 F dq \quad (\text{B.1})$$

donde (ver la Ec. (IV.2.4))

$$F = -m(t) \omega_0^2 q(t) \quad (\text{B.2})$$

(De ahora en más, se omitirá la dependencia explícita en el tiempo).

A partir de (B.1) y (B.2) se puede escribir

$$W = -\omega_0^2 \int_1^2 m q dq \quad (\text{B.3})$$

Como $dq = \dot{q} dt$, entonces

$$W = -\omega_0^2 \int_1^2 m q \dot{q} dt \quad (\text{B.4})$$

y, evaluando la integral en el miembro derecho de (B.4) por partes, se obtiene

$$W = \frac{1}{2} m(1) \omega_0^2 q(1)^2 - \frac{1}{2} m(2) \omega_0^2 q(2)^2 + \frac{1}{2} \omega_0^2 \int_1^2 \dot{m} q^2 dt \quad (\text{B.5})$$

V. Cuantificación de las Ecuaciones de Hamilton Generalizadas.

V.1. Introducción.

En este Capítulo, se reanalizará un procedimiento alternativo para la cuantificación de los efectos disipativos que fuera dejado de lado hace algún tiempo, debido a que se considera que no han sido reconocidas en forma crítica las dificultades que surgen de tal cuantificación. Se está haciendo referencia a la cuantificación de un sistema a partir de las ecuaciones de Hamilton generalizadas. Este enfoque fue originalmente estudiado por Brittin¹ y, muchos años después, Lemos² hizo una crítica de algunas de las conclusiones de Brittin. El enfoque de Brittin para la cuantificación de las fuerzas disipativas se basa en la bien conocida analogía entre la descripción hamiltoniana de la de mecánica clásica y la representación de Heisenberg de la mecánica cuántica. A partir de esta analogía, Brittin estableció lo que sería una nueva descripción de la representación de Heisenberg que presumiblemente incluía los efectos disipativos (ver la Ref.(1)).

V.2. Descripción clásica de sistemas disipativos.

Una descripción hamiltoniana clásica que incluya fuerzas disipativas puede ser obtenida a partir de las ecuaciones de Lagrange generalizadas

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{V.2.1})$$

donde $L(q, \dot{q}, t)$ es el Lagrangiano y $F_i(q, \dot{q}, t)$ son las fuerzas generalizadas no conservativas que no pueden ser derivadas de un

¹ W. E. Brittin, Phys. Rev. 77, 396 (1950).

² N. A. Lemos, Phys. Rev. D 24, 2338 (1981).

potencial generalizado $U(q, \dot{q}, t)$ ³. Definiendo como es usual a p_i como el momento canónico conjugado a q_i según

$$p_i \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{V.2.2})$$

y el Hamiltoniano según

$$H(q, p, t) \equiv \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L, \quad (\text{V.2.3})$$

al diferenciar la Ec.(V.2.3) se obtienen las ecuaciones generalizadas de Hamilton

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = - \frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (\text{V.2.4})$$

donde $Q_i = Q_i(q, p, t) = F_i(q, \dot{q}(q, p), t)$. (Las Ecs.(V.2.4) también se pueden obtener fácilmente a partir de un principio variacional llamado el principio de Hamilton generalizado (ver Ref.(3)). Entonces, si se define el corchete de Poisson de las variables dinámicas A y B como

$$\{A, B\} \equiv \sum_{i=1}^n \frac{\partial A}{\partial q_i} \frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i} \frac{\partial B}{\partial q_i}, \quad (\text{V.2.5})$$

se tiene que una consecuencia dinámica de la validez de las Ecs.(V.2.4) es que la ecuación de movimiento de cualquier variable dinámica $A(q, p, t)$ puede ser escrita según

³ H. Goldstein, *Classical Mechanics* (Addison-Wesley, Reading, Mass., 1980).

$$\frac{dA}{dt} = \{A, H\} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial A}{\partial p_i} Q_i + \frac{\partial A}{m \partial t} . \quad (\text{V.2.6})$$

La definición del corchete de Poisson (Ec. (V.2.5)) conduce a las bien conocidas propiedades siguientes:

$$\{A, A\} = 0 \quad (\text{V.2.7a})$$

$$\{A, B\} = -\{B, A\} \quad (\text{V.2.7b})$$

$$\{A+B, C\} = \{A, C\} + \{B, C\} \quad (\text{V.2.7c})$$

$$\{AB, C\} = A\{B, C\} + B\{A, C\} \quad (\text{V.2.7d})$$

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0 \quad (\text{V.2.7e})$$

$$\{A, K\} = 0 \quad K = \text{constante} \quad (\text{V.2.7f})$$

y a los llamados corchetes de Poisson fundamentales

$$\{q_k, p_l\} = \delta_{kl} , \quad \{q_k, q_l\} = \{p_k, p_l\} = 0 . \quad (\text{V.2.7g})$$

Además, las siguientes derivadas parciales resultan directamente de la definición

$$\frac{\partial}{\partial p_i} \{A, B\} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial p_i} , B \right\} + \left\{ A , \frac{\partial B}{\partial p_i} \right\} \quad (\text{V.2.8a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \{A, B\} = \left\{ \frac{\partial A}{\partial t} , B \right\} + \left\{ A , \frac{\partial B}{\partial t} \right\} \quad (\text{V.2.8b})$$

Ahora, a partir de las Ecs. (V.2.6), V.2.7e), (V.2.8a) y (V.2.8b)

se puede obtener la ecuación de movimiento para el corchete de Poisson de dos variables dinámicas cualesquiera, resultando

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{A, B\} &= \left\{ \frac{dA}{dt}, B \right\} + \left\{ A, \frac{dB}{dt} \right\} + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial A}{\partial p_i} \{B; Q_i\} + \sum_{i=1}^n \frac{\partial B}{\partial p_i} \{Q_i; A\} \end{aligned} \quad (\text{V.2.9})$$

Si se calcula la derivada temporal de cualquiera de los conmutadores fundamentales dados por las Ecs. (V.2.7g) a través de la Ec. (2.9), se ve fácilmente que resultan todas iguales a cero. En particular,

$$\frac{d}{dt} \{q_k, p_k\} = 0 . \quad (\text{V.2.10})$$

Este último resultado, lejos de resultar inesperado, es una clara muestra de la autoconsistencia de toda la descripción.

V.3. Descripción cuántica.

Debido a la estrecha analogía entre la descripción hamiltoniana clásica para sistemas conservativos y la representación de Heisenberg para la mecánica cuántica⁴ que se obtiene reemplazando las variables dinámicas por sus correspondientes operadores cuánticos y los corchetes de Poisson por los correspondientes conmutadores según

$$\{A, B\} \rightarrow \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}, \hat{B}] \quad (\text{V.3.1})$$

donde

⁴ C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum Mechanics* (Wiley, New York, 1977).

$$[\hat{A}, \hat{B}] \equiv \hat{A}\hat{B} - \hat{B}\hat{A} , \quad (\text{V.3.2})$$

Brittin sugirió extender esta analogía a la cuantificación de sistemas disipativos (ver Ref.(1)). Por lo tanto, el análogo cuántico de la ecuación clásica (V.2.6) sería

$$\frac{d\hat{A}(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}(t), \hat{H}(t)] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial \hat{p}_i(t)} \hat{Q}_i(t) + \frac{\partial \hat{A}(t)}{\partial t} . \quad (\text{V.3.3})$$

(A partir de ahora se omitirá la dependencia temporal explícita que los operadores cuánticos tienen en esta representación).

La definición del conmutador (Ec.(V.3.2)), en coincidencia con el reemplazo (V.3.1), lleva al hecho de que el conjunto de ecuaciones (V.2.7) y (V.2.8) se siguen verificando cuando se reemplazan los corchetes de Poisson por conmutadores (la constante K en la Ec.(V.2.7f) se reemplaza por un operador representado por una matriz escalar constante). Debido a todo esto se obtiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [\hat{A}, \hat{B}] &= \left[\frac{d\hat{A}}{dt}, \hat{B} \right] + \left[\hat{A}, \frac{d\hat{B}}{dt} \right] + \\ &+ \sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{A}}{\partial \hat{p}_i} [\hat{B}; \hat{Q}_i] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{B}}{\partial \hat{p}_i} [\hat{Q}_i; \hat{A}] \end{aligned} \quad (\text{V.3.4})$$

Como consecuencia, se puede verificar que la derivadas temporales de los llamados conmutadores fundamentales

$$[\hat{q}_k, \hat{p}_l] = i\hbar \delta_{kl} ; \quad [\hat{p}_k, \hat{p}_l] = [\hat{q}_k, \hat{q}_l] = 0 , \quad (\text{V.3.5})$$

son todas iguales a cero, es decir,

$$\frac{d}{dt}[\hat{q}_k, \hat{p}_1] = \frac{d}{dt}[\hat{p}_k, \hat{p}_1] = \frac{d}{dt}[\hat{q}_k, \hat{q}_1] = 0, \quad (\text{V.3.6})$$

si se usa consistentemente la Ec. (V3.4), y debe remarcarse que no se necesita ninguna restricción sobre $Q; \hat{i}$.

Por lo tanto, la inconsistencia en el análisis hecho tanto por Brittin como por Lemos se debe al hecho de que ellos escribían

$$\frac{d}{dt}[\hat{A}, \hat{B}] = \left[\frac{d\hat{A}}{dt}, \hat{B}\right] + \left[\hat{A}, \frac{d\hat{B}}{dt}\right] \quad (\text{V.3.7})$$

en lugar de la Ec. (V.3.4).

En lo respecta al análisis de Brittin, debido a que él escribió

$$\frac{d}{dt}[\hat{q}_k, \hat{p}_1] = \left[\frac{d\hat{q}_k}{dt}, \hat{p}_1\right] + \left[\hat{q}_k, \frac{d\hat{p}_1}{dt}\right] = 0, \quad (\text{V.3.8})$$

esta ecuación conduciría, de acuerdo con las Ecs. (V.3.4) y (V.3.6), a

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{q}_k}{\partial \hat{p}_i} [\hat{p}_1; \hat{Q}_i] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{p}_i} [\hat{Q}_i; \hat{q}_k] = 0, \quad (\text{V.3.9})$$

lo que a su vez implica que

$$[\hat{Q}_1, \hat{q}_k] = 0, \quad (\text{V.3.10})$$

que coincide con la restricción de Brittin.

Por otro lado, en lo concerniente al análisis de Lemos, él escribió

$$\frac{d}{dt} [\hat{q}_k, \hat{q}_1] = \left[\frac{d\hat{q}_k}{dt}, \hat{q}_1 \right] + [\hat{q}_k, \frac{d\hat{q}_1}{dt}] = 0 . \quad (\text{V.3.11})$$

$$\frac{d}{dt} [\hat{p}_k, \hat{p}_1] = \left[\frac{d\hat{p}_k}{dt}, \hat{p}_1 \right] + [\hat{p}_k, \frac{d\hat{p}_1}{dt}] = 0 , \quad (\text{V.3.12})$$

Estas últimas dos ecuaciones, siguiendo las Ecs.(V.3.4) y (V.3.6), conducirían a

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{q}_k}{\partial \hat{p}_i} [\hat{q}_1; \hat{Q}_i] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{q}_1}{\partial \hat{p}_i} [\hat{Q}_i; \hat{q}_k] = 0 , \quad (\text{V.3.13})$$

y

$$\sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{p}_k}{\partial \hat{p}_i} [\hat{p}_1; \hat{Q}_i] + \sum_{i=1}^n \frac{\partial \hat{p}_1}{\partial \hat{p}_i} [\hat{Q}_i; \hat{p}_k] = 0 , \quad (\text{V.3.14})$$

respectivamente. La Ec.(V.3.13) es idénticamente nula, mientras que la Ec.(V.3.14) implica que

$$[\hat{Q}_1, \hat{p}_k] = [\hat{Q}_k, \hat{p}_1] \quad (\text{V.3.15})$$

La Ec.(V.3.15), junto con la Ec.(V.3.10), llevó a Lemos a la conclusión de que las \hat{Q}_i son fuerzas conservativas. De cualquier manera, la conclusión de Lemos fue obtenida luego de usar la Ec.(V.3.7) en lugar de la Ec.(V.3.4), lo que debería considerarse conceptualmente erróneo.

Sin embargo, la principal desventaja de este enfoque para la cuantificación no ha sido discutida todavía. Si se considera, por simplicidad, el sistema compuesto por un oscilador armónico sujeto a una fuerza disipativa proporcional a la velocidad, se debería

escribir (para el caso unidimensional):

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{q}^2 \quad (\text{V.3.16a})$$

$$\hat{Q} = -\gamma \hat{p} . \quad (\text{V.3.16b})$$

Usando la ecuación de movimiento clave de este enfoque (Ec.(V.3.3)), es fácil probar que las evoluciones dinámicas que se obtienen para los operadores en Heisenberg $\hat{q}(t)$ y $\hat{p}(t)$ están dadas por

$$\hat{q}(t) = \exp(-(\gamma/2)t) [A \exp(i\Omega t) + B \exp(-i\Omega t)] \quad (\text{V.3.17a})$$

$$\begin{aligned} \hat{p}(t) = m \exp(-(\gamma/2)t) [& (-\frac{\gamma}{2} + i\Omega) A \exp(i\Omega t) - \\ & - (\frac{\gamma}{2} + i\Omega) B \exp(-i\Omega t)], \end{aligned} \quad (\text{V.3.17b})$$

donde

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2/4 , \quad (\text{V.3.18a})$$

$$\hat{A} = \hat{B}^\dagger = \frac{\hat{q}(0)}{2} + \frac{\hat{p}(0)}{2mi\Omega} + \frac{\gamma\hat{q}(0)}{4i\Omega} , \quad (\text{V.3.18b})$$

lo que conduce a

$$[\hat{q}(t), \hat{p}(t)] = e^{-\gamma t} [\hat{q}(0), \hat{p}(0)] , \quad (\text{V.3.19})$$

lo que constituye una violación del principio de indeterminación para $t \neq 0$. Se puede explicar la ocurrencia de esta consecuencia no deseada de acuerdo con lo siguiente:

La analogía entre la descripción hamiltoniana de la mecánica

conservativa clásica y la representación de Heisenberg de la mecánica cuántica debería considerarse una analogía formal. De hecho, esta analogía se basa en la equivalencia formal de la ecuación de movimiento de las variables dinámicas para el primer caso y de los operadores dinámicos para el segundo caso, y se basa también en el hecho de que tanto los corchetes de Poisson como los conmutadores verifican las Ecs.(V.2.7a-f) y las ecuaciones fundamentales (Ecs.(V.2.7g), salvo por el factor $i\hbar$). Sin embargo, se puede ver que la principal diferencia entre los dos formalismos yace en la misma definición de los corchetes de Poisson (Ec.(2.5)) y de los conmutadores (Ec.(V.3.2)). Este hecho se hace evidente cuando se toma en cuenta que los corchetes de Poisson fundamentales se verifican para todo tiempo t , independientemente del comportamiento dinámico de las variables clásicas $q(t)$ y $p(t)$, por definición. Pero, por el contrario, debido a la definición del conmutador de dos operadores, los conmutadores fundamentales pueden no verificarse para todo tiempo t y para cualquier evolución dinámica de los operadores cuánticos $\hat{q}(t)$ y $\hat{p}(t)$, como fue mostrado en el ejemplo anterior.

Para finalizar este Capítulo, se puede resumir lo expuesto en el mismo de la siguiente manera:

En un intento por obtener una descripción cuántica correcta de los fenómenos disipativos, Brittin propuso la cuantificación directa de las ecuaciones de Hamilton generalizadas. En su análisis, llegaba a la conclusión de que las representaciones de Schrödinger y Heisenberg no resultaban equivalentes. Varios años después, Lemos, utilizando el mismo procedimiento, restableció la equivalencia entre ambas representaciones, aunque señaló que las fuerzas no conservativas resultaban excluidas por el formalismo mismo.

En este Capítulo, se demostró que, a pesar del hecho de que el

método de cuantificación propuesto por Brittin no es un método adecuado, la forma en la que tanto Brittin como Lemos extrajeron sus conclusiones resulta incorrecta. Aunque su intención era presentar una descripción dinámico cuántica que pudiera incluir las fuerzas disipativas, ambos hicieron uso de ecuaciones dinámicas que implícitamente excluían esas fuerzas disipativas (ver la Ec.(V.3.7)).

Se puede concluir por lo tanto que el enfoque discutido aquí presenta dos dificultades principales: a) está basado en una analogía formal entre la dinámica hamiltoniana clásica y la dinámica cuántica, la cual no puede considerarse plausible de ser extendida sin violar un principio físico como el principio de Heisenberg, *debido a la diferencia entre las definiciones del corchete de Poisson y del conmutador*; y b) era un método que intentaba reproducir las mismas ecuaciones dinámicas disipativas para los operadores en Heisenberg y para sus correspondientes clásicos, lo que de hecho es una condición mucho más restrictiva que la que debería buscarse, que consistiría en la coincidencia entre las ecuaciones dinámicas para los valores de expectación de los observables cuánticos y el comportamiento dinámico disipativo de sus correspondientes clásicos.

VI. Estados Squeezed y el Principio de Máxima Entropía.

VI.1. Introducción.

En este Capítulo, se analizará, dentro del formalismo del Principio de Máxima Entropía, la evolución dinámica de los estados coherentes y los estados squeezed para Hamiltonianos dependientes del tiempo como el oscilador armónico con frecuencia variable y el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola. La idea es extender el enfoque de la Ref.(1) a ciertos Hamiltonianos dependientes del tiempo, motivado por la aparición de los mismos numerosas veces en la literatura (ver Capítulos III y IV), destacándose el significado físico de la aparición de los estados coherentes y estados squeezed dentro del Principio de Máxima Entropía.

Recientemente, se ha analizado la aparición y propiedades de los estados squeezed en términos del enfoque de la teoría de la información al operador densidad.^{2,3,4,5}

Es un hecho bien conocido^{6,7,8,9,10} que las fluctuaciones cuánticas

¹ J. Aliaga and A. N. Proto, Phys. Lett. **A 142**, 63 (1989).

² E.T. Jaynes, Phys. Rev. **106**, 620 (1957); **108**, 171 (1957), Y. Alhassid and R.D. Levine, J. Chem. Phys. **67**, 4321 (1977); Phys. Rev. **A18**, 89 (1978).

³ J. Aliaga, D. Otero, A. Plastino and A.N. Proto, Phys. Rev. **A38**, 918 (1988).

⁴ J. Aliaga, M. Negri, D. Otero, A. Plastino and A.N. Proto; Phys. Rev. **A36**, 3427 (1987).

⁵ J. Aliaga, D. R. Napoli, D. Otero, and A. Plastino, Phys. Rev. **A39**, 4223 (1989); G. Crespo, D. Otero, A. Plastino, and A. N. Proto, Phys. Rev. **A 39**, 2133 (1989).

⁶ C.C. Gerry and E.R. Vrscaj, Phys. Rev. **A 37**, 4265 (1988); C. Gerry, Phys. Rev. **A 38**, 1734 (1988).

⁷ A.M. Perelomov, Jour. Math. Phys. **26**, 222 (1972).

⁸ P. Tombesi and A. Mecozzi, Phys. Rev. **A 37**, 4778 (1988).

de dos variables dinámicas, e.g. \hat{O}_i y \hat{O}_j , deben satisfacer el principio de indeterminación

$$\Delta \hat{O}_i \Delta \hat{O}_j \geq \frac{1}{2} | \langle [\hat{O}_i ; \hat{O}_j] \rangle |, \quad (\text{VI.1.1})$$

pero no se impone ninguna restricción a los valores de las fluctuaciones individuales $\Delta \hat{O}_i$ o $\Delta \hat{O}_j$. Entonces, se denominan estados squeezed a aquéllos que satisfacen

$$(\Delta \hat{O}_i)^2 < \frac{1}{2} | \langle [\hat{O}_i ; \hat{O}_j] \rangle | \quad (\text{VI.1.2.a})$$

ó

$$(\Delta \hat{O}_j)^2 < \frac{1}{2} | \langle [\hat{O}_i ; \hat{O}_j] \rangle |, \quad (\text{VI.1.2.b})$$

si se consideran operadores adimensionales.

En este Capítulo, se usará el método propuesto en la Ref.(1). Cabe adelantar que el enfoque del Principio de Máxima Entropía (PME) a este problema nos brinda una nueva perspectiva. Se puede ver que: (a) la aparición (o no) de squeezing es una consecuencia directa de la estructura dinámica del grupo de Lie asociado al problema (i.e. el Hamiltoniano y los operadores relevantes tomados en cuenta); (b) el enfoque termodinámico a sistemas cuánticos que puede lograrse dentro del formalismo del PME permite un análisis directo del squeezing para sistemas cuánticos con temperatura distinta de cero.

⁹ H. P. Yuen, Phys. Rev. A **13**, 2226 (1976); C. M. Caves, Phys. Rev. D **23**, 1693 (1981); D.F. Walls, Nature **306**, 141 (1983); R.S. Bondurant and J.H. Shapiro, Phys. Rev. D **30**, 2548 (1984).

¹⁰ M.M. Nieto and L.M. Simmons Jr., Phys. Rev. D **20**, 1321 (1979); S.M. Roy and V. Singh, Phys. Rev. D **25**, 3413 (1982).

Se puede decir que el enfoque del PME hace evidente la conexión intrínseca entre la aparición de estados coherentes o estados squeezed, el diferente "conocimiento" introducido en un operador densidad general (necesario para evaluar adecuadamente los valores de expectación) y la dinámica hamiltoniana. De esta manera, son dos los aspectos básicos de este Capítulo: i) el operador densidad construido a través del PME, y, ii) las peculiaridades de las álgebras de Lie relacionadas en particular con el Hamiltoniano del oscilador armónico de frecuencia variable y el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola. En lo que respecta al OA de frecuencia variable, como fue bien establecido en distintas referencias,^{11,12,13,14} se han hecho diferentes esfuerzos para analizar la generación de los estados squeezed a través de la variación temporal en la frecuencia. Actualmente, permanece la cuestión abierta respecto de si los cambios adiabáticos en la frecuencia conducen o no a comportamiento squeezed.¹⁴ En este Capítulo, se analiza, por un lado, el OA con frecuencia dependiente del tiempo y su dinámica de squeezing para cualquier $\omega(t)$ (mientras que su forma funcional sea conocida). Se describen en particular los cambios adiabáticos y repentinos en la frecuencia y se concluye que los cambios adiabáticos en $\omega(t)$ conducen a squeezing. Por otro lado, también se analiza la dinámica de estados coherentes y squeezed para el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola y otros isomorfos a éste. Esto se hace, en todos los casos, tanto para la situación de *temperatura cero* como para el caso de *temperatura distinta de cero*, ya que el presente es un

¹¹ A. Jannussis and V. Bartiz, *Il Nuovo Cimento* 102 B, 33 (1988).

¹² H.-Y. Fan and H.R. Zaidi, *Phys. Rev. A* 37, 2985 (1988).

¹³ Xin Ma and William Rhodes, *Phys. Rev. A* 39, 1941 (1989).

¹⁴ J. Janszky and Y. Yushin, *Phys. Rev. A* 39 (May) (1989); H.R. Zaidi and H.-Y. Fan, *Phys. Rev. A* 39 (May) (1989).

formalismo termodinámico cuántico, basado en el operador densidad asociado con la dinámica hamiltoniana.

VI.2. Operador densidad, estados coherentes y estados squeezed para el oscilador armónico.

Las dispersiones cuánticas de los operadores dinámicos \hat{q} y \hat{p} deben satisfacer el principio de indeterminación (ver la Sección VI.1)

$$\Delta \hat{q} \Delta \hat{p} \geq \frac{\hbar}{2} . \quad (\text{VI.2.1.a})$$

Si se definen apropiadamente γ_1 y γ_2 de manera de hacer que los operadores (\hat{q} / γ_1) y (\hat{p} / γ_2) resulten adimensionales, el equivalente de la Ec.(VI.1.1) es

$$\Delta (\hat{q} / \gamma_1) \Delta (\hat{p} / \gamma_2) \geq 1. \quad (\text{VI.2.1.b})$$

Por lo tanto, se tendrá squeezing en \hat{q} / γ_1 o en \hat{p} / γ_2 cuando (ver Sección VI.1)

$$\Delta^2 (\hat{q} / \gamma_1) < 1 \quad (\text{VI.2.2.a})$$

o

$$\Delta^2 (\hat{p} / \gamma_2) < 1, \quad (\text{VI.2.2.b})$$

respectivamente.

Se estudiará la presencia de estados squeezed en \hat{q} y \hat{p} para el OA con frecuencia constante o frecuencia dependiente del tiempo. Se sabe que el OA cierra un álgebra de Lie parcial (ver Ec.(II.3.3))

tanto con el álgebra de Heisenberg H_4 , i.e. $\{ \hat{l}, \hat{q}, \hat{p} \}$, como con $SU(1,1)$, i.e. $\{ \hat{q}^2, \hat{p}^2, \hat{l} \}$, donde $\hat{l} = \frac{1}{2} \{ \hat{q} \hat{p} + \hat{p} \hat{q} \}$. Como se desea obtener estados con una relación de dispersión muy especial, se necesita incluir información concerniente no sólo a los operadores sino también a sus cuadrados. Entonces, se considerarán los operadores relevantes como aquéllos pertenecientes a H_4 y $SU(1,1)$.

La TI indica que, en este caso, el operador densidad está dado por (Refs.(2)-(5))

$$\hat{\rho} = \exp (- \lambda_0 \hat{l} - \lambda_q \hat{q} - \lambda_p \hat{p} - \lambda_{q^2} \hat{q}^2 - \lambda_{p^2} \hat{p}^2 - \lambda_1 \hat{l}) \quad (\text{VI.2.3})$$

En términos de los operadores de creación y destrucción, los operadores de posición y momento y el Hamiltoniano se pueden escribir como

$$\hat{q} = \gamma_1 (\hat{a}^+ + \hat{a}) \quad (\text{VI.2.4.a})$$

$$\hat{p} = i \gamma_2 (\hat{a}^+ - \hat{a}) \quad (\text{VI..4.b})$$

$$\hat{H} = \hbar \omega(t) (\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2}), \quad (\text{VI.2.4.c})$$

con

$$\gamma_1^2 = \frac{\hbar}{2 m \omega(t)} \quad (\text{VI.2.4.d})$$

$$\gamma_2^2 = \frac{\hbar m \omega(t)}{2} \quad (\text{VI.2.4.e})$$

donde m es la masa del oscilador.

Si se quiere estudiar el squeezing, es necesario evaluar los valores de expectación dados en la Ec.(II.1.6). Cuando se considera

un conjunto de operadores relevantes que no conmutan, se necesita diagonalizar la matriz densidad, $\hat{\rho}$, antes de aplicar la Ec.(II.1.6). Esta diagonalización se lleva a cabo (Ref.(1)) generalizando un método de operador de número de "cuasifotones" como el desarrollado en las Refs.(3) y (9). Se define un nuevo operador de creación

$$\hat{b}^+ = |\cosh r| e^{i\Phi} \hat{a}^+ + |\sinh r| e^{-i\theta} \hat{a} + |\gamma| e^{-i\psi} \quad (\text{VI.2.5})$$

con

$$[\hat{b}, \hat{b}^+]_- = 1 . \quad (\text{VI.2.6})$$

Para lograr la diagonalización requerida, se debería incluir al Hamiltoniano como un operador relevante. Por lo tanto, el operador densidad resulta

$$\hat{\rho} = \exp (- \lambda_0 \hat{I} - \lambda_q \hat{q} - \lambda_p \hat{p} - \lambda_{q^2} \hat{q}^2 - \lambda_{p^2} \hat{p}^2 - \lambda_1 \hat{I} - \beta \hat{H}) \quad (\text{VI.2.7})$$

y al utilizar las Ecs.(VI.2.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{\rho} = \exp (- \lambda_0 \hat{I} - (\lambda_q \gamma_1 + i \lambda_p \gamma_2) \hat{a}^+ - (\lambda_q \gamma_1 - i \lambda_p \gamma_2) \hat{a} \\ - (\lambda_{q^2} \gamma_1^2 - \lambda_{p^2} \gamma_2^2 + i \lambda_1 \gamma_1 \gamma_2) \hat{a}^{+2} - (\lambda_{q^2} \gamma_1^2 - \lambda_{p^2} \gamma_2^2 - i \lambda_1 \gamma_1 \gamma_2) \hat{a}^2 \\ - (\lambda_{q^2} \gamma_1^2 + \lambda_{p^2} \gamma_2^2) (\hat{a}^+ \hat{a} + \hat{a} \hat{a}^+) - \beta \hbar \omega(t) (\hat{a}^+ \hat{a} + \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (\text{VI.2.8})$$

Luego, es fácil probar que el operador densidad puede ser escrito en términos de los nuevos operadores \hat{b}^+ y \hat{b} (usando la condición de

normalización (Refs.(1) y (3)) como

$$\hat{\rho} = \exp \left(-\lambda_0 \hat{1} - \beta \hbar \omega(t) \left(\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2} \right) + \beta \hbar \omega(t) |\gamma|^2 \right) \quad (\text{VI.2.9})$$

$$= 2 \sinh (\beta \hbar \omega(t)/2) \exp(-\beta \hbar \omega(t)/2) \exp(-\beta \hbar \omega(t) \hat{b}^+ \hat{b})$$

si los multiplicadores de Lagrange verifican

$$\lambda_q \gamma_1 = \beta \hbar \omega(t) |\gamma| \left\{ |\sinh r| \cos (\psi-\theta) + |\cosh r| \cos (\psi+\varphi) \right\} \quad (\text{VI.2.10.a})$$

$$\lambda_p \gamma_2 = \beta \hbar \omega(t) |\gamma| \left\{ -|\sinh r| \sin (\psi-\theta) + |\cosh r| \sin (\psi+\varphi) \right\} \quad (\text{VI.2.10.b})$$

$$\lambda_1 \gamma_1 \gamma_2 = \beta \hbar \omega(t) |\sinh r| |\cosh r| \sin (\theta+\varphi) \quad (\text{VI.2.10.c})$$

$$\lambda_{q^2} \gamma_1^2 + \lambda_{p^2} \gamma_2^2 = \beta \hbar \omega(t) (\sinh r)^2 \quad (\text{VI.2.10.d})$$

$$\lambda_{q^2} \gamma_1^2 - \lambda_{p^2} \gamma_2^2 = \beta \hbar \omega(t) |\sinh r| |\cosh r| \cos (\theta+\varphi) \quad (\text{VI.2.10.e})$$

Como se mostrará más adelante, esta restricción en el espacio dual de los multiplicadores de Lagrange es la consecuencia del carácter estadístico cuántico del sistema estudiado (ver Ref.(5)). La inclusión del Hamiltoniano como un operador relevante no modifica la evolución temporal del sistema, dada por las Ecs.(VI.2.6), sino que la transforma en una evolución termodinámica (ver Ref.(3)), donde β es la inversa de la temperatura, definida a través de

$$\beta = \frac{1}{T} = \frac{\partial S}{\partial \langle \hat{H} \rangle} \Big|_{\{\langle \hat{O}_j \rangle\}} \quad , \quad \forall \langle \hat{O}_j \rangle \neq \langle \hat{H} \rangle$$

siguiendo las Refs. (2), (3), (15), y (16). Nótese que la matriz densidad diagonalizada (Ec.(VI.2.9)) se puede pensar como la correspondiente a una mezcla estadística de estados, siempre que $\beta \neq \infty$, i.e. que la temperatura asociada sea diferente de cero. Este hecho establece una diferencia entre el enfoque utilizado en este trabajo y aquéllos en la literatura previa en los cuales sólo se consideraban estados puros (i.e., entropía igual a cero).

El operador de creación usual se puede escribir en términos de \hat{b}^+ y \hat{b} como

$$\begin{aligned} \hat{a}^+ = & |\cosh r| e^{-i\phi} \hat{b}^+ - |\sinh r| e^{-i\theta} \hat{b} \\ & + |\gamma| [|\sinh r| e^{-i(\theta-\psi)} - |\cosh r| e^{-i(\phi+\psi)}] \end{aligned} \quad (\text{VI.2.11})$$

Usando las Ecs.(VI.2.1) y (VI.2.9-11) se pueden escribir los operadores relevantes en términos de los nuevos operadores \hat{b}^+ y \hat{b} , y usando el hecho de que la matriz densidad es diagonal en $\hat{b}^+ \hat{b}$ (ver la Ec.(VI.2.9)), se obtiene para sus valores de expectación

$$\langle \hat{q} \rangle = 2 \gamma_1 |\gamma| \{ |\sinh r| \cos(\psi-\theta) - |\cosh r| \cos(\psi+\phi) \} \quad (\text{VI.2.12.a})$$

$$\langle \hat{p} \rangle = 2 \gamma_2 |\gamma| \{ |\sinh r| \sin(\psi-\theta) - |\cosh r| \sin(\psi+\phi) \} \quad (\text{VI.2.12.b})$$

$$\langle \hat{q}^2 \rangle = \gamma_1^2 \left(1 + \frac{4 \gamma_2^2}{\hbar \omega(t)} \lambda'_{p^2} \right) \left(1 + \frac{\exp(-\beta \hbar \omega(t)/2)}{\sinh(\beta \hbar \omega(t)/2)} \right) + \langle \hat{q} \rangle^2 \quad (\text{VI.2.12.c})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{i} \rangle = & -2 \gamma_1 \gamma_2 \left\{ \frac{2 \gamma_1 \gamma_2}{(\hbar \omega(t))^2} \lambda'_{q^2} \lambda'_{p^2} - \frac{4 \gamma_1 \gamma_2}{\hbar \omega(t)} \lambda'_{i^2} \right. \\ & \left. + \frac{\gamma_1 \gamma_2}{\hbar \omega(t)} \lambda'_{i^2} \left(1 + \frac{\exp(-\beta \hbar \omega(t) / 2)}{\sinh(\beta \hbar \omega(t) / 2)} \right) \right\} \end{aligned} \quad (\text{VI.2.12.e})$$

donde se ha definido $\lambda'_k = \lambda_k / \beta$ (ver Ref.(3)). Estas nuevas variables serán por lo tanto variables intensivas de este "sistema termodinámico cuántico".^{3,15,16} Nótese que, a partir de las Ecs.(VI.2.12c) y (VI.2.12d), se puede concluir que las dispersiones de \hat{q} y \hat{p} no dependen de los multiplicadores de Lagrange λ_{q^2} y λ_{p^2} sino que dependen explícitamente de las variables intensivas λ'_{q^2} y λ'_{p^2} y del llamado "factor termodinámico" $(1 + (\exp(-\beta \hbar \omega(t)/2) / \sinh(\beta \hbar \omega(t)/2)))$.

De las Ecs.(VI.2.10c-e) se obtiene

$$\lambda'_{i^2} = \hbar \omega(t) \left(\frac{\lambda'_{q^2}}{\gamma_1^2} + \frac{\lambda'_{p^2}}{\gamma_2^2} \right) + 4 \lambda'_{q^2} \lambda'_{p^2} \geq 0, \quad (\text{VI.2.13.a})$$

$$\lambda_{q^2} \gamma_1^2 + \lambda_{p^2} \gamma_2^2 \geq 0. \quad (\text{VI.2.13.b})$$

Las Ecs.(VI.2.12c) y (VI.2.12d) permiten evaluar el producto de las dispersiones de \hat{q} y \hat{p}

$$\Delta \hat{q} \Delta \hat{p} = \frac{\hbar}{2} \left(1 + \frac{\lambda'_{i^2}}{\omega(t)^2} \right)^{1/2} \left(1 + \frac{\exp(-\beta \hbar \omega(t)/2)}{\sinh(\beta \hbar \omega(t)/2)} \right) \quad (\text{VI.2.14})$$

¹⁵ W.H. Louisell, *Quantum Statistical Properties of Radiation* (Wiley, New York, 1973), pp. 264-266.

¹⁶ H. Callen, *Thermodynamics* (Wiley, New York, 1981).

Con todos estos elementos se puede analizar la posibilidad de obtener squeezing en \hat{q} y \hat{p} . Primero se estudiará el caso particular en el cual $\omega(t) = \omega_0$, i.e. el oscilador armónico con frecuencia constante. Luego, se examinará el oscilador armónico con frecuencia dependiente del tiempo, considerándose el caso de un salto repentino en la frecuencia, que ha sido analizado recientemente en la literatura (ver Refs.(11)-(14)).

VI.3. Oscilador armónico con frecuencia constante.

En este caso la Ec.(VI.2.4c) toma la forma

$$\hat{H} = \hbar \omega_0 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) \quad (\text{VI.3.1})$$

La evolución temporal de los valores de expectación y de los multiplicadores de Lagrange puede ser evaluada usando las Ecs.(VI.2.5) y (VI.2.6) (ver Refs.(1)-(5))

$$\frac{d \langle \hat{q} \rangle}{d t} = \frac{\langle \hat{p} \rangle}{m} , \quad (\text{VI.3.2.a})$$

$$\frac{d \langle \hat{p} \rangle}{d t} = - m \omega_0^2 \langle \hat{q} \rangle , \quad (\text{VI.3.2.b})$$

$$\frac{d \langle \hat{q}^2 \rangle}{d t} = \frac{2 \langle \hat{l} \rangle}{m} , \quad (\text{VI.3.2.c})$$

$$\frac{d \langle \hat{p}^2 \rangle}{d t} = - 2 m \omega_0^2 \langle \hat{l} \rangle , \quad (\text{VI.3.2.d})$$

$$\frac{d \langle \hat{l} \rangle}{d t} = \frac{\langle \hat{p}^2 \rangle}{m} - m \omega_0^2 \langle \hat{q}^2 \rangle , \quad (\text{VI.3.2.e})$$

$$\frac{d \lambda_q}{d t} = m \omega_0^2 \lambda_p , \quad (\text{VI.3.3.a})$$

$$\frac{d \lambda_p}{d t} = - \frac{\lambda_q}{m} \quad (\text{VI.3.3.b})$$

$$\frac{d \lambda_{q^2}}{d t} = m \omega_0^2 \lambda_1 , \quad (\text{VI.3.3.c})$$

$$\frac{d \lambda_{p^2}}{d t} = - \frac{\lambda_1}{m} , \quad (\text{VI.3.3.d})$$

$$\frac{d \lambda_1}{d t} = - 2 \frac{\lambda_{q^2}}{m} + 2 m \omega_0^2 \lambda_{p^2} \quad (\text{VI.3.3.e})$$

Resolviendo las Ecs. (VI.3.2) y (VI.3.3) se obtiene

$$\langle \hat{q} \rangle_t = \langle \hat{q} \rangle_0 \cos(\omega_0 t) + \frac{\langle \hat{p} \rangle_0}{m \omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (\text{VI.3.4.a})$$

$$\langle \hat{p} \rangle_t = \langle \hat{p} \rangle_0 \cos(\omega_0 t) - m \omega_0 \langle \hat{q} \rangle_0 \sin(\omega_0 t), \quad (\text{VI.3.4.b})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{q}^2 \rangle_t &= \frac{\langle \hat{q}^2 \rangle_0}{2} (1 + \cos(2\omega_0 t)) + \frac{\langle \hat{p}^2 \rangle_0}{2 (m\omega_0)^2} (-1 + \cos(2\omega_0 t)) \\ &+ \frac{\langle \hat{l} \rangle_0}{m \omega_0} \sin(2\omega_0 t), \end{aligned} \quad (\text{VI.3.4.c})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{p}^2 \rangle_t &= \frac{\langle \hat{p}^2 \rangle_0}{2} (1 + \cos(2\omega_0 t)) + \frac{(m\omega_0)^2 \langle \hat{q}^2 \rangle_0}{2} (-1 + \cos(2\omega_0 t)) \\ &+ m \omega_0 \langle \hat{l} \rangle_0 \sin(2\omega_0 t), \end{aligned} \quad (\text{VI.3.4.d})$$

$$\langle \hat{l} \rangle_t = \langle \hat{l} \rangle_0 \cos(2\omega_0 t) + \frac{1}{2} \left\{ \frac{\langle \hat{p}^2 \rangle_0}{m\omega_0} - m\omega_0 \langle \hat{q}^2 \rangle_0 \right\} \sin(2\omega_0 t) \quad (\text{VI.3.4.e})$$

$$\lambda_q(t) = \lambda_q(0) \cos(\omega_0 t) + m \omega_0 \lambda_p(0) \sin(\omega_0 t), \quad (\text{VI.3.5.a})$$

$$\lambda_p(t) = \lambda_p(0) \cos(\omega_0 t) - \frac{\lambda_q(0)}{m \omega_0} \sin(\omega_0 t), \quad (\text{VI.3.5.b})$$

$$\begin{aligned} \lambda_{q^2}(t) = \lambda_{q^2}(0) + \frac{m \omega_0}{2} \left\{ \frac{\lambda_{q^2}(0)}{m \omega_0} - m \omega_0 \lambda_{p^2}(0) \right\} (\cos(2\omega_0 t) - 1) \\ + \frac{m \omega_0}{2} \lambda_1(0) \sin(2\omega_0 t), \end{aligned} \quad (\text{VI.3.5.c})$$

$$\begin{aligned} \lambda_{p^2}(t) = \lambda_{p^2}(0) - \frac{1}{2 m \omega_0} \left\{ \frac{\lambda_{q^2}(0)}{m \omega_0} - m \omega_0 \lambda_{p^2}(0) \right\} (\cos(2\omega_0 t) - 1) \\ - \frac{\lambda_1(0)}{2 m \omega_0} \sin(2\omega_0 t), \end{aligned} \quad (\text{VI.3.5.d})$$

$$\lambda_1(t) = \lambda_1(0) \cos(2\omega_0 t) - \left\{ \frac{\lambda_{q^2}(0)}{m \omega_0} - m \omega_0 \lambda_{p^2}(0) \right\} \sin(2\omega_0 t) \quad (\text{VI.3.5.e})$$

Se puede probar a partir de las Ecs.(VI.3.5c-d), o usando los invariantes generados vía el tensor métrico del espacio de los multiplicadores de Lagrange (ver Refs.(3)-(5)), que

$$\lambda_{q^2} \gamma_1^2 + \lambda_{p^2} \gamma_2^2 \equiv I \quad (\text{VI.3.6})$$

es un invariante de movimiento dependiente del tiempo. De la Ec.(VI.2.10d) se ve que r también es un invariante.

VI.3.A Estados coherentes.

Se considera el caso en el que el conocimiento sobre el sistema a $t = 0$ está restringido a $\langle \hat{q} \rangle_0$ y $\langle \hat{p} \rangle_0$ y β . Entonces, los valores

de expectación $\langle \hat{q}^2 \rangle_0$, $\langle \hat{p}^2 \rangle_0$ y $\langle \hat{l} \rangle_0$ deben ser obtenidos usando la Ec.(II.1.6). Por lo tanto, el formalismo de TI determina que el operador densidad es $\hat{\rho} = \exp(-\lambda_0 \hat{l} - \lambda_q \hat{q} - \lambda_p \hat{p} - \beta \hat{H})$, i.e. $\lambda'_{q^2}(0) = 0$, $\lambda'_{p^2}(0) = 0$ y $\lambda'_l(0) = 0$ (ver Refs.(4) y (5)). A partir de la Ec.(VI.2.10d) se concluye que esto es equivalente a tomar $r = 0$ (y esta condición permanecerá para todo tiempo t ya que r es un invariante). En este caso, la transformación dada en la Ec.(VI.2.5) se transforma en aquélla dada en las Refs.(1), (3) y (15)

$$\hat{b}^+ = e^{i\Phi} \hat{a}^+ + |\gamma| e^{-i\Psi} . \quad (\text{VI.3.7})$$

Las indeterminaciones de \hat{q} y \hat{p} resultan

$$\Delta^2 \hat{q} = \gamma_1^2 \left(1 + \frac{\exp(-\beta \hbar \omega_0 / 2)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0 / 2)} \right) , \quad (\text{VI.3.8.a})$$

y

$$\Delta^2 \hat{p} = \gamma_2^2 \left(1 + \frac{\exp(-\beta \hbar \omega_0 / 2)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0 / 2)} \right) \quad (\text{VI.3.8.b})$$

Por lo tanto, a $T \equiv 1/\beta = 0$, $\lambda'_q \neq 0$, $\lambda'_p \neq 0$, la entropía es cero y se tiene un estado puro con indeterminación mínima y con evolución temporal para $\langle \hat{q} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$ igual a sus correspondientes clásicos (ver Ecs.(VI.3.4)). Este estado puro de esta forma corresponde al bien conocido estado coherente (Refs.(10) y (15)). Se puede probar esto fácilmente usando la Ec.(VI.3.7) como sigue: se considera un conjunto mixto de condiciones iniciales (i.e. parte de la información relacionada con los valores de expectación (variables extensivas) y parte con las variables intensivas) $\{ \langle \hat{q} \rangle_0, \langle \hat{p} \rangle_0,$

$T = 0$ } (ver Refs.(4) y (5)). Como el operador densidad en términos de los nuevos operadores \hat{b}^+ y \hat{b} (Ec.(VI.2.9)) corresponde al operador densidad canónico, resulta que, a $T = 0$ el nuevo OA (i.e. $\bar{n} \omega_0 (\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2})$) debería condensarse en su estado fundamental, $|0\rangle_b$, para el cual

$$\hat{b} |0\rangle_b = (e^{i\Phi} \hat{a} + |\gamma| e^{-i\psi}) |0\rangle_b = 0. \quad (\text{VI.3.9})$$

Por lo tanto, este estado es un autoestado de \hat{a} (con autovalor $-|\gamma| e^{-i\psi}$) y esta es una de las definiciones de un estado coherente. Entonces, el estado coherente es el estado fundamental del OA transformado $\bar{n} \omega_0 (\hat{b}^+ \hat{b} + \frac{1}{2})$. Si se evalúa la entropía S de acuerdo con las Ecs.(II.2.3) y (VI.2.9), se obtiene

$$S = -\ln [2 \sinh (\beta \bar{n} \omega_0 / 2)] + \frac{\beta \bar{n} \omega_0}{2} \left(1 + \frac{\exp (-\beta \bar{n} \omega_0 / 2)}{\sinh (\beta \bar{n} \omega_0 / 2)} \right) \quad (\text{VI.3.10})$$

En el límite de $T = 0$, se ve fácilmente que $S = 0$. Entonces, en este caso, se está tratando con un estado puro, que es el único considerado en el enfoque en el que se utiliza la función de onda (ver Refs.(9) y (10)). Si $T > 0$, el operador densidad corresponde a aquél de estados mixtos, que tiene la misma evolución temporal que la dada para los estados coherentes, pero *no tiene indeterminación mínima* (ver las Ecs.(VI.3.8)).

VI.3.B. Estados squeezed.

Si se conocen, a $t=0$, los valores de expectación $\langle \hat{q}^2 \rangle_0$, $\langle \hat{p}^2 \rangle_0$ y $\langle \hat{l} \rangle_0$, y cuando estos valores de expectación son diferentes de aquéllos que se obtendrían aplicando la Ec.(II.1.6), con $\hat{\rho} = \exp (-\lambda_0 \hat{l} - \lambda_q \hat{q} - \lambda_p \hat{p})$, esto implica que se debe incluir nueva información en $\hat{\rho}$ haciendo $\lambda'_{q^2}(0) \neq 0$ ó $\lambda'_{p^2}(0) \neq 0$ ó

$\lambda'_{1}(0) \neq 0$. Así, se obtiene un comportamiento dinámico completamente distinto. Como se quiere analizar la posibilidad de squeezing, se escriben las relaciones de indeterminación (ver Ecs.(VI.2.12c-d))

$$\Delta^2_{\hat{q}} = \gamma_1^2 \left(1 + \frac{4 \gamma_2^2}{\hbar \omega_0} \lambda'_{p^2} \right) \left(1 + \frac{\exp(-\beta \hbar \omega_0 / 2)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0 / 2)} \right) \quad (\text{VI.3.11a})$$

$$\Delta^2_{\hat{p}} = \gamma_2^2 \left(1 + \frac{4 \gamma_1^2}{\hbar \omega_0} \lambda'_{q^2} \right) \left(1 + \frac{\exp(-\beta \hbar \omega_0 / 2)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0 / 2)} \right) \quad (\text{VI.3.11b})$$

Primero, se analizará el caso de $T = 0$, que es el único considerado previamente en la literatura, y luego se estudiará el caso termodinámico (i.e. $T > 0$).

i) *Caso de Temperatura Cero*

A $T = 0$, el operador densidad describe un estado puro, ya que la entropía es cero, y se obtendrá squeezing si a un dado tiempo t_0 $\Delta^2_{\hat{q}}(t_0) / \gamma_1^2$ ó $\Delta^2_{\hat{p}}(t_0) / \gamma_2^2$ resultan ser menores que uno (ver Ecs.(VI.2.2)). Pero se puede demostrar que ésta es la situación para cualesquiera condiciones iniciales intrínsecamente compatibles de $\langle \hat{q} \rangle_0 > 0$, $\langle \hat{p} \rangle_0 > 0$, $\langle \hat{q}^2 \rangle_0 > 0$, $\langle \hat{p}^2 \rangle_0 > 0$ y $\langle \hat{l} \rangle_0 > 0$. Se pueden escribir las Ecs.(VI.3.5c-e) usando las variables r , ϕ y θ ,

$$\frac{4 \gamma_1^2}{\hbar \omega} \lambda'_{q^2}(t) = 2 \left[(\sinh r)^2 + |\sinh r| |\cosh r| \cos(2\omega_0 t - \theta_0 - \phi_0) \right] \quad (\text{VI.3.12a})$$

$$\frac{4 \gamma_2^2}{\hbar \omega} \lambda'_{p^2}(t) = 2 \left[(\sinh r)^2 - |\sinh r| |\cosh r| \cos(2\omega_0 t - \theta_0 - \phi_0) \right] \quad (\text{VI.3.12b})$$

Como

$$(\sinh r)^2 \leq |\sinh r| |\cosh r|, \quad (\text{VI.3.13})$$

siempre se puede encontrar t_0 tal que satisfaga $2\omega t_0 - \theta_0 - \varphi_0 = \pi$, $\lambda'_{q2}(t_0) < 0$ y t_1 tal que satisfaga $2t_1 - \theta_0 - \varphi_0 = 0$, $\lambda'_{p2}(t_1) < 0$. Por lo tanto se tiene squeezing para todas las posibles condiciones iniciales. Nótese también que λ'_1 es proporcional a $\sin(2\omega t - \theta_0 - \varphi_0)$, resultando cero dos veces en cada período. De esta manera, el producto de indeterminación dado por la Ec.(VI.2.14) resulta

$$\Delta\hat{q}(t_2) \Delta\hat{p}(t_2) = \frac{\hbar}{2} \quad 2\omega t_2 - \theta_0 - \varphi_0 = \pi/2, 3\pi/2. \quad (\text{VI.3.14})$$

La evolución dinámica de λ'_{q2} y λ'_{p2} está restringida por las Ecs.(VI.2.13a-b). esto se puede ver en la Fig.1. Como se dijo antes (ver la Ec.(VI.3.6)), $\lambda_{q2} \gamma_1^2 + \lambda_{p2} \gamma_2^2 \equiv I$ es un invariante de movimiento y esto determina que la evolución tenga lugar a lo largo de líneas rectas de pendiente -1, limitadas por la hipérbola de $\lambda'_1 = 0$ (Ec.(VI.2.13a)). Cuanto más grande sea el valor de I , mayor resulta el squeezing del estado. En la intersección con la hipérbola se tiene un estado de indeterminación mínima (i.e. $\lambda'_1 = 0$ (ver Ec.(VI.3.14)), y en la recta con pendiente 1 ($\lambda_{q2} \gamma_1^2 = \lambda_{p2} \gamma_2^2$) se tiene máxima indeterminación. Se puede ver también que existe una zona con squeezing inicial en \hat{q} (a en la Fig.1) y otra con squeezing inicial en \hat{p} (b en la Fig.1). Es posible demostrar que las Ecs.(VI.3.11a-b) se pueden escribir en términos del factor de squeezing s , como en la Ref.(10), lo que en este enfoque corresponde

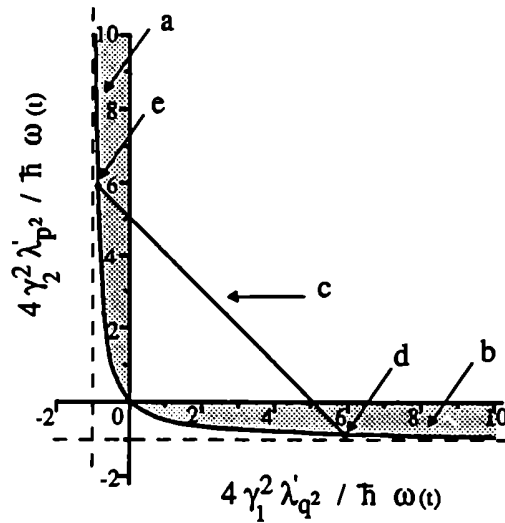


Fig.1. Espacio de los multiplicadores de Lagrange independientes: λ'_{q^2} y λ'_{p^2} . La zona gris, indicada como a (b), muestra la región donde se obtiene squeezing en \hat{q} (\hat{p}). La evolución del sistema está indicada por la línea c. Está limitada por la hipérbola dada por la Ec.(VI.2.13.a) (es decir, el principio de indeterminación). El punto d (e) corresponde a la mínima dispersión en \hat{p} (\hat{q}) para un dado valor del invariante de movimiento o, equivalentemente, r.

a

$$s = |\cosh r| + |\sinh r|, \quad s > 1 \quad (\text{VI.3.15a})$$

$$s = |\cosh r| - |\sinh r|, \quad s < 1. \quad (\text{VI.3.15b})$$

Finalmente, se remarca que para $T = 0$, para todas las posibles condiciones iniciales intrínsecamente compatibles (Ref.(5), se tienen estados squeezed, caracterizados por la condición

Por lo tanto, el estado fundamental del OA transformado (i.e. $\hbar \omega_0 (\hat{b}^+ \hat{b} + 1/2)$) resulta el estado squeezed más general, siendo el autoestado del operador $|\cosh r| e^{i\varphi} \hat{a}^+ + |\sinh r| e^{-i\theta} \hat{a}$ (con autovalor $-|\gamma|e^{-i\psi}$).

ii) *Caso de Temperatura distinta de Cero*

Se estudiará ahora el caso termodinámico, con $T \neq 0$. A partir de las Ecs. (VI.2.14) y (VI.3.11), se puede obtener $\Delta \hat{q}$, $\Delta \hat{p}$ y $\Delta \hat{q} \Delta \hat{p}$ para cualquier temperatura T . Por lo tanto, no habrá más estados de indeterminación mínima (ver Ec. (VI.2.14)), y la indeterminación de \hat{q} y \hat{p} (ver Ecs. (VI.2.10d-e) y (VI.2.12c-d)) resultará mayor que

$$\Delta^2_{\hat{q}_{\min}} = \gamma_1^2 [|\cosh r| - |\sinh r|]^2 \left(1 + \frac{\exp(-\beta \hbar \omega_0 / 2)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0 / 2)} \right) \quad (\text{VI.3.17a})$$

$$\Delta^2_{\hat{p}_{\min}} = \gamma_2^2 [|\cosh r| - |\sinh r|]^2 \left(1 + \frac{\exp(-\beta \hbar \omega_0 / 2)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0 / 2)} \right) \quad (\text{VI.3.17b})$$

Si $\Delta^2_{\hat{q}} / \gamma_1^2$ ó $\Delta^2_{\hat{p}} / \gamma_2^2$ son menores que uno (ver Ec. (VI.2.2)), se tendrá squeezing aunque no se estén considerando estados puros ni estados de indeterminación mínima. Esto es posible si se tiene

$$[|\cosh r| - |\sinh r|]^2 < \left(1 + \frac{\exp(-\beta \hbar \omega_0 / 2)}{\sinh(\beta \hbar \omega_0 / 2)} \right)^{-1} \equiv \tanh(\beta \hbar \omega_0 / 2) \quad (\text{VI.3.18})$$

De la Ec. (VI.2.10d) resulta

$$r = \operatorname{arcsinh} \left[\pm \frac{1}{2} \left(\frac{4 \gamma_2^2 \lambda'_{p2} + 4 \gamma_1^2 \lambda'_{q2}}{\hbar \omega_0} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{VI.3.19})$$

Entonces, para cualquier condición inicial que satisfaga

$$\frac{4 I}{\hbar \omega_0} = \frac{4 \gamma_2^2 \lambda'_{p2} + 4 \gamma_1^2 \lambda'_{q2}}{\hbar \omega_0} > \left(2 \sinh \left(-\frac{1}{2} \ln (\tanh (\beta \hbar \omega_0 / 2)) \right) \right)^2, \quad (\text{VI.3.20})$$

lo que significa cualquier condición inicial por encima de una recta crítica (c en la Fig.1) de pendiente -1, habrá squeezing. De esta manera, se debe notar que para $T > 0$ las "zonas de squeezing a y b" de la Fig.1 resultan modificadas de esta manera debido a lo que se puede llamar el "factor termodinámico" (i.e. $\coth (\beta \hbar \omega_0 / 2)$).

VI.4. Oscilador Armónico con Frecuencia Variable.

En este caso, el Hamiltoniano está dado por la Ec.(VI.2.4c). Las ecuaciones que determinan la evolución de los valores de expectación y de los multiplicadores de Lagrange son similares a las Ecs.(VI.3.2a-e) y (VI.3.3a-e), respectivamente, donde ω_0 debería ser reemplazado por $\omega(t)$. Entonces, las soluciones de estas ecuaciones dependerán de la forma funcional particular de $\omega(t)$. De cualquier forma, a partir de las Ecs.(VI.2.12c-d), se puede encontrar que $\hat{\Delta q}$ y $\hat{\Delta p}$ están dadas por

$$(\hat{\Delta q})^2 = \gamma_1^2 \left(1 + \frac{4 \gamma_2^2}{\hbar \omega(t)} \lambda'_{p2} \right) \left(1 + \frac{\exp (-\beta \hbar \omega(t) / 2)}{\sinh (\beta \hbar \omega(t) / 2)} \right) \quad (\text{VI.4.1a})$$

$$(\hat{\Delta p})^2 = \gamma_2^2 \left(1 + \frac{4 \gamma_1^2}{\hbar \omega(t)} \lambda'_{q2} \right) \left(1 + \frac{\exp (-\beta \hbar \omega(t) / 2)}{\sinh (\beta \hbar \omega(t) / 2)} \right). \quad (\text{VI.4.1b})$$

Nótese que estos resultados fueron obtenidos usando la

transformación dada en la Ec.(VI.2.5), siendo innecesario resolver explícitamente las Ecs.(VI.2.12c-d). El producto de indeterminación $\hat{\Delta q} \hat{\Delta p}$ está dado por la Ec.(VI.2.14). Usando las Ecs.(VI.2.10c-e), se pueden reescribir las Ecs.(VI.4.1a-b) y (VI.2.14) en términos de r , θ y φ , los cuales, en este caso, debido a que se está considerando un OA con frecuencia variable, resultarán dependientes del tiempo. Por lo tanto, se obtiene

$$(\hat{\Delta q})^2 = \frac{\hbar}{2m\omega(t)} (|\cosh 2r| - |\sinh 2r| \cos(\theta + \varphi)) \coth(\beta \hbar \omega(t)/2), \quad (\text{VI.4.2a})$$

$$(\hat{\Delta p})^2 = \frac{\hbar m \omega(t)}{2} (|\cosh 2r| + |\sinh 2r| \cos(\theta + \varphi)) \coth(\beta \hbar \omega(t)/2), \quad (\text{VI.4.2b})$$

$$\hat{\Delta q} \hat{\Delta p} = \frac{\hbar}{2} (1 + (|\sinh 2r| \sin(\theta + \varphi))^2)^{1/2} \coth(\beta \hbar \omega(t)/2), \quad (\text{VI.4.2c})$$

donde se han usado las Ecs.(VI.2.4d-e) y (VI.3.18). Nuevamente, si se quiere obtener explícitamente la dependencia funcional con el tiempo de las Ecs.(VI.4.2), se necesita conocer la elección particular de $\omega(t)$. A esta altura, se considera importante comparar estos últimos resultados con aquéllos obtenidos en la Ref.(13). Además de la diferencia introducida por el "factor termodinámico" $\coth(\beta \hbar \omega(t)/2)$, lo que refleja el nuevo punto de vista termodinámico desarrollado a partir del enfoque de TI, se desea hacer notar otra diferencia importante con respecto a los resultados que figuran en la literatura previa: En las Ecs.(VI.4.2a-b) el factor de frecuencia que aparece es $\omega(t)$ y no $\omega(0)$.

Se considerará ahora un caso especial en el cual el comportamiento temporal de las Ecs.(VI.4.2) se puede obtener sin resolver explícitamente las Ecs.(VI.3.2a-e) y (VI.3.3a-e) (donde,

como se dijo antes, debería reemplazarse ω_0 por $\omega(t)$, que ya ha sido examinado en la Ref (13): un salto repentino de la frecuencia a un tiempo particular t_0 , dado por

$$\omega(t) = \begin{cases} \omega & 0 \leq t \leq t_0 \\ \omega' & t > t_0 \end{cases} \quad (\text{VI.4.3})$$

Para poder comparar con lo expuesto en dicha referencia, se considerará que el sistema se encuentra en un estado coherente antes de que ocurra el salto en la frecuencia. Esto significa que $r = 0$ (ver Sección VI.2). Por lo tanto, las Ecs.(VI.4.2), para $t \leq t_0$, resultan

$$(\Delta \hat{q})^2 = \frac{\hbar}{2m\omega} \coth (\beta \hbar \omega / 2), \quad (\text{VI.4.4a})$$

$$(\Delta \hat{p})^2 = \frac{\hbar m \omega}{2} \coth (\beta \hbar \omega / 2), \quad (\text{VI.4.4b})$$

$$\Delta \hat{q} \Delta \hat{p} = \frac{\hbar}{2} \coth (\beta \hbar \omega / 2). \quad (\text{VI.4.4c})$$

La entropía S , de acuerdo con las Ecs.(II.2.3) y (VI.2.9), está dada por

$$S = - \ln [2 \sinh (\beta \hbar \omega / 2)] + \frac{\beta \hbar \omega}{2} \left(1 + \frac{\exp (-\beta \hbar \omega / 2)}{\sinh (\beta \hbar \omega / 2)} \right) \quad (\text{VI.4.5})$$

Como las Ecs.(VI.4.2) son las expresiones más generales para cualquier comportamiento de $\omega(t)$, se escribe para $t > t_0$,

$$(\Delta \hat{q})^2 = \frac{\hbar}{2m\omega'} (|\cosh 2r'| - |\sinh 2r'| \cos (2\omega' (t-t_0) - \theta_0 - \varphi_0)) \coth (\beta' \hbar \omega' / 2), \quad (\text{VI.4.6a})$$

$$(\hat{\Delta p})^2 = \frac{\hbar m \omega'}{2} (|\cosh 2r'| + |\sinh 2r'| \cos(2\omega'(t-t_0) - \theta_0 - \varphi_0)) \coth(\beta' \hbar \omega'/2),$$

(VI.4.6b)

$$\hat{\Delta q} \hat{\Delta p} = \frac{\hbar}{2} (1 + (|\sinh 2r'| \sin(2\omega'(t-t_0) - \theta_0 - \varphi_0))^2)^{1/2} \coth(\beta' \hbar \omega'/2).$$

(VI.4.6c)

$$S = -\ln [2 \sinh(\beta' \hbar \omega'/2)] + \frac{\beta' \hbar \omega'}{2} \coth(\beta' \hbar \omega'/2) \quad \text{(VI.4.7)}$$

donde se han usado las Ecs.(VI.3.12) (ya que para $t > t_0$ el sistema se convierte en un OA con frecuencia constante ω'). Las constantes r' , $(\theta_0 + \varphi_0)$ y β' deben ser determinadas a partir de condiciones de continuidad en $(\hat{\Delta q})^2$, $(\hat{\Delta p})^2$, $\hat{\Delta q} \hat{\Delta p}$ y S . Igualando las Ecs.(VI.4.5) y (VI.4.7) a $t=t_0$, se obtiene

$$\beta \omega = \beta' \omega', \quad \text{o} \quad \beta' = \beta \omega / \omega'. \quad \text{(VI.4.8)}$$

Usando las Ecs.(VI.4.4c) y (VI.4.6c) a $t=t_0$, se obtiene

$$1 = (1 + (|\sinh 2r'| \sin(\theta_0 + \varphi_0))^2)^{1/2}, \quad \text{(VI.4.9a)}$$

lo que implica

$$\theta_0 + \varphi_0 = 0, \pi. \quad \text{(VI.4.9b)}$$

Finalmente, las dispersiones de \hat{q} y \hat{p} serán

$$(\hat{\Delta q})^2 = \frac{\hbar}{2m\omega'} (|\cosh 2r'| - |\sinh 2r'| \cos(\theta_0 + \varphi_0)) \coth(\beta' \hbar \omega'/2),$$

(VI.4.10a)

$$(\Delta \hat{p})^2 = \frac{\hbar m \omega'}{2} (|\cosh 2r'| + |\sinh 2r'| \cos(\theta_0 + \varphi_0)) \coth(\beta' \hbar \omega' / 2). \quad (\text{VI.4.10b})$$

Igualando la Ec.(VI.4.4a) a (VI.4.10a) (o equivalentemente la Ec.(VI.4.4b) a (VI.4.10b)), se obtiene

$$\frac{\omega'}{\omega} = (|\cosh 2r'| \mp |\sinh 2r'|), \quad (\text{VI.4.11})$$

donde los signos menos y más corresponden a $\theta_0 + \varphi_0 = 0$ y $\theta_0 + \varphi_0 = \pi$, respectivamente. Los signos menos y más estarán determinados por la condición $\omega > \omega'$ ó $\omega < \omega'$, respectivamente, de manera tal que se verifica la Ec.(VI.4.11).

Si $\omega > \omega'$ ($\theta_0 + \varphi_0 = 0$), a $t=t_0$ el sistema será llevado a squeezing en \hat{q} (c.f. factor de squeezing $s < 1$ (ver Ec.(VI.3.15b) y Ref.(10)), de acuerdo con la Ec.(VI.4.10a), cuando

$$\frac{\omega'}{\omega} < \tanh(\beta \hbar \omega / 2). \quad (\text{VI.4.12})$$

Por lo tanto, cuando la Ec.(VI.4.12) se reduce al caso $T=0$, se puede ver que cualquier salto de la frecuencia conducirá a squeezing en \hat{q} .

Por el contrario, si $\omega < \omega'$ ($\theta_0 + \varphi_0 = \pi$), a $t=t_0$ el sistema será llevado a squeezing en \hat{p} (c.f. factor de squeezing $s > 1$ (ver Ec.(VI.3.15a) y Ref.(10)), de acuerdo con la Ec.(VI.4.10b), cuando

$$\frac{\omega}{\omega'} < \tanh(\beta \hbar \omega / 2). \quad (\text{VI.4.13})$$

Por lo tanto, cuando la Ec.(VI.4.13) se reduce al caso $T=0$, se puede ver que cualquier salto de la frecuencia conducirá a squeezing en \hat{p} .

En ambos casos, para $t > t_0$, el sistema evolucionará de la misma manera que fue mostrada en la Sec. VI.3, ya que ω' permanece sin cambios. de la Ec.(VI.4.11), se puede ver que r se escribe como

$$r' = \frac{1}{2} \ln (\omega'/\omega) \quad (\text{VI.4.14})$$

Estos resultados coinciden con aquéllos presentados en la Ref.(14), y la diferencia yace en el hecho de que estos se obtienen como una consecuencia de considerar sólo el conjunto adecuado de operadores relevantes par poder definir el operador densidad del sistema.

Se pueden ver todos estos resultados gráficamente en la Fig.1. A $t < t_0$, el sistema se encuentra en el origen de coordenadas, ya que inicialmente está en un estado coherente ($r=0$). A $t=t_0$, la frecuencia salta de ω a ω' y el sistema irá al punto d ($\omega' > \omega$) ó e ($\omega' < \omega$) en la Fig.1. Para $t > t_0$, el sistema evolucionará a lo largo de la recta c en la Fig.1. Nótese que a $t=t_0$, se produce en la Fig.1 un cambio de escala porque γ_1^2 , γ_2^2 , λ'_{q2} y λ'_{p2} cambian con el salto en la frecuencia. Como se dijo antes, los puntos d y e corresponderán a estados squeezed dependiendo de cuál de las condiciones impuestas por las Ecs.(VI.4.12-13) se cumpla, respectivamente.

Finalmente, y con el objeto de analizar completamente el cambio en la evolución del sistema debido al salto de la frecuencia, se evalúa el valor de expectación de la energía. Se obtiene (ver Ecs.(VI.2.12c-d))

$$\begin{aligned} \langle \hat{H} \rangle = & \frac{m \omega^2(t)}{2} \langle \hat{q} \rangle^2 + \frac{1}{2m} \langle \hat{p} \rangle^2 \\ & + \frac{\hbar \omega(t)}{2} \left(1 + \frac{\lambda_{q2} / (m \omega(t)) + \lambda_{p2} m \omega(t)}{2 \beta \omega(t)} \right) \coth(\beta \hbar \omega(t)/2) \end{aligned}$$

$$(\text{VI.4.15})$$

Debido a que se sabe que $\langle \hat{q} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$, $(\beta\omega)$, λ_{q^2} y λ_{p^2} no cambian durante el salto de la frecuencia, es fácil ver de la Ec.(VI.4.15) que la única variable extensiva (ver Ref.(3)) que puede variar es $\langle \hat{H} \rangle$. Es interesante notar que la variable intensiva asociada con $\langle \hat{H} \rangle$, i.e. β , también cambia (ver Ec.(VI.4.8)). Por lo tanto, la energía cambiará durante el salto (debido a que el sistema está energéticamente abierto), pero la entropía S permanecerá constante, ya que el sistema es informacionalmente cerrado (debido a que la información de cuándo y cómo cambia la frecuencia se sabe exactamente).

Se desea terminar esta sección resumiendo los resultados obtenidos hasta ahora en este Capítulo. En principio, se analiza la aparición de estados squeezed para el OA con ya sea frecuencia constante como frecuencia dependiente del tiempo, usando el formalismo de TI. En ambos casos se evalúa el operador densidad (Ec.(VI.2.7-9) asociado con la dinámica del OA. El operador Hamiltoniano es incluido como un operador relevante, teniendo en cuenta que su inclusión no modifica la evolución temporal del sistema. En cambio, este procedimiento permite introducir el multiplicador de Lagrange asociado $\beta=1/T$, lo que a su vez permite una descripción termodinámico cuántica. Si no se incluye al Hamiltoniano como operador relevante en la definición de $\hat{\rho}$ (Ec.(VI.2.7)), no se dispondría de la diagonalización requerida. Más aun, se puede ver fácilmente que para el caso $r = 0$, la exclusión del Hamiltoniano en $\hat{\rho}$ conduce a una matriz densidad no normalizable (ver Ref.(4)). Este enfoque, alternativo de los diferentes enfoques utilizados en la literatura previa para estudiar este problema (Refs.(6)-(14)) permite no sólo considerar la situación para temperatura cero, sino también lo que se dio en llamar el caso termodinámico (Ref.(3)), i.e. $T > 0$. Como se ha dicho en la Sección

VI.1, esta temperatura positiva es la que permite el carácter de mezcla estadística del operador densidad. Si se sigue a Louisell (Ref. (15)), esta descripción de estado no puro podría ser asociada a la presencia de la señal más ruido, con entropía positiva.

Es importante destacar que como consecuencia del procedimiento de diagonalización desarrollado a través de la Ec. (VI.2.5) se imponen algunas restricciones sobre los multiplicadores de Lagrange, i.e.

$$\hbar \omega(t) \left(\frac{\lambda'_{q^2}}{\gamma_1^2} + \frac{\lambda'_{p^2}}{\gamma_2^2} \right) + 4 \lambda'_{q^2} \lambda'_{p^2} \geq 0$$

Se puede ver fácilmente a partir de las Ecs. (VI.2.12) y (VI.2.14) que aquéllas restricciones representan, en el espacio de valores de expectación,

$$\Delta \hat{q} \geq 0, \quad \Delta \hat{p} \geq 0, \quad \Delta \hat{q} \Delta \hat{p} \geq \frac{\hbar}{2}$$

y están impuestas por el carácter estadístico cuántico del sistema. Por lo tanto, las Ecs. (VI.2.12) son los valores de expectación más generales que se pueden obtener teniendo en cuenta el conocimiento de $\{\hat{I}, \hat{q}, \hat{p}, \hat{q}^2, \hat{p}^2, \hat{I}, \hat{H}\}$. Como fue mostrado en la Sección VI.3, si $T = 0$, se puede ver que el operador densidad (VI.2.7) con los multiplicadores de Lagrange definidos por las Ecs. (VI.2.10), lo que refleja el conocimiento respecto de los operadores relevantes con los que se está trabajando, permite describir el mismo comportamiento dinámico de los valores de expectación de los operadores relevantes que el que se podría obtener aplicando el operador desplazamiento \hat{D} , introducido por Glauber¹⁷, si $r=0$, o el

¹⁷ C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, Quantum Mechanics (Wiley, New York,

operador de squeezing \hat{S} , si $\gamma=0$. Nótese que la existencia de sólo dos subálgebras finitas (H_4 y $SU(1,1)$) para el OA está relacionado con las dificultades en la convergencia¹⁸ de $\hat{U}_k = \exp[z_k(\hat{a}^+)^k - (\hat{q})^k z_k^*(\hat{a})^k]$, para $k > 2$ ($\hat{U}_1 = \hat{D}$, $\hat{U}_2 = \hat{S}$).

Finalmente, se quiere destacar el hecho de que se está usando el concepto de temperatura para sistemas termodinámico cuánticos dentro del formalismo de TI, lo que desarrollado en la Ref.(3). Como se mostró en la Sección VI.3.A, esta definición de temperatura, para el caso particular de estados coherentes, provee los mismos resultados que aquéllos dados por Louisell en la Ref.(15), pp. 264-266.

Resumiendo, para un OA con frecuencia constante se puede concluir que: (a) si la única información disponible, a $t=0$, está relacionada con $\langle \hat{q} \rangle$ y $\langle \hat{p} \rangle$ a $T=0$, la TI determina que el operador densidad del sistema será aquél que corresponda a estados coherentes (ver Ec.(VI.3.9)), (b) si el conocimiento sobre el sistema está relacionado con $\langle \hat{q} \rangle$ y $\langle \hat{p} \rangle$ pero $T>0$, la evolución de los valores de expectación de la posición y el momento será aquélla de los estados coherentes pero no de dispersión mínima (ver Ecs.(VI.3.8)), y (c) si, por otro lado, se tiene conocimiento, a $t=0$, de $\langle \hat{q}^2 \rangle$, $\langle \hat{p}^2 \rangle$ y $\langle \hat{l} \rangle$, y resulta que estos valores de expectación son diferentes de aquéllos que surgirían como resultado de evaluarlos usando el operador densidad para las condiciones (a) ó (b) arriba, entonces, siempre se obtienen estados squeezed pero en dos situaciones distintas: si $T = 0$, para cualquier condición inicial intrínsecamente compatible (Ref.(5)); si $T > 0$, cuando las condiciones iniciales satisfacen la Ec.(VI.3.20). Ambos casos se muestran en la Fig.1.

1977), Vol.1.

¹⁸ Robert A. Fisher, Michael Martin Nieto, and Vernon D. Sandberg, Phys. Rev. D 29, 1107 (1984).

Para el OA con frecuencia variable, las dispersiones de \hat{q} y \hat{p} están dadas en las Ecs.(VI.4.1). Como puede verse, el presente enfoque permite dar las dispersiones para cualquier $\omega(t)$ (ver Sección VI.2). Sin embargo, la aparición de squeezing dependerá en forma crucial de la explícita dependencia funcional con el tiempo de $\omega(t)$. En esta Sección se hace un detallado análisis para el caso particular de un salto repentino en la frecuencia a un tiempo particular t_0 (ver Refs.(11)-(14)). Para este caso particular, no era necesario resolver las ecuaciones dinámicas, debido al hecho de que antes y después del salto la evolución temporal de los valores de expectación será aquella dada en la Sección VI.3 (caso $\omega=\omega_0$). Entonces, para llegar al resultado presente, se fijaron condiciones de continuidad en $\Delta\hat{q}$, $\Delta\hat{p}$, $\Delta\hat{q}\Delta\hat{p}$ y la entropía S para $t=t_0$ (ver Ecs.(VI.4.8-9)). Como consecuencia de esto, *para $T = 0$ cualquier cambio en la frecuencia, independientemente de la forma en que se realice (repentina o adiabáticamente), necesariamente generará squeezing* (ver Ecs.(VI.4.12-13)). La transformación dada en la Ref.(13) resulta la misma que la obtenida en la Ec.(VI.4.14) de una manera más simple y más general. Más aun, es posible en este marco analizar directamente los dos casos de salto repentino $\omega'>\omega$ y $\omega'<\omega$, concluyéndose que el primero conduce a squeezing inicial en \hat{p} mientras que el segundo a squeezing inicial en \hat{q} . Para $T > 0$, el sistema será llevado a squeezing en el caso en que se verifique la Ec.(VI.4.12) o la Ec.(VI.4.13). De cualquier forma, debe notarse que la temperatura del sistema (si ésta es distinta de cero) y su energía deben cambiar cuando ocurre el salto en la frecuencia, de acuerdo con las Ecs.(VI.4.8) y (VI.4.15). Se considera importante enfatizar el hecho de que estos resultados, en lo que concierne a estados coherentes y squeezed para cualquier temperatura, pueden considerarse como directas propiedades de la dinámica hamiltoniana.

Por lo tanto, el squeezing aparece claramente como una consecuencia física del Hamiltoniano y de las condiciones iniciales del sistema.

Finalmente, como fue dicho en las Refs.(1), (3), y (14), un OA desplazado se puede escribir usando el factor γ en la Ec.(VI.2.5) con $r=0$. Entonces, es obvio que un OA desplazado no producirá squeezing.

VI.5. Operador densidad, estados coherentes y estados squeezed para el Oscilador Armónico Generalizado.

En esta Sección se estudiará la aparición de squeezing en el Hamiltoniano del llamado Oscilador Armónico Generalizado, que como se verá resulta isomorfo al Hamiltoniano de Kanai-Caldirola¹⁹ y a otros como el Hamiltoniano de dos fotones.^{20,21} Se intenta unificar el estudio de estos sistemas aprovechando el hecho de que están mutuamente relacionados a través de transformaciones canónicas. El Hamiltoniano de Kanai-Caldirola está dado por^{22,23}

$$\hat{H} = \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) = \frac{\hat{p}^2}{2 m_0} e^{-2\alpha t} + \frac{1}{2} m_0 e^{2\alpha t} \omega_0^2 \hat{q}^2 . \quad (\text{VI.5.1})$$

Nótese que la aparición de estados coherentes para este Hamiltoniano fue estudiada en la Ref.(19).

Se puede ver que^{24,25,26} mediante la transformación canónica para

¹⁹ Christopher C. Gerry, Philip K. Ma and Edward R. Vrscaj, Phys. Rev. A **39**, 668 (1989); K.H. Yeon, C.I. Um and Thomas F. George, Phys. Rev. A **36**, 5287 (1987).

²⁰ G. Dattoli, C. Centioli and A. Torre, Il Nuovo Cimento **101 B**, 557 (1988).

²¹ L.C. Papaloucas, Il Nuovo Cimento **102 B**, 315 (1988); A. Jannussis and V. Bartzis, Il Nuovo Cimento **102 B**, 33 (1988).

²² R. W. Hasse, Rep. Prog. Phys. **41**, 1027 (1978).

²³ E. Kanai, Prog. Theor. Phys. **3**, 440 (1948).

²⁴ G. Crespo, D. Otero, A. Plastino and A.N. Proto, Phys. Rev. **A42**, 3608 (1990); E. H. Kerner, Can. J. Phys. **36**, 371 (1958).

los observables \hat{q} y \hat{p}

$$\hat{Q} = \exp(\alpha t) \hat{q} \quad (\text{VI.5.2a})$$

$$\hat{P} = \exp(-\alpha t) \hat{p} , \quad (\text{VI.5.2b})$$

la cual se obtiene a partir de la siguiente función generatriz (ver, por ejemplo, la Ref.(26))

$$F_2 (\hat{q}, \hat{P}, t) = \exp(\alpha t) \frac{(\hat{P} \hat{q} + \hat{q} \hat{P})}{2}, \quad (\text{VI.5.2c})$$

se obtiene el Hamiltoniano transformado

$$\hat{H}_1 = \hat{H}_1(\hat{Q}, \hat{P}, t) = \frac{\hat{P}^2}{2 m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 \hat{Q}^2 + \alpha \frac{1}{2} (\hat{P} \hat{Q} + \hat{Q} \hat{P}) \quad (\text{VI.5.3})$$

en el cual se ha usado la regla de simetrización para el producto $\hat{P} \hat{Q}$. Este Hamiltoniano corresponde al oscilador armónico más un término proporcional a $\hat{L} = (1/2) (\hat{Q} \hat{P} + \hat{P} \hat{Q})$, y se lo llamará oscilador armónico generalizado, ya que se lo construye usando los tres operadores que intervienen en $SU(1,1)$ (uno de los grupos asociados con el oscilador armónico: $\{\hat{Q}^2, \hat{P}^2, \hat{L}\}$). Este Hamiltoniano fue considerado en la Ref.(21). Los operadores de posición y momento y el Hamiltoniano (Ec.(VI.5.3)) pueden ser reescritos en términos de los operadores de creación y destrucción usuales, de acuerdo con

$$\hat{Q} = \gamma_1 (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) , \quad (\text{VI.5.4a})$$

²⁵ M. Sebawe Abdalla, Phys. Rev. A 33, 2870 (1986).

²⁶ E.N.M. Borges, O.N. Borges and L.A. Amarante Ribeiro, Can. J. Phys. 63, 600 (1985).

$$\hat{P} = i \gamma_2 (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) , \quad (\text{VI.5.4b})$$

$$\hat{H}_1 (\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \hbar \omega_0 (\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2}) + i \frac{\alpha \hbar}{2} (\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2) , \quad (\text{VI.5.4c})$$

con

$$\gamma_1^2 = \frac{\hbar}{2 m_0 \omega_0} , \quad (\text{VI.5.5a})$$

$$\gamma_2^2 = \frac{\hbar m_0 \omega_0}{2} . \quad (\text{VI.5.5b})$$

El Hamiltoniano dado en la Ec.(VI.5.4c) fue considerado en la Ref.(20).

Finalmente, es posible redefinir los operadores de creación y destrucción usando la siguiente transformación (Refs.(24) y (25))

$$\begin{aligned} \hat{A} &= (2 m_0 \hbar \Omega)^{-1/2} [m_0 (\Omega + i \alpha) \hat{Q} + i \hat{P}] \\ &= (2 m_0 \hbar \Omega)^{-1/2} \frac{(\Omega + i \alpha)}{\omega_0} [m_0 \Omega \hat{R} + i \hat{\Pi}] , \end{aligned} \quad (\text{VI.5.6a})$$

$$\begin{aligned} \hat{A}^\dagger &= (2 m_0 \hbar \Omega)^{-1/2} [m_0 (\Omega - i \alpha) \hat{Q} - i \hat{P}] \\ &= (2 m_0 \hbar \Omega)^{-1/2} \frac{(\Omega - i \alpha)}{\omega_0} [m_0 \Omega \hat{R} - i \hat{\Pi}] , \end{aligned} \quad (\text{VI.5.6b})$$

y el Hamiltoniano (Ec.(VI.5.3)) se convierte en

$$\hat{H}_1 (\hat{A}, \hat{A}^\dagger) = \hbar \Omega (\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2})$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\hat{\Pi}^2}{m_0} + \frac{1}{2} m_0 \Omega^2 \hat{R}^2, \quad (\text{VI.5.6c})$$

con

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2. \quad (\text{VI.5.6d})$$

Los operadores \hat{R} y $\hat{\Pi}$ están dados por

$$\hat{R} = \frac{\alpha}{m_0 \omega_0 \Omega} \hat{P} + \frac{\omega_0}{\Omega} \hat{Q} \quad (\text{VI.5.7a})$$

$$\hat{\Pi} = \frac{\Omega}{\omega_0} \hat{P}, \quad (\text{VI.5.7b})$$

a partir de la función generatriz

$$F_2(\hat{Q}, \hat{\Pi}) = \frac{\alpha}{2 m_0 \Omega^2} \hat{\Pi}^2 + \frac{\omega_0}{\Omega} \left(\frac{\hat{Q} \hat{\Pi} + \hat{\Pi} \hat{Q}}{2} \right). \quad (\text{VI.5.7c})$$

Nótese que el Hamiltoniano dado por la Ec.(VI.5.6c) es el usado en la Ref.(21) para analizar la aparición de estados coherentes con frecuencia compleja.

En lo que sigue se aplicará el formalismo del PME para estudiar el squeezing para los Hamiltonianos \hat{H} , dado por la Ec.(VI.5.1), y \hat{H}_1 , dado en términos de operadores diferentes por las Ecs.(VI.5.3), (VI.5.4c) y (VI.5.6c), teniendo en cuenta el hecho de que están conectados *simplemente* por transformaciones canónicas (Ecs.(VI.5.2) y (VI.5.7)), y que han sido tratados separadamente en las Refs.(19), (20), y (21), respectivamente.

Ahora, para estudiar la aparición de estados coherentes y estados squeezed, se comenzará analizando el Hamiltoniano dado por la Ec.(VI.5.3), i.e. el oscilador armónico generalizado,

$$\hat{H}_1 = \frac{\hat{P}^2}{2} + \frac{1}{2} \omega_0^2 \hat{Q}^2 + \alpha \hat{L} , \quad (\text{VI.5.8})$$

donde se tomó por simplicidad m_0 igual a uno. Como ya fue dicho antes, el conjunto de operadores relevantes que se necesitan para obtener estados coherentes para el oscilador armónico es el grupo de Heisenberg (i.e. $\{\hat{Q}, \hat{P}\}$). Para el oscilador armónico generalizado estos operadores también cierran un semiálgebra bajo conmutación con \hat{H}_1 arrojando

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} -\alpha & \omega_0^2 \\ -1 & \alpha \end{pmatrix} . \quad (\text{VI.5.9})$$

Por lo tanto, la evolución temporal de $\langle \hat{Q} \rangle$ y $\langle \hat{P} \rangle$ está dada por

$$\frac{d \langle \hat{Q} \rangle}{d t} = \alpha \langle \hat{Q} \rangle + \langle \hat{P} \rangle , \quad (\text{VI.5.10a})$$

$$\frac{d \langle \hat{P} \rangle}{d t} = -\omega_0^2 \langle \hat{Q} \rangle - \alpha \langle \hat{P} \rangle , \quad (\text{VI.5.10b})$$

mientras que las ecuaciones para la evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange resultan

$$\frac{d \lambda_Q}{d t} = -\alpha \lambda_Q + \omega_0^2 \lambda_P , \quad (\text{VI.5.11a})$$

$$\frac{d \lambda_P}{d t} = -\lambda_Q + \alpha \lambda_P . \quad (\text{VI.5.11b})$$

En Secciones anteriores se demostró que los operadores relevantes necesarios para obtener estados squeezed para el oscilador armónico son aquéllos isomorfos a $SU(1,1)$ (i.e. $\{\hat{P}^2, \hat{Q}^2, \hat{L}\}$). Para el

oscilador armónico generalizado estos operadores cierran un álgebra de Lie parcial, con la matriz \underline{G} dada por

$$\underline{G} = \begin{pmatrix} -2\alpha & 0 & \omega_0^2 \\ 0 & 2\alpha & -1 \\ -2 & 2\omega_0^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VI.5.12})$$

Por lo tanto, la evolución temporal de $\langle \hat{P}^2 \rangle$, $\langle \hat{Q}^2 \rangle$, y $\langle \hat{L} \rangle$ está dada por

$$\frac{d\langle \hat{Q}^2 \rangle}{dt} = 2\alpha \langle \hat{Q}^2 \rangle + 2\langle \hat{L} \rangle, \quad (\text{VI.5.13a})$$

$$\frac{d\langle \hat{P}^2 \rangle}{dt} = -2\alpha \langle \hat{P}^2 \rangle - 2\omega_0^2 \langle \hat{L} \rangle, \quad (\text{VI.5.13b})$$

$$\frac{d\langle \hat{L} \rangle}{dt} = -\omega_0^2 \langle \hat{Q}^2 \rangle + \langle \hat{P}^2 \rangle, \quad (\text{VI.5.13c})$$

mientras que la evolución de los multiplicadores de Lagrange asociados con estos operadores está dada por

$$\frac{d\lambda_{Q^2}}{dt} = -2\alpha \lambda_{Q^2} + \omega_0^2 \lambda_L, \quad (\text{VI.5.14a})$$

$$\frac{d\lambda_{P^2}}{dt} = 2\alpha \lambda_{P^2} - \lambda_L, \quad (\text{VI.5.14b})$$

$$\frac{d\lambda_L}{dt} = -2\lambda_{Q^2} + 2\alpha \lambda_{P^2}. \quad (\text{VI.5.14c})$$

Integrando las Ecs. (VI.5.10-11) se obtiene

$$\langle \hat{Q} \rangle = \langle \hat{Q} \rangle_0 \cos(\Omega t) + \frac{1}{\Omega} (\langle \hat{P} \rangle_0 + \alpha \langle \hat{Q} \rangle_0) \sin(\Omega t), \quad (\text{VI.5.15a})$$

$$\langle \hat{P} \rangle = \langle \hat{P} \rangle_0 \cos (\Omega t) - \frac{1}{\Omega} (\alpha \langle \hat{P} \rangle_0 + \omega_0^2 \langle \hat{Q} \rangle_0) \sin (\Omega t), \quad (\text{VI.5.15b})$$

$$\lambda_Q = \lambda_{Q0} \cos (\Omega t) + \frac{1}{\Omega} (-\alpha \lambda_{Q0} + \omega_0^2 \lambda_{P0}) \sin (\Omega t), \quad (\text{VI.5.15c})$$

$$\lambda_P = \lambda_{P0} \cos (\Omega t) - \frac{1}{\Omega} (-\alpha \lambda_{P0} + \omega_0^2 \lambda_{Q0}) \sin (\Omega t). \quad (\text{VI.5.15d})$$

donde Ω está dado por la Ec. (VI.5.6d). Del mismo modo, usando las Ecs. (VI.5.13-14), es fácil obtener la evolución temporal de $\langle \hat{Q}^2 \rangle$, $\langle \hat{P}^2 \rangle$, y $\langle \hat{L} \rangle$.

VI.5.A. Diagonalización de la matriz $\hat{\rho}$.

Las relaciones entre las condiciones iniciales de los operadores relevantes y los valores iniciales de los multiplicadores de Lagrange no se pueden elegir arbitrariamente. El PME indica que esto se puede hacer usando la Ec. (II.1.6). El operador densidad para este problema está dado por

$$\hat{\rho} = \exp (-\lambda_0 \hat{1} - \lambda_Q \hat{Q} - \lambda_P \hat{P} - \lambda_{Q^2} \hat{Q}^2 - \lambda_{P^2} \hat{P}^2 - \lambda_L \hat{L}). \quad (\text{VI.5.16})$$

En términos de los operadores de creación y destrucción dados por las Ecs. (VI.5.6), se obtiene

$$\hat{Q} = (2 \Omega)^{-1/2} (\hat{A} + \hat{A}^\dagger), \quad (\text{VI.5.17a})$$

$$\hat{P} = -(\Omega/2)^{1/2} (u \hat{A} + u^* \hat{A}^\dagger), \quad (\text{VI.5.17b})$$

$$\hat{Q}^2 = \frac{\Omega}{2} [\hat{A}^2 + (\hat{A}\hat{A}^\dagger + \hat{A}^\dagger\hat{A}) + \hat{A}^{\dagger 2}], \quad (\text{VI.5.17c})$$

$$\hat{P}^2 = \frac{\Omega}{2} [u^2 \hat{A}^2 + |u|^2 (\hat{A}\hat{A}^\dagger + \hat{A}^\dagger\hat{A}) + u^{*2} \hat{A}^{\dagger 2}] , \quad (\text{VI.5.17d})$$

$$\hat{L} = -\frac{1}{2} [u \hat{A}^2 + \frac{u+u^*}{2} (\hat{A}\hat{A}^\dagger + \hat{A}^\dagger\hat{A}) + u^* \hat{A}^{\dagger 2}] , \quad (\text{VI.5.17e})$$

con

$$u = \frac{\alpha}{\Omega} + i , \quad (\text{VI.5.17f})$$

y donde se tomó \bar{n} igual a uno.

Como se está considerando un conjunto de operadores relevantes que no conmutan entre sí, es necesario diagonalizar el logaritmo de la matriz densidad, $\hat{\rho}$, antes de evaluar explícitamente los valores de expectación de los operadores relevantes vía la Ec.(II.1.6). Esta diagonalización se logra generalizando un método de operador número de "cuasifotones" (Ref.(9)). Se define un nuevo operador de creación

$$\hat{b}^\dagger = |\cosh r| e^{i\varphi} \hat{A}^\dagger + |\sinh r| e^{-i\theta} \hat{A} + |\gamma| e^{-i\psi} \quad (\text{VI.5.18})$$

con

$$[\hat{b} , \hat{b}^\dagger]_- = 1 . \quad (\text{VI.5.19})$$

Para poder lograr la requerida diagonalización, se debería incluir al Hamiltoniano como operador relevante. Por lo tanto, el operador densidad resulta

$$\hat{\rho} = \exp(-\lambda_0 \hat{I} - \lambda_Q \hat{Q} - \lambda_P \hat{P} - \lambda_{Q^2} \hat{Q}^2 - \lambda_{P^2} \hat{P}^2 - \lambda_L \hat{L} - \beta \hat{H}_1) \quad (\text{VI.5.20})$$

y usando las Ecs.(VI.5.17) se obtiene

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} = \exp & \left[-\lambda_0 \hat{1} - \left(\frac{\lambda_0}{(2\Omega)^{1/2}} - \lambda_P u^* (\Omega/2)^{1/2} \right) \hat{A}^\dagger \right. \\
& - \left(\frac{\lambda_0}{(2\Omega)^{1/2}} - \lambda_P u (\Omega/2)^{1/2} \right) \hat{A} \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_0^2}{\Omega} + \lambda_{P^2} \Omega u^{*2} - \lambda_L u^* \right) \hat{A}^{\dagger 2} \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_0^2}{\Omega} + \lambda_{P^2} \Omega u^2 - \lambda_L u \right) \hat{A}^2 \\
& - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_0^2}{\Omega} + \lambda_{P^2} \Omega |u|^2 - \frac{\lambda_L (u+u^*)}{2} \right) (\hat{A}^\dagger \hat{A} + \hat{A} \hat{A}^\dagger) \\
& \left. - \beta \Omega \left(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2} \right) \right]. \tag{VI.5.21}
\end{aligned}$$

Entonces, es fácil probar que la matriz densidad se puede escribir en términos de los nuevo operadores \hat{b}^\dagger y \hat{b} (usando la condición de normalización para $\hat{\rho}$) como

$$\begin{aligned}
\hat{\rho} &= \exp \left(-\lambda_0 \hat{1} - \beta \Omega \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right) + \beta \Omega |\gamma|^2 \right) \\
&= 2 \sinh (\beta \Omega / 2) \exp(-\beta \Omega / 2) \exp(-\beta \Omega \hat{b}^\dagger \hat{b}), \tag{VI.5.22}
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda_0}{(2\Omega)^{1/2}} + \lambda_P u (\Omega/2)^{1/2} &= \\
\beta \Omega |\gamma| \left\{ |\sinh r| e^{i(\psi-\theta)} + |\cosh r| e^{-i(\psi+\phi)} \right\}, \tag{VI.5.23a}
\end{aligned}$$

$$\frac{\lambda_0}{(2\Omega)^{1/2}} + \lambda_P u^* (\Omega/2)^{1/2} =$$

$$\beta \Omega |\gamma| \{ |\sinh r| e^{-i(\psi-\theta)} + |\cosh r| e^{i(\psi+\phi)} \}, \quad (\text{VI.5.23b})$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_0^2}{\Omega} + \lambda_{P^2} \Omega |u|^2 - \frac{\lambda_L (u+u^*)}{2} \right) = \beta \Omega (\sinh r)^2, \quad (\text{VI.5.23c})$$

$$\frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\lambda_0^2}{\Omega} + \lambda_{P^2} \Omega u^2 - \lambda_L u \right) = \beta \Omega |\sinh r| |\cosh r| \cos(\theta+\phi), \quad (\text{VI.5.23d})$$

$$\frac{1}{2} \text{Im} \left(\frac{\lambda_0^2}{\Omega} + \lambda_{P^2} \Omega u^2 - \lambda_L u \right) = -\beta \Omega |\sinh r| |\cosh r| \sin(\theta+\phi). \quad (\text{VI.5.23e})$$

Como fuera dicho antes, la inclusión del Hamiltoniano como operador relevante no modifica la evolución temporal del sistema, sino que la transforma en una evolución termodinámica, donde β es la inversa de la temperatura. Este enfoque, que resulta alternativo a los diferentes enfoques utilizados en la literatura previa para estudiar este problema, permite considerar tanto el caso de temperatura cero como el caso de temperatura positiva. Este último caso provee el carácter de mezcla estadística del operador densidad. Como fuera dicho en la Sección anterior, esta descripción de estado no puro podría asociarse a la presencia de una señal más ruido, con entropía positiva. Este carácter de mezcla estadística del operador densidad constituye en sí mismo una de las principales diferencias entre el enfoque utilizado en este trabajo y los enfoques previos en la literatura (i.e. solamente estados puros con entropía igual a cero).

El operador \hat{A}^\dagger (ver la Ec.(VI.5.18)), puede ser escrito en términos de \hat{b}^\dagger y \hat{b} como

$$\hat{A}^\dagger = |\cosh r| e^{-i\phi} \hat{b}^\dagger - |\sinh r| e^{-i\theta} \hat{b}$$

$$+ |\gamma| [|\sinh r| e^{-i(\theta-\psi)} - |\cosh r| e^{-i(\phi+\psi)}] \quad (\text{VI.5.24})$$

Usando las Ecs.(VI.5.17) y (VI.5.24) se pueden escribir los operadores relevantes en términos de los nuevos operadores \hat{b}^\dagger y \hat{b} , y usando el hecho de que la matriz densidad es diagonal en $\hat{b}^\dagger \hat{b}$ (ver la Ec.(VI.5.22)), se obtiene para sus valores de expectación, usando la Ec.(II.1.6),

$$\langle \hat{Q} \rangle = \frac{2 |\gamma|}{(2\Omega)^{1/2}} \{ |\sinh r| \cos(\theta-\psi) - |\cosh r| \cos(\psi+\phi) \} , \quad (\text{VI.5.25a})$$

$$\begin{aligned} \langle \hat{P} \rangle = 2(\Omega/2)^{1/2} |\gamma| [-|\sinh r| \left(\frac{\alpha}{\Omega} \cos(\theta-\psi) - \sin(\theta-\psi) \right) \\ + |\cosh r| \left(\frac{\alpha}{\Omega} \cos(\psi+\phi) - \sin(\psi+\phi) \right)] , \end{aligned} \quad (\text{VI.5.25b})$$

$$\langle \hat{Q}^2 \rangle = \frac{1}{2\Omega} (1 + 2 \lambda'_{p2}) \coth(\beta \Omega/2) + \langle \hat{Q} \rangle^2 , \quad (\text{VI.5.25c})$$

$$\langle \hat{P}^2 \rangle = \frac{\Omega}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\Omega^2} + \frac{2 \lambda'_{q2}}{\Omega^2} \right) \coth(\beta \Omega/2) + \langle \hat{P} \rangle^2 , \quad (\text{VI.5.25d})$$

donde se ha definido $\lambda'_k = \lambda_k/\beta$. Estas nuevas variables serán entonces las variables intensivas del "sistema termodinámico cuántico", en el que β es la inversa de la temperatura (Ref.(3)). Como se está considerando un oscilador armónico generalizado que es independiente del tiempo (ver la Ec.(VI.5.8)), β resulta también independiente del tiempo. Por lo tanto, los valores de expectación tienen una dependencia explícita de la temperatura dada por el factor $\coth(\beta \Omega / 2)$.

A partir de las Ecs. (VI.5.23c-e) se tiene que

$$(\lambda'_{L} + \alpha)^2 = \alpha^2 + 2 \lambda'_{Q2} + 2 \omega_0^2 \lambda'_{P2} + 4 \lambda'_{Q2} \lambda'_{P2} \geq 0, \quad (\text{VI.5.26a})$$

$$k \equiv 2 \Omega^2 (\sinh r)^2 = \lambda'_{Q2} + \lambda'_{P2} \omega_0^2 - \lambda'_{L} \alpha \geq 0. \quad (\text{VI.5.26b})$$

Las Ecs. (VI.5.25c-d) permiten evaluar el producto de las dispersiones de \hat{Q} y \hat{P} ,

$$\Delta \hat{Q} \Delta \hat{P} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\lambda'_{L} + \alpha)^2}{\Omega^2} \right)^{1/2} \coth (\beta \Omega / 2) \quad (\text{VI.5.27})$$

donde

$$\Delta^2 \hat{Q} = \frac{1}{2\Omega} (1 + 2 \lambda'_{P2}) \coth (\beta \Omega / 2), \quad (\text{VI.5.28a})$$

$$\Delta^2 \hat{P} = \frac{\Omega}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\Omega^2} + \frac{2 \lambda'_{Q2}}{\Omega^2} \right) \coth (\beta \Omega / 2) \quad (\text{VI.5.28b})$$

VI.5.B. Estudio de la aparición de estados coherentes y estados squeezed para el caso de temperatura cero.

La existencia de estados squeezed puede ser estudiado evaluando las dispersiones de \hat{Q} y \hat{P} . Primero, se analizará el caso de temperatura cero ($T = 1/\beta = 0$), lo que implica que el "factor termodinámico" $\coth (\beta \Omega / 2)$ es igual a uno. A partir de las Ecs. (VI.5.28), es fácil ver que ambas dispersiones están descriptas por las variables "intensivas" λ'_{Q2} , λ'_{P2} y β . Es importante notar que es mucho más fácil trabajar en el espacio de los multiplicadores de Lagrange que en su espacio "dual", i.e. el espacio de los valores de expectación de los operadores. Como se dijo antes, los valores de expectación de los operadores relevantes deben estar

interrelacionados. Esta interdependencia tiene su contrapartida en el espacio de los multiplicadores de Lagrange en las Ecs.(VI.5.26). Entonces, se necesita estudiar el comportamiento temporal de λ'_{Q2} , λ'_{P2} , λ'_{L} para analizar la posibilidad de obtener squeezing en \hat{Q} y \hat{P} . Usando las Ecs.(VI.5.23) se obtiene

$$\lambda'_{Q2} = \omega_0^2 [(\sinh r)^2 + |\cosh r| |\sinh r| \cos (\theta + \varphi - 2\zeta)] \quad (\text{VI.5.29a})$$

$$\lambda'_{P2} = (\sinh r)^2 - |\cosh r| |\sinh r| \cos (\theta + \varphi) \quad (\text{VI.5.29b})$$

$$\lambda'_{L} = 2 [\alpha (\sinh r)^2 + \omega_0 |\cosh r| |\sinh r| \cos (\theta + \varphi - \zeta)] \quad (\text{VI.5.29c})$$

con (usando la Ec.(VI.5.6d))

$$\sin \zeta = \frac{\alpha}{\omega_0} \quad \cos \zeta = \frac{\Omega}{\omega_0} . \quad (\text{VI.5.29d})$$

Se puede probar, a partir de las Ecs.(VI.5.14), que

$$k = \lambda'_{Q2} + \lambda'_{P2} \omega_0^2 - \lambda'_{L} \alpha \quad (\text{VI.5.30})$$

es un invariante de movimiento dependiente del tiempo. Es importante notar que, a partir de la Ec.(VI.5.26b), este invariante, que fue llamado k , siempre es positivo. Además, se puede concluir de esta ecuación que r es también un invariante. Por lo tanto, la dependencia temporal de λ'_{Q2} , λ'_{P2} , λ'_{L} está determinada solamente por la evolución temporal de $(\theta + \varphi)$. De las Ecs.(VI.5.14), se puede probar que

$$\theta + \varphi = \theta_0 + \varphi_0 - 2 \Omega t . \quad (\text{VI.5.31})$$

Entonces, las Ecs.(VI.5.29) y (VI.5.31) dan la evolución temporal de λ'_{Q^2} , λ'_{P^2} y λ'_L .

VI.5.B.1. *Comportamiento Squeezing.*

Con todos estos elementos, se puede empezar a examinar la aparición de squeezing. A partir de las Ecs.(VI.1.1) y (VI.1.2), se puede decir que el sistema tendrá squeezing en \hat{Q} ó \hat{P} cuando

$$\Delta^2_{\hat{Q}} < \frac{1}{2\Omega} \quad \text{ó} \quad \Delta^2_{\hat{P}} < \frac{\Omega}{2}, \quad (\text{VI.5.32})$$

respectivamente.

En el caso de temperatura cero, (que de hecho es el único que ha sido generalmente considerado en la literatura hasta ahora), las Ecs.(VI.5.32) resultan ser equivalentes respectivamente a

$$\lambda'_{P^2} < 0 \quad (\text{VI.5.33a})$$

$$\lambda'_{Q^2} < -\frac{\alpha^2}{2} \quad (\text{VI.5.33b})$$

Por lo tanto, las Ecs.(VI.5.33) representan las condiciones que deben ser satisfechas por los multiplicadores de Lagrange para obtener estados squeezed.

Es importante enfatizar el hecho de que este enfoque permite visualizar directamente las condiciones impuestas por el comportamiento mecánico cuántico del sistema sobre el espacio de los multiplicadores de Lagrange. Esta condición (ver la Ec.(VI.5.26a) representa una restricción en el plano $\{ 2 \lambda'_{Q^2} \equiv y, 2 \omega_0^2 \lambda'_{P^2} \equiv x \}$ tal como se indica en la Fig.2(a) y 2(b).

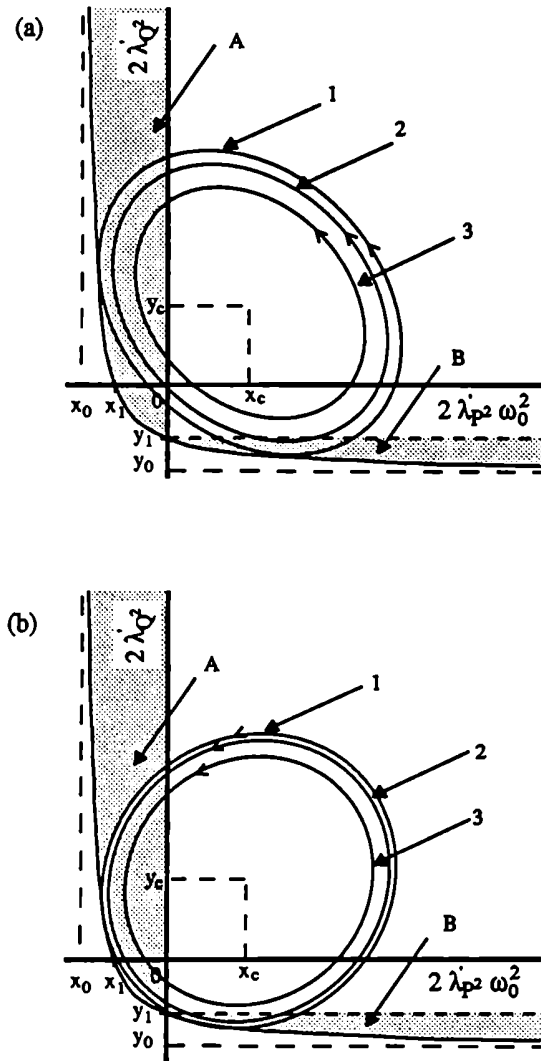


Fig.2. Espacio de los multiplicadores de Lagrange independientes λ'_{Q2} y λ'_{P2} . La zona gris, indicada con A (B), muestra la región donde se obtiene squeezing en \hat{Q} (\hat{P}). La evolución del sistema está representada por elipses recorridas en sentido antihorario. Está limitada por la hipérbola dada por la Ec.(VI.5.26a) (es decir, el principio de indeterminación). Las asíntotas de la hipérbola son $x_0 = y_0 = -\omega_0^2$, y las intersecciones de la hipérbola con los ejes x e y corresponden a

$x_1 = y_1 = -\alpha^2$. Se considera el caso $\omega_0^2 > 2\alpha^2$ en (a) y $\omega_0^2 < 2\alpha^2$ en (b) para los cuales el eje mayor de la elipse tiene pendiente -1 en (a) y 1 en (b). En cada gráfico se muestran tres elipses diferentes: Dos de ellas con squeezing en ambas coordenadas (elipses 1 y 2) y otra con squeezing solamente en \hat{Q} (elipse 3). La elipse indicada con 1 intersecta a la hipérbola dos veces, y por lo tanto esos puntos son de producto de indeterminación mínimo. Todas las elipses graficadas fueron elegidas con el mismo centro, determinado por $x_c = y_c = (k \omega_0^2 / \Omega)$.

Esta restricción está representada por la hipérbola (definida por la Ec.(VI.5.26a)),

$$\alpha^2 + x + y + x y / \omega_0^2 = 0, \quad (\text{VI.5.34})$$

la cual corresponde a la *condición de producto de indeterminación mínimo*. La hipérbola representa todas las posibles combinaciones entre λ'_{Q2} y λ'_{P2} que conducen al producto de indeterminación mínimo (i.e. $\lambda'_{L} = -\alpha$; ver la Ec.(VI.2.20)). Las asíntotas de la hipérbola están dadas por $x_0 = -\omega_0^2$ y $y_0 = -\omega_0^2$, y la intersección de la hipérbola con los ejes x e y corresponde a $x_1 = -\alpha^2$ y $y_1 = -\alpha^2$, respectivamente.

Por lo tanto, usando las Ecs.(VI.5.33) es fácil ver que la zona llamada A (ó B) en las Figs.2(a) y 2(b) corresponderá a squeezing en \hat{Q} (ó \hat{P}), respectivamente. La asimetría de las Ecs.(VI.5.33), la cual es reflejada en las Figs.2(a) y 2(b) por la asimetría entre las zonas A y B, se debe a la definición de \hat{Q} y \hat{P} en términos de \hat{A} y \hat{A}' (ver las Ecs.(VI.5.17)).

Hasta ahora, se ha determinado la localización gráfica del comportamiento de squeezing en las Figs.2(a) y 2(b). Sin embargo,

esta caracterización del squeezing (la cual, hasta ahora, no está incluyendo la evolución dinámica del sistema) no permite por sí sola examinar si el sistema evolucionará hacia un estado squeezed o no. Entonces, es pertinente analizar la evolución dinámica del sistema en el plano x-y de forma tal de examinar explícitamente la posibilidad de squeezing. Para poder lograr esto, se combinará el comportamiento dinámico del sistema reflejado por el invariante dado por la Ec.(VI.5.30), con sus propiedades mecánico cuánticas en lo referido a la relación del principio de indeterminación representado por la Ec.(VI.5.26a). Así, se obtiene

$$\left(\frac{\lambda'_{Q^2}}{\alpha} + \frac{\omega_0^2}{\alpha} \lambda'_{P^2} - \frac{k}{\alpha} + \alpha \right)^2 = \alpha^2 + 2 \lambda'_{Q^2} + 2 \omega_0^2 \lambda'_{P^2} + 4 \lambda'_{Q^2} \lambda'_{P^2}.$$

(VI.5.35)

En términos de x e y, la Ec.(VI.5.35) resulta

$$\frac{k^2}{\alpha^2} - 2k - \frac{k}{\alpha^2} y - \frac{k}{\alpha^2} x + \frac{1}{4\alpha^2} y^2 + \frac{1}{4\alpha^2} x^2 + \frac{\omega_0^2 - 2\alpha^2}{2\alpha^2\omega_0^2} xy = 0 \quad (\text{VI.5.36})$$

Con un poco de álgebra se puede probar que la Ec.(VI.5.36) representa, en general, una elipse cuyos ejes principales son rectas de pendientes 1 y -1 y con centro en $x_c = y_c = (k \omega_0^2 / \Omega)$, lo cual, de acuerdo con la Ec.(VI.5.26b), implica que su centro está siempre en el primer cuadrante.

Por lo tanto, para un dado conjunto de condiciones iniciales, ω_0 y α , la trayectoria de los multiplicadores de Lagrange, mostrada gráficamente en las Figs.2, recorre una elipse en sentido antihorario. Ahora, se deben estudiar dos casos diferentes:

a) $\omega_0^2 > 2 \alpha^2$. Entonces, el semieje mayor de la elipse es el de pendiente -1, con longitud $a^2 = 2 \omega_0^2 k (k + 2 \Omega^2) / \Omega^2$, mientras que el

tamaño del semieje menor, con pendiente 1, es $b^2 = (\alpha^2 a^2 / \Omega^2)$. Es importante notar que la distancia del centro de coordenadas al centro de la elipse, dada por $R = (2 k \omega_0^2 / \Omega)^{1/2}$, siempre es menor que a . Todas estas características están indicadas en la Fig.2(a), donde se muestran tres diferentes elipses, dos de ellas con squeezing en ambas coordenadas (elipses 1 y 2) y la otra con squeezing solamente en \hat{Q} (elipse 3). La elipse 1 intersecta a la hipérbola dos veces, y por lo tanto estos puntos son de producto de indeterminación mínimo.

b) $\omega_0^2 < 2 \alpha^2$. Entonces, el semieje mayor es aquél de pendiente 1, ya que b resulta mayor que a . Este caso se puede ver en la Fig.2(b), donde se muestran nuevamente tres elipses diferentes, dos de ellas con squeezing en ambas coordenadas (elipses 1 y 2) y la otra con squeezing sólo en \hat{Q} (elipse 3). La elipse 1 intersecta a la hipérbola dos veces, y por lo tanto esos puntos son de producto de indeterminación mínimo. Cuando $\omega_0^2 = 2 \alpha^2$, en particular, la Ec.(VI.5.36) representa una circunferencia.

Ahora se quiere analizar la posibilidad de obtener estados caracterizados por producto de indeterminación mínimo, i.e. $\Delta \hat{Q} \Delta \hat{P} = 1/2$. A partir de la Ec.(VI.5.27), es posible concluir que esto es equivalente a estudiar cuándo es que se cumple la igualdad $\lambda'_L = -\alpha$. De las Ecs.(VI.5.29c-d) y (VI.5.31), se puede probar que esto sólo es posible cuando

$$\alpha [2(\sinh r)^2 + 1] \leq \omega_0 \sinh 2r, \quad (\text{VI.5.37})$$

donde se ha usado explícitamente que $r \geq 0$, lo cual es evidente a través de la inversión de la Ec.(VI.5.26b),

$$r = \operatorname{arcsinh} \left(\frac{k}{2 \Omega^2} \right)^{1/2} \quad (\text{VI.5.38})$$

Sustituyendo la Ec. (VI.5.38) en la Ec. (VI.5.37) da

$$\left[\left(\frac{k}{2\Omega^2} \right)^{1/2} + \left(\frac{k}{2\Omega^2} + 1 \right)^{1/2} \right]^4 \geq \frac{\omega_0 + \alpha}{\omega_0 - \alpha} . \quad (\text{VI.5.39a})$$

Se puede verificar que el signo igual en la Ec. (VI.5.39) tiene lugar para

$$k = \Omega (\omega_0 - \Omega) , \quad (\text{VI.5.39b})$$

mientras que la desigualdad ocurre para

$$k > \Omega (\omega_0 - \Omega) . \quad (\text{VI.5.39c})$$

Es evidente que la condición

$$k < \Omega (\omega_0 - \Omega) \quad (\text{VI.5.39d})$$

significa que el sistema *no puede alcanzar nunca el producto de indeterminación mínimo en su evolución dinámica*. Se puede probar que $k = \Omega (\omega_0 - \Omega)$ corresponde a una raíz de multiplicidad cuatro de la ecuación de cuarto grado que resulta de la intersección de la hipérbola (Ec. (VI.5.34)) y la elipse (Ec. (VI.5.36)). Esto implica que la intersección tiene lugar en un solo punto, y usando argumentos de simetría, se puede concluir que esta intersección debe estar ubicada sobre la recta de pendiente 1. Análogamente, si $k > \Omega (\omega_0 - \Omega)$, se puede concluir que la intersección tiene lugar en dos puntos, cuyas posiciones sobre la hipérbola son equidistantes de la recta de pendiente 1.

Se acaba de determinar la trayectoria del sistema en el plano x-y y se ha estudiado cuáles son las condiciones iniciales que

corresponden al producto de indeterminación mínimo. Ahora, resulta pertinente analizar qué condiciones iniciales permiten obtener, para un dado tiempo a lo largo de la evolución dinámica, squeezing en \hat{Q} o \hat{P} . Por lo tanto, esto es equivalente a examinar bajo qué circunstancias se verifican las Ecs.(VI.5.33a-b), o, equivalentemente, para un dado Ω y α , cuáles son las condiciones iniciales sobre las variables intensivas para el sistema, si es que existen, para alcanzar squeezing. Comparando las Ecs.(VI.5.29b) y (VI.5.31) con la Ecs.(VI.5.33a), se puede concluir fácilmente que existe un tiempo t_0 que satisface

$$\lambda'_{p2}(t_0) = (\sinh r)^2 - |\sinh r| |\cosh r| < 0, \quad (\text{VI.5.40})$$

para cualquier condición inicial. La existencia de squeezing en \hat{Q} para cualquier condición inicial también se puede concluir a partir del hecho de que a (el semieje mayor de la elipse) es siempre mayor que R (la distancia del centro de coordenadas al centro de la elipse). Por el contrario, las Ecs.(VI.5.29a) y (VI.5.31) con (VI.5.33b) llevan a la conclusión de que existe un tiempo t_1 que satisface

$$\lambda'_{Q2}(t_1) = \omega_0^2 [(\sinh r)^2 - |\sinh r| |\cosh r|] < -\frac{\alpha^2}{2} \quad (\text{VI.5.41})$$

solamente si las condiciones iniciales satisfacen

$$k > \frac{\alpha^4}{2 \omega_0^2}, \quad (\text{VI.5.42})$$

donde se ha usado la Ec.(VI.5.38).

A partir de todo este análisis se puede resumir lo siguiente: Por un lado, la elección particular de ω_0 y α determinarán

exactamente la orientación de la elipse a lo largo de la cual el sistema evoluciona. Si $\omega_0^2 > 2\alpha^2$, la evolución se muestra en la Fig.2(a), mientras que si $\omega_0^2 < 2\alpha^2$, la evolución puede verse en la Fig.2(b). Vale la pena notar que siempre se está considerando el caso $(\omega_0^2 - \alpha^2) \geq 0$, i.e. la solución oscilatoria para el oscilador armónico generalizado (Ec.(VI.5.8)) y el oscilador subamortiguado para el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola (Ec.(VI.5.1)) (ver Ref.(19)). En el caso límite de $\alpha = 0$, se recuperan los resultados ya obtenidos en las Refs.(1) y (2).

Por otro lado, las evoluciones dinámicas de las dispersiones de \hat{Q} y \hat{P} , y por lo tanto la posibilidad de squeezing o producto de indeterminación mínimo, dependerá fuertemente de la elección particular de las condiciones iniciales intrínsecamente compatibles. Esta elección se ve reflejada en el valor del invariante dinámico K (ver Ecs.(VI.5.26b) y (VI.5.30)). Se obtiene que el sistema estará en un estado squeezed de \hat{Q} para cualquier condición inicial, mientras que estará en un estado squeezed de \hat{P} sólo cuando $k \geq (\alpha^4 / 2\omega_0^2)$. Esta asimetría entre el comportamiento dinámico que conduce a squeezing en \hat{Q} o \hat{P} se debe a la definición de la posición y el momento (Ecs.(VI.5.17)). Como es de esperarse, cuando $\alpha = 0$, se recupera la simetría.

Finalmente, las condiciones iniciales que conducirán eventualmente al sistema al producto de indeterminación mínimo (Ec.(VI.5.27)) son aquéllas que verifican que $k \geq \Omega(\omega_0 - \Omega)$. Si, por el contrario, $k < \Omega(\omega_0 - \Omega)$, el sistema nunca tendrá producto de indeterminación mínima para ningún tiempo.

VI.5.B.2. Estados coherentes generalizados.

Ahora, si se considera el caso en el que el conocimiento inicial sobre el sistema se restringe a $\langle \hat{Q} \rangle_0 > 0$ y $\langle \hat{P} \rangle_0 > 0$, los valores de

expectación $\langle \hat{Q}^2 \rangle_0$, $\langle \hat{P}^2 \rangle_0$ y $\langle \hat{L} \rangle_0$ deberían obtenerse a través de la Ec.(II.1.6). Por lo tanto, se puede considerar que el operador densidad es $\hat{\rho} = \exp(-\lambda_0 \hat{I} - \lambda_Q \hat{Q} - \lambda_P \hat{P} - \beta \hat{H})$, i.e. $\lambda'_{Q2}(0) = 0$, $\lambda'_{P2}(0) = 0$ y $\lambda'_L(0) = 0$ (Refs.(3) y (4)). Para el caso de temperatura cero, se debería tomar $\beta \rightarrow \infty$. Sin embargo, λ'_Q y λ'_P permanecen finitos y, en general, diferentes de cero. De la Ec.(VI.5.29) se concluye que estas condiciones son equivalentes a tomar $r = 0$ (y esto valdrá para todo t ya que r es un invariante (ver Ec.(VI.5.26b))). En este caso, la transformación dada en la Ec.(VI.5.18) resulta

$$\hat{b}^\dagger = e^{i\Phi} \hat{A}^\dagger + |\gamma| e^{-i\psi} . \quad (\text{VI.5.43})$$

Las indeterminaciones de \hat{Q} y \hat{P} resultan

$$\Delta^2 \hat{Q} = \frac{1}{2\Omega} , \quad (\text{VI.5.44a})$$

y

$$\Delta^2 \hat{P} = \frac{\Omega}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\Omega^2} \right) \quad (\text{VI.5.44b})$$

Usando la Ec.(VI.5.43), se está definiendo un estado coherente generalizado como sigue: Se considera un conjunto mixto de condiciones iniciales (i.e. parte de la información relacionada con los valores de expectación (variables extensivas) y parte relacionada con las variables intensivas) $\{ \langle \hat{Q} \rangle_0, \langle \hat{P} \rangle_0, T=0 \}$ (Refs.(3) y (4)). El operador densidad, en términos de los nuevos operadores \hat{b}^\dagger y \hat{b} (Ec.(VI.5.22)), corresponde al operador densidad canónico para un oscilador armónico (i.e. $\hbar \Omega (\hat{b}^\dagger \hat{b} + 1/2)$). A $T = 0$, el operador densidad debería ser el correspondiente al estado

fundamental del sistema, $|0\rangle_b$,

$$\hat{b} |0\rangle_b = (e^{i\Phi} \hat{A} + |\gamma| e^{-i\Psi}) |0\rangle_b = 0. \quad (\text{VI.5.45})$$

De esta manera, este estado es un autoestado de \hat{A} (con autovalor $-|\gamma| e^{-i\Psi}$) y ésta es una de las definiciones usuales de los estados coherentes. Por lo tanto, se define un estado coherente generalizado como el autoestado de \hat{A} , que corresponde a $r = 0$. A pesar de que no es un estado de indeterminación mínima, ya que ahora $\Delta\hat{Q} \Delta\hat{P} = (1/2) [1 + (\alpha^2/\Omega^2)]^{1/2}$ que es mayor que $1/2$, sus dispersiones en $\langle\hat{Q}\rangle$ y $\langle\hat{P}\rangle$ son, como es usual, independientes del tiempo (ver Ecs.(VI.5.44)). Se quiere enfatizar el hecho de que, usando la Ec.(VI.5.27), se observa que los estados con producto de indeterminación mínima son solamente aquéllos sobre la hipérbola, la que, para $\alpha \neq 0$, no intersecta el origen de coordenadas que corresponde a $r = 0$.

Si se evalúa la entropía S de acuerdo con las Ecs.(II.2.3) y (VI.5.22), se obtiene

$$S = -\ln \left[(2 \sinh (\beta\Omega/2)) + \frac{\beta\Omega}{2} \left(1 + \frac{\exp (-\beta\Omega/2)}{\sinh (\beta\Omega/2)} \right) \right]. \quad (\text{VI.5.46})$$

En el límite de $T = 0$, se ve fácilmente que $S = 0$. Entonces, en este caso se está tratando con un estado puro con evolución temporal para $\langle\hat{Q}\rangle$ y $\langle\hat{P}\rangle$ igual a sus correspondientes clásicos (ver Ecs.(VI.5.15)).

VI.5.C. Estudio de la aparición de estados coherentes y estados squeezed para el caso de temperatura distinta de cero.

Ahora se estudiará el caso termodinámico, que tiene $T \neq 0$. A partir de las Ecs.(VI.5.27) y (VI.5.28), es posible obtener $\Delta\hat{Q} \Delta\hat{P}$,

$\Delta\hat{Q}$ y $\Delta\hat{P}$ para cualquier temperatura T. De la Ec.(VI.5.27), se obtiene que no habrá ningún estado que satisfaga $\Delta\hat{Q} \Delta\hat{P} = 1/2$. Las condiciones iniciales con producto de indeterminación mínimo continuarán estando sobre la hipérbola, aunque estas condiciones tendrán ahora $\Delta\hat{Q} \Delta\hat{P} > 1/2$. La indeterminación de \hat{Q} y \hat{P} (ver las Ecs.(VI.5.28) y (VI.5.29)) será mayor que

$$\Delta^2\hat{Q}_{\min} = \frac{1}{2\Omega} e^{-2r} \coth(\beta \Omega / 2), \quad (\text{VI.5.47a})$$

$$\begin{aligned} \Delta^2\hat{P}_{\min} &= \frac{\Omega}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2 + \omega_0^2 (e^{-2r} - 1)}{\Omega^2} \right) \coth(\beta \Omega / 2) \\ &= \frac{\omega_0^2}{2 \Omega} e^{-2r} \coth(\beta \Omega / 2) \end{aligned} \quad (\text{VI.5.48b})$$

La Ec.(VI.5.32) determina cuándo se tendrá squeezing aunque no se estén considerando estados puros ni *estados de indeterminación mínima*. Entonces, se tendrá squeezing en \hat{Q} si se tiene

$$e^{-2r} < \coth(\beta \Omega / 2). \quad (\text{VI.5.49})$$

Usando la Ec.(VI.5.38), se obtiene que para cualquier condición inicial que satisfaga

$$k > 2 \Omega^2 \left\{ \sinh \left[-\frac{1}{2} \ln(\tanh(\beta \Omega / 2)) \right] \right\}^2, \quad (\text{VI.5.50})$$

habrá squeezing en \hat{Q} . Se obtendrá squeezing en \hat{P} si se tiene

$$\frac{\omega_0^2}{\Omega^2} e^{-2r} < \coth(\beta \Omega / 2). \quad (\text{VI.5.51})$$

De la misma forma que para \hat{Q} , se obtiene que habrá squeezing en \hat{P} para cualquier condición inicial que satisfaga

$$k > 2 \Omega^2 \left\{ \sinh \left[-\frac{1}{2} \left(\ln \left(\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} \right) + \ln (\tanh(\beta \Omega/2)) \right) \right] \right\}^2. \quad (\text{VI.5.52})$$

De las Ecs.(VI.5.50) y (VI.5.52), se puede ver fácilmente que la restricción impuesta sobre la condición inicial por el factor termodinámico para obtener squeezing es la misma para \hat{Q} y \hat{P} , mientras que, debido a la asimetría introducida por las Ecs.(VI.5.17), aparece un término dependiente de α ($\ln(\Omega^2/\omega_0^2)$) sólo para el squeezing en \hat{P} . Este término desaparece cuando $\alpha = 0$, recuperándose los resultados obtenidos para el oscilador armónico simple. Por lo tanto, nótese que para $T > 0$ las "zonas de squeezing A y B" de las Fig.2 resultan modificadas de esta manera debido a lo que se ha llamado el "factor termodinámico" (i.e. $\coth(\beta \hbar \omega_0/2)$).

Si $T > 0$, el operador densidad (Ec.(VI.5.16)) corresponde a estados mixtos. Entonces, si $r = 0$, el estado coherente generalizado que ha sido definido en la Sec.VI.5.B.2 tendrá la misma evolución temporal que la dada para los estados coherentes, pero con dispersiones multiplicadas por el factor termodinámico.

Para concluir esta sección, se desea enfatizar el hecho de que todo este análisis previo respecto a la aparición del squeezing y los estados coherentes generalizados está directamente relacionado con el oscilador armónico generalizado (Ec.(VI.5.8). Sin embargo, la totalidad de este análisis puede ser también fácilmente aplicado al estudio del squeezing y los estados coherentes para los operadores \hat{Q} y \hat{P} (los cuales son referidos algunas veces como cuadraturas) que se pueden definir a partir del Hamiltoniano $\hat{H}_1(\hat{a}, \hat{a}^\dagger)$ (Ec.(VI.5.6c)) a través de las Ecs.(VI.5.4a-b) y (VI.5.6a-b). Se pueden encontrar análisis similares en literatura reciente (Refs.(19) y (20)), aunque

vale la pena destacar la simplicidad y completitud de este enfoque que permite considerar, entre otros aspectos, el caso de temperatura distinta de cero.

VI.6. Estados squeezed y estados coherentes para el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola.

Como ya fue ducho en la Sección anterior, el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola puede ser obtenido a partir del Hamiltoniano del oscilador armónico generalizado (Ec.(VI.5.8)) a través de la transformación canónica dada por las Ecs.(VI.5.2). Para analizar la aparición de squeezing y la presencia de estados coherentes para el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola, se aplicarán las Ecs.(VI.5.2) a los resultados obtenidos en la Sección anterior para determinar directamente la evolución de los operadores relevantes involucrados con este Hamiltoniano. Se obtiene

$$\langle \hat{q} \rangle = \exp(-\alpha t) \langle \hat{Q} \rangle \quad (\text{VI.6.1a})$$

$$\langle \hat{p} \rangle = \exp(\alpha t) \langle \hat{P} \rangle \quad (\text{VI.6.1b})$$

$$\langle \hat{q}^2 \rangle = \exp(-2\alpha t) \langle \hat{Q}^2 \rangle \quad (\text{VI.6.1c})$$

$$\langle \hat{p}^2 \rangle = \exp(2\alpha t) \langle \hat{P}^2 \rangle \quad (\text{VI.6.1d})$$

$$\langle \hat{l} \rangle = \langle \hat{L} \rangle \quad (\text{VI.6.1e})$$

Por lo tanto, se pueden evaluar las dispersiones de \hat{q} y \hat{p} y el valor medio de la energía

$$= \frac{1}{2\Omega} (1 + 2 \lambda' p^2) \coth (\beta \Omega / 2) \exp(-2\alpha t)$$

$$= \frac{1}{2\Omega} \left[1 + 2 \left((\sinh r)^2 - |\cosh r| |\sinh r| \cos(\theta_0 + \varphi_0 - 2\Omega t) \right) \right] .$$

$$. \coth(\beta\Omega/2) \exp(-2\alpha t) \quad (\text{VI.6.2a})$$

$$\Delta^2 \hat{p} = \langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2 = (\langle \hat{p}^2 \rangle - \langle \hat{p} \rangle^2) \exp(2\alpha t)$$

$$= \frac{\Omega}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\Omega^2} + \frac{2 \lambda' Q^2}{\Omega^2} \right) \coth (\beta \Omega / 2) \exp(2\alpha t)$$

$$= \frac{\omega_0^2}{2\Omega} \left[1 + 2 \left((\sinh r)^2 + |\cosh r| |\sinh r| \cos(\theta_0 + \varphi_0 - 2\zeta - 2\Omega t) \right) \right]$$

$$. \coth(\beta\Omega/2) \exp(2\alpha t) \quad (\text{VI.6.2b})$$

$$\Delta \hat{q} \Delta \hat{p} = \Delta \hat{Q} \Delta \hat{P} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\lambda' L + \alpha)^2}{\Omega^2} \right)^{1/2} \coth(\beta\Omega/2)$$

$$= \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2 \left[\alpha (\sinh r)^2 + \omega_0 |\cosh r| |\sinh r| \cos(\theta_0 + \varphi_0 - \zeta - 2\Omega t) \right] + \alpha^2}{\Omega^2} \right)^{1/2}$$

$$. \coth(\beta\Omega/2) \quad (\text{VI.6.2c})$$

$$\langle \hat{H} \rangle = \langle \hat{H}(\hat{q}, \hat{p}, t) \rangle = \frac{\langle \hat{p}^2 \rangle}{2 m_0} e^{-2\alpha t} + \frac{1}{2} m_0 e^{2\alpha t} \omega_0^2 \langle \hat{q}^2 \rangle =$$

$$= \langle \hat{H}_1(\hat{Q}, \hat{P}, t) \rangle = \frac{\langle \hat{P}^2 \rangle}{2 m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 \langle \hat{Q}^2 \rangle + \alpha \langle \hat{L} \rangle$$

$$(\text{VI.6.2d})$$

donde se han usado las Ecs.(VI.5.1), (VI.5.3), (VI.5.27-29) y (VI.5.31). Nótese que las Ecs.(VI.6.2a-c) son la forma más general de las dispersiones, ya que dan la evolución temporal evaluada tomando en cuenta al operador densidad con todos los parámetros de la transformación (dada por la Ec.(VI.5.18)) diferentes de cero, y para el caso termodinámico (i.e. $T \neq 0$). Entonces, para analizar en detalle estos resultados y compararlos con los obtenidos previamente en la literatura, se estudiará primero la aparición de estados coherentes y luego la aparición de estados squeezed.

Como se dijo en la Sección precedente, los estados coherentes son aquellos estados puros que son autoestados del operador \hat{A} , asociados con el operador densidad (ver la Ec.(VI.5.22)) que se obtiene usando $r = 0$ para definir \hat{b} (Ec.(VI.5.18)). Es importante notar que esta definición de estados coherentes es la misma que la dada por V.V. Dodonov y V.I. Man'ko.²⁷ En ese trabajo, se dice que "los mejores estados coherentes son los autoestados del operador \hat{A} ". Si se considera el caso especial de $r = 0$ y $T = 0$ en las Ecs.(VI.6.2), se obtienen los resultados dados en la Ref.(27). A partir de estas ecuaciones se puede ver que la evolución temporal de la dispersión de \hat{q} es una función exponencial decreciente de t , mientras que la que corresponde a la dispersión de \hat{p} es una función exponencial creciente de t . Nótese que el producto de indeterminación $\Delta\hat{q} \Delta\hat{p}$ es independiente del tiempo. Si $T \neq 0$, esos resultados aparecen directamente multiplicados por el "factor termodinámico".

En la Ref.(27), se presenta otra definición de estados coherentes, también usada por K.H. Yeon et al (Ref.(19)). Allí, se muestra que aunque estos estados pueden coincidir en el momento inicial con los estados de Glauber usuales, el producto de las

²⁷ V.V Dodonov and V.I. Man'ko, Phys. Rev. A 20, 550 (1979).

indeterminaciones de estos estados oscilarían en el tiempo. Se está entonces de acuerdo con la definición de estados coherentes dada por V.V. Dodonov y V.I. Man'ko (Ref.(27)), y de esta manera se obtienen resultados diferentes a aquéllos presentados por K.H. Yeon et al (Ref.(19)). Además, en la Ref.(27), se estudia una generalización del Hamiltoniano de Kanai-Caldirola, donde se usaron una transformación canónica y una definición de un operador de creación relacionadas con las Ecs.(VI.5.2) y (VI.5.6), respectivamente, para transformar el Hamiltoniano original en uno del tipo de la Ec.(VI.5.8). Las conclusiones obtenidas en esta referencia coinciden con las presentes para el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola en lo que respecta tanto a la evolución temporal de los operadores y de las dispersiones como a la definición de los estados "cuasi-coherentes". Sin embargo, es importante notar que ese análisis fue hecho usando el enfoque de la función de onda, y por lo tanto era posible considerar solamente el caso de temperatura cero. Un enfoque termodinámico de los estados coherentes para el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola fue de hecho estudiado en la Ref.(26), aunque aplicando el método de la función de Green. De cualquier manera, los resultados que se exhiben explícitamente en esta referencia, y que coinciden con los presentes, se restringen al análisis de las dispersiones iniciales y su dependencia con la temperatura.

Si se considera $r \neq 0$ en las Ecs.(VI.6.2), se obtendrá la expresión más general de las dispersiones que se puede encontrar usando el operador densidad generado a partir del conocimiento de $\langle \hat{q} \rangle$, $\langle \hat{p} \rangle$, $\langle \hat{q}^2 \rangle$, $\langle \hat{p}^2 \rangle$ y $\langle \hat{l} \rangle$. De las Ecs.(VI.1.1) y (VI.1.2), se puede decir que el sistema tendrá squeezing en \hat{q} o \hat{p} cuando

$$\Delta^2 \hat{q} < \frac{1}{2\Omega} \quad \text{or} \quad \Delta^2 \hat{p} < \frac{\Omega}{2} . \quad (\text{VI.6.3})$$

Por lo tanto, de la Ec.(VI.6.2a), se puede concluir que, para cualquier condición inicial del sistema, éste evolucionará finalmente a squeezing en \hat{q} . Contrariamente, de la Ec.(VI.6.2b), se ve que, aunque el sistema puede estar inicialmente en un estado squeezed en \hat{p} , necesariamente será llevado a abandonar este squeezing. A pesar del hecho de que éste es el estado final del sistema, se pueden obtener diferentes situaciones intermedias dependiendo de la elección para las condiciones iniciales, como puede verse en las Figs.3(a)-3(c). A partir de las Ecs.(VI.6.2), se pueden definir las dispersiones "normalizadas" como $2 \Omega \Delta^2 \hat{q}$ y $2 \Delta^2 \hat{p} / \Omega$. Con esta definición, se obtiene squeezing en \hat{q} ó \hat{p} cuando $2 \Omega \Delta^2 \hat{q}$ ó $2 \Delta^2 \hat{p} / \Omega$ son menores que uno, respectivamente. En estas figuras, se muestran las dispersiones "normalizadas" en función del tiempo. Nótese también que las condiciones iniciales requeridas para tener al sistema en un estado inicial de squeezing en \hat{q} ó \hat{p} , son las mismas que las que fueron analizadas para \hat{Q} y \hat{P} en la Sección anterior. Finalmente, se quiere mencionar que C. Gerry et al (Ref.(19)) también analizaron la dinámica de lo que ellos llaman "estados coherentes SU(1,1)" (estados squeezed en este trabajo) para el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola. Para evaluar las dispersiones, usan el método desarrollado por Perelomov (Ref.(7)), que da resultados solamente para temperatura cero. El comportamiento dinámico de las dispersiones y del valor de expectación de la energía son obtenidos a través de un método numérico, mientras que el método usado aquí es analítico. De lo que se puede interpretar de las figuras en esa referencia, sus resultados numéricos coincidirían con aquéllos en las Ecs.(VI.6.2a-c).

Se quisiera terminar esta sección analizando brevemente la evolución temporal del valor de expectación del Hamiltoniano dado en

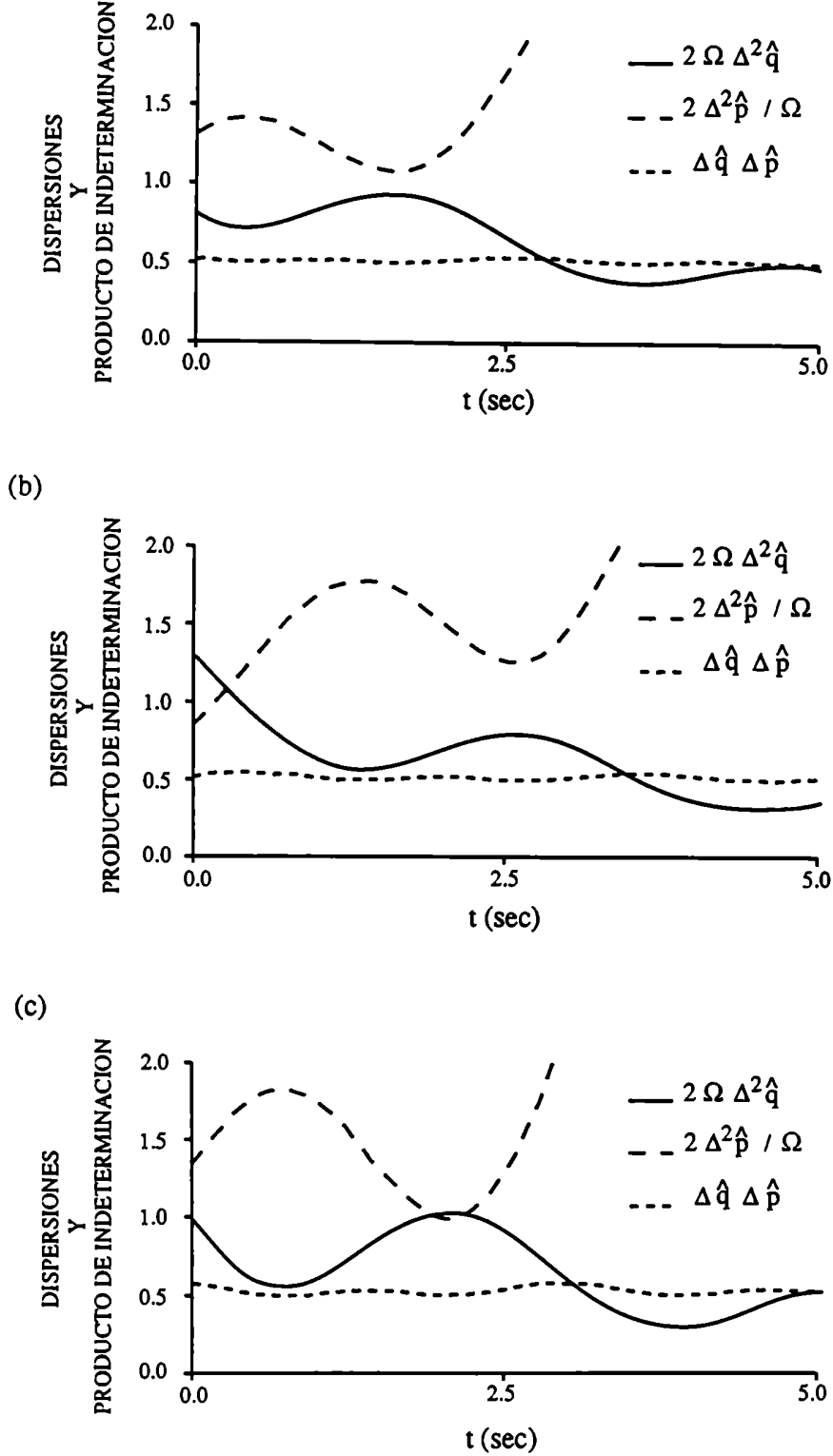


Fig.3. Gráficos de las dispersiones y el producto de indeterminación normalizados como funciones del tiempo para el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola. Se muestran tres casos diferentes: (a) para la elección $\lambda'_{q^2} = 0.15 \text{ sec}^{-2}$, $\lambda'_{p^2} = -0.1$, y $\alpha = 0.1 \text{ sec}^{-1}$, el sistema siempre está en estado squeezed en \hat{q} y nunca en \hat{p} ; (b) para $\lambda'_{q^2} = 0.08 \text{ sec}^{-2}$, $\lambda'_{p^2} = 0.15$, y $\alpha = 0.1$

sec⁻¹, el sistema está inicialmente squeezed en \hat{p} y no en \hat{q} pero, a medida que el sistema evoluciona en el tiempo, pasa a estar en estado squeezed en \hat{q} y no en \hat{p} ; (c) para $\lambda'_{q2} = 0.15 \text{ sec}^{-2}$, $\lambda'_{p2} = -0.001$, y $\alpha = 0.1 \text{ sec}^{-1}$, el sistema está inicialmente y finalmente en estado squeezed en \hat{q} y no en \hat{p} , pero para un dado período de tiempo intermedio, esta situación de squeezing resulta momentáneamente invertida.

la Ec.(VI.6.2d). Se puede probar que este Hamiltoniano es de hecho la "energía" del sistema, tal como fuera analizado en el Capítulo IV, resultando entonces innecesario definir la energía de alguna otra manera tal como fue hecho en los dos trabajos citados en la Ref.(19). La evolución temporal del valor de expectación del Hamiltoniano (Ec.(VI.6.2d)) puede ser fácilmente evaluado usando las Ecs.(VI.5.15a-b), (VI.5.25c-d) y (VI.5.29a-b) obteniéndose un comportamiento oscilatorio.

Para finalizar, y como resumen de estas dos últimas Secciones, se puede mencionar que en las mismas se analizan los estados coherentes y estados squeezed para el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola y aquéllos dados por la Ec.(VI.5.3) (oscilador armónico generalizado) (Ref.(19)), la Ec.(VI.5.4c) (relacionado con el álgebra de Lie SU(1,1)) (Ref.(20)) y la Ec.(VI.5.6c) (también conocido como oscilador armónico de frecuencia compleja) (Ref.(21)). Todos ellos fueron tratados usando el procedimiento unificador del operador densidad del PME. Ahora, se desea resumir las características principales de este análisis.

Usando el enfoque del PME, es posible: (a) describir los estados coherentes y estados squeezed como resultado de los diferentes conocimientos previos sobre el sistema. Este hecho es una consecuencia directa de la inclusión del Hamiltoniano como operador

relevante en el operador densidad. Así, esto conduce a (b) la posibilidad de describir el comportamiento dinámico de los estados coherentes y estados squeezed tanto para el caso de temperatura cero (caso usual) como para el caso de temperatura distinta de cero. Además, (c) se puede analizar la evolución dinámica de los estados squeezed como se muestra en las Figs.2(a) y 2(b).

Todo esto puede ser hecho aplicando un método cuya simplicidad permite un mejor entendimiento de las implicancias físicas de la aparición de los estados coherentes o los estados squeezed. Es importante notar que las Ecs.(VI.5.26) limitan la independencia de $\langle \hat{Q}^2 \rangle$, $\langle \hat{P}^2 \rangle$ y $\langle \hat{L} \rangle$, como resultado del carácter mecánico cuántico del problema (i.e. un operador densidad bien definido y el principio de indeterminación). En este enfoque, esta dependencia aparece en el espacio "dual" de los multiplicadores de Lagrange, donde es más fácil tratar con los aspectos cuánticos del problema. Se considera importante enfatizar el hecho de que todos estos resultados, en lo que se refiere a estados coherentes y estados squeezed para cualquier temperatura, se pueden ver como directas propiedades de la dinámica hamiltoniana. Por lo tanto, el squeezing aparece en forma clara como crucialmente dependiente del Hamiltoniano y de las condiciones iniciales del sistema.

VII. Principio de Máxima Entropía en la Representación de Interacción en el Tratamiento de Hamiltonianos y Operadores Relevantes Dependientes del Tiempo.

VII.1. Introducción.

Como ya fue visto en los Capítulos anteriores, dentro del formalismo de la mecánica cuántica, el operador densidad de PME puede ser considerado como un operador fuera del equilibrio,^{1,2,3} que permite evaluar la evolución temporal de valores de expectación para Hamiltonianos dependientes del tiempo.^{4,5,6} Este tipo de Hamiltonianos constituye un campo fructífero dentro de la mecánica cuántica, aunque resultan a veces difíciles de resolver. Como es ampliamente conocido, a menudo es conveniente en la mecánica cuántica, para trabajar exitosamente con estos Hamiltonianos, cambiar de la usual representación de Schrödinger a la representación de interacción.⁷ Como los valores de expectación son los mismos en ambas representaciones, este cambio de representación

¹ J. Aliaga, D. Otero, A. Plastino and A.N. Proto, Phys. Rev. **A38**, 918 (1988), y referencias en el mismo.

² D. Napoli, D. Otero, A. Plastino, and A. N. Proto., Nucl. Phys. **A 493**, 253 (1989).

³ J. Aliaga and A.N. Proto. Proc. XIV International Workshop on Condensed Matter Theories, edited by S. Fantoni and S. Rosati (Plenum Press, 1990).

⁴ G. Crespo, D. Otero, A. Plastino, and A. N. Proto, Phys. Rev. **A39**, 2133 (1989).

⁵ J. Aliaga, G. Crespo and A.N. Proto, Phys. Rev. **A 42**, 618 (1990).

⁶ J. Aliaga, G. Crespo and A.N. Proto, Phys. Rev. **A 42**, 4325 (1990).

⁷ C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloe, *Quantum Mechanics* (Wiley, New York, 1977), Vol. 1.

resulta útil cuando se obtiene una simplificación en los cálculos.⁸ Motivado por el hecho de haber trabajado en los Capítulos III y IV con Hamiltonianos dependientes del tiempo y que también se presenta a veces la necesidad de trabajar con operadores relevantes que dependen explícitamente del tiempo, la idea de este Capítulo es reformular el formalismo de PME en la representación de interacción a través de un enfoque unificador y que no resulte ambiguo (diferente de aquél de la Ref.(8)), tanto como dar, en esta reformulación, una receta canónica para trabajar con el operador densidad de PME cuando aparecen operadores dependientes del tiempo (en la representación de Schrödinger).

Como es usual, si se trabaja en la representación de Schrödinger, se puede definir el operador densidad $\hat{\rho}^S(t)$ que permite escribir el valor de expectación de cualquier operador como

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr} \left(\hat{\rho}^S(t) \hat{A}^S \right). \quad (\text{VII.1.1})$$

La evolución temporal de $\hat{\rho}^S(t)$ está dada por la ecuación de Liouville

$$i\hbar \frac{d \hat{\rho}^S}{d t} = [\hat{H}^S, \hat{\rho}^S], \quad (\text{VII.1.2})$$

mientras que

$$\frac{d \text{Tr} \left(\hat{\rho}^S(t) \hat{A}^S \right)}{d t} = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr} \left(\hat{\rho}^S(t) [\hat{A}^S, \hat{H}^S] \right) + \text{Tr} \left(\hat{\rho}^S(t) \frac{\partial \hat{A}^S}{\partial t} \right). \quad (\text{VII.1.3})$$

Dependiendo del Hamiltoniano particular con el que se esté trabajando, a veces es conveniente usar la representación de

⁸ Y. Alhassid and R. D. Levine, Phys. Rev. A **18**, 89 (1978).

interacción, que constituye una representación alternativa a la la representación de Schrödinger. Separando el Hamiltoniano según $\hat{H}^S(t) = \hat{H}_0^S + \hat{W}^S(t)$, la transformación de un operador en Schrödinger se puede obtener a través de la fórmula

$$\hat{A}^I = \hat{U}_0^\dagger \hat{A}^S \hat{U}_0 , \quad (\text{VII.1.4})$$

donde \hat{U}_0 está definida de acuerdo con

$$i\hbar \frac{\partial \hat{U}_0}{\partial t} = \hat{H}_0^S \hat{U}_0 . \quad (\text{VII.1.5})$$

Como el valor de expectación de cualquier operador se puede evaluar según

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr} (\hat{\rho}^I(t) \hat{A}^I) , \quad (\text{VII.1.6})$$

se demuestra fácilmente que la evolución temporal de $\hat{\rho}^I$ está dada por

$$i\hbar \frac{d \hat{\rho}^I}{d t} = [\hat{W}^I , \hat{\rho}^I] \quad (\text{VII.1.7})$$

Usando la Ec. (VII.1.6) se puede reescribir la Ec. (VII.1.3) en la representación de interacción

$$\frac{d \text{Tr} (\hat{\rho}^I(t) \hat{A}^I)}{d t} = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr} (\hat{\rho}^I(t) [\hat{A}^I , \hat{H}^I]) + \text{Tr} (\hat{\rho}^I(t) \left(\frac{\partial \hat{A}^S}{\partial t} \right)^I) \quad (\text{VII.1.8})$$

Al obtener la Ec. (VII.1.8), se puede ver que

$$\frac{\partial \hat{A}^I}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{A}^I , \hat{H}_0^S] + \left(\frac{\partial \hat{A}^S}{\partial t} \right)^I , \quad (\text{VII.1.9})$$

siendo

$$\frac{\partial \hat{A}^S}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_0^S, \hat{A}^S] + \left(\frac{\partial \hat{A}^I}{\partial t} \right)^S, \quad (\text{VII.1.10})$$

el correspondiente en la representación de Schrödinger.

Entonces, se puede reescribir la Ec.(VII.1.3) usando la Ec.(VII.1.10), y obtener

$$\frac{d \text{Tr} \left(\hat{\rho}^S(t) \hat{A}^S \right)}{d t} = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr} \left(\hat{\rho}^S(t) [\hat{A}^S, \hat{W}^S] \right) + \text{Tr} \left(\hat{\rho}^S(t) \left(\frac{\partial \hat{A}^I}{\partial t} \right)^S \right). \quad (\text{VII.1.11})$$

Análogamente, se puede usar la Ec.(VII.1.9) para reescribir la Ec.(VII.1.8)

$$\frac{d \text{Tr} \left(\hat{\rho}^I(t) \hat{A}^I \right)}{d t} = \frac{1}{i\hbar} \text{Tr} \left(\hat{\rho}^I(t) [\hat{A}^I, \hat{W}^I] \right) + \text{Tr} \left(\hat{\rho}^I(t) \frac{\partial \hat{A}^I}{\partial t} \right). \quad (\text{VII.1.12})$$

Por lo tanto, siempre que los operadores en la representación de Schrödinger sean independientes del tiempo, es conveniente usar la Ec.(VII.1.3) o su versión en la representación de interacción (Ec.(VII.1.8)) para resolver la evolución dinámica de los valores de expectación. Por otro lado, si los operadores en la representación de interacción son independientes del tiempo, es más fácil usar la Ec.(VII.1.12) o su versión en la representación de Schrödinger (Ec.(VII.1.11)). Entonces, cuando se deba tratar con operadores explícitamente dependientes del tiempo en la representación de Schrödinger, podría ser provechoso buscar una descripción en la representación de interacción adecuada en la cual los operadores resulten independientes del tiempo. Esto a su vez permitiría el uso de la Ec.(VII.1.11) (o la Ec.(VII.1.12)) en la cual el segundo

término del miembro derecho sería cero.

VII.2. Principio de Máxima Entropía en la Representación de Interacción.

Con el objeto de clarificar conceptos, se reiteran aquí algunas de las ideas desarrolladas en el Capítulo II.

De acuerdo con el PME, que ha sido aplicado en general en la representación de Schrödinger, si se parte del conocimiento de r valores de expectación, $\langle \hat{O}_1 \rangle, \dots, \langle \hat{O}_r \rangle$, se puede probar que el operador densidad $\hat{\rho}^S$ que maximiza la entropía S ,

$$S = - \text{Tr} (\hat{\rho}^S \ln \hat{\rho}^S) \quad (\text{VII.2.1})$$

está dado por

$$\hat{\rho}^S = \exp \left(- \lambda_0 - \sum_{j=1}^r \lambda_j \hat{O}_j^S \right), \quad (\text{VII.2.2})$$

donde λ_j es el multiplicador de Lagrange asociado con el operador \hat{O}_j^S , y λ_0 está determinado de forma tal de satisfacer $\text{Tr} \hat{\rho}^S = 1$. Una consecuencia directa de la ecuación de Liouville para $\hat{\rho}^S$ (Ec.(VII.1.2)) es que

$$i\hbar \frac{d \ln \hat{\rho}^S}{d t} = [\hat{H}^S, \ln \hat{\rho}^S] \quad (\text{VII.2.3})$$

Reemplazando la Ec.(VII.3.2) en la Ec.(VII.3.3) se obtiene que, para asegurar que la Ec.(VII.2.3) se verifique para todo tiempo t , se debe elegir el conjunto de q operadores \hat{O}_j^S que cierren un semi-álgebra de Lie bajo conmutación con el Hamiltoniano \hat{H}^S

$$[\hat{H}^S, \hat{O}_j^S] = i\hbar \sum_{i=1}^q g_{ij}^S \hat{O}_i^S, \quad (\text{VII.2.4})$$

mientras que los operadores \hat{O}_j^S sean independientes del tiempo. Reemplazando la Ec.(VII.2.2) en (VII.2.1) lleva a

$$S = \lambda_0 + \sum_{j=1}^q \lambda_j \langle \hat{O}_j \rangle, \quad (\text{VII.2.5})$$

lo que resalta el hecho de que la entropía S , siendo un valor medio, es independiente de la representación en la que se esté trabajando.

Combinando Teorema de Ehrenfest generalizado para operadores independientes del tiempo (ver la Ec.(VII.1.3)) junto con las Ecs.(VII.2.3) y (VII.2.4), es fácil demostrar que las ecuaciones de evolución para los multiplicadores de Lagrange y los valores de expectación están dadas por

$$\frac{d \lambda_i}{d t} = \sum_{j=1}^q g_{ij}^S \lambda_j, \quad (\text{VII.2.6})$$

y

$$\frac{d \langle \hat{O}_i \rangle}{d t} = - \sum_{j=1}^q g_{ji}^S \langle \hat{O}_j \rangle. \quad (\text{VII.2.7})$$

Es importante destacar el hecho de que la Ec.(VII.2.7) es la versión de PME de la Ec.(VII.1.3) siempre que los operadores relevantes en la representación de Schrödinger, es decir, aquéllos involucrados en la Ec.(VII.2.4), sean independientes del tiempo (ver Capítulo II).

Como se mencionó antes, en algunos casos resulta conveniente utilizar la representación de interacción. Por lo tanto, se desea

rederivar el formalismo del PME en esta representación. Como antes, partiendo del conocimiento de r valores de expectación, $\langle \hat{O}_1 \rangle, \dots, \langle \hat{O}_r \rangle$, el operador densidad $\hat{\rho}^I$ que maximiza la entropía S , está dado por

$$\hat{\rho}^I = \exp \left(- \lambda_0^I - \sum_{j=1}^r \lambda_j^I \hat{O}_j^I \right), \quad (\text{VII.2.8})$$

donde λ_j^I indica que los multiplicadores de Lagrange pueden eventualmente depender de la representación de interacción particular que se haya elegido. Una consecuencia directa de la ecuación de Liouville para $\hat{\rho}^I$ (Ec. (VII.1.7)) es que

$$i\hbar \frac{d \ln \hat{\rho}^I}{d t} = [\hat{W}^I, \ln \hat{\rho}^I] \quad (\text{VII.2.9})$$

Siguiendo el mismo procedimiento empleado para la representación de Schrödinger, definiendo el conjunto de operadores relevantes en la representación de interacción como aquéllos que cierran un semi-álgebra de Lie bajo conmutación con \hat{W}^I

$$[\hat{W}^I, \hat{O}_j^I] = i\hbar \sum_{i=1}^q g_{ij}^I \hat{O}_i^I, \quad (\text{VII.2.10})$$

se asegura que la Ec. (VII.2.8) sea solución de (VII.2.9) para todo tiempo t , mientras que los operadores \hat{O}_j^I sean independientes del tiempo. Reemplazando la Ec. (VII.2.8) en la Ec. (VII.2.1), escrita en términos de $\hat{\rho}^I$, se obtiene

$$S = \lambda_0^I + \sum_{j=1}^q \lambda_j^I \langle \hat{O}_j \rangle. \quad (\text{VII.2.11})$$

Entonces, si se comparan las Ecs.(VII.2.5) y (VII.2.11), se puede asegurar que los multiplicadores de Lagrange no deben depender de la representación en la que se esté trabajando, es decir, $\lambda_j = \lambda_j^I$ (c.f. Ref.(8)). Por lo tanto, a partir de ahora se omitirá cualquier supraíndice en los multiplicadores de Lagrange que indique la representación considerada. En este caso, combinando el Teorema de Ehrenfest generalizado para operadores independientes del tiempo en la representación de interacción (ver Ec.(VII.1.12)) junto con (VII.2.9) y (VII.2.10), se puede probar que

$$\frac{d \lambda_i}{d t} = \sum_{j=1}^q g_{ij}^I \lambda_j , \quad (\text{VII.2.12})$$

y

$$\frac{d \langle \hat{O}_i \rangle}{d t} = - \sum_{j=1}^q g_{ji}^I \langle \hat{O}_j \rangle . \quad (\text{VII.2.13})$$

Se quiere enfatizar el hecho de que, aun en el caso en que los operadores \hat{O}_j^I puedan depender explícitamente del tiempo, se puede todavía encontrar una forma simple de escribir el Teorema de Ehrenfest generalizado en la representación de interacción (Ec.(VII.1.8)), cerrando un semi-álgebra bajo conmutación con \hat{H}^I , de acuerdo con

$$[\hat{H}^I, \hat{O}_j^I] = i\hbar \sum_{i=1}^q g_{ij}^S \hat{O}_i^I , \quad (\text{VII.2.14})$$

mientras que los correspondientes \hat{O}_j^S sean independientes del tiempo. Los elementos de matriz g_{ij}^S deben llevar el supraíndice de

Schrödinger S debido a que la Ec.(VII.2.14) es la transformación directa de la Ec.(VII.2.4) bajo la Ec.(VII.1.4). De hecho, La Ec.(VII.2.14) lleva a las ecuaciones de evolución (VII.2.6) y (VII.2.7).

Análogamente, en el caso en que los operadores \hat{O}_j^S sean dependientes del tiempo, se puede también encontrar una forma simple de escribir la versión particular de la representación de Schrödinger del Teorema de Ehrenfest generalizado dada por la Ec.(VII.1.11), si se cierra un semi-álgebra de conmutación con \hat{W}^S

$$[\hat{W}^S, \hat{O}_j^S] = i\hbar \sum_{i=1}^q g_{ij}^I \hat{O}_i^S, \quad (\text{VII.2.15})$$

mientras que los correspondientes \hat{O}_i^I sean independientes del tiempo. Las ecuaciones de evolución para los multiplicadores de Lagrange y los valores de expectación de los operadores relevantes están dadas por lo tanto por las Ecs.(VII.2.12) y (VII.2.13).

Resumiendo esto último, si los operadores relevantes en la representación de Schrödinger son independientes del tiempo, las ecuaciones de evolución para los multiplicadores de Lagrange y los valores de expectación estarán dadas por las Ecs.(VII.2.6) y (VII.2.7), respectivamente, sin importar si se usó la Ec.(VII.2.4) o (VII.2.14) para cerrar el álgebra de Lie parcial. Por otro lado, si los operadores relevantes en la representación de interacción son independientes del tiempo, entonces las ecuaciones de evolución para los multiplicadores de Lagrange y los valores de expectación estarán dadas por las Ecs.(VII.2.10) y (VII.2.13), no importando si se usó la Ec.(VII.2.10) o (VII.2.15). Por lo tanto, cuando se debe trabajar con un sistema descrito por un Hamiltoniano \hat{H}^S y se desea la dinámica generada los operadores dependientes del tiempo $\hat{O}_i^S(t)$, se puede proceder de la siguiente manera: (i) encontrar, si es posible,

una separación del Hamiltoniano en $\hat{H}^S(t) = \hat{H}_0^S + \hat{W}^S(t)$ que permita introducir la representación de interacción en la cual los correspondientes \hat{O}_i^I sean independientes del tiempo; (ii) cerrar el álgebra de Lie parcial dado por la Ec.(VII.2.15); (iii) escribir las ecuaciones de evolución para los multiplicadores de Lagrange y los valores de expectación directamente como las Ecs.(VII.2.12) y (VII.2.13). Estos tres pasos permiten entonces evitar la evaluación de la derivada parcial que aparece en el último término de la Ec.(VII.1.3), siendo esto posible debido al uso de la matriz \underline{G}^I en lugar de la \underline{G}^S (definidas a partir de las Ecs.(VII.2.10) y (VII.2.4), respectivamente) (c.f. (VII.2.7) y (VII.2.13)).

VII.3. Ejemplo: Amplificador Paramétrico Degenerado y Estados Squeezed.

En esta sección se presentará una aplicación del formalismo del PME en la representación de interacción, que fue desarrollado en la Sección anterior, al ejemplo particular del amplificador paramétrico degenerado⁹. Se quiere estudiar la evolución dinámica de los operadores de cuadratura de variación lenta, que son operadores dependientes del tiempo, así como también la conexión entre los valores de expectación de estos operadores y los correspondientes multiplicadores de Lagrange. Finalmente, se analizará, dentro de este enfoque, la posibilidad de obtener estados squeezed.¹⁰

El Hamiltoniano del amplificador paramétrico degenerado (Ref.(9)), en la representación de Schrödinger, está dado por

⁹ C.C. Gerry and E.R. Vrscay, Phys. Rev. A 37, 4265 (1988).

¹⁰ H. P. Yuen, Phys. Rev. A 13, 2226 (1976); C. M. Caves, Phys. Rev. D 23, 1693 (1981); D.F. Walls, Nature 306, 141 (1983); R.S. Bondurant and J.H. Shapiro, Phys. Rev. D 30, 2548 (1984).

$$\hat{H}^S(\hat{a}, \hat{a}', t) = \hbar \omega_0 \left(\hat{a}' \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + i \frac{\alpha \hbar}{2} (e^{-2i\omega_0 t} \hat{a}'^2 - e^{2i\omega_0 t} \hat{a}^2)$$

(VII.3.1)

Como de costumbre, los operadores de cuadratura de variación lenta están definidos de acuerdo con (Ref.(9))

$$\hat{Q}^{*S} = \gamma_1 (e^{-i\omega_0 t} \hat{a}' + e^{i\omega_0 t} \hat{a}), \quad (\text{VII.3.2a})$$

$$\hat{P}^{*S} = i\gamma_2 (e^{-i\omega_0 t} \hat{a}' - e^{i\omega_0 t} \hat{a}), \quad (\text{VII.3.2b})$$

donde

$$\gamma_1^2 = \frac{\hbar}{2 m_0 \omega_0}, \quad (\text{VII.3.2c})$$

$$\gamma_2^2 = \frac{\hbar m_0 \omega_0}{2}. \quad (\text{VII.3.2d})$$

Se considerará el Hamiltoniano del sistema como

$$\hat{H}^S(\hat{a}, \hat{a}', t) = \hat{H}_0^S(\hat{a}, \hat{a}') + \hat{W}^S(\hat{a}, \hat{a}', t), \quad (\text{VII.3.3a})$$

donde

$$\hat{H}_0^S(\hat{a}, \hat{a}') = \hbar \omega_0 \left(\hat{a}' \hat{a} + \frac{1}{2} \right), \quad (\text{VII.3.3b})$$

$$\hat{W}^S(\hat{a}, \hat{a}', t) = i \frac{\alpha \hbar}{2} (e^{-2i\omega_0 t} \hat{a}'^2 - e^{2i\omega_0 t} \hat{a}^2). \quad (\text{VII.3.3c})$$

La separación del Hamiltoniano (Ec.(VII.3.3a)) se debe al hecho de que se está trabajando con operadores dependientes del tiempo, y por lo tanto resulta conveniente usar el formalismo de la representación

de interacción. Entonces, si se define el operador

$$\hat{U}_0 = \exp(i \omega_0 t \hat{a}^\dagger \hat{a}) , \quad (\text{VII.3.4})$$

usando la Ec.(VII.1.4) se obtiene

$$\begin{aligned} \hat{H}^I(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) &= \hbar \omega_0 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + i \frac{\alpha \hbar}{2} (\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2) \\ &= \frac{\hat{P}^2}{2 m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 \hat{Q}^2 + \alpha \frac{1}{2} (\hat{P} \hat{Q} + \hat{Q} \hat{P}) , \end{aligned} \quad (\text{VII.3.5a})$$

$$\hat{H}_0^I(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \hat{H}_0(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) , \quad (\text{VII.3.5b})$$

$$\hat{W}^I(\hat{a}, \hat{a}^\dagger) = \frac{i \alpha \hbar}{2} (\hat{a}^{\dagger 2} - \hat{a}^2) = \alpha \hat{L} , \quad (\text{VII.3.5c})$$

donde

$$\hat{Q} = \hat{Q}^{*I} = \gamma_1 (\hat{a}^\dagger + \hat{a}) , \quad (\text{VII.3.5d})$$

$$\hat{P} = \hat{P}^{*I} = i\gamma_2 (\hat{a}^\dagger - \hat{a}) , \quad (\text{VII.3.5e})$$

$$\hat{L} = \frac{\hat{Q} \hat{P} + \hat{P} \hat{Q}}{2} . \quad (\text{VII.3.5f})$$

Ahora, siguiendo la Ec.(VII.2.10), se puede definir el conjunto de operadores relevantes relacionados con la dinámica del problema, i.e. \hat{Q} , \hat{P} , \hat{Q}^2 , \hat{P}^2 , \hat{H}^I , como aquéllos que cierran un álgebra de Lie parcial con \hat{W}^I ,

$$[\hat{Q} , \hat{W}^I]_- = i \hbar \alpha \hat{Q} , \quad (\text{VII.3.6a})$$

$$[\hat{P}, \hat{W}^I]_- = -i \hbar \alpha \hat{P}, \quad (\text{VII.3.6b})$$

$$[\hat{Q}^2, \hat{W}^I]_- = 2i \hbar \alpha \hat{Q}^2, \quad (\text{VII.3.6c})$$

$$[\hat{P}^2, \hat{W}^I]_- = -2i \hbar \alpha \hat{P}^2, \quad (\text{VII.3.6d})$$

$$[\hat{H}^I, \hat{W}^I]_- = -\frac{i \hbar \alpha}{m_0} \hat{P}^2 + i \hbar \alpha m_0 \omega_0^2 \hat{Q}^2. \quad (\text{VII.3.6e})$$

Entonces, la matriz \underline{G}^I es

$$\underline{G}^I = \begin{pmatrix} -\alpha & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2\alpha & 0 & -\alpha m_0 \omega_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 2\alpha & \alpha/m_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (\text{VII.3.7})$$

Por lo tanto, el operador densidad está dado por (ver la Ec. (VII.2.8))

$$\hat{\rho}^I = \exp(-\lambda_0 - \lambda_{Q^*} \hat{Q} - \lambda_{P^*} \hat{P} - \lambda_{Q^*2} \hat{Q}^2 - \lambda_{P^*2} \hat{P}^2 - \beta \hat{H}^I - \varepsilon \hat{W}^I). \quad (\text{3.8})$$

De acuerdo con la Ec.(VII.2.12), la evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange incluidos en $\hat{\rho}_I$ está dada por

$$\frac{d \lambda_{Q^*}}{d t} = -\alpha \lambda_{Q^*}, \quad (\text{VII.3.9a})$$

$$\frac{d \lambda_{P^*}}{d t} = \alpha \lambda_{P^*}, \quad (\text{VII.3.9b})$$

$$\frac{d \lambda_{Q+2}}{d t} = - \alpha \lambda_{Q+2} - \alpha m_0 \omega_0^2 \beta , \quad (\text{VII.3.9c})$$

$$\frac{d \lambda_{P+2}}{d t} = \alpha \lambda_{P+2} + \frac{\alpha}{m_0} \beta , \quad (\text{VII.3.9d})$$

$$\frac{d \beta}{d t} = 0 , \quad (\text{VII.3.9e})$$

$$\frac{d \varepsilon}{d t} = 0 . \quad (\text{VII.3.9f})$$

Ahora, también se pueden escribir las ecuaciones de evolución para los valores de expectación de los operadores relevantes (Ec.(VII.2.13)), obteniéndose un conjunto de ecuaciones diferenciales lineales de fácil resolución. Sin embargo, se está intentando utilizar un enfoque diferente que permita estudiar la posibilidad de obtener squeezing analizando la evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange. Para poder evaluar los valores de expectación de los operadores, usando la Ec.(VII.3.8), se define, siguiendo la Ref.(6),

$$\hat{A} = (2 m_0 \hbar \Omega)^{-1/2} [m_0 (\Omega + i \alpha) \hat{Q} + i \hat{P}] . \quad (\text{VII.3.10})$$

De ahora en más, se considerarán m_0 y \hbar iguales a uno. En términos de \hat{A} y \hat{A}^\dagger , se obtiene

$$\hat{H}^I (\hat{A}, \hat{A}^\dagger) = \Omega (\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2}) , \quad (\text{VII.3.11})$$

donde

$$\Omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 . \quad (\text{VII.3.12})$$

El operador densidad resulta,

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}^I = & \exp \left[-\lambda_0 \hat{1} - \beta \Omega \left(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \frac{1}{2} \right) - \right. \\
 & - \left(\frac{\lambda_{Q^*}}{(2 \Omega)^{1/2}} - \lambda_{P^*} u^* (\Omega/2)^{1/2} \right) \hat{A}^\dagger - \left(\frac{\lambda_{Q^*}}{(2 \Omega)^{1/2}} - \lambda_{P^*} u (\Omega/2)^{1/2} \right) \hat{A} \\
 & - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{Q^*2}}{\Omega} + \lambda_{P^*2} \Omega u^{*2} - \epsilon u^* \right) \hat{A}^{\dagger 2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{Q^*2}}{\Omega} + \lambda_{P^*2} \Omega u^2 - \epsilon u \right) \hat{A}^2 \\
 & \left. - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{Q^*2}}{\Omega} + \lambda_{P^*2} \Omega |u|^2 - \frac{\epsilon (u+u^*)}{2} \right) \left(\hat{A}^\dagger \hat{A} + \hat{A} \hat{A}^\dagger \right) \right], \quad (\text{VII.3.13a})
 \end{aligned}$$

donde

$$u = \frac{\alpha}{\Omega} + i, \quad (\text{VII.3.13b})$$

y u^* denota su complejo conjugado. Como se quiere diagonalizar el operador densidad para poder evaluar los valores de expectación, se puede definir el nuevo operador de creación (Refs. (6) y (10))

$$\hat{b}^\dagger = |\cosh r| e^{i\Phi} \hat{A}^\dagger + |\sinh r| e^{-i\theta} \hat{A} + |\gamma| e^{-i\Psi} \quad (\text{VII.3.14})$$

luego, es fácil demostrar que el operador densidad se puede escribir en términos de los nuevos operadores \hat{b}^\dagger y \hat{b} (usando la condición de normalización) como

$$\begin{aligned}
 \hat{\rho}^I = & \exp \left(-\lambda_0 \hat{1} - \beta \Omega \left(\hat{b}^\dagger \hat{b} + \frac{1}{2} \right) + \beta \Omega |\gamma|^2 \right) \\
 = & 2 \sinh (\beta \Omega / 2) \exp(-\beta \Omega / 2) \exp(-\beta \Omega \hat{b}^\dagger \hat{b}), \quad (\text{VII.3.15})
 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{Q^*}}{(2\Omega)^{1/2}} + \lambda_{P^*} u (\Omega/2)^{1/2} &= \\ &= \beta \Omega |\gamma| \{ |\sinh r| e^{i(\psi-\theta)} + |\cosh r| e^{-i(\psi+\phi)} \}, \end{aligned} \quad (\text{VII.3.16a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_{Q^*}}{(2\Omega)^{1/2}} + \lambda_{P^*} u^* (\Omega/2)^{1/2} &= \\ &= \beta \Omega |\gamma| \{ |\sinh r| e^{-i(\psi-\theta)} + |\cosh r| e^{i(\psi+\phi)} \}, \end{aligned} \quad (\text{VII.3.16b})$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_{Q^*2}}{\Omega} + \lambda_{P^*2} \Omega |u|^2 - \frac{\epsilon (u+u^*)}{2} \right) = \beta \Omega (\sinh r)^2, \quad (\text{VII.3.16c})$$

$$\frac{1}{2} \text{Re} \left(\frac{\lambda_{Q^*2}}{\Omega} + \lambda_{P^*2} \Omega u^2 - \epsilon u \right) = \beta \Omega |\sinh r| |\cosh r| \cos(\theta+\phi), \quad (\text{VII.3.16d})$$

$$\frac{1}{2} \text{Im} \left(\frac{\lambda_{Q^*2}}{\Omega} + \lambda_{P^*2} \Omega u^2 - \epsilon u \right) = -\beta \Omega |\sinh r| |\cosh r| \sin(\theta+\phi). \quad (\text{VII.3.16e})$$

Entonces, luego de un poco de álgebra y debido al hecho de que $\hat{\rho}^I$ es diagonal en la base de autoestados de $\hat{b}^\dagger \hat{b}$, i.e. $|n\rangle_b$ (ver la Ec.(VII.3.15)), se obtiene

$$\langle \hat{Q}^2 \rangle = \frac{1}{2\Omega} (1 + 2 \lambda_{P^*2}^i) \coth(\beta \Omega/2) + \langle \hat{Q} \rangle^2, \quad (\text{VII.3.17a})$$

$$\langle \hat{P}^2 \rangle = \frac{\Omega}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\Omega^2} + \frac{2 \lambda_{Q^*2}^i}{\Omega^2} \right) \coth(\beta \Omega/2) + \langle \hat{P} \rangle^2, \quad (\text{VII.3.17b})$$

donde se han definido (ver las Refs.(9) y (10)) $\lambda_k^i = \lambda_k/\beta$. Resolviendo las Ecs.(VII.3.9), se obtiene la evolución temporal de los multiplicadores de Lagrange

$$\lambda_{Q^*}' = \lambda_{Q^*0}' e^{-\alpha t} , \quad (\text{VII.3.18a})$$

$$\lambda_{P^*}' = \lambda_{P^*0}' e^{\alpha t} , \quad (\text{VII.3.18b})$$

$$\lambda_{Q^*2}' = e^{-2\alpha t} \left(\lambda_{Q^*2_0}' + \frac{\omega_0^2}{2} \right) - \frac{\omega_0^2}{2} , \quad (\text{VII.3.18c})$$

$$\lambda_{P^*2}' = e^{2\alpha t} \left(\lambda_{P^*2_0}' + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{2} , \quad (\text{VII.3.18d})$$

$$\beta = \beta_0 , \quad (\text{VII.3.18e})$$

$$\varepsilon' = \varepsilon_0' \quad (\text{VII.3.18f})$$

A partir de las Ecs.(VII.3.16c-e), es fácil demostrar que (ver la Ref.(10))

$$(\varepsilon' + \alpha)^2 = \alpha^2 + 2 \lambda_{Q^*2}' + 2 \omega_0^2 \lambda_{P^*2}' + 4 \lambda_{Q^*2}' \lambda_{P^*2}' \geq 0 . \quad (\text{VII.3.19})$$

Derivando la Ec.(VII.3.19) con respecto al tiempo, y usando las Ecs.(VII.3.18c-d), se puede verificar, como era de esperarse, que lo anterior es un invariante dinámico del sistema. Por lo tanto, la evolución dinámica del sistema en el espacio de multiplicadores de Lagrange independientes $\{ 2 \lambda_{Q^*2}', 2 \omega_0^2 \lambda_{P^*2}' \}$ resulta en hipérbolas (ver la Fig.4). Estas hipérbolas están limitadas por una hipérbola mínima que corresponde a $\varepsilon' = -\alpha$ (ver la Ec.(VII.3.19)).

A partir de las Ecs.(VII.3.17), se obtienen las dispersiones de los operadores de cuadratura de variación lenta

$$\Delta \hat{Q}^* = \Delta \hat{Q} = \frac{1}{2\Omega} (1 + 2 \lambda_{P^*2}') \coth (\beta \Omega/2) , \quad (\text{VII.3.20a})$$

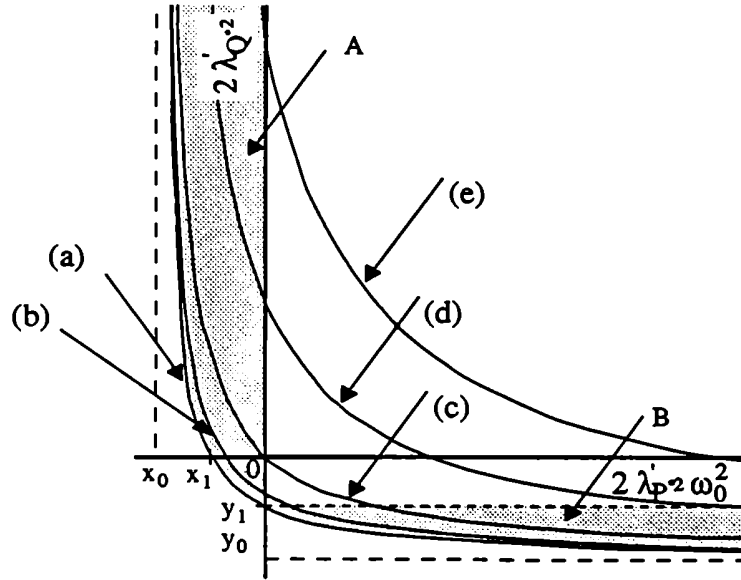


Fig.4. Espacio de los multiplicadores de Lagrange independientes $\lambda_Q^{1/2}$ y $\lambda_P^{1/2}$. La zona gris, indicada como A (B), muestra la región donde se obtiene squeezing en \hat{Q} (\hat{P}). La evolución del sistema recorre una hipérbola. Se muestra esta evolución para cinco condiciones iniciales diferentes: (a) $\varepsilon' = -\alpha$, (b) $\varepsilon' = -\alpha/2$, (c) $\varepsilon' = 0$, (d) $\varepsilon' = \alpha$, (e) $\varepsilon' = 2\alpha$. Está acotada por la hipérbola (a), dada por la Ec.(VII.3.19) (es decir, el producto de indeterminación mínimo). Las asíntotas de las hipérbolas son $x_0 = y_0 = -\omega_0^2$, y las intersecciones de la hipérbola (a) con los ejes x e y corresponden a $x_1 = y_1 = -\alpha^2$.

$$\Delta \hat{P}^* = \Delta \hat{P} = \frac{\Omega}{2} \left(1 + \frac{\alpha^2}{\Omega^2} + \frac{2 \lambda_Q^{1/2}}{\Omega^2} \right) \coth (\beta \Omega / 2) \quad (\text{VII.3.20b})$$

El producto de indeterminación por lo tanto resulta constante según

$$\Delta \hat{Q}^* \Delta \hat{P}^* = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{(\varepsilon' + \alpha)^2}{\Omega^2} \right)^{1/2} \coth (\beta \Omega / 2) \quad (\text{VII.3.21})$$

Esto significa que dado un conjunto compatible de condiciones iniciales (i.e. aquéllas que verifican la Ec.(VII.3.19)), el sistema evoluciona sobre hipérbolas caracterizadas por la constancia del producto de indeterminación. El producto de indeterminación mínimo, que permanecerá constante durante la evolución del sistema, se obtiene sólo para las condiciones iniciales que conduzcan a $\varepsilon' = -\alpha$. Sustituyendo las Ecs.(VII.3.18) en las Ecs.(VII.3.20), se obtiene

$$\Delta \hat{Q}^* = \Delta \hat{Q}_0^* e^{2\alpha t} \coth(\beta \Omega/2), \quad (\text{VII.3.22a})$$

$$\Delta \hat{P}^* = \Delta \hat{P}_0^* e^{-2\alpha t} \coth(\beta \Omega/2) \quad (\text{VII.3.22b})$$

Como puede verse directamente a partir de las Ecs.(VII.3.22), independientemente de las condiciones iniciales, el sistema evolucionará finalmente hacia squeezing en \hat{P}^* (\hat{Q}^*) para $\alpha > 0$ ($\alpha < 0$).

A manera de conclusión se puede terminar esta Sección diciendo que en este Capítulo se ha reformulado el PME en la representación de interacción. Esta reformulación difiere del enfoque presentado por Alhassid y Levine (Ref.(8)). En esa referencia, necesitaron que los operadores relevantes en la representación de Schrödinger fueran independientes del tiempo para poder usar el formalismo del PME. Por el contrario, aquí se ha desarrollado una técnica para librarse de esta restricción. Este enfoque permite evaluar la evolución temporal de los valores de expectación para operadores dependientes del tiempo evitando las dificultades presentadas por la derivada parcial en el tiempo incluida en la Ec.(VII.1.3). La relevancia de este método reside en la posibilidad de obtener un marco de la representación de interacción en el cual los operadores relevantes resulten independientes del tiempo.

Aprovechando este procedimiento, se ha estudiado la evolución dinámica de las dispersiones de los operadores de cuadratura de variación lenta (ver las Ecs.(VII.3.2a-b)), para el amplificador paramétrico degenerado. Este enfoque permite describir el comportamiento de squeezing del sistema en una descripción termodinámica. El parámetro de Lagrange β (ver la Ec.(VII.3.8)) está directamente relacionado con la temperatura cuántica del sistema. Es importante darse cuenta de que los resultados aquí obtenidos, para el caso del estado puro ($\beta = \infty$), coinciden con los previamente obtenidos por Gerry et al. (Ref.(9)) usando un enfoque completamente diferente. Para el caso de temperatura distinta de cero ($\beta \neq \infty$), se concluye que: (a) el producto de indeterminación constante se modifica de acuerdo con la Ec.(VII.3.21) (por lo tanto, el mínimo resulta diferente de $1/2$, debido al factor termodinámico $\coth(\beta \Omega/2)$); (b) las zonas de squeezing, rotuladas "A" y "B" en la Fig.4, disminuyen a medida que β varía de ∞ a 0 . De todas maneras, se puede determinar que eventualmente se llega al squeezing para \hat{P}^* o \hat{Q}^* dependiendo del signo de α .

VIII. Dinámica de los Multiplicadores de Lagrange Asociados a Operadores Relevantes Explícitamente Dependientes del Tiempo en el Operador Estadístico de Máxima Entropía.

VIII.1. Introducción.

Como ya fue expuesto en el Capítulo II y utilizado a lo largo de esta tesis, una condición fundamental para la obtención del conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas para los multiplicadores de Lagrange del operador densidad de Máxima Entropía (Ec.(II.3.4)), era que los operadores relevantes asociados fueran independientes del tiempo. Como se vio en el Capítulo anterior, esta restricción dificulta a veces el estudio de ciertos sistemas que involucran operadores relevantes explícitamente dependientes del tiempo. Si bien se dio un método como para sortear la dificultad a través del empleo de la representación de interacción, sería conveniente tener la posibilidad de encontrar la evolución temporal de un operador estadístico que involucrara operadores explícitamente dependientes del tiempo ya sea en la representación de Schrödinger o en la de Heisenberg. Este Capítulo está dedicado a tal efecto. Por razones similares a las comentadas en el Capítulo anterior, se en cuanto a claridad y posibilidad de comparación, se reiterarán aquí conceptos ya expuestos en el Capítulo II.

VIII.2. Multiplicadores de Lagrange para Operadores Relevantes Dependientes del Tiempo.

De acuerdo con lo visto en el Capítulo II, el operador estadístico $\hat{\rho}(t)$ que maximiza la entropía $S = -\text{Tr}(\hat{\rho} \ln \hat{\rho})$ sujeto a los vínculos que provienen del conocimiento de los valores de expectación iniciales de M operadores $\langle \hat{O}_j \rangle = \text{Tr}(\hat{\rho} \hat{O}_j)$ ($j=0, 1, \dots, M$, $\hat{O}_0 = \hat{I} = \text{operador identidad}$), está dado por

$$\hat{\rho}(t) = \exp \left(- \lambda_0 \hat{I} - \sum_{j=1}^M \lambda_j \hat{O}_j \right). \quad (\text{VIII.1.1})$$

Se puede probar¹ que, debido al hecho de que $\hat{\rho}(t)$ obedece la ecuación de Liouville

$$i\hbar \frac{d\hat{\rho}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\rho}], \quad (\text{VIII.1.2})$$

el conjunto de operadores \hat{O}_j originalmente considerado puede tener que ser eventualmente extendido a un conjunto de q "operadores relevantes" seleccionados de forma tal que cierren un álgebra de Lie parcial bajo conmutación con el Hamiltoniano \hat{H}

$$[\hat{H}, \hat{O}_j] = i\hbar \sum_{i=0}^q g_{ij} \hat{O}_i \quad (\text{VIII.1.3})$$

donde los g_{ij} son los elementos de una matriz G de tamaño $(q+1) \times (q+1)$. La Ec.(VIII.1.3) hace que la entropía S como variable dinámica sea una constante de movimiento así como también resulta equivalente al teorema de Ehrenfest generalizado.² Si los q operadores relevantes son *independientes del tiempo*, al combinar las Ecs.(VIII.1.1)-(VIII.1.3) resulta

¹ A.N. Proto, Maximum Entropy Principle and Quantum Mechanics, Proc. XIII International Workshop on Condensed Matter Theories, edited by Valdir Aguilera-Navarro (Plenum Press, 1989).

² D. Otero, A. Plastino, A. N. Proto, and G. Zannoli, Phys. Rev. A 26, 1209 (1982).

$$\frac{d \lambda_i}{d t} = \sum_{j=0}^q g_{ij} \lambda_j \quad (\text{VIII.1.4})$$

donde se ha supuesto la independencia lineal de los distintos λ_i . Resulta entonces obvio que la dependencia temporal de $\hat{\rho}(t)$ proviene de la dependencia temporal de los multiplicadores de Lagrange λ_i (y eventualmente de un Hamiltoniano dependiente del tiempo incluido como operador relevante) (Ref.(2)).

En esta Sección, se derivará la ecuación análoga a la Ec.(VIII.1.4) para el caso en que se tenga que trabajar con un conjunto de operadores relevantes que incluye operadores explícitamente dependientes del tiempo.

A partir de la Ec.(VIII.1.2), es fácil probar que

$$i\hbar \frac{d \ln \hat{\rho}}{d t} = [\hat{H}, \ln \hat{\rho}], \quad (\text{VIII.1.5})$$

y de la Ec.(VIII.1.1) se puede escribir

$$\ln \hat{\rho}(t) = - \sum_{j=0}^q \lambda_j(t) \hat{O}_j(t) \quad (\text{VIII.2.6})$$

donde la eventual dependencia temporal de los operadores está explícitamente indicada. Tomando la derivada temporal de la Ec.(VIII.2.6)

$$\frac{d \ln \hat{\rho}}{d t} = - \sum_{j=0}^q \frac{d \lambda_j}{d t} \hat{O}_j(t) + \lambda_j(t) \cdot \frac{d \hat{O}_j}{d t} \quad (\text{VIII.2.7})$$

Reemplazando la Ec.(VIII.2.7) en la Ec.(VIII.1.5) y suponiendo como antes la relación de clausura dada por la Ec.(VIII.1.3), se obtiene

$$\sum_{j=0}^q \frac{d \lambda_j}{d t} \hat{O}_j(t) + \lambda_j(t) \frac{d \hat{O}_j}{d t} = \sum_{\substack{s=0 \\ r=0}}^q \lambda_s(t) g_{rs} \hat{O}_r(t) \quad (\text{VIII.2.8})$$

Ahora, es conveniente distinguir entre dos posibilidades generales en lo que respecta a la dependencia temporal de los operadores:

a) La dependencia temporal en los operadores es de la forma

$$\hat{O}_j(t) = f_j(t) \hat{\Theta}_j \quad (\text{VIII.2.9})$$

donde los operadores $\hat{\Theta}_j$ ($j=0, \dots, q$) son independientes del tiempo y a su vez linealmente independientes entre sí.

Reemplazando la Ec.(VIII.2.9) en la Ec.(VIII.2.8), y utilizando la independencia lineal de los $\hat{\Theta}_j$, se obtiene

$$\frac{d \lambda_i}{d t} = - \lambda_i \frac{d \ln f_i}{d t} + \sum_{j=0}^q g_{ij} \lambda_j \quad (\text{VIII.2.10})$$

donde debe quedar claro que los elementos g_{ij} se obtienen a partir del cierre del semiálgebra de conmutación del Hamiltoniano con los operadores relevantes dependientes del tiempo según

$$[\hat{H}, \hat{O}_j(t)] = i\hbar \sum_{i=0}^q g_{ij} \hat{O}_i(t) \quad (\text{VIII.2.11})$$

Entonces, para esta dependencia temporal particular en los operadores relevantes, la Ec.(VIII.2.10) reemplaza a la Ec.(VIII.1.4).

b) La dependencia temporal de los operadores es de la forma

$$\hat{O}_j(t) = \sum_{i=0}^q f_{ji}(t) \hat{\Theta}_i \quad (\text{VIII.2.12})$$

donde, al igual que en caso anterior, los operadores $\hat{\Theta}_j$ ($j=0, \dots, q$) son independientes del tiempo y a su vez linealmente independientes entre sí. Esta situación es un caso más general, ya que se está considerando que la dependencia temporal de los operadores $\hat{O}_j(t)$ se debe a una combinación lineal de operadores independientes del tiempo con funciones arbitrarias del tiempo como coeficientes de dicha combinación lineal.

Entonces, si se reemplaza la Ec.(VIII.2.12) en la Ec.(VIII.2.8), se obtiene

$$\sum_{i=0}^q \frac{d \lambda_i}{d t} f_{ij}(t) + \lambda_i(t) \frac{d f_{ij}}{d t} = \sum_{\substack{s=0 \\ r=0}}^q \lambda_s g_{rs} f_{rj} \quad (\text{VIII.2.13})$$

con $j=0, \dots, q$, y donde, como antes, los coeficientes g_{ij} se obtienen a partir de la Ec.(VIII.2.11).

Entonces, tanto las Ecs.(VIII.2.10) como las Ecs.(VIII.2.12) (dependiendo de la dependencia temporal particular de los operadores involucrados) constituyen el conjunto de ecuaciones dinámicas que se buscaba para los multiplicadores de Lagrange relacionados con operadores dependientes del tiempo. Estos conjuntos de ecuaciones resultan los análogos al conjunto usual dado por la Ec.(VIII.1.4), el cual, se insiste, es aplicable solamente cuando se eligen operadores independientes del tiempo. Se ve entonces que el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas (VIII.2.13) es el caso más

general, a partir de la generalidad de la Ec.(VIII.2.12). De esta manera, el sistema (VIII.2.10) resulta un caso particular del sistema (VIII.2.13), si la dependencia temporal en los operadores es de la forma dada por la Ec.(VIII.2.9). Por último, se ve que tanto para (VIII.2.13) como para (VIII.2.10), el sistema original (VIII.1.4) resulta un caso particular.

Para finalizar, cabe destacar que, como era de esperarse, en todos los casos el Teorema de Ehrenfest generalizado resulta, en forma general,

$$\frac{d\langle \hat{O}_i \rangle}{dt} = -\sum_{l=0}^N \langle \hat{O}_l \rangle g_{li} + \langle \frac{\partial \hat{O}_i}{\partial t} \rangle \quad (\text{VIII.2.14})$$

VIII.3. Ejemplos.

VIII.3.A. Invariantes para el convertidor de frecuencia.

Tal como fue expuesto en el Capítulo II, una de las tantas ventajas de utilizar el enfoque del PME para un sistema cuántico es la posibilidad de obtener invariantes dinámicos generales dependientes del tiempo mediante (ver la Ec.(II.3.10))

$$\hat{I}_m(t) = \{-\ln \hat{\rho}(t)\}^m \quad (\text{VIII.3.15})$$

Entonces, como ejemplo de lo expuesto en la Sección anterior, y utilizando la Ec.(VIII.3.15), se hallará en forma simple un invariante explícitamente dependiente del tiempo para el convertidor de frecuencia.

El Hamiltoniano del convertidor de frecuencia se puede escribir como³

³ R. K. Colegrave, P. Croxson and M. A. Mannan, Phys. Lett. A, 131, 407 (1988).

$$\hat{H} = \hbar \omega_1 \hat{a}_1^\dagger \hat{a}_1 + \hbar \omega_2 \hat{a}_2^\dagger \hat{a}_2 + \\ + \hbar k (\hat{a}_2 \hat{a}_1^\dagger e^{-i(\omega_1 - \omega_2)t} + \hat{a}_1 \hat{a}_2^\dagger e^{i(\omega_1 - \omega_2)t}) \quad (\text{VIII.3.16})$$

Si se definen los siguientes operadores dependientes del tiempo

$$\hat{b}_1 = \hat{a}_1 e^{i\omega_1 t} \quad (\text{VIII.3.17a})$$

$$\hat{b}_2 = \hat{a}_2 e^{i\omega_2 t} \quad (\text{VIII.3.17b})$$

el Hamiltoniano se puede reescribir según

$$\hat{H} = \hbar \omega_1 \hat{b}_1^\dagger \hat{b}_1 + \hbar \omega_2 \hat{b}_2^\dagger \hat{b}_2 + \hbar k (\hat{b}_2 \hat{b}_1^\dagger + \hat{b}_1 \hat{b}_2^\dagger) \quad (\text{VIII.3.18})$$

Definiendo $\hat{O}_0 = \hat{I}$, $\hat{O}_1(t) = \hat{b}_1$ y $\hat{O}_2(t) = \hat{b}_2$, y siguiendo lo expuesto antes en la Sección VIII.2.(a), se obtiene

$$\frac{d \lambda_1}{d t} = i k \lambda_2 \quad (\text{VIII.3.19a})$$

$$\frac{d \lambda_2}{d t} = i k \lambda_1 \quad (\text{VIII.3.19b})$$

A partir de las Ecs.(VIII.3.19) y la Ec.(VIII.3.17), es fácil probar que

$$\hat{I}_1(t) = \cos(kt) e^{i\omega_1 t} \hat{a}_1 + i \text{sen}(kt) e^{i\omega_2 t} \hat{a}_2 \quad (\text{VIII.3.20})$$

es un invariante dinámico del convertidor de frecuencia (cf. Ref.(3)).

VIII.3.B. Dinámica de los operadores de cuadratura para el amplificador paramétrico degenerado.

Aquí, en cambio, y para ejemplificar lo expuesto en la Sección anterior, se reencontrarán las ecuaciones de evolución para los multiplicadores de Lagrange asociados a los operadores de cuadratura de variación lenta para el amplificador paramétrico degenerado (ver Ecs.(VII.3.9a) y (VII.3.9b)) que fueron obtenidas en el Capítulo VII a partir del uso del operador densidad en la representación de interacción.

El Hamiltoniano del amplificador paramétrico degenerado se puede escribir como⁴

$$\hat{H} = \hbar \omega_0 \left(\hat{a}^\dagger \hat{a} + \frac{1}{2} \right) + i \frac{\alpha \hbar}{2} \left(e^{-2i\omega_0 t} \hat{a}^{\dagger 2} - e^{2i\omega_0 t} \hat{a}^2 \right) \quad (\text{VIII.3.21})$$

En términos de los operadores de cuadratura de variación lenta

$$\hat{Q}^* = \gamma_1 (e^{-i\omega_0 t} \hat{a}^\dagger + e^{i\omega_0 t} \hat{a}) \quad \left(\text{con } \gamma_1^2 = \frac{\hbar}{2 m_0 \omega_0} \right) \quad (\text{VIII.3.22a})$$

$$\hat{P}^* = i\gamma_2 (e^{-i\omega_0 t} \hat{a}^\dagger - e^{i\omega_0 t} \hat{a}) \quad \left(\text{con } \gamma_2^2 = \frac{\hbar m_0 \omega_0}{2} \right) \quad (\text{VIII.3.22b})$$

el Hamiltoniano se puede escribir como

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^{*2}}{2 m_0} + \frac{1}{2} m_0 \omega_0^2 \hat{Q}^{*2} + \alpha \frac{1}{2} (\hat{P}^* \hat{Q}^* + \hat{Q}^* \hat{P}^*) \quad (\text{VIII.3.23})$$

Definiendo $\hat{O}_0 = \hat{I}$, $\hat{O}_1(t) = \hat{Q}^*$ y $\hat{O}_2(t) = \hat{P}^*$, se estaría trabajando con operadores relevantes explícitamente dependientes del tiempo de la forma (VIII.2.12). Siguiendo ahora lo expuesto en la Sección VIII.2(b), se tiene que el sistema de ecuaciones

⁴ J. Aliaga, G. Crespo and A.N. Proto, Phys. Rev. A 44, 2066 (1991).

diferenciales acopladas para los multiplicadores de Lagrange asociados (Ec. (VIII.2.13)) resultan en este caso

$$\gamma_1 \frac{d \lambda_1}{d t} + i \gamma_2 \frac{d \lambda_2}{d t} = - \gamma_1 \alpha \lambda_1 + i \gamma_2 \alpha \lambda_2 \quad (\text{VIII.3.24a})$$

$$\gamma_1 \frac{d \lambda_1}{d t} - i \gamma_2 \frac{d \lambda_2}{d t} = - \gamma_1 \alpha \lambda_1 - i \gamma_2 \alpha \lambda_2 \quad (\text{VIII.3.24b})$$

Sumando y restando las Ecs. (VIII.3.24a) y (VIII.3.24b), se puede ver que dichas ecuaciones resultan equivalentes a

$$\frac{d \lambda_1}{d t} = - \alpha \lambda_1 \quad (\text{VIII.3.25a})$$

$$\frac{d \lambda_2}{d t} = \alpha \lambda_2 \quad (\text{VIII.3.25b})$$

que resultan ser las mismas ecuaciones que las (VII.3.9a) y (VII.3.9b). La ventaja del enfoque utilizado aquí es que no se necesita el uso de una descripción intermedia como lo es la representación de interacción, y que la dinámica resulta enteramente resuelta ya sea en la representación de Schrödinger o en la de Heisenberg. Si se quiere, se puede considerar inclusive este resultado como una comprobación alternativa de que los multiplicadores de Lagrange no dependen de la representación elegida, tal como fuera expuesto en el Capítulo VII.

IX. Conclusiones.

En este breve Capítulo, se efectuará un resumen de los temas abarcados por la presente tesis, teniendo en cuenta que las principales conclusiones fueron expuestas al final de cada respectivo Capítulo.

El marco formal general sobre el que se han desarrollado las investigaciones es el Principio de Máxima Entropía en el contexto de la Teoría de la Información. Dicho marco provee como pieza clave para el estudio de un sistema físico la correcta descripción del mismo a partir de su operador densidad u operador estadístico.

En los Capítulos III, IV y V se estudiaron distintos enfoques históricamente propuestos para resolver el aún abierto problema de la cuantificación de la disipación como problema de un solo cuerpo. En particular, en los Capítulos III y IV se trataron Hamiltonianos que resultan ser explícitamente dependientes del tiempo. Dichas cuantificaciones de los procesos disipativos fueron críticamente examinadas, concluyéndose que o bien el modelo presenta indeseables ambigüedades (Hamiltoniano de Hasse, ver Cap. III), o bien el modelo no corresponde al problema en consideración (Hamiltoniano de Kanai-Caldirola, ver Cap. IV) o bien el modelo es intrínsecamente incorrecto (cuantificación de las ecuaciones de Hamilton generalizadas, ver Cap. V).

Sin embargo, la utilización de Hamiltonianos explícitamente dependientes del tiempo para el estudio de sistemas físicos originó la profundización de las implicancias físicas de los operadores relevantes incluidos en el operador densidad. De esta manera, se estudió la aparición de estados coherentes y estados squeezed tanto para temperatura cero como para temperatura distinta de cero y su conexión con los operadores relevantes (ver Cap. VI). La posibilidad

de utilizar el método con Hamiltonianos dependientes del tiempo hizo posible el estudio de dichos estados no sólo para el oscilador armónico de frecuencia variable, sino también para el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola, para así poder comprar los resultados obtenidos por este método con los previamente expuestos en la literatura. La posibilidad del estudio de estados coherentes y estados squeezed para temperatura distinta de cero es un éxito de este formalismo, que no ha sido antes presentado.

Como continuación del estudio iniciado, se realizó una reformulación del Principio de Máxima Entropía en la representación de interacción, de una manera clara y no estudiada antes (ver Cap. VII). Se exploró la ventaja de la utilización de esta representación en el caso en el que los operadores relevantes transformados resulten independientes del tiempo, pudiendo aplicarse la ecuaciones de evolución usuales para los multiplicadores de Lagrange asociados.

Finalmente, y para dar un carácter general al enfoque de operadores relevantes dentro del Principio de Máxima Entropía, se realizó una novedosa reformulación de las ecuaciones para los multiplicadores de Lagrange asociados con operadores con dependencia temporal explícita (ver Cap. VIII). Queda así planteado un formalismo de la mecánica estadística cuántica que permite tratar en forma precisa no sólo Hamiltonianos dependientes del tiempo, sino también operadores relevantes dependientes del tiempo, cuya utilidad y posibilidad de aplicación a numerosos problemas de la física es en sí misma destacable.

Indice.

I. Introducción	1
II. Mecánica Estadística, Mecánica Cuántica y Teoría de la Información	5
II.1. Mecánica Estadística y Mecánica Cuántica	5
II.2. Teoría de la Información y Principio de Máxima Entropía	7
II.3. Evolución temporal de valores de expectación, multiplicadores de Lagrange y coeficientes de correlación. Invariantes dinámicos	10
III. Hamiltoniano General de Hasse	16
III.1. Introducción	16
III.2. El Hamiltoniano General de Fricción	18
IV. Hamiltoniano de Kanai-Caldirola	33
IV.1. Introducción	33
IV.2. Osciladores Armónicos de Masa Variable	39
IV.2.A. Descripción del oscilador armónico de masa variable en el marco Newtoniano	39
IV.2.B. Oscilador Armónico de Masa Variable. Marco Lagrangiano	43
IV.2.C. Oscilador Armónico de Masa Variable. Marco Hamiltoniano	46
IV.3. Enfoque de Teoría de la Información al Problema	51
Apéndice A	63
Apéndice B	64
V. Cuantificación de las Ecuaciones de Hamilton Generalizadas	65

V.1. Introducción	65
V.2. Descripción clásica de sistemas disipativos	65
V.3. Descripción cuántica	68
VI. Estados Squeezed y el Principio de Máxima Entropía	75
VI.1. Introducción.	75
VI.2. Operador densidad, estados coherentes y estados squeezed para el oscilador armónico	78
VI.3. Oscilador armónico con frecuencia constante ...	84
VI.3.A. Estados coherentes	86
VI.3.B. Estados squeezed	88
VI.4. Oscilador Armónico con Frecuencia Variable	93
VI.5. Operador densidad, estados coherentes y estados squeezed para el Oscilador Armónico Generalizado	103
VI.5.A. Diagonalización de la matriz $\hat{\rho}$	109
VI.5.B. Estudio de la aparición de estados coherentes y estados squeezed para el caso de temperatura cero	114
VI.5.B.1. Comportamiento Squeezing	116
VI.5.B.2. Estados coherentes generalizados	123
VI.5.C. Estudio de la aparición de estados coherentes y estados squeezed para el caso de temperatura distinta de cero	125
VI.6. Estados squeezed y estados coherentes para el Hamiltoniano de Kanai-Caldirola	128
VII.Principio de Máxima Entropía en la Representación de Interacción en el Tratamiento de Hamiltonianos y Operadores Relevantes Dependientes del Tiempo	136

VII.1. Introducción	136
VII.2. Principio de Máxima Entropía en la Representación de Interacción	140
VII.3. Ejemplo: Amplificador Paramétrico Degene- rado y Estados Squeezed	145
VIII. Dinámica de los Multiplicadores de Lagrange Asociados a Operadores Relevantes Explícitamente Dependientes del Tiempo en el Operador Estadístico de Máxima Entropía	156
VIII.1. Introducción	156
VIII.2. Multiplicadores de Lagrange para Operadores Relevantes Dependientes del Tiempo ...	156
VIII.3. Ejemplos	161
VIII.3.A. Invariantes para el convertidor de frecuencia	161
VIII.3.B. Dinámica de los operadores de cuadratura para el amplificador paramétrico degenerado	163
IX. Conclusiones	165