

## Tesis de Posgrado

# Elastoplasticidad dinámica

Muler, Nora Edith

1992

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Muler, Nora Edith. (1992). Elastoplasticidad dinámica. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2486\\_Muler.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2486_Muler.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Muler, Nora Edith. "Elastoplasticidad dinámica". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1992.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2486\\_Muler.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2486_Muler.pdf)

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**“ELASTOPLASTICIDAD DINAMICA”**

**NORA EDITH MULER**

Director Tesis:  
Dr. Enrique Lami Dozo

Lugar de Trabajo:  
Instituto Argentino de Matemática

Tesis presentada para optar al título de: *Doctor en Ciencias Matemáticas*

- 1992 -



E. Lami Dozo



NORA MULDER.

Tesis.  
2486  
y. 2.

*A mis padres.  
A Fouly, a Nira, a Ivy  
y a Rajmiel.*

## **Agradecimientos**

Quiero agradecer al Dr. Enrique Lami Dozo quien me ha guiado y apoyado permanentemente.

Al Dr. Pierre Suquet, investigador del CNRS (Francia), quien me ha inspirado muchas de las ideas que figuran en este trabajo.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por otorgarme becas durante las cuales realicé esta tesis.

Al Instituto Argentino de Matemática por permitirme realizar este trabajo en sus instalaciones.

*Nora Muler.*

# Indice

<b>Introducción</b>	1
<b>Capítulo 1: Herramientas matemáticas</b>	5
1.1. Algunas definiciones y resultados del análisis funcional y convexo	5
1.2. Aproximación abstracta a los problemas de evolución semilineales	10
<b>Capítulo 2: Modelización de las leyes constitutivas</b>	13
2.1. Deformaciones y tensiones	13
2.2. Ecuación de movimiento	13
2.3. Aspectos fenomenológicos y reológicos	14
2.4. Termodinámica y variables de estado	14
2.5. Aplicaciones	16
2.6. Ejemplos de convexos de plasticidad	21
<b>Capítulo 3: Plasticidad sin endurecimiento</b>	22
3.1. Algunas definiciones e hipótesis de regularidad	22
3.2. Evolución dinámica de los materiales elasto-viscoplásticos sin endurecimiento	23
3.3. Evolución dinámica de los materiales elásticos perfectamente plásticos	25
<b>Capítulo 4: Plasticidad con endurecimiento lineal</b>	38
4.1. Evolución dinámica con endurecimiento lineal	38
4.2. Resultados adicionales de regularidad para la elasto-plasticidad con endurecimiento positivo	40
<b>Capítulo 5: Plasticidad con endurecimiento no lineal</b>	46
5.1. Algunas definiciones e hipótesis	46
5.2. Evolución dinámica de los materiales elasto-viscoplásticos con endurecimiento	47
5.3. Evolución dinámica de los materiales elasto-plásticos con endurecimiento	52
<b>Capítulo 6: Un esquema implícito</b>	58
6.1. Planteo del esquema implícito	58
6.2. Estimaciones a priori	61
6.3. Pasaje al límite $N \rightarrow +\infty$	64

6.4. Condiciones iniciales	65
6.5. Condiciones de contorno para $\sigma$	65
6.6. Convexo de plasticidad	66
6.7. Ecuación de movimiento	66
6.8. Ley constitutiva	66
<b>Referencias</b>	<b>70</b>

,

# INTRODUCCION

El objeto del presente trabajo es estudiar la evolución dinámica de los materiales elastoviscoplasticos y elastoplasticos con o sin endurecimiento. Se ha analizado en cada caso la existencia, unicidad y regularidad de solución, introduciéndose también un esquema implícito de aproximación para la elastoplasticidad perfecta.

La evolución cuasiestática de este tipo de materiales ha sido muy estudiada en los últimos veinte años. Se pueden citar, entre otros, a Duvaut-Lions [6], Johnson [10], Strang-Temam [13], Temam [16], Suquet [14] y [15]. En cambio el estudio riguroso, desde el punto de vista matemático, de la evolución dinámica es relativamente nuevo. Es de destacar el trabajo de Anzelloti-Luckhaus [1], sobre elastoplasticidad dinámica.

Se expondrá a continuación un breve comentario sobre cada uno de los capítulos que componen la tesis.

**Capítulo 1:** Se introducen las herramientas matemáticas que se necesitarán en los capítulos subsiguientes. Espacios de Sobolev, espacios de tensores relativamente nuevos como  $BD$  así como algunos resultados del análisis convexo, componen la primera sección de este capítulo. En la segunda sección se exponen los principales resultados de la teoría de operadores maximales monótonos, y su aplicación a la resolución de ecuaciones de evolución semilineales. Los resultados de este capítulo se encuentran en [2], [3], [10], [15] y [16].

**Capítulo 2:** El conocimiento del estado termodinámico de un material no elástico, necesita el conocimiento de la historia de las variables observables del sistema. En los modelos tratados en este trabajo, se puede describir el estado del material en cada instante, conociendo un número finito de variables, llamadas internas, evaluadas en ese mismo instante. En este capítulo se desarrolla la modelización de las leyes de comportamiento por medio de variables internas, reuniendo las ideas fundamentales que se pueden hallar en [8], [9], [11] y [15].

En 2.1 se introduce la noción de tensión y deformación asumiéndose la hipótesis de pequeñas deformaciones.

En 2.2 se formula la ecuación de movimiento. Como se considerará la evolución dinámica, la aceleración no es necesariamente despreciable.

En 2.3 se describen ensayos mecánicos como el de carga-descarga y algunas conclusiones cualitativas que se extraen de estos experimentos.

En 2.4 se desarrollan brevemente los principios básicos de la termodinámica y como estos dan origen a la noción de variables internas, que son las que rigen el comportamiento

del material. También se introduce la hipótesis de normalidad, es decir se supone la existencia de un potencial de disipación convexo y semicontinuo inferiormente, lo que permite enunciar de una manera satisfactoria las leyes constitutivas de una clase importante de materiales, en particular los que se tratarán en el presente trabajo.

En 2.5 se formulan las leyes constitutivas para la elastoplasticidad perfecta, elastoplasticidad con endurecimiento y elastoviscoplasticidad, definiendo en cada caso el potencial de disipación correspondiente y la noción de convexo de plasticidad.

En 2.6 se dan los dos ejemplos clásicos de convexos de plasticidad, el de Von Mises y el de Tresca.

**Capítulo 3:** Se estudia la evolución dinámica de materiales elastoviscoplasticos y elastoplásticos sin endurecimiento. Este tópico ha sido también desarrollado en [1], pero en el presente trabajo se ha elegido otro enfoque, generalizando las técnicas empleadas para la evolución cuasiestática en [6], [10] y [14], entre otros.

En 3.1 se introducen hipótesis de regularidad y notaciones.

En 3.2 se estudia la elastoviscoplasticidad de tipo Perzyna. Se prueba la existencia y unicidad de solución aplicando la teoría de semigrupos generados por operadores monótonos maximales.

En este modelo, las incógnitas son  $\sigma$  y  $v$  (tensión y velocidad) de un cuerpo que ocupa el dominio acotado  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , que deben satisfacer:

la ley constitutiva

$$\begin{aligned} \varepsilon(v) &= A\dot{\sigma} + \partial\varphi_\mu(\sigma) \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \text{con } \varphi_\mu(\sigma) &= \frac{1}{2\mu} |\sigma - P_K\sigma|_{\mathbb{R}^9}^2, \text{ y } K \text{ el convexo de plasticidad;} \end{aligned}$$

la ecuación de movimiento

$$\dot{v} = \operatorname{div} \sigma + f \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (\rho = 1);$$

las condiciones iniciales y de contorno mixtas, es decir se impone en una parte del borde la velocidad  $v$  y en la restante la fuerza de contacto.

Se obtiene la existencia y unicidad de solución (ver (3.16)).

En 3.3 se trata la evolución dinámica de materiales elastoplásticos sin endurecimiento.

Nuevamente las incógnitas son  $\sigma$  y  $v$ , que deben satisfacer:

la ley constitutiva

$$\begin{aligned} \varepsilon(v) &= A\dot{\sigma} + \partial I_K(\sigma) \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \sigma(x, t) &\in K \text{ c.t.p.,} \end{aligned}$$



con  $K$  el convexo de plasticidad e  $I_K$  el indicador de  $K$ ;  
la ecuación de movimiento

$$\operatorname{div} \sigma + f = \dot{v} \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \quad (\rho = 1);$$

las condiciones iniciales y de contorno mixtas.

Lo que se prueba es que el límite de la solución del problema de viscoplasticidad (planteado en 3.1) cuando  $\mu \rightarrow 0$  es la solución elastoplástica, tal como sucede en la evolución cuasiestática. La técnica utilizada es, básicamente, la de realizar estimaciones a priori, lo que provee una convergencia débil (ver (3.44)), en este caso se prueba además la convergencia fuerte (ver (3.49)).

Análogamente a los resultados obtenidos en la evolución cuasiestática, la regularidad de la velocidad  $v$  no es suficiente para asegurar que cumpla la condición de contorno. Además la ley constitutiva que satisface la solución es una ley débil. En cambio, contrariamente a lo que pasaba en la evolución cuasiestática, hay unicidad de la velocidad  $v$  y no hay restricciones con respecto al tamaño de las fuerzas de volumen  $f$  que condicionen la existencia de solución del problema.

**Capítulo 4:** Se estudia la evolución dinámica de materiales elastoplásticos con endurecimiento lineal. La ley constitutiva es en este caso:

$$\begin{aligned} L\dot{\Sigma} + \partial I_K(\Sigma) \ni (\varepsilon(v), 0) \quad \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \Sigma(x, t) \in K \quad \text{c.t.p.,} \end{aligned}$$

con  $K$  el convexo de plasticidad,  $\Sigma$  el tensor generalizado de tensiones que contiene la tensión  $\sigma$  y el endurecimiento,  $L$  el tensor de elasticidad generalizado y  $v$  la velocidad. Además se deben satisfacer la ecuación de movimiento, condiciones iniciales y de contorno mixtas.

En 4.1 se extienden las técnicas del Capítulo 3, obteniéndose la existencia y unicidad de la solución  $(\Sigma, v)$ . Como en el Capítulo 3  $(\Sigma, v)$  satisface sólo débilmente la ley constitutiva (ver (4.8)), además la velocidad  $v$  no satisface necesariamente la condición de contorno.

En 4.2 se prueba que cuando el endurecimiento es positivo (ver definición (4.13)) y el convexo de plasticidad es de tipo Von Mises, existe una mayor regularidad en la velocidad con respecto a la coordenada espacial. Como consecuencia, la solución  $(\Sigma, v)$  cumple la ley constitutiva fuerte y la velocidad satisface la condición de contorno. Por consiguiente se ha confirmado para la evolución dinámica lo que ya se sabía para la evolución cuasiestática (ver [10] y [11]), es decir que el endurecimiento positivo regulariza en un cierto sentido el problema de la plasticidad.

**Capítulo 5:** En este capítulo se estudia la evolución dinámica de materiales elastoplásticos y elastoviscoplasticos con endurecimiento no lineal. Esto significa que la energía

libre del sistema no es necesariamente cuadrática, como se suponía para los materiales con endurecimiento lineal, sino que es una función convexa que satisface condiciones de regularidad y coercividad.

En 5.1 se precisan las hipótesis sobre la energía libre  $\Phi$ .

En 5.2 se estudia la evolución viscoplástica de tipo Perzyna con endurecimiento no lineal.

Las incógnitas son la tensión  $\sigma$ , la velocidad  $v$  y las variables internas  $\alpha$ . La ley constitutiva es, en este caso,

$$\begin{pmatrix} \varepsilon(v) - A\dot{\sigma} \\ -\dot{\alpha} \end{pmatrix} = \frac{1}{\mu} ((\sigma, G(\alpha)) - P_K(\sigma, G(\alpha))) \quad \text{en } \Omega \times (0, T)$$

con  $(\sigma(x, t), G(\alpha(x, t))) \in K$  c.t.p.

donde  $G = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ ,  $\Phi$  la energía libre.

Además se debe satisfacer la ecuación de movimiento, las condiciones iniciales y de contorno mixtas.

La existencia y unicidad de solución se prueba en dos etapas, usando la teoría de los operadores maximales monótonos. En la primera etapa se obtiene la existencia y unicidad local (ver sección 5.2.1), mientras que en la segunda etapa se logra una estimación a priori, lo que permite asegurar la existencia global.

Las estimaciones a priori obtenidas en la sección 5.2 permiten probar en 5.3 que una sucesión de soluciones del problema viscoplástico, cuando  $\mu \rightarrow 0$ , tiene un límite débil. Dicho límite satisface una ecuación constitutiva débil (ver sección 5.3.6) del problema elastoplástico y la ecuación de movimiento. Además,  $\sigma$  satisface las condiciones de contorno. Estos resultados se prueban con hipótesis adicionales a las enunciadas en la sección 5.1 sobre el convexo  $K$  y la energía libre  $\Phi$ .

**Capítulo 6:** Dado el problema de la evolución dinámica de materiales elastoplásticos perfectos, el objetivo de este capítulo es construir una sucesión de soluciones del problema discretizado en el tiempo que converja hacia la solución obtenida en el Capítulo 3. Con este fin, se construye un esquema implícito con respecto al tiempo.

Primero se prueba que el esquema implícito está bien planteado, es decir la existencia y unicidad de solución para cada paso de la discretización, usando fundamentalmente el teorema de punto silla visto en el Capítulo 1 (ver sección 6.1). Luego se realizan estimaciones a priori del conjunto de soluciones halladas, lo que permite obtener un límite débil, probándose a continuación que este límite es, efectivamente, la solución del problema elastoplástico considerado.

Los resultados obtenidos son análogos a los de [5], donde se planteaba un esquema implícito similar para la evolución cuasiestática.

## CAPITULO 1: Herramientas matemáticas

### 1.1. Algunas definiciones y resultados del análisis funcional y convexo

Se supone  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $\Omega$  abierto acotado con  $\partial\Omega$  de clase  $C^1$ .

#### 1.1.1. Espacios de Sobolev.

Se define, para  $1 \leq p \leq +\infty$ ,

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega), \quad D^\alpha f \in L^p(\Omega) \quad \text{si } |\alpha| \leq m\},$$

con  $m \geq 1$  natural.

Es un espacio de Banach provisto de la norma:

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left( \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}.$$

Cuando  $p = 2$  se nota  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$  que resulta ser un espacio de Hilbert con el producto escalar

$$(f_1, f_2)_{H^m(\Omega)} = \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha f_1, D^\alpha f_2).$$

#### Traza de $H^1$ .

Existe una única aplicación lineal y continua  $\gamma_0 : H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\partial\Omega)$  tal que

$$\gamma_0 v = v \quad \text{sobre } \partial\Omega \quad \text{cuando } v \in C^1(\bar{\Omega}).$$

La imagen de  $H^1(\Omega)$  es notada  $H^{1/2}(\partial\Omega)$ , es un subespacio de  $L^2(\partial\Omega)$  que es un Hilbert. Se notará  $\gamma_0 f = f$ .

**Lema de Gronwall** (ver [4]).

Sea  $T > 0$ ,  $\lambda \in L^1(0, T)$ ,  $\lambda \geq 0$  c.t.p. y  $C_1, C_2 \geq 0$ . Sea  $\varphi \in L^1(0, T)$ ,  $\varphi \geq 0$  c.t.p. con  $\lambda\varphi \in L^1(0, T)$  y

$$\varphi(t) \leq C_1 + C_2 \int_0^t \lambda(s)\varphi(s)ds \quad \text{c.t.p. en } t \in (0, T),$$

entonces

$$\varphi(t) \leq C_1 \exp \left( C_2 \int_0^t \lambda(s) ds \right) \quad \text{c.t.p. en } t \in (0, T).$$

COROLARIO. En particular si  $C_1 = 0$ ,  $\varphi = 0$  c.t.p.

### 1.1.2. Espacios de tensores (ver [14], [16]).

Se define el espacio de tensores simétricos en  $L^2$ :

$$L^2(\Omega)_s^{n^2} = \{ \tau / \tau = (\tau_{ij}), \tau_{ij} = \tau_{ji}, \tau_{ij} \in L^2(\Omega) \quad 1 \leq i, j \leq n \}.$$

Es un espacio de Hilbert dotado con el producto escalar de  $L^2(\Omega)^{n^2}$ .

Se define el espacio ligado al operador divergencia:

$$Y = \{ \tau \in L^2(\Omega)_s^{n^2}, \operatorname{div} \tau \in L^2(\Omega)^n \}, \text{ con } (\operatorname{div} \tau)_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j};$$

que es un espacio de Hilbert dotado con el producto escalar

$$(\sigma, \tau)_{L^2(\Omega)^{n^2}} + (\operatorname{div} \sigma, \operatorname{div} \tau)_{L^2(\Omega)^n}.$$

### Teorema de trazas para $Y$ .

Existe una única aplicación lineal continua  $\gamma_\eta : Y \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega)$  tal que  $\gamma_\eta(\sigma) = \sigma \cdot \eta$  sobre  $\partial\Omega$  para  $\sigma \in C^1(\bar{\Omega})$  y  $\eta$  la normal exterior unitaria.

$H^{-1/2}(\partial\Omega)$  se define como el dual de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  para el producto de dualidad que extiende al de  $L^2(\partial\Omega)$

Además, valen las fórmulas de Green generalizadas, es decir, dada  $u \in H^1(\Omega)^n$ , se cumple

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla u \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \gamma_\eta(\sigma) \, ds$$

y

$$\int_{\Omega} \sigma \varepsilon(u) \, dx + \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma u \, dx = \int_{\partial\Omega} u \gamma_\eta(\sigma) \, ds,$$

$$\text{con } (\nabla u)_{ij} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j}, \varepsilon(u)_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right).$$

Se notará  $\gamma_\eta(\sigma) = \sigma \cdot \eta$ .

En elasticidad aparece naturalmente el espacio ligado al operador deformación  $\varepsilon$ , definido como:

$$X = \{u \in L^2(\Omega)^n, \varepsilon(u)_{ij} \in L^2(\Omega), 1 \leq i, j \leq n\},$$

que es un espacio de Hilbert dotado con el producto escalar

$$(u, v)_{L^2(\Omega)^n} + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_{L^2(\Omega)^{n^2}}.$$

De la desigualdad de Korn (ver Duvaut–Lions [8]), que se enunciará a continuación, se deduce que este nuevo espacio no es otro que el ya conocido  $H^1(\Omega)^3$ .

**Desigualdad de Korn.**

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx \leq C(\Omega) \left( \int_{\Omega} |u|^2 dx + \int_{\Omega} |\varepsilon(u)|^2 dx \right).$$

Otro espacio, mucho más débil, que surge del mismo operador deformación  $\varepsilon$ , es el espacio  $BD$ , que surge naturalmente de la plasticidad y que fue estudiado e introducido por P. Suquet [14],[15] y R. Temam [16]. Se define del siguiente modo:

$$BD(\Omega) = \{u \in L^1(\Omega)^n, \varepsilon(u)_{ij} \in M_1(\Omega) \quad 1 \leq i, j \leq n\},$$

con  $M_1$  el espacio de medidas acotadas sobre  $\Omega$ . Este espacio es el dual de un espacio de Banach.

$BD(\Omega)$  es a su vez un espacio de Banach, dotado con la norma

$$\|u\|_{BD(\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)^n} + \sum_{i,j=1}^n \|\varepsilon(u)_{ij}\|_{M_1(\Omega)}.$$

**Teorema de trazas para  $BD$ .**

Existe una aplicación  $\gamma : BD(\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega)^n$  lineal, continua y suryectiva tal que

$$\gamma(u) = u \quad \text{sobre } \partial\Omega, \text{ para } u \in C^1(\bar{\Omega})$$

y satisface una fórmula de Green

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi dx + \int_{\Omega} \varphi \varepsilon(u) dx = \int_{\partial\Omega} \gamma(u) \varphi \eta ds,$$

con  $\varphi \in C^1(\bar{\Omega})_s^{n^2}$ .

El teorema proporciona una noción débil de traza, ya que la traza de un elemento de  $BD(\Omega)$ , no es una función continua de la superficie sobre la cual se la considera. En este caso se ha perdido la unicidad, ya que es posible demostrar (ver [14], [16]) que un campo de vectores de  $BD(\Omega)$  puede tener dos trazas distintas, de un lado y del otro de una superficie orientable contenida en  $\Omega$ .

### 1.1.3. Espacios de funciones a valores vectoriales (ver [3], [4]).

Se considera  $I$  un intervalo abierto y acotado en  $\mathbb{R}$ ,  $X$  un espacio de Banach. Se nota  $L^p(I, X)$  al conjunto de funciones medibles  $f : I \rightarrow X$  tales que  $t \rightarrow \|f(t)\|$  es una aplicación en  $L^p(I)$ . Son espacios de Banach, provistos de las normas:

$$\|f\|_{L^p(I, X)} = \left( \int_I \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty$$

$$\|f\|_{L^\infty(I, X)} = \sup_{t \in I} \|f(t)\|_X \quad \text{si } p = +\infty.$$

Del mismo modo se definen los espacios de Sobolev a valores vectoriales

$$W^{m,p}(I, X) = \{f \in L^p(I, X), \partial_i^i f \in L^p(I, X) \quad 1 \leq i \leq m\}.$$

En estos espacios se pueden demostrar entre otros (ver [3], [4]) los siguientes resultados:

- i) Si  $X$  es un espacio de Banach reflexivo y  $1 < p < +\infty$ , entonces el dual de  $L^p(I, X)$  resulta ser  $L^{p'}(I, X')$  con  $X'$  el dual de  $X$  y  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .
- ii) Si  $X$  es un Hilbert, el espacio  $L^2(I, X)$  es también un Hilbert para el producto escalar

$$\int_I (f(s), g(s))_X ds.$$

iii) Si  $1 \leq p \leq +\infty$ , son equivalentes:

- a)  $f \in W^{1,p}(I, X)$ .
- b) Existe  $g \in L^p(I, X)$ , tal que

$$\delta^h f \rightarrow g \quad \text{en } L^p(I, X) \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty$$

$$\delta^h f \rightarrow g \quad \text{en } L^\infty(I, X) \quad \text{si } p = +\infty$$

$$\text{con } \delta^h f(t) = \frac{f(t+h) - f(t)}{h}.$$

Resulta entonces  $g = \partial_t f$ .

#### 1.1.4. Algunos resultados del análisis convexo (ver [7], [2]).

Se enunciarán los resultados del análisis convexo que han sido fundamentales para este trabajo.

##### **Teorema de semicontinuidad débil.**

Sea  $\varphi : X \rightarrow (-\infty, +\infty]$  con  $X$  un Banach y  $\varphi$  convexa semicontinua inferiormente, entonces  $\varphi$  es semicontinua inferiormente para la topología débil de  $X$ .

En particular, si  $x_n \rightarrow x$  débilmente en  $X$ , vale

$$\varphi(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \varphi(x_n).$$

##### **Teorema de punto silla o minimax (se da una de las variantes).**

Sea un operador  $L : A_1 \times A_2 \rightarrow \overline{\mathbf{R}}$  (a  $L$  se lo llama lagrangiano), con  $A_1 \subset X_1$ ,  $A_2 \subset X_2$ ,  $X_1$  y  $X_2$  espacios de Banach,  $A_1$  y  $A_2$  conjuntos convexos, cerrados y no vacíos, tales que

•  $\forall u \in A_1, p \rightarrow L(u, p)$  con  $p \in A_2$  es una aplicación cóncava y semicontinua superiormente.

•  $\forall p \in A_2, u \rightarrow L(u, p)$  con  $u \in A_1$  es una aplicación convexa y semicontinua inferiormente.

$$\exists p_0 \in A_2 \text{ tal que } \lim_{\substack{\|u\| \rightarrow +\infty \\ u \in A_1}} L(u, p_0) = +\infty.$$

$$\exists u_0 \in A_1 \text{ tal que } \lim_{\substack{\|p\| \rightarrow +\infty \\ p \in A_2}} L(u_0, p) = -\infty.$$

Con estas hipótesis se deduce

$L$  posee un punto silla o minimax, es decir, existe  $(\bar{u}, \bar{p}) \in A_1 \times A_2$  tal que  $L(\bar{u}, p) \leq L(\bar{u}, \bar{p}) \leq L(u, \bar{p}), \forall u \in A_1, p \in A_2$ . Además,

$$L(\bar{u}, \bar{p}) = \min_{u \in A_1} \sup_{p \in A_2} L(u, p) = \max_{p \in A_2} \inf_{u \in A_1} L(u, p).$$

### **Noción de subdiferencial.**

DEFINICIONES:

Se dice que una función  $F : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  es *subdiferenciable* en  $u \in X$ , si tiene una función afín continua minorante tal que su valor en el punto  $u$  coincida con el de  $F$ .

El *subdiferencial* de  $F$  en  $u$  (notado  $\partial F(u)$ ) está formado por los  $u^* \in X'$  (con  $X'$  se nota el dual de  $X$ ) tal que  $\langle u^*, v - u \rangle + F(u) \leq F(v) \quad \forall v \in X$ .

### **Propiedades del subdiferencial.**

- i) Si  $F$  es convexa, finita y continua en el punto  $u \in X$ , entonces  $F$  es subdiferenciable en  $u$ .
- ii) Dados  $u_1^* \in \partial F(u_1)$ ,  $u_2^* \in \partial F(u_2)$  se satisface

$$\langle u_1^* - u_2^*, u_1 - u_2 \rangle \geq 0.$$

### **Funcional de Minkowski de un convexo.**

Sea  $C \subset X$  un convexo cerrado con  $0 \in C$ , se define  $\forall x \in X$ ,  $J(x) = \inf\{\alpha > 0 / \alpha^{-1}x \in C\}$  el *funcional de Minkowski* de  $C$ . Se verifica entonces:

$$C = \{x \in X / J(x) \leq 1\}.$$

## **1.2. Aproximación abstracta a los problemas de evolución semi-lineales**

### **1.2.1. Problemas de evolución lineales ([2], [4]).**

DEFINICIÓN. Sea  $X$  un espacio de Hilbert,  $D(A) \subset X$  denso y un operador lineal  $A : D(A) \rightarrow X$ .

$A$  es disipativo (respectivamente  $-A$  monótono) sii  $\langle Au, u \rangle_H \leq 0 \quad \forall u \in D(A)$ .

$A$  es  $m$ -disipativo (respectivamente  $-A$  maximal monótono) sii  $A$  es disipativo y además  $\forall f \in X, \forall \lambda > 0 \quad \exists u \in D(A)$  tal que  $u - \lambda Au = f$ , o sea  $(I - \lambda A)$  es un operador suryectivo.



### **Teorema de Hille–Yoshida.**

Sea  $A : D(A) \rightarrow X$   $m$ -disipativo con  $D(A)$  dominio denso. Se puede construir  $T(t) : X \rightarrow X$  para cada  $t \geq 0$ , semigrupo de operadores lineales continuos de contracción generados por  $A$ , tal que si  $u_0 \in D(A)$ ,  $T(t)u_0$  es la única solución del problema

$$\begin{cases} u \in C^0([0, +\infty), D(A)) \cap C^1([0, +\infty), X) \\ \frac{d}{dt} u(t) = Au(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

### **Propiedades de los semigrupos de contracción.**

Sea  $\{T(t); t \geq 0\}$ , la familia de operadores lineales continuos generados por  $A$ , tal que forman un semigrupo de contracción en  $X$ , es decir  $\|T(t)\| \leq 1$  con  $T(0) = Id$ ,  $T(t+s) = T(t) \cdot T(s) \quad \forall t, s \geq 0$  y  $T(t)x \in C([0, +\infty), X) \quad \forall x \in X$ ; entonces

- i)  $D(A) = \left\{ x \in X / \frac{T(h)x - x}{h} \text{ tiene un límite en } X \text{ cuando } h \downarrow 0 \right\}$  es un subespacio denso en  $X$
- ii)  $T(t) : X \rightarrow D(A) \quad \forall t > 0$
- iii)  $Ax = \lim_{h \downarrow 0} \frac{T(h)x - x}{h} \quad \forall x \in D(A)$  define un operador  $m$ -disipativo con el que se reconstruye  $\{T(t)\}$

### **Ecuaciones lineales no homogéneas.**

Se supone que valen las hipótesis del Teorema de Hille–Yoshida. Se considera  $f \in W^{1,1}((0, T), X)$ , para cada  $u_0 \in D(A)$  se tiene la existencia y unicidad del problema

$$\begin{cases} u \in C^0([0, T], D(A)) \cap C^1([0, T], X) \\ \frac{d}{dt} u(t) = Au(t) + f(t) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

Esta solución es de la forma

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)ds .$$

### 1.2.2. Problemas de evolución semilineales.

Sea  $X$  un espacio de Banach reflexivo,  $A : D(A) \rightarrow X$  un operador lineal  $m$ -disipativo con  $D(A)$  denso en  $X$ .

#### Teorema de existencia local.

Sea  $F : [0, T] \times X \rightarrow X$  tal que satisface

- i)  $\|F(t, x_1) - F(t, x_2)\|_X \leq K(M)\|x_1 - x_2\|_X \quad \forall x_1, x_2 \in X, t \in [0, T]$ ,  
con  $M = \max\{\|x_1\|_X, \|x_2\|_X\}$ ,  $K(M)$  constante de Lipschitz local,
- ii)  $\|F(t_1, x) - F(t_2, x)\|_X \leq c|t_1 - t_2|(1 + \|x\|_X)$   
con  $c$  constante positiva independiente de  $x$

entonces existe una única solución del problema

$$\begin{cases} u \in C^0([0, T_M], D(A)) \cap C^1([0, T_M], X) \\ \frac{du}{dt}(t) = Au(t) + F(t, u(t)) \\ u(0) = u_0 \end{cases}$$

para algún  $T_M$ ,  $0 < T_M \leq T$ .

Además la solución satisface

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)F(s, u(s))ds \quad \text{para } 0 \leq t \leq T_M.$$

#### Existencia global de solución (ver [4]).

Si se cumplen las hipótesis del teorema de existencia local, se puede asegurar la existencia global en los siguientes dos casos:

- i)  $K(M) = K$  constante.
- ii) Se tienen estimaciones a priori del tipo

$$\|u(t)\|_X \leq C(T_M) \quad \forall t \in [0, T_M]$$

con  $C : \mathbf{R}^+ \rightarrow \mathbf{R}^+$  continua y creciente.

Notar que aquí es fundamental que  $C$  sea una función que no puede tomar el valor  $+\infty$ .

## CAPITULO 2: Modelización de las leyes constitutivas

### 2.1. Deformaciones y tensiones

Un cuerpo ocupa inicialmente el abierto  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , llamado configuración de referencia. Como consecuencia de las fuerzas a las cuales está sometido se deforma, con lo cual ocupa un abierto  $\Omega' = g(\Omega)$ , donde  $g$  es la aplicación que describe la transformación  $y = g(x)$  para cada  $x$  en  $\Omega$ .

Si se define el vector desplazamiento  $u = y - x = g(x) - x$ , la deformación viene dada por la siguiente expresión:

$$(2.1) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right).$$

En el presente trabajo se asume la hipótesis de pequeñas deformaciones, o sea que se supone que tanto el desplazamiento como su gradiente son pequeños, lo cual permite despreciar el término cuadrático de la deformación, es decir

$$(2.2) \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right).$$

Se notará  $\sigma$  al tensor de tensiones o esfuerzos, que como se sabe, es un tensor de segundo orden simétrico.

### 2.2. Ecuación de movimiento

En la mecánica del continuo, la ley fundamental que relaciona las fuerzas a las cuales están sometidos los cuerpos con la aceleración que experimentan, se expresa localmente como

$$(2.2.1) \quad \operatorname{div} \sigma + f = \rho \dot{v} \quad \text{en } \Omega \times (0, T),$$

donde

- $(\operatorname{div} \sigma)_i = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}$ , con  $\sigma$  tensor de tensiones
- $\dot{v} = \frac{d}{dt} v$ , con  $v$  la velocidad
- $\rho$  es la densidad de masa

- $f$  es la fuerza por unidad de volumen.

Como el sistema de ecuaciones diferenciales (2.1) no alcanza para describir el comportamiento de un material, se deben incluir las leyes constitutivas o de comportamiento, que tanto en elasticidad como en plasticidad son relaciones entre las tensiones y las deformaciones.

### 2.3. Aspectos fenomenológicos y reológicos

Las leyes constitutivas o de comportamiento se proponen a partir de resultados experimentales, para lo cual se deben realizar una serie de ensayos. Vamos a describir uno de ellos, el llamado de carga–descarga uniaxial.

Se considera una barra de longitud  $l$  y sección  $S$ , la cual tiene un extremo fijo y el otro extremo sometido a una fuerza  $F(t)$ . El ensayo consiste en observar la evolución de la tensión uniaxial  $\sigma = \frac{F}{S}$ , en función de la deformación uniaxial  $\epsilon = \Delta L$ .

En elastoplasticidad se distinguen, en términos cualitativos, dos zonas correspondientes a dos regímenes distintos:

**Zona 1:** Corresponde a la elasticidad lineal, la cual, frente a sollicitaciones externas, reacciona con un cambio en la deformación elástica. Se trata de deformaciones reversibles, es decir no hay disipación.

• **Zona 2:** Corresponde a la plasticidad, que se caracteriza por la irreversibilidad. Las sollicitaciones externas producen un cambio en las deformaciones irreversibles, y eventualmente en las reversibles o elásticas.

Notaremos  $\epsilon^e$  a la deformación elástica y  $\epsilon^p$  a la deformación irreversible o plástica,  $\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$ .

### 2.4. Termodinámica y variables de estado

La experiencia muestra que las transformaciones internas del cuerpo son en parte irreversibles y vienen acompañadas de variaciones de temperatura e intercambios térmicos. De allí que una descripción satisfactoria de las leyes de comportamiento debe encuadrarse en la teoría de la termodinámica macroscópica.

Como la deformación de un medio continuo es una transformación termodinámica particular, debe cumplir con los dos principios fundamentales que recordaremos brevemente aquí.

Para un sistema  $\Omega$  cualesquiera, el primer principio expresa la posibilidad de transformar la energía mecánica en calor y viceversa. Localmente se obtiene la siguiente ecuación:

$$(2.3) \quad \rho \dot{e} = \sigma \dot{\epsilon} - \operatorname{div} q + r ,$$

donde  $e$  es la densidad de energía interna, es decir, si notamos  $E$  la energía interna,  $E = \int_{\Omega} \rho e dv$ ,  $q$  es el vector flujo de calor, en tanto que  $r$  es una densidad volumétrica de la tasa de calor recibida. En las aplicaciones  $r = 0$ .

En el segundo principio interviene la noción de entropía  $s$ . Localmente se obtiene la llamada inecuación de Clausius-Duhem

$$\sigma \dot{\epsilon} - \rho \dot{\Phi} - \rho s \dot{T}_e - \frac{q}{T_e} \operatorname{grad} T_e \geq 0 ,$$

donde  $\Phi$  es la energía libre,  $\Phi = e - T_e s$ ,  $s$  es la entropía y  $T_e$  es la temperatura.

Si definimos  $d_1 = \sigma \dot{\epsilon} - \rho \dot{\Phi} - \rho s \dot{T}_e$ ,  $d_2 = -\frac{q}{T_e} \operatorname{grad} T_e$ ,  $d_1$  es la disipación intrínseca y  $d_2$  la disipación térmica volúmica. Si se admite que estas disipaciones son separadamente positivas resulta

$$(2.4) \quad \begin{cases} \sigma \dot{\epsilon} - \rho \dot{\Phi} - \rho s \dot{T}_e \geq 0 \\ -\frac{q}{T_e} \operatorname{grad} T_e \geq 0 \end{cases}$$

Se debe precisar de qué variables dependen las funciones  $\epsilon$ ,  $s$ ,  $\Phi$ . Estas variables son las llamadas variables de estado del material. Para pequeñas deformaciones estas variables son:  $T_e$  la temperatura,  $\epsilon^e$  la deformación elástica y  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ , que son las llamadas variables internas.

Del postulado de Helmholtz que permite imponer variaciones arbitrarias de temperatura a un sistema en equilibrio mecánico, se deducen las leyes de comportamiento

$$(2.5) \quad \sigma = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \epsilon^e} (\epsilon^e, \alpha, T_e)$$

$$(2.6) \quad s = -\frac{\partial \Phi}{\partial T_e} (\epsilon^e, \alpha, T_e) .$$

Se define por analogía

$$(2.7) \quad \eta = \rho \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} (\epsilon^e, \alpha, T_e) ,$$

que representan las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables internas  $\alpha$ .

A partir de (2.4), (2.5), (2.6) y (2.7) se deduce

$$(2.8) \quad \sigma \dot{\epsilon}^P - \eta \dot{\alpha} \geq 0 ,$$

con  $\epsilon^P = \epsilon - \epsilon^e$  deformación irreversible o plástica.

Se admite aquí la hipótesis de disipatividad normal, o sea la existencia de un potencial de disipación  $D$  convexo y semicontinuo inferiormente en  $\mathbf{R}^k = \mathbf{R}_s^9 \times \mathbf{R}^m$  tal que definiendo  $\Sigma = (\sigma, \eta) \in \mathbf{R}^k$  el tensor de esfuerzos generalizado, se verifique

$$(2.9) \quad \Sigma \in \partial D(\dot{\epsilon}^P, -\dot{\alpha}) .$$

Pero por propiedades del subdiferencial,

$$(2.10) \quad (\sigma, \eta) \in \partial D(\dot{\epsilon}^P, -\dot{\alpha}) \iff (\dot{\epsilon}^P, -\dot{\alpha}) \in \partial \Psi(\sigma, \eta) ,$$

con  $\Psi$  la función conjugada de  $D$ .

Cuando el potencial  $\Psi$  es diferenciable, las leyes constitutivas se pueden escribir como

$$(2.11) \quad \begin{cases} \dot{\epsilon}^P = \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \\ -\dot{\alpha} = \frac{\partial \Psi}{\partial \eta} \end{cases}$$

## 2.5. Aplicaciones

En estos ejemplos se omitirá la temperatura como variable, además la energía libre se supondrá separada, es decir  $\Phi(\epsilon^e, \alpha) = \Phi_1(\epsilon^e) + \Phi_2(\alpha)$ .

### 2.5.1. Elasticidad lineal.

Los sólidos elásticos tienen un comportamiento reversible, o sea no hay zona 2. Si además su comportamiento es lineal, la energía libre  $\Phi$  es una función cuadrática, o sea,  $\rho \Phi = \frac{1}{2} T \epsilon \cdot \epsilon$ , donde  $T$  es un tensor de 4<sup>to</sup> orden, que satisface las condiciones clásicas de coercividad y simetría, es decir:

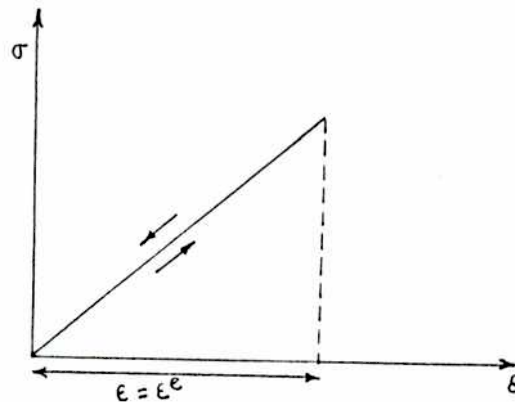
$$(2.12) \quad T_{ijkl} = T_{jikl} = T_{klij}$$

$$(2.13) \quad T_{ijkl} \xi_{ij} \xi_{kl} \geq c |\xi|^2 > 0 \quad \forall \xi \in \mathbf{R}_s^9 - \{0\} .$$

La ley constitutiva es:

$$(2.14) \quad \sigma = T \varepsilon, \text{ con } \sigma_{ij} = \sum_{kh} T_{ijkh} \varepsilon_{kh}.$$

### Curva tensión-deformación uniaxial



$$\sigma = E \varepsilon, \text{ con } \varepsilon = \varepsilon^e$$

### 2.5.2. Elasto-plasticidad.

Los modelos elastoplásticos se caracterizan por la existencia de un convexo  $K$ , en el espacio de tensores generalizados  $\mathbf{R}^k$ , llamado el convexo de plasticidad. En este caso el potencial  $\Psi$  es  $I_K(\Sigma)$  con

$$I_K(\Sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \Sigma \in K \\ +\infty & \text{si } \Sigma \notin K \end{cases}$$

Como consecuencia, la ley constitutiva es la siguiente:

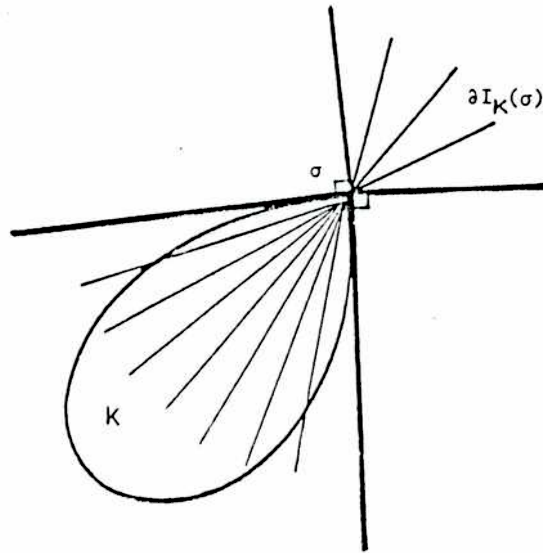
$$(2.15) \quad \begin{cases} \Sigma \in K \\ (\varepsilon^p, -\dot{\alpha}) \in \partial I_K(\Sigma) \end{cases}$$

NOTA. De la definición de subdiferencial se deduce inmediatamente que  $u \in \partial I_K(\Sigma)$  sii  $u(\tau - \Sigma) \leq 0 \forall \tau \in K, (\Sigma \in K)$ .

Si  $\Sigma \in K^0$ , con  $K^0$  el interior de  $K$ ,  $u = 0$  (es decir  $\varepsilon^p = 0, \dot{\alpha} = 0$ ), lo que significa que estamos en la zona elástica.

Si  $\Sigma \in \partial K$  con  $\Sigma$  regular (o sea que existe el plano tangente al  $\partial K$  que pasa por  $\Sigma$ ), entonces  $\partial I_K(\Sigma)$  es el conjunto de múltiplos positivos de la normal exterior al  $\partial K$  en  $\Sigma$ . De lo contrario,  $\partial I_K(\Sigma)$  forma un cono con vértice en  $\Sigma$  (ver figura).

*Interpretación geométrica de  $\partial I_K(\Sigma)$  con  $\Sigma$  no regular*

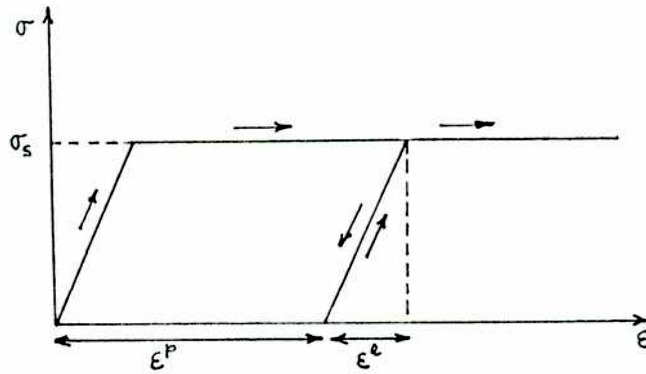


A continuación se expondrán algunos ejemplos importantes.

**Elasto-plasticidad perfecta.**

En este caso el comportamiento del material no depende de las variables internas  $\alpha$ .

*Curva tensión-deformación uniaxial*



$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p$ ,  $\sigma_s$  es un valor límite denominado punto de fluencia que depende del material.

En este caso  $K = [-\sigma_s, \sigma_s]$ .

En el caso general

- $\rho \Phi_1(\epsilon^e) = \frac{1}{2} T \epsilon^e \epsilon^e = \frac{1}{2} T (\epsilon - \epsilon^p)(\epsilon - \epsilon^p)$
- $\Phi_2(\alpha) = 0$



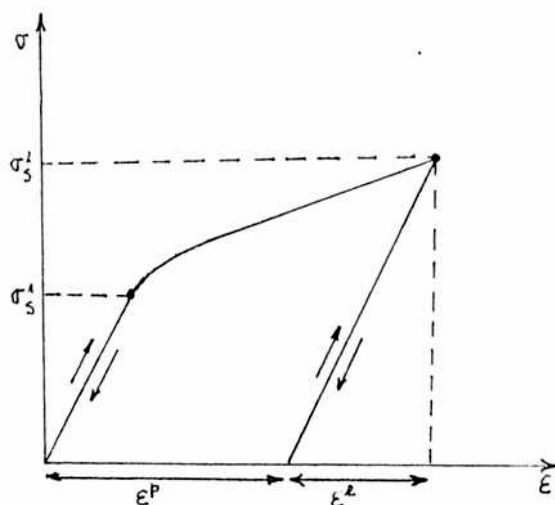
•  $K \subset \mathbf{R}_s^9$ , o sea está en el espacio del tensor de tensiones.

Como consecuencia, la ley constitutiva se expresa como:

$$\begin{cases} \sigma = T(\varepsilon - \varepsilon^p) \\ \dot{\varepsilon}^p \in \partial I_K(\sigma), \sigma \in K \end{cases}$$

### Elastoplasticidad con endurecimiento.

#### Curva tensión-deformación uniaxial



Notar que en este caso el punto de fluencia  $\sigma_s$ , es decir el límite entre la Zona 1 y la Zona 2, de las cuales se habló en 2.3, va cambiando a medida que el material se deforma, de forma tal que el convexo se agrande o bien se traslade (ver [10],[11]).

### Elasto-plasticidad con endurecimiento isótropo.

$$\rho \Phi_1(\varepsilon^e) = \frac{1}{2} T \varepsilon^e \varepsilon^e = \frac{1}{2} T(\varepsilon - \varepsilon^p)(\varepsilon - \varepsilon^p).$$

La variable interna  $\alpha$  es en este caso un escalar  $\alpha = \int_0^t |\dot{\varepsilon}^p(s)| ds$  que mide la deformación plástica acumulada.

Sea  $d(\alpha) = \rho \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}(\alpha)$ ; la ley constitutiva se escribe como:

$$\begin{cases} \sigma = T \varepsilon^e \\ (\dot{\varepsilon}^p, -\dot{\alpha}) \in \partial I_K(\sigma, d), (\sigma, d) \in K \end{cases}$$

con  $K = \{(\sigma, d) / g(\sigma) - d \leq 0\}$ ,  $g$  convexa.

**Elasto-plasticidad con endurecimiento cinemático.**

$$\rho \Phi_1(\varepsilon^e) = \frac{1}{2} T \varepsilon^e \varepsilon^e = \frac{1}{2} T(\varepsilon - \varepsilon^p)(\varepsilon - \varepsilon^p).$$

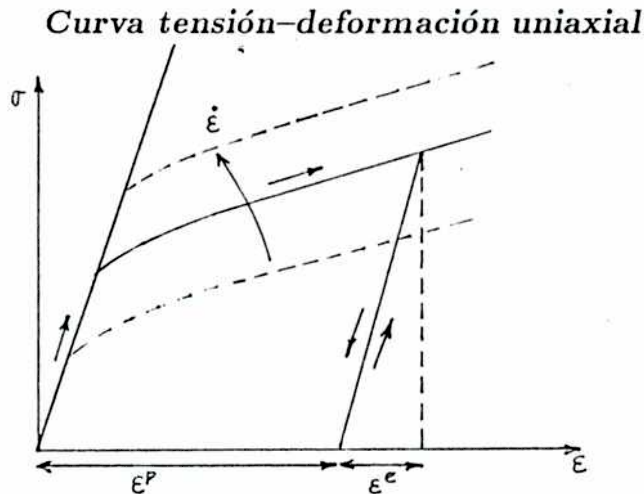
Sea  $\eta = \rho \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}$  con  $\alpha \in \mathbf{R}_s^9$ , la ley constitutiva se expresa como:

$$\begin{cases} \sigma = T \varepsilon^e \\ (\dot{\varepsilon}^p, -\dot{\alpha}) \in \partial I_K(\sigma, \eta) \end{cases}$$

con  $K = \{(\sigma, \eta) / g(\sigma - \eta) \leq 0\}$ ,  $g$  convexa.

**2.5.3. Elasto-viscoplasticidad.**

Este modelo responde a leyes regulares y sensibles a la velocidad con que se carga un material, lo que no sucede en los modelos elastoplásticos (ver [11], [15]).



**Elasto-viscoplasticidad del tipo Perzyna.**

El potencial  $\Psi$  es en este caso regular y tiene la siguiente forma:

$$\Psi(\Sigma) = \varphi_\mu(\Sigma) = \frac{1}{2\mu} |\Sigma - P_K \Sigma|^2,$$

$K$  convexo de plasticidad,  $P_K$  la proyección sobre  $K$  en  $\mathbf{R}^k$ ; con lo cual resulta la ley de comportamiento

$$\begin{cases} (\dot{\epsilon}^p, -\dot{\alpha}) = \frac{\partial \varphi_\mu(\Sigma)}{\partial \Sigma} \\ \sigma = T(\epsilon - \epsilon^p) \end{cases}$$

En el caso particular que no haya variables internas  $\alpha$ , es decir en elasto-viscoplasticidad perfecta la ley de comportamiento resulta ser

$$\begin{cases} \dot{\epsilon}^p = \frac{\partial \varphi_\mu(\sigma)}{\partial \sigma} \\ \sigma = T(\epsilon - \epsilon^p) \end{cases}$$

## 2.6. Ejemplos de convexos de plasticidad

En general el convexo  $K$  de plasticidad se define como

$$K = \{\Sigma / F(\Sigma) \leq 0\}, \quad \text{con } F \text{ función convexa y continua.}$$

En elasto-plasticidad perfecta se pueden citar dos ejemplos clásicos:

i) Modelo de Von Mises

$$F(\sigma) = \frac{1}{2} \sigma^D \cdot \sigma^D - c^2$$

, donde  $\sigma^D$  es el tensor desviador de  $\sigma$ ,  $c$  constante dada.

ii) Modelo de Tresca

$$F(\sigma) = \sup_{I,J} |\sigma_I - \sigma_J| - c^2$$

donde  $\sigma_I$  son los valores propios de  $\sigma$  y  $c$  constante dada.

## CAPITULO 3: Plasticidad sin endurecimiento

### 3.1. Algunas definiciones e hipótesis de regularidad

Un cuerpo ocupa un abierto  $\Omega$  en  $\mathbf{R}^3$ , acotado y con borde suave ( $C^1$ ).

Siguiendo con la notación introducida en el Capítulo 2,  $\sigma(x, t) \in \mathbf{R}_s^9$  es el tensor de tensiones,  $f(x, t) \in \mathbf{R}^3$  son las fuerzas de volumen,  $v(x, t) \in \mathbf{R}^3$  es la velocidad,  $\varepsilon(x, t) \in \mathbf{R}_s^9$  es la deformación con  $x \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$ ,  $A = (A_{ijkl})$  es el tensor de elasticidad, que se define como el inverso del tensor  $T$ , de lo cual resulta que es coercivo y simétrico.

El estado inicial del material está dado por  $\sigma_0$  y  $v_0$  con

$$(3.1) \quad \begin{cases} \sigma(x, 0) = \sigma_0 & \text{en } \Omega \\ v(x, 0) = v_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Las condiciones de contorno son mixtas, es decir, en una región del borde, notada  $\partial_F \Omega$ , se impone como dato la fuerza de contacto  $F^d$  y en la restante, notada  $\partial_v \Omega = \partial \Omega - \partial_F \Omega$ , se impone la velocidad  $v$ . Por consiguiente se debe cumplir

$$(3.2) \quad \begin{cases} \sigma.\eta = F^d & \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T) \\ v = v^d & \text{en } \partial_v \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

En la Sección 2, dedicada a viscoplasticidad sin endurecimiento, se asume además la existencia de  $\bar{\sigma}^d : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}_s^9$  y  $\bar{v}^d : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3$ , que satisfacen las condiciones de contorno y tales que:

$$(3.3) \quad \begin{cases} \bar{v}^d \in W^{2,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3) \\ \bar{\sigma}^d \in W^{2,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \\ \varepsilon(\bar{v}^d) \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega)) \\ \text{div}(\bar{\sigma}^d) \in W^{1,1}(0, T; L^2(\Omega)^3) \end{cases}$$

En la Sección 3, dedicada a elastoplasticidad perfecta, se asume la existencia de  $\sigma^* : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}_s^9$  y  $v^* : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}^3$  tales que:

$$(3.4) \quad \begin{cases} \sigma^*(x, t) \in K & \text{en c.t.p.} \\ \sigma^*.\eta = F^d & \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T) \\ v^* = v^d & \text{en } \partial_v \Omega \times (0, T) \\ \sigma^*(0) = \sigma_0 & \text{en } \Omega \\ v^*(0) = v_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y que satisfacen también:

$$(3.5) \quad \begin{cases} v^* \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3) \\ \sigma^* \in W^{3,\infty}(0, T; \mathbf{L}^\infty(\Omega)) \\ \operatorname{div} \sigma^* \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \\ \varepsilon(v^*) \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \end{cases}$$

Además  $\sigma^*$  cumple con la *condición de seguridad*, o sea:

Existe  $\delta > 0$ , tal que para todo  $\tau \in L^p(\Omega)$  con  $\|\tau\|_{\mathbf{L}^\infty(\Omega)} < \delta$ ,

$$(3.6) \quad \tau(x) + \sigma^*(x, t) \in K \text{ en c.t.p.}$$

En particular

$$(3.7) \quad \tau(x) + \sigma_0(x) \in K \text{ c.t.p. en } \Omega.$$

En ambas secciones notaremos:

$$\mathbf{L}^p(\Omega) = L^p(\Omega)_s^9 \quad 1 \leq p \leq +\infty$$

$H = \mathbf{L}^2(\Omega) \times L^2(\Omega)^3$  dotado del producto escalar  $[\cdot, \cdot]_A$  definido como

$$[(\tau_1, \omega_1), (\tau_2, \omega_2)]_A = \langle \tau_1, A\tau_2 \rangle_{L^2(\Omega)_s^9} + \langle \omega_1, \omega_2 \rangle_{L^2(\Omega)^3}.$$

Además, las fuerzas de volumen deben satisfacer

$$(3.8) \quad f \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

## 3.2. Evolución dinámica de los materiales elasto-viscoplásticos sin endurecimiento

### 3.2.1. Planteo del Problema.

Se estudiará la ley de Perzyna enunciada en la sección 2.5.3. Introduciendo el tensor de elasticidad  $A$ , definido en 3.1, y teniendo en cuenta que  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ , se puede escribir a esta ley como

$$(3.9) \quad \begin{aligned} \varepsilon(v) &= A\dot{\sigma} + \partial\varphi_\mu(\sigma) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \text{donde } \varphi_\mu(\sigma) &= \frac{1}{2\mu} |\sigma - P_K \sigma|_{\mathbf{R}_s^9}^2, \end{aligned}$$

con  $K$  el convexo de plasticidad en  $\mathbf{R}_s^9$  y  $P_K$  la proyección habitual en  $\mathbf{R}_s^9$ .

La ecuación constitutiva se complementa con la ecuación de movimiento

$$(3.10) \quad \dot{v} = \operatorname{div} \sigma + f \quad \text{en } \Omega \times (0, T) .$$

Se imponen las condiciones iniciales

$$(3.11) \quad \begin{cases} \sigma(0) = \sigma_0 & \text{en } \Omega \\ v(0) = v_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y las condiciones de contorno

$$(3.12) \quad \begin{cases} \sigma \cdot \eta = F^d & \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T) \\ v = v^d & \text{en } \partial_v \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

### 3.2.2. Existencia y unicidad de solución.

Para probar la existencia y unicidad de solución se va a usar la teoría de operadores monótonos maximales (ver Capítulo 1).

Se define

$$(3.13) \quad \begin{cases} \bar{\sigma} = \sigma - \bar{\sigma}^d, \bar{v} = v - \bar{v}^d \\ G_1 = A^{-1} \varepsilon(\bar{v}^d) - \bar{\sigma}^d, G_2 = f - \dot{\bar{v}}^d + \operatorname{div} \bar{\sigma}^d \end{cases}$$

Se considera el operador

$$(3.14) \quad C : D(C) \subset H \rightarrow H ,$$

con

$$C \begin{pmatrix} \tau \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -A^{-1} \varepsilon(\omega) \\ -\operatorname{div} \tau \end{bmatrix}$$

y

$$D(C) = \left\{ (\tau, \omega) \in H \left/ \begin{array}{l} \tau \in Y, \tau(x) \eta = 0 \text{ si } x \in \partial_F \Omega, \\ \omega \in H^1(\Omega)^3 \text{ con } \omega(x) = 0 \text{ si } x \in \partial_v \Omega \end{array} \right. \right\}$$

con  $Y$  definido en el Capítulo 1.

Se puede escribir (3.9), (3.10), (3.11) y (3.12) como

$$(3.15) \quad \begin{cases} (\bar{\sigma}(t), \bar{v}(t)) \in D(C) \text{ tal que} \\ \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \bar{\sigma}(t) \\ \bar{v}(t) \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \bar{\sigma}(t) \\ \bar{v}(t) \end{pmatrix} = F(t, (\bar{\sigma}(t), \bar{v}(t))) \\ \text{con } \begin{cases} \bar{\sigma}(0) = \bar{\sigma}_0 \\ \bar{v}(0) = \bar{v}_0 \end{cases} \end{cases}$$

donde

$$F(t, (\bar{\sigma}(t), \bar{v}(t))) = \begin{pmatrix} G_1(t) - A^{-1} \partial \varphi_\mu(\bar{\sigma}(t) + \bar{\sigma}^d(t)) \\ G_2(t) \end{pmatrix}$$

y

$$\begin{cases} \bar{\sigma}(0) = \sigma_0 - \bar{\sigma}^d(0) \\ \bar{v}(0) = v_0 - \bar{v}^d(0) \end{cases}$$

Se puede ver que:

- i)  $D(C)$  es denso en  $H$ .
- ii)  $C$  es un operador maximal monótono en  $H$ . Para probarlo se debe usar la desigualdad de Korn (ver Duvaut–Lions [6]).
- iii)  $F(t, U(t)) : [0, T] \times H \rightarrow H$  es Lipschitz dado que  $\partial \varphi_\mu$  es  $M/\mu$  Lipschitz, con  $M$  que no depende de  $\mu$ .

Usando la teoría de semigrupos (ver Capítulo 1) se deduce la existencia global y la unicidad de solución para (3.15) con

$$(\bar{\sigma}, \bar{v}) \in C^1(0, T; H) \cap C^0(0, T; D(C)).$$

De lo cual se deduce

$$(3.16) \quad \begin{cases} (\sigma, v) \in W^{1, \infty}(0, T; H), \\ \sigma(t) \in Y, \quad v(t) \in H^1(\Omega) \text{ en c.t.p., con } t \in (0, T) \end{cases}$$

con  $\sigma$  y  $v$  que satisfacen las condiciones de contorno.

### 3.3. Evolución dinámica de los materiales elásticos perfectamente plásticos

#### 3.3.1. Planteo del problema.

La ley constitutiva es en este caso

$$(3.17) \quad \begin{aligned} \varepsilon(v) &= A\dot{\sigma} + \partial I_K(\sigma) \quad \text{en } \Omega \times (0, T), \\ \text{con } \sigma(x, t) &\in K \quad \text{en c.t.p. ;} \end{aligned}$$

donde  $K$  es el convexo de plasticidad en  $\mathbf{R}_s^9$ . Además se tiene la ecuación de movimiento

$$(3.18) \quad \text{div } \sigma + f = \dot{v} \quad \text{en } \Omega \times (0, T),$$

Se imponen las condiciones iniciales

$$(3.19) \quad \begin{cases} \sigma(0) = \sigma_0 & \text{en } \Omega \\ v(0) = v_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y las condiciones de contorno

$$(3.20) \quad \begin{cases} \sigma.\eta = F^d & \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T) \\ v = v^d & \text{en } \partial_v \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

Es importante aclarar que la solución de la evolución dinámica no va a satisfacer (3.17) como ley constitutiva (ver [1]), sino una ley más débil, que es la siguiente:

$$(3.21) \quad \begin{aligned} &\int_{\Omega} A\dot{\sigma}(t)(\sigma(t) - \tau(t)) \, dx + \int_{\Omega} (v(t) - v^*(t)) \, \text{div} (\sigma(t) - \tau(t)) \, dx \\ &- \int_{\Omega} \varepsilon(v^*(t))(\sigma(t) - \tau(t)) \, dx \leq 0, \end{aligned}$$

para casi todo  $t$ , donde  $v^*$  está definida en la sección 3.1,  $\tau(x, t) \in K$  c.t.p.,  $\tau \in L^\infty(0, T; Y)$  y  $\tau.\eta = F^d$  en  $\partial_F \Omega \times (0, T)$ .

### 3.3.2. Estimaciones a priori I.

En primer lugar se estudiarán estimaciones a priori de  $(\sigma_\mu, v_\mu)$  solución de (3.9) (problema elasto-viscoplástico) para luego pasar al límite.

Multiplicando la ecuación (3.9) por  $(\sigma_\mu - \sigma^*)$ , donde  $\sigma^*$  está definida en la sección 3.1, se obtiene

$$(3.22) \quad \begin{aligned} &\int_0^t \int_{\Omega} A\dot{\sigma}_\mu(\sigma_\mu - \sigma^*) \, dx \, ds + \int_0^t \int_{\Omega} \partial\varphi_\mu(\sigma_\mu).(\sigma_\mu - \sigma^*) \, dx \, ds \\ &= \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon(v_\mu).(\sigma_\mu - \sigma^*) \, dx \, ds. \end{aligned}$$



Teniendo en cuenta que

$$(3.23) \quad \begin{cases} (\sigma_\mu - \sigma^*) \cdot \eta = 0 & \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T) \\ v_\mu - v^* = 0 & \text{en } \partial_v \Omega \times (0, T), \end{cases}$$

y usando la fórmula de Green, se obtiene

$$(3.24) \quad \int_0^t \int_\Omega \varepsilon(v_\mu) \cdot (\sigma_\mu - \sigma^*) dx ds = - \int_0^t \int_\Omega (v_\mu - v^*) \operatorname{div} (\sigma_\mu - \sigma^*) dx ds \\ + \int_0^t \int_\Omega \varepsilon(v^*) (\sigma_\mu - \sigma^*) dx ds .$$

Definiendo  $R^* = \dot{v}^* - \operatorname{div} \sigma^* - f$ , se deduce de (3.22) y (3.24) lo siguiente:

$$(3.25) \quad \int_0^t \int_\Omega A(\dot{\sigma}_\mu - \dot{\sigma}^*) (\sigma_\mu - \sigma^*) dx ds + \int_0^t \int_\Omega (\dot{v}_\mu - \dot{v}^*) (v_\mu - v^*) dx ds \\ + \int_0^t \int_\Omega \partial \varphi_\mu(\sigma_\mu) (\sigma_\mu - \sigma^*) dx ds = \\ = - \int_0^t \int_\Omega A \dot{\sigma}^* (\sigma_\mu - \sigma^*) dx ds - \int_0^t \int_\Omega R^* (v_\mu - v^*) dx ds \\ + \int_0^t \int_\Omega \varepsilon(v^*) \cdot (\sigma_\mu - \sigma^*) dx ds .$$

Como  $\sigma^*(x, t)$  está en el convexo de plasticidad  $K$ ,  $\varphi_\mu(\sigma^*)$  se anula, con lo cual, por convexidad de  $\varphi_\mu$ , se tiene

$$(3.26) \quad \int_0^t \int_\Omega \partial \varphi_\mu(\sigma_\mu) (\sigma_\mu - \sigma^*) dx ds \geq \int_0^t \int_\Omega \varphi_\mu(\sigma_\mu) dx ds \geq 0 .$$

Como la matriz de elasticidad  $A$  es coerciva, usando la hipótesis de regularidad (ver secciones 3.1 y 3.2), se deduce la existencia de constantes positivas  $\alpha$ ,  $C_1$  y  $C_2$ , tales que

$$(3.27) \quad \frac{\alpha}{2} \|\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \|v_\mu(t) - v^*(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \leq \\ \leq \int_0^t \int_\Omega (\varepsilon(v^*) - A \dot{\sigma}^*) (\sigma_\mu - \sigma^*) dx ds - \int_0^t \int_\Omega R^* (v_\mu - v^*) dx ds \leq \\ \leq C_1 \int_0^t \|\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + C_2 \int_0^t \|v_\mu(t) - v^*(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 ds .$$

Aplicando el Lema de Gronwall a

$$h(t) = \|\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}^2 + \|v_\mu(t) - v^*(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 ,$$

se obtiene que

$$(3.28) \quad \begin{cases} (\sigma_\mu - \sigma^*) & \text{(y por consecuencia } \sigma_\mu) \text{ está acotado en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \\ (v_\mu - v^*) & \text{(y por consecuencia } v_\mu) \text{ está acotado en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \end{cases}$$

Como consecuencia de (3.25) se verifica

$$(3.29) \quad \int_{\Omega} \partial\varphi_\mu(\sigma_\mu(t)) \cdot (\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) dx \text{ está acotado en } L^1(0, T).$$

Se deberá usar aquí la *condición de seguridad* como ya lo habían hecho para el caso cuasi-estático Johnson [10] y Suquet [14].

LEMA 3.3.1 (ver [14]). *Supongamos que  $\sigma^*$  cumpla la condición de seguridad, entonces*

$$(3.30) \quad \|\partial\varphi_\mu(\sigma_\mu(t))\|_{\mathbf{L}^1(\Omega)} \leq C \int_{\Omega} \partial\varphi_\mu(\sigma_\mu(t)) \cdot (\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) dx .$$

Con lo cual de (3.29) y (3.30) resulta

$$(3.31) \quad \partial\varphi_\mu(\sigma_\mu) \text{ está acotado en } L^1(0, T; \mathbf{L}^1(\Omega)) .$$

### **Estimaciones a priori II.**

Se define

$$\partial^h g = \frac{1}{h} (g(x, t+h) - g(x, t)) .$$

De la ecuación de movimiento (3.10) se puede obtener

$$\int_0^t \int_{\Omega} \partial^h \dot{v}_\mu \partial^h (v_\mu - v^*) dx ds = \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h (\operatorname{div} \sigma_\mu + f) \partial^h (v_\mu - v^*) dx ds .$$

Usando la fórmula de Green y las definiciones de  $v^*$ ,  $\sigma^*$  y  $R^*$  se deduce

$$(3.32) \quad \begin{aligned} \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h (\dot{v}_\mu - \dot{v}^*) \partial^h (v_\mu - v^*) dx ds &= - \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h R^* \partial^h (v_\mu - v^*) dx ds \\ &- \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h (\sigma_\mu - \sigma^*) \varepsilon(\partial^h (v_\mu - v^*)) dx ds \end{aligned}$$

y

$$(3.33) \quad \int_0^t \int_{\Omega} A \partial^h \dot{\sigma}_{\mu} \partial^h \sigma_{\mu} dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h (\partial \varphi_{\mu}(\sigma_{\mu})) \partial^h \sigma_{\mu} dx ds = \\ = \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h \varepsilon(v_{\mu}) \partial^h \sigma_{\mu} dx ds .$$

Como  $\varphi_{\mu}$  es convexa, se tiene

$$\int_{\Omega} \left( \partial \varphi_{\mu}(\sigma_{\mu}(t+h)) - \partial \varphi_{\mu}(\sigma_{\mu}(t)) \right) \cdot (\sigma_{\mu}(t+h) - \sigma_{\mu}(t)) dx \geq 0 .$$

Por lo tanto, de (3.33) se deduce

$$(3.34) \quad \int_0^t \int_{\Omega} A \partial^h \sigma_{\mu} \partial^h \dot{\sigma}_{\mu} dx ds \leq \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon(\partial^h v_{\mu}) \partial^h \sigma_{\mu} dx ds .$$

Utilizando esta última desigualdad, a partir de (3.32) se obtiene

$$(3.35) \quad \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h (\dot{v}_{\mu} - \dot{v}^*) \partial^h (v_{\mu} - v^*) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} A \partial^h \dot{\sigma}_{\mu} \partial^h \sigma_{\mu} dx ds \\ \leq - \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h R^* \partial^h (v_{\mu} - v^*) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h \sigma_{\mu} \partial^h \varepsilon(v^*) dx ds \\ + \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h \sigma^* \partial^h \varepsilon(v_{\mu} - v^*) dx ds .$$

En consecuencia, integrando con respecto al tiempo, se llega a la siguiente expresión:

$$(3.36) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial^h v_{\mu}(t) - \partial^h v^*(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \partial^h \sigma_{\mu}(t) \partial^h \sigma_{\mu}(t) dx \\ \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\partial^h v_{\mu}(0) - \partial^h v^*(0)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \partial^h \sigma_{\mu}(0) \partial^h \sigma_{\mu}(0) dx \\ + \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h \sigma^* \partial^h \varepsilon(v_{\mu}) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h \sigma_{\mu} \partial^h \varepsilon(v^*) dx ds - \\ \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h \sigma^* \partial^h \varepsilon(v^*) dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} \partial^h R^* \partial^h (v_{\mu} - v^*) dx ds .$$

**OBSERVACIÓN 3.3.1.** Sean  $g_1, g_2$  funciones en el espacio  $W^{1,2}(0, T; V)$  con  $V$  un espacio de Hilbert. Se prueba inmediatamente que:

$$g_1(t) \cdot \partial^h g_2(t) = -\partial^h g_1(t) \cdot g_2(t+h) + \partial^h (g_1(t) g_2(t))$$

Pasando al límite cuando  $h \rightarrow 0$  se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \int_0^t \partial^h g_1(t) \cdot g_2(t+h) ds dx &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_0^t \frac{d}{dt} g_1 \cdot g_2 dx ds, \\ \int_{\Omega} \int_0^t \partial^h (g_1 \cdot g_2) ds dx &\xrightarrow{h \rightarrow 0} \int_{\Omega} \int_0^t \frac{d}{dt} (g_1 \cdot g_2) ds dx. \end{aligned}$$

Si se define  $g_1 = \partial^h \sigma^*$ ,  $g_2 = \varepsilon(v_\mu)$ , aplicando la observación 3.3.1, con  $V = L^2(\Omega)_s^0$ , al término

$$\int_0^t \int_{\Omega} \partial^h \sigma^* \partial^h \varepsilon(v_\mu) dx ds$$

de (3.36) cuando  $h \rightarrow 0$  usando resultados clásicos (ver Capítulo 1), se obtiene

$$\begin{aligned} (3.37) \quad &\frac{1}{2} \int_{\Omega} |\dot{v}_\mu(t) - \dot{v}^*(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \dot{\sigma}_\mu(t) \cdot \dot{\sigma}_\mu(t) dx \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\dot{v}_\mu(0)|^2 dx + \\ &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \dot{\sigma}_\mu(0) \dot{\sigma}_\mu(0) dx - \int_0^t \int_{\Omega} \dot{R}^*(\dot{v}_\mu - \dot{v}^*) dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} \dot{\sigma}^* \varepsilon(\dot{v}^*) dx ds + \\ &+ \int_0^t \int_{\Omega} \dot{\sigma}_\mu \cdot \varepsilon(v^*) dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} \ddot{\sigma}^* \varepsilon(v_\mu) dx ds - \\ &- \int_{\Omega} \dot{\sigma}^*(0) \varepsilon(v_0) dx + \int_{\Omega} \dot{\sigma}^*(t) \varepsilon(v_\mu(t)) dx. \end{aligned}$$

Usando (3.17) y (3.18) en  $t = 0$ , las condiciones de regularidad de  $v^*$  y  $\sigma^*$ , y las propiedades del tensor de elasticidad  $A$ , se puede deducir de (3.37) la existencia de constantes positivas  $C_1, C_2, C_3, C_4$  y  $C_5$ , tales que

$$\begin{aligned} (3.38) \quad &\|\dot{v}_\mu(t) - \dot{v}^*(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\dot{\sigma}_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq C_1 + \\ &+ C_2 \int_0^t \|\dot{v}_\mu(s) - \dot{v}^*(s)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 ds + C_3 \int_0^t \|\dot{\sigma}_\mu(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds \\ &+ C_4 \int_0^t \|\varepsilon(v_\mu(s))\|_{L^1(\Omega)} ds + C_5 \|\varepsilon(v_\mu(t))\|_{L^1(\Omega)}; \end{aligned}$$

con lo cual resta analizar que sucede con los términos  $\int_0^t \|\varepsilon(v_\mu(s))\|_{L^1(\Omega)} ds$  y  $\|\varepsilon(v_\mu(t))\|_{L^1(\Omega)}$ .

De (3.9) y el Lema 3.3.1, se tiene

$$\begin{aligned} (3.39) \quad &\|\varepsilon(v_\mu(t))\|_{L^1(\Omega)} \leq \|\partial \varphi_\mu(\sigma_\mu(t))\|_{L^1(\Omega)} + \|A \dot{\sigma}_\mu(t)\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq \|\partial \varphi_\mu(\sigma_\mu(t))\|_{L^1(\Omega)} + \frac{\delta^2}{2} \|\dot{\sigma}_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{C_1}{2\delta^2} |\Omega| \\ &\leq C_2 \int_{\Omega} \partial \varphi_\mu(\sigma_\mu(t))(\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) + \frac{\delta^2}{2} \|\dot{\sigma}_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + C_3, \end{aligned}$$

con  $\delta \ll 1$  y  $C_1, C_2, C_3$  constantes positivas.

De (3.29) se deduce inmediatamente

$$(3.40) \quad \int_0^t \|\varepsilon(v_\mu(s))\|_{L^1(\Omega)} ds \leq C_4 + \frac{\delta^2}{2} \int_0^t \|\dot{\sigma}_\mu(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds ,$$

con  $C_4$  constante positiva.

Falta entonces estudiar el término

$$\int_{\Omega} \partial\varphi_\mu(\sigma_\mu(t))(\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) dx .$$

LEMA 3.3.2.

$$\int_{\Omega} \partial\varphi_\mu(\sigma_\mu(t))(\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) dx \leq \text{Cte} + \frac{\delta^2}{2} \left( \|\dot{\sigma}_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\dot{v}_\mu(t) - \dot{v}^*(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 \right).$$

*Demostración.* De (3.9) y usando la fórmula de Green, se obtiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial\varphi_\mu(\sigma_\mu(t))(\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) dx \\ &= - \int_{\Omega} (v_\mu(t) - v^*(t)) \operatorname{div} (\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \varepsilon(v^*(t))(\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) dx - \int_{\Omega} A\dot{\sigma}_\mu(t)(\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) dx . \end{aligned}$$

Combinando esta expresión con (3.10) se tiene

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \partial\varphi_\mu(\sigma_\mu(t))(\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) dx = \\ &= - \int_{\Omega} (v_\mu(t) - v^*(t))(\dot{v}_\mu(t) - \dot{v}^*(t)) dx + \int_{\Omega} (-R^*(t))(v_\mu(t) - v^*(t)) dx \\ & \quad + \int_{\Omega} \varepsilon(v^*(t))(\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) dx - \int_{\Omega} A\dot{\sigma}_\mu(t)(\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) dx . \end{aligned}$$

Usando (3.28) se deduce el resultado del lema, es decir:

$$\int_{\Omega} \partial\varphi_\mu(\sigma_\mu(t))(\sigma_\mu(t) - \sigma^*(t)) dx \leq \frac{\delta^2}{2} \int_{\Omega} |\dot{v}_\mu(t) - \dot{v}^*(t)|^2 dx + \frac{\delta^2}{2} \int_{\Omega} |\dot{\sigma}_\mu(t)|^2 dx + \text{Cte},$$

con  $\delta \ll 1$ .

Finalmente, de (3.38), (3.39), (3.40) y el Lema 3.3.2, se ha logrado la siguiente acotación:

$$\begin{aligned} & \|\dot{v}_\mu(t) - \dot{v}^*(t)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + \|\dot{\sigma}_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \\ & \leq k_1 + k_2 \int_0^t \|\dot{v}_\mu(s) - \dot{v}^*(s)\|_{L^2(\Omega)^3}^2 + k_3 \int_0^t \|\dot{\sigma}_\mu(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds, \end{aligned}$$

con  $k_1, k_2$  y  $k_3$  constantes positivas. Se puede entonces aplicar el Lema de Gronwall con lo cual se deduce para  $T > 0$ ,

$$(3.41) \quad \begin{cases} \dot{\sigma}_\mu \text{ está acotado en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ \dot{v}_\mu \text{ está acotado en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \end{cases}$$

De (3.9), (3.39) y (3.41) se llega a las acotaciones fundamentales:

$$(3.42) \quad \{\varepsilon(v_\mu); 0 < \mu < 1\} \text{ está acotado en } L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$$

y

$$(3.43) \quad \{\operatorname{div} \sigma_\mu; 0 < \mu < 1\} \text{ está acotado en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3).$$

### 3.3.3. Pasaje al límite cuando $\mu$ tiende a 0.

Las estimaciones (3.41), (3.42) y (3.43) aseguran la existencia de una sucesión notada  $(\sigma_\mu, v_\mu)$ , con  $\mu$  tendiendo a 0, tal que

$$(3.44) \quad \begin{cases} \sigma_\mu \rightarrow \sigma & \text{en } W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \text{ débil } * \\ v_\mu \rightarrow v & \text{en } L^\infty(0, T; BD(\Omega)) \text{ débil } * \\ \dot{v}_\mu \rightarrow \dot{v} & \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \text{ débil } * \\ \operatorname{div} \sigma_\mu \rightarrow \operatorname{div} \sigma & \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \text{ débil } * \end{cases}$$

De (3.44) se obtiene en particular (3.18), la ecuación de movimiento.

### 3.3.4. Condiciones iniciales.

Usando argumentos de semicontinuidad inferior (ver Capítulo 1), y de (3.41) se obtiene

$$(3.45) \quad \|\sigma(0) - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq \liminf_{\mu \rightarrow 0} \|\sigma_\mu(0) - \sigma_0\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0,$$

es decir,  $\sigma(0) = \sigma_0$  c.t.p. en  $x \in \Omega$ ; con idéntico procedimiento se obtiene  $v(0) = v_0$  c.t.p. en  $x \in \Omega$ .

### 3.3.5. Condiciones de contorno.

De la fórmula de Green, si se toma  $\omega \in C_{0,v}^\infty$  como función test con

$$C_{0,v}^\infty = \left\{ \begin{array}{l} \omega \in C^\infty([0, T] \times \Omega, \mathbf{R}^3) \\ \omega(x, t) = 0 \quad \text{si } x \in \partial\Omega_v \end{array} \right\}$$

se obtiene

$$\int_0^T \int_\Omega \operatorname{div} \sigma_\mu \omega \, dx \, dt = - \int_0^T \int_\Omega \sigma_\mu \varepsilon(\omega) \, dx \, dt + \int_0^T \int_{\partial_v \Omega} F^d(x, t) \cdot \omega \, dx \, dt .$$

Si se toma el límite ( $\mu \rightarrow 0$ ), se deduce de (3.44),

$$\int_0^T \int_\Omega \operatorname{div} \sigma \cdot \omega \, dx \, dt + \int_0^T \int_\Omega \sigma \varepsilon(\omega) \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\partial_v \Omega} F^d(x, t) \omega \, dx \, dt ,$$

$\forall \omega \in C_{0,v}^\infty$ ; de lo cual se obtiene

$$\sigma \cdot \eta = F^d \quad \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T)$$

### 3.3.6.

Se debe probar  $\sigma(x, t) \in K$  c.t.p. en  $x \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$ . Para ello se utilizan argumentos de semicontinuidad inferior para funcionales convexos (ver Capítulo 1), los resultados (3.26), (3.29) y el Lema 3.3.1

$$\begin{aligned} \int_0^t \|\sigma - P_K \sigma\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds &\leq \liminf_{\mu \rightarrow 0} \int_0^t \|\sigma_\mu - P_K \sigma_\mu\|_{L^2(\Omega)}^2 \, ds \\ &= \liminf_{\mu \rightarrow 0} \|2\mu \varphi_\mu(\sigma_\mu)\|_{L^1(0, T; L^1(\Omega))} \leq \liminf_{\mu \rightarrow 0} \mu C = 0 \end{aligned}$$

con lo cual  $\sigma(x, t) \in K$  en c.t.p.

### 3.3.7. Convergencia fuerte.

Si se toma en (3.9),  $(\sigma_\mu - \sigma)$  como función test y se usa la convexidad de  $\varphi_\mu$ , se obtiene

$$(3.46) \quad \int_0^t \int_\Omega A \dot{\sigma}_\mu (\sigma_\mu - \sigma) \, dx \, ds \leq \int_0^t \int_\Omega \varepsilon(v_\mu) (\sigma_\mu - \sigma) \, dx \, ds .$$

Utilizando la fórmula de Green

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} A(\dot{\sigma}_{\mu} - \dot{\sigma})(\sigma_{\mu} - \sigma) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} (v_{\mu} - v^*) \operatorname{div}(\sigma_{\mu} - \sigma) dx ds \\ & \leq \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon(v^*)(\sigma_{\mu} - \sigma) dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} A\dot{\sigma}(\sigma_{\mu} - \sigma) dx ds . \end{aligned}$$

Como consecuencia de (3.10) se puede escribir esta última desigualdad como

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} A(\dot{\sigma}_{\mu} - \dot{\sigma})(\sigma_{\mu} - \sigma) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} (v_{\mu} - v)(\dot{v}_{\mu} - \dot{v}) dx ds \\ & \leq \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon(v^*)(\sigma_{\mu} - \sigma) dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} A\dot{\sigma}(\sigma_{\mu} - \sigma) dx ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} (v^* - v)(\dot{v}_{\mu} - \dot{v}) dx ds . \end{aligned}$$

Usando que  $A$  es definida positiva se tiene

$$\begin{aligned} (3.47) \quad & C \int_{\Omega} |\sigma_{\mu}(t) - \sigma(t)|^2 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v_{\mu}(t) - v(t)|^2 dx \leq \\ & \leq \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon(v^*)(\sigma_{\mu} - \sigma) dx ds - \int_0^t \int_{\Omega} A\dot{\sigma}(\sigma_{\mu} - \sigma) dx ds \\ & + \int_0^t \int_{\Omega} (v^* - v)(\dot{v}_{\mu} - \dot{v}) dx ds . \end{aligned}$$

De las hipótesis de regularidad que se impusieron para  $\sigma^*$  y  $v^*$  (ver Sección 3.1) y de la regularidad en  $\sigma$  y  $v$  que surge de (3.44) se deduce fácilmente

$$(3.48) \quad \begin{cases} \varepsilon(v^*) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ A\dot{\sigma} \in L^2(0, T; L^2(\Omega)) \\ (v^* - v) \in L^2(0, T; L^2(\Omega)^3) \end{cases}$$

Pasando al límite ( $\mu \rightarrow 0$ ) en (3.47), se obtiene

$$(3.49) \quad \lim_{\mu \rightarrow 0} \sup_{t \in [0, T]} \left( \int_{\Omega} |\sigma_{\mu}(t) - \sigma(t)|^2 dx + \int_{\Omega} |v_{\mu}(t) - v(t)|^2 dx \right) \leq 0 .$$

De lo cual se deduce:



$$\begin{cases} \sigma_\mu \rightarrow \sigma & \text{en } L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \\ v_\mu \rightarrow v & \text{en } L^2(0, T; L^2(\Omega)^3) \end{cases}$$

### 3.3.8.

Se ha mostrado que se cumple la ecuación de movimiento, resta ver que pasa con la ley constitutiva. Para ello se toma en (3.9) a  $(\sigma_\mu - \chi)$  como función test, con  $\chi \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$ ,  $\chi(x, t) \in K$  c.t.p. en  $x \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$  y  $\chi \cdot \eta = F^d$  si  $x \in \partial_F \Omega$ , de lo cual resulta:

$$(3.50) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} A \dot{\sigma}_\mu(t) (\sigma_\mu(t) - \chi(t)) dx + \int_{\Omega} \partial \varphi_\mu(\sigma_\mu(t)) (\sigma_\mu(t) - \chi(t)) dx \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon(v_\mu(t)) (\sigma_\mu(t) - \chi(t)) dx . \end{aligned}$$

Sea  $t > 0$ , se define  $T_1 = t - h$  y  $T_2 = t + h$  con  $0 < h < t$ . De (3.41) se deduce la existencia de una subsucesión todavía notada  $(\sigma_\mu, v_\mu)$ , tal que se tiene

$$(3.51) \quad \begin{cases} \dot{\sigma}_\mu \rightarrow \dot{\sigma} & \text{en } L^2(T_1, T_2; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ débil} \\ \dot{v}_\mu \rightarrow \dot{v} & \text{en } L^2(T_1, T_2; L^2(\Omega)^3) \text{ débil} \end{cases}$$

Además, de (3.49) se puede ver que vale

$$(3.52) \quad \begin{cases} \sigma_\mu \rightarrow \sigma & \text{en } L^2(T_1, T_2; \mathbf{L}^2(\Omega)) \\ v_\mu \rightarrow v & \text{en } L^2(T_1, T_2; L^2(\Omega)^3) \end{cases}$$

A partir de (3.50) se obtiene

$$(3.53) \quad \begin{aligned} & \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} A \dot{\sigma}_\mu (\sigma_\mu - \chi) dx ds - \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \varepsilon(v_\mu) (\sigma_\mu - \chi) dx ds = \\ &= - \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \partial \varphi_\mu(\sigma_\mu) (\sigma_\mu - \chi) dx ds . \end{aligned}$$

Debido a las propiedades de  $\varphi_\mu$  se puede deducir

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} A \dot{\sigma}_\mu (\sigma_\mu - \chi) dx ds \leq \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \varepsilon(v_\mu) (\sigma_\mu - \chi) dx ds .$$

Usando la fórmula de Green y la definición de  $v^*$  se tiene

$$(3.54) \quad \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} A \dot{\sigma}_{\mu} (\sigma_{\mu} - \chi) dx ds + \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} (v_{\mu} - v^*) \operatorname{div} (\sigma_{\mu} - \chi) dx ds \leq \\ \leq \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \varepsilon(v^*) (\sigma_{\mu} - \chi) dx ds .$$

Teniendo en cuenta los resultados (3.51) y (3.52) es posible pasar al límite cuando  $\mu \rightarrow 0$  en (3.54) y se obtiene

$$\int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} A \dot{\sigma} (\sigma - \chi) dx ds + \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} (v - v^*) \operatorname{div} (\sigma - \chi) dx ds \leq \\ \leq \int_{T_1}^{T_2} \int_{\Omega} \varepsilon(v^*) (\sigma - \chi) dx ds ,$$

lo que es equivalente a:

$$\frac{1}{2h} \int_{T_1}^{T_2} \left[ \int_{\Omega} [A \dot{\sigma} (\sigma - \chi) + (v - v^*) \operatorname{div} (\sigma - \chi) - \varepsilon(v^*) (\sigma - \chi)] dx \right] ds \leq 0 .$$

Como  $t$  es un punto de Lebesgue de la función

$$s \rightarrow \int_{\Omega} [A \dot{\sigma}(s) (\sigma(s) - \chi(s)) + (v(s) - v^*(s)) \operatorname{div} (\sigma(s) - \chi(s)) - \varepsilon(v^*(s)) (\sigma(s) - \chi(s))] dx ,$$

para casi todo  $t$ ; entonces se puede pasar al límite ( $h \rightarrow 0$ ) obteniéndose (3.21), es decir, la ley constitutiva débil.

### 3.3.9. Unicidad de la solución.

Para probar la unicidad, se supone la existencia de dos soluciones que satisfacen (3.18), (3.19), (3.20) y (3.21):  $(\sigma_1, v_1)$  y  $(\sigma_2, v_2)$ .

Sumando (3.21) con  $\sigma = \sigma_1$ ,  $v = v_1$ ,  $\tau = \sigma_2$  y (3.21) con  $\sigma = \sigma_2$ ,  $v = v_2$ ,  $\tau = \sigma_1$  se obtiene

$$(3.55) \quad \int_{\Omega} A (\dot{\sigma}_1 - \dot{\sigma}_2) (\sigma_1 - \sigma_2) dx + \int_{\Omega} (v_1 - v_2) \operatorname{div} (\sigma_1 - \sigma_2) dx \leq 0 .$$

Aplicando la ecuación de movimiento (3.18) e integrando con respecto al tiempo se llega a

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma_1(t) - \sigma_2(t)) A (\sigma_1(t) - \sigma_2(t)) dx + \int_{\Omega} |v_1(t) - v_2(t)|^2 dx \leq 0 .$$

De la coercividad de  $A$  se deduce la unicidad, o sea,

$$(3.56) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \sigma_2 & \text{en c.t.p. } \Omega \times (0, T) \\ v_1 = v_2 & \text{en c.t.p. } \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

### 3.3.10. Comparación entre la evolución cuasi-estática y la evolución dinámica en elastoplasticidad perfecta (ver [1], [11], [14]).

La evolución cuasiestática (o sea se desprecia la aceleración  $\dot{v}$  en la ecuación de movimiento (2.2.1) suponiendo que es casi nula), ha sido ampliamente estudiada (ver [6], [10], [13], [14], [15], [16]). De los resultados obtenidos en este capítulo se desprende la siguiente comparación.

CUASI-ESTÁTICO	DINÁMICO
unicidad del tensor de esfuerzos	mismo resultado
no unicidad de la velocidad	unicidad de la velocidad
la fuerza de volumen $f$ no puede ser arbitrariamente grande	no hay restricciones en las fuerzas de volumen
no se puede asegurar la regularidad necesaria en la velocidad con respecto a la variable espacial para poder imponer las condiciones de contorno	mismo resultado

COMENTARIO: A pesar de que la velocidad no satisface la condición de contorno en el sentido *clásico* del término, se puede probar (ver [1]), que la componente normal la satisface. En cuanto a la componente tangencial se pueden deducir resultados interesantes (ver [1], [14] y [16]), pero que no aseguran que cumpla con la condición de contorno.

También es importante destacar, que la restricción en el tamaño de las fuerzas de volumen de la evolución cuasiestática, está relacionada con la teoría del análisis límite que se puede encontrar desarrollada en [12].

## CAPITULO 4: Plasticidad con endurecimiento lineal

### 4.1. Evolución dinámica con endurecimiento lineal

Un cuerpo ocupa un dominio acotado  $\Omega$  con borde suave  $C^1$ .

Se define, como en 2.5.2, el tensor de esfuerzos generalizados  $\Sigma$ , también llamado tensor de tensiones generalizado

$$\Sigma = (\sigma, A) ,$$

donde  $\sigma$  es el tensor de tensiones,  $A$  es el parámetro de endurecimiento,  $A(x, t) \in \mathbf{R}^m$ , con  $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ ,  $f$  son las fuerzas de volumen y  $v$  la velocidad.

Se define también  $E$ , la deformación generalizada

$$E = (\varepsilon, 0) ,$$

donde  $\varepsilon$  es el tensor de deformaciones y  $0 \in \mathbf{R}^m$ .

En este capítulo se considerará  $\mathbf{L}^2(\Omega) = (L^2(\Omega))^9 \times (L^2(\Omega))^m$ .

Se estudiará el caso en que la energía libre es cuadrática, estrictamente convexa y de la forma

$$\Phi(\varepsilon^\varepsilon, \alpha) = \Phi_1(\varepsilon^\varepsilon) + \Phi_2(\alpha) = \frac{1}{2} T \varepsilon^\varepsilon \cdot \varepsilon^\varepsilon + \frac{1}{2} T_1 \alpha \cdot \alpha ,$$

con  $\alpha \in \mathbf{R}^m$ ,  $\varepsilon^\varepsilon \in \mathbf{R}_s^9$  y  $\bar{T} = \begin{pmatrix} T & 0 \\ 0 & T_1 \end{pmatrix}$  tensor de 4<sup>to</sup> orden, simétrico y coercivo. Por consiguiente, la ley constitutiva elastoplástica resulta

$$\begin{pmatrix} L_1 \dot{\sigma} \\ L_2 \dot{A} \end{pmatrix} + \partial I_K(\Sigma) \ni E(v)$$

con  $K$  el convexo de plasticidad definido en  $\mathbf{R}_s^9 \times \mathbf{R}^m$ , el cual delimita el conjunto de tensiones generalizada físicamente admisibles y  $L = \begin{pmatrix} L_1 & 0 \\ 0 & L_2 \end{pmatrix}$  el tensor inverso de  $\bar{T}$ .

#### **Existencia y unicidad de la solución.**

Para probar la existencia y unicidad de la solución se procede como en el Capítulo 3, lo que no ofrece ninguna dificultad ya que a este efecto los dos problemas (evolución dinámica con endurecimiento lineal y sin endurecimiento) son formalmente idénticos. Se obtienen entonces los resultados que se presentarán a continuación.

**Elasto-viscoplasticidad con endurecimiento lineal.**

El sistema de ecuaciones está dado por la ley constitutiva de Perzyna (ver 2.5.3) y la ecuación de movimiento, o sea,

$$(4.1) \quad \begin{cases} L\dot{\Sigma} + \partial\varphi_\mu(\Sigma) = E(v) & \text{en } \Omega \times (0, T) \\ \dot{v} = \operatorname{div} \sigma + f & \text{en } \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

donde

$$(4.2) \quad \varphi_\mu(\Sigma) = \frac{1}{2\mu} |\Sigma - P_K \Sigma|_{\mathbf{R}^9 \times \mathbf{R}^m}^2,$$

con condiciones iniciales

$$(4.3) \quad \begin{cases} v(0) = v_0 & \text{en } \Omega \\ \Sigma(0) = \Sigma_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y condiciones de contorno mixtas

$$(4.4) \quad \begin{cases} \sigma \cdot \eta = F^d & \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T) \\ v = v^d & \text{en } \partial_v \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

Con la técnica ya expuesta en el Capítulo 3, se obtiene la existencia y unicidad de la solución de (4.1),(4.3),(4.4) notada  $(\Sigma_\mu, v_\mu)$

$$(4.5) \quad \begin{cases} (\Sigma_\mu, v_\mu) \in W^{1,\infty}(0, T; H), \\ \sigma_\mu(t) \in Y, v_\mu(t) \in H^1(\Omega)^3 \end{cases}$$

con  $H = L^2(\Omega)^9 \times L^2(\Omega)^m \times L^2(\Omega)^3$ .

**Elasto-plasticidad con endurecimiento lineal.**

Tomando el límite  $\mu \rightarrow 0$  como en el Capítulo 3, se prueba la existencia de  $(\Sigma, v)$  con

$$(4.6) \quad \begin{cases} \Sigma \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)), \operatorname{div} \sigma \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \\ v \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3) \cap L^\infty(0, T; BD(\Omega)^3) \end{cases}$$

solución de

$$(4.7) \quad \operatorname{div} \sigma + f = \dot{v} \quad \text{en } \Omega \times (0, T)$$

y de la ley constitutiva débil

$$(4.8) \quad \int_{\Omega} L\dot{\Sigma}(t)(\Sigma(t) - \tau(t))dx + \int_{\Omega} (v(t) - v^*(t)) \operatorname{div} (\sigma(t) - \tau_1(t))dx \leq \\ \leq \int_{\Omega} E(v^*(t))(\Sigma(t) - \tau(t))dx, \quad \text{en c.t.p. } t \in (0, T)$$

donde  $\tau(x, t) = \begin{pmatrix} \tau_1(x, t) \\ \tau_2(x, t) \end{pmatrix} \in \mathbf{R}_s^9 \times \mathbf{R}^m$ ,  $\tau(x, t) \in K$  en c.t.p.,  $\tau_1 \in L^\infty(0, T; Y)$ ,  $\tau_2 \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m)$   $\tau_1 \cdot \eta = F^d$  en  $\partial_F \Omega \times (0, T)$ ; con condiciones iniciales

$$(4.9) \quad \begin{cases} \Sigma(0) = \Sigma_0 & \text{en } \Omega \\ v(0) = v_0 & \text{en } \Omega \end{cases}$$

y condiciones de contorno en  $\sigma$

$$(4.10) \quad \sigma \cdot \eta = F^d \quad \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T).$$

**OBSERVACIÓN 4.1.1.** Para obtener los resultados de existencia y unicidad deben valer las mismas hipótesis de regularidad que para el Capítulo 3. En este caso se utiliza la *condición de seguridad* en  $\Sigma$  (ver 3.1).

## 4.2. Resultados adicionales de regularidad para la elasto-plasticidad con endurecimiento positivo

### 4.2.1. Hipótesis adicionales.

En esta sección se asumirá además de lo ya expuesto en la Sección 4.1, lo siguiente:

$$(4.11) \quad \left\{ \begin{array}{l} K = \{(\tau, \eta) \in \mathbf{R}_s^9 \times \mathbf{R}^m / F(\tau, \eta) \leq 0\} \\ \text{donde} \\ \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}, \eta_1 \in \mathbf{R}_s^9, \eta_2 \in \mathbf{R}^k, \mathbf{R}^m = \mathbf{R}_s^9 \times \mathbf{R}^k \\ F(\tau, (\eta_1, \eta_2)) = |\tau - \eta_1| - Y(\eta_2) \text{ (generalización del Convexo de Von Mises)} \\ \text{con } Y \text{ cóncava, } Y \in C^1(\mathbf{R}^k) \end{array} \right.$$

Se supone que existe  $d$  constante positiva tal que

$$(4.12) \quad d \leq \left| \frac{\partial Y}{\partial \eta_2} \right| \leq \frac{1}{d}, \quad \text{con } \frac{\partial Y}{\partial \eta_2} \equiv \nabla Y.$$

**Definición de endurecimiento positivo** (ver [11]).

Si  $(\tau, \eta) \in \partial K$  se cumple entonces

$$(4.13) \quad \frac{\frac{\partial F}{\partial \eta}(\tau, \eta) L_2^{-1} \frac{\partial F}{\partial \eta}(\tau, \eta)}{\frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau, \eta) L_1^{-1} \frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau, \eta)} \geq a,$$

con  $a$  una constante positiva.

**OBSERVACIÓN 4.2.1.** Notar que tanto  $L_2^{-1} = T_1$  como  $L_1^{-1} = T$  son estrictamente definidas positivas, por lo tanto se cumple

$$(4.14) \quad \frac{\left| \frac{\partial F}{\partial \eta}(\tau, \eta) \right|^2}{\left| \frac{\partial F}{\partial \tau}(\tau, \eta) \right|^2} \geq a', \quad \text{con } a' > 0.$$

#### 4.2.2. Lemas útiles.

**LEMA 4.2.2.** Si  $\chi \in \mathbb{R}_+^p \times \mathbb{R}^m$ , entonces existe  $\lambda_\mu(\chi) \geq 0$  tal que

$$(4.15) \quad \partial \varphi_\mu(\chi) = \frac{1}{\mu}(\chi - P_K \chi) = \lambda_\mu(\chi) \frac{\partial F}{\partial \chi}(\chi'),$$

con  $\chi' = P_K \chi$  y  $\frac{\partial F}{\partial \chi} \equiv \nabla F$ .

*Demostración.* El resultado surge como consecuencia de la regularidad, la convexidad de  $F$  y del hecho que  $K = \{\chi; F(\chi) \leq 0\}$  y que  $\chi - P_K(\chi)$  es perpendicular al hiperplano tangente a  $K$  en  $\chi' = P_K(\chi)$ . Notar que  $\lambda_\mu(\chi) = 0$  si  $\chi \in K$  y  $\lambda_\mu(\chi) > 0$  si  $\chi \notin K$ .  $\square$

**LEMA 4.2.3.** Sea  $\Sigma_\mu$  el esfuerzo generalizado, solución de (4.1), (4.2), (4.3) y (4.4). Si se define  $\Sigma'_\mu = P_K(\Sigma_\mu)$ , entonces

$$(4.16) \quad \Sigma'_\mu \xrightarrow{\mu \rightarrow 0} \Sigma \text{ en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ fuerte.}$$

*Demostración.* De manera similar a 3.4.4 se deduce que

$$\Sigma_\mu \rightarrow \Sigma \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) ,$$

además por propiedad de la proyección sobre  $K$

$$\|\Sigma'_\mu(t) - \Sigma'(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \leq \|\Sigma_\mu(t) - \Sigma(t)\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} \quad \forall t \in [0, T] .$$

Como  $\Sigma' = \Sigma$ , se obtiene (4.16).  $\square$

**LEMA 4.2.4.** Si  $\chi = (\tau, \eta) \notin K$ , con  $\chi' = P_K(\chi)$ , entonces

$$(4.17) \quad \left( \frac{\partial F}{\partial \chi}(\chi), \frac{\partial F}{\partial \chi}(\chi') \right) \geq \left| \frac{\partial F}{\partial \chi}(\chi') \right|^2 .$$

*Demostración.* De la convexidad de  $F$  se obtiene

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \chi}(\chi) - \frac{\partial F}{\partial \chi}(\chi'), \chi - \chi' \right) \geq 0 ,$$

pero  $\chi - \chi' = \lambda \frac{\partial F}{\partial \chi}(\chi')$  con  $\lambda > 0$ , con lo cual

$$\left( \frac{\partial F}{\partial \chi}(\chi) - \frac{\partial F}{\partial \chi}(\chi'), \frac{\partial F}{\partial \chi}(\chi') \right) \geq 0 ,$$

que es lo que se quería probar.  $\square$

### 4.2.3. Regularidad de la velocidad.

Para cada  $\mu > 0$  se obtiene de (4.1) y (4.15) lo siguiente:

$$(4.18) \quad \begin{cases} L_1 \dot{\sigma}_\mu = \varepsilon(v_\mu) - \lambda_\mu(\sigma_\mu, A_\mu) \frac{\partial F}{\partial \tau}(\sigma'_\mu, A'_\mu) \\ L_2 \dot{A}_\mu = -\lambda_\mu(\sigma_\mu, A_\mu) \frac{\partial F}{\partial \eta}(\sigma'_\mu, A'_\mu) \end{cases}$$

con  $(\sigma'_\mu, A'_\mu) = P_K(\sigma_\mu, A_\mu)$ .

Se definen



$$(4.19) \quad \begin{cases} S_1 = \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) / \Sigma_\mu(x, t) \in K\} \\ S_2 = \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) / \Sigma_\mu(x, t) \notin K\} \end{cases}$$

con lo cual  $\Omega \times (0, T) = S_1 \cup S_2$ .

Si  $(x, t) \in S_1$ , de (4.18) se obtiene

$$(4.20) \quad \varepsilon(v_\mu(x, t)) = L_1 \dot{\sigma}_\mu(x, t).$$

Si  $(x, t) \in S_2$ , se define

$$(4.21) \quad H_\mu = \frac{\partial F}{\partial \tau}(\sigma_\mu, A_\mu) L_1 \dot{\sigma}_\mu + \frac{\partial F}{\partial \eta}(\sigma_\mu, A_\mu) L_2 \dot{A}_\mu.$$

Combinando (4.18) y (4.21) se deduce

$$(4.22) \quad \begin{aligned} H_\mu &= \frac{\partial F}{\partial \tau}(\sigma_\mu, A_\mu) (\varepsilon(v_\mu) - \lambda_\mu(\sigma_\mu, A_\mu) \frac{\partial F}{\partial \tau}(\sigma'_\mu, A'_\mu)) - \\ &\quad - \lambda_\mu(\sigma_\mu, A_\mu) \frac{\partial F}{\partial \eta}(\sigma_\mu, A_\mu) \frac{\partial F}{\partial \eta}(\sigma'_\mu, A'_\mu), \end{aligned}$$

con lo cual se verifica

$$(4.23) \quad \lambda_\mu(\Sigma_\mu) = \frac{\frac{\partial F}{\partial \tau}(\Sigma_\mu) \varepsilon(v_\mu) - H_\mu}{\frac{\partial F}{\partial \chi}(\Sigma_\mu) \frac{\partial F}{\partial \chi}(\Sigma'_\mu)},$$

$$\text{con } \frac{\partial F}{\partial \chi} = \left( \frac{\partial F}{\partial \tau}, \frac{\partial F}{\partial \eta} \right).$$

Definiendo

$$(4.24) \quad c(\Sigma_\mu) = 1 - \frac{\frac{\partial F}{\partial \tau}(\Sigma_\mu) \frac{\partial F}{\partial \tau}(\Sigma'_\mu)}{\frac{\partial F}{\partial \chi}(\Sigma_\mu) \frac{\partial F}{\partial \chi}(\Sigma'_\mu)},$$

se obtiene de (4.18) la expresión

$$(4.25) \quad L_1 \dot{\sigma}_\mu = c(\Sigma_\mu) \varepsilon(v_\mu) + H_\mu \frac{\frac{\partial F}{\partial \tau}(\Sigma'_\mu)}{\frac{\partial F}{\partial \chi}(\Sigma_\mu) \frac{\partial F}{\partial \chi}(\Sigma'_\mu)}.$$

De la desigualdad de Cauchy-Schwartz, aplicando (4.17) y el hecho que  $\left| \frac{\partial F}{\partial \tau}(\Sigma'_\mu) \right| = \left| \frac{\partial F}{\partial \tau}(\Sigma_\mu) \right|$  se llega a

$$c(\Sigma_\mu) \geq 1 - \frac{\left| \frac{\partial F}{\partial \tau}(\Sigma'_\mu) \right|^2}{\left| \frac{\partial F}{\partial \chi}(\Sigma'_\mu) \right|^2};$$

por lo tanto, de (4.11) y (4.12), se deduce que existe una constante  $0 < \delta < 1$ , independiente de  $\Sigma_\mu$  tal que

$$(4.26) \quad c(\Sigma_\mu) \geq 1 - \delta.$$

Se puede escribir (4.25) como

$$(4.27) \quad \varepsilon(v_\mu) = c(\Sigma_\mu)^{-1} L_1 \dot{\sigma}_\mu - c(\Sigma_\mu)^{-1} R_\mu,$$

con

$$R_\mu = H_\mu \frac{\frac{\partial F}{\partial \tau}(\Sigma'_\mu)}{\frac{\partial F}{\partial \chi}(\Sigma_\mu) \cdot \frac{\partial F}{\partial \chi}(\Sigma'_\mu)}.$$

Si ahora se aplica nuevamente (4.17), se verifica

$$(4.28) \quad |R_\mu|^2 \leq |H_\mu|^2 \frac{\left| \frac{\partial F}{\partial \tau}(\Sigma'_\mu) \right|^2}{\left| \frac{\partial F}{\partial \chi}(\Sigma_\mu) \cdot \frac{\partial F}{\partial \chi}(\Sigma'_\mu) \right|^2} \leq |H_\mu|^2.$$

Si  $(x, t) \in S_1$ , de (4.20), existe una constante  $k$  positiva tal que

$$(4.29) \quad |\varepsilon(v_\mu(x, t))|_{\mathbf{R}_0^2} \leq k |\dot{\sigma}_\mu(x, t)|_{\mathbf{R}_0^2},$$

Si  $(x, t) \in S_2$ , por (4.27) y (4.28) se deduce

$$(4.30) \quad |\varepsilon(v_\mu(x, t))|_{\mathbf{R}_0^2} \leq \frac{1}{1 - \delta} (k |\dot{\sigma}_\mu|_{\mathbf{R}_0^2} + |H_\mu(x, t)|_{\mathbf{R}_0^2}).$$

De lo cual resulta

$$(4.31) \quad \|\varepsilon(v_\mu(t))\|_{L^2(\Omega)_0^2} \leq \frac{1}{1 - \delta} (k \|\dot{\sigma}_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)_0^2} + \|H_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)_0^2}).$$

Como consecuencia de las propiedades de  $F$  (ver (4.11)) y del hecho que, análogamente a lo que se demostró en el Capítulo 3, existe una constante  $k_1$  tal que  $\|\dot{\Sigma}_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)} \leq k_1 \forall \mu > 0, t \in [0, T]$  se obtiene

$$(4.32) \quad \{\varepsilon(v_\mu(t)); 0 < \mu < 1\} \text{ está acotado en } L^2(\Omega)^9 .$$

Usando la desigualdad de Korn (ver Capítulo 1), la familia

$$(4.33) \quad \{v_\mu(t), 0 < \mu < 1\} \text{ está acotada en } H^1(\Omega)^3 .$$

De (4.32) y (4.33) se deduce que se puede extraer una sucesión  $(v_\mu)$  tal que

$$(4.34) \quad \begin{cases} v_\mu \rightarrow v & \text{en } L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^3) \text{ débil } * \\ \varepsilon(v_\mu) \rightarrow \varepsilon(v) & \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \text{ débil } * \end{cases}$$

con  $v$  la solución de (4.7) y (4.8). Aquí es fundamental el hecho que hay unicidad de solución, en particular  $v \in L^\infty(0, T; H^1(\Omega)^3)$ .

**Conclusión importante.**

En forma análoga a como se procedió en el Capítulo 3, sección 3.3.5, para probar que se verifican las condiciones de contorno para  $\sigma$ , se puede ver que como consecuencia de (4.34) se cumple

$$(4.35) \quad v = v^d \quad \text{en } \partial_v \Omega \times (0, T) ,$$

es decir, las condiciones de contorno para  $v$ , lo que no se puede asegurar en el caso general, debido a la falta de regularidad.

Aplicando en la ley constitutiva débil (4.8) el hecho que  $v(t) \in H^1(\Omega)^3$  en c.t.p. con  $t \in (0, T)$ , se deduce de la fórmula de Green, de las condiciones de contorno y de la definición de  $\partial I_K$ , que  $\Sigma$  y  $v$  satisfacen la ley constitutiva fuerte, es decir

$$(4.36) \quad L\dot{\Sigma} + \partial I_K(\Sigma) \ni E(v) \quad \text{en } \Omega \times (0, T)$$

**OBSERVACIÓN 4.2.1.** Los resultados obtenidos son análogos a los de la evolución cuasi-estática (ver [11], [10]), es decir, se ha obtenido mayor regularidad de la velocidad con respecto a la variable espacial.

## CAPITULO 5: Plasticidad con endurecimiento no lineal

### 5.1. Algunas definiciones e hipótesis

Como en los capítulos anteriores, un cuerpo ocupa un abierto acotado  $\Omega$  de borde suave  $C^1$ .

Siguiendo con la notación introducida en el Capítulo 2,  $v(x, t) \in \mathbf{R}^3$  es la velocidad,  $f(x, t) \in \mathbf{R}^3$  son las fuerzas de volumen,  $\sigma(x, t) \in \mathbf{R}_s^9$  el tensor de tensiones o esfuerzos,  $\epsilon(x, t) \in \mathbf{R}_s^9$  el tensor de deformación con  $(x, t) \in \Omega \times [0, T]$ ,  $A = (A_{ijkl})$  es el tensor de 4<sup>to</sup> orden de elasticidad, coercivo, definido positivo y simétrico.

Se define (ver 2.4) el tensor de esfuerzos generalizados  $\Sigma = (\sigma, \eta)$  con  $\eta(x, t) \in \mathbf{R}^m$ ,  $x \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$  y  $K$  el convexo de plasticidad  $K \subset \mathbf{R}_s^9 \times \mathbf{R}^m$ .

Como en estos modelos se supone la energía separada (ver 2.5), resulta

$$\begin{aligned}\Phi(\epsilon^e, \alpha) &= \Phi_1(\epsilon^e) + \Phi_2(\alpha) \\ \text{con } \Phi_1(\epsilon^e) &= \frac{1}{2} T \epsilon^e \epsilon^e,\end{aligned}$$

donde  $\epsilon^e$  es la deformación elástica,  $T = A^{-1}$  y  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  las variables internas.

Se imponen las siguientes hipótesis sobre  $\Phi_2$ :

- i)  $\Phi_2 : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}$  es una función convexa y existe una constante  $c_1$  positiva tal que

$$\Phi_2(\alpha) \geq c_1 |\alpha|_{\mathbf{R}^m}^2,$$

además,  $\Phi_2 \in C^2(\mathbf{R}^m)$ , y

$$\nabla \Phi : \mathbf{R}_s^9 \times \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}_s^9 \times \mathbf{R}^m \quad \text{es inversible.}$$

Como surge del Capítulo 2,  $\sigma = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \epsilon^e}(\epsilon^e)$  y  $\eta = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}(\alpha)$ .

- ii) Si se define  $G = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}$ , se supone

$$|G_j(\alpha)| \leq a_j + b_j |\alpha|^2 \quad a_j, b_j \geq 0 \text{ en } \mathbf{R}. \text{ De esto se desprende}$$

$$G : L^2(0, T; L^2(\Omega)^m) \rightarrow L^2(0, T; L^2(\Omega)^m) \quad \text{continua y acotada}$$

y además existe una constante  $c$  positiva tal que si  $\|\alpha\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m)} \leq d$ , con  $d$  una constante positiva, entonces  $\|G(\alpha)\|_{L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m)} \leq c$ .

Se notará  $H = L^2(\Omega)^9 \times L^2(\Omega)^m \times L^2(\Omega)^3$  al espacio de Hilbert dotado con el producto escalar  $[\cdot, \cdot]_A$  definido como

$$[(u_1, u_2), (v_1, v_2)]_A = \langle u_1, Av_1 \rangle_{L^2(\Omega)^9} + \langle u_2, v_2 \rangle_{L^2(\Omega)^{m+3}}.$$

La condición inicial del material está dada por  $\sigma_0$ ,  $\alpha_0$  y  $v_0$ , con

$$\begin{cases} \sigma(0) = \sigma_0, & \text{en } \Omega \\ \alpha(0) = \alpha_0, & \text{en } \Omega \\ v(0) = v_0, & \text{en } \Omega \end{cases}$$

Las condiciones de contorno son mixtas, es decir, en una región del borde notada  $\partial_F \Omega$  se impone la fuerza de contacto  $F^d$ , mientras que en la restante, notada  $\partial_v \Omega$  se impone la velocidad  $v$ . Por consiguiente se debe cumplir

$$\begin{cases} \sigma \cdot \eta = F^d, & \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T) \\ v = v^d, & \text{en } \partial_v \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

Se asume, por la regularidad de las condiciones iniciales y de contorno, la existencia de funciones  $\sigma^*(x, t) \in \mathbf{R}_s^9$ ,  $\alpha^*(x, t) \in \mathbf{R}^m$ ,  $v(x, t) \in \mathbf{R}^3$ ,  $\xi^*(x, t) \in \mathbf{R}^m$  con  $x \in \Omega$ ,  $t \in [0, T]$ , tales que

$$\begin{cases} (\sigma^*, \alpha^*, v^*) \text{ satisfacen las condiciones iniciales y de contorno} \\ (\sigma^*(x, t), \xi^*(x, t)) \in K \text{ en c.t.p.} \\ (\sigma^*, \alpha^*, v^*) \in W^{1,\infty}(0, T; H) \\ v^*(t) \in H^1(\Omega)^3, \text{ div } \sigma^*(t) \in Y \text{ si } t \in [0, T] \\ \xi^* \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^m) \end{cases}$$

Además,  $(\sigma^*, \xi^*)$  cumplen la *condición de seguridad* (análogo al Capítulo 3 para  $\sigma^*$ ). Por otro lado,  $f \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3)$ .

## 5.2. Evolución dinámica de los materiales elasto–viscoplásticos con endurecimiento

### 5.2.1. Planteo del problema.

En esta sección se considerará la Ley de Perzyna (ver 2.5.3), o sea

$$(5.1) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon(v) - A\dot{\sigma} \\ -\dot{\alpha} \end{pmatrix} = \partial\varphi_\mu(\sigma, G(\alpha)) \quad \text{en } \Omega \times (0, T),$$

donde  $\varphi_\mu(\Sigma) = \frac{1}{2\mu} |\Sigma - P_K \Sigma|_{\mathbf{R}^9 \times \mathbf{R}^m}^2$  con  $K$  el convexo de plasticidad y  $P_K$  la proyección habitual en  $\mathbf{R}^9 \times \mathbf{R}^m$ .

Se considera también la ecuación de movimiento

$$(5.2) \quad \operatorname{div} \sigma + f = \dot{v} \quad \text{en } \Omega \times (0, T).$$

Se imponen las condiciones iniciales

$$(5.3) \quad \sigma(0) = \sigma_0, \quad \alpha(0) = \alpha_0, \quad v(0) = v_0 \quad \text{en } \Omega,$$

y las condiciones de contorno

$$(5.4) \quad \begin{cases} \sigma \cdot \eta = F^d, & \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T) \\ v = v^d & \text{en } \partial_v \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

### 5.2.2. Existencia y unicidad local de solución.

Como en los capítulos anteriores, se va a usar la teoría de operadores monótonos maximales (ver Capítulo 1), para probar la existencia y unicidad de solución. En una primera etapa se prueba la existencia local, luego por medio de una estimación a priori se obtiene la existencia global.

Se definen, usando las definiciones de 5.1, las funciones auxiliares

$$(5.5) \quad \begin{cases} \bar{v} = v - v^* \\ \bar{\sigma} = \sigma - \sigma^* \\ \bar{\alpha} = \alpha - \alpha^* \end{cases}$$

Se considera el operador

$$(5.6) \quad \begin{cases} C : D(C) \subset H \rightarrow H \\ D(C) = \left\{ (\tau_1, \tau_2, \omega) \in H / \begin{array}{l} \tau_1 \in Y, \tau_1 \cdot \eta = 0 \text{ en } \partial_F \Omega, \\ \omega \in H^1(\Omega)^3, \omega = 0 \text{ en } \partial_v \Omega \end{array} \right\} \\ C \begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^{-1} \varepsilon(\omega) \\ 0 \\ -\operatorname{div} \tau_1 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Entonces se puede escribir (5.1), (5.2), (5.3) y (5.4) como:

$$(5.7) \quad \begin{cases} U(t) \in H \\ \frac{d}{dt}U(t) + C(U(t)) = F(t, U(t)) \\ U(0) = 0 \end{cases}$$

con  $U(t) = (\bar{\sigma}(t), \bar{\alpha}(t), \bar{v}(t))$  y  $F : [0, T] \times H \rightarrow H$ ,

$$(5.8) \quad F(t, (u_1, u_2, u_3)) = \begin{pmatrix} -A^{-1}\varepsilon(v^*(t)) - \sigma^*(t) \\ -\dot{\alpha}^*(t) \\ f(t) - \dot{v}^*(t) + \operatorname{div} \sigma^*(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} L \partial\varphi_\mu(u_1 + \sigma^*(t), G(u_2 + \alpha^*(t))) \\ 0 \end{pmatrix},$$

con  $L = \begin{pmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & Id \end{pmatrix}$ ,  $Id \in \mathbf{R}^{m \times m}$ .

Se puede ver que, análogamente a 3.2:

- i)  $D(C)$  es denso en  $H$
- ii)  $C$  es un operador maximal monótono en  $H$
- iii)  $F(t, U(t)) : [0, T] \times H \rightarrow H$  es localmente Lipschitz

Notar que este caso no se tiene lipschitzianidad global debido a que  $\partial\varphi_\mu$  es lipschitz, pero  $G$  no tiene necesariamente derivada acotada.

Entonces, usando la teoría de semigrupos se obtiene (ver Capítulo 1) la existencia y unicidad local de solución. Es decir, existen  $T_0 > 0$  y  $U \in C^0(0, T_0; D(C)) \cap C^1(0, T_0; H)$  única solución de (5.7). Por ende, se obtiene la existencia y unicidad local de solución para (5.1), (5.2), (5.3) y (5.4) con  $(\sigma, \alpha, v) \in W^{1, \infty}(0, T_0; H)$ ,  $\sigma(t) \in Y$  y  $v(t) \in H^1(\Omega)^3$  sobre  $t \in [0, T_0]$ .

### 5.2.3. Existencia global de solución.

Para probar la existencia de solución global se deben hacer estimaciones a priori de los  $U(t)$  en  $H \forall t \in [0, T_0]$  (ver Capítulo 1), lo cual es equivalente a obtener estimaciones a priori de los  $(\sigma(t), v(t), \alpha(t))$  en  $H$ ,  $\forall t \in [0, T_0]$ . Para ello, dado  $t < T_0$ , se multiplica (5.1) por  $(\sigma - \sigma^*, G(\alpha) - \xi^*)$  e integrando se obtiene

$$(5.9) \quad \int_0^t \int_\Omega A \dot{\sigma}(\sigma - \sigma^*) dx ds - \int_0^t \int_\Omega \varepsilon(v)(\sigma - \sigma^*) dx ds + \int_0^t \int_\Omega \dot{\alpha}(G(\alpha) - \xi^*) dx ds = \\ = - \int_0^t \int_\Omega \partial\varphi_\mu(\sigma, G(\alpha))(\sigma - \sigma^*, G(\alpha) - \xi^*) dx ds .$$

Como  $(\sigma^*(x, t), \xi^*(x, t)) \in K$  en c.t.p., sabemos que  $\varphi_\mu(\sigma^*, \xi^*) = 0$ , por lo tanto usando la definición de subdiferencial resulta para el segundo miembro de (5.9) que

$$(5.10) \quad \int_0^t \int_\Omega \partial\varphi_\mu(\sigma, G(\alpha))(\sigma - \sigma^*, G(\alpha) - \xi^*) dx ds \geq \int_0^t \int_\Omega \varphi_\mu(\sigma, G(\alpha)) dx ds \geq 0.$$

De la fórmula de Green, aplicada al segundo término de (5.9), se llega a:

$$(5.11) \quad \int_0^t \int_\Omega \varepsilon(v)(\sigma - \sigma^*) dx ds = - \int_0^t \int_\Omega (v - v^*) \operatorname{div}(\sigma - \sigma^*) dx ds + \\ + \int_0^t \int_\Omega \varepsilon(v^*)(\sigma - \sigma^*) dx ds.$$

Definiendo  $R^* = \dot{v}^* - \operatorname{div} \sigma^* - f$ , de (5.9), (5.11) y usando que  $\operatorname{div} \sigma + f = \dot{v}$  se deduce

$$(5.12) \quad \int_0^t \int_\Omega A(\dot{\sigma} - \dot{\sigma}^*)(\sigma - \sigma^*) dx ds + \int_0^t \int_\Omega (\dot{v} - \dot{v}^*)(v - v^*) dx ds + \\ + \int_0^t \int_\Omega \dot{\alpha}(G(\alpha) - \xi^*) dx ds + \int \partial\varphi_\mu(\sigma, G(\alpha))((\sigma, G(\alpha)) - (\sigma^*, \xi^*)) dx ds \leq \\ \leq - \int_0^t \int_\Omega A\dot{\sigma}^*(\sigma - \sigma^*) dx ds - \int_0^t \int_\Omega R^*(v - v^*) dx ds + \int_0^t \int_\Omega \varepsilon(v^*)(\sigma - \sigma^*) dx ds.$$

Usando la regularidad de  $\xi^*$  se obtiene

$$(5.13) \quad \int_0^t \int_\Omega \dot{\alpha}\xi^* dx ds = - \int_0^t \int_\Omega \alpha\xi^* dx ds + \int_\Omega (\alpha(t)\xi^*(t) - \alpha(0)\xi^*(0)) dx \\ \leq - \int_0^t \int_\Omega \alpha\xi^* dx ds - \int_0^t \int_\Omega \alpha(0)\xi^*(0) dx + \frac{\delta^2}{2} \int_\Omega |\alpha(t)|^2 dx + \frac{1}{2\delta^2} \int_\Omega |\xi^*(t)|^2 dx, \\ \text{con } \delta \ll 1.$$

Debido a la definición de derivadas se verifica

$$(5.14) \quad \begin{cases} \int_0^t \int_\Omega (\dot{\sigma} - \dot{\sigma}^*)A(\sigma - \sigma^*) dx ds = \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega ((\sigma - \sigma^*)A(\sigma - \sigma^*))' dx ds \\ \int_0^t \int_\Omega (\dot{v} - \dot{v}^*)(v - v^*) dx ds = \frac{1}{2} \int_0^t \int_\Omega (|v - v^*|^2)' dx ds \\ \int_0^t \int_\Omega (\Phi_2(\alpha))' dx ds = \int_0^t \int_\Omega G(\alpha)\dot{\alpha} dx ds \end{cases}$$



De (5.10), (5.12), (5.13) y (5.14), usando además la coercividad de  $A$  y de  $\Phi_2$ , se llega a la siguiente desigualdad:

$$(5.15) \quad a\|\sigma(t) - \sigma^*(t)\|_{L^2(\Omega)_\sigma}^2 + \frac{1}{2}\|v(t) - v^*(t)\|_{L^2(\Omega)_v}^2 + b\|\alpha(t)\|_{L^2(\Omega)_m}^2 \leq \\ \leq \int_0^t \int_\Omega (\varepsilon(v^*) - A\dot{\sigma}^*)(\sigma - \sigma^*) dx ds - \int_0^t \int_\Omega R^*(v - v^*) dx ds - \\ - \int_0^t \int_\Omega \alpha \dot{\xi}^* dx ds + c ,$$

con  $a > 0$ ,  $b > 0$  y  $c$  constantes.

Si se define  $h(t) = \|\sigma(t) - \sigma^*(t)\|_{L^2(\Omega)_\sigma}^2 + \|v(t) - v^*(t)\|_{L^2(\Omega)_v}^2 + \|\alpha(t)\|_{L^2(\Omega)_m}^2$ , de (5.15) por Cauchy-Schwartz se obtiene  $h(t) \leq d \int_0^t h(s) ds + e$ , con  $d$  y  $e$  constantes positivas que no dependen ni de  $t$  ni de  $\mu$ . Aplicando el Teorema de Gronwall se deduce que existe una constante  $c_1$  positiva que no depende de  $t$  tal que

$$(5.16) \quad \|\sigma(t) - \sigma^*(t)\|_{L^2(\Omega)_\sigma} \leq c_1, \quad \|v(t) - v^*(t)\|_{L^2(\Omega)_v} \leq c_1 \quad \text{y} \quad \|\alpha(t)\|_{L^2(\Omega)_m} \leq c_1, \\ \forall t \in [0, T_0],$$

lo cual es equivalente a

$$(5.17) \quad \|\sigma(t)\|_{L^2(\Omega)_\sigma} \leq c_2, \quad \|v(t)\|_{L^2(\Omega)_v} \leq c_2 \quad \text{y} \quad \|\alpha(t)\|_{L^2(\Omega)_m} \leq c_2, \\ \forall t \in [0, T_0], \quad \text{con } c_2 \text{ constante positiva, que sólo depende de } T_0.$$

O sea, en (5.17) se han obtenido estimaciones a priori  $\forall t \in [0, T_0]$  de la solución, lo que asegura la existencia global (ver Capítulo 1).

**OBSERVACIÓN 5.2.1.** Si notamos para cada  $\mu > 0$  ( $\sigma_\mu, \alpha_\mu, v_\mu$ ) a la solución de (5.1), (5.2), (5.3) y (5.4) con  $T_0 > 0$ , (5.17) se escribe como

$$(5.18) \quad \|\sigma_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)_\sigma} \leq c(T_0), \quad \|\alpha_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)_m} \leq c(T_0) \quad \text{y} \quad \|v_\mu(t)\|_{L^2(\Omega)_v} \leq c(T_0),$$

donde  $c$  depende de  $T_0$  y no depende de  $\mu$  (ya que ni  $d$  ni  $e$  dependen de  $\mu$ ). Es importante aclarar que hasta ahora se había omitido el parámetro  $\mu$  puesto que se lo fijaba.

### 5.3. Evolución dinámica de los materiales elasto-plásticos con endurecimiento

#### 5.3.1. Hipótesis adicionales sobre la energía y el convexo de plasticidad.

Se asume para esta sección hipótesis adicionales a las ya introducidas en 5.1.

La función  $G = \frac{\partial \Phi_2}{\partial \alpha}$  verifica:

$$(5.19) \quad G(\alpha) = (\chi(\alpha), d(\alpha)) \quad \text{con } \alpha \in \mathbf{R}_s^9 \times \mathbf{R}, \chi(\alpha) \in \mathbf{R}_s^9, d(\alpha) \in \mathbf{R},$$

donde  $\chi$  es una función lineal y  $d$  es una función cóncava.

El convexo de plasticidad  $K$  tiene la siguiente forma:

$$K = \left\{ (\tau_1, \tau_2, c) \left/ \begin{array}{l} g(\tau_1 - \tau_2) - c \leq 0 \\ \text{con } \tau_1, \tau_2 \in \mathbf{R}_s^9, c \in \mathbf{R} \end{array} \right. \right\}, \text{ con } g : \mathbf{R}_s^9 \rightarrow \mathbf{R} \text{ convexa.}$$

O sea, se obtendrán resultados para los materiales con endurecimiento isotrópico y cinemático lineal (ver Capítulo 2). Se notará

$$V = L^2(\Omega)_s^9 \times L^2(\Omega)_s^9 \times L^2(\Omega), \quad L^2(\Omega) = L^2(\Omega)_s^9 \times L^2(\Omega).$$

#### 5.3.2. Planteo del problema.

La ley constitutiva se escribe como

$$(5.20) \quad \begin{pmatrix} \varepsilon(v) - A\dot{\sigma} \\ -\dot{\alpha} \end{pmatrix} \in \partial I_K(\sigma, G(\alpha)) \quad \text{en } \Omega \times (0, T),$$

con  $K$  convexo de plasticidad,  $(\sigma(x, t), G(\alpha(x, t))) \in K$  en c.t.p.

Se tiene también la ecuación de movimiento

$$(5.21) \quad \text{div } \sigma + f = \dot{v} \quad \text{en } \Omega \times (0, T).$$

Se imponen las condiciones iniciales

$$(5.22) \quad \sigma(0) = \sigma_0, \alpha(0) = \alpha_0, v(0) = v_0 \quad \text{en } \Omega,$$

y las condiciones de contorno

$$(5.23) \quad \begin{cases} \sigma \cdot \eta = F^d & \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T) \\ v = v^d & \text{en } \partial_v \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

### 5.3.3. Pasaje al límite ( $\mu \rightarrow 0$ ).

De las estimaciones (5.18) se sabe que existe una sucesión de  $(\sigma_\mu, \alpha_\mu, v_\mu)$  con  $\mu \rightarrow 0$  tal que

$$(5.24) \quad \begin{cases} (\sigma_\mu, \alpha_\mu) \rightarrow (\sigma, \alpha) & \text{en } L^\infty(0, T; V) \text{ débil } * \\ v_\mu \rightarrow v & \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \text{ débil } * \end{cases}$$

donde  $(\sigma, \alpha)$  y  $v$  pueden depender de la sucesión tomada.

### 5.3.4.

Se debe probar que  $(\sigma(x, t), G(\alpha(x, t))) \in K$  en c.t.p.

De (5.12) y (5.18) se deduce la existencia de una constante  $c$  positiva tal que para todo  $\mu > 0$ ,  $t \in (0, T)$  se tiene

$$(5.25) \quad \int_0^t \int_\Omega \partial \varphi_\mu(\sigma_\mu, G(\alpha_\mu))((\sigma_\mu, G(\alpha_\mu)) - (\sigma^*, \xi^*)) dx ds \leq c.$$

Usando (5.10) se deduce

$$(5.26) \quad \int_0^t \int_\Omega \varphi_\mu(\sigma_\mu, G(\alpha_\mu)) dx ds \leq c.$$

La función  $\|\Sigma - P_K \Sigma\|_{L^2(0, T; V)}^2$ , es convexa y continua, por consiguiente débilmente semicontinua inferiormente en  $\Sigma \in L^2(0, T; V)$ .

Debido a las hipótesis sobre la energía de la sección 5.1, existen una subsucesión de  $(\sigma_\mu, \alpha_\mu, v_\mu)$ , que cumple (5.24) y  $G^* \in L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega))$  tal que

$$(5.27) \quad \begin{aligned} G(\alpha_\mu) \rightarrow G^* & \text{ en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ débil } * \\ & \text{(en particular en } L^2(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ débil).} \end{aligned}$$

De (5.26) y (5.27) se obtiene

$$\begin{aligned}
 & \int_0^T \int_{\Omega} |(\sigma, G^*) - P_K(\sigma, G^*)|^2 dx ds \\
 (5.28) \quad & \leq \liminf_{\mu \rightarrow 0} \int_0^T \int_{\Omega} |(\sigma_{\mu}, G(\alpha_{\mu})) - P_K(\sigma_{\mu}, G(\alpha_{\mu}))|^2 dx ds \\
 & = \liminf_{\mu \rightarrow 0} (2\mu) \int_0^T \int_{\Omega} |\varphi_{\mu}(\sigma_{\mu}, G(\alpha_{\mu}))| dx ds = 0,
 \end{aligned}$$

con lo cual resulta

$$(5.29) \quad (\sigma(x, t), G^*(x, t)) \in K \quad \text{en c.t.p.}$$

Se definen  $\chi^*$  y  $d^*$  con

$$(5.30) \quad G^* = (\chi^*, d^*), \quad \chi^* \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)_s^0), \quad d^* \in L^{\infty}(0, T; L^2(\Omega)).$$

Como  $\chi$  es una función lineal, la subsucesión  $(\alpha_{\mu})$  cumple

$$(5.31) \quad \begin{cases} \chi(\alpha_{\mu}) \rightarrow \chi(\alpha) \text{ en } L^2(0, T; L^2(\Omega)_s^0) \text{ débil} \\ \text{con } \chi(\alpha) = \chi^* \end{cases}$$

Por el crecimiento impuesto a  $G$  en 5.1, tenemos que  $\forall \alpha \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $d(\alpha) \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , además la función  $\alpha \rightarrow -d(\alpha)$  es continua y convexa, por lo tanto débilmente semicontinua inferiormente en  $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , entonces de (5.24), (5.27) y (5.30) se tiene (ver Capítulo 1),

$$(5.32) \quad -d(\alpha) \leq -d^* \quad \text{en c.t.p.}$$

De (5.29), (5.31) y (5.32), siguiendo con la notación de 5.3.1, se deduce

$$(5.33) \quad g(\sigma - \chi(\alpha)) - d(\alpha) \leq g(\sigma - \chi^*) - d^* \leq 0 \quad \text{en c.t.p.},$$

que es lo que se quería probar.

### 5.3.5. Condiciones de contorno para $\sigma$ .

De (5.24) se deduce inmediatamente que  $(\sigma, v)$  satisface la ecuación de movimiento (5.21), en particular, teniendo en cuenta la regularidad de  $f$ , se verifica

$$(5.34) \quad (-\sigma, v) \in Y_a,$$

con  $Y_a = \{(\tau, \omega) \in L^2(\Omega \times (0, T))^3 \times L^2(\Omega \times (0, T))^3 / \operatorname{div} \tau + \dot{\omega} \in L^2(\Omega \times (0, T))^3\}$ .

Si se considera  $\omega : \bar{\Omega} \times [0, T] \rightarrow \mathbf{R}$  tal que

$$(5.35) \quad \omega \in H^1(\Omega \times (0, T)), \quad \omega = 0 \quad \text{en } \partial_v \Omega \times [0, T] \cup \Omega \times \{0, 1\},$$

entonces, de las propiedades del espacio  $Y_a$  (ver Capítulo 1), se cumple

$$(5.36) \quad \int_0^T \int_{\Omega} \sigma \nabla \omega \, dx \, ds - \int_0^T \int_{\Omega} v \dot{\omega} \, dx \, ds - \int_0^T \int_{\Omega} f \omega \, dx \, ds = \\ = \int_0^T \int_{\partial_F \Omega} \omega \sigma \cdot \eta \, dx \, ds.$$

Por otro lado, como  $(\sigma_\mu, v_\mu)$  con  $\mu > 0$ , cumplen con la ecuación de movimiento (5.2) y las condiciones de contorno (5.4), se tiene

$$(5.37) \quad \int_0^T \int_{\Omega} \sigma_\mu \nabla \omega \, dx \, ds - \int_0^T \int_{\Omega} v_\mu \dot{\omega} \, dx \, ds - \int_0^T \int_{\Omega} f \omega \, dx \, ds = \\ = \int_0^T \int_{\partial_F \Omega} \omega F^d \, dx \, ds.$$

Tomando el límite cuando  $\mu \rightarrow 0$ , se deduce de (5.24) que

$$(5.38) \quad \sigma \cdot \eta = F^d \quad \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T).$$

### 5.3.6. Ley constitutiva.

Se define para cada  $\mu > 0$ ,  $t \in (0, T]$  la función

$$(5.39) \quad p_\mu(t) = \int_0^t \int_{\Omega} (A \dot{\sigma}_\mu - \epsilon(v_\mu)) (\sigma_\mu - \tau_1) \, dx \, ds + \int_0^t \int_{\Omega} \dot{\alpha}_\mu (G(\alpha_\mu) - \tau_2) \, dx \, ds,$$

con

$$(5.40) \quad \begin{cases} \tau = (\tau_1, \tau_2), \tau_1 \in W^{1,\infty}(0, T; Y), \tau_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)) \\ \tau(x, t) \in K \text{ c.t.p.}, \tau(0) = (\sigma_0, \alpha_0) \text{ en } \Omega \\ \tau_1 \cdot \eta = F^d \text{ sobre } \partial_F \Omega \times (0, T) \end{cases}$$

Como  $\sigma_\mu, \alpha_\mu, v_\mu$  cumplen la ley constitutiva (5.1), de las propiedades de  $\partial\varphi_\mu$  se deduce

$$(5.41) \quad p_\mu(t) \leq 0 .$$

Se analiza cada término de la función  $p_\mu(t)$  dada en (5.39). Valen los siguientes resultados:

$$(5.42) \quad \int_0^t \int_\Omega A \dot{\sigma}_\mu (\sigma_\mu - \tau_1) dx ds = \frac{1}{2} \int_\Omega (\sigma_\mu(t) - \tau_1(t)) A (\sigma_\mu(t) - \tau_1(t)) dx + \\ + \int_0^t \int_\Omega A \dot{\tau}_1 (\sigma_\mu - \tau_1) dx ds ,$$

$$(5.43) \quad \int_0^t \int_\Omega G(\alpha_\mu) \dot{\alpha}_\mu dx ds = \int_\Omega (\Phi_2(\alpha_\mu(t)) - \Phi_2(\alpha_0)) dx ,$$

y

$$(5.44) \quad \int_0^t \int_\Omega \tau_2 \dot{\alpha}_\mu dx ds = - \int_0^t \int_\Omega \dot{\tau}_2 \alpha_\mu dx ds + \int_\Omega (\tau_2(t) \alpha_\mu(t) - |\alpha_0|^2) dx .$$

Usando las funciones  $\sigma^*$  y  $v^*$ , definidas en 5.1, se obtiene

$$(5.45) \quad \int_0^t \int_\Omega \varepsilon(v_\mu) (\sigma_\mu - \tau_1) dx ds = - \frac{1}{2} \int_\Omega |v_\mu(t) - v^*(t)|^2 dx - \\ - \int_0^t \int_\Omega R^*(v_\mu - v^*) dx ds - \int_0^t \int_\Omega (v_\mu - v^*) \operatorname{div} (\sigma^* - \tau_1) dx ds + \\ + \int_0^t \int_\Omega \varepsilon(v^*) (\sigma_\mu - \tau_1) dx ds ,$$

con  $R^* = \dot{v}^* - \operatorname{div} \sigma^* - f$ .

Reemplazando (5.42), (5.43) y (5.45) en (5.39) e integrando en  $t \in (t_0 - h, t_0 + h) \subset (0, T)$ , se puede pasar al límite inferior en (5.39) cuando  $\mu \rightarrow 0$  dado que

$$(5.46) \quad \begin{cases} (\sigma_\mu, \alpha_\mu) \rightarrow (\sigma, \alpha) & \text{en } L^2(t_0 - h, t_0 + h; V) \text{ débil} \\ v_\mu \rightarrow v & \text{en } L^2(t_0 - h, t_0 + h; L^2(\Omega)^3) \text{ débil} \end{cases}$$

y los términos cuadráticos son débilmente semicontinuos inferiormente.

Definiendo

$$\begin{aligned}
 (5.47) \quad p(t) = & \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\sigma(t) - \tau_1(t)) A (\sigma(t) - \tau_1(t)) + \int_0^t \int_{\Omega} A \dot{\tau}_1 (\sigma - \tau_1) dx ds + \\
 & + \int_{\Omega} (\Phi_2(\alpha(t)) - \Phi_2(\alpha_0)) dx - \int_0^t \int_{\Omega} \alpha \dot{\tau}_2 dx ds + \int_{\Omega} (\alpha(t) \tau_2(t) - |\alpha_0|^2) dx + \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |v(t) - v^*(t)|^2 dx + \int_0^t \int_{\Omega} (R^* + \operatorname{div} (\sigma^* - \tau_1)) (v - v^*) dx ds - \\
 & - \int_0^t \int_{\Omega} \varepsilon(v^*) (\sigma - \tau_1) dx ds .
 \end{aligned}$$

se llega a

$$0 \geq \frac{1}{2h} \liminf_{\mu \rightarrow 0} \int_{t_0-h}^{t_0+h} p_{\mu}(t) dt \geq \frac{1}{2h} \int_{t_0-h}^{t_0+h} p(t) dt .$$

Como  $p \in L^1(0, T)$  con  $t_0$  punto de Lebesgue para casi todo  $t_0 \in (0, T)$ , pasando al límite  $h \rightarrow 0$ , se prueba

$$(5.48) \quad p(t_0) \leq 0 \quad \text{c.t.p.}$$

Esta última desigualdad da una expresión débil de la ley constitutiva (5.20).

NOTA. Contrariamente al problema con endurecimiento lineal y debido a la poca regularidad de la solución no se puede dar un sentido claro a la condición inicial, tampoco se ha logrado unicidad de esta solución débil.

## CAPITULO 6: Un esquema implícito

### 6.1. Planteo del esquema implícito

Se considera la evolución dinámica de un material elástico perfectamente plástico, tal como se la ha estudiado en el Capítulo 3. Se agrega la hipótesis  $F^d = F^d(x)$  a las ya introducidas en 3.1, es decir sólo se tratará el problema con la fuerza de contacto dato en  $\partial_F \Omega$  no dependiente del tiempo.

Se define

$$(6.1) \quad \bar{v} = v - v^*, \quad \bar{f} = f - \dot{v}^*, \quad h = \varepsilon(v^*),$$

con  $v^*$  y  $\sigma^*$  ya definidas en 3.1.

La ley constitutiva débil (3.2.1), se puede escribir como

$$(6.2) \quad \int_{\Omega} A \dot{\sigma}(t)(\sigma(t) - \tau(t)) dx + \int_{\Omega} \bar{v}(t) \operatorname{div}(\sigma(t) - \tau(t)) dx \leq \int_{\Omega} h(t)(\sigma(t) - \tau(t)) dx, \quad \text{en } (0, T),$$

$\forall \tau \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{K}_F)$ , con  $\sigma(t) \in \mathbf{K}$  donde  $\mathbf{K} = \{\tau \in Y \text{ y } \tau(x) \in K \text{ en c.t.p.}\}$  y  $\mathbf{K}_F = \{\tau \in \mathbf{K} / \tau.\eta = F^d\}$ .

De la ecuación de movimiento (3.10), se obtiene la ecuación equivalente

$$(6.3) \quad \operatorname{div} \sigma + \bar{f} = \dot{\bar{v}} \quad \text{en } \Omega \times (0, T).$$

Las ecuaciones de contorno se reducen a

$$(6.4) \quad \begin{aligned} \sigma.\eta &= F^d & \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T) \\ \bar{v} &= 0 & \text{en } \partial_v \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

y las condiciones iniciales

$$(6.5) \quad \bar{v}(0) = 0, \quad \sigma(0) = \sigma_0 \quad \text{en } \Omega.$$

Para plantear el esquema implícito, se divide  $[0, T]$  en  $N$  intervalos  $[t_n, t_{n+1}]$  con  $\Delta t = \frac{T}{N}$ ,  $u^n(x) = v^*(x, t_n)$  y  $\bar{f}^n(x) = \bar{f}(x, t_n)$ ,  $h^n(x) = h(x, t_n)$ .

Partiendo de  $\sigma^0 = \sigma_0$  y  $\bar{v}^0 = 0$ , se busca obtener por inducción a  $(\sigma^{n+1}, \bar{v}^{n+1})$ , solución de

$$(6.6) \quad \begin{aligned} \int_{\Omega} A \left( \frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta t} \right) \cdot (\sigma^{n+1} - \tau) dx + \int_{\Omega} \bar{v}^{n+1} \operatorname{div}(\sigma^{n+1} - \tau) dx &\leq \\ \leq \int_{\Omega} h^{n+1}(\sigma^{n+1} - \tau) dx, \end{aligned}$$



para todo  $\tau \in \mathbf{K}_F$ , con  $\sigma^{n+1} \cdot \eta = F^d$  sobre  $\partial_F \Omega$  y  $\sigma^{n+1} \in \mathbf{K}$ . Además,

$$(6.7) \quad \int_{\Omega} \left( \frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n}{\Delta t} \right) \omega \, dx = \int_{\Omega} (\bar{f}^{n+1} + \operatorname{div} \sigma^{n+1}) \omega \, dx,$$

para todo  $\omega \in L^2(\Omega)^3$ .

Definiendo  $g^n = \bar{v}^n + \Delta t \bar{f}^{n+1}$  y  $e^n = A\sigma^n + \Delta t h^{n+1}$ , de (6.6) y (6.7) se obtiene

$$(6.8) \quad \begin{aligned} & \int_{\Omega} A\sigma^{n+1}(\sigma^{n+1} - \tau) \, dx + \Delta t \int_{\Omega} \bar{v}^{n+1} \operatorname{div}(\sigma^{n+1} - \tau) \, dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega} e^n(\sigma^{n+1} - \tau) \, dx, \end{aligned}$$

$$(6.9) \quad \int_{\Omega} \bar{v}^{n+1} \omega \, dx - \Delta t \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma^{n+1} \omega \, dx = \int_{\Omega} g^n \omega \, dx.$$

La solución  $(\sigma^{n+1}, \bar{v}^{n+1})$  es un *punto silla* del lagrangiano  $L$  (ver Capítulo 1) con  $L : Y \times L^2(\Omega)^3 \rightarrow \bar{\mathbf{R}}$ , definido como

$$(6.10) \quad \begin{aligned} L(\tau, \omega) &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\tau\tau \, dx + \Delta t \int_{\Omega} \omega \operatorname{div} \tau \, dx - \int_{\Omega} e^n \tau \, dx \\ &+ I_{\mathbf{K}_F}(\tau) - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\omega|^2 \, dx + \int_{\Omega} g^n \omega \, dx. \end{aligned}$$

Se redujo el problema de la existencia de solución del esquema implícito, para cada  $1 \leq n \leq N$ , a buscar la existencia de un *punto silla*.

El lagrangiano  $L$  no verifica las condiciones del teorema de *punto silla* (ver Capítulo 1), ya que no tiene el crecimiento al infinito en  $\tau \in Y$  necesario. Esto lleva a considerar un nuevo lagrangiano  $L_\eta$  con

$$(6.11) \quad L_\eta(\tau, \omega) = L(\tau, \omega) + \frac{\eta}{2} \int_{\Omega} |\operatorname{div} \tau|^2 \, dx.$$

Aplicando el teorema a  $L_\eta$  se deduce la existencia de un único punto silla  $(\sigma_\eta^{n+1}, \bar{v}_\eta^{n+1})$  en  $Y \times L^2(\Omega)^3$ , el cual verifica

$$(6.12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} A\sigma_\eta^{n+1}(\sigma_\eta^{n+1} - \tau) \, dx + \Delta t \int_{\Omega} \bar{v}_\eta^{n+1} \operatorname{div}(\sigma_\eta^{n+1} - \tau) \, dx \\ - \int_{\Omega} e^n(\sigma_\eta^{n+1} - \tau) \, dx + \eta \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma_\eta^{n+1} \operatorname{div}(\sigma_\eta^{n+1} - \tau) \leq 0 \\ \text{para todo } \tau \in \mathbf{K}_F \\ \int_{\Omega} \bar{v}_\eta^{n+1} \omega \, dx - \Delta t \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma_\eta^{n+1} \omega \, dx = \int_{\Omega} g^n \omega \, dx \\ \text{con } \sigma_\eta^{n+1} \in \mathbf{K}_F, \text{ y } \omega \in L^2(\Omega)^3 \end{array} \right.$$

Se debe pasar al límite con  $\eta \rightarrow 0$ , para ello se toma  $\omega = \bar{v}_\eta^{n+1}$  como función test y se suman las dos expresiones en (6.12) obteniéndose

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} A\sigma_\eta^{n+1}\sigma_\eta^{n+1} dx + \int_{\Omega} |\bar{v}_\eta^{n+1}|^2 dx + \eta \int_{\Omega} |\operatorname{div} \sigma_\eta^{n+1}|^2 dx \leq \\ & \leq \int_{\Omega} e^n(\sigma_\eta^{n+1} - \tau) dx + \int_{\Omega} g^n \cdot v_\eta^{n+1} dx + \int_{\Omega} A\sigma_\eta^{n+1}\tau dx + \\ & + \int_{\Omega} \Delta t v_\eta^{n+1} \operatorname{div} \tau dx + \eta \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma_\eta^{n+1} \operatorname{div} \tau dx , \end{aligned}$$

de lo cual, usando la coercividad de  $A$  se deduce

$$(6.13) \quad \begin{cases} \sigma_\eta^{n+1} & \text{es un sucesión acotada en } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ independiente de } \eta \\ \bar{v}_\eta^{n+1} & \text{es una sucesión acotada en } L^2(\Omega)^3 \text{ independiente de } \eta \\ \eta^{1/2} \operatorname{div} \sigma_\eta^{n+1} & \text{es una sucesión acotada en } L^2(\Omega)^3 \text{ independiente de } \eta \end{cases}$$

Tomando  $\omega = \operatorname{div} \sigma_\eta^{n+1}$  como función test, se obtiene de (6.12)

$$(6.14) \quad \operatorname{div} \sigma_\eta^{n+1} \text{ es una sucesión acotada en } L^2(\Omega)^3 \text{ independiente de } \eta .$$

Por consiguiente se puede extraer una sucesión  $(\sigma_\eta^{n+1}, \bar{v}_\eta^{n+1})$ , con  $\eta \rightarrow 0$ , y existen  $(\sigma^{n+1}, \bar{v}^{n+1})$  tales que

$$(6.15) \quad \begin{cases} \sigma_\eta^{n+1} \rightarrow \sigma^{n+1} & \text{en } \mathbf{L}^2(\Omega) \text{ débil} \\ \operatorname{div} \sigma_\eta^{n+1} \rightarrow \operatorname{div} \sigma^{n+1} & \text{en } L^2(\Omega)^3 \text{ débil} \\ \bar{v}_\eta^{n+1} \rightarrow \bar{v}^{n+1} & \text{en } L^2(\Omega)^3 \text{ débil} \end{cases}$$

De (6.14) se deduce

$$\eta \operatorname{div} \sigma_\eta^{n+1} \rightarrow 0 \text{ en } L^2(\Omega)^3 .$$

Además, de (6.13), usando la convexidad y continuidad de los funcionales se verifica

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} A\sigma_\eta^{n+1}\sigma_\eta^{n+1} dx \geq \int_{\Omega} A\sigma^{n+1}\sigma^{n+1} dx$$

y

$$\liminf_{\eta \rightarrow 0} \int_{\Omega} |\bar{v}_\eta^{n+1}|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\bar{v}^{n+1}|^2 dx .$$

Por consiguiente,  $(\sigma^{n+1}, \bar{v}^{n+1})$  es solución de (6.8) y (6.9). Como  $\mathbf{K}_F$  es cerrado y convexo, se tiene también la condición de contorno para  $\sigma^{n+1}$ , con  $\sigma^{n+1} \in \mathbf{K}$ .

Se ha demostrado la existencia de solución para el esquema implícito, la unicidad se deduce en forma inmediata usando las técnicas habituales.

## 6.2. Estimaciones a priori

Dadas  $(\chi_n)_{0 \leq n \leq N}$  funciones en un espacio vectorial cualesquiera  $V$ , se definen la interpolación lineal y en escalera respectivamente como

$$(6.16) \quad \chi_N(t) = (\chi_n - \chi_{n-1}) \frac{t - t_{n-1}}{\Delta t} + \chi_{n-1} \quad \text{si } t \in [t_{n-1}, t_n]$$

y

$$(6.17) \quad \chi_N^c(t) = \chi_n \quad \text{si } t \in [t_{n-1}, t_n].$$

### *Estimaciones a priori I.*

LEMA 6.2.1. Valen las siguientes desigualdades:

$$(6.18) \quad \sum_{n=0}^m \int_{\Omega} A(\sigma^{n+1} - \sigma^n) \sigma^{n+1} dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \sigma^{m+1} \sigma^{m+1} - \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \sigma^0 \sigma^0 .$$

y

$$(6.19) \quad \sum_{n=0}^m \int_{\Omega} (\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n) \bar{v}^{n+1} dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{v}^{m+1}|^2 dx .$$

*Demostración.* Es inmediata usando que  $A$  es un tensor definido positivo, con lo cual vale

$$A(\sigma^{n+1} - \sigma^n) \sigma^{n+1} \geq \frac{1}{2} (A \sigma^{n+1} \sigma^{n+1} - A \sigma^n \sigma^n)$$

y análogamente

$$(\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n) \bar{v}^{n+1} \geq \frac{1}{2} (|\bar{v}^{n+1}|^2 - |\bar{v}^n|^2) ,$$

Sumando los sucesivos términos de  $n = 0$  hasta  $m$  se obtienen (6.18) y (6.19).  $\square$

Eligiendo  $w = \bar{v}^{n+1}$  en (6.7), si se efectúa la suma en (6.6) y (6.7) de las sucesivas inecuaciones hasta  $m$ , usando (6.18) y (6.19) se verifica

$$(6.20) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \sigma^{m+1} \sigma^{m+1} dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{v}^{m+1}|^2 dx \leq \sum_{n=0}^m \int_{\Omega} (\bar{f}^{n+1} + \operatorname{div} \tau) \bar{v}^{n+1} \Delta t dx \\ + \sum_{n=0}^m \int_{\Omega} h^{n+1} (\sigma^{n+1} - \tau) \Delta t dx + \int_{\Omega} A (\sigma^{m+1} - \sigma^0) \tau dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \sigma_0 \sigma_0 dx ,$$

con  $0 \leq m \leq N - 1$ .

De las hipótesis de regularidad hechas en el Capítulo 3, se puede deducir de (6.20) la existencia de  $C_1$  y  $C_2$ , constantes positivas tales que

$$(6.21) \quad \int_{\Omega} |\sigma^{m+1}|^2 dx + \int_{\Omega} |\bar{v}^{m+1}|^2 dx \leq C_1 + C_2 \Delta t \sum_{n=0}^m \left( \int_{\Omega} |\sigma^n|^2 dx + \int_{\Omega} |\bar{v}^n|^2 dx \right) .$$

De la versión discreta del Teorema de Gronwall (ver Capítulo 1) se deduce que

$$(6.22) \quad \int_{\Omega} |\sigma^{m+1}|^2 dx + \int_{\Omega} |\bar{v}^{m+1}|^2 dx \leq C ,$$

con  $C$  constante positiva independiente de  $\Delta t$ ,  $0 \leq m \leq N - 1$ .

Definiendo  $\sigma_N$ ,  $\sigma_N^e$ ,  $\bar{v}_N$  y  $\bar{v}_N^e$  como se ha hecho en (6.16) y (6.17), se obtiene de (6.22) lo siguiente:

$$(6.23) \quad \begin{cases} \sigma_N \text{ y } \sigma_N^e & \text{están acotados en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ & \text{independientemente de } N \\ \bar{v}_N \text{ y } \bar{v}_N^e & \text{están acotados en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \\ & \text{independientemente de } N \end{cases}$$

### Estimaciones a priori II.

Sumando (6.6) en  $t = t_{n+1}$  con  $\tau = \sigma^n$  y (6.6) en  $t = t_n$  con  $\tau = \sigma^{n+1}$ , se obtiene

$$(6.24) \quad \int_{\Omega} A \left( \frac{\sigma^{n+1} - 2\sigma^n + \sigma^{n-1}}{\Delta t} \right) (\sigma^{n+1} - \sigma^n) dx + \int_{\Omega} (\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n) \operatorname{div} (\sigma^{n+1} - \sigma^n) dx \\ \leq \int_{\Omega} (h^{n+1} - h^n) (\sigma^{n+1} - \sigma^n) dx .$$

Si se suma (6.7) en  $t = t_{n+1}$  con  $\omega = \bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n$  y (6.7) en  $t = t_n$  con  $\omega = \bar{v}^n - \bar{v}^{n-1}$  resulta

$$(6.25) \quad \int_{\Omega} \operatorname{div} (\sigma^{n+1} - \sigma^n)(\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n) dx + \int_{\Omega} (\bar{f}^{n+1} - \bar{f}^n)(\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n) dx = \\ = \int_{\Omega} \frac{\bar{v}^{n+1} - 2\bar{v}^n + \bar{v}^{n-1}}{\Delta t} (\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n) dx .$$

LEMA 6.2.2. Valen las siguientes desigualdades:

$$(6.26) \quad A(\sigma^{n+1} - 2\sigma^n + \sigma^{n-1})(\sigma^{n+1} - \sigma^n) \geq \frac{1}{2}A(\sigma^{n+1} - \sigma^n)(\sigma^{n+1} - \sigma^n) \\ - \frac{1}{2}A(\sigma^n - \sigma^{n-1})(\sigma^n - \sigma^{n-1})$$

y

$$(6.27) \quad (\bar{v}^{n+1} - 2\bar{v}^n + \bar{v}^{n-1})(\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n) \geq \frac{1}{2}|\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n|^2 - \frac{1}{2}|\bar{v}^n - \bar{v}^{n-1}|^2 .$$

*Demostración.* Es inmediata ya que  $A$  es un tensor definido positivo.  $\square$

Aplicando el resultado del Lema 6.2.2 a (6.24) + (6.25), se obtiene

$$(6.28) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \left( \frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta t} \right) \left( \frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta t} \right) dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \left( \frac{\sigma^n - \sigma^{n-1}}{\Delta t} \right) \left( \frac{\sigma^n - \sigma^{n-1}}{\Delta t} \right) dx + \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n}{\Delta t} \right|^2 - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \frac{\bar{v}^n - \bar{v}^{n-1}}{\Delta t} \right|^2 dx \leq \int_{\Omega} \left( \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} \right) (\sigma^{n+1} - \sigma^n) dx \\ + \int_{\Omega} \left( \frac{\bar{f}^{n+1} - \bar{f}^n}{\Delta t} \right) (\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n) dx .$$

De las hipótesis de regularidad del Capítulo 3, se sabe que  $h \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3)$ ,  $\bar{f} \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3)$ , de lo cual resulta que  $\delta h = \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t}$  y  $\delta \bar{f} = \frac{\bar{f}^{n+1} - \bar{f}^n}{\Delta t}$  están acotadas en  $L^2(\Omega)^3$ . Por consiguiente, sumando en (6.28), con  $n = 1$  hasta  $m$ , se verifica

$$(6.29) \quad \int_{\Omega} \left| \frac{\sigma^{m+1} - \sigma^m}{\Delta t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\bar{v}^{m+1} - \bar{v}^m}{\Delta t} \right|^2 dx \leq \\ \leq C_1 + C_2 \sum_{n=0}^m \left[ \int_{\Omega} \left| \frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n}{\Delta t} \right|^2 dx \right] \Delta t + \\ + C_3 \left[ \int_{\Omega} \left| \frac{\sigma^1 - \sigma^0}{\Delta t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\bar{v}^1}{\Delta t} \right|^2 dx \right] \Delta t ,$$

con  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  constantes positivas y  $1 \leq m \leq N - 1$ .

Si  $m = 1$ , se consideran las ecuaciones (6.6) + (6.7) en  $t = t_1$ ,  $\omega = \bar{v}^1$  y  $\tau = \sigma^0$ , recordando que  $\bar{v}^0 = 0$ , se obtiene

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} A \left( \frac{\sigma^1 - \sigma^0}{\Delta t} \right) \left( \frac{\sigma^1 - \sigma^0}{\Delta t} \right) dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\bar{v}^1}{\Delta t} \right|^2 dx &\leq \int_{\Omega} h^1 \left( \frac{\sigma^1 - \sigma^0}{\Delta t} \right) dx \\ + \int_{\Omega} \left( \frac{\bar{v}^1}{\Delta t} \right) (\operatorname{div} \sigma^0 + \bar{f}^1) dx &. \end{aligned}$$

Como  $h \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$  y  $\bar{f} \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ , se deduce de lo anterior

$$(6.30) \quad \int_{\Omega} \left| \frac{\sigma^1 - \sigma^0}{\Delta t} \right|^2 dx + \int_{\Omega} \left| \frac{\bar{v}^1}{\Delta t} \right|^2 dx \leq C_4 ,$$

con  $C_4$  constante positiva.

Aplicando la versión discreta del Lema de Gronwall (ver Capítulo 1), se obtiene la existencia de una constante positiva  $C_5$  independiente de  $\Delta t$ , tal que

$$(6.31) \quad \left\| \frac{\sigma^{m+1} - \sigma^m}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)} + \left\| \frac{\bar{v}^{m+1} - \bar{v}^m}{\Delta t} \right\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C_5 ,$$

con  $m = 0, \dots, N - 1$ .

De (6.7) se obtiene,

$$(6.32) \quad \|\operatorname{div} \sigma^m\|_{L^2(\Omega)^3} \leq C_5 .$$

Usando las definiciones hechas en (6.16) y (6.17); (6.31) y (6.32) permiten asegurar lo siguiente:

$$(6.33) \quad \begin{cases} \dot{\sigma}_N & \text{es una sucesión acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \\ \dot{\bar{v}}_N & \text{es una sucesión acotada en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \\ \operatorname{div} \sigma_N \text{ y } \operatorname{div} \sigma_N^e & \text{son sucesiones acotadas en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \end{cases}$$

### 6.3. Pasaje al límite $N \rightarrow +\infty$

De (6.32) y (6.33) se deduce la existencia de  $\sigma \in L^\infty(0, T; Y) \cap W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega))$ ,  $\sigma^e \in L^\infty(0, T; Y)$ ,  $\bar{v} \in W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)^3)$ ,  $\bar{v}^e \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$  y subsucesiones de

$(\sigma_N, \bar{v}_N), (\sigma_N^e, \bar{v}_N^e)$  tales que

$$(6.34) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \sigma_N \rightarrow \sigma & \text{en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ débil *} \\ \dot{\sigma}_N \rightarrow \dot{\sigma} & \text{en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ débil *} \\ \sigma_N^e \rightarrow \sigma^e & \text{en } L^\infty(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ débil *} \\ \operatorname{div} \sigma_N \rightarrow \operatorname{div} \sigma & \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \text{ débil *} \\ \operatorname{div} \sigma_N^e \rightarrow \operatorname{div} \sigma^e & \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \text{ débil *} \\ \bar{v}_N \rightarrow \bar{v} & \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \text{ débil *} \\ \bar{v}_N^e \rightarrow \bar{v}^e & \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \text{ débil *} \\ \dot{\bar{v}}_N \rightarrow \dot{\bar{v}} & \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \text{ débil *} \end{array} \right.$$

Se deduce de (6.31) que vale también

$$(6.35) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \lim_{N \rightarrow +\infty} (\sigma_N - \sigma_N^e) = 0 & \text{en } L^\infty(0, T; Y) \\ \lim_{N \rightarrow +\infty} (\bar{v}_N - \bar{v}_N^e) = 0 & \text{en } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3) \end{array} \right.$$

con lo cual

$$(6.36) \quad \sigma = \sigma^e \quad \text{y} \quad \bar{v} = \bar{v}^e .$$

## 6.4. Condiciones iniciales

Como  $W^{1,2}(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \subset C([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega))$ , entonces  $\tau \rightarrow \|\tau(0) - \sigma_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)}$  es continua y convexa, por lo tanto débilmente semicontinua inferiormente, de lo cual se deduce

$$\|\sigma(0) - \sigma_0\| \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} \|\sigma_N(0) - \sigma_0\|_{\mathbf{L}^2(\Omega)} = 0 ;$$

o sea, se ha obtenido

$$(6.37) \quad \sigma(0) = \sigma_0 .$$

Con la misma técnica se obtiene

$$(6.38) \quad \bar{v}(0) = 0 .$$

## 6.5. Condiciones de contorno en $\sigma$

Para toda  $\omega \in C^\infty([0, T] \times \Omega, \mathbf{R}^3)$  con  $\omega = 0$  si  $x \in \partial_v \Omega$ , de la fórmula de Green y usando las propiedades de  $\sigma_N$ , se obtiene

$$\int_0^T \int_\Omega \operatorname{div} \sigma_N \cdot \omega \, dx \, dt = \int_0^T \int_{\partial_F \Omega} F^d(x) \omega \, dx \, dt - \int_0^T \int_\Omega \sigma_N \cdot \varepsilon(\omega) \, dx \, dt.$$

Pasando al límite, con  $N \rightarrow +\infty$ , se deduce

$$(6.39) \quad \sigma \cdot \eta = F^d \quad \text{en } \partial_F \Omega \times (0, T).$$

## 6.6. Convexo de plasticidad

Se debe probar que  $\sigma(x, t) \in K$  en c.t.p.

Como  $\|\tau - P_K \tau\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))}$  es convexa y continua en  $\tau \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$ , con  $K$  el convexo de plasticidad, es débilmente semicontinua inferiormente, por consiguiente

$$\|\sigma - P_K \sigma\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq \liminf_{N \rightarrow \infty} \|\sigma_N - P_K \sigma_N\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} = 0,$$

con lo cual

$$(6.40) \quad \sigma(x, t) \in K \quad \text{en c.t.p..}$$

## 6.7. Ecuación de movimiento

OBSERVACIÓN. Si  $\chi \in W^{1, \infty}(0, T; L^2(\Omega)^m)$ , entonces la interpolación en escalera  $\chi_N^e$  tiende a  $\chi$  en  $L^\infty(0, T; L^2(\Omega)^m)$ , si  $N \rightarrow +\infty$ .

Como consecuencia de esta observación se verifica

$$(6.41) \quad \begin{cases} \omega_N^e \rightarrow \omega & \text{en } L^2(0, T; L^2(\Omega)^3) \\ \bar{f}_N^e \rightarrow \bar{f} & \text{en } L^2(0, T; L^2(\Omega)^3) \end{cases}$$

Por otra parte, de (6.9) se deduce

$$(6.42) \quad \int_0^T \int_\Omega (\operatorname{div} \sigma_N^e + \bar{f}_N^e - \dot{\bar{v}}_N) \cdot \omega_N^e \, dx \, dt = 0,$$



con  $\omega \in C_c^\infty(0, T; L^2(\Omega)^3)$ .

Pasando al límite, de (6.34) y (6.35) vale

$$\operatorname{div} \sigma + \bar{f} = \dot{\bar{v}} \quad \text{en c.t.p..}$$

## 6.8. Ley constitutiva

*Etapu I.* Sea  $\tau \in \mathbf{K}_F$ , tal que verifica

$$\begin{cases} \tau \in W^{1,\infty}(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \\ \operatorname{div} \tau \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^3) \end{cases}$$

De (6.6) se obtiene

$$(6.43) \quad \sum_{n=0}^m \left[ \int_{\Omega} A \frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta t} (\sigma^{n+1} - \tau(t_{n+1})) dx + \int \bar{v}^{n+1} \operatorname{div} (\sigma^{n+1} - \tau(t_{n+1})) dx \right] \leq \\ \leq \sum_{n=0}^m \int_{\Omega} h^{n+1} (\sigma^{n+1} - \tau(t_{n+1})) dx,$$

y de (6.7) se llega a

$$(6.44) \quad \sum_{n=0}^m \int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma^{n+1} \bar{v}^{n+1} dx = \sum_{n=0}^m \int_{\Omega} \left( \frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n}{\Delta t} - \bar{f}(t_{n+1}) \right) \bar{v}^{n+1} dx.$$

Sumando (6.43) y (6.44) se deduce

$$(6.45) \quad \sum_{n=0}^m \int_{\Omega} A \frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta t} \sigma^{n+1} dx + \sum_{n=0}^m \int_{\Omega} \left( \frac{\bar{v}^{n+1} - \bar{v}^n}{\Delta t} \right) \bar{v}^{n+1} dx \leq \\ \leq \sum_{n=0}^m \left[ \int_{\Omega} A \frac{\sigma^{n+1} - \sigma^n}{\Delta t} \tau(t_{n+1}) dx + \int_{\Omega} \bar{v}^{n+1} (\operatorname{div} \tau(t_{n+1}) + \bar{f}(t_{n+1})) dx \right] + \\ + \sum_{n=0}^m \int_{\Omega} h^{n+1} (\sigma^{n+1} - \tau(t_{n+1})) dx.$$

De (6.18) y (6.19) para  $t_{m+1} = (m+1)\Delta t$ , se tiene

$$(6.46) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \sigma_N(t_{m+1}) \sigma_N(t_{m+1}) dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{v}_N(t_{m+1})|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} A \sigma_0 \sigma_0 dx \leq \\ \leq \int_0^{t_{m+1}} \int_{\Omega} A \dot{\sigma}_N \cdot \tau_N^e dx ds + \int_0^{t_{m+1}} \int_{\Omega} \bar{v}_N^e \cdot (\operatorname{div} \tau_N^e + \bar{f}_N^e) dx ds + \\ + \int_0^{t_{m+1}} \int_{\Omega} h^e (\sigma_N^e - \tau_N^e) dx ds.$$

Como la aplicación  $\xi \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\xi(t)\xi(t)dx : W^{1,2}(0, T; \mathbf{L}^2(\Omega)) \rightarrow L^1(0, T)$  es continua y convexa, por consiguiente débilmente semicontinua inferiormente, se cumple

$$(6.47) \quad \liminf_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\sigma_N(t)\sigma_N(t) \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\sigma(t)\sigma(t) dx ,$$

y con la misma técnica se obtiene

$$(6.48) \quad \liminf_{N \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{v}_N(t)|^2 dx \geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{v}_N(x, t)|^2 dx ,$$

De (6.34) y (6.41) en particular se verifica  $\forall t \in (0, T)$

$$(6.49) \quad \begin{cases} \dot{\sigma}_N \rightarrow \dot{\sigma} & \text{en } L^2(0, t; \mathbf{L}^2(\Omega)) \text{ débil} \\ \tau_N^e \rightarrow \tau & \text{en } L^2(0, t; \mathbf{L}^2(\Omega)) \\ \bar{v}_N^e \rightarrow \bar{v} & \text{en } L^2(0, t; L^2(\Omega)^3) \text{ débil} \\ \operatorname{div} \tau_N^e \rightarrow \operatorname{div} \tau & \text{en } L^2(0, t; L^2(\Omega)^3) \\ \bar{f}_N^e \rightarrow \bar{f} & \text{en } L^2(0, t; L^2(\Omega)^3) \\ h_N^e \rightarrow h & \text{en } L^2(0, t; L^2(\Omega)^3) \\ \sigma_N^e \rightarrow \sigma & \text{en } L^2(0, t; L^2(\Omega)^3) \text{ débil} \end{cases}$$

Usando (6.46), (6.47), (6.48) y (6.49), se pasa al límite  $N \rightarrow +\infty$ , llegando a

$$(6.50) \quad \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\sigma(t)\sigma(t)dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} A\sigma_0\sigma_0 dx + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\bar{v}(t)|^2 dx \leq \int_0^t \int_{\Omega} A\dot{\sigma}\tau dx ds + \\ + \int_0^t \int_{\Omega} h(\sigma - \tau)dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} (\bar{f} + \operatorname{div} \tau)\bar{v} dx ds .$$

para todo  $t$  en un conjunto denso de  $(0, T]$ , por densidad se obtiene en todo  $t \in (0, T]$ . Combinando este último resultado con la ecuación de movimiento, se deduce

$$(6.51) \quad \int_0^t \int_{\Omega} A\dot{\sigma}(\sigma - \tau)dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} \bar{v} \operatorname{div} (\sigma - \tau)dx ds \leq \int_0^t \int_{\Omega} h(\sigma - \tau)dx ds .$$

**Etapá II.** Sea  $\tau \in L^\infty(0, T; Y)$ ,  $t \in (0, T]$ , con  $\tau(t) \in \mathbf{K}_F$ . Se define

$$(6.52) \quad \begin{cases} \tau_n(x, t) = \int_0^t \rho_n(s)\tau(x, t-s)ds \\ \text{con } \rho_n \text{ tal que } \rho_n \in C_0^\infty([0, t]) \\ \int_0^t \rho_n(s)ds = 1, \quad \rho_n \geq 0 \end{cases}$$

LEMA 6.8.1. Dada  $\tau_n$  definida en (6.52), entonces

$$(6.53) \quad \tau_n \rightarrow \tau \quad \text{en } L^2(0, t; \mathbf{L}^2(\Omega)) ,$$

con  $\tau_n(t) \in \mathbf{K}_F$ .

*Demostración.*

Se define  $J(y) = \inf \{ \alpha > 0 / \frac{y}{\alpha} \in K \}$  el funcional de Minkowski (ver Capítulo 1), con  $y \in \mathbf{R}_s^9$ ,  $K$  el convexo de plasticidad.  $J$  es un funcional convexo y se verifica que  $K = \{ u \in \mathbf{R}_s^9 / J(y) \leq 1 \}$ , ya que  $K$  es convexo y cerrado.

Escribiendo  $J(\tau_n(x, t)) = J\left(\int_0^t \rho_n(s) \tau(x, t-s) ds\right)$ , se obtiene, como  $J$  es convexo

$$J(\tau_n(x, t)) \leq \int_0^t \rho_n(s) J(\tau(x, t-s)) ds ,$$

entonces, teniendo en cuenta que  $\tau(x, t) \in K$  en c.t.p., se obtiene

$$J(\tau_n(x, t)) \leq 1 \text{ en c.t.p.},$$

es decir  $\tau_n(x, t) \in K$  en c.t.p.

De la definición es inmediato que  $\tau_n \cdot \eta = F^d$ , por consiguiente  $\tau_n \in \mathbf{K}_F$ .

Para probar la convergencia de  $\tau_n$  a  $\tau$ , cuando  $n \rightarrow +\infty$  se define

$$G_n(x) = \|\tau_n(x) - \tau(x)\|_{L^2(0, T; \mathbf{R}_s^9)} .$$

Se verifica, por propiedades de la convolución,

$$\begin{cases} G_n^2(x) \rightarrow 0 & \text{en c.t.p.} \\ G_n^2(x) \leq C & \text{en c.t.p.} \end{cases}$$

por consiguiente, aplicando el teorema de la convergencia dominada de Lebesgue, se obtiene

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} G_n^2(x) dx = 0 ,$$

o sea se ha probado el lema.  $\square$

Como  $\tau_n$  cumple con las hipótesis que se pedían en la etapa I para las funciones test, se escribe (6.51) con  $\tau = \tau_n$ , luego se pasa al límite  $n \rightarrow +\infty$  obteniéndose,

$$\begin{aligned} & \int_0^t \int_{\Omega} A \dot{\sigma} \cdot (\sigma - \tau) dx ds + \int_0^t \int_{\Omega} \bar{v} \operatorname{div} (\sigma - \tau) dx ds \leq \\ & \leq \int_0^t \int_{\Omega} h(\sigma - \tau) dx ds , \end{aligned}$$

El hecho que  $(\sigma, v)$  satisfaga esta desigualdad, la ecuación de movimiento (ver sección 6.7), las condiciones iniciales (ver sección 6.4) y las condiciones de contorno (ver sección 6.5), aseguran que es efectivamente la solución del problema elastoplástico obtenida en el Capítulo 3.

## Referencias

- [1] ANZELLOTI, G. and LUCKHAUS, S. (1987). Dynamical evolution of elasto-perfectly plastic bodies, *Appl. Math. Optim.* 15: 121-140.
- [2] BREZIS, H. (1983). *Analyse fonctionnelle*. Masson, Paris.
- [3] BREZIS, H. (1973). *Opérateurs maximaux monotones et semigroupes de contractions dans les espaces de Hilbert*. North Holland.
- [4] CAZENAVE, T. y HARAUX, A. (1990). Introduction aux problèmes d'évolution semi-linéaires. *Mathématiques & Applications*, Ellipses, Paris.
- [5] DJAOUA, M.; TUNIS y SUQUET, P. (1984). Evolution quasi-statique des milieux visco-plastiques de Maxwell-Norton. *Math. Meth. in the Appl. Sci.* 6: 192-205.
- [6] DUVAUT, G. y LIONS, L. (1972). *Les inéquations en mécanique et en physique*. Dunod, Paris.
- [7] EKELAND, I. y TEMAM, R. (1976). *Convex analysis and variational problems*. North Holland, Amsterdam.
- [8] GERMAIN, P. (1973). *Cours de mécanique des milieux continus*, Masson, Paris.
- [9] GURTIN, M. (1981). *An Introduction to Continuum Mechanics*, Academic Press, New York.
- [10] JOHNSON, C. (1978). On plasticity with hardening. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 62, 325-336.
- [11] QUOC SON, N. (1978). Quasi-static evolution of plastic and viscoplastic bodies. *Summer School, Boundary value problems for dissipative media*, 8-13 May 1978, Jablona.
- [12] SALENÇON, J. (1983). *Calcul à la rupture et analyse limite*, Presses ENPC, Paris.
- [13] STRANG, G., TEMAM, R. (1980). Functions of bounded variation. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 75.
- [14] SUQUET, P. (1981). Sur les équations de la plasticité, existence et régularité des solutions. *J. Mec. Theor. Appl.* 20: 3-37.
- [15] SUQUET, P. (1982). *These de doctorat d'état*, Paris VI.
- [16] TEMAM, R. (1983). *Problèmes mathématiques en plasticité*. Gauthier-Villars, Paris.