Problemas de contorno para la ecuación de curvatura media prescripta

Mariani, María Cristina

1992

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Problemas de contorno para la ecuación de curvatura media prescripta

MARÍA CRISTINA MARIANI

Director de tesis:
Dr. Enrique Lami Dozo

Lugar de Trabajo:
Departamento de Matemática

Tesis presentada para optar al título de: **Doctor en Ciencias Matemáticas**

1992

Agradecimientos

Quiero agradecer al Dr. Enrique Lami Dozo por todo lo que me enseñó y por su permanente apoyo.

Al Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas por otorgarme becas durante las cuales realicé esta tesis.

A la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires por permitirme realizar este trabajo en sus instalaciones.

María Cristina Mariani.

Indice

Introducción

El problema de Plateau, que consiste en hallar una superficie de área mínima bordeada por una curva dada, fue uno de los primeros problemas considerados por el cálculo variacional y ha tenido una solución satisfactoria sólo en años recientes: en los años 30 se le dió solución en el espacio euclideano de tres dimensiones con los trabajos de Douglas y Radó [D], [R1], [R2].

Este problema fue formulado por el físico belga Joseph Plateau, quien realizó experiencias sistemáticas para describir qué curvas cerradas hechas con alambre sumergidas en una solución jabonosa, dan películas simples (sin intersecciones) de jabón.

Para fijar ideas, consideramos un subconjunto B de $\mathbf{R}^2$ abierto y acotado, cuya frontera ∂B se describe como la imagen de una curva $\gamma : [0,1] \to \mathbf{R}^2$. Si $g \in C^1([0,1])$ es una función que verifica las condiciones de periodicidad $g(0) = g(1)$, $g'(0) = g'(1)$ entonces $\Gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t), g(t))$ es una curva cerrada en $\mathbf{R}^3$, y si $v \in C^1(\overline{B})$, el área del gráfico de v viene dada por la integral

$$A(v) = \int_B (1 + v_x^2 + v_y^2)^{1/2} \, du \, dv \ .$$

Finalmente, si existe $u \in C^1(\overline{B})$ tal que $u(\gamma(t)) = g(t)$ y u minimiza a la funcional A, el gráfico de u es un ejemplo de superficie de área mínima cuyo borde es la curva Γ. Por ser u un punto crítico de la funcional A, u satisface débilmente la ecuación de superficies mínimas en B:

$$\partial_x\Big(\frac{\partial_x u}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}}\Big) + \partial_y\Big(\frac{\partial_y u}{(1 + |\nabla u|^2)^{1/2}}\Big) = 0 \ .$$

Sea ahora S una superficie en $\mathbf{R}^3$. Localmente se la puede describir como la imagen de una función regular $X : B \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $X = X(u,v)$. El vector unitario $N = \dfrac{X_u \wedge X_v}{|X_u \wedge X_v|}$ es normal a S si está bien definido y lo supondremos.

Cada plano M que contiene a N, corta a S según una curva γ_M que tiene una curvatura K_M. Si giramos π alrededor de N, la función $M \to K_M$ alcanza su máximo λ_1 y su mínimo λ_2. El promedio

$$H = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2) = H(X) \ ,$$

se llama curvatura media. Esta noción es independiente de la parametrización de S, aunque depende de la orientación.

Cuando las coordenadas (u,v) son isotermas, o sea

$$|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0 = X_u \cdot X_v \quad \text{en } B \ . \tag{ISO}$$

H queda definida a partir del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales, denominado ecuación de la curvatura media prescripta o H sistema:

$$\Delta X = 2H(X) X_u \wedge X_u \ . \tag{H}$$

Se denomina superficie minimal a una superficie con curvatura media nula, y puede demostrarse que toda superficie mínima es minimal.

Luego, $M = X(B)$ será minimal si se verifica (ISO) y X es armónica, y será una superficie de curvatura media prescripta H si se verifican (ISO) y (H), entonces, una solución al problema de Plateau deberá ser una superficie minimal que se apoya sobre una curva prescripta Γ.

En 1930–31, Jesse Douglas y Tibor Radó solucionaron el problema de Plateau de la siguiente forma [D], [R1], [R2]: Si $B = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 ;\ u^2 + v^2 < 1\}$ es el disco unidad de $\mathbf{R}^2$, el área $A(X) = \int_B |X_u \wedge X_v|$ es invariante por difeomorfismos de B, por lo tanto, si $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ es una curva de Jordan, minimizar $A(X)$ en $\{X ;\ X|_{\partial B} = \Gamma\}$ es hacerlo en un conjunto grande.

Douglas y Radó muestran que

$$\inf_{X|_{\partial B}=\Gamma} A(X) = \inf_{X|_{\partial B}=\Gamma} D(X) \qquad \text{con}$$
$$D(X) = \frac{1}{2}\int_B |\nabla X|^2 \ \text{la integral de Dirichlet,}$$

y si $D(\underline{X}) = \inf_{X|_{\partial B}=\Gamma} D(X)$ entonces $\Delta \underline{X} = 0$ y como $D(X)$ es invariante por cambios conformes de variables, sale que (ISO) se satisface para $\underline{X}$.

Debe notarse que el problema de regularidad es doble, ya que debe analizarse por un lado la regularidad de la parametrización, y por otro lado, cuando la superficie es inmersa.

Hay resultados de regularidad de la parametrización debido a Hildebrandt [Hil], y Nitsche [N] y también se han hallado condiciones para que $\underline{X}(B)$ no tenga autointersecciones: Meeks-Yau [M-Y], Tomi–Tromba [T-T] y Almgren–Simon [A-S].

Si pasamos del caso $H \equiv 0$ al caso $H \equiv$ cte en $\mathbf{R}$, $H \neq 0$, tenemos como ejemplos de superficies de curvatura media constante a los cilindros y las esferas en $\mathbf{R}^3$. Dado un círculo Γ de radio R en el plano $z = 0$ de centro 0 y una constante $H > 0$ tal que

$HR < 1$, hay dos porciones de esfera en el semiespacio superior, o sea, dos superficies de curvatura media constante H que se apoyan en Γ [B-C].

Si Γ es una curva de Jordan en $\mathbf{R}^3$, el problema de hallar superficies de curvatura media constante H, que se apoyen en Γ, se llama, a veces, problema de Rellich.

Ahora se estudia la funcional

$$D_H(X) = D(X) + 2HV(X) ,$$

donde $V(X) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_B X_u \wedge X_v \cdot X$ da el volumen algebraico ($V(X) < 0$ es posible) del cono con vértice $0 \in \mathbf{R}^3$ engendrado por $X(B)$.

La existencia de una primera solución a este problema, que suele llamarse pequeña o estable, fue demostrada por Hildebrandt en 1969 [Hi2], [St1] para curvas $\Gamma \subset B_R(0)$ con $|H|R \leq 1$. La solución puede caracterizarse como el mínimo de la funcional D_H en un conjunto apropiado. Heinz en 1969 demostró que la hipótesis $|H|R \leq 1$ no puede debilitarse [He].

Una segunda solución, llamada grande, fue hallada por Brézis–Coron y Struwe entre 1984–86. Esta solución no puede ser descripta como un mínimo local de D_H, y se la denomina solución inestable [St1], [St2], [B-C].

Por último, consideremos el caso H no constante. Como antes, el problema tiene una estructura variacional. Si definimos

$$Q(\xi) = \Big(\int_0^{\xi_1} H(s,\xi_2,\xi_3)ds \, , \int_0^{\xi_2} H(\xi_1,s,\xi_2)ds \, , \int_0^{\xi_3} H(\xi_1,\xi_2,s)ds \Big) ,$$

para $\xi \in \mathbf{R}^3$, y consideramos la funcional

$$D_H(X) = D(X) + 2V(X) ,$$

donde $V(X) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_B Q(X) \cdot X_u \wedge X_v$ es el volumen de Hildebrandt, existe una solución al problema de Plateau, también denominada pequeña y que se halla como un mínimo local de D_H, bajo condiciones análogas al caso $H \equiv$ cte para H y Γ [Hi3].

Paralelamente al problema de Plateau, se ha desarrollado el problema de Dirichlet para un H-sistema, o sea, el problema de hallar una función que verifique (H) en un sentido a precisar, y que tome un valor determinado en ∂B.

Si H es una constante no nula, se ha demostrado la existencia de dos soluciones a este problema, un mínimo local de D_H, llamada solución pequeña [H1], [St1] y una solución inestable [B-C], [St2], siempre que el dato de Dirichlet no sea constante.

En este último caso, la única solución al problema de Dirichlet es dicha constante [W]. Si H es variable, pero cercana a una constante no nula H_0 para una cierta distancia [St4], se afirma que si existe una solución estable para H_0, hay dos soluciones al problema de Dirichlet en un subconjunto denso de un entorno de H_0 [St4] y en todo ese entorno [G].

Si $S \subset \mathbf{R}^3$ es una superficie no paramétrica, o sea, S queda definida a partir de la ecuación

$$z = U(x,y) , \quad (x,y) \in \Omega \subset R^2 .$$

James Serrin ha demostrado que si Ω es un dominio acotado del plano, entonces el problema de Dirichlet en Ω para la ecuación correspondiente de curvatura media constante tiene solución para cualquier dato de contorno continuo si se verifica la relación $\eta \geq 2|H|$ con η la curvatura de $\partial\Omega$ en cada punto de $\partial\Omega$. En caso de existir, la solución es única [Se].

Por último, Gilbarg, Trudinger y Simon han demostrado para hipersuperficies en $\mathbf{R}^{n+1}$ que son el gráfico de una función $U : \Omega \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$, donde Ω es un dominio acotado, que el problema de Dirichlet para la ecuación de curvatura media prescripta tiene solución para cualquier dato de contorno continuo si y sólo si la curvatura media de $\partial\Omega$ es no negativa [G-T].

En este trabajo se ha estudiado el problema de hallar soluciones de la ecuación de curvatura media prescripta (H), para H una función continua y acotada, bajo condiciones de contorno de Dirichlet, Plateau y Neumann. También se han estudiado las propiedades de las soluciones de (H) en distintos espacios funcionales.

En el Capítulo 1 damos algunos resultados clásicos que serán citados a lo largo de este trabajo.

En el Capítulo 2 se demuestran propiedades generales de las soluciones de (H) en determinados espacios funcionales, además se dan condiciones sobre la función real y continua H para que un punto crítico de D_H tenga sus coordenadas isotermas, de manera que si $X(B)$ es una superficie inmersa en $\mathbf{R}^3$, esta tiene curvatura media $H(X)$ y se apoya en $X|_{\partial B}$.

En el Capítulo 3 se estudia el problema de Dirichlet para la ecuación de curvatura media prescripta (H). Vemos que bajo determinadas condiciones para H, los puntos críticos de D_H son soluciones de (H), y damos condiciones bajo las cuales existen más de dos soluciones de (H). Hallamos una solución que es un mínimo global de D_H, mientras que las demás soluciones son: o un mínimo local de D_H o una sucesión de mínimos de D_H en conjuntos convexos y cerrados.

Terminando el Capítulo 3 demostramos un resultado que es una variante del Lema del Paso de la Montaña [A-R], [St1], y damos condiciones para obtener soluciones del problema de Dirichlet para la ecuación de curvatura media prescripta (H) a partir de puntos críticos de D_H en conjuntos convexos apropiados.

En el Capítulo 4 se estudia la ecuación de curvatura media prescripta (H) bajo condiciones de contorno de Neumann. Demostramos condiciones necesarias que deben verificar las soluciones a este problema, y analizamos el comportamiento de la funcional D_H en un entorno de una solución que no es un mínimo local de D_H.

Finalmente, se demuestra que en analogía al resultado ya conocido de Wente [We], cuando H es una constante y el dato de contorno es la función nula, la única solución, a menos de una constante, es la función nula.

En el Capítulo 5 estudiamos el problema de Plateau para la ecuación de curvatura media prescripta (H). Demostramos que existe una solución que es un punto crítico de D_H, y que bajo determinadas condiciones para H, se obtienen soluciones que son mínimos locales de D_H en conjuntos convexos y cerrados. Por último, damos condiciones necesarias para que exista una solución en $C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3) \cap C^2(B, \mathbf{R}^3)$.

Capítulo 1

En este capítulo especificamos las notaciones que serán utilizadas a lo largo de este trabajo, y recordamos algunos resultados clásicos que luego serán citados.

1.1. Notaciones. Sea $B = \{(u,v) \in \mathbf{R}^2 \,;\, u^2 + v^2 < 1\}$ el disco unidad.

Denotaremos con $W^{m,p}(B,\mathbf{R}^3)$ a los espacios de Sobolev usuales, y $W^{m,2}(B,\mathbf{R}^3) = H^m(B,\mathbf{R}^3)$. $Tr : H^1(B,\mathbf{R}^3) \to L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)$ es el operador usual de traza, y si $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$,

$$\|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)} = \left(\int_{\partial B} |Tr\, X|^2\right)^{1/2} .$$

Para $Y \in L^\infty(U,\mathbf{R}^n)$, $\|Y\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{w\in U} |Y(w)|$. Por ejemplo, si $H \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ y $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$,

$$\|H\|_\infty = \sup_{\xi\in\mathbf{R}^3} |H(\xi)| \,, \quad \|Q\|_\infty = \sup_{\xi\in\mathbf{R}^3} |Q(\xi)| \,;$$

$$\text{y} \quad \|H(X)\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{w\in B} |H(X(w))| \,,$$

$$\|Q(X)\|_\infty = \operatorname{ess\,sup}_{w\in B} |Q(X(w))| \,.$$

Nos remitimos a [A] para todo lo concerniente a los espacios de Sobolev.

η y σ notarán los campos normal y tangente (orientados positivamente) a ∂B, respectivamente, y si $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$, $\dfrac{\partial X}{\partial \eta} = Tr\, \dfrac{\partial X}{\partial r}$.

Para las funcionales D_H y V de la introducción, notaremos

$$dD_H(X)(\varphi) = \lim_{t\to 0} \frac{[D_H(X + t\varphi) - D_H(X)]}{t} \,,$$

siempre que este límite exista.

Por último, si (u_n) es una sucesión en un espacio de Banach E que converge a un límite u, notaremos $u_n \to u$, y si la convergencia es débil, $u_n \rightharpoonup u$.

1.2. Funcionales en espacios de Banach.

DEFINICIÓN 1.2.1. Dados X un espacio de Banach separable, y $J : X \to \mathbf{R}$ una funcional, diremos que J es débilmente semicontinua inferiormente si para todo número real a,

$J^{-1}(a, +\infty)$ es abierto para la topología débil de X, o equivalentemente, si para toda sucesión (u_n) en X tal que $u_n \rightharpoonup u$ en X, $J(u) \leq \liminf J(u_n)$.

TEOREMA 1.2.1 [D-S]. *Sea X un espacio de Banach reflexivo, y $J : X \to \mathbf{R}$ una funcional que verifica las siguientes condiciones:*

i) *J es débilmente semicontinua inferiormente,*

ii) *J es coerciva, o sea, $\lim\limits_{\|v\| \to +\infty} J(v) = +\infty$ para todo $v \in X$.*

Entonces, J está acotada inferiormente y existe $u \in X$ tal que $J(u) = \inf\limits_X J$.

DEFINICIÓN 1.2.2. Una funcional $J : X \to \mathbf{R}$ se dice convexa si para todo número real $\alpha \in [0,1]$ se verifica que si $v, w \in X$, $J(\alpha v + (1-\alpha)w) \leq \alpha J(v) + (1-\alpha)J(w)$.

TEOREMA 1.2.2 [D-S]. *Si $J : X \to \mathbf{R}$ es una funcional convexa y semicontinua inferiormente, entonces es débilmente semicontinua inferiormente.*

EJEMPLO. Una forma cuadrática semidefinida positiva en un espacio de Hilbert es débilmente semicontinua inferiormente. Si además es coerciva, entonces está acotada inferiormente y alcanza su ínfimo.

1.3. Lema del Paso de la Montaña.

Sea X un espacio de Banach y $\phi : X \to \mathbf{R}$, $\phi \in C^1(X)$.

DEFINICIÓN 1.3.1. Sea $u \in X$, diremos que u es un punto crítico de ϕ si $\phi'(u) = 0$, y dado $c \in \mathbf{R}$, diremos que c es un valor crítico de ϕ si existe un punto crítico u de ϕ tal que $\phi(u) = c$.

El conjunto de todos los puntos críticos de nivel c será designado por K_c, o sea $K_c = \{u \in X \,;\, \phi'(u) = 0\,,\ \phi(u) = c\}$, y se designará por ϕ^c al conjunto de todos los puntos en niveles menores o iguales que c, $\phi^c = \{u \in X \,;\, \phi(u) \leq c\}$.

TEOREMA 1.3.1 [Wi]. *Sean $\phi \in C^1(X)$ y $S \subset X$, $c \in \mathbf{R}$, $\varepsilon, \delta > 0$ tales que $\|\phi'(u)\| \geq {}^{4\varepsilon}/_{\delta}$ para todo $u \in \phi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$, donde $S_{2\delta} = \{u \in X \,;\, dist(u,S) \leq 2\delta\}$. Entonces existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que, para todo $u \in X$ y $t \in [0,1]$ se verifican las siguientes propiedades*

i) $\eta(0,u) = u$,

ii) $\eta(t,u) = u$ *si* $u \notin \phi^{-1}([c-2\varepsilon, c+2\varepsilon]) \cap S_{2\delta}$,

iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon} \cap S) \subset \phi^{c-\epsilon} \cap S_\delta$,

iv) $\eta(t, \cdot) : X \to X$ *es un homeomorfismo.*

Condiciones de Palais–Smale.

Sea $\phi \in C^1(X)$. Diremos que ϕ verifica la condición de Palais–Smale y notaremos "ϕ verifica (P-S)" si para toda sucesión $(u_n) \subset X$, tal que

i) $(\phi(u_n))$ es acotada en $\mathbf{R}$ y

ii) $\phi'(u_n) \to 0$,

existe una subsucesión (u_{n_k}) convergente en X.

Diremos que ϕ verifica la condición de Palais–Smale de nivel c, y notaremos "ϕ verifica $(\text{P-S})_c$" si se verifica que cuando existe una sucesión $(u_n) \subset X$ tal que

i) $\phi(u_n) \to c$ y

ii) $\phi'(u_n) \to 0$,

entonces c es un valor crítico de ϕ.

TEOREMA 1.3.2 [C]. *Se supone que $\phi \in C^1(X)$ satisface (P-S), entonces, si $c \in \mathbf{R}$ no es un valor crítico de ϕ, para todo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe $\eta \in C([0,1] \times X, X)$ tal que para cualquier $u \in X$ y $t \in [0,1]$ se verifican las siguientes condiciones*

i) $\eta(0, u) = u$,

ii) $\eta(t, u) = u$ si $u \notin \phi^{-1}([c - 2\varepsilon, c + 2\varepsilon])$,

iii) $\eta(1, \phi^{c+\epsilon}) \subset \phi^{c-\epsilon}$,

iv) $\eta(t, \cdot) : X \to X$ *es un homeomorfismo.*

TEOREMA 1.3.3 "Lema del paso de la montaña" [A-R]. *Sea $\phi \in C^1(X)$ que satisface (PS) o $(PS)_c$. Si existen $e \in X$ y un número positivo r tales que $0 < r < \|e\|$, y $a \equiv \max\{\phi(0), \phi(e)\} < \inf_{\|u\|=r} \phi(u) \equiv b$, entonces $c = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} \phi(\gamma(t))$, donde $\Gamma = \{\gamma \in C([0,1], X);\ \gamma(0) = 0,\ \gamma(1) = e\}$ es un valor crítico de ϕ, y $c \geq b$.*

En el Capítulo 3 se demostrará, bajo determinadas condiciones para H, una variante de este teorema para la funcional D_H.

1.4. Superficies minimales y coordenadas isotermas.

DEFINICIÓN 1.4.1 [O]. Una superficie regular parametrizada se dice minimal si su curvatura media se anula en todo punto. Una superficie regular $S \subset \mathbf{R}^3$ será minimal si cada una de sus parametrizaciones es minimal.

El Teorema 1.4.1 justificará el motivo por el cual se denomina minimal a una superficie cuya curvatura media se anula.

DEFINICIÓN 1.4.2. Sea $X : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una superficie regular parametrizada, y sean $D \subset U$ un dominio acotado con $\overline{D} \subset U$ y $h : \overline{D} \to \mathbf{R}$ una función diferenciable. La variación normal de $X(\overline{D})$, determinada por h, es la aplicación $\varphi : \overline{D} \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to \mathbf{R}^3$ dada por $\varphi(u,v,t) = X(u,v) + th(u,v)N(u,v) \equiv X^t(u,v)$, donde $N(u,v)$ es la normal a la superficie X en el punto $X(u,v)$.

El área $A(t)$ de $X^t(\overline{D})$ está bien definida y es una función diferenciable de t para t suficientemente chico [DC].

TEOREMA 1.4.1 [DC]. *Sea $X : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ una superficie regular parametrizada y sea $D \subset U$ un dominio acotado. Entonces X es minimal si y sólo si $A'(0) = 0$ para todo D y para toda variación normal de $X(\overline{D})$.*

DEFINICIÓN 1.4.3 [DC]. Sea $X = X(u,v)$, $(u,v) \in U \subset \mathbf{R}^2$ una superficie regular parametrizada. Diremos que X es isoterma, o bien, que las coordenadas (u,v) de X son isotermas si se verifica que: $X_u \cdot X_v = 0$ y $|X_u| = |X_v|$ para todo $(u,v) \in U$.

TEOREMA 1.4.2 [DC]. *Sea $X = X(u,v)$, $(u,v) \in U \subset \mathbf{R}^2$ una superficie regular parametrizada, y se asume que X es isoterma. Entonces*

$$X_{uu} + X_{vv} = 2H\lambda^2 N \quad \text{en cada } (u,v) \in U \ ,$$

donde $\lambda^2 = X_u \cdot X_u = X_v \cdot X_v = |X_u \wedge X_v|$.

Como Corolario del Teorema 1.4.2 se deduce que si X es una superficie regular parametrizada, y X es isoterma, entonces X es minimal si y sólo si X es armónica.

TEOREMA 1.4.3 [O]. *Si S es una superficie minimal, cada punto regular de S tiene un entorno en el cual existe una reparametrización de S con coordenadas isotermas.*

Capítulo 2

En este capítulo damos estimaciones de la funcional D_H en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$ y demostramos propiedades generales de las soluciones de (II) $\Delta X = 2H(X)X_u \wedge X_v$ y de los puntos críticos de D_H en $H^2(B,\mathbf{R}^3)$. Veremos que si $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$ es un punto crítico de D_H para variaciones en $C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3)$, entonces X es una solución de la ecuación de curvatura media prescripta (II) y las coordenadas (u,v) de X son isotermas, con lo cual, cuando $X(B)$ es una superficie inmersa en $\mathbf{R}^3$, resulta una superficie de curvatura media $H(X)$ y que se apoya en $X|_{\partial B}$.

2.1. Estimaciones de la funcional D_H.

Sean $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, continua y acotada, y $Q : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ el campo vectorial asociado a H.

Si $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$, la funcional D_H está bien definida sobre $H^1(B,\mathbf{R}^3)$, pues

$$D_H = D(X) + \frac{2}{3}\int_B Q(X)\cdot X_u \wedge X_v \le D(X) + \frac{2}{3}\|Q\|_\infty D(X)\,.$$

Además, $D_H(X) \ge D(X) - \frac{2}{3}\|Q\|_\infty D(X)$ de donde se deduce en forma inmediata que si $\|Q\|_\infty < \frac{3}{2}$, $D_H(X) \ge kD(X)$, donde k es una constante positiva. A partir de la desigualdad

$$\Big|\int_B Y\cdot X_u \wedge X_v\Big| \le c\|\nabla Y\|_2\|\nabla X\|_2^2\,,$$

con c una constante positiva, válida para $Y \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ y $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$ ([B-C], Lemma A.3) se deduce que si $H \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$, $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ y $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$, $\Big|\int_B H(X)X_u \wedge X_v\cdot\varphi\Big| \le c\|\nabla(H(X)\varphi)\|_2\|\nabla X\|_2^2$ y como

$$|\nabla(H(X)\varphi)| \le |\nabla H(X)\otimes\varphi| + |H(X)\nabla\varphi|\,, \tag{2.1}$$

con

$$\nabla H(X) = \Big(\frac{\partial H(X)}{\partial u}, \frac{\partial H(X)}{\partial v}\Big) \equiv \Big(\frac{\partial H}{\partial \xi_1}(X)\frac{\partial X_1}{\partial u} + \frac{\partial H}{\partial \xi_2}(X)\frac{\partial X_2}{\partial u} + \\ + \frac{\partial H}{\partial \xi_3}(X)\frac{\partial X_3}{\partial u}, \frac{\partial H}{\partial \xi_1}(X)\frac{\partial X_1}{\partial v} + \frac{\partial H}{\partial \xi_2}(X)\frac{\partial X_2}{\partial v} + \frac{\partial H}{\partial \xi_3}(X)\frac{\partial X_3}{\partial v}\Big)$$

y $\nabla H(X)\otimes\varphi$ la matriz 3×2

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial H(X)}{\partial u}\varphi_1 & \frac{\partial H(X)}{\partial v}\varphi_1 \\ \frac{\partial H(X)}{\partial u}\varphi_2 & \frac{\partial H(X)}{\partial v}\varphi_2 \\ \frac{\partial H(X)}{\partial u}\varphi_3 & \frac{\partial H(X)}{\partial v}\varphi_3 \end{pmatrix},$$

tenemos que

$$\begin{aligned} |\nabla H(X)\otimes\varphi| &= \Big(\sum_{i=1}^{3}\Big[\Big(\frac{\partial H(X)}{\partial u}\Big)^2\varphi_i^2+\Big(\frac{\partial H(X)}{\partial v}\Big)^2\varphi_i^2\Big]\Big)^{1/2} = \\ &= \Big(\Big(\frac{\partial H(X)}{\partial u}\Big)^2+\Big(\frac{\partial H(X)}{\partial v}\Big)^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{3}\varphi_i^2\Big)^{1/2} = |\nabla H(X)|\,|\varphi|\,. \end{aligned}$$

Pero, por otro lado,

$$\begin{aligned} |\nabla H(X)| &= \Big[\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial H}{\partial \xi_i}(X)\frac{\partial X_i}{\partial u}\Big)^2+\Big(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial H}{\partial \xi_i}(X)\frac{\partial X_i}{\partial v}\Big)^2\Big]^{1/2} \leq \\ &\leq \Big\{\Big[\Big(\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial H}{\partial \xi_i}(X)\Big)^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial X_i}{\partial u}\Big)^2\Big)^{1/2}\Big]^2+ \\ &\quad+\Big[\Big(\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial H}{\partial \xi_i}(X)\Big)^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial X_i}{\partial v}\Big)^2\Big)^{1/2}\Big]^2\Big\}^{1/2} = \\ &= \Big\{\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial H}{\partial \xi_i}(X)\Big)^2\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial X_i}{\partial u}\Big)^2+\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial H}{\partial \xi_i}(X)\Big)^2\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial X_i}{\partial v}\Big)^2\Big\}^{1/2} = \\ &= \Big\{\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial H}{\partial \xi_i}(X)\Big)^2\sum_{j=1}^{3}\Big[\Big(\frac{\partial X_j}{\partial u}\Big)^2+\Big(\frac{\partial X_j}{\partial v}\Big)^2\Big]\Big\}^{1/2} = \\ &= \Big(\sum_{i=1}^{3}\Big(\frac{\partial H}{\partial \xi_i}(X)\Big)^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{j=1}^{3}\Big[\Big(\frac{\partial X_j}{\partial u}\Big)^2+\Big(\frac{\partial X_j}{\partial v}\Big)^2\Big]\Big)^{1/2} \leq \|\nabla H\|_\infty|\nabla X|\,. \end{aligned}$$

Luego, si $H\in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ y $X\in H^1(B,\mathbf{R}^3)$, $|\nabla H(X)|\in L^2(B,\mathbf{R}^3)$ y $\Big(\int_B|\nabla H(X)|^2\Big)^{1/2}$ $\leq\|\nabla H\|_\infty\|\nabla X\|_2$. Entonces, si $\varphi\in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$,

$$\left(\int_B |\nabla H(X)\varphi|^2\right)^{1/2} = \left(\int_B |\nabla H(X)|^2|\varphi|^2\right)^{1/2} \le \|\varphi\|_\infty \|\nabla H\|_\infty \|\nabla X\|_2 ,$$

y a partir de (2.1), obtenemos que

$$\begin{aligned}\int_B |\nabla(H(X)\varphi)|^2 &\le \int_B \left(|\nabla H(X)\otimes\varphi| + |H(X)\nabla\varphi|\right)^2 \le \\ &\le 2\int_B (|\nabla H(X)\otimes\varphi|^2 + |H(X)\nabla\varphi|^2) \le \\ &\le 2\left[\|\varphi\|_\infty^2 \|\nabla H\|_\infty^2 \|\nabla X\|_2^2 + \|H\|_\infty^2 \|\nabla\varphi\|_2^2\right] ;\end{aligned}$$

y por lo tanto, la integral $\int_B H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi$ resulta bien definida y

$$\left|2\int_B H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi\right| \le 2c\|\nabla X\|_2^2 \{2[\|\varphi\|_\infty^2 \|\nabla H\|_\infty^2 \|\nabla X\|_2^2 + \|H\|_\infty^2 \|\nabla\varphi\|_2^2]\}^{1/2} .$$

Por último, para $H \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$, $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$ y $X \in H^1(B, \mathbf{R}^3)$ tenemos que

$$\left|2\int_B H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi\right| \le \|H\|_\infty \|\varphi\|_\infty \|\nabla X\|_2^2 .$$

2.2. Puntos críticos de D_H en $H^2(B, \mathbf{R}^3)$.

Definición 2.2.1. Si H es acotada, diremos que $X \in H^1(B, \mathbf{R}^3)$ es una solución débil de la ecuación de curvatura media prescripta (H) si $\int_B \nabla X \cdot \nabla\varphi + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi = 0$ para toda $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$.

Lema 2.2.1. *Sean $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$ y $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$. Si $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ y $\frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ para $i \ne j$, $i,j = 1,2,3$, entonces la derivada direccional de D_H en X en la dirección φ está dada por:*

$$dD_H(X)(\varphi) = \int_B [\nabla X \cdot \nabla\varphi + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi] - \frac{2}{3}\int_{\partial B} Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \varphi \, d\sigma .$$

Observación. Según la Definición 2.2.1 y bajo las hipótesis del Lema 2.2.1, si X es un punto crítico de D_H, X resulta una solución débil de la ecuación de curvatura media prescripta (H).

Demostración del Lema 2.2.1. Sea $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$ y $\varphi \in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3)$, entonces la derivada direccional $dD_H(X)(\varphi)$ está dada por:

$$(2.2) \qquad dD_H(X)(\varphi) = \int_B \nabla X \cdot \nabla \varphi + \frac{2}{3}\int_B (Q(X)\varphi_u \wedge X_v + Q(X)X_u \wedge \varphi_v + \\ + H(X)\varphi \cdot X_u \wedge X_v) + \frac{2}{3}\int_B \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}\varphi_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \\ + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}\varphi_2\Big) \cdot X_u \wedge X_v ,$$

ya que:

$$(2.3) \quad dD_H(X)(\varphi) \equiv \Big[\frac{d}{d\varepsilon}D_H(X+\varepsilon\varphi)\Big]_{\varepsilon=0} = \\ = \frac{d}{d\varepsilon}\Big\{\frac{1}{2}\int_B |\nabla(X+\varepsilon\varphi)|^2 + \frac{2}{3}\int_B Q(X+\varepsilon\varphi)\cdot(X+\varepsilon\varphi)_u \wedge (X+\varepsilon\varphi)_v\Big\}\Big|_{\varepsilon=0} = \\ = \int_B \nabla X \cdot \nabla \varphi + \frac{2}{3}\int \Big[\frac{d}{d\varepsilon}Q(X+\varepsilon\varphi)\Big]_{\varepsilon=0} \cdot X_u \wedge X_v + \\ + \frac{2}{3}\int_B Q(X)\cdot \varphi_u \wedge X_v + \frac{2}{3}\int_B Q(X)\cdot X_u \wedge \varphi_v$$

y

$$\Big[\frac{d}{d\varepsilon}Q(X+\varepsilon\varphi)\Big]_{\varepsilon=0} = \Big[\frac{d}{d\varepsilon}(Q_1(X+\varepsilon\varphi), Q_2(X+\varepsilon\varphi), Q_3(X+\varepsilon\varphi))\Big]_{\varepsilon=0} = \\ \Big(\frac{d}{d\varepsilon}Q_1(X+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0}, \frac{d}{d\varepsilon}Q_2(X+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0}, \frac{d}{d\varepsilon}Q_3(X+\varepsilon\varphi)\Big|_{\varepsilon=0}\Big) ;$$

y llamando $\overline{X} = X + \varepsilon\varphi$, tenemos que

$$\Big[\frac{d}{d\varepsilon}Q_1(X+\varepsilon\varphi)\Big]_{\varepsilon=0} = \Big[\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_1}(\overline{X})\frac{\partial \overline{X}_1}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}(\overline{X})\frac{\partial \overline{X}_2}{\partial \varepsilon} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}(\overline{X})\frac{\partial \overline{X}_3}{\partial \varepsilon}\Big]_{\varepsilon=0} = \\ = H(X_1,X_2,X_3)\varphi_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}(X)\varphi_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}(X)\varphi_3 \equiv H(X)\varphi_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}\varphi_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}\varphi_3 ,$$

ya que $Q_1(X) = \int_0^{X_1} H(s,X_2,X_3)ds$. Análogamente,

$$\Big[\frac{d}{d\varepsilon}Q_2(X+\varepsilon\varphi)\Big]_{\varepsilon=0} = H(X)\varphi_2 + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}\varphi_3$$

y

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}Q_3(X+\varepsilon\varphi)\right]_{\varepsilon=0} = H(X)\varphi_3 + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}\varphi_2 \,.$$

Por lo tanto,

$$\left[\frac{d}{d\varepsilon}Q(X+\varepsilon\varphi)\right]_{\varepsilon=0} = H(X)\varphi + \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}\varphi_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}\varphi_3,$$
$$\frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}\varphi_2\Big) \;;$$

y reemplazando esta última expresión en (2.3) se obtiene (2.2).

Ahora, como $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$, integrando por partes obtenemos que:

$$\int_B Q(X)\cdot X_u \wedge \varphi_v \, du\, dv = \int_{-1}^{1} [Q(X)\cdot X_u \wedge \varphi]_{v=-(1-u^2)^{1/2}}^{v=(1-u^2)^{1/2}} du -$$
$$- \int_B \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial v}Q(X)\Big)\cdot X_u \wedge \varphi + Q(X)\cdot X_{uv}\wedge\varphi\Big] du\, dv =$$
$$= \int_{\partial B}(Q(X)\cdot X_u \wedge \varphi) v\, d\sigma - \int_B H(X) X_v \cdot X_u \wedge \varphi \, du\, dv -$$
$$- \int_B \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}X_{2v} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}X_{3v}, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}X_{1v} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}X_{3v}, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}X_{1v} +$$
$$+ \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}X_{2v}\Big)\cdot X_u \wedge \varphi \, du\, dv - \int_B Q(X)\cdot X_{uv}\wedge \varphi \, du\, dv \;,$$

y también,

$$\int_B Q(X)\cdot \varphi_u \wedge X_v = \int_{\partial B}(Q(X)\cdot \varphi \wedge X_v) u\, d\sigma - \int_B H(X) X_u \cdot \varphi \wedge X_v \, du\, dv -$$
$$- \int_B \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}X_{2u} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}X_{3u}, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}X_{1u} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}X_{3u}, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}X_{1u} +$$
$$+ \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}X_{2u}\Big)\cdot \varphi \wedge X_v \, du\, dv - \int_B Q(X)\cdot \varphi \wedge X_{uv} \, du\, dv \,.$$

Sumando y reemplazando en (2.2), se obtiene que

$$dD_H(X)(\varphi) = \int_B [\nabla X \cdot \nabla \varphi + \frac{2}{3}(3H(X)\varphi \cdot X_u \wedge X_v)] +$$
$$+ \frac{2}{3}\int_{\partial B} Q(X)\cdot \varphi \wedge (uX_v - vX_u) d\sigma \,.$$

Hemos utilizado los siguientes desarrollos:

$$\text{a)}\quad \frac{\partial}{\partial u}Q(X) = H(X)X_u + \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}X_{2u} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}X_{3u}, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}X_{1u} + \\ + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}X_{3u}, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}X_{1u} + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}X_{2u}\Big),$$

$$\text{b)}\quad \frac{\partial}{\partial v}Q(X) = H(X)X_v + \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}X_{2v} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}X_{3v}, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}X_{1v} + \\ + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}X_{3v}, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}X_{1v} + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}X_{2v}\Big),$$

$$\text{c)}\quad \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}\varphi_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \\ \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}\varphi_2\Big) \cdot X_u \wedge X_v - \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}X_{2u} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}X_{3u}, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}X_{1u} + \\ \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}X_{3u}, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}X_{1u} + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}X_{2u}\Big) \cdot \varphi \wedge X_v - \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}X_{2v} + \\ \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}X_{3v}, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}X_{1v} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}X_{3v}, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}X_{1v} + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}X_{2v}\Big) \cdot X_u \wedge \varphi \equiv 0\,.$$

Para verificar c), veamos como se anula la primera coordenada de esta última expresión. En efecto, la primera coordenada es:

$$\Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}\varphi_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}\varphi_3\Big)(X_{2u}X_{3v} - X_{3u}X_{2v}) - \\ - \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}X_{2u} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}X_{3u}\Big)(\varphi_2 X_{3v} - X_{2v}\varphi_3) - \\ - \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}X_{2v} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}X_{3v}\Big)(X_{2u}\varphi_3 - X_{3u}\varphi_2) = 0\,.$$

Pero por ser $uX_v - vX_u = \dfrac{\partial X}{\partial \sigma}$, llegamos a:

$$dD_H(X)(\varphi) = \int_B [\nabla X \cdot \nabla\varphi + 2H(X)\varphi \cdot X_u \wedge X_v] + \\ + \frac{2}{3}\int_{\partial B} Q(X)\cdot\varphi \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma}d\sigma\,,$$

o bien,

$$dD_H(X)(\varphi) = \int_B [\nabla X \cdot \nabla\varphi + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi] - \\ - \frac{2}{3}\int_{\partial B} Q(X)\wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma}\cdot\varphi\, d\sigma\,. \qquad \square \tag{2.4}$$

TEOREMA 2.2.1. *Supongamos que* $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ *y que* $\dfrac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ *para* $i,j = 1,2,3$, $i \neq j$, *y sea* $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$ *tal que* $dD_H(X)(\varphi) = 0$ *para toda* $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$. *Entonces* X *es una solución débil de (H) y* $\dfrac{\partial X}{\partial \eta} = \dfrac{2}{3} Q(X) \wedge \dfrac{\partial X}{\partial \sigma}$ *en* $L^2(\partial B, \mathbf{R}^3)$. *En particular,* $\dfrac{\partial X}{\partial \eta} \cdot \dfrac{\partial X}{\partial \sigma} = 0$ *pp en* ∂B. *Además, si* H *es constante y* $X \in L^\infty(B, \mathbf{R}^3)$, *se obtiene que* $\dfrac{\partial |X|^2}{\partial \eta} = X \cdot \dfrac{\partial X}{\partial \eta} = 0$ *pp en* ∂B.

Demostración. A partir de la expresión (2.4) del Lemma 2.2.1, se obtiene que

$$\int_B \nabla X \cdot \nabla \varphi + 2H(X) X_u \wedge X_v \cdot \varphi = 0 \,,$$

para toda $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$, y por lo tanto, X resulta una solución débil de (H). Además,

$$\int_B [-\Delta X + 2H(X) X_u \wedge X_v] \cdot \varphi = 0 \,,$$

para toda $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$, y por lo tanto como $-\Delta X + 2H(X) X_u \wedge X_v \in L^1(B, \mathbf{R}^3)$, obtenemos que

$$-\Delta X + 2H(X) X_u \wedge X_v = 0 \quad \text{pp en } B\,.$$

Ahora, volviendo a (2.4), tenemos que para $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$,

$$\begin{aligned} 0 &= \int_B [\nabla X \cdot \nabla \varphi + 2H(X) X_u \wedge X_v] \cdot \varphi - \frac{2}{3} \int_{\partial B} Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \varphi d\sigma = \\ &= \int_B [-\Delta X + 2H(X) X_u \wedge X_v] \cdot \varphi + \int_{\partial B} \frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot \varphi d\sigma - \frac{2}{3} \int_{\partial B} Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \varphi d\sigma = \\ &= \int_{\partial B} \left[\frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{2}{3} Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} \right] \cdot \varphi d\sigma \,, \end{aligned}$$

y como $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$, $\dfrac{\partial X}{\partial \eta}, \dfrac{\partial X}{\partial \sigma} \in L^2(\partial B, \mathbf{R}^3)$, además, $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$, y entonces, $\dfrac{\partial X}{\partial \eta} - \dfrac{2}{3} Q(X) \wedge \dfrac{\partial X}{\partial \sigma} \in L^2(\partial B, \mathbf{R}^3)$ y

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} - \frac{2}{3} Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{en } L^2(\partial B, \mathbf{R}^3). \tag{2.5}$$

Por último, si $H(X) = H_0 \in \mathbf{R}$, entonces $Q(X) = H_0 X$, $Q(X) \in L^\infty(B, \mathbf{R}^3)$ para $X \in L^\infty(B, \mathbf{R}^3)$, con lo cual D_H resulta bien definida, y además $\dfrac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} = 0$ para $i,j = 1,2,3$, $i \neq j$.

La expresión (2.5) implica que

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{2}{3} H_0 X \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma} \quad \text{pp en } \partial B,$$

y multiplicando escalarmente por X, obtenemos que

$$\frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot X = 0 \quad \text{pp en } \partial B,$$

lo cual completa la demostración. $\square$

TEOREMA 2.2.2. *Supongamos que* $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$ *y* $\dfrac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ *para* $i, j = 1, 2, 3$, $i \neq j$ *y sea* $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$ *tal que* $dD_H(X)(\varphi) = 0$ *para toda* $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$. *Entonces las coordenadas* (u, v) *de* X *son isotermas, es decir,* $|X_u| = |X_v|$ *y* $X_u \cdot X_v = 0$ *pp en* B.

Demostración.

Paso 1. Si $|X_u|^2 - |X_v|^2 = X_u \cdot X_v = 0$ en $L^1(\partial B, \mathbf{R}^3)$, entonces $|X_u|^2 - |X_v|^2 = X_u \cdot X_v = 0$ en $L^1(B, \mathbf{R}^3)$.

Extendemos X a $\mathbf{R}^2 \backslash \overline{B}$ por inversión con respecto de ∂B, o sea, para $r^2 = u^2 + v^2$ definimos

$$Y(u, v) = \begin{cases} X(u, v) \text{ en } B \\ X(u/r^2, v/r^2) \text{ en } \mathbf{R}^2 \backslash \overline{B}. \end{cases}$$

Veamos que

$$\begin{cases} \Delta Y = 2H(Y) Y_u \wedge Y_v \text{ en } B \\ \Delta Y = -2H(Y) Y_u \wedge Y_v \text{ en } \mathbf{R}^2 \backslash \overline{B}. \end{cases} \tag{2.6}$$

En efecto, si se hace el cambio de coordenadas $(u, v) \to (u', v') = (u/r^2, v/r^2)$ con $r^2 = u^2 + v^2$, y J es el jacobiano correspondiente, tenemos que

$$J^{-1} = \left| \det \begin{pmatrix} v^2 - u^2/r^4 & -2uv/r^4 \\ -2uv/r^4 & u^2 - v^2/r^4 \end{pmatrix} \right| = \left| -\left(\frac{u^2 - v^2}{r^4}\right)^2 - \frac{4u^2 v^2}{(r^4)^2} \right| =$$
$$= \left| \frac{-u^4 - v^4 + 2u^2 v^2 - 4u^2 v^2}{(r^4)^2} \right| = \left| -\frac{(u^2 + v^2)^2}{(r^4)^2} \right| = \left| \frac{-r^4}{(r^4)^2} \right| = \frac{1}{r^4},$$

ya que

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{r^2}\right) = \frac{v^2 - u^2}{r^4}, \quad \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v}{r^2}\right) = \frac{u^2 - v^2}{r^4}$$

y

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{v}{r^2}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{r^2}\right) = -\frac{2uv}{r^4} .$$

Ahora, si $Y(u,v) = X({}^{u}/_{r^2}, {}^{v}/_{r^2})$, entonces

$$Y_u = X_u \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{u}{r^2}\right) + X_v \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{v}{r^2}\right) = X_u \frac{v^2 - u^2}{r^4} + X_v\left(-\frac{2uv}{r^4}\right)$$

y análogamente,

$$Y_v = X_u \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{u}{r^2}\right) + X_v \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{v}{r^2}\right) = X_u\left(-\frac{2uv}{r^4}\right) + X_v \frac{u^2 - v^2}{r^4} .$$

Entonces,

$$Y_u \wedge Y_v = X_u \wedge X_v \left[-\left(\frac{u^2 - v^2}{r^4}\right)^2 - \frac{4u^2v^2}{(r^4)^2}\right] = X_u \wedge X_v(-J^{-1}) .$$

Además,

$$\begin{aligned} Y_{uu} = {} & X_{uu}\left(\frac{v^2 - u^2}{r^4}\right)^2 + X_{uv}\left(-\frac{2uv}{r^4}\right)\frac{v^2 - u^2}{r^4} + \\ & + X_{vu}\left(-\frac{2uv}{r^4}\right)\frac{v^2 - u^2}{r^4} + X_{vv}\left(-\frac{2uv}{r^4}\right)^2 + \\ & + X_u\left(\frac{-2ur^4 + (u^2 - v^2)2(u^2 + v^2)2u}{(r^4)^2}\right) + X_v\left(\frac{-2vr^4 + 2uv\,2(u^2 + v^2)2u}{(r^4)^2}\right) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y_{vv} = {} & X_{uu}\left(-\frac{2uv}{r^4}\right)^2 + X_{uv}\left(\frac{u^2 - v^2}{r^4}\right)\left(-\frac{2uv}{r^4}\right) + \\ & + X_{vu}\left(-\frac{2uv}{r^4}\right)\frac{u^2 - v^2}{r^4} + X_{vv}\left(\frac{u^2 - v^2}{r^4}\right)^2 + \\ & + X_u\left(\frac{-2ur^4 + 2uv\,2(u^2 + v^2)2v}{(r^4)^2}\right) + X_v\left(\frac{-2vr^4 + (v^2 - u^2)2(u^2 + v^2)2v}{(r^4)^2}\right) . \end{aligned}$$

Si sumamos $Y_{uu} + Y_{vv}$ y estudiamos los coeficientes que multiplican a cada una de las derivadas de X, vemos que: el coeficiente de X_u es:

$$\begin{aligned} & \frac{-2ur^2 + (u^2 - v^2)4u}{r^6} + \frac{-2ur^2 + 2^3uv^2}{r^6} = \\ & = \frac{(-4u^3 - 4uv^2 + 4u^3 - 4uv^2 + 2^3uv^2)}{r^6} \equiv 0 ; \end{aligned}$$

$$\text{el de } X_v\text{:}\ \frac{-2vr^2 + 2^3u^2v}{r^6} + \frac{-2vr^2 + 4v(v^2-u^2)}{r^6} =$$
$$\frac{-4vu^2 - 4v^3 + 2^3u^2v + 4v^3 - 4u^2v}{r^6} \equiv 0\,,$$

$$\text{el de } X_{uv}\text{:}\ \left(\frac{-2uv}{r^4}\right)\frac{v^2-u^2}{r^4} + \frac{u^2-v^2}{r^4}\left(\frac{-2uv}{r^4}\right) \equiv 0\,,$$

$$\text{el de } X_{vu}\text{:}\ \left(\frac{-2uv}{r^4}\right)\frac{v^2-u^2}{r^4} + \left(\frac{-2uv}{r^4}\right)\frac{u^2-v^2}{r^4} \equiv 0\,,$$

$$\text{el de } X_{uu}\text{:}\ \left(\frac{v^2-u^2}{r^4}\right)^2 + \left(\frac{-2uv}{r^4}\right)^2 = J^{-1}\,,$$

$$\text{el de } X_{vv}\text{:}\ \left(\frac{-2uv}{r^4}\right)^2 + \left(\frac{u^2-v^2}{r^4}\right)^2 = J^{-1}\,.$$

Luego, $Y_{uu} + Y_{vv} = (X_{uu} + X_{vv})J^{-1}$.

Pero si $dD_H(X)(\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$, entonces $\Delta X = 2H(X)X_u \wedge X_v$ en B, y por lo tanto $\Delta Y = 2H(Y)Y_u \wedge Y_v$ para $(u,v) \in B$, y si $(u,v) \in \mathbf{R}^2 \backslash \overline{B}$, entonces $\Delta Y(u,v) = \Delta X({}^u/_{r^2}, {}^v/_{r^2})J^{-1} = 2H(X({}^u/_{r^2}, {}^v/_{r^2}))X_u \wedge X_v({}^u/_{r^2}, {}^v/_{r^2})J^{-1} = -2H(Y)Y_u \wedge Y_v(u,v)$.

Ahora, si la medida conforme de Y es la aplicación $F(u,v) = |Y_u|^2 - |Y_v|^2 - 2i\,Y_u \cdot Y_v$, veremos que F es holomorfa en $\mathbf{C}$.

F es holomorfa en $\mathbf{C}\backslash\partial B$, pues $F(u,v) = F_1(u,v) + iF_2(u,v)$ con $F_1(u,v) = |Y_u|^2 - |Y_v|^2$, $F_2(u,v) = -2Y_u \cdot Y_v$ y F_1, F_2 verifican las condiciones de Cauchy–Riemann en $\mathbf{C}\backslash\partial B$:

$$\frac{\partial F_1}{\partial u} = 2Y_u \cdot Y_{uu} - 2Y_v \cdot Y_{vu}\,,$$
$$\frac{\partial F_2}{\partial v} = -2Y_{uv} \cdot Y_v - 2Y_u \cdot Y_{vv}\,.$$

Luego, $\dfrac{\partial F_1}{\partial u} = \dfrac{\partial F_2}{\partial v}$ si y sólo si $2Y_u \cdot Y_{uu} - 2Y_v \cdot Y_{vu} = -2Y_{uv} \cdot Y_v - 2Y_u \cdot Y_{vv}$, o sea, si y sólo si $Y_u \cdot \Delta Y \equiv 0$, lo cual queda asegurado por (2.6).

Análogamente,

$$\frac{\partial F_2}{\partial u} = -2Y_{uu} \cdot Y_v - 2Y_u \cdot Y_{vu}\,,$$
$$\frac{\partial F_1}{\partial v} = 2Y_u \cdot Y_{uv} - 2Y_v \cdot Y_{vv}\,.$$

Entonces, $\frac{\partial F_1}{\partial v} = -\frac{\partial F_2}{\partial u}$ si y sólo si $2Y_u \cdot Y_{uv} - 2Y_v \cdot Y_{vv} = 2Y_{uu} \cdot Y_v + 2Y_u \cdot Y_{vu}$, si y sólo si $Y_v \cdot \Delta Y \equiv 0$, lo cual nuevamente queda garantizado por (2.6). Luego F satisface Cauchy-Riemann en $\mathbf{R}^2 \setminus \partial B$ en forma débil, y como este operador es elíptico $F \in C^2(\mathbf{C} \setminus \partial B, \mathbf{C})$, y por último, tenemos que F es continua en ∂B, pues

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{r\to 1\\ r>1}}(|Y_u|^2 - |Y_v|^2) &= [|X_u|^2(v^2-u^2)^2 + |X_v|^2 4u^2v^2 + 2X_u \cdot X_v(v^2-u^2)(-2uv)] - \\ &- [|X_u|^2(-2uv)^2 + |X_v|^2(u^2-v^2)^2 + X_u \cdot X_v(u^2-v^2)(-2uv)] = \\ &= (|X_u|^2 - |X_v|^2)[(v^2-u^2)^2 - 4u^2v^2] + 2X_u \cdot X_v(u^2-v^2)4uv = 0 ,\end{aligned}$$

y $\lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}}(|Y_u|^2 - |Y_v|^2) = 0$ si $|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0$ y $X_u \cdot X_v = 0$ pp en ∂B, y también,

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{r\to 1\\ r>1}} Y_u \cdot Y_v &= (|X_u|^2 - |X_v|^2)[(v^2-u^2)(-2uv)] + X_u \cdot X_v[-(u^2-v^2)^2 + 4u^2v^2] = \\ &= 0 = \lim_{\substack{r\to 1\\ r<1}} Y_u \cdot Y_v\end{aligned}$$

para $|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0$ y $X_u \cdot X_v = 0$ pp en ∂B.

Por lo tanto, F es holomorfa en $\mathbf{C}$, pero

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^2} |F(u,v)| \le 2\int_{\mathbf{R}^2}(|Y_u|^2 + |Y_v|^2) = 4\int_B(|Y_u|^2 + |Y_v|^2) = \\ = 4\int_B(|X_u|^2 + |X_v|^2) < +\infty ,\end{aligned}$$

pues

$$\begin{aligned}\int_{B^c} |\nabla Y|^2 &= \int_{B^c} -\Delta Y \cdot Y + \int_{\partial B^c} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \cdot Y d\sigma = \int_{\partial B^c} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \cdot Y d\sigma + \\ &+ \int_{B^c} -\Delta X({}^{u}/_{r^2}, {}^{v}/_{r^2}) \cdot X({}^{u}/_{r^2}, {}^{v}/_{r^2})J^{-1} = \int_B -\Delta X(u',v') \cdot X(u',v')J^{-1}J + \\ &+ \int_{\partial B^c} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \cdot Y d\sigma = \int_B |\nabla X|^2 - \int_{\partial B} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \cdot Y d\sigma + \int_{\partial B^c} \frac{\partial Y}{\partial \eta} \cdot Y d\sigma = \int_B |\nabla X|^2 ,\end{aligned}$$

haciendo el cambio de variables $(u',v') = ({}^{u}/_{r^2}, {}^{v}/_{r^2})$.

Pero entonces, $F \equiv 0$, y por lo tanto,

$$|Y_u|^2 - |Y_v|^2 = Y_u \cdot Y_v = 0 , \quad \text{y en particular}$$
$$|X_u|^2 - |X_v|^2 = X_u \cdot X_v = 0 \quad \text{pp en } B.$$

<u>Paso 2</u>: (u,v) son isotermas sobre ∂B. Sea $X(r,\sigma) = X(r\cos\sigma, r\sin\sigma)$, entonces,

$$\frac{\partial X}{\partial r} = X_u \frac{\partial u}{\partial r} + X_v \frac{\partial v}{\partial r} = X_u \cos\sigma + X_v \sin\sigma$$

y

$$\frac{\partial X}{\partial \sigma} = X_u \frac{\partial u}{\partial \sigma} + X_v \frac{\partial v}{\partial \sigma} = X_u(-r \sin \sigma) + X_v r \cos \sigma \ ,$$

luego, $\frac{\partial X}{\partial r} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} = (|X_v|^2 - |X_u|^2) r \cos \sigma \sin \sigma + X_u \cdot X_v (\cos^2 \sigma - \sin^2 \sigma)$, y por lo tanto, el paso 2 es equivalente a $\frac{\partial X}{\partial r} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} = 0$ pp en ∂B. Pero como $\frac{\partial X}{\partial \eta} = T_r \frac{\partial X}{\partial r}$ y $\frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{2}{3} Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma}$ en $L^2(\partial B, \mathbf{R}^3)$, se deduce que $\frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} = 0$ pp sobre ∂B. □

COROLARIO 2.2.1. *Si las coordenadas* (u,v) *de* X *son isotermas, entonces* $\left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right|^2 - \left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right|^2 = \frac{\partial X}{\partial \sigma} \cdot \frac{\partial X}{\partial \eta} = 0$ *pp en* ∂B.

Demostración. Ya sabemos que $|X_u|^2 - |X_v|^2 = X_u \cdot X_v = 0$ pp en B si y sólo si $|X_u|^2 - |X_v|^2 = X_u \cdot X_v = 0$ pp en ∂B, y además, que $|X_u|^2 - |X_v|^2 = X_u \cdot X_v = 0$ pp en ∂B si y sólo si $\frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} = 0$ pp en ∂B.

Ahora, sabemos que $\frac{\partial X}{\partial r} = X_u \cos \sigma + X_v \sin \sigma$ y $\frac{\partial X}{\partial \sigma} = -X_u r \sin \sigma + X_v r \cos \sigma$, entonces, $\left|\frac{\partial X}{\partial r}\right|^2 = |X_u|^2 \cos^2 \sigma + |X_v|^2 \sin^2 \sigma + 2X_u \cdot X_v \cos \sigma \sin \sigma$ y $\left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right|^2 = |X_u|^2 r^2 \sin^2 \sigma + |X_v|^2 r^2 \cos^2 \sigma - 2X_u \cdot X_v r^2 \cos \sigma \sin \sigma$, y por lo tanto, para $r = 1$ tenemos que $\left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right|^2 = \left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right|^2$ si y sólo si $|X_u|^2 \cos^2 \sigma + |X_v|^2 \sin^2 \sigma = |X_u|^2 \sin^2 \sigma + |X_v|^2 \cos^2 \sigma$ y esto último sucede si y sólo si $|X_u|^2 = |X_v|^2$, lo cual completa la demostración. □

OBSERVACIONES.

a) En forma recíproca al Teorema 2.2.1, tenemos que si $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$ es una solución de la ecuación $\Delta X = 2H(X) X_u \wedge X_v$ en B y $\frac{\partial X}{\partial \eta} = \frac{2}{3} Q(X) \wedge \frac{\partial X}{\partial \sigma}$ en $L^2(\partial B, \mathbf{R}^3)$, entonces $dD_H(X)(\varphi) = 0$ para todo $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$.

b) Si $H \in \mathbf{R}$, $X \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$ y $(u,v) \in \partial B$, en cada punto $X(u,v) \in \mathbf{R}^3$, X y $\frac{\partial X}{\partial \sigma}$ son coplanares y están contenidas en el plano perpendicular a $\frac{\partial X}{\partial \eta}$ si $\frac{\partial X}{\partial \eta}(u,v) \neq 0$.

c) Si $\frac{\partial X}{\partial \eta}(u,v) \neq 0$, $X(u,v)$, $\frac{\partial X}{\partial \sigma}(u,v)$ y $\frac{\partial X}{\partial \eta}(u,v)$ forman una base de $\mathbf{R}^3$ con la misma orientación que la base canónica si $H > 0$ para cada $(u,v) \in \partial B$.

2.3. Propiedades generales de las soluciones de (H) y de los puntos críticos de D_H en $H^2(B, \mathbf{R}^3)$.

TEOREMA 2.3.1. *Sea $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$ una solución de la ecuación $\Delta X = 2H(X) X_u \wedge X_v$ en B. Entonces, $\int_B [|\nabla X|^2 + \left(\frac{|\nabla X|^2}{2}\right)_r r + 2H(X) X_r \cdot X_u \wedge X_v] = \int_{\partial B} \left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right|^2 d\sigma \geq 0$.*

Demostración. Sea X_1 la primera componente de X, entonces

$$\int_B \operatorname{div}[(uX_{1u} + vX_{1v})\nabla X_1] = \int_{\partial B} (uX_{1u} + vX_{1v})\nabla X_1 \cdot \widehat{\eta}\, d\sigma .$$

Luego,

$$\begin{aligned} \int_B [|\nabla X_1|^2 &+ (uX_{1uu} + vX_{1vu}, uX_{1uv} + vX_{1vv}) \cdot \nabla X_1 + \\ &+ (uX_{1u} + vX_{1v})\Delta X_1] = \int_{\partial B} (uX_{1u} + vX_{1v})\nabla X_1 \cdot \widehat{\eta}\, d\sigma . \end{aligned} \tag{2.7}$$

Teniendo en cuenta que:

$$\begin{aligned} &uX_{1u} + vX_{1v} = rX_{1r} , \\ &(uX_{1uu} + vX_{1vu}, uX_{1uv} + vX_{1vv}) \cdot \nabla X_1 = r(\nabla X_1)_r \cdot \nabla X_1 , \end{aligned}$$

y que

$$r\Delta X_1 X_{1r} = rX_{1r} 2H(X)(X_{2u}X_{3v} - X_{3u}X_{2v}) ,$$

reemplazando en (2.7) obtenemos que

$$\int_B [|\nabla X_1|^2 + r\left(\frac{|\nabla X_1|^2}{2}\right)_r + 2H(X) r X_{1r}(X_{2u}X_{3v} - X_{3u}X_{2v})] = \int_{\partial B} X_{1r}^2 \geq 0 ,$$

y teniendo en cuenta ésta última igualdad para X_2 y X_3,

$$\int_B [|\nabla X|^2 + r\left(\frac{|\nabla X|^2}{2}\right)_r + 2H(X) r X_r \cdot X_u \wedge X_v] = \int_{\partial B} \left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right| d\sigma \geq 0 . \qquad \square$$

TEOREMA 2.3.2. *Si $H = H_0 \in \mathbf{R}$ y $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3) \cap L^\infty(B, \mathbf{R}^3)$ es tal que $dD_H(X)(\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$, entonces si $Y \in (X + H_0^1(B, \mathbf{R}^3)) \cap L^\infty(B, \mathbf{R}^3)$, $\left|\int_B Y_u \wedge Y_v\right| \leq \frac{1}{2|H_0|}\int_{\partial B} \left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right| d\sigma$.*

Demostración. Sea $Y \in (X + H_0^1(B,\mathbf{R}^3)) \cap L^\infty(B,\mathbf{R}^3)$. Veamos entonces que $\int_B Y_u \wedge Y_v = \int_B X_u \wedge X_v$: en efecto, para toda vector $c \in \mathbf{R}^3$,

$$2\int_B (Y_u \wedge Y_v - X_u \wedge X_v)\cdot c = \int_B [(Y - X)_u \wedge (Y + X)_v + \\ + (Y + X)_u \wedge (Y - X)_v]\cdot c = 0 ,$$

ya que se sabe que si $\varphi \in H_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ y $\psi, \rho \in H^1(B,\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(B,\mathbf{R}^3)$, $\int_B (\varphi_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \varphi_v)\cdot \rho = \int_B (\rho_u \wedge \psi_v + \psi_u \wedge \rho_v)\cdot \varphi$ ([St1],. p. 92).

Pero entonces, $\left|\int_B Y_u \wedge Y_v\right| = \left|\int_B X_u \wedge X_v\right| = \left|\int_B \frac{1}{2H_0}\Delta X\right| = \frac{1}{2|H_0|}\left|\int_B \Delta X\right| = \frac{1}{2|H_0|}\left|\int_{\partial B} \frac{\partial X}{\partial \eta} d\sigma\right| \leq \frac{1}{2|H_0|}\int_{\partial B}\left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right| d\sigma = \frac{1}{2|H_0|}\int_{\partial B}\left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right| d\sigma$, ya que por el Corolario del Teorema 2.2.2, sabemos que $\left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right|^2 - \left|\frac{\partial X}{\partial r}\right|^2 = 0$ pp en ∂B si $|X_u|^2 - |X_v|^2 = 0$, $X_u \cdot X_v = 0$ pp en B. □

TEOREMA 2.3.3. *Supongamos que $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$, y que $\frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ para $i, j = 1,2,3$, $i \neq j$. Sea $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$ tal que $\|H(X)X\|_\infty < 1$ y $dD_H(X)(\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3)$. Entonces,*

$$D(X) \leq \frac{\|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}\left\|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}}{2(1 - \|H(X)X\|_\infty)} .$$

Demostración. Sabemos que $\Delta X = 2H(X)X_u \wedge X_v$ pp en B, luego, $0 = \int_B [-\Delta X + 2H(X)X_u \wedge X_v]\cdot X = \int_B [|\nabla X|^2 + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot X] - \int_{\partial B} \frac{\partial X}{\partial \eta}\cdot X d\sigma \geq 2D(X)(1 - \|H(X)X\|_\infty) - \|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}\left(\int_{\partial B}\left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right|^2 d\sigma\right)^{1/2} = 2D(X)(1 - \|H(X)X\|_\infty) - \|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}\cdot \left\|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}$, ya que por el Corolario del Teorema 2.2.2, $\left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right| = \left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right|$ pp en ∂B. □

TEOREMA 2.3.4. *Con las mismas hipótesis del Teorema 2.3.3, también se verifica la siguiente desigualdad:*

$$D(X) \leq \frac{\int_{\partial B} \frac{\partial |X|^2}{\partial \eta} d\sigma}{4(1 - \|H(X)X\|_\infty)} ,$$

en particular, $\displaystyle\int_{\partial B} \frac{\partial |X|^2}{\partial \eta}\, d\sigma \geq 0$.

Demostración. Sabemos que $0 = \displaystyle\int_B [|\nabla X|^2 + 2H(X) X_u \wedge X_v \cdot X] - \int_{\partial B} \frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot X\, d\sigma \geq 2D(X)(1 - \|H(X)X\|_\infty) - \int_{\partial B} \frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot X\, d\sigma$, y como $\displaystyle\int_{\partial B} \frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot X\, d\sigma = \frac{1}{2} \int_{\partial B} \frac{\partial |X|^2}{\partial \eta} d\sigma$, la demostración queda completada. $\square$

Capítulo 3

En este capítulo se estudia el problema de Dirichlet para la ecuación de curvatura media prescripta (H).

Vemos que para determinadas funciones H, existe para cada dato de contorno $g \in H^1(B, \mathbf{R}^3)$ una solución de (H) que es un mínimo global de D_H en el subespacio afín $T \equiv g + H_0^1(B, \mathbf{R}^3)$. Si variamos las condiciones impuestas a H, obtenemos soluciones que son: o un mínimo local de D_H en $T \cap W^{1,\infty}(B, \mathbf{R}^3)$ o una sucesión de mínimos de D_H en subconjuntos convexos y cerrados de $H^1(B, \mathbf{R}^3)$.

Finalmente se demuestra un resultado que es una variante del Lema del Paso de la Montaña para la funcional D_H, y demostramos que bajo determinadas condiciones para H y g, se obtienen soluciones del Problema de Dirichlet para la ecuación de curvatura media prescripta (H) a partir de puntos críticos de D_H en conjuntos convexos apropiados.

3.1. Mínimos de D_H en subconjuntos convexos de $H^1(B, \mathbf{R}^3)$.

Consideraremos el problema de Dirichlet en el disco unitario B, para una función vectorial $X : \overline{B} \to \mathbf{R}^3$ que satisface la ecuación de curvatura media prescripta (H)

$$\text{(Dir)} \qquad \begin{cases} \Delta X = 2H(X) X_u \wedge X_v \text{ en } B \\ X = g \text{ en } \partial B \end{cases}$$

DEFINICIÓN 3.1.1. Si H es acotada y $g \in H^1(B, \mathbf{R}^3)$, diremos que $X \in H^1(B, \mathbf{R}^3)$ es una solución débil de (Dir) si para cada $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$, se verifica

$$\text{(Sol)} \qquad \begin{cases} \int_B (\nabla X \cdot \nabla \varphi + 2H(X) X_u \wedge X_v \cdot \varphi) = 0 \\ X \in T \end{cases}$$

TEOREMA 3.1.1. *Sea $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $H \in C^1(\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}^3)$ y tal que si Q es el campo vectorial asociado a H, $\|Q\|_\infty < \frac{3}{2}$ y $\frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ para $i \neq j$, $i, j = 1, 2, 3$. Entonces, dada $g \in H^1(B, \mathbf{R}^3)$, D_H tiene un mínimo $\underline{X}$ en $T = g + H_0^1(B, \mathbf{R}^3)$ y $\underline{X}$ es una solución débil de* (Dir).

Demostración. Para $\xi, X \in H^1(B, \mathbf{R}^3)$, vale que

$$\text{(3.1)} \qquad |Q(\xi) \cdot X_u \wedge X_v| \leq |Q(\xi)| \frac{1}{2} |\nabla X|^2 ,$$

luego,

$$|D_H(X)| \leq D(X) + \frac{2}{3}\int_B |Q(X)\cdot X_u \wedge X_v| \leq D(X) + \frac{2}{3}\|Q\|_\infty D(X) \leq 2D(X)$$

y D_H resulta finita en T.

Además, por el Lema 3.1.3 que demostraremos más adelante, D_H resulta débilmente semicontinua inferiormente y coerciva en T, y como T es débilmente cerrado como subconjunto de $H^1(B,\mathbf{R}^3)$, concluimos que existe $\underline{X} \in T$ tal que D_H alcanza su mínimo en $\underline{X}$, por lo tanto, $dD_H(\underline{X})(\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$. A partir del Lema 3.1.1 que demostraremos luego, puede concluirse que $\underline{X}$ es una solución débil de (Dir). □

TEOREMA 3.1.2. *Sea $g \in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3)$ armónica y $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ cualquier función no nula que verifica las siguientes condiciones:*

i) $H \in C^1(\mathbf{R}^3) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ *y el campo vectorial Q asociado a H satisface $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$.*

ii) $\|H\|_\infty \|g\|_\infty < \dfrac{3}{2}$.

iii) *Existe un número real $c > \|\nabla g\|_\infty$ tal que $|H(\xi)| \leq \lambda_1^2/c^2(|\xi| - \|g\|_\infty)_+$ para todo $\xi \in \mathbf{R}^3$, donde $\lambda_1 > 0$ es el primer autovalor de $-\Delta$ en $H_0^1(B)$.*

Entonces g es una solución débil de (Dir) *y si g no es un mínimo local de D_H en $T \cap W^{1,\infty}(B,\mathbf{R}^3)$, existe una sucesión (X_n) de soluciones débiles distintas de* (Dir) *en $W^{1,\infty}(B,\mathbf{R}^3)$ tal que $X_n \to g$ en $W^{1,\infty}(B,\mathbf{R}^3)$.*

Demostración. Si $X \in T$, entonces tenemos que

$$|H(X)| \leq \lambda_1^2/c^2(|X| - \|g\|_\infty)_+ \leq \lambda_1^2/c^2(|X| - |g|)_+ \leq \frac{\lambda_1^2}{c^2}|X - g| \quad \text{pp en } B.$$

Luego, $H(g) = 0$ en B y entonces,

$$dD_H(g)(\varphi) = \int_B \nabla g \cdot \nabla\varphi + 2H(g) g_u \wedge g_v \cdot \varphi = -\int_B \Delta g \cdot \varphi = 0$$

para toda $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$, de donde se deduce que g es una solución débil de (Dir) en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$.

Supongamos que g no es un mínimo local de D_H en $T \cap W1,\infty(B,\mathbf{R}^3)$.

Sea ahora $\delta_1 = \min\left\{c - \|\nabla g\|_\infty, \dfrac{3}{2\|H\|_\infty} - \|g\|_\infty\right\}$ y se define $M_1 = \{X \in T; \|X - g\|_\infty + \|\nabla(X-g)\|_\infty \leq \delta_1\}$. Entonces, M_1 es no vacío, pues $g \in M_1$, es convexo, cerrado y acotado en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$, por lo tanto es débilmente compacto. Además, por el Lema 3.1.3, D_H es débilmente semicontinua inferiormente en M_1, ya que $\|Q(X)\|_\infty \leq \|H\|_\infty\|X\|_\infty \leq \|H\|_\infty(\|X-g\|_\infty + \|g\|_\infty) < {}^3/2$ para todo $X \in M_1$.

Luego, existe $X_1 \in M_1$ tal que $D_H(X_1) = \inf\limits_{X\in M_1} D_H(X)$ y como g no es un mínimo local de D_H en $W^{1,\infty}(B,\mathbf{R}^3)\cap T$, se sigue que $X_1 \neq g$. Veamos que X_1 es una solución débil de (Dir):

Como M_1 es convexo, para todo $\varepsilon \in [0,1]$ tenemos que $D_H(X_1) \leq D_H(X_1 + \varepsilon(X - X_1))$ y por lo tanto, $0 \leq {}^d/_{d\varepsilon} D_H(X_1 + \varepsilon(X - X_1))\big|_{\varepsilon=0} = dD_H(X_1)(X - X_1)$, o sea, $dD_H(X_1)(X_1 - X) \leq 0$ para todo $X \in M_1$. Luego, $dD_H(X_1)(X_1 - g) \leq \pm dD_H(X_1)(\varphi)$ para toda $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ tal que $\|\varphi\|_\infty + \|\nabla\varphi\|_\infty < \delta_1$ y entonces, $dD_H(X_1)(X_1 - g) < 0$, o bien, $dD_H(X_1)(X_1 - g) = dD_H(X_1)(\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$. En este último caso, X_1 resulta una solución débil de (Dir) en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$ y entonces, basta probar que la primera opción no es posible.

Para esto notamos que si $X \in M_1$, $\|\nabla X\|_\infty \leq \|\nabla(X - g)\|_\infty + \|\nabla g\|_\infty \leq c$ y como $|H(X)| \leq {\lambda_1^2}/{c^2}\,|X - g|$ pp en B, tenemos que $\int_B 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot (X - g) \geq -2\int_B |X_u \wedge X_v|\,{\lambda_1^2}/{c^2}\,|X - g|^2 \geq -\int_B |\nabla X|^2\,{\lambda_1^2}/{c^2}\,|X - g|^2 \geq -\lambda_1^2\|X - g\|_2^2 \geq -\|\nabla(X - g)\|_2^2$, y por otro lado, $\int_B \nabla g \cdot \nabla(X - g) = -\int_B \Delta g \cdot (X - g) = 0$. Entonces

$$
\begin{aligned}
dD_H(X_1)(X_1 - g) &= \int_B [\nabla X_1 \cdot \nabla(X_1 - g) + 2H(X_1)X_{1u} \wedge X_{1v} \cdot (X_1 - g) = \\
&= \int_B |\nabla(X_1 - g)|^2 + \int_B \nabla g \cdot \nabla(X_1 - g) + \int_B 2H(X_1)X_{1u} \wedge X_{1v} \cdot (X_1 - g) \geq \\
&\geq \|\nabla(X_1 - g)\|_2^2 - \|\nabla(X_1 - g)\|_2^2 = 0\,,
\end{aligned}
$$

y por lo tanto X_1 resulta una solución débil de (Dir) en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$.

Ahora, sean $\delta_2 = \min\{\delta_1, {}^1/2(\|X_1 - g\|_\infty + \|\nabla(X_1 - g)\|_\infty)\}$ y $M_2 = \{X \in T; \|X - g\|_\infty + \|\nabla(X - g)\|_\infty \leq \delta_2\}$. Nuevamente, existe $X_2 \in M_2$ tal que $D_H(X_2) = \inf\limits_{X\in M_2} D_H(X)$, X_2 es una solución débil de (Dir) y $X_2 \neq g$. Además, como $X_1 \notin M_2$, $X_2 \neq X_1$.

De esta forma se construye una sucesión $(X_n) \subset W^{1,\infty}(B,\mathbf{R}^3) \cap T$ de soluciones débiles de (Dir) en $W^{1,\infty}(B,\mathbf{R}^3)$ tal que $X_n \to g$ en $W^{1,\infty}(B,\mathbf{R}^3)$. □

A continuación demostraremos los Lemas 3.1.1, 3.1.2 y 3.1.3 que hemos utilizado en la demostración de los Teoremas 3.1.1 y 3.1.2.

LEMA 3.1.1. *Supongamos que $H \in C^1(\mathbf{R}^3)\cap L^\infty(\mathbf{R}^3)$, $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$ y $\dfrac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ para $i,j = 1,2,3$, $i \neq j$, y sean $X \in T$ y $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$, entonces $dD_H(X)(\varphi) =$*

$\int_B (\nabla X \cdot \nabla \varphi + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi)$. *En particular, si X es un punto crítico de D_H, entonces X es una solución débil de* (Dir).

Demostración. En forma análoga al Lema 2.2.1, vemos que para $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$, $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$, la derivada direccional $dD_H(X)(\varphi)$ está dada por:

$$dD_H(X)(\varphi) = \int_B \nabla X \cdot \nabla \varphi + \frac{2}{3}\int_B (Q(X) \cdot X_u \wedge \varphi_v + \tag{3.2}$$
$$+ Q(X) \cdot \varphi_u \wedge X_v + H(X)\varphi \cdot X_u \wedge X_v) + \frac{2}{3}\int_B \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}\varphi_2 +$$
$$+ \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}\varphi_2\Big) \cdot X_u \wedge X_v\,.$$

Como φ se anula en ∂B, si suponemos que $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$, integrando por partes obtenemos que:

$$\int_B Q(X) \cdot X_u \wedge \varphi_v = -\int_B \Big[\Big(\frac{\partial}{\partial v}Q(X)\Big) \cdot X_u \wedge \varphi + Q(X) \cdot X_{uv} \wedge \varphi\Big] =$$
$$= -\int_B H(X)X_v \cdot X_u \wedge \varphi - \int_B \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}X_{2v} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}\varphi_{3v}, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}X_{1v} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}X_{3v}, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}X_{1v} +$$
$$+ \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}X_{2v}\Big) \cdot X_u \wedge \varphi - \int_B Q(X) \cdot X_{uv} \wedge \varphi\,,$$

y

$$\int_B Q(X) \cdot \varphi_u \wedge X_v = -\int_B H(X)X_u \cdot \varphi \wedge X_v -$$
$$- \int_B \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}X_{2u} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}X_{3u}, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}X_{1u} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}X_{3u}, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}X_{1u} +$$
$$+ \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}X_{2u}\Big) \cdot \varphi \wedge X_v - \int_B Q(X) \cdot \varphi \wedge X_{vu}\,;$$

y como en el Lema 2.2.1,

$$\Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}\varphi_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}\varphi_2\Big) \cdot X_u \wedge X_v -$$
$$\Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}X_{2u} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}X_{3u}, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}X_{1u} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}X_{3u}, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}X_{1u} + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}X_{2u}\Big) \cdot \varphi \wedge X_v -$$
$$\Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}X_{2v} + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}X_{3v}, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}X_{1v} + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}X_{3v}, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}X_{1v} + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}X_{2v}\Big) \cdot X_u \wedge \varphi \equiv 0\,.$$

Entonces, siempre para $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$, reemplazando en (3.2) deducimos que

$$dD_H(X)(\varphi) = \int_B [\nabla X \cdot \nabla \varphi + \frac{2}{3}(3H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi)]\,. \tag{3.3}$$

Por el Lema 3.1.2, que demostraremos a continuación, (3.3) sigue siendo válida para $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$, y si $dD_H(X)(\varphi) = 0$ tenemos que $\int_B (\nabla X \cdot \nabla\varphi + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi) = 0$. Por lo tanto, X resulta una solución débil de (Dir). □

LEMA 3.1.2. *Supongamos que $H \in C^1(\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}^3)$, $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$ y $\frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ para $i \neq j$, $i,j = 1,2,3$, entonces, si dada $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$, se verifica que*

$$
\begin{aligned}
&\frac{2}{3}\int_B (Q(X)\cdot X_u \wedge \varphi_v + Q(X)\cdot \varphi_u \wedge X_v + H(X)\varphi \cdot X_u \wedge X_v) + \frac{2}{3}\int_B \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}\varphi_2 + \\
&\quad + \frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}\varphi_3, \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}\varphi_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}\varphi_2\Big) \cdot X_u \wedge X_v = \\
&= 2\int_B H(X) X_u \wedge X_v \cdot \varphi \,,
\end{aligned}
$$

para todo $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$, la igualdad resulta válida para $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$.

Demostración. Sea $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$ y sea $(X_n) \subset H^2(B,\mathbf{R}^3)$ tal que $X_n \to X$ en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$. Sabemos que entonces existe una subsucesión de (X_n) que también llamaremos (X_n) tal que $X_n \to X$ pp en B. Pero entonces, por el teorema de Egorov, dado $\delta > 0$, existe un conjunto B_δ tal que $|B_\delta| < \delta$ y $X_n \to X$ uniformemente en $B \setminus B_\delta$, y por lo tanto, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que $|H(X_n) - H(X)| < \varepsilon$ y $|Q(X_n) - Q(X)| < \varepsilon$ en $B \setminus B_\delta$ si $n \geq n_0$.

Luego,

$$
\begin{aligned}
&\Big|\int_B (H(X_n)X_{n_u} \wedge X_{n_v} \cdot \varphi - H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi)\Big| \leq \int_B |H(X_n) - H(X)|\,|X_u \wedge X_v|\,|\varphi| + \\
&\quad + \int_B |H(X_n)|\,|X_{n_u} \wedge X_{n_v} - X_u \wedge X_v|\,|\varphi| \leq \int_{B\setminus B_\delta} |H(X_n) - H(X)|\,\frac{1}{2}|\nabla X|^2 \|\varphi\|_\infty + \\
&\quad + \int_{B_\delta} 2\|H\|_\infty \frac{1}{2}|\nabla X|^2 \|\varphi\|_\infty + \int_B \|H\|_\infty \|\varphi\|_\infty (|X_{n_u} \wedge (X_{n_v} - X_v)| + \\
&\quad + |(X_{n_u} - X_u)\wedge X_v|) \leq \varepsilon \|\varphi\|_\infty D(X) + \int_{B_\delta} \|H\|_\infty |\nabla X|^2 \|\varphi\|_\infty + \\
&\quad + \|H\|_\infty \|\varphi\|_\infty (\|X_{n_u}\|_2 \|X_{n_v} - X_v\|_2 + \|X_v\|_2 \|X_{n_u} - X_u\|_2)\,.
\end{aligned}
$$

Además,

$$
\begin{aligned}
&|\int_B (Q(X_n)\cdot X_{n_u}\wedge\varphi_v - Q(X)\cdot X_u\wedge\varphi_v)| \le \int_B |Q(X_n)-Q(X)|\,|X_u|\,|\varphi_v| +\\
&+\int_B |Q(X_n)|\,|X_{n_u}-X_v|\,|\varphi_v| \le \int_{B\setminus B_\delta} |Q(X_n)-Q(X)|\,|X_u|\,\|\varphi_v\|_\infty +\\
&+\int_{B_\delta} 2\|Q\|_\infty |X_u|\,\|\varphi_v\|_\infty + \int_B \|Q\|_\infty |X_{n_u}-X_v|\,\|\varphi_v\|_\infty \le\\
&\le \epsilon\|\varphi_v\|_\infty\|X_u\|_1 + \|Q\|_\infty\|\varphi_v\|_\infty 2\int_{B_\delta}|X_u| + \|Q\|_\infty\|\varphi_v\|_\infty\|X_{n_v}-X_v\|_1 \ ;
\end{aligned}
$$

y análogamente,

$$
\begin{aligned}
&|\int_B (Q(X_n)\cdot\varphi_u\wedge X_{n_v} - Q(X)\cdot\varphi_u\wedge X_v)| \le \epsilon\|\varphi_u\|_\infty\|X_v\|_1 +\\
&+\|Q\|_\infty\|\varphi_u\|_\infty 2\int_{B_\delta}|X_v| + \|Q\|_\infty\|\varphi_u\|\,\|X_{n_u}-X_u\|_1 \ .
\end{aligned}
$$

Por último, si $V(Y,\varphi) = \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial\xi_2}(Y)\varphi_2 + \frac{\partial Q_1}{\partial\xi_3}(Y)\varphi_3, \frac{\partial Q_2}{\partial\xi_1}(Y)\varphi_1 + \frac{\partial Q_2}{\partial\xi_3}(Y)\varphi_3, \frac{\partial Q_3}{\partial\xi_1}(Y)\varphi_1 + \frac{\partial Q_3}{\partial\xi_2}(Y)\varphi_2\Big)$, entonces

$$
\begin{aligned}
&|V(Y,\varphi)-V(Z,\varphi)| = \Big|\Big(\frac{\partial Q_1}{\partial\xi_2}(Y) - \frac{\partial Q_1}{\partial\xi_2}(Z)\Big)\varphi_2 +\\
&+\Big(\frac{\partial Q_1}{\partial\xi_3}(Y) - \frac{\partial Q_1}{\partial\xi_3}(Z)\Big)\varphi_3, \Big(\frac{\partial Q_2}{\partial\xi_1}(Y) - \frac{\partial Q_2}{\partial\xi_1}(Z)\Big)\varphi_1 +\\
&+\Big(\frac{\partial Q_2}{\partial\xi_3}(Y) - \frac{\partial Q_2}{\partial\xi_3}(Z)\Big)\varphi_3, \Big(\frac{\partial Q_3}{\partial\xi_1}(Y) - \frac{\partial Q_3}{\partial\xi_1}(Z)\Big)\varphi_1 + \Big(\frac{\partial Q_3}{\partial\xi_2}(Y) - \frac{\partial Q_3}{\partial\xi_2}(Z)\Big)\varphi_2\Big)\Big| ,
\end{aligned}
$$

y como las funciones $\frac{\partial Q_i}{\partial\xi_j} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ son continuas para $i,j = 1,2,3$, entonces dado $\epsilon > 0$, existe $n_0 \in \mathbf{N}$ tal que si $n \ge n_0$, $\Big|\frac{\partial Q_i}{\partial\xi_j}(X_n) - \frac{\partial Q_i}{\partial\xi_j}(X)\Big| < \epsilon$ en $B\setminus B_\delta$ para $i,j = 1,2,3$.

Luego, $|V(X_n,\varphi) - V(X,\varphi)| < (3\cdot 4\epsilon^2\|\varphi\|_\infty^2)^{1/2}$, pues, por ejemplo, $\Big(\Big(\frac{\partial Q_1}{\partial\xi_2}(X_n) - \frac{\partial Q_1}{\partial\xi_2}(X)\Big)\varphi_2 + \Big(\frac{\partial Q_1}{\partial\xi_3}(X_n) - \frac{\partial Q_1}{\partial\xi_3}(X)\Big)\varphi_3\Big)^2 \le 2(\epsilon^2\|\varphi_2\|_\infty^2 + \epsilon^2\|\varphi_3\|_\infty^2) \le 4\epsilon^2\|\varphi\|_\infty^2$ ya que $(a+b)^2 \le 2(a^2+b^2)$.

Ahora,

$$|\int_B (V(X_n,\varphi)\cdot X_{n_u}\wedge X_{n_v} - V(X,\varphi)\cdot X_u\wedge X_v)| \leq$$
$$\leq \int_B |V(X_n,\varphi) - V(X,\varphi)|\,|X_u\wedge X_v| + \int_B |V(X_n,\varphi)|\,|X_{n_u}\wedge X_{n_v} - X_u\wedge X_v| \, ,$$

y como además,

$$|V(Y,\varphi)| \leq \Big[2\Big(\Big\|\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}\Big\|_\infty^2 \|\varphi_2\|_\infty^2 + \Big\|\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_3}\Big\|_\infty^2 \|\varphi_3\|_\infty^2\Big) +$$
$$+ 2\Big(\Big\|\frac{\partial Q_2}{\partial \xi_1}\Big\|_\infty^2 \|\varphi_1\|_\infty^2 + \Big\|\frac{\partial Q_2}{\partial \xi_3}\Big\|_\infty^2 \|\varphi_3\|_\infty^2\Big) + 2\Big(\Big\|\frac{\partial Q_3}{\partial \xi_1}\Big\|_\infty^2 \|\varphi_1\|_\infty^2 + \Big\|\frac{\partial Q_3}{\partial \xi_2}\Big\|_\infty^2 \|\varphi_2\|_\infty^2\Big)\Big]^{1/2} \leq$$
$$\leq \|\varphi\|_\infty \Big(\sum_{\substack{1\leq i,j\leq 3\\ i\neq j}} 2\Big\|\frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j}\Big\|_\infty^2\Big)^{1/2} = \|\varphi\|_\infty c(H)\, ,$$

donde $c(H)$ es una constante positiva que sólo depende de H, tenemos que

$$\int_B |V(X_n,\varphi) - V(X,\varphi)|\,|X_u\wedge X_v| \leq \int_{B\setminus B_\delta} (3\cdot 4\varepsilon^2\|\varphi\|_\infty^2)^{1/2}|X_u\wedge X_v| +$$
$$+ \int_{B_\delta} 2\|\varphi\|_\infty c(H)|\,|X_u\wedge X_v| \leq \varepsilon\|\varphi\|_\infty\sqrt{12}D(X) + 2\|\varphi\|_\infty c(H)\int_{B_\delta}|X_u\wedge X_v|\, ,$$

y

$$\int_B |V(X_n,\varphi)|\,|X_{n_u}\wedge X_{n_v} - X_u\wedge X_v| \leq \int_B c(H)\|\varphi\|_\infty(|X_{n_u}\wedge(X_{n_v}-X_v)| +$$
$$+ |(X_{n_u}-X_u)\wedge X_v|) \leq c(H)\|\varphi\|_\infty(\|X_{n_u}\|_2\|X_{n_v}-X_v\|_2 + \|X_{n_u}-X_u\|_2\|X_v\|_2)\, .$$

Pero entonces, como

$$\frac{2}{3}\int_B (Q(X_n)\cdot X_{n_u}\wedge\varphi_v + Q(X_n)\cdot\varphi_u\wedge X_{n_v} + H(X_n)\varphi\cdot X_{n_u}\wedge X_{n_v}) +$$
$$+ \frac{2}{3}\int_B V(X_n,\varphi)\cdot X_{n_u}\wedge X_{n_v} = 2\int_B H(X_n)X_{n_u}\wedge X_{n_v}\cdot\varphi\, ,$$

deducimos que

$$\frac{2}{3}\int_B (Q(X)\cdot X_u\wedge\varphi_v + Q(X)\cdot\varphi_u\wedge X_v + H(X)\varphi\cdot X_u\wedge X_v) +$$
$$+ \frac{2}{3}\int_B V(X,\varphi)\cdot X_u\wedge X_v = 2\int_B H(X)X_u\wedge X_v\cdot\varphi\, ,$$

lo cual completa la demostración.

LEMA 3.1.3. *Sea* $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $H \in C^1(\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}^3)$ *y tal que si* Q *es el campo vectorial asociado a* H, $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$. *Entonces, si* M *es una subconjuunto no vacío de* $H^1(B, \mathbf{R}^3)$ *tal que* $\|Q(X)\|_{L^\infty(B,\mathbf{R}^3)} < 3/2$ *para todo* $X \in M$, D_H *es débilmente semicontinua inferiormente en* M. *Si además existe una constante positiva* c *tal que* $\|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)} \leq c$ *para todo* $X \in M$, *entonces* D_H *es coerciva en* M.

Demostración. Veamos que D_H es débilmente semicontinua inferiormente:

Si $(X_n) \subset M$ converge débilmente a $X \in M$ en $H^1(B, \mathbf{R}^3)$, (X_n) converge a X en $L^2(B, \mathbf{R}^3)$ y pp en B. Por el teorema de Egorov, dado $\delta > 0$, existe un subconjunto B_δ de B con $|B_\delta| < \delta$ tal que $X_n(u,v) \to X(u,v)$ uniformemente en $B \setminus B_\delta$.

Para $\varepsilon > 0$ fijo, tenemos que:

$$\int_{B\setminus B_\delta} |(Q(X_m) - Q(X)) \cdot X_{m_u} \wedge X_{m_v}| \leq \frac{1}{2}\|Q(X_m) - Q(X)\|_{L^\infty(B\setminus B_\delta,\mathbf{R}^3)} \int_{B\setminus B_\delta} |\nabla X_m|^2 \leq$$
$$\leq \|Q(X_m) - Q(X)\|_{L^\infty(B\setminus B_\delta,\mathbf{R}^3)} \sup D(X_m) < \varepsilon \text{ si } m \geq m_0 .$$

Por otro lado, a partir de (3.1) y recordando que $\|Q(Y)\|_{L^\infty(B,\mathbf{R}^3)} < 3/2$ para $Y \in M$, obtenemos que

$$\frac{1}{2}|\nabla X_m|^2 + \frac{2}{3}Q(X_m) \cdot X_{m_u} \wedge X_{m_v} \geq 0 \quad \text{pp en } B .$$

Luego,

$$D_H(X_m) \geq \int_{B\setminus B_\delta} \left(\frac{1}{2}|\nabla X_m|^2 + \frac{2}{3}Q(X_m) \cdot X_{m_u} \wedge X_{m_v}\right) \geq \tag{3.4}$$
$$\geq \int_{B\setminus B_\delta} \frac{1}{2}|\nabla X_m|^2 + \frac{2}{3}\int_{B\setminus B_\delta} (Q(X_m) - Q(X)) \cdot X_{m_u} \wedge X_{m_v} +$$
$$+ \frac{2}{3}\int_{B\setminus B_\delta} Q(X) \cdot X_{m_u} \wedge X_{m_v} \geq \int_{B\setminus B_\delta} \left(\frac{1}{2}|\nabla X_m|^2 + \frac{2}{3}Q(X) \cdot x_{m_u} \wedge X_{m_v}\right) - \varepsilon$$

para $m \geq m_0$, pero la forma bilineal en $H^1(B, \mathbf{R}^3)$ definida por

$$a(Y_1, Y_2) = \int_{B\setminus B_\delta} \left[\frac{1}{2}\nabla Y_1 \cdot \nabla Y_2 + \frac{1}{3}Q(X) \cdot (Y_{1u} \wedge Y_{2v} + Y_{2u} \wedge Y_{1v})\right]$$

es simétrica y continua, y

$$a(Y, Y) = \int_{B\setminus B_\delta} \left(\frac{1}{2}|\nabla Y|^2 + \frac{2}{3}Q(X) \cdot Y_u \wedge Y_v\right) \geq$$
$$\geq \int_{B\setminus B_\delta} \left(\frac{1}{2}|\nabla Y|^2 - \frac{2}{3}\|Q(X)\|_{L^\infty(\partial B,\mathbf{R}^3)} \frac{1}{2}|\nabla Y|^2\right) \geq 0 .$$

Luego, $E(Y) = a(Y,Y)$ es convexa y continua, por lo tanto, semicontinua inferiormente. Finalmente, eligiendo δ suficientemente pequeño, a partir de (3.4) se obtiene que

$$\liminf_{m\to\infty} D_H(X_m) \geq D_H(X) - 2\varepsilon \ ,$$

o sea, D_H es débilmente semicontinua inferiormente en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$.

Si $\|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)} \leq c$, por la desigualdad de Sobolev válida para $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$, tenemos que

$$\|X\|_2^2 \leq k(\|\nabla X\|_2^2 + \|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}^2) \leq 2k\, D(X) + kc^2 \ ,$$

y por lo tanto $\|X\|_{H^1}$ tiende a infinito si y sólo si $D(X)$ tiende a infinito. Pero por otro lado,

$$\begin{aligned} D_H(X) &\geq D(X) - \frac{2}{3}\int_B |Q(X)\cdot X_u \wedge X_v| \geq D(X) - \frac{2}{3}\|Q(X)\|_{L^\infty(B,\mathbf{R}^3)} D(X) = \\ &= \Big(1 - \frac{2}{3}\|Q(X)\|_{L^\infty(B,\mathbf{R}^3)}\Big) D(X) \end{aligned}$$

y como $\|Q(X)\|_{L^\infty(B,\mathbf{R}^3)} < {}^3/2$, puede deducirse que D_H es coerciva en M. □

Observación. Si $\|Q\|_\infty < {}^3/2$, D_H resulta débilmente semicontinua inferiormente en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$ y si M es un subconjunto de $H^1(B,\mathbf{R}^3)$ tal que existe $c > 0$ con $\|X\|_{L^\infty(\partial B,\mathbf{R}^3)} \leq c$ para todo $X \in M$, entonces D_H es coerciva en M.

Lema 3.1.4. *Sea $dV : T \times C_0^1(B,\mathbf{R}^3) \to \mathbf{R}$ definida por $dV(X)(\varphi) = 3\int_B H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi$. Si $H(X) \in L^\infty(B)$ y $X_u \wedge X_v \in L^\infty(B,\mathbf{R}^3)$, entonces $dV(X)$ puede extenderse en forma continua a $H_0^1(B,\mathbf{R}^3)$. Por lo tanto, $dD_H(X) \in (H_0^1(B,\mathbf{R}^3))^*$.*

Demostración.

$$\begin{aligned} |dV(X)(\varphi)| &\leq 3\int_B |H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi| \leq 3\|H(X)\|_\infty \|X_u \wedge X_v\|_\infty \int_B |\varphi| \leq \\ &\leq 3|B|^{1/2}\|H(X)\|_\infty \|X_u \wedge X_v\|_\infty \|\varphi\|_2 \leq \\ &\leq 3|B|^{1/2}\frac{1}{\lambda_1}\|H(X)\|_\infty \|X_u \wedge X_v\|_\infty \|\varphi\|_{H_0^1} \ , \end{aligned}$$

donde $\lambda_1 > 0$ es el primer autovalor de $-\Delta$ en $H_0^1(B,\mathbf{R}^3)$. □

A continuación damos un ejemplo de una función H que satisface las hipótesis del Teorema 3.1.1. Sea

$$H(\xi) = \begin{cases} H_0 & \text{si } \xi_i \in (a_i, b_i) \\ 0 & \text{si } \xi_i \notin (a_i - \varepsilon, b_i + \varepsilon) \end{cases}$$

donde $H_0, \varepsilon, a_i, b_i$, $i = 1,2,3$, son números positivos tales que $0 < a_i - \varepsilon$, $a_i < b_i$.

Además suponemos que $H \in C^1(\mathbf{R}^3)$ y que $\|H\|_\infty = H_0$. Entonces, como $Q(X) = \Big(\int_0^{X_1} H(s, X_2, X_3)ds, \int_0^{X_2} H(X_1, s, X_3)ds, \int_0^{X_3} H(X_1, X_2, s)ds\Big)$ tendremos que $|Q(X)| \leq \Big(\sum_{i=1}^{3}\Big(\int_0^{b_i+\varepsilon} H_0\Big)^2\Big)^{1/2} = H_0[(b_1+\varepsilon)^2 + (b_2+\varepsilon)^2 + (b_3+\varepsilon)^2]^{1/2}$, o sea que la condición $\|Q(X)\|_\infty < 3/2$ se traduce en $H_0\Big(\sum_{i=1}^{3}(b_i+\varepsilon)^2\Big)^{1/2} < 3/2$. Además, $\dfrac{\partial Q_i}{\partial \xi_j}(X) \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$ para $i \neq j$, pues $\dfrac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}(X) = \displaystyle\int_0^{X_1} \frac{\partial H}{\partial \xi_2}(s, X_2, X_3)ds$ y como $\dfrac{\partial H}{\partial \xi_i}$ son continuas y se anulan fuera del cubo $(a_1-\varepsilon, b_1+\varepsilon) \times (a_2-\varepsilon, b_2+\varepsilon) \times (a_3-\varepsilon, b_3+\varepsilon)$ resultan acotadas, por lo tanto existe $c > 0$ tal que $\Big|\dfrac{\partial H}{\partial \xi_i}(X)\Big| \leq c$ pp en B, $i = 1,2,3$ y entonces

$$\Big|\frac{\partial Q_1}{\partial \xi_2}\Big| \leq \int_0^{X_1} \Big|\frac{\partial H}{\partial \xi_2}(s, X_2, X_3)\Big| ds \leq \int_0^{b_1+\varepsilon} c\, ds = (b_1+\varepsilon)c\,.$$

COMENTARIO. En este ejemplo puede elegirse H_0 arbitrario con tal que $H_0\Big(\sum_{i=1}^{3}(b_i+\varepsilon)^2\Big)^{1/2} < 3/2$ y por otro lado, no se ha hecho ninguna hipótesis sobre $\|g\|_\infty$. Por lo tanto, no es necesaria la hipótesis $\|H\|_\infty\|g\|_\infty \leq 1$, mientras que en el caso H constante, este es aún un problema abierto ([St1], Remark p. 104).

3.2. Soluciones débiles de (Dir) vía el Lema del Paso de la Montaña.

En esta sección estudiaremos la posibilidad de hallar otras soluciones débiles de (Dir) en T, teniendo en cuenta los resultados conocidos para el caso $H = H_0 \in \mathbf{R}$ ([B-C], [St1], [St2]).

En lo que sigue consideraremos un dato de contorno $g \in W^{1,\infty}(B, \mathbf{R}^3)$. Asimismo, para $k > 0$ en $\mathbf{R}$, denotaremos

$$M(k) = \{X \in T; \|\nabla(X-g)\|_\infty < k\} \quad \text{y}$$
$$\overline{M(k)} = \{X \in T; \|\nabla(X-g)\|_\infty \leq k\}\,,$$

$M(k)$ es no vacío (ya que $g \in M(k)$) y convexo, mientras que $\overline{M(k)}$ es no vacío, convexo, y cerrado en T. Además, $\overline{M(k)}$ coincide con la clausura de $M(k)$ en T, ya que dado

$X \in \mathring{M}(k)$, tenemos que $X - {}^1/_n(X - g)$ $(n \in \mathbf{N})$ es una sucesión en $M(k)$, pues $\|\nabla(X - {}^1/_n(X-g)) - g\|_\infty = (1 - {}^1/_n)\|\nabla(X-g)\|_\infty \leq (1 - {}^1/_n)k < k$, y $X - {}^1/_n(X-g)$ converge a X en $H^1(B, \mathbf{R}^3)$, pues $\|X - {}^1/_n(X-g) - X\|_{H^1} = {}^1/_n\|X-g\|_{H^1} \to 0$. Por último, $M(k) = \bigcup_{n \in \mathbf{N}, n > 1/k} \overline{M(k - {}^1/_n)}$ y por lo tanto $M(k)$ es un F_σ.

Se define el declive de D_H en $\overline{M(k)}$ por

$$\rho(X) = \sup\{dD_H(X)(X - Y); Y \in \overline{M(k)}\}$$

para $X \in \overline{M(k)}$. Notamos que si X es una solución débil de (Dir), necesariamente debe verificarse que $\rho(X) = 0$. Finalmente, para $\beta \in \mathbf{R}$ definimos

$$M_\beta = \{X \in \overline{M(k)}; D_H(X) < \beta\} \quad \text{y}$$
$$K_\beta = \{X \in \overline{M(k)}; D_H(X) = \beta, \rho(X) = 0\}\ .$$

El siguiente resultado es una variante del Lema del Paso de la Montaña [A-R], [St1].

TEOREMA 3.2.1. *Supongamos que $H \in L^\infty(\mathbf{R}^3) \cap C(\mathbf{R}^3)$ y que $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$. Sea X_0 un mínimo local de D_H en T, y sea $X_1 \in T$ tal que $D_H(X_1) < D_H(X_0)$. Si existe $k \in \mathbf{R}$ tal que $X_0, X_1 \in \overline{M(k)}$, entonces*

$$\beta = \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{t \in [0,1]} D_H(\gamma(t))$$

donde $\Gamma = \{\gamma : [0,1] \to \overline{M(k)};\ \gamma$ continua; $\gamma(0) = X_0,\ \gamma(1) = X_1\}$, se alcanza en $\overline{M(k)}$, o sea, existe $X \in \overline{M(k)}$ tal que $D_H(X) = \beta$, y además, X satisface $\rho(X) = 0$.

OBSERVACIÓN. De la demostración del Teorema 3.2.1 surge que X no es un mínimo local. Diremos que X es un *punto crítico inestable de D_H*.

COROLARIO 3.2.1. *Si X_0 y X_1 están en algún conjunto $\overline{M(k)}$ y los dos son mínimos locales de D_H en T, con $D_H(X_0) \neq D_H(X_1)$, entonces existe un punto crítico de D_H que es inestable en $\overline{M(k)}$.*

COROLARIO 3.2.2. *Si no hay puntos críticos de D_H que sean inestables en $\overline{M(k)}$, entonces el conjunto de mínimos locales de D_H en $\overline{M(k)}$ es conexo, y D_H es constante en dicho conjunto.*

COROLARIO 3.2.3. *Si $g = 0$ y $H(-\xi) = -H(\xi)$ para todo $\xi \in \mathbf{R}^3$, entonces para cada $k > 0$, existe un número par de puntos con declive nulo no triviales. En particular, si* *existen $X_0, X_1 \in \overline{M(k)}$ para algún $k > 0$ tales que X_0 es un mínimo local de D_H en T y $D_H(X_1) < D_H(X_0)$ existe un número par de puntos no triviales de declive nulo en $\overline{M(k)}$, que no son mínimos locales de D_H en T.*

OBSERVACIÓN. Si $H(X) = -H(-X)$ y $g \neq 0$, la ecuación $\Delta X = 2H(X)X_u \wedge X_v$ tiene un número par de soluciones en B, ya que si $\overline{X}$ es una solución, $-\overline{X}$ también lo es.

Para la demostración del Teorema 3.2.1 y de los Corolarios 3.2.1 y 3.2.2 necesitamos una serie de resultados previos que se darán luego, ahora comenzamos con la demostración del Corolario 3.2.3.

DEMOSTRACIÓN DEL COROLARIO 3.2.3. Dados $X, Y \in \overline{M(k)}$,

$$dD_H(X)(X-Y) = \int_B \nabla X \cdot \nabla(X-Y) + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot (X-Y) \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned} dD_H(-X)(-X-Y) &= \int_B \nabla X \cdot \nabla(X+Y) + 2H(-X)X_u \wedge X_v \cdot (-X-Y) = \\ &= \int_B \nabla X \cdot \nabla(X+Y) + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot (X+Y)\,. \end{aligned}$$

Luego, $dD_H(-X)(-X-Y) = dD_H(X)(X+Y)$ y como $g = 0$, $Y \in \overline{M(k)}$ si y sólo si $-Y \in \overline{M(k)}$, entonces

$$\begin{aligned} \rho(X) &= \sup_{Y \in \overline{M(k)}} dD_H(X)(X-Y) = \sup_{Y \in \overline{M(k)}} dD_H(X)(X+Y) = \\ &= \sup_{Y \in \overline{M(k)}} dD_H(-X)(-X-Y) = \rho(-X)\,. \qquad \square \end{aligned}$$

Con los siguientes resultados damos condiciones suficientes para que un punto de declive nulo en $\overline{M(k)}$ sea una solución débil de (Dir).

TEOREMA 3.2.2. *Sea $X \in \overline{M(k)}$ tal que $\rho(X) = 0$. Si una de las condiciones*

i) $X \in M(k)$

ii) $\|H(X)X\|_\infty < \dfrac{k(\pi k - \|\nabla g\|_1)}{\pi(k + \|\nabla g\|_\infty)^2} - \|H\|_\infty \|g\|_\infty$ *y* $|\nabla(X-g)| = k$ *pp en* B

iii) $|H(X)(X-g)| \leq 1$ *pp en* B *y* $\int_B \nabla X \cdot \nabla g \leq 0$

se satisface, entonces X es una solución débil de (Dir).

Demostración. Dado $Y \in \overline{M(k)}$, $dD_H(X)(X - Y) \leq \rho(X) = 0$. Luego, $dD_H(X)(X) \leq dD_H(X)(Y)$ para todo $Y \in \overline{M(k)}$. En particular,

$$dD_H(X)(X - g) \leq dD_H(X)(Y - g)\,. \tag{3.4}$$

Supongamos ahora que $X \in M(k)$. Como $\|\nabla(X - g)\|_\infty < k$, dada $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$, para ε suficientemente pequeño tenemos que $Y = X \pm \varepsilon\varphi \in \overline{M(k)}$.

Luego, $dD_H(X)(X - (X \pm \varepsilon\varphi)) = dD_H(X)(\mp\varepsilon\varphi) \leq \rho(X) = 0$. Por lo tanto, $\mp dD_H(X)(\varphi) \leq 0$ y se sigue que $dD_H(X)(\varphi) = 0$, de donde X resulta una solución débil de (Dir).

De (3.4) deducimos que para $Y = g + \varphi$, con $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$ tal que $\|\nabla\varphi\|_\infty \leq k$,

$$dD_H(X)(X - g) \leq \pm dD_H(X)(\varphi)$$

de donde $dD_H(X)(\varphi) = 0$ para $\varphi \in H_0^1(B, \mathbf{R}^3)$ con lo cual X resulta una solución débil de (Dir), o bien $dD_H(X)(X - g) < 0$.

Sea $c = \|\nabla g\|_\infty + k$, entonces $|\nabla X| \leq c$ pp en B.

Si ahora suponemos que se verifica ii), tendremos que $|\nabla(X - g)| = k$ pp en B, y entonces, si suponemos que X no es una solución débil de (Dir),

$$\begin{aligned}
0 > dD_H(X)(X - g) &= \int_B \nabla X \cdot \nabla(X - g) + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot (X - g) = \\
&= \int_B |\nabla(X - g)|^2 + \int_B \nabla g \cdot \nabla(X - g) + \int_B 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot (X - g) \geq \\
&\geq \pi k^2 - \|\nabla g\|_1 k - \int_B \|H(X)X\|_\infty |\nabla X|^2 - \int_B \|H\|_\infty \|g\|_\infty |\nabla X|^2 \geq \\
&\geq \pi k^2 - \|\nabla g\|_1 k - \pi\|H(X)X\|_\infty c^2 - \pi\|H\|_\infty\|g\|_\infty c^2 = \\
&= \pi k^2 - \|\nabla g\|_1 k - \pi\|H(X)X\|_\infty (k + \|\nabla g\|_\infty)^2 - \pi\|H\|_\infty\|g\|_\infty (k + \|\nabla g\|_\infty)^2\,.
\end{aligned}$$

Pero esta última desigualdad es equivalente a

$$\|H(X)X\|_\infty > \frac{\pi k^2 - \|\nabla g\|_1 k}{\pi(k + \|\nabla g\|_\infty)^2} - \|H\|_\infty \|g\|_\infty\,,$$

lo cual resulta una contradicción. Luego $dD_H(X)(X - g) = dD_H(X)(\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in H_0^1(B, \mathbf{R}^3)$.

Finalmente, si $\|H(X)(X - g)\|_\infty \leq 1$ y $\int_B \nabla X \cdot \nabla g \leq 0$, y suponemos que X no es una solución débil de (Dir), tenemos que

$$\begin{aligned}0 > dD_H(X)(X-g) &= \int_B \nabla X \cdot \nabla(X-g) + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot (X-g) \geq \\ &\geq \int_B |\nabla X|^2 - \int_B 2|H(X)(X-g)|\,|X_u \wedge X_v| - \int_B \nabla X \cdot \nabla g \geq \\ &\geq \int_B |\nabla X|^2 - 2|X_u \wedge X_v| - \int_B \nabla X \cdot \nabla g \geq 0\,,\end{aligned}$$

lo cual resulta una contradicción. □

TEOREMA 3.2.3. *Sea $g \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$ armónica en B. Si M es un subconjunto convexo y no vacío de T que verifica*

i) *Para algún número $\delta > 0$, $g + \varphi \in M$ para todo $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$ con $\|\nabla\varphi\|_\infty \leq \delta$*

ii) $c = \sup_{X \in M} \|\nabla X\|_\infty < +\infty$

y suponemos que $H \in C^1(\mathbf{R}^3) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ satisface $c^2|H(\xi)| \leq \lambda_1^2(|\xi| - \|g\|_\infty)_+$, con λ_1 el primer autovalor de $-\Delta$ en $H_0^1(B)$. Entonces, todo $X \in M$ tal que $\rho(X) = 0$ es una solución débil de (Dir).

Demostración. Para $Y = g + \varphi$, con $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$, $\|\nabla\varphi\|_\infty < \delta$, tenemos que $dD_H(X)(X-g) \leq dD_H(X)(\varphi)$ y se deduce que $dD_H(X)(X-g) = dD_H(X)(\varphi) = 0$ y X es una solución débil de (Dir) o $dD_H(X)(X-g) < 0$.

Veamos que el segundo caso no es posible.

Para esto, comenzamos por notar que $|H(X)| \leq \dfrac{\lambda_1^2}{c^2}|X-g|$ pp en B,

$$\begin{aligned}|H(X)| &\leq \max\{0, \frac{\lambda_1^2}{c^2}(|X| - \|g\|_\infty)\} \leq \\ &\leq \max\{0, \frac{\lambda_1^2}{c^2}(|X| - |g|)\} \leq \\ &\leq \max\{0, \frac{\lambda_1^2}{c^2}|X-g|\} = \frac{\lambda_1^2}{c^2}|X-g|\,,\end{aligned}$$

pp en B. Entonces,

$$\begin{aligned}\int_B 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot (X-g) &\geq -\int_B 2|X_u \wedge X_v|\frac{\lambda_1^2}{c^2}|X-g|^2 \geq \\ &\geq -\int_B \frac{|\nabla X|^2}{c^2}\lambda_1^2|X-g|^2 \geq -\lambda_1^2\|X-g\|_2^2 \geq -\|\nabla(X-g)\|_2^2\end{aligned}$$

$$\text{y} \int_B \nabla g \cdot \nabla(X-g) = \int_B -\Delta g \cdot (X-g) = 0\,.$$

Finalmente,

$$dD_H(X)(X-g)=\int_B|\nabla X\cdot\nabla(X-g)+2H(X)X_u\wedge X_v\cdot(X-g)|=$$
$$=\int_B|\nabla(X-g)|^2+\int_B\nabla g\cdot\nabla(X-g)+\int_B 2H(X)X_u\wedge X_v\cdot(X-g)\geq$$
$$\geq\|\nabla(X-g)\|_2^2-\|\nabla(X-g)\|_2^2=0\,.\qquad\square$$

TEOREMA 3.2.4. *Sean $g\in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3)$ armónica, $H\in C^1(\mathbf{R}^3)\cap W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ y λ_1 el primer autovalor de $-\Delta$ en $H_0^1(B)$, entonces*

a) *Si existen tres números positivos H_0, k y $c>\|\nabla g\|_\infty$ tales que*

$$|H(\xi)|\leq k\Big(|\xi|-\|g\|_\infty-\sqrt{H_0}\frac{c}{\lambda_1}\Big)_+\quad y\quad |H(\xi)|\leq H_0$$

para todo $\xi\in\mathbf{R}^3$, y $M\subset T$ es un convexo tal que $\|\nabla X\|_\infty\leq c$ para todo $X\in M$, existe un número $\delta>0$ tal que $g+\varphi\in M$ para toda $\varphi\in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ con $\|\nabla\varphi\|_\infty<\delta$, y $\|X-g\|_\infty\leq 1$ para todo $X\in M$, entonces todo punto $X\in M$ de declive nulo es una solución débil de (Dir).

b) *Si existen tres números positivos H_0, k y $c>\|\nabla g\|_\infty$ tales que*

$$|H(\xi)|\leq k\Big(|\xi|-\|g\|_\infty-H_0\frac{c^2}{\lambda_1^2}\Big)_+\quad y\quad |H(\xi)|\leq H_0$$

para todo $\xi\in\mathbf{R}^3$, y $M\subset T$ es un convexo tal que $\|\nabla X\|_\infty\leq c$ para todo $X\in M$ y existe un número $\delta>0$ tal que $g+\varphi\in M$ para toda $\varphi\in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ con $\|\nabla\varphi\|_\infty<\delta$, entonces todo punto $X\in M$ de declive nulo es una solución débil de (Dir).

Demostración. a) Sea $X\in M$ tal que $\rho(X)=0$, entonces $dD_H(X)(X-Y)\leq 0$ para todo $Y\in M$, luego si $Y=g+\varphi$ con $\varphi\in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$, $\|\nabla\varphi\|_\infty<\delta$, tendremos que $dD_H(X)(X-g)\leq\pm dD_H(X)(\varphi)$ y por lo tanto, $dD_H(X)(X-g)<0$, o bien, $dD_H(X)(X-g)=dD_H(X)(\varphi)=0$ para toda $\varphi\in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ y X es entonces una solución débil de (Dir). Luego, basta ver que el primer caso no es posible.

Para esto notamos que si B_1 es el subconjunto de B en el cual $H(X)$ no se anula, entonces $|X|-\|g\|_\infty-\sqrt{H_0}\frac{c}{\lambda_1}\geq 0$ pp en B_1 y por lo tanto, $|X-g|-\sqrt{H_0}\frac{c}{\lambda_1}\geq 0$ pp en B_1. Luego,

$$dD_H(X)(X-g)=\int_B\nabla X\cdot\nabla(X-g)+2H(X)X_u\wedge X_v\cdot(X-g)=$$
$$=\int_B|\nabla(X-g)|^2+\int_{B_1}2H(X)X_u\wedge X_v\cdot(X-g)\geq$$
$$\geq\lambda_1^2\int_B|X-g|^2-\int_{B_1}H_0c^2|X-g|\geq\int_{B_1}\lambda_1^2|X-g|^2-H_0c^2\geq 0$$

pues $|X - g| \geq \sqrt{H_0}\dfrac{c}{\lambda_1}$ pp en B_1.

b) Como en a), basta probar que $dD_H(X)(X-g) \geq 0$, pero

$$
\begin{aligned}
dD_H(X)(X-g) &= \int_B \nabla X \cdot \nabla(X-g) + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot (X-g) = \\
&\int_B |\nabla(X-g)|^2 + \int_{B_1} 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot (X-g) \geq \\
&> \int_B \lambda_1^2 |X-g|^2 - \int_{B_1} H_0 c^2 |X-g| \geq \int_{B_1} (\lambda_1^2|X-g| - H_0 c^2)|X-g| > 0\,,
\end{aligned}
$$

ya que como en a), si B_1 es el subconjunto de B en el cual $H(X) \neq 0$, entonces $|X| - \|g\|_\infty - \dfrac{c^2 H_0}{\lambda_1^2} \geq 0$ pp en B, de donde $|X-g| - \dfrac{c^2 H_0}{\lambda_1^2} \geq 0$ pp en B. □

En el siguiente teorema se estudian las condiciones bajo las cuales existen dos o más soluciones débiles de (Dir).

TEOREMA 3.2.5. *Sean $g \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3)$ armónica y $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ cualquier función que verifica las siguientes condiciones:*

i) *$H \in C^1(\mathbf{R}^3) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ y el campo vectorial Q asociado a H satisface $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$.*

ii) *Existen dos números positivos t, k tales que $|H(\xi)| \leq k(|\xi| - \|g\|_\infty - t)_+$.*

Entonces,

a) *g es un mínimo local de D_H en T y por lo tanto, es una solución débil de* (Dir).

b) *Si $\|Q\|_\infty < 3/2$ y existe $X_1 \in T$ tal que $D_H(X_1) < D_H(g)$ entonces hay por lo menos dos soluciones débiles de* (Dir).

c) *Si $|\nabla X_1| \in L^\infty(B)$, $\overline{c} = \|\nabla(X_1 - g)\|_\infty + \|\nabla g\|_\infty$ y $k < \dfrac{\lambda_1^2}{\overline{c}^2}$, con λ_1 el primer autovalor de $-\Delta$ en $H_0^1(B)$, entonces existen al menos dos soluciones débiles de* (Dir).

d) *En las condiciones de c), si $\|Q\|_\infty < 3/2$, entonces existen por lo menos tres soluciones débiles de* (Dir).

Demostración. a) Sea $X \in T$, entonces tenemos que

$$
\begin{aligned}
|H(X)| &\leq \max\{0, k(|X| - \|g\|_\infty - t)\} \leq \max\{0, k(|X| - \|g\|_\infty)\} \leq \\
&\leq \max\{0, k(|X| - |g|)\} \leq \max\{0, k|X-g|\} = k|X-g|\,,
\end{aligned}
$$

pp en B. Luego, $H(g) = 0$ en B y entonces,

$$
dD_H(g)(\varphi) = \int \nabla g \cdot \nabla \varphi + 2H(g) g_u \wedge g_v \cdot \varphi = -\int_B \Delta g \cdot \varphi = 0
$$

para toda $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$ con lo cual g resulta una solución débil de (Dir). Además, como $|H(X)| \leq \max\{0, k(|X-g|-t)\}$ pp en B, $\dfrac{\partial H}{\partial \xi_j}(g) = 0$ $j = 1,2,3$ en B ya que H se anula en un entorno de cada punto $g(u,v)$ de $\mathbf{R}^3$.

Luego, por el Lema 3.2.1, que demostraremos a continuación, $d^2 D_H(g)(\varphi,\varphi) = d^2 D(g)(\varphi,\varphi)$ para toda $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$, y g resulta un mínimo local de D_H en T.

b) Como $\|Q\|_\infty < 3/2$, por el Teorema 3.1.1, sabemos que existe un mínimo absoluto X_2 de D_H en T, y a partir de $D_H(X_1) < D_H(g)$, se deduce que $g \neq X_2$. Luego, X_2 y g son dos soluciones débiles de (Dir).

c) $\bar{c} = \|\nabla(X_1 - g)\|_\infty + \|\nabla g\|_\infty$ y $k < \dfrac{\lambda_1^2}{\bar{c}^2}$, luego, $k = \dfrac{\lambda_1^2}{c^2}$ con $c > \bar{c}$, y si $M = \{X \in T; \|\nabla(X-g)\|_\infty \leq c - \|\nabla g\|_\infty\}$ tenemos que $g \in M$, $X_1 \in M$ pues $\|\nabla(X_1 - g)\|_\infty = \bar{c} - \|\nabla g\|_\infty < c - \|\nabla g\|_\infty$ y para todo $X \in M$, $\|\nabla X\|_\infty \leq \|\nabla(X-g)\|_\infty + \|\nabla g\|_\infty \leq c$. Luego, por el Teorema 3.2.1 existe un punto crítico inestable X_3 de D_H en M y por el Teorema 3.2.3, X_3 es una solución débil de (Dir).

d) Si estamos en las condiciones de c) y además $\|Q\|_\infty < 3/2$, tenemos que existen un punto crítico inestable X_3 y un mínimo absoluto X_2 en T. Luego, g, X_2 y X_3 son tres soluciones débiles de (Dir). $\square$

A continuación demostramos el Lema 3.2.1 que hemos utilizado en la demostración de este último teorema, y una serie de lemas técnicos necesarios para la demostración del Teorema 3.2.1.

LEMA 3.2.1. *Sean $g \in H^1(B, \mathbf{R}^3)$, $H \in C^1(\mathbf{R}^3) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ y $X_0 \in T$ tal que $H(X_0) = 0$ y $\dfrac{\partial H}{\partial \xi_i}(X_0) = 0$, $i = 1,2,3$ pp en B. Entonces $d^2 D_H(X)(\varphi,\psi) = d^2 D(X)(\varphi,\psi)$ para $\varphi,\psi \in C_0^\infty(B, \mathbf{R}^3)$.*

Demostración. Para $X \in T$, $\varphi,\psi \in C_0^\infty(B, \mathbf{R}^3)$, calculemos $d^2 D_H(X)(\varphi,\psi)$:

$$d^2 D_H(X_0)(\varphi,\psi) = d^2 D(X)(\varphi,\psi) + 2\, d^2 V(X)(\varphi,\psi) ,$$

donde $D(X) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_B |\nabla X|^2$ y $V(X) = \dfrac{1}{3}\displaystyle\int_B Q(X) \cdot X_u \wedge X_v$.

$$\begin{aligned} d^2 D(X)(\varphi,\psi) &= \frac{d}{d\varepsilon}(dD(X+\varepsilon\psi)(\varphi))\big|_{\varepsilon=0} = \\ &= \frac{d}{d\varepsilon}\int_B \nabla(X+\varepsilon\psi)\cdot\nabla\varphi\big|_{\varepsilon=0} = \int_B \nabla\psi\cdot\nabla\varphi \end{aligned}$$

y

$$
\begin{aligned}
(3.5) \qquad d^2V(X)(\varphi,\psi) &= \frac{d}{d\varepsilon}(dV(X+\varepsilon\psi)(\varphi))\big|_{\varepsilon=0} = \\
&= \frac{d}{d\varepsilon}\Big(\int_B H(X+\varepsilon\psi)(X+\varepsilon\psi)_u \wedge (X+\varepsilon\psi)_v \cdot \varphi\Big)\Big|_{\varepsilon=0} = \\
&= \int_B \Big(\frac{d}{d\varepsilon}H(X+\varepsilon\psi)\big|_{\varepsilon=0}\Big)X_u \wedge X_v \cdot \varphi + \\
&+ \int_B H(X)\psi_u \wedge X_v \cdot \varphi + \int_B H(X)X_u \wedge \psi_v \cdot \varphi = \\
&= \int_B \Big(\frac{\partial H}{\partial \xi_1}(X)\psi_1 + \frac{\partial H}{\partial \xi_2}(X)\psi_2 + \frac{\partial H}{\partial \xi_3}(X)\psi_3\Big)X_u \wedge X_v \cdot \varphi + \\
&+ \int_B H(X)\psi_u \wedge X_v \cdot \varphi + \int_B H(X)X_u \wedge \psi_v \cdot \varphi \,;
\end{aligned}
$$

y como φ se anula en ∂B, entonces integrando por partes obtenemos que:

$$
\begin{aligned}
&\int_B H(X)\psi_u \wedge X_v \cdot \varphi = -\int_B H(X)\psi_u \wedge \varphi \cdot X_v = \\
&\quad \int_B \Big(\frac{\partial}{\partial v}H(X)\Big)\psi_u \wedge \varphi \cdot X + \int_B H(X)\psi_{uv} \wedge \varphi \cdot X + \int_B H(X)\psi_u \wedge \varphi_v \cdot X \,.
\end{aligned}
$$

Análogamente,

$$
\begin{aligned}
&\int_B H(X)X_u \wedge \psi_v \cdot \varphi = -\int_B \Big(\frac{\partial}{\partial u}H(X)\Big)\psi_v \wedge \varphi \cdot X - \\
&\quad \int_B H(X)\psi_{vu} \wedge \varphi \cdot X - \int_B H(X)\psi_v \wedge \varphi_u \cdot X = \\
&= \int_B \Big(\frac{\partial}{\partial u}H(X)\Big)\varphi \wedge \psi_v \cdot X - \int_B H(X)\psi_{vu} \wedge \varphi \cdot X + \int_B H(X)\varphi_u \wedge \psi_v \cdot X \,.
\end{aligned}
$$

Luego, a partir de (3.5) podemos deducir que

$$(3.6)\quad d^2V(X)(\varphi,\psi)=\int_B\Big(\frac{\partial H}{\partial\xi_1}(X)\psi_1+\frac{\partial H}{\partial\xi_2}(X)\psi_2+\frac{\partial H}{\partial\xi_3}(X)\psi_3\Big)X_u\wedge X_v\cdot\varphi+$$
$$+\int_B\Big(\frac{\partial}{\partial v}H(X)\Big)\psi_u\wedge\varphi\cdot X+\int_B\Big(\frac{\partial}{\partial u}H(X)\Big)\varphi\wedge\psi_v\cdot X+$$
$$+\int_B H(X)(\psi_u\wedge\varphi_v+\varphi_u\wedge\psi_v)\cdot X=$$
$$=\int_B\Big(\frac{\partial H}{\partial\xi_1}(X)\psi_1+\frac{\partial H}{\partial\xi_2}(X)\psi_2+\frac{\partial H}{\partial\xi_3}(X)\psi_3\Big)X_u\wedge X_v\cdot\varphi+$$
$$+\int_B\Big(\frac{\partial H}{\partial\xi_1}(X)X_{1v}+\frac{\partial H}{\partial\xi_2}(X)X_{2v}+\frac{\partial H}{\partial\xi_3}(X)X_{3v}\Big)\psi_u\wedge\varphi\cdot X+$$
$$+\int_B\Big(\frac{\partial H}{\partial\xi_1}(X)X_{1u}+\frac{\partial H}{\partial\xi_2}(X)X_{2u}+\frac{\partial H}{\partial\xi_3}(X)X_{3u}\Big)\varphi\wedge\psi_v\cdot X+$$
$$+\int_B H(X)(\psi_u\wedge\varphi_v+\varphi_u\wedge\psi_v)\cdot X\ ;$$

y como $H(X_0)=0$ y $\dfrac{\partial H}{\partial\xi_i}(X_0)=0$, $i=1,2,3$ pp en B, por hipótesis, a partir de (3.6) podemos concluir que $d^2V(X_0)(\varphi,\psi)=0$ para $\varphi,\psi\in C_0^\infty(B,\mathbf{R}^3)$. Luego,

$$d^2D_H(X_0)(\varphi,\psi)=d^2D(X_0)(\varphi,\psi)=\int_B\nabla\varphi\cdot\nabla\psi\ . \qquad \square$$

LEMA 3.2.2. *Si* $H\in L^\infty(\mathbf{R}^3)\cap C(\mathbf{R}^3)$ *y* $Q\in L^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)$, D_H *es* C^1 *en* $\overline{M(k)}$.

Demostración. Supongamos que $X_m\to X$ en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$, $X_m,X\in\overline{M(k)}$.
a) D_H es continua en $\overline{M(k)}$:
Para $Y\in\overline{M(k)}$, ya sabemos que $\|\nabla Y\|_\infty\le\|\nabla g\|_\infty+k=c$ y como $X_m\to X$ en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$, entonces existe una subsucesión que también llamamos (X_m) tal que $X_m\to X$ pp en B. Luego, por el Teorema de Egorov, existe $B^\delta\subset B$ con $|B^\delta|<\delta$ tal que $X_m\to X$ uniformemente en $B\backslash B^\delta$. Pero entonces $H(X_m)\to H(X)$ y $Q(X_m)\to Q(X)$ uniformemente en $B\backslash B^\delta$, pues $H\in L^\infty(\mathbf{R}^3)\cap C(\mathbf{R}^3)$ y $Q\in L^\infty(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^3)\cap C(\mathbf{R}^3)$.

A partir de

$$|D_H(X_m)-D_H(X)|\le|D(X_m)-D(X)|+\frac{2}{3}\int_{B\backslash B^\delta}|Q(X_m)-Q(X)|\,|X_{mu}\wedge X_{mv}|+$$
$$+\frac{2}{3}\int_{B^\delta}|Q(X_m)-Q(X)|\,|X_{mu}\wedge X_{mv}|+\frac{2}{3}\|Q\|_\infty\int_B|X_{mu}\wedge X_{mv}-X_u\wedge X_v|\ ,$$

tenemos que los dos primeros términos tienden a 0 si m crece para un dado $\delta > 0$.

Como $|X_{mu} \wedge X_{mv}| \le c^2$ y $|Q(X_m) - Q(X)| \le 2\|Q\|_\infty$ pp en B, elegimos δ de forma que el tercer término sea menor que un dado $\varepsilon > 0$.

Por último estimamos el cuarto término como

$$\int_B |X_{mu} \wedge X_{mv} - X_u \wedge X_v| \le \int_B \left[|X_{mu}|\,|X_{mv} - X_v| + |X_{mu} - X_u|\,|X_{mv}| \right] \le$$
$$\le 2c \int_B |\nabla(X_m - X)| \le 2c|B|^{1/2} \|\nabla(X_m - X)\|_2 ,$$

que tiende a 0 para $m \to +\infty$.

Si ahora suponemos que $(D_H(X_m))$ no converge a $D_H(X)$, existe una subsucesión de (X_m), que llamaremos (Y_m) y un número $\varepsilon' > 0$ tal que $|D_H(Y_m) - D_H(X)| > \varepsilon'$. Pero (Y_m) debe tener una subsucesión convergente a X. Contradicción.

b) dD_H es continua en $\left(H_0^1(B, \mathbf{R}^3)\right)^*$:
Para demostrar esta última afirmación, elegimos $\varphi \in H_0^1(B, \mathbf{R}^3)$ y estimamos

$$|dD(X_m)(\varphi) - dD(X)(\varphi)| \le \int_B |\nabla(X_m - X)|\,|\nabla\varphi| \le \|X_m - X\|_{H^1} \|\varphi\|_{H^1}$$

y

$$|dV(X_m)(\varphi) - dV(X)(\varphi)| \le \int_B |H(X_m)X_{mu} \wedge X_{mv} - H(X)X_u \wedge X_v|\,|\varphi| \le \tag{3.7}$$
$$\le \int_B |H(X_m) - H(X)|\,|X_{mu} \wedge X_{mv}|\,|\varphi| + \int_B |H(X)|\,|X_{mu} \wedge X_{mv} - X_u \wedge X_v|\,|\varphi| \le$$
$$\le c^2 \int_B |H(X_m) - H(X)|\,|\varphi| + \|H\|_\infty 2c \|\nabla(X_m - X)\|_2 \|\varphi\|_2 \le$$
$$\le \left[c^2 \|H(X_m) - H(X)\|_2 + 2c\|H\|_\infty \|\nabla(X_m - X)\|_2\right] \|\varphi\|_2 . \qquad \square$$

En el siguiente resultado estudiamos el declive ρ de D_H en $\overline{M(k)}$.

LEMA 3.2.3. *El declive $\rho : \overline{M(k)} \to \mathbf{R}$ es H^1–continua, bajo las hipótesis del Lema 3.2.2.*

Demostración. Sea $(X_n) \subset \overline{M(k)}$ tal que $X_n \to X$ en $H^1(B, \mathbf{R}^3)$ y fijamos $\varepsilon > 0$. Para $m \in \mathbf{N}$ existe $Y_m \in \overline{M(k)}$ que satisface $\rho(X_m) \le dD_H(X_m)(X_m - Y_m) + {}^{\varepsilon}/2$. Supongamos que $\rho(X_m) \ge \rho(X)$, entonces

$$0 \le \rho(X_m) - \rho(X) \le dD_H(X_m)(X_m - Y_m) + \frac{\varepsilon}{2} - dD_H(X)(X - Y_m) =$$
$$= dD_H(X_m)(X_m - X) + dD_H(X_m)(X - Y_m) - dD_H(X)(X - Y_m) + \frac{\varepsilon}{2} .$$

A partir de

$$\begin{aligned}|dD_H(X_m)(X_m - X)| &\leq |dD(X_m)(X_m - X)| + 2|dV(X_m)(X_m - X)| \leq \\ &\leq \|\nabla X_m\|_2 \|\nabla(X_m - X)\|_2 + \left| \int_B 2H(X_m) X_{mu} \wedge X_{mv} \cdot (X_m - X) \right| \leq \\ &\leq \|\nabla X_m\|_2 \|\nabla(X_m - X)\|_2 + 2c^2 \|H\|_\infty \|X_m - X\|_1 ,\end{aligned}$$

y de

$$\begin{aligned}|(dD_H(X_m) - dD_H(X))(X - Y_m)| \leq |(dD(X_m) - dD(X))(X - Y_m)| + \\ + 2|(dV(X_m) - dV(X))(X - Y_m)|\end{aligned}$$

(usando (3.7) con $\varphi = X - Y_m \in H_0^1(B, \mathbf{R}^3)$), deducimos que $\lim \rho(X_m) = \rho(X)$, ya que el caso $\rho(X) \geq \rho(X_m)$ es totalmente análogo. □

OBSERVACIÓN. Si $X \in T$ es un mínimo de D_H en $\overline{M(k)}$ (o sea: $D_H(X) \leq D_H(Y)$ para $Y \in \overline{M(k)}$) entonces $\rho(X) = 0$. En efecto: dado $\varepsilon \in [0,1]$, tenemos que si $Y \in \overline{M(k)}$, entonces $X + \varepsilon(Y - X) \in \overline{M(k)}$ y por lo tanto $D_H(X) \leq D_H(X + \varepsilon(Y - X))$ y entonces,

$$0 \leq \frac{d}{d\varepsilon} D_H(X + \varepsilon(Y - X))\Big|_{\varepsilon=0} = dD_H(X)(Y - X) .$$

Luego, $dD_H(X)(X - Y) \leq 0$ para $Y \in M$ y se cumple la igualdad para $Y = X$. Entonces $\rho(X) = 0$.

Ahora, si notamos $\widetilde{\overline{M(k)}} = \{X \in \overline{M(k)}; \rho(X) \neq 0\}$, llamaremos campo vectorial pseudo gradiente para D_H en $\overline{M(k)}$ a una aplicación Lipschitz continua $\widetilde{e} : \widetilde{\overline{M(k)}} \rightarrow H^1(B, \mathbf{R}^3)$ tal que:

i) $\widetilde{e}(X) + X \in \overline{M(k)}$ para $X \in \widetilde{\overline{M(k)}}$

ii) Existe $c_1 > 0$ en $\mathbf{R}$ que verifica:

a) $\|\widetilde{e}(X)\|_{H^1} \leq \delta$ donde $\delta =$ diámetro de $\overline{M(k)}$, $\delta \in \mathbf{R}$

b) $dD_H(X)(\widetilde{e}(X)) < -\min\{c_1^{-1}\rho(X)^2, 1\}$.

Como nuestro declive ρ y nuestro campo vectorial pseudo gradiente $\widetilde{e}$ son similares a los de [St1], pag. 34, tendremos un lema análogo al Lema 1.6, parte I en [St1].

LEMA 3.2.4. *Existe un campo vectorial pseudo gradiente $\widetilde{e}$ para D_H en $\overline{M(k)}$, bajo las hipótesis del Lema 3.2.2.*

Demostración. Si $X_0 \in \widetilde{\overline{M(k)}}$, podemos elegir $Y_0 \in \overline{M(k)}$ tal que

$$(3.8) \qquad \|X_0 - Y_0\|_{H^1} \leq \min\{\delta\rho(X_0), \delta\} \quad \text{y} \quad dD_H(X_0)(X_0 - Y_0) > \min\{\,{}^1/_2\,\rho(X_0)^2, 1\}$$

Existe Y_0 en estas condiciones ya que si

a) $\min\{\rho(X_0)\delta, \delta\} = \rho(X_0)\delta$, entonces $\rho(X_0) \leq 1$ y $\min\{\,{}^1/_2\,\rho(X_0)^2, 1\} = {}^1/_2\,\rho(X_0)^2$, ahora $\exists \overline{Y}_0$ tal que $\|X_0 - \overline{Y}_0\|_{H^1} \leq \delta$ y $dD_H(X_0)(X_0 - \overline{Y}_0) > {}^1/_2\,\rho(X_0)$. Si $Y_0 = X_0 - \rho(X_0)(X_0 - \overline{Y}_0)$, tenemos que $\|X_0 - Y_0\|_{H^1} = \rho(X_0)\|X_0 - \overline{Y}_0\|_{H^1} \leq \rho(X_0)\delta$ y además $dD_H(X_0)(X_0 - Y_0) = \rho(X_0)dD_H(X_0)(X_0 - \overline{Y}_0) > \rho(X_0)\,{}^1/_2\,\rho(X_0) = {}^1/_2\,\rho(X_0)^2$, luego existe $Y_0 \in \overline{M(k)}$ que satisface $\|X_0 - Y_0\|_{H^1} \leq \delta\rho(X_0) = \min\{\rho(X_0)\delta, \delta\}$ y $dD_H(X_0)(X_0 - Y_0) > {}^1/_2\,\rho(X_0)^2 = \min\{\,{}^1/_2\,\rho(X_0)^2, 1\}$.

Y si en cambio sucede:

b) $\min\{\rho(X_0)\delta, \delta\} = \delta$, entonces $\rho(X_0) > 1$ y $\min\{\,{}^1/_2\,\rho(X_0)^2, 1\} \leq 1 < \rho(X_0)$, por lo tanto, nuevamente podemos afirmar que existe $Y_0 \in \overline{M(k)}$ tal que $\|X_0 - Y_0\|_{H^1} \leq \delta = \min\{\rho(X_0)\delta, \delta\}$ y $dD_H(X_0)(X_0 - Y_0) > 1 \geq \min\{\,{}^1/_2\,\rho(X_0)^2, 1\}$.

Ahora, por el Lema 3.2.2, sabemos que $dD_H(X)(X - Y_0)$ es continua en $X \in \widetilde{\overline{M(k)}}$, por lo tanto, existe un entorno $V(X_0)$ de X_0 en $\widetilde{\overline{M(k)}}$ tal que para $X \in V(X_0)$ se verifica $\|X - Y_0\|_{H^1} \leq \min\{\rho(X)\delta, \delta\}$ y $dD_H(X)(X - Y_0) > \min\{\,{}^1/_2\,\rho(X)^2, 1\}$. Luego, $e_0(X) = Y_0 - X$ es un campo vectorial pseudo gradiente para D_H en $V(X_0)$.

Los conjuntos $\{V(X_0)\}_{X_0 \in \widetilde{\overline{M(k)}}}$ constituyen un cubrimiento por abiertos de $\widetilde{\overline{M(k)}}$. Sea $\{V(X_i)\}_{i \in I}$ un refinamiento localmente finito de este cubrimiento, o sea, un cubrimiento por abiertos de $\widetilde{\overline{M(k)}}$ tal que para todo $X_1 \in \widetilde{\overline{M(k)}}$ existe un entorno V_1 de X_1 y un subconjunto finito $I_1 \subset I$ tales que para $i \in I \backslash I_1$, se verifica $V_1 \cap V(X_i) = \phi$. (Este refinamiento localmente finito de $\widetilde{\overline{M(k)}}$ existe pues $\widetilde{\overline{M(k)}} \subset T$ es métrico.)

Sea ahora $\{\psi_i\}_{i \in I}$ una partición de la unidad Lipschitz–continua subordinada a $\{V(X_i)\}_{i \in I}$, o sea, una familia de funciones Lipschitz continuas ψ_i tales que sop $\psi_i \subset V(X_i)$, $0 \leq \psi_i \leq 1$ para cada $i \in I$, y además $\sum_{i \in I} \psi_i(X) = 1$ para todo $X \in \widetilde{\overline{M(k)}}$. (Por ejemplo puede tomarse $\rho_i(X) = \inf_{Y \in \widetilde{\overline{M(k)}} \backslash V(X_i)} \|X - Y\|_{H^1}$ y $\psi_i(X) = \dfrac{\rho_i(X)}{\sum_{i \in I} \rho_i(X)}$.)

Finalmente, definimos $\widetilde{e}(X) = \sum_{i \in I} \psi_i(X)(Y_i - X)$ donde $Y_i \in \overline{M(k)}$ está asociado a X_i por las relaciones (3.8). $\widetilde{e}$ resulta un campo vectorial pseudo gradiente para D_H en $\overline{M(k)}$. □

A continuación demostraremos que D_H satisface la siguiente condición de tipo Palais-Smale en $\overline{M(k)}$.

LEMA 3.2.5. *Toda sucesión $(X_m) \subset M(k)$ tal que $\lim_{m\to+\infty} \rho(X_m) = 0$ es relativamente compacta, si $H \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$.*

Demostración. $(X_m) \subset \overline{M(k)}$, por lo tanto $\|X_m - g\|_{H_0^1} \leq k|B|^{1/2}$. Luego, $(X_m - g)$ es una sucesión acotada en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$ y existe una subsucesión de (X_m), que también notaremos (X_m), y $X \in \overline{M(k)}$ tales que $X_m - g \to X - g$ débilmente en $H_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ para $m \to +\infty$, ya que $X_m - g \to \varphi$ débilmente en $H_0^1(B,\mathbf{R}^3)$, con $\|\nabla\varphi\|_\infty \leq k$ y tomamos $X = \varphi + g$.

Si ahora $\psi_m = X_m - X$, tenemos que

$$dD_H(X_m)(\psi_m) \leq \rho(X_m) \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0 .$$

Pero, por otro lado,

$$\begin{aligned} dD_H(X_m)(\psi_m) &= \int_B \nabla X_m \cdot \nabla\psi_m + 2\int_B H(X_m) X_{mu} \wedge X_{mv} \cdot \psi_m = \\ &= \|\nabla\psi_m\|_{L^2}^2 + \int_B \nabla X \cdot \nabla\psi_m + 2\int_B H(X_m) X_{mu} \wedge X_{mv} \cdot \psi_m . \end{aligned}$$

Ahora, $\int_B \nabla X \cdot \nabla\psi_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ ya que $\psi_m \to 0$ débilmente en $H_0^1(B,\mathbf{R}^3)$ y además,

$$\begin{aligned} |2\int_B H(X_m) X_{mu} \wedge X_{mv} \cdot \psi_m| &\leq 2\|H\|_\infty \frac{1}{2} c^2 \int_B |\psi_m| \leq \\ &\leq c^2 \|H\|_\infty |B|^{1/2} \|\psi_m\|_2 , \end{aligned}$$

pero por el Teorema de Rellich-Kondrakov, tenemos que $\psi_m \to 0$ fuertemente en $L^2(B,\mathbf{R}^3)$. Luego,

$$\begin{aligned} \|\nabla\psi_m\|_{L^2}^2 = \|\psi_m\|_{H_0^1}^2 \leq \rho(X_m) - \int_B \nabla X \cdot \nabla\psi_m - \\ - 2\int_B H(X_m) X_{mu} \wedge X_{mv} \cdot \psi_m \underset{m\to+\infty}{\longrightarrow} 0 , \end{aligned}$$

con lo cual deducimos que $X_m \to X$ en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$. □

LEMA 3.2.6. *Bajo las hipótesis del Lema 3.2.2, K_β es compacto.*

Demostración. Por la continuidad de D_H y ρ en $\overline{M(k)}$ (Lemas 3.2.2 y 3.2.3), K_β resulta cerrado en $\overline{M(k)}$, y por lo tanto en T.

Sea (X_m) una sucesión en K_β, entonces $\rho(X_m) = 0$, y por el Lema 3.2.5 existe una subsucesión, que también llamaremos (X_m) tal que $X_m \to X$, con $X \in T$. Como K_β es cerrado, se deduce que $X \in K_\beta$ y por lo tanto, K_β resulta compacto. □

Ahora, siempre bajo las hipótesis del Lema 3.2.2 y en forma análoga a [St1], Parte I, Lemas 1.9 y 1.10, pag. 36, obtenemos los siguientes resultados:

LEMA 3.2.7. *Sean $\beta \in \mathbf{R}$, $\bar{\varepsilon} > 0$ y supongamos que N es un entorno de K_β en $\overline{M(k)}$. Entonces existen un número $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ y una familia de funciones continuas de una parámetro $\Phi : [0,1] \times \overline{M(k)} \to \overline{M(k)}$ (donde $\Phi(t, \cdot)$ es una aplicación de $\overline{M(k)}$ en $\overline{M(k)}$) con las siguientes propiedades:*

i) $\Phi(t, X) = X$ *si* $t = 0$, *o si* $|D_H(X) - \beta| \geq \bar{\varepsilon}$ *o si* $\rho(X) = 0$.

ii) $D_H(\Phi(t, X))$ *es no creciente en* t *para todo* X.

iii) $\Phi(1, M_{\beta+\varepsilon} \backslash N) \subset M_{\beta-\varepsilon}$ *y* $\Phi(1, M_{\beta+\varepsilon}) \subset M_{\beta-\varepsilon} \cup N$.

LEMA 3.2.8. *Para cada $\beta \in \mathbf{R}$, las familias*

$$N_{\beta,\gamma_1} = \{X \in \overline{M(k)}; |D_H(X) - \beta| < \gamma_1, \rho(X) < \gamma_1\}, \ \gamma_1 > 0$$

y

$$U_{\beta,\gamma_2} = \{X \in \overline{M(k)}; \|X - Y\|_{H^1} < \gamma_2 \text{ para algún } Y \in K_\beta\}, \ \gamma_2 > 0 \,,$$

constituyen sistemas fundamentales de entornos de K_β en $\overline{M(k)}$.

Como en la demostración del Lema 3.2.7 se utiliza el Lema 3.2.8, demostraremos primero este último.

DEMOSTRACIÓN DEL LEMA 3.2.8. Como D_H y ρ son continuas, claramente cada N_{β,γ_1} es un entorno de K_β y por su definición, también es claro que cada U_{β,γ_2} es un entorno de K_β. Luego, basta probar que cualquier entorno N de K_β contiene por lo menos a un conjunto N_{β,γ_1} y a un conjunto U_{β,γ_2}.

Supongamos por contradicción que para algún entorno N de K_β, $N_{\beta,\gamma_1} \not\subset N$ para ningún $\gamma_1 > 0$. Entonces podemos construir una sucesión $(\gamma_m) \subset \mathbf{R}_{>0}$ tal que $\gamma_m \to 0$ y además, para cada m existe un elemento $X_m \in N_{\beta,\gamma_m} \backslash N$.

Como $\rho(X_m) < \gamma_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$, por el Lema 3.2.5, (X_m) tiene una subsucesión convergente que también notaremos (X_m). Ahora, si $X_m \xrightarrow[m \to +\infty]{} X$ en T, como por el Lema 3.2.3 ρ es H^1–continua, tenemos que $\rho(X_m) \xrightarrow[m \to +\infty]{} \rho(X)$, pero como $\rho(X_m) \xrightarrow[m \to +\infty]{} 0$, se deduce que $\rho(X) = 0$. Además, por el Lema 3.2.2, $D_H(X_m) \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} D_H(X)$, y como $|D_H(X_m) - \beta| < \gamma_m \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, se deduce que $D_H(X) = \beta$. Luego, $X \in K_\beta$ y como $X_m \to X$, para m suficientemente grande, debe verificarse que $X_m \in N$, ya que N es un entorno de K_β, pero por su definición, $X_m \notin N$.

Similarmente, si suponemos que para ningún $\gamma_2 > 0$, $U_{\beta,\gamma_2} \subset N$, existe una sucesión $(\gamma_m) \subset \mathbf{R}_{>0}$, $\gamma_m \underset{m \to +\infty}{\longrightarrow} 0$, y sucesiones (X_m), (Y_m) tales que $X_m \in U_{\beta,\gamma_m} \backslash N$, $Y_m \in K_\beta$ y además $\|X_m - Y_m\|_{H^1} < \gamma_m$. Pero, por el Lema 3.2.5, (Y_m) tiene una subsucesión convergente (que también notaremos (Y_m)) a un elemento $Y \in K_\beta$. Luego, (X_m) a su vez tiene una subsucesión que también notaremos (X_m) convergente a Y, pero como en el caso anterior, deducimos entonces que para m suficientemente grande $X_m \in N$. Contradicción. $\square$

Demostración del Lema 3.2.7. Se eligen números $0 < \bar{\delta} < \delta' \leq 1$, $0 < \gamma \leq 1$ tales que $N \supset U_{\beta,\gamma} \supset U_{\beta,\gamma/2} \supset N_{\beta,\delta'} \supset N_{\beta,\bar{\delta}}$, y sea η una aplicación Lipschitz–continua en $\overline{M(k)}$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$ y $\eta \equiv 0$ en $N_{\beta,\bar{\delta}}$, $\eta \equiv 1$ fuera de $N_{\beta,\delta'}$. Para esto, como $\overline{N}_{\beta,\bar{\delta}} = \{X \in \overline{M(k)}; |D_H(X) - \beta| \leq \bar{\delta}, \rho(X) \leq \bar{\delta}\} \subset N_{\beta,\delta'} = \{X \in \overline{M(k)}; |D_H(X) - \beta| < \delta', \rho(X) < \delta'\}$, notamos que en general, si U_1, U_2 son dos abiertos en un espacio métrico E tales que $\overline{U}_1 \subset U_2$, puede construirse una función Lipschitz–continua η tal que η valga 0 en U_1, η valga 1 fuera de U_2 y $0 \leq \eta \leq 1$: en efecto, si φ_1, φ_2 es una partición de la unidad subordinada al cubrimiento por abiertos de E constituido por U_2, $E \backslash \overline{U}_1$, entonces φ_2 verifica lo querido: sop $\varphi_2 \subset E \backslash \overline{U}_1$ y por lo tanto $\varphi_2 \equiv 0$ en U_1 y como sop $\varphi_1 \subset U_2$ y $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, entonces $\varphi_2 \equiv 1$ fuera de U_2.

Sea también $\varepsilon < {}^1/2 \min\{\bar{\delta}, \bar{\varepsilon}\}$ un número positivo que luego se especificará, y se elige $\varphi \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi(s) = 1$ si $|s - \beta| < \varepsilon$ y $\varphi(s) = 0$ si $|s - \beta| \geq 2\varepsilon$, para esto como $(\beta - 2\varepsilon, \beta + 2\varepsilon)$, $\mathbf{R} \backslash [\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$ es un cubrimiento por abiertos de $\mathbf{R}$, si φ_1, φ_2 es una partición de la unidad subordinada a dicho cubrimiento tal que $\varphi_1, \varphi_2 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$, entonces sop $\varphi_1 \subset (\beta - 2\varepsilon, \beta + 2\varepsilon)$ con lo cual, $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ y además $\varphi_1(s) = 0$ si $s \notin (\beta - 2\varepsilon, \beta + 2\varepsilon)$, y como φ_2 se anula en $[\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$ y $\varphi_1 + \varphi_2 = 1$, entonces $\varphi_1(s) = 1$ si $s \in [\beta - \varepsilon, \beta + \varepsilon]$.

Ahora, para $X \in \overline{M(k)}$ se define

$$e(X) = \begin{cases} \varphi(D_H(X))\eta(X)\tilde{e}(X) \text{ si } X \in \widetilde{\overline{M(k)}} \\ 0 \text{ en otro caso,} \end{cases}$$

donde $\tilde{e}$ es el campo vectorial pseudo gradiente construido en el Lema 3.2.4 para D_H en $\overline{M(k)}$.

Ahora, si $X \in \widetilde{M(k)}$ es tal que $\rho(X) = 0$, entonces X tiene un entorno en el cual φ ó η se anulan, ya que si $|D_H(X) - \beta| < \bar{\delta}$, como $\rho(X) = 0$, por continuidad, para Y en un entorno de X sigue valiendo que $|D_H(Y) - \beta| < \bar{\delta}$ y que $\rho(Y) < \bar{\delta}$ y por lo tanto, si intersecamos ese entorno de X con $N_{\beta,\bar{\delta}}$, obtenemos un nuevo entorno de X en el cual η se anula y si $|D_H(X) - \beta| \geq \bar{\delta} > 2\varepsilon$, entonces nuevamente podemos hallar un entorno de X en $\widetilde{M(k)}$ en el cual $|D_H(Y) - \beta| > 2\varepsilon$ y por lo tanto, $\varphi(D_H(Y)) = 0$. Luego, e resulta Lipschitz-continua, pues si $e(X) = 0$, existe un entorno de X en $\widetilde{M(k)}$ en el cual e se anula.

Además, como $\widetilde{M(k)}$ es convexo, tenemos que $e(X) + X \in \widetilde{M(k)}$ para todo $X \in \widetilde{M(k)}$, pues $\widetilde{e}(X) + X \in \overline{M(k)}$ y entonces, para todo número $\alpha \in [0,1]$ también tendremos que $\alpha\widetilde{e}(X) + X \in \overline{M(k)}$, ya que $\alpha\widetilde{e}(X) + X = \alpha(\widetilde{e}(X) + X) + (1 - \alpha)X$.

Ahora, sea $\Phi : [0, +\infty) \times \overline{M(k)} \to \overline{M(k)}$ la solución al problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}\Phi(t, X) = e(\Phi(t, X)) \\ \Phi(0, X) = X , \end{cases} \tag{3.9}$$

Φ se construye como límite de trayectorias aproximados como en [St3], Lema 3.8.

Φ satisface i) pues si $t = 0$, $\Phi(0, X) = X$ por ser Φ solución de (3.9), si $\rho(X) = 0$, ya hemos visto que $e(X) = 0$, y por lo tanto $\Phi(t, X) = X$, $t \in [0, +\infty)$ es solución de (3.9), y finalmente, si $|D_H(X) - \beta| \geq \bar{\varepsilon} \geq 2\varepsilon$, entonces $\varphi(D_H(X)) = 0$; luego, $e(X) = 0$ y nuevamente $\Phi(t, X) = X$, $t \in [0, +\infty)$ es solución de (3.9). Además, Φ satisface ii) pues

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}D_H(\Phi(t, X)) &= dD_H(\Phi(t, X))\Big(\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t, X)\Big) = dD_H(\Phi(t, X))(e(\Phi(t, X))) = \\ &= \eta(\Phi(t, X)) \cdot \varphi(D_H(\Phi(t, X))) \cdot dD_H(\Phi(t, X))(\widetilde{e}(\Phi(t, X))) \leq 0 ,\end{aligned}$$

o bien, $dD_H(\Phi(t, X))(e(\Phi(t, X))) = dD_H(\Phi(t, X))(0) = 0$ si $\Phi(t, X) \notin \widetilde{\overline{M(k)}}$.

Finalmente, si $D_H(X) \leq \beta + \varepsilon$, tenemos que $D_H(\Phi(1, X)) \leq \beta - \varepsilon$, o bien, $D_H(\Phi(1, X)) \geq \beta - \varepsilon$, pero si ocurre esto último, entonces $\beta - D_H(\Phi(t, X)) \leq \beta - D_H(\Phi(1, X)) \leq \varepsilon$, y por otro lado, $D_H(\Phi(t, X)) \leq D_H(\Phi(0, X)) = D_H(X) \leq \beta + \varepsilon$, entonces $D_H(\Phi(t, X)) - \beta \leq \varepsilon$. Luego, tenemos que $D_H(\Phi(1, X)) \leq \beta - \varepsilon$ o bien, $|D_H(\Phi(t, X)) - \beta| \leq \varepsilon$ para todo $t \in [0, 1]$. En este último caso,

$$\begin{aligned}D_H(\Phi(1, X)) &= D_H(X) + \int_0^1 \frac{d}{dt}D_H(\Phi(t, X))dt \leq \\ &\leq \beta + \varepsilon + \int_0^1 \eta(\Phi(t, X))dD_H(\Phi(t, X))(\widetilde{e}(\Phi(t, X)))dt \leq \\ &\leq \beta + \varepsilon - \int_0^1 \eta(\Phi(t, X)) \min\Big\{\frac{1}{2}\rho(\Phi(t, X))^2, 1\Big\}dt = (*) ,\end{aligned}$$

ya que $\varphi(D_H(\Phi(t,X)) = 1$ para todo $t \in [0,1]$ y como $\eta \equiv 1$ fuera de $N_{\beta,\delta'}$ y además $\rho(\Phi(t,X)) \geq \bar{\delta}$ fuera de $N_{\beta,\bar{\delta}}$ pues $|D_H(\Phi(t,X)) - \beta| \leq \varepsilon < \bar{\delta}$ y por último $\frac{1}{2}\bar{\delta}^2 < \bar{\delta} < 1$, tenemos que:

$$(*) \leq \beta + \varepsilon - \frac{1}{2}\bar{\delta}^2 |\{t \in [0,1]/\Phi(t,x) \notin N_{\beta,\delta'}\}| \,.$$

Supongamos ahora que $X \notin N$ o bien que $\Phi(1,X) \notin N$, entonces $\Phi(t,X) \notin N_{\beta,\delta'}$ para $t \in [0,1]$, y en este caso, $|\{t \in [0,1]/\Phi(t,X) \notin N_{\beta,\delta'}\}| = |[0,1]| = 1$, o bien tenemos que el flujo $\Phi(t,X)$ atraviesa el anillo $U_{\beta,\gamma}\backslash U_{\beta,\gamma/2}$ ya que si existe t_0 tal que $\Phi(t_0,X) \in N_{\beta,\delta'}$, como $\Phi(0,X) = X$, o bien $\Phi(1,X) \notin U_{\beta,\gamma}$ (pues hemos supuesto que $\Phi(0,X) = X$, o bien $\Phi(1,X) \notin N$), entonces $\Phi(t,X)$ debe atravesar el anillo $U_{\beta,\gamma}\backslash U_{\beta,\gamma/2}$.

En este caso, $|\{t \in [0,1]/\Phi(t,X) \notin N_{\beta,\delta'}\}| \geq \frac{\gamma}{2}\frac{1}{\delta}$, pues si $X \notin N$, dado $Y \in K_\beta$, $\|\Phi(t,X) - Y\|_{H^1} \geq \|X-Y\|_{H^1} - \|\Phi(t,X) - X\|_{H^1} = (1)$ y además, por otro lado, $\Phi(t,X) = \int_0^t e(\Phi(t,X))dt + X$, entonces $\|\Phi(t,X) - X\|_{H^1} \leq t\delta$ y como $X \notin N$, $X \notin U_{\beta,\gamma}$, entonces $\|X - Y\|_{H^1} \geq \gamma$ para todo $Y \in K_\beta$. Luego, $(1) \geq \gamma - \delta t \geq \gamma/2$ si y sólo si $t < \frac{\gamma}{2\delta}$.

Entonces, para todo $t < \frac{\gamma}{2\delta}$, $\Phi(t,X) \notin U_{\beta,\gamma/2}$ y $\Phi(t,X) \notin N_{\beta,\delta'}$, de donde $|\{t \in [0,1]; \Phi(t,X) \notin N_{\beta,\delta'}\}| \geq \frac{\gamma}{2\delta}$, y si $\Phi(1,X) \notin N$, $\|\Phi(t,X) - Y\|_{H^1} \geq \|\Phi(1,X) - Y\|_{H^1} - \|\Phi(t,X) - \Phi(1,X)\|_{H^1} = (2)$. Razonando como antes tenemos que $\|\Phi(1,X) - Y\|_{H^1} \geq \gamma$ pues $\Phi(1,X) \notin N$ y $\|\Phi(1,X) - \Phi(t,X)\|_{H^1} = \left\| \int_0^1 e(\Phi(t,X))dt - \int_0^t e(\Phi(t,X))dt \right\|_{H^1} = \left\| \int_t^1 e(\Phi(t,X))dt \right\|_{H^1} \leq \delta(1-t)$, o sea, $(2) \geq \gamma - (1-t)\delta \geq \gamma/2$ si y sólo si $\frac{\gamma}{2}\frac{1}{\delta} \geq 1 - t$, o sea, si y sólo si $t > 1 - \frac{\gamma}{2\delta}$, y así nuevamente obtenemos que $|\{t \in [0,1]; \Phi(t,X) \notin N_{\beta,\delta'}\}| \geq \frac{\gamma}{2\delta}$. Por lo tanto, si se elige γ tal que $\frac{\gamma}{2\delta} < 1$, tenemos que en cualquier caso $D_H(\Phi(t,X)) \leq \beta + \varepsilon - \frac{1}{4}\frac{\gamma}{\delta}\bar{\delta}^2$, y para completar la demostración, basta elegir $\varepsilon = \frac{1}{2}\min\left\{\bar{\varepsilon}, \frac{1}{4}\frac{\gamma\bar{\delta}^2}{\delta}\right\}$ pues entonces

$$\begin{aligned} D_H(\Phi(t,X)) &\leq \beta + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{\gamma}{\delta}\bar{\delta}^2 - \frac{1}{4}\frac{\gamma}{\delta}\bar{\delta}^2 = \\ &= \beta - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\frac{\gamma}{\delta}\bar{\delta}^2 \leq \beta - \varepsilon \,. \qquad \square \end{aligned}$$

Ahora, la demostración del Teorema 3.2.1 que daremos a continuación es análoga a la demostración del Teorema 3.3 [St1], p.125.

Demostración del Teorema 3.2.1. Sea $\bar{\varepsilon} = D_H(X_0) - D_H(X_1) > 0$. Entonces sabemos que para cualquier entorno N del conjunto K_β, existe un número $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ y una aplicación Φ con las propiedades del Lema 3.2.7, $\Phi : [0,1] \times \overline{M(k)} \to \overline{M(k)}$.

Si $K_\beta = \phi$, podemos tomar $N = \phi$, por definición de β, sabemos que existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\sup\limits_{t \in [0,1]} D_H(\gamma(t)) < \beta + \varepsilon$. Ahora si $\gamma_1 = \Phi(1,\gamma)$ tenemos que $\gamma_1 : [0,1] \to \overline{M(k)}$ y $\gamma_1(0) = \Phi(1,\gamma(0)) = \Phi(1, X_0) = X_0$ pues $\rho(X_0) = 0$, $\gamma_1(1) = \Phi(1,\gamma(1)) = \Phi(1, X_1) = X_1$ pues $\bar{\varepsilon} = D_H(X_0) - D_H(X_1) \leq \beta - D_H(X_1)$. Luego $\gamma_1 \in \Gamma$, pero por la propiedad iii) del Lema 3.2.7, $\gamma_1 \subset M_{\beta - \varepsilon}$, lo cual resulta una contradicción. Luego $K_\beta \neq \phi$.

Si ahora suponemos que K_β consiste sólo de mínimos locales de D_H en T, entonces K_β será abierto y cerrado en $\overline{M}_\beta = \{X \in \overline{M(k)}; D_H(X) \leq \beta\}$: es abierto pues si $\widetilde{X} \in K_\beta$ y V es un entorno arbitrario de $\widetilde{X}$ en $\overline{M}_\beta$, entonces para $X \in V$, $D_H(X) \leq \beta = D_H(\widetilde{X})$, y podemos fijar V tal que $D_H(\widetilde{X}) \leq D_H(X)$. Entonces tenemos que $D_H(\widetilde{X}) = D_H(X)$ para $X \in V$ y $V \subset K_\beta$ pues V consiste sólo de mínimos locales de D_H.

Finalmente, K_β es cerrado por continuidad de D_H y ρ. Por lo tanto, existe un entorno N de K_β en $\overline{M(k)}$ tal que N y $\overline{M}_\beta \backslash K_\beta$ son disjuntos. Entonces $M_{\beta-\varepsilon} \cap N = \phi$ para todo $\varepsilon > 0$ y podemos elegir N tal que $X_1 \notin N$, pues dada $\gamma \in \Gamma$ arbitraria, $\sup\limits_{t \in [0,1]} D_H(\gamma(t)) \geq D_H(X_0)$ y por lo tanto, $\beta = \inf\limits_{\gamma \in \Gamma} \sup\limits_{t \in [0,1]} D_H(\gamma(t)) \geq D_H(X_0) > D_H(X_1)$. Entonces $D_H(X_1) < \beta$ y resulta que $X_1 \in M_{\beta-\varepsilon}$ para algún $\varepsilon > 0$.

Sean ahora ε, Φ para este conjunto N, y como antes $\gamma \in \Gamma$ tal que $\sup\limits_{t \in [0,1]} D_H(\gamma(t)) < \beta + \varepsilon$.

Nuevamente, si $\gamma_1 = \Phi(1,\gamma)$, $\gamma_1 \in \Gamma$ y $\gamma_1 \subset N \cup M_{\beta-\varepsilon}$ y como $N \cap M_{\beta-\varepsilon} = \phi$, se deduce que $\gamma_1 \subset N$ o bien que $\gamma_1 \subset M_{\beta-\varepsilon}$. Pero $X_1 \in \gamma_1$ y $X_1 \notin N$, luego, $\gamma_1 \not\subset N$, mientras que $\gamma_1 \subset M_{\beta-\varepsilon}$ contradice la definición de β. □

Demostración del Corolario 3.2.1. Como $D_H(X_0) \neq D_H(X_1)$, podemos suponer sin pérdida de generalidad que $D_H(X_1) < D_H(X_0)$, con lo cual X_0 y X_1 verifican las hipótesis del Teorema 3.2.1. □

Demostración del Corolario 3.2.2. Si K_β consiste sólo de mínimos locales de D_H en T, existe un entorno N de K_β en $\overline{M(k)}$ tal que N y $\overline{M}_\beta \backslash K_\beta$ son disjuntos. Entonces $M_{\beta-\varepsilon} \cap N = \phi$ para todo $\varepsilon > 0$.

Sean $X_0, X_1 \in K_\beta$, $\bar{\varepsilon} = 1$ y ε, Φ correspondientes a N. Por definición de β existe $\gamma : [0,1] \to \overline{M(k)}$, $\gamma \in \Gamma$, tal que $\gamma \subset M_{\beta+\varepsilon}$. Como $\rho(X_0) = 0 = \rho(X_1)$, obtenemos que $\gamma_1 = \Phi(1,\gamma) \in \Gamma$, ya que $\gamma_1(0) = \Phi(1, X_0) = X_0$ y $\gamma_1(1) = \Phi(1, X_1) = X_1$. Además, por la propiedad iii) de ϕ (Lema 3.2.7), $\gamma_1 \subset M_{\beta-\varepsilon} \cup N$.

Como $X_0, X_1 \notin M_{\beta-\epsilon}$ y $M_{\beta-\epsilon} \cap N = \phi$, se deduce que $\gamma_1 \subset N$, y por lo tanto, X_0 y X_1 pertenecen a la misma componente conexa de K_β, y en particular, $D_H(X_0) = D_H(X_1) = \beta$. □

3.3. Acotaciones a priori

TEOREMA 3.3.1. *Sea X_0 un mínimo local de D_H en T tal que $X_0 \in L^\infty(B, \mathbf{R}^3)$, entonces, bajo las hipótesis del Lema 3.1.1, se verifican las siguientes desigualdades:*

a) *Si $D_H(X_0) \le D_H(g)$ y $\|Q\|_\infty < 3/2$ entonces $D(X_0) \le \dfrac{2D(g)}{1 - 2/3\|Q\|_\infty}$.*

b) *Si $|H(X)| \le \dfrac{1}{|X|}$ pp $(X \in T)$ entonces $\|X_0\|_\infty \le \|g\|_\infty$.*

Demostración. a) $D_H(X) = D(X) + \dfrac{2}{3}\displaystyle\int_B Q(X) \cdot X_u \wedge X_v$, entonces

$$D(X_0)\Big(1 - \frac{2}{3}\|Q\|_\infty\Big) \le D_H(X_0) \le D_H(g) \le 2D(g) \quad \text{y}$$
$$D(X_0) \le \frac{2D(g)}{1 - \frac{2}{3}\|Q\|_\infty}.$$

b) Sea $\varphi \in H_0^1(B) \cap L^\infty(B)$ tal que $0 \le \varphi \le 1$. Entonces, dado $\epsilon > 0$, $X_\epsilon = X_0 - \epsilon\varphi X_0 \in T$ y por minimalidad de $D_H(X_0)$ tenemos que

$$\begin{aligned}0 \le \frac{d}{d\epsilon} D_H(X_\epsilon)\Big|_{\epsilon=0} &= -\int_B (\nabla X_0 \cdot \nabla(\varphi X_0) + 2H(X_0) X_{0u} \wedge X_{0v} \cdot X_0 \varphi) = \\ &= -\int_B \nabla\Big(\frac{|X_0|^2}{2}\Big) \cdot \nabla\varphi + \big[|\nabla X_0|^2 + 2H(X_0) X_{0u} \wedge X_{0v} \cdot X_0\big]\varphi \le \\ &\le -\int_B \nabla\Big(\frac{|X_0|^2}{2}\Big) \cdot \nabla\varphi .\end{aligned}$$

Luego, $|X_0|^2 \in H^1(B) \cap L^\infty(B)$ es una subsolución débil de la ecuación $-\Delta\psi = 0$. Además, eligiendo $\varphi = \big(|X_0|^2 - \|g\|_\infty^2\big)_+ \in H_0^1(B) \cap L^\infty(B)$, obtenemos que $0 \ge \displaystyle\int_B \nabla\Big(\frac{|X_0|^2}{2}\Big) \cdot \nabla\big(|X_0|^2 - \|g\|_\infty^2\big)_+$, luego, $0 \ge \displaystyle\int_B \big|\nabla(|X_0|^2 - \|g\|_\infty^2)_+\big|^2$, de donde $\displaystyle\int_B \big|\nabla(|X_0|^2 - \|g\|_\infty^2)_+\big|^2 = 0$ y por lo tanto $|X_0| \le \|g\|_\infty$ pp en B. □

Como consecuencia inmediata obtenemos el siguiente corolario:

COROLARIO 3.3.1. *Bajo las hipótesis del Lema 3.3.1, si $g = 0$, entonces $X_0 = 0$.*

Capítulo 4

En este capítulo estudiaremos la ecuación de curvatura media prescripta (H) bajo condiciones de contorno de Neumann.

Demostramos condiciones necesarias que deben verificar las soluciones a este problema en $H^2(B,\mathbf{R}^3)$ y analizamos el comportamiento de la funcional D_H en un entorno de una solución $g \in W^{2,\infty}(B,\mathbf{R}^3)$ que no es un mínimo local de D_H en un determinado subconjunto convexo de este espacio.

Por último demostramos que en forma análoga al resultado ya conocido de Wente [We], cuando H es una constante y el dato de contorno es la función nula, la única solución, módulo las constantes, es la función nula.

El problema de contorno a estudiar será entonces: Dada $f : \partial B \to \mathbf{R}^3$, hallar $X : \overline{B} \to \mathbf{R}^3$ tal que

$$\text{(N)} \qquad \begin{cases} \Delta X = 2H(X)X_u \wedge X_v & \text{en } B \\ \dfrac{\partial X}{\partial \eta} = f & \text{en } \partial B \end{cases}$$

Consideramos datos de contorno $f \in C^1(\partial B,\mathbf{R}^3)$, funciones H continuas y acotadas, y diremos que $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$ es una solución débil de (N) si

$$\text{(Sol)} \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_B \left(\nabla X \cdot \nabla \varphi + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi\right) = 0 & \text{para toda } \varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3) \\ Tr\left(\dfrac{\partial X}{\partial r}\right) = f\,. \end{cases}$$

4.1. Condiciones necesarias.

TEOREMA 4.1.1. *Sea $H \in L^\infty(\mathbf{R}^3) \cap C(\mathbf{R}^3)$ y sea $X \in H^2(B,\mathbf{R}^3)$ una solución débil de* (N). *Entonces, si $\|H(X)X\|_\infty < 1$,*

$$D(X) \le \frac{\|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}\|f\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}}{2(1-\|H(X)X\|_\infty)}\,.$$

Demostración. Como X es una solución débil de (N), $\Delta X = 2H(X)X_u \wedge X_v$ pp en B.

Entonces,

$$0 = \int_B [-\Delta X + 2H(X)X_u \wedge X_v] \cdot X = \int_B [|\nabla X|^2 + 2H(X)X \cdot X_u \wedge X_v] -$$
$$-\int_{\partial B} \frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot X \geq 2D(X) - 2\|H(X)X\|_\infty \int_B X_u \wedge X_v - \|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)} \|f\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)} \geq$$
$$\geq 2D(X)(1 - \|H(X)X\|_\infty) - \|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)} \|f\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)} \, .$$

Por lo tanto,

$$D(X) \leq \frac{\|X\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)} \|f\|_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}}{2(1 - \|H(X)X\|_\infty)} \, . \qquad \square$$

4.2. Existencia de solución

TEOREMA 4.2.1. *Sea $f \in C^1(\partial B, \mathbf{R}^3)$ y supongamos que $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ es una función no nula que satisface las siguientes propiedades:*
i) $H \in C^1(\mathbf{R}^3) \cap W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3)$ *y* $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$.
ii) *Existe $g \in W^{2,\infty}(B, \mathbf{R}^3)$, g armónica en B, que verifica $\|H\|_\infty \|g\|_\infty < \frac{3}{2}$ y $Tr\left(\frac{\partial g}{\partial r}\right) = f$, y un número positivo $c > \|\nabla g\|_\infty$ tal que:*

$$|H(\xi)| \leq \frac{\lambda_1^2}{c^2}(|\xi| - \|g\|_\infty)_+ \quad \text{para todo } \xi \in \mathbf{R}^3 \, ,$$

donde $\lambda_1 > 0$ es el primer autovalor de $-\Delta$ en $H_0^1(B)$.

Entonces g es una solución débil de (N) *y o bien g es un mínimo local de D_H en*

$$W^{2,\infty}(B, \mathbf{R}^3) \cap \left\{X \in H^2(B, \mathbf{R}^3); Tr \frac{\partial X}{\partial r} = f, Tr\, X = Tr\, g\right\}$$

o bien existe una sucesión (X_n) en $W^{1,\infty}(B, \mathbf{R}^3)$ de soluciones débiles distintas de (N), *con $X_n \to g$ en $W^{2,\infty}(B, \mathbf{R}^3)$.*

Demostración. A partir de ii), $H(g) = 0$ en B y g es armónica en B, luego (N) se verifica trivialmente.

Ahora elegimos un número positivo δ_1 tal que

$$\delta_1 < \min\left\{c - \|\nabla g\|_\infty, \frac{3}{2\|H\|_\infty} - \|g\|_\infty\right\}$$

y definimos

$$M_1 = \Big\{ g + \varphi ; \varphi \in H^2(B, \mathbf{R}^3), Tr \frac{\partial \varphi}{\partial r} = Tr\, \varphi = 0 \quad \text{y}$$
$$\|\varphi\|_\infty + \|\nabla \varphi\|_\infty + \sum_{1 \leq i,j \leq 2} \|\partial_{ij} \varphi\|_\infty \leq \delta_1 \Big\} .$$

Tenemos que M_1 es un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de $H^2(B, \mathbf{R}^3)$. Luego, M_1 es un subconjunto débilmente compacto de $H^2(B, \mathbf{R}^3)$ y por el Lema 3.1.3, D_H es débilmente semicontinua inferiormente en M_1, ya que

$$\|Q(X)\|_\infty \leq \|H\|_\infty \|X\|_\infty \leq \|H\|_\infty (\|X - g\|_\infty + \|g\|_\infty) < \frac{3}{2} ,$$

para todo $X \in M_1$. Luego, existe $X_1 \in M_1$ tal que

$$D_H(X_1) = \inf_{X \in M_1} D_H(X) .$$

Supongamos que g no es un mínimo local de D_H en $W^{2,\infty}(B, \mathbf{R}^3) \cap \Big\{ X \in H^2(B, \mathbf{R}^3);$ $Tr \dfrac{\partial X}{\partial r} = f, Tr\, X = Tr\, g \Big\}$. Entonces $X_1 \neq g$ y como M_1 es convexo, entonces si $\varepsilon \in [0,1]$, tenemos que $D_H(X_1) \leq D_H(X_1 + \varepsilon(X - X_1))$ para $X \in M_1$ y por el Lema 3.1.4, se deduce que

$$0 \leq \frac{d}{d\varepsilon} D_H(X_1 + \varepsilon(X - X_1))\Big|_{\varepsilon = 0} \equiv dD_H(X_1)(X - X_1) .$$

Entonces, $dD_H(X_1)(X_1 - X) \leq 0$ y dada $\varphi \in C_0^2(B, \mathbf{R}^3)$ tal que $\|\varphi\|_\infty + \|\nabla \varphi\|_\infty + \sum_{1 \leq i,j \leq 2} \|\partial_{ij} \varphi\|_\infty \leq \delta_1$, tomando $X = g + \varphi \in M_1$, tenemos que

$$dD_H(X_1)(X_1 - g) \leq dD_H(X_1)(\varphi) .$$

Luego, $dD_H(X_1)(X_1 - g) = dD_H(X_1)(\varphi) = 0$, y entonces, como $Tr \dfrac{\partial X}{\partial r} = f$ para todo $X \in M_1$, X_1 es una solución débil de (N) o $dD_H(X_1)(X_1 - g) < 0$.

Veamos que el segundo caso no es posible.

Para ello notamos que

$$|H(X)| \leq \frac{\lambda_1^2}{c^2} (|X| - \|g\|_\infty)_+ \leq \frac{\lambda_1^2}{c^2} (|X| - |g|)_+ \leq$$
$$\leq \frac{\lambda_1^2}{c^2} |X - g| \quad \text{pp en } B,$$

y $\|\nabla X\|_\infty \leq \|\nabla(X-g)\|_\infty + \|\nabla g\|_\infty \leq c$ para todo $X \in M_1$, entonces

$$\int_B 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot (X-g) \geq -\int_B 2|X_u \wedge X_v| \frac{\lambda_1^2}{c^2} |X-g|^2 \geq$$
$$\geq -\int_B \frac{|\nabla X|^2}{c^2} \lambda_1^2 |X-g|^2 \geq -\lambda_1^2 \|X-g\|_2^2 \geq -\|\nabla(X-g)\|_2^2 .$$

Además, $\int_B \nabla g \cdot \nabla(X-g) = -\int_B \Delta g \cdot (X-g) = 0$, ya que $X - g \in H_0^1(B, \mathbf{R}^3)$.

Finalmente, por el Lema 3.1.1, tenemos que

$$dD_H(X_1)(X_1-g) = \int_B [\nabla X_1 \cdot \nabla(X_1-g) + 2H(X_1)X_{1u} \wedge X_{1v} \cdot (X_1-g)] =$$
$$= \int_B |\nabla(X_1-g)|^2 + \int_B \nabla g \cdot \nabla(X_1-g) + \int_B 2H(X_1)X_{1u} \wedge X_{1v} \cdot (X_1-g) \geq$$
$$\geq \|\nabla(X_1-g)\|_2^2 - \|\nabla(X_1-g)\|_2^2 = 0$$

Ahora elegimos $\delta_2 = \min\Big\{\delta_1, \frac{1}{2}\Big(\|X_1-g\|_\infty + \|\nabla(X_1-g)\|_\infty + \sum_{1\leq i,j\leq 2} \|\partial_{ij}(X_1 - g)\|_\infty\Big)\Big\}$ y definimos

$$M_2 = \Big\{g+\varphi; \varphi \in H^2(B,\mathbf{R}^3), Tr\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} = Tr\,\varphi = 0 \quad \text{y}$$
$$\|\varphi\|_\infty + \|\nabla\varphi\|_\infty + \sum_{1\leq i,j\leq 2} \|\partial_{ij}\varphi\|_\infty \leq \delta_2\Big\}$$

Entonces, existe $X_2 \in M_2$ tal que

$$D_H(X_2) = \inf_{X\in M_2} D_H(X) .$$

Como antes, X_2 es una solución débil de (N) y $X_2 \neq g$. Además, $X_2 \neq X_1$ pues $X_1 \notin M_2$.

De esta forma definimos una sucesión $(X_n) \subset W^{2,\infty}(B,\mathbf{R}^3)$ de soluciones débiles de (N) en $W^{2,\infty}(B,\mathbf{R}^3)$, y por la definición de la sucesión (δ_n), $X_n \to g$ en $W^{2,\infty}(B,\mathbf{R}^3)$.

□

OBSERVACIÓN. Si $\|Q\|_\infty < 3/2$ la condición $\|H\|_\infty \|g\|_\infty < 3/2$ no es necesaria. En este caso, podemos definir la sucesión de subconjuntos convexos de $H^2(B,\mathbf{R}^3)$ de la manera siguiente:

$$M_1 = \Big\{g + \varphi; \varphi \in H^2(B, \mathbf{R}^3),\ Tr\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} = Tr\,\varphi = 0 \quad \text{y}$$
$$\|\varphi\|_\infty + \|\nabla\varphi\|_\infty + \sum_{1\le i,j\le 2} \|\partial_{ij}\varphi\|_\infty \le c - \|\nabla g\|_\infty\Big\},$$

$$\delta_2 = \min\Big\{c - \|\nabla g\|_\infty, \frac{1}{2}(\|X_1 - g\|_\infty + \|\nabla(X_1 - g)\|_\infty + \sum_{1\le i,j\le 2} \|\partial_{ij}(X_1 - g)\|_\infty)\Big\} \text{ y}$$

$$M_2 = \Big\{g + \varphi; \varphi \in H^2(B, \mathbf{R}^3);\ Tr\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} = Tr\,\varphi = 0 \quad \text{y}$$
$$\|\varphi\|_\infty + \|\nabla\varphi\|_\infty + \sum_{1\le i,j\le 2} \|\partial_{ij}\varphi\|_\infty \le \delta_2\Big\}.$$

OBSERVACIÓN. Supongamos que H tiene como únicos ceros a una sucesión (ξ_n) que converge a $\xi_0 \in \mathbf{R}^3$. Entonces, para $f = 0$, la función constante $g \equiv \xi_0$ es una solución débil de (N), hay una sucesión $g_k \equiv \xi_k$ de soluciones débiles de (N) y es posible que g no sea un mínimo local de D_H.

4.3. Resultados tipo unicidad

TEOREMA 4.3.1. *Sea $X \in H^2(B, \mathbf{R}^3)$ una solución débil de* (N) *y supongamos que $H \in \mathbf{R}$ y $f = 0$. Entonces X es constante.*

Demostración. Como en el Teorema 2.2.2, extendemos X a $\mathbf{R}^2\backslash\overline{B}$ por inversión respecto de ∂B, o sea, para $r^2 = u^2 + v^2$ definimos

$$Y(u,v) = \begin{cases} X(u,v) & \text{en } B \\ X(u/r^2, v/r^2) & \text{en } \mathbf{R}^2\backslash\overline{B}, \end{cases}$$

y a partir de esto, si la medida conforme de Y es la aplicación

$$F(u,v) = |Y_u|^2 - |Y_v|^2 - 2iY_u \cdot Y_v$$

tenemos que $F \in C(\mathbf{C}, \mathbf{C})$, ya que las derivadas tangencial y normal coinciden en ∂B y F es holomorfa en $\mathbf{C}\backslash\partial B$, entonces F es holomorfa en $\mathbf{C}$ y

$$\int_{\mathbf{R}^2} |F(u,v)| \le 2\int_{\mathbf{R}^2}(|Y_u|^2 + |Y_v|^2) = 4\int_B(|Y_u|^2 + |Y_v|^2) =$$
$$= 4\int_B(|X_u|^2 + |X_v|^2) < +\infty.$$

Luego $F \equiv 0$, y por lo tanto,

$$\begin{aligned} |Y_u|^2 + |Y_v|^2 &= Y_u \cdot Y_v = 0 \quad \text{y en particular} \\ |X_u|^2 + |X_v|^2 &= X_u \cdot X_v = 0 \quad \text{en } \overline{B} . \end{aligned}$$

Pero entonces, por el Corolario 2.2.1,

$$\left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right| = \left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right| , \quad \text{y } \frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial X}{\partial \sigma} = 0 \quad \text{en } \partial B ,$$

y como $\dfrac{\partial X}{\partial \eta} = 0$ en ∂B, X resulta una solución al problema

$$\begin{cases} \Delta X = 2H\, X_u \wedge X_v & \text{en } B \\ X = c & \text{en } \partial B \end{cases}$$

donde $c \in \mathbf{R}^3$ es una vector constante.

Por [We], $X \equiv c$. $\square$

Capítulo 5

En este capítulo estudiaremos el problema de Plateau para superficies de curvatura media prescripta.

Dada una curva de Jordan Γ en $\mathbf{R}^3$ y una aplicación $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, llamaremos problema de Plateau para superficies de curvatura media prescripta al sistema de ecuaciones diferenciales

$$(5.1) \qquad \begin{cases} \Delta X = 2H(X) X_u \wedge X_v \text{ en } B \\ |X_u|^2 - |X_v|^2 = X_u \cdot X_v = 0 \text{ en } B \end{cases}$$

con la condición de contorno

$$(5.2) \qquad X\big|_{\partial B} : \partial B \to \Gamma \text{ es una parametrización de } \Gamma .$$

Estudiaremos la existencia de soluciones débiles del problema de Plateau, esto es, de funciones $X \in H^1(B, \mathbf{R}^3)$ que verifiquen (5.1) en forma débil y (5.2) en un sentido a precisar.

Llamaremos (P) al sistema de ecuaciones diferenciales (5.1) con la condición de contorno (5.2) y veremos que existe una solución débil de (P) que es un mínimo global de D_H en un subconjunto apropiado de $H^1(B, \mathbf{R}^3)$ y que bajo determinadas condiciones para H se obtienen soluciones que son mínimos locales de D_H en subconjuntos convexos y cerrados de $H^2(B, \mathbf{R}^3)$. Además, damos condiciones necesarias para que exista una solución de (P) en $C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^3) \cap C^2(B, \mathbf{R}^3)$.

5.1. Soluciones al problema de Plateau para superficies de curvatura media prescripta H en $H^1(B, \mathbf{R}^3)$.

Para precisar el significado de solución débil de (P), definimos los siguientes subconjuntos de $H^1(B, \mathbf{R}^3)$:

$$C(\Gamma) = \{X \in H^1(B, \mathbf{R}^3);\ Tr\, X \in C(\partial B, \mathbf{R}^3) \text{ es una parametrización débilmente monótona de } \Gamma\}$$

y

$$C^*(\Gamma) = \{X \in C(\Gamma);\ X(P_j) = Q_j \quad j = 1,2,3\}$$

donde $P_j = e^{2\pi i j/3}$ y $Q_j \in \Gamma \quad j = 1,2,3$.

Se sabe ([St1], p.19) que $C^*(\Gamma)$ es un subconjunto de $H^1(B,\mathbf{R}^3)$ débilmente cerrado, mientras que ([St1], p.15) $C(\Gamma)$ no lo es, y que si Γ es una curva de Jordan rectificable, $C(\Gamma)$ es no vacío ([St1], p.20). Además, se sabe ([St1], Lema 2.2, Parte I) que si $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$ es un punto crítico de $D(X) = \frac{1}{2}\int_B |\nabla X|^2$ en el siguiente sentido:

$$\frac{d}{d\varepsilon} D(X \circ g_\varepsilon^{-1}, B_\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = 0 \tag{5.3}$$

para toda familia de difeomorfismos $g_\varepsilon : \overline{B} \to \overline{B}_\varepsilon$ que dependen en forma diferenciable de un parámetro $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ con $g_0 = id$, entonces X satisface

$$|X_u|^2 - |X_v|^2 = X_u \cdot X_v = 0 \quad \text{p.p. en } B,$$

y que el resultado continúa siendo válido si sólo se consideran familias de difeomorfismos que conservan la orientación.

Supongamos ahora que $H \in L^\infty(\mathbf{R}^3) \cap C^1(\mathbf{R}^3)$

DEFINICIÓN 5.1.1. Diremos que $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$ es una solución débil de (P) si $X \in C(\Gamma)$, X es un punto crítico de D en el sentido de (5.3) y además,

$$\int_B (\nabla X \cdot \nabla\varphi + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot \varphi) = 0 \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)\,.$$

TEOREMA 5.1.1. *Supongamos que $H \in C(\mathbf{R}^3) \cap L^\infty(\mathbf{R}^3)$ y que el campo vectorial Q asociado a H satisface $\|Q\|_\infty < \frac{3}{2}$ y $\frac{\partial Q_i}{\partial \xi_j} \in L^\infty(\mathbf{R}^3)$, para $i \neq j$, $i,j = 1,2,3$. Entonces, dada una curva de Jordan rectificable Γ en $\mathbf{R}^3$, D_H tiene un mínimo $\underline{X}$ en $C^*(\Gamma)$ y $\underline{X}$ es una solución débil de* (P).

Demostración. En forma análoga al Teorema 3.1.1, tenemos que

$$|D_H(X)| \leq D(X) + \frac{2}{3}\int_B |Q(X)\cdot X_u \wedge X_v| \leq D(X) + \frac{2}{3}\|Q\|_\infty \leq 2D(X)$$

y por lo tanto, D_H resulta finita en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$. Además,

$$D_H(X) \geq D(X) - \frac{2}{3}\int_B |Q(X)\cdot X_u \wedge X_v| \geq D(X)\Big(1 - \frac{2}{3}\|Q\|_\infty\Big)\,,$$

y como $\|Q\|_\infty < \dfrac{3}{2}$, puede deducirse que D_H es coerciva en $C(\Gamma)$ ya que para $X \in H^1(B, \mathbf{R}^3)$ con $Tr\, X \in L^\infty(\partial B, \mathbf{R}^3)$ vale la siguiente desigualdad de Sobolev:

$$\begin{aligned}\|X\|_2^2 &\leq k_1\left(\|\nabla X\|_2^2 + \|X\|^2_{L^2(\partial B,\mathbf{R}^3)}\right) \leq k_2(D(X) + \|X\|^2_{L^\infty(\partial B,\mathbf{R}^3)}) \leq \\ &\leq k\, D(X) + k(\Gamma)\,,\end{aligned}$$

donde k_1, k_2, k y $k(\Gamma)$ son constantes positivas y $k(\Gamma)$ depende de Γ. Además, por el Lema 3.1.3, D_H es débilmente semicontinua inferiormente en $H^1(B, \mathbf{R}^3)$. Luego, como $C^*(\Gamma)$ es un subconjunto débilmente cerrado de $H^1(B, \mathbf{R}^3)$, existe $\underline{X} \in C^*(\Gamma)$ tal que

$$D_H(\underline{X}) = \inf_{X \in C^*(\Gamma)} D_H(X)\,.$$

Como $\underline{X} + \varepsilon\varphi \in C^*(\Gamma)$ para $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$, entonces $dD_H(\underline{X})(\varphi) = 0$ para $\varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3)$, y por el Lema 3.1.1, se deduce que

$$\int_B (\nabla \underline{X} \cdot \nabla\varphi + 2H(\underline{X})\underline{X}_u \wedge \underline{X}_v \cdot \varphi) = 0 \quad \text{para toda } \varphi \in C_0^1(B, \mathbf{R}^3).$$

Además, a partir del Lema 5.1.1 que demostramos a continuación y de la invariancia conforme de D [St1] resulta que:

$$\frac{d}{d\varepsilon} D_H(X \circ g_\varepsilon^{-1}, B_\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = \frac{d}{d\varepsilon} D(X \circ g_\varepsilon^{-1}, B_\varepsilon)\big|_{\varepsilon=0} = 0$$

para toda familia de difeomorfismos $g_\varepsilon = \overline{B} \to \overline{B}_\varepsilon$ tales que $g^1_{\varepsilon u} g^2_{\varepsilon v} - g^2_{\varepsilon u} g^1_{\varepsilon v} > 0$, o sea, las coordenadas (u, v) serán isotermas. □

TEOREMA 5.1.2. *Sea $\Gamma \subset \mathbf{R}^3$ una curva de Jordan rectificable tal que la solución al problema de Plateau es una función $g \in W^{2,\infty}(B, \mathbf{R}^3)$ y sea $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ cualquier función no nula que verifica las siguientes condiciones:*

i) *$H \in W^{1,\infty}(\mathbf{R}^3) \cap C^1(\mathbf{R}^3)$ y el campo vectorial Q asociado a H satisface $Q \in L^\infty(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3)$.*

ii) $\|H\|_\infty \|g\|_\infty < \dfrac{3}{2}$.

iii) *Existe un número real $c > \|\nabla g\|_\infty$ tal que $|H(\xi)| \leq \lambda_1^2/c^2\,(|\xi| - \|g\|_\infty)_+$ para todo $\xi \in \mathbf{R}^3$, donde $\lambda_1 > 0$ es el primer autovalor de $-\Delta$ en $H_0^1(B)$.*

Entonces g es una solución débil del problema de Plateau para la ecuación de curvatura media prescripta (P), *y si g no es un mínimo local de D_H en $W^{2,\infty}(B, \mathbf{R}^3) \cap$*

$\cap\{X \in H^2(B,\mathbf{R}^3);\ Tr\,\frac{\partial X}{\partial r} = Tr\,\frac{\partial g}{\partial r}\,,\ Tr\,\frac{\partial X}{\partial \sigma} = Tr\,\frac{\partial g}{\partial \sigma}\,,\ Tr\,X = Tr\,g\}$ existe una sucesión de soluciones débiles distintas de (P) con $X_n \to g$ en $W^{2,\infty}(B,\mathbf{R}^3)$.

Demostración. Si $X \in H^1(B,\mathbf{R}^3)$, entonces tenemos que

$$|H(X)| \leq \lambda_1^2/c^2\,(|X| - \|g\|_\infty)_+ \leq \lambda_1^2/c^2\,(|X| - |g|)_+ \leq \lambda_1^2/c^2\,|X-g| \quad \text{pp en } B.$$

Luego, $H(g) = 0$ y entonces, g resulta una solución débil de (P) en $H^1(B,\mathbf{R}^3)$.

Supongamos que g no es un mínimo local de D_H en $W^{2,\infty}(B,\mathbf{R}^3)\cap\Big\{X \in H^2(B,\mathbf{R}^3);$ $Tr\,\frac{\partial X}{\partial r} = Tr\,\frac{\partial g}{\partial r},\ Tr\,\frac{\partial X}{\partial \sigma} = Tr\,\frac{\partial g}{\partial \sigma},\ Tr\,X = Tr\,g\Big\}$, entonces si definimos

$$\delta_1 = \min\left\{c - \|\nabla g\|_\infty\,,\ \frac{3}{2\|H\|_\infty} - \|g\|_\infty\right\} \quad \text{y}$$

$$M_1 = \Big\{g+\varphi\,,\ \varphi \in H^2(B,\mathbf{R}^3)\,,\ Tr\,\frac{\partial \varphi}{\partial r} = Tr\,\frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = Tr\,\varphi = 0 \quad \text{y}$$
$$\|\varphi\|_\infty + \|\nabla\varphi\|_\infty + \sum_{1\leq i,j\leq 2} \|\partial_{ij}\varphi\|_\infty \leq \delta_1\Big\}$$

tenemos que M_1 es un subconjunto no vacío, convexo, cerrado y acotado de $H^2(B,\mathbf{R}^3)$. Luego, M_1 es un subconjunto débilmente compacto de $H^2(B,\mathbf{R}^3)$ y por el Lema 3.1.3, D_H es débilmente semicontinua inferiormente en M_1, ya que

$$\|Q(X)\|_\infty \leq \|H\|_\infty\|X\|_\infty \leq \|H\|_\infty(\|X-g\|_\infty + \|g\|_\infty) < \frac{3}{2}$$

para todo $X \in M_1$. Luego, existe $X_1 \in M_1$ tal que $D_H(X_1) = \inf_{X\in M_1} D_H(X)$ y como g no es un mínimo local de D_H en $W^{2,\infty}(B,\mathbf{R}^3)\cap\Big\{X \in H^2(B,\mathbf{R}^3);\ Tr\,\frac{\partial X}{\partial r} = Tr\,\frac{\partial g}{\partial r},\ Tr\,\frac{\partial X}{\partial \sigma} = Tr\,\frac{\partial g}{\partial \sigma},\ Tr\,X = Tr\,g\Big\}$, se sigue que $X_1 \neq g$.

Veamos que X_1 es una solución débil de (P):

Como M_1 es convexo, para todo $\varepsilon \in [0,1]$ tenemos que $D_H(X_1) \leq D_H(X_1 + \varepsilon(X - X_1))$ y por lo tanto, $0 \leq \frac{d}{d\varepsilon}D_H(X_1 + \varepsilon(X-X_1))\big|_{\varepsilon=0} = dD_H(X_1)(X - X_1)$, o sea, $dD_H(X_1)(X_1 - X) \leq 0$ para todo $X \in M_1$. Luego, $dD_H(X_1)(X_1 - g) \leq dD_H(X_1)(\varphi)$ para toda $\varphi \in C_0^2(B,\mathbf{R}^3)$ tal que $\|\varphi\|_\infty + \|\nabla\varphi\|_\infty + \sum_{1\leq i,j\leq 2}\|\partial_{ij}\varphi\|_\infty < \delta_1$, y entonces $dD_H(X_1)(X_1 - g) < 0$, o bien, $dD_H(X_1)(X_1 - g) = dD_H(X_1)(\varphi) = 0$, para toda $\varphi \in C_0^1(B,\mathbf{R}^3)$. Si sucede esto último, X_1 es una solución débil de (P). En efecto, $\int_B(\nabla X_1\cdot\nabla\varphi + 2H(X_1)X_{1u}\wedge X_{1v}\cdot\varphi) = 0$ para toda $\varphi \in C_0^2(B,\mathbf{R}^3)$ y

$Tr\,\dfrac{\partial X_1}{\partial r} = Tr\,\dfrac{\partial g}{\partial r}$, $Tr\,\dfrac{\partial X_1}{\partial \sigma} = Tr\,\dfrac{\partial g}{\partial \sigma}$, entonces, $\dfrac{\partial X_1}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial X_1}{\partial \sigma} = \dfrac{\partial g}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial g}{\partial \sigma} = 0$ pp en ∂B por el Corolario 2.2.1, pero por el Teorema 2.2.2, si $\dfrac{\partial X_1}{\partial \eta}\cdot\dfrac{\partial X_1}{\partial \sigma} = 0$ pp en ∂B, entonces $X_{1u}\cdot X_{1v} = |X_{1u}|^2 - |X_{1v}|^2 = 0$ pp en B, y como $Tr\,X_1 = Tr\,g$, X_1 resulta una solución débil de (P).

Resta ver que la primera opción no es posible.

Para esto notamos que si $X \in M_1$, $\|\nabla X\|_\infty \leq \|\nabla(X-g)\|_\infty + \|\nabla g\|_\infty \leq c$ y como $|H(X)| \leq \lambda_1^2/c^2\,|X-g|$ pp en B, tenemos que $\int_B 2H(X)X_u\wedge X_v\cdot(X-g) \geq -2\int_B |X_u\wedge X_v|\,\lambda_1^2/c^2\,|X-g|^2 \geq -\int_B |\nabla X|^2\,\lambda_1^2/c^2\,|X-g|^2 \geq -\lambda_1^2\|X-g\|_2^2 \geq -\|\nabla(X-g)\|_2^2$, y por otro lado, $\int_B \nabla g\cdot\nabla(X-g) = -\int_B \Delta g\cdot(X-g) = 0$ ya que g es armónica en B. Entonces,

$$\begin{aligned}
dD_H(X_1)(X_1-g) &= \int_B [\nabla X_1\cdot\nabla(X_1-g) + 2H(X_1)X_{1u}\wedge X_{1v}\cdot(X_1-g)] = \\
&= \int_B |\nabla(X_1-g)|^2 + \int_B \nabla g\cdot\nabla(X_1-g) + \int_B 2H(X_1)X_{1u}\wedge X_{1v}\cdot(X_1-g) \geq \\
&\geq \|\nabla(X_1-g)\|_2^2 - \|\nabla(X_1-g)\|_2^2 = 0\,.
\end{aligned}$$

Ahora, sean

$$\delta_2 = \min\Big\{\delta_1,\ \frac{1}{2}(\|X_1-g\|_\infty + \|\nabla(X_1-g)\|_\infty + \sum_{1\leq i,j\leq 2}\|\partial_{ij}(X_1-g)\|_\infty)\Big\} \quad \text{y}$$

$$\begin{aligned}
M_2 = \Big\{g+\varphi;\ \varphi\in H^2(B,\mathbf{R}^3),\ Tr\,\frac{\partial\varphi}{\partial r} = Tr\,\frac{\partial\varphi}{\partial\sigma} = Tr\,\varphi = 0 \quad \text{y}\\
\|\varphi\|_\infty + \|\nabla\varphi\|_\infty + \sum_{1\leq i,j\leq 2}\|\partial_{ij}\varphi\|_\infty \leq \delta_2\Big\}\,.
\end{aligned}$$

Nuevamente, existe $X_2\in M_2$ tal que $D_H(X_2) = \inf_{X\in M_2} D_H(X)$, X_2 es una solución débil de (P) y $X_2\neq g$. Además, como $X_1\notin M_2$, $X_2\neq X_1$. De esta forma se construye una sucesión $(X_n)\subset W^{2,\infty}(B,\mathbf{R}^3)$ de soluciones débiles distintas de (P) tal que $X_n\to g$ en $W^{2,\infty}(B,\mathbf{R}^3)$. □

Observación. Si $\|Q\|_\infty < \dfrac{3}{2}$ la condición $\|H\|_\infty\|g\|_\infty < \dfrac{3}{2}$ no es necesaria. En este caso, podemos definir la sucesión de subconjuntos convexos de $H^2(B,\mathbf{R}^3)$ de la manera siguiente:

$$M_1 = \Big\{ g + \varphi \, ; \; \varphi \in H^2(B, \mathbf{R}^3) \, , \; Tr \, \frac{\partial \varphi}{\partial r} = Tr \, \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = Tr \, \varphi = 0 \quad \text{y}$$
$$\|\varphi\|_\infty + \|\nabla \varphi\|_\infty + \sum_{1 \le i,j \le 2} \|\partial_{ij} \varphi\|_\infty \le c - \|\nabla g\|_\infty \Big\} \, ,$$

$$\delta_2 = \min \Big\{ c - \|\nabla g\|_\infty \, , \; \frac{1}{2} (\|X_1 - g\|_\infty + \|\nabla (X_1 - g)\|_\infty + \sum_{1 \le i,j \le 2} \|\partial_{ij} (X_1 - g)\|_\infty) \Big\} \quad \text{y}$$
$$M_2 = \Big\{ g + \varphi \, ; \; \varphi \in H^2(B, \mathbf{R}^3) \, , \; Tr \, \frac{\partial \varphi}{\partial r} = Tr \, \frac{\partial \varphi}{\partial \sigma} = Tr \, \varphi = 0 \quad \text{y}$$
$$\|\varphi\|_\infty + \|\nabla \varphi\|_\infty + \sum_{1 \le i,j \le 2} \|\partial_{ij} \varphi\|_\infty \le \delta_2 \Big\} \, .$$

LEMA 5.1.1. *V es invariante por reparametrizaciones de X que conservan la orientación, o sea, si $X \in H^1(B, \mathbf{R}^3)$ y $g \in C^1(\overline{B}, \mathbf{R}^2)$ es un difeomorfismo de B en un dominio $\widehat{B}$ con $det(dg) = g_{1u} g_{2v} - g_{2u} g_{1v} > 0$, entonces $V(X) = V(X \circ g^{-1})$.*

Demostración.

$$V(X \circ g^{-1}) = \frac{1}{3} \int_{\widehat{B}} Q(X \circ g^{-1}) \cdot (X \circ g^{-1})_{\overline{u}} \wedge (X \circ g^{-1})_{\overline{v}} d\overline{u} \, d\overline{v}$$

con $(\overline{u}, \overline{v}) = g(u,v)$ para $(u,v) \in B$. Pero

$$(X \circ g^{-1})_{\overline{u}} = X_u g^{-1}_{1\overline{u}} + X_v g^{-1}_{2\overline{u}} \quad \text{y}$$
$$(X \circ g^{-1})_{\overline{v}} = X_u g^{-1}_{1\overline{v}} + X_v g^{-1}_{2\overline{v}} \, .$$

Luego,

$$\begin{aligned} (X \circ g^{-1})_{\overline{u}} \wedge (X \circ g^{-1})_{\overline{v}} &= (X_u g^{-1}_{1\overline{u}} + X_v g^{-1}_{2\overline{u}}) \wedge (X_u g^{-1}_{1\overline{v}} + X_v g^{-1}_{2\overline{v}}) = \\ &= X_v \wedge X_u \, g^{-1}_{2\overline{u}} g^{-1}_{1\overline{v}} + X_u \wedge X_v g^{-1}_{1\overline{u}} g^{-1}_{2\overline{v}} = \\ &= X_u \wedge X_v (g^{-1}_{1\overline{u}} g^{-1}_{2\overline{v}} - g^{-1}_{1\overline{v}} g^{-1}_{2\overline{u}}) \, , \end{aligned}$$

donde $X_u \wedge X_v$ se evalúa en $g^{-1} \circ g(u,v) = (u,v)$, y entonces,

$$\begin{aligned} V(X \circ g^{-1}) &= \frac{1}{3} \int_B Q(X \circ g^{-1} \circ g) \cdot X_u \wedge X_v \frac{(g^{-1}_{1\overline{u}} g^{-1}_{2\overline{v}} - g^{-1}_{1\overline{v}} g^{-1}_{2\overline{u}})}{\left| \det \begin{pmatrix} g^{-1}_{1\overline{u}} & g^{-1}_{1\overline{v}} \\ g^{-1}_{2\overline{u}} & g^{-1}_{2\overline{v}} \end{pmatrix} \right|} du \, dv = \\ &= \frac{1}{3} \int_B Q(X) \cdot X_u \wedge X_v \, du \, dv \, , \end{aligned}$$

ya que si g preserva la orientación, g^{-1} también lo hace, y entonces

$$g^{-1}_{1\bar{u}} g^{-1}_{2\bar{v}} - g^{-1}_{1\bar{v}} g^{-1}_{2\bar{u}} > 0 . \quad \square$$

OBSERVACIÓN. La función H que verifica las hipótesis del Teorema 3.1.1 (pág. 33), también verifica las hipótesis del Teorema 5.1.1 y notamos que puede elegirse H_0 arbitrario tal que $H_0\Big(\sum_{i=1}^{3}(b_i+\varepsilon)^2\Big)^{1/2} < \dfrac{3}{2}$, y por otro lado, no se ha hecho ninguna hipótesis sobre Γ. Por lo tanto, ya no es necesaria la hipótesis "$\Gamma \subset B_R(0) \subset \mathbf{R}^3$ una curva de Jordan y $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ tal que $\|H\|_\infty R \le 1$", mientras que en el caso H constante, no puede eliminarse esta hipótesis ([St1], p.105, Resultado de no existencia de Heinz, y [He]). Sin embargo, a continuación daremos un resultado de no existencia que puede traducirse en una condición necesaria.

5.2. Resultados de no existencia de solución de (P) y condiciones necesarias.

TEOREMA 5.2.1. *Sea $\Gamma \in \mathbf{R}^3$ una curva de Jordan rectificable de longitud $L(\Gamma)$ y supongamos que existe un número δ que verifica las siguientes propiedades:*

i) $\delta > L(\Gamma)$,

ii) *Para todo $X \in C(\Gamma)$ existe un vector unitario en $\mathbf{R}^3$ que llamaremos η_X tal que $C_X = \int_B 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot \eta_X \ge \delta$.*

Entonces no existe $X \in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3) \cap C^2(B,\mathbf{R}^3)$ solución de (P).

Demostración. Si $X \in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3) \cap C^2(B,\mathbf{R}^3)$ es una solución de (P), entonces

$$C_X = \int_B 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot \eta_X = \int_B \Delta X \cdot \eta_X = \int_{\partial B} \frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot \eta_X \le$$
$$\le \int_{\partial B} \left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right| = \int_{\partial B} \left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right| = L(\Gamma) < \delta .$$

Contradicción, ya que por hipótesis $C_X \ge \delta$. $\square$

TEOREMA 5.2.2. *Sea $\Gamma \in \mathbf{R}^3$ una curva de Jordan rectificable de longitud $L(\Gamma)$, $H : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ continua y acotada, y supongamos que $X \in C^1(\overline{B},\mathbf{R}^3) \cap C^2(B,\mathbf{R}^3)$ es una solución de* (P) *que satisface $\|H(X)X\|_\infty < 1$. Entonces,*

$$D(X) \le \frac{L(\Gamma)\|X\|_\infty}{2(1 - \|H(X)X\|_\infty)} .$$

Demostración. Sabemos que $\Delta X = 2H(X)X_u \wedge X_v$ en B, entonces,

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_B [-\Delta X + 2H(X)X_u \wedge X_v] \cdot X = \int_B [|\nabla X|^2 + 2H(X)X_u \wedge X_v \cdot X] - \\
&\quad - \int_{\partial B} \frac{\partial X}{\partial \eta} \cdot X \geq 2D(X) - 2\|H(X)X\|_\infty \int_B |X_u \wedge X_v| - \|X\|_\infty \int_{\partial B} \left|\frac{\partial X}{\partial \eta}\right| d\sigma = \\
&= 2D(X)(1 - \|H(X)X\|_\infty) - \|X\|_\infty \int_{\partial B} \left|\frac{\partial X}{\partial \sigma}\right| d\sigma = \\
&= 2D(X)(1 - \|H(X)X\|_\infty) - \|X\|_\infty L(\Gamma) \,;
\end{aligned}
$$

de donde se deduce que

$$D(X) \leq \frac{L(\Gamma)\|X\|_\infty}{2(1 - \|H(X)X\|_\infty)} \,. \quad \square$$

Referencias

[A] Adams, R., *Sovolev Spaces*, Academic Press.

[A-S] Almgren, F., Simon, L., Existence of embedded solutions of Plateau's Problem, *Ann. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4)6 (1979), 447–495.

[A-R] Ambrosetti, A., Rabinowitz, P.H., Dual variational methods in critical point theory and applications, *J. Functional Analysis* 14 (1973), 349–381.

[B-C] Brezis, H., Coron, J.M., Multiple solutions of H–systems and Rellich's conjecture, *Comm. Pure Appl. Math.* 37 (1984), 149–184.

[C] Clark, D.C., A variant of the Lusternik–Schmirelman theory, *Indiana Univ. Math. J.* 22 (1972), 65–74.

[DC] Do Carmo, M., *Differential geometry of curves and surfaces*, Prentice–Hall, 1976.

[Do] Douglas, J., Solution of the problem of Plateau, *Trans. AMS* 33 (1931), 263–321.

[D-S] Dunford, N., Schwartz, J.T., *Linear Operators, Part 1*, Interscience Publishers, Inc., New York, 1957.

[G] Guofang, W., The Dirichlet Problem for the equation of prescribed mean curvature, preprint.

[G-T] Gilbarg, D., Trudinger, N.S., *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer–Verlag.

[Hi1] Hildebrandt, S., Boundary behavior of minimal surfaces, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 35 (1969), 47–82.

[Hi2] Hildebrandt, S., On the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature, *Comm. Pure Appl. Math.* 23 (1970), 97–114.

[Hi3] Hildebrandt, S., Randwertprobleme für Flächen mit vorgeschriebener mitterer Krümmung und Anwendungen auf die Kapillaritätstheorie Teil I. *Fest vorgegebener Rand. Math. Z.* 112 (1969), 205–213.

[He] Heinz, E., On the nonexistence of a surface of constant curvature with finite area and prescribed rectifiable boundary, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 35 (1969), 249–252.

[M-Y] Meeks, W.H., Yau, S.T., The classical Plateau Problem and the topology of three dimensional manifolds, *Top.* 21 (1982), 409–442.

[N] Nitsche, J.C.C., The boundary behavior of minimal surfaces. Kellog's theorem and branch points on the boundary, *Invent. Math.* 8 (1969), 313–333. Addendum, *Invent. Math.* 9 (1970), 270.

[O] Osserman, R., *A survey of minimal surfaces*, van Nostrand Reinhold Company.

[R1] Radó, T., On Plateau's problem, *Ann. of Math.* 31 (1930), 457–469.

[R2] Radó, T., The problem of least area and the problem of Plateau, *Math. Z.* 32 (1930), 763–796.

[Se] Serrin, J., The Dirichlet problem for surfaces of constant mean curvature, preprint.

[St1] Struwe, M., *Plateau's problem and the calculus of variations*, Lecture Notes, Princeton University Press.

[St2] Struwe, M., Non uniqueness in the Plateau problem for surfaces of constant mean curvature, *Arch. Rat. Mech. Anal.* 93 (1986), 135–157.

[St3] Struwe, M., On a critical point theory for minimal surfaces spanning a wire in R^n, *J. Reine Angew. Math.* 349 (1984), 1–23.

[St4] Struwe, M., Multiple solutions to the Dirichlet problem for the equation of prescribed mean curvature, preprint.

[T-T] Tomi, F., Tromba, A.J., Extreme curves bound embedded minimal surfaces of the type of the disc, *Math. Z.* 158 (1978), 137–145.

[We] Wente, H.C., The differential equation $\Delta X = 2H\, X_u \wedge X_v$ with vanishing boundary values, *Proc. AMS* 50 (1975), 59–77.

[Wi] Willem, M., Lectures on Critical Point Theory, *Trabalho de Matemática* 199, UnB, Brasilia, 1983.