Representación por haces y el teorema chino del resto

Vaggione, Diego J.

1991

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA

REPRESENTACION POR HACES Y EL TEOREMA CHINO DEL RESTO

Por Diego J. Vaggione

Trabajo de Tesis para optar al Título de Doctor en Matemática.

Director de Tesis: **Doctor Roberto L. O. Cignoli.**

DEDICADO AFECTUOSAMENTE A MIS PADRES, HUGO Y BEBY

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a mi director de tesis el Dr Roberto Cignoli por muchas valiosas conversaciones sobre este trabajo, en particular por su sugerencia de aplicar la dualidad de Priestley para investigar el TCHR en los reticulados distributivos. Un afectuoso agradecimiento para Guillermo Martínez y su esposa, Eugenia, por su amable hospitalidad. Mi agradecimiento a la FaMAF por el apoyo brindado. Quiero expresar mi profundo agradecimiento y apreciación al Dr. Oscar Cámpoli, Decano de la FaMAF, por su apoyo, aliento y consejo. Si en ciertas difíciles circunstancias su apoyo no hubiera estado presente, este trabajo jamás hubiera llegado a su fin. Mi agradecimiento al profesor David M. Clark por su cuidadosa lectura de este trabajo y sus útiles comentarios, correcciones y sugerencias. También quiero agradecer a mis padres por el infinito apoyo brindado.

Finalmente, quiero más que todo expresar mi afectuosa gratitud y apreciación a mi esposa, Silvia, por su especial personalidad.

Diego J. Vaggione

Córdoba, Octubre de 1991

INTRODUCCION.

D. M. Clark y P. H. Krauss [9] llaman a un álgebra globalmente (Booleanamente) representable por una clase de álgebras $\mathcal{M}$ si es isomorfa al álgebra de las secciones globales de un haz subdirecto (es decir, las secciones globales son producto subdirecto de las fibras) cuyo espacio base es compacto y T_0 (resp. un espacio Booleano donde los ecualizadores de las secciones globales son abiertos y cerrados) y cuyas fibras pertenecen a $\mathcal{M}$ o son triviales y a lo sumo una fibra es trivial. Este trabajo presenta caracterizaciones generales de la representabilidad global y Booleana de un álgebra A por una clase $\mathcal{M}$. Tales caracterizaciones son dadas en términos de propiedades del reticulado de congruencias de A. Unos pocos y simples conceptos nuevos son definidos (es decir, compacidad de un conjunto de congruencias, proyectivo sobre A, el Teorema Chino del Resto (en sus distintas versiones), etc) los cuales son suficientes para expresar las caracterizaciones.

En la Sección 1 fijamos notación y terminología y repasamos algunos hechos bien conocidos los cuales serán necesitados más adelante. En la Sección 2 definimos dos nociones centrales: compacidad de un conjunto de congruencias y el Teorema Chino del Resto (en sus distintas versiones). En la Sección 3 se dan caracterizaciones generales de la representabilidad global y (localmente) Booleana. El Problema 6.11 de [9], para el caso de variedades de congruencias distributivas es parcialmente resuelto. El Problema 6.19 de [9] es resuelto. Finalmente la noción de espectro es definida y la relación que hay entre las tres topologías que naturalmente súrgen en un espectro (localmente) Booleano es descripta. En la Sección 4 damos una generalización del método uniforme de construir productos subdirectos globales a partir de la propiedad de emparche dado por Clark y

Krauss en [9]. El Teorema 4.23 de [9] es mejorado. En la Sección 5 usamos el esquema constructivo dado en la Sección 4 para obtener una generalización de la construcción de Pierce para anillos. En la Sección 6 la representabilidad de Stone es definida y, usando la construcción descripta en la Sección 4, se obtienen teoremas que relacionan la representabilidad global y la de Stone. Es dada una generalización del resultado de Ledbetter expuesto en [9, pag. 83], la cual mejora sustancialmente el Teorema 6.7 de aquel trabajo. Finalmente damos un teorema que relaciona la representabilidad Booleana con la de Stone. En la Sección 7 aplicamos los resultados a álgebras en variedades con congruencias principales definibles. Se da una caracterización en primer orden de la propiedad de verificar el Teorema Chino del Resto débil y bajo ciertas hipótesis la representabilidad global es también caracterizada en primer orden. En la Sección 8 se dan algunas aplicaciones a reticulados distributivos, anillos, reticulados distributivos pseudocomplementados, anillos reticulados, variedades de expansiones reticuladas y álgebras de De Morgan. En el caso de los reticulados distributivos (o más generalmente expansiones de reticulados distributivos) la dualidad de Priestley resulta ser sorprendentemente eficáz en el estudio del Teorema Chino del Resto, permitiéndonos probar por ejemplo que los reticulados distributivos son caracterizables como los reticulados globalmente representables por cadenas de dos y tres elementos.

Se ha incluído un apéndice con los hechos y definiciones sobre teoría de haces que serán necesarios aquí.

1. PRELIMINARES.

Trabajaremos siempre con álgebras de algún tipo fijo. Ya que ordinariamente no hay confusión usaremos la misma letra para denotar un álgebra y su universo. A lo largo de este trabajo usaremos la misma notación y terminología que la de [9]. A continuación daremos un breve resumen de los principales conceptos. Si $\mathcal{K}$ es una clase de álgebras, entonces $I(\mathcal{K})$, $S(\mathcal{K})$ y $H(\mathcal{K})$ denotarán las clases de imágenes isomórficas, subálgebras e imágenes homomórficas de miembros de $\mathcal{K}$ respectivamente, y $P_u(\mathcal{K})$ denotará la clase de ultraproductos de subconjuntos de $\mathcal{K}$. Sea $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ producto subdirecto. Para cada $F \subseteq I$, π_F es la <u>proyección</u> de $\Pi\{A_i \quad i \in I\}$ sobre $\Pi\{A_i : i \in F\}$, y θ_F^A es la <u>congruencia</u> <u>proyección</u> sobre A inducida por π_F. Para $i,j \in I$ definamos $i \sim j$ (A) sii $\theta_i^A = \theta_j^A$. $J \subseteq I$ es llamado <u>A-transversal</u> si para todo $i,j \in J$, $i \sim j$ (A) si y sólo si $i = j$. J es llamado <u>A-completo</u> si para todo $i \in I$ existe $j \in J$ tal que $i \sim j$ (A). A es llamada <u>irredundante</u> si I es A-transversal. Para $x,y \in \Pi\{A_i : i \in I\}$ definimos $E(x,y) = \{i \in I : x(i) = y(i)\}$, el <u>ecualizador</u> de x e y, y $D(x,y) = \{i \in I : x(i) \neq y(i)\}$, el <u>discriminador</u> de x e y. Sea τ_E^A la <u>topología</u> <u>de</u> <u>los</u> <u>ecualizadores</u> <u>inducida</u> <u>por</u> <u>A</u>, es decir, la topología con subbase formada por los subconjuntos de la forma $E(x,y)$, donde $x,y \in A$. Es fácil probar que la topología de los ecualizadores es T_0 si y sólo si A es irredundante.

Para cualquier álgebra A, $\mathbb{1}^A$ es la congruencia universal sobre A y $\mathbb{0}^A$ es la congruencia trivial sobre A. CON(A) denotará el reticulado de congruencias de A. $\theta \in CON(A)$ es llamada <u>completamente</u> <u>meet</u> <u>irreducible</u> si $\theta \neq \mathbb{1}^A$ y para toda familia $\{\delta_i \quad i \in I\} \subseteq CON(A)$, si $\theta = \cap\{\delta_i \quad i \in I\}$, entonces $\theta = \delta_i$ para algún $i \in I$. θ es llamada <u>meet</u> <u>irreducible</u> si $\theta \neq \mathbb{1}^A$ y para todo $\sigma, \delta \in CON(A)$ si $\theta = \sigma \cap \delta$, entonces $\theta = \sigma$ or $\theta = \delta$. Un álgebra A es llamada <u>subdirectamente</u> <u>indescomponible</u> si $\mathbb{0}^A$ es meet irreducible.

Sea nuevamente $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ producto subdirecto. Para cada $F \subseteq I$

definamos $\overline{F} = \{i \in I : \theta^A_F \leq \theta^A_i\}$, $F \to \overline{F}$ es un operator de clausura, y con $\mathcal{R}^A$ denotaremos el reticulado completo de los subconjuntos cerrados. Cuando $F \to \overline{F}$ es un operador de clausura topológico (i.e. $\overline{\emptyset} = \emptyset$ y $\overline{F \cup G} = \overline{F} \cup \overline{G}$ para todo $F,G \subseteq I$) decimos que A <u>induce</u> una topología cápsula-núcleo sobre I y la topología es llamada la <u>topología</u> <u>cápsula-núcleo</u> sobre I (inducida por A). (Ver [9, Sección 3] por un detallado análisis de este tema).

Sea A un álgebra. Por un <u>semireticulado</u> <u>de</u> <u>congruencias</u> sobre A entenderemos un join-semireticulado $\mathfrak{J} = \langle \mathfrak{J}, \vee \rangle$ cuyos elementos son congruencias sobre A y cuyo orden es la relación de inclusión (es decir, $\delta = \delta \vee \theta$ sii $\theta \leq \delta$, para todo $\theta,\delta \in \mathfrak{J}$). Por un <u>reticulado</u> <u>de</u> <u>congruencias</u> sobre A entenderemos un reticulado $\mathfrak{L}$ cuyos elementos son congruencias sobre A y para todo $\theta,\delta \in \mathfrak{L}$, $\inf(\theta,\delta) = \theta \cap \delta$. Note que en ambos casos la operación supremo no necesariamente será la operación supremo de CON(A). Además, note que si $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{L}, \vee, \dots \rangle$ es un reticulado de congruencias sobre A, donde $\vee$ es la operación supremo de $\mathfrak{L}$, entonces $\langle \mathfrak{L}, \vee \rangle$ es un semireticulado de congruencias sobre A. Si $\mathfrak{C}$ es un reticulado de congruencias sobre A, completo y tal que $\inf_{i \in I}(\theta_i) = \cap\{\theta_i \quad i \in I\}$ para todo $\{\theta_i \quad i \in I\} \subseteq \mathfrak{C}$, entonces diremos que $\mathfrak{C}$ es un <u>proyectivo</u> sobre A. (Si $\theta = \cap\mathfrak{C}$, entonces $\mathfrak{C}$ está naturalmente identificado con el reticulado de las congruencias proyección de un producto subdirecto $B \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ isomorfo a A/θ). Sea $\Sigma \subseteq$ CON(A). Con $< \Sigma >$ denotaremos el proyectivo cuyo universo es

$$\{\cap\Delta : \Delta \subseteq \Sigma\},$$

y para $\{\theta_i \quad i \in I\} \subseteq \{\cap\Delta : \Delta \subseteq \Sigma\}$:

$$\inf(\theta_i \quad i \in I) = \cap\{\theta_i \quad i \in I\}$$

$$\sup(\theta_i \quad i \in I) = \vee\{\theta_i \quad i \in I\} = \cap\{\theta : \theta \in \Sigma \text{ y } \theta_i \leq \theta \text{ para } i \in I\}.$$

Una congruencia θ es llamada <u>Σ-irreducible</u> si θ no es la congruencia universal y para todo $\sigma, \delta \in \langle \Sigma \rangle$, si $\sigma \cap \delta \subseteq \theta$, entonces $\sigma \subseteq \theta$ o $\delta \subseteq \theta$. θ es llamada <u>irreducible</u> si θ es CON(A)-irreducible. $\Sigma \subseteq$ CON(A) es un <u>conjunto</u> <u>cápsula-núcleo</u> si todo $\theta \in \Sigma$ es Σ-irreducible. Es fácil de chequear que si $A \subseteq \Pi\{A_i \;\; i \in I\}$ es subdirecto, entonces A induce una topología cápsula-núcleo sobre I sii $\{\theta_i^A : i \in I\}$ es un conjunto cápsula-núcleo. (Ver [9, Sección 3]).

Supongamos $A \subseteq \Pi\{A_i \;\; i \in I\}$ es subdirecto, entonces definamos:

$$\mathcal{B}_E^A = \{\bigcap_{k=1}^{n} E(x_k, y_k) \quad x_k, y_k \in A \text{ para } k=1,\dots,n,\ n \geq 1\}.$$

Sea $\mathfrak{C}$ un proyectivo sobre A, para $x, y \in A$ definamos:

$$\theta_{(x,y)}^{\mathfrak{C}} = \cap\{\theta \in \mathfrak{C} : (x,y) \in \theta\}.$$

Los elementos de la forma $\theta_{(x,y)}^{\mathfrak{C}}$ son llamados los elementos <u>principales</u> de $\mathfrak{C}$. Con $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$ denotamos el semireticulado de congruencias sobre A:

$$\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}} = \langle\{\bigvee_{k=1}^{n} \theta_{(x_k, y_k)}^{\mathfrak{C}} : x_k, y_k \in A,\ k=1,\dots,n,\ n \geq 1\}, \vee\rangle.$$

Si $\mathfrak{C} = \langle \Sigma \rangle$, entonces a menudo escribiremos $\theta_{(x,y)}^{\Sigma}$ en lugar de $\theta_{(x,y)}^{\mathfrak{C}}$ y $\mathfrak{I}_{\Sigma}$ en lugar de $\mathfrak{I}_{\mathfrak{C}}$.

Nota: Suprimiremos los superíndices de θ_F^A, $\mathcal{R}^A$, τ_E^A, $\mathcal{B}_E^A$, $\mathbb{1}^A$ y $\mathbb{0}^A$, cuando el contexto permita deducirlos.

Lema 1.1: Supongamos que $A \subseteq \Pi\{A_i \;\; i \in I\}$ es subdirecto y sea $\Sigma = \{\theta_i \;\; i \in I\}$. Entonces:

(1) $F \to \theta_F$ es un antiisomorfismo entre el reticulado $\mathcal{R}$ de los conjuntos cerrados de I y el proyectivo $\langle \Sigma \rangle$.

(2) $F \to \theta_F$ es un isomorfismo entre el semireticulado $\langle \mathcal{B}_E, \cap \rangle$ y $\mathfrak{I}_{\Sigma}$.

Prueba: **(1)**. Sea $\theta \in \langle \Sigma \rangle$. Entonces $\theta = \cap\{\theta_i \;\; i \in F\}$ para algún $F \subseteq I$. Es fácil de chequear que $\theta = \theta_F$ y por (ii) de 3.15 de [9] tenemos que $\theta = \theta_{\bar{F}}$. Así el mapeo:

$$\mathcal{R} \to \langle \Sigma \rangle$$
$$F \to \theta_F$$

es suryectivo. Además por (i) de 3.15 de [9] tenemos que para todo $F, G \in \mathcal{R}$, $F \subseteq G$ sii $\theta_G \leq \theta_F$, y $\therefore F \to \theta_F$ es un antiisomorfismo entre $\mathcal{R}$ y $\langle \Sigma \rangle$.

(2). Es fácil de chequear que $\theta_{E(x,y)} = \theta^{\Sigma}_{(x,y)}$ para todo $x, y \in A$. **(2)** sigue de **(1)** y la observación de que $E(x,y) \in \mathcal{R}$ para todo $x, y \in A$. ∎

La validez general del Lema 1.1 deja clara la ventaja de trabajar con el concepto de proyectivo. El Lema 1.1 se aplica a todo producto subdirecto, y así la hipótesis de total expansión de [9] es evitada. Como veremos, la validez general del Lema 1.1 será vital en el desarrollo de nuestras caracterizaciones ya que nos permitirá traducir las propiedades de ciertas representaciones subdirectas especiales de un álgebra A en propiedades reticulares de CON(A).

2. COMPACIDAD DE UN CONJUNTO DE CONGRUENCIAS. DISTINTAS VERSIONES DEL TEOREMA CHINO DEL RESTO.

Sea X cualquier conjunto. Supongamos que $\mathcal{A}, \mathcal{B} \subseteq \{Y : Y \subseteq X\}$. Entonces decimos que $\mathcal{A}$ minoriza $\mathcal{B}$ cuando para cada $Y \in \mathcal{B}$ existe $Z \in \mathcal{A}$ tal que $Z \subseteq Y$. Si $Z \subseteq X$, decimos que Z minoriza $\mathcal{B}$ cuando $\{\{z\} \quad z \in Z\}$ minoriza $\mathcal{B}$. Un conjunto $\Sigma \subseteq \mathrm{CON}(A)$ es llamado compacto si para todo conjunto $S \subseteq A \times A$ el cual minoriza Σ existe un conjunto finito $S_o \subseteq S$ el cual minoriza Σ.

Nota: Si consideramos en CON(A) la topología con subbase $\{\{\theta \in \mathrm{CON}(A) \quad (x,y) \in \theta\} \quad x, y \in A\}$, entonces CON(A) resulta un reticulado topológico ([2, pag. 63]), y la noción de compacidad recién definida coincide con la de este reticulado topológico.

Ejemplos 2.1: a) *El conjunto de las congruencias maximales de un reticulado distributivo es compacto.* Sea L un reticulado distributivo. Es bien conocido que las congruencias maximales de L están identificadas con los ideales primos de L por la correspondencia:

$$P \to \theta_P = \{(x,y) : x \in P \text{ sii } y \in P\}.$$

Supongamos que $S \subseteq A \times A$ minoriza $\{\theta_P\}$. Si para todo par S_1, S_2 de subconjuntos finitos de S tubieramos que:

$$\vee\{x \wedge y : (x,y) \in S_1\} \geq \wedge\{x \vee y : (x,y) \in S_2\},$$

entonces por el teorema del ideal primo habría un ideal primo de L conteniendo el conjunto $\{x \wedge y : (x,y) \in S\}$ y disjunto de $\{x \vee y : (x,y) \in S\}$, lo cual contradiceria la hipótesis de que S minoriza $\{\theta_P\}$. O sea que existen subconjuntos finitos S_1, S_2 de S tales que:

$$a = \vee\{x \wedge y : (x,y) \in S_1\} \geq \wedge\{x \vee y : (x,y) \in S_2\} = b.$$

Sea P un ideal primo de L. Si $a \in P$, entonces $b \in P$ y $\therefore$ existe $(x,y) \in S_2$ tal que $x \vee y \in P$ lo cual implica que $(x,y) \in \theta_P$. En forma similar podemos obtener que si $a \notin P$, entonces $(x,y) \in \theta_P$ para algún $(x,y) \in S_1$. Así tenemos probado que $S_1 \cup S_2$ minoriza $\{\theta_P\}$.

b) *El conjunto de las congruencias primas de un anillo conmutativo es compacto.* Sea A un anillo conmutativo ($A = \langle A,+,-,\cdot,0\rangle$). Sea P un ideal primo de A. Definamos:

$$\theta_P = \{(x,y) : x - y \in P\}.$$

Supongamos que $S \subseteq A \times A$ minoriza $\{\theta_P\}$ y sea $M = \{\prod_{k=1}^{n}(x_k - y_k) : (x_k, y_k) \in S\}$. Si $0 \notin M$, entonces existe un ideal primo P tal que $P \cap M = \emptyset$, ([12, pag. 105, Lema 2]), lo cual es absurdo ya que S minoriza $\{\theta_p\}$. Así $0 \in M$ y $\therefore$ $\{\theta_p\}$ es compacto. ∎

Sea $\theta \in CON(A)$. Para $\delta \in CON(A)$, $\delta \geq \theta$, definamos $\delta/\theta = \{(x/\theta, y/\theta) : (x,y) \in \delta\}$. Para $\Sigma \subseteq CON(A)$ definamos $\Sigma/\theta = \{\delta/\theta : \delta \geq \theta, \delta \in \Sigma\}$. El siguiente lema es bien conocido.

Lema 2.2:

(1) $\delta/\theta \in CON(A/\theta)$.

(2) $(x/\theta, y/\theta) \in \delta/\theta$ sii $(x,y) \in \delta$.

(3) $A/\theta/\delta/\theta \to A/\delta$ es un isomorfismo.

$[x/\theta]_{\delta/\theta} \to x/\delta$

(4) $\langle\{\delta \in CON(A) : \delta \geq \theta\}, \vee, \wedge\rangle \to CON(A/\theta)$ es un isomorfismo.

$$\delta \to \delta/\theta$$

Prueba: **(1)**. Ver [4, pag. 47, Lema 6.14]. **(2)**. Use que $\delta \geq \theta$. **(3)**. Ver [4, pag. 47, Teorema 6.15]. **(4)**. Ver [4, pag. 49, Teorema 6.20]. ∎

Lema 2.3: Sea $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ subdirecto y supongamos $F \subseteq I$. Entonces F es compacto (con respecto a τ_E) si y sólo si $\{\theta_i \quad i \in F\}$ es compacto.

Prueba: Es fácil de chequear que $\bigcup_{r \in R}(E(x_r, y_r) \cap F) = F$ si y sólo si $\{(x_r, y_r) : r \in R\}$ minoriza $\{\theta_i \quad i \in F\}$, y $\therefore$ la prueba puede ser completada aplicando el Teorema de Alexander [8]. ∎

Corolario 1: $\Sigma \subseteq CON(A)$ es compacto sii la topología de los ecualizadores inducida por la imagen de $A \to \Pi\{A/\theta : \theta \in \Sigma\}$ es compacta.

Prueba: Sea $\theta = \cap\Sigma$. Note que si $S \subseteq A^2$, entonces por **(2)** del Lema 2.2 tenemos que S minoriza Σ sii S/θ minoriza Σ/θ, donde

$S/\theta = \{(x/\theta, y/\theta) : (x,y) \in S\}$. Así tenemos que Σ es compacto sii Σ/θ es compacto. Además, sea $g : A \to \Pi\{A/\delta : \delta \in \Sigma\}$ definida por $g(x) = (x/\delta)_{\delta\in\Sigma}$, $x \in A$. Σ/θ está identificado con $\{\theta_\delta^{g(A)} : \delta \in \Sigma\}$ via el isomorfismo:

$$A/\theta \to g(A),$$

$$x/\theta \to g(x)$$

y $\therefore$ Σ/θ es compacto sii $\{\theta_\delta^{g(A)} : \delta \in \Sigma\}$ es compacto. Así por el Lema 2.3 tenemos que Σ es compacto sii la topología de los ecualizadores sobre Σ inducida por $g(A)$ es compacta. ■

Lema 2.4: Sea $\Sigma \subseteq CON(A)$ compacto, y supongamos que $\theta \geq \cap\Sigma$ es una congruencia Σ-irreducible. Entonces existe $\delta \in \Sigma$ tal que $\theta \geq \delta$.

Prueba: Supongamos no existe un tal δ. Entonces para cada $\delta \in \Sigma$ sea $(x_\delta, y_\delta) \in \delta - \theta$. El conjunto $\{(x_\delta, y_\delta) : \delta \in \Sigma\}$ minoriza Σ y existe un conjunto finito $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, tal que $\{(x_\delta, y_\delta) : \delta \in \Sigma_0\}$ minoriza Σ. Así, tenemos:

$$\cap\{\theta^{\Sigma}_{(x_\delta, y_\delta)} \quad \delta \in \Sigma_0\} \subseteq \cap\Sigma \subseteq \theta,$$

lo cual contradice la Σ-irreducibilidad de θ. ■

Diremos que $\Sigma \subseteq CON(A)$ es <u>denso</u> cuando $\cap\Sigma = \mathbb{0}$. Con $MAX(A)$ (respectivamente, $MI(A)$, $IRR(A)$, $CMI(A)$) denotaremos el conjunto de congruencias maximales (respectivamente, meet-irreducibles, irreducibles, completamente meet-irreducibles). Ahora daremos algunas consecuencias del Lema 2.4.

Corolario 1: Si A es subdirectamente indescomponible, entonces Σ es compacto denso sii $\mathbb{0} \in \Sigma$.

Prueba: Ya que A es subdirectamente indescomponible, entonces $\mathbf{0}$ es irreducible. ∎

Corolario 2: Sea Σ un conjunto cápsula-núcleo. Cualquier subconjunto de $< \Sigma >$ compacto denso minoriza Σ. Si Σ contiene un subconjunto compacto denso, entonces Σ es compacto. ∎

Corolario 3: Si A es de congruencias distributivas y $\Sigma \subseteq MAX(A)$ es compacto denso, entonces $\Sigma = MAX(A) = CMI(A) = MI(A) = IRR(A)$.

Prueba: Ya que A es de congruencias distributivas tenemos que $IRR(A) = MI(A)$ (ver [9, Sección 3]). Ahora aplique el Corolario 2. ∎

Sea $\mathfrak{J} = <\mathfrak{J}, \vee>$ un semireticulado de congruencias sobre A. Entonces decimos que <u>$\mathfrak{J}$ verifica el Teorema Chino del Resto (débil)</u> cuando para todo $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathfrak{J}$, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in A$, si $(x_k, x_l) \in \theta_k \vee \theta_l$ para $1 \leq k, l \leq n$ (y $\theta_1 \cap \theta_2 \cap \ldots \cap \theta_n = \mathbf{0}$), entonces existe $x \in A$ tal que $(x, x_k) \in \theta_k$, para todo $k=1,\ldots,n$. Abreviaremos la frase "Teorema Chino del Resto" con la expresión TCHR. Si $\mathcal{L} = <\mathcal{L}, \vee, \ldots>$ es un reticulado de congruencias sobre A, entonces decimos que <u>$\mathcal{L}$ verifica el TCHR (débil)</u> cuando el semireticulado de congruencias $<\mathcal{L}, \vee>$ lo verifica. Decimos que <u>A verifica el TCHR (débil)</u> cuando CON(A) lo verifica.

Sea Σ un conjunto de congruencias sobre A. Decimos que Σ es <u>distributivo</u> cuando para todo $\theta, \delta, \sigma \in \Sigma$:

$$\theta \cap (\delta \vee \sigma) = (\theta \cap \delta) \vee (\theta \cap \sigma)$$

$$\theta \vee (\delta \cap \sigma) = (\theta \vee \delta) \cap (\theta \vee \sigma).$$

Sea $\mathcal{M}$ una clase de álgebras. Para un álgebra A, definamos:

$$\Sigma_{\mathcal{M}}^{A} = \{\theta \in CON(A) - \{\mathbf{1}^A\} \quad A/\theta \in I(\mathcal{M})\}.$$

Lema 2.5: Sea $\mathcal{K}$ una clase de álgebras tal que $H(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$. Sea $\mathcal{M}$ cualquier otra clase de álgebras. Supongamos que para todo $A \in \mathcal{K}$, $\mathfrak{I}_{\Sigma^A_{\mathcal{M}}}$ verifica el TCHR débil. Entonces para todo $A \in \mathcal{K}$ tenemos:

(1) $\mathfrak{I}_{\Sigma^A_{\mathcal{M}}}$ verifica el Teorema Chino del Resto.

(2) $\mathfrak{I}_{\Sigma^A_{\mathcal{M}}}$ es un conjunto distributivo.

(3) $\theta \mathbf{V} \delta = \theta \vee \delta = \theta \circ \delta$ para todo $\theta, \delta \in \mathfrak{I}_{\Sigma^A_{\mathcal{M}}}$.

Prueba: Sea $A \in \mathcal{K}$, y sea θ una congruencia sobre A. Usando **(3)** del Lema 2.2, puede ser probado que $\Sigma^A_{\mathcal{M}}/\theta = \Sigma^{A/\theta}_{\mathcal{M}}$. Sea $\delta_1, \delta_2 \in \langle \Sigma^A_{\mathcal{M}} \rangle$, $\delta_1, \delta_2 \geq \theta$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
(\delta_1 \mathbf{V} \delta_2)/\theta &= (\cap\{\delta \in \Sigma^A_{\mathcal{M}} : \delta \geq \delta_k,\ k=1,2\})/\theta \\
&\overset{*}{=} \cap\{\delta/\theta : \delta \in \Sigma^A_{\mathcal{M}},\ \delta \geq \delta_k,\ k=1,2\} \\
&\overset{**}{=} \cap\{\delta/\theta \in \Sigma^{A/\theta}_{\mathcal{M}} \quad \delta/\theta \geq \delta_k/\theta,\ k=1,2\} \\
&= \delta_1/\theta \ \mathbf{V}\ \delta_2/\theta.
\end{aligned}
$$

(Para * y ** use el Lema 2.2). Supongamos $\mathop{\mathbf{V}}_{k=1}^{n} \theta^{\Sigma^A_{\mathcal{M}}}_{(x_k,y_k)} \geq \theta$. Entonces:

$$
\begin{aligned}
\left(\mathop{\mathbf{V}}_{k=1}^{n} \theta^{\Sigma^A_{\mathcal{M}}}_{(x_k,y_k)}\right)/\theta &= (\cap\{\delta \in \Sigma^A_{\mathcal{M}} : \delta \geq \theta,\ (x_k,y_k) \in \delta,\ k=1,\dots,n\})/\theta \\
&= \cap\{\delta/\theta : \delta \geq \theta,\ (x_k,y_k) \in \delta,\ k=1,\dots,n,\ \delta \in \Sigma^A_{\mathcal{M}}\} \\
&= \cap\{\delta/\theta \in \Sigma^{A/\theta}_{\mathcal{M}} : (x_k/\theta, y_k/\theta) \in \delta/\theta,\ k=1,\dots,n\} \\
&= \mathop{\mathbf{V}}_{k=1}^{n} \theta^{\Sigma^{A/\theta}_{\mathcal{M}}}_{(x_k/\theta, y_k/\theta)}.
\end{aligned}
$$

Y $\therefore$ tenemos que $(\mathfrak{I}_{\Sigma^A_{\mathcal{M}}})/\theta \subseteq \mathfrak{I}_{\Sigma^{A/\theta}_{\mathcal{M}}}$. Ahora sean $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n \in \mathfrak{I}_{\Sigma^A_{\mathcal{M}}}$, $x_1, x_2, \dots, x_n \in A$. Supongamos $(x_k, x_l) \in \theta_k \mathbf{V} \theta_l$ para todo k, l. Sea $\theta = \theta_1 \cap \theta_2 \cap \dots \cap \theta_n$. Entonces $\theta_k/\theta \in \mathfrak{I}_{\Sigma^{A/\theta}_{\mathcal{M}}}$ para todo k, $\bigcap_{k=1}^{n} \theta_k/\theta = (\bigcap_{k=1}^{n} \theta_k)/\theta = 0^{A/\theta}$ y

$(x_k/\theta, x_l/\theta) \in (\theta_k \vee \theta_l)/\theta = \theta_k/\theta \vee \theta_l/\theta$ para todo k,l. Así, por hipótesis existe $x/\theta \in A/\theta$ tal que $(x/\theta, x_k/\theta) \in \theta_k/\theta$ para todo k, y $\therefore$ se tiene:

$$(x, x_k) \in \theta_k \text{ para } k=1,\dots,n.$$

O sea que tenemos probado **(1)**. Ahora es fácil probar **(3)**. A continuación probaremos **(2)**. Sea $\theta, \delta, \sigma \in \mathfrak{I}_{\Sigma^A_{\mathcal{M}}}$, y sea $(x,y) \in \theta \cap (\delta \vee \sigma)$, entonces aplicando el TCHR a θ, δ, σ, x,x,y, obtenemos que $(x,y) \in (\theta \cap \delta) \vee (\theta \cap \sigma)$ y $\theta \cap (\delta \vee \sigma) = (\theta \cap \delta) \vee (\theta \cap \sigma)$. La otra igualdad puede ser probada en forma similar. ∎

Si $\Sigma^A_{\mathcal{M}}$ es un conjunto cápsula-núcleo, entonces decimos que $\mathcal{M}$ es una <u>clase cápsula-núcleo con respecto a A</u>. Si para todo $A \in \mathcal{K}$, $\mathcal{M}$ es cápsula-núcleo con respecto a A, entonces decimos que <u>$\mathcal{M}$ es cápsula-núcleo con respecto a $\mathcal{K}$</u>.

Un álgebra A es de <u>congruencias distributivas</u> si CON(A) es un reticulado distributivo. Una clase $\mathcal{K}$ de álgebras es de <u>congruencias distributivas</u> si A es de congruencias distributivas para todo $A \in \mathcal{K}$.

Lema 2.6: Sea $\mathcal{K}$ una clase tal que $H(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$. Si $\mathcal{M}$ es una clase cápsula-núcleo con respecto a $\mathcal{K}$ tal que $\Sigma^A_{\mathcal{M}}$ es compacto denso para todo $A \in \mathcal{K}$, entonces $\Sigma^A_{\mathcal{M}} = MI(A)$ para todo $A \in \mathcal{K}$. (Y $\mathcal{K}$ es de congruencias distributivas).

Prueba: Sea $\theta \in MI(A)$, entonces A/θ es subdirectamente indescomponible y $\therefore$ por el Corolario 1 del Lema 2.4, $0 \in \Sigma^{A/\theta}_{\mathcal{M}}$. Pero ya que $\Sigma^A_{\mathcal{M}}/\theta = \Sigma^{A/\theta}_{\mathcal{M}}$, tenemos que $\theta \in \Sigma^A_{\mathcal{M}}$ Así $\Sigma^A_{\mathcal{M}} \supseteq MI(A)$ y $< \Sigma^A_{\mathcal{M}} > = CON(A)$. O sea que $IRR(A) \supseteq \Sigma^A_{\mathcal{M}}$ y por [9, Teorema 3.24] tenemos que A es de congruencias distributivas e $IRR(A) = \Sigma^A_{\mathcal{M}} = MI(A)$. ∎

Decimos que un proyectivo $\mathfrak{C}$ es <u>congruencialmente</u> <u>algebraico</u> cuando los elementos principales de $\mathfrak{C}$ son compactos.

Lema 2.7: Sea $\Sigma \subseteq CON(A)$. Entonces:

(1) $\theta,\delta \in \langle \Sigma \rangle$, $(x,y) \in \theta \vee \delta$ $\Rightarrow$ existen $\theta_1,\delta_1 \in \mathfrak{I}_\Sigma$ tales que $\theta_1 \subseteq \theta$, $\delta_1 \subseteq \delta$ y $(x,y) \in \theta_1 \vee \delta_1$.

Además, si $\langle \Sigma \rangle$ es congruencialmente algebraico, entonces:

(2) $\theta,\delta \in \langle \Sigma \rangle$, $(x,y) \in \theta \bigvee \delta$ $\Rightarrow$ existen $\theta_1,\delta_1 \in \mathfrak{I}_\Sigma$ tales que $\theta_1 \subseteq \theta$, $\delta_1 \subseteq \delta$ y $(x,y) \in \theta_1 \bigvee \delta_1$.

Prueba: (1). Se tiene:

$$\theta_{(x,y)} \subseteq \theta \vee \delta = (\vee\{\theta^{\Sigma}_{(x,y)} \quad (x,y) \in \theta\}) \vee (\vee\{\theta^{\Sigma}_{(x,y)} : (x,y) \in \delta\}).$$

Entonces existen conjuntos finitos $S_1 \subseteq \theta$, $S_2 \subseteq \delta$, tales que $\theta_{(x,y)} \subseteq (\vee\{\theta^{\Sigma}_{(u,v)} : (u,v) \in S_1\}) \vee (\vee\{\theta^{\Sigma}_{(u,v)} : (u,v) \in S_2\})$. Así, tomando $\theta_1 = \bigvee\{\theta^{\Sigma}_{(u,v)} \quad (u,v) \in S_1\}$ y $\delta_1 = \bigvee\{\theta^{\Sigma}_{(u,v)} \quad (u,v) \in S_2\}$, **(1)** se termina. **(2)** es similar a **(1)**. ∎

Lema 2.8: Sea $\Sigma \subseteq CON(A)$. Entonces:

(1) Si $\theta \circ \delta = \theta \vee \delta$ para todo $\theta,\delta \in \mathfrak{I}_\Sigma$, entonces $\theta \circ \delta = \theta \vee \delta$ para todo $\theta,\delta \in \langle \Sigma \rangle$.

(2) Si $\mathfrak{I}_\Sigma$ es un conjunto distributivo, entonces eso es $\langle \Sigma \rangle$.

Además, si $\langle \Sigma \rangle$ es congruencialmente algebraico, entonces:

(3) Si $\mathfrak{I}_\Sigma$ verifica el TCHR (débil), entonces eso hace $\langle \Sigma \rangle$.

Prueba: (1) Sean $\theta,\delta \in \langle \Sigma \rangle$, $(x,y) \in \theta \vee \delta$. Sean θ_1,δ_1 como en **(1)** del Lema 2.7, entonces $(x,y) \in \theta_1 \vee \delta_1 = \theta_1 \circ \delta_1 \subseteq \theta \circ \delta$.

(3) Sean $\theta_k \in \langle \Sigma \rangle$, $x_k \in A$, $k=1,\dots,n$. Supongamos que para todo k,l tenemos $(x_k,x_l) \in \theta_k \vee \theta_l$ (y $\theta_1 \cap \ldots \cap \theta_n = 0$). Por (2) del Lema 2.7, para todo k, l existen elementos de $\mathfrak{J}_\Sigma$, $\theta_{kkl} \leq \theta_k$, $\theta_{lkl} \leq \theta_l$ tales que $(x_k,x_l) \in \theta_{kkl} \vee \theta_{lkl}$. Sea:

$$\delta_k = \bigvee_{l=1}^{n} \theta_{kkl}, \quad k=1,\ldots,n.$$

Entonces $\delta_k \in \mathfrak{J}_\Sigma$ para todo k, ($\delta_1 \cap \ldots \cap \delta_n = 0$) y $(x_k,x_l) \in \delta_k \vee \delta_l$ para todo k, l. Así por hipótesis existe un $x \in A$ tal que $(x,x_k) \in \delta_k \leq \theta_k$ para todo k. (2) puede ser probado en forma similar. ∎

Un álgebra A es de <u>congruencias permutables</u> si todo par de congruencias sobre A permuta. Una clase $\mathcal{K}$ es de <u>congruencias permutables</u> si todo $A \in \mathcal{K}$ es de congruencias permutables.

Corolario 1: Sea A un álgebra:

(1) A es de congruencias permutables si y sólo si las congruencias compactas permutan.

(2) A es de congruencias distributivas si y sólo si {congruencias compactas} es distributivo.

(3) A verifica el Teorema Chino del Resto (débil) si y sólo si {congruencias compactas} lo hace. ∎

Sea $\mathfrak{J} = \langle \mathfrak{J}, \vee \rangle$ un semireticulado de congruencias sobre A, y sea $\Sigma \subseteq$ CON(A). Entonces decimos que <u>$\mathfrak{J}$ verifica el TCHR con respecto a Σ</u> cuando para todo $\theta_1,\ldots,\theta_n \in \mathfrak{J}$, $x_1,\ldots,x_n \in A$ si $(x_k,x_l) \in \theta_k \vee \theta_l$ para todo k, l y $\{\theta_1,\ldots,\theta_n\}$ minoriza Σ, entonces existe un $x \in A$ tal que $(x,x_k) \in \theta_k$ para $k=1,\ldots,n$. Si $\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{L}, \vee, \ldots \rangle$ es un reticulado de congruencias sobre A, entonces decimos que <u>$\mathfrak{L}$ verifica el TCHR con respecto a Σ</u> cuando $\langle \mathfrak{L}, \vee \rangle$ lo hace. Si el reticulado CON(A) verifica el TCHR con respecto a Σ, entonces decimos que $\underline{A}$ verifica el TCHR con respecto a $\underline{\Sigma}$.

Lema 2.9: Supongamos que $\Sigma \subseteq \Gamma$ y Σ minoriza Γ. Si $\mathfrak{J}_{\Sigma}$ verifica el TCHR con respecto a Σ, entonces $\mathfrak{J}_{\Gamma}$ verifica el TCHR con respecto a Γ.

Prueba: Supongamos $\{\bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Gamma}_{(x_{lk},y_{lk})}\quad k=1,\ldots,n\}$ minoriza Γ. Sea $x_1,\ldots,x_n \in$ A tal que para todo k, h:

$$(x_k,x_h) \in \bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Gamma}_{(x_{lk},y_{lk})} \vee \bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Gamma}_{(x_{lh},y_{lh})}. \quad (*)$$

Sea $\theta \in \Sigma$, ya que $\theta \in \Gamma$, tenemos que existe un k tal que $\theta \geq \bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Gamma}_{(x_{lk},y_{lk})}$, y $\therefore$ $(x_{lk},y_{lk}) \in \theta$ para todo $l=1,\ldots,m$ lo cual implica que $\theta \geq \bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Sigma}_{(x_{lk},y_{lk})}$. Así el conjunto $\{\bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Sigma}_{(x_{lk},y_{lk})}\quad k=1,\ldots,n\}$ minoriza Σ. Además ya que $\Sigma \subseteq \Gamma$ tenemos que para todo k, h:

$$(x_k,x_h) \in \bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Sigma}_{(x_{lk},y_{lk})} \vee \bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Sigma}_{(x_{lh},y_{lh})}.$$

Entonces por hipótesis existe un $x \in A$ tal que $(x,x_k) \in \bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Sigma}_{(x_{lk},y_{lk})}$ para todo k. Probaremos que:

$$(x,x_k) \in \bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Gamma}_{(x_{lk},y_{lk})} \text{ para todo k.}$$

Sea $\delta \in \Gamma$ tal que $(x_{lk},y_{lk}) \in \delta$ para $l=1,\ldots,m$ (**). Sea $\theta \in \Sigma$ tal que $\theta \leq \delta$ (Σ minoriza Γ). Ya que $\{\bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Gamma}_{(x_{lk},y_{lk})}\quad k=1, \ldots,n\}$ minoriza Γ, existe h tal que:

$$\delta \geq \theta \geq \bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Gamma}_{(x_{lh},y_{lh})}. (***)$$

Entonces por (**) y (***) tenemos que $(x_k,x_h) \in \delta$ (recordar (*)). Pero $(x,x_h) \in \delta$ ya que $(x,x_h) \in \bigvee_{l=1}^{m}\theta^{\Sigma}_{(x_{lh},y_{lh})} \leq \theta$ (recordar que por (***) tenemos que $(x_{lh},y_{lh}) \in \theta$ para $l=1,\ldots,m$) y $\therefore$ $(x,x_k) \in \delta$. ■

El siguiente lema es fácil de chequear:

Lema 2.10: Sea Σ un conjunto cápsula-núcleo denso. Entonces $\mathfrak{J}_\Sigma$ verifica el TCHR débil si y sólo si $\mathfrak{J}_\Sigma$ verifica el TCHR con respecto a Σ. ∎

3. REPRESENTABILIDAD. TEOREMAS GENERALES.

Diremos que un álgebra A es <u>globalmente</u> <u>representable</u> por una clase $\mathcal{M}$ cuando A es isomorfa a $\Gamma(\mathcal{T})$, donde $\mathcal{T}$ es un haz subdirecto cuyas fibras están en $\mathcal{M}$ y cuyo espacio base es compacto y T_0. (Ver el apéndice sobre haces). Si A es globalmente representable por la clase de las álgebras subdirectamente irreducibles, entonces diremos que A es <u>globalmente</u> <u>representable</u>.

Lema 3.1: Son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por $\mathcal{M}$.

(2) A es isomorfo a $A' \subseteq \Pi\{A_i \;\; i \in I\}$, producto subdirecto, A' emparcha sobre τ_E, τ_E es compacta y T_0, y para cada $i \in I$, $A_i \in \mathcal{M}$-{álgebras triviales}.

Prueba: Por **(3)** de A.5, **(1)** es equivalente a: **(1')** A es isomorfa a $A' \subseteq \Pi\{A_i \;\; i \in I\}$, producto subdirecto de elementos de $\mathcal{M}$ tal que existe una topología τ compacta y T_0 tal que $\tau \geq \tau_E$ y A' emparcha sobre τ. Los siguientes hechos son fáciles de chequear:

a) Sea $A \subseteq \Pi\{A_i \;\; i \in I\}$ subdirecto. Sea $J \subseteq I$ un conjunto A-completo. Si A emparcha sobre $\mathcal{B}_E^A$ (τ_E^A), entonces $\pi_J(A)$ emparcha sobre $\mathcal{B}_E^{\pi_J(A)}$ $(\tau_E^{\pi_J(A)})$.

b) Sea $A \subseteq \Pi\{A_i \;\; i \in I\}$ subdirecto. Sea $J \subseteq I$ tal que $\{\theta_i \;\; i \in J\} \cup \{\mathbb{0}\} \geq \{\theta_i \;\; i \in I\}$. Si A emparcha sobre $\mathcal{B}_E^A$ (τ_E^A), entonces $\pi_J(A)$ emparcha sobre $\mathcal{B}_E^{\pi_J(A)}$ $(\tau_E^{\pi_J(A)})$.

Supongamos que **(1')** es verdadero. Entonces podemos asumir que $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ es subdirecto, A emparcha sobre τ_E, topología compacta, y cada $A_i \in \mathcal{M}$. Sea $J \subseteq I$ tal que $\{\theta_i \quad i \in J\} = \{\theta_i \quad i \in I\}-\{\mathbb{I}\}$. Entonces por b) $\pi_J(A)$ emparcha sobre $\tau_E^{\pi_J(A)}$ y podemos suponer que $A_i \in \mathcal{M}$-{álgebras triviales} para cada $i \in I$. (Para la compacidad de $\tau_E^{\pi_J(A)}$ use el Lema 2.3). Ahora, sea $J \subseteq I$ un conjunto A-completo y A-transversal. Entonces por a) podemos tomar $A' = \pi_J(A)$ y $\tau_E^{A'}$ resultará T_0 ya que J es A-transversal y resultará compacto por el Lema 2.3. **(2)⇒(1')** es trivial. ∎

Teorema 3.2: Sea A cualquier álgebra, y sea $\mathcal{M}$ cualquier clase. Entonces son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por $\mathcal{M}$.

(2) Existe un conjunto compacto denso $\Sigma \subseteq \Sigma_{\mathcal{M}}^{A}$ tal que $\mathfrak{I}_\Sigma$ verifica el Teorema Chino del Resto con respecto a Σ.

Prueba: (1)⇒(2). Por el Lema 3.1 podemos asumir que $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$, es subdirecto, A emparcha sobre τ_E, topología compacta y T_0, y cada $A_i \in \mathcal{M}$-{álgebras triviales}. Es fácil de chequear (use el Lema 1.1):

a) Sea $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ subdirect, y sea $\Sigma = \{\theta_i \quad i \in I\}$. Entonces A emparcha sobre $\mathcal{B}_E$ si y sólo si $\mathfrak{I}_\Sigma$ verifica el TCHR con respecto a Σ.

Entonces sea $\Sigma = \{\theta_i \quad i \in I\}$, por el Lema 2.3, Σ es compacto y ∴ **(2)** sigue de a).

(2)⇒(1). Considerando el mapeo:

$$g\colon A \to \Pi\{A/\theta : \theta \in \Sigma\},$$

$$x \to (x/\theta)_{\theta\in\Sigma}$$

podemos asumir que $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ es producto subdirecto, $\Sigma = \{\theta_i \quad i \in I\}$ y $\theta_i = \theta_j \Rightarrow i = j$ (*). Entonces ya que Σ es compacto, τ_E es compacto, y por (*) tenemos que τ_E es T_0. Además por a), A emparcha sobre $\mathcal{B}_E$ y $\therefore$ ya que τ_E es compacto tenemos que A emparcha sobre τ_E (ver A.3). ■

Corolario 1: Sea $\mathcal{M}$ cualquier clase y sea A cualquier álgebra. Entonces A es globalmente representable por $\mathcal{M}$ sii A es globalmente representable por $\mathcal{M} \cup$ {álgebras triviales}. ■

Teorema 3.3: Sea A cualquier álgebra. Sea $\mathcal{M}$ una clase cápsula núcleo con respecto a A. Entonces son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por $\mathcal{M}$.

(2) $\Sigma^A_{\mathcal{M}}$ es compacto denso y $\mathfrak{J}_{\Sigma^A_{\mathcal{M}}}$ verifica el TCHR débil.

Además, si $< \Sigma^A_{\mathcal{M}} >$ es congruencialmente algebraico, entonces **(1)** y **(2)** son equivalentes a:

(3) $\Sigma^A_{\mathcal{M}}$ es compacto denso y el proyectivo $< \Sigma^A_{\mathcal{M}} >$ verifica el Teorema Chino del Resto débil.

Prueba: **(1)⇒(2)**. Sea Σ como en el Teorema 3.2. Por el Corolario 2 del Lema 2.4, Σ minoriza $\Sigma^A_{\mathcal{M}}$, el cual es compacto. Así los Lemas 2.9 y 2.10 pueden ser aplicados. Para **(2)⇒(1)** aplique el Teorema 3.2 y para **(2)⇒(3)** aplique **(3)** del Lema 2.8. ■

Corolario 1: Sea A un álgebra de congruencias distributivas. Entonces son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por álgebras subdirectamente irreducibles (indescomponibles).

(2) CMI(A) (MI(A)) es compacto y A verifica el Teorema Chino del Resto débil. ■

Corolario 2: Sea A un álgebra finita de congruencias distributivas. Entonces son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por álgebras simples.

(2) A es producto directo de álgebras simples.

Prueba: **(1)⇒(2)**. Por el Corolario 1, A verifica el TCHR débil y ∴ es fácil de chequear que el embedding:

$$A \to \Pi\{A/\theta : \theta \text{ es maximal}\}$$

$$x \to (x/\theta)_{\theta\in MAX(A)}$$

es sobre. ∎

Un álgebra A es <u>aritmética</u> si A es de congruencias distributivas y de congruencias permutables. Una clase $\mathcal{K}$ es <u>aritmética</u> si toda álgebra $A \in \mathcal{K}$ es aritmética.

Decimos que una clase $\mathcal{K}$ es <u>globalmente representable</u> por una clase $\mathcal{M}$ si para todo $A \in \mathcal{K}$, A es globalmente representable por $\mathcal{M}$.

Teorema 3.4: Sea $\mathcal{K}$ tal que $H(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{K}$. Supongamos que $\mathcal{M}$ es una clase cápsula núcleo con respecto a $\mathcal{K}$. Entonces son equivalentes:

(1) $\mathcal{K}$ es globalmente representable por $\mathcal{M}$.

(2) $\mathcal{K}$ es aritmética y para todo $A \in \mathcal{K}$, $\Sigma^{A}_{\mathcal{M}} = MI(A)$ es compacto.

Prueba: Asumamos **(1)**. Por el Teorema 3.3 y el Lema 2.6 tenemos que $\Sigma^{A}_{\mathcal{M}} = MI(A)$. Por el Teorema 3.3 y el Lema 2.5 tenemos que $\mathfrak{I}_{MI(A)}$ es distributivo y para todo $\theta, \delta \in \mathfrak{I}_{MI(A)}$, $\theta \vee \delta = \theta \circ \delta$. Así por **(1)** y **(2)** del Lema 2.8, A es aritmética. Asumamos **(2)**. Es fácil de chequear (por inducción) que A verifica el TCHR (ver [6, pag. 221, ejercicio 68]) y ∴ por el Teorema 3.3 tenemos **(1)**. ∎

El Teorema 3.4 resuelve el Problema 6.19 de [9] en forma negativa ya que la clase de los ℓ-anillos subdirectamente irreducibles y la de los ℓ-anillos subdirectamente indescomponibles son no iguales. (Ver d) de la Sección 8).

Corolario 1: Sea $\mathcal{V}$ una variedad de congruencias distributivas. Entonces son equivalentes:

(1) $\mathcal{V}$ es globalmente representable por álgebras subdirectamente irreducibles (indescomponibles).

(2) $\mathcal{V}$ es aritmética y CMI(A) (MI(A)) es compacto para todo $A \in \mathcal{V}$. ∎

El Corolario 1 reduce el Problema 6.11 de [9] al estudio de la compacidad de un conjunto de congruencias en el caso de variedades de congruencias distributivas. En la Sección 6 daremos condiciones suficientes para que CMI(A) o MI(A) sean compactos para todo $A \in \mathcal{V}$ (Corolario 1 del Teorema 6.2 y Teorema 6.3). Note que el Corolario 1 nos permite reescribir el Problema 6.10 de [9] en la siguiente forma más concreta:

¿Si $\mathcal{V}$ es una variedad aritmética, es MI(A) compacto para todo $A \in \mathcal{V}$?

Finalmente note que el Corolario 1 nos dice que la variedad de reticulados distributivos no es globalmente representable ya que esta variedad no es de congruencias permutables (ver el Problema 6.17 de [9]). Sin envargo, en las aplicaciones (ver e) de la Sección 8) probaremos que la variedad de reticulados distributivos es globalmente representable por las cadenas **2**, **3**.

Para una clase $\mathcal{K}$ de álgebras con $SI(\mathcal{K})$ denotaremos la clase de los miembros de $\mathcal{K}$ subdirectamente irreducibles.

Teorema 3.5: Sea A un álgebra de congruencias distributivas. Supongamos que $\mathcal{M} \geq SI(H(A))$. Entonces son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por $\mathcal{M}$.

(2) Existe un conjunto compacto denso $\Sigma \subseteq \Sigma_{\mathcal{M}}^{A}$ tal que A verifica el Teorema Chino del Resto con respecto a Σ.

Prueba: **(1)⇒(2)**. Por el Teorema 3.2 existe un conjunto compacto denso $\Sigma \subseteq \Sigma_{\mathcal{M}}^{A}$ tal que $\mathfrak{J}_{\Sigma}$ verifica el TCHR con respecto a Σ. Por el Corolario 2 del Lema 2.4, Σ minoriza CMI(A) (ya que A es de congruencias distributivas $CMI(A) \subseteq IRR(A)$) y Σ minoriza $\Sigma \cup CMI(A)$. Entonces por el Lema 2.9, $\mathfrak{J}_{\Sigma\cup CMI(A)}$ verifica el TCHR con respecto a $\Sigma \cup CMI(A)$. Así usando argumentos similares a los de **(3)** del Lema 2.8 podemos concluir que CON(A) verifica el TCHR con respecto a $\Sigma \cup CMI(A)$, es decir, CON(A) verifica el TCHR con respecto a Σ (Σ minoriza $\Sigma \cup CMI(A)$).

(2)⇒(1). Ya que Σ minoriza $\Sigma \cup CMI(A)$ (Corolario 2 del Lema 2.4) tenemos que A verifica el TCHR con respecto a $\Sigma \cup CMI(A)$. Entonces $\mathfrak{J}_{\Sigma\cup CMI(A)}$ verifica el TCHR con respecto a $\Sigma \cup CMI(A)$ y $\therefore$ ya que $\Sigma \cup CMI(A)$ es compacto denso, podemos aplicar el Teorema 3.2. ∎

Note que en **(1)⇒(2)** no es necesario asumir que $\mathcal{M} \geq SI(H(A))$.

Corolario 1: Sea A aritmética. Supongamos $\mathcal{M} \geq SI(H(A))$. Entonces son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por $\mathcal{M}$.

(2) Existe un conjunto compacto denso $\Sigma \subseteq \Sigma_{\mathcal{M}}^{A}$. ∎

Diremos que un álgebra A es (localmente) Booleanamente representable por una clase $\mathcal{M}$ cuando A sea isomorfa a un álgebra de secciones globales con soporte compacto de un haz sobre un espacio (localmente) Booleano el cual sea subdirecto, Hausdorff y cuyas fibras estén en $\mathcal{M}$. (Ver el apéndice sobre haces). Si A es (localmente) Booleanamente representable por álgebras subdirectamente irreducibles, entonces diremos que A es (localmente) Booleanamente representable.

Sea $\mathfrak{C}$ un proyectivo sobre A. $\theta \in \mathfrak{C}$ es un elemento factor de $\mathfrak{C}$ si existe $\delta \in \mathfrak{C}$ tal que $\theta \circ \delta = \mathbb{1}$ y $\theta \cap \delta = \mathbb{0}$. $\mathfrak{C}$ es llamado factorial si todo elemento principal de $\mathfrak{C}$ es un elemento factor. O sea, $\mathfrak{C}$ es factorial si para todo $x,y \in A$ existe $\delta \in \mathfrak{C}$ tal que $\theta^{\mathfrak{C}}_{(x,y)} \circ \delta = \mathbb{1}$ y $\theta^{\mathfrak{C}}_{(x,y)} \cap \delta = \mathbb{0}$. Si CON(A) es factorial, entonces diremos que A es cuasiregular.

A continuación daremos una caracterización de la representabilidad (localmente) Booleana similar a la caracterización del Teorema 3.2.

Teorema 3.7: Sea A cualquier álgebra y sea $\mathcal{M}$ cualquier clase. Entonces son equivalentes:

(1) A es localmente Booleanamente representable por $\mathcal{M}$.

(2) Existe un conjunto denso y cápsula-núcleo $\Sigma \subseteq \Sigma^{A}_{\mathcal{M}}$ tal que el proyectivo $< \Sigma >$ es congruencialmente algebraico y factorial.

Además si $\mathcal{M}$ no contiene álgebras triviales, entonces son equivalentes:

(3) A es Booleanamente representable por $\mathcal{M}$.

(4) Existe un conjunto denso y cápsula-núcleo $\Sigma \subseteq \Sigma^{A}_{\mathcal{M}}$ tal que $\mathbb{1}$ es un elemento compacto de $< \Sigma >$ el cual es un proyectivo factorial y congruencialmente algebraico.

Prueba: **(2)⇒(1)**. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ es subdirecto, $\Sigma = \{\theta_i\}$ y $\theta_i = \theta_j$ sii $i = j$. Es fácil de chequear que ya que A induce una topología cápsula-núcleo y $< \Sigma >$ es factorial, para todo $x, y \in A$, $\theta_{E(x,y)} \circ \theta_{D(x,y)} = \mathbb{I}$ y tenemos que A es cerrado bajo $\bar{\eta}$ (ver [9, pag. 7]). Además por [9, 5.6]:

$$\mathcal{F}_o = \{E(x,y), D(x,y) \quad x, y \in A\}$$

es un cuerpo de subconjuntos de I, y por [9, 5.14] $\mathcal{F}_o$ es base de subconjuntos abiertos y cerrados para la topología cápsula-núcleo. A continuación probaremos que para todo $x, y \in A$, $D(x,y)$ es cápsula-núcleo compacto. Por [9, 3.5], $\{D(x,y) : x, y \in A\}$ es una base de la topología cápsula-núcleo y si $D(x,y) = \bigcup_{r \in R} D(x_r, y_r)$, entonces tenemos que $E(x,y) = \bigcap_{r \in R} E(x_r, y_r)$ y $\therefore$ por el Lema 1.1:

$$\theta^{\Sigma}_{(x,y)} = \bigvee_{r \in R} \theta^{\Sigma}_{(x_r, y_r)}.$$

Pero ya que $< \Sigma >$ es congruencialmente algebraico existe un conjunto finito $R_o \subseteq R$ tal que:

$$\theta^{\Sigma}_{(x,y)} = \bigvee_{r \in R_o} \theta^{\Sigma}_{(x_r, y_r)}.$$

Así $D(x,y) = \bigcup_{r \in R_o} D(x_r, y_r)$ y $D(x,y)$ es compacto. Por [9, 5.6] A emparcha sobre $\mathcal{F}_o$ y probaremos que A emparcha sobre la topología cápsula-núcleo. Supongamos que $U_1, \ldots, U_n$ son abiertos tales que $\bigcup_{k=1}^{n} U_k = I$ y supongamos que $x_1, \ldots, x_n \in A$ son tales que $E(x_k, x_l) \supseteq U_k \cap U_l$ para todo k, l. Además, sean $x, y \in A$ tales que $D(x,y) = \cup\{D(x_k, x_l) : 1 \le k, l \le n\}$ (use [9, 5.6]). Sean $x^k_r, y^k_r \in A$, $r \in R_k$, $k=1, \ldots, n$, tales que $U_k = \cup\{D(x^k_r, y^k_r) : r \in R_k\}$ para $k=1, \ldots, n$. Ya que $D(x,y)$ es cápsula-núcleo compacto, usando [9, 5.5] puede probarse que existen $z_k, w_k \in A$, $k=1, \ldots, n$ tales que:

$$D(z_k, w_k) \subseteq U_k, \ k=1, \ldots, n,$$

$$D(x,y) = \cup\{D(z_k, w_k) : k=1, \ldots, n\}.$$

Ya que A emparcha sobre $\mathcal{F}_o$, existe $z \in A$ tal que $E(z,x_k) \geq D(z_k,w_k)$, $k=1,\ldots,n$ y $E(z,x_1) \geq E(x,y)$. Ahora es fácil de chequear que $E(z,x_k) \geq U_k$, para $k=1,\ldots,n$ y $\therefore$ A emparcha sobre la topología cápsula-núcleo. Además la topología cápsula-núcleo es Hausdorff ya que A es irredundante, con lo cual tenemos que A es producto subdirecto localmente Booleano, y $\therefore$ por **(5)** de A.5 tenemos que A es localmente Booleanamente representable por $\mathcal{M}$.

(1)⇒(2). Supongamos que $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ es un producto subdirecto localmente Booleano, donde cada $A_i \in \mathcal{M}$. (Ver **(5)** de A.5). Sea $\Sigma_1 = \{\theta_i\}$. Entonces $< \Sigma_1 >$ es congruencialmente algebraico ya que los conjuntos $D(x,y)$, $x,y \in A$, son compactos. Además, ya que A emparcha sobre $\mathcal{F}_o$, A es cerrado bajo $\overline{\eta}$ y $\therefore$ tenemos que para todo $x,y \in A$:

$$\theta^{\Sigma_1}_{(x,y)} \circ \theta_{D(x,y)} = \mathbb{I}.$$

Así $< \Sigma_1 >$ es factorial. Finalmente por [9, 5.12] tenemos que $\Sigma = \Sigma_1 - \{\mathbb{I}\}$ es cápsula-núcleo y obtenemos **(2)**. **(3)⇔(4)** puede ser probado en forma similar. ∎

Corolario 1: Sea A cualquier álgebra y sea $\mathcal{M}$ cualquier clase. Entonces A es locally Booleanamente representable por $\mathcal{M}$ sii A es locally Booleanamente representable por $\mathcal{M} \cup$ {álgebras triviales}. ∎

Sea $\mathcal{M}$ cualquier clase de álgebras. Un <u>$\mathcal{M}$-espectro</u> de A será un conjunto $\Sigma \subseteq \Sigma^A_{\mathcal{M}}$. Dado un $\mathcal{M}$-spectro de A, Σ, tenemos tres topologías naturalmente definidas sobre Σ. Una de estas topologías es el topología de los ecualizadores, τ_E, la cual tiene subbase: $\{\{\theta \in \Sigma : \theta \ni (x,y)\} : x,y \in A\}$, otra es la topología cápsula-núcleo, τ_{HK}, la cual tiene subbase: $\{\{\theta \in \Sigma : (x,y) \notin \theta\} \quad x,y \in A\}$ y finalmente la topología con subbase igual a la unión de las dos subbases anteriores, τ_B.

Note que los $\mathcal{M}$-espectros densos están naturalmente identificados con las representaciones subdirectas de A por miembros de $\mathcal{M}$-{álgebras triviales}. Sea Σ un $\mathcal{M}$-espectro denso. El Teorema 3.7 nos dice que la representación subdirecta asociada a Σ será localmente Booleana (para alguna adecuada topología) si y sólo si Σ es cápsula-núcleo y $< \Sigma >$ es congruencialmente algebraico y factorial. Además la representación subdirecta asociada a Σ será Booleana (para alguna adecuada topología) si y sólo si Σ es cápsula-núcleo, $< \Sigma >$ es congruencialmente algebraico, factorial y $\mathbb{I}$ es un elemento compacto de $< \Sigma >$.

Además es fácil de chequear que si (2) del Teorema 3.7 es verdadero, entonces para el espectro Σ tenemos:

$$\tau_E \subseteq \tau_{HK} = \tau_B,$$

con $\tau_{HK} = \tau_B$ topologías localmente Booleanas tales que los conjuntos de la forma $\{\theta \in \Sigma : (x,y) \notin \theta\}$ son compactos. Además τ_E será igual a τ_{HK} sii $\mathbb{I}$ es un elemento compacto de $< \Sigma >$, y en este caso las topologías serán Booleanas.

Puede probarse que para cualquier álgebra A y cualquier clase $\mathcal{M}$, A es localmente Booleanamente representable por $\mathcal{M}$ sii A es Booleanamente representable por $\mathcal{M} \cup$ {álgebras triviales}. Así el Teorema 3.7 describe la representabilidad (localmente) Booleana de cualquier álgebra A por <u>cualquier</u> clase $\mathcal{M}$ en terminos de propiedeades espectrales.

Las ventajas técnicas de excluir la posibilidad de que los espectros tengan la congruencia universal están claramente visibles en el desarrollo de [15].

4. EMPARCHE SOBRE RETICULADOS DISTRIBUTIVOS. LA CONSTRUCCION GENERAL.

En esta sección desarrollaremos brevemente el método uniforme de construir productos subdirectos globales a partir de la propiedad de emparche presentado en [9]. Nuestra presentación será algo más general que la de [9]. Procederemos en la misma forma practicamente sin modificaciones, con la excepción de que por razones técnicas trabajaremos con anillos de subconjuntos de I (o más generalmente hablando reticulados ajustados) pensados como bases de conjuntos abiertos y no como bases de conjuntos cerrados como en [9]. Se mejora el Teorema 4.23 de [9] (Lema 4.2). Esta mejora es muy importante en nuestro enfoque ya que nos permite probar que si la clase de factores es universal, entonces la representabilidad global y la de Stone (Sección 6) coinciden. Como se verá en las aplicaciones, es un caso usual que la clase de factores sea universal.

Sea $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ subdirecto. Sea L un reticulado cuyos elementos son subconjuntos de I. Diremos que L es <u>ajustado</u> cuando:

(1) L es distributivo y $I \in L$.

(2) Para todo $F,G \in L$ $\inf(F,G) = F \cap G$, y $F \vee G \subseteq \overline{F \cup G}$.

Diremos que <u>A</u> <u>emparcha</u> <u>sobre</u> <u>el</u> <u>reticulado</u> <u>ajustado</u> <u>L</u> si para todo $F_1,\dots,F_n \in L$, $x_1,\dots,x_n \in A$, si $F_1 \vee \dots \vee F_n = I$ y para todo k,l $E(x_k,x_l) \geq F_k \cap F_l$, entonces existe $x \in A$ tal que $E(x,x_k) \geq F_k$ para todo k. Note que esta definición de emparche es consistente con la dada en el apéndice ya que la primera define emparche sobre un conjunto de subconjuntos de I, mientras que la última define emparche sobre un reticulado ajustado, es decir, un conjunto de subconjuntos de I junto con cierta estructura. Podría pasar que A no emparche sobre un reticulado ajustado L pero que A emparche sobre el universo de L. Las posibles ambiguedades de notación se esclareserán prestando atención al contexto.

Nuevamente, sea $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ subdirecto. Sea L un reticulado ajustado. Sea J = {filtros primos de L}. Si $F \in L$ sea $\hat{F} = \{\mathcal{U} \in J : F \in \mathcal{U}\}$ y sea $\hat{L} = \{\hat{F} : F \in L\}$. $\hat{L}$ es un anillo de subconjuntos de J y $F \to \hat{F}$ es un isomorfismo de reticulados. Llamaremos $\tau(L)$ $(\tau(\hat{L}))$ a la topología sobre I (J) con base de conjuntos abiertos L $(\hat{L})$, (note que $I \in L$ y $J \in \hat{L}$). El espacio $(J,\tau(\hat{L}))$ es justamente el espacio de Stone (de filtros primos) del reticulado distributivo L (ver [1]). Para $\mathcal{U} \in J$, $x,y \in A$ definamos $x \equiv_{\mathcal{U}} y$ sii $E(x,y) \geq F$ para algún $F \in \mathcal{U}$. Es fácil de chequear que $\equiv_{\mathcal{U}}$ es una congruencia sobre A. Finalmente sea $h(i) = \{F \in L : i \in F\}$, $i \in I$. Es trivial que $h(i) \in J$ para todo i, cuando $F \vee G = F \cup G$ para todo $F,G \in L$.

Lema 4.1: Supongamos que $x,y \in A$, $F \in L$. Entonces $x \equiv_{\mathcal{U}} y$ para todo $\mathcal{U} \in \hat{F}$ si y sólo si $E(x,y) \geq F$.

Prueba: $\Rightarrow$. Supongamos $E(x,y)$ no contiene a F. Sea $\mathcal{f} = \{G \in L : G \geq F\}$, $\iota = \{G \in L : G \leq E(x,y)\}$. $\mathcal{f}$ es un filtro de L, e ι es un ideal de L ya que $G,H \in \iota \Rightarrow G \vee H \leq \overline{G \cup H} \leq E(x,y)$. Además $\mathcal{f} \cap \iota = \emptyset$ y por el Teorema del Ideal Primo existe un filtro primo $\mathcal{U}$ de L tal que $\mathcal{U} \geq \mathcal{f}$ y $\mathcal{U} \cap \iota = \emptyset$. Entonces, ya que $F \in \mathcal{U}$, $\mathcal{U} \in \hat{F}$ y $x \equiv_{\mathcal{U}} y$. Así, existe $G \in \mathcal{U}$ tal que $G \leq E(x,y)$ lo cual contradice $\mathcal{U} \cap \iota = \emptyset$. ■

Ahora podemos definir la función de <u>Gelfand</u> de la siguiente manera:

$$g\colon A \to \Pi\{A/\mathcal{U} : \mathcal{U} \in J\},$$

$$x \to (x/\mathcal{U})_{\mathcal{U}\in J}$$

donde $A/\mathcal{U}$ es $A/\equiv_{\mathcal{U}}$ y $x/\mathcal{U}$ es $x/\equiv_{\mathcal{U}}$. (Para chequear que g es uno a uno tome $F = I$ en el Lema 4.1).

El siguiente corolario es una generalización del Teorema 4.13 de [9], el resultado central de dicho trabajo. Como se verá en la Sección 5, esta generalización nos permitirá desarrollar la construcción de Comer-Werner (ver [9]) como una aplicación directa del Teorema 4.13 de [9] (generalizado).

Corolario 1: Si A emparcha sobre L, entonces $A \cong g(A) \subseteq \Pi\{A/\mathcal{U} : \mathcal{U} \in J\}$ es $\tau(\hat{L})$-global (es decir, $g(A)$ emparcha irrestrictamente sobre $\tau(\hat{L})$ y $\tau(\hat{L}) \geq \tau_E^{g(A)}$, ver [9]).

Prueba: Ya que J es compacto ($I \in L$) y $g(A)$ emparcha sobre $\hat{L}$ (aplique el Lema 4.1), A.3 nos dice que $g(A)$ emparcha sobre $\tau(\hat{L})$, y nuevamente ya que $\tau(\hat{L})$ es compacta, A.4 nos dice que $g(A)$ emparcha irrestrictamente sobre $\tau(\hat{L})$. Además $E(g(x),g(y)) = \cup\{\hat{F} : F \subseteq E(x,y)\}$ y $\therefore$ $\tau(\hat{L}) \geq \tau_E^{g(A)}$. ∎

Note que la hipótesis "R covers I" de 4.13 de [9] es evitada en el Corolario 1.

Lema 4.2: Supongamos $E(x,y) \in L$ para todo $x,y \in A$. Entonces para todo $\mathcal{U} \in J$, $A/\mathcal{U} \in ISP_u(A_i \quad i \in I)$.

Prueba: Sea $\mathcal{U}$ un filtro primo de L. Sea $\mathcal{U}_1 = \{N \subseteq I : N \supseteq F$ para algún $F \in \mathcal{U}\}$, $\mathcal{I}_1 = \{N \subseteq I : N \subseteq F$ para algún $F \in L - \mathcal{U}\}$. Es fácil probar que $\mathcal{U}_1$ es un filtro sobre I, $\mathcal{I}_1$ es un ideal sobre I y que $\mathcal{U}_1 \cap \mathcal{I}_1 = \emptyset$. Entonces por el Teorema del Ideal Primo existe un ultrafiltro $\mathcal{W}$ sobre I tal que $\mathcal{W} \supseteq \mathcal{U}_1$ y $\mathcal{W} \cap \mathcal{I}_1 = \emptyset$, es decir, $\mathcal{W} \cap L = \mathcal{U}$. Entonces tenemos que para todo $x,y \in A$, $x \equiv_{\mathcal{U}} y$ sii $x \equiv_{\mathcal{W}} y$, y el lema sigue de considerar el mapeo $A \to (\Pi\{A_i \quad i \in I\})/\mathcal{W}$, $x \to x/\mathcal{W}$. ∎

Recordemos que $\mathcal{R}$ denota el reticulado completo de los conjuntos cerrados del operador de clausura sobre I, $F \to \overline{F} = \{i \in I : \theta_F \leq \theta_i\}$. (Ver los preliminares).

Lema 4.3: Sea A de congruencias distributivas. Supongamos $CMI(A) \subseteq \{\theta_i \quad i \in I\} \subseteq MI(A)$, $L \subseteq \mathcal{R}$, y L contiene los ecualizadores. Si la intersección de cualquier familia (no-vacia) de congruencias compactas es una congruencia compacta, entonces A/u es subdirectamente indescomponible (o trivial), para todo $u \in J$.

Prueba: Es fácil de chequear que $\equiv_u = \theta_{\cap u}$. Supongamos que $\theta_{\cap u} \geq \delta_1 \cap \delta_2$, pero que $\theta_{\cap u} \geq \delta_1$ y $\theta_{\cap u} \geq \delta_2$ (*). Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\delta_1 = \theta_{(x,y)}$ y $\delta_2 = \theta_{(u,v)}$. Sea $\theta_{(x,y)} \cap \theta_{(u,v)} = \bigvee_{k=1}^{n} \theta_{(x_k,y_k)}$. Entonces, usando el Lema 1.1 podemos probar que $\cap u \subseteq E(x,y) \cup E(u,v) = \cap E(x_k,y_k)$. Además es fácil de chequear que para todo $z,w \in A$, $E(z,w) \in u$ sii $E(z,w) \geq \cap u$, y $\therefore$ $E(x,y) \cup E(u,v) \in u$. Así ya que u es primo $E(x,y) \geq \cap u$ o $E(u,v) \geq \cap u$, lo cual contradice (*). Además es fácil probar que $\mathbb{0}$ es compacto sii $\theta_{\cap u} \neq \mathbb{0}$ para todo $u \in J$. ∎

5. GENERALIZACION DE LA CONSTRUCCION DE PIERCE.

Comer ([5]) generalizó la conocida construcción de Pierce para anillos (el haz resultante es generalmente conocido como el haz de Pierce de A). Luego Werner [16] generalizó aún más el trabajo de Comer. Ambas construcciones se basan en la existencia de ciertos subreticulados de CON(A) para obtener la propiedad de emparche. Si atendemos la exposición de la construcción de Comer dada en [9, pag. 56], notaremos una gran similitud con el método de construcción de productos subdirectos globales presentado en [9, pag. 47]. Sin envargo, tal esquema no es aplicable tal como viene dado en [9] ya que lo que se obtiene de la existencia de un tal subreticulado de CON(A) es emparche sobre un reticulado ajustado de subconjuntos del conjunto de índices de alguna adecuada representación subdirecta de A (ver la prueba del Teorema 5.1) y no emparche sobre un anillo dual de subconjuntos como sería necesario para poder aplicar el Teorema 4.13 de [9]. La forma en la cual es posible expresar la construcción de Comer-Werner con el método uniforme de [9] cuando éste es generalizado como en la Sección 4 de este trabajo quedará clara en la prueba del Teorema 5.1.

A continuación describiremos la construcción de Comer en una forma algo más general (ver [9, pag. 56]). Sea $\mathcal{L}$ un reticulado de congruencias sobre un álgebra A. Supongamos que $\mathbf{0} \in \mathcal{L}$ y que $\mathcal{L}$ es distributivo. Sea $J' = \{\text{ideales primos de } \mathcal{L}\}$, $\hat{\theta} = \{\iota \in J' : \theta \in \iota\}$, $\theta \in \mathcal{L}$, $\hat{\mathcal{L}} = \{\hat{\theta} : \theta \in \mathcal{L}\}$, y sea $\tau(\hat{\mathcal{L}})$ la topología sobre J' con base de conjuntos abiertos $\hat{\mathcal{L}}$ (note que $J' \in \hat{\mathcal{L}}$ ya que $\mathbf{0} \in \mathcal{L}$). Para todo $\iota \in J'$, $\cup\iota$ es una congruencia sobre A. Sea $g'\colon A \to \Pi\{A/\iota : \iota \in J'\}$ definida por $g'(x) = (x/\iota)_{\iota \in J'}$, donde A/ι es $A/\cup\iota$ y x/ι es $x/\cup\iota$ para $\iota \in J'$, $x \in A$.

El siguiente teorema generaliza el resultado de Werner expuesto en [9, 4.38].

Teorema 5.1: Sea $\mathcal{L}$ un reticulado de congruencias sobre A. Supongamos que $\mathbf{0} \in \mathcal{L}$ y que $\mathcal{L}$ es distributivo y satisface el Teorema Chino del Resto débil. Entonces $A \cong g'(A) \subseteq \Pi\{A/\iota : \iota \in J'\}$ es $\tau(\hat{\mathcal{L}})$-global. Si además existe Σ tal que $\mathcal{L}$ es subreticulado de $< \Sigma >$ y $\mathfrak{J}_\Sigma \subseteq \mathcal{L}$, entonces las fibras de tal representación por haces están en $ISP_u(A/\theta : \theta \in \Sigma)$.

Prueba: Supongamos $A \subseteq \Pi\{A_i \ \ i \in I\}$ es subdirecto, y $\Sigma = \{\theta_i \ \ i \in I\}$ es tal que $\mathcal{L}$ es un subreticulado de $< \Sigma >$. Ya que $< \Sigma >$ es antiisomorfo a $\mathcal{R}$ tenemos que existe un subreticulado L de $\mathcal{R}$ tal que el mapeo $F \to \theta_F$ es un antiisomorfismo entre L y $\mathfrak{L}$. Es fácil de chequear que L es ajustado y que A emparcha sobre L. Sea J = {filtros primos de L}, y definamos:

$$f: J \to J'$$
$$u \to \{\theta_F : F \in u\}.$$

f es una función biyectiva la cual induce el isomorfismo de reticulados:

$$\hat{L} \to \hat{\mathfrak{L}}$$
$$\hat{F} \to \hat{\theta}_F.$$

Además para todo $u \in J$ tenemos que $\equiv_u = \cup f(u)$, es decir, $A/u = A/f(u)$. Así las representaciones $g(A) \subseteq \Pi\{A/u : u \in J\}$ y $g'(A) \subseteq \Pi\{A/\imath : \imath \in J'\}$ son esencialmente las mismas y $\therefore$ por el Corolario 1 del Lema 4.1 obtenemos que $A \cong g'(A)$ es $\tau(\hat{\mathfrak{L}})$-global. Finalmente, si $\mathfrak{L} \geq \mathfrak{J}_\Sigma$, entonces podemos aplicar el Lema 4.2 y $A/\imath = A/f^{-1}(\imath) \in ISP_u(A_i \quad i \in I) = ISP_u(A/\theta : \theta \in \Sigma)$. Para el caso general tome Σ tal que $\mathfrak{L}$ sea un subreticulado de $< \Sigma >$ (siempre se puede tomar $\Sigma = \mathfrak{L}$), defina el mapeo:

$$A \to \Pi\{A/\theta : \theta \in \Sigma\},$$
$$x \to (x/\theta)_{\theta\in\Sigma}$$

y aplique lo ya hecho. ■

Note que aplicar la construcción general de la Sección 4 nos evita tener que probar 4.31, 4.32 y 4.33 de [9], además de darnos la posibilidad en ciertos casos de obtener información acerca de los nuevos factores.

6. REPRESENTABILIDAD DE STONE. APLICACIONES DE LA CONSTRUCCION GENERAL.

Un espacio de Stone es un espacio topológico compacto y T_0, X, tal que:

(1) La familia de subconjuntos de X compactos y abiertos es un anillo de conjuntos y una base de X.

(2) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son familias de subconjuntos de X compactos y abiertos y si $\cap\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{B}$, entonces existen conjuntos finitos $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ tales que $\cap\mathcal{A}_0 \subseteq \cup\mathcal{B}_0$.

Una topología τ sobre X será una <u>topología de Stone</u> cuando (X,τ) sea un espacio de Stone. Note que los espacios de Stone son precisamente los espacios de representación topológica de Stone de los reticulados distributivos con cero y uno (ver [1]).

Diremos que A es <u>(debilmente) Stone representable</u> por una clase $\mathcal{M}$ cuando A es isomorfa al álgebra de secciones globales de un haz subdirecto cuyas fibras pertenecen a $\mathcal{M}$ (o son triviales) y cuyo espacio base es un espacio de Stone tal que los ecualizadores de las secciones globales son compactos. Si A es (debilmente) Stone representable por subdirectamente irreducibles, entonces diremos que A es <u>(debilmente) Stone representable</u>.

Lema 6.1: Son equivalentes:

(1) A es Stone representable por $\mathcal{M}$.

(2) A es isomorfo a $A' \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ producto subdirecto, A' emparcha sobre τ_E, τ_E es una topología de Stone, los ecualizadores son compactos y cada A_i pertenece a $\mathcal{M}$.

Prueba: Por **(4)** de A.5, **(1)** es equivalente a: **(1')** Existe $A' \cong A$, $A' \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ producto subdirecto y τ topología sobre I, tales que A' emparcha sobre τ, I es un espacio de Stone donde los ecualizadores son compactos y abiertos y cada A_i pertenece a $\mathcal{M}$. Ahora aplique argumentos similares a los del Lema 3.1. ∎

Teorema 6.2: Supongamos que $\mathcal{M}$ es una clase universal. Entonces son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por $\mathcal{M}$.

(2) A es Stone representable por $\mathcal{M}$.

Prueba: (1)⇒(2). Por el Lema 3.1 podemos suponer $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$, producto subdirecto, A emparcha sobre τ_E, topología compacta y T_0 y cada $A_i \in \mathcal{M}$. Sea $L = \tau_E$, $J = \{\text{filtros primos de } L\}$. Entonces $(J, \tau(\hat{L}))$ es un espacio de Stone ya que L es un reticulado distributivo acotado. Por el Corolario 1 del Lema 4.1, $g(A) \subseteq \Pi\{A/u : u \in J\}$ emparcha sobre $\tau(\hat{L})$ y por el Lema 4.2 $A/u \in \mathcal{M}$ para todo $u \in J$. Además ya que $E(g(x),g(y)) = E(\hat{x,y}) \in \hat{L}$ para todo $x,y \in A$, tenemos que en J los ecualizadores son compactos y abiertos (recordar que $\hat{L}$ es base de subconjuntos de J compactos y abiertos). Así tenemos probado **(1')** (ver la prueba del Lema 6.1) y ∴ A es Stone representable por $\mathcal{M}$. ∎

Corolario 1: Sea $\mathcal{M}$ una clase universal y sea A un álgebra. Si $\Sigma^A_{\mathcal{M}}$ es denso, entonces $\Sigma^A_{\mathcal{M}}$ es compacto.

Prueba: Use la misma construcción que en el Teorema 6.2, pero sin asumir emparche. (Note que ya que los ecualizadores pertenecen a L tenemos que $\theta_i = \equiv_{h(i)}$ para todo $i \in I$). ∎

El Teorema 6.7 de [9] (Ledbetter) establese que, bajo ciertas hipótesis sobre A y $\mathcal{M}$, una condición suficiente para la representabilidad es que todo sistema $x \equiv x_1(\theta_1), \ldots, x \equiv x_n(\theta_n)$, (con $(x_k, x_l) \in \theta_k \vee \theta_l$ para todo k,l) tenga una solución $x \in A$. (Ver [6, pag. 221, ejercicio 68]). El siguiente corolario muestra que si nos quedamos con un subconjunto del conjunto de todos los sistemas, entonces la condición resulta también necesaria.

Corolario 2: Sea A de congruencias distributivas. Supongamos que $\mathcal{M} \geq SI(H(A))$ y que $\mathcal{M}$ es una clase universal. Entonces son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por $\mathcal{M}$.

(2) A es Stone representable por $\mathcal{M}$.

(3) A verifica el Teorema Chino del Resto con respecto a $\Sigma^{A}_{\mathcal{M}}$.

Así, si A es aritmética, entonces A es Stone representable por cualquier clase universal que contenga a SI(H(A)).

Prueba: Ya que $\Sigma^{A}_{\mathcal{M}}$ es compacto denso (Corolario 1), el Teorema 3.5 puede ser aplicado. ∎

Nota 1: En **(1)⇒(2)⇒(3)** no es necesario asumir que $\mathcal{M} \geq SI(H(A))$.

Nota 2: Si la condition **(3)** es verificada por todo miembro de una variedad, entonces aplicando el Lema 2.2 podemos obtener una condición más fuerte para todo miembro de tal variedad (use argumentos similares a los del Lema 2.5).

El Teorema 6.7 de [9] es aplicable siempre y cuando la clase universal generada por los subdirectamente irreducibles incluya sólo subdirectamente indescomponibles. Esta condición es verificada cuando la clase de los subdirectamente indescomponibles es ella misma una clase universal. En la mayoría de los casos la aplicación del Teorema 6.7 de [9] se reduce a la cituación anterior.

El hecho de que la hipótesis $\mathcal{M} \subseteq$ {subdirectamente indescomponible álgebras} es evitada en el Corolario 2 permite considerar un amplio espectro de nuevos casos en los cuales surge una problemática interesante alrededor de la propiedad de verificar el TCHR con respecto a $\Sigma^{A}_{\mathcal{M}}$. Los Teoremas 8.9 y 8.10 son un claro ejemplo de las nuevas posibilidades que surgen a partir del corolario 2.

Corolario 3: Sea $\mathcal{M}$ una clase universal. Si $\mathcal{M}$ es cápsula-núcleo con respecto a A, entonces son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por $\mathcal{M}$.

(2) A es Stone representable por $\mathcal{M}$.

(3) $\Sigma^{A}_{\mathcal{M}}$ es denso y $\mathfrak{I}_{\Sigma^{A}_{\mathcal{M}}}$ verifica el TCHR débil.

(4) $< \Sigma^{A}_{\mathcal{M}} >$ es un proyectivo congruencialmente algebraico tal que contiene a $\mathbb{O}$, verifica el TCHR débil y la intersección de cualquier familia finita no vacía de elementos compactos es un elemento compacto.

Prueba: Por el Teorema 6.2, el Corolario 1 y el Teorema 3.3 es suficiente probar **(3)⇒(4)**. Supongamos **(3)**. Entonces podemos suponer que $A \leq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ es producto subdirecto, $\Sigma^{A}_{\mathcal{M}} = \{\theta_i \quad i \in I\}$ y A emparcha sobre τ_E (ver **(2)⇒(1)** de la prueba del Teorema 3.2). Pero haciendo lo mismo que en el Teorema 6.2, y usando que $\theta_i = \equiv_{h(i)}$ para todo i, podemos finalmente suponer que $A \leq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ es producto subdirecto, $\Sigma^{A}_{\mathcal{M}} \cup \{\nabla\} \supseteq \{\theta_i \quad i \in I\} \supseteq \Sigma^{A}_{\mathcal{M}}$ y existe una topología τ sobre I tal que I es un espacio de Stone, A emparcha sobre τ y los ecualizadores son compactos y abiertos. Ya que $\mathcal{R}$ y $< \Sigma^{A}_{\mathcal{M}} >$ están antiidentificados, la compacidad de

$$\theta^{\Sigma^{A}_{\mathcal{M}}}_{(x,y)},\ \bigcap_{l=1}^{n} \theta^{\Sigma^{A}_{\mathcal{M}}}_{(x_l,y_l)},\ x,y,\ x_l,y_l \in A,\ l=1,\dots,n,$$

puede ser probada usando que (I,τ) es el espacio de representación de Stone de un reticulado acotado (y que $\overline{F \cup G} = F \cup G$ para todo $F,G \in \mathcal{R}$). Finalmente, ya que $\mathfrak{I}_{\Sigma^{A}_{\mathcal{M}}}$ verifica el TCHR débil entonces por **(3)** del Lema 2.8, $< \Sigma^{A}_{\mathcal{M}} >$ verifica el TCHR débil. ■

Para una clase $\mathcal{K}$, con $SI_d(\mathcal{K})$ denotaremos la clase de lo miembros de $\mathcal{K}$ subdirectamente indescomponibles.

Corolario 4: Supongamos A es de congruencias distributivas. Si existe una clase universal $\mathcal{M}$ tal que $SI(H(A)) \subseteq \mathcal{M} \subseteq SI_d(H(A)) \cup$ {álgebras triviales}, entonces la intersección de cualquier familia finita no vacía de congruencias compactas es compacta. ■

Teorema 6.3: Sea A de congruencias distributivas y supongamos que la intersección de cualquier familia finita (no vacía) de congruencias compactas es compacta. Entonces MI(A) es compacto y son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por subdirectamente indescomponibles.

(2) A es (debilmente) Stone representable por subdirectamente indescomponibles.

(3) A verifica el Teorema Chino del Resto débil.

Prueba: Supongamos **(3)**. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ es producto subdirecto, $\{\theta_i \quad i \in I\} = MI(A)$ y que A emparcha sobre $L = \mathcal{R}$ (recordar que MI(A) es cápsula-núcleo). Ahora podemos usar el Lema 4.3 y el Corolario 1 del Lema 4.1 para probar **(2)**. Los mismos argumentos pero sin asumir emparche pueden ser usados para probar la compacidad de MI(A) (recordar que ya que L contiene los ecualizadores, $\equiv_{h(i)} = \theta_i$ para todo $i \in I$). ■

Diremos que una clase $\mathcal{K}$ es <u>(debilmente) Stone representable</u> por una clase $\mathcal{M}$ si para todo $A \in \mathcal{K}$, A es (debilmente) Stone representable por $\mathcal{M}$.

Corolario 1: Sea $\mathcal{V}$ una variedad de congruencias distributivas tal que para todo $A \in \mathcal{V}$ la intersección de cualquier familia finita (no-vacía) de congruencias compactas es una congruencia compacta. Entonces son equivalentes:

(1) $\mathcal{V}$ es globalmente representable por $SI_d(\mathcal{V})$.

(2) $\mathcal{V}$ es (debilmente) Stone representable por $SI_d(\mathcal{V})$.

(3) $\mathcal{V}$ es de congruencias permutables.

Prueba: Use el Corolario 1 del Teorema 3.4. ∎

A continuación daremos un teorema que relaciona la representabilidad de Stone y la Booleana.

Teorema 6.4: Sea A cualquier álgebra. Supongamos que $\mathcal{M}$ no contiene álgebras triviales. Si los elementos de $\Sigma^A_{\mathcal{M}}$ son incomparables, entonces son equivalentes:

(1) A es Stone representable por $\mathcal{M}$.

(2) A es Booleanamente representable por $\mathcal{M}$.

Prueba: Si A es trivial entonces el resultado es obvio. Supongamos A es no trivial. **(1)⇒(2)**. Por el Lema 6.1 podemos suponer que $A \subseteq \Pi\{A_i \ \ i \in I\}$ es producto subdirecto, A emparcha sobre τ_E, (I, τ_E) es un espacio de Stone donde los ecualizadores son compactos, y cada A_i pertenece a $\mathcal{M}$. Sea $\Sigma = \{\theta_i\}$. Es fácil de chequear que ya que τ_E es una topología de Stone y $\bar{\emptyset} = \emptyset$, entonces $< \Sigma >$ es congruencialmente algebráico y $\mathbb{I}$ es un elemento compacto ($\bar{\emptyset} = \emptyset$ ya que $\mathcal{M}$ no contiene álgebras triviales). A continuación probaremos que τ_E es T_2. Sean i, j dos distintos elementos de I. Ya que $\mathbb{I}$ es un elemento compacto de $< \Sigma >$, existen $x_k, y_k \in A$, $k=1,\dots,n$ tales que:

$$\mathbb{I} = \bigvee_{k=1}^{n} \theta^{\Sigma}(x_k, y_k)$$

y $\therefore$ ya que θ_i, θ_j son incomparables (τ_E es T_o) tenemos:

$$\mathbb{I} = \theta_i \vee \theta_j \ni (x_k, y_k) \quad \text{para } k=1,\ldots,n.$$

Así aplicando (2) del Lema 2.7 obtenemos que existen $\theta \le \theta_i$, $\delta \le \theta_j$, $\theta, \delta \in \mathfrak{I}_\Sigma$ tales que $\theta \vee \delta \ni (x_k, y_k)$ para todo k, es decir, $\theta \vee \delta = \mathbb{I}$. Ahora aplicando (2) del Lema 1.1 podemos separar i de j. Finalmente ya que τ_E es T_2 y los ecualizadores son compactos, tenemos que ellos son abiertos y cerrados y $\therefore$ tenemos (2). ■

Note que el Teorema 6.4 nos dice que si Σ es un espectro en el cual todos los elementos son incomparables, y si la representación asociada a Σ es de Stone, entonces ésta será una representación Booleana y $\tau_E = \tau_{HK} = \tau_B$ serán topologías Booleanas. Por otro lado note que si Σ es un espectro cuya representación subdirecta asociada es Booleana, entonces los elementos de Σ son incomparables (ver [15]).

Corolario 1: Sea A un álgebra de congruencias distributivas. Entonces son equivalentes:

(1) A es Stone representable por álgebras simples no triviales.

(2) A es Booleanamente representable por álgebras simples no triviales.

(3) A es cuasiregular y $\mathbb{I}$ es una congruencia compacta.

Prueba: Por el Corolario 3 del Lema 2.4 si $\Sigma \subseteq MAX(A)$ es compacto denso, entonces $\Sigma = MAX(A) = MI(A)$. Además por Clark y Krauss [9, 5.22] si A es cuasiregular entonces $MAX(A) = MI(A)$. Así la equivalencia (2)⇔(3) se sigue del Teorema 3.7. ■

Note que en (1)⇔(2) no es necesario asumir que A es de congruencias distributivas.

7. APLICACIONES A VARIEDADES CON CONGRUENCIAS PRINCIPALES DEFINIBLES.

Una variedad $\mathcal{V}$ tiene congruencias principales definibles (CPD) si existe una fórmula de primer orden $\varphi(x_1,x_2,x_3,x_4)$ tal que para todo $A \in \mathcal{V}$, $a,b,c,d \in A$:

$$(c,d) \in \theta_{(a,b)} \text{ sii } A \models \varphi(a,b,c,d).$$

Lema 7.1: Sea $\mathcal{V}$ una variedad con CPD. Entonces existen fórmulas de primer orden $\varphi_n(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n,u,v)$, $n \geq 1$, tales que para todo $A \in \mathcal{V}$, $a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n,c,d \in A$, $n \geq 1$ tenemos:

$$(c,d) \in \bigvee_{k=1}^{n}\theta_{(a_k,b_k)} \text{ sii } A \models \varphi_n(a_1,b_1,\ldots,a_n,b_n,c,d).$$

Prueba: Procederemos por inducción en n. El caso $n = 1$ es trivial. Supongamos que tenemos construída φ_n, entonces construiremos φ_{n+1}. Podemos suponer que φ está en forma normal prenexa, es decir:

$$\varphi : Q_1z_1Q_2z_2\ldots Q_mz_m\ p(t_1=s_1,\ldots,t_h=s_h),$$

donde p es un término de tipo $\{\wedge,\vee,\Rightarrow,\Leftrightarrow,\neg\}$, y $t_i = t_i(\vec{z},x_1,x_2,x_3,x_4)$, $s_i = s_i(\vec{z},x_1,x_2,x_3,x_4)$, $i=1,\ldots,h$ son términos del mismo tipo que $\mathcal{V}$. Por razones de espacio reemplazaremos la expresión $Q_1z_1Q_2z_2\ldots Q_mz_m$, por $Q\vec{z}$ y si $E_1,E_2,\ldots,E_h$ denotan expresiones cualesquiera, reemplazaremos con $p(E_i)$ a $p(E_1,\ldots,E_h)$. Sea φ_{n+1}:

$$Q\vec{z}\ p(\varphi_n(x_1,y_1,\ldots,x_n,y_n,t_i(\vec{z},x_{n+1},y_{n+1},u,v),s_i(\vec{z},x_{n+1},y_{n+1},u,v))).$$

Sea $A \in \mathcal{V}$, y $a_1,b_1,\ldots,a_{n+1},b_{n+1} \in A$. Sea $\theta = \bigvee_{k=1}^{n}\theta_{(a_k,b_k)}$, agreguemos al lenguage de V un símbolo de función unaria, f, y expandamos A a $A' = \langle A, /\theta\rangle$. Es fácil de probar que:

$$(\overset{n+1}{\underset{k=1}{\vee}}\theta_{(a_k,b_k)})/\theta = \theta_{(a_{n+1}/\theta,\, b_{n+1}/\theta)},$$

y $\therefore$ para $c,d \in A$ tenemos:

$$(c,d) \in \overset{n+1}{\underset{k=1}{\vee}}\theta_{(a_k,b_k)} \text{ sii},$$

$$(c/\theta, d/\theta) \in \theta_{(a_{n+1}/\theta,\, b_{n+1}/\theta)} \text{ sii},$$

$$A/\theta \models \varphi(a_{n+1}/\theta, b_{n+1}/\theta, c/\theta, d/\theta) \text{ sii},$$

$$A/\theta \models Q\vec{z}\ p(t_1(\vec{z}, a_{n+1}/\theta, b_{n+1}/\theta, c/\theta, d/\theta) \overset{(*)}{=} s_1(\vec{z}, a_{n+1}/\theta, b_{n+1}/\theta, c/\theta, d/\theta)).$$

Pero ya que $/\theta$ es sobre, tenemos que (*) es equivalente a:

$$A' \models Q\vec{z}\ p(t_1(f\vec{z}, fa_{n+1}, fb_{n+1}, fc, fd) = s_1(f\vec{z}, fa_{n+1}, fb_{n+1}, fc, fd)),$$

lo cual, ya que $/\theta$ es un homomorfismo, es equivalente a:

$$A' \models Q\vec{z}\ p(ft_1(\vec{z}, a_{n+1}, b_{n+1}, c, d) \overset{(**)}{=} fs_1(\vec{z}, a_{n+1}, b_{n+1}, c, d)).$$

Pero, por hipótesis inductiva:

$$A' \models (ft_1 = fs_1) \Leftrightarrow \varphi_n(a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n, t_1, s_1)$$

y $\therefore$ (**) es equivalente a:

$$A' \models \varphi_{n+1}(a_1, b_1, \ldots, a_{n+1}, b_{n+1}, c, d)$$

y $\therefore$ el Lema es probado. ■

Sean x_{lk}, y_{lk}, x_k, $1 \le l,k \le n$, variables de primer orden, y sean:

B: $\forall u,v\ (\bigwedge_{k=1}^{n} \varphi_n(x_{1k}, y_{1k}, \ldots, x_{nk}, y_{nk}, u, v)) \Rightarrow (u=v)$

C: $\bigwedge_{k,l=1}^{n} \varphi_{2n}(x_{1k}, y_{1k}, \ldots, x_{nk}, y_{nk}, x_{1l}, y_{1l}, \ldots, x_{nl}, y_{nl}, x_k, x_l)$

$$D: \exists x \bigwedge_{k=1}^{n} \varphi_n(x_{1k},y_{1k},\ldots,x_{nk},y_{nk},x,x_k),$$

donde φ_n, φ_{2n} son definidas como en el Lema 7.1. Definamos la n-ésima condición de representabilidad global para una variedad con CPD igual a la fórmula de primer orden:

$$GR_n: \ (B \wedge C) \Rightarrow D.$$

Teorema 7.2: Sea $\mathcal{V}$ una variedad con CPD. Entonces para todo $A \in \mathcal{V}$, A verifica el TCHR débil sii $A \models GR_n$ para todo $n \geq 1$. Así la clase de los miembros de $\mathcal{V}$ que verifican el TCHR débil es axiomatizable en primer orden. ∎

Teorema 7.3: Sea $\mathcal{V}$ una variedad de congruencias distributivas. Supongamos que $\mathcal{V}$ tiene la CEP (congruence extension property) y tiene CPD. Entonces para todo $A \in \mathcal{V}$ son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por álgebras simples.

(2) A es Stone representable por álgebras simples.

(3) MAX(A) es denso y $A \models GR_n$ para $n \geq 1$.

Prueba: Si MAX(A) no es denso, entonces la afirmación es trivial. O sea que podemos suponer que MAX(A) es denso. La sentencia:

$$\forall x,y \ [\neg(x=y) \Rightarrow (\forall u,v \ \varphi(x,y,u,v))],$$

axiomatiza a los miembros simples de $\mathcal{V}$, $\therefore$ ya que $\mathcal{V}$ tiene la CEP tenemos que los miembros simples forman una clase universal y MAX(A) es compacto (Corolario 1 del Teorema 6.2) lo cual, por el Corolario 3 del Lema 2.4, implica que MAX(A) = MI(A). La afirmación se desprende ahora del Teorema 6.2, el Corolario 1 del Teorema 3.3 y el Teorema 7.2. ∎

Teorema 7.4: Sea $\mathcal{V}$ una variedad de congruencias distributivas. Supongamos que $\mathcal{V}$ tiene CPD. Entonces para $A \in \mathcal{V}$ son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por $S(SI(\mathcal{V}))$.

(2) A es Stone representable por $S(SI(\mathcal{V}))$.

(3) A verifica el TCHR con respecto a $\Sigma^{A}_{S(SI(\mathcal{V}))}$.

Prueba: Consideremos sentencia de primer orden:

$$\exists x,y\ [\neg(x=y) \wedge (\forall u,v,z,w\ (\neg(u=v) \Rightarrow (\varphi(x,y,z,w) \Rightarrow \varphi(u,v,z,w))))].$$

Es fácil de chequear que esta sentencia axiomatiza los miembros de $\mathcal{V}$ subdirectamente irreducibles, y $\therefore$ $S(SI(\mathcal{V}))$ es universal. Así el teorema se sigue del Corolario 2 del Teorema 6.2. ∎

Finalmente, combinando el Teorema 7.2 con el Teorema 6.3 obtenemos:

Teorema 7.5: Sea $\mathcal{V}$ una variedad de congruencias distributivas con CPD. Supongamos que para todo $A \in \mathcal{V}$ la intersección de cualquier familia finita (no vacia) de congruencias compactos es una congruencia compacta. Entonces la clase de las álgebras de $\mathcal{V}$ (debilmente) Stone representables por subdirectamente indescomponibles coincide con la clase de las álgebras de $\mathcal{V}$ globalmente representables por subdirectamente indescomponibles y es axiomatizable en primer orden. ∎

8. ALGUNAS APLICACIONES.

a) *Reticulados Distributivos*. Sea L un reticulado distributivo, con $\theta_{(x]}$, $\theta_{[y)}$ denotaremos las congruencias sobre L: $\{(z,w) : z \vee x = w \vee x\}$, $\{(z,w) : z \wedge y = w \wedge y\}$. (Ver Balbes y Dwinger [1]). Obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 8.1: Sea L un reticulado distributivo. Entonces son equivalentes:

(1) L es globalmente representable.

(2) L es debilmente Stone representable.

(3) L es localmente Booleanamente representable.

(4) L es relativamente complementado.

Prueba: **(1)⇔(2)**. Aplique el Teorema 6.2 y el Corolario 1 del Teorema 3.2.

(3)⇒(1). Es fácil de chequear que si $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ es un producto subdirecto localmente Booleano (para alguna topología sobre I), entonces τ_E es compacta. Ahora, aplique **(2)** del Lema 3.6 y el Lema 3.1.

(1)⇒(4). Por el Corolario 1 del Teorema 3.3 tenemos que L verifica el TCHR débil. Entonces para $a < x < b$, $a,x,b \in L$ tenemos:

$$(\theta_{[x)} \cap \theta_{(b]}) \cap (\theta_{[a)} \cap \theta_{(x]}) = \mathbb{0}.$$

Así, ya que $(a,b) \in (\theta_{[x)} \cap \theta_{(b]}) \vee (\theta_{[a)} \cap \theta_{(x]})$, por el TCHR débil tenemos que existe $y \in L$ tal que:

$$(y,a) \in (\theta_{[x)} \cap \theta_{(b]})$$

$$(y,b) \in (\theta_{[a)} \cap \theta_{(x]}).$$

El elemento y es el complemento relativo de x en $[a,b]$.

(4)⇒(3). Ya que L es de congruencias permutables tenemos que para $x \leq y$:

$$(\theta_{[x)} \cap \theta_{(y]}) \circ (\theta_{(x]} \vee \theta_{[y)}) = \mathbb{1}$$

y $\therefore$ L es cuasiregular ya que $\theta_{(x,y)} = \theta_{[x)} \cap \theta_{(y]}$. Así el Teorema 3.7 puede aplicarse. ∎

Corolario 1: Ninguna variedad no trivial de reticulados puede ser globalmente representada por subdirectamente irreducibles. ∎

Nota: el Teorema 8.9 establece que la variedad de los reticulados distributivos es Stone representable por $\{2,3\}$.

Teorema 8.2: Para un reticulado distributivo L son equivalentes:

(1) L es Stone representable.

(2) L es Booleanamente representable.

(3) L es un reticulado distributivo acotado relativamente complementado.

Prueba: Es fácil de chequear que $\mathbb{I}$ es compacto sii L es acotado. Además en el Teorema 8.1 probamos que si L es relativamente complementado, entonces L es cuasiregular. Ahora aplique el Teorema 8.1 y el Corolario 1 del Teorema 6.4. ∎

b) *Anillos Conmutativos.* Sea $A = \langle A,+,-,.,0\rangle$ un anillo conmutativo. Ya que congruencias e ideales están naturalmente identificadas, entonces las nociones de compacidad, reticulados de ideales sobre A, proyectivos sobre A, "Teoremas Chinos", etc pueden ser definidas usando tal identificación. Sea $\mathfrak{R} = \langle\{\text{ideales primos de } A\}\rangle$. Note que $\mathfrak{R}$ es el reticulado de los <u>ideales radicales</u> de A. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 8.3: Sea A un anillo conmutativo. Entonces son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por dominios.

(2) A es Stone representable por dominios.

(3) A es semi-primo y $\mathfrak{R}$ verifica el Teorema Chino del Resto débil.

Prueba: Es fácil de chequear que los ideales primos son irreducibles (ver [9, 7.1]). Ya que la clase de dominios es universal, el Corolario 3 del Teorema 6.2 puede aplicarse. ∎

c) *Reticulados distributivos pseudocomplementados.* Son álgebras $\langle L, \vee, \wedge, *, 0\rangle$ donde $\langle L, \vee, \wedge, 0\rangle$ es un reticulado distributivo con 0 y * es una operación unaria, llamada pseudocomplementación, la cual satisface:

$$x \wedge y = 0 \text{ sii } y \leq x^*, \text{ para todo } x, y \in L.$$

Es decir, un reticulado distributivo pseudocomplementado es un reticulado distributivo tal que para todo $x \in L$ existe el mayor de los miembros de L disjuntos con x. Si L es un reticulado distributivo pseudocomplementado, entonces $x \leq 0^*$ para cualquier $x \in L$, y $\therefore$ L tiene un mayor elemento $1 = 0^*$. En [1, VIII.3.1] es probado que la clase de los reticulados distributivos pseudocomplementados es una variedad. Las álgebras subdirectamente irreducibles de estavariedad son exactamente los reticulados distributivos pseudocomplementados de la form $B \oplus 1$ donde B es un álgebra de Boole y la operation * es definida igual a la operation de complementación de B para elementos no nulos de B, $0^* = 1$ y $1^* = 0$. (Ver [1]). Lakser [10] mostró que la variedad de los reticulados distributivos pseudocomplementados tiene CPD y $\therefore$ la clase de los miembros subdirectamente irreducibles es cerrada bajo formación de ultraproductos. Además es fácil de chequear que esta clase es cerrada bajo formación de subálgebras y los reticulados distributivos pseudocomplementados subdirectamente irreducibles forman una clase universal. Sea $L = \langle L, \vee, \wedge, *, 0\rangle$ un reticulado distributivo pseudocomplementado. Un elemento $x \in L$ es denso si $x^* = 0$. Es fácil de chequear que los elementos densos forman un subreticulado de $\langle L, \vee, \wedge\rangle$. Denotemos con $\mathcal{D}(L)$ dicho subreticulado. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 8.4: Para un reticulado distributivo pseudocomplementado $L = \langle L, \vee, \wedge, *, 0\rangle$ son equivalentes:

(1) L es globalmente representable.

(2) L es Stone representable.

(3) L es de congruencias permutables.

(4) $\mathcal{D}(L)$ es relativamente complementado.

Así, los reticulados distributivos pseudocomplementados globalmente (o Stone) representables forman una clase axiomatizable en primer orden.

Prueba: Por el el Corolario 3 del Teorema 6.2 tenemos **(1)**$\Leftrightarrow$**(2)**$\Leftrightarrow$ L verifica el TCHR débil. Puede probarse facilmente que $\mathcal{D}(L)$ es un filtro del reticulado $\langle L,\vee,\wedge\rangle$ y $\therefore$ por VIII.4.2 de [1] tenemos que el conjunto:

$$\theta(\mathcal{D}(L)) = \{(x,y) \in L^2 : x \wedge d = y \wedge d \text{ para algún } d \in \mathcal{D}(L)\}$$

es una congruencia sobre L. Denotemos con $\mathcal{R}(L)$ el álgebra de Boole de los elementos regulares de L, es decir, el conjunto $\{x \in L : x^{**} = x\}$ junto con las operaciones inducidas por el orden parcial de L (ver [1, Teorema de Glivenko]). Supongamos $(x,y) \in \theta(\mathcal{D}(L)) \cap \mathcal{R}(L)^2$. Entonces $x \wedge d = y \wedge d$ para algún $d \in \mathcal{D}(L)$ y $\therefore$ $x = x^{**} \wedge 1 = x^{**} \wedge d^{**} = (x \wedge d)^{**} = (y \wedge d)^{**} = y^{**} \wedge d^{**} = y^{**} \wedge 1 = y$ (ver [1, (viii) of VIII.2.1]). Así tenemos que $\theta(\mathcal{D}(L)) \cap \mathcal{R}(L)^2 = \mathbb{0}^{\mathcal{R}(L)}$ y usando [11, Teorema 1, pag. 336] puede probarse facilmente que:

(a) $\langle\{\delta \in CON(L): \delta \leq \theta(\mathcal{D}(L))\},\vee,\cap\rangle \to CON(\mathcal{D}(L))$ es un isomorfismo.

$$\theta \to \theta \cap \mathcal{D}(L)^2$$

(b) $CON(L) \to CON(\mathcal{R}(L))$ es un homomorfismo.

$$\theta \to \theta \cap \mathcal{R}(L)^2$$

A continuación probaremos que L verifica el TCHR (débil) sii $\mathcal{D}(L)$ verifica el TCHR (débil). $\Rightarrow$. Se sigue de **(a)** y del hecho que $\mathcal{D}(L)$ es un filtro de $\langle L,\vee,\wedge\rangle$. $\Leftarrow$. Sean $\theta_1,\ldots,\theta_n \in CON(L)$ (tales que $\theta_1 \cap \ldots \cap \theta_n = \mathbb{0}$) y sean $x_1,\ldots,x_n$ elementos de L tales que $(x_k,x_l) \in \theta_k \vee \theta_l$ para todo k, l. Ya que $\mathcal{R}(L)$ es un álgebra de Boole, it es aritmética y $\therefore$ tenemos que $\mathcal{R}(L)$ verifica el TCHR (ver [6, pag. 221, ejercicio 68]). Además, $x^{**} \in \mathcal{R}(L)$ para todo $x \in L$ (use (iv) de VIII.2.1 de [1]) y $\therefore$ podemos aplicar el TCHR a:

$$\theta_1 \cap \mathcal{R}(L)^2, \dots, \theta_n \cap \mathcal{R}(L)^2,\ x_1^{**}, \dots,$$

(use **(b)**). Así existe $z \in \mathcal{R}(L)$ tal que $(z, x_k^{**}) \in \theta_k$ para $k=1,\dots,n$. Por otro lado, ya que $x \vee x^* \in \mathcal{D}(L)$ para todo $x \in L$ (use (vii) y (i) de VIII.2.1 de [1]), podemos aplicar el TCHR (débil) a:

$$\theta_1 \cap \mathcal{D}(L)^2, \dots, \theta_n \cap \mathcal{D}(L)^2,\ x_1 \vee x_1^*, \dots, x_n \vee x_n^*$$

(use **(a)**). Así existe $w \in \mathcal{D}(L)$ tal que $(w, x_k \vee x_k^*) \in \theta_k$ para todo k. Finalmente, si tomamos $x = z \wedge w$, entonces tenemos que $(x, x_k) = (z \wedge w, x_k^{**} \wedge (x_k \vee x_k^*)) \in \theta_k$ para $k=1,\dots,n$ y $\therefore$ el "$\Leftarrow$" es probado. (Note que $x^{**} \geq x$ para todo $x \in L$). El resto de la prueba sigue aplicando argumentos similares a los usados en el Teorema 8.1. ∎

Un <u>álgebra</u> <u>de</u> <u>Stone</u> es un reticulado distributivo pseudocomplementado que satisface la identidad:

$$x^* \vee x^{**} = 1.$$

En Balbes y Dwinger [1] es probado que las álgebras de Stone subdirectamente irreducibles son **2** y **3**. Tenemos los siguientes corolarios del Teorema 8.4:

Corolario 1: Sea L un álgebra de Stone. Entonces son equivalentes:

(1) L es globalmente representable por $\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}$.
(2) L es Stone representable por $\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}$.
(3) $\mathcal{D}(L)$ es relativamente complementada.
(4) L es de congruencias permutables. ∎

Corolario 2: La variedad de las álgebras de Stone no es globalmente representable por subdirectamente irreducibles.

Prueba: Toda cadena con 0 y 1 es un álgebra de Stone (defina $0^* = 1$ y $x^* = 0$ para $x \neq 0$) y es trivial encontrar cadenas que no sean de congruencias permutables. ∎

Nota: El Teorema 8.10 establece que la variedad de las álgebras de Stone es Stone representable por $\{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}$.

d) *Anillos reticulados.* Un anillo reticulado (ℓ-anillo) es un álgebra $\langle A,+,-,.,0,\wedge,\vee\rangle$ donde $\langle A,\wedge,\vee\rangle$ es un reticulado y $\langle A,+,-,.,0\rangle$ es un anillo y para todo $x,y,z \in A$:

$$\text{si } x \le y \text{ entonces } x+z \le y+z$$

$$\text{si } x \le y \text{ y } z \ge 0 \text{ entonces } x.z \le y.z \text{ y } z.x \le z.y$$

Como fué observado por Birkhoff y Pierce [3], la clase de los ℓ-anillos es una variedad. Un ℓ-anillo es llamado un anillo de funciones (f-anillo) si es isomorfo a un producto subdirecto de ℓ-anillos totalmente ordenados. Los f-anillos forman una variedad, y los f-anillos subdirectamente indescomponibles son exactamente los f-anillos no triviales totalmente ordenados (ver Keimel [7]). Obtenemos la siguiente mejora del Corolario 6.4 de [9]:

Teorema 8.5: The variedad de los f-anillos es Stone representable por f-anillos totalmente ordenados.

Prueba: Ya que los anillos son de congruencias permutables y los reticulados son de congruencias distributivas, los ℓ-anillos son aritméticos. Así ya que la clase de f-anillos totalmente ordenados es universal podemos aplicar el Corolario 3 del Teorema 6.2. ∎

Teorema 8.6: Todo ℓ-anillo con identidad es Stone representable por subálgebras de ℓ-anillos subdirectamente irreducibles.

Prueba: Es fácil de chequear que la variedad de los ℓ-anillos con identidad tiene CPD y $\therefore$ el Teorema 7.4 puede aplicarse. ∎

Un elemento u de un ℓ-anillo A es llamado una <u>unidad formal</u> si $\theta_{(u,0)} = \mathbb{1}$, es decir, u genera A como un ideal convexo. Por ejemplo una identidad es una unidad formal, o si para cada $x \in A$ existe $n \geq 1$ tal que $n.u \geq x$, entonces u es una unidad formal.

Teorema 8.7: Sea A un ℓ-anillo. Entonces son equivalentes:

(1) A es Stone representable por ℓ-anillos simples no triviales.

(2) A es Booleanamente representable por ℓ-anillos simples no triviales.

(3) A es cuasiregular y A tiene una unidad formal.

Prueba: Use el Corolario 1 del Teorema 6.4. ∎

e) *Variedades de expansiones reticuladas.* Una variedad $\mathcal{V}$ es una <u>variedad de expansiones reticuladas</u> si existen términos binarios t y s tales que para todo $A \in \mathcal{V}$, $\langle A, t^A, s^A \rangle$ es un reticulado (ver [9]). Si $\mathcal{V}$ es una variedad de expansiones reticuladas, entonces con $\mathcal{T}$ denotaremos la clase de los miembros de $\mathcal{V}$ totalmente ordenados. Tenemos la siguiente generalización del Teorema 6.2 de [9]:

Teorema 8.8: Sea $\mathcal{V}$ una variedad de expansiones reticuladas y sea $\mathcal{T}_1$ una subclase universal cerrada bajo formación de imagenes homomórficas no triviales. Entonces para $A \in \mathcal{V}$ son equivalentes:

(1) A es globalmente representable por $\mathcal{T}_1$.

(2) A es Stone representable por $\mathcal{T}_1$.

(3) $\Sigma^{A}_{\mathcal{T}_1}$ es denso y A verifica el TCHR con respecto a $\Sigma^{A}_{\mathcal{T}_1}$.

Prueba: Si $A \notin V(\mathcal{T}_1)$ = variedad generada por $\mathcal{T}_1$, entonces las equivalencias son triviales. Si $A \in V(\mathcal{T}_1)$, entonces por el Teorema de Jonsonn (ver [4]), $SI(H(A)) \subseteq \mathcal{T}_1$ y $\therefore$ ya que $\mathcal{T}_1$ es universal podemos aplicar el Corolario 2 del Teorema 6.2. ∎

Note que podemos tomar $\mathcal{T}_1 = \mathcal{T}$. Por ejemplo, si C es un miembro de $\mathcal{V}$ totalmente ordenado y finito, entonces podemos tomar $\mathcal{T}_1$ igual a la clase IHS(C). Los dos siguientes casos mostrarán que el Teorema 8.8 tiene interesantes aplicaciones.

Teorema 8.9: Sea $L = \langle L, \vee, \wedge, 0, 1\rangle$ un reticulado acotado. Entonces son equivalentes:

(1) L es globalmente representable por $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$.

(2) L es Stone representable por $\{\mathbf{2}, \mathbf{3}\}$.

(3) L es distributivo.

Prueba: **(3)⇒(2)**. Con X(L) denotaremos el espacio de representación de Priestley de L, es decir, el conjunto de los filtros primos de L ordenado con la inclusión de conjuntos, junto con la topología con subbase formada por los conjuntos de la forma $\sigma(x) = \{p \in X(L) \quad p \ni x\}$ y $X(L) - \sigma(x)$, con $x \in L$. (Ver [13] y [14], donde más referencias pueden ser encontradas). Un conjunto $U \subseteq X(L)$ es creciente cuando para todo $p, q \in X(L)$ si $p \in U$ y

$q \geq p$, entonces $q \in U$. Los siguientes hechos son bien conocidos:

(a) $X(L)$ es un espacio compacto y Hausdorff.

(b) $U \subseteq X(L)$ es abierto, cerrado y creciente sii $U = \sigma(x)$ para algún $x \in L$.

(c) El mapeo $Y \to \theta_Y = \{(x,y) \in L^2 : \sigma(x) \cap Y = \sigma(y) \cap Y\}$ es un antiisomorfismo entre el reticulado de los subconjuntos cerrados de $X(L)$ y *CON(L)*.

A continuación probaremos que L verifica el TCHR con respecto a $\Sigma^L_{(2,3)}$. Note que $\Sigma^L_{(2,3)} = \{\theta_{\{p,q\}} : p,q \in X(L),\ p \leq q\}$ ($\{p,q\}$ es cerrado en $X(L)$ ya que $X(L)$ es Hausdorff). Sean $\theta_1,\ldots,\theta_n$ congruencias compactas tales que el conjunto $\{\theta_1,\ldots,\theta_n\}$ minoriza $\Sigma^L_{(2,3)}$, y sean $x_1,\ldots,x_n$ elementos de L tales que $(x_k,x_l) \in \theta_k \vee \theta_l$ para todo k,l. Ya que el mapeo $U \to \theta_{X(L)-U}$ es un isomorfismo entre el reticulado de subconjuntos abiertos de $X(L)$ y $CON(L)$, tenemos que para todo abierto $U \subseteq X(L)$, U es compacto $X(L)$ sii $\theta_{X(L)-U}$ es una congruencia compacta. Pero, ya que $X(L)$ es compacto Hausdorff, tenemos que U es compacto sii U es cerrado y obtenemos que para todo conjunto cerrado $Y \subseteq X(L)$, Y es abierto sii θ_Y es compacta. Sean $Y_1,\ldots,Y_n$ subconjuntos abiertos y cerrados de $X(L)$ tales que $\theta_k = \theta_{Y_k}$ para $k=1,\ldots,n$.

Por **(c)** tenemos que:

(*) $$\sigma(x_k) \cap (Y_k \cap Y_l) = \sigma(x_l) \cap (Y_k \cap Y_l),\ \text{para } 1 \leq k,l \leq n.$$

Sea $U = \bigcup_{k=1}^{n}(\sigma(x_k) \cap Y_k)$. Supongamos que $p \in \sigma(x_k) \cap Y_k$ y que $q \geq p$, $q \in X(L)$. Ya que $\{\theta_1,\ldots,\theta_n\}$ minoriza $\Sigma^L_{(2,3)}$, existe l tal que $\theta_l \leq \theta_{\{p,q\}}$ y $\therefore$ por **(c)**, $Y_l \ni p,q$. Entonces por **(*)**, $p \in \sigma(x_l)$ y $\therefore$ $q \in \sigma(x_l)$ lo cual implica $q \in U$ (recordar que $q \in Y_l$). Así tenemos probado que U es creciente. Ya que U es clopen, existe $x \in L$ tal que $\sigma(x) = U$ (ver **(b)**). Además, ya que $\Sigma^L_{(2,3)}$ es denso y $\{\theta_1,\ldots,\theta_n\}$ minoriza $\Sigma^L_{(2,3)}$, tenemos que

$\theta_1 \cap \ldots \cap \theta_n = \mathbb{0}$ y $\therefore \bigcup_{k=1}^{n} Y_k = X(L)$. Se tiene:

$$\begin{aligned}
\sigma(x) \cap Y_l &= (\bigcup_{k=1}^{n}(\sigma(x_k) \cap Y_k)) \cap Y_l \\
&= \bigcup_{k=1}^{n}(\sigma(x_k) \cap Y_k \cap Y_l) \\
&= \bigcup_{k=1}^{n}(\sigma(x_l) \cap Y_k \cap Y_l) \qquad (\text{use } (*)) \\
&= \sigma(x_l) \cap Y_l \cap (\bigcup_{k=1}^{n} Y_k) \\
&= \sigma(x_l) \cap Y_l .
\end{aligned}$$

Así $(x,x_l) \in \theta_l$ para $l=1,\ldots,n$ y $\therefore$ tenemos probado que $\mathfrak{J}_{CON(L)}$ verifica el TCHR con respecto a $\Sigma^{L}_{\{2,3\}}$. El caso general ($\theta_1,\ldots,\theta_n$ no necesariamente compactas) se prueba usando argumentos similares a los usados en la prueba de **(3)** del Lema 2.8. Finalmente **(2)** sigue del Teorema 8.8. ∎

Nota 1: Puede probarse el Teorema 8.9 para reticulados en general pero entonces debemos reemplazar la clase $\{\mathbf{2},\mathbf{3}\}$ por $\{\mathbf{1},\mathbf{2},\mathbf{3}\}$.

Nota 2: Si L es un reticulado distributivo tal que todo filtro primo es maximal, entonces el Teorema 8.9 (generalizado) nos dice que L es Stone representable por $\{\mathbf{1},\mathbf{2}\}$ y por el Teorema 8.1 tenemos que L es relativamente complementado. Así tenemos probado el Teorema de Nachbin (ver [1]).

Teorema 8.10: Sea $L = \langle L,\vee,\wedge,^*,0\rangle$ un reticulado distributivo pseudocomplementado (ver c) de la Sección 8). Son equivalentes:

(1) L es globalmente representable por $\{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}$.

(2) L es Stone representable por $\{\mathbf{2},\mathbf{3},\mathbf{4}\}$.

(3) L es un álgebra de Stone.

Prueba: Supongamos que L es un álgebra de Stone. Sea L_1 el reticulado acotado $\langle L,\vee,\wedge,0,0^*\rangle$. Entonces usando VIII.2.2 de [1], puede facilmente chequearse que:

$$\Sigma^{L}_{\{2,3,4\}} = \{\theta_{\{p,q,r\}} : p,q,r \in X(L_1),\ p \le q \le r \text{ and } r \text{ is maximal}\}$$

($\theta_{\{p,q,r\}}$ y $X(L_1)$ son definidos como en la prueba del Teorema 8.9). Si $p,q \in X(L_1)$ y $p \le q$, entonces podemos tomar r igual a un filtro maximal de L_1, que contenga a q y obtenemos $\theta_{\{p,q,r\}} \le \theta_{\{p,q\}}$. Así $\Sigma^{L}_{\{2,3,4\}}$ minoriza $\Sigma^{L_1}_{\{2,3\}}$. Ya que $CON(L) \subseteq CON(L_1)$ y L_1 verifica el TCHR con respecto a $\Sigma^{L_1}_{\{2,3\}}$ (ver la prueba del Teorema 8.9) tenemos que L verifica el TCHR con respecto a $\Sigma^{L}_{\{2,3,4\}}$ lo cual por el Teorema 8.8 implica que **(2)** es verdadero. ∎

Los Teoremas 8.9 y 8.10 sugieren la siguiente interesante pregunta: ¿Cuáles álgebras de De Morgan (ver f)) son Stone representables por álgebras de De Morgan totalmente ordenadas?

f) *Algebras de De Morgan.* (Ver Balbes y Dwinger [1]). Un <u>álgebra de De Morgan</u> es un álgebra $\langle M,\vee,\wedge,-,0,1\rangle$ tal que $\langle M,\vee,\wedge,0,1\rangle$ es un reticulado distributivo acotado y $-$ es una operación unaria tal que:

$$\overline{x \vee y} = \bar{x} \wedge \bar{y}$$
$$\overline{x \wedge y} = \bar{x} \vee \bar{y}$$
$$\bar{\bar{x}} = x.$$

Las álgebras de De Morgan subdirectamente irreducibles son M_0 = el álgebra de Boole **2**, M_1 = la cadena **3**, con $\bar{0} = 2$, $\bar{1} = 1$, y $\bar{2} = 0$, y M_2 = el álgebra de De Morgan obtenida de $M_0 \times M_0$ redefiniendo $\overline{(0,0)} = (1,1)$, $\overline{(1,1)} = (0,0)$, $\overline{(1,0)} = (1,0)$, y $\overline{(0,1)} = (0,1)$. Todas estas álgebras son simples. Tenemos el siguiente teorema:

Teorema 8.11: Para una De Morgan álgebra M son equivalentes:

(1) M es globalmente representable por $\{M_0, M_1, M_2\}$.

(2) M es Stone representable por $\{M_0, M_1, M_2\}$.

(3) M es Booleanamente representable por $\{M_0, M_1, M_2\}$.

(4) M es de congruencias permutables.

Prueba: Asumamos que **(1)** es verdadera. Ya que $I(\{M_0, M_1, M_2\})$ es una clase universal, por el Teorema 6.2 tenemos **(2)**. Luego, por el Teorema 6.4 tenemos **(3)**. Además ya que M_0, M_1 y M_2 son álgebras simples, por el Corolario 3 del Lema 2.4 tenemos que todas las representaciones subdirectas Booleanas por subdirectamente irreducibles son totalmente expandidas (ver [9, pag. 37]) y **(4)** sigue de la propiedad de emparche y de **(1)** del Lema 2.8. Finalmente si **(4)** es verdadera, entonces M verifica el TCHR (recordar que M es de congruencias distributivas) y ∴ por el Corolario 3 del Teorema 6.2 tenemos **(2)**. ∎

APENDICE: ALGUNOS RESULTADOS DE TEORIA DE HACES.

Supongamos que tenemos un tipo fijado, es decir, un lenguaje de álgebras, entonces un <u>haz</u> <u>de</u> <u>álgebras</u> (de tal tipo) será un triple $\mathcal{I} = \langle S, \eta, I \rangle$ tal que:

(1) S, I son espacios topológicos y η: $S \to I$ es un homeomorfismo local sobreyectivo.

(2) Para cada $i \in I$, $\eta^{-1}(i)$ es el universo de un algebra A_i.

(3) Para cada símbolo de función n-aria f, la función:

$$\bigcup_{i \in I} f^{B_i}: \bigcup_{i \in I} A_i^n \to S$$

es continua, donde $\bigcup_{i \in I} A_i^n$ es pensado con la topología relativa de la topología producto de S^n.

(4) Para cada constante c del lenguaje, la función:

$$c^{\pi B}{}_i\colon\ I \to S$$

es continua.

Las álgebras A_i son llamadas las *fibras* del haz $\mathcal{T}$, el espacio S es llamado el *espacio total* o el *espacio de las fibras* y el espacio I es el *espacio de índices* o el *espacio base* de $\mathcal{T}$. Por un haz *sobre* un espacio I entenderemos un haz cuyo espacio base es I. Una *sección global* del haz será una función continua $x\colon I \to S$ tal que $x(i) \in A_i$ para todo $i \in I$. Si hay al menos una sección global, entonces ellas forman una subálgabra $\Gamma(\mathcal{T}) \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$, llamada el *álgebra de las secciones globales* de $\mathcal{T}$. Diremos que $\mathcal{T}$ es *subdirecto* cuando $\Gamma(\mathcal{T})$ sea producto subdirecto de las fibras. Veamos que efectivamente $\Gamma(\mathcal{T})$ es una subálgebra del álgebra $\Pi\{A_i \quad i \in I\}$. Por **(4)** $\Gamma(\mathcal{T})$ contiene a las constantes. Sean $x_1, x_2, \dots, x_n$ secciones globales. Entonces la función

$$\begin{aligned} F\colon\ & I \to S^n \\ & i \to (x_1(i), x_2(i), \dots, x_n(i)) \end{aligned}$$

es continua, además la imagen de tal función está contenida en $\bigcup_{i \in I} A_i^n$ y $\therefore$ por **(3)** tenemos que la composición de funciones

$$\begin{array}{ccccc} I & \xrightarrow{\ F\ } & \bigcup_{i\in I} A_i^n & \xrightarrow{\ \bigcup_{i\in I} f^{B}{}_i\ } & S \\ i & \longrightarrow & F(i) & \longrightarrow & f^{B}{}_i(x_1(i), x_2(i), \dots, x_n(i)) \end{array}$$

es continua, es decir, la funcion $f^{\pi B}{}_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es una sección global.

A.1: Sea $x \in \Pi\{A_i \quad i \in I\}$, son equivalentes:

(1) $x \in \Gamma(\mathcal{T})$.

(2) x es abierta.

(3) x es un homeomorfismo local.

Prueba: Supongamos que G, J son abiertos de S, I respectivamente, tales que $\eta|_G: G \to J$ es un homeomorfismo. Supongamos además que $J_0 \subseteq J$, $G_0 \subseteq G$ son tales que $x(J_0) = G_0$ y J_0 es abierto o G_0 es abierto. Entonces ya que $\eta(x(i)) = i$ para todo $i \in I$, tenemos que ambos J_0 y G_0 son abiertos y $x|_{J_0}$ es la inversa de $\eta|_{G_0}$. Usando lo anterior se puede probar facilmente de **(1)** o **(2)** que x es un homeomorfismo local. ∎

Corolario 1: Si $x, y \in \Gamma(\mathcal{T})$, entonces $E(x,y)$ es un abierto de I.

Prueba: Si x e y coinciden en un $i \in I$, entonces como se vió en la prueba de A.1, x e y restringidas a un entorno adecuado son la inversa de η retringida a un entorno adecuado de $x(i) = y(i)$. ∎

Diremos que un haz $\mathcal{T} = \langle S, \eta, I\rangle$ es Hausdorff cuando el espacio S lo sea.

A.2: Si $\mathcal{T}$ es subdirecto, entonces $\mathcal{T}$ es Hausdorff si y sólo si I es Hausdorff y $E(x,y)$ es abierto y cerrado para todo $x, y \in \Gamma(\mathcal{T})$.

Prueba: $\Rightarrow$. Sean $i, j \in I$, $i \neq j$. Sea $x \in \Gamma(\mathcal{T})$. Ya que $A_i \cap A_j = \emptyset$, $x(i) \neq x(j)$, y i y j pueden ser separados en I tomando las imágenes inversas por x de un par de entornos que separen a $x(i)$ y $x(j)$. Es fácil de chequear que si S es Hausdorff, entonces $D(x,y)$ es abierto para todo $x, y \in \Gamma(\mathcal{T})$, y por A.2 tenemos que los ecualizadores son abiertos y cerrados. $\Leftarrow$. Sean $a, b \in S$, $a \neq b$. Hay dos casos. Caso 1: $a \in A_i$ y $b \in A_j$, con $i \neq j$. Sean U y V entornos abiertos y disjuntos de i y j respectivamente y elijamos $x, y \in \Gamma(\mathcal{T})$ tales que $x(i) = a$ e $y(j) = b$. Claramente por ser disjuntas de a pares las fibras, $x(U)$ y $y(V)$ separan a de b. Caso 2: $a, b \in A_i$. Elijamos $x, y \in \Gamma(\mathcal{T})$ tales que $x(i) = a$ e

$y(i) = b$. Ya que $D(x,y)$ es abierto y contiene a i, $x(D(x,y))$ y $y(D(x,y))$ separan a y b. ∎

Si $\mathcal{T}$ es un haz de álgebras, entonces A es un <u>álgebra de secciones globales con soporte compacto</u> si A es una subálgebra de $\Gamma(\mathcal{T})$ y existe $a \in \Gamma(\mathcal{T})$ tal que $A = \{x \in \Gamma(\mathcal{T}) : D(x,a) \text{ es compacto}\}$. Note que si $\mathcal{T}$ es un haz subdirecto sobre un espacio de indices compacto, entonces $\Gamma(\mathcal{T})$ es la única álgebra de secciones globales con soporte compacto de $\mathcal{T}$. Además es fácil de chequear que si el lenguaje ecuacional tiene una constante, entonces existe a lo sumo un álgebra de secciones globales con soporte compacto y ∴ podemos hablar del álgebra de secciones globales con soporte compacto de $\mathcal{T}$.

Sea $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$, y sea X una familia de subconjuntos de I. Diremos que A <u>emparcha sobre</u> X cuando cada vez que $\{U_r \quad r \in R\} \subseteq X$, $\{x_r : r \in R\} \subseteq A$ sean conjuntos finitos tales que $\cup\{U_r : r \in R\} = I$ y $E(x_r, x_s) \supseteq U_r \cap U_s$ para todo $r,s \in R$, hay un $x \in A$ tal que $E(x,x_r) \supseteq U_r$ para todo $r \in R$. La noción de <u>emparche irrestricto</u> (es decir A <u>emparcha irrestrictamente</u> sobre X cuando ...) se define en la misma forma pero sin poner restricciones sobre la cardinalidad de R. Note que, en general, si tenemos un par de conjuntos $\{U_r : r \in R\}$, $\{x_r : r \in R\}$ tales que $\cup\{U_r : r \in R\} = I$ y $E(x_r,x_s) \supseteq U_r \cap U_s$ para todo $r,s \in R$ (es decir "<u>en las hipótesis de emparche</u>"), entonces siempre hay un (único) $x \in \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ tal que $E(x,x_r) \supseteq U_r$ para todo $r \in R$. A tal x le llamaremos el <u>parche</u> respecto del par de conjuntos en cuestión. La prueba de los siguientes resultados es dejada al lector.

A.3: Sea $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$, y sea τ una topología compacta sobre I.

Entonces A emparcha sobre τ si y sólo si A emparcha sobre alguna base de τ. ∎

A.4: Sea $A \subseteq \Pi\{A_i \quad i \in I\}$, y sea τ una topología compacta sobre I. Entonces A emparcha irrestrictamente sobre τ si y sólo si A emparcha sobre τ. ∎

Sea $\{A_i \quad i \in I\}$ un conjunto de álgebras, donde I es un espacio topológico con topología τ. Diremos que A es un <u>producto subdirecto global</u> del conjunto $\{A_i \quad i \in I\}$ cuando:

(1) A es producto subdirecto de $\{A_i \quad i \in I\}$.

(2) τ es compacta y T_0.

(3) Para todo $x, y \in A$, $E(x,y)$ es abierto.

(4) A emparcha sobre τ.

Un <u>espacio de Stone</u> es un espacio topológico compacto y T_0, X, tal que:

(1) La familia de subconjuntos de X compactos y abiertos es un anillo de conjuntos y una base de X.

(2) Si $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son familias de subconjuntos de X compactos y abiertos y si $\cap\mathcal{A} \subseteq \cup\mathcal{B}$, entonces existen conjuntos finitos $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$, $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$ tales que $\cap\mathcal{A}_0 \subseteq \cup\mathcal{B}_0$.

Una topología τ sobre X será una <u>topología de Stone</u> cuando (X,τ) sea un espacio de Stone. Note que los espacios de Stone son precisamente los espacios de representación topológica de Stone de los reticulados distributibos con cero y uno (ver [1]).

Diremos que A es un <u>producto subdirecto de Stone</u> del conjunto

$\{A_i : i \in I\}$ cuando:

(1) A es producto subdirecto de $\{A_i \quad i \in I\}$.

(2) τ es una topología de Stone.

(3) Para todo $x,y \in A$, $E(x,y)$ es compacto abierto.

(4) A emparcha sobre τ.

Un espacio (localmente) Booleano es un espacio topológico (localmente) compacto, cero dimencional y Hausdorff. Los espacios (localmente) Booleanos son precisamente los espacios de representación topológica de Stone de las álgebras de Boole (generalizadas).

Diremos que A es un producto subdirecto (localmente) Booleano del conjunto $\{A_i : i \in I\}$ cuando:

(1) A es producto subdirecto de $\{A_i \quad i \in I\}$.

(2) (I,τ) es un espacio (localmente) Booleano.

(3) Para todo $x,y \in A$, $D(x,y)$ es compacto abierto.

(4) A emparcha sobre τ.

Notese que dada una topología τ sobre el espacio de índices I, en general hay más de un producto subdirecto global de la familia $\{A_i \quad i \in I\}$. Por ejemplo si tomamos τ igual a la topología de los subconjuntos de I cofinitos (o sea cuyo complemento es finito), y tomamos el lenguaje vacío, entonces dado un elemento x de $\Pi\{A_i \quad i \in I\}$, podemos formar el álgebra $A_x = \{y \in \Pi\{A_i \quad i \in I\} : D(x,y)$ es finito$\}$, y claramente tales subálgebras (las cuales son productos subdirectos globales de $\{A_i : i \in I\}$) en general forman una familia de más de un elemento. Notese además que si pensamos a I con la topología discreta, entonces las álgebras A_x son producto subdirecto localmente Booleano de la familia $\{A_i \quad i \in I\}$, más generalmente si A es un producto directo débil de $\{A_i \quad i \in I\}$ (ver

[6]), entonces A es un producto subdirecto localmente Booleano de $\{A_i \ \ i \in I\}$, cuando I es pensado con la topología discreta.

Si A es producto subdirecto de $\{A_i \ \ i \in I\}$, entonces diremos que A es <u>disjuntada</u> cuando los A_i's sean disjuntos de a pares.

El siguiente teorema dice que tener un haz subdirecto es (estructuralmente hablando) lo mismo que tener un producto subdirecto junto con una topología para el conjunto de ídices cumpliendo estos últimos ciertas condiciones.

A.5: (1). Sea τ una topología sobre I. Supongamos que $A \subseteq \Pi\{A_i \ \ i \in I\}$ es un producto subdirecto disjuntado tal que τ contiene a los ecualizadores, los discriminadores son compactos y A emparcha sobre τ. Definamos $S = \cup\{A_i \ \ i \in I\}$ y démosle a S la topología con base $\{x(U) : x \in A,\ U \in \tau\}$. Sea además $\eta(a) = i$ para $a \in A_i$, $i \in I$. Entonces $\mathcal{T} = \langle S, \eta, I\rangle$ es un haz subdirecto y A es un álgebra de secciones globales con soporte compacto de $\mathcal{T}$. Si I es compacto, entonces $A = \Gamma(\mathcal{T})$.

(2). Si $\mathcal{T} = \langle S, \eta, I\rangle$ es un haz subdirecto y A es un álgebra de secciones globales con soporte compacto, entonces $A \subseteq \Pi\{A_i \ \ i \in I\}$ es un producto subdirecto disjuntado, los ecualizadores (de elementos de A) son abiertos, los discriminadores son compactos y A emparcha sobre la topología de I. Además $\mathcal{T}$ es el haz construído a partir de A y τ como en **(1)**.

(3). Si A es producto subdirecto global de la familia $\{A_i \ \ i \in (I,\tau)\}$, entonces el haz $\mathcal{T}$ construído como en **(1)** a partir de A y τ ("disjuntando" las álgebras A_i si es necesario) es subdirecto, tiene espacio base compacto y T_0 y A es el álgebra de las secciones globales de $\mathcal{T}$. Recíprocamente si tenemos un haz con tales características, entonces el álgebra de las secciones globales es producto subdirecto global de las fibras.

(4). Si A es producto subdirecto de Stone de la familia $\{A_i \quad i \in (I,\tau)\}$, entonces el haz $\mathcal{T}$ construído como en **(1)** a partir de A y τ ("disjuntando" las álgebras A_i si es necesario) es subdirecto, su espacio base es un espacio de Stone en el cual los ecualizadores de las secciones globales son compactos y A es el álgebra de las secciones globales de $\mathcal{T}$. Reciprocamente si tenemos un haz con tales características, entonces el álgebra de las secciones globales es producto subdirecto de Stone de las fibras.

(5). Si A es producto subdirecto localmente Booleano (Booleano) de la familia $\{A_i \quad i \in (I,\tau)\}$, entonces el haz $\mathcal{T}$ construído como en **(1)** a partir de A y τ ("disjuntando" las álgebras A_i si es necesario) es subdirecto, Hausdorff, su espacio base es un espacio localmente Booleano (Booleano) y A es un álgebra de secciones globales con soporte compacto de $\mathcal{T}$ (el álgebra de las secciones globales de $\mathcal{T}$). Reciprocamente si tenemos un haz con tales características, entonces toda álgebra de secciones globales con soporte compacto (el álgebra de las secciones globales) es producto subdirecto localmente Booleano (Booleano) de las fibras.

Prueba: **(1)**. Note que ya que $x(U) \cap y(V) = x(U \cap V \cap E(x,y))$ para $x,y \in A$, U,V abiertos de I, entonces $\{x(U) : x \in A,\ U \in \tau\}$ es una base ya que los ecualizadores son abiertos y $\cup\{x(U) : x \in A,\ U \in \tau\} = S$ por ser A un producto subdirecto. Veamos que efectivamente $\mathcal{T}$ es un haz. Las condiciones **(1)**, **(2)** y **(4)** de la definición de haz se cumplen facilmente. Veamos **(3)**. Sea f un símbolo de función n-aria, $n \geq 1$. Sean $a_1,\dots,a_n \in A_i$. Ya que A es producto subdirecto, sean $x_1,\dots,x_n \in A$ tales que $x_k(i) = a_k$ para $k=1,\dots,n$. Sea x(U) un abierto cualquiera de la base de S que contenga a $f^{A_i}(a_1,\dots,a_n)$. Es claro que $x(i) = f^{A_i}(a_1,\dots,a_n)$. Sea $V = E(x,f^{A}(x_1,\dots,x_n)) \cap U$, claramente V es un entorno abierto de i. Además es fácil de chequear que

$$\bigcup_{i\in I} f^{A_i}((x_1(V) \times \dots \times x_n(V)) \cap (\bigcup_{i\in I} A_i^n)) \subseteq x(U),$$

lo cual nos dice que $\bigcup_{i\in I} f^{A_i}$ es continua en $(a_1,\dots,a_n)$. Veamos ahora que A es un álgebra de secciones globales con soporte compacto. Por A.1 ya que los elementos de A son abiertos, tenemos que $A \subseteq \Gamma(\mathcal{T})$ (lo cual nos dice que $\mathcal{T}$ es subdirecto). Supongamos que $x \in \Gamma(\mathcal{T})$ y que $D(x,a)$ es compacto para algún $x \in A$. Para cada $j \in D(x,a)$ sea $x^j \in A$ tal que $x^j(j) = x(j)$. Ya que $D(x,a)$ es compacto tenemos que $D(x,a) = \cup\{E(x,x^{j_k}) : k=1,\dots,n\}$ con $j_k \in D(x,a)$, $k=1,\dots,n$. Pero entonces $\{E(x,a),E(x,x^{j_1}),\dots,E(x,x^{j_n})\}$, $a,x^{j_1},\dots,x^{j_n}$, están en las hipótesis de emparche y $\therefore$ existe un $y \in A$ tal que $E(y,a) \geq E(x,a)$ y $E(y,x^{j_k}) \geq E(x,x^{j_k})$ para $k=1,\dots,n$. Así $x = y \in A$. Si I es compacto, entonces ya que los ecualizadores son abiertos, los discriminadores son compactos y $\therefore$ toda sección global deberá estar en A.

(2). Por A.2 los ecualizadores son abiertos. Sea $a \in A$ tal que $D(x,a)$ es compacto cualquiera sea $x \in A$. Sean $x,y \in A$, notese que $D(x,y) \subseteq D(x,a) \cup D(y,a)$ lo cual nos dice que $D(x,y)$ es compacto ya que es cerrado. Veamos que A emparcha sobre la topología de I. Sean $U_1,\dots,U_n$, $x_1,\dots,x_n$ en las hipótesis de emparche. Claramente el "parche" $y \in \Pi\{A_i \quad i \in I\}$ es una sección global, y además si $a \in A$, entonces $E(y,a) \geq \cap\{E(x_k,a) \quad k=1,\dots,n\}$, es decir $D(y,a) \subseteq \cup\{D(x_k,a) : k=1,\dots,n\}$ y $\therefore$ ya que $D(y,a)$ es cerrado (A.2) tenemos que $D(y,a)$ es compacto, lo cual nos dice que $y \in A$. Finalmente ya que A es producto subdirecto, tenemos que $\{x(U) : x \in A, U$ abierto de $I\}$ es base de la topología de S, lo cual nos dice que el haz construído según **(1)** a partir de A y la topología de I es precisamente $\mathcal{T}$. ∎

La construcción dada en **(1)** de A.5 es usualmente conocida como la construcción standard.

REFERENCIAS.

[1] R. BALBES y P. DWINGER, *Distributive Lattices,* University of Missouri Press, Columbia, Missouri, 1974.

[2] G. BIRKHOFF, *Lattice theory,* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ., Vol.25, Revised Edition, 1948, Providence.

[3] G. BIRKHOFF y R. S. PIERCE, *Lattice-ordered rings,* Anais Acad. Brasil. ci. 28 (1956), 41-69.

[4] S. BURRIS y H. P. SANKAPPANAVAR, *A Course in Universal Algebra,* Springer-Verlag New York, 1981.

[5] S. COMER, *Representations of Algebras by Sections Over Boolean Spaces,* Pacific J. de Math. 38 (1971), 29-38.

[6] G. GRÄTZER, *Universal Algebra,* Van Nostrand, Princeton, 1968.

[7] K. KEIMEL, *The Representation of Lattice Ordered Groups and Rings by Sections in Sheaves,* Lecture Notes in Math. 248. Springer Verlag (Berlin and New York, 1979).

[8] J. L. KELLEY, *General Topology,* Van Nostrand, Princeton, 1955.

[9] P. H. KRAUSS y D. M. CLARK, *Global subdirect Products,* Amer. Math. Soc. Mem. 210 (1979).

[10] H. LAKSER, *Principal Congruences of Pseudo-complemented Distributive Lattices,* Proc. Amer. Math. Soc. 37 (1973), 32-36.

[11] ———— *The Structure of Pseudo-complemented Distributive Lattices. I: Subdirect Decomposition,* Trans. Amer. Math. Soc. 156 (1971), 335-342.

[12] N. H. McCOY, *Rings and Ideals,* The Math. Assoc. of Amer., 1948.

[13] H. PRIESTLEY, *Representation of Distributive Lattices by means of Ordered Stone Spaces,* Bull. London Math. Soc., 2 (1970), 186-190.

[14] ———— *Ordered Sets and Duality for Distributive Lattices,* Annals of Discrete Math. 23 (1984) 39-60.

[15] D. J. VAGGIONE, *Locally Boolean Spectra,* preprint.

[16] H. WERNER, *A generalization of Comer's Sheaf-representation Theorem,* Cont. to Gen. Alg. (Proc. Klagenfurt Conf., Klagenfurt, 1978) pp. 395-397, Heyn, Klagenfurt, 1979.

Diego J. Vaggione

Facultad de Matemática, Astronomía y Física (FaMAF)
Universidad Nacional de Córdoba
Valparaíso y R. Martínez - Ciudad Universitaria
5000 Córdoba, Argentina.