Homologías de Hochschild y cíclica de intersecciones completas

Guccione, Juan José

1991

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TITULO

HOMOLOGIAS DE HOCHSCHILD Y CICLICA DE INTERSECCIONES COMPLETAS

Autor: JUAN JOSE GUCCIONE

Director: ORLANDO E. VILLAMAYOR

Lugar de trabajo: DEPARTAMENTO DE MATEMATICA, F.C.E.N.

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR POR EL TITULO DE

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

SEPTIEMBRE

1991

A María Rut

INDICE

INTRODUCCION

La teoría de cohomología de álgebras asociativas fue definida por G. Hochschild [H] en 1945. Dada un álgebra asociativa A sobre un cuerpo k y un A-bimódulo M, Hochschild toma el grupo de aplicaciones n-lineales $\mathcal{L}_k^n(A,M)$ y define el operador coborde de $\mathcal{L}_k^n(A,M)$ en $\mathcal{L}_k^{n+1}(A,M)$ en analogía con el correspondiente de la topología algebraica. El n-ésimo grupo de homología de este complejo se denota $H^n(A,M)$ y se llama cohomología de Hochschild n-dimensional de A con coeficientes en M. En este trabajo fundacional, Hochschild obtiene uno de los resultados centrales de la teoría: una k-álgebra A es separable si y solo si $H^1(A,M)=0$ para todo A-bimódulo M. Además demuestra que $H^2(A,M)$ está en correspondencia biunívoca con el conjunto de clases de equivalencia de extensiones singulares de A por M.

En su libro "Homological Algebra" [C-E], los autores prueban que estos grupos de cohomología son funtores derivados. Sea A^e la k-álgebra envolvente de A. Un A-bimódulo es lo mismo que un A^e-módulo y vale que $H^n(A,M)\cong \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,M)$ si A es proyectivo sobre k. Cartan y Eilenberg también definen los grupos de Homología $H_\bullet(A,M)$ usando un complejo análogo al utilizado por Hochschild y prueban que cuando A es playo sobre k, coinciden con $\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(M,A)$. Estas restricciones son innecesarias si se trabaja con la teoría de funtores derivados relativos.

Supongamos ahora que A es conmutativa. En este caso $H_\bullet(A,A)$ tiene una estructura natural de A-álgebra graduada conmutativa, y dado que $H_0(A,A)=A$ y $H_1(A,A)$ es el A-módulo de diferenciales de Kälher

$\Omega^1(A)$, hay un morfismo canónico de A-álgebras

$$\gamma^{\bullet}:\Omega^{\bullet}(A) \longrightarrow H_{\bullet}(A,A),$$

donde $\Omega^{\bullet}(A)$ es el álgebra de formas diferenciales de A sobre k (es decir, el álgebra exterior de $\Omega^1(A)$). Hochschild, Konstant y Rosenberg probaron en [H-K-R] que cuando k es un cuerpo perfecto y A el anillo de funciones regulares de una variedad algebraica afín no singular sobre k, $\gamma^{\bullet}$ es un isomorfismo. Este resultado fue generalizado por Andre, quien demostró en [A] que para un morfismo playo de anillos noetherianos $\phi:k \longrightarrow A$ son equivalentes:

i) ϕ es regular

ii) $\Omega^1(A)$ es un A-módulo playo y $\gamma^{\bullet}$ es un isomorfismo.

Sea k un cuerpo de caracterítica cero. K. Wolffhardt estudió en [Wo] la homología de las k-álgebras A/I, con $A=k[X_1,\ldots,X_n]$ e I un ideal de A generado por una sucesión regular. En ese trabajo, Wolffhardt probó que

$$H_n(A/I,A/I)=\bigoplus_{i=0}^{[n/2]} H^{n-2i}(L^{\bullet}_{n-i}),$$

donde $L^{\bullet}_{(j)}$ ($j\geq 0$) es el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow \frac{I^j\Omega^0(A)}{I^{j+1}\Omega^0(A)} \xrightarrow{d} \frac{I^{j-1}\Omega^1(A)}{I^j\Omega^1(A)} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \frac{I^1\Omega^{j-1}(A)}{I^2\Omega^{j-1}(A)} \xrightarrow{d} \frac{\Omega^j(A)}{I\Omega^j(A)} \longrightarrow 0,$$

con d la diferencial de De'Rham. En [C-G-G], los autores extendieron este resultado al caso en que A es noetheriana, $k \hookrightarrow A$ es regular e I localmente es una intersección completa.

Todo lo anterior, que es un botón, muestra que la (co)homología de Hochschild está ligada de más de una forma al álgebra conmutativa. También lo esta, por ejemplo, a la Teoría K [D] y a la topología algebraica [Ha-V].

El interés en la (co)homología de Hochschild se ha reavivado mucho en los últimos años a raiz de su relación con la (co)homología cíclica de álgebra asociativas, la cual fue inventada en forma independiente por A. Connes y Tsygan en 1983. Más precisamente, ese año Connes [C] definió la cohomología cíclica $HC^{\bullet}(A)$ de un álgebra A sobre un cuerpo k de característica cero para estudiar los invariantes del espacio de hojas de una variedad foliada.

Existen conexiones muy firmes entre esta teoría y las cohomologías de Hochschild y de De'Rham. En efecto, hay una sucesión exacta larga

$$(1)\quad \ldots \xrightarrow{B} H^{n}(A,A^{\bullet}) \xrightarrow{i} HC^{n}(A) \xrightarrow{S} HC^{n+2}(A) \xrightarrow{B} H^{n+1}(A,A^{\bullet}) \xrightarrow{i} HC^{n+1}(A) \xrightarrow{S} \ldots$$

Usando las flechas S, Connes introdujo la cohomología periódica $HC^{\bullet}_{per}$ y probó que si A es el anillo de funciones diferenciables sobre una variedad V, $HC^{\bullet}_{per}(A)$ es la cohomología de De'Rham de V. En este sentido $HC^{\bullet}_{per}(A)$, la cual existe aun si A no es conmutativo (por ejemplo la $C^{\bullet}$-álgebra de una foliación) juega el rol de la cohomología. Esto le permitió definir las clases de Chern de una foliación y dar una fórmula explícita para el índice de un operador eliptico.

Más o menos simultaneamente Tsygan definió la teoría dual, es decir la homología cíclica, y probó que esta teoría esta relacionada con la homología de álgebras de Lie. Más precisamente, demostró que si A es un álgebra sobre un cuerpo k de característica cero,

(2) $HC^{\bullet}_{n-1}(A)=\mathrm{Prim}H^{Lie}_{n}(gl(A),k)$,

donde $gl(A)=\varinjlim\left(gl_{n}(A)\hookrightarrow gl_{n+1}(A)\right)$ es el álgebra de Lie de matrices y Prim denota a la parte primitiva.

Así, la homología cíclica apareció al mismo tiempo en dos campos. Un año después J.L. Loday y D. Quillen definieron la homología cíclica para álgebras sobre un anillo conmutativo arbitrario en [L-Q]. Allí definieron un producto

(3) $HC_{n}(A)XHC_{m}(A) \longrightarrow HC_{n+m+1}(A)$,

calcularon $HC^{n}(A)$ cuando A es el anillo de funciones regulares de una variedad algebraica afín sobre un cuerpo perfecto y establecieron independientemente de Tsygan la fórmula (2).

En el contexto de la Homología, el papel de la sucesión (1) lo tiene la sucesión exacta

(4) $$\ldots\xrightarrow{B} H_{n}(A,A^{\bullet}) \xrightarrow{i} HC_{n}(A) \xrightarrow{S} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B} H_{n-1}(A,A^{\bullet}) \xrightarrow{i} HC_{n-1}(A) \xrightarrow{S} \ldots$$

La fórmula (2) es similar a la igualdad

$K_{n}(A)\otimes\mathbb{Q}\cong\mathrm{Prim}H_{n}\left(gl(A),\mathbb{Q}\right)$

obtenida por Milnor y Moore. Por esta razón Tsygan denotó como $K^{+}_{n}(A)$ a $HC_{n-1}(A)$ y la llamó teoría k aditiva de A. Con esta notación el producto (3) aplica $K^{+}_{n}(A)XK^{+}_{m}(A)$ en $K^{+}_{n+m}(A)$, quedando con una graduación más natural. Este producto tiene las mismas propiedades que el de la teoría k algebraica. Hay en realidad todo un diccionario que relaciona la homología cíclica y la teoría k algebraica: El grupo lineal es reemplazado por el álgebra de Lie de Matrices, el grupo formal multiplicativo G_m por el aditivo G_a, K_n^M por $\Omega^n(A)/d(\Omega^{n-1}(A))$, la operación x+y+xy por x+y, el determinante por la traza, etc.

Más importante aún que este paralelismo es la existencia de aplicaciones naturales de los grupos K en variantes de los de la homología cíclica (ver [G], [K] y [W1]).

Estos ejemplos ponen en evidencia la notable ubiquidad de la homología cíclica. De hecho, además de en las teorías de foliaciones, álgebras de Lie y k, se la ha reconocido en otros campos como por ejemplo: diferenciales de Kälher de anillos conmutativos, espacios A(X) de Waldhausen y pseudoisotopía de espacios topológicos, álgebras de Kac-Mody, geometría hiperbólica de dimensión 3 y dilogaritmo, etc (ver [Ca]).

En esta memoria calculamos las (co)homologías de Hochschild y cíclicas de algunas álgebras que aparecen naturalmente en geometría algebraica. La parte correspondiente a la homología de Hochschild es autocontenida, pero para calcular la homología cíclica usamos dos resultados de [C-G-G] que enunciamos sin demostración en la seccion 1 (Teoremas 1.4.9 y 2.2.6).

Describiremos ahora brevemente el contenido de cada una de las secciones de la memoria. En las secciones 1 y 2 hacemos un rápido repaso de las teorías de Hochschild y cíclica, limitándonos a dar los resultados que necesitaremos más tarde. Una buena referencia para estas secciones es [L-Q].

En la tercera obtenemos una resolución A^e-libre R(A) de A, que es más simple que la canónica, cuando A es la k-álgebra de funciones regulares de una variedad afín que es intersección completa (i.e. $A=k[X_1,\dots,X_n]/\langle f_1,\dots,f_r\rangle$, con k es un anillo arbitrario con 1 y $f_1,\dots,f_r$ una sucesión regular en $k[X_1,\dots,X_n]$). Además definimos una aplicación $h_\bullet$, de R(A) en la resolución canónica normalizada de Hochschild $(A\otimes\bar{A}^{\otimes^\bullet}\otimes A,b')$, que se convierte en un morfismo de A^e-álgebras cuando se dota a R(A) de un producto natural y $(A\otimes\bar{A}^{\otimes^\bullet}\otimes A,b')$ tiene el producto barajado.

En la cuarta calculamos la homología y la cohomología de Hochschild de las k-álgebras A, consideradas en la sección 3, con coeficientes en un A-módulo M, que es visto como un A^e-módulo a través del morfismo de multiplicación $A^e \longrightarrow A$. Nuestros resultados principales son los Teoremas 4.2.6 y 4.2.7 que expresan la homología y la cohomología de Hochschild de A en función de las homologías de los complejos de Koszul generalizados de la matriz jacobiana $[\partial f_i/\partial X_j]$.

Por último, en la sección 5, calculamos la homología cíclica de la k-álgebra $A/\langle P\rangle$, cuando k es un cuerpo de característica cero, A es una k-álgebra noetheriana con $k \hookrightarrow A$ regular y P no es un divisor de cero. Nuestro principal resultado es el Teorema 5.6, en el que expresamos la homología cíclica de $A/\langle P\rangle$ en términos de las homologías de De'Rham y los módulos de diferenciales de las k-álgebras $A/\langle P^i\rangle$, con $i>0$. Estas homologías también fueron calculadas en otros trabajos cuando $A=k[X_1,\dots,X_n]$, P es homogeneo y la variedad afín definida por P tiene una sola singularidad (por ejemplo: [B-V] y [W2]). En la Nota 5.7 y el Ejemplo 5.8, verificamos que el Teorema 5.6 da, en este caso particular, esos resultados. En la Nota 5.9 generalizamos el Teorema 5.6 reemplazando <P> por un ideal I que localmente es intersección completa. Para terminar respondemos una pregunta hecha en [V], usando los resultados anteriores.

1. HOMOLOGIA Y COHOMOLOGIA DE HOCHSCHILD

1.1. Homología Relativa

Sea k un anillo conmutativo con unidad, B una k-álgebra y $A \subseteq B$ una subálgebra de B.

Una flecha de B-módulos $M_1 \xrightarrow{g} M_2$ es un *epimorfismo relativo a* A si es una retracción de A-módulos (i.e. si existe una flecha de A-módulos $M_2 \xrightarrow{f} M_1$ tal que $g \circ f = id_M$)

Un complejo de B-módulos

$$(5) \quad \ldots \xrightarrow{d_4} M_3 \xrightarrow{d_3} M_2 \xrightarrow{d_2} M_1 \xrightarrow{d_1} M_0$$

es *exacto relativo a* A si es contractil como complejo de A-módulos. Se comprueba fácilmente que esto ocurre si y solo si (5) es exacto y $M_i \twoheadrightarrow \mathrm{Coker}(d_i)$ es un epimorfismo relativo a A $\forall i > 0$.

Un B-módulo P es *proyectivo respecto de A* si cada diagrama

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \\ M_1 \arrow[r, two heads, "g"] & M_2, \end{tikzcd}$$

con g un epimorfismo relativo, puede completarse a un triángulo

$$\begin{tikzcd} & P \arrow[d] \arrow[dl] \\ M_1 \arrow[r, two heads, "g"] & M_2 \end{tikzcd}$$

que conmuta.

Por ejemplo, $B \otimes_A M$ es proyectivo relativo a A para cada A-módulo M. En efecto, dado un diagrama

$$\begin{tikzcd} & B\otimes_A M \arrow[d] \\ M_1 \arrow[r, two heads, "g"] & M_2 \end{tikzcd},$$

con g un epimorfismo relativo, existe una flecha de A-módulos $M \xrightarrow{\varphi} M_1$ tal que $g\circ\varphi(m)=f(1\otimes m)$ $\forall m\in M$. Es claro ahora que el triángulo

$$\begin{tikzcd} & b\otimes m \arrow[dl, mapsto] & B\otimes_A M \arrow[dl] \arrow[d] \\ b.\varphi(m) & M_1 \arrow[r, two heads, "g"] & M_2 \end{tikzcd},$$

conmuta.

Sea M un B-módulo. Una resolución proyectiva relativa a A de M es un complejo exacto relativo a A

$$\ldots \xrightarrow{d_4} P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varphi} M,$$

cuyos objetos P_i son proyectivos respecto de A.

1.1.1. Proposición: Cada B-módulo M tiene una resolución proyectiva relativa

Demostración: Se construye inductivamente una resolución proyectiva relativa

$$\ldots \xrightarrow{d_4} P_3 \xrightarrow{d_3} P_2 \xrightarrow{d_2} P_1 \xrightarrow{d_1} P_0 \xrightarrow{\varphi} M,$$

tomando $P_0=B\otimes_A M$, $\varphi(b\otimes m)=b.m$ y $P_{i+1} \xrightarrow{d_i} P_i=B\otimes_A \mathrm{Ker}(d_i) \twoheadrightarrow \mathrm{Ker}(d_i) \hookrightarrow P_i$.

1.1.2. Teorema: Sean

$$R_1 : \ldots \xrightarrow{d_4^1} P_3^1 \xrightarrow{d_3^1} P_2^1 \xrightarrow{d_2^1} P_1^1 \xrightarrow{d_1^1} P_0^1 \xrightarrow{\varphi^1} M^1$$

y

$$R_2: \ldots \xrightarrow{d_4^2} P_3^2 \xrightarrow{d_3^2} P_2^2 \xrightarrow{d_2^2} P_1^2 \xrightarrow{d_1^2} P_0^2 \xrightarrow{\varphi^2} M^2$$

resoluciones proyectivas relativas. Cada morfismo $M^1 \longrightarrow M^2$ se extiende a un morfismo de complejos $R_1 \longrightarrow R_2$ y dos de estas extensiones son homotópicas.

Demostración: Como φ^2 es un epimorfismo relativo existe una flecha $f_0: P_0^1 \longrightarrow P_0^2$ tal que

$$\begin{array}{ccc} P_0^1 & \xrightarrow{\varphi^1} & M^1 \\ \downarrow f_0 & & \downarrow f \\ P_0^2 & \xrightarrow{\varphi^2} & M^2 \end{array}$$

conmuta. Supongamos que se ha construído $(f_i)_{i\leq n}$. Por la propiedad universal de $Ker(d_n^2) \hookrightarrow P_n^2$ hay un morfismo $Ker(d_n^2) \xhookrightarrow{\bar{f}_n} Ker(d_n^2)$ que hace conmutativo al cuadrado

$$\begin{array}{ccc} Ker(d_n^1) & \hookrightarrow & P_n^1 \\ \downarrow f_n & & \downarrow \bar{f}_n \\ Ker(d_n^2) & \hookrightarrow & P_n^2 \end{array}$$

Se prueba ahora la existencia de f_{n+1} como se probó la de f_1. Veamos que dos extensiones $f_\bullet^1$ y $f_\bullet^2$ de f son homotópicas. Es claro que puede tomarse $\sigma_{-1}: M^1 \longrightarrow P_0^2 = 0$. Supongamos que se ha obtenido una familia $(\sigma_i : P_i^1 \longrightarrow P_{i+1}^2)_{i<n}$ que verifica

$$f_i^1 - f_i^2 = \sigma_{i-1} \circ d_i^1 + d_{i+1}^2 \circ \sigma_i \quad \forall i<n$$

Como

$$d_n^2 \circ (f_n^1 - f_n^2 - \sigma_{n-1} \circ d_n^1) = (f_{n-1}^1 - f_{n-1}^2 - d_n^2 \circ \sigma_{n-1}) \circ d_n^1 = 0,$$

existe $\overline{\sigma}_n:P \longrightarrow \mathrm{Ker}(d_n^2)$ tal que $\ker(d_n^2)\circ\overline{\sigma}_n=f_n^1-f_n^2-\sigma_{n-1}\circ d_n^1$. Por ser P_n^1 proyectivo relativo $\overline{\sigma}_n$ se levanta a una flecha $\sigma_n:P_n^1\longrightarrow P_n^2$, lo que termina la demostración.

1.1.3. Definición: Sea C una k-álgebra y F un funtor aditivo, covariante o contravariante, de la categoría de B-módulos en la de C-módulos. Se llama *derivado de* F al funtor de la categoría de B-módulos en la de C-módulos graduados que a cada objeto M le asigna la homología del complejo

$$\cdots\xrightarrow{F(d_4)} P_3\xrightarrow{F(d_3)} P_2\xrightarrow{F(d_2)} P_1\xrightarrow{F(d_1)} P_0,$$

donde

$$\cdots\xrightarrow{d_4} P_3\xrightarrow{d_3} P_2\xrightarrow{d_2} P_1\xrightarrow{d_1} P_0\xrightarrow{\varphi} M,$$

es una resolución proyectiva relativa de M. Que esta definición es buena se lo deduce inmediatamente del teorema anterior

1.1.4. Definición: Llamamos *Tor relativo y* denotamos $\mathrm{Tor}_*^{B,A}(M,-)$ al derivado relativo del producto tensorial y llamamos *Ext relativo* y denotamos $\mathrm{Ext}_{B,A}^*$ al del funtor Hom(-,M).

1.2. Homología y Cohomología de Hochschild

Sean k un anillo conmutativo con unidad arbitrario, A una k-álgebra y $\overline{A}=A/k$. LLamamos *álgebra envolvente de* A al producto tensorial $A^e=A\otimes_k A^{op}$, donde A^{op}es el anillo opuesto de A (i.e. A^{op} tiene el mismo grupo aditivo que A y su producto está definido por $a\circ b=b.a$.

La k-álgebra A es un A^e-módulo a derecha con la acción dada por $a(a_1 \otimes a_2) = a_2 a a_1$ y un A-módulo a izquierda con la dada por $(a_1 \otimes a_2)a = a_1 a a_2$.

Usaremos los símbolos $A^{\otimes^n}$ y $\overline{A}^{\otimes^n}$ para designar a los productos tensoriales $A \otimes_k \dots \otimes_k A$(n-veces) y $\overline{A} \otimes_k \dots \otimes_k \overline{A}$(n-veces) respectivamente. Es claro que tanto $A \otimes_k A^{\otimes^n} \otimes_k A$ como $A \otimes_k \overline{A}^{\otimes^n} \otimes_k A$ son A^e-módulos a izquierda con la acción definida por

$$(b \otimes c)(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) = b a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1} c.$$

La *resolución canónica de Hochschild* es el complejo de A^e-módulos a izquierda

$$(A \otimes_k A^{\otimes^\bullet} \otimes_k A, b'): \quad \dots \xrightarrow{b'} A^{\otimes^4} \xrightarrow{b'} A^{\otimes^3} \xrightarrow{b'} A^{\otimes^2} \xrightarrow{b'} A,$$

cuyos morfismos de borde $A^{\otimes^{n+2}} \xrightarrow{b'} A^{\otimes^{n+1}}$ están definidos por

$$b'(a_0 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0 \otimes \dots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \dots \otimes a_{n+1}),$$

y la *resolución canónica normalizada de Hochschild* es el complejo de A^e-módulos a izquierda

$$(A \otimes_k \overline{A}^{\otimes^\bullet} \otimes_k A, b'): \quad \dots \xrightarrow{b'} A \otimes \overline{A}^{\otimes^2} \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes \overline{A} \otimes A \xrightarrow{b'} A \otimes A \xrightarrow{b'} A,$$

donde $A \otimes_k \overline{A}^{\otimes^n} \otimes_k A \xrightarrow{b'} A \otimes_k \overline{A}^{\otimes^{n-1}} \otimes_k A$ es la flecha inducida por $A^{\otimes^{n+2}} \xrightarrow{b'} A^{\otimes^{n+1}}$

Tanto la resolución canónica de Hochschild como la normalizada son resoluciones proyectivas relativas a $A^{op} \hookrightarrow A^e$ de A. En efecto, los objetos de ambas son proyectivos respecto de $A^{op} \hookrightarrow A^e$ pues $A \otimes_k U \otimes_k A \cong A^e \otimes_{A^{op}} (U \otimes_k A)$ para cada k-módulo U, y ambas son contractiles como complejos de A^{op}-módulos, con homotopía de contracción ε_0 definida por

$$\varepsilon_0(a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1})=1\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1}.$$

En consecuencia la proyeción canónica de $(A\otimes_k A^{\otimes^\bullet}\otimes_k A,b')$ en $(A\otimes_k \overline{A}^{\otimes^\bullet}\otimes_k A,b')$ es un isomorfismo módulo homotopía.

Sea M un A^e-módulo a derecha. La *Homología de Hochschild de* M es por definición el $Z(A)$-módulo graduado $H_\bullet(M,A)=\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e,A}(M,A)$.

Tensorizando los complejos $(A\otimes_k A^{\otimes^\bullet}\otimes_k A,b')$ y $(A\otimes_k \overline{A}^{\otimes^\bullet}\otimes_k A,b')$ con M sobre A^e y usando la identificación

$$\begin{aligned} M\otimes_{A^e}(A\otimes_k U\otimes_k A) &\longrightarrow M\otimes_k U,\\ \otimes a_0\otimes u\otimes a_1 &\longmapsto m(a_0\otimes a_1)\otimes_k u \end{aligned}$$

válida para cada k-módulo U, se obtienen el *complejo de Hochschild*

$$(M\otimes_k A^{\otimes^\bullet},b):\ \ldots\xrightarrow{b} M\otimes A^{\otimes^3}\xrightarrow{b} M\otimes A^{\otimes^2}\xrightarrow{b} M\otimes A\xrightarrow{b} M$$

y el *complejo de Hochschild normalizado*

$$(M\otimes_k \overline{A}^{\otimes^\bullet},b):\ \ldots\xrightarrow{b} M\otimes \overline{A}^{\otimes^3}\xrightarrow{b} M\otimes \overline{A}^{\otimes^2}\xrightarrow{b} M\otimes \overline{A}\xrightarrow{b} M,$$

donde

$$\begin{aligned} b(m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n) &= m(a_1\otimes 1)\otimes a_2\otimes\ldots\otimes a_n\\ &+\sum_{i=0}^{n}(-1)^i m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n) + (1\otimes a_n)m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_{n-1}. \end{aligned}$$

Por supuesto, ambos tienen la homología de Hochschild y la proyección canónica es un cuasisomorfismo.

Cuando A es playo sobre k, $(A\otimes_k A^{\otimes^\bullet}\otimes_k A,b')$ y $(A\otimes_k \overline{A}^{\otimes^\bullet}\otimes_k A,b')$ son resoluciones A^e-playas. Así, en este caso $H_\bullet(M,A)=\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(M,A)$.

Sea M un A^e-módulo a izquierda. La *Cohomología de Hochschild de* M es el Z(A)-módulo graduado $H^\bullet(A,M)=\operatorname{Ext}^\bullet_{A^e,A}(A,M)$. Cuando A es proyectivo sobre k, $(A\otimes_k A^{\otimes^\bullet}\otimes_k A, b')$ y $(A\otimes_k \overline{A}^{\otimes^\bullet}\otimes_k A, b')$ son resoluciones A^e-proyectivas, y por lo tanto $H^\bullet(A,M)=\operatorname{Ext}^\bullet_{A^e}(A,M)$

1.3. El producto barajado

Recordemos que una A-álgebra diferencial graduada conmutativa es un complejo de A-módulos

$$\cdots \xrightarrow{d_4} A_3 \xrightarrow{d_3} A_2 \xrightarrow{d_2} A_1 \xrightarrow{d_1} A_0$$

junto con operaciones

$$A_i x A_j \longrightarrow A_{i+j}$$

que convierten a $A_0\oplus A_1\oplus\ldots$ en un anillo graduado conmutativo (i.e. $a_i a_j=(-1)^{i+j}a_j a_i$ y $(a_i)^2=0$ si i es impar $\forall a_i,a_j\in A_i x A_j$) y que verifican

$$d(a_i a_j) = d(a_i)a_j + (-1)^i a_i\, d(a_j).$$

Usando esta igualdad se comprueba fácilmente que en un álgebra diferencial graduada conmutativa el producto de dos ciclos es un ciclo y el producto de un ciclo por un borde es un borde. En consecuecia, el producto del álgebra induce un producto en la homología que convierte a $H_\bullet(A,A)$ en una A-álgebra graduada conmutativa.

1.3.1. Teorema: Sea A una k-álgebra conmutativa. El producto definido por

$$(a\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_p\otimes b)*(a'\otimes a_{p+1}\otimes\ldots\otimes a_{p+q}\otimes b')=$$

$$=\sum_{B_{p,q}} sgn(\sigma)aa'\otimes a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(p+q)}\otimes bb',$$

donde $B_{p,q}$ es el conjunto de las permutaciones σ de $\{1,2,\ldots,p+q\}$ tales que $\sigma(1)<\ldots<\sigma(p)$ y $\sigma(p+1)<\ldots<\sigma(p+q)$, convierte tanto a la resolución resolución canónica normalizada como a la no normalizada de hochschild en A-álgebras diferenciales conmutativas.

Demostración: Se hace por cálculo directo.

Como el complejo canónico de Hochschild y el complejo canónico normalizado de Hochschild de A se obtienen tensorisando las resoluciones correspondientes con A sobre A^e, el producto del teorema anterior induce una operación en estos complejos, llamada *producto barajado*, que es la definida por

$$(a\otimes a_1\otimes..\otimes a_p)*(a'\otimes a_{p+1}\otimes..\otimes a_{p+q})=\sum_{B_{p,q}} sgn(\sigma)aa'\otimes a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(p+q)},$$

y que los convierte en A-álgebras diferenciales graduadas conmutativas. En consecuencia la homología de Hochschild $H_*(A,A)$ de A tiene una estructura natural de A- álgebra graduada conmutativa.

1.4. Derivaciones

Sea A una k-álgebra conmutativa y M un A-módulo. Una derivación de A en M sobre k es una aplicación k-lineal $d:A\longrightarrow M$ que verifica $d(ab)=ad(b)+bd(a)$

Se ve fácilmente que $\{a\in A:d(a)=0\}$ es una subálgebra de A. En particular d restringido a k es nula. Al conjunto de las derivaciones de A en M sobre k lo denotamos $Der_k(A,M)$. La acción definida por

$$(ad_1 + d_2)(b) = ad_1(b) + d_2(b) \quad \forall a,b \in A,\ d_1,d_2 \in Der_k(A,M)$$

convierte a $Der_k(A,M)$ en un A-módulo.

1.4.1. Observación: Se verifican:

1) Cada morfismo $f:M \longrightarrow N$ de A-módulos induce un morfismo de A-módulos $Der_k(A,M) \longrightarrow Der_k(A,N)$ por composición.

2) Cada morfismo $\Phi:A \longrightarrow B$ de k-álgebras induce un morfismo de A-módulos $Der_k(B,M) \longrightarrow Der_k(A,M)$ por composición, donde la estructura de A-módulo de $Der_k(B,M)$ es la definida a través de ϕ.

Sea A una k-álgebra e I el nucleo del morfismo de A^e-módulos $\mu:A^e \longrightarrow A$ definido por $\mu(a \otimes b)=ab$. Consideraremos a I, A y A^e como A-módulos con las estructuras inducidas a través de $\begin{array}{l} A \longrightarrow A^e. \\ a \longmapsto a\otimes 1 \end{array}$ La aplicación $T:A \longrightarrow I$ definida por $T(a)=1\otimes a - a\otimes 1$ es un morfismo de k-módulos. De la igualdad

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \otimes 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i (1\otimes b_i - b_i \otimes 1) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \otimes 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i T(b_i),$$

se deduce que si A está generado como k-módulo por $(a_j)_{j\in J}$, el A-módulo I está generado por $T(a_j)_{j\in J}$. Además, se comprueba por cálculo directo que

$$(6)\quad T(ab)=aT(b)+bT(a)+T(a)T(b) \quad \forall a,b \in A.$$

Así, si $(a_j)_{j\in J}$ genera a A como k-álgebra, $T(a_j)_{j\in J}$ genera a I como ideal.

LLamamos *módulo de diferenciales de Kähler* al A-módulo $\Omega^1(A)$ $=I/I^2$ y *diferencial canónica* a la composición d_A de $T:A \longrightarrow I$ con la proyección canónica $\pi:I \longrightarrow I/I^2$ (que d_A es una diferencial se lo deduce inmediatamente de la fórmula (6)). Cuando no haya peligro de confusión escribiremos d en lugar de d_A.

1.4.2. Teorema: Para cada derivación $d':A \longrightarrow M$ hay un único morfismo $f:\Omega^1(A) \longrightarrow M$ tal que el cuadrado

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "d"] & M \arrow[d, "="] \\ \Omega^1(A) \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración: La unicidad es consecuencia innmediata de que d(A) genera $\Omega^1(A)$ como A-módulo y la existencia se verifica fácilmente observando que la composición $\varphi:I \longrightarrow M$, de la inclusión canónica $I \longrightarrow A^e$ con $\begin{array}{c} A^e \longrightarrow M \\ a\otimes b \longmapsto ad'(b) \end{array}$, se factoriza a través de $\Omega^1(A)$.

1.4.3. Corolario: $Der_k(A,M) \cong Hom_A(\Omega^1(A),M)$.

Dado un morfismo $\varphi:A \longrightarrow B$ de k-álgebras existe un único morfismo de A-módulos $\Omega^1(\varphi):\Omega^1(A) \longrightarrow \Omega^1(B)$, que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "d_A"] & B \arrow[d] \\ \Omega^1(A) \arrow[r, "\Omega(\varphi)"] & \Omega^1(B) \end{tikzcd}$$

Es claro que $\Omega^1(\psi\circ\varphi)=\Omega^1(\psi)\circ\Omega^1(\varphi)$ y que $\Omega^2(1_A)=1_{\Omega^1(A)}$.

1.4.4. Definición: Sea A un anillo conmutativo y $n\in\mathbb{N}$. LLamamos *n-ésimo módulo de diferenciales de* A y denotamos $\Omega^n(A)$ a la n-ésima potencia exterior $\wedge^n_A\left(\Omega^1(A)\right)$ de $\Omega^1(A)$ sobre A.

Usando la propiedad universal de $A\otimes A$ y que $d(ab)=ad(b)+bd(a)$ se comprueba fácilmente que la función

$$\begin{array}{ccc} (A\otimes A)X\ldots X(A\otimes A) & \longrightarrow & \Omega^{n+1}(A) \\ ((a_1\otimes b_1),\ldots,(a_n\otimes b_n)) & \longmapsto & d(a_1\ldots a_n)\wedge d(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_n) \end{array}$$

está bien definida y su restricción a $IX\ldots XI$ se anula en los elementos de la forma $(a_1,\ldots,a_n)$ con algún $a_i\in I^2$. En consecuencia también está bien definida la función

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(A)X\ldots X\Omega^1(A) & \longrightarrow & \Omega^{n+1}(A) \\ (a_1d(b_1)\wedge\ldots\wedge(a_nd(b_n)) & \longmapsto & d(a_1\ldots a_n)\wedge d(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_n) \end{array}$$

Esta última, por ser multilineal alternada, induce un morfismo de k-módulos $d^n_A:\Omega^n(A) \longrightarrow \Omega^{n+1}(A)$, que aplica $ad(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_n)$ en $d(a)\wedge d(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_n)$. Cuando no haya peligro de confusión escribiremos d^n en lugar de d^n_A.

1.4.5. Teorema: La sucesión de morfismos

$$(7)\quad \Omega^0(A) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(A) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(A) \xrightarrow{d^2} \ldots$$

,donde $\Omega^0(A)=A$ y $\Omega^0(A) \xrightarrow{d^0} \Omega^1(A)$ es la diferencial canónica, junto con la operación

$$\Omega^i(A)\ x\ \Omega^j(A) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{i+j}(A)$$

definida por

$$(a_0 d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_i))\wedge(b_0 d(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_j))$$
$$=a_0 b_0 d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_i)\wedge d(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_j)$$

es una A-álgebra diferencial graduada conmutativa.

Demostración: Es trivial.

1.4.6. Definición: El *complejo de De'Rham de A* es la A-álgebra diferencial graduada conmutativa $(\Omega^\bullet(A),d^\bullet)$ introducida en el teorema anterior. Su cohomología se denota $H^\bullet_{DR}(A)$ y se llama *cohomología de De'Rham de* A.

1.4.7. Observación: Como $b(A\otimes\bar{A}^2)=\langle xy\otimes z-x\otimes yz+zx\otimes y\rangle\subseteq A\otimes\bar{A}$, el morfismo de k-módulos $\gamma^1:\Omega^1(A)\longrightarrow H_1(A,A)$, que aplica dx en la clase de $a\otimes x$, es un isomorfismo. Gracias a la estructura multiplicativa de la homología de Hochschild, γ^1 se extiende a una flecha de A-álgebras graduadas $\gamma^\bullet:\Omega^\bullet(A)\longrightarrow H_\bullet(A,A)$.

En general $\gamma^\bullet$ no es inyectiva ni sobreyectiva. Sin embargo, cuando k contiene a $\mathbb{Q}$ se puede definir un morfismo de complejos

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots\xrightarrow{\ b\ } & A\otimes\bar{A}^{\otimes 3} & \xrightarrow{\ b\ } & A\otimes\bar{A}^{\otimes 2} & \xrightarrow{\ b\ } & A\otimes\bar{A} & \xrightarrow{\ b\ } & A \\
& \downarrow{\scriptstyle\mu^3} & & \downarrow{\scriptstyle\mu^2} & & \downarrow{\scriptstyle\mu^1} & & \downarrow{=} \\
\ldots\longrightarrow & \Omega^3(A) & \xrightarrow{\ 0\ } & \Omega^2(A) & \xrightarrow{\ 0\ } & \Omega^1(A) & \xrightarrow{\ 0\ } & A
\end{array}$$

poniendo $\mu^n(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=\frac{1}{n!}.a_0 d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_n)$. En efecto

$$\mu\circ b(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=\mu\Big(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_0\otimes a_1\otimes\ldots a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n$$
$$+(-1)^n a_n a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_{n-1}\Big)$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_0 d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_i a_{i+1})\ldots\wedge d(a_n)\right.$$

$$\left.+(-1)^n a_n a_0 d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_{n-1})\right)$$

$$=\frac{1}{n!}\left(\sum_{i=0}^{n-1}(-1)^i a_0 d(a_1)\wedge\ldots\wedge\big(a_i d(a_{i+1})+a_{i+1}d(a_i)\big)\right.$$

$$\left.\wedge\ldots\wedge d(a_n)+(-1)^n a_n a_0 d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_{n-1})\right)=0$$

Se ve inmediatamente que la flecha de $H_*(A,A)$ en $\Omega^*(A)$ es una retracción de γ^*. Así, en este caso, $\Omega^n(A)$ es un sumando directo de $H_n(A,A)$ $\forall n\in\mathbb{N}$.

1.4.8. Definición: Una k-álgebra conmutativa playa con unidad A *es homológicamente regular* si $\gamma^*:\Omega^*(A)\longrightarrow H_*(A,A)$ es un isomorfismo y $\Omega^1(A)$ es playo sobre A.

Andre demostró en [A] que para cada morfismo playo $\phi:k\longrightarrow A$ de anillos noetherianos son equivalentes:

I) A es homológicamente regular

II) ϕ es regular

En [C-G-G,§3] obtuvimos el siguiente resultado

1.4.9. Teorema: Sea k un cuerpo de caracteristica 0 y A una k-álgebra homológicamente regular e $I\subseteq A$ un ideal que localmente es intersección completa. Entonces

$$H_n(A,A)=\bigoplus_{i=0}^{[n/2]} H^{n-2i}(L^*_{(n-i)}),$$

donde los $L^*_{(j)}$ son los complejos de cocadenas

Demostración: Ver [C-G-G,§3].

2.1. Definiciónes básicas y Relación con la Teoría de Hochschild

Sea k un anillo conmutativo con unidad, A una k-álgebra asociativa, t el endomorfismo de k-módulos de $A^{\otimes^n}$ que aplica $a_0\otimes\ldots\otimes a_{n-1}$ en $(-1)^{n-1}a_{n-1}\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{n-2}$ y N la norma $1+t+t^2+\ldots+t^n$.

2.1.1. Proposición: El diagrama

$$
\mathscr{C}(A):\quad
\begin{array}{ccccccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \\
\downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle -b'} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle -b'} & & \\
A^{\otimes^3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes^3} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes^3} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes^3} & \xleftarrow{N} & \ldots \\
\downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle -b'} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle -b'} & & \\
A^{\otimes^2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes^2} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes^2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes^2} & \xleftarrow{N} & \ldots \\
\downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle -b'} & & \downarrow{\scriptstyle b} & & \downarrow{\scriptstyle -b'} & & \\
A & \xleftarrow{1-t} & A & \xleftarrow{N} & A & \xleftarrow{1-t} & A & \xleftarrow{N} & \ldots ,
\end{array}
$$

cuyas columnas pares son los complejos de Hochschild y las impares las resoluciones standard de Hochschild con el signo de la diferencial cambiado, es un coplejo doble.

Demostración: Sabemos que las columnas son complejos. Por las igualdades

$N\circ(1-t)=(1-t)\circ N=1-t^n=0$

también lo son las filas. Para terminar la demostración resta ver que $b'\circ N=N\circ b$ y $b\circ(1-t)=(1-t)\circ b'$. Sea $j:A^{\otimes^{n+1}} \longrightarrow A^{\otimes^n}$ el morfismo definido por

$$j(a_0\otimes\ldots\otimes a_n) = (-1)^n(a_n a_0\otimes\ldots\otimes a_{n-1}).$$

Como las flechas b y b', de $A^{\otimes^{n+1}}$ en $A^{\otimes^{n}}$, verifican las ecuaciones

$$b=\sum_{i=0}^{n} t^i\circ j\circ t^{n-i}$$

y

$$b'=\sum_{i=0}^{n-1} t^i\circ j\circ t^{n-i}$$

se tiene

$$N\circ b=\left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k\right)\circ\left(\sum_{i=0}^{n} t^i\circ j\circ t^{n-i}\right)=\sum_{i=0}^{n}\ \sum_{k=0}^{n-1}\ t^{k+i}\circ j\circ t^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\ \sum_{k=0}^{n-1} t^k\circ j\circ t^{n-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\ \sum_{k=0}^{n} t^i\circ j\circ t^k=\sum_{i=0}^{n-1}\ \sum_{k=0}^{n} t^i\circ j\circ t^{n-i+k}=\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i\circ j\circ t^{n-i}\right)\circ\left(\sum_{k=0}^{n-1} t^k\right)$$

$$=b'\circ N$$

y

$$b\circ(1-t)=\left(\sum_{i=0}^{n} t^i\circ j\circ t^{n-i}\right)\circ(1-t)=\sum_{i=0}^{n} t^i\circ j\circ t^{n-i}-\sum_{i=0}^{n} t^i\circ j\circ t^{n+1-i}$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} t^i\circ j\circ t^{n-i}+t^n\circ j\circ t^0-\sum_{i=0}^{n} t^i\circ j\circ t^{n+1-i}=\sum_{i=0}^{n-1} t^i\circ j\circ t^{n-i}$$

$$-\sum_{i=0}^{n-1} t^{i+1}\circ j\circ t^{n-i}=(1-t)\circ\left(\sum_{i=0}^{n-1} t^i\circ j\circ t^{n-i}\right)=(1-t)\circ b'.$$

Recordemos que a cada complejo doble

$$\mathcal{A}:\quad \begin{tikzcd} \vdots \arrow[d, "b^V_{30}"] & \vdots \arrow[d, "b^V_{31}"] & \vdots \arrow[d, "b^V_{32}"] & \\ A_{20} \arrow[d, "b^V_{20}"] & A_{21} \arrow[l, "b^H_{21}"'] \arrow[d, "b^V_{21}"] & A_{22} \arrow[l, "b^H_{22}"'] \arrow[d, "b^V_{22}"] & \cdots \arrow[l, "b^H_{23}"'] \\ A_{10} \arrow[d, "b^V_{10}"] & A_{11} \arrow[l, "b^H_{11}"'] \arrow[d, "b^V_{11}"] & A_{12} \arrow[l, "b^H_{12}"'] \arrow[d, "b^V_{12}"] & \cdots \arrow[l, "b^H_{13}"'] \\ A_{00} & A_{01} \arrow[l, "b^H_{01}"'] & A_{02} \arrow[l, "b^H_{02}"'] & \cdots \arrow[l, "b^H_{03}"'] \end{tikzcd}$$

se le asocia el complejo $\mathrm{Tot}(\mathcal{A})$, llamado *complejo total de* A, definido por:

$$\mathrm{Tot}(\mathcal{A})_n = \bigoplus_{i+j=n} A_{ij}$$

$$d_n : \mathrm{Tot}(\mathcal{A})_n \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathcal{A})_{n-1}.$$

$$d_n(X_{n,0}, X_{n-1,1}, \dots, X_{0,n})$$

$$=\big(b^V_{n,0}(X_{n,0})+b^H_{n-1,1}(X_{n-1,1}), \dots, b^V_{1,n-1}(X)+b^H_{0,n}(X).$$

La *Homología Cíclica de* A es, por definición, la homología del complejo total $\mathrm{Tot}(\mathcal{C}(A))$ de $\mathcal{C}(A)$.

Mostraremos ahora que el complejo $\mathcal{C}(A)$ puede reemplazarse por otros que a veces son más simples.

2.1.2. Proposición: El complejo Total $\mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A))$ del complejo doble

$$
\mathcal{B}(A):\quad
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] \\
A^{\otimes^4} & A^{\otimes^3} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes^2} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A\ , \arrow[l, "B"'] \\
A^{\otimes^3} \arrow[from=u, "b"] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes^2} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & \\
A^{\otimes^2} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & & \\
A\ , & & &
\end{tikzcd}
$$

donde B es la composición

$$
\begin{tikzcd}
A^{\otimes^{n+1}} & A^{\otimes^{n+1}} \arrow[l, "1-t"'] & \\
& A^{\otimes^n} \arrow[u, "\varepsilon_0"'] & A^{\otimes^n}, \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}
$$

es homotópicamente equivalente a Tot($\mathcal{C}(A)$)

Demostración: Que $\mathcal{B}(A)$ es un complejo doble es consecuencia inmediata de que $N\circ(1-t)=0=(1-t)\circ N$, $b\circ(1-t)=(1-t)\circ b'$ y $N\circ b=b'\circ N$. En efecto, usando estas igualdades se comprueba que

$$B^2=(1-t)\circ\varepsilon_0\circ N\circ(1-t)\circ\varepsilon_0\circ N=0$$

y

$$b\circ B+B\circ b=b\circ(1-t)\circ\varepsilon_0\circ N+(1-t)\circ\varepsilon_0\circ N\circ b=(1-t)\circ(b'\circ\varepsilon_0+\varepsilon_0\circ b')\circ N$$
$$=(1-t)\circ N=0.$$

Veamos ahora que Tot($\mathcal{B}(A)$) y Tot($\mathcal{C}(A)$) son homotópicamente equivalentes. Sean

$$\varphi_\bullet : \mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A))_\bullet \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathcal{C}(A))_\bullet$$

y

$$\psi_\bullet : \mathrm{Tot}(\mathcal{C}(A))_\bullet \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A))_\bullet$$

los morfismos definidos por las fórmulas

$$\varphi_\bullet(x_n, x_{n-2}, \ldots) = \left(x_n, \varepsilon_0 \circ N(x_{n-2}), \varepsilon_0 \circ N(x_{n-4}), \quad \right)$$

y

$$\psi_\bullet(x_n, x_{n-2}, \ldots) = \left(x_n + (1-t) \circ b'(x_{n-1}), x_{n-2} + (1-t) \circ b'(x_{n-3}), \quad \right).$$

Se comprueba por cálculo directo que $\varphi_\bullet$ y $\psi_\bullet$ son morfismos de complejos y que $(1-\psi_\bullet \circ \varphi_\bullet)^2 = 0$, de donde $(2\psi_\bullet - \psi_\bullet \circ \varphi_\bullet \circ \psi_\bullet) \circ \varphi_\bullet = \mathrm{id}$. Así, $\varphi_\bullet$ es una sección. La demostración se termina observando que la familia de morfismos

$$\left(\sigma_n : \mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A))_n \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathcal{C}(A))_{n+1}\right)_{n \geq 0},$$

definida por

$$\sigma_n(x_n, x_{n-2}, \ldots) = \left(0, -\varepsilon_0(x_{n-1}), 0, -\varepsilon_0(x_{n-3}), \quad \right)$$

es una homotopía de id en $\varphi_\bullet \circ \psi_\bullet$.

Ahora usaremos la proposición anterior para obtener una demostración simple del siguiente resultado importante.

2.1.3. Teorema: Cada k-álgebra asociativa A tiene asociada una sucesión exacta larga

$$(8) \quad \ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i_n} HC_n(A) \xrightarrow{S_n} HC_{n-2}(A) \xrightarrow{B_{n-2}} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i_{n-1}} \ldots$$

Demostración: Sea $\mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)[-2]$ la suspensión al cuadrado de

$\mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)$, es decir, $(\mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)[-2])_n = \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)_{n-2}$. La sucesión

$$(9)\quad 0 \longrightarrow (A\otimes A^{\otimes^\bullet}, b) \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A) \xrightarrow{\ S\ } \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)[-2] \longrightarrow 0,$$

donde i es la flecha dada por la inclusión de $(A^\bullet, b)$ en la primera columna de $\mathcal{B}(A)$, y

$$S: A^{\otimes^n} \otimes A^{\otimes^{n-2}} \otimes \ldots \longrightarrow A^{\otimes^{n-2}} \otimes A^{\otimes^{n-4}} \otimes \ldots$$

$$S(a_n, a_{n-2}, \ldots) = (a_{n-2}, a_{n-4}, \ldots),$$

es exacta. Por lo tanto tiene asociada una sucesión exacta larga de homología que resulta ser la que estamos buscando.

Se comprueba fácilmente que el morfismo $HC_n(A) \xrightarrow{B_n} H_{n+1}(A)$ de (8) es el inducido por la flecha $B_\bullet : \left(A^{\otimes^\bullet}, b\right) \longrightarrow \left(A^{\otimes^\bullet}, -b\right)$.

Observemos que las columnas de $\mathcal{B}(A)$ son todas iguales al complejo de Hochschild $(A\otimes_k A^{\otimes^\bullet}, b)$. En la Sección 1.2 vimos que la proyección canónica de este complejo en el de Hochschild normalizado $(A\otimes_k \overline{A}^{\otimes^\bullet}, b)$ es un cuasisomorfismo. Vamos a probar ahora que hay un complejo similar al $\mathcal{B}(A)$, cuyas columnas son los complejos $(A\otimes_k \overline{A}^{\otimes^\bullet}, b)$, que también puede usarse para calcular la homología cíclica de A.

Sea $n\geq 0$. Recordando que $A^{\otimes^{n+1}} \xrightarrow{\ B\ } A^{\otimes^{n+2}}$ es $(1-t)\circ\varepsilon_0\circ N$ y haciendo la cuenta vemos inmediatamente que la composición $A^{\otimes^{n+1}} \xrightarrow{\ B\ } A^{\otimes^{n+2}} \twoheadrightarrow A\otimes_k \overline{A}^{\otimes^{n+1}}$ se anula en los tensores elementales $a_0\otimes\ldots\otimes a_n$ con $a_i \in k$ para algún $i>0$. En consecuencia hay un único morfismo $B: A\otimes \overline{A}^{\otimes^n} \longrightarrow A\otimes \overline{A}^{\otimes^{n+1}}$ tal que el cuadrado

$$(10)\qquad \begin{tikzcd} A\otimes A^{\otimes^n} \arrow[r, "B"] \arrow[d] & A\otimes A^{\otimes^{n+1}} \arrow[d] \\ A\otimes \overline{A}^{\otimes^n} \arrow[r, "B"] & A\otimes \overline{A}^{\otimes^{n+1}} \end{tikzcd}$$

conmuta. Se comprueba fácilmente que también conmuta

$$(11)\qquad \begin{tikzcd} A\otimes A^{\otimes^n} \arrow[r, "b'"] \arrow[d] & A\otimes A^{\otimes^{n-1}} \arrow[d] \\ A\otimes \overline{A}^{\otimes^n} \arrow[r, "b"] & A\otimes \overline{A}^{\otimes^{n-1}} \end{tikzcd}$$

y que

$$B(a\otimes a\otimes\ldots\otimes a)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{in}.1\otimes a_i\otimes\ldots\otimes a_n\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-1},$$

para cada tensor elemental $a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n\in A\otimes\overline{A}^{\otimes}$

Ahora vamos a probar lo que anunciamos arriba.

2.1.4. Proposición: El diagrama

$$\mathcal{B}(A)_{norm}: \quad \begin{tikzcd} \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] \\ A\otimes\overline{A}^{\otimes^3} \arrow[d, "b"] & A\otimes\overline{A}^{\otimes^2} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A\otimes\overline{A} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] \\ A\otimes\overline{A}^{\otimes^2} \arrow[d, "b"] & A\otimes\overline{A} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] \\ A\otimes\overline{A} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & \\ A & & \end{tikzcd}$$

es un complejo doble y la familia $(A\otimes A^{\otimes^n} \longrightarrow A\otimes\overline{A}^{\otimes^n})_{n\geq 0}$ de proyecciones canónicas es un epimorfismo $\mathcal{B}(A) \xrightarrow{\pi} \mathcal{B}(A)_{norm}$ que induce un isomorfismo de la homología de $\mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A))$ en la homología de $\mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A))_{norm}$.

Demostración: Que $\mathcal{B}(A)_{norm}$. es un complejo doble y que la familia de proyeciones canónicas $(A\otimes A^{\otimes^n} \longrightarrow A\otimes\overline{A}^{\otimes^n})_{n\geq 0}$ es un epimorfismo de $\mathcal{B}(A)$ en $\mathcal{B}(A)_{norm}$ es consecuencia inmediata de la conmutatividad de (10) y (11). Para terminar la demostración resta probar que $\mathrm{Tot}(\pi):\mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A)) \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A))_{norm}$ es un cuasi-isomorfismo. Esto se hace inmediatamente verificando, con ayuda del lema que sigue, que el núcleo de $\mathrm{Tot}(\pi)$ es exacto. También puede mostrarse fácilmente por inducción que $\mathrm{Tot}(\pi)$ es un cuasisomorfismo usando que la sucesión exacta corta de complejos (6) es el dominio de un epimorfismo

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & (A\otimes A^{\otimes^\bullet},b) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A) \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)[-2] \arrow[r] \arrow[d, "\pi"] & 0 \\
0 \arrow[r] & (A\otimes\overline{A}^{\otimes^\bullet},b) \arrow[r] & \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)_{norm} \arrow[r] & \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)_{norm}[-2] \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

en el que la flecha $(A\otimes A^{\otimes^\bullet},b) \longrightarrow (A\otimes\overline{A}^{\otimes^\bullet},b)$ es la proyección canónica.

2.1.5. Lema: El complejo total de un complejo doble

$$
\mathscr{A}:\quad
\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b^V_{30}"] & \vdots \arrow[d, "b^V_{31}"] & \vdots \arrow[d, "b^V_{32}"] & \\
A_{20} \arrow[d, "b^V_{20}"] & A_{21} \arrow[l, "b^H_{21}"'] \arrow[d, "b^V_{21}"] & A_{22} \arrow[l, "b^H_{22}"'] \arrow[d, "b^V_{22}"] & \cdots \arrow[l, "b^H_{23}"'] \\
A_{10} \arrow[d, "b^V_{10}"] & A_{11} \arrow[l, "b^H_{11}"'] \arrow[d, "b^V_{11}"] & A_{12} \arrow[l, "b^H_{12}"'] \arrow[d, "b^V_{12}"] & \cdots \arrow[l, "b^H_{13}"'] \\
A_{00} & A_{01} \arrow[l, "b^H_{01}"'] & A_{02} \arrow[l, "b^H_{02}"'] & \cdots \arrow[l, "b^H_{03}"']
\end{tikzcd}
$$

con columnas o filas exactas es exacto.

Demostración: Supongamos que las columnas son exactas (si lo son las filas consideramos el complejo doble "transpuesto" obtenido intercambiando filas con columnas). Es suficiente mostrar que si $(x_{n,0}, x_{n-1,1}, \dots, x_{0,n})$ es un ciclo de $\mathrm{Tot}(\mathscr{A})_n$ y $x_{q,n-q+1}$, $x_{q-1,n-q+2}, \dots, x_{1,n}$, con $x_{i,j} \in A_{i,j}$ es una familia de elementos que verifica

$$b^V(x_{q-i,n-q+i+1}) + b^H(x_{q-i-1,n-q+i+2}) = x_{q-i-1,n-q+i+1} \quad \forall i \geq 0,$$

existe $x_{q+1,n-q} \in A_{q+1,n-q}$ tal que

$$b^V(x_{q+1,n-q}) + b^H(x_{q,n-q+1}) = x_{q,n-q},$$

lo que se deduce en forma inmediata de que las columnas de $\mathscr{A}$ son exactas y de que

$$
\begin{aligned}
b^V(x_{q,n-q} - b^H(x_{q,n-q+1})) &= b^V(x_{q,n-q}) - b^V \circ b^H(x_{q,n-q+1}) \\
&= b^V(x_{q,n-q}) + b^H \circ b^V(x_{q,n-q+1}) \\
&= b^V(x_{q,n-q}) + b^H(b^V(x_{q,n-q+1}) + b^H(x_{q-1,n-q+2})
\end{aligned}
$$

$$=b^{V}(x_{q,n-q})+b^{H}(x_{q-1,n-q+1})=0.$$

Cuando k es un cuerpo de característica 0 la homología cíclica puede obtenerse todavía a partir de otro complejo.

2.1.6. Proposición: Sea A una k-álgebra. Si k es un cuerpo de característica 0 la homología cíclica de A es la homología del complejo $\left((A\otimes_k A^{\otimes^\bullet})/\mathrm{Im}(1-t),b)\right)$, conúcleo del morfismo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "b'"] & A^{\otimes^5} \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-t"] & A^{\otimes^4} \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-t"] & A^{\otimes^3} \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "1-t"] & A^{\otimes^2} \arrow[r, "-b'"] \arrow[d, "1-t"] & A \\
\cdots \arrow[r, "b"] & A^{\otimes^5} \arrow[r, "b"] & A^{\otimes^4} \arrow[r, "b"] & A^{\otimes^3} \arrow[r, "b"] & A^{\otimes^2} \arrow[r, "b"] & A
\end{tikzcd}$$

Demostración: Sea $\mathcal{N}$ el complejo doble

$$\mathcal{N}:\quad\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \\
\mathrm{Im}(1-t) \arrow[d, "b"] & A^{\otimes^3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes^3} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes^3} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
\mathrm{Im}(1-t) \arrow[d, "b"] & A^{\otimes^2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^{\otimes^2} \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^{\otimes^2} \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \cdots \arrow[l, "N"'] \\
\mathrm{Im}(1-t) & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & \cdots, \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}$$

Por el lema anterior y por ser $\mathrm{Tot}(\mathcal{N})$ el núcleo de un epimorfismo de complejos $\mathrm{Tot}(\mathcal{C}(A)) \twoheadrightarrow \left((A\otimes_k A^{\otimes^\bullet})/\mathrm{Im}(1-t),b)\right)$, para probar la proposición basta ver que para cada $n\geq 1$ el complejo

$$(12)\quad \mathrm{Im}(1-t) \xleftarrow{1-t} A^{\otimes^2} \xleftarrow{N} A^{\otimes^2} \xleftarrow{1-t} A^{\otimes^2} \xleftarrow{N} \cdots$$

es exacto, lo que se verifica comprobando, con un cálculo directo, que la familia de morfismos de k-módulos

$$s_0 : \mathrm{Im}(1-t) \longrightarrow A^{\otimes^n}$$

$$s_i : A^{\otimes^n} \longrightarrow A^{\otimes^n} \quad (i \geq 1)$$

$$s_i = \begin{cases} \dfrac{-t-2t^2-\ldots-(n-1)t^{n-1}}{n} \\[2ex] \dfrac{id}{n} \end{cases}$$

es una homotopía de retracción

$$\mathrm{Im}(1-t) \underset{s_0}{\overset{1-t}{\rightleftarrows}} A^{\otimes^2} \underset{s_1}{\overset{N}{\rightleftarrows}} A^{\otimes^2} \underset{s_2}{\overset{1-t}{\rightleftarrows}} A^{\otimes^2} \underset{s_3}{\overset{N}{\rightleftarrows}} \cdots$$

de (12).

2.2. Relación con la Homología de De'Rham y De'Rham-Deligne

Sea A una k-álgebra conmutativa. En esta sección probamos dos cosas. Primero, que cuando A es homológicamente regular, el complejo de cocadenas, cuyos objetos son los grupos de homología de Hochschild y cuyos bordes son los inducidos por $B:\left(A^{\otimes^{\bullet}},b\right) \longrightarrow \left(A^{\otimes^{\bullet}},-b\right)$, es isomorfo al complejo de De'Rham de A; y luego, que si k es un cuerpo de característica cero y A es homológicamente regular, la homología cíclica de A coincide con la de De'Rham-Deligne.

2.2.1. Proposición: La flecha $\gamma^{\bullet}:\Omega^{\bullet}(A) \longrightarrow H_{\bullet}(A,A)$, introducida enla Observación 1.4.7, es un morfismo del complejo $(\Omega^{\bullet}(A),d)$ de

De'Rham de A en $(H_\bullet(A),B)$.

Demostración: Hay que probar que, para cada $n\geq 0$, el diagrama

$$\begin{tikzcd} \Omega^n(A) \arrow[r, "\gamma^n"] \arrow[d, "d"] & H_n(A) \arrow[d, "B"] \\ \Omega^{n+1}(A) \arrow[r, "\gamma^{n+1}"] & H_{n+1}(A) \end{tikzcd}$$

conmuta. Sea $\omega=a_0da_1\wedge da_2\wedge\ldots\wedge da_n\in\Omega^n(A)$. La imagen $\gamma^n(\omega)$, de ω por γ^n, es

$$\gamma^n(\omega)=(a_0\otimes a_1)*(1\otimes a_2)*\ldots*(1\otimes a_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)a_0\otimes a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(n)}$$

Aplicando B a esta expresión se obtiene

$$B(\gamma(\omega))$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma)\sum_{i=0}^{n}(-1)^{in}1\otimes a_{\sigma^{-1}(i)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(n)}\otimes a_0\otimes a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(i-1)}$$

$$=\sum_{\sigma\in S_n}\sum_{\tau\in T}\operatorname{sgn}(\sigma)\operatorname{sgn}(\tau)\;1\otimes a_{\sigma^{-1}\tau^{-1}(0)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}\tau^{-1}(n)},$$

donde T es el subgrupo cíclico de S_{n+1} generado por la permutación t de $\{0,1,..,n\}$ que manda i en i+1 $\forall i<n$. Como S_{n+1} es el producto de S_n con T, la última expresión es igual a

$$\sum_{\sigma\in S_{n+1}}\operatorname{sgn}(\sigma)1\otimes a_{\sigma^{-1}(0)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(n)}=(1\otimes a_0)*(1\otimes a_1)*\ldots*(1\otimes a_n)=\gamma^{n+1}\circ d(\omega)$$

2.2.2. Observación: Cuando A es homológicamente regular $\gamma^\bullet$ es un isomorfismo de $(\Omega^\bullet(A),d)$ en $(H_\bullet(A),B)$.

2.2.3 Definición: Se llama *Homología de De'Rham-Deligne* a la homología del complejo total del complejo doble

$$
\begin{array}{lccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
 & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle 0} \\
\mathcal{D}(A): & \Omega^2(A) & \xleftarrow{d} & \Omega^1(A) & \xleftarrow{d} & A\,, \\
 & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \downarrow{\scriptstyle 0} & & \\
 & \Omega^1(A) & \xleftarrow{d} & A & & \\
 & \downarrow{\scriptstyle 0} & & & & \\
 & A & & & &
\end{array}
$$

cuya i-ésima fila es el complejo de De'Dham truncado

$$\Omega^{\le i}(A):\Omega^i(A)\xleftarrow{d^{i-1}}\Omega^{i-1}(A)\xleftarrow{d^{i-2}}\cdots\xleftarrow{d^1}\Omega^1(A)\xleftarrow{d^0}A.$$

Es evidente que $\mathrm{Tot}(\mathcal{D}(A))=\bigoplus_{i\ge 0}(-1)^i\Omega^{\le i}(A)$. En consecuencia,

$$H_n\big(\mathrm{Tot}(\mathcal{D}(A))\big)=\Omega^n(A)/d\Omega^{n-1}(A)\oplus H^{n-2}_{DR}(A)\oplus H^{n-4}_{DR}(A)\oplus\cdots$$

2.2.4. Proposición: Sea A una k-álgebra conmutativa sobre un cuerpo k. La familia

$$\mu^n:\big(A\otimes\overline{A}^{\otimes^n}\longrightarrow\Omega^n(A)\big)_{n\ge 0},$$

formada por las flechas definidas inmediatamente después de la Observación 1.4.7, es un morfismo de $\mathcal{B}(A)_{norm}$ en $\mathcal{D}(A)$.

Demostración: Como ya se probó que $\mu\circ b=0$, es suficiente ver que $d\circ\mu=\mu\circ B$. Para ello basta observar que

$$
\begin{aligned}
d\circ\mu^n(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)&=d\left(\frac{1}{n!}.a_0d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_n)\right)\\
&=\frac{1}{n!}.d(a_0)\wedge d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_n)
\end{aligned}
$$

y

$$\mu^n\circ B(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{in}1\otimes a_i\otimes\ldots\otimes a_n\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-1}\right)$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left(\sum_{i=1}^{n}(-1)^{in}d(a_i)\wedge\ldots\wedge d(a_n)\wedge d(a_0)\ldots\wedge d(a_{i-1})\right)$$

$$=\frac{n+1}{(n+1)!}.d(a_0)\wedge d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_n)$$

$$=\frac{1}{n!}.d(a_0)\wedge d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_n).$$

2.2.5. Teorema: Si A es una k-álgebra homológicamente regular sobre un cuerpo k de característica cero,

$$HC_n(A)=\Omega^n(A)/d\Omega^{n-1}(A)\oplus H_{DR}^{n-2}(A)\oplus H_{DR}^{n-4}(A)\oplus\ldots$$

Demostración: Se lo deduce inmediatamente del Lema 2.1.5. ya que $\mathcal{B}(A)_{norm}\longrightarrow \mathcal{D}(A)$ es un cuasisomorfismo en cada columna.

En [C-G-G,§3] obtuvimos la siguiente generalización del teorema anterior.

2.2.6. Teorema: Sea k un cuerpo de caracteristica 0 y A una k-álgebra homológicamente regular e I⊆A un ideal que localmente es intersección completa. Entonces

$$HC_n(A)=\bigoplus_{i=o}^{[n/2]} H^{n-2i}(D^{\bullet}_{(n-i)}),$$

donde los $D^{\bullet}_{(j)}$ son los complejos de cocadenas

$$0\longrightarrow \frac{\Omega^0(A)}{I^{j+1}\Omega^0(A)} \xrightarrow{d} \frac{\Omega^1(A)}{I^{j}\Omega^1(A)} \xrightarrow{d} \ldots \xrightarrow{d} \frac{\Omega^{j-1}(A)}{I^{2}\Omega^{j-1}(A)} \xrightarrow{d} \frac{\Omega^{j}(A)}{I\Omega^{j}(A)} \longrightarrow 0.$$

Demostración: Ver [C-G-G,§3].

3. LA RESOLUCION SIMPLIFICADA

3.1. Introducción

Sea $A=k[X_1,\dots,X_n]/\langle f_1,\dots,f_r\rangle$, con k un anillo conmutativo con unidad arbitrario y $f_1,\dots,f_r$ una sucesión regular en $k[X_1,\dots,X_n]$. En esta sección obtenemos una resolución libre R(A) de A como un A^e-módulo. Esta resolución resulta ser una A^e-álgebra diferencial graduada conmutativa de manera natural. Además definimos explicitamente un morfismo de álgebras diferenciales graduadas $h_\bullet:R(A) \longrightarrow (A\otimes\overline{A}^{\otimes\bullet}\otimes A,b')$ que nos será util en la siguiente sección.

Sea $A'=k[X_1,\dots,X_n]$. Usaremos el desarrollo en serie de Taylor $T:A'\longrightarrow A'^e$ dado por $T(P)=1\otimes P-P\otimes 1$ y estudiado en [M-V]. También usaremos libremente la estructura de A'-módulo de A'^e obtenida haciendo actuar A' sobre los tensores elementales por multiplicación en el primer factor, i.e. definiendo $a(b\otimes c)=ab\otimes c$. De la fórmula $T(PQ)=PT(Q)+QT(P)+T(P)T(Q)$, se deduce fácilmente que para cada $P\in A'$, T(P) puede escribirse como un polinomio en $A'[T(X_1),\dots,T(X_n)]$, donde los coeficientes de cada monomio son los mismos que los de la serie de Taylor clásica. Definiremos ahora elementos de $A'\otimes A'$, que juegan respecto de la serie de Taylor, el mismo rol que las diferenciales en las direcciones de los ejes cartesianos, respecto de la diferencial total.

3.1.1. Definición: Dado $P\in A'$, llamaremos $T_j(P)$ a la suma de los monomios de T(P) que son múltiplos de $T(X_j)$ y no los son de $T(X_i)$ para ningún $i<j$, es decir, que dado j con $1\le j\le n$,

$$T_j(P)=\sum_{i_j\geq 1, i_{j+1},\ldots,i_n} \frac{1}{i_j!\ldots i_n!} \frac{\partial^{\sum i_k} P}{\partial X_j^{i_j}\ldots\partial X_n^{i_n}}.T(X)^{i_j}\ldots T(X)^{i_n}$$

3.1.2. Observación: Se verifican

a) T_j es k-lineal para cada j entre 1 y n

b) $T(P)=\sum_{j=1}^{n} T_j(P)$.

3.2. La Resolución R(A)

Como antes, sea $A=k[X_1,\ldots,X_n]/\langle f_1,\ldots,f_r\rangle$ con k un anillo conmutativo con unidad arbitrario, $f_1,\ldots,f_r$ una sucesión regular en $k[X_1,\ldots,X_n]$ y sea $A^e=A\otimes_k A$.

Sea D(A) el álgebra exterior sobre A^e generada por el A^e-módulo libre $A^e e_1\oplus\ldots\oplus A^e{}_n$ y F(A) el álgebra de potencias divididas sobre D(A) con variables $t_1,\ldots,t_r$. Recordemos que el álgebra de potencias divididas con r variables sobre un anillo D es el módulo libre sobre D, con base $t_1^{(p_1)}\ldots t_r^{(p_r)}$ $(p_j\in\mathbb{N}_0)$, provisto del producto dado por

$$(1)\quad \left(t_1^{(p_1)}\ldots t_r^{(p_r)}\right)\left(t_1^{(q_1)}\ldots t_r^{(q_r)}\right)=\prod_{k=1}^{r}\binom{p_1+q_1}{p_k}\left(t^{(p_1+q_1)}\ldots t^{(p_r+q_r)}\right)$$

Asignamos grado 1 a los elementos e_i y grado 2p a $t_j^{(p)}$. Con esta graduación, F(A) resulta una A^e-algebra graduada conmutativa.

Definimos una derivación d_* de grado -1 en F(A) por

$$d_1(e_i)=T(X_i),\ d_{2p}(t_j^{(p)})=t_j^{(p-1)}d_2(t_j)\quad y\quad d_2(t_j)=\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(f_j)}{T(X_i)}.e_i.$$

Es claro que $d_\bullet \circ d_\bullet = 0$. LLamaremos R(A) al algebra F(A) con la derivación antes definida y $R(A)_m$ a su componente homogénea de grado m . Es evidente que $R(A)_m$ es un A^e-módulo libre y que la familia

$$\left\{ e_{i_1 \ldots i_s} t_1^{(p_1)} \ldots t_r^{(p_r)} : s, p_1, \ldots, p_r \geq 0 \quad y \quad s + 2(p_1 + \ldots + p_r) = m \right\},$$

donde por $e_{i_1 \ldots}$ entendemos $e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_s}$ con $1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_s \leq n$, una base.

3.2.1. Nota: Sean $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ una sucesión de elementos conmutantes de un anillo B y M un B-módulo. Llamamos complejo de Koszul de $(x_i)_{1 \leq i \leq r}$ con coeficientes en M y denotamos con $K_\bullet(M, (x_i)_{1 \leq i \leq r})$ al complejo

$$0 \longrightarrow M^{\binom{r}{r}} \xrightarrow{d_{r-1}} M^{\binom{r}{r-1}} \xrightarrow{d_{r-2}} \ldots \xrightarrow{d_1} M^{\binom{r}{1}} \xrightarrow{d_0} M^{\binom{r}{0}} \longrightarrow 0,$$

donde $M^{\binom{r}{m}}$ denota a la suma directa de $\binom{r}{m}$ copias de M indicadas por $e_{i_1 \ldots i_m}$ $(1 \leq i_1 \leq \ldots \leq i_m \leq n)$ y, para cada $\vartheta \in M$, $d_{m-1}(\vartheta . e_{i_1 \ldots i_m}) = \sum_{j=1}^{m} (-1)^{j+1} \vartheta . x_{i_j} e_{i_1 \ldots \hat{i}_j \ldots i_m}$.

3.2.2. Nota: Es claro que el álgebra exterior D(A) , junto con la derivación que aplica e_i en $T(X_i)$ para todo i entre 1 y n, es el complejo de Koszul $K_\bullet(A^e, (T(x_i))_{1 \leq i \leq r})$. También lo es, que R(A) se obtiene a partir de D(A) matando los ciclos $\sum_{i=1}^{n} \frac{T_i(f_j)}{T(X_i)} . e_i \in A^{e\binom{n}{1}}$ con el método dado en [T].

Ahora vamos a demostrar que R(A) es una resolución A^e-libre de A.

3.2.3. Lema: El morfismo de álgebras diferenciales graduadas

$$\xi_\bullet : K_\bullet(A',(f_1,\dots f_r,f_1,\dots,f_r)) \longrightarrow K_\bullet(A,(f_1,\dots,f_r)) ,$$

dado por

$$\xi_1(e_i)=\begin{cases} e_i & \text{si} \quad i\le r \\ 0 & \text{si} \quad i>r, \end{cases}$$

induce un isomorfismo en homología.

Demostraión: Sea $B_{\bullet\bullet}$ el complejo doble

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
M_{r,0} \arrow[d] & M_{r,1} \arrow[l] \arrow[d] & \dots \arrow[l] & M_{r,r-1} \arrow[l] \arrow[d] & M_{r,r} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
M_{r-1,0} \arrow[d] & M_{r-1,1} \arrow[l] \arrow[d] & \dots \arrow[l] & M_{r-1,r-1} \arrow[l] \arrow[d] & M_{r-1,r} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
\vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & & \vdots \arrow[d] & \vdots \arrow[d] & \\
M_{1,0} \arrow[d] & M_{1,1} \arrow[l] \arrow[d] & \dots \arrow[l] & M_{1,r-1} \arrow[l] \arrow[d] & M_{1,r} \arrow[l] \arrow[d] & 0 \arrow[l] \\
M_{0,0} & M_{0,1} \arrow[l] & \dots \arrow[l] & M_{0,r-1} \arrow[l] & M_{0,r} \arrow[l] & 0 \arrow[l]
\end{tikzcd}$$

cuya entrada $M_{p,q}$ es $A'^{\binom{r}{p}} \otimes A'^{\binom{r}{q}}$ y cuyas flechas horizontales y verticales son inducidas respectivamente por las del complejo de Koszul $K_\bullet(A',(f_1,\dots,f_r))$ y por $(-1)^p$ veces las del mismo complejo de Koszul. Como $f_1,\dots,f_r$ es una sucesión regular, la flecha

$$\overline{\xi}_\bullet : \mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet}) \longrightarrow K_\bullet(A,(f_1,\dots,f_r)),$$

dada por

$$\overline{\xi}_i(e_{j_1\dots j_i}\otimes 1)=e_{j_1\dots j_i}$$

y

$$\overline{\xi}_i(e_{j_1\dots j_s}\otimes e_{j'_1\dots j'_{i-s}})=0 \quad \text{si} \quad s<i$$

es un cuasi-isomorfismo. La prueba se termina observando que hay un isomorfismo canónico $K_\bullet(A',(f_1,\dots,f_r,f_1,\dots,f_r)) \longrightarrow \mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet})$ tal que

$$\begin{tikzcd}
K_\bullet(A',(f_1,\dots,f_r,f_1,\dots,f_r)) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \mathrm{Tot}(B_{\bullet\bullet}) \arrow[d, "\overline{\xi}_\bullet"] \\
K\,(A',(f_1,\dots,f_r,f_1,\dots,f_r)) \arrow[r] & K\,(A,f_1,\dots,f_r))
\end{tikzcd}$$

es conmutativo.

3.2.4. Lema: La homología del complejo $K_\bullet(A^e,(T(X_i))_{1\le i\le n}))$ es

$$H_m(K\,(A^e,(T(X_i))_{1\le i\le n}))=A^{e\binom{r}{m}} \quad \text{si} \quad 0\le m\le r$$

y

$$H_m(K_\bullet(A^e,(T(X_i))_{1\le i\le n}))=0 \quad \text{cuando } m>r.$$

Además, $1\otimes 1\in A^{e\binom{n}{0}}$ es una base de $H_0(K_\bullet(A^e,T(X_i)_{1\le i\le n}))$ y

$$\left\{\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(f_{j_1})}{T(X_i)}\,e_i\right)\wedge\dots\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(f_{j_m})}{T(X_i)}\,e_i\right)\in A^{e\binom{r}{m}}:\ (1\le j_1<\dots<j_m\le r)\right\}$$

es una base de $H_m(K_\bullet(A^e,(T(X_i))_{1\le i\le n}))$.

Demostración: Como $T(X_i)_{1\le i\le n}$ es una sucesión regular en A'^e, el complejo donde

$$0\longrightarrow A'^{e\binom{n}{n}} \xrightarrow{d_{n-1}} A'^{e\binom{n}{n-1}} \xrightarrow{d_{n-2}} \cdots \xrightarrow{d_1} A'^{e\binom{n}{1}} \xrightarrow{d_0} A'^{e\binom{n}{0}} \longrightarrow 0$$

es el complejo de Koszul $K_\bullet(A'^e,(T(X_i))_{1\le i\le n})$ y μ está dado por $\mu(a\otimes b)=ab$, es una A'^e-resolución de A'. En consecuencia

$$\begin{aligned} H_\bullet(K_\bullet(A^e,T(X_i)_{1\le i\le n}))&=H_\bullet(K_\bullet(A'^e,(T(X_i))_{1\le i\le n})\otimes_{A'^e}A^e)\\ &=\mathrm{Tor}_\bullet^{A'^e}(A',A^e). \end{aligned}$$

Así, para calcular esta homología, podemos usar la A'^e-resolución de A^e

$$0\longrightarrow A'^{e\binom{2r}{2r}} \xrightarrow{d'_{2r-1}} A'^{e\binom{2r}{2r-1}} \xrightarrow{d'_{2r-2}} \cdots \xrightarrow{d'_1} A'^{e\binom{2r}{1}} \xrightarrow{d'_0} A'^{e\binom{2r}{0}} \xrightarrow{\pi} A^e,$$

consistente de $K_\bullet(A'^e,(f_1\otimes 1,\ldots,f_r\otimes 1,1\otimes f_1,\ldots,1\otimes f_r))$ y de la proyección canónica $A'^{e\binom{2r}{0}} \xrightarrow{\pi} A^e$.

Consideremos el diagrama de cuasi-isomorfismos

$$\begin{tikzcd}
 & K^e_\bullet(A',(T(X_i))_{1\le i\le n})\otimes_{A'^e}K^e_\bullet(A',(f_1\otimes 1,\ldots,f_r\otimes 1,1\otimes f_1,\ldots,1\otimes f_r)), \arrow[dl, "\psi^1_\bullet"'] \arrow[dr, "\varphi^1_\bullet"] & \\
K_\bullet(A'^e,(T(X_i))_{1\le j\le n})\otimes_{A'^e}A^e \arrow[d, "\psi^2_\bullet"] & & A'\otimes_{A'^e}K_\bullet(A'^e,(f_1\otimes 1,\ldots,f_r\otimes 1,1\otimes f_1,\ldots,1\otimes f_r)) \arrow[d, "\varphi^2_\bullet"] \\
K_\bullet(A^e,T(X_i)_{1\le i\le n}) & & K_\bullet(A'(f_1,\ldots,f_r,f_1,\ldots,f_r) \arrow[d, "\xi_\bullet"] \\
 & & K_\bullet(A'(f_1,\ldots,f_r)
\end{tikzcd}$$

donde $\xi_\bullet$ es el morfismo definido en 3.2.3) y $\psi^1_\bullet$, $\psi^2_\bullet$, $\varphi^1_\bullet$ y $\varphi^2_\bullet$ son las aplicaciones canónicas. De este diagrama se sigue que,

$$H_m(K\ (A^e,(T(X_i))_{1\le i\le n}))=A^{e\binom{r}{m}} \quad \text{si} \quad 0\le m\le r$$

y

$$H_m(K_\bullet(A^e,(T(X_i))_{1\le i\le n}))=0 \quad \text{cuando } m>r$$

Como $\varphi_\bullet=\xi^2_\bullet\circ\varphi^1_\bullet\circ\varphi_\bullet$ y $\psi^2_\bullet\psi^1_\bullet\psi_\bullet$ son morfismos de álgebras diferenciales graduadas, para terminar la demostración es suficiente notar que

$$\alpha=(1\otimes1)\otimes(1\otimes1)\in A'^e\otimes_{A'^e}A'^e$$

es un cíclo de grado cero de

$$K_\bullet(A'^e,(T(X_i))_{1\le i\le n}))\otimes_{A'^e}K_\bullet(A'^e,(f_1\otimes1,\dots,f_r\otimes1,1\otimes f_1,\dots,1\otimes f_r))$$

tal que

$$\psi_0(\alpha)=1\otimes1\in A^e \text{ y } \varphi_0(\alpha)=1\in A;$$

y que similarmente,

$$\beta_j=(1\otimes1)\otimes(e_j-e_{j+r})$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(f_j)}{T(X_i)}\ e_i\otimes(1\otimes1)\in\left(A'^e\otimes_{A'^e}A'^{e\binom{2r}{1}}\right)\otimes\left(A'^{e\binom{n}{1}}\otimes_{A'^e}A'^e\right)\quad(1\le j\le r)$$

es un cíclo de grado uno de

$$K_\bullet(A'^e,(T(X_i))_{1\le i\le n}))\otimes_{A'^e}K_\bullet(A'^e,(f_1\otimes1,\dots,f_r\otimes1,1\otimes f_1,\dots,1\otimes f_r))$$

tal que

$$\psi_1(\beta_j)=\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(f_j)}{T(X_i)}\, e_i\otimes(1\otimes 1)\in A^{e\binom{n}{1}} \text{ y } \varphi_1(\beta_j)=e_j\in A^{\binom{2r}{1}}.$$

3.2.5. Lema: Sea $0\le u\le r$ y $R^u(A)$ el complejo

$$\cdots\longrightarrow A^u_m \xrightarrow{d^u_{m-1}} A^u_{m-1} \xrightarrow{d^u_{m-2}} \cdots \xrightarrow{d^u_1} A^u_1 \xrightarrow{d^u_0} A^u_0,$$

donde A^u_m es el A^e-módulo libre con base

$$\left(\begin{array}{l} e_{i_1\ldots i_s}t_1^{(p_1)}\ldots t_u^{(p_u)}=e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_s}t_1^{(p_1)}\ldots t_u^{(p_u)} \\ (1\le i_1\le\ldots\le i_s\le n,\ s,p_1,\ldots,p_u\ge 0 \text{ y } m=s+2(p_1+\ldots+p_u)) \end{array}\right)$$

y, conveniendose en que $t_j^{(p)}=0$ si $p<0$,

$$d^u_{m-1}(e_{i_1..i_s}t_1^{(p_1)}..t_u^{(p_u)})=\sum_{k=1}^{s}(-1)^{k+1}T(X_{i_k})e_{i_1..\hat{i}_k..i_s}t_1^{(p_1)}\ldots t_u^{(p_u)}+$$

$$+\sum_{j=1}^{u}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{T_k(f_j)}{T(X_k)}\, e_k\wedge e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_s}t_1^{(p_1)}\ldots t_j^{(p_{j}-1)}\ldots t_u^{(p_u)}\right).$$

Afirmamos que

$$H_m(R^u(A))=A^{\binom{r-u}{m}} \quad \text{si } 0\le m\le r-u$$

y

$$H_m(R^u(A))=0 \qquad \text{si } m>r-u$$

Además, $1\otimes 1\in A^{e\binom{n}{0}}$ es un generador libre de $H_0(K_\bullet(A^e,T(X_i)_{1\le i\le n}))$ y los elementos

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(f_{j_1})}{T(X_i)}\, e_i\right)\wedge\ldots\wedge\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(f_{j_m})}{T(X_i)}\, e_i\right)\in A^{e\binom{r-u}{m}} \qquad (1+u\le j_1<\ldots<j_m\le r),$$

son generadores libres de $H_m(K_\bullet(A^e,T(X_i)_{1\le i\le n}))$ $\forall$ m con $1\le m\le r-u$.

Demostración: cuando $u=0$ se lo deduce inmediatamente del Lema 2.2.4. Supongamos que la aserción es verdadera para u y que $u<r$. En este caso, $R^{u+1}(A)$ es el complejo total del complejo doble

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "d_3^u"] & {} \arrow[d, "d_2^u"] & {} \arrow[d, "d_1^u"] & {} \arrow[d, "d_0^u"] \\
A_3^u & A_2^u.t_{u+1}^{(1)} \arrow[l, "d_3^h"'] \arrow[d, "d_1^u"] & A_1^u.t_{u+1}^{(2)} \arrow[l, "d_2^h"'] \arrow[d, "d_0^u"] & A_0^u.t_{u+1}^{(3)}, \arrow[l, "d_1^h"'] \\
A_2^u \arrow[from=2-1, d, "d_2^u"] & A_1^u.t_{u+1}^{(1)} \arrow[l, "d_2^h"'] \arrow[d, "d_0^u"] & A_0^u.t_{u+1}^{(2)} \arrow[l, "d_1^h"'] & \\
A_1^u \arrow[from=3-1, d, "d_1^u"] & A_0^u.t_{u+1}^{(1)} \arrow[l, "d_1^h"'] & & \\
A_0^u \arrow[from=4-1, "d_0^u"] & & &
\end{tikzcd}$$

donde $d_m^h : A_{m-1}^u.t_{u+1}^{(p+1)} \longrightarrow A_m^u.t_{u+1}^{(p)}$ está definido por

$$d_m^h(e_{i_1\dots i_s} t_1^{(p_1)}\dots t_u^{(p_u)} t_{u+1}^{(p+1)}))=$$

$$=\sum_{i=1}^{n} \frac{T_i(f_{u+1})}{T(X_i)}.e_i\wedge e_{i_1\dots i_s} t_1^{(p_1)}\dots t_u^{(p_u)} t_{u+1}^{(p)} \quad (s+2(p_1+\dots+p_u)=m-1)$$

Usando la hipótesis inductiva se ve fácilmente que el segundo complejo $E_{i,j}^2$, obtenido calculando primero las homologías respecto a d^u y luego respecto a d^h, es

$$E_{i,j}^2=\begin{cases} A^{e\binom{r-u}{i}} & \text{si } j=0 \text{ y } 0\le i\le r-u-1 \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

y que $1\otimes 1\in A^{e\binom{n}{0}}$ es un generador libre de $E_{0,0}^2$ y los elementos

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{T_k(f_{j_1})}{T(X_k)}\,e_k\right)\wedge\ldots\wedge\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{T_k(f_{j_i})}{T(X_k)}\,e_k\right)\in A^{e\binom{r-u}{i}}\quad (1+u\leq j_1<\ldots<j_i\leq r),$$

son generadores libres de $E^2_{i,j}$ Ahora, la tesis se sigue inmediatamente.

3.2.6. Teorema: R(A) es una resolución A^e-libre de A.

Demostración: La tesis se sigue inmediatamente del Lema 3.2.5 ya que $R(A)=R^r(A)$.

3.3. Construcción de $h_\bullet$

Ahora vamos a construir un morfismo $h_\bullet:R(A)\longrightarrow(A\otimes\overline{A}^{\otimes^\bullet}\otimes A,b')$ de álgebras diferenciales graduadas conmutativas.

Para definir $h_\bullet$ necesitamos varias propiedades del producto barajado, que fueron estudiadas en [Bach, Sec. 2].

3.3.1. Definición: Dados $\alpha=a\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_p\otimes b\in A\otimes\overline{A}^{\otimes^p}\otimes A$ y $\beta=a\otimes a_{p+1}\otimes\ldots\otimes a_{p+q}\otimes b'\in A\otimes\overline{A}^{\otimes^q}\otimes A$, definimos

$$\alpha\square\beta=\sum_{B'_{p,q}}\operatorname{sgn}(\sigma)aa'\otimes a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(p+q)}\otimes bb',$$

donde $B'_{p,q}=\left\{\sigma\in B_{p,q}:\sigma(1)<\sigma(p+1)\right\}=\left\{\sigma\in B_{p,q}:\sigma(1)=1\right\}$.

3.3.2. Nota: Se comprueba inmediatamente que el producto "□" tiene las siguientes propiedades:

a) $\alpha*\beta=\alpha\square\beta+(-1)^{pq}\beta\square\alpha\quad \alpha\in A\otimes\overline{A}^{\otimes^p}\otimes A,\ \beta\in A\otimes\overline{A}^{\otimes^q}\otimes A$

b) $(\alpha_1\square\alpha_2)\square\alpha_3=\alpha_1\square(\alpha_2\square\alpha_3)+(-1)^{p_2p_3}\alpha_1\square(\alpha_3\square\alpha_2)\quad \alpha_i\in A\otimes\overline{A}^{\otimes^{p_i}}\otimes A$

c) $\varepsilon_0(\alpha*\varepsilon_0(\beta))=\varepsilon_0(\alpha)\square\varepsilon_0(\beta)$ $\quad \alpha\in A\otimes\overline{A}^{\otimes^p}\otimes A$, $\beta\in A\otimes\overline{A}^{\otimes^q}\otimes A$

3.3.3. Definición: Dado $\alpha\in A\otimes\overline{A}^{\otimes^p}\otimes A$, definimos $\alpha^{(n)}$ para $n\geq 0$ como sigue:

$\alpha^{(0)}=1$,

$\alpha^{(n+1)}=\alpha\square\alpha^{(n)}$.

3.3.4) Proposición: Para cada $\alpha\in A\otimes\overline{A}^{\otimes^{2p}}\otimes A$ vale que

a) $\alpha^{(m)}\square\alpha^{(n)}=\binom{n+m-1}{n-1}\alpha^{(n+m)}$

b) $\alpha^{(m)}*\alpha^{(n)}=\binom{n+m}{n}\alpha^{(n+m)}$

Demostración: a) La haremos por inducción en n+m. Para n+m=1 es obvio. Supongamos que a) vale para n+m. Entonces, dado que por la Nota 3.3.2.b) es

$$\alpha^{(m+1)}\square\alpha^{(n)}=(\alpha\square\alpha^{(m)})\square\alpha^{(n)})+\alpha\square(\alpha^{(n)}\square\alpha^{(m)}),$$

se tiene

$$\alpha^{(m+1)}\square\alpha^{(n)}=\left(\binom{n+m-1}{m-1}+\binom{n+m-1}{n-1}\right)\alpha^{(n+m-1)}=\left(\binom{n+m-1}{m-1}+\binom{n+m-1}{m}\right)\alpha^{(n+m+1)}$$
$$=\binom{n+m}{m}\alpha^{(n+m)}.$$

b) Se sigue por cálculo directo ya que $\alpha^{(m)}*\alpha^{(n)}=\alpha^{(m)}\square\alpha^{(n)}+\alpha^{(n)}\square\alpha^{(m)}$.

3.3.5. Nota: El producto en $A\otimes\overline{A}^{\otimes^\bullet}$ inducido por $\square$ será denotado por el mismo símbolo. Este producto tiene las mismas propiedades que el de $A\otimes\overline{A}^{\otimes^\bullet}\otimes A$.

3.3.6. Definición: Sea $h_*:R(A) \longrightarrow (A\otimes\overline{A}^{\otimes^*}\otimes A,b')$ el morfismo de A^e-álgebras definido por

$$h_0=id,$$

$$h_1(e_i)=-1\otimes X_i\otimes 1 \quad (1\leq i\leq n),$$

$$h_2(t_j)=\varepsilon_0\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i'(f_j)}{T(X_i)}.(1\otimes X_i\otimes 1)\right) \quad (1\leq j\leq r),$$

$$h_{2p}(t_j^{(p)})=\left(h_2(t_j)\right)^{(p)} \quad (1\leq j\leq r).$$

Para probar que h_* es un morfismo de A^e-álgebras es suficiente comparar las fórmulas b) de la proposición 3.3.4 y (1) de 2.2.

Resta ver que $h_{*-1}\circ d_*=b'\circ h_*$. Puesto que d_* y b_* son derivaciones, para probarlo es suficiente verificar la igualdad sobre los generadores e_i y $t_j^{(p)}$. Para los e_i's esto es inmediato. En efecto:

$$b'\circ h_1(e_i)=b'(-1\otimes X_i\otimes 1)=T(X_i)=d_1(e_i)=h_0\circ d_1(e_i).$$

Demostraremos que $h_{*-1}\circ d_*(t_j^{(p)})=b'\circ h_*(t_j^{(p)})$ por inducción en p. El caso p=0 es trivial. Por la nota 2.3.2.c) tenemos:

$$\varepsilon_0\circ h_{2p-1}\circ d_{2p}(t_j^{(p)})=\varepsilon_0\circ h_{2p-1}\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(f_j)}{T(X_i)}.e_i t_j^{(p-1)}\right)$$

$$=\varepsilon_0\left(\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(f_j)}{T(X_i)}.(1\otimes X_i\otimes 1)\right)*\left(h_2(t_j)\right)^{(p-1)}\right)=h_2(t_j)\square\left(h_2(t_j)\right)^{(p-1)}$$

$$=\left(h_2(t_j)\right)^{(p)}.$$

Por hipótesis inductiva sabemos que

$$b'\circ h_{2p-1}\circ d_{2p}(t_j^{(p)})=h_{2p-2}\circ d_{2p-1}\circ d_{2p}(t_j^{(p)})=0.$$

Así que,

$$b'\circ h_{2p}(t_j^{(p)})=b'\circ\varepsilon_0\circ h_{2p-1}\circ d_{2p}(t_j^{(p)})=(id-\varepsilon_0\circ b')\circ h_{2p-1}\circ d_{2p}(t_j^{(p)})$$

$$=h_{2p-1}\circ d_{2p}(t_j^{(p)}).$$

4. CALCULO DE LA HOMOLOGIA Y COHOMOLOGIA DE HOCHSCHILD

4.1. Introducción

Sea $A=k[X_1,\dots,X_n]/\langle f_1,\dots,f_r\rangle$, con k un anillo conmutativo con unidad arbitrario y $f_1,\dots,f_r$ una sucesión regular en $k[X_1,\dots,X_n]$. Asumiendo que A es playo sobre k calculamos la homología de Hochschild $H_\bullet(A,M)$, de A con coeficientes en un A-módulo M considerado como un A^e-módulo a través de la multiplicación $\mu:A^e \longrightarrow A$. Cuando A es proyectivo también obtenemos la cohomología de Hochschild $H^\bullet(A,M)$

4.2. Cálculo de la Homología y Cohomología de Hochschild

Tensorisando la resolución R(A) con M sobre A^e y usando la identificación $M\otimes_{A^e}(A\otimes_k A)\approx M$ bajo la cual $(a\otimes a')m=aa'm$, obtenemos complejo

$$\overline{R}(M):\ \dots \longrightarrow \overline{M}_m \xrightarrow{\overline{d}_{m-1}} \overline{M}_{m-1} \xrightarrow{\overline{d}_{m-2}} \dots \xrightarrow{\overline{d}_1} \overline{M}_1 \xrightarrow{\overline{d}_0} \overline{M}_0,$$

donde $\overline{M}_m$ es la suma directa de copias de M indexadas por la familia $e_{i_1\dots i_s}t_1^{(p_1)}\dots t_r^{(p_r)}$, con $1\le i_1\le\dots\le i_s\le n$, $s,p_1,\dots,p_r\ge 0$ y $m=s+2(p_1+\dots+p_r)$; y conveniendose en que $t_j^{(p)}=0$ si $p<0$,

$$\overline{d}_{m-1}(\vartheta.e_{i_1\dots i_s}t_1^{(p_1)}\dots t_r^{(p_r)})$$
$$= \sum_{j=1}^{r}\vartheta.df_j\wedge e_{i_1\dots i_s}t_1^{(p_1)}\dots t_j^{(p_j-1)}\dots t_r^{(p_r)},$$

con

$$df_j=\sum_{i-1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial X_i}.e_i$$

El morfismo $h_*:R(A) \longrightarrow (A\otimes\overline{A}^{\otimes^\bullet}\otimes A, b')$ definido en la sección 3.3 induce un cuasisomorfismo $\overline{h}_*:\overline{R}(A) \longrightarrow (A\otimes\overline{A}^{\otimes^\bullet} b)$, de álgebras diferenciales graduadas conmutativas, dado por:

$$\overline{h}_m:\overline{A}_m \longrightarrow A\otimes\overline{A}^{\otimes^n}$$

$$\overline{h}_m(e_{i_1\ldots i_s}t_1^{(p_1)}\ldots t_r^{(p_r)})=(-1)^S(1\otimes X_{i_1})*(1\otimes X_{i_2})*\ \ldots *(1\otimes X_{i_s})$$
$$*\big(h_2(t_1)\big)^{(p_1)}*\ \ldots *\big(h_2(t_r)\big)^{(p_r)},$$

donde, si $f_j=f_{j_{i_1\ldots i_n}}X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n}$,

$$\overline{h}_2(t_j)=\sum_{i_1,i_2,\ldots,i_n}\sum_{s=1}^{n}\sum_{k=0}^{i_s-1}f_{j_{i_1\ldots i_n}}$$
$$.X_s^{i_s-k-1}.X_{s+1}^{i_{s+1}}\ldots X_n^{i_n}\otimes X_1^{i_1}\ldots X_{s-1}^{i_{s-1}}.X_s^{k}\otimes X_s$$

4.2.1. Nota: El complejo $\overline{R}(M)$ se descompone como suma directa $\overline{R}(M)=\bigoplus_{p\geq 0}\overline{R}^p(M)$ de los complejos

$$\overline{R}^p(M):\ 0 \longrightarrow \overline{M}^p_{2p}\xrightarrow{\overline{d}^p_{2p-1}}\overline{M}^p_{2p-1}\xrightarrow{\overline{d}^p_{2p-2}}\ \ldots$$
$$\xrightarrow{\overline{d}^p_{2p-n+1}}\overline{M}^p_{2p-n+1}\xrightarrow{\overline{d}^p_{2p-n}}\overline{M}^p_{2p-n}\longrightarrow 0,$$

donde

$$\overline{M}^p_{2p-s}=\oplus_{\gamma_{2p-s,p}}M^{\binom{n}{s}}t_1^{(p_1)}\ldots t_r^{(p_r)},$$

con $\gamma_{2p-s,p}=\Big\{p_1,\ldots,p_r\geq 0:p_1+\ldots+p_r=p-s\Big\}$, y

$$\overline{d}^p_{2p-s}=\overline{d}_{2p-s}\,|\,\overline{M}^p_{2p-s}.$$

En consecuencia, $H_m(A,M)=\oplus_{Um} H_m(\overline{R}^p(M))$, donde $Um=\left\{p\in\mathbb{N}: m/2\leq p\leq \min(m, (m+n)/2)\right\}$

4.3.2. Lema: $H_m(\overline{R}^m(M))=\Omega^m(A)\otimes_A M$ para $0\leq m\leq n$.

Demostración: Se sigue por un cálculo fácil que

$$\begin{aligned}
H_m(\overline{R}^m(M)) &= \operatorname{coker}(\overline{M}^m_{m+1}\longrightarrow \overline{M}^m_m)\\
&= \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{p_1+\dots+p_r=1} M^{\binom{n}{m-1}} t_1^{(p_1)}\dots t_r^{(p_r)} \longrightarrow M^{\binom{n}{m}}\right)\\
&= \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{p_1+\dots+p_r=1} A^{\binom{n}{m-1}} t_1^{(p_1)}\dots t_r^{(p_r)}\otimes_A M \longrightarrow A^{\binom{n}{m}}\otimes_A M\right)\\
&= \left(\wedge^{\binom{n}{m}} A^{(n)}\right)\otimes_A M \xrightarrow{\wedge^{\binom{n}{m}}(\pi)} \left(\wedge^{\binom{n}{m}} A^{(n)}/\langle df_1,\dots,df_r\rangle\right)\otimes_A M,
\end{aligned}$$

donde.

$$df_j=\sum_{i-1}^{n}\frac{\partial f_j}{\partial X_i}\,.e_i$$

y

$$A^{(n)}\xrightarrow{\pi} A^{(n)}/\langle df_1,\dots,df_r\rangle$$

es la proyección canónica. La demostración se termina notando que

$$\begin{aligned}
\Omega^1(A) &= H_1(A)= H_1(\overline{R}^1(A)\\
&= \operatorname{coker}\left(\bigoplus_{p_1+\dots+p_r=1} At_1^{(p_1)}\dots t_r^{(p_r)}\longrightarrow A^{\binom{n}{1}}\right)\\
&= A^{(n)}/\langle df_1,\dots,df_r\rangle,
\end{aligned}$$

porque $\overline{d}^1_1(t_j)=df_j$.

4.2.3. Notación: Sea M un A-módulo, $q\geq 0$ y

$$U=\left[U_{\alpha,\beta}\right]_{1\leq\alpha\leq r,\,1\leq\beta\leq n}$$

una matriz con valores en A.

a) Denotamos con $K^{p}(M,U)$ al complejo de Koszul generalizado definido por

$$K^{p}(M,U):0 \longrightarrow K^{p}_{2p}\xrightarrow{d^{p}_{2p-1}} K^{p}_{2p-1}\xrightarrow{d^{p}_{2p-2}} \cdots$$

$$\xrightarrow{d^{p}_{2p-n+1}} K^{p}_{2p-n+1}\xrightarrow{d^{p}_{2p-n}} K^{p}_{2p-n}\longrightarrow 0,$$

donde

$$K^{p}_{2p-s}=\oplus_{\gamma_{2p-s,p}} M^{\binom{n}{s}}t_1^{(p_1)}\ldots t_r^{(p_r)},$$

con $\gamma_{2p-s,p}=\left\{p_1,\ldots,p_r\geq 0:p_1+\ldots+p_r=p-s\right\}$, y conveniendose en que $t^{(p)}=0$ si $p<0$,

$$d^{p}_{2p-s}(\vartheta.e_{i_1\ldots i_{n-s+1}}t_1^{(p_1)}\ldots t_r^{(p_r)})$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{n-s+1}(-1)^{k+1}U_{j,i_k}\vartheta.e_{i_1\ldots\hat{i}_k\ldots i_{n-s+1}}t_1^{(p_1)}\ldots t_j^{(p_j-1)}\ldots t_r^{(p_r)}.$$

b) Denotamos con $K_p(M,U)$ al complejo de Koszul generalizado definido por

$$K_{p}(M,U):0 \longrightarrow K_{p}^{2p}\xrightarrow{d_{p}^{2p-1}} K_{p}^{2p-1}\xrightarrow{d_{p}^{2p-2}} \cdots$$

$$\xrightarrow{d_{p}^{2p-n+1}} K_{p}^{2p-n+1}\xrightarrow{d_{p}^{2p-n}} K_{p}^{2p-n}\longrightarrow 0,$$

donde

$$K_p^{2p-s}=\oplus_{\gamma_{2p-s,p}} M^{\binom{n}{s}} t_1^{(p_1)}\cdots t_r^{(p_r)},$$

con $\gamma_{2p-s,p}=\left\{p_1,\ldots,p_r\geq 0 : p_1+\ldots+p_r=p-s\right\}$, y

$$d_p^{2p-s}(\vartheta . e_{i_1\ldots i_{s-1}} t_1^{(p_1)}\cdots t_r^{(p_r)})$$

$$=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s-1} U_{j,i_k}\vartheta e_{i_k}\wedge e_{i_1\ldots i_{s-1}} t_1^{(p_1)}\cdots t_j^{(p_j+1)}\cdots t_r^{(p_r)}.$$

4.2.4. Nota: cuando M es reflexivo, $K_p(M,U)$ y $K^p(M,U)$ son los complejos $C_p(U)$ y $C_p^{*}(U)$ respectivamente de [B-V,capítulo 2].

4.2.5. Nota: Sea $A=k[X_1,\ldots,X_n]/\langle f_1,\ldots,f_r\rangle$, con k un anillo conmutativo con unidad arbitrario y $f_1,\ldots,f_r$ una sucesión regular en $k[X_1,\ldots,X_n]$, M un A-módulo y $U=\left[U_{\alpha,\beta}\right]_{1\leq\alpha\leq r,1\leq\beta\leq n}$ la matriz definida por $U_{\alpha,\beta}=(-1)^{\beta+1}(\partial f_\alpha/\partial X_\beta)$. La familia

$$\left(\overline{M}_{2p-s}^{p}\xrightarrow{\varphi_{2p-s}} K_{2p-s}^{p}\right)_{0\leq s\leq n},$$

donde

$$\varphi_{2p-s}(\vartheta . e_{i_1\ldots i_s} t_1^{(p_1)}\cdots t_r^{(p_r)}) = \vartheta . e_{i'_1\ldots i'_{n-s}} t_1^{(p_1)}\cdots t_r^{(p_r)}$$

(con $1\leq i'_1<\ldots<i'_{n-s}\leq n$ y $\{i_1,\ldots,i_s\}\cap\{i'_1,\ldots,i'_{n-s}\} = \emptyset$) es un isomorfismo de $\overline{R}^p(M)$ en $K^p(M,U)$.

4.2.6. Teorema: Sea $A=k[X_1,\ldots,X_n]/\langle f_1,\ldots,f_r\rangle$, con k un anillo conmutativo con unidad arbitrario y $f_1,\ldots,f_r$ una sucesión regular en $k[X_1,\ldots,X_n]$, M un A-módulo y $U=\left[U_{\alpha,\beta}\right]_{1\leq\alpha\leq r,1\leq\beta\leq n}$ la matriz definida por $U_{\alpha,\beta}=(-1)^{\beta+1}(\partial f_\alpha/\partial X_\beta)$. Supongamos que A es playo sobre k y consideremos a M como un A^e-módulo usando el morfismo $\mu:A^e \longrightarrow A$. Se tiene:

1) Si $m\le n$,

$$H_m(M,A) = \left[\bigoplus_{(m/2)\le p<m} H_m\left(\overline{R}^p(M)\right)\right]\oplus\left(\Omega^m(A)\otimes_A M\right)$$

$$= \left[\bigoplus_{(m/2)\le p<m} H_m\left(K^p(M,U)\right)\right]\oplus\left(\Omega^m(A)\otimes_A M\right)$$

2) Si $m>n$,

$$H_m(M,A) = \bigoplus_{(m/2)\le p<m+n)/2} H_m\left(\overline{R}^p(M)\right)$$

$$= \bigoplus_{(m/2)\le p<m+n)/2} H_m\left(K^p(M,U)\right)$$

3) El producto barajado de $H_*(A)$ está inducido por

$$\overline{A}^p_{2p-s} \times \overline{A}^{p'}_{2p'-s} \longrightarrow \overline{A}^{p+p'}_{2(p+p')-(s+s')}$$

$$\left(e_{i_1\ldots i_s} t_1^{(p_1)}\ldots t_r^{(p_r)}\right),\left(e_{j_1\ldots j_{s'}} t_1^{(p'_1)}\ldots t_r^{(p'_r)}\right)$$

$$\longmapsto \left(e_{i_1\ldots i_s}\wedge e_{j_1\ldots j_{s'}} t_1^{(p_1+p'_1)}\ldots t_r^{(p_r+p'_r)}\right.$$

Demostración: Como A es playo sobre k, $H_*(A,M)=\mathrm{Tor}_*^{A^e}(A,M)$. En consecuencia $H_*(A,M)=H_*\left(R(A)\otimes_{A^e}M\right)=H_*\left(\overline{R}(M)\right)$. Así, 1) y 2) se siguen inmediatamente de la Nota 4.2.1, el Lema 4.2.2 y la Nota 4.2.5, y 3) vale porque $\overline{h}_*$ es un cuasisomorfismo de álgebras diferenciales graduadas.

4.2.7. Teorema: Sean A y M como en el Teorema 3.2.6 y sea U $U=\left[U_{\alpha,\beta}\right]_{1\le\alpha\le r,1\le\beta\le n}$ la matriz dada por $U_{\alpha,\beta}=(\partial f_\alpha/\partial X_\beta)$. Supongamos que A es proyectivo sobre k y consideremos a M como un A^e-módulo a través del morfismo $\mu:A^e \longrightarrow A$. Se tiene:

1) Si $m\le n$,

$$H^m(M,A) = \bigoplus_{(m/2)\le p\le m} H^m\big(K_p(M,U)\big)$$

2) Si $m>n$,

$$H_m(M,A) = \bigoplus_{(m/2)\le p\le m+n)/2} H^m 1\big(K_p(M,U)\big)$$

Demostración: Como $(A\otimes\overline{A}^{\otimes *}\otimes A, b')$ es una resolución proyectiva de A como A^e-módulo, $H^m(A,M)=\mathrm{Ext}^m_{A^e}(A,M)=H^m\Big(\mathrm{Hom}_{A^e}\big(R(A),M\big)\Big)$. Por otra parte, M y $\mathrm{Hom}_A(A,M)$ son A^e-módulos isomorfos, donde la acción de A^e es definida por $(a\otimes b)m=abm$ y $[(a\otimes b)f](x)=f(xab)$ respectivamente. Entonces,

$$\begin{aligned}
H^m(A,M) &= H^m\Big(\mathrm{Hom}_{A^e}\big(R(A),M\big)\Big)\\
&= H^m\Big(\mathrm{Hom}_{A^e}\big(R(A),\mathrm{Hom}_A(A,M)\big)\Big)\\
&= H^m\Big(\mathrm{Hom}_A\big(R(A)\otimes_{A^e}A,M\big)\Big) = H^m\Big(\mathrm{Hom}_A\big(\overline{R}(A),M\big)\Big)\\
&= \bigoplus_{p\ge 0} H^m\Big(\mathrm{Hom}_A\big(\overline{R}^p(A),M\big)\Big)
\end{aligned}$$

La demostración se termina observando que $\mathrm{Hom}_A\big(\overline{R}^p(A),M\big)$ es isomorfo al complejo $K_p(M,U)$.

5. CALCULO DE LA HOMOLOGIA CICLICA DE HIPERSUPERFICIES

Sea k un cuerpo de característica cero, A una k álgebra homológicamente regular y P un elemento de A que no es divisor de 0. Para cada r>0 denotamos con A_r a $A/\langle P^r\rangle$. Queremos calcular la homología cíclica $HC_\bullet(A_1)$ de A_1. Por el Teorema 2.2.6,

$$HC_n(A_1) = \bigoplus_{i=0}^{[n/2]} H^{n-2i}(D^\bullet_{(j)})$$

donde los $D^\bullet_{(j)}$ son los complejos de cocadenas

$$0 \longrightarrow \frac{\Omega^0(A)}{P^{j+1}\Omega^0(A)} \xrightarrow{d} \frac{\Omega^1(A)}{P^j\Omega^1(A)} \xrightarrow{d} \dots \xrightarrow{d} \frac{\Omega^{j-1}(A)}{P^2\Omega^{j-1}(A)} \xrightarrow{d} \frac{\Omega^j(A)}{P\Omega^j(A)} \longrightarrow 0,$$

con d el morfismo inducido por la diferencial de De'Rham. Además $S:HC_n(A_1) \longrightarrow HC_{n-2}(A_1)$ está inducida por la suma directa de las proyecciones canónicas $\pi^\bullet:D^\bullet_{(j)} \longrightarrow D^\bullet_{(j-1)}$. Así, solo necesitamos calcular las homologías $H^{j-r}(D^\bullet_{(j)})$ para $0\le r\le j$. Usaremos libremente que $\Omega^i(A_r) = \dfrac{\Omega^i(A)}{P^r\Omega^i(A)+dP^r\Omega^{i-1}(A)}$.

5.1. Lema: Para $0\le r\le j$ sea $D^\bullet_{(j,r)}$ el complejo de cocadenas

$$0 \to \frac{\Omega^0(A)}{P^{r+1}\Omega^0(A)} \xrightarrow{d} \frac{\Omega^1(A)}{P^{r+1}\Omega^1(A)+dP^{r+1}\Omega^0(A)} \xrightarrow{d} \dots$$

$$\xrightarrow{d} \frac{\Omega^{j-r}(A)}{P^{r+1}\Omega^{j-r}(A)+dP^{r+1}\Omega^{j-r-1}(A)} \xrightarrow{d} \frac{\Omega^{j-r+1}(A)}{P^r\Omega^{j-r+1}(A)} \xrightarrow{d} \dots$$

$$\xrightarrow{d} \frac{\Omega^{j-1}(A)}{P^2\Omega^{j-1}(A)} \xrightarrow{d} \frac{\Omega^j(A)}{P\Omega^j(A)} \to 0,$$

que es igual a

$$0\to \Omega^0(A_{r+1}) \xrightarrow{d} \Omega^1(A_{r+1}) \xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d} \Omega^{j-r}(A_{r+1}) \xrightarrow{d} \frac{\Omega^{j-r+1}(A)}{P^r\Omega^{j-r+1}(A)}$$

$$\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d} \quad \xrightarrow{d} \frac{\Omega^{j-1}(A)}{P^2\Omega^{j-1}(A)} \xrightarrow{d} \frac{\Omega^{j}(A)}{P\Omega^{j}(A)} \to 0.$$

La proyección canónica $\pi^\bullet_{j,r}:D^\bullet_{(j)}\longrightarrow D^\bullet_{(j,r)}$ induce un isomorfismo de $H^{j-r}(D^\bullet_{(j)})$ en $H^{j-r}(D^\bullet_{(j,r)})$.

Demostración: Sea $N^\bullet_{(j,r)}$ el nucleo de $\pi^\bullet_{j,r}$. Un cálculo directo muestra que $N^\bullet_{(j,r)}$ es el complejo de cocadenas

$$0 \longrightarrow \frac{P^{r+1}\Omega^0(A)}{P^{j+1}\Omega^0(A)} \xrightarrow{d} \frac{P^{r+1}\Omega^1(A)+dP^{r+1}\Omega^0(A)}{P^{j}\Omega^1(A)} \xrightarrow{d}\cdots$$

$$\xrightarrow{d} \frac{P^{r+1}\Omega^{j-r-1}(A)+dP^{r+1}\Omega^{j-r-2}(A)}{P^{r+2}\Omega^{j-r-1}(A)}$$

$$\xrightarrow{d} \frac{P^{r+1}\Omega^{j-r}(A)+dP^{r+1}\Omega^{j-r-1}(A)}{P^{r+1}\Omega^{j-r}(A)} \longrightarrow 0 \longrightarrow\cdots\longrightarrow 0.$$

La sucesión exacta larga de homología asociada a

$$0 \longrightarrow N^\bullet_{(j,r)} \longrightarrow D^\bullet_{(j)} \xrightarrow{\pi^\bullet_{j,r}} D^\bullet_{(j,r)} \longrightarrow 0$$

es

$$\cdots\longrightarrow H^{j-r}\left(N^\bullet_{(j,r)}\right)\longrightarrow H^{j-r}\left(D^\bullet_{(j)}\right)\longrightarrow H^{j-r}\left(D^\bullet_{(j,r)}\right)\longrightarrow 0.$$

La demostración se termina notando que $H^{j-r}\left(N^\bullet_{(j,r)}\right)=0$.

5.2. **Lema:** Para $0<r\leq j$ tenemos

a) La intersección $P^r\Omega^{j-r}(A_{r+1})\cap d\Omega^{j-r-1}(A_{r+1})$ está incluída en

$H^{j-r}\left(L^{\bullet}_{(j)}\right)$, donde $L^{\bullet}_{(j)}$ es el complejo

$$0\longrightarrow \frac{P^j\Omega^0(A)}{P^{j+1}\Omega^0(A)} \xrightarrow{d} \frac{P^{j-1}\Omega^1(A)}{P^j\Omega^1(A)} \xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d} \frac{P\Omega^{j-1}(A)}{P^2\Omega^{j-1}(A)} \xrightarrow{d} \frac{\Omega^j(A)}{P\Omega^j(A)} \longrightarrow 0$$

del Teorema 1.4.9.

b) La homología de De'Rham $H^{j-r}_{DR}(A_r)$ de A_r es un subespacio de $H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j-1)}\right)$.

Demostración: a) Para r=0 la aseveración es trivial y si $r\neq 0$

$$P^r\Omega^{j-r}(A_{r+1})\cap d\Omega^{j-r-1}(A_{r+1})$$

$$= \frac{\left(P^{r+1}\Omega^{j-r}(A)+d\Omega^{j-r-1}(A)+dP^{r+1}\Omega^{j-r-1}(A)\right)\cap P^r\Omega^{j-r}(A)}{P^{r+1}\Omega^{j-r}(A)+dP^{r+1}\Omega^{j-r-1}(A)}$$

que claramente está incluído en

$$\ker\left(\frac{P^r\Omega^{j-r}(A)}{P^{r+1}\Omega^{j-r}(A)+dP^{r+1}\Omega^{j-r-1}(A)} \xrightarrow{d} \frac{P^{r-1}\Omega^{j-r+1}(A)}{P^r\Omega^{j-r+1}(A)}\right) = H^{j-r}(L^{\bullet}_{(j)}).$$

b) Supongamos que $1<r<j$. En este caso

$$H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j-1)}\right)=H^{(j-1)-(r-1)}\left(D^{\bullet}_{(j-1,r-1)}\right)$$

$$= \frac{\{\omega\in\Omega^{j-r}(A):d\omega\in P^{r-1}\Omega^{j-r+1}(A)\}}{P^r\Omega^{j-r}(A)+d\Omega^{j-r-1}(A)+dP^r\Omega^{j-r-1}(A)}$$

y

$$H^{j-r}_{DR}(A_r)=\frac{\{\omega\in\Omega^{j-r}(A):d\omega\in P^r\Omega^{j-r+1}(A)+dP^r\Omega^{j-r}(A)\}}{P^r\Omega^{j-r}(A)+d\Omega^{j-r-1}(A)+dP^r\Omega^{j-r-1}(A)}.$$

Ahora el resultado es obvio. Los casos r=1 y r=j son análogos.

5.3. Lema: La imagen del morfismo

$$H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j)}\right) \xrightarrow{\overline{\pi}} H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j-1)}\right)$$

inducido por la proyección canónica

$$\pi^{\bullet}: D^{\bullet}_{(j)} \longrightarrow D^{\bullet}_{(j-1)},$$

es $H^{j-r}_{DR}(A_r)$ para cada r con $1 \le r \le j$.

Demostración: Dado que

$$H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j)}\right) = H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j,r)}\right) = \frac{\{\omega \in \Omega^{j-r}(A) : d\omega \in P^{r}\Omega^{j-r+1}(A)\}}{P^{r+1}\Omega^{j-r}(A) + d\Omega^{j-r-1}(A) + dP^{r+1}\Omega^{j-r-1}(A)}$$

y

$$H^{j-r}_{DR}(A_r) = \frac{\{\omega \in \Omega^{j-r}(A) : d\omega \in P^{r}\Omega^{j-r+1}(A) + dP^{r}\Omega^{j-r}(A)\}}{P^{r}\Omega^{j-r}(A) + d\Omega^{j-r-1}(A) + dP^{r}\Omega^{j-r-1}(A)},$$

es claro que $\mathrm{Im}(\overline{\pi}) \subseteq H^{j-r}_{DR}(A_r)$. Nosotros probaremos ahora que vale la igualdad. Sea $\omega \in \Omega^{j-r}(A)$ tal que $d\omega \in P^{r}\Omega^{j-r+1}(A) + dP^{r}\Omega^{j-r}(A)$. Existen $\omega_1 \in \Omega^{j-r+1}(A)$ y $\omega_2 \in \Omega^{j-r}(A)$ tales que $d\omega = P^{r}\omega_1 + dP^{r}\omega_2$. Se comprueba fácilmente que la clase de $w - P^{r}\omega_2$ en $H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j)}\right)$ es un elemento cuya imagen en $H^{j-r}_{DR}(A_r)$ es la clase de w.

5.4. Teorema: para cada $j \ge 0$ se verifica:

a) $$H^{j}\left(D^{\bullet}_{(j)}\right) = \frac{\Omega^{j}(A_1)}{d\Omega^{j-1}(A\ \ )}$$

b) $$H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j)}\right) = H^{j-r}_{DR}(A_{r+1}) \oplus \left(P^{r}\Omega^{j-r+1}(A_{r+1}) \cap d\Omega^{j-r}(A_{r+1})\right)$$

$$= H^{j-r}_{DR}(A_r) \oplus \frac{H^{j-r}(L^{\bullet}_{(j)})}{P^{r}\Omega^{j-r}(A_{r+1}) \cap d\Omega^{j-r-1}(A_{r+1})}$$

c) Sea $0<m<\infty$. Si $\Omega^t(A)=0$ $\forall t>m$, $H^{j-r}(D_j^\bullet)=0$ $\forall j-r>m$ y $H^m(D_j^\bullet)$ $=H^m_{DR}(A_{j-m+1})$.

Demostración: a) Se sigue inmediatamente del Lema 5.1.

b) Como

$$\frac{\Omega^{j-r+1}(A)}{P^r\Omega^{j-r+1}(A)} = \frac{\left(\dfrac{\Omega^{j-r+1}(A)}{P^{r+1}\Omega^{j-r+1}(A)+dP^{r+1}\Omega^{j-r}(A)}\right)}{\left(\dfrac{P^r\Omega^{j-r+1}(A)}{P^{r+1}\Omega^{j-r+1}(A)+dP^{r+1}\Omega^{j-r}(A)}\right)} = \frac{\Omega^{j-r+1}(A_{r+1})}{P^r\Omega^{j-r+1}(A_{r+1})}$$

se tiene

$$H^{j-r}\left(D^\bullet_{(j,r)}\right) = \ker\left(\frac{\Omega^{j-r}(A_{r+1})}{d\Omega^{j-r-1}(A_{r+1})} \longrightarrow \frac{\Omega^{j-r+1}(A_{r+1})}{P^r\Omega^{j-r+1}(A_{r+1})}\right).$$

Aplicando ahora el lema de la serpiente al diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & \dfrac{\Omega^{j-r}(A_{r+1})}{d\Omega^{j-r-1}(A_{r+1})} & \longrightarrow & \dfrac{\Omega^{j-r}(A_{r+1})}{d\Omega^{j-r-1}(A_{r+1})} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow d & & \downarrow d & & \\
0 & \longrightarrow & P^r\Omega^{j-r+1}(A_{r+1}) & \longrightarrow & \Omega^{j-r+1}(A_{r+1}) & \longrightarrow & \dfrac{\Omega^{j-r+1}(A_{r+1})}{P^r\Omega^{j-r+1}(A_{r+1})} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

obtenemos la sucesión exacta corta

$$0\longrightarrow H^{j-r}_{DR}(A_{r+1}) \longrightarrow H^{j-r}\left(D^\bullet_{(j,r)}\right) \xrightarrow{\ d\ } P^r\Omega^{j-r+1}(A_{r+1})\cap d\Omega^{j-r}(A_{r+1}) \longrightarrow 0,$$

donde d está inducida por la diferencial de De'Rham. En consecuencia

$$H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j)}\right)=H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j,r)}\right)$$

$$=H^{j-r}_{DR}(A_{r+1})\oplus i\left(P^{r}\Omega^{j-r+1}(A_{r+1})\cap d\Omega^{j-r}(A_{r+1})\right).$$

Probaremos ahora la segunda igualdad. La sucesión exacta larga de homología asociada a

$$0 \longrightarrow L^{\bullet}_{(j)} \longrightarrow D^{\bullet}_{(j)} \xrightarrow{\pi^{\bullet}} D^{\bullet}_{(j-1)} \longrightarrow 0$$

es la sucesión exacta

$$\ldots \longrightarrow H^{j-r-1}\left(D^{\bullet}_{(j-1)}\right) \xrightarrow{d} H^{j-r}\left(L^{\bullet}_{(j)}\right) \longrightarrow H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j)}\right)$$

$$\longrightarrow H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j-1)}\right) \longrightarrow H^{j-r}\left(L^{\bullet}_{(j)}\right) \longrightarrow \ldots,$$

en la que d es la flecha inducida por la diferencial de De'Rham. Por el Lema 5.2 la imagen de $\overline{\pi}$ es $H^{j-r}_{DR}(A_r)$ y

$$d\left(H^{j-r-1}\left(D^{\bullet}_{(j-1)}\right)\right)=di\left(P^{r}\Omega^{j-r}(A_{r+1})\cap d\Omega^{j-r-1}(A_{r+1})\right)$$

$$=P^{r}\Omega^{j-r}(A_{r+1})\cap d\Omega^{j-r-1}(A_{r+1}).$$

Esto termina la prueba.

c) Se lo deduce inmediatamente del Lema 5.1 y de la hipótesis porque $\Omega^{t}(A_{r+1})$ es un cociente de $\Omega^{t}(A)$.

Sea ahora $K^{\bullet}$ el complejo de cocadenas dado por

$$K^{\bullet}= 0 \longrightarrow \frac{\Omega^{0}(A)}{P\Omega^{0}(A)} \xrightarrow{dP} \frac{\Omega^{1}(A)}{P\Omega^{1}(A)} \xrightarrow{dP} \frac{\Omega^{2}(A)}{P\Omega^{2}(A)} \xrightarrow{dP} \frac{\Omega^{3}(A)}{P\Omega^{3}(A)} \xrightarrow{dP} \ldots,$$

donde dP designa al morfismo $dP(\omega)=dP\wedge\omega$. Sea $K^{\bullet}_{(j)}$ el subcomplejo de $K^{\bullet}$ definido por

$$K^{i}_{(j)}=\begin{cases}K^{i} & \text{si } i\leq j\\ 0 & \text{si } i>j\end{cases}$$

Como P no es un divisor de 0 de A y $\Omega^{s}(A)$ $(s\geq 1)$ es playo, la familia

$$\left(\phi^{s}_{j}:\frac{\Omega^{s}(A)}{P\Omega^{s}(A)}\longrightarrow\frac{P^{j-s}\Omega^{s}(A)}{P^{j-s+1}\Omega^{s}(A)}\right)_{0\leq s\leq j}\ ,\ \phi^{s}_{j}(\omega)=\frac{1}{(j-s)!}.P^{j-s}\omega$$

es un isomorfismo de $K^{\bullet}_{(j)}$ en $L^{\bullet}_{(j)}$. Así, $H^{i}(L^{\bullet}_{(j)})=H^{i}(L^{\bullet}_{(j')})=H^{i}(K^{\bullet})$ para todo $i<\min(j,j')$.

5.5. **Proposición:** Sea $s\geq 0$. Si $H^{t}(K^{\bullet})=0$ $\forall$ $t<s$,

$$H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j)}\right)=H^{j-r}_{DR}(A_{r+1})=H^{j-r}_{DR}(A_{r})=\ldots=H^{j-r}_{DR}(A_{1})\quad\forall\ j-r<s-1$$

y

$$H^{s-1}\left(D^{\bullet}_{(j)}\right)=H^{s-1}_{DR}(A_{j-s+1}).$$

Demostración: Basta ver que

$$H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j-t)}\right)=H^{j-r}_{DR}(A_{r-t+1})\qquad\text{si } r>t \text{ y } j-r+1<s$$

y

$$H^{j-r}\left(D^{\bullet}_{(j-t)}\right)=H^{j-r}_{DR}(A_{r-t})\qquad\text{si } r>t \text{ y } j-r<s$$

lo que puede deducirse inmediatamente pues, por el Teorema 5.4 es por el lema 5.2 vale que

$$\left(P^{r-t}\Omega^{j-r+1}(A_{r-t+1})\cap d\Omega^{j-r}(A_{r-t+1})\right)\subseteq H^{j-r+1}\left(L^{\bullet}_{(j-t+1)}\right),$$

y, por la hipótesis

$$H^{j-r+1}\left(L^{\bullet}_{(j-t+1)}\right)=H^{j-r+1}(K^{\bullet})=0 \quad \text{si } r>t \text{ y } j-r+1<s,$$

y

$$H^{j-r}\left(L^{\bullet}_{(j-t)}\right)=H^{j-r}(K^{\bullet})=0 \quad \text{si } r>t \text{ y } j-r<s.$$

5.6. Teorema: Sea $0\le s\le m\le\infty$. Supongamos que $H^{t}(K^{\bullet})=0\ \forall\ t<s$ y $\Omega^{t}(A)=0\ \forall\ t>m$. Entonces

$$HC_{n}(A_{1})=\frac{\Omega^{n}(A_{1})}{d\Omega^{n-1}(A_{1})}\odot\left\{\bigodot_{i=h}^{h'-1}\left[H^{n-2i}_{DR}(A_{i+1})\right.\right.$$

$$\left.\left.\odot\left(P^{i}\Omega^{n-2i+1}(A_{i+1})\cap d\Omega^{n-2i}(A_{i+1})\right)\right]\right\}\odot\left[\bigodot_{i=h'}^{[n/2]}H^{n-2i}_{DR}(A_{i})\right]$$

$$=\frac{\Omega^{n}(A_{1})}{d\Omega^{n-1}(A_{1})}\odot\left\{\bigodot_{i=h}^{h'-1}\left[H^{n-2i}_{DR}(A_{i})\right.\right.$$

$$\left.\left.\odot\frac{H^{n-2i}(L^{\bullet}_{(n-i)})}{P^{i}\Omega^{n-2i}(A_{i+1})\cap d\Omega^{n-2i-1}(A_{i+1})}\right]\right\}\odot\left[\bigodot_{i=h'}^{[n/2]}H^{n-2i}_{DR}(A_{i})\right],$$

donde $h=\max\left(1,[(n-m+1)/2]\right)$ y $h'=\max\left(1,[(n-s+2)/2]\right)$. Además,

a) Si $i>(n-s+1)/2$, $H^{n-2i}_{DR}(A_{i+1})=H^{n-2i}_{DR}(A_i)=\ldots=H^{n-2i}_{DR}(A_1)$.

b) Si $n-m$ es impar y $n-m\geq 2$, el término de la primera igualdad correspondiente a $i=h$ es $H^m_{DR}(A_{(n-m+2)/2})$.

Demostración: Recordemos que $HC_n(A_1)=\bigoplus_{i=0}^{[n/2]} H^{n-2i}(D^\bullet_{(n-i)})$ (Teorema 2.2.6). Por el Teorema 5.4 tenemos

1) $$H^n(D^\bullet_{(n)})=\frac{\Omega^n(A_1)}{d\Omega^{n-1}(A\ )}$$

2) $$H^{n-2i}(D^\bullet_{(n-i)})=H^{n-2i}_{DR}(A_{i+1})\oplus\left(P^i\Omega^{n-2i+1}(A_{i+1})\cap d\Omega^{n-2i}(A_{i+1})\right)$$

$$=H^{n-2i}_{DR}(A_i)\oplus\frac{H^{n-2i}(L^\bullet_{(n-i)})}{P^i\Omega^{n-2i}(A_{i+1})\cap d\Omega^{n-2i-1}(A_{i+1})}\quad \text{si } i>0$$

y

3) $$H^{n-2i}(D^\bullet_{(n-i)})=\begin{cases} 0 & \text{si } n-2i>m \\ H^{n-2i}_{DR}(A_{i+1}) & \text{si } n-2i=m.\end{cases}$$

y, por la Proposición 5.5, se verifica

4) $$H^{n-2i}(D^\bullet_{(n-i)})=H^{n-2i}_{DR}(A_{i+1})=H^{n-2i}_{DR}(A_i)=..=H^{n-2i}_{DR}(A_1)\quad \text{si } n-2i+1<s$$

y

5) $$H^{n-2i}(D^\bullet_{(n-i)})=H^{n-2i}_{DR}(A_i)\quad \text{si } n-2i+1=s$$

Para mostrar que valen las dos expresiones de $HC_n(A_1)$ enunciadas arriba debemos ver que

$$H^{n-2i}(D^{\bullet}_{n-1})=\begin{cases}0 & \text{si } 0<i<h\\ H^{n-2i}_{DR}(A_1) & \text{si } i\geq h'\end{cases}$$

Esto se deduce de 3), 4) y 5), porque $i<[(n-m+1)/2]$ si y solo si $n-2i>m$, e $i\geq[(n-s+2)/2]$ si y solo si $n-2i<s$. Terminaremos esta demostración verificando a) y b). La primera aserción se sigue inmediatamente de 4) y la segunda puede deducirse de la última igualdad en 3)

5.7. **Nota:** Cuando $s=m-1$, el teorema 7 se reduce a

$$HC_n(A_1)=\frac{\Omega^n(A_1)}{d\Omega^{n-1}(A_1)}\oplus H^{n-2}_{DR}(A_1)\oplus H^{n-4}_{DR}(A_1)\oplus\ldots \qquad \text{si } n\leq m$$

$$HC_n(A_1)=H^m_{DR}\left(A_{(n-m+2)/2}\right)\oplus H^{m-2}_{DR}\left(A_{(n-m+2)/2}\right)\oplus H^{m-4}_{DR}(A_1)\oplus H^{m-6}_{DR}(A_1)\oplus\ldots$$

$$=H^m_{DR}\left(A_{(n-m)/2}\right)\oplus\frac{P^{(n-m)/2}\Omega^m(A_{(n-m+2)/2})}{P^{(n-m)/2}\Omega^m(A_{(n-m+2)/2})\cap d\Omega^{m-1}(A_{(n-m+2)/2})}\oplus$$

$$\oplus H^{m-2}_{DR}\left(A_{(n-m+2)/2}\right)\oplus H^{m-4}_{DR}(A_1)\oplus H^{m-6}_{DR}(A_1)\oplus\ldots \text{si } n>m \text{ y } n+m \text{ es par}$$

$$HC_n(A_1)=H^{m-1}_{DR}\left(A_{(n-m+3)/2}\right)\oplus\Big(P^{(n-m+1)/2}\Omega^m(A_{(n-m+3)/2})$$

$$\cap d\Omega^{m-1}(A_{(n-m+3)/2})\Big)\oplus H^{m-3}_{DR}(A_1)\oplus H^{m-5}_{DR}(A_1)\oplus\ldots$$

$$=H^{m-1}_{DR}\left(A_{(n-m+1)/2}\right)\oplus\frac{H^{m-1}(L^{\bullet}_{((n+m-1)/2)})}{P^{(n-m+1)/2}\Omega^{m-1}(A_{(n-m+3)/2})\cap d\Omega^{m-2}(A_{(n-m+3)/2})}\oplus$$

$$\oplus H^{m-3}(A_1)\oplus H^{m-5}(A_1)\oplus\ldots \text{si } n>m \text{ y } n+m \text{ es impar}$$

5.8. Ejemplo: Sea S un subconjunto multiplicativo de $k[X_1,...,X_m]$, $P\in A$ un elemento no inversible y $A=S^{-1}\left(k[X_1,...,X_m]\right)$. Si s+1 elementos de $\left\{P,\frac{\partial P}{\partial X_1},...,\frac{\partial P}{\partial X_m}\right\}$ forman una sucesión regular, las hipótesis del Teorema 5.6 se verifican. De hecho, sea $K_\bullet\left(\frac{A}{PA},\left(\frac{\partial P}{\partial X_i}\right)_{1\le i\le m}\right)$ el complejo de Koszul

$$A_1 \xleftarrow{\ \delta\ } \bigoplus_{1\le i\le m} A_1.e_i \xleftarrow{\ \delta\ } \bigoplus_{1\le i<j\le m} A_1.e_i\wedge e_j \xleftarrow{\ \delta\ } \bigoplus_{1\le i<j<k\le m} A_1.e_i\wedge e_j\wedge e_k \xleftarrow{\ \delta\ } \cdots$$

donde $\delta(e_i)=\frac{\partial P}{\partial X_i}$ $(1\le i\le m)$. Un cálculo inmediato muestra que la familia

$$\left(\frac{\Omega^t(A)}{P\Omega^t(A)} \xrightarrow{\qquad \varphi^t \qquad} \bigoplus_{1\le j_1<...<j_{m-t}\le m} A_1 e_{j_1}\wedge...\wedge e_{j_{m-t}}\right)_{0\le t\le m},$$

definida por

$$\varphi^t\left(Q.dX_{i_1}\wedge...\wedge dX_{i_t}\right)=(-1)^{\sum_{s=1}^{m-t} j_s+m-t}\ Q.e_{j_1}\wedge...\wedge e_{j_{m-t}}$$

$$\left(\begin{array}{l}1\le j_1<...<j_{m-t}\le m\\ y\ \ j_h\ne i_{h'},\ \ \forall h,h'\end{array}\right),$$

es un isomorfismo de $K_\bullet$ en $K_\bullet\left(\frac{A}{PA},\left(\frac{\partial P}{\partial X_i}\right)_{1\le i\le m}\right)$. Ahora es obvio que las hipótesis del Teorema 5.6 se satisfacen.

Consideremos ahora el siguiente caso particular: s=m-1 y S={1}. En estas condiciones $d\Omega^{m-1}(A_i)=\Omega^m(A_i)$ $\forall i\ge 0$. De donde se sigue que si n>m y n+m es par

$$\frac{P^{(n-m)/2}\Omega^m(A_{(n-m+2)/2})}{P^{(n-m)/2}\Omega^m(A_{(n-m+2)/2})\cap d\Omega^{m-1}(A_{(n-m+2)/2})}=0$$

y si n>m y n+m es impar

$$P^{(n-m+1)/2}\Omega^m(A_{(n-m+3)/2})\cap d\Omega^{m-1}(A_{(n-m+3)/2})$$

$$=P^{(n-m+1)/2}\Omega^m(A_{(n-m+3)/2}) \simeq \Omega^m(A_1);$$

con lo que las igualdades de la Nota 5.7 se simplifican. Además, si P es un polinomio homogeneo la homología de De'Rham es cero. Así que

$$HC_n(A_1)=\frac{\Omega^n(A_1)}{d\Omega^{n-1}(A_1)} \quad \text{si } n\leq m$$

y

$$HC_n(A_1)=\begin{cases} 0 & \text{si } n>m \text{ y } n+m \text{ es par} \\ \Omega^m(A_1) & \text{si } n>m \text{ y } n+m \text{ es impar} \end{cases}$$

5.9. **Nota:** Todos los resultados hasta el Teorema 5.4 valen (con las mismas demostraciones) para $A_1=\frac{A}{I}$, cuando A una k-álgebra homológicamente suave e I es un ideal de A que localmente es una intersección completa. Solo hay que reemplazar $P^\alpha\Omega^\beta$ por $I^\alpha\Omega^\beta$ y $dP^\alpha\Omega^\beta$ por $d(I^\alpha)\Omega^\beta$ en todas partes y denotar A_α a $\frac{A}{I^\alpha}$ Como un corolario de esto obtenemos la siguiente generalización del Teorema 5.6

Teorema: Sea $0 \le m \le \infty$. Supogamos que $\Omega^t(A)=0$ $\forall t>n$. Entonces

$$HC_n(A_1)=\frac{\Omega^n(A_1)}{d\Omega^{n-1}(A_1)}\otimes\left\{\bigotimes_{i=h}^{[n/2]}\left[H_{DR}^{n-2i}(A_{i+1})\otimes\left(I^i\Omega^{n-2i+1}(A_{i+1})\cap d\Omega^{n-2i}(A_{i+1})\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{\Omega^n(A_1)}{d\Omega^{n-1}(A_1)}\otimes\left\{\bigotimes_{i=h}^{[n/2]}\left[H_{DR}^{n-2i}(A_i)\otimes\frac{H^{n-2i}(L^{\bullet}_{(n-i)})}{I^i\Omega^{n-2i}(A_{i+1})\cap d\Omega^{n-2i-1}(A_{i+1})}\right]\right\},$$

donde $h=\max\left(1,[(n-m+1)/2]\right)$ y $L^{\bullet}_{(j)}$ $(j\ge 0)$ es el complejo de cocadenas

$$0\longrightarrow \frac{I^j\Omega^0(A)}{I^{j+1}\Omega^0(A)}\xrightarrow{d}\frac{I^{j-1}\Omega^1(A)}{I^j\Omega^1(A)}\xrightarrow{d}\cdots\xrightarrow{d}\frac{I\Omega^{j-1}(A)}{I^2\Omega^{j-1}(A)}\xrightarrow{d}\frac{\Omega^j(A)}{I\Omega^j(A)}\longrightarrow 0$$

del Teorema 1.4.9. Además, si n-m es par y $n-m\ge 2$, el término de la primera igualdad correspondiente a i=h es $H_{DR}^m(A_{(n-m+2)/2})$.

5.10. **Nota:** Ahora podemos responder a la cuestión formulada por Vigué-Poirrier en [V] "Interpreter le quotient $\left(HC_{2m}^{(m)}(A/I)\text{"}\right)/k\text{"}$[1], donde $HC_{2m}^{(m)}(A/I)=H_{DR}^0\left(D_{(m)}\right)$ en nuestra terminología. De hecho, por la nota 5.9, es

[1]En francés en el original.

$$H^0_{DR}\left(D_{(m)}\right)=H^0_{DR}(A_{m+1})\oplus\left(I^m\Omega^1(A_{m+1})\cap d(A_{m+1})\right)=H^0_{DR}(A_{m+1})\oplus H^0(L^{\bullet}_{(m)}).$$

Cuando $A=S^{-1}\left(k[X_1,\ldots,X_m]\right)$ con S un subconjunto multiplicativo de $k[X_1,\ldots,X_m]$, $I=\langle P\rangle$ con P un polinomio y existen dos elementos en $\left\{P,\frac{\partial P}{\partial X_1},\ldots,\frac{\partial P}{\partial X_m}\right\}$ sin un factor común, del Ejemplo 5.8 y la Proposición 5.5 se sigue que $H^0(L^{\bullet}_{(m)})=0$. Así, en este caso $HC^{(m)}_{2m}\left(\frac{A}{\langle P\rangle}\right)$ $=H^0_{DR}\left(D_{(m)}\right)$ $=H^0_{DR}(A_{m+1})$.

5.11. **Nota:** En la primera igualdad del Teorema de la Nota 5.9 hemos expresado la homología cíclica de A/I como suma directa de homologías de De'Rham y un submódulo de la homología de Hochschild de A/I,y en lasegunda como suma directa de homologías de De'Rham y un cociente de la homología de Hochschild de A/I.

BIBLIOGRAFIA

[A]: M. André

Algèbras Graduées Associées et Algebras symetriques plates

Comment. Math. Helv 49 (1974) 277-301.

[C-E]: H. Cartan, S. Eilenberg

Homological Algebra

Princeton University Press, Princeton, 1956.

[C]: A. Connes

Non Commutative Differential Geometry.

Publ. Math. I.H.E.S.

[C-G-G]: G. Cortiñas, J.A. Guccione, J.J. Guccione

Decompositions of de Hochschild and Cyclic Homologies of Differential commutatives Grades Algebras

Preprint (1990) (Enviado al Journal of Pure and Aplied Algebra).

[D]: R. Dennis

Algebraic K-theory and Hochschild Homology

Unpublished notes (1975-1976).

[G]: T. Goodwillie

On the General Linear Group and Hochschild Homology

Preprint (1984).

[H]: G. Hochschild

On the Cohomology Groups of an Associative Algebra

An. of Math. 46 (1945) 58-67.

[H-K-R]: G. Hochschild, B. Konstanst, A. Rosemberg
Differential Forms on Regular Affine Algebras
Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962) 383-408.

[H-V]: S. Halperin, M. Vigué Poirrier
The Homology of a Free Loop Space
Preprint (1989)

[K]: M. Karoubi
Homologie Cyclique et K-théorie Algébrique I et II
C.R. Acad. Sc. Paris 297 (1983) 447-450 y 513-516.

[L-Q]: J. Loday, D. Quillen
Cyclic Homology and the Lie Algebra of Matrices
Commentarii Math. Helvetici 59 (1984) 565-591.

[T]: J. Tate
Homology of Noetherian Rings and Local Rings
Illinois J. Math. 1 (1957) 14-27.

[V]: M. Vigué Poirrier
Decompositions de L'Homologie Cyclique des Algebres Gradues Commutatives
Preprint (1990).

[W1]: C. Weibel
Nil K-Theory Maps to Cyclic Homology
Trans A.M.S. 303 (1987).

[W2]: C. Weibel
Comunicación personal

[Wo] K. Wolffhardt

The Hochschild Homology of Complete Intersections

Tras. Amer. Math. Soc. 171 (1972) 51-66.