Homología de Hochschild y homología cíclica de hipersuperficies

Redondo, María Julia

1991

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TITULO

HOMOLOGIA DE HOCHSCHILD Y HOMOLOGIA CICLICA DE HIPERSUPERFICIES

Autora: MARIA JULIA REDONDO

Director: ORLANDO E. VILLAMAYOR

Lugar de Trabajo: DEPARTAMENTO DE MATEMATICA, F.C.E.yN.

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR POR EL TITULO DE

DOCTORA EN CIENCIAS MATEMATICAS

JULIO

1991

INDICE

INTRODUCCION

La cohomología cíclica $HC^{\bullet}(A)$ de un álgebra A sobre un cuerpo k de característica cero fue definida por Connes en 1983 para estudiar los invariantes del espacio de hojas de una variedad foliada. Esta teoría está relacionada con la cohomología de Hochschild y la homología de De Rham:

1) existe una sucesión exacta periódica

$$\cdots\longrightarrow H^n(A,A^{\bullet})\xrightarrow{\ i\ } HC^n(A)\xrightarrow{\ S\ } HC^{n+2}(A)\xrightarrow{\ B\ } H^{n+1}(A,A^{\bullet})\longrightarrow\cdots$$

2) si $HP^n(A)=\varinjlim HC^{n+2l}(A)$ con $S:HC^n(A)\longrightarrow HC^{n+2}(A)$, y A es el anillo de funciones diferenciables sobre una variedad V,

$HP^n(A)=H^{\bullet}(V,C)$

donde $H^{*}(V,C)$ es la cohomología de De Rham de V.

La homología cíclica fue definida por Tsygan en 1983, quien probó que esta teoría está relacionada con la homología de álgebras de Lie.

En 1984, Loday y Quillen definieron la homología cíclica de álgebras sobre un anillo conmutativo, y encontraron una sucesión exacta

$$\cdots\longrightarrow H_n(A)\xrightarrow{\ i\ } HC_n(A)\xrightarrow{\ S\ } HC_{n-2}(A)\xrightarrow{\ B\ } H_{n-1}(A)\longrightarrow\cdots$$

independientemente de los trabajos anteriores. Además definieron un producto $HC_n(A)\times HC_m(A)\longrightarrow HC_{n+m+1}(A)$.

La homología cíclica está muy relacionada con la teoría k algebraica: el grupo lineal es reemplazado por el álgebra de Lie de matrices, el grupo formal multiplicativo G_m por el grupo aditivo G_α, K_n^M por $\Omega^n(A)/d\Omega^{n-1}(A)$, la operación $x+y-xy$ por $x+y$, el determinante por la traza, etc. Además, existen aplicaciones naturales de los grupos K en la homología cíclica:

1) caracteres de Chern construídos por Karoubi:

$ch_n:K_n(A) \longrightarrow \varinjlim HC_{n+2l}(A)$

2) $\gamma_n:K_n(A) \longrightarrow HC_n(A)$ definido por Goodwillie.

3) cuando $k=\mathbf{Q}$, Wiebel definió aplicaciones

$c_n:KV_n(A) \longrightarrow HC_n^{per}(A)$ y $\upsilon_n:nilK_n(A) \longrightarrow HC_{n-1}(A)$

donde KV designa a los grupos de la teoría k de Karoubi, Nobile y Villamayor, y nilK a los grupos nilpotentes.

Se sospecha que la homología cíclica del anillo de funciones de una variedad algebraica V está relacionada con el tipo de singularidades de V. De aquí se deduce la importancia de los cálculos de la homología cíclica.

Sea k un anillo conmutativo con unidad, f un polinomio en $k[X_1,\ldots,X_n]$, y $A = k[X_1,\ldots,X_n]/\langle f\rangle$ El objetivo de este trabajo es calcular la homología y cohomología de Hochschild de A y, cuando $\mathbf{Q}\subseteq k$ y f es homogéneo con pesos cuya única singularidad es el origen, calcular la homología cíclica de A.

El Capítulo 1 contiene las nociones básicas de las homologías de Hochschild y cíclica (ver [L-Q],[G],[V],[C-E],[B1],[B2]).

En el Capítulo 2 construímos una resolución libre Rs(A) de A como A^e-módulo que es más simple que la resolución de Hochschild $(A\otimes\bar{A}^{\otimes^\bullet}\otimes A\ ,\ b')$. Definimos aplicaciones

$$Rs(A) \underset{g_\bullet}{\overset{h_\bullet}{\rightleftarrows}} (A\otimes\bar{A}^{\otimes^\bullet}\otimes A,\ b')$$

La aplicación $h_\bullet$ es un morfismo de álgebras. Además, $g_\bullet h_\bullet = id$, entonces Rs(A) resulta un sumando directo de $(A\otimes\bar{A}^{\otimes^\bullet}\otimes A\ ,b')$, y por lo tanto, exacto.

En el Capítulo 3 se calcula la homología y cohomología de Hochschild $H_\bullet(A,M)$, $H^\bullet(A,M)$ de A con coeficientes en un A-módulo M, considerado A^e-módulo por el producto $\mu:A^e\longrightarrow A$, $\mu(a\otimes b)=ab$, en función de la homología del complejo de Koszul de un módulo dado. Además, si k es un cuerpo de característica cero y f es un polinomio homogéneo con pesos tal que el conjunto de las derivadas parciales es una sucesión regular en $k[X_1,\dots,X_n]$, se calcula la homología cíclica de A.

Casi todos estos resultados aparecen en [B2].

CAPITULO 1

1-*HOMOLOGIA DE HOCHSCHILD*

Sea A un álgebra asociativa con identidad sobre un anillo conmutativo k, y $A^e = A\otimes A^{op}$ la k-álgebra envolvente. Para cada entero $n\geq 0$, sea $A^{\otimes^n}$ el producto tensorial de A sobre k n veces. La acción

$$(\alpha\otimes\beta)(a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1}) = \alpha a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1}\beta$$

convierte a $A\otimes_k A^{\otimes^n}\otimes_k A$ en un A^e-módulo.

Definimos el k-morfismo $\varepsilon_0 : A\otimes A^{\otimes^n}\otimes A \longrightarrow A\otimes A^{\otimes^{n+1}}\otimes A$ por la fórmula $\varepsilon_0(a) = 1\otimes a$, para $a\in A\otimes A^{\otimes^n}\otimes A$.

Si consideramos la aplicación $t : A\otimes A^{\otimes^{n+1}}\otimes A \longrightarrow A\otimes A^{\otimes^n}\otimes A$ definida por $t(\alpha\otimes a) = \alpha a$, con $\alpha\in A$ y $a\in A^{\otimes^{n+1}}\otimes A$, tenemos que $t.\varepsilon_o = id$, y por lo tanto, ε_0 es un monomorfismo.

Ahora, para cada $n\geq 0$, queremos definir un A-morfismo a izquierda

$$b'_n : A\otimes A^{\otimes^n}\otimes A \longrightarrow A\otimes A^{\otimes^{n-1}}\otimes A$$

que verifique:

i) $b'_0(\alpha\otimes\beta) = \alpha\beta\in A$

ii) $b'_{n+1}\varepsilon_0+\varepsilon_0 b'_n = id$ para $n\geq 0$.

Es inmediato que estas condiciones determinan b' por inducción, porque dado b'_n, el morfismo b'_{n+1} está definido por ii) en la imagen de ε_0. Como la imagen de ε_0 genera $A\otimes A^{\otimes^{n+1}}\otimes A$ como A-módulo a izquierda, b'_{n+1} es único.

Es fácil ver que la fórmula

$$\text{iii) } b'(a_0\otimes\ldots\otimes a_{n+1}) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-1}\otimes a_i a_{i+1}\otimes a_{i+2}\otimes\ldots\otimes a_{n+1}$$

verifica i) y ii).

Usando la fórmula iii) podemos verificar que b'_n es también un A-morfismo a derecha, y en consecuencia, b'_n es un A^e-morfismo.

Probemos ahora que $b'_{n-1}b'_n = 0$ para $n>0$, usando inducción. Si $n=1$ es inmediato porque $(a_0a_1)a_2 = a_0(a_1a_2)$ en A. Si $n>1$, usando ii) tenemos

$$b'_n b'_{n+1}\varepsilon_0 = b'_n - b'_n\varepsilon_0 b'_n = \varepsilon_0 b'_{n-1} b'_n$$

Entonces $b'_n b'_{n+1}\varepsilon_0 = 0$, y como la imagen de ε_0 genera $A\otimes A^{\otimes^n}\otimes A$ como A-módulo a izquierda, tenemos que $b'_n b'_{n+1} = 0$.

El complejo de cadena

$$\ldots \xrightarrow{b'} A\otimes A^{\otimes^n}\otimes A \xrightarrow{b'} A\otimes A^{\otimes^{n-1}}\otimes A \xrightarrow{b'} \ldots \xrightarrow{b'} A\otimes A\otimes A \xrightarrow{b'} A\otimes A \xrightarrow{b'} A$$

es la resolución standard de Hochschild $(A\otimes A^{\otimes^{\bullet}}\otimes A\ ,\ b')$ de A como A^e-módulo. La condición ii) muestra que ε_0 es una homotopía, es decir, que el complejo es exacto.

Sea M un A^e-módulo a derecha. Si tomamos el producto tensorial de la resolución standard de Hochschild de A con M sobre A^e, y usamos la identificación

$$M\otimes_{A^e}\left(A\otimes_k A^{\otimes^n}\otimes_k A\right) = M\otimes_{A^e}\left(A^e\otimes_k A^{\otimes^n}\right) = M\otimes_k A^{\otimes^n}$$

obtenemos el complejo de cadena $(M\otimes A^{\otimes^{\bullet}},b)$

$$\ldots \xrightarrow{b} M\otimes A^{\otimes^n} \xrightarrow{b} M\otimes A^{\otimes^{n-1}} \longrightarrow \ldots \longrightarrow M\otimes A\otimes A \xrightarrow{b} M\otimes A \xrightarrow{b} M$$

donde

$$b(m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n)=ma_1\otimes\ldots\otimes a_n+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i ma_1\otimes\ldots\otimes a_{i-1}\otimes a_i a_{i+1}\otimes a_{i+2}\otimes\ldots\otimes a_n+$$
$$+(-1)^n a_n m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_{n-1}.$$

La homología del comlpejo de Hochschild $(M\otimes A^{\otimes^\bullet},b)$ es la homología de Hochschild $H_\bullet(A,M)$.

Por otro lado, aplicando $\mathrm{Hom}_{A^e}(.,M)$ a la resolución standard de Hochschild de A, y usando la identificación

$$\mathrm{Hom}_{A^e}(A\otimes A^{\otimes^n}\otimes A,M) = \mathrm{Hom}_{A^e}(A^e\otimes_k A^{\otimes^n},M) = \mathrm{Hom}_k(A^{\otimes^n},M)$$

tenemos el complejo de cocadenas $(\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes^\bullet},M),\delta)$

$$M\xrightarrow{\delta}\mathrm{Hom}_k(A,M)\longrightarrow\ldots\longrightarrow\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes^n},M)\xrightarrow{\delta}\mathrm{Hom}_k(A^{\otimes^{n+1}},M)\xrightarrow{\delta}\ldots$$

donde

$$(\delta(f))(a_1\otimes\ldots\otimes a_n)=a_1f(a_2\otimes\ldots\otimes a_n)+\sum_{i=1}^{n-1}(-1)^i f(a_1\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n)+$$
$$+(-1)^n f(a_1\otimes\ldots\otimes a_{n-1})a_n.$$

La homología de este complejo es la cohomología de Hochschild $H^\bullet(A,M)$.

Si A es k-proyectivo, $A^{\otimes^n}$ también es k-proyectivo, y entonces $A\otimes A^{\otimes^n}\otimes A$ es un A^e-módulo proyectivo. En este caso, la resolución standard de Hochschild de A es una resolución A^e-proyectiva de A. Entonces

$$H_n(A,M) = \mathrm{Tor}_n^{A^e}(A,M) \quad \text{y} \quad H_n(A,M) = \mathrm{Ext}^n_{A^e}(A,M).$$

Ahora construiremos una variante útil de la resolución standard de Hochschild de A.

Sea $\bar{A} = A/k$ El k-epimorfismo $A \longrightarrow A/k$ induce k-epimorfismos $A^{\otimes^n} \longrightarrow \bar{A}^{\otimes^n}$ y $A\otimes A^{\otimes^n}\otimes A \longrightarrow A\otimes\bar{A}^{\otimes^n}\otimes A$ Sin peligro de confusión, llamaremos ε_0 y b' a los morfismos inducidos que también verifican las condiciones i) y ii).

Así tenemos un complejo de cadena exacto $(A\otimes\bar{A}^{\otimes^\bullet}\otimes A\ ,b')$

$$\cdots\longrightarrow A\otimes\bar{A}^{\otimes^n}\otimes A \xrightarrow{b'} A\otimes\bar{A}^{\otimes^{n-1}}\otimes A\longrightarrow\cdots\longrightarrow A\otimes\bar{A}\otimes A \xrightarrow{b'} A\otimes A \xrightarrow{b'} A$$

que se llama resolución standard normalizada de Hochschild de A.

Si M es un A^e-módulo a derecha, tenemos los complejos normalizados de Hochschild $(M\otimes\bar{A}^{\otimes^\bullet},b)$ y $(\mathrm{Hom}_k(\bar{A}^{\otimes^\bullet},M),\delta)$.

Proposición 1.1:

La homología de los complejos normalizados de Hochschild es la homología de los complejos de Hochschild.

Demostración:

Veamos que $(M\otimes A^{\otimes^\bullet},b)$ y $(M\otimes\bar{A}^{\otimes^\bullet},b)$ tienen la misma homología. Para cada $j\geq 0$, consideremos el complejo H_j

$$\cdots\longrightarrow M\otimes A^2\otimes\bar{A}^{\otimes^j} \xrightarrow{b} M\otimes A\otimes\bar{A}^{\otimes^j} \xrightarrow{b} M\otimes\bar{A}^{\otimes^j} \xrightarrow{b} M\otimes\bar{A}^{\otimes^{j-1}} \longrightarrow\cdots\longrightarrow M\otimes\bar{A} \xrightarrow{b} M$$

La proyección $A \longrightarrow \bar{A}$ induce un epimorfismo de complejos $H_j \longrightarrow H_{j+1}$.

El núcleo de este morfismo es el complejo $(N^j_\bullet\ ,b)$, donde N^j_k es cero si $k\leq j$, y N^j_{j+m} es el submódulo de $M\otimes A^m\otimes\bar{A}^{\otimes^j}$ generado por los elementos de la forma $m\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_m\otimes\overline{a_{m+1}}\otimes\ldots\otimes\overline{a_{j+m}}$ con $a_m\in k$.

Es fácil ver que $b: N^j_\bullet \longrightarrow N^j_{\bullet-1}$ es igual a $b': N^j_\bullet \longrightarrow N^j_{\bullet-1}$, y entonces el morfismo ε_0 definido antes es una homotopía de retracción del complejo núcleo.

La sucesión exacta larga de homología aplicada a la sucesión exacta

$0 \longrightarrow (N^j_\bullet, b) \longrightarrow H_j \longrightarrow H_{j+1} \longrightarrow 0$

nos dice que la homología de H_j y H_{j+1} coincide.

En forma análoga se demuestra que la homología del complejo $(\mathrm{Hom}_k(\overline{A}^{\otimes^\bullet}, M), \delta)$ es la cohomología $H^\bullet(A,M)$.

2-*PRODUCTO BARAJADO*

Recordemos que una A-álgebra diferencial graduada estrictamente anticonmutativa es un complejo de A-módulos

$$\cdots \longrightarrow A_3 \xrightarrow{d} A_2 \xrightarrow{d} A_1 \xrightarrow{d} A_0$$

junto con operaciones

$A_i \times A_j \longrightarrow A_{i+j}$

que convierten a $A_0 \oplus A_1 \oplus \ldots$ en un anillo graduado estrictamente anticonmutativo, donde anticonmutativo significa que $a_i a_j = (-1)^{i+j} a_j a_i$, y estricto significa que el cuadrado de cualquier elemento de grado impar es cero, y esta operación verifica $d(a_i a_j) = d(a_i) a_j + (-1)^i a_i\, d(a_j)$.

Usando esta igualdad es fácil verificar que en un álgebra diferencial graduada estrictamente anticonmutativa, el producto de dos ciclos es un ciclo y el producto de un ciclo por un borde es un borde. Por esto, el producto del álgebra induce un producto en la homología, que convierte a $H_0(A) \oplus H_1(A) \oplus \ldots$ en una A-álgebra graduada estrictamente anticonmutativa.

Sea A un álgebra conmutativa. Entonces la resolución standard de Hochschild y la resolución normalizada de Hochschild son

A^e-álgebras diferenciales graduadas estrictamente anticonmutativas con el producto definido por

$$(a\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_p\otimes b)*(a'\otimes a_{p+1}\otimes\ldots\otimes a_{p+q}\otimes b')=$$

$$=\sum_{B_{p,q}} \mathrm{sgn}(\sigma)aa'\otimes a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(p+q)}\otimes bb'$$

donde $B_{p,q}$ es el conjunto de las permutaciones σ de $\{1,2,\ldots,p+q\}$ tales que $\sigma(1)<\ldots<\sigma(p)$ y $\sigma(p+1)<\ldots<\sigma(p+q)$

Como el complejo de Hochschild y el complejo normalizado de Hochschild de A como A^e-módulos se obtienen tomando el producto tensorial de las resoluciones correspondientes con A sobre A^e, el producto en los complejos, llamado producto barajado, está definido por

$$(a\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_p)*(a'\otimes a_{p+1}\otimes\ldots\otimes a_{p+q})=\sum_{B_{p,q}} \mathrm{sgn}(\sigma)aa'\otimes a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(p+q)}$$

Entonces la homología de Hochschild $H_\bullet(A) = H_\bullet(A,A)$ es una A-álgebra graduada estrictamente anticonmutativa.

Dada una k-álgebra conmutativa A, $\Omega(A)$ es el módulo de los diferenciales de Kähler definido como el A-módulo generado por los símbolos dx, con $x\in A$, con las relaciones $d(xy) = xdy+ydx$, $d(x+y) = dx+dy$ y $d(k)=0$. Para cada $n\in N$ se define el n-ésimo módulo de diferenciales de A, $\Omega^n(A)$ como la n-ésima potencia exterior $\Lambda^n_A\Omega(A)$ de $\Omega(A)$ sobre A.

El complejo, llamado de De Rham,

$$A \xrightarrow{d} \Omega(A) \xrightarrow{d} \Omega^2(A) \longrightarrow \ldots$$

con $d(a_0da_1\wedge\ldots\wedge da_n)=da_0\wedge da_1\wedge\ldots\wedge da_n$, junto con las operaciones

$$\Omega^i(A) \times \Omega^j(A) \xrightarrow{\;\wedge\;} \Omega^{i+j}(A)$$

definidas por

$$(a_0da_1\wedge\ldots\wedge da_i)\wedge(b_0db_1\wedge\ldots\wedge db_j) = a_0b_0da_1\wedge\ldots\wedge da_i\wedge db_1\wedge\ldots\wedge db_j$$

es una A-álgebra diferencial graduada estrictamente anticonmutativa.

Observación 2.1:

Como $H_1(A) = A\otimes\bar{A}/b(A\otimes\bar{A}^2) = A\otimes\bar{A}/\{xy\otimes z-x\otimes yz+zx\otimes y\}$, es fácil ver que la aplicación

$$\gamma : \Omega^1(A) \longrightarrow H_1(A)$$

que manda adx en la clase de $a\otimes x$, es un isomorfismo. Gracias a la estructura multiplicativa de la homología de Hochschild, γ se extiende a una aplicación de A-álgebras

$$\gamma : \Omega^n(A) \longrightarrow H_n(A) .$$

3-*COMPLEJO DE KOSZUL*

Sea A un anillo, y sean $x_1,\ldots,x_n \in A$ Sea Ae_i el A-módulo libre de rango uno con base e_i, para $i = 1,2,\ldots,n$.

Sea $K_*(x_i)$ el complejo

$$0 \longrightarrow Ae_i \xrightarrow{\;d\;} A \longrightarrow 0$$

definido por $K_p(x_i) = 0$ si $p>1$, $K_1(x_i) = Ae_i$, $K_0(x_i) = A$ y $d(e_i) = x_i$. Entonces $H_0(K_*(x_i)) = A/x_iA$, $H_1(K_*(x_i)) = Ann(x_i)$ y $H_p(K_*(x_i)) = 0$ si $p>1$.

Dado un complejo de A-módulos C_*, llamamos $C_*(x_1,\ldots,x_n)$ al complejo $C_*\otimes K(x_1)\otimes\ldots\otimes K(x_n)$.

Dado un A-módulo M, consideremos el complejo M_* definido por $M_n = 0$ si $n>0$ y $M_0 = M$ Llamamos $K_\bullet(M,x_1,...,x_n)$ al complejo $M_\bullet(x_1,...,x_n) = M_\bullet \otimes K_\bullet(x_1) \otimes ... \otimes K_\bullet(x_n)$.

Los complejos $C_\bullet(x_1,...,x_n)$ y $K_\bullet(M,x_1,...,x_n)$ se llaman complejos de Koszul.

Veamos cómo es el complejo $K_\bullet(M,x_1,...,x_n)$:

1) $K_p(M,x_1,...,x_n) = 0$ si $p>n$

2) $K_p(M,x_1,...,x_n) = \bigoplus_{\alpha_1+..+\alpha_n=p} M \otimes K_{\alpha_1}(x_1) \otimes ... \otimes K_{\alpha_n}(x_n)$ con $\alpha_i=0$ ó 1, $0 \le p \le n$.

Sea $e_{i_1..i_p} = u_1 \otimes ... \otimes u_n$, con

$$u_i = \begin{cases} e_i & \text{si } i \in \{i_1,...,i_p\} \\ 1 & \text{si } i \notin \{i_1,...,i_p\} \end{cases}$$

Entonces

2') $K_0(M,x_1,...,x_n) = M$

$$K_p(M,x_1,...,x_n) = \bigoplus_{1\le i_1<..<i_p\le n} Me_{i_1..i_p} \simeq M^{\binom{n}{p}} \quad \text{si } 1 \le p \le n$$

3') $d(me_{i_1..i_p}) = \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r-1} d(e_{i_r}) me_{i_1..\hat{i}_r..i_p} =$

$= \sum_{r=1}^{p} (-1)^{r-1} x_{i_r} me_{i_1..}$ $\quad m \in M$.

Existe otra interpretación del complejo de Koszul. Sea $F = Ae_1+...+Ae_n$ el A-módulo libre de rango n con base $\{e_1,...,e_n\}$. Entonces el producto exterior $\Lambda^p F$ es un módulo libre de rango $\binom{n}{p}$, con base $\{ e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p} : 1 \le i_1 < ... < i_p \le n \}$, y existe un isomorfismo de A-módulos

$$M \otimes_A \Lambda^p F \longrightarrow K_p(M,x_1,...,x_n)$$

que manda $e_{i_1} \wedge ... \wedge e_{i_p}$ en $e_{i_1...i_p}$.

Así podemos definir $K_\bullet(M,x_1,\ldots,x_n)$ como el complejo $M_\bullet \otimes L_\bullet$, con $L_p = \Lambda^p F$ y $d(e_{i_1}\wedge\ldots\wedge e_{i_p}) = \sum_{r=1}^{p}(-1)^{r-1}x_{i_r}e_{i_1}\wedge\ldots\wedge\hat{e}_{i_r}\wedge\ldots\wedge e_{i_p}$.

Solo falta verificar que $L_\bullet$ es un complejo, pero la igualdad $d^2 = 0$ es inmediata.

Lema 3.1:

Si $C_\bullet$ es un complejo de A-módulos, $x \in A$ y $H_p(C_\bullet) = 0$ si $p>0$, entonces $H_p(C_\bullet(x)) = 0$ para $p>1$, la sucesión

$$0 \longrightarrow H_1(C_\bullet(x)) \longrightarrow H_0(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_0} H_0(C_\bullet) \longrightarrow H_0(C_\bullet(x)) \longrightarrow 0$$

es exacta, y δ_0 es la multiplicación por x. En particular, si x es $H_0(C_\bullet)$-regular, entonces $H_p(C_\bullet(x))=0$ para todo $p>0$ y $H_0(C_\bullet(x)) = H_0(C)/xH_0(C)$.

Demostración:

Consideremos la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A \longrightarrow K_\bullet(x) \longrightarrow A[-1] \longrightarrow 0$$

donde $(A[-1])_p = A_{p-1}$.

Tomemos ahora el producto tensorial de esta sucesión con el complejo $C_\bullet$. Así obtenemos una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow C_\bullet \longrightarrow C_\bullet(x) \longrightarrow C_\bullet[-1] \longrightarrow 0$$

Para finalizar la demostración basta considerar la sucesión exacta larga en homología

$$\ldots \longrightarrow H_{p+1}(C_\bullet) \longrightarrow H_{p+1}(C_\bullet(x)) \longrightarrow H_p(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_p} H_p(C_\bullet) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow H_1(C_\bullet) \longrightarrow H_1(C_\bullet(x)) \longrightarrow H_0(C_\bullet) \xrightarrow{\delta_0} H_0(C_\bullet) \longrightarrow H_0(C_\bullet(x)) \longrightarrow 0$$

Es fácil ver que el morfismo de conexión δ_p es la multiplicación por $(-1)^p x$.

Teorema 3.2:

Sea A una anillo, M un A-módulo y $x_1,\dots,x_n$ una sucesión M-regular en A. Entonces

$H_p(K_\bullet(M,x_1,\dots,x_n)) = 0$ si $p>0$

$H_0(K_\bullet(M,x_1,\dots,x_n)) = M/\sum_{i=1}^{n} x_i M$

Corolario 3.3:

Sea A un anillo y $x_1,\dots,x_n$ una sucesión A-regular en A. Entonces $K_\bullet(A,x_1,\dots,x_n)$ es una resolución libre del A-módulo $A/(x_1,\dots,x_n)$.

4-*HOMOLOGIA CICLICA*

Sea A un álgebra asociativa con identidad sobre un anillo conmutativo k, y sea $A^{\otimes^n}$ el producto tensorial de A sobre k n veces. Sea t un generador del grupo cíclico Z_n. Entonces $A^{\otimes^n}$ es un Z_n-módulo, con la acción definida por

$t(a_1\otimes\dots\otimes a_n) = (-1)^{n-1}(a_n\otimes a_1\otimes\dots\otimes a_{n-1})$

Recordemos cómo se construye el complejo standard para la homología de Z_n con coeficientes en $A^{\otimes^n}$, $\mathrm{Tor}_*^{Z(Z_n)}(Z,A^{\otimes^n})$ donde $Z(Z_n)$ es el anillo cuyo grupo aditivo es el grupo abeliano libre con base Z_n, y su producto es el de Z_n.

Sean $N=\sum_{i=0}^{n-1} t^i$ y $(1-t)$ dos elementos de $Z(Z_n)$, y $\varepsilon:Z(Z_n)\longrightarrow Z$ el morfismo definido por $\varepsilon(\sum m_i t^i) = \sum m_i$.

Es fácil ver que

$$\cdots \longrightarrow Z(Z_n) \xrightarrow{1-t} Z(Z_n) \xrightarrow{N} Z(Z_n) \xrightarrow{1-t} Z(Z_n) \xrightarrow{\varepsilon} Z \longrightarrow 0$$

es una resolución proyectiva del Z_n-módulo Z.

Como $A^{\otimes^n}$ es un Z_n-módulo, también es un $Z(Z_n)$-módulo. Tomando el producto tensorial sobre $Z(Z_n)$ de la resolución anterior con $A^{\otimes^n}$, y usando la identificación $Z(Z_n)\otimes_{Z(Z_n)}A^{\otimes^n} \simeq A^{\otimes^n}$ tenemos el complejo standard para la homología de Z_n con coeficientes en $A^{\otimes^n}$

$$\cdots \longrightarrow A^{\otimes^n} \xrightarrow{1-t} A^{\otimes^n} \xrightarrow{N} A^{\otimes^n} \xrightarrow{1-t} A^{\otimes^n}$$

Sea $C(A)$ el complejo doble positivo

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b \\
A^{\otimes^2} & \xleftarrow{1-t} & A^{\otimes^2} & \xleftarrow{N} & A^{\otimes^2} \xleftarrow{1-t} \\
\downarrow b & & \downarrow -b' & & \downarrow b \\
A & \xleftarrow{1-t} & A & \xleftarrow{N} & A \xleftarrow{1-t}
\end{array}$$

donde las columnas pares son los complejos de Hochschild, las columnas impares son las resoluciones standard de Hochschild con el signo de la diferencial cambiado, y las filas son los complejos standard para la homología de $Z(Z_n)$ con coeficientes en $A^{\otimes^n}$
Solo falta verificar que los cuadrados anticonmutan.

Lema 4.1:

$b(1-t) = (1-t)b'$ y $b'N = Nb$.

Demostración:

Sea $j:A^{\otimes^{n+1}} \longrightarrow A^{\otimes^{n}}$ definido por

$j(a_0 \otimes \ldots \otimes a_n) = (-1)^n (a_n a_0 \otimes \ldots \otimes a_{n-1})$.

Entonces $b = \sum_{i=0}^{n} t^i j t^{-i-1}$ y $b' = \sum_{i=0}^{n-1} t^i j t^{-i-1}$ en $A^{\otimes^{n+1}}$.

Ahora,

$$b(1-t) = \sum_{i=0}^{n} (t^i j t^{-i-1} - t^i j t^{-i}) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i j t^{-i-1} - \sum_{i=0}^{n-1} t^{i+1} j t^{-(i+1)} =$$

$= (1-t)b'$

$$b'N = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n} t^i j t^{k-(i+1)} = \sum_{i=0}^{n-1} t^i j \left(\sum_{k=0}^{n} t^{k-(i+1)} \right) = \sum_{i=0}^{n-1} t^i j \sum_{k=0}^{n} t^k = NjN$$

$$Nb = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{n} t^{k+i} j t^{-i-1} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^{k+i} \right) j t^{-i-1} = \sum_{i=0}^{n} \left(\sum_{k=0}^{n-1} t^{k} \right) j t^{-i-1} = NjN$$

Definición 4.2:

La homología cíclica $HC_*(A)$ de la k-álgebra asociativa A es la homología del complejo total de $\mathcal{C}(A)$, Tot $\mathcal{C}(A)$.

Lema 4.3:

Si un complejo doble positivo tiene sus filas exactas salvo en el lugar cero, la homología del complejo total es la homología del complejo conúcleo.

Demostración:

Sea $C = (C_{ij}, \delta_i, \rho_j)$ un complejo doble positivo tal que

(C_{ij},ρ_j) es exacto para todo i, y sea Coker C = $(C_{i0}/\mathrm{Im}\rho,\delta_i)$ el complejo conúcleo de C.

La sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tot}C' \longrightarrow \mathrm{Tot}C \longrightarrow \mathrm{Coker}\ C \longrightarrow 0 \qquad (*)$$

es una sucesión exacta corta de complejos, donde C' es el subcomplejo de C dado por $C'_{ij}=C_{ij}$ para todo $i\geq 0, j>0$, $C'_{i0} = \mathrm{Im}\ \rho_i$.

Veamos que Tot C′ es exacto. Sea $\alpha=(c_0,c_1,\ldots,c_n)$ un ciclo perteneciente a $\mathrm{Im}\rho\oplus C_{(n-1)1}\oplus\ldots\oplus C_{0n}$, es decir, $\delta c_i+\rho c_{i+1}= 0$ para $i=0,..,n-1$. Como $c_0=\rho b_1$ y $\delta c_0+\rho c_1=0$, entonces $\rho(c_1-\delta b_1) = 0$. Por la exactitud de las filas, existe b_2 tal que $\rho b_2=c_1-\delta b_2$ Como la sucesión es finita, existe $\beta= (0,b_1,b_2,\ldots,b_{n+1})$ cuyo borde es α.

La demostración termina considerando la sucesión exacta larga de homología de la sucesión (*).

Proposición 4.4:

Si el anillo k contiene a $\mathbb{Q}$, $HC_n(A) = H_n(A^{*+1}/(1-t),b)$.

Demostración:

Como car k = 0, las filas de $\mathcal{C}(A)$ son exactas, pues para $x\in A^{\otimes n}$ tenemos:

i) si $(1-t)(x)=0$, $x=N(x/n)$

ii) si $N(x)=0$, $x=(1-t)[-(1/n)(1+2t+3t^2+\ldots+nt^{n-1})(x)]$.

Usando el lema anterior, se deduce que la homología del complejo $\mathrm{Tot}\mathcal{C}(A)$ coincide con la del complejo conúcleo de $\mathcal{C}(A)$, es decir:

$HC_n(A)=H_n(A^{*+1}/(1-t),b)$.

Ahora vamos a simplificar el complejo $C(A)$. Primero veremos que las columnas impares se pueden eliminar porque son exactas. Después vamos a normalizar los complejos de Hochschild.

Sea $B(A)$ el complejo obtenido a partir de $C(A)$ eliminando las columnas impares:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] \\
A^{\otimes 3} \arrow[d, "b"] & A^{\otimes 2} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] \\
A^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

donde B está dado por la composición

$$\begin{tikzcd}
A^{\otimes n+1} & A^{\otimes n+1} \arrow[l, "1-t"'] & \\
& A^{\otimes n} \arrow[u, "\varepsilon_0"] & A^{\otimes n} \arrow[l, "N"']
\end{tikzcd}$$

Es claro que $B(A)$ es un complejo doble, es decir,

$B^2 = (1-t)\varepsilon_0 N(1-t)\varepsilon_0 N = 0$

$bB+Bb = b(1-t)\varepsilon_0 N + (1-t)\varepsilon_0 Nb = (1-t)(b'\varepsilon_0+\varepsilon_0 b')N = (1-t)N = 0.$

Proposición 4.5:

Los complejos $\mathrm{Tot}B(A)$ y $\mathrm{Tot}C(A)$ tienen la misma homología.

Demostración:

Sea $E(A)$ el complejo doble obtenido a partir de $C(A)$ eliminando las columnas pares

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "-b'"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] & \vdots \arrow[d, "-b'"] \\
A^{\otimes^3} & A^{\otimes^2} \arrow[l, "0"'] \arrow[d, "-b'"] & A \arrow[l, "0"'] \\
A^{\otimes^2} \arrow[d, "-b'"] & A \arrow[l, "0"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

La sucesión

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A) \xrightarrow{f} \mathrm{Tot}\mathcal{C}(A) \xrightarrow{g} \mathrm{Tot}\mathcal{E}(A) \longrightarrow 0$$

con f y g definidas por

$$f_{2n+1}: A \oplus A^{\otimes^3} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{2n+1}} \longrightarrow A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{2n+1}}$$

$$f_{2n+1}(a_1, a_3, \ldots, a_{2n+1}) = (a_1, \varepsilon_0 Na_1, a_3, \varepsilon_0 Na_3, \ldots, \varepsilon_0 Na_{2n-1}, a_{2n+1})$$

$$f_{2n}: A^{\otimes^2} \oplus A^{\otimes^4} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{2n}} \longrightarrow A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{2n}}$$

$$f_{2n}(a_2, a_4, \ldots, a_{2n}) = (0, a_2, \varepsilon_0 Na_2, a_4, \varepsilon_0 Na_4, \ldots, \varepsilon_0 Na_{2n-2}, a_{2n})$$

$$g_{2n+1}: A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{2n+1}} \longrightarrow A^{\otimes^2} \oplus A^{\otimes^4} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{2n}}$$

$$g_{2n+1}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n+1}) = (a_2 - \varepsilon_0 Na_1, a_4 - \varepsilon_0 Na_3, \ldots, a_{2n} - \varepsilon_0 Na_{2n-1})$$

$$g_{2n}: A \oplus A^{\otimes^2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{2n}} \longrightarrow A \oplus A^{\otimes^3} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes^{2n-1}}$$

$$g_{2n}(a_1, a_2, \ldots, a_{2n}) = (a_1, a_3 - \varepsilon_0 Na_2, a_5 - \varepsilon_0 Na_4, \ldots, a_{2n-1} - \varepsilon_0 Na_{2n-2})$$

es una sucesión exacta de complejos y Tot$\mathcal{E}$(A) es un complejo exacto. Tomando la sucesión exacta larga de homología, tenemos que los complejos $\mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)$ y $\mathrm{Tot}\mathcal{C}(A)$ son cuasi-isomorfos.

Teorema 4.6:

Para toda k-álgebra asociativa A se tiene una sucesión exacta larga

$$\cdots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{\ i\ } HC_n(A) \xrightarrow{\ S\ } HC_{n-2}(A) \xrightarrow{\ B\ } H_{n-1}(A) \longrightarrow \cdots$$

Demostración:

Sea $\mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)[-2]$ el complejo $\mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)$ con los grados "levantados" en dos, es decir, $(\mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)[-2])_n = \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)_{n-2}$.

La sucesión

$$0 \longrightarrow (A^{\bullet},b) \xrightarrow{\ i\ } \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A) \xrightarrow{\ S\ } \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)[-2] \longrightarrow 0$$

con i inducida por la inclusión en la primer columna de $\mathcal{B}(A)$, y

$$S: A^{\otimes^n} \oplus A^{\otimes^{n-2}} \oplus \ldots \longrightarrow A^{\otimes^{n-2}} \oplus A^{\otimes^{n-4}} \oplus \ldots$$

$$S(a_n, a_{n-2}, \ldots) = (a_{n-2}, a_{n-4}, \ldots)$$

es una sucesión exacta de complejos, y la sucesión exacta larga de homología correspondiente es la sucesión que estábamos buscando. Es claro que el morfismo de conexión es B.

Aún podemos simplificar más el complejo que nos da la homología cíclica. Dado $\mathcal{B}(A)$, sus columnas son los complejos de Hochschild $(A^{\bullet},b)$. En la Proposición 1.1 de este capítulo vimos que el complejo $(A^{\bullet+1},b)$ es cuasi-isomorfo al complejo normalizado de Hochschild $(A\otimes\overline{A}^{\bullet},b)$. Sea $\mathcal{B}(A)_{\mathrm{norm}}$ el complejo obtenido a partir de $\mathcal{B}(A)$ reemplazando sus columnas por los complejos normalizados:

$\mathcal{B}(A)_{norm}$:

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] & \vdots \arrow[d, "b"] \\
A\otimes\bar{A}^{\otimes 2} \arrow[d, "b"] & A\otimes\bar{A} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] \\
A\otimes\bar{A} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & \\
A & &
\end{tikzcd}$$

Falta verificar que el morfismo B pasa al cociente. Recordemos que $B=(1-t)\varepsilon_0 N$. Como $t\varepsilon_0=0$ en $A\otimes\bar{A}^{\otimes^n}$, entonces $B=\varepsilon_0 N$ en $A\otimes\bar{A}^{\otimes^n}$, y por lo tanto

$$B(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=\sum_{i=0}^{n}(-1)^{in}\,1\otimes a_i\otimes\ldots\otimes a_n\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-1}$$

y ahora es obvio que B está bien definido en $A\otimes\bar{A}^{\otimes^n}$

Proposición 4.7:

La proyección de $\mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)$ sobre $\mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)_{norm}$ es un cuasi-isomorfismo.

Demostración:

El núcleo de la proyección $\mathrm{Tot}\mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)_{norm}$ es el complejo total de un complejo que tiene sus columnas exactas (ver Proposición 1.1), y por el Lema 4.3, su complejo total es exacto.

Ejemplo 4.8:

Si $A = k$, el complejo $\mathcal{B}(A)_{norm}$ se reduce a copias de k en la diagonal, y por lo tanto, $HC_n(k)=k$ si n es par y $HC_n(k) = 0$ si n es impar.

Ejemplo 4.9:

Si A es conmutativa y Ω^1_A es el módulo de los diferenciales de Kähler, $HC_0(A) = A$, y usando la Observación 2.1, tenemos que $HC_1(A) = H_1(A)/\{1\otimes a\} = \Omega^1_A/dA$.

5-*RELACION DE LA HOMOLOGIA CICLICA CON LA COHOMOLOGIA DE DE RHAM*

Sea A una k-álgebra conmutativa. Recordemos que el producto barajado definido en la Sección 2 nos permitió definir una aplicación de A-álgebras

$\gamma : \Omega^n(A) \longrightarrow H_n(A)$

que manda un elemento $a_0da_1\wedge da_2\wedge\ldots\wedge da_n$ a la clase de $(a_0\otimes a_1)*(1\otimes a_2)*\ldots*(1\otimes a_n)$, con $*$ el producto barajado.

Proposición 5.1:

El diagrama

$$\begin{array}{ccc} \Omega^n(A) & \xrightarrow{\gamma} & H_n(A) \\ \Big\downarrow d & & \Big\downarrow B \\ \Omega^{n+1}(A) & \xrightarrow{\gamma} & H_{n+1}(A) \end{array}$$

es conmutativo, con d la derivada exterior.

Demostración:

Sea $\omega=a_0da_1\wedge da_2\wedge\ldots\wedge da_n\in \Omega^n(A)$. Entonces $\gamma(\omega)$ es la clase de

$$(a_0\otimes a_1)*(1\otimes a_2)*\ldots*(1\otimes a_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\ a_0\otimes a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(n)}$$

en $A\otimes\bar{A}^{\otimes^n}$, donde S_n es el grupo de permutaciones de $\{1,2,\ldots,n\}$. Entonces $B(\gamma(\omega))$ es la clase de

$$\sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \sum_{i=0}^{n} (-1)^{i} 1\otimes a_{\sigma^{-1}(i)} \otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(n)} \otimes a_0 \otimes a_{\sigma^{-1}(1)} \otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(i-1)} =$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \sum_{\tau\in T} \operatorname{sgn}(\sigma)\ \operatorname{sgn}(\tau)\ 1\otimes a_{\sigma^{-1}\tau^{-1}(0)} \otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}\tau^{-1}(n)}$$

donde T es el subgrupo cíclico de S_{n+1} generado por la permutación t que manda i en $i+1$. Como S_{n+1} es el producto de S_n con T, la última expresión es igual a

$$\sum_{\sigma\in S_{n+1}} \operatorname{sgn}(\sigma)\ 1\otimes a_{\sigma^{-1}(0)} \otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(n)} = (1\otimes a_0)*(1\otimes a_1)*\ldots*(1\otimes a_n)$$

La clase de éste último es

$\gamma(d\omega) = \gamma(a_0 da_1 \wedge da_2 \wedge\ldots\wedge da_n)$

Por lo tanto, $B(\gamma(\omega)) = \gamma(d\omega)$.

Si la característica de k es cero, podemos definir una aplicación

$\mu: A\otimes\overline{A}^{\bullet} \longrightarrow \Omega^{\bullet}(A)$

$\mu(a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n) = (1/n!)a_0 da_1\wedge\ldots\wedge da_n$

Sea $D(A)$ el complejo doble cuyas filas son los complejos de De Rham truncados

$$\Omega^{\leq i}(A):\Omega^{i}(A) \xleftarrow{\ d\ } \Omega^{i-1}(A) \xleftarrow{\ d\ } \ldots \xleftarrow{\ d\ } \Omega^{0}(A) \longleftarrow 0 \longleftarrow \ldots$$

$D(A)$:

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "0"] & {} \arrow[d, "0"] & {} \arrow[d, "0"] \\
\Omega^2 \arrow[d, "0"] & \Omega^1 \arrow[l, "d"'] \arrow[d, "0"] & \Omega^0 \arrow[l, "d"'] \\
\Omega^1 \arrow[d, "0"] & \Omega^0 \arrow[l, "d"'] & \\
\Omega^0 & &
\end{tikzcd}$$

Entonces $\mathrm{Tot}D(A) = \oplus\, \Omega^{\leq i}[i]$.

Proposición 5.2:

Si k contiene a $\mathbb{Q}$, la aplicación $\mu: A\otimes\bar{A}^{\bullet} \longrightarrow \Omega^{\bullet}(A)$ induce un morfismo de complejos dobles $\mu: B(A)_{norm} \longrightarrow D(A)$.

Demostración:

Solo tenemos que verificar que $\mu b = 0$ y que $d\mu = \mu B$.

$$\mu b(a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n) = [1/(n-1)!]\Big(a_0a_1da_2\wedge\ldots\wedge da_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_0da_1\wedge\ldots\wedge d(a_ia_{i+1})\wedge\ldots\wedge da_n + (-1)^n a_na_0da_1\wedge\ldots\wedge da_{n-1}\Big) =$$

$$= [1/(n-1)!]\Big(a_0a_1da_2\wedge..\wedge da_n + \sum_{i=1}^{n}(-1)^i(a_0a_ida_1\wedge..\wedge da_{i-1}\wedge da_{i+1}\wedge..\wedge da_n +$$

$$+ a_0a_{i+1}da_1\wedge..\wedge da_i\wedge da_{i+2}\wedge..\wedge da_n) + (-1)^n a_na_0da_1\wedge\ldots\wedge da_{n-1}\Big) = 0$$

$$\mu B(a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n) = \sum_{i=0}^{n}(-1)^{in}[1/(n+1)!]\ da_i\wedge\ldots\wedge da_n\wedge da_0\wedge\ldots\wedge da_{i-1} =$$

$$= [1/(n+1)!] \sum_{i=0}^{n}(-1)^{in}(-1)^{in}\ da_0\wedge\ldots\wedge da_n = (1/n!)da_0\wedge\ldots\wedge da_n =$$

$$= d\mu(a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_n).$$

Proposición 5.3:

El morfismo de complejos $\mu:(A\otimes\bar{A}^{\bullet},b) \longrightarrow (\Omega^{\bullet}(A),0)$ induce en la homología una retracción de $\gamma:\Omega^{\bullet}(A) \longrightarrow H_{\bullet}(A)$ (Es decir, $\Omega^n(A)$ es un sumando directo de $H_n(A)$).

Demostración:

Es inmediata pues

$$(\mu\gamma)(a_0da_1\wedge\ldots\wedge da_n) = \mu\left(\sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_0\otimes a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(n)}\right) =$$

$$= (1/n!)\sum_{\sigma\in S_n} a_0da_1\wedge\ldots\wedge da_n = a_0da_1\wedge\ldots\wedge da_n$$

Observación 5.4:

La homología del complejo Tot$\mathcal{D}$(A) es

$\Omega^n(A)/d\Omega^{n-1}(A)\oplus H^{n-2}_{DR}(A)\oplus H^{n-4}_{DR}(A)\oplus\ldots$

Teorema 5.5:

Si A es el anillo de funciones de una variedad no singular sobre un cuerpo de característica cero, la aplicación $\mu:A\otimes\bar{A}^{\bullet}\longrightarrow\Omega^{\bullet}(A)$ induce un isomorfismo $\mu:HC_n(A)\longrightarrow\Omega^n(A)/d\Omega^{n-1}(A)\oplus H^{n-2}_{DR}(A)\oplus H^{n-4}_{DR}(A)\oplus\ldots$

Demostración:

El morfismo de complejos dobles μ: $\mathcal{B}(A)_{norm}\longrightarrow \mathcal{D}(A)$ es un cuasi-isomorfismo en cada columna, y por lo tanto, induce un cuasi-isomorfismo de complejos totales.

6-*HOMOLOGIA CICLICA REDUCIDA*

Supongamos que el morfismo $k\longrightarrow A$ dado por la identidad de A es inyectivo. El complejo reducido de Hochschild $(A\otimes\bar{A}^{\bullet},b)_{red}$ es el complejo definido por la sucesión exacta

$$0\longrightarrow(k\otimes\bar{k}^{\bullet},b)\longrightarrow(A\otimes\bar{A}^{\bullet},b)\longrightarrow(A\otimes\bar{A}^{\bullet},b)\longrightarrow 0$$

que coincide con el complejo normalizado de Hochschild, salvo en grado cero donde reemplazamos A por $\bar{A}$. La homología de este complejo se llama homología de Hochschild reducida, y se nota $\bar{H}_n(A)$.

Proposición 6.1:

Se tiene una sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_1(A) \longrightarrow \overline{H}_1(A) \longrightarrow k \longrightarrow H_0(A) \longrightarrow \overline{H}_0(A) \longrightarrow 0$$

y $\overline{H}_n(A) = H_n(A)$ para $n \geq 2$.

Demostración:

Sea $k[0]$ el complejo

$$\ldots \longrightarrow 0 \longrightarrow 0 \longrightarrow k$$

Entonces $(k \otimes \overline{K}^{\bullet}, b) = k[0]$, y por lo tanto

$$0 \longrightarrow k[0] \longrightarrow (A \otimes \overline{A}^{\bullet}, b) \longrightarrow (A \otimes \overline{A}^{\bullet}, b)_{red} \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta. La demostración termina tomando la sucesión exacta larga de homología.

Análogamente definiremos la homología cíclica reducida $\overline{HC}_{\bullet}(A)$ como la homología del complejo total de $\mathcal{B}(A)_{red}$, definido por la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}(k)_{norm} \longrightarrow \mathcal{B}(A)_{norm} \longrightarrow \mathcal{B}(A)_{red} \longrightarrow 0$$

que coincide con $\mathcal{B}(A)_{norm}$, excepto en la diagonal, donde reemplazamos A por $\overline{A}$.

Proposición 6.2:

Se tienen sucesiones exactas largas

$$\ldots \longrightarrow HC_n(k) \longrightarrow HC_n(A) \longrightarrow \overline{HC}_n(A) \longrightarrow HC_{n-1}(k) \longrightarrow \ldots$$

$$\ldots \longrightarrow H_n(A) \xrightarrow{i} \overline{HC}_n(A) \xrightarrow{S} \overline{HC}_{n-2}(A) \xrightarrow{B} H_{n-1}(A) \xrightarrow{i} \overline{HC}_{n-1}(A) \longrightarrow \ldots$$

Demostración:

La primera se obtiene al tomar la sucesión exacta larga de homología de la sucesión exacta corta que define a $B(A)_{red}$. La segunda se consigue igual que la del Teorema 4.6, usando $B(A)_{red}$ en lugar de $B(A)$.

Proposición 6.3:

Si A es un álgebra aumentada, $HC_\bullet(A) = HC_\bullet(k) \oplus \overline{HC}_\bullet(A)$.

Demostración:

Como la sucesión exacta

$0 \longrightarrow k \longrightarrow A \longrightarrow \overline{A} \longrightarrow 0$

se parte, la sucesión exacta de complejos que define a $B(A)_{red}$ también se parte. Entonces

$0 \longrightarrow HC_\bullet(k) \longrightarrow HC_\bullet(A) \longrightarrow \overline{HC}_\bullet(A) \longrightarrow 0$

es una sucesión exacta que se parte.

Proposición 6.4:

Si $A= \bigoplus_{n\geq 0} A_n$ es un álgebra graduada y k es un cuerpo de característica cero, $HC_\bullet(A)=HC_\bullet(A_0)\oplus W_\bullet$, con $S=0$ en $W_\bullet$ ($S:HC_\bullet \longrightarrow HC_{\bullet-2}$ la aplicación de la sucesión exacta larga del Teorema 4.6).

Demostración:

Sea $D:A \longrightarrow A$, $D(a) = gr(a)a$ una derivación. Sea

$L_D:A^{\otimes^n} \longrightarrow A^{\otimes^n}$

$L_D(a_1\otimes\ldots\otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n} a_1\otimes\ldots\otimes D(a_i)\otimes\ldots\otimes a_n$

Como D es una derivación, $L_D b = bL_D$. Además, $L_D B = BL_D$ pues L_D conmuta con $(1-t)$, ε_0 y N, y $B = (1-t)\varepsilon_0 N$. Entonces L_D induce morfismos en el complejo de Hochschild y en el complejo

$\mathcal{B}(A)$. Por lo tanto, L_D induce una aplicación $L_D:HC_*(A)\longrightarrow HC_*(A)$.

Recordemos que S proviene del morfismo de complejos

$S:\mathrm{Tot}\mathcal{B}(A) \longrightarrow \mathrm{Tot}\mathcal{B}(A)[-2]$

$S:A^{\otimes^n}\otimes A^{\otimes^{n-2}}\otimes\ldots \longrightarrow A^{\otimes^{n-2}}\otimes A^{\otimes^{n-4}}\otimes\ldots$

$S(a_n,a_{n-2},\ldots) = (a_{n-2},a_{n-4},\ldots)$.

Entonces $L_DS = 0$ (Ver [G]).

Como A es un álgebra graduada, el complejo de Hochschild es bigraduado, con

$$\left(A^{\otimes^n}\right)_p = \left\{ a_1\otimes\ldots\otimes a_n \ : \sum_{i=1}^{n} gr(a_i) = p \right\}$$

Como $b:\left(A^{\otimes^n}\right)_p \longrightarrow \left(A^{\otimes^{n-1}}\right)_p$ y $B:\left(A^{\otimes^n}\right)_p \longrightarrow \left(A^{\otimes^{n+1}}\right)_p$, tenemos:

$HC_*(A) = \bigoplus_{p\geq 0} HC_*(A)_p$

$HC_*(A_0) = HC_*(A)_0$

$S:HC_*(A)_p \longrightarrow HC_{*-2}(A)_p$

Además,

$L_D(a_1\otimes\ldots\otimes a_n) = \left(\sum gr(a_i)\right) a_1\otimes\ldots\otimes a_n$

$L_D:\left(A^{\otimes^n}\right)_p \longrightarrow \left(A^{\otimes^n}\right)_p$ para todo $p\geq 0$

Si $p = \sum gr(a_i)$ es distinto de cero, L_D es un isomorfismo en $\left(A^{\otimes^n}\right)_p$, y por lo tanto, induce un isomorfismo en $HC_*(A)_p$. Como $L_DS:HC_*(A)_p\longrightarrow HC_{*-2}(A)_p$ es cero, S es cero en cada $HC_*(A)_p$, para p distinto de cero . Entonces S es cero en $W = \bigoplus_{p>0} HC_*(A)_p$.

CAPITULO 2

1-*SERIES DE TAYLOR*

Sea k un anillo conmutativo con unidad, $f=\sum f_{i_1\dots i_n}X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}$ un polinomio en $k[X_1,\dots,X_n]$ y un orden definido en $\mathbf{N}_0^n$ que satisface:

i) $(i_1,\dots,i_n) \ll (i'_1,\dots,i'_n)$ si $i_k\le i'_k$ $(1\le k\le n)$

ii) $(i_1+i''_1,\dots,i_n+i''_n) \ll (i'_1+i''_1,\dots,i'_n\ i''_n)$ para cualquier n-upla $(i''_1,\dots,i''_n)$ si $(i_1,\dots,i_n) \ll (i'_1,\dots,i'_n)$.

Ejemplos:

1) Sean $a_1,\dots,a_n$ números reales positivos, y sea σ una permutación de $\{1,\dots,n\}$. El orden $\ll$ definido por: "$(i_1,\dots,i_n)\ll$ $\ll (i'_1,\dots,i'_n)$ $\Leftrightarrow$ $\sum a_k i_k < \sum a_k i'_k$, ó $\sum a_k i_k = \sum a_k i'_k$ y existe $s\in\{1,..,n\}$ tal que $i_{\sigma(m)}=i'_{\sigma(m)}$ para $m\le s$ y $i_{\sigma(s)}< i'_{\sigma(s)}$ verifica las condiciones i) y ii).

2) El orden lexicográfico y el orden diagonal son casos particulares del ejemplo anterior, tomando $\sigma=id$, $a_1=\dots=a_n=0$ y $\sigma=id$, $a_1=\dots=a_n=1$ respectivamente.

Definición 1.1:

Un polinomio $f=\sum f_{i_1\dots i_n}X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}$ se dice mónico de grado $(j_1,\dots,j_n)$ con respecto a un orden $\ll$, si:

a) $f_{j_1\dots j_n}=1$

b) $f_{i_1\dots i_n}=0$ si $(j_1,\dots,j_n)\ll(i_1,\dots,i_n)$ y $(j_1,\dots,j_n)\ne(i_1,\dots,i_n)$.

De ahora en más, f denotará un polinomio mónico con respecto a un orden fijo $\ll$, de grado $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, con $\gamma_n \geq 1$.

Observación 1.2:

$A = k[X_1,\ldots,X_n]/\langle f\rangle$ es un k-módulo libre porque dado $P \in k[X_1,\ldots,X_n]$, existen polinomios $\overline{P}$ y $\dddot{P}$ en $k[X_1,\ldots,X_n]$, unívocamente determinados tales que:

i) $P = \overline{P}f+\dddot{P}$

ii) $\dddot{P}_{i_1\ldots i_n}=0$ si $X_1^{\gamma_1}\ldots X_n^{\gamma_n}$ divide a $X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n}$.

Sea $A'= k[X_1,\ldots,X_n]$. Usaremos el desarrollo en series de Taylor $T:A' \longrightarrow A'^e$ dado por $T(P) = 1\otimes P - P\otimes 1$, estudiado en [M-V].

Es obvio que para cualquier polinomio P en A', T(P) se puede escribir como un polinomio en $k[X_1,\ldots,X_n,T(X_1),\ldots,T(X_n)]$, donde los coeficientes de $T(X_i)$ son los coeficientes clásicos en la serie de Taylor.

Definición 1.3:

Dado un polinomio P en $k[X_1,\ldots,X_n]$, llamamos $T_j(P)$ a la suma de todos los monomios de T(P) que son múltiplos de $T(X_j)$ pero no de $T(X_i)$, para $i<j$, es decir,

$$T_j(P)=\sum_{i_j\geq 1, i_{j+1},\ldots,i_n} \frac{1}{i_j!\ldots i_n!}\cdot\frac{\partial P}{\partial X_j^{i_j}\ldots\partial X_n^{i_n}}.T(X_j)^{i_j}\ldots T(X_n)^{i_n} \quad , \quad 1\leq j\leq n$$

Proposición 1.4:

En A^e se verifican las siguientes igualdades:

a) $\sum_{i=1}^{n} T_i(P) = T(P) = 1\otimes P - P\otimes 1$

b) T_i es k-lineal, para $1 \le i \le n$.

c) $T(PQ) = (P\otimes 1)T(Q)+(Q\otimes 1)T(P)+T(P)T(Q)$

d) $T_i(PQ)= (P\otimes 1)T_i(Q)+(Q\otimes 1)T_i(P)+ \sum_{j\ge i} T_j(P)T_i(Q)+ \sum_{j>i} T_i(P)T_j(Q)$

e) $T_i(\overline{\overline{P}Q})= T_i(PQ)-(\overline{PQ}\otimes 1)T_i(f)- \sum_{j>i} T_j(\overline{PQ})T_i(f)+ \sum_{j<i} T_i(\overline{PQ})T_j(f)$

f) $T_i\left(\overline{\overline{\overline{P}}Q}\right)=T_i(\overline{PQ})-(\overline{P}\otimes 1)T_i(Q)-(Q\otimes 1)T_i(\overline{P})- \sum_{j\ge i} T_j(\overline{P})T_i(Q)- \sum_{j>i} T_i(\overline{P})T_j(Q)$

g) Si $f = \sum f_{i_1\ldots i_n} X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n}$,

$$\frac{T_m(f)}{T(X_m)} = \sum_{i_1,\ldots,i_n} \sum_{k=0}^{i_m-1} f_{i_1\ldots i_n} X_1^{i_1}\ldots X_m^{k}\otimes X_m^{i_m-k-1} X_{m+1}^{i_{m+1}}\ldots X_n^{i_n}.$$

Demostración:

a),b) y c) son inmediatos.

d) Sea $T_{(j,n)}(P) = \sum_{i=j}^{n} T_i(P)$ para $1 \le j \le n$, y pensemos a P y Q como polinomios en $k[X_1,\ldots,X_{j-1}][X_j,\ldots,X_n]$, es decir, polinomios en $X_j,\ldots,X_n$ con coeficientes en $k[X_1,\ldots,X_{j-1}]$.

Entonces $T_{(j,n)}$ es el operador T definido de

$k[X_1,\ldots,X_{j-1}][X_j,\ldots,X_n]$

en

$k[X_1,\ldots,X_{j-1}][X_j,\ldots,X_n]\otimes_{k[X_1,\ldots,X_{j-1}]} k[X_1,\ldots,X_{j-1}][X_j,\ldots,X_n]^{op}$.

Por lo tanto verifica c) :

$T_{(j,n)}(PQ)=(P\otimes 1)T_{(j,n)}(Q)+(Q\otimes 1)T_{(j,n)}(P)+T_{(j,n)}(P)T_{(j,n)}(Q)$

Como $T_i= T_{(i,n)}- T_{(i+1,n)}$, tenemos que

$T_i(PQ)= T_{(i,n)}(PQ) - T_{(i+1,n)}(PQ) =$

$=(P\otimes 1)T_i(Q)+(Q\otimes 1)T_i(Q)+T_{(i,n)}(P)T_{(i,n)}(Q)-T_{(i+1,n)}(P)T_{(i+1,n)}(Q)$

Pero

$T_{(i,n)}(P)T_{(i,n)}(Q)-T_{(i+1,n)}(P)T_{(i+1,n)}(Q)=$

$=T_{(i,n)}(P)\left(T_i(Q)+T_{(i+1,n)}(Q)\right)-T_{(i+1,n)}(P)T_{(i+1,n)}(Q)=$

$=T_{(i,n)}(P)T_i(Q)+\left(T_{(i,n)}(P)-T_{(i+1,n)}(P)\right)T_{(i+1,n)}(Q)=$

$=T_{(i,n)}(P)T_i(Q)+T_i(P)T_{(i+1,n)}(Q)=\sum\limits_{j\geq i} T_j(P)T_i(Q) + \sum\limits_{j>i} T_i(P)T_j(Q)$

e) Como $\overline{\overline{PQ}}=PQ-\overline{PQ}.f$, usando d) se tiene que

$T_i(\overline{\overline{PQ}}) = T_i(PQ) - (\overline{PQ}\otimes 1)T_i(f) - (f\otimes 1)T_i(\overline{PQ}) - \sum\limits_{j>i} T_j(\overline{PQ})T_i(f) -$

$- \sum\limits_{j\geq i} T_i(\overline{PQ})T_j(f)$

Como $f\otimes 1$ y $T(f)$ son cero en A^e, $\sum\limits_{j\geq i} T_j(f)= - \sum\limits_{j>i} T_j(f)$. Entonces

$T_i(\overline{\overline{PQ}})= T_i(PQ)-(\overline{PQ}\otimes 1)T_i(f)- \sum\limits_{j>i} T_j(\overline{PQ})T_i(f)+ \sum\limits_{j<i} T_i(\overline{PQ})T_j(f)$

f) Como $\overline{\overline{P}}=P-\overline{P}.f$, $\overline{\overline{\overline{P}}Q} = \overline{PQ}-\overline{\overline{P}Qf} = \overline{PQ}-\overline{P}Q$. Ahora basta usar d) en $\overline{PQ}-\overline{P}Q$.

g) Como T_m es k-lineal, si $f = \sum f_{i_1 \ldots i_n} X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n}$, entonces

$$\frac{T_m(f)}{T(X_m)} = \sum f_{i_1\ldots i_n}\frac{T_m(X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n})}{T(X_m)}$$

y por lo tanto, basta calcular $T_m(X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n})$. Si aplicamos d) al producto $(X_1^{i_1}\ldots X_{m-1}^{i_{m-1}})(X_m^{i_m}\ldots X_n^{i_n})$, tenemos que

$T_m(X_1^{i_1}\ldots X_n^{i_n}) = (X_1^{i_1}\ldots X_{m-1}^{i_{m-1}}\otimes 1)\ T_m(X_m^{i_m}\ldots X_n^{i_n})$

porque como $X_1^{i_1}\ldots X_{m-1}^{i_{m-1}}\in k[X_1,\ldots,X_{m-1}]$, $T_j(X_1^{i_1}\ldots X_{m-1}^{i_{m-1}})=0$ si $j\geq m$.

Ahora aplicamos d) al producto $X_m^{i_m}(X_{m+1}^{i_{m+1}}\dots X_n^{i_n})$. Como $T_j(X_{m+1}^{i_{m+1}}\dots X_n^{i_n})= 0$ para todo $j\le m$, tenemos que

$$T_m(X_m^{i_m}\dots X_n^{i_n})=(X_{m+1}^{i_{m+1}}\dots X_n^{i_n}\otimes 1)T_m(X_m^{i_m})+\sum_{l>m} T_m(X_m^{i_m})T_l(X_{m+1}^{i_{m+1}}\dots X_n^{i_n}) =$$

$$=T_m(X_m^{i_m})\;(X_{m+1}^{i_{m+1}}\dots X_n^{i_n}\otimes 1 + T(X_{m+1}^{i_{m+1}}\dots X_n^{i_n}))=T_m(X_m^{i_m})\;(1\otimes X_{m+1}^{i_{m+1}}\dots X_n^{i_n}).$$

Entonces

$$T_m(X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}) = (X_1^{i_1}\dots X_{m-1}^{i_{m-1}}\otimes 1)\; T_m(X_m^{i_m})\; (1\otimes X_{m+1}^{i_{m+1}}\dots X_n^{i_n})$$

Basta observar entonces que

$$\frac{T_m(X_m^{i_m})}{T(X_m)} = \frac{1\otimes X_m^{i_m} - X_m^{i_m}\otimes 1}{1\otimes X_m - X_m\otimes 1} = \sum_{k=0}^{i_m-1} X_m^k\otimes X_m^{i_m-k-1}$$

2-*LA RESOLUCION Rs(A)*

Sea k un anillo conmutativo con unidad, f un polinomio mónico en $k[X_1,\dots,X_n]$, $A = k[X_1,\dots,X_n]/\langle f\rangle$ y $A^e=A\otimes_k A^{op}$.

Definición 2.1:

Dado un anillo D se llama álgebra de potencias divididas al módulo libre sobre D con base $t^{(i)}$, $i\in\mathbb{N}_0$, con un producto dado por

$$t^{(i)}.t^{(j)} = \binom{i+j}{j} t^{(i+j)}= \frac{(i+j)!}{i!j!}\; t^{(i+j)}$$

Observación:

Si D es un anillo de característica cero, el álgebra de potencias divididas de D es isomorfa al anillo de polinomios $D[X]$

(basta identificar $t^{(i)}$ con $\frac{X^i}{i!}$).

Sea $D(A)$ el álgebra exterior sobre A^e del A^e-módulo libre $A^e e_1 \oplus \ldots \oplus A^e e_n$, y sea $Rs(A)$ el álgebra de potencias divididas de $D(A)$.

$Rs(A)$ es una A^e-álgebra graduada estrictamente anticonmutativa, con $gr(e_i) = 1$ y $gr(t^{(j)}) = 2j$.

Definición 2.2:

Sea $d_\bullet : Rs(A)_\bullet \longrightarrow Rs(A)_{\bullet-1}$ una derivación definida por

$$d_1(e_i) = T(X_i)$$

$$d_{2i}(t^{(i)}) = t^{(i-1)} d_2(t) = t^{(i-1)} \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i(f)}{T(X_i)} e_i$$

Es fácil ver que $d^2=0$. Entonces $Rs(A) = \oplus Rs(A)_m$ es un álgebra diferencial graduada estrictamente anticonmutativa, y $Rs(A)_m$ es el A^e-módulo libre con base

$$\{e_{i_1 \ldots i_{m-2q}} t^{(q)} = e_{i_1} \wedge e_{i_2} \wedge \ldots \wedge e_{i_{m-2q}} t^{(q)}, 0 \leq q \leq [m/2], 1 \leq i_1 < \ldots < i_{m-2q} \leq n\}.$$

Solo falta ver que $Rs(A)$ es una A^e-resolución libre de A, y para esto definiremos morfismos de complejos

$$Rs(A) \underset{g}{\overset{h}{\rightleftarrows}} (A \otimes \overline{A}^{\otimes^\bullet} \otimes A, b')$$

tales que $g_\bullet h_\bullet = id$ y $h_0 = g_0 = id_{A^e}$. Entonces $Rs(A)$ resultará ser un sumando directo de la resolución standard normalizada de Hochschild, y por lo tanto, exacta.

Observación 2.3:

El álgebra exterior $D(A)$ con la derivación d es el complejo de Koszul $K_\bullet[A^e,T(X_1),\ldots,T(X_n)]$ definido en la Sección 3 del Capítulo 1, y $Rs(A)$ se obtiene a partir de él "matando" el ciclo $\sum_{i=1}^{n} \frac{T_i(f)}{T(X_i)} e_i$, con el método dado por Tate en [T].

3-*DEFINICION DE* $h_\bullet$

En esta sección vamos a definir el morfismo

h: $Rs(A) \longrightarrow (A\otimes\overline{A}^{\otimes^\bullet}\otimes A,b')$.

Definición 3.1:

Sea $\square$ $:(A\otimes\overline{A}^{\otimes^p}\otimes A,b')\mathrm{x}(A\otimes\overline{A}^{\otimes^p}\otimes A,b') \longrightarrow (A\otimes\overline{A}^{\otimes^{(p+q)}}\otimes A,b')$ definido por

$(a\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_p\otimes b)\square(a'\otimes a_{p+1}\otimes\ldots\otimes a_{p+q}\otimes b')=$

$= \sum_{B'_{p,q}} \mathrm{sgn}(\sigma)aa'\otimes a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(p+q)}\otimes bb'$

donde $B'_{p,q}$ es el conjunto de las permutaciones σ de $\{1,2,..,p+q\}$ tales que $\sigma(1)=1$, $\sigma(2)<\ldots<\sigma(p)$ y $\sigma(p+1)<\ldots<\sigma(p+q)$.

Observación 3.2:

Si $*$ es el producto barajado definido en la Sección 2 del Capítulo 1, y $\alpha_i\in A\otimes\overline{A}^{\otimes^{p_i}}\otimes A$, valen las siguientes igualdades:

i) $\alpha_1*\alpha_2= \alpha_1\square\alpha_2 + (-1)^{p_1p_2}\alpha_2\square\alpha_1$

ii) $(\alpha_1\square\alpha_2)\square\alpha_3= \alpha_1\square(\alpha_2\square\alpha_3) + (-1)^{p_2p_3}\alpha_1\square(\alpha_3\square\alpha_2)$

iii) $\varepsilon_0(\alpha_1*\varepsilon_0(\alpha_2)) = \varepsilon_0(\alpha_1)\square\varepsilon_0(\alpha_2)$

Definición 3.3:

Si $\alpha \in A\otimes\bar{A}^{\otimes^p}\otimes A$, definimos $\alpha^{(n)}$, para $n\geq 0$, en forma inductiva, de la siguiente manera:

$\alpha^{(0)} = 1$

$\alpha^{(n+1)} = \alpha\square\alpha^{(n)}$

Proposición 3.4:

Si $\alpha \in A\otimes\bar{A}^{\otimes^{2p}}\otimes A$, tenemos

i) $\alpha^{(m)}\square\,\alpha^{(n)} = \binom{n+m-1}{m-1}\,\alpha^{(n+m)}$

ii) $\alpha^{(m)}\star\,\alpha^{(n)} = \binom{n+m}{m}\,\alpha^{(n+m)}$

Demostración:

i) Por inducción en m . Si $m=1$, es obvio. Usando la Observación 3.2)ii), tenemos:

$\alpha^{(m+1)}\square\alpha^{(n)} = (\alpha\square\alpha^{(m)})\square\alpha^{(n)} = \alpha\square(\alpha^{(m)}\square\alpha^{(n)}) + \alpha\square(\alpha^{(n)}\square\alpha^{(m)})$

Por la hipótesis inductiva, tenemos:

$$\alpha^{(m+1)}\square\alpha^{(n)} = \left(\binom{n+m-1}{m-1}+\binom{n+m-1}{n-1}\right)\alpha^{(n+m+1)} = \binom{n+m}{m}\alpha^{(n+m+1)}$$

ii) Usando la Observación 3.2)i), tenemos:

$$\alpha^{(m)}\star\alpha^{(n)}=\alpha^{(m)}\square\alpha^{(n)}+\alpha^{(n)}\square\alpha^{(m)}=\left(\binom{n+m-1}{m-1}+\binom{n+m-1}{n-1}\right)\alpha^{(n+m)}=\binom{n+m}{m}\alpha^{(n+m)}.$$

Observación 3.5:

Notaremos con el mismo símbolo $\square$ al producto inducido por $\square$ en el complejo normalizado de Hochschild $(A\otimes\bar{A}^{\otimes^{\bullet}},b)$, el cual verifica propiedades análogas.

Sea $h_m\colon Rs(A)_m \longrightarrow A\otimes\bar{A}^{\otimes^m}\otimes A$ el morfismo de A^e-álgebras definido por $h_1(e_i)= -1\otimes X_i\otimes 1$

$$h_2(t)= \varepsilon_0\left(-\sum_{m=1}^{n}\frac{T_m(f)}{T(X_m)}(1\otimes X_m\otimes 1)\right)$$

$$h_{2i}(t^{(i)})=h_2(t)^{(i)}$$

Efectivamente, h_* es un morfismo de A^e-álgebras, pues

$$h_{2(i+j)}(t^{(i)}.t^{(j)}) = \binom{i+j}{j}h_{2(i+j)}(t^{(i+j)}) = \binom{i+j}{j}h_2(t)^{(i+j)} =$$

$$= h_{2i}(t^{(i)})*h_{2j}(t^{(j)})$$

Proposición 3.6:

h: $Rs(A) \longrightarrow (A\otimes\overline{A}^{\otimes^*}\otimes A,b')$ es un morfismo de complejos.

Demostración:

Como d y b' son derivaciones, es suficiente probar que hd=b'h en los generadores e_i y $t^{(q)}$:

a) $hd(e_i)= b'h(e_i)$ pues

$h_0d_1(e_i)= h_0(T(X_i))= T(X_i)= b'(-1\otimes X_i\otimes 1)= b'h_1(e_i)$.

b) Veamos que $hd(t^{(q)})=b'h(t^{(q)})$, usando inducción en q. Si q=0 es trivial. Sea q>0. Usando la Observación 3.2)iii), se tiene

$$h_{2q}(t^{(q)}) = h_2(t)^{(q)}= h_2(t)\square h_2(t)^{(q-1)} =$$

$$= \varepsilon_0\left(\left(-\sum_{m=1}^{n}\frac{T_m(f)}{T(X_m)}(1\otimes X_m\otimes 1)\right)*h_2(t)^{(q-1)}\right) =$$

$$= \varepsilon_0 h_{2q-1}\left(\sum_{m=1}^{n}\frac{T_m(f)}{T(X_m)}\, e_m t^{(q-1)}\right) = \varepsilon_0 h_{2q-1}d_{2q}(t^{(q)})$$

Por la hipótesis inductiva, sabemos que

$$b'h_{2q-1}d_{2q}(t^{(q)})= h_{2q-2}d_{2q-1}d_{2q}(t^{(q)})=0$$

Entonces,

$$b'h_{2q}(t^{(q)}) = b'\varepsilon_0 h_{2q-1}d_{2q}(t^{(q)}) = (id-\varepsilon_0 b')h_{2q-1}d_{2q}(t^{(q)}) =$$
$$= h_{2q-1}d_{2q}(t^{(q)})$$

4-*DEFINICION DE g*

Para construir las aplicaciones $g_m : A\otimes\overline{A}^{\otimes^m}\otimes A \longrightarrow Rs(A)_m$, necesitamos definir primero los siguientes A^e-morfismos:

Definición 4.1:

i) Sea $\varphi^s_{i_k\ldots i_1} : A\otimes\overline{A}^{\otimes^k}\otimes A \longrightarrow A\otimes A$ (para $1\le i_1<\ldots<i_k\le n, 0\le s\le[k/2]$) el A^e-morfismo definido por

$$\varphi^0_{i_k\ldots i_1}(1\otimes P_k\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1) = \prod_{j=1}^{k} \frac{T_{i_j}(P_j)}{T(X_{i_j})}$$

$$\varphi^s_{i_k\ldots i_1}(1\otimes P_k\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1) = \sum_{j=2}^{k-2(s-1)} \sum_{h=1}^{j-1} (-1)^{j+h} \varphi^{s-1}_{i_k\ldots i_{j+1}}(1\otimes P_k\otimes\ldots\otimes P_{j+1}\otimes 1)\cdot$$
$$\cdot\frac{T_{i_j}(\overline{P_j P_{j-1}})}{T(X_{i_j})}\cdot\varphi^0_{i_{j-1}\ldots i_1}(1\otimes P_{j-2}\otimes\ldots\otimes P_h\otimes f\otimes P_{h-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)$$

ii) Sea $\varphi_{i_k\ldots i_1} : A\otimes\overline{A}^{\otimes^k}\otimes A \longrightarrow A\otimes A$ el A^e-morfismo definido por

$$\varphi_{i_k\ldots i_1}(1\otimes P_k\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1) = \sum_{s=0}^{[k/2]} \varphi^s_{i_k\ldots i_1}(1\otimes P_k\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)$$

iii) Sea $\blacksquare : Rs(A)_m\otimes A^e t \longrightarrow Rs(A)_{m+2}$ la aplicación A^e-lineal definida por $e_{i_1\ldots i_{m-2k}} t^{(k)}\blacksquare t = e_{i_1\ldots i_{m-2k}} t^{(k+1)}$.

Ahora estamos listos para definir el morfismo

$g:(A\otimes\overline{A}^{\otimes^{\bullet}}\otimes A,b') \longrightarrow Rs(A).$

Definición 4.2:

Sea $g_m:(A\otimes\overline{A}^{\otimes^m}\otimes A,b') \longrightarrow Rs(A)_m$ el A^e-morfismo definido por:

$g_0=id$

$$g_1(1\otimes P\otimes 1)= -\sum_{i=1}^{n}\varphi_i(1\otimes P\otimes 1)e_i= -\sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(P)}{T(X_i)}\, e_i$$

$$g_m(1\otimes P_m\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1) = -(\overline{P_mP_{m-1}}\otimes 1)g_{m-2}(1\otimes P_{m-2}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t +$$

$$+(-1)^{[(m+1)/2]}\sum_{i_1<\ldots<i_m}\varphi_{i_m\ldots i_1}(1\otimes P_m\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1).e_{i_1\ldots i_m}$$

Observación 4.3:

Es fácil ver que

$$g_m(1\otimes P_m\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)= (-1)^{[(m+1)/2]}\sum_{k=0}^{[m/2]}\Bigg(\prod_{j=1}^{k}(\overline{P_{m-2j+2}P_{m-2j+1}}\otimes 1).$$

$$.\sum_{i_1<\ldots<i_{m-2k}}\varphi_{i_{m-2k}\ldots i_1}(1\otimes P_{m-2k}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1).e_{i_1\ldots i_{m-2k}}\, t^{(k)}\Bigg)$$

Observación 4.4:

Usando la Observación anterior, se ve claramente que

$$d_{m+2}(g_m(1\otimes P_m\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t)= d_m g_m(1\otimes P_m\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t +$$

$$+(-1)^{m+1}(-1)^{[(m+1/2]}\sum_{i_1<\ldots<i_m}\varphi_{i_m\ldots i_1}(1\otimes P_m\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)e_{i_1\ldots i_m}\sum_{j=1}^{n}\frac{T_j(f)}{T(X_j)}e_j$$

Teorema 4.5:

$g_\bullet:(A\otimes\overline{A}^{\otimes^{\bullet}}\otimes A,b') \longrightarrow Rs(A)$ es un morfismo de complejos.

Demostración:

Tenemos que probar la conmutatividad de los cuadrados

$$\begin{array}{ccc} A\otimes\overline{A}^{\otimes^{m+1}}\otimes A & \xrightarrow{\quad g_{m+1}\quad} & Rs(A)_{m+1} \\ \Big\downarrow b' & & \Big\downarrow d_{m+1} \\ A\otimes\overline{A}^{\otimes^{m}}\otimes A & \xrightarrow{\quad g_{m}\quad} & Rs(A)_{m} \end{array} \qquad m\geq 0$$

y lo haremos por inducción en m. Si $m=0$, tenemos:

$$d_1 g_1(1\otimes P\otimes 1) = -\sum_{i=1}^{n} T_i(P) = P\otimes 1 - 1\otimes P = b'(1\otimes P\otimes 1) = g_0 b'(1\otimes P\otimes 1).$$

Sea $m>0$, y supongamos que para todo $k<m$, $d_{k+1}g_{k+1}=g_k b'$. Veamos que $d_{m+1}g_{m+1}=g_m b'$.

Sabemos que

$$d_{m+1}g_{m+1}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)=d_{m+1}\Big(-(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)g_{m-1}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t+$$

$$+ (-1)^{[(m+2)/2]}\sum_{i_1<\ldots<i_{m+1}} \varphi_{i_{m+1}\ldots i_1}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\; e_{i_1\ldots i_{m+1}}\Big)=$$

$$=-(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)d_{m-1}g_{m-1}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t+(-1)^{m+1}(-1)^{[m/2]}(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1).$$

$$.\sum_{i_1<\ldots<i_{m-1}} \varphi_{i_{m-1}\ldots i_1}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\; e_{i_1\ldots i_{m-1}} \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{T_j(f)}{T(X_j)}\, e_j \; +$$

$$+(-1)^{[(m+2)/2]}\sum_{i_1<\ldots<i_{m+1}} \varphi_{i_{m+1}\ldots i_1}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)d_{m+1}(e_{i_1\ldots i_{m+1}})$$

Por otro lado,

$$b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1) =$$

$$= (P_{m+1}\otimes 1)(1\otimes P_m\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1) - (1\otimes\overline{P_{m+1}P_m}\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1) +$$

$$+ (1\otimes P_{m+1}\otimes\overline{P_m P_{m-1}}\otimes P_{m-2}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1) - 1\otimes P_{m+1}\otimes P_m\otimes b'(P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)$$

Entonces

$$g_m b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1) =$$

$$= -(P_{m+1}\otimes 1)(\overline{P_m P_{m-1}}\otimes 1)g_{m-2}(1\otimes P_{m-2}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t +$$

$$+ \left(\overline{\overline{P_{m+1}P_m}P_{m-1}}\otimes 1\right)g_{m-2}(1\otimes P_{m-2}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t -$$

$$- \left(\overline{P_{m+1}\overline{P_m P_{m-1}}}\otimes 1\right)g_{m-2}(1\otimes P_{m-2}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t +$$

$$+ (\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)g_{m-2}(1\otimes b'(P_{m-1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1))\blacksquare t +$$

$$+ (-1)^{[(m+1)/2]}\sum_{i_1<\dots<i_m} \varphi_{i_m\dots i_1}\, b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)\; e_{i_1\dots i_m}$$

Como

$$(P_{m+1}\otimes 1)(\overline{P_m P_{m-1}}\otimes 1)-\left(\overline{\overline{P_{m+1}P_m}P_{m-1}}\otimes 1\right)+\left(\overline{P_{m+1}\overline{P_m P_{m-1}}}\otimes 1\right)=(P_{m+1}\overline{P_m P_{m-1}}\otimes 1)-$$

$$-(\overline{P_{m+1}P_m P_{m-1}}\otimes 1)+(\overline{P_{m+1}P_m}P_{m-1}\otimes 1)+(\overline{P_{m+1}P_m P_{m-1}}\otimes 1)-(P_{m+1}\overline{P_m P_{m-1}}\otimes 1)=$$

$$= (\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)(P_{m-1}\otimes 1)$$

tenemos que

$$g_m b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)=-(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)(P_{m-1}\otimes 1)g_{m-2}(1\otimes P_{m-2}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t+$$

$$+(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)g_{m-2}(1\otimes b'(P_{m-1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1))\blacksquare t+$$

$$+(-1)^{[(m+1)/2]}\sum_{i_1<\dots<i_m}\varphi_{i_m\dots i_1}\, b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)\; e_{i_1\dots i_m}=$$

$$=-(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)g_{m-2}b'(1\otimes P_{m-1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1))\blacksquare t+$$

$$+(-1)^{[(m+1)/2]}\sum_{i_1<\dots<i_m}\varphi_{i_m\dots i_1}\, b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)\; e_{i_1\dots i_m}$$

Usando la hipótesos inductiva, $g_m b'=d_{m+1}g_{m+1}$ si y sólo si

$$\sum_{i_1<\ldots<i_{m+1}} \varphi_{i_m\ldots i_1} b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\ e_{i_1\ldots i_m} =$$

$$=-(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\sum_{i_1<..<i_{m-1}} \varphi_{i_{m-1}..i_1}(1\otimes P_{m-1}\otimes..\otimes P_1\otimes 1)\sum_{j=1}^{n}\frac{T_j(f)}{T(X_j)}\ e_{i_1..i_{m-1}j}+$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{i_1<\ldots<i_{m+1}} \varphi_{i_{m+1}\ldots i_1}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\ d_{m+1}(e_{i_1\ldots i_{m+1}})$$

Como los elementos $e_{i_1\ldots i_r}$ son linealmente independientes, es suficiente verificar las igualdades de los coeficientes correspondientes, esto es:

$$\varphi_{i_m\ldots i_1} b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1) =$$

$$=-(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\ \sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k}\varphi_{i_m\ldots\hat{i}_k\ldots i_1}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\ \frac{T_{i_k}(f)}{T(X_{i_k})}\ +$$

$$+(-1)^m\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{i_j<h<i_{j+1}} \varphi_{i_m\ldots i_{j+1}h i_j\ldots i_1}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)T(X_h)+$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{h<i_1}\varphi_{i_m\ldots i_1 h}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1).T(X_h)$$

Su demostración, que es larga y tediosa, se encuentra al final, en el Apéndice.

5-*EXACTITUD DE Rs(A)*

Solo falta ver que $g_\bullet h_\bullet$=id, porque en este caso Rs(A) es un sumando directo de la resolución standard normalizada de Hochschild, y por lo tanto, es exacta.

Lema 5.1:

$$\varphi_{i_k\ldots i_1}\Big((1\otimes a\otimes 1)*(1\otimes P_{k-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\Big) =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r+k} \frac{T_{i_r}(a)}{T(X_{i_r})} \varphi_{i_{k-1}\cdots}\ \ {}_{\cdots i_1}(1 \otimes P_{k-1} \otimes \cdots \otimes P_1 \otimes 1)$$

Demostración:

Como $\varphi_{i_k \ldots i_1} = \sum_h \varphi^h_{i_k \ldots i_1}$, es suficiente probar el lema para $\varphi^h_{i_k \ldots i_1}$, y esto lo haremos por inducción en h .

Sea $h=0$. Como

$$(1 \otimes a \otimes 1) * (1 \otimes P_{k-1} \otimes \cdots \otimes P_1 \otimes 1) = \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r+k} (1 \otimes P_{k-1} \otimes \cdots \otimes P_r \otimes a \otimes P_{r-1} \otimes \cdots \otimes P_1 \otimes 1)$$

tenemos

$$\varphi^0_{i_k \ldots i_1}\Big((1 \otimes a \otimes 1) * (1 \otimes P_{k-1} \otimes \cdots \otimes P_1 \otimes 1)\Big) =$$

$$= \sum_{r=1}^{k} (-1)^{r+k} \frac{T_{i_r}(a)}{T(X_{i_r})} \varphi^0_{i_k \ldots \hat{i}_r \ldots i_1}(1 \otimes P_{k-1} \otimes \cdots \otimes P_1 \otimes 1)$$

Supongamos ahora que el lema es cierto para $h-1$. Usando la definición de $\varphi^h_{i_k \ldots i_1}$, tenemos:

$$\varphi^h_{i_k \ldots i_1}\Big((1 \otimes a \otimes 1) * (1 \otimes P_{k-1} \otimes \cdots \otimes P_1 \otimes 1)\Big) =$$

$$= \sum_{j=2}^{k-1-2(h-1)} \sum_{s=1}^{j-1} (-1)^{j+s} \varphi^{h-1}_{i_k \ldots i_{j+1}}\Big((1 \otimes a \otimes 1) * (1 \otimes P_{k-1} \otimes \cdots \otimes P_{j+1} \otimes 1)\Big) .$$

$$\cdot \frac{T_{i_j}(\overline{P_j P_{j-1}})}{T(X_{i_j})} \cdot \varphi^0_{i_{j-1} \ldots i_1} (1 \otimes P_{j-2} \otimes \cdots \otimes P_s \otimes f \otimes P_{s-1} \otimes \cdots \otimes P_1 \otimes 1) +$$

$$+ \sum_{j=3}^{k-2(h-1)} \sum_{s=1}^{j-2} (-1)^{k+s} \varphi^{h-1}_{i_k \ldots i_{j+1}} (1 \otimes P_{k-1} \otimes \cdots P_j \otimes 1) \frac{T_{i_j}(\overline{P_{j-1} P_{j-2}})}{T(X_{i_j})} .$$

$$\cdot \varphi^0_{i_{j-1} \ldots i_1}\Big((1 \otimes a \otimes 1) * (1 \otimes P_{j-3} \otimes \cdots \otimes P_s \otimes f \otimes P_{s-1} \otimes \cdots \otimes P_1 \otimes 1)\Big)$$

Usando la hipótesis inductiva, tenemos:

$$\varphi^{h}_{i_k\ldots i_1}\big((1\otimes a\otimes 1)*(1\otimes P_{k-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\big)=$$

$$=\sum_{j=2}^{k-1-2(h-1)}\sum_{s=1}^{j-1}(-1)^{j+s}\sum_{r=j+1}^{k}(-1)^{r+k}\frac{T_{i_r}(a)}{T(X_{i_r})}\cdot$$

$$\cdot\varphi^{h-1}_{i_k\ldots\hat{i}_r\ldots i_1}(1\otimes P_{k-1}\otimes\ldots\otimes P_{j+1}\otimes 1)\frac{T_{i_j}(\overline{P_jP_{j-1}})}{T(X_{i_j})}\cdot$$

$$\cdot\varphi^{0}_{i_{j-1}\ldots i_1}(1\otimes P_{j-2}\otimes\ldots\otimes P_s\otimes f\otimes P_{s-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\ +$$

$$+\sum_{j=3}^{k-2(h-1)}\sum_{s=1}^{j-2}(-1)^{k+s}\sum_{r=1}^{j-1}(-1)^{r+j-1}\frac{T_{i_r}(a)}{T(X_{i_r})}\cdot$$

$$\cdot\varphi^{h-1}_{i_k\ldots i_{j+1}}(1\otimes P_{k-1}\otimes\ldots\otimes P_j\otimes 1)\frac{T_{i_j}(\overline{P_{j-1}P_{j-2}})}{T(X_{i_j})}\cdot$$

$$\cdot\varphi^{0}_{i_{j-1}\ldots\hat{i}_r\ldots i_1}(1\otimes P_{j-3}\otimes\ldots\otimes P_s\otimes f\otimes P_{s-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\ =$$

$$=\sum_{j=2}^{k-1-2(h-1)}\sum_{s=1}^{j-1}(-1)^{j+s}\sum_{r=j+1}^{k}(-1)^{r+k}\frac{T_{i_r}(a)}{T(X_{i_r})}\cdot$$

$$\cdot\varphi^{h-1}_{i_k\ldots\hat{i}_r\ldots i_{j+1}}(1\otimes P_{k-1}\otimes\ldots\otimes P_{j+1}\otimes 1)\frac{T_{i_j}(\overline{P_jP_{j-1}})}{T(X_{i_j})}\cdot$$

$$\cdot\varphi^{0}_{i_{j-1}\ldots i_1}(1\otimes P_{j-2}\otimes\ldots\otimes P_s\otimes f\otimes P_{s-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\ +$$

$$+\sum_{j=2}^{k-1-2(h-1)}\sum_{s=1}^{j-1}(-1)^{k+s}\sum_{r=1}^{j}(-1)^{r+j}\frac{T_{i_r}(a)}{T(X_{i_r})}\cdot$$

$$\cdot\varphi^{h-1}_{i_k\ldots i_{j+2}}(1\otimes P_{k-1}\otimes\ldots\otimes P_{j+1}\otimes 1)\frac{T_{i_{j+1}}(\overline{P_jP_{j-1}})}{T(X_{i_{j+1}})}\cdot$$

Lema 5.2:

$g_m\big((1\otimes a\otimes 1)*(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\big) = g_1(1\otimes a\otimes 1).g_{m-1}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)$

Demostración:

Por inducción en m. Si m=1, es trivial. Sea m=2. Entonces

$$g_2\big((1\otimes a\otimes 1)*(1\otimes P\otimes 1)\big) = g_2(1\otimes a\otimes P\otimes 1-1\otimes P\otimes a\otimes 1) =$$

$$=-(\overline{aP}\otimes 1)t - \sum_{i<j}\varphi_{ji}(1\otimes a\otimes P\otimes 1)e_{ij}+ (\overline{Pa}\otimes 1)t + \sum_{i<j}\varphi_{ji}(1\otimes P\otimes a\otimes 1)e_{ij} =$$

$$= \sum_{i<j}\left(- \frac{T_j(a)}{T(X_j)}\,\frac{T_i(P)}{T(X_i)} + \frac{T_j(aP)}{T(X_j)}\,\frac{T_i(f)}{T(X_i)} + \right.$$

$$\left. + \frac{T_j(P)}{T(X_j)}\,\frac{T_i(a)}{T(X_i)} - \frac{T_j(Pa)}{T(X_j)}\,\frac{T_i(f)}{T(X_i)}\right) e_{ij} =$$

$$=\left(- \sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(a)}{T(X_i)}\,e_i\right).\left(- \sum_{i=1}^{n}\frac{T_i(P)}{T(X_i)}\,e_i\right) = g_1(1\otimes a\otimes 1).g_1(1\otimes P\otimes 1)$$

Sea m>2, y supongamos que el lema es cierto para todo k<m. Como

$$(1\otimes a\otimes 1)*(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)=$$

$$=\sum_{r=1}^{m}(-1)^{r+m}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_r\otimes a\otimes P_{r-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1) =$$

$$= 1\otimes a\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1 - 1\otimes P_{m-1}\otimes a\otimes P_{m-2}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1 +$$

$$+ 1\otimes P_{m-1}\otimes P_{m-2}\otimes\left(\sum_{r=1}^{m-2}(-1)^{r+m}(1\otimes P_{m-3}\otimes\ldots\otimes P_r\otimes a\otimes P_{r-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\right)$$

tenemos que

$$g_m\big((1\otimes a\otimes 1)*(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\big) =$$

$$=-(\overline{aP_{m-1}}\otimes 1)g_{m-2}(1\otimes P_{m-2}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t+(\overline{P_{m-1}a}\otimes 1)g_{m-2}(1\otimes P_{m-2}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t-$$

$$-\ (\overline{P_{m-1}P_{m-2}}\otimes 1)g_{m-2}\big((1\otimes a\otimes 1)*(1\otimes P_{m-3}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\big)\blacksquare t\ +$$

$$+(-1)^{[(m+1)/2]}\sum_{i_1<\ldots<i_m}\varphi_{i_m\ldots i_1}\big((1\otimes a\otimes 1)*(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\big)e_{i_1\ldots i_m} =$$

$$= -\ (\overline{P_{m-1}P_{m-2}}\otimes 1)g_{m-2}\big((1\otimes a\otimes 1)*(1\otimes P_{m-3}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\big)\blacksquare t\ +$$

$$+(-1)^{[(m+1)/2]}\sum_{i_1<\ldots<i_m}\varphi_{i_m\ldots i_1}\big((1\otimes a\otimes 1)*(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\big)e_{i_1\ldots i_m}$$

Usando la hipótesis inductiva, y el lema anterior, se deduce que

$$g_m\big((1\otimes a\otimes 1)*(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\big) =$$

$$= -g_1(1\otimes a\otimes 1)(\overline{P_{m-1}P_{m-2}}\otimes 1)g_{m-3}(1\otimes P_{m-3}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t\ +$$

$$+\ (-1)^{[(m+1)/2]}\sum_{i_1<..<i_m}\sum_{r=1}^{m}(-1)^{m-1}\frac{T_{i_r}(a)}{T(X_{i_r})}\ e_{i_r}\ .$$

$$.\varphi_{i_m\ldots\hat{i}_r\ldots i_1}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)e_{i_1\ldots\hat{i}_r\ldots i_m} =$$

$$= g_1(1\otimes a\otimes 1)\Big(-\ (\overline{P_{m-1}P_{m-2}}\otimes 1)g_{m-3}(1\otimes P_{m-3}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\blacksquare t\ +$$

$$+\ (-1)^{[(m+1)/2]+m}\sum_{i_1<..<i_m}\varphi_{i_m..i_1}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)e_{i_1..i_{m-1}}\Big) =$$

$$= g_1(1\otimes a\otimes 1).g_{m-1}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)$$

porque $(-1)^{[(m+1)/2]+m} = (-1)^{[m/2]}$

Teorema 5.3:

$g_{\bullet}h_{\bullet}=id$

Demostración:

Como $Rs(A)_r$ es libre, basta calcular $g_{\bullet}h_{\bullet}$ en los elementos de la base $\{e_{i_1\dots i_m}t^{(q)} : 1\le i_1<\dots<i_m\le n \;\; y \;\; m+2q=r\}$.

$$g_{2q+m}h_{2q+m}(e_{i_1\dots i_m}t^{(q)}) = g_{2q+m}\left(h_1(e_{i_1})*\dots*h_1(e_{i_m})*h_{2q}(t^{(q)})\right) =$$

$$= g_{2q+m}\left((1\otimes X_{i_1}\otimes 1)*\dots*(1\otimes X_{i_m}\otimes 1)*h_{2q}(t^{(q)})\right)$$

Por el lema anterior

$$g_{2q+m}h_{2q+m}(e_{i_1\dots i_m}t^{(q)})=g_1(1\otimes X_{i_1}\otimes 1)\dots g_1(1\otimes X_{i_m}\otimes 1).g_{2q}(h_{2q}(t^{(q)}))=$$

$$= g_{2q}(h_{2q}(t^{(q)}))e_{i_1\dots i_m}$$

Solo falta ver que $g_{2q}(h_{2q}(t^{(q)}))=t^{(q)}$, y lo haremos por inducción en q. Si q=0 es trivial. Sea q>0 ,supongamos que $g_{2r}(h_{2r}(t^{(r)}))=t^{(r)}$ para todo r<q y probémoslo para q.

Recordemos que $f = \sum f_{i_1\dots i_n}X_1^{i_1}\dots X_n^{i_n}$ es un polinomio mónico de grado $(\gamma_1,\dots,\gamma_n)$, con $\gamma_n>0$ y

$$\frac{T_j(f)}{T(X_j)} = \sum_{i_1,\dots,i_n}\sum_{k=0}^{i_j-1} f_{i_1\dots i_n}X_1^{i_1}\dots X_{j-1}^{i_{j-1}}X_j^k\otimes X_j^{i_j-k-1}X_{j+1}^{i_{j+1}}\dots X_n^{i_n} =$$

$$= \sum_{s\in L_j}\alpha_s^j\otimes\beta_s^j ,$$

con $L_j= \{ (i_1,\dots,i_n,k)' : 0\le k<i_j \}$, $\alpha_s^j=f_{i_1\dots i_n}X_1^{i_1}\dots X_{j-1}^{i_{j-1}}X_j^k$ y $\beta_s^j=X_j^{i_j-k-1}X_{j+1}^{i_{j+1}}\dots X_n^{i_n}$ para $s=(i_1,\dots,i_n,k)$.

Entonces, como

$$h_2(t)= -\varepsilon_0\left(\sum_{j=1}^{n}\frac{T_j(f)}{T(X_j)}\cdot(1\otimes X_j\otimes 1)\right)= -\sum_{j=1}^{n}\sum_{s\in L_j}1\otimes\alpha_s^j\otimes X_j\otimes\beta_s^j$$

tenemos que

$$h_2(t^{(q)}) = h_2(t)^{(q)} = h_2(t)\square h_2(t)^{(q-1)}=$$

$$= -\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{s_1\in L_{j_1}} 1\otimes\alpha_{s_1}^{j_1}\otimes\left((X_{j_1}\otimes\beta_{s_1}^{j_1})\ h_2(t)^{(q-1)}\right) - \sum_{j_1,j_2=1}^{n}\ \sum_{s_1\in L_{j_1}}\sum_{s_2\in L_{j_2}}1\otimes\alpha_{s_1}^{j_1}\otimes$$

$$\otimes\left(\left(\alpha_{s_2}^{j_2}\otimes\overline{\beta_{s_1}^{j_1}\beta_{s_2}^{j_2}}\right)\cdot\left((1\otimes X_{j_1}\otimes 1)*(1\otimes X_{j_2}\otimes 1)*h_2(t)^{(q-2)}\right)\right)$$

Usando la definición de g_m sabemos que

$$g_{2q}(h_{2q}(t^{(q)}))=\sum_{j_1=1}^{n}\sum_{s_1\in L_{j_1}}\left(\overline{\alpha_{s_1}^{j_1}X_{j_1}}\otimes\beta_{s_1}^{j_1}\right)g_{2q-2}\left(h_2(t)^{(q-1)}\right)\blacksquare t\ +$$

$$+\sum_{j_1,j_2=1}^{n}\ \sum_{s_1\in L_{j_1}}\ \sum_{s_2\in L_{j_2}}\left(\overline{\alpha_{s_1}^{j_1}\alpha_{s_2}^{j_2}}\otimes\overline{\beta_{s_1}^{j_1}\beta_{s_2}^{j_2}}\right)\cdot$$

$$\cdot g_{2q-2}\left((1\otimes X_{j_1}\otimes 1)*(1\otimes X_{j_2}\otimes 1)*h_2(t)^{(q-2)}\right)\blacksquare t\ +$$

$$+\ (-1)^q\overline{\sum_{i_1<..<i_{2q}}}\varphi_{i_{2q}\cdots i_1}\left(h_{2q}(t^{(q)})\right)$$

Como el grado de f es $(\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$ y $\gamma_n>0$, valen las siguientes igualdades:

i) $\overline{\alpha_{s_1}^{j_1}X_{j_1}}=\begin{cases}1 & \text{si } j_1=n \text{ y } s_1=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\gamma_n-1)\\ 0 & \text{en el resto}\end{cases}$

ii) $\beta_{s_1}^{n}=1$ si $s_1=(\gamma_1,\ldots,\gamma_n,\gamma_n-1)$

iii) $\overline{\alpha_{s_1}^{j_1}\alpha_{s_2}^{j_2}}=0$ si $j_1\neq n$ ó $j_2\neq n$

pero $(1\otimes X_n\otimes 1)*(1\otimes X_n\otimes 1)=0$

Entonces

$$g_{2q}(h_{2q}(t^{(q)}))=g_{2q-2}\left(h_2(t)^{(q-1)}\right)\blacksquare t+(-1)^q\sum_{i_1<\ldots<i_{2q}}\varphi_{i_{2q}\ldots i_1}(h_{2q}(t^{(q)}))$$

Usando la hipótesis inductiva, tenemos

$$g_{2q}(h_{2q}(t^{(q)})) = t^{(q)} + (-1)^q\sum_{i_1<\ldots<i_{2q}}\varphi_{i_{2q}\ldots i_1}(h_{2q}(t^{(q)}))$$

y, por lo tanto, para terminar la demostración, es suficiente ver que

$\varphi_{i_{2q}\ldots i_1}(h_{2q}(t^{(q)}))=0$ para $1\le i_1<\ldots<i_{2q}\le n$.

Recordemos que $h_2(t)=-\sum 1\otimes\alpha_s^j\otimes X_j\otimes\beta_s^j$, y por esto, $h_2(t)^{(q)}$ es suma de monomios del tipo $T=\pm\, 1\otimes P_{2q}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes P_0$ con $P_k=X_j$ ó $P_k=\alpha_s^j$ para $k>0$.

Si $r=0$, $\varphi^0_{i_{2q}\ldots i_1}(T)=\prod_{j=1}^{2q}\dfrac{T_{i_j}(P_j)}{T(X_{i_j})}$ es cero porque $P_{2q}=\alpha_s^j$ y $P_k=X_j$

para algún $k<2q$, pero $\dfrac{T_{i_{2q}}(\alpha_s^j)}{T(X_{i_{2q}})}\,\dfrac{T_{i_k}(X_j)}{T(X_{i_k})}$ es distinto de cero sólo

si $i_k=j$ y $j>i_{2q}$, y esto es imposible porque $i_k<i_{2q}$.

Por último, supongamos que $r>0$. Sea $\Gamma_{k,s}:A\otimes\bar{A}^{2q}\otimes A\longrightarrow A^e$ el morfismo de A^e-módulos definido por

$\Gamma_{k,s}(1\otimes P_{2q}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1) =$

$$=\frac{T_{i_k}(\overline{P_kP_{k-1}})}{T(X_{i_k})}\,\varphi^0_{i_{k-1}\ldots i_1}(1\otimes P_{k-2}\otimes\ldots\otimes P_s\otimes f\otimes P_{s-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)$$

Si T es un monomio de $h_2(t)^{(q)}$, tenemos

$\varphi^{r}_{i_{2q}\ldots i_1}(T) =$

$$=\pm\ (1\otimes P_0)\sum_{k,s}(-1)^{k+s}\varphi^{r-1}_{i_{2q}\ldots i_{k+1}}(1\otimes P_{2q}\otimes\ldots\otimes P_{k+1}\otimes 1)\ \Gamma_{k,s}(1\otimes P_{2q}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)$$

Ahora, para todo monomio T con $(P_k,P_{k-1})=(X_j,X_{j'})$, existe otro monomio T' igual a T, excepto que en T' $(P_k,P_{k-1})=(X_{j'},X_j)$, y T y T' tienen signos opuestos. Entonces $\Gamma_{k,s}(T+T')=0$.

Este razonamiento se puede repetir para:

1) $(P_k,P_{k-1})=(\alpha^j_s,\alpha^{j'}_{s'})$

2) $(P_k,P_{k-1})=(\alpha^j_s,X_{j'})$

3) $(P_k,P_{k-1})=(X_{j'},\alpha^j_s)$ con $j\neq j'$

Finalmente, si $(P_k,P_{k-1})=(X_j,\alpha^j_s)$, entonces $\dfrac{T_{i_k}(\alpha^j_s\ X_j)}{T(X_{i_k})} = 0$.

Teorema 5.4:

Rs(A) es una resolución A^e-libre de A, $g_*h_*=id$ y h_*g_* es homotópica a la identidad.

Demostración:

Es inmediata.

CAPITULO 3

1-*CALCULO DE LA HOMOLOGIA Y COHOMOLOGIA DE HOCHSCHILD*

Sea k un anillo conmutativo con unidad, f un polinomio mónico en $k[X_1,..,X_n]$, y $A=k[X_1,...,X_n]/\langle f\rangle$. Sea M un A-módulo, considerado como A^e-módulo por la multiplicación $\mu:A^e\longrightarrow A$, es decir, $m(a\otimes b) = mab$.

Recordemos que $Rs(A)=(Rs(A)_*,d_*)$ es una resolución A^e-libre de A, el conjunto $B_m = \{e_{i_1...i_{m-2k}}\ t^{(k)} \quad 1\le i_1<...<i_{m-2k}\le n\ \}$ es una base de $Rs(A)_m$, y B_m tiene $\binom{n}{m}$ elementos.

Si tomamos el producto tensorial de $Rs(A)$ con M sobre A^e, y usamos la identificación $\tau:M\otimes_{A^e} A^e\longrightarrow M$, $\tau(m\otimes(a\otimes b))=m\mu(a\otimes b)=mab$, obtenemos el complejo

$$\overline{Rs}(M):\ \dots\longrightarrow \overline{M}_m \xrightarrow{\ \overline{d}\ } \overline{M}_{m-1} \xrightarrow{\ \overline{d}\ } \dots \xrightarrow{\ \overline{d}\ } \overline{M}_1 \xrightarrow{\ \overline{d}\ } \overline{M}_0$$

donde $\overline{M}_m = M^{\binom{n}{m}}$ es la suma directa de copias de M indexadas por los elementos de B_m, y si $\vartheta \in M$

$\overline{d}_0(\vartheta\ e_i)=0$ pues

$(\tau.(id_M\otimes d).\tau^{-1})(\vartheta\ e_i) = (\tau.(id_M\otimes d))(\vartheta\otimes e_i) = \tau(\vartheta\otimes d(e_i)) =$

$= \tau(\vartheta\otimes T(X_i)) = \vartheta\ \mu(T(X_i)) = 0$

y

$\overline{d}_{2k-1}(\vartheta\ t^{(k)})=\vartheta\ df\ t^{(k-1)}$ con $df= \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_m}\ e_m$ pues

$(\tau.(id_M\otimes d).\tau^{-1})(\vartheta\ t^{(k)}) = (\tau.(id_M\otimes d))(\vartheta\otimes t^{(k)}) = \tau(\vartheta\otimes d(t^{(k)})) =$

$$= \tau(\vartheta\otimes t^{(k-1)}\sum_{m=1}^{n}\frac{T_m(f)}{T(X_m)}e_m) = \vartheta\,\mu(\sum_{m=1}^{n}\frac{T_m(f)}{T(X_m)}e_m)\,t^{(k-1)},$$

y

$$\mu(\sum_{m=1}^{n}\frac{T_m(f)}{T(X_m)}e_m) = \mu(\sum_{i_j}\sum_{k=0}^{i_m-1} f_{i_1\dots i_n} X_1^{i_1}\dots X_m^{k}\otimes X_m^{i_m-k-1} X_{m+1}^{i_{m+1}}\dots X_n^{i_n}) =$$

$$= \sum_{i_j} i_m f_{i_1\dots i_n} X_1^{i_1}\dots X_m^{i_m-1}\dots X_n^{i_n} = \frac{\partial f}{\partial X_m}$$

Entonces,

$$\overline{d}_{m-1}(\vartheta\, e_{i_1\dots i_{m-2k}}\, t^{(k)}) = \vartheta\, df\wedge e_{i_1\dots i_{m-2k}}\, t^{(k-1)}$$

Observación 1.1:

$\overline{Rs}(M) = \bigoplus_{q\ge 0}\overline{Rs}^q(M)$, donde $\overline{Rs}^q(M)$ es el complejo

$$0\longrightarrow M^{\binom{n}{0}}t^{(q)} \xrightarrow{\overline{d}^q} M^{\binom{n}{1}}t^{(q-1)} \longrightarrow\dots\longrightarrow M^{\binom{n}{n-1}} t^{(q-n+1)} \xrightarrow{\overline{d}^q} M^{\binom{n}{n}} t^{(q-n)}\longrightarrow 0$$

con $M^{\binom{n}{k}}t^{(q-k)}=0$ si $k>q$. El grado de $M^{\binom{n}{m}}t^{(q-m)}$ es $2q-k$. Entonces

$$H_r(A,M) = H_r(\overline{Rs}(M)) = \bigoplus_{\mathcal{U}_r} H_r(\overline{Rs}^q(M))$$

donde $\mathcal{U}_r = \left\{q\in\mathbb{N} : (r/2)\le q\le \min(r,(r+n)/2)\right\}$, pues $r=2q-m$, con $m=0,\dots,n$ y $m\ge q$.

Lema 1.2:

$$\mathrm{Coker}\Big(M^{\binom{n}{i-1}} t^{(q-i+1)} \xrightarrow{\overline{d}^q_{2q-i}} M^{\binom{n}{i}} t^{(q-i)} \Big) = M\otimes_A \Omega^i(A) \qquad \text{si} \quad 1\le i\le q.$$

Demostración:

Como

$$\begin{tikzcd} M^{\binom{n}{i-1}} t^{(q-i+1)} \arrow[r, "\overline{d}^q_{2q-i}"] \arrow[d] & M^{\binom{n}{i}} t^{(q-i)} \arrow[d] \\ M\otimes(\Lambda^{i-1}A^n) \arrow[r, "id_M\otimes g"] & M\otimes(\Lambda^{i}A^n) \end{tikzcd}$$

es un diagrama conmutativo, donde las flechas verticales son isomorfismos, $A^n = Ae_1 \oplus \ldots \oplus Ae_n$ y

$$g(e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{l-1}}) = df\ e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{l-1}} = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial X_m}\ e_m \wedge e_{j_1} \wedge \ldots \wedge e_{j_{l-1}}$$

es claro que

$$\mathrm{Coker}(\overline{d}^q) = \mathrm{Coker}(id_M \otimes g) = M \otimes_A \Lambda^l (A^n/\langle df\rangle).$$

Finalmente,

$$\Omega^1(A) = H_1(A) = H_1(\overline{Rs}^1(A)) = \mathrm{Coker}(A^{\binom{n}{2}} \oplus A^{\binom{n}{0}} t \xrightarrow{\ \overline{d}\ } A^{\binom{n}{1}}) = A^{(n)}/\langle df\rangle$$

porque $\overline{d}(e_i \wedge e_j) = 0$ y $\overline{d}(t) = df$.

Definición 1.3:

Dado un complejo $C = (C_\bullet, d_\bullet)$, llamamos $C[\geq i, j]$ al complejo truncado

$$C[\geq i, j]_m = \begin{cases} 0 & \text{si } m < j \\ C_{i+m-j} & \text{si } m \geq j \end{cases}$$

Lema 1.4:

El complejo $\overline{Rs}^q(M)$ es isomorfo al complejo

$$K_\bullet\left(M, \left((-1)^{m+1} \frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1 \leq m \leq n}\right)[\geq n-q, q]$$

donde $K_\bullet\left(M, \left((-1)^{m+1} \frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1 \leq m \leq n}\right)$ es el complejo de Koszul de M con respecto a $\left((-1)^{m+1} \frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1 \leq m \leq n}$ definido en la Sección 3 del Capítulo 1.

Demostración:

Basta definir $\varphi_{2q-j} : M^{\binom{n}{j}} t^{(q-j)} \longrightarrow M^{\binom{n}{n-j}}$ de la siguiente manera:

$$\varphi_{2q-j}(\vartheta\ e_{i_1\ldots i_j}t^{(q-j)})=\vartheta\ e_{i'_1\ldots i'_{n-j}}$$

con $1\le i'_1<\ldots<i'_{n-j}\le n$ y $\{i_1,\ldots,i_j\}\cap\{i'_1,\ldots,i'_{n-j}\}=\phi$.

Veamos que φ es un morfismo de complejos:

$$d\varphi_{2q-j}(\vartheta\ e_{i_1\ldots i_j}t^{(q-j)}) = d(\vartheta\ e_{i'_1\ldots i'_{n-j}}) =$$

$$=\sum_{r=1}^{n-j}(-1)^{r-1}(-1)^{i'_r+1}\frac{\partial f}{\partial X_{i'_r}}\vartheta e_{i'_1\ldots\hat{i}'_r\ldots i'_{n-j}}$$

$$\varphi_{2q-j}d(\vartheta\ e_{i_1\ldots i_j}t^{(q-j)}) = \varphi_{2q-j}\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial X_r}\vartheta\ e_r\wedge e_{i_1\ldots i_j}t^{(q-j-1)}\right) =$$

$$= \varphi_{2q-j}\left(\sum_{r=1}^{n-j}\frac{\partial f}{\partial X_{i'_r}}\vartheta\ e_{i'_r}\wedge e_{i_1\ldots i_j}t^{(q-j-1)}\right) =$$

$$= \varphi_{2q-j}\left(\sum_{r=1}^{n-j}(-1)^{i'_r-r}\frac{\partial f}{\partial X_{i'_r}}\vartheta\ e_{i_1\ldots i'_r\ldots i_j}t^{(q-j-1)}\right) =$$

$$= \sum_{r=1}^{n-j}(-1)^{i'_r+r}\frac{\partial f}{\partial X_{i'_r}}\vartheta\ e_{i'_1\ldots\hat{i}'_r\ldots i'_{n-j}}$$

Teorema 1.5:

Sea $A=k[X_1,\ldots,X_n]/\langle f\rangle$ con k un anillo conmutativo con unidad, f un polinomio mónico en $k[X_1,\ldots,X_n]$, y M un A^e-módulo. Entonces:

$$H_r(A,M)=\left[\bigoplus_{\substack{n-r<i\le n\\ i-(n+r)\ \text{es par}}} H_i\left[K_\bullet\left(M,\left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)\right]\right]\oplus\left(M\otimes_A\Omega^r(A)\right)\quad \text{si } r\le n$$

$$H_r(A,M)=\bigoplus_{\substack{0\le i\le n\\ i-(n+r)\ \text{es par}}} H_i\left[K_\bullet\left(M,\left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{1\le m\le n}\right)\right]\quad \text{si } r>n.$$

Demostración:

Como A es k-libre, $H_\bullet(A,M)=\mathrm{Tor}_\bullet^{A^e}(A,M)$, y como $Rs(A)$ es una resolución A^e-libre de A, $H_\bullet(A,M) = H_\bullet(Rs(A)\otimes_{A^e}M) = H_\bullet(\overline{Rs}(M))$.

Por la Observación 1.1, sabemos que $H_r(\overline{Rs}(M)) = \underset{\mathcal{U}_r}{\oplus} H_r(\overline{Rs}^q(M))$ donde $\mathcal{U}_r=\left\{q\in\mathbb{N} : (r/2)\le q\le \min(r,(r+n)/2)\right\}$.

Por el Lema 1.4

$$H_r(\overline{Rs}^q(M)) = H_r\left[K_r\left(M,\left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)[\ge n-q,q]\right].$$

Por la Definición 1.3

$$H_r\left[K_r\left(M,\left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)[\ge n-q,q]\right] =$$

$$= H_r\left[K_{r-2q+n}\left(M,\left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)\right]$$

si $n-q\ne r-2q+n$, es decir $r\ne q$. Si $r=q$,

$$H_r(\overline{Rs}^r(M))=\mathrm{Coker}\left(M^{\binom{n}{r-1}}t \xrightarrow{\overline{d}^r_r} M^{\binom{n}{r}} \right)=M\otimes_A\Omega^r(A)$$

por el Lema 1.2.

Basta observar entonces que si $r\le n$, entonces $(r/2)\le q\le r$ y por lo tanto $r-2q+n$ toma valores entre $n-r$ y n, y si $r>n$, $(r/2)\le q\le (r+n)/2<r$, y entonces $r-2q+n$ toma valores entre 0 y n.

Teorema 1.6:

Sea $A=k[X_1,\dots,X_n]/\langle f\rangle$ con k un anillo conmutativo con unidad, f un polinomio mónico en $k[X_1,\dots,X_n]$, y M un A-módulo. Entonces:

$$H^r(A,M)=\left[\underset{\substack{0\le l<r\\ l+r \text{ es par}}}{\oplus} H_l\left[K_\bullet\left(M,\left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)\right]\right]\oplus\mathrm{Ker}\left(M^{\binom{n}{r}}\xrightarrow{d} M^{\binom{n}{r-1}}\right)$$

si $r<n$, con $d(\vartheta\ e_{l_1\dots l_r})=\sum_{m=1}^{r}(-1)^{m+1}(\vartheta\ \frac{\partial f}{\partial X_{l_m}}.e_{l_1\dots\ \dots l_r})$ para $\vartheta\in M$

$$H^r(A,M)=\bigoplus_{\substack{0\le i\le n\\ i+r \text{ es par}}} H_i\left[K_\bullet\left(M,\left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X}\right)_{1\le m\le n}\right)\right] \quad \text{si } r\ge n.$$

Demostración:

Como A es k-libre, $H^\bullet(A,M)=\mathrm{Ext}^\bullet_{A^e}(A,M)$, y como $Rs(A)$ es una resolución A^e-libre de A, $H^\bullet(A,M)=H^\bullet(\mathrm{Hom}_{A^e}(Rs(A),M))$.

Como M es un A-módulo, entonces M es un A^e-módulo, con la acción definida por $m(a\otimes b)=mab$.

Además, como $M\simeq \mathrm{Hom}_A(A,M)$ como A^e-módulos, tenemos:

$$H^\bullet(A,M)=H^\bullet\left(\mathrm{Hom}_{A^e}(Rs(A),M)\right)=H^\bullet\left(\mathrm{Hom}_{A^e}(Rs(A),\mathrm{Hom}_A(A,M))\right)=$$

$$=H^\bullet\left(\mathrm{Hom}_A(Rs(A)\otimes_{A^e}A,M)\right)=H^\bullet\left(\mathrm{Hom}_A(\overline{Rs}(A),M)\right)=\bigoplus_{q\ge 0}H^\bullet\left(\mathrm{Hom}_A(\overline{Rs}^q(A),M)\right)$$

Pero el complejo $\mathrm{Hom}_A(\overline{Rs}(A),M)$ es isomorfo al complejo

$$0\longrightarrow M^{\binom{n}{n}}t^{(q-n)}\xrightarrow{\ \overline{d}\ } M^{\binom{n}{n-1}}t^{(q-n+1)}\longrightarrow\dots\longrightarrow M^{\binom{n}{1}}t^{(q-1)}\xrightarrow{\ \overline{d}\ }M^{\binom{n}{0}}t^{(q)}\longrightarrow 0$$

con $M^{\binom{n}{k}}t^{(q-k)}=0$ si $q<k$, y

$$\overline{d}^{2q-k+1}(\vartheta\, e_{i_1\dots i_k}t^{(q-k)})=\sum_{m=1}^{k}(-1)^{m+1}\vartheta\frac{\partial f}{\partial X_{i_m}}\, e_{i_1\dots\hat{i}_m\dots i_r}t^{(q-k+1)}$$

Entonces, es claro que el complejo $\mathrm{Hom}_A(\overline{Rs}^q(A),M)$ es isomorfo al complejo de Koszul truncado $K_\bullet\left(M,\left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)[\ge n-q,q]$.

La demostración se termina en forma análoga al final de la demostración del teorema anterior.

Ejemplo 1.7:

Sea $A'=k[X_1,\dots,X_n]$ y $K_\bullet\left(A',\left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)$ el complejo de Koszul de A' con respecto a $\left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}$. La sucesión exacta

$$0 \longrightarrow A' \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{\pi} A'/\langle f\rangle \longrightarrow 0$$

donde el morfismo f significa multiplicar por f, y π es la proyección canónica, induce una sucesión exacta corta en los complejos de Koszul

$$0 \longrightarrow K_\bullet\left(A', \left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right) \longrightarrow K_\bullet\left(A', \left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right) \longrightarrow$$

$$\longrightarrow K_\bullet\left(A, \left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right) \longrightarrow 0$$

La sucesión exacta larga de homología obtenida con esta sucesión exacta corta, es

$$\cdots \longrightarrow H_s\left[K_\bullet\left(A', \left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)\right] \xrightarrow{H_s(f)} H_s\left[K_\bullet\left(A', \left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_s(\pi)} H_s\left[K_\bullet\left(A, \left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)\right] \xrightarrow{\delta_{s-1}} H_{s-1}\left[K_\bullet\left(A', \left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)\right] \longrightarrow$$

$$\xrightarrow{H_{s-1}(f)} H_{s-1}\left[K_\bullet\left(A', \left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)\right] \longrightarrow \cdots$$

Además

$$H_0\left[K_\bullet\left(A', \left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)\right] = A'/\left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right\rangle$$

$$H_0\left[K_\bullet\left(A, \left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)\right] = A/\left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right\rangle = \Omega^n(A)$$

Si $\left(\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}$ es una sucesión regular en A', vimos en el Teorema 3.2 del Capítulo 1 que $H_s\left[K_\bullet\left(A', \left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)\right]$ es cero para todo $s>0$. Entonces, la sucesión exacta larga anterior se transforma en

$$0 \longrightarrow H_1\left[K_\bullet\left(A, \left((-1)^{m+1}\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right)\right] \longrightarrow A'/\left\langle \left(\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}\right\rangle \xrightarrow[\ ,\ ]{f}$$

$$\xrightarrow{f} A'/\langle (\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle \xrightarrow{\pi} A/\langle (\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle \longrightarrow 0$$

Por el Teorema 1.5,

$H_r(A) = \Omega^r(A)$ si $r\le n$

$H_r(A) = A/\langle (\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle = \Omega^n(A)$ si $r>n$ y $r+n$ es impar.

Por el Teorema 1.6,

$H^r(A) = A/\langle (\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle \oplus \mathrm{Ker}\left(A^{\binom{n}{r}} \xrightarrow{d} A^{\binom{n}{r-1}}\right)$ si $r<n$ y r es par

$H^r(A) = \mathrm{Ker}\left(A'/\langle (\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle \xrightarrow{f} A'/\langle (\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle\right) \oplus \mathrm{Ker}\left(A^{\binom{n}{r}} \xrightarrow{d} A^{\binom{n}{r-1}}\right)$

si $r<n$ y r es impar

$H^r(A) = A/\langle (\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle = \Omega^n(A)$ si $r\ge n$ y r es impar

$H^r(A) = \mathrm{Ker}\left(A'/\langle (\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle \xrightarrow{f} A'/\langle (\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle\right)$ si $r\ge n$ y r es impar.

2-*CALCULO DE LA HOMOLGIA CICLICA*

Sea k un anillo que contiene a $\mathbb{Q}$, f un polinomio mónico en $k[X_1,\dots,X_n]$ y sea $A=k[X_1,\dots,X_n]/\langle f\rangle$. En esta sección vamos a suponer que $(\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}$ es una sucesión regular en $k[X_1,\dots,X_n]$. Entonces, por el Ejemplo 1.7 de la Sección anterior, conocemos la homología de Hochschild de A.

Recordemos que la homología cíclica de A es la homología del complejo total de $\mathcal{B}(A)_{norm}$

$$\begin{array}{ccccc}
\vdots & & \vdots & & \vdots \\
\downarrow b & & \downarrow b & & \downarrow b \\
A\otimes\overline{A}^{\otimes 2} & \xleftarrow{B} & A\otimes\overline{A} & \xleftarrow{B} & A \\
\downarrow b & & \downarrow b & & \\
A\otimes\overline{A} & \xleftarrow{B} & A & & \\
\downarrow b & & & & \\
A & & & &
\end{array}$$

Además, si $D(A)$ es el complejo cuyas filas son los complejos de De Rham truncados

$$\begin{array}{ccccc}
\downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \downarrow 0 \\
\Omega^2 & \xleftarrow{d} & \Omega^1 & \xleftarrow{d} & \Omega^0 \\
\downarrow 0 & & \downarrow 0 & & \\
\Omega^1 & \xleftarrow{d} & \Omega^0 & & \\
\downarrow 0 & & & & \\
\Omega^0 & & & &
\end{array}$$

la aplicación

$\mu: A\otimes\overline{A}^{m} \longrightarrow \Omega^{m}(A)$

$\mu(a_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_m) = (1/m!)a_0 da_1\wedge\ldots\wedge da_m$

induce un morfismo de complejos $\mu: B(A)_{norm} \longrightarrow D(A)$ (ver Proposición 5.2 del Capítulo 1).

Teorema 2.1:

Si k es un anillo que contiene a $\mathbb{Q}$, f un polinomio mónico en $k[X_1,\ldots,X_n]$ tal que $\left(\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}$ es una sucesión regular en $k[X_1,\ldots,X_n]$, entonces

$HC_r(A) = \Omega^r(A)/d\Omega^{r-1}(A) \oplus H_{DR}^{r-2}(A) \oplus H_{DR}^{r-4}(A) \oplus \ldots$ si $r \le n$.

Demostración:

El morfismo de complejos $h: Rs(A) \longrightarrow (A \otimes \overline{A}^{\otimes \bullet} \otimes A, b')$ definido en la Sección3 del Capítulo 2, induce un isomorfismo $h: H_r(\overline{Rs}(A)) \longrightarrow H_r(A)$.

Si $r \le n$, $H_r(\overline{Rs}(A)) = \Omega^r(A)$, entonces $h: \Omega^r(A) \longrightarrow H_r(A)$ coincide con la aplicación de A-álgebras $\gamma: \Omega^r(A) \longrightarrow H_r(A)$ definida en la Observación 2.1 del Capítulo 1. Además, en la Proposición 5.3 de ese mismo Capítulo, vimos que $\mu\gamma = \mathrm{id}$. Entonces el morfismo $\mu: B(A)_{norm} \longrightarrow D(A)$ es un cuasi-isomorfismo en las filas, y por lo tanto, es un cuasi-isomorfismo de los complejos totales.

Definición 2.2:

Un polinomio P en $k[X_1,\ldots,X_n]$ se dice homogéneo con pesos si existe una sucesión de números racionales $q_1,\ldots,q_r$ con $0<q_i \le 1$ para todo i, tal que P se puede expresar como una combinación lineal de monomios $X_1^{m_1}\ldots X_r^{m_r}$ tal que $q_1m_1+\ldots+q_rm_r=1$.

Lema 2.3:

Sea P un polinomio en $k[X_1,\ldots,X_n]$. Las siguientes condiciones son equivalentes:

i) P es homogéneo con pesos

ii) existe una sucesión de enteros positivos no nulos $p_1,\ldots,p_r$ tales que P es homogéneo de grado estrictamente positivo en el anillo graduado $k[X_1,\ldots,X_n]$ con $gr(X_i)=p_i$.

iii) existe una sucesión de enteros positivos no nulos $p_1,\ldots,p_r$ y un entero positivo d no nulo tales que $P(t^{p_1}X_1,\ldots,t^{p_r}X_r) = t^dP(X_1,\ldots,X_r)$ en $k[X_1,\ldots,X_n,t]$.

Demostración:

Es inmediata a partir de la definición.

Observación 2.4:

1) Todo polinomio homogéneo es homogéneo con pesos (basta tomar $p_i=1$).

2) Si P es homogéneo con pesos, entonces

$$P(X_1,\ldots,X_n)=(1/d)\sum_{i=1}^{n} p_i X_i \frac{\partial P}{\partial X_i}(X_1,\ldots,X_n).$$

Teorema 2.5:

Si k es un cuerpo que contiene a $\mathbb{Q}$ y f es un polinomio homogéneo con pesos en $k[X_1,\ldots,X_n]$ tal que $\left(\frac{\partial f}{\partial X_m}\right)_{1\le m\le n}$ es una sucesión regular en $k[X_1,\ldots,X_n]$, la homología cíclica de $A=k[X_1,\ldots,X_n]/\langle f\rangle$ para $r\geq n$ es

$$\overline{HC}_r(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } r\geq n \text{ y } r-n \text{ es par} \\ H_r(A)=\Omega^n(A) & \text{si } r\geq n \text{ y } r-n \text{ es impar} \end{cases}$$

Además, $HC_r(A)= HC_r(k)\oplus\overline{HC}_r(A)$ para todo $r\geq 0$.

Demostración:

Como A es un álgebra aumentada, por la Proposición 6.3 del Capítulo 1, sabemos que $HC_r(A) = HC_r(k)\oplus\overline{HC}_r(A)$, y por la Proposición 6.4 del Capítulo 1, la aplicación $s:\overline{HC}_r(A)\longrightarrow \overline{HC}_{r-2}(A)$ es cero para todo $r\geq 2$. Entonces tenemos una sucesión exacta

(1) $0\longrightarrow \overline{HC}_r(A)\xrightarrow{B} \overline{H}_{r+1}(A)\xrightarrow{i} \overline{HC}_{r+1}(A)\longrightarrow 0$ para todo $r\geq 0$

Como A es un álgebra aumentada,

$$\overline{H}_r(A) = \begin{cases} H_r(A) & \text{si } r>0 \\ H_0(A)/k & \text{si } r=0 \end{cases}$$

De la sucesión exacta (1), se deduce la sucesión exacta

$$0 \longrightarrow H_0(A)/k \xrightarrow{Bi} H_1(A) \xrightarrow{Bi} H_2(A) \longrightarrow \cdots$$

En la demostración del Teorema 2.1 de este Capítulo vimos que $\mu:H_r(A) \longrightarrow \Omega^r(A)$ es un isomorfismo para $0\le r\le n$, y sabemos que $\mu Bi=d\mu$. Entonces

$$0\longrightarrow \Omega^0(A)/k \xrightarrow{d} \Omega^1(A) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Omega^{n-1}(A) \xrightarrow{d} \Omega^n(A) \longrightarrow 0$$

es exacto, pues $d:\Omega^{n-1}(A) \longrightarrow \Omega^n(A)$ es un epimorfismo. Entonces, por el Teorema 2.1, sabemos que $HC_n(A)=0$.

Como f es homogéneo con pesos,

$$f(X_1,\ldots,X_n)=(1/d)\sum_{i=1}^{n} p_i X_i \frac{\partial f}{\partial X_i}(X_1,\ldots,X_n)$$

y entonces

$$\mathrm{Ker}\left(A'/\langle(\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle \xrightarrow{f} A'/\langle(\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle\right) =$$

$$= A'/\langle(\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle = A/\langle(\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle = \Omega^n(A)$$

Por el Ejemplo 1.7 de la Sección anterior, se deduce que $H_r(A)=\Omega^n(A)$ para todo $r\ge n$.

Finalmente,

$$0 \longrightarrow \overline{HC}_r(A) \longrightarrow \Omega^n(A) \longrightarrow \overline{HC}_{r+1}(A) \longrightarrow 0$$

es una sucesión exacta corta para todo $r\ge n$, $\overline{HC}_n(A)=0$ y $\dim_k(\Omega^n(A))$ es finita pues $\Omega^n(A) = A/\langle(\frac{\partial f}{\partial X_m})_{1\le m\le n}\rangle$.

APENDICE

Para terminar la demostración del Teorema 4.5 falta ver que:

Proposición A.1:

$$\varphi_{i_m \ldots i_1} b'(1\otimes P_{m+1}\otimes \ldots \otimes P_1 \otimes 1)=$$

$$=-(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k}\varphi_{i_m\ldots \hat{i}_k \ldots i_1}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\qquad \frac{T_{i_k}(f)}{T(X_{i_k})}+$$

$$+(-1)^m\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{i_j<h<i_{j+1}}\varphi_{i_m\ldots i_{j+1}h i_j\ldots i_1}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\ T(X_h)\ +$$

$$+\ (-1)^{m+1}\sum_{h<i_1}\varphi_{i_m\ldots i_1 h}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\ T(X_h)$$

Para demostrar esta Proposición, necesitamos las siguientes definiciones y observaciones:

Definición A.2:

1) $\varphi'^{m}_{i_k\ldots i_2}: A\otimes \overline{A}^{\otimes k}\otimes A \longrightarrow A^e$

$$\varphi'^{m}_{i_k\ldots i_2}(1\otimes P_k\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)=$$

$$=\quad \sum_{j=2}^{k}(-1)^{j+1}\varphi^{m-1}_{i_k\ldots i_{j+1}}(1\otimes P_k\otimes\ldots\otimes P_{j+1}\otimes 1)\cdot\ \frac{T_{i_j}(\overline{P_j P_{j-1}})}{T(X_{i_j})}\ \cdot$$

$\cdot\varphi^{0}_{i_{j-1}\ldots i_2}(1\otimes P_{j-2}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)$, para $n>i_k>\ldots>i_2>1$ y $1\le m\le [k/2]$.

2) $\varphi'_{i_k\ldots i_2}: A\otimes \overline{A}^{\otimes^k}\otimes A \longrightarrow A^e$

$$\varphi'_{i_k\ldots i_2}(1\otimes P_k\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)=\sum_{m=1}^{[k/2]}\varphi'^{m}_{i_k\ldots i_2}(1\otimes P_k\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)$$

Observación A.3:

a) $\varphi_{i_k \ldots i_1}(1\otimes P_k\otimes \ldots \otimes P_1\otimes 1) =$

$$=\varphi_{i_k \ldots i_2}(1\otimes P_k\otimes \ldots \otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})} + \varphi'_{i_k \ldots i_2}(1\otimes P_k\otimes \ldots \otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}$$

b) $\varphi'_{i_k \ldots i_2}(1\otimes P_k\otimes \ldots \otimes P_1\otimes 1) =$

$$=-\varphi_{i_k \ldots i_3}(1\otimes P_k\otimes \ldots \otimes P_3\otimes 1)\frac{T_{i_2}(\overline{P_2P_1})}{T(X_{i_2})} - \varphi'_{i_k \ldots i_3}(1\otimes P_k\otimes \ldots \otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}$$

Observación A.4:

a) $b'(1\otimes P_{m+1}\otimes \ldots \otimes P_1\otimes 1) = b'(1\otimes P_{m+1}\otimes \ldots \otimes P_2)\otimes P_1\otimes 1 +$

$+ (-1)^m(1\otimes P_{m+1}\otimes \ldots \otimes P_3\otimes \overline{P_2P_1}\otimes 1) + (-1)^{m+1}(1\otimes P_1)(1\otimes P_{m+1}\otimes \ldots \otimes P_2\otimes 1)$

b) $b'(1\otimes P_{m+1}\otimes \ldots \otimes P_1\otimes 1) =$

$= b'(1\otimes P_{m+1}\otimes \ldots \otimes P_3)\otimes P_2\otimes P_1\otimes 1 + (-1)^{m+1}(1\otimes P_{m+1}\otimes \ldots \otimes P_4\otimes \overline{P_3P_2}\otimes P_1\otimes 1) +$

$+(-1)^m(1\otimes P_{m+1}\otimes \ldots \otimes P_3\otimes \overline{P_2P_1}\otimes 1) + (-1)^{m+1}(1\otimes P_1)(1\otimes P_{m+1}\otimes \ldots \otimes P_2\otimes 1)$

Vamos a probar el Teorema 5.1 simultáneamente con:

$$(*)\quad \varphi'_{i_m \ldots i_2} b'(1\otimes P_{m+1}\otimes \ldots \otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} =$$

$$=(-1)^m(1\otimes \overline{P_1P_2})\varphi_{i_m \ldots i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes \ldots \otimes P_3\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} -$$

$$-(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\sum^{m}(-1)^{m+k}\varphi'_{i_m\ldots\hat{i}_k\ldots i_2}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\quad\frac{T_{i_k}(f)}{T(X_{i_k})}\cdot\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}+$$

$$+(-1)^m\sum_{j=2}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{i_j<h<i_{j+1}}\varphi'_{i_m\ldots i_{j+1}h i_j\ldots i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)T(X_h)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}+$$

$$+(-1)^m\sum_{h<i_2}\varphi'_{i_m\ldots i_2 h}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)T(X_h)\ \frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}$$

Demostración:

El caso m=0 se deduce por cálculo directo. Supongamos que las dos fórmulas son ciertas para todo k<m. Veamos que (*) es cierta para k=m. Usando la Observación A.4.b) en la primer parte de la Observación A.3.b), y la Observación A.4.a) en el segundo término, tenemos

$$\varphi'_{i_m\ldots i_2}b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}=$$

$$=\quad-\varphi_{i_m\ldots i_3}\Big(b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3)\otimes 1\Big)\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})}\quad\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}+$$

$$+(-1)^m\varphi_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\left(\frac{T_{i_2}\left(\overline{P_1\overline{P_2P_3}}\right)}{T(X_{i_2})}-\frac{T_{i_2}\left(\overline{\overline{P_1P_2}P_3}\right)}{T(X_{i_2})}\right)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}+$$

$$+(-1)^m(1\otimes P_1)\varphi_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\frac{T_{i_2}(\overline{P_2P_3})}{T(X_{i_2})}\ \frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}-$$

$$-\ \varphi'_{i_m\ldots i_3}\Big(b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_2)\otimes 1\Big)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\ \frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}+$$

$$+(-1)^{m+1}\varphi'_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\left(\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})} - (1\otimes P_1)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\right)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} =$$

$$=-\Big(\varphi_{i_m\ldots i_3}b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)+(-1)^m(1\otimes P_3).$$

$$.\varphi_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\Big)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\cdot\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})} +$$

$$+(-1)^m\varphi_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\left(\frac{T_{i_2}\left(\overline{P_1\overline{P_2P_3}}\right)}{T(X_{i_2})} \qquad \frac{T_{i_2}\left(\overline{\overline{P_1P_2}P_3}\right)}{T(X_{i_2})}\right)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} +$$

$$+\ (-1)^m(1\otimes P_1)\ \varphi_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\ \frac{T_{i_2}(\overline{P_2P_3})}{T(X_{i_2})}\ \frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\ -$$

$$-\Big(\varphi'_{i_m\ldots i_3}b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_2\otimes 1)+(-1)^{m+1}(1\otimes P_2).$$

$$.\varphi'_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\Big)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\cdot\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})} +$$

$$+(-1)^{m+1}\varphi'_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\left(\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})} - (1\otimes P_1)\frac{T_{i_2}(P_2)}{T(X_{i_2})}\right)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} =$$

Como (ver Proposición 1.4 del Capítulo 2)

$$(1\otimes P_3)\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})} - \frac{T_{i_2}\left(\overline{P_1\overline{P_2P_3}}\right)}{T(X_{i_2})} + \frac{T_{i_2}\left(\overline{\overline{P_1P_2}P_3}\right)}{T(X_{i_2})} + (1\otimes P_1)\ \frac{T_{i_2}(\overline{P_2P_3})}{T(X_{i_2})} =$$

$$=(1\otimes P_3)\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})}+\frac{T_{i_2}\left(P_1\overline{P_2P_3}\right)}{T(X_{i_2})}-\frac{T_{i_2}\left(\overline{P_1P_2}P_3\right)}{T(X_{i_2})}+(1\otimes P_1)\frac{T_{i_2}(\overline{P_2P_3})}{T(X_{i_2})}=$$

$$=(1\otimes\overline{P_2P_3})\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}-\sum_{h<i_2}T_h(P_1)\frac{T_{i_2}(\overline{P_2P_3})}{T(X_{i_2})}-\sum_{h\leq i_2}T_h(\overline{P_2P_3})\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}-$$

$$-(1\otimes\overline{P_1P_2})\frac{T_{i_2}(P_3)}{T(X_{i_2})}+\sum_{h\leq i_2}T_h(P_3)\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})}+\sum_{h<i_2}T_h(\overline{P_1P_2})\frac{T_{i_2}(P_3)}{T(X_{i_2})}$$

y

$$(1\otimes P_2)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}-\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})}+(1\otimes P_1)\frac{T_{i_2}(P_2)}{T(X_{i_2})}=$$

$$=\sum_{h<i_2}T_h(P_1)\frac{T_{i_2}(P_2)}{T(X_{i_2})}+\sum_{h\leq i_2}T_h(P_2)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}+(1\otimes\overline{P_1P_2})\frac{T_{i_2}(f)}{T(X_{i_2})}-$$

$$-\sum_{h<i_2}T_h(\overline{P_1P_2})\frac{T_{i_2}(f)}{T(X_{i_2})}-\sum_{h\leq i_2}T_h(f)\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})}$$

por la hipótesis inductiva tenemos

$$\varphi'_{i_m\dots i_2}b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}=$$

$$=(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\sum_{k=3}^{m}(-1)^{m+k}\varphi_{i_m\dots\hat{i}_k\dots i_3}(1\otimes P_{m-1}\otimes\dots\otimes P_3\otimes 1)\,.$$

$$\cdot\frac{T_{i_k}(f)}{T(X_{i_k})}\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})}\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}+$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{j=3}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{i_j<h<i_{j+1}}\varphi_{i_m\ldots i_{j+1}hi_j\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1).$$

$$.T(X_h)\ \frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\ \frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})}\ +$$

$$+\ (-1)^m\sum_{h<i_3}\varphi_{i_m\ldots i_3h}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)T(X_h)\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})}\ \frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\ +$$

$$+(-1)^{m+1}\varphi_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\left((1\otimes\overline{P_2P_3})\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\ -\right.$$

$$-\sum_{h<i_2}T_h(P_1)\frac{T_{i_2}(\overline{P_2P_3})}{T(X_{i_2})}\ -\ \sum_{h\le i_2}T_h(\overline{P_2P_3})\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\ -(1\otimes\overline{P_1P_2})\frac{T_{i_2}(P_3\ )}{T(X_{i_2})}\ \ +$$

$$\left.+\sum_{h\le i_2}T_h(P_3)\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})}\ +\sum_{h<i_2}T_h(\overline{P_1P_2})\frac{T_{i_2}(P_3)}{T(X_{i_2})}\right)+$$

$$+\ \ (-1)^m(1\otimes\overline{P_2P_3})\ \ \varphi_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\ \ \frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\ \ \frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\ \ -$$

$$+(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\sum_{k=3}^{m}(-1)^{m+k}\varphi'_{i_m\ldots\hat{i}_k\ldots i_3}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\qquad\frac{T_{i_k}(f)}{T(X_{i_k})}\qquad\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}+$$

$$+\ (-1)^m(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\varphi_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_2\otimes 1)\ \frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\ \frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\ +$$

$$+\ (-1)^{m+1}\sum_{j=3}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{i_j<h<i_{j+1}}\varphi'_{i_m\ldots i_{j+1}hi_j\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_2\otimes 1)T(X_h).$$

$$\cdot\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\,\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} + (-1)^m \sum_{h<i_3} \varphi'_{i_m \ldots i_3 h}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_2\otimes 1)\,T(X_h)\frac{T_{i_2}(P_1)T_{i_1}(f)}{T(X_{i_2})\;T(X_{i_1})} +$$

$$+(-1)^m \varphi'_{i_m \ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\left(\sum_{h<i_2} T_h(P_1)\frac{T_{i_2}(P_2)}{T(X_{i_2})} + (1\otimes\overline{P_1P_2})\frac{T_{i_2}(f)}{T(X_{i_2})} + \right.$$

$$\left. +\sum_{h\leq i_2} T_h(P_2)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})} - \sum_{h<i_2} T_h(\overline{P_1P_2})\frac{T_{i_2}(f)}{T(X_{i_2})} - \sum_{h\leq i_2} T_h(f)\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})}\right)$$

Reordenando los términos, tenemos

$$\varphi'_{i_m \ldots i_2} b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} =$$

$$=(-1)^m(1\otimes\overline{P_1P_2})\left(\varphi_{i_m \ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\frac{T_{i_2}(P_3)}{T(X_{i_2})} + \right.$$

$$\left. + \quad \varphi'_{i_m \ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_{i_2}(f)}{T(X_{i_2})}\right)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}$$

$$(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\sum_{k=3}^{m}(-1)^{m+k}\left(- \quad \varphi_{i_m \ldots \hat{i}_k \ldots i_3}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})} - \right.$$

$$\left. - \varphi'_{i_m \ldots \hat{i}_k \ldots i_3}(1\otimes P_{m-1}\otimes\ldots\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\right)\frac{T_{i_k}(f)}{T(X_{i_k})}\cdot\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} +$$

$$+ (-1)^m(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\varphi_{i_m \ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\,\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} +$$

$$+ (-1)^{m}\sum_{j=3}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{i_j<h<i_{j+1}}\Bigg(- \varphi_{i_m\ldots i_{j+1}hi_j\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\,.$$

$$\cdot\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})} \qquad \varphi'_{i_m\ldots i_{j+1}hi_j\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\Bigg)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} \qquad T(X_h)+$$

$$+ (-1)^{m+1}\sum_{i_2<h<i_3}\Bigg(- \varphi_{i_m\ldots i_3h}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})} -$$

$$- \varphi'_{i_m\ldots i_3h}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\Bigg)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\; T(X_h) \;+$$

$$+(-1)^{m}\sum_{h\le i_2}\Bigg(\varphi_{i_m\ldots i_3h}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})} +$$

$$+ \qquad \varphi'_{i_m\ldots i_3h}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\Bigg)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}T(X_h)+$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{h\le i_2}\Bigg(\varphi_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\frac{T_h(P_3)}{T(X_h)} \;+$$

$$+\varphi'_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_h(f)}{T(X_h)}\Bigg)\frac{T_{i_2}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_2})}\;\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}T(X_h) \;+$$

$$+ (-1)^{m+1}\sum_{h\le i_2}\Bigg(- \varphi_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\;\frac{T_h(\overline{P_2P_3})}{T(X_h)} -$$

$$- \varphi'_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_h(P_2)}{T(X_h)}\Bigg)\frac{T_{i_2}(P_1)}{T(X_{i_2})}\;\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}T(X_h) \;+$$

$$+(-1)^m\sum_{h<i_2}\left(\left(\varphi_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\frac{T_{i_2}(\overline{P_2P_3})}{T(X_{i_2})}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\ \varphi'_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_{i_2}(P_2)}{T(X_{i_2})}\right)\frac{T_h(P_1)}{T(X_h)}\ -\ \left(\varphi_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_4\otimes 1)\cdot\right.\right.$$

$$\left.\left.\cdot\frac{T_{i_2}(P_3)}{T(X_{i_2})}\ +\ \varphi'_{i_m\ldots i_3}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_{i_2}(f)}{T(X_{i_2})}\right)\frac{T_h(\overline{P_1P_2})}{T(X_h)}\right)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\cdot T(X_h)$$

Aplicando las Observaciones A.3.a) y A.3.b), tenemos (*).

Veamos ahora que A.1 también se verifica para $k=m$. Usando las Observaciones A.4.a) y A.3.a), tenemos

$$\varphi_{i_m\ldots i_1}b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)=\qquad\varphi_{i_m\ldots i_2}\left(b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_2)\otimes 1\right)\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})}+$$

$$+(-1)^m\varphi_{i_m\ldots i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_{i_1}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_1})}\ +$$

$$+(-1)^{m+1}(1\otimes P_1)\varphi_{i_m\ldots i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_{i_1}(P_2)}{T(X_{i_1})}\ +$$

$$+\varphi'_{i_m\ldots i_2}b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\ =$$

$$=\left(\varphi_{i_m\ldots i_2}b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_2\otimes 1)+(-1)^{m+1}(1\otimes P_2)\varphi_{i_m\ldots i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\right)\cdot$$

$$\cdot\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})}\ +\ (-1)^m\varphi_{i_m\ldots i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_{i_1}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_1})}\ +$$

$$+\varphi'_{i_m\dots i_2} b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}$$

Aplicando la Proposición 1.4 del Capítulo 2, se tiene

$$-(1\otimes P_2)\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})} + \frac{T_{i_1}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_1})} - (1\otimes P_1)\frac{T_{i_1}(P_2)}{T(X_{i_1})} =$$

$$=-\sum_{h\le i_1} T_h(P_1)\frac{T_{i_1}(P_2)}{T(X_{i_1})} - \sum_{h<i_1} T_h(P_2)\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})} \qquad (1\otimes\overline{P_1P_2})\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} +$$

$$+\sum_{h<i_1} T_h(\overline{P_1P_2})\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} + \sum_{h\le i_1} T_h(f)\frac{T_{i_1}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_1})}$$

y usando la hipótesis inductiva, la ecuación queda así:

$$\varphi_{i_m\dots i_1} b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1) =$$

$$(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\sum_{k=2}^{m}(-1)^{m+k}\varphi_{i_m\dots\hat{i}_k\dots i_2}(1\otimes P_{m-1}\otimes\dots\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_k}(f)}{T(X_{i_k})}\cdot\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})} +$$

$$+(-1)^m\sum_{j=2}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{i_j<h<i_{j+1}}\varphi_{i_m\dots i_{j+1}h i_j\dots i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_2\otimes 1)T(X_h)\cdot$$

$$\cdot\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})} + (-1)^m\sum_{h<i_2}\varphi_{i_m\dots i_2 h}(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_2\otimes 1)\; T(X_h)\;\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})} +$$

$$+(-1)^m\varphi_{i_m\dots i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_3\otimes 1)\left(-\sum_{h\le i_1}T_h(P_1)\frac{T_{i_1}(P_2)}{T(X_{i_1})}-\sum_{h<i_1}T_h(P_2)\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})}-\right.$$

$$\left.-(1\otimes\overline{P_1P_2})\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}+\sum_{h<i_1}T_h(\overline{P_1P_2})\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}+\sum_{h\le i_1}T_h(f)\frac{T_{i_1}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_1})}\right)+$$

$$+\varphi'_{i_m\dots i_2}b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}$$

Ahora, aplicando la igualdad (*), tenemos

$$\varphi_{i_m\dots i_1}b'(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)=$$

$$=-(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\sum_{k=2}^{m}(-1)^{m+k}\left(\varphi_{i_m\dots\hat{i}_k\dots i_2}(1\otimes P_{m-1}\otimes\dots\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})}+\right.$$

$$\left.+\quad\varphi'_{i_m..\hat{i}_k..i_2}(1\otimes P_{m-1}\otimes..\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\right)\frac{T_{i_k}(f)}{T(X_{i_k})}+$$

$$+\ (-1)^m(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\varphi_{i_m..i_2}(1\otimes P_{m-1}\otimes..\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}+$$

$$+(-1)^m\sum_{j=2}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{i_j<h<i_{j+1}}\left(\varphi_{i_m..i_{j+1}hi_j..i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes..\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})}+\right.$$

$$\left.+\quad\varphi'_{i_m\dots i_{j+1}hi_j\dots i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes\dots\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\right)T(X_h)+$$

$$+(-1)^m\sum_{h<i_1}\left(\varphi_{i_m..i_2h}(1\otimes P_{m+1}\otimes..\otimes P_2\otimes 1)-\varphi_{i_m..i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes..\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_h(P_2)}{T(X_h)}\right).$$

$$.T(X_h)\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})} \qquad (-1)^m\sum_{h<i_1}\left(\varphi'_{i_m..i_2h}(1\otimes P_{m+1}\otimes..\otimes P_1\otimes 1)+\right.$$

$$\left.\varphi_{i_m..i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes..\otimes P_3\otimes 1)\frac{T_h(\overline{P_1P_2})}{T(X_h)}\right)T(X_h)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})} -$$

$$+(-1)^m\sum_{i_1\le h<i_2}\left(\varphi_{i_m...i_2h}(1\otimes P_{m+1}\otimes...\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})} +\right.$$

$$\left.+\ \varphi'_{i_m..i_2h}(1\otimes P_{m+1}\otimes..\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\right)T(X_h)+$$

$$+(-1)^m\varphi_{i_m..i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes..\otimes P_3\otimes 1)\left(-\sum_{h\le i_1}T_h(P_1)\frac{T_{i_1}(P_2)}{T(X_{i_1})} +\sum_{h\le i_1}T_h(f)\frac{T_{i_1}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_1})}\right)$$

Por las Observaciones A.4.b) y A.4.c), tenemos

$$\varphi_{i_m...i_1}b'(1\otimes P_{m+1}\otimes...\otimes P_1\otimes 1)=$$

$$=-(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k}\varphi_{i_m...\hat{i}_k...i_1}(1\otimes P_{m-1}\otimes...\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_k}(f)}{T(X_{i_k})} +$$

$$+(-1)^m\sum_{j=2}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{i_j<h<i_{j+1}}\varphi_{i_m..i_{j+1}hi_j..i_1}(1\otimes P_{m+1}\otimes...\otimes P_1\otimes 1)\ T(X_h) +$$

$$+(-1)^m\sum_{h<i_1}\left(\varphi'_{i_m..i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes...\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_1}(P_1)}{T(X_{i_1})}\ \frac{T_h(f)}{T(X_h)} -\right.$$

$$\left.\varphi'_{i_m..i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes..\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_{i_1}(f)}{T(X_{i_1})}\quad\frac{T_h(P_1)}{T(X_h)}\right)T(X_h)\quad +$$

$$+(-1)^m \sum_{i_1<h<i_2} \varphi_{i_m..i_2 h i_1}(1\otimes P_{m+1}\otimes..\otimes P_1\otimes 1)T(X_h) -$$

$$+(-1)^m \varphi_{i_m..i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes..\otimes P_3\otimes 1)\left(-\sum_{h<i_1} T_h(P_1)\frac{T_{i_1}(P_2)}{T(X_{i_1})} + \sum_{h<i_1} T_h(f)\frac{T_{i_1}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_1})}\right)+$$

$$+ (-1)^m \varphi_{i_m...i_2}(1\otimes P_{m+1}\otimes...\otimes P_3\otimes 1)\left(-T_{i_1}(P_1)\frac{T_{i_1}(P_2)}{T(X_{i_1})} + T_{i_1}(f)\frac{T_{i_1}(\overline{P_1P_2})}{T(X_{i_1})}\right)+$$

$$+(-1)^m \varphi_{i_m...i_1}(1\otimes P_{m+1}\otimes...\otimes P_2\otimes 1)\ T_{i_1}(P_1) +$$

$$+(-1)^m \varphi'_{i_m...i_1}(1\otimes P_{m+1}\otimes...\otimes P_1\otimes 1)\ T_{i_1}(f) =$$

$$=-(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k}\varphi_{i_m..\hat{i}_k..i_1}(1\otimes P_{m-1}\otimes..\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_k}(f)}{T(X_{i_k})} +$$

$$+(-1)^m \sum_{j=1}^{m}(-1)^{j+1}\sum_{i_j<h<i_{j+1}} \varphi_{i_m..i_{j+1} h i_j..i_1}(1\otimes P_{m+1}\otimes..\otimes P_1\otimes 1)\ T(X_h) +$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{h<i_1}\left(\varphi_{i_m...i_1}(1\otimes P_{m+1}\otimes...\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_h(P_1)}{T(X_h)} +\right.$$

$$\left.+ \varphi'_{i_m...i_1}(1\otimes P_{m+1}\otimes...\otimes P_2\otimes 1)\frac{T_h(f)}{T(X_h)}\right)T(X_h)$$

Entonces

$$\varphi_{i_m...i_1} b'(1\otimes P_{m+1}\otimes...\otimes P_1\otimes 1)=$$

$$=-(\overline{P_{m+1}P_m}\otimes 1)\sum_{k=1}^{m}(-1)^{m+k}\varphi_{i_m...\hat{i}_k...i_1}(1\otimes P_{m-1}\otimes...\otimes P_1\otimes 1)\frac{T_{i_k}(f)}{T(X_{i_k})} +$$

$$+(-1)^{m+1}\sum_{h<i_1}\varphi_{i_m\ldots i_1 h}(1\otimes P_{m+1}\otimes\ldots\otimes P_1\otimes 1)\; T(X_h).$$

REFERENCIAS

[B1] BACH (The Buenos Aires Cyclic Homology Group)
Hochschild and Cyclic homology of algebras with one generator
Aceptado para su publicación en K Theory

[B2] BACH (The Buenos Aires Cyclic Homology Group)
Hochschild and Cyclic Homology of Hypersurfaces
Aceptado para su publicación en Advances in Math.

[C-E] Cartan,H. y Eilenberg,S.
Homological Algebra
Princeton University Press (1956)

[G] Goodwillie, T.G.
Cyclic homology, derivations and the free Loopspace
Topology, vol 24, N.2, 187-215 (1985)

[L-Q] Loday,J.L. y Quillen,D.
Cyclic Homology and the Lie algebra of matrices
Comment.Math.Helv. 59, 565-591 (1984)

[M-V] Mount,K.R. y Villamayor,O.E.
Taylor series and higher derivations
Impresiones previas Dpto. de Mat., Bs.As.,18 (1969)

[T] Tate, J.
Homology of Noetherian Rings and Local Rings
Illinois J. Math. 1, 14-27 (1957)

[V] Vigué-Poirrier, M.
Cyclic homology of algebraic hypersurfaces
Pub. Irma, Lille 10 VII (1987)