

Tesis de Posgrado

Descripción fluidodinámica de las disipación-difusión en sistemas fermiónicos finitos

Vignolo, Carlos Esteban

1991

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias
Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Vignolo, Carlos Esteban. (1991). Descripción fluidodinámica de las disipación-difusión en sistemas fermiónicos finitos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2418_Vignolo.pdf

Cita tipo Chicago:

Vignolo, Carlos Esteban. "Descripción fluidodinámica de las disipación-difusión en sistemas fermiónicos finitos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1991. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2418_Vignolo.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

**Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Física**

**DESCRIPCIÓN FLUIDODINÁMICA DE LA
DISIPACIÓN-DIFUSIÓN EN SISTEMAS
FERMIÓNICOS FINITOS**

por

CARLOS ESTEBAN VIGNOLO

Directora de Tesis: *Prof. Dra. E.S. Hernández*

Co Director de Tesis: *Prof. Dr. W. Nörenberg*

Trabajo de Tesis para optar por el título de Doctor en Ciencias Físicas
Setiembre 1991

*Tesis.
2418
ej. 2.*

Quisiera agradecer especialmente a mi directora, la Dra. Susana Hernández, la ayuda, paciencia y disposición brindada a lo largo de todos estos años en las circunstancias y lugares más diversos. Por los conceptos físicos deseo agradecer a mi co-director el Dr. Wolfgang Nörenberg, y por los no-físicos al inolvidable grupo de amigos en el "exilio", Manuel Cubero, Katia y Airton Eiras, y a Ramiro Medina, por supuesto.

ÍNDICE

	pág.
1. Introducción y Resumen	3
2. Fundamentos de la Aproximación Fluidodinámica	13
2.1 Aproximación Semiclásica	14
2.2 Ecuación de Transporte Estocástica	17
 PARTE I 	
3. Fluidodinámica Disipativa Nuclear	23
3.1 Principio Variacional	23
3.2 Vorticidad y Correlaciones de Dos Cuerpos	25
3.3 Ecuación de Movimiento	26
3.4 Límite de Pequeñas Oscilaciones	28
3.5 Funcional de Energía Intrínseca	30
3.5 Tensor Viscoelástico de Esfuerzos	33
4. Solución de las Ecuaciones Fluidodinámicas para Modos de Paridad Anormal	36
4.1 Aproximación de Densidad Escalón	37
4.2 Perfil de Densidad Difuso	51

PARTE II

5. Descripción Estocástica No-Markoviana del Movimiento Colectivo Nuclear	61
5.1 Determinismo y Estocasticidad	61
5.2 Tratamiento Estocástico General	65
5.3 Movimiento Colectivo Nuclear	67
5.4 Ecuación para la Fuerza Estocástica	71
5.5 Reducción a un Movimiento Browniano Clásico	75
6. Aplicación Numérica: Excitación de Modos Normales	77
6.1 Evolución de la Matriz de Covariancia	78
6.2 Parámetros de la Ecuación de Transporte	84
6.3 Funciones de Correlación de Duración Finita	88
7. Conclusiones Generales	91
APÉNDICE	
A. Aproximación de Escala	95
B. Funcional de Energía en el Caso Estático	101
C. Descripción Microscópica del Movimiento Colectivo Nuclear	104
C.1 Ecuación de Movimiento para la Variable Colectiva	104
C.2 Evolución Temporal de las Fluctuaciones	108
Bibliografía	111

Capítulo 1

Introducción y Resumen

La conexión entre la hidrodinámica nuclear y la teoría cuántica de muchos cuerpos, delineada en la figura 1.1, ha sido objeto de estudio de muchos científicos durante varios años [1]. Es factible comenzar con una teoría microscópica exacta de muchos cuerpos, y luego de truncar una jerarquía de ecuaciones acopladas reteniendo solamente la simetría exigida por el principio de Pauli como única correlación de dos cuerpos, obtener la aproximación de campo medio conocida como aproximación de Hartree-Fock dependiente del tiempo (HFDT) [2]. Esta aproximación, si bien reproduce exitosamente la evolución de observables de un cuerpo en diversos fenómenos dinámicos nucleares, no permite en principio describir procesos colectivos de desexcitación o relajación de modos colectivos, debido a que precisamente las partículas sólo interactúan con el campo promedio efectivo, definido por el procedimiento de Hartree-Fock mismo en una manera autoconsistente. Muchos trabajos fueron realizados entonces en la última década con el objeto de incorporar correlaciones de dos cuerpos causadas por la interacción residual nucleón-nucleón [4]. Tales extensiones, conocidas como HFDT extendido (HFDT-E) [4], permiten así describir no sólo los efectos de campo medio tenidos en cuenta en principio en una aproximación de Hartree-Fock.

Luego, uno puede pasar a una descripción clásica -o mejor dicho, semiclásica- interpretando a la función de Wigner resultante de una antitransformada de Fourier de la densidad de dos cuerpos como una función de distribución. La ecuación de Vlasov-Boltzmann, resultante como el límite $\hbar \rightarrow 0$ de la ecuación de movimiento en la aproximación de HFDT-E, representa la base para toda descripción estadística. Introduciendo la entropía local se puede probar que, junto con la ecuación de Vlasov-Boltzmann, la derivada total de la entropía local nunca decrece [2], resultado co-

nocido clásicamente como Teorema H [5]. Naturalmente se hablará de un estado de equilibrio (térmico) local, cuando la entropía local sea estacionaria. Más aún, puede ser demostrado que, cuando se alcanza el equilibrio, la distribución local de momentos estará caracterizada por una del tipo de Fermi. Los parámetros en la función de distribución resultan ser,

- la temperatura local;
- la energía de Fermi, relacionada con la densidad local;
- el apartamiento de la distribución esféricamente simétrica, relacionado con el campo local de velocidades.

Entonces, en equilibrio, el tensor de esfuerzos obtenido a partir de la distribución de momentos, depende solamente de la temperatura local, la densidad local, y el campo local de velocidades.

El próximo paso consiste en utilizar el método de Enskog-Chapman y aproximar así la ecuación de Vlasov-Boltzmann por un conjunto de ecuaciones diferenciales acopladas para los momentos de la distribución, multiplicando por distintas potencias de \mathbf{p} e integrando en el espacio de momentos. Esto conduce a un conjunto infinito de ecuaciones acopladas que en un paso inmediato deberán ser truncadas para obtener así la solución en un nivel de aproximación determinado. Dicha truncación en la mayoría de los casos, está limitada por la capacidad de cálculo. El llamado *nivel hidrodinámico* se alcanza cuando sólo se conserva hasta el segundo momento en la expansión. Las ecuaciones que esta aproximación engendra son, a saber, la de continuidad (orden cero), la de Navier-Stokes (orden uno) y la de conservación de la energía (orden dos). En tal representación hidrodinámica, las variables dinámicas involucradas son la densidad local, el campo de velocidades y la densidad de energía.

Aún bajo la suposición de equilibrio local, para reducir la ecuación de Vlasov-Boltzmann al conjunto de ecuaciones acopladas a disposición en el nivel hidrodinámico, es necesario contestar una pregunta crucial respecto de si el tiempo de relajación que conduce a dicho estado de equilibrio local es pequeño en comparación con el tiempo total involucrado en el proceso. Si bien la magnitud exacta de este valor genera aún discusiones al querer ser firmemente establecido, muchos intentos fueron hechos para calcularlo a partir de distintos modelos [6, 7]. Aproximaciones en conexión con la Teoría del Líquido de Fermi normal [8] establecen que, a partir de la magnitud promedio de la energía de la excitación colectiva y la temperatura del líquido fermiónico, es posible calcular el tiempo para que un número de nucleones excitados pueda alcanzar una situación de equilibrio. Cálculos de Bertsch [7] realizados en conexión con el tema de colisiones entre iones pesados en el régimen de bajas energías, estiman en $60 \text{ MeV}/\epsilon^* \text{ fm}/c$ el tiempo necesario para que una distribución anisotrópica de momentos relaje al equilibrio, siendo ϵ^* la energía de excitación por partícula disponible en el sistema. Por otro lado, en colisiones entre

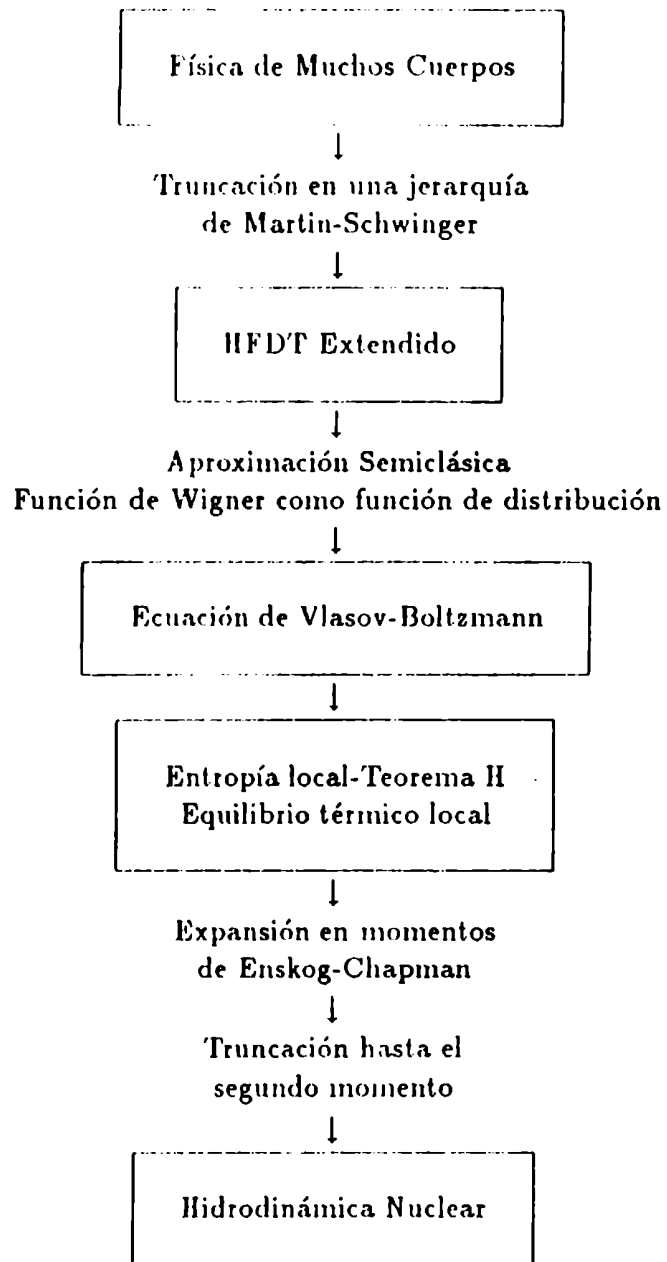


Figura 1.1: Genealogía de la hidrodinámica nuclear y su conexión con la física de muchos cuerpos.

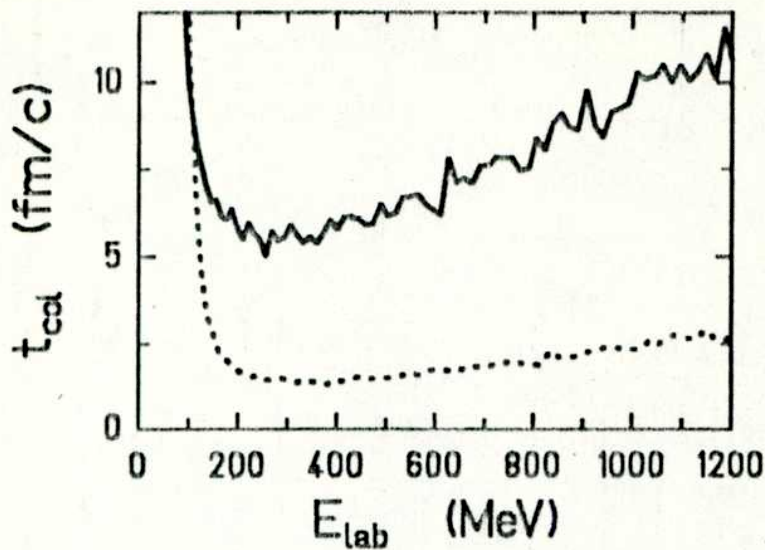


Figura 1.2: Tiempo medio entre dos sucesivas colisiones nucleón-nucleón para materia nuclear en su estado fundamental en función de la energía cinética del nucleón incidente en dos distintas aproximaciones, suponiendo (línea punteada) o no que la sección eficaz de colisión es constante e igual a su valor en el vacío [9].

iones pesados a energías intermedias, la distribución de momentos en la región de colisión puede ser representada aproximadamente por una bi-esfera cuyos centros están separados por el momento relativo determinado en base a la energía cinética por nucleón del proyectil. Como el bloqueo debido al principio de Pauli resulta menos eficaz cuando la separación entre centros de la bi-esfera de Fermi aumenta, la fracción de nucleones capaz de realizar colisiones de dos cuerpos y a la vez el espacio de fases de estados finales accesibles, aumenta con la energía de bombardeo. Uno espera entonces un decrecimiento del tiempo de relajación con el incremento de energía hasta que dicho valor sea tan alto como para separar la bi-esfera en dos esferas de Fermi disjuntas. A partir de aquí, el tiempo de relajación resulta ser menos sensible a los cambios de energía incidente, y es por eso que, para valores de energía bombardeante por partícula en el rango de 200 MeV/Λ a 1.2 GeV/Λ el tiempo de relajación permanece aproximadamente constante y en el orden de los 5 a 10 fm/c tal como se muestra en la figura 1.2. Dichos resultados, tomados de la referencia [9], fueron obtenidos a partir de ecuaciones cinéticas covariantes adecuadas en el rango de energías intermedias.

Una teoría markoviana basada en una descripción hidrodinámica sería en principio adecuada si el tiempo de interacción involucrado en el proceso fuese grande comparado con el tiempo de relajación. Sin embargo, a pesar del éxito de dicha

teoría en la descripción de colisiones disipativas núcleo-núcleo [10], basándose en las estimaciones previas para el tiempo de relajación, la suposición de equilibrio local no sería válida al menos en la fase de aproximación de ambos núcleos ni en el estudio de resonancias gigantes excitadas en este tipo de procesos disipativos, como ya fue puntualizado por Broglia y colaboradores [11].

Sin embargo, abandonar el concepto de equilibrio local no implica necesariamente dejar de lado una descripción hidrodinámica. La característica distintiva y a la vez atractiva de toda descripción fluidodinámica ¹ es la elección de cantidades locales como la densidad de partícula independiente y el campo de velocidades como cantidades dinámicas básicas para la descripción de un sistema de muchos cuerpos. El problema surge cuando, para conseguir un sistema de ecuaciones cerrado en estas variables, se aproximan otras magnitudes locales como la densidad de energía o el tensor de esfuerzos internos por funciones o funcionales de las primeras. Este proceder, conseguido a través de ecuaciones de estado locales y potenciales dependientes de la densidad, será entonces justificable cuando el libre camino medio de los constituyentes nucleares sea pequeño en comparación con una longitud característica (por ejemplo, el radio nuclear o la longitud de onda de una excitación colectiva).

Este modelo hidrodinámico convencional ha sido aplicado frecuentemente en sistemas nucleares y ha logrado describir con éxito las resonancias dipolares gigantes. Sin embargo y como se mencionó con anterioridad, su validez debería ser dudosa ya que en el régimen de bajas energías, basándose en las estimaciones del tiempo de relajación τ , uno esperaría que el libre camino medio de los nucleones sea comparable con las dimensiones del radio nuclear. Este hecho, consecuencia directa del principio de Pauli, forma el sustento del modelo de capas nuclear. El mayor fracaso del modelo hidrodinámico ocurre en el simple caso de la descripción de resonancias cuadrupolares gigantes, que predice dichos estados a energías de excitación del orden de $\hbar\omega_{2+} \approx 30 A^{-1/2}$ MeV, mientras que experimentalmente [12] se los halla a $\hbar\omega_{2+} \approx 63 A^{-1/3}$ MeV. Este fracaso resulta como consecuencia de haber utilizado una aproximación de Thomas-Fermi estática para el cálculo de la energía cinética intrínseca que presupone necesariamente una distribución de momentos esférica, es decir, en equilibrio local [13]. Resulta obvio entonces que la densidad de energía deducida de consideraciones estáticas no es suficiente para la descripción de un proceso dinámico.

Holzwarth y Eckart [13, 14] demostraron que en una aproximación fluidodinámica correcta, la funcional de densidad de energía cinética intrínseca debe tener en cuenta la distorsión de la esfera de Fermi. Esto fue logrado extendiendo resultados conocidos de la teoría de Thomas-Fermi, y trajo aparejado la aparición de fuerzas restauradoras de origen puramente cinético para los modos colectivos, excepto para los casos monopolar y dipolar donde la hidrodinámica usual resulta suficiente para describir-

¹Se reservará de aquí en más la palabra «fluidodinámica» para denotar una descripción hidrodinámica en donde no se utiliza explícitamente la hipótesis de equilibrio local.

los correctamente [3, 13]. En el marco de este tipo de descripción fluidodinámica adecuada al régimen de bajas energías, se desarrollará en la primer parte de este trabajo doctoral (c.f. Parte I) una teoría capaz de describir efectos disipativos, possibilitando así la aparición de autofrecuencias complejas de cuya parte real serán extraídos los valores del ancho característico del modo colectivo bajo estudio. Más aún, dicha formulación permitirá describir la relajación de la distorsión local de la esfera de Fermi sin restricciones para el valor del tiempo de relajación τ , permitiendo así una respuesta viscoelástica del medio [15, 16]. En otras palabras, dentro de esta descripción dinámica [15, 16], será posible atacar procesos que ocurren en escalas temporales totalmente distintas y sin necesidad de especificaciones previas, obteniéndose una respuesta del medio a la vez parcialmente elástica y parcialmente viscosa o plástica.

Las ecuaciones de movimiento serán deducidas de un principio variacional (c.f. Cap. 3) y resueltas para el caso particular de una clase de modo colectivo llamado modo torsión² o modo de paridad anormal (c.f. Cap. 4), obteniéndose soluciones analíticas (c.f. Sec. 4.1) si se supone que la densidad nuclear de equilibrio es del tipo escalón, o bien se resolverá numéricamente el problema (c.f. Sec. 4.2) si el perfil de densidades de equilibrio contiene difusión en la superficie nuclear. La elección de este modo torsión, responde a características particulares del mismo. Como se verá en detalle más adelante, este modo es excitado sin producir cambio alguno en la densidad de equilibrio, de forma tal que la energía de excitación proviene de una contribución puramente cinética y por lo tanto tal modo colectivo no aparece en descripciones hidrodinámicas convencionales. Más aún, las ecuaciones de movimiento se ven enormemente simplificadas por el hecho de tratarse de un modo transversal, lo que permite un tratamiento matemático sencillo del problema, obteniéndose inclusive soluciones analíticas para una elección particular de la densidad de equilibrio, como se mencionó con anterioridad.

Lamentablemente, la formulación fluidodinámica previa tiene asociada la restricción a movimientos colectivos de pequeña amplitud y por esta razón no es aplicable a colisiones entre iones pesados, por ejemplo. Sin embargo, es posible una reformulación de la aproximación fluidodinámica considerando en lugar del campo de desplazamientos³ el campo de velocidades como variable de campo, permitiendo la descripción de fenómenos colectivos de gran amplitud y manteniendo además las características viscoelásticas del medio nuclear. A nivel microscópico, este tipo de descripción es conocida como Dinámica Disipativa Diabática (DDD) [19, 23], y tiene la desventaja de no poder atacar movimientos colectivos cuyo campo de velocidades contenga vorticidad, debido a tratarse de una descripción de partícula independiente (c.f. Cap.3). A nivel macroscópico, sin embargo, es factible desarrollar una teoría

²Del inglés «twist».

³Por razones que serán obvias más adelante, el campo de desplazamientos es también llamado campo de escala.

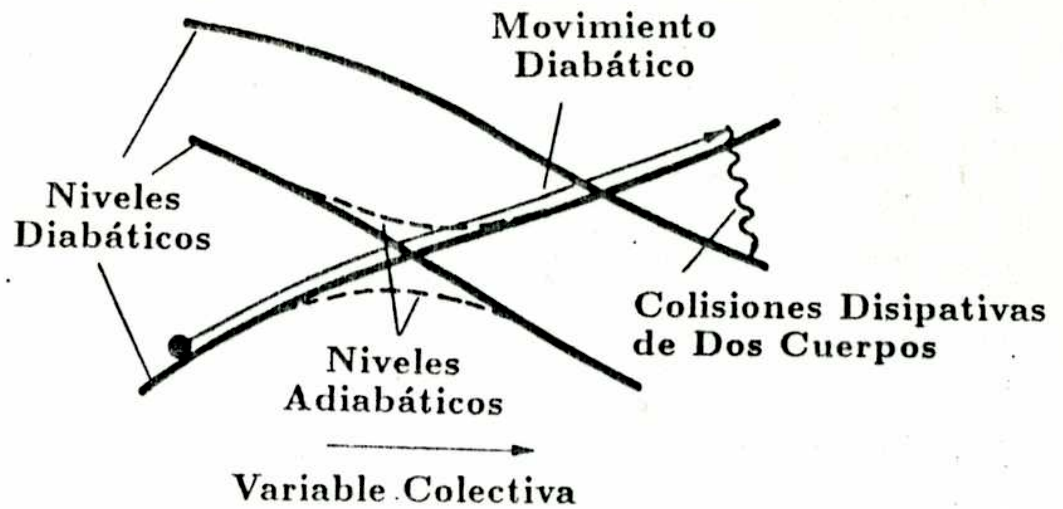


Figura 1.3: Ilustración del movimiento diabático de partícula independiente y colisiones de dos cuerpos que conducen a disipación como elementos básicos de la Dinámica Disipativa Diabática (DDD) para una única coordenada colectiva [19].

(partiendo de la ecuación de Vlasov-Boltzmann) que permite describir en una forma totalmente general fenómenos de no equilibrio sin necesidad de especificar a priori el carácter del fluido (c.f. Cap.5) [18].

Como su nombre lo indica, la teoría de la DDD está basada fundamentalmente en dos elementos: el movimiento diabático de partícula independiente que aproximadamente describe el acople mecanocuántico coherente entre grados de libertad colectivos e intrínsecos, y las colisiones disipativas responsables de la equilibración o termalización del sistema. Como en física atómica, la palabra «diabática» proveniente del griego «διαβαδίζω» es utilizada para designar la existencia de cruces. Esto es, funciones con estructura nodal diferente (carácter diferente), exhiben cruces de los correspondientes niveles diabáticos, como se indica en la figura 1.3. Cualitativamente se observa un mecanismo de disipación que consta de dos pasos: comenzando con alguna distribución de equilibrio para las probabilidades de ocupación de partícula independiente (p.ej., la correspondiente al estado fundamental si se está considerando la etapa inicial de una colisión nucleón-nucleón), la excitación diabática de los estados de partícula-agujero produce una fuerza repulsiva en el movimiento colectivo. Así entonces, la energía cinética colectiva es acumulada primariamente como un potencial conservativo. Sin embargo, colisiones de uno y dos cuerpos tratan de reestablecer una nueva distribución de equilibrio para las probabilidades de ocupación destruyendo por lo tanto el potencial diabático. La termalización o equilibrio

intrínseco debido a las colisiones constituye un proceso irreversible temporalmente que finalmente conduce a disipación.

La teoría de la DDD describe de una manera clara y físicamente transparente, un movimiento de partícula independiente en un campo medio dependiente del tiempo. Sólo se exige que la evolución temporal esté restringida a movimientos con velocidades significativamente menores que la velocidad de Fermi, pero en principio son también descriptibles mediante tal teoría movimientos colectivos de gran amplitud con características elásticas y plásticas a la vez. Interacciones residuales de dos cuerpos son introducidas a posteriori mediante un *ansatz* de relajación [19], posibilitando así, en una segunda etapa, la termalización del sistema. La elección particular de la fase de la función de onda de muchos cuerpos para restringir el movimiento a uno del tipo de partícula independiente, lleva entrañablemente ligada [17] la elección del campo de velocidades colectivo como el gradiente de la fase de la función de onda de partícula independiente, digamos $\mathbf{u} = \nabla\phi$, de lo que inmediatamente resulta que $\nabla \times \mathbf{u} = 0$, y el movimiento queda limitado por lo tanto a modos colectivos irrotacionales (c.f., Sec. 3.2). Sin embargo, como se verá en el capítulo 5, este tipo de descripción es más amplia que la formulada originalmente por sus autores [19, 23] y permitirá incluir, por lo menos a nivel macroscópico, modos colectivos con rotor del campo de velocidades distinto de cero [18].

Más aún, en la segunda parte de este trabajo doctoral (c.f. Parte II) se proveerá el marco necesario para describir fenómenos que incluyan posibles fluctuaciones estocásticas de las variables dinámicas bajo estudio, tal como ocurre, p.ej., en colisiones nucleares, dando así origen a procesos de multifragmentación. En ningún momento se presupondrá la existencia de un potencial de velocidades a partir del cual el campo de velocidades pueda ser deducido, describiendo así de una manera totalmente general y universal movimientos colectivos nucleares sin necesidad de hipótesis adicionales acerca de la naturaleza del fluido en cuestión, sea este irrotacional, incompresible o no.

El punto de partida para tal programa es, como se mencionó con anterioridad, una ecuación para la función de distribución de un cuerpo como la de Vlasov-Boltzmann. En realidad, debido a que en el núcleo colisional son incluidos efectos debidos al bloqueo de Pauli, es común encontrar en la literatura tal ecuación referida como una del tipo de Boltzmann-Uehling-Uhlenbeck (BUU), Vlasov-Uehling-Uhlenbeck (VUU), o también de Landau-Vlasov, aunque en este último caso se presupone un tipo de aproximación especial para el núcleo colisional. [5].

Modelos cuya evolución en el tiempo está determinada por este tipo de ecuaciones, han sido aplicados con éxito en la descripción de observables de un cuerpo en colisiones nucleares [25]. Sin embargo, todos estos tipos de teorías, ya sean cuánticas o clásicas, son clasificables dentro de un mismo grupo llamado "teorías de transporte promediadas en un conjunto estadístico", y así obviamente, determinarán

sólo cantidades en promedio. Consecuentemente, todo tipo de fluctuaciones son suprimidas de la representación, obteniéndose como resultado, solamente densidades de un cuerpo que evolucionan variando suavemente en el tiempo. Para proveer del marco necesario para la descripción de procesos fluctuantes en sistemas de muchos cuerpos, Ayik y Grégoire [26] extendieron recientemente la teoría de transporte de un cuerpo incluyendo así fluctuaciones en la ecuación de BUU. Desde otro punto de vista a la vez alternativo, Randrup y Remaud [27] incorporaron fluctuaciones en la dinámica determinando la evolución temporal de la función de distribución y su variancia asociada. En general se observa que, en un sistema diluido, la dinámica está principalmente determinada por las colisiones de dos cuerpos, las que (*i*) producen disipación "termalizando" la distribución de momentos de partícula independiente, y (*v*) inducen fluctuaciones propagando correlaciones en el espacio de fases [26]. Este doble efecto de las colisiones de dos cuerpos puede ser incorporado en la ecuación de movimiento mejorando simplemente la deducción de la ecuación BUU. Esto conduce a una extensión de tal ecuación para la densidad fluctuante $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = K[f] + \delta K(t), \quad (1.1)$$

que contiene además del término de colisión usual $K[f]$, un término de colisión fluctuante $\delta K(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, que tiene su origen en correlaciones de orden superior. Esta ecuación será discutida en detalle en el capítulo 5. En esta línea de trabajo, en la Parte II de esta tesis, se demostrará que esta formulación aplicada inicialmente a la descripción de movimientos colectivos irrotacionales e incompresibles [28] es en realidad más general, aplicándose esta también a modos colectivos con vorticidad y compresibilidad. Además se demostrará que la naturaleza del fluido en consideración establece solamente la escala temporal característica del movimiento (c.f. Cap.6).

En pocas palabras, este trabajo consta de dos grandes bloques, denominados Parte I y Parte II; en el primero de ellos, se desarrolla una fluidodinámica disipativa capaz de reproducir anchos y energías de excitación de modos colectivos nucleares, obtenidos de las partes real e imaginaria de las autofrecuencias soluciones de un problema espectral (ecuación de autovalores-autofunciones) proveniente de una formulación variacional adecuada al régimen de bajas energías. Esta dinámica tiene la limitación de estar restringida a pequeñas oscilaciones del fluido nuclear. Como aplicación fueron elegidos los llamados modos colectivos de paridad anormal o modos torsión.

En el segundo bloque, se deduce un sistema no-markoviano de ecuaciones en el marco de una teoría de transporte estocástica para movimientos colectivos de gran amplitud, que permite describir además modos colectivos con vorticidad en su campo de velocidades, tal el caso de los modos torsión estudiados en la Parte I. Se demuestra

aquí también, que el sistema de ecuaciones resultante es completamente equivalente a las ecuaciones dinámicas de Hamilton-Langevin para un oscilador Browniano clásico, donde la velocidad colectiva juega el papel de coordenada de la partícula Browniana ficticia. Se estudia además la influencia del ruido coloreado en contraposición al espectro blanco ofrecido por funciones δ de Dirac como correlación de la fuerza estocástica en distintos tiempos.

Capítulo 2

Fundamentos de la Aproximación Fluidodinámica

En este capítulo se presentarán los fundamentos y las herramientas básicas necesarios para la comprensión de las partes I y II de este trabajo doctoral. En la sección 2.1 se introducirán las bases comunes a toda descripción fluidodinámica semiclásica para obtener posteriormente, en dicho marco semiclásico, la versión de la ecuación de Vlasov-Boltzmann en el límite $\hbar \rightarrow 0$ de aquella que da la evolución para la densidad de un cuerpo, supuesta en principio como una del tipo de HFDTE:

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) + \frac{i}{\hbar} [h(\hat{\rho}), \hat{\rho}] = I(\hat{\rho}) . \quad (2.1)$$

En principio, podría incluirse en el miembro derecho de (2.1) no sólo las correlaciones de dos cuerpos causadas por la interacción nucleón-nucleón como es usual en un tratamiento del tipo HFDTE, sino también un término fluctuante producto de conservar y propagar correlaciones iniciales de orden superior durante un tiempo finito. Como resultado, dichas correlaciones aparecen como una fuerza estocástica en la ecuación de movimiento, de la misma manera que en una ecuación de Langevin usual. Éste será precisamente el tema de estudio de la sección 2.2. Se obtendrán además las ecuaciones fluidodinámicas haciéndose hincapié en la importancia de la deformación de la esfera de Fermi en lo que respecta al cálculo de la energía de excitación de los modos colectivos, objeto de estudio del capítulo 3.

2.1 Aproximación Semiclásica

A continuación se delinearán cómo obtener en el límite semiclásico $\hbar \rightarrow 0$ de una expansión de Wigner-Kirkwood en potencias de \hbar , una ecuación del tipo Vlasov-Uehling-Uhlenbeck (VUU), partiendo de la ecuación de evolución para la densidad de partícula independiente (2.1). Para ello, es conveniente introducir la transformada de Wigner de un operador de partícula independiente A como

$$(A(x, x'))_{\omega} \equiv A(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \int d^3r' e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{r}'/\hbar} (\mathbf{r} + \mathbf{r}'/2 | A | \mathbf{r} - \mathbf{r}'/2), \quad (2.2)$$

donde \mathbf{r} y \mathbf{r}' están dados por

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') \\ \mathbf{r}' &= \mathbf{x} - \mathbf{x}'. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Cabe destacar que la representación de Wigner es un mapeo conveniente del espacio debido a que, por ejemplo, el operador Hamiltoniano tiene en esta representación la contraparte clásica correspondiente

$$H(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V(\mathbf{r}). \quad (2.4)$$

Para el producto de operadores de un cuerpo es conveniente utilizar la siguiente regla [3]

$$(AB)_{\omega} = A(\mathbf{r}, \mathbf{p}) e^{(i\hbar/2)\vec{\Lambda}} B(\mathbf{r}, \mathbf{p}), \quad (2.5)$$

donde

$$\vec{\Lambda} = \overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{r}} \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{p}} - \overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{p}} \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{r}}, \quad (2.6)$$

indicando las flechas sobre los operadores, la dirección en que el gradiente actúa.

Utilizando la regla (2.6) y la definición (2.2), es inmediato obtener como transformada de Wigner de la ecuación de evolución para la densidad de partícula independiente (2.1), la siguiente identidad

$$\frac{\partial \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} + \frac{2}{\hbar} \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \sin\left[\frac{\hbar}{2} (\overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{r}} \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{p}} - \overleftarrow{\nabla}_{\mathbf{p}} \overrightarrow{\nabla}_{\mathbf{r}}) H(\mathbf{r}, \mathbf{p})\right] = I[\tilde{f}], \quad (2.7)$$

siendo $\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ la transformada de Wigner de la densidad de partícula independiente $\hat{\rho}$. En la (2.7) se utilizó dos veces la regla (2.6) para los operadores $(AB)_w$ y $(BA)_w$ para calcular el conmutador $[A, B]_w$ como

$$[A, B]_w \equiv (AB - BA)_w = 2i A_w \sin\left(\frac{\hbar}{2} \overleftarrow{\Lambda}\right) B_w . \quad (2.8)$$

De la ecuación (2.7) se obtiene inmediatamente en el límite semiclásico $\hbar \rightarrow 0$ la ecuación deseada:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{p}}\right) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = I[f] , \quad (2.9)$$

que representa un balance del número de partículas que entra y que sale de una celda del espacio de fases: el primer término en el miembro de la izquierda representa el cambio explícito en el tiempo de la función de distribución $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, el segundo da el cambio debido a la velocidad de las partículas en la celda, y el tercero representa el cambio de su momento debido a la existencia de aceleración causada por la fuerza total \mathbf{F} . Si en (2.1) el miembro derecho fuese nulo -como se obtiene en una aproximación de HFDT-, la ecuación (2.9) también sería igual a cero, resultado inherente a la teoría de partícula independiente de Hartree-Fock. Si las partículas interactúan, se debe tener en cuenta que ellas podrían ser dispersadas hacia afuera o hacia adentro de la celda en consideración. Dicho balance del tipo ganancia menos pérdida está representado por el miembro derecho de la ecuación (2.9), cuyo núcleo colisional $I[f]$ en la denominada aproximación de Uehling-Uhlenbeck [5], contendrá correlaciones de Pauli vedando así la posibilidad de que dos partículas luego de colisionar ocupen la misma celda. Si además se incluye en el miembro derecho de (2.1) un término fluctuante que proviene de retener correlaciones de orden superior (c.f. sec. 2.2), se obtendrá un tipo de ecuación de Langevin. La conexión de dicha ecuación con la que describe un movimiento Browniano clásico será visto en detalle en el capítulo 5. Por lo pronto, cabe destacar que con la ecuación (2.9) se dispone de una descripción fluidodinámica, simplemente tomando el momento de orden cero y uno de la distribución; es decir, multiplicando a (2.9) por \mathbf{p}^0 y \mathbf{p}^1 e integrando en el espacio de impulsos, resulta

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.10)$$

y

$$m\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j} \right) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} + \rho \frac{\partial U[\rho]}{\partial r_i} = 0 , \quad (2.11)$$

debido a que el término fluctuante en la ecuación de Langevin es incapaz de introducir fuentes de momento [28]. Las identidades (2.10) y (2.11) representan la conservación de la masa y el momento, siendo obviamente

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 p}{h^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (2.12)$$

$$m\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 p}{h^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \mathbf{p}, \quad (2.13)$$

la densidad local y la densidad de momentos respectivamente. En la (2.11) además, σ_{ij} denota el tensor flujo de momentos

$$m\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 p}{h^3} (p_i - mu_i)(p_j - mu_j) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), \quad (2.14)$$

y la fuerza total fue expresada como el gradiente de un potencial dependiente de la densidad, relacionado con la funcional de energía intrínseca $E[\rho]$ a través de

$$U[\rho] = \frac{\delta E[\rho]}{\delta \rho}. \quad (2.15)$$

Veremos también en el capítulo siguiente al estudiar en detalle la expresión de la funcional de energía cinética, que la hipótesis de equilibrio local $\rho(\mathbf{x}, t) \simeq \bar{\rho}(\mathbf{x})$ no es correcta en el régimen de bajas energías, en donde se debe tener en cuenta la deformación de la esfera de momentos para reproducir modos colectivos nucleares. En la imagen dada por la teoría de Fermi, dichos modos son conocidos bajo el nombre de *sonido cero* en contraposición a aquellos descriptibles por una teoría hidrodinámica usual y conocidos como *sonido ordinario* o *primer sonido*.

2.2 Ecuación de Transporte Estocástica

Partiendo de la ecuación de Schrödinger exacta, es posible obtener una ecuación de transporte para la densidad de partícula independiente, simplemente truncando una jerarquía de ecuaciones diferenciales acopladas (conocida como jerarquía de Martin-Schwinger o BBGKY en física clásica). Si definimos las densidades de una partícula y de dos partículas respectivamente como

$$\hat{\rho}(1, 1', t) = \langle \phi | a^\dagger(1, t) a(1', t) | \phi \rangle, \quad (2.16)$$

$$\hat{\sigma}(12, 1'2', t) = \langle \phi | a^\dagger(1, t) a^\dagger(2, t) a(1', t) a(2', t) | \phi \rangle, \quad (2.17)$$

donde $a^\dagger(1, t)$ y $a(1, t)$ son los operadores de creación y destrucción de los estados de partícula independiente en la representación de Heisenberg, y 1,2 designan un conjunto de índices especificando un estado; entonces, las ecuaciones de movimiento para las densidades pueden ser deducidas usando la regla ¹

$$i \frac{\partial}{\partial t} \langle \phi | A(t) | \phi \rangle = \langle \phi | [H, A(t)] | \phi \rangle, \quad (2.18)$$

siendo $H = t + v$ el Hamiltoniano de muchos cuerpos, consistente de la energía cinética t y una interacción efectiva de dos cuerpos v y $A(t) = a^\dagger(1, t) a(1', t)$, $a^\dagger(1, t) a^\dagger(2, t) a(1', t) a(2', t)$, ..., etc. Además, aquí como en (2.16) y (2.17), los valores medios son tomados con respecto a un estado específico inicial del sistema de muchos cuerpos $|\phi(t_0)\rangle$ en el tiempo t_0 . Además, $\hat{\rho}, \hat{\sigma}, \dots$, representan magnitudes fluctuantes, mientras que ρ, σ, \dots , serán reservados para sus promedios.

A través de (2.18), la ecuación para la densidad de una partícula $\hat{\rho}(1, 1', t)$ está acoplada a la de dos partículas, la ecuación para la densidad de dos partículas $\hat{\sigma}(12, 1'2', t)$, está acoplada a la de tres, y así sucesivamente. La tarea principal asignada a la teoría de transporte es truncar esta jerarquía y deducir una ecuación de movimiento efectiva para la densidad de partícula independiente. Para deducir tal ecuación, como puntualizaron Ayik y Grégoire [26], sólo se necesita determinar la evolución temporal del sistema durante un intervalo de tiempo pequeño, $\Delta t = t - t_0$ correspondiente a dos colisiones aisladas. En una imagen clásica, este intervalo debería ser grande comparado con la duración de la colisión misma τ_d , pero corto comparado con el tiempo τ_λ entre colisiones,

$$\tau_d \ll t - t_0 \ll \tau_\lambda. \quad (2.19)$$

¹En esta sección se tomará $\hbar = 1$ por simplicidad.

Para un sistema diluido, durante este tipo de intervalos, las colisiones de tres cuerpos son menos probables que las de dos, y así, la jerarquía de Martin-Schwinger puede ser truncada hasta el segundo nivel negando por lo tanto correlaciones de tres cuerpos. Aunque la ecuación para $\hat{\sigma}(t)$ sin correlaciones de tres cuerpos describe una colisión aislada entre dos partículas, sus soluciones no pueden ser dadas en una forma cerrada sin introducir posteriores aproximaciones debido al hecho de que es en la práctica imposible determinar las condiciones iniciales antes de que las partículas colisionen. Como resultado de la evolución dinámica previa, la densidad de dos partículas $\hat{\sigma}(t_0)$ en el tiempo t_0 contiene el efecto de todas las otras correlaciones. Así por lo tanto, la determinación de $\hat{\sigma}(t_0)$ es equivalente a resolver el problema de muchos cuerpos exactamente. La forma usual de proceder es introducir un promedio en ensamble, y suponer que la densidad de dos cuerpos promediada está inicialmente descorrelacionada a tiempo t_0 , lo que es conocido como "hipótesis de caos molecular". Como resultado del promedio en el conjunto estadístico, todas las fluctuaciones son perdidas y así se obtiene una ecuación de transporte del tipo de Boltzmann para la densidad de partícula independiente promediada [5].

Si se desea describir fluctuaciones de la densidad de partícula independiente, se deberá impedir entonces introducir promedios en el conjunto estadístico, y retener las correlaciones iniciales en la ecuación de movimiento, aunque otras aproximaciones estadísticas deban ser introducidas para lograr un modelo matemáticamente tratable. Recientemente, Ayik y Grégoire propusieron una extensión del modelo de transporte incorporando fluctuaciones debido a correlaciones de orden superior en la ecuación de movimiento dentro de una aproximación estadística [26]. De acuerdo con este modelo, la evolución temporal de la densidad de partícula independiente esta determinada por una ecuación de transporte estocástica,

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{\rho}(t) + i[h(\hat{\rho}), \hat{\rho}] = K(\hat{\rho}) + \delta K(t) . \quad (2.20)$$

En esta última ecuación, $h(\hat{\rho})$ es el hamiltoniano de campo medio y $K(\hat{\rho})$ denota el término de colisión en el límite de acople débil (es decir, al orden más bajo en v),

$$K(1, 1', \rho) = - \sum_2 \int_{t_0}^t dt' \langle 12 | [v, g^1(t, t')] [U(t'), \sigma_o(t')] g(t', t) | 1'2 \rangle , \quad (2.21)$$

donde $\sigma_o(t)$ es la parte promediada y descorrelacionada de la densidad de dos partículas

$$\sigma_o(12, 1'2', t) = \rho(1, 1', t) \rho(2, 2', t) , \quad (2.22)$$

y $g(t', t)$ indica el propagador de campo medio

$$g(t', t) = \mathcal{T} \times \exp\left[-i \int_t^{t'} ds h(s)\right]. \quad (2.23)$$

La magnitud $U(t)$ está definida como

$$\langle 12|U|34 \rangle = \sum_{1'2'} [\delta(1, 1') - \rho(1, 1')] [\delta(2, 2') - \rho(2, 2')] \langle 1'2'|v|34 \rangle, \quad (2.24)$$

que tiene en cuenta efectos de bloqueo de Pauli en los estados intermedios. El término de colisión $K(\rho)$ describe los efectos promediados de las colisiones de dos cuerpos en la densidad de partícula independiente. De acuerdo con este modelo [26], éste debería ser calculado en primera instancia en términos de la densidad promediada $\rho(t)$, y al final del proceso $\rho(t)$ sería reemplazada por la densidad fluctuante $\hat{\rho}(t)$ para así obtener $K(\hat{\rho})$.

El segundo término en el miembro derecho de (2.20) describe un término de colisión fluctuante,

$$\delta K(1, 1', t) = - \sum_2 \langle 12|[v, g^1(t_0, t) \delta \hat{\sigma}(t_0) g(t_0, t)]|1'2 \rangle, \quad (2.25)$$

donde $\delta \hat{\sigma}(t_0)$ denota la parte correlacionada de la densidad de dos partículas al tiempo t_0 ,

$$\delta \hat{\sigma}(12, 1'2', t_0) = \hat{\sigma}(12, 1'2', t_0) - \sigma_0(12, 1'2', t_0). \quad (2.26)$$

El término de colisión fluctuante describe los efectos de correlaciones de orden superior sobre la evolución temporal de la densidad de partícula independiente. Si se supone que la densidad promedio de dos partículas $\sigma(t_0)$ está inicialmente descorrelacionada, es decir, $\sigma(t_0) = \sigma_0(t_0)$, el promedio en el conjunto estadístico de $\delta K(t)$ se anulará. Como resultado entonces, el promedio de la ecuación (2.20) producirá una ecuación del tipo de Boltzmann para la densidad promedio. Sin embargo, antes de realizar el promedio, $\delta K(t)$ nunca se anula; tal término varía rápidamente como función del tiempo con un tiempo característico τ_c del orden del tiempo que dura la correlación de dos cuerpos. Este tiempo es imposible de calcular explícitamente, y por tal razón en la ref. [26], por analogía con el movimiento Browniano clásico, se considera que (2.20) describe un proceso estocástico en el cual la densidad de partícula independiente $\hat{\rho}(t)$ como un todo, es tenida en cuenta como una variable estocástica. Se supone además que el término de colisión fluctuante actúa como una

fuerza aleatoria caracterizada por una función de correlación

$$\overline{\delta K(1, 1', t) \delta K(2, 2', t')} = C(11'; 22') \zeta(t - t'), \quad (2.27)$$

donde $\zeta(t - t')$ da cuenta de que la correlación de dos cuerpos dura un tiempo finito caracterizado por τ_c , por ejemplo a través de

$$\zeta(t - t') = \frac{1}{\sqrt{\pi} \tau_c} \exp[-(t - t')^2 / \tau_c^2]. \quad (2.28)$$

Especificando la función de correlación $C(11'; 22')$ del término de colisión fluctuante, la ecuación (2.20) resulta ser una ecuación de transporte estocástica bien definida para la densidad fluctuante de partícula independiente.

PARTE I

1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12

Capítulo 3

Fluidodinámica Disipativa Nuclear

En este capítulo se presentará la deducción de las ecuaciones de movimiento para un modelo de fluido nuclear que incluye viscosidad de uno y dos cuerpos. La descripción dinámica a la que se apunta, resulta adecuada a un régimen de bajas energías en donde el fluido nuclear presenta un comportamiento viscoelástico, es decir, una respuesta parcialmente elástica y parcialmente viscosa o plástica simultáneamente.

3.1 Principio Variacional

La introducción de los parámetros necesarios para la descripción variacional surge naturalmente, como es usual en toda aproximación fluidodinámica [3, 14], separando la función de onda para un sistema de A fermiones en su módulo ϕ (real y anti-simétrico con respecto a las permutaciones de dos partículas cualquiera) y una fase S (real y simétrica) utilizada como primera coordenada variacional

$$\Psi(1\dots A, t) = \phi(1\dots A, t) \cdot \exp(i\frac{m}{\hbar}S(1\dots A, t)) . \quad (3.1)$$

La segunda coordenada variacional $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$ es introducida a través de la llamada aproximación de escala para la densidad de un cuerpo [14]

$$\rho(\mathbf{x}, t) = \int d2\dots dA \phi^2(\mathbf{x}, 2\dots A, t), \quad (3.2)$$

es decir,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = e^{i\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)} \bar{\rho}(\mathbf{x}). \quad (3.3)$$

La ecuación (3.3) que caracteriza a la densidad de un cuerpo a todo tiempo t a través del vector de escala $\mathbf{s}(\mathbf{x}, t)$, puede ser tenida en cuenta como una simple parametrización ya que no impone restricciones sobre la densidad: para cualquier par de funciones diferenciables ρ and $\bar{\rho}$ existe un conjunto infinito de funciones \mathbf{s} , tal que (3.3) es satisfecha. Además, si $\rho, \bar{\rho} \rightarrow 0$ para $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ el ansatz (3.3) garantiza la conservación de la norma $\int \rho(\mathbf{x}, t) d^3\mathbf{x} = \int \bar{\rho}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$. No obstante, debido a la importancia de dicha ecuación -en ella radica la aproximación de escala-, su deducción será delineada en el apéndice A.

El mayor atractivo de toda aproximación fluidodinámica es la descripción simple a través de densidades locales y campos de velocidades, estos últimos relacionados con la variación temporal de la densidad de un cuerpo por la ecuación de continuidad:

$$\frac{d}{dt} \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t)) = 0, \quad (3.4)$$

donde la velocidad está conectada a la fase S de (3.1) según

$$\rho \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \int d2\dots dA \phi^2(\mathbf{x}, 2\dots A, t) \nabla S(\mathbf{x}, 2\dots A, t). \quad (3.5)$$

Con el conjunto de coordenadas generalizadas $z_\mu = \{S, \mathbf{s}\}$, las ecuaciones de movimiento serán obtenidas como ecuaciones de Euler-Lagrange [15] a partir del Lagrangiano

$$\mathcal{L}_0(z_\mu, \dot{z}_\mu) = \langle \Psi | i\hbar \partial_t - H | \Psi \rangle. \quad (3.6)$$

Si bien usualmente la variación restringida del Lagrangiano $\mathcal{L}_0(z_\mu, \dot{z}_\mu)$ de (3.6) se toma igual a cero, con el objeto de incluir en la dinámica fuerzas viscosas de un cuerpo que sean funciones de las velocidades generalizadas \dot{z}_μ , se postulará una ecuación de Lagrange disipativa,

$$\left(\frac{\delta}{\delta z_\mu} - \partial_t \frac{\delta}{\delta \dot{z}_\mu} \right) \mathcal{L}_0 = \frac{\delta}{\delta \dot{z}_\nu} F_{\mu\nu} \quad (\mu, \nu = 0\dots 3). \quad (3.7)$$

En mecánica clásica, el conjunto de ecuaciones (3.7) determinan el movimiento de una partícula en un medio viscoso, caracterizado por un tensor de viscosidades $F_{\mu\nu}$.

3.2 Vorticidad y Correlaciones de Dos Cuerpos

Cabe destacar que, para obtener la expresión (3.5), no fue necesario realizar hipótesis alguna sobre la fase $S(1, \dots, A, t)$ de la función de onda de muchos cuerpos (3.1). En una descripción fluidodinámica es común realizar el *ansatz* de separabilidad

$$S(1, \dots, A, t) = \sum_{i=1}^A \varphi(i, t), \quad (3.8)$$

y restringirse así a movimientos del tipo de partícula independiente [3], donde la velocidad común a todos los nucleones es obtenida como el gradiente de la fase φ , es decir,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla \varphi(\mathbf{x}, t), \quad (3.9)$$

quedando limitado el estudio a flujos irrotacionales ($\nabla \times \mathbf{u} = 0$) [3]. La conexión entre vorticidad y correlaciones de dos cuerpos fue estudiada por Holzwarth y Schütte [29]. Basta escribir

$$S(1, \dots, A, t) = \sum_{i=1}^A \varphi(i, t) + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \mu(i, t) \mu(j, t), \quad (3.10)$$

y con la ecuación de continuidad (3.4), procediendo como en (3.5) uno obtiene

$$\mathbf{u} = \nabla \varphi + \lambda \nabla \mu, \quad (3.11)$$

donde

$$\rho(\mathbf{x}, t) \lambda(\mathbf{x}, t) = A \int d^2 \dots d^A \phi^2 \sum_{j \neq 1} \mu(j, t) = \int \rho^{(2)}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) \mu(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (3.12)$$

Obviamente, de (3.12) se deduce que, tomar $\mu = 0$ equivale a despreciar las correlaciones de dos cuerpos y además, acorde a (3.11), limitarse a flujos irrotacionales.

Modos colectivos tales como el llamado modo torsión , objeto de estudio del capítulo siguiente, son obtenidos en su versión "naive" [30, 31] con campos de velocidades rotacionales, a saber,

$$\mathbf{u} = (yz, -xz, 0) , \quad (3.13)$$

y así entonces

$$\varphi = xyz ; \lambda = \sqrt{2x^2z} ; \mu = \sqrt{2y^2z} . \quad (3.14)$$

Tales modos serán entonces indescriptibles por una dinámica de partícula independiente como la DDD donde la fase es una función de las coordenadas, ya que en este caso la vorticidad está intrínsecamente relacionada con las correlaciones de dos cuerpos que imposibilitan que la fase $S(1...A, t)$, expresada como (3.10), sea reducida a la forma (3.8).

3.3 Ecuación de Movimiento

De las ecuaciones de Euler-Lagrange (3.7) puede ser deducida una ecuación del tipo de Navier-Stokes para un fluido viscoso, una vez que ciertas propiedades del medio en cuestión son conocidas. Por ejemplo, bajo la suposición de que se está tratando con un medio isótropo aunque en principio inhomogéneo, el tensor de viscosidades $F_{\mu\nu}$ podrá ser resumido a la forma diagonal

$$F_{\mu\nu} = \frac{1}{4} \delta_{\mu\nu} \mathcal{F} . \quad (3.15)$$

Antes de escribir las ecuaciones de movimiento, debe ser tenido en cuenta que la variación del Lagrangiano respecto de la fase S (componente $\mu = 0$ en (3.7)), $(\delta/\delta S - \partial_t \delta/\delta \dot{S}) \mathcal{L}_o = \delta \mathcal{F} / \delta \dot{S}$ determina la ecuación de continuidad (3.4),

$$\partial_t \phi^2(1...A, t) + \sum_{k=1}^A \partial_k (\phi^2(1...A, t) \partial_k S(1...A, t)) = 0 , \quad (3.16)$$

simplemente integrando (3.16) sobre las coordenadas de las partículas de 2 hasta A. Esto resultará siempre y cuando el segundo miembro de (3.7) sea nulo, ya que de otro modo en el lado derecho de la identidad (3.16) aparecería una contribución

distinta de cero, resultado incompatible con el hecho de que en el régimen de bajas energías, uno no espera ni fuentes ni sumideros de partículas. Por esta razón, la funcional \mathcal{F} dependerá solamente de la variación temporal del campo de escala, \dot{s} , por ejemplo, a través de una serie de potencias [32] :

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \sum_n \int \rho \alpha_n \dot{s}^n d^3x . \quad (3.17)$$

Así entonces, la segunda variación restringida del Lagrangiano \mathcal{L}_0 resulta:

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{ij} \{ A \int d^2 \dots dA \phi^2 \partial_j \dot{s} + \frac{A}{2} \int d^2 \dots dA \phi^2 \partial_j \sum_{l,k=1}^A (\partial_l S)(\partial_k S) \} - \frac{1}{m} \frac{\delta E}{\delta s_i} \\ = \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \rho n \alpha_n \dot{s}^{n-1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

Combinando esta última con (3.8), se obtiene la ecuación deseada:

$$\mathcal{O}_{ij} \{ \partial_i (\rho u_j) + \partial_k (\rho u_j u_k + \sigma_{jk}) \} = \frac{1}{m} \frac{\delta E}{\delta s_i} + \frac{1}{2} \sum_{n \geq 2} \rho n \alpha_n \dot{s}_i^{n-1} . \quad (3.19)$$

siendo el operador \mathcal{O}_{ij} ¹

$$\mathcal{O}_{ij}(\mathbf{x}, t) = \delta_{ij} - \delta_{ij} \frac{1}{2} \partial_k s_k(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{2} s_{ji}(\mathbf{x}, t) + \dots , \quad (3.20)$$

σ_{ij} el tensor de esfuerzos internos,

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}, t) = A \int d^2 \dots dA \phi^2 (\partial_i S - u_i)(\partial_j S - u_j) , \quad (3.21)$$

y $E[s]$ la energía intrínseca,

$$E[s] = \langle \phi | H | \phi \rangle = \int (t + v) d^3x \quad (3.22)$$

¹Se adoptará la convención $s_{kij} = \dots \partial_j \partial_i s_k$

3.4 Límite de Pequeñas Oscilaciones

Para valores pequeños de s y \dot{s} , la ecuación (3.19) puede ser linealizada,

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \frac{1}{m} \frac{\delta E}{\delta \mathbf{s}} - \nabla \cdot \ddot{\boldsymbol{\sigma}} - \alpha \rho \mathbf{u}, \quad (3.23)$$

en donde $\alpha \equiv \alpha_2$ y se ha utilizado el hecho de que

$$\dot{\mathbf{s}} = -\mathbf{u} \quad (3.24)$$

tal como resulta de comparar la derivada temporal de (3.3) con la ecuación de continuidad en el límite de pequeñas oscilaciones. La ecuación (3.23) corresponde entonces a una descripción fluidodinámica disipativa

$$\rho \ddot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_o + \mathbf{F}_d \quad (3.25)$$

con una fuerza conservativa

$$\mathbf{F}_o = \frac{1}{m} \frac{\delta E}{\delta \mathbf{s}}, \quad (3.26)$$

y una fuerza disipativa que posee dos contribuciones:

$$\mathbf{F}_d = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = -\nabla_{\mathbf{u}} \mathcal{F} - \nabla \cdot \ddot{\boldsymbol{\sigma}}. \quad (3.27)$$

De (3.23) resulta obvio que para \mathcal{F} , bastaba haber tomado una funcional del tipo de Rayleigh en lugar de la serie de potencias (3.17) en el espíritu de las teorías de disipación de un cuerpo [33] ya que al linealizar, sólo el término mas bajo con contribución no nula sobrevive; es decir, puede ser escogida como funcional de disipación:

$$\mathcal{F} = \frac{1}{2} \alpha \int \rho \dot{s}^2 d^3 \mathbf{x}. \quad (3.28)$$

En ausencia de viscosidad de dos cuerpos, esta última ecuación está relacionada con la pérdida irreversible de energía cinética T de la manera usual:

$$\frac{d}{dt} T = -2\mathcal{F} = -2\alpha T. \quad (3.29)$$

Puede ser reconocido así $\tau \sim \alpha^{-1}$ como el tiempo de vida media para el flujo colectivo en un régimen de disipación de un cuerpo con una fuerza dependiente de la velocidad según:

$$F_d = F_1 = -\nabla_u \mathcal{F} = -\alpha \bar{\rho} u . \quad (3.30)$$

Con el sólo objeto de obtener un orden de magnitud para el coeficiente de disipación α , el tiempo característico τ puede ser tomado como el tiempo de relajación de la excitación, estimado como algunas veces el tiempo necesitado por un nucleón para recorrer el diámetro del núcleo. Según G. Bertsch [7] dicho valor depende primariamente de la energía disponible en el sistema -la energía de excitación por partícula ϵ^* - aproximadamente como:

$$\tau \simeq 2 \cdot 10^{-22} \frac{\text{MeV} \cdot s}{\epsilon^*} . \quad (3.31)$$

Es decir, para energías menores o del orden del MeV por nucleón, uno espera valores

$$\alpha \leq 0.5 \cdot 10^{-22} s^{-1} . \quad (3.32)$$

La expresión (3.27) incluye sin embargo, el flujo de momento transversal producto de las colisiones residuales de dos cuerpos no tenidas en cuenta en el campo medio y permitirá así, como se verá más adelante, investigar la competición entre la disipación de uno y dos cuerpos, no sólo en el límite hidrodinámico sino en todo el rango de escalas nucleares.

Para resolver la ecuación (3.23) es necesario aún conocer la expresión de la energía intrínseca $E[s]$ y del tensor de esfuerzos σ_{ij} , objeto de las dos subsiguientes secciones.

Antes de finalizar este párrafo, sin embargo, cabe destacar que en ausencia de viscosidad y bajo la hipótesis de equilibrio local $\rho(\mathbf{x}, t) \simeq \bar{\rho}(\mathbf{x})$, i.e., $E = E[\rho]$ como

$$\delta\langle\phi|H|\phi\rangle = \int \frac{\delta}{\delta\rho} E[\rho] \delta\rho d^3x , \quad (3.33)$$

y según la identidad (3.3),

$$\delta\rho = (\partial_i \delta s_i + \frac{1}{2} [\partial_i s_i, \partial_j s_j] + \dots) \rho , \quad (3.34)$$

reemplazando esta última igualdad en (3.33) e integrando por partes:

$$\delta(\phi|H|\phi) = - \int \delta s_i \mathcal{O}_{ij}(\rho) \partial_j \frac{\delta}{\delta \rho} E[\rho] d^3x, \quad (3.35)$$

con el operador \mathcal{O}_{ij} dado por (3.20). Igualando ahora ambos miembros de la (3.19) con la energía intrínseca resultante de (3.35), se obtiene finalmente:

$$\partial_t \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = - \frac{1}{m} \nabla \frac{\delta E}{\delta \rho}. \quad (3.36)$$

Esta identidad junto con la de continuidad (3.4), determina el conjunto de ecuaciones hidrodinámicas usuales en la llamada aproximación adiabática [35]. Como fue puntualizado en la introducción, la suposición de equilibrio local es incorrecta en un régimen de bajas energías, en donde la deformación de la esfera de momentos representa la parte preponderante y determina en la mayoría de los casos, la dependencia correcta de la energía de excitación del modo con el número de masa nuclear A [3]. Por el otro lado, si bien la aproximación $E = E[\rho]$ sería válida a mayores energías, deja ya de tener sentido una truncación hasta el segundo momento en una expansión en potencias de la velocidad para el límite semiclásico de las ecuaciones de HFDT extendido, cuyo resultado es precisamente la ecuación de continuidad (3.4) a orden cero, y la (3.36) a orden uno. Esto se verá más detalladamente en la parte II.

3.5 Funcional de Energía Intrínseca

Básicamente, para la determinación de la energía intrínseca $E[\mathbf{s}] = T[\mathbf{s}] + V[\mathbf{s}]$ debe ser solamente tenido en cuenta, que la parte cinética $T[\mathbf{s}]$ tiene que ser recalculada en la situación dinámica, ya que la transformación de escala (3.3) conduce a una distorsión de la esfera de momentos. Para la parte potencial sin embargo, uno no espera que un cambio en la distribución de impulsos afecte a ella de manera considerable [14] por lo que en principio puede ser utilizada alguna expresión estática efectiva, tal como:

$$v = \sum_{\nu} a_{\nu} \bar{\rho}^{\nu}, \quad (3.37)$$

donde $V[\mathbf{s}] \equiv V[\bar{\rho}] = \int v d^3z$. Los coeficientes de volumen en (3.37), pueden ser fijados requiriendo distintas propiedades de estabilidad y saturación para materia

nuclear, así como también una difusividad del perfil de densidades estático acorde a una distribución del tipo Woods-Saxon (apéndice B).

La parte puramente dinámica fue calculada en la referencia [14] y sólo aquí por completitud serán reproducidos los resultados. Basta obtener la transformación a coordenadas deformadas,

$$p_k = \tilde{p}_i (e^A)_{ik} \quad (3.38)$$

o bien, equivalentemente,

$$p^2 = \tilde{p}_i \tilde{p}_k W_{ik} \quad (3.39)$$

con $A_{ik} = s_{ik} - \frac{1}{2} s_j s_{ijk} + \dots$ y $W_{ik} = (e^A)_{ij} (e^A)_{kj}$. Entonces, calculando la energía cinética a partir de la transformada de Wigner de la densidad de un cuerpo:

$$T[\mathbf{s}] = \int t d^3 \mathbf{x} = \int \left(\frac{1}{(2\pi\hbar)^3} \frac{1}{2m} \int f(\mathbf{x}, \mathbf{p}, t) p^2 d^3 p \right) d^3 \mathbf{x}, \quad (3.40)$$

resultará, incluyendo la corrección de segundo orden [14]:

$$T[\mathbf{s}] = \frac{1}{2} \int W_{ik}[\mathbf{s}] \tau_{ik}(\mathbf{x}) d^3 \mathbf{x} + \frac{\hbar^2}{8m} \int s_{ik} s_{ilk} \bar{\rho} d^3 \mathbf{x}. \quad (3.41)$$

Esta última expresión en el caso estático $\mathbf{s} = 0$ se reduce a

$$T_o[\bar{\rho}] = \int t_o d^3 \mathbf{x} \equiv \int \tau_{11} d^3 \mathbf{x}, \quad (3.42)$$

donde la densidad de energía cinética estática, está dada por la expresión en la aproximación de Thomas-Fermi correspondiente más correcciones de superficie (términos de Weizsäcker) según (apéndice B):

$$t_o = \frac{3}{5} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \left(\frac{3}{2} \pi^2 \right)^{2/3} \bar{\rho}^{5/3} + \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{36} \left(\frac{\nabla \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right)^2 + \frac{1}{3} \nabla^2 \bar{\rho} \right]. \quad (3.43)$$

El último término en el miembro derecho de (3.43) resulta ser la divergencia de un vector que se anula en el infinito; en virtud del teorema de Gauss, este término no contribuirá a la energía cinética resultante de integrar en todo el espacio a t_o .

Para el caso de modos transversales ($\mathbf{x} \cdot \mathbf{s} = 0$), sin divergencias ($\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$), y bajo simetría esférica, la energía $E[\mathbf{s}]$ toma una forma particularmente simple debido a que bajo estas hipótesis, son eliminados completamente todos los términos

con origen en la energía potencial (volumen y superficie). Dentro de esta categoría son descriptos los modos de paridad anormal o modos torsión [30] que no causan cambios en la densidad local y por lo tanto aparecen a energía cero en toda descripción hidrodinámica usual bajo la hipótesis de equilibrio local. Estos modos involucran sin embargo distorsiones de la superficie de Fermi que via (3.3) producen una contribución no nula a la energía intrínseca. Dichos estados de excitación colectiva son objeto de estudio del capítulo siguiente. Para ellos entonces resulta de (3.41) con (3.43) la siguiente expresión:

$$\frac{\delta}{\delta s} E[s] = \frac{\delta}{\delta s} T[s] = -\{\tilde{\tau}_0 \nabla^2 + \frac{\tilde{\tau}'_0}{r} (\mathbf{x} \cdot \nabla - 1)\} s + \frac{\hbar^2}{4m} \partial_k \partial_l (\bar{\rho} \nabla_s t_k) \quad (3.44)$$

donde el tilde indica derivación respecto del radio r , y $\tilde{\tau}_0$ está dada por [16]

$$\tilde{\tau}_0 = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{5} \left(\frac{3\pi^2}{2} \right)^{2/3} \bar{\rho}^{5/3} + \frac{1}{36} (2\bar{\rho}'' + \frac{\bar{\rho}'''}{r}) \right\} . \quad (3.45)$$

Reescribiendo ahora la expresión para la derivada funcional de la energía intrínseca con

$$\tau_0 = \tilde{\tau}_0 + \frac{\hbar^2}{4m} \frac{\bar{\rho}'}{r} , \quad (3.46)$$

resulta:

$$\frac{\delta}{\delta s} E[s] = -\{\tau_0 \nabla^2 + \frac{\tau'_0}{r} (\mathbf{x} \cdot \nabla - 1)\} s . \quad (3.47)$$

La densidad de equilibrio $\bar{\rho}$ a los efectos de cálculo (ver capítulo 3) será escogida como una del tipo Woods-Saxon

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_0}{1 + \exp((r - R)/a)} , \quad (3.48)$$

en donde los parámetros de la densidad son tomados como es usual [16], $R = 1.2 A^{-1/3} \text{fm}$, $\bar{\rho}_0 = 0.16 \text{fm}^{-3}$ y $a = 0.5 \text{ fm}$, o bien una densidad del tipo escalón

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 \Theta(r - R) , \quad (3.49)$$

que permitirá obtener soluciones analíticas para las ecuaciones fluidodinámicas de movimiento.

3.6 Tensor Viscoelástico de Esfuerzos

Para resolver la ecuación (3.23) es necesario conocer la expresión para el tensor de esfuerzos internos, es decir, en otras palabras, conocer la respuesta del medio a una deformación, lo que equivale a dar la relación constitutiva del material en cuestión.

W. Nörenberg demostró a principios de la década del '80, que un sistema finito de fermiones confinado en un recipiente exhibe la propiedad llamada de viscoelasticidad, i.e., una respuesta parcialmente viscosa o plástica y al mismo tiempo parcialmente elástica. Este fenómeno observado ya por Maxwell en objetos macroscópicos, puede ser representado cualitativamente a través de una única fuerza restauradora, que resulta de combinar un arreglo en serie de un resorte de constante μ y un pistón de constante η con respuesta $-\mu\Delta x$ y $-\eta\Delta\dot{x}$ respectivamente ante un desplazamiento Δx . Es inmediato ver que una partícula con un sólo grado de libertad q y bajo tal disposición geométrica (resorte + pistón) cumple con la siguiente ley:

$$\frac{F}{\eta} = -\dot{q} - \frac{F}{\mu}, \quad (3.50)$$

o bien, dado que el cociente η/μ tiene unidades de tiempo, llamando

$$\tau = \frac{\eta}{\mu} \quad (3.51)$$

resulta:

$$\dot{F} + \mu\dot{q} = -\frac{F}{\tau}. \quad (3.52)$$

Es decir, el sistema de ecuaciones para una partícula en un medio viscoelástico idealizado es:

$$\begin{cases} m\ddot{q} = F \\ \dot{F} + \mu\dot{q} = -\frac{F}{\tau} \end{cases}, \quad (3.53)$$

que puede resumirse, tras una integración formal, en una única ecuación integro-diferencial:

$$m\ddot{q} = F = -\mu \int_{t_0}^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} \dot{q}(t') dt'. \quad (3.54)$$

Para procesos que ocurren durante un breve lapso de tiempo $t - t_0 \ll \tau$ (deformaciones rápidas), los esfuerzos internos generados por la deformación provocan una respuesta elástica $F = -\mu(q - q_0)$ con μ como coeficiente de rigidez. Dichos esfuerzos decaerán en un tiempo característico τ , dependiendo éste esencialmente de la temperatura y del material en consideración. Para deformaciones lentas

($\dot{q}(t') \simeq \dot{q}(t)$ si $t - t' \gg \tau$) se obtiene una respuesta puramente viscosa $F = -\mu\tau\dot{q}(t)$, con un coeficiente de fricción $\eta = \mu\tau$.

Cabe mencionar que las ecuaciones (3.53) originan, suponiendo que $F = F_0 e^{\zeta t}$,

$$F = -\frac{\mu\dot{q}}{\zeta + \tau^{-1}}. \quad (3.55)$$

En una versión más elaborada de la teoría de Maxwell sobre la viscoelasticidad [34], el tensor de esfuerzos σ_{ij} está relacionado con el tensor gradiente de velocidades $e_{ij} = \frac{1}{2}(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i})$ por:

$$(\tau\partial_t + 1)\sigma_{ij} = -2\eta e_{ij} = -2\mu\tau e_{ij} = 2\mu\zeta\tau d_{ij} \quad (3.56)$$

siendo $\tau = \eta/\mu$ el tiempo característico de relajación de la deformación y d_{ij} el tensor

$$d_{ij} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial s_i}{\partial x_j} + \frac{\partial s_j}{\partial x_i}\right) = -\zeta^{-1}e_{ij}, \quad (3.57)$$

utilizando el hecho de que la deformación y la velocidad están vinculadas a través de (3.16) bajo la hipótesis $s(x, t) = s(x)e^{\zeta t}$. Así se obtiene utilizando (3.48) una expresión para el tensor viscoelástico de esfuerzos,

$$\sigma_{ij} = -\frac{2\mu}{\zeta + \tau^{-1}}e_{ij}, \quad (3.58)$$

cuyo análogo "naive" se encuentra en la (3.55). Así entonces, la respuesta al medio ante una deformación $s(x, t)$ acorde con la identidad (3.57) será:

$$\sigma_{ij} = \frac{2\mu\zeta}{\zeta + \tau^{-1}}d_{ij}. \quad (3.59)$$

Antes de finalizar esta sección, cabe destacar que el conjunto de ecuaciones (3.53) tras un cambio de variables $x = \dot{q}$ y $p = F$, se escribirá

$$\begin{cases} \dot{x} = p/m \\ \dot{p} + \gamma p + \mu x = 0, \end{cases} \quad (3.60)$$

y determina por lo tanto, la evolución de un oscilador armónico amortiguado de constante restitutiva μ y constante de fricción $\gamma = 1/\tau$. Esta característica y sus implicaciones serán estudiadas en detalle en la Parte II, en conexión con el oscilador Browniano clásico.

Capítulo 4

Solución de las Ecuaciones Fluidodinámicas para Modos de Paridad Anormal

Como fue mencionado en reiteradas oportunidades con anterioridad, el concepto de equilibrio local es cuestionable -al menos a energías menores de 20 MeV/A- ya que el camino libre medio de los nucleones es comparable con las dimensiones del núcleo mismo. Efectos de no equilibrio introducen entonces distorsiones en la esfera de momentos (inexistentes en una descripción hidrodinámica usual) que contribuyen significativamente al valor numérico de la energía de excitación, e inclusive para las resonancias cuadrupolares gigantes, por ejemplo, dicha corrección a la energía determina la dependencia correcta con el número de masa nuclear. Los llamados estados "twist" o modos torsión [13, 30] constituyen un caso especialmente interesante de modos colectivos nucleares. Debido a que son excitados sin producir modificaciones en la densidad de masa, la única contribución a la energía proviene de la parte cinética. Estos modos que son por lo tanto indescriptibles a través de representaciones hidrodinámicas convencionales, aparecen sin embargo en cálculos microscópicos como soluciones del problema de RPA [38] a lo largo de toda la tabla periódica a energías del orden de $45A^{-1/3}$ MeV. En una imagen ingenua o "naive" [30, 31], este modo puede ser visualizado como una oscilación torsional de los meridianos de una esfera. Dicha oscilación está asociada a la vez con un desplazamiento relativo de la capas horizontales del fluido cuyo ángulo de torsión depende de la coordenada cilíndrica z . En otras palabras, dicho modo es obtenido a través del operador

$$\hat{T} = e^{-i\alpha z} = e^{\alpha u \cdot \nabla}, \quad \mathbf{u} = (yz, -xz, 0), \quad (4.1)$$

es decir, una rotación alrededor de un eje z fijo al cuerpo, con un ángulo de rotación proporcional a z . El operador zI_z tiene spin y paridad 2^- debido a que la parte escalar del producto tensorial $\mathbf{x} \otimes \mathbf{1}$, i.e., $\mathbf{x} \cdot \mathbf{1}$, se anula idénticamente [30]. Para núcleos axialmente simétricos, la excitación de este tipo de modos (llamados también modos magnéticos o de paridad anormal) no produce cambio alguno en la densidad local. Nótese además que, a diferencia de otras resonancias gigantes, el modo torsión posee vorticidad, $\nabla \times \mathbf{u} \neq 0$, lo que impedirá tratar a dicho modo bajo una descripción del tipo Dinámica Disipativa Diabática (DDD) [19, 20], en donde la velocidad se obtiene del gradiente de una fase colectiva impuesta a las funciones de onda viajeras en una representación de partícula independiente [17].

En una descripción más elaborada sin embargo, el campo de velocidades debe ser obtenido como el autovector solución de la ecuación de movimiento, siendo el autovalor correspondiente la frecuencia característica de excitación del modo, la que en el caso disipativo en cuestión, será una función de valores complejos con parte real no nula. En esta sección se estudiará el problema de dichas autofrecuencias complejas del modo torsión, utilizando el modelo viscoelástico desarrollado en la sección anterior. En el párrafo 4.1 se tratará el caso donde la densidad de equilibrio es del tipo escalón (ADE), cuya expresión matemática está dada por (3.49). Esto conduce a soluciones analíticas de la ecuación de movimiento (3.19) [15], dejando así para el párrafo 4.2 el estudio de las soluciones numéricas para el caso de un perfil de densidad difuso [16] elegido como uno del tipo Woods-Saxon (ADWS) dado por (3.48).

4.1 Aproximación de Densidad Escalón

Suponiendo bajo simetría esférica que la densidad de equilibrio tiene un perfil del tipo escalón (3.49),

$$\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 \Theta(r - R), \quad (4.2)$$

resultará para la densidad de energía cinética (3.46):

$$\tau_o(r) \equiv \bar{\tau}_o(r) = \tau_o \Theta(r - R), \quad (4.3)$$

donde

$$\tau_o = \frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \frac{1}{5} \left(\frac{3}{2} \pi^2 \right)^{2/3} \bar{\rho}_0^{5/3} \right\}. \quad (4.4)$$

Así, la expresión (3.47) tomará la simple forma:

$$\frac{\delta}{\delta \mathbf{s}} E[\mathbf{s}] = -\tau_0 \nabla^2 \mathbf{s} . \quad (4.5)$$

En general, bajo simetría esférica, los distintos multipolos J, M con paridad $(-)^L$ en una expansión del campo vectorial $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ en términos de los armónicos esféricos vectoriales

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}) = \sum_{JLM} \Phi_{JLM}(r) \mathbf{Y}_{JLM}(\Omega) , \quad (4.6)$$

estarán desacoplados, y para cada multipolo J , la identidad (4.6) tiene dos tipos de soluciones, las de paridad normal $(-)^J$,

$$s_J(\mathbf{x}) = \Phi_{J+1} \mathbf{Y}_{JJ+10}(\Omega) + \Phi_{J-1} \mathbf{Y}_{JJ-10}(\Omega) , \quad (4.7)$$

y las de paridad anormal $(-)^{J+1}$,

$$s_J(\mathbf{x}) = \Phi_J \mathbf{Y}_{JJ0}(\Omega) . \quad (4.8)$$

Dentro de este último grupo está el modo torsión $J^* = 2^-$, y debido a que sólo este multipolo será estudiado, se suprimirá de aquí en más el índice J , de forma tal que

$$\mathbf{s} = \Phi(r) \mathbf{Y}_{220}(\Omega) , \quad (4.9)$$

siendo \mathbf{Y}_{220} el armónico esférico vectorial correspondiente a $J=2$ y proyección sobre el eje z $M=0$ [36], la ecuación de movimiento (3.19) se escribirá ahora:

$$\Phi'' + \frac{2}{r} \Phi' + \left(\kappa^2 - \frac{J(J+1)}{r^2} \right) \Phi = 0 , \quad (4.10)$$

donde

$$\kappa^2 = -m\bar{\rho}_0 \frac{\zeta^2 + \alpha\zeta}{\tau_0 + m \frac{\mu\zeta}{\zeta+r-1}} \quad (4.11)$$

En la (4.10) se utilizó la expresión (3.59) del tensor viscoelástico para los modos estacionarios

$$\mathbf{s}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{s}(\mathbf{x}) e^{\zeta t} . \quad (4.12)$$

Las soluciones obtenidas para la ecuación de movimiento (4.10) son funciones de Bessel esféricas del primer tipo [41]

$$\Phi(r) = j_2(\kappa r) , \quad (4.13)$$

cuyas soluciones para el caso no viscoso fueron estudiadas en la referencia [14] , obteniéndose como autofrecuencias los valores imaginarios puros

$$\zeta = \pm i\omega_0 , \quad (4.14)$$

que representan oscilaciones sin amortiguación.

En la (4.14), el valor de ω_0 ,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\kappa^2 \tau_0}{m \bar{\rho}_0}} , \quad (4.15)$$

es conocido una vez que sea determinado el valor de κ a través de las condiciones de contorno [14] .

Condiciones de contorno

Si la simetría es esférica, un modo del tipo torsión es generado simplemente como una rotación del fluido nuclear, involucrando sin embargo, ángulos dependientes de las coordenadas (cf. eq. (4.1)) según:

$$\hat{T} \propto \mathbf{s} \cdot \nabla = \Phi_J(r) Y_{JJ_0}(\Omega) \cdot \nabla . \quad (4.16)$$

Descomponiendo el armónico esférico vectorial $Y_{JJ_0}(\Omega)$ en sumas de armónicos esféricos Y_{lm} [36] resulta,

$$Y_{JJ_0}(\Omega) = \sum_{m+\mu=0} \langle J0 | l1 m\mu \rangle Y_{lm} \hat{e}_\mu , \quad (4.17)$$

donde

$$\hat{e}_{\pm 1} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} \pm i\hat{y}) \quad (4.18)$$

$$\hat{e}_0 \equiv \hat{z} \quad (4.19)$$

Utilizando propiedades conocidas sobre los coeficientes de Clebsch-Gordan ($JM|j_1j_2m_1m_2$), se obtendrá para el operador torsión de (4.13) la siguiente expresión:

$$\hat{T} \propto \frac{\Phi_J(r)}{r} F_J(\Omega) l_i = \alpha_J(x) l_i, \quad (4.20)$$

con $F_1 = \text{const}$, $F_2 \propto \cos\theta$, $F_3 \propto 4\cos^2\theta - \sin^2\theta$, etc., y $l_i = i(y\partial_x - x\partial_y)$.

El flujo transversal generado por el operador de rotación \hat{T} en (4.17) debe ser cero en la superficie $r = R$ para el caso bajo estudio donde la densidad de equilibrio está dada por la expresión (4.2), es decir, se debe cumplir

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} \alpha_J(r) \right]_{r=R} \equiv \left[\frac{\partial}{\partial r} j_J(\kappa r)/r \right]_{r=R} = 0, \quad (4.21)$$

de donde será posible obtener entonces los valores de κ deseados. Para $J = 2$, esta última ecuación conduce a [41]

$$4 j_2(\kappa R) = \kappa R j_1(\kappa R), \quad (4.22)$$

donde

$$j_1(z) = \frac{\sin z}{z^2} - \frac{\cos z}{z} \quad (4.23)$$

$$j_2(z) = \left(\frac{3}{z^3} - \frac{1}{z} \right) \sin z - \frac{3}{z^2} \cos z, \quad (4.24)$$

son las funciones de Bessel esféricas $j_n(z)$ correspondientes a $n = 1$ y $n = 2$ respectivamente.

Luego de obtener el valor de κ que satisface la ecuación (4.19) (por ejemplo a través de un simple código numérico tipo Newton-Raphson), resulta inmediato calcular la frecuencia natural del primer modo torsión para el ^{208}Pb utilizando la expresión (4.15). Resulta finalmente:

$$\hbar\omega_0 = 9.13 \text{MeV}. \quad (4.25)$$

Autofrecuencias para el caso viscoelástico general

Bajo simetría esférica, κ permanecerá constante y así entonces ω_0 exista o no viscosidad en el medio, y por lo tanto podrán ser obtenidas las autofrecuencias

soluciones de (4.10) resolviendo la ecuación cúbica (4.8), o equivalentemente:

$$\zeta^3 + (\alpha + \tau^{-1})\zeta^2 + (\omega_o^2 + \mu/\bar{\rho}_o\kappa^2 + \alpha\tau^{-1})\zeta + \omega_o^2\tau^{-1} = 0. \quad (4.26)$$

En función de la variable adimensional λ ,

$$\lambda = \zeta\tau, \quad (4.27)$$

y además

$$\begin{cases} a_2 = \alpha\tau + 1 \\ a_1 = \alpha\tau + \tau^2\omega_p^2 \\ a_0 = \tau^2\omega_o^2, \end{cases} \quad (4.28)$$

con $\omega_p^2 = \omega_o^2 + \mu/\bar{\rho}_o\kappa^2$, la ecuación (4.23) podrá ser escrita en la forma usual

$$\lambda^3 + a_2\lambda^2 + a_1\lambda + a_0 = 0, \quad (4.29)$$

con soluciones analíticas conocidas [41]. Definiendo las funciones auxiliares:

$$\begin{aligned} q(\alpha, \tau) &= \frac{1}{3}a_1 - \frac{1}{9}a_2^2 \\ r(\alpha, \tau) &= \frac{1}{6}(a_1a_2 - 3a_0) - \frac{1}{27}a_2^3, \end{aligned} \quad (4.30)$$

se cumple que $q^3 + r^2 > 0$, para coeficientes α entre cero y un valor inclusive un orden de magnitud mayor que el estimado en el capítulo precedente. Por tal razón, la ecuación (4.29) poseerá en todos los casos una raíz real y dos complejas conjugadas:

$$\zeta_1 = \lambda_1/\tau \equiv -\gamma_1 \quad (4.31)$$

$$\zeta_{2,3} = \lambda_{2,3}/\tau \equiv -\gamma_2 \pm iX_o/\tau \quad (4.32)$$

donde

$$\gamma_1 = \frac{1}{\tau} \left[\frac{a_2}{3} - (S_+ + S_-) \right], \quad (4.33)$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{\tau} \left[\frac{a_2}{3} + \left(\frac{S_+ + S_-}{2} \right) \right], \quad (4.34)$$

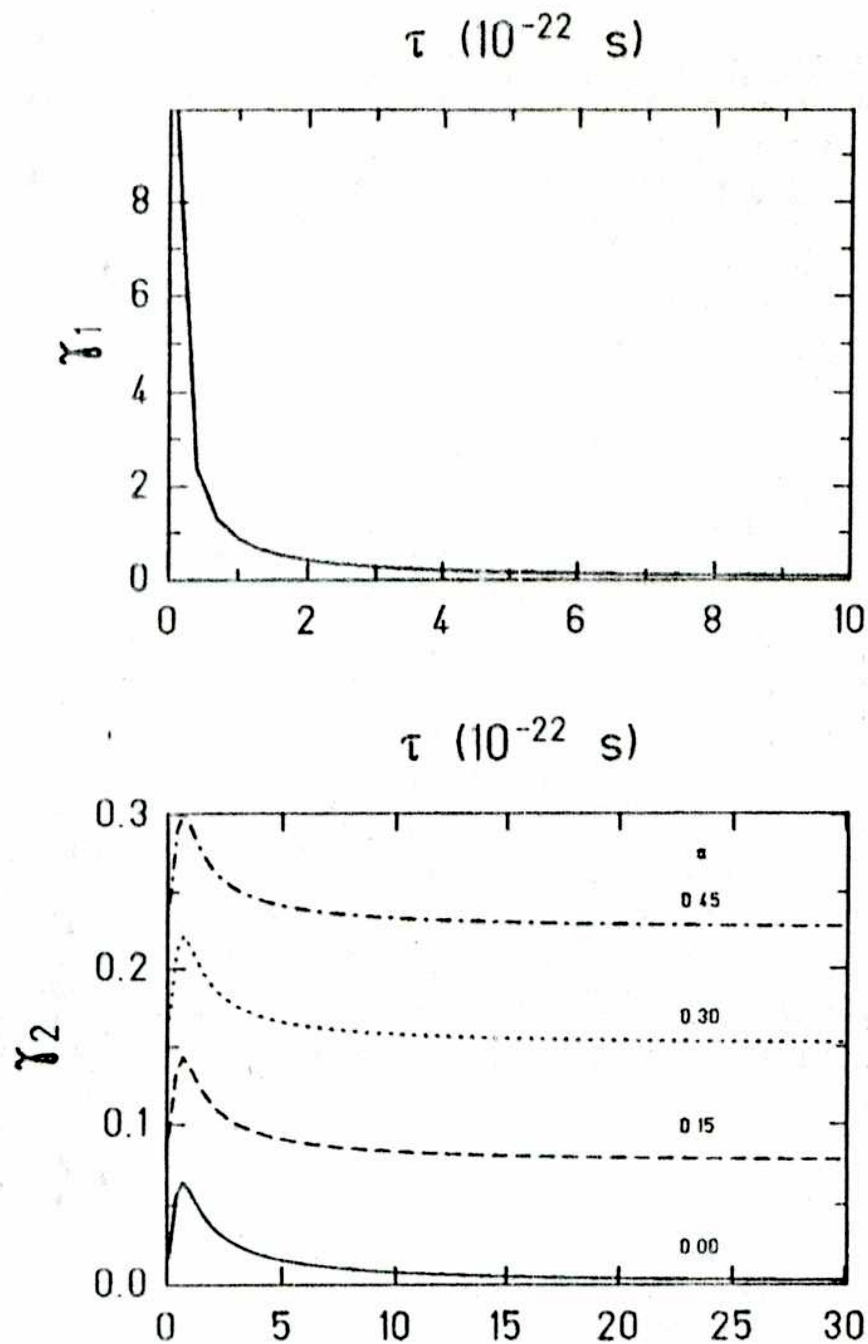


Figura 4.1: Constantes de amortiguamiento γ_1 y γ_2 definidas por las ecuaciones (4.33) y (4.34) como funciones de τ para distintos valores del coeficiente de viscosidad de un cuerpo α . Con la resolución del gráfico, γ_1 resulta independiente de α .

y además

$$X_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}(S_+ + S_-), \quad (4.35)$$

siendo

$$S_{\pm} = [r \pm (q^3 + r^2)^{1/2}]^{1/3}. \quad (4.36)$$

El mecanismo de disipación descrito a través de las soluciones (4.31)-(4.32) está compuesto esencialmente por dos procesos distintos: para tiempos cortos $t \ll \tau$, se observa una rápida relajación del modo colectivo con frecuencia determinada por X_0 y constante de fricción inicial $\gamma_i \equiv \gamma_2$ (ver Fig. 4.1) durante el cual el sistema es intrínsecamente "calentado", mientras que para tiempos largos $t \gg \tau$ el sistema relaja sobreamortiguadamente con una constante de fricción distinta $\gamma_f \equiv \gamma_1$, con

$$\gamma_f \gg \gamma_i. \quad (4.37)$$

El mismo mecanismo de disipación fue encontrado para el caso de resonancias cuadrupolares gigantes (ver pág. 486 de la ref. [21]). Cabe destacar, que bajo la presente descripción viscoelástica originada por la elección del tensor de esfuerzos (3.59), es posible tratar fenómenos disipativos con escalas temporales significativamente distintas dentro de una única representación sobre la base de un mismo núcleo friccional (cf. eq. (3.54)). Esto permite la descripción simultánea de un comportamiento elástico de la materia nuclear para tiempos cortos ($t \ll \tau$) y por el contrario viscoso en la desexcitación, para tiempos mucho mayores ($t \gg \tau$).

De la ecuación (4.32) será posible entonces obtener el ancho y la frecuencia del modo colectivo [16] para el caso general viscoelástico en función del tiempo de relajación τ y parametrizados por el coeficiente de disipación de un cuerpo α , simplemente como:

$$\begin{cases} \Gamma = -2\hbar \text{Re}(\zeta_{2,3}) \equiv 2\hbar\gamma_2 \\ \hbar\omega = \hbar X_0/\tau. \end{cases} \quad (4.38)$$

El ancho y la frecuencia determinados por la ecuación (4.38) para el primer modo torsión 2^- en el ^{208}Pb fueron graficados en la figura 4.2. Nótese que, salvo un factor de escala, las figuras para γ_2 y el ancho Γ coinciden, como surge inmediatamente de la discusión posterior a la ecuación (4.36). En la figura 4.2 además, la frecuencia está dada por unidad de ω_0 , correspondiente al caso no viscoso [14] y fijada por las condiciones de contorno a través del valor de κ como en (4.22).

De la observación de la figura 4.2 surge inmediatamente que el centroide de energía $\hbar\omega$ tiene una conducta prácticamente independiente del coeficiente α cualquiera sea el tiempo de relajación τ , mientras que por el contrario, el ancho es

fuertemente dependiente de él. En otras palabras, la introducción de coeficientes viscosos modifica y determina -como era de esperar- la disipación de energía (regulada por la parte real de ζ) pero no cambia la ubicación del centroide, encontrándose un modo espacialmente idéntico a aquel hallado en el caso no viscoso (determinado por κ o equivalentemente por ω_0), con prácticamente el mismo valor de energía de excitación, pero amortiguado con intensidades dependientes de los coeficientes α y μ (cf. eqs. (4.26)). Sin embargo, como fue puntualizado ya por Holzwarth y Eckart en la ref. [14], la ubicación del centroide está fuertemente afectada por la forma del perfil superficial de la densidad de equilibrio $\bar{\rho}_0$. Las soluciones numéricas a las ecuaciones de movimiento para el caso de un perfil de densidad del tipo Woods-Saxon (3.48) (c.f. subsección 4.2), arrojan resultados considerablemente menores para el valor numérico de la energía de excitación $\hbar\omega$, obteniéndose soluciones de 7.46 MeV que aproximadamente reproduce el valor determinado experimentalmente de 7.6 MeV [38] para el ^{208}Pb , i.e., $45A^{-1/3}$. Estos resultados concuerdan a la vez con aquellos obtenidos a través de cálculos microscópicos del tipo RPA [38].

En el marco de una aproximación de densidad escalón (4.2) como la desarrollada en esta subsección, es posible simular un núcleo más extenso aumentando las dimensiones del radio superficial y a la vez disminuyendo el valor de la densidad de equilibrio de forma tal de conservar constante el volumen

$$\int_{V(R)} \bar{\rho}_0 d^3x = \int_{V(R')} \bar{\rho}'_0 d^3x, \quad (4.39)$$

es decir, con un núcleo más "blando" y a la vez más grande. Con valores de $\bar{\rho}'_0 = 0.14 \text{ fm}^{-3}$ y $R' = 7.77 \text{ fm}$ ($R \cong 1.3A^{-1/3}$) para el ^{208}Pb se obtuvieron valores de $\hbar\omega \cong 7.6 \text{ MeV}$ sin modificación de los resultados observados para el ancho Γ del torsión [15].

Por otro lado, en la figura 4.2 se puede apreciar que, fijado el valor del ancho Γ (por ejemplo a través de su valor experimental), existen dos valores distintos del tiempo de relajación τ asociados a un régimen hidrodinámico, si $\omega\tau \ll 1$ o bien viscoelástico, en caso de que $\omega\tau \gg 1$. Mientras que Γ es una función rápidamente creciente para valores pequeños de τ , ésta decrece lentamente para valores $\tau \rightarrow \infty$. El máximo de la curva $\Gamma(\tau)$ separa así dos regímenes cualitativamente distintos cuyo cambio corresponde a un valor de τ_c donde la función $q(\tau)$ definida en (4.27) se anula [41], es decir, donde

$$q(\tau_c) = \frac{(1 + \alpha\tau_c)^2}{3} - (1 + \beta)\omega_0^2\tau_c^2 - \alpha\tau_c \cong 0, \quad (4.40)$$

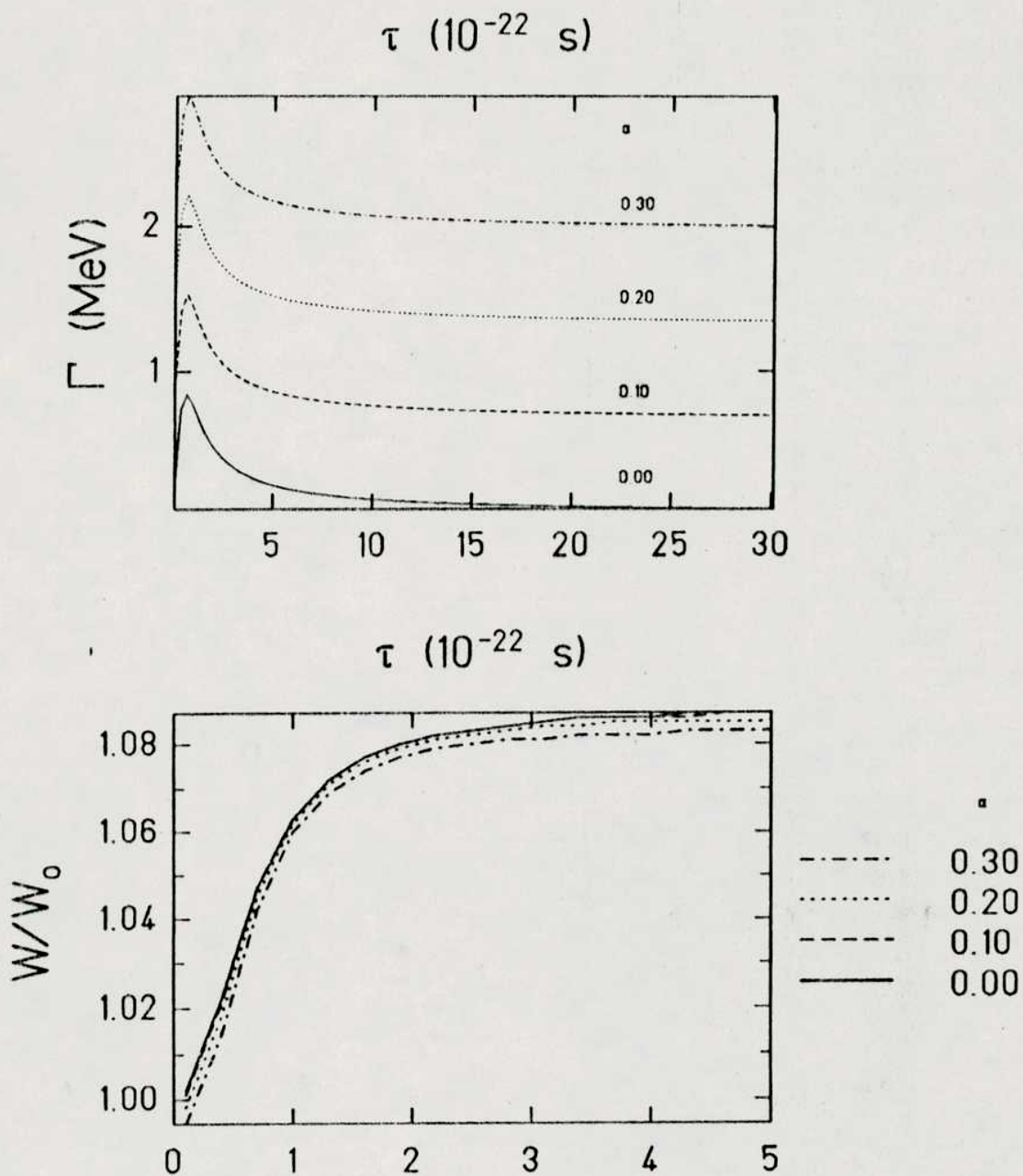


Figura 4.2: Ancho Γ y centroide de energía (expresado en unidades de ω_0) para el primer estado 2^- torsión en el ^{208}Pb para diferentes valores del coeficiente de viscosidad de un cuerpo α .

con

$$\beta = \frac{\mu}{\rho_0} m \left[\sqrt{5} \left(\frac{3}{2} \pi^2 \rho_0 \right)^{-1/3} \hbar \right]^2. \quad (4.41)$$

De la ecuación (4.37) se obtiene fácilmente [16]

$$\tau_c = \frac{\alpha}{3\omega_0^2(1+\beta) - \alpha^2} + \left[\frac{\alpha^2}{(3\omega_0^2(1+\beta) - \alpha^2)^2} + \frac{1}{3\omega_0^2(1+\beta) - \alpha^2} \right]^{1/2}, \quad (4.42)$$

que para valores de α menores que $0.5 \cdot 10^{-22} \text{s}^{-1}$ corresponde a

$$\tau_c \approx \frac{1}{\omega_0^2 \sqrt{3(1+\beta)}} = 0.410 \cdot 10^{-22} \text{s}, \quad (4.43)$$

valor independiente de α como se observa en la figura 4.2 y en cuya proximidad el fluido se comporta viscoelásticamente.

Fluidodinámica disipativa en los límites elástico y viscoso

Para fijar con más claridad las ideas sobre el comportamiento del fluido nuclear viscoelástico bajo estudio, es conveniente en este punto revisar algunas propiedades y características físicas de dicho fluido en los dos regímenes opuestos, a saber, el hidrodinámico y el elástico.

a. Límite elástico

Si ω es la frecuencia característica de excitación del modo colectivo, el límite elástico o también llamado no-colisional se define como aquel donde el producto $\omega\tau$ es mucho mayor que la unidad. En este límite, el tensor de esfuerzos internos (3.59) resulta [34, 42]

$$\sigma_{ij}^E = 2\mu d_{ij}, \quad (4.44)$$

correspondiendo este último al valor clásico

$$\sigma_{ij}^E = \lambda \delta_{ij} d_{ii} + 2\mu d_{ij}, \quad (4.45)$$

para modos libres de divergencias, tal el caso de los modos de paridad anormal torsión (c.f. Sec. 3.4). En la (4.45) λ y μ son los coeficientes de Lamè y d_{ij} el tensor de deformaciones definido por (3.57). Con la expresión (4.44), la ecuación de

movimiento (3.23) se podrá escribir como

$$\bar{\rho}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_o - \alpha\bar{\rho}\mathbf{u} - \mu\nabla^2\mathbf{s}, \quad (4.46)$$

donde al igual que en el caso viscoelástico, \mathbf{F}_o representa la parte conservativa de la fuerza

$$\mathbf{F}_o = \frac{1}{m} \frac{\delta E}{\delta \mathbf{s}}, \quad (4.47)$$

y los dos últimos términos en (4.46), la parte disipativa con viscosidades de uno y dos cuerpos. Esta ecuación es el equivalente clásico de aquella que da la evolución temporal de un desplazamiento cualquiera \mathbf{s} en un medio elástico isótropo. En (4.46) sin embargo, el análogo cuántico del módulo de Lamè μ , contiene correlaciones de dos cuerpos y resulta ser la presión del gas de Fermi [34, 42], relacionado con la velocidad de Fermi v_F a través de

$$\mu \equiv p_o = \frac{1}{5} \bar{\rho}_o v_F^2. \quad (4.48)$$

Bajo tales condiciones, la solución a la ecuación de movimiento (4.46) para la parte radial $\Phi_J(r)$ del campo de escala $\mathbf{s}(\mathbf{x})$ para un modo torsión de spin J será también -al igual que el caso viscoelástico general- una función de Bessel esférica $j_J(\kappa r)$ con un número de onda κ

$$\kappa^2 = \frac{m\bar{\rho}_o}{\tau_o + m\mu} (\zeta^2 + \alpha\zeta). \quad (4.49)$$

La ecuación (4.49) determina la relación de dispersión para las autofrecuencias

$$\zeta_{1,2}^B = -\frac{\alpha}{2} \pm i\omega_B, \quad (4.50)$$

con el centroide

$$\omega_B = \sqrt{\omega_o^2 + \frac{\mu\kappa^2}{\bar{\rho}_o} - \frac{\alpha^2}{4}}, \quad (4.51)$$

y el ancho

$$\Gamma^B = \hbar\alpha. \quad (4.52)$$

Cabe notar, que la perturbación a la frecuencia no viscosa ω_o está compuesta de dos contribuciones opuestas; la disipación de un cuerpo -única fuente de

amortiguamiento- se opone al incremento en la frecuencia de oscilación introducido por correlaciones de origen cuántico a través de μ . Por el otro lado sin embargo, el módulo de las autofrecuencias complejas en (4.50) es independiente de la intensidad del coeficiente de disipación de un cuerpo, y está dado por:

$$\mathcal{E}^E = \hbar |\zeta_{1,2}^E| = \sqrt{(\hbar\omega_0)^2 + \mu\kappa^2\hbar^2/\rho_0} = \sqrt{(\hbar\omega_E)^2 + (\Gamma^E/2)^2}. \quad (4.53)$$

Es evidente que el último término en esta expresión permanece fijo, una vez que el modo es seleccionado acorde con la raíz de la función de Bessel j_2 obtenida a través de las condiciones de contorno como en (4.18). Esto determinará por ende la ubicación del centroide de energía para un fluido perfecto $\hbar\omega_0$.

Investigando más detalladamente la expresión límite para el ancho Γ en el régimen viscoelástico partiendo de la expresión (4.38) se obtiene:

$$\Gamma^{VE} \cong \frac{\hbar\beta}{\tau} + \hbar\alpha. \quad (4.54)$$

En el régimen elástico $\tau \rightarrow \infty$ se reobtiene el resultado (4.52) y además, en ausencia de acoples externos ($\alpha = 0$), se recupera el resultado límite $\Gamma = 0$ [43, 44] obtenido en realidad muchos años atrás al estudiar el amortiguamiento de las ondas sonoras de acuerdo con la Teoría de Landau para un líquido de Fermi normal [8], donde se observa que $\Gamma^{VE}(\tau)$ es una función monótonamente decreciente con τ , que satisface $\Gamma^{VE}(\tau) \cdot \tau \simeq \text{const}$. Veremos más adelante que un resultado similar, acorde al esperado por la Teoría de Fermi, es obtenido en el caso opuesto ($\omega\tau \ll 1$) para el llamado sonido ordinario o primer sonido, en contraposición al estudiado en este régimen no colisional (en donde existe una deformación de la esfera de momentos) y denominado como sonido cero [8].

b. Límite hidrodinámico

Este límite altamente colisional corresponde al caso en que $\omega\tau \ll 1$, donde ahora la interacción residual entre pares de nucleones resultan ser predominantes sobre la intensidad del campo promedio. En tal caso, es preferible incorporar el concepto de viscosidad [8] definido como el coeficiente de proporcionalidad entre la parte no diagonal del tensor de esfuerzos σ_{ij} y el tensor gradiente de las velocidades

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (4.55)$$

es decir,

$$\sigma_{ij}^H = -2\eta e_{ij} . \quad (4.56)$$

La expresión (4.56) se puede obtener también como el límite $\tau \rightarrow 0$ del tensor viscoelástico (3.59) utilizando la relación $\tau = \eta/\mu$ (c.f., Cap. 3). Dicha identidad al igual que (4.44) no contiene en principio efectos de superficie; sin embargo, tales efectos son en cierta manera restituidos a través de la fuerza disipativa de un cuerpo, ya que ahora la ecuación de movimiento (3.23) resulta ser una del tipo de Navier-Stokes

$$\bar{\rho}\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{F}_o - \alpha\bar{\rho}\mathbf{u} + \eta\nabla^2\mathbf{u} , \quad (4.57)$$

con una fuerza externa disipativa que aporta un acople extra con el medio ambiente, en este caso, con las paredes oscilantes del campo medio y donde, como en (4.46), la fuerza conservativa \mathbf{F}_o está dada por (4.47).

Una vez más, las autofunciones radiales de (4.57) para el modo torsión son funciones de Bessel esféricas $j_J(\kappa r)$ donde ahora la relación de dispersión hidrodinámica estará dada por:

$$\kappa^2 = -m\bar{\rho}_o \frac{\zeta^2 + \alpha\zeta}{\tau_o + m\mu\zeta} . \quad (4.58)$$

Las autofrecuencias en este caso estarán determinadas entonces por

$$\zeta_{1,2}^E = -\Gamma/2\hbar \pm i\omega_H , \quad (4.59)$$

donde

$$\Gamma^H = \hbar\gamma = \hbar\alpha + \frac{\hbar\eta\kappa^2}{\bar{\rho}_o} , \quad (4.60)$$

y el centroide $\hbar\omega_H$ está dado por

$$\omega_H = \sqrt{\omega_o^2 - \gamma^2} . \quad (4.61)$$

Una vez más, el módulo de las autofrecuencias complejas (4.59) es una constante,

$$\mathcal{E}^H = \hbar|\zeta_{1,2}^H| = \hbar\omega_o , \quad (4.62)$$

en otras palabras, es independiente de los coeficientes de disipación una vez que fue asignado el valor para el centroide de energía $\hbar\omega_o$ para el caso de un fluido no viscoso.

En el régimen hidrodinámico, por otro lado, es posible además calcular la viscosidad para un líquido de Fermi a bajas temperaturas, cuya expresión está dada exactamente a través de [7]

$$\eta = \frac{4}{15} m \frac{\hbar^3 v_F^5}{T^2} \langle \mathcal{W}(\theta) \frac{\sin^4 \theta / 2 \sin^2 \varphi / 2}{\cos \theta} \rangle^{-1}, \quad (4.63)$$

donde $\mathcal{W}(\theta)$ es la probabilidad de dispersión de dos cuasipartículas de Landau en el nivel de Fermi debida a su interacción efectiva, y $\langle \rangle$ denota el promedio angular [8]. En el caso isótropo, (4.63) produce un valor para η dado por

$$\eta = m \frac{\hbar^3 v_F^5}{2T^2} \mathcal{W}_0^{-1}, \quad (4.64)$$

con

$$\mathcal{W}_0 = \langle \mathcal{W}(\theta) \rangle. \quad (4.65)$$

Cabe destacar, que la viscosidad en (4.63) es proporcional a T^{-2} , cuya dependencia había sido ya sugerida en los años 50 por Pomeranchuk [45] a partir de consideraciones cualitativas. El valor numérico de la viscosidad depende del conocimiento de la función promedio en (4.65) y por lo tanto no puede ser exactamente determinada. Sin embargo, la expresión (4.64) nos permite estimar el orden de magnitud de η seleccionando para \mathcal{W}_0 una fuerza efectiva del tipo de Skyrme [46] promediada sobre las componentes de spin e isospin

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_0 = & \frac{2\pi}{\hbar} \left\{ \frac{1}{15} k_F^4 t_2^2 [(5 + 4X_2)^2 + 6(1 + X_2)^2 + 9] \right. \\ & + 6t_0^2 (1 + X_0^2) + \frac{1}{6} \bar{\rho}_0^{2\alpha} t_3^2 (1 + X_3^2) + \frac{16}{15} k_F^2 t_1^2 (1 + X_1^2) \\ & + 8t_0 t_1 k_F^2 (1 + X_0 X_1) + \frac{4}{3} \bar{\rho}_0^\alpha k_F^2 t_1 t_3 (1 + X_1 X_3) \\ & \left. + t_0 t_3 \bar{\rho}_0^\alpha (1 + X_0 X_3) \right\}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

En la referencia [15] Hernández y Vignolo estudiaron el comportamiento de la viscosidad η en función del factor de densidad α de (4.66) para distintos fits de los parámetros de la fuerza de Skyrme. En todos los casos, y para valores $0.2 \leq \alpha \leq 0.5$, se observa que el producto ηT^2 en (4.64) permanece acotado aproximadamente entre

$$2 < \eta T^2 < 5 \text{ [} 10^{11} \text{poise]}. \quad (4.67)$$

Por razones históricas se siguió utilizando una unidad de viscosidad del sistema de unidades CGS (poise), aunque sin embargo, tan impresionante orden de magnitud no debe resultar extraño ya que dicho valor colapsa a la unidad en caso de emplear magnitudes típicas a cualquier descripción nuclear

$$1.25 < \eta T^2 < 3.13 \left[\text{MeV} \frac{10^{-22} \text{g}}{\text{fm}^3} \right]. \quad (4.68)$$

Cabe destacar que dichos valores, si bien son levemente mayores que aquellos reportados por Auerbach y Yeverehyahu [47] para reproducir anchos de resonancias gigantes, subestiman en un orden de magnitud a los correspondientes de Tang y Wong [48] o a los de Buchwald y colaboradores [49] empleados en el estudio de la dinámica de las reacciones entre iones pesados usando una descripción hidrodinámica de equilibrio.

Uno podría, por otro lado, estimar la relación entre las fuerzas «viscosas» y las fuerzas «inerciales» y hallar que ésta resulta ser del orden de algunas décimas, introduciendo un «número de Reynolds» $Re = \bar{\rho}_0 v_F R / \eta$ que correspondería a un valor levemente mayor que la unidad.

4.2 Perfil de Densidad Difuso

En la sección 4.1 se utilizó un perfil de densidades del tipo escalón (4.2) con el objeto de obtener una primera aproximación a la solución del problema de autovalores y autofunciones. En tal caso, bajo lo que se denominó aproximación ADE, las autofunciones correspondientes a la parte radial del campo de escala son simplemente las soluciones de una ecuación de Bessel (4.10) y por lo tanto funciones con expresiones analíticas conocidas, mientras que los autovalores correspondientes (que determinan a su vez las autofrecuencias del problema), se obtienen de la resolución de una ecuación trascendente (4.22).

La descripción precedente da cuenta de la sencillez del problema en caso de que la densidad sea del tipo escalón; sin embargo, no es posible llevar a cabo tal programa si se utiliza un perfil de densidad con difusión, ya que en este caso será necesario trabajar con las expresiones completas (3.45) a (3.47) en lugar de la versión simplificada (4.3) a (4.5), y por lo tanto enfrentar la solución numérica del problema de autovalores y autofunciones. Para los cálculos, con propósitos ilustrativos, fue

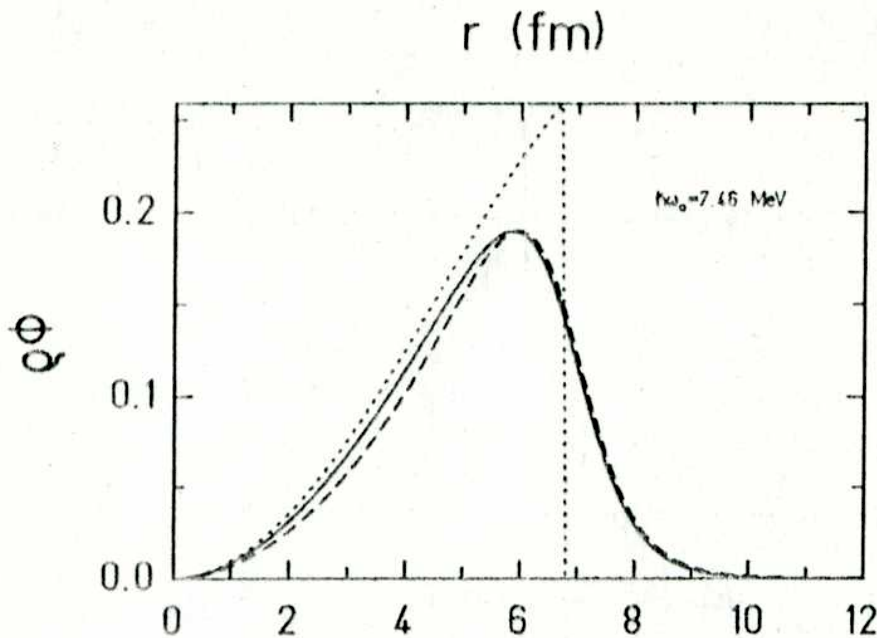


Figura 4.3: Dependencia radial de la densidad de corriente para el primer modo torsión 2^- en el ^{208}Pb . Para las soluciones numéricas (línea llena) se eligió un perfil del tipo Woods-Saxon, en contraposición con la solución analítica (línea punteada) correspondiente a un perfil de densidad del tipo escalón. La aproximación ingenua (ver texto) se muestra línea cortada.

elegida como densidad de equilibrio una función del tipo (3.48),

$$\bar{\rho} = \frac{\bar{\rho}_0}{1 + \exp((r - R)/a)}, \quad (4.69)$$

donde, como es habitual, se escogió [16] $R = 1.2 A^{-1/3}\text{fm}$, $\bar{\rho}_0 = 0.16\text{fm}^{-3}$ y $a = 0.5\text{fm}$.

Al igual que en la sección precedente, uno no espera que la introducción de parámetros viscosos modifique en manera alguna al modo espacialmente; en otras palabras, la inclusión de efectos disipativos tiene que dar como resultado un modo espacialmente idéntico al caso no viscoso ($\alpha = \vec{\sigma} = 0$ en (3.23)) pero con amplitud decreciente en el tiempo, debido a una autofrecuencia compleja como solución cuya parte real es no nula. En la figura 4.3 se muestra la dependencia con r de la parte radial $\Phi(r)$ del campo de escala, multiplicada por la densidad de equilibrio en tres distintas aproximaciones. Los resultados corresponden a cálculos sin viscosidad para

el primer estado 2^- en el ^{208}Pb . Con línea de puntos se muestra la solución analítica en la aproximación de densidad escalón (ADE), es decir, la función de Bessel $j_2(\kappa r)$, en comparación con la solución numérica para un perfil de densidad del tipo (4.69). Se agregó también por completitud como en la referencia [14] (líneas cortadas), la solución ingenua $\Phi(r) = r^2$ que equivale a imponer a todo el fluido un campo de velocidades $\mathbf{u} = (yz, -xz, 0)$ como el de (4.1), bajo la separación en coordenadas angulares y radiales (4.6). Cabe mencionar que esta última solución no satisface (4.10) y por lo tanto la correspondiente autofrecuencia solución del problema puede ser obtenida solamente a partir de [13]

$$\omega = \sqrt{C/B}, \quad (4.70)$$

con

$$B = m \int \rho(r) z^2 (x^2 + y^2) d^3x \quad (4.71)$$

$$C = \frac{\hbar^2}{5m} \left(\frac{3}{2}\pi^2\right)^{2/3} \int \bar{\rho}(r)^{5/3} (x^2 + y^2) d^3x - \frac{\hbar^2}{2m} A, \quad (4.72)$$

tal como se procede en toda descripción fluidodinámica en donde el movimiento es impuesto al fluido y no es obtenido como solución del problema [3]. Nótese sin embargo la destacable similaridad entre la solución numérica exacta y la "naive".

La solución numérica buscada es obtenida entonces resolviendo una ecuación diferencial en derivadas parciales del tipo (4.10) para la parte radial del campo de escala $\Phi_J(r)$ con un dado spin nuclear J . Dicha ecuación del tipo autovalor-autofunción está vinculada con las autofrecuencias complejas ζ a través de [16]

$$\Phi'' + a(\zeta, r)\Phi' + b(\zeta, r)\Phi = 0, \quad (4.73)$$

donde las funciones con valores complejos $a(\zeta, r)$ y $b(\zeta, r)$ están dadas por

$$a = \frac{2}{r} + \frac{\tau'_0}{\tau_0 + \sigma} \quad (4.74)$$

$$b = -m\bar{\rho} \frac{(\zeta^2 + \alpha\zeta)}{\tau_0 + \sigma} - \frac{1}{r} \frac{\tau'_0}{\tau_0 + \sigma} - \frac{J(J+1)}{r^2},$$

con $\tau_0(r)$ como la funcional de energía cinética en la aproximación de Thomas-Fermi dada por (3.46), y con σ el coeficiente de proporcionalidad entre el tensor de

esfuerzos internos σ_{ij} y el duplo del tensor de deformaciones d_{ij} (c.f. ec. (3.59)), es decir,

$$\sigma_{ij} = 2\sigma d_{ij}, \quad (4.75)$$

siendo

$$\sigma = \frac{\mu\zeta}{\zeta + \tau^{-1}}. \quad (4.76)$$

La ecuación diferencial compleja (4.73), es equivalente al siguiente sistema de ecuaciones reales acopladas:

$$\Phi'' + a_R\Phi' + b_R\Phi = 0 \quad (4.77)$$

$$a_I\Phi' + b_I\Phi = 0, \quad (4.78)$$

donde los subíndices R e I respectivamente denotan las partes real e imaginarias de las correspondientes funciones dadas por (4.74).

Cuando se reemplaza (4.78) en (4.77), se obtiene $\Phi = 0$ o bien

$$\mathcal{P}^2 - \mathcal{P}' - a_R\mathcal{P} + b_R = 0, \quad (4.79)$$

donde se ha definido

$$\mathcal{P}(\tau, \zeta) = b_i/a_i. \quad (4.80)$$

Resolviendo la ecuación diferencial (4.79) será posible entonces calcular el tiempo de relajación τ como función de la coordenada radial para un dado modo colectivo caracterizado por el valor del centroide de energía ω y el ancho Γ , los que deben ser introducidos como parametros de entrada. El procedimiento consiste simplemente en resolver una ecuación diferencial de primer orden para $\tau(r)$ según lo indicado por (4.79), utilizando las expresiones (4.74) y (4.80). La densidad nuclear fue elegida como en (4.69). Como fue mencionado con anterioridad, la ecuación (4.79) no es necesariamente válida en los nodos de de la autofunción $\Phi(r)$; sin embargo, uno puede suponer que está tratando con soluciones $\tau(r)$ que son funciones continuas de r obteniendo así resultados de validez en todo el rango de escalas nucleares. Tales soluciones son mostradas en la figura 4.4 para un valor realista del centroide de energía de 7.6 MeV, aproximadamente $45 A^{-1/3}$ MeV, que corresponde al primer modo torsión en el ^{208}Pb . El ancho y el coeficiente de disipación de un cuerpo α son tomados como parámetros libres [16].

Como en el caso ADE ilustrado en la figura 4.2, una vez que es escogido el valor del ancho Γ , se obtienen dos valores distintos del tiempo de relajación asociado con

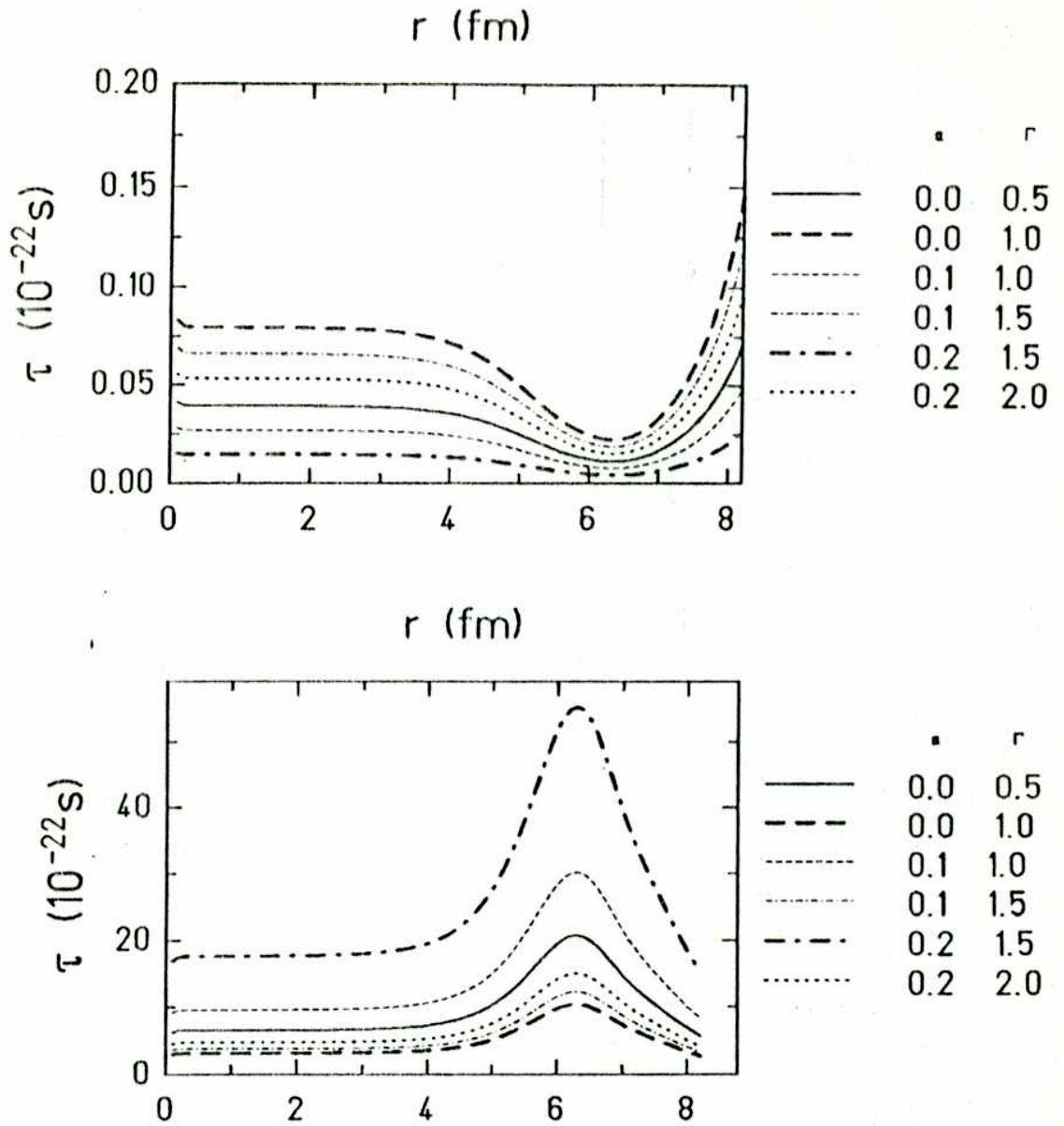


Figura 4.4: Dependencia radial del tiempo de relajación τ en el régimen hidrodinámico o colisional y en el régimen elástico o no-colisional para un perfil de densidad del tipo Woods-Saxon. El ancho Γ (en MeV) y el coeficiente α (en $10^{22} s^{-1}$) son tomados como parámetros de entrada.

ramas complementarias de la autofrecuencia compleja y con comportamiento opuesto. Debe ser tenido en cuenta que, como puntualizaron Bohigas y colaboradores muchos años atrás [50], si bien la extensión de la aproximación de Thomas-Fermi (3.46) para núcleos finitos no debería ser válida más allá del punto de retorno semiclásico, uno obtiene resultados correctos si a los efectos prácticos considera como soluciones del problema a tales funciones prolongadas analíticamente en todo el espacio [50]. La figura 4.4 exhibe así las soluciones $\tau(r)$ correspondientes al régimen hidrodinámico ($\tau \rightarrow 0$) y el elástico ($\tau \rightarrow \infty$) respectivamente, válidas entonces más allá del valor $R = 1.2 A^{-1/3}$ correspondiente al radio superficial del núcleo.

Discusión

Uno puede apreciar al examinar la figura 4.4 que la solución hidrodinámica se comporta como fuera establecido previamente por otros autores [51] desde otra perspectiva. En efecto, la aproximación llevada a cabo en tales trabajos se resume al cálculo del potencial óptico y del libre camino medio asociado en una aproximación del tipo de densidad local, empleando interacciones efectivas. La característica saliente de tales soluciones al igual que la que corresponde a los cálculos aquí realizados, es el decrecimiento del libre camino medio -y consecuentemente el tiempo de relajación al cual éste es proporcional- sobre la superficie nuclear. Esta conducta puede ser asociada al hecho de que la desaparición del efecto de bloqueo de Pauli en la superficie nuclear favorece así la ocurrencia de colisiones de dos cuerpos, contrarrestando la mayor dilución del fluido. En la región exterior, donde los constituyentes nucleares son prácticamente inexistentes (c.f. ec. (4.69)), la cola Maxwelliana de la distribución de Fermi gobierna el valor de $\tau(r)$, el que aproximadamente crecerá proporcional a $1/\bar{\rho}$ [8].

En el régimen viscoelástico, la conducta de la función $\tau(r)$ es absolutamente distinta. Uno podría esgrimir en este caso que la ecuación de Vlasov-Boltzmann proveniente de la versión semiclásica de la teoría de HFDT (c.f. Cap. 1) no incluye efectos de bloqueo de Pauli en el núcleo colisional (primer término en el miembro derecho de (2.9)). El fluido se comportará así clásicamente, con un módulo de Lamé μ [31] que decrece al caer el valor de la densidad. Como consecuencia, la superficie nuclear corresponde a la región más elástica del núcleo, y uno espera entonces un incremento importante en el tiempo de relajación como exhibe la figura 4.4 (parte inferior) para radios próximos al radio de la superficie nuclear.

Es importante notar las diferentes escalas en el eje de las ordenadas de la figura 4.4. En el régimen hidrodinámico se observa que en la región central del núcleo, el tiempo de relajación permanece debajo de $0.1 \cdot 10^{-22} s$ para todos los valores del ancho Γ y el coeficiente de disipación de un cuerpo α , dentro del rango de valores estimado en cálculos previos, $\Gamma < 1 \text{ MeV}$ y $\alpha < 0.5 \cdot 10^{22} s^{-1}$ [16]. Tales valores para el tiempo de relajación son demasiado bajos para permitir la observación de los modos colectivos actualmente en estudio, donde la deformación de la esfera de

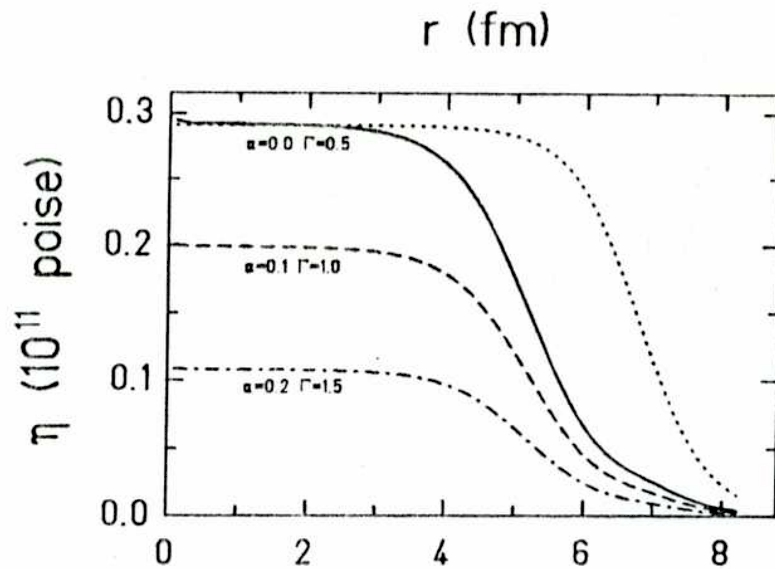


Figura 4.5: Viscosidad de dos cuerpos $\eta(r)$ para distintas elecciones de los parámetros α y Γ . Con líneas de puntos se indica el perfil de densidad nuclear del tipo Woods-Saxon (normalizado con el máximo) elegido a los efectos de cálculo.

Fermi lleva la parte preponderante de la energía de excitación. Más aún, para modos torsión, la única contribución a la energía proviene de dicha deformación. Se debería dejar de lado entonces la rama hidrodinámica de soluciones del campo de escala en una descripción acorde a modos colectivos que semejan más un modo del tipo de sonido cero que de primer sonido o sonido ordinario en el marco de la teoría de Fermi para un líquido normal. La situación es distinta sin embargo, cuando uno observa el tamaño de la escala del tiempo de relajación para las soluciones correspondientes a la rama viscoelástica, que ronda valores del orden de $20 \cdot 10^{-22} s$ de acuerdo con lo esperado (c.f. ec. (3.31)).

Un resultado de la actual aproximación fluidodinámica es la posibilidad de calcular la viscosidad hidrodinámica η de (4.57) como función del radio nuclear, dado el parámetro de amortiguamiento α y el ancho del modo colectivo. Esto es posible con la ayuda de la relación $\tau = \eta/\mu$, las soluciones $\tau(r)$ correspondientes a la rama hidrodinámica y el módulo de Lamè μ determinado por la presión del gas de Fermi (c.f. sec. 4.1) en este caso con una dependencia radial dada por el perfil de densidad nuclear. Los resultados fueron graficados en la figura 4.5, donde se muestran las funciones $\eta(r)$ para distintas elecciones de α y Γ . La densidad nuclear (4.69) fue también graficada (línea de puntos) como referencia. Resulta claro que, aunque análogamente con el caso $\tau(r)$ del régimen hidrodinámico la viscosidad refleja la desaparición del bloqueo de Pauli en la superficie, la función $\eta(r)$ sigue fielmente

la forma del perfil de densidad $\bar{\rho}(r)$, desplazando sin embargo la ubicación de la superficie hacia valores menores del radio nuclear. Cabe notar que, la viscosidad cae a cero en ausencia de materia nuclear, mientras que el tiempo de relajación sufre un fuerte incremento que podría inclusive sugerir una divergencia en la región externa, donde las colisiones de dos cuerpos son prácticamente inexistentes.

Adicionalmente, la figura 4.5 evidencia que el orden de magnitud de la viscosidad asociada a un modo colectivo del tipo torsión, está en correspondencia con los valores calculados previamente (c.f. Sec. 4.1) y con aquellos estimados para cálculos de anchos de resonancias gigantes [47].

PARTE II



Capítulo 5

Descripción Estocástica No-Markoviana del Movimiento Colectivo Nuclear

En este capítulo se discutirán los casos donde se deberá necesariamente trabajar dentro de un marco estocástico para describir correctamente la evolución de un sistema de muchos cuerpos en interacción. En particular, se deducirán ecuaciones no-markovianas para el movimiento colectivo nuclear a partir de una ecuación cinética. En caso de que el movimiento esté representado por una única coordenada colectiva (asociada a un modo normal del sistema), se demostrará que el sistema de ecuaciones resultante es completamente equivalente a las ecuaciones dinámicas de Hamilton-Langevin para un oscilador Browniano clásico en donde la velocidad juega el papel de coordenada de la partícula Browniana ficticia.

5.1 Determinismo y Estocasticidad

Como se sabe, la solución completa de un sistema de muchos cuerpos consistiría en resolver todas sus ecuaciones microscópicas. Debido a que esto es imposible de llevar a cabo, distintos tipos de aproximaciones son realizadas, o equivalentemente, distintos modelos son propuestos y así, mediante este tipo de aproximaciones, truncando jerarquías de ecuaciones diferenciales acopladas, se consigue finalmente un sistema matemáticamente tratable. Con este proceder en el capítulo 1, se fue avanzando por lo que se denominó "genealogía de la hidrodinámica nuclear" (c.f. fig.1) para detenerse finalmente en un nivel fluidodinámico semiclásico puramente determinis-

ta proveniente de una teoría de campo medio del tipo de HFDTE. Esto significa básicamente que la imagen asociada a tal descripción corresponde a partículas colisionando entre sí y con el campo promedio, cuyo transferencia de impulso (representada en forma de viscosidades de uno y dos cuerpos) conduce a que la velocidad de las partículas decrezca hasta hacerse finalmente igual a cero. La ecuación diferencial que gobierna el movimiento (en el caso bajo estudio la (3.23)), es una ecuación determinista, i.e., la velocidad $u(t)$ a tiempo t está completamente determinada una vez que las condiciones iniciales fueron fijadas. Además, dentro de la representación viscoelástica perseguida en este trabajo, la evolución dinámica está determinada -al menos en su nivel elemental cuando el sistema posee un único grado de libertad- por un sistema de ecuaciones equivalente al de un oscilador amortiguado (c.f. ec. (3.60)).

Sin embargo, lo que se obtiene en general al abandonar una representación microscópica exacta, es una descripción en términos de pocas variables macroscópicas fluctuantes. Esto fue analizado en el capítulo 2 en conexión con la truncación de una jerarquía de Martin-Schwinger de ecuaciones acopladas hasta segundo orden, pero en realidad en un tratamiento general resultará cada vez que se retengan contribuciones residuales no lineales, como se verá a continuación en términos generales (c.f. sec. 5.2). La figura 5.1 da una representación esquemática de lo que ocurre. Un tratamiento estocástico riguroso debería comenzar con una descripción microscópica. El tratamiento determinista debería seguir a continuación, consecuencia de despreciar las fluctuaciones (indicado por flechas dobles \Rightarrow en la fig. 5.1).

Tal deducción rigurosa tiene involucrada el cálculo de coeficientes que determinan la disipación -difusión en el proceso dinámico, cálculo que puede ser muy complicado o incluso algunas veces imposible. En este caso es plausible comenzar con ecuaciones deterministas y usar argumentos heurísticos para obtener finalmente una descripción estocástica, paso indicado con una flecha simple (\rightarrow) en la figura 5.1. Esto se consigue agregando fuerzas estocásticas a la ecuación de movimiento determinista en forma de ruido, y así se obtiene una ecuación diferencial estocástica del tipo de Langevin. La intensidad del ruido es determinada por otros argumentos, por ejemplo, utilizando el teorema de equipartición [54].

Si la población del sistema bajo estudio es grande, las fluctuaciones son usualmente despreciadas y uno tiene por lo tanto un problema determinista. Sin embargo, si la magnitud del ruido no es despreciable, el tratamiento determinista no será estable y una descripción estocástica es necesaria aún para sistemas numerosos. En física nuclear, en particular, el efecto de las colisiones residuales de dos cuerpos había sido incorporado hasta hace muy poco tiempo atrás sólo en *promedio* a la evolución temporal de la distribución reducida de partícula independiente [26], y así todas estas teorías se encuadraban en el tipo de tratamientos de un cuerpo, determinando sólo el efecto promedio de las colisiones de dos cuerpos y en una manera puramente determinista [4]. Esta característica básica limitaba la utilidad de tales modelos a

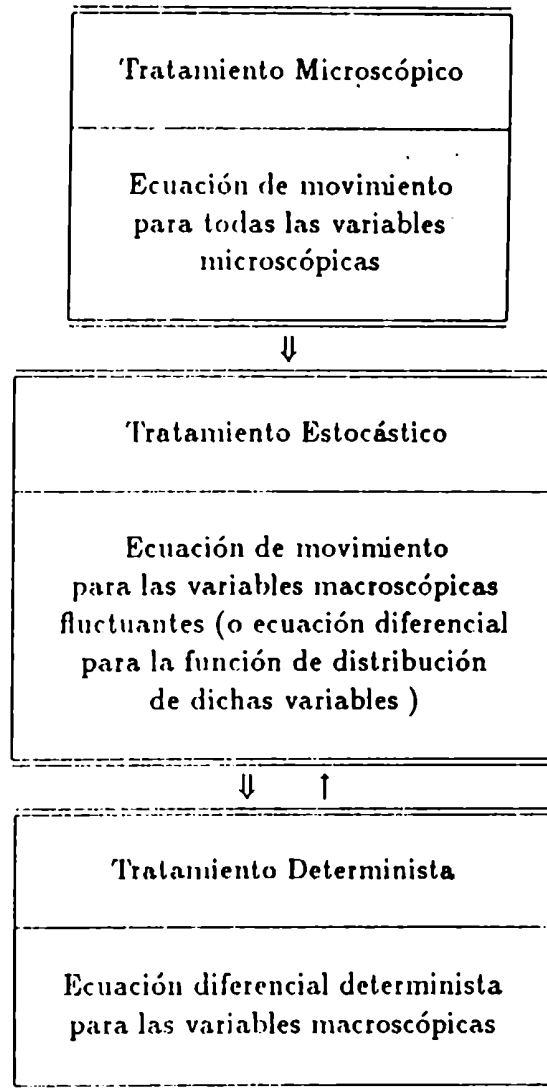


Figura 5.1: Las tres etapas en el tratamiento de un sistema de muchos cuerpos ; \Rightarrow : deducción rigurosa ; \rightarrow : deducción heurística [54].

procesos donde la dinámica exhibía fluctuaciones relativamente pequeñas. Sin embargo, en colisiones típicas a energías intermedias -régimen en el cual las colisiones de dos cuerpos juegan un papel importante-, existen otros canales finales accesibles por el sistema donde las fluctuaciones pueden llegar a ser importantes, dando origen por ejemplo a fenómenos de multifragmentación. Por lo tanto se considera entonces de gran interés práctico desarrollar una teoría que permita describir fluctuaciones dinámicas dentro de un tratamiento estocástico derivado rigurosamente de primeros principios, de acuerdo con lo esquematizado en la figura 5.1. La razón de por qué evitar un tratamiento heurístico va más allá de la simple rigurosidad matemática. La incorporación del ruido como fuerza "externa" es incorrecta, ya que en realidad tal ruido no es una cantidad externa fija sino que obedece él mismo ecuaciones de movimiento acopladas a aquellas que determinan la evolución de las variables dinámicas mismas.

La aplicación de este tipo de programa a procesos dinámicos nucleares fue realizada pioneramente por S. Ayik [56], quien dedujo las propiedades estadísticas de la interacción residual mediante técnicas generales de proyección utilizadas en estadística cuántica. Recientemente, Ayik y Grégoire [26] aplicaron este esquema general a la situación particular donde la interacción residual es aproximada por un núcleo colisional del tipo Uehling-Uhlenbeck, obteniendo así una ecuación para la densidad fluctuante de un cuerpo del tipo Vlasov-Uehling-Uhlenbeck (VUU) estocástica. Desde un punto de vista alternativo, Randrup y Remaud [27] adaptaron técnicas de la teoría de transporte para deducir un sistema de ecuaciones cerrado para el primer y segundo momento de la distribución de un cuerpo en el espacio de fases, es decir, determinaron la evolución del valor medio y la variancia de la densidad fluctuante de un cuerpo en el espacio de fases, lo que se puede interpretar como una truncación hasta el segundo momento de un sistema de ecuaciones que determina la "distribución de la función distribución".

En la primer línea de trabajo, se hallarán en las secciones 5.3 y 5.4 las ecuaciones de movimiento que determinan la evolución de una única coordenada colectiva asociada a la excitación de un modo normal del fluido fermiónico. Dichas ecuaciones no se restringen a modos colectivos irrotacionales o incompresibles, demostrando así que la descripción es en realidad más general que la formulada oportunamente por Ayik y colaboradores [28]. Más aún, en la sección 5.5 tras una simple redefinición de las variables se demostrará que dicho sistema de ecuaciones es totalmente equivalente a aquel que determina la evolución dinámica de un oscilador Browniano clásico. Antes de llevar a cabo tal programa, en la sección 5.2 se estudiará cómo proceder en forma general y a la vez cómo obtener un tratamiento estocástico siguiendo el esquema presentado en la figura 5.1, reflejando así de una manera simple que la descripción correcta de fenómenos fluctuantes debe incluir el ruido como una parte misma del sistema, que evoluciona siguiendo ecuaciones de movimiento acopladas a las que resultan para las variables dinámicas mismas.

5.2 Tratamiento Estocástico General

Supóngase que mediante algún procedimiento particular, a partir de una descripción microscópica se obtuvo un sistema de ecuaciones para un número N arbitrario de variables estocásticas macroscópicas p_ν para el proceso dinámico

$$\dot{p}_\nu = h_\nu(p_1, \dots, p_N) + \delta h_\nu(p_1, \dots, p_N), \quad (5.1)$$

donde h_ν son funciones no-lineales de las p_ν que en general incluyen un conjunto de parámetros externos $\sigma_1, \dots, \sigma_p$. En las secciones siguientes se deducirá tal sistema para la evolución dinámica de las variables colectivas asociadas a los modos normales de oscilación del fluido nuclear en el límite semiclásico de las ecuaciones de HFDTE, pero por ahora el tratamiento es completamente general. En la (5.1) se dividió el miembro derecho en dos partes, de forma tal que el término de ruido $\delta h_\nu(t)$ aparece explícitamente, el que además cumple con las hipótesis usuales

$$\overline{\delta h_\nu(t)} = 0; \quad (5.2)$$

$$\overline{\delta h_\nu(t) \delta h_\nu(t')} \propto \delta_{\nu\nu'} \delta(t - t'). \quad (5.3)$$

En realidad, la división del miembro derecho de (5.1) no es necesaria, ya que las h_ν podrían incluir tal ruido por definición. No obstante, se dejará expresado explícitamente el término fluctuante para mantener la descripción tan sencilla como sea posible. Más aún, en (5.3) para fijar ideas se escribió que el ruido es del tipo “ δ correlacionado”, pero podría también tratarse de una función caracterizada por un tiempo finito τ_c de duración de la correlación como se puntualizó en (2.28). Un ruido del tipo “ δ correlacionado” es llamado *ruido blanco*, porque la distribución espectral dada por la transformada de Fourier de (5.3) es independiente de la frecuencia espectral. Si la parte estocástica δh_ν no tiene correlación del tipo δ , i.e., la densidad espectral depende de la frecuencia, se utiliza el término *ruido coloreado*.

Supóngase además ahora que el sistema (5.1) admite soluciones estacionarias denotadas por p_ν^o . Con un corrimiento del origen del sistema de coordenadas de las p_ν , se podría colocar inclusive a las p_ν^o iguales a cero. Escribiendo

$$p_\nu(t) = p_\nu^o + q_\nu(t), \quad (5.4)$$

e insertando (5.4) en (5.1), si las fluctuaciones alrededor de dicha solución estacionaria son pequeñas, se podrá intentar una linealización de las ecuaciones (5.1). El

sistema de ecuaciones linealizado podrá ser escrito entonces en la forma

$$\dot{q}_\nu = \sum_k \mathcal{L}_{\nu k} q_k, \quad (5.5)$$

donde los elementos de matriz $\mathcal{L}_{\nu k}$ dependen de las p_ν^0 y los parámetros σ_l . Utilizando una notación abreviada, en lugar de (5.5) se escribirá

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathcal{L} \mathbf{q}. \quad (5.6)$$

El sistema (5.6) representa un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias, por lo que podrán ser encontradas soluciones en la forma

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}^{(\mu)}(0) \exp(\lambda_\mu t), \quad (5.7)$$

siendo λ_μ los autovalores del problema

$$\lambda_\mu \mathbf{q}^{(\mu)}(0) = \mathcal{L} \mathbf{q}^{(\mu)}(0) \quad (5.8)$$

y $\mathbf{q}^{(\mu)}(0)$ los autovectores correspondientes. La solución más general de (5.6) es obtenida como superposición de los modos normales (5.7),

$$\mathbf{q} = \sum_\mu \xi_\mu \exp(\lambda_\mu t) \mathbf{q}^{(\mu)}(0), \quad (5.9)$$

con coeficientes constantes arbitrarios ξ_μ . Al suponer que el sistema es estable, la parte real de todos los autovalores λ_μ resulta negativa.

Requiriendo ahora que la descomposición (5.4) satisfaga las ecuaciones no-lineales originales (5.1), las funciones $\mathbf{q}(t)$ a determinar seguirán una ley del tipo

$$\dot{\mathbf{q}} = \mathcal{L} \mathbf{q} + \mathcal{N}(\mathbf{q}) + \delta \mathcal{N}(\mathbf{q}), \quad (5.10)$$

en donde la parte lineal $\mathcal{L} \mathbf{q}$ ya fue resuelta en (5.6), la no-lineal $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ proviene de su análogo en (5.1), y $\delta \mathcal{N}$ tiene en cuenta *contribuciones residuales estocásticas no-lineales* despreciadas al resolver inicialmente el problema (5.6). El vector solución $\mathbf{q}(t)$ seguirá siendo una superposición de autovectores (5.7), pero ahora sin embargo,

ξ_μ son funciones aleatorias del tiempo desconocidas. Cuanto menores sean las fluctuaciones alrededor del punto estacionario del sistema, menos importante será la contribución de $\delta\mathcal{N}$. Pero al variar algunos de los parámetros σ_l , el sistema se puede volver inestable, lo que se manifiesta en un cambio de signo de uno o varios de los autovalores λ_μ , o también podría ocurrir que las fluctuaciones incrementen su magnitud, en cuyo caso deberá ser tenido en cuenta que la parte estocástica $\delta\mathcal{N}$ contendrá adicionalmente información esencial para la evolución futura del proceso dinámico. Esto es debido a que tanto la contribución no-lineal $\mathcal{N}(\mathbf{q})$ como la parte residual $\delta\mathcal{N}$ en (5.10), satisfacen ellas mismas ecuaciones de movimiento acopladas a aquellas que determinan la evolución del resto del sistema y no son impuestas ni manejadas desde el exterior a voluntad, conduciendo en algunos casos a que el sistema explore nuevos estados de equilibrios inaccesibles si no existiesen tales fluctuaciones. Esto se manifiesta particularmente como procesos de auto-organización del sistema, que obedecen leyes dictadas por el sistema mismo.

Los modos ξ_μ que satisfacen $\text{Re } \lambda_\mu \geq 0$ juegan el papel de parámetros de orden en la teoría que estudia fenómenos colectivos conocida como "sinérgica" [55] debido a que su conducta determina la del sistema como un todo.

5.3 Movimiento Colectivo Nuclear

Considérese un fluido arbitrario cuyas propiedades estadísticas estén descritas por medio de una funcional $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ en el espacio de fases. En el espíritu del capítulo 2, f corresponde a una transformación conforme o "mapeo" del operador densidad reducido de un cuerpo en una función de distribución de cuasi-probabilidades o función de Wigner, aunque en realidad podría tratarse de una función de distribución de una partícula clásica. Como se expresó en el capítulo 2, dicha función f satisface una ecuación cinética estocástica, acorde a (2.9) y (2.20),

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \right) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = K[f] + \delta K(t), \quad (5.11)$$

donde m es la masa de la partícula del fluido, \mathbf{F} representa la fuerza total que incluye contribuciones de potenciales externos y del campo promedio, $K[f]$ es un núcleo colisional, usualmente seleccionado como uno del tipo Uehling-Uhlenbeck, y $\delta K(t)$ es un término fluctuante proveniente de conservar y propagar correlaciones de dos cuerpos no tenidas en cuenta en $K[f]$, como fue indicado en la sección 2.2. En esta descripción, la funcional de un cuerpo $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ es considerada como una

variable aleatoria en un espacio de distribuciones abstracto, en el cual los promedios serán indicados por una barra (ver sección siguiente).

Sin tener en cuenta la naturaleza específica del fluido ni el carácter de $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, -i.e., sea ésta clásica o un mapeo semiclásico de un objeto cuántico-, al retener los dos primeros momentos de la distribución (c.f. sec. 2.1), o sea, la densidad local y la densidad de momento

$$\rho(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 p}{h^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (5.12)$$

$$m\rho(\mathbf{r}, t)\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 p}{h^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \mathbf{p}, \quad (5.13)$$

ellos estarán unidos por la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (5.14)$$

en cualquier régimen dinámico. Como el término de ruido en la ecuación VUU estocástica (5.11) es incapaz de introducir fuentes de momentos [26], la ecuación que resulta como balance de momentos es una del tipo de Navier-Stokes

$$m\rho \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial r_j} \right) + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial r_j} + \rho \frac{\partial U[\rho]}{\partial r_i} = 0, \quad (5.15)$$

con el tensor de esfuerzos o tensor flujo de momentos, dado por

$$m\sigma_{ij}(\mathbf{r}, t) = \int \frac{d^3 p}{h^3} (p_i - mu_i)(p_j - mu_j) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t). \quad (5.16)$$

En la ecuación (5.15) la fuerza ha sido expresada como gradiente de un potencial dependiente de la densidad relacionado con la funcional de energía intrínseca $E[\rho]$ por

$$U[\rho] = \frac{\delta E[\rho]}{\delta \rho}. \quad (5.17)$$

En un trabajo previo [28], Ayik y colaboradores dedujeron una ecuación de evolución para la coordenada colectiva asociada a un modo incompresible e irrotacional, es decir, $\mathbf{u} = \nabla \phi$, siendo ϕ un potencial de velocidades en el marco de una aproximación dinámica diabática DDD, con la hipótesis adicional de que $\nabla^2 \phi = 0$. El propósito de esta sección y la siguiente es demostrar que una ecuación idéntica se cumple para la coordenada colectiva asociada a un modo cuyo perfil de velocidades

no está restringido a ninguna de las dos suposiciones previas. A tal efecto, se considerará sólo que el campo de velocidades $u(\mathbf{r}, t)$ que determina las líneas de flujo puede ser separado según

$$u(\mathbf{r}, t) = \dot{q}(t)v(\mathbf{r}), \quad (5.18)$$

donde la amplitud $q(t)$ puede ser tenida en cuenta como la coordenada colectiva asociada a la excitación bajo estudio, caracterizada por el perfil de velocidades $v(\mathbf{r})$ en (5.18) [19, 37]. En realidad (5.18) es una sobresimplificación, ya que siempre es posible expandir el campo de velocidades $u(\mathbf{r}, t)$ en términos de un conjunto completo de funciones linealmente independientes $v_\nu(\mathbf{r})$ [37]

$$u(\mathbf{r}, t) = \sum_{\nu} \dot{q}_{\nu}(t)v_{\nu}(\mathbf{r}), \quad (5.19)$$

y a la vez introducir un conjunto de coordenadas colectivas q_{ν} . Si bien es posible deducir un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas para el conjunto de variables colectivas definido por (5.19), sólo para simplificar el tratamiento se mostrará la deducción de las ecuaciones para el caso de una única coordenada colectiva q , aunque se escribirán los resultados generales, obtenidos de forma similar. Sin embargo, una aplicación numérica de dicho problema general va más allá del alcance de este trabajo, por lo que el capítulo siguiente será dedicado a estudiar los resultados que se obtienen como consecuencia de excitar un único modo normal. En particular se aplicarán los resultados al modo torsión de la primera parte de este trabajo doctoral, para el cual se dispone de una descripción fluidodinámica capaz de calcular el perfil de velocidades $v(\mathbf{r})$ de manera exacta, aunque por completitud se establecerá una comparación con la excitación colectiva cuadrupolar en su versión "naive" o ingenua, correspondiente a una descripción fluidodinámica donde el campo de velocidades es impuesto y no es obtenido como solución de las ecuaciones de movimiento (c.f. cap. 4). Cabe destacar que, en el límite de pequeñas oscilaciones, siempre será posible excitar al fluido de modo tal de que éste oscile en uno de sus modos normales, tal como el de (5.18), y más aún, dichos modos están desacoplados, por lo que en este régimen al menos sería válida tal descripción.

Supóngase entonces que el campo de velocidades $u(t)$ es separable según (5.18), y adicionalmente que la coordenada colectiva asigna la dependencia temporal de la densidad local, acorde con

$$\rho(\mathbf{r}, t) \cong \rho_0(\mathbf{r}, q(t)), \quad (5.20)$$

donde $\rho_0(\mathbf{r}, q)$ corresponde a la configuración de equilibrio. Esta última hipótesis, junto con (5.18) reducen la ecuación de continuidad (5.14) a la siguiente expresión

$$\frac{\partial \rho_0}{\partial q} + \nabla \cdot (\rho_0 v) = 0, \quad (5.21)$$

la que utilizada en la ecuación de Navier-Stokes (5.13) nuevamente con (5.18) y (5.20) resulta, luego de multiplicar por $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ e integrar en el espacio de coordenadas,

$$M\ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q} \dot{q}^2 = \mathcal{F}(\dot{q}) - \frac{\partial E_o(q)}{\partial q}, \quad (5.22)$$

que es una ecuación de transporte colectivo, donde la masa colectiva está dada por

$$M(q) = m \int \rho_o(\mathbf{r}, q) \mathbf{v}^2(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (5.23)$$

En (5.22) la fuerza dinámica $\mathcal{F}(\dot{q})$ es el promedio en el espacio de fases de la densidad de fuerza cuadrupolar

$$m \hat{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dot{q}) = (p_i - m\dot{q}v_i) \frac{\partial v_i}{\partial r_j} (p_j - m\dot{q}v_j), \quad (5.24)$$

o sea, en otras palabras

$$\mathcal{F}(\dot{q}) = \langle \hat{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dot{q}) \rangle = \int \frac{d^3 r d^3 p}{h^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \hat{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dot{q}). \quad (5.25)$$

Adicionalmente, se ha expresado el término de fuerza media como el gradiente de

$$E_o(q) = \int d^3 r \rho_o(\mathbf{r}, q) U[\rho_o(\mathbf{r}, q)]. \quad (5.26)$$

Vale la pena remarcar que la deducción aquí presentada responde a un cálculo fluidodinámico clásico donde no es necesario poner explícitamente de manifiesto la naturaleza específica del líquido en consideración. Particularidades como el tipo de estadística que siguen las partículas, la estructura de la funcional de energía y la geometría detallada del perfil de velocidades, sirven sólo para la obtención numérica de los parámetros de la ecuación macroscópica (5.22), y consecuentemente ellos establecerán nada más que las escalas características del movimiento. Sobre este punto se volverá con más detalle en el capítulo siguiente.

5.4 Ecuación para la Fuerza Estocástica

Una ecuación tal como la (5.22) puede ser escrita como una única ecuación no-markoviana disipativa, simplemente procediendo como en la sección 3.5 (c.f. ec.(3.54)), una vez que sea conocida la ley para la evolución temporal de la fuerza dinámica $\mathcal{F}(\dot{q})$. Desde diferentes puntos de vista [21, 28], dichas características no-markovianas de la ecuación de movimiento fueron analizadas suponiendo la existencia de un potencial de velocidades del cual se obtiene el campo $v(\mathbf{r})$. Como fue puntualizado en la sección 3.2, para el caso de la dinámica disipativa diabática (DDD), esta restricción esta entrañablemente ligada al hecho de tratarse de una descripción dinámica microscópica de partícula independiente, pero sin embargo, para el caso fluidodinámico (i.e., macroscópico) actualmente en estudio, tal hipótesis no es necesaria. Por lo tanto, en esta sección se deducirá la evolución dinámica de la fuerza de (5.25), la que resultará como consecuencia directa de suponer una ecuación cinética estocástica (5.11), sin tener en cuenta la naturaleza particular del fluido bajo consideración o de la función de distribución $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$. En efecto, de la definición (5.25) y con (5.11), se podrá escribir

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = \dot{\mathcal{F}}_{rev} + \dot{\mathcal{F}}_{dis} + \dot{\mathcal{F}}_{ruido}, \quad (5.27)$$

donde la variación reversible $\dot{\mathcal{F}}_{rev}$ está relacionada con el término de flujo de la ecuación de Vlasov, el disipativo $\dot{\mathcal{F}}_{dis}$ con el núcleo colisional $K[f]$ en (5.22), y el término de ruido $\dot{\mathcal{F}}_{ruido}$ con su análogo $\delta K(t)$ ¹

Si el núcleo colisional se trata en la aproximación de relajación [57], se podrá escribir

$$K[f] = -\frac{f - f_0}{\tau}, \quad (5.28)$$

siendo f_0 la distribución de equilibrio para el sistema de partículas analizado. Esto implica que, la variación de la fuerza respecto a su valor de equilibrio determinará la conducta del término de disipación

$$\dot{\mathcal{F}}_{dis} = -\frac{\mathcal{F} - \mathcal{F}_0}{\tau}, \quad (5.29)$$

respecto de la escala temporal τ . Si bien el valor de τ es en realidad una función de la energía total disponible por el sistema según lo expresado en (3.31), a los efectos de cálculo numérico será tomado como un parámetro externo.

¹El por qué de tales subíndices resultará obvio en la sección siguiente.

Para el término de ruido, se obtendrá

$$\dot{\mathcal{F}}_{\text{ruido}} \equiv \delta K_F(t) = \int \frac{d^3r d^3p}{h^3} \hat{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dot{q}) \delta K(t), \quad (5.30)$$

y por lo tanto se podrá establecer su correlación si se postula la propia para el término $\delta K(t)$ en la ecuación VUU (5.11). Bajo la hipótesis de ruido blanco Ayik y Grégoire [26] calcularon que

$$\overline{\delta K(t) \delta K(t')} = C(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \delta(t - t'), \quad (5.31)$$

donde la correlación de momentos $C(\mathbf{p}, \mathbf{p}')$ es una funcional de la distribución de de un cuerpo $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$, tal que la correlación del ruido en (5.30) resulta ser

$$\overline{\delta K_F(t) \delta K_F(t')} = \delta(t - t') \int \frac{d^3r d^3p d^3p'}{h^6} C(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \hat{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dot{q}) \hat{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}', \dot{q}) = 2D \delta(t - t'), \quad (5.32)$$

que define a la vez el coeficiente de difusión D para el ruido blanco en el espacio de fuerzas estocásticas. Considérese finalmente el término de flujo libre $\dot{\mathcal{F}}_{\text{dis}}$. Notando que el término con gradiente en coordenadas de la ecuación VUU se puede escribir como

$$\frac{p_i}{m} \frac{\partial f}{\partial r_i} = -\dot{q} \frac{p_i}{m} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \frac{\partial v_j}{\partial r_i} (p_j - m\dot{q}v_j), \quad (5.33)$$

con $\epsilon = (\mathbf{p} - m\dot{q}\mathbf{v})^2/2m$, por definición de la densidad de fuerzas \hat{F} se encuentra

$$\frac{p_i}{m} \frac{\partial f}{\partial r_i} = -\dot{q} \hat{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dot{q}) \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + \mathcal{O}(\dot{q}^3). \quad (5.34)$$

Multiplicando ahora por \hat{F} e integrando sobre todo el espacio, se obtiene

$$\dot{\mathcal{F}}_{\text{rev}} = \dot{q} \int \frac{d^3r d^3p}{h^3} \hat{F}^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dot{q}) \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial \epsilon} = -\Gamma \dot{q}, \quad (5.35)$$

donde Γ es positivo, ya que para f próxima a f_0 , la variación promedio $\partial f/\partial \epsilon$ es menor que cero. Cabe destacar que, para una distribución de Fermi cercana al equilibrio, utilizando el hecho de que [57]

$$\frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} = -\frac{1}{T} f_0 (1 - f_0), \quad (5.36)$$

resultará

$$\dot{\mathcal{F}}_{rev} \cong -\frac{\dot{q}}{T} \int \frac{d^3 r d^3 p}{h^3} \hat{F}^2 f(1-f) = -\Gamma \dot{q}, \quad (5.37)$$

lo que define a Γ como

$$\Gamma \equiv \sigma_F^2 / T, \quad (5.38)$$

siendo σ_F^2 las fluctuaciones de la fuerza dinámica

$$\sigma_F^2 = \overline{\mathcal{F}^2} - \overline{\mathcal{F}}^2, \quad (5.39)$$

para un fluido a temperatura T a un dado tiempo, la cual se supone uniforme en todo el sistema.

Resumiendo la discusión anterior, se concluye que en la aproximación de relajación, la (5.27) es siempre una ecuación del tipo de Langevin

$$\frac{d\mathcal{F}}{dt} = -\Gamma \dot{q} - \frac{\mathcal{F} - \mathcal{F}_0}{\tau} + \delta K_F(t), \quad (5.40)$$

la que, como fue comentado al iniciar esta sección, puede ser formalmente integrada en la ecuación (5.22) para mostrar explícitamente los efectos no-markovianos de fricción retardada [19, 28]; es decir, combinando (5.22) y (5.40), se dispone del siguiente sistema de ecuaciones diferenciales acopladas

$$\begin{cases} M\ddot{q} + \frac{1}{2}\partial_q M\dot{q}^2 = \mathcal{F} - \partial_q E_0 \\ \dot{\mathcal{F}} = -\Gamma\dot{q} - (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)/\tau + \delta K_F(t). \end{cases} \quad (5.41)$$

En este punto cabe destacar que el sistema (5.41) posee su análogo no-estocástico dado por (3.53). En otras palabras, ambas descripciones tienen asociado en común un comportamiento viscoelástico frente a excitaciones externas como relación constitutiva del medio. Es decir, si se procede entonces de la misma manera que en la sección 3.5, se obtiene

$$M\ddot{q} + \frac{1}{2}\frac{\partial M}{\partial q}\dot{q}^2 + \frac{\partial E_0(q)}{\partial q} = -\int_{t_0}^t \gamma(t-t')\dot{q}(t')dt' + \delta K_F(t), \quad (5.42)$$

donde el núcleo friccional está dado por

$$\gamma(t-t') = \Gamma(t') \exp\left[-\frac{(t-t')}{\tau}\right], \quad (5.43)$$

y así análogamente, para procesos que ocurren durante un breve lapso de tiempo (deformaciones rápidas), los esfuerzos internos generados por la deformación provocan una respuesta elástica con Γ como coeficiente de rigidez, y para deformaciones lentas, se obtiene una respuesta puramente viscosa con un coeficiente de fricción $\Gamma\tau$.

Así entonces, el sistema de ecuaciones (5.41) o su única ecuación equivalente (5.42), proveen una descripción estocástica no-markoviana del movimiento colectivo nuclear que permite tratar de igual manera a modos colectivos, sin tener que realizar suposiciones específicas acerca de la naturaleza del fluido bajo consideración, sea éste incompresible, irrotacional o no.

En caso de que el campo de velocidades $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t)$ sea expandido en un número arbitrario de coordenadas colectivas como en (5.19), en lugar del sistema (5.41) se deberá escribir

$$\sum_{\nu} M_{\mu\nu} \ddot{q}_{\nu} + \frac{1}{2} \frac{\partial M_{\mu\nu}}{\partial q_{\nu}} \dot{q}_{\nu} \dot{q}_{\mu} = \mathcal{F}_{\mu}(\dot{\mathbf{q}}) - \frac{\partial E_0(\mathbf{q})}{\partial q_{\mu}}, \quad (5.44)$$

$$\frac{d\mathcal{F}_{\mu}}{dt} = - \sum_{\nu} \Gamma_{\mu\nu} \dot{q}_{\mu} - \frac{\mathcal{F}_{\mu} - \mathcal{F}_{\mu}^0}{\tau} + \delta K_{\mu}^F(t), \quad (5.45)$$

donde obviamente

$$M_{\mu\nu}(\mathbf{q}) = m \int \rho_0(\mathbf{r}, \mathbf{q}) \mathbf{v}_{\mu} \cdot \mathbf{v}_{\nu} d^3r, \quad (5.46)$$

$$\mathcal{F}_{\mu}(\dot{\mathbf{q}}) = \langle \hat{F}_{\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}) \rangle = \int \frac{d^3r d^3p}{h^3} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \hat{F}_{\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}), \quad (5.47)$$

y además en (5.45)

$$\Gamma_{\mu\nu} = \frac{1}{T} \int \frac{d^3r d^3p}{h^3} \hat{F}_{\mu} \hat{F}_{\nu} f(1-f), \quad (5.48)$$

$$\begin{aligned} \overline{\delta K_{\mu}^F(t) \delta K_{\nu}^F(t')} &= \delta(t-t') \int \frac{d^3r d^3p d^3p'}{h^6} C(\mathbf{p}, \mathbf{p}') \hat{F}_{\mu}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dot{\mathbf{q}}) \hat{F}_{\nu}(\mathbf{r}, \mathbf{p}', \dot{\mathbf{q}}) \\ &= 2D_{\mu\nu} \delta(t-t'). \end{aligned} \quad (5.49)$$

Como se mencionó con anterioridad, una aplicación numérica del sistema de ecuaciones (5.44) y (5.45) va más allá del alcance de este trabajo doctoral, y por lo tanto sólo se estudiará el sistema (5.41), tema del capítulo siguiente. Pero antes de realizar cálculo numérico alguno, en la sección 5.5 se demostrará que es posible interpretar el sistema de ecuaciones estocástico (5.41) como el conjunto de ecuaciones de Hamilton-Langevin que determinan la dinámica de un oscilador Browniano clásico, en donde la *velocidad colectiva* juega el papel de coordenada de la partícula Browniana ficticia.

5.5 Reducción a un Movimiento Browniano Clásico

La deducción del sistema de ecuaciones (5.41) de la sección previa, fue llevada a cabo haciendo uso de argumentos e hipótesis generales apropiadas a cualquier descripción fluidodinámica clásica. La consecuencia más importante en lo que respecta a la dinámica nuclear es, que una gran variedad de movimientos colectivos pueden ser catalogados en una clase universal o conjunto de equivalencia, descrito por el sistema acoplado de ecuaciones no-markovianas estocásticas (5.41). Las condiciones para que un flujo coherente pertenezca a este conjunto de equivalencia son:

- la función de distribución de probabilidades debe satisfacer una ecuación del tipo VUU estocástica;
- el campo de velocidades debe ser separable, independientemente del carácter -i.e., sea éste irrotacional, incompresible o no- del perfil de velocidades.

Cabe recordar que la segunda hipótesis no es necesariamente restrictiva, ya que como se discutió en la sección precedente, el sistema de ecuaciones es fácilmente generalizable a un conjunto arbitrario de coordenadas colectivas para el cual siempre es válida la hipótesis de separabilidad.

De esta manera, modos colectivos nucleares intrínsecamente distintos como los modos de paridad anormal $J^\pi = 2^-$ (c.f. Parte I), y los de paridad normal, cuyo exponente más estudiado es el modo cuadrupolar $J^\pi = 2^+$, pertenecen conjuntamente a esta clase universal. Esto ilustra la profunda equivalencia entre manifestaciones macroscópicas de las distorsiones en el espacio de fases sean ellas geométricas, dinámicas, o una combinación particular de ambas, ya que mientras el modo 2^+ refleja una deformación de la gota misma (cambio en la densidad local), la oscilación 2^- preserva la simetría esférica y tiene por lo tanto su origen en una distorsión cuadrupolar de la superficie de momentos (c.f. cap.4). Esta conducta universal de flujos colectivos con estructuras geométricas físicamente diferentes, se manifiesta entonces en la dinámica de las fluctuaciones del movimiento colectivo nuclear.

Más aún, nótese que despreciando la variación de masa colectiva con q en (5.22), hipótesis válida en límite de pequeñas oscilaciones, y reabsorbiendo la fuerza macroscópica de la ecuación (5.40) en la dinámica \mathcal{F} , la ecuación de transporte colectivo sigue una ley de Newton con una fuerza aleatoria del tipo de Langevin

$$\begin{aligned}\dot{x} &= p/M \\ \dot{p} &= -\Gamma x - \frac{1}{\tau} p + \varphi(t),\end{aligned}\tag{5.50}$$

simplemente tras un cambio de variables, definiendo como "coordenada" $x = \dot{q}/\Omega$ y como "momento" $p = (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)/\Omega$, siendo Ω la frecuencia característica del oscilador (i.e., $\Omega^2 = \Gamma/M$). La elección de dichas unidades es apropiada por razones dimensionales, para trabajar así con una coordenada Browniana commensurable a la coordenada colectiva misma. En (5.50) además, $\varphi(t)$ es tomada como una fuerza estocástica con distribución gaussiana y del tipo δ correlacionada. La intensidad del ruido estará dada por la constante de difusión $D' = D/\Omega^2$ con D definido por (5.32).

Las ecuaciones (5.50) conforman el sistema dinámico de ecuaciones de Hamilton-Langevin para un oscilador Browniano de masa M y constante restitutiva Γ , y precisamente define el conjunto de equivalencia. Es fácil entonces reconocer que la *velocidad colectiva*, y no la *coordenada colectiva* juega el papel de *coordenada de la partícula Browniana ficticia*. Este resultado reviste especial importancia, ya que determina una particularidad más del movimiento colectivo nuclear que lo diferencia de cualquier dinámica clásica; a pesar de ello, al tratar de reducir el problema de muchos cuerpos en interacción a un conjunto de ecuaciones para las variables colectivas (primer etapa en el tratamiento, de acuerdo con el esquema de la figura 5.1), varios autores imponen al sistema una dinámica completamente clásica [58].

Capítulo 6

Aplicación Numérica: Excitación de Modos Normales

En la descripción presentada en el capítulo anterior, la funcional de un cuerpo o densidad de cuasiprobabilidades $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ fue considerada como una variable aleatoria en un espacio de de distribuciones abstracto, suponiendo que su evolución dinámica en el espacio de fases responde a una ecuación del tipo Vlasov-Uehling-Uhlenbeck estocástica (5.11). En lugar de calcular como hicieron Randrup y Remaud [27] la evolución del valor medio y su dispersión en dicho espacio de distribuciones, en la línea de trabajo de Ayik y colaboradores [26] se obtuvo un sistema de ecuaciones para un conjunto de variables colectivas consideradas como variables estocásticas en el espacio de configuraciones satisfaciendo ecuaciones del tipo de Hamilton-Langevin. En el caso más simple en el que el movimiento esté restringido a un único grado de libertad (un modo normal de excitación del fluido fermiónico), el sistema de ecuaciones obtenido corresponde básicamente al de un oscilador Browniano en donde la velocidad colectiva juega el papel de coordenada Browniana. La sencillez de estas ecuaciones permite calcular la evolución temporal de las fluctuaciones de tales coordenadas colectivas asociadas a un modo normal del sistema sin necesidad de recurrir a cálculos del tipo Monte Carlo. Es decir, en lugar de calcular la evolución de un conjunto de trayectorias (típicamente del orden de 10^4 ó 10^5) con las mismas condiciones iniciales y luego a distintos tiempos calcular el número de ellas que caen en un intervalo $(x, x + \delta x)$ para obtener su distribución y así finalmente sus momentos, para el cálculo de la evolución de las fluctuaciones de una única variable colectiva, basta resolver ecuaciones diferenciales ordinarias, o bien, en el caso de utilizar "ruido coloreado", ecuaciones integro-diferenciales. En este capítulo se llevará a cabo tal programa, analizando además la influencia del ruido coloreado en contraposición al ruido blanco, asociado a funciones de correlación del tipo δ .

6.1 Evolución de la Matriz de Covariancia

En términos de las variables definidas en la sección 5.5, partiendo del sistema de ecuaciones (5.50) es fácil obtener la dinámica de la matriz de covariancia [39],

$$\Sigma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sigma_{xx}^2 & \sigma_{xp}^2 \\ \sigma_{xp}^2 & \sigma_{pp}^2 \end{pmatrix}, \quad (6.1)$$

aunque en realidad, por tratarse de una matriz simétrica, basta conocer tres de los cuatro momentos, es decir, si para simplificar la notación se define

$$\chi \equiv \sigma_{xx}^2 = \overline{x^2} - \bar{x}^2, \quad (6.2)$$

$$\phi \equiv \sigma_{pp}^2 = \overline{p^2} - \bar{p}^2, \quad (6.3)$$

$$\sigma \equiv \sigma_{xp}^2 = \overline{x\dot{p}} - \bar{x}\bar{\dot{p}}, \quad (6.4)$$

basta con determinar la evolución de la matriz columna

$$\mathcal{U} = \begin{pmatrix} \chi \\ \phi \\ \sigma \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Luego de realizar algunas operaciones sobre el sistema (5.50), se obtiene como resultado la siguiente ecuación diferencial lineal para el vector de (6.5)

$$\frac{d}{dt}\mathcal{U} = \mathcal{M}\mathcal{U} + \mathcal{U}_i, \quad (6.6)$$

donde la matriz \mathcal{M} está dada por

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/M \\ 0 & -2/\tau & -2\Gamma \\ -\Gamma & 1/M & -1/\tau \end{pmatrix}, \quad (6.7)$$

y el término inhomogéneo

$$\mathcal{U}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ 2D/\Omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.8)$$

Siendo el sistema (6.6) equivalente a una única ecuación diferencial ordinaria de tercer orden,

$$\frac{d^3 \chi}{dt^3} = -\frac{3}{\tau} \frac{d^2 \chi}{dt^2} - (4\Omega^2 + \frac{2}{\tau^2}) \frac{d\chi}{dt} - 4\frac{\Omega^2}{\tau} \chi + \frac{4D}{M^2}, \quad (6.9)$$

la solución homogénea para cualquier componente del vector de fluctuaciones \mathcal{U} evoluciona de acuerdo con tres factores de decaimiento exponencial $e^{\lambda t}$ siendo $\lambda = \lambda_0$ y λ_{\pm} los autovalores de la matriz dinámica \mathcal{M} , es decir,

$$\lambda_0 = -\frac{1}{\tau}, \quad (6.10)$$

$$\lambda_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{\tau^2} - 4\Omega^2} = -\frac{1}{\tau} \pm i\omega,$$

donde $\Omega^2 = \Gamma/M$. En general, la frecuencia ω en (6.10) es un número real, ya que en todo el rango de interés de estudio de la dinámica del movimiento nuclear se verifica $\Omega\tau \geq 1$ (c.f. cap.4 y refs. [15, 16, 21]).

Cabe recordar en este momento que, bajo equilibrio local, existe una expresión cerrada relacionando la correlación de el núcleo colisional fluctuante (c.f. eq.(5.31)) con el número de ocupación local, que permite el cálculo del coeficiente de difusión en (5.32). Esto resulta del hecho de que, como fuera puntualizado en el capítulo precedente, para el caso bajo estudio de un fluido fermiónico degenerado, la funcional $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ puede ser elegida como el número de ocupación local de una distribución de Fermi, cuya derivada respecto de la energía viene dada por (c.f. eq.(5.36))

$$\frac{\partial f}{\partial \epsilon} \approx -\frac{1}{T} f(1-f), \quad (6.11)$$

con lo que la constante restitutiva del oscilador Browniano definido como en (5.37)

$$\Gamma(t) = \frac{1}{T} \int \frac{d^3 r d^3 p}{h^3} \hat{F}^2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dot{q}) f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) (1 - f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)), \quad (6.12)$$

determina el coeficiente de difusión en un dado instante de tiempo a través de [28]

$$D = \frac{\Gamma T}{\tau} = \frac{\sigma_F^2}{\tau}. \quad (6.13)$$

De esta manera, con la identidad (6.13), el vector U evolucionará hacia el punto de equilibrio

$$U_{eq} = \begin{pmatrix} D_{eq} \tau / M \Gamma \Omega^2 \\ D_{eq} \tau / \Omega^2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T_{eq} / M \Omega^2 \\ \Gamma T_{eq} / \Omega^2 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6.14)$$

Antes de discutir las soluciones numéricas de la ecuación (6.6) en el caso general donde el coeficiente de difusión es una función del tiempo, es conveniente hacer algunas observaciones. Primero, nótese que la escala de las fluctuaciones dinámicas depende exclusivamente del parámetro adimensional

$$\nu = \frac{1}{\Omega \tau}, \quad (6.15)$$

es decir con otras palabras, depende de la relación entre el coeficiente de disipación del oscilador Browniano ficticio y su frecuencia natural de oscilación, ya que al seleccionar variables adimensionales

$$U^* = \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \\ \zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \chi / \chi_{eq} \\ \phi / \phi_{eq} \\ \sigma / \sqrt{\chi_{eq} \phi_{eq}} \end{pmatrix}, \quad (6.16)$$

$$t^* = \Omega t, \quad (6.17)$$

el sistema (6.6) toma la forma universal

$$\frac{d}{dt^*} U^* = \mathcal{M}^* U^* + U_i^* \quad (6.18)$$

donde

$$\mathcal{M}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2\nu & -2 \\ -1 & 1 & -\nu \end{pmatrix}, \quad (6.19)$$

$$U_i^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{D_{eq}}{D_{eq}^*} \nu \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (6.20)$$

con autovalores

$$\lambda_o^* = -\nu, \quad (6.21)$$

$$\lambda_{\pm}^* = -\nu \pm \sqrt{\nu^2 - 4}.$$

En segundo lugar, cabe recordar que la dinámica de las fluctuaciones para las oscilaciones cuadrupolares -en el marco de una teoría de transporte microscópica derivada de la DDD- fue estudiada con anterioridad por Cassing y Nörenberg [21]. En realidad, el caso allí tratado puede ser tenido en cuenta como caso particular del sistema (6.6) o (6.18) donde la condición inicial para la "dispersión de momentos"

$$\bar{\phi}(t) = \sigma_P^{2(t)}/\Omega^2 = \Gamma T_{eq}/\Omega^2. \quad (6.22)$$

es fijada con su valor de equilibrio y supuesta que se cumple en todo instante de tiempo. Esto elimina una de las variables y reduce por lo tanto el orden del sistema de la ecuación diferencial a resolver, el que resulta

$$\frac{d}{dt} \bar{u} = \tilde{\mathcal{M}} \bar{u} + \bar{u}_i \quad (6.23)$$

donde ahora entonces

$$\bar{u} = \begin{pmatrix} \bar{\chi} \\ \bar{\sigma} \end{pmatrix}, \quad (6.24)$$

$$\tilde{\mathcal{M}} = \begin{pmatrix} 0 & 2/M \\ -\Gamma & -1/\tau \end{pmatrix}, \quad (6.25)$$

y además

$$\bar{u}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \Gamma T_{eq}/M\Omega^2 \end{pmatrix}. \quad (6.26)$$

Nótese que el sistema (6.23) es equivalente a una única ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 \bar{\chi}}{dt^2} = -2\Omega^2 \bar{\chi} - \frac{1}{\tau} \frac{d\bar{\chi}}{dt} + \frac{2T_{eq}}{M}. \quad (6.27)$$

Como consecuencia de tal aproximación, los autovalores del sistema homogéneo de (6.23) serán ahora

$$\bar{\lambda}_{\pm} = -\frac{1}{2\tau} \pm \sqrt{\frac{1}{4\tau^2} - 2\Omega^2} = -\frac{1}{2\tau} \pm i\bar{\omega}, \quad (6.28)$$

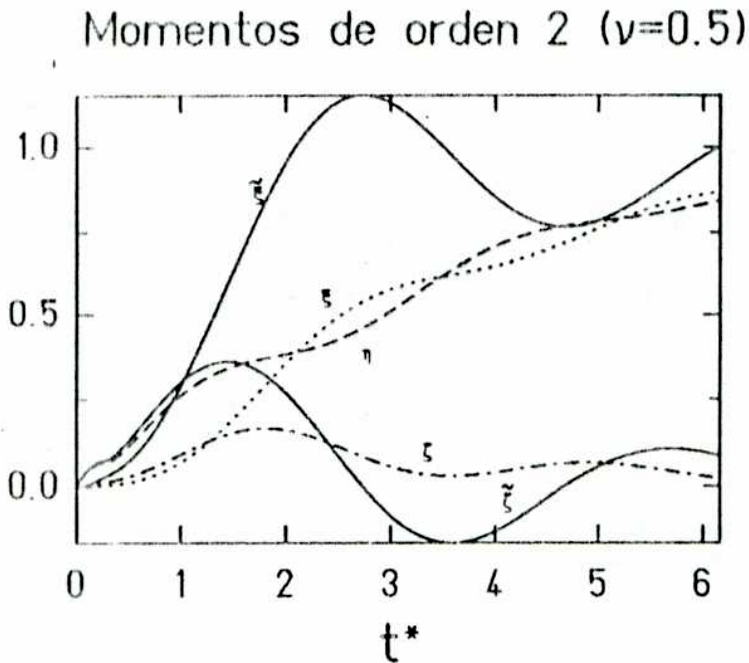
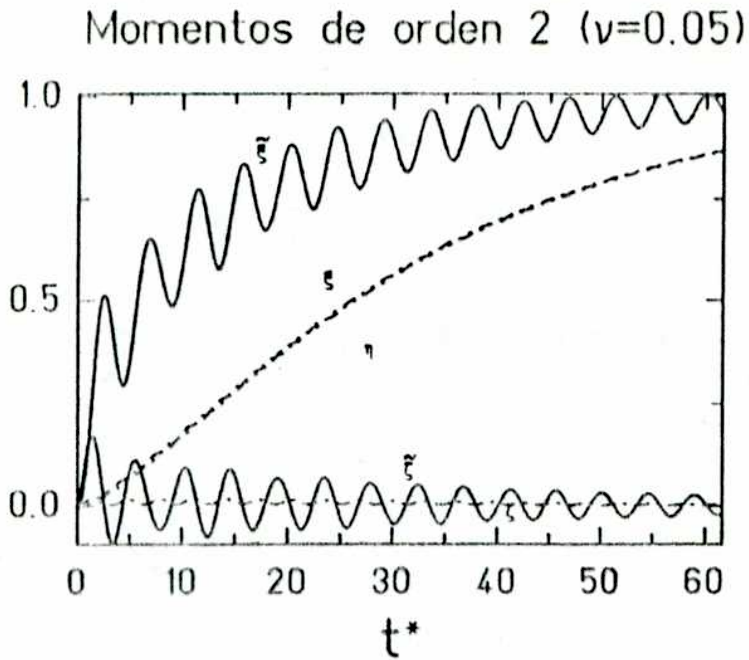


Figura 6.1: Evolución temporal de los segundos momentos de la coordenada colectiva (componentes del vector de fluctuaciones U^* y \tilde{U}^*) para $\nu = 0.5$ y $\nu = 0.05$. Con líneas llenas se muestran los resultados obtenidos bajo la aproximación de equilibrio local $\sigma_F^2 = \Gamma T$ (indicadas con símbolos \sim).

los que al ser comparados con los valores resultantes para la dinámica correcta (6.6) explican el comportamiento observado en la figura 6.1, donde se percibe claramente que la aproximación (6.22) al subestimar el amortiguamiento en la evolución de U , permite así el crecimiento de oscilaciones de período mayor, ya que bajo la condición $\Omega\tau \geq 1$ se cumple que

$$\bar{\omega} < \omega, \quad (6.29)$$

como resulta simplemente de comparar (6.10) y (6.28).

La figura 6.1 ilustra entonces la evolución del vector adimensional $U^* \equiv (\xi, \eta, \zeta)$ luego de resolver (6.6). Como comparación se muestra también la evolución del vector $\tilde{U}^* \equiv (\tilde{\xi}, \tilde{\eta})$ obtenido de (6.23) después de haber adimensionalizado el vector \tilde{U} de (6.24) procediendo como en (6.16). La figura 6.1 muestra la evolución para dos valores distintos del parámetro ν , concretamente para $\nu = 0.5$ y $\nu = 0.05$ que corresponden aproximadamente a los valores de tiempo de relajación $\tau = 30$ fm/c y $\tau = 300$ fm/c utilizados en la figura 2 de la referencia [21]. La longitud de las abscisas fue elegida de manera diferente en ambos casos, i.e., hasta $t^* \simeq 60$ y $t^* \simeq 6$, respectivamente para facilitar la comparación con los resultados de la referencia [21], los que fueran graficados hasta un tiempo t de aproximadamente tres veces el tiempo de relajación τ . Debería notarse sin embargo que, al observar la evolución para el caso $\nu = 0.05$ sólo hasta $t^* \simeq 6$, los resultados obtenidos para la evolución de todos los momentos de segundo orden son similares, lo que refleja la leve variación de las autofrecuencias complejas de (6.21) con respecto al valor de ν .

Para calcular las funciones del tiempo mostradas en la figura 6.1, se integró numéricamente las ecuaciones de movimiento sujetas a la condición de fluctuación-disipación (6.13) en donde la temperatura del sistema fue elegida como [21]

$$T(t) := \sqrt{\frac{8 E^*(t)}{A}}. \quad (6.30)$$

En la expresión (6.30), la energía de excitación E^* incrementa a expensas de la energía colectiva disipada (con contribuciones potencial y cinética), acorde a la ley clásica

$$\frac{dE^*(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} E_{coll} = -\frac{d}{dt} (E_{kin} + U). \quad (6.31)$$

La identidad (6.31) acopla entonces la disipación con las fluctuaciones de la velocidad colectiva o "coordenada" Browniana.

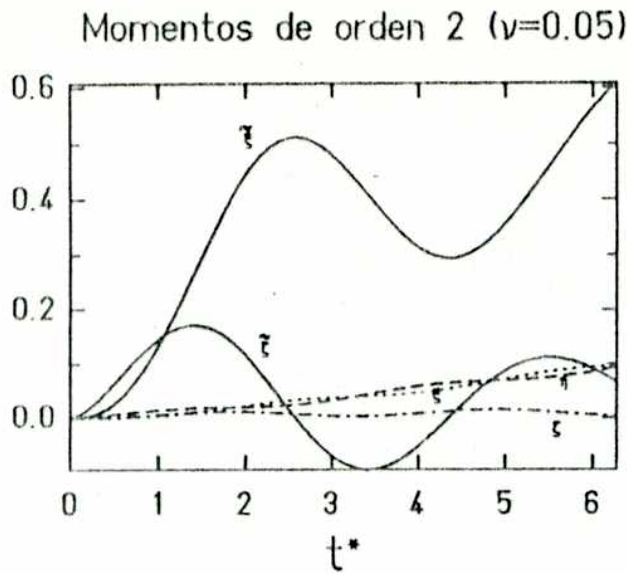


Figura 6.2: Idem fig. 10 para el valor $\nu = 0.05$ pero sólo hasta $t^* \approx 6$.

6.2 Parámetros de la Ecuación de Transporte

En esta sección serán calculados los parámetros necesarios para la determinación exhaustiva de la evolución de la coordenada colectiva, es decir, las constantes Γ y M de (5.41). Cabe recordar que para el caso particular en donde el modo colectivo tiene un perfil de velocidades irrotacional, se dispone de una teoría microscópica (la Dinámica Disipativa Diabática) a través de la cual es posible obtener dichos coeficientes Γ y M . Por completitud en el apéndice C será delineada tal deducción que permitirá calcular por lo tanto las constantes deseadas.

En realidad, como se mencionó con anterioridad, la coordenada Browniana es en sí misma una variable estocástica, por lo que de ella sólo interesa conocer la evolución de sus momentos. Esto puede ser logrado en forma general realizando un cálculo del tipo de Monte Carlo para una muestra de trayectorias estocásticas, o bien, en caso de trabajar con ruido blanco, hallando la evolución de la función de distribución de la variable colectiva estocástica, quién satisfará una ecuación del tipo de Fokker-Planck para la cual se conocen algoritmos numéricos de probada eficacia [59]. Ambos métodos -si bien atractivos- son costosos en lo que respecta a tiempo de computación. En la sección anterior se demostró que, al menos para estudiar la dinámica hasta los segundos momentos (matriz de covarianza), no es necesario encarar tal programa ya que basta con resolver ecuaciones diferenciales ordinarias para el caso de "ruido blanco" o ecuaciones integro-diferenciales en el caso de "ruido coloreado" (c.f. sec. 6.3).

Al restringirse por lo tanto al estudio de la dinámica de la matriz de covarianza

para una única variable colectiva asociada al modo normal bajo estudio, se observó en la sección precedente que en realidad el único parámetro que determina la escala temporal de las fluctuaciones es la frecuencia del oscilador Browniano

$$\Omega = \sqrt{\frac{\Gamma}{M}}, \quad (6.32)$$

determinada como el cociente entre la constante restitutiva del oscilador y su masa. Las características particulares del fluido como son el tipo de perfil de velocidades, su carácter, etc., intervienen entonces sólo en el cálculo de la frecuencia (6.32), permitiendo de esta manera describir conjuntamente modos colectivos de características intrínsecas distintas. Tal es el caso de las vibraciones cuadrupolares 2^+ correspondiente a un modo normal de los llamados de "paridad normal", y del modo torsión o modo de "paridad anormal", según la clasificación estudiada en el capítulo 4. Como fue repetido en varias oportunidades con anterioridad, mientras que éste último tiene su origen en una distorsión puramente dinámica del espacio de fases y el primero contiene adicionalmente una contribución geométrica, ambos pueden ser descriptos por el mismo formalismo en lo que respecta a la evolución de la coordenada colectiva.

Para obtener los parámetros M y Γ basta conocer el perfil del campo de velocidades, ya que simplemente por definición (c.f. eqs. (5.23) y (5.24))

$$M(q) = m \int \rho_o(\mathbf{r}, q) \mathbf{v}^2(\mathbf{r}) d^3 r, \quad (6.33)$$

y además

$$m \hat{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, \dot{q}) = (p_i - m \dot{q} v_i) \frac{\partial v_i}{\partial r_j} (p_j - m \dot{q} v_j), \quad (6.34)$$

por lo que resultará inmediato calcular

$$\sigma_F^{2(4)} = T \int d^3 r d\Omega_p g(p_F) \hat{F}^2(\mathbf{r}, p_F, \Omega_p, 0) \equiv T \Gamma, \quad (6.35)$$

siendo

$$g(p_F) = \frac{3 A m}{2 p_F^2}. \quad (6.36)$$

Ahora bien, según lo indicado en la Parte I, existirán entonces dos caminos para obtener los coeficientes en (6.33) y (6.35), a saber, imponiendo el campo de velocidades (versión "ingenua") o resolviendo las ecuaciones fluidodinámicas exactas,

como se hiciera en el cap. 4 [15, 16]. En el primer caso, el movimiento de torsión o "twist" puede ser descripto por el campo de velocidades

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \dot{\alpha}(t)(yz, -xz, 0) \quad (6.37)$$

donde $\alpha = -q$ es el ángulo polar por unidad de longitud vertical. En este caso, es posible dar expresiones analíticas para la masa colectiva y las fluctuaciones de la fuerza, donde adicionalmente se conoce analíticamente

$$\hat{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, 0) = -p_z l_z, \quad (6.38)$$

en donde l_z es la componente z del momento angular. Los parámetros para el modo torsión resultan entonces

$$\sigma_F^{2^{(4)}} = \frac{4}{25} A \varepsilon_F T, \quad (6.39)$$

y

$$M = \frac{2}{35} m A R^2, \quad (6.40)$$

siendo R el radio nuclear. Para el caso del movimiento cuadrupolar "ingenuo", el campo de velocidades está dado por [13, 28]

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \dot{\delta}(t)(x, y, -2z) \quad (6.41)$$

en donde δ representa la deformación cuadrupolar. En este caso se obtiene

$$\sigma_F^{2^{(4)}} = \frac{24}{5} A \varepsilon_F T, \quad (6.42)$$

$$M = \frac{6}{5} m A R^2. \quad (6.43)$$

Los valores numéricos resultantes para el ^{208}Pb fueron expresados en la Tabla I. Ellos corresponden a cálculos realizados en la versión "ingenua" y a aquellos realizados según la descripción fluidodinámica correcta (c.f. cap. 4) para el modo torsión (subíndice T) en las aproximaciones de densidad escalón (ADE) y de densidad Woods-Saxon (ADWS). Por comparación fueron tabulados los resultados respecto de los correspondientes para el caso cuadrupolar "ingenuo" o "naive" (subíndice

C) expresando la coordenada colectiva α del modo torsión por unidad del radio nuclear R para trabajar así con unidades commensurables de masa nuclear.

	<i>Movimiento Twist Naive (impuesto)</i>	<i>Movimiento Twist FD (solución exacta)</i>	
		ADE	ADVS
Γ_T/Γ_C	0.0333	0.0283	0.0308
M_T/M_C	0.0476	0.0359	0.0393
Ω_T/Ω_C	0.700	0.788	0.784

Tabla I

Como se puntualizó al comenzar esta sección, los parámetros M y Γ determinan la escala en la evolución temporal de las fluctuaciones para cada miembro de la clase de equivalencia, donde su frecuencia característica está dada por $\Omega = \sqrt{\Gamma/M}$ (tercer línea en la Tabla I). Se puede ver con claridad que, si bien el valor de cada parámetro en sí mismo varía con cada miembro de la clase de equivalencia bajo estudio, su cociente -que determina la frecuencia Ω - es prácticamente insensible, y por lo tanto uno no esperaría grandes variaciones en el comportamiento universal mostrado en las figuras 6.1 y 6.2 por modificaciones de la escala temporal.

Analizando el problema desde un punto de vista microscópico es fácil entender este fenómeno (ver Apéndice C). La frecuencia de la oscilación Ω se corresponde directamente con la frecuencia de la excitación de la resonancia colectiva. Como en la deformación de la esfera de momentos todas las partículas participan con el consiguiente efecto de volumen y su dependencia característica $A^{-1/3}$, el cociente entre las frecuencias características de la excitación de dos resonancias cualesquiera de este tipo (observadas experimentalmente con energías comprendidas entre $45A^{-1/3}$ y $82A^{-1/3}$ MeV) resultará ser del orden de la unidad.

6.3 Funciones de Correlación de Duración Finita

En esta sección se estudiará el caso en que el ruido $\delta K(t)$ en la ecuación VUU estocástica (5.11) no sea del tipo δ correlacionado (ruido blanco) sino que por el contrario, la correlación dura un tiempo finito caracterizado por un valor τ_c . Por ejemplo, postulando como función de correlación temporal una gaussiana como en (2.28), se podrá escribir

$$\zeta(t-t') = \frac{1}{\sqrt{\pi} \tau_c} \exp[-(t-t')^2/\tau_c^2], \quad (6.44)$$

función que reemplazará a $\delta(t-t')$ en los cálculos precedentes. En este caso, las ecuaciones diferenciales de las secciones 6.1 y 6.2 son fácilmente generalizables, teniendo la precaución ahora de que para determinar el estado de las variables a tiempo t , es necesario conocer sus valores anteriores hasta dicho tiempo, lo que implica resolver un sistema de ecuaciones integro-diferenciales. A los efectos prácticos puede reemplazarse la constante de difusión D en las ecuaciones diferenciales anteriores, por el valor

$$\hat{D}(\tau_c) = 2 \Gamma \int_0^t \frac{T(t')}{\tau(t')} \zeta(t-t') dt', \quad (6.45)$$

donde la función $\zeta(t-t')$ podría ser entonces cualquier aproximante de la δ de Dirac, supuesta una función par sólo por simplicidad. En el límite $\tau_c \mapsto 0$ se deben reobtener los resultados correspondientes para ruido blanco. En realidad, uno siempre debería suponer que el ruido es "coloreado", ya que dicho efecto está íntimamente ligado a la aparición de un núcleo de memoria en la ecuación de Langevin [60]. Sin embargo, como veremos a continuación, un cálculo de ésta naturaleza podría ser evitado -al menos en lo que respecta a la determinación de la evolución temporal de las fluctuaciones- ahorrando de esta manera tiempo de computación.

Al resolver las ecuaciones con $\tau_c \neq 0$, se encuentra un comportamiento similar al observado en las figuras 6.1 y 6.2, aunque sin embargo el sistema necesita más tiempo para alcanzar el valor de equilibrio. En una imagen clásica esto se puede entender si se tiene en cuenta que ahora no sólo las partículas colisionan entre sí y con el campo promedio, sino que además utilizan parte de su tiempo «correlacionándose». Dicho efecto está representado en la figura 6.3, en donde fue graficado el tiempo T_S necesario para que las fluctuaciones $\sigma(t)$, ya sean fluctuaciones de la velocidad o de la fuerza, alcancen por lo menos 90% de su valor asintótico. Se observa que, si bien para $\tau_c = 0$ tal valor se alcanza en algo más de tres veces el tiempo de relajación τ , a medida que el tiempo de correlación incrementa, el valor de T_S crece de manera aproximadamente lineal con τ_c , prácticamente independiente del valor del parámetro $\nu = 1/\Omega\tau$. Los valores $\nu = 0.5$ y $\nu = 0.05$ corresponden como

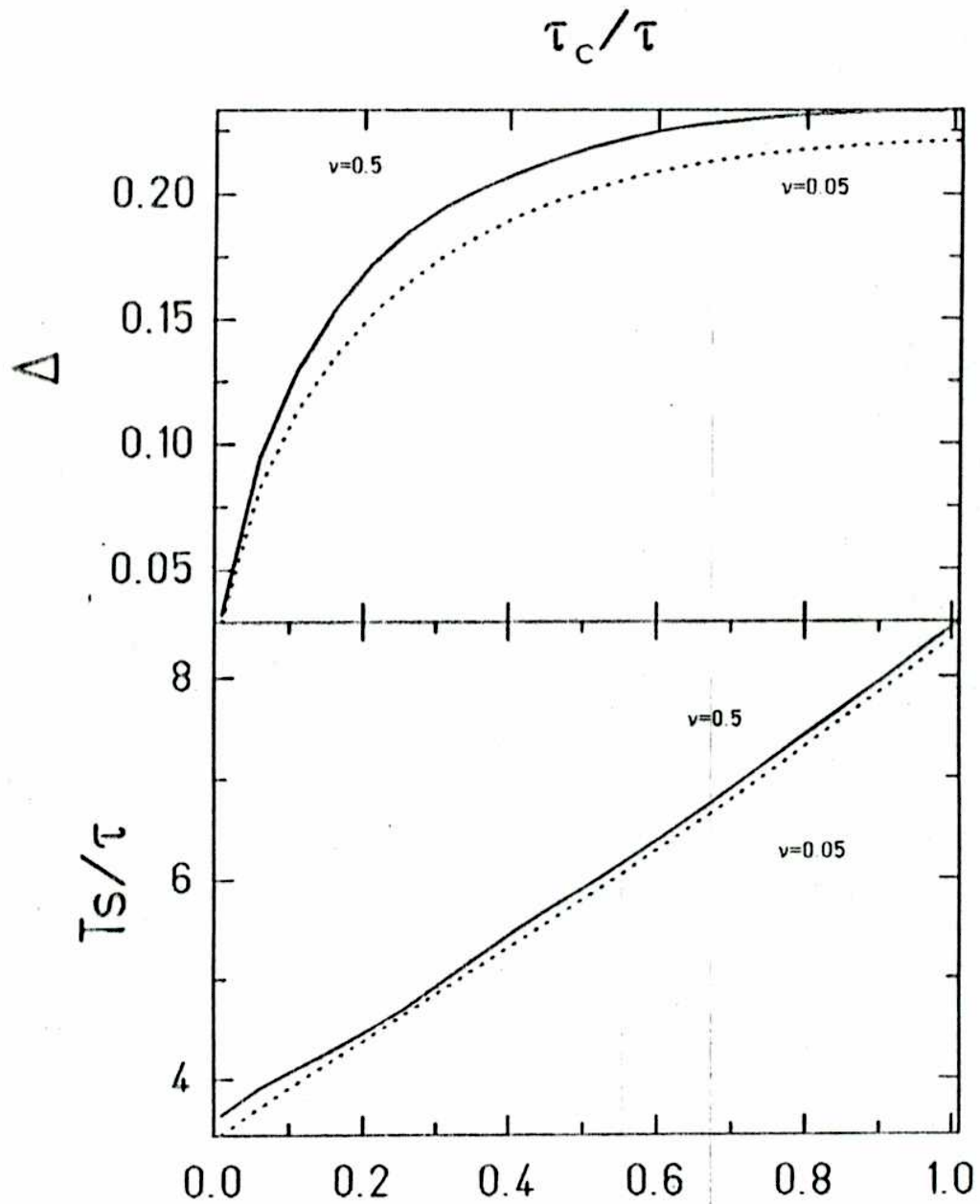


Figura 6.3: Efecto obtenido como consecuencia de incluir ruido "coloreado" en las ecuaciones dinámicas (ver texto).

en la figura 6.1 a tiempos de relajación $\tau \simeq 30$ fm/c y $\tau \simeq 300$ fm/c respectivamente, elegidos constantes y de la misma magnitud que en la referencia [21].

Tiene sentido entonces comparar en cada instante de tiempo la diferencia relativa entre el valor de una componente cualquiera del vector \mathcal{U} suponiendo una correlación del tipo δ (ruido blanco) o bien cuando ella dura un tiempo finito (ruido "coloreado"). Esta variación en promedio estará representada por

$$\Delta(\tau_c) = \frac{1}{T_S} \int_0^{T_S} \frac{|\sigma(t)^{(B)} - \sigma(t)^{(C)}|}{\sigma(t)^{(B)}} dt, \quad (6.46)$$

en donde la integral se realiza hasta el valor T_S introducido en el párrafo anterior, realizando la comparación entonces hasta un valor de tiempo t tal que el sistema alcanza 90% de su valor asintótico. La gráfica de dicha función se muestra en la figura 6.3, en donde por completitud se muestra todo el rango de valores $0 \leq \tau_c \leq \tau$, aunque uno esperaría valores del tiempo de correlación relativamente pequeños en comparación con el tiempo de relajación τ . De la figura 6.3 surge que, aún para valores de $\tau_c \approx \frac{\tau}{2}$, la desviación promedio (6.46) permanece dentro del 20%. Obviamente es imposible determinar la magnitud exacta del valor del tiempo de correlación τ_c , y simplemente se podría estimar mediante distintos argumentos que su valor debería corresponder a una pequeña fracción del valor del tiempo de relajación τ . En todos los casos, del análisis de la figura 6.3 resultaría que, al menos en una primera aproximación, podría ser despreciada la influencia del ruido "coloreado" y resolver así ecuaciones diferenciales ordinarias para obtener la evolución de las fluctuaciones en el tiempo, ahorrando por lo tanto tiempo de cómputo.

Capítulo 7

Conclusiones Generales

En este trabajo se presentó un modelo fluidodinámico semiclásico capaz de describir los fenómenos de disipación y difusión en sistemas fermiónicos finitos. En particular se restringió el estudio a modos colectivos nucleares, en donde un único grado de libertad -asociado precisamente con la excitación colectiva- es necesario para describir correctamente el problema. Se trabajó con una aproximación dinámica de probada validez en el régimen de bajas energías, la que corrige y a la vez complementa la antigua descripción hidrodinámica. Más aún, se supuso que la respuesta del medio a una excitación es parcialmente elástica y a la vez parcialmente plástica (comportamiento viscoelástico) en lugar de la tradicional imagen de flujo lento viscoso asociada a un fluido viscoso, destacando el carácter no-markoviano de la dinámica del movimiento colectivo.

En la primera parte se introdujeron efectos disipativos a través de un procedimiento variacional basado en una aproximación de escala limitada a pequeñas oscilaciones del fluido nuclear. La disipación en el sistema proviene de dos fuentes distintas y a la vez competitivas: una viscosidad originada en las colisiones residuales de dos cuerpos, y otra del tipo de un cuerpo proporcional a la velocidad del flujo colectivo, que da cuenta de posibles inelasticidades en el campo promedio. La inclusión de viscosidad en la dinámica genera autofrecuencias complejas como solución del problema variacional, permitiendo así describir con la parte real de dichas frecuencias de una forma más que natural oscilaciones del fluido que decrecen en el tiempo debido a la disipación de energía. Cálculos numéricos fueron realizados para un caso particular de excitación colectiva conocida como modo torsión con números cuánticos $J^\pi = 2^-$ para el núcleo de ^{208}Pb , en donde la ubicación del centroide así como su dispersión son obtenidos fácilmente, e inclusive, en el caso de que la

densidad de equilibrio sea elegida como una del tipo escalón (ADE), analíticamente. Los resultados fueron comprobados y chequeados con distintos modelos. Mediante el cálculo de distintos parámetros se demostró la validez de la aproximación aquí propuesta observando a la vez las limitaciones de la misma.

En la segunda parte se discutieron casos donde es necesaria una descripción dentro de un marco estocástico. Restringiéndose a los modos colectivos analizados en la Parte I y utilizando los resultados allí deducidos fue posible determinar la evolución temporal de las fluctuaciones (matriz de covarianza). Se demostró que las ecuaciones obtenidas de primeros principios no corresponden a un movimiento Browniano usual, sino que aunque las ecuaciones son del tipo Hamilton-Langevin la velocidad colectiva sin embargo juega el papel de coordenada de la partícula Browniana ficticia. La dinámica en sí misma no está restringida a pequeñas oscilaciones, a pesar de que el ejemplo analizado -el modo torsión de la primer parte- corresponde a tal caso. Se compararon los resultados obtenidos con el caso conocido de la resonancia cuadrupolar gigante. Adicionalmente se demostró que tal tipo de modos (así como los modos con compresibilidad) pueden ser descriptos por el modelo aquí presentado, los que fueron clasificados dentro de lo que se denominó una clase de equivalencia a la que pertenece el modo torsión. Se resolvieron también las ecuaciones integro-diferenciales que aparecen al tener en cuenta que el ruido no es del tipo δ correlacionado o "ruido blanco", sino por el contrario tiene una duración finita, conocido como "ruido coloreado". Se demostró que al menos en una primera aproximación, no es necesario encarar este tipo de problema, pues bastaría resolver ecuaciones diferenciales ordinarias ahorrando de esta manera tiempo de cálculo.

Para finalizar, cabe destacar que la descripción fluidodinámica presentada en este trabajo es aplicable a cualquier sistema fermiónico finito, a pesar de que sólo fuera analizado el caso particular de un conjunto de nucleones interactuantes. Resulta de gran interés, por ejemplo, la aplicación de esta teoría al estudio de la excitación de estados colectivos en gotas de ${}^3\text{He}$, y en tal sentido serán realizados cálculos a la brevedad. Recientemente [61], estudios microscópicos fueron llevados a cabo en el marco de una aproximación de fases al azar (RPA) para los modos colectivos monopolar ($L = 0$) y cuadrupolar ($L = 2$). Sería deseable entonces, disponer de los resultados macroscópicos correspondientes para poder establecer así una comparación. Más aún, debido a dificultades prácticas en la preparación misma del líquido de ${}^3\text{He}$ a estudiar experimentalmente, el número de átomos constituyentes es mayor que el número de nucleones típico (de 100 a 200). Esto trae asociado como consecuencia inmediata la diagonalización de matrices cada vez mayores en cualquier cálculo numérico del tipo RPA. La descripción fluidodinámica ofrece por el contrario, soluciones numéricas rápidas teniendo asociada además una imagen físicamente sencilla y transparente, un punto de partida nada despreciable en el estudio de sistemas de fermiones interactuantes.

APÉNDICE

1
1
1
1
1
1
1
1

Apéndice A

Aproximación de Escala

En este apéndice se deducirá la ecuación (3.3) utilizada en la primera parte de este trabajo, y que constituye el sustento de la aproximación de escala. Mediante tal relación, es posible determinar a todo tiempo la densidad de partícula independiente una vez conocido el campo de deformaciones $s(\mathbf{x}, t)$ o campo de escala, y luego de elegida la expresión para la densidad de equilibrio $\bar{\rho}(\mathbf{x})$, por ejemplo, como una del tipo Woods-Saxon (3.48).

Para obtener la ecuación deseada,

$$\rho(\mathbf{x}, t) = e^{\partial, s, (\mathbf{x}, t)} \bar{\rho}(\mathbf{x}), \quad (\text{A.1})$$

se utilizará el hecho de que, el operador densidad de partícula independiente podrá siempre ser factorizado como ¹

$$\rho(t) = e^{-i\hat{\varphi}(t)} \bar{\rho} e^{i\hat{\varphi}(t)}, \quad (\text{A.2})$$

donde $\hat{\varphi}$ es un operador hermítico impar. La descomposición (A.2) fue propuesta por Baranger y Véneroni [52] y es utilizada como punto de partida para una aproximación de HFDT adiabática [3].

Aceptando el ansatz (A.2) como válido, resultará que la transformada de Wigner $\varphi_w = \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ del operador $\hat{\varphi}(t)$ es real e impar en \mathbf{p} , por lo que, expandiéndola en potencias de \mathbf{p} y deteniéndose al orden más bajo, dicha transformada resultará

$$\varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \simeq -s(\mathbf{r}, t) \mathbf{p} + \dots, \quad (\text{A.3})$$

¹Por simplicidad y a menos que sea indicado expresamente, se tomará $\hbar = 1$.

que a la vez introduce en la descripción el campo de escalas \mathbf{s} utilizado a posteriori como coordenada generalizada en el cálculo de las ecuaciones de movimiento en el marco de una descripción variacional (c.f. eq. (3.7)).

La aproximación (A.3), adecuada en un régimen de bajas energías, cumple con la exigencia de conservación de la masa,

$$\begin{aligned} \dot{\rho}(\mathbf{r}, t) &= -\frac{i}{(2\pi)^3} \int d^3 p [\dot{\varphi}, \rho]_{\omega} \\ &= \rho(\mathbf{r}, t) \frac{\partial \dot{\mathbf{s}}}{\partial \mathbf{r}} + \dot{\mathbf{s}} \cdot \frac{\partial \rho(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} + \dots, \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

simplemente identificando (c.f. Sec. 3.4)

$$\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = -\dot{\mathbf{s}} \quad (\text{A.5})$$

como la velocidad común a todos los nucleones. En la ecuación (A.4) fue empleada la regla (2.8) para el cálculo de la transformada de Wigner del conmutador de dos operadores.

Para obtener la identidad deseada (A.1), es necesario conocer los elementos de matriz del operador $\hat{\varphi}(t)$ cuya transformada de Wigner es conocida, y que bajo la aproximación (A.3) determina el campo de escalas. Es decir, es necesario calcular la contraparte cuántica asociada a la expresión clásica (A.3). Esto es posible mediante, por ejemplo, la regla de cuantificación de Weyl [5], para lo que es necesario escribir a φ_{ω} en la forma

$$\varphi_{\omega} \equiv \varphi(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int \int d^3 k d^3 j e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{j})} \beta(\mathbf{k}, \mathbf{j}), \quad (\text{A.6})$$

lo que implica

$$\begin{aligned} \beta(\mathbf{k}, \mathbf{j}) &= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \int d^3 r d^3 p e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{j})} (-\mathbf{s} \cdot \mathbf{p}) \\ &= \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{k}) \cdot (-i\nabla) \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 p e^{-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{j}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

es decir

$$\beta(\mathbf{k}, \mathbf{j}) = -i\tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{k}) \cdot \nabla \delta(\mathbf{j}), \quad (\text{A.8})$$

donde $\bar{s}(\mathbf{k})$ representa la transformada de Fourier del campo $\mathbf{s}(\mathbf{r})$.

Por lo tanto, de acuerdo con la regla de cuantificación de Weyl, el operador $\hat{\varphi}(\hat{\mathbf{r}}, \hat{\mathbf{p}})$ se obtendrá de

$$\begin{aligned}\hat{\varphi} &= \int \int d^3 r d^3 p e^{i(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{p}})} - i \bar{s}(\mathbf{k}) \cdot \nabla_j \delta(\mathbf{j}) \\ &= i \int d^3 k \bar{s}(\mathbf{k}) \cdot \nabla_j e^{i(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{p}})} \Big|_{\mathbf{j}=0},\end{aligned}\quad (\text{A.9})$$

donde

$$\nabla_j e^{i(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{p}})} = \nabla_j \sum_n \frac{1}{n!} i^n (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{p}})^n \quad (\text{A.10})$$

con

$$\begin{aligned}\nabla_j (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{p}})^n \Big|_{\mathbf{j}=0} &= \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}})^{n-1} + (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}) \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}})^{n-2} \\ &+ (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}})^2 \hat{\mathbf{p}}(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}})^{n-3} + \dots + (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}})^{n-1} \hat{\mathbf{p}} \\ &= \mathbf{k}^{n-1} (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^{n-1} + \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^{n-2} \\ &+ \hat{\mathbf{r}}^2 \cdot \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^{n-3} + \dots + \hat{\mathbf{r}}^{n-2} \cdot \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}}^{n-1} \cdot \hat{\mathbf{p}}).\end{aligned}\quad (\text{A.11})$$

Utilizando el hecho de que

$$[\hat{\mathbf{r}}^n, \hat{\mathbf{p}}] = i n \hat{\mathbf{r}}^{n-1}, \quad (\text{A.12})$$

o sea

$$\hat{\mathbf{r}}^n \cdot \hat{\mathbf{p}} = \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^n + i \hbar n \hat{\mathbf{r}}^{n-1}, \quad (\text{A.13})$$

se cumple que

$$\begin{aligned}\nabla_j (\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{p}})^n \Big|_{\mathbf{j}=0} &= \mathbf{k}^{n-1} [\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^{n-1} + (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^{n-1} + i \hbar \hat{\mathbf{r}}^{n-2}) \\ &+ (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^{n-1} + i \hbar 2 \hat{\mathbf{r}}^{n-2}) \\ &+ \dots (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^{n-1} + (n-2) i \hbar \hat{\mathbf{r}}^{n-2}) \\ &+ (\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^{n-1} + (n-1) i \hbar \hat{\mathbf{r}}^{n-2}] \\ &= \mathbf{k}^{n-1} [(n \hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}})^{n-1} \\ &+ i \hbar (1 + 2 + \dots + (n-1)) \hat{\mathbf{r}}^{n-2}]\end{aligned}\quad (\text{A.14})$$

$$= k^{n-1}[(n \mathbf{p} \cdot \hat{\mathbf{r}})^{n-1} + i \hbar \frac{n(n-1)}{2} \hat{\mathbf{r}}^{n-2}] ,$$

para así obtener, reemplazando en (A.10)

$$\begin{aligned} \nabla_j e^{i(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{p}})} &= \sum_n i^n k^{n-1} \left[\hat{\mathbf{p}} \frac{\hat{\mathbf{r}}^{n-1}}{(n-1)!} + \frac{i \hbar}{2} \frac{\hat{\mathbf{r}}^{n-2}}{(n-2)!} \right] \quad (\text{A.15}) \\ &= i \hat{\mathbf{p}} e^{i \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}} - i \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} e^{i \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}} \\ &= i \left(\hat{\mathbf{p}} - \frac{\hbar \mathbf{k}}{2} \right) e^{i \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}} . \end{aligned}$$

Como también en (A.11) se puede usar que

$$\hat{\mathbf{p}} \cdot \hat{\mathbf{r}}^n = \hat{\mathbf{r}}^n \cdot \hat{\mathbf{p}} - i \hbar n \hat{\mathbf{r}}^{n-1} , \quad (\text{A.16})$$

se podrá escribir, junto con (A.15), que

$$\nabla_j e^{i(\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} + \mathbf{j} \cdot \hat{\mathbf{p}})} = \frac{1}{2} i (e^{i \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}} \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} e^{i \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}}}) , \quad (\text{A.17})$$

por lo que, retornando a la ecuación (A.9), se obtiene finalmente para el operador $\hat{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{p})$ la siguiente expresión

$$\hat{\varphi}(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = -\frac{1}{2} [s(\mathbf{r}) \cdot \hat{\mathbf{p}} + \hat{\mathbf{p}} \cdot s(\mathbf{r})] . \quad (\text{A.18})$$

En (A.17) el operador $\hat{\mathbf{p}} \cdot s(\mathbf{r})$ actúa como

$$[\hat{\mathbf{p}} \cdot s(\mathbf{r})] \Psi(\mathbf{r}) = -i \hbar \nabla_r [s(\mathbf{r}) \Psi(\mathbf{r})] , \quad (\text{A.19})$$

y así por lo tanto, en la representación de coordenadas, se obtiene para los elementos de matriz del operador $\hat{\varphi}$

$$\langle \mathbf{x} | \hat{\varphi} | \mathbf{x}' \rangle = \frac{i \hbar}{2} [s(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot s(\mathbf{x})] \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \quad (\text{A.20})$$

que equivale a decir que $\hat{\varphi}$ es diagonal en esta base y de la forma

$$\langle \mathbf{x} | \hat{\varphi} | \mathbf{x}' \rangle = A(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \quad (\text{A.21})$$

donde $A(\mathbf{x})$ contiene operadores de derivación. Entonces, será fácil calcular las potencias de $\hat{\varphi}$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{x} | \hat{\varphi}^n | \mathbf{x}' \rangle &= \int d1 \dots d(n-1) \langle \mathbf{x} | \hat{\varphi} | \mathbf{x}_1 \rangle \langle \mathbf{x}_1 | \hat{\varphi} | \mathbf{x}_2 \rangle \dots \langle \mathbf{x}_{n-1} | \hat{\varphi} | \mathbf{x}' \rangle \\ &= A(\mathbf{x}) \int d1 d2 \dots \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) A(\mathbf{x}_1) \delta(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \dots A(\mathbf{x}_{n-1}) \delta(\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}') \\ &= A(\mathbf{x}) A(\mathbf{x}) \int d2 \dots \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2) A(\mathbf{x}_2) \dots \delta(\mathbf{x}_{n-1} - \mathbf{x}') \\ &= A^n(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \end{aligned} \quad (\text{A.22})$$

y en consecuencia

$$U(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \langle \mathbf{x} | e^{i\hat{\varphi}} | \mathbf{x}' \rangle = e^{iA(\mathbf{x})} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') , \quad (\text{A.23})$$

con lo que finalmente se llega a la expresión para los elementos de matriz de la densidad de un cuerpo

$$\begin{aligned} \rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) &= \int \int d^3r d^3r' U^\dagger(\mathbf{x}, \mathbf{r}, t) \bar{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') U(\mathbf{r}', \mathbf{x}', t) \\ &= \int \int d^3r d^3r' e^{-iA(\mathbf{x})} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}) \bar{\rho}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') e^{-iA(\mathbf{r}')} \delta(\mathbf{r}' - \mathbf{x}') \\ &= e^{-i(A(\mathbf{x}) - A(\mathbf{x}'))} \bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') , \end{aligned} \quad (\text{A.24})$$

o bien, equivalentemente

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}', t) = e^{i[s(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot s(\mathbf{x}) + s(\mathbf{x}') \cdot \nabla_{\mathbf{x}'} + \nabla_{\mathbf{x}'} \cdot s(\mathbf{x}')] } \bar{\rho}(\mathbf{x}, \mathbf{x}') . \quad (\text{A.25})$$

En la ecuación (A.25) los gradientes operan sobre toda función a su derecha. Así entonces, los elementos diagonales estarán dados por

$$\rho(\mathbf{x}, t) = e^{i[s(\mathbf{x}) \cdot \nabla_{\mathbf{x}} + \nabla_{\mathbf{x}} \cdot s(\mathbf{x})]} \bar{\rho}(\mathbf{x}) , \quad (\text{A.26})$$

o bien con la notación abreviada ²

$$\partial_i s_i = \mathbf{s} \cdot \nabla_{\mathbf{r}} + \nabla_{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{s} , \quad (\text{A.27})$$

se obtiene la expresión deseada (A.1)

$$\rho(\mathbf{x}, t) = e^{\partial_i s_i(\mathbf{x}, t)} \bar{\rho}(\mathbf{x})$$

²Se sobreentiende la suma sobre índices repetidos.

Apéndice B

Funcional de Energía en el Caso Estático

En este apéndice se analizarán con más detalle, los miembros componentes de la expresión de la funcional de energía estática en la aproximación de Thomas-Fermi, utilizada como punto de partida para el cálculo de la energía intrínseca dinámica en el capítulo 3.

En el formalismo de densidad de energía aplicado a núcleos finitos, la energía total del sistema $E[\bar{\rho}]$ es una funcional de la densidad estática $\bar{\rho}$. La parte cinética de la densidad de energía, con la corrección que surge cuando se tiene en cuenta el tamaño finito del núcleo -denominada corrección de Weizsäcker-, resulta ser [3, 35]

$$t_o = \frac{3}{5} \left(\frac{\hbar^2}{2m} \right) \left(\frac{3}{2} \pi^2 \right)^{2/3} \bar{\rho}^{5/3} + \frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{1}{36} \left(\frac{\nabla \bar{\rho}}{\bar{\rho}} \right)^2 + \frac{1}{3} \nabla^2 \bar{\rho} \right]. \quad (\text{B.1})$$

El primer término en el miembro derecho de la ecuación (B.1), es obviamente el término de Thomas-Fermi, único sobreviviente en el caso de materia nuclear infinita. El segundo término conocido como corrección de Weizsäcker, incluye el factor $\hbar^2/36m$ que, como fue puntualizado por Brueckner y colaboradores [53], había sido incorrectamente calculado como $\hbar^2/4m$ por el mismo Weizsäcker y aporta una porción no despreciable a la energía total. El último término de este segundo miembro es irrelevante para el cálculo de la energía total, ya que al realizar la integral de (B.1) en todo el espacio, dicha integral de cero por tratarse de la divergencia de un campo vectorial que se anula en el infinito.

Para la parte potencial, términos de volumen deben ser agregados como en (3.37)

$$v = \sum_{\nu} a_{\nu} \bar{\rho}^{\nu}; \quad (\text{B.2})$$

si en (B.2) se elige, por ejemplo, una expresión del tipo de Skyrme con sólo dos parámetros [35], T_0 y T_3 ,

$$v = \frac{3}{8}T_0\bar{\rho}^2 + \frac{1}{16}T_3\bar{\rho}^{2+\beta}, \quad (\text{B.3})$$

con $\beta = 1/3$, entonces, dichos parámetros T_0 y T_3 podrán ser determinados requiriendo que para materia nuclear estable se cumpla

$$\left. \frac{\partial \epsilon_\infty}{\partial \bar{\rho}} \right|_{\bar{\rho}_0} = \left. \frac{\epsilon_\infty}{\bar{\rho}} \right|_{\bar{\rho}_0} = -16 \text{ MeV}, \quad (\text{B.4})$$

en donde ϵ_∞ representa la energía total estática para el caso de materia nuclear infinita, es decir, la suma del término de Thomas-Fermi de (B.1) y del potencial v determinado por (B.3). La identidad (B.4) resulta de suponer que la energía por partícula para $\bar{\rho} = \bar{\rho}_0 = 0.16 \text{ fm}^{-3}$ es estable

$$\left. \frac{\partial(\epsilon_\infty/\bar{\rho})}{\partial \bar{\rho}} \right|_{\bar{\rho}_0} = 0 = \frac{1}{\bar{\rho}} \left. \frac{\partial \epsilon_\infty}{\partial \bar{\rho}} \right|_{\bar{\rho}_0} - \left. \frac{\epsilon_\infty}{\bar{\rho}^2} \right|_{\bar{\rho}_0}. \quad (\text{B.5})$$

Resolviendo la identidad (B.5), se obtiene

$$\begin{aligned} T_0 &= -1801.86 \\ T_3 &= 12904.41, \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

con lo que queda completamente determinada la expresión para la energía intrínseca estática, simplemente combinando (B.1) con (B.3) utilizando el resultado (B.6) para calcular

$$\epsilon = t_0 + v. \quad (\text{B.7})$$

Cabe destacar que la parte puramente dinámica de la energía no está incluida en la expresión (B.7) y por lo tanto dicha ecuación solamente aportará la componente estática del potencial de campo medio, calculable de acuerdo con (2.15) según

$$U[\bar{\rho}] = \frac{\delta E[\bar{\rho}]}{\delta \bar{\rho}}, \quad (\text{B.8})$$

siendo

$$E[\bar{\rho}] = \int \epsilon d^3x . \quad (\text{B.9})$$

Apéndice C

Descripción Microscópica del Movimiento Colectivo Nuclear

En este apéndice se presentarán los lineamientos e ideas generales que subyacen en la teoría microscópica conocida como Dinámica Disipativa Dinámica (DDD) [19, 23]. Describir la teoría en sí misma, va más allá del alcance de este trabajo, por lo que aquí sólo se analizará el caso trivial de un sistema de A nucleones en interacción confinados a una caja cúbica sujeta a una deformación cuadrupolar. Por analogía a lo realizado en las partes I y II, se describirá en primer lugar la dinámica determinista; luego, suponiendo que las colisiones residuales de dos cuerpos introducen características estocásticas al proceso, se pasará a trabajar con una dinámica no-determinista. Cabe destacar que, a diferencia de lo realizado en el cap.2, en la formulación original de la DDD una ecuación del tipo de Langevin es *postulada* en lugar de ser deducida; más aún, como se mencionó en repetidas oportunidades, la DDD es una teoría de partícula independiente en la cual las colisiones residuales son agregadas a posteriori mediante un *ansatz* de relajación, y donde entonces la elección de la base diabática llevará intrínsecamente asociados *flujos irrotacionales*.

C.1 Ecuación de Movimiento para la Variable Colectiva

Para estudiar las principales características de los mecanismos de disipación en el movimiento colectivo nuclear, W. Nörenberg [19] analizó inicialmente el problema de un gas de Fermi interactuante, ya que en él -debido a la simplicidad de la geometría del problema- es posible describir analíticamente el mecanismo principal de disipación de energía como el resultado de la excitación diabática partícula-agujero con la subsecuente equilibración vía colisiones de dos cuerpos, tal como fue esquema-

tizado en la figura 1.3 En este caso la deformación cuadrupolar puede ser descripta convenientemente por el campo de velocidades

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \nabla\Phi = \dot{q}(t) \nabla\varphi(\mathbf{x}), \quad (\text{C.1})$$

$$\varphi(\mathbf{x}) = r^2 \mathcal{P}_2(\cos\theta) = \frac{1}{2}(2z^2 - x^2 - y^2), \quad (\text{C.2})$$

donde $q(t)$ denota la coordenada colectiva. Nótese que el campo de velocidades no sólo es irrotacional sino que además es incompresible. Esto está conectado, como se mencionó con anterioridad, con la elección de la base diabática

$$\Psi_\alpha(\mathbf{x}; q, \dot{q}, t) = \exp\{-i(\int_0^t dt' \epsilon_\alpha(t') - m\Phi(\mathbf{x}, \dot{q}))/\hbar\} \phi_\alpha(\mathbf{x}, q) \quad (\text{C.3})$$

donde

$$\phi_\alpha(\mathbf{x}, q) = \frac{1}{\sqrt{V}} \exp(ik_\alpha \cdot \mathbf{x}) \quad (\text{C.4})$$

representan los estados estacionarios normalizados dentro del volumen de la caja V . Efectos de compresión fueron excluidos al usar que la deformación de la caja se realiza a volumen constante. Las funciones de onda (C.3) se mueven con el mismo campo de velocidades $\mathbf{u} = \nabla\Phi$ y satisfacen la ecuación de Schrödinger

$$\left(\frac{-\hbar^2}{2m} - i\hbar \frac{\partial}{\partial t}\right) \Psi_\alpha = 0 \quad (\text{C.5})$$

hasta términos de orden \dot{q}^2 y \ddot{q} , si

$$\epsilon_\alpha = \frac{\hbar^2}{2m} k_\alpha(q) \quad (\text{C.6})$$

y

$$\frac{\partial}{\partial q} |\phi_\alpha\rangle = -\nabla\varphi \cdot \nabla |\phi_\alpha\rangle, \quad (\text{C.7})$$

que se verifica inmediatamente a partir de las definiciones (C.2) y (C.4).

Para obtener la ecuación de movimiento para la variable colectiva q , basta considerar la energía total E

$$E = \sum_{\alpha} \langle \Psi_{\alpha} | \frac{-\hbar^2}{2m} \nabla^2 | \Psi_{\alpha} \rangle n_{\alpha} = \sum_{\alpha} \epsilon_{\alpha}(q) n_{\alpha} + \frac{1}{2} M(q) \dot{q}^2, \quad (\text{C.8})$$

donde n_{α} denota la probabilidad de ocupación del estado de partícula independiente α y además

$$M(q) = m \sum_{\alpha} \langle \phi_{\alpha} | \nabla \varphi \cdot \nabla \varphi | \phi_{\alpha} \rangle n_{\alpha}, \quad (\text{C.9})$$

representa el parámetro de masa colectiva dado por su valor irrotacional. Teniendo en cuenta que, por tratarse de un sistema cerrado $dE/dt = 0$, resultará de (C.8)

$$M(q) \ddot{q} + \frac{1}{2} \frac{\partial M}{\partial q} \dot{q}^2 = Q/M \equiv \mathcal{F}, \quad (\text{C.10})$$

con

$$\mathcal{F} = - \sum_{\alpha} \frac{\partial \epsilon_{\alpha}}{\partial q} n_{\alpha}, \quad (\text{C.11})$$

donde además

$$Q = \sum_{\alpha} \langle \phi_{\alpha} | \hat{Q} | \phi_{\alpha} \rangle n_{\alpha}, \quad \text{with } \hat{Q} = -p_x^2 - p_y^2 + 2p_z^2, \quad (\text{C.12})$$

denota el valor medio del momento cuadrupolar de la distribución de momentos.

A partir de la derivada temporal del momento cuadrupolar Q se obtiene

$$\frac{dQ}{dt} = \dot{q} \sum_{\alpha} \frac{\partial}{\partial q} \langle \phi_{\alpha} | \hat{Q} | \phi_{\alpha} \rangle n_{\alpha}(t) + \sum_{\alpha} \langle \phi_{\alpha} | \hat{Q} | \phi_{\alpha} \rangle \frac{dn_{\alpha}}{dt}, \quad (\text{C.13})$$

de donde es inmediato ver que, mientras que el primer miembro en (C.13) describe una distorsión de la superficie de Fermi debido al escaleo de las funciones de onda diabáticas según (C.7), el segundo término está determinado por las colisiones de dos cuerpos las que cambian la probabilidad de ocupación de los estados diabáticos y equilibran el sistema; mediante un ansatz de relajación se supone que tal equilibración es lograda en un tiempo característico τ

$$\frac{dn_{\alpha}}{dt} = \frac{n_{\alpha}(t) - \bar{n}_{\alpha}}{\tau}, \quad (\text{C.14})$$

donde el valor de equilibrio de la probabilidad de ocupación estará dado como es usual por la distribución de Fermi

$$\tilde{n}_\alpha(q, \mu, T) = \{1 + \exp[(\epsilon_\alpha - \mu)/T]\}^{-1} . \quad (C.15)$$

El potencial químico $\mu(q)$ y la temperatura T están determinados por la conservación del número total de partículas y la energía total, respectivamente. El tiempo de relajación τ si bien es una función de la energía de excitación por partícula (c.f. Caps. 1 y 3) se supondrá constante por simplicidad.

Con la definición de la fuerza \mathcal{F} de (C.10) y la aproximación de relajación (C.14) se obtiene

$$\frac{d}{dt} \mathcal{F}(q, t) = -\Gamma(q, t) \dot{q} - \frac{1}{\tau} [\mathcal{F}(q, t) - \bar{\mathcal{F}}(q)] , \quad (C.16)$$

donde Γ está dado por

$$\Gamma(q, t) = \sum_\alpha \frac{\partial^2 \epsilon_\alpha}{\partial q^2} n_\alpha(t) . \quad (C.17)$$

Nuevamente, el primer término en el miembro derecho de (C.16) tiene su origen en el acople coherente del movimiento de partícula independiente al movimiento colectivo dando origen a la distorsión colectiva de la esfera de Fermi, mientras que el segundo término describe el decaimiento de dichas distorsiones debido a las colisiones residuales de dos cuerpos. La ecuación (C.10) junto con la (C.16) determinan el sistema de ecuaciones diferenciales acopladas a resolver

$$\begin{cases} M \ddot{q} + \frac{1}{2} \partial_q M \dot{q}^2 = \mathcal{F} \\ \dot{\mathcal{F}} = -\Gamma \dot{q} - (\mathcal{F} - \mathcal{F}_0)/\tau \end{cases} \quad (C.18)$$

o bien, una única ecuación integro-diferencial obtenida, tras una integración formal, como

$$\ddot{q} + \Omega_2^2 \int_{t_0}^t e^{-\frac{(t-t')}{\tau}} \dot{q}(t') dt' = 0 , \quad (C.19)$$

con la consabida conducta viscoelástica (c.f. Caps. 3 y 5). En la ecuación (C.19) la frecuencia Ω_2 está dada por

$$\Omega_2 = \sqrt{\Gamma/M} , \quad (C.20)$$

quien resulta ser la frecuencia de la resonancia cuadrupolar gigante

$$\hbar \Omega_2 = 2 \hbar \sqrt{\langle p^2 \rangle_0 / m M_0} \approx 66 A^{-1/3} \text{ MeV} \quad (C.21)$$

utilizando la relación de escala (C.7) para calcular Γ como (c.f. ec. (6.42))

$$\Gamma = \frac{4}{m} \langle p^2 \rangle \simeq \frac{4}{m} \langle p^2 \rangle_0 - \frac{12}{5} A \frac{p_F^2}{m} \equiv \frac{24}{5} A \epsilon_F, \quad (\text{C.22})$$

luego de aproximar el valor medio del impulso por su valor sobre la esfera de Fermi. En (C.19) se utilizó también que $M(q) \simeq M(q=0) \equiv M_0$. Si en lugar de un potencial del tipo caja cúbica se hubiese utilizado uno del tipo oscilador armónico de frecuencia natural ω_0 [21], bajo el mismo tipo de deformación cuadrupolar se hubiera obtenido que

$$\Omega_2 \simeq 2\omega_0, \quad (\text{C.23})$$

en donde se toma, como es usual,

$$\omega_0 \simeq 41 A^{-1/3} \text{ MeV}. \quad (\text{C.24})$$

En este caso también resulta del cálculo analítico de Γ por definición, para el caso de pequeñas oscilaciones cuadrupolares ($q \ll 1$) [21] $\Gamma = M_0 \Omega^2$.

C.2 Evolución Temporal de las Fluctuaciones

Tan pronto como se suponga que las colisiones residuales de dos cuerpos puedan inducir además transiciones estocásticas entre niveles diabáticos de partícula independiente, la descripción de la sección C.1 representará sólo valores medios del número de ocupación $n_a(t)$ y la variable colectiva q . En realidad ahora, el sistema estará descrito a tiempo t por una mezcla estadística de funciones de partícula independiente $\phi_a^{(i)}$. En otras palabras, el número de ocupación de un miembro i del conjunto estadístico $n_a^{(i)}$ varía estocásticamente entre 0 y 1, causando así la variación estocástica de la fuerza de (C.11) acorde a

$$\mathcal{F}_i(q, t) = - \sum_a \frac{\partial \epsilon_a}{\partial q} n_a^{(i)}(t). \quad (\text{C.25})$$

La conducta estocástica de la fuerza podría ser descrita por una ecuación del tipo de Fokker-Planck para la función de distribución. Alternativamente puede ser introducida la variable estocástica $\mathcal{F}_i(q, t)$ que satisface una ecuación del tipo de

Langevin postulada como

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{F}_i(q, t) = -\frac{1}{\tau} [\mathcal{F}_i(q, t) - \bar{\mathcal{F}}_i(q)] + \delta K(t) \quad (\text{C.26})$$

donde la cantidad $\delta K(t)$ es un función irregular del tiempo supuesta con media cero y espectro blanco (δ correlacionada en el tiempo). Como las fluctuaciones son generadas en la derivada temporal de la fuerza, uno espera una dependencia temporal distinta para las fluctuaciones en la variable colectiva respecto de un movimiento Browniano tradicional.

A continuación los cálculos prosiguen de la misma manera que en el capítulo 5 para el caso de la descripción fluidodinámica macroscópica. Con la ecuación de transporte para la variable colectiva (C.10) y la ecuación del tipo de Langevin, es posible deducir la evolución temporal de la variancia de la fuerza dinámica

$$\sigma_F^2 = \overline{\mathcal{F}_i^2} - \bar{\mathcal{F}}_i^2, \quad (\text{C.27})$$

ligada a la variancia de la velocidad colectiva

$$\sigma_q^2 = \overline{q^2} - \bar{q}^2. \quad (\text{C.28})$$

Las expresiones microscópicas correspondientes serán en este caso, a partir de la definición (C.11) utilizando (C.27)

$$\sigma_F^2 = \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \epsilon_{\alpha}}{\partial q} \right)^2 n_{\alpha} (1 - n_{\alpha}), \quad (\text{C.29})$$

la que, de la ecuación diferencial que la vincula con la variancia de la variable colectiva, para $n_{\alpha}(t) \approx \bar{n}_{\alpha}$ resulta

$$\sigma_F^2 \simeq \sigma_q^2 M \tilde{W}, \quad (\text{C.30})$$

donde

$$\tilde{W} \simeq \Gamma \equiv \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \epsilon_{\alpha}}{\partial q^2} \bar{n}_{\alpha}, \quad (\text{C.31})$$

utilizando la definición de Γ de (C.17). Como además $\partial \tilde{\mathcal{F}} / \partial q = 0$, es decir

$$0 \equiv - \sum_{\alpha} \frac{\partial^2 \epsilon_{\alpha}}{\partial q^2} \tilde{n}_{\alpha} - \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \epsilon_{\alpha}}{\partial q} \right)^2 \frac{\partial \tilde{n}_{\alpha}}{\partial \epsilon_{\alpha}}, \quad (\text{C.32})$$

resultará

$$\Gamma = - \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \epsilon_{\alpha}}{\partial q} \right)^2 \frac{\partial \tilde{n}_{\alpha}}{\partial \epsilon_{\alpha}} = \frac{1}{T} \sum_{\alpha} \left(\frac{\partial \epsilon_{\alpha}}{\partial q} \right)^2 \tilde{n}_{\alpha} (1 - \tilde{n}_{\alpha}), \quad (\text{C.33})$$

luego de utilizar que para una distribución de Fermi próxima al equilibrio (c.f. eq. (5.36))

$$\tilde{n}_{\alpha} (1 - \tilde{n}_{\alpha}) = -T \frac{\partial n_{\alpha}}{\partial \epsilon_{\alpha}}. \quad (\text{C.34})$$

Esto implica finalmente que el coeficiente Γ está relacionado con las fluctuaciones de la fuerza dinámica a través de (c.f. eq. (5.38))

$$\Gamma = \frac{\sigma_F^2}{T}. \quad (\text{C.35})$$

Para terminar cabe destacar que de las relaciones (C.30) y (C.31), con la última ecuación (C.35)

$$\sigma_F^2 \simeq \sigma_{\dot{q}}^2 M \Gamma \equiv \Gamma T \quad (\text{C.36})$$

de donde resulta el teorema de equipartición para las fluctuaciones en la velocidad

$$\frac{1}{2} M \sigma_{\dot{q}}^2 = \frac{1}{2} T \quad (\text{C.37})$$

o equivalentemente

$$\sigma_{\dot{q}}^2 = \frac{T}{M}. \quad (\text{C.38})$$

Bibliografía

- [1] Ver, p.e., el artículo de revisión de A.S. Goldhaber y H.H. Heckman, *Annu. Rev. Nucl. Phys.* **A249** (1978) 161.
- [2] C.Y. Wong y H.K. Tang, *Phys. Rev. Lett.* **40** (1978) 1070 ; *Phys. Rev.* **C20** (1979) 1419.
- [3] P. Ring y P.Schuck, *The Many-Body Problem*, Springer (1981).
- [4] H.S. Köhler, *Nucl. Phys.* **A343** (1980) 315 y **A378** (1982) 182 ;
H.S. Köhler y B.S. Nilsson, *Nucl. Phys* **A417** (1984) 541 y **A477** (1988) 318.
- [5] R. Balescu, *Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics*, Wiley, 1975.
- [6] J. Randrup, *Nucl. Phys.* **A314** (1979) 429.
- [7] G. Bertsch, *Z. Phys.* **A289** (1978) 103.
- [8] A.A. Abrikosov y M. Khalatnikov, *Rep. Progr. Phys.* **22** (1959) 329 ;
D. Pines y P. Nozières, *The Theory of Quantum liquids*, Benjamin (N.Y.) (1966) Chap. 1.
- [9] M. Schönhofen, Tesis de Doctorado, Technische Hochschule Darmstadt, julio 1990 ;
M. Cubero, M. Schönhofen, B.L. Friman y W. Nörenberg, *Nucl. Phys.* **A519** (1990) 345c.
- [10] W. Nörenberg y H. Weidenmüller, *Introduction to the Theory of Heavy-Ion Collisions*, Springer, 1980.
- [11] R.A. Broglia, O. Civitarese, C.H. Dasso y A. Winther, *Phys. Lett.* **73B** (1978) 405.
- [12] D.H. Youngblood, J.M. Moss, C.M. Rosza, J.D. Bronson, A.D. Bacher y D.R. Brown, *Phys. Rev.* **C13** (1976) 994.
- [13] G. Holzwarth y G. Eckart, *Z. Phys.* **A284** (1978) 291.
- [14] G. Holzwarth y G. Eckart, *Nucl. Phys.* **A325** (1979) 1.
- [15] E.S. Hernández y C.E. Vignolo, *Z. Phys.* **A333** (1989) 255.
- [16] C.E. Vignolo y E.S. Hernández, *Z. Phys.* **A336** (1990) 285.
- [17] W.Cassing, S.J. Wang y W. Nörenberg, GSI-Preprint 83-36.
- [18] E.S. Hernández, C.E. Vignolo y W. Nörenberg, (será publicado).
- [19] W. Nörenberg , *Phys. Lett.* **B104** (1981) 107.
- [20] A. Lukasiak, W. Cassing y W. Nörenberg, *Nucl. Phys.* **A426** (1984) 181.
- [21] W. Cassing y W. Nörenberg, *Nucl. Phys.* **A401** (1983) 467.

- [22] K. Niita, W. Nörenberg y S.J. Wang, *Z. Phys.* **A326** (1987) 69.
- [23] W. Nörenberg, *Nucl. Phys.* **A409** (1983) 191c.
- [24] D. Berdichevsky, A. Lukasiak, W. Nörenberg y P. Rozmej, *Nucl. Phys.* **A499** (1989) 609
- [25] G. Bertsch y S. Das Gupta, *Phys. Reports* **160** (1988) 190 y referencias citadas en dicha publicación.
- [26] S. Ayik y C. Grégoire, *Nucl. Phys.* **A513** (1990) 187.
- [27] J. Randrup y B. Remaud, *Nucl. Phys.* **A514** (1990) 339.
- [28] S. Ayik, E. Suraud, J. Stryjewski y M. Belkacem, *Z. Phys.* **A337** (1990) 413.
- [29] G. Holzwarth y D. Schütte, *Phys. Lett.* **73B** (1978) 255.
- [30] G. Holzwarth y G. Eckart, *Z. Phys.* **A283** (1977) 219.
- [31] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, Pergamon Press (1981).
- [32] L.D. Landau y E.M. Lifshitz, *Mechanics*, Pergamon Press (1982).
- [33] S.E. Koonin y J. Randrup, *Nucl. Phys.* **A289** (1977) 475.
- [34] J. Vogel, E. Vogel, S. Hess y C. Toepffer, *Z. Phys* **B60** (1985) 19.
- [35] J. Wu, R. Feng y W. Nörenberg, *Phys. Lett.* **B209** (1988) 430.
- [36] D.M. Brink y G.R. Satchler, *Angular Momentum*, Clarendon Press, 1979.
- [37] B. Morgenstern y W. Nörenberg, *Nucl. Phys.* **A492** (1989) 93.
- [38] B. Schwesinger, *Phys. Rev.* **C29** (1984) 1077.
- [39] S. Chandrasekhar, *Rev. Mod. Phys.* **15** (1943) 1.
- [40] N. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and Chemistry*, North Holland, Amsterdam (1981).
- [41] M. Abramowitz e I. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York (1972).
- [42] R.W. Hasse, G. Ghosh, J. Winter y A. Lumbroso, *Phys. Rev.***C25** (1982) 2771.
- [43] G. Bertsch, *N. Phys.* **A249** (1975) 253.
- [44] S. Stringari, *Nuovo Cimento* **87 A** (1985) 231.
- [45] I.A. Pomeranchuk, *J. Exp. Theor. Phys.* **20** (1950) 919.
- [46] E.S. Hernández y L.O. Juri, *Phys. Rev. C* (será publicado).
- [47] A. Auerbach y A. Yeverechyahu, *Ann. Phys.* **95** (1975) 35
- [48] H.H. Tang y C.Y. Wong, *Phys. Rev.* **C21** (1980) 1846.
- [49] G. Buchwald, L.P. Csernei, J.A. Maruhn, W. Greiner y H. Stöcker, *Phys. Rev.* **C24** (1981) 135.

- [50] O. Bohigas, X. Campi, H. Krivine y J. Treiner, *Phys. Lett.* **64** (1976) 381.
- [51] L. Ge, Y. Zhuo y W. Nörenberg *Nucl. Phys.* **A459** (1986) 77 ;
Y. Zhuo, Y. Han y X. Wu, *Progr. Theor. Phys.* **79** (1988) 110 .
- [52] M Baranger y M. Vénetoni, *Ann. Phys. (N.Y.)* **114** (1978) 123.
- [53] K.A. Brueckner, J.R. Buchler, S. Jorna y R.J. Lombardi, *Phys. Rev.* **171**
(1968) 1188.
- [54] H. Risken, *The Fokker-Planck Equation*, Springer (1989).
- [55] H. Haken, *Synergetics (An Introduction)* Springer (1977).
- [56] S. Ayik, *Z. Phys.* **A298** (1980) 83.
- [57] K. Huang, *Statistical Mechanics*, J. Wiley & Sons (1963).
- [58] Ver p.ej. C.E. Aguiar, V.C. Barbosa, R. Donángelo y S.R. Souza, *Nucl. Phys.*
A491 (1989) 301.
- [59] P. Fröbrich y S.Y. Xu, *Nucl. Phys.* **A477** (1988) 143.
- [60] N. Van Kampen, *J. of Stat. Phys.* **54** (1989) 1289.
- [61] Ll. Serra, J. Navarro, M. Barranco y N. Van Giai, *Z. Phys. D* (será
publicado).

