Biblioteca Digital
F C E N - U B A

BIBLIOTECA CENTRAL LUIS F LELOIR
BIBLIOTECA CENTRAL LELOIR
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES UBA

Tesis de Posgrado

Procesos de dispersión a la energía de Planck

Lousto, Carlos Oscar

1991

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:
Lousto, Carlos Oscar. (1991). Procesos de dispersión a la energía de Planck. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2398_Lousto.pdf

Cita tipo Chicago:
Lousto, Carlos Oscar. "Procesos de dispersión a la energía de Planck". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1991.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2398_Lousto.pdf

EXACTAS UBA
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

UBA
Universidad de Buenos Aires

Dirección: Biblioteca Central Dr. Luis F. Leloir, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, Universidad de Buenos Aires. Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA - Tel. (++54 +11) 4789-9293

Contacto: digital@bl.fcen.uba.ar

Universidad de Buenos Aires

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

PROCESOS DE DISPERSION A LA ENERGIA DE PLANCK

Autor: Carlos Oscar Lousto

Director: Mario A. Castagnino

Lugar de trabajo: Instituto de Astronomía y Física del Espacio

Tesis presentada para optar al título de Doctor en Ciencias Físicas

Motivaciones y Contenido

Los procesos a la más alta escala de energía (la energía de Planck, $E_{pl} = \sqrt{\hbar c^5/G} \simeq 10^{19} GeV$) están bien fuera del alcance experimental de nuestros laboratorios. A tales energías, los efectos de la gravedad cuántica jugarán un papel muy importante pero, hasta el momento, no tenemos una teoría cuántica completa de la gravitación para estudiar en detalle estos efectos. Sin embargo, hay procesos que pueden ser descriptos apropiadamente con las herramientas que poseemos actualmente (Relatividad General y Teoría Cuántica de Campos). En esta Tesis, abordaremos el estudio de uno de tales procesos: La dispersión de partículas a energías del orden de E_{pl}. A estas energías la interacción predominante entre partículas es la gravitacional. Esta estará descripta (según la Relatividad General) por la métrica generada por partículas ultrarrelativistas en dispersión.

La primera parte de la Tesis está dedicada a obtener, precisamente, estas métricas tipo onda de choque que describen el campo gravitacional creado por fuentes viajando a la velocidad de la luz y llevando energías tan grandes como la de Planck. Entonces, podemos realizar un estudio semiclásico del problema de dispersión, tomando una métrica clásica de fondo sobre la cual se estudian campos cuantizados. Esto significa estudiar la colisión de una partícula en reposo (representada por un campo cuántico ϕ) con una partícula viajando a velocidades ultrarrelativistas (representada por la métrica de una onda de choque gravitacional). Afortunadamente, para este problema se puede hallar una expresión analítica de la matriz S de dispersión. Aquí aparece el primer contacto con la teoría de cuerdas fundamentales, ya que la amplitud de dispersión hallada se asemeja a la conocida amplitud de Veneziano para la teoría de cuerdas.

Estudiamos, además, las métricas generadas por fuentes extendidas viajando a velocidades ultrarrelativistas. En particular, aquellas creadas por defectos topológicos tales como: monopolos, cuerdas cósmicas y paredes de dominio. En estos casos también se puede hallar una expresión analítica para la matriz S de dispersión.

Por otro lado, al estudiar la colisión de cuerdas fundamentales en el espacio - tiempo plano, se halla una matriz de dispersión que puede interpretarse, en forma efectiva, como la matriz S de una sola cuerdas fundamentales en un fondo tipo onda de choque gravitacional de los ya nombrados. Este fondo tiene la forma, en el límite de gran parámetros de impactos, de aquél generado por una fuente puntual. Mientras que, para parámetros de impactos pequeños, la métrica asume la forma de aquella creada por una paredes de dominio. Esto muestra la conección entre el análisis semiclásico y la teoría de cuerdas fundamentales, que pretende ser (también) una teoría cuántica de la gravitación. Así vemos que hay procesos a la energía de Planck en que se pueden hacer predicciones teóricas más o menos razonables, a pesar de no contar aún con una teoría cuántica de la gravitación completa y confiable.

Indice

	pág.
I-Introducción	6
II-El límite ultrarrelativista de métricas tipo agujero negro	10
1.Métrica de Schwarzschild	10
2.Métrica de Reissner - Nordstrøm	12
3.Métrica de Kerr - Newman	16
III-La onda de choque gravitacional como solucion de las ecuaciones de Einstein	21
1.Ecuaciones de Einstein	21
2.Métrica de fondo plana	24
3.Métrica de fondo curva	27
IV-La dispersión de campos cuantizados por estas ondas de choque gravitacional	37
1.Campo escalar	37
2.Ejemplos	39
3.El caso γ grande pero finito	42
4.Campo de espín 1/2	44

V-Ondas de choque gravitacional generadas por fuentes extendidas: cuerdas cósmicas, monopolos y paredes de dominio 50

1.Cuerdas cósmicas ultrarrelativistas 50

2.Monopolos y paredes de dominio ultrarrelativistas 60

3.La dispersión de campos por estas geometrías 66

VI-Relación con la dispersión de cuerdas fundamentales 72

1.Métrica de fondo efectiva para la dispersión de supercuerdas 72

2.Dispersión 77

Apéndice A 87

Apéndice B 90

I - Introducción

El campo gravitacional generado por fuentes nulas ha sido extensivamente estudiado desde hace más de cincuenta años, comenzando con el primer artículo de Tolman[1] en 1934, en el cual analizó el campo gravitacional de pulsos de luz en la aproximación linearizada, hasta los artículos de Peres[2] y Bonnor[3] en los años sesenta, en los cuales fue definitivamente demostrado que los campos producidos por fuentes nulas son ondas gravitacionales planas frontales.

En 1971 Aichelburg y Sexl[4] derivaron una expresión exacta para la onda gravitacional asociada a una partícula puntual sin masa:

$$ds^2 = du\ dv + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + 8p \ln \rho \delta(u) du^2 \tag{1}$$

donde $\rho^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2$, $u = \tilde{z} - \tilde{t}$ y $v = \tilde{z} + \tilde{t}$. p es el impulso de la partícula.

La métrica de Aichelburg - Sexl describe el campo gravitacional de una partícula ultrarrelativista sin masa ni carga ni espín. Esta es el límite ultrarrelativista de la solución de Schwarzschild: Se deforma primero la geometría de Schwarzschild aplicando una transformación de Lorentz en la direción z con velocidad v. En el límite ultrarrelativista, cuando $v \to c = 1$ y la masa$\to 0$ (manteniendo el momento p de la partícula fijo), la deformación se hace extrema: el espacio - tiempo es plano en todos lados excepto en el plano nulo ortogonal a la dirección de movimiento y tiene un comportamiento tipo $\delta(u)$ (donde $u = z - t$). El espacio - tiempo resultante es una onda plana frontal gravitacional.

La solución de Aichelburg - Sexl ha sido rederivada por Dray y 't Hooft[5] resolviendo directamente las ecuaciones de Einstein para una fuente viajando a la velocidad de la luz.

La comprensión de la física a la energía de Planck (la más alta escala de energía) es de fundamental importancia y de presente gran interés. Ante la ausencia de guía experimental vale la pena investigar procesos que puedan ser calculados y formulados en una forma precisa. Cuando las partículas se dispersan a energías del orden o mayores que la de Planck, la interación gravitacional domina el proceso de colisión. A tales enormes energías, la descripción de las partículas fundamentales por campos (o cuerdas) en el espacio - tiempo plano cesa de ser válida. La geometría curva del espacio - tiempo creado por las partículas debe ser tenida en cuenta . O sea, debemos resolver las ecuaciones de movimiento del campo (o cuerda) en la geometría del espacio - tiempo curvo apropiado al problema en cuestión. Como veremos, las geometrías tipo Aichelburg - Sexl[4] son relevantes para el estudio de la dispersión de partículas a muy alta energía ($s \geq m_{pl}^2$). Este problema ha despertado mucho interés recientemente. 't Hooft y otros[6,7,8] han estudiado la dispersión de campos por la geometría de Aichelburg - Sexl, hallando una amplitud de dispersión:

$$S^{AS}(s,t) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{4}{|\,t\,|}\right)^{iG(s-m^2)} \frac{\Gamma[1 - iG(s - m^2)]}{\Gamma[iG(s - m^2)]} + \delta(\vec{k}_\perp - \vec{p}_\perp) \ . \tag{2}$$

donde t y s son las variables de Mandelstam del problema, o sea:

$$Gs = wp + Gm^2 \quad , \quad t = -\,|\,\vec{k}_\perp - \vec{p}_\perp\,| \ .$$

Se observa una curiosa similitud de esta amplitud de dispersión con la de Veneziano para la teoría de Cuerdas.

S^{as} exhibe una infinita secuencia de polos imaginarios en $G(s - m^2) = -in$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ Estos polos, llamados de 't Hooft, son típicos de amplitudes Coulombianas (dan el espectro de los estados ligados relativistas del Hidrógeno).

Por otro lado, Veneziano, Amati y otros[9,10,11,12], calcularon la colisión de cuerdas en el espacio - tiempo plano. Se encuentra, sin embargo, una matriz S que en los límites apropiados se comporta como si cada cuerda fundamental se estubiera propagando en una métrica de fondo tipo Aichelburg - Sexl generalizada. En ecuaciones, la matriz S puede escribirse como una integral de camino de una cuerda en la primera cuantización:

$$S = \int dX^{\mu} \exp\left\{\frac{iT}{2h}\int d\sigma \int d\tau \partial^{\alpha} X^{\mu} \partial_{\alpha} X^{\nu} g_{\mu\nu}(X)\right\} \tag{3}$$

donde, lo que aparece en el exponente no es otra cosa que la acción de Polyakov para cuerdas moviéndose en la métrica $g_{\mu\nu}$ tipo Aichelburg - Sexl generalizada. Además, comparando los resultados de dispersión de cuerdas fundamentales con con este *ansätze*, se puede determinar la forma precisa de la función $f(\rho)$ que aparece en la métrica de Aichelburg - Sexl generalizada y calcular el perfil de energía de la fuente efectiva.

En esta Tesis se estudia el espacio - tiempo generado por partículas ultrarrelativistas dotadas inicialmente de carga y espín con el fin de tener una descripción más completa de la geometría producida por las partículas con energías del orden o mayores que la de Planck. Los resultados se pueden resumir escribiendo la métrica de una onda de choque con perfil $f(x^i)$ arbitrario (Aichelburg - Sexl generalizada), es decir:

$$ds^2 = dudv - f(x^i)\delta(u)du^2 + dx_i dx^i \quad , \quad i = 2, 3, ...D-1 \tag{4}$$

También estudiamos la dispersión de partículas ultrarrelativistas cargadas y con espín en un sistema de referencia donde sólo una de las partículas (digamos la partícula 2) tiene una energía del orden de la de Planck, E_{pl} y ambas partículas tienen masas en reposo $m_1, m_2 \ll m_{pl}$. La partícula 2 es ultrarrelativista y el espacio - tiempo alrededor de ella

está descripto por la métrica (4). La partícula 1 es una partícula de prueba, ya que su energía es mucho menor que E_{pl}. Consideremos la partícula 1 como neutra, entomces el problema de dispersión se reduce a resolver la ecuación de Klein - Gordon o de Dirac libre en el espacio - tiempo curvo (4). La regularización continua de este problema lleva a sólo un corrimiento de fase para el campo escalar de

$$\varphi(x^i) = \omega f(x^i)/4 \ . \tag{5}$$

No se observa producción de partículas ni radiación por frenado, o sea la dispersión es elástica. Calculamos exactamente la matriz S para estos procesos y hallamos una infinita secuencia de polos.

Luego abordamos el estudio de objetos ultrarrelativistas extendidos. Tomamos como ejemplo los monopolos, las cuerdas cósmicas y las paredes de dominio ya que se piensa que desde su formación en el universo temprano poseen velocidades ultrarrelativistas. Se estudia la dispersión de campos cuánticos por estas geometrías y se hallan expresiones analíticas para la matriz S.

La Tesis termina con un capítulo que relaciona todos los capítulos anteriores con la dispersión de cuerdas fundamentales en el espacio - tiempo plano. La matriz S de dispersión de cuerdas fundamentales en el espacio - tiempo plano se puede describir equivalentemente como la dispersión de una cuerda en el fondo curvo (4). Esto clarifica la interpretación y muestra el surgimiento de una métrica curva no trivial a partir del espacio - tiempo plano.

Finalmente, pensamos que los elementos presentados en esta Tesis servirán para probar y comprender mejor la estructura de la teoría de cuerdas fundamentales o cualquier otra teoría cuántica de la gravitación a la escala de Planck.

II - El límite ultrarrelativista de métricas tipo agujero negro

En este capítulo tomaremos una solución de las ecuaciones de Einstein representando una fuente estática y le aplicaremos una transformación de Lorentz con velocidad $v \to 1$. Este límite singular producirá como resultado una nueva solución a las ecuaciones de Einstein representando una onda de choque gravitacional localizada en el plano $u = 0$ con un perfil $f(\rho)$ característico de la fuente en consideración.

1. Métrica de Schwarzschild

La métrica de Schwarzschild representa el campo gravitacional generado por una partícula de masa m en reposo. Por conveniencia, escribamos ésta en coordenadas isotrópicas[13]:

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - m/2r}{1 + m/2r}\right)^2 dt^2 + (1 + m/2r)^4 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \tag{6}$$

donde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

Para obtener el campo gravitacional que sentiría un observador desplazándose con un movimiento uniforme respecto a la masa m, apliquemos a esta métrica una transformación de Lorentz en la dirección z:

$$\bar{t} = \gamma(t + vz) \quad , \quad \bar{z} = \gamma(z + vt)$$

$$\bar{y} = y \quad , \quad \bar{x} = x \quad , \quad \gamma = (1 - v^2)^{-1/2} \tag{7}$$

Entonces la métrica (6) se verá de la siguiente forma:

$$ds^2 = \gamma^2 \left[g_{rr}(r) - g_{00}(r)\right] (d\bar{t} - v d\bar{z})^2 + g_{rr}(r)(-d\bar{t}^2 + d\bar{x}^2 + d\bar{y}^2 + d\bar{z}^2) \tag{8}$$

donde hemos hecho uso de:

$$\gamma^2(d\tilde{z} - vd\tilde{t})^2 = d\tilde{z}^2 - d\tilde{t}^2 + \gamma^2(d\tilde{t} - vd\tilde{z})^2. \tag{9}$$

A nosotros nos interesa particularmente el límite ultrarrelativista de esta métrica, i.e. $v \to 1$. Para obtener un resultado finito, debemos hacer tender a cero la masa en reposo en la expresión (8) de modo tal que el impulso (o la energía) permanezca constante, o sea:

$$m = p\gamma^{-1} \tag{10}$$

El límite resultante es muy sutil y debe calcularse en el sentido de funciones generalizadas. En el Apéndice A se muestra que:

$$\lim_{v \to 1} \gamma^2 4m/r = -4p\left[\delta(\tilde{z} - \tilde{t})\ln\rho^2 - |\tilde{z} - \tilde{t}|^{-1}\right] \qquad \rho^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 \tag{11}$$

y luego de la siguiente transformación de coordenadas

$$\begin{aligned} d\tilde{t} - d\tilde{z} &= dt - dz \\ d\tilde{t} + d\tilde{z} &= dt + dz - 4p\,|\tilde{z} - \tilde{t}|^{-1}\,(dt - dz)\,, \end{aligned} \tag{12}$$

la métrica quedará:

$$ds^2 = du\,dv + dx^2 + dz^2 + 8p\ln\rho\,\delta(u)du^2 \tag{13}$$

donde $u = \tilde{z} - \tilde{t}$ y $v = \tilde{z} + \tilde{t}$ son las coordenadas nulas usuales.

Esta es la llamada métrica de Aichelburg - Sexl[4]. Representa el campo gravitacional generado por una partícula escalar de masa en reposo nula viajando a la velocidad de la luz. Este campo gravitacional es plano en todos lados excepto en la hipersuperficie nula $u = 0$ perpendicular al movimiento de la partícula. El tensor de Riemann calculado a

partir de (13) es también proporcional a $\delta(u)$. Por lo tanto la métrica de Schwarzschild, que era de tipo Petrov D, luego de tomar el límite singular $v \to 1$, se transformó en tipo Petrov N (radiación pura). Vale la pena remarcar que si hubiésemos partido de la versión linearizada de la métrica (6), hubiéramos obtenido el mismo resultado (13) para la métrica final[4]. Esto se debe al proceso mismo de tomar el límite $v \to 1$ que sólo deja rastros de los términos lineales en m. Volveremos a ver esta particularidad cuando generalicemos (13) para otras fuentes ultrarrelativistas.

2. Métrica de Reissner - Nordstrøm[14]

La métrica de Reissner - Nordstrøm representa el campo gravitacional generado por una partícula puntual dotada de masa m y carga Q. En coordenadas isotrópicas toma la siguiente forma[14]:

$$ds^2 = -\left(1 - 2m/r + Q^2/r^2\right) dt^2 + \left(1 + m/\bar{r} + (m^2 - Q^2)/4\bar{r}^2\right)^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (14)$$

donde

$$r = \bar{r}\left(1 + m/\bar{r} + (m^2 - Q^2)/4\bar{r}^2\right) \quad , \quad \bar{r}^2 = x^2 + y^2 + z^2 \ .$$

Luego de aplicar la transformación de Lorentz (7) se obtiene:

$$ds^2 = \gamma^2 \left[g_{\bar{r}\bar{r}}(r) - g_{00}(r)\right] (d\tilde{t} - v d\tilde{z})^2 + g_{\bar{r}\bar{r}}(r)(-d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2). \quad (15)$$

Aquí, para obtener un límite finito cuando $v \to 1$ no sólo debemos tomar $m \to 0$ como en la ec.(10), sino que también la carga debe ir a cero como:

$$Q^2 = p_e^2 \gamma^{-1} \quad (16)$$

manteniendo el momento electromagnético p_e constante.

La métrica resultante se obtendrá de calcular:

$$ds^2 = (d\tilde{t} - v d\tilde{z})^2 \lim_{v \to 1} \gamma^2 \left[4m/\tilde{r} - 3Q^2/2\tilde{r}^2\right] + (-d\tilde{t}^2 + d\tilde{x}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{z}^2) \tag{17}$$

que, con ayuda de (11) y del límite:

$$\lim_{v \to 1} \gamma^2 3Q^2/2\tilde{r}^2 = \frac{3}{2}\pi p_e^2 \frac{1}{\rho}\delta(\tilde{z} - \tilde{t}) \ , \tag{18}$$

que se calcula en el apéndice A, puede escribirse del la siguiente forma[14]:

$$ds^2 = du\ dv + dx^2 + dz^2 + \left[8p \ln \rho + \frac{3}{2}\pi p_e^2 \frac{1}{\rho}\right] \delta(u) du^2 \ . \tag{19}$$

Esta métrica representa el campo gravitacional de una partícula viajando a la velocidad de la luz con impulsos cinéticos y electromagnético p y p_e respectivamente. La presencia de la $\delta(u)$ indica que de nuevo el espacio - tiempo será plano en todos lados excepto en el plano nulo ortogonal a la dirección de movimiento y tendremos una onda de choque acompañando a la partícula. Vemos que la dependencia en ρ de la componente electromagnética es diferente a la de la materia.

Es interesante notar que la métrica de Reissner - Nordstrøm contiene tres casos: i) $Q^2 < m^2$, que deja la singularidad desnuda. ii) $Q^2 = m^2$, el así llamado caso extremo y iii)$Q^2 > m^2$, que corresponde al caso agujero negro. Sin embargo, cuando $\gamma \to \infty$ sólo tendremos el caso iii), pues $p_e^2\gamma > p^2$ y tendremos que (19) representa, efectivamente, la métrica de una partícula ubicada en la singularidad $\rho = 0$. El caso ii) corresponde a $p_e^2 = \gamma^{-1}p^2 \to 0$, que recobra el resultado (13). En el caso i) los horizontes de eventos

estaban ubicados en $r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - Q^2}$, pero para $\gamma \to \infty$, ambos desaparecen hacia $r = 0$.

Resulta interesante ver el caso D dimensional de la métrica de Reissner - Nordstrøm, ya que en los últimos años se tiende a estudiar teorías de unificación en D dimensiones (supergravedad, teoría de cuerdas, etc.).

La métrica de Reissner - Nordstrøm en D dimensiones no compactificadas puede escribirse de la siguiente forma:

$$ds^2 = -g(r)dt^2 + g(r)^{-1}dr^2 + r^2 d\Omega_{D-2} \tag{20}$$

donde

$$\begin{aligned} g(r) &= 1 - 2C/r^{D-3} + E^2/r^{2(D-3)} \\ C &= \frac{8\pi G m}{(D-2)\Omega_{D-1}} \\ E^2 &= \frac{8\pi G Q^2}{(D-2)(D-3)} \\ \Omega_D &= \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \ . \end{aligned} \tag{21}$$

La tansformación a coordenadas isotrópicas $\bar{r}$, será:

$$r^{D-3} = \bar{r}^{D-3}\left[1 + C/\bar{r}^{D-3} + (C^2 - E^2)/4\bar{r}^{2(D-3)}\right] \ . \tag{22}$$

Aplicando la transformación de Lorentz (7) que deja las coordenadas transversales x_i , $i = 2, 3, ...D-1$ sin cambios, la métrica resultante será:

$$ds^2 = (d\bar{t} - v d\bar{z})^2 \lim_{v \to 1} \gamma^2 \left[4C/\bar{r}^{D-3} - 3E^2/2\bar{r}^{2(D-3)}\right] + (-d\bar{t}^2 + d\bar{z}^2 + d\bar{x}_i d\bar{x}^i) \tag{23}$$

donde los límites

$$\lim_{v\to 1} \gamma^2 4C/\bar{r}^{D-3} = K\rho^{-(D-4)}\delta(u)$$

$$\lim_{v\to 1} \gamma^2 3E^2/2\bar{r}^{2(D-3)} = B\rho^{-2(D-4)-1}\delta(u) \tag{24}$$

$$K = -\frac{16\pi Gp}{(D-4)\Omega_D}$$

$$B = -\frac{6\pi Gp_e^2}{(D-2)(D-7)} \prod_{j=0}^{D-4} \frac{2D-7-2j}{2(D-3-j)}$$

se calculan en en apéndice A.

El resultado final está dado por[14]:

$$ds^2 = dudv - f_D(\rho)\delta(u)du^2 + dx_i dx^i \tag{25}$$

$$f_D(\rho) = K\rho^{-(D-4)} + B\rho^{-2(D-4)-1} \ .$$

Esta métrica generaliza para $D > 4$ la dada por (19).

3. Métrica de Kerr - Newman[15]

La métrica de Kerr - Newman representa el campo gravitacional generado por una partícula rotante cargada, dotada de masa M, carga Q y momento angular por unidad de masa a. Para obtener el límite ultrarrelativista de esta métrica seguiremos los lineamientos de las secciones anteriores, sin embargo la inclusión del momento angular o espín complica notablemente las cuentas, lo que se verá reflejado en el resultado final.

La métrica de Kerr - Newman escrita en coordenadas de Boyer - Lindquist es[13]:

$$\begin{aligned} ds^2 = &-(\Delta - a^2\sin^2\theta)q^{-2}dt^2 - 2Mra\sin^2\theta q^{-2}dtd\varphi + \frac{q^2}{\Delta}dr^2 + \\ &q^2d\theta^2 + \left[(r^2+a^2)^2 - \Delta a^2\sin^2\theta\right]q^{-2}\sin^2\theta d\varphi^2 \ , \end{aligned} \tag{26}$$

donde

$$\Delta = r^2 - 2Mr + a^2 + Q^2 \qquad q^2 = r^2 + a^2\cos^2\theta \ .$$

Teniendo en mente aplicar una transformación de Lorentz, escribiremos la métrica (26) en coordenadas asimptóticamente Cartesianas

$$\begin{aligned} x &= (r^2+a^2)^{1/2}\sin\theta\cos\varphi \ , \\ y &= (r^2+a^2)^{1/2}\sin\theta\sin\varphi \ , \\ z &= r\cos\theta \quad , \quad t = t \ . \end{aligned} \tag{27}$$

Apliquemos ahora una transformación de Lorentz (con velocidad v) en la dirección z (una partícula ultrarrelativista tiene sólo dos polarizaciones de espín ($\pm S$), en la dirección de movimiento)

$$\tilde{t} = \gamma(t+vz) \quad , \quad \tilde{z} = \gamma(z+vt) \quad ,$$

$$\tilde{y} = y \tag{28}$$

$$\gamma = (1 - v^2)^{-1/2} \ .$$

El límite $v \to 1$ en la métrica resultante es un punto delicado, pero podremos extraer una expresión con sentido permitiendo que M , Q y S dependan de γ y tiendan a cero como:

$$m = p\gamma^{-1} \quad , \quad Q^2 = p_e^2\gamma^{-1} \quad , \quad S = aM = ap\gamma^{-1} \ . \tag{29}$$

Entonces, luego de reemplazar las ecs. (27) - (29) en (26), hallamos:

$$ds^2 = -d\tilde{t}^2 + d\tilde{z}^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{x}^2 + (d\tilde{t} - vd\tilde{z})^2 \lim_{v\to 1} \left[\gamma^2(\Delta g_{\tilde{t}\tilde{t}} + \Delta g_{\tilde{z}\tilde{z}})\right] + O(\gamma^{-1}) \ , \tag{30}$$

donde

$$\Delta g_{\tilde{t}\tilde{t}} = \frac{2M\tilde{r} - Q^2}{\tilde{r}^2 + a^2\cos^2\theta} \ ,$$

$$\Delta g_{\tilde{z}\tilde{z}} = \frac{(2M\tilde{r} - Q^2)(\tilde{r}^2 + a^2)\cos^2\theta}{(\tilde{r}^2 + a^2\cos^2\theta)(\tilde{r}^2 - 2M\tilde{r} + a^2 + Q^2)} \ , \tag{31}$$

y

$$\cos\theta = z(\tilde{z})/\tilde{r} \ ,$$

$$\tilde{r}^2 = \frac{1}{2}\left[z(\tilde{z})^2 + \rho^2 + \sqrt{(z^2(\tilde{z}) + \rho^2)^2 + 4a^2z^2(\tilde{z})}\right] \ , \tag{32}$$

$$\rho^2 = \tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 - a^2 \ .$$

Notemos que los términos correspondientes a $g_{t\varphi}$ en el límite $v \to 1$ tienden a cero como $\gamma^{-1}\delta(\tilde{t} - \tilde{z})$.

Los límites que aparecen en la ec. (30) son calculados explícitamente en el Apéndice B, dando como resultado una onda de choque gravitacional [16]:

$$ds^2 = du\ dv - f(\rho)\delta(u)du^2 + d\tilde{y}^2 + d\tilde{x}^2 \ , \tag{33}$$

$$f(\rho) = -8p\ln\rho - \frac{3}{2}\pi p_e^2\rho^{-1} + p\sum_{m=1}^{\infty} B_m(a^2/\rho^2)^m - \pi p_e^2\rho^{-1}\sum_{m=1}^{\infty} C_m(a^2/\rho^2)^m \tag{34}$$

donde $u = \tilde{z} - \tilde{t}$ y $v = \tilde{z} + \tilde{t}$ son las coordenadas nulas usuales, y los coeficientes B_m y C_m son factores numéricos que se hallan en el Apéndice B:

$$B_m = 4\sum_{k=0}^{m}(-)^{m-k}\sum_{j=0}^{m-1}(-)^j\binom{m-1}{j}\left\{\frac{A_{k,2m-2k+1/2}}{2j+m+1} + \frac{A_{k,2m-2k+3/2}}{2j+m+2}\right\} \ , \tag{35}$$

$$\begin{aligned} C_m = \sum_{k=0}^{m}(-)^{m-k}4^{-m}\{&\frac{A_{k,2m-2k+1}}{(2m)!}(4m-4)!!\prod_{j=0}^{m-1}\frac{2m-2j-1}{2m+2j+1} + \\ &+ \frac{A_{k,2m-2k+2}}{2(2m+1)!}(4m+1)!!\prod_{j=0}^{m}\frac{2m-2j+1}{2m+2j+1}\} \ . \end{aligned} \tag{36}$$

La métrica (30) representa el campo gravitacional de una partícula de masa m, carga Q y espín S en el límite ultrarrelativista $v \to 1$ cuando esta tres cantidades tienden a cero manteniendo sus respectivos momentos asociados (p, p_e y a) constantes. La dependencia en ρ de cada contribución es diferente. La contribución del espín se acopla al momento cinético p, sólo a través de potencias impares negativas de ρ; mientras que el acoplamiento a la carga se produce a través de potencias negativas pares de ρ.

El espacio - tiempo es plano en todos lados excepto en el plano artogonal a la dirección de propagación y tiene un comportamiento tipo $\delta(u)$ característico de las contracciones producidas por objetos viajando a la velocidad de la luz.

En la métrica (33)-(34), la condición $\rho^2 = \bar{x}^2 + \bar{y}^2 - a^2 \geq 0$ significa que esta solución impulsada "recuerda" la singularidad tipo anillo de la métrica original de Kerr[17].

Vale la pena también puntualizar que la geometría impulsada (33)-(34) tiene $M^2 = p^2\gamma^{-2} < Q^2 + a^2 = p_e^2\gamma^{-1} + a^2$ cuando $\gamma \to \infty$. Esto significa que la métrica (26) no representa un agujero negro, sino a una partícula ubicada en la singularidad irremovible $r = 0$.

Recientemente, Ferrari y Pendenza[18] obtuvieron para el límite ultrarrelativista de la métrica de Kerr sólo el primer término de la ec(34). Con su método, ellos no alcanzan a encontrar las potencias adicionales de ρ proporcionales a B_m, ya que imponen $u = 0$ antes de tomar el límite singular $v \to 1$. Si hubiéramos hecho esto mismo en las ecs. (259) y (265) todos los términos adicionales se anularían pero, aquí tenemos un doble límite, o sea $v \to 1$ y $u \to 0$ que debe tratarse en el sentido de distribuciones, como lo hemos hecho en el Apéndice B y el resultado final será, sin duda, el dado por las ecs.(34)-(36).

Para comprender mejor los efectos clásicos que produce una métrica tipo onda de choque gravitacional

$$ds^2 = du\left[dv - f(x^i)\delta(u)du\right]du + dx_i dx^i \qquad i = 2, 3, ...D-1 \tag{37}$$

se pueden estudiar sus curvas geodésicas. Está claro, por la presencia de la delta, que para $u \neq 0$ estas curvas serán líneas rectas; ya que nos quedará la métrica Minkowskiana. Al cruzar el plano $u = 0$ (donde está ubicada la onda de choque gravitacional) las coordenadas

$(u,\ x^i)$ seguirán con continuidad, mientras que la coordenada v sufrirá un corrimiento instantáneo:

$$\Delta v = f(\rho)\ . \tag{38}$$

También se producirá un efecto de refracción descripto por[5]:

$$\cot\alpha + \cot\beta = \frac{1}{2}\partial_\rho f \tag{39}$$

donde α y β son los ángulos incidente y reflejado respectivamente.

III - La onda de choque gravitacional como solución de las ecuaciones de Einstein

En el capítulo anterior hemos tomado una solución de las ecuaciones de Einstein representando el campo gravitacional de una fuente en reposo y le hemos aplicado una transformación de Lorentz con $v \to 1$ para hallar la métrica tipo onda de choque gravitacional asociada a esta geometría. En este capítulo plantearemos el problema en algún sentido inverso, ya que procuraremos resolver las ecuaciones de Einstein para una fuente ya desde el principio ultrarrelativista.

1. Ecuaciones de Einstein[19]

Hemos visto en el capítulo anterior cómo, a partir de un espacio - tiempo curvo con una transformación de Lorentz singular hallamos una métrica que representa una onda de choque gravitacional superpuesta al espacio plano. El formalismo que vamos a desarrollar nos permitirá estudiar estas onda de choque gravitacional en un fondo curvo

$$ds^2 = 2A(u,v')dudv' + g(u,v')h_{ij}(x^k)dx^i dx^j \ . \tag{40}$$

Solución de las ecuaciones de Einstein sin onda de choque gravitacional.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = T_{\mu\nu} \tag{41}$$

Entonces, propongamos como métrica solución de las ecuaciones de Einstein:

$$ds^2 = 2A(u,v)du[dv - f(x^k)\delta(u)du] + g(u,v)h_{ij}(x^k)dx^i dx^j \tag{42}$$

donde

$$v = v' + f(x^k)\Theta(u) \tag{43}$$

$\Theta(u)$ es la función escalón.

Las componentes no nulas del tensor de Ricci están dadas por[5]:

$$R_{ui} = -(A_{,v}/A)f_{,i}\,\delta(u)\ , \tag{44}$$

$$R_{ij} = {}^{D-2}R_{ij} - h_{ij}[g_{,uv}/A + (g_{,vv}/A)f\delta(u)]\ , \tag{45}$$

$$R_{vv} = -g_{,vv}/g + \frac{1}{2}g_{,v}^2/g^2 + g_{,v}\,A_{,v}/gA\ , \tag{46}$$

$$\begin{aligned} R_{uv} =& A_{,u}\,A_{,v}/A^2 - A_{,uv}/A + \frac{1}{2}g_{,u}\,g_{,v}/g^2 - g_{,uv}/g \\ &+(A_{,v}^2/A^2 - A_{,vv}/A - g_{,v}\,A_{,v}/gA)f\delta(u) \end{aligned} \tag{47}$$

$$\begin{aligned} R_{uu} =& -g_{,uu}/g + \frac{1}{2}g_{,u}^2 + g_{,u}\,A_{,u}/gA + (2A_{,uv}/g \\ &- 2A_{,u}\,A_{,v}/A^2 + g_{,v}\,A_{,u}/gA + g_{,u}\,A_{,v}/gA)f\delta(u) \\ &+ 2(A_{,vv}/A - A^2{}_{,v}/A^2 + g_{,v}\,A_{,v}/gA)f^2\delta^2(u) \\ &+ (A/g)\nabla^2 f\delta(u) - (g_{,v}/g)f\delta'(u)\ , \end{aligned} \tag{48}$$

donde ∇^2 y ${}^{D-2}R$ son, respectivamente, el Laplaciano y tensor de Ricci del espacio $D-2$ - dimensional con métrica h_{ij}.

Pediremos que la métrica de fondo (40) sea solución de las ecuaciones de Einstein con fuente $T^{(b)}_{\mu\nu}$, o sea:

$$R_{\mu\nu}\,|_{f=0} = T^{(b)}_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{(b)}_{\mu\nu}T^{(b)} + \Lambda g^{(b)}_{\mu\nu} \tag{49}$$

donde $R_{\mu\nu}$ está dado por las ecs. (44) - (48) y

$$T_{\mu\nu} = T^{(b)}_{\mu\nu} + T^{(p)}_{\mu\nu}\ .$$

Aquí hemos descompuesto el tensor energía - momento $T_{\mu\nu}$ en dos partes: $T^{(b)}_{\mu\nu}$ que se refiere a los campos o materia que genera la métrica de fondo, y $T^{(p)}_{\mu\nu}$, que es el tensor energía - momento de la partícula viajando a la velocidad de la luz y que genera la onda de choque gravitacional.

Consideraremos $T^{(p)}_{\mu\nu}$ de la siguiente forma:

$$T^{(p)}_{uu} = \sigma(x^k)\delta(u) \ , \tag{50}$$

anulándose las demás componentes. Ahora, utilizando (49), las ecuaciones de Einstein (41) para la métrica completa (43) (o sea la onda de choque gravitacional) se reducirán a:

$$-(A_{,v}/A)f_{,i}\,\delta(u) = 0 \ , \tag{51}$$

$$h_{ij}(g_{,vv}/A)f\delta(u) = 0 \ , \tag{52}$$

$$(A^2_{,v}/A^2 - A_{,vv}/A - g_{,v}A_{,v}/gA)f\delta(u) = 0 \ , \tag{53}$$

$$\begin{aligned}
&(2A_{,uv}/g - 2A_{,u}A_{,v}/A^2 + g_{,v}A_{,u}/gA + g_{,u}A_{,v}/gA)f\delta(u) \\
&+ 2(A_{,vv}/A - A^2{}_{,v}/A^2 + g_{,v}A_{,v}/gA)f^2\delta^2(u) \\
&+ (A/g)\nabla^2 f\delta(u) - (g_{,v}/g)f\delta'(u) \\
&= T^{(p)}_{uu} - \frac{1}{2}g_{uu}T^{(p)} + \Lambda g_{uu} \ ,
\end{aligned} \tag{54}$$

donde hemos utilizado la forma del $T^{(p)}_{\mu\nu}$ dado por la ec (50). De estas ecs. podemos deducir cuando la métrica propuesta (42) es la solución de las ecuaciones de Einstein:

$$\partial_v A(0,v) = 0 = \partial_v g(0,v) \tag{55}$$

$$(A/g)\nabla^2_{D-2}f + (2A\Lambda - g_{,uv}/g)f = \sigma(x^k) \tag{56}$$

ambas evaluadas en $u = 0$. Estas serán las condiciones que deberá cumplir la métrica propuesta (42) para satisfacer las ecuaciones de Einstein. Mientras las condiciones (55) se refieren a restricciones sobre la métrica de fondo (40), la (56) es más operativa en el sentido que dada $\sigma(x^k)$ permite, mediante su resolución, hallar $f(x^k)$. Esta ecuación, siendo lineal en f y la fuente, suele simplificar el problema de hallar la métrica de la onda de choque gravitacional a partir de una fuente dada.

2. Métrica de fondo plana

Para comprobar el poder de las ecs. (55)-(56) tomemos una métrica de fondo Minkowskiana. Entonces, de (40) vemos que:

$$A = \frac{1}{2} \quad \text{y} \quad g = 1 \ , \tag{57}$$

con lo cual las condiciones (55) se cumplen trivialmente. Para resolver la (56) debemos dar el tensor energía - momento ultrarrelativista de la fuente generadora de la onda de choque gravitacional. Veamos algunos ejemplos:

a) Partícula sin carga

El tensor energía - momento de una partícula sin masa localizada en $\rho = 0$ y $u = 0$ tiene sólo una componente no nula

$$T_{uu} = p\delta(\rho)\delta(u) \ . \tag{58}$$

Reemplazando esta expresión en (56):

$$\nabla_\rho^2 f = 16\pi p \delta(\rho) \ . \tag{59}$$

La solución de esta ecuación (sin tomar en cuenta las soluciones a la ecuación homogénea, que representan ondas gravitacionales sin fuente) es:

$$f(\rho) = 8p \ln \rho \ . \tag{60}$$

O sea, la métrica resultante será la de Aichelburg - Sexl, i.e. la (13).

Es interesante ver que la generalización D - dimensional de (60) puede hallarse fácilmente por este método. En efecto, la solución a la ecuación:

$$\nabla_{D-2}^2 f = 16\pi p \delta^{D-2}(\rho) \tag{61}$$

está dada por[10,20]

$$f_D(\rho) = \frac{16\pi p}{\Omega_{D-2}} \frac{\rho^{4-D}}{D-4} \ ,$$

$$\Omega_D = \frac{2\pi^{D/2}}{\Gamma(D/2)} \tag{62}$$

que coincide con la parte correspondiente al impulso p de (25), hallada impulsando la solución D - dimensional.

b) Partícula cargada[14]

La componente electromagnética del tensor energía - momento de una partícula cargada está dada por [13]:

$$T_0^0 = T_r^r = -Q^2/r^4 \ , \quad (F_0^i = Qx^i/r^3) \ . \tag{63}$$

Esta expresión es válida en el sistema de coordenadas en el que la partícula está en reposo. Al aplicar una transformación de Lorentz en la dirección z, la única componente no nula en el límite $v \to 1$ es (ver Apéndice A):

$$T^e_{uu} = \lim_{v \to 1} \frac{3}{4}\gamma^2 Q^2/r^4 = \frac{3}{2}\pi p_e^2 \rho^{-3}\delta(u) \ . \tag{64}$$

Entonces la ec. (56) quedará:

$$\nabla^2_\rho f = -\frac{3}{2}\pi p_e^2 \rho^{-3} \ , \tag{65}$$

cuya solución está dada por:

$$f = -\frac{3}{2}\pi p_e^2 \rho^{-1} \ , \tag{66}$$

que es la misma expresión (19) obtenida como el límite ultrarrelativista de la geometría de Reissner - Nordstrøm.

También podemos comenzar con el tensor energía - momento electromagnético de una carga puntual en el espacio - tiempo plano D - dimensional y tomar el límite ultrarrelativista $\gamma \to \infty$, $m \to 0$ y $Q \to 0$, o sea:

$$T^e_{uu} = \lim_{v \to 1} \frac{3}{2}\gamma^2 F^2 (D-3)^2/r^{2(D-2)} = C\rho^{2(D-3)-1}\delta(u) \ , \tag{67}$$

con $C = (2D-7)B/(D-3)/16\pi$.

Por lo tanto, la generalización D - dimensional de la ec. (31) será:

$$\rho^{3-D}\partial_\rho(\rho^{D-3}\partial_\rho)f = -16\pi G[p\delta^{D-2}(\rho) + C\rho^{-2(D-3)-1}] \ , \tag{68}$$

con solución dada por:

$$f_D(\rho) = K\rho^{-(D-4)} + B\rho^{-2(D-4)-1} \ ,$$

que es la misma que (25) obtenida a partir del límite ultrarrelativista de la geometría D - dimensional de Reissner - Nordstrøm.

3. Métrica de fondo curva[19]

Ahora, apliquemos este método al estudio de las onda de choque gravitacional generadas por partículas ultrarrelativistas en un fondo estático esféricamente simétrico D - dimensional.

Primero, observemos que cualquier solución con simetría esférica de las ecuaciones de Einstein puede ser escrita de la forma (40), ya que la parte angular ya viene escrita en la forma deseada:

$$d\Omega^2_{D-2} = h_{ij}(x^k)dx^i dx^j \ , \ i,j = 2,3,.....,D-1 \ , \tag{69}$$

donde $d\Omega^2_{D-2}$ es la longitud de arco de la $D-2$ esfera y las componentes u, v de la métrica siempre puede ser escrita como $ds^2 = 2A(u,v)dudv$ ya que cualquier métrica bidimensional es conforme al plano.

Si escribimos la métrica de un espacio - tiempo estático con simetría esférica de la siguiente forma:

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + H(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2_{D-2} \tag{70}$$

y transformamos a variables $\tilde{u}, \tilde{v}$, dadas por

$$d\tilde{u} = dt - dr^* \ , \ d\tilde{v} = dt + dr^* \ , \tag{71}$$

donde:

$$dr^* = \sqrt{H(r)/B(r)}dr \ , \tag{72}$$

obtenemos:

$$ds^2 = -B(r)d\tilde{u}d\tilde{v} + r^2 d\Omega^2_{D-2} \ . \tag{73}$$

Con una nueva transformación a variables tipo Kruskal:

$$u = -\exp(-k_h\tilde{u}) \ , \quad v = \exp(k_h\tilde{v}) \tag{74}$$

donde $k_h = k(r_h)$ es la gravedad superficial, evaluada en el horizonte de eventos r_h. Finalmente obtenemos:

$$ds^2 = -B(r)k_h^{-2}\exp(-2k_h r^*)dudv + r^2 d\Omega^2_{D-2} \ . \tag{75}$$

Ahora somos capaces de identificar las funciones que aparecen en (40):

$$A(u,v) = -\frac{1}{2}B(r)k_h^{-2}\exp(-2k_h r^*) \ , \tag{76}$$

$$g(u,v) = r^2 \ , \tag{77}$$

donde $r(u,v)$ está dado implícitamente a partir de la ec. (74):

$$u\,v = -\exp(2k_h r^*) \doteq q(r) \ . \tag{78}$$

La última igualdad es por la relación (72). Como r es una función de uv, al derivar A y g y evaluar en $u = 0$ se cumplen las condiciones (55).

Ahora necesitamos evaluar $g_{,uv}$ en $u = 0$ para usarlo en la ec.(56). De la ec.(78) tenemos que:

$$\partial^2_{uv}(uv) = 1 = q'' \frac{\partial r}{\partial u}\frac{\partial r}{\partial v} + q'\partial^2_{uv} r \ ,$$

y de la ec.(77)

$$g_{,uv} = \partial^2_{uv} r^2 \ |_{u=0} = 2r_h(dq/dr)^{-1} \ .$$

De las ecs.(72) y (78)

$$dq/dr = -2k_h \exp(2k_h r^*)\sqrt{H/B} \ ,$$

entonces:

$$g_{,uv} = -(r_h/k_h)\exp(-2k_h r^*)\sqrt{B/H} \ . \tag{79}$$

Para los casos en que estamos interesados (agujeros negros) $B(r) = 1/H(r)$. Entonces, comparando las ecs. (76) y (79) hallamos:

$$g_{,uv} = 2r_h k_h A(0,v) \ . \tag{80}$$

Por lo tanto, para los espacios - tiempos estáticos esféricamente simétricos, la ec. (56) está dada por:

$$\nabla^2_{D-2} f(x^k) + 2r_h(\Lambda r_h - k_h) f(x^k) = [r_h^2/A(0,r)]\sigma(x^k) \tag{81}$$

En esta ecuación se puede entender la aparición del término proporcional a f como debido a la interacción entre el espacio - tiempo curvo y la partícula ultrarrelativista.

Como ejemplo de aplicación de esta ecuación tomemos como fuente el tensor energía - momento de una partícula sin masa en 4 dimensiones ubicada en el polo, sobre el horizonte de un agujero negro

$$T_{uu}^{(p)} = 32\pi p A^2 \delta(\theta)\delta(u) \ , . \tag{82}$$

Entonces la ec.(81) quedará:

$$\nabla^2 f - af = b\delta(\theta) \tag{83}$$

$$a = 2r_h(\lambda r_h - k_h) \ \ , \ \ b = 32\pi p r_h^2 A(r_h) \ . \tag{84}$$

La solución de esta ecuación puede escribirse como una serie en polinomios de Legendre:

$$f(\theta) = b\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(l+\frac{1}{2})P_l(\cos\theta)}{l(l+1)+a} \ . \tag{85}$$

Podemos hallar una expresión integral para $f(\theta)$ utilizando la función generadora de los polinomios de Legendre:

$$\sum_{l=0}^{\infty} P_l(x)t^l = (1-2xt+t^2)^{-1/2}$$

y definiendo $t^l = e^s$, hallamos:

$$f(\theta) = b\int_0^{\infty} \frac{ds\cos(\frac{1}{2}\sqrt{3a}s)}{\sqrt{\cosh s - \cos\theta}} \ . \tag{86}$$

Aquí la función $f(\theta)$ que tiene en cuenta el efecto de la onda de choque gravitacional sobre el horizonte de eventos, depende explícitamente de parámetros definidos por la geometría de fondo. Mientras que b sólo aparece como un factor de escala en f, la dependencia en a

resulta importante. En particular, para el caso de Schwarzschild: $a = 1$ y $b = 2^9 m^4/ep$, con lo que recuperamos los resultados de Dray y 't Hooft[5]. Integrando numéricamente la expresión (86) se muestra en la Figura 1 la forma de la función $f(\theta)$ para distintos valores del parámetro a.

La generalización de este caso para incluir la componente electromagnética del tensor energía - momento es como sigue: Sabemos que para una onda de choque gravitacional con $p_e \neq 0$ en el espacio - tiempo de Minkowski el tensor energía - momento de una partícula ultrarrelativista en 4 dimensiones es[14]:

$$T_{uu} = T_{uu}^{(p)} + T_{uu}^{(em)} \quad , \quad T_{uu}^{(em)} = \frac{3}{2}\pi p_e^2 \rho^{-3} \delta(u) \ ,$$

donde (para una transformación de Lorentz en la dirección z) $\rho = \bar{r}\sin\theta$. Por lo tanto, para una partícula con momento p_e en el polo del agujero negro:

$$T_{uu}^{(em)} = \tilde{C}(r_h) p_e^2 \sin^{-3}\theta \delta(u) \ ,$$

$\tilde{C}(r_h)$ es una constante sólo dependiente del radio del horizonte. La ec. (83) para f_{em} queda:

$$\nabla^2 f_{em} - a f_{em} = C \sin^{-3}\theta \quad , \quad C = \tilde{C}(r_h) r_h^2 / A(r_h) \ .$$

La función corrimiento total será: $f_T = f + f_{em}$. Como la $f(\theta)$ dada por (86) es la función de Green de esta ecuación, tendremos:

$$f_{em}(\theta) = C \int f(\theta - \theta') \sin^{-3}\theta' d\theta' \ .$$

También podemos poner:

$$f_{em}(\theta) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j \sin^{-j}\theta \ ,$$

donde las f_j satisfacen:

$$f_{j+2} = \frac{j^2}{j^2 + 3j + 2 + a} \ , \ j = 3, 5, 7, \ldots.$$

$$f_3 = -C/(6 + a) \ .$$

Para el caso de agujero negro extremos $a = 0$, la solución general está dada por:

$$f_{em}(\theta) = C/\sin\theta + d \ln \tan \frac{1}{2}\theta + D \ ,$$

d y D son constantes arbitrarias (D es meramente un cambio en el origen de coordenadas de v).

Como estamos interesados principalmente en el caso de agujeros negros, escribimos[13]:

$$B(r) = H(r)^{-1} = 1 - 2m/r + Q^2 - \Lambda r^2/3 \ . \tag{87}$$

para los coeficientes de la métrica en ec.(70). Aquí m y Q son la carga y masa del agujero negro y Λ la constante cosmológica.

Calculemos la dependencia con la geometría para estos casos de interés, o sea el coeficiente a que aparece en (84). El radio del horizonte y la gravedad superficial están dados por:

$$B(r) = 0 = H(r_h)^{-1} = 1 - 2m/r_h + Q^2/r_h^2 - \Lambda r_h^2/3 \ , \tag{88}$$

$$k(r_h) = \frac{1}{2}B'(r_h) = m/r_h^2 - Q^2/r_h^3 - \Lambda r_h/3 \ . \tag{89}$$

Analizar el caso general implicaría resolver ena ecuación de cuarto orden para r_h in (88), se podría hacer pero es más instructivo ver los dos casos de mayor interés:

a) El agujero negro de Reissner - Nordstrøm

Aquí $\Lambda = 0$ y la solución de (88) es

$$r_h = m + \sqrt{m^2 - Q^2} \ . \tag{90}$$

Reemplazando este valor en la ec.(89), hallamos

$$a_{RN} = 2r_h k_h = 2\sqrt{1-\lambda}/(1+\sqrt{1-\lambda}) \ , \ 0 < \lambda = Q^2/m^2 < 1 \ . \tag{91}$$

En la Figura 1 se puede observar f/b (dada por la ec.(86)) versus la variable θ. En este caso a va desde cero (para el agujero negro extremo, $Q = m$) a uno (para el agujero negro de Schwarzschild).

b) El agujero negro de Schwarzschild - (anti) de Sitter

Aquí $Q = 0$ y (88) es cúbica en r_h. Se pueden estudiar dos subcasos:

b1) $\Lambda < 0$. Solamente tenemos una solución real:

$$r_h = (-\Lambda)^{-1/3}\left[\left(-3m + \sqrt{9m^2 - \Lambda^{-1}}\right)^{-1/3} - \left(3m + \sqrt{9m^2 - \Lambda^{-1}}\right)^{-1/3}\right] \ , \tag{92}$$

que produce:

$$a_{SaD} = 1 + \left[\left(-3\Omega + \sqrt{9\Omega^2 + 1}\right)^{-1/3} - \left(3\Omega + \sqrt{9\Omega^2 + 1}\right)^{-1/3}\right]^2 \tag{93}$$

donde, $\Omega^2 = -\lambda m^2$. Vemos que a tiene un rango de variación desde $a = 1$ para el agujero negro de Schwarzschild hasta $a \to \infty$. En la Figura 1 se muestra f/b para algunos casos de interés.

b2) $\Lambda > 0$. Aquí encontramos dos valores de $r_h > 0$ solución de la ec.(88). Uno correspondiente al horizonte de eventos cosmológico y el otro al del agujero negro. Este último es el que necesitamos:

$$r_h = (2/\sqrt{\Lambda})\cos(\frac{1}{3}\varphi + 4/3\pi) \ , \tag{94}$$

donde

$$\tan\varphi = -\sqrt{(9\Omega^2)^{-1} - 1} \tag{95}$$

con $\frac{1}{2}\pi < \varphi < \pi$ y ahora $\Omega^2 = \lambda m^2 < 1$. Esto produce:

$$a_{SD} = 1 - 4\cos^2(\frac{1}{3}\varphi + 4/3\pi) \ . \tag{96}$$

En la Figura 1 se muestra el resultado de integrar la ec.(86) con estos valores de a, que varían entre uno para el agujero negro de Schwarzschild y cero para para el caso $\Lambda = m^{-2}$.

El caso de de Sitter puro no puede sacarse de aquí simplemente tomando el límite $m \to 0$, ya que en ese caso desaparecería el horizonte de eventos del agujero negro. Partiremos directamente de la métrica estática de de Sitter

$$ds^2 = -B(r)dt^2 + H(r)dr^2 + r^2 d\Omega^2 \ ,$$

donde

$$B(r) = H(r)^{-1} = 1 - \frac{1}{3}\Lambda r^2 \ .$$

Aplicándole a esta métrica las trasformaciones (71)-(72), obtenemos la ec.(73). Si deseamos considerar una onda de choque gravitacional esférica, tropezamos con el hecho que la ec.(55) no se cumple. Lo mismo ocurre si consideramos una onda plana en un espacio de de Sitter. Esto generaliza el resultado de la referencia[5], donde se encontró que no existen onda de choque gravitacional esféricas del tipo que nosotros estudiamos en el espacio - tiempo de Minkowski.

FIGURA 1

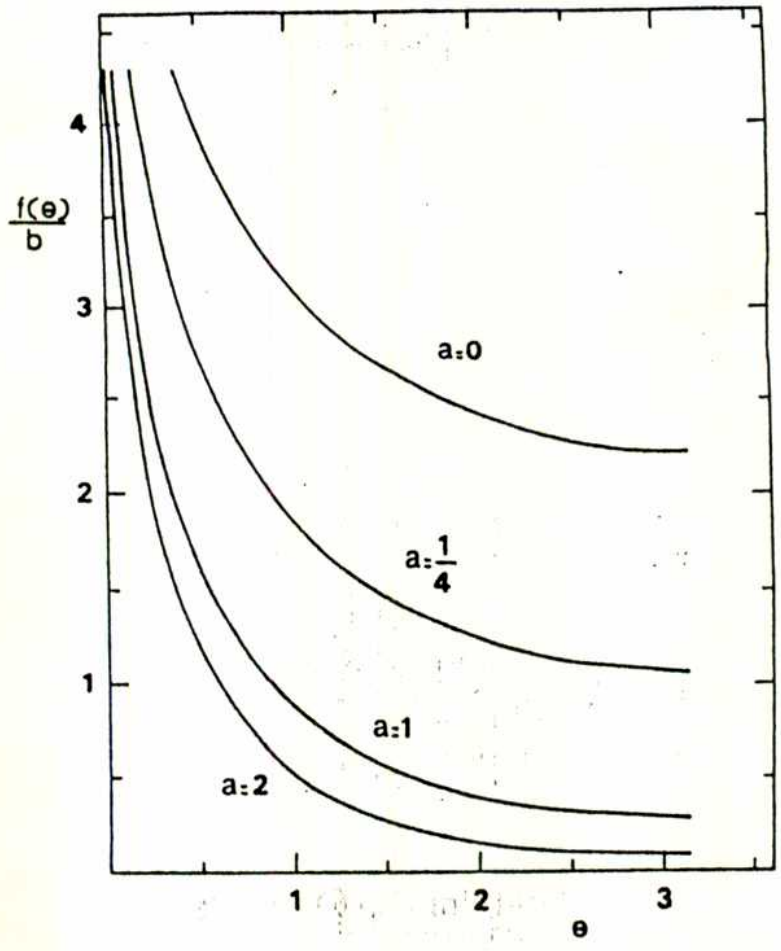

Figura 1: Esta figura muestra la función corrimiento $f(\theta)/b$ (ver ec.(86)) que tiene en cuenta el efecto producido por una onda de choque gravitacional esférica en espacios - tiempos estáticos con horizontes de eventos y $\Lambda \neq 0$, parametrizada por el valor de a (ver ec.(84)). Para el agujero negro de Reissner - Nordstrøm $f(\theta)/b$ tomará valores entre las curvas $a = 1$ (Schwarzschild, $Q = 0$) y $a = 0$ (agujero negro extremo, $Q = M$). Para la familia Schwarzschild - (anti) de Sitter $f(\theta)/b$ tomará valores entre $a = 1$ ($\Lambda = 0$) y $a = 0$ ($\Lambda = M^{-2}$). Para $a \to \infty$ (cuando $\Lambda < 0$), $f \to 0$. Como la partícula ultrarrelativista está en el polo de agujero negro ($\theta = 0$), no debería sorprender la divergencia que aparece en f cuando $\theta \to 0$.

IV - La dispersión de campos cuantizados por estas onda de choque gravitacional

En este capítulo pasaremos del análisis clásico hecho en los dos anteriores a un análisis semiclásico del problema de dispersión. La métrica de fondo permanecerá descripta como un objeto clásico, mientras que se cuantizarán los campos a estudiar sobre este fondo. Estudiaremos la ecuación de Klein Gordon y de Dirac para campos de espín 0 y 1/2 respectivamente, y deduciremos expresiones exactas para sus correspondientes matrices S de dispersión.

1. Campo escalar

Estudiemos ahora la ecuación de Klein - Gordon en la geometría de Reissner - Nordstrøm ultrarrelativista discutida en los capítulos anteriores. Esto describe el siguiente proceso: la dispersión de dos partículas sin espín (1 y 2) con masas m_1, $m_2 = m$ ambas con masas $\ll m_{pl}$ a energías del orden o mayores que la masa de Planck (m_{pl}, c=1).

Elijamos un sistema de referencia donde sólo una de las partículas (partícula 2) tenga una energía del orden de la de Planck. Entonces, la partícula 2 será ultrarrelativista con momento p y el espacio - tiempo alrededor de ella estará descripto por la geometría de Aichelburg - Sexl ya discutida. La partícula 1 será una partícula de prueba ya que su energía es mucho menor que la m_{pl}. Su dinámica está descripta por la ecuación de Klein - Gordon en la geometría de la (4):

$$[4\partial_u\partial_v - 4f(x^k)\delta(u)\partial_v^2 - \nabla_\perp^2 + m^2]\Psi = 0 \ , \tag{97}$$

donde

$$\nabla_\perp^2 = \sum_{k=1}^{D-2} \partial_i^2 \ . \tag{98}$$

descomponiendo la función de onda

$$\Psi(u,v,x^k) = \exp(-i\omega v/4)\Phi(u,x^k) \ , \tag{99}$$

ya que la variable v es cíclica, la ecuación de Klein - Gordon (97) se simplifica, dando una ecuación de Schrödinger D-1 dimensional:

$$\partial_u \Phi = -i\omega/4 f(x^k)\delta(u) + i/\omega(\nabla_\perp^2 - m^2]\Phi = 0 \ . \tag{100}$$

Como se estudió en la [8] esta ecuación tal como está escrita no es un problema matemático bien definido. La función de onda $\Phi(u,x^k)$ es discontinua en $u = 0$ y el producto $\Phi\delta(u)$ está indefinido. Para darle sentido a esta ecuación se necesita un procedimiento de regularización. Pueden considerarse dos procedimientos rigurosos: i) Regularización continua, o sea reemplazar $\delta(u)$ por una secuencia de funciones regulares convergentes a una delta y ii) Regularización de Retículo, o sea discretizar la variable u derivando una ecuación de diferencias finitas en $n = u/\Delta$ y tomando en la solución el límite $\Delta \to 0$ (con Δ el espaciado del retículo). Ambos procedimientos producen matrices S unitarias pero diferentes. Tomemos una onda plana entrante desde $u < 0$

$$\Phi_<(u,x^k) = \exp\left(i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp - iu/\omega(k_\perp^2 + m^2)\right) \quad \text{(reg. continua)}$$

$$\Phi_{<n}(x^k) = \exp\left(i\vec{k}_\perp \cdot \vec{x}_\perp - in\alpha(k_\perp)\right) \quad \text{(reg. retículo)} \tag{101}$$

donde

$$\alpha(k_\perp) = \arcsin[\Delta/\omega(k_\perp^2 + m^2)] \ .$$

Notemos que

$$\lim_{n\to 0} n\alpha(k_\perp) = u/\omega(k_\perp^2 + m^2) \ .$$

Entonces, para $u > 0$, la regularización continua y la regularización por retículo en el límite $\Delta \to 0$ producen una función de onda de la forma

$$\Phi_>(u, x^k) = \int dp_\perp^{D-2} \exp\left\{i\vec{p}_\perp \cdot \vec{x}_\perp - iu/\omega(p_\perp^2 + m^2)\right\} S(k_\perp, p_\perp, \omega) \qquad (102)$$

donde

$$S(k_\perp, p_\perp, \omega) = (2\pi)^{2-D} \int dx_\perp^{D-2} \exp\left[i(\vec{k}_\perp - \vec{p}_\perp) \cdot \vec{x}_\perp + i\varphi_D(x^k)\right] \ , \qquad (103)$$

$S(k_\perp, p_\perp, \omega)$ es la matriz S que lleva de un estado entrante con momento $(k_\perp, \omega)$ a un estado saliente con momento $(p_\perp, \omega)$. Para las métricas que hemos visto $f = f(\rho)$, entonces se puede integrar esta expresión sobre los ángulos:

$$S(k_\perp, p_\perp, \omega) = (2\pi)^{1-D/2} \mid \vec{k}_\perp - \vec{p}_\perp \mid^{D/2-2} \int_0^\infty d\rho \rho^{D/2-1} J_{D/2-2}\left(\rho \mid \vec{k}_\perp - \vec{p}_\perp \mid\right) \exp(-i\varphi_D(\rho)) \ . \qquad (104)$$

La diferencia de resultados entre la regularización continua y la regularización por retículo está dada en el corrimiento de fase $\varphi_D(\rho)$:

$$\begin{aligned} \varphi_D^{\text{continua}}(x^k) &= \omega/4 f_D(x^k) \\ \varphi_D^{\text{retículo}}(x^k) &= 2\arctan[\omega/8 f_D(x^k)] \ . \end{aligned} \qquad (105)$$

La solución dada en las referencias[6,7] coincide con la regularización continua.

2. Ejemplos[14]

a) Métrica de Aichelburg - Sexl

Este caso es muy interesante pues puede resolverse en forma analítica. En efecto, la matriz S en 4 dimensiones (regularización continua) será (ver ecs.(103),(104) y (13)):

$$S(k_\perp, p_\perp, \omega) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty d\rho \rho J_0 \left(\rho \mid \vec{k}_\perp - \vec{p}_\perp \mid\right) \exp(-2i\omega p \ln \rho) \ . \tag{106}$$

Integral que puede hallarse en tablas[21], con el siguiente resultado:

$$S^{AS}(s,t) = \frac{1}{\pi} \left(\frac{4}{\mid t \mid}\right)^{iG(s-m^2)} \frac{\Gamma[1 - iG(s-m^2)]}{\Gamma[iG(s-m^2)]} + \delta(\vec{k}_\perp - \vec{p}_\perp) \ . \tag{107}$$

donde

$$Gs = \omega p + Gm^2 \quad , \quad t = - \mid \vec{k}_\perp - \vec{p}_\perp \mid \ .$$

Y de donde puede verse que no hay producción de partículas (los coeficientes de Bogoliubov[22] entre los modos entrantes y los salientes, son cero) ni radiación por frenado en ningún sistema de referencia; la dispersión es elástica[6].

S^{cont} exhibe una infinita secuencia de polos imaginarios en:

$$G(s - m^2) = -in \ , \ n = 1, 2, 3, .. \tag{108}$$

Estos polos son típicos de amplitudes Coulombianas (dan el espectro de los estados ligados relativistas del Hidrógeno).

Con la regularización de retículo[8] los resultados físicos son distintos. S^{ret} no exhibe polos en las variables s y t, sino que posee cortes en el eje imaginario s y un punto fijo de ramificación en $s = 0$ y uno móvil en $s = 2i/\ln(4/t)$. Sin embargo en el límite $s \to m^2$ ambas amplitudes S^{cont} y S^{ret} coinciden. Este límite es simplemente la amplitud de intercambio de un gravitón:

$$S = -i/(\pi t) G(s - m^2)[1 + O(G(s - m^2))] \ . \tag{109}$$

También puede observarse una más bien curiosa similitud entre la ec.(107) y la famosa amplitud de Veneziano para teoría de cuerdas. Uno podría pensar en que hay una más profunda conección entre estas dos cosas. Sobre esta muy interesante conjetura volveremos en el Capítulo VI.

b) Métrica de Reissner - Nordstrøm

Este caso contiene al anterior y veremos que de hecho se podrá expresar como una superposición de aquél.

La matriz s en 4 dimensiones para el $f(\rho)$ de la ec.(19) está dada por:

$$S(k_\perp, p_\perp, \omega) = (2\pi)^{-1} \int_0^\infty d\rho\rho J_0 \left(\rho \mid \vec{k}_\perp - \vec{p}_\perp \mid\right) \exp\left\{-i\omega/4(8p\ln\rho + \alpha/\rho\right\} \ . \qquad (110)$$

Expandiendo el exponencial $\exp(-i\omega/4\rho)$ obtenemos[14]:

$$S(s,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{iG(s-m^2)}{4p}\right]^n S^{\alpha=0}\left[iG(s-m^2) + n/2, t\right] \ . \qquad (111)$$

Vemos que la matriz de dispersión para $\alpha \neq 0$ es una superposición infinita de matrices S de Aichelburg - Sexl. Esta serie exhibe[14] una serie infinita de polos imaginarios en:

$$iG(s-m^2) = im/2 \quad , \quad m \text{ entero} \ . \qquad (112)$$

Vemos así que el efecto del momento electromagnético p_e, incrementa el número de polos (o resonancias) en un factor cuatro. De los residuos de estos polos se puede ver que para $p_e = 0$ los momentos angulares para los estados ligados están acotados por n, mientras que para $p_e \neq 0$ todos los momentos angulares están permitidos.

El caso de regularización de retículo[14] da una expresión complicada, pero se puede ver que no exhibe polos pero si cortes en s y t. En el límite $s \to m^2$ ambas amplitudes S^{cont} y S^{ret} coinciden. Este límite es simplemente la amplitud de intercambio de un gravitón:

$$S = -i/(\pi t)G(s - m^2)[1 + O(G(s - m^2))] \ .$$

3. El caso γ grande pero finito[14]

Consideremos ahora el caso en que la partícula 1 tiene una carga finita e_1. En este caso existe un acoplamiento no trivial entre e_1 y el momento electromagnético p_e de la onda de choque gravitacional creada por la partícula 2. En el contexto discutido en las secciones anteriores, en el cual la partícula 2 es ultrarrelativista y la partícula 1 es de prueba, el proceso de dispersión está descripto por la ecuación de Klein - Gordon para un campo cargado:

$$[\Box + m_1^2]\Psi = 0$$

$$\Box = g^{\mu\nu}(\partial_\mu - e_1 A_\mu)(\partial_\nu - e_1 A_\nu) \ . \tag{113}$$

Como en el límite ultrarrelativista, el campo electromagnético es una configuración singular (A_μ va a cero, pero no su cuadrado) y $g_{\mu\nu}$ contiene un término proporcional a $\delta(u)$, es conveniente no trabajar directamente con la métrica de la onda de choque gravitacional, sino con la geometría no singular correspondiente a tomar γ finito (v cercano, pero no igual a 1) y m y e pequeños, pero no cero.

Recordemos que el potencial electromagnético de una carga puntual es:

$$A^{\mu} = \gamma A^{0} \ ,$$
$$A^{0} = \frac{Q}{(D-3)r^{D-3}} \ . \tag{114}$$

La métrica impulsada estará dada por:

$$ds^2 = \gamma^2 \left[g_{\bar{r}\bar{r}}(r) - g_{00}(r)\right](d\bar{t} - v d\bar{z})^2 + g_{\bar{r}\bar{r}}(r)(-d\bar{t}^2 + d\bar{z}^2 + \delta_{ij}\bar{x}^i d\bar{x}^j) \ , \tag{115}$$

donde

$$\bar{r} = [\gamma^2(\bar{z} - v\bar{t})^2 + \rho^2]^{1/2}$$

y r, $g_{\bar{r}\bar{r}}(r)$ y $g_{00}(r)$ están dados por las ecs. (20) - (21).

Como estamos interesados en estudiar valores de $v \cong 1$, definamos las coordenadas "cuasi nulas":

$$u = \bar{z} - v\bar{t} \ , \quad v = \bar{z} + v\bar{t} \ .$$

Entonces la métrica impulsada (115) puede escribirse como:

$$ds^2 = \gamma^2 \left[g_{\bar{r}\bar{r}}(r) - g_{00}(r)\right] du^2 + g_{\bar{r}\bar{r}}(r)(du\ dv + \delta_{ij} d\bar{x}^i d\bar{x}^j + \gamma^{-2} d\bar{z}^2) \ . \tag{116}$$

De ahora en más, despreciaremos la contribución del término proporcional a γ^{-2}. Utilizando esta métrica para escribir la ecuación de Klein - Gordon (113), hallamos:

$$\partial_{\mu}\Phi = \left[-i\omega/4 g^{(1)}_{uu} - i/\omega \nabla^2_{\perp} - ie_1^2\gamma^2/\omega (A^0)^2 (g^{(1)}_{uu} + g^{(2)}_{uu}) + m^2\right] \Phi \ , \tag{117}$$

$$g^{(1)}_{uu} = \gamma^2 \left[4C/\bar{r}^{D-3} - 3E^2/2\bar{r}^{2(D-3)}\right] \ ,$$

$$g_{uu}^{(2)} = \gamma^2/2\left[-C^2/\bar{r}^{2(D-3)} + 5CE^2/\bar{r}^{3(D-3)} - 7/8E^2/\bar{r}^{4(D-3)}\right] ,$$

y donde hemos utilizado que la variable v es cíclica (ec.(99)) y que la derivada del potencial:

$$\partial_\mu A^\mu \qquad Q\gamma^3\left[(r-C)/\bar{r} - (C^2 - E^2)/2\bar{r}^{(D-2)}\right] u/\bar{r}^{(D-1)} . \tag{118}$$

Observemos que los términos lineales en e_1 no aparecen en la ec. (117), porque éstos se acoplan al campo electromagnético $F_{\mu\nu}$, que en el límite $v \to 1$ va a cero como $\gamma^{-1/2}\delta(u)$. También podemos ver que el primer término en el corchete del lado derecho de la ec. (117), en el límite $v \to 1$ da el ahora conocido resultado $f(\rho)\delta(u)$. El término proporcional a e_1^2, como lleva un γ^2 dará una componente divergente como $\gamma\delta(u)$ correspondiendo al término $g_{uu}^{(1)}$, y otro finito (proporcional a $\delta(u)$) correspondiente a $g_{uu}^{(2)}$. Para $\gamma = \infty$, la interacción entre una partícula ultrarrelativista con momento p_e y una partícula de prueba con carga finita, diverge. La interacción está bien definida para γ grande pero finita. La ecuación de Klein - Gordon resultante es muy complicada de analizar; no es separable en las variable (u, ρ). La interacción de dos partículas ultrarrelativistas con momentos electromagnéticos p_{e_1} y p_{e_2} debería estar bien definida en el límite $\gamma = \infty$, pero representa un muy complicado problema de colisión no lineal.

4. Campo de espín 1/2[15]

En el Capítulo II, sección 3 vimos como los efectos de rotación modifican la métrica de la onda de choque gravitacional. Ahora investigaremos que ocurre cuando la partícula de prueba tiene un espín diferente de cero en esta métrica de fondo. Hemos ya estudiado[8,14]

un campo escalar en la métrica (4) con $f(\rho)$ genérico. Aquí, estudiaremos el caso de un campo de Dirac de espín 1/2.

Para escribir la ecuación de Dirac en un fondo curvo definamos primero la tétrada V^a_μ por la siguiente relación:

$$g_{\mu\nu} = V^a_\mu \eta_{ab} V^b_\nu \ , \tag{119}$$

donde $g_{\mu\nu}$ es la métrica del espacio - tiempo curvo estudiado (índices griegos) y η_{ab} es la métrica Minkowskiana (índices latinos se refieren a la tétrada).

La matrices de Dirac en el espacio - tiempo curvo son definidas como:

$$\Gamma^\mu = V^\mu_a \gamma^a \ , \tag{120}$$

donde γ^a son las matrices de Dirac del espacio - tiempo plano.

Finalmente, la derivada covariante espinorial del campo Ψ es definida como:

$$\nabla_\mu \Psi = (\partial_\mu + \sigma_\mu)\Psi \ , \tag{121}$$

donde σ_μ es la conección espinorial

$$\sigma_\mu = \frac{1}{2}\Sigma^{ab} V^\lambda_a V_{\lambda b;\mu} \ , \tag{122}$$

$$\Sigma^{ab} = \frac{1}{4}[\gamma^a, \gamma^b] \ . \tag{123}$$

La acción para el campo de espín 1/2 en el espacio - tiempo curvo es[22]:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left[\bar{\Psi}\Gamma^\mu \nabla_\mu \Psi - \nabla_\mu \bar{\Psi} \Gamma^\mu \Psi \right] - m\bar{\Psi}\Psi \right\} \ , \tag{124}$$

donde m es la masa del campo y $\bar{\Psi} = -i\gamma^0\Psi^\dagger$ es el campo adjunto de Dirac.

La variación de S con respecto a $\bar{\Psi}$ nos permite encontrar la ecuación de campo para Ψ:

$$(\Gamma^\mu \nabla_\mu - m)\Psi(x) = 0 \ . \tag{125}$$

Para nuestro caso (ec.(4)), la tétrada en coordenadas (u, v, x, y) está dada (en forma matricial) por:

$$V_a^\mu = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & f\delta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \tag{126}$$

Entonces, las matrices de Dirac generalizadas son

$$\Gamma^\mu = (\gamma^v, \quad \gamma^u \quad \gamma^v f\delta, \quad \gamma^1, \quad \gamma^2) \ , \tag{127}$$

donde

$$\gamma^v = \gamma^3 + \gamma^0 \qquad \gamma^u = \gamma^3 - \gamma^0 \ . \tag{128}$$

Ahora, la conección espinorial puede ser calculada, utilizando que para nuestra métrica:

$$\Gamma^v_{uu} = f(\rho)\delta'(u) \quad , \quad \Gamma^v_{ui} = \Gamma^i_{uu} = \partial_i f(\rho)\delta(u) \ . \tag{129}$$

Entonces, de(122):

$$\begin{aligned} \sigma_v &= 0 \\ \sigma_i &= 0 \\ \sigma_u &= \frac{1}{4}(3\Sigma^{0i} - \Sigma^{3i})\partial_i f(\rho)\delta(u) \ . \end{aligned} \tag{130}$$

donde

$$\Sigma^{0i} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & P_i \\ P_i & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma^{3i} = \frac{i}{2}\begin{pmatrix} P_j & 0 \\ 0 & P_j \end{pmatrix} \qquad j \neq i \ . \tag{131}$$

P_i son las matrices de Pauli

$$P_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad P_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \qquad P_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{132}$$

Ahora, con la conección espinorial (130), la matrices de Dirac generalizadas (120) y la derivada covariante (121) tenemos todos los elementos para escribir explícitamente la ecuación de campo (125) para el campo espinorial

$$\Psi(u, v, x^j) = e^{-i\omega v}\Phi(u, x^j) \ , \tag{133}$$

(donde hemos utilizado que v es una variable cíclica). Entonces, la ecuación de campo se leerá:

$$\partial_u \Phi = \left\{ (\gamma^v)^{-1} \left[i\omega\gamma^u + \gamma^j \partial_j - m \right] + \left[\frac{1}{4}(3\Sigma^{0j} - \Sigma^{3j})\partial_j f + i\omega f \right] \delta(u) \right\} \Phi \ . \tag{134}$$

Esto es un sistema de ecuaciones acopladas para las cuatro componentes del espinor $\Phi(u, x^j)$. Para $u \neq 0$ obtenemos la ecuación de Dirac en el espacio - tiempo plano, así las soluciones para $u > 0$ y $u < 0$ serán ondas planas.

Esta ecuación, siendo de primer orden en ∂_u y teniendo un potencial de interacción proporcional a $\delta(u)$, está mal definida. Este es el mismo problema que para el campo de Klein - Gordon en este mismo fondo [8] donde se encuentra que la solución depende del método de regularización utilizado.

Para estudiar las soluciones de la ecuación (134) es conveniente escribirla en la representación de interacción, o sea:

$$-\partial_u \varphi = V\varphi \ , \tag{135}$$

donde φ es un espinor de cuatro componentes y V puede escribirse en forma matricial como sigue:

$$V = -\frac{\delta(u)}{8}\begin{pmatrix} A & B \\ B & A \end{pmatrix} \tag{136}$$

con A y B dados por

$$A = -i\begin{pmatrix} 8\omega f & -\partial_- f \\ -\partial_+ f & 8\omega f \end{pmatrix}$$

$$B = -3i\begin{pmatrix} 0 & \partial_+ f \\ -\partial_- f & 0 \end{pmatrix} \tag{137}$$

y

$$\partial_\pm f = \partial_2 \pm i\partial_1 f \ .$$

Gracias al hecho que la dependencia en u de V aparece como un factor común, podemos diagonalizar V para todo valor de u. Esto puede hacerse con la introducción de una matriz C que hace todo el trabajo:

$$-\partial_u C\varphi C^{-1} = CVC^{-1}C\varphi C^{-1} = -\partial\tilde{\varphi} = \tilde{V}\tilde{\varphi} \ . \tag{138}$$

Luego de un largo pero elemental cálculo hallamos:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & \Gamma_+^{-1} & 1 & \Gamma_+^{-1} \\ -\Gamma_+ & 1- & -\Gamma_+ & 1 \\ -1 & -\Gamma_-^{-1} & 1 & \Gamma_-^{-1} \\ \Gamma_- & -1 & -\Gamma_- & 1 \end{pmatrix} \tag{139}$$

donde

$$\Gamma_{\pm} = \left[\frac{(\partial_+ \pm 3\partial_-)f}{(\partial_- \pm 3\partial_+)f}\right]^{1/2} \tag{140}$$

Ahora el potencial de interacción asume una forma diagonal:

$$\bar{V} = -i\delta(u)\ diag(\lambda_a) \tag{141}$$

con autovalores dados por:

$$\lambda_{1,2} = -\omega f \pm \frac{1}{4}[4(\partial_2 f)^2 + (\partial_1 f)^2]^{1/2}\ , \tag{141}$$

$$\lambda_{3,4} = -\omega f \pm \frac{1}{4}[(\partial_2 f)^2 + 4(\partial_1 f)^2]^{1/2}\ . \tag{142}$$

Así, hemos desacoplado las cuatro componentes del espinor de forma tal que cada componente satisface una ecuación similar a la del campo escalar [8,16]. Teniendo en mente ésto es fácil convencernos que la matriz S para cada componente está dada por:

$$S_a = \int \frac{d\vec{\rho}}{(2\pi)^2} e^{i(\vec{k}_\perp - \vec{p}_\perp)\cdot\vec{\rho} + i\lambda_a(\vec{\rho})}\ . \tag{143}$$

A primera vista esta expresión para la matriz S resulta bastante más complicada para integrar explícitamente que la (102) para el campo escalar. Esto se debe a la forma de los λ_a, los cuales no sólo se acoplan a $f(\rho)$ como en el caso escalar, sino también a sus derivadas. Esta dependencia no escalar es de esperar, pues aquí estamos teniendo en cuenta el espín de la partícula. Además tendremos una anisotropía con respecto a (x, y) aún si f depende sólo de ρ, como se puede ver de (141)-(142). Esto nos inhibe de hacer la integración a priori sobre los ángulos como lo hicimos para obtener (104) a partir de (103). Sin embargo, la forma de los λ_a nos sugiere que los polos de 't Hooft (108), hallados en la sección 2 de este Capítulo sobrevivirán de algún modo en el caso del campo de Dirac ahora considerado.

V - Onda de choque gravitacional generadas por fuentes extendidas: cuerdas cósmicas, monopolos y paredes de dominio

En este Capítulo estudiaremos las ondas de choque gravitacional generadas por fuentes extendidas ultrarrelativistas, fundamentalmente cuerdas cósmicas (locales, globales, superconductoras y en rotación) y otros defectos topológicos (monopolos y paredes de dominio). En el límite ultrarrelativista, estas fuentes viajarán a la velocidad de la luz y los parámetros físicos (masa, carga y espín) deben tomarse dependientes de γ e ir a cero apropiadamente. Las matrices de dispersión de los campos de Klein - Gordon en estas geometrías son calculadas y se estudia el comportamiento a bajas y altas energías. Se comparan estos resultados con los correspondientes a la dispersión producida por fuentes puntuales (geometrías tipo Aichelburg - Sexl, para las cuales tenemos polos tipo Coulombianos). Para fuentes extendidas, así como puntuales, el límite ultrarrelativista y el de campo débil (o comportamiento a gran distancia) de la geometría dan las mismas matrices de dispersión.

1. Cuerdas cósmicas ultrarrelativistas[23]

Las cuerdas cósmicas son defectos topológicos lineales, formados por tubos delgados de vacío falso rodeados por el vacío verdadero. Las cuerdas cósmicas pudieron haberse formado al expandirse y enfriarse el universo temprano. Los campos cuánticos (digamos un campo escalar ϕ) representando partículas elementales pudieron sufrir una o varias transiciones de fase en las cuales ϕ tomó un valor de expectación de vacío distinto de cero en el estado fundamental.

Dependiendo del tipo de simetría que fue espontáneamente rota, local o global, y de otras características (como si puede desarrollar una corriente eléctrica o un momento angular intrínseco), tendremos un tipo distinto de cuerdas cósmicas. En nuestro caso, estudiaremos cuerdas cósmicas derechas e infinitas. Estas son estables y no podrán decaer sin cambiar la topología del campo.

Las cuerdas cósmicas son objetos macroscópicos, soluciones de energía finita (vórtices) de teorías de *gauge* acopladas a campos de Higgs[24]. Tienen una masa por unidad de longitud μ dada por $G\mu = (\langle\phi\rangle/m_{pl})^2$ y un radio $\delta \sim 1/M_{GUT}$ donde $\langle\phi\rangle$ es el valor de expectación de vacío del campo de Higgs. Para Teorías Gran Unificadas $\langle\phi\rangle_{GUT} = 10^{-3}m_{pl}$ entonces $G\mu = 10^{-6}$. Estas cuerdas delgadas están descriptas por las ecuaciones de Nambu [24]. Dependiendo del tipo de simetría que se rompe espontáneamente, las cuerdas cósmicas pueden ser locales o globales.

a) Cuerdas cósmicas locales o de *gauge*

Las cuerdas de *gauge* tienen su energía concentrada en un tubo muy delgado con un radio del orden de la escala de ruptura de simetría. Por ejemplo, una cuerda cósmica local formada durante la transición de fase de Teorías Gran Unificadas a una temperatura del orden de $10^{15}GeV$, tendría un radio de $10^{-29}cm$ y una masa por unidad de longitud de $10^{22}gr/cm$. Fuera de la cuerda el camo de *gauge* justo compensa el campo escalar de Higgs y tendremos una densidad de energía igual a cero.

Fuera del núcleo de la cuerda (localizada a lo largo del eje z), el tensor energía - momento puede escribirse como:

$$T_0^0 = T_z^z = \mu\delta(x)\delta(y) \ , \tag{144}$$

anulándose las restantes componentes.

Realicemos una transformación de Lorentz en la dirección x con velocidad v. Para obtener un límite no trivial cuando $v \to c$ y $\mu \to 0$, debemos permitir que μ dependa de γ de la siguiente forma:

$$\mu = p_\mu \gamma^{-1}.$$

Entonces, tendremos que $\mu \to 0$ cuando $\gamma \to \infty$ manteniendo la energía p_μ constante. En este límite, la única componente que queda distinta de cero es:

$$T_{uu} = p_\mu \delta(y)\delta(u) \ , \tag{145}$$

donde $u = x - t$.

Por lo tanto, el espacio - tiempo creado por esta fuente nula es una onda de choque gravitacional de la forma:

$$ds^2 = dudv + f(y)\delta(u)du^2 + dy^2 + dz^2 \ , \tag{146}$$

donde $v = x + t$ y $f(y)$ satisface

$$\nabla_\perp^2 f \doteq \partial_y^2 f + \partial_z^2 f = p_\mu \delta(y) \ , \tag{147}$$

$$f(y) = 2p_\mu \mid y \mid \tag{148}$$

No escribimos explícitamente la dependencia en z pues es lineal y puede ser removida por una transformación de coordenadas.

Alternativamente, este resultado puede obtenerse impulsando la métrica de una cuerda cósmica local (espacio - tiempo cónico), que para estos propósitos es conveniente escribirla

$$ds^2 = ds^2_{plana} + \left(\frac{\mu}{4} - 1\right) \mu r^2 d\varphi^2 \tag{149}$$

Este es un espacio - tiempo cónico con un ángulo de déficit:

$$\delta\Phi = 8\pi\mu \ .$$

Utilizando coordenadas Cartesianas ($x = r\cos\varphi$, $y = r sin\varphi$), tenemos:

$$r^2 d\varphi^2 = \frac{x^2 dy^2 + y^2 dx^2 - 2xydxdy}{x^2 + y^2}$$

y podemos aplicar directamente la transformación de Lorentz en la dirección x, o sea:

$$\tilde{x} = \gamma(x + vt) \qquad \tilde{t} = \gamma(t + vz)$$

Para calcular el límite ultrarrelativista de las componentes de la métrica, debemos integrar, tomar el límite $\gamma \to \infty$ y luego derivar las expresiones correspondientes (ver referencias[4,14] y Apéndices por más detalles sobre este procedimiento). Con la ayuda de la integral

$$\int \frac{du}{u^2 + \gamma^{-2} y^2} = \frac{\gamma}{y} \arctan\left(\frac{u\gamma}{y}\right)$$

encontramos

$$ds^2 = dudv + p_\mu \mid y \mid \delta(u) du^2 + dy^2 + dz^2 \ . \tag{150}$$

Notemos que aunque $f(y)$ es lineal en y, esta dependencia es no trivial y no puede ser eliminada por una transformación de coordenadas debido a la presencia del valor absoluto $| y |$. Esto refleja la topología no Minkowskiana del espacio - tiempo cónico original. Aunque la geometría de la cuerdas cósmicas estática es localmente plana, el ángulo de déficit produce este efecto después de la deformación en el límite ultrarrelativista. Vemos que la función f sólo depende de la distancia y perpendicular a la cuerda (en vez de la distancia radial ρ como en el caso de las fuentes puntuales), lo que refleja las simetrías del problema.

b) Cuerdas cósmicas globales

Consideremos ahora el caso de cuerdas cósmicas globales derechas. Estas se habrían formado luego de la ruptura de una simetría global y tienen un potencial de largo alcance que se extiende fuera del núcleo de la cuerda. En consecuencia, el tensor energía - momento $T_{\mu\nu}$ es diferente de cero en todo el espacio - tiempo, y decae como r^{-2}, mientras que la energía total diverge logarítmicamente. Esto hace que las propiedades de las cuerdas cósmicas globales sean bien diferentes de las cuerdas locales. En la aproximación linearizada de Relatividad General, el tensor energía - momento en coordenadas cilíndricas está dado por[25]:

$$T^0_0 = T^z_z = T^r_r = -T^\theta_\theta = -\frac{\mu}{2r^2} \tag{151}$$

Haciendo una transformación de Lorentz en la dirección x y tomando el límite ultrarrelativista tal que $\mu = p_\mu \gamma^{-1} \to 0$ con p_μ fijo, tenemos:

$$T_{uu} = -\frac{p_\mu}{| y |}\delta(u) \qquad\qquad y \neq 0 \tag{152}$$

anulándose todas las otras componentes. La función f de la métrica generada por esta fuente, solución de la ecuación:

$$\nabla_1^2 f \doteq \partial_y^2 f + \partial_z^2 f = \frac{p_\mu}{|\, y \,|} \qquad y \neq 0 \tag{153}$$

está dada (salvo términos lineales que pueden ser eliminados por una transformación de coordenadas) por:

$$f(y) = p_\mu \,|\, y \,|(\ln |\, y \,| - 1) \qquad y \neq 0 \,. \tag{154}$$

Vemos de nuevo que la presencia del valor absoluto $|\, y \,|$ caracteriza el límite ultrarrelativista de las geometrías de cuerdas cósmicas. Además del término proporcional a $|\, y \,|$, correspondiente al remanente del ángulo de déficit de la cuerda cósmica local, tenemos aquí una contribución logarítmica (característica de la cuerda global) la cual producirá efectos de dispersión similares a los de la geometría de Aichelburg - Sexl en 4 dimensiones.

Podemos obtener el mismo resultado para $f(y)$ ec.(154) comenzando con la métrica correspondiente a la fuente estática (151), dada por[25]:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{\mu}{2}\ln r\right)(-dt^2 + dt^2) + dr^2 + r^2(1 - \mu \ln r)d\varphi^2 \,. \tag{155}$$

Después de realizar una transformación de Lorentz en la dirección z, para tomar el límite ultrarrelativista, debemos calcular la integral

$$\int \frac{(u^2 - \tilde{y}^2)}{u^2 + \tilde{y}^2} \ln(u^2 + \tilde{y}^2)du \qquad \tilde{y} = \gamma^{-1} y \,, \tag{156}$$

tomar el límite y luego derivar, lo que que produce $f(y) = p_\mu \,|\, y \,|(\ln |\, y \,| - 1)$, la misma expresión (154).

c) Cuerdas cósmicas Superconductoras

Como se sabe, dependiendo del contenido de campos de las Teorías Gran Unificadas y de la forma en que el grupo de simetrías es espontáneamente roto, las cuerdas cósmicas pueden transformarse en superconductoras, con cargas bosónicas o fermiónicas, produciendo corrientes de hasta $10^{20} Amp$. El tensor energía - momento electromagnético correspondiente puede ser escrito como[26]:

$$T_0^0 = T_z^z = -T_r^r = -T_\theta^\theta = -\frac{I^2}{r^2} \tag{157}$$

donde I es proporcional a la corriente a lo largo de la cuerda. El hecho que el espacio - tiempo sea curvo no modifica esta expresión, ya que las correcciones a la ec.(157) sólo contribuyen con un factor constante$(1 + A_0)^{-4}$, donde $A_0 = Gp_I^2/(4\pi p_{\mu_M}^2)$ (véase más abajo).

Después de aplicar la transformación de Lorentz en la dirección x, uno podría esperar un resultado similar al de la ec. (152), ya que aquí también tenemos $T_{\mu\nu} \sim r^{-2}$. Sin embargo, en la ec.(157) hay una diferencia de signo: $T_0^0 = -T_r^r$ que produce $T_{uu} = 0$. Esto es consecuencia del hecho que $T_{\mu\nu}$ para el campo electromagnético no tiene traza. Como la cuerda está viajando a la velocidad de la luz en la dirección x, no es posible además tener otra componente de movimiento en la dirección z y por lo tanto, la corriente efectiva

Este resultado puede también hallarse a partir de la métrica generada por una cuerda cósmica superconductora, la cual está dada por[27]:

$$ds^2 = \left(r^\alpha + Ar^{-\alpha}\right)^2 \left[r^{2\alpha^2}(-dt^2 + dr^2) + r^2 b^2 d\varphi^2\right] + \left(r^\alpha + Ar^{-\alpha}\right)^{-2} dz^2 \ , \tag{158}$$

donde

$$\alpha = \mu_M/4 \qquad b = 1 - \mu_F/2 \qquad A = \frac{I^2}{2\pi\mu_M^2 b^2} \ .$$

μ_M y μ_F son la masa por unidad de longitud asociada a la materia y al campo electromagnético respectivamente.

Luego de aplicar una transformación de Lorentz en la direción x, con el fin de obtener un límite ultrarrelativista no trivial, debemos tomar $\gamma \to \infty$ con μ_M e I tendiendo a cero como:

$$\mu_M = p_M \gamma^{-1} \qquad I = p_I \gamma^{-1} \ . \tag{159}$$

manteniendo los momentos p_{μ_M} y p_I fijos. Entonces $\mu_M \to 0$, $I \to 0$ y

$$A = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{p_I}{p_M}\right)^2 = constante.$$

Por lo tanto, en este límite, los términos dependientes de α simplemente se hacen constantes y la métrica resultante será la de la cuerda cósmica local ultrarrelativista, ec. (150) , o sea, sólo el efecto del ángulo de déficit $\delta\Phi = 8\pi\mu_M$ sobrevivirá.

d) Cuerda cósmica con espín

Las cuerdas cósmicas pueden tener también momento angular por unidad de longitud J, inducido por efectos de polarizacion de vacío o, en el caso de cuerdas cósmicas superconductora, por la presencia de campos magnéticos externos[28]. Esta métrica está dada por[29]:

$$ds^2 = -\left(dt + \frac{J}{2}d\varphi\right)^2 + r^2 b^2 d\varphi^2 + dr^2 + dz^2 \qquad b = 1 - \mu/2 \tag{160}$$

que para nuestros propósitos es más conveniente escribir como:

$$ds^2 = ds^2_{plano} - J d\varphi dt + \left(\frac{J^2}{4r^2} - \mu\right) r^2 d\varphi^2 \ . \tag{161}$$

Aquí, el espín, está en la dirección z.

Esta métrica es localmente plana, pero con una topología no Minkowskiana proveniente del ángulo de déficit $\delta\Phi = \mu$ y la identificación en la coordenada temporal $t \to t + J$.

Después de aplicar una transformación de Lorentz en la dirección z, y poner:

$$J = p_J \gamma^{-1}$$

obtenemos para $\gamma \to \infty$

$$\begin{aligned} ds^2 =& ds^2_{plano} - \mu r^2 d\varphi^2 - p_J d\varphi (dt - dz) \\ =& du(dv + p_J d\varphi) + b^2 r^2 d\varphi^2 \ , \end{aligned} \tag{162}$$

donde

$$u = z - t \qquad\qquad v = z + t \ .$$

Esta métrica es localmente plana, como puede verse al realizar la siguiente transformación de coordenadas:

$$v' = v + p_J \varphi \qquad\qquad \varphi' = b\varphi \qquad\qquad u' = u \qquad\qquad z' = z \ .$$

Sin embargo, la topología no es la Minkowskiana, ya que tenemos las siguientes identificaciones:

$$(u', v', z', \varphi') \longrightarrow (u', v' + 2\pi p_J, z', \varphi' + 2\pi b) \tag{163}$$

O sea que, cuando la cuerda cósmica con espín se hace ultrarrelativista, mantiene su topología no trivial característica ya que la dirección de movimiento es la misma que la del espín. La métrica impulsada resultante es la segunda línea de la ec.(162).

Si el movimiento fuera en la dirección x, o sea en la direción transversal al espín, el término $g_{0\varphi}$ daría para $\gamma \to \infty$ una contribución constante $p_J\delta(u)$. Pero este término puede ser removido por una transformación de coordenadas. el término dependiente de μ dará una contribución $p_\mu \mid y \mid \delta(u)$, como la cuerda cósmica local. Esto es consistente, ya que si el espín está en la direción transversa al movimiento, no debiera haber remanente en el límite ultrarrelativista.

Puede mostrarse que cuando la cuerda con espín no está viajando a velocidades ultrarrelativistas, los rayos de luz siguiendo órbitas circulares alrededor de la cuerda y muy cercanas a la misma ($r < \frac{J}{2b}$), pueden propagarse hacia el pasado, violando así la causalidad[30]; o sea, que el vector de Killing ∂_φ, que tiene órbitas cerradas, se hace "temporal" en esta región. Este efecto desaparece en el límite ultrarrelativista. Esto puede verse estudiando los conos de luz generados por órbitas circulares nulas con velocidad angular Ω; o sea $\varphi = \Omega t$, $r = constante$ y $z = constante$. Para geodésicas nulas ($ds^2 = 0$), y la ec. (162) nos da:

$$\Omega_\pm = \frac{p_J \pm \sqrt{p_J^2 + 4r^2b^2}}{2r^2b^2}$$

Así, obtenemos $\Omega_+ > 0$ y $\Omega_- < 0$ para todo $r > 0$, entonces las líneas $t = constante$ nunca forman un ángulo mayor a 45° con el eje $\varphi' r$, y no tendremos violación de causalidad en este caso.

2. Monopolos y paredes de dominio ultrarrelativistas[23]

En las Teorías de Gran Unificación se predice la existencia de monopolos superpesados. Estos monopolos son nudos en el valor de expectación de vacío de campos escalares. Cuando una ruptura espontánea de simetría ocurre, el valor de expectación de vacío del campo de Higgs es determinado por la energía libre, pero la direción en el espacio de grupo no está determinada. Dependiendo de la estructura del patrón de ruptura de simetría, aparecen varios defectos topológicos: monopolos, cuerdas cósmicas y paredes de dominio[31], correspondiendo a objetos de dimensión 0, 1 y 2 respectivamente.

a) Monopolos locales

Consideremos primero el caso de monopolos locales o de *gauge*. Estos aparecen en las Teorías de Gran Unificación[31] luego de una secuencia de rupturas de simetrías locales finalizando en el gupo $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. La métrica generada por estos monopolos de masa M y carga magnética Q es simplemente la de Reissner - Nordstrøm:

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right) \quad (164)$$

El límite ultrarrelativista de esta métrica y la onda de choque gravitacional que se obtiene de ella ya ha sido estudiada en los Capítulos II y III. Cuando $\gamma \to \infty$, y M y Q tienden a

$$M = p\gamma^{-1} \qquad Q = \gamma^{-1/2} p_Q \ , \quad (165)$$

manteniendo p y p_Q fijos, el espacio - tiempo resultande es:

$$ds^2 = dudv - f(\rho)\delta(u)du^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 \ , \quad (166)$$

$$f(\rho) = -8Gp\ln\rho - \frac{3}{2}\pi G p_Q^2/\rho \ . \tag{167}$$

Aquí p y p_Q son respectivamente los momentos cinéticos y magnéticos del monopolo ul- trarrelativista. El primer término es simplemente la contribución Aichelburg - Sexl proveniente de la masa del monopolo.

b) Monopolos globales

Consideremos ahora el caso de monopolos globales. Cuando la simetría que se rompe espontáneamente es global, la variación del campo escalar de Goldstone no es compensada por el campo de *gauge*. La densidad de energía asociada al campo de Higgs varía como r^{-2} y la energía total E es linealmente divergente. Entonces, los monopolos globales y los anti monopolos se atraen mutuamente con una fuerza confinante independiente de su distancia mutua: $F = \partial E/\partial r \sim \eta^2$. Fuera del núcleo del monopolo el tensor energía - momento puede escribirse como[32]:

$$T_0^0 = T_r^r = \frac{\eta^2}{r^2} \qquad\qquad T_\theta^\theta = T_\varphi^\varphi = 0 \ ; \tag{168}$$

η es la energía de ruptura de simetría.

Aplicando una transformación de Lorentz (en la direción z, digamos) y tomando el límite ultrarrelativista $\gamma \to \infty$, $\eta \to 0$ de forma tal que:

$$\eta(\gamma) = p_\eta \gamma^{-1/2} \ , \tag{169}$$

manteniendo el momento cenético p_η fijo, la única componente no nula del $T_{\mu\nu}$ es:

$$T_{uu} = 2p_\eta^2 \rho^{-1}\delta(u) \qquad\qquad \rho^2 = x^2 + y^2 \ . \tag{170}$$

El espacio - tiempo creado por esta fuente nula tiene la forma de la ec.(166), con $f(\rho)$ satisfaciendo la ecuación:

$$\nabla_{\perp}^{2} f \doteq \rho^{-1}\partial_{\rho}(\rho\partial_{\rho}f) = 2p_{\eta}^{2}\rho^{-1} , \tag{171}$$

$$f(\rho) = 2p_{\eta}^{2}\rho . \tag{172}$$

Esta dependencia lineal en la coordenada ρ puede ser removida por una rotación de Lorentz de uno de las regiones planas ($u < 0$, digamos) con respecto a la otra ($u > 0$). Esto puede verse[5] también del hecho que la desviación relativa de los observadores cerca de $u = 0$ es proporcional a f', mientras que la refracción relativa de geodésicas a través de $u = 0$ es proporcional a f''.

Alternativamente, este espacio - tiempo de la onda de choque gravitacional puede obtenerse a partir de la métrica de un monopolo global estático, que está dada por[32]:

$$ds^{2} = -\left[1 - \eta^{2} - 2\frac{M(r)}{r}\right]dt^{2} + \left[1 - \eta^{2} - 2\frac{M(r)}{r}\right]^{-1} dr^{2} + r^{2}d\Omega^{2} , \tag{173}$$

$$d\omega^{2} = d\theta^{2} + \sin^{2}\theta d\varphi^{2} ,$$

aquí η es la escala de energía de ruptura de simetría correspondiente al monopolo global y M es la masa efectiva. Este espacio - tiempo describe los efectos de una masa M y un ángulo sólido de déficit. Los efectos de la masa residual son muy pequeños ($\mid M \mid \sim m_{GUT}$) comparados con los efectos del ángulo sólido de déficit, y para nuestros propósitos serán despreciables. Entonces la métrica (173) puede escribirse como:

$$ds^{2} = ds_{plano}^{2} + \eta^{2}dt^{2} + \frac{\eta^{2}}{1 - \eta^{2}}dr^{2} . \tag{174}$$

Realicemos ahora una transformación de Lorentz en la direción z

$$\tilde{z} = \gamma(z + vt) \qquad \tilde{t} = \gamma(t + vz) \ ,$$

y tengamos en cuenta que $(dr/dz)^2 = z^2/r^2$.

Calculando el límite $v \to 1$ con la ayuda de la integral

$$\int \frac{u^2 du}{u^2 + \gamma^{-1}\rho^2} = u - \gamma^{-1}\rho \arctan\left(\frac{u}{\gamma^{-1}\rho}\right) \tag{175}$$

encontramos de nuevo la métrica (166) con $f(\rho) = 2p_\eta^2\rho$. Recordemos que $\eta = \gamma^{-1/2}p_\eta \to 0$ manteniendo p_η fijo y que al calcular el límite $v \to 1$ de las componentes de la métrica, integramos, tomamos el límite y luego derivamos la correspondientes expresiones. Si hubiéramos incluido la masa residual del monopolo M con $M = p\gamma^{-1}$, habríamos obtenido en el límite $\gamma \to \infty$ una contribución adicional similar a la de la geometría de Aichelburg - Sexl, o sea:

$$f(\rho) = -8Gp\ln\rho + 2p_\eta^2\rho \tag{176}$$

c) Paredes de dominio

Su formación está asociada a la ruptura de una simetría discreta. Para una pared de dominio localizada en el plano x - y, el tensor energía - momento puede ser representado por[33]:

$$T_0^0 = T_x^x = T_y^y = \sigma\delta(z) \qquad T_z^z = 0 \ , \tag{177}$$

donde σ es la escala de energía de la ruptura de simetría correspondiente a las paredes de dominio.

Luego de aplicar una transformación de Lorentz en la direción z y tomar

$$\sigma = p_\sigma \gamma^{-1} \tag{178}$$

en el límite ultrarrelativista tenemos:

$$T_{uu} = p_\sigma \delta(u) \qquad\qquad u = z - t \quad , \tag{179}$$

anulándose todas la demás componentes. La función f satisface:

$$f_{,xx} + f_{,yy} = 2p_\sigma \ , \tag{180}$$

$$f(\rho) = \frac{1}{2} p_\sigma \rho^2 \qquad\qquad \rho^2 = x^2 + y^2 \tag{181}$$

$$ds^2 = dudv + \frac{1}{2} p_\sigma \rho^2 \delta(u) du^2 + dx^2 + dy^2 \ . \tag{182}$$

También podemos obtener este resultado a partir de la métrica externa a la pared de dominio:

$$ds^2 = -(1 - kz)^2 dt^2 + dz^2 + (1 - kz)^2 e^{2kt}(dx^2 + dy^2) \tag{183}$$

donde $k = p_\sigma$ en nuestro caso.

Esta métrica es como la de de Sitter en las coordenadas (t, x, y) y como una cuña de Rindler en el plano (z, t). Entonces, realizando la siguiente transformación:

$$T = -k^{-1} e^{-kz} \sinh(kt)$$

$$Z = -k^{-1} e^{-kz} \cosh(kt) \ , \tag{184}$$

la métrica (183) se escribirá:

$$\begin{aligned} ds^2 &= -dT^2 + dZ^2 + k^2(Z+T)^2(dx^2+dy^2) \\ &= dUdV + k^2V^2(dx^2+dy^2) \qquad U>0 \end{aligned} \tag{185}$$

donde

$$U = (Z-T) \qquad V(Z+T)\,.$$

Esta forma de la métrica es equivalente a(182). En efecto, si a la métrica:

$$ds^2 = d\tilde{U}d\tilde{V} - f(\tilde{\rho})\delta(\tilde{U})d\tilde{U}^2 + \tilde{\rho}^2 d\varphi \tag{186}$$

le aplicamos la transformación[5]:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= U - 2/k \\ \tilde{V} &= V - \Theta(U)f(\rho) - \frac{1}{4}U\theta^2(U)f'^2(\rho) \\ \tilde{\rho} &= \rho - \frac{1}{2}U\Theta(U)f'(\rho) \end{aligned} \tag{187}$$

donde $\Theta(U)$ es la función escalón, obtenemos para $U>0$ y $f(\rho)=\frac{1}{2}k\rho^2$, la métrica:

$$ds^2 = dUdV + (1+\frac{1}{2}kU)^2(d\rho^2+\rho^2 d\varphi^2) \tag{188}$$

con una transformación más $U \to 2(v-1)/k$ y $V \to ku/2$, llevaremos la ec.(188) a la forma de la ec.(185).

3. La dispersión de campos por estas geometrías[23]

Estudiemos ahora la dispersión de un campo escalar (partícula puntual) por estas geometrías. La ecuación de Klein - Gordon para la clase de métricas dadas por la ec.(166) ha sido ya analizada[14,8] y es soluble analíticamente. Para una onda plana entrante desde $u < 0$ con momento $(\mathbf{k}_\perp, \omega)$

$$\Psi_<(u, v, \mathbf{x}_\perp) = e^{-\frac{i\omega v}{4}} e^{i\mathbf{k}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp - iu(\mathbf{k}_\perp^2 + m^2)/\omega}$$

la solución saliente con momento $(\mathbf{p}_\perp, \omega)$ está dada por:

$$\Psi_>(u, v, \mathbf{x}_\perp) = \int d^2\mathbf{p}_\perp e^{i\mathbf{p}_\perp \cdot \mathbf{x}_\perp - iu(\mathbf{p}_\perp^2 + m^2)/\omega} S(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{p}_\perp, \omega) \tag{189}$$

La matriz de dispersión S tiene la expresión:

$$S(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{p}_\perp, \omega) = \int \frac{d\rho}{(2\pi)^2} e^{i(\mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}_\perp) \cdot \rho + \frac{i\omega}{4} f(\rho)} \tag{190}$$

o luego de integrar sobre los ángulos:

$$S(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{p}_\perp, \omega) = \int \frac{d\rho}{2\pi} \rho J_0(|\, \mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}_\perp \,|\, \rho) e^{\frac{-i\omega}{4} f(\rho)} \tag{191}$$

Daremos ahora las matrices S de los perfiles de onda de choque halladas en este Capítulo, en términos de las variables s, t:

$$Gs = \omega p + Gm^2 \qquad\qquad t = -\,|\, \mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}_\perp \,|^2$$

a) Cuerdas cósmicas locales

En este caso la matriz S es:

$$S = \delta(k_z - p_z) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{2\pi} e^{iy(k_y - p_y)} e^{i\omega p|y|/4}$$
$$= \frac{1}{2} \delta(k_z - p_z) \{ \delta [k_y - (p_y - \omega p/4)] - \delta [k_y - (p_y + \omega p/4)] \} \ , \tag{192}$$

$$S = \delta(k_z - p_z) \frac{iGs}{t + (Gs/4)^2} \ . \tag{193}$$

La matriz S es no trivial debido a la no trivialidad de la topología del espacio - tiempo de la cuerda cósmica. No trivialidad que permanece luego de tomar el límite ultrarrelativista a través de la presencia del valor absoluto $| y |$ en $f(y)$. Esto produce un efecto que puede ser interpretado como de lente o enfocamiento de geodésicas:

$$\tan^2 \theta = t/s \sim 1/s \quad ,$$

como puede verse del cero del argumento de la delta de Dirac, ec.(192).

Para $s \to 0$, tenemos la amplitud de intercambio de un gravitón:

$$S(s \to 0) = \delta(k_z - p_z) \frac{iGs}{\pi t} \ , \tag{194}$$

mientras que para $t \to 0$:

$$S(t \to 0) = \delta(k_z - p_z) \frac{4i}{\pi Gs} \ . \tag{195}$$

Para $s \to \infty$ y $t \to \infty$ tendremos respectivamente:

$$S(t \to \infty) = \delta(k_z - p_z) \frac{iGs}{\pi t} \qquad S(s \to \infty) = \delta(k_z - p_z) \frac{16i}{\pi Gs} \tag{196}$$

lo que muestra una especie de dualidad entre los comportamientos s pequeño y t grande.

b) Monopolos globales

En este caso, hallamos:

$$S = \frac{iGs}{8\pi\left[-t - (Gs/4)^2\right]^{3/2}} \ . \tag{197}$$

Hay una singularidad en $t = -(Gs/4)^2$, o sea a un ángulo $\tan^2\theta = t/s \sim 1/s$, lo que significa que tenemos un foco diferente para cada frecuencia. Para $Gs \to 0$ y $t \to 0$ tenemos respectivamente:

$$S(s \to 0) = \frac{iGs}{8\pi\left[-t\right]^{3/2}} \qquad S(t \to 0) = \frac{8i}{\pi(Gs)^2} \tag{198}$$

y

$$S(t \to \infty) = \frac{iGs}{8\pi\left[-t\right]^{3/2}} \qquad S(s \to \infty) = \frac{8i}{\pi(Gs)^2} \ . \tag{199}$$

En este caso, el límite $Gs \to 0$ así como el límite $t \to 0$ no reproducen la amplitud de intercambio de un gravitón, como en el caso de partículas y cuerdas cósmicas ultrarrelativistas.

c) Paredes de dominio

En este caso la matriz S está dada por:

$$S = \frac{2i}{\pi\omega p}\exp\frac{-2i\mid \mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}_\perp \mid^2}{\omega p} = \frac{2i}{\pi Gs}\exp\frac{2it}{Gs} \ . \tag{200}$$

Entonces, para $Gs \to \infty$ y para $t \to 0$ tenemos respectivamente:

$$S(s \to \infty) = \frac{2i}{\pi Gs} \qquad S(t \to 0) = \frac{2i}{\pi Gs} \tag{201}$$

Las paredes de dominio y los monopolos globales tienen comportamientos diferentes para pequeño s y pequeño t en las matrices de dispersión. Estos comportamientos son diferentes de las amplitudes de intercambio de un gravitón usuales (partículas puntuales), debido a la naturaleza de largo alcance de los potenciales de estas fuentes.

La matriz S de las paredes de dominio exhibe singularidades esenciales para $Gs \to 0$, así como para $t \to 0$. Para monopolos globales la matriz S tiene cortes ramificados[23].

Es interesante recordar aquí la amplitud de dispersión producida por la geometría de una fuente puntual estática de masa M en el límite de campo gravitacional débil (o régimen de gran parámetro de impacto). Para un campo relativista representando una partícula de masa m y momento p, está dada por:

$$f_{Coul}(x,y) = x\frac{\Gamma(1-ix)}{\Gamma(1+ix)}\left(\frac{y}{2}\right)^{2ix-1} \tag{202}$$

donde

$$y = 4p\sin^2(\Theta/2) \qquad x = 2GMp\left(1+\frac{m^2}{2p^2}\right) \qquad E^2 = m^2 + p^2 \ .$$

Esta es la amplitud Coulombiana relativista y Θ, es el ángulo de dispersión.

Por otro lado, la amplitud de dispersión del mismo campo, pero esta vez dispersado por la geometría de una fuente puntual ultrarrelativista (sin masa en reposo y viajando a la velocidad de la luz), está dada por:

$$f_{AS}(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{p}_\perp) = \frac{p}{|\mathbf{k}_\perp - \mathbf{p}_\perp|} f_{Coul}(|\mathbf{k}-\mathbf{p}|, \omega q) \ , \tag{203}$$

$\mathbf{k}_\perp$ y $\mathbf{p}_\perp$ son, respectivamente, los momentos transversales entrantes y salientes del campo, y ω es el momento en la direción longitudinal nula v. q es el momento cinético de la fuente. A esta amplitud, le corresponde la siguiente sección eficaz Coulombiana ultrarrelativista:

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{AS,\quad \Theta\ll 1} = 4\frac{(GM)^2}{(\Theta/2)^4} \ . \tag{204}$$

Esta es la misma sección eficaz que la de la dispersión de gravitones por una fuente estática de masa M. La dispersión gravitón - gravitón en el contexto de la colisión de cuerdas fundamentales da, en la aproximación eikonal, para grandes parámetros de impactos, una expresión similar a la (202).

Vemos que para fuentes puntuales, la amplitud de dispersión exacta producida por una fuente ultrarrelativista (geometría de la onda de choque gravitacional), coincide con la amplitud de dispersión producida por el límite de campo débil de la fuente estática (eq(203)).

Es interesante ver que para fuentes extendidas, en particular para cuerdas cósmicas y monopolos, el límite ultrarrelativista y el límite de campo débil (o comportamiento de gran distancia) de la geometría dan la misma amplitud de dispersión.

En efecto, en el límite de campo débil $G\mu \ll 1$, la amplitud de dispersión de un campo escalar por el espacio - tiempo cónico de una cuerda cósmica, está dado por [34]:

$$f(\Theta)_{G\mu\ll 1} = \frac{1}{4\pi}\ \frac{-4\pi G\mu}{(4\pi G\mu)^2 - \sin^2[\Theta(1+4\pi G\mu)/2]} \ . \tag{205}$$

En términos de las variables s y t para este caso,

$$s = \mu^2 + 2\mu E + m^2 \simeq \mu^2 \qquad\qquad t = -\mathbf{k}^2 \sin^2(\Theta/2) \ ,$$

o aún más conveniente, en términos de $\hat{t} = -\mathbf{k}^2 \sin^2(\Theta/2(1-2\mu))$, tenemos:

$$f(\Theta)_{G\mu \ll 1} = \frac{1}{4\pi} \frac{-G\mu}{(4\pi G\mu)^2 + \hat{t}/\mathbf{k}^2} \ . \tag{206}$$

Así, a primer orden:

$$f(\Theta)_{G\mu \ll 1} = G\sqrt{s}\mathbf{k}^2/t = \mid f_{Coul}(\Theta) \mid_{m=0} \tag{207}$$

Por otro lado, cuando las cuerdas cósmicas se convierten en una fuente ultrarrelativista viajando a la velocidad de la luz, la amplitud de dispersión de un campo representando una partícula de prueba puede reexpresarse como:

$$S = i\delta(k_z - p_z) f_{cs}(Gs, t) + \delta(\mathbf{k} - \mathbf{p}) \ .$$

O sea, de nuevo vemos que el límite ultrarrelativista de la geometría y el límite de campo débil (o comportamiento de gran distancia) de la geometría de la fuente estática dan las mismas amplitudes de dispersión.

Lo mismo puede decirse acerca del límite de campo débil de la amplitud de dispersión para monopolos globales estáticos (con $\xi = 1/8$) (ver referencia [34]).

Entonces, en conclusión, el límite de campo débil de las fuentes estáticas parece reproducir (con la apropiada identificación de variables) la amplitud de dispersión exacta producida por fuentes ultrarrelativistas. Esto puede verse se origina en el proceso de cálculo del límite $v \to c$, en el cual las métricas ultrarrelativistas son obtenidas; tomar la métrica estática linearizada basta para reproducir estos resultados[4].

VI - Relación con la dispersión de cuerdas fundamentales

En este Capítulo estudiaremos las colisiones de cuerdas fundamentales en el espacio - tiempo plano a energías mayores que la de Planck, como el problema efectivo de una cuerda fundamental en el fondo curvo generado por las otras cuerdas. Aquí, encontraremos la métrica curva efectiva generada por estas colisiones en dos regímenes de parámetro de impacto, b: i) Parámetro de impacto intermedio: $x^d \ll b \ll \sqrt{\alpha' \ln s} \cong \Delta$, (x^d caracterizando las fluctuaciones de las cuerdas); ii) Gran parámetro de impacto: $b \gg \sqrt{\alpha' \ln s} \cong \Delta \gg x^d$. En ambos casos la métrica curva de fondo puede caracterizarse por la de una onda de choque gravitacional del tipo visto en los primeros Capítulos de la Tesis. Para gran parámetro de impacto, hallamos un perfil de onda de choque gravitacional (en $D = 4$): $f(\rho) = 8p \ln \rho$, o sea la geometría de Aichelburg - Sexl para fuentes puntuales con momento p. Para b intermedio, hallamos $f(\rho) \sim \rho^2$ correspondiente a una fuente extendida con una distribución de energía $\sigma(\rho) \sim \exp\{-\rho^2/\Delta^2\}$. Se analiza la matriz de dispersión de esta geometría y sus implicaciones para el proceso de colisión de cuerdas. El ángulo de deflección (en $D = 4$) es $\Theta = \frac{8Gp}{b}$ para gran b y $\Theta = 4Gqb/\Delta^2$ para b intermedio.

1. Métrica de fondo efectiva para para la dispersión de cuerdas fundamentales[35]

Aquí, estudiaremos la colisión de cuerdas fundamentales a energías Planckianas en el espacio - tiempo plano como el problema equivalente de una cuerda en el fondo curvo efectivo producido por la otras; a medida que hacemos decrecer el parámetro de impacto

b. En el régimen estudiado aquí, b nunca llega a cero ($b \gg x^d \sim$ tamaño de la cuerda). En el régimen de gran parámetro de impacto descripto por:

$$x^d \ll \sqrt{\alpha' \ln s} \ll b \tag{208}$$

donde s es la variable de Mandelstam usual y x^d el tamaño característico de las fluctuaciones de la cuerda, la geometría efectiva generada por la colisión de cuerdas en el espacio - tiempo plano, es la de Aichelburg - Sexl.

Nosotros investigaremos en detalle aquí el régimen:

$$x^d \ll b \ll \sqrt{\alpha' \ln s} \ . \tag{209}$$

En este régimen (llamémoslo pequeño - intermedio), b es aún mucho mayor que el tamaño característico de las exitaciones de la cuerda, tal que en la colisión, las cuerdas no se "superponen" entre sí. Hallamos que es posible asociar una métrica curva efectiva al proceso de colisión en este régimen.

Amati, Ciafaloni y Veneziano[9] obtuvieron una expresión para la amplitud de dispersión de la colisión de supercuerdas en espacio - tiempo plano, válida para altas energías (energías mayores que $1/\sqrt{\alpha'}$, donde α' es la pendiente usual de cuerdas). El régimen de alta energía estudiado es el de gran acoplamiento efectivo $g^2\alpha' s/\sqrt{\alpha'}^{D-4}$ y pequeño parámetro de expansión en lazos $g^2/\sqrt{\alpha'}^{D-4}$, ($\alpha' g^2 = 16\pi G$). Resumiendo en la aproximación eikonal, el comportamiento predominante de los diagramas de lazos de cuerdas en el espacio - tiempo plano D - dimensional no compactificado, se halla la siguiente matriz S:

$$S = \exp\left(2i \int_0^\pi : a(s, b + \hat{x}^u(\sigma_u, 0) - \hat{x}^d(\sigma_d, 0)) : \frac{d\sigma_u d\sigma_d}{\pi^2}\right) , \tag{210}$$

donde b es el parámetro de impacto entre los centros de masas de las dos cuerdas en colisión. x^u y x^d son las oscilaciones alrededor del centro de masa de la cuerda en reposo; s es la variable ususal de Mandelstam y a es la amplitud árbol de cuerdas:

$$\begin{aligned} a(s,b) &= \frac{Gs}{2\pi^{D/2-2}} b^{4-D} \int_0^{g(b,s)} dt e^{-t} t^{D/2-3} \ , \\ g(b,s) &= \frac{b^2}{4\alpha'[ln(s) - i\pi/2]} \ , \end{aligned} \tag{211}$$

donde la integral puede ser escrita en términos de la función gama incompleta $\Gamma\left[(D-4)/2, g(b,\right.$

Por otro lado, la dispersión de cuerdas libres[10,8] en el fondo tipo onda de choque gravitacional(4) se puede resolver exactamente. Para una supercuerda libre en este fondo la matriz S tiene la siguiente expresión:

$$S = \exp\left(\frac{i}{2\pi} p^u \int_0^\pi d\sigma f\left(x(\sigma,0)\right)\right) \ , \tag{212}$$

donde p^u es el impulso asociado a la cuerda, σ es la coordenada de la hoja de universo espacial y $x(\sigma, \tau = 0)$ es la proyección de la coordenada D - dimensional de la supercuerda sobre el plano $u = p^u \tau = 0$ donde la onda de choque gravitacional está localizada (perpendicular al movimiento de la fuente ultrarrelativista).

Ahora, si queremos que ambas matrices describan el mismo fenómeno, debemos igualar las expresiones (212) y (210). Así, obtenemos la forma de la función f que aparece en la métrica (4)

$$f(\rho) = \frac{8q}{s} \int_0^\pi : a(s, \rho - \hat{x}^d(\sigma_d, 0)) : \frac{d\sigma_d}{\pi} \ , \tag{213}$$

donde q es el impulso asociado a la onda de choque gravitacional y $s = 2p^u q$.

Reemplazando la ec. (211) en la (213) obtenemos para $f(\rho)$:

$$f(\rho) = C \int_0^{\pi} \frac{d\sigma}{\pi} : b^{4-D} \int_0^{g(\rho)} dt e^{-t} t^{\frac{D-6}{2}} : \tag{214}$$

donde

$$g(\rho) = \frac{b^2}{4\alpha'(ln(s) - i\pi/2)} \quad , \quad C = \frac{4Gq}{2\pi^{D/2-2}} \quad , \quad b = \rho - x^d(\sigma, 0) \ . \tag{215}$$

Estudiemos esta función $f(\rho)$ en el caso cuando

$$\rho \gg [\alpha' ln(s)]^{1/2} \gg x^d \tag{216}$$

Este caso corresponde a la dispersión de supercuerdas a muy altas energías y grandes parámetros de impactos. Como ρ es grande, la integral en la variable t en la ec.(214), puede tomarse entre cero e infinito (debido al exponencial en el integrando). Además, siempre que $\rho \gg x^d(\sigma)$ podremos sacar b^{4-D} fuera de la integral. Entonces:

$$f(\rho) = C' \rho^{4-D} \quad , \tag{217}$$

que corresponde a la métrica de Aichelburg - Sexl (partícula sin carga ni espín) en D dimensiones.

El otro límite que queremos estudiar es:

$$[\alpha' ln(s)]^{1/2} \gg \rho \gg x^d(\sigma) \quad , \tag{218}$$

que en algún sentido representa el opuesto al último límite estudiado, ya que el (218) corresponde a la dispersión de cuerdas a muy alta energía y parámetros de impactos pequeños (o intermedios), aunque no tan pequeños como para que se superpongan las cuerdas. El

régimen dado en la ec. (218) significa que los parámetros de impactos son más pequeños que aquellos considerados por el régimen (216), pero aún grandes comparados al tamaño característico de las exitaciones de las cuerdas fundamentales.

Aquí es conveniente analizar el tensor energía - momento efectivo o equivalente en vez de la función métrica $f(\rho)$. Con este fin, utilizaremos la ec. (56) (con las (50) y (57)). Así, obtenemos el tensor energía - momento a partir de una f dada, procedimiento inverso al utilizado generalmente.

Entonces:

$$T_{uu}(\rho) = \frac{1}{2}\delta(u)\frac{1}{\rho^{D-3}}\partial_\rho\left(\rho^{D-3}\partial_\rho f(\rho)\right) = \frac{2C\exp\{-\rho^2/\Delta^2\}\delta(u)}{\Delta^{D-2}} \tag{219}$$

con

$$\Delta^2 = [4\alpha'(ln(s) - i\pi/2)] \ .$$

Esta expresión es exacta dentro de las suposiciones planteadas para obtener (214). De aquí puede observarse claramente lo que significan los regímenes (216) y (218) que hemos planteado. En el límite (216) $T_{uu} \to 0$, que caracteriza la solución de Aichelburg - Sexl (representada por una $\delta(\rho)$); mientras que en el límite (218) $T_{uu} \sim$ *constante* (como en el caso de las paredes de dominio visto en el Capítulo anterior).

En términos de la métrica a la que le aplicamos la transformación de Lorentz con $v \to 1$, esto representaría una fuente de interacción no puntual. A este $T_{\mu\nu}$ le corresponde aproximadamente una función métrica:

$$f(\rho) = \frac{C\rho^2}{\Delta^{D-2}} \quad , \quad C = \frac{4Gq}{(2\pi)^{D/2-2}} \quad , \quad \rho < \Delta \ , \tag{220}$$

que difiere de la métrica de Aichelburg - Sexl (que en 4 dimensiones es: $f(\rho) = C\ln(\rho)$). Esta nueva dependencia aparece como una consecuencia de la interación no puntual de las cuerdas en el régimen de pequeño - intermedio parámetro de impacto. Es de esperar que al estudiar la dispersión a parámetro de impacto más y más pequeños, la colisión de supercuerdas genere una geometría de onda de choque gravitacional que ya no se comporte como la de una fuente puntual.

Es interesante notar que la densidad de energía (219) es propia de la dispersión de cuerdas fundamentales, sin embargo, se puede aproximar por un haz homogéneo:

$$\sigma_h = \begin{cases} \sigma_0 & \text{si } \rho < \Delta \\ 0 & \text{si } \rho > \Delta \ . \end{cases}$$

Lo que producirá (para $\rho < \Delta$), resultados similares a los hallados en el Capítulo anterior para la pared de dominio. Es remarcable también que, la presencia de esta densidad de energía baste para remover los así llamados polos de 't Hooft (108). Esto ejemplificara el caracter suavisador de las cuerdas fundamentales, ya notado en otros cálculos de la teoría de cuerdas fundamentales.

2. Dispersión[35]

Analicemos la matriz S de los campos de Klein - Gordon en esta geometría con el fin de describir algunos de los rasgos de la dispersión de cuerdas a ulta alta energía, a medida que se va haciendo decrecer el parámetro de impacto b. El escenario general se muestra en la Figura 2. En esta matriz de dispersión, los polos

$$iGs = n + 1 \quad , \quad n = 0, 1, 2, ...$$

no aparecen. Estos polos, que aparecían en la matriz S de un campo (o cuerda) en la geometría de Aichelburg - Sexl, son consecuencia de extrapolar el uso de la geometría de Aichelburg - Sexl hasta parámetros de impactos muy pequeños $0 \leq b \leq x^d$ (incluyendo $b = 0$). Para b intermedios, las desviaciones de la geometría de Aichelburg - Sexl son importantes y, por otro lado, para muy pequeños b ($0 \leq b \leq x^d$), el uso de la aproximación de una métrica de fondo no es válido.

Primero consideremos la deflección de partículas puntuales (geodésicas) en esta métrica. llamemos $\vec{P}_<$ y $\vec{P}_>$ a los momentos de la partícula antes y después de la colisión con la onda de choque gravitacional. Sean $P_x = (P_v - P_u)/2$, $P_0 = (P_v + P_u)/2$ y P^i las componentes del momento de la partícula de masa $m^2 = (P^i)^2 - P_u P_v$. Llamemos ρ_0 a la distancia desde el origen al punto donde la trayectoria entrante intersecta la onda de choque gravitacional (el plano $u = 0$) y φ el ángulo entre $\vec{\rho}_0$ y el momento entrante (aquí tenemos simetría cilíndrica).

Entonces el parámetro de impacto será:

$$b = \rho_0 \sin(\varphi) \quad , \quad \cos(\varphi) = \frac{P^i_< \, x^i_<}{\rho_0} \tag{221}$$

El ángulo de deflección es simplemente el ángulo entre los momentos entrantes y salientes, o sea[20]:

$$\cos\Theta = \frac{\vec{P}_> \cdot \vec{P}_<}{|\vec{P}_>||\vec{P}_<|} =$$

$$= \frac{P_x^2 + (p^i)^2 + P_x P_u (\partial_\rho f)^2/8 - (P_x + P_u) P^i x^i (\partial_\rho f)/(2\rho)}{\sqrt{P_x^2 + (p^i)^2}\sqrt{(P_x - P^i x^i(\partial_\rho f)/(2\rho) + P_u(\partial_\rho f)^2)^2 + (P^i - P_u x^i(\partial_\rho f)/(2\rho))^2}} \, . \tag{222}$$

Las componentes del momento en el miembro derecho de esta ecuación, se refieren al momento antes de la colisión (<).

Por simplicidad, consideraremos colisiones colineales. O sea, $P^i = 0$, $\varphi = \pi/2$ (i.e. $b = \rho_0$) y pequeño ángulo de dispersión Θ. Entonces:

$$\sin\Theta = \frac{P_u(\partial_\rho f)}{2}\left[P_x^2 + P_u(\partial_\rho f)^2(P_u - P_x)/4 + P_u^2(\partial_\rho f)^4/64\right]^{-1/2} \sim \Theta \ . \tag{223}$$

Si uno estudia la métrica de Aichelburg - Sexl, $\partial_\rho f = 8Gp/\rho$ y el límite $\rho \to \infty$ da:

$$\Theta_{AS} = \frac{4GpP_u}{P_x}\frac{1}{b} \ . \tag{224}$$

Para una partícula sin masa, $P_0 = -P_x$, o sea $P_u = -2P_x$ así:

$$\Theta_{AS} = -2\frac{4Gp}{b} \tag{225}$$

Recordemos que la dispersión de una partícula no masiva por la geometría de Schwarzschild en el régimen de gran b es:

$$\Theta_{BH} = -\frac{4GM}{b} \quad , \tag{226}$$

Siendo M la masa del agujero negro. El factor 2 en la ec.(225) es característico del límite ultrarrelativista. Por ejemplo, la deflección de gravitones por una partícula escalar de masa M en el límite ultrarrelativista, así como la deflección en la dispersión de dos gravitones (en la aproximación del intercambio de un gravitón) es $8GE/b$. En nuestro caso, $\partial_\rho f \cong 2C\rho/\Delta^{D-2}/(D-2)$, que en nuestro régimen ec.(218) es $\ll 1$, y obtenemos:

$$\Theta_S \cong \frac{-2Cb}{\Delta^{D-2}(D-2)} \tag{227}$$

Observemos que Θ_S tiene una dependencia en b diferente comparada a el término correspondiente de Aichelburg - Sexl. Esto es así en la región intermedia (218), ya que

allí tenemos una densidad de energía positiva dada por el tensor energía - momento (219), mientras que en la métrica de Aichelburg - Sexl $T_{uu} = 0$ para $\rho \neq 0$.

Se desprende de las ecs.(225) (Θ tiende a cero para gran b) y (227) (Θ tiende a cero para pequeño b), que el ángulo de dispersión, Θ, debe tener un extremo como función del parámetro de impacto b, para algún valor b_m intermedio. Entonces, para $\mid \Theta \mid < \mid \Theta_m \mid = \mid \Theta(b_m) \mid$, existirán dos valores de b que conduzcan al mismo ángulo de dispersión. Cada uno contribuirá a la sección eficaz diferencial clásica evaluada en ese ángulo, o sea:

$$\sigma(\Theta) = \sum_{i=1}^{2} \frac{b_i}{\sin\Theta} \left| \frac{db}{d\Theta} \right|_i . \tag{228}$$

La sección eficaz diferencial evaluada en Θ_m diverge, pero para $\mid \Theta \mid > \mid \Theta_m \mid$ la sección eficaz cásica se anula (ya que Θ_m es un extremo). Este fenómeno es llamado de dispersión tipo *arco iris*, en analogía al proceso de dispersión de la luz solar por las gotas de lluvia.

Consideremos ahora la matriz S de los campos de Klein - Gordon en la geometría (4) en cuatro dimensiones. La matriz S está dada por[8]:

$$S(\mathbf{k}_\perp, \mathbf{p}_\perp, \omega) = \int \frac{d\rho}{2\pi} \rho J_0(\mid \mathbf{k}_\perp - \mathbf{p}_\perp \mid \rho) e^{\frac{-i\omega}{4} f(\rho)} \tag{229}$$

Con el fin de utilizar esta matriz S para describir algunos de los aspectos de la colisión de cuerdas a ultra altas energías, la integral que aparece en (229) debe entenderse como la suma de tres términos:

$$S = S_I + S_{II} + S_{III} = \int_0^{\rho_1} + \int_{\rho_1}^{\rho_2} + \int_{\rho_2}^{\infty} \tag{230}$$

En la última integral (régimen de gran parámetro de impacto), podemos utilizar la métrica de Aichelburg - Sexl, o sea $f_{III}(\rho) = 8Gp\ln(\rho)$. En la segunda integral (región intermedia),

debe reemplazarse $f_{II}(\rho) = 4Gq\rho^2/\Delta^2$. Desafortunadamente, no parece fácil obtener una expresión cerrada para la segunda integral con límites genéricos; mientras que para la primera región la simple utilización de la aproximación de métrica efectiva no es válida (la colisión es tan cercana que las cuerdas fundamentales se tocan una a otra). Esto es resumido en la Figura 2. Los polos $iGs = n + 1 \quad , \quad n = 0, 1, 2, ...$ que aparecen en la matriz S para la geometría de Aichelburg - Sexl, son consecuencia de la extensión de la tercera integral hasta parámetros de impactos $\rho_2 = 0$.

La tercera integral está dada por:

$$S_{III}(s, t, \rho_2) = \frac{1}{2\pi} \int_{\rho_2}^{\infty} d\rho \rho^{1-2iGs} J_0(\rho\sqrt{-t}) \ , \tag{231}$$

con $t = -\mid \mathbf{k}_\perp - \mathbf{k}_\perp \mid^2 \quad , \quad Gs = \omega p$ y donde hemos tomado $f_{III}(\rho) = 8Gp \ln \rho$. Entonces, hallamos

$$S_{III} = \frac{1}{2\pi}(-t)^{iGs-1}\{-2iGs\rho_2 J_0(\rho_2) S_{-2iGs,-1}(\rho_2) + \rho_2 J_1(\rho_2) S_{1-2iGs,0}(\rho_2)\} \tag{232}$$

donde J_0 y J_1 son la funciones de Bessel y

$$S_{\alpha,\beta}(z) = s_{\alpha,\beta}(z) +$$

$$+2^{\alpha-1}\Gamma(\frac{\alpha-\beta+1}{2})\Gamma(\frac{\alpha+\beta+1}{2})\left[\sin(\frac{\alpha-\beta}{2}\pi)J_\alpha(z) - \cos(\frac{\alpha-\beta+1}{2}\pi)N_\alpha(z)\right] \tag{233}$$

$S_{\alpha,\beta}(z)$ y $s_{\alpha,\beta}(z)$ son las funciones de Lommel[36] y pueden ser relacionadas a las series hipergeométricas

$$s_{\alpha,\beta}(z) = \frac{z^{\alpha+1}}{(\alpha+\beta+1)(\alpha-\beta+1)} \quad {}_1F_2\left(1; \frac{1}{2}(\alpha-\beta+3); \frac{1}{2}(\alpha+\beta+3); -z^2/4\right) \tag{234}$$

$$N_\alpha(z) = \csc(\alpha\pi)[J_\alpha(z)\cos(\alpha\pi) - J_{-\alpha}(z)]$$

Para $\rho_2 \to 0$, la ec.(232) da la amplitud de dispersión (107). Para cualquier ρ_2 finito y distinto de cero, S_{III} no tendrá los polos en $iGs = n+1, \quad n = 0, 1, ...$ Para ver esto es más conveniente hacer la descomposición: $\int_{\rho_2}^{\infty} = \int_0^{\infty} - \int_0^{\rho_2}$ en la ec.(231). El primer término está dado por[6,8]:

$$\frac{1}{2\pi} 2^{1-2iGs}(-t)^{iGs-1} \frac{\Gamma(1-iGs)}{\Gamma(iGs)} \quad , \tag{235}$$

mientras que el segundo término produce

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{\rho_2} d\rho\rho^\mu J_0(\rho\sqrt{-t}) = \frac{1}{2\pi}(-t)^{-(\mu+1)/2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{4^k(k!)^2}\frac{\rho_2^{\mu+2k+1}}{\mu+2k+1} \quad , \quad \mu = 1-2iGs \tag{236}$$

donde hemos utilizado:

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z^{2k}}{4^k(k!)^2} \ . \tag{237}$$

La ec.(236) tiene polos en $\mu = -(2k+1)$, o sea $iGs = n+1, \quad n = 0, 1, ...,$ lo mismo que la ec.(235). Veamos ahora sus residuos. Multiplicando la ec.(236) por $\mu + 2k + 1$ y tomando el límite $\mu \to -(2n+1)$ obtenemos:

$$Res\left\{\int_0^{\rho_2}\right\} = \frac{1}{2\pi}(-t)^{-n}\frac{(-1)^n}{4^n(n!)^2} \quad , \tag{238}$$

Por otro lado, usando que:

$$Res\{\Gamma(-n)\} = \frac{(-1)^n}{n!} \quad , \tag{239}$$

obtenemos para el residuo de la ec.(235) la misma expresión, ec.(238). Por lo tanto, al restar para obtener S_{III}, dada por (231), los polos desaparecen.

La descripción de la dispersión de cuerdas fundamentales a muy alta energía en términos de la dispersión de una cuerda libre en el fondo efectivo creado por todas las otras, permite entender algunos aspectos de la colisión misma. Aquí, hemos extendido la relación entre la dispersión descripta por la colisión de supercuerdas en el espacio - tiempo plano y la dispersión descripta por la teoría semiclásica, que considera un fondo curvo. A la descripción de un fondo generado por una partícula ultrarrelativista dispersándose con una cuerda fundamental que pasa con un gran parámetro de impacto (ver referencia[10]), le hemos agregado el régimen de parámetro de impacto pequeño - intermedio. En la interpretación semiclásica, cuando la dispersión es a gran parámetro de impacto, uno espera que la cuerda de prueba no sufra perturbaciones dependientes de la estructura del objeto que generó la onda de choque gravitacional. Debido a este hecho, parece razonable describir el proceso de dispersión por una $f(\rho)$ (ver ec.(217)) que caracteriza a una fuente puntual, o sea la geometría de Aichelburg - Sexl. Sin embargo, a medida que hagamos el parámetro de impacto más y más pequeño, será más y más importante que clase de estructura no puntual posean las cuerdas. Es debido a ésto, que es más razonable suponer que la dispersión semiclásica está descripta por un tensor energía - momento como el dado en la ec.(219).

Vale la pena notar que al tomar una onda de choque gravitacional descripta por una función perfil $f(\rho)$, hemos considerado la colisión con simetría axial. Esto parece ser una buena aproximación, siempre que el parámetro de impacto se mantenga mucho más grande que el tamaño típico de las cuerdas fundamentales. Sin duda, éste es nuestro caso. En general, si la colisión ocurre a muy pequeños parámetros de impactos, aparecerán

anisotropías en la dispersión y ellas deberían ser descriptas (siempre que la aproximación de métrica efectiva sea válida), por una onda de choque gravitacional con una función perfil $f(\rho, \theta)$. Esto suma otro factor de desviación de la métrica de Aichelburg - Sexl, aparte del ya descripto en este Capítulo.

FIGURA 2

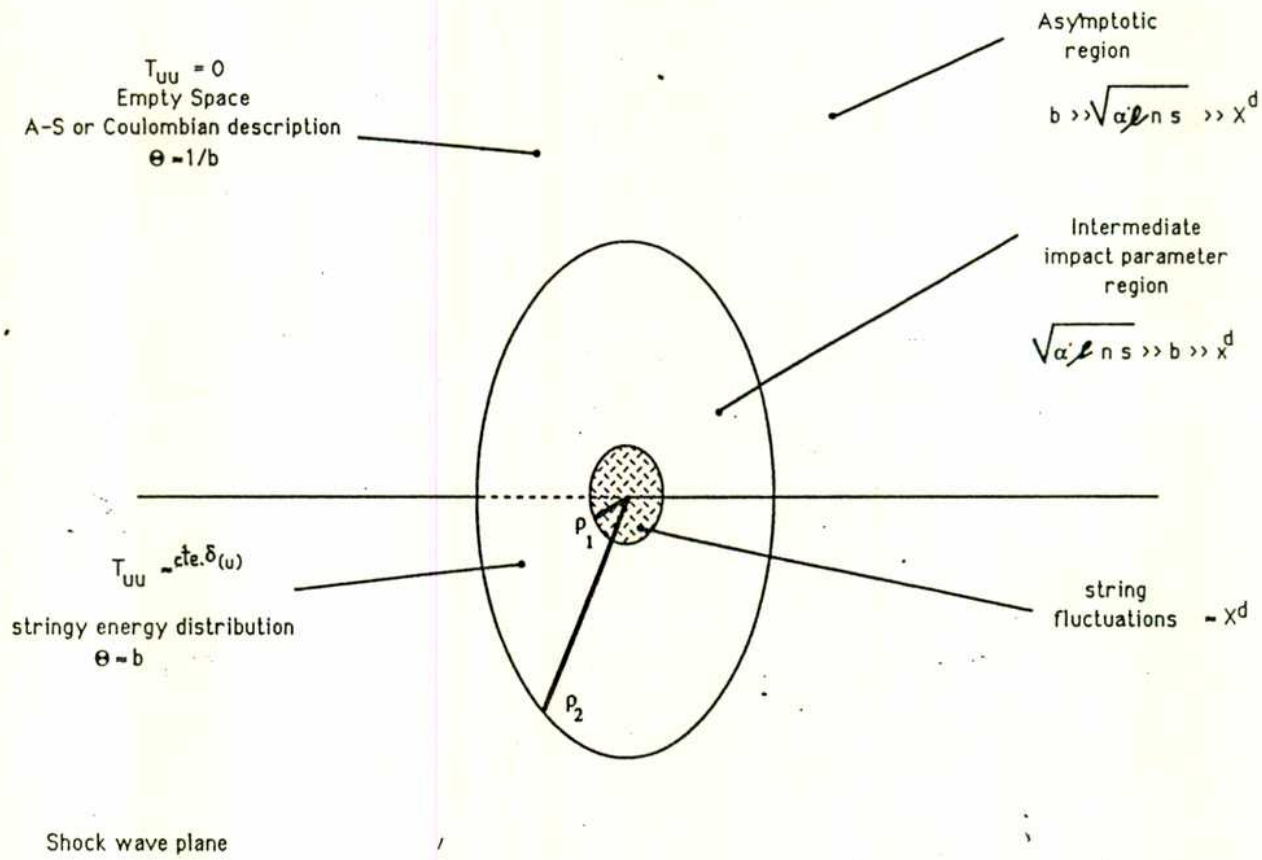

Figura 2: Diagrama esquemático del proceso de colisión de cuerdas fundamentales; los distintos regímenes de parámetros de impactos y la geometría efectiva asociada.

Agradecimientos

Este trabajo de Tesis contó con el respaldo económico del CONICET, la Universidad de Buenos Aires, el Directorate General for Science, Research and Development of the Commission of the European Communities bajo contrato *No.* C11-0540-M(TT) y de la Fundación Antorchas. También quisiera agradecer al Instituto de Astronomía y Física del Espacio y al DEMIRM (Francia) por la utilización de sus instalaciones y equipos y a la Dra. N. Sánchez por la colaboración brindada en los trabajos relacionados a esta Tesis.

Apéndice A

Para calcular los límites en las ecs.(11), (18) y (64) hemos utilizado el método descripto en el apéndice de la referencia[4]. Este método consiste en integrar la expresión antes de tomar el límite y sólo después calcular la derivada.

Nosotros queremos calcular:

$$\lim_{v\to 1} f_v(t,x,y,z) \ . \tag{240}$$

Entonces procedemos como sigue: Calculemos

$$\lim_{v\to 1} F_v(t-x,y,z) \ , \tag{241}$$

donde

$$F_v = \int_{-\infty}^{x} dx' f_v(t,x',y,z) \ , \tag{242}$$

f_v debe ser integrable al menos por segmentos (salvo puntos aislados). Entonces, tomando el límite y calculando la derivada, obtenemos (240).

Estudiemos el caso de la ec.(11):

$$\begin{aligned} \lim_{v\to 1} \frac{\gamma^2 4M}{\bar{r}} &= \lim_{v\to 1} \frac{\gamma^2 4\gamma^{-1}p}{[\gamma^2(x-vt)^2+\rho^2]^{1/2}} \\ &= \lim_{v\to 1} \frac{4p}{[(x-vt)^2+(1-v^2)\rho^2]^{1/2}} \ . \end{aligned} \tag{243}$$

En este límite sumamos y restamos:

$$4p[(x-vt)^2+(1-v^2)]^{-1/2} \ ,$$

para obtener:

$$\lim_{v\to 1}\frac{\gamma^2 4M}{\bar{r}} = \lim_{v\to 1} 4p\{[(x-vt)^2+(1-v^2)\rho^2]^{-1/2} \\ -[(x-vt)^2+(1-v^2)]^{-1/2}\} + \frac{4p}{\mid t-x \mid} \cdot \tag{244}$$

Al integrar la expresión entre llaves hallamos:

$$F_v = 4p\ln\left\{\frac{[(x-vt)^2+(1-v^2)\rho^2]^{1/2}+x-vt}{[(x-vt)^2+(1-v^2)]^{1/2}+x-vt}\right\} . \tag{245}$$

Entonces:

$$\lim_{v\to 1} F_v = \begin{cases} 0 & \text{si } x-vt>0 \\ \ln\rho^2 & \text{si } x-vt<0 \end{cases} . \tag{246}$$

Finalmente calculando las derivadas, obtenemos (11).

Del mismo modo calculamos el límite (18):

$$\lim_{v\to 1} -\frac{3\gamma^2 Q^2}{2\bar{r}^2} = \lim_{v\to 1}\frac{-\frac{3}{2}\gamma^2\gamma^{-1}p_e^2}{\gamma^2(x-vt)^2+\rho^2} \\ = \lim_{v\to 1}\frac{-\frac{3}{2}p_e^2\gamma^{-1}}{(x-vt)^2+(1-v^2)\rho^2} . \tag{247}$$

Integrando esta expresión obtenemos:

$$F_v = -\frac{3}{2}p_e^2\rho^{-1}\arctan\left[\frac{x-vt}{\sqrt{1-v^2}\rho}\right] , \tag{248}$$

Entonces:

$$\lim_{v\to 1} F_v = -\frac{3}{2}p_e^2\rho^{-1}\begin{cases} \pi/2 & \text{si } x-vt>0 \\ -\pi/2 & \text{si } x-vt<0 \end{cases} \tag{249}$$

y su derivada nos da la expresión (18).

El límite (64) está dado por:

$$\lim_{v\to 1}\left\{-\frac{3\gamma^2 Q^2}{4\bar{r}^4}\right\} = \lim_{v\to 1}\frac{-\frac{3}{2}\gamma^2\gamma^{-1}p_e^2\gamma^{-4}}{[(x-vt)^2+(1-v^2)\rho^2]^2} . \tag{250}$$

Luego de integrar obtenemos:

$$F_v = \frac{3}{2}p_e^2\gamma^{-1}\rho^{-2}\left\{(x-vt)[(x-vt)^2+(1-v^2)\rho^2]^{-1} + \int dx[(x-vt)^2+(1-v^2)\rho^2]^{-1}\right\}, \tag{251}$$

entonces, tomando el límite (y usando este último resultado) hallamos:

$$\lim_{v\to 1} F_v = \frac{3}{2}p_e^2\rho^{-3}\begin{cases}\pi/2 & \text{si } x-vt>0\\ -\pi/2 & \text{si } x-vt<0\end{cases} \tag{252}$$

Derivando aquí, se halla la ec.(64).

Los límites (24) y (67), correspondientes al caso D - dimensional, pueden ser calculados como los del caso 4 - dimensional. Para ejemplificar, podemos calcular el si-guiente límite:

$$\lim_{v\to 1}\left\{-\frac{3\gamma^2E^2}{2\bar{r}^{2(D-3)}}\right\} = \lim_{v\to 1}\frac{\frac{3}{2}\gamma^2E^2(p_e)\gamma^{-1}\gamma_{-}2(D-3)}{[(x-vt)^2+\gamma_{-}2\rho^2]^{D-3}}, \tag{253}$$

$$E^2(p_e) = \frac{8\pi Gp_e^2}{(D-2)(D-3)}.$$

Integrando como antes, lo que está dentro del límite, obtenemos:

$$\begin{aligned}\lim_{v\to 1} F_{v,D} =& \frac{3}{2}E^2(p_e)\frac{(2D-9)\gamma}{2(D-4)}\frac{\gamma_{-}2(D-4)}{\rho^2}\int dx'[(x-vt)^2+\gamma_{-}2\rho^2]^{3-D}\\ =& \frac{3}{2}E^2(p_e)\left\{\frac{(2D-9)}{2(D-4)}\rho^{-2}\lim_{v\to 1}F_{v,D-1}\right\}.\end{aligned} \tag{254}$$

La relación recursiva (254) nos permite escribir los límites D - dimensionales en función de los 4 - dimensionales. Haciendo esto, encontramos:

$$\frac{d}{dx}\left[\lim_{v\to 1}F_{v,D}\right] = \left[\prod_{j=0}^{D-5}\frac{2D-9-2j}{2(D-4-j)}\right]\rho^{-2(D-4)}F_4', \tag{255}$$

$$F_4' = \frac{\pi}{\rho}\delta(u)$$

y con una simple redefinición de j en la productoria, obtenemos la ec. (24).

El otro límite en (24) y el de (67) pueden hallarse en una forma bien similar a la que acabamos de realizar.

Apéndice B

Para calcular los límites que aparecen en las ecs.(30) y (31) utilizaremos el método bosquejado en los apéndices de las referencias[4,14]. Este método consiste en, esencialmente, integrar sobre la variable $u = \tilde{z} - \tilde{t}$, luego tomar el límite $v \to 1$ y finalmente derivar con respecto a u.

Veamos primero que la expresión:

$$r^{-2N} = 2^N (z^2 + \rho^2)^{-N} \left[1 + \sqrt{1 + \frac{4a^2 z^2}{(z^2 + \rho^2)^2}} \right]^N \tag{256}$$

puede desarrollarse en serie de Taylor[21]

$$r^{-2N} = (z^2 + \rho^2)^{-N} \sum_{k=0}^{\infty} A_{k,N} \left(\frac{az}{(z^2 + \rho^2)} \right)^{2k} \tag{257}$$

donde

$$A_{k,N} = \frac{(-)^k}{k!} N(N + k + 1)(N + k + 2).....(k - \textit{términos}) \tag{258}$$

Apliquemos esto al desarrollo en multipolos de $\Delta g_{\tilde{t}\tilde{t}}$ en la ec.(31), o sea:

$$\Delta g_{\tilde{t}\tilde{t}} = (2Mr - Q^2) \sum_{n=0}^{\infty} (-)^n \frac{(az)^{2n}}{r^{4n+2}} \ . \tag{259}$$

Aplicar una transformación de Lorentz aquí es equivalente a reemplazar en las expresiones precedentes:

$$\begin{aligned} z &\to u = \tilde{z} - \tilde{t} \\ \rho &\to \tilde{\rho} = \gamma^{-1} \rho \\ a &\to \tilde{a} = \gamma^{-1} a \ . \end{aligned} \tag{260}$$

Entonces, la intregral a calcular puede hallarse en tablas[21]:

$$\int_{-\infty}^{\tilde{z}-\tilde{t}} \frac{du\ u^{2(n+k)}}{(u^2+\tilde{\rho}^2)^{2(n+k)+1/2}} =$$

$$= \begin{cases} \tilde{\rho}^{-2(n+k)} \sum_{j=0}^{n+k-1} \frac{(-)^j}{(2j+n+k+1)} \binom{n+k+1}{j} \frac{u^{2(n+k+j)+1}}{(u^2+\tilde{\rho}^2)^{n+k+j+1/2}} & \text{if} \quad n+k \geq 1 \\ \ln(u+\sqrt{u^2+\tilde{\rho}^2}) & \text{if} \quad n+k=0\ . \end{cases} \tag{261}$$

Tomando el límite $v \to 1$ y derivando con respecto a u, hallamos

$$\lim_{v\to 1} \left\{ \frac{\gamma^2 2M\tilde{r}}{\tilde{r}^2 + a^2\cos^2\theta} \right\} = -4\ln\rho + \tag{262}$$

$$+4p \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{k=0 \\ n+k\neq 0}}^{\infty} (-)^n \left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)^{n+k} \left\{ A_{k,2n+1/2} \sum_{j=0}^{n+k-1} \frac{(-)^j}{(2j+n+k+1)} \binom{n+k+1}{j} \right\} \delta(u)\ ,$$

donde

$$\binom{m}{l} = \frac{m!}{l!(m-l)!}\ .$$

Para calcular el segundo sumando en la ec.(259) (proporcional a Q^2) proce-deremos en forma similar. Con la ayuda de las integrales[21]:

$$\int_{-\infty}^{u=\tilde{z}-\tilde{t}} \frac{u^{2(n+k)}}{(u^2+\tilde{\rho}^2)^{2(n+k)+1}} =$$

$$= \left\{ \prod_{j=0}^{n+k-1} \left[\frac{2(n+k)-2j-1}{2(n+k)+2j+1} \right] \right\} \frac{(4(n+k)-1)!!}{(2n+2k)!4^{n+k}} \tilde{\rho}^{-2(n+k)-1} \arctan(u/\tilde{\rho})\ , \tag{263}$$

tomando el límite $v \to 1$ y derivando con respecto a u, obtenemos:

$$\lim_{v\to 1} \left\{ \frac{-\gamma^2 Q^2}{\tilde{r}^2 + a^2\cos^2\theta} \right\} = \frac{-\pi p_e^2}{\rho} \delta(u) \cdot \tag{264}$$

$$\cdot \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (-)^n \left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)^{n+k} A_{k,2n+1} \left\{ \prod_{j=0}^{n+k-1} \left[\frac{2(n+k)-2j-1}{2(n+k)+2j+1} \right] \right\} \frac{(4(n+k)-1)!!}{(2n+2k)!4^{n+k}}\ ,$$

donde la doble suma da 1 cuando $n = k = 0$.

Análogamente, el otro límite $v \to 1$ de $\Delta g_{\tilde{z}\tilde{z}}$ que aparece en la ec.(30) puede calcularse. De nuevo, el desarrollo en multipolos de la ec.(31) da:

$$\Delta g_{\tilde{z}\tilde{z}} = (2Mr - Q^2)\frac{z^2}{r^4}\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n\left(\frac{a^2z^2}{r^4}\right)^n \tag{265}$$

Las integrales a calcular en este caso son[21]:

$$\int_{-\infty}^{\tilde{z}-\tilde{t}} \frac{u^{2(n+k+1)}}{(u^2+\tilde{\rho}^2)^{2(n+k)+3/2}} =$$

$$= \begin{cases} \tilde{\rho}^{-2(n+k)}\sum_{j=0}^{n+k-1}\frac{(-)^j}{(2j+n+k+2)}\binom{n+k+1}{j}\frac{u^{2(n+k+j)+3}}{(u^2+\tilde{\rho}^2)^{n+k+j+3/2}} & \text{if} \quad n+k \geq 1 \\ -\frac{u}{(u^2+\tilde{\rho}^2)^{1/2}} + \ln(u+\sqrt{u^2+\tilde{\rho}^2}) & \text{if} \quad n+k = 0\ . \end{cases} \tag{266}$$

Tomando el límite $v \to 1$ y derivando con respecto a u, hallamos:

$$\lim_{v\to 1}\left\{\frac{\gamma^2 2M\tilde{r}\cos^2\theta}{\tilde{r}^2+a^2\cos^2\theta}\right\} = -4p\delta(u) - 4\ln\rho +$$

$$+4p\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{\substack{k=0\\ n+k\neq 0}}^{\infty}(-)^n\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)^{n+k}\left\{A_{k,2n+3/2}\sum_{j=0}^{n+k-1}\frac{(-)^j}{(2j+n+k+2)}\binom{n+k+1}{j}\right\}\delta(u)\ . \tag{267}$$

Para calcular el segundo sumando en la ec.(265) (proporcional a Q^2) proce-deremos en forma similar a los casos anteriores. Con la ayuda de las integrales[21]:

$$\int_{-\infty}^{u=\tilde{z}-\tilde{t}} \frac{u^{2(n+k+1)}}{(u^2+\tilde{\rho}^2)^{2(n+k+1)}} =$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{2}\left\{\prod_{j=0}^{n+k}\left[\frac{2(n+k)-2j+1}{2(n+k)+2j+1}\right]\frac{(4(n+k)+1)!!}{(2n+2k+1)!4^{n+k}}\tilde{\rho}^{-2(n+k)-1}\arctan(u/\tilde{\rho})\right\} & \text{if} \quad n+k \geq 1 \\ -\frac{1}{2}\frac{u}{(u^2+\tilde{\rho}^2)} + \frac{1}{2}\tilde{\rho}^{-1}\arctan(u/\tilde{\rho}) & \text{if} \quad n+k = 0\ , \end{cases} \tag{268}$$

tomando el límite $v \to 1$ y derivando con respecto a u, hallamos

$$\lim_{v\to 1}\left\{\frac{-\gamma^2 Q^2\cos^2\theta}{\bar{r}^2+a^2\cos^2\theta}\right\} = \frac{p_e^2}{2u}+ \tag{269}$$

$$-\frac{\pi p_e^2}{2\rho}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(-)^n\left(\frac{a^2}{\rho^2}\right)^{n+k} A_{k,2n+2}\left\{\prod_{j=0}^{n+k}\left[\frac{2(n+k)-2j+1}{2(n+k)+2j+1}\right]\right\}\frac{(4(n+k)+1)!!}{(2n+2k+1)!4^{n+k}}\delta(u)$$

donde la doble suma da $1/2$ cuando $n = k = 0$.

Entonces, de las ecs.(262)-(267) obtenemos los coeficientes B_m dados por la ec.(35) y de las ecs.(264)-(269) los C_m dados por por la ec.(36).

Después de haber calculado todos estos límites, es fácil convencerse que el límite $v \to 1$ del término cruzado $g_{\varphi t}$ es cero. En efecto, la descomposición en monopolos de este término es:

$$g_{\varphi t} = 2Ma(1-z^2/r^2)\sum_{n=0}^{\infty}(-)^n a^{2n}z^{2n}/r^{4n+1}\ , \tag{270}$$

impulsándolo, sólo aparece un factor γ debido a la transformación de la coordenada t (la coordenada φ no se modifica). Entonces, el límite tenderá a γ^{-1} veces términos proporcionales a $\delta(u)$.

Referencias

1. R.C.Tolman, "Relativity, Thermodynamics and Cosmology", Oxford University Press, Oxford (1934).

2. A.Peres, Phys.Rev., Vol.118, 1105 (1960).

3. W.B.Bonnor, Comm.Math.Phys., Vol.13, 163 (1969). W.B.Bonnor, Int. Jour. Theor. Phys., Vol.3, 57 (1970). W.B.Bonnor, Int. Jour. Theor. Phys., Vol.3, 257 (1970).

4. P.C.Aichelburg y R.U.Sexl,J.Gen.Rel.Grav., Vol.2, 303 (1971).

5. T.Dray y G.'t Hooft, Nucl.Phys., B253, 173 (1985).

6. G.'t Hooft, Phys.Lett., B198, 61 (1987).

7. C.Klimčik, Phys.Lett., B208, 373 (1988).

8. H.J.de Vega y N.Sánchez, Nucl.Phys., B317,731(1989).

9. D.Amati, M.Ciafaloni y G. Veneziano, Int.J.Mod.Phys., A3, 1615 (1988). D.Amati, M.Ciafaloni y G. Veneziano, Phys.Lett., B216, 41 (1989).

10. D.Amati y C.Klimčik, Phys.Lett., B210, 92 (1988).

11. G.Veneziano, DST Workshop on String Theory (H.S.Mani y R.Ramachandran eds.) World Sci. Publ. Co. (1988) p 1.

12. G.Veneziano, "Strings and Gravitation", talk presented at the 5th Marcel Grossmann meeting (Perth, Aug. 1988), D.G.Blair y M.J.Buckinghan Eds., World Sci., Singapore (1989), p 173.

13. C.W.Misner, K.S.Thorne y J.A.Wheeler, "Gravitation", W.H. Freeman and Co., San Francisco (1973).

14. C.Loustó y N.Sánchez, Int.J.Mod.Phys., A3, 915 (1990).

15. C.Loustó y N.Sánchez, en preparación (1991).

16. C.Loustó y N.Sánchez, Phys.Lett., B232, 462 (1989).

17. W. Israel, Phys.Rev., D2, 641 (1970).

18. V.Ferrari y P.Pendenza, J.Gen.Rel.Grav., Vol.22, 1105 (1990).

19. C.Loustó y N.Sánchez, Phys.Lett., B220, 55 (1989).

20. H.J.de Vega y N.Sánchez, Nucl.Phys., B317, 706 (1989).

21. I.S.Gradstheyn y I.M.Ryzhik, "Table of Integrals, Series and Products", Academic Press, N.Y.(1980).

22. N.D.Birrel y P.C.W.Davies, "Quantum Fields in Curved Space", Cambridge U.P., Cambridge (1982).

23. C.Loustó y N.Sánchez, "Gravitational Shock Waves Generated by Extended Sources: Ultrarelativistic Cosmic strings, Monopoles and Domain Walls" preprint GTCRG-90-15, Buenos Aires 1990. A ser publicado por Nucl. Phys. B (1991).

24. A.Vilenkin, Phys.Rep., Vol.121, 263 (1985).

25. D.Harari y P.Sikivie, Phys.Rev., D37, 3438 (1988).

26. L.Witten, in "Gravitation: An Introduction to Current Research", ed. by L.Witten (Wiley, N.Y. 1962).

27. M.Demianski, Phys.Rev., D38, 698 (1988).

28. P.O.Mazur, Phys.Rev., D34, 1925 (1986).

29. S. Deser, R. Jackiw y G. 't Hooft, Ann. Phys. (NY), Vol.152, 220 (1984).

30. D.Harari y A.P.Polychronakos, Phys.Rev., D38, 3320 (1988).

31. J.Preskill, "The Very Early Universe", eds. G.W. Gibbons, S.W. Hawking y S.T. Siklos, Cambridge U.P. (1983), p 119.

32. M.Barriola y A.Vilenkin, Phys.Rev.Lett., 63, 341 (1989). D.Harari y C.O.Loustó, Phys.Rev., D42, 2626 (1990).

33. A.Vilenkin, Phys.Lett., B133, 177 (1983).

34. C.O.Loustó, "Classical y Quantum Scattering from Global Monopoles", preprint (1991).

35. C.Loustó y N.Sánchez, "High Energy Superstring Collisions and their Relation to Gravitational Shock Wave Backgrounds" preprint (1991).

36. A. Erdelyi et al., "Tables of Integral Transforms", Vol.II, McGraw-Hill, N.Y. (1954).

Firmas

Autor: **Carlos Oscar Lousto**

Director: **Prof. Dr. Mario A. Castagnino**

Jurado:

Jurado:

Jurado: