Soluciones positivas de un problema parabólico de autovalores con funciones de peso

Paczka, Sofía Rosalía

1990

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Universidad de Buenos Aires
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

"Soluciones positivas de un problema parabólico de autovalores con funciones de peso."

Director de Tesis:
Dr. Enrique Lami Dozo

Lugar de trabajo:
Departamento de Matemática.

Sofía Paczka

Tesis para optar al título de Doctor en Matemática

1990

A mis padres

Quiero agradecer a mi director de tesis, Dr. Enrique Lami Dozo por todo lo que me enseñó, por su permanente buena disposición y su paciencia.

Al Dr. Humberto Alagia, al Dr. Oscar Campoli y al Dr. Juan Tirao por su apoyo y confianza.

A la Facultad de Matemática, Astronomía y Física de la Universidad Nacional de Córdoba, a sus autoridades, profesores y compañeros por el estímulo brindado en la realización de este trabajo.

INDICE

I. INTRODUCCIÓN.
HIPOTESIS Y RESUMEN DE RESULTADOS

En este trabajo estudiaremos existencia de soluciones positivas al problema parabólico lineal de autovalores

$$\begin{aligned} \mathcal{L}u = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(x, t, D)u &= \lambda m u \quad \text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

$$u \ T\text{-periódica en la variable } t, \ \forall\, x \in \bar{\Omega}$$

donde

- Ω es un dominio acotado de $\mathbb{R}^n$ con frontera $\partial\Omega$ de clase $C^{2+\mu}$ con $\mu \in (0,1)$

  (o sea frontera tal que $\forall\ x_0 \in \partial\Omega\ \ \exists$ una bola $B = B(x_0)$ con centro en x_0 y una correspondencia biyectiva φ entre B y $D \subset \mathbb{R}^n$ tal que

  1. $\varphi(B \cup \Omega) \subset \mathbb{R}^n_+$
  2. $\varphi(B \cap \partial\Omega) \subset \partial\mathbb{R}^n_+$
  3. $\varphi \in C^{2+\mu}(B)$, $\varphi^{-1} \in C^{2+\mu}(D)$

  [ref [6], p 94]

- $\mathcal{A}(x, t, D) = -\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, t)\, D_i D_k + \sum_{j=1}^{n} a_j(x, t)\, D_j \qquad (D_i \text{ indica } \frac{\partial}{\partial x_i})$

  con a_{ik}, a_j, m, con $i, j, k = 1, \cdots, n$ funciones pertenecientes al espacio $C^{\mu,\mu/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R}) =$ espacio de las funciones μ-Hölder continuas con respecto a la métrica $d((x,t), (y,s)) = (\ \|x - y\|^2 + |t - s|\ )^{1/2}$. A estas funciones las supondremos periódicas en la variable t, de período $T > 0$ y además supondremos que $a_{ik} = a_{ki}$ y que $\exists$ una constante positiva μ_0 tal que

$$\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(x, t)\, \xi^i \xi^k \geq \mu_0 |\xi|^2 \qquad \forall\, (x,t) \in \bar{\Omega} \times \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \forall\ \xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$$

Sea $a \in C^{\mu,\mu/2}(\bar{\Omega} \times I\!R)$, a T-periódica en t. Estamos entonces suponiendo que $\forall\ t$ $\mathcal{A}(x, t, D)$ y $\mathcal{A}(x, t\ D) + a$ son expresiones diferenciales uniformemente elípticas en $\bar{\Omega}$ y que

$$\mathcal{L} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}(x, t, D) \quad \text{y} \quad \mathcal{L} + a = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}(x, t, D) + a \tag{2.1}$$

son expresiones uniformemente parabólicas, además T-periódicas en t.

- ν indica la normal exterior a Ω (y por la hipótesis hecha sobre Ω resulta que

$$\nu \in C^{1+\mu}(\partial\Omega, I\!R^n).$$

Primeramente estudiaremos la existencia de solución periódica al problema parabólico siguiente

$$\begin{aligned} (\mathcal{L} + a)u = \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(x, t, D)u + a(x,t)u &= f \quad \text{en } \Omega \times I\!R\,, \quad a > 0 \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \quad \text{en } \partial\Omega \times I\!R \end{aligned} \tag{2.2}$$

con f T-periódica en t y $f \in C^{\mu,\mu/2}(\bar{\Omega} \times I\!R)$.

Sean los espacios

$E = \{\ f$ restringida a $\bar{\Omega} \times [0, T]$ tal que $f \in C^{\mu,\mu/2}(\bar{\Omega} \times I\!R)$ y f es T-periódica en $t\ \}$ con

$\|f\|_E = \|f\|_{C^{\mu,\mu/2}(\bar{\Omega}\times[0,T])}$

$F = \{\ f$ restringida a $\bar{\Omega} \times [0, T]$ tal que $f \in C^{2+\mu,1+\mu/2}(\bar{\Omega} \times I\!R)$, $\dfrac{\partial f}{\partial \nu} = 0$ en $\partial\Omega \times I\!R$ y f T-periódica en $t\ \}$ con

$\|f\|_F = \|f\|_{C^{2+\mu,1+\mu/2}(\bar{\Omega}\times[0,T])}$ y

$\mathcal{E} = \{\ f$ restringida a $\bar{\Omega} \times [0, T]$ tal que $f \in C(\bar{\Omega} \times I\!R)$ y f es T-periódica en $t\ \}$ con

$\|f\|_{\mathcal{E}} = \|f\|_{C(\bar{\Omega}\times[0,T])}$.

Considerados estos espacios con el ordenamiento natural de las funciones ($u \geq w$ sii $u(x, t) \geq w(x, t)\ \forall\ (x, t) \in (\bar{\Omega} \times [0, T])$) resultan ser espacios de Banach ordenados.

Probaremos entonces que el operador $\mathcal{L}$ inducido por $\dfrac{\partial}{\partial t} + \mathcal{A}(x, t, D)$ con dominio F es tal que para a en E y $a > 0$ el operador $\mathcal{L} + a$ admite un operador inverso $(\mathcal{L} + a)^{-1} : E \to E$ compacto y fuertemente positivo, y que se extiende un operador también compacto y fuertemente positivo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}$ (donde si X e Y son espacios de Banach ordenados con conos de elementos positivos P y Q respectivamente, $\overset{\circ}{Q} \neq \emptyset$, diremos que un operador $A : X \to Y$ es fuertemente positivo si $A(P - \{0\}) \subset \overset{\circ}{Q}$). La función $1 \in E$ es autofunción asociada de autovalor 1 de $(\mathcal{L} + a)^{-1}$, notaremos con ψ la única autofunción positiva normalizada para el autovalor 1 del operador adjunto de $(\mathcal{L} + 1)^{-1}$. Dado $m \in E$ notaremos con M el operador multiplicación por m.

Estudiaremos entonces el problema de autofunciones positivas de $\mathcal{L}u = \lambda\, M\, u$ en E con $\lambda \in I\!R$ con el objeto de caracterizar las funciones de peso m para las cuales exista λ diferente de cero y $u_\lambda > 0$ tal que $\mathcal{L}u_\lambda(x) = \lambda\, M\, u_\lambda(x)$. El resultado que probaremos es el siguiente:

1. Si $m \in E$ y m no es función de t solamente entonces el problema de autovalores

   $$\mathcal{L}u = \lambda\, M\, u \quad u > 0 \ \text{ en } E$$

   tiene un único autovalor $\lambda_1(m)$, aparte del autovalor 0, si y solamente si m o $-m$ satisfacen

   $$(*) \qquad \int_0^T \max_{x \in \bar{\Omega}} m(x, t)\, dt > 0 \quad \text{y} \quad \langle \psi, m \rangle < 0$$

   Además si m satisface $(*)$ (respectivamente $-m$) $\lambda_1(m)$ es positivo (respectivamente negativo).

2. Si m es solo función de t entonces $\mathcal{L}u = \lambda\, M\, u$, $u > 0$ en E tiene aparte de $\lambda = 0$ una solución diferente de cero si y solo si m satisface que $m_0 = \int_0^T m(s)\, ds = 0$. Además cuando $m_0 = 0$ para todo λ en $I\!R$ existe $u_\lambda(x) > 0$ tal que $\mathcal{L}u_\lambda = \lambda\, M\, u_\lambda$.

II. EL PROBLEMA PARABOLICO PERIÓDICO CON CONDICIONES DE BORDE DE TIPO NEUMANN

Sea $a > 0$ en E (o sea $a(x,t) \geq 0$ pero $a(x,t) \not\equiv 0$). Pasaremos a considerar primero bajo las hipótesis enunciadas anteriormente la solución del problema parabólico periódico siguiente

$$\text{II.[1]} \begin{cases} \mathcal{L}u + a\,u = \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(x,t,D)\,u + a(x,t)\,u = f & \text{en } \Omega \times \mathbb{R}\,,\ a > 0 \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \\ u\ T\text{-periódica en } t\ \forall\, x \in \bar{\Omega} & \end{cases}$$

con f T-periódica en t y $f \in C^{\mu,\mu/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$; donde por solución del problema II.[1] entenderemos una función $u \in C^{2,1}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ que satisface II.[1] puntualmente [ref [1]].

Teorema II.1: Dada $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, T-periódica en t, existe una única solución u del problema II.[1], más aún $u \in C^{2+\mu,1+\mu/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$.

Para la demostración de este Teorema se planteará el problema II.[1] en términos de ecuaciones de evolución para lo cual nos harán falta algunos resultados en ese contexto.

Teorema II.2: Sea $p > n$. Sea $X = L^p(\Omega)$. Para $t \in \mathbb{R}$ consideremos el operador $A(t) : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$ inducido por $\mathcal{A}(\cdot, t, D)$ con dominio D independiente de t

$$D = \{\ u \in W^{2,p}(\Omega)\ /\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ en } \partial\Omega\ \}$$

(o sea $[A(t)w](x) = [\mathcal{A}(x,t,D)w](x)$ donde $\mathcal{A}(x,t,D)$ actúa en $w \in D$ en sentido generalizado).

Sea $v_0 \in L^p(\Omega)$, $a : [0, \omega] \to L^p(\Omega)$ $\mu/2$–Hölder continua en $[0, \omega]$ para la norma en $L^p(\Omega)$ entonces para $k \in \mathbb{R}$, k suficientemente grande el problema de Cauchy

$$\text{II.[2]}\left\{\begin{array}{rcll} \dfrac{dv}{dt}(t) + A(t)\,v(t) + a(t)\,v(t) + k\,v(t) & = & g(t) & \text{en } L^p(\Omega)\ \forall\, t \in (0, \omega] \\ v(0) & = & v_0 & \text{en } L^p(\Omega) \end{array}\right.$$

admite para cada g Hölder continua $g : [0, \omega] \to L^p(\Omega)$ una solución única v tal que $v \in C([0, \omega], L^p(\Omega)) \cap C^1((0, \omega], L^p(\Omega))$ y tal que $v(t) \in D(A(t)) = D \quad \forall\ t \neq 0$ y está dada por

$$v(t) = V(t, 0)\, v_0 + \int_0^t V(t, s)\, g(s)\, ds$$

donde $V(t, s)$ es la solución fundamental de II.[2] además $v \in C^1([0, \omega], L^p(\Omega))$ si $v_0 \in D$.

Demostración del Teorema II.2: Destaquemos las propiedades de la familia de operadores $Aa(t) = A(t) + a(t)$

A.1) $\{Aa(t)\ /\ t \in [0, \omega]\}$ es una familia de operadores cerrados con dominio independiente de t y denso en $X = L^p(\Omega)$.

A.2) Existe $k > 0$ suficientemente grande tal que para todo $t \in [0, \omega]$ la resolvente $R(\lambda,\ Aa(t) + k)$ existe para todo λ con $\mathrm{Re}\ \lambda \leq 0$ y

$$\|R(\lambda,\ Aa(t) + k)\|_{L^p(\Omega)} \leq C\ (1 + |\lambda|)^{-1}$$

donde C es una constante independiente de t y de λ.

A.3) La aplicación de $Aa(\cdot) + k : [0, \omega] \to L(X_1,\ L^p(\Omega))$ es $\mu/2$–Hölder continua, donde X_1 es el dominio D con la norma $\|u\|_1 = \|(Aa(0) + k)u\|_{L^p(\Omega)}$, o sea

$$\|\ (Aa(s) + k)u - (Aa(t) + k)u\ \|_{L^p(\Omega)} \leq C\ |s - t|^{\mu/2}\, \|u\|_1.$$

De la propiedad **A.3)** se deduce la siguiente

A'.3) Existe una constante $c > 0$ tal que

$$\|\ [(Aa(s) + k) - (Aa(t) + k)](Aa(r) + k)^{-1}\ \| \leq c\ |s - t|^{\mu/2}\ \forall\, t,\ s,\ r \in [0, \omega].$$

Para la prueba de estas propiedades ver el Apéndice §1.

De las propiedades **A.1**, **A.2** y **A'.3** se deduce que el problema de Cauchy

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dt} + (Aa(t) + k)v &= g \quad \text{en } L^p(\Omega)\ \forall\, t \in (0, \omega] \\ v(0) &= v_0 \quad \text{en } L^p(\Omega) \end{aligned}$$

para cada g-Hölder continua tiene una solución única v con las propiedades que afirma la tesis del Teorema II.2 (ref [4], p 108,109). ∎

Sea el problema de valores iniciales siguiente

$$\text{II.[3]}\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t}(x, t) + \mathcal{A}(x, t, D)\, v(x, t) + b(x, t)\, v(x, t) = g(x, t) & \text{en } \Omega \times (0, \omega] \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0, \omega) \\ v(x, 0) = v_0(x) & \text{en } \bar{\Omega} \end{cases}$$

con b y $g \in C^{\mu, \mu/2}(\bar{\Omega} \times [0, \omega])$, $v_0 \in C(\bar{\Omega})$).

Nota II.1: Diremos que v es una solución clásica de II.[3] si $v \in C(\bar{\Omega} \times [0, \omega]) \cap C^{2,1}(\Omega \times (0, \omega]) \cap C^{\delta,0}(\bar{\Omega} \times (0, \omega])$ y satisface II.[3] puntualmente (ref. [1], p 16). Una solución clásica es llamada regular si

$$v \in C^{1,0}(\bar{\Omega} \times [0, \omega]) \cap C^{2,1}(\bar{\Omega} \times (0, \omega]).$$

Nota II.2: Si $u \in C(\bar{\Omega} \times [0, \omega])$ y definimos $v(t)(x) = u(x, t)$ entonces $v \in C([0, T], C(\bar{\Omega}))$ y viceversa.

Nota II.3: Bajo las hipótesis del Teorema II.2, si $v_0 \in D$ entonces toda solución v de II.[2] vía la identificación $v(x, t) = v(t)(x)$ pertenece a $C^{1,0}(\bar{\Omega} \times [0, \omega]) \cap C^{2+\mu, 1+\mu/2}(\bar{\Omega} \times (0, \omega])$ y es una solución regular de

$$\text{II.[4]} \begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{A}(x,t,D)\,v + a(x,t)\,v + k\,v = g & \text{en } \Omega \times (0,\omega] \\ \dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,\omega] \\ v(x,0) = v_0(x) & \text{en } \bar{\Omega} \end{cases}$$

con a y $g \in C^{\mu,\mu/2}(\bar{\Omega} \times [0,\omega])$ y reciprocamente toda solución regular de II.[4] es una solución de II.[2] (ver ref [1], p 17, Lema 4.2).

Lema II.1: Bajo las hipótesis del Teorema II.2, el problema siguiente

$$\text{II.[5]} \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(x,t,D)\,u + a(x,t)\,u = g & \text{en } \Omega \times (0,\omega] \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{en } \partial\Omega \times (0,\omega] \\ u(x,0) = u_0(x) & \text{en } \bar{\Omega} \end{cases}$$

con a y $f \in C^{\mu,\mu/2}(\bar{\Omega} \times [0,\omega])$ y $u_0 \in D$ tiene una única solución regular y está dada por

$$u(x,t) = \left[U(t,0)\,u_0 + \int_0^t U(t,s)\,f(s)\,ds\right](x)$$

donde $f(s)(x) = f(x,s)$ y $U(t,s) = e^{kt}\,V(t,s)\,e^{-kt}$ con V la solución fundamental de II.[2].

Demostración: Poniendo $e^{kt}v(x,t)$ y $g(x,t) = e^{-kt}f(x,t)$ los problemas II.[4] y II.[5] son equivalentes cn $v_0 = u_0 \in D$ y el problema II.[3] en virtud de la Nota II.3 tiene solución regular $v(x,t) = v(t)(x)$ con $v(t)$ solución del problema II.[2] que $\exists$ pues $e^{-ks}f(s)$ es $\mu/2$-Hölder continua por ser $f \in C^{\mu,\mu/2}(\bar{\Omega} \times [0,\omega])$ y de la expresión que da el Teorema II.2 se desprende la expresión para $v(x,t)$

$$v(x,t) = \left[V(t,0)\,v_0 + \int_0^t V(t,s)\,e^{-ks}\,f(s)\,ds\right](x)$$

y por lo tanto la de $u(x,t) = e^{kt}\,v(x,t)$. ∎

Con el objeto de determinar una condición inicial que nos proporcione una solución de II.[5] que satisfaga $u(x,0) = u(x,T) = u_0$ probemos el siguiente Lema sobre el operador $K = U(T,0)$.

Lema II.2: Bajo las hipótesis del Teorema II.2, sea $\omega > T$ y sea K el operador definido por $K\,u_0 = U(T,0)\,u_0 = e^{kt}\,V(T,0)\,u_0$, $u_0 \in L^p(\Omega)$, V la solución fundamental de II.[2]. Entonces K define un operador de $C(\bar{\Omega})$ en $C(\bar{\Omega})$ compacto fuertemente positivo y si $a > 0$ con radio espectral $r(k) < 1$ (donde $C(\bar{\Omega})$ es tomado con su ordenamiento natural y con fuertemente positivos entenderemos que lleva los elementos positivos no nulos en el interior del cono positivo).

Demostración: Veamos primero que K es un operador lineal y continuo de $L^p(\Omega)$ en $W^{2,p}(\Omega)$:

$$\|V(T,0)\,u_0\|_{W^{2,p}} \leq c\,(\|(Aa(T)+k)(V(T,0)\,u_0)\|_{L^p(\Omega)} + \|V(T,0)\,u_0\|_{L^p(\Omega)})$$

por la desigualdad (39.1) del §1. del apéndice pues $V(T,0)\,u_0 \in D$.
Además como $(Aa(T)+k)^{-1}$ es continuo de $L^p(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$ resulta que

$$\begin{aligned}\|V(T,0)\,u_0\|_{L^p(\Omega)} &= \|(Aa(T)+k)^{-1}\,(Aa(t)+k)\,V(T,0)\,u_0\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq c_1\,\|(Aa(T)+k)\,V(T,0)\,u_0\|_{L^p(\Omega)}\end{aligned}$$

de donde

$$\|V(T,0)\,u_0\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq c_2\,\|(Aa(T)+k)\,V(T,0)\,u_0\|_{L^p(\Omega)} \leq c_3\,\|u_0\|_{L^p(\Omega)}$$

esta última desigualdad por el Teorema 5.2.1 de Tanabe (ref [12], p 17).

Resulta entonces que $K = e^{kT}\,V(T,0)$ es un operador lineal compacto de $C(\bar{\Omega})$ en $C(\bar{\Omega})$ por la siguiente cadena de composiciones

$$C(\bar{\Omega}) \xrightarrow{i_1} L^p(\Omega) \xrightarrow{K} W^{2,p}(\Omega) \xrightarrow{i_2} C(\bar{\Omega})$$

donde las inclusiones son continuas y K es continuo por lo dicho anteriormente y la última inclusión i_2 es compacta (ref [6], p.171 Teorema 7.26).

Veamos que K es un operador lineal fuertemente positivo de $C(\bar{\Omega})$ en $C(\bar{\Omega})$: Sea $u_0 > 0$, $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ y supongamos primero que $u_0 \in D$, entonces

$$u(x, t) = [U(t, 0)\, u_0](x)$$

es una solución regular (por Lema II.1) de II.[5] para $f(x, t) \equiv 0$ con condición inicial $u_o > 0$ entonces por el principio de maximo para ecuaciones parabólicas resulta que $u(x, t) > 0 \; \forall \, x \in \bar{\Omega}$ si $t > 0$ (ref [9]), por lo tanto $u(x, T) = K\, u_o(x) > 0 \; \forall \, x \in \bar{\Omega}$. Si $u_0 \in C(\bar{\Omega})$ pero $u_0 \notin D$, $u_0 > 0$, observemos que se puede hallar $\{w_n\} \subset D$ tal que $0 < w_0 < w_1 < \ldots < w_n \ldots < u_0$ y w_n tiende a u_0 en $C(\bar{\Omega})$ de donde por la continuidad de K en $C(\bar{\Omega})$ se deduce que $K\, u_0(x) \geq 0$ y por lo tanto $K\,(u_0 - w_0)(x) \geq 0$ y en consecuencia $K\, u_0(x) \geq K\, w_0(x) > 0 \; \forall \, x \in \bar{\Omega}$ o sea $K\, u_0$ pertenece al interior del cono positivo de $C(\bar{\Omega})$.

Aplicando el Teorema de Krein–Rutman (ver §5. apéndice) podemos deducir que el radio espectral de K, $r(K)$ es positivo. Sea $u_0 > 0$ tal que $K\, u_0 = r(K)\, u_0$ entonces por el principio de máximo para ecuaciones parabólicas se deduce que $\|K\, u_0\|_{C(\bar{\Omega})} \leq \|u_0\|_{C(\bar{\Omega})}$ y por lo tanto $r(K) \leq 1$. Veamos que $r(K) < 1$.

Sea $a > 0$ y supongamos que $r(K) = 1$, entonces existe $u_0 > 0$ tal que $K\, u_0 = u_0$ y como $U(t, s)\, u_0 \in D$ si $t > 0$ se tiene que $u_0 = K\, u_0 = U(T, 0)\, u_0 \in D$ entonces $u(x, t) = [U(t, 0)\, u_0](x)$ es solución regular de II.[5] para $f(x, t) \equiv 0$ y satisface $u(x, T) = K\, u_o(x) = u_0(x) = u(x, 0)$ entonces por el principio de máximo debería ser $u(x, t)$ =cte $\forall x \in \bar{\Omega}$, $0 \leq t \leq T$, pero $a > 0$ implica $u(x, t) = 0 \; \forall x \in \bar{\Omega}$, $0 \leq t \leq T$ entonces $u_0(x) \equiv 0$, contra lo supuesto, por lo tanto $r(K) < 1$. ∎

Demostración del Teorema II.1: Sea $\omega > T$. por el Lema II.1

$$u(x, t) = \left[U(t, 0)\, u_0 + \int_0^t U(t, s)\, f(s)\, ds \right](x) \tag{9.1}$$

donde $f(s)(x) = f(x, s)$, es una solución regular de

$$II.[5]\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(x, t, D)\, u + a(x, t)\, u &= f \qquad \text{en } \Omega \times (0, \omega] \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 \qquad \text{en } \partial\Omega \times (0, \omega] \\ u(x, 0) &= u_0(x) \quad \text{en } \bar{\Omega} \end{cases}$$

si $u_0 \in D$.

Necesitamos determinar $u_0 \in D$ de modo tal que $u(x, t)$ satisfaga $u(x, 0) = u(x, T)$ o sea

$$u(x, 0) = u_0(f)(x) = u(x, T) = \left[U(T, 0)\, u_0 + \int_0^T U(T, s)\, f(s)\, ds\right](x)$$

o sea

$$u_0 = U(T, 0)\, u_0 = \int_0^T U(T, 0)\, f(s)\, ds. \tag{10.1}$$

Por el Lema II.1 $w(x, t) = \int_0^t U(T, s)\, f(s)\, ds$ es una solución regular de II.[5] para $u_0 \equiv 0 \in D$ por lo tanto $w(\cdot, t) \in C^2(\bar{\Omega})$ para cada $t \in (0, \omega]$ y en particular $w(\cdot, T) \in C^2(\bar{\Omega}) \subset C(\bar{\Omega})$. Sea K el operador inducido en $C(\bar{\Omega})$ por $U(T, 0)$, definido en el Lema II.1, entonces por este Lema resulta que podemos definir univocamente $u_0(f) \in C(\bar{\Omega})$ tal que

$$u_0(f) = (I - K)^{-1}\, w(\cdot, T) = (I - K)^{-1} \left[\int_0^T U(T, s)\, f(s)\, ds\right] \tag{10.2}$$

pues $(I - K)$ tiene inverso pues $r(K) < 1$ por lo tanto vale (10.1) pero además $u_0 \in D$ pues $w(x, t)$ por ser solución regular de II.[5] satisface la condición de borde para $t \in (0, \omega]$ en particular para $t = T$, por lo tanto $w(\cdot, T) \in D$ además $U(T, 0)\, u_0 \in D$ por las propiedades de la solución fundamental en consecuencia de (9.1) se deduce que $u_0 \in D$.

Resulta entonces que la

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \left[U(t, 0)\, u_0 + \int_0^t U(t, s)\, f(s)\, ds\right](x) \\ \text{con } u_0 &= [I - U(T, 0)]^{-1} \left(\int_0^T U(T, s)\, f(s)\, ds\right) \end{aligned} \tag{10.3}$$

es solución regular de II.[5] y cumple $u(x, 0) = u(x, T)$.

Sea $v(x, t) = \begin{cases} u(x, t) & \text{si } t \leq T \\ u(x, t-T) & \text{si } t \geq T \end{cases}$

La función $v(x, t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{A}(x, t, D)\, v + a(x, t)\, v = f \text{ en } \Omega \times [T, \omega]$$

y cumple con $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ en $\partial\Omega \times [T, w]$ por su definición y por la T-periodicidad de los coeficientes y de $f(x, t)$. Como $u(x, t)$ es también ahí una solución pues lo es en todo $(0, \omega]$ resulta que $u(x, t) = u(x, t+T)$ o sea la solución $u(x, t)$ extendida por periodicidad, es la solución de II.[1] y resulta que $u \in C^{2+\mu, 1+\mu/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$. ∎

Sea $E = \{f/\bar{\Omega} \times [0, T]$ talr que $f \in C^{\mu, \mu/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ y f es T-periódica en $t\}$ con

$\|f\|_E = \|f\|_{C^{\mu, \mu/2}(\bar{\Omega} \times [0, T])}$.

Sea $F = \{f/\bar{\Omega} \times [0, T]$ tales que $f \in C^{2+\mu, 1+\mu/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$, $\dfrac{\partial f}{\partial \nu} = 0$ en $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ y f es T-periódica en t $\}$ con

$\|f\|_F = \|f\|_{C^{2+\mu, 1+\mu/2}(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})}$.

Sea $\mathcal{E} = \{f/\bar{\Omega} \times [0, T]$ tales que $f \in C(\bar{\Omega} \times \mathbb{R})$ y f es T-periódica en t $\}$ con

$\|f\|_{\mathcal{E}} = \|f\|_{C(\bar{\Omega} \times [0, T])}$.

Consideraremos a estos espacios con el ordenamiento natural de las funciones.

Teorema II.3: Bajo las hipótesis del Teorema II.1, sea $\mathcal{L}$ el operador inducido por (2.1) con dominio $D(\mathcal{L}) = F$. Sea S_a el operador que a cada $f \in E$ le asocia en virtud del Teorema II.1 la única solución $u \in F$ del problema II.[1] o sea $S_a(f) = (\mathcal{L} + a)^{-1}(f)$ y

$$S_a(f) = U(t, 0)\left[(I - U(T, 0)^{-1} \int_0^T U(T, s)\, f(s)\, ds\right] + \int_0^t U(t, s)\, f(s)\, ds$$

entonces $S_a : E \to F$ es un isomorfismo y si también llamamos S_a a $i_F \circ S_a$ donde i_F es la inclusión de F en E entonces $S_a : E \to E$ es compacto y fuertemente positivo.

Teorema II.4: Bajo las hipótesis del Teorema II.3, S_a se extiende univocamente a un operador $S_a : \mathcal{E} \rightarrow E$ continuo y $S_a : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ es compacto y fuertemente positivo.

Demostración del Teorema II.3: $\mathcal{L} + a$ es claramente continuo de F en E. Es biyectivo por el Teorema II.1 ya que para cada $f \in E$ existe una única solución del problema II.[1] dada por $S_a(f)$ y como E y F son espacios de Banach, $S_a = (\mathcal{L} + a)^{-1}$ es continuo de E en F y como la inclusión de F en E es compacta para completar la prueba falta ver que S_a es fuertemente positivo. Veamos esto:

Sea $f > 0$, $f \in E$, probaremos que $u(x, t) = S_a(f)(x, t) > 0 \; \forall \, (x, t)$.

$u(x, t)$ es solución regular de

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{A}(x, t, D)\, u + a(x, t)\, u &= f && \text{en } \Omega \times \mathbb{R} && (12.1) \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} &= 0 && \text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} && (12.2) \\ u(x, 0) &= u_0(f)(x) && \text{en } \bar{\Omega} \end{aligned}$$

$$u \; T\text{-periódica en } \bar{\Omega}$$

De (12.1) deducimos que

$$-\frac{\partial(-u)}{\partial t} - \mathcal{A}(x, t, D)(-u) - a(x, t)(-u) = f > 0 \qquad (12.3)$$

Supongamos que el $\max -u = M \geq 0$. Si M es alcanzado en el interior entonces por el principio de máximo (ref [9]), es alcanzado por $-u(x, 0) = -u_0(f)(x)$, más aún $-u(x, 0) \equiv M$ y por la periodicidad $-u(x, T) \equiv M$ por lo tanto u es constante $-u(x, t) \equiv M \geq 0$ lo que lleva a una contradicción en (12.3) pues $a > 0$ y $f > 0$. Si M es alcanzado en $\partial\Omega \times \mathbb{R}$ esto lleva a una contradicción con (12.2) pues por el principio de máximo debería ser $\dfrac{\partial(-u)}{\partial \nu} > 0$ en ese punto.

En consecuencia $\max(-u) = M < 0$, o sea $u(x, t) > 0 \; \forall \, (x, t)$, por lo tanto u está en el interior del cono positivo de E. ∎

Demostración del Teorema II.4: La prueba de este Teorema requiere retomar algunos resultados de la teoría de ecuaciones de evolución .

Las hipótesis A.1 y A.2 que verifican los operadores $Aa(t)$ (pag 5) implican que $-K(t) = -A\,a(t) - k$ es el generador infinitesimal de un semigrupo holomorfo $\{e^{-sK(t)}/0 \leq s < \infty\}$ en $L(L^p(\Omega))$. Más aún existen constantes positivas c y d tales que

$$\|e^{-sK(t)}\| \leq c\,e^{-ds} \tag{13.1}$$

y

$$\|K(t)\,e^{-sK(t)}\| \leq c\,s^{-1}\,e^{-ds} \quad \text{para} \quad s > 0 \quad \text{y} \quad t \in [0, \omega]$$

La desigualdad (12.1) implica la existencia de la integral

$$K^{-\alpha}(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty s^{\alpha-1}\,e^{-sK(t)}\,ds \qquad \forall\,\alpha > 0.$$

Se tiene que $K^{-1}(t) = [K(t)]^{-1}$ y cada $K^{-\alpha}(t)$ es un endomorfismo inyectivo continuo de $L^p(\Omega)$. En consecuencia $K^{\alpha}(t) = [K^{-\alpha}(t)]^{-1}$ es un operador lineal biyectivo cerrado en $L^p(\Omega)$. Puede probarse que cada $K^{\alpha}(t)$ tiene dominio denso y que

$$D(K^{\alpha}(t)) \subset D(K^{\beta}(t)) \qquad \text{para } \alpha \geq \beta \geq 0$$

Más aún $K^{\alpha+\beta}(t)(x) = K^{\alpha}(t)\,K^{\beta}(t)(x) = K^{\beta}(t)\,K^{\alpha}(t)(x)$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $x \in D(K^{\gamma}(t))$ con $\gamma = \max\{\alpha, \beta, \alpha+\beta\}$ donde $K^0(t) = i\,d_{L^p(\Omega)} = I$ (ref. [1], [4], [8], [11])

También puede probarse que $D(K^{\beta}(s)) \subset D(K^{\alpha}(t))$ para $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, $s, t \in [0, \omega]$y que

$$K^{\alpha}(s)\,K^{-\beta}(t)\| \leq c(\alpha, \beta) \text{ para } s, t \in [0, \omega]$$

Definición: Sea $\|x\|_\alpha = \|K^{\alpha}(0)\,x\|_{L^p(\Omega)}$ para $x \in D(K^{\alpha}(0))$ y $0 \leq \alpha \leq 1$ y denotemos con X_α al espacio de Banach $(D(K^{\alpha}(0)), \|\ \|_\alpha)$.

Se cumple que X_β tiene inclusión continua en X_α si $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$ (con $X_0 = L^p(\Omega)$).

Lema II.4: Sea $0 \leq \alpha < \beta \leq 1$, sea $v(t, s)$ como en el Teorema II.2 y sea $S(x, g)(t) = V(t, 0)x + \int_0^t V(t, s)g(s)\, ds$ entonces S es un operador lineal y continuo de

$$X_\beta \times C([0, \omega], L^p(\Omega)) \text{ en } C^\gamma([0, \omega], X_\alpha \quad \text{para todo } \gamma \in [0, \beta - \alpha] \text{ (ref. [1], p 10).}$$

Lema II.5: Supongamos que $\frac{1}{2} + \frac{n}{2p} < \alpha \leq 1$. Entonces X_α tiene inclusión continua en $C^{1+\lambda}(\bar{\Omega})$ donde $0 \leq \lambda 2\alpha - 1 - \frac{n}{p}$ (ref. [1], p 16).

Lema II.6: Sea $g \in C([0, \omega], C(\bar{\Omega}))$ y sea $V(t, s)$ como en el Teorema II.2 y sea $H(g)(t) = \int_0^t V(t, s)g(s)\, ds$. Entonces H es un endomorfismo continuo y compacto de $C([0, \omega], C(\bar{\Omega}))$.

Demostración: : $C([0, \omega], C(\bar{\Omega}))$ tiene inclusión continua en $C([0, \omega], L^p(\Omega))$ y por el Lema II.4, H está bien definida y es continua de $C([0, \omega], L^p(\Omega))$ en $C^\gamma([0, \omega], X_\alpha)$ para $0 \leq \alpha < 1$ y $0 \leq \gamma \leq 1 - \alpha$. Ademas $C^\gamma([0, \omega], X_\alpha)$ tiene inclusión compacta en $C([0, \omega], C(\bar{\Omega}))$ por la siguiente cadena de inclusiones continuas:

$C^\gamma([0, \omega], X_\alpha)$ en $C^\gamma([0, \omega], C^{1+\lambda}(\bar{\Omega})$ por el Lema II.5 para α y λ adecuados ($p > n$).

$C^\gamma([0, \omega], C^{1+\lambda}(\bar{\Omega})$ en $C^\gamma([0, \omega], C^{2\gamma}(\bar{\Omega})$ pues $C^{1+\lambda}(\bar{\Omega})$ tiene inclusión continua en $C^{2\gamma}(\bar{\Omega})$.

Ademas la aplicación F de $C^\gamma([0, \omega], C^{2\gamma}(\bar{\Omega})$ en $C^{2\gamma,\gamma}([0, \omega] \times \bar{\Omega})$ dada por $F(f)(t, x) = f(t)(x)$ es continua (ver §2. Nota II.4 del apéndice) y a su vez $C^{2\gamma,\gamma}([0, \omega] \times \bar{\Omega})$ tiene inclusión compacta en $C([0, \omega] \times \bar{\Omega})$ (ver §3. Nota II.5 del apéndice) que se identifica con $C([0, \omega], C(\bar{\Omega}))$. ∎

Lema II.7: Sea $f \in C([0, \omega], C(\bar{\Omega}))$, sea $U(t, s)$ como el el Lema II.2 ($U(t, s) = e^{kt}V(t, s)e^{-kt}$,con V la solución fundamental de II.[2]), sea K como en el Lema II.3 ($K = U(T, 0)$) y sea U_0 la aplicación dada por

$$U_0(f) = (I - K)^{-1}\left(\int_0^T U(T, s)f(s)\, ds\right)$$

entonces U_0 es continua de $C([0,\omega], C(\bar\Omega))$ en X_α con $0 \leq \alpha < 1$.

Demostración:

$$\begin{aligned} U_0(g) &= (I-K)^{-1}\left(e^{kT}\int_0^T V(T,s)\,f(s)\,ds\right) = \\ &= (I-K)^{-1}\left(e^{kT}\,H(g)(T)\right) \quad \text{con} \quad g(s) = e^{-ks}f(s) \end{aligned}$$

La aplicación que a f le asocia g es continua de $C([0,\omega], C(\bar\Omega))$ en si mismo y luego H aplica g continuamente en $C([0,\omega], X_\alpha)$ (se ve en la demostración del Lema II.6) y por lo tánto continuamente en $C([0,\omega], X_\alpha)$. Como la valuación en T es continua de $C([0,\omega], X_\alpha)$ en X_α y la multiplicación por e^{kT} es continua de X_α en X_α resulta que

$$f \to \int_0^T U(T,s)\,f(s)\,ds$$

es continua de $C([0,\omega], C(\bar\Omega))$ en X_α.
$V(T,0)$ es continua de X_α en X_α (ref. [1], Lema 2.1, desigualdad 2.8, p.9) por lo tanto $K = e^{kT}V(T,0)$ es continuo de X_α en X_α y como $I-K$ tiene inversa continua de $C(\bar\Omega)$ en $C(\bar\Omega)$ entonces $I-K$ tiene inversa de X_α en X_α y que por lo tanto resulta continua pues X_α es de Banach. Está probada entonces la afirmación del Lema II.7. ∎

Lema II.8: Sean f y U_0 como en el Lema II.7. Entonces la aplicación S_0 definida por

$$S_0(f)(t) = U(t,0)\left[(I - U(T,0))^{-1}\left(\int_0^T U(T,s)\,f(s)\,ds\right)\right]$$

es continua y compacta de $C([0,\omega], C(\bar\Omega))$ en si mismo.

Demostración: Sean $\frac{1}{2} + \frac{n}{2p} < \dot\alpha < \alpha < 1$. Observemos que $S_0(f)(t) = e^{kt}\,S(U_0(f), 0)$ con S como en el Lema II.4 por lo tanto por los Lemas II.4 y II.7 S_0 es continua de $C([0,\omega], C(\bar\Omega))$

en $C^{\gamma}([0,\omega], X_{\bar{\alpha}})$ y como este último espacio tiene inclusión compacta en $C([0,\omega], C(\bar{\Omega}))$ (ver demostración de Lema II.6) resulta la afirmación . ∎

Probaremos ahora el Teorema II.4

De los Lemas II.7 y II.6 se deduce que la aplicación

$$S_a(f)(t) = U(t,0)\left[(I - U(T,0)^{-1}\left(\int_0^T U(T,s)\,f(s)\,ds\right)\right] + \int_0^t U(t,s)\,f(s)\,ds$$

es una aplicación continua y compacta de $C([0,\omega], C(\bar{\Omega}))$ en sí mismo o equivalentemente de $C([0,\omega]\times\bar{\Omega})$ en sí mismo. En el Teorema II.3 vimos que S_a de E en E era fuertemente positivo, por lo tanto si $w \in \mathcal{E}$, $w > 0$ tomemos $\{w_n\} \subset E$ tal que $w_n \to w$ en $\mathcal{E}$ y $w_n > 0$ entonces $S_a w_n \to S_a w$ y como $S_a w_n > 0$ resulta $S_a w \geq 0$ por lo tanto S_a es positiva. Sea $\tilde{w} \in E$ tal que $0 < \tilde{w} < w$ entonces $S_a w(x,t) \geq S_a \tilde{w}(x,t) > 0$ y por lo tanto S_a es estrictamente positivo de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}$. Fin demostración del Teorema II.4 . ∎

III EL PROBLEMA DE AUTOFUNCIONES POSITIVAS DE $\mathcal{L}u = \lambda M u$

Dado $m \in C^{\mu,\mu/2}(\bar{\Omega} \times I\!R)$ T-periódica en t, queremos determinar las condiciones que debe verificar m para que exista $\lambda \in I\!R$ tal que tenga solución el siguiente problema

$$\text{III.[1]} \begin{cases} \mathcal{L}u = \lambda M u \\ u > 0 \end{cases} \quad \text{en} \quad E \tag{17.1}$$

donde $\mathcal{L}$ es el operador inducido por (2.1) con dominio de $\mathcal{L}$ $D(\mathcal{L}) = F$ (como en el Teorema II.3) y M el operador multiplicación por m en E.

Nota III.1: Evidentemente $u(x, t) \equiv 1$ y $\lambda = 0$ satisfacen (17.1) cualquiera que sea $m \in E$. Además acompañando a $\lambda = 0$ no existe otra autofunción positiva que satisfaga (17.1) lo que veremos en la Nota siguiente.

Nota III.2: El núcleo de $\mathcal{L}$ está generado por la función $u(x, t) \equiv 1$. O sea $\operatorname{Ker}\mathcal{L} = \langle 1 \rangle$.

Demostración: Supongamos $\mathcal{L}u = 0$ entonces $\mathcal{L}u + u = u$ por lo tanto $(\mathcal{L} + 1)u = u$ en consecuencia $(\mathcal{L} + 1)^{-1} u = u$ pero tambien $(\mathcal{L} + 1)^{-1} 1 = 1$ y como $(\mathcal{L} + 1)^{-1}$ por el Teorema II.3, sabemos que es compacto y fuertemente positivo de E en E entonces por el Teorema de Krein–Rutman 1 es el radio espectral de $(\mathcal{L} + 1)^{-1}$ y $u \in \langle 1 \rangle$. ∎

Nota III.3: Una condición necesaria para la existencia de $\lambda \neq 0$ y $u > 0$ que satisfaga III.[1] es que $m(x, t)$ cambie de signo.

Demostración: Supongamos que $m(x, t) \not\equiv 0$ y $m(x, t)$ no cambia de signo y sean $\lambda \neq 0$ y $u > 0$ tales que $\mathcal{L}u = \lambda M u$.

Esto es equivalente a $(\mathcal{L}+1)u - u = \lambda M u$ y a

$$u - (\mathcal{L}+1)^{-1} u = \lambda (\mathcal{L}+1)^{-1} M u \tag{18.1}$$

Como m no cambia de signo y $u > 0$ entonces $M u > 0$ o $M u < 0$ ($M u = 0$ no puede ser, pues de lo contrario sería $\mathcal{L} u = \lambda M u = 0$ y entonces u sería constante y por lo tanto $M u$ no identicamente nulo contra lo supuesto), pero entonces $\lambda(\mathcal{L}+1)^{-1} M u > 0$ o $\lambda(\mathcal{L}+1)^{-1} M u < 0$ en cualquiera de los dos casos la ecuación (18.1) por el Teorema de Krein–Rutman no tendría solución positiva, llegamos así a una contradicción . ∎

Nota III.4: La función ψ

Hemos visto (en la demostración de la Nota III.2) que 1 es el radio espectral de $(\mathcal{L}+1)^{-1}$ y tambien lo es de S_1 y por lo tanto como $(\mathcal{L}+1)^{-1}$ es un operador compacto fuertemente positivo de E en E, y S_1 de $\mathcal{E}$ en $\mathcal{E}$, aplicando el Teorema de Krein–Rutman tambien 1 es el radio espectral de su adjunto $[(\mathcal{L}+1)^{-1}]^*$ de E^* en E^* y tambien de S_1^* de $\mathcal{E}^*$ en $\mathcal{E}^*$ y por lo tanto existe $\psi \in \mathcal{E}^* \subset E^*$ tal que $S_1^* \psi = \psi$ con ψ fuertemente positiva en $\mathcal{E}^*$ (ψ es por lo tanto una medida boreliana positiva definida sobre $\bar{\Omega} \times \pi$ donde π es el intervalo $[0, T]$ identificados su extremos. En lo que sigue entonces notaremos con ψ a la única autofunción positiva de S_1^* tal que $\|\psi\|_E = 1$.

Probaremos los resultados que se enuncian en los siguientes Teoremas:

Teorema III.1: Sea $m \in E$ tal que m no es función de t solamente.

Entonces el problema de autovalores

$$\mathcal{L} u = \lambda M u \quad u > 0 \quad \text{en} \quad E$$

tiene un único autovalor $\lambda_1(m)$, aparte del autovalor 0, si y solamente si m o $-m$ satisfacen

$$\overline{m} = \int_0^T \max_{x \in \bar{\Omega}} m(x, t)\, dt > 0 \qquad \text{y} \qquad \langle \psi, m \rangle < 0 \tag{18.2}$$

Además si m satisface (18.2), respectivamente $-m$, $\lambda_1(m)$ es positivo, respectivamente negativo, y en ambos casos la autofunción $u_1(m) > 0$ asociada a $\lambda_1(m)$ pertenece a F y el espacio de autofunciones asociado a $\lambda_1(m)$ es de dimensión 1.

Teorema III.2: Sea $m \in E$ tal que m es función de t solamente o sea $m(x,t) = m(t)$ $\forall$ $x \in \bar{\Omega}$.
Entonces el problema de autovalores

$$\mathcal{L}u = \lambda M u \quad u > 0 \quad \text{en } E$$

tiene solución λ diferente de cero si y solo si

$$m_0 = \int_0^T m(s)\, ds = 0. \tag{19.1}$$

Además cuando $m_0 = 0$ para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ existe $u_\lambda > 0$ tal que $\mathcal{L}u_\lambda = \lambda M u_\lambda$.

En el apartado III.1 veremos que la condición (18.2):

$$(*) \qquad \overline{m} = \int_0^T \max_{x\in\bar{\Omega}} m(x,t)\, dt > 0 \qquad \text{y} \qquad \langle \psi, m \rangle$$

es suficiente para la existencia de un $\lambda_1(m) > 0$ y $u_1(m) > 0$ tales que $\mathcal{L}u_1 = \lambda_1 M u_1$; este resultado quedará probado en la proposición III.2 a través de los Lemas III.1 y III.2. El caso $\langle \psi, -m \rangle < 0$ y $\overline{-m} > 0$ se estudiará cambiando la función de peso m por $-m$.

En el apartado III.2 estudiaremos la unicidad del autovalor determinado en III.1 y quedará probado el Teorema III.2. En el apartado III.3 estudiaremos la necesidad de las condiciones $\overline{m} > 0$ y $\langle \psi, m \rangle < 0$ para la existencia de autovalor positivo con lo que finalmente quedará probado el Teorema III.1

III.1 Estudio de condiciones suficientes para la existencia de $\lambda > 0$ y $u > 0$ tales que $\mathcal{L}u = \lambda M u$ en E.

Proposición III.1: Sea $m \in E$. Sin perdida de generalidad podemos suponer que $\|m\|_\infty = \sup_{(x,t)\in\bar{\Omega}\times[0,T]} |m(x,t)| < 1$. Sea $\lambda > 0$ y sea el operador

$$K_\lambda = (\mathcal{L} + \lambda)^{-1}(M + 1) \quad \text{de} \quad E \quad \text{en} \quad E$$

Entonces K_λ es un operador compacto fuertemente positivo de E en E y el problema

$$\mathcal{L}u = \lambda M u \quad , \quad \lambda > 0 \quad , \quad u > 0 \quad \text{en} \quad E \tag{20.1}$$

es equivalente a

$$u = \lambda K_\lambda u \quad , \quad \lambda > 0 \quad , \quad u > 0 \quad \text{en} \quad E \tag{20.2}$$

Demostración: K_λ es compacto y fuertemente positivo pues $(\mathcal{L}+\lambda)^{-1}$ lo es y $m(x,t)+1 > 0$ $\forall\, x, t$ pues $\|m\|_\infty < 1$. Ademas $\mathcal{L}u = \lambda M u$ sii $\mathcal{L}u + \lambda u = \lambda M u + \lambda u = \lambda(M+1)u$ sii $u = \lambda(\mathcal{L}+\lambda)^{-1}(M+1)u$. ∎

Nota III.5: En todo lo que sigue supondremos que m, la función de peso, es tal que $\|m\|_\infty < 1$.

Lema III.1: Sea $m \in E$ tal que $\langle \psi, m \rangle < 0$. Supongamos que existe $w_0 > 0$, $w_0 \in E$ y $\alpha_0 > 0$ tales que

$$w_0 \leq \alpha_0 K_{\alpha_0} w$$

entonces $\exists\ \lambda > 0$ y $u > 0$ tales que

$$u = \lambda K_\lambda u.$$

Demostración: (La prueba es análoga al caso elíptico (ref [10]))

Supongamos $w_0 < \alpha_0 K_{\alpha_0} w_0$. Sea $\dfrac{1}{\alpha_1}$ = radio espectral de K_{α_0} entonces $\dfrac{1}{\alpha_1} > 0$ y es un autovalor de K_{α_0} con autofunción asociada $w_1 > 0$ que supondremos normalizada.

Veamos que $\alpha_1 < \alpha_0$:

Supongamos lo contrario, o sea $\alpha_1 \geq \alpha_0$ o sea $\dfrac{1}{\alpha_0} \geq \dfrac{1}{\alpha_1}$. Sabemos que $w_0 < \alpha_0 K_{\alpha_0} w_0$ por lo tanto

$$\frac{1}{\alpha_0} w_0 - K_{\alpha_0} w_0 < 0. \tag{21.1}$$

Si fuera $\dfrac{1}{\alpha_0} = \dfrac{1}{\alpha_1}$ esto contradeciría el Teorema de Krein-Rutman pues la ecuación (21.1) no tendría solución positiva.

Si fuera $\dfrac{1}{\alpha_0} > \dfrac{1}{\alpha_1}$ también llegamos a una contradicción pues por el Teorema de Krein-Rutman la ecuación $\dfrac{1}{\alpha_0} u - K_{\alpha_0} u > 0$ tiene una única solución que es positiva y en (21.1) es $-w_0 < 0$. Por lo tanto $\alpha_1 < \alpha_0$.

Como $(\mathcal{L} + \alpha_0) w_1 = \alpha_1 (M + 1) w_1$ se tiene que

$$\begin{aligned}(\mathcal{L} + \alpha_1) w_1 &= (\mathcal{L} + \alpha_0 - \alpha_0 + \alpha_1) w_1 = (\mathcal{L} + \alpha_0) w_1 - (\alpha_0 - \alpha_1) w_1 \\ &= \alpha_1 (M + 1) w_1 - (\alpha_0 - \alpha_1) w_1\end{aligned}$$

Aplicando $(\mathcal{L} + \alpha_1)^{-1}$ se obtiene

$$w_1 = \alpha_1 K_{\alpha_1} w_1 - (\alpha_0 - \alpha_1)(\mathcal{L} + \alpha_1)^{-1} w_1 < \alpha_1 K_{\alpha_1} w_1 \quad \text{con} \quad \alpha_1 < \alpha_0$$

Repitiendo este procedimiento obtenemos una sucesión $(\alpha_j)_{j \in N}$ en $I\!R_+$ y una sucesión $(w_j)_{j \in N}$ en E tales que

$$0 < \ldots < \alpha_j < \alpha_{j-1} < \ldots < \alpha_1 < \alpha_0 \ , \quad w_j > 0 \quad \text{y} \quad \|w_j\|_E = 1.$$

y

$$w_j = \alpha_j K_{\alpha_j} w_j - (\alpha_{j-1} - \alpha_j) (\mathcal{L} + \alpha_j)^{-1} w_j. \tag{21.2}$$

Sea $\lambda = \lim_{j\to\infty} \alpha_j$. Supongamos que $\lambda > 0$. Hemos visto que $\mathcal{L}$ es un operador cerrado de E en E tal que $(\mathcal{L}+\alpha)^{-1}$ existe y es continua si $\alpha > 0$, por lo tanto $(\mathcal{L}+\alpha_j)^{-1}$ converge a $(\mathcal{L}+\lambda)$ (por analiticidad de la resolvente) y por lo tanto

$$(\alpha_{j-1}-\alpha_j)(\mathcal{L}+\alpha_j)^{-1}\, w_j \to 0$$

en consecuencia

$$w_j - \alpha_j\, K_{\alpha_j} w_j \to 0 \quad \text{en } E \tag{22.1}$$

Ahora bien sea $\varepsilon_j = w_j - \alpha_j\, K_{\alpha_j} w_j$ entonces

$$w_j = \alpha_j\, K_{\alpha_j} w_j + \varepsilon_j \quad \text{con} \quad \varepsilon_j \to 0$$

Ademas

$$w_j = \alpha_j\, K_\lambda\, w_j + \alpha_j\,(K_{\alpha_j} - K_\lambda)\, w_j + \varepsilon_j = \alpha_j\, K_\lambda\, w_j + u_j$$

con

$$u_j = \alpha_j\,(K_{\alpha_j} - K_\lambda)\, w_j + \varepsilon_j \to 0$$

(pues $\|w_j\| = 1$, $K_{\alpha_j} \to K_\lambda$ y $\alpha_j \to \lambda$) por lo tanto $w_j - u_j = \alpha_j\, K_\lambda\, w_j = K_\lambda\,(\alpha_j\, w_j)$, $\alpha_j\, w_j$ es una sucesión acotada y K_λ compacto, por lo tanto existe una subsucesión convergente $w_{jk} - u_{jk} \to u$ pero como $u_j \to 0$ entonces $w_{jk} \to u$ además $u > 0$ pues $w_{jk} > 0$ y $\|w_{jk}\| = 1$. Pasando al límite entonces en (22.1) se obtiene $u = \lambda\, K_\lambda\, u$ y por lo tanto $\mathcal{L}\, u = \lambda\, M\, u$.

Hemos visto entonces que si $\lim \alpha_j = \lambda > 0$ la afirmación se cumple.

Veamos ahora que λ no puede ser cero.

Supongamos lo contrario o sea $\alpha_j \to 0$.

Por (21.2) tenemos

$$w_j = \alpha_j\, K_{\alpha_j} w_j - (\alpha_{j-1}-\alpha_j)(\mathcal{L}+\alpha_j)^{-1}\, w_j.$$

Apliquemos $(\mathcal{L}+\alpha_j)$ a ambos miembros

$$\mathcal{L}\, w_j + \alpha_j\, w_j = \alpha_j\,(M+1)\, w_j - (\alpha_{j-1}-\alpha_j)\, w_j$$

por lo tanto

$$\mathcal{L} w_j = \alpha_j (M+1) w_j - \alpha_{j-1} w_j.$$

Resulta que $\|\mathcal{L} w_j\|_E \le \alpha_j.2.1 + \alpha_{j-1} \le 3\,\alpha_{j-1}$ por lo tanto $\mathcal{L} w_j \to 0$ en E y $\|(\mathcal{L}+1) w_j\|_E \le$ cte. en consecuencia $(\mathcal{L}+1)^{-1} (\mathcal{L}+1) w_j = w_j$ tiene una subsucesión convergente $w_{jk} \to w$ y como $\mathcal{L}$ es cerrado en E $\mathcal{L} w = 0$ de donde deducimos que $w = 1$.

Resulta entonces que $\langle \psi, M\, w_{jk} \rangle \to \langle \psi, M.1 \rangle$ y $\langle \psi, M.1 \rangle < 0$ por hipótesis, en consecuencia

$$\langle \psi, M\, w_{jk} \rangle < 0 \quad \text{para } k \text{ grande} \tag{23.1}$$

Por otra parte como $\mathcal{L}^* \psi = 0$ se tiene

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathcal{L}^* \psi, w_j \rangle = \langle \psi, \mathcal{L} w_j \rangle = \langle \psi, \alpha_j (M+1) w_j - \alpha_{j-1} w_j \rangle = \\ &= \alpha_j \langle \psi, M\, w_j \rangle + \alpha_j \langle \psi, w_j \rangle - \langle \psi, \alpha_{j-1} w_j \rangle = \\ &= \alpha_j \langle \psi, M\, w_j \rangle + (\alpha_j - \alpha_{j-1}) \langle \psi, w_j \rangle \le \alpha_j \langle \psi, M\, w_j \rangle \end{aligned}$$

pues $\psi > 0$ y $w_j > 0$ y $(\alpha_j - \alpha_{j-1}) < 0$ de donde $\langle \psi, M\, w_j \rangle \ge 0$ lo cual es una contradicción con (23.1). ∎

Lema III.2: Sea $m \in E$ tal que $\overline{m} = \int_0^T \max_{x \in \Omega} m(x,t)\, dt > 0$. Entonces existe $w \in E$, $w > 0$ y $\alpha > 0$ tal que

$$w \le \alpha\, K_\alpha\, w.$$

Demostración: Sean $w \in E$, $w > 0$ y $\alpha > 0$ tales quew satisfacen

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{A}(x,t,D)\, w &= \alpha\, m\, w \quad &&\text{en } \Omega \times \mathbb{R} \\ w &= 0 &&\text{en } \partial\Omega \times \mathbb{R} \end{aligned}$$

w T-periódica en t.

Tales w y α existen por el Teorema 1 de Beltramo–Hess pues $\overline{m} > 0$ es la condición M^+ en dicho Teorema (ref [3]). Sea $v = \alpha\,(\mathcal{L} + \alpha)^{-1}\,(M + 1)\,w$ entonces $v(x,\, t) > 0$ pues $w > 0$ en E y de la prueba del Teorema II.3 se deduce que $v(x,\, t) > 0$.

Se tiene entonces que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial t} + \mathcal{A}(x,\, t,\, D)\,w + \alpha\,w &= \alpha\,(m+1)\,w \\
w &= 0 \qquad\qquad \text{en } \partial\Omega \times I\!R \\
\frac{\partial v}{\partial t} + \mathcal{A}(x,\, t,\, D)\,v + \alpha\,v &= \alpha\,(m+1)\,w \\
v &> 0 \qquad\qquad \text{en } \partial\Omega \times I\!R
\end{aligned}
$$

Por el principio de máximo entonces $v \geq w$ y en consecuencia

$$w \leq \alpha\,(\mathcal{L} + \alpha)^{-1}\,(M+1)\,w = \alpha\,K_\alpha\,w. \ \blacksquare$$

Estamos entonces en condiciones de probar la siguiente proposición:

Proposición III.2: (Existencia) Sea $m \in E$, $\|m\|_\infty < 1$.

1. Si $\langle \psi,\, m\rangle < 0$ y $\overline{m} = \int_0^T \max_{x\in\hat{\Omega}} m(x,\, t)\, dt > 0$ entonces existe un $\lambda_1(m) > 0$ y $u_1(m) > 0$ tal que se cumple $\mathcal{L}\,u_1 = \lambda_1\,M\,u_1$.
2. Si $\langle \psi,\, m\rangle > 0$ y $\underline{m} = \int_0^T \min_{x\in\hat{\Omega}} m(x,\, t)\, dt < 0$ entonces existe un $\lambda_1(m) < 0$ y $u_1(m) > 0$ tal que se cumple $\mathcal{L}\,u_1 = \lambda_1\,M\,u_1$.

Ademas en ambos casos el espacio de autofunciones asociado a $\lambda_1(m)$ es de dimensión 1.

Demostración:

1. Como m cumple $\overline{m} > 0$ por el Lema III.2 existe $w \in E$, $w > 0$ y $\alpha > 0$ tal que

$$w \leq \alpha\,K_\alpha\,w$$

y como $\langle \psi,\, m\rangle < 0$ entonces por el Lema III.1 existe $\lambda_1(m) > 0$ y $u_1(m) > 0$ tales que

$$u_1 = \lambda_1\,K_{\lambda_1}\,u_1$$

entonces de la proposición III.1 se deduce que se cumple $\mathcal{L} u_1 = \lambda_1 m u_1$.

2. Se deduce de 1. ya que en este caso $-m$ satisface las hipótesis de 1.

Ademas como el operador K_{λ_1} es compacto y fuertemente positivo, por el Teorema de Krein-Rutman se deduce que el espacio de autofunciones asociado a $\lambda_1(m)$ es de dimensión uno. ∎

III.2 Estudio de Unicidad

Pasaremos a estudiar ahora la unicidad del autovalor $\lambda_1(m)$ dado en la proposición anterior, primeramente la unicidad en cuanto autovalor positivo con esa propiedad.

Definición de la función $\mu(\lambda)$:
Sea $\lambda > 0$, sea $m \in E$, $\|m\|_\infty < 1$. Observemos que

$$\mathcal{L} u = \lambda M u \tag{25.1}$$

es equivalente a

$$\mathcal{L} u + \lambda (1 - m) u = \lambda u \tag{25.2}$$

donde por la hipótesis hecha sobre m y λ es $\lambda (1-m) > 0$ y sabemos entonces que el operador $\mathcal{L} + \lambda (1-m))^{-1}$ es un operador compacto fuertemente positivo de E en E con radio espectral $r(\lambda) > 0$ y $r(\lambda)$ es el único autovalor con autofunción positiva asociada u_λ, o sea se cumple

$$[\mathcal{L} + \lambda (1 - m)]^{-1} u_\lambda = r(\lambda) u_\lambda \tag{25.3}$$

Sea $\gamma(\lambda) = \dfrac{1}{r(\lambda)}$ y supongamos u_λ normalizada ($\|u_\lambda\|_E = 1$). Resulta entonces que $\gamma(\lambda)$ y

u_λ es el único par que satisface

$$[\mathcal{L} + \lambda(1-m)]\, u_\lambda = \gamma(\lambda)\, u_\lambda \tag{26.1}$$

$$u_\lambda > 0\,,\ \|u_\lambda\|_E = 1\,,\ \gamma(\lambda) \geq 0.$$

En virtud de que nos interesa hallar $\lambda > 0$ tal que se cumpla (25.2) con $u > 0$ nos interesa estudiar los valores de λ para los cuales $\gamma(\lambda) = \lambda$.

Definamos $\mu(\lambda)$ así : $\mu(\lambda) = \gamma(\lambda) - \lambda$ para $\lambda > 0$ y $\mu(0) = 0$. Equivalentemente podemos caracterizar $\mu(\lambda)$ así :

Nota III.6: Caracterización de $\mu(\lambda)$: $\mu(\lambda)$ es el único número real que satisface: existe $u > 0$ en E tal que

$$\mathcal{L}u + \lambda(1-m)u = (\mu(\lambda) + \lambda)\, u$$

Para $\lambda > 0$ esto se deduce de todo lo anterior y para el caso $\lambda = 0$ por la Nota III.3 el único valor posible para que se satisfaga $\mathcal{L}u = (u(0) + 0)\, u \quad u > 0$ es $\mu(0) = 0$ como hemos definido.

Lema III.3: Sea $m \in E$. $\|m\|_\infty < 1$. La función $\mu(\lambda)$ es analítica.

Demostración: Sea $\gamma(\lambda) = \mu(\lambda) + \lambda$. Estudiaremos la analiticidad de $\gamma(\lambda)$. Consideremos $\mathcal{L}$ como operador continuo de F en E y por la inclusión compacta J de F en E para todo $\lambda \geq 0$ los operadores $\mathcal{L} + \lambda(1-m) - \gamma(\lambda)\, J$ son operadores de Fredholm de indice cero pues

$$\mathcal{L} + \lambda(1-m)\, J - \gamma(\lambda)\, J = \mathcal{L} + 1 \cdot J + [\lambda(1-m) - 1 - \gamma(\lambda)]\, J$$

y $\mathcal{L} + 1 \cdot J$ es un isomorfismo entre F y E y $[\lambda(1-m) - 1 - \gamma(\lambda)]\, J$ es un operador compacto de F en E y en consecuencia el $\mathcal{L} + [\lambda(1-m) - \gamma(\lambda)]\, J$ es una perturbación compacta de un isomorfismo y por lo tanto es un operador de Fredholm de índice cero. Por lo tanto

$$\begin{aligned}\dim \operatorname{Ker} \mathcal{L} + \lambda(1-m)J - \gamma(\lambda)J &= \dim \operatorname{coKer} \mathcal{L} + \lambda(1-m)J - \gamma(\lambda)J = \\ &= \dim E \Big/ R(\mathcal{L} + \lambda(1-m)J - \gamma(\lambda)J)\end{aligned}$$

además sabemos que $\dim \operatorname{Ker}(\mathcal{L} + \lambda(1-m)J - \gamma(\lambda)J) = 1$ y resulta que $\gamma(\lambda)$ es un J-simple autovalor de $\mathcal{L} + \lambda(1-m)$, donde $\gamma \in I\!R$ decimos que es un J-simple autovalor de un operador L siempre que

1. $\dim \operatorname{Ker}(L - \gamma J) = \operatorname{codim} R(L - \gamma J) = 1$ y

2. si $\operatorname{Ker}(L - \gamma J)$ está generado por u entonces $J u \notin R(L - \gamma J)$.

Comprobemos 2.: Sea u_λ el generador normalizado del $\operatorname{Ker} \mathcal{L} + \lambda(1-m)J - \gamma(\lambda)J$.

Supongamos que existe $w \in F$ tal que

$$\begin{aligned}J u_\lambda &= [\mathcal{L} + \lambda(1-m)J - \gamma(\lambda)]J]w = \\ &= [\mathcal{L} + 1 \cdot J + [\lambda(1-m) - 1 - \gamma(\lambda)]J]w\end{aligned}$$

Sea $\tilde{w} = [\mathcal{L} + 1 \cdot J + \lambda(1-m)J]w$ entonces

$$\begin{aligned}J u_\lambda &= \tilde{w} - [\gamma(\lambda) + 1]J(\mathcal{L} + 1 \cdot J + \lambda(1-m)J)^{-1}\tilde{w} = \\ &= \frac{1}{\gamma(\lambda)+1}[(\gamma(\lambda)+1)\tilde{w}] - J(\mathcal{L} + 1 \cdot J + \lambda(1-m)J)^{-1}[(\gamma(\lambda)+1)\tilde{w}]\end{aligned}$$

y como $\dfrac{1}{\gamma(\lambda)+1}$ es el radio espectral de $(\mathcal{L} + 1 + \lambda(1-m))^{-1}$ esto contradice que $\dfrac{1}{\gamma(\lambda)+1}$ sea simple, por lo tanto no existe tal w.

Estamos entonces en las condiciones de un Lema sobre perturbación de autovalores simples (ver §6 apéndice) de Grandall-Rabinowitz y del cual se deduce que $\gamma(\lambda)$ es analítica y por lo tanto u_λ es analítica. ▌

Lema III.4: Sea $m \in E$. $\|m\|_\infty < 1$. La función μ_λ es cóncava para $\lambda \geq 0$.

Demostración: Sean u_1, λ_1 y u_2, λ_2 tales que $u_i > 0$, $\lambda_i \geq 0$ y $(\mathcal{L} + \lambda_i(1-m))u_i = (\mu_i + \lambda_i)u_i$ con $\mu_i = \mu(\lambda_i)$, $i = 1, 2$. Sea $w = (u_1 \cdot u_2)^{1/2}$ entonces $w > 0$ y $w \in F = D(\mathcal{L})$, entonces si $\overline{\lambda} = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ y $\overline{\mu} = \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ se tiene que

$$(\mathcal{L} - \overline{\lambda}\, M)\, w \geq \overline{\mu}\, w \qquad \text{Ver §4 Nota III.7 en apéndice}$$

Queremos ver que $\mu(\overline{\lambda}) \geq \overline{\mu}$ o sea $\gamma(\overline{\lambda}) \geq \overline{\mu} + \overline{\lambda}$. Supongamos lo contrario o sea que

$$\gamma(\overline{\lambda}) < \overline{\mu} + \overline{\lambda} \quad \text{por lo tanto} \quad \frac{1}{\overline{\mu} + \overline{\lambda}} < \frac{1}{\gamma(\overline{\lambda})} \tag{28.1}$$

y $(\mathcal{L} + \overline{\lambda}(1-m)w \geq (\overline{\mu} + \overline{\lambda})\, w$ por lo tanto

$$\frac{1}{\overline{\mu} + \overline{\lambda}}\, w - (\mathcal{L} + \overline{\lambda}(1-m))^{-1}\, w \geq 0 \tag{28.2}$$

pero $\dfrac{1}{\gamma(\overline{\lambda})}$ es el radio espectral de $(\mathcal{L} + \overline{\lambda}(1-m))^{-1}$ por lo tanto de (28.1) por el Teorema de Krein-Rutman se deduce que (28.2) no puede tener solución positiva. Llegamos así a una contradicción que provino de suponer $\mu(\overline{\lambda}) < \overline{\mu}$, por lo tanto $\mu(\overline{\lambda}) \geq \overline{\mu}$ y como μ es continua resulta que μ es cóncava. ▌

Proposición III.3: $m \in E$, $\|m\|_\infty < 1$, $\langle \psi, m \rangle < 0$ y $\overline{m} > 0$. Entonces el $\lambda_1(m)$ de la Proposición III.2 es el único autovalor positivo con autofunción positiva de $\mathcal{L}u = \lambda\, M\, u$.

Demostración: Por la Proposición III.2 sabemos que existe $\lambda_1(m) > 0$ y $u_1(m) > 0$ tales que $u_1 = \lambda_1 K_{\lambda_1} u_1$ y por lo tanto $\mathcal{L} u_1 = \lambda_1\, m\, u_1$ en consecuencia $\mu(\lambda_1) = 0$ y como también

$\mu(0) = 0$ de la concavidad de μ resulta que , o bien $\lambda > 0$ tal que $\mu(\lambda) = 0$ es único en cuyo caso λ_1 sería único, o bien por la concavidad y analiticidad de μ resulta que $\mu(\lambda) \equiv 0$ $\forall \ \lambda > 0$. En este último caso podríamos tomar una sucesión $\lambda_j \to 0$ y $u_j > 0$ con $\|u_j\| = 1$ tales que

$$\mathcal{L} u_j = \lambda_j m u_j \tag{29.1}$$

en consecuencia

$$\|\mathcal{L} u_j\| = \|\lambda_j m u_j\| \leq \lambda_j \to 0$$

y por lo tanto

$$\|\mathcal{L} u_j + u_j\| \leq \text{cte.}$$

en consecuencia

$$(\mathcal{L} + 1)^{-1}(\mathcal{L} u_j + u_j) = u_j$$

tiene una subsucesión convergente pues $(\mathcal{L} + 1)^{-1}$ es compacto por lo tanto existe $u_{jk} \to u$ y como $\mathcal{L} u_j \to 0$ y $\mathcal{L}$ es cerrado en E $\mathcal{L} u = 0$ pero $u_{jk} > 0$ y $\|u_{jk}\| = 1$ por lo tanto $u > 0$ y $\|u\| = 1$ en consecuencia por la Nota III.2 resulta que $u = 1$.
Sabemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \mathcal{L}^* \psi, u_{jk} \rangle = \langle \psi, \mathcal{L} u_{jk} \rangle = \langle \psi, \lambda_{jk} m u_{jk} \rangle = \\ &= \lambda_{jk} \langle \psi, m u_{jk} \rangle \end{aligned} \tag{29.2}$$

pero $u_{jk} \to 1$ entonces $m u_{jk} \to m$ y $\langle \psi, m u_{jk} \rangle \to \langle \psi, m \rangle < 0$ por hipótesis, en consecuencia $\langle \psi, m u_{jk} \rangle < 0$ desde un k en adelante lo que contradice (29.2). En consecuencia no puede existir tal sucesión $\lambda_j \to 0$ con $u_j > 0$ $\|u_j\| = 1$ tal que (29.1) por lo tanto el $\lambda_1(m)$ es el único autovalor positivo con autofunción positiva. ∎

Lema III.5: Sea $m \in E$, $\|m\|_\infty < 1$ tal que $m(x, t) \equiv m(t)$ $\forall \ x \in \bar{\Omega}$. Sea $m_0 = \int_0^T m(t)\, dt$ entonces $\mu(\lambda) = -\lambda \frac{m_0}{T}$.

Demostración: Por la caracterización de $\mu(\lambda)$ (Nota III.6) sabemos que $\exists\ \mu(\lambda) > 0$ tal que

$$(\mathcal{L} + \lambda(1-m)\, u_\lambda = (\mu(\lambda) + \lambda)\, u_\lambda \tag{29.3}$$

Supongamos u_λ solo función de t entonces (29.3) se reduce a

$$\frac{du_\lambda(t)}{dt} + \lambda(1 - m(t))\, u_\lambda(t) = (\mu(\lambda) + \lambda)\, u_\lambda(t)$$

por lo tanto

$$\frac{du_\lambda}{dt} = \lambda\, m(t)\, u_\lambda(t) + \mu(\lambda)\, u_\lambda(t)$$

en consecuencia

$$\frac{1}{u_\lambda(t)} \frac{du_\lambda(t)}{dt} = \lambda\, m(t) + \mu(\lambda)$$

de donde resulta

$$u_\lambda(t) = u_\lambda(0)\, e^{\lambda \int_0^t m(s)\, ds + \mu(\lambda) t},$$

como debe ser $u_\lambda(T) = u_\lambda(0)$ resulta

$$e^{\lambda\, m_0 + \mu(\lambda)\, T} = 1$$

por lo tanto $\mu(\lambda) = -\lambda \dfrac{m_0}{T}$. ∎

Demostración del Teorema III.2: (es un corolario del Lema III.5)
Si $m_0 \neq 0$ por el Lema III.5 $\mu(\lambda) = -\lambda\dfrac{m_0}{T} \neq 0\ \forall\ \ \lambda > 0$ por lo tanto no existe autovalor positivo con autofunción positiva tal que $\mathcal{L}\, u = \lambda\, m\, u$. Tampoco existe un autovalor negativo λ_1 con esa propiedad pues eso implicaría la existencia de autovalor positivo $\lambda_0 = -\lambda_1$ con autofunción positiva para el problema $\mathcal{L}\, u = \lambda(-m)\, u$ con función de peso $-m$ donde $-m$ satisface $(-m)_0 = \displaystyle\int_0^T (-m)(t)\, dt = -m_0 \neq 0$ y esto no sería posible por la primera parte .
Si $m_0 = 0$ definamos $u_\lambda(t) = e^{\lambda \int_0^t m(s)\, ds}$ entonces $u_\lambda > 0$, $u_\lambda \in F \subset E$ y $\mathcal{L}\, u_\lambda = \lambda\, m\, u_\lambda$ $\forall\ \lambda > 0$. ∎

Lema III.6: Sean m_1 y $m_2 \in E$, $\|m_1\|_\infty < 1$ $\|m_2\|_\infty < 1$. Sean μ_1 y μ_2 las funciones μ asociadas a las funciones de peso m_1 y m_2 respectivamente. Si $m_1 < m_2$ entonces $\mu_2(\lambda) < \mu_1(\lambda)$.

Demostración:

Sean u_1 y u_2 las únicas autofunciones positivas normalizadas asociadas a λ tales que

$$(\mathcal{L} + \lambda(1 - m_i))\, u_i = (\mu_i(\lambda) + \lambda)\, u_i = \gamma_i(\lambda)\, u_i, \quad i = 1, 2, \tag{31.1}$$

deberemos probar entonces que $\gamma_2(\lambda) < \gamma_1(\lambda)$. Sea λ fijo y escribamos $\gamma_2 = \gamma_2(\lambda)$ y $\gamma_1 = \gamma_1(\lambda)$.

Sea m tal que $1 - m_1 = 1 - m_2 + m$ entonces $m \in E$, $\|m\|_\infty < 1$, $m > 0$ y

$$(\mathcal{L} + \lambda(1 - m_1) + m\,\lambda)\, u_1 = \gamma_1\, u_1$$

en consecuencia

$$(\mathcal{L} + \lambda(1 - m_2))\, u_1 = -\lambda\, m\, u_1 + \gamma_1\, u_1 \tag{31.2}$$

$$(\mathcal{L} + \lambda(1 - m_2))\, u_2 = \gamma_2\, u_2 \tag{31.3}$$

por lo tanto de (31.2) se deduce

$$u_1 = -(\mathcal{L} + \lambda(1 - m_2))^{-1}\, \lambda\, m\, u_1 + \gamma_1\, (\mathcal{L} + \lambda(1 - m_2))^{-1}\, u_1$$

en consecuencia

$$\frac{1}{\gamma_1} u_1 - (\mathcal{L} + \lambda(1 - m_2))^{-1}\, u_1 = -(\mathcal{L} + \lambda(1 - m_2))^{-1}\, \lambda\, m\, u_1 = -h \;\text{ con }\; h > 0 \tag{31.4}$$

Supongamos que $\gamma_2 \geq \gamma_1$ por lo tanto

$$\frac{1}{\gamma_1} \geq \frac{1}{\gamma_2}. \tag{31.5}$$

Si $\dfrac{1}{\gamma_1} = \dfrac{1}{\gamma_2}$ = radio espectral de $(\mathcal{L} + \lambda\,(1 - m_2))^{-1}$ por (31.3), entonces (31.4) no es posible por el Teorema de Krein–Rutman y si $\dfrac{1}{\gamma_1} > \dfrac{1}{\gamma_2}$ de (31.4) deducimos

$$\frac{1}{\gamma_1}(-u_1) - (\mathcal{L} + \lambda\,(1 - m_2))^{-1}\,(-u_1) = h > 0$$

lo cual también contradice el Teorema de Krein–Rutman pues $-u_1 < 0$. En consecuencia $\gamma_2 < \gamma_1$ por o tanto $\mu_2 < \mu_1$. ∎

Corolario del Lema III.6: Sean m_1 y m_2 en E de norma menor que 1 tales que $\langle\psi,\, m_1\rangle < 0$ y $\langle\psi,\, m_2\rangle < 0$ y ambas cumplen $\overline{m}_1 > 0$ y $\overline{m}_2 > 0$. Sean λ_1 y λ_2 los únicos autovalores positivos con autofunción positiva u_1 y u_2 respectivamente que satisfacen $\mathcal{L}\,u_i = \lambda_i\, m_i\, u_i$ $i = 1, 2$ entonces $m_1 < m_2$ implica $\lambda_2 < \lambda_1$.

Demostración: Por el Lema III.6 sabemos que $\mu_2(\lambda) < \mu_1(\lambda)$ y como $\mu_2(\lambda_2) = 0$ se tiene que $0 = \mu_2(\lambda_2) < \mu_1(\lambda_2)$ y como $\mu_1(\lambda_1) = 0$ y $\mu_1(0) = 0$ por la concavidad de μ_1 resulta que $0 < \lambda_2 < \lambda_1$. ∎

Proposición III.4: (Unicidad). Sea $m \in E$, $\|m\|_\infty < 1$, tal que $\langle\psi,\, m\rangle < 0$ y $\overline{m} > 0$ (respectivamente $\langle\psi,\, m\rangle > 0$ y $\underline{m} < 0$). Entonces $\lambda_1(m)$ de la Proposición III.2 es el único autovalor diferente de cero con autofunción positiva de $\mathcal{L}\,u = \lambda\, M\, u$.

Demostración: Sea $\hat{\lambda} < 0$. Para el operador $\hat{\mathcal{L}} = \mathcal{L} + \hat{\lambda}\,(-m - 1)$ con $a_0 = \hat{\lambda}\,(-m - 1) > 0$ tambien podemos definir la función $\hat{\mu}(\lambda)$ para $\lambda \geq 0$ como el único número real que satisface que existe $u_{\tilde{\lambda}} > 0$ tal que

$$\begin{aligned}[\hat{\mathcal{L}} + \tilde{\lambda}\,(1-m)]\,u_{\tilde{\lambda}} &= [\mathcal{L} + \hat{\lambda}\,(-m-1) + \tilde{\lambda}\,(1-m)]\,u_{\tilde{\lambda}} = \hat{\gamma}(\tilde{\lambda})\,u_{\tilde{\lambda}} = \\ &= [\hat{\mu}(\tilde{\lambda}) + \tilde{\lambda}]\,u_{\tilde{\lambda}}\end{aligned}$$

y se puede ver como antes que $\hat{\mu}(\tilde{\lambda})$ es analítica y cóncava.

Notemos con $\lambda_1 = \lambda_1(m)$ al único autovalor positivo con $u_1 > 0$ tal que $\mathcal{L}\,u_1 = \lambda_1\,m\,u_1$ (que existe y es único por las proposisciones III.2 y III.3.)

También sabemos que $\lambda = 0$ y $u = 1$ satisfacen $\mathcal{L}\,u = \lambda\,m\,u$. Supongamos que existe además un $\overline{\lambda}_1 < 0$ y $\overline{u}_1 > 0$ tales que $\mathcal{L}\,\overline{u}_1 = \overline{\lambda}_1\,m\,\overline{u}_1$.

Tomemos $\hat{\lambda} = 2\,\overline{\lambda}_1$. Entonces

$$\hat{\mathcal{L}} + \tilde{\lambda}\,(1-m) = \mathcal{L} + 2\,\overline{\lambda}_1\,(-m-1) + \tilde{\lambda}\,(1-m)$$

en tres valores diferentes de $\tilde{\lambda}$, $\hat{\mu}$ toma el mismo valor: $\hat{\mu}(-\overline{\lambda}_1) = \hat{\mu}\,(-2\,\overline{\lambda}_1) = \hat{\mu}\,(-2\,\overline{\lambda}_1 + \lambda_1) = -2\,\overline{\lambda}_1$ pues:

$$\begin{aligned}[\hat{\mathcal{L}} + (-\overline{\lambda}_1)(1-m)]\,\overline{u}_1 &= \mathcal{L}\,\overline{u}_1 + 2\,\overline{\lambda}_1\,(-m-1)\,\overline{u}_1 + (-\overline{\lambda}_1)\,(1-m)\,\overline{u}_1 = \\ &= \overline{\lambda}_1\,m\,\overline{u}_1 - 2\,\overline{\lambda}_1\,m\,\overline{u}_1 - 2\,\overline{\lambda}_1\,\overline{u}_1 - \overline{\lambda}_1\,\overline{u}_1 + \overline{\lambda}_1\,m\,\overline{u}_1 = \\ &= [-2\,\overline{\lambda}_1 + (-\overline{\lambda}_1)]\,\overline{u}_1\end{aligned}$$

por lo tanto $\hat{\mu}(-\overline{\lambda}_1) = -2\,\overline{\lambda}_1$,

$$\begin{aligned}[\hat{\mathcal{L}} + (-2\,\overline{\lambda}_1)\,(1-m)]1 &= \mathcal{L}\,1 + 2\,\overline{\lambda}_1\,(-m-1)\,1 + (-2\overline{\lambda}_1)\,(1-m)\,1 = \\ &= (-2\,\overline{\lambda}_1\,m - 2\overline{\lambda}_1 - 2\overline{\lambda}_1 + 2\overline{\lambda}_1\,m)\,1 = \\ &= [-2\,\overline{\lambda}_1 + (-2\,\overline{\lambda}_1)]\,1\end{aligned}$$

por lo tanto $\hat{\mu}(-2\,\overline{\lambda}_1) = -2\,\overline{\lambda}_1$,

$$\begin{aligned}[\hat{\mathcal{L}} + (-2\,\overline{\lambda}_1 + \lambda_1)\,(1-m)]\,u_1 &= \mathcal{L}\,u_1 + 2\,\overline{\lambda}_1\,(-m-1)\,u_1 + (-2\,\overline{\lambda}_1 + \lambda_1)\,(1-m)\,u_1 = \\ &= \lambda_1\,m\,u_1 - 2\,\overline{\lambda}_1\,m\,u_1 - 2\,\overline{\lambda}_1\,u_1 - 2\,\overline{\lambda}_1\,u_1 + 2\,\overline{\lambda}_1\,m\,u_1 + \\ &\quad + \lambda_1\,u_1 - \lambda_1\,m\,u_1 = [-2\,\overline{\lambda}_1 + (-2\,\overline{\lambda}_1 + \lambda_1)]\,u_1\end{aligned}$$

por lo tanto $\hat{\mu}(-2\,\overline{\lambda}_1 + \lambda_1) = -2\,\overline{\lambda}_1$.

De la concavidad y analiticidad de $\hat{\mu}(\tilde{\lambda})$ deducimos entonces que $\hat{\mu}(\tilde{\lambda}) \equiv -2\,\overline{\lambda}_1 \;\; \forall\;\tilde{\lambda} > 0$ en particular para $\tilde{\lambda}$ de la forma $\tilde{\lambda} = \lambda - 2\,\overline{\lambda}_1$ con $\lambda > 0$. O sea existe $u_{\tilde{\lambda}} > 0$ tal que

$$[\hat{\mathcal{L}} + (\lambda - 2\,\overline{\lambda}_1)(1-m)]\,u_{\tilde{\lambda}} = [-2\,\overline{\lambda}_1 + (\lambda - 2\,\overline{\lambda}_1)]\,u_{\tilde{\lambda}}$$

o sea

$$\begin{aligned}[\mathcal{L} + 2\,\overline{\lambda}_1\,(-m-1) + (\lambda - 2\,\overline{\lambda}_1)(1-m)]\,u_{\tilde{\lambda}} &= [\mathcal{L} + \lambda\,(1-m) - 2\,\overline{\lambda}_1 - 2\,\overline{\lambda}_1]\,u_{\tilde{\lambda}} = \\ &= [-2\,\lambda_1 + \lambda - 2\,\lambda_1]\,u_{\tilde{\lambda}}\end{aligned}$$

y por lo tanto $[\mathcal{L} + \lambda(1-m)]u_{\hat{\lambda}} = \lambda u_{\hat{\lambda}}$ para todo $\lambda > 0$ en consecuencia $\mu(\lambda) \equiv 0$ lo que contradice la Proposición III.3. ∎

III.3 Las condiciones $\langle \psi, m \rangle < 0$, $\overline{m} > 0$, para m o $-m$, son también necesarias.

Proposición III.5: Sea $m \in E$, $\|m\|_\infty < 1$ y m no solo función de t. Entonces la condición $\overline{m} > 0$ (respectivamente $\underline{m} < 0$) para m, es necesaria para la existencia de autovalor positivo (respectivamente negativo) con autofunción positiva de $\mathcal{L}u = \lambda M u$.

Demostración: Supongamos que $\overline{m} = \int_0^t \max_{x \in \hat{\Omega}} m(x,t)\, dt \le 0$.
Sea $\overline{m} < 0$. Sea c tal que $\overline{m} < c < 0$. Sea $\tilde{m}(t) = \max_{x \in \hat{\Omega}} m(x,t)$ entonces como m no depende solamente de t se cumple que $m < \tilde{m}$ en $\mathcal{E}$. Sea $r \in E$, r solo función de t tal que $\|r\|_\infty < 1$, $\tilde{m} < r$ y $c_1 = \int_0^T r(t)\, dt < c$.

Entonces como $m < r$ en E por el Lema III.6

$$\mu(\lambda) \equiv \mu_m(\lambda) > \mu_r(\lambda) = -\lambda \frac{c_1}{T}$$

donde la última igualdad es por el Lema III.5; de donde resulta $\mu(\lambda) > -\lambda \frac{c_1}{T} > 0 \;\forall\, \lambda > 0$.
Supongamos ahora $\overline{m} = 0$. Para todo $\delta > 0$ elijamos $r(\delta)$ en E solo función de t tal que $\|r(\delta)\|_\infty < 1$, $\tilde{m} < r(\delta)$ y $\overline{r(\delta)} = \int_0^T r(\delta)(t)\, dt < \delta$.

Entonces como antes

$$\mu_m(\lambda) > -\lambda \frac{\overline{r(\delta)}}{T} > -\lambda \frac{\delta}{T} \quad \forall\ \lambda > 0$$

como esto es cierto para todo δ, haciendo tender δ a cero obtenemos que $\mu_m(\lambda) \ge 0$. Sea ahora $m_1 \in E$ tal que $m < m_1 < \tilde{m}$ (tal m_1, existe pues m no es función de t solamente) y se cumple que $\overline{m}_1 = \overline{m} = 0$ entonces por lo anterior se tiene que $\mu_{m_1}(\lambda) \geq 0 \;\; \forall \;\; \lambda > 0$ pero $\mu_m(\lambda) > \mu_{m_1}(\lambda) \;\; \forall \;\; \lambda > 0$ de donde $\mu(\lambda) > 0 \; \forall \;\; \lambda > 0$.

Sea $\underline{m} \geq 0$ entonces $\overline{-m} \leq 0$ entonces por lo anterior no existe $\lambda > 0$ y $u > 0$ tales que $\mathcal{L}u = \lambda(-m)u = -\lambda m u$ o sea no existe $\lambda < 0$ y $u > 0$ tal que $\mathcal{L}u = \lambda m u$. ∎

Pasemos a estudiar ahora la necesidad de la condición $\langle \psi, m \rangle < 0$ para la existencia de $\lambda_1 > 0$ con $u_1 > 0$ tal que $\mathcal{L}u_1 = \lambda_1 m u_1$.

Lema III.7: Sea $m \in E$ con $\|m\|_\infty < 1$ y m no función de t solamente. Si $\langle \psi, m \rangle > 0$, $\overline{m} > 0$ y $\underline{m} \geq 0$ entonces el cero es el único autovalor con autofunción positiva de $\mathcal{L}u = \lambda M u$.

Demostración: Como $\underline{m} \geq 0$ por la proposición anterior no existe $\lambda < 0$ y $u > 0$ tales que $\mathcal{L}u = \lambda m u$. Veamos que tampoco existe un $\lambda > 0$ con esa propiedad, o sea que $\mu_m(\lambda) \neq 0 \;\; \forall \;\; \lambda > 0$.

Sea $\widehat{m}(t) = \inf_{x \in \Omega} m(x, t) < m(x, t)$. Para cada $\delta > 0$ pequeño, elegimos $r(\delta) \in E$ solo función de t tal que $r(\delta) < \widehat{m}(t)$, $\|r(\delta)\|_\infty < 1$ y $\int_0^T r(\delta)(t)\, dt > -\delta$ (esto último se puede lograr pues $\underline{m} = \int_0^T \widehat{m}(t)\, dt \geq 0$), entonces

$$\mu_m(\lambda) < \mu_{r(\delta)} = -\lambda \frac{\overline{r(\delta)}}{T} < \lambda \frac{\delta}{T} \qquad \forall \;\; \lambda > 0$$

por lo tanto $\mu_m(\lambda) \leq 0$ y tomando como antes $m_1 \in E$ tal que $\widehat{m} < m_1 < m$ se obtiene $\mu_m(\lambda) < \mu_{m_1}(\lambda) \leq 0$. ∎

Lema III.8: Sea $m \in E$ tal que $\|m\|_\infty < 1$ y supongamos que m no es función de t solamente. Si $\langle \psi, m \rangle = 0$ entonces el cero es el único autovalor con autofunción positiva de $\mathcal{L}u = \lambda M u$.

Demostración: Por el absurdo supongamos que existen $\lambda_0 \neq 0$ y $u_0 > 0$ tales que $\mathcal{L}\, u_0 = \lambda_0\, m\, u_0$.

Si $\lambda_0 > 0$ entonces por la Proposición III.5 $\overline{m} > 0$. Pueden presentarse dos casos: a) $\underline{m} \geq 0$ y b) $\underline{m} < 0$.

a) Consideremos la función de peso $m + \varepsilon$ con ε pequeño de modo tal que $\|m + \varepsilon\|_\infty < 1$ en consecuencia $\langle \psi,\, m + \varepsilon \rangle > 0$, $\overline{m + \varepsilon} > 0$ y $\underline{m + \varepsilon} \geq 0$ por lo tanto $m + \varepsilon$ cumple las hipótesis del Lema III.7 y entonces $\mu_{m+\varepsilon}(\lambda) \neq 0$ para todo $\lambda > 0$ y por lo tanto tiene signo constante.

Como $\mu_{m+\varepsilon}(\lambda) < \mu_m(\lambda)$ para todo $\lambda > 0$ y $\mu_{m+\varepsilon}(\lambda_0) < \mu_m(\lambda_0) = 0$ resulta que $\mu_{m+\varepsilon}(\lambda) < 0$ para todo $\lambda > 0$ pero como $\mu_{m+\varepsilon}(\lambda) = \mu_m(\lambda) - \lambda\,\varepsilon$ resulta que $\mu_m(\lambda) < \lambda\,\varepsilon$ para todo $\lambda > 0$. Como esto vale para todo $\varepsilon > 0$ pequeño se tiene que $\mu_m(\lambda) \leq 0$ para todo $\lambda > 0$ y $\mu_m(\lambda_0) = 0$ implica que $\mu_m(\lambda) \equiv 0$.

b) Recordemos que en este caso tenemos la hipótesis $\langle \psi,\, m \rangle = 0$, $\overline{m} > 0$ y $\underline{m} < 0$.
Aquí para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño $m + \varepsilon$ cumple $\langle \psi,\, m + \varepsilon \rangle > 0$ y $\underline{m + \varepsilon} < 0$ en consecuencia el problema $\mathcal{L}\, u = \lambda\,(m + \varepsilon)\, u$ tiene un único autovalor diferente de cero y que es negativo, con autofunción positiva, entonces $\mu_{m+\varepsilon}(\lambda)$ es de signo constante y procediendo como en el caso a) llegaremos a que $\mu_m(\lambda) \equiv 0$.

En ambos casos $\mu_m(\lambda) \equiv 0$, pero esto no es posible porque $m - \varepsilon$ satisface $\langle \psi,\, m - \varepsilon \rangle < 0$ y $\overline{m - \varepsilon} > 0$ para ε pequeño por lo tanto existe un único $\lambda_\varepsilon > 0$ tal que $\mu_{m-\varepsilon}(\lambda_\varepsilon) = 0$ pero por otra parte $\mu_{m-\varepsilon}(\lambda) > \mu_m(\lambda) \equiv 0$ para todo $\lambda > 0$ lo cual es una contradicción.

Si $\lambda_0 < 0$ entonces $-m$ estaría en la situación analizada anteriormente pues $\langle \psi,\, -m \rangle = 0$ y $\mathcal{L}\, u_0 = (-\lambda_0)(-m)\, u_0$ con $(-\lambda_0) > 0$ y vimos que esto no era posible. ∎

Proposición III.6: Sea $m \in E$, $\|m\|_\infty < 1$. Supongamos que m no es función de t solamente. La condición $\langle \psi,\, m \rangle < 0$ (respectivamente $\langle \psi,\, m \rangle > 0$) es necesaria para la existencia de $\lambda_1 > 0$ (respectivamente $\lambda_1 < 0$) y $u_1 > 0$ tales que $\mathcal{L} u_1 = \lambda_1 M u_1$.

Demostración: Supongamos $\lambda_1 > 0$ y $u_1 > 0$ tales que $\mathcal{L} u_1 = \lambda_1 M u_1$ entonces por la Proposición III.5 $\overline{m} > 0$.
Por el Lema III.8 $\langle \psi, m \rangle = 0$ no puede ser. Supongamos por absurdo que $\langle \psi, m \rangle > 0$. Se podrían plantear entonces las siguientes situaciones.

a) $\langle \psi, m \rangle > 0$, $\overline{m} > 0$, $\underline{m} < 0$, esto implicarí la existencia de $\overline{\lambda}_1 < 0$ y $\overline{u}_1 > 0$ tales que $\mathcal{L} \overline{u}_1 = \overline{\lambda}_1 M \overline{u}_1$ por la proposición III.4, y $\overline{\lambda}_1$ sería además el único autovalor diferente de cero con esa propiedad, contra lo supuesto.

b) $\langle \psi, m \rangle > 0$, $\overline{m} > 0$, $\underline{m} \geq 0$, esto por el Lema III.7 contradeciría la existencia de $\lambda_1 > 0$ y $u_1 > 0$ tales que $\mathcal{L} u_1 = \lambda_1 M u_1$ que supusimos al comienzo.

En consecuencia $\langle \psi, m \rangle < 0$.

Si $\lambda_1 < 0$ y $u_1 > 0$ tales que $\mathcal{L} u_1 = \lambda_1 M u_1$ entonces $\mathcal{L} u_1 = (-\lambda_1)(-M) u_1$ y por lo anterior $\langle \psi, -m \rangle < 0$ por lo tanto $\langle \psi, m \rangle > 0$. ∎

Demostración del Teorema III.1: Por Proposiciones III.2, III.4, III.5 y III.6 . ∎

APÉNDICE

§1. Propiedades de la familia de operadores $Aa(t)$

Sea $p > n$. Para $t \in \mathbb{R}$ consideremos el operador

$$A(t) : L^p(\Omega) \to L^p(\Omega)$$

inducido por $\mathcal{A}(\cdot, t, D)$ (ver pag. 1) con dominio D independiente de t

$$D(A(t)) = D = \{u \in W^{2,p}(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{en} \quad \partial\Omega\}$$

Sea $a : [0, \omega] \to L^p(\Omega)$ $\mu/2$-Hölder continua en $[0, \omega]$ para la norma en $L^p(\Omega)$ entonces la familia de operadores $Aa(t) = A(t) + a(t)$ cumple con las siguientes propiedades:

A.1 $\{Aa(t)/t \in [0, \omega]\}$ es una familia de operadores cerrados con dominio independiente de t y denso en $X = L^p(\Omega)$.

Pues $C_0^\infty(\Omega) \subset D \subset L^p(\Omega)$ y como $C_0^\infty(\Omega)$ es denso en $L^p(\Omega)$ entonces D lo es, además por definición el dominio de $Aa(t)$ es D para todo t en consecuencia solo falta ver que $Aa(t)$ para cada t es un operador cerrado.

Observemos que existe una constante c tal que

$$\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq c \left(\|Aa(t)\,u\|_{L^p(\Omega)} + \|u\|_{L^p(\Omega)}\right) \;\; \forall\, u \in D \tag{39.1}$$

pues la desigualdad (39.1) vale para $u \in \mathcal{D}$ donde $\mathcal{D} = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) / \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \;\; \text{en} \;\; \partial\Omega\}$ (ref [4], desigualdad 19.3, pag. 75) y D es la clausura de $\mathcal{D}$ en$W^{2,p}(\Omega)$.

Entonces si

$$\begin{aligned} u_n &\to u \quad \text{en } L^p(\Omega) \quad \text{con } u_n \in D \quad \text{y} \\ Aa(t)\,u_n &\to v \quad \text{en } L^p(\Omega) \end{aligned}$$

resulta que

$$\|u_n - u_m\|_{W^{2,p}(\Omega)} \leq c \left(\|Aa(t)\,(u_n - u_m)\|_{L^p(\Omega)} + \|u_n - u_m\|_{L^p(\Omega)}\right)$$

y por lo tanto $\{u_n - u_m\}$ es una sucesión de Cauchy en $W^{2,p}(\Omega)$ y en consecuencia converge en $W^{2,p}(\Omega)$ y como $\{u_n\} \subset D$ y D es cerrado en $W^{2,p}(\Omega)$, converge a un objeto de D que no puede ser otro que u y como $Aa(t)$ es continuo de $W^{2,p}(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$ entonces $Aa(t)\, u_n$ converge a $Aa(t)\, u$ por lo tanto $Aa(t)\, u = v$ y resulta $Aa(t)$ cerrada.

A.2) Existe $k > 0$ suficientemente grande tal que para todo $t \in [0, \omega]$ la resolvente

$$R(\lambda,\ Aa(t) + k)$$

existe para todo λ con $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ y

$$||R(\lambda,\ Aa(t) + k)||_{L^p(\Omega)} \leq c\,(1 + |\lambda|)^{-1} \tag{40.1}$$

donde c es una constante independiente de t y de λ pues

$$\|(Aa(t) - \lambda\, I)^{-1}\|_{L^p(\Omega)} \leq c_0\, |\lambda|^{-1} \quad \forall\, \lambda \text{ con } \operatorname{Re} \lambda \leq 0 \quad \text{y} \quad |\lambda| \geq \Lambda_0$$

(ref [4], pag 78), entonces si $k > \max(1, \Lambda_0)$ y $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ resulta que $\operatorname{Re}(\lambda - k) \leq 0$ y $|\lambda - k| > |\lambda| > \Lambda_0$ y por lo tanto

$$\begin{aligned} \|R(\lambda,\ Aa(t) + k)\|_{L^p(\Omega)} &= \|(Aa(t) - (\lambda - k)\, I)^{-1}\|_{L^p(\Omega)} \leq \\ &\leq \frac{c_0}{|\lambda - k|} \leq \frac{2\, c_0}{1 + |\lambda|}. \end{aligned}$$

A.3) La aplicación $Aa(\cdot) + k : [0, \omega] \to L(X_1,\ L^p(\Omega))$ es Hölder continua, donde X_1 es el dominio D con la norma $\|u\|_1 = \|(Aa(0) + k)\, u\|_{L^p(\Omega)}$ (que es equivalente a la norma del gráfico en D inducida por el operador $Aa(0) + k$ pues de la propiedad A.2 se desprende que $(Aa(0) + k)^{-1}$ existe y es continuo de $L^p(\Omega)$ en $L^p(\Omega)$).

Probaremos la afirmación A.3:

Por la hipótesis de μ-Hölder continuidad hecha sobre los coeficientes a_{ij}, a_i y a que intervienen en la definición de $Aa(s) + k$ se tiene que

$$\|(Aa(s) + k)\, u - Aa(t) + k)\, u\|_{L^p(\Omega)} \leq c\, |s - t|^{\mu/2}\, \|u\|_{W^{2,p}(\Omega)} \tag{40.2}$$

pues

$$\|(Aa(s)+k)\,u-(Aa(t)+k)\,u\|_{L^p(\Omega)}=\|-\sum_{i,k}[a_{ik}(x,s)-a_{ik}(x,t)]\,D_i\,D_k\,u(x)+$$
$$+\sum_j[a_j(x,s)-a_j(x,t)]\,D_j\,u(x)+[a(x,s)-a(x,t)]\,u(x)\|_{L^p(\Omega)}\leq$$
$$\leq\sum_{i,k}c_{ik}\,|s-t|^{\mu/2}\,\|D_i\,D_k\,u(x)\|_{L^p(\Omega)}+$$
$$+\textstyle\sum_j c_j\,|s-t|^{\mu/2}\,\|D_j\,u(x)\|_{L^p(\Omega)}+c_o\,|s-t|^{\mu/2}\,\|u(x)\|_{L^p(\Omega)}\leq c\,|s-t|^{\mu/2}\,\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}.$$

La desigualdad (39.1) para $Aa(0)+k$ nos dice que $\|u\|_{W^{2,p}(\Omega)}\leq c\,(\|(Aa(0)+k)\,u\|_{L^p(\Omega)}+\|u\|_{L^p(\Omega)})$ $\forall\ u\in D$ de donde se desprende que $\|\ \|_{W^{2,p}(\Omega)}$ es equivalente a la norma del gráfico en D inducida por el operador $Aa(0)+k$ y esta a su vez por lo dicho al comienzo, es equivalente a $\|\ \|_1$ por lo tanto de la desigualdad (40.2) se obtiene

$$\|(Aa(s)+k)\,u-(Aa(t)+k)\,u\|_{L^p(\Omega)}\leq c\,|s-t|^{\mu/2}\,\|u\|_1$$

de donde resulta la afirmación A.3.

A'.3) Existe una constante $c>0$ tal que

$$\|[(Aa(s)+k)-(Aa(t)+k)]\,(Aa(r)+k)^{-1}\|\leq c\,|s-t|^{\mu/2}\quad\forall\ t,\,s,\,r\in[0,\,\omega]$$

Veamos primero el caso cuando $r=0$.

$$\begin{aligned}&\|[(Aa(s)+k)-(Aa(t)+k)]\,(Aa(0)+k)^{-1}\|=\\&\qquad=\sup_{\|u\|_{L^p(\Omega)}=1}\|[Aa(s)-Aa(t)]\,(Aa(0)+k)^{-1}\,u\|_{L^p(\Omega)}\leq\\&\qquad\leq c\,|s-t|^{\mu/2}\,\|(Aa(0)+k)^{-1}\,u\|_1=c\,|s-t|^{\mu/2}\,\|u\|_{L^p(\Omega)}=c\,|s-t|^{\mu/2}\end{aligned}\tag{41.1}$$

Ahora bien

$$\|(Aa(s)-Aa(t))\,(Aa(r)+k)^{-1}\|\leq\|(Aa(s)-Aa(t))\,(Aa(0)+k)^{-1}\|\cdot\|(Aa(0)+k)\,(Aa(r)+k)^{-1}\|\tag{41.2}$$

De (41.1) se deduce que la aplicación $r \rightarrow (Aa(r)+k)(Aa(0)+k)^{-1}$ de $[0, \omega]$ en $GL(L^p(\Omega))$ es continua y como de $GL(L^p(\Omega))$ en si mismo la aplicación $B \rightarrow B^{-1}$ es continua resulta que $r \rightarrow (Aa(0)+k)\,(Aa(r)+k)^{-1}$ es continua y por lo tanto existe una constante c_1 tal que

$$\|(Aa(0)+k)\,(Aa(r)+k)^{-1}\| \leq c_1 \quad \forall\, r \in [0, \omega] \tag{41.3}$$

De (41.1), (41.2) y (41.3) se deduce A'.3.

§2. Nota II.4

Sea $F : C^{\gamma}([0, \omega], C^{2\gamma}(\bar{\Omega})) \to C^{2\gamma,\gamma}([0, \omega] \times \bar{\Omega})$ la aplicación tal que

$$F(f)(t, x) = f(t)(x)$$

Entonces F es continua.

Demostración:

$$\|F(f)\|_{C^{2\gamma,\gamma}([0,\omega]\times\bar{\Omega})} = \sup_{(t,x)} |F(f)(t, x)| + \sup_{x\neq y,\, s\neq t} \frac{|F(f)(t, x) - F(f)(s, y)|}{[(|t - s| + \|x - y\|^2)^{1/2}]^{2\gamma}} \leq$$

$$\leq \sup_{x\neq y,\, t\neq s} \left\{ \frac{F(f)(t, x) - F(f)(t, y)}{\|x - y\|^{2\gamma}} \frac{\|x - y\|^{2\gamma}}{(|t - s| + \|x - y\|^2)^{2\gamma/2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{F(f)(t, y) - F(f)(s, y)}{|t - s|^{\gamma}} \frac{|t - s|^{\gamma}}{(|t - s| + \|x - y\|^2)^{2\gamma/2}} \right\} +$$

$$+ \sup_t \sup_x |f(t)(x)| \leq$$

$$\leq \sup_t \sup_{x\neq y} \frac{|f(t)(x) - f(t)(y)|}{\|x - y\|^{2\gamma}} + \sup_t \|f(t)\|_{C(\bar{\Omega})} + \sup_{t\neq s} \sup_y \frac{|f(t)(y) - f(s)(y)|}{|t - s|^{\gamma}}$$

$$\leq \sup_t \|f(t)\|_{C^{2\gamma}(\bar{\Omega})} + \sup_{t\neq s} \frac{\|f(t) - f(s)\|_{C(\bar{\Omega})}}{|t - s|^{\gamma}} \leq$$

$$\leq \sup_t \|f(t)\|_{C^{2\gamma}(\bar{\Omega})} + \sup_{t\neq s} \frac{\|f(t) - f(s)\|_{C^{2\gamma}(\bar{\Omega})}}{|t - s|^{\gamma}} = \|f\|_{C^{\gamma}([0,\omega],C^{2\gamma}(\bar{\Omega}))}$$

por lo tanto F es continua. ∎

§3. **Nota II.5** $C^{2\gamma,\gamma}([0,\,\omega]\times\bar{\Omega})$ tiene inclusión compacta en $C([0,\,\omega]\times\bar{\Omega})$.

Demostración: Sea $\{f_n\}$ una sucesión acotada en $C^{2\gamma,\gamma}([0,\,\omega]\times\bar{\Omega})$, o sea cumple que

$$\sup_n\left\{\sup_{(t,x)}|f_n(t,\,x)| + \sup_{(t,x)\neq(s,y)}\frac{|f_n(t,\,x)-f_n(s,\,y)|}{[(|t-s|+\|x-y\|^2)^{1/2}]^{2\gamma}}\right\} < M < \infty$$

por lo tanto

1) $\sup\limits_n\sup\limits_{(t,x)}|f_n(t,\,x)| < M < \infty$ o sea $\{f_n\}$ es equi-acotada (en n).

2) $\lim\limits_{\delta\to 0}\left[\sup\limits_{n,\,(|t-s|+\|x-y\|^2)^{1/2}\leq\delta}|f_n(t,\,x)-f_n(s,\,y)|\right] = 0$

o sea $\{f_n\}$ es equicontinua (en n). por lo tanto por el Teorema de Ascali-Arzelá (ref [7], p. 85) la sucesión $\{f_n\}$ es relativamente compacta en $C([0,\,\omega]\times\bar{\Omega})$ donde a $[0,\,\omega]\times\bar{\Omega}$ lo consideramos con la topología inducida por la métrica $d((x,\,t),\,(y,\,s)) = (|t-s|+\|x-y\|^2)^{1/2}$, pero como esta métrica induce la misma topología que la métrica usual de $\mathbb{R}^{n+1}$ resulta la afirmación de la Nota II.2. ∎

§4. **Nota III.7** Sea $\mathcal{L}$ el operador inducido por (2.1) con dominio de $\mathcal{L}$ $D(\mathcal{L}) = F$ (como en el Teorema II.3). Sean $m \in E$ con $\|m\|_\infty < 1$, $a \in E$, $a \geq 0$. Sean u_1, λ_1 y u_2, λ_2 tales que $u_i > 0$, $\lambda_i \geq 0$ y $(\mathcal{L} + a + \lambda_i(1-m))u_i = (\mu_i + \lambda_i)u_i$ con $\mu_i = (\mu(\lambda_i)$, $i = 1, 2$.

Sea $w = (u_1 \cdot u_2)^{1/2}$ entonces $w > 0$, $w \in F = D(\mathcal{L})$

y si $\bar{\lambda} = \dfrac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ y $\bar{\mu} = \dfrac{\mu_1 + \mu_2}{2}$ entonces $(\mathcal{L} + a - \bar{\lambda}\, m)\, w \geq \bar{\mu}\, w$.

Demostración: Sean $\mathcal{L}_{x,2} = -\sum_{i,j} a_{ij}\, D_i\, D_j$ y $\mathcal{L}_{x,1} = \sum_k a_k\, D_k$ por lo tanto $\mathcal{L} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathcal{L}_{x,2} + \mathcal{L}_{x,1}$. Sea $w = (u_1^{1/2} \cdot u_2^{1/2})$. Escribamos a que es igual $D_i\, D_j\, w$, $D_k\, w$ y $D_t\, w$ con $D_t = \dfrac{\partial}{\partial t}$, por lo tanto

$$
\begin{aligned}
D_k(u_1^{1/2}\, u_2^{1/2}) &= \frac{1}{2} u_1^{-1/2}\, u_2^{-1/2}\, (u_2\, D_k\, u_1 + u_1\, D_k\, u_2) \\
D_i\, D_j(u_1^{1/2} \cdot u_2^{1/2}) &= D_i(\frac{1}{2} u_1^{-1/2}\, u_2^{1/2}\, D_j\, u_1 + \frac{1}{2} u_1^{1/2}\, u_2^{-1/2}\, D_j\, u_2) = \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) u_1^{-3/2}\, u_2^{1/2}\, D_i\, u_1\, D_j\, u_1 + \\
&\quad + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) u_1^{-1/2}\, u_2^{-1/2}\, D_i\, u_2\, D_j\, u_1 + \\
&\quad + \frac{1}{2} u_1^{-1/2}\, u_2^{1/2}\, D_i\, D_j\, u_1 + \\
&\quad + \frac{1}{2}(-\frac{1}{2}) u_2^{-3/2}\, u^{1/2}\, D_i\, u_2\, D_j\, u_2 + \\
&\quad + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}) u_2^{-1/2}\, u_1^{-1/2}\, D_i\, u_1\, D_j\, u_2 + \\
&\quad + \frac{1}{2} u_2^{-1/2}\, u_1^{1/2}\, D_i\, D_j\, u_2 = \\
&= \frac{1}{2} u_1^{-1/2}\, u_2^{-1/2}\, (u_2\, D_i\, D_j\, u_1 + u_1\, D_i\, D_j\, u_2) + \\
&\quad + \frac{1}{4} u_1^{-1/2}\, u_2^{-1/2}\, (D_i\, u_2\, D_j\, u_1 + D_i\, u_1\, D_j\, u_2) - \\
&\quad - \frac{1}{4} u_1^{-1/2}\, u_2^{-1/2}\, (u_2\, u_1^{-1}\, D_i\, u_1\, D_j\, u_2 + u_1\, u_2^{-1}\, D_i\, u_2\, D_j\, u_2) \\
D_t(u_1^{1/2}\, u_2^{1/2}) &= \frac{1}{2} u_1^{-1/2}\, u_2^{1/2}\, D_t\, u_1 + \frac{1}{2} u_1^{1/2}\, u_2^{-1/2}\, D_t\, u_2
\end{aligned}
$$

Recordemos que $a_{ij} = a_{ji}$ y sea A la matriz con elementos $A_{ij} = a_{ij}$. Entonces por la hipótesis hecha sobre los coeficientes a_{ij}, si ξ, $\eta \in \mathbb{R}^n$ entonces $\langle \xi, \eta \rangle_A = \langle A\xi, \eta \rangle = \sum a_{ij}\, \xi_i\, \eta_j$ es un producto escalar.

Calculemos $\mathcal{L}_{x,2}(u_1^{1/2}\, u_2^{1/2})$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{x,2}(u_1^{1/2}\, u_2^{1/2}) &= \frac{1}{2} u_1^{-1/2}\, u_2^{-1/2}\, (u_2\, \mathcal{L}_{x,2}\, u_1 + u_1\, \mathcal{L}_{x,2}\, u_2) - \\
&\quad - \frac{1}{4} u_1^{-1/2}\, u_2^{-1/2} \sum_{i,j} a_{ij} (D_i\, u_2\, D_j\, u_1 + D_i\, u_1\, D_j\, u_2) + \\
&\quad + \frac{1}{4} u_1^{-1/2}\, u_2^{-1/2} \sum_{i,j} a_{ij} (u_2\, u_1^{-1}\, D_i\, u_1\, D_j\, u_1 + u_1\, u_2^{-1}\, D_i\, u_2\, D_j\, u_2) = \\
&= \frac{1}{2} u_1^{-1/2}\, u_2^{-1/2}\, (u_2\, \mathcal{L}_{x,2}\, u_1 + u_1\, \mathcal{L}_{x,2}\, u_2) - \\
&\quad - \frac{1}{4} u_1^{-1/2}\, u_2^{-1/2}\, 2\, \langle \nabla u_2, \nabla u_1 \rangle_A + \\
&\quad + \frac{1}{4} u_1^{-1/2}\, u_2^{-1/2} (u_2\, u_1^{-1}\, \langle \nabla u_1, \nabla u_1 \rangle_A + u_1\, u_2^{-1}\, \langle \nabla u_2, \nabla u_2 \rangle_A)
\end{aligned}$$

donde con ∇u_i notamos $(D_1\, u_i,\, D_2\, u_i,\, \ldots,\, D_n\, u_i)$.

Veamos que

$$u_2\, u_1^{-1}\, \langle \nabla u_1, \nabla u_1 \rangle_A + u_1\, u_2^{-1}\, \langle \nabla u_2, \nabla u_2 \rangle_A \geq 2\, \langle \nabla u_2, \nabla u_1 \rangle_A \tag{46.1}$$

Esto es equivalente a ver que

$$u_2^2\, \langle \nabla u_1, \nabla u_1 \rangle_A + u_1^2\, \langle \nabla u_2, \nabla u_2 \rangle_A \geq 2\, u_1\, u_2\, \langle \nabla u_2, \nabla u_1 \rangle_A$$

o sea ver que

$$\langle u_2\, \nabla u_1, u_2\, \nabla u_1 \rangle_A + \langle u_1\, \nabla u_2, u_1\, \nabla u_2 \rangle_A \geq 2\, \langle u_1\, \nabla u_2, u_2\, \nabla u_1 \rangle_A$$

es decir

$$\langle u_2\, \nabla u_1, u_2\, \nabla u_1 \rangle_A + \langle u_1\, \nabla u_2, u_1\, \nabla u_2 \rangle_A - 2\, \langle u_1\, \nabla u_2, u_2\, \nabla u_1 \rangle_A \geq 0$$

pero el miembro de la izquierda en la ultima desigualdad es $\|u_2 \nabla u_1 - u_1 \nabla u_2\|_A^2$ el cual efectivamente es mayor o igual que cero por lo tanto vale (46.1). En consecuencia

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{x,2}(u_1^{1/2} u_2^{1/2}) &\geq \frac{1}{2}u_1^{-1/2} u_2^{-1/2}(u_2 \mathcal{L}_{x,2} u_1 + u_1 \mathcal{L}_{x,2} u_2) \\
\mathcal{L}_{x,1}(u_1^{1/2} u_2^{1/2}) &= \frac{1}{2}u_1^{-1/2} u_2^{-1/2}(u_2 \mathcal{L}_{x,1} u_1 + u_1 \mathcal{L}_{x,1} u_2) \\
\frac{\partial}{\partial t}(u_1^{1/2} u_2^{1/2}) &= \frac{1}{2}u_1^{-1/2} u_2^{-1/2}(u_2 \frac{\partial}{\partial t} u_1 + u_1 \frac{\partial}{\partial t} u_2) \\
a\,(u_1^{1/2} u_2^{1/2}) &= \frac{1}{2}u_1^{-1/2} u_2^{-1/2}(u_2\, a\, u_1 + u_1\, a\, u_2)
\end{aligned}$$

entonces

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L} + a)(u_1^{1/2} u_2^{1/2}) &\geq \frac{1}{2}u_1^{-1/2} u_2^{-1/2}(u_2 (\mathcal{L} + a) u_1 + u_1 (\mathcal{L} + a) u_2) \\
&= \frac{1}{2}u_1^{-1/2} u_2^{-1/2}[u_2 (\lambda_1\, m\, u_1 + \mu_1 u_1) + u_1 (\lambda_2\, m\, u_2 + \mu_2 u_2)] = \\
&= u_1^{-1/2} u_2^{-1/2}[\frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2} m + \frac{\mu_1 + \mu_2}{2}]
\end{aligned}$$

de donde $(\mathcal{L} + a - \bar{\lambda} m)w \geq \bar{\mu}\, w$. ∎

§5. Teorema de Krein–Rutman

Sea (E, P) un espacio de Banach ordenado cuyo cono P de elementos positivos tenga interior no vacío ($\mathring{P} \neq \emptyset$). Sea T un endomorfismo compacto de E tal que $T(P - \{0\}) \subset \mathring{P}$. Entonces

- el radio espectral $r(T)$ es positivo.
- $r(T)$ es un autovalor simple de T con autovector positivo y ningun otro autovalor tiene autovector positivo asociado.
- $r(T)$ es un autovalor simple de T^* con autovector $w(r)$ estrictamente positivo ($w(r)(y) > 0 \ \ \forall \ y \in P - \{0\}$).
- para todo $y \in P - \{0\}$ la ecuación

  $$\lambda x - T x = y$$

  tiene exactamente una solución positiva si $\lambda > r(T)$ y no tiene solución positiva para $\lambda \leq r(T)$.

  La ecuación

  $$r(T) x - T x = -y$$

  no tiene solución positiva.
- para todo $S \in L(E)$ que satisfaga $S \geq T$ se tiene que $r(S) \geq r(T)$. Si $S - T$ es tal que $(S - T)(P - \{0\}) \subset \mathring{P}$ entonces $r(S) > r(T)$. (ref. [2], p. 632)

§6. Lema sobre perturbación de autovalores simples

Sean T_0, $K \in B(X, Y)$ y supongamos que r_0 es un K-simple autovalor de T_0 (o sea

1. $\dim \operatorname{Ker}(T_0 - r_0 K) = 1 = \dim Y/R(T_0 - r_0 K)$ y

2. si $\operatorname{Ker}(T_0 - r_0 K)$ está generado por u entonces $K u \notin R(T_0 - r_0 K)$).

Entonces existe un valor $\delta > 0$ tal que si $T \in B(X, Y)$ y $\|T - T_0\| < \delta$ entonces existe un único $r(T) \in \mathbb{R}$ que satisface $|r(T) - r_0| < \delta$ para el cual $T - r(T)K$ es singular. La aplicación $T \to r(T)$ es analítica y $r(T)$ es un K-simple autovalor de T. Finalmente si $\operatorname{Ker}(T_0 - r_0 K) = \langle x_0 \rangle$ y Z es el complemento de $\langle x_0 \rangle$ en X existe un único "null" vector $x(T)$ de $T - r(T)K$ que satisface $x(T) - x_0 \in Z$. La aplicación $T \to x(T)$ es también analítica.(ref [5], Lema 1.3, p. 163).

§7. Principio de máximo para ecuaciones parabólicas

(Transcripción de los enunciados de los Teoremas 5,6 y 7 del capítulo 3, sección 3 de ref [9]).

Sea el operador

$$L \equiv \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\, t)\frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,\, t)\frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial t}$$

Diremos que el operador L es parabólico en $(x,\, t) = (x_1,\, x_2, \ldots,\, x_n,\, t)$ si para t fijo existe $\mu > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\, t)\,\xi_i \xi_j \geq \mu \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \tag{50.1}$$

para toda n-upla de números reales $(\xi_1, \ldots, \xi_n)$. El operador L es uniformemente parabólico en un dominio E del espacio $(x,\, t)$ si (50.1) vale para todo $(x,\, t)$ en E.

Teorema 5: Sea u tal que satisface en un dominio E en $I\!R^{n+1}$.

$$L[u] = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,\, t)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x\, t)\frac{\partial u}{\partial x_i} - \frac{\partial u}{\partial t} \geq 0 \tag{50.2}$$

donde L es un operador uniformemente parabólico y los coeficientes de L son acotados. Supongamos que el máximo de u en E es M y que se alcanza en un punto interior de $P(x,\, \bar{t})$. Notemos con $E(\bar{t})$ la componente conexa, de la intersección del hiperplano $t = \bar{t}$ con E, que contiene a P. Entonces $u \equiv M$ en $E(\bar{t})$. Mas aún si Q es un punto de E que puede conectarse con P por un camino en E consistente solo de segmentos horizontales y segmentos verticales entonces $u = M$ en Q.

Nota : El Teorema 5 es válido si el punto $P(\bar{x},\, \bar{t})$ está sobre la componente horizontal $E(\bar{t})$ de la frontera ∂E de E, siempre que u y sus derivadas $\frac{\partial u}{\partial x_i}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}$ y $\frac{\partial u}{\partial t}$ sean todas continuas en $E \cup E(\bar{t})$.

Teorema 6: Bajo las mismas hipótesis que en el Teorema 5, supongamos ahora que el máximo se toma en un punto P de la frontera ∂E. Supongamos que puede construirse una esfera que pase por P cuyo interior yasca enteramente en E y en la cual $u < M$. Tambien supongamos que la dirección radial del centro de la esfera al punto P no sea paralela al eje de los t. Entonces si $\dfrac{\partial}{\partial \nu}$ indica cualquier derivada direccional en una dirección saliente se tiene

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} > 0 \quad \text{en} \quad P.$$

Teorema 7: Las conclusiones de los Teoremas 5 y 6 siguen siendo válidas si u es solución de $(L + h)[u] \geq 0$ siempre que $h \leq 0$ y $M \geq 0$.

REFERENCIAS

[1] H. Amann, Periodic solutions of Semilinear Parabolic Equations, En: Nonlinear Analysis, ed. Cesari-Kannan-Weinberg, Academic Press, 1978, p 1-29.

[2] H. Amann, Fixed points equations and nonlinear eigenvalue problems in ordered Banach Spaces, SIAM Rev 18 (1976) p 620-70.

[3] A. Beltramo–P. Hess, "On principal eigenvalue of a periodic Parbolic Operator", Communication in PDE 9 (1984), p 919-941.

[4] A. Friedman, Partial Diffrential Equations, Holt, New York, 1969.

[5] Grandall–Rabinowitz, Bifurcation, Perturbation of Simple Eigenvalue and Linearized Stability in Archive for Rotational Mechanics and Analysis, v. 52, N° 2.

[6] D. Guilbarg–N.S. Trudinger. "Elliptic Partial Differential Equations of Second Order", Springer–Verlag Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo.

[7] Kosaku–Yosida, "Functional Analysis", Springer–Verlag, Berlin.

[8] A. Pazy, "Semi–Groups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations", Univ. of Maryland, Lecture Notes N° 19, Univ. of Maryland College Park, 1974.

[9] M. H. Protter nad H. F. Weinberger, "Maximum principles in Differential Equations", Prentice–Hall, Englewood Clifs, New Jersey 1967.

[10] S. Senn–P. Hess, "On Positive Solutions of a Linear Elliptic Eigenvalue Problem with Neumann Boundary Conditions", Mathematics Institute os Zürich, Freiestrasse 36, CH - 8032 Zürich, Switzerland.

[11] P. E. Sobolewskii, Equations of Parabolic type in Banch space, Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2 49 (1966), p 1-62.

[12] H. Tanabe, "Equations of Evolution", Pitman - London - San Francisco - Melbourne.