

Tesis de Posgrado

Estructura de los estados intrusos

Arenas Peris, Gerardo Enrique

1991

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Arenas Peris, Gerardo Enrique. (1991). Estructura de los estados intrusos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2390_ArenasPeris.pdf

Cita tipo Chicago:

Arenas Peris, Gerardo Enrique. "Estructura de los estados intrusos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1991.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2390_ArenasPeris.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

Tema de Tesis:

ESTRUCTURA DE LOS ESTADOS INTRUSOS

Autor:

LIC. GERARDO ENRIQUE ARENAS PERIS

Director de Tesis:

DR. PEDRO FEDERMAN

Lugar de Trabajo:

Departamento de Física
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Tesis presentada para optar por el
Título de Doctor en Ciencias Físicas.

Tesis.
2390
ej 2

APORTES ORIGINALES REALIZADOS POR EL LIC. GERARDO E. ARENAS PERIS
A LO LARGO DE LA REALIZACION DE SU TESIS

El trabajo realizado constituye la presentacion de un modelo simple que describe los aspectos mas relevantes de la estructura de los estados intrusos en una base de acoplamiento debil.

El primer aporte original consistio en reformular la descripcion anteriormente estudiada (en el Trabajo de Seminario) en terminos del acoplamiento debil entre agujeros del carozo y el resto de los nucleones de valencia. Tal biparticion del sistema no tiene antecedentes en la literatura sobre acoplamiento debil, y permite no solamente volver mas "elegante" la formulacion de las ecuaciones involucradas, sino extender efectivamente su rango de aplicabilidad. Los calculos realizados para nuevas regiones ($Z=40$, $Z=82$) dan resultados muy satisfactorios.

El segundo aporte fue la justificacion teorica de la aproximacion de primer orden, en terminos de senioridad minima. El formalismo completo quedaba de ese modo solidamente fundamentado. Al haberse hallado una expresion simple para la correccion de segundo orden, el truncamiento del desarrollo perturbativo hasta el primer orden se demuestra, de este modo, valido.

El tercer aporte consistio en obtener la derivacion de las ecuaciones surgidas de otros modelos semiempiricos como casos particulares y/o aproximaciones realizadas a partir del modelo desarrollado.

El cuarto aporte consistio en el desarrollo de un metodo, preciso y consistente con el modelo, para la determinacion de los elementos de matriz monopolomonopolos de la interaccion neutron-proton, a partir de datos experimentales. El metodo desarrollado despertó el interes de otros colegas y, en colaboracion con P.Federman, S.Pittel y R.F.Casten se elaboró un plan (actualmente en desarrollo) para determinar todos los elementos de matriz correspondientes en la region de las tierras raras.



Pedro Federman

A Manhê, Panhê, Di, la Flákintosh,
Manú, el Rafa, Fredy, Nina, Piru,
Fabio, Ernest, el Enano, Ceci, Ili,
e incluso a la Negra y la Lobita.
Al fin y al cabo, realizar una
tesis es un acto de amor.*

RESUMEN

La compleja estructura de los estados intrusos nucleares se describe en términos de un modelo de acoplamiento débil que permite extraer máxima información de datos experimentales, obteniéndose fórmulas explícitas para las energías de excitación y las probabilidades de transición electromagnéticas. La componente monopolar de la interacción neutrón-protón juega un papel fundamental en la sistemática de la energía de dichos estados, y se ha desarrollado un método, consistente con el modelo, para extraer sus elementos de matriz del experimento. De este modo se realizaron cálculos sin parámetros libres para una amplia variedad de excitaciones en núcleos medios y pesados con masas pares e impares a lo largo de cinco regiones de la Tabla Periódica. El acuerdo entre energías calculadas y experimentales es muy satisfactorio. Las probabilidades de transición electromagnéticas ofrecen una prueba de la validez de las aproximaciones realizadas, si bien la información experimental es escasa como para realizar una comparación sistemática. Se presentan predicciones basadas en el modelo para energías de excitación de estados intrusos en núcleos donde éstos no han sido aún observados experimentalmente.

INDICE

	Pág.
Resumen	3
Indice	4
Prólogo	6
1. INTRODUCCION	9
1.1. Estados intrusos: Definición, generalidades y antecedentes	9
1.2. Ideas básicas del presente trabajo	13
2. DESCRIPCION DE ESTADOS INTRUSOS EN UNA BASE DE ACOPLAMIENTO DEBIL	16
2.1. Energías de excitación	16
2.2. Probabilidades de transición	22
2.3. Relación con otras descripciones	27
3. CALCULO DE LA CORRECCION DE PRIMER ORDEN	30
3.1. Cálculo de $\bar{V}_{\pi\pi}$	30
3.2. Cálculo de $\bar{V}_{\nu\pi}$	31
3.2.1. Dependencia de $\bar{V}_{\nu\pi}$ con la forma de la función de onda	32
3.2.2. Determinación de los \bar{V}_{ν} consistente con el modelo .	34
3.3. Determinación de los monopolos de la interacción neutrón-protón	35

3.3.1. Motivaciones	36
3.3.2. Antecedentes e ideas básicas del método	39
3.3.3. Deducción de las ecuaciones y descripción del método	42
4. DISCUSION DE LOS RESULTADOS	44
4.1. Región $Z = 28$	44
4.2. Región $Z = 40$	45
4.3. Región $Z = 50$	50
4.4. Región $N = 82$	53
4.5. Región $Z = 82$	55
5. CONCLUSIONES	59
Agradecimientos	62
APENDICES	63
A. La corrección de primer orden	63
B. La corrección de segundo orden	66
C. Validez del esquema de acoplamiento débil	68
D. Acoplamiento débil extremo	71
REFERENCIAS	74

PROLOGO

Poco después de comenzar mi investigación de la estructura de los estados intrusos en el núcleo atómico, P. Federman me presentó una idea que estaba desarrollando para obtener una descripción simple de la sistemática de la energía de dichos estados, que hacía innecesaria diagonalización alguna, en contraste con las dimensiones astronómicas de los Hamiltonianos involucrados en cálculos tradicionales del modelo de capas. Los cálculos preliminares permitían prever una correcta descripción, sin parámetros libres, de los centroides de los estados 0^+ en los isótopos pares del Sn. Sin embargo, las hipótesis subyacentes no estaban claramente especificadas, y sus alcances eran restringidos, ya que no abarcaban ni todas las excitaciones ni todas las regiones de interés. Esto constituyó el punto de partida del trabajo presentado en esta tesis, cuyas etapas pueden resumirse como sigue.

Mi primer aporte consistió en generalizar esta descripción a núcleos impares sobre la base de la misma intuición original, sustentada en la provisional hipótesis de "carozo inerte", según la cual los núcleos con pocos agujeros de protones (o neutrones) permanecían "congelados" en su estado fundamental en las excitaciones intrusas. No obstante, existía una asimetría (físicamente "antiestética") entre las ecuaciones que describían estados intrusos en núcleos pares e impares con partículas fuera de capa cerrada y las correspondientes a agujeros fuera de ella.

Más adelante se me hizo evidente que la sustitución de la base originaria (partícula-partícula) por una base partícula-agujero permitía eliminar la endeble hipótesis de "caro-

zo inerte", al tiempo que aumentaba el rango de aplicabilidad del modelo y su simplicidad. Más aún, no solamente se eliminaba así la mencionada asimetría de las ecuaciones, sino que todas las ecuaciones se reducían a casos particulares de una única formulación general. De este modo, la energía de los estados intrusos podía calcularse como una combinación lineal de energías de ligadura y elementos de matriz monopolo-monopolo de la interacción nuclear. Sobre esta base se realizaron los primeros cálculos para las regiones $Z=50$ y $N=82$, con resultados muy satisfactorios [Are86a].

Un análisis más detallado de las características del modelo me llevó posteriormente a la conclusión de que se trataba de una aproximación de acoplamiento débil. La corrección de primer orden se reduce, para estados de senioridad mínima, a la componente monopolar de la interacción, y la corrección de segundo orden es despreciable. Para las regiones $Z=50$ y $N=82$, la interacción monopolar promedio es aproximadamente independiente de la masa. Sin embargo, el estudio de otras regiones de la Carta de Nucleidos demostraba que éste no es el caso general, y que era necesario considerar explícitamente la dependencia de los monopolos neutrón-protón con la órbita. Desarrollé entonces un método semiempírico para determinar la componente monopolar de la interacción neutrón-protón. Así pudieron llevarse a cabo los cálculos para las regiones $Z=28$ y $Z=82$. Los resultados para estas regiones eran aceptables, aunque su precisión era menor que la obtenida para las otras dos regiones [Are86b,Are87]. Esta imprecisión era atribuible a la escasez de méritos del método semiempírico para la determinación de los monopolos de la interacción neutrón-protón. Era necesario, por ende, desarrollar una técnica más refinada.

Paralelamente, el estudio comparativo de otros modelos semiempíricos me llevó a una interesante conclusión: todos ellos se obtenían como aproximaciones o casos particulares de la descripción aquí presentada.

Una manipulación adecuada de las ecuaciones desarrolladas condujo al descubrimiento de un método alternativo, más preciso y consistente con el modelo, para la obtención de los elementos de matriz monopolo-monopolo de la interacción neutrón-protón a partir de datos experimentales. Los resultados se aplicaron al cálculo de las energías de los estados intrusos en la región $Z=82$, y el acuerdo con el experimento resultó impactante [Are88b]. Cálculos similares para los isótopos del Zr ($Z=40$) en la región transicional $A \cong 100$ arrojaron resultados con la misma precisión [Are88c]. Pudo asimismo generalizarse la aplicabilidad del modelo a otros estados de la banda intrusa (fuera de las cabezas de banda).

El método desarrollado para la determinación de los monopolos despertó el interés de otros colegas. En colaboración con P. Federman, S.Pittel y R.F.Casten, se elaboró un plan (actualmente en desarrollo) para determinar *todos* los elementos de matriz monopoles de la interacción neutrón-protón en la región $50 < Z < 82 < N < 126$.

En la redacción de esta tesis he omitido la descripción del primer método para la determinación de monopolos, desarrollado en [Are86b]. Con el objeto de aligerar la lectura, se han evitado largas discusiones sobre la naturaleza de los datos experimentales, remitiéndose en cada caso a la bibliografía existente. Finalmente, una advertencia: en todo este trabajo se ha empleado la convención de signos "atractivo = positivo"; si bien no es la más habitual, quien se vea en el trance de manejar cotidianamente cientos de energías de ligadura sabrá apreciar las ventajas de utilizar dicha convención.

1. INTRODUCCION

"Intruder means: coming from outside..."
(M.Vergnes,1988).

1.1. ESTADOS INTRUSOS: DEFINICION, GENERALIDADES Y ANTECEDENTES

Se denomina "intruso" a un estado nuclear que contiene importantes componentes de configuraciones correspondientes a la excitación de una o dos partículas a través del *gap* entre dos capas mayores y que, a orden cero, "debería" encontrarse a una energía de excitación proporcionalmente alta (múltiplo de $\hbar\omega \approx 41 A^{-1/3}$ MeV) pero se observa experimentalmente a una energía mucho menor. La sistemática de la energía de los estados intrusos de protones muestra mínimos hacia la mitad de la capa de valencia de neutrones (y viceversa), a veces a tan baja energía que pueden inclusive devenir el estado fundamental [Pie85] (Fig.1.1). Esto da lugar a una *coexistencia* entre estados intrusos y estados de los nucleones de valencia que se ha observado, en los últimos años, en los espectros nucleares de bajas energías de núcleos medios y pesados a lo largo de toda la Carta de Nucleidos [Hey83], preferentemente en la vecindad de números mágicos (Fig.1.2), además de los casos ya conocidos para núcleos livianos [Fed69]. Las excitaciones típicas que conducen a estados intrusos corresponden a configuraciones de 1p-4h, 1p-2h, 2p-1h, y 4p-1h, en núcleos impares, y de 2p-4h, y 2p-2h, en núcleos par-par (Fig.1.3). La existencia de estados intrusos en núcleos impar-impar, su-

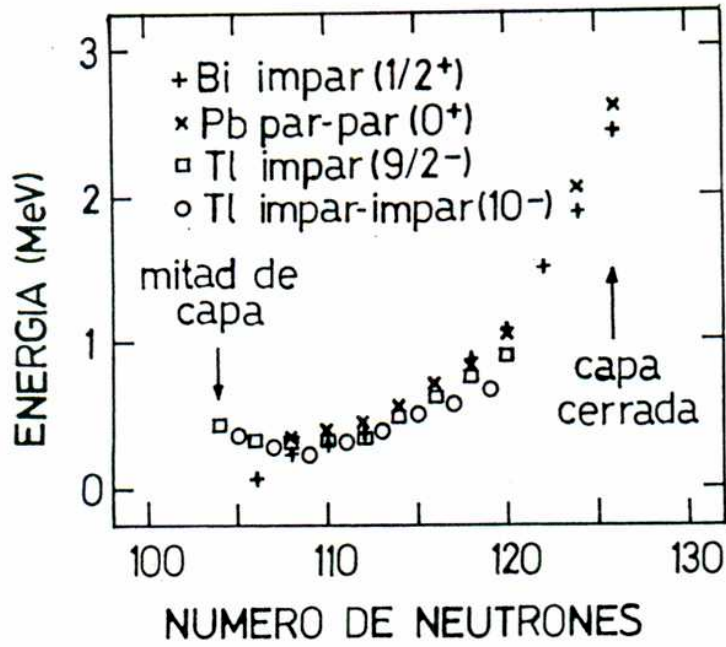


FIG.1.1. Energías de excitación de estados intrusos en la región $Z = 82$ (tomadas de [Hey88]). Para los estados 0^+ en el Pb se grafica la mitad de dicha energía de excitación.

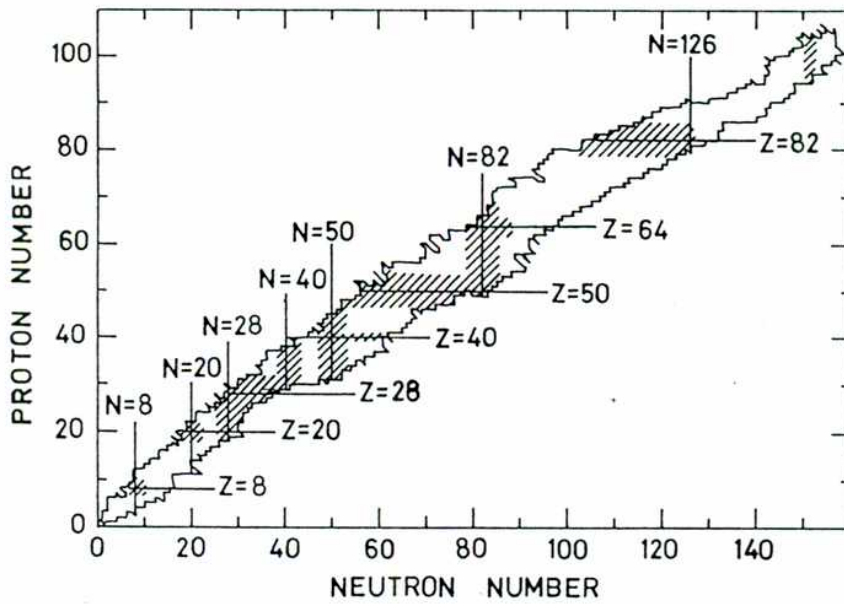


FIG.1.2. Regiones de la Carta de Nucleidos en que se han observado estados intrusos.

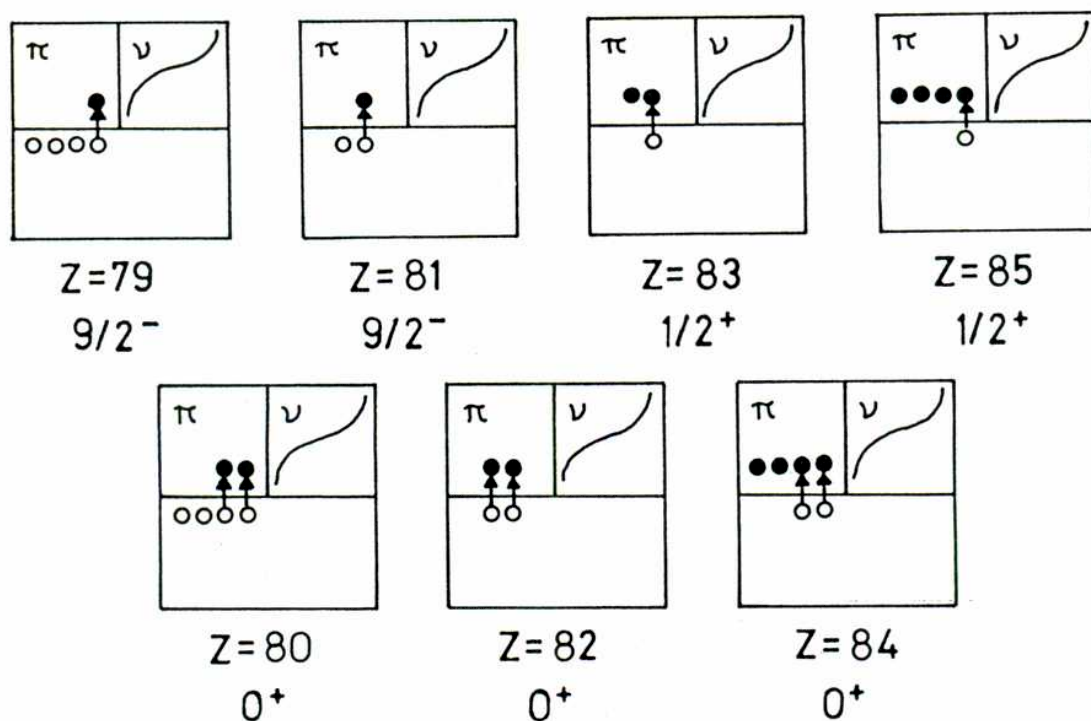


FIG.1.3. Representación esquemática de las excitaciones intrusas típicas [Are88a]. En cada caso se dan ejemplos de isótopos y del J^π del estado intruso en la región $Z = 82$. La excitación 4p-2h (Po), no observada experimentalmente, se incluye por completitud.

gerida hace una década por Kreiner et al. [Kre81], ya ha comenzado a ser extensamente investigada [Dup90].

Muchos autores atribuyen la baja energía de los estados intrusos a que en ellos el núcleo se deformaría, y de este modo la coexistencia recién mencionada se concibe como "coexistencia de forma", es decir, entre estados esféricos (de los nucleones de valencia) y estados deformados (intrusos) [Bro66, Bra72, Dup84, Hey85]. Otros autores, sin embargo, adscriben la disminución de energía a mecanismos tales como "vibraciones de pairing" [Blo70, Fly77], acoplamiento entre exci-

taciones esféricas partícula-agujero y vibraciones del carozo [Wen81], o polarización de protones y neutrones a orbitales compañeros de spin-órbita [Fed79]. Estos autores no consideran que "intruso" implique *necesariamente* "deformado". En el presente trabajo utilizaremos la expresión "estados intrusos" en este último sentido, debido a que no realizaremos hipótesis acerca de la forma de dichos estados nucleares. Por otra parte, las $B(E2)$ conocidas dentro de las bandas intrusas dan información acerca de la gran colectividad de estas transiciones, si bien la evidencia experimental acerca del carácter deformado de los estados correspondientes no es concluyente [Hey83].

La saga de los estados intrusos comenzó a principios de los años sesenta. Durante mucho tiempo el estado 0^+ a 6.06 MeV de energía de excitación en el ^{16}O constituyó un "misterio". Desde los importantes trabajos de Talmi y Unna [Tal60], Federman y Talmi [Fed65], Brown y Green [Bro66], y Ripka [Rip69], comprendimos que la componente principal de este estado es la estructura de $4p-4h$. El desarrollo de métodos experimentales de sofisticación creciente ha ampliado aceleradamente el panorama de la coexistencia a una gran variedad de excitaciones en unos doscientos núcleos. Así, el análisis de la estructura de los estados intrusos es motivo de gran interés en la actualidad (véase [Hey88, Sis88, Ver88, Dup90, Huy90, Kir90, Rik90] y referencias allí incluidas). Se han utilizado diversos modelos y aproximaciones en diferentes casos y regiones, incluyendo métodos semiempíricos [Blo70, Fly77] y cálculos de energía potencial total [Hey76], del modelo de acoplamiento débil entre cuartetos [Ari70], del modelo unificado [Bro77], de Hartree-Fock-Bogoliubov [Goo77, Kum85] y del modelo de bosones interactuantes [Rik88]. Puede hallarse un informe detallado de gran parte del panorama teórico y experimental en el trabajo de Heyde et al. [Hey83].

La descripción microscópica de estados intrusos en núcleos medios y pesados, basada en el modelo de capas, resulta

extremadamente complicada. Talmi ha hecho notar que los 12 neutrones de valencia del ^{112}Sn dan lugar a matrices Hamiltonianas cuyas dimensiones son del orden de 10^5 [Tal81]. Teniendo en cuenta que los estados intrusos en los isótopos pares del Sn corresponden a excitaciones de 2p-2h [Fie77, Fly77], resulta obvio que estos cálculos, aun cuando fuesen posibles, carecen de sentido (considérese la propagación de incluso pequeñas incertezas en los valores de los elementos de matriz de dos cuerpos). Debido a esto, los cálculos del modelo de capas se han restringido generalmente a núcleos livianos ($N, Z \leq 28$). En su versión tradicional, dichos cálculos reproducen correctamente tanto las energías como las propiedades electromagnéticas de los estados intrusos [Met81]. Cabe destacar que prácticamente el 100% de las funciones de onda de dichos estados corresponde a configuraciones p-h simples, del tipo $(j_1^m j_2^{-n})$ con $m, n = 1, 2$. Por otra parte, la versión de acoplamiento débil [Ari71] entre partículas y agujeros conduce a espectros muy similares a los obtenidos en el espacio de configuración completo [Joh78], aunque no se han calculado propiedades electromagnéticas. Esto sugiere que los estados intrusos pueden ser descriptos como estructuras $mp-nh$ en que los agujeros están *débilmente acoplados* al resto.

1.2. IDEAS BASICAS DEL PRESENTE TRABAJO

Consideremos, por razones de claridad, el clásico ejemplo de los isótopos pares del Sn. En estos núcleos, los estados intrusos se obtienen elevando dos protones del carozo doblemente mágico ($^{100}_{50}\text{Sn}$) a la capa de los neutrones de valencia. La interacción fuertemente atractiva entre protones y neutrones en la misma capa [Tal62] da lugar a estados intrusos $J^\pi = 0^+$ de muy baja energía. Es dicha interacción la que determina la *forma* de estos estados, ya que el resto de la interacción residual (entre los nucleones de valencia y

los dos agujeros en el carozo) es fundamentalmente monopolar.

Por otra parte, si consideramos que los dos agujeros de protones están débilmente acoplados al resto de los nucleones [Ari71], el Hamiltoniano total H será el de un sistema de dos componentes: uno constituido por el carozo doblemente mágico, los dos protones, y los neutrones de valencia (cuyo Hamiltoniano H_1 es, entonces, el que describe el espectro de bajas energías del ^{52}Te isótono), y otro constituido por los dos agujeros de protones (cuyo Hamiltoniano H_2 es la suma de las energías de agujero independiente relativas al carozo de ^{100}Sn más la interacción entre ambos agujeros). Los autovalores de H_1 y H_2 pueden obtenerse de los espectros experimentales del Te isótono y del $^{98}_{48}\text{Cd}$ respectivamente, y la base de acoplamiento débil está constituida por el producto de los estados correspondientes de dichos núcleos. Consideremos ahora

$$H = H_1 + H_2 + V_{12} \quad (1.1)$$

donde V_{12} incluye solamente la interacción de los agujeros de protones con los neutrones y protones de valencia. La energía del estado intruso puede calcularse, a primer orden, como

$$E = E_0 + \Delta E, \quad (1.2)$$

donde E_0 (la aproximación de orden cero) es una combinación lineal de energías de ligadura, y ΔE (la corrección de primer orden) es la interacción monopolar total entre los agujeros de protones y las partículas (protones y neutrones) de valencia. La corrección de segundo orden es despreciable. En el Cap.3 se muestra cómo ΔE puede obtenerse del experimento en forma consistente con el modelo, de modo que la expresión (1.2) no contenga parámetros libres.

En el Cap.2 se describe el modelo para la estructura de los estados intrusos. Las ideas que acabamos de exponer se

generalizan a series de isótopos (isótonos) con Z (N) próximo a números mágicos. El modelo es aplicable a las excitaciones intrusas típicas (1p-4h, 2p-4h, 1p-2h, 2p-2h, 2p-1h y 4p-1h) a lo largo de toda la Tabla Periódica. En la Sección 2.1 se deriva la expresión general para la energía de excitación de dichos estados; el Apéndice A contiene los detalles de la deducción, en el Apéndice B se presenta una expresión para estimar la corrección de segundo orden, y en el Apéndice C se discute la validez del esquema de acoplamiento débil. En la segunda Sección se analizan las probabilidades de transición. En la tercera, se discute la relación entre el presente modelo y otras descripciones de los estados intrusos; en el Apéndice D se demuestra que éstas se obtienen como casos particulares y/o aproximaciones del modelo aquí presentado.

El Cap.3 contiene la descripción del cálculo de ΔE y del método para obtener los elementos de matriz de la interacción monopolo-monopolo neutrón-protón en forma consistente con el modelo. Este método puede generalizarse para obtener a partir del experimento todos los elementos de matriz monopolares neutrón-protón en una región dada, lo que otorga al mismo un interés intrínseco debido a la utilidad de dichos elementos de matriz para la resolución de problemas tales como el seguimiento de los niveles de partícula independiente al variar la masa [Sor84] (de importancia para la predicción de regiones con características de semi-magicidad [Ver88]), la aparición de deformación nuclear [Cas85,Cas90], y la descripción del doble decaimiento β [Eng89].

En el Cap.4 se presentan los cálculos y se discuten los resultados obtenidos para las regiones $Z = 28, 40, 50, \text{ y } 82$, y $N = 82$.

El Cap.5 contiene las conclusiones y posibles extensiones de esta línea de investigación.

2. DESCRIPCION DE ESTADOS INTRUSOS EN UNA BASE DE ACOPLAMIENTO DEBIL

"I don't want to get into the details of residual interactions such as pairing and other couplings since they are rather private matters".

(A.Menchaca-Rocha,1990).

2.1. ENERGIAS DE EXCITACION

Por razones de simplicidad, restringiremos nuestra discusión a estados intrusos de protones. El caso de los neutrones es completamente simétrico (excepto la contribución coulombiana a la interacción entre partículas idénticas).

Los estados intrusos en un núcleo (Z,N) se obtienen elevando ΔZ protones del carozo doblemente mágico (Z_M, N_M) a las órbitas ocupadas por los neutrones de valencia (partículas o agujeros). Esto corresponde a excitaciones de $Z - Z_R$ partículas y $Z_M - Z_R$ agujeros de protones, donde

$$Z_R = \min\{Z_M, Z\} - \Delta Z, \quad (2.1)$$

como puede verse fácilmente [Are87].

Consideremos el núcleo $(Z_M + Z - Z_R, N)$, consistente en el carozo (Z_M, N_M) , $|N - N_M|$ neutrones (partículas o agujeros) y $Z - Z_R$ protones de valencia, y denotemos por H_1 su Hamiltoniano. Sea H_2 el Hamiltoniano de los agujeros de protones, i.e. la interacción entre ellos más las energías de agujero independiente relativas al carozo doblemente mágico. Los autova-

lores de H_2 pueden obtenerse del espectro del núcleo (Z_R, N_M) y la energía de ligadura del carozo. Consideremos el Hamiltoniano de acoplamiento débil [Ari71] dado por

$$H = H_1 + H_2 + V_{12}, \quad (2.2)$$

donde V_{12} incluye solamente la interacción de los $Z_M - Z_R$ agujeros de protones con los $Z - Z_R$ protones y $|N - N_M|$ neutrones de valencia. Designemos por $|\alpha_i J_i\rangle$ los autoestados de H_i con autovalores $E(\alpha_i J_i)$, donde J_i y α_i denotan, respectivamente, el momento angular y los restantes números cuánticos que caracterizan los autoestados ($i = 1, 2$). Los estados

$$|\alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2; J\rangle = \left[|\alpha_1 J_1\rangle \otimes |\alpha_2 J_2\rangle \right]^J \quad (2.3)$$

(donde los corchetes indican acoplamiento a momento angular J) constituyen una base de acoplamiento débil [Ari71] apropiada para describir los estados intrusos.

A orden cero, la energía de ligadura de dichos estados se calcula como

$$\begin{aligned} E_0(\alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2; J) &= E(\alpha_1 J_1) + E(\alpha_2 J_2) \\ &= E_B(Z_M + Z - Z_R, N; \alpha_1 J_1) \\ &\quad + E_B(Z_R, N_M; \alpha_2 J_2) - E_B(Z_M, N_M; \text{g.s.}), \end{aligned} \quad (2.4)$$

donde $E_B(Z, N; \alpha J)$ denota la energía de ligadura del núcleo (Z, N) en el estado $|\alpha J\rangle$. Nótese que si J_1 y J_2 son ambos distintos de cero, se obtienen multipletes degenerados en energía. En la Fig.2.1(a) se muestra la dependencia con N de E_0 para tres cadenas de isótopos en la región del plomo.

La corrección de primer orden a E_0 está dada por

$$\Delta E(\alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2; J) = \langle \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2; J | V_{12} | \alpha_1 J_1 \alpha_2 J_2; J \rangle. \quad (2.5)$$

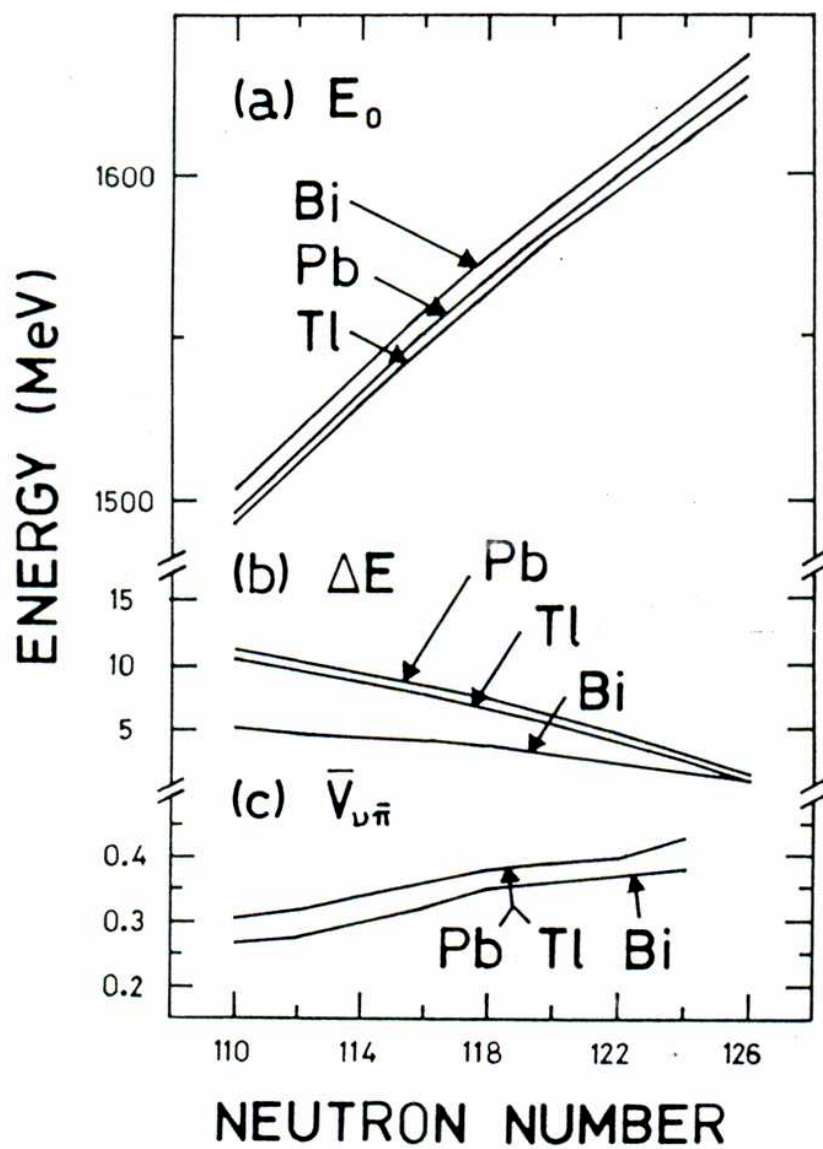


FIG.2.1.(a) Energía a orden cero, (b) corrección de primer orden (valor absoluto), y (c) interacción monopolar promedio neutrón-protón para los estados intrusos $|9/2^-_1 0^+_1; 9/2^->$, $|0^+_1 0^+_1; 0^+>$, y $|0^+_1 1/2^+_1; 1/2^+>$ en los isótopos del talio ($Z=81$), plomo ($Z=82$), y bismuto ($Z=83$), respectivamente, calculados con los parámetros de la Tabla 4.4 [Are88b].

El cálculo de ΔE resulta particularmente simple cuando J_1 y/o J_2 son cero, pues en este caso sólo contribuye la componente monopolar de V_{12} (ver Apéndice A). En contraste, E_0 puede contener importantes componentes de orden superior en la interacción, pero una de las virtudes de nuestro trabajo consiste en incorporarlas en energías de ligadura experimentales. Evidentemente, lejos de números mágicos la interacción cuadrupolar puede dominar la descripción. Sin embargo, todos los casos de interés se hallan en núcleos cuyo número de protones o neutrones es próximo a números mágicos [Hey83], de modo que las condiciones requeridas para calcular la corrección de primer orden se cumplen. Denotemos por $j_{\bar{\pi}}$, j_{π} y j_{ν} las órbitas ocupadas por los agujeros de protones, las partículas de protones y los neutrones de valencia, respectivamente. Entonces, si J_1 y/o J_2 son cero,

$$\Delta E = \sum_{j_{\bar{\pi}}} n_{\bar{\pi}} \left[\sum_{j_{\pi}} n_{\pi} \bar{V}(j_{\bar{\pi}}^{-1}; j_{\pi}) + \sum_{j_{\nu}} n_{\nu} \bar{V}(j_{\bar{\pi}}^{-1}; j_{\nu}) \right], \quad (2.6)$$

donde $n_{\bar{\pi}}$, n_{π} y n_{ν} son, respectivamente, los números de ocupación de las órbitas $j_{\bar{\pi}}$, j_{π} y j_{ν} , y $\bar{V}(j_{\bar{\pi}}^{-1}; j_{\pi(\nu)})$ es la componente monopolar de la interacción entre un agujero de protones en la órbita $j_{\bar{\pi}}$ y un protón (neutrón) en la órbita $j_{\pi(\nu)}$.

En el caso de estados intrusos de protones, nos interesa describir la sistemática para cadenas de isótopos, en cuyo caso $n_{\bar{\pi}}$ y n_{π} variarán poco con N en comparación con n_{ν} . Resulta entonces conveniente, utilizando la identidad [Sha59]

$$\bar{V}(j_{\bar{\pi}}^{-1}; j_{\pi(\nu)}) = -\bar{V}(j_{\bar{\pi}}; j_{\pi(\nu)}), \quad (2.7)$$

reescribir la Ec.(2.6) como

$$\Delta E = -(Z_M - Z_R) [(Z - Z_R) \bar{V}_{\bar{\pi}\bar{\pi}} + (N - N_M) \bar{V}_{\nu\bar{\pi}}], \quad (2.8)$$

donde

$$\bar{V}_{\pi\bar{\pi}} = \sum_{j_{\bar{\pi}}} \sum_{j_{\pi}} \frac{n_{\bar{\pi}} n_{\pi} \bar{V}(j_{\bar{\pi}}; j_{\pi})}{(Z_M - Z_R)(Z - Z_R)} \quad (2.9)$$

será aproximadamente independiente de N, en tanto

$$\bar{V}_{\nu\bar{\pi}} = \sum_{j_{\bar{\pi}}} \sum_{j_{\nu}} \frac{n_{\bar{\pi}} n_{\nu} \bar{V}(j_{\bar{\pi}}; j_{\nu})}{(Z_M - Z_R) |N - N_M|} \quad (2.10)$$

puede depender de N. Las diferencias en los $\bar{V}(j_{\bar{\pi}}; j_{\nu})$ para diferentes órbitas j_{ν} , ponderadas con las ocupaciones relativas $n_{\nu} / |N - N_M|$, son las responsables de esta dependencia. Sin embargo, es esperable que

$$\bar{V}_{\nu} = \sum_{j_{\bar{\pi}}} \frac{n_{\bar{\pi}} \bar{V}(j_{\bar{\pi}}; j_{\nu})}{Z_M - Z_R} \quad (2.11)$$

sea constante para una serie de isótopos. Más aún, se espera que sea el mismo para diferentes valores de Z, mientras Z_R no cambie, como ocurre, e.g., en los casos de estados intrusos del Tl ($1p-2h, J^{\pi}=9/2^{-}$) y el Pb ($2p-2h, J^{\pi}=0^{+}$).

En el Apéndice B se deriva una expresión para la corrección de segundo orden que permite estimar su valor sencillamente. Esta corrección aporta una contribución mínima a la energía de los estados intrusos, un par de órdenes de magnitud menor que la corrección de primer orden, de modo que el cálculo perturbativo a primer orden constituye una buena aproximación. En el Apéndice C se discute la validez del esquema de acoplamiento débil en relación a la base de estados (2.3), mostrándose que el modelo es en principio aplicable a núcleos medios y pesados.

La energía de excitación de los estados intrusos en el

núcleo (Z,N) puede entonces calcularse, según (2.4) y (2.8), como

$$\begin{aligned}
 E_x(\alpha_1 J_1, \alpha_2 J_2; J) = & E_B(Z, N; \text{g.s.}) - E_B(Z_M + Z - Z_R, N; \alpha_1 J_1) \\
 & + E_B(Z_M, N_M; \text{g.s.}) - E_B(Z_R, N_M; \alpha_2 J_2) \\
 & + (Z_M - Z_R) [(Z - Z_R) \bar{V}_{\pi\pi} + (N - N_M) \bar{V}_{\nu\pi}], \quad (2.12)
 \end{aligned}$$

para J_1 y/o J_2 iguales a cero. Esta condición se satisface para las excitaciones de interés (1p-4h, 2p-4h, 1p-2h, 2p-2h, 2p-1h, 4p-1h) cuando la senioridad generalizada de los estados $|\alpha_1 J_1\rangle$ y $|\alpha_2 J_2\rangle$ es mínima, lo cual corresponde generalmente a los estados fundamentales de los núcleos $(Z_M + Z - Z_R, N)$ y (Z_R, N_M) . En algunos casos, las configuraciones intrusas se observan altamente fragmentadas. Por ejemplo, la intensidad de la transición a estados 0^+ para los isótopos pares del Sn en la reacción $A-2\text{Cd}(^3\text{He}, n)$ presenta fragmentación significativa en un rango de varios MeV [Fie77]. Evidentemente, en estos casos las energías calculadas con la Ec.(2.12) no pueden compararse con las energías de excitación experimentales, puesto que cada estado 0^+ del Sn contendrá mezcla de configuraciones 2p-2h y 0p-0h. Sin embargo, es natural suponer que, en tales situaciones,

$$\langle 0^+ 0^+; 0^+ | 0^+ \rangle \simeq s_i, \quad (2.13)$$

donde $|0^+ 0^+; 0^+\rangle$ es el estado intruso definido por (2.3), $|0^+_i\rangle$ es el i -ésimo estado del espectro del núcleo producto (Sn), y s_i es el factor espectroscópico correspondiente en la reacción de transferencia de dos protones (normalizado en la unidad). De este modo, la energía de excitación (2.12) y las energías $E(0^+_i)$ de los estados del Sn están relacionadas por la expresión

$$\begin{aligned}
E_x(0_1^+ 0_1^+; 0^+) &= \sum_i s_i E(0_i^+) \\
&= \bar{E}(0^+)
\end{aligned}
\tag{2.14}$$

donde $\bar{E}(0^+)$ es el centroide para la reacción mencionada. De este modo, aún en estos casos la Ec.(2.12) es útil para predecir la localización de dichos centroides. En una gran variedad de excitaciones, sin embargo, consideraciones energéticas y/o la conservación de momento angular o paridad resultan en una alta selectividad; de este modo, a menudo un solo estado con J^π dado agota la totalidad de la intensidad. Si k denota dicho estado, puede ponerse $s_i = \delta_{ik}$, y así la energía calculada con la expresión (2.12) debe compararse con la correspondiente energía de excitación experimental.

2.2 PROBABILIDADES DE TRANSICION

Consideremos los estados intrusos de dos protones en núcleos par-par. El estado cabeza de banda tiene $J^\pi = 0^+$ y se obtiene del acoplamiento de los estados fundamentales de los Hamiltonianos H_1 y H_2 [Ec.(2.2)], de modo que puede escribirse como

$$|0_1^+(\text{intr.})\rangle = |0_1^+(1) 0_1^+(2); 0^+\rangle. \tag{2.15}$$

El primer excitado del sistema de dos componentes puede expresarse aproximadamente como una combinación lineal de los estados $|2_1^+(1) 0_1^+(2); 2^+\rangle$ y $|0_1^+(1) 2_1^+(2); 2^+\rangle$ [Hey86]:

$$|2_1^+(\text{intr.})\rangle = \cos\alpha |2_1^+(1) 0_1^+(2); 2^+\rangle + \sin\alpha |0_1^+(1) 2_1^+(2); 2^+\rangle, \tag{2.16}$$

donde $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, en tanto la combinación

$$|2_2^+(\text{intr.})\rangle = \sin\alpha |2_1^+(1) 0_1^+(2); 2^+\rangle - \cos\alpha |0_1^+(1) 2_1^+(2); 2^+\rangle \quad (2.17)$$

se encuentra a mayor energía. Nos interesa analizar las probabilidades de transición $E2:2_i^+ \rightarrow 0_1^+$ dentro de la banda intrusa ($i = 1,2$), que denominaremos $B_i(\text{intr.})$, definidas por

$$\begin{aligned} B_i(\text{intr.}) &= B[E2:2_i^+(\text{intr.}) \rightarrow 0_1^+(\text{intr.})] \\ &= \frac{1}{5} |\langle 2_i^+(\text{intr.}) \| T \| 0_1^+(\text{intr.}) \rangle|^2, \quad i = 1,2, \end{aligned} \quad (2.18)$$

donde T es el operador cuadrupolar eléctrico. Por tratarse de un operador de un cuerpo, puede descomponerse en una suma de dos operadores, $T(1)$ y $T(2)$, donde $T(\rho)$ actúa sobre el subsistema ρ ($\rho = 1,2$). Insertando (2.16) en (2.18), y usando herramientas del álgebra tensorial, puede demostrarse que

$$\begin{aligned} B_i(\text{intr.}) &= \frac{1}{5} |\cos\alpha \langle 2_1^+(1) \| T(1) \| 0_1^+(1) \rangle \\ &\quad + \sin\alpha \langle 2_1^+(2) \| T(2) \| 0_1^+(2) \rangle|^2. \end{aligned} \quad (2.19)$$

Utilizando la definición de las probabilidades de transición de ambos subsistemas,

$$\begin{aligned} B(\rho) &= B[E2:2_1^+(\rho) \rightarrow 0_1^+(\rho)] \\ &= \frac{1}{5} |\langle 2_1^+(\rho) \| T(\rho) \| 0_1^+(\rho) \rangle|^2, \quad \rho = 1,2, \end{aligned} \quad (2.20)$$

podemos reescribir la Ec.(2.19) como

$$B_i(\text{intr.}) = [\cos\alpha B(1)^{1/2} + \sin\alpha B(2)^{1/2}]^2. \quad (2.21)$$

De un modo completamente similar se puede obtener la probabilidad de transición desde el estado definido en la Ec.(2.17):

$$B_2(\text{intr.}) = [\sin\alpha B(1)^{1/2} - \cos\alpha B(2)^{1/2}]^2. \quad (2.22)$$

Las probabilidades de transición $B_1(\text{intr.})$ y $B_2(\text{intr.})$ cumplen la *regla de suma*

$$B_1(\text{intr.}) + B_2(\text{intr.}) = B(1) + B(2). \quad (2.23)$$

En la Fig.2.2 se representan las probabilidades de transición relativas $B_i(\text{intr.})/B(1)$ como función de α para diversos valores de $r = B(1)/B(2)$. Obsérvese que el sistema 1 contiene protones y neutrones en la misma capa, de modo que su energía de excitación $E[2_1^+(1)]$ será en general menor que la energía $E[2_1^+(2)]$ del sistema 2 (que sólo contiene partículas idénticas). Por lo tanto, $\cos\alpha \geq 1/\sqrt{2}$, y entonces

$$B_1(\text{intr.}) > B_2(\text{intr.}) \quad (2.24)$$

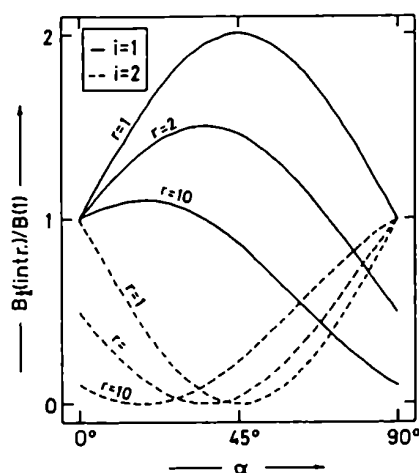


FIG.2.2. Probabilidades de transición relativas $B_i(\text{intr.})/B(1)$ en función de α para diversos valores del cociente $r = B(1)/B(2)$.

(ver Fig.2.2). Esta es una propiedad general de los sistemas de dos componentes, ya señalada por Heyde y Sau [Hey86]. Estos autores han mostrado que la energía $E[2_1^+(1)]$ puede calcularse aproximadamente como

$$E[2_1^+(1)] = \varepsilon - 2 d_{\pi\nu}, \quad (2.25)$$

donde ε es la energía de excitación del sistema de partículas idénticas (protones o neutrones), que puede considerarse constante para una dada región, y

$$d_{\pi\nu} = \frac{\kappa}{5} F_{\pi\nu} [N_{\pi} N_{\nu} (1 - N_{\pi}/\Omega_{\pi}) (1 - N_{\nu}/\Omega_{\nu})]^{1/2}. \quad (2.26)$$

En esta expresión, κ es la intensidad de la fuerza cuadrupolar, N_{π} (N_{ν}) es el número de protones (neutrones) de valencia, y Ω_{π} (Ω_{ν}) es el tamaño de la capa de valencia correspondiente, en tanto

$$F_{\pi\nu} = [(\Omega_{\pi} - 2)(\Omega_{\nu} - 2)]^{-1/2} \langle j_{\pi} \| Q_{\pi} \| j_{\pi} \rangle \langle j_{\nu} \| Q_{\nu} \| j_{\nu} \rangle \quad (2.27)$$

es una constante para j_{π} y j_{ν} fijos ($j_{\rho} = (\Omega_{\rho} - 1)/2$, $\rho = 1, 2$). Para derivar estas ecuaciones, los autores suponen que los núcleos con protones y neutrones de valencia pueden considerarse sistemas de dos componentes fuertemente acoplados por la interacción cuadrupolar. El estado que denominamos $|2_1^+(1)\rangle$ corresponde a la mezcla coherente

$$|2_1^+(1)\rangle = [|2_1^+(\pi) 0_1^+(\nu); 2^+\rangle + |0_1^+(\pi) 2_1^+(\nu); 2^+\rangle] / \sqrt{2}, \quad (2.28)$$

donde π y ν denotan los sistemas de protones y neutrones respectivamente. Poniendo $E[2_1^+(2)] = \varepsilon$, puesto que el subsistema 2 contiene sólo partículas idénticas (agujeros de protones), los coeficientes de las mezclas de configuraciones en

las Ecs.(2.16) y (2.17) pueden obtenerse diagonalizando el Hamiltoniano

$$H(2^+) = \begin{bmatrix} \varepsilon - 2 d_{\pi\nu} & V_{12} \\ V_{12} & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

cuyos autovalores son

$$\left. \begin{array}{l} E[2_1(\text{intr.})] \\ E[2_2(\text{intr.})] \end{array} \right\} = \varepsilon - d_{\pi\nu} \mp (d_{\pi\nu}^2 + V_{12}^2)^{1/2}. \quad (2.30)$$

Con una fuerza cuadrupolo-cuadrupolo, y utilizando las fórmulas de reducción del álgebra de Racah [Sha59], se obtiene para el elemento de matriz de la mezcla

$$V_{12} = \sqrt{2} (d_{\pi\pi}^- + d_{\pi\nu}^-), \quad (2.31)$$

donde $d_{\pi\pi}^-$ y $d_{\pi\nu}^-$ se definen como en la Ec.(2.26).

En general [Sha59]

$$\begin{aligned} \langle j \| Q \| j \rangle &= (5/4\pi)^{1/2} R_j^2 \frac{(2j+1)[3/4 - j(j+1)]}{[(2j-1)j(2j+1)(j+1)(2j+3)]^{1/2}} \\ &\simeq -(5j/8\pi)^{1/2} R_j^2, \quad \text{para } j \gg 1, \end{aligned} \quad (2.32)$$

siendo R_j^2 el radio cuadrático medio para la órbita j (en unidades de $\hbar/m\omega \approx A^{1/3} \text{fm}^2$). En esta misma aproximación resulta así

$$F_{\pi\nu} \simeq F_{\pi\nu}^- \simeq F_{\pi\pi}^-, \quad (2.33)$$

y así podemos calcular, diagonalizando (2.29) con (2.30) y (2.31),

$$\tan\alpha = -t + (1+t^2)^{1/2}, \quad (2.34)$$

donde

$$t = \left| d_{\pi\nu} / V_{12} \right|$$

$$= \left\{ \frac{N_{\pi}(1-N_{\pi}/\Omega_{\pi})N_{\nu}(1-N_{\nu}/\Omega_{\nu})}{2N_{\pi}(1-N_{\pi}/\Omega_{\pi})[(N_{\nu}(1-N_{\nu}/\Omega_{\nu}))^{1/2} \pm (N_{\pi}(1-N_{\pi}/\Omega_{\pi}))^{1/2}]^2} \right\}^{1/2} \quad (2.35)$$

El signo superior (inferior) en el denominador corresponde al caso de partículas (agujeros) de neutrones. Con esta expresión se calculó α para las excitaciones de 2p-4h, 2p-2h, y 4p-2h, en la región $Z = 50$, según se muestra en la Fig.2.3.

De este modo, conocidas las probabilidades de transición $B(1)$ y $B(2)$, puede calcularse B_1 (intr.) a partir de las Ecs. (2.21), (2.34) y (2.35). Es interesante observar que en los extremos de capa es $\alpha=45^\circ$ (mezcla 50%-50%), reflejando la propiedad general de los sistemas de dos componentes (en este caso, protones y agujeros de protones) con energías de excitación similares. Por otra parte, a medida que nos alejamos de capa cerrada, la mezcla disminuye, pero nunca por debajo de 75%-25%.

2.3. RELACION CON OTRAS DESCRIPCIONES

La descripción de las energías de excitación (Secc.2.1) presenta ciertas analogías con el modelo de cuartetos [Ari70], en el cual las excitaciones de dos protones y dos neutrones en núcleos α -mágicos se describen como el acoplamiento entre dos subsistemas débilmente interactuantes y con fuerte ligadura interna. El hecho de que la interacción

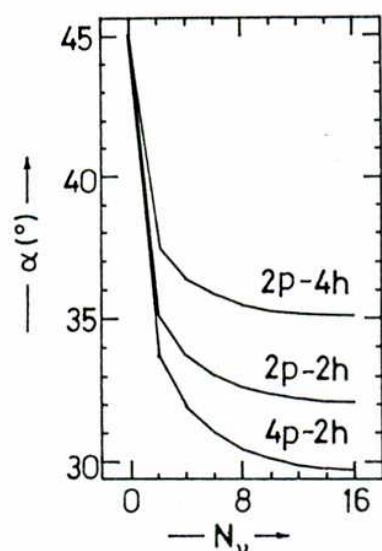


FIG.2.3. Angulo de la mezcla α (en grados) del estado definido en Ec.(2.16) como función del número de neutrones de valencia para diversas excitaciones intrusas en la región del Sn, calculadas con las Ecs.(2.34) y (2.35). Sólo se presentan los resultados hasta la mitad de la capa de valencia de neutrones (la función es simétrica alrededor de $N_v = \Omega_v/2$).

cuarteto-cuarteto sea proporcional al número de agujeros [Ari71] puede considerarse un reflejo de la naturaleza monopolar de la fuerza entre ambos subsistemas. El modelo aquí presentado unifica diferentes descripciones utilizadas en la literatura para tratar estados intrusos $2p-2h 0^+$ en núcleos par-par, también conocidas como "vibraciones de pairing" (PV). La expresión utilizada por Blomqvist para evaluar la energía de excitación de las PV en el ^{208}Pb [Blo70], inspirada a su vez en [Zam65], se obtiene de (2.12) como el caso particular para núcleos doblemente mágicos. Una extensión del mismo método fue posteriormente aplicada por Flynn y Kunz a

los isótopos pares del Sn [Fly77]. El impactante contraste entre los pobres resultados obtenidos en este caso (a pesar del uso de sobreestimaciones de $\bar{V}_{n\pi}$ [Hey83]) y la precisión de los resultados para el ^{208}Pb puede comprenderse en términos de nuestra descripción. La expresión utilizada por Flynn y Kunz para los cálculos en la región del estaño se obtiene como aproximación, según nuestro modelo, en el límite del acoplamiento débil de protones y neutrones en una misma capa (cf. Apéndice D). Puesto que ésta no es una buena aproximación lejos de núcleos doblemente mágicos [Ari71], son esperables pobres resultados cerca de la mitad de capa de los neutrones de valencia. Por otra parte, ninguna consideración concerniente a las propiedades electromagnéticas de los estados intrusos puede desprenderse de estas descripciones.

Más recientemente, la energía de excitación de las PV de protones en los isótopos livianos del Pb se estimó semiempíricamente como suma de las energías de los estados intrusos $9/2^-$ y $1/2^+$ en los isótonos vecinos Tl y Bi, respectivamente [Dup84]. Esta relación puede derivarse de las mismas ecuaciones desarrolladas en el Apéndice D. Por otra parte, la aplicabilidad misma del método es incierta en el caso de existir fragmentación en las configuraciones intrusas en los núcleos vecinos.

Por último, la hipótesis de acoplamiento débil ha sido utilizada recientemente para describir las PV con un tratamiento semejante, en algunos aspectos, al aquí presentado, ya que tiene en cuenta explícitamente la componente monopolar de la fuerza nuclear y se incluyen otros efectos en energías de ligadura experimentales [Hey88]. Sin embargo, la componente cuadrupolo-cuadrupolo de la interacción neutrón-protón debe calcularse explícitamente (utilizando funciones de onda SU(3) para los estados 0^+).

3. CALCULO DE LA CORRECCION DE PRIMER ORDEN

"An important interaction in the many-body problem is that between the particles and the physicists who are trying to solve the problem".
(H.J.Lipkin,1959).

3.1. CALCULO DE $\bar{V}_{\pi\pi}$

En principio, el cálculo de la interacción monopolar promedio protón-protón ($\bar{V}_{\pi\pi}$) definida por la Ec.(2.9) requiere conocer los números de ocupación de las órbitas de protones y agujeros de protones, así como también todos los elementos de matriz monopolaes involucrados. Sin embargo, la sistemática conocida de estos elementos de matriz permite simplificar dicho cálculo. En primer lugar, notemos que los monopolos de la interacción protón-protón pueden descomponerse como

$$\bar{V}(j_{\pi}^-; j_{\pi}) = \bar{V}_{T=1}(j_{\pi}^-; j_{\pi}) + \bar{V}_C(j_{\pi}^-; j_{\pi}) , \quad (3.1)$$

donde $V_{T=1}$ es la componente isovectorial de la interacción nuclear, y V_C es la interacción coulombiana. Ahora bien, el monopolo de la interacción isovectorial para partículas en órbitas distintas es pequeño y repulsivo [Tal62], del orden de -150 keV [Sch76,Dae83]. Por otra parte, también la contribución coulombiana es aproximadamente independiente de las órbitas, del orden de -250 keV [Fly77,Wen81], de modo que

$\bar{V}(j_{\bar{\pi}}; j_{\pi})$ no varía sensiblemente con $j_{\bar{\pi}}$ y j_{π} , y por tanto, según (2.9),

$$\bar{V}_{\pi\bar{\pi}} \simeq \text{constante}, \quad (3.2)$$

y del orden de -400 keV. En ciertos casos, las energías de los estados $|j_{\bar{\pi}}^{-1} j_{\pi}; J\rangle$ en núcleos doblemente mágicos se conocen para todos los valores de J , de donde se puede obtener $\bar{V}(j_{\bar{\pi}}; j_{\pi})$ restando, de la energía a orden cero, el promedio ponderado (con factores $2J+1$) de las energías de excitación de los estados del multiplete. En virtud de (3.2), puede tomarse $\bar{V}_{\pi\bar{\pi}} = \bar{V}(j_{\bar{\pi}}; j_{\pi})$ para todos los cálculos en la región correspondiente.

3.2. CALCULO DE $\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}$

La Ec.(2.10) permite calcular la interacción monopolar promedio neutrón-protón ($\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}$) siempre que se conozcan los números de ocupación de las órbitas de neutrones y agujeros de protones, y los correspondientes monopolos $\bar{V}(j_{\bar{\pi}}; j_{\nu})$. En este caso, una simplificación comparable a la desarrollada en el apartado anterior es impracticable. Los monopolos de la interacción neutrón-protón presentan una mayor dependencia con la órbita, como resulta evidente del hecho de que son esencialmente estos elementos de matriz quienes dictan los corrimientos de los niveles de partícula independiente provocando inclusive la aparición y desaparición de *gaps* entre capas [Sor84, Cas85]. No obstante, sustituyendo (2.11) en (2.10) resulta

$$\bar{V}_{\nu\bar{\pi}} = \sum_{j_{\nu}} \frac{n_{\nu}}{|N-N_M|} \bar{V}_{\nu} , \quad (3.3)$$

donde, según se señaló en la Secc.2.1, $\bar{V}_{\nu} = \bar{V}_{\nu}(Z_R)$ será aproximadamente constante para cada Z_R e independiente de Z . Esto reduce la cantidad de parámetros a determinar.

El cálculo exacto de los números de ocupación implicaría, en principio, la diagonalización completa del Hamiltoniano (2.2). Como hemos señalado en la Secc.1.1, esto carece de sentido. Por otra parte, la información experimental acerca de los n_{ν} es escasa. Si a esto sumamos el hecho de que los \bar{V}_{ν} son desconocidos, vemos que el cálculo de $\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}$ plantea un interesante desafío.

3.2.1. Dependencia de $\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}$ con la forma de la función de onda.

Para \bar{V}_{ν} fijos, $\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}$ depende de la función de onda (2.3) a través de los números de ocupación. Poniendo

$$\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}(\{n_{\nu}\}) = \frac{1}{\Delta N} \sum_{j_{\nu}} n_{\nu} \bar{V}_{\nu} , \quad (3.4)$$

nos interesa estudiar el cambio en $\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}$ al variar los n_{ν} de modo tal que

$$\Delta N \equiv |N-N_M| = \sum_{j_{\nu}} n_{\nu} \quad (3.5)$$

permanezca constante. A primer orden en δn_{ν} ,

$$\begin{aligned}\delta\bar{V}_{\nu\bar{\pi}} &\equiv \bar{V}_{\nu\bar{\pi}}(\{n_\nu + \delta n_\nu\}) - \bar{V}_{\nu\bar{\pi}}(\{n_\nu\}) \\ &= \frac{1}{\Delta N} \sum_{j_\nu} \bar{V}_{j_\nu} \delta n_{j_\nu} .\end{aligned}\quad (3.6)$$

La condición de vínculo (3.5) nos permite obtener uno de los números de ocupación, digamos n_ρ , en función de los demás. Es fácil ver que

$$\delta\bar{V}_{\nu\bar{\pi}} = \frac{1}{\Delta N} \sum_{j_\nu} (\bar{V}_{j_\nu} - \bar{V}_\rho) \delta n_{j_\nu} \quad (3.7)$$

para cualquier ρ . Por otra parte, sabemos que $\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}$ es, por definición, un promedio ponderado de los \bar{V}_{j_ν} y que éstos, si bien varían con la órbita, tienen el mismo signo (son atractivos [Tal62]) y del mismo orden de magnitud (alrededor de 300 keV para núcleos medios y pesados [Sch76,Dae83]), de modo que no difieren sensiblemente de $\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}$. Si elegimos ρ de tal modo que minimice la diferencia entre \bar{V}_ρ y $\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}(\{n_\nu\})$, resulta

$$\begin{aligned}\delta\bar{V}_{\nu\bar{\pi}} &\simeq \frac{1}{\Delta N} \sum_{j_\nu} [\bar{V}_{j_\nu} - \bar{V}_{\nu\bar{\pi}}(\{n_\nu\})] \delta n_{j_\nu} \\ &= \delta \left[\frac{1}{\Delta N} \sum_{j_\nu} n_{j_\nu} \bar{V}_{j_\nu} - \bar{V}_{\nu\bar{\pi}}(\{n_\nu\}) \right] = 0 ,\end{aligned}\quad (3.8)$$

en virtud de (3.4). Por lo tanto, podemos decir que $\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}$ no depende fuertemente de la forma de la función de onda.

A modo de ilustración, hemos realizado el cálculo de $\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}$ para las regiones del Sn y del Pb con dos funciones de onda sensiblemente diferentes: una obtenida en un cálculo de BCS con interacción de *pairing*, y la otra *sin interacción residual*, donde las partículas se ubican en las órbitas más bajas compatibles con el principio de exclusión de Pauli (superficie de Fermi definida [Rin80]). Los resultados se muestran en la

Fig.3.1. La coincidencia es notoria.

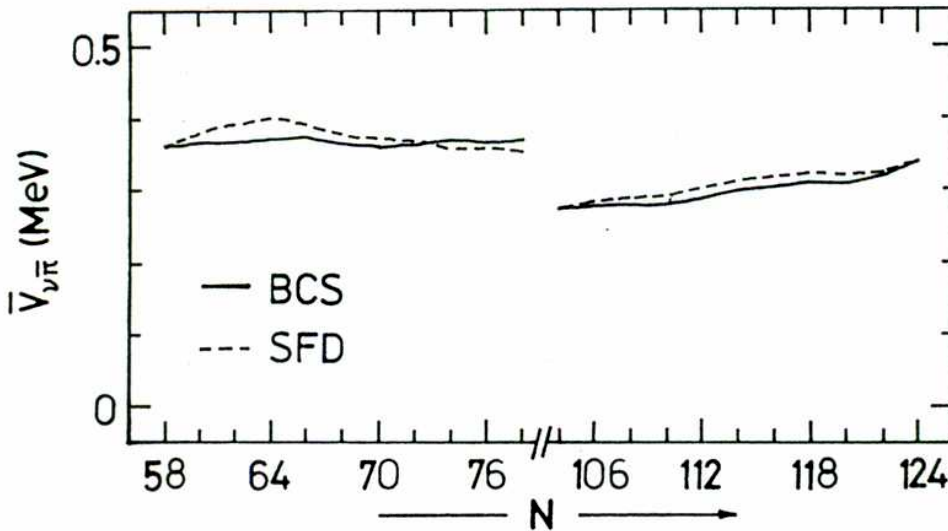


FIG.3.1. Comparación entre el cálculo de $\bar{V}_{\nu\pi}$ usando una función de onda de BCS y una con superficie de Fermi definida (SFD) [Are86b], para las regiones del Sn y del Pb.

3.2.2. Determinación de los \bar{V}_{ν} consistente con el modelo

La corrección de primer orden (ΔE) es muy sensible a pequeñas variaciones en $\bar{V}_{\nu\pi}$. En efecto, según se desprende de la Ec.(2.8), $\bar{V}_{\nu\pi}$ puede aparecer multiplicada por factores del orden de 100 para excitaciones de 1p-4h o 2p-4h cerca de mitad de capa de los neutrones de valencia, por ejemplo. Esto

subraya la necesidad de una alta precisión en los valores de \bar{V}_ν , puesto que (según señaláramos en la Sección anterior) el valor de $\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}$ no puede depender esencialmente de los números de ocupación.

Es posible diseñar un método, consistente con el modelo, para la determinación de los \bar{V}_ν . Si requerimos que los estados *fundamentales* ($\Delta Z = 0$) de los núcleos con $Z = Z_R$ también sean descritos por la Ec.(2.12), obtenemos

$$(Z_M - Z_R) \sum_{j_\nu} n_\nu \bar{V}_\nu = E_B(Z_M, N; \text{g.s.}) - E_B(Z_R, N; \text{g.s.}) \\ + E_B(Z_R, N_M; \text{g.s.}) - E_B(Z_M, N_M; \text{g.s.}). \quad (3.9)$$

Para un dado valor de Z_R , los \bar{V}_ν se pueden determinar de modo que optimicen el ajuste de la Ec.(3.9) para distintos valores de N. La dependencia con N de ΔE en la Ec.(2.8) y de $\bar{V}_{\nu\bar{\pi}}$ en la Ec.(2.10), resultante de la determinación de los \bar{V}_ν con este método para la región del Pb, se muestra en las Figs.2.1 (b) y (c) respectivamente.

Es oportuno señalar que las interacciones promedio \bar{V}_ν no son parámetros libres para el cálculo de las energías de los estados intrusos. Por ejemplo, los valores utilizados para calcular las excitaciones de 1p-4h y 2p-4h para los isótopos del Au y el Hg, respectivamente ($Z_R = 78$ en ambos casos) se obtienen ajustando a través de la Ec.(3.9) los estados *fundamentales* de los isótopos del Pt ($Z = Z_R$).

3.3. DETERMINACION DE LOS MONOPOLOS DE LA INTERACCION NEUTRON-PROTON

El método descrito en la Sección anterior permite determinar con precisión las interacciones promedio \bar{V}_ν involucradas en el cálculo de energías de excitación de estados in-

trusos. Sin embargo, sus alcances van más allá de esto. En primer lugar notemos que la restricción de la Ec.(3.9) a los estados fundamentales excede los requerimientos de la aproximación de senioridad mínima. De hecho, todos los estados de cuasipartícula independiente en núcleos con Z impar y N par satisfacen esta condición. Por otra parte, si bien los estados intrusos de protones se observan generalmente en núcleos con N par [Hey83], también los estados de cuasipartícula independiente en núcleos con Z par y N impar satisfacen la restricción antes mencionada. Por último, observemos que para núcleos con $Z_R = Z_M - 1$, \bar{V}_ν coincide con un elemento de matriz monopolar neutrón-protón, como se desprende de la definición (2.11). Esto sugiere la posibilidad de generalizar el método de modo que permita determinar no ya las interacciones promedio \bar{V}_ν , sino los elementos de matriz mismos que entran en su definición. Si bien esto implica un número mayor de parámetros, la generalización mencionada aumenta considerablemente el número de datos experimentales utilizables, de modo que la calidad del ajuste no se ve perjudicada.

3.3.1. Motivaciones

Es obvio que tal extensión del método no es un requisito indispensable para el estudio de la estructura de los estados intrusos. Si bien ambas cuestiones están íntimamente vinculadas entre sí debido al rol asignado (por éste y otros modelos [Hey85,Dob88]) a la interacción monopolar neutrón-protón, el conocimiento de las interacciones promedio \bar{V}_ν es suficiente. La motivación proviene además de otras áreas de la física nuclear, algunas de ellas inclusive alejadas de nuestro objeto de investigación. La componente monopolar de la interacción neutrón-protón es objeto de un interés creciente en los últimos años a causa de su papel crucial en fenómenos diversos tales como la aparición de colectividad y deformación [Cas85,

Cas90], la variación de los niveles de partícula independiente con la masa [Sor84] y el doble decaimiento β . En particular, los elementos de matriz nucleares apropiados para describir este modo de decaimiento dependen fuertemente de algunos de estos monopolos [Eng89], los cuales intervienen así en el cálculo de cotas para la masa del neutrino (de importancia en problemas cosmológicos [Dav78]).

La componente cuadrupolar de la interacción neutrón-protón ocupó durante las últimas décadas el centro de la escena en la descripción de la deformación nuclear [War88], y fue naturalmente incorporada en la sistemática de propiedades nucleares basada en el esquema $N_\pi N_\nu$ de Casten [Cas85]. En este sentido puede comprenderse el valor "copernicano" de la reciente afirmación de Dobaczewski según la cual el hecho de que un núcleo sea deformado o esférico depende del interjuego de las componentes monopolar y cuadrupolar de la fuerza nuclear [Dob88]. Desde esta perspectiva, el estudio de los monopolos de la interacción neutrón-protón se relaciona *directamente* con el problema de la deformación.

Conviene subrayar el hecho de que la componente monopolar de la fuerza nuclear a la cual nos referimos *no coincide* con el parámetro $l = 0$ del usual desarrollo multipolar de la interacción neutrón-protón [Rin80]

$$V_{\nu\pi} = \sum_{\ell} \chi_{\ell} Q_{\ell}^{(\pi)} \cdot Q_{\ell}^{(\nu)}, \quad (3.10)$$

puesto que su dependencia con la órbita no está incluida allí, siendo por tanto insensible a los detalles de la estructura nuclear. De hecho, su valor medio en el estado fundamental (de senioridad mínima) está dado simplemente por

$$\langle g.s. | \chi_0 Q_0^{(\pi)} \cdot Q_0^{(\nu)} | g.s. \rangle = \chi_0 N_\pi N_\nu, \quad (3.11)$$

donde N_π y N_ν son los números de protones y neutrones de va-

lencia respectivamente. En relación a esto, se ha observado [Cas90] que la variación del valor medio de la interacción total neutrón-protón (de la cual el miembro derecho de la Ec. (3.9) constituye una estimación) como función del producto $N_{\pi} N_{\nu}$ es muy simple: tiene un comportamiento lineal en el origen, tornándose ligeramente "saturado" para valores grandes de $N_{\pi} N_{\nu}$ (i.e., cerca de la mitad de capa). La parte lineal puede adscribirse a la componente monopolar de la interacción, como sugiere la Ec.(3.11). En un trabajo reciente, Zhang et al. describieron esta "saturación" en términos de la fuerza cuadrupolar solamente [Zha89]. Esta componente tiene la conocida propiedad de dar elementos de matriz en el esquema de senioridad ($\nu = 2$) que "saturan" a mitad de capa [Sha59]. Sin embargo, hemos mostrado [Are90] que también la componente monopolar es necesaria para explicar correctamente esta saturación, siempre que se tenga en cuenta la dependencia de los elementos de matriz con la órbita, ya que esta dependencia influye en la concavidad de la curva (Fig.3.2).

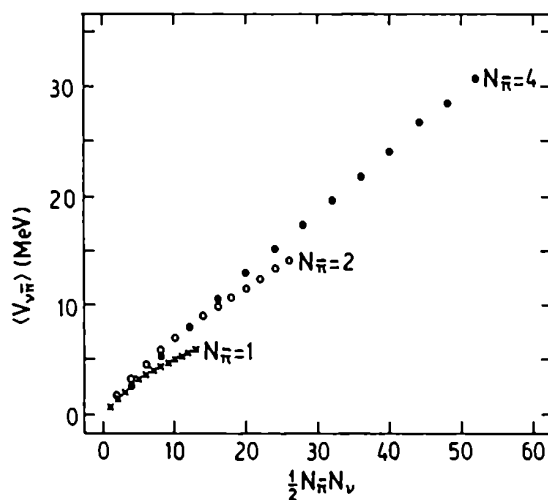


FIG.3.2. Interacción monopolar total neutrón-protón (en MeV) para el estado fundamental de núcleos en la región del plomo, en función del producto entre el número de agujeros de protones (N_{π}) y el número de pares de neutrones de valencia ($N_{\nu}/2$) [Are90].

3.3.2. Antecedentes e ideas básicas del método

Gran parte de lo que hoy en día se conoce acerca de la interacción efectiva entre nucleones no proviene de fuerzas realísticas (derivadas de la interacción nucleón-nucleón "desnuda") sino de análisis fenomenológicos apropiados. Ejemplos conocidos son la interacción cuadrupolo-cuadrupolo entre neutrones y protones y la interacción de *pairing* entre nucleones idénticos [Bes69]. Importante información sobre la intensidad de estas dos componentes de la fuerza nuclear efectiva proviene de análisis globales de la sistemática nuclear. Sin embargo, no existe un análisis detallado correspondiente para la fuerza monopolar entre neutrones y protones. El estudio de esta fuerza es dificultoso debido a que sus efectos no se manifiestan directamente en núcleos individuales en términos de simples observables sino que se hacen evidentes en los cambios de estructura a lo largo de grandes regiones [War88].

Consideremos un núcleo semi-mágico con solamente neutrones de valencia. Como es bien sabido, la fuerza entre nucleones idénticos está dominada por su componente de *pairing*, que favorece formas esféricas y sistemas vibracionales. El estado fundamental de tal sistema puede expresarse como un estado de senioridad generalizada cero. ¿Qué sucede al agregar protones (o agujeros de protones) a este núcleo semi-mágico? La interacción neutrón-protón está dominada por su componente cuadrupolo-cuadrupolo, que tiende a inducir correlaciones cuadrupolares y, por lo tanto, a destruir la estructura de senioridad generalizada cero. Pero la intensidad del cuadrupolo neutrón-protón es mucho más débil que la del apareamiento entre nucleones idénticos, de modo que deben agregarse varios protones antes que la estructura del condensado de neutrones se destruya. Típicamente, el agregado de uno o dos protones no es suficiente para ello. Existe buena evidencia experimental (por ejemplo, en los isótopos pares pesados del

Hg) de que tales sistemas tienen aún predominantemente un carácter vibracional, y que los estados más bajos conservan la simple estructura de acoplamiento débil.

En cuanto a la cuestión de hasta qué punto los efectos de la interacción cuadrupolar neutrón-protón son importantes como para que las componentes de senioridad generalizada más alta se mezclen con los estados de menor energía, el cociente entre las contribuciones energéticas provenientes de las interacciones de *pairing* y cuadrupolar neutrón-protón proporciona una estimación útil [Fed79]. Para un sistema con N_π protones y N_ν neutrones de valencia, la contribución de *pairing* es proporcional al número de pares de nucleones, en tanto que la interacción neutrón-protón contribuye en forma proporcional al producto $N_\pi N_\nu$, de modo que el cociente R entre ambas contribuciones es

$$R(N_\pi, N_\nu) = \begin{cases} \frac{\gamma}{2} \frac{N_\pi + N_\nu}{N_\pi \cdot N_\nu}, & \text{para núcleos par-par,} \\ \frac{\gamma}{2} \frac{N_\pi + N_\nu - 1}{N_\pi \cdot N_\nu}, & \text{para núcleos impares,} \end{cases} \quad (3.12)$$

donde γ es el cociente entre las intensidades de ambas fuerzas. Típicamente $\gamma \simeq 8$ para núcleos medios y pesados, como se desprende del hecho de que tanto el ^{150}Sm como el ^{100}Mo son transicionales y tienen, por tanto, $R \simeq 1$. En la Fig.3.3 se muestra el comportamiento de R en función de N_π y N_ν para la región de las Tierras Raras.

Observemos que para sistemas con un protón de valencia y N_ν par, es $R = 4$ (como es evidente, ya que la interacción de *pairing* es dominante para núcleos de partícula independiente y el esquema de senioridad generalizada es aplicable). Para núcleos con $N_\pi = 2$ y N_ν par, R varía entre 4 y 2, de modo que aquí también *pairing* domina. Ahora bien, si tomamos como criterio para la selección de núcleos la condición de que la con-

tribución de *pairing* sea al menos el doble de la cuadrupolar, es decir

$$R \geq 2, \quad (3.13)$$

los núcleos con $N_\pi = 2$ y N_ν impar (senioridad uno), así como también unos pocos núcleos con $N_\pi = 3, 4$, pueden incluirse en el cálculo (ver Fig.3.3).

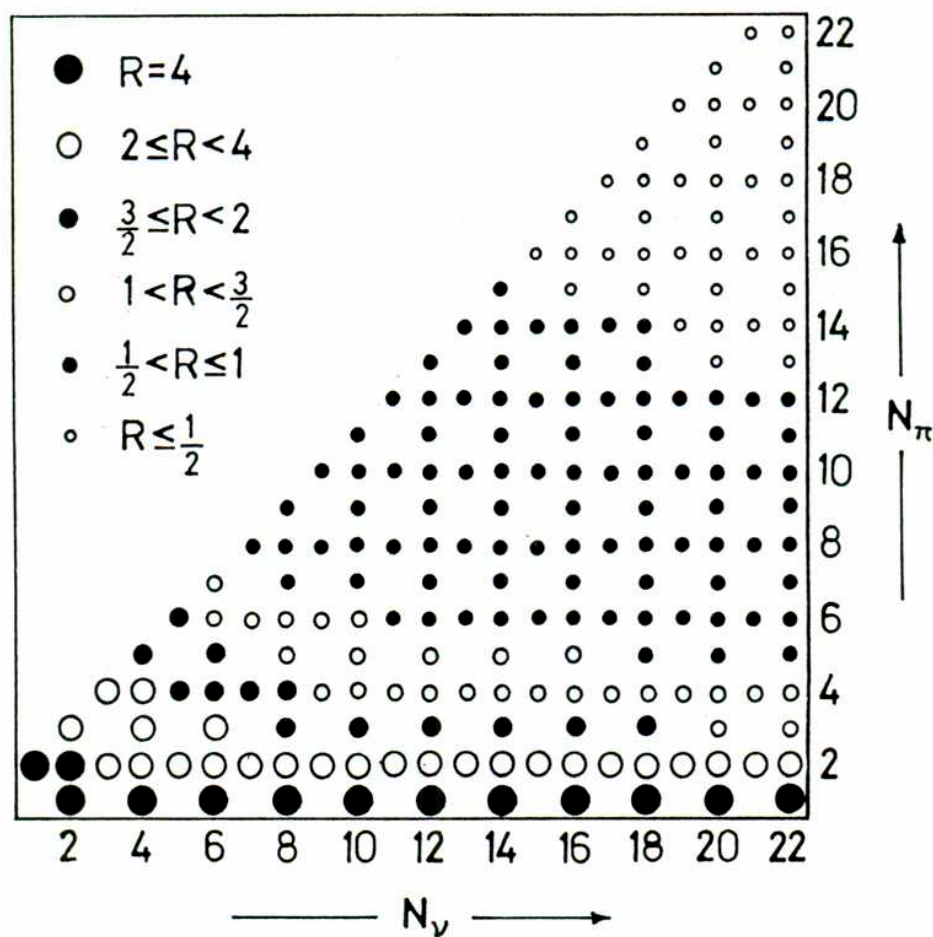


FIG.3.3. Valores del cociente $R(N_\pi, N_\nu)$, definido por la Ec. (3.12), en la región de las Tierras Raras ($\gamma = 8$).

3.3.3. Dedución de las ecuaciones y descripción del método

En la Secc.2.1 derivamos la expresión (2.12) para la energía de excitación de un estado intruso en el núcleo (Z,N) en una configuración de $Z - Z_R$ partículas y $Z_M - Z_R$ agujeros de protones. Es evidente que para $Z - Z_R = 0$ esta expresión debe describir estados de los nucleones de valencia, puesto que corresponde a excitaciones en que no se elevan protones a través del *gap* entre capas mayores ($\Delta Z = 0$). Poniendo $Z = Z_R$ y sustituyendo (2.10) en (2.12) resulta, cuando J_1 y/o J_2 son cero

$$\begin{aligned} \mp \sum_{j_{\pi} j_{\nu}} \sum_{\alpha_2 J_2} n_{\pi}(\alpha_2 J_2) n_{\nu}(\alpha_1 J_1) \bar{V}(j_{\pi}; j_{\nu}) = \\ = E_B(Z, N; \alpha_1 J_1, \alpha_2 J_2; J) - E_B(Z_M, N; \alpha_1 J_1) \\ + E_B(Z_M, N_M; g.s.) - E_B(Z, N_M; \alpha_2 J_2), \quad (3.14) \end{aligned}$$

donde el signo superior (inferior) corresponde al caso de partículas (agujeros) de neutrones. En el miembro izquierdo se ha incluido explícitamente la dependencia de los números de ocupación respecto del estado. Como es obvio a partir de la discusión precedente, el mismo formalismo puede aplicarse al caso de partículas de protones o agujeros de neutrones, con una sustitución adecuada en la Ec.(3.14) de los números de ocupación y modificando el signo del miembro izquierdo en función de la naturaleza de los estados considerados (p-p, h-h, o p-h).

El miembro derecho de (3.14) puede extraerse directamente de datos experimentales, y los números de ocupación pueden obtenerse en cálculos de BCS para los núcleos semi-mágicos (Z_M, N) y (Z, N_M) , de modo que las únicas incógnitas en (3.14) son los elementos de matriz monopulares de la interacción neutrón-protón.

El método propuesto consiste en plantear el conjunto de ecuaciones (3.14) para todos los núcleos que satisfagan la condición (3.13) en una dada región, y tratar los elementos de matriz como parámetros libres que optimicen el ajuste a las energías experimentales de los estados apropiados. Para ello es necesario ensamblar varios conjuntos de cálculos provenientes de diversas partes de la región. Trabajos previos en la capa (2s-1d) [Whi85] señalan la necesidad de incluir una apropiada dependencia de los elementos de matriz con la masa.

4. DISCUSION DE LOS RESULTADOS

"Desearía saber si el lector vaciló o no antes de aceptar mi afirmación de que la cuadruplicación es una duplicación de la operación de duplicar."

(Sir A.Eddington, 1938).

4.1. REGION $Z = 28$

Para los isótopos impares del Mn, Co, Cu y Ga, existe información experimental acerca de los centroides en reacciones de transferencia de un protón. Para el Ga, la configuración intrusa $(1f7/2)^{-1}$ está altamente fragmentada [Hey83], y es muy difícil distinguirla de la configuración correspondiente al orbital $1f5/2$ [Rot78].

Los estados intrusos en los isótopos del Mn y Co se han observado en reacciones $(^3\text{He},d)$, mientras para los isótopos del Cu y del Ga se han utilizado además reacciones $(d, ^3\text{He})$ y (t,α) .

Los cálculos se realizaron con valores de $\bar{V}_\nu = 0.71, 0.67,$ y 0.58 MeV para $j_\nu = 2p3/2, 1f5/2,$ y $2p1/2$, respectivamente. En la Tabla 4.1 se presentan los resultados, comparados con la información experimental disponible. El acuerdo obtenido es muy satisfactorio.

No existe información experimental acerca de centroides en excitaciones 0^+ de dos protones para núcleos par-par en esta región, aun cuando se han estudiado algunos isótopos del Fe ($Z=26$), Ni ($Z=28$), y Zn ($Z=30$), con reacciones $(^3\text{He},n)$ y

(${}^6\text{Li},d$). Las energías calculadas [Are86b], que no se reproducen aquí, son máximas para $Z=28$, y presentan mínimos marcados para $N=30-32$, creciendo lentamente para masas mayores.

TABLA 4.1. Centroides experimentales [Hey83, Rot78] y calculados [Are86b] (en MeV) para los estados intrusos de excitación de un protón en núcleos impares alrededor de $Z=28$.

N	Mn (Z=25) ^a		Co (Z=27) ^a		Cu (Z=29) ^b		Ga (Z=31) ^b	
	expt.	calc.	expt.	calc.	expt.	calc.	expt.	calc.
28	2.30	2.12	2.32	2.34				
30	2.13	1.92	1.61	1.67		1.70		
32		1.50	1.25	1.65		1.71		
34				1.41	1.76	1.82		1.56
36				1.35	2.17	1.94		1.76
38					2.19	2.19	1.93	1.93

^a $J^\pi = 3/2^-$.

^b $J^\pi = 7/2^-$.

4.2. REGION $Z = 40$

La estructura de los isótopos livianos del Zr para $50 \leq N \leq 56$ es fácilmente comprensible en términos del modelo de capas esférico [Aue65, Glo75]. Los primeros estados excitados $J^\pi = 0^+$ en los isótopos pares se describen como el resultado de elevar dos protones de la órbita $2p_{1/2}$ a la $1g_{9/2}$, según se determina a partir de los datos de reacciones

($d, {}^3\text{He}$) [Pre68], ($d, {}^6\text{Li}$) [Mol88], y del decaimiento β [Mac88]. Otros niveles se describen en términos de neutrones de valencia ocupando las órbitas más bajas ($2d_{5/2}$, $3s_{1/2}$). Ya hace mucho tiempo se ha observado que los isótopos más pesados, ricos en neutrones y alejados del valle de estabilidad, exhiben aspectos claramente colectivos [Che70]. Desde entonces, nuevos y más completos resultados experimentales ratificaron esta concepción en forma concluyente [Sis88]. La transición de formas esféricas a deformadas tiene lugar entre $A = 98$ y $A = 102$. El agregado de neutrones extra polariza los neutrones y protones a las órbitas $1g_{7/2}$ y $1g_{9/2}$ respectivamente. La interacción isoescalar fuertemente atractiva entre nucleones que ocupan órbitas compañeras de spin-órbita hace de tales configuraciones las principales componentes de los estados fundamentales deformados para $N \geq 60$, según los resultados del pionero trabajo de Federman y Pittel [Fed79].

Esta interpretación de la estructura de los isótopos pesados del zirconio ha sido discutida recientemente desde dos ángulos. En primer lugar, cálculos de HFB dan prioridad a la polarización de neutrones al orbital $1h_{11/2}$ como responsable del cambio de estructura para $N = 60$ [Dob88]. En segundo término, se ha argumentado que las configuraciones con cuatro protones en la órbita $1g_{9/2}$ podrían ser las principales componentes de los primeros estados excitados $J^\pi = 0^+$ observados en ${}^{96}\text{Zr}$ y ${}^{98}\text{Zr}$, siendo por tanto las candidatas naturales para la configuración principal en los estados fundamentales de los isótopos más pesados [Mey86].

Hemos aplicado nuestro modelo a los isótopos transicionales del Zr suponiendo excitaciones de dos protones del carozo de ${}^{90}\text{Zr}$, con los parámetros de la Tabla 4.2, y considerando sólo tres órbitas activas de neutrones ($2d_{5/2}$, $3s_{1/2}$ y $1g_{7/2}$). De este modo calculamos las energías de excitación de las cabezas de banda $J^\pi = 0^+$, así como también las de los miembros $J^\pi = 2^+, 4^+$ de la banda intrusa y los cocientes

$E(4^+)/E(2^+)$ resultantes, que se comparan con el experimento en la Fig.4.1. El detallado acuerdo es impactante. La sistemática de la energía de las cabezas de banda 0^+ , el brusco descenso del miembro 2^+ de la banda intrusa, y la transición de forma para $A = 100$ se describen con precisión. Las fuertes $B(E2:2^+_1 \rightarrow 0^+_1)$ en los isótopos ^{100}Zr [Hil88] y ^{102}Zr [Ram87] también se describen correctamente, como se muestra en la Fig.4.2.

Los mismos parámetros dan por resultado energías mucho más altas para las excitaciones de cuatro protones, aunque en este caso las correcciones ΔE sean mucho mayores que las correspondientes a excitaciones de dos protones. No obstante, no llegan a contrarrestar los grandes valores de E_0 , dando por resultado las energías de excitación que se indican en la Fig.4.3.

Los resultados obtenidos validan, por lo tanto, la concepción de Federman y Pittel acerca de la estructura de los isótopos del Zr, en contraposición con las otras interpretaciones antes mencionadas.

TABLA 4.2. Parámetros (en MeV) para la región del Zr [Are88a].

j_ν	\bar{V}_ν	$\bar{V}_{\pi\bar{\pi}}$
2d5/2	0.38	
3s1/2	0.27	-0.26
1g7/2	0.38	

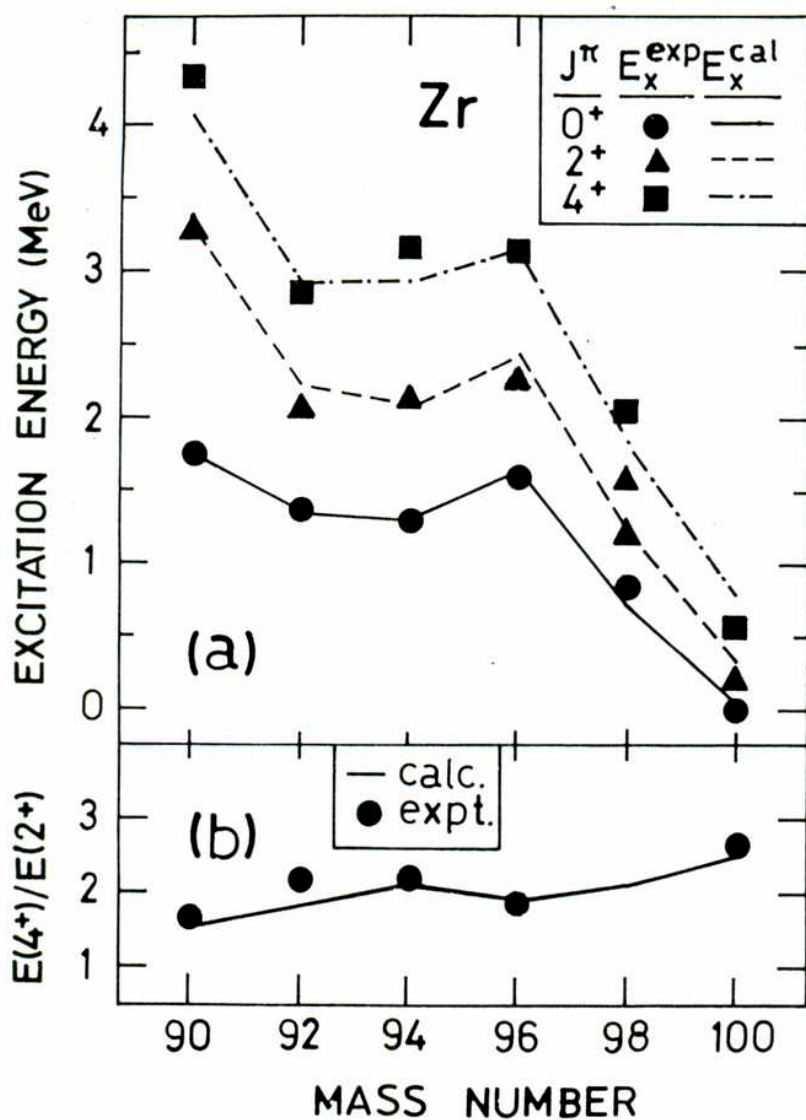


FIG.4.1.(a) Energías experimentales y calculadas para las cabezas de banda intrusa 0^+ y candidatos para los miembros de la banda 2^+ y 4^+ en los isótopos del Zr con $90 \leq A \leq 100$. (b) Correspondientes cocientes $E(4^+)/E(2^+)$.

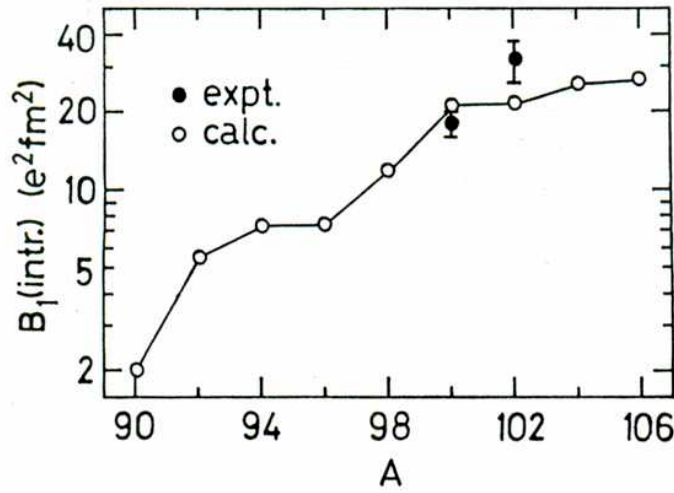


FIG.4.2. Probabilidades de transición reducidas E2 (intrabanda) experimentales [Ram87,Hil88] y calculadas [Ec.(2.19)] para los isótopos del Zr.

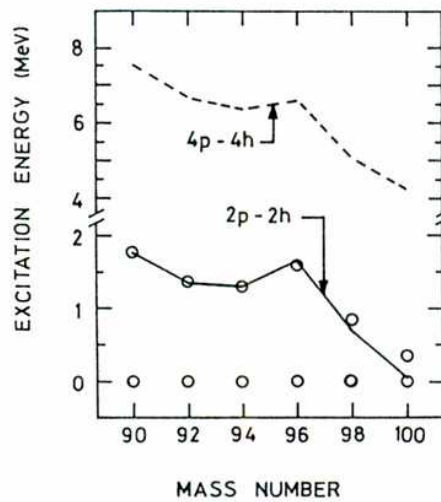


FIG.4.3. Energías de excitación experimentales de los estados 0^+ de menor energía en los isótopos pares del Zr (círculos) comparadas con valores calculados suponiendo excitaciones de dos protones (línea llena) y cuatro protones (línea punteada).

4.3. REGION Z = 50

En esta región, los agujeros de protones se encuentran principalmente en la órbita $1g_{9/2}$, en tanto los neutrones se reparten entre los orbitales $2d_{5/2}$, $1g_{7/2}$, $3s_{1/2}$, $1h_{11/2}$, y $2d_{3/2}$. La componente isovectorial de la interacción nuclear promedio entre las órbitas $1g_{9/2}$ y $2d_{5/2}$ es conocida y vale -0.15 MeV [Sch76], a los cuales sumamos -0.25 MeV de la interacción coulombiana [Fly77, Wen81] para obtener $\bar{V}_{\pi\pi} = -0.40$ MeV, según se describió en la Secc. 3.1. Por otra parte, la interacción monopolar promedio $\bar{V}_{\nu\pi}$ es aproximadamente constante e igual a 0.37 MeV [Are86a], que coincide con el valor experimental correspondiente al mismo par de órbitas [Sch76], y este valor se utilizó para todos los cálculos en la región.

Los centroides de los niveles excitados en reacciones de transferencia de un protón en núcleos con Z impar no han sido determinados experimentalmente en esta región. Sin embargo, la escasa fragmentación de la configuración intrusa $2d_{5/2}$ en los isótopos impares de la Ag, y de las configuraciones $2d_{5/2}$ y $1g_{7/2}$ en los isótopos impares del In, hace posible seguir la tendencia de los centroides experimentales a través del conocimiento de los niveles excitados correspondientes (cf. Secc. 2.1). Lo mismo sucede con la configuración intrusa $(1g_{9/2})^{-1}$ en los isótopos impares del Sb y el I.

En el caso de los estados 0^+ de excitación de dos protones en núcleos con Z par, existe al menos información parcial acerca de los centroides obtenidos en la reacción $(^3\text{He},n)$ para los isótopos pares del Cd y el Sn, pero no para los del Te.

Las energías calculadas se muestran y comparan con el experimento en la Fig.4.4. El acuerdo es excelente.

En cuanto a las $B(E2)$, existe información experimental acerca de las transiciones $2^+ \rightarrow 0^+$ en la banda intrusa para los isótopos ^{112}Cd , ^{114}Cd , y ^{116}Sn . Para el cálculo de las

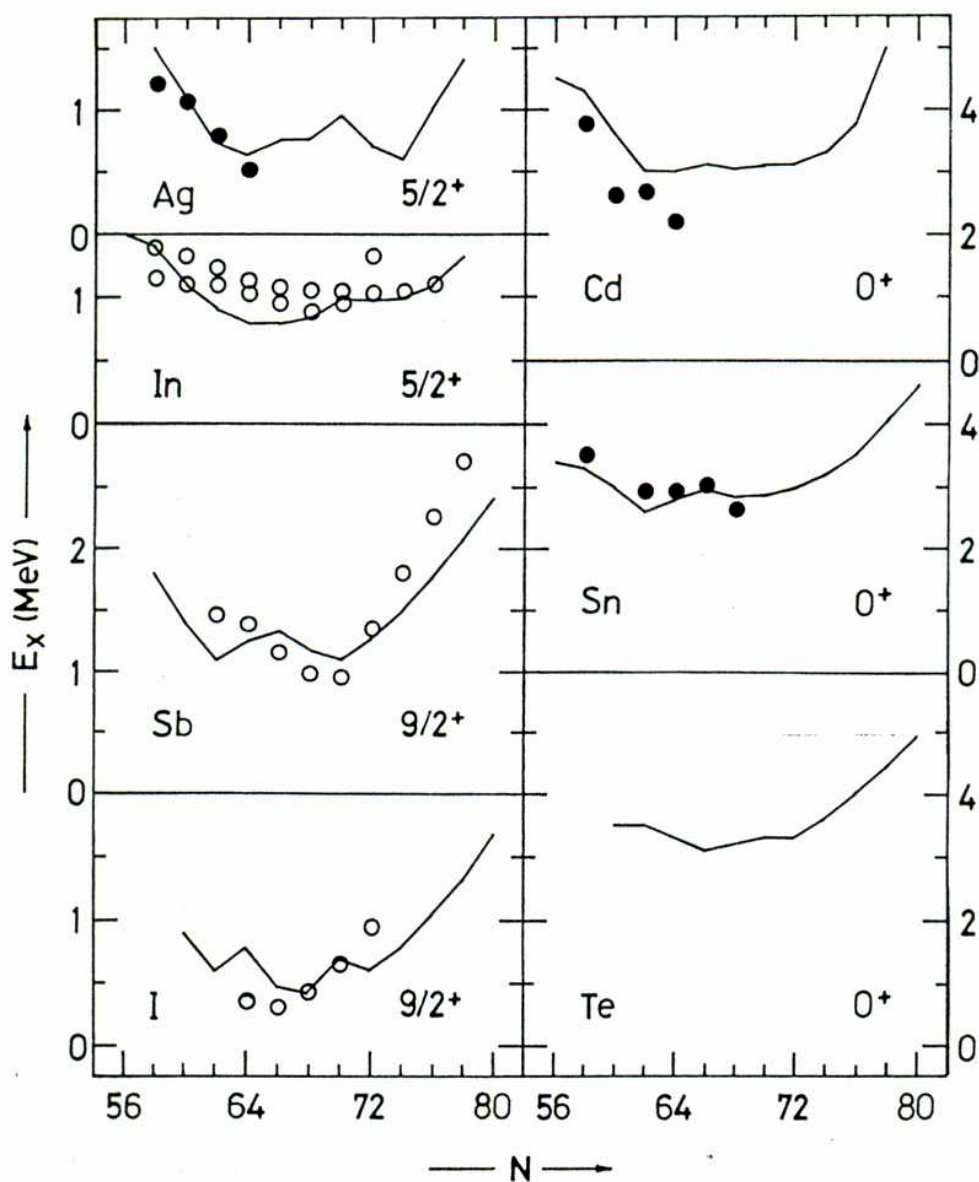


FIG.4.4. Energías de excitación [Hey83,Led78] (círculos blancos) y centroides [Fie77] (círculos negros) experimentales, y calculados [Are86a] (líneas llenas) para estados intrusos en los isótopos con $47 \leq Z \leq 53$.

probabilidades correspondientes se requiere la $B(E2)$ de la banda fundamental en el ^{116}Te ; aunque ésta no se conoce, podemos estimar su valor como aproximado al correspondiente al ^{118}Te , basándonos en consideraciones sistemáticas [Ram87]. De este modo se han podido llevar a cabo los cálculos cuyos resultados se presentan en la Fig.4.5. Nuevamente, el acuerdo con el experimento es satisfactorio.

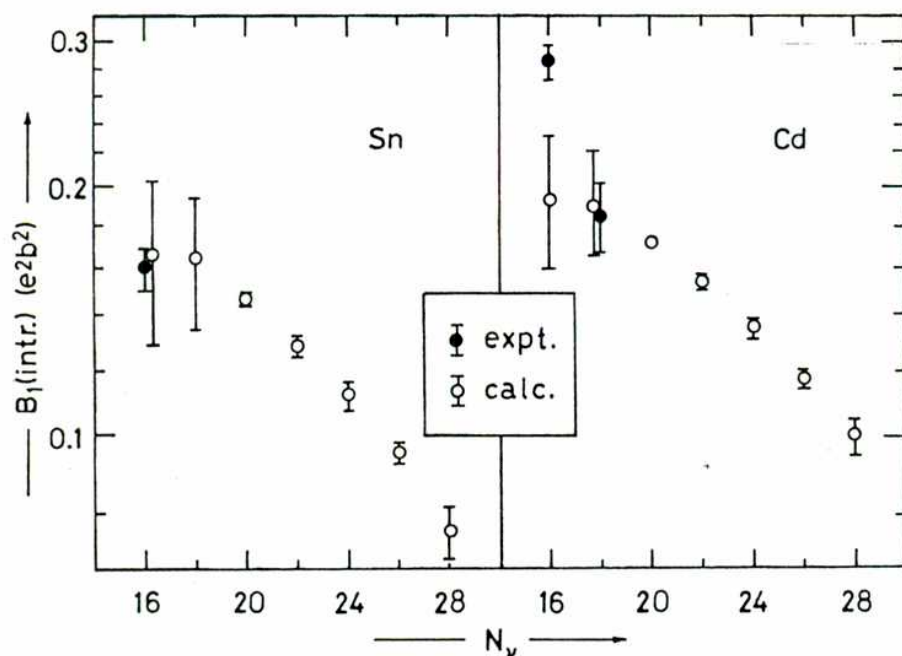


FIG.4.5. Probabilidades de transición $B(E2:2^+ \rightarrow 0^+)$ intrabanda (en e^2b^2) experimentales (círculos negros) y calculadas (círculos blancos) en los isótopos del Sn y del Cd. (Ver detalles en el texto.)

4.4. REGION N = 82

Estimaciones semiempíricas de los elementos de matriz monopulares neutrón-proton para esta región dan por resultado una interacción monopolar promedio aproximadamente constante, de alrededor de 0.28 MeV [Are86a,Are86b], que se fijó en este valor para los cálculos en toda la región. Puesto que $\bar{V}_{\nu p}$ no se conoce experimentalmente, se asignó a este parámetro el valor de -0.15 MeV que sugiere la sistemática (cf.Secc.3.1). Con estos valores se calcularon las energías de excitación para estados intrusos con $\Delta N = 1$ en los isótonos impares de $N = 79, 81, 83, \text{ y } 85$, y con $\Delta N = 2$ en los isótonos pares de $N = 80, 82, \text{ y } 84$, que se comparan con los datos experimentales en la Fig.4.6. El acuerdo cuantitativo entre las predicciones teóricas y los datos experimentales es excelente. Para los isótonos con $N = 82$, los niveles 0^+ se han observado en reacciones de transferencia de dos neutrones, y la concordancia entre energías medidas y calculadas hace suponer que no hay fragmentación significativa de la configuración intrusa.

En la Tabla 4.3 se presentan los valores calculados para $B_1(\text{intr.})$ en los isótonos con $N = 82$. Como en este caso $B_1(2) = B(E2; {}^{130}\text{Sn})$ no se conoce, se estimó su valor como $0.017 \text{ e}^2 \text{ b}^2$ que corresponde a dos partículas (${}^{92}\text{Zr}$) -en lugar de dos agujeros- en la capa $50 < N < 82$. No hay información experimental que pueda compararse con los resultados.

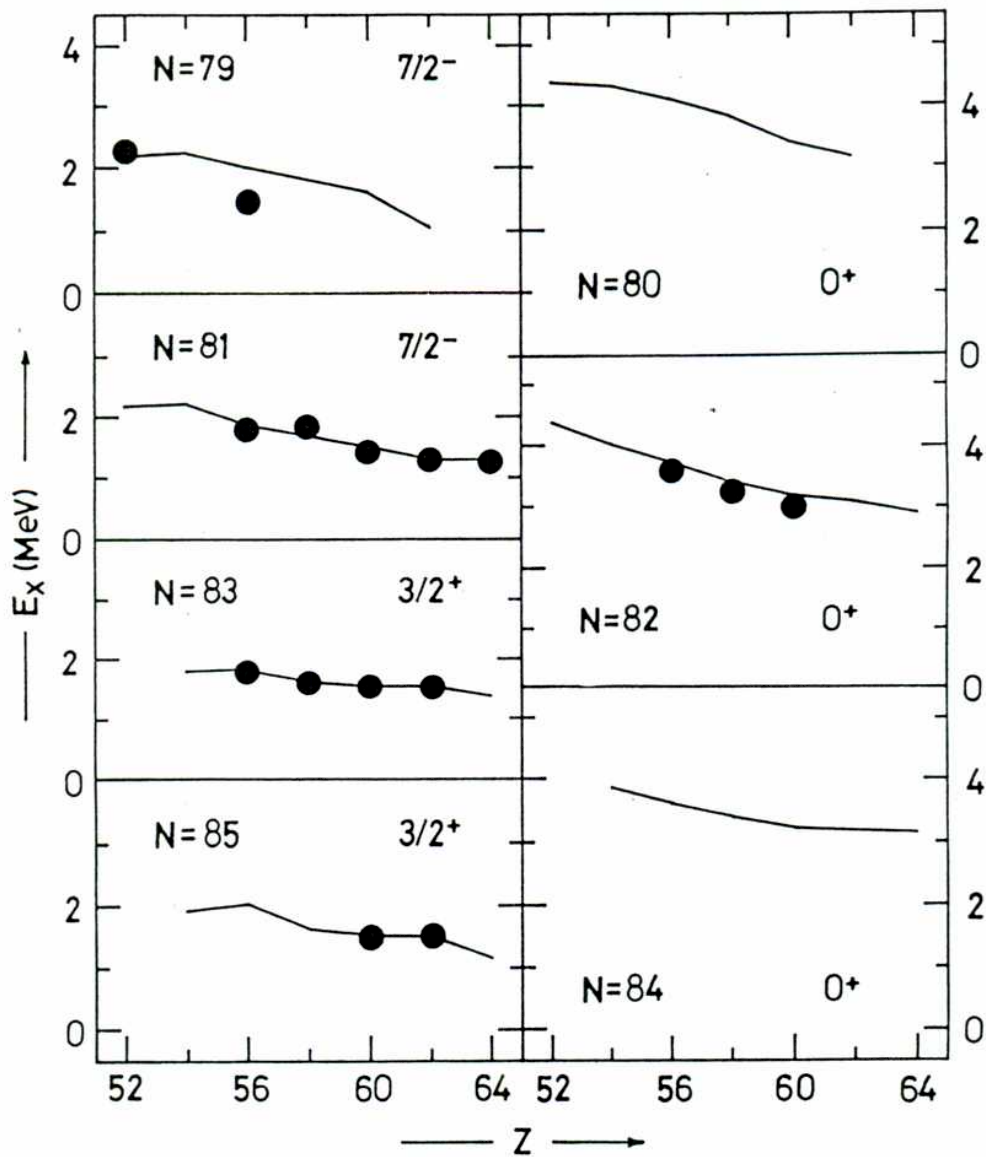


FIG.4.6. Energías de excitación experimentales [Led78, Hey83,Mul72] (círculos negros) y calculadas (líneas llenas) para los estados intrusos de menor energía en los isótonos con $79 \leq N \leq 85$.

TABLA 4.3. $B_1(\text{intr.})$ calculadas (en e^2b^2) para isótonos con $N=82$.

Núcleo	$B_1(\text{intr.})$
^{136}Xe	0.017(2)
^{140}Ce	0.104(3)
^{142}Nd	0.122(7)
^{144}Sm	> 0.05

4.5. REGION $Z = 82$

Históricamente, esta fue la región en la que por primera vez se utilizara el método descrito en la Secc.3.2.2 para el cálculo de las interacciones promedio \bar{V}_ν [Are88b], ya que cálculos previos habían demostrado tanto la dependencia de estos parámetros con la órbita como la insuficiencia de las estimaciones semiempíricas de los mismos [Are87]. Los resultados de aplicar el mencionado método en la región del Pb se indican en la Tabla 4.4. Con estos parámetros se calcularon las energías de excitación para estados intrusos $\Delta Z = 1$ en los isótopos impares del Au, Tl, Bi, y At, y $\Delta Z = 2$ en los isótopos pares del Hg, Pb, y Po, que se comparan con el experimento en la Fig.4.7. El excelente acuerdo es notorio. La ausencia de información experimental pertinente impide la aplicación del test de las probabilidades de transición cuadrupolares dentro de la banda intrusa (Secc.2.2).

En el caso de los isótopos del Tl cabe destacar que una gran variedad de modelos ha intentado dar cuenta de la depen-

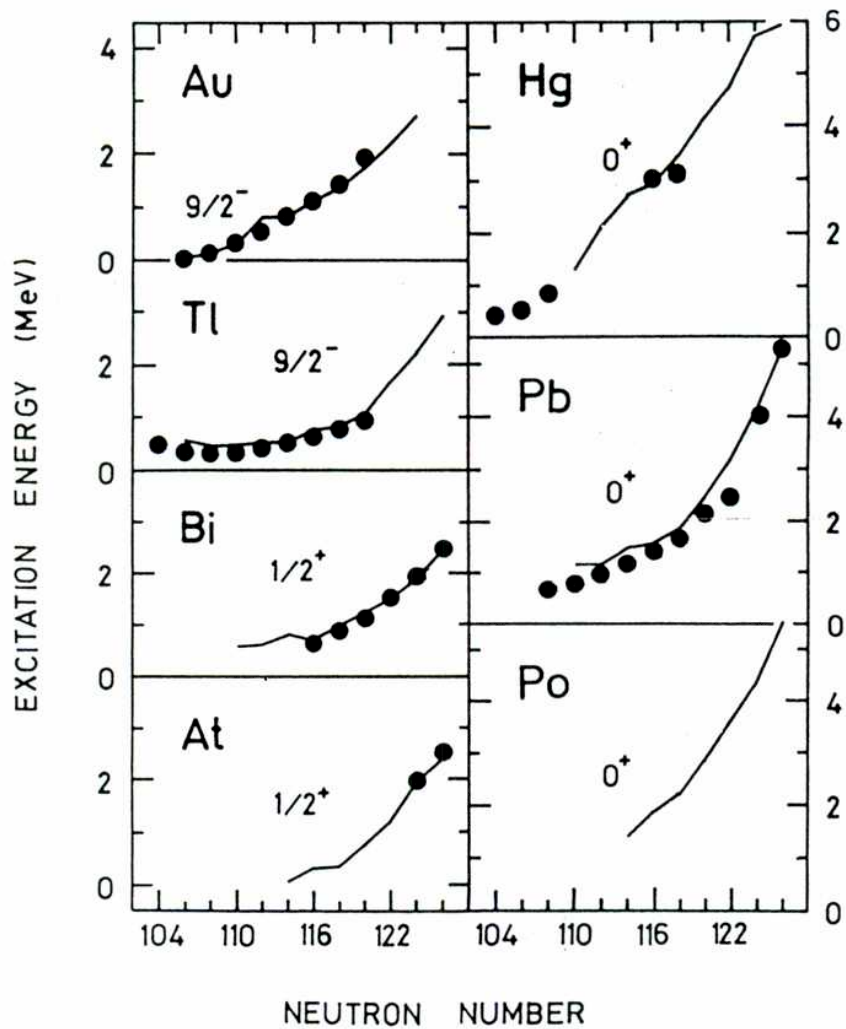


FIG.4.7. Energías de excitación experimentales [Hey83,Dup84, Kan86] (círculos negros) y calculadas (líneas llenas) para los estados intrusos de menor energía en los isótopos con $79 \leq Z \leq 85$.

TABLA 4.4. Parámetros (en MeV) para la región del Pb [Are88b]

j_ν	\bar{V}_ν			$\bar{V}_{\pi\bar{\pi}}$
	$Z_R = 78$	$Z_R = 80$	$Z_R = 81$	
3p1/2	0.31	0.43	0.38	
2f5/2	0.37	0.42	0.41	
3p3/2	0.26	0.19	0.12	-0.326
1i13/2	0.27	0.21	0.16	

dencia de la energía de excitación del estado $9/2_1^-$ con la masa (mínima para $N = 108, 110$), pero que aún cuando la mayoría de ellas reproduce cualitativamente las tendencias observadas, ninguna logra un acuerdo cuantitativo. En particular, la ubicación del mínimo en $N = 108, 110$ no ha sido reproducida por ningún modelo previo, de modo que los cálculos aquí presentados son los primeros que predicen correctamente la ubicación del mínimo.

La información experimental acerca de los isótopos del At es escasa. El modelo predice el centroide de la configuración intrusa $(3s1/2)^{-1}$ prácticamente en coincidencia con el nivel $1/2^+$ observado en el ^{211}At ($N = 126$), de acuerdo con la tendencia general de las configuraciones intrusas de protones, que presentan escasa o nula fragmentación para núcleos con capa cerrada de neutrones. Para $N = 124$, la energía calculada coincide con el estado de 1.95 MeV observado en el ^{209}At . Este nivel tiene paridad positiva y su momento angular se supone comprendido entre $3/2$ y $7/2$ en base a su decaimiento E1 al nivel de paridad negativa y energía 1.10 MeV, cuyo momento angular es probablemente $5/2$ o $7/2$. Sin embargo,

nuestros cálculos ofrecen una prueba en favor de la asignación tentativa $J^\pi = 1/2^+$ para el nivel de 1.95 MeV en el ^{209}At , correlativa de la asignación $J^\pi = 3/2^+$ para el nivel de 1.10 MeV. Esto, a su vez, es consistente con la observación, en el ^{211}At , de un nivel $3/2^-$ o $5/2^-$ a 1.12 MeV de energía de excitación (posiblemente perteneciente a la configuración $(1h9/2)^{-3}$), al cual decae el estado intruso vía transición E1.

5. CONCLUSIONES

"The nucleus is indeed a very interesting system."

(A.Arima, e I.Hamamoto,1971).

Este trabajo constituye la presentación de un modelo simple que describe los aspectos más relevantes de la estructura de los estados intrusos en una base de acoplamiento débil. Las características del modelo pueden sintetizarse como sigue:

- La base elegida es aquélla en que los agujeros del carozo están débilmente acoplados al resto de los nucleones de valencia.
- El cálculo de las energías de excitación puede realizarse perturbativamente a primer orden. La energía de orden cero puede extraerse del experimento. La corrección de primer orden es de naturaleza monopolar y puede obtenerse de datos experimentales en forma consistente con el modelo. De este modo las energías de excitación se pueden calcular sin parámetros libres.
- Las probabilidades de transición también se calculan en función de datos experimentales, sin parámetros libres.
- La aplicabilidad del modelo se ha extendido a todas las excitaciones intrusas en núcleos medios y pesados, y permite realizar predicciones en núcleos donde dichas

excitaciones no han sido aún observadas.

- Otras descripciones de estados intrusos 0^+ de 2p-2h [Blo70, Fly77, Dup84] se obtienen como casos particulares o aproximaciones de la presente descripción.

Los cálculos realizados muestran un satisfactorio acuerdo con los datos experimentales a lo largo de toda la Tabla Periódica ($51 \leq A \leq 211$).

Para varias regiones hemos presentado cálculos correspondientes a excitaciones 4p-2h en núcleos par-par. Si bien se ha señalado la dificultad para obtener centroides experimentales de tales excitaciones en reacciones de transferencia de dos protones [Fie78], la región del plomo ofrece un interesante campo para su estudio, debido a la escasa fragmentación de las configuraciones intrusas 0^+ [Dup84]. En particular, los resultados que hemos presentado predicen estados intrusos 0^+ a energías por debajo de 2 MeV en los núcleos $^{198,200}\text{Po}$, de modo que el estudio experimental del decaimiento α de los isótopos $^{202,204}\text{Rn}$ resultaría un test decisivo de las hipótesis realizadas.


El análisis de las probabilidades de transición electromagnéticas constituye una importante prueba en favor de la validez del modelo, si bien la escasa información experimental disponible dificulta una comparación sistemática con las predicciones teóricas. Es posible que un análisis más minucioso de las transiciones $E2:2^+ \rightarrow 0^+$ dentro de la banda intrusa en núcleos par-par requiera considerar la mezcla del estado $|0_1^+ 0_1^+; 0^+\rangle$ con el estado $|2_1^+ 2_1^+; 0^+\rangle$, ya que si bien éste se encuentra a una energía no perturbada mayor que la de los estados $|2_1^+ 0_1^+; 2^+\rangle$ y $|0_1^+ 2_1^+; 2^+\rangle$, el elemento de matriz que lo conecta es $\sqrt{5}$ veces mayor que el que conecta a estos últimos entre sí (cf. Ec.(B.3)). Recientemente Heyde ha realizado una sugerencia similar en un contexto ligeramente diferente [Hey88].

En los cálculos presentados no se han incluido estados

intrusos en núcleos impar-impar o excitaciones de dos protones en núcleos impares, debido a que la hipótesis de senioridad mínima es inaplicable o no constituye una buena aproximación. No obstante, estas excitaciones ya están siendo estudiadas experimentalmente (por ejemplo, en los isótopos pares del talio)[Huy90]. El análisis de la eventual extensión y aplicabilidad del modelo a estos casos puede ser objeto de futuros trabajos.

Finalmente, es interesante señalar que en los últimos años se han confirmado experimentalmente algunas predicciones basadas en este modelo. Tal es el caso de los estados intrusos 2^+ y 4^+ en el ^{96}Zr [Mol88] y de los estados intrusos $5/2^+$ en los isótopos ^{123}In y ^{125}In [Huc90]. Estos últimos se midieron a energías de 1.05 MeV y 1.10 MeV respectivamente, en tanto los cálculos presentados en [Are86a] predecían energías de 1.01 y 1.10 MeV. Huck et al. interpretan teóricamente estos estados como correspondientes a un acoplamiento agujero-vibración, a diferencia de la estructura de $1p-2h$ que surge de la presente descripción.


G. E. ARENAS PERIS


P. FEDERMAN

AGRADECIMIENTOS

Deseo expresar mi gratitud a S.Pittel por sus estimulantes comentarios y aportes en relación al método para la determinación de los elementos de matriz monopolares, así como a R.F.Casten por haberme proporcionado una gran cantidad de datos experimentales actualizados y críticamente analizados.

Mi más profundo agradecimiento a E.D.Kirchuk, quien más de una vez me rescatara de los laberintos del álgebra tensorial o de los vórtices de un *infinite do loop*. Su lectura crítica del manuscrito ha sido de invaluable utilidad. Sin su respaldo humano, quizás esta tesis nunca hubiese visto la luz.

A P.Federman y aquellos miembros de la comunidad física local que me ofrecieron su tiempo y sus conocimientos generosamente; a J.Rikovska, K.Sistemich, J.Dobaczewski, y R.A.Sorensen, de la comunidad internacional, con quienes pude discutir varias de las ideas contenidas en este trabajo; y particularmente al profesor I.Talmi, por unas breves pero invaluable palabras durante la conferencia de Cocoyoc '88; a todos ellos, mi sincero reconocimiento.

A los miembros del Departamento de Física de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA) y del laboratorio TANDAR, al personal del Instituto del Cálculo y del CONICET, que de diversas maneras me ayudaron en este camino. Gracias.

Este trabajo fue apoyado por una beca del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas.

APENDICES

A. LA CORRECCION DE PRIMER ORDEN

En esta Sección mostraremos cómo se deriva la Ec.(2.6) a partir de la Ec.(2.5) cuando J_1 y/o J_2 son cero, con la aproximación de senioridad generalizada mínima. Consideraremos, sin pérdida de generalidad, excitaciones de N_π partículas y $N_{\bar{\pi}}$ agujeros de protones, en núcleos con N_ν neutrones de valencia.

En primer lugar, si N_π , $N_{\bar{\pi}}$ y N_ν son todos pares, la condición de senioridad mínima implica que $J_1 = J_2 = 0$, y podemos escribir

$$|\alpha_1 0 \alpha_2 0; 0\rangle = \sum_{\sigma} c_{\sigma} |\psi_{\sigma}\rangle, \quad (\text{A.1})$$

donde

$$|\psi_{\sigma}\rangle = \prod_{j_{\bar{\pi}}} \prod_{j_{\pi}} \prod_{j_{\nu}} |j_{\bar{\pi}}^{-n_{\bar{\pi}}(\sigma)}(0)\rangle |j_{\pi}^{n_{\pi}(\sigma)}(0)\rangle |j_{\nu}^{n_{\nu}(\sigma)}(0)\rangle, \quad (\text{A.2})$$

y σ recorre todas las configuraciones en que la senioridad es mínima. Nótese que

$$\sum_{j_{\nu}} n_{\nu}(\sigma) = N_{\nu}, \quad (\text{para todo } \sigma) \quad (\text{A.3})$$

y análogamente para protones y agujeros de protones. Por otra parte, el razonamiento que sigue es válido aun cuando la senioridad no sea mínima con tal que la forma de la función de onda sea como en (A.2), es decir, inclusive cuando se permitieran configuraciones con senioridad $\nu \geq 2$ pero acopladas a momento angular cero. Los coeficientes c_σ son las componentes de $|\alpha_1 0 \alpha_2 0; 0\rangle$ en la base (A.2), y

$$\sum_{\sigma} |c_{\sigma}|^2 = 1 . \quad (\text{A.4})$$

La corrección de primer orden puede ahora calcularse directamente:

$$\Delta E = \sum_{\sigma} |c_{\sigma}|^2 \sum_{j_{\bar{\pi}}} \sum_{\rho} \sum_{j_{\rho}} V(j_{\bar{\pi}}^{-n_{\bar{\pi}}(\sigma)}(0) j_{\rho}^{n_{\rho}(\sigma)}(0); 0) . \quad (\text{A.5})$$

donde $\rho = \pi, \nu$, y [Sha59]

$$\begin{aligned} V(j_{\bar{\pi}}^{-n_{\bar{\pi}}(\sigma)}(0) j_{\rho}^{n_{\rho}(\sigma)}(0); 0) &= \\ &= \langle j_{\bar{\pi}}^{-n_{\bar{\pi}}(\sigma)}(0) j_{\rho}^{n_{\rho}(\sigma)}(0); 0 | V_{12} | j_{\bar{\pi}}^{-n_{\bar{\pi}}(\sigma)}(0) j_{\rho}^{n_{\rho}(\sigma)}(0); 0 \rangle \\ &= \frac{n_{\bar{\pi}}(\sigma)}{2j_{\bar{\pi}}+1} \frac{n_{\rho}(\sigma)}{2j_{\rho}+1} \sum_J (2J+1) \langle j_{\bar{\pi}}^{-1} j_{\rho}; J | V_{12} | j_{\bar{\pi}}^{-1} j_{\rho}; J \rangle \\ &= n_{\bar{\pi}}(\sigma) n_{\rho}(\sigma) \bar{V}(j_{\bar{\pi}}^{-1}; j_{\rho}) , \quad (\rho = \pi, \nu) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

siendo

$$\bar{V}(j_{\pi}^{-1}; j_{\rho}) = \sum_J (2J+1) \langle j_{\pi}^{-1} j_{\rho}; J | V_{12} | j_{\pi}^{-1} j_{\rho}; J \rangle / \sum_J (2J+1) \quad (A.7)$$

la componente monopolar de la interacción entre un agujero de protones en la órbita j_{π}^{-} y una partícula en la órbita j_{ρ} . Insertando (A.6) en (A.5) obtenemos

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sum_{\sigma} |c_{\sigma}|^2 \sum_{j_{\pi}^{-}} \sum_{\rho} \sum_{j_{\rho}} n_{\pi}(\sigma) n_{\rho}(\sigma) \bar{V}(j_{\pi}^{-1}; j_{\rho}) \\ &= \sum_{j_{\pi}^{-}} \sum_{\rho} \sum_{j_{\rho}} \bar{V}(j_{\pi}^{-1}; j_{\rho}) \left[\sum_{\sigma} |c_{\sigma}|^2 n_{\pi}(\sigma) n_{\rho}(\sigma) \right]. \end{aligned} \quad (A.8)$$

El término entre corchetes es el valor medio del producto entre el número de agujeros de protones en la órbita j_{π}^{-} y una partícula en la órbita j_{ρ} , y es igual al producto de los valores medios (números de ocupación), puesto que no están correlacionados por ser órbitas diferentes. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Delta E &= \sum_{j_{\pi}^{-}} \sum_{\rho} \sum_{j_{\rho}} \bar{V}(j_{\pi}^{-1}; j_{\rho}) n_{\pi} n_{\rho} \\ &= \sum_{j_{\pi}^{-}} n_{\pi}^{-} \left[\sum_{j_{\pi}^{+}} n_{\pi}^{+} \bar{V}(j_{\pi}^{-1}; j_{\pi}^{+}) + \sum_{j_{\nu}^{+}} n_{\nu}^{+} \bar{V}(j_{\pi}^{-1}; j_{\nu}^{+}) \right], \end{aligned} \quad (A.9)$$

donde n_{π}^{-} , n_{π}^{+} y n_{ν}^{+} son, respectivamente, los números de ocupación de las órbitas j_{π}^{-} , j_{π}^{+} y j_{ν}^{+} .

En la deducción de (A.9) hemos supuesto que N_{π}^{-} , N_{π}^{+} y N_{ν}^{+} son todos pares. Es fácil ver que si alguno de ellos es impar, la condición de senioridad mínima ($\nu = 1$) impone que los otros sean ambos pares, de modo tal que J_1 o J_2 es cero.

Con un razonamiento análogo al anterior, podemos ver que

$$\Delta E = \sum_{\sigma} |c_{\sigma}|^2 \sum_{j_{\bar{\pi}} \rho} \sum_{j_{\rho}} V(j_{\bar{\pi}}^{-n_{\bar{\pi}}(\sigma)}(J_2) j_{\rho}^{n_{\rho}(\sigma)}(J_1); J), \quad (\text{A.10})$$

y puesto que [Sha59]

$$V(j_{\bar{\pi}}^{-n_{\bar{\pi}}(\sigma)}(J_2) j_{\rho}^{n_{\rho}(\sigma)}(J_1); J) = V(j_{\bar{\pi}}^{-n_{\bar{\pi}}(\sigma)}(0) j_{\rho}^{n_{\rho}(\sigma)}(0); 0) \quad (\text{A.11})$$

se deriva (A.9) idénticamente.

B. LA CORRECCION DE SEGUNDO ORDEN

Al calcular energías a primer orden en teoría de perturbaciones, es importante tener un modo de estimar la magnitud de la corrección de segundo orden para evaluar la validez de la aproximación realizada. En este Apéndice estimaremos dicha corrección para el estado cabeza de banda 0^+ en excitaciones de dos protones en núcleos par-par. Para otros estados o excitaciones puede obtenerse una estimación similar, pero el álgebra involucrada es verdaderamente mucho más compleja.

Nos interesa estimar

$$\Delta E^{(2)} = \sum_{\alpha\beta J} \frac{|\langle \alpha J, \beta J; 0^+ | V_{12} | 0_1^+(1), 0_1^+(2); 0^+ \rangle|^2}{E_0(\alpha J, \beta J; 0^+) - E_0(0_1^+, 0_1^+; 0^+)}, \quad (\text{B.1})$$

donde la suma excluye $(\alpha J, \beta J) = (0_1^+, 0_1^+)$. La única componente de V_{12} que contribuye significativamente en los elementos de matriz de (B.1) es la cuadrupolo-cuadrupolo. Evaluándolos para esta fuerza en un modelo de una sola órbita para cada subsistema, la suma en (B.1) se reduce a un solo término:

$$\Delta E^{(2)} \approx \frac{|\langle 2_1^+(1) 2_1^+(2); 0^+ | V_{12} | 0_1^+(1), 0_1^+(2); 0^+ \rangle|^2}{E[2_1^+(1)] + E[2_1^+(2)]}, \quad (B.2)$$

donde los términos del denominador son las energías de excitación de los primeros estados 2^+ en los núcleos $(Z_M + Z - Z_R, N)$ y (Z_R, N_M) respectivamente. Utilizando herramientas de cálculo tensorial [Sha59], es fácil ver que para una fuerza cuadrupolar

$$\begin{aligned} \langle 2_1^+(1) 2_1^+(2); 0^+ | V_{12} | 0_1^+(1) 0_1^+(2); 0^+ \rangle &= \\ &= \sqrt{5} \langle 2_1^+(1) 0_1^+(2); 2^+ | V_{12} | 0_1^+(1) 2_1^+(2); 2^+ \rangle. \end{aligned} \quad (B.3)$$

Pero el elemento de matriz que figura en el miembro derecho de esta ecuación es el mismo que aparece en la Ec.(2.30), de la cual se obtiene

$$\Delta E^{(2)} \approx 5 \frac{\{E[2_1^+(1)] - E[2_1^+(\text{intr.})]\} \{E[2_1^+(2)] - E[2_1^+(\text{intr.})]\}}{E[2_1^+(1)] + E[2_1^+(2)]} \quad (B.4)$$

Este cociente es pequeño, ya que al comienzo de una capa es $E[2_1^+(\text{intr.})] \approx E[2_1^+(2)]$, en tanto que hacia la mitad de capa tenemos $E[2_1^+(\text{intr.})] \approx E[2_1^+(1)]$, de modo que

$$\Delta E^{(2)} / \Delta E \ll 1. \quad (B.5)$$

Por ejemplo, en la región del Sn, $E[2_1^+(1)] \simeq 0.64$ MeV, $E[2_1^+(\text{intr.})] \simeq 0.33$ MeV, y $E[2_1^+(2)] \simeq 0.59$ MeV, y siendo $\Delta E \simeq 12$ MeV, se obtiene $\Delta E^{(2)}/\Delta E \simeq 0.025$.

C. VALIDEZ DEL ESQUEMA DE ACOPLAMIENTO DÉBIL

Para probar la validez del esquema de acoplamiento débil se debe evaluar la relación entre los elementos de matriz no diagonales de la interacción y la diferencia entre los correspondientes elementos de matriz diagonales del Hamiltoniano total, i.e. el cociente

$$r = \frac{\langle \psi | H | \phi \rangle}{\langle \psi | H | \psi \rangle - \langle \phi | H | \phi \rangle}, \quad (\text{C.1})$$

donde $|\psi\rangle$ y $|\phi\rangle$ son dos estados de la base de acoplamiento débil. El modelo es aplicable en general cuando $r \ll 1$ [Ari71]. Calcular r en forma exacta puede constituir un problema extremadamente difícil. Sin embargo, dado que solamente nos interesa conocer su orden de magnitud, podemos recurrir a ciertas aproximaciones plausibles que permitan estimar r de una manera sencilla.

Consideremos los estados $|\psi\rangle = |0_1^+(1)0_1^+(2)0^+\rangle$ y $|\phi\rangle = |2_1^+(1)2_1^+(2)0^+\rangle$, correspondientes a excitaciones de dos protones en núcleos par-par. En este caso, el denominador en (C.1) contiene la suma de las energías de excitación de los estados $2_1^+(1)$ y $2_1^+(2)$, más la diferencia entre los elementos de matriz diagonales de la interacción. En esta diferencia, la componente monopolar de la fuerza se cancela, de modo que la única componente que contribuye apreciablemente tanto en el numerador como en el denominador de la Ec.(C.1) es la in-

teracción cuadrupolo-cuadrupolo. De este modo,

$$r = \frac{(\kappa/\sqrt{5}) \langle 2_1^+ (1) \| Q(1) \| 0_1^+ (1) \rangle \langle 2_1^+ (2) \| Q(2) \| 0_1^+ (2) \rangle}{E[2_1^+ (1)] + E[2_1^+ (2)] - \frac{\kappa}{5} \langle 2_1^+ (1) \| Q(1) \| 2_1^+ (1) \rangle \langle 2_1^+ (2) \| Q(2) \| 2_1^+ (2) \rangle}, \quad (C.2)$$

donde κ es la intensidad de la fuerza cuadrupolar, y $Q(\rho)$ es el operador cuadrupolar para el subsistema ρ ($\rho=1,2$). Utilizando un modelo de una sola órbita en el esquema de senioridad [Hey86], es fácil ver que el numerador en (C.2) es cero en los extremos de la capa de valencia [Sha59], de modo que la condición $r \ll 1$ se satisface. Por otra parte, hacia mitad de la capa de valencia el elemento de matriz en el denominador de (C.2) se anula, el del numerador es máximo, y $E[2_1^+ (1)]$ es mínima. En el límite de una sola órbita $j \gg 1$, resulta así

$$r \lesssim \frac{(\kappa/32\pi) [5\Omega_1 \Omega_2]^{1/2}}{E[2_1^+ (1)] + E[2_1^+ (2)]} \quad (C.3)$$

En esta expresión, $\Omega_\rho = 2j_\rho + 1$ es el tamaño de la capa de valencia del sistema ρ ($\rho=1,2$). Pueden derivarse relaciones similares para excitaciones de un protón en núcleos impares, obteniéndose cotas del mismo orden de magnitud. En la Tabla C.1 se muestran los valores de r calculados con (C.3). La disminución general de r para regiones más livianas no debe interpretarse en el sentido de que el esquema de acoplamiento débil constituya una mejor aproximación en núcleos livianos, ya que la suposición de una sola órbita $j \gg 1$ no es buena en tales casos, de modo que la Ec.(C.3) no es válida. Por el contrario, $r \cong 1$ para la región del ^{40}Ca [Ari71]. La región

$Z=28$ constituye un caso límite, ya que $\Omega_2=8$ y j_2 resulta del orden de la unidad, y sin embargo la versión de acoplamiento débil del modelo de capas conduce a espectros similares a los obtenidos en cálculos completos [Joh78]. En las demás regiones de núcleos medios y pesados, no obstante, puede esperarse que el esquema de acoplamiento débil para estados intrusos constituya una buena aproximación.

TABLA C.1. Valores de r calculados con la Ec.(C.3) para diversas regiones y excitaciones, utilizando $\kappa \approx 0.15$ MeV [Sau81]. Las energías de excitación experimentales se tomaron de [Ram87].

Región	r		
	2p-2h	2p-4h	4p-2h
Z = 82	0.07 ^a	0.08 ^{a,b}	0.09 ^c
N = 82	0.05	0.05	0.06
Z = 50	0.06 ^d	0.04	0.07 ^d
Z = 40	0.03	0.02	0.01
Z = 28	0.02	0.02	0.02

^aSuponiendo $E[2^+(^{188}\text{Po})] \approx E[2^+(^{200}\text{Po})]$.

^bSuponiendo $E[2^+(^{204}\text{Pt})] \approx E[2^+(^{204}\text{Pb})]$.

^cSuponiendo $E[2^+(^{200}\text{Rn})] \approx E[2^+(^{192}\text{Pt})]$.

^dSuponiendo $E[2^+(^{98}\text{Cd})] \approx E[2^+(^{92}\text{Zr})]$.

D. ACOPLAMIENTO DEBIL EXTREMO

Consideremos el Hamiltoniano dado por la Ec.(2.2). Por definición,

$$H_1 = H_\nu + H_\pi + V_{\nu\pi} , \quad (D.1)$$

donde H_ν es el Hamiltoniano del sistema formado por el carozo doblemente mágico y los neutrones de valencia, H_π es el de los protones de valencia (energías de partícula independiente más interacción entre ellos), y $V_{\nu\pi}$ es la interacción entre neutrones y protones de valencia. Análogamente,

$$V_{12} = V_{\pi\bar{\pi}} + V_{\nu\bar{\pi}} , \quad (D.2)$$

donde $V_{\pi\bar{\pi}}$ ($V_{\nu\bar{\pi}}$) es la interacción entre protones (neutrones) y agujeros de protones. Así,

$$\begin{aligned} H &= H_1 + H_2 + V_{12} \\ &= H_\nu + H_\pi + H_2 + V_{\nu\pi} + V_{\pi\bar{\pi}} + V_{\nu\bar{\pi}} , \end{aligned} \quad (D.3)$$

En la hipótesis de un acoplamiento débil extremo (en que protones, agujeros de protones, y neutrones estuviesen débilmente acoplados entre sí) con senioridad mínima, las funciones de onda pueden escribirse

$$|\psi\rangle = |\psi_\nu\rangle |\psi_\pi\rangle |\psi_{\bar{\pi}}\rangle , \quad (D.4)$$

donde $|\psi_\nu\rangle$, $|\psi_\pi\rangle$ y $|\psi_{\bar{\pi}}\rangle$ son, respectivamente, estados de los neutrones, protones y agujeros de protones de valencia. Pues-

to que

$$(H_{\nu} + H_{\pi} + V_{\nu\pi}) |\psi_{\nu}\rangle |\psi_{\pi}\rangle = E_{\mathbf{B}}(Z_{\mathbf{M}} + Z - Z_{\mathbf{R}}, N) |\psi_{\nu}\rangle |\psi_{\pi}\rangle \quad (\text{D.5})$$

$$(H_{\nu} + H_{\mathbf{2}} + V_{\nu\pi}) |\psi_{\nu}\rangle |\psi_{\pi}^{-}\rangle = E_{\mathbf{B}}(Z_{\mathbf{R}}, N) |\psi_{\nu}\rangle |\psi_{\pi}^{-}\rangle \quad (\text{D.6})$$

$$H_{\nu} |\psi_{\nu}\rangle = E_{\mathbf{B}}(Z_{\mathbf{M}}, N) |\psi_{\nu}\rangle, \quad (\text{D.7})$$

la energía de excitación del estado intruso resulta, en esta aproximación,

$$\begin{aligned} E_{\mathbf{x}} &= E_{\mathbf{B}}(Z, N) - \langle \psi | H | \psi \rangle \\ &= E_{\mathbf{B}}(Z, N) - E_{\mathbf{B}}(Z_{\mathbf{M}} + Z - Z_{\mathbf{R}}, N) - E_{\mathbf{B}}(Z_{\mathbf{R}}, N) + E_{\mathbf{B}}(Z_{\mathbf{M}}, N) \\ &\quad + (Z_{\mathbf{M}} - Z_{\mathbf{R}})(Z - Z_{\mathbf{R}}) \bar{V}_{\pi\pi}^{-}, \end{aligned} \quad (\text{D.8})$$

donde hemos utilizado la definición (2.9) de $\bar{V}_{\pi\pi}^{-}$. Las expresiones utilizadas en [Blo70, Fly77] constituyen casos particulares de esta ecuación.

La energía de excitación de los estados intrusos $2p-2h$ 0^{+} en núcleos par-par con $Z = Z_{\mathbf{M}}$ se calcula, según (D.8), como

$$E_{\mathbf{x}}(2p-2h; 0^{+}) = 2 E_{\mathbf{B}}(Z_{\mathbf{M}}, N) - E_{\mathbf{B}}(Z_{\mathbf{M}} + 2, N) - E_{\mathbf{B}}(Z_{\mathbf{M}} - 2, N) + 4 \bar{V}_{\pi\pi}^{-} \quad (\text{D.9})$$

en tanto la correspondiente a estados $2p-1h$ $J^{\pi} = j_{\pi}^{-}$ en el isótono con $Z = Z_{\mathbf{M}} + 1$ resulta

$$E_x(2p-1h; j_{\pi}^-) = E_B(Z_M+1, N) - E_B(Z_M+2, N) \\ - E_B(Z_M-1, N) + E_B(Z_M, N) + 2\bar{V}_{\pi\pi} \quad (D.10)$$

y la de los estados $1p-2h$ $J^{\pi}=j_{\pi}$ en el isótono con $Z = Z_M - 1$ se escribe

$$E_x(1p-2h; j_{\pi}) = E_B(Z_M-1, N) - E_B(Z_M+1, N) \\ - E_B(Z_M-2, N) + E_B(Z_M, N) + 2\bar{V}_{\pi\pi} \quad (D.11)$$

de modo que

$$E_x(2p-2h; 0^+) = E_x(1p-2h; j_{\pi}) + E_x(2p-1h; j_{\pi}^-) . \quad (D.12)$$

Esta expresión ha sido utilizada por Van Duppen et al. [Dup84] en la región del Pb.

Para derivar (D.12) debe suponerse que la interacción monopolar promedio entre un protón y un agujero de protones es la misma en las tres excitaciones. Esto es exacto si protones y agujeros de protones están confinados a una sola órbita.

REFERENCIAS

A

- [Are86a] G.E.Arenas Peris, y P.Federman, *Phys.Lett.* **173B**, 359 (1986).
- [Are86b] G.E.Arenas Peris, "Estructura de los Estados intrusos", (Tesis de Licenciatura, 1986).
- [Are87] G.E.Arenas Peris, y P.Federman, en: *Proceedings of the IX Workshop in Nuclear Physics*, eds.: A.O. Macchiavelli, H.M. Sofia, y E. Ventura (World Scientific, Singapore, 1987) p.428.
- [Are88a] G.E.Arenas Peris, y P.Federman, en: *X Reunión de Trabajo en Física Nuclear* (Buenos Aires, 1987), CNEA NT-3/88, p.57.
- [Are88b] G.E.Arenas Peris, y P.Federman, *Phys.Rev.* **C38**, 493 (1988).
- [Are88c] G.E.Arenas Peris, en: *Contemporary Topics in Nuclear Structure Physics*, eds.: R.F. Casten, A. Frank, M. Moshinsky, y S. Pittel (World Scientific, Singapore, 1988) p.663.
- [Are90] G.E.Arenas Peris, y P.Federman, en: *Proceedings of the XII Workshop on Nuclear Physics*, eds.: M.C. Cambiaggio, A.J. Kreiner, y E. Ventura (World Scientific, Singapore, 1990) p.351.
- [Ari70] A.Arima, V.Gillet, J.Ginocchio, *Phys.Rev.Lett.* **25**, 1043 (1970).
- [Ari71] A.Arima, e I.Hamamoto, *Ann.Rev.Nucl.Sci.*, **21**, 55 (1971).
- [Aue65] N.Auerbach, e I.Talmi, *Nucl.Phys.* **64**, 458 (1965).

B

- [Bes69] D.R.Bes, y R.A.Sorensen, en: *Advances in Nuclear Physics*, Vol.12, eds.: M.Baranger, y E.Vogt (Plenum, N.York, 1969) p.129.
- [Blo70] J.Blomqvist, *Phys.Lett.* **33B**, 541 (1970).
- [Bra72] M.Brack, J.Damgaard, N.S.Jensen, H.C.Pauli, V.M.Strutinsky, y C.Y.Wong, *Rev.Mod.Phys.* **44**, 61 (1972).
- [Bro66] G.E.Brown, y A.M.Green, *Nucl.Phys.* **75**, 401 (1966).
- [Bro77] J.Bron, W.H.A.Hesselink, H.Bedet, H.Verheul, y G.Vanden Berg, *Nucl.Phys.* **A279**, 365 (1977).

C

- [Cas85] R.F.Casten, *Phys.Rev.Lett.* **54**,1991(1985).
 [Cas90] R.F.Casten,D.J.Brenner,C.Wesselborg,y J.Y.Zhang,en:
Proceedings of the XII Workshop on Nuclear Physics,
 eds.:M.C.Cambiaggio,A.J.Kreiner,E.Ventura(World
 Scientific,Singapore,1990)p.310.
 [Che70] E.Cheifetz,R.C.Jared,S.G.Thompson,y J.B.Wilhelmy,
Phys.Rev.Lett. **25**,38(1970).

D

- [Dae83] W.W.Daehnick,*Phys.Rep.* **96**,317(1983).
 [Dav78] P.Davies,*The Runaway Universe*(Dent & Sons,London,
 1978).
 [Dob88] J.Dobaczewski,en:*Contemporary Topics in Nuclear
 Structure Physics*,eds.:R.F.Casten,A.Frank,M.
 Moshinsky,y S.Pittel(World Scientific,Singapore,
 1988)p.227.
 [Dup84] P.Van Duppen,E.Coenen,K.Deneffe,M.Huyse,K.Heyde,
 y P.Van Isacker,*Phys.Rev.Lett.* **52**,1974(1984).
 [Dup90] P.Van Duppen,P.Decroock,P.Dendooven,M.Huyse,G.Reusen,
 y J.Wauters,en:*Proceedings of the XII Workshop on
 Nuclear Physics*,eds.:M.C.Cambiaggio,A.J.Kreiner,y
 E.Ventura(World Scientific,Singapore,1990)p.161.

E

- [Eng89] J.Engel,P.Vogel,X.Ji,y S.Pittel,*Phys.Lett.* **225B**,5
 (1989).

F

- [Fed65] P.Federman,e I.Talmi,*Phys.Lett.* **19**,480(1965).
 [Fed69] P.Federman,en:*Cargèse Lectures in Physics* (Gordon &
 Breach,Paris,1969),Vol.3.
 [Fed79] P.Federman,y S.Pittel,*Phys.Rev.* **C20**,820(1979).
 [Fie77] H.W.Fielding,R.E.Anderson,C.D.Zafiratos,D.A.Lind,
 F.E.Cecil,H.H.Wieman,y W.P.Alford,*Nucl.Phys.* **A281**,
 389(1977).
 [Fie78] H.W.Fielding,R.E.Anderson,P.D.Kunz,D.A.Lind,C.D.Za-
 firatos,y W.P.Alford,*Nucl.Phys.* **A304**,520(1978).
 [Fly77] E.R.Flynn,y P.D.Kunz,*Phys.Lett.* **68B**,40(1977).

G

- [Glo75] D.H.Gloeckner,*Nucl.Phys.* **A253**,301(1975).
 [Goo77] A.L.Goodman,*Nucl.Phys.* **A287**,1(1977).

H

- [Hey76] K.Heyde,M.Waroquier,H.Vincx,y P.Van Isacker,

- Phys.Lett.**64B**,135(1976).
- [Hey83] K.Heyde,P.Van Isacker,M.Waroquier,J.L.Wood,y R.A. Mayer,Phys.Rep.**102**,291(1983).
- [Hey85] K.Heyde,P.Van Isacker,R.F.Casten,y J.L.Wood, Phys.Lett.**155B**,303(1985).
- [Hey86] K.Heyde,y J.Sau,Phys.Rev.C**33**,1050(1986).
- [Hey88] K.Heyde,en:*Contemporary Topics in Nuclear Structure Physics*,eds.:R.F.Casten,A.Frank,M.Moshinsky,y S.Pittel(World Scientific,Singapore,1988)p.183.
- [Hi188] J.C.Hill,F.K.Wohn,R.F.Petry,R.L.Gill,H.Mach,y M.Moszynski,en:*Nuclear Structure of the Zirconium Region*,eds.:J.Eberth,R.A.Meyer,y K.Sistemich (Springer-Verlag,Berlin,1988)p.64.
- [Huc90] H.Huck,A.Jech,G.Marti,M.L.Pérez,E.Seva,y H.M.Sofia, en:*Proceedings of the XII Workshop on Nuclear Physics*,eds.:M.C.Cambiaggio,A.J.kreiner,y E.Ventura (World Scientific,Singapore,1990)p.314.
- [Huy90] M.Huyse,P.Decroock,P.Dendooven,G.Reusen,P.Van Duppen, y J.Wauters,en:*Proceedings of the XII Workshop on Nuclear Physics*,eds.:M.C.Cambiaggio,A.J.Kreiner,y E.Ventura(World Scientific,Singapore,1990)p.361.

J

- [Joh78] I.P.Johnstone,y H.G.Benson,Phys.Rev.C**17**,311(1978).

K

- [Kan86] J.Kantele,M.Luontama,W.Trzaska,R.Julin,A.Passoja, y K.Heyde,Phys.Lett.**171B**,151(1986).
- [Kir90] E.D.Kirchuk,y P.Federman,en:*Proceedings of the XII Workshop on Nuclear Physics*,eds.:M.C.Cambiaggio,A.J. Kreiner,y E.Ventura(World Scientific,Singapore,1990) p.362.
- [Kre81] A.J.Kreiner,C.Baktash,G.García Bermúdez,y M.A.J.Marriscotti,Phys.Rev.Lett.**47**,1709(1981).
- [Kum85] A.Kumar,y M.R.Gunye,Phys.Rev.C**32**,2116(1985).

L

- [Led78] C.M.Lederer,y V.S.Shirley(eds.),*Table of Isotopes* (J.Wiley & Sons,N.York,1978).

M

- [Mac88] H.Mach,G.Molnár,S.W.Yates,R.L.Gill,A.Aprahamian, y R.A.Meyer,Phys.Rev.C**37**,254(1988).
- [Met81] B.C.Metsch,y P.W.M.Glaudemans,Nucl.Phys.A**352**,60 (1981).
- [Mey86] R.A.Meyer,E.A.Henry,L.G.Mann,y K.Heyde, Phys.Lett.**177B**,271(1986).
- [Mol88] G.Molnár,T.Belgya,B.Fazekas,A.Verés,S.W.Yates,

- E.W.Kleppinger,R.A.Gatenby,H.Mach,R.Julin,J.Kumpulainen,A.Passoja,y E.Verho,en:*Nuclear Structure of the Zirconium Region*,eds.:J.Eberth,R.A.Meyer,y K.Sistemich(Springer-Verlag,Berlin,1988)p.215.
- [Mul72] T.J.Mulligan,E.R.Flynn,O.Hansen,R.F.Casten,y R.K.Sheline,Phys.Rev.C6,1802(1972).

P

- [Pie85] W.F.Piel Jr.,P.Choudhury,U.Garg,M.A.Quader,P.M.Stwertka,S.Wajda,y D.B.Fossan,Phys.Rev.C31,456(1985).
- [Pre68] B.M.Preedom,E.Newman,y J.C.Hiebert,Phys.Rev.166,1156(1968).

R

- [Ram87] S.Raman,C.H.Malarkey,W.T.Milner,C.W.Nestor,Jr.,y P.H.Stelson,At.Data and Nucl.Data Tables 36,1(1987).
- [Rik88] J.Rikovska,N.J.Stone,D.Bonatsos,y W.B.Walters,en:*Contemporary Topics in Nuclear Structure Physics*,eds.:R.F.Casten,A.Frank,M.Moshinsky,y S.Pittel(World Scientific,Singapore,1988)p.659.
- [Rik90] J.Rikovska,N.J.Stone,W.B.Walters,y D.Bonatsos,en:*Proceedings of the XII Workshop on Nuclear Physics*,eds.:M.C.Cambiaggio,A.J.Kreiner,y E.Ventura(World Scientific,Singapore,1990)p.369.
- [Rin80] P.Ring,y P.Schuck,*The Nuclear Many-Body Problem*(Springer-Verlag,N.York,1980).
- [Rip69] G.Ripka,en:*Advances in Nuclear Physics*,Vol.12,eds.:M.Baranger,y E.Vogt(Plenum,N.York,1969)p.183.
- [Rot78] G.Rotbard,G.LaRana,M.Vergnes,G.Berrier,J.Kalifa,F.Guilbaut,y R.Tamisier,Phys.Rev.C18,86(1978).

S

- [Sau81] J.Sau,y K.Heyde,Phys.Rev.C23,2315(1981).
- [Sch76] J.P.Schiffer,y W.W.True,Rev.Mod.Phys.48,191(1976).
- [Sha59] A.de Shalit,e I.Talmi,*Nuclear Shell Theory*(Acad.Press,N.York,1959).
- [Sis88] K.Sistemich,en:*Contemporary Topics in Nuclear Structure Physics*,eds.:R.F.Casten,A.Frank,M.Moshinsky,y S.Pittel(World Scientific,Singapore,1988)p.207.
- [Sor84] R.A.Sorensen,Nucl.Phys.A420,221(1984).

T

- [Tal60] I.Talmi,e I.Unna,Ann.Rev.Nucl.Sci.10,353(1960).
- [Tal62] I.Talmi,Rev.Mod.Phys.34,704(1962).
- [Tal71] I.Talmi,Nucl.Phys.A172,1(1971).
- [Tal81] I.Talmi,Scuola Int.di Fisica "Enrico Fermi",Corso

LXXIX(North-Holland,Amsterdam,1981)p.172.

V

- [Ver88] M.Vergnes,en:*Contemporary Topics in Nuclear Structure Physics*,eds.:R.F.Casten,A.Frank,M.Moshinsky,y S.Pittel(World Scientific,Singapore,1988) p.243.

W

- [War88] D.D.Warner,en:*Contemporary Topics in Nuclear Structure Physics*,eds.:R.F.Casten,A.Frank,M.Moshinsky,y S.Pittel(World Scientific,Singapore,1988) p.667
- [Wen81] G.Wenes,P.Van Isacker,M.Waroquier,K.Heyde, y J.Van Maldeghem,Phys.Rev.C23,2291(1981).
- [Whi85] B.H.Whildenthal,en:*Nuclear Shell Models*,eds.:M.Valliers,y B.H.Whildenthal (World Scientific, Singapore,1985)p.346.

Z

- [Zam65] L.Zamick,Phys.Lett.33B,541(1965).
- [Zha89] J.Y.Zhang,R.F.Casten,y S.Brenner,Phys.Lett.227B,1 (1989).