Estimadores basados en rangos para modelos ARMA

Kelmansky, Diana M.

1990

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

ESTIMADORES BASADOS EN RANGOS PARA MODELOS ARMA

Autora
DIANA M. KELMANSKY

Director
Dr. Víctor J.Yohai

Trabajo presentado para optar al título de
Doctor de la Universidad de Buenos Aires

Agradezco

a Víctor Yohai por indicarme el camino,

a Nelly Ferretti por compartir tantos desencantos y tantas alegrías,

a mi esposo, Eduardo, y a mis hijos, Aureliano, Alejandra y Aníbal por sobrellevar mi ansiedad,

en este transitar hacia un trabajo de tesis.

ESTIMADORES BASADOS EN RANGOS PARA MODELOS ARMA

RESUMEN

En este trabajo se introduce una nueva familia de estimadores robustos para modelos ARMA. Estos estimadores pueden ser definidos reemplazando en las ecuaciones de mínimos cuadrados las autocovarianzas muestrales de los residuos por autocovarianzas basadas en rangos.

Se demuestra la normalidad asintótica de estos estimadores. Se estudian sus propiedades de eficiencia y robustez. Con una adecuada elección de las funciones de peso se obtienen estimadores altamente eficientes bajo normalidad y robustos en presencia de observaciones anómalas. Las funciones de peso también pueden elegirse de manera que los estimadores resultantes sean asintoticamente tan eficientes como los estimadores de máxima verosimilitud para una distribución dada.

Se realizó un estudio de Monte Carlo para observar las propiedades de robustez de los estimadores propuestos.

1. Introducción.

Sea $(Z_1, \ldots, Z_T)$ la serie observada de un modelo ARMA (p, q) estacionario e invertible, es decir,

$$\phi_0(B)(Z_t - \mu_0) = \theta_0(B)U_t \tag{1.1}$$

donde U_t son variables aleatorias independientes e identicamente distribuidas (i.i.d.) con distribución F, μ_0 es la media de Z_t, $\phi_0(B)$ y $\theta_0(B)$ son polinomios dados por

$$\phi_0(B) = 1 - \phi_{10}B \cdots - \phi_{p0}B^p$$

y

$$\theta_0(B) = 1 - \theta_{10}B \cdots - \theta_{q0}B^q$$

y B es el operador definido por $BZ_t = Z_{t-1}$.

Box y Jenkins (1970) propusieron estimadores (BJ–estimadores) para los parámetros del modelo ARMA (p, q) que son asintoticamente equivalentes a los estimadores de máxima verosimilitud bajo normalidad. El enfoque clásico de cuadrados mínimos consiste en minimizar la suma de cuadrados de los residuos (CM–estimadores). Es bien conocido que los BJ– y los CM–estimadores son asintoticamente equivalentes y eficientes cuando las variables U_t tienen distribución normal. Sin embargo ninguno de los métodos es robusto pues ambos son muy sensibles ante la presencia de algunas observaciones anómalas.

Se han propuesto varias clases de estimadores robustos para modelos ARMA. Denby y Martin (1979), Martin (1980) y Bustos (1982) han estudiado M-estimadores generales (GM–estimadores); Bustos y Yohai (1986) definen estimadores basados en las autocovarianzas de los residuos (RA–estimadores) para modelos ARMA; Martin (1981) propone los estimadores de máxima verosimilitud aproximados (AM–estimadores). Como revisión de la estimación robusta se sugiere ver Martin y Yohai (1985).

En este trabajo se introduce una nueva familia de estimadores basada en rangos. Estos estimadores se definen mediante argumentos similares a los utilizados para los RA–estimadores. La idea básica consiste en reemplazar en la expresión de los CM–estimadores las autocovarianzas muestrales de los residuos por autocovarianzas basadas en rangos. Los estimadores resultantes serán llamados RAR–estimadores.

Estos estimadores también pueden ser pensados como asociados a los estadísticos introducidos por Hallin y Puri (1988) para definir tests óptimos basados en rangos. Se ha demostrado que los RAR–estimadores tienen la misma eficiencia asintótica que los tests correspondientes y por lo tanto las funciones de peso o scores pueden elegirse de manera que los estimadores resultantes sean asintoticamente tan eficientes como los estimadores de máxima verosimilitud para una distribución F dada.

En la Sección 2 se introducen los RAR–estimadores. En la Sección 3 se establecen las suposiciones necesarias para probar los resultados asintóticos. En la Sección 4 se muestra la normalidad asintótica de los RAR–estimadores y su eficiencia asintótica. En la Sección 5 se dan los resultados de un estudio de Monte Carlo en el cual se comparan los CM–, los RA– y los RAR–estimadores bajo el modelo AR(1).

2. Estimadores basados en las autocovarianzas de los rangos de los residuos.

2.1 Definición de los RAR–estimadores.

Sea $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$ ($\boldsymbol{\phi} = (\phi_1, \ldots, \phi_p)$, $\boldsymbol{\theta} = (\theta_1, \ldots, \theta_q)$) el vector cuyas componentes son todos los parámetros autoregresivos y promedio móviles y sea $\boldsymbol{\lambda}_0$ el vector cuyas componentes son los correspondientes parámetros verdaderos. También, sean $s_h(\boldsymbol{\phi})$, $t_h(\boldsymbol{\theta})$ y $g_h(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$ ($0 \leq h < \infty$) los coeficientes del desarrollo en serie de los operadores $\boldsymbol{\phi}^{-1}(B)$, $\boldsymbol{\theta}^{-1}(B)$ y $\boldsymbol{\theta}^{-1}(B)\boldsymbol{\phi}(B)$ respectivamente.

Sean

$$U_t(\boldsymbol{\lambda}, \mu) = \sum_{i=0}^{t-1} g_i(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})(Z_{t-i} - \mu)\,, \quad p+1 \leq t \leq T \tag{2.1.1}$$

y

$$\gamma_i(\boldsymbol{\lambda}, \mu) = \sum_{t=p+1+i}^{T} U_t(\boldsymbol{\lambda}, \mu) U_{t-i}(\boldsymbol{\lambda}, \mu)\,, \quad 1 \leq i \leq T-p-1\,.$$

Bustos y Yohai (1986) han observado que las ecuaciones de cuadrados mínimos para los parámetros autoregresivos y promedio móviles son asintoticamente equivalentes al siguiente sistema de ecuaciones

$$(2.1.2) \qquad \begin{cases} \displaystyle\sum_{h=0}^{T-j-p-1} s_h(\boldsymbol{\phi})\, \gamma_{h+j}(\boldsymbol{\lambda},\mu) = 0\,, \quad 1 \le j \le p\,, \\ \displaystyle\sum_{h=0}^{T-j-p-1} t_h(\boldsymbol{\theta})\, \gamma_{h+j}(\boldsymbol{\lambda},\mu) = 0\,, \quad 1 \le j \le q\,, \\ \displaystyle\sum_{t=p+1+i}^{T} U_t(\boldsymbol{\lambda},\mu) = 0. \end{cases}$$

Bustos y Yohai (1986) propusieron una clase de estimadores basada en las autocovarianzas de los residuos (RA–estimadores) que están definidos reemplazando en (2.1.2) las autocovarianzas γ_i's por autocovarianzas robustas de los residuos de la forma

$$\sum_{t=p+1+i}^{T} \eta\left(\frac{U_t(\boldsymbol{\lambda},\mu)}{s}, \frac{U_{t-i}(\boldsymbol{\lambda},\mu)}{s}\right),$$

donde $\eta(u,v)$ es una función acotada y s es un estimador de la escala de las innovaciones. Hay dos formas canónicas de elegir η : (i) del tipo *Hampel-Krasker* : $\eta(u,v) = \psi(u\,v)$ y (ii) del tipo *Mallows* : $\eta(u,v) = \psi(u)\psi(v)$, donde ψ es una función impar y acotada.

Considérense ahora dos funciones generadoras de scores $J_i\,:\ [0,1] \to \Re\ i = 1,2$ que satisfacen $J_i(1-u) = -J_i(u)$ y sea $R_t(\boldsymbol{\lambda})$ el rango de $U_t(\boldsymbol{\lambda},\mu)$ entre $U_{p+1}(\boldsymbol{\lambda},\mu),\ldots,U_T(\boldsymbol{\lambda},\mu)$ (nótese que $R_t(\boldsymbol{\lambda})$ no depende de μ). Las autocovarianzas de orden i de los rangos de los residuos $\gamma_i^*(\boldsymbol{\lambda})$ se definen por

$$(2.1.3) \qquad \gamma_i^*(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda})) = \sum_{t=p+1+i}^{T} J_1\left(\frac{R_t(\boldsymbol{\lambda})}{T-p+1}\right) J_2\left(\frac{R_{t-i}(\boldsymbol{\lambda})}{T-p+1}\right), \quad 1 \le i \le T-p-1$$

donde $\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}) = (R_{p+1}(\boldsymbol{\lambda}),\ldots,R_T(\boldsymbol{\lambda}))$.

Luego los RAR–estimadores se definen en forma similar a los RA–estimadores reemplazando en las dos primeras ecuaciones de (2.1.2) los γ_i's por los γ_i^*'s dados por (2.1.3).

La lista siguiente muestra algunas elecciones interesantes de funciones generadoras de scores J_1 y J_2.

(i) $J_1 = J_2 = \Phi^{-1}$, donde Φ es la función de distribución normal estandar. Los RAR–estimadores basados en estas funciones son óptimos bajo normalidad.

(ii) $J_1(u) = 2u - 1$, $J_2(u) = \ell n(u/(1-u)$. Los RAR–estimadores basados en estas funciones son óptimos cuando F es logística.

(iii) $J_1(u) = \text{sign}(u - 1/2)$, $J_2(u) = F_e^{-1}(u)$, donde F_e es la función de distribución doble exponencial. Los RAR–estimadores basados en estas fuciones son óptimos cuando $F = F_e$.

(iv) $J_1(u) = J_2(u) = 2u - 1$.

(v) $J_1(u) = J_2(u) = \text{sign}(u - 1/2)$.

Se introduce la siguiente notación:

$$\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\lambda), \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) = (W_{T,1}(\mathbf{R}_T(\lambda), \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}), \ldots, W_{T,p+q}(\mathbf{R}_T(\lambda), \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}))\ ,$$

donde

$$W_{T,j}(\mathbf{R}_T(\lambda), \phi, \theta) = (T - j - p)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} \gamma^*_{h+j}(\mathbf{R}_T(\lambda)) s_h(\phi), \quad 1 \le j \le p\ ,$$

(2.1.4)

$$W_{T,p+j}(\mathbf{R}_T(\lambda), \phi, \theta) = (T - j - p)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} \gamma^*_{h+j}(\mathbf{R}_T(\lambda)) t_h(\theta), \quad 1 \le j \le q\ .$$

Luego los RAR–estimadores de λ_0, $\widehat{\lambda}_T$, se definen como una sucesión que satisface

$$T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\widehat{\lambda}_T), \widehat{\phi}_T, \widehat{\theta}_T) = 0. \tag{2.1.5}$$

Como $R_t(\lambda)$ no depende de μ el procedimiento propuesto permite obtener solamente estimadores para ϕ_0 y θ_0 pero no para μ_0. Una vez que $\widehat{\lambda}_T$ ha sido calculado utilizando (2.1.4), un estimador de μ_0 puede obtenerse eligiendo el $\widehat{\mu}_T$ tal que $\text{Loc}(U_t(\widehat{\lambda}_T, \widehat{\mu}_T)) = 0$ donde Loc define un estimador de locación, por ejemplo, puede utilizarse un R–estimador de locación.

2.2. Interpretación de los RAR–estimadores como CM–estimadores iterados.

En el caso en que $J_1 = J_2$, los RAR–estimdores pueden interpretarse como CM–estimadores iterados. Sea $\widehat{\lambda}_T$ el RAR–estimador, se definen residuos modificados U_t^*, $p + 1 \le t \le T$, por

$$U_t^* = J_1\left(\frac{R_t(\widehat{\lambda}_T)}{T - p + 1}\right) \tag{2.2.1}$$

y sea Z_t^* una observación del modelo ARMA (p,q) con parámetro $\widehat{\lambda}_T$ correspondiente a los residuos modificados, es decir,

$$Z_t^* = \sum_{h=0}^{t-p-1} g_h^*(\phi,\theta) U_{t-h}^*(\widehat{\lambda}_T) \tag{2.2.2}$$

donde $g_h^*(\phi,\theta)$ son los coeficientes del desarrollo en serie del operador $\phi^{-1}(B)\theta(B)$.

Luego, los residuos del proceso Z_t^*, $U_t^{**}(\widehat{\lambda}_T)$, satisfacen

$$U_t^{**}(\widehat{\lambda}_T) = U_t^* \; .$$

Como $\widehat{\lambda}_T$ satisface las ecuaciones (2.1.5), por (2.2.1) y (2.2.2) también se puede escribir

$$\begin{cases} \displaystyle\sum_{t=p+1+j}^{T} \sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\phi) \,.\, \mathrm{U}_t^*(\widehat{\lambda}_T) U_{t-h-j}^*(\widehat{\lambda}_T) = 0, \quad 1 \le j \le p, \\ \displaystyle\sum_{t=p+1+j}^{T} \sum_{h=0}^{t-j-p-1} t_h(\theta) \,.\, \mathrm{U}_t^*(\widehat{\lambda}_T) U_{t-h-j}^*(\widehat{\lambda}_T) = 0, \quad 1 \le j \le q, \end{cases} \tag{2.2.3}$$

y por lo tanto puede pensarse a $\widehat{\lambda}_T$ como el CM–estimador del proceso Z_t^*.

Esto sugiere el siguiente procedimiento iterativo para calcular los estimadores RAR:

(a) Se parte de un estimador $\widehat{\lambda}_T^{(0)}$.

(b) Suponiendo que $\widehat{\lambda}_T^{(i)}$ ya ha sido calculado, se define Z_t^* por (2.2.1) y (2.2.2), con $\widehat{\lambda}_T^{(i)}$ en vez de $\widehat{\lambda}_T$. Luego $\widehat{\lambda}_T^{(i+1)}$ es el CM–estimador asociado a la serie $(Z_1^*, \ldots, Z_T^*)$, éste se obtiene como solución de (2.2.3).

Si la sucesión $\widehat{\lambda}_T^{(i)}$ converge a $\widehat{\lambda}_T$, este será el RAR–estimador. El algoritmo es similar al descripto en Bustos y Yohai (1986) para los RA–estimadores. No se ha podido probar su convergencia, por esta razón no fue utilizado en el estudio de Monte Carlo.

3. Suposiciones básicas y notaciones.

Las siguientes suposiciones serán necesarias para probar los resultados sobre consistencia y normalidad asintótica.

Suposición A.

(i) U_t tiene momentos finitos hasta orden 3, con media $E(U_t) = 0$ y varianza $E(U_t^2) = \sigma^2$.

(ii) F es simétrica y continua.

(iii) $F(x)$ tiene una densidad $f(x)$ que es una función no creciente de $|x|$, estrictamente decreciente para pequeños valores de x, uniformemente continua y $\int_{-\infty}^{\infty} f^3(x)dx < \infty$.

(iv) f es derivable en c.t.p. y su derivada f' satisface: $\int_{-\infty}^{\infty} |f'(x)|dx < \infty$.

(v) f tiene información de Fisher $I(f)$ finita; es decir, f es absolutamente continua sobre intervalos finitos y $0 < I(f) = \int_{-\infty}^{\infty} (f'(x)/f(x))^2 f(x)dx < \infty$.

(vi) Sea $F^{-1}(u) = \inf\{x : F(x) \geq u\}$, $0 < u < 1$ y $\varphi(x) = -f'(x)/f(x)$, $x \in \Re$. Supóngase que $\varphi(x)$ is derivable en c.t.p. y su derivada $\varphi'(x)$ es Lipschitziana en c.t.p. y de cuadrado integrable: $|\varphi'(x) - \varphi'(y)| < K|x - y|$ y $\int_0^1 \varphi'^2(F^{-1}(u))du < \infty$.

Suposición B. Las dos funciones generadoras de scores J_i, $i = 1, 2$, satisfacen

(i) $\int_0^1 |J_i(u))|^4 du < \infty$.

(ii) $|d^j J_i(u)/du^j| \leq K(u(1-u))^{-j-1/4+\delta_l}$, $j = 0, 1$, $0 < u < 1$ para algún $\delta_l > 0$, $l = 1, 2$.

(iii) $J_i(1-u) = -J_i(u)$.

(iv) $J_i(F(v))$ son continuamente diferenciables y $|J_i(F(v))| \leq K|v|^m$ donde m puede ser 0 o 1.

(v) $J_i(F(v))$ tiene derivadas acotadas.

(vi) $E(J_1^{*\prime}(U_1)) \neq 0$ y $E(J_2(F(U_1))U_1) \neq 0$, donde $J_1^{*\prime}(v) = \partial J_1(F(v))/\partial v$.

(vii) $|J_i(u) - J_i(v)| \leq K|u - v|$, $0 < K < \infty$

Observación 3.1. Sea R_{p+1}, el rango de U_{p+1}, entre $U_{p+1}, \ldots, U_T$. De la suposición B(ii) se obtiene que

$$\lim_{T\to\infty} E\Big(\big(J_i(F(U_{p+1})) - J_i\big(\frac{R_{p+1}}{T-p+1}\big)\big)^4\Big) = 0.$$

La demostración de este resultado está dada en la Proposición 7.1 del Apéndice B.

Observación 3.2. Las suposiciones B(iv) y B(v) se satisfacen, por ejemplo, si $J_i(u) = \Phi^{-1}(u)$ y F es normal; también si $J_i(u) = 2u - 1$ y F es normal o logística; lo mismo ocurre si $J_i(u) = ln(u/(1-u))$ y F es logística, $i = 1, 2$.

4. Normalidad y eficiencia asintóticas.

En esta sección se establece la normalidad asintótica de los RAR-estimadores y se da su matriz de covarianza asintótica.

Sea C la matriz simétrica de $(p+q) \times (p+q)$ dada por

$$
\begin{aligned}
C_{i,j} &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k(\boldsymbol{\phi}_0) s_{k+j-i}(\boldsymbol{\theta}_0), \qquad && i \le j \le p, \\
C_{i,p+j} &= \sum_{k=0}^{\infty} t_k(\boldsymbol{\theta}_0) s_{k+j-i}(\boldsymbol{\phi}_0), \qquad && i \le p,\ j \le q,\ i \le j, \\
C_{i,p+j} &= \sum_{k=0}^{\infty} s_k(\boldsymbol{\phi}_0) t_{k+j-i}(\boldsymbol{\theta}_0), \qquad && i \le p,\ j \le q,\ j \le i, \\
C_{p+i,p+j} &= \sum_{k=0}^{\infty} t_k(\boldsymbol{\theta}_0) t_{k+j-i}(\boldsymbol{\phi}_0), \qquad && i \le j \le q,
\end{aligned}
\tag{4.1}
$$

y sea η el escalar dado por

$$\eta = \frac{E\,(J_1^2(F(U_1)))E(J_2^2(F(U_1)))}{E^2(J_1^{*\prime}(U_1))E^2(J_2(F(U_1))U_1)}. \tag{4.2}$$

El siguiente teorema establece la normalidad asintótica de los RAR-estimadores.

TEOREMA 4.1. Sean $Z_1, \ldots, Z_T$ observaciones correspondientes a un proceso $AR(p)$ estacionario y supóngase que A y B son válidas. Si además, $\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_T$ es una sucesión de estimadores que satisface

$$T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_T), \widehat{\boldsymbol{\phi}}_T, \widehat{\boldsymbol{\theta}}_T) \xrightarrow{p} 0, \text{cuando } T \to \infty \tag{4.3}$$

y tal que $T^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_T - \boldsymbol{\lambda}_0)$ está acotada en probabilidad, entonces

$$T^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_T - \boldsymbol{\lambda}_0) \xrightarrow{\mathcal{D}} N(\mathbf{0}, \eta\, C^{-1}), \quad \text{cuando } T \to \infty\,.$$

La demostración de este Teorema está dada en el Apéndice A (Sección 6).

OBSERVACIÓN 4.1. Se ha podido probar el Teorema 4.1 solamente en el caso AR(p); se conjetura que el resultado también es válido en el caso general del modelo ARMA(p, q). El único resultado demostrado para el caso AR(p) solamente es el de la Proposición 6.2.4. Esta proposición da la equivalencia asintótica uniforme entre el sistema de ecuaciones de un RAR–estimador y otro sistema correspondiente a un RA-estimador. Sin embargo, el resultado vale en general para un modelo ARMA(p, q) sin la condición de uniformidad (véase la Proposición 6.2.3).

OBSERVACIÓN 4.2. La suposición B(vii) del Teorema 4.1 es muy restrictiva. Esta suposición es satisfecha por las funciones generadoras de los scores de Wilcoxon, $J_i(u) = 2u - 1$, pero no por las función generadora de los scores normales, $J_i(u) = \Phi^{-1}(u)$. Esta suposición es utilizada también solamente en la demostración de la Proposición 6.2.4. Teniendo en cuenta los resultados de Monte Carlo se conjetura que el Teorema 4.1 vale bajo suposiciones más débiles que incluyan $J_1(u) = J_2(u) = \Phi^{-1}(u)$.

OBSERVACIÓN 4.3. El Teorema 4.1 requiere que $T^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{\lambda}}_T - \boldsymbol{\lambda}_0)$ sea acotado en probabilidad. La Proposición 6.2.4 muestra la existencia de una sucesión que satisface (4.3) y la condición de acotabilidad.

Como C^{-1} es la matriz de covarianza de los CM–estimadores, la matriz de covarianzas asintótica de los RAR–estimadores difiere de la de los CM–estimadores en el factor escalar η. Luego, la eficiencia asintótica relativa de los RAR–estimadores respecto a los CM–estimadores, cuando la distribución de las innovaciones es F, está dada por

$$e_F(\text{RAR, LS}) = \frac{E^2(J_1'(U_1))E^2(J_2(F(U_1))U_1)}{E(J_1^2(F(U_1)))E(J_2^2(F(U_1)))}\,. \tag{4.4}$$

Hallin, Ingenbleek y Puri (1985), y Hallin y Puri (1988), encontraron la misma eficiencia asintótica para tests basados en los estadísticos $\mathbf{W}_T$. También encontraron que las funciones de peso óptimas están dadas por

$$J_1 = \varphi(F^{-1})\,, \quad J_2 = F^{-1}, \tag{4.5}$$

donde φ está definida en la suposición A(vi). Los RAR–estimadores, con estas funciones de peso, tienen la misma eficiencia asintótica que los estimadores de máxima verosimilitud. En la Sección 2 se han introducido los scores o funciones de peso, óptimos, correspondientes a F normal, logística o doble exponencial. En particular cuando los scores están dados por (4.5) y F es normal tenemos $e_F(RAR, CM) = 1$.

La Tabla 1 muestra los valores de $e_F(RAR, CM)$ para varias funciones de peso y varios tipos de densidades. Se han considerado funciones de peso óptimas de la forma (4.7) para las distribuciones normal, logística y exponencial. También se han considerado funciones de peso de la forma

$$J_1 = J_2 = \varphi(F^{-1}). \tag{4.6}$$

Los RAR–estimadores basados en funciones de peso de esta forma son un poco menos eficientes que los óptimos dados por (4.5). Sin embargo, en el caso en que F es la distribución logística o doble exponencial, las funciones dadas por (4.6) son acotadas y esto las hace, como se verá más adelante, más robustas. Más aun, cuando estas funciones son de la forma (4.6) se podría utilizar el algoritmo de cálculo dado en la Sección 2.2. En el caso en que F es normal las funciones dadas por (4.5) y (4.6) son las mismas.

La Tabla 1 ilustra la ganancia en eficiencia que se obtiene cuando se utilizan los estimadores RAR.

TABLA 1. Valores de $\mathbf{e_F}$(RAR,CM)

Funciones Generadoras de Scores J_1, J_2	Tipos de Densidades		
	Normal	Logística	Doble Exponencial
$J_1(u) = J_2(u) = \Phi^{-1}(u)$	1	1.0389	1.2263
$J_1 = 2u - 1,\ J_2(u) = \ln(u/(1-u))$	0.9472	1.0966	1.4833
$J_1 = J_2 = 2u - 1$	0.9109	0.9976	1.2656
$J_1(u) = J_2(u) = \text{sign}(u - \frac{1}{2})$	0.4053	0.4805	1
$J_1(u) = \text{sign}(u - \frac{1}{2}),\ J_2(u) = F_e^{-1}(u)$	0.6131	0.8133	2

5. El Estudio de Monte Carlo.

5.1. Descripción del Estudio.

En esta sección se muestran los resultados de un estudio de Monte Carlo en el que se comparan los CM–, RA– y RAR–estimadores para el caso AR(1) sin outliers (puramente Gaussiano) y también se consideran dos tipos de outliers u observaciones anómalas (ver Denby Martin 1979):

(a) *Outliers en las Innovaciones.* Las U_t tienen una distribución normal contaminada F; es decir,

$$F(x) = (1 - \varepsilon)\Phi(x) + \varepsilon\Phi(x/\tau)$$

donde Φ es la distribución normal estandar, ε es chico y $\tau \geq 1$.

En este caso, Z_t es un proceso ARMA (p, q) perfectamente observado. El caso Gaussiano original corresponde a $\varepsilon = 0$.

(b) *Outliers Aditivos.* El modelo AR(1), con outliers aditivos (AROA) utilizado en este estudio de Monte Carlo, supone que las observaciones $(Z_1, \ldots, Z_T)$ satisfacen

$$Z_t = W_t + V_t \quad 1 \leq t \leq T,$$

donde W_t es un modelo AR(1) Gaussiano, es decir,

$$W_t = \phi W_{t-1} + U_t \quad 1 \leq t \leq T,$$

donde las U_t son variables aleatorias i.i.d. con distribución N(0,1). Las variables V_t, $1 \leq t \leq T$ son i.i.d. y tienen distribución

$$H = (1 - \varepsilon)\delta_0 + \varepsilon\, \mathrm{N}(0, \tau^2),$$

donde δ_0 es la distribución que asigna probabilidad 1 al origen . Luego una fracción $1 - \varepsilon$ de las veces Z_t coincide con el modelo AR(1) Gaussiano W_t y el resto de las veces Z_t es igual a W_t más algún ruido Gaussiano V_t. El caso Gaussiano puro corresponde a $\varepsilon = 0$.

En el estudio de Monte Carlo se han considerado RAR–estimadores con $J_1 = J_2 = J$; para tres funciones J: (i)$J(u) = \Phi^{-1}(u)$, (ii) $J(u) = 2u - 1$, (iii) $J(u) = \mathrm{sign}(u - 1/2)$. Estos estimadores son comparados con los RA–estimadores del tipo Mallows basados en la familia de Huber

$$\psi_{H,c}(u) = \text{sign}(u)\min(|u|, c).$$

Se han considerado 3 valores de las constantes c de calibración: 1.345, .99 y el caso límite en el cual $c \to 0$, que es equivalente a tomar $\psi(u) = \text{sign}(u)$. Estos valores de c fueron elegidos de manera que los RA–estimadores correspondientes tengan aproximadamente la misma eficiencia asintótica bajo el modelo Gaussano puro que los RAR–estimadores seleccionados

Para cada estimador se obtienen los estimadores de Monte Carlo de la media (Media), el error cuadrático medio (ECM), la eficiencia relativa del estimador con respecto al estimador de CM (Ef), esto es, el cociente entre el ECM del CM– estimador y el ECM del correspondiente estimador. Se tomó una muestra de tamaño 100 y se realizaron 300 replicaciones. Más aun, para cada estimador se obtuvo una estimación de su valor asintótico (VA) bajo el modelo con outliers aditivos calculada utilizando una muestra de tamaño 10000.

Se tomaron dos valores para ϕ_{10}: 0,5 y 0,8.

Se utilizaron varias rutinas dadas en Press, Flannery, Teukolsky y Vetterling (1986): RAN1 (generador de números al azar), GASDEV (generador de la distribución normal estandar), RANK (ordenamiento de un vector) and ZBRAK (acotación de una raiz). Los programas fueron escritos en FORTRAN y procesados en una computadora VAX 11, 750 del centro de cómputos de la FCEyN de la UBA.

5.2. Discusión de los resultados.

La Tabla 2 muestra los resultados del estudio de Monte Carlo bajo un modelo AR(1) Gausiano. Las Tabla 3 y 4 muestran los resultados del estudio de Monte Carlo bajo un modelo AR(1) Gausiano con outliers en las innovaciones para $\varepsilon = 0.05$ y $\tau = 10$ ó $\varepsilon = 0.1$ y $\tau = 3$. Se observa que los resultados están de acuerdo con el hecho de que los CM–estimadores no son muy sensibles ante la presencia de outliers en las innovaciones.

Las Tablas 5, 6, 7 y 8 dan los resultados bajo el modelo AR(1) Gausiano con outliers aditivos (AROA) para $\varepsilon = 0.05$ ó 0.1 y $\tau = 3$ ó 10.

Se observa que los RA– y los RAR–estimadores son mucho más robustos que los CM–

estimadores en presencia de outliers aditivos. Sin embargo, a igual eficiencia bajo un modelo AR(1) Gausiano perfectamente observado, los RA–estimadores se comportan en forma más robusta que los correspondientes RAR–estimadores. El RAR–estimador basado en $J = \Phi^{-1}$ es más sensible ante la presencia de outliers que los otros dos; esto se explica por el hecho de que Φ^{-1} no es acotada. Sin embargo este estimador tiene un comportamiento más robusto que el CM–estimador.

La Tabla 9 muestra los valores asintóticos estimados, bajo el modelo AROA con $\epsilon = 0.05$ ó 0.1 y $\tau = 3$ ó 10. Aquí corresponden comentarios similares a los hechos para las Tablas 4 y 5.

Los resultados de Monte Carlo precedentes llevan a la conclusión que, para outliers aditivos, los RAR–estimadores tienen buenas propiedades de robustez para el modelo AR(1) cuando las funciones de peso son elegidas adecuadamente.

Debido a que las eficiencias que se obtuvieron para el tamaño de muestra 100 presentan diferencias significativas con las asintóticas de la Tabla 1, también se realizó un estudio de Monte Carlo con 500 replicaciones y muestras de tamaño 500 para el modelo AR(1) Gausiano. Las eficiencias relativas de los RAR–estimadores con respecto a la de los CM–estimadores obtenidas en este estudio se muestran en la Tabla 10 y son similares a las eficiencias presentadas en la Tabla 1.

TABLA 2. Resultados de Monte Carlo para el modelo AR(1) Gausiano

	$\phi_{10} = 0.5$			$\phi_{10} = 0.8$		
Estimadores	Media	ECM	Eficiencia	Media	ECM	Eficiencia
CM	0.48	0.83	1.00	0.78	0.49	1.00
RA (c=1.345)	0.48	0.91	0.91	0.78	0.51	0.96
RAR (J(u)=$\Phi^{-1}(u)$)	0.48	0.93	0.89	0.78	0.52	0.93
RA (c=0.990)	0.48	1.00	0.83	0.78	0.56	0.87
RAR (J(u)=$2u-1$)	0.48	0.97	0.86	0.78	0.61	0.80
RA ($\Psi(u) = \mathrm{sign}(u)$)	0.47	1.92	0.43	0.78	1.02	0.48
RAR (J(u)=$\mathrm{sign}(u-\frac{1}{2})$)	0.47	1.96	0.42	0.79	0.94	0.52

TABLA 3. Resultados de Monte Carlo para el modelo AR(1) Gausiano con outliers en las innovaciones

	$\phi_{10} = 0.5$					
	$\varepsilon = 0.10 \quad \tau = 3$			$\varepsilon = 0.05 \quad \tau = 10$		
Estimadores	Media	ECM	Ef	Media	ECM	Ef
CM	0.47	0.87	1.00	0.48	0.67	1.00
RA (c=1.345)	0.47	0.85	1.02	0.48	0.58	1.15
RAR (J(u)=$\Phi^{-1}(u)$)	0.47	0.85	1.02	0.48	0.50	1.32
RA (c=0.990)	0.47	0.96	0.90	0.48	0.69	0.96
RAR (J(u)=$2u-1$)	0.47	0.89	0.97	0.48	0.63	1.06
RA ($\Psi(u) = \text{sign}(u)$)	0.46	1.73	0.50	0.48	1.49	0.45
RAR (J(u)=sign$(u-\frac{1}{2})$)	0.46	2.44	0.35	0.48	1.43	0.47

TABLA 4. Resultados de Monte Carlo para el modelo AR(1) Gausiano con outliers en las innovaciones

	$\phi_{10} = 0.8$					
	$\varepsilon = 0.10 \quad \tau = 3$			$\varepsilon = 0.05 \quad \tau = 10$		
Estimadores	Media	ECM	Ef	Media	ECM	Ef
CM	0.77	0.50	1.00	0.78	0.38	1.00
RA (c=1.345)	0.77	0.53	0.94	0.79	0.35	1.08
RAR (J(u)=$\Phi^{-1}(u)$)	0.78	0.57	0.87	0.79	0.38	0.99
RA (c=0.990)	0.78	0.56	0.89	0.79	0.41	0.91
RAR (J(u)=$2u-1$)	0.78	0.63	0.82	0.79	0.45	0.82
RA ($\Psi(u) = \text{sign}(u)$)	0.78	1.06	0.47	0.79	1.67	0.22
RAR (J(u)=sign$(u-\frac{1}{2})$)	0.78	1.98	0.25	0.79	1.89	0.20

TABLA 5. **Resultados de Monte Carlo para el modelo AR(1) Gausiano con outliers aditivos**

	$\phi_{10} = 0.5$					
	$\varepsilon = 0.10 \quad \tau = 3$			$\varepsilon = 0.05 \quad \tau = 10$		
Estimadores	Media	ECM	Ef	Media	ECM	Ef
CM	0.30	5.29	1.00	0.14	14.11	1.00
RA (c=1.345)	0.39	2.51	2.10	0.40	2.28	6.17
RAR (J(u)=$\Phi^{-1}(u)$)	0.35	3.42	1.54	0.32	4.60	3.06
RA (c=0.990)	0.40	2.28	2.31	0.39	2.01	6.99
RAR (J(u)=$2u-1$)	0.36	2.98	1.77	0.37	3.21	4.38
RA ($\Psi(u) = \text{sign}(u)$)	0.40	4.12	1.28	0.41	3.16	4.46
RAR (J(u)=sign$(u-\frac{1}{2})$)	0.41	3.30	1.60	0.41	3.14	4.48

TABLA 6. **Resultados de Monte Carlo para el modelo AR(1) Gausiano con outliers aditivos**

	$\phi_{10} = 0.5$					
	$\varepsilon = 0.05 \quad \tau = 3$			$\varepsilon = 0.10 \quad \tau = 10$		
Estimadores	Media	ECM	Ef	Media	ECM	Ef
CM	0.38	2.76	1.00	0.07	19.00	1.00
RA (c=1.345)	0.44	1.40	1.97	0.31	5.26	3.60
RAR (J(u)=$\Phi^{-1}(u)$)	0.41	1.80	1.53	0.22	9.76	1.94
RA (c=0.990)	0.45	1.40	1.96	0.34	4.38	4.33
RAR (J(u)=$2u-1$)	0.44	1.48	1.86	0.26	7.29	2.60
RA ($\Psi(u) = \text{sign}(u)$)	0.43	3.31	0.83	0.33	4.71	4.03
RAR (J(u)=sign$(u-\frac{1}{2})$)	0.44	2.81	0.98	0.35	4.82	3.93

TABLA 7. Resultados de Monte Carlo para el modelo AR(1) Gausiano con outliers aditivos

	$\phi_{10} = 0.8$					
	$\varepsilon = 0.10 \quad \tau = 3$			$\varepsilon = 0.05 \quad \tau = 10$		
Estimadores	Media	ECM	Ef	Media	ECM	Ef
CM	0.59	5.83	1.00	0.34	24.60	1.00
RA (c=1.345)	0.71	1.91	3.04	0.77	1.83	13.44
RAR (J(u)=$\Phi^{-1}(u)$)	0.72	2.79	2.08	0.76	2.86	8.59
RA (c=0.990)	0.69	3.54	1.64	0.68	2.38	10.33
RAR (J(u)=$2u-1$)	0.69	2.33	2.50	0.69	2.41	10.18
RA ($\Psi(u) = \mathrm{sign}(u)$)	0.74	1.74	3.35	0.73	1.84	13.36
RAR (J(u)=$\mathrm{sign}(u-\frac{1}{2})$)	0.70	2.53	2.29	0.72	1.92	12.79

TABLA 8. Resultados de Monte Carlo para el modelo AR(1) Gausiano con outliers aditivos

	$\phi_{10} = 0.8$					
	$\varepsilon = 0.05 \quad \tau = 3$			$\varepsilon = 0.10 \quad \tau = 10$		
Estimadores	Media	ECM	Ef	Media	ECM	Ef
CM	0.67	2.81	1.00	0.20	37.77	1.00
RA (c=1.345)	0.74	1.72	1.63	0.75	3.41	11.08
RAR (J(u)=$\Phi^{-1}(u)$)	0.75	1.76	1.59	0.77	5.49	6.87
RA (c=0.990)	0.74	1.68	1.67	0.61	4.92	7.67
RAR (J(u)=$2u-1$)	0.73	1.46	1.91	0.58	7.25	5.20
RA ($\Psi(u) = \mathrm{sign}(u)$)	0.75	1.40	2.00	0.70	3.61	10.46
RAR (J(u)=$\mathrm{sign}(u-\frac{1}{2})$)	0.73	1.71	1.64	0.66	3.73	10.12

TABLA 9. Resultados de Monte Carlo para el modelo AR(1) Gausiano con outliers aditivos y tamaño de muestra 10000

	$\phi_{10} = 0.5$				$\phi_{10} = 0.8$			
	$\tau = 3$		$\tau = 10$		$\tau = 3$		$\tau = 10$	
Estimadores	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.10$	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.10$	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.10$	$\varepsilon = 0.05$	$\varepsilon = 0.10$
CM	0.35	0.28	0.07	0.04	0.67	0.59	0.24	0.15
RA (c=1.345)	0..45	0.40	0.41	0.32	0.77	0.73	0.76	0.70
RAR (J(u)=$\Phi^{-1}(u)$)	0.40	0.33	0.30	0.17	0.73	0.67	0.68	0.52
RA (c=0.990)	0.45	0.41	0.43	0.35	0.78	0.74	0.77	0.72
RAR (J(u)=$2u-1$)	0.44	0.38	0.39	0.27	0.76	0.72	0.75	0.65
RA ($\Psi(u) = \mathrm{sign}(u)$)	0.47	0.42	0.46	0.39	0.79	0.76	0.79	0.75
RAR (J(u)=sign($u - \frac{1}{2}$))	0.47	0.42	0.46	0.38	0.79	0.76	0.78	0.74

TABLA 10. Resultados de Monte Carlo para el modelo AR(1) Gausiano con tamaño de muestra 500

	$\phi_{10} = 0.5$			$\phi_{10} = 0.8$		
Estimadores	Media	ECM	Ef	Media	ECM	Ef
CM	0.497	0.174	1.000	0.796	0.081	1.000
RAR (J(u)=$\Phi^{-1}(u)$)	0.497	0.179	0.972	0.796	0.084	0.964
RAR (J(u)=$2u-1$)	0.497	0.195	0.892	0.796	0.092	0.880
RAR (J(u)=sign($u - \frac{1}{2}$))	0.497	0.410	0.424	0.796	0.202	0.400

6. Apéndice A.

6.1. Notación y Definiciones. Sin pérdida de generalidad se puede suponer $\mu_0 = 0$.

Dado $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_h) \in \Re^h$, $\boldsymbol{\beta}(B)$ denota el operador polinomial $\boldsymbol{\beta}(B) = 1 - \beta_1 B - \cdots - \beta_h B^h$, donde 1 es el operador identidad y B es el operador "backward shift".

Sea

$$R^{*h} = \{\boldsymbol{\beta} \in \Re^h : \boldsymbol{\beta}(B) \text{ tiene todas sus raices con valor absoluto} > 1\} .$$

Como Z_t es estacionario $\boldsymbol{\phi}_0 \in R^{*p}$ y como es invertible $\boldsymbol{\theta}_0 \in R^{*q}$.

Dados $\boldsymbol{\phi} \in R^{*p}$ y $\boldsymbol{\theta} \in R^{*q}$ sea g_i definido como al comienzo de la Sección 2.1, es decir, por

$$\boldsymbol{\theta}^{-1}(B)\boldsymbol{\phi}(B) = \sum_{i=0}^{\infty} g_i(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) B^i .$$

En general se indicará con K a las constantes mientras no sea fuente de confusiones.

Es fácil probar que las fuciones g_i son continuamente diferenciables para $\boldsymbol{\phi} \in R^{*p}$ y $\boldsymbol{\theta} \in R^{*q}$. Más aun, dados los conjuntos compactos $C_1 \subset R^{*p}$ y $C_2 \subset R^{*q}$, existen $K > 0$ y $0 < b < 1$ tales que

$$\text{(6.1.1)} \qquad \sup\left\{|g_i(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})| : \boldsymbol{\phi} \in C_1,\ \boldsymbol{\theta} \in C_2\right\} \leq K b^i$$

$$\text{(6.1.2)} \qquad \sup\left\{\frac{|\partial g_i(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})|}{\partial \phi_l} : \boldsymbol{\phi} \in C_1,\ \boldsymbol{\theta} \in C_2\right\} \leq K b^i, \quad 1 \leq l \leq p$$

$$\text{(6.1.3)} \qquad \sup\left\{\frac{|\partial g_i(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})|}{\partial \theta_l} : \boldsymbol{\phi} \in C_1,\ \boldsymbol{\theta} \in C_2\right\} \leq K b^i, \quad 1 \leq l \leq q.$$

Dado $\boldsymbol{\lambda} = (\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})$, se definen los residuos de orden k por

$$\text{(6.1.4)} \qquad U_t^{(k)}(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=0}^{k} g_i(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) Z_{t-i} , \quad 1 \leq k \leq \infty .$$

Nótese que de (2.1.2) y de (6.1.4) resulta inmediatamente

$$U_t(\boldsymbol{\lambda}) = U_t^{(t-1)}(\boldsymbol{\lambda}), \qquad p + 1 \leq t \leq T.$$

Sea

$$\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}) = (U_{p+1}(\boldsymbol{\lambda}), \ldots, U_T(\boldsymbol{\lambda})),$$

$$W^*_{T,j}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}) = (T-p-j)^{-1}\sum_{h=0}^{T-j-p-1}\sum_{t=p+1+h+j}^{T} J_1(F(U_t(\boldsymbol{\lambda})))J_2(F(U_{t-h-j}(\boldsymbol{\lambda})))s_h(\boldsymbol{\phi})$$

para $1 \leq j \leq p$ y

$$W^*_{T,p+j}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}) = (T-p-j)^{-1}\sum_{h=0}^{T-j-p-1}\sum_{t=p+1+h+j}^{T} J_1(F(U_t(\boldsymbol{\lambda})))J_2(F(U_{t-h-j}(\boldsymbol{\lambda})))t_h(\boldsymbol{\theta})$$

para $1 \leq j \leq q$. Finalmente se denota

$$\mathbf{W}^*_T(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}) = (W^*_{T,1}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}),\ldots,W^*_{T,p+q}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta})).$$

Obsérvese que las ecuaciones de los RA–estimadores con $\eta(u,v) = J_1(u)J_2(v)$ se pueden escribir como

$$\mathbf{W}^*_T(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{0}.$$

Sea R_j, el rango de U_j, $p+1 \leq j \leq T$, entre $U_{p+1},\ldots,U_T$, luego sea $\mathbf{R}_T = (R_{p+1},\ldots,R_T)$ y $\mathbf{U}_T = (U_{p+1},\ldots,U_T)$ También, sean $\mathbf{A}_1 \in \Re^p$, $\mathbf{A}_2 \in \Re^q$ y $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2) \in \Re^{p+q}$. En lo que sigue se considerán $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}$, $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}_1$ y $\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}_2$.

6.2. Distribución asintótica de los RAR- estimadores. Primero, en la Proposición 6.2.1, se muestra que $T^{1/2}(\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T,\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{W}^*_T(\mathbf{U}_T,\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}))$ converge en probabilidad a 0 cuando $T\to\infty$. Luego, mediante la noción de contiguidad (Proposición 6.2.2), se prueba en la Proposición 6.2.3, que $T^{1/2}(\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{W}^*_T(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}))$ converge in probabilidad a 0 cuando $T\to\infty$. En la Proposición 6.2.4 se muestra la equivalencia asintótica uniforme de $T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},0)$ y $T^{1/2}\mathbf{W}^*_T(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},0)$ cuando $\|\mathbf{A}\| \leq A_0$, para cualquier $A_0 > 0$. Finalmente se concluye la normalidad asintótica de los RAR–estimadores y se obtiene su matriz de covarianza asintótica aplicando los resultados sobre la normalidad asintótica de los RA–estimadores.

LEMA 6.2.1. Sea $a_T(i,j)$ una función de dos variables reales dada definida sobre $N_{T-p} \times N_{T-p}$ donde $N_{T-p} = \{1, 2, \dots, T-p\}$ y sea

$$\zeta_i = \sum_{t=p+1+i}^{T} a(R_t, R_{t-i}), \quad 1 \le i \le T-p-1,$$

entonces

(i)

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\zeta_i) &= (T-p-i)\operatorname{Var}(a_T(R_{P+1+i}, R_{p+1})) \\ &+ 2(T-p-2i)\operatorname{Cov}(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1}),\, a_T(R_{p+2i+1}, R_{p+1+i})) \\ &+ [(T-p-i)(T-p-i-3)+2i]\operatorname{Cov}(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1}),\, a_T(R_{p+3i+1}, R_{p+2i+1})),\end{aligned}$$

(ii)

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\zeta_i) &\le 3(T-p-i)\operatorname{Var}(a_T(R_{p+2}, R_{p+1})) \\ &+ T(T-p-i)\operatorname{Cov}(a_T(R_{p+4}, R_{p+3}),\, a_T(R_{p+2}, R_{p+1})),\end{aligned}$$

(iii)

$$\begin{aligned}&|\operatorname{Cov}(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1}),\, a_T(R_{p+3i+1}, R_{p+2i+1}))| \\ &\le K_T\, E[a_T^2(R_{p+1+i}, R_{p+1})],\end{aligned}$$

donde K_T es $O(T^{-1})$ cuando $T \to \infty$.

DEMOSTRACIÓN:

Demostración de (i).

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}(\zeta_i) =& (T-p-i)\operatorname{Var}(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})) + \\ & \sum_{t=p+1+i}^{T} \sum_{t \ne t'} \sum_{t'=p+1+i}^{T} \operatorname{Cov}(a_T(R_t, R_{t-i}), a_T(R_{t'}, R_{t'-i})).\end{aligned}$$

Para acotar la doble sumatoria se consideran los valores de los índices que dan lugar a diferentes covarianzas:

(a) $t-i=t'$, $t'-i=t$. Absurdo.

(b) $t-i=t'$. Resulta

$$\mathrm{Cov}(a_T(R_t,R_{t-i}),a_T(R_{t'},R_{t'-i}))=\mathrm{Cov}(a_T(R_{p+1+2i},R_{p+1+i}),a_T(R_{p+1+i},R_{p+1})).$$

Hay $(T-p-2i)$ covarianzas de esta forma.

(c) $t=t'-i$. Por lo tanto

$$\mathrm{Cov}(a_T(R_t,R_{t-i}),a_T(R_{t'},R_{t'-i}))=\mathrm{Cov}(a_T(R_{p+1+i},R_{p+1}),a_T(R_{p+1+2i},R_{p+1+i})).$$

Existen $(T-p-2i)$ covarianzas de esta forma.

(d) $t\neq t'$, $t'\neq t-i$, $t\neq t'-i$. En este caso

$$\mathrm{Cov}(a_T(R_t,R_{t-i}),a_T(R_{t'},R_{t'-i}))=\mathrm{Cov}(a_T(R_{p+1+i},R_{p+1}),a_T(R_{p+1+3i},R_{p+1+2i})).$$

Existen $(T-p-i)(T-p-i-3)+2i$ covarianzas de esta forma.

Luego

$$\sum_{t=p+1+i}^{T}\ \sum_{t\neq t'\ \ t'=p+1+i}^{T}\mathrm{Cov}(a_T(R_t,R_{t-i}),a_T(R_{t'},R_{t'-i}))=$$
$$\sum_{t=p+1+2i}^{T}\mathrm{Cov}(a_T(R_t,R_{t-i}),a_T(R_{t-i},R_{t-2i}))+$$
$$\sum_{t'=p+1+2i}^{T}\mathrm{Cov}(a_T(R_{t'-i},R_{t'-2i}),a_T(R_{t'},R_{t'-i}))+$$
$$\sum_{t=p+1+2i}^{T}\ \sum_{t\neq t'\ t'\neq t-i\ t\neq t'-i\ \ t'=p+1+i}^{T}\mathrm{Cov}(a_T(R_t,R_{t-i}),a_T(R_{t'},R_{t'-i}))$$
$$=2(T-p-2i)\mathrm{Cov}(a_T(R_{p+1+2i},R_{p+1+i}),a_T(R_{p+1+i},R_{p+1}))$$
$$((T-p-i)(T-p-i-3)+2i)\mathrm{Cov}(a_T(R_{p+1+i},R_{p+1}),a_T(R_{p+1+3i},R_{p+1+2i})).$$

Demostración de (ii). La cota de la varianza de ζ_i se obtiene inmediatamente de (i),

$$\begin{aligned}|\mathrm{Cov}(a_T(R_{p+1+2i},R_{p+1+i}),&a_T(R_{p+1+i},R_{p+1}))|\\ &\leq\left(\mathrm{Var}(a_T(R_{p+1+2i},R_{p+1+i}))\mathrm{Var}(a_T(R_{p+1+i},R_{p+1}))\right)^{1/2}\\ &=\mathrm{Var}(a_T(R_{p+1+i},R_{p+1}))\end{aligned}$$

y

$$(T-p-i)(T-p-i-3) < T(T-p-i)$$

Demostración de (iii). Para demostrar el resultado correspondiente a este inciso es necesario ver primero que

$$\begin{aligned}
&E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})) = \\
&\frac{(T-p-2)(T-p-3)}{(T-p)(T-p-1)} E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1}) | R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) \\
&+\frac{(T-p-2)}{(T-p)(T-p-1)}(E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1}) | R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) \\
&+E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1+3i}) | R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) \\
&+E(a_T(R_{p+1+2i}, R_{p+1}) | R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) \\
&+E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1+2i}) | R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))) \\
&+\frac{1}{(T-p)(T-p-1)}(E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}) | R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) \\
&+E(a_T(R_{p+1+2i}, R_{p+1+3i}) | R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})))
\end{aligned} \tag{6.2.1}$$

Se procederá a demostrar (6.2.1).

$$E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})) = ((T-p)(T-p-1))^{-1} \sum_{i_1=1}^{T-p} \quad \sum_{i_1 \neq i_2} \quad \sum_{i_2=1}^{T-p} (a_T(i_1, i_2)$$

El conjunto de índices I sobre los que se extiende la doble sumatoria, puede escribirse como unión de los siguientes 7 conjuntos disjuntos.

$$\begin{aligned}
I_1 &= \{(i_1, i_2) | \ (i_1, i_2) \in I \ , i_1 \neq R_{p+1+3i}, \ i_2 \neq R_{p+1+2i}\} \\
I_2 &= \{(i_1, i_2) | \ (i_1, i_2) \in I \ , i_1 = R_{p+1+3i}, \ i_2 \neq R_{p+1+2i}\} \\
I_3 &= \{(i_1, i_2) | \ (i_1, i_2) \in I \ , i_1 \neq R_{p+1+2i}, \ i_2 = R_{p+1+3i}\} \\
I_4 &= \{(i_1, i_2) | \ (i_1, i_2) \in I \ , i_1 \neq R_{p+1+3i}, \ i_2 = R_{p+1+2i}\} \\
I_5 &= \{(i_1, i_2) | \ (i_1, i_2) \in I \ , i_1 = R_{p+1+2i}, \ i_2 \neq R_{p+1+2i}\} \\
I_6 &= \{(i_1, i_2) | \ (i_1, i_2) \in I \ , i_1 = R_{p+1+3i}, \ i_2 = R_{p+1+2i}\} \\
I_7 &= \{(i_1, i_2) | \ (i_1, i_2) \in I \ , i_1 = R_{p+1+2i}, \ i_2 = R_{p+1+3i}\}.
\end{aligned}$$

Dado un conjunto A cualquiera se denota por $\#A$ al cardinal de dicho conjunto. Es fácil ver que

$$\#I_1 = (T-p-2)(T-p-3)$$
$$\#I_2 = \#I_3 = \#I_4 = \#I_5 = (T-p-2)$$
$$\#I_6 = \#I_7 = 1.$$

Luego

$$\#I = (T-p-2)(T-p-3) + 4(T-p-2) + 2 = (T-p)(T-p-1).$$

Además como

$$E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) = \frac{T-p-2}{T-p-3} \sum_{(i_1,i_2)\in I_1} \sum a_T(i_1, i_2)$$
$$E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) = (T-p-2)^{-1} \sum_{(i_1,i_2)\in I_2} \sum a_T(i_1, i_2)$$
$$E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1+3i})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) = (T-p-2)^{-1} \sum_{(i_1,i_2)\in I_3} \sum a_T(i_1, i_2)$$
$$E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1+2i})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) = (T-p-2)^{-1} \sum_{(i_1,i_2)\in I_4} \sum a_T(i_1, i_2)$$
$$E(a_T(R_{p+1+2i}, R_{p+1+i})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) = (T-p-2)^{-1} \sum_{(i_1,i_2)\in I_5} \sum a_T(i_1, i_2)$$
$$E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) = \sum_{(i_1,i_2)\in I_6} \sum a_T(i_1, i_2)$$
$$E(a_T(R_{p+1+2i}, R_{p+1+3i})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) = \sum_{(i_1,i_2)\in I_7} \sum a_T(i_1, i_2),$$

se obtiene (6.2.1).

Como

$$\begin{aligned} E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) \\ &= E(E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}|(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))) \\ &= E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})|(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))), \end{aligned}$$

reemplazando $E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})|(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))$ por la expresión dada en (6.2.1) resulta

$$
\begin{aligned}
&E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))\\
&= \frac{(T-p)(T-p-1)}{(T-p-2)(T-p-3)}E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})))\\
&- \frac{1}{T-p-3}(E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))\\
&+ E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1+3i})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))\\
&+ E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})E(a_T(R_{p+1+2i}, R_{p+1})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))\\
&+ E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1+2i})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})))\\
&+ \frac{1}{(T-p)(T-p-1)}(E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})\\
&\quad \times E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))\\
&+ E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})E(a_T(R_{p+1+2i}, R_{p+1+3i})|R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))).
\end{aligned}
$$

Luego

$$
\begin{aligned}
E(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})&a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))\\
&= \frac{(T-p)(T-p-1)}{(T-p-2)(T-p-3)}E^2(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))\\
&- \frac{1}{T-p-3}(E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1}))\\
&+ E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1+3i}))\\
&+ E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})a_T(R_{p+1+2i}, R_{p+1}))\\
&+ E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1+2i}))\\
&- \frac{1}{(T-p)(T-p-1)}E(a_T^2(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i}))\\
&+ E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})a_T(R_{p+1+2i}, R_{p+1+3i})).
\end{aligned} \tag{6.2.2}
$$

Sea

$$
\begin{aligned}
S = & -\frac{1}{T-p-3}(E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1})) \\
& + E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1+3i})) \\
& + E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})a_T(R_{p+1+2i}, R_{p+1})) \\
& + E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1+2i})) \\
& - \frac{1}{(T-p)(T-p-1)}E(a_T^2(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})) \\
& + E(a_T(R_{p+1+3i}, R_{p+1+2i})a_T(R_{p+1+2i}, R_{p+1+3i})).
\end{aligned} \tag{6.2.3}
$$

Por lo tanto, de (6.2.2) y (6.2.3) se tiene

$$
\begin{aligned}
& |\mathrm{Cov}(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1}), a_T(R_{p+3i+1}, R_{p+2i+1}))| \\
& \qquad \leq \frac{4(T-p)-6}{(T-p-2)(T-p-3)}E^2(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})) + |S|.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta que para cualquier par X, Y de variables aleatorias identicamente distribuidas, vale, $|E(X,Y)| \leq E(X^2)$ se obtiene facilmente que

$$
\begin{aligned}
|S| & \leq \frac{4}{T-p-3}E(a_T^2(R_{p+1+i}, R_{p+1}))\frac{2}{(T-p-2)(T-p-3)}E(a_T^2(R_{p+1+i}, R_{p+1})) \\
& = \frac{4(T-p)-6}{(T-p-2)(T-p-3)}E(a_T^2(R_{p+1+i}, R_{p+1})).
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
& |\mathrm{Cov}(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1}), a_T(R_{p+3i+1}, R_{p+2i+1}))| \\
& \qquad \leq \frac{2(4T-6)}{(T-p-2)(T-p-3)}E^2(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})) \\
& \qquad = K_T E^2(a_T(R_{p+1+i}, R_{p+1})).
\end{aligned}
$$

Donde $K_T = (2(4T-6))/((T-p-2)(T-p-3))$ es $O(T^{-1})$.

Queda asi demostrado el Lema 6.2.1. ∎

PROPOSICIÓN 6.2.1. *Supóngase que valen B(i), B(ii) y B(iii) luego*

$$\sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\|\leq T^{-1/2}A_0} T^{1/2}|\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T,\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{W}^*_T(\mathbf{U}_T,\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta})| \xrightarrow{p} 0\,, \qquad \text{cuando } T\to\infty\,.$$

DEMOSTRACIÓN: Para probar la proposición es suficiente mostrar que para $1\leq j\leq p+q$ (6.2.4)

$$\sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\|\leq T^{-1/2}A_0} T^{1/2}|(\mathbf{W}_{T,j}(\mathbf{R}_T,\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}) - \mathbf{W}^*_{T,j}(\mathbf{U}_T,\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta})| \xrightarrow{p} 0\,, \qquad \text{cuando } T\to\infty\,.$$

Primero se considera $1\leq j\leq p$.

Sean

$$\overline{J}_T = [(T-p)(T-p-1)]^{-1}\sum_{i=1}^{T-p}\sum_{i\neq j\;\; j=1}^{T-p} J_1\left(\frac{i}{T-p+1}\right)J_2\left(\frac{j}{T-p+1}\right)$$

y

$$\overline{J}^*_T(\mathbf{U}_T) = [(T-p)(T-p-1)]^{-1}\sum_{t_1=p+1}^{T}\sum_{t_1\neq t_2\;\; t_2=p+1}^{T} J_1(F(U_{t_1}))J_2(F(U_{t_2})).$$

Luego se tiene que

$$\begin{aligned}
&T^{1/2}(\mathbf{W}_{T,j}(\mathbf{R}_T,\boldsymbol{\phi}_0,\boldsymbol{\theta}_0) - \mathbf{W}^*_{T,j}(\mathbf{U}_T,\boldsymbol{\phi}_0,\boldsymbol{\theta}_0)) = \\
&\qquad T^{1/2}((T-p-j)^{-1}\sum_{h=0}^{T-p-j-1}\sum_{t=p+1+h+j}^{T} J_1\left(\frac{R_t}{T-p+1}\right)J_2\left(\frac{R_{t-h-j}}{T-p+1}\right)s_h(\boldsymbol{\phi}) \\
&\qquad -(T-p-j)^{-1}\sum_{h=0}^{T-p-j-1}\sum_{t=p+1+h+j}^{T} J_1(F(U_t))J_2(F(U_{t-h-j}))s_h(\boldsymbol{\phi}) \\
&\qquad = T^{1/2}(T-p-j)^{-1}\sum_{h=0}^{T-p-j-1}\sum_{t=p+1+h+j}^{T} [J_1\left(\frac{R_t}{T-p+1}\right)J_2\left(\frac{R_{t-h-j}}{T-p+1}\right) \\
&\qquad - J_1(F(U_t))J_2(F(U_{t-h-j})) - \overline{J}_T + \overline{J}^*_T(\mathbf{U}_T)]s_h(\boldsymbol{\phi}) \\
&\qquad + T^{1/2}(T-p-j)^{-1}[\overline{J}_T - \overline{J}^*_T(\mathbf{U}_T)]\sum_{h=0}^{T-p-j-1}(T-p-h-j)s_h(\boldsymbol{\phi})\,.
\end{aligned}$$

Se define

$$\Delta_{T,j,1} = T^{1/2}(T-p-j)^{-1}[\overline{J}_T - \overline{J}^*_T(\mathbf{U}_T)]\sum_{h=0}^{T-p-j-1}(T-p-h-j)s_h(\boldsymbol{\phi})$$

y

$$\Delta_{T,j,2} = T^{1/2}(T-p-j)^{-1} \sum_{h=0}^{T-p-j-1} \sum_{t=p+1+h+j}^{T} [J_1(\frac{R_t}{T-p+1})J_2(\frac{R_{t-h-j}}{T-p+1})$$
$$-J_1(F(U_t))J_2(F(U_{t-h-j})) - \overline{J}_T + \overline{J}_T^{*}(\mathbf{U}_T)]s_h(\phi).$$

Primero se muestra que $\sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\| \leq T^{-1/2}A_0} \Delta_{T,j,1} \xrightarrow{p} 0$ cuando $T \to \infty$.

Por hipótesis B(iii) se tiene que $J_1(1-u) = J_1(u)$ y $J_2(1-u) = J_2(u)$, luego

$$\sum_{i=1}^{T-p} J_1(\frac{i}{T-p+1}) = \sum_{j=1}^{T-p} J_2(\frac{j}{T-p+1}) = 0.$$

Entonces

$$\overline{J}_T = [(T-p)(T-p-1)]^{-1} \sum_{i=1}^{T-p} J_1(\frac{i}{T-p+1})J_2(\frac{i}{T-p+1})$$

y por lo tanto

$$|\overline{J}_T| = |[(T-p)(T-p-1)]^{-1} \sum_{i=1}^{T-p} J_1(\frac{i}{T-p+1})J_2(\frac{i}{T-p+1})|$$
$$\leq (T-p-1)^{-1}[\frac{\sum_{i=1}^{T-p} J_1^2(\frac{i}{T-p+1})}{T-p}]^{1/2}[\frac{\sum_{i=1}^{T-p} J_2^2(\frac{i}{T-p+1})}{T-p}]^{1/2}.$$

Además, como

$$\frac{\sum_{i=1}^{T-p} J_1^2(\frac{i}{T-p+1})}{T-p} \underset{T\to\infty}{\to} \int_0^1 J_1^2(u)\,du < \infty,$$

y

$$\frac{\sum_{i=1}^{T-p} J_2^2(\frac{i}{T-p+1})}{T-p} \underset{T\to\infty}{\to} \int_0^1 J_2^2(u)\,du < \infty,$$

resulta que existen T_0 y K tales que si $T > T_0$ entonces

$$|\overline{J}_T| \leq \frac{K}{T-p-1}.$$

Luego, aplicando (6.1.1) a $|s_h(\phi)|$ se tiene

$$\sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\| \leq T^{-1/2}A_0} |T^{1/2}(T-p-j)^{-1}\overline{J}_T \sum_{h=0}^{T-p-j-1} (T-p-h-j)s_h(\phi)|$$
$$\leq \frac{T^{1/2}K}{T-p-1} \sum_{h=0}^{\infty} b^h \to 0, \qquad \text{cuando } T \to \infty.$$

También se verifica

$$\sup_{\|\lambda-\lambda_0\|\leq T^{-1/2}A_0} T^{1/2}(T-p-j)^{-1}\overrightarrow{J_T} \sum_{h=0}^{T-p-j-1} (T-p-h-j)s_h(\phi) \xrightarrow{P} 0$$

cuando $T \to \infty$.

En efecto

$$\begin{aligned} T^{1/2}|\overrightarrow{J_T}| &\leq T^{1/2}[(T-p)(T-p-1)]^{-1}[|\sum_{t_1=p+1}^{T}\sum_{t_2=p+1}^{T} J_1(F(U_{t_1}))J_2(F(U_{t_2}))| \\ &+ |\sum_{t=p+1}^{T} J_1(F(U_t))J_2(F(U_t))|] \\ &= [|(T-p)^{-1/2}\sum_{t=p+1}^{T} J_1(F(U_t))|][|(T-p)^{-1}\sum_{t=p+1}^{T} J_2(F(U_t))|] \qquad (6.2.5) \\ &\times \frac{[T(T-p)]^{1/2}}{T-p-1} + \frac{T^{1/2}}{T-p-1}[\frac{1}{T-p}|\sum_{t=p+1}^{T} J_1(F(U_t))J_2(F(U_t))|]. \end{aligned}$$

Por el Teorema Central del Límite el primer factor del primer sumando de (6.2.5) tiende en distribución a una normal con media cero y varianza $E(J_1^2(F(U_{p+1})))$ finita por hipótesis B(i). Por la Ley de los Grandes Números el segundo factor del primer sumando tiende en probabilidad a 0 y el segundo factor del segundo sumando al módulo de la esperanza de $J_1(F(U_{p+1}))J_2(F(U_{p+1}))$ que es finito por hipótesis B(i). Por lo tanto $T^{1/2}\overrightarrow{J_T} \xrightarrow{P} 0$ cuando $T \to \infty$.

Luego, aplicando nuevamente (6.1.1) a $|s_h(\phi)|$ se tiene

$$\begin{aligned} |T^{1/2}(T-p-j)^{-1}\overrightarrow{J_T} \sum_{h=0}^{T-p-j-1} (T-p-h-j)s_h(\phi)| \\ \leq T^{1/2} K\, |\overrightarrow{J_T}| \sum_{h=0}^{\infty} b^h. \end{aligned}$$

De aqui es inmediato ver que

$$\sup_{\|\lambda-\lambda_0\|\leq T^{-1/2}A_0} \Delta_{T,j,1} \xrightarrow{P} 0$$

cuando $T \to \infty$. Por lo tanto, para obtener (6.2.4) alcanza con mostrar que

$$\lim_{T\to\infty} E\,[\sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\|\leq T^{-1/2}A_0} \Delta^2_{T,j,2}] = 0\,,$$

Sea $\mathbf{U}_{(\cdot)} = (U_{(1)}, \ldots, U_{(T-p)})$ donde $U_{(i)},\ 1 \leq i \leq T-p$, es el estadístico de orden $i-esimo$.

Se define

$$\alpha(R_t, R_{t-i}, U_{(R_t)}, U_{(R_{t-i})}) = J_1(\frac{R_t}{T-p+1})J_2(\frac{R_{t-i}}{T-p+1}) - J_1F(U_{(R_t)}))J_2(F(U_{(R_{t-i})}))$$

y

$$S^i_T(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) = \sum_{t=p+1+i}^{T} \alpha(R_t, R_{t-i}, U_{(R_t)}, U_{(R_{t-i})}) - (T-p-i)(\overline{J}_T - \overline{J}^*_T(\mathbf{U}_T)),$$

para $1 \leq i \leq T-p-1$.

Luego se tiene

$$\Delta_{T,j,2} = T^{1/2}(T-p-j)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} S^{h+j}_T(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) s_h(\boldsymbol{\phi})\,.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} E[\sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\|\leq T^{-1/2}A_0} \Delta^2_{T,j,2}] \leq T(T-p-j)^{-2} &\sum_{h=0}^{T-j-p-1} E[(S^{h+j}_T(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}))^2 \\ &\times \sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\|\leq T^{-1/2}A_0} s^2_h(\boldsymbol{\phi}) \\ + \sum_{h=0}^{T-j-p-1} \sum_{h\neq h'} \sum_{h'=0}^{T-j-p-1} &|\, E[(S^{h+j}_T(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}))(S^{h'+j}_T(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}))]\,| \\ &\times \sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\|\leq T^{-1/2}A_0} |s_h(\boldsymbol{\phi})|\,|s_{h'}(\boldsymbol{\phi})|\,]. \end{aligned}$$

Se verá primero que

$$\lim_{T\to\infty} T(T-p-j)^{-2} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} E[(S^{h+j}_T(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}))^2] \sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\|\leq T^{-1/2}A_0} s^2_h(\boldsymbol{\phi}) = 0\,. \tag{6.2.6}$$

Sea, para $1 \leq i \leq T-p-1$,

$$S_T^{*i}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) = \sum_{t=p+1+i}^{T} \alpha(R_t, R_{t-i}, U_{(R_t)}, U_{(R_{t-i})}).$$

Luego

$$E[(S_T^i(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}))^2] = E[E[(S_T^{*i}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) - (T-p-i)(\overline{J}_T - \overline{J}_T^{\bullet}(\mathbf{U}_T)))^2 \,|\, \mathbf{U}_{(\cdot)}\,]].$$

Se mostrará ahora que

$$E(S_T^{*i}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) \,|\, \mathbf{U}_{(\cdot)}) = (T-p-i)(\overline{J}_T - \overline{J}_T^{\bullet}(\mathbf{U}_T)). \tag{6.2.7}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} E(S_T^{*i}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) \,|\, \mathbf{U}_{(\cdot)}) &= E\Big(\sum_{t=p+1+i}^{T} \alpha(R_t, R_{t-i}, U_{(R_t)}, U_{(R_{t-i})}) |\, \mathbf{U}_{(\cdot)}\Big) \\ &= E\Big(\sum_{t=p+1+i}^{T} J_1(\frac{R_t}{T-p+1}) J_2(\frac{R_{t-i}}{T-p+1}) - J_1 F(U_{(R_t)})) \\ &\qquad \times J_2(F(U_{(R_{t-i})}))|\, \mathbf{U}_{(\cdot)}\Big). \end{aligned}$$

Como $U_{p+1}, \ldots, U_T$ son variables aleatorias independientes e identicamente distribuídas, los vectores $(R_{p+1}, \ldots, R_T)$ y $(U_{(1)}, \ldots, U_{(T-p)})$ son independientes. Luego

$$E\big(J_1(\frac{R_t}{T-p+1}) J_2(\frac{R_{t-i}}{T-p+1}) |\, \mathbf{U}_{(\cdot)}\big) = \overline{J}_T$$

y

$$E\big(J_1 F(U_{(R_t)})) J_2(F(U_{(R_{t-i})}))|\, \mathbf{U}_{(\cdot)}\big) = \overline{J}_T^{\bullet}(\mathbf{U}_T)$$

Luego vale (6.2.6). Por lo tanto

$$\begin{aligned} E[\mathrm{Var}(S_T^{*i}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) \,|\, \mathbf{U}_{(\cdot)})] &= E\big([S_T^{*i}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) - (T-p-i)(\overline{J}_T - \overline{J}_T^{\bullet}(\mathbf{U}_T)]^2)|\, \mathbf{U}_{(\cdot)}\big) \\ &= E\big([S_T^{*i}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)})]^2 |\, \mathbf{U}_{(\cdot)}\big), \end{aligned}$$

y entonces

$$E\big([S_T^{*i}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)})]^2\big) = E\big(E[\mathrm{Var}(S_T^{*i}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) \,|\, \mathbf{U}_{(\cdot)})]\big).$$

Como los vectores $U_{p+1}, \ldots, U_T$ y $(R_{p+1}, \ldots, R_T)$ son independientes, el Lema 6.2.1 puede aplicarse con varianza condicional. Luego

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(S_T^{*i}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) \mid \mathbf{U}_{(\cdot)}) \\
&\leq 3(T-p-i)\mathrm{Var}(\alpha(R_{p+1+i}, R_{p+1}, U_{(R_{p+1+i})}, U_{(R_{p+1})}) \mid \mathbf{U}_{(\cdot)}) \\
&+ T(T-p-i)K_T E[(\alpha(R_{p+1+i}, R_{p+1}, U_{(R_{p+1+i})}, U_{(R_{p+1})}))^2 \mid \mathbf{U}_{(\cdot)}] \\
&\leq 3(T-p-i)E[(\alpha(R_{p+1+i}, R_{p+1}, U_{(R_{p+1+i})}, U_{(R_{p+1})}))^2 \mid \mathbf{U}_{(\cdot)}] \\
&+ T(T-p-i)K_T E[(\alpha(R_{p+1+i}, R_{p+1}, U_{(R_{p+1+i})}, U_{(R_{p+1})}))^2 \mid \mathbf{U}_{(\cdot)}] \\
&\leq T(3+TK_T)E[(\alpha(R_{p+1+i}, R_{p+1}, U_{(R_{p+1+i})}, U_{(R_{p+1})}))^2 \mid \mathbf{U}_{(\cdot)}].
\end{aligned}$$

Tomando esperanzas se obtiene

$$E(\mathrm{Var}(S_T^{*i}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) \mid \mathbf{U}_{(\cdot)}) \leq T(3+TK_T)E[(\alpha(R_{p+1+i}, R_{p+1}, U_{(R_{p+1+i})}, U_{(R_{p+1})}))^2].$$

Es decir

$$E[(\dot{S}_T^i(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)})^2] \leq T(3+TK_T)E[(\alpha(R_{p+1+i}, R_{p+1}, U_{(R_{p+1+i})}, U_{(R_{p+1})}))^2].$$

Como $(U_{(R_{p+1+i})}, U_{(R_{p+1})}) = (U_{p+1+i}, U_{p+1})$, es fácil ver que

$$\begin{aligned}
&E\big[(\alpha(R_{p+1+i}, R_{p+1}, U_{(R_{p+1+i})}, U_{(R_{p+1})}))^2\big] \\
&\quad = E\big[(J_1(\frac{R_{p+1}}{T-p+1})J_2(\frac{R_{p+2}}{T-p+1}) - J_1(F(U_{p+1}))J_2(F(U_{p+2})))^2\big] \\
&\quad = E\big[(J_1^2(F(U_{p+1}))[J_2(\frac{R_{p+2}}{T-p+1}) - J_2(F(U_{p+2}))]^2\big] \\
&\quad + E\big[[J_1(\frac{R_{p+1}}{T-p+1}) - J_1(F(U_{p+1}))]^2[J_2(\frac{R_{p+2}}{T-p+1}) - J_2(F(U_{p+2}))]^2\big] \\
&\quad + 2E\big[(J_1(F(U_{p+1}))[J_1(\frac{R_{p+1}}{T-p+1}) - J_1(F(U_{p+1}))][J_2(\frac{R_{p+2}}{T-p+1}) - J_2(F(U_{p+2}))]^2\big] \\
&\quad + E\big[(J_2^2(F(U_{p+2}))[J_1(\frac{R_{p+1}}{T-p+1}) - J_1(F(U_{p+1}))]^2\big] \\
&\quad + 2E\big[J_1(F(U_{p+1}))J_2(F(U_{p+2}))[J_1(\frac{R_{p+1}}{T-p+1}) - J_1(F(U_{p+1}))] \\
&\qquad [J_2(\frac{R_{p+2}}{T-p+1}) - J_2(F(U_{p+2}))]\big]
\end{aligned}$$

$$+ 2E\big[J_2(F(U_{p+2}))[J_1(\frac{R_{p+1}}{T-p+1}) - J_1(F(U_{p+1}))]^2$$
$$\times [J_2(\frac{R_{p+2}}{T-p+1}) - J_2(F(U_{p+2}))]\big].$$

De la desigualdad de Schuartz y del hecho que $E(J_i(F(U_t))) = \int_0^1 J_i(u))\,du < \infty$ y $\lim_{T\to\infty} E\big((J_i(F(U_{p+1})) - J_i(\frac{R_{p+1}}{T-p+1}))^4\big) = 0$ para $i = 1,2$, se obtiene inmediatamente que

$$\lim_{T\to\infty} E\big[(\alpha(R_{p+1+i}, R_{p+1}, U_{(R_{p+1+i})}, U_{(R_{p+1})}))^2\big] = 0. \tag{6.2.8}$$

Por lo tanto por (6.1.1) se tiene que

$$T(T-p-j)^{-2} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} E[(S_T^{h+j}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}))^2] s_h^2(\phi)$$
$$\le (3 + TK_T)(2p+1) E[(\alpha(R_{p+1}, R_{p+2}, U_{(R_{p+1})}, U_{(R_{p+2})}))^2]\, K \sum_{h=0}^{\infty} b^{2h}.$$

Luego, de (6.2.8) y del hecho que K_T es $O(T^{-1})$ resulta (6.2.6) o sea

$$\lim_{T\to\infty} T(T-p-j)^{-2} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} E[(S_T^{h+j}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}))^2] \sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\| \le T^{-1/2}A_0} s_h^2(\phi) = 0\,.$$

Se mostrará ahora que

$$\lim_{T\to\infty} T(T-p-j)^{-2} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} \sum_{\substack{h'=0 \\ h\neq h'}}^{T-j-p-1} |E[S_T^{h+j}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) S_T^{h'+j}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)})]|$$
$$\times \sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\| \le T^{-1/2}A_0} |s_h(\phi)||s_{h'}(\phi)| = 0\,. \tag{6.2.9}$$

En efecto, como

$$|E[S_T^{h+j}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) S_T^{h'+j}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)})]|$$
$$\le \Big[E[S_T^{h+j}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)})]^2 E[S_T^{h'+j}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)})]^2\Big]^{1/2}$$
$$\le T(3 + TK_T) E[(\alpha(R_{p+1}, R_{p+2}, U_{p+1}, U_{p+2}))^2],$$

de (6.1.1) resulta

$$T(T-p-j)^{-2} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} \sum_{\substack{h'=0 \\ h \neq h'}}^{T-j-p-1} |E[S_T^{h+j}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)}) S_T^{h'+j}(\mathbf{R}_T, \mathbf{U}_{(\cdot)})]\, s_h(\boldsymbol{\phi}) s_{h'}(\boldsymbol{\phi})|$$

$$\leq (3 + TK_T)(2p+1) E[(\alpha(R_{p+1}, R_{p+2}, U_{p+1}, U_{p+2}))^2] K \sum_{h=0}^{\infty} |b|^h,$$

donde $\sum_{h=0}^{\infty} |b|^h < \infty$.

Por lo tanto vale (6.2.9) y en consecuencia (6.2.4). Esto completa la demostración de la proposición para $1 \leq j \leq p$.

Se considerará ahora $p+1 \leq j+p \leq p+q$

$$T^{1/2}(\mathbf{W}_{T,j+p}(\mathbf{R}_T, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{W}^*_{T,j+p}(\mathbf{U}_T, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})) =$$

$$T^{1/2}((T-p-j)^{-1} \sum_{h=0}^{T-p-j-1} \sum_{t=p+1+h+j}^{T} J_1(\frac{R_t}{T-p+1}) J_2(\frac{R_{t-h-j}}{T-p+1}) t_h(\boldsymbol{\theta})$$

$$-(T-p-j)^{-1} \sum_{h=0}^{T-p-j-1} \sum_{t=p+1+h+j}^{T} J_1(F(U_t)) J_2(F(U_{t-h-j})) t_h(\boldsymbol{\theta}),$$

Esta expresión es idéntica a la correspondiente al caso $1 \leq j \leq p$, salvo que aquí aparecen los $t_h(\boldsymbol{\theta})$ en vez de los $s_h(\boldsymbol{\phi})$. Luego vale (6.2.4). Esto completa la demostración de la proposición. ∎

COROLARIO 6.2.1.

$$\sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\| \leq T^{-1/2} A_0} T^{1/2} \Big| \frac{1}{T-p-j} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\boldsymbol{\phi}) J_1\Big(\frac{R_t}{T-p+1}\Big) J_2\Big(\frac{R_{t-h-j}}{T-p+1}\Big)$$

$$- \frac{1}{T-p-j} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\boldsymbol{\phi}) J_1(F(U_t)) J_2(F(U_{t-h-j})) \Big|$$

$\xrightarrow{P} 0$ *cuando* $T \to \infty$.

En lo que sigue se utiliza la noción de contigüidad introducida por LeCam(1960). Una buena introducción a esta noción se puede encontrar en el Capítulo VI de Hájek y Šidák (1967).

Supóngase que $[T^{1/8}] \geq p+1$. Sea $\mathbf{u} = (u_{[T^{1/8}]}, \ldots, u_T)$ y por abuso de notación sea $\mathbf{U}_T = (U_{[T^{1/8}]}, \ldots, U_T)$ luego, sea

$$p_T(\mathbf{u}) = \prod_{t=[T^{1/8}]}^{T} f(u_t)$$

la función de densidad de probabilidad conjunta de $\mathbf{U}_T$ y $q_T(\mathbf{u})$ a la función de densidad de probabilidad conjunta de $\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}) = (U_{[T^{1/8}]}(\boldsymbol{\lambda}), \ldots, U_T(\boldsymbol{\lambda}))$.

PROPOSICIÓN 6.2.2. Supóngase que la suposición A se satisface. Entonces las densidades q_T son contiguas a las densidades p_T.

OBSERVACIÓN. La elección de los vectores $(U_{[T^{1/8}]}, \ldots, U_T)$ y $(U_{[T^{1/8}]}(\boldsymbol{\lambda}), \ldots, U_T(\boldsymbol{\lambda}))$ es esencial para la demostración de la Proposición 6.2.2 cuando $q \neq 0$. En el caso $q = 0$ se puede demostrar la contigüidad directamente considerando $(U_{p+1}, \ldots, U_T)$ y $(U_{p+1}(\boldsymbol{\lambda}), \ldots, U_T(\boldsymbol{\lambda}))$.

Sean $\theta_{0,0} = 1$ y $\theta_{i,0} = 0$ si $i \geq q$, luego, para todo $j = 0, \ldots, q-1$, se definen

$$c_{1,j}(\boldsymbol{\theta}_0) = \theta_{j+1},$$

y

$$c_{t,j}(\boldsymbol{\theta}_0) = \sum_{i=1}^{min(t-1,q)} \theta_{i,0} c_{t-i,j}(\boldsymbol{\theta}_0) + \theta_{t+j,0}, \quad p+2 \leq t \leq T.$$

También, sean $s_0(\boldsymbol{\phi}) = 1$, para todo $\boldsymbol{\phi}$ y $t_0(\boldsymbol{\theta}_0) = 1$.

En la demostración de la Proposición 6.2.2 se utiliza el resultado dado en el siguiente lema.

LEMA 6.2.2. Sea $(Z_1, \ldots, Z_T)$ la serie observada de un modelo $ARMA(p,q)$, es decir, $\boldsymbol{\phi}_0(B)Z_t = \boldsymbol{\theta}_0(B)U_t$ donde U_t son variables aleatorias i.i.d. y sea $U_t(\boldsymbol{\lambda})$, $p+1 \leq t \leq T$, el residuo dado por (2.1.2). Entonces,

para $t = p+1$

$$U_t = U_t(\boldsymbol{\lambda}) + \sum_{j=0}^{q-1} c_{t-p,j}(\boldsymbol{\theta}_0) U_{p-j} + T^{-1/2} \sum_{k=t-p}^{p} A_{1,t-k} Z_k$$

y

para todo $p+2 \leq t \leq T$

$$
U_t = \left\{ \begin{array}{l}
U_t(\lambda) + \sum_{j=0}^{q-1} c_{t-p,j}(\theta_0) U_{p-j} \\
+T^{-1/2} \sum_{j=p+1}^{t-1} U_j(\lambda) \Big(\sum_{i=1}^{min\{p,t-j\}} A_{1,i} s_{t-j-i}(\boldsymbol{\phi}) - \sum_{i=1}^{min\{q,t-j\}} A_{2,i} t_{t-j-i}(\theta_0) \Big) \\
+T^{-1} \sum_{j=p+1}^{t-2} U_j(\lambda) \sum_{i=1}^{min\{p,t-j-1\}} A_{1,i} \sum_{k=i+1}^{min\{q+i,t-k-1+i\}} A_{2,k-i} \\
\qquad \times \sum_{r=0}^{t-k} s_r(\boldsymbol{\phi}) t_{t-k-r}(\theta_0) \\
+T^{-1/2} \sum_{k=1}^{p} Z_k \Big(\sum_{i=1}^{min\{p,t-p-1\}} A_{1,i} \sum_{j=0}^{min\{t-p-1-i,k-i\}} \phi_{p-k+1+j} \\
\qquad \times \sum_{r=0}^{t-p-1-i+j} s_{t-p-1-i+j-r}(\boldsymbol{\phi}) t_r(\boldsymbol{\theta}_0) \\
+ \sum_{j=0}^{min\{k-1,t-p-2\}} A_{1,p-k+1+j} t_{t-p-1-j}(\theta_0) \Big) + I_{[0,\infty)}(2p-t) \sum_{k=t-p}^{p} Z_k A_{1,t-k}
\end{array} \right.
$$

DEMOSTRACIÓN: . El resultado se obtiene a partir de (1.1) y de la definición de los residuos dada por (2.1.2). ∎

DEMOSTRACIÓN DE LA PROPOSICIÓN 6.2.2:

Con el objetivo de que la demostración resulte más clara se considerarán por separado los casos $AR(p)$, $MA(q)$ y $ARMA(p,q)$.

Caso AR(p).En este caso $q=0$, esto permite trabajar con $\boldsymbol{\phi}$ en vez de $\boldsymbol{\lambda}$.

Denótese por $q_T^*(\mathbf{u}|z_1,\ldots,z_p)$ a la función de densidad de probabilidad condicional conjunta de $\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi})$ dado que las observaciones $Z_1,\ldots,Z_p$ permanecen fijas en los valores $z_1,\ldots,z_p$.

Primero se demostrará que las densidades $q_T^*(.|z_1,\ldots,z_p)$ son contiguas a las densidades p_T para todo $z_1,\ldots,z_p$.

Considérese el cociente de verosimilitud dado por

$$L_{T,\phi}(\mathbf{u}, z_1, \ldots, z_p) = \begin{cases} q_T^*(\mathbf{u}|z_1, \ldots, z_p)/p_T(\mathbf{u}) & \text{si } p_T(\mathbf{u}) > 0 \\ 1 & \text{si } p_T(\mathbf{u}) = q_T^*(\mathbf{u}|z_1, \ldots, z_p) = 0 \\ 0 & \text{si } p_T(\mathbf{u}) = 0 < q_T^*(\mathbf{u}|z_1, \ldots z_p). \end{cases}$$

De acuerdo al primer lema de contigüidad de LeCam (véase por ejemplo Hájek y Šidák (1987)) para establecer que $\{q_T^*(.|z_1, \ldots, z_p)\}$ es contigua a $\{p_T\}$, es suficiente mostrar que $\log L_{T,\phi}(\mathrm{U}, z_1, \ldots, z_p)$ es asintoticamente normal con media $-d^2/2$ y varianza d^2.

Del Lema 6.2.2 se tiene que

para $t = p + 1$

$$U_t = U_t(\phi) + T^{-1/2} \sum_{k=t-p}^{p} A_{1,t-k} Z_k$$

y

para $p + 2 \leq t \leq T$

$$U_t = \begin{cases} U_t(\phi) + T^{-1/2} \sum_{j=p+1}^{t-1} U_j(\phi) \sum_{i=1}^{min\{p,t-j\}} A_{1,i} s_{t-j-i}(\phi) \\ +T^{-1/2} \sum_{k=1}^{p} Z_k \sum_{i=1}^{min\{p,t-p-1\}} A_{1,i} \sum_{j=0}^{min\{t-p-1-i,k-i\}} \phi_{p-k+1+j} s_{t-p-1-i+j-r}(\phi) \\ +I_{[0,\infty)}(2p-t) \sum_{k=t-p}^{p} Z_k A_{1,t-k} \end{cases}$$

Sea

$$(6.2.10) \qquad d_k(\phi, \mathbf{A}_1) = \sum_{i=1}^{min\{k,p\}} \mathbf{A}_{1,i} s_{k-i}(\phi)$$

y $s_{-1}(\phi) = \cdots = s_{-p+1}(\phi) = 0$ para $p \geq 1$.

Entonces reagrupando los coeficientes de $U_j(\phi)$ se tiene:

para $p+2 \leq t \leq T$

$$U_t = \begin{cases} U_t(\boldsymbol{\phi}) + T^{-1/2} \displaystyle\sum_{k=1}^{t-p-1} d_k(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1) U_{t-k}(\boldsymbol{\phi}) \\ +T^{-1/2} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} Z_k \sum_{i=1}^{min\{p,t-p-1\}} A_{1,i} \sum_{j=0}^{min\{t-p-1-i,k-i\}} \phi_{p-k+1+j} s_{t-p-1-i+j-r}(\boldsymbol{\phi}) \\ +I_{[0,\infty)}(2p-t) \displaystyle\sum_{k=t-p}^{p} Z_k A_{1,t-k} \end{cases}$$

Sea

$$h_{T,t}(U_{p+1}(\boldsymbol{\phi}), \ldots, U_{t-1}(\boldsymbol{\phi}), Z_1, \ldots, Z_p, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1) = T^{-1/2} \sum_{k=t-p}^{p} A_{1,t-k} Z_k \qquad si \;\; t = p+1$$

y

$$h_{T,t}(U_{p+1}(\boldsymbol{\phi}), \ldots, U_{t-1}(\boldsymbol{\phi}), Z_1, \ldots, Z_p, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1)$$
$$= \begin{cases} T^{-1/2} \displaystyle\sum_{k=1}^{t-p-1} d_k(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1) U_{t-k}(\boldsymbol{\phi}) \\ +T^{-1/2} \displaystyle\sum_{k=1}^{p} Z_k \sum_{i=1}^{min\{p,t-p-1\}} A_{1,i} \sum_{j=0}^{min\{t-p-1-i,k-i\}} \phi_{p-k+1+j} s_{t-p-1-i+j-r}(\boldsymbol{\phi}) \\ +I_{[0,\infty)}(2p-t) \displaystyle\sum_{k=t-p}^{p} Z_k A_{1,t-k}, \end{cases}$$

si $p+2 \leq t \leq T$.

Luego

$$U_t = U_t(\boldsymbol{\phi}) + h_{T,t}(U_{p+1}(\boldsymbol{\phi}), \ldots, U_{t-1}(\boldsymbol{\phi}), Z_1, \ldots, Z_p, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1).$$

Se ve facilmente que el Jacobiano de la transformación de $(U_{[T^{1/8}]}, \ldots, U_T)$ en $(U_{[T^{1/8}]}(\boldsymbol{\phi}), \ldots, U_T(\boldsymbol{\phi}))$ es 1. De este resultado se obtiene inmediatamente que

$$q_T^*(\mathbf{u} \,|\, z_1, \ldots, z_p) = \prod_{t=[T^{1/8}]}^{T} f(u_t + h_{T,t}(u_{p+1}, \ldots, u_{t-1}, z_1, \ldots, z_p, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1)).$$

Sea

$$h_{T,t} = h_{T,t}(U_{p+1}, \ldots, U_{t-1}, z_1, \ldots, z_p, \boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1),$$

luego

$$q_T^*(\mathbf{U}_T \mid z_1, \ldots, z_p) = \prod_{t=[T^{1/8}]}^{T} f(U_t + h_{T,t}).$$

Como

$$\log q_T^*(\mathbf{U}_T \mid z_1, \ldots, z_p) = \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \log f(U_t + h_{T,t}),$$

utilizando un desarrollo de Taylor se tiene:

$$\log q_T^*(\mathbf{U}_T \mid z_1, \ldots, z_p) = \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \log f(U_t)$$

(6.2.11)

$$- \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) h_{T,t} - 2^{-1} \sum_{[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t + \xi\, h_{T,t})(h_{T,t})^2 \text{ c.s., cuando } T \to \infty$$

donde $\varphi(U_t) = f'(U_t)/f(U_t)$ y $\xi = \xi(\mathbf{U}_T, z_1, \ldots, z_p, \boldsymbol{\phi}) \in [0,1]$.

Se verá ahora que el término de primer orden en (6.2.11) es asintoticamente normal con media 0 y varianza

$$d^2 = \sigma^2 I(f) \sum_{j=1}^{\infty} [d_j(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{A}_1)]^2.$$

En efecto si $[T^{1/8}] \geq 2p+1$ se tiene

$$\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) h_{T,t} = T^{-1/2} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) \sum_{k=1}^{t-p-1} d_k(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1) U_{t-k} + T^{-1/2} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t)$$
$$\times \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} A_{1,i} \sum_{j=0}^{min\{t-p-i-1, p-k+1-i\}} \phi_{k+j} s_{t-p-i-j-1}(\boldsymbol{\phi}) z_{p+1-k}.$$

Como $E(|U_t|) < \infty$, $E(|\varphi(U_t)|) < \infty$ y $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}_1$ está en un compacto cuando $\mathbf{A}_1$ está fija, resulta que

$$T^{-1/2} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) \sum_{k=1}^{p} \sum_{i=1}^{p} A_{1,i} \sum_{j=0}^{min\{t-p-i-1, p-k+1-i\}} \phi_{k+j} s_{t-p-i-j-1}(\boldsymbol{\phi}) z_{p+1-k}.$$

tiende en probabilidad a 0 cuando $T \to \infty$.

Por lo tanto para obtener la distribución asintótica de $\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi(U_t)h_{T,t}$ basta con hallar la de $T^{-1/2}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi(U_t)\sum_{k=1}^{t-p-1}d_k(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)U_{t-k}$.

Se introducen ahora las variables auxiliares $Y_{T_0,T,t}(\boldsymbol{\phi}_0)$ definidas por

$$Y_{T_0,T,t}(\boldsymbol{\phi}_0)=\sum_{k=1}^{T_0}d_k(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1)\varphi(U_t)U_{t-k}$$

que son T_0-1 dependientes con $E(Y_{T_0,T,t}(\boldsymbol{\phi}_0))=0$ y

$$\mathrm{Var}(Y_{T_0,T,t}(\boldsymbol{\phi}_0))=I(f)\sigma^2\sum_{k=1}^{T_0}d_k(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1)^2=d_{T_0}^2$$

Luego del Teorema 6.7.5 de Anderson (1971) se obtiene inmediatamente que

$$(T-[T^{1/8}]+1)^{-1/2}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}Y_{T_0,T,t}(\boldsymbol{\phi}_0)$$

tiende en distribución a Y_{T_0} con $Y_{T_0}\sim N(0,d_{T_0}^2)$.

Del hecho que

$$\begin{aligned}T^{-1/2}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi(U_t)\sum_{k=1}^{t-p-1}d_k(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)U_{t-k}&=T^{-1/2}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi(U_t)\sum_{k=1}^{T_0}d_k(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)U_{t-k}\\&+T^{-1/2}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi(U_t)\sum_{k=T_0+1}^{t-p-1}d_k(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)U_{t-k},\end{aligned}\tag{6.2.12}$$

donde $p<T_0<[T^{1/8}]$ y que los dos últimos sumandos de (6.2.12) tienden en probabilidad a 0 es fácil ver que $\forall\epsilon>0$

$$\begin{aligned}\lim_{T_0\to\infty}\lim_{T\to\infty}P(|T^{-1/2}&\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi(U_t)\sum_{k=1}^{t-p-1}d_k(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)U_{t-k}\\&-(T-[T^{1/8}]+1)^{-1/2}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}Y_{T_0,T,t}(\boldsymbol{\phi}_0)|\geq\epsilon)=0\end{aligned}$$

Luego como Y_{T_0} tiende en distribución a Y cuando $T_0 \to \infty$ donde $Y \sim N(0, d^2)$, por el Teorema 4.2 de Billingsley (1968 pag 25) se tiene que

$$\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) h_{T,t} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, d^2) \tag{6.2.13}$$

cuando $T \to \infty$.

Se demostrará que el término de segundo orden de (6.2.11)

$$-2^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t + \xi\, h_{T,t})(h_{T,t})^2$$

converge en probabilidad a $-d^2/2$.

De la hipótesis A(vi) se obtiene que

$$|\varphi'(U_t + \xi\, h_{T,t}) - \varphi'(U_t)| \leq K\xi |h_{T,t}|,$$

por lo tanto

$$|\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t + \xi\, h_{T,t})(h_{T,t})^2 - \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t)(h_{T,t})^2| \leq K\xi \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} |h_{T,t}|^3.$$

También, como las variables U_t tienen momentos finitos hasta orden 3 de (6.1.1) se obtiene que la cota superior

$$K\xi \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} |h_{T,t}|^3$$

converge en probabilidad a 0 cuando $T \to \infty$. Luego

$$-2^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t + \xi\, h_{T,t})(h_{T,t})^2 = -2^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t)(h_{T,t})^2 + o_1, \tag{6.2.14}$$

donde $o_1 \xrightarrow{P} 0$ cuando $T \to \infty$.

Sea $T_0 \leq [T^{1/8}] - p - 1$, entonces de la expresión de $h_{T,t}$, se obtiene

$$
\begin{aligned}
& -2^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t)(h_{T,t})^2 = -(2T)^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t)[\sum_{k=1}^{T_0} d_k(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{A}_1)U_{t-k}]^2 \\
& -(2T)^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t)[\sum_{k=T_0+1}^{t-p-1} d_k(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1)U_{t-k}]^2 \\
& -T^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t)[\sum_{k=1}^{T_0} d_k(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1)U_{t-k}][\sum_{k'=T_0+1}^{t-p-1} d'_k(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1)U_{t-k'}] \\
(6.2.15) & \\
& -(2T)^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t)[(\sum_{k=1}^{T_0} d_k(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1)U_{t-k})^2 - (\sum_{k=1}^{T_0} d_k(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{A}_1)U_{t-k})^2] \\
& -(2T)^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t)[\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} A_{1,i} \sum_{j=0}^{min\{t-p-i-1,p-k+1-i\}} \phi_{k+j} s_{t-p-i-j-1}(\boldsymbol{\phi}) z_{p+1-k}]^2 \\
& -T^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t)[\sum_{k=1}^{t-p-1} d_k(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1)U_{t-k}] \\
& \times [\sum_{k'=1}^{p}\sum_{i=1}^{p} A_{1,i} \sum_{j=0}^{min\{t-p-i-1,p-k'+1-i\}} \phi_{k'+j} s_{t-p-i-j-1}(\boldsymbol{\phi}) z_{p+1-k'}].
\end{aligned}
$$

Sea

$$d_{T_0} = \sigma^2 I(f) \sum_{j=1}^{T_0} d_j^2(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{A}_1)$$

Se demostrará que el primer sumando de (6.2.15) tiende en probabilidad a $-d_{T_0}^2/2$ y que los demás tienden a 0.

Sean $Y'_{T_0,T,t}$ las variables $T_0 - 1$-dependientes definidas por:

$$Y'_{T_0,T,t} = -(1/2)\varphi'(U_t)[\sum_{k=1}^{T_0} d_k(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{A}_1)U_{t-k}]^2.$$

Entonces

$$-(2T)^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t)(\sum_{k=1}^{T_0} d_k(\boldsymbol{\phi}_0, \mathbf{A}_1)U_{t-k})^2 = \frac{1}{2T} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} Y'_{T_0,T,t}.$$

Pero $E(Y'_{T_0,T,t}) = -d^2_{T_0}/2$, por lo tanto, por el Teorema Ergódico

$$-(2T)^{-1} \sum_{t=[T^{1/s}]}^{T} \varphi'(U_t)[\sum_{k=1}^{T_0} d_k(\phi_0, \mathbf{A}_1)U_{t-k}]^2$$

converge en probabilidad a $-d^2_{T_0}/2$ cuando $T \to \infty$.

Luego, como $\lim_{T_0\to\infty} d^2_{T_0}/2 = d^2/2$, se puede concluir que $\forall\epsilon > 0$

$$\lim_{T_0\to\infty} \lim_{T\to\infty} P(|-(2T)^{-1} \sum_{t=[T^{1/s}]}^{T} \varphi'(U_t)[\sum_{k=1}^{T_0} d_k(\phi_0, \mathbf{A}_1)U_{t-k}]^2 + d^2/2| \geq \epsilon) = 0.$$

Ahora se consideran los restantes sumandos de (6.2.15).

Para el segundo sumando de (6.2.15) se tiene:

$$E\big(|(2T)^{-1} \sum_{t=[T^{1/s}]}^{T} \varphi'(U_t)[\sum_{k=T_0+1}^{t-p-1} d_k(\phi, \mathbf{A}_1)U_{t-k}]^2|\big)$$

$$\leq \sigma^2 E(|\varphi'(U_t)|)E(U_t^2) \sum_{k=T_0+1}^{\infty} d_k^2(\phi, \mathbf{A}_1)$$

$$+ \sigma^2 E(|\varphi'(U_t)|)E^2(|U_t|)\Big(\sum_{k=T_0+1}^{\infty} |d_k(\phi, \mathbf{A}_1)|\Big)^2.$$

Como $\sum_{k=T_0+1}^{\infty} d_k^2(\phi, \mathbf{A}_1) < \infty$ y $\sum_{k=1}^{\infty} |d_k(\phi, \mathbf{A}_1)| < \infty$, $\forall\epsilon > 0\ \exists T_0^*$ tal que $\forall T_0 \geq T_0^*$

$$\sum_{k=T_0+1}^{\infty} d_k^2(\phi, \mathbf{A}_1) < \frac{\epsilon/2}{\sigma^2 E(|\varphi'(U_t)|)E(U_t^2)}$$

y

$$\Big(\sum_{k=T_0+1}^{\infty} |d_k(\phi, \mathbf{A}_1)|\Big)^2 < \frac{\epsilon/2}{\sigma^2 E(|\varphi'(U_t)|)E^2(|U_t|)}.$$

Luego $\forall\epsilon > 0\ \exists T_0^*$ tal que $\forall T_0 \geq T_0^*$

$$E\big(|(2T)^{-1} \sum_{t=T_0+1}^{T} \varphi'(U_t)[\sum_{k=T_0+1}^{t-p-1} d_k(\phi, \mathbf{A}_1)U_{t-k}]^2|\big) < \epsilon.$$

Mediante un razonamiento análogo, facilmente se obtiene una acotación similar para el tercer sumando.

Para el cuarto sumando de (6.2.15) se tiene

$$E\Big(|(2T)^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t)[\big(\sum_{k=1}^{T_0}d_k(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)U_{t-k}\big)^2-\big(\sum_{k=1}^{T_0}d_k(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1)U_{t-k}\big)^2]|\Big)$$

$$\leq (2T)^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}E(|\varphi'(U_t)|)[\sum_{k=1}^{\infty}|d_k^2(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)-d_k^2(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1)E(U_t^2)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k\neq k'}\sum_{k'=1}^{\infty}|d_k(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)d_{k'}(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)-d_k(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1)d_{k'}(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1)|E^2(|U_t|)]$$

$$\leq E(|\varphi'(U_t)|)[\sum_{k=1}^{\infty}(|d_k^2(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)(d_k^2(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)-d_k^2(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1))|$$

$$+|d_k^2(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1)(d_k^2(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)-d_k^2(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1))|)E(U_t^2)$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{k\neq k'}\sum_{k'=1}^{\infty}(|d_k(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)(d_{k'}(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)-d_{k'}(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1))|$$

$$+|d_{k'}(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1)(d_k(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)-d_k(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1))|)E^2(|U_t|)].$$

Luego de la definición de $d_k(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)$, del Teorema del valor medio (6.1.1) y (6.1.2) se obtiene que

$$E\big(|(2T)^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t)[(\sum_{k=1}^{T_0}d_k(\boldsymbol{\phi},\mathbf{A}_1)U_{t-k})^2-(\sum_{k=1}^{T_0}d_k(\boldsymbol{\phi}_0,\mathbf{A}_1)U_{t-k})^2]|\big)\underset{T\to\infty}{\to}0.$$

Para el quinto sumando de (6.2.15) se tiene:

$$E\big(|(2T)^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t)[\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}A_{1,i}\sum_{j=0}^{min\{t-p-i-1,p-k-1-i\}}\phi_{k+j}s_{t-p-i-j-1}(\boldsymbol{\phi})z_{p+1-k}]^2|\big)$$

$$\leq (2T)^{-1}E\big(\sum_{k=1}^{p}\sum_{k'=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\sum_{i'=1}^{p}\sum_{j=0}^{p-k}\sum_{j'=0}^{p-k}|A_{1,i}A_{1,i'}\phi_{k+j}\phi_{k'+j'}$$

$$\times z_{p+1-k}z_{p+1-k'}|\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}|\varphi'(U_t)s_{t-p-i-j-2}s_{t-p-i'-j'-2}|\big)$$

$$\leq (2T)^{-1}A^*E(|\varphi'(U_{p+1})|)\sum_{k=1}^{p}\sum_{k'=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\sum_{i'=1}^{p}\sum_{j=0}^{p-k}\sum_{j'=0}^{p-k}|b^{-i-j-i'-j'-2}A_{1,i}A_{1,i'}$$

$$\times(|\phi_{0,k+j}|+|A_{1,k+j}||)(|\phi_{0,k'+j'}|+|A_{1,k'+j'}|)|z_{p+1-k}z_{p+1-k'}|\sum_{t=[T^{1/8}]}^{\infty}b^{2(t-p)}.$$

Como

$$\sum_{k=1}^{p}\sum_{k'=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}\sum_{i'=1}^{p}\sum_{j=0}^{p-k}\sum_{j'=0}^{p-k}|b^{-i-j-i'-j'-2}A_{1,i}A_{1,i'}$$
$$\times(|\phi_{0,k+j}|+|A_{1,k+j}|)(|\phi_{0,k'+j'}|+|A_{1,k'+j'}|)|z_{p+1-k}z_{p+1-k'}|$$

es constante y la serie $\sum_{t=2p+1}^{\infty} b^{2(t-p)} < \infty$ resulta que

$$E\big(|(2T)^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t)[\sum_{k=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}A_{1,i}\sum_{j=0}^{\min\{t-p-i-1,p-k+1-i\}}\phi_{k+j}s_{t-p-i-j-1}(\phi)z_{p+1-k}]^2|\big).$$

tiende a 0 cuando $T\to\infty$.

En forma similar para el sexto sumando de (6.2.15) se tiene

$$E\big(|-T^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t)[\sum_{k=1}^{t-p-1}d_k(\phi,\mathbf{A}_1)U_{t-k}]$$
$$\times\sum_{k'=1}^{p}\sum_{i=1}^{p}A_{1,i}\sum_{j=0}^{\min\{t-p-i-1,p-k'+1-i\}}\phi_{k'+j}s_{t-p-i-j-1}(\phi)z_{p+1-k'}|\big)$$

tiende a 0 cuando $T\to\infty$.

Por lo tanto

$$-2^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t+\xi\, h_{T,t})(h_{T,t})^2\xrightarrow{p}-d^2/2 \tag{6.2.16}$$

Finalmente, como

$$\log L_{T,\phi}(\mathbf{U},z_1,\ldots,z_p)=\log q_T^*(\mathbf{U}_T\,|\,z_1,\ldots,z_p)-\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\log f(U_t)$$
$$=-\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi(U_t)h_{T,t}-2^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t+\xi\, h_{T,t})(h_{T,t})^2$$

c.s., cuando $T\to\infty$ de (6.2.13) y (6.2.16) se puede concluir que $\log L_{T,\phi}(\mathbf{U},z_1,\ldots,z_p)$ es asintoticamente normal con media $-d^2/2$ y varianza d^2. Esto prueba que las densidades $q_T^*(.|z_1,...,z_p)$ son contiguas a las densidades p_T para todo $z_1,...,z_p$. Sean P_T y Q_T

las medidas de probabilidad asociadas con las densidades p_T y q_T respectivamente. Considérese una sucesión de Borelianos $A_T \in \Re^{T-p}$ tales que $P_T(A_T) \to 0$. De la contiguidad de $q^*_T(.|z_1,...,z_p)$ a p_T tenemos que $Q_T(A_T|z_1,...,z_p) \to 0$ para todo $z_1,...,z_p$. Luego usando Teorema de convergencia dominada se tiene que $Q_T(A_T) \to 0$. Esto prueba que las densidades q_T son contiguas a las densidades p_T en el caso $AR(p)$.

Caso $MA(q)$. En este caso $p = 0$ y $\boldsymbol{\phi} = 0$ permite trabajar con $\boldsymbol{\theta}$ en vez de λ

Sea $\widetilde{q}_T(\mathbf{u}|u_0, \ldots, u_{1-q})$ la función de densidad de probabilidad conjunta de $\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\theta})$ dado que las variables $U_0, \ldots, U_{1-q}$ permanecen fijas en los valores $u_0, \ldots, u_{1-q}$.

Se utilizará un procedimiento análogo al realizado en el caso AR(p) y se comenzará demostrando que las densidades $\widetilde{q}_T(.|u_0, \ldots, u_{1-q})$ son contiguas a las densidades p_T para todo $u_0, \ldots, u_{1-q}$ fijo.

Sea el cociente de verosimilitud dado por

$$\widetilde{L}_{T,\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}, u_0, \ldots, u_{1-q}) = \begin{cases} \widetilde{q}_T(\mathbf{u}|u_0, \ldots, u_{1-q})/p_T(\mathbf{u}) & \text{si } p_T(\mathbf{u}) > 0 \\ 1 & \text{si } p_T(\mathbf{u}) = \widetilde{q}_T(\mathbf{u}|u_0, \ldots, u_{1-q}) = 0 \\ 0 & \text{si } p_T(\mathbf{u}) = 0 < \widetilde{q}_T(\mathbf{u}|u_0, \ldots, u_{1-q}). \end{cases}$$

Sean

$$\widetilde{d}_l(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}_2) = \sum_{j=1}^{min\{q,l\}} A_{2,j} t_{l-j}(\boldsymbol{\theta}_0). \tag{6.2.17}$$

y

$$\widetilde{d}^2 = \sigma^2 I(f) \sum_{l=1}^{\infty} \widetilde{d}_l^2(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}_2) \tag{6.2.18}$$

Se verá que $\log \widetilde{L}_{T,\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}, u_0, \ldots, u_{1-q})$ es asintoticamente normal con media $-\widetilde{d}^2/2$ y varianza $\widetilde{d}^2$.

Sea

$$\begin{aligned} h_{T,t}(U_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, U_{t-1}(\boldsymbol{\theta}), U_0, \ldots, U_{1-q}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}_2) = & \sum_{j=0}^{q-1} c_{t,j}(\boldsymbol{\theta}_0) U_{-j} \\ & - T^{-1/2} \sum_{l=1}^{t-1} \widetilde{d}_l(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}_2) U_{t-l}(\boldsymbol{\theta}), \end{aligned}$$

si $1 < t \leq T$.

Del Lema (6.2.2) se tiene que

$$U_t = U_t(\boldsymbol{\theta}) + \widetilde{h}_{T,t}(U_1(\boldsymbol{\theta}), \ldots, U_{t-1}(\boldsymbol{\theta}), U_0, \ldots, U_{1-q}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}_2)$$

Es inmediato ver que el Jacobiano de la transformación de $(U_{[T^{1/s}]}, \ldots, U_T)$ en $(U_{[T^{1/s}]}(\boldsymbol{\theta}), \ldots, U_T(\boldsymbol{\theta}))$ es 1. Por lo tanto

$$\widetilde{q}_T(\mathbf{u}|u_0, \ldots, u_{1-q}) = \prod_{t=[T^{1/s}]}^{T} f(u_t + \widetilde{h}_{T,t}(u_1, \ldots, u_{t-1}, u_0, \ldots, u_{1-q}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}_2).$$

Sea

$$\widetilde{h}_{T,t} = \widetilde{h}_{T,t}(U_1, \ldots, U_{t-1}, u_0, \ldots, u_{1-q}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}_2),$$

luego,

$$\widetilde{q}_T(\mathbf{U}_T|u_0, \ldots, u_{1-q}) = \prod_{t=[t^{1/s}]}^{T} f(U_t + \widetilde{h}_{T,t}).$$

Igual que en el caso $AR(p)$, utilizando un desarrollo de Taylor se obtiene

$$\log \widetilde{q}_T(\mathbf{U}_T|u_0, \ldots, u_{1-q}) = \sum_{t=[T^{1/s}]}^{T} \log f(U_t)$$

(6.2.19)

$$- \sum_{t=[T^{1/s}]}^{T} \varphi(U_t)\widetilde{h}_{T,t} - 2^{-1} \sum_{t=[T^{1/s}]}^{T} \varphi'(U_t + \xi\, \widetilde{h}_{T,t})(\widetilde{h}_{T,t})^2 \text{ c.s., cuando } T \to \infty$$

donde $\xi = \xi(\mathbf{U}_T, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}_2) \in [0, 1]$.

El término de primer orden de (6.2.19) se puede escribir como

$$- \sum_{t=[T^{1/s}]}^{T} \varphi(U_t)\widetilde{h}_{T,t} = - \sum_{t=[T^{1/s}]}^{T} \varphi(U_t) \sum_{j=0}^{q-1} c_{t,j}(\boldsymbol{\theta}_0)u_{-j}$$

(6.2.20)

$$- T^{-1/2} \sum_{t=[T^{1/s}]}^{T} \varphi(U_t) \sum_{l=1}^{t-1} \widetilde{d}_l(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}_2)U_{t-l}$$

y luego la esperanza del valor absoluto del primer sumando de (6.2.20) se acota por

$$E(|\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) \sum_{j=0}^{q-1} c_{t,j}(\theta_0) u_{-j}|)$$

$$\leq K b^{[T^{1/8}]-q} E|\varphi(U_{p+1})| \sum_{j=0}^{q-1} |u_{-j}| \sum_{t=0}^{\infty} b^t. \tag{6.2.21}$$

Como $0 < b < 1$ y $E(|\varphi(U_{p+1})|) < \infty$ resulta que (6.2.21) tiende a cero cuando $T \to \infty$.

Realizando en este caso una descomposición análoga a la de (6.2.12) para el caso AR(p), se tiene que el segundo sumando de (6.2.20)

$$-T^{-1/2} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) \sum_{l=1}^{t-1} \tilde{d}_l(\theta_0, \mathbf{A}_2) U_{t-l} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \tilde{d}^2). \tag{6.2.22}$$

Por lo tanto de (6.2.20), (6.2.21) y (6.2.22) resulta

$$- \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) \tilde{h}_{T,t} \xrightarrow{\mathcal{D}} N(0, \tilde{d}^2). \tag{6.2.23}$$

Considérese ahora el término de segundo orden de (6.2.19).

En forma análoga a (6.2.14) se tiene

$$-2^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t + \xi \tilde{h}_{T,t})(\tilde{h}_{T,t})^2 = -2^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t)(\tilde{h}_{T,t})^2 + o_2, \tag{6.2.24}$$

donde $o_2 \xrightarrow{P} 0$ cuando $T \to \infty$.

De la expresión de $\widetilde{h}_{T,t}$ se obtiene inmediatamente que

$$-2^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t)(\widetilde{h}_{T,t})^2 = -2^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t)[\sum_{j=0}^{q-1}c_{t,j}(\boldsymbol{\theta}_0)u_{-j}]^2$$

$$+T^{-1/2}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t)[(\sum_{j=0}^{q-1}c_{t,j}(\boldsymbol{\theta}_0)u_{-j})(\sum_{l=1}^{t-1}\widetilde{d}_l(\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{A}_2)U_{t-l})]$$

$$(6.2.25)\qquad -(2T)^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t)[\sum_{l=T_0+1}^{t-1}\widetilde{d}_l(\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{A}_2)U_{t-l}]^2$$

$$-(T)^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t)[(\sum_{l=1}^{T_0}\widetilde{d}_l(\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{A}_2)U_{t-l})(\sum_{l'=T_0+1}^{t-1}\widetilde{d}_l'(\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{A}_2)U_{t-l'})]$$

$$-(2T)^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t)[\sum_{l=1}^{T_0}\widetilde{d}_l(\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{A}_2)U_{t-l}]^2.$$

Llamando

$$\widetilde{d}^2_{T_0} = \sigma^2 I(f)\sum_{l=1}^{T_0}\widetilde{d}^2_l(\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{A}_2)$$

se tiene para el último sumando de (6.2.25)

$$-(2T)^{-1}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\varphi'(U_t)[\sum_{l=1}^{T_0}\widetilde{d}_l(\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{A}_2)U_{t-l}(\boldsymbol{\theta})]^2$$

$$(6.2.26)\qquad \xrightarrow{p} -\widetilde{d}^2_{T_0}/2 \quad \text{cuando } T\to\infty.$$

Ademaś

$$(6.2.27)\qquad \widetilde{d}^2_{T_0}\to\widetilde{d}^2 \text{ cuando } T_0\to\infty$$

Los restantes sumandos de (6.2.25) tienden en probabilidad a 0 cuando $T\to\infty$.

Por lo tanto, como

(6.2.28)

$$\log\widetilde{L}_{T,\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_0,u_0,\ldots,u_{1-q}) = \log\widetilde{q}_T(\mathbf{u}|u_0,\ldots,u_{1-q}) - \sum_{t=[T^{1/8}]}\log f(U_t)$$

c.s., cuando $T\to\infty$,

de (6.2.19), (6.2.23) (6.2.26) y (6.2.27) resulta que $\log \widetilde{L}_{T,\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{u}_0, u_0, \ldots, u_{1-q})$ es asintoticamente normal con media $-\widetilde{d}^2/2$ y varianza $\widetilde{d}^2$.

Esto concluye la demostración para el caso MA(q).

Caso ARMA(p,q).

Sea $\check{q}_T(\mathbf{u}|z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q})$ la función de densidad de probabilidad condicional conjunta de $U_T(\lambda)$ dado que $(Z_1, \ldots, Z_p, U_p, \ldots, U_{p+1-q})$ permanece fijo en el valor $(z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q})$.

De manera analoga a lo realizado en los casos $AR(p)$ y $MA(q)$, se demostrará que las densidades $\check{q}_T(.|z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q})$ son contiguas a las densidades p_T para todo $(z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q})$ fijo.

Considérese el cociente de verosimilitud dado por

$$\check{L}_{T,\lambda}(\mathbf{u}, z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q})$$
$$= \begin{cases} \check{q}_T(\mathbf{u}|z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q})/p_T(\mathbf{u}) & \text{si } p_T(\mathbf{u}) > 0 \\ 1 & \text{si } p_T(\mathbf{u}) = \check{q}_T(\mathbf{u}|z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q}) = 0 \\ 0 & \text{si } p_T(\mathbf{u}) = 0 < \check{q}_T(\mathbf{u}|z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q}). \end{cases}$$

Sea

(6.2.29) $$\check{d}_k(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}) = d_k(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1) - \widetilde{d}_k(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}_2),$$

donde $d_k(\boldsymbol{\phi}, \mathbf{A}_1)$ y $\widetilde{d}_k(\boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}_2)$ están definidos en (6.2.10) y (6.2.17) respectivamente.

Sea

(6.2.30) $$\check{d}^2 = \sigma^2 I(f) \sum_{k=1}^{\infty} d_k^2(\boldsymbol{\phi}_0, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}).$$

Se demostrará que $\log L_{T,\lambda}(\mathbf{u}, z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q})$ es asintoticamente normal con media $-\check{d}^2/2$ y varianza $\check{d}^2$.

Sea para $t = p + 1$

$$\check{h}_{T,t}(U_{p+1}(\boldsymbol{\lambda}), \ldots, U_{t-1}(\boldsymbol{\lambda}), Z_1, \ldots, Z_p, U_p, \ldots, U_{p+1-q}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A})$$
$$= \sum_{j=0}^{q-1} c_{t-p,j}(\boldsymbol{\theta}_0) U_{p-j} + T^{-1/2} \sum_{k=t-p}^{p} A_{1,t-k} Z_k$$

y para todo $p+2 \leq t \leq T$

$$
\begin{aligned}
&\check{h}_{T,t}(U_{p+1}(\boldsymbol{\lambda}), \ldots, U_{t-1}(\boldsymbol{\lambda}), Z_1, \ldots, Z_p, U_p, \ldots, U_{p+1-q}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}) \\
&= \left\{ \begin{array}{l}
\displaystyle\sum_{j=0}^{q-1} c_{t-p,j}(\boldsymbol{\theta}_0) U_{p-j} \\
\displaystyle +T^{-1/2} \sum_{j=p+1}^{t-1} U_j(\boldsymbol{\lambda}) \Big(\sum_{i=1}^{min\{p,t-j\}} A_{1,i} s_{t-j-i}(\boldsymbol{\phi}) - \sum_{i=1}^{min\{q,t-j\}} A_{2,i} t_{t-j-i}(\boldsymbol{\theta}_0) \Big) \\
\displaystyle +T^{-1} \sum_{j=p+1}^{t-2} U_j(\boldsymbol{\lambda}) \sum_{i=1}^{min\{p,t-j-1\}} A_{1,i} \sum_{k=i+1}^{min\{q+i,t-k-1+i\}} A_{2,k-i} \\
\displaystyle \qquad \times \sum_{r=0}^{t-k} s_r(\boldsymbol{\phi}) t_{t-k-r}(\boldsymbol{\theta}_0) \\
\displaystyle +T^{-1/2} \sum_{k=1}^{p} Z_k \Big(\sum_{i=1}^{min\{p,t-p-1\}} A_{1,i} \sum_{j=0}^{min\{t-p-1-i,k-i\}} \phi_{p-k+1+j} \\
\displaystyle \qquad \times \sum_{r=0}^{t-p-1-i+j} s_{t-p-1-i+j-r}(\boldsymbol{\phi}) t_r(\boldsymbol{\theta}_0) \\
\displaystyle + \sum_{j=0}^{min\{k-1,t-p-2\}} A_{1,p-k+1+j} t_{t-p-1-j}(\boldsymbol{\theta}_0) \Big) + I_{[0,\infty)}(2p-t) \sum_{k=t-p}^{p} Z_k A_{1,t-k}
\end{array} \right.
\end{aligned}
$$

Del Lema (6.2.2) se tiene que para $p+2 \leq t \leq T$

$$U_t = U_t(\boldsymbol{\lambda}) + \check{h}_{T,t}(U_{p+1}(\boldsymbol{\lambda}), \ldots, U_{t-1}(\boldsymbol{\lambda}), Z_1, \ldots, Z_p, U_p, \ldots, U_{p+1-q}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A})$$

Es inmediato ver que el Jacobiano de la transformación de $(U_{[T^{1/8}]}, \ldots, U_T)$ en $(U_{[T^{1/8}]}(\boldsymbol{\theta}), \ldots, U_T(\boldsymbol{\theta}))$ es 1. Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&\check{q}_T(\mathbf{u}|z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q}) \\
&\quad = \prod_{t=[T^{1/8}]}^{T} f(u_t + \check{h}_{T,t}(u_{p+1}, \ldots, u_{t-1}, z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A})).
\end{aligned}
$$

Sea

$$\check{h}_{T,t} = \check{h}_{T,t}(U_{p+1}, \ldots, U_{t-1}, z_1, \ldots, \qquad , \ldots, u_{p+1-q}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A})$$

luego

$$\check{q}_T(\mathbf{U}_T|z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q}, \phi, \theta_0, \mathbf{A}) = \prod_{t=[t^{1/8}]}^{T} f(U_t + \check{h}_{T,t}).$$

Igual que en el caso $AR(p)$, utilizando un desarrollo de Taylor se obtiene

$$\log \breve{q}_T(\mathbf{U}_T | z_1, \ldots, z_p, u_p, \ldots, u_{p+1-q}, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A})) = \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \log f(U_t)$$

(6.2.31)

$$- \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) \breve{h}_{T,t} - 2^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi'(U_t + \xi\, \breve{h}_{T,t})(\breve{h}_{T,t})^2 \text{ c.s., cuando } T \to \infty$$

donde $\xi = \xi(\mathbf{U}_T, \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}) \in [0,1]$.

El término de primer orden de (6.2.31) se puede escribir como

$$- \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) \breve{h}_{T,t} = - \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) \sum_{j=0}^{q-1} c_{t-p,j}(\boldsymbol{\theta}_0) u_{p-j}$$

$$- T^{-1/2} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) \sum_{k=1}^{t-p-1} \breve{d}_k(\boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}_0, \mathbf{A}) U_{t-k}$$

$$- T^{-1} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) \sum_{j=p+1}^{t-2} U_j \sum_{i=1}^{min\{p,t-j-1\}} A_{1,i} \sum_{k=i+1}^{min\{q+i,t-k-1+i\}} A_{2,k-i} \sum_{r=0}^{k} s_r(\boldsymbol{\phi}) t_{t-k-r}(\boldsymbol{\theta}_0)$$

(6.2.32)

$$- T^{-1/2} \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) \sum_{k=1}^{p} z_k \Big(\sum_{i=1}^{min\{p,t-p-1\}} A_{1,i} \sum_{j=0}^{min\{t-p-1-i,k-i\}} \phi_{p-k+1+j}$$

$$\times \sum_{r=0}^{t-p-1-i+j} s_{t-p-1-i-j}(\boldsymbol{\phi}) t_r(\boldsymbol{\theta}_0)$$

$$+ \sum_{j=0}^{min\{k-1,t-p\}} A_{1,p-k+1+j} t_{t-p-1-j}(\boldsymbol{\theta}_0) \Big) + I_{[0,\infty)}(2p-t) \sum_{k=t-p}^{p} z_k A_{1,t-k}.$$

Acotando la esperanza de forma análoga a lo realizado en (6.2.21) para el caso $MA(q)$ se obtiene que el primer sumando de (6.2.32)

$$(6.2.33) \qquad - \sum_{t=[T^{1/8}]}^{T} \varphi(U_t) \sum_{j=0}^{q-1} c_{t-p,j}(\boldsymbol{\theta}_0) u_{p-j}$$

tiende en probabilidad a 0 cuando $T \to \infty$.

También en forma similar al caso $AR(p)$ se obtiene que el segundo sumando de (6.2.32)

$$-T^{-1/2}\sum_{t=[T^{1/s}]}^{T}\varphi(U_t)\sum_{k=1}^{t-p-1}\check{d}_k(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{A})U_{t-k}\xrightarrow{\mathcal{D}}N(0,\check{d}^2) \tag{6.2.34}$$

Del hecho que

$$E(|U_t|)=E(|U_{p+1}|)<\infty,$$

$$E(|\varphi(U_t)|)=E(|\varphi(U_{p+1})|)<\infty,$$

$|t_i(\boldsymbol{\theta}_0)|\le Kb^i$, $\boldsymbol{\phi}=\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_1$ está en un compacto $\mathcal{C}$ para todo $\mathbf{A}_1$ fijo y por lo tanto $\sup_{\boldsymbol{\phi}\in\mathcal{C}}|s_i(\boldsymbol{\phi})|\le Kb^i$, resulta que los restantes sumandos de (6.2.32) tienden en probabilidad a 0 cuando $T\to\infty$.

Por lo tanto se tiene que

$$-\sum_{t=[T^{1/s}]}^{T}\varphi(U_t)\check{h}_{T,t}\xrightarrow{\mathcal{D}}N(0,\check{d}^2)$$

En forma análoga a (6.2.14) resulta que

$$-2^{-1}\sum_{t=[T^{1/s}]}^{T}\varphi'(U_t+\xi\,\tilde{h}_{T,t})(\check{h}_{T,t})^2=-2^{-1}\sum_{t=[T^{1/s}]}^{T}\varphi'(U_t)(\check{h}_{T,t})^2+o_3, \tag{6.2.36}$$

donde $o_3\xrightarrow{p}0$ cuando $T\to\infty$. De la expresión de $\check{h}_{T,t}$, se obtiene facilmente que

$$\begin{aligned}-2^{-1}\sum_{t=[T^{1/s}]}^{T}\varphi'(U_t)(\check{h}_{T,t})^2=&-(2T)^{-1}\sum_{t=[T^{1/s}]}^{T}\varphi'(U_t)\\ &\times[\sum_{k=1}^{T_0}\check{d}_k(\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}_0,\mathbf{A})U_{t-k}]^2+o_4\end{aligned} \tag{6.2.37}$$

donde $o_4\xrightarrow{p}0$ cuando $T\to\infty$.

La demostración se concluye como en el caso $AR(p)$ a partir de (6.2.15). ∎

PROPOSICIÓN 6.2.3. Supóngase que las suposiciones A, B(i), B(ii), B(iii) y B(viii) se satisfacen. Sea $\mathbf{A} \in \Re^{p+q}$ y $\boldsymbol{\lambda} = \boldsymbol{\lambda}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}$ entonces

$$T^{1/2}(\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{p} \mathbf{0}\,, \quad \text{cuando } T \to \infty\,.$$

DEMOSTRACIÓN: Sea $1 \leq j \leq p$,

$$\begin{aligned}
&T^{1/2}|\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta})| \\
&\qquad \leq T^{1/2}\Big|\frac{1}{T-p-j}\sum_{t=p+1+j}^{[T^{1/8}]-1}\sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\boldsymbol{\phi})J_1\Big(\frac{R_t(\boldsymbol{\lambda})}{T-p+1}\Big)J_2\Big(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\lambda})}{T-p+1}\Big)\Big| \\
&\qquad + T^{1/2}\Big|\frac{1}{T-p-j}\sum_{t=p+1+j}^{[T^{1/8}]-1}\sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\boldsymbol{\phi})J_1(F(U_t(\boldsymbol{\lambda})))J_2(F(U_{t-h-j}(\boldsymbol{\lambda})))\Big| \\
&\qquad + T^{1/2}\Big|\frac{1}{T-p-j}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\boldsymbol{\phi})J_1\Big(\frac{R_t(\boldsymbol{\lambda})}{T-p+1}\Big)J_2\Big(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\lambda})}{T-p+1}\Big) \\
&\qquad - \frac{1}{T-p-j}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\boldsymbol{\phi})J_1(F(U_t(\boldsymbol{\lambda})))J_2(F(U_{t-h-j}(\boldsymbol{\lambda})))\Big|.
\end{aligned} \tag{6.2.38}$$

Se acotará ahora el primer sumando de (6.2.38)

$$\begin{aligned}
&T^{1/2}\Big|\frac{1}{T-p-j}\sum_{t=p+1+j}^{[T^{1/8}]-1}\sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\boldsymbol{\phi})J_1\Big(\frac{R_t(\boldsymbol{\lambda})}{T-p+1}\Big)J_2\Big(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\lambda})}{T-p+1}\Big)\Big| \\
&\qquad \leq \frac{T^{1/2}}{T-p-j}\sum_{h=0}^{[T^{1/8}]-j-p-1}|s_h(\boldsymbol{\phi})|\Big[\sum_{t=p+1+h+j}^{[T^{1/8}]-1} J_1^2\Big(\frac{R_t(\boldsymbol{\lambda})}{T-p+1}\Big)\Big]^{1/2} \\
&\qquad\qquad \times\Big[\sum_{t=p+1+h+j}^{[T^{1/8}]-1} J_2^2\Big(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\lambda})}{T-p+1}\Big)\Big]^{1/2}
\end{aligned} \tag{6.2.39}$$

De la hipótesis B(ii) resulta para $i = 1, 2$

$$\max_{1\leq j\leq T-p} |J_i^2(\frac{j}{T-p+1})| \leq K(T-p+1)^{1/4-\delta}. \tag{6.2.40}$$

Luego de (6.1.1), (6.2.39) y (6.2.40) resulta que para todo $\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\| \le A_0/\sqrt{T}$

$$
\begin{aligned}
&T^{1/2}\Big|\frac{1}{T-p-j}\sum_{t=p+1+j}^{[T^{1/8}]-1}\sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\boldsymbol{\phi})J_1\Big(\frac{R_t(\boldsymbol{\lambda})}{T-p+1}\Big)J_2\Big(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\lambda})}{T-p+1}\Big)\Big|\\
(6.2.41)\qquad &\le \frac{T^{1/2}}{T-p-j}[T^{1/8}](T-p+1)^{1/4-\delta}\sum_{h=0}^{\infty} b^h\\
&\le \frac{T^{7/8}}{T-p-j} \to 0
\end{aligned}
$$

cuando $T\to\infty$.

Para acotar el segundo sumando de (6.2.38) se procede de la siguiente manera. Por el Lema 3.4 (ii) de Bustos, Fraiman y Yohai (1984), existe ε_0 tal que

$$
\begin{aligned}
&\lim_{T\to\infty}\sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\|\le\varepsilon_0}\Big|\frac{1}{[T^{1/8}]-p-j}\sum_{t=p+1+j}^{[T^{1/8}]-1}\sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\boldsymbol{\phi})J_1(F(U_t(\boldsymbol{\lambda})))J_2(F(U_{t-h-j}(\boldsymbol{\lambda})))\\
(6.2.42)\qquad &\qquad -E(J_1(F(U_t^{\infty}(\boldsymbol{\lambda})))J_2(F(U_{t-h-j}^{\infty}(\boldsymbol{\lambda})))\Big| = 0.
\end{aligned}
$$

Además

$$
(6.2.43)\qquad \sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\|\le\varepsilon_0}|E(J_1(F(U_t^{\infty}(\boldsymbol{\lambda})))J_2(F(U_{t-h-j}^{\infty}(\boldsymbol{\lambda})))| < \infty.
$$

Luego de (6.2.42) y (6.2.43) se tiene que

$$
\begin{aligned}
&T^{1/2}\Big|\frac{1}{T-p-j}\sum_{t=p+1+j}^{[T^{1/8}]-1}\sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\boldsymbol{\phi})J_1(F(U_t(\boldsymbol{\lambda})))J_2(F(U_{t-h-j}(\boldsymbol{\lambda})))\Big|\\
(6.2.44)\qquad&\\
&\le \frac{T^{1/2}([T^{1/8}]-p-j)}{T-p-j}\sup_{\|\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\lambda}_0\|\le\varepsilon_0} E(J_1(F(U_t^{\infty}(\boldsymbol{\lambda})))J_2(F(U_{t-h-j}^{\infty}(\boldsymbol{\lambda})))\sum_{h=0}^{\infty} b^h\\
&\to 0 \quad \text{cuando } T\to\infty
\end{aligned}
$$

Finalmente del Corolario 6.2.1, de la Proposicion 6.2.2 y de la definición de contigüidad resulta

$$T^{1/2}\Big|\frac{1}{T-p-j}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\phi)J_1\Big(\frac{R_t(\lambda)}{T-p+1}\Big)J_2\Big(\frac{R_{t-h-j}(\lambda)}{T-p+1}\Big)$$

(6.2.45)

$$-\frac{1}{T-p-j}\sum_{t=[T^{1/8}]}^{T}\sum_{h=0}^{t-j-p-1} s_h(\phi)J_1(F(U_t(\lambda)))J_2(F(U_{t-h-j}(\lambda)))\Big|$$

$$\xrightarrow{P} 0 \quad \text{cuando } T\to\infty.$$

Para $1\le j\le p$, la proposición resulta de (6.2.38), (6.2.41) y (6.2.45).

La demostración para $p+1\le j\le p+q$ es idéntica. ∎

LEMA 6.2.3. Supóngase que las suposiciones A, B(i) B(ii),B(iii) y B(viii) se satisfacen. Sean $\mathbf{A}=(\mathbf{A}_1,\mathbf{A}_2)\in\Re^{p+q}$, $\boldsymbol{\epsilon}=(\boldsymbol{\epsilon}_1,\boldsymbol{\epsilon}_2)\in\Re^{p+q}$ y $A_0>0$. Notemos por $\|\cdot\|$ la norma Euclídea usual. Entonces, si

$$\sup_{\|\mathbf{A}\|\le A_0,\|\boldsymbol{\epsilon}\|\le\epsilon_0}\|T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_1,\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_2)$$

(6.2.46)

$$-T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon})),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}_1+\boldsymbol{\epsilon}_1),\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}_2+\boldsymbol{\epsilon}_2))\|\xrightarrow{P} 0,$$

y

$$\sup_{\|\mathbf{A}\|\le A_0,\|\boldsymbol{\epsilon}\|\le\epsilon_0}\|T^{1/2}\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_1,\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_2)$$

(6.2.47)

$$-T^{1/2}\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon})),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}_1+\boldsymbol{\epsilon}_1),\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}_2+\boldsymbol{\epsilon}_2))\|\xrightarrow{P} 0,$$

cuando $T\to\infty$ y $\varepsilon_0\to 0$, también vale

$$\sup_{\|\mathbf{A}\|\le A_0}\|T^{1/2}(\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\phi}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta})-\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}))\|\xrightarrow{P} 0. \tag{6.2.48}$$

DEMOSTRACIÓN: De (6.2.46) y (6.2.47) se obtiene que dado $\delta>0$ existen ε_0 y T_1 tales que, si $T>T_1$ entonces

$$P(\sup_{\substack{\|\boldsymbol{\epsilon}\|\le\epsilon_0\\ \|\mathbf{A}\|\le A_0}}\|T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon})),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}_1+\boldsymbol{\epsilon}_1),\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}_2+\boldsymbol{\epsilon}_2))$$

$$-T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_1,\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_2)\|>\delta/4)\le\delta/4$$

y

$$P(\sup_{\substack{|\boldsymbol{\varepsilon}|\leq\varepsilon_0\\|\mathbf{A}|\leq A_0}} \|T^{1/2}\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon})),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_1),\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_2))$$

$$-T^{1/2}\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_1,\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_2)\|>\delta/4)\leq\delta/4$$

Sea $\mathcal{A}=\{\mathbf{A}\ /\ \|\mathbf{A}\|\leq A_0\}$. Considérese un cubrimiento finito de $\mathcal{A}$ por k bolas de radio ε_0 y centros $\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_k$, que se denota $\mathcal{B}(\mathbf{a}_j,\varepsilon_0)$, $\forall\, 1\leq j\leq k$.

Por la Proposición 6.2.3 existe T_2 tal que si $T>T_2$ entonces

$$P(T^{1/2}\|\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_j),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{1,j},\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{2,j})$$

$$-\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_j),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{1,j},\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{2,j})\|\ >\ \delta/2)\leq\delta/2k,\ 1\leq j\leq k$$

Además

$$P(\sup_{\|\mathbf{A}\|\leq A_0}\|T^{1/2}(\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta})-\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}))\|\leq\delta)$$

$$=P(\max_{1\leq j\leq k}\sup_{\mathbf{A}\in\mathcal{B}(\mathbf{a}_j,\varepsilon_0)}\|T^{1/2}(\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta})-\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}),\boldsymbol{\phi},\boldsymbol{\theta}))\|\leq\delta)$$

$$\geq 1-P\Big[\max_{1\leq j\leq k}\sup_{\mathbf{A}\in\mathcal{B}(\mathbf{a}_j,\varepsilon_0)}\|T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_1,\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_2)$$

$$-T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_1),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{1,j},\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{2,j})\|>\delta/4$$

$$\bigcup\Big(\max_{1\leq j\leq k}\sup_{\mathbf{A}\in\mathcal{B}(\mathbf{a}_j,\varepsilon_0)}\|T^{1/2}\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_1,\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_2)$$

$$-T^{1/2}\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_1),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{1,j},\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{2,j})\|>\delta/4\Big)$$

$$\bigcup\Big(\max_{1\leq j\leq k}\sup_{\mathbf{A}\in\mathcal{B}(\mathbf{a}_j,\varepsilon_0)}T^{1/2}\|\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_j),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{1,j},\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{2,j})$$

$$-\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_j),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{1,j},\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{2,j})\|\ >\ \delta/2\Big)\Big]$$

Pero, dado $\delta>0$, existen ε_0 y T_1 tales que, si $T>T_1$ entonces

$$P(\max_{1\leq j\leq k}\sup_{\mathbf{A}\in\mathcal{B}(\mathbf{a}_j,\varepsilon_0)}\|T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_1,\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_2)$$

$$-T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_1),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{1,j},\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{a}_{2,j})\|>\delta/4)$$

$$\leq P(\max_{1\leq j\leq k}\sup_{\substack{\mathbf{A}\in\mathcal{B}(\mathbf{a}_j,\varepsilon_0)\\\|\mathbf{A}\|\leq A_0,\|\boldsymbol{\varepsilon}\|\leq\varepsilon_0}}\|T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_1,\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}_2)$$

$$-T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon})),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}_1+\boldsymbol{\varepsilon}_1),\boldsymbol{\theta}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}_2+\boldsymbol{\varepsilon}_2))\|>\delta/4)$$

$$\leq\delta/4.$$

Analogamente, dado $\delta > 0$, existen ϵ_0 y T_1 tales que, si $T > T_1$ entonces

$$P(\max_{1\leq j\leq k}\sup_{\mathbf{A}\in B(\mathbf{a}_j,\epsilon_0)} \|T^{1/2}\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}), \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}_1, \boldsymbol{\theta}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}_2)$$
$$- T^{1/2}\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_1), \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_{1,j}, \boldsymbol{\theta}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_{2,j})\| > \delta/4) \leq \delta/4.$$

Ademaś existe T_2 tal que si $T > T_2$ entonces

$$P(\max_{1\leq j\leq k}\sup_{\mathbf{A}\in B(\mathbf{a}_j,\epsilon_0)} T^{1/2}\|\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_j), \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_{1,j}, \boldsymbol{\theta}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_{2,j})$$
$$- \mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_j), \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_{1,j}, \boldsymbol{\theta}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_{2,j})\| > \delta/2)$$
$$= P(\bigcup_{j=1}^{k} T^{1/2}\|\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_j), \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_{1,j}, \boldsymbol{\theta}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_{2,j})$$
$$- \mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_j), \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_{1,j}, \boldsymbol{\theta}_0 + T^{-1/2}\mathbf{a}_{2,j})\| > \delta/2)$$
$$\leq \delta/2.$$

Luego, para todo $\delta > 0\ \exists\, T_1\ , T_2$ tales que si $T > \max\{T_1, T_2\}$ entonces

$$P(\sup_{\|\mathbf{A}\|\leq A_0} \|T^{1/2}(\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}) - \mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\lambda}), \boldsymbol{\phi}, \boldsymbol{\theta}))\| \leq \delta) \geq 1 - \delta.$$

Esto completa la demostracíon del lema. ∎

PROPOSICIÓN 6.2.4. *Supóngase que* $(Z_1, \ldots, Z_T)$ *es un proceso AR(p) estacionario y ergódico y que las suposiciones A y B se satisfacen. Sea* $\mathbf{A} \in \Re^p$ *y* $A_0 > 0$ *y* $\boldsymbol{\phi} = \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}$. *Denótese por* $\|\cdot\|$ *la norma Euclidea usual. Luego*

(i) $\sup_{\|\mathbf{A}\|\leq A_0} \|T^{1/2}(\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{\phi}, \mathbf{0}) - \mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}), \boldsymbol{\phi}, \mathbf{0}))\| \xrightarrow{p} 0$, *cuando* $T \to \infty$.

(ii) Existe una sucesión de estimadores $\widehat{\boldsymbol{\phi}}_T$ *tales que* $T^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_T - \boldsymbol{\phi}_0)$ *es acotado en probabilidad y*

$$T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_T), \widehat{\boldsymbol{\phi}}_T, \mathbf{0}) \xrightarrow{p} \mathbf{0}, \quad \text{cuando } T \to \infty .$$

DEMOSTRACIÓN: Por el Lema 6.2.3 para probar (i) es suficiente probar

$$\sup_{\|\mathbf{A}\|\leq A_0, \|\boldsymbol{\epsilon}\|\leq\epsilon_0} \|T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}_1), \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}_1, \mathbf{0})$$
$$- T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_1)), \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\epsilon}_1), \mathbf{0})\| \xrightarrow{p} 0, \tag{6.2.49}$$

y

$$\sup_{\|\mathbf{A}\|\le A_0, \|\boldsymbol{\varepsilon}\|\le \varepsilon_0} \|T^{1/2}\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}_1), \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}_1, \mathbf{0})$$

(6.2.50)

$$- T^{1/2}\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1)), \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}_1 + \boldsymbol{\varepsilon}_1), \mathbf{0})\| \xrightarrow{p} 0 ,$$

cuando $T \to \infty$ y $\varepsilon_0 \to 0$.

Para simplificar la notación, en lo que sigue se reemplazará $\mathbf{A}_1$ y $\boldsymbol{\varepsilon}_1$ por $\mathbf{A}$ y $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Primero se mostrará que vale (6.2.49).

Para $1 \le j \le p$ sean

$$S_{1,j}(T, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varepsilon}) = T^{1/2}(T - j - p)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} |s_h(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon}))| \sum_{t=p+1+h+j}^{T}$$

$$|J_2(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon}))}{T-p+1})||J_1(\frac{R_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon}))}{T-p+1}) - J_1(\frac{R_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})}{T-p+1})| ,$$

$$S_{2,j}(T, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varepsilon}) = T^{1/2}(T - j - p)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} |s_h(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon}))| \sum_{t=p+1+h+j}^{T}$$

$$|J_1(\frac{R_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})}{T-p+1})||J_2(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon}))}{T-p+1}) - J_2(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})}{T-p+1})|$$

y

$$S_{3,j}(T, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varepsilon}) = T^{1/2}(T - j - p)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} |s_h(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}) - s_h(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon}))|$$

$$\sum_{t=p+1+h+j}^{T} |J_1(\frac{R_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})}{T-p+1})||J_2(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})}{T-p+1})| .$$

Luego

$$|T^{1/2}\mathbf{W}_{T,j}(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}), \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}, \mathbf{0})$$

$$- T^{1/2}\mathbf{W}_{T,j}(\mathbf{R}_T(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon})), \boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon}), \mathbf{0})|$$

(6.2.51)

$$\le S_{1,j}(T, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varepsilon}) + S_{2,j}(T, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varepsilon}) + S_{3,j}(T, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varepsilon}).$$

Dado $\mathbf{X} \in \Re^h$ y $x \in \Re$ se notará por $F_h(\mathbf{X}, x)$ a la función de distribución empírica determinada por $\mathbf{X}$ es decir

$$F_h(\mathbf{X}, x) = \frac{\sum_{i=1}^{h} I(X_i \leq x)}{h}$$

donde $I(B)$ denota la función indicadora del suceso B. Como

$$R_t(\phi_0 + T^{-1/2}\Delta) = \sum_{i=1}^{T-p} I(U_{p+i}(\phi_0 + T^{-1/2}\Delta) \leq U_t(\phi_0 + T^{-1/2}\Delta))$$

es inmediato que

$$R_t(\phi_0 + T^{-1/2}\Delta) = (T-p)F_{T-p}(U_T(\phi_0 + T^{-1/2}\Delta), U_t(\phi_0 + T^{-1/2}\Delta)). \tag{6.2.52}$$

De (6.2.52) juntamente con la hipótesis B(vii) se tiene que

$$\begin{aligned} &|J_1(\frac{R_t(\phi_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\epsilon)}{T-p+1}) - J_1(\frac{R_t(\phi_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}}{T-p+1})| \\ &\leq \frac{K(T-p)}{T-p-1}|F_{T-p}(U_T(\phi_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\epsilon)), U_t(\phi_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\epsilon)) \\ &- F_{T-p}(U_T(\phi_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}), U_t(\phi_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}))| \end{aligned} \tag{6.2.53}$$

Por lo tanto, aplicando la desigualdad de Schwartz y (6.2.53) a $S_{1,j}(T, \mathbf{A}, \epsilon)$ se tiene

$$\begin{aligned} S_{1,j}(T, \mathbf{A}, \epsilon) &\leq (T(T-p))^{1/2}(T-j-p)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} |s_h(\phi_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\epsilon))| \\ &\times \Big[\sum_{t=p+1+h+j}^{T} |J_2(\frac{R_{t-h-j}(\phi_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\epsilon))}{T-p+1})|^2/(T-p)\Big]^{1/2} K(T-p)^{1/2}(T-p+1)^{-1} \\ &\times \Big[\sum_{t=p+1+h+j}^{T} ((T-p)^{1/2}|F_{T-p}(U_T(\phi_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\epsilon)), U_t(\phi_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\epsilon)) \\ &- F_{T-p}(U_T(\phi_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}), U_t(\phi_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}))|)^2\Big]^{1/2}, \end{aligned}$$

Pero

$$\sum_{j=1}^{T-p}[J_2(\frac{j}{T-p+1})]^2/(T-p) \underset{T\to\infty}{\to} \int_0^1 J^2(u)\,du = K < \infty.$$

Como además la sucesión $(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon}))$ está en un compacto para $\|\mathbf{A}\| \leq A_0$ y $\|\boldsymbol{\epsilon}\| \leq \epsilon_0$, de (6.1.1) resulta que

$$\sup_{\|\mathbf{A}\|\leq A_0, \|\boldsymbol{\epsilon}\|\leq \epsilon_0} |s_h(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon}))| \leq K b^h$$

con $\sum_{h=0}^{\infty} b^h < \infty$.

Luego

$$\begin{aligned}
&S_{1,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) \leq K T^{1/2}(T-j-p)^{-1} \\
&\times \Big[\sum_{t=p+1+h+j}^{T} [(T-p)^{1/2} |F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon})), U_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon}))) \\
&- F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}), U_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}))|]^2 \Big]^{1/2}
\end{aligned} \tag{6.2.54}$$

Sean

$$\begin{aligned}
o_1(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) =& (T-p)^{1/2}|F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon})), U_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon}))) \\
&- F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0), U_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon})))| \\
&(T-p)^{1/2}|F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}), U_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})) \\
&- F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0), U_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}))| \\
o_2(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) =& (T-p)^{1/2}|F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0), U_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon}))) \\
&- F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0), U_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})) - T^{-1/2}\sum_{i=1}^{p} \epsilon_i Z_{t-i} f(U_{t-i}(\boldsymbol{\phi}_0))| \\
o_3(\epsilon_0) =& \epsilon_0 \sum_{i=1}^{p} |Z_{t-i} f(U_t(\boldsymbol{\phi}_0))|
\end{aligned}$$

y

$$o_4(T,A_0) = \sup_{\substack{x\in\Re \\ \|\mathbf{A}\|\leq A_0}} (T-p)^{1/2}|F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}), x) - F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0), x)|$$

Es fácil ver que

$$\sup_{\substack{1\leq t\leq T \\ \|\mathbf{A}\|\leq A_0, \|\boldsymbol{\epsilon}\|\leq \epsilon_0}} o_1(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) \leq o_4(T, A_0+\epsilon_0) + o_4(T,A_0). \tag{6.2.55}$$

Además por el Teorema 2 de la Sección 1 de Koul(1989) se tiene que

(6.2.56) $$o_4(T, A_0 + \varepsilon_0) \xrightarrow{p} 0 \quad \text{y} \quad o_4(T, A_0) \xrightarrow{p} 0$$

cuando $T \to \infty$.

Por otro lado, usando la fórmula 5 de Koul(pag 18,1989), se tiene

$$\sup_{\substack{1 \leq t \leq T \\ \|\mathbf{A}\| \leq A_0}} (T-p)^{1/2} |F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\phi_0), U_t(\phi_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}))$$

$$- F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\phi_0), U_t(\phi_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})) - T^{-1/2} \sum_{i=1}^{p} A_i Z_{t-i} f(U_{t-i}(\phi_0))| \xrightarrow{p} 0$$

y

$$\sup_{\substack{1 \leq t \leq T \\ \|\mathbf{A}\| \leq A_0, \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \varepsilon_0}} (T-p)^{1/2} |F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\phi_0), U_t(\phi_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A} + \boldsymbol{\varepsilon})))$$

$$- F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\phi_0), U_t(\phi_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})) - T^{-1/2} \sum_{i=1}^{p} (A_i + \varepsilon_i) Z_{t-i} f(U_{t-i}(\phi_0))| \xrightarrow{p} 0$$

cuando $T \to \infty$.

Sea

(6.2.57) $$o_5(T, A_0, \varepsilon_0) = \sup_{\substack{1 \leq t \leq T \\ \|\mathbf{A}\| \leq A_0, \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \varepsilon_0}} o_2(T, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varepsilon})$$

entonces

(6.2.58) $$o_5(T, A_0, \varepsilon_0) \xrightarrow{p} 0 \text{ cuando } T \to \infty$$

. Luego de (6.2.54), (6.2.55) y (6.2.57) se obtiene

(6.2.59)
$$P(\sup_{\|\mathbf{A}\| \leq A_0, \|\boldsymbol{\varepsilon}\| \leq \varepsilon_0} S_{1,j}(T, \mathbf{A}, \boldsymbol{\varepsilon}) > \delta) \leq P\Big(K T^{1/2} (T-j-p)^{-1}$$
$$\times \Big[\sum_{t=p+1+h+j} [o_4(T, A_0 + \varepsilon_0) + o_4(T, A_0) + o_5(T, A_0, \varepsilon_0) + o_3(\varepsilon_0)]^2 \Big]^{1/2} > \delta\Big)$$

De (6.2.56) y (6.2.58) resulta

$$P\Big((KT^{1/2}(T-j-p)^{-1})^2 \sum_{t=p+1+h+j}^{T} (o_4(T,A_0+\varepsilon_0)$$

$$+ o_4(T,A_0) + o_5(T,A_0,\varepsilon_0))^2 > \delta^2/3\Big) \xrightarrow{P} 0 \tag{6.2.60}$$

cuando $T \to \infty$.

Del hecho que $E(|Z_{t-i}|) \leq K < \infty$ y que $E(|f(U_t)| = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(u)\,du < \infty$ resulta

$$\begin{aligned} P(o_3(\varepsilon_0) > \delta/3^{1/2}) &\leq \frac{E(o_3(\varepsilon_0))}{\delta/3^{1/2}} \\ &\leq \frac{\varepsilon_0 pK}{\delta/3^{1/2}}. \end{aligned} \tag{6.2.61}$$

De (6.2.56) y (6.2.61) resulta que

$$P\Big(2(KT^{1/2}(T-j-p)^{-1})^2 \sum_{t=p+1+h+j}^{T} (o_4(T,A_0+\varepsilon_0) + o_4(T,A_0)$$

$$o_5(T,A_0,\varepsilon_0))o_3(\varepsilon_0) > \delta^2/3\Big) \xrightarrow{P} 0 \tag{6.2.62}$$

cuando $T \to \infty$.

Del hecho que $E(|Z_{t-i}|^2) \leq K < \infty$ y que $E(|f^2(U_t)| = \int_{-\infty}^{\infty} f^3(u)\,du < \infty$ resulta

$$\begin{aligned} P(o_3^2(\varepsilon_0) > \delta^2/3) &\leq \frac{E(o_3^2(\varepsilon_0))}{\delta^2/3} \\ &\leq \frac{\varepsilon_0^2 pK}{\delta^2/3}. \end{aligned}$$

Luego

$$P\Big((KT^{1/2}(T-j-p)^{-1})^2 \sum_{t=p+1+h+j}^{T} o_3^2(\varepsilon_0) > \delta^2/3\Big) \to 0 \tag{6.2.63}$$

cuando $T \to \infty$. Por lo tanto de (6.2.54), (6.2.59), (6.2.60), (6.2.62) y (6.2.63) resulta

$$\sup_{||\mathbf{A}|| \leq A_0, ||\boldsymbol{\varepsilon}|| \leq \varepsilon_0} S_{1,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\varepsilon}) \xrightarrow{P} 0, \quad \text{cuando } T \to \infty,\ \varepsilon_0 \to 0\,. \tag{6.2.64}$$

Sea

$$S_{2,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) = T^{1/2}(T-j-p)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} |s_h(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon}))| \sum_{t=p+1+h+j}^{T}$$

$$|J_1(\frac{R_t(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A})}{T-p+1})||J_2(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon}))}{T-p+1}) - J_2(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A})}{T-p+1})|.$$

De (6.2.53) junto con la hipótesis B(vii) se tiene que

$$|J_2(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon})}{T-p+1}) - J_2(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}}{T-p+1})|$$

$$\leq \frac{K(T-p)}{T-p-1}|F_{T-p}(U_T(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon})), U_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon})))$$

(6.2.65)

$$-F_{T-p}(U_T(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}), U_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}))|$$

Por lo tanto, aplicando la desigualdad de Schwartz y (6.2.65) a $S_{2,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon})$ se tiene

$$S_{2,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) \leq (T-p+1)^{-1}(T-p)K\Big[\sum_{j=1}^{T-p}[J_1(\frac{j}{T-p+1})]^2/(T-p)\Big]^{1/2}$$

$$\times\, T^{1/2}(T-j-p)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} |s_h(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon}))|$$

(6.2.66)

$$\times \Big[\sum_{t=p+1+h+j}^{T} [(T-p)^{1/2}|F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon})), U_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon})))$$

$$-F_{T-p}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}), U_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}))|]^2\Big]^{1/2}$$

De (6.2.66) se obtiene inmediatamente una expresión similar a (6.2.54). Por lo tanto procediendo de igual manera que para $S_{1,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon})$ resulta

(6.2.67)
$$\sup_{||\mathbf{A}||\leq A_0, ||\boldsymbol{\epsilon}||\leq \epsilon_0} S_{2,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) \xrightarrow{P} 0, \quad \text{cuando } T\to\infty,\ \epsilon_0 \to 0\,.$$

Sea

$$S_{3,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) = T^{1/2}(T-j-p)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} |s_h(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}) - s_h(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\epsilon}))|$$

$$\times \sum_{t=p+1+h+j}^{T} |J_1(\frac{R_t(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A})}{T-p+1})||J_2(\frac{R_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A})}{T-p+1})|\,.$$

Aplicando la desigualdad de Schwartz y (6.1.2) a $S_{3,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\varepsilon})$ se tiene, si $T \geq 2p+1$

$$S_{3,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\varepsilon}) \leq (p+1)K\varepsilon_0 \sum_{h=0}^{\infty} b^h \Big[\sum_{j=1}^{T-p} [J_1(\frac{j}{T-p+1})]^2/(T-p)\Big]^{1/2}$$
$$\times \Big[\sum_{j=1}^{T-p} [J_2(\frac{j}{T-p+1})]^2/(T-p)\Big]^{1/2}$$

Luego

(6.2.68) $$\sup_{\|\mathbf{A}\|\leq A_0, \|\boldsymbol{\varepsilon}\|\leq \varepsilon_0} S_{3,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\varepsilon}) \xrightarrow{p} 0, \quad \text{cuando } T \to \infty,\ \varepsilon_0 \to 0\,.$$

Finalmente, (6.2.49) resulta de (6.2.51), (6.2.64), (6.2.67) y (6.2.68).

Se demostrará ahora (6.2.50).

Sean, para $1 \leq j \leq p$,

$$S^*_{1,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\varepsilon}) = T^{1/2}(T-j-p)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} |s_h(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))| \sum_{t=p+1+h+j}^{T}$$
$$|J_2(F(U_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))))||J_1(F(U_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))))$$
$$- J_1(F(U_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})))|\,,$$

$$S^*_{2,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\varepsilon}) = T^{1/2}(T-j-p)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} |s_h(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))| \sum_{t=p+1+h+j}^{T}$$
$$|J_1(F(U_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})))||J_2(F(U(_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))))$$
$$- J_2(F(U_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})))|$$

y

$$S^*_{3,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\varepsilon}) = T^{1/2}(T-j-p)^{-1} \sum_{h=0}^{T-j-p-1} |s_h(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A}) - s_h(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))|$$
$$\times \sum_{t=p+1+h+j}^{T} |J_1(F(U_t(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})))||J_2(F(U_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0 + T^{-1/2}\mathbf{A})))|\,.$$

Luego

$$
\begin{aligned}
&|T^{1/2}\mathbf{W}^{*}_{T,j}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A}),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A},0)\\
&-T^{1/2}\mathbf{W}^{*}_{T,j}(\mathbf{U}_T(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon})),\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}),\mathbf{0})|\\
&\le S^{*}_{1,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\varepsilon})+S^{*}_{2,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\varepsilon})+S^{*}_{3,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\varepsilon}).
\end{aligned}
\tag{6.2.69}
$$

Se acotará ahora $S^{*}_{1,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\varepsilon})$.

De (6.1.1) resulta

$$
\begin{aligned}
S^{*}_{1,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\varepsilon})\le T^{1/2}(T-j-p)^{-1}K\sum_{t=p+1+h+j}^{T}&|J_2(F(U_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))))|\\
&\times|J_1(F(U_t(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))))-J_1(F(U_t(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A})))|\,,
\end{aligned}
$$

Del Teorema del Valor Medio y de la hipótesis B(v) se tiene

$$
\begin{aligned}
&|J_1(F(U_t(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))))-J_1(F(U_t(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A})))|\\
&\qquad\le K|U_t(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))-U_t(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A})|.
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$
\begin{aligned}
&|J_1(F(U_t(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))))-J_1(F(U_t(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}\mathbf{A})))|\\
&\qquad\le KT^{-1/2}\sum_{i=1}^{p}|\varepsilon_i Z_{t-i}|.
\end{aligned}
$$

De la hipótesis B(iv) se tiene

$$
|J_2(F(U_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))))|\le K|U_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))|
$$

Además

$$
|U_{t-h-j}(\boldsymbol{\phi}_0+T^{-1/2}(\mathbf{A}+\boldsymbol{\varepsilon}))|\le T^{-1/2}\sum_{i=1}^{p}|(A_i+\varepsilon_i)Z_{t-h-j-i}|+|U_{t-h-j}|.
$$

Luego

$$\sup_{\|\mathbf{A}\|\leq A_0,\|\boldsymbol{\epsilon}\|\leq\epsilon_0} S^*_{1,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) \leq K(T-p-1)^{-1}\varepsilon_0 \sum_{t=p+1+h+j} (T^{-1/2}\varepsilon_0 \times \sum_{i=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} |Z_{t-h-j-i}Z_{t-l}| + \sum_{l=1}^{p} |U_t Z_{t-l}|)$$

Entonces

$$P(\sup_{\|\mathbf{A}\|\leq A_0,\|\boldsymbol{\epsilon}\|\leq\epsilon_0} S^*_{1,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) > \delta) \leq \Big(E(K(T-p-1)^{-1}\varepsilon_0 \sum_{t=p+1+h+j} (T^{-1/2}\varepsilon_0 \times \sum_{i=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} |Z_{t-h-j-i}Z_{t-l}| + \sum_{l=1}^{p} |U_t Z_{t-l}|)\Big)\Big/\delta \tag{6.2.70}$$

Como $E(|Z_{t-h-j-i}Z_{t-l}|) \leq K$ y $E(|U_t Z_{t-l}|) \leq K$ se tiene

$$E(K(T-p-1)^{-1}\varepsilon_0 \sum_{t=p+1+h+j} (T^{-1/2}\varepsilon_0 \sum_{i=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} |Z_{t-h-j-i}Z_{t-l}| + \sum_{l=1}^{p} |U_t Z_{t-l}|) \leq \varepsilon_0 K.$$

Luego de (6.2.70) resulta

$$\sup_{|\mathbf{A}|\leq A_0,|\boldsymbol{\epsilon}|\leq\epsilon_0} S^*_{1,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) \xrightarrow{p} 0, \quad \text{cuando } T\to\infty,\ \varepsilon_0\to 0\,. \tag{6.2.71}$$

Analogamente se obtiene

$$\sup_{|\mathbf{A}|\leq A_0,|\boldsymbol{\epsilon}|\leq\epsilon_0} S^*_{2,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) \xrightarrow{p} 0, \quad \text{cuando } T\to\infty,\ \varepsilon_0\to 0\,. \tag{6.2.72}$$

Argumentos similares y (6.1.2) llevan a

$$\sup_{|\mathbf{A}|\leq A_0,|\boldsymbol{\epsilon}|\leq\epsilon_0} S^*_{3,j}(T,\mathbf{A},\boldsymbol{\epsilon}) \xrightarrow{p} 0, \quad \text{cuando } T\to\infty,\ \varepsilon_0\to 0\,. \tag{6.2.73}$$

Finalmente de (6.2.69), (6.2.71), (6.2.72) y (6.2.73) se obtiene (6.2.50). Esto completa la demostración de la parte (i).

Se demostrará ahora (ii).

De los Teoremas 3.1 y 4.1 de Bustos Fraiman y Yohai (1984) resulta que existe una sucesión $\widehat{\boldsymbol{\phi}}_T$ tal que $T^{1/2}(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_T - \boldsymbol{\phi}_0)$ está acotada en probablidad y

$$T^{1/2}\mathbf{W}^*_T(\mathbf{U}_T(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_T),\widehat{\boldsymbol{\phi}}_T,0) \xrightarrow{p} 0 \text{ cuando } T\to\infty\,.$$

Por lo tanto de (i) se tiene que

$$T^{1/2}\mathbf{W}_T(\mathbf{R}_T(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_T),\widehat{\boldsymbol{\phi}}_T,0)\xrightarrow{p}0 \text{ cuando } T\to\infty\ .$$

esto completa la demostración de la Proposición. ∎

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA 4.1: De acuerdo con la Proposición 6.2.4 se tiene

$$T^{1/2}\mathbf{W}_T^*(\mathbf{U}_T(\widehat{\boldsymbol{\phi}}_T),\widehat{\boldsymbol{\phi}}_T,\mathbf{0})\xrightarrow{p}\mathbf{0},\quad \text{cuando } T\to\infty.$$

Luego $\widehat{\boldsymbol{\phi}}_T$ satisface el sistema de ecuaciones correspondiente a los RA–estimadores con $\eta(u,v)=J_1(F(u))J_2(F(v))$ entonces el teorema resulta de Bustos, Fraiman y Yohai (1984; Teorema 4.1). ∎

7. Apéndice B.

PROPOSICIÓN 7.1. *Sea J una función tal que*

(7.1.1) $$|d^jJ(u)/du^j|\leq K(u(1-u))^{-j-1/8+\delta},\quad j=0,1\ ,0<u<1$$

para algún $\delta>0$

entonces

(7.1.2) $$\lim_{T\to\infty}E\Big([J(F(U_{p+1}))-J\Big(\frac{R_{p+1}}{T-p+1}\Big)]^4\Big)=0$$

DEMOSTRACIÓN: Sea

$$\begin{aligned}A_T=&E\Big([J(F(U_{p+1}))-J\Big(\frac{R_{p+1}}{T-p+1}\Big)]^4\Big)\\=&E\Big(E\Big([J(F(U_{(R_{p+1})}))-J\Big(\frac{R_{p+1}}{T-p+1}\Big)]^4|R_{p+1}\Big)\Big)\\=&(T-p)^{-1}\sum_{j=1}^{T-p}E\Big([J(F(U_{(j)}))-J(\frac{j}{T-p+1})]^4\Big)\end{aligned}$$

En (7.1.1) se considerará el caso en que $0<\delta\leq 1/8$; si $\delta>1/8$ la demostración resulta comparativamente más simple. Sea δ_1 tal que

(7.1.3) $$0\ <\ \delta_1\ <\delta.$$

También sean $T_1 = [(T-p)^{\delta_1}]$ y $T_2 = T - p - [(T-p)^{\delta_1}]$. Se definen

$$\begin{aligned}
A_{T,1} =&(T-p)^{-7/8}\sum_{j=1}^{T_1} E\Big([J(F(U_{(j)})) - J(\frac{j}{T-p+1})]^4\Big)\\
A_{T,2} =&(T-p)^{-7/8}\sum_{j=T_1+1}^{T_2} E\Big([J(F(U_{(j)})) - J(\frac{j}{T-p+1})]^4\Big)\\
A_{T,3} =&(T-p)^{-7/8}\sum_{j=T_2+1}^{T-p} E\Big([J(F(U_{(j)})) - J(\frac{j}{T-p+1})]^4\Big).
\end{aligned}$$

Luego, como

$$A_T = (T-p)^{-1/8}(A_{T,1} + A_{T,2} + A_{T,3})$$

para probar (7.1.2) alcanza con demostrar que existe T_0 tal que

$$|A_{T,1}| + |A_{T,2}| + |A_{T,3}| \leq K \text{ si } T > T_0.$$

De (7.1.1) resulta

$$|J(u)| \leq K(u(1-u))^{-1/8+\delta}.$$

Luego, existe T_1 tal que, si $T > T_1$ entonces

$$\begin{aligned}
\max_{1\leq j\leq T-p} |J(\frac{j}{T-p+1})| \leq& K \max_{1\leq j\leq T-p} \Big((\frac{j}{T-p+1})(1-\frac{j}{T-p+1})\Big)^{-1/8+\delta}\\
\leq& K(T-p+1)^{1/8-\delta}.
\end{aligned} \tag{7.1.4}$$

Sea $\Psi(y)$ la función de distribución de $J(F(U_j))$, por lo tanto $\Psi^*(y) = \Psi(y) - \Psi(-y)$ es la función de distribución de $|J(F(U_j))|$. También de (7.1.1) resulta que si $1 \leq k \leq 4$

$$\int_0^\infty y^{2k+\delta}\, d\Psi^*(y) \;<\; \infty. \tag{7.1.5}$$

Luego, para $1 \leq k \leq 4$

$$\begin{aligned}
\max_{1\leq j\leq T-p} |E(J^k(F(U_{(j)})))|^{1+\delta/2k} \leq& E(\max_{1\leq j\leq T-p} |J^k(F(U_j))|^{1+\delta/2k})\\
\leq& (T-p)\int_0^\infty y^{k(1+\delta/2k)}(\Psi^*(y))^{T-p-1}\, d\Psi^*(y)\\
\leq& (T-p)\Big(\int_0^\infty y^{2k+\delta}\, d\Psi^*(y)\Big)^{1/2}\\
&\times\Big(\int_0^\infty (\Psi^*(y))^{2(T-p-1)}\, d\Psi^*(y)\Big)^{1/2}\\
\leq& K(T-p)^{1/2} \qquad \text{si } T > T_2 \text{ para algún } T_2,
\end{aligned}$$

esto implica que

$$(7.1.6) \qquad \max_{1\leq j\leq T-p} |E(J^k(F(U_{(j)})))| \leq K(T-p)^{k/(2k+\delta)} \qquad \text{si } T > T_2.$$

Como

$$\begin{aligned}
|A_{T,1}| \leq & \frac{T_1}{(T-p)^{7/8}} \max_{1\leq j\leq T_1} E\Big([J(F(U_j)) - J(\frac{j}{T-p+1})]^4\Big) \\
\leq & (T-p)^{\delta_1 - 7/8}\Big(\max_{1\leq j\leq T_1} |J(\frac{j}{T-p+1})^4| + 4 \max_{1\leq j\leq T_1} |J(\frac{j}{T-p+1})^3| \\
& \times \max_{1\leq j\leq T_1} |E(J(F(U_{(j)})))| + 6 \max_{1\leq j\leq T_1} |J(\frac{j}{T-p+1})^2| \max_{1\leq j\leq T_1} |E(J^2(F(U_{(j)})))| \\
& + 4 \max_{1\leq j\leq T_1} |J(\frac{j}{T-p+1})^2| \max_{1\leq j\leq T_1} |E(J^3(F(U_{(j)})))| + \max_{1\leq j\leq T_1} |E(J^4(F(U_{(j)})))|\Big),
\end{aligned}$$

de (7.1.4) y (7.1.6) resulta

$$\begin{aligned}
|A_{T,1}| \leq & (T-p)^{\delta_1 - 7/8} K\Big((T-p)^{1/2-4\delta} + 4(T-p)^{3/8-3\delta+1/(2+\delta)} \\
& + 6(T-p)^{1/4-2\delta+2/(4+\delta)} + 4(T-p)^{1/8-\delta+3/(6+\delta)} + (T-p)^{4/(8+\delta)}\Big).
\end{aligned}$$

Luego, si $T > \max\{T_1, T_2\}$ resulta $|A_{T,1}| \leq (T-p)^{-\alpha}$ con $\alpha > 0$ y en consecuencia existe T_3 tal que si $T > T_3$ entonces $|A_{T,1}| \leq K$.

La cota de $A_{T,3}$ se obtiene en forma idéntica a la anterior pues

$$|A_{T,1}| \leq (T-p)^{\delta_1 - 7/8} \max_{T_2+1\leq j\leq T-p} E\Big([J(F(U_j)) - J(\frac{j}{T-p+1})]^4\Big)$$

Para obtener la cota de $|A_{T,2}|$ se necesitan los siguientes resultados.

Se define, para $0 < t < s < 1$

$$(7.1.7) \qquad g_s(t) = \{(s-t)/s\}^s \{(1-s+t)/(1-s)\}^{1-s}.$$

Luego

$$(7.1.8) \qquad \sup_{0<\eta\leq t} g_s(t) = g_s(\eta) \text{ donde } 0 < g_s(\eta) < 1 \text{ para todo } 0 < s < 1,$$

y

$$(7.1.9) \qquad \frac{\sup_{0<s<\eta} |g_s(s/2)(2/e^{1/2})^s - 1|}{\eta} \underset{\eta\to 0}{\longrightarrow} 0.$$

También, a partir de las expresiones de la función de distribución y de la función de densidad del estadístico de orden i para el caso de N v.a. uniformes, se tiene

$$(7.1.10) \qquad i\binom{N}{i}\int_0^{u_0} u^{i-1}(1-u)^{N-i}\,du = \sum_{r=i}^{N}\binom{N}{r}u_0^r(1-u_0)^{N-r}.$$

Por lo tanto, del Teorema 1 de Hoeffding (1963), resulta

$$(7.1.11) \qquad \sup_{u_0\leq i/N-t}\left\{i\binom{N}{i}\int_0^{u_0} u^{i-1}(1-u)^{N-i}\,du\right\} \leq [g_{(i/N)}(t)]^N.$$

De (7.1.7), (7.1.8) y (7.1.11) resulta

$$(7.1.12) \qquad \sup_{0<\epsilon<i/N}\ \sup_{u_0\leq i/N-t}\left\{i\binom{N}{i}\int_0^{u_0} u^{i-1}(1-u)^{N-i}\,du\right\} \leq [\rho(\epsilon,\eta)]^N,$$

donde $0<\rho(\epsilon,\eta)<1$ y de (7.1.7), (7.1.9) y (7.1.11)

$$(7.1.13) \qquad \sup_{N_1\leq i\leq N\epsilon}\ \sup_{u_0\leq i/(2N)}\left\{i\binom{N}{i}\int_0^{u_0} u^{i-1}(1-u)^{N-i}\,du\right\} \leq [\rho^*(\epsilon)]^{N^{\delta_1}},$$

donde $0<\rho^*(\epsilon)<1$ para todo $\epsilon>0$. Además, para todo k fijo

$$(7.1.14) \qquad [\rho(\epsilon,\eta)]^N\Big/N^{-k}\to 0 \text{ y } [\rho^*(\epsilon)]^{N^{\delta_1}}\Big/N^{-k}\to 0,$$

cuando $N\to\infty$.

Finalmente, por la continuidad de $J'(u)$ en el intervalo abierto (0,1), se tiene que para todo $\epsilon>0$ y $\eta>0$ existe $\gamma<\epsilon$ tal que

$$(7.1.15) \qquad \sup_{\epsilon<u<1-\epsilon}\ \sup_{|u|<\gamma}|J'(u+v)-J'(u)|<\eta.$$

Sean

$$A_{T,2,1} = (T-p)^{-7/8}\sum_{j=T_1+1}^{[(T-p)\epsilon]} E\Big([J(F(U_{(j)}))-J(\frac{j}{T-p+1})]^4\Big)$$

$$A_{T,2,2} = (T-p)^{-7/8}\sum_{j=[(T-p)\epsilon]+1}^{T_2-[(T-p)\epsilon]-1} E\Big([J(F(U_{(j)}))-J(\frac{j}{T-p+1})]^4\Big)$$

$$A_{T,2,3} = (T-p)^{-7/8}\sum_{j=T_2-[(T-p)\epsilon]}^{T_2} E\Big([J(F(U_{(j)}))-J(\frac{j}{T-p+1})]^4\Big).$$

Luego

$$A_{T,2} = A_{T,1,2} + A_{T,2,2} + A_{T,3,2}. \tag{7.1.16}$$

Se considerará ahora $T_1 + 1 \leq j \leq [(T-p)\epsilon]$.

Sea

$$u_1 = j/2(T-p)$$

y sean

$$\begin{aligned}
D_{j,1} &= \int_0^{u_1} [J(u) - J(\frac{j}{T-p+1})]^4 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
D_{j,2} &= \int_{u_1}^{4u_1} [Ju) - J(\frac{j}{T-p+1})]^4 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
D_{j,3} &= \int_{4u_1}^{1} [J(u) - J(\frac{j}{T-p+1})]^4 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du.
\end{aligned} \tag{7.1.17}$$

Se observa que

$$\begin{aligned}
|D_{j,1}| \leq & \int_0^{u_1} [|J(u)| + |J(\frac{j}{T-p+1})|]^4 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
\leq & \int_0^{u_1} |J(u)|^4 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
& +4 \int_0^{u_1} |J(u)|^3 |J(\frac{j}{T-p+1})| j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
& +6 \int_0^{u_1} |J(u)|^2 |J(\frac{j}{T-p+1})|^2 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
& +4 \int_0^{u_1} |J(u)||J(\frac{j}{T-p+1})|^3 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
& + \int_0^{u_1} |J(\frac{j}{T-p+1})|^4 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du.
\end{aligned} \tag{7.1.18}$$

De (7.1.7) y (7.1.8) se tiene que

$$\begin{aligned}
u^{j-1}(1-u)^{T-p-j} &\leq \Big(\frac{1}{2}\frac{j-1}{T-p-1} + \frac{1}{2(T-p)}\Big)^{j-1}\Big(1 - \frac{1}{2}\frac{j-1}{T-p-1} - \frac{1}{2(T-p)}\Big)^{T-p-j} \\
&= \Big(\frac{j-1}{T-p-1}\Big)^{j-1}\Big(1 - \frac{j-1}{T-p-1}\Big)^{T-p-j}\Big[g_{\frac{j-1}{T-p-1}}\Big(\frac{1}{2}\frac{j-1}{T-p-1} - \frac{1}{2(T-p)}\Big)\Big]^{T-p-1}
\end{aligned}$$

Luego

$$|D_{j,1}| \leq (T-p)\Big[g_{\frac{j-1}{T-p-1}}\Big(\frac{1}{2}\frac{j-1}{T-p-1}-\frac{1}{2(T-p)}\Big)\Big]^{T-p-1}$$
$$\times\Big(\int_0^1 |J(u)|^4\,du + 4|J(\frac{j}{T-p+1})|\int_0^1 |J(u)|^3\,du$$
$$+6|J(\frac{j}{T-p+1})|^2\int_0^1 |J(u)|^2\,du + 4|J(\frac{j}{T-p+1})|^3$$
$$\times\int_0^1 |J(u)|\,du + |J(\frac{j}{T-p+1})|^4\Big).$$

Del hecho que $g_s(t)$ es una función decreciente de t, de (7.1.4), (7.1.9) y de (7.1.14) resulta que existe T_4 tal que si $T > T_4$ entonces

$$|D_{j,1}| \leq K(T-p)^{-1/8} \tag{7.1.19}$$

Analogamente se obtiene

$$|D_{j,3}| \leq K(T-p)^{-1/8} \tag{7.1.20}$$

Se acotará ahora $D_{j,2}$. Del teorema del Valor Medio se tiene que existe θ, $0<\theta<1$ tal que

$$|D_{j,2}| \leq \int_{u_1}^{4u_1}(u-\frac{j}{T-p+1})^4|J'(\theta u+(1-\theta)\frac{j}{T-p+1})|^4$$
$$\times j\binom{T-p}{j}u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\,du.$$

Además de (7.1.1), para $u_1 \leq u \leq 4u_1$ se tiene

$$|J'(\theta u+(1-\theta)\frac{j}{T-p+1})| \leq \Big((\theta u+(1-\theta)\frac{j}{T-p+1})(1-\theta u-(1-\theta)\frac{j}{T-p+1})\Big)^{-9/8+\delta}$$
$$\leq (u_1(1-u_1))^{-9/8+\delta} \leq u_1^{-9/8+\delta}.$$

Luego

$$|D_{j,2}| \leq \Big(\frac{j}{2(T-p)}\Big)^{-9/2+4\delta}E\Big(\big(F(U_{(j)})-E(F(U_{(j)}))\big)^4\Big). \tag{7.1.21}$$

Como

$$(7.1.22) \qquad E\Big(\big(F(U_{(j)})-E(F(U_{(j)}))\big)^4\Big) \le K\frac{j}{(T-p+1)^3},$$

de (7.1.19), (7.1.20) y (7.1.21) resulta

$$|A_{T,2,1}| \le K\epsilon + K\frac{\epsilon^{4\delta-5/2}}{(T-p+1)^{15/8}},$$

puede hacerse arbitrariamente pequeño con tal de tomar ϵ pequeño y T suficientemente grande. Analogamente

$$|A_{T,2,3}| \underset{T\to\infty}{\to} 0$$

Se acotará ahora $A_{T,2,2}$.

Sean $u_1 = \frac{j}{T-p+1} - \eta$ y $u_2 = \frac{j}{T-p+1} + \eta$, por (7.1.15) se puede elegir η tal que

$$\sup_{u_1<u<u_2} |J'(u) - J'(\frac{1}{T-p+1})| < \eta.$$

Sean

$$D'_{j,1} = \int_0^{u_1} [J(u) - J(\frac{j}{T-p+1})]^4 j\binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\,du$$
$$D'_{j,2} = \int_{u_1}^{u_2} [J(u) - J(\frac{j}{T-p+1})]^4 j\binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\,du$$
$$D'_{j,3} = \int_{u_2}^{1} [J(u) - J(\frac{j}{T-p+1})]^4 j\binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\,du.$$

Luego, se demuestra exactamente como en (7.1.19) que para T suficientemente grande

$$(7.1.23) \qquad |D'_{j,1}| \le K(T-p)^{-1/8}$$

y

$$(7.1.24) \qquad |D'_{j,3}| \le K(T-p)^{-1/8}$$

Más aún.

$$
\begin{aligned}
|D'_{j,2}| \le& \int_{u_1}^{u_2} (u - \frac{j}{T-p+1})^4 |J'(\theta u + (1-\theta)\frac{j}{T-p+1}|^4 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
\le& \Big|J'(\frac{j}{T-p+1})\Big|^4 \int_{u_1}^{u_2} (u - \frac{j}{T-p+1})^4 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
&+ \sup_{u_1 \le u \le u_2} \Big|J'(u) - J'(\frac{j}{T-p+1})\Big|^4 \\
&\times \int_{u_1}^{u_2} (u - \frac{j}{T-p+1})^4 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
&+ 4\Big|J'(\frac{j}{T-p+1})\Big| \sup_{u_1 \le u \le u_2} \Big|J'(u) - J'(\frac{j}{T-p+1})\Big|^3 \\
&\times \int_{u_1}^{u_2} (u - \frac{j}{T-p+1})^4 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
&+ 6\Big|J'(\frac{j}{T-p+1})\Big|^2 \sup_{u_1 \le u \le u_2} \Big|J'(u) - J'(\frac{j}{T-p+1})\Big|^2 \\
&\times \int_{u_1}^{u_2} (u - \frac{j}{T-p+1})^4 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
&+ 4\Big|J'(\frac{j}{T-p+1})\Big|^3 \sup_{u_1 \le u \le u_2} \Big|J'(u) - J'(\frac{j}{T-p+1})\Big| \\
&\times \int_{u_1}^{u_2} (u - \frac{j}{T-p+1})^4 j \binom{T-p}{j} u^{j-1}(1-u)^{T-p-j}\, du \\
\le& KE\Big((F(U_j) - \frac{j}{T-p+1})^4\Big)\Big[(T-p+1)^{1/2-4\delta} + \eta^4 + 4(T-p+1)^{1/8-\delta}\eta^3 \\
&+ 6(T-p+1)^{1/4-2\delta}\eta^2 + 4(T-p+1)^{3/8-3\delta}\Big].
\end{aligned}
$$

De (7.1.22) resulta

$$
\begin{aligned}
|D'_{j,2}| \le& K\frac{j}{(T-p+1)^3}\Big[(T-p+1)^{1/2-4\delta} + \eta^4 + 4(T-p+1)^{1/8-\delta}\eta^3 \\
&+ 6(T-p+1)^{1/4-2\delta}\eta^2 + 4(T-p+1)^{3/8-3\delta}\Big].
\end{aligned} \tag{7.1.25}
$$

Finalmente de (7.1.23), (7.1.24) y (7.1.25) se tiene

$$
\begin{aligned}
|A_{T,2,2}| \leq & (T-p)^{-7/8} \sum_{[(T-p)\epsilon]+1}^{T_2-[(T-p)\epsilon]-1} |D'_{j,1}| + |D'_{j,2}| + |D'_{j,3}| \\
\leq & K(2+(T-p+1)^{-3/2} \sum_{j=1}^{T-p} \frac{j}{T-p+1} \\
\leq & K(2+(T-p+1)^{-1/2}).
\end{aligned}
$$

Queda así concluída la demostración de la Proposición. ∎

REFERENCIAS

Anderson, T.W. (1971). *The Statistical Analysis of Times Series.* Wiley, New York.

Billingsley, P. (1968). *Convergence of Probability Measures.* Wiley, New York.

Box, G.E.P. and Jenkins, G.M. (1970). *Time Series Analysis, forecasting and control.* Holden-Day, San Francisco.

Bustos, O.H. (1982). General M-estimates for contaminated $p-th$ order autoregressive processes: consistency and asymptotic normality. *Z. Wahrsch. Verw. Gebeiete* **59** 491-504.

Bustos, O., Fraiman, R. and Yohai, V. (1984) Asymptotic behaviour of the estimates based on residual autocovariance for ARMA models. *Robust and Nonlinear Time Series.* (J. Franke, W. Härdle and D. Martin, eds.) 26-49. Springer-Verlag, New York.

Bustos, O. and Yohai, V. (1986). Robust Estimates for ARMA models. *J. Amer. Statist. Assoc.* **81** 155-168.

Denby, L. and Martin, R.D. (1979). Robust estimation of the first order autoregressive parameter. *J. Amer. Statist. Assoc.* **74** 140-147.

Hallin, M., Ingenbleek, J.-Fr. and Puri, M.L. (1985). Linear serial rank tests for randomness against ARMA alternatives. *Ann. Statist.* **13** 1156-1181.

Hallin, M. and Puri, M.L. (1988). Optimal rank-based procedures for time series analysis: Testing an ARMA model against other ARMA models. *Ann. Statist.* **16** 402-432.

Hájek, J. and Šidák, Z. (1967). *Theory of Rank Tests.* Academic Press, New York.

Hoeffding, W. (1963). Probability inequalities for sums of bounded random variables. *JASA* **58,** 369-400.

Koul, H. (1989). A weak convergence result useful in robust autoregression. Manuscrito no publicado.

Krieger, H.A. (1984). A new look at Bergström's Theorem on convergence in distribution variables. *Israel Journal of Mathematics* **47** 32-64.

LeCam, L. (1960). Locally asymptotically normal families of distributions. *Univ. Calif. Publ. Statist.* 3, 37-98.

Martin, R. D. (1980). Robust estimation of autoregressive models (with discussion). In *Directions in Time Series,* edited by Brillinger, et al., *Instit. of Math. Statistics Publications.*

Martin, R. D. (1981). Robust methods in time series. In *Applied Time Series II,* edited by D. F. Findley, *Academic Press, New York.*

Martin, R.D. and Yohai, V.J. (1985). Robustness in time series and estimating ARMA models. In *Handbook of Statistics, Vol. 5,* edited by E. J. Hannan, et al., 119-155, *Elsevier Science Publishers B. V.*

Press, W.H., Flannery, B.P., Teukolsky, S.A. and Vetterling, W.T. (1986). *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing.* Cambridge University Press.

Puri, M.L. and Sen, P. K. (1971). *Nonparametric Methods on Multivariate Analysis.* Wiley, New York.

V J. Yohai