

## Tesis de Posgrado

# Aplicaciones de la teoría de sistemas de control a sistemas naturales

Neuman, Carlos Enrique

1990

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Neuman, Carlos Enrique. (1990). Aplicaciones de la teoría de sistemas de control a sistemas naturales. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2363\\_Neuman.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2363_Neuman.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Neuman, Carlos Enrique. "Aplicaciones de la teoría de sistemas de control a sistemas naturales". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1990. [http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2363\\_Neuman.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2363_Neuman.pdf)

**EXACTAS** UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



**UBA**

Universidad de Buenos Aires

1990  
2363  
e.j.2

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

APLICACIONES DE LA TEORÍA DE SISTEMAS  
DE CONTROL A SISTEMAS NATURALES

por

Carlos Enrique NEUMAN

Tesis presentada para optar al título de  
Doctor en Ciencias Matemáticas

Director: Dr. Carlos E. D'ATTELLIS

Codirector: Dr. Vicente COSTANZA

Lugar de trabajo: Departamento de Matemáticas e INTEC

1990

- 2363 -  
e.j.2



**LOS ÁRBOLES MANTIENEN UNIDA A LA TIERRA CON EL CIELO**

## Resumen

En esta tesis se estudian temas de Matemática Aplicada con el fin de configurar un marco nuevo y preciso para el tratamiento de problemas de manejo de sistemas naturales ecológicos para los que no se han hallado métodos satisfactorios de tratamiento ni solución integral. Los pasos dados en el modelado, identificación y control óptimo de sistemas naturales ecológicos agroforestales en el marco de las teorías de sistemas generales y de control configura el punto de partida para la construcción de un Sistema de Sustentación de Decisiones (DSS) para manejo agrosilvopastoril en el marco de bosques subtropicales. Se ha puesto un énfasis especial en el estudio y solución de problemas de la región, como los que se presentan en los sistemas forestales del norte de la provincia de Santa Fe, Argentina. Los métodos elaborados se aplican a otros sistemas naturales y a sistemas organizados por el hombre: económicos, sociales y geográficos.

En el pasado humano la organización del espacio fue un prolongado fenómeno natural con marchas y contramarchas. El método de prueba y error que en muchos casos ha conducido a la desaparición de recursos de la superficie terrestre ha permitido en ciertos casos la organización de sistemas naturales ecológicos no totalmente ineficientes. En la actualidad, en cambio, no es admisible la inherente lentitud de tal proceso pues es necesario desarrollar metodologías que permitan resolver urgentemente los problemas globales y simultáneamente organizar la preservación del medio ambiente que se encuentra seriamente afectada. En consecuencia se plantea en este trabajo un conjunto de métodos tendientes a la solución del problema de manejo correcto de los sistemas naturales mencionados.

En el capítulo 1 se ubican conceptualmente los problemas que se abordarán y se mencionan referencias y resultados obtenidos por otros autores en temas análogos. Se establece la notación en forma preliminar y se presentan las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) asociadas con el tipo de problemas en cuestión. Los problemas estudiados son esencialmente no lineales. Cuando se los linealiza se reduce fuertemente la aplicabilidad y calidad de los resultados. La no linealidad está asociada a los sistemas ecológicos. Se mencionan algunos de los efectos del mal manejo de estos sistemas y algunos de los elementos que deben tenerse en cuenta en los modelos que se construyen.

En el capítulo 2 se establece la clase de modelos que se utilizan para la dinámica. Allí se toma partido por los modelos paramétricos globales. Estos modelos, que basta tomar polinomiales, se identifican con técnicas que se introducen en el apéndice A3. También se adoptan modelos del tipo entrada-salida en el apéndice A4 y se obtienen allí modelos internos vía realización. Se define la forma de las funcionales de evaluación de las estrategias de control y de su impacto sobre el sistema, y las funciones que las constituyen. Se definen asimismo las llamadas funciones de valor asociadas con dichas estrategias.

En el capítulo 3 se construyen algoritmos combinatorios basados en un enfoque de recorrido exhaustivo para el control impulsional de sistemas ecológicos definidos por modelos logísticos. Su identificación se ilustra en el apéndice A3. Ellos descansan en la observación de que la consideración de todos los casos posibles se reduce a un conjunto relativamente pequeño de evaluaciones si se satisfacen ciertas hipótesis sobre los parámetros. Este capítulo presenta la aplicación del control de saltos al manejo de recursos renovables. Allí se obtiene una definición explícita de la estrategia óptima de saltos en el caso de un sistema natural no lineal que modela ciertos tipos de bosques. Los resultados están de acuerdo con una acción conservativa economicoecológica. Los

ejemplos desarrollados en este trabajo asocian teorías nuevas de control de saltos con el manejo de bosques naturales.

Las inecuaciones (H-J-B) del capítulo 4 son el comienzo de líneas alternativas de ataque, mencionadas en la introducción, que han sido aplicadas por otros autores a problemas socioeconómicos y de manejo de sistemas económicos. Se establecen nuevas coordenadas en el espacio de estados para tratar las ecuaciones (H-J-B) sobre las trayectorias y se introduce el caso de lagrangianos polinomiales y su efecto en los cálculos.

En el Apéndice A1 se comparan los resultados de esta tesis con los métodos clásicos de manejo. Se muestra además que una acción de manejo del bosque que no sea óptima, en general causa pérdidas significativas en el mediano plazo. Los ejemplos que se presentan se complementan en el apéndice A2 con aplicaciones silvopastoriles en el bosque Chaqueño (R. Argentina). Se discretizan los problemas y se comparan los métodos propuestos. Se comparan los resultados con la optimización directa del funcional en el caso  $r = 1$ . Se establecen los siguientes hechos: (1) los cortes deben realizarse —por razones ecológicas— con un espaciamiento de, por lo menos, un año —que en la práctica es mucho mayor— y la biomasa remanente de la especie extraída no puede ser inferior a un valor preestablecido, (2) en el período decaanual de estudio (mediano plazo), el número óptimo de cortes resulta muy pequeño (o nulo), (3) hay en general baja sensibilidad respecto de la cantidad cortada en el sentido que corrimientos respecto de los valores óptimos no afectan en gran medida el resultado final. Los algoritmos construidos se basan en estas condiciones, y los resultados coinciden con los del capítulo 5.

Nuevos algoritmos para los mismos problemas se construyen en el capítulo 5. El enfoque es ahora variacional. Se comentan brevemente antecedentes desarrollados por Menaldi y se comparan los resultados que se obtendrían aplicando sus métodos, con los de esta tesis, como introducción a la segunda parte donde se describen los nuevos algoritmos. Mediante ellos se determinan las componentes pertinentes del borde del conjunto de continuación, las que se utilizan para la definición de la política óptima de manejo.

El siguiente capítulo es de conclusiones. El trabajo se complementa con apéndices que ya han sido mencionados e ilustran otros aspectos de los problemas. En el A1 se compara con los métodos clásicos. Los A2 y A5 conducen al programa BALL, orientado al manejo agrosilvopastoril en el Bosque Chaqueño, primera versión de un Sistema de Sustentación de Decisiones (DSS por Decision Support System). En el A3 se inicia el estudio de la identificación de los modelos dinámicos y en el A4 se presentan métodos de control de la evolución temprana de rodales, estableciéndose un nexo con el apéndice precedente. En éste se propone un método nuevo para encontrar estrategias óptimas de fertilización en bosques implantados. El método consiste básicamente en determinar aproximadamente las ecuaciones que gobiernan la dinámica del sistema árbol-fertilizante, y luego aplicar métodos usuales de optimización para costos aditivos. Se describe el procedimiento mediante un experimento real con ejemplares de *Eucalyptus rostrata*. La ventaja principal del método consiste en la posibilidad de tomar en cuenta sucesiones de aplicaciones de fertilizantes que puedan ser distintas en magnitud y también efectivizadas en momentos distintos. Los resultados producen recomendaciones sobre cuándo y cuánto fertilizante debería aplicarse en una plantación similar para maximizar las ganancias globales.

# ÍNDICE

Resumen.	
Índice.	iv
1. Introducción.	1.
Sistemas generales y sistemas naturales.	3
Sistemas de control. Control óptimo.	7
Control impulsional.	14
Sistemas agroforestales.	17
Modelos de largo plazo.	18
Simulaciones de corto plazo.	19
Manejo combinado.	20
Modelos economicoecológicos.	21
Optimización forestal.	23
Manejo de sistemas agroforestales.	24
Contenidos de la tesis.	28
2. Modelización y funciones de Valor.	2.
La dinámica.	2
Control impulsional.	4
La funcional de beneficio.	6
Actualización.	8
La función de valor.	8
Restricciones a la funcional de beneficio.	9

3. Control impulsional de sistemas agroforestales.	3.
El análisis del caso continuo.	1
Aproximación de la solución vía discretización.	9
Ejemplo numérico.	15
Ejemplo en dos dimensiones espaciales	28
4. Las Inecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman.	4.
Un resultado de ortogonalidad.	7
El caso de lapso fijo.	9
Funcionales autónomas.	11
Ejemplo.	13
El conjunto de continuación.	16
Cambio de variables bajo dinámica logística.	17
Las inecuaciones para la función de valor.	18
5. Algoritmos Variacionales.	5.
El caso de horizonte infinito.	1
Tiempo de detención.	4
Control Impulsional.	7
El régimen $(\zeta, Z)$ .	10
Nuevos algoritmos.	13
El problema con umbral nulo.	16
El problema con umbral.	29
6. Conclusiones.	6.
A1. El Manejo de Bosques Clásico.	A1.
Métodos clásicos de manejo de bosques.	2

<b>A2. Manejo Agrosilvopastoril en el Bosque Chaqueño.</b>	<b>A2.</b>
Introducción.	1
Descripción de un modelo simplificado.	9
El manejo y su optimización.	12
Conclusiones.	19
<b>A3. El Modelo Logístico y el Problema de Identificación.</b>	<b>A3.</b>
<b>A4. Fertilización de bosques como sistema de control.</b>	<b>A4.</b>
Optimización del proceso de fertilización forestal.	3
Introducción.	3
El formalismo de la teoría de control.	8
El método aplicado a un experimento.	11
Aplicaciones y conclusiones.	31
Apéndice.	33
<b>A5. El Programa BALL.</b>	<b>A5.</b>
Introducción.	1
El programa.	3
La identificación.	4
La optimización.	5
El uso interactivo.	13
Comentarios.	16
<b>R. Referencias y Bibliografía.</b>	<b>R.</b>



# 1. INTRODUCCIÓN.

En esta tesis se presenta un conjunto de resultados tendientes a la construcción de un Sistema de Sustentación de Decisiones (Decision Support System, DSS) aplicado al manejo de sistemas naturales ecológicos. Usualmente un tal DSS consiste de: (i) una metodología para generar herramientas capaces de dar respuestas a los problemas más usuales planteados en un campo de aplicación específico, y (ii) las herramientas en sí: teoremas, algoritmos, reglas prácticas, programas de computación, etc. Se atacan aquí parcialmente ambos aspectos. La obtención de los resultados aludidos ha obligado a recurrir a las teorías de sistemas generales y de control; y también al modelado, identificación y optimización de sistemas naturales; y de sus extensiones a sistemas organizados por el hombre: económicos, sociales, y geográficos.

Mas detalladamente, los propósitos de este trabajo son:

- o o presentar un marco nuevo y preciso para el tratamiento del problema de manejo de sistemas naturales ecológicos,
- o o desarrollar criterios específicos para la obtención de políticas de manejo, adaptadas a las necesidades de desarrollo de tales sistemas, con un enfoque de objetivos múltiples (económicos, ecológicos, etc.)
- o o comparar los resultados de los nuevos métodos con los que proveen algunos enfoques clásicos de manejo,
- o o adaptar técnicas de identificación y de realización de sistemas al caso de los sistemas agrosilvopastoriles,

- o o proponer algoritmos para determinar manejos silviculturales óptimos y subóptimos,
- o o utilizar experimentos y simulaciones para conferir validez a los enunciados abstractos, y mostrar la factibilidad de los algoritmos propuestos.

Se elabora principalmente sobre la teoría de control impulsional, para aplicarla al manejo de recursos renovables agroforestales. Se obtiene primero una definición explícita de la estrategia óptima para las extracciones o incorporaciones de recursos al sistema, que se realizan como acciones de control sobre cierto tipo de bosques. Se extienden luego los resultados obtenidos a sistemas con varias variables (bosque, especies forestales, ganado pastando bajo monte). En este proceso, para la determinación de los controles óptimos se fundamentan y construyen algoritmos de dos tipos:

- combinatorios, tanto exhaustivos como probabilísticos, basados en la separación en el tiempo de las acciones de control. Estos algoritmos permiten determinar directamente la política óptima (o un subóptimo adecuado a los requerimientos del DSS).
- variacionales, basados en las formas integrales de las ecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman que se deducen para cada caso en estudio. Aquí los algoritmos permiten determinar los bordes de ciertos dominios distinguidos del espacio de fases, elementos que permiten finalmente obtener la política óptima.

Los propósitos enunciados comienzan a desarrollarse a partir del capítulo 2. En el resto de este capítulo se tratan conceptos generales y referencias asociadas con la tesis en sus distintos aspectos.

## SISTEMAS GENERALES Y SISTEMAS NATURALES.

Las teorías matemáticas de sistemas y de control se han desarrollado de modo altamente significativo en el presente siglo, en particular a partir de la década de 1950. La teoría clásica de control, desarrollada desde el siglo pasado con el fin de resolver problemas de gobernabilidad de sistemas físicos amplía sus orientaciones, enfoques y métodos, que tienden en forma natural a las aplicaciones en las ramas más diversas del saber humano y a nuevas estrategias para la resolución, tanto de problemas que acompañan a la humanidad desde sus comienzos, como de los originados por los intentos parciales de solución a los primeros y las sorprendentes tragedias y fracasos generados por esas acciones. Un ejemplo de estos es el aumento a nivel planetario de las áreas desérticas y la correlativa disminución de las masas boscosas.

Un marco teórico útil para una aproximación general a los problemas de gestión de sistemas naturales consiste en la construcción de un modelo simplificador de la evolución de algunas variables descriptoras de la realidad, representado por ecuaciones diferenciales ordinarias de evolución, o de ecuaciones en diferencias en el caso de modelos con tiempo discreto; y la definición de un medio eficiente para comparar los resultados de la acción, que en los términos planteados consistirá, en general, en alguna función con codominio en los números reales. Esta función de comparación suele presentarse como un funcional de beneficio (generalizado); en el que se incluyen los efectos de las acciones diseñadas para lograr el manejo de los sistemas, y las respuestas de los mismos. La simplificación aludida es esencial a la modelización. Puesto que uno de los objetivos es lograr entender las relaciones elementales del sistema que estudiamos, en caso de elaborar modelos muy complejos lograríamos crear un nuevo sistema intermedio de “explicación” casi tan difícil como el original. Por ejemplo, si el modelo incluye muchas ecuaciones diferenciales, cada una para explicar un aspecto

parcial del sistema, la evolución en conjunto de las mismas puede “predecir” fenómenos no observados, o contradictorios, o al menos difíciles de comprobar experimentalmente.

Los fenómenos se manifiestan al espíritu crítico humano como relacionados. Un aspecto importante del devenir de la ciencia es intentar establecer relaciones entre, o sistematizar, los fenómenos. En este contexto, un sistema natural es para el científico un conjunto de objetos de la realidad observable y sus relaciones, percibidas dentro de un marco conceptual holístico. Los sistemas naturales son pues el resultado de la interrelación entre el conjunto caótico de fenómenos y el afán humano de establecer allí un orden.

El resultado de ésta acción es la creación de un ente abstracto que actúa como modelo (necesaria y deseablemente simplificador) del sistema natural, esto es el sistema en los términos de la definición expuesta más adelante.

Cuando nos referimos a sistemas naturales en este trabajo pensamos en un conjunto específico de éstos: los sistemas ecológicos en interacción con el hombre, es decir sistemas asociados al manejo de recursos naturales ecológicos. Ejemplos de éstos van desde el pequeño rodal implantado, pasando por los asentamientos agrosilvopastoriles o las subcuencas hídricas integradas, hasta los procesos de avance de la frontera de los desiertos y la deforestación global. Entre los aspectos fundamentales por tener en cuenta es necesario, por lo tanto, incluir el de medio ambiente y su nivel de calidad. Estos son el resultado de la delicada interacción entre la biosfera y la noosfera en la superficie terrestre (ver Polanski, 1974).

En el presente siglo, merced al desarrollo de disciplinas como la Matemática, la Informática, la Ecología, la Economía y la Geografía, y soportada por el avance tecnológico en medios ordenadores fue posible que comenzara a desarrollarse una Teoría de Sistemas Generales, que ha podido concebirse como una colección de conceptos

generales, principios, herramientas, problemas, métodos y técnicas asociadas con estos nuevos entes, los sistemas (ver Klir, 1972 y von Bertalanffy, 1972). Por ejemplo Mesarovic (1972) considera a la teoría de sistemas como la que trata de explicar los fenómenos o las construcciones conceptuales en términos de conceptos de procesamiento de información y de la toma de decisiones. Desde un punto de vista formal un sistema general sería una relación en un espacio producto, donde las componentes son los 'objetos' del sistema, admitiéndose dos aproximaciones posibles,

- (a) la de entrada-salida
- (b) la de obtención de objetivos.

Un sistema es, en el contexto precedente, un conjunto de operaciones lógicas que actúan sobre, y en las que actúan, una o más entradas (ver Bennet y Chorley, 1978). Estas conducen a la producción por el sistema de salidas (y se pueden obtener resultados).

Si es posible operar sobre las entradas para obtener unas salidas requeridas, o cambiar el sistema (en el caso de los sistemas conceptuales) de modo de obtener la salida deseada a partir de las entradas existentes, entonces se tiene un sistema de control.

Desde los orígenes de la humanidad la organización del espacio fue un fenómeno natural surgente del nivel alcanzado de posibilidad de satisfacción de las necesidades esenciales de los distintos grupos. Las tecnologías diseñadas a lo largo de siglos de experimentación real lograron optimizar, por un método implícito de prueba y error, el manejo de los recursos naturales en locaciones particulares de nuestro planeta donde fue posible mantener sistemas naturales que pudiesen gozar de cierta autonomía. Así se ha producido una natural organización del espacio terrestre y del sistema de usos de la tierra asociado al aprovechamiento de los recursos locales.

En la actualidad no. El grado de crecimiento de la población mundial lleva a la necesidad y al desafío de organizar la preservación del medio ambiente, que está siendo fuertemente afectado por los desequilibrios en los que se incurre. Con este fin resulta esencial ensayar la optimización del uso de los recursos con que cuenta la humanidad para su desarrollo. Esto es necesario pues no tiene sentido esperar que las nuevas y necesarias tecnologías se descubran como en la historia humana hasta la primera mitad del presente siglo. Es necesario, en consecuencia, considerar cuál es la óptima ubicación (localización) para las cosas, cuál es el óptimo uso de las distintas áreas, etc, en un plazo breve, pues con las presentes acciones se están degradando rápidamente los sistemas. En ello tienen mucho que aportar las Teorías de Sistemas Generales, de Sistemas de Control, y la Matemática Aplicada en general.

En este sentido, las aplicaciones de los resultados obtenidos en el presente trabajo aspiran a la optimización de la conservación y uso de uno de los más preciados recursos naturales con que cuenta el hombre para el desarrollo integral del planeta, el bosque tropical y subtropical (muy limitadamente renovable), en interacción con la acción agropastoril y el consiguiente asentamiento humano.

Hasta no hace muchos años se ha actuado sobre el bosque con el mero fin de reducir su cobertura. Se lo ha considerado en general como un recurso natural de fácil renovación y susceptible de un consumo ilimitado. Ello no es así, lo que se ve claramente en la actualidad. De hecho, el sistema ecológico asociado al bosque natural parece comportarse como un recurso natural no renovable y agotable en gran medida.

Más adelante en esta introducción, y en el apéndice A1, mencionamos resumidamente algunos de los estilos de manejo usuales y sus consecuencias en lo que respecta a bosques naturales y al manejo agrosilvopastoril (ver apéndice A2).

## SISTEMAS DE CONTROL. CONTROL ÓPTIMO.

En un afán simplificadorio (parsimonia) podemos considerar, siguiendo a R. Bellman (1971), que un sistema es un vector de estados y una regla para determinar su comportamiento en el tiempo. Pero, ¿cómo se compadece esta elegante definición matemática de sistema con los sistemas naturales previamente mencionados? Es obvio que a partir de la observación de un sistema natural se pueden ensayar numerosas realizaciones concretas de sistemas matemáticos; el sistema real las incluye y es por supuesto más rico que la agregación de modelos que podamos ensayar mediante la aplicación de diversos criterios como los de similaridad, analogía y equivalencia, a su vez relacionados con el concepto de isomorfismo.

A la definición previa podemos agregarle las nociones de vector de control y de resultado de la evolución, donde la elección del control se decide por el beneficio deducido de este. En los sistemas que involucran decisiones de sus conductores se plantea el incremento de las presiones sobre éstos para adecuar las acciones a la creciente interacción entre los sectores fisicoecológico y socioeconómico de los sistemas geográficos. En el primero la influencia positiva humana es limitada; no así la negativa, aunque ambas son potencialmente decisivas. En cambio, en el segundo, el controlador es parte del sistema. Cuando se integran ambos aspectos se ve la necesidad actual de la planificación, por razones de supervivencia, de las acciones de la humanidad sobre el medio natural.

El principio de optimalidad de Bellman (1971) nos dice que “una política óptima tiene la propiedad de que, sean cuales fuesen el estado inicial y la decisión inicial, las decisiones restantes deben constituir una política óptima respecto del estado que resulta de la primera decisión”. Utilizándolo para el estudio de los problemas del control óptimo moderno análogos de los clásicos del Cálculo de Variaciones (ver

Fleming y Rishel, 1975), podemos obtener las correspondientes ecuaciones de evolución de Hamilton-Jacobi-Bellman (H-J-B) del control óptimo (ver Bellman, 1971) en el caso clásico. Este enfoque permitirá tratar los problemas de control de sistemas naturales, los que, en general, hacen necesario el planteo de modelos no lineales (la linealización de los mismos suele conducir a la trivialización de los resultados y, de este modo, no permitir la determinación de políticas óptimas).

Para poder discutir más formalmente algunos aspectos de las posibles aplicaciones, sentemos previamente algunas definiciones y propiedades generales.

De acuerdo con Sussman (1977) un sistema de control  $\Sigma$  queda definido por la especificación de,

- (i) Un espacio de estados  $O$
- (ii) Un espacio de control  $U$
- (iii) Una clase de funciones de control admisibles  $\mathcal{U}$
- (iv) Una ecuación diferencial ordinaria,

$$\begin{cases} \dot{y} = g(y, u) & \text{con } y \in O, u \in \mathcal{U}, u(s) \in U, \\ y(t) = x & \text{con } x \in O. \end{cases} \quad (1.1)$$

Si además puede darse,

- (v) Un espacio de salidas  $P$
- (vi) Una aplicación de salida  $\varphi : O \rightarrow P$

se tiene lo que se denomina un sistema con salidas o simplemente un sistema.

Para dichos entes podemos enunciar el siguiente problema general de optimización (ver Fleming y Rishel, 1975 por más detalles). Dado un conjunto  $C$  asociado con  $\Sigma$  y una función real

$$J : C \longrightarrow \mathbb{R},$$

que evalúa de alguna forma el comportamiento de  $\Sigma$  en  $C$ , encontrar un elemento  $c^* \in C$  tal que

$$J(c^*) \geq J(c) \quad \forall c \in C.$$

Supongamos que  $c^* \in C$  y

$$J(c^*) \geq J(c)$$

para cualquier  $c \in C$ . Entonces, si

$$w : [a, b] \subset \mathbb{R} \longrightarrow C$$

es tal que  $w(s^*) = c^*$ , y  $J \circ w$  es suficientemente suave (en algún sentido, de modo que sea posible definir sus derivadas), se tendrá que la derivada primera de  $J \circ w$  se anulará en  $s = s^*$ ; si  $s^*$  está en el interior del segmento  $[a, b]$ , que en ese punto la derivada segunda será menor o igual que 0 y que, en el caso que el punto  $s^*$  coincida con alguno de los extremos del segmento, se tendrá la correspondiente desigualdad amplia para la derivada primera. Las definiciones específicas de derivación que se utilizarán dependerán de las propiedades del espacio  $C$ .

Para definir el problema general clásico de control óptimo conviene restringir la noción de sistema previamente expuesta. Al espacio de estados  $O$  lo supondremos un abierto de  $\mathbb{R}^r$ , al espacio de control  $U \subset \mathbb{R}^p$  convendrá tomarlo cerrado.

Sea entonces

$$g : \mathbb{R}_{\geq 0} \times O \times U \longrightarrow \mathbb{R},$$

[1.9]

la función  $g(s, y, u)$  que rige la dinámica del sistema y

$$h : \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \times \mathbb{O}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^k,$$

la función  $h(t, T, x, y_{tx}(T))$  que define las restricciones de la evolución, ambas suficientemente regulares. Cuando además se desea obtener un resultado relacionado con el sistema, se tiene el siguiente problema general clásico de control óptimo:

- Encontrar un par factible  $(\tilde{x}, \tilde{u})$  (en el sentido definido a continuación) tal que el correspondiente resultado  $J(\tilde{x}, \tilde{u})$  sea máximo, donde
- $\mathcal{U}$  es el conjunto de funciones  $u(s)$  continuas a trozos, con valores en  $\mathbb{U}$ , cada una definida en el intervalo  $[t, T] \subset \mathbb{R}_{\geq 0}$ .

- La solución de

$$\begin{cases} \dot{y} = g(s, y(s), u(s)) \\ y(t) = x, \end{cases} \quad (1.2)$$

es una trayectoria que corresponde al control  $u(s)$  y la condición inicial  $x$ .

- La función

$$h_1(t, T, x, y_{tx}(T)),$$

con  $y(s)$  solución de la ecuación diferencial previa es el resultado

$$J(x, u) = h_1(t, T, x, y_{tx}(T)),$$

- las funciones

$$h_j(t, T, x, y_{tx}(T)) \quad j = 2, \dots, k,$$

son las condiciones finales para las trayectorias del sistema ( $k$  puede eventualmente ser igual a uno y en tal caso no haber tales restricciones).

- En este contexto un par  $(x, u)$  se dice factible (lo que depende de  $t$  y  $T$ ) si hay una solución  $y(s)$  de la ecuación diferencial con condición inicial  $y(t) = x$  y condiciones finales  $h_j$ , con  $j \geq 2$ , satisfechas por  $y(s)$ .

La definición previa es pasible de generalización formal, sea para ello la función

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{O} \times \mathbb{U} \longrightarrow \mathbb{R},$$

con  $f(s, y, u)$  suficientemente regular; es posible entonces considerar el resultado

$$J(x, u) = \int_t^T f(s, y(s), u(s)) ds,$$

o una combinación

$$J(x, u) = h_1(t, T, x, y_{tx}(T)) + \int_t^T f(s, y(s), u(s)) ds.$$

Con el fin de ilustrar brevemente los métodos clásicos, resulta conveniente presentar el enfoque vía programación dinámica. Con la notación previa, y dado que el problema de optimización es maximizar el resultado sobre los controles  $u(\cdot)$  factibles para la condición inicial  $(t, x)$  —es decir tales que el par  $(x, u)$  sea factible—, se define la función de valor

$$V(t, x) = \sup_{u \text{ factibles}} h(T, y(T)),$$

y, en el caso de no existir controles factibles, entonces se establece  $V(t, x) = \infty$ .

Para la demostración del teorema que enunciamos a continuación ver Fleming y Rishel (1975).

**Teorema.** Sea  $(t, x)$  un punto interior del conjunto

$$Q = \{(t, x) \in \mathbb{R}^{1+r} : \text{hay control factible para } (t, x)\},$$

**[1.11]**

en el que la función  $V(t, x) = \sup_{u \text{ factible}} h_1(T, y(T))$  es diferenciable. Entonces  $V(t, x)$  satisface la desigualdad

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} g(x, v, t) \leq 0 \quad \forall v \in U.$$

Si hay un control óptimo  $u^*(\cdot)$  factible para  $(t, x)$  entonces la ecuación diferencial

$$\sup_{v \in U} \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\partial V}{\partial x} g(x, v, t) \right\} = 0,$$

tiene solución y el máximo se alcanza por  $u^*(t)^+$ , límite a derecha del control óptimo en  $t$ . □

La ecuación del teorema se denomina *ecuación diferencial en derivadas parciales de la Programación Dinámica*, o ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman. Si existen controles óptimos, la función de valor debe satisfacerla en cada punto interior del conjunto  $Q$  en el que sea diferenciable. Surge así el interés en estudiar la regularidad de la función  $V$  (ver al respecto Caffarelli y Friedman, 1978, 1979).

Enfoquemos con fines ilustrativos el mismo problema pero con un resultado

$$J(T, x, u) = \int_0^T f(y, u) ds,$$

(en forma análoga al desarrollo en el capítulo 6 de Bellman, 1971) y una ecuación diferencial de evolución

$$\begin{cases} \dot{y} = g(y, u) \\ y(0) = x, \end{cases}$$

y análogamente definamos

$$V(T, x) = \max_u J(T, x, u).$$

Sea

$$v = u(0) = v(T, x),$$

[1.12]

podemos escribir aproximadamente

$$y(\delta) = x + g(x, v)\delta,$$

y

$$\int_0^\delta f(y, u)ds = f(x, v)\delta.$$

Por otra parte, también aproximadamente

$$\max_{u|(\delta, T)} \int_\delta^T f(y, u)ds = V(T - \delta, x + g(x, v)\delta),$$

de modo que

$$V(T, x) = \max_v \{f(x, v)\delta + V(T - \delta, x + g(x, v)\delta)\} + o(\delta).$$

Pero también

$$V(T - \delta, x + g(x, v)\delta) = V(T, x) + (gV_x - V_T)\delta + o(\delta),$$

con lo que

$$V_T = \max_v \{f(x, v) + g(x, v)V_x\},$$

y con la condición inicial  $V(0, x) = 0$ .

La función  $V(T, x)$  es la que define la política. Para obtener  $v_{\max}$  derivamos la expresión entre llaves e igualamos a cero.

En consecuencia

$$\begin{cases} V_T(T, x) = f(x, v_{\max}) + g(x, v_{\max})V_x(T, x) \\ V_x(T, x) = -\frac{f_v(x, v_{\max})}{g_v(x, v_{\max})} \end{cases} \quad (1.3)$$

o bien

$$\begin{cases} V_T = f - g\frac{f_v}{g_v} \\ V_x = -\frac{f_v}{g_v} \end{cases} \quad (1.4)$$

Si pensamos en  $0 = f_v + g_v V_x$  como una ecuación que determina  $v$  en términos de  $V_x$ , es decir  $v = l(x, V_x)$ , se puede escribir

$$\begin{cases} V_T = \varphi(x, V_x) \\ V(x, 0) = 0 \end{cases}$$

donde  $\varphi$  surge de reemplazar  $v$  por  $l$  en (1.3). Esto determina  $V(T, x)$  como solución de un problema de valores iniciales.

## CONTROL IMPULSIONAL

A los problemas mencionados se puede superponer con naturalidad la posibilidad de discontinuidades exógenamente impuestas a las trayectorias del sistema. Bensoussan y Lions (1975) presentan una metodología general para el tratamiento de estas situaciones fundado en el estudio sistemático de las desigualdades cuasivariacionales, es decir que extienden las ecuaciones de H-J-B del control continuo. Cuando se admiten tales discontinuidades resultan los problemas de control impulsional a los que se asocian las ecuaciones e inecuaciones de Bellman generalizadas, que expresamos para diversas situaciones en el capítulo 4.

Varios trabajos recientes se ocupan del problema impulsional determinista. Los hay, entre otros, con punto de vista eminentemente teórico: Barles (1985), que demuestra que la función de costo óptimo de un problema de control impulsional determinista es la única solución de viscosidad de una desigualdad cuasivariacional de Hamilton-Jacobi (H-J) de primer orden en  $\mathbb{R}^n$ ; Menaldi (1980, 1982a y b, 1987, caso degenerado), que caracteriza el costo óptimo de un problema de control impulsional (respectivamente de tiempo de detención) como la solución máxima de una desigualdad cuasivariacional (respectivamente variacional) de primer orden, y da estimaciones de la velocidad de convergencia uniforme de la sucesión de problemas de tiempo de paro

asociada. Con propuestas de resolución numérica: González (1980) en su tesis se ocupa de la ecuación de H-J del control determinista; los puntos principales se tienen en González y Rofman (1985a y b), donde se estudian los problemas de control óptimo determinista con tiempo de detención y controles continuos e impulsionales, tanto en el caso estacionario como en el no estacionario. Se obtiene el costo óptimo utilizando un método de aproximación al considerarlo como el elemento máximo de un conjunto adecuado de subsoluciones de la ecuación de H-J asociada, y enfocando la solución numérica de las aproximaciones con un método del tipo de relajación. Con solución explícita en un caso simplificado y linealizado: Sulem (1986b), que determina la política de órdenes de compra para el control impulsional de un sistema determinista de inventario de dos productos sujetos a una dinámica constante de demanda y a costos lineales a trozos (de acumulación y de escasez). Obtiene explícitamente el costo óptimo como la solución más suave de una desigualdad cuasivariacional bidimensional y da una construcción exacta de la frontera del conjunto de continuación, lo que permite determinar la política óptima. Asimismo Sulem (1986a) considera el caso estocástico monodimensional con un tratamiento similar. Asociándolo al problema de desigualdades cuasivariacionales: Bensoussan y Lions (1978, 1982), que desarrollan las ecuaciones correspondientes a la versión estocástica, pero que pueden reducirse al caso determinista; Perthame (1985); Menaldi (1982b) que ya mencionamos (en el capítulo 5 se reconsideran los resultados de este artículo). Rempala y Zabczyk (1988) dan una demostración de una versión del principio del máximo de Blaquièrre (1977) para Control Impulsional determinista.

Los textos de Bensoussan y Lions (1978 y 1982) inician un desarrollo del tema de las difusiones estocásticas (ver Menaldi y Robin, 1983; Liao, 1984; P.L.Lions, 1981 y Perthame, 1984) y más generalmente de las funciones (procesos) de Markov (Robin, 1978; Lepeltier y Marchal, 1984; Mosco, 1985) en este contexto, basados

en el enfoque teórico de P.A.Meyer (1975). Los artículos de Menaldi (1980, 1987) desarrollan en un marco estocástico los aspectos descriptos más arriba para el caso determinista. Las principales hipótesis que se asumen son: coeficientes Lipschitzianos para la difusión, crecimiento polinomial de las variables, y funciones y evolución en todo el dominio. Obtiene resultados de existencia de políticas óptimas. Menaldi (1988) concentra una revisión de los resultados de aplicación a Teoría de Control de la Programación Dinámica Estocástica. Mazziotto et al. (1988) presentan un resultado de existencia para Control Impulsional con observaciones parciales. Báncora-Imbert, Chow y Menaldi (1988) lo aplican a un sistema mecánico donde el control está orientado a minimizar las vibraciones aleatorias del sistema, utilizando el Principio de la Programación Dinámica para obtener la ecuación H-J-B asociada.

Paralelo al problema de los fundamentos metodológicos nos planteamos el de las aplicaciones de la teoría. En nuestro caso atacamos, por un lado, el manejo integral de los sistemas ecologicogeográficos asociados al bosque natural, y por otro, el de los sistemas agrosilvopastoriles. En tal sentido interesan en primer término los avances en los métodos de modelado de la evolución de tales sistemas, en escala pequeña y en gran escala.

Un enfoque posible para determinar el control sobre el sistema natural (ver Tait, 1986) es el uso de Programación Dinámica (ver también Meneses y Olivares (1982) donde se presenta un modelo de programación dinámica para la determinación de la estrategia de raleos y corta final en rodales de *Pinus radiata* D. Don.), método que fuera inventado por R. Bellman. Los algoritmos que desarrollamos en el capítulo 3 admiten una reformulación utilizando esta teoría. En el apéndice A4 se exhibe un ejemplo de aplicación.

Las ecuaciones H-J-B de los problemas de control en general han sido tratadas por numerosos autores. Por ejemplo González (1976) considera la función costo óptimo de un problema de control como el elemento maximal de un conjunto convenientemente elegido, que contiene todas las soluciones de la ecuación de H-J (ver también González, 1980). Carlson (1985, 1986) desarrolla la Teoría de Carathéodory-Hamilton-Jacobi. Snow (1967) aplica esta teoría en control óptimo. Otros autores que han estudiado distintos aspectos teóricos de estas ecuaciones son Bardi (1985), Barron (1985), Engler (1986), Haslinger y Roubiček (1986), Mignot y Puel (1976, 1984), Perthame (1983, 1985a, 1985b), Burch (1977), Koike (1987).

En los capítulos 4 y 5 se obtendrán las ecuaciones H-J-B para el caso de los problemas de manejo de sistemas naturales que deseamos resolver, y también sus versiones integrales.

## SISTEMAS AGROFORESTALES.

La optimización de sistemas naturales y ambientales con objetivo economicocológico ha sido históricamente una meta inalcanzada de la humanidad. En los días presentes la economía del corto plazo dicta usualmente las políticas de manejo, y ellas resultan en consecuencias desastrosas desde el punto de vista ecológico. Además, ello redundaría en malos negocios de mediano y largo plazo, sobre todo cuando se desea y logra incluir en la evaluación el costo asociado al deterioro ecológico, lamentable herencia dejada a las generaciones futuras. Entre las razones de lo descrito se cuenta una ansiedad generalizada por planificar y ejecutar operaciones financieras de corto plazo debidas al fenómeno de la inflación, y posiblemente a otros no reconocibles tan explícitamente. Es nuestra opinión que también se adolece de la falta de herramientas analíticas simples que puedan ayudar en el el modelado y control de los sistemas naturales con eficiencia. En el caso de los bosques, existe un sólido cuerpo de literatura

que estudia varios aspectos de su modelado y manejo, pero en su gran mayoría dedicada al caso de bosques implantados en zonas templadas y frías de nuestro planeta. Es muchísimo menor (aunque en crecimiento) el número de aportes sobre el manejo combinado de los recursos.

#### Modelos de largo plazo.

En el largo plazo los bosques son ecosistemas dinámicos, con una mortalidad continua en las poblaciones de árboles balanceada por su gran capacidad reproductiva (Shugart y West, 1981a). Es muy importante entender cómo se afectan estos ecosistemas por las acciones naturales y principalmente antropogénicas sobre el medio ambiente en el mediano y largo plazo, pues para entender y manejar ecológicamente a los bosques, éstos deben ser pensados como ecosistemas muy grandes y duraderos en el tiempo. La optimización del manejo en el corto plazo debe ser, en consecuencia, sintonizada con la noción de sucesión. Un buen número de los métodos corrientes de manejo tienen, sin embargo, una conceptualización estática de los sistemas naturales y, en consecuencia, las acciones desarrolladas han conducido a la degradación o destrucción de los mismos.

La dinámica de largo plazo de los sistemas forestales se ha estudiado según las tres categorías de organización siguientes (Shugart y West, 1980):

- (1) los modelos de árbol, que toman al árbol individual como la unidad básica del simulador forestal (ver Dale et al., 1985),
- (2) los modelos de claros, que simulan atributos particulares de cada árbol individual en unidades espaciales predeterminadas (claros), y
- (3) los modelos de bosque, que toman al bosque como punto focal del modelo de simulación.

Estos modelos teóricos parecen ser necesarios en el estudio de sucesiones. En el corto y mediano plazo el enfoque vía modelos empíricos los complementa adecuadamente, poseyendo la ventaja adicional de una relativa mayor facilidad de control que está muy dificultada en los primeros.

#### Simulación de corto plazo.

Hay una actividad creciente de creación de modelos de ecosistemas forestales. Ewel et al. (1978) utiliza el simulador CSMP (Continuous Systems Modelling Program) para calcular la evolución de un rodal de pinos (*Pinus elliotti*) durante 30 años, sometido a varias acciones de manejo. Para Ewel (1987) el uso de modelos para el manejo de recursos es cada vez más apropiado debido a la creciente complejidad de las metas del manejo. Sin embargo ciertos factores limitan la complejidad de los modelos que se diseñen para alcanzarlas: la masa de información necesaria para construir y simular el modelo, y el error inherente al proceso de integración entre otros. Los modelos que describen solamente alguno de los procesos básicos en un ecosistema pueden ser útiles a pesar de su simplicidad. Los más complejos, que describen ecosistemas enteros, son más útiles solamente cuando son parte de un proyecto de investigación en marcha. García (1983) desarrolla un modelo y un procedimiento de estimación para predecir el crecimiento en altura de rodales de edad uniforme. Se modela por una ecuación diferencial estocástica cuya parte determinista es equivalente al modelo de von Bertalanffy y Richards (generalización del modelo logístico de Verhulst). García (1984) desarrolla un modelo de espacio de estados para el crecimiento de pino (*Pinus radiata*) en el que los raleos son modelados como saltos en las trayectorias. Bailey y Ware (1983) desarrolla una medida del tipo y nivel de raleo y su relación con otros atributos del rodal, y compara el crecimiento del rodal con raleos y sin ellos. Dennis et al. (1985) evalúa la calidad de los modelos que se han

aplicado. Gran número de ellos provienen de ecuaciones de regresión empírica, y su propuesta es construir modelos conceptualmente mejorados, basados en el conocimiento biológico del crecimiento de los árboles. Hellman (1979) despliega un modelo con distribución por edades y efecto de sombra sobre los renovales asociado al aumento de la densidad. El crecimiento se regula por talas y plantado de semillas. Metzler y Gockert (1988) modelan la dinámica de crecimiento de un bosque afectado por contaminación atmosférica. Holmberg et al. (1979) discuten la necesidad del modelado y la simulación en ecología vegetal.

Los conceptos de validación y realismo de modelos ecológicos son reconsiderados por Cale et al. (1983) en términos del dominio de aplicabilidad de un modelo. La ambigüedad en la aplicación y la conceptualización de la validación de un modelo (ecológico) es un problema que incide en la capacidad para determinar la utilidad del mismo.

#### Manejo combinado.

El manejo combinado, necesario en bosques tropicales y subtropicales, ha tenido una mejor consideración en los últimos años. El manejo de los bosque templados y fríos orientados a la producción masiva de madera no ha sido enfocado desde este punto de vista salvo en casos aislados. En el apéndice A2 se considera el caso del bosque subtropical Chaqueño.

Álvarez-Buylla Rocas et al. (1989) describen y analizan los principales componentes del proceso de producción en los solares de una comunidad tropical mexicana, a saber: las prácticas de manejo, los medios de trabajo, y la cantidad, calidad y distribución temporal de la producción. El cincuenta por ciento del bosque tropical del sureste de México ha sido talado para asentar pasturas y cultivos agrícolas. Hay ventajas ecológicas, tecnológicas y productivas de los sistemas agroforestales alternativos

respecto de tales monocultivos, sin embargo el impacto actual del manejo combinado a nivel regional es restringido, debido a la pequeña área cultivada bajo este sistema contrario a la expansión de la frontera agrícola. Una ventaja de las técnicas agroforestales en los solares es que no exigen grandes inversiones para su desarrollo. A ello se suma la diversidad de la producción y el reservorio genético involucrado en los mismos.

Los aspectos económicos del Eucaliptus en agrosilvicultura y sus efectos sobre los cultivos agrícolas han sido estudiados por Ahmed (1989) mediante observaciones realizadas en establecimientos y suministrada por granjeros progresistas en India, con el objetivo económico de obtener la mayor tasa interna de retorno con mínima pérdida para los cultivos agrícolas.

Las nuevas técnicas de manejo combinado agroforestal que han sido desarrolladas en diversas partes del mundo han de permitir aliviar el problema de la deforestación y concurrente degradación de las tierras agrícolas en las naciones tropicales y subtropicales (Duchhart et al., 1989). Pero las soluciones no pueden limitarse a localizaciones puntuales, por la incidencia ecológica y social de esos procesos. Por ello es necesaria la planificación, ya que la agrosilvicultura requiere una perspectiva holística a ser mantenida durante el largo período de implementación.

#### Modelos economicoecológicos.

Los avances recientes en la teoría económica del manejo de bosques con árboles de varias edades son integrados por Rideout (1985) y expresados en términos de análisis de flujo de caja. La metodología financiera está basada en el concepto de valor del bosque manejado en el largo plazo.

Teniendo en cuenta la estructura impositiva, Koskela (1989a y b) da un análisis detallado de las decisiones de tala de árboles bajo precios inciertos y sin racionamiento del crédito o con él. Los tres tipos de impuestos considerados son: la tasa fija (independiente de la cantidad talada, integra la constante  $D_0$  del capítulo siguiente), la tasa unitaria (proporcional al volumen extraído), y la tasa de rendimiento (asociada al retorno por la tala).

Andersson et al. (1984) y Andersson y Lesse (1984) estudian el sector forestal desde un punto de vista global. En la sección 4.2 del primer trabajo desarrollan la teoría clásica del manejo forestal y aplicaciones de la teoría de control óptimo, lo que complementan con consideraciones del impacto ecológico de las decisiones del sector forestal.

Basado en la premisa de que el manejo de bosques y las inversiones en nuevas plantas procesadoras son decisiones de largo plazo, Lönnstedt (1986) considera vital para las empresas involucradas a la planificación. Su modelo de largo plazo del sector forestal consiste de dos sectores competidores simétricos —el sector doméstico y los sectores competidores de los restantes países—. Cada sector incluye desde el crecimiento de la madera hasta el consumo de los productos de la industrialización.

Desde otro punto de vista Hellman (1980) supone que un grupo de plantas productoras de celulosa se construirán en una región forestal de un país en el que el bosque (templado-frío) será cultivado con el solo propósito de suministrarles materia primera. El uso de grandes máquinas taladoras impide la selección de los árboles por cortar. Esto obliga a la división en subbosques más pequeños y uniformes para los que se obtienen los valores adecuados de estado estacionario.

La integración de los modelos económicos y ecológicos de manejo de recursos naturales es tratada por Braat y van Lierop (1987). Le dan bases teóricas al modelado interdisciplinario que se ha ido desarrollando en los últimos tiempos. Los modelos economicoecológicos difieren de los monodisciplinarios 'extendidos', en que incluyen representaciones adecuadas tanto de los procesos involucrados y de los componentes económicos como de los ecológicos. En su apéndice B (pág. 301-304) se incluyen referencias de modelos integrados y a continuación una abundante lista de referencias (pág. 305-329).

El servicio forestal de Estados Unidos de Norteamérica ha adoptado un modelo de programación lineal (FORPLAN, ver García, 1988) como la principal herramienta analítica para la planificación integrada del recurso requerida por la ley nacional de manejo forestal de 1976. Esta ley que enmienda la de planificación de bosques y recursos naturales renovables, requiere el desarrollo e implementación de planes de uso de la tierra y recursos para cada uno de los 155 parques nacionales.

#### Optimización forestal.

En el apéndice A1 comparamos nuestros resultados con el modelo lineal simple de Clark y DePree (1979) para el raleo y rotación óptimos de rodales implantados en zonas templadas. Hultkrantz presenta un modelo lineal por edades que es usado para calcular programas de tala óptimos en el largo plazo. Sus resultados indican que si se tiene una distribución de edades, altas talas pueden resultar óptimas aun cuando los costos de ajuste puedan ser relativamente altos. Gorriga et al. (1988) presenta un problema de control de tiempo óptimo de un rodal, teniendo en cuenta las clases diamétricas. Se utiliza el principio del máximo de Pontryagin para reducirlo a un problema de frontera de dos extremos clásico. El algoritmo se aplica a un modelo con tres clases diamétricas en computadoras personales. Chaudhuri y Sen (1987)

desarrollan un modelo con estructura de edades para determinar la política óptima para cortar y talar árboles de una especie particular en un bosque, con el fin de maximizar el rendimiento total en un período específico de tiempo. El modelo toma en cuenta el tiempo en que los árboles deben ser talados, cuántos de ellos y de qué edad. El artículo de Sinuany-Stern et al. (1986) da un modelo para hallar la política óptima de raleo en un bosque de pinos en Israel. Se simula el crecimiento del rodal bajo varias acciones de raleo y se estiman las funciones de crecimiento anual por métodos de regresión.

Reed y Errico (1986) construyen un sistema dinámico que describe la evolución del bosque bajo el impacto de tala y la posibilidad (aleatoria) de fuego. Cuando el fuego se trata en forma determinista, esas ecuaciones pueden utilizarse para formular un problema de tala óptima que se resuelve por programación lineal. Varios modelos forestales (e.g. FORPLAN, mencionado más arriba) no permiten modelar pérdidas catastróficas resultantes del fuego u otros agentes, sin embargo los efectos de tasas relativamente pequeñas de fuego pueden ser dramáticos.

## MANEJO DE SISTEMAS AGROFORESTALES.

La desaparición acelerada de la cobertura boscosa natural de la tierra y los procesos de desertificación sugieren, entre otras conclusiones, que los bosques nativos han sido muy mal manejados, y que su riqueza se está dilapidando. Uno de los objetivos de este trabajo es mostrar cómo la Teoría Matemática de Sistemas y la Teoría de Control, en particular Control por Saltos o Impulsional, pueden ser útiles para definir las políticas óptimas para las extracciones en ecosistemas forestales. Ha habido variado número de intentos de aplicar control impulsional a problemas de manejo en el pasado. Por ejemplo, Bensoussan y Tapiero (1982) que efectúan una revisión de Control Impulsivo y sus aplicaciones en 'management', dan condiciones para controles óptimos

en aplicaciones a control de inventarios, expansiones de capacidad instalada, despacho de vehículos, inspección de mantenimiento, y problemas de fijación de precios, en un marco estocástico, y relacionan el control impulsional de inventarios con los problemas del tipo  $(s, S)$ ; Blaquière (1985), que considera un sistema dinámico sometido a un control óptimo de retroalimentación de modo que la evolución del estado está sometida a saltos y cambios continuos, para horizonte finito o infinito, aplica los resultados al problema del cuidador de motel; Seierstad (1985), que demuestra la existencia de un control óptimo en un problema donde la dinámica y la funcional contienen un control que es una medida de Lebesgue-Stieltjes, lo aplica al problema de expansión de una firma; Getz y Martin (1980), que considera problemas de control óptimo dependientes de parámetros en tiempo continuo con discontinuidades en la variable de estado en un número finito de tiempos del interior del intervalo de evolución, aplica el principio del máximo impulsional al manejo de pesquerías; Eastham y Hastings (1988) que lo aplican al problema del inversor que maneja un conjunto de títulos sometidos a una dinámica regida por una ecuación diferencial estocástica, construyen una desigualdad cuasivariacional de la que obtienen los controles que deben ser aplicados para optimizar la utilidad total de consumo, y resuelven el problema en dimensión uno; Costa y Davis (1989), luego de estudiar el control impulsional de procesos deterministas a trozos en forma muy general y construir una técnica numérica para su cómputo, aplican sus resultados al problema de mantenimiento y reemplazo; Cohen (1987) lo aplica a problemas de pasturas y de cambio óptimo de lugar de alimentación, tanto para recurso alimenticio no renovable como para renovable. Sin embargo, no hemos encontrado que ninguno de ellos sea particularmente útil para resolver nuestros problemas. Es, por otra parte, posible modelar y resolver un conjunto amplio de diversas situaciones con los métodos que proponemos (ver Neuman y Costanza, 1986, y apéndice A2). Con el bosque pensado como un sistema dinámico no lineal exploraremos las estructuras

de cortes periódicos en ciertas especies de un bosque dado, con el objetivo parcial de optimizar el valor neto presente de la gestión definido por un funcional de beneficio generalizado, y también el objetivo parcial ecológico que aparece como la imposición de restricciones ecológicas.

Elaboramos algoritmos (ver capítulos 3 y 5) que permiten corroborar mediante experimentos numéricos que, en general, en el plazo mediano o breve, un pequeño número de cortes es óptimo y que la política óptima cambia significativamente con pequeñas modificaciones de las condiciones iniciales. Asimismo, de las demostraciones que fundamentan los algoritmos, se deducen condiciones y criterios para los plazos y métodos de manejo. Un resultado muy importante es que la política óptima no es obvia bajo ningún punto de vista. En efecto, nuestros resultados frecuentemente difieren de la práctica corriente que suele estar basada en la aplicación de tecnologías extrañas a los sistemas involucrados y que los afectan irreversiblemente antes que sea posible modificarlas aprovechando la experiencia.

La tesis tiene interés en particular en el manejo de bosques subtropicales naturales, especialmente aquellos que han sido severamente deteriorados por tala excesiva. Desde un punto de vista ecológico los ecosistemas forestales subtropicales y tropicales son muy diferentes de aquellos de las zonas más templadas del planeta. La fragilidad de los ciclos de nutrientes y del agua, la falta de estabilidad del suelo, y su baja resistencia a la erosión, hacen que los bosques subtropicales se degraden fácilmente cuando son explotados negligentemente. La relación entre la biomasa y el suelo está, en general, menos estructurada, y la remoción de la vegetación conduce a un deterioro irreversible de éste. En el apéndice A1 consideramos algunos enfoques clásicos de estos problemas. Exponemos brevemente dos puntos de vista clásicos del manejo de bosques. Remitimos a dicho apéndice para la consideración de criterios generales que hacen a la formulación de los funcionales de beneficio cuya optimización se busca, en particular

respecto de la duración de los períodos de evaluación y la influencia de parámetros de difícil predicción.

El manejo del agua justifica un comentario aparte. Para el caso de bosques templado-fríos, Bowes et al. (1984) proponen un uso múltiple tendiente a la producción conjunta de madera y agua en regiones donde el manejo de la producción maderera sola puede tener una perspectiva económica negativa. El mecanismo básico propuesto consiste en regular la liberación del agua disponible, reduciendo la evapotranspiración y la retención mediante la reducción de la cobertura de vegetación. Se tiene una relación aproximadamente inversa entre la producción de ambos recursos. Krutilla et al. (1983) analizan los costos y beneficios del aumento de la masa de agua disponible en los casos mencionados, tanto en el sitio como cuenca abajo del mismo. Aunque los resultados que obtienen son provisionales y dependen de la calidad de la información censal, se puede concluir que el manejo combinado de los recursos es necesario cuando se plantean como objetivos concurrentes la conservación de los mismos y el beneficio económico. El énfasis debe ponerse en el análisis integral de la cuenca hídrica como totalidad.

En el caso de los bosques tropicales y subtropicales el panorama cambia respecto de los templados. Dos clases principales de agua son de importancia para los ecosistemas que consideramos: el agua superficial y el agua subterránea. Es absolutamente necesario controlar el movimiento del agua, los picos que conducen a inundaciones y el rendimiento. Cuando se consideran prácticas agrícolas en suelos inestables, es necesario controlar cuidadosamente el agua y la irrigación artificial. El problema es obtener la retención apropiada del agua. El agua subterránea juega un papel singular en este balance, y su ciclo es menos conocido. Al presente este factor está incluido solamente en forma indirecta en nuestro modelo en los umbrales y restricciones al número de intervenciones permitidas en el sistema, aunque también

es posible incluirlo como factor constitutivo adicional dentro de las penalizaciones de corte y otros términos del funcional de beneficio. Los árboles protegen la productividad y estabilidad de los ecosistemas subtropicales principalmente por la intercepción del agua de lluvia y la ayuda al correcto flujo de la misma, pero también interceptando los vientos e inhibiendo la erosión eólica, y creando una estructura de sombras adecuada.

Contenidos de la Tesis.

Se ha considerado pertinente presentar en el capítulo siguiente los elementos básicos de la formulación matemática del problema, y en el capítulo 4 un complemento de los mismos. Nótese que estamos en presencia de problemas esencialmente no lineales; baste mirar la dinámica de evolución de cualquier especie viva para convencerse (ver apéndice A3). Definimos en el capítulo 2 el modelo general utilizado y la forma de las funcionales por optimizar, y en el capítulo 4 obtenemos las inecuaciones de H-J-B asociadas. La forma de las funcionales de evaluación es muy general y se adapta a un gran número de casos reales de manejo de sistemas. Allí se introducen consideraciones y restricciones originadas en cuestiones ecológicas. Definimos las funciones de valor correspondientes a  $j$  saltos exactamente, con  $j$  entero positivo. Mostramos un ejemplo del comportamiento de dichas inecuaciones. Establecemos nuevas coordenadas en el espacio de estados (en el caso logístico, aunque las ideas se extienden a dinámicas más generales) e introducimos el caso de lagrangianos no constantes y su efecto en los cálculos.

En el capítulo 3 construimos algoritmos basados en un enfoque de recorrido exhaustivo para el control impulsional de sistemas ecológicos. Ellos descansan en la observación de que la consideración de todos los casos posibles se reduce a la de unas pocas evaluaciones si se satisfacen ciertas hipótesis sobre los parámetros. Los ejemplos que se presentan se complementan en el apéndice A2 con aplicaciones

agroforestales para el bosque Chaqueño (Argentina). En ellos se muestra la relación de los algoritmos exhaustivos con algoritmos alternativos de tipo Montecarlo. En todos estos casos, además de la discretización temporal, se apela a la discretización de los estados e impulsos. Un enfoque alternativo más se plantea al aplicar Programación Dinámica 'a posteriori' de la discretización. Los métodos expuestos son ejemplificados al tratar modelos con un número pequeño de variables de estado, pero no están limitados en el número de variables salvo por dificultades de tipo computacional. En el ejemplo agroforestal se trabaja en un espacio tetradimensional. También se estudia la optimización directa del funcional  $J$  y se comparan los resultados con los obtenidos por los algoritmos basados en discretizaciones. Se tiene en cuenta la evolución óptima para diversos horizontes y su rendimiento como adelanto de los métodos más generales del capítulo 5. Se establece una periodización en los cortes y cotas para los mismos, lo que se adiciona a que el número de cortes es pequeño y la sensibilidad respecto de la cantidad cortada también; de modo que es posible obtener buenos resultados con discretizaciones no muy finas.

Las inecuaciones H-J-B del capítulo 4 son el comienzo de una línea de ataque alternativa respecto de la desarrollada en esta tesis, que comienza con las técnicas para su solución numérica que ha sido aplicada a problemas socioeconómicos ya mencionados, y se continúa en la actualidad en un interesante número de artículos que utilizan las llamadas soluciones de viscosidad de estas ecuaciones caracterizando las condiciones para la existencia y unicidad de las mismas (ver e.g. Barles, 1985, Crandall et al., 1984, Crandall y Lions, 1983 y 1985, Fleming y Souganidis, 1986, Lions, 1982, Lions y Souganidis, 1985, Souganidis, 1985). Para aspectos específicos ver también Barles (1983), Lions (1983), y Lions y Perthame (1986) para el caso de Control Impulsional Ergódico.

Nuevos algoritmos para los mismos problemas se construyen en el capítulo 5. Estos se basan en un enfoque variacional y se apoyan en los resultados de finitud del capítulo 3. En aquel se tendía sin embargo a una resolución puntual, en cambio en estos se tiende a la determinación de la frontera del conjunto de continuación que se define en el capítulo 4. Luego de comentar brevemente parte de un artículo de Menaldi (1982b) y exhibir ejemplo de la correspondencia de ese enfoque con lo realizado previamente cuando se extiende a horizonte infinito y la relación con el problema de tipo  $(s, S)$  del manejo de inventarios en Investigación Operativa, mostramos nuevos métodos para determinar la política óptima de manejo de los sistemas que nos ocupan. Se da un resultado de tiempo de detención que justifica la definición del borde del conjunto de continuación y su método de determinación. Se da la forma integral de las ecuaciones H-J-B que se utiliza en el diseño de los algoritmos. Se presenta un algoritmo de Menaldi (1982b) que se relaciona con el 'rationale' de la determinación de la evolución óptima. La autonomía de la dinámica logística utilizada se traduce en que si se toman los tiempos en forma decreciente desde el horizonte  $T$ , es posible utilizar el espacio de fases  $[0, \infty) \times O$  en las variables  $\tau = T - t$  y  $x$ , en el que se pueden construir recursivamente los sectores útiles del borde del conjunto de continuación. La primera parte del capítulo es introductoria de los métodos propuestos en el resto del mismo. Se establecen restricciones (dinámica logística, ausencia de amortizaciones, lagrangiano constante, funciones de saltos y final afines) con el fin de facilitar la exposición y la comparación con resultados precedentes. Sin embargo, las restricciones mencionadas no afectan la aplicabilidad de los algoritmos propuestos a casos mas generales.

En el capítulo 6 establecemos conclusiones de nuestro trabajo y algunas líneas de acción futura.

El conjunto de apéndices ilustra sobre otras facetas de los problemas de modelado, identificación y control de sistemas generales naturales con énfasis en las aplicaciones específicas. Los métodos expuestos en el apéndice A4 son incluidos como complemento de los del cuerpo principal de este trabajo. La amplitud del enfoque permite, sin embargo, que con modificaciones menores sea posible tratar casos que en primera aproximación no parecen estar relacionados con la fertilización temprana de rodales implantados. Estos métodos están orientados a sistemas que por un lado son no lineales y por otro están pobremente definidos y son inciertos, como por ejemplo resultan los sistemas controlados de soporte ecológico vital (CELSS, ver Auslander et al. 1983, MacElroy, 1987). Al principio del apéndice A4 se introduce con más detalle este tema y, en general, la aplicación de los modelos entrada-salida a sistemas naturales. Los modelos que se definen en este apéndice permiten identificar luego parámetros de la dinámica de crecimiento de las etapas posteriores estableciéndose de este modo el nexo con los métodos de los capítulos 3 y 5.

Los apéndices A2 y A5 se dedican a la aplicación a los sistemas agroforestales Chaqueños de los métodos del capítulo 3. En ellos se justifican los modelos adoptados y se presenta el producto **BALL** que implementa los algoritmos desarrollados permitiendo su uso por productores para la toma de decisiones de manejo de sus sistemas. **BALL** es así la primera versión de un DSS en construcción, orientado al manejo de estos sistemas.

En el apéndice A3 se inicia el estudio de los problemas asociados a la identificación de los parámetros de los modelos dinámicos y se justifica la elección de estos. Previamente se consideran en forma breve algunos antecedentes de la formulación de modelos logísticos.

## 2. MODELIZACIÓN Y FUNCIONES DE VALOR

Clasificamos a los modelos dinámicos de sistemas naturales entre conceptuales y empíricos. Los primeros son aquellos en los que se establecen las ecuaciones teniendo en cuenta las relaciones de detalle, físicas o biológicas, entre las variables que se utilizan para representar los estados, las entradas y las salidas. Estos son los que han sustentado los métodos clásicos de las ciencias exactas; también se denominan modelos de conocimiento y en su construcción se integra todo el conocimiento de los procesos elementales involucrados en el sistema en estudio. Los empíricos son los que representan relaciones de causa a efecto y establecen relaciones de entrada-salida, o relaciones dinámicas entre variables del sistema, aceptando que los detalles internos del mismo queden ocultos en lo que se denomina una caja negra. Estos suelen llamarse también modelos de representación o de comportamiento, pues se observa el comportamiento en diversas situaciones y, en función de ello, se determina una función que relaciona las salidas con las entradas. El proceso de modelado se hace posible mediante la restricción de las funciones aceptables y la consecuente identificación que consiste en un proceso de experimentación, de restricción del modelo a una clase particular y una estimación de los parámetros que definen la relación específica. Cuando se desea modelar la evolución de un sistema ecológico es prácticamente imposible detallar las relaciones internas —de hecho extremadamente complejas y generalmente desconocidas— y así es necesario formular modelos globales de entrada y salida, o bien, modelos paramétricos simples cuyos coeficientes son ajustados con datos censales. Debe tenerse en cuenta, sin embargo, que ambas aproximaciones concurren en el proceso de modelado real. Se identifican los parámetros de modelos cuyas clases son elegidas en función del conocimiento que se posea del sistema.

Dos observaciones son pertinentes. En primer lugar podría creerse que si contáramos con un modelo conceptual o teórico que pensáramos que nos permitiese predecir en detalle completo los comportamientos futuros de las variables de estado de nuestro sistema ecológico, desearíamos utilizarlo. Y por añadidura pensaríamos que hemos avanzado en nuestro conocimiento del sistema real. Sin embargo, debe notarse que tal descripción será útil respecto de la capacidad predictiva del modelo (en general en el corto plazo, o dicho en forma mas técnica, localmente) pero continuará siendo insatisfactorio en lo que respecta al aporte del modelo complejo a nuestra comprensión de los elementos del sistema debido a que un modelo de alta complejidad hace necesario un esfuerzo de explicación casi tan dificultoso como el sistema original que se modela. En segundo término debe notarse que un modelo de entrada-salida o, también, paramétrico, simplificado en el mayor grado posible que permita tomar correctas decisiones de control no es menos preferible que el anterior aunque nos provea de otro tipo de comprensión del problema. Ambos puntos de vista concurren a un mismo objetivo que es un mejor conocimiento del sistema real y de las acciones que el controlador del sistema debe realizar para manejarlo.

## LA DINÁMICA.

En este capítulo y los siguientes nos inclinamos por los modelos paramétricos globales, que consideran la evolución de un número pequeño de variables directamente medibles. Asumimos conocidos los parámetros de dicho modelo global (ver Neuman y Costanza, 1987, y el apéndice A3, al respecto del problema de su identificación). También se consideran en esta tesis la obtención de modelos internos o conceptuales vía realización (ver apéndice A4).

El crecimiento del bosque se describe entonces por la siguiente ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = g(y(s), u(s)) & \text{con } s \geq t \\ y(t) = x \end{cases} \quad (2.1)$$

En esta ecuación la variable de estado

$$y \in O \subset \mathbb{R}_{\geq 0}^r,$$

de igual modo que para la condición inicial  $x$ .  $\mathbb{R}$  es el cuerpo de números reales,  $\mathbb{R}_{\geq 0}$  representa los números mayores que 0 y  $\mathbb{R}_{\geq 0}^r$  las  $r$ -uplas de miembros de  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ . Las primeras  $r - 1$  variables corresponden a igual número de especies del bosque, y la otra variable al resto del bosque considerado como una totalidad. La variable de control continuo o clásico  $u$  pertenece a  $U \subset \mathbb{R}^p$ , que generalmente se toma convexo compacto y la función  $u(\cdot)$  a un conjunto  $\mathcal{U}$  de funciones admisibles. La variable temporal se nota  $s$  y pertenece a  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ ;  $t$  es el instante inicial y  $T$  es el instante final de evolución. La función

$$g : \mathbb{R}^r \times \mathbb{R}^p \longrightarrow \mathbb{R}^r,$$

que define la dinámica que rige el desarrollo del bosque es un vector de polinomios.

La forma de la función  $g$  depende del problema particular. En los ejemplos de nuestro trabajo hemos utilizado tanto polinomios de grado dos en las variables (ver Neuman y Costanza, 1986, 1987 y 1990) como el producto de polinomios de grado hasta tres en el único control por los estados que aparecen en forma lineal (ver Costanza y Neuman, 1990, y el apéndice A4) en este último caso la única entrada,  $u(\cdot)$ , representó la cantidad de fertilizante agregado a árboles en crecimiento, y la salida, las alturas alcanzadas por los mismos, resultando los estados de la aproximación con una realización de orden hasta tres. En el primer caso los estados son variables

representativas de las biommas involucradas. Un ejemplo típico de este caso es, sin incluir controles continuos,

$$\dot{y}_i(s) = a_i y_i(s) \left(1 - \sum_{j=1}^r b_{ij} y_j(s)\right) \quad \text{con } i = 1, \dots, r,$$

donde los  $a$  son las tasas de crecimiento independiente y los  $b$  son los coeficientes de interacción entre las coordenadas del estado (ver el apéndice A3).

Es posible formular modelos discretizados de la dinámica definida por  $g$ . La discretización puede incluir la del espacio de estados  $O$  ó no. En las aplicaciones la discretización se puede reducir a la variable de evolución  $s$  la que en tal caso tomará valores en  $N_0$ . Una discretización del ejemplo previo es,

$$y_{i+1} = y_i + A_i y_i \left(1 - \sum_{j=1}^r b_{ij} y_j\right) \quad \text{con } i = 1, \dots, r,$$

que incluye a la discretización de primer orden de Euler.

Control impulsional.

Cuando se superpone a la evolución natural o controlada del bosque la acción de manejo, surge la necesidad de incluir un conjunto de saltos

$$Z = \{(s_i, z_i); i \in I\},$$

cuyos elementos son pares de instantes

$$s_i \in \mathbb{R}_{\geq 0},$$

y saltos asociados

$$z_i \in S \subset \mathbb{R}^r,$$

[2·4]

indexados por un conjunto ordenado finito  $I$ , el conjunto  $S$  de saltos admisibles generalmente se toma compacto. El conjunto

$$\{s_i : i \in I\},$$

de instantes de salto está filtrado por el conjunto  $I$ . Para cada instante  $s_i$  el efecto de  $Z$  resulta en un salto en la variable de estado:

$$y(s_i+) = y(s_i-) + z_i,$$

en consecuencia las trayectorias del sistema serán continuas a izquierda con discontinuidades de salto en cada punto  $s_i$ .

Mediante el control por saltos o impulsional se modelan las extracciones —y también agregados si en el sistema se consideran variables susceptibles de incrementarse abruptamente, por ejemplo ganado— que se ejercen sobre el sistema en determinados momentos. En general la capacidad extractiva del controlador sobre el sistema estará limitada por una cota superior dada por la tecnología utilizada. En el caso de los sistemas a los que aplicamos estos métodos deberá comprobarse que tales cotas no son superadas, pero como deseamos ejercer una actividad conservativa y regenerativa sobre el sistema, asumimos que en general nos hallaremos alejados de tales cotas superiores.

Las variables de decisión en el control impulsional son los instantes de salto, la intensidad de los impulsos, y el número de ellos.

Nótese que es posible ejercer sobre el mismo proceso un control continuo y uno impulsional. Obsérvese asimismo que la definición de un control de tiempo de detención del proceso es un caso particular de control impulsional, aquí la variable de decisión es, solamente, el instante final  $T$  en que se decide parar el proceso.

## LA FUNCIONAL DE BENEFICIO.

El objetivo ecológico se presenta como una acción conservativa en el bosque: se define un umbral en cada una de las variables de estado debajo del cual no se puede talar, y solo se acepta hacerlo con baja periodicidad.

Para medir el resultado económico de la gestión en el período  $[t, T]$ , donde  $t$  es el instante inicial y  $T$  el final del lapso estudiado, deberemos componer la funcional de beneficio con varios términos. En primer lugar consideramos la amortización del capital necesario para adquirir el lote que ha de controlarse. Debe considerarse la dependencia de este término de las condiciones iniciales  $(t, x)$  y tiempo final  $T$ . A continuación se incluyen los costos corrientes de gestión vía la integral de una función de costo controlada. En tercer término debe incluirse el efecto de los controles por saltos. Por último se debe agregar un término que defina el valor residual del sistema al término de la gestión.

El beneficio total generado por el sistema en evolución puede medirse, en consecuencia, por la siguiente funcional

$$\begin{aligned}
 J(t, T, x, u(\cdot), Z) = & \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x) e^{-c(t_j-t)} \\
 & + \int_t^T f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s-t)} ds \\
 & + \sum_{i=1}^n k(s_i, y(s_i-), z_i) e^{-c(s_i-t)} \\
 & + h(T, y(T-)) e^{-c(T-t)},
 \end{aligned} \tag{2.2}$$

donde  $l$  es el número de pagos de amortización

$$q_j : \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \times \mathbf{O} \longrightarrow \mathbb{R} \text{ con } j = 0, \dots, l,$$

o funciones de costo inicial de la inversión, aquí  $t_0 = t$ , y  $q_0 = q$ ; el lagrangiano

$$f : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbf{O} \times \mathbf{U} \longrightarrow \mathbb{R}$$

es la función de costos corrientes del sistema por unidad de tiempo; en el siguiente término  $n$  es el número de saltos, y

$$k : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbf{O} \times \mathbf{S} \longrightarrow \mathbb{R}$$

es el beneficio del salto  $z \in \mathbf{S}$  aplicado al estado  $y(s-) \in \mathbf{O}$  en el instante  $s \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , éste tiene en general dos términos, de la forma

$$k(s, y, z) = D(s) + K(y, z),$$

con

$$D(s) < 0 \quad \text{si} \quad z \neq 0,$$

el costo de efectuar el salto y  $K$  el beneficio parcial generado por el salto  $z$  en el estado  $y$ . Se tiene además que  $K(y, 0) = 0$  y  $D(s) = 0$  si  $z = 0$ . Debe notarse que el valor negativo de  $D(s)$  cuando el salto  $z$  es no nulo establece una diferencia muy importante entre el control impulsional y el control continuo ya que ese valor negativo impide que se ejerza el control salvo en un número finito de instantes en cada lapso finito. Los controles continuos tienen, en cambio, un costo que es en algún sentido proporcional a la duración del lapso en que el control se aplica. En control impulsional la decisión de ejercer el control tiene asociada un costo fijo mínimo independiente del nivel del control. Una forma equivalente de establecer la restricción es definir una separación mínima entre saltos  $\sigma$  tal que

$$s_{i+1} - s_i \geq \sigma.$$

El salto  $z$  debe satisfacer

$$z \in \mathbf{S}(y(s)) = \{z \in \mathbf{S} : y^j(s) + z^j \geq x_0^j \quad \text{con} \quad j = 1, \dots, r\},$$

que es el conjunto de saltos factibles a partir de  $y(s)$ , en esta expresión  $x_0$  es el umbral mínimo admisible para los estados; la función

$$h : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbf{O} \longrightarrow \mathbb{R}$$

es la función de beneficio generalizado final del sistema.

Actualización.

En todos los términos la exponencial

$$e^{-c(s-t)}$$

permite llevar a valor presente (tiempo inicial  $t$ ), con la tasa de interés real  $c$ , los beneficios y costos futuros (tiempo  $s$ ). La consideración de valores presentes de los beneficios futuros permite además aceptar el caso de horizonte infinito ( $T = \infty$ ) para los lagrangianos  $f$  utilizados (integrables multiplicados por la exponencial).

La función de valor.

Estamos interesados en obtener una estrategia de control ( $u(\cdot), Z$ ) que maximice la funcional  $J$  dada en la ecuación (2.2), en consecuencia asociamos al problema una función de valor

$$V : \mathbb{R}_{\geq 0}^2 \times \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$V(t, T, x) = \sup_{u(\cdot), Z} J(t, T, x, u(\cdot), Z). \quad (2.3)$$

Dadas esta función  $V$  y la funcional  $J$  quedan naturalmente definidas sendas sucesiones  $\{V_k\}$  y  $\{J_k\}$  originadas en fijar sucesivamente  $n = k$ , en particular  $J_0$  y  $V_0$  corresponden al problema de control continuo (sin saltos),  $J_1$  y  $V_1$  al problema con un salto, y así siguiendo para los siguientes valores de  $k$ .

Es claro que

$$V(t, T, x) = \sup_i \{V_i(t, T, x)\}.$$

[2.8]

Restricciones a la funcional de beneficio.

En los ejemplos de los siguientes capítulos de esta tesis se efectúan algunas restricciones a las funciones que componen la funcional de beneficio.

El número de pagos de amortización se toma  $l = 0$ , la inversión inicial  $q_0 = q$  se toma de la forma

$$q(x) = d_0(x - x_0),$$

con  $x_0$  el umbral de los estados y  $d_0$  una constante negativa. De este modo se valoriza el estado inicial pasible de ser afectado.

Consideraremos lagrangianos de la forma

$$f(s, y(s), u(s)) = f_0 + f_1 y(s) + f_2 u(s),$$

donde  $f_j$  con  $j = 0, 1, 2$  son constantes. Algunos ejemplos tienen lagrangiano constante. Se indica en el texto cómo se extienden los procedimientos cuando el lagrangiano es lineal o, más generalmente, polinomial.

La función  $k$ , que evalúa el beneficio asociado al salto tiene dos términos, de la forma

$$k(s, y, z) = D(s) + K(y, z).$$

La forma utilizada para  $K$  en este trabajo es independiente del estado  $y$ , a saber

$$K(y, z) = -(d_1 z + d_2)z,$$

con  $d_1$  y  $d_2$  vectores constantes.

La forma de la función de evaluación del valor residual (en el tiempo final) tiene en particular la forma

$$h(T, y(T-)) = d_2(y(T) - x_0),$$

donde el vector constante  $d_2$  es el mismo que en la expresión de  $K$  pues permite calcular el beneficio neto de la acción impulsiva de control y valorar el remanente.

Debe notarse sin embargo que los algoritmos del capítulo 3 no son afectados por las restricciones precedentes, las que se utilizan en los ejemplos para facilitar la exposición de los resultados.

### 3. CONTROL IMPULSIONAL DE SISTEMAS AGRO-FORESTALES.

En el capítulo 2 se ha dado una nueva formulación del problema de manejo forestal al considerar a las extracciones de biomasa que se efectúan en el sistema como control impulsional. La evolución de las variables del sistema está regida por una ecuación diferencial ordinaria autónoma con segundo miembro polinomial en las variables y el resultado de la evolución se calcula mediante una funcional de beneficio que incluye valuaciones iniciales y finales, cálculo de los costos corrientes vía un lagrangiano polinomial, y consideración de los beneficios derivados de la acción de los controles por saltos. El problema puede tratarse utilizando las expresiones del capítulo precedente, lo que denominaremos caso continuo, o discretizando la funcional con el fin de establecer algoritmos de tipo combinatorio

#### EL ANÁLISIS DEL CASO CONTINUO.

La versión “continua” contribuye a la comprensión de varios aspectos básicos de los métodos en discusión, y permite comparar los resultados teóricos con los obtenidos por algoritmos basados en discretizaciones. Las biomasa  $y$  evolucionan a partir de la condición inicial  $t = 0$ ,  $y(0) = x$  hasta el horizonte  $T$ . En el lapso de evolución se ejerce un control impulsional  $Z$  que se superpone a la dinámica libre, generando una sucesión finita de discontinuidades en la trayectoria. Todo el proceso se evalúa con la funcional  $J$ .

Para obtener la función de valor en este caso definimos los  $I$ -funcionales de corte y las respectivas funciones de valor (ya fueron mencionadas en el capítulo anterior) de la siguiente forma

$$J_n(x, Z_n) = q(x) + \int_0^T f(y(s))e^{-cs} ds + \sum_{i=1}^n k(y(s_i^-), z_i)e^{-cs_i} + h(y(T^-))e^{-cT}, \quad (3.1)$$

donde  $Z_n$  es una  $n$ -upla de saltos admisibles, y

$$V_n(x) = \sup_{Z_n} J_n(x, Z_n).$$

En particular se tiene

$$V_0(x) = J_0(x),$$

$$V_1(x) = \sup_{(s,z)} J_1(x, s, z),$$

y

$$V_2(x) = \sup_{(s_1, z_1, s_2, z_2)} J_2(x, s_1, z_1, s_2, z_2).$$

Como ya fue enunciado en el capítulo precedente

$$V(x) = \sup \{V_i(x); 0 \leq i\}.$$

Para evaluar la función de beneficio terminal  $h$  que aparece en la ecuación (3.1), necesitamos la solución de la siguiente sucesión de problemas de valores iniciales (en los instantes  $s_i - (1 \leq i \leq n + 1)$ ) con la misma ecuación diferencial ordinaria

$$\begin{cases} \dot{y}(s) = g(y(s)), \\ y(0) = x, & \text{para } s \in [0, s_1), \\ y(s_i) = y(s_i^-) + z_i, & \text{para } s \in [s_i, s_{i+1}) \text{ e } i \geq 1, \end{cases}$$

[3.2]

donde  $s_{n+1} = T$  y  $s_1$  puede eventualmente coincidir con el instante inicial 0. Consideramos el caso  $r = 1$  pues es suficientemente ilustrativo de los métodos propuestos. Combinamos el modelo logístico desarrollado en el apéndice A3, que está representado por

$$g(y) = y(a - by),$$

una función constante  $f(= f_0)$ , y formas simples para  $q(x)$ ,  $D$ ,  $K(y, z)$ , y  $h(x)$ , específicamente

$$q(x) = (-q_0)(x - x_0),$$

$$D = D_0 \text{ si } z < 0,$$

$$D = 0 \text{ si } z = 0,$$

$$K(y, z) = -d_2 z,$$

$$h(x) = (d_2)(x - x_0),$$

donde  $q_0$ ,  $D_0$ , y  $d_2$  son constantes reales, y  $x_0$  es el mínimo umbral para los estados, cuyo origen es un conjunto de restricciones ecológicas. Aquí solo está involucrada la especie útil.

La expresión (2.1) es ahora

$$\dot{y} = y(a - by) \quad \text{con} \quad y(0) = x, \quad (3.2)$$

y su solución tiene la forma

$$y(s) = \frac{kx}{x + (k - x)e^{-as}}, \quad (3.3)$$

donde  $k = a/b$  es el cociente entre la velocidad de crecimiento y el freno ecológico del sistema logístico, y asimismo representa el límite superior para la variable de estado  $y$  cuando  $s \rightarrow \infty$ .

Por motivos ecológicos debe fijarse el extremo izquierdo del intervalo  $O$ . Tomamos  $x_0 > 0$  y  $O = [x_0, k)$ , donde  $[x_0, k)$  indica el intervalo real entre los números  $x_0$  y  $k$ . La ecuación para  $J$  deviene

$$J(x, Z) = (-q_0)(x - x_0) + \frac{f_0}{c}(1 - e^{-cT}) + \sum_{i=1}^n (D_0 - d_2 z_i) e^{-cs_i} + (d_2)(y(T-) - x_0) e^{-cT}. \quad (3.4)$$

Utilizando (3.1), (3.4) y (3.3) el funcional  $J_0$  toma la forma

$$J_0 = (-q_0)(x - x_0) + \frac{f_0}{c}(1 - e^{-cT}) + (d_2) \left( \frac{kx}{x + (k - x)e^{-aT}} - x_0 \right) e^{-cT}, \quad (3.5)$$

una función solamente de la condición inicial  $y(0) = x$  y final  $T$ . Debe observarse que las ecuaciones H-J-B del caso de período fijo que se obtienen en el capítulo 4 se satisfacen por la expresión (3.5) para  $V_0$ .

Para tener una definición explícita del funcional  $J_n$  es conveniente introducir las funciones  $F_j$  que definimos inductivamente:

$$F_0(x) = x, \quad s_0 = 0,$$

y

$$F_j(x, Z_j) = \frac{k}{1 + \frac{k - F_{j-1}}{F_{j-1}} e^{-a(s_j - s_{j-1})}} + z_j, \quad \text{con } j > 0,$$

y entonces reescribir en el caso de un salto, suprimiendo el subíndice,

$$y(T-) = \frac{kF(x, s, z)}{F(x, s, z) + (k - F(x, s, z))e^{-a(T-s)}}.$$

Podemos expresar ahora

$$J_1(x, s, z) = (-q_0)(x - x_0) + \frac{f_0}{c}(1 - e^{-cT}) + (D_0 - d_2 z) e^{-cs} + (d_2) \left( \frac{kF}{F + (k - F)e^{-a(T-s)}} - x_0 \right) e^{-cT}. \quad (3.6)$$

[3.4]

De manera totalmente análoga se obtienen los funcionales  $J_i(x, Z)$ , ( $i \geq 2$ ) y las funciones de valor asociadas  $V_i(x)$ , ( $i \geq 2$ ).

Del análisis de las derivadas parciales de (3.6) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales en las variables  $s$  y  $z$ ,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial J_1}{\partial s} = -c(D_0 - d_2 z)e^{-cs} \\ \quad + (d_2)e^{-cT}e^{-a(T-s)} \frac{\frac{ka}{x}((F-z)^2(k-x)e^{-as} - Fx(k-F))}{(F + (k-F)e^{-a(T-s)})^2} = 0 \\ \frac{\partial J_1}{\partial z} = -(d_2)e^{-cs} + (d_2)e^{-cT} \frac{k^2 e^{-a(T-s)}}{(F + (k-F)e^{-a(T-s)})^2} = 0. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Si el par deseado  $(s_{\max}, z_{\max})$  existe, deberá satisfacer el sistema formado por las expresiones (3.7).

Claramente

$$V_1(x) = J_1(x, s_{\max}, z_{\max}).$$

Entonces, para cada  $x$  se puede comparar  $V_0(x)$  y  $V_1(x)$ . Para todos los  $x$  donde sólo sea necesario considerar  $V_0(x)$  y  $V_1(x)$ , obtenemos el control por saltos o impulsional completo: no cortar, o cortar  $z_{\max}$  en el instante  $s_{\max}$ . Pero si para  $x \in O$  existe  $i > 1$  con

$$V_i(x) > \sup\{V_0(x), V_1(x)\},$$

entonces será necesario continuar el proceso de búsqueda del control de salto en forma análoga a lo descrito para  $V_1(x)$ , lo que involucra resolver un sistema de cuatro ecuaciones en las variables  $s_1, z_1, s_2$ , y  $z_2$ , y así siguiendo.

En lo que sigue de esta sección comenzaremos a demostrar que, dependiendo de los valores de los parámetros en la funcional de costo-beneficio, y para cada estado inicial  $x$ , las funciones de valor  $V_i$  presentan un buen comportamiento, en el sentido de que existe un índice  $k$  tal que  $V_k$  es mayor que el resto de los  $V_i$ , que éstos son no decrecientes para  $i \leq k$ , y que son decrecientes monótonamente para  $i \geq k$ . Esto garantiza que solamente será necesario un número finito de pasos para alcanzar el óptimo.

Definimos

$$L_n = \sum_{i=1}^n |z_i| + (y(T) - x_0), \quad (3.8)$$

$$B_n = -\frac{D_0}{d_2 L_n},$$

y

$$\tilde{a}_{ni} = \frac{|z_i|}{L_n} \quad \text{con } i = 1, \dots, n, \quad (3.9)$$

y notamos que

$$\sum_{i=1}^n \tilde{a}_{ni} + \frac{(y(T) - x_0)}{L_n} = 1,$$

lo que nos permite reescribir la ecuación (3.4) así:

$$J_n(x, Z_n) = I(x) + d_2 L_n \left[ e^{-cT} + \sum_{i=1}^n \left( \tilde{a}_{ni} (e^{-cs_{ni}} - e^{-cT}) - B_n e^{-cs_{ni}} \right) \right]. \quad (3.10)$$

donde  $I(x)$  representa a los dos primeros sumandos de la expresión (3.4), y los  $\{(s_{ni}, a_{ni})\}$  son el control impulsional óptimo para  $n$  saltos. Tomemos

$$L_0 = y_{0x}(T) - x_0,$$

donde la notación  $y_{0x}(s) = y(s; 0, x)$ , la trayectoria con condición inicial  $(0, x)$ ; supongamos que

$$L_i \cong L_0 \quad \text{para } i \geq 1,$$

[3.6]

y definamos

$$E(n, i) = \tilde{a}_{ni}(e^{-csni} - e^{-cT}) - B_0e^{-csni}.$$

**Proposición 3.1:** Si  $V_0 > V_1$ , entonces

$$V_0 > V_1 > V_2 > \dots$$

**Demostración:**  $V_0 > V_1$  implica que

$$e^{-cT} > e^{-cT} + E(1, 1) > e^{-cT} + a(e^{-cs} - e^{-cT}) - B_0e^{-cs},$$

para cada par  $(a, s)$  admisible, pues el par  $(a_{11}, s_{11})$  da el máximo. En consecuencia tenemos

$$a(e^{-cs} - e^{-cT}) - B_0e^{-cs} < \delta < 0, \quad (3.11)$$

para todos los pares  $(a, s)$  tales que

$$0 \leq s \leq T \text{ y } 0 \leq a \leq (y(T) - x_0)/L_0.$$

La desigualdad (3.11) conduce a

$$\sum_{i=1}^j E(j, i) < j\delta,$$

y la proposición se deduce inmediatamente. □

Teniendo en cuenta la ecuación (3.10) podemos formular la siguiente observación:

**Observación 3.1:** Si  $B_0 (= -D_0/d_2L_0)$  es suficientemente grande (ver la ecuación (3.12) más abajo), entonces existe un índice  $k$ , con  $1 \leq k \leq n$ , tal que el correspondiente sumando  $E(n, k)$  en la expresión de  $V_n$  es negativo.

Demostración: Tenemos  $0 \leq a_{nk} < 1/n$  para algún  $k$ , con  $1 \leq k \leq n$ , pues de no ser así entonces la suma de los  $a_{ni}$  sería mayor que uno. Asimismo  $0 \leq s_{nk} \leq T$  implica que

$$e^{-cT} \leq e^{-cs_{nk}} \leq 1.$$

Entonces

$$E(n, k) < \frac{1 - e^{-cT}}{n} - B_0 e^{-cT},$$

cuando

$$B_0 > \frac{e^{cT} - 1}{n}. \quad (3.12)$$

□

**Observación 3.2:** Si existe  $k$ , con  $1 \leq k \leq n$ , tal que su correspondiente sumando en (3.10) es negativo, entonces

$$V_n < V_{n-1}.$$

Demostración: Tenemos que

$$\tilde{J}_{n-1} = V_n - d_2 L_0 E(n, k) > V_n.$$

Pero  $\tilde{J}_{n-1}$  es un  $J_{n-1}$  admisible, y, en consecuencia  $V_n < V_{n-1}$ . □

**Observación 3.3:** Supongamos que existen índices  $k, l$  tales que  $1 \leq k, l \leq n$  y que

$$J_{n-1} = I + d_2 L_0 \left( e^{-cT} + \sum_{i=1, i \neq k, l}^n E(n, i) + (a_k + a_l)(e^{-c\tilde{s}} - e^{-cT}) - B_0 e^{-c\tilde{s}} \right) \quad (3.13)$$

es un funcional admisible para  $(n - 1)$  cortes, con

$$\tilde{s} = \frac{a_{nk}s_{nk} + a_{nl}s_{nl}}{a_{nk} + a_{nl}}.$$

Entonces,  $V_n < V_{n-1}$ .

[3.8]

Demostración: Las siguientes desigualdades se deducen de propiedades de las medias aritméticas y geométricas:

$$ae^{-cs} + be^{-ct} = (a+b) \left[ \frac{a}{a+b} e^{-cs} + \frac{b}{a+b} e^{-ct} \right] \\ \leq (a+b) e^{-c \frac{as+bt}{a+b}}$$

y

$$e^{-cs} + e^{-ct} \geq e^{-c \frac{as+bt}{a+b}}.$$

Cuando se aplican a (3.13) y (3.10), estas propiedades dan  $V_n < J_{n-1}$ . Pero, por hipótesis,  $J_{n-1} < V_{n-1}$ , y en consecuencia la observación está demostrada.  $\square$

## APROXIMACIÓN DE LA SOLUCIÓN VÍA DISCRETIZACIÓN

Es natural asumir para sistemas forestales que los cortes sólo pueden realizarse en momentos fijos en lugar de continuamente. Esto lleva naturalmente a una versión discreta del índice de 'performance' original, el que junto con la dinámica permite efectuar una aproximación al problema enunciado. Por simplicidad mantenemos la notación para los objetos correspondientes.

Consideremos una funcional discretizada  $J$  análoga a (3.1)

$$J(x, Z) = q(x) + \sum_{i=1}^n f_i(y(i))(1 + \hat{c})^{-i} + \sum_{i=0}^n k(y(i), i, z_i)(1 + \hat{c})^{-i} + h(y(n-))(1 + \hat{c})^{-n}$$

donde el índice  $i$  representa la época, i.e. el año, en que se aplica el impulso. La constante  $\hat{c}$  es la versión discreta de la tasa de interés  $c$  (ver ecuación (3.1)), de modo que debe ser

$$\hat{c} = -\log(1 - c).$$

La función  $k$  es

$$k(y, i, z_i) = D + K(y, z_i)$$

[3.9]

como antes, con

$$D < 0 \text{ si } z_i \neq 0,$$

y

$$D = 0 \text{ si } z_i = 0.$$

Cuanto mayor es  $D$  menor es

$$j = \text{card}\{i : z_i \neq 0; 0 \leq i \leq n-1\}.$$

En la mayoría de las aplicaciones (mediano plazo), los  $j$  usuales son  $j = 0, 1, 2$ ; dependiendo de  $D$  y de la condición inicial  $x$ .

Los funcionales discretos  $J_0$  y  $J_1^m$  toman las formas siguientes

$$J_0(x) = (q_0)(x - x_0) + (f_0) \frac{(1 + \hat{c})^{n+1} - 1}{\hat{c}(1 + \hat{c})^n} + (d_2)(y(n-) - x_0)(1 + \hat{c})^{-n},$$

y

$$\begin{aligned} \tilde{J}_1^m(x, j, k) &= J_1^m(x, j, k\tilde{z}_m[y(j-) - x_0]) \\ &= (q_0)(x - x_0) + f_0 \frac{(1 + \hat{c})^{n+1} - 1}{\hat{c}(1 + \hat{c})^n} \\ &\quad + (D_0 - d_2 k \tilde{z}_m[y(j-) - x_0])(1 + \hat{c})^{-j} + (d_2)(y(n-) - x_0)(1 + \hat{c})^{-n}, \end{aligned}$$

donde

$$\tilde{z}_m = \tilde{z}_0 / 2^m, \quad \tilde{z}_0 = 0.5,$$

y el conjunto  $s$  en el nivel de discretización  $m$  resulta

$$S_m = \{z_i(m) = k\tilde{z}_m[y(i-) - x_0]; i = 0, 1, \dots, n\}.$$

También se tiene

$$V_1^m(x) = \sup_{(j,k)} \tilde{J}_1^m(x, j, k).$$

**[3·10]**

De forma totalmente análoga se pueden definir los funcionales discretos  $J_i^m$ ,  $\tilde{J}_i^m$ , y las correspondientes  $(i, m)$ -funciones de valor  $V_i^m$  para  $i > 1$ . Claramente se tiene

$$V(x) = \sup \left\{ V_0(x), \sup \left\{ \lim_{m \rightarrow \infty} V_i^m(x) : 1 \leq i \leq n \right\} \right\}.$$

El algoritmo parcial resultante es

**Algoritmo 3.1:** Definidos  $m$  y  $\tilde{z}_m (= 2^{m-1})$

- (i) Calcular  $V_0(x)$  ( $= J_0(x)$ ).
- (ii) Hallar  $V_1^m(x)$ . Primero, determinar

$$\tilde{J}_1^m(x, j, k) = J_1^m(x, j, k \tilde{z}_m [y(j-) - x_0]),$$

para cada par  $(j, k)$ , con  $0 \leq j \leq n-1$ ,  $0 \leq k \leq 2^{m+1} + 1$ . Entonces, hallar el par  $(\hat{j}, \hat{k})$  tal que

$$V_1^m(x) = \tilde{J}_1^m(x, \hat{j}, \hat{k}) = \sup_{j, k} \tilde{J}_1^m(x, j, k).$$

- (iii) Si  $V_0(x) > V_1^m(x)$ , entonces asignar  $V^m(x) = V_0(x)$ . Si no vale la desigualdad entonces hallar  $V_2^m(x)$  de la siguiente manera. Primero determinar

$$\tilde{J}_2^m(x, j, k, h, l) = J_2^m(x, j, k \tilde{z}_m [y(j-) - x_0], h, l \tilde{z}_m [y(h-) - x_0]),$$

para cada 4-upla  $(j, k, h, l)$  con  $0 \leq j < h \leq n-1$ ,  $0 \leq k, l \leq 2^{m+1} + 1$ . Entonces determinar la 4-upla  $(\hat{j}, \hat{k}, \hat{h}, \hat{l})$  tal que

$$V_2^m(x) = \tilde{J}_2^m(x, \hat{j}, \hat{k}, \hat{h}, \hat{l}) = \sup_{j, k, h, l} \tilde{J}_2^m(x, j, k, h, l).$$

[[3.11]]

(iv) Definir  $B_0 = -D_0/d_2L_0$  y  $S_1 = 1 - e^{-cT}$ , y hallar el menor  $N \geq 1$  tal que  $B_0 \geq S_1/(N + 2)$ . Si  $N > 1$ , definir  $S_2 = e^{cT} - 1$ , hallar el menor  $M \geq 2$  tal que  $B_0 \geq S_2/M$ , y entonces obtener el  $V_i^m$  para  $3 \leq i \leq M$  como en (iii) para  $V_2^m$ , y asignar

$$V^m(x) = \max_{1 \leq i \leq M} V_i^m(x).$$

Si  $N = 1$ , comparar  $V_1^m(x)$  y  $V_2^m(x)$ . Si  $V_1^m(x) > V_2^m(x)$ , entonces asignar

$$V^m(x) = V_1^m(x).$$

Si no, hallar  $V_i^m(x)$  para  $i > 2$  hasta que para cierto  $i = j$ ,  $V_j^m(x) > V_{j+1}^m(x)$  y entonces asignar

$$V^m(x) = V_j^m(x).$$

(v) Comenzar nuevamente desde (ii) con un  $m$  mayor. □

En la figura 3·1 representamos el algoritmo 3.1, basado conceptualmente en una generalización de los resultados probados en la sección previa, a saber: Si  $V_n > V_{n+1}$  entonces  $V_n > V_{n+j}$  para  $j = 2, 3, \dots$ . Deseamos que esta proposición sea verdadera para índices pequeños; entonces la consideración exhaustiva de todos los casos pertinentes resultará muy veloz.

**Proposición 3.2:** Si  $B_0 = D_0/d_2L_0$  es suficientemente grande (ver ecuación (3·18) más adelante) entonces, para cada  $n \geq 0$ ,

$$V_n > V_{n+1} \text{ implica } V_n > V_{n+1} > V_{n+2} > \dots$$

**Demostración:** Probaremos esta proposición por inducción en  $n$ .

El caso  $n = 0$  fue demostrado en la Proposición 3.1.

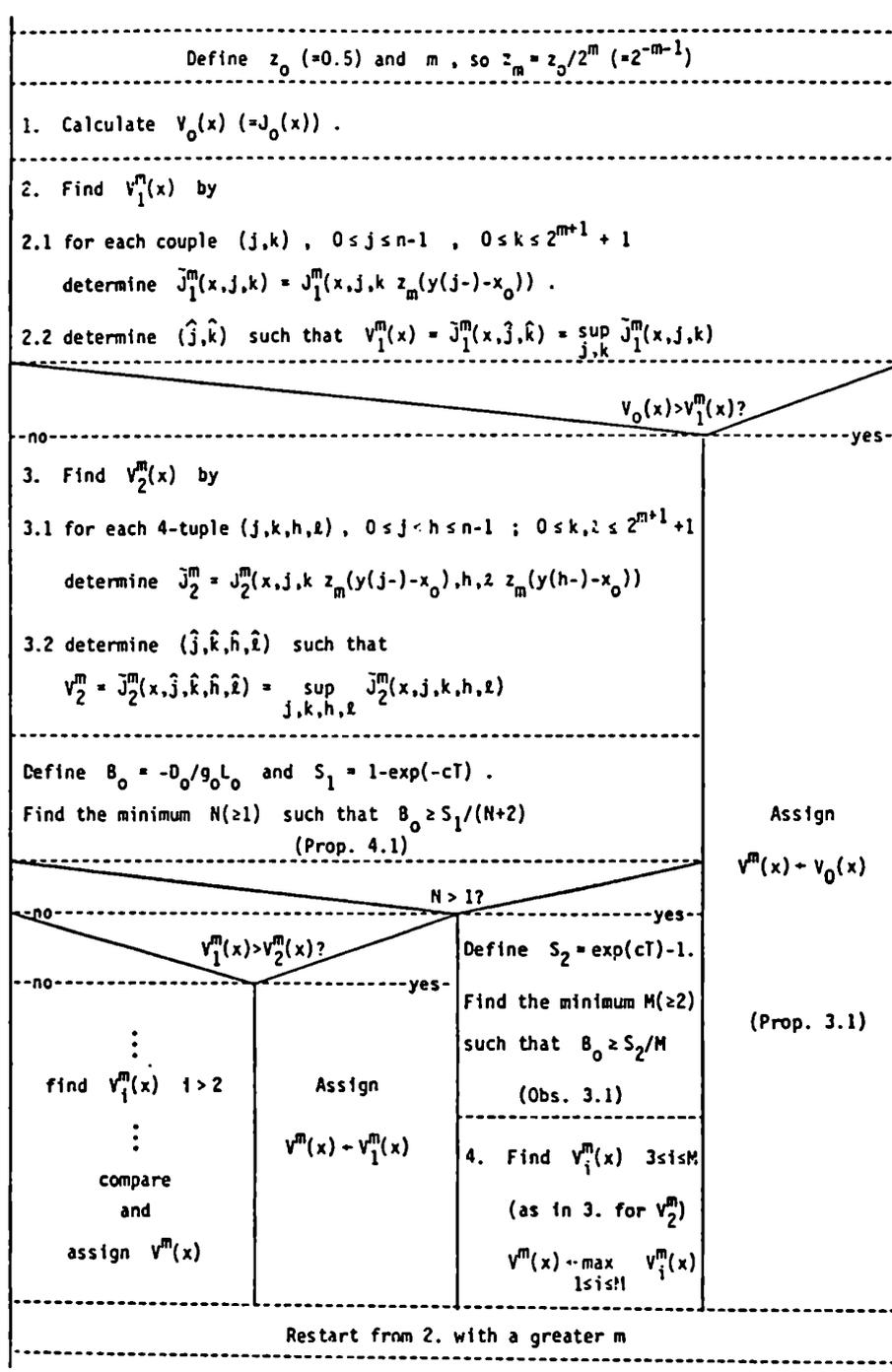


Figura 3-1: Parte principal del algoritmo para la determinación de las funciones de valor  $V^m(x)$ , para cada condición inicial  $x$ .

Supongamos ahora que

$$V_{n-1} > V_n \text{ implica } V_{n-1} > V_n > V_{n+1} > \dots \quad (3.14)$$

Si  $V_n > V_{n+1}$ , y  $V_{n-1} > V_n$ , entonces (3.14) implica la tesis inmediatamente.

Consideremos ahora el caso  $V_{n-1} \leq V_n$ . Cada uno de los términos  $E(n, i)$  en la expresión (3.10) para  $V_n$  es positivo, pues de no ser así debería existir un índice  $k$ , con  $1 \leq k \leq n$ , y  $E(n, k) < 0$ , y esto implicaría la contradicción

$$V_n < I + d_2 L_0 \left( e^{-cT} + \sum_{i=1, i \neq k}^n E(n, i) \right) < V_{n-1} \quad (3.15)$$

ya que la expresión del medio en (3.15) es un  $J_{n-1}$  admisible, y  $V_{n-1}$  es el máximo.

Para probar que  $V_{n+1} > V_{n+2}$ , miramos los términos  $E(n+2, i)$ . Si alguno de ellos es negativo, entonces  $V_{n+1} > V_{n+2}$  por un argumento similar al utilizado para  $V_{n-1} > V_n$ .

Consideremos entonces el caso en que todos los términos  $E(n+2, i)$  son positivos. Si cualquier par de ellos puede ser combinado en el sentido de la Observación 3.3, entonces obtenemos  $V_{n+1} > V_{n+2}$  de nuevo. Sólo resta el caso en que esta combinación de términos es imposible. Ello implicaría que todos los  $a_{n+2, i}$  son los mayores admisibles en sus instantes  $s_{n+2, i}$  correspondientes, y en consecuencia

$$s_{n+2, i} < T - \log\left(\frac{a_{n+2, i}}{a_{n+2, i} - B_0}\right) = W(c, B_0, T, a_{n+2, i}) \quad (3.16)$$

y

$$a_{n+2, i} > B_0 \frac{1}{1 - e^{-cT}} = A(c, B_0, T) \text{ para } i = 1, 2, \dots, n+2. \quad (3.17)$$

[3.14]

Pero como  $n \geq 1$ , (3.16) y 3.17) implicarían que existen tres o más cortes máximos admisibles, todos superiores a  $A(c, B_0, T)$ ; y que todos los cortes deben ser realizados cerca del comienzo del período, para instantes previos a  $W(c, B_0, T, a_{n+2,i})$ . Las desigualdades (3.17) implican que

$$\sum_{i=1}^{n+2} a_{n+2,i} > \frac{(n+2)B_0}{1 - e^{-cT}}.$$

En consecuencia, de (3.8) y (3.9),

$$\frac{(n+2)B_0}{1 - e^{-cT}} < 1.$$

Entonces, con

$$B_0 \geq \frac{1 - e^{-cT}}{n+2} \quad (3.18)$$

queda garantizado que  $V_{n+1} > V_{n+2}$ . La cota dada en (3.18) refina la de (3.12) ya que  $e^{-cT} < 1$ .

En forma análoga demostramos que  $V_{n+2} > V_{n+3}$ , y así sucesivamente.  $\square$

Es posible mostrar que lo anterior resta válido para  $L_0 < L_1 \cong L_2 \cong \dots$ . No tratamos aquí el caso en que los  $L_i$  de orden superior difieren significativamente entre sí, lo que no se ha presentado en nuestros experimentos numéricos (ver para mejor ilustración el capítulo 4).

#### EJEMPLO NUMÉRICO.

Simulamos el crecimiento de una especie única (algarrobo) mediante la ecuación diferencial ordinaria  $\dot{y} = g(y)$  con

$$g(y) = y(0.2059 - 0.00344y).$$

[[3.15]

La evolución del sistema está acotada al intervalo  $O = [5, k)$  donde  $5 \text{ ton}\cdot\text{ha}^{-1}$  es un límite inferior adecuado (umbral de protección ecológica), y  $k = 0.2059/0.00344$ . Para esta especie el precio de mercado es  $d_0 = 40 \text{ ton}^{-1}$  y el retorno neto  $d_2 = 24.5 \text{ ton}^{-1}$ , los costos anuales  $f_0 = -15 \text{ ton}^{-1}$ , y el costo fijo por cortar se considera un parámetro  $D_0 = -190$ . Estudiamos un intervalo de mediano plazo de 8 años con una tasa de descuento  $c = 0.05$ , entonces las expresiones para los  $J_i$  son

$$J_0(x) = 17.73 - 40x + \frac{992.6x}{11.53 + 0.807x},$$

y

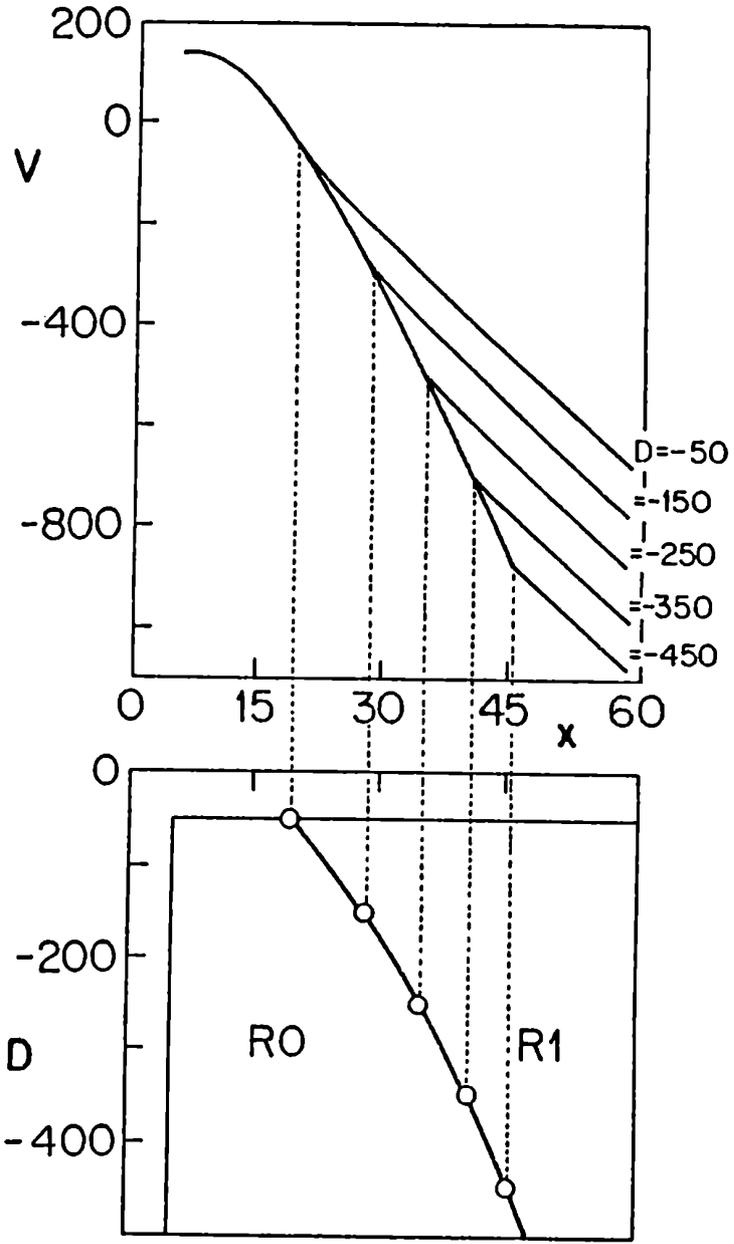
$$\tilde{J}_1^m(x, j, k) = 5.14 - 40x + (D_0 - 24.5kz_m[y(j-) - 5])(1.05)^{-j} + 16.58y(8-).$$

Las funcionales  $\tilde{J}_i^m$ ,  $i > 2$ , pueden expresarse de modo totalmente análogo.

En la figura 3-2 representamos la función de valor  $V$  para distintos valores de  $D$ , y de ellos obtenemos gráficamente los dominios 'R0' y 'R1' del espacio de coordenadas  $(D, x)$ . Esta partición sectorial del espacio  $(D, x)$  es útil para determinar los valores de cambio de 'no cortar' a 'cortar una vez'. Por ejemplo, cuando  $D_0 = -190$ , se obtiene de la figura 3-2 que  $x = 30.8$  es el límite entre las regiones 'R0' y 'R1' para ese  $D$ .

En las tablas 3-I y 3-II se muestran resultados típicos para la evolución del sistema en cada una de las regiones mencionadas previamente.

Observamos en estas tablas que la pérdida cuando se pasa de  $V_0(0, 8, 12.7)$  a  $V_1^2(0, 8, 12.7)$  es de 146%, y que la pérdida al pasar de  $V_1^2(0, 8, 34.4)$  a  $V_0(0, 8, 34.4)$  es de 12.5%, y de  $V_1^2(0, 8, 34.4)$  a  $V_2^2(0, 8, 34.4)$  es de 30%. Esto implica que las políticas de manejo no óptimas pueden afectar seriamente el resultado de mediano plazo del sistema.



**Figura 3·2:** Función de valor  $V^2$ , dibujada versus la condición inicial  $x$  para varios valores del parámetro  $D$  (arriba), y determinación gráfica de los dominios  $R_0$  y  $R_1$  en el sector  $[-50, -500] \times O$  del plano  $(D, x)$  (abajo).

**Tabla 3-I:** Resultados de evolución del sistema para la mejor política con condición inicial  $x = 12.7$ , y parámetros  $D_0 = -190$ ,  $\hat{c} = 0.05$ ,  $m = 2$ ,  $z_m = 0.125$ .

Number of Cuttings	Year	y(i-)	-z(i)	y(i+)	Discounted net revenue	
	i				annual	accumulated
0	0	12.70	0.	12.70	-318.00	-318.00
	1	14.88	0	14.88	- 14.28	-332.28
	2	17.30	0	17.30	- 13.60	-345.89
	3	19.93	0	19.93	- 12.95	-358.84
	4	22.76	0	22.76	- 12.34	-371.18
	5	25.73	0	25.73	- 11.75	-382.94
	6	28.78	0	28.79	- 11.19	-394.13
	7	31.86	0	31.86	- 10.66	-404.79
	8	34.89	0	34.89	492.41	87.61
1	0	12.70	0	12.70	-318.00	-318.00
	1	14.88	0	14.88	- 14.28	-332.28
	2	17.30	0	17.30	- 13.60	-345.89
	3	19.93	0	19.93	- 12.95	-358.84
	4	22.76	0	22.76	- 12.34	-371.18
	5	25.73	0	25.73	- 11.75	-382.94
	6	28.78	0	28.78	- 11.19	-394.13
	7	31.86	10.0	21.78	29.70	-364.43
	8	24.71	0	24.71	323.51	- 40.92
Clark-type Solution $y^* = 22.83$ (number of cuttings = 4 )	0	12.70	0	12.70	-318.00	-318.00
	1	14.88	0	14.88	- 14.28	-332.28
	2	17.30	0	17.30	- 13.60	-345.89
	3	19.93	0	19.93	- 12.95	-358.84
	4	22.76	0	22.76	- 12.34	-371.18
	5	25.73	2.9	22.83	-104.95	-476.13
	6	25.73	2.9	22.83	- 99.96	-576.09
	7	25.73	2.9	22.83	- 95.20	-671.29
	8	25.73	2.9	22.83	211.77	-459.52

Tabla 3-II: Resultados de evolución del sistema para la mejor política con condición inicial  $x = 34.4$ , y parámetros  $D_0 = -190$ ,  $\hat{c} = 0.05$ ,  $m = 2$ ,  $z_m = 0.125$ .

Number of Cuttings	Year	$y(i-)$	$-z(i)$	$y(i+)$	Discounted net revenue	
	i				annual	accumulated
0	0	34.40	0	34.40	-1186.00	-1186.00
	1	37.35	0	37.35	- 14.28	-1200.28
	2	40.16	0	40.16	- 13.60	-1213.89
	3	42.78	0	42.78	- 12.95	-1226.84
	4	45.18	0	45.18	- 12.34	-1239.18
	5	47.34	0	47.34	- 11.75	-1250.94
	6	49.25	0	49.25	- 11.19	-1262.13
	7	50.93	0	50.93	- 10.66	-1272.79
	8	52.38	0	52.38	782.44	- 490.35
1	0	34.40	0	34.40	-1186.00	-1186.00
	1	37.35	24.2	13.08	370.99	- 815.00
	2	15.31	0	15.31	- 13.60	- 828.00
	3	17.77	0	17.77	- 12.95	- 841.56
	4	20.45	0	20.45	- 12.34	- 853.90
	5	23.30	0	23.30	- 11.75	- 865.66
	6	26.29	0	26.29	- 11.19	- 876.85
	7	29.35	0	29.35	- 10.66	- 887.51
	8	32.43	0	32.43	782.44	- 435.97
2	0	34.40	0	34.40	-1186.00	-1186.00
	1	37.35	24.2	13.08	370.99	- 815.00
	2	15.31	0	15.31	- 13.60	- 828.00
	3	17.77	0	17.77	- 12.95	- 841.56
	4	20.45	0	20.45	- 12.34	- 853.90
	5	23.30	0	23.30	- 11.75	- 865.66
	6	26.29	0	26.29	- 11.19	- 876.85
	7	29.35	9.1	20.22	13.35	- 863.49
	8	23.06	0	23.06	296.20	- 567.29
Clarktype Solution $y^* = 22.83$ (number of cuttings = 9)	0	34.40	11.57	22.83	- 109.54	-1092.54
	1	25.73	2.9	22.83	- 127.57	-1220.11
	2	25.73	2.9	22.83	- 121.50	-1341.61
	3	25.73	2.9	22.83	- 115.71	-1457.32
	4	25.73	2.9	22.83	- 110.20	-1567.52
	5	25.73	2.9	22.83	- 104.95	-1672.47
	6	25.73	2.9	22.83	- 99.96	-1772.43
	7	25.73	2.9	22.83	- 95.20	-1867.63
	8	25.73	2.9	22.83	211.77	-1655.86

Consideremos el estado  $y^*$  de rendimiento máximo sostenido (MSY) como es obtenido en el apéndice A1. En este caso, la ecuación para  $y^*$  es

$$a - 2by^* = c,$$

es decir  $y^* = 22.83 \text{ ton}\cdot\text{ha}^{-1}$  (ver Clark y DePree, 1979). En las tablas 3·I y 3·II mostramos también los resultados de la evolución, sujeta a la política de ajustarse a  $y^*$  tan cerca como sea posible. Si comparamos los resultados en las distintas secciones de las tablas mencionadas, concluimos que la política clásica de MSY obtenida como el control de extracción lineal singular, es significativamente peor que la nuestra como estrategia de manejo.

Se dibujan las funciones de valor  $V_i^2(x)$  para  $i = 0, 1, 2$  en la figura 3·3. La función de valor  $V^2(0, 8, x)$  es la envolvente superior de las curvas representadas. En el intervalo  $[5.0; 30.8]$  claramente  $V(0, 8, x) = V_0(0, 8, x)$ , siendo  $J_0$  una función solamente de  $x$ . En el resto del dominio  $O$ , i.e.  $x \in [30.8; 59.0]$ ,

$$V(0, 8, x) \cong V_1^2(0, 8, x)$$

donde

$$V(0, 8, x) = \lim_{m \rightarrow \infty} V_1^m(0, 8, x).$$

Basados en los datos de las tablas 3·I y 3·II tenemos los siguientes valores para las constantes de las proposiciones previas:  $B_0(12.7) \cong 0.22$  y  $B_0(34.4) \cong 0.14$ . En el caso del valor inicial  $x = 34.4$  debe tenerse

$$s_{21} < W(0.05, 0.14, 8, a_{21}) \cong 0.54,$$

y

$$a_{21} > A(0.05, 0.14, 8) \cong 0.43;$$

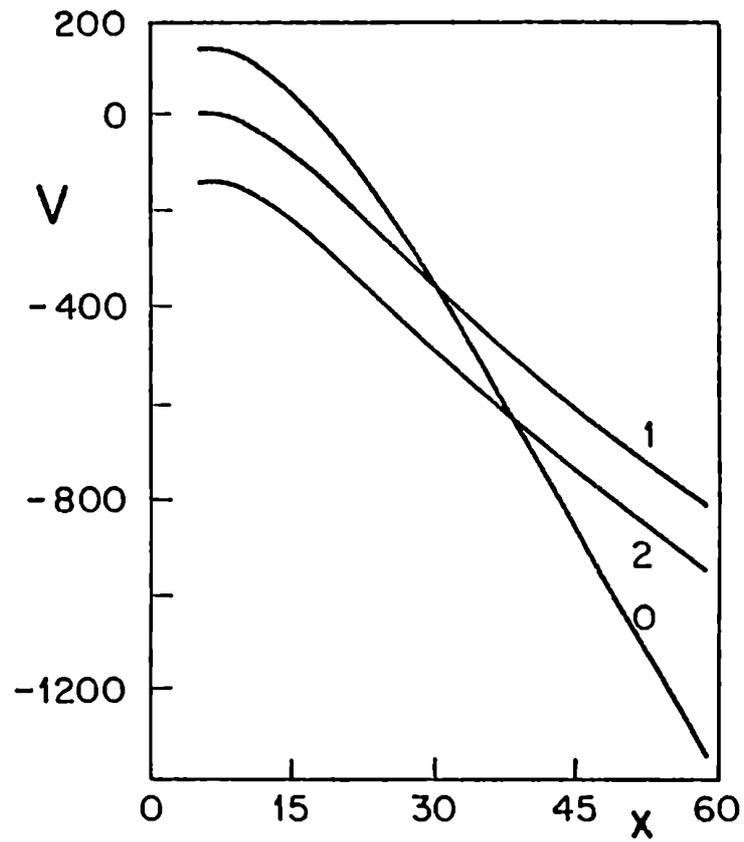


Figura 3-3: Las funciones de valor  $V_i^2$  para  $i = 0, 1, 2$ , ( $D_0 = -190$ ).  
 La función  $V^2$  es la envolvente superior de las curvas dibujadas.

pero debido a la discretización los valores son 'primer año' ( $s = 1$ ), y  $a_{21} = 0.45$ . Los valores aproximados de las constantes  $S_i$  en el algoritmo 3.1 son  $S_1 \cong 0.33$  y  $S_2 \cong 0.5$ ; de modo que se tiene  $N(12.7) = 1 = N(34.4)$ ,  $M(12.7) = 2$  y  $M(34.4) = 3$ .

En la figura 3-4 dibujamos  $V(0, 8, x)$  y sus funciones asociadas para el intervalo  $[5; 30]$ , y lo mismo para  $[33; 59]$  en la figura 3-5.

El comportamiento de los controles y la función de valor para varias condiciones iniciales de la región 'R1' del plano  $(D, x)$  en las versiones continua y discreta de este ejemplo se resumen en la tabla 3-III. Observamos buen ajuste entre ambas versiones. El resultado para la versión discreta se obtuvo del algoritmo 3.1, y el de la continua resolviendo el sistema (3-7) para las variables  $s$  y  $z$ .

Como resultado principal de este ejemplo hemos obtenido que en el intervalo  $[5.0; 30.8]$  la política óptima es 'no saltar', y exactamente 'un impulso' en el resto del dominio  $O$ . Este salto debe tomarse cerca del comienzo de la evolución, y lleva al sistema a un estado en el intervalo  $(9.0; 15.0)$ .

En la figura 3-6 representamos las curvas de evolución del sistema del ejemplo a partir de  $x = 15.5$ , para diversos valores del horizonte  $T$ , a saber:  $T = 7, 12, 17$ , y  $22$  (años). Cuando  $T = 7$  no se efectúa salto alguno. Para  $T = 12$ , el salto óptimo para el nivel de discretización adoptado (que se representa en la figura con las puntas de flecha señalando los lugares de salto posibles) es el representado para el sexto año. Para los lapsos mayores se nota que la secuencia de los primeros saltos se estabiliza, realizándose el primero en el  $s = 5$ , el segundo en  $s = 10$  y el tercero en  $s = 17$  para el mayor  $T$ . Se representa asimismo en esta figura la trayectoria asociada a la extracción de la renta anual, cuyo resultado económico se dibuja en la figura 3-7, donde representamos el resultado acumulado para las evoluciones correspondientes a  $T = 22$  que fueron representadas en la figura 3-6. Se observa que hay una significativa diferencia entre el

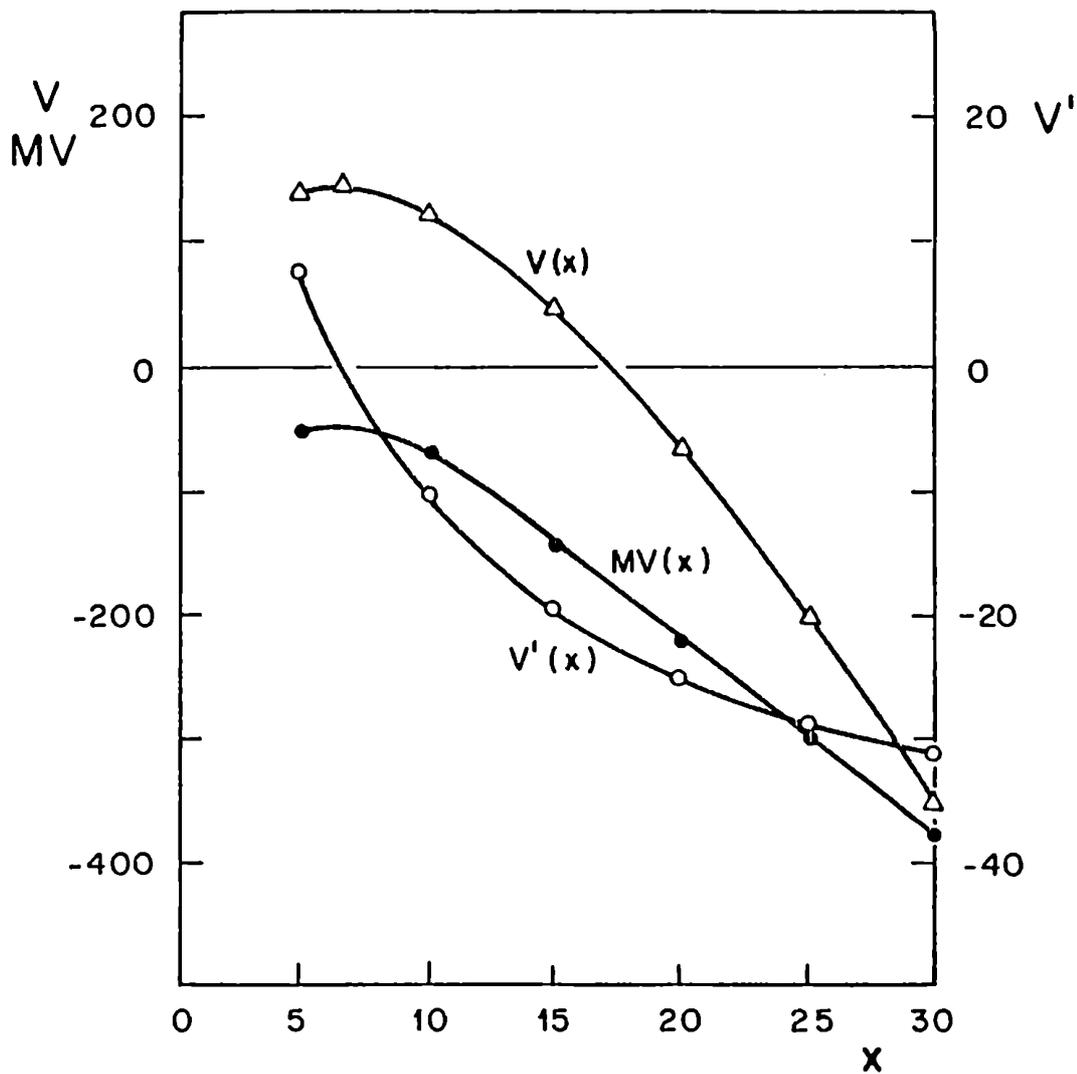


Figura 3.4: Las funciones  $V(x)$ ,  $MV(x)$  y  $V'(x)$  en el intervalo  $[5, 30] \subset \mathcal{O}$  ( $D_0 = -190$ ).

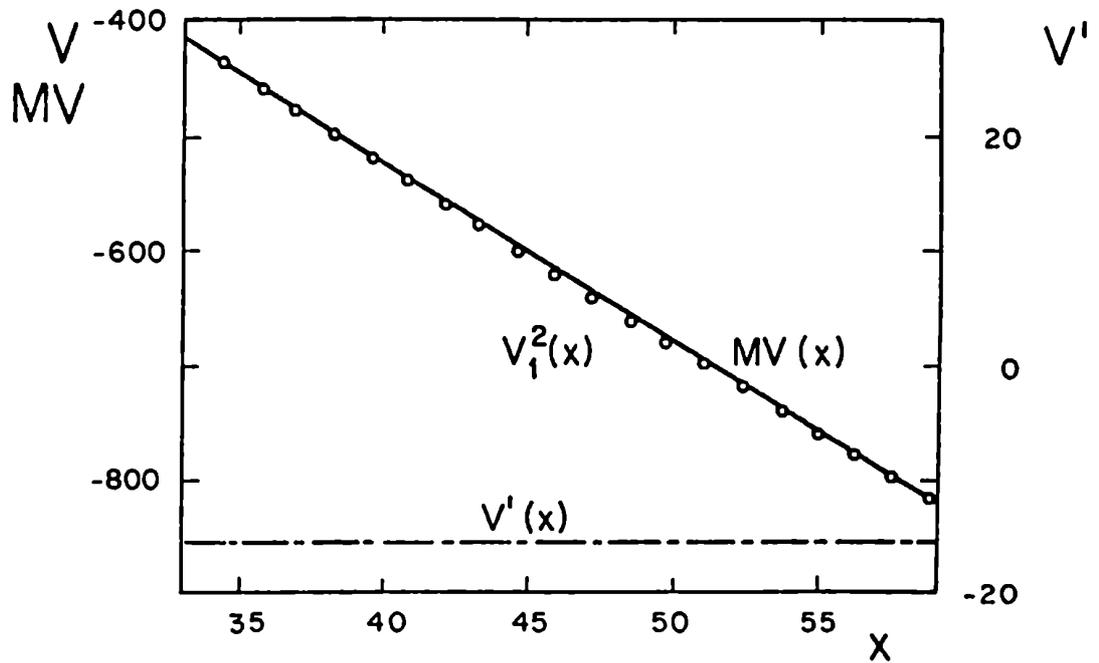


Figura 3-5: Las funciones  $V_1^2(x)$ ,  $MV(x)$  y  $V'(x)$  en el intervalo  $[33, 59] \subset \mathcal{O}$  ( $D_0 = -190$ ).

**Tabla 3-III: Controles y función de valor para varias condiciones iniciales en la región 'R1' del plano  $(D, x)$ ,  $D_0 = -190$ ,  $\hat{c} = 0.05$ .**

$x$	$j$	$s$	$z$	$v_1^1$	$v_1$	$v_1^A$
31.0						-375.1
31.0		1.73	-21.8		-374.3	
35.0		0.69	-23.8		-456.0	
35.0	1		-24.7	-446.5		
35.0						-446.5
36.8		0.21	-24.7		-474.9	
37.0	0		-24.0	-479.1		
37.0						-479.3

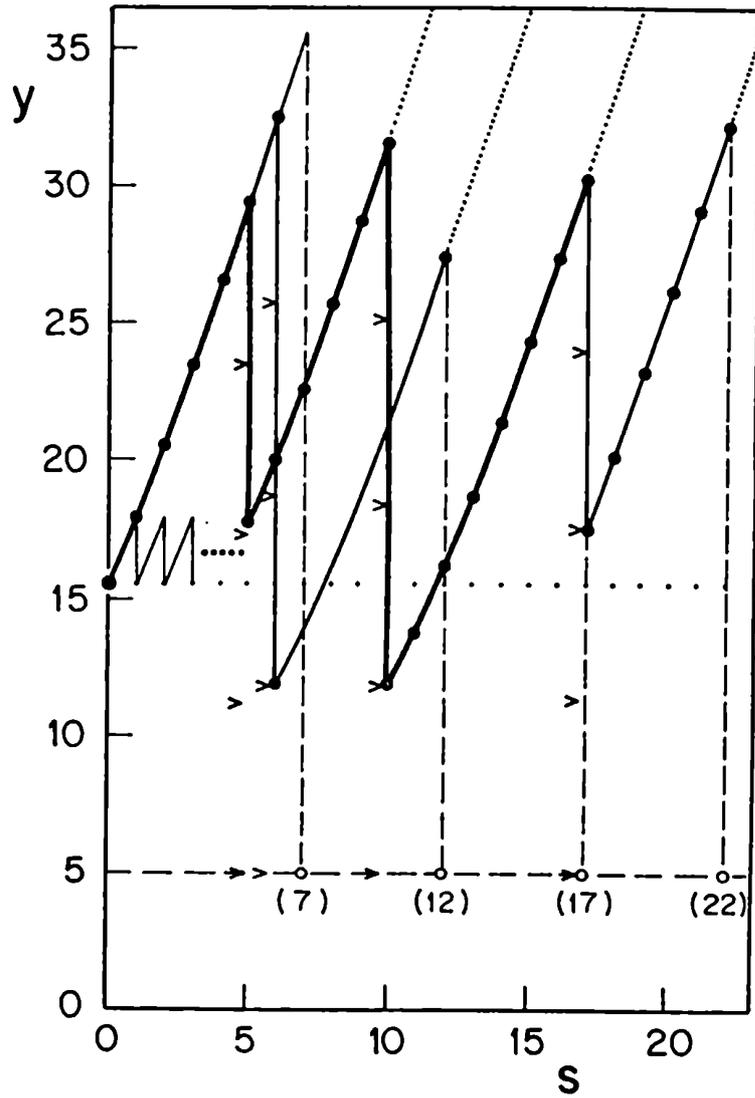
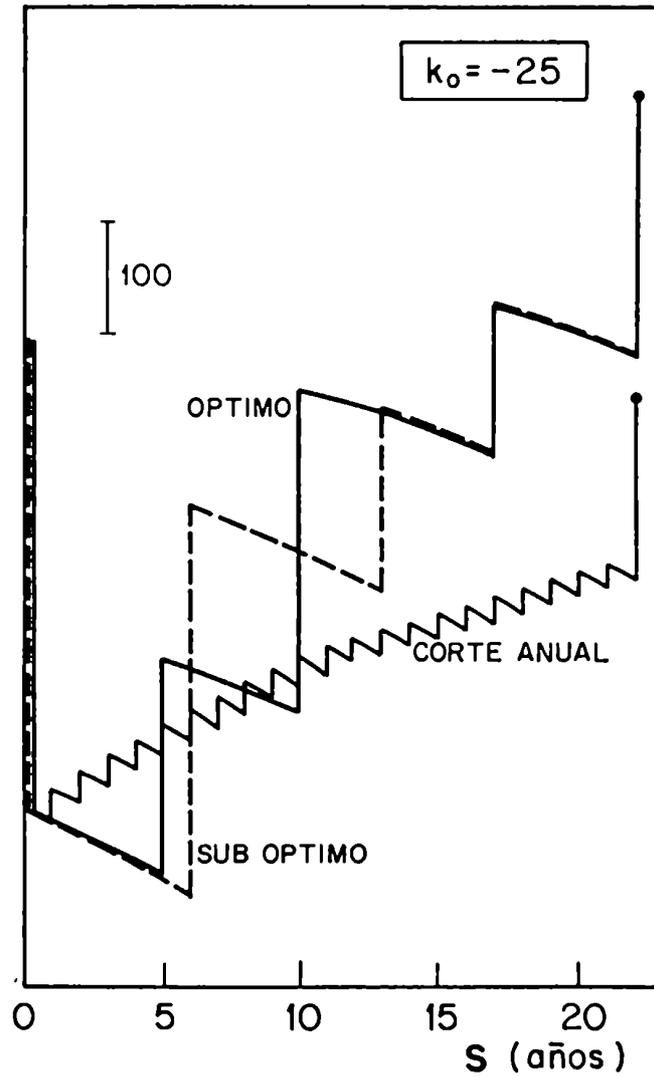


Figura 3-6: Evolución del sistema para varios horizontes  $T = 7, 12, 17,$  y  $22,$  con la sucesión de cortes óptimos. Las puntas de flecha indican los posibles lugares de salto definidos por el nivel de discretización adoptado. El estado inicial es  $x = 15.5$  ton. Se muestra la curva de extracción anual.



**Figura 3·7:** Evaluación económica de diversas acciones de manejo representadas en la figura 3·6. Horizonte  $T = 22$  años, penalización  $D_0 = -25$ .

resultado final del óptimo impulsional y el resultado de aplicar la metodología usual de extracción de la renta anual. El descenso inicial de las curvas corresponde a la función  $q$ , que representa el costo inicial del proceso; las curvas decrecen debido a los gastos corrientes  $f$ , y se producen aumentos de beneficio en ocasión de las extracciones (evaluadas por la función  $k$ ). El crecimiento en  $T = 22$  corresponde a la función terminal  $h$ . Debe destacarse que se obtienen resultados similares con sucesiones de salto  $Z$  distintas, debido a la discretización. En el capítulo 5 se estudia en detalle la ubicación y tamaño de los cortes que deben ser realizados para alcanzar el rendimiento óptimo.

#### EJEMPLO EN DOS DIMENSIONES ESPACIALES.

Hemos construido una descripción explícita para la estructura de cortes en el ejemplo visto, lograda mediante una aplicación del formalismo de Teoría de Control Impulsional, lo cual es novedoso para el manejo forestal. Cuando está bajo consideración un bosque con una única especie, la dinámica logística regida por la ecuación diferencial ordinaria  $\dot{y} = y(a - by)$  es un modelo macroscópico muy útil para seguir su evolución. Cuando  $r > 1$  nuestro algoritmo discreto es análogo al del caso  $r = 1$ , pero con algunas modificaciones menores necesarias para administrar un conjunto mayor de subíndices.

En el apéndice A2 presentamos un ejemplo en cuatro dimensiones espaciales que modela el manejo silvopastoril en bosques de la Región Chaqueña.

En el caso del problema de manejo de un bosque con una sola especie distinguida ( $r = 2$ ), hemos planteado (ver Neuman y Costanza, 1986) una solución al problema discretizado, la que se basa en los siguientes hechos ya establecidos:

- Los cortes se realizan —por razones ecológicas— con un espaciamiento de por lo menos un año, y la masa remanente de la especie no puede ser inferior a un valor preestablecido.
- En el período de 8 años de estudio (mediano plazo) el número óptimo de cortes resulta muy bajo, o nulo.
- Hay, en general, baja sensibilidad respecto de la cantidad cortada. Pequeñas variaciones de la magnitud cortada casi no afectan al valor de la función  $V(0, n, x)$ .

En razón de estas observaciones el procedimiento de obtención de la función de valor aproximada numéricamente es,

- ★ Para una grilla rectangular de puntos del dominio  $O$ , considerados cada uno como condición inicial de la ecuación diferencial (2.1), se hallan los respectivos pares  $(y_1(t+1, x), y_2(t+1, x))$  que definen la evolución del sistema en un período (de un año).
- ★ Para determinar los valores  $(y_1(s+1), y_2(s+1))$  de evolución en un año a partir de  $(y_1(s), y_2(s))$  se utiliza interpolación convexa en el rectángulo de la grilla al que pertenece este punto.
- ★ Puesto que el sistema (2.1) es autónomo, partiendo de cada condición inicial  $x$  se evalúa el funcional  $J(0, n, x, Z^i)$  para un conjunto de posibles políticas de corte  $Z^i$ , por dos caminos:
  - ★★ Exhaustivo: Asignamos a los  $Z^i$  primero el corte nulo, luego todos los cortes únicos posibles (dada la discretización), todos los pares de cortes posibles, etc, así hasta 'agotar' las posibilidades (debe notarse aquí que el número óptimo de cortes es menor que tres).

★★ Aleatorio: Asignamos a los  $Z^i$  el corte nulo, luego una selección aleatoria de los cortes únicos posibles, mas tarde una selección aleatoria de los pares de cortes posibles, etc.

Se obtiene, entonces, el mayor valor entre estos  $J(0, n, x, Z^i)$  calculados, y se determina a cuál  $Z^i$  corresponde.

★ Se tiene así,

1º: Una partición del dominio  $O$  en subdominios de igual número óptimo de cortes.

2º: Una función de valor aproximada,  $V(0, n, x)$ , que permite definir la política óptima en cada caso.

Ejemplo.

Aplicamos la metodología expuesta al sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1(0.04 - 0.12y_1 - 0.001y_2) \\ \dot{y}_2 = y_2(0.08 - 0.001y_1 - 0.06y_2) \end{cases} \quad (3.19)$$

del que representamos algunas de las trayectorias en la figura 3.8. En este ejemplo la funcional  $J(0, n, x, Z)$  es

$$J(x, Z) = f_0 \sum_{i=0}^n \frac{1}{(1 + \bar{c})^i} + \sum_{j=0}^m (D_0 - d_2 z_j) \frac{1}{(1 + \bar{c})^j}$$

En esta versión discreta de (2.2) consideramos nulas las funciones  $q_j(0, n, x)$  y  $h(n, y(n-))$ , tomamos

$$k(j, y, z_j) = D_0 - d_2 z_j,$$

[3.30]

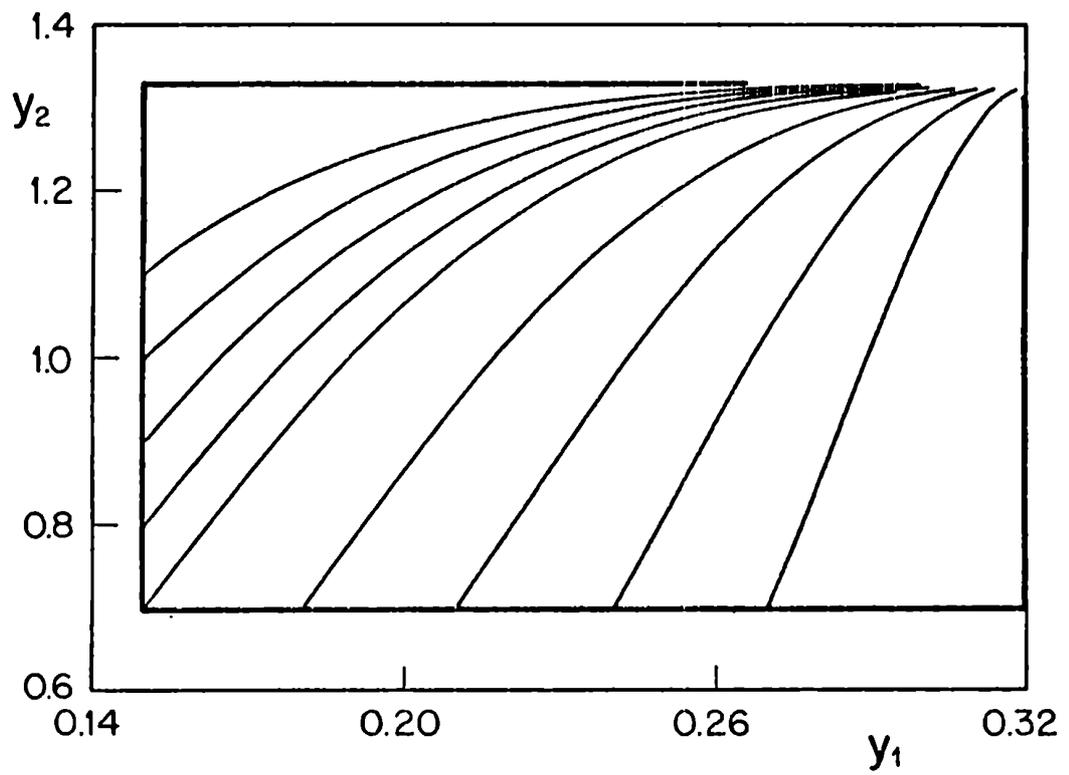


Figura 3-8: Trayectorias del sistema (3-19) para el dominio

$$O = (0.15, 0.32) \times (0.70, 1.32).$$

$f_0 = -41.5$ , y para  $Z = (j, z_j)_{j \geq 0}$  el costo por cortar  $D_0 = -320$  si  $z_j \neq 0$ , además  $d_2 = 3425$ ,  $n = 9$ , y la versión discreta del coeficiente de actualización  $\tilde{c} = 0.07$ . Con estos datos  $J_0(0, 9, x) = -311.9$  es el beneficio en ausencia de cortes,

$$J_1(0, 9, x, j, z) = -311.9 + (-320 + 3245z)(1.07)^{-j}$$

el correspondiente a un corte, y las expresiones análogas para los restantes. La evaluación se realiza por hectárea.

Con todos estos datos representamos en la figura 3.9 la función de valor aproximada  $\tilde{V}$  obtenida por el modo 'exhaustivo' descrito previamente.

La curva de  $\tilde{V}(y_1, 0.801)$ , función parcial de  $\tilde{V}$ , presenta tres tramos lineales correspondientes a las zonas de:

1. Ningún corte (entre 0.15 y 0.224).
2. Un corte dentro del intervalo (0;9) de tiempos (entre 0.224 y 0.262).
3. Un corte en  $s = 0$ , comienzo del período de análisis (desde 0.262).

La función  $\tilde{V}$  obtenida resulta numéricamente muy regular (ver Caffarelli y Friedman, 1978). En cada uno de los sectores de la curva el control de saltos óptimo resulta perfectamente definido: o un corte, o ninguno; y, en el caso de un corte, éste debe realizarse al comienzo del período de evolución si se comienza a partir de un cierto valor del dominio (primera coordenada). En la zona intermedia el momento de corte se desplaza desde el tiempo final hacia el inicial. No se observa fuerte dependencia de la segunda variable (resto del bosque).

Obtenemos aproximaciones de la función de valor  $\tilde{V}$  también mediante el método 'aleatorio' ya descrito. En este caso la  $\tilde{V}$  hallada dependerá de la corrida particular y del número de casos en la misma.

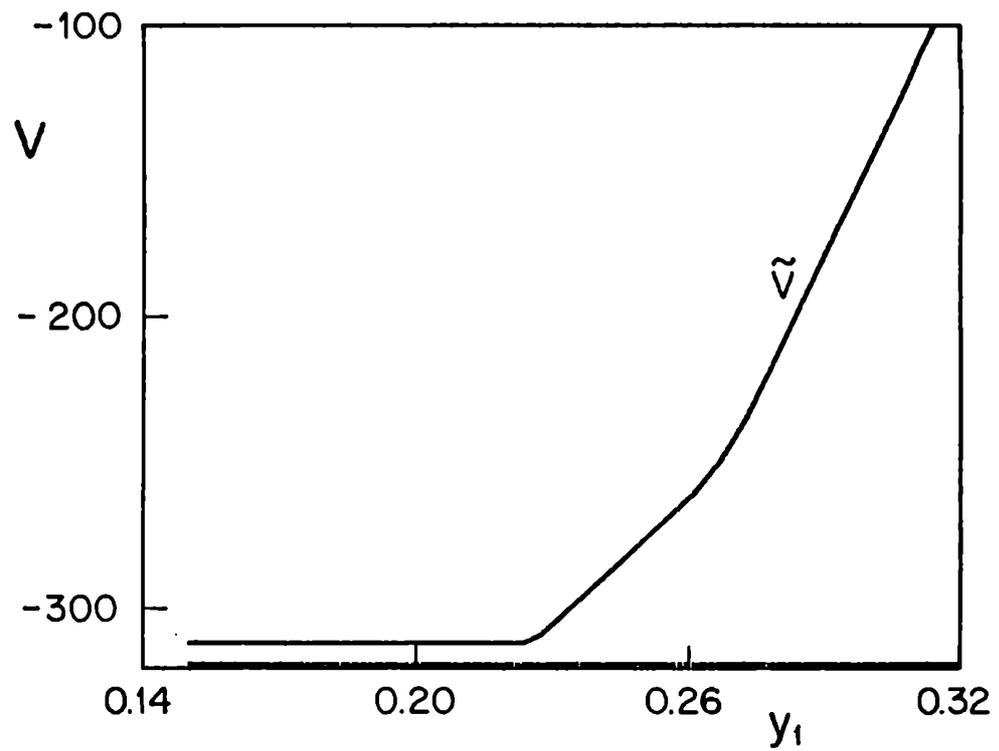
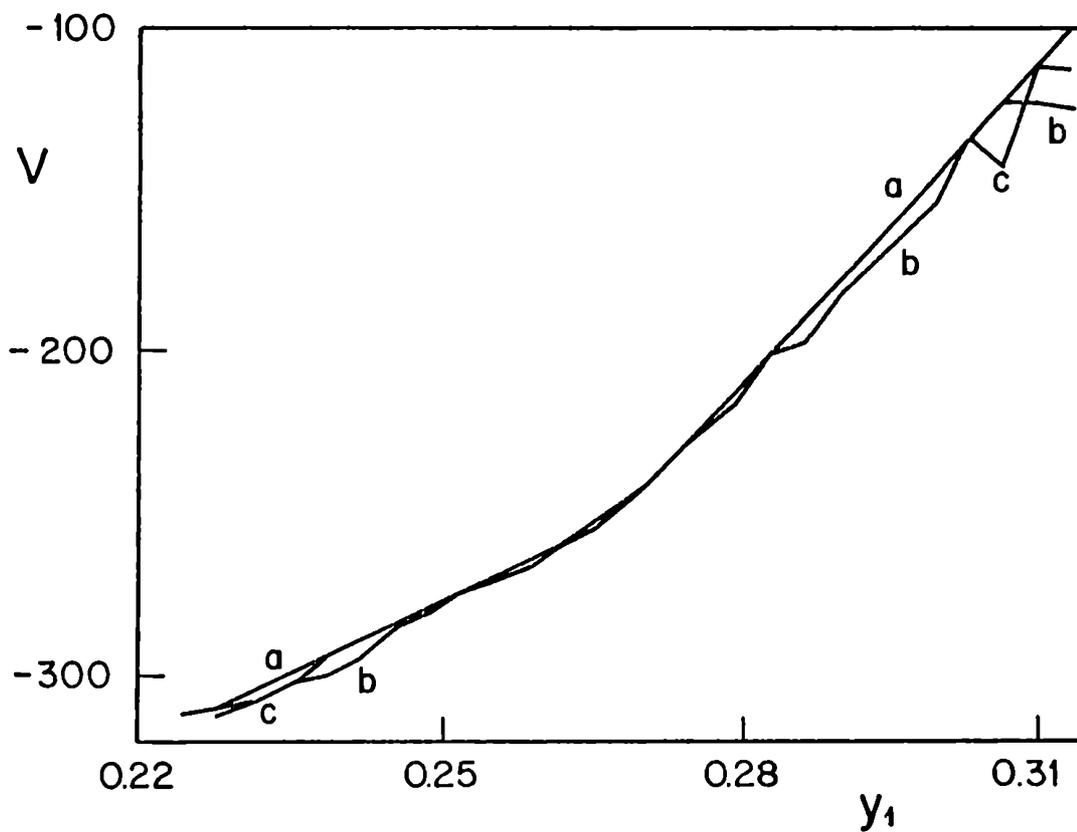


Figura 3-9: Función de valor aproximada  $\tilde{V}(y_1)$  para  $y_2 = 0.801$ .



**Figura 3-10:** Función de valor aproximada  $V(y_1, 0.801)$ .

(a) Parte de la  $V$  representada en la figura 3-9.

(b) Obtenida por el método 'aleatorio' con 250 casos.

(c) Idem con 150 casos.

En la figura 3·10 representamos dos ejemplos de tales curvas (método 'aleatorio') de 150 y 250 casos respectivamente, y además parte de la curva representada en la figura 3·9 (método 'exhaustivo'). Resulta obvio que las versiones de tipo Montecarlo estarán acotadas superiormente por las del tipo 'exhaustivo'. Por otra parte éstas están bien aproximadas por aquéllas para valores relativamente pequeños del número de casos (aquí 150 ó 250).

El tiempo empleado por la computadora (VAX/VMS 780) para determinar el valor de  $\tilde{V}$  correspondiente a un punto de  $O$  es de 50 *seg.* en el caso 'exhaustivo' (441 evaluaciones de  $J$ ) y de 5 *seg.* en el 'aleatorio' (150 evaluaciones de  $J$ ) con 150 controles distintos (ver tabla 3·IV). La ventaja en velocidad compensa la desventaja de obtener datos suboptimales. Hay una desventaja adicional de necesitar mayor localización de memoria en el método 'aleatorio', en la medida que se desee almacenar los valores de las tiradas parciales para facilitar la impresión de los resultados y evitar aumentar la memoria usada en las tablas de valores de cada corrida.

Ejemplo.

Para el mismo sistema (3·19) del ejemplo previo consideramos la funcional  $J(0, n, x, Z)$ ,

$$J(x, Z) = q_0 x + f_0 \sum_{i=0}^n \frac{1}{(1 + \tilde{c})^i} + \sum_{j=0}^m (D_0 - d_2 z_j) \frac{1}{(1 + \tilde{c})^j}$$

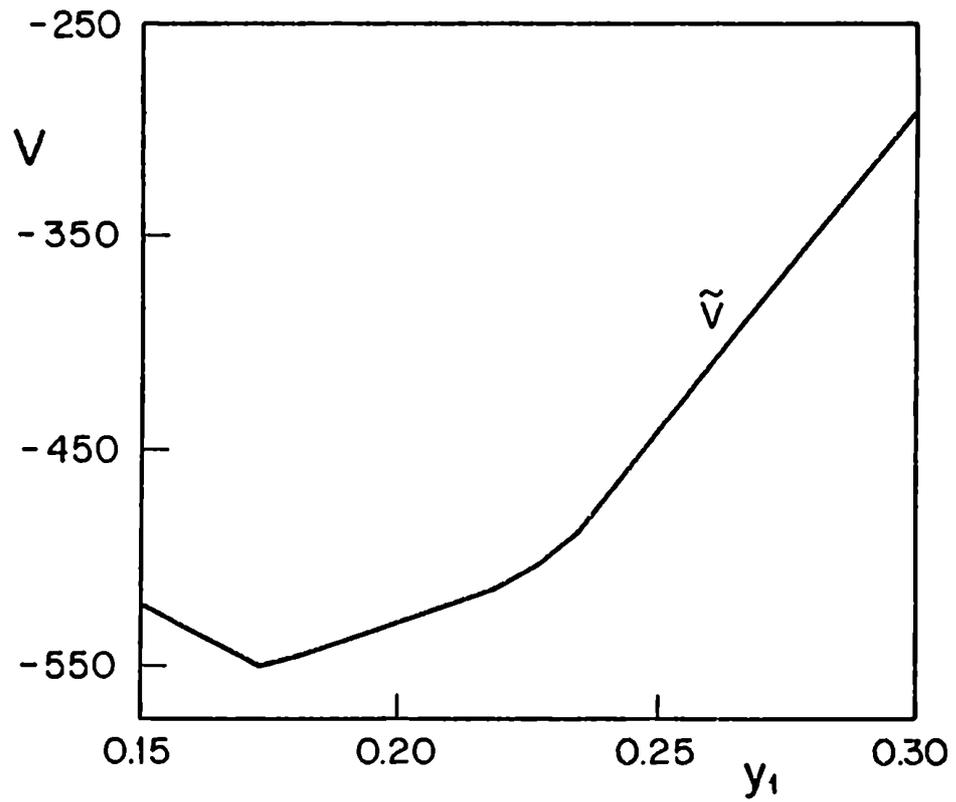
Aquí la función de costo inicial es  $q_0 = -1250x$  y  $q_i = 0$  ( $i > 0$ ). Asimismo tomamos  $h(n, y(n-)) = 0$ . Las demás funciones y constantes se toman como en el ejemplo previo con la excepción de  $d_2 = 4325$ ,  $D_0 = -220$  y  $f_0 = -44.5$ . Con estos datos

$$J_0(0, 9, x) = -334.43 - 1250x_1$$

[3·35]

Tabla 3-IV: Comparación de técnicas computacionales. Corridas efectuadas con equipo VAX/VMS 780.

Método	"exhaustivo"	"aleatorio"
Velocidad de determinación de un valor de $V$ (tiempo empleado)	50 <i>seg</i>	5 <i>seg</i>
Memoria utilizada para facilitar la impresión de resultados (matrices de datos de saltos simultáneas)	18	150
Número de evaluaciones de $J(x, Z)$	441	150
Aproximación obtenida	óptima	suboptimal



**Figura 3-11:** Función de valor aproximada  $\tilde{V}(y_1, y_2)$  para  $y_2$  valiendo 0.777, 0.926, y 1.075. Las tres curvas están superpuestas.

es el beneficio en ausencia de cortes, en particular  $J_0(0, 9, 0.15) = -522.0$ ; también

$$J_1(0, 9, x, j, z) = -334.43 - 1250x_1 + (-220 + 4325z)(1.07)^{-j}$$

es el beneficio correspondiente a la evaluación del sistema que incluye exactamente un corte en el intervalo  $[0, 9]$ .

Para mayor número de cortes se tienen expresiones análogas. En la figura 3-11 representamos la función de valor  $\tilde{V}$  aproximada obtenida por el método 'exhaustivo' descripto. Como en el ejemplo previo la curva presenta tres tramos lineales análogos a los sectores '1.', '2.', y '3.' de la curva del ejemplo previo. En el sector medio, para  $y_1 \in (0.18, 0.24)$ , se tiene una ligera dependencia de  $\tilde{V}$  respecto de la segunda variable  $y_2$ . El control de salto óptimo asociado a este ejemplo resulta análogo al que se deduce en el ejemplo previo.

## 4. LAS INECUACIONES DE HAMILTON-JACOBI-BELLMAN

Una de las vías de ataque para lograr la solución del problema de control óptimo planteado en los párrafos previos es la obtención de ecuaciones que permitan determinar a la función de valor  $V$  definida en el capítulo 2, se remite a ese capítulo para la notación que se utiliza en la funcional de beneficio. La deducción de las ecuaciones es posible apelando al principio de la programación dinámica. En esta sección determinamos conjuntos de inecuaciones para  $V$  bajo distintas hipótesis. Los métodos utilizados se basan en los trabajos ya clásicos de R. Bellman y en la bibliografía reciente (ver González, 1980).

Es inmediato que cuando  $T = t$  se tiene la condición inicial

$$V(t, t, x) \geq q(t, t, x) + h(t, x), \quad (4.1)$$

y vale el igual si no hay salto en  $t$ .

Supongamos ahora que no se producen saltos, ni amortizaciones, ni se termina la evolución en el intervalo  $[t, t + \delta)$ , así  $t_1 > \delta$ ,  $s_1 > \delta$ ,  $T$  está suficientemente alejado y para  $0 < \varepsilon < \delta$  se tiene la siguiente desigualdad, pues  $V$  es mayor que cualquier  $J$ ,

$$\begin{aligned} V(t, T, x) \geq & q(t, T, x) + \sum_{j=1}^l q_j(t_j, T, x) e^{-c(t_j-t)} \\ & + \int_t^{t+\varepsilon} f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s-t)} ds \\ & + \int_{t+\varepsilon}^T f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s-t)} ds \\ & + \sum_{i=1}^n k(s_i, y(s_i-), z_i) e^{-c(s_i-t)} \\ & + h(T, y(T-)) e^{-c(T-t)} \end{aligned}$$

[4.1]

es decir

$$\begin{aligned}
 (V - q)(t, T, x) &\geq \sum_{j=1}^l q_j(t_j, T, x) e^{-c(t_j - t)} \\
 &\quad + \int_t^{t+\varepsilon} f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s-t)} ds \\
 &\quad + \int_{t+\varepsilon}^T f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s-(t+\varepsilon))} e^{-c\varepsilon} ds \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n k(s_i, y(s_i-), z_i) e^{-c(s_i-(t+\varepsilon))} e^{-c\varepsilon} \\
 &\quad + h(T, y(T-)) e^{-c(T-(t+\varepsilon))} e^{-c\varepsilon}
 \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned}
 J(t + \varepsilon, T, y(t + \varepsilon), u(\cdot), Z) &= q(t + \varepsilon, T, y(t + \varepsilon)) \\
 &\quad + \sum_{j=1}^l q_j(t_j, T, y(t + \varepsilon)) e^{-c(t_j - (t + \varepsilon))} \\
 &\quad + \int_{t+\varepsilon}^T f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s-(t+\varepsilon))} ds \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n k(s_i, y(s_i-), z_i) e^{-c(s_i-(t+\varepsilon))} \\
 &\quad + h(T, y(T-)) e^{-c(T-(t+\varepsilon))}
 \end{aligned}$$

con lo que

$$\begin{aligned}
 e^{-c\varepsilon} (J(t + \varepsilon, T, y(t + \varepsilon), u(\cdot), Z) &- q(t + \varepsilon, T, y(t + \varepsilon)) \\
 &\quad - \sum_{j=1}^l q_j(t_j, T, y(t + \varepsilon)) e^{-c(t_j - (t + \varepsilon))}) \\
 &= \int_{t+\varepsilon}^T f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s-t)} ds \\
 &\quad + \sum_{i=1}^n k(s_i, y(s_i-), z_i) e^{-c(s_i-t)} \\
 &\quad + h(T, y(T-)) e^{-c(T-t)}
 \end{aligned}$$

**[4.2]**

resulta así

$$\begin{aligned}
(V - q)(t, T, x) &\geq \int_t^{t+\varepsilon} f(s, y(s), u(s))e^{-c(s-t)} ds \\
&\quad + e^{-c\varepsilon} (J(t + \varepsilon, T, y(t + \varepsilon), u(\cdot), Z) \\
&\quad - q(t + \varepsilon, T, y(t + \varepsilon))) \\
&\quad - \sum_{j=1}^l (q_j(t_j, T, y(t + \varepsilon)) - q_j(t_j, T, x))e^{-c(t_j-t)}
\end{aligned}$$

Hemos partido el período de evolución  $[t, T]$  entre dos intervalos,  $[t, t + \varepsilon]$  y  $[t + \varepsilon, T]$ , ahora debemos optimizar en el segundo de ellos. Tomamos el supremo respecto de  $u(\cdot)$  y  $Z$  y obtenemos,

$$\begin{aligned}
0 &\geq \sup_{u(\cdot)} \left\{ \int_t^{t+\varepsilon} f(s, y(s), u(s))e^{-c(s-t)} ds \right. \\
&\quad + (e^{-c\varepsilon} - 1)(V - q)(t + \varepsilon, T, y(t + \varepsilon)) \\
&\quad - \sum_{j=1}^l (q_j(t_j, T, y(t + \varepsilon)) - q_j(t_j, T, x))e^{-c(t_j-t)} \\
&\quad \left. + (V - q)(t + \varepsilon, T, y(t + \varepsilon)) - (V - q)(t, T, x) \right\}.
\end{aligned}$$

Tomamos en el primer intervalo

$$u(s) = u_0 \in \mathbf{U},$$

valor constante para el que la desigualdad continua siendo válida, y luego de dividir por  $\varepsilon$  pasamos al límite obteniendo, por la convergencia uniforme de cada término (suponemos a las funciones involucradas suficientemente regulares),

$$\begin{aligned}
0 &\geq f(t, x, u_0) - c(V - q)(t, T, x) \\
&\quad + \frac{\partial(V - q)}{\partial x}(t, T, x)g(t, x, u_0) \\
&\quad + \frac{\partial(V - q)}{\partial t}(t, T, x) \\
&\quad - \sum_{j=1}^l \frac{\partial q_j}{\partial x}(t_j, T, x)g(t, x, u_0)e^{-c(t_j-t)}
\end{aligned}$$

[4.3]

pero el  $u_0 \in \mathbf{U}$  que tomamos antes es uno elegido arbitrariamente, de modo que se tiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial(V - q)}{\partial t}(t, T, x) + \sup_{u \in \mathbf{U}} \left\{ \frac{\partial(V - q)}{\partial x}(t, T, x)g(t, x, u) \right. \\ \left. + f(t, x, u) - c(V - q)(t, T, x) \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^l \frac{\partial q_j}{\partial x}(t_j, T, x)g(t, x, u)e^{-c(t_j - t)} \right\} \leq 0 \end{aligned} \quad (4.2)$$

Hemos supuesto que no se aplicaban saltos al principio de la evolución para deducir la ecuación (4.2). Supongamos ahora que se comienza con un salto  $z \in \mathbf{S}_x$  en el espacio de saltos factibles para la posición inicial  $x$  y que, además de estar  $T$  suficientemente alejado del instante inicial  $t$ , también lo están los momentos de los eventuales siguientes saltos (es decir  $\sigma$  es suficientemente grande) resulta así que, como  $V \geq J$ ,

$$\begin{aligned} V(t, T, x) &\geq q(t, T, x) + \sum_{j=1}^l q_j(t_j, T, x)e^{-c(t_j - t)} \\ &\quad + k(t, x, z) + J(t, T, x + z, u(\cdot), \tilde{Z}) \\ &\quad - q(t, T, x + z) - \sum_{j=1}^l q_j(t_j, T, x + z)e^{-c(t_j - t)} \end{aligned}$$

donde  $\tilde{Z}$  es el control de saltos restante, es decir

$$Z = (t, z; \tilde{Z}).$$

Tomamos supremo respecto de  $u(\cdot)$  y  $\tilde{Z}$ , resultando

$$\begin{aligned} 0 &\geq k(t, x, z) + V(t, T, x + z) - \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x + z)e^{-c(t_j - t)} \\ &\quad - (V(t, T, x) - \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x)e^{-c(t_j - t)}) \end{aligned}$$

[4.4]

ahora tomamos supremo respecto de  $z$  obteniendo en definitiva

$$\begin{aligned} & \sup_{z \in S_x} \{k(t, x, z) + V(t, T, x + z) \\ & \quad - \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x + z) e^{-c(t_j - t)}\} \\ & \quad - (V(t, T, x) - \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x) e^{-c(t_j - t)}) \leq 0 \end{aligned} \quad (4.3)$$

Deseamos ahora estudiar el comportamiento de la funcional  $J$  y de la función de valor  $V$  en el entorno del punto final de evolución  $T$ . Para ello supongamos que no se producen cortes ni se saldan amortizaciones en el intervalo  $[T - \delta, T]$ . Podemos escribir, con  $0 < \varepsilon < \delta$ ,

$$\begin{aligned} J(t, T - \varepsilon, x, u(\cdot), Z) = & \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T - \varepsilon, x) e^{-c(t_j - t)} \\ & + \int_t^{T - \varepsilon} f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s - t)} ds \\ & + \sum_{i=1}^n k(s_i, y(s_i -), z_i) e^{-c(s_i - t)} \\ & + h(T - \varepsilon, y(T - \varepsilon)) e^{-c(T - \varepsilon - t)} \end{aligned}$$

con

$$s_i < T - \varepsilon$$

y

$$t_j < T - \varepsilon$$

para todos los  $i$  y  $j$  respectivamente, entonces,

$$\begin{aligned} V(t, T, x) \geq & J(t, T - \varepsilon, x, u(\cdot), Z) \\ & + \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x) e^{-c(t_j - t)} \end{aligned}$$

[4.5]

$$\begin{aligned}
& + \int_{T-\epsilon}^T f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s-t)} ds \\
& + h(T, y(T)) e^{-c(T-t)} \\
& - \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T - \epsilon, x) e^{-c(t_j-t)} \\
& - h(T - \epsilon, y(T - \epsilon)) e^{-c(T-\epsilon-t)}
\end{aligned}$$

recordemos que  $q_0 = q$  y  $t_0 = t$  y que como no se producen saltos en el tiempo  $T$  se tiene  $y(T-) = y(T)$ . Tomamos supremo respecto de los controles  $u(\cdot)$  y  $Z$  obteniendo

$$\begin{aligned}
0 \geq \sup_{u(\cdot)} \{ & V(t, T - \epsilon, x) - V(t, T, x) \\
& + \int_{T-\epsilon}^T f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s-t)} ds \\
& - \sum_{j=0}^l (q_j(t_j, T - \epsilon, x) - q_j(t_j, T, x)) e^{-c(t_j-t)} \\
& - e^{-c(T-t)} (h(T - \epsilon, y(T - \epsilon)) (e^{c\epsilon} - 1) \\
& + h(T - \epsilon, y(T - \epsilon)) - h(t, y(T))) \}
\end{aligned}$$

tomamos como antes

$$u(s) = u_0 \in \mathbf{U}$$

en el intervalo  $[T - \delta, T]$  para el que vale la desigualdad, dividimos por  $\epsilon$  y pasamos al límite para obtener (por la convergencia uniforme de las funciones involucradas),

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V}{\partial T}(t, T, x) + \sum_{j=0}^l \frac{\partial q_j}{\partial T}(t_j, T, x) e^{-c(t_j-t)} \\
+ e^{-c(t_j-t)} (f(T, y(T), u_0) + \frac{\partial h}{\partial T}(T, y(T)) \\
+ \frac{\partial h}{\partial y}(T, y(T)) g(T, y(T), u_0) - ch(T, y(T))) \leq 0
\end{aligned}$$

[4.6]

pero la desigualdad previa debe valer para cada  $u_0 \in \mathbf{U}$  de manera que hemos probado que vale

$$\begin{aligned}
-\frac{\partial V}{\partial T}(t, T, x) + \sum_{j=0}^l \frac{\partial q_j}{\partial T}(t_j, T, x) e^{-c(t_j-t)} \\
+ e^{-c(T-t)} \sup_{u \in \mathbf{U}} \left\{ f(T, y(T), u) + \frac{\partial h}{\partial T}(T, y(T)) \right. \\
\left. + \frac{\partial h}{\partial y}(T, y(T)) g(T, y(T), u) - ch(T, y(T)) \right\} \leq 0
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Un resultado de ortogonalidad.

Hemos deducido las ecuaciones (4.2) y (4.3) a partir de hipótesis que no pueden darse simultáneamente y es razonable pensar que cuando se satisfacen las condiciones para una de ellas, entonces valga con el igual. En consecuencia deseamos probar que el producto de los primeros miembros de las ecuaciones (4.2) y (4.3) es nulo, para ello podemos, por ejemplo, suponer que

$$\begin{aligned}
\sup_{z \in \mathbf{S}_x} \left\{ k(t, x, z) + V(t, T, x + z) \right. \\
\left. - \sum_{j=0}^l (q_j(t_j, T, x + z) e^{-c(t_j-t)}) \right\} \\
- (V(t, T, x) - \sum_{j=0}^l (q_j(t_j, T, x) e^{-c(t_j-t)}) + \delta) \leq 0
\end{aligned}$$

para un cierto  $(t, T, x)$ . Entonces existirá  $\varepsilon > 0$  tal que las estrategias de control con salto en  $(t, t + \varepsilon)$  tienen un beneficio

$$J(t, T, x, u(\cdot), Z) \leq V(t, T, x) - \frac{\delta}{2}$$

[4.7]

y en consecuencia no es necesario tenerlos en cuenta en la búsqueda de una estrategia óptima. Para una estrategia cualquiera con primer salto en  $s_1$  (suponemos que  $t_1 \geq s_1$ ) se tiene

$$\begin{aligned}
J(t, T, x, u(\cdot), Z) &\leq q(t, T, x) + \sum_{j=1}^l q_j(t_j, T, x) e^{-c(t_j-t)} \\
&\quad + \int_t^{s_1} f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s-t)} ds \\
&\quad + e^{-c(s_1-t)} (k(s_1, y(s_1), z_1) + V(s_1, T, y(s_1-) + z_1) \\
&\quad - q(s_1, T, y(s_1-) + z_1) \\
&\quad - \sum_{j=1}^l q_j(t_j, T, y(s_1-) + z_1) e^{-c(t_j-s_1)})
\end{aligned} \tag{4.5}$$

independientemente del control  $u(\cdot)$ , y por la regularidad supuesta en las funciones involucradas, el miembro derecho debe tender (cuando  $s_1 \rightarrow t$ ) a

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x) e^{-c(t_j-t)} + k(t, x, z_1) \\
&\quad + V(t, T, x + z_1) - \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x + z_1) e^{-c(t_j-t)}.
\end{aligned}$$

La convergencia es uniforme respecto de  $z_1$  pues

$$z_1 \in \mathbf{S}_{y(s_1-)} \subset \mathbf{S}$$

que es compacto. Luego, existe  $\varepsilon > 0$  tal que

$$\begin{aligned}
J(t, T, x, u(\cdot), Z) &\leq \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x) e^{-c(t_j-t)} + k(t, x, z_1) \\
&\quad + V(t, T, x + z_1) - \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x + z_1) e^{-c(t_j-t)} + \frac{\delta}{2}
\end{aligned} \tag{4.6}$$

para todas las estrategias con  $s_1 \in [t, t + \varepsilon]$ . Combinamos (4.5) y (4.6) para obtener,

$$J(t, T, x, u(\cdot), Z) - \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x) e^{-c(t_j-t)}$$

[4.8]

$$\begin{aligned}
&\leq k(t, x, z_1) + V(t, T, x + z_1) \\
&\quad - \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x + z_1) e^{-c(t_j - t)} + \frac{\delta}{2} \\
&\leq \sup_{z \in S_x} \{ k(t, x, z) + V(t, T, x + z) \\
&\quad - \sum_{j=0}^l (q_j(t_j, T, x + z) e^{-c(t_j - t)}) \} + \frac{\delta}{2} \\
&\leq V(t, T, x) - \sum_{j=0}^l (q_j(t_j, T, x) e^{-c(t_j - t)}) - \delta + \frac{\delta}{2}
\end{aligned}$$

resulta así

$$J(t, T, x, u(\cdot), Z) \leq V(t, T, x) - \frac{\delta}{2}$$

En consecuencia todas esas trayectorias con  $s_1 \in [t, t + \varepsilon]$  no pueden ser optimales y es posible descartarlas del problema. Entonces sea  $s_1 > t + \varepsilon$ , y asumamos que no hay saltos al principio. Se tiene así

$$\begin{aligned}
&V(t, T, x) - \sum_{j=0}^l q_j(t_j, T, x) e^{-c(t_j - t)} \\
&= \sup_{u(\cdot)} \int_t^{t+\varepsilon} f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s-t)} ds \\
&\quad + e^{-c\varepsilon} (V(t + \varepsilon, T, y(t + \varepsilon)) - q(t + \varepsilon, T, y(t + \varepsilon))) \\
&\quad - \sum_{j=1}^l q_j(t_j, T, y(t + \varepsilon)) e^{-c(t_j - t - \varepsilon)}
\end{aligned}$$

de donde se obtiene la ecuación (4.2) con signo igual.

El caso de lapso fijo.

Resta considerar un caso particular de importancia, el de lapso  $T - t$  fijo. Supongamos en consecuencia que no se efectúan cortes ni al principio ni al final, y que tampoco se efectúan amortizaciones  $q_j$  con  $j \geq 1$  en los  $\varepsilon$ -intervalos inicial y final. La expresión análoga a (2.6) para  $t + \varepsilon$  es, en el caso de lapso fijo,

$$J(t + \varepsilon, T + \varepsilon, y(t + \varepsilon), u(\cdot), Z)$$

$$\begin{aligned}
&= q(t + \varepsilon, T + \varepsilon, y(t + \varepsilon)) \\
&\quad + \sum_{j=1}^l q_j(t_j, T + \varepsilon, y(t + \varepsilon)) e^{-c(t_j - (t + \varepsilon))} \\
&\quad + \int_{t + \varepsilon}^{T + \varepsilon} f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s - (t + \varepsilon))} ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^n k(s_i, y(s_i -), z_i) e^{-c(s_i - (t + \varepsilon))} \\
&\quad + h(T + \varepsilon, y(T + \varepsilon)) e^{-c(T + \varepsilon - (t + \varepsilon))}.
\end{aligned}$$

En forma análoga a la desarrollada previamente se puede deducir que

$$\begin{aligned}
0 \geq \sup_{u(\cdot)} \{ &\int_t^{t + \varepsilon} f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s - t)} ds \\
&- \int_T^{T + \varepsilon} f(s, y(s), u(s)) e^{-c(s - t)} ds \\
&+ \sum_{j=1}^l (q_j(t_j, T, x) - q_j(t_j, T + \varepsilon, y(t + \varepsilon))) e^{-c(t_j - t)} \\
&+ e^{-c\varepsilon} (V - q)(t + \varepsilon, T + \varepsilon, y(t + \varepsilon)) - (V - q)(t, T, x) \\
&- (h(T + \varepsilon, y(T + \varepsilon)) e^{-c(T + \varepsilon - t)} - h(T, y(T)) e^{-c(T - t)}) \}.
\end{aligned}$$

A partir de esta desigualdad es posible deducir la siguiente expresión, en forma análoga a lo realizado para las ecuaciones (4.2) y (4.4),

$$\begin{aligned}
\sup_{u \in U} \{ &\frac{\partial(V - q)}{\partial t}(t, T, x) + \frac{\partial(V - q)}{\partial x}(t, T, x) g(t, x, u) \\
&+ f(t, x, u) - c(V - q)(t, T, x) \\
&- (-\frac{\partial V}{\partial T}(t, T, x) + e^{-c(T - t)} [f(T, y(T), u) + \frac{\partial h}{\partial T}(T, y(T)) \\
&+ \frac{\partial h}{\partial y}(T, y(T)) g(T, y(T), u) - ch(T, y(T))]) \\
&- \sum_{j=1}^l (\frac{\partial q_j}{\partial T}(t_j, T, x) + \frac{\partial q_j}{\partial x}(t_j, T, x) g(t, x, u)) e^{-c(t_j - t)} \} \leq 0
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Debe observarse que la ecuación (4.7) contiene los términos de las ecuaciones (4.2) y (4.4). Resulta así que la suma de ambas es menor que cero (pero no necesariamente cada una por separado en este caso).

Funcionales autónomas.

Resulta interesante considerar el caso en que, además de la dinámica, los restantes objetos matemáticos involucrados en el proceso de optimización no dependan explícitamente de la variable de evolución, y en consecuencia sea posible considerar una sola variable temporal, la duración  $\tau = T - t$  del proceso controlado. Para expresar las ecuaciones correspondientes a este caso es necesario modificar la dependencia de las funciones respecto de las variables. Por razones de simplicidad expositiva conservaremos la misma notación para las funciones, ya que por un lado expresamos explícitamente las variables para cada función, y por otro en todos los casos se desprenden del contexto los dominios de cada una. La expresión de la funcional de beneficio "autónoma" resulta así

$$\begin{aligned}
 J(\tau, x, u(\cdot), Z) = & \sum_{j=0}^l q_j(\tau, x) e^{-c(t_j - t)} \\
 & + \int_t^T f(y(s), u(s)) e^{-c(s-t)} ds \\
 & + \sum_{i=1}^n k(z_i) e^{-c(s_i - t)} \\
 & + h(y(T-)) e^{-c\tau}.
 \end{aligned}$$

Con los métodos desarrollados previamente se deducen las ecuaciones siguientes,

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial(V - q)}{\partial\tau}(\tau, x) + \sup_{u \in U} \left\{ \frac{\partial(V - q)}{\partial x}(\tau, x) g(x, u) \right. \\
 \left. + f(x, u) - c(V - q)(\tau, x) \right. \\
 \left. + \sum_{j=1}^l \left( \frac{\partial q_j}{\partial\tau}(\tau, x) - \frac{\partial q_j}{\partial x}(\tau, x) g(x, u) \right) e^{-c(t_j - t)} \right\} \leq 0,
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\begin{aligned} \sup_{z \in \mathbb{S}_x} \{k(z) + V(\tau, x+z) - \sum_{j=0}^l q_j(\tau, x+z)e^{-c(t_j-t)}\} \\ - (V(\tau, x) - \sum_{j=0}^l q_j(\tau, x)e^{-c(t_j-t)}) \leq 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

y

$$\begin{aligned} -\frac{\partial V}{\partial \tau}(\tau, x) + \sum_{j=0}^l \frac{\partial q_j}{\partial \tau}(\tau, x)e^{-c(t_j-t)} \\ + e^{-c\tau} \sup_{u \in \mathbb{U}} \{f(y(T), u) + \frac{\partial h}{\partial y}(y(T))g(y(T), u) - ch(y(T))\} \leq 0. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Cuando se consideran problemas donde no intervienen los controles continuos  $u(\cdot)$  y las funciones  $q_j$  se suponen nulas con excepción de  $q_0 = q$ , entonces las ecuaciones (4.8), (4.9) y (4.10) resultan, efectuando las modificaciones obvias en la expresión de las funciones involucradas, respectivamente,

$$-\frac{\partial(V-q)}{\partial \tau}(\tau, x) + \frac{\partial(V-q)}{\partial x}(\tau, x)g(x) + f(x) - c(V-q)(\tau, x) \leq 0 \quad (4.11)$$

$$\sup_{z \in \mathbb{S}_x} \{k(z) + (V-q)(\tau, x+z)\} - (V-q)(\tau, x) \leq 0 \quad (4.12)$$

y

$$-\frac{\partial(V-q)}{\partial \tau}(\tau, x) + e^{-c\tau} \{f(y(T)) + \frac{\partial h}{\partial y}(y(T))g(y(T)) - ch(y(T))\} \leq 0 \quad (4.13)$$

Estas ecuaciones son válidas, de igual modo que las precedentes, en los puntos donde existan las derivadas que en ellas figuran. La forma de las funciones que hemos utilizado garantizan la diferenciabilidad en casi todo punto.

[4.12]

En las condiciones iniciales para las que no se producen cortes en la evolución óptima sin controles continuos y sin amortizaciones se tiene que  $V = V_0$  y, en consecuencia,

$$V(t, T, x) = q(t, T, x) + \int_t^T f(s, y(s))e^{-c(s-t)} ds + h(T, y(T))e^{-c(T-t)}$$

en este caso se satisfacen las ecuaciones (4.11), (4.12) y (4.13), la primera y la tercera idénticamente con igualdad entre ambos miembros. Este resultado se puede generalizar.

Ejemplo.

Consideramos el problema de determinación de la política óptima de saltos que debe aplicarse para manejar, durante un lapso determinado, un bosque con una especie distinguida (no existe otro control que no sea el impulsional). Para simplificar la notación omitimos efectuar explícita mención de la segunda variable (la primera representa la biomasa de una especie distinguida del bosque por su abundancia o valor intrínseco y la segunda el resto de la biomasa del bosque). La dimension es  $r = 1$ . La dinámica que rige el crecimiento de nuestro bosque es

$$\begin{cases} \dot{y} &= y(a - by) \\ y(0) &= x \end{cases}$$

y la funcional (autónoma) de beneficio

$$\begin{aligned} J(\tau, x, Z) &= (q_0)(x - x_0) + \frac{f_0}{c}(1 - e^{-cT}) \\ &+ \sum_{i=1}^n (D_0 - g_0 z_i) e^{-cs_i} \\ &+ h(y(T))e^{-cT} \end{aligned}$$

donde  $\tau = T - t = T$ , pues se toma  $t = 0$ .

[[4.13]]

En este ejemplo los valores de los parámetros y coeficientes son: la tasa de crecimiento libre  $a = 0.2059$ , el coeficiente de freno ecológico  $b = 0.00344$  (la capacidad receptiva del sistema  $k = \frac{a}{b} = 59.8$ ), y la condición inicial  $x \in [5; 59.8]$ ; datos con los que queda definida la dinámica. En la funcional, la duración  $\tau = 7$  (años), el costo inicial  $g_0 = -40$ , el umbral de estados  $x_0 = 5$ , el costo corriente  $f_0 = -15$ , la tasa de actualización  $c = 0.048$  (versión "continua" de la tasa discreta del 5%), el costo de corte fijo  $D_0 = -42$  y el beneficio neto de venta de la madera  $d_2 = 24.5$ . Con estos parámetros hemos obtenido que la política óptima es

Intervalo	Número óptimo de cortes	¿Corte al comienzo?
$5 \leq x \leq 19.5$	0	-
$19.5 \leq x \leq 31.5$	1	no
$31.5 \leq x \leq 59.8$	1	si

y en cada caso que deba efectuarse un salto, llevar a aproximadamente 15 el estado.

El método para hallar la política óptima descrita en la tabla precedente se basa en el uso de nuestro algoritmo de recorrido exhaustivo del problema discretizado equivalente.

En este capítulo nos interesa además relacionar lo dicho con el comportamiento de las ecuaciones (4.11)-(4.13). Para ello es conveniente denominar  $HJBa(\tau, x)$ ,  $HJBb(\tau, x)$ , y  $HJBc(\tau, x)$  respectivamente a los primeros miembros de estas ecuaciones.

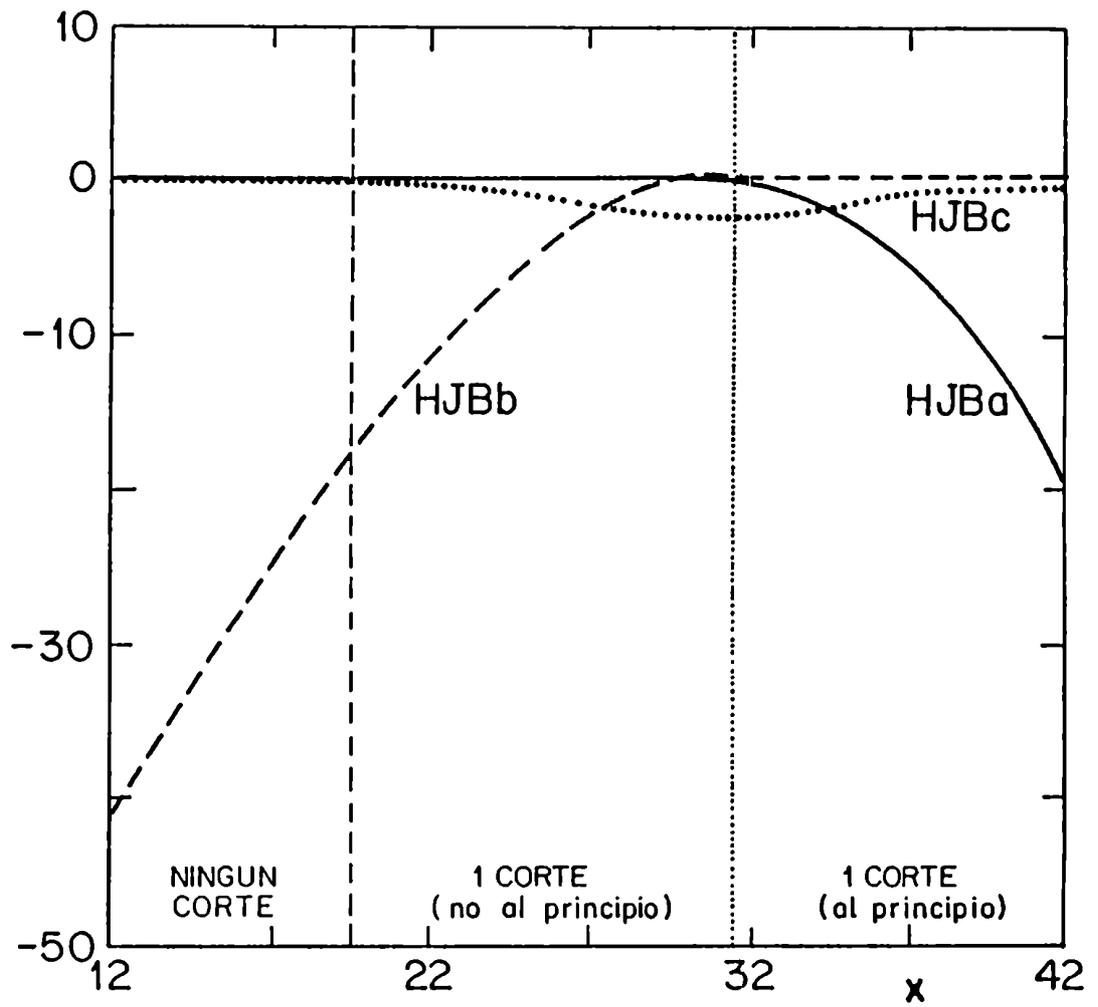


Figura 4.1. Comportamiento de los primeros miembros de las inecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman.

En la figura 4.1 representamos estas funciones  $HJB \cdot (7, x)$  para  $x \in [12; 42]$ ; en ella observamos los dominios en los que valen los signos igual y la propiedad de ortogonalidad. Existen pequeñas desviaciones debidas al origen numérico de los datos utilizados en el cálculo de las derivadas involucradas. Derivando directamente se prueba la validez de las ecuaciones  $HJBa = 0$  y  $HJBc = 0$  en el intervalo  $[5; 19.5]$ . Las porciones restantes de las curvas dependen de la determinación aproximada de  $s_{opt}$  y  $z_{opt}$ , el momento y el corte óptimos.

### EL CONJUNTO DE CONTINUACIÓN.

Escribimos la ecuación (4.3) en su forma simplificada

$$\sup_{z \in S_x} \{k(z) + V(t, x + z)\} - V(t, x) \leq 0$$

Por el resultado de ortogonalidad tenemos que vale el signo igual en ésta o en la ecuación diferencial parcial de Hamilton-Jacobi-Bellman. La interpretación (ver Bensoussan y Lions, 1975) es que vale el igual cuando debe efectuarse el impulso, y el menor estricto cuando todavía es óptimo dejar evolucionar el sistema sin saltar.

Para definir el conjunto de continuación  $C$  se define previamente la función  $MV(t, x)$  por

$$MV(t, x) = \sup_{z \in S_x} \{k(z) + V(t, x + z)\}$$

y entonces

$$C_c = \{(s, x) \in [t, T] \times O : V(t, x) > MV(t, x)\}$$

El resto del espacio de fases se denomina conjunto de salto  $C_s$ . Cuando el sistema evoluciona lo hace libremente hasta tocar su frontera, instante de paro en el cual el sistema debe efectuar el salto óptimo. Si la condición inicial pertenece al conjunto  $C_s$ , entonces es óptimo comenzar con un salto y luego continuar desde la posición de llegada.

La ecuación (4.3) y las nociones de conjuntos de continuación y de salto, asociadas al control impulsional, son nuevas respecto de la teoría clásica de control donde solamente se consideran controles continuos. En ellas se basan diferencias importantes, tanto desde el punto de vista teórico, como en lo que respecta a las aplicaciones y métodos prácticos de determinación de los controles óptimos. En el capítulo siguiente se utilizan en la construcción de los algoritmos para la determinación de los controles en los sistemas estudiados.

### CAMBIO DE VARIABLES BAJO DINÁMICA LOGÍSTICA.

Se remite al apéndice A3 para el enunciado de algunas de las propiedades del flujo logístico. Sin pérdida de generalidad respecto del caso  $r$ -dimensional ( $r > 2$ ) podemos establecer un nuevo sistema de coordenadas en el espacio de eventos correspondiente al modelo logístico bidimensional

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1(a - by_1 - cy_2) \\ \dot{y}_2 = y_2(p - ry_1 - qy_2) \end{cases}$$

donde todos los coeficientes son positivos y los estados se restringen al subconjunto abierto  $D$  del cuadrante  $\mathbb{R}_{>0}^2$  limitado por las variedades definidas por las expresiones

$$g_1 = a - by_1 - cy_2 = 0$$

y

$$g_2 = p - ry_1 - qy_2 = 0.$$

Como  $g_1$  y  $g_2$  son funciones que definen un campo vectorial tangente de clase  $C^\infty$  se tiene que el flujo local de  $g (= g_1, g_2)$  definido por las curvas características

$$\tilde{y}(s; 0, x_1, x_2) = y_{0x}(s)$$

[4.17]

es de clase  $C^\infty$ . Por ello podemos definir un sistema de coordenadas  $(\sigma, \xi_1, \xi_2)$  en  $(-\infty, \infty) \times D$  dado por

$$\begin{cases} \sigma(s, y_1, y_2) = s \\ \xi_1(s, y_1, y_2) = \tilde{y}_1(0; s, y_1, y_2) \\ \xi_2(s, y_1, y_2) = \tilde{y}_2(0; s, y_1, y_2) \end{cases}$$

donde  $(s, y_1, y_2) \in (-\infty, \infty) \times D$ , y  $\tilde{y}(0; s, y_1, y_2)$  es la trayectoria característica (única) que pasa por  $(s, y_1, y_2)$  evaluada en el origen.

Conocida la terna  $(\sigma, \xi_1, \xi_2)$  se obtiene su transformada  $(s, y_1, y_2)$  por

$$\begin{cases} s(\sigma, \xi_1, \xi_2) = \sigma \\ y_1(\sigma, \xi_1, \xi_2) = \tilde{y}_1(\sigma; 0, \xi_1, \xi_2) \\ y_2(\sigma, \xi_1, \xi_2) = \tilde{y}_2(\sigma; 0, \xi_1, \xi_2) \end{cases}$$

Así definimos la transformación  $T$  por  $(s, y_1, y_2) = T(\sigma, \xi_1, \xi_2)$ .

Las inecuaciones para la función de valor.

Aplicando este cambio de variables y definiendo  $u = V \circ T$  y  $\varphi = f \circ T$ , la inecuación diferencial de evolución de la programación dinámica queda

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}(\sigma, \xi_1, \xi_2) - cu(\sigma, \xi_1, \xi_2) + \varphi(\sigma, \xi_1, \xi_2) \leq 0$$

debido a que las variables  $\xi_i$  no cambian a lo largo de las trayectorias. No hay cambio, salvo la variable, de la inecuación derivada de efectuar un salto en el instante inicial.

En el caso  $r = 1$  que utilizamos en la ejemplificación, se puede expresar el cambio de variables en el espacio  $(-\infty, \infty) \times (0, k)$  así:

$$T(\sigma, \xi) = (s, y)$$

donde

$$\begin{cases} s = \sigma \\ y = \frac{k}{1 + \frac{k-\xi}{\xi} e^{-a\sigma}} \end{cases}$$

y la matriz Jacobiana de la transformación  $T$  es

$$JT = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ g\left(\frac{k\xi}{\xi + (k-\xi)e^{-a\sigma}}\right) & \frac{k^2 e^{-a\sigma}}{(\xi + (k-\xi)e^{-a\sigma})^2} \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es siempre positivo.

La inecuación de H-J-B queda

$$\frac{\partial u}{\partial \sigma}(\sigma, \xi) - cu(\sigma, \xi) + \varphi(\sigma, \xi) \leq 0$$

de modo que

$$u(\sigma, \xi) = C(\xi)e^{c\sigma}$$

es solución de la ecuación diferencial homogénea (con signo =).

Supongamos que  $\varphi(\sigma, \xi) = \varphi(\xi)$  es independiente de  $\sigma$ , lo que equivale a que el lagrangiano  $f$  sea constante a lo largo de cada trayectoria (ello no implica constancia en el dominio). Entonces

$$u(\sigma, \xi) = \frac{\varphi(\xi)}{c}$$

es solución particular, y se tiene la expresión

$$u(\sigma, \xi) = \frac{\varphi(\xi)}{c} (1 - e^{c(\sigma-\tau)}) + u(\tau, \xi)e^{c(\sigma-\tau)},$$

que permite calcular, para un cierto  $\xi$  dado, la función de valor de un tiempo  $\sigma$  conocida la de otro tiempo  $\tau$  en el caso en que  $f$  sea constante sobre cada trayectoria.

Cuando el lagrangiano  $f$  es más general en principio se lo deberá integrar en forma numérica. Sin embargo el caso que nos interesa de lagrangiano lineal (o cuadrático, y, en general, polinomial)

$$f(t, x) = f_0 + f_1 x$$

admite un tratamiento especial. Se tiene que  $\varphi = f \circ T$  ya no es independiente de la variable temporal y al integrar la ecuación diferencial se tiene

$$\varphi(\sigma, \xi) = f_0 + f_1 y(\sigma; 0, \xi),$$

y por lo tanto la expresión para el coeficiente  $C$  en la determinación de una solución particular es

$$C = \frac{f_0}{c} e^{-c\sigma} - f_1 k \int_0^\sigma \frac{e^{-cs}}{1 + \frac{k-\xi}{\xi} e^{-as}} ds$$

que puede integrarse en forma analítica cuando la tasa  $a$  es un múltiplo de la tasa  $c$ . Para el caso  $a = 4c$  tratado en el ejemplo monodimensional del capítulo previo se obtiene (ver Gradshtein y Ryzhik, 1980) la siguiente expresión para la fórmula de cambio de tiempo análoga a la precedente,

$$u(\sigma, \xi) = \frac{f_0}{c} (1 - e^{c(\sigma-\tau)}) + \frac{f_1}{c} \frac{k}{4\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{\xi}{(k-\xi)}} (\Psi(\sigma) - \Psi(\tau) e^{c(\sigma-\tau)}) + u(\tau, \xi) e^{c(\sigma-\tau)}$$

donde

$$\Psi(s) = \log \frac{\sqrt{k-\xi} e^{-2cs} + \sqrt[4]{4\xi(k-\xi)} e^{-cs} + \sqrt{\xi}}{\sqrt{k-\xi} e^{-2cs} - \sqrt[4]{4\xi(k-\xi)} e^{-cs} + \sqrt{\xi}} + 2 \arctan \frac{\sqrt[4]{4\xi(k-\xi)} e^{-cs}}{\sqrt{\xi} - \sqrt{k-\xi} e^{-2cs}}$$

## 5. ALGORITMOS VARIACIONALES.

En el capítulo 3 se han desarrollado algoritmos de tipo combinatorio que permiten obtener el control óptimo impulsional para el manejo de sistemas silviculturales en sus versiones continua y discretizada. En la primera parte de este capítulo se compara el enfoque de esta tesis con el de Menaldi (1982b). En la segunda se desarrollan nuevos algoritmos para determinar el control impulsional determinista óptimo para los sistemas definidos en los capítulos precedentes.

### EL CASO DE HORIZONTE INFINITO.

En primer término debe notarse que el conjunto  $O \in \mathbb{R}^r$  donde evoluciona el sistema controlado, es, en el caso tratado en esta tesis, un subconjunto de

$$\{x \in \mathbb{R}_{>0}^r : x_i > x_{0i} \text{ con } i = 1, \dots, r\},$$

donde  $x_{0i}$  es el umbral ecológico de la especie  $i$  (ver capítulos 2 y 3, y apéndice A2).

Asimismo la frontera del dominio  $O$  definido en el capítulo 2 está formada por hiperplanos umbral (paralelos a los planos coordenados) y las curvas características del sistema dinámico definido por la función  $g$ , o bien las variedades singulares donde se anulan las componentes de la función  $g$  (ver figura 5.1); razón por la cual cualquier trayectoria del sistema que parte del interior del conjunto  $O$  se mantiene en él.

En la figura 5.1 se representa el dominio  $O$  en el caso  $r = 2$  para

$$g(x_1, x_2) = (x_1(a - bx_1 - cx_2), x_2(p - rx_1 - qx_2)),$$

[5.1]

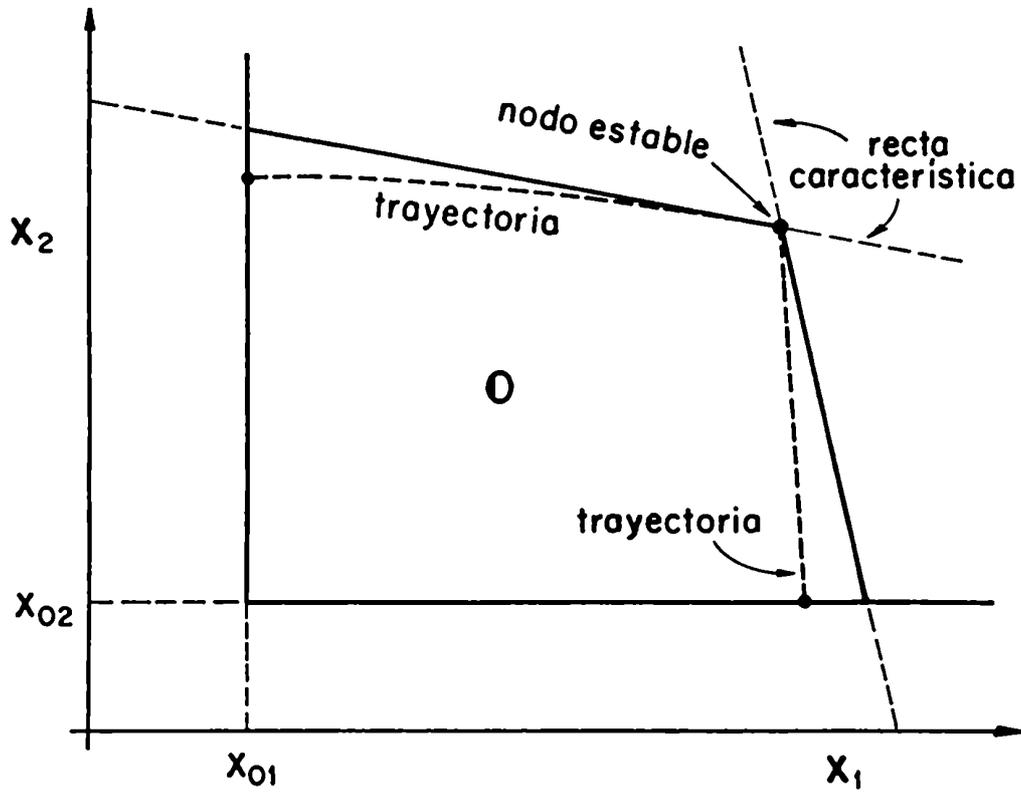


Figura 5-1: El dominio  $O \subset \mathbb{R}^2$ .

(ver apéndice A3). Se deduce inmediatamente que los valores de los diversos tiempos  $\tau$  de salida de las trayectorias del conjunto  $\bar{O}$  resultan  $\tau = \infty$  y, por lo tanto, en todos los casos los resultados de Menaldi (1982b) aplicados a la evolución de sistemas naturales ecológicos se refieren al problema de control impulsional con horizonte infinito y sin controles clásicos.

Las ecuaciones correspondientes se obtienen a partir de las ecuaciones (4.11) y

(4.12)

$$\frac{\partial(V - q)}{\partial x}(x)g(x) + f(x) - c(V - q)(x) \leq 0 \quad (5.1)$$

y

$$\sup_{z \in S_x} \{k(z) + (V - q)(x + z)\} - (V - q)(x) \leq 0 \quad (5.2)$$

Debe recordarse que el producto de los primeros miembros de estas ecuaciones es nulo en todo el dominio  $O$ .

La forma de la función de evaluación del efecto del impulso es  $k(z) = D_0 + K(z)$  con  $D_0 < 0$  el costo fijo, y el término  $K(z)$  que es el beneficio neto asociado al salto  $z$ . Las hipótesis sobre  $k$  deben ser tales que esté impedida la existencia de una sucesión infinita de impulsos en un intervalo finito de la variable de evolución. En este trabajo, en que por ejemplo  $K(z) = -d_2z$ , debe notarse que razones físicas impiden que ello se produzca puesto que, para que  $k(z)$  alcance valores positivos, o, mas precisamente aún, supere una constante  $k_0$  tal que  $D_0 < k_0 < 0$  es necesario que el valor de  $z$  sea finito y suficientemente grande en valor absoluto, lo que disminuye en esa proporción el nivel de las variables de estado involucradas, necesitándose un tiempo finito para su recuperación hasta alcanzar nuevamente un nivel que admita la aplicación de un nuevo salto.

Tiempo de detención.

Como se asocia con la solución del caso impulsional la determinación de una sucesión de tiempos de detención, se considerará brevemente este problema. Se considera para ello la dinámica

$$\dot{y} = g(s, y)$$

con la condición inicial  $y(t) = x$  y con las hipótesis habituales de regularidad para  $g$ , que ahora se extienden también a la variable de evolución  $s$ . La variable de control es  $\sigma$ , el instante de detención del sistema; se elige  $\tilde{\sigma} \geq t$  para maximizar la funcional

$$J(t, x, \sigma) = \int_t^\sigma f(s, y(s))e^{-c(s-t)} ds + h(\sigma, y(\sigma))e^{-c(\sigma-t)}$$

Como antes

$$V(t, x) = \sup_{\sigma \geq t} J(t, x, \sigma)$$

Si el tiempo de detención  $\tilde{\sigma}$  es finito entonces se define

$$\hat{\sigma}(t, x) = \inf\{\sigma : \sigma \geq t \text{ y } V(\sigma, y(\sigma)) = h(\sigma, y(\sigma))\}$$

Se puede demostrar que  $\hat{\sigma}$  es el

$$\inf\{\sigma : V(t, x) = J(t, x, \sigma)\} = \hat{\sigma},$$

que fue supuesto finito.

Para ello, sea  $\sigma^*$  tal que

$$J(t, x, \sigma^*) = \sup_{\sigma \geq t} J(t, x, \sigma) = V(t, x)$$

que existe por hipótesis.

Sea  $\omega > \sigma^*$ , entonces

$$J(t, x, \omega) = J(t, x, \sigma^*) - h(\sigma^*, y(\sigma^*))e^{-c(\sigma^*-t)} + \int_{\sigma^*}^{\omega} f(s, y(s))e^{-c(s-t)} ds + h(\omega, y(\omega))e^{-c(\omega-t)}$$

Por definición de  $\sigma^*$  se tiene

$$J(t, x, \omega) \leq J(t, x, \sigma^*),$$

entonces  $\forall \omega \geq \sigma^*$

$$\int_{\sigma^*}^{\omega} f(s, y(s))e^{-c(s-t)} ds \leq h(\sigma^*, y(\sigma^*))e^{-c(\sigma^*-t)} - h(\omega, y(\omega))e^{-c(\omega-t)}$$

pero

$$V(\sigma^*, y(\sigma^*)) = \sup_{\sigma \geq \sigma^*} J(\sigma^*, y(\sigma^*), \sigma) = J(\sigma^*, y(\sigma^*), \omega)$$

para algún  $\omega \geq \sigma^*$ , sea este  $\omega^*$  (puede ser eventualmente infinito), entonces

$$\begin{aligned} V(\sigma^*, y(\sigma^*)) &= J(\sigma^*, y(\sigma^*), \omega^*) \\ &= \int_{\sigma^*}^{\omega^*} f(s, y(s))e^{-c(s-\sigma^*)} ds + h(\omega^*, y(\omega^*))e^{-c(\omega^*-\sigma^*)} \\ &= e^{-c(\sigma^*-t)} \left( \int_{\sigma^*}^{\omega^*} f(s, y(s))e^{-c(s-t)} ds + h(\omega^*, y(\omega^*))e^{-c(\omega^*-t)} \right) \\ &\leq e^{-c(\sigma^*-t)} h(\sigma^*, y(\sigma^*))e^{-c(\sigma^*-t)} \\ &= h(\sigma^*, y(\sigma^*)) \\ &= J(\sigma^*, y(\sigma^*), \sigma^*) \end{aligned}$$

lo que implica que

$$V(\sigma^*, y(\sigma^*)) = h(\sigma^*, y(\sigma^*))$$

Se ha probado de esta forma que, fijados  $t$  y  $x$ ,

$$\{\sigma : V(t, x) = J(t, x, \sigma)\} \subset \{\sigma : V(\sigma, y(\sigma)) = h(\sigma, y(\sigma))\}$$

con lo que  $\bar{\sigma} \geq \hat{\sigma}$ . Supongase que  $\hat{\sigma} < \bar{\sigma}$ , como

$$J(t, x, \hat{\sigma}) < J(t, x, \bar{\sigma})$$

pues  $\bar{\sigma}$  es el menor  $\sigma$  que realiza el supremo, se tiene que

$$\int_{\hat{\sigma}}^{\bar{\sigma}} f(s, y(s)) e^{-c(s-t)} ds > h(\hat{\sigma}, y(\hat{\sigma})) e^{-c(\hat{\sigma}-t)} - h(\bar{\sigma}, y(\bar{\sigma})) e^{-c(\bar{\sigma}-t)}$$

pero como

$$V(\hat{\sigma}, y(\hat{\sigma})) = h(\hat{\sigma}, y(\hat{\sigma}))$$

se tiene que

$$V(\hat{\sigma}, y(\hat{\sigma})) e^{-c(\hat{\sigma}-t)} < \int_{\hat{\sigma}}^{\bar{\sigma}} f(s, y(s)) e^{-c(s-t)} ds + h(\bar{\sigma}, y(\bar{\sigma})) e^{-c(\bar{\sigma}-t)}$$

o bien

$$V(\hat{\sigma}, y(\hat{\sigma})) < J(\hat{\sigma}, y(\hat{\sigma}), \bar{\sigma})$$

lo que es una contradicción originada en suponer que  $\hat{\sigma} < \bar{\sigma}$ , de este modo  $\hat{\sigma} = \bar{\sigma}$  y se tiene probada la afirmación.

Obsérvese que la obtención del tiempo final o tiempo de detención se basa en el criterio de partir el dominio  $O$  entre dos zonas, una con  $V > h$  y la otra con  $V = h$ , y dejar evolucionar el sistema siendo el momento de detención el primer instante en que el estado cambia de la zona  $\{V > h\}$  a la otra. Si se comenzase en la zona  $\{V = h\}$  entonces el tiempo de detención resulta ser el instante inicial.

Varios artículos de Menaldi (e.g. 1980a, 1982a), y de Menaldi y Rofman (1974) ilustran el problema de tiempo de detención. En ellos se estudian los casos de dominios acotados y no acotados utilizando formulaciones variacionales. Se caracteriza el costo óptimo de un problema de tiempo de detención como la solución máxima de una desigualdad variacional de primer orden (caso determinista) o de segundo orden (caso estocástico). Se establecen allí algunas propiedades de continuidad del costo óptimo.

Control impulsional.

El aspecto que nos interesa destacar es la formulación integral de la ecuación H-J-B (5.1) para tiempo final sin actualización y con horizonte infinito (Menaldi, 1982a):

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x)g(x) + f(x) - cu(x) \leq 0 \quad \text{si} \quad u(x) \leq \int_0^t f(y(s))ds + u(y(t)), \quad \forall t \geq 0$$

la que sumada a la observación precedente respecto de los conjuntos de continuación y de detención configuran la base para los algoritmos que se desarrollan en este capítulo.

Considérese ahora la función  $k(z) = D_0 + K(z)$ , continua, tal que  $k(z) \geq D_0$ , pero aquí con  $D_0 < 0$ .

Se define el operador  $M$  por

$$M\psi(x) = \sup_{z \in S_x} \{k(z) + \psi(x+z)\}$$

donde

$$S_x = \{z \in S : x+z \in \bar{O}\}$$

Con estas definiciones se prueba, siguiendo a Menaldi (1982b), que si  $\psi$  es continua en  $\bar{O}$ , entonces  $M\psi$  también lo es en  $\bar{O}$ . Para demostrar esto se define una función  $\xi : \bar{O} \times S \rightarrow S$  continua y uniformemente continua en  $x \in \bar{O}$  de la siguiente forma (ver figura 5.2):  $\xi(x, z)$  es la proyección ortogonal sobre el convexo cerrado  $\bar{O} \cap (S + x)$ , donde  $S + x$  se interpreta en el sentido conjuntista. Resulta así que se tiene  $x + \xi(x, z) \in \bar{O}$ ,  $\forall x \in \bar{O}$ ,  $\forall z \in S$ , y  $\xi(x, z) = z$  si  $x + z \in \bar{O}$ .

La compacidad del conjunto  $S_x = \bar{O} \cap (S + x)$  garantiza la existencia de una función (se mantiene la hipótesis de continuidad de  $\psi$ )

$$\hat{z} : \bar{O} \rightarrow S$$

[5.7]

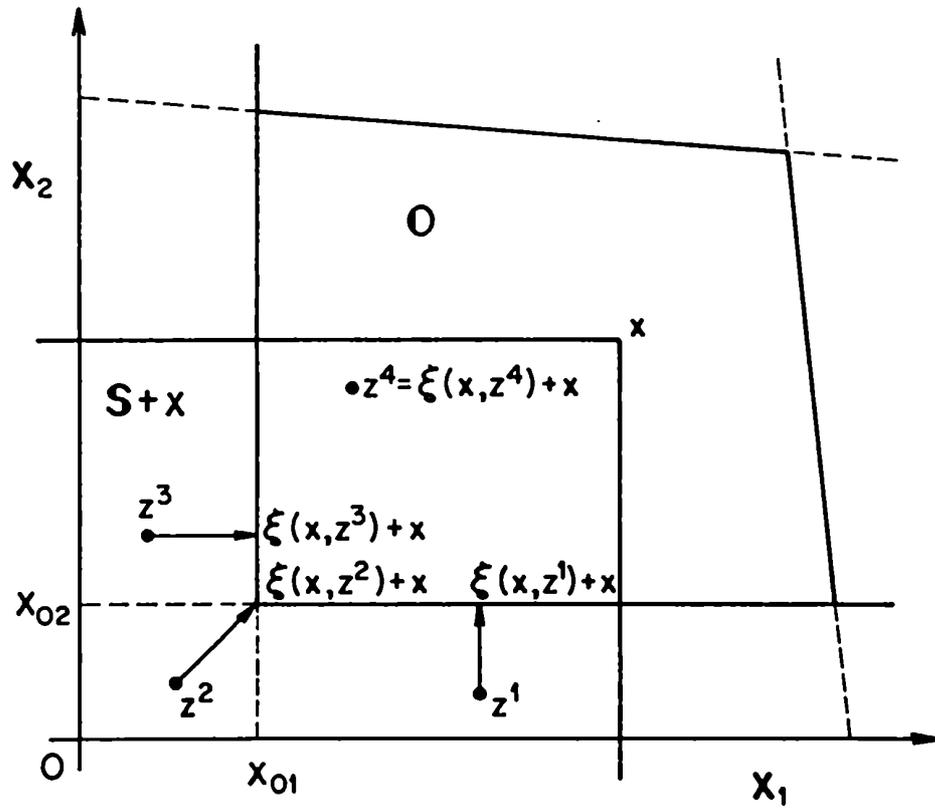


Figura 5-2: El conjunto  $\bar{O} \cap (S+x)$ , la función  $\xi$ , y la imagen de los puntos  $(x, z_j)$  con  $j = 1, 2, 3, 4$ .

tal que

$$M\psi(x) = k(\hat{z}(x)) + \psi(x + \hat{z}(x)) \quad \forall x \in \bar{O}.$$

La función de valor  $u = V - q$  es solución de las ecuaciones (5.1) y (5.2). De la primera se utilizará su forma integral. La ecuación (5.1) vale en  $O$  si, y solo si, se tiene

$$u(x) \geq \int_t^s f(y(r))e^{-c(r-t)} dr + u(y(s))e^{-c(s-t)} \quad \forall s \geq t$$

Aparece naturalmente una sucesión de problemas del tipo de tiempo de detención por recurrencia:

se parte de  $u^0(x)$  que satisface

$$u^0(x) \geq \int_t^s f(y(r))e^{-c(r-t)} dr + u^0(y(s))e^{-c(s-t)} \quad \forall s \geq t \quad \forall x \in \bar{O},$$

y, obtenido  $u^{n-1}(x)$  se determina  $u^n(x)$  como la solución mínima del problema

$$\begin{cases} u^n(x) \geq \int_t^s f(y(r))e^{-c(r-t)} dr + u^n(y(s))e^{-c(s-t)} & \forall s \geq t \quad \forall x \in \bar{O} \\ u^n(x) \geq M u^{n-1}(x) \end{cases}$$

Se demuestra que

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u^n(x)$$

es la solución del problema, y que si  $f$  es continua, entonces  $u$  resulta continua.

En su Observación 2.1 (Menaldi, 1982b,p.232) afirma que las  $u^i$  se pueden definir como ciertos beneficios óptimos, sin embargo se tiene:

$$v_0 = \int_t^\infty f(y(s))e^{-c(s-t)} ds$$

$u^0 = v_0$  y dados  $v_n$  y  $u^n = \sup\{u^{n-1}, v_n\}$  se obtiene  $v_{n+1}$  mediante:

$$v_{n+1} = \sup_{s \geq t} \left( \int_t^s f(y(r))e^{-c(r-t)} dr + M v_n(y(s))e^{-c(s-t)} \right)$$

[5.9]

y

$$v_{n+1} = \sup\{u^n, v_{n+1}\}$$

De este modo cada  $u^n(x)$  da el mejor resultado de efectuar hasta  $n$  saltos.

El régimen  $(\zeta, Z)$ .

En el caso del ejemplo del capítulo 3 de un bosque con una especie distinguida, cuyo crecimiento está regido por el modelo logístico, extendido al caso de horizonte infinito; y siendo el problema autónomo, pues la ecuación diferencial ordinaria que rige la dinámica lo es y el lagrangiano  $f$  es la constante  $f_0$  (lo mismo vale para lagrangiano lineal); entonces es razonable pensar que luego de un lapso de transición se llegue a un régimen del tipo  $(\zeta, Z)$ , clásico en Investigación Operativa. La función de valor que se obtiene con el algoritmo esbozado precedentemente coincide con la que se obtiene resolviendo el problema  $(\zeta, Z)$  (cuando se alcanza el nivel  $Z$  se aplica un salto hasta  $\zeta$ ).

Para determinar a  $\zeta$  y  $Z$  se supone provisoriamente que  $(0, \zeta)$  es la condición inicial, y entonces existirá  $\sigma > 0$  tal que

$$Z = y_{0\zeta}(\sigma),$$

de este modo hay que maximizar

$$J(\sigma, \zeta) = \frac{f_0}{c} + \sum_{j=1}^{\infty} (D_0 + d_2(Z - \zeta))e^{-c\sigma j}$$

es decir

$$J(\sigma, \zeta) = \frac{f_0}{c} + \left( D_0 + d_2 \left( \frac{k}{1 + \frac{k-\zeta}{\zeta} e^{-a\sigma}} - \zeta \right) \right) \frac{1}{e^{c\sigma} - 1}$$

[5.10]

Se deriva  $J$  respecto de  $\sigma$  y  $\zeta$  y se consigue por un lado

$$\zeta = \varphi_1(\sigma) = k \frac{e^{-(a/2)\sigma} - e^{-a\sigma}}{1 - e^{-a\sigma}},$$

de modo que

$$\frac{k}{\zeta} - 1 = \varphi_2(\sigma) = \frac{1 - e^{-(a/2)\sigma}}{e^{-(a/2)\sigma} - e^{-a\sigma}}$$

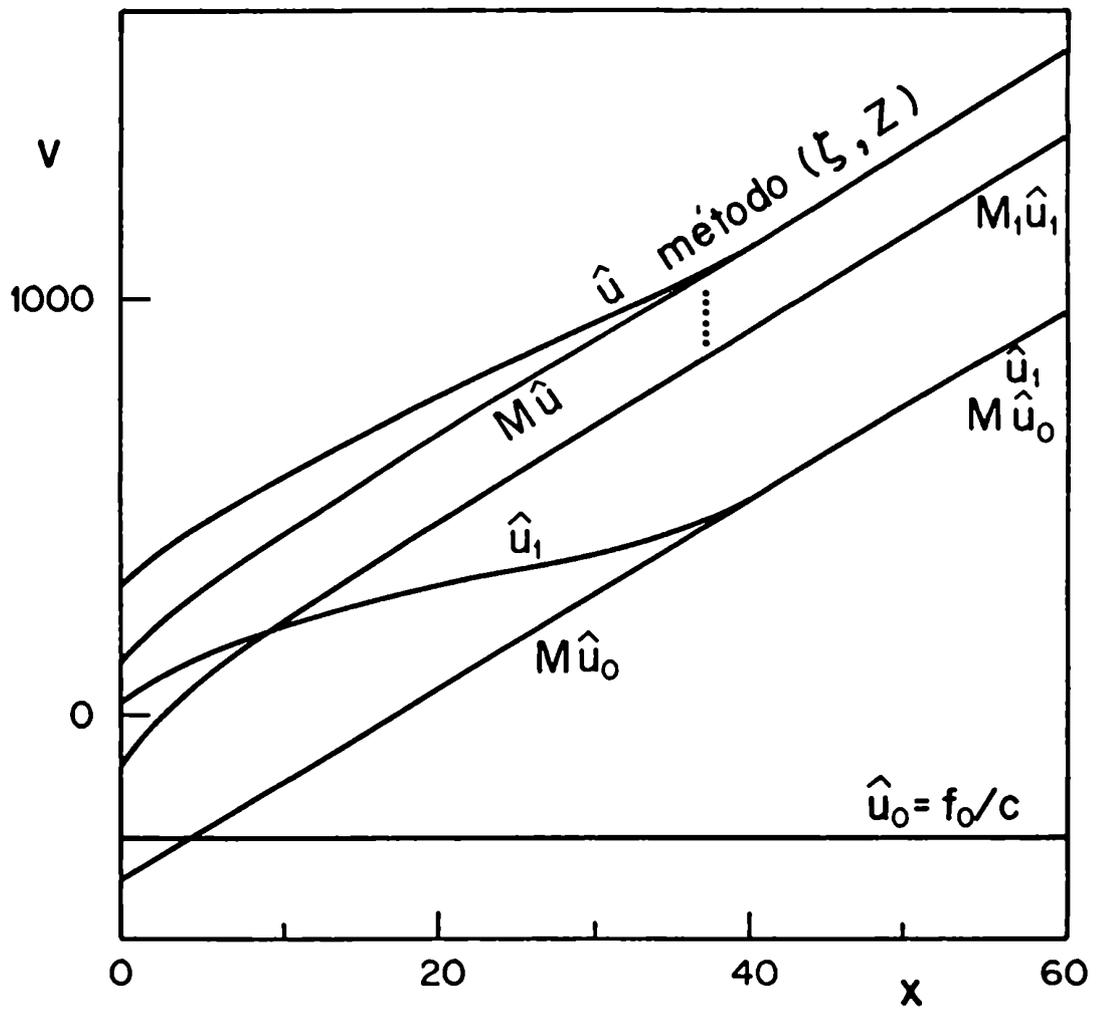
y por otro

$$d_2 g \left( \frac{k}{1 + \varphi_2(\sigma)e^{-a\sigma}} \right) = \frac{ce^{c\sigma}}{e^{c\sigma} - 1} \left( D_0 + d_2 \left( \frac{k}{1 + \varphi_2(\sigma)e^{-a\sigma}} - \varphi_1(\sigma) \right) \right)$$

de donde se obtiene  $\sigma$ , luego se obtiene  $\zeta = \varphi_1(\sigma)$ , y así  $Z = y_{0\zeta}(\sigma)$  y el valor máximo de  $J$ .

El lapso de transición permite alcanzar la posición  $(s, \zeta)$  desde la condición inicial  $(0, x)$ . Cuando  $x$  es menor que  $\zeta$  simplemente se deja evolucionar el sistema hasta el tiempo en que el estado alcanza ese valor, y sólo resta llevar a valor neto presente a  $J$ . Si, en cambio,  $x$  es intermedio entre  $\zeta$  y  $Z$ , se deja correr hasta este último y se salta a  $\zeta$  de manera de llegar al punto de partida común. Además de actualizar, debe sumarse el efecto de la función  $k(z)$ . Si la condición inicial supera el nivel  $Z$ , se salta en el instante inicial a  $\zeta$  y se evalúa en consecuencia.

En la figura 5.3 se representa la sucesión de funciones de valor que se obtiene aplicando la metodología recursiva enunciada previamente al ejemplo citado. La función  $\hat{u}$  límite de la sucesión de la que se representa los primeros miembros es el resultado de resolver el presente caso que se denomina  $(\zeta, Z)$ . Debe notarse que el valor de  $Z$  está cercano a  $x = 40$ , y se salta a una posición cercana al origen de coordenadas. Con este ejemplo se finaliza la consideración del caso de horizonte infinito.



**Figura 5.3:** Funciones de valor  $u = V - q$  del problema de horizonte infinito correspondientes al ejemplo monodimensional del capítulo 3 (nótese la coincidencia a menos de la función  $q$ . En el anterior ejemplo:  $T = 8$  años).

## NUEVOS ALGORITMOS.

El algoritmo básico que se utilizará para determinar el control de un sistema natural se basa en las siguientes consideraciones. Se retoma la notación  $V_i$  para la función de valor de exactamente  $i$  saltos, y se utilizará  $u_i$  para las definidas en la página 5-9.

El interés se centra en el análisis de los problemas con horizonte finito  $T$  que se supondrá fijo en lo que sigue. Por brevedad se omitirá de las expresiones en todos los casos en que no sea necesario que figure explícitamente. Es interesante observar que, pese a la autonomía del sistema diferencial y del lagrangiano, no es posible considerar estacionario el problema. La causa de ello es que si el horizonte es finito, luego de haber evolucionado un cierto lapso el horizonte desde la nueva posición es distinto y, en consecuencia, debe tenerse en cuenta la dependencia temporal de las funciones de valor pues el beneficio en una trayectoria 'a posteriori' de haber evolucionado un intervalo, corresponde a un tiempo posterior al inicial.

La función  $V_0$  se obtiene calculando  $J_0$ . Conocido  $V_0$  se obtiene  $MV_0$ , que representa la valuación de la mejor forma de efectuar un salto en el momento inicial. El óptimo determina el lugar a donde se salta para realizar  $MV_0$ .

Con  $MV_0$  se puede calcular  $V_1$  como el

$$\sup_{s \in [t, T]} \left( \int_t^s f(r, y(r)) e^{-c(r-t)} dr + MV_0(s, y(s)) e^{-c(s-t)} \right)$$

es decir que representa la mejor forma de evolucionar un cierto lapso, y efectuar el mejor salto al final del mismo. Se denota por  $s^*$ , el tiempo en que el máximo se alcanza (eventualmente  $s^* = t$  y el mejor instante de salto es al principio). Nótese que  $s^*$  es el primer instante en que  $V_1 = MV_0$  (ver el resultado de tiempo de finalización óptimo al comienzo de este capítulo).

Se calcula la función  $MV_1$ , que nos da la mejor forma de saltar en el instante inicial para que, partiendo del sitio a donde se salta, y luego del período de recuperación, se deba saltar por segunda vez (lo que es evaluado por  $V_1(t, x + z)$ ). De modo que

$$V_2 = \sup_{s \in [t, T]} \left( \int_t^s f(r, y(r)) e^{-c(r-t)} dr + MV_1(s, y(s)) e^{-c(s-t)} \right)$$

expresa la mejor forma de evolucionar hasta el tiempo que realice el máximo, y saltar en ese instante, para luego saltar por segunda vez (en total dos saltos). Siguiendo este procedimiento de acuerdo con la definición inductiva ya establecida se obtiene la sucesión  $\{V_i\}$ , que permite determinar a su vez la sucesión  $\{u_i\}$  coincidente con la establecida en Menaldi (1982b).

En el capítulo 3 se ha podido determinar que la sucesión de funciones de valor es finita y que el número de miembros es, en general, pequeño (depende de  $T$  y de que se cumplan ciertas acotaciones con los parámetros del modelo). Como la  $\{u_i\}$  es una sucesión creciente, resulta que existe un índice  $j$  tal que  $V = u_j$ . Es posible afirmar que, cuando el horizonte  $T$  es finito, la garantía de un número finito y pequeño de saltos reside en el valor (negativo) del parámetro  $D_0$ ; y además en las características físicas del sistema modelado, pues no es factible extraer demasiadas veces de una variable de estado cuyo crecimiento en el sistema tiene velocidad finita.

En lo que sigue se considera el problema de control impulsional óptimo determinista enunciado en el capítulo 2, con las siguientes restricciones:

- (1) la dinámica es logística,
- (2) las amortizaciones  $q$  son nulas,
- (3) el lagrangiano es constante ( $f_0$ ),

(4) la función de salto  $k$  es de la forma

$$k(z) = D_0 + K(z)$$

con  $K(z) = -d_2 z$ ,

(5) la función final  $h$  es de la forma

$$d_2(y(T) - x_0)$$

con la misma constante que en  $K(z)$  (cuando la dimensión es  $r > 1$  se tiene una matriz  $d_2$ ).

En las aplicaciones a sistemas naturales ecológicos el crecimiento de tipo logístico modela adecuadamente bien la dinámica del crecimiento de las biomásas en interacción. En caso de considerarse otros modelos de crecimiento sólo se deberán cambiar las rutinas de integración de la dinámica, que en general debe efectuarse en forma numérica (aún el modelo logístico no admite solución analítica en dimensión 2 o superior).

Es posible considerar lagrangianos más generales que los constantes. En el capítulo 4 se ha visto que cuando el lagrangiano  $f$  es lineal en los estados —y, en consecuencia, se puede extender al caso polinomial—, y se tiene una relación entera entre las tasas de crecimiento e interés, puede tratarse de igual modo que la dinámica. En tal caso es posible integrar en forma directa y utilizar las expresiones obtenidas en las rutinas de evaluación del resultado, las que operan sin dificultad.

Respecto de la linealidad de la función de salto  $K$ , cabe destacar que en algunos ejemplos (apéndice A2) ha sido considerada una  $K$  más general. La razón de conservarla lineal es que de este modo se simplifican los primeros pasos de los algoritmos que se diseñan en este capítulo y se hace más clara la exposición. Consideraciones análogas se aplican al caso de la función terminal  $h$ .

Es importante aclarar que el modelo así restringido es lo suficientemente versátil como para permitir tratar un gran número de problemas reales, y que las restricciones efectuadas, que permiten simplificar algunos detalles, no son esenciales a la aplicabilidad de los algoritmos en la forma que son enunciados. Existen sí rutinas específicas del caso  $r = 1$ , que cuando se apliquen en lo que sigue se mencionarán explícitamente.

El problema con umbral nulo.

En primer término se tratará el caso en que el umbral  $x_0$  es muy pequeño y no supera el nivel mínimo al cual conducen los saltos óptimos. Sin embargo el modelo desarrollado en esta tesis incluye al umbral como elemento esencial, y por ello más adelante se expresarán las modificaciones al algoritmo para tenerlo en cuenta.

La función de valor del proceso sin cortes es, en consecuencia (se supone  $T$  fijo):

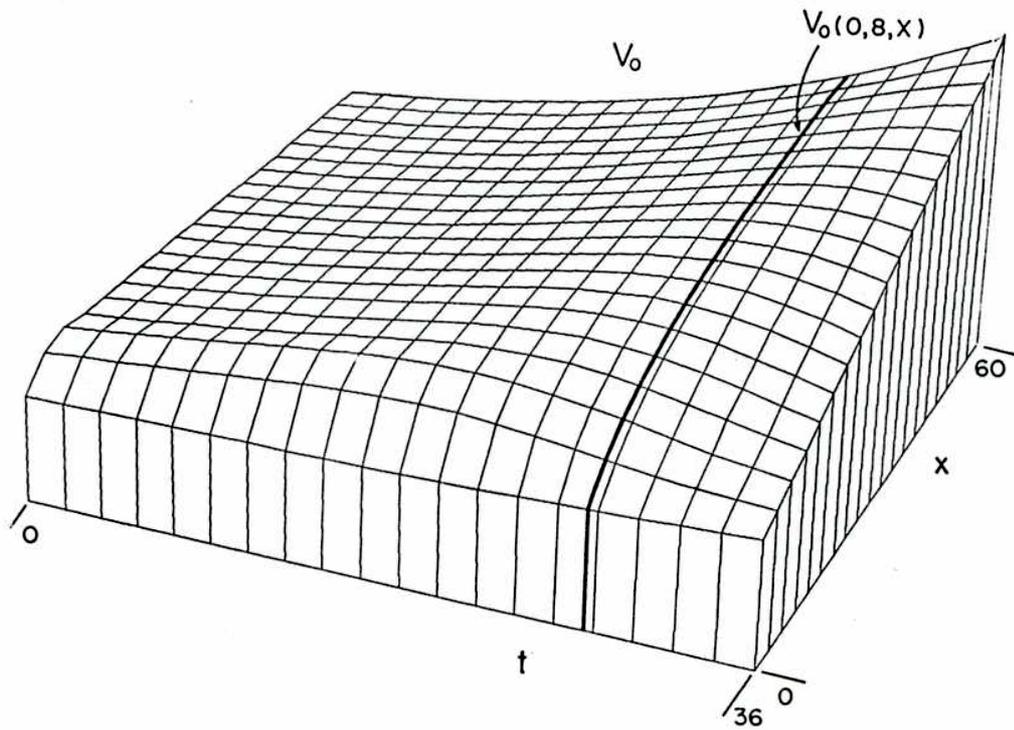
$$V_0(t, x) = \frac{f_0}{c}(1 - e^{-c(T-t)}) + d_2(y_{tx}(T) - x_0)e^{-c(T-t)} \quad (5.3)$$

En el caso general debe integrarse numéricamente tanto el lagrangiano como la dinámica, y para  $V_0$  (y las demás funciones de valor) se construyen tablas precalculadas sobre las que se interpola en forma convexa. Esto reduce mucho el tiempo de computación, en especial cuando se requieren repetidamente estas evaluaciones. Las ventajas de este procedimiento disminuyen en problemas con parámetros cambiantes.

En la figura 5.4 se representa la función de valor  $V_0(t, x)$  correspondiente al ejemplo monodimensional del capítulo 3. En ella se resalta la función  $V_0(0, 8, x)$ .

Para calcular  $MV_0(t, x)$  se debe hallar el  $z$  admisible que realiza el máximo de la expresión

$$\varphi(z) = V_0(t, x + z) + D_0 - d_2z \quad (5.4)$$



**Figura 5.4:** La función de valor  $V_0(t, 36, x)$  correspondiente al ejemplo monodimensional del capítulo 3.

Nótese que sustituyendo  $x+z$  por una variable auxiliar  $\xi$  se debe optimizar la expresión

$$V_0(t, \xi) + D_0 - d_2\xi + d_2x$$

en la que la condición inicial  $x$  figura en forma lineal en un único término. De este modo la localización del máximo no depende de  $x$ , es decir que  $x+z$  resulta independiente de  $x$ , y entonces esta función será llamada  $\zeta_1(t)$ . Lo anterior se aplica asimismo al caso de la determinación de  $MV_i(t, x)$  con  $i > 1$ , y en forma análoga se definirán las  $\zeta_i(t)$ . Estas funciones expresan el estado al que se salta en forma óptima desde cualquier otro estado mayor en el tiempo  $t$  en el caso en que se realicen después exactamente  $i - 1$  saltos.

Se deriva la función  $\varphi(z)$  y se iguala a cero para obtener el extremo:

$$\frac{\partial V_0}{\partial x}(t, \zeta_1(t)) = d_2 \quad (5.5)$$

Cuando el salto óptimo resulta interior al conjunto admisible, esta expresión permitirá sustituir las apariciones de la derivada parcial de la función  $V_0$ .

En el caso logístico de dimensión  $r = 1$  se puede calcular la derivada pues se conoce la solución explícita de la ecuación diferencial que rige la dinámica (debe derivarse respecto de  $x$  la función  $y_{t, x+z}(T)$ ), y entonces se tiene:

$$\zeta_1(t) = k \frac{e^{\frac{a-c}{2}(T-t)} - 1}{e^{a(T-t)} - 1} \quad (5.6)$$

En este caso la derivada segunda de  $\varphi(z)$  es menor que cero de modo que  $\varphi$  es cóncava y solo puede presentar un máximo en el conjunto admisible (aquí un intervalo).

**Observación 5.1:** Cuando  $K(z)$  y  $h(t, x)$  son diferenciables se obtiene el  $\tilde{z}$  correspondiente al máximo (que existe por la compacidad) mediante una recursión:

$$x + \tilde{z} = k \frac{\psi(\tilde{z}) e^{\frac{a-c}{2}(T-t)} - 1}{e^{a(T-t)} - 1}$$

[[5.18]

donde

$$\psi(z) = \sqrt{\frac{\partial h / \partial x(T, y_{t, x+z}(T))}{-dK/dz(z)}}$$

Cuando  $\psi$  es independiente de  $z$  (y de  $x$ ) la recursión no es necesaria, y se tiene que el salto es admisible, i.e.  $\zeta_1(t) \in (0, k)$ , si

$$e^{\frac{\alpha-c}{2}(T-t)} \leq \psi \leq e^{\frac{\alpha+c}{2}(T-t)}.$$

Cuando  $K(z) = -d_2 z$  y  $h = d_2(y(T) - x_0)$  se tiene  $\psi = 1$ . □

**Observación 5.2:** En algunos casos se tiene una restricción física adicional:  $\tilde{z} \leq 0$ . Es decir que si  $x \leq \zeta_1(t)$ , se debe tomar en tales casos  $\tilde{z} = 0$ , el único admisible (no se salta al principio). □

La expresión de  $MV_0(t, x)$  resulta así:

$$MV_0(t, x) = \begin{cases} V_0(t, \zeta_1(t)) + D_0 - d_2(\zeta_1(t) - x) & \text{si } x > \zeta_1(t) \\ V_0(t, x) + D_0 & \text{si } x \leq \zeta_1(t) \end{cases} \quad (5.7)$$

**Observación 5.3:** Como  $D_0 < 0$ , se deduce que si  $x \leq \zeta_1(t)$  entonces no se salta al principio. De modo que  $b_1(t)$ , el punto de frontera del conjunto de continuación para el caso en que existe exactamente un salto, resulta mayor que  $\zeta_1(t)$ . □

**Observación 5.4:** Para los  $\zeta_i$ , con  $i > 1$  y para los correspondientes  $MV_i$  se tienen expresiones análogas a las del caso con subíndice 0 aunque ya no una fórmula explícita. Uno de los objetivos parciales de los algoritmos de este capítulo es hallar esas funciones  $\zeta_i$  y estudiar su relación con el umbral  $x_0$ . □

Se desea también hallar expresiones para cada una de las funciones  $b_{j+1}(t)$ , frontera del conjunto de continuación asociado a exactamente  $j + 1$  saltos, para cada  $j \geq 0$ . Se tiene:

**Observación 5.5:** Las condiciones que definen las  $b_{j+1}(t)$  son, para los  $t$  donde las derivadas involucradas existan:

$$\frac{d}{ds}\Phi_{j+1}(s)|_{s=t} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2}{ds^2}\Phi_{j+1}(s)|_{s=t} < 0$$

donde

$$\Phi_{j+1}(s) = \int_t^s f(r, y(r))e^{-c(r-t)} dr + MV_j(s, y_{tx}(s))e^{-c(s-t)}$$

**Demostración:** La expresión  $\Phi_{j+1}(s)$  evalúa la acción de recorrer la trayectoria hasta el instante  $s$  y en él aplicar la mejor política de  $j+1$  saltos, efectuando el primero en  $s$ . Que su máximo se encuentre en el instante inicial  $t$  significa que el punto  $(t, b_{j+1}(t))$  está en la frontera del conjunto de continuación correspondiente.  $\square$

**Observación 5.6:**  $\Phi_1(s)$  es diferenciable.

**Demostración:**  $V_0(t, x)$  y  $\zeta_1(t)$  lo son.  $\square$

**Observación 5.7:** En los puntos donde  $V_j$  es diferenciable se tiene:

$$\frac{d}{ds}\Phi_{j+1}(s)|_{s=t} = d_2(g(x) - g(\zeta_{j+1}(t)) - cD_0 + cd_2(\zeta_{j+1}(t) - x))$$

es decir que

$$cx - g(x) - \gamma_{j+1}(t) = 0$$

donde

$$\gamma_{j+1}(t) = \left( c\zeta_{j+1}(t) - g(\zeta_{j+1}(t)) - \frac{cD_0}{d_2} \right)$$

de manera que

$$b_{j+1}(t) = \frac{a - c + \sqrt{(a - c)^2 + 4b\gamma_{j+1}(t)}}{2b}$$

Se tiene además que la condición

$$\frac{\gamma_{j+1}(t)}{c} < k$$

[[5.20]

garantiza la admisibilidad de  $\zeta_{j+1}$  y  $b_{j+1}$ , es decir que  $b_{j+1} < k$ ; cuando  $f$  no es constante y  $K$  es diferenciable se tiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Phi_{j+1}(s)|_{s=t} &= f(t, x) - f(t, \zeta_{j+1}(t)) + \left(-\frac{dK}{dz}(\zeta_{j+1}(t) - x)(g(x) - g(\zeta_{j+1}(t)))\right) \\ &\quad - cD_0 - cK(\zeta_{j+1}(t) - x) \end{aligned}$$

Demostración: Se utiliza la ecuación H-J-B de evolución, que vale para  $V_j$ , y se reemplaza por la expresión (5.5) que también vale si  $V_0$  se sustituye por  $V_j$ .  $\square$

En función de lo ya calculado se tiene una expresión explícita para el borde  $b_1(t)$ . Para la expresión de los algoritmos conviene definir las funciones  $w_i(t) = V_i(t, b_i(t))$  y  $\tilde{w}_i(t) = V_{i-1}(t, b_i(t))$ , con  $i \geq 1$ . Se definen los conjuntos de tiempos  $\sigma_i$  como

$$\sigma_i = \{s : w_i(s) = \tilde{w}_i(s)\}$$

Observación 5.8: Los conjuntos  $\sigma_i$  son unitarios.  $\square$

Conocidos los  $\sigma_i$  se separa el espacio  $[t, T] \times \mathbf{O}$  mediante las trayectorias  $c_j(s) = y(s; \sigma_j, b_j(\sigma_j))$ . Al sector entre  $c_j$  y  $c_{j+1}$ ,  $j \geq 1$ , corresponde el número óptimo de saltos igual a  $j$ . La zona sin saltos no está limitada a la derecha (tiempos mayores) por una de estas curvas. Se utiliza, en cambio, la expresión  $c_0(s)$  para la trayectoria  $y(s; T; b_1(T))$  (nótese que  $b_1(T)$  está bien definida pues el  $\lim_{s \rightarrow T} b_1(s)$  existe).

Dado cada borde  $b_i(t)$ , interesará determinar el tiempo  $s$  en que una trayectoria de la dinámica con condición inicial  $(t, x)$  intercepta esa frontera. En general se trata de un problema de búsqueda del  $\tilde{s}$  correspondiente a la intersección única. Esta búsqueda se realiza por un método de partición binaria. En el caso monodimensional, como se tiene solución explícita de la dinámica y también su inversa (correspondiente a la misma

condición inicial, ver apéndice A3), se puede utilizar un método recursivo que converge cuando la derivada de la función que define el borde se mantiene en valor absoluto menor que uno (ver Dahlquist y Björk, 1976). Si se llama  $s(y; t, x)$  a la función inversa de  $y(s; t, x)$ , la recursión comienza con  $s_0 = t$ , y conocido  $s_i$  se halla

$$s_{i+1} = s(b_j(s_i); t, x) \quad (5.8)$$

que muy rápidamente converge a  $\bar{s}$ .

Para determinar  $\zeta_j(t)$ , con  $j > 1$  (el lugar a donde se salta en el tiempo  $t$  cuando está involucrado  $V_{j-1}(t, x)$ ) se utiliza la ecuación H-J-B de evolución (movimiento por las características). Se tiene que

$$V_{j-1}(t, y(t; s, b_{j-1}(s))) = \frac{f_0}{c}(1 - e^{-c(s-t)}) + w_{j-1}(s)e^{-c(s-t)}$$

y

$$V_{j-2}(t, y(t; s, b_{j-1}(s))) = \frac{f_0}{c}(1 - e^{-c(s-t)}) + \tilde{w}_{j-1}(s)e^{-c(s-t)}$$

Se obtienen los máximos de las funciones

$$W_{j-1}(t, \bar{s}, s) = V_{j-1}(t, y(t; s, b_{j-1}(s))) + D_0 - d_2(\rho_{j-1}(t, s) - \rho_{j-1}(t, \bar{s}))$$

y

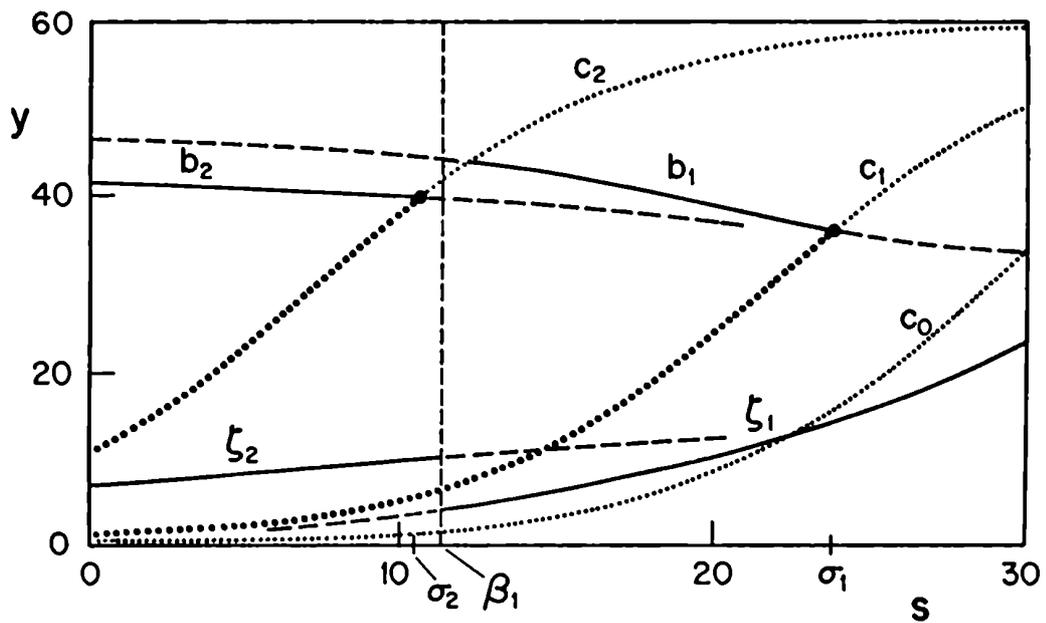
$$\tilde{W}_{j-1}(t, \bar{s}, s) = V_{j-2}(t, y(t; s, b_{j-1}(s))) + D_0 - d_2(\rho_{j-1}(t, s) - \rho_{j-1}(t, \bar{s}))$$

donde  $\rho_{j-1}(t, s)$  es la evaluación en  $t$  de la trayectoria que pasa por  $(s, b_{j-1}(s))$ , y  $\bar{s}$  permite seleccionar un estado inicial. También se utilizan los  $s_j$  y  $\bar{s}_j$  en que se hallan los máximos para determinar con  $\rho_{j-1}(t, s_j)$  y  $\rho_{j-1}(t, \bar{s}_j)$  los estados correspondientes a tales extremos. Nótese que el valor y la localización del extremo en la sección por  $t$  no depende de la reparametrización precedente cuando el mismo se halla en el interior del intervalo. Estos máximos pueden alcanzarse, sin embargo, en los extremos del intervalo

admisibles y en tal caso el máximo se calcula directamente evaluando las expresiones allí. Con  $W_{j-1}(t, t, s)$  se determina  $\zeta_j(t)$  y con este valor se obtiene  $b_j(t)$ . Conocidos éstos se comparan  $W_{j-1}(t, t, s_j)$  y  $\bar{W}_{j-1}(t, t, \bar{s}_j)$ . Mientras el segundo sea mayor no hay cambios, el tiempo en que se igualan se denominará  $\beta_{j-1}$ . Para los tiempos mayores que  $\beta_{j-1}$  el salto óptimo conduce al estado definido por  $\zeta_{j-1}$ , y para los menores al estado  $\zeta_j$ . A partir de  $\beta_{j-1}$ , hacia tiempos menores se busca el  $\sigma_j$  de la siguiente manera: se determina para cada punto del borde  $b_j(t)$ , recorriendo los tiempos en sentido decreciente, el  $\hat{s}$  de la intersección de la trayectoria por  $(t, b_j(t))$  con el borde  $b_{j-1}(s)$  (por búsqueda directa o mediante el método recursivo explicado) y se comparan los valores de  $W_{j-1}(t, \hat{s}, s_j)$  y  $V_{j-1}(t, y(t; \hat{s}, b_j(\hat{s})))$ . Cuando se igualan se ha hallado  $\sigma_j$ , puesto que el primero da el valor de  $V_j$  y el segundo el de  $V_{j-1}$ .

En la figura 5.5 se representan los bordes  $b_1$  y  $b_2$  y los sitios de salto óptimo  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  en el caso del ejemplo monodimensional del capítulo 3. También se dibujan los límites  $c_0$ ,  $c_1$ , y  $c_2$ . Los  $\sigma_i$  son los tiempos de intersección entre las curvas  $b_i$  y  $c_i$ ,  $i = 1, 2$ . El tiempo  $\beta_1$  separa las zonas en que se salta a  $\zeta_1$  ó  $\zeta_2$ . Si, por ejemplo, se desea analizar el problema con un horizonte de 8 años en lugar de los 30 años representados en la figura 5.5, debe trasladarse el origen al tiempo 22. En este caso no será necesario preocuparse por lo que sucede a la izquierda del nuevo origen, y se observa que bastará la función de valor  $V_1$  (que es  $V$ ) para obtener la política óptima dado un estado inicial.

Cuando se parte de una condición inicial  $(t, x)$  tal que  $x < b_i(t)$  (situación habitual en la clase de problemas que se tratan con la figura 5.5), la política óptima se obtiene hallando el tiempo  $s_1$  en que la trayectoria que pasa por  $(t, x)$  alcanza el borde  $b_i$ , luego en ese lugar saltando al estado  $(s_1, \zeta_i(s_1))$  correspondiente, luego recorriendo la trayectoria por este punto hasta alcanzar el borde  $b_{i-1}$  o el horizonte  $T$ , y en el primer caso saltando nuevamente como en  $s_1$ . El proceso completo determina



**Figura 5-5:** Primeros pasos de la determinación del borde del conjunto de continuación. Se representan los bordes  $b_1$  y  $b_2$  y los sitios de salto óptimo  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  en el caso del ejemplo monodimensional del capítulo 3. Asimismo los límites  $c_0$ ,  $c_1$ , y  $c_2$ . Los  $\sigma_i$  son los tiempos de intersección entre las curvas  $b_i$  y  $c_i$ ,  $i = 1, 2$ . El tiempo  $\beta_1$  separa las zonas en que se salta a  $\zeta_1$  ó  $\zeta_2$ .

la sucesión óptima, y la dificultad reside en la determinación de las intersecciones de las trayectorias con los bordes por los métodos ya explicados.

Cuando la condición inicial  $(t, x)$  no satisface lo precedente y es tal que el estado  $x$  es mayor que el  $b_i$  correspondiente, en la mayoría de los casos se debe comenzar con un salto al punto  $(s_1, \zeta_i(s_1))$  y seguir como antes. Existen, sin embargo, zonas de transición en el entorno de los tiempos  $\sigma_i$  que podrían someterse a un análisis ulterior. De los puntos  $(\sigma_i, b_i(\sigma_i))$  parten curvas (no señaladas en la figura) que completan la frontera del conjunto de continuación. Por ejemplo, de  $(\sigma_2, b_2(\sigma_2))$  hasta  $(\beta_1, b_1(\beta_2))$  debería determinarse la frontera del conjunto de continuación que conecta las curvas  $b_2$  y  $b_1$  en los sectores pertinentes. Sin embargo, esa determinación, que exige el llamado a una rutina adicional para hallar los puntos de igualdad entre funciones de valor, solamente debe realizarse para condiciones iniciales extraordinarias. En el ejemplo se llega a una curva que parte de  $(\sigma_1, b_1(\sigma_1))$  con mayor pendiente que  $c_1$ , y que separa la zona donde  $V$  es  $V_0$  (inferior) de aquélla donde es  $V_1$  (superior). Esto significa que hay puntos para estados superiores a  $c_1$  para los que es óptimo no efectuar cortes. Para determinar estas curvas deben compararse en cada vertical las funciones de valor asociadas a saltar instantáneamente por un lado y a continuar hasta el siguiente borde por el otro, y determinar el punto de separación donde se igualan.

En la figura 5-6 se representan los bordes  $b_1$  para distintos valores de la penalización de corte  $D_0$ . Son distintos casos del ejemplo monodimensional del capítulo 3 (comparar con la figura 3-2). Se representa la trayectoria que pasa por  $(0, 25)$  para observar las intersecciones con cada uno de los bordes. En todos los casos se salta al correspondiente  $\zeta_1(s)$ . Con el aumento de la penalización se retrasa el instante de aplicación del único impulso (ver la figura 5-5). Los  $\sigma_1$  correspondientes a las curvas  $b_1$  dependientes de los distintos valores de  $D_0$  separan, como antes, la parte de cada  $b_1$  que es borde del conjunto de continuación, de aquélla en que sólo

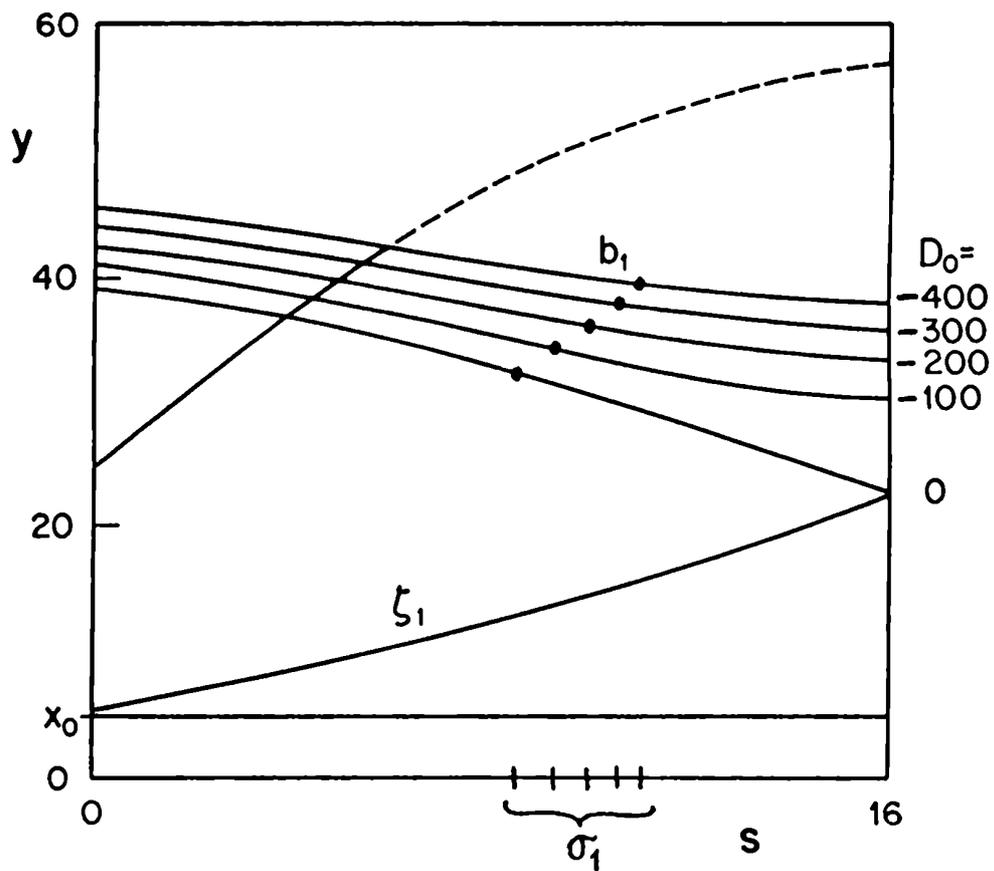


Figura 5-6: Los bordes  $b_1$  para distintos valores de la penalización de corte  $D_0$ . Casos del ejemplo monodimensional del capítulo 3. Se representa una trayectoria para observar las intersecciones con cada uno de los bordes. En todos los casos se salta al correspondiente  $\zeta_1(s)$ .

tiene significado cuando se estudia la ocurrencia de exactamente un salto. Para las trayectorias que pasan a la derecha de los puntos  $(\sigma_1, b_1(\sigma_1))$  es óptimo no saltar en  $b_1$ , y continuar hasta el horizonte  $T$ . Nótese que los puntos están casi alineados en una trayectoria, de modo que el efecto de cambio de  $D_0$  es poco importante en lo que respecta a la separación entre las zonas de un salto y sin saltos. Nótese asimismo que la curva  $\zeta_1$  no depende de la constante  $D_0$  (ver la ecuación 5.6).

En la figura 5.7 se representan los bordes  $b_1$  y los respectivos lugares de salto  $\zeta_1$  para distintos valores de la tasa de actualización,  $c$ , expresada como fracción de la tasa de crecimiento del rodal,  $a$ . Cuando aumenta la tasa de interés las curvas frontera descienden en el espacio de eventos, adelantando de este modo el instante de salto (se corta antes). Esto justifica en parte la acción habitual de los nuevos poseedores de tierras forestales, que adoptan una actitud depredatoria desde el inicio. Nótese que para altas tasas el umbral  $x_0$  es el lugar de salto, y que si éste no fuese fijado se saltaría a estados prácticamente nulos, desapareciendo el recurso. El efecto directo de una tasa de descuento menor es incrementar la preservación de los ambientes naturales para generaciones futuras (ver Krautkraemer, 1988); sin embargo existirían efectos secundarios asociados a la acumulación de capital, que podrían incidir en sentido opuesto a lo expresado, es decir desplazando a las inversiones a otras áreas y permitiendo una acción depredatoria subsidiaria. Menaldi (1982b) por su parte, para realizar ciertas acotaciones pone como hipótesis que la tasa  $c$  sea 'suficientemente grande' como para garantizar la coercividad del operador de primer orden que define la ecuación de Hamilton-Jacobi.

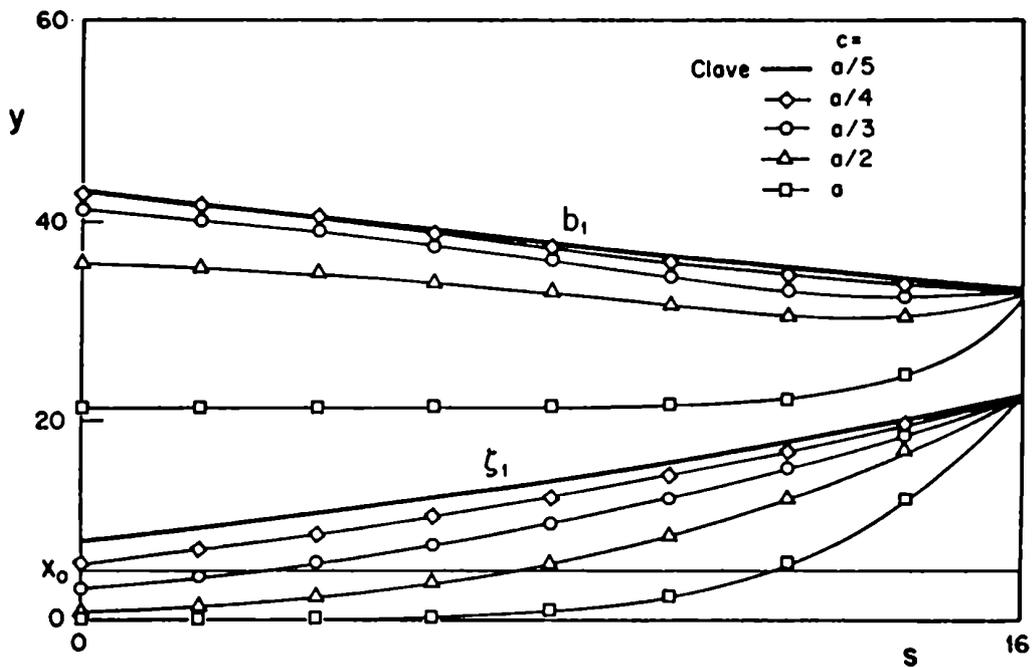


Figura 5·7: Los bordes  $b_1$  y los lugares de salto respectivos  $\zeta_1$  para distintos valores de la tasa de actualización  $c$  expresada como fracción de la tasa de crecimiento del rodal  $a$ . Casos del ejemplo monodimensional del capítulo 3.

El problema con umbral.

El umbral, o sea el nivel mínimo permitido para cada estado, permite ejercer una restricción cuyo fundamento es la conservación ecológica. Cuando se lo superpone al caso descrito precedentemente, el valor de  $x_0$  interactúa con los de las funciones  $\zeta_i$ , limitando la capacidad para saltar solamente a esos lugares donde se realizan los máximos de las funciones  $\varphi$ , argumento del sup en la definición de  $MV_i$ , análogas a 5.4 para cada una de las funciones de valor  $V_i$ .

La función  $V_0(t, x)$  dada en la ecuación 5.3 no se altera por la modificación del umbral. Se llama  $\zeta_i^\circ$  a las anteriores  $\zeta_i$  asociadas al problema sin umbral, y en general se identifican las anteriores funciones con el circulito. Como la función  $\zeta_1^\circ(t)$  es creciente habrá a lo sumo un punto en que atraviesa al umbral  $x_0$ , y a tal tiempo se denominará  $\theta_1 \in [0, T]$  (si existe). A partir de  $\theta_1$ , la función  $\zeta_1^\circ(t)$  se hace mayor que el umbral  $x_0$ . Se define  $\zeta_1(t) = \zeta_1^\circ(t) \vee x_0$ , que vale  $\zeta_1^\circ(t)$  después de  $\theta_1$  y  $x_0$  antes. También se define la trayectoria  $\tilde{c}_1(t)$ , que pasa por el punto  $(\theta_1, b_1^\circ(\theta_1))$  separador entre las zonas donde puede incidir el umbral y donde no incide. Después de  $\tilde{c}_1$  se define  $b_1(t)$  como  $b_1^\circ(t)$ . En la zona a la izquierda de la característica  $\tilde{c}_1$  (tiempos menores) se modifican las expresiones de la observación 5.7 puesto que la nueva expresión para la función  $\gamma_{j+1}$  es

$$\gamma_{j+1}(t) = \left( cx_0 - \frac{\partial V_0}{\partial x}(t, x_0)g(x_0) - \frac{cD_0}{d_2} \right) \quad (5.9)$$

la que modifica el valor de  $b_1^\circ(t)$ . La razón del cambio es que ahora no vale la igualdad 5.5. La modificación se extiende al cálculo de los  $b_{j+1}$  con  $j > 1$ , en todos los casos en que el umbral no sea superado por la respectiva  $\zeta_{j+1}^\circ$ . Nótese que en el segundo miembro de 5.9 se puede sustituir  $x_0$  por  $\zeta_{j+1} (= \zeta_{j+1}^\circ \vee x_0)$ .

Con el nuevo borde  $b_1$  para la zona de exactamente un salto, los siguientes pasos en el algoritmo son análogos al caso sin umbral.

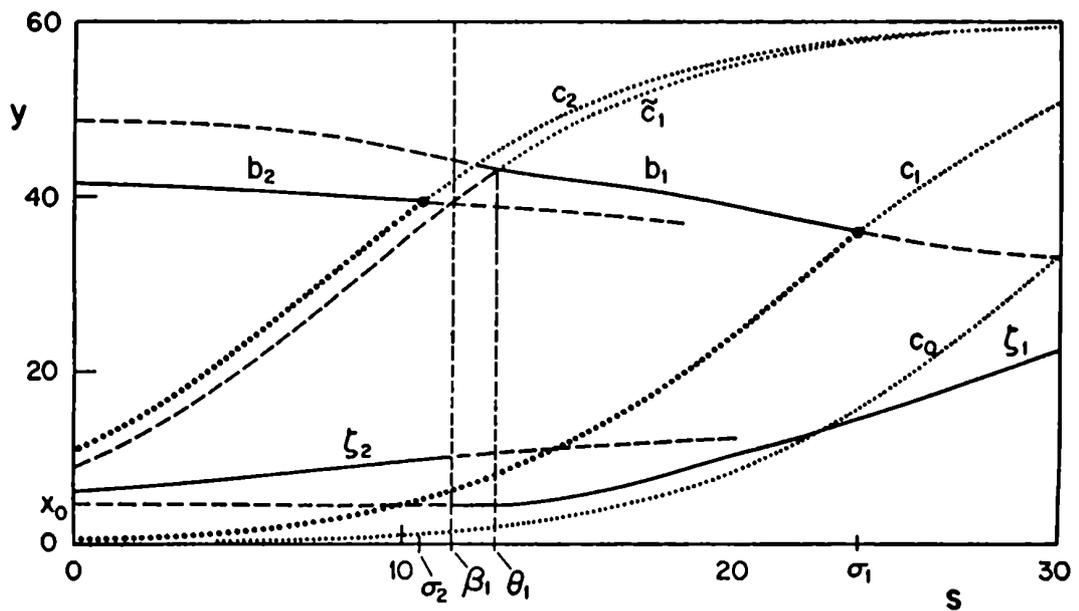
Se calcula donde sea necesaria la función  $MV_0(t, x)$  por la expresión 5.7 con el nuevo  $\zeta_1$ . Se definen como antes las funciones  $w_i$  y  $\tilde{w}_i$ , pero en su argumento se debe modificar la expresión del borde  $b_i$ . Con ellas se hallan los tiempos  $\sigma_i$  de igual modo que antes. Los siguientes pasos son los mismos que en el caso sin umbral, con la diferencia de que el sitio de salto está acotado por el umbral, y cuando la cota se realiza, se modifica la evaluación del borde  $b$  correspondiente, siendo necesario calcular la derivada de la función de valor parcial pertinente en el umbral  $x_0$ .

En la figura 5.8 se representan los bordes  $b_1$  y  $b_2$  y los sitios de salto óptimo  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  en el caso del ejemplo monodimensional del capítulo 3 con umbral  $x_0$  no nulo. Asimismo los límites  $c_0$ ,  $c_1$ , y  $c_2$ . Los  $\sigma_i$  son los tiempos de intersección entre las curvas  $b_i$  y  $c_i$ ,  $i = 1, 2$ . El tiempo  $\beta_1$  separa las zonas en que se salta a  $\zeta_1$  ó  $\zeta_2$ . La curva  $\tilde{c}_1$  separa las zonas en que incide el umbral (tiempos menores) y en que no incide (tiempos mayores). Como en el caso de la figura 5.5, si por ejemplo se desea analizar el problema con un horizonte de 8 años en lugar de los 30 años representados en la figura 5.8, debe trasladarse el origen al tiempo 22. En este caso no será necesario preocuparse por lo que sucede a la izquierda del nuevo origen, y se observa que bastará la función de valor  $V_1$  (que es  $V$ ) para obtener la política óptima para cada estado inicial.

Por lo expuesto se pueden enunciar los siguientes algoritmos:

**Algoritmo 5.1** (Determinación de las componentes del borde del conjunto de continuación. Son conocidas las expresiones para  $V_0(t, x)$ ,  $\zeta_1^\circ(t)$ ,  $b_1^\circ(t)$ , y  $c_0(t)$ .):

- (1) Se halla el tiempo  $\theta_1 \in [0, T]$  (si existe) donde  $\zeta_1^\circ(t)$  se hace mayor que el umbral  $x_0$ . Se define  $\zeta_1(t) = \zeta_1^\circ(t) \vee x_0$  y  $\tilde{c}_1(t)$ , trayectoria que pasa por  $(\theta_1, b_1^\circ(\theta_1))$  y que separa el espacio de fases entre las zonas donde puede incidir el umbral y donde no incide. Se define  $b_1(t)$  como  $b_1^\circ(t)$  donde  $\zeta_1^\circ(t) \geq x_0$ , y la expresión 5.9 con  $j = 0$  donde  $x_0$  es mayor.



**Figura 5.8:** Primeros pasos de la determinación del borde del conjunto de continuación en el problema con umbral  $x_0 (\neq 0)$ . Se representan los bordes  $b_1$  y  $b_2$  y los sitios de salto óptimo  $\zeta_1$  y  $\zeta_2$  en el caso del ejemplo monodimensional del capítulo 3. Asimismo los límites  $c_0$ ,  $c_1$ , y  $c_2$ . Los  $\sigma_i$  son los tiempos de intersección entre las curvas  $b_i$  y  $c_i$ ,  $i = 1, 2$ . El tiempo  $\beta_1$  separa las zonas en que se salta a  $\zeta_1$  ó  $\zeta_2$ . La curva  $\tilde{c}_1$  separa las zonas en que incide el umbral (tiempos menores) y en que no incide (tiempos mayores).

- (2) Se calcula  $MV_0(t, x)$  por la expresión 5·7 con el nuevo  $\zeta_1$ .
- (3) Se utilizan las funciones  $w_1$  y  $\tilde{w}_1$  para determinar el tiempo  $\sigma_1$  donde  $V_1$  se hace mayor que  $V_0$  sobre  $b_1$ . Se determina la trayectoria  $c_1(t)$  que pasa por el punto  $(\sigma_1, b_1(\sigma_1))$ .
- (4) Se utilizan las funciones  $W_1$  y  $\tilde{W}_1$ , definidas como en el caso sin umbral, para determinar sus máximos, con el fin de obtener  $\zeta_2^\circ$ . Se comparan entre sí para determinar el tiempo  $\beta_1$  en que se igualan.
- (5) Se compara  $\zeta_2^\circ$  con el umbral, se toma el mayor en cada tiempo, y se determina el borde  $b_2$  como en (1).
- (6) Se determina el tiempo  $\sigma_2$  así: se halla para cada punto del borde  $b_2(t)$ , recorriendo los tiempos en sentido decreciente, el  $\hat{s}$  de la intersección de la trayectoria que pasa por  $(t, b_2(t))$  con el borde  $b_1(s)$  (por búsqueda directa o mediante el método recursivo explicado en 5·8); y se comparan los valores de  $W_1(t, \hat{s}, s_2)$  y  $V_1(t, y(t; \hat{s}, b_2(\hat{s})))$ , y cuando se igualan se ha hallado  $\sigma_2$ , puesto que el primero da el valor de  $V_2$  y el segundo el de  $V_1$ . Se determina la trayectoria  $c_2(t)$  que pasa por el punto  $(\sigma_2, b_2(\sigma_2))$ .
- (7) Se determinan  $\zeta_3^\circ$  y  $\beta_2$  como en (4).
- (8) El proceso continúa un número finito de pasos hasta alcanzar el tiempo 0 desde el horizonte  $T$ , calculando las funciones  $\zeta_j$ ,  $b_j$ ,  $c_j$ , y los tiempos  $\sigma_j$  y  $\beta_j$  con  $j > 2$ . □

El algoritmo anterior permite definir una realimentación que, para cada punto  $(t, x)$  del espacio de fases define si se salta o no, y, en caso positivo, cuál es el estado de llegada. En cada banda  $c_{j+1}-c_j$  y en cada banda  $\beta_{j+1}-\beta_j$  se sabrá así cuál es la acción que conducirá a la trayectoria impulsional óptima desde  $(t, x)$ .

**Algoritmo 5.2** (Determinación de la política óptima para la condición inicial  $(t, x)$  y umbral no nulo. Se conocen las expresiones de los  $b_j$  y  $\zeta_j$  en los sectores limitados por las trayectorias  $c_j$  que pasan por los puntos  $(\sigma_j, b_j(\sigma_j))$ ):

- (1) Se determina el índice  $i$  tal que  $c_{i+1}(t) \geq x \geq c_i(t)$ .
- (2) Si  $i = 0$  (ó  $x \leq c_0(t)$ ), la política óptima consiste en permitir evolucionar al sistema hasta el horizonte. Si  $i > 0$  se halla la intersección entre la curva característica que pasa por  $(t, x)$  y la curva  $b_i$ , lo que sucede en el tiempo  $s_1$  ( $< \sigma_i$ ).
- (3) Si  $i > 0$  en (2), se efectúa un salto al punto  $(s_1, \zeta_i(s_1))$  y se halla el índice  $k$  ( $< i$ ) para el que la segunda coordenada toma valores entre  $c_k(s_1)$  y  $c_{k+1}(s_1)$ . Se continúa por la trayectoria que pasa por  $(s_1, \zeta_i(s_1))$  hasta cortar el borde  $b_k$ , o hasta llegar al horizonte  $T$ .
- (4) El proceso continúa en forma análoga un número finito de pasos hasta alcanzar el horizonte. Se obtiene así el control impulsional  $Z$  óptimo. □

## 6. CONCLUSIONES

En el presente trabajo se ha intentado configurar un marco nuevo y preciso para el tratamiento de algunos problemas de manejo de sistemas naturales ecológicos. Los pasos dados en tal dirección son importantes, no solo en sí sino como punto de partida para la construcción —que se ha iniciado— de un Sistema de Sustentación de Decisiones (DSS, ver la introducción) para manejo agrosilvopastoril en el marco de bosques subtropicales. Se ha puesto énfasis en el estudio y solución de problemas de la región, como los que se presentan en los sistemas forestales del norte de la provincia de Santa Fe, Argentina.

Ha sido necesario desarrollar criterios específicos para la obtención de políticas de manejo adaptadas a las necesidades de tales sistemas. También ha sido necesario proponer nuevos métodos y algoritmos para determinar manejos silviculturales óptimos o subóptimos. Se ha formulado así el problema de manejo de sistemas naturales ecológicos y sistemas agroforestales con un objetivo economicoecológico en términos de la teoría de control impulsional moderna, y se han construido algoritmos efectivos para resolverlo. Se apeló a los controles impulsionales por las características que presentan las extracciones de biomasa en los sistemas naturales. Estas se producen durante un lapso breve respecto del de desarrollo de la dinámica de tales sistemas, y tienen asociado costos fijos de dos tipos principales: por un lado los costos asociados al acto de extracción; y por otro los relacionados con la estabilidad de los sistemas ecológicos.

Para el caso de bosques que contienen una especie distinguida creciendo con otras de pequeño valor comercial ( $r = 1$ ), se ha ilustrado el proceso con soluciones analíticas. El método también se aplica cuando  $r > 1$ , es decir que dos o más especies son de interés. En el caso del bosque de una especie hemos observado que, en el mediano plazo (diez años), el número óptimo de cortes  $n$  resulta dependiente de uno de los parámetros clave del problema (la constante  $D_0$ : penalización por efectuar una extracción); y que este  $n$  es siempre pequeño, esto es  $n = 0, 1, \text{ ó } 2$ .

Las restricciones ecológicas tenidas en cuenta se manifiestan como cotas en el número, periodicidad y cantidades permitidas de los posibles cortes. Las políticas de manejo obtenidas mantienen al sistema dentro de límites de seguridad ecológica y proveen mejores beneficios.

Se han adaptado técnicas de identificación y de realización de sistemas no lineales al caso de los sistemas agrosilvopastoriles. A partir de datos censales, resultado de experimentos de campo, se han estimado los coeficientes de modelos polinomiales que rigen la evolución de los estados de los sistemas considerados.

La funcional de evaluación del proceso ha sido llevada a una forma muy general, y permite ahora modelar muy variadas situaciones concretas. Cuando se aplican los algoritmos de tipo combinatorio se percibe el balance entre las ventajas computacionales de la variante tipo Montecarlo respecto de la determinista, y la desventaja de obtener soluciones subóptimas. En ambos casos, determinista o estocástico, se llega hasta un nivel de discretización apropiado del espacio de estados. Estos primeros algoritmos han sido orientados a la resolución local del problema, en contraposición a los de tipo variacional construidos más adelante, que dan una solución global adaptable a las distintas condiciones iniciales.

Las estrategias óptimas que han sido obtenidas indican que deben realizarse cortes parciales en la masa de recursos tales que

- (i) a veces están alejados del comienzo del período de estudio, en claro desacuerdo con los habituales nuevos propietarios de bosques nativos que comienzan a desmontar tan rápido como pueden,
- (ii) otras veces están lejos de la región de máximo crecimiento en el espacio de fases, contradiciendo a la mayoría de los silvicultores con objetivos de maximización económica, y
- (iii) las cantidades óptimas por ser cortadas usualmente difieren de las que se obtendrían al cortar cada año el crecimiento anual del bosque (renta natural, recomendada como cota superior por los ingenieros forestales con orientación ecológica).

Los puntos precedentes presentan características poco usuales en la práctica forestal. Por ello se comparan los resultados de esta tesis con los que se obtienen por los enfoques clásicos en la materia. Del resultado de esta comparación se ha podido observar una clara ventaja para los métodos propuestos aquí (ver apéndice A1). La formulación del problema silvicultural mediante la teoría de control impulsional resulta más flexible que en los esquemas tradicionales, y conduce a una mejor definición de las acciones óptimas. Por ejemplo, es posible incluir en los parámetros de la funcional de evaluación aspectos no contemplados habitualmente, como son los niveles impositivos relacionados a la preservación del medio ambiente desde el punto de vista ecológico. La regulación de tales efectos puede incorporarse diversificando los parámetros o creando subparámetros como ser para la penalización  $D_0$ , que tiene una incidencia neta en las características de las políticas óptimas recomendadas para cada caso.

Se han utilizado experimentos y simulaciones para conferir validez a los resultados y mostrar la factibilidad de los algoritmos propuestos. La calidad del asesoramiento que los métodos desarrollados puedan ofrecer en el futuro dependerá, como es de suponer, de la de los datos e información que se haya reunido hasta entonces.

Las ecuaciones e inecuaciones H-J-B obtenidas en el capítulo 4 permiten desarrollar los algoritmos del capítulo 5, y de este modo plantear estrategias alternativas para la solución práctica del problema de manejo. Para el tratamiento de estas ecuaciones se ha explorado la posibilidad de redefinir el sistema de coordenadas en el espacio de fases. La utilización de las características del sistema dinámico permite simplificar los algoritmos de determinación de las funciones de valor, y reducir en gran medida el número de evaluaciones que son necesarias para su obtención.

En el proceso de determinación de los controles óptimos impulsionales a los que debe ser sometido el sistema, queda particionado el espacio de fases entre dos conjuntos distinguidos: el conjunto de continuación (en él el sistema continúa su evolución); y su complemento, el conjunto de salto (en él el sistema salta a un estado determinado por una ley de retroalimentación). Ha sido posible determinar que no es necesario conocer la totalidad de la frontera del conjunto de continuación. Basta considerar los bordes  $b_i$  que son 'visibles' recorriendo las características del flujo. Los que quedan ocultos por bordes efectivos en tiempos menores no tienen incidencia significativa sobre la determinación de la política óptima. Así queda separado el espacio de eventos  $[t, T] \times O$  en bandas limitadas por las curvas  $c_i$ , cuyas trayectorias inciden en los bordes  $b_i$ : entre  $c_i$  y  $c_{i+1}$  la intersección de la trayectoria con el borde  $b_i$  define el instante en que debe ser aplicado un salto del control impulsional óptimo. De este modo queda definido el control en forma de lazo cerrado ('feedback').

Del tratamiento de lagrangianos polinomiales no constantes que se inicia en el capítulo 4 se deduce que, aún en el caso monodimensional, es preferible la resolución numérica de la componente de costos corrientes de la funcional de beneficio respecto de su cálculo explícito. Cuando la ecuación diferencial que da la dinámica está controlada por controles continuos no constantes (en el caso constante o 'constante a trozos' se reduce el problema al caso polinomial) el sistema debe integrarse en forma numérica. Por esta razón se han diseñado rutinas de integración adecuadas, las que compiten favorablemente en eficiencia computacional con los métodos basados en la evaluación explícita de las primitivas.

Se ha hallado concordancia entre la extensión a horizonte infinito de los métodos exhaustivos del capítulo 3, los métodos de Menaldi (1982b), y los problemas de inventario de tipo  $(s, S)$  de Investigación Operativa. La función  $k(z)$  asociada a los saltos que se utiliza en este trabajo, no está acotada superiormente por una constante negativa, pero aún así la separación temporal mínima entre saltos admisibles que han de conformar el control impulsional óptimo es finita. Ello se origina en el nivel de la penalización que sufre el salto eventual y en las características físicas de los sistemas que se modelan y manejan. La autonomía de la dinámica logística se traduce en que, si se cambia de coordenadas en los tiempos a la variable  $\tau = T - t$ , entonces a medida que crece  $\tau$  es como si el horizonte se alejase, de modo que es posible estudiar el problema en un nuevo espacio  $[0, \infty) \times O$ , utilizando las variables  $\tau$  y  $x$ . En este espacio, que también admite un cambio de coordenadas definido por el flujo de la dinámica, se construye recursivamente la sucesión de bordes del conjunto de continuación, lugares de salto, y características frontera entre zonas de  $i$  saltos; con este número  $i$  creciendo a medida que aumenta  $\tau$ . Pese a las restricciones establecidas en el capítulo 5 (dinámica logística, ausencia de amortizaciones, lagrangiano constante, función de salto y función final afines), el modelo es suficientemente versátil como para permitir el tratamiento

de gran número de problemas reales. Las restricciones aludidas solamente tienen como objetivo simplificar la exposición; los algoritmos que presentamos se pueden generalizar para superarlas sin dificultad.

¿Cuál es la utilidad en la práctica forestal de los resultados obtenidos con las técnicas de optimización que han sido discutidas? Podrían aportarse como respuesta las diferentes políticas óptimas que se obtuvieron para los casos del ejemplo monodimensional del capítulo 3, por ejemplo. Los resultados que se ven allí difieren en la época de corte, sus cantidades y el beneficio producido. Creemos que un empresario forestal no es siempre capaz de tener en cuenta todos esos factores al mismo tiempo para definir la política óptima. Las diferencias en los beneficios obtenidos por seguir estrategias óptimas o por no hacerlo, son suficientemente significativos como para justificar un tratamiento exhaustivo del problema de planificación. El software necesario para asesorar al productor es siempre pensado como implementable en computadoras personales. A partir de datos censales respecto de la dinámica de un cierto número de tipos forestales y variable relacionadas en una región en estudio, se está en posición de hacer de éstos métodos un producto de uso común. Algo análogo puede decirse de las propuestas de control de fertilización de plantaciones forestales, y de determinar otros controles para ser ejercidos sobre estos sistemas.

Restan considerar, no obstante lo dicho hasta aquí, un cierto número de factores en la búsqueda de la forma más general del problema (ver, por ejemplo, Shugart, 1984, Clemhout y Wan, 1985 y Shukla et al., 1988). En el caso de tener libertad para accionar sobre el bosque, se pueden ejercer acciones silviculturales para mejorar el valor neto de la biomasa útil por unidad de área de cada una de las especies útiles (ver, por ejemplo, Hellman, 1981). Podemos introducir plantines para modificar la dinámica de crecimiento del bosque. Asimismo se pueden hacer tareas culturales como remover los árboles muertos y las plagas, matar los insectos dañinos, usar fertilizantes (ver Costanza

y Neuman, 1990, y el apéndice A4) y otras acciones modelizables como controles continuos o clásicos. Para seguir estos cursos de acción, por ejemplo en el litoral de la Región Chaqueña, es necesario enriquecer los experimentos de campo iniciados, de manera que resulten fuente de datos censales en cantidad y calidad suficiente para la identificación de modelos adecuadamente ajustados y con buena capacidad predictiva.

Con la vista puesta en el manejo integral de lotes experimentales, se ha avanzado también sobre el problema de considerar la dinámica acoplada de varios recursos, presentes en el sistema natural al mismo tiempo y evolucionando en conjunto: por ejemplo varias especies forestales con la adición de ganado pastando bajo monte (ver apéndice A2, y Neuman y Costanza, 1988), pasturas nativas o exóticas, etc. Parece necesario, sobre todo en ambientes ecológicamente frágiles y áridos, tomar en consideración esta asociación de ganado y bosque para mejorar las ganancias y simultáneamente conservar el suelo (ver, por ejemplo, Anónimo, 1986; Ffolliot y Thames, 1983).

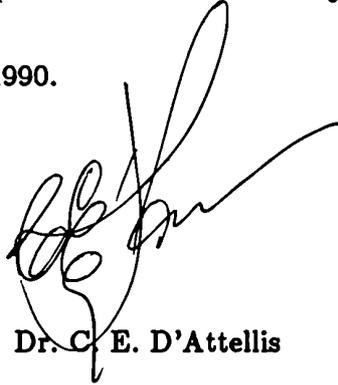
Como síntesis final digamos que en esta tesis se ha avanzado en la solución de varios problemas de Matemática Aplicada, orientados a mejorar el conocimiento de la dinámica de evolución de sistemas naturales ecológicos y optimizar su manejo. Los sistemas estudiados son esencialmente no lineales. Los métodos desarrollados son generales y permiten superar estrategias clásicas pensadas con el mismo fin. Creemos que los resultados son útiles para resolver problemas específicos de zonas forestales de la región Chaqueña de la República Argentina. El enfoque ha sido comprehensivo y global, y se han discutido problemas y soluciones que tienen gran incidencia en el desarrollo correcto de los sistemas forestales que interactúan con el hombre, pero que no han recibido mucha atención en la literatura de aplicaciones de Matemática al presente. El criterio principal para la construcción de soluciones ha sido siempre el de hallar los métodos más simples para tratar tales sistemas, y a su vez que respetasen

las complejidades y no linealidades inherentes a los mismos. Se han presentado así los medios para alcanzar mejores performances en el manejo de los sistemas naturales.

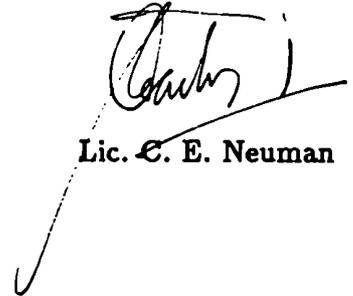
Buenos Aires, 26 de mayo de 1990.



Dr. V. Costanza



Dr. C. E. D'Attellis



Lic. C. E. Neuman



## A1. EL MANEJO DE BOSQUES CLÁSICO

El análisis clásico de rotación establecido por Faustmann en la primera mitad del siglo pasado, y más recientemente revisado y desarrollado por Samuelson (1976), Heaps y Neher (1979), Wan y Anderson (1986), y Wan (1985), no es aplicable, lamentablemente, en nuestro caso. La experiencia indica que en los bosques subtropicales no debería practicarse el procedimiento de tala completa y replantado. En lo que respecta al Chaco Sudamericano, los efectos negativos de éstas y otras prácticas incorrectas han sido discutidas en detalle por Morello y Hortt (1984). Los mismos problemas se manifiestan en otras regiones del mundo (ver Anónimo, 1984, en relación al Sahel del oeste de África).

El tiempo de espera para efectuar la rotación clásica de Faustmann en el caso de un bosque maderable nativo es mucho mayor que el período de mediano plazo de evaluación de nuestro sistema. Los períodos más largos están influidos negativamente por la evolución de parámetros impredecibles como precios, tasas financieras, y otros. Como ejemplo podemos mencionar que en la primera mitad de este siglo, la sobreexplotación de bosques nativos de *Schinopsis balansae* (quebracho colorado) llevó al casi agotamiento del recurso y a la degradación del bosque, debido principalmente a la aplicación inapropiada de técnicas clásicas de manejo. Se realizaron algunos experimentos para determinar el período de rotación, de manera de crear bosques implantados de esa sola especie, pero se obtuvo un extensísimo período de ochenta años y eso desalentó la reforestación (ver Anónimo, 1967). Sin embargo, se han informado buenos resultados en la regeneración natural del quebracho (ver Valentini, 1960).

Los estudios de rotación fueron hechos inicialmente para su aplicación a las plantaciones de árboles, generalmente de especies únicas y de rápido crecimiento. Nosotros estudiamos bosques en los que coexisten varias especies, con ejemplares de distintas edades, y donde las prácticas silviculturales son totalmente diferentes. Por ejemplo, no es fácil en nuestro caso determinar la edad de los árboles útiles y deseados para determinar cuándo cortarlos. Esa decisión en general se basa en la consideración del diámetro u otros parámetros. Además, la regeneración natural se prefiere al replantado; muchas veces se incluye algún tipo de práctica agroforestal para incrementar la productividad del sistema; brevemente, un número de características propias hace que los bosques que estudiamos sean más delicados y, en consecuencia, más difíciles de manejar que las plantaciones.

Métodos clásicos de manejo de bosques.

Faustmann (1849) dedujo una fórmula para la rotación óptima de un rodal con árboles de la misma edad. Si  $v(s)$  es el valor comercial de los árboles de edad  $s$ , y  $T$  es el período de rotación (por ser determinado), entonces el valor presente del rodal es,

$$J(T) = \frac{v(T) - C}{e^{cT} - 1}$$

donde  $C$  es el costo de cortar y replantar el stand, y  $c$  es la tasa de interés corriente (en ausencia de inflación). El período  $T$  que maximiza  $J(T)$  se obtiene a partir de la fórmula de Faustmann,

$$\frac{v'(T)}{v(T) - C} = \frac{c}{1 - e^{-cT}} \quad (\text{A1.1})$$

Este análisis ha sido útil aplicado a bosques implantados templados, con árboles de la misma edad.

[A1.2]

**Tabla A1-I:** Valor  $v(s)$  de árboles de *Schinopsis balansae* de edad  $s$  y el análisis de Faustmann correspondiente para un costo de  $C = 300$ .

edad $s$	valor $v(s)$	$v'(s)$	$v'(s)/[v(s) - C]$	$0.05/[1 - \exp(-0.05s)]$
30	240	12	-0.2	0.064
40	360	14	0.23	0.058
50	510	17	0.08	0.055
60	720	24	0.057	0.053
70	1010	24	0.034	0.052
80	1190	15	0.017	0.051

La información de la tabla A1·I, basada en un trabajo de Gallo (1978) y normas corrientes de valuación, es ilustrativa de un bosque nativo subtropical. De la tabla A1·I y la ecuación (A1·1) se obtiene un período de rotación óptimo de más de 60 años para una tasa de interés  $c = 0.05$ . Este es un período de rotación muy largo, varias veces más largo que los horizontes de manejo usuales hoy, lo que hace insatisfactorio el método de Faustmann en la circunstancia analizada.

Otro método clásico de aproximación al manejo de bosques consiste en determinar el nivel óptimo de biomasa y el corte anual necesario para permanecer en estado estacionario —en otras palabras, extraer exactamente la renta del bosque—.

Siguiendo, por ejemplo, los métodos del libro de Clark (1976, pág. 39) un modelo adecuado para un bosque de una única especie (descrita por una variable de estado  $y$  y talada con tasa  $\eta(s)$ ) es

$$\begin{cases} \dot{y} = g(y) - \eta(s) \\ y(0) = x \end{cases}$$

La inserción lineal de la tasa de corte  $\eta$  es muy útil para resolver el problema de maximizar el funcional de beneficio neto presente dado por

$$J = \int_0^{\infty} [p(s) - C]\eta(s)e^{-cs} ds$$

donde  $p(s)$  es el precio de la madera,  $C$  es el costo de cortar, y  $c$  es la tasa de interés (comparar con los funcionales del capítulo 2). Sustituimos

$$\eta(s) = g(y) - \dot{y}$$

en la integral y aplicamos formalmente la ecuación de Euler del Cálculo de Variaciones (ver, e.g., Clark y DePree, 1979) para obtener la ecuación

$$g'(y) = c$$

$$\text{[A1·4]}$$

y el estado  $y^*$  de rendimiento máximo sostenido cuando se resuelve para el caso  $p(s)$  constante.

Este método resulta excesivamente restrictivo —y, en consecuencia, lejos de la optimalidad— debido a la forma continua de  $\eta$  y su incidencia lineal en la dinámica. Como ilustración citamos valores de un caso tratado en detalle en el capítulo 3. Para

$$g(y) = y(0.2059 - 0.00344y)$$

y una definición de  $J$  levemente diferente, el  $y^*$  calculado es  $23 \text{ ton}\cdot\text{ha}^{-1}$ . La evolución de la correspondiente política para dos condiciones iniciales diferentes se compara con la nuestra:

Condición inicial $\text{ton}\cdot\text{ha}^{-1}$	Valor de la política tipo Clark con $y^* = 23 \text{ ton}\cdot\text{ha}^{-1}$	Valor óptimo para nuestra política
12.7	-460	+88
34.4	-1656	-436

Encontramos que el punto de vista del control impulsional es más flexible que los clásicos, y consecuentemente produce mejores resultados globales.

Referimos a la siguiente bibliografía para otros aspectos del manejo clásico: Clark (1986), pág. 29 y siguientes; Conrad y Clark (1987), pág. 96 y 191; Anderson y Wan (1981); y Anderson (1976).

## A2. MANEJO AGROSILVOPASTORIL EN EL BOSQUE CHAQUEÑO

### Introducción.

Consideramos el problema de optimizar el manejo agrosilvopastoril en una porción de un ecosistema boscoso subtropical parcialmente degradado por la acción previa del hombre. Las estrategias habituales de uso de tales zonas han tendido en el pasado y tienden en la actualidad a la depredación y degradación de los recursos que en delicado equilibrio sustentan la sucesión del bosque virgen.

Los bosques naturales tropicales y subtropicales, a pesar de encontrarse en un alarmante proceso regresivo en el mundo, han sido poco considerados en lo que respecta a su modelización y control. En un trabajo reciente (integrante de esta tesis; ver Neuman y Costanza, 1990) se analiza parte de la literatura previa en control y manejo de bosques, se establece un modelo de manejo económicoecológico y se formulan y justifican algoritmos para su control impulsional. En otro artículo (cuyo cuerpo principal se presenta en este apéndice; ver Neuman y Costanza, 1988) se expande el modelo forestal desarrollado previamente para incorporar la coexistencia de ganado con el bosque. El tratamiento que se ha utilizado en ambos casos parte de diseñar un modelo de espacio de estados global y plantear un funcional de beneficio que tenga en cuenta explícita o implícitamente a los problemas ecológicos involucrados, como ser,

- Fragilidad de los ciclos de nutrientes y agua.
- Falta de estabilidad del suelo.
- Pequeña resistencia a la erosión.

- Peligro de desertificación. Desaparición de la cobertura vegetal. Avance de la frontera de desierto. Efectos negativos en regiones adyacentes.

En consecuencia establecemos un modelo simplificado del sistema mencionado y de los criterios y medios de su optimización, y analizamos la incidencia en el ajuste de los parámetros del modelo, de los factores cualitativos y cuantitativos, ecológicos y geográficos que deben tenerse en cuenta al abordar el problema de planificación real.

La formulación del modelo se basa en el principio de rendimientos decrecientes de la producción ecológica primaria con la intensidad del factor o nutriente, y en los mecanismos de interacción entre las especies vegetales y el ganado que se desea manejar. Se tienen en cuenta las posibles vías de inclusión en la formulación del problema de los aspectos ecológicos de protección de suelos y semillas, del bosque frente a fuegos y de la fauna salvaje. Se relaciona el problema con el manejo de cuencas hidrológicas y la consiguiente distribución de aguas y conservación de nutrientes inorgánicos.

Se consideran los efectos en la evolución del sistema de distintas prácticas forestales (desmalezado, entresacado y poda), de protección (lucha antiplagas) y en particular, en lo que respecta a la interacción con el ganado, los efectos del sobrepastoreo y la necesidad de protección de renovales o plantación de nuevos ejemplares y el suministro de forraje.

Para el caso de un bosque con dos especies deseadas se obtienen los resultados de la evolución del modelo y se analiza su optimización a la luz de las consideraciones previas. Se propone una metodología para la incorporación cuantitativa de otros factores a los modelos generales.

Desde el punto de vista ecológico los sistemas boscosos subtropicales (y tropicales) se diferencian de los presentes en las zonas templadas del planeta en una serie de aspectos que en general los hacen de más fácil degradación al ser sometidos a la explotación humana.

La relación entre la biomasa y el suelo está, al igual que éste, en general poco estructurada y la alteración de la cobertura vegetal conduce rápidamente a la erosión del suelo, lo que lleva con facilidad hacia la desertificación.

La explotación de los ecosistemas boscosos ha conducido en general a su regresión y destrucción en oposición a las naturales sucesión e integración de los ecosistemas que no han sido explotados.

Teniendo como objetivo la supervivencia de la población humana de estos ecosistemas degradados y el mejoramiento de su estándar y posibilidades de vida resulta necesario hacer uso de los recursos naturales (no totalmente renovables) y humanos de la mejor manera posible. Por ello, y teniendo en cuenta las fuertes limitaciones tecnológicas, sociales, económicas y financieras que suelen acompañarlos, es necesario lograr, por un lado, estrategias óptimas de manejo y por otro una participación de la comunidad destinataria en la definición de las necesidades y acciones por seguir con el objeto de lograr su apoyo y colaboración. Sin éstos es poco probable que un proyecto, aun técnicamente adecuado, pueda prosperar y tener éxito al intentar ser aplicado.

Los objetivos ecológicos generales que deseamos alcanzar son la recuperación y conservación del ecosistema forestal y de la flora y fauna originales en equilibrio con la obtención de beneficios sostenidos que permitan satisfacer las necesidades de la comunidad. No se trata de una conservación estática sino que se admiten las acciones que permitan mejorar la productividad del suelo o eventualmente introducir especies nuevas que se integren naturalmente al sistema. Se desean conservar los recursos

naturales asociados: minerales, suelo, agua, fauna y también los relacionados con la recreación y el paisaje.

El manejo del agua (superficial y subterránea) merece un párrafo especial. El marco de análisis natural resulta ser la cuenca hídrica y su ordenación integral. Debe considerarse la circulación del agua superficial, su rendimiento y eventuales picos de escorrentía (evaluación de posibles inundaciones). La cantidad de agua subterránea y su ciclo de recambio así como su composición química son factores que deben tenerse en cuenta en la etapa de planificación.

La idea básica que asumimos al atacar el problema de optimizar el manejo de ecosistemas boscosos es que en general los árboles protegen la productividad de los ecosistemas. Protegen al suelo, que con ser necesario para la productividad como sostén y suministro de nutrientes, está poco desarrollado y es de fácil deterioro por los vientos (los árboles constituyen barreras protectoras), el agua (interceptan la lluvia y evitan el rigor y destrucción producida por las gotas) y el sol (producen sombra). También facilitan el suministro y reciclado de la materia orgánica y el aporte consiguiente de nutrientes al ciclo ecológico lo que a su vez modifica las condiciones de circulación del agua reteniendo la humedad y ayudando a impedir la escorrentía y en última instancia las posibles inundaciones. Para Huxley (1983), en los sistemas de uso de la tierra agroforestales los árboles (componentes perennes maderables) juegan un papel tanto en la productividad como en el autosostén (conservación o mejora de los aspectos ambientales) del sistema. Las características de los árboles que considera ambientalmente beneficiosas son: continuidad de la cubierta vegetal, implicando entre otras consecuencias el aprovechamiento de la radiación solar que se perdería por plantas cortadas estacionalmente, la capacidad de enriquecer el micrositio depositando residuos orgánicos, también de modificar el microclima con efectos favorables sobre el suelo y

las plantas asociadas, capacidad de dar sombra a plantas mas bajas y la tendencia a dominar la economía del agua en el sitio.

Por lo tanto, las técnicas de rozado e incorporación a la agricultura tradicional de los lotes así tratados es una estrategia esencialmente errónea que ha conducido al deterioro y desertificación de grandes extensiones de la superficie terrestre y que configura el resultado contrario exactamente al logro de un ecosistema equilibrado donde se manifieste

- perpetuidad del aprovechamiento de recursos
- producción constante de materia prima
- incorporación de industrias
- aprovechamiento económico

(ver, por ejemplo, Ledesma y Galíndez, 1974)

Lamentablemente, para contrarrestar prácticas depredadoras es preciso contar con información censal adecuada al establecimiento de modelos de manejo. Existen experiencias aisladas de determinación de la evolución de sistemas agrosilvopastoriles (ver, por ejemplo, Saravia Toledo, 1984, Saravia Toledo y Del Castillo, 1988, Karlin y Díaz, 1984) pero no se conoce con precisión como evolucionaría el sistema boscoso frente a distintas acciones de manejo y en interacción con otras variables. Se sabe sin embargo (ver Anónimo, 1985), que el uso de tecnologías tradicionales es altamente inadecuado y conduce al deterioro del sistema y que las tecnologías agrosilvopastoriles existentes no son muy aplicables en general a nuestros problemas locales. Es necesario formular un programa de elaboración de diagnósticos regionales y proyectos de investigación y de organización en los que debe participar necesariamente el poder público además de la iniciativa privada.

La productividad de los sistemas agroforestales multipropósito no puede estimarse a partir de medidas convencionales de productividad de los campos monocultivos (Raintree, 1983). Para estos, la unidad de evaluación es el campo, para aquellos, la empresa. La relación entre los árboles y los cultivos que se les asocian puede ser competitiva, complementaria, suplementaria o alguna mezcla de ellas; cuál predomina en un sistema dado depende no solamente del genotipo, número y espaciamiento de los componentes, sino también de cuáles factores de crecimiento son limitantes para los respectivos componentes en las condiciones reales de campo.

La estrategia de ataque de un problema tan complejo incluye la formulación en etapas de sucesivos modelos de validez creciente que representen al principio el sistema en un modo global, y vayan incorporando detalles, aumentando la especificidad de las nuevas versiones y sacrificando en alguna medida la globalidad. Se consideran entonces las acciones de manejo de estos modelos simplificados en los que resulta más simple el establecimiento de políticas de acción óptima, y se extrapolan los resultados a la acción sobre los más complejos. La acción agroforestal es biológicamente más compleja que muchas formas de uso de la tierra, agrícolas o forestales, de modo que tales sistemas combinados requieren mayores habilidades de manejo (Huxley, 1983). El desarrollo de lo agroforestal necesita un enfoque técnico y socio-económico combinado desde el principio, y el productor rural debe estar involucrado en las opciones en cada etapa como condición prácticamente excluyente para el éxito de un proyecto.

Es necesario, al aplicar estas técnicas de simulación computacional de modelos, establecer comparaciones con conjuntos de datos censales (en caso de poderse obtener). Para ello deben plantearse experiencias de observación y medición en el terreno de las variables y factores modelados. Y confrontar los modelos con conjuntos de datos independientes de los usados en la calibración (ver Neuman y Costanza, 1987).

Un capítulo importante de la formulación del modelo de simulación es su evaluación. Debe ser sometido a pruebas diversas, como ser la aplicación de perturbaciones controladas, análisis de sensibilidad frente a cambios en los parámetros o estados en un cierto rango de análisis. En general estas experiencias definen nuevos sectores de investigación en el problema.

Siguiendo en términos generales la síntesis de objetivos formulada por Swartzman (1980), digamos que la simulación ecológica debe permitir:

- buen ajuste al comportamiento del sistema
- lograr un mejor conocimiento de los mecanismos del sistema
- destacar áreas para ulterior investigación
- suministrar modelos generales
- estudiar los efectos del manejo y control del sistema

El modelo que se construya debe ser entonces evaluado respecto de la eficiencia con la que cubre estos objetivos

En el presente capítulo estudiamos las posibilidades de definición de un modelo global y simplificado del sistema silvopastoril con un bosque en el que se distinguen dos especies por su valor o por su abundancia. Convenimos en decir que la masa forestal está adecuadamente cuantificada si conocemos las cantidades presentes de las dos especies distinguidas y de la masa forestal restante. Estas tres variables usadas para describir el bosque en forma aproximada se denominan "variables de estado". Una cuarta variable de estado representa al ganado, que se desarrolla en interacción parcial con el bosque. La formulación del modelo se basa en el principio de rendimientos decrecientes de la producción ecológica primaria con la intensidad del factor o nutriente,

y en los mecanismos de interacción entre las especies vegetales y el ganado que se desean manejar.

El tipo de ataque descrito para arribar al modelo de la dinámica del sistema es intermedio entre los enfoques clásicos en la materia. Uno de ellos, el llamado "externo", propone 'a priori' una forma arbitraria para el modelo y luego ajusta sus parámetros para hacerlos coincidir con datos experimentales. El método "interno" consiste en analizar todos los posibles mecanismos de interacción entre las variables, no solo aquellas que aparecerán en el modelo final, y a partir de consideraciones teóricas describir con ecuaciones cada uno de estos mecanismos. Luego se combinan en lo posible todas las ecuaciones y se usa el resultado final como descripción global. Nosotros hemos propuesto formas no arbitrarias para el modelo global, sino tipos de ecuaciones avaladas por la experiencia de científicos de diversas ramas de las ciencias naturales, y luego identificamos sus parámetros a partir de datos consignados en muchas experiencias anteriores. Pero no hemos intentado describir explícitamente las interacciones entre todos los factores intervinientes.

Estamos, sin embargo, trabajando en la aplicación de ideas similares a las de Forrester (1973), conocidas como 'system dynamics', para construir un modelo a partir de información cualitativa y aproximadamente cuantitativa sobre interacciones entre las siguientes entidades: ciclo de los principales nutrientes del suelo, acción de la fauna salvaje, acción del fuego, ordenación de cuencas hidrológicas, crecimiento de pastos, contribución de los frutos del monte al forraje, desmalezado, enriquecimiento forestal, etc. En los modelos presentados en este trabajo, estos factores han sido tenidos en cuenta indirectamente, puesto que influyen en los parámetros en forma cuantitativa aunque no explícita. Dichos parámetros habrían sido distintos a los usados en los cálculos de las tablas y figuras presentadas, si hubiéramos admitido el uso de fertilización artificial, o la plantación de renovals, o el suministro de forraje adicional.

El estado rudimentario de nuestros intentos de modelado "interno" nos ha inducido a continuar usando modelos intermedios como los presentados en nuestro trabajo. La limitación más seria de nuestros modelos consiste en que los valores asignados a los parámetros no pueden considerarse ciertos para cualquier rango de evolución de los estados. En razón de ello y sobre todo por consideraciones ecológicas de conservación se han impuesto restricciones a dicha evolución mediante la definición de umbrales de existencia mínima para cada una de las variables de estado.

Los sistemas geográfico-ecológicos silvopastoriles son de gran complejidad. Un número muy grande de factores y variables deben tenerse en cuenta, tanto sus valores como sus interacciones, si se desea, como es nuestro objetivo, definir acciones específicas para su manejo. Para los del Gran Chaco sudamericano ver Morello y Hortt (1984, 1988) y Morello (1986).

Descripción de un modelo simplificado.

Describimos en general el sistema en estudio mediante un sistema de ecuaciones diferenciales controladas de la forma

$$\dot{y} = g(s, y, u)$$

donde  $y(s)$  es el vector de variables de estado y  $g$  es el vector de funciones que rige su dinámica y que dependen de la variable de evolución  $s$ , de los estados  $y$ , y de un vector de controles  $u$ . Estos controles incluyen parámetros ambientales que pueden ser o no pasibles de modificación por el ordenador del sistema. En capítulos previos describimos en detalle los modelos utilizados.

La confrontación contra datos censales de ecosistemas reales es esencial. Sin embargo es posible describir algunas situaciones muy generales. Se presenta complementareidad entre dos especies cuando ambas crecen simultaneamente (aún compitiendo, lo que retarda sus velocidades de crecimiento) y competitividad cuando sus velocidades de crecimiento son de signos opuestos, esto originado por su interacción. Más adelante se presentan ejemplos de estas relaciones.

El sistema que estudiamos en este capítulo está definido por los estados de cuatro variables, las masas de dos especies forestales de explotación deseada y del resto del bosque configuran las tres variables  $y_1$ ,  $y_2$ , e  $y_3$  expresadas en  $\text{ton ha}^{-1}$  y la cuarta,  $y_4$ , es la de una especie de ganado expresada en  $\text{kg ha}^{-1}$ . En cada variable y en el nivel cero de las restantes, los modelos propuestos son del tipo Verhulst. En interacción se tienen términos de la forma  $-cy_1y_2$  en  $g_1$  y  $g_2$  con valores de  $c$  pequeños debido a que hay un efecto de moderada competencia entre las especies forestales y  $-cy_jy_3$  con  $j = 1, 2$  respectivamente con una interacción mayor causada por un valor de  $y_3$  (resto del bosque) nominalmente más alto.

Supondremos que el horizonte de tiempo en consideración (número  $n$  de años) es muy pequeño respecto al requerido para que la especie '1' (quebracho) sea maderable. En estas circunstancias asumiremos que la interacción entre el ganado y la especie '1' es prácticamente nula, de allí que el coeficiente del término de la forma  $-cy_1y_4$  sea tomado igual a cero. Debe tenerse en cuenta aquí que, en caso de repetir la aplicación del modelo al mismo monte por otros  $n$  años, la suposición anterior puede dejar de ser válida porque, por ejemplo, es posible que durante todo el primer período los renovales hayan sido destruidos por el ganado, lo que configuraría una condición inicial distinta para el segundo periodo. Sin embargo, esta situación puede evitarse con un manejo adecuado de clausuras rotativas, con lo que se conseguirían condiciones iniciales idénticas cada vez que comienza un ciclo de  $n$  años.

Con el fin de ilustrar la mayor cantidad de casos posible, tomamos un coeficiente de interacción pequeño pero no nulo para el caso ganado versus especie  $y_2$  (por ejemplo algarrobo), porque es posible que el ramoneo, el pisoteo del suelo, etc, afecte el crecimiento global de esta especie forestal al estar actuando continuamente durante  $n$  años.

También hemos asumido aquí que el ganado obtiene todo el forraje que necesita gracias al monte. En caso de que hubiesemos admitido el suministro de forraje adicional, o la implantación de pasturas, o ambas acciones, habríamos necesitado construir un modelo en el que el forraje apareciera como nueva variable de estado ( $y_5$ ), dado que sería modificable directamente por acciones externas al sistema. En otras palabras, el forraje también podría prestarse al “control por saltos”.

Las políticas de control por saltos consisten en la determinación de un conjunto de períodos en los que se modifica el estado del sistema llevándolo mediante extracciones o agregados a una nueva posición en el espacio de estados. La idea es realizar el control por saltos de modo que se alcance el óptimo de algún objetivo de beneficio convenientemente definido. Sobre las formulaciones más corrientes del control por saltos o impulsional, sus aplicaciones, conexiones con diversas áreas matemáticas y métodos específicos de tratamiento numérico, recomendamos consultar González y Rofman (1985) y las referencias allí indicadas.

Un ejemplo de modelo de evolución basado en las consideraciones previas es,

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1(0.123 - 0.001 y_1 - 0.0003 y_2 - 0.0001 y_3) \\ \dot{y}_2 = y_2(0.136 - 0.0003 y_1 - 0.0013 y_2 - 0.0001 y_3 - 0.0002 y_4) \\ \dot{y}_3 = y_3(0.164 - 0.0005 y_3 - 0.0002 y_4) \\ \dot{y}_4 = y_4(0.919 - 0.0001 y_2 - 0.0009 y_3 - 0.0061 y_4) \end{cases} \quad (\text{A2.1})$$

[A2.11]

Su evolución se considera a partir de los valores de umbral  $x_{10} = 50 \text{ ton ha}^{-1}$ ,  $x_{20} = 34 \text{ ton ha}^{-1}$ ,  $x_{30} = 210 \text{ ton ha}^{-1}$ ,  $x_{40} = 25 \text{ kg ha}^{-1}$

y se representa en la figura A2.1 en función del tiempo con las condiciones iniciales  $x_1 = 59.0$ ,  $x_2 = 38.45$ ,  $x_3 = 225.5$  y  $x_4 = 33.0$ . Las variables evolucionan en un sector maduro del espacio de estados descriptivo de un bosque sano y en crecimiento.

En la figura A2.2 representamos las principales relaciones entre madera producida por un bosque y el ganado que crece bajo monte. Se muestran los casos de variables suplementarias, complementarias y competitivas.

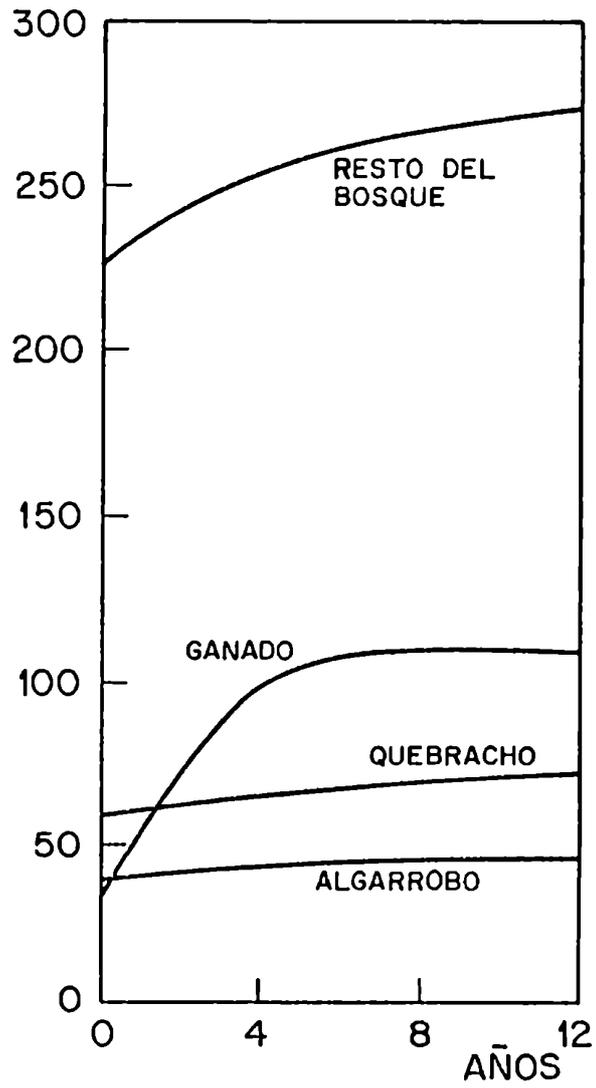
En la figura A2.3 se muestra la relación de crecimiento entre especies forestales sumadas y ganado mediante la representación de la masa de ganado versus la masa vegetal total y también los valores de evolución independiente de una y otro.

En la figura A2.4 se muestran las curvas de crecimiento para diversas condiciones iniciales del sistema definido por la ecuación diferencial (A2.1) donde se observa el efecto de algunas de las restantes variables sobre la evolución de otras en el caso restringido de ausencia de otras. El estudio de optimización se realiza con las cuatro coordenadas, sin embargo es instructivo observar el comportamiento por separado de las mismas.

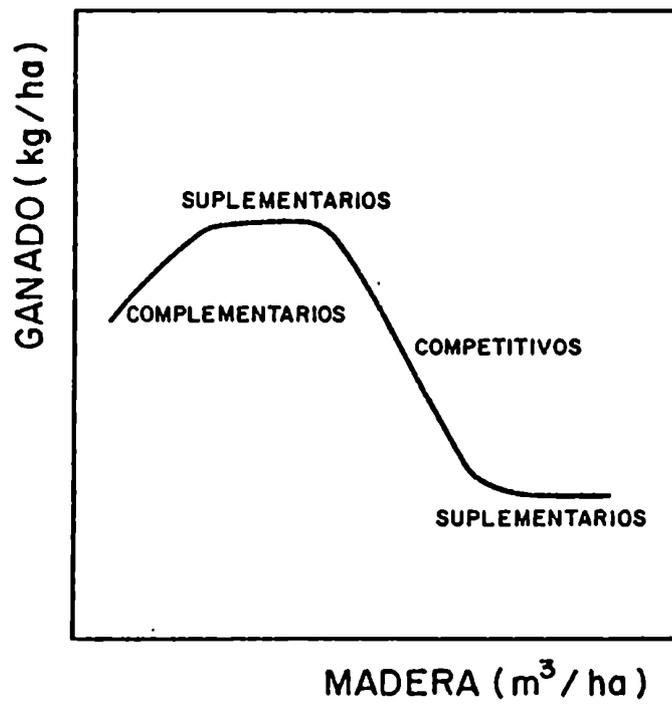
El manejo y su optimización.

Las acciones de manejo sobre el sistema descrito por las ecuaciones previas se retringen en este apéndice a la aplicación de control por saltos (ver Neuman y Costanza, 1987 y 1990). El resultado de tal acción se ha evaluado mediante un funcional de

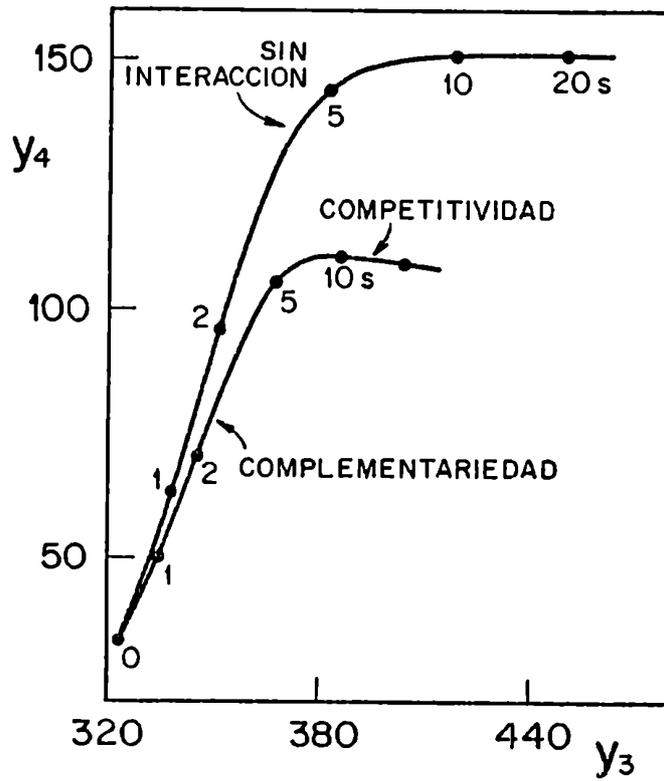
[A2.12]



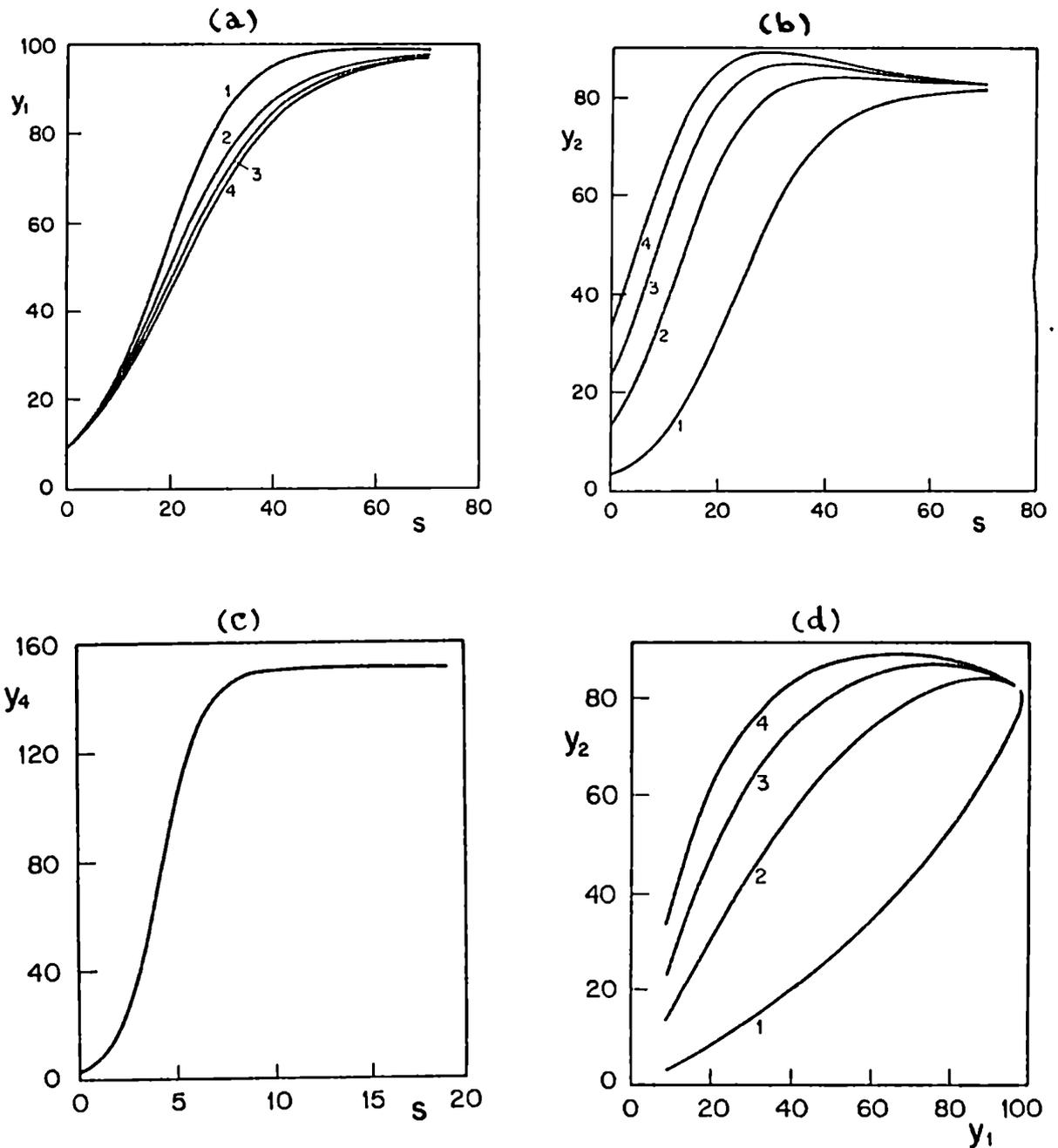
**Figura A2-1:** Evolución de las especies del sistema descrito por la ecuación diferencial (A2-1). Las especies forestales en  $\text{ton ha}^{-1}$  y el ganado en  $\text{kg ha}^{-1}$ .



**Figura A2-2:** Curva de relaciones entre ganado y madera en sistemas silvopastoriles.



**Figura A2.3:** Curvas de masa de ganado versus masa de bosque en los casos del sistema integrado definido por la ecuación diferencial (A2.1) —curva inferior— y la evolución de las mismas variables para el caso hipotético de ausencia de interacción entre ellas —curva superior—.



**Figura A2-4:** Curvas de crecimiento de las especies representadas por las variables

(a)  $y_1$  (en presencia de  $y_2$ ) en función de  $s$

(b)  $y_2$  (en presencia de  $y_1$ ) en función de  $s$

(c)  $y_4$  (sola) en función de  $s$

(d)  $y_2$  vs.  $y_1$  en ausencia de las restantes.

Los números en las curvas identifican las correspondientes a las mismas condiciones iniciales. Se representan en la restricción del espacio de estados.

beneficio de la forma

$$J = q(x - x_0) + \int_t^T f(y(s))e^{-c(s-t)} ds \\ + \sum_{i=1}^n (D_0 + K(z^i))e^{-c(s_i-t)} + g_0(y(T) - x_0)e^{-c(T-t)}$$

donde las variables de estado deben satisfacer la ecuación diferencial (A2.1) con las condiciones iniciales  $y(t) = x$ . En este funcional el primer término representa la valuación inicial del sistema a través de los valores de sus variables de estado, es de la forma

$$q(x - x_0) = q_{10}(x_1 - x_{10}) + q_{20}(x_2 - x_{20}) + q_{30}(x_3 - x_{30}) + q_{40}(x_4 - x_{40})$$

donde las constantes  $q_{i0}$  representan los precios unitarios de cada recurso. La integral del segundo sumando calcula los costos corrientes de explotación, tomamos un valor constante  $f_0$  para la función  $f$ . El tercer sumando calcula el beneficio de la realización del control por saltos,  $D_0$  es un vector de costos asociados a la decisión de alterar el estado de las especies y  $K$  es la función de beneficio correspondiente. El restante sumando calcula el valor residual del sistema al cabo del período de gestión. Los coeficientes de precio,  $g_{i0}$ , con  $i = 1, 2, 3, 4$ , tanto en  $K$  como en este último sumando son un vector de constantes, y la forma de  $K$  es

$$K(z^i) = \sum_{j=1}^4 (g_{j0} - c_{j0}z_j^i)z_j^i$$

donde, además, los  $c_{j0}$  con  $j = 1, 2, 3, 4$  son coeficientes que penalizan las extracciones de gran magnitud. Los términos están llevados a valor neto presente por las exponenciales negativas de la tasa de interés multiplicada por el tiempo transcurrido desde el momento inicial.

[A2.17]

**Tabla A2-I: Resultado de la evolución del sistema con  
condición inicial  $x_1 = 59.0$ ,  $x_2 = 38.45$ ,  $x_3 = 225.5$ ,  $x_4 = 33.0$ .**

años	estados				cortes				resultados netos			
									anual	descontados		
	subóptimo											
0	59.00	38.45	225.50	33.00	0.0	0.0	0.0	0.0	-418.31	-418.31	-418.31	
1	60.70	39.85	234.80	51.66	10.7	5.8	0.0	0.0	471.87	425.11	6.79	
2	51.92	35.37	242.49	71.33	0.0	0.0	7.5	0.0	11.34	9.20	15.99	
3	53.80	36.57	241.83	88.05	0.0	0.0	6.8	0.0	8.33	6.09	22.09	
4	55.62	37.62	241.19	99.72	5.6	3.6	6.2	34.7	354.60	233.59	255.67	
5	51.93	35.28	242.09	83.18	0.0	0.0	7.1	0.0	9.52	5.65	261.32	
6	53.80	36.41	241.37	96.55	0.0	0.0	6.4	0.0	6.16	3.29	264.61	
7	55.63	37.42	240.88	104.96	0.0	0.0	5.9	0.0	3.82	1.84	266.45	
8	57.39	38.34	240.59	109.74	0.0	0.0	5.6	0.0	1199.40	520.63	787.08	
	subóptimo menos eficiente											
0	59.00	38.45	225.50	33.00	9.0	4.5	0.0	0.0	-33.60	-33.60	-33.60	
1	51.96	35.53	234.80	51.68	0.0	0.0	0.0	0.0	-19.00	-17.12	-50.72	
2	53.83	36.86	242.49	71.34	0.0	0.0	7.5	0.0	11.33	9.20	-41.52	
3	53.65	38.02	241.83	88.05	5.6	4.0	6.8	0.0	273.66	200.10	158.58	
4	51.93	35.14	241.19	99.74	0.0	0.0	6.2	0.0	5.29	3.49	162.06	
5	53.81	36.18	240.77	106.78	0.0	0.0	5.8	0.0	3.28	1.95	164.01	
6	55.64	37.14	240.53	110.70	0.0	0.0	5.5	0.0	2.10	1.13	165.14	
7	57.41	38.04	240.40	112.73	0.0	0.0	5.4	0.0	1.47	0.71	165.84	
8	59.12	38.89	240.33	113.78	0.0	0.0	5.3	0.0	1132.14	569.27	735.11	
	extracción de la renta anual											
0	59.00	38.45	225.50	33.00	0.0	0.0	0.0	0.0	-418.31	-418.31	-418.31	
1	60.70	39.85	234.80	51.66	1.7	1.4	9.3	18.7	117.83	106.16	-312.09	
2	60.70	39.85	234.80	51.66	1.7	1.4	9.3	18.7	117.83	95.63	-216.46	
3	60.70	39.85	234.80	51.66	1.7	1.4	9.3	18.7	117.83	86.16	-130.30	
4	60.70	39.85	234.80	51.66	1.7	1.4	9.3	18.7	117.83	77.62	-52.68	
5	60.70	39.85	234.80	51.66	1.7	1.4	9.3	18.7	117.83	69.93	17.25	
6	60.70	39.85	234.80	51.66	1.7	1.4	9.3	18.7	117.83	63.00	80.25	
7	60.70	39.85	234.80	51.66	1.7	1.4	9.3	18.7	117.83	56.76	134.00	
8	60.70	39.85	234.80	51.66	1.7	1.4	9.3	18.7	117.83	234.13	468.13	

Cuando se aplican a este problema los métodos desarrollados en el capítulo 3 (ver Neuman y Costanza, 1990) se obtiene el resultado subóptimo que se presenta en la tabla A2·I acompañado de otro resultado con rendimiento no tan bueno y del resultado obtenido al aplicar la política de cortar cada año lo producido en el mismo (extracción de la renta).

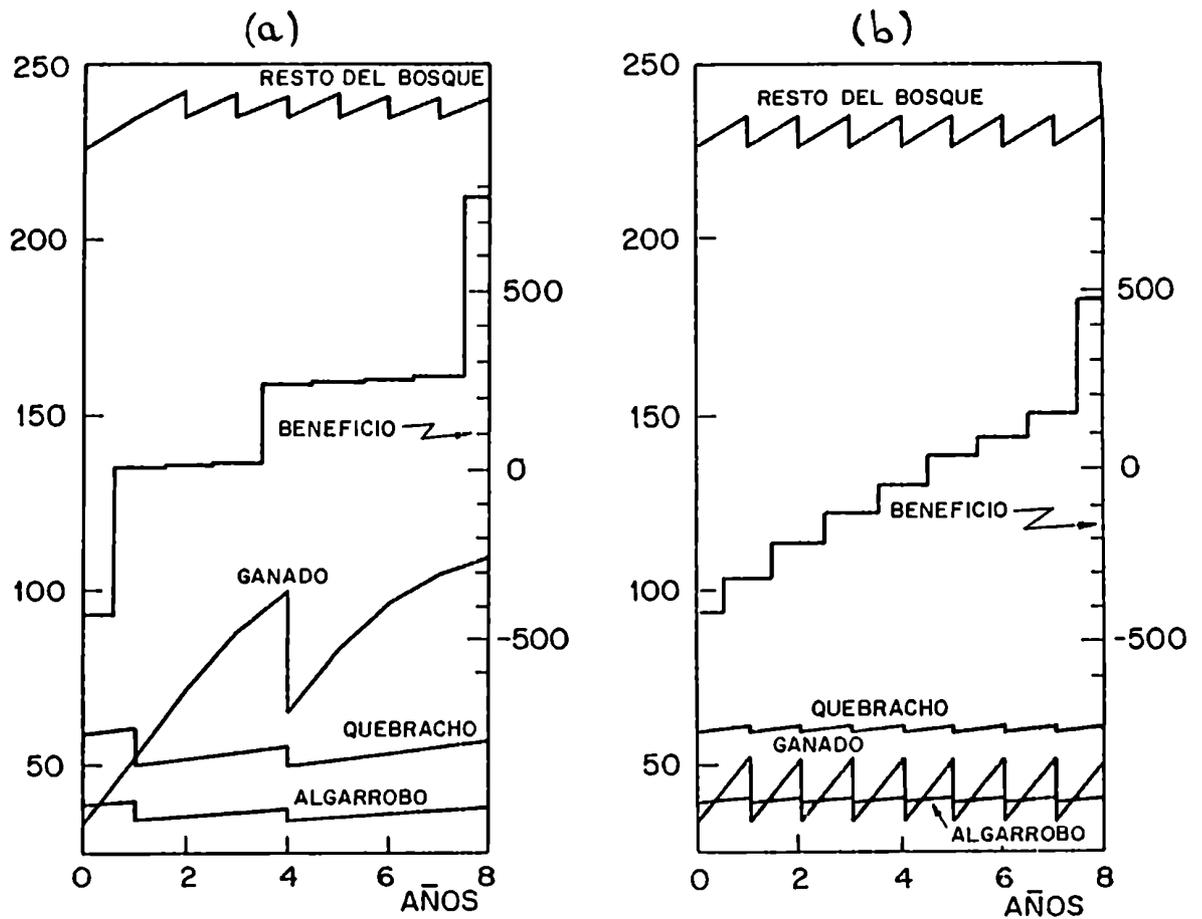
En la figura A2·5 se representan el primero (a) y tercero (b) de los casos mencionados.

### Conclusiones.

Este es el resultado de atacar el problema propuesto, a través de la construcción de un modelo simplificado para la evolución del sistema bosque-ganado, del diseño de una función de beneficio suficientemente general como para incluir objetivos económicos y ecológicos a optimizar, y finalmente mediante la resolución numérica del problema matemático planteado por las ecuaciones generadas por los pasos anteriores.

De los resultados numéricos expuestos en la tabla A2·I se puede concluir lo siguiente:

- la solución adoptada no es la habitual. Difiere significativamente de las estrategias más usadas (de la depredadora, que consiste en talar todo el bosque al principio; tanto como de la conservacionista, que sólo extrae anualmente la renta del sistema).
- este camino mantiene al sistema dentro de un margen de seguridad ecológica. El estado final corresponde a un sistema sano y en crecimiento.
- la utilidad económica que proporciona la política subóptima obtenida es considerablemente superior a las que producen las estrategias clásicas.



**Figura A2-5:** Curvas de evolución controlada de las variables de estado según la  
 (a) política subóptima de la tabla A2-I,  
 (b) extracción de la renta anual.  
 Se representa en otra escala el resultado económico de dicha política.

- el flujo de dinero que recibe el productor es satisfactorio. El supuesto productor que maneja este sistema, recibe el producto de sus extracciones en tres momentos: al final del segundo, cuarto y octavo años.
- el esfuerzo computacional requerido para determinar la estrategia es de dimensiones usuales para problemas manejables por computadoras personales.

Consideremos el caso de una unidad económica en la Cuña Boscosa en la Provincia de Santa Fe, R. Argentina. Se trata de un lote mediano de 2000 hm<sup>2</sup> aproximadamente con recursos naturales promedio en el que los problemas ecológicos principales son la erosión hídrica y la explotación irracional del bosque asociada al desmonte. Los objetivos son la explotación racional y ecológicamente moderada, la inserción gradual de ganadería bajo monte y agricultura y en una etapa posterior la industrialización progresiva. El lote se encuentra en el Parque Chaqueño. Es una zona con monte en la cual se presentan esteros, pantanos, bañados y cañadas. Las aguas subterráneas son muy profundas con sedimentos salinizados. Los veranos son cálidos y los inviernos moderados. Las condiciones sociales de la población local son muy malas con familias muy numerosas, alta mortalidad infantil atención médica deficiente, dieta deficiente, mala escolaridad. Las construcciones son de troncos con relleno de barro y paja. Los techos de chapa, madera o paja. La economía tiene una base eminentemente forestal. La evaluación de la gestión de este lote debe incluir los factores mencionados en este apéndice.

### A3. EL MODELO LOGÍSTICO Y EL PROBLEMA DE IDENTIFICACIÓN

Describimos en general los sistemas en estudio mediante un sistema de ecuaciones diferenciales controladas de la forma

$$\dot{y} = g(s, y, u)$$

donde  $y(s)$  es el vector de variables de estado y  $g$  es el vector de funciones que rige su dinámica y que dependen de la variable de evolución  $s$ , de los estados  $y$ , y de un vector de controles  $u$ .

Cuando se considera la evolución de la biomasa de una especie en un medio que le ofrece una provisión limitada de nutrientes un modelo generalizador clásico es el de Verhulst, i.e.

$$g(y) = y(a - by) = ay(1 - (y/k))$$

donde  $k = a/b$  es la capacidad receptiva del medio o techo ecológico, es, asimismo, el valor al que tiende la población en el mediano plazo.

Cabe destacar que existe un amplio conjunto de modelos asintóticos análogos como por ejemplo los de Gompertz

$$g(y) = ry \log(k/y),$$

o de decaimiento exponencial

$$g(y) = ry(1 - e^{-ay}),$$

[A3.1]

todos tienen en común la propiedad de tender a un nivel fijo y limitado de la masa de la especie y el ajuste dependerá de los datos censales. Cuando el suministro de éstos es escaso o nulo el modelo global de Verhulst es satisfactorio pues es robusto y conceptualmente simple. Este modelo es un caso particular del propuesto por L. von Bertalanffy (Adelani y Rodin, 1989), que se adapta mejor en algunos casos al crecimiento de especies animales.

Hay un cuerpo muy amplio y creciente de bibliografía sobre modelos de crecimiento de especies vivas y ecología matemática (ver Svirezhev, 1983), algunos de los artículos más recientes (que a su vez remiten a una bibliografía mas amplia la que complementa el material citado en el apéndice A1) son mencionados a continuación:

La representación matemática de la evolución de poblaciones forestales utiliza numerosos tipos de modelos dinámicos (Houllier, 1988). Se pueden mencionar dos formas de ataque al problema de la elección del modelo:

- Empírica (situación  $\rightarrow$  modelo  $\rightarrow$  teoría), o externa. Se trata de identificar el modelo entre una familia preestablecida, a partir de datos censales. Este proceso suele tener la dificultad de que los parámetros tienen baja significación física o biológica y que puede no ser muy adecuada la extrapolación fuera de la zona de datos censales.
- Teórica (teoría  $\rightarrow$  modelo  $\rightarrow$  situación), o interna. Se trata de deducir la forma del modelo a partir de consideraciones teóricas relativas a las propiedades físicas o biológicas. El problema, en el caso de bosques es que no suelen conocerse en detalle los mecanismos, también sucede que debe multiplicarse el número de parámetros lo que puede generar inestabilidad.

Cromer (1988) examina modelos logísticos para las extracciones en ambientes estacionales. Estudia las soluciones periódicas y acota sus valores extremos para establecer esquemas de extracción (ver el apéndice A1). También Smith (1986) estudia modelos de competencia entre especies con comportamiento periódico. Mickens (1988) determina soluciones exactas de la ecuación diferencial que modela el crecimiento de una población sometida a crecimiento logístico y advección lineal. De este modo es posible incluir las variaciones espaciales.

Definamos  $d$  por la expresión

$$e^d = (k - x)/x$$

para que la solución de la ecuación de Verhulst pueda escribirse

$$y = \frac{k}{1 + e^{d-at}}$$

La derivada primera,  $y'(t)$ , es siempre mayor que 0, pues es  $g(y)$ , así la función es creciente en todo su dominio. Además está acotada por  $k$ .

En la figura A3.1 ilustramos varios ejemplos de curvas logísticas, para diversos valores de sus parámetros.

Resulta interesante notar que es posible despejar la variable de evolución  $s$  (el estado  $y$  y su derivada no se anulan), dada la condición inicial  $(t, x)$ , resulta:

$$s(y) = t + \log \left( \left( \frac{y(k-x)}{x(k-y)} \right)^{\frac{1}{a}} \right).$$

En los sistemas con varias variables y controles la forma de inclusión de la interacción entre estos configura uno de los detalles delicados de la modelización.

[[A3.3]

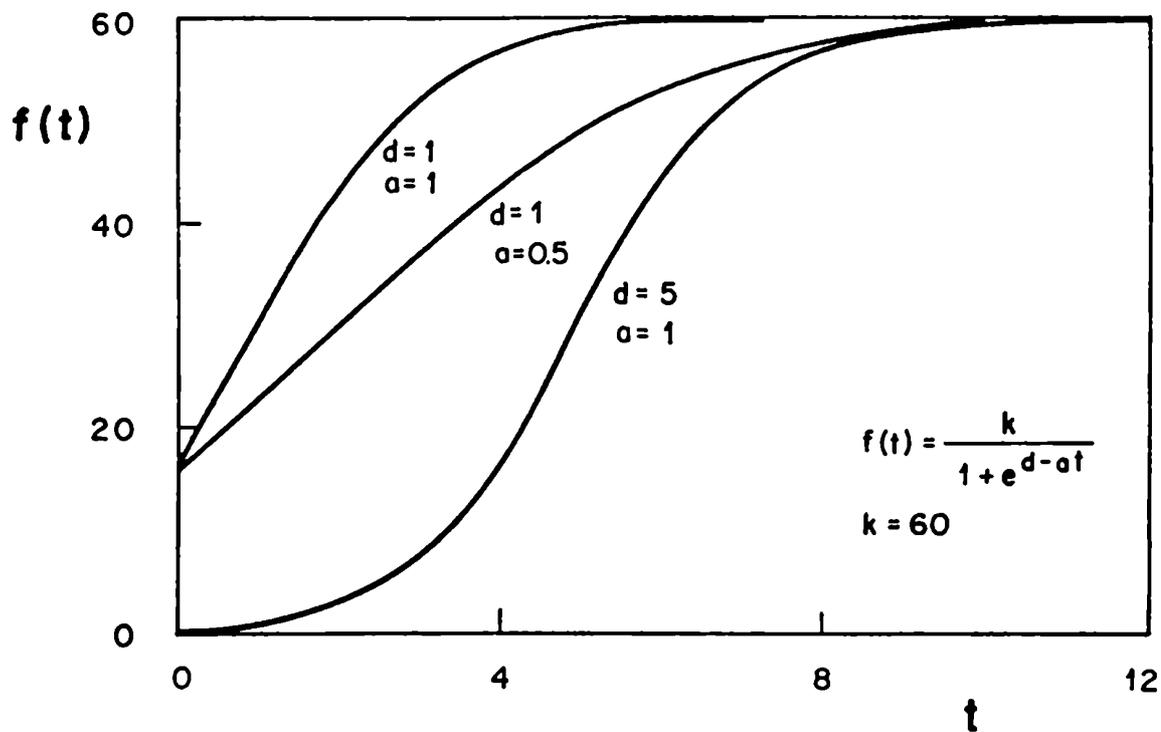


Figura A3-1: Ejemplos de distribuciones logísticas para diversos valores de  $k$ ,  $d$  y  $a$ .

Los modelos generales de interacción competitiva, por ejemplo de dos especies, del tipo Lotka-Volterra tienen,

$$g_1 = ay_1(k_1 - y_1 - \alpha y_2)/k_1$$

$$g_2 = py_2(k_2 - y_2 - \beta y_1)/k_2$$

Otros tipos de modelos, como los del tipo cadena alimentaria, tienen, en cambio,

$$g_1 = y_1(a_{10} - a_{11}y_1 - a_{12}y_2)$$

$$g_2 = y_2(-a_{20} + a_{21}y_1 - a_{23}y_2)$$

$$g_n = y_n(-a_{n0} + a_{n,n-1}y_{n-1})$$

Los efectos de interacción se presentan como términos bilineales con un coeficiente cuyo signo indica el tipo de interacción y su magnitud el resultado de los distintos efectos parciales. Debe tenerse en cuenta que los efectos suelen ser el resultado de múltiples causas en interacción.

La parte lineal de todos los modelos formales hasta aquí exhibidos indica la evolución de la variable aislada en ausencia de las restantes y con baja densidad.

La curva de crecimiento de una sola especie según el modelo logístico de Verhulst definido por

$$g(y) = y(a - by)$$

tiene una forma sigmoidea característica. Cuando varias especies interactúan, las ramas de sus curvas de crecimiento en baja densidad conservan la forma anterior pero al aumentar las densidades y pesos relativos de especies en interacción los comportamientos de cada especie pueden ser muy diversos y no es posible establecer *a priori* su evolución.

Hemos justificado la elección de funciones  $g$  polinomiales para regir la dinámica de crecimiento de especies forestales. Dada la esencial no linealidad de tales modelos es necesario diseñar métodos de identificación adaptados a ellos.

En el caso de una especie forestal, cuya masa se representa con la variable  $y_1$  ( $y$ , en tal caso,  $y_2$ , la restante coordenada de  $y$ , representa la masa del resto del bosque), podemos, por ejemplo, considerar un modelo de cinco parámetros,  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $p$ , y  $q$  con  $g$  de la forma

$$g(y_1, y_2) = (y_1(a - by_1 - cy_2), y_2(p - cy_1 - qy_2))$$

y determinar valores adecuados de los parámetros a partir de datos censales.

Estudiemos en primer término el caso de un rodal implantado donde el problema se reduce a una sola variable de estado.

Para este tipo de evolución propusimos el modelo logístico dado por la ecuación diferencial

$$\begin{cases} \dot{y} = g(y(s)) \\ y(t) = x \end{cases}$$

donde  $g(y) = y(a - by)$ .

Deseamos estimar los parámetros  $a$  y  $b$  del modelo. En este caso en que  $r = 1$  ( $r$  es la dimensión del sistema definido en el capítulo 2) es posible seguir dos caminos para la estimación.

En primer término, como conocemos la solución de la ecuación diferencial previa, a saber,

$$y(s) = \frac{k}{1 + \frac{k-x}{x} e^{-a(s-t)}}$$

donde  $k = a/b$ , podemos encontrar la relación entre las variables

$$Y(s) = \log_e\left(\frac{k}{y(s)} - 1\right)$$

[[A3-6]

y

$$X(s) = s - t$$

de donde se obtienen los valores de  $-a$  y de  $\log_e((k-x)/x)$  a partir de los datos censales.

En la tabla A3·I incluimos los datos de crecimiento en volumen de una especie implantada a partir de los que obtenemos la pendiente y la ordenada al origen mencionadas. Para cada  $k = a/b$  se obtienen  $b$  y  $x$ , y puede evaluarse la bondad del ajuste mediante  $(\rho(k))^2$  donde  $\rho(k)$  es el coeficiente de correlación lineal entre la variable  $y(s)$  y la  $\hat{y}(s)$  calculada a partir de los valores estimados de los parámetros reemplazados en la expresión de la solución de la ecuación diferencial.

Como es necesario elegir  $k$  para calcular  $Y(s)$ , realizamos el ajuste para varios valores de  $k$  y obtenemos de la figura A3·2, donde representamos  $(\rho(k))^2$  vs.  $k$ , el valor óptimo para  $k$ .

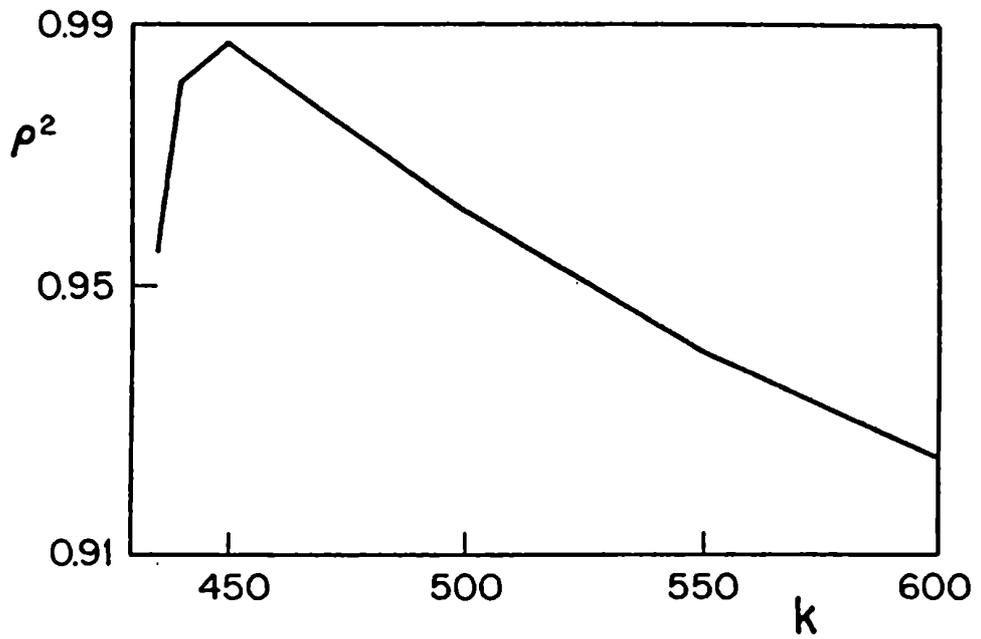
En la tabla A3·II exponemos los resultados del ajuste para distintos valores de  $k$ . Resultan así los valores estimados de  $\hat{a} = 0.342$  y  $\hat{b} = 0.00076$ , lo que conlleva  $\hat{k} = 450$ .

Una segunda forma de obtener los parámetros en este caso (cuando  $r > 1$ , de las dos metodologías será la única factible), es utilizar la derivada numérica de los datos (ver tabla A3·I) y establecer el modelo “ $z$  vs.  $y$ ” definido por  $z = y(a - by)$  mediante regresión no lineal, lo que produce  $\hat{a} = 0.37$  y  $\hat{b} = 0.00087$ , y que coincide muy satisfactoriamente con el resultado del método previamente desplegado.

Consideremos ahora el caso de una especie forestal que crece en un bosque nativo. El problema de la identificación de los parámetros del modelo definido al principio correspondiente a  $r = 2$  presenta dos grandes dificultades de bien distinto origen.

**Tabla A3-I:** Crecimiento de rodal implantado. Los volúmenes *y* se obtuvieron en Anónimo (1981).

año	volumen	derivada (aproximada numéricamente)
<i>s</i>	<i>y</i> $m^3 ha^{-1}$	<i>z = \dot{y}</i> $m^3 ha^{-1} año^{-1}$
3	32.2	
4	60.9	
5	97.3	38.1
6	135.7	39.0
7	173.5	32.7
8	202.9	34.7
9	242.8	36.5
10	273.6	28.9
11	301.6	26.5
12	326.8	24.0
13	349.9	22.4
14	371.4	30.2
15	390.4	17.4
16	406.5	15.0
17	420.5	
18	432.4	



**Figura A3-2:** El cuadrado del coeficiente de correlación lineal para distintos valores de  $k = a/b$ , donde  $a$  y  $b$  son los p arámetros del modelo logístico.

**Tabla A3-II:** Valores estimados de los parámetros para diversos valores de  $k = a/b$ .

$k$	$\rho^2$	$\hat{a}$	$\hat{b}$	$\hat{x}(t = 0)$
435	0.955	0.408	0.00094	12.53
440	0.981	0.375	0.00085	15.74
450	0.987	0.342	0.00076	19.43
500	0.961	0.276	0.00055	28.16
550	0.940	0.247	0.00045	32.42
600	0.924	0.230	0.00038	35.07

**Tabla A3·III:** Crecimiento de especie estimada y bosque ambiente naturales (Datos sintéticos basados en el crecimiento de una especie local)

año	volumen				velocidad de crecimiento (aproximada numéricamente)	
<i>s</i>	<i>y</i> <sub>1</sub>	<i>y</i> <sub>2</sub>	$\tilde{y}_1$	$\tilde{y}_2$	$\tilde{y}_{d1} = \dot{\tilde{y}}_1$	$\tilde{y}_{d2} = \dot{\tilde{y}}_2$
	<i>m</i> <sup>3</sup> <i>dam</i> <sup>-2</sup>				<i>m</i> <sup>3</sup> <i>dam</i> <sup>-2</sup> <i>año</i> <sup>-1</sup>	
4	0.16	1.06	0.162	1.131		
5	0.18	1.21	0.164	1.145		
6	0.16	1.09	0.167	1.160	0.00282	0.0143
7	0.17	1.19	0.170	1.174	0.00299	0.0155
8	0.17	1.25	0.173	1.188	0.00173	0.00737
9	0.19	1.13	0.174	1.188	0.00112	-0.00177
10	0.21	1.26	0.176	1.187	0.00185	-0.00151
11	0.14	1.22	0.177	1.186	0.00177	-0.00138
12	0.18	1.21	0.179	1.184	0.00226	-0.00382
13	0.15	1.32	0.181	1.183	-0.00201	0.0148
14	0.20	1.13	0.177	1.211	0.00036	0.0215
15	0.18	1.11	0.183	1.221	0.00667	0.00866
16	0.19	1.13	0.188	1.231	0.00584	0.0101
17	0.21	1.26	0.194	1.241	0.00580	0.0121
18	0.18	1.25	0.200	1.251	0.00632	-0.00324
19	0.21	1.29	0.206	1.238	0.00473	-0.00564
20	0.20	1.34	0.210	1.244	0.00290	0.00763
21	0.22	1.28	0.213	1.250	0.00316	0.00602
22	0.26	1.10	0.216	1.256		
23	0.20	1.22	0.219	1.262		

Por un lado es difícil hallar datos censales de dinámica de crecimiento de una especie forestal útil en el seno de un bosque natural; razón por la cual, para ejemplificar las técnicas de estimación descriptas en este apéndice, será necesario utilizar datos parcialmente estimados a partir de datos de crecimiento de una especie del norte de la Provincia de Santa Fe, Argentina. Los mismos aparecen en la tabla A3-III.

Por otro, no resulta fácil la identificación de los parámetros del modelo en este caso, por la no-linealidad y por no contar con una solución analítica de la ecuación diferencial cuando la dimensión  $r$  supera la unidad. En las aplicaciones resolvemos numéricamente las ecuaciones con rutinas basadas en los algoritmos de tipo Runge-Kutta; existen otros métodos de aproximación que usan soluciones inferiores y superiores (ver Ladde et al., 1985) y métodos iterativos asociados a ellas. Continuando las ideas presentadas en la resolución del caso  $r = 1$ , formamos la matriz  $M(a, b, c, p, q)$  siguiente, que abreviaremos  $M$ ,

$$M = \begin{pmatrix} \tilde{y}_{d1}^1 - \tilde{y}_1^1(a - b\tilde{y}_1^1 - c\tilde{y}_2^1) & \tilde{y}_{d2}^1 - \tilde{y}_2^1(p - c\tilde{y}_1^1 - q\tilde{y}_2^1) \\ \tilde{y}_{d1}^2 - \tilde{y}_1^2(a - b\tilde{y}_1^2 - c\tilde{y}_2^2) & \tilde{y}_{d2}^2 - \tilde{y}_2^2(p - c\tilde{y}_1^2 - q\tilde{y}_2^2) \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{y}_{d1}^N - \tilde{y}_1^N(a - b\tilde{y}_1^N - c\tilde{y}_2^N) & \tilde{y}_{d2}^N - \tilde{y}_2^N(p - c\tilde{y}_1^N - q\tilde{y}_2^N) \end{pmatrix}$$

(para conformarla utilizamos las variables  $\tilde{y}$  y no las  $y$  en razón de la falta de regularidad de estas últimas).

A partir de las variables  $y$  realizamos una linealización a trozos de la trayectoria en el espacio  $(y_1, y_2)$  tomando los puntos en grupos, obteniendo la recta de mínimos cuadrados de las distancias en cada coordenada alrededor de las respectivas medias aritméticas. Consideramos como nuevos puntos los del espacio  $(\tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$  así obtenidos.

Deseamos hallar, por cuadrados mínimos, los valores  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $p$ , y  $q$ , que hagan mínimo al  $\det(M^t M)$ , (ver Bates y Watts, 1987) el que, aplicando la clásica identidad de Lagrange (ver Gradshtein y Ryzhik, 1980) puede escribirse

$$F = \det(M^t M) = \sum_{1 \leq i < j \leq N} ((\tilde{y}_{d1}^i - \tilde{y}_1^i(a - b\tilde{y}_1^i - c\tilde{y}_2^i))(\tilde{y}_{d2}^j - \tilde{y}_2^j(p - c\tilde{y}_1^j - q\tilde{y}_2^j)) - (\tilde{y}_{d1}^j - \tilde{y}_1^j(a - b\tilde{y}_1^j - c\tilde{y}_2^j))(\tilde{y}_{d2}^i - \tilde{y}_2^i(p - c\tilde{y}_1^i - q\tilde{y}_2^i)))^2$$

Es deseable que la determinación del mínimo de la función  $F$  de los parámetros  $a, \dots, q$ , no dependa fuertemente de los datos  $\tilde{y}$ , ya que éstos, en general, estarán modificados por errores de observación que no pueden dejar de ser tenidos en cuenta. Se observa en la práctica que los valores de los parámetros estimados a partir de la minimización de  $F$  no resisten variaciones moderadamente significativas de los datos  $(s, y_1, y_2)$  pese a que son linealizados a trozos por el procedimiento que los transforma en los  $(s, \tilde{y}_1, \tilde{y}_2)$ . Siguiendo las ideas que permiten la aplicabilidad de los modelos de Schaeffer (ver D'Attellis, 1983) para la determinación de parámetros de modelos en poblaciones de peces con el objetivo de su explotación y control, y notando las dificultades para obtener datos empíricos de calidad mínima, es que puede superarse la dificultad originada en la inestabilidad de los resultados de la estimación de parámetros mediante la técnica de fijar el parámetro de interacción competitiva  $c$  del modelo que identificamos. Un valor razonable en el caso de los datos de la tabla A3·III es  $c = 0.001$ , un orden de magnitud menor que los que corresponderían a las variables  $\tilde{y}_1$  e  $\tilde{y}_2$  por separado, obtenidos mediante las técnicas de ajuste logístico descrito en este apéndice. Con esta elección, en principio arbitraria, pero basada en las propiedades clásicas de los sistemas autónomos bivariados que representan sistemas competitivos lentos (la competencia es menos importante que el crecimiento de cada variable, ver Coddington y Levinson, 1955) el problema se reduce a obtener  $a$ ,  $b$ ,  $p$ , y  $q$  tales que minimicen la

función parcial  $F_{0.001}$  dada por

$$F_{0.001} = \sum_{1 \leq i < j \leq N} ((\tilde{y}_{d1}^i - \tilde{y}_1^i(a - b\tilde{y}_1^i - 0.001\tilde{y}_2^i))(\tilde{y}_{d2}^j - \tilde{y}_2^j(p - 0.001\tilde{y}_1^j - q\tilde{y}_2^j)) - (\tilde{y}_{d1}^j - \tilde{y}_1^j(a - b\tilde{y}_1^j - 0.001\tilde{y}_2^j))(\tilde{y}_{d2}^i - \tilde{y}_2^i(p - 0.001\tilde{y}_1^i - q\tilde{y}_2^i)))^2$$

Para obtener los parámetros estimados minimizando la función  $F_{0.001}$  utilizamos la rutinas habituales de biblioteca de programas, y con los valores de los mismos se resuelve el sistema definido por el modelo —sin los términos asociados al control impulsional— y se comparan los valores respectivos de las variables. Con buen ajuste en el caso de los datos previamente expuestos se obtienen  $\hat{a} = 0.04002$ ,  $\hat{b} = 0.11998$ ,  $\hat{p} = 0.07917$ , y  $\hat{q} = 0.06099$  los que, con la precisión de los datos, permiten escribir el sistema

$$\begin{cases} \dot{y}_1 = y_1(0.04 - 0.12y_1 - 0.001y_2) \\ \dot{y}_2 = y_2(0.08 - 0.001y_1 - 0.06y_2) \end{cases}$$

Con información escasa, los métodos planteados proporcionan valores estables de los parámetros  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $p$ , y  $q$  de los modelos definidos por las funciones  $g$  dadas en cada caso, aún en el caso de datos de crecimiento de las especies que incluyen imprecisiones del orden del 10% (y hasta del 20%). Sin embargo,

- (a) Es conveniente realizar experiencias para determinar el tipo de datos adecuados para utilizar como información primaria. En tal sentido, por las necesidades del proceso de ajuste, convendría probablemente determinar valores de crecimiento en el corto plazo para un buen número de distintas condiciones de partida. En tal caso se podrían utilizar las aproximaciones definidas por los desarrollos en serie de potencias para seguir otra vía de identificación.

- (b) Un complemento del camino de identificación desarrollado en este trabajo sería construir un proceso iterativo de determinación de los parámetros del modelo definido por la función  $g$ : reobtener el coeficiente  $c$  a partir de los restantes estimados luego de fijarlo; con el nuevo  $c$  así obtenido determinar nuevos  $a$ ,  $b$ ,  $p$ , y  $q$ , etcétera.
- (c) Lo precedente podría desarrollarse para el caso en que no se postularan iguales los coeficientes de interacción en ambas ecuaciones, lo cual llevaría a considerar un sexto coeficiente  $r$  y modificar los métodos adecuadamente. En el apéndice A5 se presenta otra estrategia para la realización de la identificación.

En el apéndice A4 se establece una estrategia adicional para obtener el modelo del sistema en el caso de considerar la aplicación de controles clásicos.

## A4. FERTILIZACIÓN DE BOSQUES COMO SISTEMA DE CONTROL

*Eucalyptus rostrata* Schlecht. (*Eucalyptus camaldulensis* Dehnh.) es un árbol alto (18-45m) de rápido crecimiento (Weber, 1986), tiene una madera dura y moderadamente pesada. Las semillas, que son de origen australiano aunque se obtienen actualmente en otros países, son muy pequeñas. Comienza su desarrollo en vivero en potes plásticos durante 18-24 semanas. Requiere suelos pesados y gruesos a bajas altitudes, más de 800 mm de lluvia o acceso a abundante agua subterránea. Suele requerir cuidados adicionales y riego durante el primer año. Se utiliza para reforestación. Su sistema de raíces es útil para proteger la cuencas altas de la erosión.

El manejo de rodales de eucalipto se realiza en dos fases, la temprana, donde el énfasis reside en la implantación y fertilización, y la madura donde se los maneja mediante talas selectivas periódicas. En el artículo que se incluye a continuación (Costanza y Neuman, 1990, traducido en CERIDE) se tratan métodos para el manejo en la primera fase, y, a continuación se dan los parámetros del modelo que han de usarse en la segunda.

En función de los tratamientos que se realizan en la etapa temprana de conformación del rodal se obtendrán distintas propiedades en la madera que se extraiga. No hay suficientes estudios al respecto y no se conoce acabadamente la influencia de la velocidad de crecimiento en esas propiedades. Por ejemplo, Bamber et al. (1982) estudian el efecto del crecimiento rápido en las propiedades de la madera de eucalipto. El crecimiento a la máxima velocidad posible se logra por la combinación

de: preparación del sitio, control de malezas e insectos y fertilización. La madera de los árboles que crecieron rápidamente fue similar a la de los de crecimiento normal en lo que respecta a la densidad y dimensiones de fibra, pero los vasos resultaron mas pequeños y menos numerosos.

Un aspecto complementario que ha merecido atención es el del manejo combinado de eucalipto. Redhead et al. (1983) reportan la asociación de *Eucalyptus rostrata* con maíz y leguminosas, donde la aplicación de los árboles fue para combustible y postes. Deben realizarse, sin embargo, experiencias para evaluar los rendimientos de estos sistemas agroforestales.

Los métodos que se presentan a continuación son aplicables también a sistemas con ambiente controlado. En el artículo siguiente se menciona esa posibilidad en relación a los CELSS. Para el caso de aplicaciones forestales remitimos, por ejemplo, a Kozlowski y Huxley (1983) que describen distintos sistemas de ambiente controlado que pueden usarse con ventaja para hacer crecer plantas aproximadamente uniformes y explorar variaciones genéticas en la etapa de sembrado; investigar las respuestas de los propágulos y plantas jóvenes a los rigores ambientales; y varias otras hasta estudiar pestes y enfermedades de las plantas. Asimismo pueden ser utilizados para evaluar la posibilidad de especies de árboles multipropósito cuando se combinan con experiencias de campo.

# OPTIMIZACIÓN DEL PROCESO DE FERTILIZACIÓN FORESTAL COMO SISTEMA DE CONTROL.

## Introducción

El problema de optimización de la aplicación de nutrientes a plantas jóvenes es obviamente básico en agricultura, aunque escasamente tratado en el reino de la matemática aplicada o disciplinas relacionadas. Planteamos el tema en términos de la teoría de control y exploramos la utilidad de sus métodos y manera de razonamiento en general. También hemos diseñado y realizado un experimento para acceder a la posibilidad de la real aplicación del proyecto teórico. Esto fue la tarea de un grupo interdisciplinario, puesto que consideramos que es la mejor manera de atacar esta clase de problemas.

Para el sistema dinámico natural, son posibles dos enfoques principales de la descripción cuantitativa: el primero consiste en modelar la dinámica del proceso de nutrición a partir de leyes físicas; el otro genera tal modelo del análisis de los datos de comportamiento del sistema.

Trataremos en este trabajo el segundo método aplicado al proceso de agregar dosis sucesivas de nutrientes a plantaciones dadas. En nuestro caso, los datos experimentales fueron tomados de una forestación joven.

La entrada de tal sistema está principalmente relacionada con la cantidad de fertilizantes agregados. La elección para la salida es más flexible: cualquier medida o combinación de medidas asociadas con el crecimiento de las plantas puede ser tomada como el relevante observable. Ya que la adición de nutrientes y las medidas de

crecimiento se realizan usualmente en forma periódica, el sistema de control resultante es del tipo tiempo discreto. En este trabajo no se da en detalle la terminología de teoría de sistemas que usamos; para ello hacemos referencia a Kalman, Falb y Arbib (1969).

Nuestro objetivo es formular y resolver el problema de control óptimo en los términos más simples para el sistema descripto. El problema es encontrar la 'mejor' secuencia de adiciones de fertilizantes. El significado de 'mejor' será definido precisamente en términos de minimizar un costo generalizado con antelación a que se realice cualquier cálculo. Por esta razón hemos diseñado una función de costo y determinado el sistema óptimo con respecto al costo particular, pero se debe entender que otros puntos de vista son igualmente admisibles (Berger y Damas Garlipp, 1980, Jacob y Balloni, 1978).

En los últimos 20 años se dieron a conocer varias experiencias sobre fertilización en plantas jóvenes (ver Mello et al. (1970) para un conjunto de referencias anteriores a 1970, y después de este año, Balloni (1978), Bellote et al. (1980), Donald y Schutz (1977), Ewald Maki (1966), Herbert (1983), Jacob y Balloni (1978), Luna Flores (1972), Turner y Lambert (1987), y Will (1971)). La mayoría implica la aplicación de fertilizantes en el tiempo de plantación o próximo a él. Se aplican dosis iniciales diferentes de N, P, K y otros compuestos menos comunes a las especies elegidas, y luego se mide un indicador general de la evolución de tales especies durante el experimento, y finalmente se anticipan algunas conclusiones sobre la influencia de las dosis iniciales en el resultado.

Es difícil encontrar descripciones de experimentos de fertilizantes planeados para explicar la interacción de la fertilización con la genética forestal y mejoramiento de especies, con el ciclo de nutrientes y el efecto de su importación y exportación en el ecosistema forestal, y con el problema general de la baja fertilidad de los suelos tropicales y subtropicales. Tampoco, se conoce claramente cómo afecta la fertilización a la dinámica de los ecosistemas forestales implantados. Algunos resultados (ver Donald y Schutz, 1977) indican que el efecto de los fertilizantes agregados a los árboles en el momento de ser plantados es significativo en los primeros años pero más tarde no existe diferencia entre los tratados y los no tratados. Otros autores (e.g. Balloni, 1978, Herbert, 1983), informaron marcados efectos entre el tiempo de plantación y el talado.

Uno de los principios básicos de fertilización (ver Beaton, 1973) afirma que como primera etapa debe realizarse un diagnóstico de los nutrientes que limitan el crecimiento. Los métodos más usuales para determinar los nutrientes limitantes incluyen análisis químico del suelo, o preferentemente de diferentes tejidos del árbol, y también la experimentación de campo. En nuestro caso se hicieron exámenes químicos preliminares para planear la experimentación, con diferentes dosis de fertilizantes. Sin embargo, fuimos cuidadosos en mantener los porcentajes dentro de los límites recomendados en la literatura, para evitar de esta manera un crecimiento indeseable de la presión osmótica. También, estuvimos condicionados por el carácter boscoso de nuestro sistema. Generalmente se cree que el suelo de los bosques no es fértil. Cuando en tales situaciones se agregan fertilizantes se obtienen significativas respuestas. Por lo general, algunos o sólo un nutriente en un porcentaje moderado es un estímulo adecuado (ver Ewald Maki, 1966).

Algunos de los parámetros afectados por la adición de diferentes fertilizantes son: altura; diámetros (bhd y otros), uniformidad, conicidad del tallo, calidad de la madera, densidad, resistencia a la enfermedad, sequía y helada, etc. Debido a que estas relaciones son tan complejas, no existe una opinión unánime con respecto a cuáles son los efectos precisos de las diferentes estrategias de fertilización. Aún no se cuenta con una explicación teórica final para tales mecanismos (ver Balloni, 1978, Donald y Schutz, 1977, Herbert, 1983, Luna Flores, 1972, y Neuman y Costanza, 1988). Algunas leyes básicas son aproximadas por fórmulas generales que aclaran el problema (ver Bellote et al., 1980, y Papadakis, 1954). Por lo tanto, ya que nuestro objetivo fue recomendar estrategias de fertilización con información existente, estuvimos forzados a tomar un acercamiento al sistema tipo caja negra porque no se cuenta con las ecuaciones que describen su dinámica completa.

Este problema es típico entre los que enfrentamos en el modelado y control de sistemas ecológicos, ya sean abiertos o cerrados. El gran número de variables y sus relaciones complejas involucradas en una descripción detallada del ecosistema conduce a una incertidumbre y no linealidad inherente de tales sistemas. A pesar del esfuerzo dedicado a tal modelado, es todavía difícil obtener ecuaciones lo suficientemente exactas que permitan buenas predicciones sobre períodos largos de tiempo, y también suficientemente precisas para facilitar su tratamiento y su solución mediante computadoras.

En años recientes, el problema de controlar y manejar los sistemas ecológicos ha sido considerado en el contexto de los CELSS (Controlled Ecological Life Support Systems). Estos sistemas han sido cada vez más estudiados por sus futuras aplicaciones en la tecnología espacial (ver Auslander et al., 1983, MacElroy et al., 1986, Oleson y Olson, 1986, y Averner, 1985). Varias de sus principales características se tienen en cuenta en los métodos sistémicos de identificación, realización y control que nosotros proponemos en este trabajo. Los objetivos de buena predictabilidad y confiabilidad

tanto como estabilidad en el largo plazo son alcanzables por pasos de aproximación sucesiva de la dinámica que se está modelando, y por la inclusión de un conjunto cada vez mas amplio de entradas.

Entre los muchos factores que influyen el crecimiento del árbol, la cantidad de nutrientes en el suelo es quizás el más pasible de ser manipulado (ver Ewald Maki, 1966, Mello et al., 1970), y por ello hemos incluido en primer término la cantidad de fertilizante entre las entradas. Todas las otras variables (temperatura, humedad del suelo, luz) entran al problema a través de la dinámica global de la caja negra, la que será adecuadamente aproximada (Costanza et al., 1983). Una de las razones principales para introducir la teoría de control en el proceso de nutrición es la posibilidad de determinar secuencias de fertilización, es decir, se admite un número de instantes para el agregado de nutrientes, y otros tantos para evaluar el crecimiento. Los experimentos convencionales (Donald y Schutz, 1977, Herbert, 1983, Luna Flores, 1972) consideran la 'respuesta' de un bosque dado a un 'tratamiento' específico, el cual en general, comprende una o algunas adiciones fijas de fertilizantes. Usando una descripción del sistema como sistema dinámico de control, podemos considerar secuencias de adiciones (potencialmente diferentes cantidades en distintos tiempos), y las correspondientes secuencias de observaciones del crecimiento. El 'costo' de una de tales secuencias es una suma de varios factores evaluados en cada tiempo de muestreo. Aquí hay otro aspecto positivo del punto de vista de la teoría de control: hay métodos eficientes para determinar la secuencia óptima; es decir, no es necesario evaluar el costo de todas las secuencias de fertilización para encontrar una que cueste menos, puede ser realizado por un método más económico en tiempo de computación como la programación dinámica o entera.

Una última ventaja del acercamiento sistémico: el número y tipo de experimentos necesarios para obtener las ecuaciones para la dinámica están prescritos por el algoritmo de aproximación. Hemos usado el algoritmo descrito en Costanza et al. (1983); uno alternativo ha aparecido recientemente en Díaz y Desrochers (1988).

Siguiendo el desarrollo del formalismo de la teoría de control describimos la estructura biológica y experimental usada en la aproximación de la dinámica, y las técnicas aplicadas para determinar la política óptima para nuestro ejemplo. Finalmente tratamos la significación de los resultados y su uso potencial en situaciones similares y generalizaciones posibles.

El formalismo de la teoría de control

El crecimiento de las plantas puede ser visto como un proceso de control definiendo

$u$ : un conjunto de variables que afectan el crecimiento, cuyos valores pueden ser manipulados (fertilizantes, riego, poda, temperatura, humedad del suelo, luz, etc.). Estas son las variables de entrada.

$y$ : un conjunto de cantidades observables que describen la evolución de la planta o grupo de plantas (altura, diámetro, evaluación de la salud, etc.). Estas son las variables de salida.

Estas cantidades  $u$  e  $y$  evolucionan en el tiempo y por lo general queremos cambiar los valores  $u$  para obtener un resultado para los valores  $y$ , el cual esté cerca del óptimo en algún sentido prescrito. En muchos casos se considera que se sufre una penalidad por el esfuerzo de cambiar los valores  $u$  (llamemos a este efecto  $J_u$ ) y que se

obtiene un beneficio por aumentar los valores  $y$  (lo llamaremos  $-J_y$ ). Por lo tanto, el propósito en estos casos es seleccionar la trayectoria para  $u$  de modo que el costo total

$$J(u) = J_u + J_y \quad (\text{A4.1})$$

sea minimizado.

Uno de los obstáculos para seleccionar la trayectoria óptima para los valores  $u$  proviene de la falta de conocimiento sobre la dependencia explícita de  $J$  respecto de  $u$ .

Algunas veces, la física nos suministra una ley que gobierna la relación  $u$ - $y$ , por ejemplo, una de la forma:

$$\dot{y} = f(y, u), \quad (\text{A4.2})$$

o bien

$$y_{n+1} = f(y_n, u_n), \quad (\text{A4.3})$$

donde  $\dot{y}$  significa  $dy/dt$ , y los subíndices en (A4.3) denotan el tiempo de muestreo en el que fueron medidas las variables.

Cualquiera de las ecuaciones equivalentes a (A4.2) ó (A4.3) para un sistema dado, es por lo general, llamada 'la dinámica' o 'la descripción interna' del sistema. En otros casos, se debe construir una ecuación similar a partir de los experimentos. Generalmente se necesitará un número infinito de experimentos, a menos que tengamos algunos indicios sobre la forma esperada de la función  $f$ . Para sistemas lineales ( $f$  una función lineal de  $u$  e  $y$ ), el número de experimentos por ser realizados pueden reducirse a  $N$  (la dimensión del sistema, usualmente igual al número de variables en el vector de estados). Esta es una de las razones que han contribuido a la expansión de la teoría de sistemas lineales y su control óptimo.

Pero los sistemas de control son buenas aproximaciones solamente para los procesos de evolución cerca de un punto de equilibrio (estado estacionario), como plantas químicas continuas, columnas de destilación simplificadas, etc. Los sistemas naturales (como el crecimiento de plantas) son en su mayoría no lineales, y rara vez tienen puntos de equilibrio. En la década pasada comenzó a desarrollarse con gran generalidad una teoría para la aproximación de sistemas de control no lineales para resolver estas situaciones. Usamos algunos resultados desarrollados en esta línea para sistemas de tiempo discreto (aquellos para los cuales las mediciones y acciones se toman solamente en instantes de tiempo fijos). Básicamente contamos con un algoritmo capaz de aproximar la ecuación (A4.3) por generalizaciones de fórmulas como la siguiente:

$$y_{n+1} = A(u_n)y_n + B(u_n) \quad (\text{A4.4})$$

donde  $A$  y  $B$  son funciones polinómicas. Los sistemas descritos por ecuaciones como la (A4.4) no son suficientes para aproximar la mayoría de los comportamientos no lineales por eso podemos mejorar el procedimiento de aproximación vía realizaciones (ver detalles en Costanza et al., 1983), de la forma

$$\tilde{y}_n = \left( \sum_{i=0}^k H_i P_i(u_n) \right) x_n \quad (\text{A4.5})$$

$$x_{n+1} = \left( \sum_{i=0}^k F_i P_i(u_n) \right) x_n + \sum_{i=0}^k G_i P_i(u_n) \quad (\text{A4.6})$$

en términos de las variables de estado  $x_n$ , inherentes a la estructura de la caja negra, no necesariamente con significado físico, ni relacionadas en forma evidente con las variables observables  $\tilde{y}_n$  donde  $\tilde{y}_n = y_n - y_{0n}$ , siendo  $y_{0n}$  la salida correspondiente a la evolución libre. Los polinomios ortogonales  $P_i(u)$  se definen de una manera estándar y esto permite, vía las matrices (o coeficientes de ajuste)  $F_i$ ,  $G_i$ , y  $H_i$  para  $i = 0, \dots, k$ , una aproximación explícita .

Evaluamos la bondad en el ajuste de la aproximación por el cálculo de una suma pesada de los cuadrados de las desviaciones entre las salidas observadas  $y_i$  y las estimadas  $\tilde{y}_i$ . Es posible observar una disminución repentina de los valores de este indicador cuando se obtiene una aproximación adecuada.

Cuando se han recolectado los datos de entrada/salida para los mismos pasos sucesivos, podemos considerar el problema de optimización y hallar la secuencia óptima de entrada para aquellos pasos y para futuras aplicaciones. Cada problema de optimización determina la forma específica para la ecuación (A4.1), por ejemplo

$$J = \sum_n (c_n y_n + d_n u_n) \quad (\text{A4.7})$$

con coeficientes apropiados  $c_n, d_n$  ( $n = 1, 2, \dots$ ).

Una vez que los parámetros para las ecuaciones (A4.5) a (A4.7) han sido determinados, el problema de control óptimo para este sistema está bien planteado y se puede buscar su solución por métodos numéricos, esto se realiza en la sección siguiente.

El método aplicado a un experimento.

Muchos factores influyen en el crecimiento de un árbol. Algunos de ellos pueden ser alterados por el hombre, otros no. Los nutrientes del suelo son ejemplos de la primera clase y las condiciones climáticas son de la segunda. La teoría de control acepta como entrada solamente representantes de la primera clase, es decir, variables que pueden ser manipuladas; el resto de las variables deben entrar en formas más o menos complicadas en la función  $f$  de las ecuaciones (A4.2) ó (A4.3).

[A4.11]

De los diferentes indicadores de la condición del suelo, en este trabajo nos hemos concentrado en los niveles de dos de los nutrientes principales necesarios para un árbol en crecimiento: nitrógeno y fósforo, los que están directamente relacionados al procesamiento de sustancias orgánicas por la planta. Sin embargo este enfoque podría, en casos mas generales, no ser suficiente.

Los niveles de los nutrientes cambian abruptamente de sitio en sitio, pero en áreas de tamaño mediano destinadas a la forestación, se supone que los valores promedio de los principales nutrientes son suficientes cuando se desea satisfacer las dosis recomendadas para los fertilizantes, en los casos en que no hay pérdidas serias de nutrientes al agua subterránea o problemas de contaminación. Una complicación similar surge con la variación de las necesidades de los nutrientes de una planta a otra, y aún para la misma planta a medida que transcurre el tiempo. Algunas veces, consideraciones prácticas fuerzan la adopción de valores promedio para las necesidades de los nutrientes como aproximaciones, pero estos valores aproximados son todavía difíciles de obtener de la literatura técnica, aún para las especies más comunes usadas en la forestación. Se puede considerar seriamente la siguiente hipótesis en función de observaciones unánimes en experimentos previos con *Eucaliptus* (ver Balloni, 1978, y Luna Flores, 1972): ellos demandan nitrógeno, especialmente en su juventud. Por lo tanto, hemos elegido para optimizar el período de los dos primeros años después de plantados, para fertilizar con varias aplicaciones de urea (por simplicidad equiespaciadamente en el tiempo). Se realizó una adición inicial de fósforo —la misma cantidad para cada árbol— para favorecer el crecimiento de la raíz. Esta adición de P no se considera en el análisis de optimización.

Nuestro experimento consistió en tres plantaciones de árboles de *Eucaliptus rostrata*, cada una con ocho filas de 32 especímenes. La distancia entre filas fue de 2,5 m, y 1 m entre las plantas. El tamaño de muestra fue de cuatro para cada plantación (12 en total), este tamaño no podía aumentarse debido a restricciones prácticas. El sitio está situado a 31°50' latitud Sur y 60°70' longitud Oeste. Algunos datos climáticos son:  $\bar{T} = 18^{\circ}\text{C}$ , precipitación media = 950 mm.

Basado en el análisis del suelo (tabla A4·I) y recomendaciones locales para *E. rostrata* (ver INTA, 1983), se adoptó un valor de 45 g de fosfato triple y 15 g de urea por planta. No hubo necesidad de irrigación excepto al principio para suavizar el shock de transplante. Las malezas y las hormigas fueron controladas regularmente. Todo el fosfato fue suministrado en el momento de plantado. El nitrógeno fue aplicado como sigue:

- (i) La urea se aplicó en 4 etapas con intervalos de 6 meses.
- (ii) Cada una de las tres plantaciones de 256 árboles fue dividida en 4 bloques: para cada período esta división fue hecha de diferentes maneras (ver la figura A4·1 para una descripción adicional):

Etapa 1, perpendicularmente a las filas;

Etapa 2, dos filas por bloque;

Etapa 3, cada uno de los bloques de la etapa 1 se divide en cuartos;

Etapa 4, solamente en el caso que ha habido uniformidad suficiente en los valores obtenidos de los 4 ejemplares de cada muestra, entonces esa muestra se divide entre sus cuatro componentes.

**Tabla A4-I: Características iniciales del suelo.**

Organic matter %	2.27
Total C %	1.32
C/N	12
P ppm	65
P <sub>2</sub> O <sub>5</sub> %	0.015
N %	0.11
NO <sub>3</sub> <sup>-</sup> ppm	96
pH	6.9

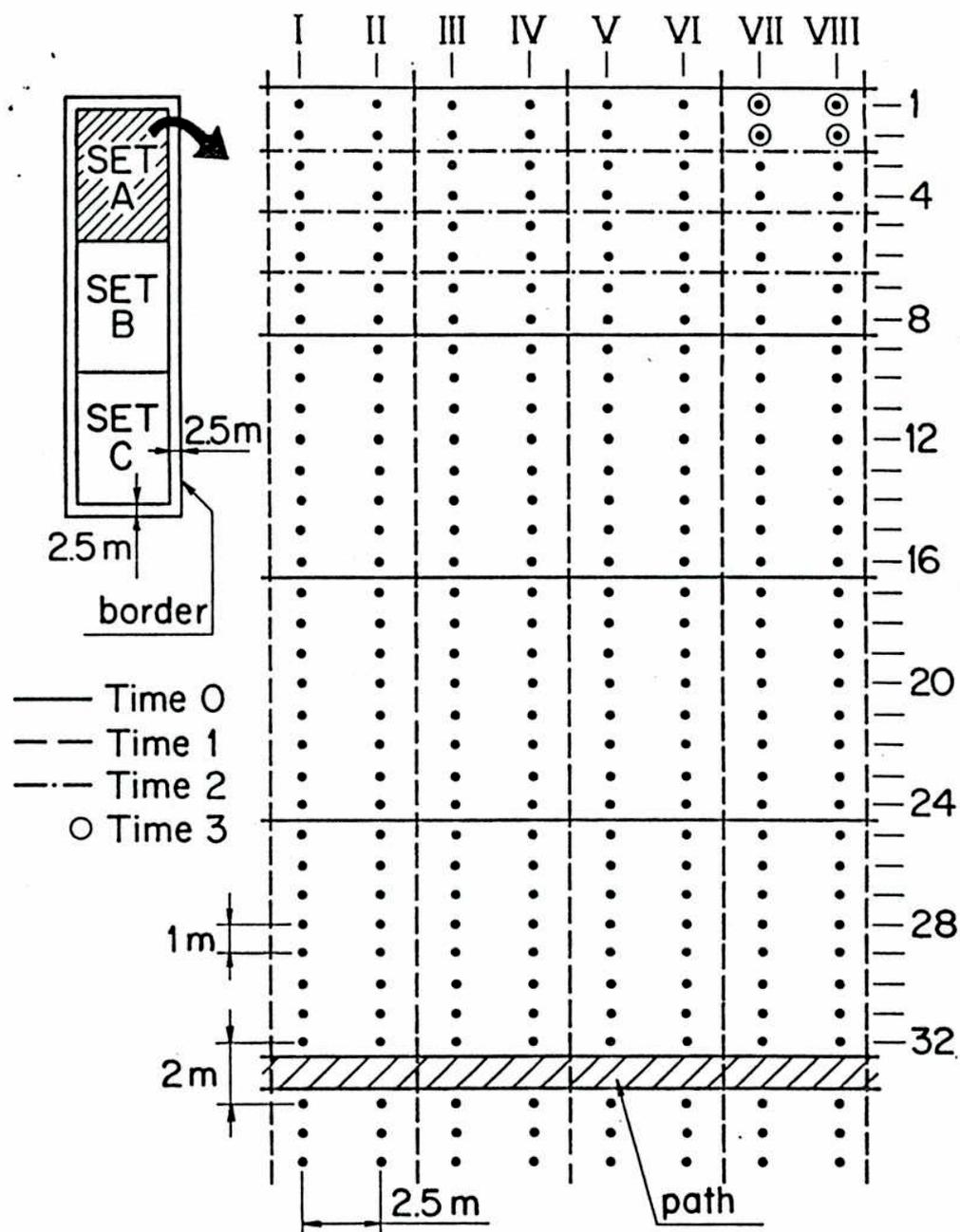


Figura A4-1: Diseño experimental. Distribución espacial de los árboles e ilustración gráfica de las aplicaciones sucesivas de fertilizante.

- (iii) En un tiempo dado, las cuatro partes obtenidas de la división reciben 0, 1/2, 1 y 3/2 dosis de urea. El procedimiento descrito por ii) e iii) garantiza que todas las dosis permitidas posibles de combinación de urea se obtienen luego de la cuarta etapa.
- (iv) El fertilizante se aplicó en círculos alrededor del árbol, aumentado el diámetro cada vez para permitir una mejor absorción por el sistema de raíces.

Se tuvieron en cuenta las siguientes convenciones para el tratamiento numérico:

- (i) La única variable de entrada  $u$ , fue la cantidad de urea usada en cada etapa. Los valores para  $u$  fueron normalizados de acuerdo a la convención siguiente:

---

Valor para $u$	0	1	2	3
Dosis de urea	0	1/2	1	3/2

---

- (ii) La única variable de salida,  $y$ , fue la altura del árbol en cada etapa. El valor 0 para  $\tilde{y}_n (= y_n - y_{0n})$  representa la altura de los árboles no fertilizados, y los restantes valores para  $\tilde{y}_n$  se toman relativos a aquellos valores.
- (iii) Los valores  $y$  para los árboles que recibieron igual tratamiento hasta el tiempo de medición fueron promediados, y se asigna la media a todos ellos.
- (iv) En cada etapa, los datos tomados del experimento son introducidos en un sistema de programas de computadora, el que construye realizaciones parciales aproximadas (ecuaciones dinámicas).

Una vez que los posibles valores de entrada  $u$  se conocen, es posible escribir los polinomios ortogonales estándar definidos como en Costanza et al. (1983). Ellos son:

$$P_0(u) = 1 \quad (\text{A4.8})$$

$$P_1(u) = 1 - \frac{2}{3}u \quad (\text{A4.9})$$

$$P_2(u) = 1 - 3u + u^2 \quad (\text{A4.10})$$

$$P_3(u) = 1 - \frac{47}{3}u + 15u^2 - \frac{10}{3}u^3 \quad (\text{A4.11})$$

Los datos obtenidos para las etapas 2, 3 y 4 para las diferentes relaciones de fertilizantes aplicados se resumen en la tabla A4-II.

Los valores iniciales  $y_1$  y los estados iniciales correspondientes  $x_1$  (obtenidos de realizaciones) son tomados como 0. Con datos hasta la etapa 3 podemos obtener una aplicación de entrada-salida (ver ecuación (A4.4)) con

$$A(u_n) = 0.50 - 0.42u_n + 0.26u_n^2 - 0.047u_n^3 \quad (\text{A4.12})$$

$$B(u_n) = 144.9 + 31.5u_n - 8.67u_n^2 - 0.184u_n^3 \quad (\text{A4.13})$$

en la tabla A4-III se listan las salidas resultantes.

A esta altura es posible analizar optimizaciones parciales, teniendo en cuenta que contamos con un diseño concreto para la funcional de costo para comparar secuencias de control diferentes.

Para la parte  $J_y$  del costo se procede como sigue a continuación

$$-J_y(k) = \sum_{n=2}^N pv_n \quad (\text{A4.14})$$

donde

$p$ : precio de venta de 1 m<sup>3</sup> de madera

[A4.17]

Tabla A4-II: Alturas  $y_n$  (en cm), con  $n = 2, 3$ , y 4 de árboles fertilizados con dosis  $(u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$  y  $(u_1, u_2, u_3)$  respectivamente (datos experimentales modificados).

---

$u_1 = 0$	1	2	3
150.0	173.0	171.0	157.0
$u_1 = 0$	1	2	3
$u_2 = 0$	160.8	238.8	258.8
1	198.5	244.4	235.2
2	228.5	239.4	216.3
3	194.2	214.5	199.9
$u_1, u_2 = 00$	10	20	30
$u_3 = 0$	392.2	505.0	559.0
1	439.6	562.0	637.0
2	530.7	609.0	639.0
3	459.0	591.0	603.0
$u_1, u_2 = 01$	11	21	31
$u_3 = 0$	507.0	539.0	662.0
1	522.0	607.0	601.0
2	610.0	590.0	516.5
3	532.0	559.5	540.4
$u_1, u_2 = 02$	12	22	32
$u_3 = 0$	580.0	607.0	588.0
1	590.0	588.0	532.0
2	547.0	577.8	550.0
3	540.0	532.0	500.0
$u_1, u_2 = 03$	13	23	33
$u_3 = 0$	439.0	540.0	597.0
1	532.0	563.0	581.0
2	528.0	583.0	563.0
3	576.0	574.0	522.0

---

**Tabla A4·III:** Alturas  $\hat{y}_n$  (en cm), con  $n = 2, 3$ , de árboles fertilizados con dosis  $(u_1)$  y  $(u_1, u_2)$ , respectivamente. (Resultados de la función de entrada/salida  $\hat{y}_{n+1} = A(u_n)\hat{y}_n + B(u_n)$ , con  $n = 1, 2$ , y  $A(u_n), B(u_n)$  dadas por (A4·12) y (A4·13)).

	$u_1 = 0$	1	2	3
	145	168	173	156
$u_2 = 0$	$u_1 = 0$	1	2	3
	217	229	232	224
1	209	216	217	213
2	217	222	224	219
3	195	200	201	197

$v_n$ : volumen de la madera producido desde el tiempo  $n - 1$  hasta el  $n$  debido a la estrategia de control  $k = (u_1, \dots, u_n)$  evaluado mediante

$$v_n = f_n^{k,N} (y_n - y_{n-1}) \quad (\text{A4.15})$$

donde

$f_n^{k,N}$ : es un coeficiente que tiene en cuenta la forma del árbol (la que puede depender de  $n$ ), y la calidad de la madera (la que puede depender en  $N$  y  $k$ ). En este trabajo, por simplicidad, dejaremos de lado la dependencia respecto de  $k$ .

Para el costo de fertilización (costo de control), tomamos simplemente

$$J_u(k) = \sum_{n=2}^N cu_{n-1} \quad (\text{A4.16})$$

donde

$c$ : es el costo de la dosis de urea normalizada con las mismas unidades usadas para los coeficientes previos por eso los  $J$ 's son expresados en dinero.

Todos los otros costos fijos no son relevantes para la optimización del presente proyecto.

En el caso de nuestro experimento hemos usado datos corrientes del mercado para estimar

$$p = -875\text{m}^{-3}$$

$$f_2^3 = 0.012$$

$$f_3^3 = 0.008$$

y

$$c = 528$$

$$[\text{A4.20}]$$

**Tabla A4·IV:** Resultados del funcional de costo  $-J(k)$  para los controles  $k$  hasta la etapa 3 basado en datos experimentales de la tabla A4·II.

$u_2$	$u_1$			
	0	1	2	3
0	2026	1663	1174	530
1	1442	1044	540	-75
2	970	558	61	-561
3	288	-124	-628	-1243

con datos de la tabla A4-II, hasta la etapa 3 obtenemos la política óptima  $u_1 = 0$ ,  $u_2 = 0$  como se puede inferir de la tabla A4-IV.

Si intentamos obtener el óptimo utilizando los datos de la tabla A4-III calculados mediante los polinomios (A4-12) y (A4-13), se ve que estos valores dan un resultado incorrecto, debido, por ejemplo, a la sobreestimación de  $y_3(0,0)$  y la subestimación de  $y_3(2,0)$ , entre otras. Además, esta expresión de las  $y$ 'es no se adapta para la extrapolación después de la etapa 3; ver por ejemplo el valor de  $y_4(2,0,3) = 228$  calculado vs. el valor experimental de 553 de la tabla A4-II.

La aproximación de la dinámica hasta la etapa 4 se alcanza mediante una realización parcial producida por un algoritmo diseñado previamente (ver Costanza et al. (1983), y ecuaciones (A4-5) y (A4-6), donde  $x_n$  son los estados). El algoritmo encuentra que la mejor dimensión para los estados es 3. Las matrices involucradas son

$$\begin{aligned}
 H_0 &= (-2.85 \quad -3.59 \quad -23.6) \\
 H_1 &= H_2 = H_3 = 0 \\
 F_0 &= \begin{pmatrix} 1.24 & -0.0091 & 3.18 \\ -0.427 & -1.05 & -16.4 \\ 0.103 & 0.65 & 3.98 \end{pmatrix} \\
 F_1 &= \begin{pmatrix} 0.896 & -0.095 & -1.82 \\ -1.87 & 2.51 & 9.38 \\ 0.784 & -0.511 & -2.27 \end{pmatrix} \\
 F_2 &= \begin{pmatrix} 1.06 & -0.116 & -1.63 \\ 0.137 & -0.823 & 8.41 \\ 0.213 & 0.135 & -2.04 \end{pmatrix} \\
 F_3 &= \begin{pmatrix} -0.277 & 0.263 & 0.133 \\ 0.0651 & 0.257 & -0.685 \\ -0.0052 & -0.0693 & 0.166 \end{pmatrix} \\
 G_0 &= (0) \quad G_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad G_2 = \begin{pmatrix} 1.35 \\ -0.283 \\ 0.271 \end{pmatrix} \quad G_3 = \begin{pmatrix} -0.0399 \\ 0.0744 \\ 0.021 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Este conjunto de matrices será denominado en lo que sigue como realización D.

[A4-22]

Fue necesario usar realizaciones de dimensiones más grandes que uno porque los polinomios como (A4.12) y (A4.13) no dan suficiente aproximación cuando se identifican estados y salidas. En otras palabras, creando los estados 'internos'  $x_n$ , podemos mantener el tratamiento numérico dentro del reino de los sistemas polinómicos, pero con el costo de un esfuerzo computacional extra debido al aumento en la dimensión de la realización parcial. Las ecuaciones (A4.5) y (A4.6) deben observarse como una generalización de las ecuaciones (A4.4).

Los resultados de entrada-salida hasta la etapa 4, producidos por la realización D, se presentan en la tabla A4.V.

La próxima etapa es obtener el sistema óptimo, lo que se hace en este caso evaluando todas las secuencias de entradas posibles.

Con  $f_2^4 = 0.043$ ,  $f_3^4 = 0.039$ ,  $f_4^4 = 0.009$ ,  $c = 528$ , y  $p = -875$ , tenemos que los cinco mejores sistemas basados en datos experimentales son:

$$\begin{array}{lll}
 (1) & u_1 = 2 & u_2 = 1 & u_3 = 0 \\
 (2) & u_1 = 2 & u_2 = 0 & u_3 = 1 \\
 (3) & u_1 = 1 & u_2 = 0 & u_3 = 0 \\
 (4) & u_1 = 2 & u_2 = 0 & u_3 = 0 \\
 (5) & u_1 = 0 & u_2 = 2 & u_3 = 0
 \end{array}$$

y que los cinco mejores basados en salidas provistas por el modelo de realización D son:

$$[A4.23]$$

Tabla A4.V: Alturas  $\hat{y}_n$  (en cm) con  $n = 2, 3$ , y  $4$ , de árboles fertilizados con dosis  $(u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$ , y  $(u_1, u_2, u_3)$  respectivamente (calculadas con la realización D).

---

$u_1 = 0$	0	1	2	3
150.0	172.9	170.9	157.0	
$u_2 = 0$	0	1	2	3
144.1	226.3	247.0	196.4	
1	206.9	237.0	215.9	
2	228.8	215.0	213.1	
3	202.0	223.9	211.1	204.8
$u_1, u_2 = 00$	00	10	20	30
342.1	529.7	579.0	456.2	
1	442.9	608.0	530.1	
2	500.0	599.9	560.5	
3	501.1	548.8	553.1	535.6
$u_1, u_2 = 01$	01	11	21	31
520.3	558.6	597.7	559.0	
1	571.8	573.8	574.1	
2	600.6	583.7	533.1	576.1
3	616.0	526.6	503.8	589.7
$u_1, u_2 = 02$	02	12	22	32
666.1	523.8	506.7	621.7	
1	596.3	538.6	564.5	
2	553.2	576.2	532.0	528.9
3	612.0	491.1	487.1	584.5
$u_1, u_2 = 03$	03	13	23	33
401.8	564.9	646.0	503.5	
1	548.6	539.6	546.2	
2	618.3	469.2	560.0	
3	554.5	515.9	527.8	551.4

---

- (1)  $u_1 = 0$      $u_2 = 2$      $u_3 = 0$
- (2)  $u_1 = 1$      $u_2 = 0$      $u_3 = 0$
- (3)  $u_1 = 2$      $u_2 = 0$      $u_3 = 0$
- (4)  $u_1 = 1$      $u_2 = 0$      $u_3 = 1$
- (5)  $u_1 = 1$      $u_2 = 1$      $u_3 = 0$

En este punto es natural preguntar sobre la influencia de las variaciones en los datos experimentales y sus efectos en el proceso completo. Es instructivo realizar un experimento computacional sobre la robustez del método. Modificamos un par de valores,  $\check{y}_4(1, 1, 2) \leftarrow 843$  y  $\check{y}_4(2, 3, 0) \leftarrow 224$  (diferencias de 43% y 63% respectivamente con los datos experimentales) y obtenemos una realización diferente, llamada  $Q$ , cuya salida está listada en la tabla A4·VI.

Como una medida del nivel de aproximación abtenida con los datos de la tablas A4·II, V, y VI, diseñamos una media cuadrática  $\Delta_{ij}$  (donde  $i$  y  $j$  representan las tablas comparadas), la que excluye los datos sobre el 90% en nivel de desacuerdo. Los valores calculados son:

$$\Delta_{25} = 26.6$$

$$\Delta_{26} = 28.1$$

$$\Delta_{56} = 21.1$$

lo que muestra que los resultados de las realizaciones D y Q son indistinguibles respecto de esta medida de desviación.

[A4·25]

**Tabla A4.VI:** Alturas  $y_n$  (en cm), con  $n = 2, 3$ , y 4 de árboles fertilizados con dosis  $(u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$  y  $(u_1, u_2, u_3)$ , respectivamente (resultados obtenidos con la realización Q deducida de datos artificialmente alterados).

---

$u_1 = 0$	0	1	2	3
	150.0	173.0	171.3	156.9
$u_1 = 0$	0	1	2	3
$u_2 = 0$	143.4	226.5	248.7	195.1
1	206.3	246.6	237.4	215.4
2	232.0	238.8	209.4	217.5
3	200.2	224.9	214.6	202.1
$u_2, u_1 = 00$	00	10	20	30
$u_3 = 0$	322.2	538.4	595.9	447.6
1	431.6	581.9	622.7	519.5
2	532.9	584.5	601.8	539.2
3	459.7	562.0	590.0	519.6
$u_2, u_1 = 01$	01	11	21	31
$u_3 = 0$	491.4	586.5	614.5	544.1
1	580.2	593.6	573.6	569.5
2	736.4	480.7	456.4	612.2
3	566.5	566.1	546.2	551.2
$u_1, u_2 = 02$	02	12	22	32
$u_3 = 0$	636.0	558.3	541.3	589.6
1	597.3	580.0	538.2	564.4
2	609.4	478.8	511.1	568.8
3	564.4	557.8	524.8	541.7
$u_1, u_2 = 03$	03	13	23	33
$u_3 = 0$	521.2	531.9	538.7	519.1
1	550.5	559.0	540.7	541.9
2	641.8	489.3	482.8	586.7
3	537.9	543.1	527.1	530.6

---

Usando los parámetros previos  $p$ ,  $c$ ,  $f_n^N$  con la realización  $Q$ , obtenemos las siguientes mejores políticas

$$(1) \quad u_1 = 0 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = 2$$

$$(2) \quad u_1 = 0 \quad u_2 = 2 \quad u_3 = 0$$

$$(3) \quad u_1 = 2 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0$$

$$(4) \quad u_1 = 1 \quad u_2 = 0 \quad u_3 = 0$$

$$(5) \quad u_1 = 1 \quad u_2 = 1 \quad u_3 = 0$$

Después de compararlos con los anteriores concluimos que perturbaciones significativas en los datos conducen a pequeñas variaciones entre las (necesariamente) distintas realizaciones.

También puede verse que las políticas óptimas correspondientes a datos perturbados son similares a aquellos obtenidos de los datos originales, es decir, el método es suficientemente robusto.

Pero los datos experimentales mostraron variaciones locales significativas, las que influyeron en la realización D de tal manera que aumentaron las variaciones locales y globales en el tiempo para los datos de entrada/salida generados por la realización D.

Podríamos suponer que las variaciones locales podrían haber sido suavizadas incluyendo datos de más repeticiones del mismo experimento pero esto en la práctica es difícil. Por razones numéricas relacionadas con la rutina de aproximación de nuestro algoritmo, se podría alcanzar el mismo efecto a través de un mayor redondeo de los datos experimentales. Exploramos esta última opción aplicando una fórmula de redondeo a los datos de salida. El valor redondeado para  $y$ , llamado  $y_r$ , se toma como

$$y_r = \rho \left\lfloor \frac{y}{\rho} + 0.5 \right\rfloor \quad (\text{A4.17})$$

[A4.27]

donde  $\rho$  es el parámetro de precisión y el símbolo  $[x]$  significa la parte entera de  $x$ .

Aplicamos la fórmula (A4.17) a los datos con  $\rho = 10$  para los valores  $y_2$ ,  $\rho = 20$  para los valores  $y_3$ ,  $\rho = 50$  para los valores  $y_4$ , y  $\rho = 100$  para todos los subsiguientes.

Se obtiene entonces una nueva realización (en lo que sigue, realización M). Las matrices involucradas son: (distinguimos este nuevo conjunto de matrices con una  $\tilde{\phantom{x}}$ )

$$\tilde{H}_0 = \begin{pmatrix} -4.5 & -2.5 & 14.9 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{H}_1 = \tilde{H}_2 = \tilde{H}_3 = 0$$

$$\tilde{F}_0 = \begin{pmatrix} 1.12 & -0.386 & 0.0276 \\ -0.308 & 2.330 & 0.291 \\ 0.116 & -0.303 & -0.396 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}_1 = \begin{pmatrix} 0.333 & -0.171 & -0.00552 \\ 2.43 & 0.230 & -0.0583 \\ -0.518 & 0.207 & 0.0791 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}_2 = \begin{pmatrix} 0.910 & -0.429 & -0.0253 \\ 1.09 & 0.0696 & -0.267 \\ -0.0454 & -0.17 & 0.363 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{F}_3 = \begin{pmatrix} -0.315 & 0.275 & 0.00782 \\ 0.152 & -0.139 & 0.0826 \\ -0.150 & 0.0491 & -0.112 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{G}_0 = (0) \quad \tilde{G}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{G}_2 = \begin{pmatrix} 1.09 \\ 0.988 \\ -0.00736 \end{pmatrix} \quad \tilde{G}_3 = \begin{pmatrix} -0.0687 \\ 0.234 \\ -0.015 \end{pmatrix}$$

En la figura A4.2 trazamos los rangos de las salidas, para distintos tiempos, tanto para los datos experimentales como para aquellos D- y M-generados. Observamos que los rangos para M son más pequeños que para la realización D.

También observamos de los datos que la configuración topológica abierta del árbol asociado con resultados de la realización D cambia a una más pequeña e interrelacionada para la realización M, convirtiendo a esta realización en más apropiada para la aplicación de algoritmos estándar de programación dinámica.

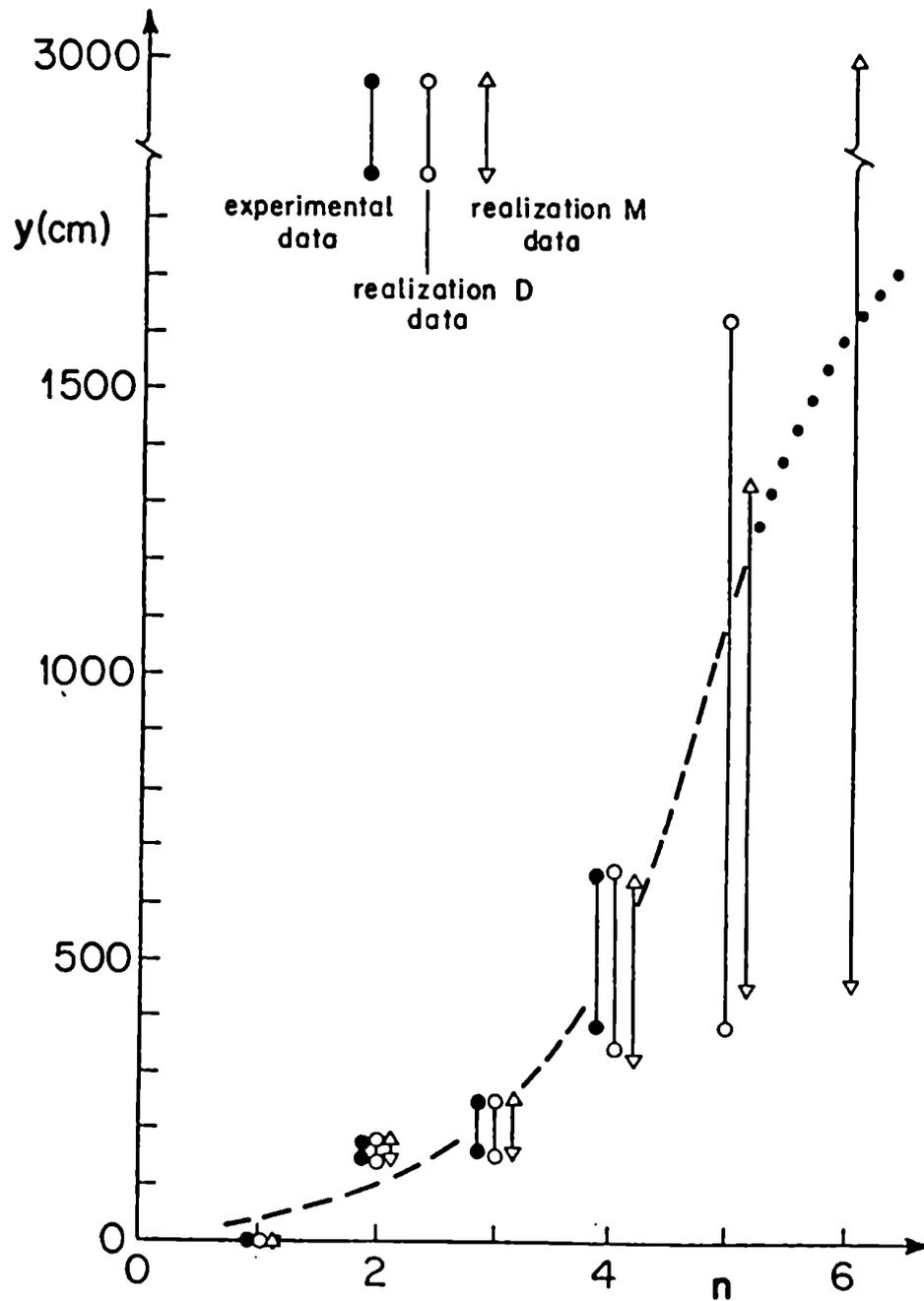


Figura A4.2: Rangos de salida para los diferentes tiempos. La curva de guiones representa la altura de crecimiento medio del rodal basada en datos experimentales hasta la etapa 4 y datos de la realización M. La curva de puntos es una extrapolación de la anterior.

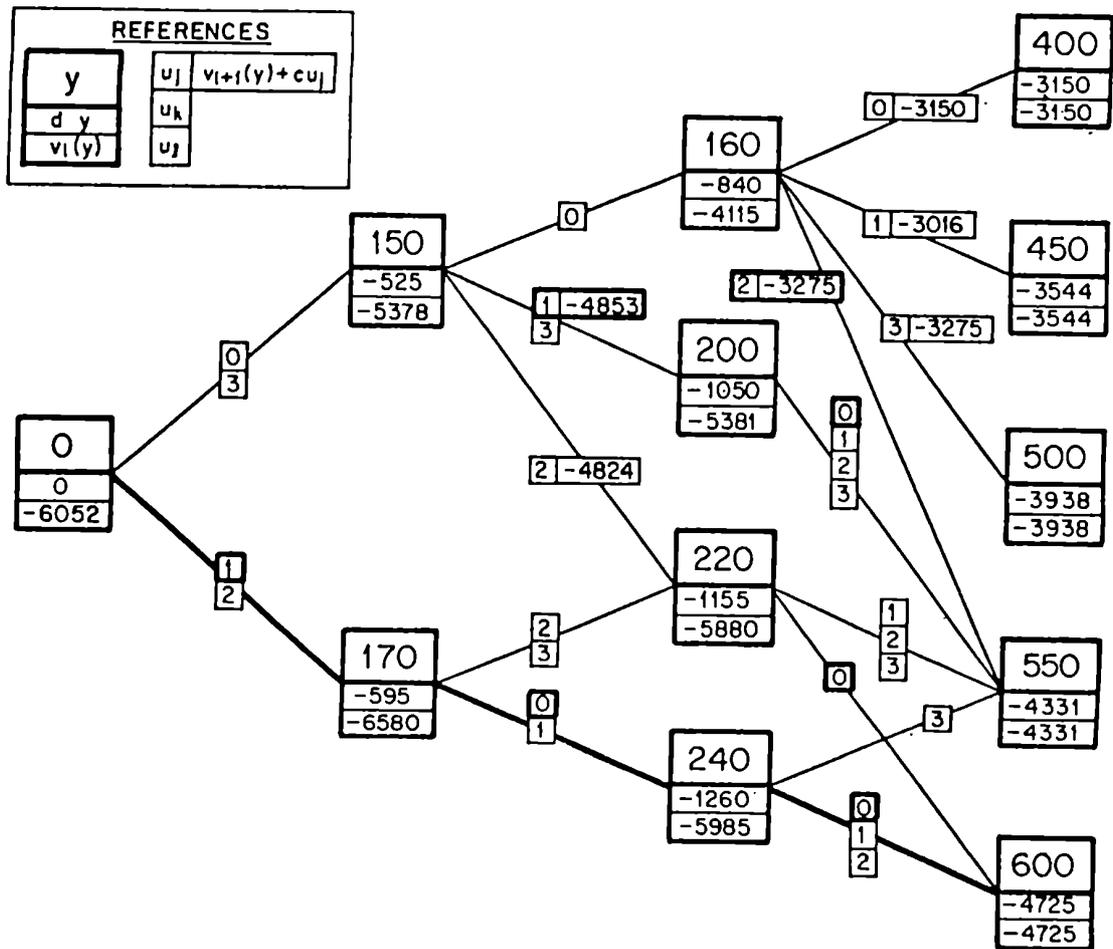


Figura A4-3: Grafo de programación dinámica para los datos suavizados. Se dibuja en cada nodo una caja con la salida  $y$ , el valor del nodo  $d \cdot y$ , y la función de valor  $v_i(y)$ . El control  $u$  y el valor de arco  $v_{i+1}(y) + u$  se asocian a cada arco.

En la figura A4·3 se dibuja el grafo de programación dinámica. De él se obtiene en forma directa la política óptima determinada previamente.

Aplicaciones y conclusiones.

Hemos mostrado que la optimización de secuencias de aplicaciones de fertilizantes puede ser analizada y resuelta usando algoritmos de la teoría de control. Hemos también ilustrado el uso de esos algoritmos en el diseño y procesamiento de la información experimental generada por una situación real. Los resultados no fueron obvios pues sintetizan varios factores que influyen en el problema como un todo.

El uso práctico de este método para diseñar secuencias de fertilización para plantaciones nuevas debe ser entendido en los términos siguientes:

- (a) Si ya se ha optimizado en una situación muy similar (el mismo abono, la misma especie de árbol, clima, etc.), entonces utilizar tentativamente los resultados obtenidos para la plantación nueva. Si no,
- (b) Dedicar un período de tiempo, con varios tratamientos potenciales de fertilización, para realizar un experimento para determinar la mejor política válida para este mismo período en una escala más grande. Dependiendo de la urgencia, se debería diferir la plantación en gran escala durante el período experimental.
- (c) Siguiendo el experimento, se puede usar la misma estructura (con precauciones en cuanto al tamaño y sitio) para la optimización de un próximo período donde la fertilización sea aún necesaria.
- (d) La optimización de resultados para el nuevo período puede ser aplicada a la plantación en cuanto estén disponibles (teniendo en cuenta detalles menores de implementación).

Es posible la aplicación de los métodos propuestos en dos líneas principales. Una es la generalización del problema para permitir extracciones de la biomasa en crecimiento superpuestas a la evolución controlada, en la forma de un control impulsional óptimo discreto (Neuman y Costanza, 1986, 1988, 1990).

La segunda aplicación principal debería ser adaptar nuestra hipótesis a los requerimientos ecológicos de los CELSS, lo que planeamos discutir en un trabajo futuro. Esto implicaría ciertamente la modificación del algoritmo de realización para tratar controles en dimensiones más grandes que uno. Del punto de vista experimental existen problemas naturales de dimensión (gran escala, alto costo) en los experimentos con bosques, pero en el contexto de CELLS estos problemas están minimizados.

Las técnicas de optimización merecen algunos comentarios. Los ejemplos experimentales analizados fueron suficientemente pequeños como para que la exposición fuese compacta pero cuando se optimiza con varios controles, series de tiempo más largas, mayor dimensión de realizaciones y observadores, etc., se puede llegar a problemas prácticamente intratables. Por ejemplo, el problema teórico de encontrar la política de fertilización óptima para un bosque en general está más allá del problema que se intenta resolver en este trabajo.

El problema estudiado implica en general el cálculo de un óptimo global en un espacio discreto donde los nodos pueden ser estructurados topológicamente (de modo que se pueda definir el sistema de vecinos de cada nodo). Si comenzamos una 'caminata' en algún nodo y vamos hacia los nodos con mejores valores, es fácil darse cuenta que pronto se alcanzaría un óptimo local y podría no ser posible llegar al óptimo global (deseado). Varias técnicas de búsqueda han sido diseñadas para solucionar este serio problema, pero cada una de ellas funciona solamente sobre problemas con hipótesis restrictivas. Actualmente consideramos técnicas de optimización global en espacios

topológicos discretos dependiendo de una clase especial de 'caminatas' que tiene alguna probabilidad de desechar el óptimo local en la búsqueda de uno global.

Considerando el uso de la metodología desarrollada en este apéndice con propósitos de predicción, la disponibilidad de una realización permite dos tipos de extrapolaciones, con respecto al tiempo y a los valores de entrada. En nuestro caso no recomendamos la extrapolación a otras tasas de fertilización, puesto que los polinomios  $P_i(u)$  usados para la aproximación se construyen usando explícitamente el rango permitido para  $u$ . Si tales extrapolaciones fueran deseables, deberían usarse desde el principio polinomios  $P_i(u)$  con rangos en  $u$  mayores

No hemos aplicado completamente la extrapolación en el tiempo a nuestro ejemplo por las siguientes razones:

- (i) La fertilización es usualmente más necesaria en los primeros estadios (Luna Flores, 1972), por eso sólo hemos hecho ejemplos numéricos con pocas etapas más allá de la cuarta.
- (ii) Los datos experimentales mostraron variaciones locales significativas, lo que influenció la realización  $D$  de tal manera que aumentaron las variaciones globales y locales en el tiempo (figura A4.2). En este sentido, la realización  $M$  es más adecuada para propósitos de predicción.

Apéndice.

En este apéndice A4 hemos aplicado la metodología de control a un conjunto de datos de entrada/salida proveniente de un experimento real pero sencillo. Sin embargo el método también es apropiado para aplicaciones donde los datos disponibles no son completos ni se generan tan simplemente. Describimos dos ejemplos de este tenor a continuación.

Considere, por ejemplo, el caso de un bosque maduro que se somete a fertilización aérea con el objetivo principal de aumentar la producción volumétrica de madera. Esto es practicado en una escala comercial en el norte de Europa. Nos limitamos al sistema de control definido por el proceso de fertilización global de un bosque de abeto y pinos sobre un período de 15 años (Anónimo, 1981a). El bosque es fertilizado desde el aire con un fertilizante a base de N, aproximadamente cada cinco años. El fertilizante se agrega en dosis de 35 kg N/ha (que corresponde al valor  $u = 1$  de la entrada), ó 70 kg N/ha (correspondiente al valor  $u = 2$ ). El valor  $u = 0$  de la entrada se asocia con la fertilización nula (ver Ewald Maki, 1966).

Existe una gran complejidad ecológica y económica en las relaciones entre las variables de estado potenciales para este sistema, pero las variables de entrada-salida pueden ser reducidas a: *cantidad de fertilizante e incremento de biomasa debido al proceso de fertilización*. Ponemos todas las otras variables dentro de la caja negra cuya dinámica va a ser estimada.

Los datos en la tabla A4·VII resultaron de la interpolación de los informados por el grupo SCA (Anónimo, 1981a). En 15 años el crecimiento en biomasa producido debido a la fertilización fue 4,5 millones de m<sup>3</sup>. El costo del proceso de fertilización fue aproximadamente 30 millones de U\$S (es decir, 17 U\$S por ha (Anónimo, 1984a).

En este ejemplo podemos usar polinomios ortogonales de grado hasta dos (Costanza et al., 1983) y podemos calcular una realización de dimensión 1, cuyas matrices son

$$H_0 = 1 \quad H_1 = H_2 = 0$$

$$F_0 = 0.74 \quad F_1 = 0.22 \quad F_2 = 0.04$$

y

$$G_0 = 1.62 \quad G_1 = -1.35 \quad G_2 = -0.28$$

[A4·34]

**Tabla A4·VII:** Incremento acumulado diferencial del total de biomasa ( $10^6\text{m}^3$ ) de bosques fertilizados con dosis  $(u_1)$ ,  $(u_1, u_2)$  y  $(u_1, u_2, u_3)$  respectivamente. (Datos informados e interpolados).

---

$u_1 = 0$	0	1	2
	0.0	2.2	2.7
$u_1 = 0$ $u_2 = 0$	0	1	2
	0.0	2.2	2.7
1	2.2	3.6	3.9
2	2.7	3.9	4.2
$u_1, u_2 = 00$ $u_3 = 0$	00	10	20
	0.0	2.2	2.7
1	2.2	3.6	3.9
2	2.7	3.9	4.2
$u_1, u_2 = 01$ $u_3 = 0$	01	11	21
	2.2	3.6	3.9
1	3.6	4.5	4.8
2	3.9	4.7	4.9
$u_1, u_2 = 02$ $u_3 = 0$	02	12	22
	2.7	3.9	4.2
1	3.9	4.7	4.9
2	4.2	4.9	5.0

---

El algoritmo determina que la mejor dimensión para las realizaciones aproximadas es uno. Esto es originado probablemente por la suavidad generada durante el proceso de interpolación.

De la ecuación (A4.6) y los valores calculados para las matrices  $F_i$ ,  $G_i$ , and  $H_i$ , se obtienen las siguientes líneas rectas conteniendo toda la información sobre la dinámica del sistema

$$(u = 0) \quad x_{t+1} = x_t$$

$$(u = 1) \quad x_{t+1} = 0.66x_t + 2.18$$

$$(u = 2) \quad x_{t+1} = 0.56x_t + 2.69$$

Como en este caso  $x = y$ , mirando las rectas anteriores y sus puntos de intersección podemos inferir algunos resultados de optimización. Si estuviéramos interesados en el aumento de biomasa, la mejor política podría haber sido fertilizar con doble dosis de fertilizante hasta que la salida alcance el valor de 5.1 millones el  $m^3$ , luego con una dosis simple de 5.1 millones a 6.4 millones de  $m^3$ , y cesar la fertilización a partir de ese momento. Pero si también consideramos el precio de los fertilizantes, entonces la acción óptima resulta en la aplicación de una dosis única periódica de fertilizante nitrogenado.

Otro ejemplo, ilustrando ahora una aplicación a los sistemas con más variables de entrada y/o salida, viene de ampliar el sistema descrito en este apéndice A4 como sigue:

- Variables de entrada

$u$ : cantidad de urea agregada (lo mismo que antes)

$v$ : medida relacionada al agua que entra al sistema (nueva)

- Variables de salida

$y$ : altura de los árboles (lo mismo que antes)

$z$ : diámetro (bhd) de los árboles (nueva)

La variable  $z$  fue medida simultáneamente con  $y$  en cada etapa del experimento (ver tabla A4·VIII). Contamos también con datos de crecimiento libre para árboles de la misma especie bajo condiciones de suelo similares y pequeña diferencia de promedio de lluvias caídas (Glade, 1983).

Para aplicar el algoritmo de realización aproximada necesitaríamos más datos experimentales, principalmente aquellos correspondientes a los casos de fertilizantes combinados y variaciones en las precipitaciones. Estos fueron generados simulando un sistema de entrada/salida ampliado (ver los valores para la etapa 1 en la tabla A4·IX), donde el valor  $v = 1$  se asocia a la precipitación ocurrida en el experimento principal (900 mm). Como no hubo riego adicional tomamos  $v = 0$  para los datos correspondientes a una precipitación media de 850 mm y  $v = 2$  para 950 mm. Las diferencias en precipitación son pequeñas, de modo que suponemos una dependencia cuasi lineal de  $x$  respecto de  $v$ . El resultado cualitativo observado para  $v = 1$  y los diferentes valores de  $u$  se reprodujo en ocasión de la simulación de las salidas necesarias para  $v = 0$  y  $v = 2$ . Con toda esta información numérica construimos una nueva realización aproximada de la forma:

$$\begin{pmatrix} y_n \\ z_n \end{pmatrix} = \left( \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^1 H_{ij} P_i(u_n) Q_j(v_n) \right) x_n$$

$$x_{n+1} = \left( \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^1 F_{ij} P_i(u_n) Q_j(v_n) \right) x_n + \left( \sum_{i=0}^3 \sum_{j=0}^1 G_{ij} P_i(u_n) Q_j(v_n) \right)$$

[A4·37]

**Tabla A4-VIII:** Diámetros (bhd)  $z_n$  (en cm), con  $n = 2, 3,$  y  $4$  de árboles controlados por  $(u_1, v_1)$ ,  $(u_1, v_1, u_2, v_2)$  y  $(u_1, v_1, u_2, v_2, u_3, v_3)$  respectivamente, donde las  $u_j$  son dosis de fertilizante agregados y  $v_1 = 1, v_2 = 1, v_3 = 1$  son los promedios de lluvia caída correspondientes al experimento principal.

---

$u_1 =$	0	1	2	3
	2.7	3.1	2.7	2.5
$u_1 =$	0	1	2	3
$u_2 =$	0	1	2	3
	2.8	3.4	4.2	3.7
	1	3.3	3.2	3.2
	2	3.6	2.9	3.2
	3	3.1	3.2	3.1
$u_1, u_2 =$	00	10	20	30
$u_3 =$	0	1	2	3
	5.2	6.4	6.9	6.8
	1	7.6	8.2	6.3
	2	7.2	8.5	6.6
	3	7.4	7.5	7.0
$u_1, u_2 =$	01	11	21	31
$u_3 =$	0	1	2	3
	6.8	7.2	8.0	6.3
	1	7.6	7.9	7.3
	2	7.1	6.6	6.9
	3	7.6	6.7	7.0
$u_1, u_2 =$	02	12	22	32
$u_3 =$	0	1	2	3
	6.9	7.8	7.3	7.0
	1	6.4	6.6	7.2
	2	6.8	6.1	7.2
	3	6.5	7.4	6.2
$u_1, u_2 =$	03	13	23	33
$u_3 =$	0	1	2	3
	5.5	6.1	7.4	6.4
	1	7.6	6.7	5.8
	2	6.6	7.3	7.4
	3	7.6	6.9	6.6

---

Tabla A4·IX: Alturas  $y_1$  y diámetros (bhd)  $z_1$  (en cm) de árboles controlados por  $(u_1, v_1)^a$

	$u_1 = 0$	1	2	3	
$v_1 = 0$	162	185	185	173	$y_1$
	2.7	3.0	3.0	2.8	$z_1$
1	167	187	187	177	$y_1$
	2.7	3.0	3.0	2.9	$z_1$
2	172	188	188	181	$y_1$
	2.8	3.0	3.0	2.9	$z_1$

<sup>a</sup> Habría  $4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 288$  valores correspondientes a la etapa 2 y  $4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 4 \times 3 \times 2 = 3456$  valores correspondientes a la etapa 3 que no se incluyen.

donde los polinomios  $P_i(u)$  están dados en las formulas (A4.8-11) de este apéndice A4,  
y

$$Q_0(v) = 1$$

$$Q_1(v) = 1 - v$$

Los valores obtenidos del procedimiento de realización fueron:

(a) mejor dimensión para el espacio de estados: 3

(b) las correspondientes matrices para la mejor realización aproximada de orden 3,  
a saber:

$$H_{00} = \begin{pmatrix} -4.5 & -2.5 & 14.9 \\ -0.06 & -0.03 & 0.19 \end{pmatrix}$$

$$H_{10} = H_{20} = H_{30} = H_{01} = H_{11} = H_{21} = H_{31} = 0$$

$$F_{00} = \begin{pmatrix} 1.1 & -0.4 & 0.03 \\ -0.3 & 2.3 & 0.3 \\ -0.1 & -0.3 & -0.4 \end{pmatrix}$$

$$F_{10} = \begin{pmatrix} 0.3 & -0.2 & -0.005 \\ 2.4 & 0.23 & -0.06 \\ -0.5 & 0.2 & 0.08 \end{pmatrix}$$

$$F_{20} = \begin{pmatrix} 0.9 & -0.4 & -0.02 \\ 1.1 & 0.07 & -0.3 \\ -0.04 & -0.17 & 0.4 \end{pmatrix}$$

$$F_{30} = \begin{pmatrix} -0.3 & 0.3 & 0.008 \\ 0.15 & -0.14 & 0.08 \\ -0.15 & 0.05 & -0.1 \end{pmatrix}$$

$$F_{01} = F_{11} = F_{21} = F_{31} = 0$$

$$G_{00} = \begin{pmatrix} -2.5 \\ -1.0 \\ 0.1 \end{pmatrix} \quad G_{10} = \begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad G_{20} = \begin{pmatrix} 1.1 \\ 1.0 \\ -0.07 \end{pmatrix} \quad G_{30} = \begin{pmatrix} -0.07 \\ -0.23 \\ -0.15 \end{pmatrix}$$

$$G_{01} = \begin{pmatrix} 0.7 \\ 0.0 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad G_{11} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.2 \\ 0.0 \end{pmatrix} \quad G_{21} = \begin{pmatrix} 0.0 \\ 0.0 \\ -0.1 \end{pmatrix} \quad G_{31} = 0.$$

El proceso de optimización puede efectuarse como antes una vez que se ha agregado un nuevo término para la evaluación del efecto de costo inducido por la variable  $v$ .

A partir de los datos que permiten construir la figura A4.2 del artículo precedente, es posible identificar los parámetros del crecimiento logístico del rodal implantado. Estos resultan ser  $a = 0.36$  y  $b = 0.00082$  en el caso de ausencia de fertilizante y  $a = 0.43$  y  $b = 0.00102$  con fertilizante óptimo, de manera que la constante (variable) de receptividad  $k$  es del orden de las  $430 \text{ ton.ha}^{-1}$ . Ya en el cuarto año se tiene, por raleos, una densidad de cerca de 1000 ejemplares por hectárea. Con los coeficientes de forma que hemos establecido, este modelo de crecimiento logístico ajusta a los datos censales, de manera que es utilizado para la optimización del manejo posterior. El umbral ecológico que se mantiene permite la continuidad del rodal en el tiempo y la conservación del medio.

## A5. EL PROGRAMA BALL

### INTRODUCCIÓN.

El manejo de sistemas geográficos agrosilvopastoriles se manifiesta como un problema de difícil solución en diversas regiones de nuestro planeta. En nuestro país, la mayor parte del territorio menos privilegiado adolece de falta de estrategias adecuadas para enfrentar el doble desafío del aprovechamiento de recursos y de la conservación ecológica. Las metodologías corrientes de manejo han tendido hasta ahora a producir resultados altamente negativos sobre los sistemas naturales. Por ejemplo el veloz avance de la frontera del desierto y la destrucción de los recursos naturales ha sido una constante del asentamiento humano en el Chaco Argentino, región que abarca varias provincias del norte de nuestro territorio.

BALL, el producto que presentamos en versión -1.01, incorpora parte del conocimiento existente respecto de las estrategias ecológica y económicamente adecuadas para el manejo de sistemas silvopastoriles, al que asocia técnicas de identificación de modelos dinámicos controlados y de su control óptimo tanto clásico como por saltos o impulsional.

Una de las ideas básicas en que basamos el manejo de ecosistemas boscosos de escasa robustez es que, en general, los árboles protegen su productividad. El logro de un ecosistema equilibrado, con perpetuidad del aprovechamiento de recursos, y producción constante de materias primas y productos de su elaboración, con aprovechamiento económico que permita el armónico desarrollo y crecimiento de las poblaciones que en ellos se sustentan, es el objetivo a cuyo logro se orienta el asesoramiento suministrado por el programa BALL.

Dadas las características de los sistemas silvopastoriles el manejo se realiza en tiempo discreto con un lapso anual, semianual o, asimismo, trimestral, entre muestras de las variables de estado. El último debe ser usado en casos especiales de incorporación de la componente agronómica al modelo.

La información censal que necesita el programa es de breves series de datos de crecimiento de las especies animales y vegetales en distintas condiciones de los controles y para diversos estados. Con tales datos censales, un conjunto de las rutinas de inicialización del programa determina los parámetros del modelo dinámico propuesto. La discretización temporal no obsta a que la dinámica, que, en general, para el crecimiento de poblaciones en sistemas naturales debe ser planteada no lineal, pueda ser continua (ecuación diferencial ordinaria controlada, el caso preferido al presente) o, también, discreta (ecuación en diferencias). El proceso de identificación también puede ser realizado en una primera etapa independiente y entonces, en las siguientes sesiones, evitar este paso incluyendo directamente a los parámetros como datos. Cuando se trabaja repetidamente con el mismo modelo (caso habitual en que ha sido satisfactoriamente identificado y no cambian las condiciones generales del sistema) es posible utilizar la opción de construcción, en un archivo auxiliar, de una tabla de datos, cuyo tamaño depende de la discretización adoptada, y que acelera considerablemente el proceso de integración de la dinámica vía un método de interpolación convexa.

Es posible elegir entre diversos conjuntos de parámetros para las funcionales que se han de optimizar en la etapa de obtención de los controles óptimos o modificar los parámetros (costos, precios, tasas de interés real, etc) de las mismas. El resultado de la optimización es la definición explícita de los momentos y las correspondientes acciones de manejo que deben ejercerse para la mejor conducción del sistema.

BALL está diseñado como programa semiinteractivo en ambiente VAX-11-780/VMS versión 4.5 y su versión -1.01 está escrita en VAX-BASIC versión 3.0. Está avanzada la versión 0.01 de BALL en VAX-C (portable a computadora personal IBM-compatible tipo PC-XT con MS-DOS en versión 3.0 o superior). Por sus características, además de suministrar las políticas óptimas de manejo correspondientes al problema que se haya planteado vía la definición de los diversos parámetros del mismo, permite probar diversas alternativas de acción sobre el sistema mediante simulaciones que, sin afectar al sistema real, nos dicen cómo se comportaría éste bajo esas nuevas condiciones y, asimismo, modificar, dentro de ciertos límites, la estructura misma de los modelos dinámicos y de los funcionales de beneficio ecológico-económico que se utilizan en la optimización.

En este artículo seguimos la notación fijada en el capítulo 2.

En la siguiente sección describimos las rutinas de BALL.

Identificaremos con

▷▷v.0◁◁ los detalles que correspondan a la versión 0.01 de BALL, actualmente en proceso de implementación.

## EL PROGRAMA.

Luego de presentarse, BALL interroga al usuario acerca de si la sesión se desea interactiva o no. Si se corre en modo "batch" utiliza los datos y parámetros de su propia base. En el modo interactivo interroga al usuario respecto de datos y rutinas por utilizar.

▷▷v.0◁◁ Se implementan rutinas que admiten la variación de la estructura interna de los modelos en una gama amplia durante la sesión interactiva.

Dos secciones especiales del programa realizan, respectivamente, la identificación y la optimización.

La Identificación.

A partir de la vía metodológica iniciada en el apéndice A3 la rutina de identificación nos provee los coeficientes del modelo polinomial para la evolución controlada. La información se suministra al programa como una sucesión de pares de vectores que contienen, cada uno, la serie de estados y controles respectivos, correspondientes a una dada condición inicial.

Para la identificación del modelo del sistema utilizamos un conjunto de trayectorias a partir de distintas condiciones iniciales y con distintos valores de los controles (ver apéndice A4). En los casos en que se identifica la evolución controlada, los controles han sido discretizados convenientemente y se tienen los datos censales en la forma

$$(x_1^i(s_j), \dots, x_r^i(s_j), u_1^i(s_j), \dots, u_p^i(s_j))$$

con

$$i = 1, \dots, N \quad \text{y} \quad j = 0, \dots, 2$$

donde  $N$  es el número de condiciones iniciales y  $s_0 = 0$  es el instante inicial para cada evolución. Con esta información se estima numéricamente la velocidad de cambio de cada vector  $x^i$  en el punto  $x^i(0)$  y resolvemos el problema de cuadrados mínimos sustituyendo esta información en la expresión formal de la ecuación diferencial ordinaria  $\dot{x} = f(x, u)$  con  $f$  un polinomio de segundo grado.

▷▷v.0◁◁ Se implementa la consideración de los controles  $u^i$  en la identificación.

Utilizamos las rutinas de integración que describimos en la próxima sección y comparamos (otra aplicación de mínimos cuadrados) las trayectorias censales con las calculadas con los coeficientes obtenidos en el paso anterior, lo que inicia un nuevo proceso de optimización moviéndonos en el espacio de parámetros que, como es fácil calcular, tiene, en el caso de grado dos, y sin controles  $u$ , exactamente

$$r + r + \binom{r}{2} = \frac{r^2 + 3r}{2}$$

coeficientes en cada una de las  $r$  componentes de  $f$ .

En el caso  $r = 1$  son dos parámetros (ver el apéndice A3 para la identificación en este caso en que se tiene solución analítica de la ecuación diferencial). Cuando  $r = 4$  son, en principio, cincuenta y seis parámetros. Por esta razón, en este caso, las versiones actuales del programa comienzan identificando con un número sensiblemente inferior asociado a los modelos de Verhulst-Pearl, es decir, veinte coeficientes.

▷▷v.0◁◁ En pasos sucesivos, y de no alcanzarse un ajuste apropiado se incorporan nuevos conjuntos de términos y se determina, en consecuencia, un mayor número de parámetros.

La optimización.

Se optimizan sistemas definidos por las masas de dos especies forestales distinguidas por su valor o abundancia (expresadas como  $x_1$  y  $x_2$ ), la del resto del bosque (expresada  $x_3$ ) y la de ganado (expresada  $x_4$ ). En los casos en que se desee que alguna de las variables mencionadas no se involucre en la evaluación bastará fijarla en el valor cero. Las variables no nulas no se apartan de rangos definidos por las restricciones ecológicas que tiene el sistema en estudio.

La estructura actual del programa permite adicionar a estos vectores tetradi-  
mensionales un par de variables de control (en este caso  $x_5$  y  $x_6$ , que corresponden a  
 $u_1$  y  $u_2$ ). Puede ampliarse, modificando el programa fuente, el número de variables o  
de controles en caso de ser necesario.

En función del valor del indicador que define si la sesión es interactiva o no lo  
es, se producen los siguientes pasos

- (1) lectura de datos (en el caso interactivo se permite la modificación de algunos de  
los parámetros)
- (2) dependiendo de cuáles variables de estado se encuentren involucradas (las restantes  
se fijan nulas) se determina el caso en cuestión mediante un desarrollo binario. El  
índice asociado al caso es global, toma un único valor en cada corrida
- (3) se determina si se resuelve por primera vez el sistema no controlado de ecuaciones  
diferenciales o, en cambio, se lee la información del archivo donde están precalcu-  
ladas las posiciones en el período siguiente a partir de una grilla de discretización  
del espacio de evolución de estados. Con estos valores se interpola para determinar  
las trayectorias
- (4) comienza el ciclo central donde se realiza la optimización propiamente dicha para  
los conjuntos de valores iniciales que se establezcan. En esta etapa se admiten  
dos caminos principales (que se seleccionan con el valor de una variable en la base  
de datos), una vía determinista exhaustiva (basada en un algoritmo presentado  
en Neuman y Costanza (1990), que se resume más adelante), y una vía tipo  
“Montecarlo”, donde se seleccionan en forma parcialmente aleatoria distintas  
políticas de manejo y se hallan las subóptimas entre ellas.

si se ha solicitado una serie de soluciones para sendos vectores de condiciones iniciales el ciclo de cálculo determina los valores y los graba en dos archivos de salida de la información diseñados para permitir, uno de ellos, el procesamiento ulterior de la información, y el otro la inspección visual de la misma. En la forma interactiva los resultados solamente se registran en el dispositivo de salida.

Dados los valores del número de casos se establece el ciclo principal de cálculo. En la forma interactiva se fija este número en uno, de este modo al final de cada optimización es posible definir una nueva condición inicial o nuevos parámetros para la misma condición, que se deduce del estado inicial del problema en estudio. En lo que respecta a esta opción el estilo "batch" se orienta al establecimiento de estrategias y criterios globales y al ajuste de parámetros, en cambio el modo "interactivo" permite determinar tácticas específicas de acción, en condiciones particulares.

El primer paso es leer de un archivo de datos los parámetros y valores iniciales que en ausencia de modificaciones determinarán la corrida. La información da el número de variables de estado, el de controles clásicos, la precisión deseada en la integración de la ecuación diferencial y la bandera que determina si se usan efectivamente los controles continuos. El horizonte y la tasa de interés real (en ausencia de inflación) a los que se agregan parámetros asociados a las salidas se leen a continuación. Luego de leer los valores de las penalizaciones relacionadas con los controles por saltos se incluye el número de saltos y los valores iniciales de las variables de estado que permitirán fijar el caso de la corrida.

En el caso de desear suministrar más de un vector inicial se fija el número de puntos para la determinación en cada variable y los intervalos de su recorrido. Los siguientes datos son las ganancias netas, costos y precios necesarios en la evaluación del beneficio y los valores intermedios en la evolución de las variables de estado. Previamente a

los indicadores para seleccionar algoritmos, determinar si se imprime o no, entre otras decisiones, se leen los valores que definen la discretización del espacio de estados que se utilizará en la rutina que acelera el cálculo de las trayectorias.

Esta rutina, que determina la evolución del sistema, utiliza las coordenadas de la matriz “de cortes”, formada por vectores de la misma dimensión que el espacio de estados. Los cortes posibles —en sentido amplio pues se admiten tanto disminuciones como aumentos— se toman en un conjunto discreto equiespaciado. En el caso de las especies forestales distinguidas, para  $2^k$  cortes posibles, solo se admiten, al presente, desde el corte nulo, correspondiente, por razones técnicas al valor máximo citado, hasta el mayor corte posible que lleva la variable, e.g.,  $y_j$ , al umbral mínimo permitido,  $x_{j0}$ . Los  $2^k - 1$  valores intermedios se modifican en pasos con el tamaño de la diferencia entre el estado presente y el umbral multiplicada por  $i/2^k$  con el índice  $i$  recorriendo la sucesión entera hasta  $2^k$ . El resto del bosque se administra en forma diferente, se deja crecer por encima de su umbral  $x_{30}$  hasta un valor  $x_{3,m}$  (por determinar), se tala la masa que supere este valor luego de cada período. El objetivo de ello es mantener un nivel adecuado de cobertura del suelo por el bosque y de este modo dificultar su erosión. El tratamiento de los cortes generalizados en el caso del ganado, basado en la práctica habitual, pero simplificada su estructura, depende, para la variable  $y_4$ , de tres parámetros, el umbral mínimo  $x_{40}$ , y dos valores intermedios  $x_{4,inf}$  y  $x_{4,sup}$ , por determinar. La cuarta coordenada del vector de cortes solo admite los valores  $\{0, 1, 2^k\}$ . Si esta coordenada toma el mayor valor, el estado no cambia. En el caso de los valores 0 y 1 depende del valor del estado. Si  $y_4 \geq x_{4,sup}$ , entonces para el valor 1 se salta al valor medio entre el estado y  $x_{4,inf}$ , y, para el valor 0 se salta a éste último. Si  $x_{4,inf} \leq y_4 \leq x_{4,sup}$ , en el caso 1 se salta al extremo superior y en el caso 0 al inferior. En el caso  $x_{4,inf} \geq y_4$ , para el valor 1 se salta a  $x_{4,sup}$ , y para 0 al valor intermedio entre el estado y éste.

Debe notarse que es posible modificar la mencionada estructura de cortes en etapa de compilación,

▷▷v.0◀◀ la alteración del conjunto de cortes posibles en forma interactiva se reduce a dos casos específicos, en primer lugar, cuando se trata del manejo de una especie implantada más ganado, y en segundo lugar, en el caso en que, dada la situación más general, se desea adoptar una política de rotación periódica para el bosque completo.

Resuelta, en cada tiempo, la cuestión de a dónde saltar, se invoca a las rutinas que determinan la posición al cabo de un período. Si se consideran controles continuos el programa utiliza las rutinas que integran la ecuación diferencial controlada. En el caso en que sea posible (por ejemplo, si no hay controles continuos) se utiliza un subprograma que determina la nueva posición interpolando entre los valores precalculados para un conjunto de posiciones dadas por una discretización adecuada.

En todos los casos se conservan los valores de las coordenadas de los estados para su utilización en la rutina que evalúa la gestión.

La base del cálculo del beneficio es determinar una trayectoria y valuarla llevando las cifras a valor neto presente. Debe, en consecuencia integrarse la ecuación diferencial ordinaria autónoma controlada que rige la dinámica teniendo en cuenta la sucesión de saltos generada por el control impulsional.

Todas las partes del programa destinadas a la construcción de trayectorias del sistema reposan en las rutinas de integración en mayor o menor medida. Como el sistema de ecuaciones diferenciales tiene segundo miembro polinomial (los coeficientes de los polinomios se determinan en la etapa de identificación) se diseñó un paquete 'ad hoc' de subprogramas que lo integran con la precisión requerida. Utiliza los métodos combinados de Runge-Kutta (RK) de cuatro pasos y extrapolación de Richardson

(RCH, un paso y repetida). La estrategia es calcular con dos pasos, uno múltiplo del otro, la solución vía RK y aplicar un paso de extrapolación. Si las corridas con paso  $h$  y  $h/2$  difieren (en términos de la precisión requerida), se efectúa la extrapolación RCH.

La precisión que se alcanza con estas rutinas de integración de la ecuación diferencial con impulsos es del orden del indicador correspondiente definido en la lectura de datos al principio de la corrida.

El beneficio neto presente correspondiente a una trayectoria de saltos se evalúa mediante la funcional adecuadamente discretizada. Los valores de las condiciones iniciales permiten determinar la evaluación inicial en función de su apartamiento de los umbrales mínimos de las variables. Para cada período sucesivo se calcula el costo corriente del mismo, y, dependiendo de los controles que se apliquen se calcula el beneficio correspondiente, incluyendo las penalizaciones asociadas a la realización de acciones que involucren saltos en las variables. Al finalizar la evolución del sistema se calcula el valor residual final. En cada caso se lleva a valor presente mediante la tasa de interés real.

Las estructura de las rutinas que permiten calcular las ganancias netas absolutas en cada período se establecen en la etapa de compilación.

▷▷v.0◁◁ La implementación de rutinas de ganancias con estructura variable depende de las necesidades del usuario y del grado de sutileza de la evaluación que desee realizarse

La optimización por el camino determinista exhaustivo mencionado comienza calculando —por la consideración y ordenamiento de todos los casos pertinentes— los valores de  $V_0$ ,  $V_1$ , y  $V_2$  y las trayectorias que los producen. Si alguno de los dos primeros es mayor que los restantes el proceso termina, y se obtiene  $V = V_i$  con  $i = 0$  ó  $i = 1$ . Si  $V_2$  es mayor que los precedentes entonces se calcula  $V_3$  y se compara. En el caso de ser  $V_2 > V_3$  se asigna  $V = V_2$ , de no ser así el proceso continúa. La forma de la función  $k (= D_0 + K(z))$  con  $D_0 < 0$  y  $K(z)$  el beneficio neto debido a la aplicación del salto  $z$ ) garantiza la finitud del algoritmo esquematizado (ver Neuman y Costanza, 1990). El programa permite obtener, sin modificación, hasta  $V_5$ , aunque rara vez es necesario, en el estudio de mediano plazo, superar el subíndice 3. En la etapa de adaptación del programa a un caso concreto es útil a veces calcular todas estas funciones de valor y comparar las correspondientes políticas óptimas y subóptimas.

▷▷v.0◀◀ El caso de horizonte infinito (es decir  $T = \infty$ ) está asociado a un proceso periódico que limita el cálculo a un corte por etapa.

En la etapa correspondiente a “un corte” se corta una vez exactamente, esto significa que hay un año en que se altera una o más variables y en los demás años no se afecta ninguna. Debe notarse que el caso en que se corta una vez en cada especie pero en períodos distintos es parte del caso de dos ó más cortes. Lo mencionado no debe afectar pues este algoritmo es efectivamente exhaustivo (ver Neuman y Costanza, 1990).

Si se tiene que  $V_0 > V_1$ , la asignación  $V = V_0$  sugiere que resultaría innecesario calcular  $V_2$ . Esto es efectivamente así pero la determinación de  $V_2$  en todos los casos, aún aquellos en que no es necesario para la obtención de la función de valor, se debe a que la información que provee este proceso se introduce en una rutina adicional que indica la sensibilidad de la evaluación ante variaciones de ciertos parámetros,

▷▷v.0◀◀ la determinación de la sensibilidad y precisión de los resultados se asocia a un subprograma que permite modificar los parámetros económicos y exhibe los nuevos resultados.

La optimización por el camino tipo “Montecarlo”, que, por su naturaleza, nos permite obtener un subóptimo, comienza calculando  $V_0$ . A continuación se selecciona un número predeterminado de posibles políticas de control. Para cada una de ellas, representada por la matriz de coeficientes mencionada antes, se calcula el resultado de la evolución. Se ordenan los resultados y se determina cual es el mejor. Paralelamente, dependiendo del número de ensayos prefijados, se determinan los intervalos de clase para la construcción de un histograma que proveerá índices estadísticos de la distribución obtenida (momentos, sesgo, etc.). De su análisis, el producto determina si es necesario efectuar más ensayos, o si éstos deben realizarse con mayor o menor número de cortes, o si, en cambio, el conjunto determinado produce una aproximación razonable del verdadero óptimo (que es desconocido). Se puede utilizar el programa para calibrar estas rutinas comparando con los resultados que da la vía determinista.

Los números aleatorios que se utilizan son los provistos por los servicios del sistema ambiente con semilla basada en funciones del tiempo presente del mismo.

▷▷v.0◀◀ Se implementa una rutina específica de construcción de números aleatorios.

El resultado de la optimización es la definición de las acciones (óptimas) que deben realizarse sobre el sistema para dar el mejor resultado neto descontado y el valor de éste. Asimismo se obtiene la sensibilidad del sistema a variaciones de ciertos parámetros pasibles de ser ajustados en el sistema real y, eventualmente, la estimación de sus valores más apropiados.

El uso interactivo.

Cuando se usa interactivamente, BALL permite modificar diversos parámetros del problema y comparar los resultados con los producidos en corridas previas.

Es posible suprimir variables o controles, o adicionarlos hasta la cantidad máxima admitida (dependiente de la discretización de los estados y controles y de la capacidad de almacenamiento del ambiente computacional, en caso de no ser posible la combinación deseada, BALL lo anuncia y resuelve el problema más fino posible asociado al solicitado. Es menester declarar que, para las aplicaciones para las que la versión actual ha sido diseñada, los requerimientos de memoria no son muy altos y las discretizaciones pueden ser de paso amplio sin afectar en gran medida la calidad de los resultados. En la etapa de desarrollo se utilizan precisiones muy superiores a las que son necesarias en la etapa de uso comercial.

El uso normal es posterior al proceso de fijar el modelo y la información necesaria para efectuar integraciones de alta velocidad de las ecuaciones, por ello el conjunto de parámetros que usualmente se modifican está integrado por las condiciones iniciales, el horizonte de manejo, la tasa de interés y los precios de los distintos factores.

La selección del método exhaustivo suele estar asociada a la necesidad de resultados más precisos. En cambio se apela al algoritmo de tipo probabilístico cuando se desea tener una respuesta más veloz (y más económica en tiempo de computación) pero no tan precisa.

En algunos casos se justifica actuar sobre las discretizaciones para evaluar la posibilidad de efectuar acciones más sutiles sobre el sistema. En estos casos el producto responde con comparaciones entre los valores previos y los nuevos.







A partir de información censal escasa y fraccionaria hemos definido (apéndice A2) un modelo del sistema silvopastoril utilizando las técnicas descriptas.

BALL permite desarrollar el problema de manejo agrosilvopastoril en un ambiente de teoría de sistemas y de control y, eventualmente, obtener soluciones que superen a las técnicas habituales de acción sobre tales sistemas que han llevado a su destrucción y casi extinción.

Nuestro programa se orienta a incorporar en futuras versiones el conocimiento de expertos vía reglas explícitas de acción en diversas situaciones de análisis. Se desea que sea capaz de asesoramiento tanto a los encargados de fijar las políticas y legislación que rijan el manejo, como a los administradores y propietarios encargados de llevarlas a cabo en sus respectivos establecimientos.



## R. REFERENCIAS Y BIBLIOGRAFÍA

- ABER, JS, BOTKIN, DB y MELILLO, JM: *Predicting the Effects of Different Harvesting Regimes on Productivity and Yield in Northern Hardwoods*, *Canadian Journal of Forest Research*, 9, 1979, 10-14.
- ABRAHAM, R y MARSDEN, JE: *Foundations of Mechanics*, Benjamin, 1978, London.
- ADELANI, LA, y RODIN, EY: *A simple nonlinear model for the exploitation of renewable economic resources*, *Computers and Mathematics with Applications*, 18(5), 1989, 411-420.
- AEYELS, D: *Global Controllability for Smooth Nonlinear Systems: A Geometric Approach*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, 23(3), 1985, 452-465
- AHMED, P: *Eucalyptus in agroforestry: its effects on agricultural production and economics*, *Agroforestry Systems*, 8, 1989, 31-38.
- AHMED, NU y TEO, KL: *Optimal Control of Distributed Parameter Systems*, North Holland, 1981, New York.
- AKIYAMA, H: *Invariant Formulation for Stochastic Analysis on Vector Bundles*, *Mathematica Japonica*, 28, 1983, 509-517.
- ALAGIA, HR: *Sistemas diferenciales con singularidades y sistemas de control*, Sexto Seminario Nacional de Matemática, IMAF, Universidad Nacional de Córdoba, 1982, 1-21.
- ÁLVAREZ-BUYLLA ROCES, ME, LAZOS CHAVERO, E, y GARCÍA-BARRIOS, JR: *Homegardens of a humid tropical region in Southeast Mexico: an example of an agroforestry cropping system in a recently established community*, *Agroforestry Systems*, 8, 1989, 133-156.
- ANDERSON FJ: *Control Theory and the Optimum Timber Rotation*, *Forest Science*, 22, 1976, 242-246.

- ANDERSON K y WAN FYM: *Ordered Site Access and Age Distribution in Forest Harvesting II. The Ongoing Forest*, IAMS Report 81-14 University of British Columbia, 1981.
- ANDERSSON, ÅE, KALLIO, M, y SEPPÄLÄ, R: *Systems Analysis for the Forest Sector*, International Institute for Applied Systems Analysis, Working Paper-84-17, 1984, Laxemburg, Austria.
- ANDERSSON, ÅE, y LESSE, P: *Renewable Resource Economics. Optimal Rules of Thumb*, International Institute for Applied Systems Analysis, Working Paper-84-84, 1984, Laxemburg, Austria.
- ANÓNIMO, NN: *La Forestal Argentina*, Editado por la Sociedad Anónima 'La Forestal', Buenos Aires, Argentina, 1967.
- ANÓNIMO, NN: *El eucalipto en la repoblación forestal*, FAO, UN, 1981, Roma.
- ANÓNIMO, NN: *Annual Report, SCA Group*, Svenska Cellulosa Aktiebolaget (SCA), Sundsvall, Suecia, 1981a.
- ANÓNIMO, NN: *Información Forestal; Guía para la Fertilización de Eucalyptus*, INTA, Concordia, Argentina, 1983.
- ANÓNIMO, NN: *Agroforestry in the West African Sahel*, Resource Management for Arid and Semi Arid Regions, Board on Science and Technology for International Development, National Research Council, National Academy, 1984, Washington.
- ANÓNIMO, NN: *FAO Fertilizer Yearbook*, Food Statistics Series N° 56, Food and Agriculture Organization of the United Nations, 1984a, Roma.
- ANÓNIMO, NN: *Lineamientos para una política de desarrollo del Árido Subtropical Argentino*, SECyT, 1985, Catamarca, Argentina.
- ANÓNIMO, NN: *Sistemas Agroforestales en America Latina y el Caribe*, Oficina Regional de FAO en Santiago de Chile, 1986, Chile.

- AUSLANDER, DM, SPEAR, RC, BABCOCK PS, y NADEL, MH: *Control and Modelling of a CELSS*, NASA Contractor Report # 177324, NASA, Ames Research Center, 1983, Moffett-Field, California 94035.
- AVERNER, MM: *An Approach to the Mathematical Modelling of a Controlled Ecological Life Support System*, NASA Contractor Report # 166331, NASA, Ames Research Center, 1985, Moffett-Field, California 94035.
- AYERZA, R, DIAZ, R, y KARLIN, U: *Manejo de 'prosopis' arbóreas en sistemas de producción ganaderos en el Chaco seco de Argentina*, *Gaceta Agronómica*, 8(42), 1988, 140–156.
- AYMERICH, G: *Aspetti variazionali di alcuni modelli matematici in biologia*, *Atti Seminario Matematico e Fisico, Università di Modena*, 34(2), 1985/86, 385–394.
- AXSÄTER, S: *Control theory concepts in production and inventory control*, *International Journal of Systems Science*, 16(2), 1985, 161–169.
- BAILEY, RL y WARE, KD: *Compatible basal-area growth and yield model for thinned and unthinned stands*, *Canadian Journal of Forest Research*, 13, 1983, 563–571.
- BAIOCCHI, C y CAPELO, A: *Variational and Quasivariational Inequalities. Applications to Free Boundary Problems*, Wiley, 1984, Chichester.
- BALLONI, EA: *Fertilização Florestal Boletim Informativo do IPEF*, 6(16), 1978, 1–34.
- BAMBER, RK, HORNE, R, y GRAHAM-HIGGS, A: *Effect of Fast Growth on the Wood Properties of Eucalyptus grandis*, *Australian Forest Research*, 12, 1982, 163–167.
- BANCORA-IMBERT, MC, CHOW, PL y MENALDI, JL: *Control Impulsional de un Oscilador Estocástico Amortiguado*, AADECA, 1988, Buenos Aires.
- BANKS, SP y YEW, MK: *On the Optimal Control of Bilinear Systems and its Relation to Lie Algebras*, *International Journal of Control*, 43(3), 1986, 891–900.
- BARBU, V, y DA PRATO, G: *Hamilton-Jacobi equations in Hilbert spaces*, *Research Notes in Mathematics*, 86, Pitman, 1983, Boston

- BARDI, M: *Geometric Properties of Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, *Journal of Differential Equations*, **58**, 1985, 364–380.
- BARLES, G: *Deterministic Impulse Control Problems*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **23**, 1985, 419–432.
- BARLES, G: *Inéquations quasi-variationnelles du premier ordre et équations de Hamilton-Jacobi*, *Comptes Rendues de l'Académie de Sciences, Paris*, **296**, 1983, 703–705.
- BARNARD, J et al.: *Survey for Monitoring Changes and Trends in Renewable Resources: Forests and Marine Fisheries*, *The American Statistician*, **39**(4, Part 2), 1985, 363–373.
- BARRERA, CA: *Economía y ambiente. Análisis del subsistema regional Chaqueño*, Publicaciones de la Fundación Bariloche.
- BARRON, EN: *Viscosity Solutions for the Monotone Control Problem*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **23**, 1985, 161–171.
- BARRON, EN y JENSEN, R: *Optimal Control Problems with No Turning Back.*, *Journal of Differential Equations*, **36**, 1980, 223–248.
- BATES, DM y WATTS, DG: *A generalized Gauß-Newton procedure for multiresponse parameter estimation*, *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, **8**(1), 1987, 49–55.
- BAUMANN, WT y RUGH, WJ: *Feedback Control of Nonlinear Systems by Extended Linearization*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **36**, 1980, 223–248.
- BEATON, JD: *Fertilizer Methods and Applications to Forestry Practice*, Forest Fertilization Symposium Proceedings, U.S. Department of Agriculture, Forest Service General Technical Report, NE-3, 1973, 55–71, (Citado en Balloni, 1978).
- BELBAS, SA y LENHARDT, SM: *Nonlinear Partial Differential Equations for Stochastic Optimal Control with Switchings and Impulses*, *Applied Mathematics and Optimization*, **14**(3), 1986, 215–227.

- BELLMAN, R: *Introduction to the Mathematical Theory of Control Processes*, Academic, 1971, New York.
- BELLMAN, R, y KALABA, R: *Dynamic Programming and Modern Control Theory*, Academic press, 1965, New York.
- BELLOTE, AFJ, SARRUGE JR, HAAG HP y DE OLIVEIRA GD: *Absorção de Macronutrientes e Micronutrientes pelo Eucalyptus Grandis (Hill, ex-Maiden) em função da idade*. IUFRO Meeting Proceedings, 1980.
- BENNET, RJ y CHORLEY, RJ: *Environmental Systems*, Methuen, 1978, Londres.
- BENSOUSSAN, A: *Introduction to the Theory of Impulse Control*, Control Theory and Topics in Functional Analysis, Trieste International Seminar Course 1974, IAEA, 1976, Vienna, Austria, Vol. III, 1-19.
- BENSOUSSAN, A, HURST, EG, y NÄSLUND, B: *Management Applications of Modern Control Theory*, North Holland/Elsevier, 1974, Amsterdam.
- BENSOUSSAN, A y LIONS, JL: *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique*, Dunod, 1978, Paris .
- BENSOUSSAN, A y LIONS, JL: *Contrôle impulsionnel et inéquations quasi-variationnelles*, Dunod, 1982, Paris.
- BENSOUSSAN, A y LIONS, JL: *Nouvelles méthodes en contrôle impulsionnel*, *Applied Mathematics and Optimization*, 1, 1975, 289.
- BENSOUSSAN, A y TAPIERO, CS: *Impulse Control in Management: Prospects and Applications*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 37, 1982, 419-442.
- BENTON, S: *The Hamilton-Jacobi equation, a global approach*, Academic Press, 1977, New York.
- BERGER, R y DAMAS GARLIPP RC: *Aspectos Económicos do Emprego de Fertilizantes Minerais na Produção de Madeira de Eucalyptus Saligna no Estado de Sao Paulo*, IUFRO Meeting Proceedings, 1980.

- BLAQUIÈRE, A: *Impulse Optimal Control with Finite or Infinite Time Horizon*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **46**, 1985, 431–439.
- BLAQUIÈRE, A: *Differential Games with Piecewise Continuous Trajectories*, en *Differential Games and Applications*, P Hagedorn, HW Knobloch, y GJ Olsder, editores, Springer, 1977, Berlin, 34–69.
- BLAQUIÈRE, A y LEITMANN G: *On the Geometry of Optimal Processes*, en Leitmann, 1967.
- BOLTYANSKII, VG: *Optimal Control of Discrete Systems*, Wiley, 1978, New York.
- BOWES, MD, KRUTILLA, JV y SHERMAN, P: *Forest Management for Increased Timber and Water Yields*, *Water Research R*, **20**(6), 1984, 655–663.
- BRAAT, LC, y Van LIEROP, WFJ (editores): *Integrated Economic-Ecological Modeling*, Elsevier Science Publishers, North-Holland, 1987, Amsterdam.
- BROCKETT, RW: *Feedback Invariants for Nonlinear Systems*, *Proceedings Seventh IFAC Congress*, 1978, Helsinki, 1115–1120.
- BROCKETT, RW: *Nonlinear Systems and Differential Geometry*, *Proceedings IEEE*, **64**(1), 1976, 61–72.
- BURCH, BC: *A Semigroup Treatment of the Hamilton-Jacobi Equation in Several Space Variables*, *Journal of Differential Equations*, **23**, 1977, 107–124.
- BYRNES, CI: *A Brief Tutorial on Calculus on Manifolds, with emphasis on Applications to Identification and Control*, Division of Applied Science and Department of Mathematics, 1983, Harvard University, Cambridge.
- CAFFARELLI, L y FRIEDMAN, A: *Regularity of the solution of the quasivariational inequality for the impulse control problem*, *Communications on Partial Differential Equations*, **3**(8), 1978, 745–753.
- CAFFARELLI, L y FRIEDMAN, A: *Regularity of the solution of the quasivariational inequality for the impulse control problem, II*, *Communications on Partial Differential Equations*, **4**(3), 1979, 279–291.

- CAPUZZO DOLCETTA, I, FLEMING, WH y ZOLEZZI, T (eds) *Recent Mathematical Methods in Dynamic Programming*, Lecture Notes in Mathematics, **1119**, Springer, 1985, Berlin.
- CARLSON, DA: *A Carathéodory-Hamilton-Jacobi Theory for Infinite-Horizon Optimal Control Problems*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **48(2)**, 1986, 265–287.
- CARLSON, DA: *Carathéodory-Hamilton-Jacobi Theory for Nonsmooth Problems of Lagrange and Problems of Optimal Control*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **112**, 1985, 259–273.
- CASSELS, JWS: *Economics for Mathematicians*, London Mathematical Science Lecture Note Series, **62**, Cambridge University Press, 1981, Cambridge.
- CEA, J: *Conception optimale ou identification des formes. Calcul rapide de la dérivée directionnelle de la fonction coût*, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **20(3)**, 1986, 371–402.
- CEBUHAR, WA y COSTANZA, V: *Approximation Procedures for the Optimal Control of Bilinear and Non-linear Systems*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **43(4)**, 1984, 615–627.
- CHAUDHURI, AK, y SEN, KM: *Optimum harvesting policy for an age-structured forest*, *International Journal of Systems Science*, **18(8)**, 1987, 1425–1432.
- CLARK, CW: *Mathematical Bioeconomics. The Optimal Management of Renewable Resources*, Wiley, New York, New York, 1976.
- CLARK, CW: *Bioeconomic Modelling and Resource Management*, Institute of Applied Mathematics, University of British Columbia, Vancouver V6T 1Y4, Canada, 1986.
- CLARK, CW y DePREE, JD: *A Simple Linear Model for the Optimal Exploitation of Renewable Resources*, *Applied Mathematics and Optimization*, **5**, 1979, 180–196.
- CLARKE, FH: *Optimal Control and the True Hamiltonian*, *SIAM Review*, **21(2)**, 1979, 157–166.

- CLARKE, FH: *Perturbed Optimal Control Problems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **31**(6), 1986, 535–542.
- CLARKE, FH y LOEWEN, PD: *The Value Function in Optimal Control: Sensitivity, Controllability and Time-optimality*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **24**, 1986, 243–263.
- CLEMHOUT, S y WAN, HY: *Dynamic Common Property resources and Environmental Problems*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **46**, 1985, 471–481.
- CODDINGTON, EA y LEVINSON, N: *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill, 1955, N York.
- CONRAD, JM y CLARK, CW: *Natural Resource Economics. Notes and Problems*, Cambridge University Press, 1987, Cambridge.
- CORRIGA, G, SALIMBENI, D, SANNA, S, y USAI, G: *An optimal control problem in forest management*, *Applied Mathematical Modelling*, **12**, 1988, 328–332.
- COHEN Y: *Applications of Optimal Impulse Control to Optimal Foraging Problems*, en *Applications of Control Theory in Ecology*, *Lecture Notes in Biomathematics*, **73**, Y Cohen (editor), Springer, 1987.
- COOKE, KL y WITTEN, M: *One-dimensional Linear and Logistic Harvesting Models*, *Mathematical Modelling*, **7**, 1986, 301–340.
- COPPEL, WA: *A Simple Class of Quadratic Systems*, *Journal of Differential Equations*, **64**, 1986, 275–282.
- COSTA, OLV, y DAVIS, MHA: *Impulse Control of Piecewise-Deterministic Processes*, *Mathematics of Control, Signals and Systems*, **2**(3), 1989, 187–206.
- COSTANZA, V: *Universal Approximations of Control Systems over Finite Time*, Ph.D. Dissertation, 1980, Princeton.
- COSTANZA, V, DICKINSON, BW y JOHNSON, EF: *Universal Approximation of Discrete-time Control Systems over Finite-time*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **28**(4), 1983, 439–452.

- COSTANZA, V, y NEUMAN, CE: *Optimising the Process of Forest Fertilization as a Control System*, *Fertilizer Research*, 1990, en prensa.
- COURANT, R y HILBERT, D: *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, Partial Differential Equations, Interscience, 1962, Wiley, New York.
- CRANDALL, MG, EVANS, LC y LIONS, PL: *Some Properties of Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, *Transactions of the American Mathematical Society*, **282**, 1984, 487-502.
- CRANDALL, MG y LIONS, PL: *Hamilton-Jacobi Equations in Infinite Dimensions I: Uniqueness of Viscosity Solutions*, *Journal of Functional Analysis*, **62**, 1985, 379-396.
- CRANDALL, MG y LIONS, PL: *Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, *Transactions of the American Mathematical Society*, **277**, 1983, 1-42.
- CROMER, TL: *Harvesting in a Seasonal Environment*, *Mathematical and Computer Modelling*, **10**(6), 1988, 445-450.
- DAHLQUIST, G, y BJÖRCK, Å: *Numerical Methods*, Prentice-Hall, 1974, E. Cliffs, NJ.
- DALE, VH, DOYLE, TW y SHUGART, HH: *A Comparison of Tree Growth Models*, *Ecological Modelling*, **29**, 1985, 145-169.
- D'ATTELLIS, CE: *Modelos de poblaciones de Schaeffer: Estimación de parámetros y control*, en Segundas Jornadas Latinoamericanas de Matemática Aplicada II, Río de Janeiro, 1983, 871-926.
- DELLACHERIE, C y MEYER, PA: *Probabilities and Potentiel*, *North-Holland Mathematical Studies*, **29**, 1978, Hermann/North-Holland.
- DEL VALLE, P y REBORATTI, HJ: *Consideraciones Generales para el Ordenamiento de los Bosques Nativos del Chaco Oriental*, En Trabajos de la Jornada Preparatoria del Proyecto Interinstitucional para el Manejo Agrosilvopastoril e Industrialización de los Recursos Forestales en Lotes de la Cuña Boscosa del Norte de Santa Fe, 1985, Santa Fe.

- DENNIS, B, BROWN, BE, STAGE, AR, BURKHART, HE, y CLARK, S: *Problems of Modeling Growth and Yield of Renewable Resources*, *The American Statistician*, **39**(4,Pt.2), 1985, 374–383.
- DIAZ, H, DESROCHERS, AA; *Modelling of Nonlinear Discrete-time Systems from Input-Output Data*, *Automatica*, **24**, 1988, 629–641.
- DONALD, DGM and SCHUTZ, CJ: *The Response of Eucalyptus to Fertilizer Application at Planting: the Low's Creek Trial*, *South African Forest Journal*, **102**, 1977, 23–28.
- DUCHHART, I, STEINER, F, y BASSMAN, JH: *Planning methods for agroforestry*, *Agroforestry Systems*, **7**, 1989, 227–258.
- EASTHAM, JF y HASTINGS, KJ: *Optimal Impulse Control of Portfolios*, *Mathematics of Operations Research*, **13**(4), 1988, 588–605.
- EKELAND, I y TEMAM, R: *Convex Analysis and Variational Problems*, North Holland, 1976, Amsterdam.
- ENGLER, H: *On Hamilton-Jacobi equations in bounded domains*, *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, **102A**, 1986, 221–242.
- EWALD MAKI, T; *Necesidad de Fertilizantes en la Producción Maderera*, *Unasylva*, **20**, 1966, 49–54.
- EWEL, KC: *Use of Models in Resource Management*, en *Current topics in forest research*, SV Kossuth y NA Pywell (compiladores), General Technical Report SE-46, Asheville, NC. U.S.Department of Agriculture, Forest Service, Southeastern Forest Experiment Station, 1987, 6–9.
- EWEL, CE, HOOD, SJ, y MYERS, RL: *Simulation of Dynamics of a Managed Slash-Pine Ecosystem on Poorly Drained Soils*, in *Proceedings of the Fifth North American Forest Biology Workshop*, CA Hollis y AE Squillace (editores), University of Florida, Gainesville, FL, USA, 1978, 375–388.

- FAUSTMANN, M: *Berechnung des Werthes, Welchen Walboden Sowte nach nicht Haubare Holtz Bestande für die Weldwirtschaft Besitzen*, *Allgemeine Forst und Jagd Zeitung*, **25**, 1849, 441.
- FFOLLIOT, PF y THAMES, JL: *Environmentally Sound Small-scale Forestry Projects*, CODEL, 1983, New York.
- FLEMING, WH Y RISHEL, RW: *Deterministic and Stochastic Optimal Control*, Springer, 1975, Berlin.
- FLEMING, WH y SOUGANIDIS, PE: *Asymptotic Series and the Method of Vanishing Viscosity*, *Indiana University Mathematical Journal*, **35**(2), 1986, 425–447.
- FORRESTER, JW: *World Dynamics*, Wright-Allen, 1973, Cambridge.
- GABRIELSEN, G: *Global Maxima of Real Valued Functions*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **50**(2), 1986, 257–266.
- GALLO, JY: *Evolución de cuatro especies forestales en experimentación*, Folleto Técnico Forestal, **47**, IFONA, Buenos Aires, 1987.
- GARCÍA, MW: *Using a Forest Management Allocation and Scheduling Model for Integrated resource Planning*, *Computers, Environment and Urban Systems*, **12**, 1988, 25–35.
- GARCÍA, O: *A Stochastic Differential Equation Model of the Height Growth of Forest Stands*, *Biometrics*, **39**(4), 1983, 1059–1072.
- GARCÍA, O: *New Class of Growth Models for Even-aged Stands: Pinus radiata in Golden Downs Forest*, *New Zealand Journal of Forestry Science*, **14**(1), 1984, 65–88.
- GELB, A (editor): *Applied Optimal Estimation*, MIT Press, 1984, Cambridge, Mass.
- GELFAND, IM y FOMIN, SV: *Calculus of Variations*, Prentice-Hall, 1963, Englewood Cliffs, NJ.
- GERHARDT, C: *Global  $C^{1,1}$ -regularity for solutions of quasivariational inequalities*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **89**, 1985, 83.

- GETZ, WM: *Optimal and Feedback Strategies for Managing Multicohort populations*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **46**(4), 1985, 505–514.
- GETZ, WM y MARTIN, DH: *Optimal Control Systems with State Variable Jump Discontinuities*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **31**, 1980, 195–205.
- GIHMAN, II y SKOROHOD, AV: *The Theory of Stochastic Processes I, II and III*, Springer, 1974, 1976, 1979, New York.
- GILMORE, R: *Catastrophe Theory for Scientists and Engineers*, J. Wiley & Sons, 1981, New York.
- GLADE, JE: *Crecimiento y Producción de Montes de Eucalyptus Grandis en la Zona de Concordia, Rendimiento de un Monte de Eucalyptus Grandis a los 10 años, y Elaboración de una Tabla de Volumen para Eucalyptus Grandis*, Instituto Nacional de Tecnología Agropecuaria (INTA), 1983, Concordia, R. Argentina.
- GONZALEZ, R: *Sur l'existence d'une solution maximale de l'équation de Hamilton-Jacobi*, *Comptes Rendus de la Académie de Sciences, Paris*, **282**, 1976, 1287–1290.
- GONZALEZ, R: *Sur la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi du contrôle déterministe*, Tesis de 3<sup>er</sup> ciclo, Universidad de Paris IX, 1980.
- GONZALEZ, R y ROFMAN, E: *On deterministic control problems: An approximation procedure for the optimal cost I: The stationary problem*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **23**, 1985a, 242–266.
- GONZALEZ, R y ROFMAN, E: *On deterministic control problems: An approximation procedure for the optimal cost II: The nonstationary case*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **23**, 1985b, 267.
- GRADSHTEIN IS y RYZHIK IM: *Table of Integrals, Series and Products*, Academic, 1980, New York.
- GRIZZLE, JW y MARCUS, SI: *The Structure of Nonlinear Control Systems Possesing Symmetries*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **30**(3), 1985, 248–258

- GUIDORZI, RP, LOSITO, MP y MURATORI, T: *The Range Error Test in the Structural Identification of Linear Multivariable Systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **27**(5), 1982, 1044–1054.
- HAGGETT, P: *Geography, A Modern Synthesis*, Harper & Row, 1979, New York
- HAIGHT, RG: *A Comparison of Dynamic and Static Economic Models of Uneven-aged Stand Management*, *Forest Science*, **31**(4), 1985, 957–974.
- HAJEK, O: *Discontinuous Differential Equations I*, *Journal of Differential Equations*, **32**, 1979a, 149–170.
- HAJEK, O: *Discontinuous Differential Equations II*, *Journal of Differential Equations*, **32**, 1979b, 171–185.
- HASDORFF, L: *Gradient Optimization and Non-linear Control*, Wiley, 1976, New York.
- HASLINGER J y ROUBIČEK, T: *Optimal Control of Variational Inequalities. Approximation Theory and Numerical Realization*, *Applied Mathematics and Optimization*, **14**(3), 1986, 187–201
- HEAPS, T y NEHER, PA: *Economics of Forestry when the Rate of Harvest is Constrained*, *Journal of Environmental Economics and Management*, **6**, 1979, 297–319
- HELLMAN, O: *A Mathematical Model for a Forest Consisting of a Single Species of Trees of a Non-shade-tolerant Kind*, Report 100, 1979, University of Turku, Finland.
- HELLMAN, O: *A Special Problem of Large Scale Forest Management*, *European Journal of Operational Research*, **4**, 1980, 16–18
- HELLMAN, O: *On the Optimal Control of the Growth of a Forest in a Special Case*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **34**(4), 1981, 579–591.
- HELMES, K: *Optimal Discounted Control for a Continuous Time Inventory Model*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **44**(1), 1984, 75–94.

- HERBERT, MA; *The Response of Eucalyptus Grandis to Fertilising with Nitrogen, Phosphorous, Potassium and Dolomitic Lime for a Mispah Soil Series*, South African Forest Journal, 124, 1983, 4-12.
- HOLMBERG, A, MÄKELÄ, A, y SIEVÄNEN, R: *Dynamic Modelling in Plant Ecology*, Acta Polytechnica Scandinavica, 31, 1979, 89-94.
- HOULLIER, F: *Construction et interprétation de modèles dynamiques: exemples forestiers*, en Pavé (1988), 83-107.
- HRUBES, RJ: *Environmentally Related Restrictions on the Timber Harvesting Capability of a National Forest. A Case Study*, Hilgardia, 52(1), 1984, 1-37.
- HULTKRANTZ, L: *Optimal timber-harvesting programmes in a model with adjustment costs*, Canadian Journal of Forest Research, 16(4), 1986, 836-840.
- HUXLEY, PA (editor): *Plant Research and Agroforestry*, ICRAF, 1983, Nairobi, Kenya.
- HUXLEY, PA: *The role of trees in agroforestry: some comments*, en Huxley (1983), 257-270.
- JACOB, WA y BALLONI, EA: *Efeitos da Fertilização na Qualidade da Madeira*, Boletim Informativo do IPEF, 6(20), 1978, 1-13.
- JURDJEVIC, V y SALLET, G: *Controllability properties of affine systems*, SIAM Journal on Control and Optimization, 22(3), 1984, 501-508.
- KAHN, DW: *Introduction to Global Analysis*, Academic, 1980, New York.
- KAILATH, T: *Lectures on Wiener and Kalman Filtering*, Springer, 1981, Wien.
- KALMAN, RE, FALB, PL y ARBIB, MA: *Topics in Mathematical Systems Theory*, McGraw Hill, 1969, New York.
- KARLIN, U y DIAZ, R: *Potencialidad y manejo de Algarrobos en el árido subtropical argentino*, SECyT, 1984, Buenos Aires.
- KLIR, G (editor): *Trends in General Systems Theory*, Wiley, 1972, New York.

- KOIKE, S: *An Asymptotic Formula for Solutions of Hamilton-Jacobi-Bellman Equations*, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods & Applications*, **11**(3), 1987, 429–436.
- KOSKELA, E: *Forest Taxation and Timber Supply Under Price Uncertainty: Perfect Capital Markets*, *Forest Science*, **35**(1), 1989a, 137–159.
- KOSKELA, E: *Forest Taxation and Timber Supply Under Price Uncertainty: Credit Rationing in Capital Markets*, *Forest Science*, **35**(1), 1989b, 160–172.
- KOZLOWSKI, TT, y HUXLEY, PA: *The role of controlled environments in agroforestry research*, en Huxley (1983), 551–567.
- KRAUTKRAEMER, JA: *The Rate of Discount and the Preservation of Natural Environments*, *Natural resource Modeling*, **2**(3), 1988, 421–437.
- KRUTILLA, JV, BOWES, MD y SHERMAN, P: *Watershed Management for Joint Production of Water and Timber: A Provisional Assessment*, *Water Research Bulletin*, **19**(3), 1983, 403.
- KUNISCH, K y WHITE, LW: *Parameter Identifiability under Approximation*, *Quarterly Applied Mathematics*, **44**(3), 1986, 475–486.
- LADDE, GS, LAKSHMIKANTHAM, V, y VATSALA, AS: *Monotone Iterative Techniques for Nonlinear Differential Equations*, Pitman, 1985, Boston.
- LEDESMA, NR y GALÍNDEZ, VH: *Un modelo de desarrollo de región semiárida con sus propios recursos biológicos. "El distrito forestal"*, Inta, Mendoza, 1974.
- LEE, EB y MARKUS, L: *Foundations of Optimal Control Theory*, Wiley, 1967, New York.
- LEITMANN, G. (editor): *Topics in Optimization*, Academic, 1967, New York.
- LEONDES, CT (editor): *Advances in Control Systems, Theory and Applications*, Vol. 1-29, Academic Press, 1966/1988, New York.
- LEPELTIER, JP y MARCHALL, B: *Théorie générale du contrôle impulsif markovien*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **22**, 1984, 645–665.

- LIAO Y-Ch: *Switching and impulsive control of a reflected diffusion*, *Applied Mathematics and Optimization*, **11**, 1984, 153–159
- LIONS, PL: *Control of diffusion processes in  $R^n$* , *Communications on Pure and Applied Mathematics*, **34**, 1981, 121–147.
- LIONS, PL: *Generalized Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, Pitman, 1982, London.
- LIONS, PL: *Hamilton-Jacobi-Bellman Equations and the Optimal Control of Stochastic Systems*, *Proceeding of the International Congress of Mathematicians, Varsovia*, 1983, 1403–1417.
- LIONS, PL y PERTHAME, B: *Quasivariational Inequalities and Ergodic Impulse Control*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **24**(4), 1986, 604–615.
- LIONS, PL y SOUGANIDIS, PE: *Differential Games, Optimal Control and Directional Derivatives of Viscosity Solutions of Bellman's and Isaac's Equations*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **23**(4), 1985, 566–583.
- LÖNNSTEDT, L: *A Dynamic Forest Sector Model with a Swedish Case*, *Forest science*, **32**(2), 1986, 377–397.
- LUNA FLORES, CD: *Efectos del Uso de Fertilizantes en el Crecimiento Inicial de Eucalyptus Botryoides*, *Actas del 7° Congreso Forestal Mundial*, 1972, Buenos Aires, 2313–1319.
- MAC ELROY, RD y SMERNOFF, DT (editores): *Regenerative Life Support System y Space*, XXVI COSPAR Meeting, Toulouse, France, July 1986, NASA Conference Publication # 2480, NASA, Ames Research Center, 1986, Moffett Field, California 94035.
- MacELROY, RD, TREMOR, J, SMERNOFF, DT, KNOTT, W y PRINCE, RP: *A Review of Recent Activities in the NASA CELSS Program*, en *Controlled Ecological Life Support System*, NASA CP-2480, RD MacElroy y DT Smernoff (editores), 1987, 51–55.

- MAZZIOTTO, G, STETTNER, L, SZPIRGLAS, J y ZABCZYK, J: *On Impulse Control with Partial Observation*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **26**(4), 1988, 964–984.
- MELLO, HA, MASCARENHAS, J, SIMÕES, JN y COUTO, HTZ: *Resultados da aplicação de fertilizantes minerais na produção de Madeira de Eucalyptus Saligna Sim. em Solos de Cerrado do Estado de São Paulo Boletim Informativo do IPEF*, **1**(1), 1970, 7–26.
- MENALDI, JL: *Le problème de contrôle impulsionnel optimal déterministe et l'inéquation quasi-variationnelle du premier ordre associée*, *Applied Mathematics and Optimization*, **8**, 1982b, 223–243.
- MENALDI, JL: *Le problème de temps d'arrêt optimal déterministe et l'inéquation variationnelle du premier ordre associée*, *Applied Mathematics and Optimization*, **8**, 1982a, 131–158.
- MENALDI, JL: *On the Optimal Impulse Control Problem for Degenerate Diffusions*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **18**(6), 1980, 722–739.
- MENALDI, JL: *Optimal Impulse Control Problems for Degenerate Diffusions with Jumps*, *Acta Applicandæ Mathematicæ*, **8**, 1987, 165–198.
- MENALDI, JL: *Programación Dinámica Estocástica*, Cuadernos del Instituto de Matemática "B. Levi", Rosario, **16**, 1988.
- MENALDI, JL: *Sur les problèmes de temps d'arrêt, contrôle impulsionnel et continu correspondant à des opérateurs dégénérés*, Tesis de doctorado de estado, Universidad de Paris IX, 1980, Paris.
- MENALDI, JL y ROBIN, M: *Processus de diffusion réfléchis avec sauts*, *Comptes Rendus de la Académie des Sciences de Paris, I*, **297**, 1983, 533–536.
- MENESES, A y OLIVARES, B: *Estrategia óptima de corte a nivel de rodal en plantaciones de Pinus radiata*, Instituto de Manejo Forestal, Universidad Austral de Chile, preimpreso, 1983.

- MESAROVIC, MD: *A Mathematical Theory of General Systems*, En Klir, 1972.
- METZLER, W, y GOCKERT, D: *Simulation and Stability Analysis for Parameter Dependent 2-Dimensional Models of Air Polluted Forests*, *Mathematical and Computer Modelling*, **11**, 1988, 493–498.
- MEYER, PA: *Renaissance, recollements, mélanges, ralentissement de processus de Markov*, *Annales de l'Institut Fourier, Grenoble*, **25**, 1975, 465–495.
- MICKENS, RE: *Exact Solutions to a Population Model: The Logistic Equation with Advection*, *SIAM Review*, **30**(4), 1988, 629–633.
- MIGNOT, F y PUEL, JP: *Inéquations variationnelles et quasivariationnelles hyperboliques du premier ordre*, *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, **55**, 1976, 353–378.
- MIGNOT, F y PUEL, JP: *Optimal Control in Some Variational Inequalities*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **22**, 1984, 466–476.
- MILUSHEVA, SD: *Justification of the Averaging Method for a System of Singularly Perturbed Differential Equations with Impulses*, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik*, **36**(2), 1985, 293–308.
- MORELLO, J: *Sistemas y estrategias ambientales para la ampliación de la frontera agrícola en América Latina*, CEPAL/PNUMA, 1986, Chile.
- MORELLO, J y HORTT, G: *Changes in the Areal Extent of Arable Farming, Stock Raising, and Forestry in the South American Chaco*, *Applied Geography and Development*, **25**, 1984, 109–127.
- MORELLO, J, y HORTT, G: *La Naturaleza y la Frontera Agropecuaria en el Gran Chaco Sudamericano*, *Pensamiento Iberoamericano*, **12**, 1988, 109–136.
- MOSCO, U: *On some stochastic optimal impulse control problems*, En Cappuzo Dolcetta, 1985.

- MURRAY, JM: *Existence theorems for optimal control and calculus of variations problems where the states can jump*, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **24**, 1986, 412–438.
- NAGAI, H: *Impulsive Control of Symmetric Markov Processes and Quasivariational Inequalities*, *Osaka Journal of Mathematics*, **20**, 1983, 863–879.
- NEUMAN, CE: *La distribución logística*, Preimpreso, 1983, Cátedra de Análisis Matemático II, Carrera de Geografía, Facultad de Filosofía y Letras, Universidad de Buenos Aires.
- NEUMAN CE y COSTANZA V: *Control Impulsional en el manejo de bosques*. Trabajos del Segundo Congreso Latinoamericano de Control Automático, JP Weisz, editor, **I**, 1986, 113–118, Publicado por AADECA.
- NEUMAN CE y COSTANZA V: *Control óptimo impulsional determinista de un sistema de Lotka-Volterra en  $\mathbb{R}^2$* , Trigésimoseptima reunión de comunicaciones científicas de la Unión Matemática Argentina, 1987, Bahía Blanca.
- NEUMAN CE y COSTANZA V: *Optimización Impulsional de Sistemas Naturales*. Actas de la Segunda Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información, RPI'87, B Cernuschi Frias y C E D'Attellis, editores, 1987, Buenos Aires, 208–228.
- NEUMAN CE y COSTANZA V: *Deterministic Impulse Control in Native Forest Ecosystems Management*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **66**(2), 1990, 173–196.
- NEUMAN, CE y COSTANZA, V: *Solution of the optimal impulse control problem with logistic dynamics and polynomial lagrangians*, 1990a, inédito.
- NEUMAN CE y COSTANZA V: *Las inecuaciones de Hamilton-Jacobi-Bellman de la optimización de sistemas naturales*, en CE D'Attellis (editor) *Sistemas no lineales de control*. Actas del Laboratorio Matemático de Invierno, LAMAIN'88, Mendoza, 1988, 187–210.

- NEUMAN, CE y COSTANZA, V: BALL, *Un programa semiinteractivo para asesoramiento en manejo agrosilvopastoril*, en C Muravchik, C Rago y P Arambel (editores), Anales de la Tercera Reunión de Trabajo en Procesamiento de la Información, RPI'89, La Plata, 1989, (NOL)37-46.
- NEUMAN CE y COSTANZA V: *Hacia una formalización matemática del problema de manejo agrosilvopastoril* Actas del Sexto Congreso Forestal Argentino Santiago del Estero, NR Ledesma (editor), I, 1988, 137-140.
- OLESON, M y OLSON, RL: *Controlled Ecological Life Support Systems (CELSS). Conceptual Design Option Study*, NASA Contractor Report #177421, NASA, Ames Research Center, 1986, Moffett Field, California 94035.
- PAPADAKIS, J: *Ecología de los Cultivos*, Vol. I, 1954, Buenos Aires.
- PAVÉ, A (editor): *Les Cahiers d'EDORA*, Rapports de Recherche, 866, INRIA-Sophia Antipolis, 1988.
- PERTHAME, B: *Inéquations quasi-variationnelles et équations de Hamilton-Jacobi-Bellman*, *Comptes Rendues de la Académie de Sciences, Paris*, 296, 1983, 373-376.
- PERTHAME, B: *Continuous and impulsive control of diffusion processes in  $R^n$* , *Nonlinear Analysis, Theory, Methods, and Applications*, 8, 1984, 1227-1239.
- PERTHAME, B: *On the Regularity of the Solutions of Quasivariational Inequalities*, *Journal of Functional Analysis*, 64(2), 1985a, 190-208.
- PERTHAME, B: *Some Remarks on Quasivariational Inequalities and the Associated Impulsive Control Problem*, *Annals of the Institute Henri Poincaré (Analyse non Linéaire)*, 2(3), 1985b, 237.
- PIELOU, EC: *Mathematical Ecology*, Wiley, 1977, New York.
- PIELOU, EC: *The Interpretation of Ecological Data. A Primer on Classification and Ordination*, Wiley, 1984, New York.
- POLANSKI, J: *Geografía Física General*, EUDEBA, 1974, Buenos Aires.

- RAINTREE, JB: *Bioeconomic considerations in the design of agroforestry cropping systems*, en Huxley (1983), 271–289.
- RAY, WH y LAINIOTIS, DG: *Distributed Parameter Systems Identification, Estimation and Control*, Marcel Dekker, 1978, New York.
- REDHEAD, JF, MAGHEMBE, JA, y NDUNGURU, BJ: *The intercropping of grain legumes in agroforestry systems*, en Huxley (1983), 117–124.
- REED, WJ y ERRICO, D: *Optimal Harvest Scheduling at the Forest Level in the Presence of the Risk of Fire*, *Canadian Journal of Forest Research*, 16, 1986, 266–278.
- REMPALA, R y ZABCZYK, J: *On the Maximum Principle for Deterministic Impulse Control Problems*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, 59(2), 1988, 281–288.
- RENTROP, P: *Partitioned Runge-Kutta Methods with Stiffness Detection and Step Size Control*, *Numerische Mathematik*, 47(4), 1985, 545–564.
- RIDEOUT, D: *Managerial Finance for Silvicultural Systems*, *Canadian Journal of Forest Research*, 15, 1985, 163–166.
- ROBIN, M: *Contrôle impulsif des processus de Markov*, Tesis de doctorado de estado, Universidad de Paris IX, 1978, Paris.
- RYAN, D y HANSON, FD: *Optimal Harvesting with Exponential Growth in an Environment with Random Disasters and Bonanzas*, *Mathematical Biosciences*, 74(1), 1985, 37–57.
- SAMUELSON, PA: *Economics of Forestry in an Evolving Society*, *Economic Inquiry*, 4, 1976, 466–492.
- SARAVIA TOLEDO, C: *Manejo silvopastoril en el Chaco Noroccidental de Argentina*, Tercera Reunión de Intercambio Tecnológico en Zonas Áridas y Semiaridas, Catamarca, 1984, 26–50.

- SARAVIA TOLEDO, CJ, y DEL CASTILLO, EM: *Uso racional del bosque Chaqueño semiárido*, en *Actas del Sexto Congreso Forestal Argentino Santiago del Estero*, NR Ledesma (editor), 1988.
- SEIERSTAD, A: *Existence of an Optimal Control with Sparse Jumps in the State Variable*, *Journal of Optimization Theory and Applications*, **45**, 1985, 265–293
- SHIH, M-S: *Generalized Quasivariational Inequalities in Locally Convex Topological Vector Spaces*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **108**(2), 1985, 333–343.
- SHUGART, HH: *A Theory of Forest Dynamics*, Springer, New York, New York, 1984.
- SHUGART, HH y WEST, DC: *Long-Term Dynamics of Forest Ecosystems*, *American Scientist*, **69**, 1981a, 647–652.
- SHUGART, HH y otros: *Patterns and Dynamics of Forests: An Application of Simulation Models*, En West, 1981.
- SHUKLA, JB, MISRA, OP, AGARWAL, M y SHUKLA, A: *Effect of Pollution and Industrial Development on Degradation of Biomass-resource: A Mathematical Model with Reference to Doon Valley*, *Mathematical and Computer Modelling*, **11**, 1988, 910–913.
- SINUANY-STERN, Z, FINGER, N, y KLIGLER, E: *An Optimal Forest Thinning Policy: A Simulation Approach*, *Computers and Environmental Urban Systems*, **11**(4), 1986, 181–189.
- SMITH, HL: *Periodic Competitive Differential Equations and the Discrete Dynamics of Competitive Maps*, *Journal of Differential Equations*, **64**, 1986, 165–194.
- SNOW, DR: *Carathéodory-Hamilton-Jacobi Theory in Optimal Control*, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **17**, 1967, 99–118.
- SOUGANIDIS, PE: *Existence of Viscosity Solutions of Hamilton-Jacobi Equations*, *Journal of Differential Equations*, **56**, 1985, 345–390.

- STAMPACCHIA, G: *Introducción a las ecuaciones diferenciales en derivadas parciales e inecuaciones variacionales*, Cuadernos 'B. Levi', **1**, 1971, Universidad Nacional de Rosario.
- STUART, CA: *Differential Equations with Discontinuous Nonlinearities*, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, **63**, 1976, 59–75.
- SULEM, A: *A Solvable One-dimensional Mode of a Diffusion Inventory System*, *Mathematics of Operations Research*, **11**, 1986a, 125–133.
- SULEM, A: *Explicit Solution of a Two-dimensional Deterministic Inventory Problem*, *Mathematics of Operations Research*, **11**(1), 1986b, 134–146.
- SUSSMANN, HJ: *Existence and Uniqueness of Minimal Realizations of Nonlinear Systems*, *Mathematical Systems Theory*, **10**, 1977, 263–284.
- SUSSMANN, HJ: *Semigroup Representations, Bilinear Approximations of Input-output Maps, and Generalized Inputs*, Springer Lecture Notes in Economics, Mathematics and Systems, **131**, 1976, New York.
- SUSSMANN, HJ y JURDJEVIC, V: *Controllability of Nonlinear Systems*, *Journal of Differential Equations*, **12**, 1972, 95–116.
- SVIREZHEV, YuM: *Modern Problems of Mathematical Ecology*, *Proceeding of the International Congress of Mathematicians, Varsovia*, 1983, 1677–1693.
- SWARTZMAN, G: *Evaluation of Ecological Simulation Models*, Springer Lecture Notes in Biomathematics, **33**, 1980, 230–267.
- THOM, R: *L'équivalence d'une fonction différentiable et d'un polynome*, *Topology*, **3**, 1965, 297–307.
- TURNER J y LAMBERT MJ: *Nutritional Management of Pinus Radiata at Gurnang State Forest, New South Wales*, *Fertilizer Research*, **13**(2), 1987, 127–138.
- VALENTINI, JA: *La reforestación con Quebracho Colorado Schinopsis Balansae Engl. y algunas normas silvícolas relacionadas con su aprovechamiento racional*, Quinto Congreso Forestal mundial, 1960, 622–626.

- VAN der SCHAFT, AJ: *Controllability and Observability for Affine Nonlinear Hamiltonian Systems*, *IEEE Transactions on Automatic Control*, **27**(2), 1982, 490–492.
- VON BERTALANFFY, L: *The History and Status of General Systems Theory*, En Klir, 1972.
- WAN, FYM y ANDERSON, K: *Optimal Forest Harvesting with Ordered Site Access*, *Studies in Applied Mathematics*, **68**, 1986, 189–226.
- WAN, FYM: *Ordered Site Access and Optimal Forest Rotation*, *Studies in Applied Mathematics*, **73**, 1985, 155–175.
- WEBER, FR: *Reforestation in arid lands*, VITA, 1986, Arlington, VA.
- WEISZ, JP: *Trabajos del Segundo Congreso Latinoamericano de Control Automático*, en tres partes, AADECA, 1986, Buenos Aires.
- WEST, DC y SHUGART, HH: *Forest Succesion*, Springer, 1981, New York.
- WHITE, LW: *Optimal Bang-bang controls arising in a Sobolev Impulse Control Problem*, *Journal of Mathematical Analysis*, **99**(1), 1984, 237–247.
- WILL, GM: *Use of Fertilizers in Australian and New Zealand Forests*, IUFRO Florida Congress Proceedings, 1971, Florida.

◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇ ◇

