

Tesis de Posgrado

Aceleración de métodos iterativos en la resolución numérica de sistemas no lineales

Masih, Samira Abdel

1990

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias
Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Masih, Samira Abdel. (1990). Aceleración de métodos iterativos en la resolución numérica de sistemas no lineales. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2353_Masih.pdf

Cita tipo Chicago:

Masih, Samira Abdel. "Aceleración de métodos iterativos en la resolución numérica de sistemas no lineales". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1990. http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2353_Masih.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

**Aceleración de métodos iterativos en la resolución numérica
de sistemas no lineales.**

Samira Abdel Masih

DIRECTOR DE TESIS

Dr. Juan Pedro Milaszewicz

LUGAR DE TRABAJO

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA)

Tesis presentada para optar al título de:

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

-1990-

CONTENIDO

Prólogo	1
Capítulo I. INTRODUCCION	3
Capítulo II. DEFINICIONES Y RESULTADOS BASICOS.	10
Capítulo III. ANALISIS DE LOS METODOS ITERATIVOS DE JACOBI, GAUSS-SEIDEL Y NEWTON-RAPHSON.	24
Método no lineal de Jacobi.	25
Eliminación de una de las variables.	27
Método no lineal de Gauss-Seidel.	29
Eliminación de una de las variables.	33
Teorema 3.6	36
Teorema 3.7	37
Método de Newton-Raphson.	42
Eliminación de una de las variables.	43
Notación.	45
Teorema 3.14	56
Teorema 3.17	64
Capítulo IV. METODOS SECANTES.	70
Lema 4.3	77
Método Secante 1.	83
Método Secante 2.	86

Eliminación de una de las variables.	91
Teorema 4.5	92
Capítulo V. EJEMPLOS.	98
Métodos de Jacobi y Gauss-Seidel no lineales	98
Método de Newton-Raphson.	109
Método Secante 2.	133
Bibliografía General.	145
Agradecimientos.	147

Prólogo

Por medio de eliminación parcial de incógnitas, sistemas lineales asociados a la discretización de ecuaciones elípticas, pueden ser transformados en sistemas equivalentes, para los cuales los procedimientos iterativos numéricos de resolución clásicos convergen más rápidamente que para los sistemas originales.

En este Trabajo se trató de extender este tipo de resultados a sistemas no lineales.

En el Capítulo 3 se prueba que, bajo hipótesis adecuadas, si se elimina una de las variables, los métodos iterativos no lineales de Jacobi y Gauss-Seidel, convergen más rápidamente que para los sistemas originales.

Aquí también se analizó la eliminación en el caso del método de Newton-Raphson. Los experimentos numéricos han sugerido que, si se comienza con el mismo valor inicial, las iteraciones de Newton-Raphson generadas por el sistema original y el reducido, no sólo convergen en general con la misma rapidez a la raíz, sino que los términos principales del error son, componente a componente, semejantes entre sí.

Esto será justificado en el Teorema 3.14 .

En el Capítulo 4 se obtuvo una expresión general del error para los métodos Secantes, pero no ha sido posible comparar los órdenes de convergencia entre las iteraciones generadas por el sistema original y el reducido.

El beneficio computacional de la eliminación parcial está vinculado a la eventual facilidad de dicha eliminación, la reducción del número de operaciones y la aceleración de la convergencia .

Este Trabajo de Tesis ha sido realizado mientras su autora era becaria del CONICET .

CONTENIDO I

INTRODUCCION

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función con dominio y rango en el espacio vectorial real \mathbb{R}^n . Se desea "computar" soluciones del sistema de n ecuaciones en n variables

$$F(x) = 0 \quad (1)$$

Esto involucra, al menos, dos problemas :

- El análisis de la existencia de soluciones.
- El estudio de métodos adecuados para determinar soluciones computables.

Claramente, las respuestas a estos problemas , dependen esencialmente de las propiedades de la función F en cuestión.

En el contexto del primer problema mencionado, surgen naturalmente las siguientes preguntas:

- Si existen soluciones de (1) en un conjunto $D_0 \subset D$.
- Cuántas soluciones hay en D_0 .
- Cuál es la influencia de cambios específicos de la función F en las soluciones.

Simple ejemplos muestran que (1) puede no tener solución, o tener una cantidad finita o infinita de soluciones. Además, aún en casos sencillos como los de los polinomios en una variable, no se dispone de una teoría algebraica general que permita determinar sus raíces en un número finito de pasos .

Los resultados más conocidos sobre la existencia de soluciones de (1) se basan en los Principios de Contracción y sus generalizaciones, como así también en el Teorema de punto fijo de Brouwer.

En este trabajo se supone que la ecuación (1) tiene soluciones, y

nuestro principal interés es el estudio y examen de algunos métodos clásicos para aproximarlas, modificados por eliminaciones parciales de incógnitas . En casos especiales, como los sistemas lineales, los métodos directos para resolver (1) no siempre son adecuados en la práctica; es por esto que se aplican también los métodos iterativos.

En el caso de sistemas no lineales generales, sólo se dispone de métodos iterativos.

Los principales problemas asociados a un proceso iterativo para resolver (1) son:

- Si la iteración converge a una solución de (1).
- Si el proceso está bien definido, es decir, si puede continuarse hasta lograr un resultado satisfactorio.
- Cuál es el costo computacional de las iteraciones aplicadas.

Existen tres tipos de resultados de convergencia:

- Teoremas de convergencia local: suponen la existencia de una solución particular x_* , asegurando la existencia de un entorno \mathcal{U} de x_* tal que, comenzando con cualquier valor inicial en \mathcal{U} , la iteración queda bien definida y converge a x_* .
- Teoremas de convergencia semilocal: no requieren conocimiento de la existencia de una solución, y afirman que para ciertos datos iniciales, usualmente bajo condiciones estrictas, hay convergencia a alguna solución x_* , generalmente próxima al valor inicial.

Los teoremas de este tipo incluyen en general estimaciones computables del error $x^k - x_*$.

- Teoremas de convergencia global: afirman que, comenzando con cualquier valor inicial en el dominio del operador, la convergencia a una solución

x_* está asegurada.

Los teoremas de convergencia que demostraremos son de carácter local. En lo referente al costo computacional de un proceso, los principales puntos a tener en cuenta son dos :

- Cuál es el "costo" en cada paso de un proceso iterativo.
- Cuán rápido converge la sucesión.

El interés por determinar implementaciones computacionales eficientes, y minimizar el costo de un determinado proceso iterativo, sugirió la idea de efectuar eliminación parcial , primeramente en sistemas lineales, mediante la cual el sistema original es transformado en un sistema equivalente .

El Dr. Milaszewicz probó, dentro del contexto lineal, y bajo ciertas hipótesis, que los procesos iterativos clásicos de Jacobi y Gauss-Seidel asociados al nuevo sistema convergen más rápidamente que para los sistemas originales.

Más precisamente, los principales resultados obtenidos por él fueron los siguientes (ver [1]) :

Sea el sistema

$$x = Bx + b \quad (1.1)$$

donde $B = (b_{ij})$, $b_{ij} \in \mathbb{R}$, $b_{ij} \geq 0 \quad \forall i, j (1 \leq i, j \leq n)$; $n \geq 2$

$$b \in \mathbb{R}^n$$

Se supondrá además que $b_{ii} = 0 \quad \forall i , 1 \leq i \leq n$.

Sea $\rho(B)$ = radio espectral de B.

Si fijamos k , $1 \leq k \leq n$, y consideramos el siguiente sistema, obtenido a partir de (1.1) por eliminación de x_k :

$$x = B'x + b' \quad (1.2)$$

con $B' = (b'_{ij})$, $b' = (b'_i)$ definidos así :

$$b'_{ij} = \begin{cases} b_{ij} + b_{ik} * b_{kj} & \text{si } j \neq k, 1 \leq i, j \leq n \\ 0 & \text{si } j = k, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

$$b'_i = b_i + b_{ik} * b_k \quad 1 \leq i \leq n$$

Se obtiene una relación entre $\rho(B)$ y $\rho(B')$, que proviene de un resultado logrado por François Robert (Ver [3]):

Lema 1.1 : Una y sólo una de de las siguientes condiciones se cumple:

- i) $\rho(B) = 0 = \rho(B')$
- ii) $\rho(B) = 1 = \rho(B')$
- iii) $0 < \rho(B)^2 \leq \rho(B') \leq \rho(B) < 1$
- iv) $1 < \rho(B) \leq \rho(B') \leq \rho(B)^2$

Nota 1.1 : No es difícil verificar que si $\rho(B) < 1$, entonces los sistemas (1.1) y (1.2) son equivalentes.

El *Lema 1.1* y la *Nota 1.1* sugieren que, cuando $\rho(B) < 1$, el método iterativo de Jacobi convergerá asintóticamente más rápido a la solución de (1.1) cuando es aplicado al sistema (1.2), que cuando se aplica al sistema original.

El siguiente Teorema (ver [1]), mejora la afirmación iii) del

Lema 1.1 cuando B es irreducible:

Teorema 1.2 : Si $\rho(B) < 1$ y B es irreducible, entonces $\rho(B') < \rho(B)$.

ITERACIONES DE GAUSS- SEIDEL

Se desea establecer ahora la relación existente entre los radios de convergencia de las iteraciones de Gauss-Seidel asociadas a los sistemas (1.1) y (1.2) , cuando $\rho(B) < 1$.

Sean L , U , L' , U' tales que

$$B = L + U$$

$$B' = L' + U' \quad , \text{con } L \text{ y } L': \text{ matrices triangulares inferiores estrictas.}$$

U y U': matrices triangulares superiores.

Entonces las matrices de Gauss-Seidel asociadas a B y B'

son, respectivamente:

$$H = (I-L)^{-1}U \quad \text{y} \quad H' = (I-L')^{-1}U'.$$

El Teorema y Corolario siguientes fueron también probados en [1] :

Teorema 1.3 :

Si B es irreducible y si existen i, j, tales que $b_{ik} * b_{kj} \neq 0$, con:

i) $k < j < i$, ó

ii) $j < i < k$, ó

iii) $i < k < j$

Entonces $\rho(H') < \rho(H)$.

Corolario 1.4 : Vale siempre $\rho(H') \leq \rho(H)$.

Se trató de extender este tipo de resultados a sistemas no lineales.

François Robert consideró funciones contráctiles $F : \prod_{i=1}^n X_i \rightarrow \prod_{i=1}^n X_i$, con $X_i =$ espacio de Banach, $i=1,2,\dots,n$, y probó el siguiente resultado, basando su demostración en el Teorema de Stein-Rosenberg (ver [2]):

Teorema 1.5 : Sea F una aplicación de un producto finito X de espacios de Banach en sí mismo, y contráctil respecto de la norma vectorial canónica sobre X (confrontar Definición 2.7).

Entonces F admite un único punto fijo ζ de X , y el método iterativo de Gauss-Seidel no lineal asociado a F converge a ζ . ■

Bajo las hipótesis utilizadas en el contexto lineal en [1], se demuestra, en el Capítulo 3, una generalización al caso no lineal para los Métodos iterativos de Jacobi y Gauss-Seidel.

Estos resultados motivaron el interés por otros métodos iterativos clásicos, tales como los de Newton-Raphson y Secantes, con el fin de determinar resultados análogos.

Este Trabajo de Tesis se puede resumir en los términos siguientes:

Dado un sistema no lineal de ecuaciones, y empleando para su resolución los métodos iterativos clásicos, en caso de ser aplicables, se trata de analizar cómo es afectada la convergencia si el sistema original es modificado mediante eliminación de una de las variables.

Los resultados analíticos obtenidos son los siguientes:

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una función cuyo dominio D contiene un punto x_* tal que $F(x_*) = 0$. Supongamos que:

i) F es diferenciable en un entorno de $x_* \in D$.

ii) $\frac{\partial f_i}{\partial x_i}(x_*) \neq 0$, $\forall i=1,2,\dots,n$; $f_i = i$ -ésima coordenada de F .

Entonces:

- a) En iteraciones funcionales de punto o fijo, si la matriz Jacobiana es irreducible y no negativa, el sistema reducido converge estrictamente más rápido.
- b) Si además F tiene segunda derivada continua en un entorno de x_* , con $F''(x_*) h h \neq 0 \forall h \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $F'(x_*)$ es no singular y la condición ii) se satisface solamente para algún i ($1 \leq i \leq n$), entonces el método iterativo de Newton-Raphson asociado al sistema reducido converge igual o más rápido que la iteración de Newton-Raphson asociada al sistema original.

REFERENCIAS

- [1] J.P. Milaszewicz, Improving Jacobi and Gauss-Seidel Iterations, *Linear Algebra and its Applications*, 93 : 161-170 (1987).
- [2] F.Robert - M.Charnay - F. Musy, Iterations chaotiques serie-parallele pour des equations non-lineaires de point fixe, *Aplikace Matematiky*, 20 : 1-36 (1975).
- [3] F.Robert, Algorithmes tronqués de découpe linéaire, *Rairo, Revue de l'afcet* : 45-64 (Jul.1972).

CAPÍTULO II

DEFINICIONES Y RESULTADOS BASICOS

2.1 Sea $x=(x_1, x_2, \dots, x_n)^t$ un vector en R^n ; se definen las siguientes normas vectoriales:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{1/p} \quad 1 \leq p \leq \infty \quad (\text{norma } l_p)$$

$$\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} (|x_i|) \quad (\text{norma } l_\infty)$$

2.2 Teorema de equivalencia de Normas: Sean $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ dos normas en R^n .

Entonces existen constantes $c_2 \geq c_1 > 0$ tales que:

$$c_1 \|x\| \leq \|x\|' \leq c_2 \|x\| \quad \forall x \in R^n$$

2.3 Norma de operadores lineales: Dadas dos normas $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ en R^n y R^m respectivamente, y $A \in \mathcal{L}(R^n, R^m)$, la norma de A respecto de $\|\cdot\|$ y $\|\cdot\|'$ se define por:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|'$$

2.4 Sea $A \in \mathcal{L}(R^n, R^m)$ donde R^n y R^m están normados por alguna de las normas

l_i , con $i=1, \infty$. Entonces, si $A=(a_{ij})$:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \left(\sum_{i=1}^m |a_{ij}| \right)$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq m} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right)$$

2.5 $\|A\|_2^2 = \lambda$; $\lambda = \text{m\u00e1ximo autovalor de } A^t A$

2.6 *Lema de Perturbaci\u00f3n:* Sean $A, C \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$; supongamos que A es invertible, con $\|A^{-1}\| \leq \alpha$. Si $\|A-C\| \leq \beta$ y $\beta\alpha < 1$, entonces C es tambi\u00e9n invertible y $\|C^{-1}\| \leq \alpha/(1-\alpha\beta)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2.7 *Teorema de Stein-Rosenberg:* Sea la matriz de Jacobi $n \times n$ $B = L + U$ no negativa con elementos diagonales nulos; con $L =$ matriz triangular inferior, $U =$ matriz triangular superior, y sea $\mathcal{L}_1 = (I - L)^{-1} U$, la matriz de Gauss-Seidel.

Entonces, una y s\u00f3lo una de las siguientes relaciones se cumplen:

- i) $\rho(B) = \rho(\mathcal{L}_1) = 0$
- ii) $0 < \rho(\mathcal{L}_1) < \rho(B) < 1$
- iii) $1 = \rho(B) = \rho(\mathcal{L}_1)$

2.8 *Definici\u00f3n:* Sea el espacio producto $X = \prod_{i=1}^k X_i$, $X_i =$ espacio de Banach con norma $\|\cdot\|_i, i=1, \dots, k$. Un elemento $x \in X$ es, por definici\u00f3n, una k -upla $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)^t, x_i \in X_i$. La siguiente aplicaci\u00f3n de X en \mathbb{R}^k :
 $x = (x_1, x_2, \dots, x_k)^t \rightarrow p(x) = (\|x_1\|_1, \|x_2\|_2, \dots, \|x_k\|_k)$
 se llamar\u00e1 " la norma vectorial can\u00f3nica sobre X ".

2.9 *Definici\u00f3n:* Sean $x, y \in \mathbb{R}^k$; se dice que $x \leq y$ si $x_i \leq y_i, \forall i=1, 2, \dots, k$. Una matriz K $k \times k$ se dice no negativa si sus coeficientes son no negativos.

2.10 *Definici\u00f3n:* Una funci\u00f3n $F: \prod_{i=1}^k X_i \rightarrow \prod_{i=1}^k X_i, X_i =$ espacio de Banach se dir\u00e1 contr\u00e1ctil respecto de la norma vectorial can\u00f3nica sobre X , si existe una matriz K $k \times k$ no negativa de radio espectral $\rho(K) < 1$ tal que:

$$\rho(F(x)-F(y)) \leq K \rho(x-y), \quad \forall x, y \in X$$

2.11 *Definición:* Una aplicación $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es diferenciable Frèchet (ó F-diferenciable) en $x \in \text{int}(D)$ si existe $A \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ tal que

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|F(x+h)-F(x)-Ah\|}{\|h\|} = 0$$

2.12 *Teorema del Valor Medio:* Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ F-diferenciable en cada punto de un conjunto convexo $D_0 \subset D$. Entonces,

$\forall x, y \in D_0, \exists t \in (0, 1)$ tal que

$$F(y)-F(x) = F'(x+t(y-x)) (y-x) \quad \blacksquare$$

Es importante destacar que el Teorema no vale en general para funciones $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, con $m > 1$. Como consecuencia inmediata del Teorema, aplicado a cada coordenada de F , se puede afirmar lo siguiente:

Si $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es F-diferenciable en un conjunto abierto convexo $D_0 \subset D$, y si $x, y \in D_0$, entonces:

$$F(y)-F(x) = B(x, y) (y-x),$$

donde $B(x, y) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ se construye a partir de las componentes

f_1, f_2, \dots, f_m de F . Más precisamente, $\exists t_1, t_2, \dots, t_m \in (0, 1)$ tales que:

$$B(x, y) = \begin{pmatrix} f'_1(x+t_1(y-x)) \\ \vdots \\ f'_m(x+t_m(y-x)) \end{pmatrix}$$

2.13 Si $F: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua en $[a, b]$ y si f' existe y es integrable Riemann en (a, b) , entonces:

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b)-F(a)$$

Para una aplicación $G: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$, se define la integral de G en términos de sus componentes g_1, g_2, \dots, g_m así:

$$\int_a^b G(t) dt = \begin{pmatrix} \int_a^b g_1(t) dt \\ \vdots \\ \int_a^b g_m(t) dt \end{pmatrix} \quad (*)$$

y se dice que G es integrable Riemann en $[a, b]$ si cada componente es integrable Riemann. Si ahora $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ es F -diferenciable en cada punto del intervalo $[x, y] \subset D$, entonces cada función coordenada $g_i(t) = f_i(x + t(y-x))$ es continua para $t \in [0, 1]$, $i=1, 2, \dots, n$. Si además, las $g'_i(t)$ son integrables Riemann en $t \in [0, 1]$, se tiene:

$$g_i(1) - g_i(0) = \int_0^1 g'_i(t) dt, \quad i=1, 2, \dots, n$$

$$\text{y} \quad f_i(y) - f_i(x) = \int_0^1 f'_i(x + t(y-x)) (y-x) dt, \quad i=1, 2, \dots, n$$

Por lo tanto, usando la definición (*) se puede escribir:

$$F(y) - F(x) = \int_0^1 F'(x + t(y-x)) (y-x) dt$$

2.14 Si $G: [a, b] \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^m$ es continua en $[a, b]$, entonces:

$$\left\| \int_a^b G(t) dt \right\| \leq \int_a^b \| G(t) \| dt,$$

para cualquier norma en \mathbb{R}^m .

2.15 *Definición:* Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ F -diferenciable en cada punto de un conjunto abierto $D_0 \subset D$. Si la aplicación $F': D_0 \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$ es F -diferenciable en $x \in D_0$, entonces $F''(x) = (F')'(x)$ se llamará "la F -derivada segunda de F en x ". Notar que $F''(x) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$

y, por definición,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\| F'(x+h) - F'(x) - F''(x)h \|}{\| h \|} = 0$$

2.16 Notar que la aplicación $B: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por:

$$B(h,k) = [F''(x)h]k \text{ es bilineal.}$$

2.17 Representación de $F''(x)$ en términos de las derivadas parciales de las funciones coordenadas f_1, f_2, \dots, f_m de F : Si $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es tal que $f''(x)$ existe, entonces se define la matriz Hessiana $n \times n$ $H_f(x)$ así:

$$H_f(x) = \begin{bmatrix} \partial_1 \partial_1 f(x) & \dots & \partial_n \partial_1 f(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial_1 \partial_n f(x) & \dots & \partial_n \partial_n f(x) \end{bmatrix}$$

$$\text{donde } \partial_i \partial_j f(x) = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}$$

Entonces, si $f_i''(x)$ existe $\forall i=1,2,\dots,n$,

$$[F''(x)hk] = (k H_1(x) h^1, k H_2(x) h^2, \dots, k H_m(x) h^m)$$

donde $H_1(x), H_2(x), \dots, H_m(x)$ son las matrices Hessianas de f_1, f_2, \dots, f_m en x respectivamente, y $h, k \in \mathbb{R}^n$.

2.18 La norma $F''(x)$ en el espacio $\mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathcal{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m))$ se define de la manera natural, es decir, $\forall h \in \mathbb{R}^n$,

$$\|F''(x)h\| = \sup \{ \|F''(x)hk\|, k \in \mathbb{R}^m, \|k\|=1 \}$$

y, por lo tanto,

$$\|F''(x)\| = \sup_{\|h\|=1} \{ \|F''(x)h\| \} = \sup_{\|h\|=1} \sup_{\|k\|=1} \{ \|F''(x)hk\| \},$$

donde hemos utilizado las normas que corresponden en cada caso.

2.19 La continuidad de F'' se define en términos de la norma, o sea, F'' es continua en x si $\|F''(x) - F''(y)\| \rightarrow 0$ cuando $y \rightarrow x$.

Es bien sabido que F'' es continua en x si todas las derivadas parciales

segundas de las funciones coordenadas de F son continuas.

2.20 Si $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ tiene F -derivada segunda en x , entonces F'' es simétrica, es decir, $F''(x)hk = F''(x)kh \forall h, k \in \mathbb{R}^n$.

2.21 *Definición:* Sea $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \times \dots \times \mathbb{R}^{n_p}$, donde $n = n_1 + n_2 + \dots + n_p$; denotemos los elementos de \mathbb{R}^n por $x = (x_1, x_2, \dots, x_p)$, con $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}, i = 1, \dots, p$

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, y dado $x \in D$, sea

$$D_i = \{ y \in \mathbb{R}^{n_i} / (x_1, \dots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \dots, x_p) \in D \}$$

Se define $F_i: D_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ por $F_i(y) = F(x_1, \dots, y, \dots, x_p)$, $y \in D_i$.

Entonces F tiene F -derivada parcial $\partial_i F(x) = F'_i(x)$ en x respecto de \mathbb{R}^{n_i} , si $x_i \in \text{int}(D_i)$ y F_i tiene F -derivada en x_i .

2.22 *Teorema de la Función Implícita:* Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ continua en un entorno abierto $D_0 \subset D$ del punto (x_0, y_0) para el cual $F(x_0, y_0) = 0$. Supongamos que $\partial_1 F$ existe en un entorno de (x_0, y_0) , y que además es continua en (x_0, y_0) y $\partial_1 F(x_0, y_0)$ es no singular.

Entonces existen entornos abiertos $S_1 \subset \mathbb{R}^n$ y $S_2 \subset \mathbb{R}^p$ de x_0 e y_0 respectivamente tal que, $\forall y \in \bar{S}_2$, la ecuación $F(x, y) = 0$ tiene única solución $x = H(y) \in \bar{S}_1$ y la aplicación $H: S_2 \rightarrow \mathbb{R}^n$ es continua.

Más aún, si $\partial_2 F$ existe en (x_0, y_0) , entonces H es F -diferenciable en y_0 y

$$H'(y_0) = -[\partial_1 F(x_0, y_0)]^{-1} \partial_2 F(x_0, y_0)$$

2.23 *Definición:* Una familia de operadores $\{G_k\}, G_k: D_k \subset (\mathbb{R}^n)^{k+p} \rightarrow \mathbb{R}^n$, $k = 0, 1, \dots$ define un proceso iterativo $\mathcal{J} = (\{G_k\}, D_*, p)$ con p puntos

iniciales y dominio $D_* \subset D$, si $D_* \neq \emptyset$ y si $\forall (x^0, \dots, x^{-p+1}) \in D_*$, la sucesión $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ generada por: $x^{k+1} = G_k(x^k, \dots, x^{-p+1})$, $k=0,1,\dots$

existe, es decir, si $(x^k, \dots, x^{-p+1}) \in D_k$, $\forall k \geq 0$.

Un punto x_* tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} x^k = x_*$ es llamado "punto límite del proceso" y el conjunto de todas las sucesiones $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ generadas por \mathcal{J} que convergen a x_* será denotado por $\mathcal{E}(\mathcal{J}, x_*)$.

2.24 Definición: Sea $\{x^k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}^n$ una sucesión convergente a x_* .

Las cantidades:

$$Q_p(\{x^k\}) = \begin{cases} 0 & \text{si } x^k = x_*, \forall k \text{ salvo cantidad finita} \\ \lim_{k \rightarrow \infty} (\|x^{k+1} - x_*\| / \|x^k - x_*\|^p) & \text{si } x^k \neq x_*, \forall k \text{ salvo cantidad finita} \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases}$$

definidas para $p \in [1, \infty)$, son llamadas "los factores de convergencia cocientes" (ó Q-factores) de $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ respecto de la norma $\|\cdot\|$ en \mathbb{R}^n ; y

$$Q_p(\mathcal{J}, x_*) = \sup \{ Q_p(\{x^k\}) / \{x^k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{E}(\mathcal{J}, x_*) \}, \quad 1 \leq p < \infty$$

son "los Q-factores de \mathcal{J} en x_* ", respecto de la norma con la cual se calcula $Q_p(\{x^k\})$.

2.25 Lema: Sean $Q_p(\mathcal{J}, x_*)$, $p \in [1, \infty)$ los Q-factores de un proceso

iterativo \mathcal{J} respecto de alguna norma fija en \mathbb{R}^n . Entonces vale una y sólo una de las siguientes posibilidades:

a) $Q_p(\mathcal{J}, x_*) = 0 \quad \forall p \in [1, \infty)$

b) $Q_p(\mathcal{J}, x_*) = \infty \quad \forall p \in [1, \infty)$

c) $\exists p_0 \in [1, \infty)$ tal que $Q_p(\mathcal{J}, x_*) = 0, \quad \forall p \in [1, p_0)$ y

$$Q_p(\mathcal{T}, x_*) = \infty \quad \forall p \in (p_0, \infty) .$$

Demostración: Ver [5], pág.282

2.26 *Definición:* Sean \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 dos procesos iterativos con punto límite x_* , $Q_p(\mathcal{T}_1, x_*)$ y $Q_p(\mathcal{T}_2, x_*)$ los correspondientes Q-factores computados con la misma norma en \mathbb{R}^n . Entonces \mathcal{T}_1 es Q-más rápido que \mathcal{T}_2 si $\exists p \in [1, \infty)$ tal que $Q_p(\mathcal{T}_1, x_*) < Q_p(\mathcal{T}_2, x_*)$.

Nota: El concepto de Q-rapidez depende de la norma en \mathbb{R}^n , y es posible que en alguna norma, el proceso iterativo \mathcal{T}_1 sea Q-más rápido que el proceso \mathcal{T}_2 , mientras que en otra norma, \mathcal{T}_2 puede ser Q-más rápido que \mathcal{T}_1 . Sin embargo, el siguiente concepto es independiente de la norma utilizada:

2.27 *Definición:* Sean $Q_p(\mathcal{T}, x_*)$, $p \in [1, \infty)$ los Q-factores de un proceso iterativo \mathcal{T} con punto límite x_* respecto de alguna norma en \mathbb{R}^n .

Entonces:

$$\theta_q(\mathcal{T}, x_*) = \begin{cases} \infty & \text{si } Q_p(\mathcal{T}, x_*) = 0 \quad \forall p \in [1, \infty) \\ \inf\{p \in [1, \infty) / Q_p(\mathcal{T}, x_*) = \infty\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se llama "el Q-orden de \mathcal{T} en x_* ".

2.28 *Observación:* Sean \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 dos procesos iterativos con límite x_* .

Si $\theta_q(\mathcal{T}_1, x_*) > \theta_q(\mathcal{T}_2, x_*)$, entonces \mathcal{T}_1 es Q-más rápido que \mathcal{T}_2 , para cualquier norma en \mathbb{R}^n .

El Q-orden de \mathcal{J} en x_* es independiente de la norma utilizada, por lo cual utilizaremos esta definición sistemáticamente.

Nota: si $Q_1(\mathcal{J}, x_*) = 0$, se dice que la convergencia es Q-superlineal.

si $0 < Q_1(\mathcal{J}, x_*) < 1$, se dice que la convergencia es Q-lineal.

si $Q_1(\mathcal{J}, x_*) \geq 1$, la convergencia es Q-sublineal.

si $0 < Q_2(\mathcal{J}, x_*) < \infty$, la convergencia se dirá Q-cuadrática.

si $Q_2(\mathcal{J}, x_*) = 0$, la convergencia se dirá Q-supercuadrática.

si $Q_2(\mathcal{J}, x_*) = \infty$, la convergencia será Q-subcuadrática.

2.29 Definición: Sea $\{x^k\}_{k=1}^{\infty}$ una sucesión que converge a x_* .

Los números:

$$\mathcal{R}_p(\{x^k\}) = \begin{cases} \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x_*\|^{1/k}, & \text{si } p=1 \\ \overline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|x^k - x_*\|^{1/p}, & \text{si } p>1 \end{cases}$$

son llamados "los factores radicales de convergencia", y

$$\mathcal{R}_p(\mathcal{J}, x_*) = \sup \{ \mathcal{R}_p(\{x^k\}) / \{x^k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(\mathcal{J}, x_*) \}, \quad 1 \leq p < \infty$$

son los " \mathcal{R} -factores de \mathcal{J} en x_* ".

2.30 Lema: $\mathcal{R}_p(\{x_k\})$ es independiente de la norma en \mathbb{R}^n , $\forall p \in [1, \infty)$.

Demostración: Ver [5], pág. 288

2.31 Lema: Sea \mathcal{J} un proceso iterativo con límite x_* . Entonces una y sólo una de las siguientes condiciones se cumple:

a) $\mathcal{R}_p(\mathcal{J}, x_*) = 0 \quad \forall p \in [1, \infty)$

b) $\mathcal{R}_p(\mathcal{J}, x_*) = 1 \quad \forall p \in [1, \infty)$

c) $\exists p_0 \in [1, \infty)$ tal que $\mathcal{R}_p(\mathcal{J}, x_*) = 0 \quad \forall p \in [1, p_0)$, y

$$\mathcal{R}_p(\mathcal{T}, x_*) = 1 \quad \forall p \in (p_0, \infty).$$

Demostración: Ver [5], pág. 289

2.32 *Definición:* Sean \mathcal{T}_1 y \mathcal{T}_2 dos procesos iterativos con límite x_* .

Entonces \mathcal{T}_1 es \mathcal{R} -más rápido que \mathcal{T}_2 en x_* , si $\exists p \in [1, \infty)$ tal que

$$\mathcal{R}_p(\mathcal{T}_1, x_*) < \mathcal{R}_p(\mathcal{T}_2, x_*).$$

2.33 *Definición:* Sea \mathcal{T} un proceso iterativo con límite x_* .

La cantidad:

$$\mathcal{O}_r(\mathcal{T}, x_*) = \begin{cases} \infty & \text{si } \mathcal{R}_p(\mathcal{T}, x_*) = 0 \quad \forall p \in [1, \infty) \\ \inf\{p \in [1, \infty) / \mathcal{R}_p(\mathcal{T}, x_*) = 1\} & \text{en otro caso} \end{cases}$$

se llama "el \mathcal{R} -orden de \mathcal{T} en x_* ".

Nota: si $0 < \mathcal{R}_1(\mathcal{T}, x_*) < 1$, se dice que la convergencia de \mathcal{T} es \mathcal{R} -lineal.

si $\mathcal{R}_1(\mathcal{T}, x_*) = 1$, se dirá que la convergencia de \mathcal{T} es \mathcal{R} -sublineal.

si $\mathcal{R}_1(\mathcal{T}, x_*) = 0$, se dice que la convergencia de \mathcal{T} es \mathcal{R} -superlineal.

si $0 < \mathcal{R}_2(\mathcal{T}, x_*) < 1$, se dirá que la convergencia es \mathcal{R} -cuadrática.

2.34 *Teorema:* Sea \mathcal{T} un proceso iterativo con punto límite x_* . Entonces:

$$\mathcal{O}_q(\mathcal{T}, x_*) \leq \mathcal{O}_r(\mathcal{T}, x_*)$$

Demostración: Ver [5], pág. 296

2.35 *Teorema:* Sea \mathcal{T} un proceso iterativo y $\mathcal{B}(\mathcal{T}, x_*)$ el conjunto de sucesio-

nes generadas por \mathcal{T} que convergen a x_* . Supongamos que $\exists p \in [1, \infty)$ y una

constante c_2 tal que para cualquier $\{x^k\}_{k=1}^{\infty} \in \mathcal{B}(\mathcal{T}, x_*)$,

$$\|x^{k+1} - x_*\| \leq c_2 \|x^k - x_*\|^p, \quad \forall k \geq k_0 = k_0(\{x^k\}) \quad (1)$$

Entonces $\theta_r(\mathcal{J}, x_*) \geq \theta_q(\mathcal{J}, x_*) \geq p$

Por otro lado, si \exists una constante $c_1 > 0$ y alguna sucesión $\{x^k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{E}(\mathcal{J}, x_*)$ tal que:

$$\|x^{k+1} - x_*\| \geq c_1 \|x^k - x_*\|^p > 0, \quad \forall k \geq k_0 = k_0(\{x^k\}) \quad (2)$$

Entonces $\theta_q(\mathcal{J}, x_*) \leq \theta_r(\mathcal{J}, x_*) \leq p$

Por lo tanto, si se cumple (1) y (2), entonces: $\theta_q(\mathcal{J}, x_*) = \theta_r(\mathcal{J}, x_*) = p$. ■

Demostración: Ver [5], pág. 297

Convergencia local y radio de convergencia para iteraciones de la forma:

$$x^{k+1} = G(x^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

2.36 Definición: Sea $G: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces, x_* es punto de atracción de la iteración $x^{k+1} = G(x^k)$, $k=0, 1, \dots$ si existe un entorno S de x_* tal que $S \subset D$ y, $\forall x^0 \in S$, la iteración $\{x^k\}_{k=1}^\infty$ permanece en D y converge a x_* .

2.37 Teorema de Ostrowski: Supongamos que $G: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene un punto fijo $x_* \in \text{int}(D)$ y que es F -diferenciable en x_* .

Si el radio espectral de $G'(x_*)$ satisface $\rho(G'(x_*)) = \sigma < 1$, entonces x_* es un punto de atracción de la iteración $x^{k+1} = G(x^k)$, $k=0, 1, \dots$ ■

Demostración: Ver [5], pág. 300

2.38 Teorema de convergencia Lineal: Si $G: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ tiene un punto fijo $x_* \in \text{int}(D)$, es F -diferenciable en x_* y $\rho(G'(x_*)) = \sigma < 1$, entonces

$\mathcal{R}_1(\mathcal{J}, x_*) = \rho(G'(x_*))$. Más aún, si $\rho(G'(x_*)) > 0$, entonces:

$$\mathcal{O}_r(\mathcal{J}, x_*) = \mathcal{O}_q(\mathcal{J}, x_*) = 1 \quad \blacksquare$$

Demostración: Ver [5], pág. 301

2.39 Teorema: Sea $G: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con punto fijo $x_* \in \text{int}(D)$. Supongamos que G es continuamente diferenciable en alguna bola abierta $S = S(x_*, \delta) \subset D$. Si $G'(x_*) = 0$ y G es dos veces F -diferenciable en x_* , entonces:

x_* es punto de atracción del proceso $\mathcal{J}: x^{k+1} = G(x^k)$, $k=0, 1, \dots$ y

$$\mathcal{O}_r(\mathcal{J}, x_*) \geq \mathcal{O}_q(\mathcal{J}, x_*) \geq 2$$

Si además $G''(x_*)hh \neq 0$, $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $h \neq 0$, entonces:

$$\mathcal{O}_r(\mathcal{J}, x_*) = \mathcal{O}_q(\mathcal{J}, x_*) = 2 \quad \blacksquare$$

Demostración: Ver [5], pág. 304

2.40 Teorema de atracción de Newton: Sea $F: D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ F -diferenciable en un entorno abierto $S_0 \subset D$ de un punto $x_* \in D$ para el cual $F(x_*) = 0$. Supongamos que F' es continua en x_* y $F'(x_*)$ es no singular.

Entonces x_* es punto de atracción del proceso iterativo de Newton:

$$\mathcal{J}: x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1}F(x^k), \quad k=0, 1, \dots$$

$$\text{y} \quad \mathcal{R}_1(\mathcal{J}, x_*) = \mathcal{Q}_1(\mathcal{J}, x_*) = 0.$$

Si además existen constantes $\alpha < \infty$ y $p \in (0, 1]$ tales que

$$\|F'(x) - F'(x_*)\| \leq \alpha \|x - x_*\|^p, \quad \forall x \in S_0$$

Entonces $\mathcal{O}_r(\mathcal{J}, x_*) \geq \mathcal{O}_q(\mathcal{J}, x_*) \geq 1+p$.

Finalmente, si F es continuamente diferenciable en S_0 y la segunda F -derivada existe en x_* y satisface:

$$F''(x_*)hh \neq 0, \quad \forall h \in \mathbb{R}^n, h \neq 0$$

Entonces $\mathcal{O}_r(\mathcal{J}, x_*) = \mathcal{O}_q(\mathcal{J}, x_*) = 2 \quad \blacksquare$

Demostración: Ver [5], pág. 312

2.41 Teorema: Sea $G: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con punto fijo $x_* \in \text{int}(D)$. Supongamos que G es F -diferenciable en x_* y que $G'(x_*) = 0$. Entonces x_* es punto de atracción del proceso iterativo $x^{k+1} = G(x^k)$, $k=0,1,\dots$ y $\mathcal{R}_1(\mathcal{J}, x_*) = Q_1(\mathcal{J}, x_*) = 0$. Más aún, si en alguna bola $S = S(x_*, r)$ la estimación

$$\| G(x) - G(x_*) \| \leq \alpha \| x - x_* \|^p, \quad \forall x \in S$$

se cumple para algún $p > 1$, entonces $\mathcal{O}_r(\mathcal{J}, x_*) \geq \mathcal{O}_q(\mathcal{J}, x_*) \geq p$.

Si además, la estimación

$$\| G(x) - G(x_*) \| \geq \beta \| x - x_* \|^p, \quad \forall x \in S$$

se satisface para algún $\beta > 0$, entonces $\mathcal{O}_r(\mathcal{J}, x_*) = \mathcal{O}_q(\mathcal{J}, x_*) = p$.

Demostración: Ver [5], pág. 303

2.42 Teorema: Sea \mathcal{J} un proceso iterativo y $\mathcal{E}(\mathcal{J}, x_*)$ el conjunto de sucesiones generadas por \mathcal{J} que convergen a x_* . Sean $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_m$ constantes no negativas. Si, para cualquier $\{x^k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{E}(\mathcal{J}, x_*)$, existe $k_0 \geq m$ tal que

$$\| x^{k+1} - x_* \| \leq \| x^k - x_* \| \sum_{j=0}^m \gamma_j \| x^{k-j} - x_* \|, \quad \forall k \geq k_0,$$

entonces $\mathcal{O}_r(\mathcal{J}, x_*) \geq \tau$, donde τ es la única raíz positiva de

$$t^{m+1} - t^m - 1 = 0.$$

Si además, existe $\beta > 0$ y alguna sucesión $\{x^k\}_{k=1}^\infty \in \mathcal{E}(\mathcal{J}, x_*)$ tal que, para algún $k_0 \geq m$,

$$\| x^{k+1} - x_* \| \geq \beta \| x^k - x_* \| \| x^{k-m} - x_* \| > 0, \quad \forall k \geq k_0,$$

entonces $\phi_r(\mathcal{J}, x_*) = \tau$

Demostración: Ver [5], pág. 291

REFERENCIAS

- [4] R.S. VARGA, " MATRIX ITERATIVE ANALYSIS ",
PRENTICE-HALL, ENGLEWOOD CLIFFS, N.J., 1962.
- [5] J.M. ORTEGA- W.C. RHEINBOLDT , " ITERATIVE SOLUTION OF NONLINEAR
EQUATIONS IN SEVERAL VARIABLES ",
ACADEMIC PRESS, INC., 1970.

CAPÍTULO III

ANÁLISIS DE LOS MÉTODOS ITERATIVOS DE JACOBI, GAUSS-SEIDEL, Y NEWTON-RAPHSON.

En el presente capítulo se prueba que, para iteraciones de punto fijo, si la matriz Jacobiana asociada al sistema original es no negativa, entonces la eliminación de una variable mejora o a lo sumo no empeora la convergencia.

Más aún, si dicha matriz es no negativa e irreducible, el sistema reducido converge asintóticamente más rápido.

Estos resultados son un corolario del trabajo realizado por el Dr. J.P. Milaszewicz dentro del contexto lineal.

Esta idea será examinada en la última parte del Capítulo, para el caso del método Newton-Raphson .

Veremos que esta idea es fructífera, bajo ciertas hipótesis.

En el Capítulo 5 se exhibirán ejemplos ilustrativos.

1 METODO NO LINEAL DE JACOBI.

Surge como una extensión del método lineal de Jacobi:

Sea el sistema lineal de ecuaciones:

$$Ax = b ,$$

donde $A = (a_{ij})$, $a_{ii} \neq 0$; $b = (b_i)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$

Supongamos que la k -ésima iteración $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)^t$ ha sido determinada. Entonces, para obtener la próxima componente x_i^{k+1} , se resuelve la siguiente ecuación lineal en la variable x_i :

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j + a_{ii} x_i = b_i$$

La solución de dicha ecuación será x_i^{k+1} , es decir,

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(- \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij} x_j^k + b_i \right)$$

o escrito en forma compacta, si

$$A = D - L - U$$

donde D , L , U son matrices diagonal, estrictamente triangular inferior y triangular superior respectivamente, entonces

$$x^{k+1} = D^{-1}(L + U) x^k + D^{-1}b , \quad k=0, 1, \dots$$

Sea ahora el sistema no lineal $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con componentes f_1, f_2, \dots, f_n :

$$F(x) = 0$$

Suponiendo que la k -ésima iteración $x^k = (x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k)$ ha sido calculada, entonces, de manera análoga al caso lineal, la i -ésima componente de x^{k+1} se obtiene resolviendo la i -ésima ecuación en la variable x_i :

$$f_i(x_1^k, \dots, x_{i-1}^k, x_i, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k) = 0 \quad (3.1)$$

La solución de dicho sistema será x_i^{k+1} , es decir,

$$x_i^{k+1} = g_i(x_1^k, \dots, x_{i-1}^k, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k), \quad i=1, 2, \dots, n$$

o escrito en forma compacta,

$$x^{k+1} = G(x^k), \quad G = (g_1, g_2, \dots, g_n)$$

Nota: Para poder resolver la ecuación (3.1), $\forall i=1, 2, \dots, n$, supondremos que F es diferenciable en un entorno de $x_* \in D$, donde x_* es raíz de F , y $\partial_i f_i(x_*) \neq 0$, $\forall i=1, 2, \dots, n$. En consecuencia, G resulta F -diferenciable en x_* .

Queda así planteada la ecuación de punto fijo:

$$x = G(x), \quad G = (g_1, g_2, \dots, g_n) \quad (3.2)$$

donde $g_i = g_i(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$

Definición: a $G'(x_*)$ se la llamará "la matriz jacobiana asociada al sistema (3.2)", donde :

$$G'(x_*) = \begin{pmatrix} g_1^1 & \dots & g_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ g_n^1 & \dots & g_n^n \end{pmatrix}$$

con $g_i^j = \partial_j g_i(x_*)$, y x_* es la raíz de F o el punto fijo de (3.2) .

Obviamente, $G'(x_*)$ tiene ceros en la diagonal, y supondremos que $g_i^j \geq 0 \quad \forall i, j = 1, 2, \dots, n$

Eliminación de una de las variables:

Si fijamos m , $1 \leq m \leq n$, y consideramos el siguiente sistema obtenido de (3.2) por eliminación de x_m :

$$x = \tilde{G}(x), \quad (3.3)$$

donde:

$$\tilde{G} = (\tilde{g}_1, \dots, \tilde{g}_n)$$

y, $\forall i = 1, 2, \dots, n$,

$$\tilde{g}_i = g_i(x_1, \dots, x_{m-1}, g_m(x), x_{m+1}, \dots, x_n)$$

El método no lineal de Jacobi asociado a (3.3) será :

$$x^{k+1} = \tilde{G}(x^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

Resulta entonces:

$$\tilde{g}_i^j = \theta_j \tilde{g}_i(x_*) = \begin{cases} g_i^j + g_i^m g_m^j & \text{si } j \neq m, 1 \leq i, j \leq n \\ 0 & \text{si } j = m, 1 \leq i \leq n \end{cases}$$

Por lo tanto, $G'(x_*)$ y $\tilde{G}'(x_*)$ satisfacen las mismas hipótesis que las matrices B y B' del Capítulo 1.

En consecuencia, valen los siguientes Lemas y Teorema:

Lema 3.1 : Una y sólo una de las siguientes condiciones se cumple:

- i) $\rho(G'(x_*)) = 0 = \rho(\tilde{G}'(x_*))$
- ii) $\rho(G'(x_*)) = 1 = \rho(\tilde{G}'(x_*))$
- iii) $0 < \rho(G'(x_*))^2 \leq \rho(\tilde{G}'(x_*)) \leq \rho(G'(x_*)) < 1$
- iv) $1 < \rho(G'(x_*)) \leq \rho(\tilde{G}'(x_*)) \leq \rho(G'(x_*))^2$

Teorema 3.2 : Si $\rho(G'(x_*)) < 1$ y $G'(x_*)$ es irreducible, entonces

$$\rho(\tilde{G}'(x_*)) < \rho(G'(x_*))$$

Lema 3.3 : Sea $\tilde{G}_m'(x_*)$ la matriz de orden $(n-1)$ obtenida a partir de $\tilde{G}'(x_*)$, eliminando la m -ésima fila y columna. Entonces $\tilde{G}'(x_*)$ es reducible y $\rho(\tilde{G}'(x_*)) = \rho(\tilde{G}_m'(x_*))$.

Demostración: análoga al Corolario 3.5

2- METODO NO LINEAL DE GAUSS-SEIDEL.

Al igual que el método no lineal de Jacobi, este método es una extensión del método lineal de Gauss-Seidel:

Sea el sistema lineal de ecuaciones:

$$A x = b$$

con $A = (a_{ij})$, $b = (b_i)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, y $a_{ii} \neq 0 \forall i=1, 2, \dots, n$

Supongamos que la k -ésima iteración $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)^t$ y las $(i-1)$ componentes $x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$ de la iteración x^{k+1} han sido determinadas.

Entonces, para obtener la componente x_i^{k+1} , se resuelve la ecuación lineal en la variable x_i :

$$\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} + a_{ii} x_i + \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k = b_i$$

La solución de dicho sistema será x_i^{k+1} , es decir,

$$x_i^{k+1} = \frac{1}{a_{ii}} \left(-\sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{k+1} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^k + b_i \right)$$

o escrito en forma compacta, si

$$A = D - L - U ,$$

con D , L y U matrices diagonal, estrictamente triangular inferior y estrictamente triangular superior respectivamente, entonces

$$x^{k+1} = (D - L)^{-1} U x^k + (D - L)^{-1} b, k = 0, 1, \dots$$

Sea ahora el sistema no lineal $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ con componentes f_1, f_2, \dots, f_n :

$$F(x) = 0$$

Suponiendo que la k -ésima iteración $x^k = (x_1^k, \dots, x_n^k)^t$ y las $(i-1)$ componentes $x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}$ de la iteración x^{k+1} han sido determinadas, entonces, para obtener la componente x_i^{k+1} , se resuelve la i -ésima ecuación no lineal en la variable x_i :

$$f_i(x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_i, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k) = 0$$

La solución de dicha ecuación será x_i^{k+1} , es decir,

$$x_i^{k+1} = g_i(x_1^{k+1}, \dots, x_{i-1}^{k+1}, x_{i+1}^k, \dots, x_n^k)$$

Para escribirlo en forma compacta, definimos la función $V = (v_1, \dots, v_n)$ tal que :

$$\begin{aligned} v_1(x^k) &= x_1^{k+1} = g_1(x_1^k, x_2^k, \dots, x_n^k) \\ v_2(x^k) &= x_2^{k+1} = g_2(v_1(x^k), x_2^k, \dots, x_n^k) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ v_i(x^k) &= x_i^{k+1} = g_i(v_1(x^k), \dots, v_{i-1}(x^k), x_i^k, \dots, x_n^k) \\ &\cdot \\ v_n(x^k) &= x_n^{k+1} = g_n(v_1(x^k), \dots, v_{n-1}(x^k), x_n^k) \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$x^{k+1} = V(x^k) \quad , \quad k = 0, 1, \dots$$

Queda así planteada la ecuación de punto fijo :

$$x = V(x) \quad , \quad (3.4)$$

con $V = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ definida así :

$$\begin{aligned} v_1(x) &= g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ v_i(x) &= g_i(v_1(x), \dots, v_{i-1}(x), x_i, \dots, x_n) \quad , \quad i \geq 2 \end{aligned}$$

El siguiente Lema prueba que $V'(x_*)$ es la matriz de Gauss-Seidel asociada a $G'(x_*)$:

Lema 3.4 : Si x_* es raíz de F (o punto fijo de (3.4)), entonces

$V'(x_*) = (I - L)^{-1} U = (I + L + \dots + L^{n-1}) U$, con L y U tales que

$$L = \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ g_1^1 & 0 & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ g_n^1 & \dots & g_n^{n-1} & & 0 \end{pmatrix} \quad U = \begin{pmatrix} 0 & g_1^2 & \dots & \dots & g_n^1 \\ & 0 & g_2^3 & \dots & g_n^2 \\ & & \dots & \dots & \dots \\ & & & \dots & \dots \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

Es decir, L y U son la parte triangular inferior y triangular superior respectivamente de la matriz $G'(x_*)$

Demostración:

Se probará por inducción sobre i , que

$$\partial_j v_i(x_*) = [(I - L)^{-1} U]_{ij} \quad , \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Para $i = 1$,

$$\partial_j v_1(x_*) = U_{1j} = [U + LU + L^2U + \dots + L^{n-1}U]_{1j} =$$

$$= [(I + L + L^2 + \dots + L^{n-1}) U]_{1j} = [(I - L)^{-1} U]_{1j}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Supongamos que, $\forall k = 1, \dots, i-1$, se cumple

$$\partial_j v_k(x_*) = [(I - L)^{-1} U]_{kj}, \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

veamos para i :

$$v_i(x) = g_i(v_1(x), \dots, v_{i-1}(x), x_1, \dots, x_n)$$

si $j < i$,

$$\partial_j v_i(x_*) = \sum_{k=1}^{i-1} \partial_k g_i(x_*) \partial_j v_k(x_*) \stackrel{(1)}{=} \sum_{k=1}^{i-1} L_{ik} [(I - L)^{-1} U]_{kj} =$$

$$\stackrel{(2)}{=} \sum_{k=1}^n L_{ik} [(I - L)^{-1} U]_{kj} = [L ((I - L)^{-1} U)]_{ij} =$$

$$= [L (I + L + L^2 + \dots + L^{n-1}) U]_{ij} = [(L + L^2 + \dots + L^{n-1} + L^n) U]_{ij} =$$

$$\stackrel{(3)}{=} [(L + L^2 + \dots + L^{n-1}) U]_{ij} + U_{ij} = [(I + L + \dots + L^{n-1}) U]_{ij} =$$

$$= [(I - L)^{-1} U]_{ij}$$

Si $j \geq i$,

$$\partial_j v_i(x_*) = \partial_j g_i(x_*) + \sum_{k=1}^{i-1} \partial_k g_i(x_*) \partial_j v_k(x_*) \stackrel{(4)}{=} [L (I - L)^{-1} U]_{ij} + U_{ij} =$$

$$= [L (I - L)^{-1} U]_{ij} + U_{ij} = [L (I + L + \dots + L^{n-1}) U]_{ij} + U_{ij} =$$

$$= [(L + L^2 + \dots + L^{n-1} + L^n) U]_{ij} + U_{ij} = [(I + L + \dots + L^{n-1}) U]_{ij} =$$

$$= [(I - L)^{-1} U]_{ij} \quad \blacksquare$$

Nota: (1) y (4) valen por hipótesis inductiva,

(2) vale pues L es triangular inferior estricta,

(3) vale porque U es triangular superior.

Eliminación de una de las variables

Si fijamos m , $1 \leq m \leq n$, y , como se hizo antes, se considera el siguiente sistema obtenido de (3.2) por eliminación de x_m ,

$$x = \tilde{G}(x) \quad , \quad \tilde{G} = (\tilde{g}_1, \tilde{g}_2, \dots, \tilde{g}_n) \quad (3.3)$$

donde

$$\tilde{g}_i = g_i(x_1, \dots, x_{m-1}, g_m(x), x_{m+1}, \dots, x_n) \quad , \quad i = 1, 2, \dots, n$$

Entonces, el método no lineal de Gauss-Seidel asociado a (3.3) será:

$$\begin{aligned} x_1^{k+1} &= \tilde{g}_1(x_1^k, \dots, x_n^k) = \tilde{v}_1(x^k) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_i^{k+1} &= \tilde{g}_i(\tilde{v}_1(x^k), \dots, \tilde{v}_{i-1}(x^k), x_i^k, \dots, x_n^k) = \tilde{v}_i(x^k) \\ &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_n^{k+1} &= \tilde{g}_n(\tilde{v}_1(x^k), \dots, \tilde{v}_{n-1}(x^k), x_n^k) = \tilde{v}_n(x^k) \end{aligned}$$

Queda de esta forma planteada la ecuación de punto fijo:

$$x = \tilde{V}(x) \quad , \quad \tilde{V} = (\tilde{v}_1, \tilde{v}_2, \dots, \tilde{v}_n)$$

con

$$\tilde{v}_1(x) = \tilde{g}_1(x)$$

$$\tilde{v}_i(x) = \tilde{g}_i(\tilde{v}_1(x), \dots, \tilde{v}_{i-1}(x), x_i, \dots, x_n) \quad , \quad i \geq 2 .$$

El siguiente Lema prueba que $\tilde{V}'(x_*)$ es la matriz de Gauss-Seidel asociada a $\tilde{G}'(x_*)$:

Lema 3.5 $\tilde{V}'(x_*) = (I - L')^{-1} U'$, donde

L' = parte triangular inferior estricta de $\tilde{G}'(x_*)$

U' = parte triangular superior de $\tilde{G}'(x_*)$, es decir, $U' = \tilde{G}'(x_*) - L'$.

Demostración:

Al igual que en el Lema 3.4, se prueba por inducción sobre i, que:

$$\partial_j \tilde{v}_i(x_*) = [(I - L')^{-1} U']_{ij} \quad , \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Para $i = 1$,

$$\partial_j \tilde{v}_1(x_*) = \partial_j \tilde{g}_1(x_*) = \partial_j g_1(x_*) + \partial_m g_1(x_*) \partial_j g_m(x_*) = U'_{1j} =$$

$$= [(I + L' + L'^2 + \dots + L'^{n-1}) U']_{1j} = [(I - L')^{-1} U']_{1j} .$$

Supongamos que, $\forall r = 1, \dots, i-1$,

$$\partial_j \tilde{v}_r(x_*) = [(I - L')^{-1} U']_{rj} \quad , \quad \forall j = 1, 2, \dots, n$$

Veamos para i :

$$\tilde{v}_i(x) = \tilde{g}_i(\tilde{v}_1(x), \dots, \tilde{v}_{i-1}(x), x_i, \dots, x_n)$$

Si $j < i$,

$$\begin{aligned} \partial_j \tilde{v}_i(x_*) &= \sum_{r=1}^{i-1} \partial_r \tilde{g}_i(x_*) \partial_j \tilde{v}_r(x_*) \stackrel{(5)}{=} \sum_{r=1}^{i-1} L'_{ir} [(I - L')^{-1} U']_{rj} = \\ &\stackrel{(6)}{=} \sum_{r=1}^n L'_{ir} [(I - L')^{-1} U']_{rj} = [L' (I - L')^{-1} U']_{ij} = \\ &= [(L' + L'^2 + \dots + L'^{n-1} + L'^n) U']_{ij} \stackrel{(7)}{=} [(L' + \dots + L'^{n-1}) U']_{ij} + U'_{ij} \\ &= [(I + L' + \dots + L'^{n-1}) U']_{ij} = [(I - L')^{-1} U']_{ij} . \end{aligned}$$

Si $j \geq i$, la demostración es análoga al Lema 3.4 ■

Nota: (5) vale por hipótesis inductiva.

(6) vale pues L' es triangular inferior estricta.

(7) vale porque U' es triangular superior.

Corolario 3.5 : Sea $\tilde{V}'_m(x_*)$ la matriz de orden $(n-1)$ obtenida de $\tilde{V}'(x_*)$, eliminando la m -ésima fila y columna.

Entonces $\tilde{V}'(x_*)$ es reducible y $\rho(\tilde{V}'(x_*)) = \rho(\tilde{V}'_m(x_*))$.

Demostración:

$\tilde{V}'(x_*)$ tiene su m -ésima columna nula pues :

como $U'_{sm} = 0$, $\forall s = 1, 2, \dots, n$, entonces

$$\partial_m \tilde{V}'_l(x_*) = [(I - L')^{-1} U']_{lm} = \sum_{s=1}^n (I - L')_{ls}^{-1} U'_{sm} = 0.$$

Por lo tanto, existe una matriz de permutación P tal que :

$$P \tilde{V}'(x_*) P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \partial_1 \tilde{V}'_m(x_*) & \dots & \partial_{m-1} \tilde{V}'_m(x_*) & \partial_{m+1} \tilde{V}'_m(x_*) & \dots & \partial_n \tilde{V}'_m(x_*) \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & \tilde{V}'_m(x_*) & & & \end{pmatrix}$$

Obviamente, de aquí resulta lo que se quiere probar. ■

Los Lemas 3.4 y 3.5 afirman que $V'(x_*)$ y $\tilde{V}'(x_*)$ satisfacen las mismas hipótesis que las matrices H y H' del Capítulo 1.

Por lo tanto, se tiene :

Teorema 3.6 : Si $G'(x_*)$ es irreducible y si $\exists i, j$ tales que $g_l^m g_m^j \neq 0$,

con

a) $m < j < i$, o

b) $j < i < m$, o

c) $i < m < j$

entonces $\rho(\tilde{V}'(x_*)) < \rho(V'(x_*))$.

Corolario 3.6 : $\rho(\tilde{V}'(x_*)) \leq \rho(V'(x_*))$

Notación:

Llamamos:

\mathcal{J}_1 : proceso iterativo generado por el método de Jacobi no lineal.

$\tilde{\mathcal{J}}_1$: proceso iterativo generado por el método de Jacobi no lineal, eliminando la variable x_m .

\mathcal{J}_2 : proceso iterativo generado por el método de Gauss-Seidel no lineal.

$\tilde{\mathcal{J}}_2$: proceso iterativo generado por el método de Gauss-Seidel no lineal, eliminando la variable x_m .

Los Lemas y Teoremas enunciados anteriormente, pueden resumirse en el siguiente :

Teorema 3.7 : Si $\rho(G'(x_*)) < 1$, entonces una y sólo una de las siguientes condiciones se cumple:

$$i) \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*) = \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_2, x_*) = \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*) = \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_2, x_*) = 0$$

$$ii) 0 < \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_2, x_*) \leq \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_2, x_*) < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*) < 1, \text{ y}$$

$$0 < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*)^2 \leq \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*) \leq \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*) < 1$$

$$iii) 0 = \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_2, x_*) < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_2, x_*) < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*) < 1, \text{ y}$$

$$0 < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*)^2 \leq \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*) \leq \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*) < 1.$$

Si además $G'(x_*)$ satisface las hipótesis del Teorema 3.6, entonces

$$0 \leq \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_2, x_*) < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_2, x_*) < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*), \text{ y}$$

$$0 < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*)^2 \leq \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*) < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*) < 1.$$

Demostración: Por el Teorema de convergencia lineal (Teorema 2.38),

se sabe que :

$$\mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*) = \rho(G'(x_*))$$

$$\mathcal{R}_1(\mathcal{J}_2, x_*) = \rho(V'(x_*))$$

$$\mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*) = \rho(\tilde{G}'(x_*))$$

$$\mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_2, x_*) = \rho(\tilde{V}'(x_*))$$

Por el Teorema de Stein-Rosenberg (Teorema 2.7) y Lema 3.4, una de las siguientes condiciones se satisface :

a) $\mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*) = \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_2, x_*) = 0$ ó

b) $0 < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_2, x_*) < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*) < 1$

y, del Lema 3.1, una y solo una de las siguientes condiciones se satisface :

i) $0 = \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*) = \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*)$

ii) $0 < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*)^2 \leq \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*) \leq \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*) < 1$

Las demás desigualdades se desprenden inmediatamente del Corolario 3.6 y Teoremas 3.2 y 3.6 ■

Observación: El Teorema 3.7 formaliza el hecho que, cuando $G'(x_*)$ es irreducible y $\rho(G'(x_*)) < 1$, la iteración no lineal de Jacobi convergerá asintóticamente más rápido cuando es aplicado al sistema (3.2), que cuando se aplica al sistema (3.1).

Análoga conclusión vale para el método no lineal de Gauss-Seidel.

Cabe preguntarse qué relación existe entre $\mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_2, x_*)$ y $\mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*)$.

Del Teorema 3.7 se puede concluir que, si $\rho(G'(x_*)) < 1$, entonces

$$\mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_2, x_*)^2 \leq \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*) .$$

Sin embargo, esta expresión puede mejorarse si se aplica el siguiente Teorema, probado por el Dr. J.P. Milaszewicz (ver [5]) :

Teorema de Stein-Rosenberg generalizado :

Sea $B(X)$ el espacio de operadores lineales y acotados en X , donde X es un espacio de Banach real .

Sean L y $U \in B(X)$ positivas, U completamente continua, $\rho(L) < 1$ y

$H = (I - L)^{-1} U$. Entonces una y sólo una de las siguientes condiciones se cumple :

i) $\rho(L + U) = 0 = \rho(H)$

ii) $\rho(L + U) = 1 = \rho(H)$

iii) $0 \leq \rho(U) \leq \rho(H) < \rho(L + U) < 1$

iv) $0 < \rho(U) = \rho(H) = \rho(L + U) < 1$

v) $\rho(U) < \rho(L + U)$ y $1 < \rho(L + U) < \rho(H)$

vi) $\rho(U) = \rho(L + U)$ y $1 < \rho(L + U) \leq \rho(H)$

Corolario : Si $\rho(G'(x_*)) < 1$, entonces $\mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_2, x_*) \leq \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*)$.

Demostración: inmediata del Teorema anterior ,Lema 3.1 y Lema 3.5 .

Lema 3.8 : Si $0 < \rho(G'(x_*)) < 1$, entonces:

$$\begin{aligned} \theta_q(\mathcal{J}_1, x_*) &= \theta_r(\mathcal{J}_1, x_*) = \theta_q(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*) = \theta_r(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*) = \theta_q(\mathcal{J}_2, x_*) = \\ &= \theta_r(\mathcal{J}_2, x_*) = 1 \leq \theta_q(\tilde{\mathcal{J}}_2, x_*) \leq \theta_r(\tilde{\mathcal{J}}_2, x_*) . \end{aligned}$$

Demostración: como $0 < \rho(G'(x_*)) < 1$, entonces $0 < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_1, x_*) < 1$;

Teorema 3.7 implica que $0 < \mathcal{R}_1(\mathcal{J}_2, x_*) < 1$ y $0 < \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{J}}_1, x_*) < 1$.

Por lo tanto, las igualdades surgen inmediatamente del Teorema de

convergencia lineal. Además, puede verificarse que $\forall \{x^k\} \in \mathcal{C}(\tilde{\mathcal{J}}_2, x_*)$,

$$\|x^{k+1} - x_*\| \leq (\|\tilde{V}'(x_*)\| + \varepsilon) \|x^k - x_*\| , \quad \forall k \geq k_0 = k_0(\{x^k\}) , \text{ y } \varepsilon = \text{cte} > 0.$$

En consecuencia, las desigualdades se obtienen del Lema 2.35 . ■

El siguiente Lema muestra que la afirmación del Teorema 3.6 puede no ser cierta si se eliminan las hipótesis a) , b) y c)

Lema 3.9 : Sea la ecuación de punto fijo (3.1); si $G = (g_1, g_2, \dots, g_n)$

es tal que :

$$g_1 = g_1(x_2)$$

$$g_i = g_i(x_{i-1}, x_{i+1}) , \quad i=2, \dots, n-1$$

$$g_n = g_n(x_{n-1})$$

Entonces:

i) Si se elimina la variable x_1 , utilizando la primera ecuación, en las ecuaciones 2 a n , y se comienza con el mismo valor inicial,

resulta : $x_i^k = \tilde{x}_i^k , \quad \forall i=1, 2, \dots, n , \quad k=0, 1, \dots$

donde:

$\{x_i^k\}_{i=1}^n$ = iteración de Gauss-Seidel sin eliminación.

$(\tilde{x}_i^k)_{i=1}^n$ = iteración de Gauss-Seidel obtenida por eliminación de x_1 .

(i) Si $\rho(G'(x_*)) < 1$, entonces $\rho(V'(x_*)) = \rho(\tilde{V}'(x_*))$.

Demostración: i) Notar que $\tilde{g}_1 = g_1$; $\tilde{g}_2 = g_2(g_1(x_2), x_3)$, y $\tilde{g}_i(x) = g_i(x)$, $i=3, \dots, n$

Se probará el Lema por inducción sobre el paso iterativo k :

Para $k = 1$,

notar que $x_i^0 = \tilde{x}_i^0$, $i=1, 2, \dots, n$; pues se toma el mismo valor inicial.

$$\tilde{x}_1^k = \tilde{g}_1(\tilde{x}_2^{k-1}) = g_1(x_2^{k-1}) = x_1^k$$

$$\tilde{x}_2^k = g_2(g_1(\tilde{x}_2^{k-1}), \tilde{x}_3^{k-1}) = g_2(g_1(x_2^{k-1}), x_3^{k-1}) = g_2(x_1^k, x_3^{k-1}) = x_2^k;$$

Si $3 \leq i \leq n$, teniendo en cuenta que se fue probando que

$\tilde{x}_j^k = x_j^k$, si $j < i$; y que $\tilde{g}_i = g_i$, resulta entonces:

$$\tilde{x}_i^k = g_i(\tilde{x}_{i-1}^k, \tilde{x}_{i+1}^{k-1}) = g_i(x_{i-1}^k, x_{i+1}^{k-1}) = x_i^k;$$

$$\tilde{x}_n^k = g_n(\tilde{x}_{n-1}^k) = g_n(x_{n-1}^k) = x_n^k.$$

Supongamos que vale para k , veamos para $k+1$:

$$\tilde{x}_1^{k+1} = \tilde{g}_1(\tilde{x}_2^k) = \tilde{g}_1(x_2^k) = g_1(x_2^k) = x_1^{k+1};$$

$$\tilde{x}_2^{k+1} = g_2(g_1(\tilde{x}_2^k), \tilde{x}_3^k) = g_2(g_1(x_2^k), x_3^k) = g_2(x_1^{k+1}, x_3^k) = x_2^{k+1};$$

si $3 \leq i \leq n$, la demostración es análoga al caso $k = 1$.

(ii) Por i), resulta $\tilde{\mathcal{T}}_2 = \mathcal{T}_2$, en consecuencia $\mathcal{R}_1(\mathcal{T}_2, x_*) = \mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{T}}_2, x_*)$.

Como $\rho(G'(x_*)) < 1$, el Teorema de Stein-Rosenberg y Corolario 3.6

implican que $\rho(\tilde{V}'(x_*)) \leq \rho(V'(x_*)) < 1$; por lo tanto, por el Teorema de convergencia lineal, resulta:

$$\mathcal{R}_1(\tilde{\mathcal{T}}_2, x_*) = \rho(\tilde{V}'(x_*)), \text{ y } \mathcal{R}_1(\mathcal{T}_2, x_*) = \rho(V'(x_*))$$

así, $\rho(\tilde{V}'(x_*)) = \rho(V'(x_*))$. ■

3-METODO DE NEWTON-RAPHSON

Descripción del método

Sea f una función real, de variable real, continuamente diferenciable con una raíz x_* tal que $f'(x_*) \neq 0$.

Suponiendo que la k -ésima iteración x^k ha sido calculada, el método consiste en aproximar f por la función lineal :

$$l(x) = f'(x^k)(x-x^k) + f(x^k)$$

entonces x^{k+1} se define como la raíz de l , donde suponemos que x^k está lo suficientemente cerca de x_* como para que $f'(x^k) \neq 0$.

Este método puede extenderse a funciones de n variables :

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; $x_* \in \text{int}(D)$. Para obtener la $(k+1)$ -ésima iteración a partir de x^k , cada componente f_i de F es aproximada por la función afín :

$$f_i'(x^k)(x-x^k) + f_i(x^k) \quad (3.5)$$

la cual describe el hiperplano tangente de f_i en x^k .

Entonces x^{k+1} se toma como la intersección de los n -hiperplanos (3.5) en \mathbb{R}^{n+1} , con el hiperplano $x = 0$. Es decir,

$$x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1} F(x^k), \quad k=0, 1, \dots$$

Para que el método quede bien definido y converja a x_* , se supondrá que F es que es continuamente diferenciable en un entorno de x_* , y $\det(F'(x_*)) \neq 0$.

Eliminación de una de las variables

Sea $F: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$; y sea $x_* \in \text{int}(D)$ tal que $F(x_*) = 0$.

Fijemos k , $1 \leq k \leq n$, y supongamos que:

- a) F es dos veces continuamente F -diferenciable en un entorno de x_* .
- b) $\partial_k f_i(x_*) \neq 0$, para algún i .

Se desea eliminar del sistema la variable x_k . Por el Teorema de la Función Implícita (Teorema 2.22), existen entornos abiertos $S_1 \subset \mathbb{R}$, $S_2 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ de x_k^* y $(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)^t$ respectivamente y una aplicación diferenciable:

$$h: S_2 \rightarrow \bar{S}_1 \subset \mathbb{R} \text{ tal que}$$

$$x_k^* = h(x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*) \quad , \quad y$$

$$f_i(x_1, \dots, x_{k-1}, h(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n) = 0 \quad ,$$

$$\forall (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)^t \in S_2 \quad .$$

Resulta así un nuevo sistema a resolver:

$$\tilde{F}(\bar{x}) = 0 \quad , \quad \text{donde}$$

$$\tilde{F}: \tilde{D} \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1} \quad , \quad \tilde{F} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{i-1}, \tilde{f}_{i+1}, \dots, \tilde{f}_n) \quad , \quad y$$

$$\tilde{f}_j(\bar{x}) = f_j(x_1, \dots, x_{k-1}, h(\bar{x}), x_{k+1}, \dots, x_n) \quad , \quad \forall j \neq i \quad ;$$

$$\bar{x} = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)^t$$

Observaciones:

- Para que \tilde{F} quede bien definida, pediremos que $\bar{S}_1 \times \pi(D) \subset D$, donde $\pi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$; $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n)^t$.
- \tilde{F} es también dos veces continuamente diferenciable en un entorno de $\bar{x}_* = (x_1^*, \dots, x_{k-1}^*, x_{k+1}^*, \dots, x_n^*)^t$ y $F''(\bar{x}_*)$ es no singular, como se verá en el Lema 3.11.
Así, \tilde{F} satisface las hipótesis del Teorema de atracción de Newton, y por lo tanto \bar{x}_* es punto de atracción de la iteración de Newton-Raphson generada por \tilde{F} .
- Si $F''(x_*) = 0$, entonces $\tilde{F}''(\bar{x}_*) = 0$.
Esto es una consecuencia inmediata de la Nota (i) (pág.46).
- Sin pérdida de generalidad, se supondrá que $i = k = 1$.
Así, $\partial_1 f_1(x_*) \neq 0$, y $\tilde{F} = (\tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n)$; donde $\tilde{f}_i(x_2, \dots, x_n) = f_i(h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)$, $i=2, \dots, n$.

Notación:

- Si A es una matriz $n \times n$ con columnas A_1, \dots, A_n , entonces $\det A = \det(A_1, \dots, A_n)$; y $(A_1, \dots, \hat{A}_j, \dots, A_n)$ es la matriz que resulta de eliminar la j -ésima columna de A .

- Dada $P : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, se dice que $P(x) = o(\|x - x_*\|^r)$ $r > 0$; si

$$\lim_{x \rightarrow x_*} \frac{P(x) - P_*}{\|x - x_*\|^r} = 0, \quad \text{donde } P_* = \lim_{x \rightarrow x_*} P(x)$$

- Llamaremos $\bar{x}_* = (x_2^*, \dots, x_n^*)^t$ y $\bar{x} = (x_2, \dots, x_n)^t$.

Las matrices jacobianas $F'(x_*)$ y $\tilde{F}'(\bar{x}_*)$ serán:

$$F'(x_*) = \begin{pmatrix} f_1^1 & \dots & f_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ f_n^1 & \dots & f_n^n \end{pmatrix} \quad \tilde{F}'(\bar{x}_*) = \begin{pmatrix} \tilde{f}_2^2 & \dots & \tilde{f}_2^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{f}_n^2 & \dots & \tilde{f}_n^n \end{pmatrix},$$

donde:

$$f_i^j = \partial_j f_i(x_*) \quad ; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad ; \quad y$$

$$\tilde{f}_i^j = \partial_j \tilde{f}_i(\bar{x}_*) \quad ; \quad i, j = 2, \dots, n$$

- $f_{\bullet}^{ij} = \partial_{ij}^2 f_{\bullet}(x_*)$; $s, i, j = 1, 2, \dots, n$; y

$$\tilde{f}_{\bullet}^{ij} = \partial_{ij}^2 \tilde{f}_{\bullet}(\bar{x}_*) \quad ; \quad s, i, j = 2, \dots, n$$

- $\det(s, k)$ = determinante de la matriz que se obtiene eliminando la fila " s " y columna " k " de $F'(x_*)$; $1 \leq s, k \leq n$

$\overline{\det}(s,k)$ = determinante de la matriz que se obtiene eliminando la fila $(s-1)$ y columna $(k-1)$ de $\tilde{F}'(\bar{x}_*)$; $2 \leq s,k \leq n$.

• Si $n = 2$, entonces $\overline{\det}(2,2) = 1$.

Notas

i) como $f_1(h(\bar{x}), x_2, \dots, x_n) = 0 \quad \forall \bar{x} \in S_2$, entonces , $\forall j = 2, \dots, n$;

$$\frac{\partial f_1(h(\bar{x}), x_2, \dots, x_n)}{\partial x_1} + \frac{\partial h(\bar{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial f_1(h(\bar{x}), x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

Por lo tanto,

$$\frac{\partial h(\bar{x}_*)}{\partial x_j} = - f_1^j / f_1^1 \quad (2)$$

y, derivando (1) respecto de x_i , ($i \geq 2$) resulta :

$$\frac{\partial^2 h(\bar{x}_*)}{\partial x_i \partial x_j} = [- (f_1^1)^2 f_1^{ij} + f_1^1 f_1^{1j} f_1^i + f_1^1 f_1^{1i} f_1^j - f_1^{11} f_1^i f_1^j] / (f_1^1)^3 \quad (3)$$

ii) como $\tilde{f}_k(\bar{x}) = f_k(h(\bar{x}), x_2, \dots, x_n)$ para $k \geq 2$, usando (2) y (3)

resulta :

$$\tilde{f}_k^{ij} = (f_k^{11} f_1^i f_1^j) / (f_1^1)^2 - (f_k^{1j} f_1^i / f_1^1) + (f_k^1 [- (f_1^1)^2 f_1^{ij} + f_1^1 f_1^{1j} f_1^i + f_1^1 f_1^{1i} f_1^j - f_1^{11} f_1^i f_1^j] / (f_1^1)^3) - (f_k^{1i} f_1^j / f_1^1) + f_k^{ij}$$

iii) $h(\bar{x}) - h(\bar{x}_*) = h'(\bar{x}_*) (\bar{x} - \bar{x}_*) + R(\bar{x})$, donde :

$R(\bar{x}) = h(\bar{x}) - h(\bar{x}_*) - h'(\bar{x}_*) (\bar{x} - \bar{x}_*)$; pero, por la definición de diferenciabilidad, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que, si $\| \bar{x} - \bar{x}_* \| < \delta$, entonces $| R(\bar{x}) | < \epsilon \| \bar{x} - \bar{x}_* \|$.

Por lo tanto, $R(\bar{x}) = o(\| \bar{x} - \bar{x}_* \|)$; así ,

$$h(\bar{x}) - h(\bar{x}_*) = \sum_{l=2}^n \partial_l h(\bar{x}_*) (x_l - x_l^*) + R(\bar{x}) = - \sum_{l=2}^n (f_1^l / f_1^1) (x_l - x_l^*) + R(\bar{x}).$$

Los experimentos numéricos han sugerido que, si se comienza con el mismo valor inicial, las iteraciones de Newton-Raphson generadas por F y \tilde{F} , no sólo convergen en general con la misma rapidez a x_* y \bar{x}_* respectivamente, sino que los términos correspondientes a \tilde{F} son semejantes a los de F ; además hay casos en los que la convergencia de las iteraciones generadas por \tilde{F} es claramente mejor que la, de las iteraciones asociadas a F . Esto será justificado en los Teoremas 3.14 y 3.17 .

Previamente se demostrarán los siguientes Lemas:

Lema 3.10 : Si $x_1 = h(x_2, \dots, x_n)$, entonces, $\forall k = 1, 2, \dots, n$:

$$\begin{aligned} [F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*)]_k &= \frac{1}{\det F'(x_*)} \sum_{s=1}^n (-1)^{s+k} \det(s, k) \{ \\ &\{ \frac{f_1^{11}}{(f_1^1)^2} (\sum_{i=2}^n f_1^i (x_i - x_i^*))^2 - 2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \frac{f_1^{1i} f_1^{1j}}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + \\ &+ \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n f_1^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \} + q_k(\bar{x}), \end{aligned}$$

donde $q_k(\bar{x}) = o(\| \bar{x} - \bar{x}_* \|^2)$

Demostración:

Recordando que $[F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*)]_s = \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n f_1^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*)$

$$y \quad [F'(x_*)^{-1}]_{ks} = \frac{(-1)^{s+k} \det(s, k)}{\det F'(x_*)}, \quad \forall s, k = 1, 2, \dots, n$$

entonces, $\forall k = 1, 2, \dots, n$ se tiene

$$[F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*)]_k = \frac{1}{\det F'(x_*)} \sum_{s=1}^n (-1)^{s+k} \det(s, k) \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{\bullet}^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \right)$$

Pero, teniendo en cuenta Nota i(i),

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n f_{\bullet}^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) &= f_{\bullet}^{11} \left(- \sum_{l=2}^n \frac{f_{\bullet}^l}{f_{\bullet}^1} (x_l - x_l^*) + R(\bar{x}) \right)^2 + \\ &+ 2 \sum_{i=2}^n f_{\bullet}^{i1} (x_i - x_i^*) \left(- \sum_{l=2}^n \frac{f_{\bullet}^l}{f_{\bullet}^1} (x_l - x_l^*) + R(\bar{x}) \right) + \\ &+ \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n f_{\bullet}^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) = f_{\bullet}^{11} \left[\left(\sum_{l=2}^n \frac{f_{\bullet}^l}{f_{\bullet}^1} (x_l - x_l^*) \right)^2 - \right. \\ &- 2 R(\bar{x}) \sum_{l=2}^n \frac{f_{\bullet}^l}{f_{\bullet}^1} (x_l - x_l^*) + (R(\bar{x}))^2 \left. \right] - 2 \sum_{i=2}^n f_{\bullet}^{i1} (x_i - x_i^*) \left[\sum_{l=2}^n \frac{f_{\bullet}^l}{f_{\bullet}^1} (x_l - x_l^*) \right] + \\ &+ 2 R(\bar{x}) \sum_{i=2}^n f_{\bullet}^{i1} (x_i - x_i^*) + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n f_{\bullet}^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) = \\ &= \frac{f_{\bullet}^{11}}{(f_{\bullet}^1)^2} \left(\sum_{l=2}^n f_{\bullet}^l (x_l - x_l^*) \right)^2 - 2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \frac{f_{\bullet}^{i1} f_{\bullet}^j}{f_{\bullet}^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + \\ &+ \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n f_{\bullet}^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + p_{\bullet}(\bar{x}), \quad \text{con} \end{aligned}$$

$$p_{\bullet}(\bar{x}) = \frac{-2 f_{\bullet}^{11}}{f_1^1} R(\bar{x}) \sum_{l=2}^n f_1^l (x_l - x_l^*) + f_{\bullet}^{11} [R(\bar{x})]^2 + 2 R(\bar{x}) \sum_{i=2}^n f_{\bullet}^{1i} (x_i - x_i^*)$$

resulta entonces: $p_{\bullet}(\bar{x}_{\bullet}) = 0$, y, si $\|\nabla \bar{f}_1\|_2 = \|(f_1^2, \dots, f_1^n)\|_2$,

$$|p_{\bullet}(\bar{x})| \leq 2 \frac{|f_{\bullet}^{11}|}{|f_1^1|} \|\nabla \bar{f}_1\|_2 \|\bar{x} - \bar{x}_{\bullet}\|_2 |R(\bar{x})| + |f_{\bullet}^{11}| |R(\bar{x})|^2 + 2 |R(\bar{x})| \|(f_{\bullet}^{12}, \dots, f_{\bullet}^{1n})\|_2 \|\bar{x} - \bar{x}_{\bullet}\|_2 ;$$

como $R(\bar{x}) = o(\|\bar{x} - \bar{x}_{\bullet}\|)$, entonces, para \bar{x} suficientemente cerca de \bar{x}_{\bullet} ,

$$|p_{\bullet}(\bar{x}) - p_{\bullet}(\bar{x}_{\bullet})| \leq 2 \epsilon \frac{|f_{\bullet}^{11}|}{|f_1^1|} \|\nabla \bar{f}_1\|_2 \|\bar{x} - \bar{x}_{\bullet}\|_2^2 + |f_{\bullet}^{11}| \epsilon^2 \|\bar{x} - \bar{x}_{\bullet}\|_2^2 + 2 \epsilon \|(f_{\bullet}^{12}, \dots, f_{\bullet}^{1n})\|_2 \|\bar{x} - \bar{x}_{\bullet}\|_2^2$$

Por lo tanto, $p_{\bullet}(\bar{x}) = o(\|\bar{x} - \bar{x}_{\bullet}\|_2^2)$, $\forall s = 1, 2, \dots, n$

Así, $\forall k = 1, 2, \dots, n$;

$$[F'(x_{\bullet})^{-1} F''(x_{\bullet})(x - x_{\bullet})(x - x_{\bullet})]_k = \frac{1}{\det F'(x_{\bullet})} \sum_{s=1}^n (-1)^{s+k} \det(s, k) \left\{ \frac{f_{\bullet}^{11}}{(f_1^1)^2} \left(\sum_{i=2}^n f_1^i (x_i - x_i^*) \right)^2 - 2 \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n \frac{f_{\bullet}^{1i} f_1^j}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + \sum_{i=2}^n \sum_{j=2}^n f_{\bullet}^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + p_{\bullet}(\bar{x}) \right\} ;$$

definiendo $q_k(\bar{x}) = \frac{1}{\det F'(x_*)} \sum_{s=1}^n (-1)^{s+k} \det(s,k) p_s(\bar{x})$,

queda probado el Lema. ■

Lema 3.11 $\det F'(x_*) = f_1^1 \det \tilde{F}'(\bar{x}_*)$

Demostración:

Sean $F_j =$ columna j -ésima de $F'(x_*)$; $j = 1, \dots, n$
 $\tilde{F}_j =$ columna $(j-1)$ -ésima de $\tilde{F}'(\bar{x}_*)$; $j = 2, \dots, n$
 $\bar{F}_j =$ columna j -ésima de $F'(x_*)$, pero eliminando la primer
 coordenada ; $j = 1, \dots, n$

Así, $F'(x_*) = (F_1, F_2, \dots, F_n)$ y $\tilde{F}'(\bar{x}_*) = (\tilde{F}_2, \tilde{F}_3, \dots, \tilde{F}_n)$

como $\tilde{f}_i(\bar{x}) = f_i(h(\bar{x}), \bar{x})$, para $i=2, \dots, n$, resulta:

$$\tilde{f}_i^j = -\frac{f_i^1 f_1^j}{f_1^1} + f_i^j, \text{ si } i, j=2, \dots, n; \text{ entonces } \tilde{F}_j = -\frac{f_1^j \bar{F}_1}{f_1^1} + \bar{F}_j$$

para $j=2, \dots, n$.

Por lo tanto, desarrollando $\det F'(x_*)$ por la primer fila,

$$\det F'(x_*) = \det(F_1, F_2, \dots, F_n) = f_1^1 \det(\bar{F}_2, \bar{F}_3, \dots, \bar{F}_n) +$$

$$+ \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} f_1^j \det(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \hat{\bar{F}}_j, \dots, \bar{F}_n) =$$

$$\begin{aligned}
&= f_1^1 \det \left(\tilde{F}_2 + \frac{f_1^2 \bar{F}_1}{f_1^1}, \tilde{F}_3 + \frac{f_1^3 \bar{F}_1}{f_1^1}, \dots, \tilde{F}_n + \frac{f_1^n \bar{F}_1}{f_1^1} \right) + \\
&+ \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} f_1^j \det \left(\bar{F}_1, \tilde{F}_2 + \frac{f_1^2 \bar{F}_1}{f_1^1}, \dots, \widehat{\text{lugar } j}, \tilde{F}_n + \frac{f_1^n \bar{F}_1}{f_1^1} \right) = \\
&= f_1^1 \det(\tilde{F}_2, \tilde{F}_3, \dots, \tilde{F}_n) + f_1^1 \sum_{j=2}^n \det \left(\tilde{F}_2, \tilde{F}_3, \dots, \frac{f_1^j \bar{F}_1}{f_1^1}, \dots, \tilde{F}_n \right) + \\
&\hspace{15em} \leftarrow \text{en lugar de } \tilde{F}_j \rightarrow
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&+ \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} f_1^j \det(\bar{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \widehat{\tilde{F}_j}, \dots, \tilde{F}_n) = f_1^1 \det \tilde{F}'(\bar{x}_*) + \\
&+ f_1^1 \sum_{j=2}^n \frac{f_1^j}{f_1^1} \det(\tilde{F}_2, \tilde{F}_3, \dots, \widehat{\tilde{F}_j}, \dots, \tilde{F}_n) + \\
&\hspace{15em} \leftarrow \text{lugar } (j-1) \rightarrow
\end{aligned}$$

$$+ \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} f_1^j \det(\bar{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \widehat{\tilde{F}_j}, \dots, \tilde{F}_n) = f_1^1 \det \tilde{F}'(\bar{x}_*) +$$

$$+ \sum_{j=2}^n (-1)^{j-2} f_1^j \det(\bar{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \widehat{\tilde{F}_j}, \dots, \tilde{F}_n) +$$

$$+ \sum_{j=2}^n (-1)^{1+j} f_1^j \det(\bar{F}_1, \tilde{F}_2, \dots, \widehat{\tilde{F}_j}, \dots, \tilde{F}_n) = f_1^1 \det \tilde{F}'(\bar{x}_*) \quad \blacksquare$$

Lema 3.12 : $\det(s, k) = f_1^1 \overline{\det(s, k)}$; $s, k \geq 2$.

Demostración:

Sean, para $s, j \geq 2$,

$F_j^\circ =$ columna j -ésima de $F'(\bar{x}_*)$, pero eliminando la coordenada s -ésima .

\bar{F}_j^0 = columna j-ésima de $F'(x_*)$, pero eliminando la primer y s-ésima coordenada .

\tilde{F}_j^0 = columna (j-1)-ésima de $\tilde{F}'(\bar{x}_*)$, pero eliminando la coordenada (s-1)-ésima .

Entonces resulta:

$$\tilde{F}_j^0 = \frac{-f_1^j \bar{F}_1^0}{f_1^1} + \bar{F}_j^0, \text{ si } s, j \geq 2 ;$$

$$\det(s, k) = \det(F_1^0, F_2^0, \dots, \hat{F}_k^0, \dots, F_n^0) ;$$

$$\overline{\det}(s, k) = \det(\tilde{F}_2^0, \tilde{F}_3^0, \dots, \hat{\tilde{F}}_k^0, \dots, \tilde{F}_n^0)$$

por lo tanto, desarrollando $\det(s, k)$ por la primer fila,

$$\det(s, k) = \det(F_1^0, F_2^0, \dots, \hat{F}_k^0, \dots, F_n^0) = f_1^1 \det(\bar{F}_2^0, \bar{F}_3^0, \dots, \hat{\bar{F}}_k^0, \dots, \bar{F}_n^0) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^{1+j} f_1^j \det(\bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0, \dots, \hat{\bar{F}}_j^0, \dots, \hat{\bar{F}}_k^0, \dots, \bar{F}_n^0) =$$

$$= f_1^1 \det(\tilde{F}_2^0 + \frac{f_1^2 \bar{F}_1^0}{f_1^1}, \dots, \tilde{F}_k^0 + \frac{f_1^k \bar{F}_1^0}{f_1^1}, \dots, \tilde{F}_n^0 + \frac{f_1^n \bar{F}_1^0}{f_1^1}) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^{1+j} f_1^j \det(\bar{F}_1^0, \tilde{F}_2^0 + \frac{f_1^2 \bar{F}_1^0}{f_1^1}, \dots, \tilde{F}_j^0 + \frac{f_1^j \bar{F}_1^0}{f_1^1}, \dots, \tilde{F}_k^0 + \frac{f_1^k \bar{F}_1^0}{f_1^1}, \dots, \tilde{F}_n^0 + \frac{f_1^n \bar{F}_1^0}{f_1^1}) +$$

$$+ \frac{f_1^n \bar{F}_1^0}{f_1^1}) = f_1^1 \det(\bar{F}_2^0, \dots, \hat{\bar{F}}_k^0, \dots, \bar{F}_n^0) + f_1^1 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n \det(\bar{F}_2^0, \dots, \frac{f_1^j \bar{F}_1^{-0}}{f_1^1} \\ \leftarrow \text{lugar } (j-1) \rightarrow$$

$$, \dots, \bar{F}_k^0, \dots, \bar{F}_n^0) + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^{1+j} f_1^j \det(\bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0, \dots, \hat{\bar{F}}_j^0, \dots, \bar{F}_k^0, \dots, \bar{F}_n^0) =$$

$$= f_1^1 \overline{\det}(s, k) + f_1^1 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^{j-2} \frac{f_1^j}{f_1^1} \det(\bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0, \dots, \hat{\bar{F}}_j^0, \dots, \bar{F}_k^0, \dots, \bar{F}_n^0) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^{1+j} f_1^j \det(\bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0, \dots, \hat{\bar{F}}_j^0, \dots, \bar{F}_k^0, \dots, \bar{F}_n^0) = f_1^1 \overline{\det}(s, k) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^j f_1^j \det(\bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0, \dots, \hat{\bar{F}}_j^0, \dots, \bar{F}_k^0, \dots, \bar{F}_n^0) +$$

$$+ \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^{1+j} f_1^j \det(\bar{F}_1^0, \bar{F}_2^0, \dots, \hat{\bar{F}}_j^0, \dots, \bar{F}_k^0, \dots, \bar{F}_n^0) = f_1^1 \overline{\det}(s, k) \quad \blacksquare$$

Lema 3.13: Si $k \geq 2$, entonces $(-1)^{k+1} \det(1, k) = \sum_{a=2}^n (-1)^{a+k+1} f_a^1 \overline{\det}(s, k)$

Demostración:

Desarrollando $\det(1, k)$ por la primer columna, si $\bar{F}_1 = (\bar{f}_1, \dots, \bar{f}_{n-1})^t$,

$$\det(1, k) = \det(\bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \hat{\bar{F}}_k, \dots, \bar{F}_n) = \sum_{a=1}^{n-1} (-1)^{1+a} \bar{f}_a \det(\bar{F}_2^{a+1}, \bar{F}_3^{a+1}, \dots,$$

$$\dots, \hat{\bar{F}}_k^{a+1}, \dots, \bar{F}_n^{a+1}) \stackrel{(1)}{=} \sum_{a=1}^{n-1} (-1)^{1+a} f_{a+1}^1 \det(\bar{F}_2^{a+1}, \bar{F}_3^{a+1}, \dots, \hat{\bar{F}}_k^{a+1}, \dots, \bar{F}_n^{a+1}) \stackrel{(2)}{=}$$

$$= \sum_{\sigma=2}^n (-1)^\sigma f_\sigma^1 \det(\bar{F}_2^\sigma, \bar{F}_3^\sigma, \dots, \hat{\bar{F}}_k^\sigma, \dots, \bar{F}_n^\sigma) =$$

$$= \sum_{\sigma=2}^n (-1)^\sigma f_\sigma^1 \det(\tilde{F}_2^\sigma + \frac{f_1^2 \bar{F}_1^\sigma}{f_1^1}, \dots, \hat{\tilde{F}}_k^\sigma + \frac{f_1^k \bar{F}_1^\sigma}{f_1^1}, \dots, \tilde{F}_n^\sigma + \frac{f_1^n \bar{F}_1^\sigma}{f_1^1}) =$$

$$= \sum_{\sigma=2}^n (-1)^\sigma f_\sigma^1 \{ \det(\tilde{F}_2^\sigma, \dots, \hat{\tilde{F}}_k^\sigma, \dots, \tilde{F}_n^\sigma) + \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n \det(\tilde{F}_2^\sigma, \dots, \frac{f_1^j \bar{F}_1^\sigma}{f_1^1}, \dots, \hat{\tilde{F}}_k^\sigma, \dots, \tilde{F}_n^\sigma) \} =$$

(3)

$$= \sum_{\sigma=2}^n (-1)^\sigma f_\sigma^1 \overline{\det}(s, k) + \sum_{\sigma=2}^n f_\sigma^1 \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^{\sigma+j-2} \frac{f_1^j}{f_1^1} \det(\bar{F}_1^\sigma, \tilde{F}_2^\sigma, \dots, \hat{\tilde{F}}_j^\sigma, \dots, \hat{\tilde{F}}_k^\sigma, \dots, \tilde{F}_n^\sigma) =$$

$$= \sum_{\sigma=2}^n (-1)^\sigma f_\sigma^1 \overline{\det}(s, k) + \sum_{\sigma=2}^n \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^{\sigma+j} \frac{f_1^j f_\sigma^1}{f_1^1} \det(\bar{F}_1^\sigma, \dots, \hat{\bar{F}}_j^\sigma, \dots, \hat{\bar{F}}_k^\sigma, \dots, \bar{F}_n^\sigma) =$$

$$(4) \quad \sum_{\sigma=2}^n (-1)^\sigma f_\sigma^1 \overline{\det}(s, k) \quad \blacksquare$$

Observaciones:

(1) vale pues la i -ésima coordenada de \bar{F}_1 es la coordenada $(i+1)$ -ésima de F_1 , para $i=1, \dots, n-1$

(2) se hace cambio de variable : $\tilde{s} = s+1$

(3) aparece en el lugar $(j-1)$, en lugar de \tilde{F}_j^σ

(4) $\sum_{\sigma=2}^n \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^{\sigma+j} \frac{f_1^j f_\sigma^1}{f_1^1} \det(\bar{F}_1^\sigma, \dots, \hat{\bar{F}}_j^\sigma, \dots, \hat{\bar{F}}_k^\sigma, \dots, \bar{F}_n^\sigma) = 0$ pues:

notar que :

$$\begin{aligned}
0 &= \det(\bar{F}_1, \bar{F}_1, \dots, \hat{\bar{F}}_j, \dots, \hat{\bar{F}}_k, \dots, \bar{F}_n) = \\
&\sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s+1} \bar{f}_s \det(\bar{F}_1^{s+1}, \dots, \hat{\bar{F}}_j^{s+1}, \dots, \hat{\bar{F}}_k^{s+1}, \dots, \bar{F}_n^{s+1}) = \\
&= \sum_{s=1}^{n-1} (-1)^{s+1} f_{s+1}^1 \det(\bar{F}_1^{s+1}, \dots, \hat{\bar{F}}_j^{s+1}, \dots, \hat{\bar{F}}_k^{s+1}, \dots, \bar{F}_n^{s+1}) = \\
&= \sum_{s=2}^n (-1)^s f_s^1 \det(\bar{F}_1^s, \dots, \hat{\bar{F}}_j^s, \dots, \hat{\bar{F}}_k^s, \dots, \bar{F}_n^s)
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
&\sum_{s=2}^n \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^{s+j} \frac{f_1^j f_1^1}{f_1^1} \det(\bar{F}_1^s, \dots, \hat{\bar{F}}_j^s, \dots, \hat{\bar{F}}_k^s, \dots, \bar{F}_n^s) = \\
&= \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^j \frac{f_1^j}{f_1^1} \sum_{s=2}^n (-1)^s f_s^1 \det(\bar{F}_1^s, \dots, \hat{\bar{F}}_j^s, \dots, \hat{\bar{F}}_k^s, \dots, \bar{F}_n^s) = \\
&= \sum_{\substack{j=2 \\ j \neq k}}^n (-1)^j \frac{f_1^j}{f_1^1} \det(\bar{F}_1, \bar{F}_1, \bar{F}_2, \dots, \hat{\bar{F}}_j, \dots, \hat{\bar{F}}_k, \dots, \bar{F}_n) = 0.
\end{aligned}$$

Nota al Lema 3.13:

Como $\det(s, k) = f_1^1 \overline{\det(s, k)}$, si $s, k \geq 2$, entonces :

$$(-1)^{k+1} \det(1, k) = \sum_{s=2}^n (-1)^{s+k+1} \frac{f_1^1}{f_1^1} \det(s, k). \blacksquare$$

El siguiente Teorema compara el término principal del error del

método de Newton-Raphson generado por F , y el generado por \tilde{F} :

Teorema 3.14 : Si $x_1 = h(x_2, \dots, x_n)$, entonces, para $i \geq 2$,

$$[F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x-x_*) (x-x_*)]_i = [\tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1} \tilde{F}''(\bar{x}_*) (\bar{x}-\bar{x}_*) (\bar{x}-\bar{x}_*)]_i + q_i(\bar{x}), \text{ donde}$$

$$q_i(\bar{x}) = o(\|\bar{x} - \bar{x}_*\|^2); \quad \bar{x} = (x_2, \dots, x_n)^t, \text{ y } x_* = (x_2^*, \dots, x_n^*)^t$$

Demostración:

Si $k \geq 2$, como

$$[\tilde{F}''(\bar{x}_*) (\bar{x}-\bar{x}_*) (\bar{x}-\bar{x}_*)]_k = \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \tilde{f}_k^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*), \text{ y}$$

$$[\tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1}]_{k\theta} = (-1)^{\theta+k} \overline{\det}(s, k) / \det \tilde{F}'(\bar{x}_*),$$

entonces, por Nota ii) y Lemas 3.11, 3.12 y 3.13,

$$[\tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1} \tilde{F}''(\bar{x}_*) (\bar{x}-\bar{x}_*) (\bar{x}-\bar{x}_*)]_k =$$

$$= \frac{1}{\det \tilde{F}'(\bar{x}_*)} \left(\sum_{\theta=2}^n (-1)^{\theta+k} \overline{\det}(s, k) \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \tilde{f}_k^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \right) =$$

$$= \frac{1}{\det \tilde{F}'(\bar{x}_*)} \left(\sum_{\theta=2}^n (-1)^{\theta+k} \overline{\det}(s, k) \left\{ \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_1^{\theta+1} f_1^i f_1^j}{(f_1^1)^2} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \right\} \right) =$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_{\bullet}^{1j} f_1^i}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n f_{\bullet}^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) - \\
& - \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_{\bullet}^1 f_1^{1j}}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n f_{\bullet}^1 f_1^{1j} f_1^i (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) - \\
& - \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_{\bullet}^1 f_1^{11} f_1^i f_1^j}{(f_1^1)^3} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \}) = \\
& = \frac{1}{\det F'(x_*)} \left(\sum_{s=2}^n (-1)^{s+k} \det(s, k) \left(\frac{f_{\bullet}^{11}}{(f_1^1)^2} \left(\sum_{i=2}^n f_1^i (x_i - x_i^*) \right)^2 - \right. \right. \\
& - 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_{\bullet}^{1j} f_1^i}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n f_{\bullet}^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) - \\
& - \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_{\bullet}^1 f_1^{1j}}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_{\bullet}^1 f_1^{1j} f_1^i}{(f_1^1)^2} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) - \\
& \left. \left. - \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_{\bullet}^1 f_1^{11} f_1^i f_1^j}{(f_1^1)^3} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \right) \right) = \\
& = \frac{1}{\det F'(x_*)} \left(\sum_{s=2}^n (-1)^{s+k} \det(s, k) \left(\frac{f_{\bullet}^{11}}{(f_1^1)^2} \left(\sum_{i=2}^n f_1^i (x_i - x_i^*) \right)^2 - \right. \right. \\
& - 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_{\bullet}^{1j} f_1^i}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n f_{\bullet}^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{s=2}^n (-1)^{s+k+1} \det(s, k) \left(\sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_1^{1j} f_1^{ij}}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) - \right. \\
& - 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_1^{1j} f_1^{ij} f_1^i}{(f_1^1)^2} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_1^{1j} f_1^{ij} f_1^i f_1^j}{(f_1^1)^3} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \left. \right) = \\
& = \frac{1}{\det F'(x_*)} \left(\sum_{s=2}^n (-1)^{s+k} \det(s, k) \left(\frac{f_1^{11}}{(f_1^1)^2} \left(\sum_{i=2}^n f_1^i (x_i - x_i^*) \right)^2 - \right. \right. \\
& - 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_1^{1j} f_1^i}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n f_1^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \left. \right) + \\
& + \sum_{s=2}^n (-1)^{s+k+1} \frac{f_1^1}{f_1^1} \det(s, k) \left(\sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n f_1^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) - \right. \\
& - 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_1^{1j} f_1^i}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + \frac{f_1^{11}}{(f_1^1)^2} \left(\sum_{i=2}^n f_1^i (x_i - x_i^*) \right)^2 \left. \right) = \\
& = \frac{1}{\det F'(x_*)} \left(\sum_{s=2}^n (-1)^{s+k} \det(s, k) \left(\frac{f_1^{11}}{(f_1^1)^2} \left(\sum_{i=2}^n f_1^i (x_i - x_i^*) \right)^2 - \right. \right. \\
& - 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_1^{1j} f_1^i}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n f_1^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \left. \right) + \\
& + (-1)^{k+1} \det(1, k) \left(\sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n f_1^{ij} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_1^{1j} f_1^i}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + \frac{f_1^{11}}{(f_1^1)^2} \left(\sum_{i=2}^n f_1^i (x_i - x_i^*) \right)^2 \Big) = \\
& = \frac{1}{\det F'(x_*)} \left(\sum_{s=1}^n (-1)^{s+k} \det(s, k) \left(\frac{f_1^{11}}{(f_1^1)^2} \left(\sum_{l=2}^n f_1^l (x_l - x_l^*) \right)^2 - \right. \right. \\
& \left. \left. - 2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \frac{f_1^{1j} f_1^i}{f_1^1} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) + \sum_{j=2}^n \sum_{l=2}^n f_1^{lj} (x_i - x_i^*) (x_j - x_j^*) \right) \right) .
\end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la expresión de $[F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*)]_k$ en el Lema 3.10, queda probado el Teorema. ■

El siguiente Teorema compara los órdenes de convergencia entre la iteración de Newton-Raphson generada por F , y la generada por \tilde{F} . Previamente se demostrará el siguiente:

Lema 3.15 : Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos veces continuamente diferenciable en un entorno de $x_* \in \text{int}(D)$, para el cual $F(x_*) = 0$ y $F'(x_*)$ es no singular .

Si se define la función de Newton :

$$G(x) = x - F'(x)^{-1} F(x) , \text{ entonces}$$

$$i) G'(x) = F'(x)^{-1} F''(x) [F'(x)^{-1} F(x)] , \forall x \in S = \text{entorno de } x_*$$

$$ii) G''(x_*) = F'(x_*)^{-1} F''(x_*) .$$

Demostración:

i) Sea $\beta = \| F'(x_*)^{-1} \|$, y sea ε tal que $0 < \varepsilon < (2\beta)^{-1}$; elijamos $\delta > 0$ tal que :

$$\begin{aligned} \| F(y) - F(x_*) \| &< \varepsilon, \\ \| F'(y) - F'(x_*) \| &\leq \varepsilon, \\ \| F''(y) - F''(x_*) \| &< \varepsilon, \quad \forall y \in S = B(x_*, \delta) \end{aligned} \tag{1}$$

Por Lema de Perturbación 2.6, $F'(y)^{-1}$ existe $\forall y \in S$, y además

$$\| F'(y) \|^{-1} \leq \frac{\beta}{(1-\beta\varepsilon)} < 2\beta \tag{2}$$

Sea ahora x fijo, $x \in S$; como F' y $F''(x)$ son continuas en x , podemos suponer que δ ha sido elegido lo suficientemente pequeño para que, si

$\| x - y \| < \delta$, entonces :

$$\| F'(y) - F'(x) \| < \varepsilon \tag{3}$$

$$\| F'(y) - F'(x) - F''(x)(y-x) \| < \varepsilon \| y-x \| \tag{4}$$

$$F(y) = F(x) + F'(x)(y-x) + R(y), \text{ con } \| R(y) \| < \varepsilon \| y-x \| \tag{5}$$

Por (5),

$$F'(y)^{-1} F(y) = F'(y)^{-1} F(x) + F'(y)^{-1} F'(x)(y-x) + F'(y)^{-1} R(y),$$

por lo tanto,

$$G(y) = y - F'(y)^{-1} F(y) = y - F'(y)^{-1} F(x) - F'(y)^{-1} F'(x)(y-x) - F'(y)^{-1} R(y); \text{ entonces,}$$

$$\begin{aligned} G(y) - G(x) &= y - F'(y)^{-1} F(x) - F'(y)^{-1} F'(x)(y-x) - F'(y)^{-1} R(y) - x + \\ &+ F'(x)^{-1} F(x) = [I - F'(y)^{-1} F'(x)](y-x) + [F'(x)^{-1} - F'(y)^{-1}] F(x) - \\ &- F'(y)^{-1} R(y) = F'(y)^{-1} [F'(y) - F'(x)](y-x) + [F'(x)^{-1} - F'(y)^{-1}] F(x) - \end{aligned}$$

$$- F'(y)^{-1}R(y) \quad ;$$

pero, usando la simetría de $F''(x)$, resulta

$$\begin{aligned} & [F'(x)^{-1} - F'(y)^{-1}] F(x) - F'(x)^{-1}F''(x)[F'(x)^{-1}F(x)](y-x) = \\ & F'(x)^{-1} [F'(y) - F'(x)] F'(y)^{-1}F(x) - F'(x)^{-1}F''(x)[F'(x)^{-1}F(x)](y-x) = \\ & F'(x)^{-1}[F'(y) - F'(x) - F''(x)(y-x) + F''(x)(y-x)] F'(y)^{-1}F(x) - \\ & - F'(x)^{-1}F''(x)[F'(x)^{-1}F(x)](y-x) = \\ & = F'(x)^{-1}[F'(y) - F'(x) - F''(x)(y-x)] F'(y)^{-1}F(x) + \\ & + F'(x)^{-1}F''(x)(y-x)F'(y)^{-1}F(x) - F'(x)^{-1}F''(x)[F'(x)^{-1}F(x)](y-x) = \\ & = F'(x)^{-1}[F'(y) - F'(x) - F''(x)(y-x)]F'(y)^{-1}F(x) + \\ & + F'(x)^{-1}F''(x)[F'(y)^{-1}F(x)](y-x) - F'(x)^{-1}F''(x)[F'(x)^{-1}F(x)](y-x) = \\ & = F'(x)^{-1}[F'(y) - F'(x) - F''(x)(y-x)]F'(y)^{-1}F(x) + \\ & + F'(x)^{-1}F''(x)[F'(y)^{-1}F(x) - F'(x)^{-1}F(x)](y-x) = \\ & = F'(x)^{-1}[F'(y) - F'(x) - F''(x)(y-x)]F'(y)^{-1}F(x) + \\ & + F'(x)^{-1}F''(x)[F'(y)^{-1}F(x) - F'(x)^{-1}F(x)](y-x) = \\ & = F'(x)^{-1}[F'(y) - F'(x) - F''(x)(y-x)]F'(y)^{-1}F(x) + \\ & + F'(x)^{-1}F''(x)F'(y)^{-1}[F'(x) - F'(y)]F'(x)^{-1}F(x)(y-x) \end{aligned}$$

por lo tanto, usando (1)-(5),

$$\begin{aligned} & \| G(y) - G(x) - F'(x)^{-1}F''(x)[F'(x)^{-1}F(x)](y-x) \| \leq 2\beta\epsilon \|y-x\| + \\ & + \|F'(x)^{-1}\|e2\beta\|F(x)\| \|y-x\| + \|F'(x)^{-1}\| \|F''(x)\|2\beta\epsilon\|F'(x)^{-1}\| \|F(x)\| \|y-x\| + \\ & + 2\beta\epsilon \|y-x\| \leq 2\beta\epsilon \|y-x\| + 4\beta^2\|F(x)\| \epsilon \|y-x\| + \\ & + 8\beta^3 \|F(x)\| \|F''(x)\| \epsilon \|y-x\| = \\ & = (2\beta\epsilon + 4\beta^2\epsilon \|F(x)\| + 8\beta^3\epsilon \|F(x)\| \|F''(x)\|) \|y-x\| < \\ & < (2\beta\epsilon + 4\beta^2\epsilon^2 + 8\beta^3\epsilon^2(\epsilon + \|F''(x_*)\|)) \|y-x\|. \end{aligned}$$

como ϵ es arbitrario y β , $\|F''(x_*)\|$ son cantidades fijas, se ve que

G es F -diferenciable en x y vale $i)$.

$ii)$ Por $i)$, resulta $G'(x_*) = 0$.

Sean β y δ como en $i)$; además, como G es F -diferenciable $\forall x \in S$, supondremos que δ satisface también que

$$\| G(x) - G(x_*) \| = \| G(x) - G(x_*) - G'(x_*)(x - x_*) \| < \varepsilon \| x - x_* \| ,$$

$\forall x \in S$. Por lo tanto,

$$\begin{aligned} G'(x) - G'(x_*) - F'(x_*)^{-1}F''(x_*)(x - x_*) &= F'(x)^{-1}F''(x)[F'(x)^{-1}F(x)] - \\ &- F'(x_*)^{-1}F''(x_*)(x - x_*) = F'(x)^{-1}F''(x)[F'(x)^{-1}F(x) - x + x - x_* + x_*] - \\ &- F'(x_*)^{-1}F''(x_*)(x - x_*) = -F'(x)^{-1}F''(x)[x - F'(x)^{-1}F(x) - x_*] + \\ &+ F'(x)^{-1}F''(x)(x - x_*) - F'(x_*)^{-1}F''(x_*)(x - x_*) = \\ &= -F'(x)^{-1}F''(x)[x - F'(x)^{-1}F(x) - x_*] + F'(x)^{-1}F''(x)(x - x_*) - \\ &- F'(x_*)^{-1}F''(x_*)(x - x_*) + F'(x_*)^{-1}F''(x_*)(x - x_*) - F'(x_*)^{-1}F''(x_*)(x - x_*) = \\ &= -F'(x)^{-1}F''(x)[x - F'(x)^{-1}F(x) - x_*] + [F'(x)^{-1} - F'(x_*)^{-1}]F''(x_*)(x - x_*) + \\ &+ F'(x_*)^{-1}[F''(x)(x - x_*) - F''(x_*)(x - x_*)] = \\ &= -F'(x)^{-1}F''(x)[G(x) - G(x_*)] + \\ &+ F'(x)^{-1}[F'(x_*) - F'(x)]F'(x_*)^{-1}F''(x_*)(x - x_*) + \\ &+ F'(x_*)^{-1}[F''(x)(x - x_*) - F''(x_*)(x - x_*)] \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned} \| G'(x) - F'(x_*)^{-1}F''(x_*)(x - x_*) \| &< 2\beta (\varepsilon + \|F''(x_*)\|) \varepsilon \|x - x_*\| + \\ &+ 2\beta\varepsilon \|F'(x_*)^{-1}\| (\varepsilon + \|F''(x_*)\|) \|x - x_*\| + \|F'(x_*)^{-1}\| \varepsilon \|x - x_*\| = \\ &= (2\beta (\varepsilon + \|F''(x_*)\|) \varepsilon + 2\beta\varepsilon \|F'(x_*)^{-1}\| (\varepsilon + \|F''(x_*)\|) + \\ &+ \varepsilon \|F'(x_*)^{-1}\|) \|x - x_*\| ; \end{aligned}$$

como ε es arbitrario y $\|F'(x_*)^{-1}\|$ y $\|F''(x_*)\|$ son cantidades fijas,

queda probado ii) . ■

Lema 3.16: Sean F y G definidas como en el Lema 3.16 . Entonces:

$$x_* - G(x) = -\frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*) + R(x) ,$$

con $R(x) = o(\|x - x_*\|^2)$.

Demostración:

Sea R tal que

$$G(x) = G(x_*) + \frac{1}{2} G''(x_*) (x-x_*) (x-x_*) + R(x) .$$

Por el Lema anterior, G es diferenciable en un entorno de x_* .

En consecuencia, R también lo es y, siendo $G'(x_*) = 0$, resulta :

$$R'(x) = G'(x) - G''(x_*) (x - x_*) = G'(x) - G'(x_*) - G''(x_*) (x - x_*) ,$$

$\forall x \in S =$ entorno de x_* .

Por definición de $G''(x_*)$, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$ / si $\|x - x_*\| < \delta$, \rightarrow

$$\|G'(x) - G'(x_*) - G''(x_*) (x - x_*)\| < \varepsilon \|x - x_*\| ;$$

por lo tanto, $\|R'(x)\| < \varepsilon \|x - x_*\|$

Por el Teorema de Valor Medio generalizado ,

$$\begin{aligned} \|R(x)\| &= \|R(x) - R(x_*)\| = \left\| \int_0^1 R'(x_* + t(x - x_*)) (x - x_*) dt \right\| \leq \\ &\leq \int_0^1 \|R'(x_* + t(x - x_*)) (x - x_*)\| dt \leq \varepsilon \|x - x_*\|^2 . \end{aligned}$$

Así, $R(x) = o(\|x - x_*\|^2)$ y, como $G(x_*) = x_*$ y $G''(x_*) = F'(x_*)^{-1} F''(x_*)$,

queda probado el Lema . ■

Teorema 3.17 : Sea $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dos veces continuamente diferenciable en un entorno $S_0 \subset D$ de x_* , para el cual $F(x_*) = 0$ y $F'(x_*)$ es no singular. Supongamos que :

$$a) \frac{\partial f_{i_0}(x_*)}{\partial x_{j_0}} \neq 0$$

$$b) \forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}, \quad F''(x_*) x x \neq 0 .$$

Sean

$$\mathcal{J}_1 : x^{k+1} = x^k - F'(x^k)^{-1} F(x^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

$$\mathcal{J}_2 : \tilde{x}^{k+1} = \tilde{x}^k - \tilde{F}'(\tilde{x}^k)^{-1} \tilde{F}(\tilde{x}^k), \quad k = 0, 1, \dots$$

las iteraciones generadas por el Método de Newton-Raphson sin eliminación, y eliminando la variable x_{j_0} a partir de la i_0 -ésima componente de F , respectivamente.

Entonces:

$$i) \quad \theta_r(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) \geq \theta_q(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) \geq 2 = \theta_q(\mathcal{J}_1, x_*) = \theta_r(\mathcal{J}_1, x_*)$$

ii) Si además, $\forall x \in \mathbb{R}^n - \{0\}$, $[F'(x_*)^{-1} F''(x_*) x x]_i \neq 0$, para algún $i \neq j_0$, entonces:

$$\theta_q(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) = \theta_r(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) = 2 = \theta_q(\mathcal{J}_1, x_*) = \theta_r(\mathcal{J}_1, x_*) .$$

Demostración:

i) Sin pérdida de generalidad, supondremos que $i_0 = j_0 = 1$.

Por el Teorema 2.39, resulta $\theta_r(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) \geq \theta_q(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) \geq 2$; y, por el Teorema de Atracción de Newton, (Teorema 2.40), resulta

$$O_q(\mathcal{J}_1, x_*) = O_r(\mathcal{J}_1, x_*) = 2.$$

(i) Sólo hay que probar que $O_q(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) \leq O_r(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) \leq 2$.

Obsérvese que la hipótesis (i) implica la hipótesis b) del Teorema.

Sea $G(\bar{x}) = \bar{x} - \tilde{F}'(\bar{x})^{-1} \tilde{F}(\bar{x})$; $\bar{x} = (\bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)^t$; $G = (g_2, \dots, g_n)$

Por el Lema 3.16, $G(\bar{x}) = \bar{x}_* + \frac{1}{2} \tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1} \tilde{F}''(\bar{x}_*) (\bar{x} - \bar{x}_*) (\bar{x} - \bar{x}_*) + R(\bar{x})$,

con $R(\bar{x}) = o(\|\bar{x} - \bar{x}_*\|^2)$.

Por lo tanto, si $R = (R_2, \dots, R_n)$, $\forall \epsilon > 0 \exists \delta > 0$ / si $\|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty < \delta$,

$\Rightarrow |R_i(\bar{x})| < \epsilon \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2$, $i = 2, \dots, n$.

Entonces, $\forall i \geq 2$, usando el Teorema 3.14, si

$x = (h(x_2, \dots, x_n), x_2, \dots, x_n)^t$,

$|g_i(\bar{x}) - x_i^*| = \left| \frac{1}{2} [\tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1} \tilde{F}''(\bar{x}_*) (\bar{x} - \bar{x}_*) (\bar{x} - \bar{x}_*)]_i + R_i(\bar{x}) \right| \geq$

$\geq \frac{1}{2} |[\tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1} \tilde{F}''(\bar{x}_*) (\bar{x} - \bar{x}_*) (\bar{x} - \bar{x}_*)]_i| - |R_i(\bar{x})| \geq$

$\geq \frac{1}{2} |[\tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1} \tilde{F}''(\bar{x}_*) (\bar{x} - \bar{x}_*) (\bar{x} - \bar{x}_*)]_i| - \epsilon \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2 =$

$= \frac{1}{2} | [F'(\bar{x}_*)^{-1} F''(\bar{x}_*) (x - x_*) (x - x_*)]_i - q_i(\bar{x}) | - \epsilon \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2 \geq$

$\geq \frac{1}{2} | [F'(\bar{x}_*)^{-1} F''(\bar{x}_*) (x - x_*) (x - x_*)]_i | - \frac{1}{2} |q_i(\bar{x})| - \epsilon \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2$

como $q_i(\bar{x}) = o(\|\bar{x} - \bar{x}_*\|^2)$, podemos suponer que δ ha sido elegido

lo suficientemente pequeño para que, si $\|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty < \delta$, entonces

$|q_i(\bar{x})| < 2\epsilon \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2$, $\forall i = 2, \dots, n$; por lo tanto,

$-\frac{1}{2} |q_i(\bar{x})| > -\epsilon \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2$.

Así ,

$$|g_i(\bar{x}) - x_i^*| \geq \frac{1}{2} | [F'(\bar{x}_*)^{-1} F''(\bar{x}_*)(x - \bar{x}_*)(x - \bar{x}_*)]_i | - 2\varepsilon \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2$$

En consecuencia,

$$\|G(\bar{x}) - G(\bar{x}_*)\|_\infty \geq \frac{1}{2} \|\pi(F'(\bar{x}_*)^{-1} F''(\bar{x}_*)(x - \bar{x}_*)(x - \bar{x}_*))\|_\infty -$$

$- 2\varepsilon \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2$, donde

$\pi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}$ es tal que $\pi(x_1, \dots, x_n) = (x_2, \dots, x_n)^t$.

Sea $S^1 = \{x \in \mathbb{R}^n / \|x\| = 1\}$; como la función

$H : S^1 \rightarrow \mathbb{R}$, $H(x) = \|\pi(F'(\bar{x}_*)^{-1} F''(\bar{x}_*)xx)\|$, toma valores positivos y es continua sobre un compacto, alcanza un mínimo positivo. Sea entonces

$c = \min_{\|y\|_\infty=1} \|\pi(F'(\bar{x}_*)^{-1} F''(\bar{x}_*)yy)\|_\infty$; por lo tanto,

$$\|G(\bar{x}) - G(\bar{x}_*)\|_\infty \geq \frac{1}{2} c \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2 - 2\varepsilon \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2 \geq$$

$$\geq \frac{1}{2} c \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2 - 2\varepsilon \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2 = \left(\frac{1}{2}c - 2\varepsilon\right) \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2 ;$$

tomando $\varepsilon = \frac{c}{8}$, queda :

$$\|G(\bar{x}) - G(\bar{x}_*)\|_\infty \geq \frac{c}{4} \|\bar{x} - \bar{x}_*\|_\infty^2 , \forall \bar{x} \in S = B(\bar{x}_*, \delta)$$

Por el Teorema 2.41, resulta entonces $\phi_q(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) \leq \phi_r(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) \leq 2$. ■

Observaciones:

● Nótese que si F es una función lineal, en cuyo caso $F''(x_*) \times x = 0$, entonces

$$O_q(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) = O_r(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) = \infty = O_q(\mathcal{J}_1, x_*) = O_r(\mathcal{J}_1, x_*) .$$

● Si se elimina la hipótesis (i) del Teorema 3.17, puede ocurrir que las iteraciones de Newton-Raphson generadas por el sistema reducido, tengan orden de convergencia mayor que 2, como lo muestra el siguiente ejemplo:

Sea $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F = (f_1, f_2)$ definida por:

$$f_1(x_1, x_2) = 2x_2^3 + x_1 - 5/8$$

$$f_2(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2 - 41/32$$

Raíz: $x_* = (3/8, 1/2)$.

$$F'(x_*) = \begin{bmatrix} 1 & 1.5 \\ 1.5 & 2 \end{bmatrix} .$$

$F''(x_*) \times x \neq 0 \quad \forall x = (x_1, x_2) \neq 0$ pues :

$$F''(x_*) \times x = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f_1^{ij} x_i x_j \\ \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 f_2^{ij} x_i x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6x_2^2 \\ 4x_1^2 \end{bmatrix} \neq 0 .$$

Por lo tanto, por el Teorema de Atracción de Newton, (Teorema 2.40), resulta:

$$\theta_q(\mathcal{J}_1, x_*) = \theta_r(\mathcal{J}_1, x_*) = 2 .$$

Si se elimina x_1 a partir de f_1 , se obtiene el nuevo sistema :

$$\tilde{F} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \tilde{F}(x) = 2 (5/8 - 2x^2)^2 + 2x - 41/32 .$$

Se verifica que, si $\bar{x}_* = 1/2$, entonces $\tilde{F}''(\bar{x}_*) = 0$. (*)

Si se define $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $G(x) = x - \tilde{F}'(x)^{-1} \tilde{F}(x)$, resulta, por (*) y el Teorema 2.41 :

$$\theta_r(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) \geq \theta_q(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) \geq 3 .$$

En consecuencia,

$$\theta_r(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) \geq \theta_q(\mathcal{J}_2, \bar{x}_*) \geq 3 > 2 = \theta_q(\mathcal{J}_1, x_*) = \theta_r(\mathcal{J}_1, x_*) .$$

Notar además, que

$$[F'(x_*)^{-1} F''(x_*) \times x]_2 = \left[\begin{pmatrix} -8 & 6 \\ 6 & -4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6x_2^2 \\ 4x_1^2 \end{pmatrix} \right]_2 = 36x_2^2 - 16x_1^2 ;$$

por lo tanto,

$$[F'(x_*)^{-1} F''(x_*) \times x]_2 = 0 \quad \text{sii} \quad x_2 = \pm \frac{2}{3} x_1 .$$

CONCLUSION:

Eliminar una variable de un sistema no lineal dado, en caso de ser posible, es conveniente analíticamente, pues la iteración de Newton-Raphson generada por dicha eliminación no sólo converge al menos con la misma rapidez que la iteración de Newton-Raphson obtenida sin eliminación, sino que además lo hace sin modificar los valores de las iteradas sucesivas (Teorema 3.14).

Además, como se verá en los ejemplos, la eliminación de incógnitas puede conducir a economizar tiempo de computación, pues el número de operaciones puede disminuir notablemente.

REFERENCIAS

- [6] J.P. Milaszewicz, *On Criticality and the Stein-Rosenberg Theorem*, *Siam J. Numer. Anal.*, 18 (1981), pág. 559-564 .

CAPÍTULO IV

MÉTODOS SECANTES

En este capítulo continuaremos nuestro análisis de la eliminación en el caso de los Métodos Secantes .

Si bien se obtuvo para estos métodos una expresión general del error, no ha sido posible comparar los órdenes de convergencia entre las iteraciones generadas por el Método Secante sin eliminación, y el obtenido mediante eliminación de una de las variables del sistema.

Descripción del Método:

Aunque el método de Newton-Raphson es teóricamente atractivo, puede en algunos casos, ser dificultosa su implementación práctica.

Esto se debe a que en cada paso iterativo es necesario computar las n componentes de $F(x^k)$; además hay que calcular los n^2 coeficientes de $F'(x^k)$; a menos que las derivadas parciales $\partial_j f_i(x^k)$, $i, j = 1, 2, \dots, n$ tengan una forma funcional simple, dicho cálculo puede incrementar excesivamente el tiempo de resolución.

Con el fin de evitar el cálculo explícito de las derivadas, surgen los Métodos Secantes . Para ello se aproxima $\partial_j f_i(x)$ por un cociente de diferencias. Esto puede ser ventajoso, aún cuando se cuenta con programas de diferenciación automática.

Más precisamente, si f es una función real de variable real, con raíz x_* , entonces definimos :

$$x^{k+1} = x^k - \left[\frac{f(x^k + h^k) - f(x^k)}{h^k} \right]^{-1} f(x^k) \quad , \quad k = 0, 1, \dots$$

donde $h^k \in \mathbb{R}$ es tal que $\lim_{k \rightarrow \infty} h^k = 0$ ($h^k \neq 0$).

La forma más conocida de Método Secante se obtiene definiendo $h^k = x^{k-1} - x^k$.

Geoméricamente, x^{k+1} es la solución de la ecuación linealizada

$$l(x) = \left[\frac{f(x^k + h^k) - f(x^k)}{h^k} \right] (x - x^k) + f(x^k) = 0 \quad ,$$

donde l es una aproximación a la recta tangente

$$l_t(x) = f'(x^k) (x - x^k) + f(x^k) \quad ,$$

o también puede verse como una interpolación lineal de f entre los puntos x^k y $x^k + h^k$.

Generalizando a n dimensiones, si $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $F = (f_1, \dots, f_n)$, el Método Secante consiste en reemplazar la derivada $F'(x^k)$ por una matriz $J(x^k, H_k)$, cuyos coeficientes son cocientes de diferencias que aproximan a los coeficientes de $F'(x^k)$. Más precisamente,

Definición: Sea el operador $J : D_1 \subset \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}(\mathbb{R}^n) \rightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ definido por

$$J(x, H) = (F(x + He^1) - F(x), \dots, F(x + He^n) - F(x)) H^{-1} \quad , \quad \text{donde}$$

e^1, \dots, e^n son los vectores canónicos, y

$$D_1 = \{ (x, H) / x + He^i \in D, \quad i=1, \dots, n ; H \text{ no singular} \} \quad .$$

Recordemos que, dados $(n+1)$ vectores x^0, \dots, x^n en R^n , se dice que están en posición general si $x^j - x^0, j=1, \dots, n$ son linealmente independientes.

Entonces, si $x^{k,0}, \dots, x^{k,n}$ son $(n+1)$ vectores en posición general próximos a x^k , con $x^{k,0} = x^k$, el Método Secante general se expresa en forma compacta así :

$$\begin{cases} x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} F(x^k) , & k=0,1,\dots \\ H_k = (x^{k,1} - x^k, \dots, x^{k,n} - x^k,) \end{cases}$$

Geométricamente, la gráfica de cada componente $f_i, i = 1, \dots, n$, es reemplazada por un hiperplano en R^{n+1} que interpola f_i en los $(n+1)$ puntos $x^{k,j}, j = 0, 1, \dots, n$.

Es decir, un vector α^i y un escalar α_i deben encontrarse de manera tal que la función afín

$$L_i(x) = \alpha_i + \langle x, \alpha^i \rangle \quad \text{satisfaga}$$

$$L_i(x^{k,j}) = f_i(x^{k,j}) \quad , \quad j = 0, 1, \dots, n$$

Entonces, la iterada x^{k+1} se obtiene como la intersección de esos n hiperplanos en R^{n+1} con el hiperplano $x = 0$; o sea, x^{k+1} es la solución del sistema lineal

$$L_i(x) = 0 \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

De acuerdo a la elección de los puntos de interpolación $x^{k,j}, j = 0, \dots, n$, surgen los distintos Métodos Secantes.

Mencionaremos y trataremos dos de los más conocidos:

● METODO SECANTE 1

Se toma $x^{k,j} = (x_j^{k-1} - x_j^k) e^j$, $j = 1, \dots, n$

En este caso, H_k es la matriz diagonal

$$H_k = \text{diag} (x_1^{k-1} - x_1^k, \dots, x_n^{k-1} - x_n^k)$$

definiendo $h_j^k = x_j^{k-1} - x_j^k$, $j = 1, \dots, n$, entonces

$$J(x^k, H_k) = \left(\left[\frac{F(x^k + h_1^k e^1) - F(x^k)}{h_1^k} \right], \dots, \left[\frac{F(x^k + h_n^k e^n) - F(x^k)}{h_n^k} \right] \right)$$

● METODO SECANTE 2

Se toma $x^{k,j} = x^k + \sum_{i=1}^j (x_i^{k-1} - x_i^k) e^i$, $j = 1, 2, \dots, n$

En este caso, H_k es la matriz triangular superior tal que

$$(H_k)_{ij} = \begin{cases} x_i^{k-1} - x_i^k & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

y, definiendo $h_i^k = x_i^{k-1} - x_i^k$, entonces

$$J(x_k, H_k) =$$

$$= \left(\frac{1}{h_1^k} [F(x^k + h_1^k e^1) - F(x^k)], \dots, \frac{1}{h_n^k} [F(x^k + \sum_{j=1}^n h_j^k e^j) - F(x^k + \sum_{j=1}^{n-1} h_j^k e^j)] \right)$$

En lo que sigue, se supondrá también que $F : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ es dos veces continuamente diferenciable en un entorno $S_0 \subset D$ para el cual $F(x_*) = 0$ y $F'(x_*)$ es no singular.

En esta sección se hallará primeramente una expresión del error para el Método Secante, y luego se analizará la convergencia cuando se elimina una de las variables del sistema, tanto para el Método Secante 1 como para el Método Secante 2.

Lema 4.1: Sea $G(x, H) = x - J(x, H)^{-1} F(x)$. Entonces

$$x_* - G(x, H) = [J(x, H)^{-1} - F'(x_*)^{-1}] F(x) + \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*) + R_1(x),$$

$$\text{donde } R_1(x) = o(\|x - x_*\|^2)$$

Demostración:

Como $F(x_*) = 0$ y F tiene segunda derivada continua, resulta

$$F(x) = F'(x_*) (x - x_*) + \frac{1}{2} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*) + R(x),$$

con $R(x) = o(\|x - x_*\|^2)$; por lo tanto,

$$F'(x_*)^{-1} F(x) = x - x_* + \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*) + R_1(x),$$

$$\text{donde } R_1(x) = F'(x_*)^{-1} R(x) \quad ; \quad \rightarrow R_1(x) = o(\|x - x_*\|^2) ;$$

entonces,

$$x_* - x + F'(x_*)^{-1} F(x) = \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*) + R_1(x) ;$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned} x_* - x + J(x, H)^{-1} F(x) - J(x, H)^{-1} F(x) + F'(x_*)^{-1} F(x) &= \\ = \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} F''(x_*)^{-1} (x - x_*) (x - x_*) + R_1(x) \end{aligned}$$

así,

$$\begin{aligned} x_* - G(x, H) &= [J(x, H)^{-1} - F'(x_*)^{-1}] F(x) + \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*) + \\ &+ R_1(x) \quad , \end{aligned}$$

con lo cual queda probado el Lema . ■

Definición:

Sea $R(x)$ tal que

$$F(x) = F'(x_*) (x - x_*) + \frac{1}{2} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*) + R(x) ;$$

$$R_1(x, H) = (R_1(x, He^1), \dots, R_1(x, He^n)) \quad , \quad \text{donde}$$

$$R_1(x, He^i) = R(x + He^i) - R(x) \quad , \quad i = 1, \dots, n ;$$

$$P = (F''(x_*) He^1 He^1, \dots, F''(x_*) He^n He^n)$$

Lema 4.2 : Sea G como en el Lema 4.1 . Entonces,

$$J(x, H) = F'(x_*) + \frac{1}{2} P H^{-1} + F''(x_*) (x - x_*) + R_1(x, H) H^{-1} \quad ,$$

con

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_* \\ \|H\| \rightarrow 0}} \frac{\| R_1(x, H) \|}{(\|x - x_*\| + \|H\|)^2} = 0$$

Demostración:

$$F(x + He^k) = F'(x_*) (x + He^k - x_*) + \frac{1}{2} F''(x_*) (x + He^k - x_*) (x + He^k - x_*) + R(x + He^k) ;$$

$$F(x) = F'(x_*) (x - x_*) + \frac{1}{2} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*) + R(x)$$

por lo tanto, teniendo en cuenta la bilinealidad y simetría de $F''(x_*)$,

$$\begin{aligned} F(x + He^k) - F(x) &= F'(x_*) He^k + \frac{1}{2} F''(x_*) He^k He^k + F''(x_*) (x - x_*) He^k + \\ &+ R(x + He^k) - R(x) = \\ &= F'(x_*) He^k + \frac{1}{2} F''(x_*) He^k He^k + F''(x_*) (x - x_*) He^k + R_1(x, He^k) . \end{aligned}$$

Entonces,

$$\begin{aligned} (F(x + He^1) - F(x), \dots, F(x + He^n) - F(x)) &= \\ &= F'(x_*) H + \frac{1}{2} P + F''(x_*) (x - x_*) H + R_1(x, H) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$J(x, H) = F'(x_*) + \frac{1}{2} P H^{-1} + F''(x_*) (x - x_*) + R_1(x, H) H^{-1} .$$

Sea $\epsilon > 0$; $\exists \delta > 0$ / si $\| x - x_* \|_1 < \delta$ y $\| H \|_1 < \delta \rightarrow$

$$\begin{aligned} \| R_1(x, He^k) \|_1 &\leq \| R(x + He^k) \|_1 + \| R(x) \|_1 \leq \epsilon \| x + He^k - x_* \|_1^2 + \\ &+ \epsilon \| x - x_* \|_1^2 \leq 2\epsilon \| x - x_* \|_1^2 + \epsilon \| He^k \|_1^2 + 2\epsilon \| x - x_* \|_1 \| He^k \|_1 \\ &\leq 2\epsilon \| x - x_* \|_1^2 + \epsilon \| H \|_1^2 + 2\epsilon \| x - x_* \|_1 \| H \|_1 \leq \\ &\leq 2\epsilon \| x - x_* \|_1^2 + 2\epsilon \| H \|_1^2 + 4\epsilon \| x - x_* \|_1 \| H \|_1 = \\ &= 2\epsilon (\| x - x_* \|_1 + \| H \|_1)^2 ; \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\| R_1(x, H) \|_1 < 2\epsilon (\| x - x_* \|_1 + \| H \|_1)^2 .$$

Como ϵ es arbitrario, queda probado el Lema . ■

Lema 4.3 : Sea $G(x,H)$ como en el Lema 4.1 . Supongamos que :

$$a) \lim_{\substack{x \rightarrow x_* \\ \|H\| \rightarrow 0}} \frac{\| R1(x,H) H^{-1} \|}{(\|x - x_*\| + \|H\|)} = 0$$

$$b) \| P H^{-1} \| \leq \alpha \| H \| \quad ; \quad \alpha = \text{constante.}$$

Entonces, existe un entorno $S = B(x_*, \delta)$ de x_* tal que, $\forall x \in S$ y $\|H\| < \delta$, se cumple :

$$i) J(x,H)^{-1} = \left[I - \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} P H^{-1} - F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) - F'(x_*)^{-1} R1(x,H) H^{-1} + T(x,H) \right] F'(x_*)^{-1},$$

donde $T(x,H)$ es tal que

$$\| T(x,H) \| \leq \alpha_1 \|x - x_*\|^2 + \alpha_2 \|H\|^2 + \alpha_3 \|x - x_*\| \|H\|, \text{ con } \alpha_1, \alpha_2 \text{ y } \alpha_3 \text{ constantes positivas que dependen de } \alpha, \|F'(x_*)^{-1}\|, \|F''(x_*)\| \text{ y } \delta.$$

$$ii) x_* - G(x,H) = \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} [P H^{-1} (x_* - x) - F''(x_*) (x_* - x) (x_* - x)] + W(x,H),$$

donde

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_* \\ \|H\| \rightarrow 0}} \frac{\| W(x,H) \|}{(\|x - x_*\|^2 + \|H\| \|x - x_*\|)} = 0$$

Demostración:

i) Por el Lema 4.2,

$$J(x, H) = F'(x_*) \left[I - \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} P H^{-1} + F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) + \right. \\ \left. + F'(x_*)^{-1} R_1(x, H) H^{-1} \right]$$

Por la hipótesis a), $\exists \delta_1 > 0$ / si $\|x - x_*\| < \delta_1$ y $\|H\| < \delta_1 \rightarrow$
 $\|R_1(x, H) H^{-1}\| < \|x - x_*\| + \|H\|.$

Sea entonces

$$\delta < \min \left(\delta_1, \frac{1}{(\|F'(x_*)^{-1}\| (2 + \alpha/2 + \|F''(x_*)\|))} \right)$$

Por lo tanto,

$$J(x, H)^{-1} = \left[I - \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} P H^{-1} - F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) - \right. \\ \left. - F'(x_*)^{-1} R_1(x, H) H^{-1} + T(x, H) \right] F'(x_*)^{-1} ; \text{ siendo}$$

$$T(x, H) = \sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \left[\frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} P H^{-1} + F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) + \right. \\ \left. + F'(x_*)^{-1} R_1(x, H) H^{-1} \right]^n ; \text{ entonces,}$$

$$\|T(x, H)\| \leq \sum_{n=2}^{\infty} \left\| \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} P H^{-1} + F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) + \right. \\ \left. + F'(x_*)^{-1} R_1(x, H) H^{-1} \right\|^n \leq \sum_{n=2}^{\infty} \left([\|F'(x_*)^{-1}\| (1 + \alpha/2)] \|H\| + \right. \\ \left. + [\|F'(x_*)^{-1}\| (1 + \|F''(x_*)\|)] \|x - x_*\| \right)^n .$$

Por lo tanto,

$$\text{llamando } c_1 = \|F'(x_*)^{-1}\| (1 + \alpha/2) \text{ y } c_2 = \|F'(x_*)^{-1}\| (1 + \|F''(x_*)\|) ,$$

$$\frac{\|T(x, H)\|}{(c_1 \|H\| + c_2 \|x - x_*\|)^2} \leq \sum_{n=2}^{\infty} (c_1 \|H\| + c_2 \|x - x_*\|)^{n-2} =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (c_1 \|H\| + c_2 \|x - x_*\|)^n < \sum_{n=0}^{\infty} ((c_1 + c_2) \delta)^n = \frac{1}{1 - (c_1 + c_2) \delta},$$

con lo cual queda probado que

$$\|T(x, H)\| \leq \alpha_1 \|x - x_*\|^2 + \alpha_2 \|H\|^2 + \alpha_3 \|x - x_*\| \|H\|.$$

(i) Por (i),

$$J(x, H)^{-1} - F'(x_*)^{-1} = \left[-\frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} P H^{-1} - F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) - \right.$$

$$\left. - F'(x_*)^{-1} R_1(x, H) H^{-1} + T(x, H) \right] F'(x_*)^{-1}$$

por otro lado, $F(x) = F'(x_*) (x - x_*) + o(\|x - x_*\|)$;

así,

$$\left[J(x, H)^{-1} - F'(x_*)^{-1} \right] F(x) = \left[-\frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} P H^{-1} - F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) - \right.$$

$$\left. - F'(x_*)^{-1} R_1(x, H) H^{-1} + T(x, H) \right] \left[(x - x_*) + o(\|x - x_*\|) \right] =$$

$$= -\frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} P H^{-1} (x - x_*) - F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*) +$$

$$+ \left[-F'(x_*)^{-1} R_1(x, H) H^{-1} + T(x, H) \right] \left[(x - x_*) + o(\|x - x_*\|) \right] +$$

$$+ \left[-\frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} P H^{-1} - F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) \right] o(\|x - x_*\|) =$$

$$= \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} P H^{-1}(x_* - x) - F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*) + Q(x, H),$$

donde $Q(x, H)$ es tal que, por las hipótesis a), b) y la acotación de $T(x, H)$:

$$\lim_{\substack{x \rightarrow x_* \\ \|H\| \rightarrow 0}} \frac{\|Q(x, H)\|}{(\|x - x_*\|^2 + \|x - x_*\| \|H\|)} = 0$$

Por lo tanto,

$$[J(x, H)^{-1} - F'(x_*)^{-1}] F(x) + \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*) =$$

$$= \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} P H^{-1}(x_* - x) - \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} F''(x_*) (x - x_*) (x - x_*) +$$

+ $Q(x, H)$;

usando el Lema 4.1, resulta :

$$x_* - G(x, H) = \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} [P H^{-1}(x_* - x) - F''(x_*) (x_* - x) (x_* - x)] +$$

+ $W(x, H)$,

donde $W(x, H) = Q(x, H) + R_1(x)$, siendo $R_1(x) = o(\|x - x_*\|^2)$

Por lo tanto, queda probado ii) . ■

Observación

El Lema 4.3 ii) generaliza la expresión del error del Método Secante para el caso $n = 1$ pues:

si $f : D \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, entonces

$$H_k = x^{k-1} - x^k \quad P = f''(x_*) (x^{k-1} - x^k) (x^{k-1} - x^k) ;$$

así,

$$\begin{aligned} P H_k^{-1} (x_* - x^k) - f''(x_*) (x_* - x^k) (x_* - x^k) &= f''(x_*) (x^{k-1} - x^k) (x_* - x^k) - \\ &- f''(x_*) (x_* - x^k) (x_* - x^k) = f''(x_*) (x_* - x^k) [x^{k-1} - x^k - x_* + x^k] = \\ &= - f''(x_*) (x_* - x^k) (x_* - x^{k-1}) \end{aligned}$$

por lo tanto,

$$E^{k+1} = x_* - x^{k+1} = - \frac{1}{2} f'(x_*)^{-1} f''(x_*) E^k E^{k-1} + W(x^k, H_k), \quad (4.1)$$

con $W(x^k, H_k)$ tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\| W(x^k, H_k) \|}{(\| E^k \|^2 + \| x^{k-1} - x^k \| \| E^k \|)} = 0. \quad (4.2)$$

Notar que $\exists K / \forall k \geq K, \| E^{k+1} \| \leq c \| E^k \|$, $c =$ constante positiva
pues:

como $E^k \rightarrow 0$, $\exists k_0 / \forall k \geq k_0, \| E^k \| < 1$.

Por (4.2), $\exists k_1 / \forall k \geq k_1$, se cumple que

$$\| W(x^k, H_k) \| < \| E^k \|^2 + \| x^{k-1} - x^k \| \| E^k \| \leq 2 \| E^k \|^2 + \| E^{k-1} \| \| E^k \|.$$

Sea $K > \max(k_0, k_1)$; entonces, por la expresión del error en (4.1),

resulta, $\forall k \geq K$,

$$\| E^{k+1} \| \leq \frac{1}{2} \| f'(x_*)^{-1} \| \| f''(x_*) \| \| E^k \| \| E^{k-1} \| + 2 \| E^k \|^2 + \| E^{k-1} \| \| E^k \| =$$

$$= \left(\frac{1}{2} \| f'(x_*)^{-1} \| \| f''(x_*) \| \| E^{k-1} \| + 2 \| E^k \| + \| E^{k-1} \| \right) \| E^k \| <$$

$$\left(3 + \frac{1}{2} \|f'(x_*)^{-1}\| \|f'(x_*)\| \right) \|E^k\| = c \|E^k\| .$$

Así, $\forall k \geq K$,

$$\begin{aligned} \|E^k\|^2 + \|x^{k-1} - x^k\| \|E^k\| &\leq 2c \|E^k\| \|E^{k-1}\| + \|E^{k-1}\| \|E^k\| = \\ &= (1 + 2c) \|E^k\| \|E^{k-1}\|. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $\forall k \geq K$, resulta:

$$\frac{\|W(x^k, H_k)\|}{(\|E^k\|^2 + \|x^{k-1} - x^k\| \|E^k\|)} \geq \frac{\|W(x^k, H_k)\|}{(1+2c) \|E^k\| \|E^{k-1}\|}$$

en consecuencia,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|W(x^k, H_k)\|}{\|E^k\| \|E^{k-1}\|} = 0 . \quad \text{Entonces, podemos concluir de (4.1) que}$$

$$E^{k+1} = x_* - x^{k+1} \cong -\frac{1}{2} f'(x_*)^{-1} f''(x_*) E^k E^{k-1} .$$

METODO SECANTE 1

Puede verificarse que, por la estructura de la matriz H_k , $k = 0, 1, \dots$, que las hipótesis a) y b) del Lema 4.3 se satisfacen $\forall k \geq k_0$.

Por lo tanto, vale la expresión del error del Lema 4.3, (i).

De la misma forma que se hizo para el Método de Newton-Raphson, si suponemos que

$$\frac{\partial f_{l_0}}{\partial x_{j_0}}(x_*) \neq 0$$

se puede eliminar la variable x_{j_0} a partir de la componente

l_0 -ésima de F . Sin embargo, el Método Secante 1 generado por el nuevo sistema \tilde{F} puede converger más lentamente que el Método Secante 1 generado por el sistema original, como lo evidencian los siguientes ejemplos, en los que se trabajó con doble precisión:

EJEMPLOS

Ejemplo 1

Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F = (f_1, f_2)$

$$f_1(x_1, x_2) = -3 + 2x_1 + x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = -1 + x_1 x_2$$

Raíces: $(1, 1)^t$ y $(1/2, 2)^t$.

i) Si se elimina x_1 a partir de f_1 , con raíz $(1, 1)^t$ y se toman los siguientes valores iniciales:

para el sistema sin eliminación: $x^{(-1)} = (x_1^{(-1)}, x_2^{(-1)})^t = (3.5, 0.5)^t$

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^t = (3., 0.)^t$$

para el sistema reducido: $\tilde{x}^{(-1)} = 0.5$, $\tilde{x}^{(0)} = 0.$

Entonces, si llamamos $E_2^{(k)} = x_2^* - x_2^{(k)}$, y $\tilde{E}_2^{(k)} = x_2^* - \tilde{x}^{(k)}$, se obtienen los siguientes resultados :

k	$E_2^{(k)}$	$\tilde{E}_2^{(k)}$
1	0.6666667	0.199999988
2	0.1904761904	9.0909063816 E-2
3	2.6272577996 E-2	1.4084517955 E-2
4	6.5578977838 E-4	1.1587738990 E-3
5	4.2949691408 E-7	1.6093254089 E-5

(i) Si se elimina x_1 a partir de f_1 , con raíz $(1/2, 2.)^t$, con los siguientes valores iniciales:

$$x^{(-1)} = (x_1^{(-1)}, x_2^{(-1)})^t = (-3.5, 4.5)^t$$

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^t = (-3., 4.)^t$$

$$\tilde{x}^{(-1)} = 4.5, \quad \tilde{x}^{(0)} = 4.$$

k	$E_2^{(k)}$	$\tilde{E}_2^{(k)}$
1	1.4	0.90909099578
2	0.5157894736	0.46511626243
3	0.13095173166	0.17809438705
4	1.358927724 E-2	5.04102706909 E-2
5	1.7978223489 E-4	7.30800628662 E-3
6	3.2310034481 E-8	3.48329544067 E-4
7	1.1657341758 E-15	2.62260437011 E-6

Ejemplo 2

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad ; F = (f_1, f_2)$$

$$f_1(x_1, x_2) = x_1 - x_2^2$$

$$f_2(x_1, x_2) = x_2 + \text{sen}(x_1)$$

Raíz : $(0., 0.)^t$

Si se elimina x_1 a partir de f_1 con valores iniciales :

$$x^{(-1)} = (x_1^{(-1)}, x_2^{(-1)})^t = (1.5, 1.5)^t$$

$$x^{(0)} = (x_1^{(0)}, x_2^{(0)})^t = (1., 2.)^t$$

$$\tilde{x}^{(-1)} = 1.5 \quad , \quad \tilde{x}^{(0)} = 2.$$

Los resultados obtenidos figuran en la siguiente tabla :

k	$E_2^{(k)}$	$\tilde{E}^{(k)}$
1	0.1944016	2.600651
2	8.9671910 E-2	1.589577
3	0.4848810	0.8545079
4	3.2483220 E-2	0.6598232
5	1.0858631 E-2	1.576225
6	3.6621373 E-4	0.3598468
7	4.0115847 E-6	2.2146255 E-2
8	1.4683792 E-9	1.1983935 E-2
9	5.8841820 E-15	2.6272982 E-4

METODO SECANTE 2

En este caso, como se vio al principio de este capítulo, la matriz H_k es tal que, si $k = 0, 1, \dots$

$$(H_k)_{ij} = \begin{cases} x_i^{k-1} - x_i^k & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j \end{cases}$$

Lema 4.4 Para $k = 0, 1, \dots$, se tiene

$$(H_k^{-1})_{ij} = \begin{cases} (x_j^{k-1} - x_j^k)^{-1} & \text{si } j = i \\ -(x_j^{k-1} - x_j^k)^{-1} & \text{si } j = i + 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Demostración

Notar que, dados $(n + 1)$ vectores $r_0, r_1, \dots, r_n \in \mathbb{R}^n$, se tiene

$$(r_1 - r_0, r_2 - r_0, \dots, r_n - r_0) Q = (r_1 - r_0, r_2 - r_1, \dots, r_n - r_{n-1}),$$

con Q matriz $n \times n$ definida así :

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -1 & & & 0 \\ & 1 & -1 & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ 0 & & & -1 & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

por lo tanto, si escribimos $H_k = (h_1^k, h_2^k, \dots, h_n^k)$, con

$h_i^k =$ columna i -ésima de H_k , y $r_0 = 0$, $r_i = h_i^k$ $i = 1, \dots, n$,

se tiene

$$(h_1^k, h_2^k, \dots, h_n^k) Q = (h_1^k, h_2^k - h_1^k, \dots, h_n^k - h_{n-1}^k) \rightarrow$$

$$H_k = (h_1^k, h_2^k - h_1^k, \dots, h_n^k - h_{n-1}^k) Q^{-1} \rightarrow$$

$$H_k^{-1} = Q (h_1^k, h_2^k - h_1^k, \dots, h_n^k - h_{n-1}^k)^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & & 0 \\ & 1 & -1 & \\ & & \ddots & \ddots \\ 0 & & & 1 & -1 \\ & & & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (x_1^{k-1} - x_1^k)^{-1} & & 0 \\ & \ddots & \\ & & (x_n^{k-1} - x_n^k)^{-1} \\ 0 & & & \end{bmatrix},$$

con lo cual queda probado el Lema ■

Se verá a continuación que el error en el paso k -ésimo puede escribirse como en el Lema 4.3 ii) . Para ello verificaremos las hipótesis

a) y b) de dicho Lema :

Hipótesis a):

$$R1(x^k, H_k) = (R(x^k + h_1^k) - R(x^k), \dots, R(x^k + h_n^k) - R(x^k)) ,$$

donde $H_k = (h_1^k, \dots, h_n^k)$, y si $R_i(x) = i$ -ésima coordenada de $R(x)$,

entonces, usando el Lema 4.4 y el Teorema del Valor Medio,

$$[R1(x^k, H_k) H_k^{-1}]_{ij} = \sum_{l=1}^n [R_l(x^k + h_l^k) - R_l(x^k)] [H_k^{-1}]_{lj} =$$

$$= [R_i(x^k + h_j^k) - R_i(x^k)] [H_k^{-1}]_{jj} + [R_i(x^k + h_{j-1}^k) - R_i(x^k)] [H_k^{-1}]_{j-1, j} =$$

$$= [R_i(x^k + h_j^k) - R_i(x^k)] \frac{1}{(x_j^{k-1} - x_j^k)} - [R_i(x^k + h_{j-1}^k) - R_i(x^k)] \frac{1}{(x_j^{k-1} - x_j^k)} =$$

$$= \frac{1}{(x_j^{k-1} - x_j^k)} [R_i(x^k + h_j^k) - R_i(x^k + h_{j-1}^k)] =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(x_j^{k-1} - x_j^k)} R'_i(x^k + h_{j-1}^k + t(h_j^k - h_{j-1}^k)) (h_j^k - h_{j-1}^k) = \\
&= \frac{1}{(x_j^{k-1} - x_j^k)} R'_i(x^k + h_{j-1}^k + t(h_j^k - h_{j-1}^k)) (0, \dots, 0, x_j^{k-1} - x_j^k, 0, \dots, 0) = \\
&= \partial_j R'_i(x^k + h_{j-1}^k + t(h_j^k - h_{j-1}^k)) \quad , \text{ con } t \in (0, 1) .
\end{aligned}$$

Por lo tanto, como $R'(x) = F'(x) - F'(x_*) - F''(x_*)(x - x_*) \rightarrow$

$R'(x) = o(\|x - x_*\|) \rightarrow$ dado $\varepsilon > 0$, $\exists \delta = B(x_*, \delta) =$ entorno de x_*

tal que, $\forall x^k \in S$, se cumple que

$$\begin{aligned}
| [R_1(x^k, H_k) H_k^{-1}]_{ij} | &\leq \varepsilon \|x^k + h_{j-1}^k + t(h_j^k - h_{j-1}^k) - x_*\| \leq \\
&\leq \varepsilon (\|x^k - x_*\| + \|h_{j-1}^k + t(h_j^k - h_{j-1}^k)\|) \leq
\end{aligned}$$

$$\leq \varepsilon c (\|x^k - x_*\| + \|H_k\|) ;$$

entonces,

$\|R_1(x^k, H_k)\|_1 \leq n \varepsilon c_1 (\|x^k - x_*\|_1 + \|H_k\|_1)$, con c, c_1 constantes como ε es arbitrario y n, c_1 son cantidades fijas, queda probado que

$$\lim_{\substack{x^k \rightarrow x_* \\ \|H_k\| \rightarrow 0}} \frac{\|R_1(x^k, H_k)\|}{(\|x^k - x_*\| + \|H_k\|)} = 0$$

Hipótesis b)

$P = (F''(x_*) h_1^k h_1^k, \dots, F''(x_*) h_n^k h_n^k)$, con

$$h_j^k = \begin{pmatrix} x_1^{k-1} - x_1^k \\ \vdots \\ x_j^{k-1} - x_j^k \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

por lo tanto,

$$P_{ij} = \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^j f_i^{ml} (x_l^{k-1} - x_l^k) (x_m^{k-1} - x_m^k)$$

$$(P H_k^{-1})_{ij} = \sum_{e=1}^n P_{ie} (H_k^{-1})_{ej} = P_{ij} (H_k^{-1})_{jj} + P_{i,j-1} (H_k^{-1})_{j-1,j} ;$$

$$P_{ij} (H_k^{-1})_{jj} = \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^j f_i^{ml} \frac{(x_l^{k-1} - x_l^k) (x_m^{k-1} - x_m^k)}{(x_j^{k-1} - x_j^k)} =$$

$$= \sum_{m=1}^j \left(\sum_{l=1}^{j-1} f_i^{ml} \frac{(x_l^{k-1} - x_l^k) (x_m^{k-1} - x_m^k)}{(x_j^{k-1} - x_j^k)} + f_i^{mj} (x_m^{k-1} - x_m^k) \right) =$$

$$= \sum_{m=1}^j \sum_{l=1}^{j-1} f_i^{ml} \frac{(x_l^{k-1} - x_l^k) (x_m^{k-1} - x_m^k)}{(x_j^{k-1} - x_j^k)} + \sum_{m=1}^j f_i^{mj} (x_m^{k-1} - x_m^k) =$$

$$= \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{l=1}^{j-1} f_i^{ml} \frac{(x_l^{k-1} - x_l^k) (x_m^{k-1} - x_m^k)}{(x_j^{k-1} - x_j^k)} + \sum_{l=1}^{j-1} f_i^{lj} (x_l^{k-1} - x_l^k) +$$

$$+ \sum_{m=1}^j f_i^{mj} (x_m^{k-1} - x_m^k) = \sum_{m=1}^{j-1} \sum_{l=1}^{j-1} f_i^{ml} \frac{(x_l^{k-1} - x_l^k) (x_m^{k-1} - x_m^k)}{(x_j^{k-1} - x_j^k)} +$$

$$+ 2 \sum_{l=1}^{j-1} f_i^{lj} (x_l^{k-1} - x_l^k) + f_i^{jj} (x_j^{k-1} - x_j^k) =$$

$$= - P_{i,j-1} (H_k^{-1})_{j-1,j} + 2 \sum_{l=1}^{j-1} f_i^{lj} (x_l^{k-1} - x_l^k) + f_i^{jj} (x_j^{k-1} - x_j^k) ;$$

por lo tanto,

$$(P H_k^{-1})_{ij} = 2 \sum_{l=1}^{j-1} f_i^{lj} (x_l^{k-1} - x_l^k) + f_i^{jj} (x_j^{k-1} - x_j^k) \rightarrow$$

$$\|P H_k^{-1}\| \leq \alpha \|H_k\|, \text{ con } \alpha = \text{cte} \quad \blacksquare$$

Entonces, si llamamos

$E^{(k)}$ = error en el Método Secante 2 en el k -ésimo paso =

$$x_* - x^k$$

resulta así, $\forall k \geq k_0$,

$$E^{(k+1)} = \frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} [P H_k^{-1} E^{(k)} - F''(x_*) E^{(k)} E^{(k)}] + W(x^k, H_k)$$

donde

$$P = (F''(x_*) h_1^k h_1^k, \dots, F''(x_*) h_n^k h_n^k)$$

$$H_k = (h_1^k, \dots, h_n^k)$$

$$h_i^k = \begin{pmatrix} x_1^{k-1} - x_1^k \\ \vdots \\ x_i^{k-1} - x_i^k \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\|W(x^k, H_k)\|}{(\|x^k - x_*\|^2 + \|H_k\| \|x^k - x_*\|)} = 0$$

Eliminación de una de las variables

Supongamos que $F = (f_1, f_2, \dots, f_n)$ es tal que, para algún i_0, j_0 ,

$$\partial_{j_0} f_{i_0}(x_*) \neq 0$$

si se elimina la variable x_{j_0} a partir de la componente i_0 -ésima de F , entonces, como ya vimos, resulta un nuevo sistema a resolver:

$$\tilde{F} : \tilde{D} \subset \mathbb{R}^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}^{n-1}, \quad \tilde{F} = (\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_{i_0-1}, \tilde{f}_{i_0+1}, \dots, \tilde{f}_n),$$

$$\tilde{F}(x_1, \dots, x_{j_0-1}, x_{j_0+1}, \dots, x_n) = 0, \quad \text{donde, } \forall i \neq i_0,$$

$$\tilde{f}_i(x_1, \dots, x_{j_0-1}, x_{j_0+1}, \dots, x_n) = f_i(x_1, \dots, x_{j_0-1}, h(\bar{x}), x_{j_0+1}, \dots, x_n),$$

$$\text{con } \bar{x} = (x_1, \dots, x_{j_0-1}, x_{j_0+1}, \dots, x_n)^t;$$

h es la función definida, como se hizo para el caso del Método de Newton-Raphson, por el Teorema de la Función Implícita (Teorema 2.22). Sin pérdida de generalidad, se supondrá que $i_0 = j_0 = 1$; así,

$$\tilde{F} = (\tilde{f}_2, \dots, \tilde{f}_n), \quad \partial_1 f_1(x_*) \neq 0 \quad \text{y}$$

$$\tilde{f}_i(\bar{x}) = f_i(h(\bar{x}), \bar{x}), \quad i = 2, \dots, n; \quad \bar{x} = (x_2, \dots, x_n)^t$$

Observación: Es fácil verificar que

\tilde{F} satisface las hipótesis del Teorema de Discretización de Newton (Ortega-Rheinboldt, pág. 360). Por lo tanto, $\bar{x}_* = (x_2^*, \dots, x_n^*)^t$ es punto de atracción de la iteración generada por el Método Secante 2 que resulta de eliminar la variable x_1 .

El siguiente Teorema , a semejanza del Teorema 3.14 , compara el término principal del error del Método Secante 2 generado por F , y el generado por \tilde{F} .

Teorema 4.5

Si $x_1 = h(x_2, \dots, x_n)$, entonces, $\forall k \geq 2$, se cumple

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} [P H^{-1}(x_* - x) - F''(x_*) (x_* - x) (x_* - x)] \right]_k = \\ & = \left[\frac{1}{2} \tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1} [\tilde{P} \tilde{H}^{-1}(\bar{x}_* - \bar{x}) - \tilde{F}''(\bar{x}_*) (\bar{x}_* - \bar{x}) (\bar{x}_* - \bar{x})] \right]_k + \\ & + \sum_{s=2}^n \sum_{j=s}^n \sum_{i=2}^{j-1} \alpha_{ij}^{ks} [(x_i^* - x_i) (x_j^* - y_j) - (x_i^* - y_i) (x_j^* - x_j)] + t_k(\bar{x}, \bar{y}) \end{aligned}$$

donde :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= (x_2, \dots, x_n)^t & \bar{x}_* &= (x_2^*, \dots, x_n^*)^t \\ x &= (x_2, \dots, x_n)^t & x_* &= (x_1^*, \dots, x_n^*)^t \\ H &= (h_1, \dots, h_n) & & \text{con} \end{aligned}$$

$$h_i = \begin{pmatrix} y_1 - x_1 \\ \vdots \\ y_i - x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad y_1 = h(y_2, \dots, y_n) \quad ; \quad \bar{y} = (y_2, \dots, y_n)^t$$

$$\tilde{H} = (\tilde{h}_2, \dots, \tilde{h}_n) \quad \text{con}$$

$$\tilde{h}_i = \begin{pmatrix} y_2 - x_2 \\ \vdots \\ y_i - x_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \lim_{\substack{\bar{x}, \bar{y} \rightarrow \bar{x}_*}} \frac{t_k(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x}_* - \bar{x}\| \|\bar{x}_* - \bar{y}\|} = 0 \quad \forall k$$

$$P = (F''(x_*) h_1 h_1, \dots, F''(x_*) h_n h_n) \quad ,$$

$$\tilde{P} = (\tilde{F}''(\bar{x}_*) \tilde{h}_2 \tilde{h}_2, \dots, \tilde{F}''(\bar{x}_*) \tilde{h}_n \tilde{h}_n) \quad y$$

$$\alpha_{ij}^{ke} = (-1)^{e+k+1} \frac{\det(s, k)}{\det F'(x_*)} \left[- \frac{f_{\circ}^1 f_1^{11} f_1^i f_1^j}{(f_1^1)^3} + \frac{2 f_{\circ}^1 f_1^{1i} f_1^j}{(f_1^1)^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{f_{\circ}^{11} f_1^i f_1^j}{(f_1^1)^2} - \frac{2 f_{\circ}^{1i} f_1^j}{f_1^1} \right]$$

Demostración

Un simple cálculo muestra que la m -ésima componente de

$P H^{-1}(x_* - x) - F''(x_*) (x_* - x) (x_* - x)$ es :

$$- 2 \sum_{\circ=1}^n \sum_{l=1}^{\circ-1} f_m^{l\circ} (x_l^* - y_l) (x_{\circ}^* - x_{\circ}) - \sum_{\circ=1}^n f_m^{\circ\circ} (x_{\circ}^* - y_{\circ}) (x_{\circ}^* - x_{\circ})$$

por lo tanto, si $k \geq 2$,

$$\left[\frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} [P H^{-1}(x_* - x) - F''(x_*) (x_* - x) (x_* - x)]_k = \right.$$

$$= - \frac{1}{2 \det F'(x_*)} \sum_{\circ=1}^n (-1)^{\circ+k} \det(s, k) \left[2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=1}^{j-1} f_{\circ}^{ij} (x_i^* - y_i) (x_j^* - x_j) + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^n f_{\circ}^{jj} (x_j^* - y_j) (x_j^* - x_j) \right] \quad y$$

$$\left[\frac{1}{2} \tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1} [\tilde{P} \tilde{H}^{-1}(\bar{x}_* - \bar{x}) - \tilde{F}''(\bar{x}_*) (\bar{x}_* - \bar{x}) (\bar{x}_* - \bar{x})]_k = \right.$$

$$= -\frac{1}{2 \det F'(x_*)} \sum_{s=2}^n (-1)^{s+k} \overline{\det}(s,k) \left[2 \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^{j-1} \tilde{f}_s^{ij} (x_i^* - y_i) (x_j^* - x_j) + \sum_{j=2}^n \tilde{f}_s^{jj} (x_j^* - y_j) (x_j^* - x_j) \right]$$

usando los Lemas 3.11 - 3.13, y la expresión de \tilde{f}_s^{ij} , $s, i, j = 2, \dots, n$ en términos de f_s^{ij} y f_s^i , $s, i, j = 1, 2, \dots, n$, resulta:

$$\begin{aligned} & \left[\frac{1}{2} F'(x_*)^{-1} [P H^{-1}(x_* - x) - F''(x_*) (x_* - x) (x_* - x)] \right]_k = \\ & = -\frac{1}{2 \det F'(x_*)} \left(\sum_{s=2}^n (-1)^{s+k} \overline{\det}(s,k) \left[\sum_{i=2}^n \left(-\frac{f_s^1 f_1^{11} (f_1^i)^2}{(f_1^1)^3} - \frac{f_s^1 f_1^{ii}}{f_1^1} + \right. \right. \right. \\ & + \frac{2 f_s^1 f_1^{1i} f_1^i}{(f_1^1)^2} + \frac{f_s^{11} (f_1^i)^2}{(f_1^1)^2} + f_s^{ii} - \left. \frac{2 f_s^{1i} f_1^i}{f_1^1} \right) (x_i^* - y_i) (x_i^* - x_i) + \\ & + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^n \left(-\frac{f_s^1 f_1^{11} f_1^i f_1^j}{(f_1^1)^3} + \frac{2 f_s^1 f_1^{1j} f_1^i}{(f_1^1)^2} - \frac{2 f_s^1 f_1^{ij}}{f_1^1} + \frac{f_s^{11} f_1^i f_1^j}{(f_1^1)^2} - \right. \\ & - \frac{2 f_s^{1j} f_1^i}{f_1^1} + \left. 2 f_s^{ij} \right) (x_i^* - y_i) (x_j^* - x_j) + \sum_{j=2}^n \sum_{i=2}^{j-1} \left(-\frac{f_s^1 f_1^{11} f_1^i f_1^j}{(f_1^1)^3} + \right. \\ & + \frac{2 f_s^1 f_1^{1i} f_1^j}{(f_1^1)^2} + \frac{f_s^{11} f_1^i f_1^j}{(f_1^1)^2} - \left. \frac{2 f_s^{1i} f_1^j}{f_1^1} \right) (x_i^* - x_i) (x_j^* - y_j) \left. \right] \Big) + \end{aligned}$$

$$+ t_k(\bar{x}, \bar{y}), \text{ con } t_k \text{ tal que } \lim_{\bar{x}, \bar{y} \rightarrow x_*} \frac{t_k(\bar{x}, \bar{y})}{\|\bar{x} - x_*\| \|\bar{y} - x_*\|} = 0$$

además,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2} \tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1} \left[\tilde{P} \tilde{H}^{-1}(\bar{x}_* - \bar{x}) - \tilde{F}''(\bar{x}_*)(\bar{x}_* - \bar{x})(\bar{x}_* - \bar{x}) \right] \right]_k = \\
& = - \frac{1}{2 \det F'(\bar{x}_*)} \left\{ \sum_{\alpha=2}^n (-1)^{\alpha+k} \det(s, k) \left[\sum_{i=2}^n \left(\frac{f_{\alpha}^{11} (f_1^i)^2}{(f_1^i)^2} - \frac{2 f_{\alpha}^{1i} f_1^i}{f_1^i} \right. \right. \right. \\
& - \frac{f_{\alpha}^{1i} f_1^{ii}}{f_1^i} + \frac{2 f_{\alpha}^{1i} f_1^{4i} f_1^i}{(f_1^i)^2} - \frac{f_{\alpha}^{1i} f_1^{11} (f_1^i)^2}{(f_1^i)^3} + f_{\alpha}^{ii}) (x_i^* - y_i) (x_i^* - x_i) + \\
& + 2 \sum_{j=9}^n \sum_{i=2}^{j-1} \left(\frac{f_{\alpha}^{11} f_1^i f_1^j}{(f_1^i)^2} - \frac{f_{\alpha}^{1j} f_1^i}{f_1^i} - \frac{f_{\alpha}^{1i} f_1^{ij}}{f_1^i} + \frac{f_{\alpha}^{1i} f_1^{1j} f_1^i}{(f_1^i)^2} + \right. \\
& \left. \left. + \frac{f_{\alpha}^{1i} f_1^{1i} f_1^j}{(f_1^i)^2} - \frac{f_{\alpha}^{1i} f_1^{11} f_1^i f_1^j}{(f_1^i)^3} - \frac{f_{\alpha}^{1i} f_1^j}{f_1^i} + f_{\alpha}^{ij}) (x_i^* - y_i) (x_j^* - x_j) \right] \right\}
\end{aligned}$$

por lo tanto,

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{1}{2} F'(\bar{x}_*)^{-1} \left[P H^{-1}(\bar{x}_* - \bar{x}) - F''(\bar{x}_*)(\bar{x}_* - \bar{x})(\bar{x}_* - \bar{x}) \right] \right]_k = \\
& - \left[\frac{1}{2} \tilde{F}'(\bar{x}_*) \left[\tilde{P} \tilde{H}^{-1}(\bar{x}_* - \bar{x}) - \tilde{F}''(\bar{x}_*)(\bar{x}_* - \bar{x})(\bar{x}_* - \bar{x}) \right] \right]_k = \\
& = - \sum_{\alpha=2}^n (-1)^{\alpha+k} \frac{\det(s, k)}{2 \det F'(\bar{x}_*)} \sum_{j=9}^n \sum_{i=2}^{j-1} \left[- \frac{f_{\alpha}^{1i} f_1^{11} f_1^i f_1^j}{(f_1^i)^3} + \frac{2 f_{\alpha}^{1i} f_1^{1i} f_1^j}{(f_1^i)^2} + \right. \\
& \left. + \frac{f_{\alpha}^{11} f_1^i f_1^j}{(f_1^i)^2} - \frac{2 f_{\alpha}^{1i} f_1^j}{f_1^i} \right] [(x_i^* - x_i)(x_j^* - y_j) - (x_i^* - y_i)(x_j^* - x_j)] + t_k(\bar{x}, \bar{y})
\end{aligned}$$

con lo cual queda demostrado el Teorema. ■

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_1 &: x^{k+1} = x^k - J(x^k, H_k)^{-1} F(x^k) \quad , \quad y \\ \mathcal{J}_2 &: \tilde{x}^{k+1} = \tilde{x}^k - J(\tilde{x}^k, \tilde{H}_k)^{-1} \tilde{F}(\tilde{x}^k) \end{aligned}$$

las iteraciones generadas por el Método Secante (1 o 2) obtenido sin eliminación, y eliminando la variable x_{j_0} a partir de la i_0 -ésima componente de F , respectivamente.

Entonces, si $E^{k+1} = x_* - x^{k+1}$ y $\tilde{E}^{k+1} = \bar{x}_* - \tilde{x}^{k+1}$, y teniendo en cuenta la expresión del error en el Método Secante (Lema 4.3 ii), podemos concluir que $\exists k_0 \in \mathbb{N} / \forall k \geq k_0$,

$$\begin{aligned} \|E^{k+1}\|_1 &\leq \alpha_1 \|x^k - x_*\|_1^2 + \alpha_2 \|x^k - x_*\|_1 \|x^{k-1} - x_*\|_1 \quad , \\ \|\tilde{E}^{k+1}\|_1 &\leq \tilde{\alpha}_1 \|\tilde{x}^k - \bar{x}_*\|_1^2 + \tilde{\alpha}_2 \|\tilde{x}^k - \bar{x}_*\|_1 \|\tilde{x}^{k-1} - \bar{x}_*\|_1 \quad , \end{aligned}$$

donde

$$\alpha_1 = \left(\frac{1}{2} (\|F'(x_*)^{-1}\|_1 \alpha + \|F'(x_*)^{-1}\|_1 \|F''(x_*)\|_1) + 2 \right)$$

$$\alpha_2 = \left(\frac{1}{2} \|F'(x_*)^{-1}\|_1 \alpha + 1 \right)$$

$$\tilde{\alpha}_1 = \left(\frac{1}{2} (\|\tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1}\|_1 \tilde{\alpha} + \|\tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1}\|_1 \|\tilde{F}''(\bar{x}_*)\|_1) + 2 \right)$$

$$\tilde{\alpha}_2 = \left(\frac{1}{2} \|\tilde{F}'(\bar{x}_*)^{-1}\|_1 \tilde{\alpha} + 1 \right) \quad ,$$

α y $\tilde{\alpha}$ son constantes tales que

$$\| P H_k^{-1} \| \leq \alpha \| H_k \| \quad \| \tilde{P} \tilde{H}_k^{-1} \| \leq \tilde{\alpha} \| \tilde{H}_k \| , \text{ donde}$$

$$P = (F''(x_*) h_1^k h_1^k, \dots, F''(x_*) h_n^k h_n^k) , \tilde{P} = (\tilde{F}''(\tilde{x}_*) \tilde{h}_2^k \tilde{h}_2^k, \dots, \tilde{F}''(\tilde{x}_*) \tilde{h}_n^k \tilde{h}_n^k)$$

$$H_k = (h_1^k, \dots, h_n^k) \quad \tilde{H}_k = (\tilde{h}_2^k, \dots, \tilde{h}_n^k) , \text{ y}$$

$$h_i^k = \begin{pmatrix} 0 \\ x_i^{k-1} - x_i^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{h}_i^k = \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{x}_i^{k-1} - \tilde{x}_i^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Método Secante 1})$$

$$h_i^k = \begin{pmatrix} x_1^{k-1} - x_1^k \\ \vdots \\ x_i^{k-1} - x_i^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \tilde{h}_i^k = \begin{pmatrix} \tilde{x}_2^{k-1} - \tilde{x}_2^k \\ \vdots \\ \tilde{x}_i^{k-1} - \tilde{x}_i^k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{Método Secante 2})$$

No ha sido posible por el momento ,comparar los órdenes de convergencia entre las iteraciones generadas por el sistema original y el sistema reducido.

Por el Lema 2.42, sólo se puede concluir que

$$\phi_r(\mathcal{J}_2, \tilde{x}_*) \geq \tau = (1 + \sqrt{5}) / 2 , \text{ y}$$

$$\phi_r(\mathcal{J}_1, x_*) \geq \tau = (1 + \sqrt{5}) / 2$$

COMPUESTO V

El conjunto de ejemplos de este capítulo tiene por objeto ilustrar los desarrollos teóricos de los Capítulos anteriores, así como las dificultades que puede plantear la implementación computacional de la eliminación parcial. En todos los ejemplos se ha trabajado con doble precisión. El ejemplo 5 del método de Newton-Raphson, pone en evidencia la necesidad de evaluar previamente el costo computacional antes de efectuar cualquier eliminación.

MÉTODOS DE JACOBI Y GAUSS-SEIDEL NO LINEALES

Ejemplo 1

Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $F = (f_1, f_2)$ definida así :

$$f_1(x_1, x_2) = -3. + 2. x_1 - x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = -1. - x_1 x_2$$

Las raíces son : $r_1 = (1., -1.)^t$; $r_2 = (0.5, -2.)^t$

Queda planteada la ecuación de punto fijo :

$$x = (x_1, x_2)^t = G(x) = (g_1(x), g_2(x))^t, \text{ donde}$$

$$g_1(x) = (3. + x_2)/2.$$

$$g_2(x) = -1./x_1$$

$$G'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0.5 \\ 1/x_1^2 & 0 \end{bmatrix} ; \text{ así, } G'(x) \geq 0 \text{ e irreducible.}$$

Con los valores iniciales $(2., 1.)^t$, converge a $r_1 = (1., -1.)^t$

Criterio de convergencia utilizado : $|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0.5 \cdot 10^{-10}$, $i=1,2$

Los resultados están resumidos en la siguiente tabla :

METODO JACOBI NO LINEAL	METODO G-SEIDEL NO LINEAL
Sin eliminación : 66 iteraciones Nº de operaciones por iteración : 2	Sin eliminación : 34 iteraciones Nº de operaciones por iteración : 2
eliminando x_1 : 34 iteraciones Nº de operaciones por iteración : 2	eliminando x_1 : 34 iteraciones Nº de operaciones por iteración : 2
eliminando x_2 : 34 iteraciones Nº de operaciones por iteración : 2	eliminando x_2 : 33 iteraciones Nº de operaciones por iteración : 3

Ejemplo 2 : El siguiente ejemplo ilustra la afirmación del Lema 3.9 .

Sea la ecuación diferencial

$$x''(t) = -1. - \text{sen}(x'(t))$$

con las condiciones de contorno

$$x(0) = 0 \quad , \quad x(1) = 1. \quad , \quad t \in [0,1]$$

Sea $\Pi = \{ x_0 = 0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = 1. \}$ una partición de $[0,1]$; con

$n = 19$; $h = x_{i+1} - x_i = 0.05$; así,

$$x_i = \frac{i}{n+1}, \quad i = 1, \dots, n$$

Mediante el Método de Diferencias Finitas, se obtiene el siguiente sistema no lineal :

$$x(0) = 0.$$

$$x(n+1) = 1.$$

Para $i = 1, \dots, n$,

$$F_i = \frac{x_{i+1} + x_{i-1} - 2x_i}{h^2} + 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h}\right) = 0$$

Resulta así la siguiente ecuación de punto fijo :

$$x = (x_1, \dots, x_n)^t = G(x) = (g_1, \dots, g_n)^t, \quad \text{donde, para } i = 1, \dots, n,$$

$$x_i = g_i(x_{i-1}, x_{i+1}) = \frac{1}{2} \left[x_{i+1} + x_{i-1} + h^2 \left(1 + \operatorname{sen}\left(\frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2h}\right) \right) \right]$$

Por lo tanto, coinciden las iteraciones generadas por el Método de Gauss-Seidel obtenido sin eliminación, y eliminando la variable x_i respectivamente.

Notar que

i) $G'(x)$ es irreducible pues su grafo es fuertemente conexo :



ii) $G'(x) \geq 0$ pues

Valores iniciales : $x_i^0 = 1. \quad \forall i = 1, \dots, n$

Criterio de convergencia : $|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0.5 \cdot 10^{-5}, \quad \forall i = 1, \dots, n$

METODO JACOBI NO LINEAL	METODO G-SEIDEL NO LINEAL
Sin eliminación: 579 iteraciones n° de operaciones por iteración: 57	Sin eliminación: 279 iteraciones n° de operaciones por iteración: 57
eliminando x_1 : 526 iteraciones n° de operaciones por iteración: 57	eliminando x_1 : 279 iteraciones n° de operaciones por iteración: 57
eliminando x_2 : 512 iteraciones n° de operaciones por iteración: 57	eliminando x_2 : 278 iteraciones n° de operaciones por iteración: 60
eliminando x_n : 548 iteraciones n° de operaciones por iteración: 57	eliminando x_n : 279 iteraciones n° de operaciones por iteración: 60

Resultados numéricos obtenidos: los correspondientes valores para los distintos sistemas reducidos son esencialmente iguales a los de la tabla siguiente:

x_i	JACOBI NO LINEAL, SIN ELIMINACION	G-SEIDEL NO LINEAL, SIN ELIMINACION
i	Nº de iteración: 579	Nº de iteración: 279
1	9.4468989577257 E-2	9.447637512027 E-2
2	0.1840284153360276	0.184041329950202
3	0.26862106132431	0.2686401457549371
4	0.34822062754137	0.3482420490602
5	0.4228152637247	0.4228411270902
6	0.49243150528869	0.4924565112893769
7	0.557104213687149	0.557131815608368
8	0.61690977097755	0.61693387075054
9	0.6719257583375	0.6719508445565068
10	0.7222699898709724	0.7222898760287221
11	0.7680546365319661	0.76807437236323
12	0.8094271665055979	0.80944112384468
13	0.8465241556048604	0.846537382295459
14	0.8795100959851	0.87951802853835
15	0.90853580579185	0.90854292746355
16	0.9337714026902698	0.93377454010055
17	0.95537324028096	0.95537583410948
18	0.97350810639414	0.97350850973536
19	0.9883312583673	0.98833153879316

Ejemplo 3

Sea $F : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$, $F = (f_1, f_2, f_3, f_4)$, definida así :

si $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^t$, entonces

$$f_1(x) = 5 \cdot x_1 - \exp((x_2 - 2.) / 2.) - x_3^2 - 3.75 = 0$$

$$f_2(x) = 2 \cdot x_2 - 1. / 3 \cdot \text{sen}((x_1 - 1.) / 2.) - x_3^2 / 5. - x_4^2 / 5. - 3.9 = 0$$

$$f_3(x) = 7 \cdot x_3 - \log((x_2 - 1.)^2) + \cos((x_1 - 1.) / 2.) - 4 \cdot x_4 - 2.5 = 0$$

$$f_4(x) = 8 \cdot x_4 - x_1^2 - x_2^2 - x_3 + 1.5 = 0$$

Una raíz es $r = (1., 2., 0.5, 0.5)^t$. Se obtiene la siguiente ecuación de punto fijo : $x = G(x)$, $G = (g_1, g_2, g_3, g_4)$, donde :

$$g_1 = \frac{1}{5} (\exp((x_2 - 2.) / 2.) + x_3^2 + 3.75)$$

$$g_2 = \frac{1}{2} (\frac{1}{3} (\text{sen}((x_1 - 1.) / 2.)) + x_3^2 / 5. + x_4^2 / 5. + 3.9)$$

$$g_3 = \frac{1}{7} (\log((x_2 - 1.)^2) - \cos((x_1 - 1.) / 2.) + 4 \cdot x_4 + 2.5)$$

$$g_4 = \frac{1}{8} (x_1^2 + x_2^2 + x_3 - 1.5)$$

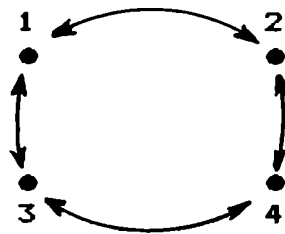
i) $G'(r)$ es no negativa pues :

$$G'(x) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{10} \exp((x_2 - 2)/2) & \frac{2}{3} x_3 & 0 \\ \frac{1}{12} \cos((x_1 - 1)/2) & 0 & \frac{x_3}{5} & \frac{x_4}{5} \\ \frac{1}{14} \sin((x_1 - 1)/2) & \frac{2}{7(x_2 - 2)} & 0 & \frac{4}{7} \\ \frac{x_1}{4} & \frac{x_2}{4} & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto,

$$G'(r) = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0.1 & 0.1 \\ 0 & \frac{2}{7} & 0 & \frac{4}{7} \\ 0.25 & 0.5 & \frac{1}{8} & 0 \end{pmatrix}$$

(i) $G'(r)$ es irreducible pues su grafo es fuertemente conexo :



Valores iniciales tomados : $(1.5, 2.5, 1., 1.)^t$

Criterio de convergencia : $|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0.5 \cdot 10^{-12}$, $\forall i = 1, \dots, 4$

METODO JACOBI NO LINEAL	METODO G-SEIDEL NO LINEAL
Sin eliminación: 48 iteraciones N° de operaciones por iteración: 16	Sin eliminación: 29 iteraciones N° de operaciones por iteración: 16
eliminando x_1 : 44 iteraciones N° de operaciones por iteración: 16	eliminando x_1 : 26 iteraciones N° de operaciones por iteración: 22
eliminando x_2 : 39 iteraciones N° de operaciones por iteración: 16	eliminando x_2 : 26 iteraciones N° de operaciones por iteración: 28
eliminando x_3 : 36 iteraciones N° de operaciones por iteración: 16	eliminando x_3 : 22 iteraciones N° de operaciones por iteración: 24
eliminando x_4 : 34 iteraciones N° de operaciones por iteración: 16	eliminando x_4 : 20 iteraciones N° de operaciones por iteración: 22

Algunos resultados numéricamente obtenidos:

x_i	JACOBI, SIN ELIMINACION	G-SEIDEL, SIN ELIMINACION
i	iteración: 48	iteración: 29
x_1	1.0000000000000231	1.0000000000000108
x_2	2.0000000000000206	2.0000000000000076
x_3	0.50000000000005337	0.50000000000001554
x_4	0.50000000000004123	0.50000000000000841

Ejemplo 4

Sea la ecuación diferencial de segundo orden :

$$y''(x) + 0.5 \exp(y'(x) - 2) - 0.5 = 0$$

con la condición de contorno :

$$y(0) = -2.$$

$$y'(1) = 2.$$

Obviamente, la solución es $y(x) = 2x - 2$

Mediante el Método de diferencias finitas , se obtiene el siguiente sistema no lineal :

$$\left[\begin{array}{l} \text{Para } i = 1, \dots, n \text{ ,} \\ F_i = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} + 0.5 \exp((y_{i+1} - y_{i-1})/(2h) - 2) - 0.5 = 0 \end{array} \right.$$

$$y_0 = -2.$$

$$y_{n+1} = 4h + y_{n-1}$$

De aquí resulta la ecuación de punto fijo :

$$y = (y_1, \dots, y_n)^t = G(y) \quad , \quad G = (g_1, g_2, \dots, g_n)^t \quad , \quad \text{donde :}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{Para } i = 1, \dots, n \quad , \\ g_i = \frac{1}{2} [y_{i+1} + y_{i-1} - h^2 (0.5 - 0.5 \exp((y_{i+1} - y_{i-1}) / (2h) - 2))] \end{array} \right.$$

Tomamos $h = 0.2$, $n = 5$

i) $G'(y) \geq 0$ pues :

$$g_j = \begin{cases} \frac{1}{2} [1 - \frac{h}{2} 0.5 \exp((y_{i+1} - y_{i-1}) / (2h) - 2)] & \text{si } j=i-1 \\ \frac{1}{2} [1 + \frac{h}{2} 0.5 \exp((y_{i+1} - y_{i-1}) / (2h) - 2)] & \text{si } j=i+1 \\ 0 & \text{en el resto} \end{cases}$$

ii) $G'(y)$ es irreducible pues su grafo es fuertemente conexo.

Valores iniciales tomados : $y_i = -2.$, $\forall i = 1, \dots, 5$

Criterio de convergencia : $| y_i^{k+1} - y_i^k | \leq 0.5 \cdot 10^{-7}$, $\forall i$.

JACOBI NO LINEAL	G-SEIDEL NO LINEAL
Sin eliminación: 276 iteraciones N° de operaciones por iteración: 20	Sin eliminación: 180 iteraciones N° de operaciones por iteración: 20
eliminando x_1 : 264 iteraciones N° de operaciones por iteración: 20	eliminando x_1 : 180 iteraciones N° de operaciones por iteración: 20
eliminando x_2 : 234 iteraciones N° de operaciones por iteración: 20	eliminando x_2 : 172 iteraciones N° de operaciones por iteración: 24

Algunos resultados obtenidos

	JACOBI, SIN ELIMINACION	G-SEIDEL, SIN ELIMINACION
y_i	iteración: 276	iteración: 180
y_1	-1.6000003395753	-1.60000023650372
y_2	-1.200000614362113	-1.20000041511307
y_3	-0.8000008042734	-0.8000005314308103
y_4	-0.4000008992457	-0.400000586681735
y_5	-8.992457323706 E-7	-5..866817359215237 E-7

METODO DE NEWTON-RAPHSON

Ejemplo 1 : (Ver [7],pág.80)

Sea la ecuación proveniente de la reacción química de una partícula catalítica porosa :

$$\begin{aligned} \frac{d \theta}{d x} &= B Da (1 - \gamma) \exp\left(\frac{\theta}{(1+\theta/\gamma)}\right) - \beta (\theta - \theta_c) = R_1(\theta, \gamma) \\ \frac{d \gamma}{d x} &= Da (1 - \gamma) \exp\left(\frac{\theta}{(1+\theta/\gamma)}\right) = R_2(\theta, \gamma) \end{aligned} \quad (1)$$

donde :

θ = medida de la temperatura

γ = conversión

Da = número de Damköler

γ = medida de la energía

β = medida del coeficiente de transferencia de calor

θ_c = medida de la temperatura del medio refrigerante

λ = radio del reciclo

$x \in [0,1]$

Las condiciones de borde son :

$$\theta(0) = (1 - \lambda) \theta(1)$$

$$\gamma(0) = (1 - \lambda) \gamma(1)$$

Construyendo una malla uniforme en $[0,1]$ con puntos de la forma i/n , con $n = 2$, $i = 0,1,2$; y si $B = 4$, $Da = 0.1$, $\gamma = 20$, $\lambda = 0.5$, $\beta = 0$, se obtiene la siguiente aproximación de (1): llamamos

$$\theta_1 = 0.375 x_1 + 0.75 x_3 - 0.125 x_5$$

$$\theta_2 = -0.125 x_1 + 0.75 x_3 + 0.375 x_5$$

entonces, resulta el sistema no lineal: $F(x) = 0$, $F = (f_1, \dots, f_6)$,

$x = (x_1, \dots, x_6)^t$, donde

$$f_1 = -2x_1 + 2x_3 - 0.4 (1 - 0.375x_2 - 0.75x_4 + 0.125x_6) \exp(20 \theta_1 / (20 + \theta_1))$$

$$f_2 = -2x_2 + 2x_4 - 0.1 (1 - 0.375x_2 - 0.75x_4 + 0.125x_6) \exp(20 \theta_1 / (20 + \theta_1))$$

$$f_3 = -2x_3 + 2x_5 - 0.4 (1 + 0.125x_2 - 0.75x_4 - 0.375x_6) \exp(20 \theta_2 / (20 + \theta_2))$$

$$f_4 = -2x_4 + 2x_6 - 0.1 (1 + 0.125x_2 - 0.75x_4 - 0.375x_6) \exp(20 \theta_2 / (20 + \theta_2))$$

$$f_5 = -x_1 + 0.5x_5$$

$$f_6 = -x_2 + 0.5x_6$$

Las componentes del vector x representan los siguientes valores:

$$x_1 = \theta_0 \simeq \theta(0)$$

$$x_4 = y_1 \simeq y(0.5)$$

$$x_2 = y_0 \simeq y(0)$$

$$x_5 = \theta_2 \simeq \theta(1)$$

$$x_3 = \theta_1 \simeq \theta(0.5)$$

$$x_6 = y_2 \simeq y(1)$$

Si se elimina x_6 a partir de f_6 , se obtiene el nuevo sistema :

$$\tilde{F}(\bar{x}) = 0 \quad , \quad \bar{x} = (x_1, \dots, x_5)^t \quad , \quad \tilde{F} = (f_1, \dots, f_5) \quad , \quad \text{donde}$$

$$\tilde{f}_1 = -2x_1 + 2x_9 - 0.4(1 - 0.125x_2 - 0.75x_4) \exp(20 \theta_1 / (20 + \theta_1))$$

$$\tilde{f}_2 = -2x_2 + 2x_4 - 0.1(1 - 0.125x_2 - 0.75x_4) \exp(20 \theta_1 / (20 + \theta_1))$$

$$\tilde{f}_9 = -2x_9 + 2x_5 - 0.4(1 - 0.625x_2 - 0.75x_4) \exp(20 \theta_2 / (20 + \theta_2))$$

$$\tilde{f}_4 = -2x_4 + 4x_2 - 0.1(1 - 0.625x_2 - 0.75x_4) \exp(20 \theta_2 / (20 + \theta_2))$$

$$\tilde{f}_5 = -x_1 + 0.5x_5$$

Resultados obtenidos

Criterio de convergencia utilizado:

$$|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0.5 \cdot 10^{-5} \quad , \quad \forall i \quad \|F\|_2 < 0.5 \cdot 10^{-5}$$

NEWTON-RAPHSON SIN ELIMINACION			
Iteracion	x_1	x_2	x_9
0	0.7259	0.1815	1.0520
1	0.9554667424	0.2988666866	1.9767094142
2	0.964050249327	0.241012562985	1.989760745939
3	0.9640468661445	0.2410117165961	1.989759194954
4	0.964046866149	0.2410117165939	1.989759194954

Iteracion	x_4	x_5	x_6
0	0. 2690	1. 4518	0. 9691
1	0. 944177954218	1. 910988484850	0. 47778887921
2	0. 94744018655	1. 928100498565	0. 4820251247705
3	0. 947499789798	1. 928098792289	0. 482029499072
4	0. 947489789798	1. 928098792287	0. 482029489071

N^o de operaciones por iteracion: 186

NEWTON-RAPHSON ELIMINANDO x_6 A PARTIR DE f_6			
Iteracion	x_1	x_2	x_3
0	0. 7259	0. 1815	1. 0520
1	0. 955481892497	0. 238870458792	1. 976726180821
2	0. 96405028904	0. 24101255979	1. 98976074017
3	0. 9640468661444	0. 2410117165861	1. 989759184954
4	0. 964046866143	0. 2410117165959	1. 989759184954

	x_4	x_5	x_6
0	0. 2690	1. 4518	
1	0. 944181546056	1. 91096866487	0. 477740917584
2	0. 94744018509	1. 928100478094	0. 48202511958
3	0. 947499789798	1. 928098792288	0. 482029499072
4	0. 947499789798	1. 928098792287	0. 482029489071

N^o de operaciones por iteracion : 195

Sin eliminación: converge en 4 iteraciones.

Eliminando x_0 a partir de f_0 : converge en 4 iteraciones.

Nota

En el Método de Newton-Raphson obtenido de eliminar x_0 a partir de f_0 , se calculó, $\forall k$, x_0^k a partir de f_0 , es decir, $x_0^k = 2 x_2^k$, aunque este cómputo no es tenido en cuenta cuando se calcula el número de operaciones efectuadas en cada iteración.

Ejemplo 2: (Ver [7],pág. 93)

La difusión no isotérmica y la reacción química de primer orden de una partícula catalítica porosa son descritas por una ecuación diferencial de segundo orden

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{a}{x} \frac{dy}{dx} = \phi^2 y \exp(\gamma\beta(1-y)/(1+\beta(1-y))) \quad (2)$$

con las condiciones de contorno

si $x = 0$, $y'(x) = 0$

si $x = 1$, $y = 1$

donde :

y = concentración del componente reactivo

a , β , ϕ = parámetros $x \in [0,1]$

Sea $\Pi = \{ x_1, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = 1 \}$ una partición de $[0,1]$, con $x_i = (i - 1)/n$, $h = 1/n$.

Si $a = 0.$, $\gamma = 20.$, $\beta = 0.05$, $\phi = 1.$, $n = 10$, $h = 0.1$,

entonces resulta la siguiente aproximación de diferencias finitas de (2)

$$y(0) = y(2)$$

$$y(n+1) = 1.$$

Para $i = 1, \dots, n$,

$$\theta = \frac{1 - y_i}{(1 + 0.05(1 - y_i))}$$

$$f_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} - 0.01 y_i \exp(\theta) = 0$$

Las incógnitas son y_1, y_2, \dots, y_n ; además, $y_0 = y(0)$ e $y_{n+1} = y(n+1)$.

Si se elimina y_2 a partir de f_1 , resulta el siguiente sistema:

$$\alpha = \frac{2y_1 + 0.01y_1 \exp((1-y_1)/(1+0.05(1-y_1)))}{2} \quad (= y_2)$$

$$\tilde{f}_2 = y_1 - 2\alpha + y_3 - 0.01\alpha \exp((1-\alpha)/(1+0.05(1-\alpha))) = 0$$

$$\tilde{f}_3 = \alpha - 2y_3 + y_4 - 0.01y_3 \exp((1-y_3)/(1+0.05(1-y_3))) = 0$$

$$y_{n+1} = 1.$$

Para $i = 4, \dots, n$,

$$\theta = \frac{(1 - y_i)}{1+0.05(1-y_i)}$$

$$\tilde{f}_i = y_{i-1} - 2y_i + y_{i+1} - 0.01y_i \exp(\theta) = 0$$

Las incógnitas son y_1, y_2, \dots, y_n .

En cada paso de la eliminación, se calcula también

$$y_2^k = \frac{2y_1^k + 0.01y_1^k \exp((1-y_1^k)/(1+0.05(1-y_1^k)))}{2}$$

Dicha expresión es obtenida a partir de f_1 , pero no es tenido en cuenta, al eliminar y_2 , cuando se calcula el número de operaciones efectuadas en cada iteración.

Criterio de convergencia: $|y_i^{k+1} - y_i^k| \leq 0.5 \cdot 10^{-5} \forall i$, y $\|F\|_2 < 0.5 \cdot 10^{-5}$.

Se ha tomado $y_i^0 = 1$ uniformemente, en primer lugar y luego $y_i^0 = 4$.

NEWTON-RAPHSON SIN ELIMINACION			
Iteracion	$x_1 = 0.$	$x_2 = 0.1$	$x_3 = 0.2$
0	1.	1.	1.
1	0.5	0.505	0.520
2	0.551364825	0.55565589	0.568559276
3	0.55218152031	0.556459887155	0.56932605646
4	0.55218171951	0.556460077289	0.569326297627
	$x_4 = 0.3$	$x_5 = 0.4$	$x_6 = 0.5$
0	1.	1.	1.
1	0.545	0.580	0.625
2	0.590163394	0.620608682	0.6600772365
3	0.590870991318	0.621298870005	0.660616138761
4	0.590871158282	0.6212990184904	0.660616265578

NEWTON-RAPHSON SIN ELIMINACION

Iteracion	$x_7 = 0.6$	$x_8 = 0.7$	$x_9 = 0.8$
0	1.	1.	1.
1	0.680	0.745	0.820
2	0.7087785659	0.76698185483	0.8347454665
3	0.709216625028	0.76726926104	0.8349672487
4	0.709216728010	0.76726999891	0.83496790008
	$x_{10} = 0.9$	$x_{11} = 1.$	
0	1.	1.	
1	0.905	1.	
2	0.91239480944	1.	
3	0.912505819609	1.	
4	0.91250589967	1.	

N° de operaciones por iteracion : 155

NEWTON-RAPHSON ELIMINANDO x_2 A PARTIR DE f_1

Iteracion	$x_1 = 0.$	$x_2 = 0.1$	$x_3 = 0.2$
0	1.	1.	1.
1	0.4997547272	0.50882552259	0.51978197978
2	0.5513499467	0.555624664177	0.5685459019
3	0.552181511059	0.556459874085	0.569926047
4	0.55218171951	0.556460077282	0.569926297627

NEWTON-RAPHSON ELIMINANDO x_2 A PARTIR DE f_1

Iteracion	$x_4 = 0.3$	$x_5 = 0.4$	$x_6 = 0.5$
0	1.	1.	1.
1	0.54480923231	0.5798964848	0.6248697979
2	0.59015097519	0.6205979229	0.6600682088
3	0.5908709895	0.62129896921	0.66061619901
4	0.590871158282	0.62129900184	0.66061626557
	$x_7 = 0.6$	$x_8 = 0.7$	$x_9 = 0.8$
0	1.	1.	1.
1	0.6798909898	0.7449182424	0.81994549
2	0.7087719156	0.7669264068	0.8347418319
3	0.70921662038	0.76726325754	0.8349672464
4	0.709216728010	0.76726399891	0.83496790008
	$x_{10} = 0.9$	$x_{11} = 1.$	
0	1.	1.	
1	0.9049727474	1.	
2	0.91239298587	1.	
3	0.91250581249	1.	
4	0.91250589967	1.	
N ^o de operaciones por iteracion : 136			

Sin eliminación: converge en 4 iteraciones.

Eliminando x_2 a partir de f_1 : converge en 4 iteraciones.

NEWTON-RAPHSON SIN ELIMINACION

Iteracion	$x_1 = 0.$	$x_2 = 0.1$	$x_9 = 0.2$
0	4.	4.	4.
1	0.7266745614	0.7204980124	0.737724689
2	0.54900171895	0.5474074927	0.56065097002
3	0.55215675718	0.5564355079	0.569302802149
4	0.552181719996	0.5564600771	0.56932628745
5	0.55218171951	0.5564600772	0.5693262976
	$x_4 = 0.3$	$x_5 = 0.4$	$x_6 = 0.5$
0	4.	4.	4.
1	0.75152957095	0.770816900166	0.7955772167
2	0.5828051985	0.619990264009	0.6549588442
3	0.59084952712	0.6212197489	0.66059978924
4	0.5908711581	0.62129901895	0.6606162654
5	0.5908711582	0.62129901849	0.6606162655
	$x_7 = 0.6$	$x_8 = 0.7$	$x_9 = 0.8$
0	4.	4.	4.
1	0.82579984474	0.8619646377	0.902909694956
2	0.704086411021	0.763356006009	0.8323415998
3	0.70920992705	0.7672591989	0.834960514
4	0.70921672279	0.7672698888	0.8349678007
5	0.70921672801	0.76726988991	0.8349678008

NEWTON-RAPHSON SIN ELIMINACION

Iteracion	$x_{10} = 0.9$	$x_{11} = 1.$
0	4.	1.
1	0.9485959209	1.
2	0.911809844	1.
3	0.9125024426	1.
4	0.912505839	1.
5	0.912505839	1.

N^o de operaciones por iteracion : 153

NEWTON-RAPHSON ELIMINANDO x_2 A PARTIR DE f_1

Iteracion	$x_1 = 0.$	$x_2 = 0.1$	$x_3 = 0.2$
0	4.	4.	4.
1	0.7266971432	0.731455064739	0.7377448251
2	0.54294906708	0.54719920051	0.56060377954
3	0.55215624369	0.556484514304	0.56930239662
4	0.552181719927	0.55646007709	0.5693262974
5	0.552181719517	0.5564600772	0.5693262976

	$x_4 = 0.3$	$x_5 = 0.4$	$x_6 = 0.5$
0	4.	4.	4.
1	0.75154124796	0.7708314968	0.7955899112
2	0.58276455287	0.61995600661	0.65488009465

3	0.59084911174	0.62121088805	0.6605994798
4	0.590871158119	0.62123901894	0.6606162654
5	0.590871158202	0.62123901894	0.6606162655
	$x_7 = 0.6$	$x_8 = 0.7$	$x_9 = 0.8$
0	4.	4.	4.
1	0.82578956046	0.8619722815	0.90290879646
2	0.7040634054229	0.7699889318	0.8929901165
3	0.70920908904	0.7672590155	0.8949609919
4	0.709216727909	0.76726939889	0.8949679007
5	0.70921672801	0.7672693989	0.8949679008
	$x_{10} = 0.9$	$x_{11} = 1.$	
0	4.	1.	
1	0.9485984794	1.	
2	0.911896499	1.	
3	0.91250281	1.	
4	0.91250589965	1.	
5	0.91250589967	1.	
N ^o de operaciones por iteración: 196			

Sin eliminación: converge en 5 iteraciones.

Eliminando x_2 a partir de f_1 : converge en 5 iteraciones.

Ejemplo 3 : (Ver [7], pág. 95)

Sea la ecuación diferencial

$$y''(x) = -1 - \text{sen}(y'(x)) \quad (3)$$

con las condiciones de borde:

$$y(0) = 0. \quad , \quad y(1) = 1. \quad , \quad x \in [0,1]$$

Sea $\Pi = \{ x_0 = 0, x_1, \dots, x_n, x_{n+1} = 1 \}$ una partición de $[0,1]$,

donde

$$x_i = i / (n+1) \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

Tomando $h=0.05$ y $n=19$, mediante el Método de diferencias finitas se obtiene el siguiente sistema no lineal :

$$y_0 = y(0) = 0.$$

$$y_{n+1} = y(n+1) = 1.$$

Para $i = 1, \dots, n$,

$$f_i = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} + 1 + \text{sen}\left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h}\right) = 0$$

Si se elimina y_1 a partir de f_1 , resulta el siguiente sistema :

$$\alpha = \frac{1}{2} (\tilde{y}_2 + h^2 + h^2 \text{sen}(\tilde{y}_2 / (2h)))$$

$$\tilde{f}_2 = \frac{1}{h^2} (\tilde{y}_3 + \alpha - 2\tilde{y}_2) + 1 + \text{sen}((\tilde{y}_3 - \alpha) / (2h)) = 0$$

$$\tilde{y}_{n+1} = y(n+1) = 1.$$

Para $i = 3, \dots, n$,

$$\left[\tilde{f}_i = \frac{\tilde{y}_{i+1} + \tilde{y}_{i-1} - 2\tilde{y}_i}{h^2} + 1 + \operatorname{sen}\left(\frac{\tilde{y}_{i+1} - \tilde{y}_{i-1}}{2h}\right) = 0 \right.$$

Valores iniciales tomados : 1. , $\forall i = 1, \dots, n$

Criterio de convergencia : el mismo que en el ejemplo anterior.

Confrontar los resultados con el Ejemplo 2 de los Métodos no lineales de Jacobi y G-Seidel.

NEWTON-RAPHSON		NEWTON-RAPHSON
ITERACION i	Sin eliminación	Eliminando y_1 a partir de f_1
x_i	y_i	\tilde{y}_i
0.01	0.1137578696	0.10729023710493
0.1	0.20979993	0.19417777773
0.15	0.29871799	0.28437982951
0.2	0.380859567	0.36774275636
0.25	0.456555207	0.4446001741
0.30	0.526119352	0.5152694248
0.35	0.589851099	0.58005237021
0.40	0.6480349569	0.6392361471
0.45	0.7009415513	0.6930938858
0.50	0.748828312178	0.74188599301
0.55	0.7919401087	0.7858578019
0.60	0.83050986609	0.8252461906
0.65	0.8647591472	0.8602741698
0.70	0.894898707009	0.8911544424
0.75	0.92112901972	0.918089395623
0.80	0.94364078093	0.94127190692
0.85	0.96261538164	0.9608834257
0.90	0.97822536801	0.97709983114
0.95	0.990694867	0.99008616779

ITERACION 2	Sin eliminación	Eliminando y_1 a partir de f_1
x_i	y_i	\tilde{y}_i
0.05	9.454049963 E-2	9.450929298204 E-2
0.1	0.1840971544	0.18404059241
0.15	0.268675876	0.26863197276
0.20	0.348254944	0.348211481037
0.25	0.4228339874	0.422788061605
0.30	0.4924324687	0.49238409879
0.35	0.55709622008	0.55704467045
0.40	0.61689105602	0.616837158806
0.45	0.6719043875	0.671849983151
0.50	0.722242584	0.722187914679
0.55	0.7680289986	0.76797551999
0.60	0.809398109	0.809348367102
0.65	0.84649857202	0.84645913018
0.70	0.879484345	0.87944441517
0.75	0.9085150096	0.908480784381
0.80	0.93375272215	0.93372499238
0.85	0.95596017196	0.9559392578
0.90	0.9734987445	0.9734848094
0.95	0.9883270971	0.9883201696

NEWTON-RAPHSON		NEWTON-RAPHSON
ITERACION 3	Sin eliminación	Eliminando y_1 a partir de f_1
x_i	y_i	\tilde{y}_i
0.05	0.44435052 E-2	0.4443504207819 E-2
0.10	0.183976897378	0.1839768966060
0.15	0.268546425649	0.26854642488
0.20	0.34812219199	0.348122190607
0.25	0.4226990276	0.42269902689
0.30	0.49229665260	0.492296651779
0.35	0.5569590868	0.5569590860
0.40	0.6167533769	0.61675337605
0.45	0.671767715	0.671767714
0.50	0.7221090842	0.72210908338
0.55	0.7679005709	0.76790057004
0.60	0.809278506	0.809278505
0.65	0.846389573	0.846389572
0.70	0.8793880029	0.879388002091
0.75	0.908432961	0.908432960763
0.80	0.933686191	0.9336861909881
0.85	0.955309948	0.9553099479
0.90	0.97346524	0.973465248
0.95	0.988310430	0.988310430264
ITERACION 4	Sin eliminación	Eliminando y_1 a partir de f_1
x_i	y_i	\tilde{y}_i
0.05	0.444350339 E-2	0.44435032154 E-2
0.10	0.18397689538	0.18397689538
0.15	0.26854642964	0.26854642964
0.20	0.3481221894084	0.348122189408
0.25	0.4226990256775	0.4226990256
0.30	0.49229665065	0.49229665065
0.35	0.55695908494	0.55695908494
0.40	0.61675337501	0.61675337501
0.45	0.67176771941	0.67176771941
0.50	0.722109082421	0.722109082421
0.55	0.767900569191	0.76790056919
0.60	0.8092785047	0.8092785047
0.65	0.8463895716	0.8463895716
0.70	0.87938800130	0.87938800130
0.75	0.908432960125	0.908432960125
0.80	0.93368619045	0.93368619045
0.85	0.9553099475	0.9553099475
0.90	0.973465248491	0.9734652484
0.95	0.98831043011	0.98831043011
	N ^o operac. p/il:519	N ^o operac. p/il:479

Sin eliminación: converge en 4 iteraciones.

Eliminando y_1 a partir de f_1 : converge en 4 iteraciones.

Ejemplo 4 : (Ver [7],pág.96)

La difusión de masa y la reacción química de primer orden en una partícula isotérmica catalítica porosa, teniendo en cuenta la dependencia de concentración del coeficiente de difusión, puede ser descrito mediante una ecuación diferencial de segundo orden :

$$\frac{d^2 \theta}{dx^2} + \frac{1}{1-\theta} \left(\frac{d\theta}{dx} \right)^2 = \phi^2 \theta (1-\theta) \quad (4)$$

con las condiciones de borde :

$$x = 0, \quad \frac{d\theta}{dx} = 0 \quad \quad \quad x = 1, \quad \theta = 1. \quad , \quad x \in [0,1]$$

Sea $\Pi = \{ x_1 = 0, x_2, \dots, x_n, x_{n+1} = 1 \}$ una partición de $[0,1]$, con $h = 0.25$, $n = 4$ y $x_i = (i-1)/n$, $i = 1, \dots, 4$.

Si $\phi = 1$, resulta la siguiente aproximación de diferencias finitas de (4) :

$$y_0 = y_2$$

$$y_{n+1} = y(n+1) = 1$$

Para $i = 1, \dots, n$,

$$f_i = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} + \frac{1}{1-y_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right)^2 - y_i(1-y_i) = 0$$

incógnitas : y_i ($\simeq \theta(x_i)$) , $i = 1, \dots, n$

Si se elimina y_2 a partir de f_1 , resulta un nuevo sistema :

$$\alpha = \frac{2y_1 + h^2 y_1 (1 - y_1)}{2}$$

$$\tilde{f}_2 = \frac{y_3 + y_1 - 2\alpha}{h^2} + \frac{1}{1-\alpha} \left(\frac{y_3 - y_1}{2h} \right)^2 - \alpha (1 - \alpha) = 0$$

$$\tilde{f}_3 = \frac{1}{h^2} (y_4 + \alpha - 2y_3) + \frac{1}{1-y_3} \left(\frac{y_4 - \alpha}{2h} \right)^2 - y_3 (1 - y_3) = 0$$

$$y_{n+1} = 1.$$

Para $i = 4, \dots, n$,

$$\tilde{f}_i = \frac{y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i}{h^2} + \frac{1}{1-y_i} \left(\frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2h} \right)^2 - y_i (1 - y_i) = 0$$

En cada paso se calculó también :

$$y_2^k = \frac{1}{2} (2y_1^k + h^2 y_1^k (1 - y_1^k)) , \text{ fórmula que es obtenida a partir de } f_1.$$

Resultados obtenidos

NEWTON-RAPHSON SIN ELIMINACION				
ITERACION	$x_1 = 0$	$x_2 = 0.25$	$x_3 = 0.50$	$x_4 = 0.75$
0	0.	0.	0.	0.
1	0.9207132380	0.94948552675	1.03760066086	1.19056589627
2	0.99952260130	0.99973160401	0.99996988549	0.99991157157
3	0.99999961022	0.99999962952	0.99999978998	0.999999804549
4	0.99999999844	0.99999999849	0.99999999866	0.999999999160
N° de operaciones por iteracion: 69				

NEWTON-RAPHSON ELIMINANDO y_2 A PARTIR DE f_1				
ITERACION	$x_1 = 0$	$x_2 = 0.25$	$x_3 = 0.50$	$x_4 = 0.75$
0	0.	0.	0.	0.
1	0.9207132380	0.92299449966	1.03760066086	1.19056583627
2	0.9994218267	0.99949988421	1.00000422972	0.99999011264
3	0.9999999886	0.99999998572	0.99999997480	1.00000025991
4	1.0000000005	1.00000000526	1.00000000047	0.99999999794

N^o de operaciones por iteracion : 62

El criterio de convergencia utilizado, es el mismo que en el ejemplo anterior.

Sin eliminación: converge en 4 iteraciones.

Eliminando y_2 a partir de f_1 : converge en 4 iteraciones.

Ejemplo 5 : (Ver [7],pág.97)

La combinación de calor y transferencia de masa dentro y fuera de una partícula catalítica porosa, y la reacción química de primer orden, pueden ser descriptas por una ecuación diferencial no lineal:

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \phi^2 y \exp((\gamma\beta(\xi-y)/(1+\beta(\xi-y)))) \quad (5)$$

con las condiciones de contorno::

$$x = 0, \quad \frac{d y}{d x} = 0. \quad x = -1, \quad -\frac{d y}{d x} = Sh (y-1) \quad x \in [0,1]$$

donde

$$\xi = (1 - Sh/Nu) y(1) + Sh/Nu$$

Sea $\gamma = 20.$, $\beta = 0.1$, $Sh = 30.$, $Nu = 10.$, $\phi = 0.2$;

$n = 5$, $h = 0.25$, $x_i = (i-1)/n$, $i = 1, \dots, 5$

Mediante el Método de diferencias finitas, se obtiene la siguiente aproximación de (5) :

$$y_0 = y_2$$

$$y_{n+1} = y_{n-1} - 2h \cdot 30 (y_n - 1)$$

Para $i = 1, \dots, n$,

$$\mu = \frac{-4 y_1 + 6 - 2y_i}{1.3 + 0.2y_1 - 0.1y_i}$$

$$f_i = y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i - 0.04 h^2 y_i \exp(\mu) = 0$$

Incógnitas: y_i ($\approx y(x_i)$) $i = 1, \dots, n$

Si se elimina y_n a partir de f_{n-1} , resulta el nuevo sistema :

$$y_0 = y_2$$

Para $i = 1, \dots, n-2$,

$$\mu = \frac{-4 y_1 + 6 - 2y_i}{1.3 + 0.2y_1 - 0.1y_i}$$

$$\tilde{f}_i = y_{i+1} + y_{i-1} - 2y_i - 0.04 h^2 y_i \exp(\mu) = 0$$

$$\lambda = -y_{n-2} + 2y_{n-1} + 0.04 h^2 y_{n-1} \exp((-4y_1 + 6 - 2y_{n-1}) / (1.3 + 0.2y_1 - 0.1y_{n-1})) \quad (\approx y_n)$$

$$\tilde{f}_n = 2y_{n-1} - 2h30(\lambda-1) - 2\lambda - 0.04h^2\lambda \exp((-4y_1 + 6 - 2\lambda)/(1.3 + 0.2y_1 - 0.1\lambda)) = 0$$

Resultados obtenidos

NEWTON-RAPHSON SIN ELIMINACION			
ITERACION	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.25$	$x_2 = 0.50$
0	5.	5.	5.
1	0.9999981738	0.9999982808	0.9999986018
2	0.9770940715	0.97849815001	0.98246894523
3	0.977090468989	0.978978916282	0.982420400669
4	0.97703046846	0.978978315749	0.98242040027
ITERACION	$x_3 = 0.75$	$x_4 = 1$	
0	5.	5.	
1	0.9999991368	0.9999998858	
2	0.989182138512	0.998570587105	
3	0.989152920132	0.998566498809	
4	0.98915291989	0.99856649847	
N° de operaciones por iteracion: 129			

NEWTON-RAPHSON ELIMINANDO y_n A PARTIR DE f_{n-1}			
ITERACION	$x_0 = 0$	$x_1 = 0.25$	$x_2 = 0.50$
0	5.	5.	5.
1	0.99999819934	0.999998306399	0.99999862733
2	0.977128727911	0.978472669401	0.982509091797
3	0.977030696185	0.978378542992	0.982420629705
4	0.977030469275	0.978978316552	0.982420401069
ITERACION	$x_3 = 0.75$	$x_4 = 1$	
0	5.	5.	
1	0.999999162326	1.002498475679	
2	0.989215514054	0.998609567108	
3	0.989152597963	0.998566849254	
4	0.989152920665	0.998566639287	
N° de operaciones por iteracion: 130			

Sin eliminación: converge en 4 iteraciones.

Eliminando y_n a partir de f_{n-1} : converge en 4 iteraciones.

El criterio de convergencia que se utilizó, fue el mismo que en el ejemplo anterior.

En el Método de Newton-Raphson obtenido de eliminar y_n , se calculó también

$$\tilde{y}_n^k = -\tilde{y}_{n-2}^k + 2\tilde{y}_{n-1}^k + 0.04h^2 \tilde{y}_{n-1}^k \exp((-4\tilde{y}_1^k + 6 - 2\tilde{y}_{n-1}^k) / (1.3 + 0.2\tilde{y}_1^k - 0.1\tilde{y}_{n-1}^k))$$

Esta expresión se obtiene a partir de f_{n-1} , pero no se la tuvo en cuenta al contar el número de operaciones por iteración.

Ejemplo 6: (ver [8])

Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F = (f_1, f_2)$ definida así :

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 1.$$

$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 2.)^2 + (x_2 - 0.5)^2 - 1.$$

Este sistema no lineal tiene por raíces

$$r_1 \approx (1.54634288, 1.39117631)^t$$

$$r_2 \approx (1.06734609, 0.139227667)^t$$

VALORES INICIALES	NEWTON-RAPHSON	Nº DE OPERAC.P/ITERACION
$(0.1, 2.)^t$	Sin eliminación: converge a r_2 en 24 it.	Sin eliminación: 13
$(0.1, 2.)^t$	Eliminando x_2 a partir de f_1 : converge a la 1ª comp. de r_2 en 7 it.	Eliminando x_2 a partir de f_1 : 8

Criterio de convergencia: $|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0.5 \cdot 10^{-15}$ y $\|F\|_2 < 10^{-15}$

Ejemplo 7: (ver [8])

Sea $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $F = (f_1, f_2)$ definida así :

$$f_1(x_1, x_2) = -13 + x_1 + ((-x_2 + 5)x_2 - 2)x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = -29 + x_1 + ((x_2 + 1)x_2 - 14)x_2$$

Raíz : $(5., 4.)^t$

VALORES INICIALES	NEWTON-RAPHSON	Nº DE OP. P/ ITERACION
$(15., -2.)^t$	Sin eliminación: converge en 43 it.	Sin eliminación: 13
$(15., -2.)^t$	Eliminando x_1 a partir de f_1 : converge en 43 it.	Eliminando x_1 a partir de f_1 : 8

Criterio de convergencia: el mismo que en el ejemplo anterior.

Ejemplo 8: (ver [8])

Sea $F = (f_1, \dots, f_n)$ definida por:

$$f_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 T_i(z) dz - \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n T_i(x_j), \quad i = 1, \dots, n$$

donde las $T_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i=1, \dots, n$ están definidas así :

$$T_0(z) = 1$$

$$T_1(z) = 2z - 1$$

$$T_{i+1}(z) = 2(2z - 1)T_i(z) - T_{i-1}(z), \quad i = 1, 2, \dots$$

N	VALORES INICIALES	NEWTON-RAPHSON	Nº DE OP. P/ IT.
2	$x_i = i/(n+1), i=1,..,n$	S/eliminación: converge en 3 it.	S/eliminación: 11
2	$x_i = i/(n+1), i=1,..,n$	Eliminando x_1 a partir de f_1 : converge en 3 it.	Eliminando x_1 a a partir de f_1 : 6
3	$x_i = i/(n+1), i=1,..,n$	S/eliminación: diverge	S/eliminación: 54
3	$x_i = i/(n+1), i=1,..,n$	Eliminando x_1 a partir de f_1 : converge en 6 it.	Eliminando x_1 a partir de f_1 : 38

Criterio de convergencia: $|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0.5 \cdot 10^{-8}$, y $\|F\|_2^2 < 10^{-8}$

Ejemplo 9

Sea $F = (f_1, f_2)$ definida por

$$f_1(x_1, x_2) = 10000 x_1 x_2 - 1.$$

$$f_2(x_1, x_2) = \exp(-x_1) + \exp(-x_2) - 1.0001$$

Raíz : $\approx (0.1099 \cdot 10^{-4}, 9.096)$

Criterio de convergencia: $|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0.5 \cdot 10^{-5}$, y $\|F\|_2 < 10^{-10}$

VALORES INICIALES	NEWTON-RAPHSON	Nº DE OP. P/ ITERACION
$(0., 1.)^t$	S/eliminación: converge en 12 it.	S/eliminación: 11
$(0., 1.)^t$	Elim. x_1 a partir de f_1 : conv. en 10 it.	Elim. x_1 a partir de f_1 : 6

METODO SECANTE 2

Ejemplo 1

Sea $F = (f_1, f_2)$ tal que

$$f_1(x_1, x_2) = -3 + 2x_1 + x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = -1. + x_1x_2$$

Raíces: $(1., 1.)^t$ y $(0.5, 2.)^t$

Sea $R = (r_1, r_2)^t$ una raíz del sistema ; definimos

$$E_i^k = |x_i^k - r_i|, \quad \tilde{E}_i^k = |\tilde{x}_i^k - r_i|, \quad i = 1, 2$$

a) Eliminando x_1 a partir de f_1 , con valores iniciales

$$(x_1^{-1}, x_2^{-1})^t = (3.5, 0.5)^t, \quad (x_1^0, x_2^0)^t = (3., 0.)^t$$

$$(\tilde{x}_2^{-1}, \tilde{x}_2^0)^t = (0.5, 0.)^t$$

El Método Secante 2 converge, sin efectuar eliminación, a la raíz

$(1., 1.)^t$.

Los resultados obtenidos figuran en la siguiente tabla :

ITERACION k	E ₂ ^k	E ₂ ^k
0	1.	1.
1	0. 71428571	0. 2
2	0. 5	9. 0909123 E-2
3	0. 1612903225	1. 4084637 E-2
4	4. 85496893 E-2	1. 1587143 E-3
5	6. 47165415 E-3	1. 1587149 E-5
6	2. 9777579 E-4	1. 6033649 E-5
7	1. 914149905 E-6	1. 8605449 E-8
N ^o DE OPERACIONES POR ITERACION		
Sin Eliminación: 6		
Eliminando x_1 a partir de f_1 : 6		

b) Eliminando x_1 a partir de f_1 , con valores iniciales

$$(x_1^{-1}, x_2^{-1})^t = (-3.5, 4.5)^t$$

$$(x_1^0, x_2^0)^t = (-3., 4.)^t ; (\tilde{x}_2^{-1}, \tilde{x}_2^0)^t = (4.5, 4.)^t$$

El método converge, sin eliminación, a la raíz $(0.5, 2.)^t$

ITERACION k	E_2^k	\tilde{E}_2^k
0	2.	2.
1	1.45454545	0.9090910
2	1.070929076	0.4651169
3	0.44356495	0.17809439002
4	0.18952075	5.0410271 E-2
5	5.14759780 E-2	7.9080069 E-3
6	7.86123455 E-3	9.4832954 E-4
7	9.81998038 E-4	2.8610229 E-6
8	2.9784248 E-6	8.79444517 E-10
N° DE OPERACIONES POR ITERACION		
Sin eliminación: 6		
Eliminando x_1 a partir de f_1 : 6		

c) Eliminando x_2 a partir de f_2 , con valores iniciales

$$(x_1^{-1}, x_2^{-1})^t = (3.5, 0.5)^t , (x_1^0, x_2^0)^t = (3., 0.)^t$$

$$(\tilde{x}_1^{-1}, \tilde{x}_1^0)^t = (3.5, 3.)^t$$

El método converge, sin efectuar eliminación, a la raíz $(1., 1.)^t$

ITERACION k	E_1^k	\tilde{E}_1^k
0	2.	2.
1	0.95714285	0.2499999
2	0.25	7.6923019 E-2
3	8.064516129 E-2	1.1963626 E-2
4	2.42718446 E-2	7.4183941 E-4
5	9.29582707 E-3	8.2254410 E-6
6	1.488878671 E-4	6.096691699 E-9
7	9.57071952 E-7	5.01820807 E-14
N° DE OPERACIONES POR ITERACION		
Sin Eliminación: 6		
Eliminando x_2 : 6		

Ejemplo 2: (ver [8])

Sea $F = (f_1, f_2)$ definida por

$$f_1(x_1, x_2) = x_1^2 - x_2 - 1.$$

$$f_2(x_1, x_2) = (x_1 - 2.)^2 + (x_2 - 0.5)^2 - 1.$$

Raíces : $r_1 \approx (1.54634288, 1.39117631)^t$

$r_2 \approx (1.06734608580669, 0.1392276668868)^t$

Con los siguientes valores iniciales:

$$(x_1^{-1}, x_2^{-1})^t = (0.1, 2.)^t, \quad (x_1^0, x_2^0)^t = (0.1, 2.)^t$$

$$(x_1^{-1}, x_1^0)^t = (0.2, 0.1)^t,$$

la iteración converge a r_2 ; y si se elimina x_2 a partir de f_1 ,
el método obtenido por dicha eliminación converge a la primera
componente de r_2 .

ITERACION k	E_1^k	\tilde{E}_1^k
0	0.967346	0.967346
1	2.2517210858	8.611088894 E-2
2	0.19490010104	9.995804442 E-2
3	1.194491662989	5.598596782 E-3
4	7.944121725 E-2	2.80227715 E-4
5	1.006579888 E-2	2.17728643 E-6
6	8.59335639 E-3	8.66856281 E-10
7	9.90581912 E-4	2.41473507 E-15
8	4.15298247 E-6	0
9	2.78260020 E-9	0
10	2.77278200 E-14	0

N^o DE OPERACIONES POR ITERACION

Sin Eliminación: 11
Eliminando x_2 a partir de f_1 : 8

Con el siguiente criterio de convergencia :

$$E_i^k = | x_i^k - r_i^i | < 0.5 \cdot 10^{-12}, \quad i = 1,2 \quad \text{donde } r_2 = (r_2^1, r_2^2),$$

Sin eliminación : el método converge en 10 iteraciones

Eliminando x_2 a partir de f_1 : converge en 7 iteraciones .

Ejemplo 3: (ver [8])

Sea $F = (f_1, f_2)$ definida por

$$f_1(x_1, x_2) = 10 \cdot x_1 x_2 - 1.$$

$$f_2(x_1, x_2) = \exp(-x_1) + \exp(-x_2) - 1.0001$$

$$\text{Raíz : } r = (r_1, r_2)^t \approx (2.784448663 \cdot 10^{-2}, 3.591375244)^t$$

$$\text{Valores iniciales: } (x_1^{-1}, x_2^{-1})^t = (0.01, 2.)^t, \quad (x_1^0, x_2^0)^t = (0., 1.)^t$$

a) Si se elimina x_2 a partir de f_2 , con valores iniciales

$$(\tilde{x}_1^{-1}, \tilde{x}_1^0)^t = (0.01, 0.)^t \text{ y el criterio de convergencia}$$

$$| x_i^{k+1} - x_i^k | \leq 0.5 \cdot 10^{-15} \quad \forall i, \quad \text{y } \| F \|_2 < 10^{-15}, \text{ los resultados}$$

obtenidos son los siguientes :

ITERACION k	x_1^k	\tilde{x}_1^k
0	0.	0.
1	8.7947663068 E-2	2.17983454808 E-2
2	4.5346667994 E-2	2.60763847910 E-2
3	1.6336090804 E-2	2.77686382202 E-2
4	2.808747786 E-2	2.78495794859 E-2
5	2.808667624 E-2	2.78444861737 E-2
6	2.788738659 E-2	2.78444866344 E-2
7	2.7844328981 E-2	2.784448663449 E-2
8	2.7844488907 E-2	2.7844486634485 E-2
9	2.78444866348 E-2	2.7844486634485 E-2
10	2.78444866344 E-2	2.7844486634485 E-2
11	2.7844486634485 E-2	2.7844486634485 E-2
Nº DE OPERACIONES POR ITERACION		
Sin Eliminación: 14	Eliminando x_2 : 6	

Sin Eliminación: converge en 11 iteraciones

Eliminando x_2 a partir de f_2 : converge en 8 iteraciones.

b) Si se elimina x_1 a partir de f_1 , con el mismo criterio de convergencia que en a) y valores iniciales $(\tilde{x}_2^{-1}, \tilde{x}_2^0)^t = (2., 1.)^t$, los resultados son los siguientes :

ITERACION k	x_2^k	\tilde{x}_2^k
0	1.	1.
1	2. 2052936991177	2. 4644840694636
2	2. 517906920053	2. 755467060979
3	8. 1867983634	8. 22235928804
4	8. 418129760089	8. 4529793198433
5	8. 5972030629907	8. 564824731489
6	8. 585508972187	8. 58930921922289
7	8. 591222579446	8. 59194998077982
8	8. 591974717119	8. 5919752062096
9	8. 5919752446929	8. 5919752446887
10	8. 591975244689505	8. 591975244689504
11	8. 591975244689505	8. 591975244689505
12	8. 591975244689505	8. 591975244689505
N° DE OPERACIONES POR ITERACION		
Sin Eliminación : 14		
Eliminando x_1 : 8		

Sin Eliminación: converge en 11 iteraciones .

Eliminando x_1 a partir de f_1 : converge en 12 iteraciones .

Ejemplo 4

El mismo Ejemplo 1 del Método de Newton-Raphson .

Sin eliminación , los valores iniciales son :

$$x_i^{-1} = 0.5 \quad , \quad i=1, \dots, 6$$

$$x_1^0 = 0.7259 \quad ; \quad x_2^0 = 0.1815 \quad ; \quad x_3^0 = 1.0520 \quad ; \quad x_4^0 = 0.2630$$

$$x_5^0 = 1.4518 \quad ; \quad x_6^0 = 0.3631$$

Eliminando x_6 a partir de f_6 , los valores iniciales son :

$$\tilde{x}_i^{-1} = 0.5 \quad , \quad i=1, \dots, 5$$

$$\tilde{x}_1^0 = 0.7259 \quad ; \quad \tilde{x}_2^0 = 0.1815 \quad ; \quad \tilde{x}_3^0 = 1.0520 \quad ; \quad \tilde{x}_4^0 = 0.2630$$

$$\tilde{x}_5^0 = 1.4518$$

Criterio de convergencia : $|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0.5 \cdot 10^{-5}$, $\|F\|_2 < 10^{-5}$

Resultados Obtenidos

METODO SECANTE 2 SIN ELIMINACION			
Iteración	$x_1 = \theta_0$	$x_2 = y_0$	$x_3 = \theta_1$
0	0.7259	0.1815	1.0520
1	0.9050923274504	0.2262730897005	1.3076628426109
2	0.9629055949406	0.240726385925	1.387807736019
3	0.9640473893594	0.2410118496122	1.389757064527
4	0.9640470811583	0.2410117725619	1.3897594536544
Iteración	$x_4 = y_1$	$x_5 = \theta_2$	$x_6 = y_2$
0	0.2630	1.4518	0.3631
1	0.326915696245	1.8101846502114	0.452546161178
2	0.3469519150854	1.9258111896791	0.481452792527
3	0.347439277629	1.928094772486	0.4820297200802
4	0.3474398749123	1.9280941560846	0.4820295961866
N° DE OPERACIONES POR ITERACION : 650			

METODO SECANTE 2 ELIMINANDO x_{σ} A PARTIR DE f_{σ}

Iteración	$x_1 = \theta_0$	$x_2 = y_0$	$x_3 = \theta_1$
0	0. 7259	0. 1815	1. 0520
1	0. 8510112044889	0. 2127528130998	1. 2473185425459
2	0. 9610544220532	0. 2402635898178	1. 3852481085982
3	0. 9640582308986	0. 2410145570340	1. 3897590084847
4	0. 9640469235768	0. 2410117902034	1. 3897592474777
5	0. 9640468283886	0. 2410117064069	1. 3897590791128
Iteración	$x_4 = y_1$	$x_5 = \theta_2$	$x_{\sigma} = y_2$
0	0. 2630	1. 4518	
1	0. 9118283864995	1. 702022405702	0. 42550562619
2	0. 8468120280244	1. 922108887952	0. 4805271796856
3	0. 8474897543075	1. 928116455564	0. 48202911406801
4	0. 9474398140561	1. 928093840921	0. 4820234604069
5	0. 9474397719645	1. 928093650545	0. 4820234128126
N ^o DE OPERACIONES POR ITERACION : 477			

Sin eliminación: converge en 4 iteraciones.

Eliminando x_{σ} a partir de f_{σ} : converge en 5 iteraciones.

Nota

Al igual que para el Método de Newton-Raphson, se calculó, en el Método Secante obtenido por eliminación, x_{σ}^k a partir de f_{σ} , es decir, $x_{\sigma}^k = 2 x_2^k$; pero este cómputo no es tenido en cuenta cuando se calcula el número de operaciones efectuadas en cada iteración.

Ejemplo 5

El mismo Ejemplo 3 del Método de Newton-Raphson, pero en este caso, $h = 0.1$ y $n = 9$.

Valores iniciales : $x_i^{-1} = 0.5$, $x_i^0 = 1.$, $\forall i=1, \dots, n$

Criterio de convergencia : $|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0.5 \cdot 10^{-5}$, y $\|F\|_2 < 10^{-5}$.

METODO SECANTE 2 SIN ELIMINACION

Iteración	0.1	0.2	0.3
0	1.	1.	1.
1	0. 16497763694	0. 30798983699	0. 49779725519
2	0. 1826715156489	0. 946495842515	0. 490986066141
3	0. 184092405017	0. 94892088618	0. 4925455965
4	0. 1840714599991	0. 948288158601	0. 49250895446
5	0. 184071462709	0. 948288168757	0. 4925089654
Iteración	0.4	0.5	0.6
0	1.	1.	1.
1	0. 5545936798	0. 65868547622	0. 750491762495
2	0. 61479499704	0. 72024763316	0. 807631016269
3	0. 61702315665	0. 72237415438	0. 809517472008
4	0. 61698697095	0. 72234078540	0. 80948893227
5	0. 61698698201	0. 7223407958	0. 80948834163
Iteración	0.7	0.8	0.9
0	1.	1.	1.
1	0. 83024458084	0. 89822906500	0. 95472960365
2	0. 8780546534	0. 93275020885	0. 9729847282
3	0. 8795836098	0. 9382510493	0. 97953781667
4	0. 8795598816	0. 9380807495	0. 97352879118
5	0. 8795598894	0. 9380808067	0. 97352879427

N^o DE OPERACIONES POR ITERACION : 319

METODO SECANTE 2 ELIMINANDO x_1 A PARTIR DE f_1			
Iteración	0.1	0.2	0.3
0		1.	1.
1	0.166715195203	0.31343045680	0.442439469707
2	0.183394210985	0.34692229923	0.49089478389
3	0.184082116389	0.348309660103	0.49259364778
4	0.184071458060	0.34828816084	0.49250895704
5	0.184071461985	0.348288168757	0.4925089654
Iteración	0.4	0.5	0.6
0	1.	1.	1.
1	0.5585149565	0.66196286951	0.753081923228
2	0.61527522906	0.72066668215	0.807970947404
3	0.6170113173995	0.72236312927	0.80950789038
4	0.616986979708	0.72234078826	0.809488335049
5	0.61698698201	0.7223407958	0.80948834168
Iteración	0.7	0.8	0.9
0	1.	1.	1.
1	0.832163766008	0.89949314702	0.95534807948
2	0.878308071692	0.93291602048	0.97306540686
3	0.87957599208	0.93381983284	0.9735351284
4	0.87955988418	0.93380807688	0.97352879225
5	0.8795598894	0.93380808067	0.9735287942
N ^o DE OPERACIONES POR ITERACION: 255			

Sin eliminación: converge en 5 iteraciones.

Eliminando x_1 a partir de f_1 : converge en 5 iteraciones.

Ejemplo 6

Sea $F = (f_1, f_2)$ definida por

$$f_1(x_1, x_2) = -13 + x_1 + ((-x_2 + 5) x_2 - 2) x_2$$

$$f_2(x_1, x_2) = -29 + x_1 + ((x_2 + 1) x_2 - 14) x_2$$

Raíz : (5.,4.)^t

Valores iniciales : (x₁⁻¹, x₂⁻¹)^t = (8., -1.)^t ; (x₁⁰, x₂⁰)^t = (7., 1.)^t

Criterio de convergencia : | x_i^{k+1} - x_i^k | ≤ 0.5 10⁻⁵, y || F ||₂ < 10⁻⁵

Se eliminó x₁ a partir de f₁, con valores iniciales :

(x̃₂⁻¹, x̃₂⁰)^t = (-1., 1.)^t

Algunos de los resultados obtenidos fueron los siguientes :

ITERACION k	x ₂ ^k	x̃ ₂ ^k
0	1.	1.
24	9.9726970156146	9.9735181997952
25	4.00150993042187	4.0014358564862
26	9.999984089156	9.99998527043
27	9.9999999993189	9.99999999186885
28	4.00000000011293	4.000000000000046

Nº DE OPERACIONES POR ITERACION

Sin eliminación: 15
 Eliminando x₁: 10

Método Secante 2 sin eliminación: converge en 28 iteraciones

Método Secante 2 obtenido de eliminar x₁ a partir de f₁ :
 converge en 28 iteraciones .

Ejemplo 7

El mismo Ejemplo 2 del Método de Newton-Raphson, pero en este caso :

h = 0.2 y n = 5

Valores iniciales : x_i⁻¹ = 0.5 , x_i⁰ = 1. , ∀ i=1,...,n

Criterio de convergencia : $|x_i^{k+1} - x_i^k| \leq 0.5 \cdot 10^{-5}$, y $\|F\| < 10^{-5}$.

Se eliminó y_2 a partir de f_1 .

METODO SECANTE 2 SIN ELIMINACION			
Iteración	$x_1 = 0$	$x_2 = 0.2$	$x_3 = 0.4$
0	1.	1.	1.
1	0.567659106748	0.5844488639519	0.63506746976447
2	0.550437335196	0.5676655149785	0.61982081879579
3	0.552492075984	0.5696093669765	0.6214482754523
4	0.552482293119	0.5696001402951	0.62144061414715
5	0.552482287182	0.5696001347241	0.62144060957581
Iteración	$x_4 = 0.6$	$x_5 = 0.8$	
0	1.	1.	
1	0.720266638581	0.8413116217057	
2	0.708175689430	0.8344058368824	
3	0.709328705689	0.8349951361302	
4	0.709323390259	0.8349924056961	
5	0.709323327089	0.8349924040940	
N° DE OPERACIONES POR ITERACION: 185			

METODO SECANTE 2 ELIMINANDO y_2 A PARTIR DE f_1			
Iteración	$x_1 = 0.$	$x_2 = 0.2$	$x_3 = 0.4$
0	1.		1.
1	0.566892124968	0.5842157916218	0.6344978971190
2	0.550471216779	0.5675595975612	0.6198487399437
3	0.552491859824	0.5696098471895	0.6214480998838
4	0.552482293597	0.5696001412323	0.6214406143711
5	0.552482287224	0.5696001347667	0.6214406096274

Iteración	$x_4 = 0.6$	$x_5 = 0.8$	
0	1.	1.	
1	0.719891558421	0.8411254638957	
2	0.708196672666	0.8344167192347	
3	0.709328573109	0.8349950675551	
4	0.70932330400	0.8349924057651	
5	0.70932327123	0.8349924041110	
N° DE OPERACIONES POR ITERACION: 98			

Sin Eliminación : converge en 5 iteraciones.

Eliminando y_2 a partir de f_1 : converge en 5 iteraciones.

REFERENCIAS

[7] MILAN KUBICEK-VLADIMIR HLAVACEK,

" NUMERICAL SOLUTION OF NONLINEAR BOUNDARY VALUE PROBLEMS
WITH APPLICATIONS ", PRENTICE-HALL, 1983.

[8] BROWN, K., "A Quadratically convergent Newton-Like Method based
upon Gaussian Elimination". Siam J. Numer. Anal. 6, 561-569 (1969).

Bibliografia General

- Brown, K. " *Solution of simultaneous non-linear equations*", *Comm. ACM.* 10, 728-729 (1967).
- Brown, K. " *A Quadratically convergent Newton-Like Method based upon Gaussian Elimination* ", *Siam J. Numer. Anal.* 6, 561-569 (1969).
- Broyden, C.G. " *A class of Methods For solving Nonlinear simultaneous equations* ", *Maths. Comput.* 19, 577-593 (1965).
- Broyden, C.G. " *Quasi-Newton Methods and their application to Function Minimisation* ", *Maths. Comput.* 21, 368-381 (1967).
- Broyden, J.E., Dennis Jr. and Moré, J. " *On the local and Superlinear convergence of Quasi-Newton Methods*", *J. Inst. Maths. Applies* 12, 223-245 (1973).
- Forsythe, G.E. and Wasow, W.R. " *Finite-Difference Methods for partial Differential Equations* ". John Wiley and Sons, New York. (1960).
- Henrici, P. " *Elements of Numerical Analysis* ". Wiley, New York. (1964).
- Isaacson, E. and Keller, H.B. " *Analysis of Numerical Methods* ". John Wiley and Sons, New York. (1966).
- Kubicek, M. and Hlavacek, V. " *Numerical Solution of nonlinear boundary value problems with applications* ". Prentice-Hall, (1983).
- Lancaster, P. " *Error Analysis for the Newton-Raphson Method* ", *Numerische Mathematik* 9, 55-68 (1966).
- Milaszewicz, J.P. " *A generalization of the Stein-Rosenberg Theorem to Banach spaces*", *Numer. Math.*, 34, 403-409 (1980).

- Milaszewicz, J.P. " *On criticality and the Stein-Rosenberg Theorem* ",
Siam J. Numer. Anal. 18, 559-564 (1981).
- Milaszewicz, J.P. " *On modified Jacobi Linear operators* ", Linear Algebra
and its Applications, 51, 127-136 (1983).
- Milaszewicz, J.P. " *Improving Jacobi and Gauss-Seidel Iterations* ",
Linear Algebra and its Applications, 93, 161-170 (1987)
- Ortega, J.M. and Rheinboldt, W.C. " *Iterative Solution of Nonlinear
Equations in several variables* ". Academic Press,
INC, (1970).
- Robert, F., Charnay, M. and Musy, F. " *Iterations chaotiques serie-parallele
pour des equations non lineaires de point fixe* ",
Aplikace Matematiky, 20, 1-37 (1975).
- Robert, F. " *Autour du Théorème de Stein-Rosenberg* ", Numer. Math., 27
133-141 (1976).
- Varga, R. " *Matrix Iterative Analysis* ". Prentice Hall, Englewood Cliffs,
New Jersey (1962).
- Wilkinson, J. " *Rounding Errors in Algebraic Processes* ". Prentice Hall,
Englewood Cliffs, New Jersey (1963).
- Wolfe, P. " *The Secant Method for solving nonlinear equations* ",
Comm. ACM 2, 12-13 (1959).

Agradecimientos.

Ante todo, a Dios nuestro Señor, fuente de toda sabiduría y verdad, y a la Santísima Virgen, quien con su maternal dulzura me daba fuerzas en los momentos de debilidad y desánimo .

A mi director, Dr. Juan Pedro Milaszewicz . Sin duda este Trabajo no podría haberse realizado sin su colaboración.

Quiero destacar mi profunda admiración por su capacidad intelectual y valores humanos excepcionales.

A mi esposo Lutfi y mi hijo Walid, por haberme tenido paciencia y acompañado en situaciones difíciles.

A mis padres, mis hermanos y mi tía Nur, por el apoyo que me brindaron en todo momento.

A los profesores del Departamento de Matemática de IMAF (Universidad Nacional de Córdoba), por haberme impulsado a efectuar este Trabajo.

Finalmente, agradezco al CONICET por los años de beca que me permitieron emprender esta tarea.

Samira Abdel Masih.