

## Tesis de Posgrado

# Transporte no local del calor en plasmas

Minotti, Fernando Oscar

1990

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Minotti, Fernando Oscar. (1990). Transporte no local del calor en plasmas. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2337\\_Minotti.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2337_Minotti.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Minotti, Fernando Oscar. "Transporte no local del calor en plasmas". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1990.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2337\\_Minotti.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2337_Minotti.pdf)

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE FISICA  
LABORATORIO DE FISICA DEL PLASMA

# Transporte no local del calor en plasmas

Fernando Oscar Minotti

Trabajo de Tesis presentado para optar al Título de Doctor en Ciencias Físicas

Director de Tesis: Prof. Dr. Constantino Ferro Fontán

2337

**Dedicado muy especialmente a mis padres**

**Agradezco profundamente a mi Director de Tesis, el Dr. Ferro Fontán por su ejemplo, enseñanzas y, particularmente, por la confianza y libertad que me brindó para el desarrollo de este trabajo.**

**Agradezco a todos los integrantes del Laboratorio de Física del Plasma por su cálida amistad y compañerismo.**

## Índice

	Página
Introducción	1
Capítulo I	5
Ecuación de Fokker-Planck	5
Aproximaciones usuales para el flujo térmico	13
Aproximaciones alternativas	16
Desarrollo en polinomios de Legendre	19
Capítulo II	24
Modelo de flujo limitado: problema tipo	24
Capítulo III	41
Expresión no local del flujo térmico y de partículas	41
Comparación con el experimento AURORA	61
Condiciones de aplicabilidad en geometría esférica	71
Inclusión de la segunda anisotropía	72
Inclusión de contornos espaciales	77

Capítulo IV	80
Método de momentos	80
Conclusiones	102
Referencias	104

## Introducción

El fin de este trabajo es la obtención de un formalismo útil para tratar el problema del transporte de energía en plasmas con fuertes gradientes espaciales.

El problema del transporte de energía en plasmas muy inhomogéneos ha despertado mucho interés en los últimos años. La razón principal es que una buena determinación del flujo térmico es fundamental en muchas situaciones de la física tales como, por ejemplo, la fusión por confinamiento inercial, la teoría de coronas estelares y de evaporación de residuos de supernovas.

La complicación principal radica en que las aproximaciones difusivas para el flujo térmico dejan de ser aplicables cuando los gradientes de las magnitudes macroscópicas son suficientemente fuertes. La longitud característica con la que debe compararse la escala  $L$  definida por dichos gradientes es el camino libre medio  $\lambda$  de las partículas que transportan la energía, esencialmente electrones. Debido a que  $\lambda$  en un plasma depende muy fuertemente de la energía de la partícula, se acostumbra tomar como camino libre medio característico el correspondiente a la energía térmica  $\lambda_T$ . De esta manera, puede decirse que las aproximaciones difusivas, también llamadas locales, fallan cuando el cociente  $\epsilon \equiv \lambda_T / L$  es superior a cierto valor límite. Lo notable es que éste es muy pequeño ( $\epsilon_{lim} \approx 10^{-3}$  !!) y se alcanza fácilmente en situaciones tales como las mencionadas en el párrafo anterior.

La expresión local del flujo térmico en el caso de un plasma totalmente ionizado puede escribirse  $q \approx \epsilon q_{lim}$ , donde  $q_{lim}$  es el valor del flujo libre máximo correspondiente a una densidad  $n_e$  y a una temperatura  $T_e$  electrónicas:  $q_{lim} = n_e T_e (T_e / m_e)^{1/2}$ . De esta manera, cuando  $\epsilon > \epsilon_{lim}$ ,

el flujo resulta en general sobrestimado y la solución más usual es limitar el valor de  $q$  a una fracción de  $q_{lm}$ . Esta técnica de limitación del flujo, y que es la más popular hoy día en los códigos de simulación, no es muy correcta desde el punto de vista físico debido a que es esencialmente una solución local a un problema no local. En efecto, la no validez de las aproximaciones difusivas se debe a que las partículas más importantes para el transporte térmico tienen energías 4-5 veces mayores que las térmicas y, consecuentemente, caminos libres medios muy grandes por lo que, en situaciones de gradientes fuertes, contribuyen en forma no local al flujo de calor.

Las alternativas son en general muy complicadas debido a que la única manera satisfactoria de atacar el problema es resolver la ecuación cinética que describe la función de distribución electrónica y calcular entonces el flujo térmico. Las soluciones en forma analítica de dicha ecuación son en general posibles sólo si los gradientes de temperatura son suaves, en cuyo caso conducen a las expresiones difusivas clásicas; cuando los gradientes son fuertes el problema debe en general atacarse numéricamente.

La gran cantidad de estudios numéricos realizada en los últimos años permitió comprender más profundamente el mecanismo del transporte térmico en tales condiciones y permitió ciertas aproximaciones analíticas útiles. Las ideas claves en dichas aproximaciones son las siguientes:

1) El flujo térmico se debe sustancialmente a electrones muy energéticos, de energías 4-5 veces superiores a la energías térmica. Esto posibilita aproximar los operadores de colisión de la ecuación cinética por expresiones más dóciles al tratamiento analítico.

ii) Si la función de distribución se desarrolla en término de las autofunciones del operador de colisiones dispersivo (colisiones electrón-ión y electrón-electrón dispersivas), muy pocos términos de este desarrollo, entre dos y tres generalmente, son suficientes para una buena descripción del flujo térmico. Con esto es posible reducir el número de variables independientes.

iii) Lo esencial en el desarrollo mencionado en ii) es que la parte isótropa de la función de distribución (coeficiente de la autofunción de autovalor cero del operador de colisiones dispersivo) se aparta fuertemente de la función maxwelliana local en el rango de energías correspondiente al transporte térmico. Este punto junto con el anterior indican que el efecto de las inhomogeneidades espaciales en plasmas suficientemente colisionales, no es tanto el de inducir anisotropías de orden elevado sino más bien el de modificar la forma funcional de las anisotropías bajas y de la parte isótropa en la zona de altas energías.

Estas ideas han posibilitado recientemente algunas aproximaciones analíticas prometedoras; todas ellas resultan en expresiones del flujo térmico no locales, en las que la contribución a un dado punto del espacio proviene de zonas distantes varios caminos libres medios. Estas aproximaciones en general tienen el problema de no ser aplicables a plasmas de bajo número de carga atómico  $Z$ , debido a que una de las aproximaciones fundamentales es establecer una jerarquía bien diferenciada entre las colisiones electrón-ión y electrón-electrón.

El programa de este trabajo es entonces el siguiente: en el capítulo I se obtiene la ecuación cinética aproximada teniendo en cuenta los puntos i)-iii) y se tratan en forma cualitativa algunos conceptos relacionados.

En el capítulo II se obtienen soluciones cuasi-analíticas, usando el modelo de flujo limitado, para el caso idealizado de la ablación de un cuerpo sólido por un plasma caliente, que introduce con un modelo conceptualmente sencillo el problema a estudiar, además de servir de referencia en capítulos posteriores.

En el capítulo III se obtiene, utilizando las ideas mencionadas en esta Introducción y en el capítulo I, un formalismo no local para plasmas de  $Z$  arbitrario.

En el capítulo IV se desarrolla un formalismo que permite atacar problemas muy poco collisionales en los que el punto II) no es aplicable debido a que los efectos geométricos en plasmas con caminos libres medios muy grandes inducen anisotropías de orden elevado en la función de distribución.

## Capítulo I

### Ecuación de Fokker-Planck

El problema del transporte de energía en plasmas requiere en general un tratamiento puramente cinético, a partir del cual pueden obtenerse formulaciones adaptadas a los diferentes regímenes. La ley de Spitzer y Härm [Spitzer L. y Härm R. (1953)], por ejemplo, se obtiene al resolver la ecuación cinética en el límite de gradientes de temperatura suaves. De esta manera, para tratar la cuestión del transporte de calor en un plasma fuertemente inhomogéneo, debe partirse de una ecuación cinética que describa adecuadamente tal régimen.

La ecuación cinética más popular en la física de plasmas es la de Fokker-Planck. La razón es que una ecuación de este tipo describe apropiadamente la evolución de la función de distribución cuando las colisiones más importantes son las que producen desviaciones pequeñas de la velocidad, como es el caso de un plasma. En todo este trabajo se considerará que el plasma es totalmente ionizado y que los modos de oscilación colectivos del plasma se encuentran en su nivel térmico (plasma quiescente). En tal caso la ecuación de Fokker-Planck es

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} + \frac{\mathbf{F}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = C_{ee} + C_{ei} \quad (I-1)$$

donde  $C_{ee}$  es el operador de colisiones electrón-electrón y  $C_{ei}$  el correspondiente a interacciones electrón-ion;  $\mathbf{F}$  representa la fuerza electromagnética debida a los campos macroscópicos que actúan sobre la partícula, en los casos de interés para este trabajo  $f$  es

debido solamente al campo eléctrico autoconsistente, esto es, generado por la distribución de las especies del plasma mismo y no impuesto desde fuera.

Los operadores de colisión pueden escribirse para el caso de un plasma en la forma de Landau, que puede ser deducida del operador de colisiones de Boltzmann considerando que las colisiones producen un cambio pequeño de la velocidad. Así mismo, la forma de este operador puede deducirse de primeros principios por una gran variedad de caminos que conducen todos a prácticamente los mismos resultados, una de las razones que acreditan la validez de la ecuación de Fokker-Planck. Estas deducciones son ya clásicas y existe abundante bibliografía al respecto por lo que no se las repetirá aquí [ver, por ejemplo, Trubnikov B. A. (1965), Shkarofsky I. P., Johnston T. W. y Bachynski M. P. (1966), Wu Ta-You (1966), Liboff R. L. y Fedele J. B. (1967), Akhiezer A. I., Akhiezer I. A., Polovin, Sitenko y Stepanov (1975)], sino más bien se tomarán los resultados finales y se los trabajará a fin de obtener expresiones más útiles para el presente trabajo.

El operador de colisiones en la forma de Landau se escribe [Braginskii S. I. (1965)]

$$C_{ab} = -\frac{2\pi e_a^2 e_b^2 \ln \Lambda_{ab}}{m_a} \frac{\partial}{\partial v_\beta} \int \left[ \frac{f_a(v)}{m_b} \frac{\partial f_b(v')}{\partial v'_\gamma} - \frac{f_b(v')}{m_a} \frac{\partial f_a(v)}{\partial v'_\gamma} \right] U_{\beta\gamma} d^3v' \quad (1-2)$$

donde

$$U_{\beta\gamma} = \frac{1}{u^3} (u^2 \delta_{\beta\gamma} - u_\beta u_\gamma) ; \quad u_\mu = v_\mu - v'_\mu$$

Debe entenderse aquí suma sobre los índices griegos repetidos, en tanto que a y b representan a las diferentes especies: electrones y diferentes iones. Los símbolos  $e_{a,b}$  representan las

cargas eléctricas de las especies a, b y el  $\ln \Delta_{ab}$  es el logaritmo de Coulomb para Interacciones de la especie a con la b, para un plasma clásico es:  $\Delta_{ab} = r_{\max} / r_{\min}$ , con  $r_{\min} \equiv r_D (m_a + m_b) / (m_a m_b \langle |v_a - v_b|^2 \rangle)$  y  $r_{\max} \equiv (4 \pi \sum n_i e_i^2 T_i)^{1/2}$ ; en estas fórmulas  $\langle \rangle$  simboliza el promedio sobre las funciones de distribución de las dos partículas interactuantes, y la sumatoria se extiende a todas las especies " i " cuya velocidad térmica  $v_{T_i} \equiv (T_i / m_i)^{1/2}$  sea mayor que  $(\langle |v_a - v_b|^2 \rangle)^{1/2}$ .

Dado que la masa de los iones es mucho mayor que la de los electrones pueden efectuarse algunas simplificaciones en el término de colisiones  $C_{ei}$ . En efecto, en una colisión electrón-ion la velocidad relativa es prácticamente igual a la del electrón, por lo que puede hacerse un desarrollo de  $U_{\beta\gamma}$  alrededor de  $\mathbf{v}' = 0$ ; la Integración respecto de  $\mathbf{v}'$  puede entonces efectuarse explícitamente. De esta manera, en el sistema en que los iones tienen velocidad media nula, el operador  $C_{ei}$  resulta tener una expresión sencilla que, despreciando términos de orden  $m_e / m_i$ , es

$$C_{ei} = \frac{\gamma_{ei} n_i}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{v}} \cdot \left[ \left( \frac{1 - \mathbf{v}\mathbf{v}}{v^3} \right) \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right]$$

donde

$$\gamma_{ei} = \frac{4\pi Z^2 e^4 |r| \Delta_{ei}}{m_e^2}$$

y el resto de los términos tiene la notación habitual, de aquí en más se escribirá  $e_e = -e$  y  $e_i = Ze$ . Nótese que la forma de la función de distribución iónica no aparece en esta expresión, sino sólo su momento de orden cero, esto es, la densidad numérica de iones, por lo que, al menos en la aproximación de despreciar términos de orden  $m_e / m_i$ , esta forma del término de colisiones

electrón-ion es válida para cualquier función de distribución iónica, en el sistema en que los iones tienen velocidad media nula. La (1-1) se escribirá entonces en este sistema con lo cual, despreciando términos de orden  $(m_e / m_i)^{1/2}$  y suponiendo que la temperatura iónica no es mucho mayor que la electrónica, el primer miembro de dicha ecuación conserva la misma forma donde  $v$  ahora es la velocidad electrónica relativa a la velocidad iónica media. En tal caso, si puede considerarse que el plasma es neutro o estacionario, la corriente electrónica debe tener divergencia nula que, en los sistemas unidimensionales que se tratarán, se traduce generalmente en la nulidad de dicha corriente.

Suponiendo que la función de distribución depende de una sola coordenada espacial  $x$ , la dependencia en las variables independientes puede ser expresada en la forma  $f(x, v, \mu, t)$ , donde  $v$  es el módulo de la velocidad y  $\mu$  el coseno del ángulo que forma ésta con el eje  $x$ . En estos casos, el operador  $C_{ei}$  se expresa en términos de la variable  $\mu$  como

$$C_{ei} = \frac{Y_{ei} n_i}{2 v^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right]$$

El operador de colisiones electrón-electrón, por otro lado, no tiene una expresión tan sencilla, para verla en la forma que se aplicará más adelante, considérese nuevamente el caso espacialmente unidimensional. La función de distribución puede desarrollarse en polinomios de Legendre de la variable  $\mu$ . En el caso general en que  $f$  depende de más de una coordenada espacial y, por lo tanto, debe tenerse en cuenta también la coordenada angular azimutal alrededor de  $x$  en el espacio de velocidades, el desarrollo es más complicado y está dado en términos de las funciones armónicas esféricas y que puede verse, por ejemplo, en el libro clásico de Shkarofsky et al. arriba citado. En todo este trabajo, sin embargo, se considerarán

situaciones de alta simetría en las que sólo interviene una coordenada espacial y que por lo tanto admiten un desarrollo de la función de distribución en polinomios de Legendre de la forma

$$f(x, y, \mu, t) = \sum_{\alpha=0}^{\infty} f_{\alpha}(x, y, t) P_{\alpha}(\mu) \quad (1-3)$$

En tal caso, reemplazando (1-3) en (1-2) los dos primeros términos del desarrollo de  $C_{ee}$  en polinomios de Legendre resultan ser

$$C_{ee}^0 = \frac{\gamma_{ee}}{3v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left[ 3f_0 l_0^0 + v(l_2^0 + J_{-1}^0) \frac{\partial f_0}{\partial v} \right]$$

$$\frac{1}{\gamma_{ee}} C_{ee}^1 = \frac{1}{3v} \frac{\partial^2 f_1}{\partial v^2} (l_2^0 + J_{-1}^0) + \frac{1}{3v^2} \left( \frac{\partial f_1}{\partial v} - \frac{f_1}{v} \right) (3l_0^0 - l_2^0 + 2J_{-1}^0) +$$

$$+ 8\pi f_0 f_1 + \frac{1}{5v} \frac{\partial^2 f_0}{\partial v^2} (l_3^1 + J_{-2}^1) + \frac{1}{15v^2} \frac{\partial f_0}{\partial v} (-3l_3^1 + 5l_1^1 + 2J_{-2}^1)$$

donde

$$\gamma_{ee} = \frac{4\pi e^4 \ln \Delta_{ee}}{m_e^2}$$

$$l_{\beta}^{\alpha} \equiv \frac{4\pi}{v^{\beta}} \int_0^v f_{\alpha} v^{\beta+2} dv$$

$$J_{\beta}^{\alpha} \equiv \frac{4\pi}{v^{\beta}} \int_v^{\infty} f_{\alpha} v^{\beta+2} dv$$

Como puede verse, estas expresiones son lo suficientemente complicadas para impedir un tratamiento analítico a menos que se efectúen algunas simplificaciones. Para empezar, se utilizará el hecho que los electrones más importantes para el fenómeno de transporte son los de altas energías, de aproximadamente 4-5 veces la energía térmica en gradientes moderados [Luciani J. F. (1985)], 6-7 veces dicha energía en gradientes más fuertes [Sanmartín J. R., Ramírez J. y Fernández-Ferla R. (1990)]. En tal caso, en las integrales  $I_{\beta}^{\alpha}$  puede extenderse el límite de integración hasta  $\infty$  y, además, despreciarse la contribución de las integrales  $J_{\beta}^{\alpha}$ . Los coeficientes del desarrollo del operador de colisiones se escriben entonces

$$C_{ee}^0 = \frac{\gamma_{ee} n_e}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( f_0 + \frac{D}{v} \frac{\partial f_0}{\partial v} \right)$$

$$C_{ee}^1 = -\frac{\gamma_{ee} n_e}{v^3} f_1 + \frac{\gamma_{ee} n_e}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( f_1 + \frac{D}{v} \frac{\partial f_1}{\partial v} \right)$$

donde

$$D \equiv \frac{4\pi}{3 n_e} \int_0^{\infty} f_0 v^4 dv \quad (14)$$

Al escribir estas expresiones se han despreciado además los términos de orden  $(v_T / v)^2$  y superiores, donde  $v_T$  es la velocidad térmica definida por  $v_T \equiv (T_e / m_e)^{1/2}$ , y los términos con  $I_1^1$  y  $I_3^1$  que pueden escribirse como

$$I_1^1 = \frac{4\pi}{v} \int_0^{\infty} f_1 v^3 dv = \frac{3J}{v}$$

$$i_3^1 = \frac{4\pi}{v^3} \int_0^\infty f_1 v^5 dv = \frac{6Q}{m_e v^3}$$

Dado que el flujo de partículas  $J$  y el de energía  $Q$  están limitados a una fracción de sus valores máximos  $n_e v_T$  y  $n_e m_e v_T^3$  respectivamente, se ve que para energías altas  $i_3^1$  es efectivamente despreciable. El valor de  $i_1^1$  si bien es pequeño puede no ser despreciable, sin embargo, como se resolverá la ecuación cinética en el sistema en que los iones se encuentran en reposo,  $J$  es directamente proporcional a la corriente eléctrica la cual, en los sistemas estacionarios y unidimensionales que se estudiarán, debe ser cero si no se entrega corriente a través de los contornos.

De esta manera, si en el desarrollo de la función de distribución (1-3) pueden despreciarse los términos superiores al segundo, agrupando términos resulta

$$C_{ee} = \frac{Y_{ee} n_e}{v^2} \left\{ \frac{1}{2v} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] + \frac{\partial}{\partial v} \left( r + \frac{D}{v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \right\}$$

con lo cual

$$C_{ee} + C_{ei} = \frac{Y n_e}{2v^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] + \frac{Y_{ee} n_e}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( r + \frac{D}{v} \frac{\partial f}{\partial v} \right) \quad (1-5)$$

donde se ha definido

$$Y = \frac{4\pi e^4 (Z \ln \Delta_{ei} + \ln \Delta_{ee})}{m_e^2}$$

y se ha supuesto cuasineutralidad  $n_e \approx Z n_i$ . Aunque aquí se ha supuesto un desarrollo en polinomios de Legendre con sólo dos términos para deducir la forma del término de colisiones electrón-electrón en (1-5), esta expresión es válida en general en el límite de altas energías cualquiera sea la forma de  $f$ , como puede verse en el libro de Akhiezer et al (1975). Por otro lado, Luciani J. F. (1985) muestra que (1-5) es correcta aun en el caso de fuertes gradientes espaciales, como los que interesan en este trabajo, en el que la escala definida por éstos es comparable al camino libre medio electrónico, siempre que éste sea mucho mayor que la longitud de Debye.

El término de colisiones (1-5) se acostumbra escribir

$$C_{ee} + C_{ei} = \frac{D_{\perp}}{v^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] + \frac{C}{v^2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{D_{\parallel}}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \quad (1-6)$$

donde  $D_{\perp} \equiv Y n_e / 2$ , es el llamado coeficiente de dispersión perpendicular,  $C \equiv Y_{ee} n_e$ , es el de fricción dinámica y  $D_{\parallel} \equiv Y_{ee} n_e D$ , el de dispersión paralela. Esta expresión así definida no contiene suposiciones sobre la forma funcional de la  $f$ , esto es, es válida por ejemplo para funciones de distribución cuya parte isótropa es no maxwelliana, que son justamente las de mayor interés para este trabajo.

La expresión (1-5), o su equivalente (1-6), es la que se usará en todo este trabajo. En ella aparece el coeficiente  $D$  definido por (1-4); nótese que en el sistema en que está escrito el término de colisiones es  $D = v_T^2$ . Esto dice en particular que la función de distribución maxwelliana anula idénticamente el operador de colisiones (1-6), lo que no es trivial en virtud de las simplificaciones hechas.

Otra cuestión interesante de notar, y que será muy útil en capítulos posteriores, es que para partículas muy energéticas, con velocidades grandes comparadas con la velocidad térmica, el término más importante en (1-6) es el de fricción dinámica, que es de orden  $(v / v_T)^2$  respecto de los de dispersión, con lo cual el término de colisiones depende sólo de la densidad local del plasma, cualquiera sea la función de distribución de éste. De esta manera, el término de colisiones puede considerarse lineal para las partículas de energías altas comparadas con la energía térmica. Esta última afirmación expresa el hecho que las partículas muy supratérmicas son pocas comparadas con las que determinan los momentos hidrodinámicos más bajos: densidad y temperatura.

### Aproximaciones usuales para el flujo térmico

La ecuación cinética (1-1) con el término de colisiones de Landau o sus formas aproximadas (1-5) y (1-6) es en general muy difícil de resolver aun en problemas altamente simplificados como, por ejemplo, problemas planos y unidimensionales en los cuales debe recurrirse en general a soluciones numéricas. Para las situaciones de interés práctico, sin embargo, dichas soluciones numéricas son muy exigentes en recursos de cómputo y se recurre por lo tanto a una descripción de tipo fluido. Esta puede obtenerse, como es ya clásico, a partir de la misma ecuación (1-1) tomando momentos apropiados en el espacio de velocidades. Dicha serie de momentos conduce a un conjunto de infinitas ecuaciones diferenciales acopladas que dependen sólo de las variables espaciales y del tiempo y que es totalmente equivalente a la ecuación cinética misma. La resolución efectiva del problema requiere cortar el conjunto de ecuaciones a un número finito y considerar sólo los primeros momentos; como estos resultan acoplados con momentos más elevados, se requiere alguna aproximación para estos últimos.

En general, las ecuaciones de fluido se escriben de la forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \vec{\mathbf{P}}) = \mathbf{F}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho \left( \epsilon + \frac{u^2}{2} \right) + \nabla \cdot \left[ \rho \mathbf{u} \left( \epsilon + \frac{u^2}{2} \right) + \mathbf{u} \cdot \vec{\mathbf{P}} + \mathbf{Q} \right] = \mathbf{W}$$

donde  $\rho$  es la densidad de masa,  $\mathbf{u}$  la velocidad del fluido,  $\epsilon$  la densidad de energía interna;  $\mathbf{F}$  es la densidad de fuerzas de volumen y  $\mathbf{W}$  la densidad de energía ganada por el medio por unidad de tiempo. Salvo casos límites en los que puede entrar a pesar la viscosidad iónica, y que no son de interés en este trabajo, el tensor de tensiones  $\mathbf{P}$  puede aproximarse por  $2\mu \nabla \mathbf{u}$ . De esta manera, para poder cerrar el sistema de ecuaciones debe relacionarse el vector flujo de calor  $\mathbf{Q}$  con  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  y  $\epsilon$ . En principio esto puede no ser posible dado que, en general, los coeficientes de la ecuación cinética dependen de diferentes momentos de la función de distribución no reducibles a los que determinan  $\rho$ ,  $\mathbf{u}$  y  $\epsilon$ . Sin embargo, el hecho que el transporte térmico sea gobernado por los electrones de alta energía permite reducir la ecuación cinética a una forma determinada precisamente por estos momentos, como se vio más arriba.

De esta manera, la aproximación para el flujo de calor se puede obtener luego de resolver analíticamente la ecuación cinética, calculando en forma explícita dicho flujo. Las soluciones analíticas de la ecuación cinética en condiciones más o menos arbitrarias sólo son posibles en general si la función de distribución no se aparta sensiblemente de la función maxwelliana local, siendo uno de los métodos más populares el de Chapman-Enskog

[Chapman S. y Cowling T. G. (1958)]. Otros métodos como el de Grad [Grad H. (1963), Fechner W. B. y Mayer F. J. (1984), Boyd T. J. M., Lonsdale L. D. y Sanderson J. J. (1988)] que no presuponen un cuasi-equilibrio local conducen a ecuaciones fluidas más complicadas y la corrección que aportan no es significativa para los plasmas de interés y, además, no tienden a los valores correctos en el caso de gradientes suaves [Luciani J. F. (1985)] o fallan al explicar la inhibición del flujo térmico [Boyd T. J. M., Lonsdale L. D. y Sanderson J. J. (1988)].

El método propuesto por Chapman y Enskog para gases y utilizado por muchos autores para el caso de plasmas, válido cuando los gradientes de las magnitudes macroscópicas son pequeños, consiste en una expansión de la función de distribución en términos de un parámetro pequeño  $\epsilon$  que es típicamente el cociente entre el camino libre medio de las partículas y la escala de los gradientes macroscópicos. La ecuación (1-1) se resuelve entonces en forma consistente para cada orden  $\epsilon^n$ , suponiendo además que  $f$  depende del tiempo sólo a través de la dependencia en el tiempo de la densidad, la temperatura y otras posibles magnitudes macroscópicas. La dependencia temporal de estas magnitudes para cada orden  $\epsilon^n$  se supone dada por las ecuaciones obtenidas de la solución de  $f$  para el orden anterior  $\epsilon^{n-1}$ . Si bien en teoría la solución puede obtenerse al orden de aproximación deseado, es muy difícil obtener soluciones más allá del orden 1, además se ha visto que la expansión propuesta es sólo asintótica y que, por lo tanto, cuando la primera aproximación no es suficiente, el cálculo de aproximaciones mayores no está justificado [Luciani J. F. (1985)].

Como se mencionó, las aproximaciones indicadas son válidas sólo si la función de distribución es muy próxima a la de equilibrio local; las condiciones para que esto suceda pueden clarificarse considerando lo siguiente. Un sistema descrito por una ecuación como la de Fokker-Planck alcanza el equilibrio a través de las colisiones, la efectividad de las mismas

puede medirse en términos del camino libre medio, por ejemplo, de deflexión perpendicular  $\lambda_{ei} = (m_e v^2)^2 / 2\pi e^4 (Z^2 n_i \ln \Delta_{ei} + n_e \ln \Delta_{ee})$ . Este, y en general todos los caminos libres medios determinados por colisiones de Coulomb, aumenta aproximadamente con el cuadrado de la energía de la partícula, de esta manera, los electrones de alta energía que tienen caminos libres medios comparables a la distancia  $L$  definida por los gradientes macroscópicos pueden llegar, sin pérdida apreciable de su energía, a zonas del plasma con propiedades medias muy diferentes de la zona de donde proceden. Es claro entonces que en la zona de alta energía las colisiones no son lo suficientemente efectivas para producir un equilibrio local y que la importancia relativa que puede tener esta población no termalizada de alta energía depende de cómo se compara  $L$  con algún camino libre medio típico, que puede ser el correspondiente a los electrones de energía igual a la térmica  $\lambda_T$ . Llamando  $\epsilon \equiv \lambda_T / L$ , se ve entonces que cuanto más pequeño es  $\epsilon$ , tanto mayor es la energía por encima de la cual los electrones no se termalizan localmente y, por lo tanto, menor la fracción de los mismos y también menor su importancia relativa. Los métodos que presuponen un apartamiento pequeño respecto del equilibrio local son entonces aplicables en el límite  $\epsilon \rightarrow 0$ .

### Aproximaciones alternativas

A partir de un cierto valor de  $\epsilon$  la fracción no termalizada de electrones puede ser importante. Dado que el flujo de calor se debe sustancialmente a electrones de energías 4-5 veces mayores que la térmica, la expresión de Spitzer y Härm pierde validez cuando el camino libre medio de estos electrones es comparable a la escala de variación de la temperatura:  $\lambda_{4-5T} = 16-25 \lambda_T \approx L$ , o sea,  $\epsilon \approx 5 \cdot 10^{-2}$ . Un estudio más cuidadoso como el desarrollo a orden tres del método de Chapman y Enskog, conduce al límite todavía más estricto de  $\epsilon \approx 3 \cdot 10^{-3}$ . Este valor

se alcanza muy fácilmente en los plasmas generados por láser y en muchos plasmas de interés astrofísico como el de las coronas estelares y el correspondiente a los residuos de supernovas.

La solución estricta es entonces el tratamiento completamente cinético del problema; sin embargo, los desarrollos previos muestran que en algunas situaciones es posible una aproximación alternativa mucho más viable. En efecto, si el flujo de calor está determinado básicamente por partículas muy supratérmicas, el término de colisiones en la ecuación (I-1) es el (I-6). Al resolver la ecuación cinética en este límite se puede obtener entonces una buena aproximación para el flujo térmico.

Estas situaciones, que se cuantificarán más adelante, pueden denominarse cuasi-hidrodinámicas, en el sentido que las magnitudes hidrodinámicas locales determinan los coeficientes de la ecuación cinética. El flujo de calor resultante será entonces una funcional más o menos complicada de estas magnitudes. Esto es, en esencia, la idea del método de Chapman-Enskog; las expresiones no locales representan la suma de infinitos términos de dicho desarrollo que serían divergentes en el límite de gradientes de temperatura fuertes [Luciani J. F. (1985)].

Con todas estas consideraciones en años recientes se atacó el problema del transporte térmico bajo gradientes fuertes de temperatura esencialmente con dos tratamientos distintos. El propuesto por Luciani J. F., Mora P. y Pellat R. (1985), Luciani J. F. y Mora P. (1986) y Bendib A., Luciani J. F. y Matte J. P. (1988), consiste en separar la ecuación (I-1) en dos términos distintos, uno que contiene el operador de transporte convectivo, el de dispersión perpendicular y una aproximación al término de fricción dinámica electrónica por un lado; todo este término se identifica con un operador de transporte colisional que actúa sobre  $f$ . Por otro lado, el resto de

los términos, a saber : el de campo eléctrico y el de dispersión paralela se agrupan en un término considerado como "fuente". Las propiedades del operador de transporte collisional definido permiten su inversión formal en forma exacta con lo que la solución resulta al aplicar la inversa de este operador al término de fuente. Por supuesto, la fuente debe calcularse en forma consistente por lo que el proceso se vuelve iterativo. Las ventajas son que las propiedades del operador de difusión perpendicular permiten lograr aproximaciones analíticas muy buenas de la inversa del operador de transporte collisional, y que el proceso iterativo es rápidamente convergente. En paralelo con este cálculo, Luciani et al proponen una fórmula empírica no local para evaluar el flujo de calor, que obtiene al ajustar los resultados de su método. Si bien el método propuesto es bastante general, en el fondo es más bien un método alternativo de resolución de la ecuación cinética y no tanto uno que permita evaluar en forma segura y directa el flujo de calor.

El otro método está más bien orientado al cálculo directo del flujo de calor y fue propuesto por Albritton J. R., Williams E. A., Bernstein I. B. y Swartz K. P. (1986). Consiste en resolver analíticamente la ecuación (I-1) linealizada en el límite de altas energías y con la aproximación adicional de considerar un número de carga iónica  $Z$  alto. La solución en tal caso puede obtenerse analíticamente con lo que resulta una expresión explícita para el flujo de calor en términos de los perfiles de temperatura y densidad que están en buen acuerdo con simulaciones numéricas más desarrolladas [Albritton J. R. (1983)]. El inconveniente es que este formalismo es aplicable sólo en el límite de  $Z$  elevado.

Debe considerarse, además, que las aproximaciones de Luciani et al y de Albritton et al son válidas bajo condiciones cuasi-estacionarias, definidas como aquellas en que las variables macroscópicas varían poco en los tiempos típicos de colisión. Como prueba Luciani [Luciani J.

F. (1985)], esta aproximación es correcta cuando no existen campos externos rápidamente variables, debido a que el tiempo en que varían los perfiles hidrodinámicos es largo comparado con el tiempo de difusión en las distancias de interés (unos pocos caminos libres medios térmicos) de los electrones energéticos responsables del transporte de calor.

En el capítulo III de este trabajo se seguirá un método análogo al de Albritton et al y se obtendrá una solución analítica para el caso de Z arbitrario y las expresiones consecuentes para el flujo de calor y del campo eléctrico autoconsistente.

### Desarrollo en polinomios de Legendre

Una de las suposiciones fundamentales es que el desarrollo de la función de distribución en polinomios de Legendre es rápidamente convergente y que, por lo tanto, unos pocos términos de dicho desarrollo son una aproximación suficientemente buena. Si tal suposición está o no fundamentada puede esclarecerse por lo siguiente. Si  $P_n(\mu)$  es el polinomio de Legendre de orden n, entonces

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial P_n}{\partial \mu} \right] = -n(n+1) P_n(\mu)$$

por lo tanto, para cada uno de los coeficientes del desarrollo (1-2), la acción del operador de dispersión perpendicular se traduce en un término de la forma

$$-n(n+1) \frac{\gamma n_e}{2v^3} f_n$$

De esta manera, cada anisotropía  $f_n$  tiene un tiempo característico de decaimiento debido a colisiones electrón-ion y electrón-electrón dispersivas dado por

$$\tau_n = \frac{m_e^2 v^3}{2\pi n(n+1) e^4 (Z^2 n_i \ln \Lambda_{ei} + n_e \ln \Lambda_{ee})} \quad (1-7)$$

Esta expresión indica dos aspectos interesantes; por un lado, que el efecto isotropizador de las colisiones electrón-ion crece con  $Z$  y, por otro lado, que las distintas anisotropías decaen tanto más rápidamente cuanto más alto es su orden (en particular, el tiempo de decaimiento de  $f_2$  es 3 veces inferior al de  $f_1$ ). Este último efecto coincide con el debido a los términos de transporte y de dispersión paralela y fricción dinámica electrónicos que tienden en general a establecer las diferentes anisotropías.

Cuál de todos los efectos es el determinante depende de cada problema, por lo que la determinación de los límites dentro de los cuales vale un desarrollo de pocos términos requiere un estudio más cuidadoso. No se pretende aquí hacer una descripción detallada de este estudio que puede encontrarse en Luciani et al (1985) sino simplemente hacer un resumen muy breve del mismo. Todo se reduce al estudio del operador de transporte colisional mencionado arriba, el mismo resulta de la ecuación cinética (1-1) con el operador de colisiones (1-6) para el caso estacionario y espacialmente unidimensional

$$\mu v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\mu e E}{m} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{e E (1 - \mu^2)}{m v} \frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{D_{\perp}}{v^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] + \frac{C}{v^2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{D_{\parallel}}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2} \quad (1-8)$$

que, reordenando los términos, se escribe

$$T(f) = S(f)$$

donde

$$T(f) = \mu v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{D_{\perp}}{v^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] - \frac{C}{v^2} \frac{\partial f}{\partial v}$$

$$S(f) = \frac{\mu e E}{m} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{e E (1 - \mu^2)}{m v} \frac{\partial f}{\partial \mu} + \frac{D_{\parallel}}{v^2} \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

Luciani et al muestran que la transformada de Fourier respecto de  $x$  del operador de transporte colisional  $T$  (con una aproximación fenomenológica para el término de fricción dinámica:  $C / v^2 \partial f / \partial v = -\gamma f$ ) puede ser invertido en forma exacta. Llamando  $G = T^{-1}$ , el espectro de  $G$  presenta una rama que domina el transporte para gradientes de temperatura de pequeños a moderados:  $\epsilon < 2 \cdot 10^{-2}$ , esto es, gradientes 10 veces superiores a los permitidos para la aproximación de Spitzer. Esta rama es la que corresponde a la aproximación cuasi-hidrodinámica en la que los coeficientes del término colisional están definidos por los valores locales de densidad y temperatura. Las otras ramas del espectro, que son las correspondientes al comportamiento completamente cinético, sólo intervienen en el caso de gradientes mayores.

Lo más interesante para el presente trabajo es que la rama cuasi-hidrodinámica resulta muy bien descrita por los primeros dos o tres términos del desarrollo en polinomios de Legendre (el tomar más términos no modifica el espectro en forma apreciable en la zona correspondiente a esta rama).

En realidad, el límite determinado por Luclani ( $\epsilon < 2 \cdot 10^{-2}$ ) es algo conservador; estimaciones de Kishimoto et al [Kishimoto Y., Mima K. y Haines M. G. (1988)] elevan este límite en un orden de magnitud ( $\epsilon < 10^{-1}$ ). Una estimación adicional puede hacerse a partir de la expresión (I-8). En efecto, introduciendo el desarrollo (I-2) en (I-8), el primer miembro de ésta se escribe

$$\begin{aligned} & \mu v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\mu \theta E}{m} \frac{\partial f}{\partial v} - \frac{\theta E (1 - \mu^2)}{m v} \frac{\partial f}{\partial \mu} = \\ & = \sum_{l=0}^{\infty} \left\{ v \frac{\partial f_l}{\partial x} - \frac{\theta E}{m} \frac{\partial f_l}{\partial v} \right\} \left( \frac{l+1}{2l+1} P_{l+1} + \frac{l}{2l+1} P_{l-1} \right) + \\ & + \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\theta E f_l}{m v} \frac{l(l+1)}{2l+1} (P_{l+1} - P_{l-1}) \end{aligned}$$

De las simulaciones numéricas [Bell A. R., Evans R. G. y Nicholas D. J. (1981), Matte J. P. y Yirmont J. (1982)] resulta que los términos de campo eléctrico son del mismo orden que el de gradiente espacial. Es claro entonces que las anisotropías se establecen en distancias del orden de la escala de los gradientes macroscópicos  $L$ , de manera que las anisotropías que, para la energía de interés, tienen caminos de isotropización  $v\tau$  [ $\tau$  es el dado por (I-7)] menores que  $L$  son efectivamente pequeñas. Si las partículas de interés son las de energías 5-6 veces superiores a la térmica, la condición para despreciar la anisotropía  $l$  resulta ser

$$\epsilon < \frac{l(l+1)}{30}$$

Para  $l = 2$  esto equivale a  $\varepsilon < 0,2$ . Por otro lado, las simulaciones numéricas [Matte J. P. y Yilmont J. (1982)] muestran en general que aun en casos con caminos libres medios superiores a las escalas macroscópicas ( $\varepsilon > 1$ ), el flujo de calor resulta razonablemente determinado (con un error de aproximadamente el 20 %) con sólo los dos primeros términos del desarrollo en polinomios de Legendre.

## Capítulo II

### Modelo de flujo limitado: problema tipo

En este capítulo se presenta el problema de la ablación de un objeto sólido que está inmerso en un plasma caliente. El interés práctico de esta configuración está dado por su aplicación a las técnicas de realimentación de combustible en máquinas de alto  $\beta$  [Gralnick S. L. (1973), Parks P. B., Turnbull R. J. y Foster C. A. (1977), Milora S. L. (1981) y Chang C. T. (1983)], y la descripción de la evaporación de residuos de supernovas [Cowie C. L. y McKee C. F. (1977), McKee C. F. y Cowie C. L. (1977), Balbus S. A. y McKee C. F. (1982), Gullani J. L. (1984)]. Por otro lado, esta situación es especialmente apta para introducir el fenómeno de interés para este trabajo, debido a que a pesar de su relativa sencillez involucra todos los efectos que se quieren estudiar: el transporte de energía en configuraciones con gradientes abruptos y la hidrodinámica involucrada.

A fin de estudiar las características esenciales del fenómeno se utilizará un modelo de transporte térmico con limitador de flujo [Max C. E., McKee C. F. y Mead W. C. (1980)]. Si bien este último no es satisfactorio desde el punto de vista físico, es la extensión más sencilla posible del transporte clásico de Spitzer y es también la técnica más popular en la actualidad en los códigos de simulación. Por otro lado, el modelo con flujo clásico limitado tiene la ventaja de permitir soluciones cuasi-analíticas, que son las que se obtendrán en este capítulo para un problema estacionario y unidimensional con simetría esférica y que serán útiles a fin de comparar con otros modelos en capítulos posteriores.

El problema a estudiar es entonces el siguiente: cuando un objeto sólido es sumergido en un plasma caliente, los impactos de los electrones e iones de éste calientan, disocian e

ionizan el material cercano a la superficie. Se forma así la denominada corona que rodea al objeto. Esta corona puede estar formada por un gas caliente débilmente ionizado o por un plasma. Se estudiará aquí el caso de que sea un plasma y se considerará que el objeto y la corona formada tienen simetría esférica, y que el sistema es estacionario. Esta última hipótesis puede justificarse por lo siguiente: el problema real es estrictamente no estacionario; sin embargo, dado que la densidad del objeto sólido es mucho mayor que la del plasma que lo rodea, la velocidad de retroceso de la superficie debido a la ablación del material, es mucho menor que las velocidades del flujo de materia evaporada. De esta manera, la evolución del sistema sigue en forma cuasi-estacionaria la posición de la superficie, ajustando los parámetros del flujo al valor instantáneo de dicha posición. Cuantitativamente, el tiempo que emplea una partícula de fluido emitida por la superficie para recorrer la zona de interés del flujo debe ser mucho menor que el tiempo típico de retroceso de la superficie.

En tales condiciones las ecuaciones que describen el estado de la corona son [Sanz J., Liñan A., Rodríguez M. y Sanmartín J. R. (1981)]:

$$n v r^2 = \mu \quad (11-1-a)$$

$$m_i \frac{n}{Z} v \frac{dv}{dr} = - \frac{d}{dr} \left( n T_e + \frac{n}{Z} T_i \right) \quad (11-1-b)$$

$$n v T_e \frac{d}{dr} \left( \ln \frac{T_e^{3/2}}{n} \right) = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 q) - \frac{dQ_{ei}}{dt} \quad (11-1-c)$$

$$\frac{n}{Z} v T_i \frac{d}{dr} \left( \ln \frac{T_i^{3/2}}{n} \right) = \frac{dQ_{ei}}{dt} \quad (II-1-d)$$

donde  $m_i$  es la masa iónica,  $n$  la densidad numérica de electrones,  $v$  la velocidad hidrodinámica del plasma,  $T_e$  y  $T_i$  las temperaturas electrónica y iónica respectivamente. La constante  $\mu$  es proporcional a la masa evaporada por unidad de tiempo ( $= 4\pi m_i \mu / Z$ ),  $dQ_{ei}/dt$  es la energía cedida por los electrones a los iones por unidad de tiempo y de volumen, y  $q$  es el flujo de calor. Al escribir estas ecuaciones se ha supuesto cuasineutralidad ( $Zn_i \approx n_e = n$ ) y se han despreciado la viscosidad y procesos inelásticos como ionización y radiación. Con el objeto de simplificar aún más el problema se estudiará el límite de alto  $Z$ , que permite despreciar el término de  $T_i$  en la segunda ecuación y el de  $dQ_{ei}/dt$  en la tercera. En el caso de  $Z$  arbitrario, el tener que considerar la ecuación para la temperatura iónica complica el tratamiento sin agregar cambios cualitativos [ver, por ejemplo, Sanz J. y Sanmartín J. R. (1983) para el caso de microesferas de  $Z$  arbitrario evaporadas por láser]

Llamando  $r_s$  al radio instantáneo del sólido y usando el subíndice  $\infty$  para designar a las variables del plasma lejos del sólido, las condiciones de contorno serán:

- c.1)  $v(r_s) = 0$
- c.2)  $T_e(r_s) = 0$
- c.3)  $q(r_s) = 0$
- c.4)  $n(r \rightarrow \infty) = n_\infty$
- c.5)  $T_e(r \rightarrow \infty) = T_\infty$

$$c.6) \psi(r \rightarrow \infty) = 0$$

Habiéndose desacoplado la temperatura iónica de las ecuaciones, usando la primera ecuación para despejar  $n$  y las condiciones c.1), c.2) y c.3), resulta el sistema

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{2} m_i v^2 \right) = Z T_e \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{T_e} \frac{dT_e}{dr} \right) \left( 1 - \frac{Z T_e}{m_i v^2} \right)^{-1} \quad (II-2-a)$$

$$\mu \left( \frac{5}{2} Z T_e + \frac{1}{2} m_i v^2 \right) = q Z r^2 \quad (II-2-b)$$

A fin de modelar el flujo de calor se utilizará la expresión [Draine B. T. y Giuliani J. L. (1984)]

$$q = \frac{q_{sh}}{1 + \left| \frac{q_{sh}}{q_{sat}} \right|}$$

que empalma con continuidad los regímenes de gradientes de temperatura suaves en los que vale la expresión clásica de Spitzer y Härm  $q = q_{sh} = K T_e^{5/2} dT_e / dr$ , con el régimen de gradiente abrupto en el que el flujo se supone saturado en un valor  $q_{sat} = 3 / 10 \phi m_e n (T_e / m_e)^{3/2}$ . En estas últimas expresiones,  $K$  es prácticamente constante (depende de  $r$  muy débilmente a través del logaritmo de Coulomb) y  $\phi$  es un parámetro ajustable supuesto del orden de uno y constante en toda la corona; en la literatura es más común llamar factor de limitación a  $f_L = (3 / 10) \phi$ .

Con las adimensionalizaciones

$$\eta = r / r_3$$

$$\theta = T_e / T_\infty$$

$$u = \gamma / (Z T_\infty / m_e)^{1/2},$$

y teniendo en cuenta que, de la (II-2-b) y de la expresión de  $q$ , es  $dT_e / dr \geq 0$ , resulta el sistema de ecuaciones

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\theta}{u^2} \right) \frac{du^2}{d\eta} = \frac{2\theta}{\eta} - \frac{d\theta}{d\eta} \quad (\text{II-3-a})$$

$$\gamma \eta^2 \theta^{5/2} \frac{d\theta}{d\eta} = \left( 1 + \beta \eta^2 u \theta \frac{d\theta}{d\eta} \right) \left( \frac{5}{2} \theta + \frac{1}{2} u^2 \right) \quad (\text{II-3-b})$$

donde

$$\gamma = K T_\infty^{5/2} r_3 / \mu$$

$$\beta = \gamma (Z m_e / m_i)^{1/2} 10 / (3 \phi).$$

Este sistema de ecuaciones puede tratarse mediante el formalismo del plano de fase de Sedov [Sedov L. I. (1959)]. En efecto, definiendo las variables de fase

$$M^2 = u^2 / \theta$$

$$Y = \gamma \eta \theta^{5/2}$$

(M es el número de Mach referido a la velocidad de las ondas lónico-acústicas  $c_3^2 = Z T_0 / m_i$ ), el sistema se escribe

$$\frac{dM^2}{d \ln \eta} = \frac{M^2 \{ 8Y [1 - \epsilon M (M^2 + 5)] - (M^2 + 1)(M^2 + 5) \}}{2Y (M^2 - 1) [1 - \epsilon M (M^2 + 5)]} \quad (II-4-a)$$

$$\frac{dY}{d \ln \eta} = Y + \frac{5}{4} \frac{M^2 + 5}{1 - \epsilon M (M^2 + 5)} \quad (II-4-b)$$

donde  $\epsilon = \beta / (2\gamma)$ . Entre estas dos ecuaciones es posible eliminar la variable espacial  $\eta$  y obtener así un sistema autónomo que relacione  $M^2$  con  $Y$ ; una vez hecho esto, de la (II-4-b) se obtiene, a través de una cuadratura,  $\eta(Y)$  que por inversión da  $Y(\eta)$ . Conocida  $Y(\eta)$ , la  $M^2(\eta)$  resulta inmediatamente. La ecuación autónoma es

$$\frac{dM^2}{dY} = \frac{2M^2 \{ 8Y [1 - \epsilon M (M^2 + 5)] - (M^2 + 1)(M^2 + 5) \}}{Y (M^2 - 1) \{ 4Y [1 - \epsilon M (M^2 + 5)] + 5(M^2 + 5) \}} \quad (II-5)$$

Las soluciones de esta ecuación están representadas por curvas en el plano  $(M^2, Y)$ . Por cada punto regular de (II-5) pasa sólo una de estas curvas que pueden unir entre sí los diferentes puntos singulares de (II-5). Estos son seis, y su ubicación  $(M^2, Y)$ , junto con el tipo de singularidad y expresiones asintóticas, están dados por

O)  $(0, 0)$ , es un nodo, en su entorno es  $M^2 = C Y^{2/5}$ .

S)  $\left(1, \frac{3}{2(1 - 6\epsilon)}\right)$ , es una ensilladura, en su entorno es  $M^2 = 1 + \beta \left[ Y - \frac{3}{2(1 - 6\epsilon)} \right]$

A)  $(0, \infty)$ , es un nodo, en su entorno es  $M^2 = C / Y^4$ .

B)  $(\infty, 0)$ , es un nodo, en su entorno es  $M^2 = C / Y^{2/5}$ .

C)  $(\infty, \infty)$ , es un nodo, en su entorno es  $M^2 = \ln(C Y^4)$ .

D)  $(M_{sat}^2, \infty)$ , es un nodo, en su entorno es  $M^2 = M_{sat}^2 \left[ 1 - \frac{(M_{sat}^2 + 5)(M_{sat}^2 + 1)}{8(1/2 + \epsilon M_{sat}^2)} \frac{1}{Y} \right]$ . Aquí  $M_{sat}^2$  es

la raíz de la ecuación  $X(X^2 + 5) = 1/\epsilon$ .

Un esquema de las curvas en el espacio de fase se muestra en la figura II-1.

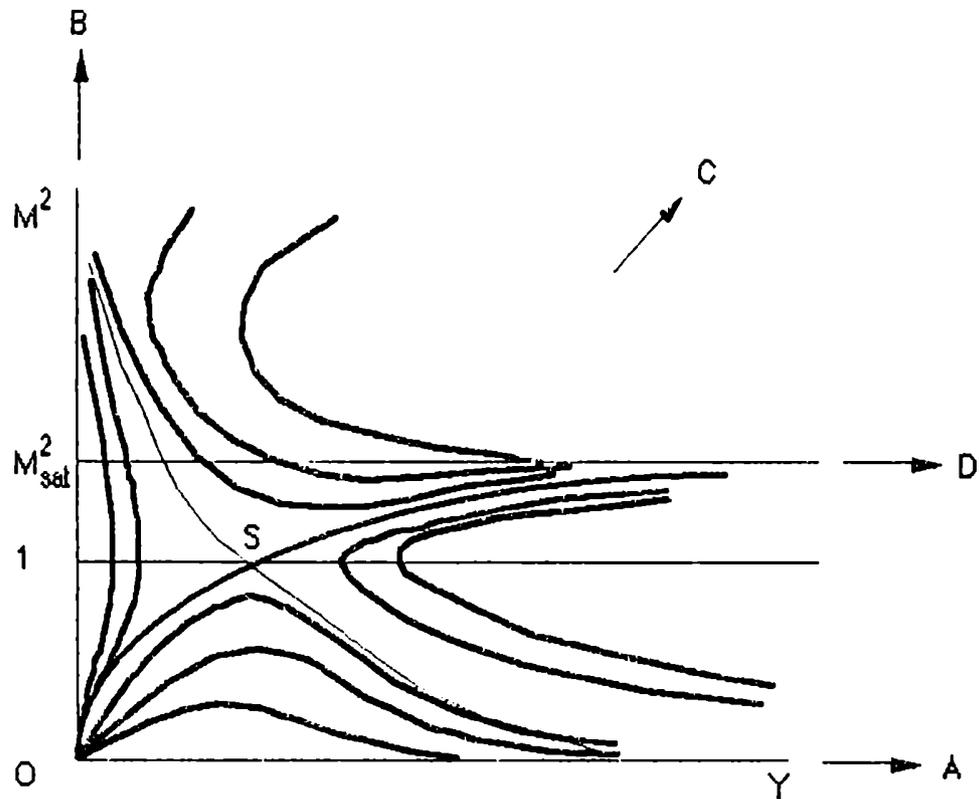


Figura II-1

Posición de los puntos singulares y distintos tipos de curvas,  
correspondientes a la ecuación (II-5)

Como se mencionó antes, por cualquier punto regular del plano de fase pasa una sola curva que une dos puntos singulares. Para determinar qué curva corresponde a la solución de un problema particular debe analizarse el comportamiento asintótico de las variables en el entorno de cada punto singular. En el problema de Interés para este trabajo, de las condiciones de contorno c-1), c-2), c-4), c-5) y c-6), y de las definiciones de las variables de fase, se ve inmediatamente que las condiciones sobre la superficie del sólido ( $\eta = 1$ ) corresponden al punto O; las condiciones al infinito, por otro lado, están representadas por el punto A. De esta

manera, la solución estará representada por una curva, o trozos de curva, que una los puntos singulares O y A.

Ahora bien, las curvas que unen O con A en forma continua cumplen todas que  $M^2 < 1$ . Las soluciones con porciones de flujo supersónico estarán representadas por trozos de curva, uno partiendo de O y otro llegando a A, relacionadas entre sí en forma discontinua, esto es, debe existir un frente de choque. Existe sólo una curva que partiendo de O Ingres a la zona  $M^2 > 1$ , con  $\gamma$  monótono creciente [ como debe ser en  $M = 1$  de acuerdo con la (II-4-b)], que es la que pasa por S. Esta curva termina en D, de manera que en algún punto debe haber un salto discontinuo a una curva con  $M^2 < 1$  que llegue a A. La condición de empalme será que el salto corresponda al mismo valor de  $\eta$  en ambas curvas y que se cumplan las condiciones de salto apropiadas al tipo de choque en cuestión.

Designando con subíndice - (+) a las variables del plasma después (antes) del choque, las relaciones de Rankine-Hugoniot para un choque plano en un gas monoatómico se escriben [Zel'dovich Ya. B. y Raizer Yu. P. (1966)]

$$\frac{\theta_-}{\theta_+} = 1 + M_+^2 (1 - \psi) \left( \psi - \frac{1}{M_+^2} \right)$$

$$M_-^2 = \frac{\psi M_+^2}{1 + M_+^2 (1 - \psi)}$$

donde  $\psi = n_+ / n_-$ .

Si la temperatura a través del choque fuese discontinua, el flujo de calor sería completamente saturado por considerar un choque sin espesor. Dado que, en términos de la variable  $M^2$ , es

$$\frac{q_{sh}}{q_{sat}} = \frac{\bar{K} T_e^{5/2} \frac{dT_e}{dr}}{\frac{3}{10} \phi \eta \frac{T_e^{5/2}}{m_e^{1/2}}} = \frac{\epsilon M (M^2 + 5)}{1 - \epsilon M (M^2 + 5)}$$

el hecho que el flujo de calor sea totalmente saturado implica  $q_{sh} / q_{sat} \rightarrow \infty$  y, por lo tanto,  $M^2 = M_{sat}^2$ . Sin embargo, la curva O-S-D se encuentra en la zona  $M^2 < M_{sat}^2$ , por lo tanto la temperatura debe ser continua a través del choque. Las condiciones de salto dicen entonces que

$$M_-^2 = 1 / M_+^2$$

$$Y_- = Y_+$$

Para obtener una solución se procede entonces de la siguiente manera. Fijado el valor de  $\epsilon$ , las curvas O-S-D, O-S-A y todas las intermedias (ver figura) se calculan de una vez y para siempre. Desde el punto de vista numérico es conveniente integrar la ecuación (II-5) desde S hacia O y desde S hacia D y A, usando, para arrancar el cálculo, las expresiones asintóticas válidas en la cercanía de los puntos singulares.

Por las condiciones c.4) y c.5), en el límite  $\eta \rightarrow \infty$  es

$$M^2 = \frac{u^2}{B} \rightarrow \frac{\sigma^2}{\gamma^2} \frac{1}{\eta^4}$$

$$Y = \gamma \eta \theta^{5/2} \rightarrow \gamma \eta$$

donde  $\sigma_{\infty}^2 = \frac{\bar{K} T_{\infty}^2}{n_{\infty} r_3} (m_i / Z)^{1/2}$ .

De esta manera, cada problema queda definido por su valor de  $\sigma_{\infty}$  (como puede verse también por consideraciones dimensionales); el valor de  $\gamma$  resulta como autovalor del problema. Desde el punto de vista del cálculo es muy difícil fijar el valor de  $\sigma_{\infty}$  y luego obtener el  $\gamma$ ; lo más conveniente es, si se buscan soluciones con flujo supersónico, integrar simultáneamente el sistema formado por (II-5) y

$$\frac{d \ln \eta}{d Y} = \frac{1}{\gamma + \frac{5}{4} \frac{M^2 + 5}{1 - \epsilon M (M^2 + 5)}}$$

partiendo desde S hacia D, y eligiendo como parámetro libre el valor de  $M^2$  correspondiente al choque; para cada valor de éste, las condiciones de salto determinan la curva que va hacia A; los valores de  $\sigma_{\infty}$  y  $\gamma$  se obtienen entonces como

$$\gamma = \lim_{Y \rightarrow \infty} \frac{Y}{\eta} \quad (II-6-a)$$

$$\sigma_{\infty} = \gamma^{-1} \lim_{Y \rightarrow \infty} M Y^2 \quad (II-6-b)$$

Este procedimiento requiere conocer el valor de  $\eta$  correspondiente al punto S que se determina, para cada valor de  $\epsilon$ , de una vez y para siempre integrando (II-5) desde S hacia O

variando el valor de  $\eta$  en S hasta que se obtenga  $\eta \rightarrow 1$  en O. En la tabla I-1 se muestra el valor  $\eta_{son}$  de  $\eta$  correspondiente al punto sónico para diferentes  $\epsilon$ .

$\epsilon$	$\eta_{son}$
0	1,214941
0,01	1,218957
0,02	1,223456
0,03	1,228525
0,04	1,234275
0,05	1,240860
0,06	1,248475
0,07	1,257386
0,08	1,267957
0,09	1,280714
0,10	1,296419
0,11	1,316277

Tabla I-1

Los valores correspondientes a flujos siempre subsónicos son más sencillos de obtener, pues basta integrar (II-5) desde O hacia A usando para arrancar el cálculo que en el entorno de O es  $M^2 = C Y^{2/5}$ . El parámetro libre es ahora el valor de C (que debe ser menor que el correspondiente a la curva O-S), y los valores de  $\sigma_{\infty}$  y  $\gamma$  resultan también dados por las (II-6).

En la figura II-2 se muestran los perfiles de  $\theta$  y de la densidad adimensionalizada con su valor al infinito:  $v \equiv n / n_{\infty}$ . Estos fueron calculados para  $\epsilon = 0,08$ , que corresponde a un plasma de Ydrio ( $Z \approx 7$  y  $A \approx 14$ ), con un factor de limitación  $f_L = 0,1$ . La posición de la onda de choque es  $\eta = 6$  que fue elegida como parámetro libre.

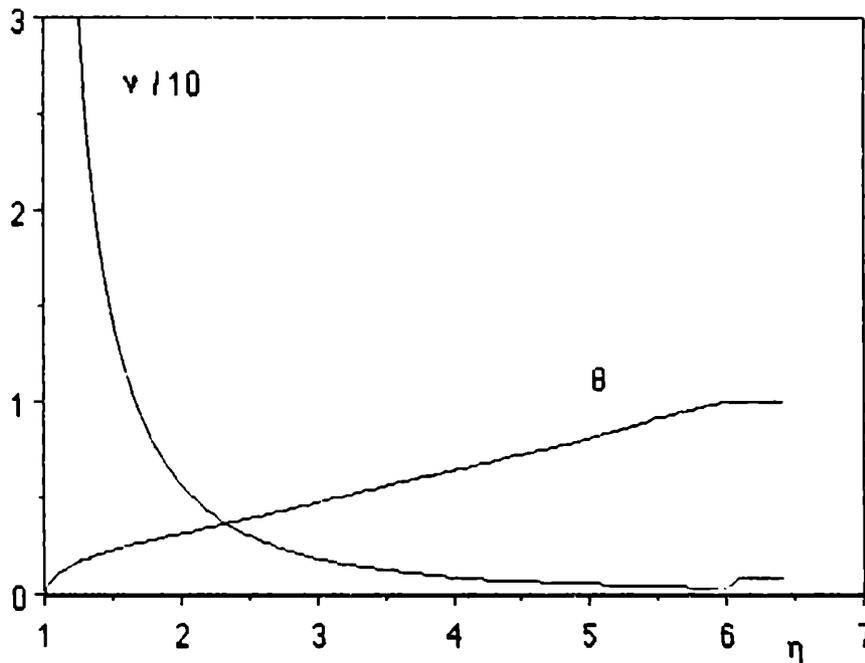


Figura II-2

Perfiles de densidad y temperatura adimensionales correspondientes a  $\epsilon = 0,08$

Nótese que entre el punto sónico y el choque la temperatura crece en forma aproximadamente lineal, esta es la zona en que el flujo toma valores fuertemente saturados. Es interesante ver que en las zonas en que el flujo está completamente saturado la solución del sistema (II-2) es analítica. En efecto, dicho sistema para  $q = q_{sat}$  se escribe

$$\frac{1}{2} \left( 1 - \frac{\theta}{u^2} \right) \frac{du^2}{d\eta} = \frac{2\theta}{\eta} - \frac{d\theta}{d\eta}$$

$$\epsilon u^3 + 5 \epsilon \theta u - \theta^{3/2} = 0$$

Resolviendo la segunda para  $u$  se obtiene simplemente  $u = M_{sat} \theta^{1/2}$ , que usada en la primera conduce, luego de una Integración elemental, a

$$\theta = cte \eta^\lambda$$

donde

$$\lambda = \frac{4}{1 + M_{sat}^2}$$

Para  $\epsilon = 0,08$  es  $M_{sat} \approx \sqrt{3}$  por lo que  $\lambda \approx 1$  y el perfil de temperatura debe ser lineal.

Para los experimentos de fusión por confinamiento inercial es de gran interés conocer la presión de ablación, esto es, la presión sobre la superficie del sólido, que es la que produce la compresión y calentamiento del combustible. En términos de las variables definidas arriba la presión de ablación  $P_a$  está dada por

$$P_a = n_\infty T_\infty \frac{\sigma_\infty}{\gamma^{6/5}} \lim_{\eta \rightarrow 1} \frac{\gamma^{1/5}}{M}$$

Siendo  $\gamma$  el autovalor correspondiente a cada  $\sigma_{\infty}$ , la presión de ablación adimensionalizada con la presión al infinito es una función de  $\sigma_{\infty}$  para cada valor del limitador  $\epsilon$ . Esto es lo que se muestra en la figura II-3

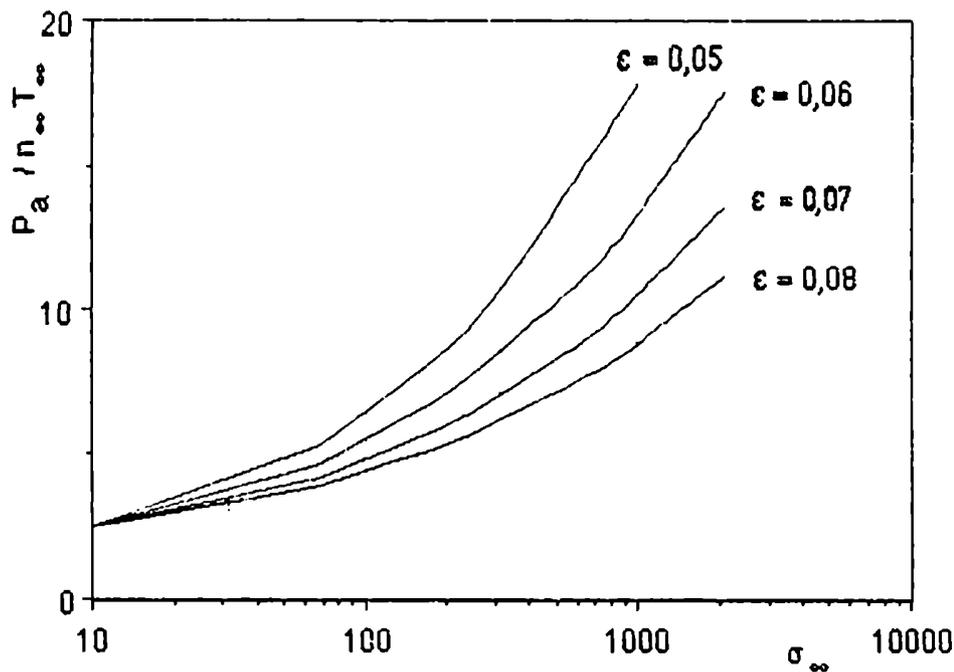


Figura II-3

Presión de ablación adimensional como función de  $\sigma_{\infty}$

Nótese que en las configuraciones de alto  $\sigma_{\infty}$  que permiten lograr presiones de ablación elevadas respecto de las del plasma, estas dependen muy fuertemente del valor de  $\epsilon$ , lo que requiere un estudio más cuidadoso de cuál es el limitador de flujo que mejor reproduce la solución real del problema. La evidencia experimental más fuerte está dada por el estudio del limitador de flujo en microesferas evaporadas por pulsos láser de alta potencia [T. J. Goldsack

et al (1982)] que indica que el limitador de flujo que mejor ajusta los resultados experimentales es  $f_L \approx 0,1$ .

Para el caso de una microesfera de vidrio el valor  $f_L = 0,1$  conduce a que  $\epsilon = 0,08$ . Para este valor de  $\epsilon$  la curva correspondiente de la figura II-3 puede ajustarse en la zona de interés por la relación simple

$$P_a = 0,86 n_{\infty} T_{\infty} \sigma_{\infty}^{1/3}$$

con una precisión superior al 5%. Es interesante notar que Gratton R., Piriz A. R. y Pouzo J. O. (1986), al resolver el mismo problema aplicando el modelo simplificado de Parks y Turnbull [Parks P. B. y Turnbull R. J. (1978)] que no utiliza limitador de flujo, sino que supone transporte de calor por un haz supratérmico punto a punto monoenergético, obtienen la ley

$$P_a = 0,40 n_{\infty} T_{\infty} \sigma_{\infty}^{1/3}$$

La coincidencia en la forma funcional no es de ninguna manera sorprendente dado que puede obtenerse directamente por argumentos dimensionales; el factor adimensional por otro lado, depende fuertemente del modelo de transporte térmico utilizado y, en particular, del factor de limitación del flujo térmico. La necesidad consecuente de un estudio más cuidadoso del transporte de energía en situaciones de gradientes espaciales abruptos, lleva entonces a desarrollar modelos alternativos confiables y suficientemente viables para el cálculo, lo que se desarrollará en los capítulos siguientes.

## Capítulo III

### Expresión no local del flujo térmico y de partículas

Utilizando la ecuación cinética definida en el capítulo I se procurará en este capítulo un estudio teórico del transporte debido a los electrones en un plasma cinético clásico en el que los modos propios se encuentran en su nivel térmico. La idea es obtener un formalismo de tipo fluido aplicable al caso de gradientes abruptos de temperatura y a situaciones de bajo número de carga  $Z$ .

Se considerará una configuración que depende de una sola coordenada cartesiana  $x$  en las variables espaciales. Con respecto a las velocidades se desarrollará la función de distribución en polinomios de Legendre del coseno del ángulo formado por el vector velocidad y la dirección  $x$ , que se designará por  $\mu$ . La ecuación de Fokker-Planck (I-1), cuando la dependencia de la función de distribución de los electrones se escribe en términos de la coordenada  $x$ , el tiempo  $t$ , la energía  $\epsilon$  y  $\mu$ , es

$$\frac{\partial f}{\partial t} - \frac{\partial e\psi}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + \mu v \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1 - \mu^2}{m v} \frac{\partial e\psi}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial \mu} = \frac{v}{\lambda_{ei}} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] + \frac{df}{dt_{ee}} \quad (\text{III-1})$$

donde  $\psi$  es el potencial de campo electrostático y  $e$  el valor absoluto de la carga del electrón. El operador  $d/dt_{ee}$  representa la parte no elástica del término de colisiones electrón-electrón y  $\lambda_{ei} = (mv^2)^2 / 2\pi e^4 n (Z \ln \Delta_{ei} + \ln \Delta_{ee})$  es el camino libre medio de dispersión. Para pasar de la (I-1) a la (III-1) debe usarse que la relación entre la energía y la velocidad es  $\epsilon = mv^2 / 2 - e\psi(x, t)$ .

Desarrollando la  $f$  en términos de los polinomios de Legendre en la variable  $\mu$

$$f(x,t,\mu,\epsilon) = f_0(x,t,\epsilon) + \mu f_1(x,t,\epsilon) + P_2(\mu) f_2(x,t,\epsilon) + \dots$$

y reemplazando esta expresión en la ecuación de Fokker-Planck (III-1) se obtiene una cadena de ecuaciones acoplada para los coeficientes  $f_i(x, t, \epsilon)$ . Las dos primeras ecuaciones son

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{\partial \epsilon \phi}{\partial t} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{1}{m \nu} \frac{\partial \epsilon \phi}{\partial x} f_1 = \frac{df_0}{dt_{\bullet\bullet}} \quad (\text{III-2-a})$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\partial \epsilon \phi}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon} + \nu \frac{\partial f_0}{\partial x} + \frac{2}{5} \nu \frac{\partial f_2}{\partial x} + \frac{6}{5} \frac{1}{m \nu} \frac{\partial \epsilon \phi}{\partial x} f_2 + \frac{2 \nu}{\lambda_{ei}} f_1 = \frac{df_1}{dt_{\bullet\bullet}} \quad (\text{III-2-b})$$

Si se pretende describir el transporte en plasmas de bajo  $Z$ , no es posible invocar el efecto isotropizador de las colisiones electrón-ion a fin de retener sólo unos pocos términos del desarrollo en polinomios de Legendre. Como se mencionó en el primer capítulo, sin embargo, analizadas con más detenimiento las propiedades del operador de colisiones electrón-ion se concluye que una buena descripción del flujo de energía es posible con sólo los dos primeros términos del desarrollo mencionado aun en plasmas de bajo  $Z$ . En particular se ve en el sistema (III-2) que si el campo eléctrico no es anormalmente alto, basta despreciar la segunda anisotropía  $f_2$  respecto de la parte isótropa  $f_0$  para que dicho sistema sea cerrado respecto de  $f_0$  y  $f_1$ . En la figura III-1 se reproduce el perfil de las dos primeras anisotropías de la función de distribución electrónica referidas a su parte isótropa, de acuerdo a las simulaciones realizadas con el código Fokker-Planck Internacional para las condiciones del equipo AURORA con un plasma de  $Z = 1$  en el que existen gradientes de temperatura abruptos (la longitud de variación

de la temperatura es de unos 3 caminos libres medios térmicos), y para una temperatura de 0,3 eV, aproximadamente. Es importante mencionar que estas simulaciones reproducen muy bien las mediciones de la función de distribución realizadas sobre dicho equipo. Como puede apreciarse,  $f_2$  es una fracción pequeña de  $f_0$  aun en una situación extrema como la indicada. Por otro lado, las simulaciones numéricas indican que incluso en los casos en que las anisotropías superiores no son pequeñas, éstas tienen muy poca influencia en el valor de los flujos definidos por  $f_1$ . La inclusión de  $f_2$  en el formalismo se considera en el final de este capítulo.

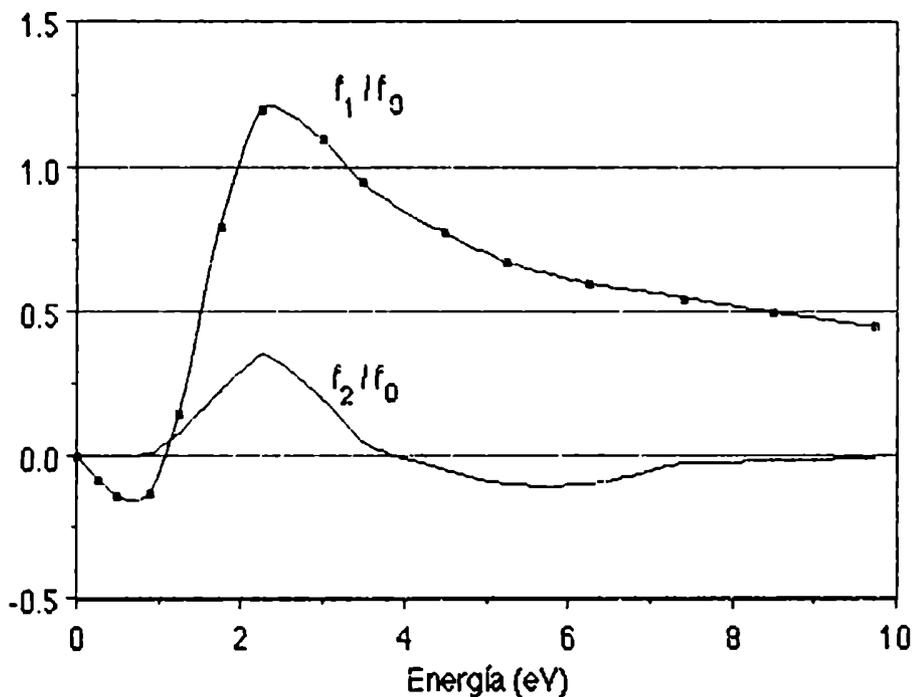


Figura III-1

Relación entre la parte isotrópica y distintas anisotropías de la función de distribución en el experimento AURORA

En el límite de Z alto existe una simplificación adicional que es despreciar el término de colisiones electrón-electrón respecto del correspondiente a las colisiones electrón-ion en la (III-b). Esta aproximación es la habitual cuando se buscan soluciones analíticas [Bell A. R. (1983), Albritton J. R., Williams E. A., Bernstein I. B. y Swartz K. P. (1986), Lindman E. L. y Swartz K. (1986)]. En este trabajo, sin embargo, no se hará tal aproximación con el fin de aplicar los resultados a plasmas de bajo Z.

Como los apartamientos de la función de distribución respecto de una maxwelliana se producen para energías muy superiores a las térmicas que son, por otro lado, las que interesan para el transporte térmico, la parte isótropa se puede escribir  $f_0 = f_{MB} + \delta f$ , donde  $\delta f$  es el apartamiento respecto de la maxwelliana, que es apreciable sólo a energías altas comparadas con la térmica; debe tenerse en cuenta que la magnitud de  $\delta f$  no está restringida a ser pequeña. Con respecto a la primera anisotropía  $f_1$  puede decirse también que sólo es apreciable a altas energías debido a que el número de electrones correspondientes a estas energías que contribuyen a la corriente es pequeño, lo que requiere una muy baja corriente de retorno de electrones termalizados (ver Fig III-1).

La expresión de  $d/dt_{ee}$  es

$$\frac{df}{dt_{ee}} = \frac{2 m_e v^3}{\lambda_c} \left( \frac{\partial f}{\partial \epsilon} + T_e \frac{\partial^2 f}{\partial \epsilon^2} \right) \quad (III-3)$$

donde  $\lambda_c$  el camino libre medio de pérdida de energía  $\lambda_c = (m v^2)^2 / 2 \pi e^4 n \ln \Delta_{ee}$ , y  $T_e$  la temperatura electrónica.

Dado que la  $f_{MB}$  anula el término de colisiones y que  $\delta f$  y  $f_1$  son significativos en el límite de energías altas, el segundo término de (III-3) puede despreciarse frente al primero tanto en el caso de  $f_0$  como de  $f_1$ . Por otro lado, si el tiempo de variación del campo eléctrico y las otras magnitudes macroscópicas es pequeño comparado con el tiempo de colisiones, puede considerarse el proceso de establecimiento de la función de distribución como estacionario. Con estas consideraciones, las ecuaciones (III-2) se reducen a

$$\frac{1}{3v} \frac{\partial}{\partial x} (v^2 f_1) = \frac{2 m v^3}{\lambda_e} \frac{\partial \delta f}{\partial \epsilon} \quad (\text{III-4-a})$$

$$v \frac{\partial f_{MB}}{\partial x} + v \frac{\partial \delta f}{\partial x} + \frac{2 v}{\lambda_{el}} f_1 = \frac{2 m v^3}{\lambda_e} \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon} \quad (\text{III-4-b})$$

Para escribir la primera se ha usado además que

$$\frac{1}{m v} \frac{\partial e\phi}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

Eliminando a  $\delta f$  entre ambas ecuaciones se obtiene la siguiente ecuación para  $f_1$ :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{\lambda_e}{6 m v^4} \frac{\partial}{\partial x} (v^2 f_1) \right] = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[ \frac{2 m v^2}{\lambda_e} \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon} - \frac{2}{\lambda_{el}} f_1 - \frac{\partial f_{MB}}{\partial x} \right] \quad (\text{III-5})$$

Como interesan las soluciones en el límite de energías altas, puede considerarse que  $\epsilon \gg |e\phi|$  y, por lo tanto,  $\partial v / \partial x \approx 0$ . De esta manera la (III-5) se reescribe

donde se ha definido

$$\lambda(x) \equiv \frac{\lambda_\epsilon}{\sqrt{3} (m v^2)^2}$$

$$C \equiv \frac{\ln \Delta_{e1}}{\ln \Delta_{e0}}$$

Haciendo el cambio de variable  $d\lambda\zeta = \lambda(x) dx$  y definiendo

$$\alpha \equiv (1 + CZ) / 2$$

$$\psi \equiv \epsilon^{-\alpha} f_1,$$

resulta que la ecuación (III-6) se escribe

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\epsilon^{\alpha+1}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \epsilon^{\alpha-1} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right) = - \frac{\sqrt{3}}{\epsilon^{\alpha+1}} \frac{\partial^2 f_{MB}}{\partial \zeta \partial \epsilon}$$

En términos de la función de Green  $G(\zeta, \epsilon | \zeta_0, \epsilon_0)$  la solución formal de esta ecuación es

$$f_1(\zeta, \epsilon) = - \epsilon^\alpha \int d\zeta_0 \int d\epsilon_0 G(\zeta, \epsilon | \zeta_0, \epsilon_0) \frac{\sqrt{3}}{\epsilon_0^{\alpha+1}} \frac{\partial^2 f_{MB}}{\partial \zeta_0 \partial \epsilon_0} \quad (\text{III-7})$$

La ecuación que satisface la función Green es

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} - \frac{1}{\epsilon^{\alpha+1}} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \epsilon^{\alpha-1} \frac{\partial G}{\partial \epsilon} \right) = \delta(\zeta - \zeta_0) \delta(\epsilon - \epsilon_0) \quad (\text{III-8})$$

Si se considera que no hay contornos espaciales que influyan la zona de interés la solución de (III-8) será de la forma

$$G(\zeta, \epsilon | \zeta_0, \epsilon_0) = G(\zeta - \zeta_0, \epsilon, \epsilon_0).$$

La transformada de Fourier de la función de Green respecto de  $\zeta - \zeta_0$

$$a(k, \epsilon, \epsilon_0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ik(\zeta - \zeta_0)} G(\zeta - \zeta_0, \epsilon, \epsilon_0) d(\zeta - \zeta_0)$$

debe satisfacer

$$k^2 a + \frac{\alpha - 1}{\epsilon^3} \frac{\partial a}{\partial \epsilon} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 a}{\partial \epsilon^2} = -\frac{1}{2\pi} \delta(\epsilon - \epsilon_0)$$

La solución que describe la contribución a  $\epsilon$  proveniente de la fuente con energía  $\epsilon_0$  mayor que  $\epsilon$  será de la forma

$$a(k, \epsilon, \epsilon_0) = \Theta(\epsilon_0 - \epsilon) b(k, \epsilon, \epsilon_0)$$

con lo que resulta para  $b$  la ecuación

$$k^2 b + \frac{\alpha - 1}{\epsilon^3} \frac{\partial b}{\partial \epsilon} + \frac{1}{\epsilon^2} \frac{\partial^2 b}{\partial \epsilon^2} = 0$$

con las condiciones

$$[b]_{\epsilon=\epsilon_0} = 0 \quad (\text{III-9-a})$$

$$\left[ \frac{\partial b}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon=\epsilon_0} = \frac{\epsilon_0^2}{2\pi} \quad (\text{III-9-b})$$

Efectuando el cambio de variable  $\xi = k \epsilon^2 / 2$  y definiendo la función  $\Psi \equiv \epsilon^{(\alpha-2)/2} b$ , la ecuación anterior se escribe como la ecuación de Bessel para  $\Psi(\xi)$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} + \left( 1 - \frac{\nu^2}{\xi^2} \right) \Psi = 0$$

donde  $\nu = |2 - \alpha| / 4$ . Como soluciones independientes pueden tomarse las funciones de Hankel de orden  $\nu$ :  $H_\nu^{(1,2)}$ , con lo cual la función  $b$  será

$$b = \epsilon^{(2-\alpha)/2} \left[ A H_\nu^{(1)}(k\epsilon^2/2) + B H_\nu^{(2)}(k\epsilon^2/2) \right]$$

Las condiciones (III-9) se escriben entonces

$$A H_\nu^{(1)}(k\epsilon_0^2/2) + B H_\nu^{(2)}(k\epsilon_0^2/2) = 0$$

$$A H_\nu^{(1)'}(k\epsilon_0^2/2) + B H_\nu^{(2)'}(k\epsilon_0^2/2) = \frac{\epsilon_0^{\alpha/2}}{2\pi k}$$

donde la prima simboliza la derivada respecto del argumento. Dado que [Abramowitz M. y Stegun I. (1970)]

$$\begin{aligned} H_{\nu}^{(1)}(z) H_{\nu}^{\prime(2)}(z) - H_{\nu}^{(2)}(z) H_{\nu}^{\prime(1)}(z) &= \\ &= H_{\nu}^{(2)}(z) H_{\nu+1}^{(1)}(z) - H_{\nu}^{(1)}(z) H_{\nu+1}^{(2)}(z) = -\frac{4i}{\pi z} \end{aligned}$$

el sistema tiene siempre solución que vale

$$A = -i \frac{\epsilon_0^{(\alpha+4)/2}}{16} H_{\nu}^{(2)}(k\epsilon_0^2/2)$$

$$B = i \frac{\epsilon_0^{(\alpha+4)/2}}{16} H_{\nu}^{(1)}(k\epsilon_0^2/2)$$

Con todo esto la función de Green exacta cuando no existen contornos espaciales es

$$G(\zeta, \epsilon | \zeta_0, \epsilon_0) = -\frac{1}{16} \epsilon_0^{(\alpha+2)/4} \epsilon^{(2-\alpha)/2} \Theta(\epsilon_0 - \epsilon)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(\zeta-\zeta_0)} \left\{ H_{\nu}^{(1)}(k\epsilon^2/2) H_{\nu}^{(2)}(k\epsilon_0^2/2) - H_{\nu}^{(1)}(k\epsilon_0^2/2) H_{\nu}^{(2)}(k\epsilon^2/2) \right\} dk \quad (\text{III-10})$$

Lamentablemente, esta expresión no puede evaluarse analíticamente y deben emplearse argumentos adicionales para poder obtener resultados prácticos. Un límite sencillo de analizar es el de número atómico elevado  $Z \rightarrow \infty$  que equivale a  $\nu \rightarrow \infty$ . En tal caso las expresiones asintóticas de las funciones de Hankel son [Abramowitz M. y Stegun I. (1970)]

$$H_{\nu}^{(1)}(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left[ \left( \frac{\xi e}{2\nu} \right)^{\nu} - 2i \left( \frac{\xi e}{2\nu} \right)^{-\nu} \right]$$

$$H_{\nu}^{(2)}(\xi) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \left[ \left( \frac{\xi e}{2\nu} \right)^{\nu} + 2i \left( \frac{\xi e}{2\nu} \right)^{-\nu} \right]$$

con las cuales la función de Green puede obtenerse inmediatamente de (III-10) y vale

$$G(\zeta, \epsilon | \zeta_0, \epsilon_0) = -\frac{\epsilon_0^3}{4\nu} \Theta(\epsilon_0 - \epsilon) \left[ \left( \frac{\epsilon_0}{\epsilon} \right)^{4\nu} - 1 \right] \delta(\zeta - \zeta_0)$$

La aparición de la delta de Dirac indica que en este límite el fenómeno de transporte está altamente localizado en el espacio, como era de esperarse en una situación en que las colisiones electrón-ion son tan efectivas para la isotropización. De la (III-7) resulta para  $f_1$

$$f_1 = \frac{\sqrt{3}}{\alpha-2} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial \zeta} \int_{\epsilon}^{\infty} \left[ 1 - \left( \frac{\epsilon}{\epsilon_0} \right)^{\alpha-2} \right] \frac{\partial f_{MB}}{\partial \epsilon_0} d\epsilon_0$$

En el límite  $\alpha \rightarrow \infty$  esta expresión se reduce a

$$f_1 = -\frac{\sqrt{3}}{\alpha-2} \epsilon^2 \frac{\partial f_{MB}}{\partial \zeta} = -\frac{\lambda_{\epsilon}}{4(\alpha-2)} \frac{\partial f_{MB}}{\partial x} \approx -\frac{\lambda_{ei}}{2} \frac{\partial f_{MB}}{\partial x} \quad (\text{III-11})$$

que es el resultado que puede obtenerse directamente del sistema original (III-2) haciendo  $Z \rightarrow \infty$ . Usando (III-11) para calcular el flujo de calor se obtiene inmediatamente la ley clásica de Spitzer y Härm.

A continuación se estudiará la expresión general (III-7). En la misma aparecen derivadas de la función de Boltzmann

$$f_{MB}(\zeta, \epsilon) = \left(\frac{m}{2\pi}\right)^{3/2} \frac{n(\zeta)}{T(\zeta)^{3/2}} \exp\left[-\frac{\epsilon + e\phi(\zeta)}{T(\zeta)}\right]$$

Dado que la solución se obtuvo en el límite  $\epsilon \gg |e\phi|$ , se considerará en esta expresión que  $e\phi \approx 0$  luego de derivar respecto de  $\zeta_0$ , con lo que se escribirá

$$f_1(\zeta, \epsilon) = -e\alpha \int d\zeta_0 \int d\epsilon_0 G(\zeta, \epsilon | \zeta_0, \epsilon_0) \frac{\sqrt{3}}{\epsilon_0^{\alpha+1}} \left[ \frac{\partial^2 f_{MB}^{(0)}}{\partial \zeta_0 \partial \epsilon_0} - \frac{1}{T(\zeta_0)} \frac{\partial e\phi}{\partial \zeta_0} \frac{\partial f_{MB}^{(0)}}{\partial \zeta_0} \right] \quad (III-12)$$

donde  $f_{MB}^{(0)} \equiv f_{MB}(e\phi = 0)$ . De ahora en más se suprimirá el supraíndice (0) en la  $f_{MB}^{(0)}$  que se dará por sobreentendido.

De igual manera, en las expresiones de los flujos de partículas y de energía expresados en forma exacta por

$$J = \frac{8\pi}{3m^2} \int_{-e\phi}^{+\infty} (\epsilon + e\phi) f_1 d\epsilon$$

$$Q = \frac{8\pi}{3m^2} \int_{-e\phi}^{+\infty} (\epsilon + e\phi)^2 f_1 d\epsilon$$

se hará  $e\phi = 0$ , con lo que el efecto del campo electrostático estará contemplado en el término de "campo eléctrico"  $\partial e\phi/\partial z$ . Este se obtendrá en forma implícita al pedir que el flujo de partículas se anule en cada punto del espacio.

Con el fin de obtener aproximaciones útiles debe analizarse con cuidado el proceso de transporte. A lo largo de las características de la ecuación hiperbólica (III-6) se tiene

$$\frac{d\epsilon}{dx} = \pm \frac{4\sqrt{3}}{\lambda_c} \epsilon = \pm \frac{1}{\lambda(x)\epsilon}$$

que al ser integrada resulta

$$\left| \zeta - \zeta_0 \right| = \frac{1}{2} \left| \epsilon^2 - \epsilon_0^2 \right|$$

donde las magnitudes con subíndice cero se refieren a los valores iniciales. Una suposición razonable es que la contribución más importante a la función de distribución en un dado punto del espacio y con determinada energía  $\epsilon$ , corresponda a partículas provenientes de otros puntos con energías no muy diferentes de  $\epsilon$ . Si esto es así, los valores de  $k$  más importantes en la integral de (III-10) serán aquellos que satisfagan la condición

$$k \approx \frac{1}{\left| \zeta - \zeta_0 \right|} \approx \frac{\epsilon^2}{\left| \epsilon^2 - \epsilon_0^2 \right|} 2\epsilon^{-2} \gg 2\epsilon^{-2}$$

De esta manera, basta utilizar aproximaciones de las funciones de Hankel válidas para argumentos grandes. Tales expresiones asintóticas son [Abramowitz M. y Stegun I. (1970)]

$$H_{\nu}^{(1)}(\xi) \approx \left(\frac{2}{\pi \xi}\right)^{1/2} \exp[i(\xi - \nu\pi/2 - \pi/4)] \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1/2 - \nu)_r (1/2 + \nu)_r}{r! (2i\xi)^r} \right]$$

$$H_{\nu}^{(2)}(\xi) \approx \left(\frac{2}{\pi \xi}\right)^{1/2} \exp[-i(\xi - \nu\pi/2 - \pi/4)] \left[ 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{(1/2 - \nu)_r (1/2 + \nu)_r}{r! (-2i\xi)^r} \right]$$

donde  $(\alpha)_r = \alpha(\alpha + 1)(\alpha + 2) \dots (\alpha + r - 1)$ .

Los argumentos anteriores indican que existe un cierto ordenamiento en el proceso de transporte que posibilita el uso de expresiones asintóticas de las funciones de Hankel; la importancia relativa de los diferentes términos del desarrollo, sin embargo, no puede determinarse a priori y, en principio, deben compararse las expresiones que resultan de retener diferente número de términos. Si se utiliza sólo el primer término del desarrollo de cada una de las funciones de Hankel la integral de (III-10) puede realizarse inmediatamente y resulta

$$G(\xi, \varepsilon | \zeta_0, \varepsilon_0) = \frac{1}{2} \varepsilon_0^{(\alpha+2)/2} \varepsilon^{-\alpha/2} \Theta(\varepsilon_0 - \varepsilon) \left[ \Theta(\zeta_0 - \zeta_+) - \Theta(\zeta_0 - \zeta_-) \right]$$

donde

$$\zeta_{\pm} = \zeta \pm \frac{\varepsilon_0^2 - \varepsilon^2}{2}$$

con esta expresión la primera anisotropía resulta de (III-7) y vale

$$f_1(\zeta, \epsilon) = \frac{\sqrt{3}}{2} \epsilon^{\alpha/2} \int_{\epsilon}^{\infty} d\epsilon_0 \epsilon_0^{-\alpha/2} \int_{\zeta_-}^{\zeta_+} d\zeta_0 \left[ \frac{\partial^2 f_{MB}}{\partial \epsilon_0 \partial \zeta_0} - \frac{1}{T(\zeta_0)} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta_0} \frac{\partial f_{MB}}{\partial \epsilon_0} \right] \quad (III-13)$$

Con esta expresión y la (III-4-a) puede calcularse el apartamiento de la parte isótropa respecto de la maxwelliana que vale

$$\delta f(\zeta, \epsilon) = -\frac{1}{2} \int_{\epsilon}^{\infty} d\epsilon_1 \epsilon_1^{(\alpha+2)/2} \int_{\epsilon_1}^{\infty} d\epsilon_0 \epsilon_0^{-\alpha/2} \left[ \frac{\partial^2 f_{MB}}{\partial \epsilon_0 \partial \zeta_0} - \frac{1}{T(\zeta_0)} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta_0} \frac{\partial f_{MB}}{\partial \epsilon_0} \right]_{\zeta_-}^{\zeta_+}$$

donde ahora es

$$\zeta_{\pm} = \zeta \pm \frac{\epsilon_0^2 - \epsilon^2}{2}$$

Para el cálculo efectivo de la primera anisotropía  $f_1$ , la (III-13) puede todavía elaborarse efectuando la integración respecto de  $\epsilon_0$ . La expresión resultante es

$$f_1(\zeta, \epsilon) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{m}{2\pi} \right)^{3/2} \epsilon^{\alpha/2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_0 \frac{n_0}{T_0^{5/2}} \left[ \frac{\exp(-\Sigma/T_0)}{\Sigma(\alpha+2)^{1/2}} + T_0^{-\alpha/2} \frac{\partial \phi}{\partial \zeta_0} S_{\alpha/2}(\Sigma/T_0) \right]$$

donde  $S_{\gamma}(x) \equiv \int_x^{+\infty} \frac{\exp(-u)}{u^{\gamma}} du$ , y  $\Sigma \equiv (\epsilon^2 + 2|\zeta - \zeta_0|)^{1/2}$ .

Con la (III-13) pueden calcularse los flujos de partículas J y de calor Q dados por

$$\langle J, Q \rangle = \frac{8\pi}{3m^2} \int_0^{\infty} \epsilon \beta f_1 d\epsilon$$

donde  $\beta = 1, 2$  corresponde a J, Q respectivamente. Estos resultan de integrales sucesivas respecto de  $\zeta_0$ ,  $\epsilon_0$  y  $\epsilon$  en el término con campo eléctrico de (III-13), y respecto de  $\epsilon_0$  y  $\epsilon$  en el primer término de la misma expresión. Extendiendo hasta Infinito el límite de las Integrales, usando apropiadamente funciones escalón, se prueba que el orden de las Integraciones puede cambiarse y efectuar primero la integral sobre  $\epsilon$ . Hecho esto, luego de un cálculo tedioso pero directo resultan las expresiones

$$\langle J(x), Q(x) \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ g_{J,Q}(x') P_{J,Q}[\theta(x, x')] + h_{J,Q}(x') \frac{\partial \theta \phi}{\partial x'} R_{J,Q}[\theta(x, x')] \right\} dx' \quad (III-14)$$

donde se ha vuelto a la coordenada espacial x y, además, se han definido

$$g_J(x') = \left( \frac{8\pi}{m} \right)^{1/2} e^4 \ln \Delta_{ee} \frac{n(x')^2}{T(x')^{3/2}} ; \quad g_Q(x') = g_J(x') T(x')$$

$$h_J(x') = \left( \frac{2}{3\pi m} \right)^{1/2} \frac{n(x')}{T(x')^{1/2}}; \quad h_Q(x') = h_J(x') T(x')$$

$$P_{J,Q}[\theta] = \text{sg}(x-x') I_{0,1}; \quad R_J[\theta] = \frac{4}{\alpha+4} I_2; \quad R_Q[\theta] = \frac{12}{\alpha+6} I_3$$

en las que

$$I_n(\theta) \equiv \frac{1}{n!} \int_{\theta}^{+\infty} \left(1 - \frac{\theta^2}{u^2}\right)^{\frac{\alpha+2n}{4}} u^n \exp(-u) du \quad (\text{III-15})$$

y

$$B(x, x') \equiv \frac{1}{T(x')} \left| 2 \int_{x'}^x \frac{dx''}{\lambda(x'')} \right|^{\frac{1}{2}}$$

Propiedades importantes de los núcleos  $I_n(\theta)$  son las siguientes:

i)  $I_n(\theta=0) = 1$

ii)  $I_n(\theta \rightarrow \infty) \rightarrow \frac{2^v \Gamma(v+1)}{n!} \theta^{v+\sigma} \exp(-\theta) \left[ 1 + \frac{(v+2\sigma)(v+1)}{2} \frac{1}{\theta} + O\left(\frac{1}{\theta^2}\right) \right]$

donde  $v \equiv (\alpha + 2n) / 4$  y  $\sigma \equiv n - 2v$ .

$$\text{iii) } \int_0^{\infty} \ln(\theta) \theta^\gamma d\theta = \frac{\Gamma(n + \gamma + 2)}{n! (n + 2 + \alpha / 2)}$$

Estas expresiones muestran efectivamente el carácter no local de los flujos en el sentido que la contribución a los mismos en un dado punto  $x$  proviene de las diferentes posiciones  $x'$  pesadas por los núcleos  $P$  y  $R$ . Como puede verse fácilmente, estos son funciones moduladas por exponenciales decrecientes de  $\theta$ , que es esencialmente la raíz cuadrada de la distancia entre  $x$  y  $x'$  medida en unidades del camino libre medio térmico:  $\lambda_T = T^2 \lambda(x)$ , con  $T$  la temperatura del punto fuente  $x'$ . De esta manera, las contribuciones a los flujos provienen de distancias menores que unos pocos  $\lambda_T$  por lo que es de esperar comportamientos muy diferentes dependiendo de cómo se comparan las distancias de variación de las magnitudes macroscópicas  $L$  con  $\lambda_T$ . A continuación se estudiarán los límites  $L \gg \lambda_T$  y  $L \ll \lambda_T$ .

En ambos casos límites el estudio analítico es más sencillo si se vuelve a la variable auxiliar  $\zeta$  [ $d\zeta = dx/\lambda(x)$ ] y se tiene en cuenta que

$$\theta(x, x') = \frac{1}{T(\zeta)} |2(\zeta - \zeta')|^{1/2} = \theta(T(\zeta), \zeta - \zeta')$$

Definiendo además la variable  $z \equiv \zeta - \zeta'$ , los flujos son

$$\{J(\zeta), Q(\zeta)\} = \int_0^{+\infty} \left\{ g_{J,Q}(\zeta - z) I_{0,1} [T(\zeta - z), z] - g_{J,Q}(\zeta - z) I_{0,1} [T(\zeta - z), z] \right\} dz +$$

$$+ \int_0^{+\infty} \left\{ h_{J,Q}(\zeta - z) \frac{\partial \epsilon \phi}{\partial \zeta'} R_{J,Q} [T(\zeta - z), z] + h_{J,Q}(\zeta + z) \frac{\partial \epsilon \phi}{\partial \zeta'} R_{J,Q} [T(\zeta + z), z] \right\} dz$$

Traducido a la variable  $z$ , la no localización de los núcleos  $P$  y  $R$  se extiende hasta "distancias"  $\Delta \zeta \approx T^2$ , en las cuales las variaciones de una variable macroscópica  $g$  cualquiera es:  $|\Delta g| \approx T^2 |\partial g / \partial \zeta| = \lambda_T |\partial g / \partial x|$ .

En el caso de gradientes suaves ( $L \gg \lambda_T$ ) es  $|\Delta g| \ll g$ , lo que permite retener sólo los primeros términos del desarrollo de  $g$  en serie de Taylor alrededor de  $\zeta$ , resultando

$$\langle J(\zeta), Q(\zeta) \rangle = - \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ g_{J,Q}(\zeta) \int_0^{+\infty} l_{0,1} [T(\zeta), z] dz \right\} + 2 h_{J,Q}(\zeta) \frac{\partial \epsilon \phi}{\partial \zeta} \int_0^{+\infty} R_{J,Q} [T(\zeta), z] dz$$

Las integrales pueden efectuarse analíticamente usando la propiedad iii) y, volviendo a la coordenada  $x$ , los resultados son

$$J(x) = \left( \frac{2}{3 \pi m} \right)^{1/2} \frac{8 \times 4!}{(\alpha + 4)(\alpha + 8)} \lambda(x) \left[ - \frac{\partial}{\partial x} (n T^{5/2}) + \frac{\partial \epsilon \phi}{\partial x} n T^{3/2} \right]$$

$$Q(x) = \left( \frac{2}{3 \pi m} \right)^{1/2} \frac{8 \times 5!}{(\alpha + 6)(\alpha + 10)} \lambda(x) \left[ - \frac{\partial}{\partial x} (n T^{7/2}) + \frac{\partial \epsilon \phi}{\partial x} n T^{5/2} \right]$$

La condición de corriente nula conduce al resultado clásico

$$\frac{\partial \epsilon \phi}{\partial x} = \frac{T}{n} \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{5}{2} \frac{\partial T}{\partial x}$$

que, usado en la expresión del flujo de calor, da la ley de Spitzer

$$Q(x) = - \left( \frac{2}{\pi} \right)^{3/2} \frac{80}{(\alpha + 6)(\alpha + 10)} \frac{T^{5/2}}{\sqrt{m} e^4 \ln \Delta_{ee}} \frac{\partial T}{\partial x}$$

La dependencia del factor numérico respecto de  $Z$  en esta expresión reproduce, con una precisión superior al 15 % para  $Z \leq 10$ , los valores obtenidos por Epperlein E. M. y Haines M. G. (1985) mediante la resolución numérica cuidadosa de la ecuación de Fokker-Planck linealizada en el límite de apartamientos pequeños respecto del equilibrio local. Para  $Z > 10$ , los términos superiores del desarrollo asintótico de las funciones de Hankel entran a pesar debido a que sus coeficientes numéricos son funciones rápidamente crecientes con  $Z$ .

Considérese ahora el caso opuesto,  $L \ll \lambda_T$ . Para estudiarlo se hará un modelo tipo escalón para la densidad y temperatura, que pasan de un valor "caliente" subindicado con "c" a un valor "frío" indicado con "f" en  $\zeta = 0$ . El valor de los flujos en la posición del salto estará dado por

$$\begin{aligned} \{J(0), Q(0)\} = & g_{J,Q}^{(c)} \int_0^{+\infty} I_{0,1} [T_c, z] dz - g_{J,Q}^{(f)} \int_0^{+\infty} I_{0,1} [T_f, z] dz + \\ & + \frac{1}{2} \Delta \epsilon \phi \left[ h_{J,Q}^{(c)} + h_{J,Q}^{(f)} \right] R_{J,Q}(0) \end{aligned}$$

donde se ha supuesto que la contribución principal debida al campo eléctrico ocurre en la posición del salto donde el potencial electrostático es discontinuo. Las integrales se resuelven también aquí en forma analítica con la propiedad iii) y la condición de corriente nula da como resultado un salto en el potencial electrostático

$$\Delta\phi = 2 \frac{n_f T_f^{1/2} - n_c T_c^{1/2}}{n_f T_f^{-1/2} + n_c T_c^{-1/2}}$$

que usado en la expresión del flujo de calor da

$$Q = \left( \frac{2}{3\pi m} \right)^{1/2} \frac{12}{\alpha + 6} n_c n_f \left[ \frac{T_c^2 - T_f^2}{n_f T_c^{1/2} + n_c T_f^{1/2}} \right]$$

Esta expresión coincide dentro del 5 % con los resultados obtenidos por el método de Monte-Carlo para  $Z = 1$  por Khan S. A. y Rognlien T. D. (1981).

Si  $T_c \gg T_f$  se tiene

$$Q \rightarrow \left( \frac{2}{3\pi m} \right)^{1/2} \frac{12}{\alpha + 6} n_c T_c^{3/2} = \left( \frac{2}{3\pi} \right)^{1/2} \frac{12}{\alpha + 6} Q_{LM}$$

donde  $Q_{LM}$  es el flujo libre máximo  $nT(T/m)^{1/2}$ . El factor de limitación es entonces

$$f_L = \left( \frac{2}{3\pi} \right)^{1/2} \frac{12}{\alpha + 6} \approx \frac{11}{Z + 13}$$

En el caso que el campo eléctrico se anule ( $n_c T_c^{1/2} = n_f T_f^{1/2}$ ) se tiene que

$$Q = \left( \frac{2}{3 \pi m} \right)^{1/2} \frac{12}{\alpha + 5} n_c T_c^{1/2} (T_c - T_f)$$

### Comparación con el experimento AURORA

En situaciones más generales en las que el camino libre medio térmico es comparable a las dimensiones características de los gradientes macroscópicos la fórmula (III-14) debe evaluarse numéricamente. Sin embargo, el cálculo se simplifica mucho debido a que los núcleos (III-15) pueden aproximarse con error menor que el 1% por medio de expresiones muy sencillas. Por ejemplo, en el caso de  $Z = 1$  ( $\alpha = 1$ ), las aproximaciones analíticas de dichos núcleos son

$$I_0(\theta) = \exp\{-1.098 \theta\} \quad \text{(III-16-a)}$$

$$I_1(\theta) = \exp\{-0.2361 \theta - 0.4875 \theta^2 + 0.1715 \theta^3 - 0.0229 \theta^4\} \quad \text{(III-16-b)}$$

$$I_2(\theta) = \exp\{-0.1982 \theta - 0.2112 \theta^2 + 0.031 \theta^3 - 0.0017 \theta^4\} \quad \text{(III-16-c)}$$

$$I_3(\theta) = \exp\{-0.1302 \theta - 0.1580 \theta^2 + 0.017 \theta^3 - 0.0007 \theta^4\} \quad \text{(III-16-d)}$$

A continuación, se aplicará la expresión (III-14) para el flujo de calor con las aproximaciones (III-16) para los núcleos (III-15), al caso del experimento con la máquina AURORA llevado a cabo en la Universidad de California Davis [Rogers J. H. et al (1988)]. En el mismo se sigue la evolución temporal del perfil de temperatura de un plasma de Argón una vez ionizado en el que inicialmente el camino libre medio térmico electrónico es sólo unas tres

veces menor que la distancia definida por el gradiente de temperatura. Además de la temperatura se mide también el perfil de densidad, de potencial electrostático y la función de distribución electrónica. En paralelo con las mediciones se realizaron simulaciones con distintos modelos; uno fluido con transporte de calor multigrupal limitado, con el código LASNEX [Zimmerman G. B. y Kruer W. L. (1975)], y otro cinético con el código Fokker-Planck Internacional [Matte J. P. y Yirmont J. (1982)]. Se reportó una coincidencia notable entre las mediciones y los resultados del código cinético; por otro lado, ningún valor del limitador de flujo fue capaz de ajustar las mediciones en el código fluido con flujo limitado.

La idea en el presente trabajo es comparar los resultados del experimento AURORA con los de un código fluido en el que el flujo de calor se calcule por medio de (III-14).

En la figura III-2 se muestra el perfil inicial de densidad normalizado con respecto a la densidad crítica definida más abajo; el tiempo característico de evolución de este perfil es de unos milisegundos, en tanto que el correspondiente a la evolución de la temperatura es de sólo unos pocos microsegundos. De esta manera, puede considerarse que el perfil de densidad se mantiene constante durante la etapa de interés. Esto simplifica el cálculo porque puede trabajarse directamente con la variable auxiliar  $\zeta$  en lugar de la coordenada  $x$ .

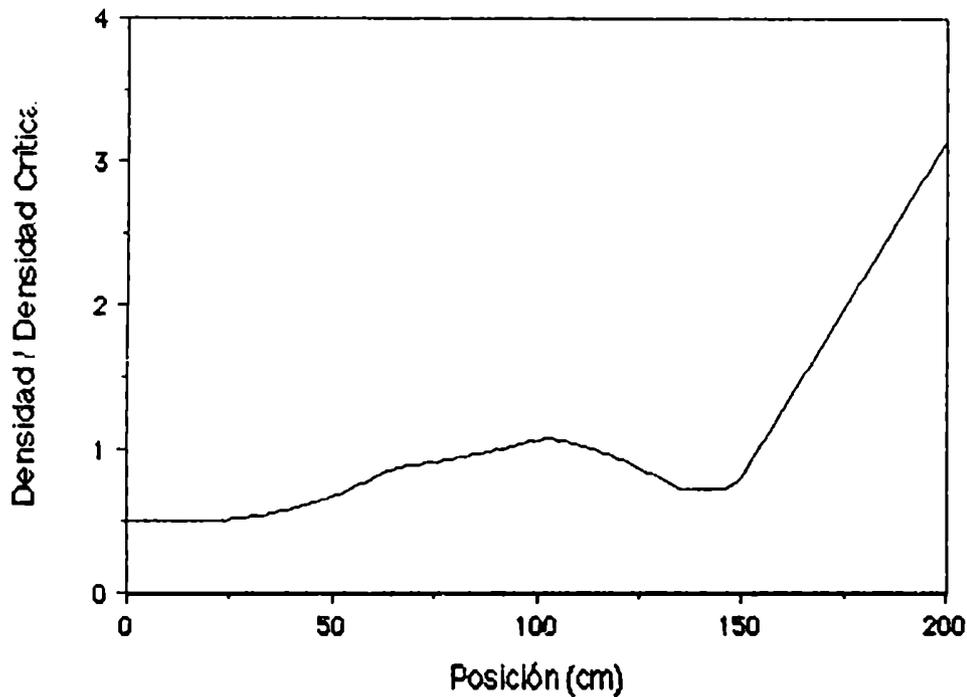


Figura III-2

Perfil de densidad en el experimento AURORA

La ecuación de evolución de la temperatura es

$$\frac{3}{2} n \frac{\partial T}{\partial t} = - \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (\text{III-17})$$

que es conveniente escribir en términos de variables adimensionales. Si se consideran una densidad  $n_0$  y una temperatura  $T_0$  de referencia, pueden definirse las magnitudes adimensionales

$$\eta \equiv \frac{x}{\lambda_0}, \quad \tau \equiv \frac{2tT_0^{1/2}}{3\lambda_0 m^{1/2}},$$

donde

$$\lambda_0 = \frac{T_0^2}{2 \pi e^4 n_0 \ln \Delta_{ee}}$$

$$Q_0 = \frac{n_0 T_0^{3/2}}{m^{1/2}}$$

$$J_0 = \frac{n_0 T_0^{1/2}}{m^{1/2}}$$

En términos de estas magnitudes, la variable  $\zeta$  se obtiene de  $d\zeta = v(\eta) d\eta$  y la ecuación (III-17) se escribe entonces

$$\frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tau} = - \frac{\partial \tilde{Q}}{\partial \zeta} \quad (\text{III-18})$$

La expresión de los flujos normalizados de partículas y energía es, de (III-14),

$$\{\tilde{J}(\zeta), \tilde{Q}(\zeta)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \tilde{g}_{J,Q}(\zeta) P_{J,Q}[\theta(\zeta, \zeta')] + \tilde{h}_{J,Q}(\zeta) \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \zeta'} R_{J,Q}[\theta(\zeta, \zeta')] \right\} d\zeta' \quad (\text{III-19})$$

donde

$$\tilde{g}_J(\zeta) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{v(\zeta)}{\tilde{T}(\zeta)^{3/2}} ; \tilde{g}_Q(\zeta) = \tilde{g}_J(\zeta) \tilde{T}(\zeta)$$

$$\tilde{h}_J(\zeta) = \left(\frac{3}{8\pi}\right)^{1/2} \frac{v(\zeta)}{\tilde{T}(\zeta)^{1/2}} ; \tilde{h}_Q(\zeta) = \tilde{h}_J(\zeta) \tilde{T}(\zeta)$$

En términos de la variable  $\zeta$  y de la temperatura adimensionalizada,  $\theta$  se expresa simplemente por

$$\theta(\zeta, \zeta') = \frac{\sqrt{2 \cdot 3^{1/2}} |\zeta - \zeta'|}{\tilde{T}(\zeta')}$$

Debe tenerse en cuenta que, por haberse resuelto la (III-5) no sujeta a contornos espaciales, estas últimas expresiones valen para un plasma indefinidamente extenso. Las condiciones experimentales, por otro lado, imponen ciertas condiciones de contorno, a saber, flujo térmico nulo en  $x = 0$  y temperatura constante en el otro extremo. A fin de simular esto en un plasma sin contornos, se consideró que en  $x < 0$  existe un plasma que es la imagen especular del original respecto del plano  $x = 0$  con lo que se asegura, por consideraciones de simetría, que el flujo de calor a través de este plano es nulo. Las condiciones en el otro extremo se simularon agregando una zona de plasma adicional de varios caminos libres medios de espesor que representa el baño de plasma frío existente en la experiencia.

Para la densidad de referencia se utilizó  $n_0 = 1,8 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$ , que corresponde a la densidad electrónica crítica de absorción resonante de las microondas utilizadas para calentar el plasma (modo  $TE_{11}$  de frecuencia 1,2 GHz). Como valor de referencia para la temperatura se tomó  $T_0 = 1 \text{ eV}$ .

El problema se reduce entonces a la Integración de (III-18) con las expresiones (III-19) para los flujos adimensionalizados de partículas y energía. La expresión del flujo de partículas es necesaria pues el campo eléctrico resulta en forma autoconsistente al imponer que la corriente electrónica es nula.

La implementación numérica es fundamental pues si se pretende aplicar este tipo de formalismo no local en códigos fluidos complejos, se requiere un algoritmo rápido y seguro de cálculo. De los distintos métodos utilizados el más eficaz en rapidez y precisión es el que detalla a continuación.

El cálculo de las expresiones (III-19) requiere la evaluación de integrales de la forma general

$$\Gamma(\zeta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Sigma(\zeta') \Pi(\zeta, \zeta') d\zeta' \quad (\text{III-20})$$

Si el intervalo de interés se discretiza, estas integrales se escriben, todavía en forma exacta como

$$\Gamma(\zeta_k) = \sum_{i < k} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \Sigma(\zeta') \Pi(\zeta_k, \zeta') d\zeta' + \sum_{i \geq k} \int_{\zeta_i}^{\zeta_{i+1}} \Sigma(\zeta') \Pi(\zeta_k, \zeta') d\zeta'$$

Las funciones  $\Sigma(\zeta')$  se expresan en términos de  $\nu(\zeta')$  y de  $\tilde{T}(\zeta')$ , en tanto que los núcleos  $\Pi$  son funciones de  $|\zeta - \zeta'|$  y de  $\tilde{T}(\zeta')$ . La aproximación es entonces proponer que, dentro de cada intervalo  $[\zeta_i, \zeta_{i+1}]$  el  $\tilde{T}(\zeta')$  que aparece en los núcleos  $\Pi$  se aproxima por

$$\tilde{T}(\zeta') = \tilde{T}_j + \frac{\tilde{T}_{j+1} - \tilde{T}_j}{\zeta_{j+1} - \zeta_j} (\zeta' - \zeta_j)$$

en tanto que las  $\Sigma$  se expresan de manera análoga por

$$\Sigma(\zeta') = \Sigma_j + \frac{\Sigma_{j+1} - \Sigma_j}{\zeta_{j+1} - \zeta_j} (\zeta' - \zeta_j)$$

donde en cada caso las magnitudes subindicadas corresponden a los valores en el borde de intervalo correspondiente. Dentro de cada intervalo la integración se realiza entonces por medio del algoritmo de cuadratura de Gauss-Legendre con típicamente entre 2 y 6 puntos (basta en general con sólo 3).

En el caso del flujo de partículas, la integral que contiene el campo eléctrico se escribe en la forma general (III-20) con

$$\Sigma(\zeta') = \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \zeta'} h_j(\zeta')$$

De esta manera, agrupando convenientemente términos, la condición de corriente nula se escribe

$$\sum_k A_{jk} \left[ \frac{\partial \tilde{\phi}}{\partial \zeta} \right]_k = B_j$$

donde

$$A_{jk} = h_J(\zeta_k) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} P_J[\theta(\zeta_j, \zeta')] d\zeta' - h_J(\zeta_k) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \frac{\zeta' - \zeta_k}{\zeta_{k+1} - \zeta_k} P_J[\theta(\zeta_j, \zeta')] d\zeta' +$$

$$+ h_J(\zeta_k) \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \frac{\zeta' - \zeta_{k-1}}{\zeta_k - \zeta_{k-1}} P_J[\theta(\zeta_j, \zeta')] d\zeta'$$

$$B_j = - \sum_k \int_{\zeta_k}^{\zeta_{k+1}} \tilde{g}_J(\zeta') P_J[\theta(\zeta_j, \zeta')] d\zeta'$$

La inversión de este sistema por medio de un algoritmo eficiente como el de Gauss-Jordan permite entonces el cálculo del campo eléctrico y la posterior evaluación del flujo de calor.

En la figura III-3 se muestran los perfiles de temperatura electrónica correspondientes a diferentes instantes. El trazo completo corresponde al resultado de la Integración de (III-18) con la expresión (III-19) para los flujos; los símbolos corresponden a los valores experimentales reportados para los instantes correspondientes. Las condiciones iniciales son las correspondientes a los 3 microsegundos en el trabajo experimental.

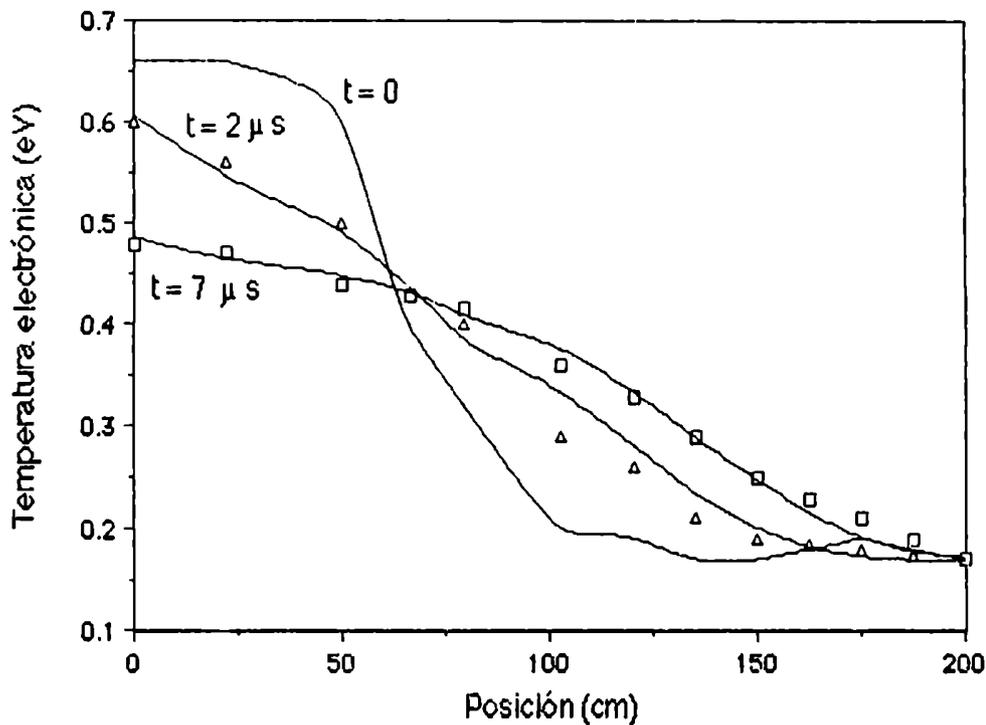


Figura III-3

Perfiles de temperatura en diferentes instantes, obtenidos con el formalismo de este capítulo (líneas) y medidos en los instantes correspondientes en el experimento AUROPA (símbolos)

Como puede apreciarse, la coincidencia es muy buena y, en particular, es comparable a los resultados del código completamente cinético que utiliza en este caso los cuatro primeros términos del desarrollo de la función de distribución en polinomios de Legendre. Recordando que el plasma tiene un número de carga  $Z = 1$ , estos resultados dan fuerza a las hipótesis empleadas en la obtención de la expresión (III-14), a saber, la restricción del desarrollo hasta la primera anisotropía, y las aproximaciones usadas para las funciones de Hankel.

Así mismo, en la figura III-4 se representa con líneas llenas el valor calculado del potencial electrostático que se obtiene por integración del campo eléctrico que resulta de imponer corriente nula; los símbolos corresponden a los valores medidos en los instantes correspondientes.

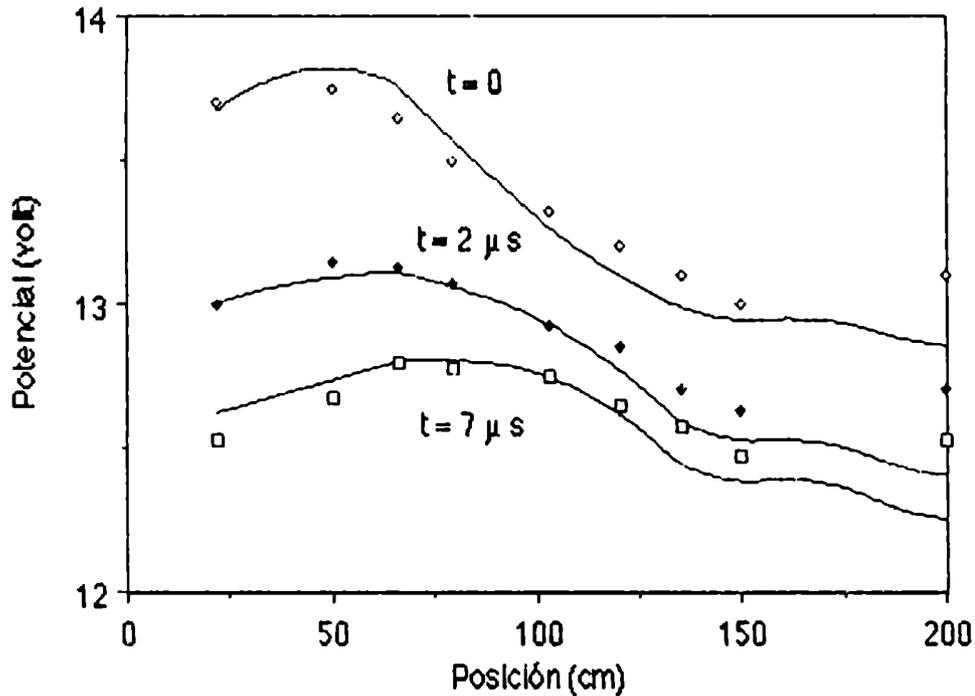


Figura III-4

Perfiles de potencial en diferentes instantes, obtenidos con el formalismo de este capítulo (líneas) y medidos en los instantes correspondientes en el experimento AURORA (símbolos)

Estos resultados refuerzan también el modelo empleado para el cálculo del campo eléctrico y que fue discutido por algunos autores [Bendib A., Luciani J. F. y Matte J. P. (1988), Prasad M. K. y Kershaw D. S. (1989)].

## Condiciones de aplicabilidad en geometría esférica

Utilizando los mismos argumentos expuestos en este capítulo es posible obtener consideraciones de interés. La primera es la aplicación del formalismo al caso con geometría esférica para atacar problemas como el considerado en el capítulo anterior. En el caso de simetría esférica la función de distribución puede considerarse dependiente del radio  $r$ , el tiempo  $t$ , la energía  $\epsilon$  y el coseno del ángulo que forma la dirección del vector velocidad con la dirección radial  $\mu$ . Las ecuaciones equivalentes a las (III-2) son entonces

$$\frac{\partial f_0}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial f_0}{\partial \epsilon} + \frac{\nu}{3} \frac{\partial f_1}{\partial r} + \frac{2}{3} \left( \frac{\nu}{r} + \frac{1}{m \nu} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) f_1 = \frac{df_0}{dt_{\infty}}$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial t} - \frac{\partial \phi}{\partial t} \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon} + \nu \frac{\partial f_0}{\partial r} + \frac{2}{5} \nu \frac{\partial f_2}{\partial r} + \frac{6}{5} \left( \frac{\nu}{r} + \frac{1}{m \nu} \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) f_2 + \frac{2 \nu}{\lambda_{ei}} f_1 = \frac{df_1}{dt_{\infty}}$$

Si se desprecia  $f_2$  frente a  $f_0$ , para el caso estacionario, una deducción en todo análoga al caso plano conduce a la ecuación para  $f_1$ .

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\lambda_{\epsilon}}{6 m \nu^4 r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \nu^2 f_1) \right] = \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[ \frac{2 m \nu^2}{\lambda_{\epsilon}} \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon} - \frac{2}{\lambda_{ei}} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial r} \right] \quad (\text{III-21})$$

De aquí resulta inmediatamente que el caso plano, con la identificación  $r \equiv x$ , se obtiene en el caso que las longitudes de variación macroscópicas  $L$ , en una dada posición, sean mucho menores que el radio  $r$  correspondiente. La condición que parecería más natural para poder aplicar el formalismo plano a un caso esférico es que el camino libre medio de los electrones de interés  $\lambda_{\epsilon}$  fuese mucho menor que el radio en el punto considerado. La expresión (III-21) dice,

sin embargo, que basta que se cumpla la condición muchas veces menos restrictiva  $L \ll r$ . La posible contradicción es sólo aparente debido a que, como se verá en el capítulo siguiente, en los casos en que  $\lambda_e \approx r$  el desarrollo de la función de distribución en polinomios de Legendre no está justificado. En tales circunstancias debe recurrirse a aproximaciones alternativas como las que se desarrollarán en dicho capítulo.

### Inclusión de la segunda anisotropía

Utilizando las mismas ideas desarrolladas en este capítulo, es posible obtener una ecuación reducida aproximada para  $f_1$  que contenga las contribuciones de la anisotropía  $f_2$ . En efecto, ahora debe considerarse el sistema (III-2) sin despreñar  $f_2$  más la ecuación para ésta

$$\frac{\partial f_2}{\partial t} - \frac{\partial e\phi}{\partial t} \frac{\partial f_2}{\partial \epsilon} + \frac{2}{3} v \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{3}{7} v \frac{\partial f_3}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{1}{m v} \frac{\partial e\phi}{\partial x} f_1 + \frac{12}{7} \frac{1}{m v} \frac{\partial e\phi}{\partial x} f_3 + \frac{6 v}{\lambda_e} f_2 = \frac{df_2}{dt_{ee}}$$

Por lo visto en el primer capítulo, aun en los gradientes muy abruptos, es factible despreñar a  $f_3$  respecto de  $f_1$ ; haciendo esto, considerando el caso estacionario y aproximando el término de colisiones electrón-electrón por su límite de alta energía

$$\frac{d}{dt_{ee}} \approx \frac{2 m v^3}{\lambda_e} \frac{\partial}{\partial \epsilon}$$

se obtiene para  $f_2$  la ecuación

$$\frac{\partial f_2}{\partial \epsilon} - \frac{3 \lambda_e}{\lambda_e m v^2} f_2 = \frac{\lambda_e}{3 m v^2} \frac{\partial f_1}{\partial x}$$

Con las definiciones usadas de  $\alpha$  y de la variable auxiliar  $\zeta$  esta ecuación se escribe simplemente

$$\frac{\partial f_2}{\partial \epsilon} - \frac{3\alpha}{\epsilon} f_2 = \frac{2\epsilon}{\sqrt{3}} \frac{\partial f_1}{\partial \zeta}$$

cuya solución, con la condición de tender a cero cuando  $\epsilon \rightarrow \infty$ , es

$$f_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}} \epsilon^{3\alpha} \int_{\epsilon}^{\infty} \epsilon_0^{1-3\alpha} \frac{\partial f_1}{\partial \zeta} d\epsilon_0 \quad (\text{III-22})$$

Por otro lado, de las (III-2) resulta la análoga de la (III-6) cuando no se desprecia  $f_2$

$$\epsilon \frac{\partial^2 f_1}{\partial \zeta^2} - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[ \frac{1}{\epsilon} \frac{\partial f_1}{\partial \epsilon} - \frac{\alpha f_1}{\epsilon^2} \right] = -\sqrt{3} \frac{\partial^2}{\partial \zeta \partial \epsilon} \left( f_{MB} + \frac{2}{5} f_2 \right)$$

Utilizando la (III-22) en esta expresión resulta, luego de algo de álgebra y de derivar respecto de  $\epsilon$ ,

$$\frac{9}{5} \epsilon^{-4\alpha/3} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \epsilon^{(6-2\alpha)/3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[ \epsilon^{1-3\alpha} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \epsilon^{\alpha-1} \frac{\partial \psi}{\partial \epsilon} \right) \right] = -\sqrt{3} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \epsilon^{1-3\alpha} \frac{\partial^2 f_{MB}}{\partial \zeta \partial \epsilon} \right)$$

donde  $\psi \equiv \epsilon^{-\alpha} f_1$ . De esta manera, la solución para  $f_1$  puede obtenerse por el formalismo de la función de Green a través de una expresión análoga a la (III-7)

$$f_1(\zeta, \epsilon) = \epsilon^\alpha \int d\zeta_0 \int d\epsilon_0 \frac{\partial G(\zeta, \epsilon | \zeta_0, \epsilon_0)}{\partial \epsilon_0} \frac{\sqrt{3}}{\epsilon_0^{3\alpha-1}} \frac{\partial^2 f_{MB}}{\partial \zeta_0 \partial \epsilon_0}$$

donde  $G(\zeta, \epsilon, \zeta_0, \epsilon_0)$  satisface la ecuación

$$\frac{9}{5} \epsilon^{-4\alpha/3} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \epsilon^{(6-2\alpha)/3} \frac{\partial^2 G}{\partial \zeta^2} \right) - \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left[ \epsilon^{1-3\alpha} \frac{\partial}{\partial \epsilon} \left( \epsilon^{\alpha-1} \frac{\partial G}{\partial \epsilon} \right) \right] = \delta(\zeta - \zeta_0) \delta(\epsilon - \epsilon_0)$$

Si no se consideran contornos espaciales la función de Green se escribe

$$G(\zeta - \zeta_0, \epsilon, \epsilon_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ik(\zeta - \zeta_0)} a(k, \epsilon, \epsilon_0) dk$$

donde

$$a(k, \epsilon, \epsilon_0) = \Theta(\epsilon_0 - \epsilon) b(k, \epsilon, \epsilon_0)$$

y  $b$  satisface la ecuación

$$\epsilon^3 \frac{\partial^3 b}{\partial \epsilon^3} - (\alpha + 1) \epsilon^2 \frac{\partial^2 b}{\partial \epsilon^2} + \left[ (1 + 2\alpha)(1 - \alpha) + \frac{9}{5} k^2 \epsilon^4 \right] \epsilon \frac{\partial b}{\partial \epsilon} + \frac{18 - 6\alpha}{5} k^2 \epsilon^4 b = 0 \quad (\text{III-23})$$

con las condiciones

$$[b]_{\epsilon=\epsilon_0} = 0$$

(III-24-a)

$$\left[ \frac{\partial b}{\partial \epsilon} \right]_{\epsilon = \epsilon_0} = 0 \quad (III-24-b)$$

$$\left[ \frac{\partial^2 b}{\partial \epsilon^2} \right]_{\epsilon = \epsilon_0} = \frac{\epsilon_0^{2\alpha}}{2\pi} \quad (III-24-c)$$

Por las condiciones (III-24-a) y (III-24-b) la función  $b$  es muy pequeña en el entorno de  $\epsilon = \epsilon_0$ ; como el proceso de transporte asegura que esta zona es la más importante y esto equivale a su vez a la condición  $k\epsilon^2 \gg 1$ , la ecuación (III-23) puede escribirse en este límite

$$\epsilon^3 \frac{\partial^2 \chi}{\partial \epsilon^2} - (\alpha + 1) \epsilon^2 \frac{\partial \chi}{\partial \epsilon} + \frac{9}{5} k^2 \epsilon^5 \chi = 0 \quad (III-25)$$

donde  $\chi \equiv \partial b / \partial \epsilon$ . Esta ecuación puede resolverse en la aproximación WKB, con lo que se obtiene la solución que satisface las (III-24-b) y (III-24-c)

$$b = \frac{i}{4\pi \delta^2 k^2} \epsilon_0^{(3\alpha-2)/2} \epsilon^{(\alpha-2)/2} \left\{ \exp[i\delta k(\epsilon_0^2 - \epsilon^2)/2] + \exp[-i\delta k(\epsilon_0^2 - \epsilon^2)/2] \right\}$$

donde  $\delta \equiv 3/\sqrt{5}$ . Para llegar a esta expresión se ha usado además que  $k\epsilon^2 \gg \alpha$ , por lo que esta solución es válida sólo si  $\alpha \approx 1$ . En este mismo límite, tanto para las derivaciones como para las integraciones, puede considerarse variable sólo el término entre llaves. Con todo esto, la  $f_1$  resulta

$$f_1(\zeta, \varepsilon) = \frac{\sqrt{3}}{2\delta} \varepsilon^{(3\alpha-2)/2} \int_c^\infty d\varepsilon_0 \varepsilon_0^{(2-3\alpha)/2} \int_{\tilde{\zeta}_-}^{\tilde{\zeta}_+} d\tilde{\zeta}_0 \left[ \frac{\partial^2 f_{MB}}{\partial \varepsilon_0 \partial \tilde{\zeta}_0} - \frac{1}{T(\tilde{\zeta}_0)} \frac{\partial \varepsilon \phi}{\partial \tilde{\zeta}_0} \frac{\partial f_{MB}}{\partial \varepsilon_0} \right]$$

donde  $\tilde{\zeta} = \zeta / \delta$ ; todas las demás definiciones coinciden con las correspondientes a la (III-13). De esta manera, comparando esta expresión con la (III-13), se ve que todo el formalismo subsiguiente puede aplicarse si se hacen los cambios

$$J, Q \rightarrow J/\delta, Q/\delta$$

$$\zeta \rightarrow \zeta/\delta$$

$$\alpha \rightarrow 3\alpha - 2$$

Debido a las hipótesis empleadas en la resolución de (III-23), la inclusión de  $f_2$  en el formalismo empeora los resultados, respecto de los valores obtenidos con sólo  $f_1$  cuando  $\alpha$  es grande. Esto puede verse, por ejemplo, en el caso de gradientes suaves, donde, salvo para  $\alpha = 1$  en que ambas aproximaciones coinciden, la nueva expresión es un 20 % menor que el resultado correcto para  $\alpha = 3$ , y empeora al crecer el  $\alpha$ . Por otro lado, en el caso del experimento AURORA, el formalismo con  $f_2$  conduce a perfiles de temperatura que, dentro del 10 %, coinciden con los dados por la aproximación de tomar sólo  $f_1$ . Estas consideraciones indican que, para  $\alpha$  chicos ( $\alpha \approx 1$ ), las correcciones que aporta la inclusión de  $f_2$  son pequeñas cuando los gradientes de temperatura no son muy fuertes  $\frac{\lambda_T}{T} \left| \frac{dT}{dx} \right| \leq 0,3$ . Para valores superiores de  $\alpha$ , por otro lado, el fuerte efecto isotropizador de las colisiones electrón-ion reduce los valores de las anisotropías superiores haciendo todavía menor la incidencia de  $f_2$  en el valor del flujo térmico.

## Inclusión de contornos espaciales

La solución (III-10) de la función de Green se obtuvo en el caso de no existir contornos espaciales. En las aplicaciones, sin embargo, es común tener un plasma limitado por vacío; tal es el caso, por ejemplo, del experimento AURORA. En tales circunstancias pueden usarse todavía las expresiones (III-15) derivadas de la (III-10), siempre que en el cálculo se extienda el plasma al infinito agregando un plasma simétrico respecto del borde, que asegure flujo térmico nulo en el mismo. Esta técnica, si bien es discutible [Holstein P. A. et al (1986)], parece adecuada al menos para los electrones con las energías de interés, como lo confirman los buenos resultados obtenidos en este trabajo en el caso del experimento AURORA.

Desde el punto de vista computacional, el agregado de celdas "fantasma" puede ser muy costoso, sobre todo si el camino libre medio electrónico es grande cerca del borde, lo que es habitual en el caso de coronas tenues y calientes. A continuación se muestra que, a partir de la solución (III-10), es sencillo obtener la función de Green correcta para estos tipos de contorno, y los propagadores correctos a usar en las expresiones (III-14). En efecto, suponiendo que el plasma existe en  $\zeta > \zeta^*$ , la función de Green para un plasma indefinidamente extenso puede usarse si se supone que en  $\zeta < \zeta^*$  existe un plasma que es la imagen especular del real respecto al plano  $\zeta = \zeta^*$ . Esto puede lograrse escribiendo que

$$g^S(\zeta_0, \epsilon_0) = \Theta(\zeta_0 - \zeta^*) g(\zeta_0, \epsilon_0) - \Theta(\zeta^* - \zeta_0) g(2\zeta^* - \zeta_0, \epsilon_0)$$

donde  $\Theta$  es la función escalón y se ha definido

$$g(\zeta_0, \varepsilon_0) = -\varepsilon^\alpha \frac{\sqrt{2}}{\varepsilon_0^{\alpha+1}} \frac{\partial^2 f_{MB}}{\partial \zeta_0 \partial \varepsilon_0}$$

con lo que, de (III-7), la solución para  $f_1$  es

$$f_1(\zeta, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\zeta_0 \int_0^{+\infty} d\varepsilon_0 G(\zeta, \varepsilon | \zeta_0, \varepsilon_0) g^S(\zeta_0, \varepsilon_0)$$

donde  $G$  es la dada por (III-10). Desarrollando esta última expresión resulta

$$f_1(\zeta, \varepsilon) = \int_{\zeta^*}^{+\infty} d\zeta_0 \int_0^{+\infty} d\varepsilon_0 G^*(\zeta, \varepsilon | \zeta_0, \varepsilon_0) g(\zeta_0, \varepsilon_0)$$

donde  $G^*$  es la función de Green buscada que se escribe, en términos de la correspondiente a un plasma sin contornos, como

$$G^*(\zeta, \varepsilon | \zeta_0, \varepsilon_0) = G(\zeta, \varepsilon | \zeta_0, \varepsilon_0) - G(\zeta, \varepsilon | 2\zeta^* - \zeta_0, \varepsilon_0)$$

A partir de esta expresión puede reproducirse todo el formalismo para el cálculo de los flujos de partículas y de calor, llegándose a las expresiones (III-14), donde ahora la integración espacial es a partir de  $x^*$ , y los núcleos  $h_n$  dados por (III-15) deben reemplazarse por los  $h_n^*$  que se escriben simplemente en términos de los  $h_n$  como

$$h_n^* = h_n(\theta) - h_n(\theta^*)$$

donde  $\theta = (2|\zeta_0 - \zeta|)^{1/2} T(\zeta_0)$  y  $\theta^* = (2|\zeta_0 + \zeta - 2\zeta^*|)^{1/2} T(\zeta_0)$ .

Condiciones de contorno más generales son mucho más difíciles de incluir, véase, por ejemplo, Fernández-Feria R., Sanmartín J. R. y Ramírez J. (1990).

## Capítulo IV

### Método de momentos

Existen muchas situaciones de interés práctico en las que además de existir fuertes gradientes de temperatura, los efectos debidos a la geometría complican en grado extremo su descripción. En efecto, cuando los caminos libres medios de las partículas de interés para el transporte de energía son comparables a las dimensiones macroscópicas características, los efectos geométricos en el cálculo del transporte son esenciales. En este capítulo se volverá a tratar el caso de un sólido esférico que es evaporado por un plasma caliente, de interés para la astrofísica en relación al estudio de remanentes de supernovas, y para las técnicas de renovación de combustible en máquinas toroidales. En estas situaciones es típico que los electrones del plasma tengan caminos libres medios comparables e incluso mayores que las dimensiones del núcleo frío que sufre la ablación. En tal caso la función de distribución en las cercanías del sólido es fuertemente anisótropa en las velocidades debido esencialmente al efecto de sombra de éste. De esta manera, el desarrollo usual de la función de distribución en polinomios de Legendre (ver capítulo I) no está muy justificado.

La manera de proceder es, entonces, un tratamiento cinético completo sin apelar a desarrollos de la función de distribución en polinomios de Legendre, lo que ha sido hecho en forma numérica por algunos autores pero sin considerar movimiento hidrodinámico [Jorna S. y Wood L. (1987)]. En este capítulo se extenderá el método de momentos de Lees [Lees L. (1965)] para la gasdinámica que fue usado también por Shirazian y Steinhauer [Shirazian M. H. y Steinhauer L. C. (1981)] para estudiar la conducción térmica en un plasma plano y sin movimiento. La idea es proponer una función de distribución "razonable" para el problema a

estudiar, con parámetros (en general funciones) que se determinan al pedir que se satisfaga un número de momentos suficiente de la ecuación cinética.

Para proponer una posible forma funcional de la función de distribución debe considerarse con cierto cuidado el proceso de ablación del sólido en el plasma ambiente. Cerca del objeto se establece un plasma de baja temperatura y alta densidad; bajo condiciones tan altamente colisionales es de esperar una función de distribución maxwelliana. Por otro lado, lejos del sólido la función de distribución es la correspondiente al plasma ambiente. Si la zona intermedia es poco colisional, es de esperarse una función de distribución bimodal, esto es, que las partículas provenientes del plasma alejado tengan una función de distribución funcionalmente diferente de las procedentes del sólido. En un plasma estrictamente no colisional, el vector velocidad de las partículas provenientes del plasma ambiente forma en una posición  $r$  dada ( $r$  es la coordenada radial esférica con origen en el centro del cuerpo), un ángulo  $\alpha$  con la dirección radial que, debido a la sombra del sólido, satisface

$$-1 \leq \cos \alpha \equiv \mu < \sqrt{1 - \left(\frac{r_s}{r}\right)^2} \equiv \Sigma$$

donde  $r_s$  es el radio de sólido. Los valores complementarios de  $\mu$  corresponden a partículas provenientes del cuerpo ablado. De esta manera, si se supone que el plasma al infinito tiene una función de distribución maxwelliana, se propondrá como función de prueba para los electrones

$$f = n_1 \left(\frac{m}{2\pi T_1}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m v^2}{2 T_1}\right) H(\mu - \Sigma) + n_2 \left(\frac{m}{2\pi T_2}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{m v^2}{2 T_2}\right) H(\Sigma - \mu) \quad (IV-1)$$

H es la función escalón y  $n_1, T_1, n_2, T_2$  son funciones de la coordenada  $r$  a determinar.

En general, la ecuación cinética para los electrones tiene la forma

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} - \frac{e \mathbf{E}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} = \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{col}} \quad (19-2)$$

Si  $\psi$  es una función de  $\mathbf{x}, \mathbf{v}$  y  $t$ , luego de multiplicar (19-2) por  $\psi$  e integrar en el espacio de velocidades se obtienen las relaciones de Maxwell

$$\frac{\partial}{\partial t} \int f \psi d^3v - \int f \frac{\partial \psi}{\partial t} d^3v + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \int f \psi \mathbf{v} d^3v - \int f \mathbf{v} \cdot \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{x}} d^3v + \frac{e \mathbf{E}}{m} \cdot \int f \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{v}} d^3v = \int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{col}} \psi d^3v$$

Tomando  $\psi = 1, \mathbf{v}, v^2$  y  $\mathbf{v} v^2$  respectivamente resulta

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \nabla \cdot (n \langle \mathbf{v} \rangle) = \int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{col}} d^3v$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (n \langle \mathbf{v} \rangle) + \nabla \cdot (n \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle) + \frac{e \mathbf{E}}{m} n = \int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{col}} \mathbf{v} d^3v$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( n \left\langle \frac{v^2}{2} \right\rangle \right) + \nabla \cdot \left( n \left\langle \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right\rangle \right) + \frac{e \mathbf{E}}{m} \cdot (n \langle \mathbf{v} \rangle) = \int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{col}} \frac{v^2}{2} d^3v$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \left( n \left\langle \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \right\rangle \right) + \nabla \cdot \left( n \left\langle \frac{v^2}{2} \mathbf{v} \mathbf{v} \right\rangle \right) + \frac{e E}{m} \cdot \left[ n \left\langle \frac{v^2}{2} \right\rangle \mathbf{1} + n \langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle \right] = \int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{col.}} \frac{v^2}{2} \mathbf{v} d^3v$$

donde se ha simbolizado  $\int f \psi d^3v$  por  $n \langle \psi \rangle$ , con  $n$  la densidad numérica de electrones. Para un sistema estacionario con simetría esférica las ecuaciones anteriores se escriben

$$r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 n \langle v_r \rangle \right) = \int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{col.}} d^3v \quad (\text{IV-2-a})$$

$$r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 n \langle v_r v_r \rangle \right) - 2 r^{-1} n \langle v_{\perp} v_{\perp} \rangle + \frac{e E_r}{m} n = \int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{col.}} v_r d^3v \quad (\text{IV-2-b})$$

$$r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 n \left\langle \frac{v^2}{2} v_r \right\rangle \right) + \frac{e E_r}{m} n \langle v_r \rangle = \int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{col.}} \frac{v^2}{2} d^3v \quad (\text{IV-2-c})$$

$$r^{-2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 n \left\langle \frac{v^2}{2} v_r v_r \right\rangle \right) - 2 r^{-1} n \left\langle \frac{v^2}{2} v_{\perp} v_{\perp} \right\rangle + \frac{e E_r}{m} \left( n \left\langle \frac{v^2}{2} \right\rangle + n \langle v_r v_r \rangle \right) = \int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{col.}} \frac{v^2}{2} v_r d^3v \quad (\text{IV-2-d})$$

donde  $v_r = \mu v$ ,  $v_{\perp} = (1 - \mu^2)^{1/2} v$ . Para seguir adelante deben considerarse con cuidado las integrales de los términos de colisiones.

Por conservación del número de partículas debe ser

$$\int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col.} d^3v = 0$$

Por otro lado, si se desdobra el término de colisiones en el correspondiente a interacciones con iones y con electrones

$$\left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col.} = \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col.}^{e-e} + \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col.}^{e-i}$$

debido a la conservación de la cantidad de movimiento y de la energía en las interacciones de Coulomb es

$$\int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col.}^{e-e} v_r d^3v = 0$$

y

$$\int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col.}^{e-e} \frac{v^2}{2} d^3v = 0 \quad (IV-3)$$

respectivamente.

Debido a la diferencia de masa entre electrones e iones, se desprejará la transferencia total de energía entre ambas especies imponiendo que

$$\int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col}^{e-1} \frac{v^2}{2} \sigma^3 v = 0$$

Para calcular el resto de las integrales debe usarse una expresión explícita para el término de colisiones. Se utilizará uno del tipo Fokker-Planck del que se tomarán sus expresiones asintóticas vistas en el primer capítulo válidas para electrones de energía superior a la térmica, por ser estos los más importantes para evaluar los momentos de orden relativamente elevado que sobreviven. Para este régimen es

$$\left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col}^{e-1} = \frac{D_{\perp}}{v^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right]$$

$$\left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{col}^{e-0} = \frac{D_{\perp}}{Z v^3} \frac{\partial}{\partial \mu} \left[ (1 - \mu^2) \frac{\partial f}{\partial \mu} \right] + \frac{C}{v^2} \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{D_{\parallel}}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left( \frac{1}{v} \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

donde

$$D_{\perp} \equiv \frac{v_T^4}{2 \lambda_e} ; \quad C \equiv \frac{2 D_{\perp}}{Z} ; \quad D_{\parallel} \equiv C v_T^2 ,$$

$$v_T \equiv \left( \frac{\Theta}{m} \right)^{1/2}$$

$$\lambda_e = \frac{\Theta^2}{4 \pi n Z e^4 \ln \Delta}$$

Se ha considerado  $\ln \Delta_{ee} = \ln \Delta_{ei} = \ln \Delta$ .  $\Theta$  corresponde a la temperatura de los electrones, sin embargo, como criterio más adecuado para la situación presente, se determinará  $\Theta$  de manera que la condición (IV-3) se cumpla idénticamente (téngase en cuenta que  $\Theta$  aparece sólo en  $D_{ii}$ ).

Con la expresión (IV-1) de  $f$  esto se escribe

$$\int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{col}} \frac{v^2}{2} d^3v = - \frac{m C}{(2 \pi m)^{1/2}} \left[ (1 + \Sigma) \frac{n_2}{T_2^{1/2}} \left( 1 - \frac{\Theta}{T_2} \right) + (1 - \Sigma) \frac{n_1}{T_1^{1/2}} \left( 1 - \frac{\Theta}{T_1} \right) \right] = 0$$

de donde resulta

$$\Theta = \frac{1 + \alpha}{\frac{1}{T_2} + \frac{\alpha}{T_1}}$$

con

$$\alpha = \frac{1 - \Sigma}{1 + \Sigma} \frac{n_1}{n_2} \frac{T_2^{1/2}}{T_1^{1/2}}$$

Con esto pueden evaluarse las integrales restantes. Usando la expresión propuesta para la función de distribución  $f$ , luego de un cálculo tedioso pero directo, el sistema (IV-2) se escribe

$$\frac{d}{d\eta} (v_1 \theta_1^{1/2} - v_2 \theta_2^{1/2}) = 0 \tag{IV-4-a}$$

$$(1 + \Sigma^3) \frac{d}{d\eta} (v_2 \theta_2) + (1 - \Sigma^3) \frac{d}{d\eta} (v_1 \theta_1) + \Xi [(1 + \Sigma) v_2 + (1 - \Sigma) v_1] = g_1 \tag{IV-4-b}$$

$$\frac{d}{d\eta} (v_1 \theta_1^{3/2} - v_2 \theta_2^{3/2}) + \frac{\Xi}{2} (v_1 \theta_1^{1/2} - v_2 \theta_2^{1/2}) = 0 \quad (\text{IV-4-c})$$

$$\begin{aligned} & \left(1 + \Sigma^3\right) \frac{d}{d\eta} (v_2 \theta_2^2) + \left(1 - \Sigma^3\right) \frac{d}{d\eta} (v_1 \theta_1^2) + \\ & + \frac{\Xi}{5} \left\{ 3 \left[ (1 + \Sigma) v_2 \theta_2 + (1 - \Sigma) v_1 \theta_1 \right] + \frac{2}{3} \left[ (1 + \Sigma^3) v_2 \theta_2 + (1 - \Sigma^3) v_1 \theta_1 \right] \right\} = g_2 \quad (\text{IV-4-d}) \end{aligned}$$

donde se han definido las variables adimensionales

$$\eta = r / r_s$$

$$\theta_{1,2} = T_{1,2} / T_0$$

$$v_{1,2} = n_{1,2} / n_0$$

$$\Xi = e E_r r_s / T_0$$

con  $n_0$  y  $T_0$  dos valores constantes de referencia para la densidad y la temperatura respectivamente. El resto de los símbolos corresponde a

$$g_1 = g Z \eta^{-2} \left[ (1 + \Sigma) v_2 + (1 - \Sigma) v_1 \right] \left( \frac{v_2}{\theta_2} - \frac{v_1}{\theta_1} \right)$$

$$g_2 = \frac{2}{5} g \eta^{-2} \left[ (1 + \Sigma) v_2 + (1 - \Sigma) v_1 \right] n_2 \left[ (Z + 1) \left( 1 - \frac{v_1}{v_2} \right) - 3 \left( 1 - \frac{\theta_2}{\theta_1} \right) \frac{1 + \alpha}{1 + \alpha \frac{\theta_2}{\theta_1}} \right]$$

donde

$$g \equiv \frac{\pi n_0 e^4 \ln \Delta r_s}{T_0^2} = \frac{1}{4Z} \frac{r_s}{\lambda_0}$$

$\lambda_0$  es el camino libre medio de electrones térmicos correspondiente a los valores de referencia  $n_0$  y  $T_0$ .

En realidad, la expresión propuesta para el término de colisiones electrón-ion es válida sólo si los iones tienen velocidad media nula. Si se tiene en cuenta el movimiento de los iones la expresión correcta para  $g_1$  es

$$g_1 = gZ\eta^{-2} \left[ (1 + \Sigma)v_2 + (1 - \Sigma)v_1 \right] \left( \frac{v_2}{\theta_2} - \frac{v_1}{\theta_1} \right) + \\ + \frac{4}{3} \frac{gZ}{\sqrt{2\pi}} \left[ (1 + \Sigma)v_2 + (1 - \Sigma)v_1 \right] u_{ion} \left[ (1 + \Sigma) \frac{v_2}{\theta_2^{3/2}} + (1 - \Sigma) \frac{v_1}{\theta_1^{3/2}} \right]$$

donde  $u_{ion}$  es la velocidad media de los iones adimensionalizada con  $(T_0 / m_e)^{1/2}$ . La corrección adicional, sin embargo, es pequeña pues  $u_{ion} \approx (m_e / m_i)^{1/2}$ , de manera que se usará la expresión original de  $g_1$ .

Las ecuaciones (IV-4) requieren condiciones de contorno apropiadas; para el problema de un cuerpo esférico de radio  $r_s$  sumergido en un plasma de densidad  $n_0$  y temperatura  $T_0$  las condiciones de contorno son

$$\theta_1 \rightarrow 0 ; v_1 \rightarrow \infty \quad (\text{para } \eta \rightarrow 1) \quad (\text{IV-5-a})$$

$$\theta_2 \rightarrow 1 ; v_2 \rightarrow 1 \quad (\text{para } \eta \rightarrow \infty) \quad (\text{IV-5-a})$$

Las primeras dos condiciones aseguran que las partículas provenientes del sólido tienen una función de distribución de baja temperatura y alta densidad; las dos últimas condiciones corresponden a una función de distribución maxwelliana lejos del cuerpo con los parámetros del plasma ambiente.

El sistema (IV-4) no es en realidad completo pues se requiere una ecuación más para determinar el campo eléctrico, que puede obtenerse tomando un momento más de la ecuación cinética. Sin embargo, debido al término de colisiones electrón-ion utilizado, el movimiento de los iones no aparece explícitamente en dicho sistema sino sólo implícitamente a través del campo eléctrico. En realidad éste es el término de acople esencial entre ambas especies, las correcciones al término de colisiones electrón-ion es, como se vio, despreciable. De esta manera, el tomar más momentos de la ecuación cinética no parece apuntar en la dirección correcta pues el campo eléctrico resultante no tendría en cuenta el movimiento iónico en forma satisfactoria, que aparece descrito muy pobremente sólo por la condición de cuasineutralidad implícita en la expresión del término de colisiones electrón-ion. Una aproximación más correcta es considerar el movimiento explícito de los iones a través de una ecuación de tipo fluido

$$m_i n_i u_i \frac{du_i}{dr} = - \frac{d}{dr} (n_i T_i) + Z e n_i E_r - m \int \left( \frac{\delta f}{\delta t} \right)_{\text{col}}^{e-i} v_r d^3v \quad (\text{IV-6})$$

Para cerrar el sistema puede suponerse por ejemplo cuasineutralidad si las longitudes características son grandes comparadas con la longitud de Debye, tomando

$$Z n_1 \approx n = n_0 \frac{1}{2} \left[ (1 - \Sigma) v_1 + (1 + \Sigma) v_2 \right] \quad (IV-7-a)$$

$$u_1 \approx \langle v_r \rangle = \left( \frac{2 T_0}{\pi m} \right)^{1/2} \frac{1}{\eta^2} \frac{v_1 \theta_1^{1/2} - v_2 \theta_2^{1/2}}{(1 - \Sigma) v_1 + (1 + \Sigma) v_2} \quad (IV-7-b)$$

Para la temperatura iónica, por otro lado, existen diferentes posibilidades según el problema en cuestión. Si se pretende mantener el problema lo más sencillo posible puede considerarse en algunos casos que el fluido de iones es frío y tomar  $T_i \approx 0$ . Cuando no es posible esto es a veces más realista considerar equipartición de temperaturas  $T_e \approx T_i$ , usando que

$$T_e = \frac{2}{3} \left\langle \frac{m}{2} \left[ (v_r - \langle v_r \rangle)^2 + v_{\perp}^2 \right] \right\rangle = T_0 \frac{(1 - \Sigma) v_1 \theta_1 + (1 + \Sigma) v_2 \theta_2}{(1 - \Sigma) v_1 + (1 + \Sigma) v_2} - \frac{m}{3} \langle v_r \rangle^2 \quad (IV-7-c)$$

En este último caso surge la dificultad adicional de la aparición de un punto sónico que es un punto singular del sistema (IV-4) más la (IV-6), y la aparición de un frente de choque necesario para ajustar las condiciones de contorno al infinito, en forma totalmente análoga al caso estudiado en el capítulo II.

De cualquier manera, ambas aproximaciones tienen una dificultad esencial y es que no pueden satisfacerse las condiciones de contorno (IV-5-a). En efecto, si se desarrollan las ecuaciones (IV-4) en el entorno de  $\eta = 1$ , puede verse luego de un cálculo muy tedioso que no

es posible satisfacer simultáneamente a las (IV-5-a). En particular se ve que sólo existe solución cuando  $\Xi = 0$  y  $\theta_2(\eta \rightarrow 1) \rightarrow 0$ . La condición de despreciar el campo eléctrico, por otro lado, es usual en en estos formalismos [Boyd T. J. M., Lonsdale L. D. y Sanderson J. J. (1988)].

Si  $\Xi = 0$  el sistema (IV-4) se escribe

$$v_1 \theta_1^{1/2} - v_2 \theta_2^{1/2} = K$$

$$\left(1 + \Sigma^3\right) \frac{d}{d\eta} \left(v_2 \theta_2\right) + \left(1 - \Sigma^3\right) \frac{d}{d\eta} \left(v_1 \theta_1\right) = g_1$$

$$v_1 \theta_1^{3/2} - v_2 \theta_2^{3/2} = K'$$

$$\left(1 + \Sigma^3\right) \frac{d}{d\eta} \left(v_2 \theta_2^2\right) + \left(1 - \Sigma^3\right) \frac{d}{d\eta} \left(v_1 \theta_1^2\right) = g_2$$

De las ecuaciones primera y tercera,  $v_1$  y  $v_2$  se pueden expresar en términos de  $\theta_1$  y  $\theta_2$ . La constante K no puede ser nula debido a que es proporcional a la tasa de ablación. Del comportamiento asintótico de  $\theta_{1,2}$  cerca del cuerpo, puede verse que, para que la densidad y la temperatura sean no negativas, la constante K' tiene que ser nula. Con estas consideraciones, el comportamiento de  $\theta_{1,2}$  cerca del sólido está dado por:

$$\theta_1 = \theta(\eta)$$

$$\theta_2 = \theta(\eta) + C [\theta(\eta)]^\beta$$

donde:

$$\theta(\eta) = \left[ \frac{19Z + 6}{4} \sigma \left( 1 - \frac{1}{\eta} \right) \right]^{2/5} + O \left[ \left( 1 - \frac{1}{\eta} \right)^{(2\beta + 1)/5} \right]$$

$$\sigma \equiv g K$$

$$\beta \equiv \frac{207Z + 54}{76Z + 24}$$

Dados los valores de  $\sigma$  y de  $Z$ , la constante  $C$  se determina de manera de satisfacer la condición:

$$\theta_2(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow 1$$

Una vez hecho esto, el autovalor  $K$  resulta de la condición:

$$v_2(\eta \rightarrow \infty) \rightarrow 1$$

expresado por:

$$K = \left[ \frac{1 - \theta_1}{\theta_1} \right]_{\eta \rightarrow \infty}$$

Esto fue implementado para diferentes valores de Z. La relación entre K y g se indica en la figura IV-1 para Z = 1. Recuérdese que  $g = r_s / (4 Z \lambda_D)$  y que K es la tasa de ablación de masa  $(dm_s/dt)$  adimensionalizada.

$$K = \frac{dm_s}{dt} \frac{Z}{4\pi m_i n_0 T_0^{1/2}} \sqrt{2\pi m_e}$$

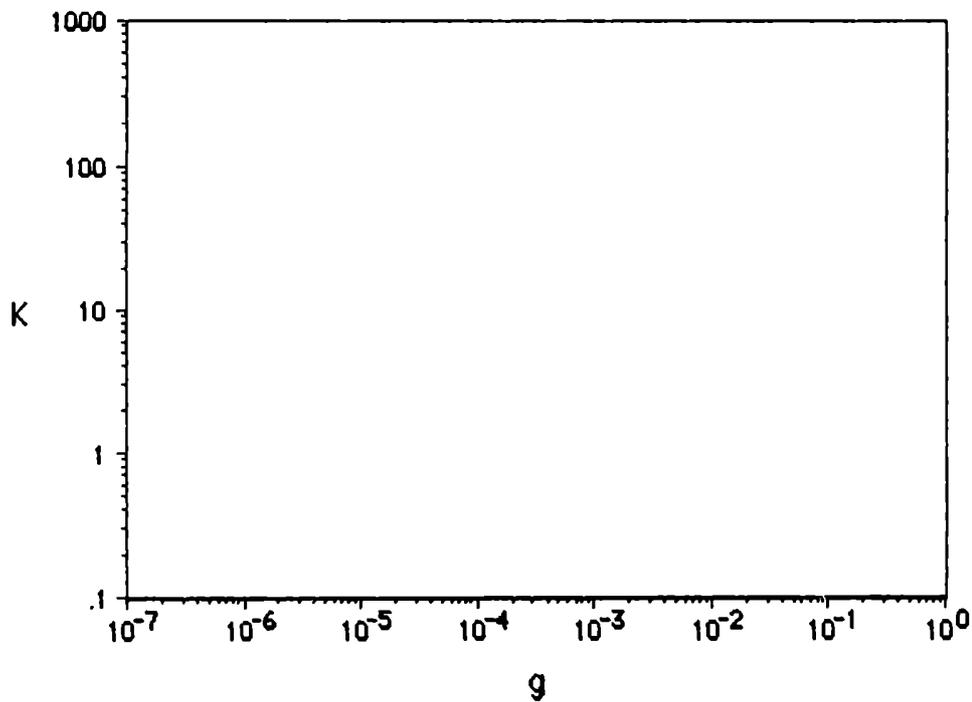


Figura IV-1

Relación entre la tasas de ablación adimensional K y g

Esta curva puede ajustarse por

$$K = .3 g^{-.507} ,$$

con una precisión de más del 10%. A partir de esta fórmula puede calcularse el tiempo de evaporación de una microesfera de hidrógeno de radio inicial  $r_s$  sumergida en un plasma caliente de densidad  $n_0$  y temperatura  $T_0$ . En efecto, dado que el flujo de partículas está relacionado con  $K$  a través de

$$n v = \frac{K}{\sqrt{2\pi m_e}} \left(\frac{r_s}{r}\right)^2 n_0 T_0^{1/2}$$

la ley de retroceso de la superficie del sólido debido a la pérdida de masa del mismo es

$$\frac{dr_s}{dt} = - \frac{K n_0 T_0^{1/2}}{2 n_s^0 \sqrt{2\pi m_e}}$$

donde  $n_s^0$  es la densidad numérica molecular del sólido ( $= 3,13 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ , para deuterio-tritio sólido). A través de esta expresión resulta un tiempo de vida característico de la microesfera dado por

$$\tau = 6 \cdot 10^{12} r_s^{1.507} n_0^{-0.493} T_0^{-1.514} ,$$

el tiempo se da en milisegundos, el radio en centímetros, la densidad en Inversa de centímetros cúbicos, y la temperatura en electron-volts. Esta debe ser comparada con la expresión obtenida por Mayer [Mayer F. J. (1982)], quien usa el modelo de Cowie y McKee [Cowie L. L. y McKee C. F. (1977)] para reproducir los resultados de diversos experimentos de inyección de

microesferas de hidrógeno en tokamaks [Milora S. L. (1981)] eligiendo convenientemente el valor del limitador de flujo térmico, obteniendo:

$$\tau = 4.1 \cdot 10^{12} r_p^{1.5} n_0^{-5} T_0^{-1.5} ,$$

las magnitudes están en las mismas unidades de la formula anterior. De esta manera el método desarrollado en este capítulo reproduce muy bien las tasas de ablación observadas en situaciones tan extremas como las mencionadas, sin necesidad de introducir parámetros de ajuste. En particular, esto indica que los flujos térmicos obtenidos son realistas

En la figura IV-2 se muestran los perfiles de las diferentes magnitudes, correspondientes a las condiciones del experimento ISX-B que corresponde a una máquina tipo tokamak con densidades y temperaturas típicas de  $5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  y 1 KeV respectivamente [Milora S. L. (1981)]. La temperatura y densidad del plasma se calculan por medio de las expresiones (VI-7), y en la figura se muestran sus valores adimensionalizados con los correspondientes al infinito:  $v \equiv n/n_0$  y  $\theta \equiv T_p/T_0$ .

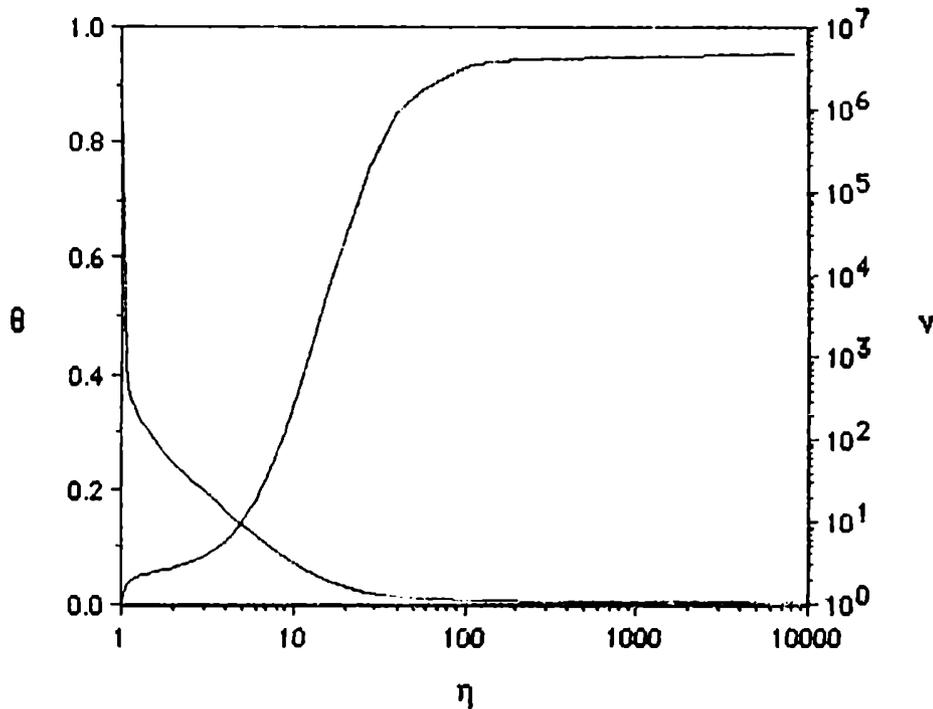


Figura IV-2

Perfiles de densidad y temperatura adimensionales obtenidos con el formalismo de este capítulo para las condiciones del experimento ISX-B

Los perfiles de temperatura concuerdan muy bien con los dados por Mayer, no así los de densidad, que presentan una disminución mucho más abrupta que la reportada. Esto podría explicar mediciones sobre el mismo experimento que muestran densidades altas sólo en las proximidades del sólido, en tanto que la extensión de la nube fría se sigue aproximando bien por la descripción de Mayer. Observaciones astronómicas parecen indicar un resultado similar en el caso de la evaporación de nubes frías [Ballet J., Arnaud M. y Rothenflug (1986)].

En la figura IV-3 se muestra el perfil del flujo de calor adimensionalizado con el flujo libre máximo al infinito, junto con el cociente entre el flujo de calor y el correspondiente de Spitzer, para las condiciones del experimento ISX-B.

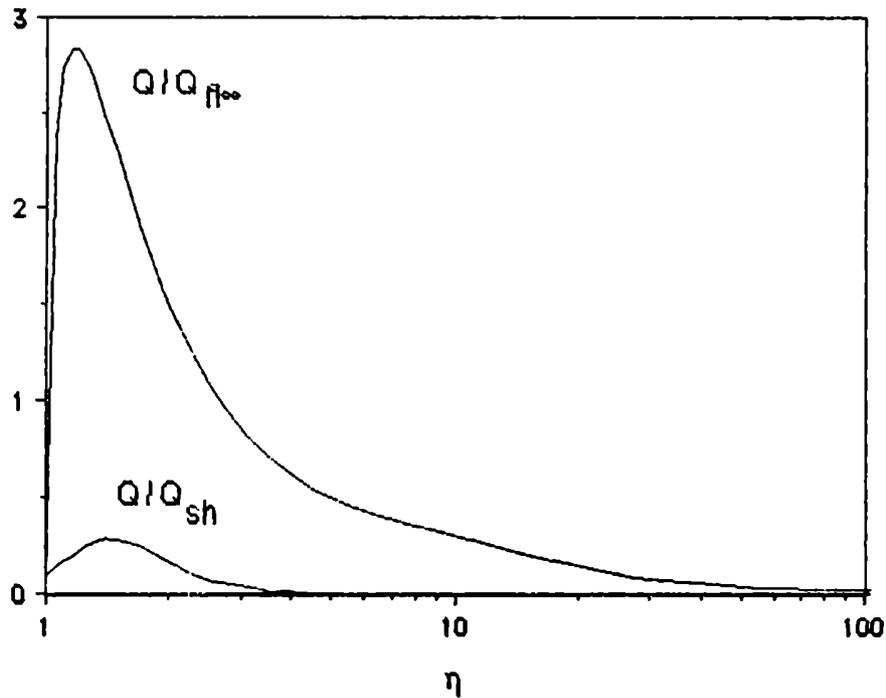


Figura IV-3

Flujo de calor y relación entre el flujo de calor y el correspondiente de Spitzer para las condiciones del experimento ISX-B

Nótese que el flujo térmico es siempre una fracción del flujo clásico, menor que 0,29. Un gráfico muy ilustrativo a este respecto es el mostrado en la figura IV-4 donde se muestra el cociente entre el flujo térmico de Spitzer y el flujo dado por el formalismo de este capítulo, como función del cociente entre el camino libre medio térmico local y la escala local de variación de la temperatura.

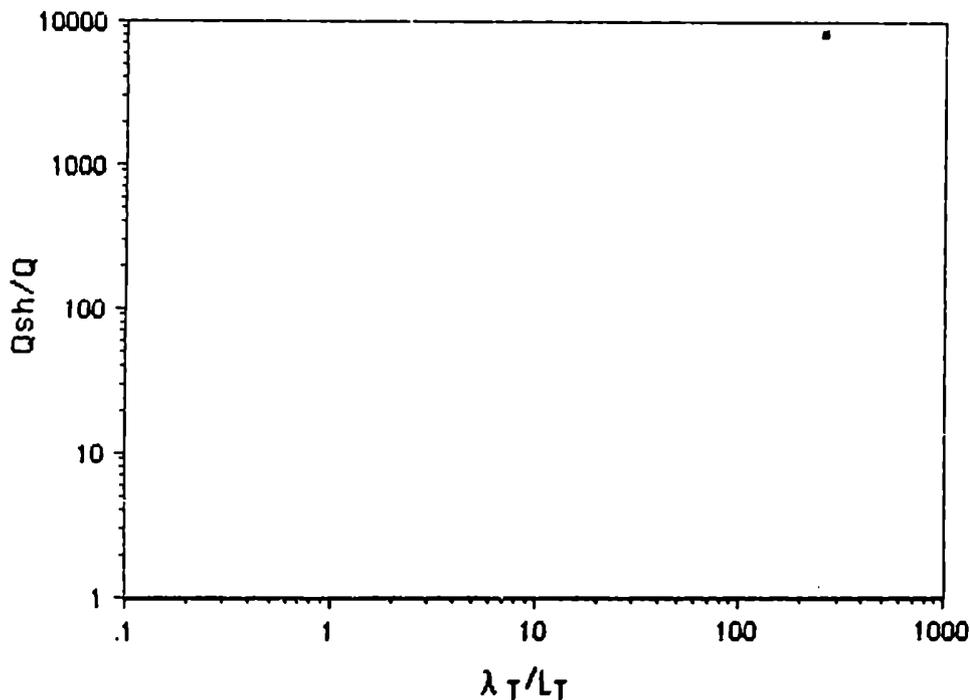


Figura IV-4

Relación entre el flujo de calor y el correspondiente de Spitzer como función del cociente entre el camino libre medio térmico y la escala local de variación de la temperatura, para las condiciones del experimento ISX-B

La función de prueba (IV-1) sólo es aplicable en los casos muy poco colisionales como el del ISX-B, donde el cociente entre el camino libre medio térmico en el plasma ambiente y el radio de la microesfera vale  $\lambda_T / r_s = 4 \cdot 10^{-4}$  !! . A modo de ejemplo considérense los perfiles de temperatura y densidad para un caso más colisional donde  $\lambda_T / r_s = 4 \cdot 10^{-1}$  correspondiente a un plasma de vidrio ( $Z \approx 7$ ,  $A \approx 14$ ). Usando el formalismo desarrollado en el capítulo II, con un valor de  $\epsilon = 0,08$ , resultan los perfiles mostrados en la figura IV-5 (líneas con símbolos) junto con los obtenidos con el método de momentos (líneas simples).

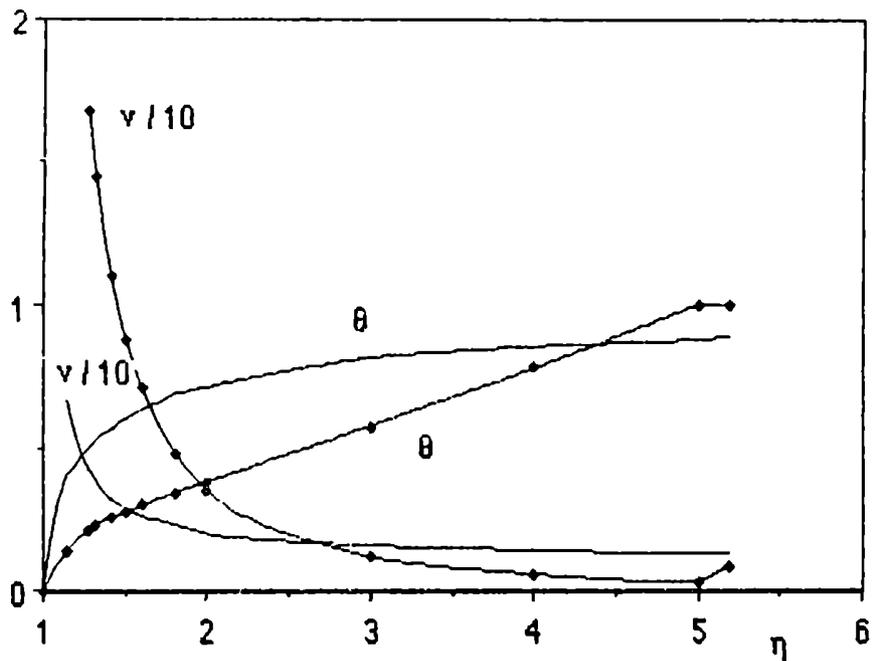


Figura IV-5

Perfiles de densidad y temperatura adimensionales obtenidos con el formalismo de este capítulo (líneas), y con el formalismo del capítulo II (líneas con símbolos), para el caso en que  $\lambda_T / r_s = 0,4$  y  $Z=7, A=14$

La marcada diferencia entre los distintos perfiles indica que la función (IV-1) no se adapta a los casos muy colisionales, como era de esperarse. Sin embargo, la tasa de ablación resulta razonablemente bien descrita por ambos modelos. En efecto, la tasa de ablación de masa se escribe

$$\frac{dm_s}{dt} = \frac{4\pi m_i}{Z} \frac{K n_0 T^{1/2}}{\sqrt{2\pi m_e}}$$

por lo que puede tomarse a K como una tasa de ablación adimensional. El valor de K correspondiente al ejemplo mostrado en la figura IV-5 es  $K = 0,2816$ ; el que resulta de aplicar el formalismo del capítulo II con  $\epsilon = 0,08$  es  $K_{lim} = 0,4514$  (diferencia del 46 %). Si se hubiese usado  $\epsilon = 0.1$  sería  $K_{lim} = 0,3275$ , que da una diferencia del 15 %.

De esta manera, el formalismo presentado en este capítulo es aplicable a las situaciones muy poco colisionales comunes en las experiencias de realimentación de combustible en máquinas toroidales, no tratables por teorías locales. Tanto las tasas de ablación como los perfiles de temperatura reproducen bien las observaciones experimentales; el perfil de densidad, sin embargo, parece decaer demasiado abruptamente al alejarse de la superficie del sólido. Este último efecto es debido a que el movimiento iónico no es tratado en forma satisfactoria al tener que desprejarse el campo eléctrico y, por lo visto más arriba, sólo es subsanable eligiendo funciones de prueba diferentes de la (IV-1), lo que complica enormemente el formalismo sin agregar mejoras substanciales.

## Conclusiones

El fin de este trabajo fue la obtención de un formalismo útil para tratar el transporte de energía en plasmas con fuertes gradientes de temperatura. La dificultad esencial es que, en principio, el problema requiere un tratamiento completamente cinético. Dadas las dificultades inherentes a utilizar tal tratamiento en cada problema particular, se busca entonces obtener soluciones más o menos generales de la ecuación cinética, válidas en el régimen estudiado.

En el capítulo III de este trabajo, dichas soluciones generales se han encontrado, en el caso de plasmas planos unidimensionales, para el rango de energías de interés en el cálculo del flujo térmico. Otros autores han obtenido soluciones analíticas de este tipo, pero válidas solamente en el límite  $Z \rightarrow \infty$  [ver, por ejemplo, Albritton et al (1986)], de hecho, como se desprende de la comparación con los resultados del capítulo III, el término de pérdida de energía despreciado para obtener estas soluciones, sigue siendo importante aun para  $Z$  tan alto como 10. En paralelo con esto, se ha mostrado que el uso de sólo los dos primeros términos del desarrollo de la función de distribución en polinomios de Legendre, está justificado aun en plasmas de  $Z = 1$ , cuando los gradientes de temperatura no son demasiado intensos  $\lambda_T/T |dT/dx| < 0,3$ . La inclusión de la segunda anisotropía, por otro lado, se redujo a la integración de una ecuación diferencial ordinaria, de la cual se obtuvo la generalización del formalismo anterior en el caso  $Z \approx 1$ .

Como aporte adicional, al final del capítulo III se incluyó en el formalismo la existencia de contornos espaciales correspondientes a una interfase plasma-vacio. La inclusión de condiciones de contorno generales puede lograrse de manera similar a la usada por Fernández-Feria R., Sanmartín J. R. y Ramirez J. (1990), y es objeto de un trabajo futuro.

La generalización de todo este formalismo a problemas con simetría cilíndrica o esférica, o a dimensiones espaciales mayores que uno no es inmediato, debido a que no puede eliminarse trivialmente la densidad de partículas definiendo una variable auxiliar. El formalismo plano, sin embargo, puede utilizarse en problemas unidimensionales cilíndricos o esféricos, siempre que la escala local de los gradientes macroscópicos sea pequeña comparada con el radio del punto considerado.

En el capítulo IV se desarrolló un formalismo aplicable cuando los caminos libres medios son comparables a las distancias macroscópicas características, con el cual se trató el problema de la evaporación de microesferas de combustible sólido en plasmas de máquinas toroidales, obteniéndose una buena reproducción de observables experimentales, sin necesidad de parámetros de ajuste como los requeridos por los métodos tradicionales. Usando diferentes funciones de prueba, puede emplearse el formalismo para tratar otro tipo de problemas, tales como el transporte de calor en la corona de plasmas generados por láser.



## Referencias

- Abramowitz M. y Stegun I., "Handbook of Mathematical Functions", Dover, New York (1970)
- Akhiezer A. I., Akhiezer I. A., Polovin, Sitenko y Stepanov, "Plasma Electrodynamics" Vol 2, Pergamon Press (1975)
- Albritton J. R., Phys. Rev. Lett. **50**, 2078 (1983)
- Albritton J. R., Williams E. A., Bernstein I. B. y Swartz K. P., Phys. Rev. Lett. **57**, 1887 (1986)
- Balbus S. A. y McKee C. F., Ap. J. **252**, 529 (1982)
- Ballet J., Arnaud M. y Rothenflug, Astron. Astrophys. **161**, 12 (1986)
- Bell A. R., Evans R. G. y Nicholas D. J., Phys. Rev. Lett. **46**, 243 (1981)
- Bell A. R., Phys. Fluids **26**, 279 (1983)
- Bendib E. L., Luciani J. F. y Matte J. P., Phys. Fluids **31**, 711 (1988)
- Boyd T. J. M., Lonsdale L. D. y Sanderson J. J., J. Plasma Phys. **39**, 115 (1988)
- Braginskii S. I., "Transport Processes In a Plasma", Rev. of Plasma Phys. Vol 1, Consultants Bureau (1965)
- Chapman S. y Cowling T. G., "Mathematical Theory of Non-Uniform Gases", Cambridge University Press (1958)
- Cowle L. L. y McKee C. F., Ap. J. **211**, 135 (1977)
- Draine B. T. y Giuliani J. L., Ap. J. **281**, 690 (1984)

- Epperlein E. M. y Haines M. G., *Phys. Fluids* **29**, 1029 (1986)
- Fechner W. B. y Mayer F. J., *Phys. Fluids* **27**, 1538 (1984)
- Fernández-Ferla R., Sanmartín J. R. y Ramírez J., enviado a *Plasma Phys. Cont. Fusion* (1990)
- Ghang C. T., *Phys. Fluids* **26**, 805 (1983)
- Giuliani J. L., *Ap. J.* **277**, 605 (1984)
- Goldsack T. J., Kilkenny J. D., MacGowan B. J., Cunningham P. F., Lewis C. L. S., Key M. H. y Rumsby P. T., *Phys. Fluids* **25**, 1634 (1982)
- Grad H., *Phys. Fluids* **6**, 147 (1963)
- Grainick S. L., *Nucl. Fusion* **13**, 703 (1973)
- Gratton R., Piriz A. R. y Pouzo J. O., *Nucl. Fusion* **26**, 483 (1986)
- Holstein P. A., Delettrez J., Skupsky S. y Matte J. P., *J. Appl. Phys.* **60**, 2296 (1986)
- Jorna S. y Wood L., *J. Plasma Phys.* **38**, 317 (1987)
- Khan S. A. y Rognlien T. D., *Phys. Fluids* **24**, 1442 (1981)
- Kishimoto Y., Mima K. y Haines M. G., *J. Phys. Soc. Jpn.* **57**, 1972 (1988)
- Lees L., *J. SIAM Appl. Math.* **13**, 278 (1965)
- Liboff R. L. y Fedele J. B., *Phys. Fluids* **10**, 1391 (1967)
- Lindman E. L. y Swartz K., *Phys. Fluids* **29**, 2657 (1986)

- Luciani J. F., "Transport non-local dans un plasma cinétique très inhomogène", Tesis Doctoral, Universidad de París VI (1985)
- Luciani J. F., Mora P. y Pellat R., Phys. Fluids **28**, 835 (1985)
- Luciani J. F. y Mora P. J., J. Stat. Phys. **43**, 281 (1986)
- Matte J. P. y Yirmont J., Phys. Rev. Lett. **48**, 1936 (1982)
- Max C. E., McKee C. F. y Mead W. C., Phys. Fluids **23**, 1620 (1980)
- Mayer F. J., Phys. Rev. Lett. **48**, 1400 (1982)
- McKee C. F. y Cowie L. L., Ap. J. **215**, 213 (1977)
- Milora S. L., J. Fusion Energy **1**, 15 (1981)
- Molvig K. y Hizanidis K., Phys. Fluids **27**, 2847 (1984)
- Parks P. B., Turnbull R. J. y Foster C. A., Nucl. Fusion **17**, 539 (1977)
- Parks P. B. y Turnbull R. J., Phys. Fluids **21**, 1735 (1978)
- Prasad M. K. y Kershaw D. S., Phys. Fluids B **1**, 2430 (1989)
- Rogers J. H., De Groot J. S., Abou-Assaleh Z., Matte J. P., Johnston T. W. y Rosen M. D., Phys. Fluids B **1**, 741 (1989)
- Sanmartín J. R., Ramirez J. y Fernández-Feria R., enviado a Phys. Fluids B (1990)
- Sanz J., Liñan A., Rodríguez M. y Sanmartín J. R., Phys. Fluids **24**, 2098 (1981)
- Sanz J. y Sanmartín J. R., Phys. Fluids **26**, 3361 (1983)

Sedov I. L., "Similarity and Dimensional Methods in Mechanics", Academic Press (1959)

Shirazian M. H. y Steinhauer L. C., Phys. Fluids **24**, 843 (1981)

Shkarofsky I. P., Johnston T. W. y Bachynski M. P., "The Particle Kinetics of Plasmas", Addison-Wesley (1966)

Spitzer L. y Härm R., Phys. Rev. **89**, 977 (1953)

Trubnikov B. A., "Particle Interactions in a Fully Ionized Plasma", Consultants Bureau (1965)

Wu Ta-You, "Kinetic Equations of Gases and Plasmas", Addison-Wesley (1966)

Zel'dovich Ya. B. y Raizer Yu. P., "Physics of Shock Waves and High-Temperature Hydrodynamic Phenomena" Vol 1, Academic Press (1966)

Zimmerman G. B. y Kruer W. L., Comm. Plasma Phys. **2**, 51 (1975)