Desigualdad de Harnack y existencia y estimaciones de la función de Green para operadores elípticos degenerados

Salinas, Oscar M.

1989

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

Registro N° 2332

DESIGUALDAD DE HARNACK Y
EXISTENCIA Y ESTIMACIONES DE LA FUNCION DE GREEN
PARA OPERADORES ELIPTICOS DEGENERADOS

TRABAJO PRESENTADO PARA OPTAR AL TITULO DE

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

Oscar M. Salinas

Director: Dr. Hugo Aimar

Departamento de Matemática

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Diciembre 1989

2332
ej. 2

Trabajo realizado como Becario del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) en el Programa Especial de Matemática Aplicada (PEMA), Santa Fe

Este trabajo no hubiera sido posible sin la guía y el esfuerzo brindados por la Dra. Eleonor Harboure y, en especial, por el Dr. Hugo Aimar. Agradezco además el constante estímulo infundido por ellos y por el Dr. Roberto Macías y su esposa, la Lic. Ilda Hernández.

Deseo agradecer también a Mirta Gómez por el mecanografiado de estas páginas y, por el apoyo prestado para que ello fuera posible, al resto de las integrantes del Banco de Dactilógrafas del Centro Regional de Investigación y Desarrollo de Santa Fe (CERIDE).

La labor aquí expuesta fue realizada en uso de Becas Internas del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) en el Programa Especial de Matemática Aplicada (PEMA) en la sede del Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (NTEC).

INDICE

INTRODUCCIÒN

En este trabajo extendemos a una nueva clase de operadores elípticos degenerados, resultados clásicos entre los principalmente se cuentan: desigualdad de Harnack, existencia de la función de Green y estimaciones de regularidad y tamaño de la misma. Dichos resultados han sido tema de numerosos trabajos. En todos el operador diferencial tiene básicamente la forma de divergencia

$$(0.1) \qquad Lu = - \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij} D_j u)$$

donde la matriz $A = [a_{ij}]$ es simétrica y medible en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Sin embargo, hay variedad de condiciones sobre la elipticidad de la misma.

Muchas de las técnicas que utilizaremos aquí son generalizaciones de las introducidas por J. Moser en 1961 ([M1]) y 1971 ([M2]). La hipótesis sobre la elipticidad de A considerada por este autor es lo que se suele denominar elipticidad uniforme, es decir

$$(0.2) \qquad C \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \leq C^{-1} \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

en c.t.p. $x \in \Omega$ para una constante $C > 0$. Ejemplo de este tipo de operadores es

$$Lu = -\mathrm{div}(\nabla u)$$

La misma condición es la utilizada, entre otros, por W. Littman, G. Stampacchia y H. Weinberger en [LSW] y por D. Kinderlehrer y G. Stampacchia en [KS] .

Las técnicas de Moser encuentran una generalización en 1982, debida a E. Fabes, C. Kenig y R. Serapioni ([FKS]) . El tipo de elipticidad considerada allí es

$$(0.3) \qquad w(x) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \le C\, w(x) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \qquad \forall\, \xi \in \mathbb{R}^n$$

en c.t.p. $x \in \Omega$, donde C es una contante positiva y w una función medible no negativa tal que

$$(0.4) \qquad w(B)\, w^{-1}(B) \cong |B|^2$$

para toda bola euclídea B donde $w(B) = \int_R w$. Es decir que w es un elemento de la clase A_2 de Muckenhoupt ([M]) . La novedad consiste en que se permite que la matriz sea semidefinida positiva, o sea que pueden existir puntos donde los términos de (0.3) se anulen. Ejemplo de este tipo de operadores es

$$Lu = -\mathrm{div}(|x|^{\alpha}\, \nabla u) \qquad \text{para algún } \alpha \in (-n,n) .$$

En el trabajo mencionado, se obtiene, entre otras cosas, una desigualdad de Harnack, la que, a su vez, sirve para demostrar la continuidad Hölder de las soluciones. El problema de la función de Green para estos operadores fue analizado por los mismos Fabes y Kenig junto con D. Jerison en [FJK] .

Una extensión del caso anterior en ecuaciones elípticas degeneradas es estudiada por S. Chanillo y R. Wheeden en [ChW2] . Esta consiste en tomar pesos distintos a la derecha y a la izquierda en (0.3), esto es

$$(0.5) \qquad v(x) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \le w(x) \sum_{i=1}^{n} \xi_i^2$$

Las hipótesis sobre el par (v.w) son por un lado, que v verifique (0.4) y w satisfaga una propiedad de duplicación es decir que exista una constante $C > 0$ tal que

$$w(2B) \leq C\, w(B)$$

para toda bola euclídea B, donde $2B$ indica la bola concéntrica con B y de radio dos veces el de ésta. Además es necesaria una hipótesis que relacione ambos pesos. Esta es que exista $\sigma > 1$ y $C > 0$ tal que

$$\theta \left(\frac{w(\theta B)}{w(B)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq C \left(\frac{v(\theta B)}{v(B)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, \theta \in (0,1]\ ,$$

para toda bola euclídea B. Dentro de esta clase de operadores está

$$Lu = -\mathrm{div}(|x|^{1/2} D_1 u, |x|^{-1/2} D_2 u) \qquad x \in \mathbb{R}^2$$

Con estas condiciones los mencionados autores prueban una desigualdad de Harnack ([ChW2]) y analizan el problema de la función de Green ([ChW3]). Entre las herramientas utilizadas se encuentra una nueva generalización de las técnicas de Moser en las que se aplican los resultados de [ChW1] sobre desigualdades de Sobolev y Poincaré.

En 1982, B. Franchi y E. Lanconelli publican [FL1] , primero de una serie de tres artículos en los que estudian una clase sustancialmente diferente de operadores elípticos degenerados. La diferencia estriba en que la condición de elipticidad es

$$(0.6) \qquad \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(x)\, \xi_i^2 \leq \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \leq C \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(x)\, \xi_i^2$$

Aquí, las λ_i son funciones no negativas tales que $\lambda_1 \equiv 1$, $\lambda_j(x) = \lambda_j(x_1,\ldots,x_{j-1})$ $\quad j = 2,\ldots,n$ y, además satisfacen una serie de condiciones puntuales que las asemejan, en cierta forma, a potencias de módulos. Como ejemplo tenemos, para $x = (x_1,x_2)$ en $\mathbb{R}^2$. el operador

$$Lu = -\mathrm{div}(D_1 u, |x_1|^{\beta} D_2 u) \qquad \beta > 0$$

La serie de tres artículos mencionados se completa con [FL2] y [FL3], sobre desigualdad de Harnack, regularidad de soluciones e inmersiones en espacios de Sobolev. Las técnicas utilizadas en éstos tres trabajos constituyen una novedad con respecto a las que se aplican en los ya comentados. Aquí se construye una métrica a partir de los λ_i, que en el caso $\lambda_i \equiv 1$ $\forall\, i$ coincide con la euclídea y sobre esta nueva geometría se procede, ahora sí, a una adecuada generalización de las técnicas de Moser.

En 1986, B. Franchi y R. Serapioni ([FS]) engloban las condiciones (0.3) y (0.6) en una nueva clase de operadores degenerados, donde la elipticidad está dada por

$$w(x) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(x)\, \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \le C\, w(x) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(x)\, \xi_i^2 \tag{0.7}$$

donde las λ_i son como en (0.6) y w es un peso en la clase A_2 pero con respecto a la métrica generada a partir de los λ_i. Indicando con d a esta métrica y tomando $n = 2$ tenemos, como ejemplo de operador, a

$$Lu = -\mathrm{div}\Big((d(0,x))^{\alpha}\, (D_1 u, |x_1|^{\beta}\, D_2 u)\Big) \qquad \alpha \in (-2,2) \qquad \beta > 0$$

Los mencionados autores bajo estas condiciones, fusionan adecuadamente las técnicas aplicadas en [FKS], [FL1], [FL2] y [FL3] en un contexto de espacios de tipo homogéneo (ver [CW] y [C]) para obtener extensiones para el nuevo tipo de operadores de los resultados de dichos artículos.

La clase de operadores elípticos degenerados que estudiaremos aquí, contiene como casos particulares todos los antes mencionados. La forma del operador es la de (0.1) mientras que la hipótesis de elipticidad está dada por

$$v(x) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(x)\, \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \le w(x) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(x)\, \xi_i^2$$

donde las λ_i son como en los trabajos de Franchi y Lanconelli y el par (v,w) satisface cierta condición, que ya veremos en el desarrollo del trabajo, en términos de la geometría generada a partir de los λ_i. Dentro de esta clase de operadores podemos citar, indicando con d a la métrica obtenida de los λ_i s

$$Lu = -\mathrm{div}\left((d(0,x))^{\alpha} D_1 u, (d(0,x))^{-\alpha} |x_1|^{\beta} D_2 u\right)$$

para $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^n$, $\beta > 0$ y $\alpha > 0$ tal que $1 - \frac{1}{2+\beta} < \frac{1}{4} \frac{(4+\alpha)(2-\alpha)}{2+\alpha}$.

En el Capítulo I presentaremos las hipótesis sobre los λ_i y definiciones y propiedades básicas ya conocidas de la geometría generada por ellos. Además demostraremos algunos resultados nuevos dentro de dicha geometría que luego nos serán de suma utilidad. El Capítulo II está dedicado a la obtención de desigualdades de tipo Sobolev y Poincaré con los pesos v y w, adecuadas a la nueva geometría. En el mismo, además, analizaremos las condiciones que impondremos sobre el par (v,w). El Capítulo III contiene, por un lado, las definiciones y principales propiedades de los espacios de tipo Sobolev en los que trabajaremos y, por otro, un estudio básico de los operadores que nos ocupan. En el Capítulo IV, con la ayuda de los resultados de los capítulos anteriores, probaremos una desigualdad de tipo Harnack que, a su vez, nos servirá para estudiar regularidad de soluciones. Finalmente, en el Capítulo V, demostraremos la existencia de la función de Green asociada a nuestros operadores y algunas estimaciones de tamaño y regularidad de la misma.

CAPITULO I

Preliminares Geométricas

En este Capítulo estudiaremos las propiedades geométricas básicas del espacio $\mathbb{R}^n$ equipado con una distancia inducida por el campo vectorial $(\lambda_1(x) \dots \lambda_n(x))$ asociado en la forma (0.2) al operador L .

El primer estudio en esta dirección con los λ_i en las condiciones (1.1) a (1.3) siguientes, fue hecho por Franchi y Lanconelli en [FL1]. En ese trabajo Franchi y Lanconelli definieron la distancia, una casi-distancia equivalente y demostraron resultados que fueron luego aplicados por los mismos autores en [FL2] y [FL3] para probar una desigualdad de Harnack en el caso $v = w = 1$ en (0.2). Cuando Franchi y Serapioni en [FS] consideran el problema análogo para el caso $v = w$, el hecho que $\mathbb{R}^n$ con aquella distancia y la medida de Lebesgue constituya un espacio de tipo homogéneo, permite usar los resultados de A.P. Calderón ([C]) sobre clases A_p en ese contexto. El estudio del caso general $v \neq w$ que nos proponemos aquí, requerirá nuevos resultados geométricos tales como los contenidos en los lemas (1.14), (1.30) y la construcción de una familia de rectángulos con una adecuada propiedad de cubrimiento hecha en la sección 3 de este capítulo.

§.1 Definición y propiedades básicas de la distancia

Sean $\lambda_1 \equiv 1$; $\lambda_2(x) = \lambda_2(x_1);\dots;\lambda_j(x) = \lambda_j(x_1,x_2,\dots,x_{j-1})$, donde $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$, n funciones que satisfacen las siguientes propiedades

(1.1) $\lambda_j \in C(\mathbb{R}^n) \cap C^1(\mathbb{R}^n - \Pi)$, donde

$$\Pi = \{x \in \mathbb{R}^n : \prod_{i=1}^{n} x_i = 0\}$$

(1.2) cada λ_j es par en cada variable separadamente, i.e.

$$\lambda_j(x_1,\dots,x_i,\dots,x_{j-1}) = \lambda_j(x_1,\dots,-x_i,\dots,x_{j-1})$$

(1.3) $0 < \lambda_j(x) \leq \Lambda$, para todo $x \in \mathbb{R}^n - \Pi$, $j = 1,\dots,$

Existen números no negativos b_{ji} tales que

$$0 \leq x_i(D_i\, \lambda_j)\,(x) \leq b_{ji}\, \lambda_j(x) \quad \text{para} \quad 1 \leq j \leq n\ ,\ 1 \leq i \leq j-1 \quad \text{y}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n - \Pi$.

En primer lugar introducimos las nociones de vector λ-subunitario y curva λ-subunitaria y en base a ello definiremos la métrica d .

(1.4) <u>Definición</u>: Diremos que un vector $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in \mathbb{R}^n$ es un vector λ-subunitario en un punto $x = (x_1,\dots,x_n)$ si

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \gamma_j\, \xi_j\right)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2(x)\, \xi_j^2 \quad , \text{ para todo } \xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n .$$

(1.5) <u>Definición</u>: Sea $\gamma : [0,T] \to \mathbb{R}^n$ una curva absolutamente continua. Diremos que γ es una curva λ-subunitaria si $\dot{\gamma}(t)$ es un vector λ-subunitario en $\gamma(t)$ para casi todo $t \in [0,T]$.

(1.6) <u>Definición</u>: Sean $x,y \in \mathbb{R}^n$, definimos

$$d(x,y) = \inf\{T \in \mathbb{R}^+ / \text{existe una curva } \lambda\text{-subunitaria } \gamma:[0,T] \to \mathbb{R}^n \text{ que verifica: } \gamma(0) = x\ ,\ \gamma(T) = y\}$$

(1.7) <u>Observación</u>: ([FL1] y [FL3]) Las hipótesis sobre λ aseguran la existencia de una curva λ-subunitaria que una x e y para cada par $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, de donde se deduce que d es una métrica. Además existe una constante positiva $b = b(\Lambda)$ tal que para todo par (x,y) se verifica $|x - y| \leq b\, d(x,y)$.

Para nuestros propósitos es útil introducir una casi-métrica (no simétrica) δ ,equivalente a d , que está definida más explícitamente, la cual en algunos casos, es más fácil de manejar que d .

(1.8) Definición: Sea $x \in \mathbb{R}^n$ $t \in \mathbb{R}$, definimos

$$H_o(x,t) = x$$

$$H_{k+1}(x,t) = H_k(x,t) + t\, \lambda_{k+1}(H_k(x,t))\, e_{k+1} \quad ; \quad \text{para } k = 0,\ldots,n-1$$

donde $\{e_k\}_{k=1}^n$ es la base canónica usual en $\mathbb{R}^n$.

(1.9) Definición: Sea $x \in \mathbb{R}^n$, definimos las siguientes funciones reales de variable real $s \to F_j(x,s) = s\, \lambda_j(H_{j-1}(x,s))$, $j = 1,\ldots,n$.

Es claro que $F_j(x,s)$ es una función de las j variables: $x_1,x_2,\ldots,x_{j-1}$ y s .

(1.10) Lema: Para cada j , la función $F_j(x,s)$ en $\{x \in \mathbb{R}^n / x_k \geq 0$, $k = 1,\ldots,j-1\} \times (0,\infty)$ es no decreciente en cada variable. En particular, es estrictamente creciente en s .

Demostración: De (1.3) se sigue que, para cada i , λ_i es no decreciente en $\{x \in \mathbb{R}^n/x_k \geq 0$, $k =1,\ldots,i-1\}$, de donde la monotonía en las variables x es inmediata. Dado que $\lambda_i > 0$ en $\mathbb{R}^n - \Pi$, de la definición se concluye que F_j es estrictamente creciente en s .#

A partir del lema anterior es claro que para cada $x = (x_1,\ldots, x_n) \in R^n$ tal que $x_k \geq 0$, $k = 1,\ldots,j-1$, podemos definir la función inversa de $F_j(x,\cdot)$, esto es $\psi_j(x,\cdot) = (F_j(x,\cdot))^{-1}$ para $j = 1,\ldots,n$. Ahora definimos la casi-métrica δ de la siguiente forma:

(1.11) Definición: Sean $x = (x_1,\ldots,x_n)$, $y = (y_1,\ldots,y_n)$ en $\mathbb{R}^n$

$$\delta(x,y) = \max_{j=1,\ldots,n} \psi_j(x^*,|x_j - y_j|) ,$$

donde $x^* = (|x_1|,\ldots,|x_n|)$.

(1.12) Lema ([FL1] Teoremas 2.6 y 2.7): Existe $a \geq 1$, que depende solo de las constantes b_{ji} de (1.3), tal que para cualquiera $x,y \in \mathbb{R}^n$

$$a^{-1}\,\delta(x,y) \leq d(x,y) \leq a\,\delta(x,y) .$$

Sea $G_1 = 1$ y $G_j = 1 + \sum_{i=1}^{j-1} G_i\, b_{ji}$ para $j = 2,\ldots,$

(1.13) Lema ([FL2] proposición 4.3): Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$ y $\theta \in (0,1)$ tenemos

$$\theta^{G_j} \leq \frac{F_j(x^*,\theta s)}{F_j(x^*,s)} \leq \theta \quad ,$$

$$\theta \leq \frac{\psi_j(x^*,\theta s)}{\psi_j(x^*,s)} \leq \theta^{\frac{1}{G_j}}$$

(1.14) Lema: Sean $x = (x_1,\ldots,x_n)$ e $y = (y_1,\ldots,y_n)$ en $\mathbb{R}^n$, y sean $r > 0$ y $\theta \in (0,1]$. Si para alguna constante $K \geq 1$.

$$|y_i| + F_i(y^*,\theta r) \leq |x_i| + K\,F_i(x^*,r) \quad , \quad i = 1,\ldots,j$$

luego

$$F_{j+1}(y^*,\theta r) \leq \theta\, K^{G_{j+1}-1}\, F_{j+1}(x^*,r) \;,$$

Demostración: Se obtiene aplicando el Lema (1.10) y el lema anterior, en efecto

$$\begin{aligned} F_{j+1}(y^*,\theta r) &= \theta r\, \lambda_{j+1}(|y_1| + F_1(y^*,\theta r),\ldots,|y_j| + F_j(y^*,\theta r)) \\ &\leq \theta r\, \lambda_{j+1}(|x_1| + K\,F_1(x^*,r),\ldots,|x_j| + K\,F_j(x^*,r)) \\ &\leq \theta r\, \lambda_{j+1}(|x_1| + F_1(x^*,Kr),\ldots,|x_j| + F_j(x^*,Kr)) \\ &= \theta\, K^{-1}\, F_{j+1}(x^*,Kr) \leq \theta\, K^{G_{j+1}-1}\, F_{j+1}(x^*,r) \;.\# \end{aligned}$$

Durante el resto de este trabajo utilizaremos la letra S y la letra Q para referirnos, respectivamente, a las d-bolas y a las δ-bolas , es decir

$$S(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n / d(x,y) < r\}$$

$$Q(x,r) = \{y \in \mathbb{R}^n / \delta(x,y) < r\}$$

$$= \{y = (y_1,\dots,y_n) \in \mathbb{R}^n / |x_i - y_i| < F_i(x^*,r) \quad , \quad i=1,\dots,n\}$$

para $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$. Además, para $\alpha > 0$, $Q = Q(x,r)$ y $S = S(x,r)$, indicaremos $\alpha Q = Q(x,\alpha r)$ y $\alpha S = S(x,\alpha r)$.

(1.15) Lema: ([FS], proposición 2.7) Valen las siguientes propiedades

(1.16) para todo x en $\mathbb{R}^n$ y todo $r > 0$ se tiene

$$S(x,a^{-1}r) \subset Q(x,r) \subset S(x,ar)$$

donde a es la constante en (1.12);

(1.17) existe una constante $b > 1$ tal que si $|x - y| \le 1$, entonces

$$b^{-1} |x - y| \le d(x,y) \le b|x - y|^{\eta} \quad ,$$

donde $\eta = \min\limits_j \{G_j^{-1}\}$

(1.18) vale la propiedad de duplicación para las d-bolas , i.e. existe una constante $A > 1$ tal que

$$|2\, S| \le A\, |S|$$

(1.19) duplicación para las δ-bolas:

$$|2\, Q| \le A\, |Q| \; .$$

Observamos que todas las constantes dependen sólo de n , Λ y los b_{ij} .

De (1.18) y (1.19) tenemos que $(\mathbb{R}^n, d, \mathbb{L})$ y $(\mathbb{R}^n, \delta, \mathbb{L})$ son espacios de tipo homogéneos en el sentido de Coifman y M. de Guzman [CG] .

Aquí L es la medida de Lebesgue de $\mathbb{R}^n$.

(1.20) Lema: Sean $x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n$ y $r>0$. Luego existe y en $S(x,r)$ tal que $S(y,\mu r)\subset S(x,r)$ y $S(y,\mu r)\cap S(x,\mu r)=\phi$ para μ en $(0,4^{-1}\,a^{-6})$.

Demostración: Supongamos que x es tal que $x_i\geq 0$, $i=1,\dots,$ A partir de la definición de δ es claro que para $y=(x_1+2^{-1}\,a^{-3}\,r\,,\,x_2,\dots,x_n)$ tenemos $\delta(x,y)=2^{-1}\,a^{-3}\,r$. Además tenemos que para $\theta\in(0,4^{-1}\,a^{-2})$ se verifica

$$(1.21)\qquad Q\left(y,\frac{\theta}{a^3}\,r\right)\subset Q\left(x,\frac{r}{a}\right)$$

$$(1.22)\qquad Q\left(y,\frac{\theta}{a^3}\,r\right)\cap Q\left(x,\frac{\theta}{a^3}\,r\right)=\phi$$

En efecto, para cada $z\in Q\left(y,\frac{\theta}{a^3}\,r\right)$ tenemos

$$\begin{aligned}\delta(x,z)&\leq a^2(\delta(x,y)+\delta(y,z))\\&\leq a^2\left(\frac{r}{2\,a^3}+\frac{\theta}{a^3}\,r\right)\\&=\frac{r}{a}\left(\frac{1}{2}+\theta\right)<\frac{r}{a}\end{aligned}$$

lo que prueba (1.21). Por otra parte

$$\frac{r}{2\,a^3}=\delta(x,y)\leq a^2(\delta(x,z)+\delta(y,z))\;,$$

de donde, para $z\in Q\left(y,\frac{\theta r}{a^3}\right)$, se sigue que

$$\begin{aligned}\delta(x,z)&\geq\frac{r}{2\,a^5}-\delta(y,z)\geq\frac{r}{2\,a^5}-\frac{\theta}{a^3}\,r\\&=\frac{r}{a^3}\left(\frac{1}{2\,a^2}-\theta\right)>\frac{r}{a^3}\,\frac{1}{4\,a^2}>\frac{\theta}{a^3}\,r\;,\end{aligned}$$

con lo que llegamos a (1.22). Luego, como $S(y,\theta\, a^{-4}\, r) \subset Q(y,\theta\, a^{-3}\, r) \subset Q(x,a^{-1}\, r) \subset S(x,r)$, tenemos la tesis para x en el primer cuadrante. El caso general se demuestra por simetría.$_{\#}$

Veremos ahora algunos resultados técnicos que usaremos en el Capítulo II, incluyendo una estimación de la medida de una d-bola en términos de los λ_i . Introducimos, con tal propósito, una familia de curvas subunitarias que dependen de n parámetros reales:

(1.23) <u>Definición</u>: Sea $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ y $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ en $\mathbb{R}^n$ con $0 < \varepsilon_j < \nu_j$, $j = 1,\dots,n$. Indicaremos con $\Delta^{\nu}_{\varepsilon}$ al conjunto $\{y \in \mathbb{R}^n/\varepsilon_j \leq y_j \leq \nu_j$, $j = 1,\dots,n\}$. Si $\gamma = (\gamma_1,\dots,\gamma_n) \in \{-1,1\}^n$, definimos $T_\gamma y = T_\gamma(y_1,\dots,y_n) = (\gamma_1 y_1,\dots,\gamma_n y_n)$ y denotaremos con $\Delta^{\nu}_{\varepsilon}(\gamma)$ al conjunto $T_\gamma(\Delta^{\nu}_{\varepsilon})$. Además, si $x \in \mathbb{R}^n$ y $\rho > 0$ definimos $Q^\gamma(x,\rho) = \{y \in Q(x,\rho)/\gamma_j(y_j - x_j) \geq 0$; $j = 1,\dots,n\}$ si $\gamma = (1,\dots,1)$ escribiremos $Q^+(x,\rho)$ en lugar de $Q^{(1,\dots,1)}(x,\rho)$.

(1.24) <u>Definición</u>: Para $x = (x_1,\dots,x_n)$ e $y = (y_1,\dots,y_n)$ en $\mathbb{R}^n$ indicaremos con $H(t,x,y) = (H_1(t,x,y),\dots,H_n(t,x,y))$ a la solución del siguiente problema de Cauchy

$$\dot{H}_j(\cdot,x,y) = \lambda_j(H(\cdot,x,y))\, y_j$$

$$H_j(o,x,y) = x_j$$

$$j = 1,\dots,n .$$

Notemos que $H_j(t,x,y)$ depende solamente de $y_1,\dots,y_j$.

(1.25) <u>Lema</u> ([FS], proposición 7.3) Sean ε y ν como en la definición (1.23), luego existen $2\,n$ constantes positivas $C_1,\dots,C_n,\tilde{C}_1,\dots,\tilde{C}_n$ que dependen solo de ε , ν y los b_{ji} , tales que

(1.26) Si $\tau > 0$ $x \in R^n$ e $y \in \Delta_\varepsilon^\nu$ existen m y M , $0 \leq m < M \leq 1$ que dependen sólo de τ , x e y con $M-m \geq 4^{-n}$, tal que

$$H_j(s,x,y) \geq C_j(|x_j| + H_j(x^*,\tau)) \qquad j = 1,\ldots,$$

para $s \in [m\tau, M\tau]$.

(1.27) Si $\tau > 0$ e $y \in \Delta_\varepsilon^\nu$, tenemos

$$|H_j(\tau,x,y)| \leq \tilde{C}_j(|x_j| + H_j(x^*,\tau)) \qquad j = 1,\ldots,$$

Sin pérdida de generalidad, podemos suponer $C_j \leq 1 \leq \tilde{C}_j$.

(1.28) <u>Lema</u> ([FS], proposición 7.4) Sean $\xi \in (0,1]$ y $\gamma \in \{-1,1\}^n$ fijos. Luego existen ε , $\nu \in \mathbb{R}^n$ como en la definición (1.20) tal que, para todo $r > 0$ y para todo $x \in \mathbb{R}^n$

$$|H(r,x,\Delta_\varepsilon^\nu(\gamma)) \cap Q^\gamma(x,r)| \geq (1 - \xi)\ |Q^\gamma(x,r)|$$

(1.29) <u>Lema</u> ([FS] proposición 7.5) Sean ε , ν y γ como en la definición (1.23). Luego existen dos constantes positivas C_1 y C_2 que dependen sólo de ε , ν y los b_{ji} tal que

$$C_1 |S(x,r)| \leq \prod_{j=1}^{n} \int_o^r \lambda_j(H(t,x,y))\, dt \leq C_2\ |S(x,r)|$$

para cada $x \in R^n$, $r > 0$ e $y \in \Delta_\varepsilon^\nu(\gamma)$.

§.2 <u>Lema de cubrimiento de tipo Besicovitch</u>

El principal resultado de esta sección es el siguiente

(1.30) <u>Lema</u>: Sea E un conjunto acotado en $\mathbb{R}^n$. Sea $\mathcal{F}$ una familia de δ-bolas tal que $\forall\, x \in E\ \exists\ r(x) > 0$ $Q(x,r(x)) \in \mathcal{F}$. Existe una sucesión $\{x_k\} \subset E$ para la cual se verifica

(1.31) $$E \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q(x_k, r(x_k))$$

(1.32) existe una constante C que depende solo de n y de las constantes b_{ij} tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q(x_k, r(x_k))} \leq C$$

Para demostrar el lema anterior necesitamos dos resultados previos demostrados por Caffarelli y Calderón ([CC]) .

(1.33) Lema ([CC]): Sea $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$, una familia de cubos en $\mathbb{R}^n$ con lados paralelos a los ejes coordenados. Supongamos que para $i > j$ el centro de Q_i no pertenece a Q_j y que existe una constante $k \geq 2$, tal que si $Q_i \cap Q_j \neq \phi$, entonces $k\,\ell_j \geq \ell_i$, donde ℓ_i denota la longitud del lado de Q_i . Luego existe una constante C que sólo depende de n y k tal que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \chi_{Q_i} \leq C$$

Demostración: Sea x_o un punto que pertenece a los cubos $Q_{d_1}, \ldots, Q_{d_m}$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que x_o es el origen. Para simplificar la notación escribiremos Q_j en lugar de Q_{d_j}. Entre los Q_j consideraremos el subconjunto de cubos $Q_{j_1}, Q_{j_2}, \ldots,$ con $j_1 < j_2 < \ldots,$ que tienen centro en el primer cuadrante $(\mathbb{R}^n_+)$. Consideremos la longitud ℓ_{j_1} del primer cubo cuyo centro está en $\mathbb{R}^n_+$, ahora introducimos el cubo auxiliar $Q_o = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n / 0 \leq x_i \leq 1/2\,\ell_{j_1} , i = 1, \ldots, n\}$. Claramente $Q_o \subset Q_{j_1}$ y puesto que los centros de los Q_{j_s} , $s > 1$, no están contenidos en Q_{j_1} , hay, como máximo, un centro en Q_o. Ahora consideremos el conjunto de 2^{n-1} cubos adyacentes a Q_o en $\mathbb{R}^n_+$ con lados de longitud $1/2\ \ell_{j_1}$. En cada uno de ellos hay, como máximo, un centro. En efecto, supongamos que en uno de ellos hay dos centros, C_{j_s} y C_{j_t}. Luego, para algún $i \in \{1,\dots,n\}$.

$$x_i(C_{j_s}) \geq \frac{1}{2}\ \ell_{j_1}$$

$$x_i(C_{j_t}) \geq \frac{1}{2}\ \ell_{j_1}$$

donde $x_i(C_{j_s})$ indica la i-ésima coordenada de C_{j_s}. Así, ℓ_{j_s} y ℓ_{j_t} son mayores que ℓ_{j_1}, y como

$$|x_r(C_{j_s}) - x_r(C_{j_t})| \leq \frac{1}{2}\ \ell_{j_1}$$

para $r=1,\dots,n$, se sigue que $C_{j_s} \in Q_{j_t}$ y $C_{j_t} \in Q_{j_s}$, lo que es una contradicción. Entonces en el cubo auxiliar $Q_1 = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x_i \leq \ell_{j_1},\ i = 1,\dots,n\}$ hay, como máximo, $1 + (2^n - 1)$ centros. Tomemos aquellos Q_{j_i} que tienen centros fuera de Q_1. Ahora consideremos los $2^n - 1$ cubos adyacentes a Q_1 cuyos lados tienen longitud ℓ_{j_1}. Aplicando un razonamiento similar al anterior con Q_1 en lugar de Q_o tenemos que cada uno de los cubos mencionados tienen, como máximo un centro. Sea $Q_2 = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x_i \leq 2\ \ell_{j_1},\ i = 1,\dots,n\}$. De acuerdo al razonamiento precedente hay como máximo, $1+(2^n-1)+(2^n-1)$ centros en Q_2. Ahora tomemos en $\mathbb{R}^n_+$ los $2^n - 1$ cubos adyacentes a Q_2 que tienen lados de longitud $2\ \ell_{j_1}$. Razonando como antes, tenemos que cada uno de ellos contiene como máximo un centro. Luego la inducción es clara. Construyendo $Q_o, Q_1, \dots, Q_r$, donde

$$Q_s = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x_i \leq 2^{s-1}\ \ell_{j_1},\ i = 1,\dots,n\},$$

Q_{s-1} y sus $2^n - 1$ cubos adyacentes en $\mathbb{R}^n_+$ cuyos lados tienen la misma longitud están contenidos en Q_s. Así, hay como máximo, $1 + s(2^n - 1)$ centros en Q_s . Ahora bien como $\ell_{j_r} \leq \kappa\, \ell_{j_1}$, resulta que cada centro está en

$$\bar{Q} = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n / 0 \leq x_i \leq \kappa\, \tfrac{1}{2}\, \ell_{j_1} \ ,\ i = 1,\dots,n\}$$

Por otra parte, si $s > \log_2 \kappa$ tenemos que $2^{s-1}\ \ell_{j_1} > \kappa\, 2^{-1}\, \ell_{j_1}$ de donde $\bar{Q} \subset Q_s$. Luego es claro que en $\mathbb{R}^n_+$ hay, como máximo $1+(1+\log_2 \kappa)$ (2^n-1) cubos de la familia dada que contienen a $0 = x_o$. Por un argumento de simetría se sigue que en $\mathbb{R}^n$ el número máximo es

$$2^n\ (1 + (1 + \log_2 \kappa)(2^n - 1))\ ,$$

lo que concluye la demostración. #

(1.34) <u>Lema</u> ([CC]): Sea $\{R_j\}_{j=1}^{\infty}$ una familia de rectángulos n-dimensionales con lados paralelos a los ejes coordenados. Supongamos que para $i > j$ el centro de R_i no pertenece a R_j y que existen constantes $\kappa_1,\dots,\kappa_n$ tales que si $R_i \cap R_j \neq 0$ tenemos $\kappa_s\, \ell_j^s \geq \ell_i^s$, $s = 1,\dots,n$, donde ℓ_i^s indica la longitud del lado correspondiente al eje x_s del rectángulo R_i . Luego existe una constante C que sólo depende de n , $\kappa_1,\dots,\kappa_n$ tal que

$$\sum_{j=1}^{\infty} \chi_{R_j} \leq C$$

<u>Demostración</u>: Para $n = 1$ el lema se reduce al anterior. Veamos el caso $n = 2$. Sea x_o un punto que pertenece a $R_{d_1},\dots,R_{d_j},\dots,$ con $d_1 < \dots < d_j < \dots,$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad que $x_o = 0$ y que los centros de los R_{d_j} están en $\mathbb{R}^n_+$. Consideremos ahora el rectángulo auxiliar

$$R_o = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 2^{-1}\, \ell_x(R_{d_1})\ ,\ 0 \leq y \leq 2^{-1} \ell_y(R_{d_1})\}$$

donde $\ell_x(R_{d_1})$ y $\ell_y(R_{d_1})$ indican las longitudes de los lados de R_{d_1}

paralelos a los ejes x e y respectivamente. Claramente $R_o \subset R_{d_1}$ y hay, como máximo, un centro en él, el de R_{d_1}. A continuación definimos dos familias de bandas: para el eje y

$$S_r = \{(x,y)/2^{r-2}\ \ell_y(R_{d_1}) < y \leq 2^{r-1}\ \ell_y(R_{d_1}) \quad , \quad x \geq 0\}$$

y para el eje x

$$T_t = \{(x,y)/2^{t-2}\ \ell_x(R_{d_1}) < x \leq 2^{t-1}\ \ell_x(R_{d_1}) \qquad y \geq 0\}$$

con r , $t \in \mathbb{N}$. Es claro que los centros de todos los R_{d_j} están en el rectángulo

$$R = \{(x,y)/0 \leq x \leq \kappa_1\ 2^{-1}\ \ell_x(R_{d_1}) \qquad 0 \leq y \leq \kappa_2\ 2^{-1}\ \ell_y(R_{d_1})\} \ .$$

Por otra parte, también es claro que

$$R \subset \left(\bigcup_{r=1}^{r_o} S_r\right) \cup \left(\bigcup_{t=1}^{t_o} T_t\right) \cup R_o$$

donde r_o y t_o son los naturales que verifican

$$1 + \log_2 \kappa_2 \geq r_o > \log_2 \kappa_2$$

$$1 + \log_2 \kappa_1 \geq t_o > \log_2 \kappa_1$$

Ahora veamos cuantos centros puede contener cada banda. Conside_remos la banda S_r y los rectángulos R_{d_i} con centros en ella. Luego pa_ra esos R_{d_i} tenemos

$$2^{-1}\ \ell_y(R_{d_i}) \geq 2^{r-2}\ \ell_y(R_{d_1}) \ ,$$

Ahora cortando cada R_{d_i} con la recta $y = 2^{r-2}\ \ell_y(R_{d_1})$, obte_nemos, sobre ella, una familia de segmentos I_{d_i} que satisfacen las siguientes condiciones:

(1.35) el punto $(0,2^{r-2}\,\ell_y(R_{d_1}))$ pertenece a I_{d_i} ,

(1.36) si $d_i < d_j$, luego $2\,\kappa_1$ longitud $(I_{d_j}) \geq$ longitud (I_{d_i}) ,

(1.37) si $d_i < d_j$, el centro de I_{d_j} no pertenece a I_{d_i} .

Es fácil verificar las condiciones (1.35) y (1.36) , veamos (1.37) . Supongamos que (1.37) no se verifica para I_{d_i} , I_{d_j} , $d_i < d_j$, esto significa

(1.38) $|x(C_{d_i}) - x(C_{d_j})| \leq 2^{-1}\,\ell_x(R_{d_i})$,

por otra parte, sabemos que

(1.39) $|y(C_{d_j}) - y(C_{d_i})| \leq 2^{r-2}\,\ell_y(R_{d_1}) < 2^{-1}\,\ell_y(R_{d_i})$.

Pero de (1.38) y (1.39) se sigue que R_{d_i} contiene a C_{d_j} , lo que contradice nuestra hipótesis. Luego es válido (1.37). Entonces, con la familia $\{I_{d_i}\}$ estamos en las hipótesis del lema anterior para $n = 1$. Por consiguiente en la banda S_r hay, como máximo, un número $N = N(\kappa_1) < \infty$ de centros. Luego en $\bigcup_{r=1}^{r_o} S_r$ hay como máximo $(1 + \log_2 \kappa_2)\,N$ centros. Usando el mismo argumento tenemos que en $\bigcup_{t=1}^{t_o} T_t$ hay , como máximo $(1 + \log_2 \kappa_1)\,M$ centros, donde $M = M(\kappa_2) < \infty$. Así, en $\mathbb{R}^2_+$ hay, como máximo, $(1 + \log_2 \kappa_1)(1 + \log_2 \kappa_2)\,M\,N + 1$ centros. Entonces en $\mathbb{R}^2$ hay, como máximo, $4\,M\,N\,(1 + \log_2 \kappa_1)(1 + \log_2 \kappa_2) + 1$ centros, lo que es nuestra tesis. De manera que el lema para $n = 1$ implica el resultado para $n = 2$. En general el caso $n-1$ implica el caso n . Esto se puede hacer definiendo las siguientes "bandas":

$$S_r^j = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n / 2^{r-2}\,\ell_j(R_{d_1}) < x_j < 2^{r-1}\,\ell_j(R_{d_1}) ,$$
$$x_\kappa \geq 0 \ , \ \kappa = 1,\dots,n\}$$

luego se cortan los rectángulos con centros en ellas con los hiperplanos

$x_j = 2^{r-2}\, \ell_j(R_{d_1})$. Así reducimos el caso n-dimensional al de $n-1$ dimensiones. De esta manera queda probado el resultado.$_{\#}$

Ahora estamos en condiciones de proceder con la

Demostración del Lema (1.30): Como E es acotado, si $\sup_{x \in E} r(x) = \infty$, es claro que existe $x \subset E$ tal que $E \subset Q(x, r(x))$, y en este caso queda demostrado el lema. Si $\sup_{x \in E} r(x) < \infty$ procedemos de la siguiente forma: Sea $E_1 = E$, elegimos $C_1 \in E_1$ tal que

$$r(C_1) \geq \frac{1}{2} \sup_{x \in E_1} r(x) .$$

Ahora sea $E_2 = E_1 - Q(C_1, r(C_1))$, si $E_2 \neq \phi$ eligimos $C_2 \in E_2$ tal que

$$r(C_2) \geq \frac{1}{2} \sup_{x \in E_2} r(x) .$$

Siguiendo así tenemos en la κ-ésima etapa

$$E_\kappa = E_{\kappa-1} - Q(x_{\kappa-1}, r(x_{\kappa-1})) = E - \bigcup_{i=1}^{\kappa-1} Q(x_i, r(x_i))$$

$$C_\kappa \in E_\kappa \quad \text{tal que} \quad r(C_\kappa) \geq \frac{1}{2} \sup_{x \in E_2} r(x)$$

Continuamos de esta forma mientras $E_\kappa \neq \phi$. Si en alguna etapa $E_\kappa = \phi$, detenemos el proceso. Es claro que si $i > j$, C_i no pertenece a $Q(C_j, r(x_j))$. Por parte para $i > j$ tenemos $r(C_j) \geq \frac{1}{2} r(C_i)$, luego, si además se verifica $Q(C_i, r(C_i)) \cap Q(C_j, r(C_j)) \neq \phi$, se sigue que

$$|x_1(C_i)| + F_1(C_i^*, r(C_i)) \leq |x_1(C_j)| + 5\, F_1(C_1^*, r(C_j)) .$$

Ahora tomando $\theta \in [0,1]$ tal que $\theta\, 2\, r(C_j) = r(C_1)$, obtenemos a partir de la última desigualdad

$$(1.40) \qquad |x_1(C_i)| + F_1(C_i^*,\theta\, 2\, r(C_j)) \le |x_1(C_j)| + 5\, F_1(C_j^*,2\, r(C_j)) \ .$$

Luego, aplicando el Lema (1.14), tenemos

$$F_2(C_i^*,r(C_i)) \le 5^{G_2+1}\, F_2(C_j^*,2\, r(C_j)) \ .$$

Entonces, como $Q(C_i,r(C_i)) \cap Q(C_j,r(C_j)) \neq \phi$, se sigue

$$(1.41) \qquad |x_2(C_i)| + F_2(C_i^*,\theta\, 2\, r(C_j)) \le |x_2(C_j)| + (2.5^{G_2+1}+1)\, F_2(C_j^*,2\, r(C_j)).$$

Luego, teniendo en cuenta (1.40) y (1.41), a partir del Lema (1.14) obtenemos

$$F_3(C_i^*,r(C_i)) \le (2.5^{G_2+1}+1)^{G_3+1}\, F_3(C_j^*,2\, r(C_j)) \ .$$

Ahora utilizamos esta desigualdad para obtener, razonando como antes, una relación del tipo (1.40) y (1.41) pero para la tercera componente de los centros. Luego aplicamos nuevamente el Lema (1.14) y así sucesivamente con todas las componentes. Así, finalmente tenemos que existen constantes $K_1,\dots,K_n$, que sólo dependen de n y los G_ℓ , tal que

$$F_\ell(C_i^*,r(C_i)) \le K_\ell\, F_\ell(C_j^*,2\, r(C_j)) \qquad \ell = 1,\dots,$$

De ésto se sigue, utilizando (1.13) que

$$F_\ell(C_i^*,r(C_i)) \le K_\ell\, 2^{G_\ell}\, F_\ell(C_j^*,r(C_j)) \qquad \ell = 1,\dots,$$

Entonces estamos en condiciones de aplicar el Lema (1.34) a la familia $\{Q(C_i,r(C_i))\}_{i=1}^{\infty}$, con lo que se verifica (1.32). Sólo nos resta ver que $E \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q(C_i,r(C_i))$. Para ello volvamos al proceso de selección de centros C_i . Si en alguna etapa κ_o de dicho proceso tenemos $E_{\kappa_o} = \phi$, luego $E \subset \bigcup_{i=1}^{\kappa_o-1} Q(C_i,r(C_i))$ con lo que se llega a lo buscado. Ahora bien, si $E_\kappa \neq \phi$, $\forall\, \kappa$ entonces tenemos infinitos $Q(C_\kappa, r(C_\kappa))$. Veamos que en este caso se verifica $r(C_\kappa) \to 0$ para $\kappa \to \infty$. Supongamos que no es cierto, es decir que existe $\varepsilon > 0$ y una subsucesión $\{r(C_{\kappa_i})\}$ tal que $r(C_{\kappa_i}) \geq \varepsilon$, $\forall\, j$. Luego, como $C_{\kappa_j} \notin Q(C_{\kappa_m}, r(C_{\kappa_m}))$ para $j > m$, tenemos

$$Q\left(C_{\kappa_j}, \frac{\varepsilon}{4\, a^2}\right) \cup Q\left(C_{\kappa_i}, \frac{\varepsilon}{4\, a^2}\right) = \phi \quad \text{para todo} \quad i \neq j \ .$$

En efecto, pues si existe un y_o en dicha intersección, tenemos a partir del Lema (1.12)

$$\delta(C_{\kappa_i}, C_{\kappa_j}) \leq a^2(\delta(C_{\kappa_i}, y_o) + \delta(C_{\kappa_j}, y_o))$$

$$\leq a^2\left(\frac{\varepsilon}{4\, a^2} + \frac{\varepsilon}{4\, a^2}\right) = \frac{\varepsilon}{2} < r(C_{\kappa_i}) \ ,$$

o sea que $C_{\kappa_j} \in Q(C_{\kappa_i}, r(C_{\kappa_i}))$, lo que, para $j > i$, no es cierto. Aho ra bien, como $\sup\limits_{x \in E} r(x) < \infty$, luego existe $M > 0$ tal que $Q(x, r(x)) \subset Q(0,M)$, para todo $x \in E$. Entonces

$$(1.42) \qquad \sum_{j=1}^{\infty} \left|Q\left(C_{\kappa_j}, \frac{\varepsilon}{4\, a^2}\right)\right| = \left|\bigcup_{j=1}^{\infty} Q\left(C_{\kappa_j}, \frac{\varepsilon}{4\, a^2}\right)\right|$$

$$\leq |Q(0,M)| < \infty$$

Por otra parte, del Lema (1.10), tenemos que $\left|Q\left(0, \frac{\varepsilon}{4\, a^2}\right)\right| \leq \left|Q\left(C_{\kappa_j}, \frac{\varepsilon}{4\, a^2}\right)\right|$ para todo j . Por consiguiente

$$\infty = \sum_{j=1}^{\infty} \left|Q\left(0, \frac{\varepsilon}{4\, a^2}\right)\right| \leq \sum_{j=1}^{\infty} \left|Q\left(C_{\kappa_j}, \frac{\varepsilon}{4\, a^2}\right)\right| \ ,$$

lo que, de (1.42), es una contradicción. Luego $r(C_\kappa) \to 0$ cuando $\kappa \to \infty$. Ahora supongamos que existe x_o en $E - \bigcup Q(C_\kappa, r(C_\kappa))$. Entonces $x_o \in E_\kappa$ para todo κ , por consiguiente

$$0 < r(x_o) \leq \sup_{x \in E_\kappa} r(x) \leq 2\, r(C_\kappa) \quad \text{para todo} \quad \kappa \ ,$$

que es una contradicción. Así queda demostrado (1.35).$_{\#}$

§.3 Construcción de familias de δ-bolas que aproximan a las d-bolas

En el Capítulo II necesitaremos disponer de familias de δ-bolas tales que cada familia sea un cubrimiento disjunto de $\mathbb{R}^n$ y que dada S una d-bola cualquiera, exista una δ-bola Q perteneciente a alguna de dichas famiilias tal que $S \subset Q$ y $|Q| \cong |S|$. Si la casi-distancia fuese invariante por traslaciones de $\mathbb{R}^n$, bastaría tomar traslaciones adecuadas de redes de δ-bolas con radios diádicos. La construcción que hacemos aquí se basa en encontrar un sustituto adecuado de las traslaciones usuales.

Sea $k \in \mathbb{Z}$, definimos

$$(1.43) \qquad x_{j_1} = (2\, j_1 - 1)\, 2^k\, e_1$$

$$x_{j_1 \ldots j_i} = x_{j_1} + \ldots + x_{j_1 \ldots j_{i-1}} + (2\, j_1 - 1)\, F_i(x^*_{j_1 \ldots j_{i-1}}, 2^k)\, e_i$$

para $j_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots,$

(1.44) Definición: Sea $k \in \mathbb{Z}$. Indicaremos con D^k a la familia formada por las δ-bolas $Q(x_{j_1 \ldots j_n}, 2^k)$ $\quad j_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1, \ldots, n$.

A partir de la construcción es claro que, para cada k , las δ-bolas de D^k son disjuntas y cubren a $\mathbb{R}^n$ excepto por un conjunto de medida nula.

A continuación definiremos una serie de operadores de $\mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}^n$ que luego utilizaremos para construir el resto de las familias.

(1.45) Definición: Para cada $k \in \mathbb{Z}$ definimos

$$T^k_{\ell_1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \ell_1 = -1,0,1 \qquad \text{donde}$$

$$T^k_{\ell_1}(x) = x + \ell_1\, 2^k\, e_1$$

$$T^k_{\ell_1 \dots \ell_{i-1}\,\ell_i} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \qquad \ell_i = -1,0,1 \qquad \text{donde}$$

$$T^k_{\ell_1 \dots \ell_{i-1}\,\ell_i}(x) = T^k_{\ell_1 \dots \ell_{i-1}}(x) + \ell_i\, F_i(T^k_{\ell_1 \dots \ell_{i-1}}(x)^*, 2^k)\, e_i$$

para $i = 2,\dots,n$.

Notemos que el número total de series de índices $\ell_1 \dots \ell_n$, con $\ell_i = -1,0,1$ para $i = 1,\dots,n$, es 3^n . Indicamos con τ al conjunto de dichas series. Numerando los elementos de τ de alguna forma simbolizaremos cada elemento con (s) , para $s = 1,\dots,3^n$.

(1.46) Definición: Sea $k \in \mathbb{Z}$ y $(s) = \ell_1 \dots \ell_n \in \tau$. Indicaremos con $D^{k,s}$ a la familia formada por las δ-bolas $Q(T^k_{\ell_1 \dots \ell_n}(x_{j_1 \dots j_n}), 2^k)$, $j_i \in \mathbb{Z}$, $i = 1,\dots,n$. Aquí $x_{j_1 \dots j_n}$ está definido como en (1.43).

(1.47) Observación: Notemos que cada familia $D^{k,s}$ puede considerarse como obtenida de D^k a través del operador $T^k_{(s)}$. Por otra parte tenemos $D^{k,s} = D^k$ para $(s) = 1 \dots 1$. Además es inmediato que, al igual que para D^k las δ-bolas de cada familia $D^{k,s}$ son disjuntas y su unión cubre a $\mathbb{R}^n$ excepto por un conjunto de medida nula.

El siguiente lema contiene la propiedad fundamental de las familias $D^{k,s}$.

(1.48) Lema: Para cada $\tilde{x} = (\tilde{x}_1,\dots,\tilde{x}_n) \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, existen $(s) \in \tau$ y $Q_o \in D^{k,s}$ para $k: 2^{k-1} < 2r \le 2^k$ tal que

(1.49) $\quad Q(\tilde{x},r) \subset Q_o$,

(1.50) $\quad |Q_o| \leq C|Q(\tilde{x},r)|$ donde C es una constante independiente de $\tilde{x}$, r , k y (s) .

Demostración: Sea $k \in \mathbb{Z}$ tal que $2^{k-1} < 2r \leq 2^k$. Veamos que existen $(s) \in \tau$ y $Q_o \in D^{k,s}$ tal que $Q(\tilde{x},r) \subset Q_o$. Es claro que existe un centro C_1 de una δ-bola de radio 2^k en D^{k,s_1} con $s_1 = 1\ldots1$, y un valor de ℓ_1 tal que

$$x_1(T^k_{\ell_1 1\ldots1}(C_1)) \in [\tilde{x}_1 - F_1(\tilde{x}^*,r), x_1 + F_1(\tilde{x}^*,r)]$$

(1.51)
$$[\tilde{x}_1 - F_1(\tilde{x}^*,r), x_1 + F_1(\tilde{x}^*,r)] \subset [\tilde{x}_1(T^k_{\ell_1}(C_1)) - F_1(T^k_{\ell_1}(C_1)^*,2^k), x_1(T^k_{\ell_1}(C_1) + F_1(T^k_{\ell_1}(C_1)^*,2^k)]$$

donde $x_1(T^k_{\ell_1},(C_1))$ denota la primera componente de $T^k_{\ell_1}(C_1)$.

Supongamos ahora que hemos encontrado también $\ell_2,\ldots,\ell_m$, y C_i con $Q(C_i,2^k) \in D^{k,s_i}$, donde $(s_i) = \ell_1\ldots\ell_{i-1}1\ldots1$, para $i=2,\ldots,m$ y que verifican

(1.52)
$$x_j(C_i) = x_j(T^k_{1\ldots1\ell_j}(C_j)) \qquad j = 1,\ldots,i-1$$

(1.53)
$$x_i(T^k_{1\ldots1\ell_i}(C_i)) \in [\tilde{x}_i - F_i(\tilde{x}^*,r), \tilde{x}_i + F_i(\tilde{x}^*,r)] \quad ,$$

(1.54)
$$[\tilde{x}_i - F_1(\tilde{x}^*,r), \tilde{x}_i + F_i(\tilde{x}^*,r)] \subset [x_i(T^k_{1\ldots1\ell_i}(C_i)) - F_i(T^k_{1\ldots1\ell_i}(C_i)^*,2^k), x_i(T^k_{1\ldots1\ell_i}(C_i)) + F_i(T^k_{1\ldots\ell_i}(C_i)^*,2^k)]$$

Luego, de (1.52) y (1.55) tenemos

$$|\tilde{x}_i| + F_i(\tilde{x}^*,r) \leq |x_i(T^k_{1\ldots 1\ell_i}(C_i))| + F_i(T^k_{1\ldots 1\ell_i}(C_i)^*,2^k)$$

para $i = 1,\ldots,n$. Entonces, a partir del Lema (1.14), se sigue

$$F_{m+1}(\tilde{x}^*,r) \leq 2\, F_{m+1}(T^k_{1\ldots 1\ell_m}(C_m)^*,2^k)$$

De esta desigualdad es claro que existe un punto C_{m+1} con $Q(C_{m+1},2^k) \in D^{k,s_{m+1}}$, donde $(s_{m+1}) = \ell_1\ldots\ell_m 1\ldots 1$, y un valor de ℓ_{m+1} tal que (1.52), (1.53) y (1.54) valen para $i = m+1$. Continuamos el proceso inductivo hasta obtener estas tres últimas relaciones para $i = n$. Luego, tomando $c = T^k_{1\ldots 1\ell_n}(C_n)$, tenemos

$$Q(\tilde{x},r) \subset Q(c,2^k) \in D^{k,s} \qquad \text{para} \quad s = \ell_1\ldots\ell_n$$

Así, con $Q_o = Q(c,2^k)$, llegamos a (1.49) .

Por otra parte, como para todo $x \in Q(c,2^k)$ tenemos

$$\delta(\tilde{x},x) \leq a^2(\delta(c,\tilde{x}) + \delta(c,x)) \leq a^2\, 2^{k+1} \leq a^2\, 2^3\, r$$

resulta $Q(c,2^k) \subset Q(\tilde{x},8\,a^2\, r)$, donde a es la constante de (1.12). Luego, de (1.19) se sigue

$$|Q(c,2^k)| \leq C|Q(\tilde{x},r)|$$

con C independiente de c y k . De esta manera queda demostrado (1.50).#

CAPITULO II

Desigualdades de Sobolev y Poincaré

Sea (v,w) un par de funciones no negativas definidas en un conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Diremos que (v,w) pertenece a la clase $S_{\sigma,\alpha}$ si cumple las siguientes condiciones

(2.1) $0 < v(Q), w(Q) < \infty$ para toda δ-bola Q tal que $\bar{Q} \subset \Omega$

(2.2) existe $\sigma > 1$, $\alpha \in (0,1]$ y una constante positiva C tal que

$$\left(\frac{w(Q_o \cap Q)}{w(Q_o)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \left(v^{-1}(Q_o \cap Q)\, v(Q_o)\right)^{\frac{1}{2}} \leq C\, |Q_o|^{1-\alpha}\, |Q|^{\alpha}$$

para todas las δ-bolas Q_o y Q tal que $\bar{Q}_o \subset \Omega$ y radio $(Q) \leq 8a^4$ radio (Q_o).

A continuación, en la Sección 1, demostraremos una desigualdad de tipo Sobolev y una de tipo Poincaré, que serán aplicadas en los Capítulos IV y V. Para dichas demostraciones utilizaremos, además de las condiciones (2.1) y (2.2), algunos de los resultados del Capítulo I. Luego, en la Sección 2, efectuaremos un análisis de la condición 2.2).

§.1 Desigualdades de tipo Sobolev y Poincaré

Denotaremos con ∇_λ al operador diferencial $(\lambda_1 D_1, \dots, \lambda_n D_n)$ con esta notación los resultados principales de esta sección con

(2.3) Teorema: Sean $\beta \in \mathbb{R}^+$ fijo, $Q = Q(\bar{x},r)$ una δ-bola tal que $\bar{Q} \subset \Omega$ y $(v,w) \in S_{\sigma,\alpha}$ para algún $\alpha \in (1-(\sum_j G_j)^{-1}, 1]$, donde los G_j están definidos como en el Capítulo I. Luego, existe una constante C que sólo depende de n y de las constantes de (1.3) y (2.2) tal que para toda función $u \in Lip(\bar{Q})$ que verifica

(2.4) $\qquad |\{x \in Q(\tilde{x},r)/u(x) = 0\}| \geq \beta|Q(\tilde{x},r)|$

se tiene

$$(2.5) \qquad \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |u(x)|^{2\sigma} w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq C\, r \left(\frac{1}{v(Q)} \int_Q |\nabla_\lambda u(x)|^2 v(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

El teorema anterior permite obtener, a su vez, las dos siguientes

(2.6) <u>Teorema</u>: (desigualdad de Sobolev) Sea (v,w) como en el Teorema anterior y Q una δ-bola de radio r tal que $\bar{Q} \subset \Omega$. Luego, para cualquier $u \in Lip_o(\frac{1}{2} Q)$, se verifica

$$(2.7) \qquad \left(\frac{1}{w(Q)} \int_{\frac{1}{2}Q} |u(x)|^{2\sigma} w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq C\, r \left(\frac{1}{v(Q)} \int_{\frac{1}{2}Q} |\nabla_\lambda u(x)|^2 v(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

donde C es una constante que sólo depende de n y de las constantes de (1.3) y (2.2)

(2.8) <u>Teorema</u>: (desigualdad de Poincaré) Sea (v,w) como en el Teorema (2.3) y Q una δ-bola de radio r tal que $\bar{Q} \subset \Omega$. Luego existe una constante C que depende sólo de n y de las constantes de (2.3) y (2.2) tal que para cualquier $u \in Lip(\bar{Q})$ se verifica

$$(2.9) \qquad \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |u(x) - u_Q|^{2\sigma} w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq C\, r \left(\frac{1}{v(Q)} \int_Q |\nabla_\lambda u(x)|^2 v(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

donde

$$u_Q = \frac{1}{w(Q)} \int_Q u(x)\, w(x)\, dx$$

La demostración del Teorema (2.3) se basa, por una parte, en una estimación de la función u en términos de un cierto operador de integración fraccionaria aplicado a $\nabla_\lambda u$, y por otra, en una acotación con pesos de dicho operador.

El siguiente Lema, demostrado por Franchi y Serapioni en [FS], provee una estimación preliminar para u en términos de $\nabla_\lambda u$.

(2.10) <u>Lema</u>: Sea $\beta \in \mathbb{R}^+$ fijo. Existe una constante C_o tal que para toda δ-bola $Q(\bar{x},r)$ y todo $x \in Q(\bar{x},r)$ la desigualdad

$$(2.11)\qquad |u(x)| \le C_o \int_0^{2a^2r} \frac{1}{|S(x,t)|} \int_{S(x,C_o r)} |\nabla_\lambda u(y)|\, \chi_{Q(\bar{x},r)}(y)\, dy\, dt$$

es válida para cada $u \in \mathrm{Lip}(Q(\bar{x},r))$ que satisfaga

$$(2.12)\qquad |\{x \in Q(\bar{x},r)/u(x)=0\}| \ge \beta |Q(\bar{x},r)| \ .$$

<u>Demostración</u>: Sea $x \in Q(\bar{x},r)$. Podemos asegurar que existe $\gamma \in \{-1,1\}^n$ tal que $|E \cap Q^\gamma(x,2a^2r)| \ge \beta\, 2^{-n}\, |Q(\bar{x},r)|$, donde $Q^\gamma(x,2a^2r)$ se define como en (1.24) y $E = \{y \in Q(\bar{x},r)/u(y) = 0\}$. Esto es inmediato a partir de (2.12) y de las siguientes inclusiones

$$E \subset Q(\bar{x},r) \subset Q(x,2a^2r) = \bigcup_\gamma Q^\gamma(x,2a^2r)$$

Luego, como $Q(x,2a^2r) \subset Q(\bar{x},4a^4r)$, usando la propiedad de duplicación (1.19) obtenemos

$$|E \cap Q^\gamma(x,2a^2r)| \ge C_o\, \beta |Q^\gamma(x,2a^2r)|$$

Ahora, tomando $\zeta = C_o\, \beta/2$ en el Lema (1.28), tenemos, con la notación de dicho Lema, que existe ε y ν , dependientes de β y C_o , tal que

$$|H(2a^2r,x,\Delta_\varepsilon^\nu(\gamma)) \cap Q^\gamma(x,2a^2r)| \le \left(1 - \frac{\beta C_o}{2}\right) |Q^\gamma(x,2a^2r)|$$

Entonces se sigue que

$$\begin{aligned} |Q^\gamma| &\ge |(Q^\gamma \cap E) \cup (Q^\gamma \cap H(\dots))| \\ &= |Q^\gamma \cap E| + |Q^\gamma \cap H(\dots)| - |E \cap Q^\gamma \cap H(\dots)| \\ &\ge |Q^\gamma| \left(\beta C_o + 1 - \frac{\beta C_o}{2}\right) - |E \cap Q^\gamma \cap H(\dots)| \end{aligned}$$

de donde obtenemos

$$|E \cap Q^{\gamma}(x,2a^2r) \cap H(2a^2r,x,\Delta_{\varepsilon}^{\nu}(\gamma))| \geq \frac{\beta C_o}{2} |Q^{\gamma}(x,2a^2r)|$$

Ahora supongamos que $x \notin E$, pues (2.11) es obvia si $x \in E$, e indiquemos con B el conjunto $\{y \in \Delta_{\varepsilon}^{\nu}(\gamma)/H(2a^2r,x,y) \in E\}$. Sea ψ una función suave con soporte en $\Delta_{\varepsilon/2}^{2\nu}(\gamma)$, tal que $0 \leq \psi \leq 1$ en $\mathbb{R}^n$ y $\psi = 1$ en $\Delta_{\varepsilon}^{\nu}(\gamma)$. Supongamos por el momento que $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Para $y \in B$, tenemos

$$|u(x)| = |u(x) - u(H(2a^2r,x,y))| \ \psi(y) \ .$$

Luego, integrando sobre B e indicando $\mathbb{H} = \{y/H(2a^2r,x,y) \in Q(\tilde{x},r)\}$, se sigue

$$\begin{aligned}
(2.13) \qquad |B| \ |u(x)| &= \int_B |u(x) - u(H(2a^2r,x,y))| \ \psi(y)\, dy \\
&\leq \int_{\mathrm{Sop}\,\psi \cap \mathbb{H}} |u(x) - u(H(2a^2r,x,y))| \ \psi(y)\, dy \\
&\leq \int_0^{2a^2r} dt \int_{\mathrm{Sop}\,\psi \cap \mathbb{H}} |\langle \nabla u(H(t,x,y)),\dot{H}(t,x,y)\rangle| \ \psi(y)\, dy \\
&\leq \int_0^{2a^2r} dt \int_{\mathrm{Sop}\,\psi \cap \mathbb{H}} |\nabla_{\lambda} u(H(t,x,y))| \ |y| \ \psi(y)\, dy \\
&\leq 2\,|\nu| \int_0^{2a^2r} dt \int_{\mathrm{Sop}\,\psi \cap \mathbb{H}} |\nabla_{\lambda} u(H(t,x,y))|\, dy
\end{aligned}$$

A continuación aplicamos el cambio de variable $y \to H(t,x,y)$. Para ello tengamos en cuenta que en $\Delta_{\varepsilon/2}^{2\nu}(\gamma)$, a partir del Lema (1.29), tenemos

$$|\det \frac{\partial H}{\partial y}(t,x,y)| = \prod_{j=1}^{n} \int_0^t \lambda_j(H(s,x,y))\, ds \approx |S(x,t)|$$

con constantes que sólo dependen de ν,ε y las constantes de (1.3). Por otra parte, por la monotonía en t de las componentes de $H(t,x,y)$, te nemos $H(t,x,H) \subset Q(\tilde{x},r) \quad \forall\, t \in [0,2a^2 r]$. Luego, de (2.13), se sigue

$$(2.14) \qquad |u(x)| \le C \frac{1}{|B|} \int_0^{2a^2 r} dt \frac{1}{|S(x,t)|} \int_{H(t,x,\Delta^{2\sigma}_{\varepsilon/2}(\gamma)) \cap Q(\tilde{x},r)} |\nabla_\lambda u(y)|\, dy \, .$$

donde la constante depende sólo de β y de las constantes de (1.3). Veamos ahora que existe una constante C que depende sólo de β tal que $H(t,x,\Delta^{2\nu}_{\varepsilon/2}(\gamma)) \subset S(x,C\,t)$. En efecto, si $y \in \Delta^{2\nu}_{\varepsilon/2}(\gamma)$ y $\xi \in \mathbb{R}^n$ tenemos

$$\begin{aligned} \langle \dot{H}(s,x,y),\xi\rangle^2 &= (\sum_j \lambda_j(H(s,x,y))\, y_j\, \xi_j)^2 \\ &\le (\sum_j \lambda_j^2(H(s,x,y))\, \xi_j^2)\, |y|^2 \end{aligned}$$

Así, $s \to H(s\,|y|^{-2},x,y)$ es una curva λ-subunitaria que comienza en x y alcanza $H(t,x,y)$ para $s = t\,|y|^2$. Luego, por la definición de d , se sigue que $d(x,H(t,x,y)) \le t\,|y|^2 \le 4\,|\nu|^2\, t$, con lo que queda demostrada la inclusión deseada. Esto, aplicado en (2.14) nos dá

$$u(x) \le C \frac{1}{|B|} \int_0^{2a^2 r} dt \frac{1}{|S(x,t)|} \int_{S(x,C\,t)} |\nabla_\lambda u(x)|\, \chi_{Q(\tilde{x},r)}(y)\, dy \, .$$

Por otra parte, usando el cambio de variable $y \to H(2a^2 r,x,y)$, tenemos

$$|B| = \int_B dy \ge C \frac{|H(2a^2 r,x,B)|}{|S(x,r)|}$$

$$= C \frac{|E \cap H(2a^2 r,x,\Delta^{\nu}_{\varepsilon}(\gamma))|}{|S(x,r)|} \ge C\,\beta \frac{|Q^{\gamma}(x,2a^2 r)|}{|S(x,r)|} \ge C > 0 \, .$$

lo que, junto con la densidad de $C^1(\mathbb{R}^n)$ en $\mathrm{Lip}(\overline{Q(\tilde{x},r)})$, concluye el Lema.#

Los operadores que introducimos en la siguiente definición sirven para construir un operador de tipo integración fraccionaria discreto.

(2.15) <u>Definición</u>: Sea $k \in \mathbb{Z}$, $(s) \in \tau$ y $u \in (0,1]$.

Para f en $L^1_{loc}(\mathbb{R}^n)$ definimos el siguiente operador

$$(P^{k,s}_{\mu} f)(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{|Q|^{\mu}} \displaystyle\int_Q |f(y)|\, dy & \text{si existe } Q \in D^{k,s} \text{ tal que } x \in Q \\ 0 & \mathbb{R}^n - \displaystyle\bigcup_{Q \in D^{k,s}} Q \end{cases}$$

donde (s) , τ y $D^{k,s}$ están definidas en (1.46) .

(2.16) Lema: Sean $\beta \in \mathbb{R}^+$, $Q(\tilde{x},r)$ una δ-bola y $\mu \in (1-(\Sigma\, G_j)^{-1},1]$. Entonces existen una constante C , una sucesión $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}^+$ con $\sum_i a_i < \infty$ que sólo dependen de μ y una sucesión $\{k_i\} \subset \mathbb{Z}$, que sólo depende de r, tales que la desigualdad

$$(2.17) \qquad |u(x)| \leq C\, r |Q(\tilde{x},r)|^{\mu-1} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\sum_{(s)\in\tau} \left(P^{k_i,s}_{\mu} (\chi_{Q(\tilde{x},r)} |\nabla_{\lambda} u|) \right)(x) \right)$$

es válida para cada $u \in \mathrm{Lip}(Q(\tilde{x},r))$ que satisface (2.12) y cada $x \in Q(\tilde{x},r)$.

Demostración: Descomponiendo diádicamente la integral en el miembro derecho de (2.11)

$$(2.18) \qquad |u(x)| \leq C_o \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\frac{2a^2 r}{2^i}}^{\frac{2a^2 r}{2^{i-1}}} dr\, \frac{1}{|S(x,t)|} \int_{S(x,C_o t)} |\nabla_{\lambda} u(y)|\, \chi_{Q(\tilde{x},r)}(y)\, dy$$

$$\leq C_o\, r \sum_{i=1}^{\infty} \left(\int_{\frac{2a^2}{2^i}}^{\frac{2a^2}{2^{i-1}}} \frac{dt}{|S(x,tr)|^{1-\mu}} \right)$$

$$\times \int_{S\left(s,C_o \frac{2a^2}{2^{i-1}}\right)} |\nabla_{\lambda} u(y)|\, \chi_{Q(\tilde{x},r)}(y)\, dy$$

Ahora bien, aplicando el Lema (1.48) y (1.19), se sigue que para cada i existe $k_i \in \mathbb{Z}$, $(s_i) \in \tau$ y $Q_i \in D^{k_i,s_i}$ tal que

$$S\left(x, C_o \frac{a^2 r}{2^{i-2}}\right) \subset Q_i \qquad y \qquad |Q_i| \leq C \left|S\left(x, C_o \frac{a^2 r}{2^{i-2}}\right)\right|$$

donde C es independiente de x,r e i . Por otra parte, de (1.13) y (1.19), tenemos que existe una constante C , independiente de r y x , tal que

$$|S(x,tr)| \geq C\, t^{(\Sigma_j G_j)} |S(x,r)|$$

para $t \in (0,1]$. Luego, tomando i_o en η tal que $\frac{a^2}{2^{i_o-2}} < 1 < \frac{a^2}{2^{i_o-3}}$ obtenemos, de (2.15) para $\mu \in (1 - (\Sigma_j G_j)^{-1}, 1]$

$$|u(x)| \leq C\, r \left\{ \sum_{i=1}^{i_o} \left(\int_{\frac{a^2}{2^{i-1}}}^{\frac{a^2}{2^{i-2}}} \frac{dt}{|S(x,tr)|^{1-\mu}} \right) \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\left|S\left(x, \frac{2a^2 r}{2^i}\right)\right|^{\mu}} \int_{S\left(x, C_o \frac{2a^2 r}{2^{i-1}}\right)} |\nabla_\lambda u(x)|\, \chi_{Q(\tilde{x},r)}(y)\, dy \right\}$$

$$+ \frac{1}{C\, |S(x,r)|^{1-\mu}} \left\{ \sum_{i=i_o+1}^{\infty} \left(\int_{\frac{a^2}{2^{i-1}}}^{\frac{a^2}{2^{i-2}}} t^{-(\Sigma_j G_j)(1-\mu)}\, dt \right) \right.$$

$$\left. \times \frac{1}{\left|S\left(x, \frac{2a^2 r}{2^i}\right)\right|^{\mu}} \int_{S\left(x, C_o \frac{2a^2 r}{2^{i-1}}\right)} |\nabla_\lambda u(x)|\, \chi_{Q(\tilde{x},r)}(y)\, dy \right\}$$

$$\leq C\, r\, |S(x,r)|^{\mu-1} \left(\sum_{i=1}^{i_o} \frac{1}{|Q_i|^{\mu}} \int_{Q_i} |\nabla_\lambda u(y)|\, \chi_{Q(\tilde{x},r)}(y)\, dy \right.$$

$$\left. + \sum_{i=i_o+1}^{\infty} \frac{1}{2^{(i-1)((\mu-1)(\Sigma_j G_j)+1)}} \frac{1}{|Q_i|^{\mu}} \int_{Q_i} |\nabla_\lambda u(x)|\, \chi_{Q(\tilde{x},r)}(y)\, dy \right)$$

$$\leq C\, r\, |S(x,r)|^{\mu-1} \sum_{i=1}^{\infty} a_i\, P_\mu^{k_i,s_i} \left(|\nabla_\lambda u|\, \chi_{Q(\tilde{x},r)}\right)(x)$$

$$\leq C\ r\ |S(x,r)|^{\mu-1} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \left(\sum_{(s)\in\tau} \left(P_\mu^{k_i,s} \left(|\nabla_\lambda u|\ \chi_{Q(\tilde{x},r)} \right) \right)(x) \right)$$

donde $a_i = 1$ para $i = 1,\dots,i_o$ y $a_i = 2^{(i-1)((\mu-1)(\Sigma_j G_j)+1)}$ para $i = i_o + 1,\dots$. Así teniendo en cuenta que por (1.15), $|S(x,r)| \equiv |Q(\tilde{x},r)|$, obtenemos (2.11) para $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Finalmente, la conclusión para $u \in \mathrm{Lip}(\overline{Q(\tilde{x},r)})$ se sigue aplicando un argumento de densidad.#

(2.19) <u>Observación</u>: Sabemos que para cada $x \in Q(\tilde{x},r)$ se verifica $Q(\tilde{x},r) \subset S(x,2a^3 r)$. Por otra parte del Lema (1.48), tenemos que para (2.18) podemos elegir k_i tal que $2^{k_i} \leq C_o\ a^3 r\ 2^{-i+4}$. Luego, de (2.18), si 2^{k_i} además es mayor que $8a^4 r$, se sigue que para todo $x \in Q(\tilde{x},r)$

$$P^{k_i,s_i}\left(|\nabla_\lambda u|\ \chi_{Q(\tilde{x},r)}\right)(x) = \frac{1}{|Q_i|^\mu} \int_{Q(\tilde{x},r)} |\nabla_\lambda u(x)|\ dy$$

$$\leq \frac{1}{|Q(\tilde{x},r)|^\mu} \int_{Q(\tilde{x},r)} |\nabla_\lambda u(x)|\ dy$$

En el siguiente lema probaremos un resultado de acotación con dos pesos de los operadores $P_\mu^{k,s}$. La técnica utilizada está inspirada en la que E.T. Sawyer ([S]) usa para demostrar un resultado similar para la maximal fraccionaria en el espacio euclídeo.

(2.20) <u>Lema</u>: Sean $1 < p \leq 1 < \infty$, Q_o una δ-bola y (v,w) un par de funciones positivas, definidas en Q_o y medibles Borel tal que $0 < v(Q_o)$ $w(S) < \infty$. Luego para toda f tal que $f \equiv 0$, en $\mathbb{R}^n - S$ y $f \in L^p(S,vdx)$ se verifica

$$(2.21)\qquad \left(\frac{1}{w(Q_o)} \int_{Q_o} |(P_\mu^{k,s} f)(x)|^q\ w(x)\ dx\right)^{\frac{1}{q}} \leq C\ |Q_o|^{1-\mu} \left(\frac{1}{v(Q_o)} \int_{Q_o} |f(x)|^p\ v(x)\ dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

sí y sólo sí,

$$(2.22)\qquad \left(\frac{w(Q_o \cap Q)}{w(Q_o)}\right)^{\frac{1}{q}} \left(\frac{v^{\frac{1}{p-1}}(Q_o \cap Q)}{|Q_o|^{\mu}}\right)^{1-\frac{1}{p}} \leq C\, |Q_o|^{1-\mu}\, (v(Q_o))^{-\frac{1}{p}}$$

para toda $Q \in D^{k,s}$. La constante C en ambos casos depende sólo de la condición suficiente correspondiente.

Demostración: Por simplicidad en la notación indicaremos con P_μ a $P_\mu^{k,s}$ y con D a $D^{k,s}$. Veamos que (2.21) implica (2.22). Supongamos que existe $Q \in D$ tal que

$$\int_{Q_o \cap Q} v^{-\frac{1}{p-1}}\, dx = \int_{Q_o \cap Q} v^{-\frac{p}{p-1}}\, v\, dx = \infty .$$

Entonces existe $g \in L^p(Q_o, vdx)$ tal

$$\int_{Q_o \cap Q} g\, v^{-1}\, vdx = \infty .$$

Luego el miembro izquierdo de (2.21) para $f = g$ en Q_o es igual a infinito, lo que es una contradicción. Esto demuestra que

$$\int_{Q_o \cap Q} v^{-\frac{q}{p-1}}\, dx < \infty \qquad \text{para todo} \quad Q \in D .$$

Finalmente, obtenemos (2.22) tomando $f = \chi_{Q_o \cap Q}\, v^{-\frac{1}{p-1}}$ en (2.21). Ahora vamos a demostrar la recíproca. Sea f en $L^p(Q_o, vdx)$ tal que $f \equiv 0$ en $\mathbb{R}^n - Q_o$. Luego

$$\frac{1}{w(Q_o)} \int_{Q_o} |P_\mu f|^q\, w\, dx = \frac{1}{w(Q_o)} \sum_{Q \in D} \int_{Q_o \cap Q} |P_\mu f|^q\, w\, dx$$

$$= \sum_{Q \in D} \frac{1}{w(Q_o)} \int_{Q_o \cap Q} \left(|Q|^{-\mu} \int_Q |f|\, dy\right)^q w\, dx$$

$$= \sum_{Q \in D} \frac{w(Q_o \cap Q)}{w(Q_o)}\, |Q|^{-\mu q} \left(\int_Q |f|\, v^{-1}\, vdx\right)^q$$

$$\leq \sum_{Q\in D} \frac{w(Q_o\cap Q)}{w(Q_o)} |Q|^{-\mu q} \left(\int_{Q_o\cap Q} v^{-\frac{p}{p-1}} v dx\right)^{q(\frac{p-1}{p})} \left(\int_Q |f|^p v dx\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$= \sum_{Q\in D} \frac{w(Q_o\cap Q)}{w(Q_o)} \left(\frac{v^{-\frac{1}{p-1}}(Q_o\cap Q)}{|Q|^{\mu}}\right)^{q(1-\frac{1}{p})} \left(\int_Q |f|^p vdx\right)^{\frac{q}{p}}$$

Entonces, aplicando (2.22) y como $p \leq q$, tenemos

$$\frac{1}{w(Q_o)} \int_{Q_o} |p_\mu f|^q wdx \leq C |Q_o|^{(1-\mu)q} \left(v(Q_o)\right)^{-\frac{q}{p}} \sum_{Q\in D} \left(\int_Q |f|^p vdx\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$\leq C |Q_o|^{(1-\mu)q} \left(v(Q_o)\right)^{-\frac{q}{p}} \left(\sum_{Q\in D} \int_Q |f|^p vdx\right)^{\frac{q}{p}}$$

$$= C |Q_o|^{(1-\mu)q} \left(\frac{1}{v(Q_o)} \int_{Q_o} |f|^p vdx\right)^{\frac{q}{p}}$$

con lo queda demostrado (2.21).#

Ahora estamos en posesión de las herramientas necesarias para la demostración de los Teoremas (2.3), (2.6) y (2.8).

Demostración del Teorema (2.3): En primer lugar aplicamos a u el Lema (2.16). Luego, para $Q = Q(\tilde{x},r)$, tenemos

$$\left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |u(x)|^{2\sigma} w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq \frac{Cr}{|Q|^{1-\mu}} \sum_{i=1}^{\infty} a_i \sum_{(s)\in\tau}$$

$$\times \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q |p_\mu^{k_i,s}(|\nabla_\lambda u|\chi_Q))x)|^{2\sigma} w(x)\, dx\right)^{\frac{1}{2\sigma}}$$

Ahora, tomando $p = 2$ y $q = 2\sigma$, la desigualdad (2.5) se obtiene aplicando (2.1), (2.2) y el Lema (2.20) para los i tales que $2^{k_i} \leq 8a^4 r$, y la observación (2.19), la desigualdad de Schwartz y (2.2) para $Q = Q_o$ para los restantes i .#

Demostración del Teorema (2.6) (desigualdad de Sobolev): Extendiendo a u como cero en $Q(\tilde{x},r) - Q(x,\frac{r}{2})$ tenemos que $u \in \mathrm{Lip}(\overline{Q(\tilde{x},r)})$ y

$$|\{(x \in Q(\tilde{x},r)/u(x) = 0\}| \geq |Q(\tilde{x},r) - Q(\tilde{x},\frac{r}{2})|$$

donde $|Q(\tilde{x},r) - Q(\tilde{x},\frac{r}{2})|$ es equivalente, por (1.18), a $|Q(\tilde{x},r)|$. Luego (2.7) se obtiene aplicando el Teorema anterior a la extensión de u $._{\#}$

Demostración del Teorema (2.8) (desigualdad de Poincaré): Dadas $Q = Q(\tilde{x},r)$, u y , siempre es posible encontrar un número $b = b(Q,u)$ tal que si $Q^+ = \{x \in Q / u(x) \geq b\}$ y $Q^- = \{x \in Q / u(x) \leq b\}$ luego

$$(2.23) \qquad |Q^+| \geq \frac{1}{2}|Q| \qquad y \qquad |Q^-| \geq \frac{1}{2}|Q|$$

Suponiendo este hecho, tenemos que las funciones $(u-b)^+$ y $(u-b)^-$ satisfacen las hipótesis del Teorema (2.3) con $\beta = \frac{1}{2}$. Entonces, de (2.5) se sigue que

$$\frac{1}{w(Q)}\int_{Q^\pm} |u-b|^{2\sigma}\, wdx \leq (C\,r)^{2\sigma}\left(\frac{1}{v(Q)}\int_{Q^\pm} |\nabla_\lambda u|^2\, vdx\right)^\sigma$$

De donde, sumando miembro a miembro, obtenemos

$$\frac{1}{w(Q)}\int_Q |u-b|^{2\sigma}\, wdx \leq \left(\frac{(C\,r)^2}{v(Q)}\right)^\sigma \left(\left(\int_{Q^+} |\nabla_\lambda u|^2\, vdx\right)^\sigma + \left(\int_{Q^-} |\nabla_\lambda u|^2 vdx\right)^\sigma\right)$$

$$\leq 2(C\,r)^{2\sigma}\left(\frac{1}{v(Q)}\int_Q |\nabla_\lambda u|^2\, vdx\right)^\sigma$$

Luego

$$\left(\int_Q |u-u_Q|^{2\sigma}\, wdx\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq \left(\int_Q |u-b|^{2\sigma}\, wdx\right)^{\frac{1}{2\sigma}} + \left(\int_Q |b-u_Q|^{2\sigma}\, wdx\right)^{\frac{1}{2\sigma}}$$

$$= \left(\int_{Q} |u - b|^{2\sigma} wdx\right)^{\frac{1}{2\sigma}} + \left|\frac{1}{w(Q)} \int_{Q} (b-u)\, wdx\right| \left(w(Q)\right)^{\frac{1}{2\sigma}}$$

$$\leq \left(\int_{Q} |u-b|^{2\sigma} wdx\right)^{\frac{1}{2\sigma}} + \left(\int_{Q} |u-b|^{2\sigma} wdx\right)^{\frac{1}{2\sigma}}$$

$$\leq 2^{1+\frac{1}{2\sigma}} C\, r \left(\frac{1}{v(Q)} \int_{Q} |\nabla_\lambda u|^2 \, vdx\right)^{\frac{1}{2}}$$

con lo que queda demostrada (2.9). Ahora sólo nos resta probar la existencia del número b tal que se verifica (2.23). Para ello definimos en $\mathbb{R}$ las funciones $\psi(t) = |\{x \in Q \,/ u(x) \leq t\}|$ y $\phi(t) = |\{x \in Q \,/ u(x) \geq t\}|$. Es claro que ψ es creciente y continua por la derecha y que ϕ es decreciente y continua por la izquierda. Sea $b = \inf\{t/\psi(t) \geq 2^{-1}|Q\,|\}$, luego, por la continuidad por derecha de ψ , tenemos que $\psi(b) \geq 2^{-1}|Q_o|$. Supongamos ahora que $\phi(b) < 2^{-1}|Q|$. Luego, por la continuidad por izquierda, existe $t < b$ tal que $\phi(t) < 2^{-1}|Q|$. Entonces tenemos $\psi(t) > 2^{-1}|Q\,|$, lo que contradice la definición de b , luego $\phi(b) \geq 2^{-1}|Q\,|$. Así se completa (2.21).#

§.2 Discusión sobre las hipótesis en (v,w)

En [ChW1] , S. Chanillo y R. Wheeden demuestran desigualdades del tipo de (2.7) y (2.9) para el caso euclídeo, es decir $\lambda_i \equiv 1 \;\; \forall\, i$. Allí se supone que los pesos están definidos en todo $\mathbb{R}^n$ y que cumplen las siguientes condiciones

(2.24) $w \in D_\infty$, es decur $w(B(x,r) \cong w(B(x,2r))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$,

(2.25) $v \in A_2$, o sea $v(b(x,r))\, v^{-1}(B(x,r)) \cong |B(x,r)|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$, (2.26) existe $\sigma > 1$ y $C > 0$ tal que

$$\frac{t}{r}\left(\frac{w(b(x,t))}{w(b(x,r))}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq C\left(\frac{v(B(x,t))}{v(B(x,r))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todos t y r, $0 < t < r$

En las condiciones dadas, $B(x,r)$ indica la bola euclídea de centro x y radio r. Para la geometría en que estamos trabajando consideraremos la siguiente generalización de las condiciones anteriores:

(2.27) $w \in D_\infty$ con respecto a las δ-bolas, es decir $w(Q(x,r)) \cong w(Q(x,2r))$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

(2.28) $v \in A_2$ con respecto a las δ-bolas, es decir $v^{-1}(Q(x,r))\, v(Q(x,r)) \cong |Q(x,r)|^2$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y $r > 0$.

(2.29) existe $\sigma > 1$ y $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{|Q(x,t)|}{|Q(x,r)|}\right)^{(\Sigma_j G_j)^{-1}} \left(\frac{w(Q(x,t))}{w(Q(x,r))}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq C\left(\frac{v(Q(x,t))}{v(Q(x,r))}\right)^{\frac{1}{2}}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$ y para todos t y r, $0 < t < r$.

En la última desigualdad los G_j están definidos como en el Capítulo I. Indicaremos con C_σ al conjunto de hipótesis sobre (v,w) formado por (2.27), (2.28) y (2.29).

Con el objeto de comparar las condiciones C_σ con las $S_{\sigma,\alpha}$ comenzamos estudiando algunas propiedades de estas últimas. Observamos aquí que la condición $S_{\sigma,\alpha}$ en el par (v,w) es similar a la que se obtiene sustituyendo el operador maximal fraccionario por el operador $P_\mu^{k,s}$ en la condición de Sawyer.

(2.30) Lema: Dados α_1, α_2 en $(0,1]$, si $\alpha_1 > \alpha_2$, luego S_{σ,α_1} implica S_{σ,α_2}.

Demostración: Basta ver que si Q_o y Q satisfacen (2.2) con $\alpha = \alpha_1$ luego satisfacen (2.2) para $\alpha = \alpha_2$. Esto es trivial si $w(Q_o \cap Q)$ ó $v^{-1}(Q_o \cap Q)$ es cero. Supongamos que $w(Q_o \cap Q)$ y $v^{-1}(Q_o \cap Q)$ son positivos. Entonces (2.2) para $\alpha = \alpha_1$ puede escribirse

$$\left(\frac{|Q_o|}{|Q|}\right)^{\alpha_1} \le \frac{C\,|Q_o|}{\left(v^{-1}(Q_o \cap Q)\; v(Q_o)\right)^{\frac{1}{2}}} \left(\frac{w(Q_o)}{w(Q_o \cap Q)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Luego la tesis queda probada si demostramos que existe una constante $C > 0$ independiente de Q_o y Q , tal que

$$\text{(2.31)} \qquad \left(\frac{|Q_o|}{|Q|}\right)^{\alpha_2} \le C \left(\frac{|Q_o|}{|Q|}\right)^{\alpha_1}$$

Para ver esto tengamos en cuenta que como $w(Q_o \cap Q) > 0$ tenemos $Q_o \cap Q \neq \phi$, por otra parte de (2.2), tenemos que $\text{radio}(Q) \le 8a^4\, \text{radio}(Q_o)$. Luego, de la propiedad de duplicación (1.19), resulta que existe una constante C , independiente de Q_o y Q , tal que $|Q| \le C\,|Q_o|$. Ahora (2.31) es clara.#

(2.32) Lema: Sea v una función positiva en c.t.p. de Ω que verifica (2.2) para algún w tal que $0 < w(Q) < \infty$ para toda δ-bola Q con $\bar{Q} \subset \Omega$. Luego $v^{-1}(Q)\, v(Q) \cong |Q|^2$ para toda δ-bola Q tal que $\bar{Q} \subset \Omega$.

Demostración: Tomando $Q_o = Q$ en (2.2), resulta

$$\left(v^{-1}(Q)\; v(Q)\right)^{\frac{1}{2}} \le C\,|Q|$$

para toda δ-bola Q tal que $\bar{Q} \subset \Omega$, donde C es independiente de Q . Luego, como por la desigualdad de Hölder vale $|Q|^2 \le v^{-1}(Q)\, v(Q)$ para toda δ-bola $Q \subset \Omega$, tenemos la tesis.#

(2.33) Observación: El lema anterior nos dice que si (v,w) satisface $S_{\sigma,\alpha}$ luego $v \in A_2$ en Ω. Luego si Q es una δ-bola tal que $2\bar{Q} \subset \Omega$ tenemos que $v(2Q) \cong v(Q)$. Para demostrar esto basta ver que existe una constante C tal que para toda δ-bola Q vale la desigualdad $v(2Q) \leq C\, v(Q)$. Esto último se obtiene combinando la condición A_2 con la propiedad de duplicación (1.18), en efecto

$$v(2Q) = \frac{c|2Q|^2}{v^{-1}(2Q)} \leq \frac{c|Q|^2}{v(Q)\, v^{-1}(Q)} \; \frac{v^{-1}(Q)}{v^{-1}(2Q)}\, v(Q) \leq C\, v(Q)$$

(2.34) Lema: Sea (v,w) un par de pesos no negativos en $S_{\sigma,\alpha}$ para $\Omega = \mathbb{R}^n$ y $\alpha = 1 - (\sum_j G_j)^{-1}$, luego (v,w) satisface (2.29).

Demostración: A partir de (2.2), tenemos que

$$\left(\frac{w(\theta Q)}{w(Q)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \left(v^{-1}(\theta Q)\, v(Q)\right)^{\frac{1}{2\sigma}} = \left(\frac{w(Q \cap \theta Q)}{w(Q)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \left(v^{-1}(Q \cap \theta Q)\, v(Q)\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq c|Q|^{(\sum_j G_j)^{-1}}\; |\theta Q|^{1-(\sum_j G_j)^{-1}}$$

$$\leq c\left(\frac{|Q|}{|\theta Q|}\right)^{(\sum_j G_j)^{-1}} |\theta Q|$$

para toda δ-bola Q y todo $\theta \in (0,1]$. Luego, de esta desigualdad y la desigualdad de Hölder, se sigue

$$\left(\frac{|\theta Q|}{|Q|}\right)^{(\sum_j G_j)^{-1}} \left(\frac{w(\theta Q)}{w(Q)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq c\, \frac{|\theta Q|}{\left(v^{-1}(\theta Q)\, v(Q)\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leq c\, \frac{|\theta Q|}{|\theta Q|} \left(\frac{v(\theta Q)}{v(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= c\left(\frac{v(\theta Q)}{v(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Esto completa la demostración.$_{\#}$

Los resultados anteriores prueban que si $(v,w) \in S_{\sigma,\alpha}$ para algún α en $(1-(\sum_j G_j)^{-1},1]$ y w satisface (2.27) luego $(v,w) \in C_\sigma$. Nuestro propósito ahora es probar que la condición C_σ implica $S_{\sigma',\alpha}$ en $\mathbb{R}^n$ para algún σ' en $(1,\sigma)$ y algún α en $(1-(\sum_j G_j)^{-1},1]$. Para ello necesitamos algunos resultados previos.

(2.35) <u>Lema</u>: Sea $w \in D_\infty$ con respecto a las δ-bolas en Ω. Luego existe $C_o > 0$ y $\beta \geq 1$ tal que

$$\frac{w(\theta Q)}{w(Q)} \geq C_o\ \theta^\beta$$

para todo $\theta \in (0,1]$ y para toda δ-bola $Q \subset \Omega$.

<u>Demostración</u>: Sea $Q = Q(x,r)$ una δ-bola en Ω. A partir del Lema (1.20) tenemos que para $\mu = (8a^8)^{-1}$ existe $y \in Q(x,r)$ tal que $Q(y,\mu r) \subset Q(x,r)$ y $Q(y,\mu r) \cap Q(x,\mu r) = \phi$. Entonces, como $w \in D_\infty$ en Ω existe una constante $C > 0$ independiente de r, x e y tal que

$$\begin{aligned} w(Q(x,r)) &\geq w(Q(x,\mu r)) + w(Q(y,\mu r)) \\ &\geq (1+C)\ w(Q(x,\mu r)) \end{aligned}$$

de donde se sigue

$$\frac{w(Q(x,\mu r))}{w(Q(x,r))} \leq \frac{1}{1+C}$$

Luego, dado $\theta \in (0,1]$, para $k \in \mathbb{N}_o$ tal que $\mu^{k+1} < \theta \leq \mu^k$, tenemos

$$\begin{aligned} \frac{w(\theta Q)}{w(Q)} &\leq \frac{w(\mu Q)}{w(Q)}\,\frac{w(\mu^2 Q)}{w(\mu Q)} \cdots \frac{w(\mu^k Q)}{w(\mu^{k-1} Q)} \\ &\leq \frac{1}{(1+C)^k} \leq (1+C)^{-\frac{\log_{1+C}\theta}{\log_{1+C}\mu}+1} = C\ \theta^{-\frac{1}{\log_{1+C}\mu}} \end{aligned}$$

con lo que queda demostrado el lema.$_{\#}$

(2.36) Lema: Sea (v,w) un par de pesos no negativos que satisfacen (2.27) y (2.29). Luego existe $\eta \in (0,1)$, $\sigma' \in (1,\sigma)$ y una constante $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{|\theta Q|}{|Q|}\right)^{(\sum_j G_j)^{-1}\eta} \left(\frac{w(\theta Q)}{w(Q)}\right)^{\frac{1}{2\sigma'}} \leq C \left(\frac{v(\theta Q)}{v(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

para todo $\theta \in (0,1)$ y toda δ-bola Q .

Demostración: Sea Q una δ-bola . A partir del Lema (1.13), se sigue

$$|\theta Q| \leq \theta^{\sum_j G_j} |Q| ,$$

para $\theta \in (0,1)$, donde C es una constante positiva independiente de Q . Luego, por el Lema anterior, tenemos

$$\left(\frac{|\theta Q|}{|Q|}\right)^{(\sum_j G_j)^{-1}} = \left(\frac{|\theta Q|}{|Q|}\right)^{(\sum_j G_j)^{-1}(1-\varepsilon\beta+\varepsilon\beta)}$$

$$\leq \theta^{\varepsilon\beta} \left(\frac{|\theta Q|}{|Q|}\right)^{(\sum_j G_j)^{-1}(1-\varepsilon\beta)}$$

$$\geq C \left(\frac{|\theta Q|}{|Q|}\right)^{(\sum_j G_j)^{-1}(1-\varepsilon\beta)} \left(\frac{w(\theta Q)}{w(Q)}\right)^{\varepsilon}$$

para cada $\varepsilon > 0$ y θ en $(0,1)$. Entonces, de (2.27), se sigue

$$\left(\frac{|\theta Q|}{|Q|}\right)^{(\sum_j G_j)^{-1}(1-\varepsilon\beta)} \left(\frac{w(\theta Q)}{w(Q)}\right)^{\frac{1+\varepsilon 2\sigma}{2\sigma}} \leq C \left(\frac{|\theta Q|}{|Q|}\right)^{(\sum_j G_j)^{-1}} \left(\frac{w(\theta Q)}{w(Q)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}}$$

$$\leq C \left(\frac{w(\theta Q)}{v(Q)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora tomando un ε en $(0,\min(\beta^{-1},(\sigma-1)(2\sigma 0^{-1}))$ tenemos $1-\varepsilon\beta$ en $(0,1)$ y $\sigma(1+\varepsilon 2\sigma)^{-1} > 1$, con lo que a su vez, tenemos la tesis con $\eta = 1-\varepsilon\beta$ y $\sigma' = \sigma(1+\varepsilon 2\sigma)^{-1}$.

(2.37) Lema: Sea (v,w) un par de pesos que satisfacen C_σ. Luego existen $C>0$, σ' en $(1,\sigma)$ y $\alpha\in(1-(\sum_j G_j)^{-1},1]$ tal que

$$(2.38)\qquad \left(\frac{w(Q_o\cap Q)}{w(Q_o)}\right)^{\frac{1}{2\sigma'}} \left(v^{-1}(Q_o\cap Q)\ v(Q_o)\right)^{\frac{1}{2}} \le C\ |Q_o|^{1-\alpha}\ |Q|^{\alpha}$$

para todas las δ-bolas Q_o y Q tal que $\text{radio}(Q)\le 8a^4\ \text{radio}(Q_o)$

Demostración: Sean $Q_o=Q(x_1,r_1)$ y $Q=Q(x_2,r_2)$ dos δ-bolas tal que $r_2\le 8a^4 r_1$. Si $Q_o\cap Q=\phi$, la desigualdad (2.38) es válida para todos σ' y α. Supongamos que existe $x_o\in Q_o\cap Q$, luego $Q_o\subset\tilde{Q}=2a^4(4a^2+1)r_1r_2^{-1}Q$. En efecto, para $z\in Q_o$, tenemos

$$\begin{aligned}\delta(x_2,z) &\le a^2(\delta(x_2,x_o)+\delta(x_o,z))\\ &\le a^2(\delta(x_2,x_o)+a^2(\delta(x_1,x_o)+\delta(x_1,z)))\\ &\le a^2(r_2+2a^2r_1)\le 2a^4(4a^2+1)\ r_1\end{aligned}$$

Por otra parte tenemos $\tilde{Q}\subset a^4(16a^4+2a^2+1)\ Q_o$, pues para $z\in\tilde{Q}$ se verifica

$$\begin{aligned}\delta(x_1,z) &\le a^2(\delta(x_1,x_2)+\delta(x_2,z))\\ &\le a^2(a^2(\delta(x_1,x_o)+\delta(x_2,x_o))+2a^4(4a^2+1)\ r_1)\\ &\le a^2(a^2(r_1+r_2)+2a^4(4a^2+1)\ r_1)\\ &\le a^4((2a)^4+2a^2+1)\ r_1\end{aligned}$$

Luego, para los números σ' y η dados por el Lema anterior y para $\theta=(2a^4(4a^2+1)\ r_1)^{-1}\ r_2$

$$\begin{aligned}\left(\frac{w(Q_o\cap Q)}{w(Q_o)}\right)^{\frac{1}{2\sigma'}} \left(v^{-1}(Q_o\cap Q)\ v(Q_o)\right)^{\frac{1}{2}} &\le C\left(\frac{w(Q)}{w(\tilde{Q})}\right)^{\frac{1}{2\sigma'}} \left(v^{-1}(Q)\ v(\tilde{Q})\right)^{\frac{1}{2}}\\ &= C\left(\frac{w(\theta\tilde{Q})}{w(\tilde{Q})}\right)^{\frac{1}{2\sigma'}} \left(v^{-1}(\theta\tilde{Q})\ v(\tilde{Q})\right)^{\frac{1}{2}}\end{aligned}$$

$$\leq C \left(\frac{|\tilde{Q}|}{|\theta\tilde{Q}|}\right)^{(\sum_j G_j)^{-1}\eta} \left(v^{-1}(\theta\tilde{Q})\, v(\theta\tilde{Q})\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\, |\tilde{Q}|^{(\sum_j G_j)^{-1}\eta}\, |\theta\tilde{Q}|^{1-(\sum_j G_j)^{-1}\eta}$$

$$\leq C\, |Q_o|^{(\sum_j G_j)^{-1}\eta}\, |Q|^{1-(\sum_j G_j)^{-1}\eta}$$

La última desigualdad prueba la tesis con $\alpha = 1 - (\sum_j G_j)^{-1}\eta$.#

Con el Lema anterior hemos probado que si $(v,w) \in C_\sigma$, luego $(v,w) \in S_{\sigma',\alpha}$ para algún $\sigma' \in (1,\sigma)$ y algún $\alpha \in (1 - (\sum_j G_j)^{-1},1]$. Ahora utilizaremos este hecho para probar

(2.39) Lema: Si $w \in A_2$ con respecto a las δ-bolas en $\mathbb{R}^n$, luego $(w,w) \in S_{\sigma,\alpha}$ para algún $\sigma > 1$ y algún $\alpha \in (1 - (\sum_j G_j)^{-1},1]$.

Demostración: Por el Lema anterior basta probar que $(w,w) \in C_\sigma$ para algún $\sigma > 1$. Sea Q una δ-bola, luego, por la hipótesis, tenemos

$$(2.40) \qquad \frac{w(\theta Q)}{w(Q)} = \frac{w(\theta Q)}{w(Q)}\, \frac{w^{-1}(\theta Q)}{w^{-1}(Q)}\, \frac{w^{-1}(Q)}{w^{-1}(\theta Q)}$$

$$\geq C \left(\frac{|\theta Q|}{|Q|}\right)^2$$

para todo $\theta \in (0,1]$. Ahora, eligiendo $\sigma > 1$ tal que $(\sum_j G_j)^{-1} \frac{2\sigma}{\sigma-1} > 2$, a partir de (2.40) se sigue

$$\frac{w(\theta Q)}{w(Q)} \geq C \left(\frac{|\theta Q|}{|Q|}\right)^{(\sum_j G_j)^{-1} \frac{2\sigma}{\sigma-1}}$$

(2.41) Observación: Los Lemas (2.32) y (2.39) prueban que $v \in A_2$ sí y sólo sí $(v,v) \in S_{\sigma,\alpha}$ para algún $\sigma > 1$ y algún $\alpha \in (1 - (\sum_j G_j)^{-1} ,1]$.

(2.42) Observación: Si bien es cierto que si $(v,w) \in S_{\sigma,\alpha}$ luego v duplica lo mismo no necesariamente es válido para w. En nuestro trabajo necesitaremos que la función maximal

$$M_w f(y) = \sup \frac{1}{w(Q(y,r))} \int_{Q(y,r)} |f(x)| \, w(z) \, dz$$

donde el supremo se toma sobre todas las δ-bolas Q centradas en y contenidas en Ω y f es una función definida en Ω, sea de tipo débil (1,1) con peso w, esto es

$$w(\{y \in \Omega : M_w f(y) > \lambda\}) \leq \frac{C}{\lambda} \int_\Omega |f| \, w \, dz .$$

La desigualdad precedente vale aunque w no duplique. La misma se obtiene como en el caso de bolas euclídeas (ver pág. 39 de [G]), reemplazando el teorema 3.2.1 en [G] por el lema (1.30).

A continuación veremos algunos ejemplos de pares de pesos que se encuentran en alguna clase $S_{\sigma,\alpha}$.

(2.43) Ejemplo: Consideremos el par (v,w) con $v(x) = (d(o,x))^{\beta}$ y $w(x) = (d(o,x))^{-\beta}$ para $\beta > 0$. Veamos, en primer lugar, que para $\beta \in (0,n)$ ambos pesos están en A_2. Sea $\beta \in (o,n)$ y sea $S = S(y,r)$ una d-bola en $\mathbb{R}^n$. Si $d(o,y) \leq 2r$ tenemos

$$d(o,x) \leq d(o,y) + d(y,x) < d(o,y) + r$$

$$d(o,x) \geq d(o,y) - d(y,x) > d(o,y) - r$$

para todo $x \in S$. Luego

$$\int_S (d(o,x))^{\beta} \, dx \leq (d(o,y) + r)^{\beta} \, |S| \tag{2.44}$$

$$\int_S (d(o,x))^{-\beta} \, dx \leq (d(o,y) - r)^{-\beta} \, |S| \tag{2.45}$$

Ahora bien, si $d(o,y) < 2r$ luego $S \subset S(o,3r)$, de manera que aplicando (1.13), (1.16) y (1.18), resulta

$$(2.46) \qquad \int_S (d(o,x))^{\beta}\, dx \le \int_{S(o,3r)} (d(o,x))^{\beta}\, dx$$

$$\le (3r)^{\beta}\, |S(o,3r)| \le C\, r^{\beta}\, |S|$$

$$(2.47) \qquad \int_S (d(o,x))^{-\beta}\, dx \le \int_{S(o,3r)} (d(o,x))^{-\beta}\, dx$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\frac{3r}{2^{j+1}} \le d(o,x) < \frac{3r}{2^j}} (d(o,x))^{-\beta}\, dx$$

$$\le \sum_{j=0}^{\infty} (3r)^{-\beta}\, 2^{(j+1)\beta}\, |S(o,\tfrac{3r}{2^j})|$$

$$\le C\, r^{-\beta}\, |S(o,3r)| \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(\beta-n)}$$

$$\le C\, r^{-\beta}\, |S|$$

Luego, de (2.44), (2.45), (2.46) y (2.47), es claro que, para $\beta \in (o,n)$, v y w están en A_2 con respecto a las d-bolas y , por duplicación también con respecto a las δ-bolas . Ahora veamos que, para ciertos valores de β en (o,n) , el par (v,w) pertenece a $S_{\sigma,\alpha}$ para algún $\sigma > 1$ y algún $\alpha \in (1-(\sum_j G_j)^{-1},1]$. Para ello basta ver que se cumple (2.2) para dichos valores de σ y α . Como v y w duplican, es claro que es suficiente probar (2.2) para $Q \subset Q_o$ y concéntricas, es decir que sólo hay que demostrar que existe $\sigma > 1$, $\alpha \in (1-(\sum_j G_j)^{-1},1]$ y $C > 0$ tal que

$$\left(\frac{w(\theta Q)}{w(Q)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \left(v^{-1}(\theta Q)\, v(Q)\right)^{\frac{1}{2}} \le C\, |Q|^{1-\alpha}\, |\theta Q|^{\alpha}$$

para toda δ-bola Q y todo $\theta \in (0,1]$.

Ahora bien, usando (1.16), (1.19), la desigualdad de Hölder y la propiedad de duplicación de $w = v^{-1}$, tenemos

$$\text{(2.48)} \qquad \left(\frac{w(\theta Q)}{w(Q)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \left(v^{-1}(\theta Q)\ v(Q)\right)^{\frac{1}{2}} \leq \frac{(w(\theta Q)\ w^{-1}(Q))^{\frac{1}{2\sigma}+\frac{1}{2}}}{|Q|^{\frac{1}{\sigma}}}$$

$$\leq C\ \frac{(w(\theta S)\ w^{-1}(S))^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})}}{|S|^{\frac{1}{\sigma}}}$$

para toda δ-bola Q y todo $\theta \in (0,1]$, donde S es la d-bola con mismo centro y radio de Q. Tomemos $\sigma > 1$ y $Q = Q(y,r)$, luego, si $d(o,y) \geq 2r$, de (2.44) y (2.45), tenemos, para $S = S(y,r)$ y $\theta \in (0,1]$ la siguiente desigualdad

$$\text{(2.49)} \qquad \frac{(w(\theta S)\ w^{-1}(S))^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})}}{|S|^{\frac{1}{\sigma}}} \leq \left(\left(\frac{d(o,y)+r}{d(o,y)-\theta r}\right)^{\beta} |S|\ |\theta S|\right)^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})} \frac{1}{|S|^{\frac{1}{\sigma}}}$$

$$\leq 3^{\beta}\ |S|^{1-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})}\ |\theta S|^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})}$$

Ahora bien, si $d(o,y) \leq 2\theta r$, de (2.46), (2.47), (1.13), (1.16) y (1.18), resulta

$$\text{(2.5)} \qquad \frac{(w(\theta S)\ w^{-1}(S))^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})}}{|S|^{\frac{1}{\sigma}}} \leq C\left(\theta^{-\beta}\ |S|\ |\theta S|\right)^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})} \frac{1}{|S|^{\frac{1}{\sigma}}}$$

$$\leq C\left(\left(\frac{|S|}{|\theta S|}\right)^{\frac{\beta}{n}} |S|\ |\theta S|\right)^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})} \frac{1}{|S|^{\frac{1}{\sigma}}}$$

$$= C\ |S|^{1-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})(1-\frac{\beta}{n})}\ |\theta S|^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})(1-\frac{\beta}{n})}$$

Por otra parte, si $2\theta r < d(o,y) < 2r$, de (2.45), (2.46), (1.13), (1.16) y

(1.18) vale

$$(2.51)\qquad \frac{(w(\theta S)\ w^{-1}(S))^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})}}{|S|^{\frac{1}{\sigma}}} \leq \left(\left(\frac{r}{d(o,y)-\theta r}\right)^{\beta} |S|\ |\theta S|\right)^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})} \frac{1}{|S|^{\frac{1}{\sigma}}}$$

$$\leq (\theta^{-\beta}\ |S|\ |\theta S|)^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})} \frac{1}{|S|^{\frac{1}{\sigma}}}$$

$$\leq C\ |S|^{1-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})(1-\frac{\beta}{n})}\ |\theta S|^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})(1-\frac{\beta}{n})}$$

Finalmente, de (2.48), (2.49), (2.50), (2.51), 1.13) y (1.19), resulta

$$\left(\frac{w(\theta Q)}{w(Q)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} (v^{-1}(\theta Q)\ v(Q))^{\frac{1}{2}} \leq C\ |Q|^{1-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})(1-\frac{\beta}{n})}\ |\theta Q|^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})(1-\frac{\beta}{n})}$$

para toda δ-bola Q y todo $\theta \in (0,1]$. Ahora tomando, por ejemplo $\sigma = 1+\frac{\beta}{n}$ y eligiendo $\beta_o \in (o,n)$ tal que $\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})(1-\frac{\beta}{n}) \in (1-(\sum_j G_j)^{-1},1]$ para todo $\beta \in (0,\beta_o]$ tenemos $(v,w) \in S_{\sigma,\alpha}$ con $\sigma = 1+\frac{\beta}{n}$ y $\alpha = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})(1-\frac{\beta}{n})$ para todo $\beta \in (0,\beta_o]$.

(2.52) Ejemplo: Sea $w(x) = (d(o,x))^{-\beta}$, $\beta \in (0,n)$. Combinando las desigualdades (2.44) a (2.47) con (1.13), (1.16) y (1.18) es fácil probar

$$(2.53)\qquad \frac{w(\theta S)}{w(S)} \leq C \left(\frac{|\theta S|}{|S|}\right)^{1-\frac{\beta}{n}}$$

para toda d-bola S y todo $\theta \in (0,1]$. Luego, para $\sigma > 1$, $v(x) \equiv 1$ y $\varepsilon \in (0,1)$, tenemos

$$\left(\frac{w(\theta S)}{w(S)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq C \left(\frac{|\theta S|}{|S|}\right)^{(1-\frac{\beta}{n})\frac{1}{2\sigma}} \left(\frac{|\theta S|}{v^{-1}(\theta S)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C \left(\frac{|\theta S|}{|S|}\right)^{(1-\frac{\beta}{n})\frac{1}{2\sigma}} \frac{|\theta S|^{\frac{1}{2}(1-\varepsilon)}\ |\theta S|^{\frac{\varepsilon}{2}}}{(v^{-1}(\theta S))^{\frac{1}{2}}}$$

$$\leq C \left(\frac{|\theta S|}{|S|}\right)^{(1-\frac{\beta}{n})\frac{1}{2\sigma}} \frac{|S|^{1-\frac{\varepsilon}{2}} \; |\theta S|^{\frac{\varepsilon}{2}}}{(v^{-1}(\theta S)\; v(S))^{\frac{1}{2}}}$$

$$= C \, \frac{|S|^{1-(\frac{\varepsilon}{2}+(1-\frac{\beta}{n})\frac{1}{2\sigma})} \; |\theta S|^{\frac{\varepsilon}{2}+(1-\frac{\beta}{n})\frac{1}{2\sigma}}}{(v^{-1}(\theta S)\; v(S))^{\frac{1}{2}}}$$

Ahora bien, tomando, por ejemplo $\varepsilon = 1 - \frac{\beta}{n}$ y $\sigma = 1 + \frac{\beta}{n}$, podemos elegir $\beta_o \in (o,n)$ tal que $\frac{\varepsilon}{2} + (1 - \frac{\beta}{n}) \frac{1}{2\sigma} \in (1-(\sum_j G_j)^{-1}, 1]$ para todo $\beta \in (0,\beta_o]$. Entonces, aplicando un razonamiento similar al del ejemplo anterior, se sigue que $(v,w) \in S_{\sigma,\alpha}$ con $\sigma = 1 + \frac{\beta}{n}$ y $\alpha = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})(1-\frac{\beta}{n})$ para todo $\beta \in (0,\beta_o]$.

(2.54) Ejemplo: Tomando $v(x) = (d(o,x))^{\beta}$ con $\beta \in (o,n)$, tenemos por (2.53), la desigualdad

$$\frac{v^{-1}(\theta S)}{v^{-1}(S)} \geq C \left(\frac{|\theta S|}{|S|}\right)^{1-\frac{\beta}{n}}$$

vele,

$$\left(\frac{w(\theta S)}{w(S)}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \left(v^{-1}(S)\; v(S)\right)^{\frac{1}{2}} \leq C \left(\frac{|\theta S|}{|S|}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \left(\frac{|\theta S|}{|S|}\right)^{(1-\frac{\beta}{n})\frac{1}{2}} |S|$$

$$= C \, |S|^{1-\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})(1-\frac{\beta}{n})} \; |\theta S|^{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})(1-\frac{\beta}{n})}$$

Razonando como en los ejemplos anteriores tenemos que $(v,w) \in S_{\sigma,\alpha}$ con $\sigma = 1 + \frac{\beta}{n}$ y $\alpha = \frac{1}{2}(1+\frac{1}{\sigma})(1-\frac{\beta}{n})$, para todo $\beta \in (0,\beta_o]$.

CAPITULO III

Espacios de Sobolev: Existencia de Soluciones

Consideremos el operador

$$(3.1) \qquad L = - \sum_{i,j=1}^{n} D_i(a_{ij}\, D_j)$$

donde las funciones $a_{ij}(x)$ están definidas y son medibles en un abierto acotado $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y la meztri] $A = [a_{ij}]$ es simétrica y verifica

$$(3.2) \qquad 0 \le v(x) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(x)\, \xi_i^2 \le \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\, \xi_i\, \xi_j \le w(x) \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2(x)\, \xi_i^2 ,$$

para todo $x \in \Omega$. Supondremos que $\lambda_1(x) \equiv 1$; $\lambda_2(x) = \lambda_2(x_1),\ldots,\lambda_j(x)= \lambda_j(x_1,x_2,\ldots,x_{j-1})$ satisfacen las condiciones (1.1), (1.2) y (1.3) del Capítulo I y que v y w satisfacen las condiciones (2.1) y (2.2) para $\alpha \in (1-(\sum_j G_j)^{-1},1]$ del Capítulo II.

En la Sección 1 de este Capítulo introduciremos dos espacios de tipo Sobolev y probaremos algunos resultados relacionados con sus elementos. En la Sección 2 definiremos dentro del marco dado por la Sección 1, los conceptos de solución y subsolución asociados a L. Allí también demostraremos dos teoremas de existencia de solución de problemas de Dirichlet asociados a L. Además dremos un principio de máximo para soluciones, una aplicación del mismo y un resultado sobre acotación de soluciones. En el Capítulo trabajaremos con d-bolas, pero todo permance válido si cambiamos éstas por δ-bolas.

§.1 Espacios

Sea S una d-bola tal que $2a^2\bar{S} \subset \Omega$. Para $\phi \in \mathrm{Lip}(\bar{S})$ definimos

(3.3) $$\|\phi\|^2 = \int_S \langle A\nabla\phi , \nabla\phi\rangle + \int_S \phi^2\, w$$

donde $\langle\cdot,\cdot\rangle$ denota el producto escalar en $\mathbb{R}^n$. Luego de la condición de elipticidad (3.2) para L , tenemos

(3.4) $$\int_S |\nabla_\lambda\, \phi|^2\, v + \int_S \phi^2\, w \le \|\phi\|^2 \le \int_S |\nabla_\lambda\, \phi|^2\, w + \int_S \phi^2\, w$$

donde ∇_λ está definido como en el Capítulo II. Por consiguiente $\|\phi\|^2 \le (\|\nabla_\lambda\, \phi\|_\infty^2 + \|\phi\|_\infty^2)\, w(S) < \infty$. Ahora para ϕ , $\Psi \in \mathrm{Lip}(\bar{S})$ definimos

(3.5) $$a(\phi,\psi) = \int_S \langle A\nabla\phi,\nabla\psi\rangle + \int_S \phi\psi w$$

Utilizando la desigualdad izquierda en (3.4) y la simetría de A , tenemos que $a(\cdot,\cdot)$ es un producto interno en $\mathrm{Lip}(\bar{S})$, luego $\|\cdot\|$ es una norma en dicho espacio.

(3.6) <u>Definición</u>: Indicaremos con $H(S)$ a la completación de $\mathrm{Lip}(\bar{S})$ con respecto al producto interno $a(\cdot,\cdot)$.

A partir de la definición tenemos que $H(S)$ está formado por las funciones de $\mathrm{Lip}(\bar{S})$ más otros elementos que pueden ser identificados con sucesiones de Cauchy en $\mathrm{Lip}(\bar{S})$ con la norma $\|\cdot\|$. También sabemos que, si ϕ y ψ denotan los elementos de $H(S)$ que representan, respectivamente, las sucesiones de Cauchy $\{\phi_k\}$ y $\{\psi_k\}$, tenemos

(3.7) $$a(\phi,\psi) = \lim a(\phi_k,\psi_k)$$

que es independiente de las sucesiones escogidas para representar a los elementos.

Por otra parte, si $\{\phi_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathrm{Lip}(\bar{S})$ con respecto a $\|\cdot\|$, de (3.4) se sigue que también es una sucesión de

Cauchy en $L^2(S,wdx)$ y que $\{\lambda_i D_i \phi_k\}$ para $i=1,\dots,n$, lo son en $L^2(S,vdx)$. Luego existen ϕ en $L^2(S,wdx)$ y $\phi^{(i)}$, $i=1,\dots,n$, en $L^2(S,vdx)$ tal que

$$(3.8) \qquad \lim \int_S (\phi_k - \phi)^2 \, w = 0$$

$$(3.9) \qquad \lim \int_S (\lambda_i D_i \phi_k - \phi^{(i)})^2 \, v = 0$$

Teniendo en cuenta ésto, podemos probar

(3.10) Lema: Sean $\{\phi_k\}$ y $\{\psi_k\}$ dos sucesiones de Cauchy en $Lip(\bar{S})$ con respecto a $\|\cdot\|$. Luego, en $L^1(S,dx)$, tenemos

$$(3.11) \qquad \lim \langle A\nabla\phi_k, \nabla\psi_k\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\phi^{(i)}/\lambda_i)\,(\psi^{(j)}/\lambda_j) \,,$$

$$(3.12) \qquad \lim \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\, D_i\, \phi_k(\psi^{(j)}/\lambda_j) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\phi^{(i)}/\lambda_i)\,(\psi^{(j)}/\lambda_j)$$

Demostración: Sea $h_k = \langle A\nabla\phi_k, \nabla\psi_k\rangle$. Por la simetría de A tenemos que

$$(3.13) \qquad |\langle Ax,y\rangle| \leq \langle Ax,x\rangle^{1/2} \langle Ay,y\rangle^{1/2}$$

para x e y en $\mathbb{R}^n$. Esta desigualdad junto con la hipótesis en $\{\phi_k\}$ y $\{\psi_k\}$ permiten demostrar que $\{h_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(S,dx)$. Luego existe h tal que $\{h_k\}$ converge a h en $L^1(S,dx)$. Ahora bien, como $\lambda_i D_i \phi_k \to \phi^{(i)}$ y $\lambda_i D_i \psi_k \to \psi^{(i)}$ en $L^2(S,vdx)$ para $i=1,\dots,n$ existen subsucesiones tal que $\lambda_i D_i \phi_{k_\ell} \to \phi^{(i)}/\lambda_i$ y $D_i \psi_{k_\ell} \to \psi^{(i)}/\lambda_i$ en c.t.p. de S , $i=1,\dots,n$. Entonces $h_{k_\ell} = \langle A\nabla\phi_{k_\ell}, \nabla\psi_{k_\ell}\rangle \to \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\phi^{(i)}/\lambda_i)(\psi^{(j)}/\lambda_j)$ en c.t.p. de S . Pero como $\{h_{k_\ell}\}$ converge a h en $L^1(S,dx)$ existe una subsucesión que converge a h en c.t.p. de S . Así, finalmente, $h = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\phi^{(i)}/\lambda_i)(\psi^{(j)}/\lambda_j)$

en c.t.p. de S , con lo que queda demostrado (3.19). Ahora con $h_k = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} D_i \phi_k(\psi^{(j)}/\lambda_j)$, tenemos que $\{h_k\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^1(S,dx)$ a partir de (3.13) y de la integrabilidad de $\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\psi_i/\lambda_i)(\psi_j/\lambda_j)$ sobre S . Luego, (3.12) se obtiene siguiendo un razonamiento similar al utilizado para (3.11).#

Para $\{\phi_k\}$ y $\{\psi_k\}$ como en el lema precedente, tenemos

$$\lim\left(\int_S (\phi_k - \phi)^2 w + \int_S \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(D_i \phi_k - \frac{\phi^{(i)}}{\lambda_i})(D_j \phi_k - \frac{\phi^{(j)}}{\lambda_j})\right) = 0$$

$$\lim\left(\int_S (\psi_k - \psi)^2 w + \int_S \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(D_i \psi_k - \frac{\psi^{(i)}}{\lambda_i})(D_j \psi_k - \frac{\psi^{(j)}}{\lambda_i})\right) = 0$$

Es claro que si las sucesiones son tales que $\|\phi_k - \psi_k\| \to 0$ se tiene que $\phi = \psi$, $\phi^{(i)} = \psi^{(i)}$, $i = 1,\dots,n$ en c.t.p. de S . Teniendo en cuenta todo esto, en lo sucesivo identificaremos al elemento de $H(S)$ que representa una sucesión de Cauchy $\{\phi_k\}$ en $Lip(\bar{S})$ con la función $\phi \in L^2(S,wdx)$ de (3.8). Además denotaremos con $D_i \phi$ a $\frac{\phi^{(i)}}{\lambda_i}$, y con $\nabla\phi$ al vector cuya componente i-ésima es $D_i \phi$, $i = 1,\dots,n$, donde las $\phi^{(i)}$ son las de (3.9). Con estas consideraciones, podemos escribir

$$a(\phi_k - \phi,\phi_k - \phi) = \int_S (\phi_k - \phi)^2 w + \int_S \langle A\nabla(\phi_k - \phi),\nabla(\phi_k - \phi)\rangle \to 0$$

Además, de (3.7) por el Lema anterior tenemos que (3.10) vale para todo par ϕ,ψ en $H(S)$.

Notemos que la definición de $D_i\phi$ coincide con la usual de derivada i-ésima si $\phi \in Lip(\bar{S})$.

Ahora, para $\phi,\psi \in Lip(\bar{S})$, definimos

$$(3.14) \qquad a_o(\phi,\psi) = \int_S \langle A\nabla\phi,\nabla\psi\rangle$$

La análoga de (3.4) es

$$\int_S |\nabla_\lambda \phi|^2 v \le a_o(\phi,\phi) \le \int_S |\nabla_\lambda \psi|^2 w$$

Notemos que $(a_o(\phi,\phi))^{1/2}$ no es una norma en $Lip(\bar{S})$ pues $a_o(\phi,\phi) = 0$ no implica necesariamente $\phi = 0$. Sin embargo, es una norma en el espacio $Lip_o(S)$ de las funciones Lipschitz con soporte compacto en S . Indicaremos dicha norma con $\|\cdot\|_o$.

(3.15) Definición: Denotaremos con $H_o(S)$ a la completación de $Lip_o(S)$ con el producto interno $a_o(\cdot,\cdot)$.

A partir de la desigualdad de Sobolev (Teorema (2.6)) es claro que $H_o(S) \subset H(S)$. Luego cada elemento de $H_o(S)$ se identifica con una función $\phi \in L^2(S,wdx)$, tenemos definidas $D_i \phi$, $i = 1,\dots,n$, y además (3.14) vale para todas ϕ y ψ en $H(S)$.

A continuación introduciremos en $H(S)$ una noción de no negatividad y una de igualdad en la frontera. Estas nos resultarán útiles para el trabajo que realizaremos luego.

(3.16) Definición: Sea $\phi \in H(S)$, diremos que ϕ es no negativa en conjunto $E \subset \bar{S}$, y la denotaremos: $\phi \ge 0$ en E , si existe una sucesión $\{\phi_k\} \subset Lip(\bar{S})$ que converge a ϕ en $H(S)$ y tal que $\phi_k(x) \ge 0$ para todo x en un entorno, que puede depender de k , de E en S .

(3.17) Observación: A partir de la definición anterior es inmediato que si $\phi \in H(S)$ es no negativa en E luego $\phi(x) \ge 0$ en c.t.p. de E . La recíproca también es cierta. En efecto, si $u \in H(S)$ es tal que $u \ge 0$ en c.t.p. de S y $\{u_k\} \subset Lip(S)$ converge a u en $H(S)$ luego $\{u_k^+\}$ es una sucesión en $Lip(S)$ y converge a $u^+ = u$ en $L^2(S,wdx)$. Además como $a(u_k^+,u_k^+) \le a(u_k,u_k) \le C$ para todo k , existe una subsucesión que converge débilmente a una función g en $H(S)$. Entonces por el Teorema de Saks-Banach, tenemos que existe una sucesión que indicaremos con $\{g_k\}$ de combinaciones lineales convexas finitas de elementos de dicha sucesión que converge fuertemente a g en $H(S)$. Ahora bien, por la forma en que hemos definido $H(S)$ y como $v \leq w$ y $v^{-1}(S) < \infty$, tenemos

$$\int_S \lambda_i D_i(u-g)\,\phi = -\int_S \lambda_i(u-g)\, D_i\,\phi \qquad i=1,\dots,$$

para toda $\phi \in C_o^1(S)$. Esto, dado que $u=g$ en c.t.p. de S , prueba que $D_i u = D_i g$, $i=1,\dots,n$ en c.t.p. de S . Luego $\{g_k\}$ converge a u en $H(S)$ lo que demuestra nuestra afirmación.

(3.18) <u>Definición</u>: Dadas ϕ y ψ en $H(S)$ diremos que ϕ es igual a ψ en ∂S y lo denotaremos $\phi=\psi$ en ∂S si $\phi-\psi \in H_o(S)$.

(3.19) <u>Observación</u>: La condición $2a^2S \subset \Omega$ sólo se utiliza para probar $H_o(S) \subset H(S)$. Si esta hipótesis se reemplaza por $S \subset \Omega$, podemos aún definir $H_o(S)$ y $(H(S)$ pero no podemos probar la inclusión mencionada.

§.2 <u>Soluciones y subsoluciones</u>

A continuación definiremos los conceptos de solución y subsolución para problemas asociados al operador L en una d-bola S tal que $2a^2\bar{S} \subset \Omega$.

(3.20) <u>Definición</u>: Diremos que un elemento $u \in H(S)$ es subsolución de L en S si

$$a_o(u,\phi) \leq 0 \qquad \forall\ \phi \in H_o(S) \text{ tal que } \phi \geq 0 .$$

(3.21) <u>Definición</u>: Dada f tal que $f/w \in L^{(2\sigma)'}(S,wdx)$ donde $(2\sigma)'$ es el exponente conjugado de Hölder de 2σ , diremos que $u \in H(S)$ es solución de $Lu=f$ en S si

$$a_o(u,\phi) = \int_S f\,\phi \qquad \forall\ \phi \in H_o(S)$$

Si $f=0$ en c.t.p. de S diremos simplemente que u es solución de L .

(3.22) Definición: Dada una función vectorial $F=(f_1,\dots,f_n)$ tal que $|F|/v \in L^2(S,vdx)$ diremos que $u \in H(S)$ es solución de $Lu = -\mathrm{div}_\lambda' F$ si

$$a_o(u,\phi) = \int_S \langle F,\nabla_\lambda \phi\rangle = \int_S \sum_{i=1}^n f_i\,\lambda_i\,D_i\,\phi \qquad \forall\ \phi \in H_o(S)\ .$$

En relación con las dos últimas definiciones consideramos, dada f como en (3.21), F como en (3.22) y $\psi \in H(S)$ los siguientes problemas

(3,23) $Lu = f$ en S $\qquad u = \psi$ en ∂S

(3.24) $Lu = -\mathrm{div}_\lambda F$ en S $\qquad u = \Psi$ en ∂S

En las condiciones dadas, cada uno de estos problemas tiene solución en $H(S)$, como veremos en los dos siguientes teoremas.

(3.25) Teorema: Para cada f tal que $f/w \in L^{(2\sigma)'}(S,wdx)$ y cada Ψ en $H(S)$ existe una única $u \in H(S)$ que satisface (3.23) y tal que

$$(3.26)\qquad \|u-\Psi\|_o \le C\left(\left(\int_S \left(\frac{|f|}{w}\right)^{(2\sigma)'} w\right)^{\frac{1}{(2\sigma)'}} + a_o(\Psi,\Psi)^{\frac{1}{2}}\right) ,$$

donde $C = C(v,w,s)$.

Demostración: Sean Ψ en $H(S)$ y f tal que $f/w \in L^{(2\sigma)'}(S,wdx)$. Ahora definimos

$$\ell(\phi) = \int_S f\,\phi - a_o(\Psi,\phi) \qquad \phi \in \mathrm{Lip}_o(S)$$

Luego, aplicando la desigualdad de Schwartz, tenemos

$$|\ell(\phi)| \le \left(\int_S \left(\frac{|f|}{w}\right)^{(2\sigma)'} w\right)^{\frac{1}{(2\sigma)'}} \left(\int_S |\phi|^{2\sigma} w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} +$$

$$+\ a_o(\psi,\psi)^{\frac{1}{2}}\ a_o(\phi,\phi)^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, extendiendo ϕ como cero fuera de S y aplicando la desigualdad de Sobolev (Teorema (2.6)) se sigue

$$|\ell(\phi)| \leq C \int_S \left(\frac{|f|}{w}\right)^{(2\sigma)'} w\Big)^{\frac{1}{(2\sigma)'}} \left(\int_S |\nabla_\lambda \phi|^2 v\right)^{\frac{1}{2}} + a_o(\Psi,\Psi)^{\frac{1}{2}} a_o(\phi,\phi)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\left(\left(\int_S \left(\frac{|f|}{w}\right)^{(2\sigma)'} w\right)^{\frac{1}{(2\sigma)'}} + a_o(\Psi,\Psi)^{\frac{1}{2}}\right) a_o(\phi,\phi)^{\frac{1}{2}}$$

donde $C = C(v,w,S)$. De ésto, por la densidad de $Lip_o(S)$ en $H_o(S)$, tenemos que $\ell(\cdot)$ es un funcional lineal acotado en $H_o(S)$. Luego, dado que $H_o(S)$ es un espacio de Hilbert con producto interno $a_o(\cdot,\cdot)$, existe una única ϕ_o en $H_o(\Omega)$ tal que

$$a_o(\phi_o,\phi) = \int_S f\,\phi - a_o(\Psi,\phi) \quad , \text{ para todo } \phi \in H_o(S)$$

$$\|\phi_o\|_o \leq C\left(\left(\int_S \left(\frac{|f|}{w}\right)^{(2\sigma)'} w\right)^{\frac{1}{(2\sigma)'}} + a_o(\Psi,\Psi)^{\frac{1}{2}}\right)$$

Finalmente tomando $u = \phi_o + \Psi$ obtenemos la tesis.$_\#$

(3.27) <u>Teorema</u>: Para cada $F = (f_1,\dots,f_n)$ tal que $|F|/v \in L^2(S,vdx)$ y cada Ψ en $H(S)$ existe una única $u \in H(S)$ que satisface (3.24) y tal que

$$\text{(3.28)} \qquad \|u - \Psi\|_o \leq \left(\int_S \left(\frac{|F|}{v}\right)^2 v\right)^{\frac{1}{2}} + a_o(\Psi,\Psi)^{\frac{1}{2}}$$

<u>Demostración</u>: Sean F y Ψ como en la hipótesis. El razonamiento es similar al aplicado en el Teorema anterior. Basta definir ahora

$$\ell(\phi) = \int_S \langle F,\nabla_\lambda\phi\rangle - a_o(\Psi,\phi) \qquad \phi \in Lip_o(S)$$

De aquí, aplicando la desigualdad de Schwartz, se sigue

$$|\ell(\phi)| \le \left(\int_S \left(\frac{|F|}{v}\right)^2 v\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_S |\nabla_\lambda \phi|^2 v\right)^{\frac{1}{2}} + a_o(\psi,\psi)^{\frac{1}{2}}\, a_o(\phi,\phi)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le \left(\left(\int_S \left(\frac{|F|}{v}\right)^2 v\right)^{\frac{1}{2}} + a_o(\psi,\psi)^{\frac{1}{2}}\right) a_o(\psi,\psi)^{\frac{1}{2}}$$

Así, teniendo en cuenta la densidad de $Lip_o(S)$ en $H_o(S)$, tenemos que $\ell(\cdot)$ es un funcional lineal acotado en $H_o(S)$. Luego el resultado se obtiene como en el Teorema anterior.#

A continuación demostraremos un principio de máximo para subsoluciones y luego lo aplicaremos para obtener una variante para soluciones.

(3.29) Lema (Principio de máximo débil): Si $u \in H(S)$ es una subsolución de L en S tal que $u \ge 0$ en ∂S, luego $u \ge 0$ en c.t.p. de S.

Demostración: Como $u \ge 0$ en ∂S sabemos por definición, que existe una sucesión $\{u_k\}$ en $Lip(\bar{S})$ que converge a u en $H(S)$ tal que $u_k(x) \ge 0$ para todo x en un entorno, que puede depender de k, de ∂S en $\bar{S}$. Ahora, para dicha sucesión, definimos $u_k^- = -\min\{u_k, 0\}$. Es claro que $u_k^- \in Lip_o(S)$ y es no negativa en S. Por otra parte, $\nabla u_k^- = -\chi_{\{u_k \le 0\}} \nabla u_k$, entonces $\langle A\nabla u_k^-, \nabla u_k^-\rangle = \chi_{\{u_k \le 0\}} \langle A\nabla u_k\ \nabla u_k\rangle$. Luego, como $\{u_k\}$ es una sucesión acotada en $H(S)$ resulta que $\{u_k^-\}$ lo es en $H_o(S)$. Por consiguiente existe una subsucesión $\{u_{k_j}^-\}$ que converge débilmente en $H_o(S)$ a una ψ. Entonces, puesto que u es subsolución, tenemos

$$\begin{aligned} -\lim a_o(u_{k_j}^-, u_{k_j}^-) &= \lim a_o(u_{k_j}, u_{k_j}^-) \\ &= \lim a_o(u, u_{k_j}^-) \\ &= a_o(u,\psi) \ge 0 \end{aligned}$$

Luego, por la elipticidad, resulta

$$\lim \int_S |\nabla_\lambda u^-_{k_j}|^2 v = 0$$

Ahora, entendiendo como cero a $u^-_{k_j}$ en $\Omega - S$ y aplicando la desigualdad de Sobolev (Teorema (2.6)) se sigue

$$\lim \int_S |u^-_{k_j}|^2 w = 0$$

Luego, para probar la tesis, basta probar que $\{u^-_{k_j}\}$ converge a u^- en $L^2(S,wdx)$, y esto es cierto pues $\{u_{k_j}\}$ converge a u en $L^2(S,wdx)$.#

(3.30) <u>Lema</u>: Sea $x \in \Omega$ y sean $S_1 = S(x,r_1)$, $S_2 = S(x,r_2)$ y $S_3 = S(x,r_3)$, d-bolas en Ω con $r_1 < r_2 < r_3$. Si $\phi \in H(S_3)$ satisface $\phi \leq C_1$ para alguna constante C_1 en c.t.p. de $S_3 - S_1$, luego, dado $C_2 > C_1$, existe $\{\phi_k\} \subset Lip(\bar{S}_2)$ que converge a ϕ en $H(S_2)$ y tal que, para cada k , $\phi_k \leq C_2$ en un entorno de ∂S_2 . Además, si $u \in H(S_2)$ es solución de L en S_2 y existe una sucesión $\{u_k\} \subset lip(\bar{S}_2)$ que converge a u en $H(S_2)$ y tal que, para cada k , $u_k \leq \phi_k$ en un entorno de ∂S_2 , entonces $u \leq C_2$ en c.t.p. de S_2 .

<u>Demostración</u>: La afirmación correspondiente a u se sigue de la correspondiente a ϕ aplicando el Lema anterior a la solución $C_2 - u$ en S_2 . En efecto, como $C_2 - u_k \geq C_2\, \phi_k \geq 0$ en un entorno de ∂S_2 para cada k , tenemos $C_2 - u \geq 0$ en ∂S_2 . Sólo nos resta probar la tesis sobre ϕ . Para ello, en primer lugar, tomamos una sucesión $\{h_k\} \subset Lip(\bar{S}_3)$ que converja a ϕ en $H(S_3)$. Luego dicha sucesión converge a ϕ en $L^2(S_3,wdx)$ y puede ser elegido tal que también converge ϕ en c.t.p. de S_3 . Entonces, por el Teorema de Egorov, dado $\varepsilon > 0$ y $C_2 > C_1$, existe $E \subset S_3 - S_1$ y $k_o \in \mathbb{N}$ tal que $|S_3 - S_1 - E| < \varepsilon$ y $h_k \leq C_2$ en E si

$k \geq k_o$. Ahora tomando $r_4, \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \mathbb{R}^+$ tal que $r_4 > r_3$, $r_1 < r_1 + \varepsilon < r_2$ y $r_2 < r_2 + \varepsilon_2 < r_3$, elegimos ψ_1 , ψ_2 y ψ_3 , no negativos, en $C_o^\infty(S(x,r_4))$ tal que sop $\psi_1 \subset (1+\varepsilon_1) S_1$ sop $\psi_2 \subset (1+\varepsilon_2) S_2 - S_1$ sop $\psi_3 \subset S(x,r_4) - S_3$ y $\psi_1 + \psi_2 + \psi_3 = 1$ en S_3 . Con estas funciones y $\{h_k\}$ definimos $\{\phi_k\}$ donde $\phi_k = h_k\ \psi_1 + (h_k\ \psi_2) \wedge C_2$. Es claro que esta sucesión está en $\mathrm{Lip}(\bar{S}_3)$ y $\phi_k \leq C_2$ en un entorno de ∂S_2 para cada k . A continuación vamos a demostrar que $\{\phi_k\}$ converge a ϕ en $H(S_2)$, lo que es equivalente a probar las igualdades

$$(3.31) \qquad \lim \int_{S_2} |\phi_k - h_k|^2\ w = 0 \quad ,$$

$$(3.32) \qquad \lim \int_{S_2} \langle A\ \nabla(\phi_k - h_k), \nabla(\phi_k - h_k)\rangle = 0$$

Ahora bien, como $\{h_k\}$ converge ϕ en $L^2(S_3,wdx)$, luego $\{h_k\ \psi_2\}$ converge a $\phi\ \psi_2$ en el mismo espacio. Más aún, como $|\alpha \wedge C_2 - \beta \wedge C_2| \leq |\alpha - \beta|$, $\forall\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}$ tenemos que $\{(h_k\ \psi_2) \wedge C_2\}$ converge a $(\phi\psi_2) \wedge C_2$ en $L^2(S_3,wdx)$. Entonces, dado que $\phi \leq C_1$ en c.t.p. de $S_2 - S_1$, tenemos que $\{h_k\ c_2\}$ y $\{(h_k\ \psi_2) \wedge C_2\}$ convergen a $\phi\psi_2$ en $L^2(S_2-S_1,wdx)$. Esto demuestra (3.31), pues

$$\int_{S_2} |\phi_k - h_k|^2\ w = \int_{S_2-S_1} |(h_k\ \psi_2) \wedge C_2 - h_k\ \psi_2|^2\ w$$

Veamos ahora (3.32). Para $k \geq k_o$, tenemos

$$(3.33) \qquad \int_{S_2} \langle A\ \nabla(\phi_k - h_k), \nabla(\phi_k - h_k)\rangle$$

$$= \int_{S_2-S_1} \langle A\ \nabla((h_k\ \psi_2) \wedge C_2 - h_k\ \psi_2), \nabla((h_k\ \psi_2) \wedge C_2 - h_k\ \psi_2)\rangle$$

$$= \int_{(S_2-S_1)\ \cap\ \{h_k\ \psi_2 > C_2\}} \langle A\ \nabla(h_k\ \psi_2), \nabla(h_k\ \psi_2)\rangle$$

$$\leq \int_{S_2-S_1-E} \langle A\ \nabla(h_k\ \psi_2), \nabla(h_k\ \psi_2)\rangle$$

El integrando en el último término es no negativo y podemos acotarlo de la siguiente manera

$$\langle A\ \nabla(h_k\ \psi_2), \nabla(h_k\ \psi_2)\rangle = h_k^2\ \langle A\ \nabla\psi_2, \nabla\psi_2\rangle + 2\ h_k\ \psi_2 \langle A\ \nabla h_k, \nabla\psi_2\rangle$$

$$+ \psi_2^2\ \langle A\ \nabla h_k, \nabla h_k\rangle$$

$$\leq h_k^2\ \langle A\ \nabla\psi_2, \nabla\psi_2\rangle + \psi_2^2\ \langle A\ \nabla h_k, \nabla h_k\rangle$$

$$+ 2\ |h_k|\ \psi_2\ \langle A\ \nabla h_k, \nabla h_k\rangle^{1/2}\ \langle A\ \nabla\psi_2, \nabla\psi_2\rangle^{1/2}$$

$$\leq h_k^2\ |\nabla_\lambda \psi_2|^2\ w + \psi_2^2\ |\nabla_\lambda h_k|^2\ w$$

$$+ 2\ \psi_2\ |h_k|\ |\nabla_\lambda \psi_2|\ w^{1/2}\ \langle A\ \nabla h_k, \nabla h_k\rangle^{1/2}\ .$$

Luego, de (3.33) utilizando la desigualdad de Hölder, se sigue

$$\int_{S_2} \langle A\ \nabla(\phi_k-h_k), \nabla(\phi_k-h_k)\rangle \leq C\ \|\nabla_\lambda \phi_2\|_\infty^2 \int_{S_2-S_1-E} h_k^2\ w$$

$$+ \int_{S_2-S_1-E} \langle A\ \nabla h_k, \nabla h_k\rangle$$

Ahora tomando límite superior en ambos miembros tenemos

$$0 \leq \overline{\lim} \int_{S_2} \langle A\ \nabla(\phi_k-h_k, \nabla(\phi_k-h_k\rangle \leq C\ \|\nabla_\lambda \phi_2\|_\infty^2 \int_{S_2-S_1-E} \phi^2\ w$$

$$+ \int_{S_2-S_1-E} \langle A\ \nabla\phi, \nabla\phi\rangle$$

Entonces, como el ε que tomamos para la elección de E puede ser tan pequeño como queramos, la desigualdad anterior prueba (3.32).#

Para finalizar la sección veremos dos acotaciones relacionadas con (3.26) y (3.28) las que nos resultarán útiles en el Capítulo V.

(3.34) Lema: Sean f y $F = (f_1,\dots,f_n)$ tal que, $f/w \in L^p(S,wdx)$ para algún $p \in (1,\sigma)$ y $|F|/v \in L^{q'}(S,wdx)$ para algún $q \in (1,\frac{2\sigma}{\sigma+1})$. Luego, si $u \in H_o(S)$ es tal que $Lu = f$ en S, entonces

$$\sup_{x\in S} |u(x)| \leq C \left(\int_S \left(\frac{|f|}{w}\right)^{p'} w\right)^{\frac{1}{p'}} \tag{3.35}$$

si, en cambio, u satisface $Lu = \mathrm{div}_\lambda F$ en S, entonces

$$\sup_{x\in S} |u(x)| \leq C \left(\int_S \left(\frac{|F|}{v}\right)^{q'} v\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{3.36}$$

En ambos casos $C = C(S,w,v)$.

Demostración: Veamos que vale la primera desigualdad. Para ello tomamos

$$C_o = C \left(\int_S \left(\frac{|f|}{w}\right)^{p'} w\right)^{\frac{1}{p'}}$$

y, para $\beta \geq 1$ y $M \in (C_o,\infty)$, definimos

$$H_M(t) = \begin{cases} t^\beta - C_o^\beta & t \in [C_o,M] \\ M^\beta - C_o^\beta + \beta\, M^{\beta-1}(t-M) & t > M \end{cases}$$

Ahora, tomando $\{u_k\} \subset \mathrm{Lip}_o(S)$ que converge a u en $H_o(S)$ y en c.t.p. de S , definimos $\phi_k = u_k^+ + C_o$ y, para cada M ,

$$\psi_k(x) = T(\phi_k(x)) = \int_{C_o}^{\phi_k(x)} H_M'(t)^2\, dt \quad , \quad x \in S$$

Es claro que $\{\psi_k\} \subset Lip_o(S)$. Veamos que $\{\|\psi_k\|_o\}$ está acotada. En efecto, pues

$$\nabla\psi_k = H'_M(\phi_k)^2 \nabla\phi_k \quad ,$$

entonces, por la simetría de A y la acotación de H'_M ,

$$\begin{aligned} \|\psi_k\|_0^2 &= \int <A\nabla\psi_k, \nabla\psi_k> \\ &= \int H'_M(\phi_k)^4 <A\nabla\psi_k, \nabla\psi_k> \\ &\leq \|H'_M\|_\infty^4 \int <A\nabla u_k, \nabla u_k> \\ &= \|H'_M\|_\infty^4 \|u_k\|_o^2 \end{aligned}$$

Luego existe una subsucesión de $\{\psi_k\}$, que denotaremos que la misma forma, que converge débilmente a una ψ en $H_o(S)$. Entonces

$$\lim a_o(u_k,\psi_k) = \lim a_o(u,\psi_k) = a_o(u,\psi) \ .$$

Por consiguiente, teniendo en cuenta que u es solución, podemos escribir

$$(3.37) \qquad \int_S <A\nabla u_k, \nabla\psi_k> = \int_S f\psi_k + \xi_k \qquad k \in \mathbb{N}$$

donde $|\xi_k| \subset \mathbb{R}$ es una sucesión que converge a cero. Ahora bien, como $\nabla\phi_k = \chi_{\{u_k>0\}} \nabla u_k$, $\nabla\psi_k = T'(\phi_k) \nabla\phi_k$ y $\phi_k = 0$ si $u_k \leq 0$, tenemos

$$\begin{aligned} (3.38) \qquad \int_S <A\nabla u_k, \nabla\psi_k> &= \int_S <A\nabla u_k, \nabla\phi_k> T(\phi_k) \\ &= \int_S <A\nabla\phi_k, \nabla\phi_k> T'(\phi_k) \\ &\geq \int_S |\nabla_\lambda \phi_k|^2 T'(\phi_k) \ v \end{aligned}$$

Por otra parte, como H_M' es creciente, es válida

$$T(\phi_k(x)) = \int_{C_o}^{\phi_k(x)} (H_M'(t))^2 \, dt$$

$$\leq (\phi_k(x) - C_o) \left(H_M'(\phi_k(x))\right)^2$$

$$\leq \phi_k(x) \left(H_M'(\phi_k(x))\right)^2$$

$$= \phi_k(x) \, T'(\phi_k(x))$$

Luego, aplicando esto y (3.38) en (3.37), se sigue

$$\int_S |\nabla_\lambda H_M(\phi_k)|^2 v = \int_S |\nabla_\lambda \phi_k|^2 (H_M'(\phi_k))^2 v$$

$$= \int_S |\nabla_\lambda \phi_k|^2 T'(\phi_k) v$$

$$\leq \int_S |f| \, |\psi_k| + |\xi_k|$$

$$\leq \int_S |f| \, |T(\phi_k)| + |\xi_k|$$

$$\leq \int_S |f| \, \phi_k T'(\phi_k) + |\xi_k|$$

$$= \frac{C_o}{C_o} \int_S |f| \, \phi_k T'(\phi_k) + |\xi_k|$$

$$\leq \frac{1}{C_o} \int_S |f| \, \phi_k^2 T'(\phi_k) + |\xi_k|$$

$$= \frac{1}{C_o} \int_S |f| \, \phi_k^2 H_M'(\phi_k)^2 + |\xi_k| \, .$$

Entonces, a partir de la desigualdad de Sobolev (Teorema (2.6)), tenemos

$$(3.39)\qquad \left(\int_S |H_M(\phi_k)|^{2\sigma}\, w\right)^{\frac{1}{\sigma}} \leq C\left(\frac{1}{C_o}\int_S |f|\,(\phi_k\, H_M'(\phi_k))^2 + |\xi_k|\right)$$

$$\leq C\left(\frac{C_o}{C_o}\left(\int_S (\phi_k\, H_M'(\phi_k))^{2p}\right)^{\frac{1}{p}} + |\xi_k|\right)$$

$$\leq C\left(\left(\int_S (\phi_k\, H_M'(\phi_k))^{2p}\right)^{\frac{1}{p}} + |\xi_k|\right)$$

donde $C = C(S,w,v)$. Sabemos que $\{u_k^+\}$ converge a u^+ en c.t.p. de S , de manera que $\{\phi_k\}$ converge a $\phi = u^+ + C_o$ de la misma forma, lo que, a su vez, implica que $\{H_M'(\phi_k)\}$ converge en c.t.p. de S a $H_M'(\phi)$. Luego, teniendo en cuenta que $\phi \in L^{2\sigma}(S,wdx)$, el Teorema de convergencia de Lebesgue nos asegura que $\{\phi H_M'(\phi_k)\}$ a $\phi H_M'(\phi)$ en $L^{2\sigma}(S,wdx)$. En consecuencia, tenemos que $\{\phi_k\, H_M'(\phi_k)\}$ converge a $\phi H_M'(\phi)$ en $L^{2\sigma}(S,wdx)$. Entonces, dado que $\{H_M(\phi_k)\}$ converge a $H_M(\phi)$ en c.t.p. de S , tomando límite inferior en ambos miembros de (3.39) y aplicando a la derecha, el resultado anterior y, a la izquierda, el Lema de Fatou, tenemos

$$(3.40)\qquad \left(\int_S |H_M(\phi)|^{2\sigma}\, v\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq C\left(\int_S (\phi H_M'(\phi))^{2p}\, w\right)^{\frac{1}{2p}}$$

A partir de la definición de H_M tenemos que $(\phi^\beta - C_o^\beta)\, \chi_{[C_o,M]}(\phi) \leq H_M(\phi)$ y $H_m'(\phi) \leq \beta\, \phi^{\beta-1}$. Luego, utilizando estas desigualdades en (3.40) y haciendo tender M a ∞ resulta

$$\left(\int_S \left(\phi^\beta - C_o^\beta\right)^{2\sigma} w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq C\,\beta\left(\int_S \phi^{2p\beta}\, w\right)^{\frac{1}{2p}}$$

Entonces, como $\phi \geq C_o$, tenemos

$$\left(\int_S \psi^{2\sigma\beta}\, w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} - \beta\left(w(S)\right)^{\frac{1}{2\sigma}-\frac{1}{2p}}\left(\int_S \psi^{2p\beta}\, w\right)^{\frac{1}{2p}} \leq \left(\int_S \psi^{2\sigma\beta} w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} - c_o^{\beta}\left(w(S)\right)^{\frac{1}{2\sigma}}$$

$$\leq \left(\int_S (\psi^{\beta} - c_o^{\beta})^{2\sigma}\, w\right)^{\frac{1}{2\sigma}}$$

$$\leq C\,\beta\left(\int_S \psi^{2p\beta}\, w\right)^{\frac{1}{2p}}$$

Esto nos conduce a

$$(3.41)\qquad \left(\frac{1}{w(S)}\int_S \psi^{2\sigma\beta}\, w\right)^{\frac{1}{2\sigma\beta}} \leq \left(\beta\left(C\, w(S)^{\frac{1}{2p}-\frac{1}{2\sigma}} + 1\right)\right)^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{1}{w(S)}\int_S \psi^{2p\beta}\, w\right)^{\frac{1}{2p\beta}}$$

$$\leq \left(\beta\, C\, \text{máx}\left(w(S),1\right)^{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sigma}\right)}\right)^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{1}{w(S)}\int_S \psi^{2p\beta}\, w\right)^{\frac{1}{2p\beta}}$$

$$= (\beta\, C)^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{1}{w(S)}\int_S \psi^{2p\beta}\, w\right)^{\frac{1}{2p\beta}} \qquad \beta \geq 1$$

donde $C = C(S,w,v)$. Ahora bien, por la definición de ϕ , la desigualdad de Sobolev y el Teorema (3.25), resulta

$$(3.42)\qquad \left(\frac{1}{w(S)}\int_S \psi^{2p}\, w\right)^{\frac{1}{2p}} \leq \left(\frac{1}{w(S)}\int_S \psi^{2\sigma}\, w\right)^{\frac{1}{2\sigma}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{w(S)}\int_S |u|^{2\sigma}\, w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} + c_o$$

$$\leq C\, \|u\|_o + c_o$$

$$\leq C\, c_o$$

donde $C = C(S,w,v)$. Entonces, iterando (3.42) con β en la sucesión

$\left\{\left(\frac{\sigma}{p}\right)^k\right\}_{k=0}^{\infty}$, tenemos

$$\sup_{x\in S} |u^+(x) + C_o| \le \left(\prod_{k=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{p}\, C\right)^{k\left(\frac{p}{\sigma}\right)^k} \right) C_o$$

$$\le \left(\prod_{k=0}^{\infty} \left(\sigma\, C\right)^{k\left(\frac{1}{\sigma}\right)^k} \right) C_o$$

$$= C\, C_o$$

con $C = C(S,w,v)$. Esto, a su vez, nos lleva a

$$\sup_{x\in S} |u^+(x)| \le C\, C_o$$

Un razonamiento similar nos lleva a la misma acotación para u^- . Así queda probado (3.35). Para la demostración de (3.36) el argumento es del mismo tipo, sólo que tomando

$$C_o = \left(\int_S \left(\frac{|F|}{v}\right)^{q'} v\right)^{\frac{1}{q'}}$$

Luego, la análoga de (3.37) es

$$\int_S \langle A\nabla u_k, \nabla\psi_k\rangle = \int_S \langle F, \nabla_\lambda\, \psi_k\rangle + \xi_k$$

$$= \int_S \langle F, \nabla_\lambda\, \phi_k\rangle\, T'(\phi_k) + \xi_k$$

Entonces podemos obtener

$$\int_S |\nabla_\lambda\, \phi_k|^2\, T'(\phi_k)\, v \le \frac{1}{2} \int_S |\Sigma_\lambda\, \phi_k|^2\, T'(\phi_k)\, v$$

$$+ 2 \int_S \left(\frac{|F|}{v}\right)^2 T'(\phi_k)\, v + |\xi_k|$$

Por consiguiente, tenemos

$$\int_S |\nabla_\lambda H_M(\phi_k)|^2 v \leq \frac{4}{c_o^2}\int_S \left(\frac{|F|}{v}\right)^2 \phi_k^2 H_M'(\phi_k)^2 v + 2|\xi_k|$$

$$\leq \frac{4}{c_o^2} c_o^2 \left(\int_S \left(\phi_k H_M'(\phi_k)\right)^{\frac{2q'}{q'-2}} v\right)^{\frac{q'-2}{q'}} + 2|\xi_k| .$$

Ahora, usando la desigualdad de Sobolev, haciendo tender k y M a infinito como antes y teniendo en cuenta que $v \leq w$, resulta

$$\left(\int_S \left(\phi^\beta - c_o^\beta\right)^{2\sigma} w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq C\beta\left(\int_S \phi^{\frac{2q'\beta}{q'-2}} v\right)^{\frac{q'-2}{2q'}}$$

$$\leq C\beta\left(\int_S \phi^{\frac{2q'\beta}{q'-2}} w\right)^{\frac{q'-2}{2q'}}$$

con $C = C(S,w,v)$. Luego, como $\frac{q'}{q'-2} < \sigma$, se sigue

$$(3.43)\qquad \left(\frac{1}{w(S)}\int_S \phi^{2\sigma\beta} w\right)^{\frac{1}{2\sigma\beta}} \leq (C\beta)^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{1}{w(S)}\int_S \phi^{\frac{2q'\beta}{q'-2}} w\right)^{\frac{q'-2}{2q'\beta}}$$

con $C = C(S,w,v)$. Ahora bien, razonando como en (3.42) pero usando el Teorema (3.27) en lugar del (3.25), tenemos

$$\left(\frac{1}{w(S)}\int_S \phi^{\frac{2q'}{q'-2}} w\right)^{\frac{q'-2}{2q'}} \leq C\, c_o$$

Finalmente teniendo en cuenta que $\frac{q'}{q'-2} > 1$, (3.36) se obtiene iterando (3.43) para β con valores en la sucesión $\left\{\left(\frac{\sigma(q'-2)}{q'}\right)^k\right\}_{k=0}^{\infty}$.#

CAPITULO IV

Desigualdad de Harnack

La fórmula del valor medio para una función armónica u en el espacio euclídeo provee una acotación del supremo de u en una bola por su ínfimo sobre la misma bola, esta es la desigualdad clásica de Harnack. En casos de operadores elípticos más generales que el Laplaciano, la validez de una desigualdad de Harnack proporciona una herramienta útil para el estudio de la regularidad de las soluciones, en particular continuidad de las mismas.

El principal resultado de este capítulo es el siguiente:

(4.1) <u>Teorema</u> (Desigualdad de Harnack)

Sea $Q_o = Q(\bar{x}, 4R)$ una δ-bola en Ω . Si $u \in H(Q_o)$ es una solución no negativa de $Lu = 0$ y $Q = \frac{1}{4} Q_o$ entonces

$$\sup_Q u \leq e^{c\left(\frac{w(2Q)}{w(1/2\ Q)}\right)^{\gamma}\left(\frac{w(2Q)}{v(2Q)}\right)^{1/2}} \inf_Q u$$

donde $\gamma = (3\sigma^2 + 2\sigma - 2)(\sigma - 1)^{-1}$ y c sólo depende de las constantes en (1.3) y (2.2).

Este teorema contiene, como casos particulares, varias extensiones conocidas de la desigualdad de Harnack para operadores elípticos en forma de divergencia con coeficientes discontinuos. En efecto, aplicando el Teorema (4.1) a la situación descripta en (0.2) obtenemos el resultado de Moser (ver [M1]) cuyas ideas básicas subyacen en las técnicas que emplearemos en este capítulo. Para la situación descripta en (0.3) el teorema nos da el resultado de Fabes, Kenig y Serapioni [FKS]. Bajo las condiciones de (0.6) obtenemos la desigualdad de Harnack de Franchi y Lanco nelli en [FL3] . Por otra parte si el operador L es del tipo (0.7) llegamos al resultado de Franchi y Serapioni ([FS]) . Si $\lambda_i \equiv 1 \quad \forall\, i$, $w \neq v$ y w satisface la propiedad de duplicación, el cociente $\frac{w(2Q)}{w(1/2\ Q)}$ resulta acotado y, por consiguiente, obtenemos el resultado de Chanillo y Wheeden (ver [ChW2]) .

Como hemos observado en el Capítulo II (ver (2.39)) la condición $S_{\sigma,\alpha}$ no implica la duplicación para w por lo cual el Teorema (4.1) aplicado al caso de la distancia usual $(\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 1)$ es más general que el Teorema B de [ChW2] .

El resultado de Chanillo y Wheeden se basa en una extensión de las técnicas de iteración de Moser y en un lema de Bombieri (ver [B]) que, en el caso clásico, permite prescindir del lema de John-Nirenberg sobre funciones de oscilación media acotada usado en [M1] .

Nuestra demostración sigue una adaptación de la técnica de Chanillo y Wheeden que requiere la desigualdad de Poincaré demostrada en el Capítulo II (Teorema (2.8)) y una modificación adecuada del lema de Bombieri (ver (4.18). En la Sección 1 demostraremos el Teorema (4.1) y en §.2 daremos condiciones suficientes para la continuidad de las soluciones a partir de la desigualdad de Harnack.

§.1 Demostración del Teorema (4.1)

La desigualdad de Poincaré (Teorema (2.8)) nos permite obtener las siguientes desigualdades de tipo Hölder inverso.

(4.2) Lema: Sea Q la δ-bola $Q(\bar{x}, R)$ y $u \in H(Q)$ una subsolución no negativa de L . Luego para $\frac{1}{2} \leq s < t < 1$ existe una constante $C > 0$ dependiendo sólo de las corrientes en (1.3) y (2.2) tal que

$$(4.3)\qquad \left(\frac{1}{w(sQ)}\int_{sQ} u^{2\beta\sigma}\, w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \le C\,\beta\,\mu\,\frac{s}{t-s}\left(\frac{1}{w(tQ)}\int_{tQ} u^{2\beta}\, w\right)^{\frac{1}{2}}$$

para $\beta \ge 1$

$$(4.4)\qquad \left(\frac{1}{w(sQ)}\int_{sQ} u^{(\beta+1)\sigma}\, w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \le C\left(\mu\,\frac{|\beta+1|}{|\beta|}\,\frac{s}{t-s} + \left(\frac{w(tQ)}{w(sQ)}\right)^{2}\right)$$

$$\times\left(\frac{1}{w(tQ)}\int_{tQ} u^{\beta+1}\, w\right)^{\frac{1}{2}}$$

para $\beta \le 1$

donde $\mu = \left(\frac{w(Q)}{v(Q)}\right)^{1/2}$

<u>Demostración</u>: Veamos en primer lugar (4.3). Sea $o < M < \infty$ definimos

$$H_M(t) = \begin{cases} t^{\beta} & t \in [0,M] \\ M^{\beta} + \beta M^{\beta-1}(t-M) & t > M \end{cases}$$

Notemos que H_M', está acotada para cada M. Sea $\{u_k\}$ una sucesión en $Lip(\bar{Q})$ tal que $u_k \ge 0$ $\forall\, k$ y $u_k \to u$ en $H(Q)$. Para cada M definimos para $\eta \in C_o^{\infty}(Q)$

$$\phi_k(x) = \eta^2(x)\int_o^{u_k(x)} H_M'(t)^2\, dt$$

Es claro que $\phi_k \in Lip_o(Q)$ y $\phi_k \ge 0$. Veamos que $\|\phi_k\|_o$ está acotada. Tenemos

$$\nabla\phi_k = \eta^2\,(H_M'(u_k))^2\,\nabla u_k + 2\,\eta\,\nabla\eta\int_o^{u_k} H_M'(t)^2\, dt$$

Luego, por simetría de A

$$\|\phi_k\|_o^2 = \int <A\nabla\phi_k,\nabla\phi_k>$$

$$= \int \left(\eta^2\ H_M'(u_k)^2\right) <A\nabla u_k,\nabla u_k>$$

$$+ \int 4\eta^3\ H_M'(u_k)^2 \left(\int_o^{u_k} H_M'(t)^2\ dt\right) <A\nabla u_k,\nabla\eta>$$

$$+ \int \left(2\eta \int_o^{u_k} H_M'(t)^2\ dt\right)^2 <A\nabla\eta,\nabla\eta>$$

$$= I + II + III$$

Ahora bien

$$I \le \|\eta\|_\infty^4\ \|H_M'\|_\infty^4 \int <A\nabla u_k,\nabla u_k> \le \|\eta\|_\infty^4\ \|H_M'\|_\infty^4\ \|u_k\|^2$$

$$II \le 4\ \|\eta\|_\infty^3\ \|H_M'\|_\infty^4 \int u_k <A\nabla u_k,\nabla\eta>$$

$$\le 4\ \|\eta\|_\infty^3\ \|H_M'\|_\infty^4 \int u_k <A\nabla u_k,\nabla u_k>^{1/2} <A\nabla\eta,\nabla\eta>^{1/2}$$

$$\le 4\ \|\eta\|_\infty^3\ \|H_M'\|_\infty^4\ \||\nabla_\lambda\eta|\|_\infty \int u_k <A\nabla u_k,\nabla u_k>^{1/2} w^{1/2}$$

$$\le 4\ \|\eta\|_\infty^3\ \|H_M'\|_\infty^4\ \||\nabla_\lambda\eta|\|_\infty \left(\int u_k^2\ w\right)^{1/2} \left(\int <A\nabla u_k,\nabla u_k>\right)^{1/2}$$

$$\le 4\ \|\eta\|_\infty^3\ \|H_M'\|_\infty^4\ \||\nabla_\lambda\eta|\|_\infty\ \|u_k\|^2$$

$$III \le 4\ \|\eta\|_\infty^2\ \|H_M'\|_\infty^4 \int u_k^2 <A\nabla\eta,\nabla\eta>$$

$$\le 4\ \|\eta\|_\infty^2\ \|H_M'\|_\infty^4 \int u_k^2\ |\nabla_\lambda\eta|^2\ w$$

$$\le 4\ \|\eta\|_\infty^2\ \|H_M'\|_\infty^4\ \||\nabla_\lambda\eta|\|_\infty^2\ \|u_k\|^2$$

Así finalmente

$$\|\phi_k\|_o^2 \leq C \ \|u_k\|^2$$

donde C depende de M $\|\eta\|_\infty$ y $\| |\nabla_\lambda \eta| \|_\infty$. Como $\{u_k\}$ es una sucesión convergente en $H(Q)$, la sucesión $\{\|u_k\|^2\}$ es acotada luego tenemos que $\{\|\phi_k\|_o^2\}$ está acotada, por consiguiente existe una subsucesión $\{\phi_{k_i}\}$ que converge débilmente en $H_o(Q)$ a cierta ϕ . Entonces, como $H_o(Q)$ es un funcional lineal continuo en $H_o(s)$, tenemos $a_o(u,\phi) = \lim_j a_o(u-u_{k_j},\phi_{k_j}) = 0$ en efecto: $|a_o(u-u_{k_i},\phi_{k_j})| \leq \|u-u_{k_j}\| \ \|\phi_{k_j}\|_o \leq C \ \|u-u_{k_j}\|$. Así

$$a_o(u,\phi) = \lim_j \left(a_o(u_{k_j},\phi_{k_j}) + a_o(u - u_{k_j},\phi_{k_j}) \right)$$

$$= \lim a_o(u_{k_j},\phi_{k_j})$$

Ahora bien, como u es una subsolución, tenemos que $a_o(u,\phi_{k_j}) \leq 0 \ \forall j$, luego $a_o(u,\phi) \leq 0$, en consecuencia $\lim_j a_o(u_{k_j},\phi_{k_j}) \leq 0$. Consideraremos primero el caso en que $\lim_j a_o(u_{k_j},\phi_{k_j}) = 0$. Indicamos $\xi_{k_j} = a_o(u_{k_j},\phi_{k_j})$. Por simplicidad de notación omitiremos momentánea-meante los subíndices, así

$$\int <A\nabla u,\nabla\phi> = a_o(u,\phi) = \xi$$

entonces

$$\int <A\nabla u,\eta^2 \ H_M'(u)^2 \ \nabla u> = \xi - \int <A\nabla u,\nabla\eta \ 2\eta \int_o^u H_M'(t)^2 \ dt>$$

lo que nos conduce a

$$\int <AH_M'(u) \ \nabla u,H_M'(u) \ \nabla u> \eta^2 = \int <A\nabla u,\eta^2 \ H_M'(u)^2 \ \nabla u>$$

$$= \xi - \int <AH_M'(u) \ \nabla u,2\eta \ \frac{\nabla\eta}{H_M'(u)} \int_o^u H_M'(t)^2 \, dt>$$

y así

$$(4.5) \qquad \int \langle AH_M'(u)\, \nabla u, H_M'(u)\, \nabla u\rangle\, \eta^2 \le 2 \int \left|\langle AH_M'(u)\eta\nabla u, \frac{\nabla\eta}{H_M'(u)} \int_0^u H_M'(t)^2\, dt\rangle\right| + |\xi|$$

En el caso en que $\lim_j a_o(u_{k_j}, \phi_{k_j}) < 0$, tenemos $a_o(u_{k_j}, \phi_{k_j}) \le 0$ si j es suficientemente grande, luego, un razonamiento similar al anterior nos conduce a una expresión como (4.5) pero sin el término $|\xi|$. De manera que (4.5) vale en ambos casos con $u = u_{k_j}$ para j suficientemente grande y $\xi = \xi_{k_j}$ donde $\xi_{k_j} \to 0$. Ahora, aplicando la desigualdad

$$(4.6) \qquad |\langle Ax,y\rangle| \le \frac{\varepsilon}{2} \langle Ax,x\rangle + \frac{1}{2\varepsilon} \langle Ay,y\rangle \qquad (\varepsilon > 0)$$

con $\varepsilon = \frac{1}{2}$ al miembro derecho de (4.5) y combinando los términos

$$\frac{1}{2} \int \langle AH_M'(u)\nabla u, H_M'(u)\nabla u\rangle\, \eta^2 \le 2 \int \langle A\nabla\eta, \nabla\eta\rangle \left(\frac{1}{H_M'(u)} \int_0^u H_M'(t)^2\, dt\right)^2 + |\xi|$$

de donde, por ser H_M' creciente, se sigue

$$\frac{1}{2} \int \langle AH_M'(u)\nabla u, H_M'(u)\nabla u\rangle\, \eta^2 \le 2 \int \langle A\nabla\eta, \nabla\eta\rangle\, (uH_M'(u))^2 + |\xi|$$

Notemos que $H_M'(u)\nabla u = \nabla(H_M(u))$, entonces la desigualdad

$$(4.7) \qquad \int |\nabla_\lambda(H_M(u))|^2\, v\, \eta^2 \le 4 \int |\nabla_\lambda \eta|^2\, w\, (uH_M'(u))^2 + 2\, |\xi|$$

es una consecuencia de la elipticidad.

Ahora, dados s y t tal que $\frac{1}{2} \le s < t < 1$, elegimos η tal que $\eta \equiv 1$ en sQ , $\eta \equiv 0$ fuera de tQ y $|\nabla_\lambda \eta| \le \frac{C}{(t-s)R}$ (para la existencia de tal función ver [FL2], pág. 537). Luego de (4.7)

$$\int_{sQ} |\nabla_\lambda(H_M(u))|^2\, v \le \frac{C}{(t-s)^2 R^2} \int_{tQ} (uH_M'(u)^2\, w - 2\, |\xi|$$

Entonces, aplicando la desigualdad de Poincaré a $H_M(u)$ en sQ y combinando con la desigualdad anterior tenemos

$$(4.8) \qquad \left(\frac{1}{w(sQ)}\int_{sQ} \left|H_M(u) - \frac{1}{w(sQ)}\int_{sQ} H_M(u)\, w\right|^{2\sigma} w\right)^{\frac{1}{2\sigma}}$$

$$\leq \frac{c\; s}{(t-s)} \left(\frac{w(tQ)}{v(sQ)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{w(tQ)}\int_{tQ} (uH_M'(u))^2\, w\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{C\; sR}{v(sQ)^{1/2}}\, |\xi|^{1/2}$$

Ahora bien

$$\frac{w(tQ)}{v(sQ)} \leq \frac{w(Q)}{v(\frac{1}{2}Q)} \leq c\, \frac{w(Q)}{v(Q)} = c\, \mu^2$$

por otra parte, como H_M' es creciente y $H_M(u) = H_M(u) - H_M(o) = H_M'(z)\, u$ para algún $z \in [0,u]$, tenemos

$$\frac{1}{w(sQ)}\int_{sQ} H_M(u)\; w \leq \frac{1}{w(sQ)}\int_{sQ} u\; H_M'(u)\; w$$

$$\leq \left(\frac{1}{w(sQ)}\int_{tQ} (u\; H_M'(u))^2\; w\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \left(\frac{w(tQ)}{w(sQ)}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{w(tQ)}\int_{tQ} (u\; H_M'(u))^2\; w\right)^{\frac{1}{2}}$$

De las desigualdades precedentes y de (4.8) sigue que

$$\left(\frac{1}{w(sQ)}\int_{sQ} (H_M(u_{k_j}))^{2\sigma} w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq C\left(\mu\, \frac{s}{t-s} + \left(\frac{w(tQ)}{w(sQ)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{w(tQ)}\int_{tQ} (u_{k_j}\, H_M'(u_{k_j})^2\, w\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \frac{C\; sR}{w(sQ)^{1/2}}\, |\xi_{k_j}|^{\frac{1}{2}} .$$

Ahora, tomando límite inferior para una subsucesión $\{u_{k_j}\}$ que converja u en c.t.p. y aplicando el lema de Fatou en el miembro izquierdo tenemos

$$\left(\frac{1}{w(sQ)}\int_{sQ}(H_M(u))^{2\sigma}\,w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \le C\left(\mu\,\frac{s}{t-s}+\left(\frac{w(tQ)}{w(sQ)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\,\frac{\lim}{j}\,\left(\frac{1}{w(tQ)}\int_{tQ}(u_{k_j}\,H'_M(u_{k_j}))^2 w\right)^{\frac{1}{2}}$$

por otra parte, teniendo en cuenta que $|u_{k_j}H'_M(u_{k_j}) - u\,H'_M(u)|^2 \le 2(|u_{k_j}-u|^2$ $(H'_M(u))^2 + |u|^2\,(H'_M(u_{k_j}) - H'_M(u)|^2)$ y la continuidad y acotación de H'_M, obtenemos

$$(4.9)\qquad \left(\frac{1}{w(sQ)}\int_{sQ}(H_M(u))^{2\sigma} w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \le C\left(\mu\,\frac{s}{t-s}+\left(\frac{w(tQ)}{w(sQ)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{w(tQ)}\int_{tQ}(u\,H'_M(u))^2\,w\right)^{\frac{1}{2}}$$

Luego, como $\left(\frac{w(tQ)}{w(sQ)}\right)^{1/2} \le C\,\mu$, $\frac{s}{t-s}+1 \le \frac{2s}{t-s}$, $uH'_M(u) \le u\,\beta u^{\beta-1} = \beta u^{\beta}$ y $H_M(u) \ge u^{\beta}\,\chi_{\{u\le M\}}$, para $M \to \infty$ obtenemos (4.3) . Ahora veamos (4.4). Sin pérdida de generalidad, tomando $u \ge \varepsilon$ en lugar de u , podemos suponer que $u > \varepsilon$ para un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ fijo. Sea $\{u_k\}$ una sucesión en $Lip(\bar{Q})$ que converge a u en $H(Q)$ y tal que $u_k \ge \varepsilon$ $\forall\, k$. Con η como antes y además no negativa, para $\beta \le 1$, definimos

$$\phi_k(k) = \eta^2(x)\;u_k^{\beta}(x)$$

Notemos que cada u_k^{β} es acotada y tiene derivadas acotadas, además $\phi_k \ge 0$ y $\phi_k \in Lip_o(Q)$. También, sepuede demostrar que la sucesión $\{\|\phi_k\|_o\}$ está acotada. En efecto, tenemos

$$(4.10)\qquad \nabla\phi_k = 2\eta\;u_k^{\beta}\;\nabla\eta + \beta\eta^2\;u_k^{\beta-1}\;\nabla u_k \quad ,$$

entonces

$$\begin{aligned}\|\phi_k\|_o &= \int \langle A\nabla\phi_k,\nabla\phi_k\rangle \\ &= \int (\beta\;u_k^{\beta-1}\;\eta^2)^2\;\langle A\nabla u_k,\nabla u_k\rangle + \int 4\eta^3\;u_k^{2\beta-1}\;\langle A\nabla u_k,\nabla\eta\rangle \\ &\quad + \int (2\eta\;u_k^{\beta})^2\;\langle A\nabla\eta,\nabla\eta\rangle \\ &= I + II + III\end{aligned}$$

ahora bien, con estimaciones similares a las anteriores tenemos que

$$\mathrm{I} \quad \leq \beta^2 \;\|\beta\|_\infty^4\; \varepsilon^{2(\beta-1)} \int <A\nabla u_k, \nabla u_k> \;\leq\; \beta^2 \;\|\eta\|_\infty^4\; \varepsilon^{2(\beta-1)} \;\|u_k\|^2$$

$$\mathrm{II} \quad \leq 4 \;\|\eta\|_\infty^3\; \varepsilon^{\beta-1} \;|\beta| \int u_k <A\nabla u_k, \nabla\eta>$$

$$\leq 4 \;\|\eta\|_\infty^3\; \varepsilon^{\beta-1} \;|\beta| \;\|\,|\nabla_\lambda \eta|\,\|_\infty \left(\int u_k^2 \, w\right)^{1/2} \left(\int <A\nabla u_k, \nabla u_k>\right)^{1/2}$$

$$\leq 4 \;\|\eta\|_\infty^3\; \varepsilon^{\beta-1} \;|\beta| \;\|\,|\nabla_\lambda \eta|\,\|_\infty \;\|u_k\|^2$$

$$\mathrm{III} \leq 4 \;\|\eta\|_\infty^1 \int u_k^{2(\beta-1)} \; u_k^2 <A\nabla\eta, \nabla\eta>$$

$$\leq 4 \;\|\eta\|_\infty^2\; \varepsilon^{2(\beta-1)} \int u_k^2 <A\nabla\eta, \nabla\eta>$$

$$\leq 4 \;\|\eta\|_\infty^2\; \varepsilon^{2(\beta-1)} \;\|\,|\nabla_\lambda \eta|\,\|_\infty \;\|u_k\|$$

así, finalmente

$$\|\phi_k\|_o^2 \leq C \;\|u_k\|^2$$

donde C depende de $\|\eta\|_\infty$ $\|\,|\nabla_\lambda \eta|\,\|_\infty$ y ε . Luego, como $\{\|u_k\|^2\}$ es una sucesión acotada, tenemos que $\{\|\phi_k\|_o^2\}$ está acotada, por consiguiente existe una subsucesión $\{\phi_{k_j}\}$ que converge débilmente en $H_o(\Omega)$ a cierta ϕ . Entonces, como $a_o(u.\cdot)$ es un funcional lineal continuo en $H_o(\Omega)$ y u es solución, tenemos

$$o = a_o(u,\phi) = \lim_j \xi_{k_j}$$

donde

$$\xi_{k_j} = \int <A\nabla u_{k_j}, \nabla\phi_{k_j}>$$

Momentáneamente obviaremos los subíndices. De la fórmula (4.10) y

$$\nabla(u^{(\beta+1)/2}) = \frac{\beta+1}{2} u^{(\beta-1)/2} \nabla u$$

obtenemos para $\beta \neq -1$

$$\frac{\beta}{\beta+1} \int <A\nabla(u^{(\beta+1)/2}),\nabla(u^{(\beta+1)/2})> \eta^2 = \frac{\beta}{\beta+1} \int \left(\frac{\beta+1}{2}\right)^2 u^{\beta-1} <A\nabla u,\nabla u> \eta^2$$

$$= \frac{\beta}{2} \frac{\beta+1}{2} \int u^{\beta-1} <A\nabla u,\nabla u> \eta^2$$

$$= \frac{\beta+1}{4} \int <A\nabla u,\nabla\phi> - \frac{\beta+1}{4} \int <A\nabla u,2\eta\, u^{\beta}\, \nabla\eta>$$

$$= \frac{\beta+1}{4}\, \xi - \frac{1}{2}\int \frac{\beta+1}{2} u^{(\beta-1)/2}\, u^{(\beta+1)/2} <A\nabla u,\nabla\eta>\, 2\eta$$

$$= \frac{\beta+1}{4}\, \xi - \int <A\nabla(u^{(\beta+1)/2}),\nabla\eta>\, \eta\, u^{(\beta+1)/2}$$

Luego, tomando valor absoluto

$$\frac{|\beta|}{|\beta+1|} \int <A\nabla(u^{(\beta+1)/2}),\nabla(u^{(\beta+1)/2}> \eta^2 \leq \int |<A\nabla(u^{(\beta+1)/2}),\nabla\eta>|\, u^{(\beta+1)/2}\, \eta + C_\beta|\xi|$$

Aplicando (4.6) con $\varepsilon = \dfrac{|\beta|}{|\beta+1|}$ $(-\infty < \beta \leq 1\ ,\ \beta \neq 0,-1)$, obtenemos

$$\int <A\nabla(u^{(\beta+1)/2}),\nabla(u^{(\beta+1)/2})> \eta^2 \leq \left(\frac{\beta+1}{\beta}\right)^2 \int <A\nabla\eta,\nabla\eta>\, u^{\beta+1} + C_\beta|\xi|$$

Entonces, el mismo razonamiento hecho para obtener (4.9) nos conduce a

$$\left(\frac{1}{w(sQ)} \int_{sQ} u_{k_j}^{(\beta+1)\sigma}\, w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \leq C\left(\mu\, \frac{|\beta+1|}{|\beta|}\, \frac{s}{t-s} + \left(\frac{w(tQ)}{w(sQ)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{w(tQ)} \int_{tQ} u_{k_j}^{\beta+1}\, w\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$+ C_\beta\, \frac{sR}{v(sQ)^{1/2}}\, |\xi_{k_j}|^{\frac{1}{2}}$$

Ahora, tomando límite inferior para una subsucesión $\{u_{k_j}\}$ que converja a u en c.t.p. y aplicando el lema de Fatou en el miembro izquierdo tenemos

$$\left(\frac{1}{w(sQ)}\int_{sQ} u^{(\beta+1)\sigma}\,w\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \le C\left(\mu\,\frac{|\beta+1|}{|\beta|}\,\frac{s}{s+1}+\left(\frac{w(tQ)}{w(sQ)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\varliminf_{j}\left(\frac{1}{w(tQ)}\int_{tQ} u_{k_j}^{\beta+1}\,w\right)^{\frac{1}{2}}$$

Por otra parte, notemos que si $\beta+1<0$, luego $\{u_{k_j}^{\beta+1}\}$ está uniformemente acotada por $\varepsilon^{\beta+1}$ y converge puntualmente a $u^{\beta+1}$, mientras que si $0<\beta+1\le 2$, $\{u_{k_j}\}$ converge a u en $L^{\beta+1}(Q,wdx)$, puesto que lo hace en $L^2(Q,wdx)$, así, en cualquiera de esos casos, obtenemos (4.4).

La técnica de iteración de Moser nos permite obtener el siguiente resultado

(4.11) <u>Lema</u>: Sean Q , u y μ como en el Lema (4.2). Sea $\alpha\in[\frac{1}{2},1)$. Entonces existen constantes C_1 y C_2 que sólo dependen de las constantes en (1.3) y (2.2) tales que

$$\sup_{\alpha Q} u^p \le \frac{C_1(\mu p)^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}}}{(1-\alpha)^{C_2}}\,\frac{1}{w(Q)}\int_Q u^p\,w \qquad \text{para } p\ge 2 \tag{4.12}$$

$$\sup_{\alpha Q} u^p \le \frac{C_1}{(1-\alpha)^{C_2}}\left(\mu\,|p|+\left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^{1/2}\right)^{\frac{2\sigma^2}{\sigma-1}}\left(\frac{1}{w(Q)}\int_Q u^p\,w\right) \tag{4.13}$$

para $p<2$.

<u>Demostración</u>: Sea $p\ge 2$. Elevando ambos miembros de (4.3) a $\frac{1}{\beta}$ y tomando $r=2\beta$ obtenemos

$$\left(\frac{1}{w(sQ)}\int_{sQ} u^{\sigma r}\,w\right)^{\frac{1}{\sigma r}} \le \left(C\,\mu\,r\,\frac{s}{t-1}\right)^{\frac{2}{r}}\left(\frac{1}{w(tQ)}\int_{tQ} u^{r}\,w\right)^{\frac{1}{r}} \qquad r\ge 2 \tag{4.14}$$

Iterando (4.14) para t y s con valores en la sucesión y r en $\{\sigma^j p\}$ la desigualdad (4.12) sigue de la estimación

$$\prod_{j=0}^{\infty}\left(C\,p\,\mu\,\sigma^j\,\frac{t_{j+1}}{t_j-t_{j+1}}\right)^{\frac{2}{\sigma^i p}} \leq \left(\frac{C_1(\mu p)^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}}}{(1-\alpha)^{C_2}}\right)^{1/p}$$

Veamos que esta acotación es cierta. En efecto, indicando

$$a_j = \frac{t_{j+1}}{t_j-t_{j+1}} = \frac{(\alpha(j+1)+1)(j+1)}{1-\alpha}$$

$$\prod_{j=0}^{\infty}(C\,p\,\mu\,\sigma^j\,a_j)^{\frac{2}{\sigma^j p}} = \prod_{j=0}^{\infty}(C\,\mu\,p)^{\frac{2}{\sigma^j p}}\prod_{j=0}^{\infty}\sigma^{\frac{2j}{\sigma^j p}}\prod_{j=0}^{\infty}a_j^{\frac{2}{\sigma^j p}}$$

Estimamos cada uno de los tres factores

$$\prod_{j=0}^{\infty}(C\,\mu\,p)^{\frac{2}{\sigma^j p}} = (C\,\mu\,p)^{\frac{2}{p}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{\sigma^j}} = (C\,\mu\,p)^{\frac{2}{p}\frac{\sigma}{\sigma-1}}$$

$$\prod_{j=0}^{\infty}\sigma^{\frac{j2}{\sigma^j p}} = \sigma^{\frac{2}{p}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{j}{\sigma^j}} \leq \sigma^{\frac{4}{p\log\sigma}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sigma^{\frac{j}{2}}}{\sigma^j}} = \sigma^{\frac{4}{p\log\sigma}\frac{\sigma^{1/2}}{\sigma^{1/2}-1}}$$

finalmente

$$\prod_{j=0}^{\infty}a_j^{\frac{2}{\sigma^j p}} = e^{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2}{\sigma^j p}\log a_j}$$

$$= e^{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2}{\sigma^j p}\log\frac{(\alpha(j+1)+1)(j+1)}{1-\alpha}}$$

$$\leq e^{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2}{\sigma^j p}\log\left(\frac{(j+2)(j+1)}{1-\alpha}\right)}$$

$$\leq e^{\sum_{j=0}^{\infty}\frac{2}{\sigma^j p}\log\frac{(j+2)^2}{1-\alpha}}$$

$$= e^{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{2}{\sigma^j p}\left(2(j+2) + \log \frac{1}{1-\alpha}\right)}$$

$$\le e^{\frac{4}{p}\frac{2}{\log\sigma}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\sigma^{\frac{j+2}{2}}}{\sigma^j}}\; e^{\frac{2}{p}\frac{\sigma}{\sigma-1}\log\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$= e^{\frac{8}{p\log\sigma}\,\sigma\,\frac{\sigma^{1/2}}{\sigma^{1/2}-1}}\; e^{\frac{2}{p}\frac{\sigma}{\sigma-1}\log\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$\le e^{\frac{1}{p}\left(\frac{8}{\log\sigma}\frac{\sigma^{3/2}}{\sigma^{1/2}-1} + \frac{2\sigma}{\sigma-1}\right)\log\frac{1}{1-\alpha}}$$

$$= \frac{1}{(1-\alpha)^{C_2/p}}$$

con lo que queda demostrada la acotación y con ella (4.12).

Veamos ahora (4.13). Haciendo $r = \beta + 1$ en (4.4) y elevando ambos miembros a $\frac{1}{|r|}$ obtenemos la siguiente desigualdad para r en $(-\infty,2] - \{0,1\}$

$$(4.15)\qquad \left(\frac{1}{w(sQ)}\int_{sQ} u^{\sigma r}\, w\right)^{\frac{1}{\sigma|r|}} \le \left(C\left(\mu\,\frac{|r|}{|r-2|}\,\frac{s}{t-s} + \left(\frac{w(tQ)}{w(sQ)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{2}{|r|}}\left(\frac{1}{w(tQ)}\int_{tQ} u^r\, w\right)^{\frac{1}{|r|}}$$

Ahora sólo resta aplicar un argumento de iteración con s , t y r como antes y $p \in (-\infty,2] - \{0,1\}$ dado . Si $p > 0$ la sucesión $r_j = \sigma^j p$ decrece a $-\infty$ y (4.15) vale para cualquiera de esos valores de r .

El valor límite del miembro izquierdo de (4.15) es entonces $\sup_{\alpha Q} u^{-1}$. Si $a_j = \frac{t_{j+1}}{t_{j+1} - t_j}$, el producto infinito de las constantes es

$$\prod_{j=0}^{\infty}\left(C\left(\mu\,\frac{\sigma^j a_j |p|}{|\sigma^j p-1|} + \left(\frac{w(t_{j+1}Q)}{w(t_jQ)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{1}{\sigma^j|p|}}$$

que está acotado por

$$\prod_{j=0}^{\infty}\left(C\left(\mu|p|\,\sigma^{j}a_{j}+\left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{2}{\sigma^{j}|p|}}$$

pues $|\sigma^{j}p-1|\geq 1$ y $\left(\frac{w(t_{j+1}Q)}{w(t_{j}Q)}\right)^{\frac{1}{2}}\leq\left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^{\frac{1}{2}}$, $\forall\, j\geq 0$. A su vez como $\sigma^{j}a_{j}\geq 1$, $\forall\, j$, esto está acotado por

$$\prod_{j=0}^{\infty}\left(C\left(\mu|p|+\left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\sigma^{j}\,\alpha_{j}\right)^{\frac{2}{\sigma^{j}|p|}}$$

Razonando como en el lema precedente se puede ver que la última expresión menor o igual que

$$\left(\frac{C_{1}\left(\mu|p|+\left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^{1/2}\right)^{2\sigma/\sigma-1}}{(1-\alpha)^{C_{2}}}\right)^{1/|p|}$$

dibde C_1 y C_2 depende sólo de las constantes de (1.3) y (2.2). Así obtenemos la conclusión (4.13) para $p<0$. Veamos ahora dicha desigualdad para $p>0$

Supongamos primero que p es de la forma $2(\sigma+1)^{-1}\,\sigma^{-k_{o}}$ con $k_{o}\in\mathbb{Z}$ fijo. Sea $j_{o}\in\mathbb{N}$ tal que $\sigma^{j_{o}-k_{o}}>\sigma+1\geq\sigma^{j_{o}-1-k_{o}}$. Ahora aplicamos el argumento de iteración utilizando (4.15) para $r=p,\sigma p,\dots,\sigma^{j_{o}-1}p$ y (4.14) para $r=\sigma^{j}p$ con $j\geq j_{o}$. El valor límite del miembro izquierdo es ahora $\sup\limits_{\alpha Q} u$ y , con $a_{j}=\frac{t_{j+1}}{t_{j+1}-t_{j}}$, el producto de las constantes es

$$\prod_{j=0}^{j_{o}-1}\left(C\left(\mu\,\frac{\alpha^{j}a_{j}\,p}{|\sigma^{j}p-1|}+\left(\frac{w(t_{j+1}Q)}{w(t_{j}Q)}\right)^{1/2}\right)\right)^{2/\sigma^{j}p}\prod_{j=j_{o}}^{\infty}(C\,p\,\mu\,\sigma^{j}a_{j})^{2/\sigma^{j}p}\,.$$

Dado que $|\sigma^{j}p-1|=\left|\frac{2\sigma^{j-k_{o}}}{\sigma+1}-1\right|$ supera a una constante fija positiva y

$$1 \leq \left(\frac{w(t_{j+1}Q)}{w(t_jQ)}\right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^{\frac{1}{2}} \qquad \forall\, j$$

el producto anterior está acotado por

$$\prod_{j=0}^{\infty} \left(C\left(\mu\, p + \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^{\frac{1}{2}}\right) \sigma^j\, a_j\right)^{\frac{2}{\sigma^j p}}$$

donde C sólo depende de las constantes de (1.3) y (2.2). Esto demuestra (4.13) para p de la forma $2/((\sigma+1)\sigma^k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Ahora dado un p cualquiera en $(0,2)$, existe $k_o \in \mathbb{Z}$ tal que $2/((\sigma+1)\sigma^{k_o}) \leq p < 2/((\sigma+1)\sigma^{k_o-1})$. Luego, aplicando la conclusión recién obtenida para $2/((\sigma+1)\sigma^{k_o})$ tenemos

$$\sup_{\alpha Q} u \leq \left(\frac{C_1}{(1-\alpha)^{C_2}} \left(\mu\, \frac{2}{(\sigma+1)\sigma^{k_o}} + \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)\right)^{\frac{(\sigma+1)\sigma^{k_o}}{2}}$$

$$\times\left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q u^{\frac{2}{(\sigma+1)\sigma^{k_o}}}\, w\right)^{\frac{(\sigma+1)\sigma^{k_o}}{2}}$$

de donde, aplicando la relación entre p y $\frac{2}{(\sigma+1)\sigma^{k_o}}$, y la desigualdad de Hölder, se sigue

$$\sup_{\alpha Q} u \leq \left(\frac{C_1}{(1-\alpha)^{C_2}} \left(\mu\, p + \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{2\sigma}{\sigma-1}}\right)^{\frac{\sigma}{p}} \left(\frac{1}{w(Q)} \int_Q u^p\, w\right)^{\frac{1}{p}}$$

Así queda demostrado el lema.#

(4.16) Lema: Sean Q como en el lema anterior y $u \in H(Q)$ una solución de $Lu = 0$ tal que $u \geq \varepsilon$ para algún $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, para $\alpha \in [\frac{1}{2},1)$ definimos $K = K(\alpha,u)$ por

$$\log K = \frac{1}{w(\alpha Q)} \int_{\alpha Q} \log u \; w$$

Entonces existe una constante C que depende sólo de las constantes de (1.4), (1.5) y (1.7) tal que para $t > 0$.

$$w\left(\left\{x \in \alpha Q / \left|\log \frac{u(x)}{K}\right| > t\right\}\right) \leq \frac{C}{(1-\alpha)} \frac{\mu}{t} w(\alpha Q)$$

Demostración: Sea $\eta \subset C_o^{\infty}(Q)$ tal que $\eta \equiv 1$ en αQ y $|\nabla_\lambda \eta| \leq \frac{1}{(1-\alpha)R}$, y sea $\{u_k\} \subset Lip(\bar{Q})$ tal que $u_k \geq \varepsilon \;\; \forall\, k$ y $u_k \to u$ en $H(Q)$. Ahora, para cada k , definimos $\phi_k = \eta^2/u_k$. Es claro que $\phi_k \in Lip_o(Q)$, además, razonando como en el lema (4.2) se demuestra que existe una subsucesión $\{\phi_{k_j}\}$ tal que $\xi_{k_j} := \int \langle A\nabla u_{k_j}, \nabla \phi_{k_j}\rangle \to 0$ cuando j tiende a infinito. Luego, teniendo en cuenta que $\nabla \phi_k = -\eta^2 u_k^{-2} \nabla u_k + 2\eta\, u_k^{-1} \nabla \eta$ y $\nabla(\log u) = \nabla u/u$, prescindiendo de los subíndices, tenemos

$$\int \langle A\nabla \log u, \nabla \log u\rangle \eta^2 = \int \langle A \frac{\nabla u}{u}, \frac{\nabla u}{u}\rangle \eta^2$$

$$= \int \langle A \nabla u, \frac{\eta^2}{u^2} \nabla u\rangle$$

$$= 2 \int \langle A\, \eta \frac{\nabla u}{u}, \nabla \eta\rangle - \xi$$

Entonces, tomando valor absoluto y aplicando (4.6) con $\varepsilon = \frac{1}{2}$, obtenemos

$$\int \langle A \nabla \log u, \nabla \log u\rangle \eta^2 \leq 4 \int \langle A \nabla \eta, \nabla \eta\rangle + 2\,|\xi|$$

De esta última desigualdad, utilizando la elipticidad y la definición de η , se sigue

$$\int_{\alpha Q} |\nabla_\lambda \log u|^2 \, v \leq \frac{C}{(1-\alpha)^2 R^2} \int_Q w + 2\,|\xi|$$

Luego, por la desigualdad de Poincaré (Teorema (2.8)) .

$$(4.17)\qquad \frac{1}{w(\alpha Q)}\int_{\alpha Q}\left|\log u-\frac{1}{w(\alpha Q)}\int_{\alpha Q}\log u\, w\right|^2 w\le \frac{C\,w(Q)}{(1-\alpha)^2\,v(Q)}+\frac{C\,R^2}{v(Q)}\,|\xi|$$

donde, recordemos $u=u_{k_j}$ y $\xi=\xi_{k_j}$. Dado que, por el teorema del valor medio, $|\log u_{k_j}-\log u|\le 1/\varepsilon\,|u_{k_j}-u|$, tenemos $\log u_{k_j}\to\log u$ en $L^2(Q,wdx)$. En consecuencia, tomando límite en (4.17) se obtiene

$$\frac{1}{w(\alpha Q)}\int_{\alpha Q}|\log u-\log K|^2\,w\le\frac{C\,\mu^2}{(1-\alpha)^2}$$

Finalmente, utilizando esta desigualdad, se obtiene para $t>0$

$$w\left(\left\{x\in\alpha Q/\left|\log\frac{u(x)}{K}\right|>t\right\}\right)\le\frac{1}{t}\int_{\alpha Q}\left|\log\frac{u(x)}{K}\right|w$$

$$\le\frac{1}{t}\,w(\alpha Q)^{1/2}\left(\int_{\alpha Q}\left|\log\frac{u(x)}{K}\right|^2 w\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\le\frac{C\,\mu\,w(\alpha Q)}{t\cdot(1-\alpha)}$$

lo que completa la demostración.

(4.18) Lema: Sea μ una constante positiva y f una función medible Borel, no negativa y acotada en una δ-bola $Q=Q(\bar{x},R)$ tal que para algún par de constantes positivas C_o y β satisface las siguientes condiciones

$$(4.19)\qquad \sup_{sQ} f^p\le\frac{C_o}{(t-s)^\beta}\,\frac{1}{w(tQ)}\int_{tQ} f^p\,w$$

para todo $p\in(0,\frac{1}{\mu})$ y para todos los s y t que verifican $\frac{1}{2}\le s<t\le 1$ donde $sQ=Q(\bar{x},sR)$

$$(4.20)\qquad w(\{x\in Q/\log f(x)>\xi\})\le\frac{C_o\,\mu\,w(Q)}{\xi}$$

para todo $\xi>0$

Entonces existe una constante positiva C tal que para $\alpha \in [\frac{1}{2},1)$ se verifica

$$(4.21) \qquad \sup_{\alpha Q} f \leq e^{\frac{C(8\beta)^{4\beta} C_o^3}{(1-\alpha)^{2\beta}} \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^2 \mu}$$

Basta demostrar (4.21) para $\mu = 1$, en efecto:

Demostración: reemplazar f por $f^{1/\mu}$ y ξ por $\xi\mu$. Sea $\alpha \in [\frac{1}{2},1)$ definimos, para $\alpha \leq \rho < 1$

$$\psi(\rho) = \sup_{\rho Q} \log f$$

Es claro que ψ es una función no decreciente. Veamos que

$$(4.22) \qquad \psi(\beta) \leq \frac{3}{4}\,\psi(r) + \frac{8\, C_o^3}{(r-\rho)^{2\beta}} \frac{w(Q)}{w(\alpha Q)} \qquad \alpha \leq \rho < r \leq 1$$

Para ello descomponemos rQ en los conjuntos $A_{1r} = \{\log f > \frac{1}{2}\,\psi(r)\}$ y $A_{2r} = \{\log f \leq \frac{1}{2}\,\psi(r)\}$, luego

$$\int_{rQ} f^p\, w = \int_{A_{1r}} f^p\, w + \int_{A2r} f^p\, w$$

$$\leq p \int_o^{+\infty} s^{p-1}\, w(\{x \in A_{1r}/f(x) > s\})\, ds + e^{[(p/2)\psi(r)]}\, w(A_{2r})$$

$$= p \int_o^{e^{[(\psi(r))/2]}} s^{p-1}\, w(\{x \in A_{1r}/f(x) > s\})\, ds$$

$$+ p \int_{e^{[(\psi(r))/2]}}^{+\infty} s^{p-1}\, w(\{x \in A_{1r}/f(x) > s\})\, ds$$

$$+ e^{[(p/2)\psi(r)]}\, w(A_{2r}) .$$

De la última desigualdad, teniendo en cuenta que $\log f \leq \psi(r)$ en rQ y aplicando (4.20), se sigue

$$(4.23)\qquad \int_{rQ} f^p\, w \leq p \int_0^{e^{(\psi(r)/2)}} s^{p-1}\, w(A_{1r})\, ds$$

$$+ p \int_{e^{(\psi(r)/2)}}^{e^{\psi(r)}} s^{p-1}\, w(\{x \in A_{1r}/f(x) > s\})\, ds$$

$$+ e^{[(p/2)\psi(r)]}\, w(A_{2r})$$

$$\leq w(A_{1r})\, e^{[(p/2)\psi(r)]} + w(x \in Q/\log f(x) > \tfrac{\psi(r)}{2}\})\, e^{p\psi(r)}$$

$$+ w(A_{2r})\, e^{[(p/2)\psi(r)]}$$

$$\leq \frac{2\, C_o}{\psi(r)}\, w(Q)\, e^{p\psi(r)} + w(Q)\, e^{[(p/2)\psi(r)]}$$

Supongamos que

$$(4.24)\qquad \psi(r) > 2C_o$$

y elijamos p de manera que $e^{[(p/2)\psi(r)]} = \frac{2\, C_o}{\psi(r)}\, e^{p\psi(r)}$, esto es $p = \frac{2}{\psi(r)} \log \frac{\psi(r)}{2\, C_o}$ es claro que $0 < p < \mu^{-1} = 1$. En este caso, de (4.23)

$$\int_{rQ} f^p\, w \leq 2\, w(Q)\, e^{[(p/2)\psi(r)]}$$

Luego, de (4.19)

$$\psi(\rho) \leq \frac{1}{p} \log\left(\frac{2\, C_o}{(r-\rho)^\beta}\, \frac{e^{[(p\psi(r))/2]}}{w(rQ)}\, W(Q)\right)$$

$$= \frac{1}{p} \log\left(\frac{2\, C_o}{(r-\rho)^\beta}\, \frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right) + \frac{\psi(r)}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\, \psi(r) \left(\frac{\log\left(\frac{2\, C_o}{(r-\rho)^\beta}\, \frac{w(Q)}{w(rQ)}\right)}{\log \frac{\psi(r)}{2\, C_o}} + 1\right)$$

Si $\psi(r)$ es suficientemente grande como para que el primer sumando entre paréntesis sea menor que $\frac{1}{2}$, esto es si

$$(4.25) \qquad \psi(r) > \frac{8\ C_o^3}{(r-\rho)^{2\beta}} \left(\frac{w(Q)}{w(rQ)}\right)^2$$

luego $\psi(\rho) < \frac{3}{4}\ \psi(r)$. Ahora bien, si (4.24) o (4.25) no se cumple, tenemos

$$\psi(r) \leq \frac{8\ C_o^3}{(r-\rho)^{2\beta}} \left(\frac{w(Q)}{w(rQ)}\right)^2 \leq \frac{8\ C_o^3}{(r-\rho)^{2\beta}} \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^2$$

para $\alpha \leq \rho < \leq 1$. Luego, como $\psi(\rho) \leq \psi(r)$, en cualquiera de los casos considerados vale (4.22). La iteración de esta desigualdad para cualquier sucesión

$$\alpha \leq \rho_o < \rho_1 < \ldots < \rho_k \leq 1$$

nos lleva a

$$\psi(\rho_o) \leq \left(\frac{3}{4}\right)^k \psi(\rho_k) + 8\ C_o^3 \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^2 \sum_{j=0}^{k-1} \left(\frac{3}{4}\right)^j \frac{1}{(\rho_{i+1} - \rho_j)^{2\beta}}$$

de donde, haciendo tender k a infinito, obtenemos

$$\psi(\alpha) \leq \psi(\rho_o) \leq 8\ C_o^3 \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^j \frac{1}{(\rho_{j+1} - \rho_j)^{2\beta}} \quad .$$

Luego, tomando $\rho_j = 1 - \frac{(1-\alpha)}{1+j}$, $j \leq 0$, tenemos

$$\psi(\alpha) \leq \frac{8\ C_o^3}{(1-\alpha)^{2\beta}} \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^j \Big((1+j)(2+j)\Big)^{2\beta}$$

$$\leq \frac{8\ C_o^3}{(1-\alpha)^{2\beta}} \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^j (2+j)^{4\beta}$$

$$\leq \frac{8\, C_o^3}{(1-\alpha)^{2\beta}} \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^j (8\beta)^{4\beta} \left(\frac{4}{3}\right)^{(2+j)/2}$$

$$= \frac{32}{3} \frac{C_o^3\, (8\beta)^{4\beta}}{(1-\alpha)^{2\beta}} \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^2 \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{j/2}$$

$$= \frac{1}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^{1/2}} \frac{32}{3} \frac{C_o^3\, (8\beta)^{4\beta}}{(1-\alpha)^{2\beta}} \left(\frac{w(Q)}{w(\alpha Q)}\right)^2$$

con lo que queda probada la tesis.#

Demostración de la Desigualdad de Harnack (Teorema (4.1)): Sin pérdida de generalidad, tomando $u+\varepsilon$, en lugar de u, podemos suponer que $u \geq \varepsilon$ para un $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ fijo. El Lema (4.11) nos asegura que u está acotada sobre αQ para $\alpha \in (0,2)$. Por otra parte, para $\frac{1}{2} \leq s < t \leq 1$ y $0 < |p| < \frac{1}{\mu}$, aplicando el Lema (4.11) en $t\frac{3}{2}Q$ con $\alpha = \frac{s}{t}$ se tiene

$$\sup_{s\frac{3}{2}Q} u^p \leq \frac{C_1}{(t-s)^{C_2}} \left(\mu|p| + \left(\frac{w(t\frac{3}{2}Q)}{w(s\frac{3}{2}Q)}\right)^{1/2}\right)^{\frac{2\sigma^2}{\sigma-1}} \frac{1}{w(t\frac{3}{2}Q)} \int_{t\frac{3}{2}Q} u^p\, w$$

donde $Q = Q(\tilde{x},R)$ y $\mu = \left(\frac{w(\frac{3}{2}Q)}{v(\frac{3}{2}Q)}\right)^{1/2}$. Luego

$$\sup_{s\frac{3}{2}Q} u^p \leq \frac{C_1}{(t-s)^{C_2}} \left(1 + \left(\frac{w(\frac{3}{2}Q)}{w(\frac{3}{4}Q)}\right)^{1/2}\right)^{\frac{2\sigma^2}{\sigma-1}} \frac{1}{w(t\frac{3}{2}Q)} \int_{t\frac{3}{2}Q} u^p\, w$$

$$\leq \frac{C}{(t-s)^{C_2}} \left(\frac{w(\frac{3}{2}Q)}{w(\frac{3}{4}Q)}\right)^{\frac{\sigma^2}{\sigma-1}} \frac{1}{w(t\frac{3}{2}Q)} \int_{t\frac{3}{2}Q} u^p\, w \qquad \frac{1}{2} \leq s < t \leq 1 \,,$$

Esta desigualdad proporciona la condición (4.19) del lema anterior para u y u^{-1}. Ahora, aplicando el lema (4.16) con $\alpha = \frac{3}{4}$ y $2R$ en lugar de R, resulta

$$w\left(\left\{x \in \frac{3}{2} Q / \left|\log \frac{u(x)}{K}\right| > t\right\}\right) \leq C \, \frac{\mu}{t} \, w\left(\frac{3}{2} Q\right)$$

con $\mu = \left(\frac{w(2Q)}{v(2Q)}\right)^{1/2}$ que es la hipótesis (4.20) del lema precedente para $\frac{u}{K}$ y $\frac{K}{u}$. Luego, de ese lema aplicado a $\frac{u}{K}$ y $\frac{K}{u}$, se sigue que tanto $\sup\limits_{\alpha\frac{3}{2}Q} \frac{u}{K}$ como $\sup\limits_{\alpha\frac{3}{2}Q} \frac{K}{u}$ están acotados por

$$e^{\frac{C(8C_2)^{4C_2}}{(1-\alpha)^{2C_2}} \left(\frac{w(\frac{3}{2} Q)}{w(\frac{3}{2} Q)}\right)^{\frac{3\sigma^2}{\sigma-1}} \left(\frac{w(\frac{3}{2} Q)}{w(\frac{3}{2} Q)}\right)^{2} \left(\frac{w(\frac{3}{2} Q)}{v(\frac{3}{2} Q)}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

para $\alpha \in [\frac{1}{2}, 1)$ Entonces, para $\alpha = \frac{2}{3}$

$$\sup_Q u \leq e^{C \left(\frac{w(\frac{3}{2} Q)}{w(\frac{3}{4} Q)}\right)^{\frac{3\sigma^2 + 2\sigma - 2}{\sigma-1}} \left(\frac{w(\frac{3}{2} Q)}{v(\frac{3}{2} Q)}\right)^{\frac{1}{2}}} \inf_Q u$$

con lo que queda demostrado el teorema.

§.2 Continuidad de Soluciones

En esta sección indicaremos con

$$\mu(x,r) = \left(\frac{w(\frac{3}{2} Q)}{v(\frac{3}{4} Q)}\right)^{\frac{2\sigma^2 + 2\sigma - 2}{\sigma-1}} \left(\frac{w(\frac{3}{2} Q)}{v(\frac{3}{2} Q)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

donde $Q = Q(x,r)$. Sea u una solución de $Lu = 0$ en una δ-bola Q_o.

Con un razonamiento análogo al de [ChW2], mediante un proceso iterativo similar a los aplicados en la sección anterior, se puede demostrar que u es acotada en cualquier δ-bola $Q(x,r)$ tal que $Q(x,2r) \subset Q_0$. Así oscilación

$$\omega(x,r) = \sup_{Q(x,r)} u - \inf_{Q(x,r)} u$$

de u sobre $Q(x,r)$, es finita. Ahora, aplicando la desigualdad de Harnack a las soluciones no negativas $\sup_{Q(x,r)} u - u$ y $u - \inf_{Q(x,r)} u$, tenemos

$$(4.26) \qquad w(x,\tfrac{r}{2}) \le \frac{e^{C\,\mu(x,r)} - 1}{e^{C\,\mu(x,r)} + 2}\, w(x,r)$$

(4.27) <u>Teorema</u>: Bajo las condiciones precedentes, tenemos

(4.28) Si $\mu(x,r)$ está uniformemente acotada luego u es Hölder continúa con respecto a la distancia usual, a d y a δ.

(4.29) Si $\mu(x,r) = O(\log\log \frac{1}{r})$ cuando $r \to 0$ uniformemente en x entonces u es continua.

<u>Demostración</u>: La afirmación (4.28) para δ se demuestra con el argumento usual de Moser, por iteración de

$$\omega(x,\tfrac{r}{2}) \le \frac{e^{C} - 1}{e^{C} + 1}\, \omega(x,r)$$

que se obtiene de (4.26) y de la acotación uniforme de $\mu(x,r)$. El resultado para d y la métrica usual sigue de (1.12) y (1.17) respectivamente. El resultado enunciado en (4.29) se obtiene con un razonamiento similar al utilizado por Chanillo y Wheeden.#

CAPITULO V

Existencia y Propiedades de la Función de Green

En este capítulo nos ocuparemos de probar existencia y estimaciones de la función de Green asociada al operador diferencial L de (3.1). Esta es una función $G(x,y) = G_y(x)$ para $x \in S$ e $y \in \frac{1}{2} S$, que se anula en cierta forma en ∂S y tal que

$$\int_S \langle A\nabla G_y, \nabla\psi\rangle = \psi(y)$$

para toda $\psi \in Lip_0(S)$, donde S es una d-bola tal que $12\, aS \subset \Omega$. Además veremos como se puede usar la función de Green para representar las soluciones de problemas del tipo de (3.23) y (3.24).

Los resultados precedentes son una generalización de, entre otros, los logrados por Chanillo y Wheeden en [ChW3] (Teoremas (1.3) y (1.8)) para la métrica euclídea. Nuestras técnicas extienden las usadas por dichos autores a la geometría particular asociada al operador L.

En la Sección 1 se obtienen estimaciones para una aproximación de la función de Green y en la Sección 2 para su λ-gradiente. En la Sección 3 se prueba la existencia de la función Green y se aplica a la representación de soluciones. Finalmente, en la Sección 4, se estudia el tamaño y regularidad de la función de Green.

§.1 Estimaciones para la función de Green aproximada

Sea S una d-bola tal que $2\, aS \subset \Omega$. Dados $y \in S$ y $\rho > 0$ tal que $Q_\rho = Q(y,\rho) \subset S$ definimos en $H_0(S)$ el funcional

$$\psi \to \frac{1}{w(Q_\rho)} \int_{Q_\rho} \psi\, w$$

Es claro, a partir de la desigualdad de Sobolev (Teorema (2.6)) que, dicho funcional es lineal y continuo en $H_o(S)$. Luego, como $H_o(S)$ es un espacio de Hilbert con producto interno $a_o(\cdot,\cdot)$, existe una única $G^\rho_y \in H_o(S)$ tal que

(5.1) $$a_o(G^\rho_y,\psi) = \frac{1}{w(Q_\rho)}\int_{Q_\rho} \psi\, w$$

para todo $\psi \in H_o(S)$

(5.2) Definición: Nos referiremos a $G^\rho_y = G^\rho(\cdot,y)$, como la función de Green ρ-aproximada para S con polo y . Cuando no haya dudas sobre el polo, utilizaremos la notación G^ρ .

(5.3) Lema: G^ρ es no negativa en S en el sentido de $H(S)$.

Demostración: Tomemos una sucesión $\{G^\rho_k\} \subset Lip_o(S)$ que converja a G^ρ en $H_o(S)$. Notemos que como $\nabla|G^\rho_k| = sg(G^\rho_k)\ \nabla G^\rho_k$ $\{|G^\rho_k|\}$ es acotada en $H_o(S)$. Luego existe una subsucesión $\{|G^\rho_{k_j}|\}$ que converge débilmente a una función h en $H_o(S)$. Entonces de (5.1) tenemos

$$a_o(G^\rho,h-G^\rho) = \lim a_o(G^\rho,|G^\rho_{k_j}| - G^\rho_{k_j})$$

$$= \lim \frac{1}{w(Q_\rho)}\int_{Q_\rho} (|G^\rho_{k_j}| - G_{k_j})\ w \geq 0$$

lo que, a su vez, implica $a_o(G^\rho,h) \geq a_o(G^\rho,G^\rho)$. La última desigualdad, dado que $a_o(G^\rho,G^\rho) \geq 0$, asegura que existe $\theta \in (0,1]$ tal que $a_o(G^\rho,G^\rho) = \theta a_o(G^\rho,h)$. Entonces

$$\begin{aligned} 0 &\leq \|G^\rho - \theta\,|G^\rho_{k_j}|\,\|_o^2 \\ &= a_o(G^\rho - \theta|G^\rho_{k_j}|, G^\rho - \theta|G^\rho_{k_j}|) \\ &= a_o(G^\rho,G^\rho) - 2\theta\, a_o(G^\rho,|G^\rho_{k_j}|) + \theta^2 a_o(|G^\rho_{k_j}|,|G^\rho_{k_j}|) \\ &= a_o(G^\rho,G^\rho) - 2\theta\, a_o(G^\rho,|G^\rho_{k_j}|) + \theta^2 a_o(G^\rho_{k_j},G^\rho_{k_j}) \end{aligned}$$

Ahora, tomando límite superior para $j \to \infty$ tenemos

$$(5.4) \qquad 0 \leq \overline{\lim} \, \| G^\rho - \theta \, |G^\rho_{k_j}| \, \|_o^2$$

$$= a_o(G^\rho, G^\rho) - 2\,\theta\, a_o(G^\rho, h) + \theta^2 a_o(G^\rho, G^\rho)$$

$$= a_o(G^\rho, G^\rho) - 2\, a_o(G^\rho, G^\rho) + \theta^2 a_o(G^\rho, G^\rho)$$

$$= (\theta^2 - 1)\, a_o(G^\rho, G^\rho) \leq 0$$

Luego $\{\theta |G^\rho_{k_j}|\}$ converge en $H_o(S)$ a G^ρ y como $\theta|G^\rho_{k_j}| \geq 0 \quad \forall\, j$ queda probado que $G^\rho \geq 0$ en S. De (5.4), también, se sigue $\theta = 1$. Esto quiere decir que si $\{G^\rho_k\} \subset Lip_o(S)$ es una sucesión que converge a G^ρ en $H_o(S)$, luego existe una subsucesión $\{G^\rho_{k_j}\}$ tal que $\{|G^\rho_{k_j}|\}$ también lo hará.#

El siguiente Lema provee una estimación para la función de distribución de G^ρ.

(5.5) Lema: Existe una constante C independiente de ρ y del polo y tal que

$$w(\{G^\rho_y > t\}) \leq C \left(\frac{R^2}{v(2Q)} \right)^\sigma \frac{w(2Q)}{t^\sigma}$$

donde R es el radio de S y Q es la δ-bola con igual centro que S y radio aR.

Demostración: Sea $\{G_k\} \subset Lip_o(S)$ una sucesión que converge a G^ρ en $H_o(S)$. Por el Lema (5.5) podemos suponer $G^\rho_k \geq 0$ en S para todo k. Ahora, dado $t > 0$, definimos

$$\psi_k = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G^\rho_k} \right)^+ = \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{G^\rho_k} \right) \chi_{\{G^\rho_k > t\}} \quad , \quad k \in \mathbb{N}$$

Es claro que $\{\psi_k\} \subset \mathrm{Lip}_o(S)$. Por otra parte, como

$$\nabla\psi_k = \frac{\nabla G_k^\rho}{(G_k^\rho)^2}\, \chi_{\{G_k^\rho > t\}}$$

tenemos

$$\|\psi_k\|_o^2 = \int_S \langle A\nabla\psi_k, \nabla\psi_k\rangle$$

$$= \int_{\{G_k^\rho > t\}} \langle A\nabla G_k^\rho, \nabla G_k^\rho\rangle \frac{1}{(G_k^\rho)^4}$$

$$\leq \frac{1}{t^4} \int_S \langle A\nabla G_k^\rho, \nabla G_k^\rho\rangle$$

$$= \frac{1}{t^4}\, \|G_k^\rho\|_o^2$$

Luego, dado que $\{\|G_k^\rho\|_o\}$ es una sucesión acotada, existe una subsucesión $\{\psi_{k_j}\}$ que converge débilmente a una función ψ en $H_o(S)$. Entonces

$$\text{(5.6)} \qquad \lim a_o(G_{k_j}^\rho, \psi_{k_j}) = \lim a_o(G^\rho, \psi_{k_j}) = a_o(G^\rho, \psi)$$

Por otra parte, de (5.1) y de la definición de ψ_{k_j} , se sigue

$$a_o(G^\rho, \psi_{k_j}) = \frac{1}{w(Q_\rho)} \int_{Q_\rho} \psi_{k_j}\, w \leq \frac{1}{t} \ ,$$

para todo $j \in \mathbb{N}$. Entonces, de (5.6)

$$\lim \int_S \langle A\nabla G_{k_j}^\rho, \nabla G_{k_j}^\rho\rangle\, \chi_{\{G_{k_j} > t\}} \frac{1}{(G_{k_j}^\rho)^2} = \lim \int_S \langle A\nabla G_{k_j}^\rho, \nabla\psi_{k_j}\rangle$$

$$= \lim a_o(G_{k_j}^\rho, \psi_{k_j}) \leq \frac{1}{t}$$

luego, aplicando la elipticidad, tenemos

$$(5.7)\qquad \overline{\lim} \int_{\{G^\rho_{k_j} > t\}} \frac{|\nabla_\lambda G_{k_j}|^2}{(G^\rho_{k_j})^2} v \le \frac{1}{t}$$

Ahora, definiendo

$$\Psi_k = (\log G^\rho_k - \log t)^+ = (\log G^\rho_k - \log t)\, \chi_{\{G^\rho_k > t\}}$$

resulta $\{\Psi_k\} \subset Lip_o(S)$ y, para cada k, se verifica

$$\nabla_\lambda \Psi_k = \frac{\nabla_\lambda G^\rho_k}{G^\rho_k} \chi_{\{G^\rho_k > t\}}$$

Entonces, de (5.7)

$$\overline{\lim} \int_S |\nabla_\lambda \Psi_{k_j}|^2 v \le \frac{1}{t}$$

Esta desigualdad y la de Sobolev (Teorema (2.6)) nos lleva a

$$\overline{\lim} \left(\frac{1}{w(2Q)} \int_{\{G^\rho_{k_j} > t\}} \left(\log\left(\frac{G_{k_j}}{t}\right)\right)^{2\sigma} w\right)^{\frac{1}{\sigma}} \le \frac{R^2}{v(2Q)} \frac{1}{t} \quad ,$$

Restringiendo la integral al dominio $\{G^\rho_{k_j} > 2t\}$, obtenemos

$$(5.8)\qquad (\log 2)^2\, \overline{\lim} \left(\frac{w(\{G^\rho_{k_j} > 2t\})}{w(2Q)}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \le C \frac{R^2}{v(2Q)} \frac{1}{t}$$

Por otra parte, como $\{G^\rho_k\}$ converge a G^ρ en $L^2(S,wdx)$, podemos supo ner que $\{G^\rho_{k_j}\}$ converge a G^ρ en c.t.p. de S, con lo que se verifica

$$\chi_{\{G^\rho > t\}} \le \underline{\lim}\, \chi_{\{G^\rho_{k_j} > t\}}$$

en c.t.p. de S . Esto , por el Lema de Fatou, nos conduce a

$$w(\{G^\rho > t\}) \leq \underline{\lim}\, w(\{G^\rho_{k_j} > t\})$$

lo que, combinado con (5.8) para t en lugar de $2t$, prueba la tesis.#

(5.9) <u>Lema</u>: Sea $S = S(y,r)$ tal que $2aS \subset \Omega$. Sean $p \in (0,\sigma)$ y $\rho \in (0,\frac{r}{4a})$ entonces

$$\sup_{\frac{r}{2}< d(y,x) < r} G^\rho_y \leq C\left(\frac{w(S(y,\frac{4}{3}r))}{v(S(y,r))}\right)^{\frac{2\sigma^2}{p(\sigma-1)}} \frac{r^2}{v(S(y,r))}\left(\frac{w(S(y,\frac{8}{3}r))}{\inf\limits_{\frac{r}{2}< d(y,x)<r} w(S(x,\frac{r}{3a^2}))}\right)^{\frac{1}{p}}$$

<u>Demostración</u>: Sea x en la corona $\{x \in S/\frac{r}{2} < d(y,x) < \frac{3}{4}r\}$ y $\rho \in (0,\frac{r}{4a})$, entonces $S(x,\frac{r}{4}) \subset S(y,r) - S(y,a\rho) = S_r - S_{a\rho}$. En efecto, pues para z en $S(x,\frac{r}{4})$ tenemos

$$\begin{aligned} d(y,z) &\leq d(y,x) + d(x,z) \\ &< \frac{3r}{4} + \frac{r}{4} = r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d(y,z) &\geq d(y,x) - d(x,z) \\ &> \frac{r}{2} - \frac{r}{4} = \frac{r}{4} > a\rho \end{aligned}$$

Por otra parte, notemos que G^ρ es solución de $Lu = 0$ en $S_r - S_{a\rho}$, pues, de (5.1), tenemos $a_o(G^\rho,\psi) = 0$ para toda ψ en $lip_o(S)$ con soporte en $S_r - S_{a\rho}$. Luego, del Lema (4.11) y la propiedad de duplicación de v , se sigue

$$(5.10) \qquad \sup_{Q(x,\frac{r}{8a})} G^{\rho} \leq C \left(\frac{w(Q(x,\frac{r}{4a}))}{v(Q(x,\frac{r}{4a}))}\right)^{\frac{2\sigma^2}{p(\sigma-1)}} \left(\frac{1}{w(Q(x,\frac{r}{4a}))} \int_{Q(x,\frac{r}{4a})} (G^{\rho})^p \, w\right)^{\frac{1}{p}}$$

para $p \in (1,\sigma)$, donde C depende sólo de las constantes de (1.3) y (2.2). Ahora, para p en $(0,\sigma)$, usando el Lema (5.5) y la desigualdad $w(\{G^{\rho} > t\} \cap Q(x,\frac{r}{4a})) \leq w(S(y,2r))$, tenemos

$$\int_{Q(x,\frac{r}{4a})} (G^{\rho})^p \, w = p \int_0^{\infty} t^{p-1} \, w(\{G^{\rho} > t\} \cap Q(x,\tfrac{r}{4a})) \, dt$$

$$= p\left(\int_0^{\frac{r^2}{v(S(y,2r))}} t^{p-1} \, w(\{G^{\rho} > t\} \cap Q(x,\tfrac{r}{4a})) \, dt\right.$$

$$\left. + \int_{\frac{r^2}{v(S(y,2r))}}^{\infty} y^{p-1} \, w(\{G^{\rho} > t\} \cap Q(x,\tfrac{r}{4a})) \, dt\right)$$

$$\leq p\left(w(S(y,2r)) \int_0^{\frac{r^2}{v(S(y,2r))}} t^{p-1} \, dt\right.$$

$$\left. + C \int_{\frac{r^2}{v(S(y,2r))}}^{\infty} t^{p-1-\sigma} \left(\frac{r^2}{v(S(y,2r))}\right)^{\sigma} w(S(y,2r)) \, dt\right)$$

$$= p\left(\frac{w(S(y,2r))}{p} \left(\frac{r^2}{v(S(y,2r))}\right)^p\right.$$

$$\left. + C \, \frac{w(S(y,2r))}{p-\sigma} \left(\frac{r^2}{v(S(y,2r))}\right)^p\right)$$

$$\leq C \, w(S(y,2r)) \left(\frac{r^2}{v(S(y,2r))}\right)^p$$

Luego, de (5.10), y la acotación anterior, se sigue

$$\sup_{Q(x,\frac{r}{8a})} G^{\rho} \le C\left(\frac{w(Q(x,\frac{r}{4a}))}{v(Q(x,\frac{r}{4a}))}\right)^{\frac{2\sigma^2}{p(\sigma-1)}} \left(\frac{w(S(y,2r))}{w(Q(x,\frac{r}{4a}))}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{r^2}{v(S(y,2r))}$$

para una constante C independiente de ρ , r y x . Ahora bien, teniendo en cuenta (1.16), la propiedad de duplicación de v y que la desigualdad anterior vale para todo x en $\frac{3}{4}S - \frac{1}{2}S$, se sigue

$$(5.11) \qquad \sup_{\frac{r}{2}< d(y,x) < \frac{3r}{4}} G^{\rho} \le C\left(\frac{w(S(y,r))}{v(S(y,r))}\right)^{\frac{2\sigma^2}{p(\sigma-1)}} \frac{r^2}{v(S(y,r))}$$

$$\times\left(\frac{w(S(y,2r))}{\inf\limits_{\frac{r}{2}< d(y,x) < \frac{3r}{4}} w\left(S(x,\frac{r}{4a^2})\right)}\right)$$

para p en $(0,\sigma)$ y ρ en $(0,\frac{r}{4a})$, y donde C es independiente de ρ y r . Esta acotación, a su vez, nos permite obtener una similar pero para la corona $\{x \in S/\frac{r}{2} < d(y,x) < r\}$. Para ello basta ver que si G_o^{ρ} es la función de Green aproximada para $S_o = S(y,\frac{4r}{3})$ con polo y , luego se verifica $G^{\rho} \le G_o^{\rho}$ en S . En efecto, pues de ésto y (5.11) para G_o^{ρ} y S_o en lugar de G^{ρ} y S , se sigue

$$\sup_{\frac{2r}{3} < d(y,x) < r} G^{\rho} \le \sup_{\frac{2r}{3} < d(y,x) < r} G_o^{\rho}$$

$$\le C\left(\frac{w(S(y,\frac{4r}{3}))}{v(S(y,\frac{4r}{3}))}\right)^{\frac{2\sigma^2}{p(\sigma-1)}} \frac{r^2}{v(S(y,\frac{4r}{3}))} .$$

$$\times\left(\frac{w(S(y,\frac{8r}{3}))}{\inf\limits_{\frac{2r}{3}<d(y,x)<r} w\left(S(x,\frac{r}{3a^2})\right)}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Luego, de esta desigualdad y (5.11), es clara la tesis. Sólo nos resta probar que $G_o^\rho - G^\rho \leq 0$ en S. Esto es una consecuencia del principio del máximo débil (Lema (3.28)) pues $G_o^\rho - G^\rho$ es solución en S y $G_o^\rho - G^\rho \geq 0$ en ∂S. #

(5.12) Lema: Sea $S(x_o,R)$ una d-bola tal que $S(x_o,12aR) \subset \Omega$. Luego, para cada $\rho \in (0,\sigma)$ existe una constante positiva C, independiente de x_o y R, tal que

$$\sup_{\frac{r}{2}<d(y,x)<r} G_y^\rho(x) \leq C\int_r^R \left(\frac{w(S(y,12t))}{v(S(y,t))}\right)^{\frac{2\sigma^2}{p(\sigma-1)}} \frac{t^2}{v(S(y,t))} \times\left(\frac{w(S(y,12t))}{\inf\limits_{d(y,z)<4t} w\left(S(x,\frac{2t}{9a^2})\right)}\right)^{\frac{1}{p}} \frac{dt}{t} \tag{5.13}$$

para todos $y \in S(x_o,\frac{R}{2})$ $r \in (0,\frac{r}{2})$ y $\rho \in (0,\frac{r}{4a})$.

Demostración: En primer lugar vamos a considerar el caso $y = x_o$. Para $s>0$ indicaremos con S_s a $S(y,s)$, y con G_s^ρ a la función de Green aproximada para S_s con polo y. Además, para $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$ denotaremos

$$g(t_1,t_2) = \left(\frac{w(S_{t_1})}{v(S_{t_2})}\right)^{\frac{2\sigma^2}{p(\sigma-1)}} \frac{t_1^2}{v(S_{t_2})}\left(\frac{w(S_{t_1})}{\inf\limits_{d(y,x)<\frac{t_1}{3}} w(S(x,t_2))}\right)^{\frac{1}{p}}$$

Notemos que esta función que depende también de p , es creciente a t_1 y decreciente en t_2 . Sea $r < \frac{R}{2}$ y $m \in \mathbb{N}$ tal que $(\frac{3}{2})^{m-1} r \leq R < (\frac{3}{2})^m r$. Luego, en $S_r - S_{r/2}$, se verifica

$$(5.14) \qquad G_R^\rho \leq G^\rho_{(3/2)^m r} = G_r^\rho + \sum_{j=1}^{m} \left(G^\rho_{(3/2)^j r} - G^\rho_{(3/2)^{j-1} r} \right)$$

Ahora vamos a estimar el tamaño de cada sumando. En primer lugar, del Lema (5.9), tenemos

$$(5.15) \qquad \sup_{S_r - S_{r/2}} G_r^\rho \leq C\, g\left(\frac{8r}{3}, \frac{r}{3a^2}\right)$$

para cada $p \in (0,\sigma)$ y para todo $\rho \in (0, \frac{r}{4a})$. Para estimar los términos restantes vamos a probar que si $\rho \in (0, \frac{s}{4a})$ resulta

$$(5.16) \qquad \sup_{S_s} (G^\rho_{3s/2} - G^\rho_s) \leq C\, g\left(4s, \frac{s}{2a^2}\right)$$

para cada $\rho \in (0,\sigma)$. Luego, como se verifica que

$$g\left(\frac{8r}{3}, \frac{r}{3a^2}\right) \leq g\left(4r, \frac{r}{3a^2}\right)$$

y

$$g\left(4\,(\tfrac{3}{2})^{m-1} r\,,\, (\tfrac{3}{2})^{m-1} \frac{r}{2a^2}\right) = g\left(6\,(\tfrac{3}{2})^{m-2} r\,,\, (\tfrac{3}{2})^{m-2} \frac{3r}{4a^2}\right)$$

tenemos, a partir de (5.14) y (5.15), que vale

$$(5.17) \qquad \sup_{S_r - S_{r/2}} G_R^\rho \leq C \sum_{j=1}^{m-1} g\left(6\,(\tfrac{3}{2})^{j-1} r\,,\, (\tfrac{3}{2})^{j-1} \frac{r}{3a^2}\right)$$

$$\leq C \sum_{j=1}^{m-1} \int_{(\frac{3}{2})^{j-1} r}^{(\frac{3}{2})^{j} r} g\left(6t, \frac{2t}{9a^2}\right) \frac{dt}{t}$$

$$\leq C \int_r^R g\left(6t, \frac{2t}{9a^2}\right) \frac{dt}{t}$$

para cada $p \in (0,\sigma)$ y para todo $\rho \in (0,\frac{r}{4a})$. Ahora bien, si y es un punto cualquiera de $S(x_o,\frac{R}{2})$, resulta $S(x_o,R) \subset S(y,2R)$. Luego $G^\rho \leq G^\rho_{2R}$ en $S(x_o,R)$. De esta desigualdad y (5.17) se sigue

$$(5.18) \qquad \sup_{\frac{r}{2} < d(y,x) < r} G^\rho \leq C \int_r^{2R} g\left(6t, \frac{2t}{9a^2}\right) \frac{dt}{t}$$

$$= C \left(\int_{2r}^{2R} g\left(6t, \frac{2t}{9a^2}\right) \frac{dt}{t} + \int_r^{2r} g\left(6t, \frac{2t}{9a^2}\right) \frac{dt}{t} \right)$$

$$= C \left(\int_r^{R} g\left(12t, \frac{2t}{9a^2}\right) \frac{dt}{t} + \int_r^{2r} g\left(6t, \frac{2t}{9a^2}\right) \frac{dt}{t} \right)$$

$$= C \int_r^{R} g\left(12t, \frac{2t}{9a^2}\right) \frac{dt}{t}$$

con lo que se demuestra (5.13). Sólo resta ver que (5.16) es válida. Para ello tengamos en cuenta que por el Lema (5.9), se verifica

$$\sup_{S_{(3s/2)}-S_{(3s/4)}} G^\rho_{(3s/4)} \leq G\, g\left(4s, \frac{s}{2a^2}\right)$$

para cada $p \in (0,\sigma)$ y para todo $\rho \in \left(0, \frac{3s}{2a^2}\right)$. Ahora vamos a aplicar el Lema (3.30) con $x = y$, $r_1 = \frac{3}{4}s$, $r_2 = s$, $r_3 = \frac{3}{2}s$, $\psi = G^\rho_{(3s/2)}$ y C_1 igual al segundo miembro de la desigualdad anterior. De dicha Lema se sigue que existe $\{\phi_k\} \subset \mathrm{Lip}(\bar{S}_s)$ convergente a $G^\rho_{(3s/2)}$ en $H(S_s)$ y tal que $\phi_k \leq 2\,C_1$ en un entorno de ∂S_2 para cada k. Luego, tomando una sucesión no negativa $\{\Psi_k\}$ en $\mathrm{Lip}_o(S_s)$ que converge a G^ρ_s en $H_o(S)$, obtenemos (5.16) aplicando el Lema (3.29) con $u = G^\rho_{(3s/2)} - G^\rho_s$ y $u_k = \phi_k - \Psi_k$. #

(5.19) <u>Corolario</u>: Con las mismas hipótesis que en el Lema (5.12) se verifica que para c.t.p. $y \in S(x_o,\frac{R}{2})$ y para cada $p \in (1,\sigma)$ existe una constante $C = C(y,x_o,R,w,v) > 0$ tal que

$$(5.20) \qquad \sup_{\frac{r}{2}<d(y,x)<r} G_y^\rho(x) \leq C \min\left(\int_r^R \frac{t^2}{|S(y,t)|}\frac{dt}{t}, \int_r^R \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}}\frac{dt}{t}\right)$$

para todo $r \in (0,\frac{R}{2})$ y para todo $\rho \in (0,\frac{r}{4a})$

<u>Demostración</u>: En vista de la observación (2.42) tenemos que

$$C_1(y) = \sup_{t \leq R} \frac{w(S(y,12t))}{v(S(y,t))}$$

$$C_2(y) = \sup_{t \leq R} \frac{|S(y,t)|}{v(S(y,t))}$$

y

$$C_3(y) = \sup_{t \leq R} \frac{|S(y,t)|}{w(S(y,t))} \leq C \sup_{t \leq R} \frac{1}{w(Q(y,\frac{t}{a}))}\int_{Q(y,\frac{t}{a})} \frac{1}{w}\, w\, dt$$

son finitas en c.t.p. $y \in S(x_o,\frac{R}{2})$. Ahora, de (5.13), tenemos

$$(5.21) \qquad \sup_{\frac{r}{2}<d(y,x)<r} G_y^\rho(x) \leq C(C_1(y))^{\frac{2\sigma^2}{p(\sigma-1)}+\frac{1}{p}}\, C_2(y) \int_r^R \frac{t^2}{|S(y,t)|}\frac{dt}{t}$$

para cada $y \in S(x_o,\frac{R}{2})$ y para todos $r \in (0,\frac{R}{2})$ y $\rho \in (0,\frac{r}{4a})$.

Por otra parte, de (1.18) y (1.16), resulta

$$\left(\frac{t}{a^2R}\right)^{\sum_j G_j} \leq \frac{|S(y,t)|}{|S(y,R)|} \qquad 0 < t \leq R$$

luego, a partir del Lema (2.34) y la propiedad de duplicación de v obtenemos

$$\frac{t^2}{v(S(y,t))} \leq C\, R^2 \left(\frac{w(S(y,aR))}{w(S(y,\frac{t}{a}))}\right)^{\frac{1}{\sigma}} \frac{1}{v(S(y,R))} \qquad 0 < r \leq R .$$

Esta desigualdad, aplicada en (5.13) lleva a

$$\sup_{\frac{r}{2} < d(s,x) < r} G_y^{\rho}(x) \leq C(C_1(y))^{\frac{2\sigma^2}{p(\sigma-1)}+\frac{1}{p}}(C_3(y))^{\frac{1}{\sigma}} R^2 \frac{(w(S(y,aR)))^{\frac{1}{\sigma}}}{v(S(y,R))}$$

$$\times \int_r^R \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{dt}{t}$$

lo que, combinado con (5.21) y tomando también supremo en p , nos conduce a la tesis.#

§.2 Estimaciones para el λ-gradiente de la función de Green aproximada

Comenzamos esta sección con una estimación de $\nabla_\lambda G^\rho$ en términos de G^ρ .

(5.22) Lema: Sea $S = S(x_0,R)$ una d-bola tal que $2S \subset \Omega$,luego existe una constante $C > 0$ tal que

$$\int_{S-Q(y,r)} \langle A\nabla G_y^\rho, \nabla G_y^\rho\rangle \leq \frac{C}{r^2} \int_{Q(y,r)-Q(y,\frac{r}{2})} (G_y^\rho)^2\, w \quad ,$$

para todos $y \in \frac{1}{2} S$, $r \in (0,\frac{R}{2a})$ y $\rho \in (0,\frac{r}{2})$.

Demostración: La técnica utilizada es muy similar a la aplicada para el Lema (4.2), razón por la cual omitiremos algunos cálculos. Sea $y \in \frac{1}{2} S$ y sea $\{G_k^\rho\} \subset \mathrm{Lip}_0(S)$ una sucesión de funciones no negativas, que converge a $G^\rho = G_y^\rho$ en $H_0(S)$. Ahora elegimos $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ tal que $\eta \equiv 1$ fuera de $Q(y,r)$, $\eta \equiv 0$ en $Q(y,\frac{r}{2})$ y $|\nabla_\lambda \eta| \leq \frac{C}{r}$. Con esta función definimos $\psi_k = G_k^\rho \eta^2$ $k \in \mathbb{N}$. Es claro que $\psi_k \geq 0$ para cada k , y que dicha sucesión está contenida en $Lip_o(S)$. Con un razonamiento similar al usado para el Lema (4.2) podemos demostrar que existe una constante $C > 0$, independiente de k , tal que $\|\psi_k\|_o^2 \leq C \|G_k^\rho\|^2$. Como $\{\|G_k^\rho\|^2\}$ es una sucesión acotada, luego exite una subsucesión $\{\psi_{k_j}\}$ que converge débilmente a una ψ en $H_o(S)$. Entonces dado que $a_o(G^\rho,\cdot)$ es un funcional lineal y continuo en $H_o(S)$, tenemos

$$(5.23) \qquad a_o(G^\rho,\psi) = \lim a_o(G^\rho,\psi_{k_j}) = \lim a_o(G^\rho_{k_j},\psi_{k_j}) \ .$$

Ahora bien, como $\psi_{k_j} \equiv 0$ en $Q(y,\rho)$, de (5.1) resulta $a_o(G^\rho,\psi_{k_j}) = 0$ para todo j . Luego, de (5.23), tenemos $\lim a_o(G^\rho_{k_j},\psi_{k_j}) = 0$. Siguiendo el método aplicado para el Lema (4.2) tenemos

$$\int <A\nabla G^\rho_{k_j},\nabla G^\rho_{k_j}> \eta^2 \leq 2|a_o(G^\rho_{k_j},\psi_{k_j})| + 16\int |\nabla_\lambda \eta|^2 \, (G^\rho_{k_j})^2 \, w$$

de donde se sigue

$$\int_{S-Q(y,r)} <A\nabla G^\rho_{k_j},\nabla G^\rho_{k_j}> \leq 2|a_o(G^\rho_{k_j},\psi_{k_j})| + \frac{C}{r^2}\int_{Q(y,r)-Q(y,\frac{r}{2})} (G^\rho_{k_j})^2 \, w$$

La tesis se sigue haciendo tender $j \to \infty$ en la última desigualdad y recordando que $\{<A\nabla G^\rho_{k_j},\nabla G^\rho_{k_j}>\}$ converge a $<A\nabla G^\rho,\nabla G^\rho>$ en $L^1(S,dx)$.#

Ahora utilizaremos el Lema anterior y el corolario (5.19) para probar el siguiente resultado.

(5.24) <u>Lema</u>: Sea $S = S(x_o,R)$ una d-bola en Ω tal que $12aS \subset \Omega$ luego, si $n > 2$, se verifica que para c.t.p. $y \in \frac{1}{2} S$ existe una constante $C = C(y,x_o,R,w,v) > 0$ tal que

$$\int_{S-Q(y,r)} |\nabla_\lambda G^\rho_y|^2 \, v \leq C \int_{r/2a}^{R} \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{dt}{t}$$

para todo $r \in (0,\frac{R}{2a})$ y para todo $\rho \in (0,\frac{R}{2a})$.

Demostración: Supongamos, en primer lugar, que $\rho \in (0,\frac{r}{8a^2})$. En este caso, a partir del Lema anterior, la elipticidad y el corolario (5.19) para I igual a la integral de $|\nabla_\lambda G_y^\rho|^2 v$ en $S-Q(y,r)$, vale

$$(5.25) \qquad I \le \frac{C}{r^2} w(Q(y,r)) \left(\sup_{\frac{r}{2} < \delta(y,x) < r} G_y^\rho(x) \right)^2$$

$$\le \frac{C\, w(Q(y,r))}{r^2} \left(\sup_{\frac{r}{a2} < d(y,x) < ar} G_y^\rho(x) \right)^2$$

$$\le \frac{C\, w(Q(y,r))}{r^2} \left(\sum_{j=0}^{j \le \log_2 a^2+1} \sup_{\frac{ar}{2^{j+1}} < d(y,x) < \frac{ar}{2^j}} G_y^\rho(x) \right)^2$$

$$\le \frac{C\, w(Q(y,r))}{r^2} \left(\sum_{j=0}^{j \le \log_2 a^2+1} \min\left(\int_{\frac{ar}{2^j}}^{R} \frac{t^2}{|S(y,t)|} \frac{dt}{t}, \int_{\frac{ar}{2^j}}^{R} \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{dt}{t} \right) \right)^2$$

$$\le \frac{C\, w(Q(y,r))}{r^2} \left(\min\left(\int_{\frac{r}{2a}}^{R} \frac{t^2}{|S(y,t)|} \frac{dt}{t}, \int_{\frac{r}{2a}}^{R} \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{dt}{t} \right) \right)^2$$

$$\le \frac{C\, w(Q(y,r))}{r^2} \left(\int_{\frac{r}{2a}}^{R} \frac{t^2}{|S(y,t)|} \frac{dt}{t} \right) \left(\int_{\frac{r}{2a}}^{R} \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{dt}{t} \right)$$

Ahora bien, teniendo en cuenta los Lemas (1.13) y (1.15), podemos acotar

$$\int_{\frac{r}{2a}}^{R} \frac{t^2}{|S(y,t)|} \frac{dt}{t} \le \int_{\frac{r}{2a}}^{\infty} \frac{t^2}{|S(y,t)|} \frac{dt}{t}$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\frac{2^j r}{2a}}^{\frac{2^{j+1} r}{2a}} \frac{t^2}{|S(y,t)|} \frac{dt}{t}$$

$$\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2^j r}{2a}\right)^2 \frac{1}{|S(y,\frac{2^j r}{2a})|}$$

$$\leq C \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{2^j r}{a}\right)^2 \frac{1}{2^{jn}} \frac{1}{|S(y,r)|}$$

$$= \frac{C\, r^2}{|S(y,r)|} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(2-n)}$$

$$= \frac{C\, r^2}{|S(y,r)|}$$

Luego, de (5.25) tenemos

$$(5.26) \qquad \int_{S-Q(y,r)} |\nabla_\lambda G_Y^\rho|^2\, v \leq C\, \frac{w(Q(y,r))}{|Q(y,r)|} \int_{\frac{r}{2a}}^{R} \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{dt}{t}$$

Ahora consideremos el caso $\rho \in [\frac{r}{8a^2},\frac{R}{2})$. Aplicando (5.1) y la desigualdad de Sobolev en $Q = Q(x_o, aR)$, tenemos

$$a_o(G_Y^\rho, G_Y^\rho) = \frac{1}{w(Q(y,\rho))} \int_{Q(y,\rho)} G_Y^\rho\, w$$

$$\leq \left(\frac{1}{w(Q(y,\rho))} \int_{Q(y,\rho)} (G_Y^\rho)^{2\sigma}\, w\right)^{\frac{1}{2\sigma}}$$

$$\leq \left(\frac{1}{w(Q(y,\rho))} \int_{S} (G_Y^\rho)^{2\sigma}\, w\right)^{\frac{1}{2\sigma}}$$

$$\leq C\, R \left(\frac{w(2Q)}{w(Q(y,\rho))}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \left(\frac{1}{v(2Q)} \int_S |\nabla_\lambda G_Y^\rho|^2\, v\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C\, R \left(\frac{w(2Q)}{w(Q(y,\rho))}\right)^{\frac{1}{2\sigma}} \frac{1}{(v(2Q))^{1/2}} (a_o(G_Y^\rho, G_Y^\rho))^{1/2}$$

$$= C\, \frac{1}{w(Q(y,\rho))^{1/2\sigma}} (a_o(G_Y, G_Y))^{1/2}$$

Luego,

$$(5.27)\qquad \int_S |\nabla_\lambda G_y^\rho|^2\, v \le a_o(G_y^\rho, G_y^\rho)$$

$$\le \frac{C}{w(Q(y,\rho))^{1/\sigma}}$$

$$\le \frac{C}{w\left(Q(y,\frac{r}{8a^2})\right)^{1/\sigma}}$$

$$= C\,\frac{1}{w\left(Q(y,\frac{r}{8a^2})\right)^{1/\sigma}}\left(\int_{\frac{r}{2a}}^{r} \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}}\,\frac{dt}{t}\right)^{-1}\int_{\frac{r}{2a}}^{r} \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}}\,\frac{dt}{t}$$

$$\le C\left(\frac{|S(y,r)|}{w\left(Q(y,\frac{r}{8a^2})\right)}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\int_{\frac{r}{2a}}^{R} \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}}\,\frac{dt}{t}$$

$$\le C\left(\frac{|S(y,r)|}{w\left(Q(y,\frac{r}{8a^2})\right)}\right)^{\frac{1}{\sigma}}\int_{\frac{r}{2a}}^{R} \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}}\,\frac{dt}{t}$$

Los factores que quedan fuera de las integrales en los miembros derechos de (5.26) y (5.27) están uniformemente acotados en $r \in (0,\frac{R}{2a})$ para casi todo punto y , como puede verse usando (2.42).#

Con la estimación proporcionada por el Lema precedente estamos en condiciones de obtener la siguiente conclusión sobre la integrabilidad de $|\nabla_\lambda G^\rho|$.

(5.28) <u>Lema</u>: Sea $S = S(x_o,R)$ un d-bola tal que $12aS \subset \Omega$. Si $n > 2$, luego para cada $q \in (0,\frac{2\sigma}{\sigma+1})$ y c.t.p. $y \in \frac{1}{2}S$ existe una constante $C = C(q,y,x_o,R,w,v) > 0$ tal que

$$\int_S |\nabla_\lambda G_Y^\rho|^q \, v \leq C \quad ,$$

para todo $\rho \in (0,\frac{R}{2a})$

Demostración: Sean $Y \in \frac{1}{2} S$ y $\rho \in (0,\frac{R}{2a})$. Es claro que, para todo r tal que $Q(Y,r) \subset S$ y para todo $s > 0$, vale la acotación

$$v(\{|\nabla_\lambda G_Y^\rho| > s\}) \leq v((S-Q(Y,r)) \cap \{|\nabla_\lambda G_Y^\rho| > s\}) + v(Q(Y,r))$$

$$\leq \frac{1}{s^2} \int_{S-Q(Y,r)} |\nabla_\lambda G_Y^\rho|^2 \, v + v(Q(Y,r))$$

Luego, por el Lema anterior y la finitud de la función maximal de v , tenemos

$$v(\{|\nabla_\lambda G_Y^\rho| > s\}) \leq \frac{C}{s^2} \int_{\frac{r}{2a}}^{R} \frac{1}{|S(Y,t)|^{1/\sigma}} \frac{dt}{t} + |Q(Y,r)| \sup_{t \leq \frac{R}{2a}} \frac{v(Q(s,t))}{|Q(s,t)|}$$

$$\leq C \left(\frac{1}{s^2} \int_{\frac{r}{2a}}^{R} \frac{1}{|S(Y,t)|^{1/\sigma}} \frac{dt}{t} + |Q(Y,r)| \right)$$

para c.t.p. $Y \in \frac{1}{2} S$ y para todo $r \in (0,\frac{R}{2a})$, donde $C = C(Y,S,w,v)$.
Entonces, teniendo en cuenta los Lemas (1.13) y (1.15), resulta

$$(5.29) \qquad v(\{\nabla_\lambda G_Y^\rho| > s\}) \leq C(|Q(Y,r)| + \frac{1}{s^2} \sum_{j=0}^{\infty} \int_{\frac{2^j r}{2a}}^{\frac{2^{j+1} r}{2a}} \frac{1}{|S(Y,t)|^{1/\sigma}} \frac{dt}{t})$$

$$\leq C \left(|Q(Y,r)| + \frac{1}{s^2} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{\left|S(Y,\frac{2^j r}{2a})\right|^{1/\sigma}} \right)$$

$$\leq C \left(|Q(Y,r)| + \frac{1}{s^2 |S(Y,r)|^{1/\sigma}} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-n/\sigma\, j} \right)$$

$$\leq C \left(|Q(Y,r)| + \frac{1}{s^2 |Q(Y,r)|^{1/\sigma}} \right)$$

Ahora bien, a partir de la definición de la casi-métrica δ , es inmediato que, para cada $s > 0$, existe $r > 0$ tal que $|Q(y,r)| = s^{-2\sigma/\sigma+1}$. Luego, con esta elección de r en (5.29), resulta

$$\nu(\{|\nabla_\lambda G_y^\rho| > s\}) \leq C\, s^{-\frac{2\sigma}{\sigma+1}}$$

para todo $s > |Q(s,\frac{R}{2a})|^{-(\sigma+1)/2\sigma}$, para todo $\rho \in (0,\frac{R}{2a})$ y para c.t.p. $y \in \frac{1}{2}S$. Entonces, para $q \in (0,\frac{2\sigma}{\sigma+1})$, tenemos

$$\int_S |\nabla_\lambda G_y^\rho|^q\, \nu = q \int_0^\infty s^{q-1}\, \nu(\{|\nabla_\lambda G_y^\rho| > s\})\, ds$$

$$= q\left(\int_0^{|Q(y,\frac{R}{2a})|^{-\frac{\sigma+1}{2\sigma}}} s^{q-1}\, \nu(\{|\nabla_\lambda G_y^\rho| > s\})\, ds \right.$$

$$\left. + \int_{|Q(y,\frac{R}{2a})|^{-\frac{\sigma+1}{2\sigma}}}^\infty s^{q-1}\, \nu(\{|\nabla_\lambda G_y^\rho| > s\})\, ds\right)$$

$$\leq \nu(S)\, |Q(y,\tfrac{R}{2a})|^{-\frac{\sigma+1}{2\sigma}q} + C\int_{|Q(y,\frac{R}{2a})|^{-\frac{\sigma+1}{2\sigma}q}}^\infty s^{q-\frac{2\sigma}{\sigma+1}-1}\, ds$$

$$\leq C\left(|Q(y,\tfrac{R}{2a})|^{-\frac{\sigma+1}{2\sigma}q} + |Q(y,\tfrac{R}{2a})|^{-\frac{\sigma+1}{2\sigma}(q-\frac{2\sigma}{\sigma+1})}\right) ,$$

con lo que queda probado el Lema.#

§.3 <u>Existencia de la función de Green</u>

Comenzaremos esta sección introduciendo una ligera modificación de los espacios de tipo Sobolev definidos en el Capítulo III.

Sea S una d-bola tal que $12aS \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$ para $n \geq 3$ y sean

p y q en $[1,\infty)$. Para $\psi \in Lip_o(S)$ definimos

$$\|\psi\|_{p,q} = \left(\int_S |\psi|^p\, w\right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_S |\nabla_\lambda \psi|^q\, v\right)^{\frac{1}{q}}$$

Es claro que $\|\cdot\|_{p,q}$ es una norma en $Lip_o(S)$. Teniendo en cuenta ésto, definimos.

(5.30) Definición: Indicaremos con $X_{p,q} = X_{p,q}(S)$ a la completación de $Lip_o(S)$ con respecto a la norma $\|\;\|_{p,q}$. Cuando no haya posibilidad de confusión, utilizaremos la notación X en lugar de $X_{p,q}$.

(5.31) Observación: Es inmediato que, con un razonamiento similar al empleado en el Capítulo III para los espacios $H(S)$, podemos identificar cada elemento de $X_{p,q}$ con una función de $L^p(S,wdx)$ y gradiente con una función de $L^q(S,wdx)$. En lo sucesivo utilizaremos esta identificación para trabajar con $X_{p,q}$

Ahora estamos en condiciones de probar el siguiente resultado de convergencia.

(5.32) Lema: Para c.t.p. $y \in \frac{1}{2}S$ existe una sucesión $\{\rho_k\} \subset (0,\frac{R}{2a})$ convergente a cero y una función G_y tal que $\{G_y^{\rho_k}\}$ converge débilmante a G_y en $X_{p,q}$ para todo $p \in [1,\sigma)$ y todo $q \in [1,\frac{2\sigma}{\sigma+1})$.

Demostración: A partir de los Lemas (5.5) y (5.28) tenemos que para c.t.p. $y \in \frac{1}{2}S$ y para cada par $(p,q) \in (1,\sigma)\times(1,\frac{2\sigma}{1+\sigma})$ existe una constante $C = C(y,p,q,S,w,v)$ tal que $\|G_y^\rho\|_{p,q} \le C$ para todo $\rho \in (0,\frac{R}{2a})$. Sea $y \in \frac{1}{2}S$ uno de los puntos para los que vale la acotación anterior y sean $\{(p_j,q_j)\} \subset (1,\sigma)\times(1,\frac{2\sigma}{\sigma+1})$ y $\{\varepsilon_\ell\} \subset (0,\frac{R}{2a})$ tal que $\{p_j\} \uparrow \sigma$, $\{q_j\} \uparrow \frac{2\sigma}{\sigma+1}$ y $\{\varepsilon_\ell\} \downarrow 0$. Por la acotación de $G^{\varepsilon_\ell} = G_y^{\varepsilon_\ell}$, para $\ell \in \mathbb{N}$, en $X_{p,q}$ y la reflexibilidad de dicho espacio, es claro que existe una sucesión $\{\rho_{1,i}\} \subset \{\varepsilon_\ell\}$ tal que $\{G^{\rho_{1,i}}\}$ converge débilmente a una función

G_1 en X_{p_1,q_1}. Con el mismo argumento podemos encontrar una subsucesión $\{\rho_{2,i}\}$ de $\{\rho_{1,i}\}$, tal que $\{G^{\rho_{2,i}}\}$ converge débilmente a una G_2 en X_{p_2,q_2}. Aplicando este razonamiento en forma sucesiva tenemos para cada j, una subsucesión $\{\rho_{j+1,i}\}$ de $\{\rho_{j,i}\}$ tal que $\{G^{\rho_{j+1,i}}\}$ converge débilmente a una G_{j+1} en $X_{p_{j+1},q_{j+1}}$. Ahora bien, dada $\psi \in Lip_o(S)$, es claro que la aplicación

$$\Psi \to \int_S \Psi\, \psi\, w$$

para $\Psi \in X_{p_j,q_j}$, define un funcional lineal continuo en X_{p_j,q_j} para cada j. Luego, por la convergencia débil para j y $j+1$, se sigue

$$\lim \int_S G^{\rho_{j+1,i}}\, \psi\, w = \int_S G_j\, \psi\, w \quad ,$$

$$\lim \int_S G^{\rho_{j+1,i}}\, \psi\, w = \int_S G_{j+1}\, \psi\, w \, ,$$

para toda $\psi \in Lip_o(S)$. Entonces

$$\int_S (G_j - G_{j+1})\, \psi\, w = 0 \qquad\qquad \text{para toda} \quad \psi \in Lip_o(S)$$

de donde se deduce que $G_j = G_{j+1}$ en c.t.p. de S y para todo j. Un razonamiento similar para con los funcionales lineales continuos definidos por

$$\Psi \to \int_S \langle \nabla_\eta \Psi, \nabla_\lambda \psi \rangle\, v$$

con $\psi \in C_o^1(S)$, lleva a conclusión $\nabla_\lambda G_j = \nabla_\lambda G_{j+1}$ en c.t.p. de S y para todo j. Ahora tomando $\rho_k = \rho_{k,k}$ para cada k, y $G_y = G_1$, tenemos que $\{G_y^{\rho_k}\}$ converge débilmente a G_y en X_{p_j,q_j} para todo j. Luego la convergencia se verifica en $X_{p,q}$, para todo par $(p,q) \in [1,\sigma)\times[1,\frac{2\sigma}{\sigma+1})$. En efecto, es claro que para cada uno de dichos pares existe j tal que $p \leq p_j$ y $q \leq q_j$, con lo que tenemos $X_{p_j,q_j} \subset X_{p,q}$ de donde resulta inmediata la conclusión.#

(5.33) Definición: Nos referiremos a $G_y = G(\cdot,y)$ como la función de Green para S con polo y . Cuando no haya dudas sobre el polo utilizaremos la notación G .

A partir del Lema anterior podemos probar.

(5.34) Teorema: Si el par de pesos (v,w) es tal que $(\frac{w}{v})^{q_o'} v \in L^1(S,dx)$ para algún $q_o \in (1,\frac{2\sigma}{\sigma+1})$, luego, para c.t.p. $y \in \frac{1}{2} S$, se verifica

$$\int_S \langle A\nabla G_y, \nabla\psi\rangle = \psi(y) \qquad \forall\ \psi \in Lip_o(S) ,$$

donde G_y es la función de Green para S con polo y .

Demostración: Sean $\Psi,\psi \in Lip_o(S)$, luego

$$(5.35) \qquad a_o(\Psi,\psi) = \int_S \langle A\nabla\Psi,\nabla\psi\rangle$$

$$\leq \int_S \langle A\nabla\Psi,\nabla\Psi\rangle^{1/2} \langle A\nabla\psi,\nabla\psi\rangle^{1/2}$$

$$\leq \int_S |\nabla_\lambda\Psi|\ |\nabla_\lambda\psi|\ w$$

$$\leq \left(\int_S \left(|\nabla_\lambda\psi|\ \frac{w}{v}\right)^{q_o'} v\right)^{\frac{1}{q_o'}} \left(\int_S |\nabla_\lambda\Psi|^{q_o} v\right)^{\frac{1}{q_o}}$$

$$\leq \|\nabla_\lambda\psi\|_\infty \left(\int_S (\tfrac{w}{v})^{q_o'} v\right)^{\frac{1}{q_o'}} \left(\int_S |\nabla_\lambda\Psi|^{q_o} v\right)^{\frac{1}{q_o}}$$

Utilizando esto y la observación (5.31) es claro que, aplicando un argumento similar al aplicado para el Lema (3.10), tenemos

$$a_o(\Psi,\psi) = \int_S \langle A\nabla\Psi,\nabla\psi\rangle \qquad \forall\ \Psi \in X_{p,q_o}$$

para cada $p \in [1,\infty)$ y $\psi \in Lip_o(S)$. Por otra parte, también por (5.35) resulta que, para cada $\psi \in Lip_o(S)$, $a_o(\cdot,\psi)$ define un funcional lineal continuo en X_{p,q_o} para todo p en $[1,\infty)$. Luego, a partir del Lema anterior y (5.1) tenemos

$$\begin{aligned}\int_S \langle A\nabla G_Y,\nabla\psi\rangle &= a_o(G_Y,\psi)\\ &= \lim a_o(G_Y^{\rho_k},\psi)\\ &= \lim \frac{1}{w(Q(Y,\rho_k))}\int_{Q(Y,\rho_k)} \psi\, w\\ &= \psi(Y)\end{aligned}$$

para cada $\psi \in Lip_o(S)$ lo que prueba la tesis.#

Veremos ahora, como puede ser usada la función de Green para dar representaciones integrales de soluciones a los problemas

(5.36) $\quad Lu = f \quad \text{en} \quad S \qquad u \in H_o(S)$

con f tal que $f/w \in L^{p'_o}(S,wdx)$ para algún $p_o \in (1,\sigma)$,

(5.37) $\quad Lu = -div_\lambda F \quad \text{en} \quad S \qquad u \in H_o(S)$

con $F=(f_1,\ldots,f_n)$ tal que $|F|/v \in L^{q'_o}(S,vdx)$ para algún $q_o \in (1,\frac{2\sigma}{\sigma+1})$.

Por los Teoremas (3.25) y (3.27) sabemos que cada uno de estos problemas tiene una única solución.

(5.38) <u>Teorema</u>: Si u es la solución del problema (5.36) luego

(5.39) $$u(Y) = \int_S G_Y(x)\, f(x)\, dx \qquad \text{para c.t.p.} \quad Y \in \tfrac{1}{2}S .$$

Si u es la solución de (5.37), tenemos

(5.40) $$u(y) = \int_S \langle \nabla_\lambda G_y(x), F(x)\rangle \, dx \quad , \quad \text{para c.t.p. } \; y \in \tfrac{1}{2} S \; .$$

Demostración: A partir de (3.21), tenemos que si u es la solución de (5.36) se verifica

(5.41) $$a_o(u, G_y^{\rho_k}) = \int_S G_y^{\rho_k} f$$

para c.t.p. $y \in \frac{1}{2} S$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, donde $\{G_y^{\rho_k}\}$ es la sucesión de (5.32). Ahora bien, teniendo en cuenta (5.1), es claro que

$$a_o(u, G_y^{\rho_k}) = \frac{1}{w(Q(y,\rho_k))} \int_{Q(y,\rho_k)} u \, w$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Luego

(5.42) $$\lim a_o(u, G_y^{\rho_k}) = u(y) \qquad \text{para c.t.p. } \; y \in \tfrac{1}{2} S$$

Por otra parte, dado que

$$\left|\int_S \psi f\right| \le \left(\int_S \left(\frac{|f|}{w}\right)^{p_o'} w\right)^{\frac{1}{p_o'}} \left(\int_S |\psi|^{p_o} w\right)^{\frac{1}{p_o}}$$

para toda $\psi \in Lip_o(S)$, es inmediato que

$$\ell(\psi) = \int_S \psi \, f$$

define un funcional lineal continuo en $X_{p_o,q}$ para todo $q \in [1,\infty)$.

Entonces, por el Lema (5.32), tenemos

$$\lim \int_S G_y^{\rho_k} f = \int_S G_y f \qquad \text{para c.t.p. } \; y \in \tfrac{1}{2} S \; .$$

Luego (5.39) se obtiene tomando límite para $k \to \infty$ en ambos miembros de (5.41) y aplicando (5.42) y la última igualdad. La conclusión (5.40) se obtiene de manera similar teniendo en cuenta en primer lugar que, de (3.22), si u es solución de (5.37) luego

$$a_o(u,G_Y^{\rho k}) = \int_S \langle\nabla_\lambda G_Y^{\rho k},F\rangle$$

para c.t.p. $Y \in \frac{1}{2}S$ y para todo $k \in \mathbb{N}$, y en segundo lugar, que

$$\left|\int_S \langle\nabla_\lambda\psi,F\rangle\right| \le \left(\int_S \left(\frac{|F|}{v}\right)^{q_o'} v\right)^{\frac{1}{q_o'}} \left(\int_S |\nabla_\lambda\psi|^{q_o} v\right)^{\frac{1}{q_o}}$$

para toda $\psi \in Lip_o(S)$ tal que $|\nabla_\lambda\psi| \in L^{q_o}(S,vdx)$.#

§.4 Estimaciones de tamaño y regularidad de la función de Green

En esta sección aplicaremos algunos resultados de las secciones anteriores para obtener una cota superior y una inferior para la función de Green y para analizar su integrabilidad.

En primer lugar obtendremos una cota inferior para la función de Green aproximada

(5.43) Lema: Sea $S = S(x_o,R)$ una d-bola tal que $4aS \subset \Omega$. Luego

$$\inf_{\frac{r}{2}<d(Y,x)<r} G_Y^{\rho}(x) \ge C\int_r^R \frac{t^2}{w(S(Y,2at))}\, e^{-C\left(\frac{w(S(Y,2at))}{\inf\limits_{d(Y,z)<2t} w(S(z,2t))}\right)^{\gamma}\left(\frac{w(S(Y,t))}{v(S(Y,t))}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{dt}{t}$$

para todo $Y \in \frac{1}{2}S$, todo $r \in (0,\frac{R}{8a^2})$ y todo $\rho \in (0,\frac{r}{4a^2})$, donde $\gamma = (3\sigma^2 + 2\sigma - 2)/(\sigma-1)$

Demostración: Sea $Y \in \frac{1}{2}S$ y $r \in (0,\frac{R}{4a^2})$. Indicaremos con G_s^{ρ} a la función de Green aproximada para $S(Y,s)$ con polo Y. Luego, a partir del Lema (5.22), tenemos

$$(5.44)\qquad \int_{S(y,2ar)-Q(y,r)} \langle A\nabla G^{\rho}_{2ar},\nabla G^{\rho}_{2ar}\rangle \le \frac{C}{r^2}\, w(Q(y,r))\left(\sup_{Q(y,r)-Q(y,\frac{r}{2})} G^{\rho}_{2ar}\right)^2$$

$$\le \frac{C}{r^2}\, w(Q(y,r))\left(\sup_{S(y,ar)-S(y,\frac{r}{2a})} G^{\rho}_{2ar}\right)^2$$

Ahora bien, para cada $x \in S(y,ar)-S(y,\frac{r}{2a})$ es claro que $S(x,\frac{r}{4a}) \subset S(y,2ar)-S(y,\frac{r}{4a})$. Luego, como G^{ρ}_{2ar} es una solución no negativa de L en $S(y,2ar)-S(y,\frac{r}{4a})$ para $\rho \in (0,\frac{r}{4a^2})$, la desigualdad de Harnack (Teorema (4.1)) y la propiedad de duplicación de v nos aseguran

$$\sup_{Q(x,\frac{r}{8a^2})} G^{\rho}_{2ar} \le e^{C\left(\frac{w\left(Q(x,\frac{r}{4a^2})\right)}{w\left(Q(x,\frac{r}{16a^2})\right)}\right)^{\gamma}\left(\frac{w\left(Q(x,\frac{r}{4a^2})\right)}{v\left(Q(x,\frac{r}{4a^2})\right)}\right)^{\frac{1}{2}}} \inf_{Q(x,\frac{r}{8a^2})} G^{\rho}_{2ar}$$

$$\le e^{C\left(\frac{w\left(S(y,2ar)\right)}{\inf_{d(y,z)<ar} w\left(S(z,\frac{r}{16a^2})\right)}\right)^{\gamma}\left(\frac{w(S(y,2ar))}{v(S(y,2ar))}\right)^{\frac{1}{2}}} \inf_{Q(x,\frac{r}{8a^2})} G^{\rho}_{2ar}$$

para todo $\rho \in (0,\frac{r}{4a^2})$, donde $\gamma = (3\sigma^2 + 2\sigma - 2)/(\sigma - 1)$ y C es independiente de r , x e y . Como esta desigualdad es válida para todo $x \in S(y,ar) - S(y,\frac{r}{2a})$, combinada con (5.44) nos conduce a

$$(5.45)\qquad \left(\inf_{S(y,ar)-S(y,\frac{r}{2a})} G^{\rho}_{2ar}\right)^2 \ge$$

$$\frac{Cr^2}{w(Q(y,r))}\, e^{-C\left(\frac{w(S(y,2ar))}{\inf_{d(y,z)<ar} w\left(S(z,\frac{r}{16a^2})\right)}\right)^{\gamma}\left(\frac{w(S(y,2ar))}{v(S(y,2ar))}\right)^{1/2}}$$

$$\int_{S(y,2ar)-Q(y,r)} \langle A\nabla G^{\rho}_{2ar},\nabla G^{\rho}_{2ar}\rangle$$

Por otra parte, tomando $\eta \in C_o^\infty(S(y,2ar))$ tal que $\eta \equiv 1$ en $Q(y,r)$ y $|\nabla_\lambda \eta| \le \frac{C}{r}$, tenemos

$$1 = \frac{1}{w(Q(y,\rho))} \int_{Q(y,\rho)} \eta \, w$$

$$= a_o(G^\rho_{2ar},\eta)$$

$$\le \int_{S(y,2ar)} \langle A\nabla G^\rho_{2ar},\nabla G^\rho_{2ar}\rangle^{1/2} \langle A\nabla\eta,\nabla\eta\rangle^{1/2}$$

$$\le \left(\int_{S(y,2ar)-Q(y,r)} \langle A\nabla G^\rho_{2ar},\nabla G^\rho_{2ar}\rangle\right)^{1/2} \left(\int_{S(y,2ar)} |\nabla_\lambda \eta|^2 \, w\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{C}{r} (w(S(y,2ar))^{1/2} \left(\int_{S((y,2ar)-Q(y,r)} \langle A\nabla G^\rho_{2ar},\nabla G^\rho_{2ar}\rangle\right)^{1/2}$$

Luego, a partir de (5.45), resulta

$$(5.46) \qquad \inf_{S(y,ar)-S(y,\frac{r}{2a})} G^\rho_{2ar} \ge \frac{Cr^2}{w(S(y,2ar))} \cdot e^{-C\left(\frac{w\left(S(y,2ar)\right)}{\inf\limits_{d(y,z)<ar} w\left(S(z,\frac{r}{16a^2})\right)}\right)^\gamma \left(\frac{w(S(y,2ar))}{v(S(y,2ar))}\right)^{1/2}}$$

para todo $\rho \in (0,\frac{r}{4a^2})$. Entonces, aplicando el Lema (3.29) con $x = y$, $r_3 = ar$, $r_2 = r$, $r_1 = \frac{r}{2a}$ y $\psi = G^\rho_{2ar}$ obtenemos una sucesión $\{G^\rho_{2ar,k}\} \subset Lip(S(y,r))$ que converge a G^ρ_{2ar} en $H(S(y,r))$ y tal que, para cada k , $G^\rho_{2ar,k}$ tiene, como cota inferior, en un entorno de $\partial S(y,r)$ al miembro izquierdo de (5.46). Ahora sea $\{G^\rho_{r,k}\} \subset Lip_o(S(y,r))$ una sucesión no negativa que converge a G^ρ_r en $H_o(S(y,r))$ donde G^ρ_r indica la función de Green aproximada para $S(y,r)$ con polo y . Luego, para cada k , $G^\rho_{2ar,k} - G^\rho_{r,k}$ también está acotada inferiormente en un entorno de $\partial S(y,r)$, por el miembro izquierdo de (5.46). Entonces, del

Principio del máximo débil (Teorema (3.29)) se sigue que

$$(5.47)\qquad G^{\rho}_{2ar} - G^{\rho}_{r} \geq \frac{Cr^2}{w(S(y,2ar))}\, e^{-C\left(\frac{w\left(S(y,2ar)\right)}{\inf\limits_{d(y,z)<ar} w\left(S(z,\frac{r}{4a^2})\right)}\right)^{\gamma}\left(\frac{w(S(y,2ar))}{v(S(y,2ar))}\right)^{\frac{1}{2}}}$$

en c.t.p. de $S(y,r)$ y para todo $\rho \in (0,\frac{r}{4a^2})$. Por otra parte por el Principio del máximo débil, sabemos también que $G^{\rho}_{R} \geq G^{\rho}_{(2a)^m r}$ en c.t.p. de $S(y,(2a)^m r)$, donde $m \in \mathbb{N}$ es tal que $(2a)^m r \leq R < (2a)^{m+1} r$. Luego, en c.t.p. de $S(y,2ar)$ es válido

$$(5.48)\qquad G^{\rho}_{R} \geq G^{\rho}_{(2a)^m r} = G^{\rho}_{2ar} + \sum_{j=1}^{m-1}\left(G^{\rho}_{(2a)^{j+1} r} - G^{\rho}_{(2a)^j r}\right)$$

A continuación denotaremos con S_t a la d-bola con centro en y y radio t , y con $g(t_1,t_2)$ para $(t_1,t_2) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$, a la función

$$g(t_1,t_2) = \frac{t_1^2}{w(S_{t_2})}\, e^{-C\left(\frac{w(S_{t_2})}{\inf\limits_{d(y,x)<t_2} w\left(S(x,\frac{t_1}{16a^2})\right)}\right)^{\gamma}\left(\frac{w(S_{t_2})}{v(S_{t_1})}\right)^{1/2}}$$

donde C y γ son los del miembro derecho de (5.47). Notemos que esta función es creciente en t_1 y decreciente en t_2 . Ahora, aplicando (5.46) y (5.47) en (5.48), resulta

$$(5.49)\qquad G^{\rho}_{R} \geq C \sum_{j=0}^{m-1} g\left((2a)^j r,(2a)^{j+1} r\right)$$

$$\geq C \sum_{j=0}^{m-1} \int_{(2a)^{j+1} r}^{(2a)^{j+2} r} g\left(\frac{t}{4a^2},t\right) \frac{dt}{t}$$

$$\geq C \int_{2ar}^{R} g\left(\frac{t}{4a^2},t\right) \frac{dt}{t}$$

$$= C\left(\int_{4a^2r}^{R} g(\frac{t}{4a^2},t)\ \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_{2ar}^{4a^2r} g(\frac{t}{4a^2},t)\ \frac{dt}{t}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_{2ar}^{4a^2r} g(\frac{t}{4a^2},t)\ \frac{dt}{t}\right)$$

$$\leq C\left(\int_{2ar}^{R} g(\frac{t}{4a^2},t)\ \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_{r}^{2ar} g(\frac{t}{2a},2at)\ \frac{dt}{t}\right)$$

$$\geq C\int_{r}^{R} g(\frac{t}{4a^2},2at)\ \frac{dt}{t}\ ,$$

en c.t.p. de $S(y,ar) - S(y,\frac{r}{2a})$ y para todo $\rho \in (0,\frac{r}{4a^2})$. Luego, si y es un punto cualquiera de $\frac{1}{2}S$ se verifica $S(y,\frac{R}{2}) \subset S$. Entonces, por el Principio del máximo débil $G_y^\rho \geq G_{R/2}^\rho$ en c.t.p. de $S(y,\frac{R}{2})$, donde G_y^ρ es la función de Green aproximada para S con polo y . Luego, de (5.49), vale la acotación

$$\text{(5.50)} \qquad G_y^\rho \geq C\int_{r}^{R/2} g(\frac{t}{4a^2},2at)\ \frac{dt}{t}$$

$$= C\left(\int_{4r}^{R} g(\frac{t}{8a^2},at)\ \frac{dt}{t} + \frac{1}{2}\int_{2r}^{4r} g(\frac{t}{8a^2},at)\ \frac{dt}{t}\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\int_{2r}^{4r} g(\frac{t}{8a^2},at)\ \frac{dt}{t}\right)$$

$$\geq C\left(\int_{2r}^{R} g(\frac{t}{8a^2},at)\ \frac{dt}{t} + \int_{r}^{2r} g(\frac{t}{4a^2},2at)\ \frac{dt}{t}\right)$$

$$\geq C\int_{r}^{R} g(\frac{t}{8a^2},2at)\ \frac{dt}{t}$$

en c.t.p. de $S(y,ar) - S(y,\frac{r}{2a})$ y para todo $r \in (0,\frac{r}{8a^2})$ y $\rho \in (0,\frac{r}{4a^2})$

que utilizando la propiedad de duplicación de v , lleva a la tesis.$_{\#}$

A continuación probaremos un resultado del análisis funcional que nos resultará de fundamental importancia.

(5.51) Lema: Sean $E \in \mathbb{R}^n$ medible, $h \in L^1_{loc}(E,dx)$ positiva en c.t.p. de E y $p \in (1,\infty)$. Si $\{f_k\} \subset L^p(E,hdx)$ converge débilmente a una función f y es tal que $\sup_k f_k \leq C_o$, para alguna constante C_o , en c.t.p. de un conjunto acotado $F \subset E$, entonces $f \leq C_o$ en c.t.p. de F .

Demostración: Por la hipótesis tenemos que $C_o - f_k \geq 0$, $\forall k$, en c.t.p. de F . Luego

$$\int_E (C_o - f_k)\, g\, hdx \geq 0$$

para todo k y para toda $g \in L^{p'}(E,hdx)$ tal que $\mathrm{sop}(g) \subset F$ y $g \geq 0$ en c.t.p. de F . De aquí, por la convergencia débil, se sigue

$$\int_E (C_o - f)\, g\, hdx \geq 0$$

para toda g en las condiciones antes mencionadas. Entonces, tomando $g = \chi_{F\cap\{f>C_o\}}$, tenemos que $(C_o - f)\, h \geq 0$ en c.t.p. de F . Esto, dado que $h > 0$ en c.t.p. de E , con asegura que $f \leq C_o$ en c.t.p. de F .$_{\#}$

Ahora estamos en condiciones de probar.

(5.52) Teorema: Sea $S = S(x_o,R)$ una d-bola tal que $12aS \subset \Omega$. Luego para c.t.p. $y \in \frac{1}{2}S$, la función G_y es no negativa en c.t.p. de S y para todo $r \in (0,\frac{R}{8a^2})$ valen las siguientes acotaciones

$$\sup_{\frac{r}{2} < d(y,x) < r} G_y(x) \leq C \int_r^R \frac{t^2}{v(S(y,t))} \times \left(\left(\frac{w(S(y,12t))}{v(S(y,t))} \right)^{\gamma_1} \frac{w(S(y,12t))}{\inf\limits_{d(y,x)<4t} w\left(S(z,\frac{2t}{9a^2})\right)} \right)^{1/2} \frac{dt}{t} \tag{5.53}$$

para cada $p \in (1,\sigma)$ y donde $\gamma_1 = 2\sigma^2/(\sigma-1)$;

(5.54) $$\inf_{\frac{r}{2} < d(y,x) < r} G_y(x) \geq C \int_r^R \frac{t^2}{w(S(y,2at))} \times e^{-C\left(\frac{w(S(y,2at))}{\inf\limits_{d(y,z)<2t} w(S(z,2t))}\right)^{\gamma_2}\left(\frac{w(S(y,t))}{v(S(y,t))}\right)^{\frac{1}{2}}} \frac{dt}{t}$$

donde $\gamma_2 = (3\sigma^2 + 2\sigma - 2)/(\sigma - 1)$

Demostración: A partir del Lema (5.3) se sigue que $G_y^\rho \geq 0$ para c.t.p. de S para todo $y \in \frac{1}{2} S$ y todo $\rho \in (0,\frac{R}{2a})$. Luego, por los Lemas (5.22) y (5.51) y la definición de la función de Green (Teorema (5.34)), tenemos que $G_y \geq 0$ en c.t.p. de S y para c.t.p. $y \in \frac{1}{2} S$. La desigualdad (5.53) es consecuencia inmediata de los Lemas (5.12), (5.32) y (5.51) y de la definición (5.33). Por otra parte, la desigualdad (5.54) se obtiene, con el mismo razonamiento anterior, a partir del Lema (5.43).#

A continuación probaremos un resultado sobre integrabilidad sin pesos de la función de Green.

(5.55) Teorema: Sea $S = S(x_o,R)$ una d-bola tal que $17a^2 S \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$, para $n \geq 3$. Luego $G_y \in L^p(S,dx)$ para c.t.p. $y \in \frac{1}{2} S$ y todo $p \in (0,\text{máx}(\sum_j G_j)/(\sum_j G_j - 1),\sigma))$.

Demostración: A partir de (5.53), aplicando un razonamiento similar al aplicado para demostrar el Corolario (5.19), se sigue que

(5.56) $$\sup_{\frac{r}{2}<d(y,x)<r} G_y(x) \leq C \min\left(\int_r^R \frac{t^2}{|S(y,t)|} \frac{dt}{t}, \int_r^R \frac{1}{|S(y,t)|^{1/\sigma}} \frac{dt}{t}\right)$$

para c.t.p. $y \in \frac{1}{2} S$ y todo $r \in (0,\frac{R}{8a^2})$, donde $C = C(y,x_o,R,w,v)$. Luego, como para c.t.p. $y \in \frac{1}{2} S$ se verifica que $S(x_o,R) \subset S(y,2R) \subset S(y,16a^2R)$ y $G_y(x) \leq G_{16a^2R}(x)$ en $S(x_o,R)$, donde G_{16a^2R} indica la función de Green para $S(y,16a^2R)$ con polo y , tenemos

$$\int_{S(x_o,R)} (G_y)^p\,dx \leq \int_{S(x_o,R)} (G_{16a^2R})^p\,dx$$

$$\leq \int_{S(y,2R)} (G_{16a^2R})^p\,dx$$

$$= \sum_{i=0}^{\infty} \int_{S(y,\frac{2R}{2^i})-S(y,\frac{2R}{2^{i+1}})} (G_{16a^2R})^p\,dx$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\int_{\frac{R}{2^{i-1}}}^{16a^2R} \frac{t^2}{|S(y,t)|}\,\frac{dt}{t}\right)^p |S(y,\frac{R}{2^{i-1}})|$$

$$\leq \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \int_{\frac{R}{2^{i-1}}2^j}^{\frac{R}{2^{i-1}}2^{j+1}} \frac{t^2}{|S(y,t)|}\,\frac{dt}{t}\right)^p |S(y,\frac{R}{2^{i-1}})|$$

$$\leq C \sum_{i=0}^{\infty} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(R\,2^{1-i}\,2^{j+1}\right)^2}{|S(y,\frac{R}{2^{i-1}}2^j)|}\right)^p |S(y,\frac{R}{2^{i-1}})|$$

Entonces, aplicando (1.13) y (1.15), resulta

$$(5.57) \qquad \int_{S(x_o,R)} (G_y)^p\,dx \leq C \sum_{i=0}^{\infty} \left(\frac{(R\,2^{1-i})^2}{|S(y,\frac{R}{2^{i-1}})|} \sum_{j=0}^{\infty} 2^{j(2-n)}\right)^p |S(y,\frac{R}{2^{i-1}})|$$

$$\leq C \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(R\,2^{1-i})^{2p}}{|S(y,\frac{R}{2^{i-1}})|^{p-1}}$$

$$\leq C\left(\frac{(2R)^{2p}}{|S(y,2R)|^{p-1}}+\frac{R^{2p}}{|S(y,R)|^{p-1}}\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i((\sum_j G_i-2)p-\sum_j G_j)}\right)$$

La serie en el miembro derecho es finita sí y sólo sí $p<(\sum_j G_j)/(\sum_j G_j-2)$. Por otra parte, aplicando otra vez (5.56) y razonando como antes, tenemos también que

$$\int_{S(x_o,R)} (G_y)^p\, dx \leq \frac{C}{|S(y,R)|^{p/\sigma-1}}\left(1+\sum_{i=1}^{\infty} 2^{i(\frac{p}{\sigma}\sum_j G_j-\sum_j G_j)}\right)$$

con la serie del miembro derecho finita sí y sólo sí $p<\sigma$. Luego, de (5.57) y ésto, tenemos la tesis.#

Por el Lema (5.32) sabemos que $G_y\in X_{p,q}$ para c.t.p. $y\in\frac{1}{2}S$ y todo por $(p,q)\in[1,\sigma)\times[1,\frac{2\sigma}{\sigma+1})$. En el siguiente Teorema veremos que existe una constante C, independiente de y, tal que $\|G_y\|_{p,q}\leq C$ para todo par $(p,q)\in[1,\sigma)\times[1,\frac{2\sigma}{\sigma+1})$. La demostración se basa en las igualdades (5.39) y (5.40) y en un argumento de iteración de tipo Moser.

(5.58) <u>Teorema</u>: Sea $S=S(x_o,R)$ una d-bola tal que $12aS\subset\Omega\subset\mathbb{R}^n$ para $n\geq 3$. Luego existe una constante C tal que $\|G_y\|_{p,q}\leq C$ para todo par $(p,q)\in(1,\sigma)\times(1,\frac{2\sigma}{\sigma-1})$ y para c.t.p. $y\in\frac{1}{2}S$.

<u>Demostración</u>: Notemos que probar la tesis es equivalente a probar que existe C tal que se verifican simultáneamente

(5.59) $$\left(\int_S (G_y)^p\, w\right)^{1/p}\leq C$$

(5.60) $$\left(\int_S |\nabla_\lambda G_y|^q\, v\right)^{1/p}\leq C$$

para c.t.p. $y\in\frac{1}{2}S$ y todo por $(p,q)\in(1,\sigma)\times(1,\frac{2\sigma}{\sigma+1})$. Ahora bien, dado $(p,q)\in(1,\sigma)\times(1,\frac{2\sigma}{\sigma+1})$, sabemos que $G_y\in X_{p,q}$ para c.t.p. $y\in\frac{1}{2}S$.

Luego, para c.t.p. $y \in \frac{1}{2} S$, existen $f \in L^{p'}(S,wdx)$ y $f_i \in L^{q'}(S,vdx)$, $i = 1,\dots,n$, tal que

$$(5.61) \qquad \left(\int_S (G_y)^p\, w\right)^{1/p} = \int_S G_y\, f\, w$$

$$(5.62) \qquad \left(\int_S |\nabla_\lambda G_y|^q\, v\right)^{1/q} \le \sum_{i=1}^{n} \left(\int_S |\lambda_i D_i G_y|^q\, v\right)^{1/q}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \int_S \lambda_i\, D_i\, G_y\, f_i\, v$$

y además,

$$(5.63) \qquad \left(\int_S |f|^{p'}\, w\right)^{1/p'} = 1 \quad ,$$

$$(5.64) \qquad \left(\int_S |f_i|^{q'}\, v\right)^{1/q'} = 1 \qquad i = 1,\dots,$$

Por el Teorema (5.38) tenemos que los miembros derechos de (5.61) y (5.62) representan respectivamente y en c.t.p. $y \in \frac{1}{2} S$, a las soluciones de $Lu = f\,w$ y $Lu = -\mathrm{div}_\lambda(F\,v)$ con $F = (f_1,\dots,f_n)$. Luego, (5.59) y (5.60) son consecuencias de (3.26) y (5.63), y de (3.28) y (5.64) respectivamente.#

BIBLIOGRAFIA

[CC] CAFFARELLI, L. y CALDERON, C.
"Weak type estimates for the Hardy-Littlewood maximal functions".
Studia Math. 49 (1974), 217-223.

[C] CALDERON, A.P.
"Inequalities for the maximal function relative to a metric".
Studia Math. 57 (1976), 297-306.

[CG] COIFMAN, R. y DE GUZMAN, M.
"Singular integrals and multipliers on homogeneous spaces".
Rev. Un. Mat. Argentina, 25 (1970), 137-144.

[CW] COIFMAN, R. y WEISS, G.
"Analyse harmonique non conmutative sur certains espaces homogenes".
Lecture Notes in Mathematics, N° 242, Springer-Verlag, 1971.

[ChW1] CHANILLO, S. y WHEEDEN, R.
"Weighted Poincaré and Sobolev inequalities and estimates for weighted Peano Maximal functions".
A aparecer.

[ChW2] CHANILLO, S. y WHEEDEN, R.
"Harnack's inequality and mean value inequalities for solutions of degenerate elliptic equations".
A aparecer.

[ChW3] CHANILLO, S. y WHEEDEN, R.
"Existence and estimates of Green's function for degenerate elliptic equations".
A aparecer.

[FJK] FABES, E., JERISON, D. y KENIG, C.
"The Wiener test for degenerate elliptic equations".
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 32, 3 (1982). 151-182.

[FRS] FABES, E., KENIG, G. y SERAPIONI, R.
"The local regularity of solutions of degenerate elliptic equations".
Comm. in Partial Differential Equations, 7, 1982, 77-116.

[FL1] FRANCHI, B. y LANCONELLI, E.
"Une métrique associeé a une classe d`opérateurs elliptiques dégénérés".
Proc. of the meeting-linear partial and pseudo differential operators. Rend. Sem. Mat. Univ. e Politec. Torino (1982).

[FL2] FRANCHI, B. y LANCONELLI, E.
"Hölder regularity theorem for a class of linear elliptic operators with measurable coefficients".
Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Serie IV, Vol. X, N° 4 (1983), 523-541.

[FL3] FRANCHI, B. y LANCONELLI, E.
"An embedding theorem for Sobolev spaces related to non smooth vector fields and Harnack inequality".
Comm. in Partial Differential Equations, Vol. 9 (13), 1984, 1237-1264.

[FS] FRANCHI, B. y SERAPIONI, R.
"Pointwise estimates for a class of strongly degenerate elliptic operators: a geometrical approach".
Universitá Degli Studi di Trento, Italy, U.T.N., 195 (1986), 1-57.

[KS] KINDERLEHRER, D. y STAMPACCHIA, G.
"An introduction to variational inequalities and their applications".
Academic Press, 1980.

[LSW] LITTMAN, W.; STAMPACCHIA, G. y WEINBERGER, H.
"Regular points for elliptic equations with discontinuous coefficients".
Estratto degli Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa. Scienze Fisiche e Matematiche, Serie III, Vol. XVII, Fasc. I-II. 1963.

[M1] MOSER, J.
"On Harnack's theorem for elliptic differential equations".
Comm. on Pure and Applied Math., Vol. XIV, (1961), 557-591.

[M2] MOSER, J.
"On a pointwise estimate for parabolic differential equations".
Comm. on Pure and Applied Math., Vol. XXIV (1971), 727-740.

[M] MUCKENHOUPT, B.
"Weighted norm inequalities for the Hardy maximal function".
Trans. Amer. Math. Soc. 165 (1972), 207-227.

[S] SAWYER, E.
"A characterization of a two weight norm inequality for maximal operators".
Studia Math. 75, (1982), 1-11.

Lic. Oscar M. Salinas

Dr. Hugo Aimar
Director