Homología cíclica de extensiones monogeneradas

Guccione, Jorge Alberto

1990

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Matemáticas de la Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

TITULO

HOMOLOGIA CICLICA DE EXTENSIONES MONOGENERADAS

Autor: JORGE ALBERTO GUCCIONE

Director: ORLANDO E. VILLAMAYOR

Lugar de Trabajo: DEPARTAMENTO DE MATEMATICA, F.C.E. y N.

TESIS PRESENTADA PARA OPTAR POR EL TITULO DE

DOCTOR EN CIENCIAS MATEMATICAS

OCTUBRE

1989

INTRODUCCION

En 1983 Connes [C] definió la cohomología cíclica $HC^*(A)$ de un álgebra A sobre un cuerpo k de característica cero para estudiar los invariantes del espacio de hojas de una variedad foliada.

Existe una conexión muy fuerte entre esta teoría, la cohomología de Hochschild y la homología de de Rham. Mas precisamente hay una sucesión exacta periódica

$$(1)\quad \cdots \xrightarrow{B} H^n(A,A^*) \xrightarrow{i} HC^n(A) \xrightarrow{S} HC^{n+2}(A) \xrightarrow{B} H^{n+1}(A,A^*) \xrightarrow{i} HC^{n+1}(A) \xrightarrow{S} \cdots$$

El morfismo S le permitió definir una teoría periódica

$$HP^n(A)=\varinjlim_{i} HC^{n+2i}(A)$$

Si A es el anillo de funciones diferenciables sobre una variedad V

$$HP^n(A)=H^*(V,C),$$

donde $H^*(V,C)$ es la cohomología de de Rham de V

En este sentido $HP^n(A)$, la cual existe aun si A es no commutativo (por ejemplo la C^*-álgebra de una foliación) juega el rol de la cohomología. Esto le permite a Connes definir las clases de Chern de una foliación y dar una fórmula explicita para el índice de un operador elíptico sobre una foliación.

En el mismo año Tsygan [T] definió la teoría dual, es decir la homología cíclica y probó que esta teoría está relacionada con la homología de álgebras de Lie. Más precisamente el estableció que si A es una k-álgebra con k un cuerpo de característica cero

$$(2)\qquad HC^*_{n-1}(A)=\mathrm{Prim}H^{Lie\bullet}_{n}(gl(A),k),$$

donde $gl(A)=\varinjlim_{n}(gl_n(A) \longrightarrow gl_{n+1}(A))$ es el álgebra de Lie de Matrices y Prim es la parte primitiva.

Así la homología cíclica apareció al mismo tiempo en dos campos diferentes. Un año después Loday y Quillen definierón la homología cíclica para álgebras sobre un anillo commutativo arbitrario en su célebre trabajo [L-Q]. Allí definieron un producto

(3) $HC_n(A) X CH_m(A) \longrightarrow HC_{n+m+1}(A)$

estableciendo además independientemente de Tsygan, la fórmula (1) y que la aplicación de estabilización

$$H_i(gl_n(A),k) \longrightarrow H_i(gl_{n+1}(A),k)$$

es un isomorfismo para $i\leq n$ y tiene conúcleo $\Omega^{n-1}(A)/d(\Omega^{n-2}(A))$ para $i=n+1$.

En el contexto de la homología la sucesión exacta (1) queda reemplazada por

(4) $\ldots \xrightarrow{B} H_*(A) \xrightarrow{i} HC_*(A) \xrightarrow{S} HC_{*-2}(A) \xrightarrow{B} H_{*-1}(A) \xrightarrow{i} HC_{*-1}(A) \xrightarrow{S} \ldots$

La fórmula (2) es análoga al teorema de Milnor-Moore que afirma que

$$K_n(A)\otimes Q \cong \mathrm{Prim} H_n(GL(A),Q)$$

Por esta razón Tsygan denotó a $HC_{n-1}(A)$ como $K_n^+(A)$ y lo llamó teoría k aditiva de A. Con esta nueva notación el producto definido en [L-Q] aplica $K_n^+(A) X K_m^+(A)$ en $K_{n+m}^+(A)$ quedando con una graduación más natural. Este producto tiene las mismas propiedades que el de la teoría k algebraica. Aquí el rol de la teoría k de Milnor es jugado por $\Omega^n(A)/d(\Omega^{n-1}(A)) \subseteq HC_n(A)$. Con esta analogía el teorema de estabilización mencionado más arriba es el análogo aditivo de un teorema de Suslin para $K_n(A)$. Hay en realidad todo un diccionario que relaciona la homología cíclica y la teoría k algebraica: El grupo lineal es reemplazado por el álgebra de Lie de matrices, el grupo formal multaiplicativo G_m por el aditivo G_a, K_n^M por $\Omega^n(A)/d(\Omega^{n-1}(A))$, la operación $x+y-xy$ por $x+y$, el determinante por la traza, etc.

Más importante aún que este paralelismo es la existencia de aplicaciones naturales de los grupos K en variaciones de los de la homología cíclica (para las definiciones ver la sección 3). Más precisamente en [K1] Karoubi construyó caracteres de Chern

$$ch_n : K_n(A) \longrightarrow \varprojlim_i HC_{n+2i}(A),$$

en [G] Goodwillie definió un morfismo

$$\gamma_n : K_n(A) \longrightarrow HC_n^-(A)$$

y en [W] Weibel, definió, para $k=\mathbb{Q}$, aplicaciones

$$c_n : KV_n(A) \longrightarrow HC_n^{per}(A) \quad \text{y} \quad \nu_n : nilK_n(A) \longrightarrow HC_{n-1}(A) \ ,$$

donde KV designa a los grupos de la teoría K de Kroubi, Nobile y Villamayor y nilK a los grupos K nilpotentes (ver [W]), mostrando además que los diagramas

$$\begin{tikzcd} K_n(A) \arrow[r, "D_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & H_n(A) \arrow[d, "="] \\ HC_n^-(A) \arrow[r] & H_n(A) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} K_n(A) \arrow[rr, "ch_n"] \arrow[d, "\gamma_n"] & & \text{Lim } HC_{n+2i}(A) \arrow[d, "="] \\ HC_n^-(A) \arrow[r] & HC_n^{per}(A) \arrow[r] & \text{Lim } HC_{n+2i}(A) \end{tikzcd}$$

donde D_n es el morfismo definido por Dennis [D] en 1975 y

$$\begin{tikzcd} \dots \arrow[r] & KV_{n-1}(A) \arrow[r] \arrow[d, "c_{n-1}"] & nilk_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\nu_n"] & K_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "\gamma_n"] & KV_n(A) \arrow[r] \arrow[d, "c_n"] & \dots \\ \dots \arrow[r] & HC_{n-1}^{per}(A) \arrow[r] & HC_{n-1}(A) \arrow[r] & HC_n(A) \arrow[r] & HC_n^{per}(A) \arrow[r] & \dots \end{tikzcd}$$

commutan.

Por otro lado Goodwillie obtuvo en [G] el siguiente

Teorema: Si A es una $\mathbb{Q}$-álgebra e I es un ideal nilpotente de A hay isomorfismos

$$\begin{array}{ccc} nilK_n(A,I) & \cong & K_n(A,I) \\ \downarrow \nu_n & & \downarrow \gamma_n \\ HC_{n-1}(A,I) & \cong & HC_n^-(A,I) \end{array}$$

Estos resultados y el hecho de que se sospecha que la homología cíclica del anillo de funciones de una variedad algebraica V está fuertemente relacionada con el tipo de singularidades de V muestra la importancia de los cálculos de la homología cíclica. En este sentido los trabajos más significativos son [Bach], [B], [C-G-V], [K-V], se calculan homologías cíclicas de anillos de grupos; [L] y [B-V], donde se obtienen descomposiciones de la homología cíclica de álgebras commutativas, [B-O] , [K2], [k3] y [Ka], donde se establecen fórmulas de Künneth para la homología cíclica, etc.

Sea D una k-álgebra commutativa y S un subconjunto multiplicativo de k[X]. El objetivo principal de este trabajo es calcular la homología cíclica de $D[X]/\langle X^n\rangle$ y $S^{-1}D[X]$ en términos de las homologías de Hochschild y cíclica de D , bajo hipótesis adecuadas.

En las secciones 1, 2 y 3 damos las nociones básicas acerca de las homologías de Hochschild y cíclica y establecemos sus principales propiedades (para más detalles ver [K], [B-O], [L-Q] y [W]).

En la sección 4 mostramos que para $A=k[X]/\langle f\rangle$, donde k es un anillo commutativo arbitrario con unidad y f es un polinomio mónico, el complejo de Hochschild $(C_*(A),b_*)$ de A tiene la misma homología que uno más sencillo $(C\text{'}_*(A),b\text{'}_*)$, lo que nos permite calcular fácilmente la homología de Hochschild de A. Nosotros obtenemos también morfismos

$\bar{h}_*:(Cs_*(A),bs_*) \longrightarrow (C_*(A),b_*)$ y $\bar{g}_*:(C_*(A),b_*) \longrightarrow (Cs_*(A),bs_*)$ que inducen isomorfismos inversos uno del otro en la homología.

En la sección 5 probamos primero que, para $A=k[X]/(X^n)$, donde k es un anillo commutativo arbitrario con unidad , el complejo doble $B(A)_{norm}$ definido en [L-Q] puede ser reemplazado por un complejo más sencillo. Como una aplicación obtenemos la homología cíclica $HC_*(A)$ y los morfismos $S:HC_*(A) \longrightarrow HC_{*-2}(A)$ Esto nos permite calcular fácilmente la homología periódica $HC_*^{per}(A)$ y las homologías $HC_*^-(A)$ y $HC^*(A)$. Finalmente hacemos los mismos cálculos para $A=S^{-1}k[X]$.

En la sección 6 cálculamos la homología cíclica de $D[X]/(X^n)$ y $S^{-1}D[X]$ en términos de las homologías de Hochschild y cíclica de D, donde D es una k-álgebra commutativa con k un anillo commutativo conteniendo a un cuerpo. Obtenemos además resultados similares para la cohomología y, finalmente cuando k es un cuerpo, cálculamos la homología y cohomología cíclica de $D[X]/(P)$, con P un polinomio en $k[X]$. Todos estos resultados son conocidos cuando k es un cuerpo de característica cero.

SECCION 1

HOMOLOGIA DE HOCHSCHILD

Sea k un anillo conmutativo arbitrario con unidad y A una k-álgebra Se define el álgebra envolvente A^e de A como $A^e = A \otimes A^{op}$, donde A^{op} es el anillo opuesto de A (i.e.: A^{op} tiene el mismo grupo aditivo que A y su producto $\circ$ está definido por $a \circ b = b.a$). Dado $n \in \mathbb{N}$ se denota con A^n al producto tensorial $A \otimes_k \ldots \otimes_k A$ n veces. Es claro que A^n puede ser considerado como un A^e-módulo a izquierda mediante la acción

$(a \otimes b)(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = aa_1 \otimes \ldots \otimes a_n b$

Se define la resolución canónica de Hochschild de A como el complejo de A^e-módulos

$$(1) \quad \ldots \xrightarrow{b'} A^6 \xrightarrow{b'} A^5 \xrightarrow{b'} A^4 \xrightarrow{b'} A^3 \xrightarrow{b'} A^2 \xrightarrow{b'} A \ ,$$

donde $A^n \xrightarrow{b'} A^{n-1}$ es el operador definido por

$$b'(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (-1)^{i+1} a_1 \otimes \ldots \otimes a_i a_{i+1} \otimes \ldots \otimes a_n$$

La familia de morfismos $\left(\varepsilon_0 : A^n \longrightarrow A^{n+1}\right)_{n>0}$, definida por

$$\varepsilon_0(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = 1 \otimes a_1 \otimes \ldots \otimes a_n \qquad \forall\ n>0$$

es una homotopia de retracción de (1), en efècto $\varepsilon_0 b' + b' \varepsilon_0 = id$.

Tensorizando el complejo (1) por A sobre A^e y utilizando la identificación

$$A \otimes_{A^e} A^n \longrightarrow A^{n-1}$$
$$a \otimes (a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) \longmapsto a_n a a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}$$

se obtiene el complejo de Hochschild

(2) $\quad \cdots \xrightarrow{b} A^6 \xrightarrow{b} A^5 \xrightarrow{b} A^4 \xrightarrow{b} A^3 \xrightarrow{b} A^2 \xrightarrow{b} A$,

donde el morfismo $A^n \xrightarrow{b} A^{n-1}$ inducido por b' resulta ser

$b(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) = b'(a_1 \otimes \ldots \otimes a_n) + (-1)^n . a_n a_1 \otimes a_2 \otimes \ldots \otimes a_{n-1}$.

Su homología

$H_*(A) = \dfrac{\ker(A^{*+1} \longrightarrow A^*)}{\operatorname{Im}(A^{*+2} \longrightarrow A^{*+1})}$ se

se llama la homología de Hochschild de A con coeficientes en A. Cuando A es playo sobre k, A^n es playo sobre A^e para todo n>0 y así, en este caso $H_*(A) = \operatorname{Tor}_*^{A^e}(A,A)$.

Sean ahora $\bar{A} = A/k$ y $\bar{A}^n$ el producto tensorial de $\bar{A}$ n veces. Para cada $n \geq 1$ el morfismo $b: A^n \longrightarrow A^{n-1}$ induce un morfismo $b: A \otimes \bar{A}^n \longrightarrow A \otimes \bar{A}^{n-1}$. El complejo

(3) $\quad \cdots \xrightarrow{b} A\otimes\bar{A}^5 \xrightarrow{b} A\otimes\bar{A}^4 \xrightarrow{b} A\otimes\bar{A}^3 \xrightarrow{b} A\otimes\bar{A}^2 \xrightarrow{b} A\otimes\bar{A} \xrightarrow{b} A$,

se llama complejo de Hochschild normalizado y su homología es la homología de Hochschild. En efecto se tiene la siguiente

Proposicion 1.1: La familia de proyecciones canónicas $\left(\Pi_n : A^{n+1} \to A\otimes\bar{A}^n\right)_{n>0}$ define un morfismo de complejos que induce un isomorfismo en la homología.

Demostración: Para cada $n \geq 1$ se considera la sucesión exacta corta de complejos

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\cdots \xrightarrow{b} & N^n_{n+1} & \xrightarrow{b} & N^n_n & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow \cdots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & 0 \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
(*) \quad \cdots \xrightarrow{b} & A\otimes A^2\otimes\bar{A}^{n-1} & \xrightarrow{b} & A\otimes A\otimes\bar{A}^{n-1} & \xrightarrow{b} & A\otimes\bar{A}^{n-1} & \xrightarrow{b} \cdots \longrightarrow & A\otimes\bar{A}^2 & \xrightarrow{b} & A\otimes\bar{A} & \xrightarrow{b} & A \\
& \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\cdots \xrightarrow{b} & A\otimes A\otimes\bar{A}^{n-1} & \xrightarrow{b} & A\otimes\bar{A}^n & \xrightarrow{b} & A\otimes\bar{A}^{n-1} & \xrightarrow{b} \cdots \longrightarrow & A\otimes\bar{A}^2 & \xrightarrow{b} & A\otimes\bar{A} & \xrightarrow{b} & A
\end{array}$$

donde los morfismos b están definidos como más arriba y N^n_{n+j} es el submódulo de $A\otimes A^{j+1}\otimes\overline{A}^{n-1}$ generado por los elementos de la forma $a_0\otimes\ldots\otimes a_{j+1}\otimes\overline{a_{j+2}}\otimes\ldots\otimes\overline{a_{j+n}}$ con $a_{j+1}\in k$. La sucesión exacta larga de homología aplicada a los diagramas (*) muestra que para probar la proposición basta ver que las sucesiones

$$(**)\quad \ldots\xrightarrow{\ b\ } N^n_{n+4}\xrightarrow{\ b\ } N^n_{n+3}\xrightarrow{\ b\ } N^n_{n+2}\xrightarrow{\ b\ } N^n_{n+1}\xrightarrow{\ b\ } N^n_n\longrightarrow 0$$

son exactas; pero es fácil ver, usando que $b:N^n_{n+j}\longrightarrow N^n_{n+j-1}$ verifica

$$b(a_0\otimes\ldots\otimes a_{j+1}\otimes\overline{a_{j+2}}\otimes\ldots\otimes\overline{a_{j+n}})=\sum_{i=0}^{j}(-1)^i a_0\otimes\ldots\otimes a_ia_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_{j+1}\otimes\overline{a_{j+2}}\otimes\ldots\otimes\overline{a_{j+n}}\ +$$

$$+\sum_{i=j+2}^{j+n-1}(-1)^i a_0\otimes\ldots\otimes a_{j+1}\otimes\overline{a_{j+2}}\otimes\ldots\otimes\overline{a_ia_{i+1}}\otimes\ldots\otimes\overline{a_{j+n}},$$

que la familia de morfismos $\left(\varepsilon_0:N^n_{n+j}\longrightarrow N^n_{n+j+1}\right)_{j\geq 0}$ definida por

$$\varepsilon_0(a_0\otimes\ldots\otimes a_{j+1}\otimes\overline{a_{j+2}}\otimes\ldots\otimes\overline{a_{j+n}})=1\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{j+1}\otimes\overline{a_{j+2}}\otimes\ldots\otimes\overline{a_{j+n}}\qquad\forall\ j\geq 0$$

es una homotopía de retracción de (**).

El Producto barajado

Recordamos que una A-álgebra diferencial graduada estrictamente commutativa es un complejo de A-módulos

$$\ldots\xrightarrow{d_7} A_6\xrightarrow{d_6} A_5\xrightarrow{d_5} A_4\xrightarrow{d_4} A_3\xrightarrow{d_3} A_2\xrightarrow{d_2} A_1\xrightarrow{d_1} A_0$$

junto con operaciones

$$A_i\times A_j\longrightarrow A_{i+j}\quad (i,j\geq 0)$$

que convierten a $A_0\oplus A_1\oplus A_2\oplus A_3\oplus\ldots$ en un anillo estrictamente commutativo graduado (i.e. si $a_i\in A_i$ y $a_j\in A_j$ $a_ia_j=(-1)^{i+j}a_ja_i$ y $(a_i)^2=0$ si i es impar) y que verifican

(4) $d_{i+j}(a_i a_j)=d_i(a_i)a_j+(-1)^i a_i d_j(a_j)$

Es fácil ver, usando la fórmula (4), que en un álgebra diferencial graduada estrictamente commutativa el producto de dos ciclos es un ciclo y el producto de un ciclo por un borde es un borde. Así el producto del álgebra induce un producto en la homología que convierte a $H_*(A)=H_0(A)\oplus \oplus H_1(A)\oplus H_2(A)\oplus\ldots$ es una A-álgebra graduada estrictamente commutativa.

Teorema 1.2: Sea A una k-álgebra commutativa. La operación definida por

$$(a\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_p)*(a'\otimes a_{p+1}\otimes\ldots\otimes a_{p+q})=\sum_{B_{pq}} sg(\sigma)\left[aa'\otimes a_{\sigma^{-1}(1)}\otimes\ldots\otimes a_{\sigma^{-1}(p+q)}\right],$$

dondé la suma es tomada sobre el conjunto B_{pq} de las permutaciones σ de $\{1,\ldots,p+q\}$ que verifican $\sigma(1)<\ldots<\sigma(p)$ y $\sigma(p+1)<\ldots<\sigma(p+q)$ convierte tanto al complejo de Hochschild como al de Hochschild normalizado en una A-álgebra diferencial graduada estrictamente commutativa. Así la Homología de Hochschild $H_*(A)$ de un álgebra commutativa A con coeficientes en A tiene una estructura natural de álgebra graduada estrictamente commutativa.

Demostración: Se hace por cálculo directo.

<u>Derivaciones</u>

Sea A una k-álgebra y M un A-módulo a izquierda. Una derivación de A sobre ken M es una aplicación k-lineal $d:A\longrightarrow M$ que verifica

(5) $d(ab)=ad(b)+bd(a)$

Es fácil ver que $\{a\in A:\ d(a)=0\}$ es un subanillo de A. Observese que esto implica que d restringido a k es nula. Al conjunto de las k-derivaciones de A en M se lo nota $Der_k(A,M)$. Sea $Z(A)$ el centro de A.

La operación definida por

$(ad_1+d_2)(b)=ad_1(b)+d_2(b) \qquad \forall\ a\in Z(A),\ b\in A,\ d_1,d_2\in Der_k(A,M)$

convierte a $Der_k(A,M)$ en un $Z(A)$-módulo.

Observación 1.3: Se verifican:

1) Dado el morfismo $f:M \longrightarrow N$ de A-módulos queda definido el morfismo de $Z(A)$-módulos

$$\begin{array}{ccc} Der_k(A,M) & \longrightarrow & Der_k(A,N) \\ d & \longmapsto & fd \end{array}$$

2) Dado un morfismo $\phi:A \longrightarrow B$ de k-álgebras y un B-módulo M queda definido el morfismo de $Z(A)$-módulos

$$\begin{array}{ccc} Der_k(B,M) & \longrightarrow & Der_k(A,{}_{\phi}M), \\ d & \longmapsto & d\phi \end{array}$$

donde ${}_{\phi}M$ denota al grupo abeliano M con la estructura de A-módulo definida por $am=\phi(a)m\ \forall a\in A$ y $\forall m\in M$.

Sea A una k-álgebra. Denotemos por I al núcleo del epimorfismo de A^e-módulos $\mu:A\otimes A^{op} \longrightarrow A$, definido por $\mu(a\otimes b)=ab$. Se considerará a I, A y A^e como A-módulos a izquierda mediante las estructuras inducidas por $\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A\otimes A^{op} \\ a & \longmapsto & a\otimes 1 \end{array}$. Se define un mórfismo de k-módulos $T:A \longrightarrow I$ mediante $T(a)=1\otimes a-a\otimes 1$. La igualdad $\sum_{i=1}^{n} a_i\otimes b_i = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i\otimes 1 + \sum_{i=1}^{n} a_i\left(1\otimes b_i - b_i\otimes 1\right) = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i\otimes 1 + \sum_{i=1}^{n} a_iT(b_i)$ muestra que si A está generado como k-módulo por $(a_j)_{j\in J}$, I está generado como A-módulo por $T(a_j)$ $(j\in J)$. Se demuestra por cálculo directo que

(6) $T(ab)=bT(a)+aT(b)+T(b)T(a) \quad \forall\ a,b\in A$

Así si la familia $(a_j)_{j\in J}$ genera a A como k-álgebra, $T(a_j)$ $(j\in J)$ genera a I como ideal.

Denotemos por $\Omega(A)$ al A-módulo I/I^2 y por $d_A:A \longrightarrow \Omega(A)$ a la composición del k-morfismo $T:A \to I$ con la proyección canónica $\Pi:I \to I/I^2$ Es fácil ver usando la fórmula (6) que d_A es una derivación. Al A-módulo $\Omega(A)$ se lo llama el A-módulo de diferenciales de A y a d_A se la denomina la diferencial canónica. A veces, cuando no haya peligro de confusión usaremos el símbolo d en lugar de d_A.

Teorema 1.4: Para cada derivación $d':A \longrightarrow M$ existe un único morfismo de A-módulos $f:\Omega(A) \longrightarrow M$ tal que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "d'"] \arrow[d, "d_A"] & M \arrow[d, "="] \\ \Omega(A) \arrow[r, "f"] & M \end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración: La composición $\varphi:I \longrightarrow A$ de la inclusión canónica $I \longrightarrow A\otimes A^{op}$ con el A-morfismo $\begin{array}{l} A\otimes A^{op} \longrightarrow A \\ a\otimes b \longmapsto ad(b) \end{array}$, restringida a I^2 es nula

En efecto $\varphi((1\otimes a-a\otimes 1)(1\otimes b-b\otimes 1))=\varphi(1\otimes ab-b\otimes a-a\otimes b+ab\otimes 1)=d(ab)-bd(a)-ad(b)=0$

Así define un A-morfismo $f:\Omega(A) \longrightarrow M$. Es fácil ver que $fd_A=d'$. La unicidad se deduce de que $d_A(A)$ genera $\Omega(A)$ como A-módulo.

Corolario 1.5: $Der_k(A,M)\cong Hom_A(\Omega(A),M)$

Dado un morfismo de $\varphi:A \longrightarrow B$ de k-álgebras se define $\Omega(\varphi):\Omega(A) \longrightarrow \Omega(B)$ como el único morfismo de A-módulos que hace conmutativo al diagrama

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "d_A"] & B \arrow[d, "d_B"] \\ \Omega(A) \arrow[r, "\Omega(\varphi)"] & \Omega(B) \end{tikzcd}$$

Es claro que si $\varphi:A \longrightarrow B$ y $\psi:B \longrightarrow C$ son morfismos de k-álgebras $\Omega(\psi\varphi)=\Omega(\psi)\Omega(\varphi)$ y que $\Omega(1_A)=1_{\Omega(A)}$.

Definicion I.6: Sea A un anillo commutativo. Dado $n\in\mathbb{N}$ se define el n-ésimo módulo de diferenciales de A, $\Omega^n(A)$ como la n-ésima potencia exterior $\wedge^n_A\Omega(A)$ de $\Omega(A)$ sobre A.

La aplicación

$$\begin{array}{ccc} (A\times A)\times\ldots\times(A\times A) & \longrightarrow & \Omega^{n+1}(A) \\ ((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)) & \longmapsto & d(a_1\ldots a_n)\wedge d(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_n) \end{array}$$

induce la aplicación

$$\begin{array}{ccc} (A\otimes A)\times\ldots\times(A\otimes A) & \longrightarrow & \Omega^{n+1}(A) \\ ((a_1\otimes b_1),\ldots,(a_n\otimes b_n)) & \longmapsto & d(a_1\ldots a_n)\wedge d(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_n) \end{array}$$

Su restricción a $I\times\ldots\times I$ se anula en los elementos de la forma $(a_1,\ldots,a_n)$ con algún $a_i\in I^2$. En efecto basta comprobarlo para los elementos de la forma

$$(a_1T(b_1),\ldots,a_iT(b_i)T(c_i),\ldots,a_nT(b_n))=$$

$$=(a_1T(b_1),\ldots,a_iT(b_ic_i)-a_ib_iT(c_i)-a_ic_iT(b_i),\ldots,a_nT(b_n)).$$

Para ello es suficiente ver que

$$d(a_1\ldots a_n)\wedge d(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_ic_i)\wedge\ldots\wedge b(b_n)-$$

$$-d(a_1\ldots a_n)\wedge d(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_i)\wedge\ldots\wedge b(b_n)-$$

$$-d(a_1\ldots a_n)\wedge d(b_1)\wedge\ldots\wedge d(c_i)\wedge\ldots\wedge b(b_n)=0,$$

lo que se comprueba fácilmente usando que $d(ab)=ad(b)+bd(a)$. Así queda definida la función

$$\begin{array}{ccc} \Omega(A)\times\ldots\times\Omega(A) & \longrightarrow & \Omega^{n+1}(A) \\ (a_1d(b_1)\wedge\ldots\wedge a_nd(b_n)) & \longmapsto & d(a_1\ldots a_n)\wedge d(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_n) \end{array}$$

Como esta función es A-multilineal alternada queda definido el morfismo $d^n_A:\Omega^n(A)\to\Omega^{n+1}(A)$, dado por $d^n_A(ad(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_n))=d(a)\wedge d(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_n)$

A veces, cuando no haya peligro de confusión usaremos el símbolo d^n en lugar de d^n_A.

Teorema 1.7: Sea A un anillo commutativo. La sucesión de morfismos

$$(7)\ A \xrightarrow{d^0} \Omega^1(A) \xrightarrow{d^1} \Omega^2(A) \xrightarrow{d^2} \Omega^3(A) \xrightarrow{d^3} \Omega^4(A) \xrightarrow{d^4}$$

junto con las opèraciones

$$\Omega^i(A)X\Omega^j(A) \xrightarrow{\wedge} \Omega^{i+j}(A)$$

definidas por

$$\left[ad(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_i)\right]\wedge\left[a'd(b_{i+1})\wedge\ldots\wedge d(b_{i+j})\right]=$$
$$=aa'd(b_1)\wedge\ldots\wedge d(b_i)\wedge d(b_{i+1})\wedge\ldots\wedge d(b_{i+j})$$

es una A-álgebra diferencial graduada estrictamente commutativa (aquí $\Omega^0(A)$ denota a A y $A \xrightarrow{d^0} \Omega^1(A)$ a la diferencial canónica)

Demostración: Es trivial

Al complejo (7) se lo denomina complejo de de Rham de A y a su homología $H^*_{DR}(A)$, la homología de de Rham de A.

Sea A un anillo commutativo. La aplicación

$$d':A \longrightarrow H_1(A)=\frac{A\otimes\bar{A}}{b(A\otimes\bar{A}^2)}$$

definida por $d'(a)=\overline{1\otimes a}$ es una k-derivación. En efecto, como $b(1\otimes a\otimes b)=$ $=a\otimes b-1\otimes ab+b\otimes a$, $d'(ab) = \overline{1\otimes ab} = a\overline{(1\otimes b)}+b\overline{(1\otimes a)} = ad'(b)+bd'(a)$. Así queda inducido un morfismo de A-módulos

$$\gamma^1:\Omega(A) \longrightarrow H_1(A),$$

dado por $\gamma^1(ad(b))=\overline{a\otimes b}$.

Por otro lado, como la composición del A-morfismo $\psi:A\otimes\bar{A} \longrightarrow \Omega(A)$, dado por $\psi(a\otimes b)=ad(b)$ con el morfismo $b:A\otimes\bar{A}^2 \longrightarrow A\otimes\bar{A}$ es igual a cero, queda definida una aplicación $H_1(A) \longrightarrow \Omega(A)$, que es claramente inversa de γ^1. Se tiene así probado que γ^1 es un isomorfismo. Usando ahora que el producto barajado es estrictamente commutativo se comprueba fácilmente que para cada $n\in\mathbb{N}$ la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Omega(A)\times\ldots\times\Omega(A) & \longrightarrow & H_n(A) \\ (a_1 d(b_1)\wedge\ldots\wedge a_n d(b_n)) & \longmapsto & \gamma^1(a_1 d(b_1))*\ldots*\gamma^1(a_n d(b_n)) \end{array}$$

es A-multilineal alternada e induce por lo tanto el morfismo de A-módulos

$$\gamma^n:\Omega^n(A) \longrightarrow H_n(A) ,$$

dado por $\gamma^n(a_o d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_n))=(a_o\otimes a_1)*(1\otimes a_2)*\ldots*(1\otimes a_n)$.

Es claro que la aplicación

$$\gamma^*=\oplus_{n\geq o}\gamma^n:\oplus_{n\geq o}\Omega^n(A) \longrightarrow \oplus_{n\geq o}H_n(A)$$

es un morfismo de álgebras graduadas.

Es sabido que cuando A es el anillo de funciones algebraicas de una variedad no singular sobre un cuerpo perfecto k, γ^* es un isomorfismo (ver [H-C-R]). Por otro lado cuando k contiene a Q se puede definir un morfismo de complejos

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r, "b"] & A\otimes\overline{A}^5 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\mu^5"] & A\otimes\overline{A}^4 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\mu^4"] & A\otimes\overline{A}^3 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\mu^3"] & A\otimes\overline{A}^2 \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\mu^2"] & A\otimes\overline{A} \arrow[r, "b"] \arrow[d, "\mu^1"] & A, \arrow[d, "="] \\
\ldots \arrow[r, "0"] & \Omega^5(A) \arrow[r, "0"] & \Omega^4(A) \arrow[r, "0"] & \Omega^3(A) \arrow[r, "0"] & \Omega^2(A) \arrow[r, "0"] & \Omega^1(A) \arrow[r, "0"] & A
\end{tikzcd}$$

poniendo $\mu^n(a_o\otimes\ldots\otimes a_n)=\frac{1}{n!}\, a_o d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_n)$. En efecto

$$\mu b(a_o\otimes\ldots\otimes a_n)=\mu\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_o\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n+(-1)^{n+1}a_{n+1}a_o\otimes\ldots\otimes a_n\right]=$$

$$=\frac{1}{n!}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_o d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_i a_{i+1})\wedge\ldots\wedge d(a_{n+1})+\right.$$

$$\left.+(-1)^{n+1}a_{n+1}a_o d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_n)\right]=$$

$$=\frac{1}{n!}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i}a_0 d(a_1)\wedge\ldots\wedge\left(a_i d(a_{i+1})+a_{i+1}d(a_i)\right)\wedge\ldots\wedge d(a_{n+1})+\right.$$

$$\left.+\ (-1)^{n+1}a_{n+1}a_0 d(a_1)\wedge\ldots\wedge d(a_n)\right]=0$$

Es immediato que μ^* induce en la homologia una retracción de γ^*. Asi en este caso $\Omega^n(A)$ es un sumando directo de $H_n(A)$ $\forall$ $n\in\mathbb{N}$.

SECCION 2

HOMOLOGIA CICLICA

Sea k un anillo commutativo arbitrario con unidad y A una k-álgebra Se denota con t al endomorfismo de A^n definido por $t(a_0\otimes\ldots\otimes a_{n-1})=$ $=(-1)^{n-1}a_{n-1}\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{n-2}$, y con N a la correspondiente norma $1+t+t^2+$ $+\ldots+t^{n-1}$.

Teorema 2.1: El diagrama

$$\mathscr{C}(A):\quad \begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "-b'"] & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "-b'"] & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "-b'"] & \\
A^3 \arrow[d, "b"] & A^3 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^3 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^3 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^3 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^3 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & {} \arrow[l, "1-t"'] \\
A^2 \arrow[d, "b"] & A^2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & {} \arrow[l, "1-t"'] \\
A & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & {} \arrow[l, "1-t"']
\end{tikzcd}$$

que tiene en las columnas pares al complejo de Hochschild y en las columnas impares al inverso aditivo de la resolución canónica de Hochschild es un complejo doble.

Demostración: Sea $j:A^{n+1}\longrightarrow A^n$ el morfismo definido por $j(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=$ $=(-1)^n(a_n a_0\otimes\ldots\otimes a_{n-1})$. Sobre A^{n+1} valen las igualdades

$$b=\sum_{i=0}^{n} t^i j t^{n-i}$$

y

$$b'=\sum_{i=0}^{n-1} t^i j t^{n-i}$$

Así

$$Nb=(1+t+\ldots+t^{n-1})\left[\sum_{i=0}^{n} t^i j t^{n-i}\right]=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1} t^{i+k} j t^{n-i}=\sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n-1} t^{k} j t^{n-i}=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n} t^{i} j t^{k}=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n} t^i j t^{n-i+k}=\left[\sum_{i=0}^{n-1} t^i j t^{n-i}\right](1+t+\dots+t^{n-1})=b'N$$

y

$$b(1-t)=\left[\sum_{i=0}^{n} t^i j t^{n-i}\right](1-t)=\sum_{i=0}^{n} t^i j t^{n-i}-\sum_{i=0}^{n} t^i j t^{n+1-i}=\sum_{i=0}^{n-1} t^i j t^{n-i}+t^n j t^0-$$

$$-\sum_{i=0}^{n} t^i j t^{n+1-i}=\sum_{i=0}^{n-1} t^i j t^{n-i}-\sum_{i=0}^{n-1} t^{i+1} j t^{n-i}=(1-t)\left[\sum_{i=0}^{n-1} t^i j t^{n-i}\right]=(1-t)b'$$

Recordemos que a cada complejo doble

$$\mathcal{A}\qquad \begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b^V_{30}"] & {} \arrow[d, "b^V_{31}"] & {} \arrow[d, "b^V_{32}"] & {} \arrow[d, "b^V_{33}"] & {} \arrow[d, "b^V_{34}"] & {} \arrow[d, "b^V_{35}"] & \\
A_{20} \arrow[d, "b^V_{20}"] & A_{21} \arrow[l, "b^H_{21}"'] \arrow[d, "b^V_{21}"] & A_{22} \arrow[l, "b^H_{22}"'] \arrow[d, "b^V_{22}"] & A_{23} \arrow[l, "b^H_{23}"'] \arrow[d, "b^V_{23}"] & A_{24} \arrow[l, "b^H_{24}"'] \arrow[d, "b^V_{24}"] & A_{25} \arrow[l, "b^H_{25}"'] \arrow[d, "b^V_{25}"] & {} \arrow[l, "b^H_{26}"'] \\
A_{10} \arrow[d, "b^V_{10}"] & A_{11} \arrow[l, "b^H_{11}"'] \arrow[d, "b^V_{11}"] & A_{12} \arrow[l, "b^H_{12}"'] \arrow[d, "b^V_{12}"] & A_{13} \arrow[l, "b^H_{13}"'] \arrow[d, "b^V_{13}"] & A_{14} \arrow[l, "b^H_{14}"'] \arrow[d, "b^V_{14}"] & A_{15} \arrow[l, "b^H_{15}"'] \arrow[d, "b^V_{15}"] & {} \arrow[l, "b^H_{16}"'] \\
A_{00} & A_{01} \arrow[l, "b^H_{01}"'] & A_{02} \arrow[l, "b^H_{02}"'] & A_{03} \arrow[l, "b^H_{03}"'] & A_{04} \arrow[l, "b^H_{04}"'] & A_{05} \arrow[l, "b^H_{05}"'] & {} \arrow[l, "b^H_{06}"']
\end{tikzcd}$$

se le asigna un complejo, que se llama complejo total de $\mathcal{A}$ y se denota $\mathrm{Tot}(\mathcal{A})$, definido por

$$\mathrm{Tot}(\mathcal{A})_n=\bigoplus_{i+j=n} A_{ij}$$

$$d:\mathrm{Tot}(\mathcal{A})_n \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathcal{A})_{n-1}\ ,$$

$$d(x_{n,0},x_{n-1,1},\dots,x_{0,n})=$$

$$=(b^V_{n,0}(x_{n,0})+b^H_{n-1,1}(x_{n-1,1}),\dots,b^V_{1,n-1}(x_{1,n-1})+b^H_{0,n}(x_{0,n}))$$

Se define la homología cíclica $HC_*(A)$ como la homología del complejo total $\mathrm{Tot}(\mathscr{C}(A))$ de $\mathscr{C}(A)$.

A continuación mostraremos que el complejo $\mathcal{C}(A)$ puede ser reemplazado por otros que muchas veces son más simples.

Proposicion 2.2: $\mathrm{Tot}(\mathcal{C}(A))$ es homotópicamente equivalente a $\mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A))$, donde $\mathcal{B}(A)$ es el complejo doble

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"] \\
A^4 & A^3 \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A^2 \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] \\
A^3 \arrow[u, leftarrow, "b"] \arrow[d, "b"] & A^2 \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & \\
A^2 & A \arrow[l, "B"'] & & \\
A \arrow[u, leftarrow, "b"] & & &
\end{tikzcd}$$

con $B:A^n \longrightarrow A^{n+1}$ definido por $B=(1-t)\varepsilon_0 N$.

Demostración: Las igualdades

$$BB=\left[(1-t)\varepsilon_0 N\right]\left[(1-t)\varepsilon_0 N\right]=(1-t)\varepsilon_0\left[N(1-t)\right]\varepsilon_0 N=0$$

y

$$bB+Bb=b(1-t)\varepsilon_0 N+(1-t)\varepsilon_0 Nb=(1-t)b'\varepsilon_0 N+(1-t)\varepsilon_0 b'N=(1-t)(b'\varepsilon_0+\varepsilon_0 b')N=$$

$$=(1-t)N=0$$

muestran que $\mathcal{B}(A)$ es un complejo doble.

Sean ahora

$$\varphi_n:\mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A))_n \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathcal{C}(A))_n$$

y

$$\psi_n:\mathrm{Tot}(\mathcal{C}(A))_n \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A))_n$$

los morfismos definidos por

$$\varphi_n(x_n,x_{n-2},\ldots)=(x_n,\varepsilon_0 N(x_{n-2}),x_{n-2},\varepsilon_0 N(x_{n-4}),\ldots)$$

$\psi_n(x_n,x_{n-2},\ldots)=(x_n+(1-t)b'(x_{n-1}),x_{n-2}(1-t)b'(x_{n-3}),\ldots)$

Se comprueba por cálculo directo que $\varphi_*=(\varphi_n)_{n\geq 0}$ y $\psi_*=(\psi_n)_{n\geq 0}$ son morfismos de complejos y que $(1-\psi_*\varphi_*)^2=0$, lo que implica que $(2\psi_*-\psi_*\varphi_*\psi_*)\varphi_*=id$ Así φ_* es una sección. Para terminar la demostración basta ver que la familia de morfismos

$$\left[\sigma_n:\mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A))_n \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathcal{C}(A))_{n+1}\right]_{\geq 0}$$

definida por

$$\sigma_n(x_n,x_{n-2},\ldots)=(0,-\varepsilon_0(x_{n-1}),0,-\varepsilon_0(x_{n-3}),\ldots)$$

es una homotopía de retracción de id en $\varphi_*\psi_*$, lo que se comprueba directamente.

El morfismo $B:A^n \longrightarrow A^{n+1}$ está dado por

$$B(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{in}1\otimes a_i\otimes\ldots\otimes a_n\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-1}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{(i+1)n}a_{i-1}\otimes 1\otimes a_i\otimes\ldots\otimes a_n\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-2}\ .$$

En efecto,

$$B(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=(1-t)\varepsilon_0 N(a_0\otimes\ldots\otimes a_n)=(1-t)\varepsilon_0\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{in}a_i\otimes\ldots\otimes a_n\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-1}\right]=$$

$$(1-t)\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{in}1\otimes a_i\otimes\ldots\otimes a_n\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-1}\right]=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{in}1\otimes a_i\otimes\ldots\otimes a_n\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-1}+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}(-1)^{(i+1)n}a_{i-1}\otimes 1\otimes a_i\otimes\ldots\otimes a_n\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{i-2}$$

Ahora como

$$\begin{aligned} A\times\ldots\times A &\longrightarrow A\otimes\overline{A}^{n+1} \\ (a_0,\ldots,a_n) &\longmapsto \sum_{i=1}^{n}(-1)^{in}1\otimes\overline{a}_i\otimes\ldots\otimes\overline{a}_n\otimes\overline{a}_0\otimes\ldots\otimes\overline{a}_{i-1} \end{aligned}$$

es k-multilineal y se anula en los elementos $a_0\otimes\ldots\otimes a_n$ con $a_i\in k$ para algún $i>0$, existe un único morfismo $B:A\otimes\overline{A}^n \longrightarrow A\otimes\overline{A}^{n+1}$ de k-módulos que basta verificar que su núcleo es exacto, lo que se deduce del lema que sigue usando que por la proposición 1 de la primera sección lo son las columnas del núcleo del morfismo de $\mathcal{B}(A)$ en $\mathcal{B}(A)_{norm}$.

Lema 2.4: El complejo total de un complejo doble

$$\mathcal{A}\qquad \begin{tikzcd}
\ \arrow[d, "b^V_{30}"] & \ \arrow[d, "b^V_{31}"] & \ \arrow[d, "b^V_{32}"] & \ \arrow[d, "b^V_{33}"] & \ \arrow[d, "b^V_{34}"] & \ \arrow[d, "b^V_{35}"] & \\
A_{20} \arrow[d, "b^V_{20}"] & A_{21} \arrow[l, "b^H_{21}"'] \arrow[d, "b^V_{21}"] & A_{22} \arrow[l, "b^H_{22}"'] \arrow[d, "b^V_{22}"] & A_{23} \arrow[l, "b^H_{23}"'] \arrow[d, "b^V_{23}"] & A_{24} \arrow[l, "b^H_{24}"'] \arrow[d, "b^V_{24}"] & A_{25} \arrow[l, "b^H_{25}"'] \arrow[d, "b^V_{25}"] & \ \arrow[l, "b^H_{26}"'] \\
A_{10} \arrow[d, "b^V_{10}"] & A_{11} \arrow[l, "b^H_{11}"'] \arrow[d, "b^V_{11}"] & A_{12} \arrow[l, "b^H_{12}"'] \arrow[d, "b^V_{12}"] & A_{13} \arrow[l, "b^H_{13}"'] \arrow[d, "b^V_{13}"] & A_{14} \arrow[l, "b^H_{14}"'] \arrow[d, "b^V_{14}"] & A_{15} \arrow[l, "b^H_{15}"'] \arrow[d, "b^V_{15}"] & \ \arrow[l, "b^H_{16}"'] \\
A_{00} & A_{01} \arrow[l, "b^H_{01}"'] & A_{02} \arrow[l, "b^H_{02}"'] & A_{03} \arrow[l, "b^H_{03}"'] & A_{04} \arrow[l, "b^H_{04}"'] & A_{05} \arrow[l, "b^H_{05}"'] & \ \arrow[l, "b^H_{06}"']
\end{tikzcd}$$

con columnas exactas es exacto.

Demostración: Basta ver que si $(x_{n,0},x_{n-1,1},\dots,x_{0,1})$ es un ciclo de $Tot(\mathcal{A})_n$ y $x_{q,n-q-1},x_{q-1,n-q+2},\dots,x_{1,n}$ con $x_{i,j}\in A_{i,j}$ es una familia de elementos que verifica

$$b^V(x_{q-i,n-q+i+1})+b^H(x_{q-i-1,n-q+i+1})=x_{q-i-1,n-q+i+1}\qquad \forall\ i\geq 0\ ,$$

existe $x_{q+1,n-q}\in A_{q+1,n-q}$ tal que $b^V(x_{q+1,n-q})+b^H(x_{q,n-q+1})=x_{q,n-q}$, lo que se deduce fácilmente de que las columnas de $\mathcal{A}$ son exactas y de que

$$b^V(x_{q,n-q}-b^H(x_{q,n-q+1}))=b^V(x_{q,n-q})-b^Vb^H(x_{q,n-q+1}))=$$

$$=b^V(x_{q,n-q})+b^Hb^V(x_{q,n-q+1}))=b^V(x_{q,n-q})+b^H(b^V(x_{q,n-q+1})+b^H(x_{q-1,n-q+2}))=$$

$=b^V(x_{q,n-q})+b^H(x_{q-1,n-q+1})=0$

Cuando k contiene al cuerpo $\mathbb{Q}$ de los números racionales la homología cíclica se puede obtener todavía a partir de otro complejo como indica la siguiente proposición

Proposicion 2.5: Sea A una k-álgebra sobre un anillo commutativo k que contiene a Q. La homología cíclica de A es la homología del complejo $(A^{*+1}/\mathrm{Im}(1-t),b)$, conúcleo del morfismo

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r, "-b'"] & A^6 \arrow[r, "-b'"] \arrow[d, "1-t"] & A^5 \arrow[r, "-b'"] \arrow[d, "1-t"] & A^4 \arrow[r, "-b'"] \arrow[d, "1-t"] & A^3 \arrow[r, "-b'"] \arrow[d, "1-t"] & A^2 \arrow[r, "-b'"] \arrow[d, "1-t"] & A \arrow[d, "1-t"] \\
\cdots \arrow[r, "b"] & A^6 \arrow[r, "b"] & A^5 \arrow[r, "b"] & A^4 \arrow[r, "b"] & A^3 \arrow[r, "b"] & A^2 \arrow[r, "b"] & A
\end{tikzcd}$$

Demostración: Sea $\mathcal{N}$ el complejo doble

$$\mathcal{N} \qquad \begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "-b'"] & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "-b'"] & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "-b'"] & \\
\mathrm{Im}(1-t) \arrow[d, "b"] & A^3 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^3 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^3 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^3 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^3 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \arrow[l, "1-t"'] \\
\mathrm{Im}(1-t) \arrow[d, "b"] & A^2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & A^2 \arrow[l, "N"'] \arrow[d, "b"] & A^2 \arrow[l, "1-t"'] \arrow[d, "-b'"] & \arrow[l, "1-t"'] \\
\mathrm{Im}(1-t) & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & A \arrow[l, "N"'] & A \arrow[l, "1-t"'] & \arrow[l, "1-t"']
\end{tikzcd}$$

La sucesión exacta larga de homología obtenida a partir de la sucesión exacta corta de complejos

$$0 \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathcal{N}) \longrightarrow \mathrm{Tot}(\mathcal{C}(A)) \longrightarrow (A^{*+1}/\mathrm{Im}(1-t),b) \longrightarrow 0$$

muestra que para probar la proposición es suficiente ver que el complejo

$\mathcal{N}$ es exacto. Para esto, por el lema anterior, basta ver que para cada $n\geq 1$ el complejo

$$(*)\ \ldots \longrightarrow A^n \xrightarrow{N} A^n \xrightarrow{1-t} A^n \xrightarrow{N} A^n \xrightarrow{1-t} A^n \xrightarrow{N} A^n \xrightarrow{1-t} \mathrm{Im}(1-t)$$

es exacto, lo que se deduce immediatamente de que, cómo es fácil ver, la familia de morfismos

$s_o:\mathrm{Im}(1-t) \longrightarrow A^n$

$s_i:A \longrightarrow A^n \quad (i\geq 1)$

$$s_i=\begin{cases} \dfrac{-t-2t^2-\ldots-(n-1)t^{n-1}}{n} & \text{si } i \text{ es par} \\ \dfrac{id}{n} & \text{si } i \text{ es impar} \end{cases}$$

forma una homotopía de retracción

$$\ldots \underset{s_6}{\overset{}{\rightleftarrows}} A^n \underset{s_5}{\overset{N}{\rightleftarrows}} A^n \underset{s_4}{\overset{1-t}{\rightleftarrows}} A^n \underset{s_3}{\overset{N}{\rightleftarrows}} A^n \underset{s_2}{\overset{1-t}{\rightleftarrows}} A^n \underset{s_1}{\overset{N}{\rightleftarrows}} A^n \underset{s_o}{\overset{1-t}{\rightleftarrows}} \mathrm{Im}(1-t)$$

de $(*)$.

Dados un complejo (A_*,d_*) y un número entero n se denota con $(A_*,d_*)[n]$ a la suspensión n-ésima de (A_*,d_*), es decir al complejo definido por

$$(A_*,d_*)[n]_m=A_{n-m} \quad \text{y} \quad d[n]_m:(A_*,d_*)[n]_m \longrightarrow (A_*,d_*)[n]_{m-1}=(-1)^m d_{m-n}$$

Para cada k-álgebra A se tiene la sucesión exacta corta

$$(8) \quad 0 \longrightarrow (A\otimes\overline{A}^*,b) \xrightarrow{i_*} \mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A_{norm})) \xrightarrow{S_*} \mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A_{norm}))[2] \longrightarrow 0,$$

donde i_* es la flecha inducida por la inclusión canónica de $(A\otimes\overline{A}^*,b)$ en la primera columna de $\mathcal{B}(A_{norm})$ y $S_*=(S_n:\bigoplus_{i\geq o} A\otimes\overline{A}^{n-2i} \longrightarrow \bigoplus_{i\geq 1} A\otimes\overline{A}^{n-2i})_{n\geq 1}$

es la flecha definida por $s_n(x_n,x_{n-2},\dots)=(x_{n-2},x_{n-4},\dots)$ $\forall\ n\in\mathbb{N}$.

La sucesión exacta larga de homología asociada a la sucesión exacta corta (8) da la sucesión exacta

$$(9)\quad \dots\xrightarrow{B} H_*(A)\xrightarrow{i} HC_*(A)\xrightarrow{S} HC_{*-2}(A)\xrightarrow{B} H_{*-1}(A)\xrightarrow{i} HC_{*-1}(A)\xrightarrow{S}\dots$$

llamada de Gysin-Connes. Es fácil ver que la flecha $HC_*(A)\xrightarrow{B} H_{*+1}(A)$ es la flecha inducida por el morfismo de complejos

$$\mathrm{Tot}(\mathcal{B}(A_{norm}))\longrightarrow(A\otimes\bar{A}^*,b)[-1]$$

definido por $B_n(x_n,x_{n-2},\dots)=B(x_n)$

<u>Relación entre las homologías cíclica y de de Rham-Deligne</u>

En este apartado se calcula la homología cíclica del anillo de funciones algebraicas de una variedad suave sobre un cuerpo k de característica cero. Comenzamos con la siguiente definición:

Definicion 2.6: Sea A una k-álgebra commutativa. Se define la homología de de Rham-Deligne de A como la homología del complejo total del complejo doble

$$\mathcal{D}(A)\qquad \begin{tikzcd}
{} \arrow[d, "0"] & {} \arrow[d, "0"] & {} \arrow[d, "0"] & {} \arrow[d, "0"] \\
\Omega^3(A) \arrow[d, "0"] & \Omega^2(A) \arrow[l, "d^2"'] \arrow[d, "0"] & \Omega^1(A) \arrow[l, "d^1"'] \arrow[d, "0"] & A \arrow[l, "d^0"'] \\
\Omega^2(A) \arrow[d, "0"] & \Omega^1(A) \arrow[l, "d^1"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "d^0"'] & \\
\Omega^1(A) \arrow[d, "0"] & A \arrow[l, "d^0"'] & & \\
A & & &
\end{tikzcd}$$

cuya i-ésima fila es el complejo de de Rham truncado

$$\Omega^{\leq i}:\Omega^{i}(A) \xleftarrow{d^{i-1}} \Omega^{i-1}(A) \xleftarrow{d^{i-2}} \dots \xleftarrow{d^{1}} \Omega^{1}(A) \xleftarrow{d^{0}} A$$

Es immediato que $\mathrm{Tot}(\mathcal{D}(A)) = \bigoplus_{i\geq 0}(-1)^{i}\Omega^{\leq i}[i]$. Así

$$H_n(\mathrm{Tot}(\mathcal{D}(A))=\Omega^{n}(A)/d(\Omega^{n-1}(A)\oplus H^{n-2}_{DR}(A)\oplus H^{n-4}_{DR}(A)\oplus\dots$$

Cuando k contiene a $\mathbb{Q}$ existe un morfismo de complejos dobles de $\mathcal{B}(A)_{norm}$ en $\mathcal{D}(A)$ que permite comparar las homologías cíclicas y de de Rham-Deligne.

Proposición 2.7: Sea k un anillo commutativo que contiene a $\mathbb{Q}$ y A una kálgebra commutativa. La familia de morfismos

$$(\mu^{n}:A\otimes\bar{A}^{n} \longrightarrow \Omega^{n}(A))_{n\geq 0}$$

define un morfismo de $\mathcal{B}(A)_{norm}$ en $\mathcal{D}(A)$.

Demostración: Como en la primera sección ya se probó que $\mu b=0$ sólo resta ver que $d\mu=\mu b$, lo que se deduce immediatamente de las igualdades

$$d\mu^{n}(a_0\otimes\dots\otimes a_n)=d\left[\frac{1}{n!}\ a_0d(a_1)\wedge\dots\wedge d(a_n)\right]=\frac{1}{n!}d(a_0)\wedge d(a_1)\wedge\dots\wedge d(a_n)$$

y

$$\mu B(a_0\otimes\dots\otimes a_n)=\mu\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{in}1\otimes a_i\otimes\dots\otimes a_n\otimes a_0\otimes\dots\otimes a_{i-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[\sum_{i=1}^{n}(-1)^{in}d(a_i)\wedge\dots\wedge d(a_n)\wedge d(a_0)\wedge\dots\wedge d(a_{i-1})\right]=$$

$$=\frac{n+1}{(n+1)!}d(a_0)\wedge\dots\wedge d(a_n)=\frac{1}{n!}d(a_0)\wedge d(a_1)\wedge\dots\wedge d(a_n)$$

Queda así definido un morfismo

$$(10)\quad HC_n(A) \longrightarrow \Omega^{n}(A)/d(\Omega^{n-1}(A)\oplus H^{n-2}_{DR}(A)\oplus H^{n-4}_{DR}(A)\oplus\dots \qquad \forall\ n\geq 0$$

Teorema 2.8: Si A es el anillo de funciones de una variedad no singular sobre un cuerpo de característica cero el morfismo (10) es un isomorfismo

Demostración: Como se vio en la sección 1, la flecha $\mathcal{B}(A)_{norm} \longrightarrow \mathcal{D}(A)$ es un cuasisomorfismo en cada columna. Así se puede hacer la misma demostración que en la proposición 2.3.

SECCION 3

COMPLEJOS MEZCLADOS Y HOMOLOGIA CICLICA

En esta sección recordamos algunas definiciones y propiedades generales acerca de complejos mezclados que usaremos mas tarde. Todas las definiciones y propiedades mencionadas estan en [B-O], [K] o [W].

Sea k un anillo commutativo con unidad. Un complejo mezclado $\tilde{M}=(M_*,b_*,B_*)$ consiste de un complejo de cadena de k-módulos (M_*,b_*), $b_n:M_n \to M_{n-1}$ tales que $b_{n+1}.b_n=0$, con B_* dado por aplicaciones k-lineales $B_n:M_n \to M_{n+1}$ que verifican $B_{n+1}.B_n=0$ y $B_{n-1}.b_n+ b_{n+1}.B_n=0$. Un morfismo de complejos mezclados $f_*:\tilde{M} \to \tilde{M}'$ consiste de aplicaciones k-lineales $f_n:M_n \to M'_n$ que commutan con los morfismos b y B.

A un complejo mezclado $\tilde{M}=(M_*,b_*,B_*)$ se le puede asociar el complejo de cadena ${}_B\tilde{M}=({}_B\tilde{M}_*,d_*)$ donde

$${}_B\tilde{M}_n=M_n \oplus M_{n-2} \oplus M_{n-4} \oplus \ldots$$

y, para cada $(x_n,x_{n-2},\ldots) \in {}_B\tilde{M}_n$,

$$d(x_n,x_{n-2},\ldots)=(b_n x_n+ B_{n-2} x_{n-2},\ b_{n-2} x_{n-2}+ B_{n-4} x_{n-4},\ldots)$$

Se ve immediatamente que ${}_B\tilde{M}$ está relacionado con el complejo (M_*,b_*) por la siguiente sucesión exacta de complejos

$$(11) \qquad 0 \to (M_*,b_*) \to {}_B\tilde{M} \overset{S}{\to} {}_B\tilde{M}[2] \to 0$$

La aplicación S, es la proyección canónica obtenida dividiendo $_B\tilde{M}$ por su primer factor. Los grupos de homología

$$H_*(\tilde{M})=H_*(M_*,b_*)$$

$$HC_*(\tilde{M})=H_*(_B\tilde{M})$$

son por definición las homologías de Hochschild y cíclicas de $\tilde{M}$ respectivamente. La sucesión exacta larga de homología asociada a la sucesión exacta corta (1) resulta,

$$(12) \qquad \ldots\to H_*(\tilde{M}) \xrightarrow{i} HC_*(\tilde{M}) \xrightarrow{S} HC_{*-2}(\tilde{M}) \xrightarrow{B} H_{*-1}(\tilde{M}) \xrightarrow{i} HC_{*-1}(\tilde{M}) \xrightarrow{S}\ldots$$

y será llamada la sucesión exacta de Gysin-Connes. Obviamente dado un morfismo de complejos mezclados $f_*:\tilde{M} \to \tilde{M}'$ se obtiene un diagrama commutativo

$$\begin{tikzcd}
\ldots \arrow[r] & H_*(\tilde{M}) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & HC_*(\tilde{M}) \arrow[r, "S"] \arrow[d] & HC_{*-2}(\tilde{M}) \arrow[r, "B"] \arrow[d] & H_{*-1}(\tilde{M}) \arrow[r, "i"] \arrow[d] & HC_{*-1}(\tilde{M}) \arrow[r, "S"] \arrow[d] & \ldots \\
\ldots \arrow[r] & H_*(\tilde{M}') \arrow[r, "i"] & HC_*(\tilde{M}') \arrow[r, "S"] & HC_{*-2}(\tilde{M}') \arrow[r, "B"] & H_{*-1}(\tilde{M}') \arrow[r, "i"] & HC_{*-1}(\tilde{M}') \arrow[r, "S"] & \ldots
\end{tikzcd}$$

Definicion 3.1: ([K,2.2]) Sean $\tilde{M}=(M_*,b_*,B_*)$ y $\tilde{M}'=(M'_*,b'_*,B'_*)$ dos complejos mezclados. Una homotopía fuerte de retracción de $\tilde{M}$ en $\tilde{M}'$ es una colección de morfismos graduados $G_*^{(i)}:M_* \to M_{*+2i}$ de grado $2i$ para todo $i\geq 0$, $(G_j^{(i)}:M_j \to M_{j+2i})_{j\geq 0}$ que verifican:

i) $G_*^{(0)}$ is a morfismo de complejos $(M_*,b_*) \to (M'_*,b'_*)$

ii) $G_{j+1}^{(i)}.B_j - B'_{2i+j}.G_j^{(i)}=b'_{2i+j+2}.G_j^{(i+1)} - G_{j-1}^{(i+1)}.b_j \qquad (i\geq 0)$

El interés de las homotopías fuertes de retracción se debe al siguiente resultado

Proposicion 3.2: Sean $\tilde{M}=(M_*,b_*,B_*)$ y $\tilde{M}'=(M'_*,b'_*,B'_*)$ dos complejos mezclados. Si hay una homotopía fuerte de retracción $(G_*^{(i)})_{i\geq 0}$ de $\tilde{M}$ en $\tilde{M}'$ existe a morfismo de complejos $G:{}_B\tilde{M} \to {}_B\tilde{M}'$ tal que el diagrama

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \to & (M_*,b_*) & \to & {}_B\tilde{M} & \overset{S}{\to} & {}_B\tilde{M}[2] & \to & 0 \\
 & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \to & (M'_*,b'_*) & \to & {}_B\tilde{M}' & \overset{S}{\to} & {}_B\tilde{M}'[2] & \to & 0
\end{array}$$

commuta. Además si $G_*^{(0)}$ es un cuasisomorfismo, también lo es G.

Demostración: ver [K, Proposición 2.3].

Nosotros usaremos el siguiente resultado

Proposicion 3.3: Sean $\tilde{M}=(M_*,b_*,B_*)$ y $\tilde{M}'=(M'_*,b'_*,B'_*)$ dos complejos mezclados. Supongase que existe una colección de morfismos graduados $G_*^{(i)}:M_* \to M_{*+2i}$ de grado $2i$ para $(0\leq i\leq n)$ y una colección of aplicaciones $G_j^{(n+1)}:M_j \to M_{2n+j+2}$ $(0\leq j\leq m-1)$, con $m\geq 0$, tal que:

i) $G_*^{(0)}$ es un morfismo de complejos $(M_*,b_*) \to (M'_*,b'_*)$

ii) $G_{j+1}^{(i)}.B_j - B'_{2i+j}.G_j^{(i)}=b'_{2i+j+2}.G_j^{(i+1)} - G_{j-1}^{(i+1)}.b_j$

(para $0\leq i<n$ o $i=n$ y $0\leq j\leq m-1$)

entonces, $b'_{2n+m+1}(G_{m+1}^{(n)}.B_m - B'_{2n+m}.G_m^{(n)} + G_{m-1}^{(n+1)}.b_m)=0$

Demostración: Definimos $G^{(i)}_j=0$ y $B_j=0$ si $j<0$ y $b_j=0$ si $j\leq 0$. Se sabe que

$b'_{2n+m+1}.B'_{2n+m}=-B'_{2n+m-1}.b'_{2n+m}$ y

$$b'_{2n+m+1}.G^{(n+1)}_{m-1}=G^{(n)}_{m}.B_{m-1}-B'_{2n+m-1}.G^{(n)}_{m-1}+G^{(n+1)}_{m-2}.b_{m-1}$$

Así,

$$b'_{2n+m+1}(G^{(n)}_{m+1}.B_{m}-B'_{2n+m}.G^{(n)}_{m}+G^{(n+1)}_{m-1}.b_{m})=$$

$$=b'_{2n+m+1}.G^{(n)}_{m+1}.B_{m}+B'_{2n+m-1}.b'_{2n+m}.G^{(n)}_{m}+G^{(n)}_{m}.B_{m-1}.b_{m}-B'_{2n+m-1}.G^{(n)}_{m-1}.b_{m}+$$

$$+G^{(n+1)}_{m-2}.b_{m-1}.b_{m}=$$

$$=b'_{2n+m+1}.G^{(n)}_{m+1}.B_{m}-G^{(n)}_{m}.b_{m+1}.B_{m}+B'_{2n+m-1}.b'_{2n+m}.G^{(n)}_{m}-B'_{2n+m-1}.G^{(n)}_{m-1}.b_{m}$$

Si $n=0$ esta expresión es igual a cero por ser $G^{(0)}_{*}$ un morfismo de complejos.

Si $n\geq 1$, usando que

$$G^{(n-1)}_{m+2}.B_{m+1}-B'_{2n+m-1}.G^{(n-1)}_{m+1}=b'_{2n+m+1}.G^{(n)}_{m+1}-G^{(n)}_{m}.b_{m+1}$$

se obtiene

$$b'_{2n+m+1}(G^{(n)}_{m+1}.B_{m}-B'_{2n+m}.G^{(n)}_{m}+G^{(n+1)}_{m-1}.b_{m})=$$

$$=G^{(n-1)}_{m+2}.B_{m+1}.B_{m}-B'_{2n+m-1}.G^{(n-1)}_{m+1}.B_{m}+B'_{2n+m-1}.b'_{2n+m}.G^{(n)}_{m}-B'_{2n+m-1}.G^{(n)}_{m-1}.b_{m}=$$

$$=-B'_{2n+m-1}.b'_{2n+m}.G^{(n)}_{m}-B'_{2n+m-1}.B'_{2n+m-2}.G^{(n-1)}_{m}+B'_{2n+m-1}.b'_{2n+m}.G^{(n)}_{m}=0$$

Dados dos complejos mezclados $\tilde{M}=(M_{*},b_{*},B_{*})$ y $\tilde{M}'=(M'_{*},b'_{*},B'_{*})$ se define el producto tensorial $\tilde{M}\otimes\tilde{M}'$ (ver [K, p.202]) como el complejo mezclado $\left[(M\otimes M')_*,(b\otimes b')_*,(B\otimes B')_*\right]$, donde:

$$(M\otimes M')_n=\bigoplus_{k=0}^{n}(M_k\otimes M'_{n-k})$$

$$(b\otimes b')_n(x_k\otimes x'_{n-k})=b_k x_k\otimes x'_{n-k}+(-1)^k.x_k\otimes b'_{n-k}x'_{n-k}$$

$$(B\otimes B')_n(x_k\otimes x'_{n-k})=B_k x_k\otimes x'_{n-k}+(-1)^k.x_k\otimes B'_{n-k}x'_{n-k}$$

Proposicion 3.4: Sea $(G_*^{(i)})_{i\geq 0}$ una homotopia fuerte de retracción de $\tilde{M}=(M_*,b_*,B_*)$ a $\tilde{M}'=(M'_*,b'_*,B'_*)$. Si $\tilde{M}''=(M''_*,B''_*,B''_*)$ es un complej mezclado, la familia de morfismos $(G^{(i)}\otimes Id(\tilde{M}''))_*$ $(i\geq 0)$ definida por:

$$(G^{(i)}\otimes Id(\tilde{M}''))_j:(M\otimes M'')_j\to(M\otimes M'')_{j+2i}$$

$$(G^{(i)}\otimes Id(\tilde{M}''))_j(x_k\otimes x''_{j-k})=G_j^{(i)}x_k\otimes x''_{j-k}$$

es una homotopia fuerte de retracción de $\tilde{M}\otimes\tilde{M}''$ en $\tilde{M}'\otimes\tilde{M}''$. Además, si $G_*^{(0)}$ es una equivalencia de homotopia , también lo es $G_*^{(0)}\otimes Id(\tilde{M}'')$.

Demostración: Es directa.

Dada una k-álgebra A se obtiene un complejo mezclado

$$\tilde{C}(A)=(C_*(A),b_*,B_*)=\begin{array}{ccccccc}
\downarrow b_4 & & \downarrow b_3 & & \downarrow b_2 & & \downarrow b_1 \\
A\otimes\bar{A}^3 & \xleftarrow{B_2} & A\otimes\bar{A}^2 & \xleftarrow{B_1} & A\otimes\bar{A} & \xleftarrow{B_0} & A \\
\downarrow b_3 & & \downarrow b_2 & & \downarrow b_1 & & \\
A\otimes\bar{A}^2 & \xleftarrow{B_1} & A\otimes\bar{A} & \xleftarrow{B_0} & A & & \\
\downarrow b_2 & & \downarrow b_1 & & & & \\
A\otimes\bar{A} & \xleftarrow{B_0} & A & & & & \\
\downarrow b_1 & & & & & & \\
A & & & & & &
\end{array}$$

definiendo

$C_m(A)=A\otimes\overline{A}^m$,

donde $\overline{A}=A/k$ y $\overline{A}^m$ denota el producto tensorial de $\overline{A}$ m-veces,

$$b_m(a_0\otimes\ldots\otimes a_m)=\sum_{j=0}^{m-1}(-1)^j.a_0\otimes\ldots\otimes a_ja_{j+1}\otimes\ldots\otimes a_m+(-1)^m.a_ma_0\otimes a_1\otimes\ldots\otimes a_{m-1},$$

y

$$B_m(a_0\otimes\ldots\otimes a_m)=\sum_{j=0}^{m}(-1)^{jm}.1\otimes a_j\otimes\ldots\otimes a_m\otimes a_0\otimes\ldots\otimes a_{j-1}$$

Observese que las homologias de Hochschild y ciclicas $H_*(A)$ y $HC_*(A)$ de A definidas en las secciones 1 y 2 son las homologias de Hochschild y ciclicas de $\tilde{C}(A)$ respectivamente.

Usaremos la siguiente

Proposicion 3.5: ([B-O],[K]) Dadas dos k-álgebras A y A' existe una homotopia fuerte de retracción de $\tilde{C}(A)\otimes\tilde{C}(A')$ en $\tilde{C}(A\otimes A')$ tal que $G_*^{(0)}$ es el cuasisomorfismo barajado.

Recalcamos que si $G_*^{(0)}$ es una equivalencia de homotopia y $F:Ab\to Ab$ es un funtor aditivo, $F(G_*^{(0)})$ también es una equivalencia de homotopia.

Finalmente a un complejo mezclado $\tilde{M}=(M_*,b_*,B_*)$ se le asocian los complejos de cadena $_{BP}\tilde{M}=(_{BP}\tilde{M}_*,d_*^P)$ y $_{B^-}\tilde{M}=(_{B^-}\tilde{M}_*,d_*^-)$, donde (con la convención de que $M_i=0$ si $i<0$, se tiene

$$_{BP}\tilde{M}_n=\prod_{i\in\mathbb{Z}}M_{n-2i}\qquad\forall\ n\in\mathbb{Z}$$

$$d^P(\ldots,x_{n+2},x_n,x_{n-2},\ldots)=(\ldots,b_{n+2}x_{n+2}+B_nx_n,\ b_nx_n+B_{n-2}x_{n-2},\ldots)$$

y

$${}_{B^-}\tilde{M}_n=\prod_{i\in N} M_{n+2i} \qquad \forall\ n\in\mathbb{Z}$$

$$d^P(\ldots,x_{n+4},x_{n+2},x_n)=(\ldots,b_{n+4}x_{n+4}+B_{n+2}x_{n+2},b_{n+2}x_{n+2}+B_nx_n,\ b_nx_n)$$

Se ve fácilmente que hay un diagrama commutativo con filas exactas

$$\text{(13)}\qquad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & {}_{B^-}\tilde{M} & \longrightarrow & {}_{BP}\tilde{M} & \xrightarrow{S} & {}_{B}\tilde{M}[2] & \to & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \to & (M_*,b_*) & \to & {}_{B}\tilde{M} & \xrightarrow{S} & {}_{B}\tilde{M}[2] & \to & 0 \end{array}$$

La homología de ${}_{BP}\tilde{M}$ y ${}_{B^-}\tilde{M}$ se llaman homología cíclica periódica y cíclica negativa de $\tilde{M}$ y se denotan por $HC_*^{per}(\tilde{M})$ y $HC_*^-(\tilde{M})$ respectivamente.

Como ${}_{BP}\tilde{M}=\ldots\longrightarrow \prod_{i\geq 0} M_{2i}\xrightarrow{b+B}\prod_{i\geq 0} M_{2i+1}\xrightarrow{b+B}\prod_{i\geq 0} M_{2i}\xrightarrow{b+B}\ldots$ la homología $HC_*^{per}(\tilde{M})$ es periódica de periodo 2.

La sucesión exacta larga de homología asociada al diagrama (13) resulta

$$\begin{array}{ccccccccccccc} \ldots\longrightarrow & HC^{per}_{m+1}(A) & \xrightarrow{S'} & HC_{m-1}(A) & \xrightarrow{B} & HC^-_m(A) & \xrightarrow{i} & HC^{per}_m(A) & \xrightarrow{S'} & HC_{m-2}(A) & \longrightarrow\ldots \\ & \downarrow S' & & \downarrow = & & \downarrow & & \downarrow S' & & \downarrow = & \\ \ldots\longrightarrow & \bar{HC}_{m+1}(A) & \xrightarrow{S} & \bar{HC}_{m-1}(A) & \xrightarrow{B} & \bar{H}_m(A) & \xrightarrow{i} & \bar{HC}_m(A) & \xrightarrow{S} & \bar{HC}_{m-2}(A) & \longrightarrow\ldots \end{array}$$

Las homologías cíclica y cíclica periódica están relacionadas también por la sucesión exacta corta

$$0 \to \varprojlim_i{}^1 HC_{m+1+2i}(A) \to HC_m^{per}(A) \to \varprojlim_i HC_{m+2i}(A) \to 0$$

(ver por ejemplo, [W, 1.4])

Si las sucesiones $(HC_{2i}(\tilde{M}),S)$ y $(HC_{2i+1}(\tilde{M}),S)$ satisfacen la condición de Mittag-Leffler, $\varprojlim{}^1 HC_{m+1+2i}(A)=0$ y $HC_*^{per}(\tilde{M})=$ $=\varprojlim_i HC_{m+2i}(\tilde{M})$.

SECCION 4

CALCULO DE LA HOMOLOGIA DE HOCHSCHILD

Sea $A=k[X]/\langle f\rangle$, donde k es un anillo commutativo arbitrario con 1 y $f = X^n+ f_{n-1}X^{n-1}+\ldots+ f_0$ es un polinomio mónico de grado n. Vamos a construir una resolución proyectiva de A como A^e-módulo a izquierda. Para ello usaremos el desarrollo en serie de Taylor $T(p)=1\otimes p-p\otimes 1$, $T:A \to A\otimes_k A$. Notese que si $\mu:A\otimes_k A \to A$ está definido por $\mu(a\otimes b)=a.b$ se tiene $\mu\left(\frac{T(f)}{T(X)}\right)= f'$, la derivada de f respecto de X. Todos estos resultados aparecen en [Bach].

Puesto que f es un polinomio mónico existe el algoritmo de division por f. Denotemos con $\overline{P}$ al cociente de P por f y con $\ddot{P}$ al resto, i.e. $P=\overline{P}.f+\ddot{P}$, $gr(\ddot{P})<gr(f)$. La unicidad de $\overline{P}$ y $\ddot{P}$ son obvias.

Es bien sabido que si se considera a $A\otimes_k A$ como un A-módulo mediante la acción definida por $a(b\otimes c)=ab\otimes c$, entonces $T(pq)=pT(q)+qT(p)+T(p)T(q)$.

Proposicion 4.1: Se verifica:

1) $\dfrac{T(\ddot{pX})}{T(X)} = (1\otimes X)\dfrac{T(p)}{T(X)} + p\otimes 1 - (\overline{pX}\otimes 1)\dfrac{T(f)}{T(X)} \qquad \mathrm{mod}(1\otimes f,f\otimes 1)$

2) $\dfrac{T(f)}{T(X)} = \sum\limits_{i>0} f_i \sum\limits_{k=0}^{i-1} X^k\otimes X^{i-k-1}$

3) $(p\otimes 1)\dfrac{T(f)}{T(X)} = (1\otimes p)\dfrac{T(f)}{T(X)} = \dfrac{T(pf)}{T(X)} \qquad \mathrm{mod}(1\otimes f,f\otimes 1)$

4) $\sum\limits_{i>0} f_i \sum\limits_{k=0}^{i-1} \overline{X^{k+1}}\otimes X^{i-k-1}= 1$

La prueba puede ser obtenida por cálculo directo.

Proposicion 4.8: La sucesión

$$(1)\quad \dots \xrightarrow{d_6} A^2 \xrightarrow{d_5} A^2 \xrightarrow{d_4} A^2 \xrightarrow{d_3} A^2 \xrightarrow{d_2} A^2 \xrightarrow{d_1} A^2 \xrightarrow{\mu} A\ ,$$

donde A^2 denota a $A\otimes_k A$ y

$$d_{2i+1}(a\otimes b) = (a\otimes b)T(X)$$

$$d_{2i}(a\otimes b) = (a\otimes b)\frac{T(f)}{T(X)}$$

es exacta.

Demostración: Es bien sabido que, dado que X genera a A como k-álgebra $T(X)=1\otimes X-X\otimes 1$ genera $\ker(\mu)$ como ideal de A^2. Para comprobar que la sucesión es un complejo es suficiente ver que el producto $T(X)\frac{T(f)}{T(X)} = 0$ en A^2. Para ver la exactitud se construyen A-morfismos $s_0:A \to A^2$, $s_1:A^2\to A^2$ y $s_2:A^2\to A^2$ (aquí A actúa sobre A^2 en la variable de la derecha) que son una homotopía de retraccion para este complejo.

$$s_0(p) = 1\otimes p$$

$$s_1(p\otimes 1) = -\frac{T(p)}{T(X)}$$

$$s_2(p\otimes 1) = \overline{pX}\otimes 1$$

$$\underset{s_2}{\overset{d_6}{\rightleftarrows}} A^2 \underset{s_1}{\overset{d_5}{\rightleftarrows}} A^2 \underset{s_2}{\overset{d_4}{\rightleftarrows}} A^2 \underset{s_1}{\overset{d_3}{\rightleftarrows}} A^2 \underset{s_2}{\overset{d_2}{\rightleftarrows}} A^2 \underset{s_1}{\overset{d_1}{\rightleftarrows}} A^2 \underset{s_0}{\overset{\mu}{\rightleftarrows}} A$$

Por cálculo directo se obtiene

$$s_1 d_{2i+1} + d_{2i} s_2 = id$$

$$s_2 d_{2i} + d_{2i+1} s_2 = id$$

$$s_0 \mu + d_1 s_2 = id$$

Aplicando $A\otimes_{A^e}$ a esta sucesión y usando la identificación $A\otimes_{A^e}A^2\cong A$ se obtiene el complejo

$$(C_{\bullet *}(A),bs_*):\ldots\xrightarrow{0} A \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{0} A \xrightarrow{f'} A \xrightarrow{0} A$$

Dado que la sucesión (1) es A^e-libre, la homología del último complejo es la homología de Hochschild de A cómo k-álgebra; denotando a esta homología por $H_*(A)$ se tiene

$$H_i(A) = \begin{cases} A \text{ si } i=0 \\ A/\langle f'\rangle \text{ si } i \text{ es impar} \\ Ann(f') \text{ si } i \text{ es par e } i>0 \end{cases}$$

Vamos a comparar ahora la resolución proyectiva (1) con la resolución canónica reducida de Hochschild dada por

$$(2)\ \ldots\xrightarrow{b'} A\otimes\bar{A}^4\otimes A \xrightarrow{b'} A\otimes\bar{A}^3\otimes A \xrightarrow{b'} A\otimes\bar{A}^2\otimes A \xrightarrow{b'} A\otimes\bar{A}\otimes A \xrightarrow{b'} A\otimes A \xrightarrow{b'} A$$

donde $\bar{A}=A/k$, $\bar{A}^n$ denota al producto tensorial de A n veces y

$$b'(a_1\otimes\ldots\otimes a_n) = \sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_1\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n$$

Cómo (1) y (2) son resoluciones A^e-proyectivas de A, existen A^e-morfismos de complejos $g_*:(2)\to(1)$ y $h_*:(1)\to(2)$ que, tensorizados con A sobre A^e inducen cuasisomorfismos $\bar{h}_*$ y $\bar{g}_*$ inversos uno del otro. Las aplicaciones g_* y h_* se definen de la siguiente manera:

$(2)\xrightarrow{g_*}(1)$ definido por:

$$\varepsilon_{2r}(1\otimes P_1\otimes\ldots\otimes P_{2r}\otimes 1)=(-1)^r.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{P_{2i-1}P_{2i}})$$

$$\varepsilon_{2r+1}(1\otimes P_1\otimes\ldots\otimes P_{2r+1})=(-1)^{r+1}.\frac{T(p_1)}{T(X)}.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{P_{2i-1}P_{2i}}),$$

obteniendose después de tensorizar con A sobre A^e,

$$(C_*(A),b_*)\xrightarrow{\;\overline{\varepsilon}_*\;}(Cs_*(A),bs_*)$$

$$\overline{\varepsilon}_{2r}(1\otimes P_1\otimes\ldots\otimes P_{2r})=(-1)^r.\prod_{i=1}^{r}\overline{P_{2i-1}P_{2i}}$$

$$\overline{\varepsilon}_{2r+1}(1\otimes P_1\otimes\ldots\otimes P_{2r+1})=(-1)^{r+1}p_1'.\prod_{i=1}^{r}\overline{P_{2i-1}P_{2i}},$$

donde $(C_*(A),b_*)$ es el complejo normalizado de Hochschild

$$(C_*(A),b_*):\ \ldots\xrightarrow{b}A\otimes\overline{A}^5\xrightarrow{b}A\otimes\overline{A}^4\xrightarrow{b}A\otimes\overline{A}^3\xrightarrow{b}A\otimes\overline{A}^2\xrightarrow{b}A\otimes\overline{A}\xrightarrow{b}A,$$

donde b está definido por

$$b(a_1\otimes\ldots\otimes a_n)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^i a_1\otimes\ldots\otimes a_i a_{i+1}\otimes\ldots\otimes a_n+(-1)^{n+1}a_n a_1\otimes\ldots\otimes a_{n-1}$$

y

$h_*:(1)\to(2)$ definido por

$$h_{2r}(1\otimes 1)=(-1)^r\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n}(f_{i_1}\ldots f_{i_r})\sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{i_1-1,\ldots i_r-1}1\otimes X^{k_1}\otimes X\otimes\ldots\otimes X^{k_r}\otimes X\otimes X^{\left[\sum_{j=1}^{r}i_j-\sum_{j=1}^{r}k_j-r\right]}$$

$$h_{2r+1}(1\otimes 1)=(-1)^{r+1}\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n}(f_{i_1}\ldots f_{i_r})\sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{i_1-1,\ldots i_r-1}1\otimes X\otimes X^{k_1}\otimes\ldots\otimes X^{k_r}\otimes X^{\left[\sum_{j=1}^{r}i_j-\sum_{j=1}^{r}k_j-r\right]},$$

obteniendose después de tensorizar con A sobre A^e,

$$(Cs_*(A),bs_*) \xrightarrow{\hbar_*} (C_*(A),b_*)$$

$$\hbar_{2r}(1)=(-1)^r \sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n}(f_{i_1}\ldots f_{i_r}) \sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{i_1-1,\ldots i_r-1} X^{\left[\sum_{j=1}^{r} i_j-\sum_{j=1}^{r} k_j-r\right]}\otimes X^{k_1}\otimes X\otimes\ldots\otimes X^{k_r}\otimes X$$

$$\hbar_{2r+1}(1)=(-1)^{r+1}\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n}(f_{i_1}\ldots f_{i_r}) \sum_{k_1,\ldots,k_r=1}^{i_1-1,\ldots i_r-1} X^{\left[\sum_{j=1}^{r} i_j-\sum_{j=1}^{r} k_j-r\right]}\otimes X\otimes X^{k_1}\otimes\ldots\otimes X^{k_r}\otimes X$$

Proposicion 4.3: g_* y h_* son morfismos de complejos

Demostración: Primero tenemos que probar que el diagrama

$$\begin{tikzcd} A\otimes\bar{A}^{k+1}\otimes A \arrow[r, "b'"] \arrow[d, "g_{k+1}"] & A\otimes\bar{A}^{k}\otimes A \arrow[d, "g_k"] \\ A^2 \arrow[r, "d_{k+1}"] & A^2 \end{tikzcd}$$

commuta. Haremos esto por inducción en k.

Para $k=0$ se tiene $d_1g_1(1\otimes p\otimes 1)=d_1(-\frac{T(p)}{T(X)})=-T(p)=p\otimes 1-1\otimes p$ y, por otro lado, $g_0b'(1\otimes p\otimes 1)=g_0(p\otimes 1-1\otimes p)=p\otimes 1-1\otimes p$

Para el paso inductivo probaremos primero que, para todo $k\geq 0$, $g_{k+1}=s_{k+1}g_kb'$. Distinguiremos los casos k par e impar.

Para k par, $k=2r$, se tiene

$$s_{2r+1}\varepsilon_{2r}b'(1\otimes p_1\otimes\dots\otimes p_{2r+1}\otimes 1) = s_{2r+1}\varepsilon_{2r}(p_1\otimes\dots\otimes p_{2r+1}\otimes 1+$$

$$+\sum_{i=1}^{2r}(-1)^i p_1\otimes\dots\otimes \overset{\dots\dots}{p_i p_{i+1}}\otimes\dots\otimes p_{2r+1}-1\otimes p_1\otimes\dots\otimes p_{2r+1})$$

y, dado que $\varepsilon_{2r}(1\otimes\varepsilon_1\otimes\dots\otimes\varepsilon_{2r+1})=1\otimes\alpha\in A^2$ y, por ser $T(1)=0$, $s_2(1\otimes\alpha)=0$, la suma de más arriba se reduce a

$$s_{2r+1}\varepsilon_{2r}(p_1\otimes\dots\otimes p_{2r+1}\otimes 1)=s_{2r+1}((p_1\otimes 1).(-1)^r.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{p_{2i}p_{2i+1}}))=$$

$$=(-1)^{r+1}.\frac{T(p_1)}{T(X)}.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{p_{2i}p_{2i+1}})=\varepsilon_{2r+1}(1\otimes p_1\otimes\dots\otimes p_{2r+1}\otimes 1)$$

Para k impar, k=2r+1, se tiene

$$s_{2r+2}\varepsilon_{2r+1}b'(1\otimes p_1\otimes\dots\otimes p_{2r+2}\otimes 1) = s_{2r+2}\varepsilon_{2r+1}(p_1\otimes\dots\otimes p_{2r+2}\otimes 1+$$

$$+\sum_{i=1}^{2r}(-1)^i p_1\otimes\dots\otimes \overset{\dots\dots}{p_i p_{i+1}}\otimes\dots\otimes p_{2r+2}-1\otimes p_1\otimes\dots\otimes p_{2r+2})=$$

$$=s_2\Big[(p_1\otimes 1).(-1)^{r+1}.\frac{T(p_2)}{T(X)}.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{p_{2i+1}p_{2i+2}})+$$

$$+(-1)^{r+2}.\frac{T(\overset{\dots\dots}{p_1 p_2})}{T(X)}.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{p_{2i+1}p_{2i+2}})+(-1)^{r+1}.\frac{T(p_1)}{T(X)}.\sum_{i=1}^{r}\Big(\prod_{j=1}^{i-1}(1\otimes\overline{p_{2j}p_{2j+1}}).$$

$$.(1\otimes\overline{\overset{\dots\dots}{p_{2i}p_{2i+1}}p_{2i+2}}-1\otimes\overline{p_{2i}\overset{\dots\dots}{p_{2i+1}p_{2i+2}}}).\prod_{j=i+1}^{r}(1\otimes\overline{p_{2j+1}p_{2j+2}})\Big)+$$

$$+(-1)^{r+1}.\frac{T(p_1)}{T(X)}.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{p_{2i}p_{2i+1}})(1\otimes p_{2r+2})\Big]$$

Multiplicando $q_1q_2=\overline{q_1q_2}f+\overset{\dots\dots}{q_1q_2}$ por q_3 obtenemos $q_1q_2q_3=\overline{q_1q_2}q_3f+\overset{\dots\dots}{q_1q_2}q_3$ y remplazando aquí $\overset{\dots\dots}{q_1q_2}q_3$ por $\overline{\overset{\dots\dots}{q_1q_2}q_3}f+\overset{\dots\dots}{\overset{\dots\dots}{q_1q_2}q_3}$, $\overline{q_1q_2q_3}=\overline{\overline{q_1q_2}q_3}+\overline{\overset{\dots\dots}{q_1q_2}q_3}$ y $\overset{\dots\dots}{q_1q_2q_3}=\overset{\dots\dots}{\overset{\dots\dots}{q_1q_2}q_3}$. Por la misma razón $\overline{q_1q_2q_3}=q_1\overline{q_2q_3}+\overline{q_1\overset{\dots\dots}{q_2q_3}}$. Así $\overline{\overset{\dots\dots}{q_1q_2}q_3}-\overline{q_1\overset{\dots\dots}{q_2q_3}}=q_1\overline{q_2q_3}-\overline{q_1q_2}q_3$ y la suma previa se reduce a

$$s_2\Big[(p_1\otimes 1).(-1)^{r+1}.\frac{T(p_2)}{T(X)}.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{P_{2i+1}P_{2i+2}})+$$

$$+(-1)^{r+2}.\frac{T(\dot{\bar{p}}_1\dot{\bar{p}}_2)}{T(X)}.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{P_{2i+1}P_{2i+2}})+(-1)^{r+1}.\frac{T(p_1)}{T(X)}.\sum_{i=1}^{r}\Big(\prod_{j=1}^{i-1}(1\otimes\overline{P_{2j}P_{2j+1}}).$$

$$.(1\otimes p_{2i}\overline{P_{2i+1}P_{2i+2}}-1\otimes\overline{p_{2i}P_{2i+1}P_{2i+2}}).\prod_{j=1+1}^{r}(1\otimes\overline{P_{2j+1}P_{2j+2}})\Big)+$$

$$+(-1)^{r+1}.\frac{T(p_1)}{T(X)}.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{P_{2i}P_{2i+1}})(1\otimes p_{2r+2})\Big]$$

Puesto que en esta última expresión los terminos se cancelan de a pares la suma resulta ser

$$s_2\Big[(p_1\otimes 1)(-1)^{r+1}.\frac{T(p_2)}{T(X)}.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{P_{2i+1}P_{2i+2}})+$$

$$+(-1)^{r+2}.\frac{T(\dot{\bar{p}}_1\dot{\bar{p}}_2)}{T(X)}.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{P_{2i+1}P_{2i+2}})+$$

$$+(-1)^{r+1}.\frac{T(p_1)}{T(X)}.(1\otimes p_2\overline{p_3p_4}).\prod_{j=2}^{r}(1\otimes\overline{P_{2j+1}P_{2j+2}})\Big]=$$

$$s_2\Big[(p_1\otimes 1)(-1)^{r+1}.\frac{T(p_2)}{T(X)}.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{P_{2i+1}P_{2i+2}})+$$

$$+(-1)^{r+2}.\Big(\frac{T(p_1p_2)}{T(X)}-\frac{T(\overline{p_1p_2}f)}{T(X)}\Big).\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{P_{2i+1}P_{2i+2}})+$$

$$+(-1)^{r+1}.\frac{T(p_1)}{T(X)}.(1\otimes p_2\overline{p_3p_4}).\prod_{j=2}^{r}(1\otimes\overline{P_{2j+1}P_{2j+2}})\Big]$$

Reemplazando $T(p_1q_2)$ por $p_1T(p_2)+p_1T(p_2)+T(p_1)T(p_2)$ y cancelando términos la suma anterior se reduce a

$$(-1)^{r+1}s_2\Big[\frac{T(\overline{p_1p_2}f)}{T(X)}.\prod_{i=1}^{r}(1\otimes\overline{P_{2i+1}P_{2i+2}})\Big]$$

Usando ahora que $T(\overline{p_1 p_2 f})=(f\otimes 1)T(\overline{p_1 p_2})+(1\otimes\overline{p_1 p_2})T(f)$ y que $f\otimes 1=0$ en A^2, este producto resulta ser igual a

$$(-1)^{r+1}s_2\left[\prod_{i=0}^{r}(1\otimes\overline{p_{2i+1}p_{2i+2}}).\frac{T(f)}{T(X)}\right]=(-1)^{r+1}\prod_{i=0}^{r}(1\otimes\overline{p_{2i+1}p_{2i+2}}).s_2\left[\frac{T(f)}{T(X)}\right]=$$

$$=\varepsilon_{2r+2}(1\otimes p_1\otimes\ldots\otimes p_{2r+2}\otimes 1).s_2\left[\frac{T(f)}{T(X)}\right]$$

La demostración se termina usando que por los puntos 1) y 4) de la proposición 4.1 $s_2\left[\frac{T(f)}{T(X)}\right]=1$.

Ahora podemos terminar la prueba de esta primera parte de la proposición de la siguiente manera:

Como $\varepsilon_{k+1}=s_{k+1}\varepsilon_k b'$, $d_{k+1}\varepsilon_{k+1}=d_{k+1}s_{k+1}\varepsilon_k b'$ y como $d_{k+1}s_{k+1}=id-s_k d_k$, $d_{k+1}\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_k b'-s_k d_k\varepsilon_k b'$. Por hipótesis inductiva $d_k\varepsilon_k=\varepsilon_{k-1}b'$ y así $d_{k+1}\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_k b'-s_k d_k\varepsilon_k b'=d_{k+1}\varepsilon_{k+1}=\varepsilon_k b'-s_k\varepsilon_{k-1}b'b'=\varepsilon_k b'$

Resta probar ahora que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} A^2 & \xrightarrow{d_{k+1}} & A^2 \\ \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_{k+1}} & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_k} \\ A\otimes\bar{A}^{k+1}\otimes A & \xrightarrow{b'} & A\otimes\bar{A}^{k}\otimes A \end{array}$$

commuta.

Es claro que $h_{k+1}(1\otimes 1)=\varepsilon_o h_k d_{k-1}(1\otimes 1)$. Ahora podemos terminar la prueba por induccion en k.

Para $k=0$, $h_o=\varepsilon_o=id$ y la demostración es trivial.

Supongase ahora que $k>0$. Usando que $b'\varepsilon_o=id-\varepsilon_o b'$ se obtiene $b'h_{k+1}(1\otimes 1)=$ $=b'\varepsilon_o h_k d_{k+1}(1\otimes 1)=h_k d_{k+1}(1\otimes 1)-\varepsilon_o b'h_k d_{k+1}(1\otimes 1)$. Cómo por hipótesis inductiva $\varepsilon_o b'h_k d_{k+1}(1\otimes 1)=\varepsilon_o h_{k-1}d_k d_{k+1}(1\otimes 1)=0$, $b'h_{k+1}(1\otimes 1)=h_k d_{k+1}(1\otimes 1)$.

SECCION 5

CALCULO DE LA HOMOLOGIA CICLICA

En esta sección mostraremos la existencia de una homotopía fuerte de retracción que induce un cuasisomorfismo, desde un complejo mezclado simple $\tilde{C}_\bullet(A)$ a $\tilde{C}(A)$, cuando $A=k[X]/\langle X^n\rangle$ y k es un anillo conmutativo arbitrario con 1. Como una aplicación, calculamos la homología cíclica de A y los morfismos $HC_*(A)\xrightarrow{S} HC_{*-2}(A)$. Usando este resultado obtanemos $HC_*^{per}(A)$, $HC_*^-(A)$ and $HC^*(A)$. Finalmente, mostramos que para $A=S^{-1}k[X]$, donde S es un sistema multiplicativo de k[X], existe un morfismo desde $\tilde{C}(A)$ a un complejo mezclado mas sencillo $\tilde{C}_\bullet(A)$. Como una aplicación hacemos para $A=k[X]$ y $A=k[X,X^{-1}]$ los mismos cálculos que antes para $A=k[X]/\langle X^n\rangle$. Algunos de estos resultados aparecen en [Bach].

Proposicion 5.1: Sea $A=k[X]/\langle f\rangle$, donde k es un anillo commutativo con 1 y $f=X^n+f_{n-1}X^{n-1}+...+f_0$ es un polinomio mónico de grado n. El morfismo

$$B_{\bullet m}=A \xrightarrow{\bar{h}_m} A\otimes\bar{A}^m \xrightarrow{B_m} A\otimes\bar{A}^{m+1} \xrightarrow{\bar{\varepsilon}_{m+1}} A$$

está dado por

$B_{\bullet 2r}(1)=0$

$B_{\bullet 2r}(X^a)=-a.X^{a-1}-\overline{r.f'X^a}$ si $a\geq 1$

$B_{\bullet 2r+1}=0$

verifica

$$B(\bar{a}_0\otimes\ldots\otimes\bar{a}_n)=\sum_{i=1}^{n}(-1)^{in}1\otimes\bar{a}_i\otimes\ldots\otimes\bar{a}_n\otimes\bar{a}_0\otimes\ldots\otimes\bar{a}_{i-1}$$

Proposicion 2.3: El diagrama

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"] & {} \arrow[d, "b"] \\
 & A\otimes\bar{A}^{4} \arrow[d, "b"] & A\otimes\bar{A}^{3} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A\otimes\bar{A}^{2} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] \\
\mathcal{B}(A)_{norm} & A\otimes\bar{A}^{3} \arrow[d, "b"] & A\otimes\bar{A}^{2} \arrow[l, "B"'] \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & \\
 & A\otimes\bar{A}^{2} \arrow[d, "b"] & A \arrow[l, "B"'] & & \\
 & A & & &
\end{tikzcd}$$

es un complejo doble y la familia de epimorfismos canónicos $(A\otimes A^{n}\longrightarrow A\otimes\bar{A}^{n})$ es un epimorfismo de $\mathcal{B}(A)$ en $\mathcal{B}(A)_{norm}$ que induce un isomorfismo de la homología de $Tot(\mathcal{B}(A))$ en la homología de $Tot(\mathcal{B}(A)_{norm})$

Demostración: Para probar que $\mathcal{B}(A)_{norm}$ es un complejo doble y que la familia de epimorfismos canónicos $(A\otimes A^{n}\longrightarrow A\otimes\bar{A}^{n})$ es un epimorfismo de $\mathcal{B}(A)$ en $\mathcal{B}(A)_{norm}$, es suficiente ver que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
A\otimes A^{n} \arrow[r, "B"] \arrow[d] & A\otimes A^{n+1} \arrow[d] \\
A\otimes\bar{A}^{n} \arrow[r, "B"] & A\otimes\bar{A}^{n+1}
\end{tikzcd}
\quad \text{y} \quad
\begin{tikzcd}
A\otimes A^{n} \arrow[r, "b"] \arrow[d] & A\otimes A^{n-1} \arrow[d] \\
A\otimes\bar{A}^{n} \arrow[r, "b"] & A\otimes\bar{A}^{n-1}
\end{tikzcd}$$

conmutan, lo que es immediato. Para probar que $Tot(\mathcal{B}(A))\longrightarrow Tot(\mathcal{B}(A)_{norm})$ es un cuasisomorfismo (i.e. induce isomorfismos en las homologias)

Demostración: Se sabe que A es libre sobre k con base $(X^a)_{0\leq a\leq n-1}$ y

$$\hbar_{2r+1}(X^a)=(-1)^{r+1}\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n}(f_{i_1}\ldots f_{i_r})\sum_{\Lambda} X^{k_o}\otimes X\otimes X^{k_1}\otimes\ldots\otimes X^{k_r}\otimes X,$$

donde $\Lambda=\{(k_o,\ldots k_r):1\leq k_j\leq 1_j\ (1\leq j\leq r);\ k_o\geq 0\ ;\sum_{j=o}^{r} k_j+r\ =\ \sum_{j=o}^{r} 1_j+a\}$. Así

$$B_{2r+1}\hbar_{2r+1}(X^a)=$$

$$=(-1)^{r+1}\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n}(f_{i_1}\ldots f_{i_r})\sum_{\Lambda}\left[\sum_{j=o}^{r}\left[1\otimes X\otimes X^{k_j}\otimes X\otimes\ldots\otimes X^{k_r}\otimes X\otimes X^{k_o}\otimes X\otimes\ldots\otimes X^{k_{j-1}}\otimes X-\right.\right.$$

$$\left.\left.-1\otimes X^{k_j}\otimes X\otimes\ldots\otimes X^{k_r}\otimes X\otimes X^{k_o}\otimes X\otimes\ldots\otimes X^{k_{j-1}}\right]\right]$$

Así

$$\varepsilon_{2r+2}B_{2r+1}\hbar_{2r+1}(X^a)=(-1)^{r+1}\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n}(f_{i_1}\ldots f_{i_r})\sum_{\Lambda}\left[(r+1)\overline{X^{k_o}}X\prod_{t=1}^{r}\overline{X^{b_t+1}}\ -\right.$$

$$\left.-(r+1)\overline{X^{k_o}}X\prod_{t=1}^{r}\overline{X^{b_t+1}}\right]=0$$

De la misma manera

$$\hbar_{2r}(X^a)=(-1)^{r}\sum_{i_1,\ldots,i_r=1}^{n}(f_{i_1}\ldots f_{i_r})\sum_{\Lambda} X^{k_o}\otimes X^{k_1}\otimes\ldots\otimes X^{k_r}\otimes X,$$

donde $\Lambda=\{(k_o,\ldots k_r):1\leq k_j\leq 1_j\ (1\leq j\leq r);\ k_o\geq a\ ;\sum_{j=o}^{r} k_j+r\ =\ \sum_{j=o}^{r} 1_j+a\}$. Así

$B_{2r}\hbar_{2r}(X^{a})=$

$$=(-1)^{r}\sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{n}(f_{i_1}\dots f_{i_r})\sum_{\Lambda}\left[\sum_{j=0}^{r}\left[1\otimes X^{k_0}\otimes X^{k_1}\otimes X\otimes\dots\otimes X^{k_r}\otimes X+1\otimes X^{k_1}\otimes X\otimes\dots\otimes X^{k_r}\otimes X\otimes X^{k_0}+\right.\right.$$

$$\left.\left.1\otimes X\otimes X^{k_2}\otimes X\otimes\dots\otimes X\otimes X^{k_r}\otimes X\otimes X^{k_0}\otimes X^{k_1}+\dots+1\otimes X\otimes X^{k_0}\otimes X^{k_1}\otimes X\otimes\dots\otimes X^{k_r}\right]\right]$$

Así

$$\bar{\varepsilon}_{2r+1}B_{2r}\hbar_{2r}(X^{a})=-\sum_{i_1,\dots,i_r=1}^{n}(f_{i_1}\dots f_{i_r})\sum_{\Lambda}\left[\sum_{j=1}^{r}k_jX^{k_j-1}\overline{\overset{\cdots\cdots}{X^{k_0}}X}\dots\widehat{\overline{X^{k_j+1}}}\dots\overline{X^{k_r+1}}+\right.$$

$$\left.+r\overline{\overset{\cdots\cdots}{X^{k_0}}X^{k_1}}.\overline{X^{k_2+1}}\dots\overline{X^{k_r+1}}+\left(\overset{\cdots\cdots}{X^{k_0}}\right)'.\overline{X^{k_r+1}}\dots\overline{X^{k_r+1}}\right],$$

donde el símbolo $\widehat{\overline{X^{k_j+1}}}$ significa que este término ha sido omitido. Los sumandos no nulos de $\sum_{j=1}^{r}k_jX^{k_j-1}\overline{\overset{\cdots\cdots}{X^{k_0}}X}\dots\widehat{\overline{X^{k_j+1}}}\dots\overline{X^{k_r+1}}$ son aquellos en los que $k_1=\dots=\hat{k}_j\dots k_r=n-1$ y $k_0+k_j+1=i_j+a$. Para que $r\overline{\overset{\cdots\cdots}{X^{k_0}}X^{k_1}}.\overline{X^{k_2+1}}\dots\overline{X^{k_r+1}}$ sea no nulo es necesario que $k_2=\dots=k_r=n-1$ y $k_0+k_1+1=i_1+a$. Finalmente para que no sea nulo $\left(\overset{\cdots\cdots}{X^{k_0}}\right)'.\overline{X^{k_r+1}}\dots\overline{X^{k_r+1}}$ se necesita que $k_1=\dots=k_r=n-1$ y $k_0=a$. Usando estos hechos y que $\overline{\overset{\cdots\cdots}{X^{k_0}}X}=\overline{X^{k_0+1}}-\overline{X^{k_0}}.X$ y $\overline{\overset{\cdots\cdots}{X^{k_0}}X^{k_1}}=$ $=\overline{X^{k_0+k_1}}-\overline{X^{k_0}}.X^{k_1}$ se obtiene

$$\bar{\varepsilon}_{2r+1}B_{2r}\hbar_{2r}(X^{a})=-aX^{a-1}-r\sum_{i_1=1}^{n}f_{i_1}\sum_{k_1=1}^{i_1-1}\left[\overline{X^{i_1+a-1}}-\overline{X^{i_1-k_1+a-1}}.X^{k_1}\right]-$$

$$-\sum_{j=1}^{r}\sum_{i_j=1}^{n}f_{i_j}\sum_{k_j=1}^{i_j-1}k_jX^{k_j-1}\left[\overline{X^{i_1-k_j+a}}-\overline{X^{i_j-k_j+a-1}}.X\right]=-aX^{a-1}-$$

$$-r\sum_{i=1}^{n}f_i\sum_{k=1}^{i-1}\left[\overline{X^{i+a-1}}-\overline{X^{i-k+a-1}}.X^{k}\right]-r\sum_{i=1}^{n}f_i\sum_{k=1}^{i-1}kX^{k-1}\left[\overline{X^{i-k+a}}-\overline{X^{i-k+a-1}}.X\right]=$$

Ahora

$$\sum_{k=1}^{i-1}kX^{k-1}\left[\overline{X^{i-k+a}}-\overline{X^{i-k+a-1}}.X\right]=\sum_{k=1}^{i-1}kX^{k-1}.\overline{X^{i-k+a}}-\sum_{k=2}^{i}kX^{k-1}.\overline{X^{i-k+a}}+$$

$$+\sum_{k=2}^{i}X^{k-1}.\overline{X^{i-k+a}}=\overline{X^{i+a-1}}-1X^{i-1}.\overline{X^{a}}+\sum_{k=2}^{i}X^{k-1}.\overline{X^{i-k+a}}=\sum_{k=1}^{i}X^{k-1}.\overline{X^{i-k+a}}=$$

$$=\sum_{k=0}^{i-1}X^{k}.\overline{X^{i-k-1+a}}$$

Así

$$\bar{\varepsilon}_{2r+1}B_{2r}\hbar_{2r}(X^{a})=-aX^{a-1}-r\sum_{i=1}^{n}f_i\sum_{k=1}^{i-1}\left[\overline{X^{i+a-1}}-\overline{X^{i-k+a-1}}.X^{k}\right]-$$

$$-r\sum_{i=1}^{n}f_i\sum_{k=0}^{i-1}X^{k}.\overline{X^{i-k-1+a}}=-aX^{a-1}-r\sum_{i=1}^{n}f_i(1-1)\overline{X^{i+a-1}}+r\sum_{i=1}^{n}f_i\sum_{k=1}^{i-1}\overline{X^{i-k+a-1}}.X^{k}-$$

$$-r\sum_{i=1}^{n}f_i\sum_{k=0}^{i-1}X^{k}.\overline{X^{i-k-1+a}}=-aX^{a-1}-r\sum_{i=1}^{n}f_i(1-1)\overline{X^{i+a-1}}-r\sum_{i=1}^{n}f_i\overline{X^{i+a-1}}=-aX^{a-1}-$$

$$-r\sum_{i=1}^{n}f_i1\overline{X^{i+a-1}}=-aX^{a-1}-r\overline{f'X^{a}}$$

Definicion 5.2: Sea $A=k[X]/\langle X^n\rangle$, donde k es un anillo arbitrario con 1. Se define el complejo mezclado

$$\tilde{C}s(A)=(Cs_*(A),bs_*,Bs_*)=\quad\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "nX^{n-1}"] & \vdots \arrow[d, "0"] & \vdots \arrow[d, "nX^{n-1}"] & \vdots \arrow[d, "0"] \\
A \arrow[d, "0"] & A \arrow[l, "Bs_2"'] \arrow[d, "nX^{n-1}"] & A \arrow[l, "Bs_1"'] \arrow[d, "0"] & A \arrow[l, "Bs_0"'] \\
A \arrow[d, "nX^{n-1}"] & A \arrow[l, "Bs_1"'] \arrow[d, "0"] & A \arrow[l, "Bs_0"'] & \\
A \arrow[d, "0"] & A \arrow[l, "Bs_0"'] & & \\
A & & &
\end{tikzcd}$$

Observese que en este caso $Bs_{2r}(1)=0$ y $Bs_{2r}(X^{a})=-(a+nr).X^{a-1}$ $(1\leq a<n)$

Nota 5.3: El complejo mezclado $\tilde{C}s(A)$ es isomorfo a la suma directa $\bigoplus_{a=0}^{n-1}\tilde{C}s^{(a)}(A)$ de los complejos mezclados de k-módulos

$$\tilde{C}s^{(a)}(A)=(Cs^{(a)}_*(A),bs^{(a)}_*Bs^{(a)}_*)=\quad\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d, "bs^{(a)}_4"] & \vdots \arrow[d, "bs^{(a)}_3"] & \vdots \arrow[d, "bs^{(a)}_2"] & \vdots \arrow[d, "bs^{(a)}_1"] \\
k \arrow[d, "bs^{(a)}_3"] & k \arrow[l, "Bs^{(a)}_2"'] \arrow[d, "bs^{(a)}_2"] & k \arrow[l, "Bs^{(a)}_1"'] \arrow[d, "bs^{(a)}_1"] & k \arrow[l, "Bs^{(a)}_0"'] \\
k \arrow[d, "bs^{(a)}_2"] & k \arrow[l, "Bs^{(a)}_1"'] \arrow[d, "bs^{(a)}_1"] & k \arrow[l, "Bs^{(a)}_0"'] & \\
k \arrow[d, "bs^{(a)}_1"] & k \arrow[l, "Bs^{(a)}_0"'] & & \\
k & & &
\end{tikzcd}$$

definidos por:

$Cs_j^{(0)}(A)=k \qquad bs_{2j+1}^{(0)}=0,\ bs_{2j}^{(0)}(1)=n \qquad Bs_j^{(0)}=0$

y, para $a\geq 1$

$Cs_j^{(a)}(A)=k \qquad bs_j^{(a)}=0 \qquad Bs_{2j+1}^{(a)}=0,\ Bs_{2j}^{(a)}(1)=a+nj$

Nota 5.4: Sea $A=k[X]/\langle X^n\rangle$, donde k es un anillo commutativo con 1. Para cada a, $1\leq a\leq n-1$, el complejo mezclado $\tilde{C}s^{(a)}(A)$ es isomorfo a la suma directa $\bigoplus_{i\geq 0}\tilde{C}s^{(a,i)}(A)$ de los complejos mezclados de k-módulos $\tilde{C}s^{(a,i)}(A)=$ $=(Cs_*^{(a,i)}(A),bs_*^{(a,i)},Bs_*^{(a,i)})$ definidos por:

$Cs_{2i}^{(a,i)}(A)=Cs_{2i+1}^{(a,i)}(A)=k,\ Cs_j^{(a,i)}(A)=0$ if $j\neq 2i,2i+1$

$bs_*^{(a,i)}=0$

$Bs_{2i}^{(a,i)}(1)=a+ni$

Definicion 5.5: Llamaremos grado de un monomio $X^{\alpha_o}\otimes\ldots\otimes X^{\alpha_m}\in A\otimes\bar{A}^m$ $(\alpha_i<n)$ a la suma de los exponentes α_i, i.e. $gr(X^{\alpha_o}\otimes\ldots\otimes X^{\alpha_m})=\sum_{i=o}^{m}\alpha_i$.
Diremos que un elemento no nulo $W\in A\otimes\bar{A}^m$ es homogeneo de grado $gr(W)=r$ si

$$W=\sum_{\lambda}\lambda.X^{\alpha_o(\lambda)}\otimes\ldots\otimes X^{\alpha_m(\lambda)} \quad (\alpha_i(\lambda)<n)$$

con cada monomio $X^{\alpha_o(\lambda)}\otimes\ldots\otimes X^{\alpha_m(\lambda)}$ de grado r

Teorema 5.6: Hay una homotopia fuerte de retracción $(G_*^{(i)})_{i\geq 0}$ de $\tilde{C}s(A)$ en $\tilde{C}(A)$ tal que $G_*^{(0)}=\bar{h}_*$.

Demostración: Construiremos los morfismos $G_*^{(i)}$ por inducción en i y j. Sea m≥0. Supongamos que ya tenemos construidos $G_*^{(i)}$ $(0\leq i\leq t)$ y $G_j^{(t+1)}$ $(0\leq j\leq m-1)$, tales que

i) $G_*^{(0)}=\bar{h}_*$

ii)$G_{j+1}^{(i)}.Bs_j - B_{2i+j}.G_j^{(i)}=b_{2i+j+2}.G_j^{(i+1)}- G_{j-1}^{(i+1)}.bs_j$

(para $o\leq i<t$ o $i=t$ y $o\leq j\leq m-1$)

(considerando $G_{j-1}^{(i+1)}=bs_j=0$ if $j=0$)

iii) $G_{2j}^{(i)}(X^a)=\sum\lambda.X^{\alpha_o}\otimes...\otimes X^{\alpha_{2i+2j}}$

con $gr(G_{2j}^{(i)}(X^a))=\sum_{k=o}^{2i+2j}\alpha_k = a+nj$

y

$$G_{2j+1}^{(i)}(X^a)=\sum\lambda.X^{\alpha_o}\otimes...\otimes X^{\alpha_{2i+2j+1}}$$

con $gr(G_{2j+1}^{(i)}(X^a))= \sum_{k=o}^{2i+2j+1}\alpha_k = 1+a+nj$

Demostración: Sea m=2r. Como $f=X^n$, b es homogeneo de grado 0. Así, para definir $G_m^{(t+1)}$ que verifique ii) and iii), es suficiente mostrar que para cada a, con $0\leq a\leq n-1$

$$T = G_{m+1}^{(t)}.Bs_m(X^a) - B_{2t+m}.G_m^{(t)}(X^a) + G_{m-1}^{(t+1)}.bs_m(X^a)$$

es un borde de grado a+nr. Se puede ver por cálculo directo que gr(T)= =a+nr. Por la proposición 3.3, para ver que T es un borde sólo tenemos que probar que $\bar{g}_{2t+m+1}(T)=0$. Si t≥1 esto se deduce de que gr(T)<(r+1)n y de que para que $\bar{g}_{2s+1}(W)$ sea distinto de 0 para un monomio

$W=X^{\alpha_0}\otimes\ldots\otimes X^{\alpha_{2s+1}}$ es necesario que $gr(W)>ns$ (ver la definición de $\bar{g}_{2s+1}$)

If $t=0$, usando que $G_*^{(0)}=h_*$, $Bs_m=\bar{g}_{m+1}.B_m.h_m$ y $\bar{g}_{m+1}.h_{m+1}=id$, tenemos

$$\bar{g}_{m+1}\left(G^{(0)}_{m+1}.Bs_m-B_m.G^{(0)}_m+G^{(1)}_{m-1}.bs_m\right)=\bar{g}_{m+1}.h_{m+1}.\bar{g}_{m+1}.B_m.h_m-\bar{g}_{m+1}.B_m.G^{(0)}_m+$$

$$+\bar{g}_{m+1}.G^{(1)}_{m-1}bs_m=\bar{g}_{m+1}.G^{(1)}_{m-1}.bs_m$$

Ahora si $a>0$, (ver *3.2*) $bs_m(X^a)=nX^{n-1}X^a=nX^nX^{a-1}=0$ en A, y si $a=0$, podemos usar que

$$dg\left(G^{(1)}_{m-1}.bs_m(1)\right)=dg\left(G^{(1)}_{2r-1}(X^{n-1})\right)=rn$$

para deducir, de la definición de $\bar{g}_{m+1}$, que $\bar{g}_{m+1}.G^{(1)}_{m-1}.bs_m=0$.

Para $m=2r+1$ se puede repetir la misma demostración que para $m=2r$.

Recalcamos que $G_*^{(0)}=h_*$ es una equivalencia de homotopía. Así para cada funtor aditivo $F:Ab\longrightarrow Ab$, $F(G_*^{(0)})$ también lo es.

Teorema 5.7: Sea $A=k[X]/\langle X^n\rangle$ e I el ideal generado por X en A. Se Tiene:

1) $HC_*(A)=HC_*(k)\oplus HC_*(A,I)$, donde

$$HC_{2r+1}(A,I)=\bigoplus_{j=0}^{r}\left[\left(\bigoplus_{a=1}^{n-1}\frac{k}{(a+nj).k}\right)\oplus\frac{k}{n.k}\right] \qquad (r\geq 0)$$

y

$$HC_{2r}(A,I)=\left[Ann(n)^{(r)}\right]\oplus\left[\bigoplus_{a=1}^{n-1}\left[k\oplus\left(\bigoplus_{j=0}^{r-1}Ann(a+nj)\right)\right]\right] \qquad (r\geq 0)$$

donde $Ann(m)$ es el anulador de m in k, i.e. la m-torsión de k, y $M^{(m)}$ es la suam directa de m copias de M.

2) El morfismo $S:HC_{2r+1}(A,I) \to HC_{2r-1}(A,I)$ es la proyección canónica y el morfismo $S:HC_{2r}(A) \to HC_{2r-2}(A)$ es el inducido por

$$\begin{array}{ccc} \left[\bigoplus_{j=0}^{r-1} Ann(a+nj)\right] \oplus k & \longrightarrow & \left[\bigoplus_{j=0}^{r-2} Ann(a+nj)\right] \oplus k \\ ((\alpha_0,\ldots,\alpha_{r-1}),\alpha) & \longrightarrow & ((\alpha_0,\ldots,\alpha_{r-2}),\alpha_{r-1}) \end{array} \qquad (1 \leq a < n)$$

y la proyección canónica $Ann(n)^{(r)} \longrightarrow Ann(n)^{(r-1)}$

Demostración: Se lo deduce directamente del teorema *5.6* y la nota *4.3*

Teorema 5.8: Let $A = k[X]/\langle X^n \rangle$. Se tiene

1)a) La homologia ciclica periódica $HC_*^{per}(A)$ es el limite inverso de $HC_*(A)$, i.e.,

$$HC_{2r+1}^{per}(A) = \prod_{j \geq 0} \left[\left[\bigoplus_{a=1}^{n-1} \frac{k}{(a+nj).k} \right] \oplus \frac{k}{n.k} \right] \qquad (r \geq 0)$$

y

$$HC_{2r}^{per}(A) = \left[k \oplus \prod_{j \geq 0} (Ann(n))_j \right] \oplus \left[\bigoplus_{a=1}^{n-1} \left[\prod_{j \geq 0} Ann(a+nj) \right] \right] \qquad (r \geq 0)$$

donde $(Ann(m))_j$ es una copia de $Ann(m)$.

b)El morfismo $S':HC_{2r+1}^{per}(A) \to HC_{2r+1}^{per}(A)$ es la proyección canónica y el morfismo $S':HC_{2r}^{per}(A) \to HC_{2r}^{per}(A)$ es inducido por

$$\begin{array}{ccc} \left[\prod_{j \geq 0} Ann(a+nj)\right] & \longrightarrow & \left[\bigoplus_{j=0}^{r-1} Ann(a+nj)\right] \oplus k \\ (\alpha_0,\alpha_1,\ldots\ldots) & \longrightarrow & ((\alpha_0,\ldots,\alpha_{r-1}),\alpha_r) \end{array} \qquad (1 \leq a < n)$$

y la proyección canónica $k\oplus \prod_{j\geq o} (A_{nn}(n))_j \longrightarrow k\oplus A_{nn}(n)^{(r)}$

2) $HC^{-}_{2r+1}(A)=k^{(n-1)}\oplus \frac{k}{n.k} \oplus \prod_{j>r}\left[\left(\bigoplus_{a=1}^{n-1}\frac{k}{(a+nj).k}\right)\oplus \frac{k}{n.k}\right]$ $(r\geq 0)$

y

$$HC^{-}_{2r}(A)=\left[\prod_{j\geq r}(Ann(n))_j\right]\oplus\left[\bigoplus_{a=1}^{n-1}\left[\prod_{j\geq r}Ann(a+nj)\right]\right] \qquad (r\geq 0)$$

donde $(Ann(m))_j$ es isomorfo a $Ann(m)$ para todo j.

3) $HC^{2r}(A)=\left[k\oplus\left(\frac{k}{n.k}\right)^{(r)}\right]\oplus\left[\bigoplus_{a=1}^{n-1}\left[k\oplus\left(\bigoplus_{j=o}^{r-1}\frac{k}{(a+nj).k}\right)\right]\right]$ $(r\geq 0)$

y

$$HC^{2r+1}(A)=\left[Ann(n)^{(r+1)}\right]\oplus\left[\bigoplus_{j=o}^{r}\left[\bigoplus_{a=1}^{n-1}Ann(a+nj)\right]\right] \qquad (r\geq 0)$$

donde $Ann(m)$ es el anulador de m en k, i.e. la m-torsión de k, y $M^{(m)}$ es la suma directa de m copias de M.

Demostración: 1)La homología cíclica periódica $HC^{per}_{*}(A)$ y la homología cíclica $HC_{*}(A)$ están relacionadas por la sucesión exacta

$$0 \to \varprojlim_{i}{}^{1} HC_{m+1+2i}(A) \to HC^{per}_{m}(A) \to \varprojlim_{i} HC_{m+2i}(A) \to 0$$

(ver la sección 3)

Es fácil ver que tanto $(HC_{2i}(A),S)$ como $(HC_{2i+1}(A),S)$ satisfacen la condición de Mittag-Leffler , Así $HC^{per}_{m}(A)=\varprojlim_{i} HC_{m+2i}(A)$.

La prueba se termina por cálculo directo

2) $HC^-_*(A)$ está relacionada con las homologías de Hochschild, cíclica and cíclica periódica por el diagrama exacto

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & HC^{per}_{m+1}(A) \arrow[r, "S'"] \arrow[d, "S'"] & HC_{m-1}(A) \arrow[r, "B"] \arrow[d, "="] & HC^-_m(A) \arrow[r, "I"] \arrow[d] & HC^{per}_m(A) \arrow[r, "S'"] \arrow[d, "S'"] & HC_{m-2}(A) \arrow[r] \arrow[d, "="] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & HC_{m+1}(A) \arrow[r, "S"] & HC_{m-1}(A) \arrow[r, "B"] & H_m(A) \arrow[r, "I"] & HC_m(A) \arrow[r, "S"] & HC_{m-2}(A) \arrow[r] & \cdots
\end{tikzcd}$$

(ver la sección 3), a partir del que se obtiene eldiagrama conmutativo con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} S'_{m-1} \arrow[r] \arrow[d] & HC^-_m(A) \arrow[r] \arrow[d] & \operatorname{Ker} S'_{m-2} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Coker} S_{m-1} \arrow[r] & H_m(A) \arrow[r] & \operatorname{Ker} S_{m-2} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

Por la parte 1)b), deducimos de la primer fila, que para $m=2r$

$$HC^-_{2r}(A)=\ker S'_{m-2}=\left[\prod_{j\geq r}(\operatorname{Ann}(n))_j\right]\oplus\left[\bigoplus_{a=1}^{n-1}\left[\prod_{j\geq r}\operatorname{Ann}(a+nj)\right]\right]$$

Si $m=2r+1$, usando que $\dfrac{k}{\operatorname{Ann}(a+rn)}=(a+rn).k$, el diagram resulta

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \bigoplus_{a=1}^{n-1}(a+nr).k \arrow[r] \arrow[d, "="] & HC^-_{2r+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \prod_{j\geq r}\left[\left(\bigoplus_{a=1}^{n-1}\frac{k}{(a+nj).k}\right)\oplus\frac{k}{n.k}\right] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus_{a=1}^{n-1}(a+nr).k \arrow[r, "\alpha"] & k^{(n-1)}\oplus\frac{k}{n.k} \arrow[r, "\beta"] & \left(\bigoplus_{a=1}^{n-1}\frac{k}{(a+nr).k}\right)\oplus\frac{k}{n.k} \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde α es la inyección canónica en el primer término, y β y γ son las proyecciónes canónicas. Aplicando el lema de la serpiente obtenemos el diagrama commutativo con filas y columnas exactas

$$
\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{j>r}\left[\left(\bigoplus\limits_{a=1}^{n-1}\dfrac{k}{(a+nj).k}\right)\oplus\dfrac{k}{n.k}\right] \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{j>r}\left[\left(\bigoplus\limits_{a=1}^{n-1}\dfrac{k}{(a+nj).k}\right)\oplus\dfrac{k}{n.k}\right] \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus\limits_{a=1}^{n-1}(a+nr).k \arrow[r] \arrow[d] & HC^{-}_{2r+1}(A) \arrow[r] \arrow[d] & \prod\limits_{j\geq r}\left[\left(\bigoplus\limits_{a=1}^{n-1}\dfrac{k}{(a+nj).k}\right)\oplus\dfrac{k}{n.k}\right] \arrow[r] \arrow[d, "\gamma"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \bigoplus\limits_{a=1}^{n-1}(a+nr).k \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & k^{(n-1)}\oplus\dfrac{k}{n.k} \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & \left(\bigoplus\limits_{a=1}^{n-1}\dfrac{k}{(a+nr).k}\right)\oplus\dfrac{k}{n.k} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}
$$

Puesto que la última columna se parte, también lo hace la del medio y así

$$HC^{-}_{2r+1}(A)\simeq k^{(n-1)}\oplus\frac{k}{n.k}\oplus\prod_{j>r}\left[\left(\bigoplus_{a=1}^{n-1}\frac{k}{(a+nj).k}\right)\oplus\frac{k}{n.k}\right]$$

3)La cohomología cíclica de A es la homología del complejo $Hom_k\left[{}_B(\tilde{C}(A)),k\right]$. Ahora, aplicando el funtor $Hom_k(\ ,k)$ a la homotopía fuerte de retracción $(G_*^{(i)})_{i\geq 0}$ de $\tilde{C}_\bullet(A)$ en $\tilde{C}(A)$, se obtiene una homotopía fuerte $\left[Hom_k(G_*^{(i)},k)\right]_{i\geq 0}$, con $Hom_k(G_*^{(0)},k)$ un cuasisomorfismo de $Hom_k(\tilde{C}(A),k)$ en $Hom_k(\tilde{C}_\bullet(A),k)$. Así, por las notas *4.3* y *4.4*, la cohomología cíclica de A es la cohomología del complejo de cocadenas $\left[\bigoplus\limits_{a=1}^{n-1}\bigoplus\limits_{i\geq 0} Hom_k\left[{}_B(\tilde{C}_\bullet^{(a,i)}(A)),k\right]\right]\oplus Hom_k\left[{}_B(\tilde{C}_\bullet^{(0)}(A)),k\right]$.

Ahora la prueba se obtiene por cálculo directo

Definicion 5.9: Sea S un subconjunto multiplicativo de $k[X]$ y $A=S^{-1}k[X]$. Definimos el complejo mezclado

$$\tilde{C}s(A)=(Cs_*(A),bs_*,Bs_*)= \begin{tikzcd} \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] & \arrow[d] \\ 0 \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & A \arrow[l] \arrow[d, "0"] & A \arrow[l] \\ 0 \arrow[d] & A \arrow[l] \arrow[d, "0"] & A \arrow[l, "Bs_0"'] & \\ A \arrow[d, "0"] & A \arrow[l, "Bs_0"'] & & \\ A & & & \end{tikzcd}$$

como

$Cs_0(A)=Cs_1(A)=A$, $Cs_j(A)=0$ si $j\geq 2$

$bs_*=0$

$$Bs_0\left(\frac{P}{Q}\right)=-\left(\frac{P}{Q}\right)'=\frac{Q'P-P'Q}{Q^2}\ ,\ Bs_j=0 \text{ si } j\geq 1$$

Lema 3.10: El complejo

$$0 \xrightarrow{\mu} A\otimes A \xrightarrow{T(X)} A\otimes A \xrightarrow{\mu} A,$$

donde $T(X)$ significa multiplicar por $T(X)=1\otimes X-X\otimes 1$, es una resolución A^e-proyectiva de A.

Demostración: Se lo deduce de que los morfismos $A \xrightarrow{s_0} A\otimes A$ y $A\otimes A \xrightarrow{s_1} A\otimes A$ definidos por

$$s_o\left(\frac{P}{Q}\right)=1\otimes\frac{P}{Q}$$

y

$$s_1\left(\frac{P}{Q}\otimes 1\right)=\left(\frac{1}{Q}\otimes\frac{1}{Q}\right)\cdot\left(\frac{P\otimes Q-Q\otimes P}{1\otimes X-X\otimes 1}\right)$$

son una homotopía de retracción.

Proposicion 5.11: La familia $C_*(A) \xrightarrow{h_*} Cs_*(A)$ de A^e-morfismos dada por

$$A \xrightarrow{\bar{h}_o} A = 1_A$$

$A\otimes\bar{A} \xrightarrow{\bar{h}_1} A$, definida por $\bar{h}_1\left(1\otimes\frac{P}{Q}\right)=-\left(\frac{P}{Q}\right)'$

$A\otimes\bar{A}^j \xrightarrow{\bar{h}_j} 0$, la aplicación nula $(j\geq 0)$.

es un morfismo de $\tilde{C}_*(A)$ en $\tilde{C}s_*(A)$ que induce cuasisomorfismos en las homologías de Hochschild y cíclica.

Demostración:Es fácil ver que $\bar{h}_*$ es un morfismo de $\tilde{C}_*(A)$ en $\tilde{C}s_*(A)$. Para ver que

$$(C_*(A),b_*) \xrightarrow{\bar{h}_*} (Cs_*(A),bs_*)$$

es un cuasisomorfismo es suficiente observar que $\bar{h}_*$ está inducida por el morfismo h_* de resoluciones A^e-proyectivas

$$\begin{array}{ccccccccc}
\ldots \xrightarrow{b'} & A\otimes\bar{A}^2\otimes A & \xrightarrow{b'} & A\otimes\bar{A}\otimes A & \xrightarrow{b'} & A\otimes A & \xrightarrow{b'} & A \\
 & \downarrow h_2 & & \downarrow h_1 & & \downarrow h_o & & \downarrow = \\
\ldots \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & A\otimes A & \xrightarrow{T(X)} & A\otimes A & \xrightarrow{\mu} & A
\end{array}$$

dado por

$h_o=\mathrm{Id}$

$$h_1\left(1\otimes\frac{P}{Q}\otimes 1\right)=\left(\frac{1}{Q}\otimes\frac{1}{Q}\right)\left(\frac{P\otimes Q\ -\ Q\otimes P}{1\otimes X\ -\ X\otimes 1}\right)=$$

$$=\left(\frac{1}{Q}\otimes\frac{1}{Q}\right).\left[\sum_{\substack{i,\,j=o\\ i<j}}^{n,m} P_i.Q_j.(\sum_{t=o}^{j-i-1} X^{i+t}\otimes X^{j-t-1})-\sum_{\substack{i,\,j=o\\ i>j}}^{n,m} P_i.Q_j.(\sum_{t=o}^{i-j-1} X^{j+t}\otimes X^{i-t-1})\right]$$

Corolario 5.12: Sea S es un subconjunto multiplicativo de $k[X]$, $A=S^{-1}k[X]$,y $d:A \to A$ la derivada con respecto a X, Se tiene

1)a) $HC_{2r+1}(A)=\dfrac{A}{d(A)}$ $(r\geq 0)$

$HC_o(A)=A$

y

$HC_{2r}(A)=\ker(d(A))$ $(r\geq 1)$

b) Los morfismos $S:HC_{2r+1}(A) \to HC_{2r-1}(A)$ y $S:HC_{2r+2}(A) \to HC_{2r}(A)$ $(r\geq 1)$ son las identitidades, y el morfismo $S:HC_2(A) \to HC_o(A)$ es la inclusión canónica

2) La homologia ciclica periódica es

$$HC^{per}_{2r+1}(A)=HC_{2r+1}(A)=\frac{A}{d(A)}$$

y

$$HC^{per}_{2r}(A)=HC_2(A)=\ker(d(A))$$

3) $HC^-_{2r}(A)=HC^-_{2r+1}(A)=0$ $(r\geq 1)$ y $HC^-_1(A)=H_1(A)=A$

Demostración: Se lo obtiene por cálculo directo.

Corolario 5.13: Si k contiene un cuerpo y $A=S^{-1}k[X]$,

$$HC_*(A) = k[u]\otimes V_*\oplus W_*$$

donde $k[u]$ es el álgebra conmutativa graduada generada por un elemento u de grado 2, $V_*=V_0\oplus V_1$ con $V_0=\ker(d(A))$ y $V_1=A/\mathrm{Im}(d(A))$, y $W_*=W_0$ con $W_0=A/\ker(d(A))$.

Corolario 5.14: Si $A=k[X]$,

$$HC^{per}_{2r+1}(A)=HC_{2r+1}(A)=\bigoplus_{j\geq 1}\frac{k}{j.k}.X^{j-1}\ ,HC_0(A)=A \quad y$$

$$HC^{per}_{2r}(A)=HC_{2r}(A)=\bigoplus_{j\geq 0}\mathrm{Ann}(j).X^{j}\ (r\geq 1)$$

Demostración: Se lo obtiene de *3.12*.

Corolario 5.15: Si $A=k[X,X^{-1}]$,

$$HC^{per}_{2r+1}(A)=HC_{2r+1}(A)=\bigoplus_{j\in Z}\frac{k}{j.k}.X^{j-1}\ ,HC_0(A)=A \quad y$$

$$HC^{per}_{2r}(A)=HC_{2r}(A)=\bigoplus_{j\in Z}\mathrm{Ann}(j).X^{j}\ (r\geq 1)$$

Demostración: Se lo obtiene de *3.12*.

Definicion 5.16: Dado $a\in\mathbb{Z}$ se define $\tilde{C}s^{(a)}$ como el complejo mezlado de k-módulos

$$Cs^{(\alpha)}=(Cs_*^{(\alpha)},bs_*^{(\alpha)},Bs_*^{(\alpha)})= \begin{tikzcd} {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d] & {} \arrow[d, "0"] \\ 0 \arrow[d] & 0 \arrow[l] \arrow[d] & k \arrow[l] \arrow[d, "0"] & k \arrow[l, "a"'] \\ 0 \arrow[d] & k \arrow[l] \arrow[d, "0"] & k \arrow[l, "a"'] & \\ k \arrow[d, "0"] & k \arrow[l, "a"'] & & \\ k & & & \end{tikzcd}$$

donde

$Cs_0^{(\alpha)}=Cs_1^{(\alpha)}=k$, $Cs_j^{(\alpha)}=0$ si $j\geq2$, $\qquad bs_*=0$, $\qquad Bs_0(1)=a$, $Bs_j=0$ se $j\geq1$

Nota 5.17: $\tilde{C}s(k[X])\cong \bigoplus_{\alpha\geq1}\tilde{C}s^{(\alpha)}\oplus\tilde{C}(k)$ y $\tilde{C}s(k[X,X^{-1}])\cong \bigoplus_{\alpha\in\mathbb{Z}}\tilde{C}s^{(\alpha)}$

Teorema 5.18: Sea $A=k[X]$. Se tiene:

$$HC^{2r+1}(A)=\prod_{j\geq1} Ann(j).X^{j-1},\quad HC^{0}(A)=K[[X]] \text{ y } HC^{2r}(A)=\prod_{j\geq0}\frac{k}{j.k}.X^{j} \quad (r\geq1)$$

Demostración: Se puede repetir la misma demostración que en el teorema *5.8*, parte 3).

Teorema 5.19: Sea $A=k[X,X^{-1}]$. Se tiene:

$$HC^{2r+1}(A)=\prod_{j\in\mathbb{Z}} Ann(j).X^{j-1},\quad HC^{0}(A)=k[[X,X^{-1}] \text{ y } HC^{2r}(A)=\prod_{j\in\mathbb{Z}}\frac{k}{j.k}.X^{j} \quad (r\geq1)$$

Demostración: Se puede repetir la misma demostración que en el teorema *5.8*, parte 3).

SECCION 6

RESULTADOS FINALES

En esta sección obtenemos una expresión de la homología cíclica de $D[X]/\langle X^n\rangle$, $D[X]$ y $D[X,X^{-1}]$ en función de las homologías cíclica y de Hochschild de D, cuando D es una k-álgebra, con k un anillo commutativo conteniendo a un cuerpo.

Comenzamos con la siguiente definición

Definicion 6.1: El cóno de un morfismo de cómplejos $g_*:(A_*,b_*) \longrightarrow (A'_*,b'_*)$ es el cómplejo $C(g_*)=(C_*(g_*),d_*)$, donde

$C_n(g_*)=A_n\oplus A'_{n+1}$

y

$C_n(g_*) \xrightarrow{d_n} C_{n-1}(g_*)$

está definido por $d_n(a_n,a'_{n+1})=\left[b_{n-1}(a_n),g_n(a_n)-b'_n(a'_{n+1})\right]$

Proposicion 6.2: Si

$$0 \to (A''_*,b''_*) \xrightarrow{f_*} (A_*,b_*) \xrightarrow{g_*} (A'_*,b'_*) \to 0$$

es una sucesión exacta corta de complejos, el morfismo

$$A''_* \xrightarrow{\alpha_*} C_*(g_*),$$

definido por $\alpha_n(a''_n)=(f_n(a''_n),0)$ es un cuasisómorfismo.

Nota 6.3: Sean $A=k[X]/\langle X^n\rangle$ y $\tilde{M}=(M_*,b_*,B_*)$ complejos mezclados. De las *Notas 5.3* y *5.4* se deduce que

$$\tilde{C}_B(A)\otimes\tilde{M}=\left[\bigoplus_{a=1}^{n-1}\bigoplus_{i\geq 0}\tilde{C}_B^{(a,i)}(A)\otimes\tilde{M}\right]\oplus\left[\tilde{C}_B^{(0)}(A)\otimes\tilde{M}\right],$$

donde $\tilde{C}_B(A)$ es el complejo mezclado de *5.2*.

Proposicion 6.4: Sean $A=k[X]/\langle X^n\rangle$ y $\tilde{M}=(M_*,b_*,B_*)$ cómplejos mezclados. Para cada $a\geq 1$ el complejo de cadana asociado al cómplejo $\tilde{C}_B^{(a,i)}(A)\otimes\tilde{M}$ es el cono del morfismo

$$\phi_*^{(a,i)}({}_B\tilde{M}_*,d_*)[2i] \longrightarrow ({}_B\tilde{M}_*,d_*)[2i+2],$$

donde

$$\phi_m^{(a,i)}:\bigoplus_{j\geq 0} M_{m-2i-2j} \longrightarrow \bigoplus_{j\geq 1} M_{m-2i-2j}$$

está definida por

$$\phi_m^{(a,i)}(\alpha_{m-2i},\alpha_{m-2(i+1)},\ldots)=(a+in)S_m^{(a,i)}\left[(\alpha_{m-2i},\alpha_{m-2(i+1)},\ldots)\right]=$$

$$=(a+in).(\alpha_{m-2(i+1)},\alpha_{m-2(i+2)},\ldots)$$

Demostración: Es trivial.

Teorema 6.5: Sea k un anillo commutativo con 1, contenienda a un cuerpo y p la característica de k. Para cada k-álgebra D se tiene:

1) Si p divide a n

$$HC_t(D[X]/\langle X^n\rangle)=\left[\bigoplus_{j\geq 0}HC_{t-j}(D)\right]^{(n/p)}\oplus\left[\bigoplus_{j\geq 0}H_{t-2j}(D)\right]^{(n-n/p)},$$

donde $M^{(m)}$ es la suma directa de m copias de M, y la aplicación $S:HC_t(D[X]/\langle X^n\rangle)\rightarrow HC_{t-2}(D[X]/\langle X^n\rangle)$ es el morfismo inducido por las aplicaciones $S:HC_{t-j}(D)\longrightarrow HC_{t-j-2}(D)$ $(j\geq 0)$ y los morfismos nulos $H_{t-2j}(D)\longrightarrow H_{t-2j-2}(D)$ $(j\geq 0)$

2) Si p no divide a n

$$HC_t(D[X]/\langle X^n\rangle)=HC_t(D)\oplus\left[\bigoplus_{a=1}^{n-1}\left[\bigoplus_{j\in B_a}(HC_{t-2j}(D)\oplus HC_{t-2j-1}(D))\right]\oplus\left[\bigoplus_{j\in C_a}H_{t-2j}(D)\right]\right],$$

donde $B_a=\{j\geq 0:p$ divide a $a+nj\}$, $C_a=\{j\geq 0:p$ no divide a $a+nj\}$ y la aplicación $S:HC_t(D[X]/\langle X^n\rangle)\to HC_{t-2}(D[X]/\langle X^n\rangle)$ es el morfismo inducido por las aplicaciones $S:HC_{t-j}(D)\longrightarrow HC_{t-j-2}(D)$ $(j\geq 0)$ y los morfismos nulos $H_{t-2j}(D)\longrightarrow H_{t-2j-2}(D)$ $(j\geq 0)$.

Demostración: $D[X]/\langle X^n\rangle=D\otimes_k k[X]/\langle X^n\rangle$. Así, por las proposiciones *1.2* y *3.5*, y las notas *5.3* y *5.4*, se tiene

$$HC_t(D[X]/\langle X^n\rangle)=HC_t\left[\tilde{C}(k[X]/\langle X^n\rangle)\otimes\tilde{C}(D)\right]=HC_t\left[\tilde{C}_s(k[X]/\langle X^n\rangle)\otimes\tilde{C}(D)\right]=$$

$$=\left[\bigoplus_{a=1}^{n-1}\bigoplus_{j\geq 0}HC_t\left[\tilde{C}_s^{(a,i)}(k[X]/\langle X^n\rangle)\otimes\tilde{C}(D)\right]\right]\oplus HC_t\left[\tilde{C}_s^{(0)}(k[X]/\langle X^n\rangle)\otimes\tilde{C}(D)\right].$$

Ahora la prueba se termina fácilmente usando las proposciones *5.2* y *5.4*.

Teorema 6.6: Sea k un anillo commutativo con 1, conteniendo a un cuerpo y p la característica de k. Para cada k-álgebra D se tiene

1) Si p divide a n

$$HC^t(D[X]/\langle X^n\rangle)=\left(\bigoplus_{j\geq 0}HC^{t-j}(D,D^*)\right)^{(n/p)}\oplus\left(\bigoplus_{j\geq 0}H^{t-2j}(D,D^*)\right)^{(n-n/p)},$$

donde $M^{(m)}$ es la suma directa de m copias de M

2) Si p no divide a n

$$HC^t(D[X]/\langle X^n\rangle)=HC^t(D)\oplus\left[\bigoplus_{a=1}^{n-1}\left[\bigoplus_{j\in B_a}(HC^{t-2j}(D)\oplus HC^{t-2j-1}(D))\right]\oplus\left[\bigoplus_{j\in C_a}H^{t-2j}(D)\right]\right],$$

donde $B_a=\{j\geq 0 : p$ divide a $a+nj\}$, $C_a=\{j\geq 0 : p$ no divide a $a+nj\}$

Demostración: La cohomología cíclica de $D[X]/\langle X^n\rangle$ es la homología del complejo

$\mathrm{Hom}_k\left({}_B(\tilde{C}(D[X]/\langle X^n\rangle)),k\right)$. Ahora, aplicando el funtor $\mathrm{Hom}_k(\ ,k)$ a la homotopía fuerte de contracción $(\theta_*^{(i)})_{i\geq 0}$ de $\tilde{C}_s(k[X]/\langle X^n\rangle)\otimes\tilde{C}(D)$ a $\tilde{C}(D[X]/\langle X^n\rangle)$, obtanemos una homotopía fuerte de contracción $\left(\mathrm{Hom}_k(\theta_*^{(i)},k)\right)_{i\geq 0}$, con $\mathrm{Hom}_k(\theta_*^{(0)},k)$ un cuasisomorfismo de $\mathrm{Hom}_k\left(\tilde{C}(D[X]/\langle X^n\rangle),k\right)$ en $\mathrm{Hom}_k\left(\tilde{C}_s(k[X]/\langle X^n\rangle)\otimes\tilde{C}(D),k\right)$. Así, por las notas *5.3* y *5.4*, la cohomología cíclica de A es la homología del complejo

$$\left(\bigoplus_{a=1}^{n-1}\bigoplus_{i\geq 0}\mathrm{Hom}_k\left({}_B\left[\tilde{C}_s^{(a,i)}(k[X]/\langle X^n\rangle\otimes\tilde{C}(D)\right],k\right)\right)\oplus\mathrm{Hom}_k\left({}_B\left[\tilde{C}_s^{(0)}(k[X]/\langle X^n\rangle\otimes\tilde{C}(D)\right],k\right)$$

Ahora la prueba se termina por cálculo directo

Nota 6.7: Sea D un álgebra sobre un cuerpo k y P un polinomio con coeficientes en k. Es fácil ver que si

$$P=(X-a_1)^{n_1}\ldots(X-a_m)^{n_m}$$

en la clausura algebraica de k,

$$HC_*(D[X]/\langle P\rangle)=\bigoplus_{j=1}^{m}HC_*(D[X]/\langle X^{n_j}\rangle$$

y

$$HC^*(D[X]/\langle P\rangle)=\bigoplus_{j=1}^{m}HC^*(D[X]/\langle X^{n_j}\rangle$$

Nota 6.8: Sea k un anillo commutativo con 1, conteniendo a un cuerpo k' y S el subconjunto multiplicativo de k[X] generado por $(X-b_i)_{i\in I}$, con $b_i\in k'$. Para $A=S^{-1}k[X]$, $\tilde{C}_s(A)$ es isomorfo a la suma directa $\tilde{C}(k)\oplus\left[\bigoplus_{a\geq1}\tilde{C}s^{(a)}\right]\oplus\left[\tilde{C}(k)[1]\oplus\left[\bigoplus_{a\geq1}\tilde{C}s^{(a)}\right]\right]^{(I)}$, donde $M^{(I)}$ es la suma directa de $\#(I)$ copias de M. (para las definiciones de $\tilde{C}(k)$ y $\tilde{C}s^{(a)}$ ver p.7 y *definition 5.16*).

Demostración: Es una consecuencia directa de que

$$\left\{1,\ X,\ X^2,\dots,\frac{1}{X-b_i},\ \left[\frac{1}{X-b_i}\right]^2,\ \left[\frac{1}{X-b_i}\right]^3,\dots\ (i\in I)\right\}$$

es una base de $A=S^{-1}k[X]$.

Proposicion 6.9: Sea k un anillo commutative con 1, conteniendo a un cuerpo k', S el subconjunto multiplicativo de k[X] generado por $(X-b_i)_{i\in I}$, con $b_i\in k'$, $A=S^{-1}k[X]$ y $\tilde{M}=(M_*,b_*,B_*)$ un complejo mezclado. Para cada $a\geq1$ el complejo de cadena asociado a $\tilde{C}s^{(a)}\otimes\tilde{M}$ es el cono del morfismo $\phi_*^{(a)}:({}_B\tilde{M}_*,d_*)\longrightarrow({}_B\tilde{M}_*,d_*)[2]$, donde $\phi_m^{(a)}:\bigoplus_{j\geq0}M_{m-2j}\longrightarrow\bigoplus_{j\geq1}M_{m-2j}$ está definida por

$$\phi_m^{(a)}(\alpha_m,\ \alpha_{m-2},\dots)=a.S_m^{(a)}\left[(\alpha_m,\ \alpha_{m-2},\dots)\right]=a.(\alpha_{m-2(i+1)},\ \alpha_{m-2(i+2)},\dots)$$

Demostración: Es trivial.

Theorem 6.10: Sea k un anillo commutative con 1, conteniendo a un cuerpo k', S el subconjunto multiplicativo de k[X] generado por $(X-b_i)_{i\in I}$, con $b_i\in k'$ y p la característica de k. Para cada k-álgebra D se tiene:

$$1) HC_t(S^{-1}D[X]) = HC_t(D) \oplus \left[\bigoplus_{j\in B} \left[HC_t(D) \oplus HC_{t-1}(D) \right]_a \right] \oplus \left[\bigoplus_{j\in C} \left[H_t(D) \right]_a \right] \oplus$$

$$\oplus \left\{ \bigoplus_{i\in I} \left[HC_{t-1}(D) \oplus \left[\bigoplus_{j\in B} \left[HC_t(D) \oplus HC_{t-1}(D) \right]_a \right] \oplus \left[\bigoplus_{j\in C} \left[H_t(D) \right]_a \right] \right]_i \right\},$$

donde $B=\{a\geq 1: p$ divide a $a\}$, $C=\{a\geq 1: p$ no divide a $a\}$ y donde M_j es isomorfo a M para cada k-módulo M y cada subíndice j.

2)La aplicación $S: HC_t(S^{-1}D[X]) \to HC_{t-2}(S^{-1}D[X])$ es el morfismo inducido por las aplicaciones $S: HC_t(D) \longrightarrow HC_{t-2}(D)$, $S: HC_{t-1}(D) \longrightarrow HC_{t-3}(D)$ y el morfismo nulo $H_t(D) \longrightarrow H_{t-2}(D)$.

Demostración: Se puede repetir la prueba del teorema *6.5* o usar [K,3.2].

Teorema 6.11: Sea k un anillo commutativo con 1, conteniendo a un cuerpo k', S el subconjunto multiplicativo de k[X] generado por $\{X-b_i\}_{i\in I}$, con $b_i \in k'$ y p la característica de k. Para cada k-algebra D se tiene:

$$HC^t(S^{-1}D[X]) = HC^t(D) \oplus \left[\prod_{j\in B} \left[HC^t(D) \oplus HC^{t-1}(D) \right]_a \right] \oplus \left[\prod_{j\in C} \left[H^t(D) \right]_a \right] \oplus$$

$$\oplus \left\{ \bigoplus_{i\in I} \left[HC^{t-1}(D) \oplus \left[\prod_{j\in B} \left[HC^t(D) \oplus HC^{t-1}(D) \right]_a \right] \oplus \left[\prod_{j\in C} \left[H^t(D) \right]_a \right] \right]_i \right\},$$

donde $B=\{a\geq 1: p$ divide a $a\}$, $C=\{a\geq 1: p$ no divide a $a\}$ y donde M_j es isomorfo a M para cada k-módule M y cada subíndice j.

Demostración: Se puede repetir la prueba del teorema *5.6*.

JORGE ALBERTO GUCCIONE

ORLANDO E. VILLAMAYOR

REFERENCIAS

[B]: Burghelea, Dan.
The cyclic homology of the group ring.
Comment. Math. Helv. 60 (1985) (354-365)

[B-O]: Burghelea, Dan and Ogle, Crichton.
The Künneth formula in cyclic homology.
Mathematische Zeitschrift 193 (1986), 527-536.

[B-V]: Burghelea, Dan and Vigué Poirrier, Micheline
Cyclic homology of Commutative Algebras
Lecture Notes in Maths, Vol 1318 pp. 51-72.

[Bach]: Buenos Aires Cyclic Homology Group.
Cyclic homology of algebras with one generator

[C]: Connes, A.
Non Commutative Differential Geometry.
Publ. Math. IHES.

[C-K]: Connes, A. et Karoubi, M.
Caractère multiplicatif. d'un module de Fredholm.
C.R. Acad. Sc. Paris, 299 (1984) 963-968.

[C-G-V]: Cortiñas, G., Guccione, J. A. and Villamayor, O. E.
Cyclic Homology of $K[\mathbb{Z}/p.\mathbb{Z}]$.
K-Theory 2 (1989) 603-616

[D]: Dennis, R. K.
Algebraic K-theory and Hochschild homology.
Unpublished notes, 1975-76.

[G]: Goodwillie, T.
On the general linear group and Hochschild homology.
Preprint (1984).

[K1]: Karoubi, M.
Homologie cyclique et K-théorie algébrique I et II
C.R. Acad. Sc. Paris, 297 (1983) 447-450 et 513-516.

[K2]: Karoubi, M.
Formule de Künneth en homologie cyclique, I.
C.R. Acad. Cs. Paris, t 303, Serie I, n^{o} 12, 1986.

[K3]: Karoubi, M.
Formule de Künneth en homologie cyclique, II.
C.R. Acad. Cs. Paris, t 303, Serie I, n^{o} 13, 1986.

[K-V]: Karoubi, Max and Villamayor Orlando E.
Homologie cyclique d'algebres des groupes,(1989)

[Ka]: Kassel, Christian.
Cyclic homology, comodules and mixed complexes.
Journal of algebra 107 (1987), 195-216.

[L]: Loday, J. L.
Opérations sur l'homologie cyclique des algèbres commutatives

[L-Q]: Loday, J. L. and Quillen, D.
Cyclic homology and the Lie algebra of matrices.
Commentarii Math. Helvelici 59 (1984), 565-591.

[T]: Tsygan, B. L.
The homology of matrix Lie algebras over rings and the Hochschild homology.
Uspehi Mat. Nouk, 38 (1983) 225-226.

[W]: Weibel, Charles A.
Nil k-theory maps to Cyclic Homology
Trans AMS 303 (1987).