

## Tesis de Posgrado

# Termodinámica y dinámica no lineal de las pulsaciones estelares

Acosta, Andrea

1990

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in [digital.bl.fcen.uba.ar](http://digital.bl.fcen.uba.ar). It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

**Cita tipo APA:**

Acosta, Andrea. (1990). Termodinámica y dinámica no lineal de las pulsaciones estelares. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2297\\_Acosta.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2297_Acosta.pdf)

**Cita tipo Chicago:**

Acosta, Andrea. "Termodinámica y dinámica no lineal de las pulsaciones estelares". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1990.  
[http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis\\_2297\\_Acosta.pdf](http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2297_Acosta.pdf)

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES  
FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES  
DEPARTAMENTO DE FÍSICA

TERMODINAMICA Y DINAMICA NO LINEAL DE LAS PULSACIONES ESTELARES  
Andrea Costa

Trabajo de Tesis presentado para optar  
al Título de Doctora en Ciencias Físicas  
1990

Director de Tesis: Prof. Dr. Constantino Ferro Fontán

## INDICE

I.	<u>INTRODUCCION</u>	4
II.	<u>CONCEPTOS GENERALES</u>	7
II.1	INTRODUCCION	7
II.2	TEORIA LINEAL	11
II.3	MECANISMO DE EXCITACION DE LAS OSCILACIONES	18
II.4	MODELOS DE UNA CAPA	20
II.5	ESTADO ACTUAL DE LA INVESTIGACION	24
III.	<u>TERMODINAMICA IRREVERSIBLE</u>	29
III.1	CONCEPTOS GENERALES	29
III.2	GENERALIZACION DEL CRITERIO DE GLANSDORFF-PRIGOGINE	39
III.2.1	CRITERIO DE GLANSDORFF-PRIGOGINE (GP)	40
III.2.2	CRITERIO GENERALIZADO DE GLANSDORFF-PRIGOGINE (GGP)	42
III.2.3	COMPARACION DEL CRITERIO GGP CON OTROS CRITERIOS	48
III.2.4	EQUIVALENCIA ENTRE EL POTENCIAL LOCAL DE GLANSDORFF Y PRIGOGINE Y EL LAGRANGIANO TERMODINAMICO DE ONSAGER MACHLUP.	49
III.3	CONCLUSIONES	51
IV	<u>APLICACION DE LA TERMODINAMICA A LA TEORIA DE LAS PULSACIONES ESTELARES</u>	52
IV.1	TEORIA GENERAL	52
IV.2	CASOS PARTICULARES	59
IV.3	EJEMPLO NUMERICO	83
IV.4	CONCLUSIONES	70
V	<u>ANALISIS DE LOS EFECTOS DE LA PRESION DE RADIACION EN LA EXCITACION DE PULSACIONES ESTELARES MEDIANTE SOLUCIONES PERTURBATIVAS DE TIPO CICLO LIMITE.</u>	72
V.1	INTRODUCCION	73
V.2	MODELO	75
V.3	ANALISIS PERTURBATIVO	77
V.4	INTEGRACION NUMERICA DIRECTA	88

V.5 DISCUSION  
V.6 CONCLUSIONES

VI CONCLUSIONES

APENDICE I  
APENDICE II  
TABLA I  
REFERENCIAS

## I. INTRODUCCION

Las estrellas pulsantes son estrellas en las que se producen movimientos dinámicos de escala comparable con el radio estelar. Estos movimientos más o menos rítmicos comprenden generalmente a la estrella en su totalidad.

La idea de que este tipo de estrellas variables deben sus cambios a expansiones y contracciones cíclicas o periódicas data de los trabajos de Eddington en 1918. Las observaciones astronómicas muestran que las estrellas pulsantes ocupan un lugar bien definido en el diagrama H-R (luminosidad temperatura efectiva). Tales regiones son regiones de inestabilidad. Cuando una estrella siguiendo su trayectoria evolutiva, entra en una de estas regiones deviene temporariamente una estrella pulsante. Cuando sale de dicha región la pulsación muere y se transforma en una estrella no pulsante ordinaria. Es posible entonces concluir que, al menos para gran parte de estas estrellas, la pulsación tiene origen en la inestabilidad frente a pequeñas oscilaciones. La teoría lineal del fenómeno permite el estudio ante perturbaciones pequeñas alrededor del estado de equilibrio de las ecuaciones de movimiento del sistema. Sin embargo, dado que las estrellas son sistemas disipativos, si éstas se vuelven linealmente inestables en algún tramo de su trayectoria evolutiva debe entonces existir algún mecanismo no lineal que provea la saturación de dicha inestabilidad.

El estudio no lineal de las pulsaciones es un campo de investigación reciente mientras que el mecanismo de excitación de la pulsación es un fenómeno bien establecido al menos para las Cefeidas

clásicas.

En la tesis que presentamos se reformula la teoría de pulsaciones estelares mediante el enfoque de la termodinámica irreversible. La aplicación de este tratamiento al problema general permite considerar los casos particulares en forma sistemática y unificada dando además una interpretación termodinámica rigurosa. Mostraremos cómo a partir de la construcción de un Lagrangiano termodinámico se reobtienen los casos particulares de la teoría y aplicaremos dicho formalismo a un ejemplo semirealístico. Estos resultados se muestran en el capítulo IV.

En el capítulo V investigamos el efecto de la presión de radiación en la excitación y estabilidad de las soluciones no lineales de tipo ciclo límite de las ecuaciones de movimiento. Este trabajo lo hemos realizado implementando un cálculo perturbativo del que hemos obtenido no sólo las ramas de equilibrio sino también la relajación no lineal a las ramas estables. Los resultados que obtenemos contienen consecuencias observacionales interesantes.

Hemos investigado dos líneas de trabajo paralelas, la de la termodinámica irreversible y el tratamiento en el marco del estudio de sistemas dinámicos. En el primer caso el problema posee una interpretación termodinámica en la que las fluctuaciones o el ruido son conceptos pertenecientes a la misma teoría. La segunda forma de trabajo ha sido la más difundida por ser simple y permitir una visión global del fenómeno. Es decir, permite distinguir las características dinámicas del sistema (por ej. los tipos de equilibrios y su estabilidad) en términos de parámetros generales.

En el capítulo III comparamos y analizamos los alcances de

distinto tipo de criterios de estabilidad termodinámicos y proponemos, en el marco de la termodinámica irreversible, una generalización del criterio de Glanscorff y Prigogine que lo hace un criterio necesario y suficiente de estabilidad.

El capítulo II es introductorio, en el se hace un resumen y revisión de la teoría y una descripción del estado actual de la misma.

## II CONCEPTOS GENERALES

### II.1 INTRODUCCION

Las estrellas pulsantes son estrellas que sufren movimientos dinámicos coherentes debido a causas intrínsecas, que son más o menos rítmicos (con períodos que van de los minutos a los 1000 días) y de amplitudes características grandes ( $\approx R^*$  radio estelar).

Sólo una de  $10^5$ - $10^6$  estrellas es una estrella pulsante. El número estimado del total de estas estrellas en nuestra galaxia es de  $2 \cdot 10^6$  estrellas. Uno de los resultados observacionales más espectaculares en el estudio de estas estrellas ha sido la conocida relación período-luminosidad de las Cefeidas clásicas que ha permitido la medición de grandes distancias astronómicas (del orden de la separación entre galaxias). La variabilidad observada de estas estrellas se detecta por cambios que se producen en la medición de la velocidad radial, el tipo espectral, la luminosidad, color, etc.

Las observaciones astronómicas muestran que las estrellas pulsantes (de variación intrínseca) ocupan un lugar bien definido en el diagrama H-R (diagrama luminosidad-temperatura efectiva) Fig.1. Tales regiones son regiones de inestabilidad. Cuando una estrella, siguiendo su trayectoria evolutiva, entra en una de estas regiones deviene temporariamente una estrella pulsante. Cuando sale de dicha región la pulsación muere y se transforma en una estrella no pulsante ordinaria. Es posible entonces concluir que, al menos para gran parte de estas estrellas, la pulsación tiene origen en la inestabilidad frente a pequeñas oscilaciones alrededor de la solución de equilibrio estático.



Se han propuesto y estudiado diversos mecanismos de excitación de dichas inestabilidades. Es decir, dado que las pulsaciones no son totalmente adiabáticas y una cierta fracción de energía mecánica se pierde en cada período, debe existir un mecanismo de excitación que provea energía adicional cuando la estrella se encuentra evolutivamente en una región de inestabilidad. Eddington (1930) propuso dos mecanismos posibles como responsables de dicha excitación. Uno de ellos consiste en que en la fase de la compresión, y debido al aumento de la temperatura, la producción de energía nuclear es más eficiente y por lo tanto en esta fase se acumula energía que puede ser liberada en la descompresión. El segundo mecanismo que consideró consiste en que ciertas partes de la estrella se vuelven más opacas en la fase compresiva de manera que la radiación es retenida más allá de dicha fase provocando luego la expansión. Es decir, el medio produce un efecto de válvula en el flujo que lo atraviesa debido a que la capacidad calorífica es mayor en la compresión que en la expansión. Trabajos posteriores mostraron que el primer mecanismo propuesto es inefectivo en las condiciones estelares usuales (en las que la generación de energía nuclear se realiza en el centro de la estrella) debido a que el valor relativo de la amplitud de la oscilación  $\delta r/r_0$  ( $r_0$  valor de equilibrio de la coordenada radial  $r$ ) es muy pequeño en el centro de la estrella donde dicho mecanismo de excitación puede actuar (Ledoux y Walraven 1958).

Los primeros trabajos en el tema fueron hechos suponiendo a la estrella como un gas perfecto, que debido a su alta opacidad interior realiza oscilaciones adiabáticas en la aproximación lineal. En esta aproximación se obtiene una buena determinación de los períodos. La extensión al caso no adiabático permite el estudio de la estabilidad,

la evolución y la mejor determinación de los períodos. La extensión no lineal del problema permite estudiar la saturación de la amplitud y las correcciones a los valores lineales hallados. Más aún, como se mostrará en un capítulo posterior, algunas de las pulsaciones estelares pueden describirse como atractores no lineales. Es decir, dado que las amplitudes observadas para estrellas de un mismo tipo no varían apreciablemente de estrella en estrella, esto indica el comportamiento no lineal de tipo ciclo límite (bifurcación de Hopf).

Para el estudio del fenómeno que interesa las estrellas se tratan como un medio continuo de gas ideal. La ecuación que contempla la situación más general de las pulsaciones estelares se obtiene combinando la ecuación de continuidad, la de impulso y el balance de energía total del sistema. Junto con estas ecuaciones se utilizan relaciones constitutivas, como por ejemplo, la ecuación de estado para el gas, la expresión para el flujo radiativo en la aproximación de difusión, la expresión para la generación de energía termonuclear y la opacidad en función de la temperatura y la densidad, etc.

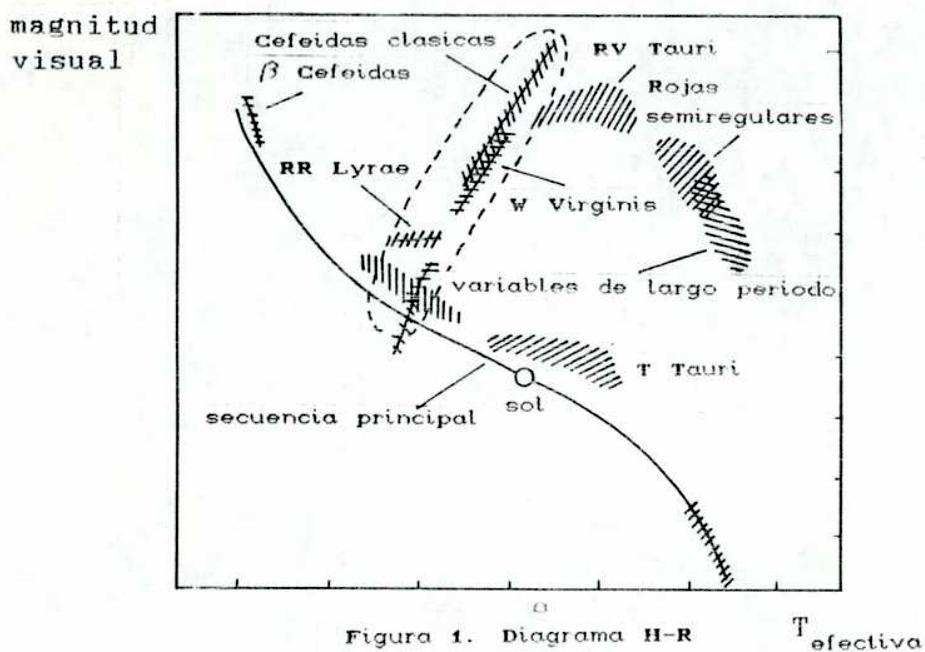


Figura 1. Diagrama H-R

Las ecuaciones generales en el caso radial y en coordenadas Lagrangianas son, la ecuación de impulso

$$\partial^2 r / \partial t^2 = - G m(r) / r^2 - 1/\rho \partial p(r) / \partial r \quad (2.1.1)$$

donde  $m(r)$  es la masa interior a la superficie de coordenada  $r$ ,  $\rho$  es la densidad y  $p$  la presión total (presión del gas más presión de radiación), la ecuación de balance de energía (primera ley de la termodinámica)

$$\partial E / \partial t + p \partial V / \partial t \equiv \partial Q / \partial t, \quad \partial Q / \partial t = \varepsilon - \partial f / \partial m \quad (2.1.2)$$

donde  $E$  es la energía interna por unidad de masa,  $V=1/\rho$  volumen específico),  $\varepsilon$  la generación de energía nuclear por unidad de masa y tiempo,  $f$  es el flujo de energía a través de la esfera de radio  $r$  y  $Q$  la ganancia de calor por unidad de masa; y la ecuación de continuidad

$$\partial r / \partial m = 1 / (4\pi \rho r^2). \quad (2.1.3)$$

Si la ecuación de estado es conocida pueden combinarse las ecuaciones anteriores de masa, energía y momento obteniéndose una única ecuación en derivadas parciales que resulta ser una ecuación de tercer orden en el tiempo y de cuarto orden en la coordenada espacial

$$\begin{aligned} \dots \dots \dots \\ r - 2r \ddot{r} / r - 4(\dot{m}r / r - 4\pi r^2 \partial [4\pi \Gamma_1 \rho \partial (r^2 \dot{r}) / \partial m] / \partial m) \\ = -4\pi r^2 \partial [\rho (\Gamma_2 - 1) (\varepsilon - \partial L_r / \partial m)] / \partial m \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

$L_r$  es la luminosidad a la profundidad  $r$ ,  $\Gamma_1$  y  $\Gamma_2$  son los coeficientes adiabáticos definidos de modo que

$$\begin{aligned} (\partial \log p / \partial \log \rho)_s = \Gamma_1; \quad (\partial \log T / \partial \log \rho)_s = \Gamma_2 - 1 \\ L_r = -4 \pi r^2 4ac / 3k\rho T^3 \partial T / \partial r \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

donde  $k$  es la opacidad media de Rosseland,  $c$  la velocidad de la luz,  $a$  la constante de Stefan-Boltzmann,  $s$  es la entropía y se cumple la

relación  $f=L_r/4\pi r^2$  La ecuación (2.1.4) resulta de escribir el primer principio de la termodinámica en la forma

$$p \rho \Gamma_1 dV/dt + dp/dt = (\Gamma_3 - 1) \rho dQ/dt \quad (2.1.6)$$

$$dV/dt = 4\pi \partial(r^2 \dot{r})/\partial m$$

La ecuación ro radial equivalente se obtiene de manera similar y puede verse en Cox (1980).

## II.2 TEORIA LINEAL

La teoría lineal permite estudiar la estabilidad ante pequeñas perturbaciones alrededor del estado de equilibrio de las ecuaciones de movimiento.

Originariamente se ha tomado la solución

$$v(r,t) = 0 \quad \forall r \quad \forall t \quad (2.2.1)$$

como equilibrio lineal (y no lineal) de las ecuaciones. Sin embargo esta solución no puede ser un equilibrio exacto del problema salvo que el sistema se encuentre en equilibrio termodinámico con el medio. Es decir, debido a que la estrella emite energía en forma irreversible la solución de máxima entropía corresponde a la de equilibrio con el medio interestelar, es decir a una temperatura de 3-4 °K. Sin embargo la solución (2.2.1) es, en primera aproximación, una solución de equilibrio del problema, aunque siempre inestable. Estas inestabilidades son de tres tipos, pulsacional, dinámica o secular.

La composición estelar se modifica debido a la transmutación nuclear de los elementos. Esto significa que las cantidades termodinámicas son función de la composición química además de depender de dos variables termodinámicas. La ecuación de la energía

contiene entonces cantidades que dependen de  $x_i$  (abundancia de masa de la especie  $i$ ) y la producción de energía nuclear por unidad de masa  $\epsilon$  es una función de  $x_i$ , cantidades que a su vez provienen de ecuaciones cinéticas del tipo

$$\dot{x}_i = \dot{x}_i(x_1, \dots, x_n, \rho, T) \quad (2.2.2)$$

Si despreciamos las derivadas temporales ( $\partial/\partial t=0$ ) resulta  $\epsilon=0$  y de las ecuaciones (2.1.2) debe ser  $L=0$  ( $L$  es la luminosidad para  $r=R_*$ ). Esta situación corresponde, como ya dijimos a la situación de equilibrio termodinámico con el medio y en este caso  $v(r,t)=0$  es solución. Si nos restringimos a intervalos de tiempo suficientemente cortos, de manera que todos los  $x_i$  pueden ser despreciados salvo en  $\epsilon$  entonces, para tiempos menores que el tiempo nuclear resulta que  $v(r,t)=0$  sigue siendo solución si se cumple la ecuación

$$\epsilon - 1/\rho \nabla \cdot f = 0 \quad (2.2.3)$$

que es la condición de equilibrio térmico local o de balance de energía para cada elemento de volumen. Recordando que  $f=L_r/4\pi r^2$ , la condición (2.2.3) es equivalente a anular el término derecho de (2.1.4).

Con estas consideraciones, sin pérdida de generalidad, es decir, para tiempos cortos respecto a tiempos del orden del tiempo nuclear y para oscilaciones adiabáticas, se pueden proponer soluciones del tipo  $\delta(r,t)/r = \xi(r,t) = \xi(r) e^{i\sigma t}$ . Si  $\sigma$  es real tenemos una inestabilidad pulsacional (pulsaciones estelares); si  $\sigma$  es imaginaria pura y positiva tenemos inestabilidad dinámica (por ej. la contracción gravitatoria).

Los cambios seculares corresponden a variaciones producidas en

tiempos del orden de la evolución estelar. La descripción de este fenómeno la proveen las soluciones de la ecuación (2.1.4) para tiempos del orden del tiempo de Kelvin. El tiempo de Kelvin ( $t_k$ ) es el tiempo de relajación cuando se producen apartamientos de la estrella de su equilibrio térmico, es decir, apartamientos del balance entre la energía generada por reacciones termonucleares en el interior estelar y energía perdida por radiación a través de la superficie de la estrella ( $t_k \sim E_{\text{térmica}}/L$ ). En este caso (para  $t \approx t_k$ ) el término no adiabático deja de ser pequeño y las frecuencias a considerar son complejas. Se desprecian los términos en  $\ddot{r}$  y  $\ddot{r}'$  por ser la aceleración mucho menor que la de caída libre. Las soluciones que se obtienen de la ecuación resultante son las que dan la evolución del modelo estelar no pulsante.

#### a) CASO ADIABATICO

La hipótesis de oscilaciones lineales adiabáticas (sin ganancias o pérdidas netas de calor para cada elemento de masa), aunque es poco realista, da una buena descripción de algunas características dinámicas de las estrellas, como por ejemplo períodos y amplitudes relativas entre las distintas zonas de la estrella. La razón de estos aciertos es que las pulsaciones pueden considerarse en primera aproximación como oscilaciones adiabáticas. Esta teoría, como es obvio, no da información acerca del comportamiento térmico, de la estabilidad o de la existencia y surgimiento de las pulsaciones.

La ecuación diferencial que describe este tipo de oscilaciones se obtiene de la ecuación no adiabática (2.1.1) linealizada alrededor de una solución de equilibrio ( $\dot{r} = \dot{\rho} = \dot{p} = \dot{T} = 0 \quad \forall m$  y

$dp/dm = -Gm/4\pi r^4$ ,  $dL_r/dm = \epsilon$ ) y suponiendo soluciones de tipo estacionarias ( $\delta r/r = \xi(r, t) = \xi(r) e^{i\sigma t}$  donde  $\delta r$  es la perturbación de la solución de equilibrio)

$$d(\Gamma_1 p r^4 d\xi/dr)/dr + \xi(\sigma^2 \rho r^4 + r^3 d[(3\Gamma_1 - 4)p]/dr) = 0 \quad (2.2.4)$$

$\sigma^2$  es siempre real dado que los coeficientes de la ecuación lo son, lo que implica que la parte real de  $\xi(r, t)$  se anula (para todo  $r$ ) dos veces en un período, es decir, la estrella pasa por el estado de equilibrio dos veces en un mismo período. Este resultado no se obtiene cuando las oscilaciones son no adiabáticas dado que  $i\sigma = k + iw$  con  $k \neq 0$ .

La ecuación (2.2.4) con apropiadas condiciones de contorno es un problema de autovalores y autovectores del tipo Sturm-Liouville y existe en la literatura una extensa bibliografía (Ledoux 1958) acerca de él.

Las condiciones de contorno son:

en el origen ( $r=0$ )

$$\delta r = 0 \text{ y } d\xi/dr = 0 \quad (2.2.5a)$$

y en  $r=R^*$

$$\delta p/p = -(\sigma^2 r/g + 4)\xi \quad (2.2.5b)$$

que se obtiene como consecuencia de que la temperatura es despreciable en la superficie respecto de los valores del interior. Esta última suposición es también equivalente a que el tiempo  $t_a$  de respuesta inercial de la atmósfera es pequeño respecto al período.

Algunas características, para distintos modelos de politropas, que se obtiene de la solución de la ecuación (2.2.4) son: 1) la frecuencia adimensional  $\Omega_0 = \sigma_0 [R^{*3}/G M^*]^{1/2}$  en el modo fundamental aumenta con la concentración de masa en el centro y disminuye con la

densidad media ( $\rho_c / \bar{\rho}$ ); 2) el cociente  $|\xi_R / \xi_c|$  entre la amplitud de la oscilación en la superficie de la estrella y en el centro está fuertemente correlacionado con  $\rho_c / \bar{\rho}$ , ( $|\xi_R / \xi_c| \propto \rho_c / \bar{\rho}$ ) de manera que, estrellas con una gran concentración de masa en el centro tienen una amplitud de oscilación mucho mayor en la superficie que en la región central. Es decir, la pulsación no penetra las regiones más internas de la estrella donde la mayor cantidad de masa se localiza. La pulsación es entonces un fenómeno superficial que afecta sólo a las capas más externas del interior estelar.

#### b) CASO NO ADIABATICO

La introducción de los términos no adiabáticos modifica poco el resultado numérico del problema ya que estos términos son del orden de  $\pi / t_K$  (período y tiempo de Kelvin) que como ya se mencionó es generalmente una magnitud mucho menor que uno. Sin embargo, el hecho de que el sistema no es más un sistema conservativo resulta ser una diferencia cualitativa importante respecto del caso anterior. La introducción de estos términos implica que las frecuencias características del problema pueden ser complejas y esto a su vez indica que las amplitudes de pulsación son secularmente crecientes o decrecientes en el tiempo. Esto es debido a que el sistema no está en equilibrio termocinámico con el medio y por lo tanto  $v_{r,0} = 0 \quad \forall r$  no es un equilibrio exacto (si lo es en una primera aproximación), lo que implica que no hay balance térmico, o sea que para tiempos largos es  $\delta(\epsilon - 1/\rho \nabla \cdot f) \neq 0$ . No ocurre entonces, como en el caso adiabático, que el sistema pasa dos veces en un mismo período por la solución de equilibrio  $v_{r,0} = 0 \quad \forall r$ .

La ecuación de la energía (2.1.2) puede escribirse en el caso



lineal como:

$$d(\delta p/p_0)/dt = \Gamma_1 d(\delta \rho/\rho_0)/dt + (\Gamma_1 - 1) \rho_0/p_0 \delta(\epsilon - 1/\rho \nabla \cdot f) \quad (2.2.8)$$

vemos de esta ecuación que los efectos no adiabáticos contenidos en el término con  $\delta(\epsilon - 1/\rho \nabla \cdot f)$  provocan un corrimiento de fase entre los términos de la presión y de la densidad. Por ejemplo, si  $dQ/dt = (\Gamma_1 - 1) \rho_0/p_0 \delta(\epsilon - 1/\rho \nabla \cdot f)$  (ganancia local de calor) es positivo cuando la densidad  $\rho$  es máxima ( $\Gamma_1 d(\delta \rho/\rho_0)/dt = 0$ ), la presión seguirá aumentando y por lo tanto el máximo de  $\delta p$  estará desfasado negativamente respecto del máximo de  $\delta \rho$  (ver Fig.2). Lo dicho puede expresarse de otra manera a partir de la ecuación de balance de energía que puede también escribirse como

$$d \left[ \int_M \frac{1}{2} v^2 dm \right] / dt = \int_M p d(1/\rho) / dt dm + \int_M F \cdot v dm \quad (2.2.7)$$

donde  $F$  son las fuerzas de volumen por unidad de masa; en este caso  $F$  es la fuerza gravitatoria. Si se integra esta ecuación en un período completo, suponiendo que el sistema retorna al estado inicial, el término del potencial gravitatorio se anula y se obtiene que la variación de la energía cinética  $\Delta T$  durante dicho período es  $\Delta T = W$ .  $W$  es el trabajo realizado sobre la estrella por la suma de los gradientes de presión y de gravedad que actúan sobre cada elemento de masa considerado, que son aplicados por los elementos vecinos a este. Es decir, este trabajo es igual al valor  $p dV$  ( $V = 1/\rho$ ) del trabajo hecho por cada elemento de masa sobre sus vecinos en un período. Si la suma de los trabajos  $dW$  sobre todos los elementos de masa es positiva (negativa), entonces  $\Delta T > 0$  ( $\Delta T < 0$ ) y se tiene una estrella con inestabilidad (estabilidad) pulsacional.

La discusión anterior permite pensar que la estrella está compuesta por una superposición de capas elementales de masa  $dm$  que

realizan un ciclo térmico en un período. Se puede entonces concluir que una región que está ganando (perdiendo) calor en la máxima compresión es una región que excita (amortigua) las oscilaciones.

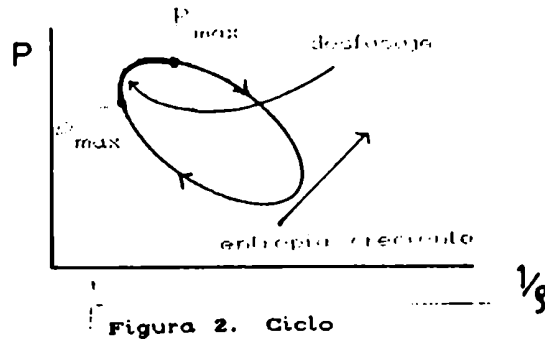


Figura 2. Ciclo

Las soluciones que se obtienen de la ecuación no adiabática, para las condiciones estelares usuales, no difieren mucho del resultado para el caso adiabático. Esto significa que la amplitud  $\xi(r)$  tiene un término imaginario pequeño y las pulsaciones son prácticamente ondas estacionarias. Los períodos son generalmente más pequeños (por lo menos para el modo fundamental) que los correspondientes períodos adiabáticos.

La ecuación de movimiento en la aproximación cuasiadiabática se escribe en forma compacta en la forma

$$\mu \ddot{\xi} + \rho \dot{\xi} + L \xi + D \int \xi dt = 0 \quad (2.2.8)$$

donde

$$D \xi = r^3 d [(\Gamma_3 - 1) \rho \dot{\xi}] / dr \quad \text{con } \dot{q} = \partial E / \partial t + p \partial(1/\rho) / \partial t \quad (2.2.8a)$$

$$\rho \xi = 4/3 r^3 d [r^4 \nu d\xi / dr] dr \quad \text{con } \nu \text{ la viscosidad} \quad (2.2.9b)$$

$$L \xi = -d [r^4 \Gamma_1 p d\xi / dr] dr - r^3 [d[(3 \Gamma_1 - 4) p] / dr] \xi \quad (2.2.9c)$$

$$\mu = \rho r^4 \quad (2.2.9d)$$

La ecuación (2.2 8) proviene de la ecuación (2.1.4) utilizando como variable independiente a  $r$  en vez de  $m$ , linealizando e integrando una vez en el tiempo dicha ecuación linealizada. Esta expresión se utilizará en el siguiente capítulo. El caso adiabático se reobtiene cuando  $D=\rho=0$ .

### II.3 MECANISMO DE EXCITACION DE LAS OSCILACIONES

Como ya se mencionó el mecanismo de excitación de las oscilaciones es provisto por las regiones de ionización de elementos abundantes. La energía nuclear que es la fuente principal de energía de las estrellas tiene un rol totalmente despreciable en la excitación de las oscilaciones y esto es así porque el fenómeno de la pulsación involucra sólo a las capas externas de la estrella. El agente principal del mecanismo de excitación es la región de ionización del helio.

Como se mencionó, la excitación se produce debido a que en la etapa de compresión se absorbe calor mientras que en la de expansión se libera calor de manera que se realiza un trabajo positivo sobre la estrella. La ionización de un elemento abundante como el  $\text{He}^{++}$  provoca el desfase entre ganancias y pérdidas del flujo de energía que atraviesa esta zona en la que la etapa de máxima presión ocurre después de la de máxima densidad. Esta modulación del flujo de energía en forma sostenida excita la oscilación. En las regiones adiabáticas internas se produce el fenómeno inverso, la etapa de máxima presión ocurre antes que la de máxima densidad produciendo un efecto amortiguador sobre la estrella. Si este efecto de amortiguación, que

se produce en las zonas en donde la amplitud de la oscilación es relativamente menor, no compensa la excitación que se produce en las regiones externas se obtiene como resultado neto de este proceso que las estrellas se vuelven inestables ante pequeñas perturbaciones.

La ubicación en el diagrama H-R de las estrellas para las que se produce este efecto neto de excitación se corresponde con la ubicación de los distintos tipos de estrellas pulsantes existentes. La contrastación de estas consecuencias observacionales de la teoría con los datos empíricos que dan ubicación a las estrellas en el diagrama H-R son el aval más importante de la teoría.

La localización de la capa de ionización (para que la estrella pulse) debe ser tal que coincida con la ubicación de la llamada región de transición. La región de transición es la zona que separa el interior donde las oscilaciones son cuasiadiabáticas del exterior donde las oscilaciones son no adiabáticas. Esta región se caracteriza porque en ella la razón de la energía luminosa que la atraviesa respecto de su energía interna es aproximadamente igual a uno. Es decir,

$$L_0 \tau_{ff}/E_0 \approx 1 \quad (2.3.1)$$

donde  $\tau_{ff}$  es el tiempo de caída libre.

La región no adiabática se caracteriza por el hecho de que el flujo luminoso atraviesa la región sin ser modulado. Es decir es un flujo constante espacialmente. El efecto de la región de ionización sobre el flujo que la atraviesa es el de absorber energía en la compresión y liberarla en la expansión. Esta energía en vez de calentar el material cuando este se comprime es utilizada en la ionización del material. Sin embargo, este efecto no es capaz de excitar las oscilaciones

cuando la región de ionización está ubicada en la zona adiabática debido a que la modulación sobre el flujo que se ejerce al entrar en dicha región es compensado totalmente al salir de ella (se produce una modulación inversa). Si las dos regiones coinciden, es decir si la región de transición está a la temperatura de ionización del helio ( $T \approx 10^4 \text{K}$ ) la inestabilidad que produce el flujo sobre el material al entrar en la región no puede ser compensada con el efecto inverso a la salida de dicha región debido a que esta zona es no adiabática y el flujo es constante espacialmente. El efecto neto es entonces la excitación de las oscilaciones.

La expresión (2.3.1) define la región de inestabilidad de las Cefeidas en el diagrama H-R.

#### II.4 MODELOS DE UNA CAPA

En esta sección se describen algunos modelos de una capa con el objeto de utilizarlos en el capítulo V. Estos modelos han sido desarrollados para poder analizar el fenómeno de la pulsación en la forma más simple y esquemática posible sin perder las características esenciales que se pretende describir. Representan el movimiento de una capa fina relativamente delgada, esférica, concéntrica y ubicada a cierta distancia del centro estelar. Mencionaremos las características de algunos.

Rudd Rosenberg (1970)

Si  $M$  es la masa del centro rígido,  $\mu \ll M$  es la masa del gas en la capa y  $r$  es el radio exterior instantáneo, la ecuación de movimiento es

$$\mu \frac{d^2 r}{dt^2} = 4\pi r^2 P - G M \mu / r^2 \quad (2.4.1)$$

El gas en esta zona se comporta como si toda la masa estuviera concentrada en la fina capa de radio  $r$ . El radio de equilibrio  $r_0$  se obtiene de (2.4.1) y la ecuación de energía que se utiliza es

$$P/P_0 = K (\rho/\rho_0)^{\Gamma_1} \quad (2.4.2)$$

donde  $K$  es variable y es una medida de la no adiabaticidad de la zona. La relación entre  $\rho$  y  $r$  es

$$\rho/\rho_0 = (r/r_c)^{-m} \quad (2.4.3)$$

donde

$$m = \ln\{ [(r/r_0)^3 n_0^3 - 1] / (n_0^3 - 1) \} / \ln(r/r_0) \quad (2.4.4)$$

con  $n_0 = r_0/r_c$ ,  $r_c$  el radio del centro rígido. Combinando las ecuaciones anteriores se obtiene

$$\ddot{w} = G M/r_0^3 [K/w^n - 1/w^2] \quad (2.4.5)$$

con  $w = r/r_0$ ,  $n = m\Gamma_1 - 2$  y  $K$  pequeño en cantidades de  $1-w$ .

Baker (1966)

Este modelo es un modelo lineal para el cual las variables físicas son constantes en  $r$ . Es decir, Baker anula las derivadas espaciales salvo  $\partial(\delta L_r/L_r)/\partial\mu$  que es responsable de la modulación del flujo de energía y por ende de la excitación de las oscilaciones. Se desprecia el coeficiente que da cuenta de las fuentes de energía nuclear  $\epsilon$ . Para evaluar  $\partial(\delta L_r/L_r)/\partial\mu$  Baker supone que la luminosidad incidente desde la región interior es constante y por lo tanto  $\delta L_r/L_r = 0$  en este contorno. En la superficie exterior de la capa  $\delta L_r/L_r$  es variable con el tiempo. Para el interior de la capa se aproxima  $\partial(\delta L_r/L_r)/\partial\mu$  por  $2 \delta L_r/L_r \Delta\mu$ . Es decir, el promedio instantáneo de los valores en los contornos.

Baker supone sólo transporte radiativo y para la opacidad

$$\delta k/k = n \delta \rho/\rho - s \delta T/T \quad (2.4.6)$$

donde  $n$  y  $s$  son constantes en la capa y dependen del elemento que se ioniza y de la temperatura de la región. La ecuación de estado linealizada es

$$\delta P/P = \kappa_{\rho} \delta \rho/\rho + \kappa_T \delta T/T \quad (2.4.7)$$

donde  $\kappa_{\rho} = \partial \ln P / \partial \ln \rho|_T$  y  $\kappa_T = \partial \ln P / \partial \ln T|_{\rho}$  son constantes. Con todas las derivadas espaciales eliminadas la ecuación que se obtiene es una ecuación diferencial ordinaria de tercer orden en el tiempo. Suponiendo una dependencia temporal del tipo  $e^{\sigma t}$  se obtiene una ecuación cúbica para la frecuencia. Baker analiza distintos modos posibles en función del acoplamiento entre los términos adiabáticos y los no adiabáticos.

Stellingwerf (1972), Stellingwerf y Gautsky (1984)

El modelo que describiremos a continuación es una generalización del modelo de Stellingwerf de 1972 que fue modificado para permitir una ecuación de estado general. Este modelo es el que se usa en el capítulo V para analizar los efectos de la presión de radiación en el encendido de la excitación. Consiste en una capa homogénea de radio exterior  $r$  y radio interior fijo e igual a  $r_c$ . Es libre de pulsar alrededor de su radio de equilibrio  $r_0$ . Definimos  $x=r/r_0$  y  $m=3/[1-(r_c/r_0)^3]$  de manera que  $\rho/\rho_0 = x^{-m}$ .

Se supone que:

$$P \sim \rho^{\kappa_{\rho}} T^{\kappa_T} \quad (2.4.8)$$

$$E \sim \rho^{\eta_{\rho}} T^{\eta_T}$$

donde los cuatro exponentes son función de la presión de radiación a

través de  $\beta$ , donde

$$\beta = P_g / P, \quad P = P_g + P_r, \quad \text{presión del gas más presión de radiación} \quad (2.4.9)$$

y de  $\gamma_g = (C_p / C_v)_{ga}$ , (el cociente de calores específicos del gas).

Los exponentes de la presión son función de  $\beta$  (Cox y Giuli 1968)

$$\begin{aligned} \kappa_\rho &= \beta \\ \kappa_T &= 4 - 3\beta \end{aligned} \quad (2.4.10)$$

y si se definen

$$\begin{aligned} \Theta &= PV/E = (\gamma_g - 1) / (3(1-\beta)(\gamma_g - 1) + \beta) \\ \Phi &= \beta C_v / R = (12(1-\beta)(\gamma_g - 1) + \beta) / (\gamma_g - 1) \end{aligned} \quad (2.4.11)$$

los exponentes de la energía interna resultan

$$\begin{aligned} \eta_\rho &= -\Theta(\kappa_T - 1) \\ \eta_T &= \Theta\Phi \end{aligned} \quad (2.4.12)$$

Los valores de las  $\Gamma$  pueden expresarse

$$\begin{aligned} \Gamma_3 - 1 &= \kappa_T / \Phi \\ \Gamma_1 &= \kappa_\rho + (\Gamma_3 - 1)\kappa_T \end{aligned} \quad (2.4.13)$$

Stellingwerf (1972) define un factor de no adiabaticidad  $h$  de modo que

$$T \sim \rho^{\frac{\Gamma_3 - 1}{3}} h \quad (2.4.14)$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} P &\sim \rho^{\frac{\Gamma_1}{3}} h^{\kappa_T} \\ E &\sim \rho^\Theta h^{\eta_T} \end{aligned} \quad (2.4.15)$$

$h$  viene determinada por la solución de la ecuación de la energía y refleja las ganancias y pérdidas de la capa que pulsa. Utilizando como unidad de tiempo el de caída libre ( $t_{ff} = (GM/R^3)^{-1/2}$ ) y  $\tau = t/t_{ff}$ , las ecuaciones de movimiento que resultan son



$$d^2x/d\tau^2 = h^{\kappa} / x^q - 1/x^2$$

$$dh/d\tau = (T_1 \ominus m (dx/d\tau) + T_2) / (\eta_T x^{-m\Theta} h^{(\eta_T^{-1})}) \quad (2.4.16)$$

donde

$$T_1 = x^{(-m\Theta-1)} h^{\eta_T} - x^{(-m(\Gamma_1-1)-1)} h^{\kappa} \tau$$

$$T_2 = -\zeta (L/L_0 - L_i/L_0) \quad (2.4.17)$$

$\zeta = L_0 t_{ff} / (E_0 M_0)$  es la razón de la energía luminosa y térmica en la capa;  $L_0$  es la luminosidad de equilibrio;  $L_i$  es la luminosidad incidente en la capa y  $L$  es la luminosidad instantánea en la superficie externa de la capa. Resulta

$$L/L_0 = x^b h^{(s+4)}$$

$$L_i/L_0 = x^u \quad (2.4.18)$$

con  $b=4+m[n-(s+4)(\Gamma_1-1)]$ ;  $n$  y  $s$  son los exponentes de la densidad y temperatura de la opacidad y  $u$  representa el efecto de la luminosidad en las capas internas. Los valores estándar que se utilizan en el capítulo V son

$\gamma_g = 1.1$	valor de la zona de ionización
$m = 10$	grosor de la capa
$n = 1$	coeficiente de la opacidad de Kramer
$s = 3$	coeficiente de la opacidad de Kramer
$u = -2$	anortiguamiento de la luminosidad interior

## II.5 ESTADO ACTUAL DE LA INVESTIGACION

### a) Desbalance térmico

Como es sabido el estado "estático" (no pulsante) de las estrellas es función del tiempo. Estos cambios lentos del estado de equilibrio dan lugar a la evolución de la estrella desde su nacimiento

hasta su muerte.

Como se mencionó los tiempos característicos asociados a esta evolución son en general mucho mayores que los períodos de oscilación. Es por esto que la aproximación de tomar al estado no pulsante de la estrella como verdadero estado de equilibrio es una muy buena aproximación salvo en etapas evolutivas tardías en las que estos cambios pueden ser más rápidos. Los cambios lentos del modelo estático se deben a que la estrella no está en equilibrio térmico exacto, es decir

$$\epsilon - \nabla \cdot f / \rho \neq 0 \quad (2.5.1)$$

La suposición de que las oscilaciones son adiabáticas o cuasi adiabáticas da buena concordancia con los períodos observados, constatándose que estas aproximaciones son casi siempre correctas salvo para regiones muy cercanas a la superficie.

La aproximación cuasi adiabática consiste en utilizar las soluciones del caso adiabático para resolver por cálculo perturbativo las ecuaciones del caso general.

Esta aproximación ha sido criticada debido a que al desprestigiar términos de segundo orden en la perturbación se cometen errores del mismo orden que los asociados al desbalance térmico (Cox, Hansen y Davey 1973; Simor 1971).

El cálculo de estabilidad a partir de principios variacionales también ha dado lugar a discrepancias entre distintos autores dados que diferentes principios variacionales dan distintos coeficientes de estabilidad (Cox, Hansen y Davey 1973; Simon 1971).

Se han encontrado también discrepancias entre el cálculo perturbativo y el variacional (Aizeman y Cox 1974; Demaret 1978).

Las diferencias entre los distintos cálculos tienen que ver con

la elección del principio variacional y con la utilización del estado no perturbado en equilibrio hidrostático y térmico. Buchler (1978) ha atribuido la discrepancia en la determinación de los coeficientes de estabilidad a la dificultad que presenta el cálculo de promedios temporales de un movimiento que no es estrictamente periódico. Propone entonces un formalismo de dos tiempos (uno para la pulsación y otro para la evolución) que hace posible definir un promedio temporal riguroso, y un coeficiente de estabilidad definido a partir de la variable de acción del problema. Este formalismo fue posteriormente extendido (Buchler y Regev 1982) para contener a las regiones altamente no adiabáticas de la estrella utilizando una descripción en la que las perturbaciones se realizan respecto a un equilibrio hidrostático dependiente de la entropía en cada instante de la evolución.

Mostraremos en un capítulo posterior como a partir de las modernas técnicas de la termodinámica irreversible (Lavenda 1985) es posible definir un principio variacional general que contiene a los distintos principios conocidos de la literatura como casos particulares y que tiene además una interpretación termodinámica clara.

#### b) Cálculo no lineal

Dado que las estrellas son sistemas disipativos, si éstas se vuelven inestables ante pequeñas perturbaciones en algún tramo de su trayectoria evolutiva debe entonces existir algún mecanismo no lineal que provea la saturación de dicha inestabilidad. Más aún, las amplitudes de pulsación observadas para estrellas de un mismo tipo no presentan grandes variaciones de una a otra lo que indica un

comportamiento no lineal de tipo atractor de ciclo límite.

Los primeros trabajos de cálculo no lineal han consistido en la integración numérica directa de las ecuaciones utilizando técnicas numéricas diferentes (Stellingwerf 1974,1975).

Recientemente las técnicas de cálculo perturbativo no lineal introducidas en este tema por Buchler y Goupil (1984) han permitido el análisis de las ecuaciones en términos de los parámetros físicos de interés que además permiten una visualización global del problema. La implementación de códigos hidrodinámicos numéricos que analizan secuencias de modelos obtenidos a partir de la variación de un parámetro de control (generalmente la temperatura efectiva) han permitido clasificar distinto tipo de estrellas según el comportamiento que ofrecen los modelos frente a la variación del parámetro. (Kovacs y Buchler 1988; Buchler, Goupil y Kovacs 1987; Buchler y Kovacs 1987). En un capítulo posterior mostramos las ventajas de este tipo de técnicas aplicadas a un caso particular. El cálculo perturbativo que allí utilizamos es una adaptación del trabajo de looss y Joseph (1980).

Otro tema de investigación reciente en el que se utilizan técnicas no lineales modernas son el estudio de rutas al caos y de soluciones del tipo atractor extraño en las ecuaciones de movimiento no lineales. En este sentido Buchler y Kovacs (1987) han sugerido que el comportamiento de las estrellas anómalas puede ser explicado como una evolución de tipo atractor extraño.

#### c) Efectos de la presión de radiación

Como ya se mencionó los cálculos teóricos predicen las regiones de inestabilidad del diagrama H-R. Sin embargo, las estrellas de alta

luminosidad como por ejemplo las  $\beta$ -Cefeidas ocupar una región que está corrida en este diagrama respecto de los cálculos teóricos (Castor 1971; Stellingwerf 1975). Cox y Stellingwerf (1979) han propuesto que este corrimiento se debe a los efectos de la presión de radiación que comúnmente no se incluyen en dichos cálculos. En trabajos más recientes (Stellingwerf y Gautschi 1988) se ha investigado el efecto estabilizador y desestabilizador que produce la presión de radiación en estas estrellas. En el capítulo V analizamos, basados en este último trabajo, los efectos de la presión de radiación como parámetro de control para el encendido de la inestabilidad.

#### d) Otros efectos

Las teorías existentes excluyen la consideración de las capas más externas (atmósfera, región de transición y corona), dado que las dimensiones relativas y las condiciones físicas en estas zonas son fundamentalmente distintas a las interiores y que no modifican (en la aproximación en la que se trabaja) el fenómeno de la pulsación.

Los trabajos que analizan el comportamiento de estas regiones más externas son en general trabajos observacionales que contienen gran información sobre el comportamiento dinámico y permiten obtener una precisa descripción fenomenológica del movimiento (Costa, Ringuelet 1985). Es interesante mencionar que si se hace un análisis de las frecuencias propias de las atmósferas estelares (considerando regiones internas junto con la fotosfera) hay una clara correspondencia entre las frecuencias de corte de dichas atmósferas con las frecuencias observadas (Costa, Fontenla y Ringuelet 1988).

### III TERMODINAMICA IRREVERSIBLE

La termodinámica irreversible es una disciplina de desarrollo relativamente reciente. Los primeros trabajos, tratando sistemas cercanos al equilibrio termodinámico y con fluctuaciones en la vecindad de este estado fueron hechos por Onsager y Machlup (1953) y por Prigogine (1967). Esta teoría fue posteriormente extendida a situaciones alejadas del equilibrio termodinámico (Glauber y Prigogine 1970; Keizer 1976; Fox 1979; Graham 1978; Haken 1978; Lavenda 1985). En esta nueva formulación se describe la relajación de procesos fuera del equilibrio a un estado estacionario de no equilibrio (también llamado equilibrio no lineal). La presentación microscópica de la teoría da fundamentación a la formulación macroscópica y fenomenológica junto con una visión unificada del problema.

#### III.1 CONCEPTOS GENERALES

En un sistema aislado la entropía  $S$  aumenta monótonamente hasta alcanzar su máximo valor; esto es expresado matemáticamente por la segunda ley de la termodinámica

$$d_i S \geq 0 \quad (3.1.1)$$

En sistemas abiertos, en los que se intercambia materia y energía con el medio esto deja de ser cierto. Prigogine (1967) propuso la formulación extendida, para sistemas abiertos y aislados, de la segunda ley de la termodinámica. Es decir,

$$dS = d_e S + d_i S, \quad d_i S \geq 0 \quad (3.1.2)$$

donde  $d_e S$  es el flujo de entropía debido a los intercambios de energía

y materia con el medio y  $d_i S$  es la producción de entropía debido a procesos irreversibles dentro del sistema. Si el sistema está aislado  $d_e S$  es nulo y la ecuación (3.1.2) se reduce a la (3.1.1). Si bien  $d_i S$  nunca es negativo el flujo  $d_e S$  no tiene un signo definido y como resultado de esto puede darse que en su evolución el sistema alcance estados para los que la entropía es menor que la del equilibrio termodinámico. Más aún, el sistema puede permanecer indefinidamente en uno de estos estados si ocurre que  $dS = 0$  o, lo que es lo mismo,  $d_e S = -d_i S$  (obsérvese que  $d_e S$  debe ser  $\leq 0$ ). Dicho estado es un estado estacionario y vemos que un movimiento coherente del sistema puede autosostenerse si se provee suficiente cantidad de flujo de entropía negativa.

La estabilidad del estado estacionario está determinada por las propiedades termodinámicas del sistema. En una descripción linealizada del sistema alrededor del estado estacionario  $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}$ , el primer orden de la ecuación (3.1.2) se reduce al balance de fuerzas que actúan sobre el sistema. El segundo orden de esta ecuación determina la estabilidad del sistema. El significado físico de esta última afirmación es inmediato; en un sistema termodinámico el tiempo no es más un parámetro como lo es en la dinámica de Newton, el signo del tiempo revela la dirección de la evolución. La producción interna de entropía  $d_i S$ , asociada a la disipación del sistema es una cantidad de segundo orden que es siempre positiva y que por lo tanto es la manifestación de la irreversibilidad de los procesos. En otras palabras, la evolución espontánea del sistema implica  $d_i S \geq 0$ , si una perturbación no satisface esta desigualdad el sistema debe volver al estado de referencia. El criterio es entonces que un estado estacionario es estable si para toda perturbación que pueda darse

ocurre  $\dot{S}_i \leq 0$ .

Esto puede expresarse en términos matemáticos diciendo que un sistema físico descrito por las coordenadas generalizadas del espacio de configuración  $q_1, q_2, \dots, q_n$ , y cuya evolución está gobernada por un sistema de ecuaciones diferenciales conocidas, será estable si existe una función  $\Theta$ , llamada función de Liapunov, definida en la vecindad del estado estacionario  $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}$  para la que son verdaderas las siguientes condiciones

$$\Theta(q_1, q_2, \dots, q_n) \geq 0, \quad \Theta(q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}) = 0 \quad (3.1.3a)$$

$$d\Theta/dt = \sum_i \partial\Theta/\partial q_i \dot{q}_i \leq 0 \quad (3.1.3b)$$

La existencia de una función de Liapunov que satisface las ecuaciones (3.1.3a-b) es una condición suficiente (Lefschetz 1977) para la estabilidad del estado estacionario  $q_1^{(0)}, q_2^{(0)}, \dots, q_n^{(0)}$ . Por lo tanto si  $\Theta$  satisface la relación (3.1.3b) estrictamente pero no la (3.1.3a) (o viceversa), el sistema aún puede ser estable. En III.2 presentaremos una discusión sobre los requisitos para que las condiciones de estabilidad sean condiciones necesarias y suficientes. Esta formulación matemática adecuada a distintas ramas de la física ha dado lugar a los llamados principios de energía. Presentaremos algunos de ellos en lo que resta de la sección III.1 y en parte de III.2.

#### a) PRINCIPIO DE LAVENDA

Para variaciones  $x_i = q_i - q_i^{(0)}$  alrededor del estado estacionario una reformulación de la ecuación (3.1.2) da lugar al principio de balance de potencia de Lavenda (1985), cuya expresión a segundo orden en la energía libre (y en notación compleja) es:



$$\mathbb{R} \circ \Pi = d \eta / dt + 2\varphi, \quad (3.1.4)$$

donde  $\varphi$  es la función de disipación de Rayleigh-Onsager, la función  $\Pi$  es el exceso de potencia externa (de segundo orden) y representa el trabajo realizado por las fuerzas externas sobre el sistema.  $\eta$  es la variación a segundo orden de la energía libre (exceso de energía libre). Se cumple también que la variación a segundo orden de la entropía, a energía interna constante, y el exceso de energía libre son iguales a menos de un signo y de un factor de temperatura constante (Lavenda 1978);  $\eta$  es una forma cuadrática y se expresa

$$\eta = - 1/2 \langle x, S x \rangle = -1/2 x_i S_{ij} x_j \quad (3.1.5)$$

donde  $S$  es la matriz asociada a la forma cuadrática de la entropía y  $\langle, \rangle$  es el producto escalar definido en el espacio de Hilbert del vector  $|x\rangle$  cuyas componentes son  $x_i$ . La ecuación (3.1.4) expresa que el aumento de entropía o la disminución de energía libre en el sistema es debido a la disipación de energía así como a la potencia suministrada por el sistema.

Si definimos  $|\chi\rangle = |-\partial\eta/\partial x\rangle$  como las fuerzas termodinámicas que miden la tendencia del sistema a evolucionar hacia el equilibrio, y los flujos como las derivadas temporales del vector  $|x\rangle$ , el balance de flujos y fuerzas da la ecuación

$$\mathbb{R} \circ |\dot{x}\rangle = - |\chi\rangle + |\chi_{ext}\rangle \quad (3.1.6)$$

que puede ser identificada como la ecuación de movimiento linealizada del sistema.  $|\chi_{ext}\rangle$  representa aquí la acción de una fuerza externa sobre el sistema y que puede ser expresada también como

$$|\chi_{ext}\rangle = - \mathbb{R}' \cdot |\dot{x}\rangle \quad (3.1.7)$$

$R_0$  es una matriz hermítica y definida positiva asociada a la disipación interna del sistema (por ejemplo esfuerzos viscosos o resistencia eléctrica).

La matriz resistiva generalizada se define

$$R = R_0 + R' \quad (3.1.8)$$

que en el caso no lineal depende del estado.

En situaciones cercanas al equilibrio termodinámico el estado de referencia es el mismo estado de equilibrio. Este es un estado de balance detallado entre flujos y fuerzas en el que, como fue originariamente mostrado por Onsager, la matriz resistiva generalizada  $R$  es hermítica y definida positiva. La hermiticidad de  $R$  está garantizada por el principio de reversibilidad microscópica y su signo positivo por la cercanía del equilibrio termodinámico donde la entropía tiene un máximo. En este caso  $R=R_0$  porque  $R'=0$ .

Si se calcula el producto escalar de la ecuación (3.1.6) con el vector de flujo  $|x\rangle$  se pueden identificar, por comparación con la ecuación (3.1.4) las siguientes identidades

$$2\dot{\varphi} = \langle x, \dot{R}_0 x \rangle \quad (3.1.9)$$

$$R_0 \Pi = -1/2 (\langle x, \dot{R}' x \rangle + c.c.) \quad (3.1.10)$$

$$-d\eta/dt = d(1/2 \langle x, \dot{S} x \rangle)/dt = \langle x, \dot{S} x \rangle \quad (3.1.11)$$

donde c.c. significa complejo conjugado.

En el equilibrio termodinámico las fuerzas externas son nulas y la relación (3.1.4) se reduce a

$$-d\eta/dt = 2\dot{\varphi} \quad (3.1.12)$$

En este caso la función de Liapunov  $\Theta$  se obtiene inmediatamente

debido al caracter positivo de la función de Rayleigh-Onsager. Es decir, si definimos  $\Theta = \eta$  esta cantidad es positiva (dado que la energía libre adquiere en el equilibrio su valor mínimo y nulo), y de la ecuación (3.1.12)  $d\eta/dt \leq 0$ . Se cumplen entonces las condiciones (3.1.3a-b) para la función  $\eta$  que definida como función de Liapunov da una interpretación física a estas condiciones.  $\eta \geq 0$  implica que el estado estacionario es un mínimo local del exceso de energía libre, y  $d\eta/dt \leq 0$  implica que la disipación definida en (3.1.9) es positiva. La función de Liapunov corresponde a la cantidad extrema cuya variación a primer orden se anula. Esto significa que ecuaciones sujetas a vínculos termodinámicos distintos tienen funciones de Liapunov diferentes; si el sistema está aislado su función de Liapunov es la entropía, a menos de un signo; si el sistema está en contacto con un reservorio térmico su función de Liapunov es la energía libre, etc.. Para vínculos fuera de equilibrio termodinámico utilizamos  $\eta$  (el exceso de energía libre) como potencial termodinámico generalizado. Como ya se ha mencionado, se puede demostrar (Nicolis y Prigogine 1977) que todas las cantidades de segundo orden asociadas a los potenciales termodinámicos son iguales a menos de factores que no afectan la determinación de la estabilidad.

Para un estado de no equilibrio, la ecuación (3.1.6) puede reescribirse de la forma

$$\mathbb{R} \dot{|x\rangle} = \mathbb{R}_0 \dot{|x\rangle} + \mathbb{R}' \dot{|x\rangle} = - |\partial \eta / \partial x\rangle = \mathbb{S} |x\rangle \quad (3.1.13)$$

que, como se verá, es la expresión más general para la ecuación de movimiento de un sistema. Consideremos dos casos posibles: a)  $\mathbb{R}'$  es antihermítica y b)  $\mathbb{R}'$  es una matriz con partes hermítica y antihermítica. En el primer caso  $\mathbb{R}_0 \Pi = 0$  y la ecuación (3.1.4) se

reduce a la ecuación (3.1.12), con parte hermítica de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}_{\text{H}}$ , igual a  $\mathbb{R}_0$ . Resulta entonces que el exceso de energía libre  $\eta$  es nuevamente una función de Liapunov adecuada para el sistema. En el segundo caso  $\eta$  será una función de Liapunov adecuada del sistema únicamente si  $\mathbb{R}'_{\text{H}}$  (o al menos  $\mathbb{R}'_{\text{H}} = (\mathbb{R}_0 + \mathbb{R}')_{\text{H}}$ ) es definida positiva. En este caso  $d\eta/dt$  será menor o igual que cero y la estabilidad estará determinada por el signo de  $\eta$ . Sin embargo, como mostraremos en el capítulo IV se puede realizar un cambio de coordenadas que transforme la matriz  $\mathbb{R}'$  en una que tenga sólo parte antihermítica lo que ubica el problema en la situación del caso a.

#### b) LAGRANGIANO TERMODINAMICO Y TEORIA DE ONSAGER

En el capítulo IV mostraremos cómo se construye un lagrangiano termodinámico para el problema de las pulsaciones estelares. La construcción de dicho lagrangiano está basado en ideas de Onsager y Machlup (1953) que fueron originariamente formuladas para situaciones cercanas al equilibrio termodinámico donde la ecuación (3.1.13) es tal que  $\mathbb{R}$  es una matriz hermítica y definida positiva. Este tratamiento fue extendido posteriormente a situaciones alejadas del equilibrio termodinámico (Lavenda 1978, 1985).

Desde un punto de vista matemático podemos decir que el lagrangiano que puede construirse depende en cada caso del carácter autoadjunto del problema. Atherton y Homsy (1975) mostraron que hay tres posibles tipos de principios variacionales. Estos son: principio potencial, asociado a ecuaciones de carácter hermítico; el principio potencial alternado, asociado a operadores antihermíticos y principios compuestos asociado a operadores con parte hermítica y antihermítica.

Estos autores muestran que, dada una ecuación, siempre existe un principio variacional posible, al menos del tipo compuesto. El lagrangiano de Onsager-Machlup es un ejemplo de principio compuesto (el único posible en este caso). Dado el carácter compuesto de las ecuaciones, las soluciones asociadas a este principio deben ser de dos tipos, las ecuaciones de movimiento propiamente dichas y las soluciones espúreas llamadas también modos antitermodinámicos.

Explicaremos brevemente las ideas de Onsager para la vecindad del equilibrio termodinámico. La ecuación de movimiento de un sistema macroscópico es una ecuación promediada. Las fluctuaciones de dichas cantidades macroscópicas son causadas por la interacción con los grados de libertad microscópicos del sistema. Cerca del equilibrio termodinámico, no hay fuerzas externas y la ecuación de movimiento es

$$\text{Re } \dot{x} = \chi, \quad \chi = - \langle \partial \eta / \partial x \rangle = S x \quad (3.1.14)$$

La cantidad

$$\mathcal{L} = 1/2 \langle \text{Re } \dot{x} - \chi, \text{Re } (\text{Re } \dot{x} - \chi) \rangle \quad (3.1.15)$$

llamada lagrangiano "termodinámico" es una medida de la desviación cuadrática media de la trayectoria real respecto de la trayectoria fenomenológica (ecuación (3.1.14)) y por definición es definida semipositiva. Evidentemente el valor  $x$  que satisface (3.1.14), minimiza  $\mathcal{L}$ . En el Apéndice I se muestra que  $\eta = \int \mathcal{L} dt$ .

Como veremos en un caso concreto en el capítulo IV las ecuaciones de Euler-Lagrange que se obtienen de  $\mathcal{L}$  pueden factorizarse en dos partes separadas a) la ecuación termodinámica (3.1.14) y b) la ecuación antitermodinámica

$$\chi = - \text{Re } \dot{x} \quad \text{o} \quad \text{Re } \dot{x} + S x = 0 \quad (3.1.16)$$

que es equivalente a la ecuación (3.1.14) cambiando  $t$  por  $-t$ . Estas soluciones espúreas se obtienen debido a que el lagrangiano termodinámico es invariante frente a inversión temporal.

La definición (3.1.15) también puede escribirse en la forma

$$\mathcal{L} = \varphi + Y + \dot{\eta} \quad (3.1.17)$$

donde  $Y$  es una expresión numéricamente igual a  $\varphi$  que se obtiene de la expresión de la función disipación reemplazando los flujos por las fuerzas.

$$Y = 1/2 \langle \chi | \mathbb{R}^0 | \chi \rangle \quad (3.1.18)$$

Lejos del equilibrio termodinámico  $\mathbb{R}$  no es necesariamente una matriz hermítica y definida positiva. Sin embargo, si la parte hermítica de  $\mathbb{R}$  es definida positiva es posible definir un nuevo lagrangiano

$$\mathcal{L} = 1/2 \langle \mathbb{R} | : - \chi, (\mathbb{R}^H)^{-1} | \mathbb{R} | x - \chi \rangle \quad (3.1.19)$$

de manera que  $\mathcal{L}$  es una cantidad definida positiva también. En este caso nuevamente se obtienen dos tipos de ecuaciones de Euler-Lagrange, las termodinámicas y las antitermodinámicas espúreas, siendo estas últimas

$$|\dot{\chi}\rangle = - \mathbb{R}^+ |\dot{\chi}\rangle \quad \text{o} \quad \mathbb{R}^+ |\dot{\chi}\rangle + \mathbb{S} |\dot{\chi}\rangle = 0 \quad (3.1.20)$$

que se obtienen también de la ecuación (3.1.13) cambiando el signo del término disipativo,  $\mathbb{R}^H |\dot{\chi}\rangle$ . Los modos antitermodinámicos son entonces la reflexión temporal de los modos termodinámicos; si  $|\dot{\chi}\rangle \approx e^{\lambda t}$  es una solución de la ecuación (3.1.13),  $|\dot{\chi}'\rangle \approx e^{-\lambda^* t}$  será solución de la ecuación (3.1.20) debido al carácter reversible de la formulación lagrangiana. El significado físico de los modos antitermodinámicos es que expresan la dirección más probable de crecimiento de la

fluctuación (Lavenda 1985).

Mostraremos en el capítulo IV que aún cuando  $R_{ii}$  no es una cantidad definida positiva se puede realizar una transformación  $R_{ii} \rightarrow Q$ , donde  $Q$  es una matriz hermítica y definida positiva, que permite definir un lagrangiano adecuado. En este caso el lagrangiano definido como

$$\mathcal{L}' = 1/2 |\dot{R} \dot{x} - x|_Q^2 \quad (3.1.21)$$

es también definido positivo y mínimo para la solución correcta (si  $\xi$  es un vector,  $|\xi|_Q^2 = \langle \xi, Q \xi \rangle$  es la norma de  $\xi$  con métrica  $Q$ ).

Si las ecuaciones que describen la dinámica del sistema son de segundo orden

$$M \ddot{x} + R \dot{x} + U x = 0 \quad (3.1.22)$$

donde  $M$  es el operador asociado a la inercia,  $R$  es la matriz resistiva generalizada  $R = R_0 + R'$ , y  $U = -S$  es la matriz asociada a los potenciales generalizados del sistema se puede describir el problema en forma similar.

Esta última ecuación puede ser reducida a la ecuación de primer orden (3.1.13). Nuevamente es posible identificar las cantidades  $\Pi$ ,  $\varphi$  y  $\eta$  por comparación con el principio de balance de potencia de Lavenda obteniéndose

$$2\varphi = \langle \dot{x}, R_0 \dot{x} \rangle \quad (3.1.23)$$

$$\eta = 1/2 (\langle \dot{x}, M \dot{x} \rangle + \langle x, U x \rangle) \quad (3.1.24)$$

$$Re \Pi = -1/2 (\langle \dot{x}, R' \dot{x} \rangle + c.c.) \quad (3.1.25)$$

Suponiendo sin pérdida de generalidad que la parte hermítica de  $R$  (ver capítulo IV) es definida positiva el lagrangiano (3.1.19) se

escribe en este caso

$$\mathcal{L} = 1/2 \langle (M \ddot{x} + R \dot{x} + U) x, (Rn)^{-1} (M \ddot{x} + R \dot{x} + U) x \rangle \quad (3.1.26)$$

y  $\eta$  es una función de Liapunov.

Otro criterio de estabilidad es el conocido criterio de Glansdorff y Prigogine que será presentado a continuación. En la sección siguiente analizamos cuándo un criterio es condición necesaria y suficiente de estabilidad. Propondremos una generalización del criterio de Glansdorff y Prigogine y haremos un análisis comparativo mostrando la equivalencia de diferentes criterios.

### III.2 GENERALIZACIÓN DEL CRITERIO DE GLANSDORFF-PRIGOGINE

El criterio de estabilidad termodinámico de estados de no equilibrio basado en el exceso de entropía fue originariamente formulado por Glansdorff y Prigogine (GP 1971).

La generalidad de este criterio ha sido cuestionada por ser una condición suficiente pero no necesaria de estabilidad (Fox 1979). Es decir, aunque la validez del criterio queda demostrada para los modos normales del problema  $|q\rangle = \xi$  en la inecuación (3.1.3) (Glansdorff, Nicolis y Prigogine 1974; Nicolis y Prigogine 1979), la debilidad del criterio se pone de manifiesto debido a la ausencia en el caso general ( $\forall |q\rangle$ ) de una forma cuadrática cuyo signo pueda determinar la estabilidad del estado estacionario de no equilibrio.

Mostraremos en esta sección que mediante una simple modificación de la hipótesis de equilibrio local de Glansdorff-Prigogine se puede construir una forma cuadrática que, para todo estado estacionario de no equilibrio, define una función de Liapunov del problema (en el sentido de Keizer (1976); ver también Fox (1980)). Mostramos también



la equivalencia entre el criterio del potencial local de Prigogine y el lagrangiano de Onsager-Machlup.

### III.2.1. CRITERIO DE GLANSDORFF-PRIGOGINE

Consideremos nuevamente un estado estacionario de no equilibrio caracterizado por variables  $q_i$ , que satisfacen ecuaciones de movimiento diferenciales. Si definimos  $x_i = q_i - q_i^{(0)}$ , la linealización de las ecuaciones de movimiento alrededor del estado estacionario  $q_i^{(0)}$  resulta

$$\dot{|x\rangle} = \Lambda' |x\rangle, \quad (3.2.1)$$

donde  $|x\rangle$  es el vector de componentes  $x_i$  y  $\Lambda'$  es la matriz, diagonalizable a izquierda y derecha, asociada a las ecuaciones linealizadas de las  $x_i$ .

Recordemos que el exceso de entropía (la variación a segundo orden de la entropía alrededor del estado de referencia) puede escribirse como la forma cuadrática

$$\delta^2 S = 1/2 \langle x, \mathcal{S}x \rangle, \quad (3.2.2)$$

donde  $\mathcal{S}$  la matriz simétrica asociada a la entropía (por ejemplo, cerca del equilibrio termodinámico  $\delta^2 S$  se determina mediante la relación de Gibbs) y que las fuerzas termodinámicas se definen

$$|\chi\rangle = \mathcal{S} |x\rangle. \quad (3.2.3)$$

De las ecuaciones (3.2.2) y (3.2.3) obtenemos

$$\delta^2 S = \langle \dot{x}, \chi \rangle \quad (3.2.4)$$

y

$$d_i \delta^2 S = \langle \dot{x}, \chi \rangle. \quad (3.2.5)$$

De acuerdo con el teorema de Liapunov (ecuación 3.1.3a-b) una condición suficiente para la estabilidad del estado estacionario es que

$$\delta^2 S < 0, \quad d_t \delta^2 S \geq 0 \quad (3.2.6)$$

Esta última desigualdad es la expresión de la segunda ley de la termodinámica si el estado de referencia es el de equilibrio termodinámico o un estado estacionario cercano a él. En otras palabras, la segunda ley implica que si el estado de referencia es el de equilibrio termodinámico o un estado estacionario cercano, las relaciones (3.2.6) se verifican idénticamente no importa cuál sea la forma explícita de la solución  $|x\rangle$ .

Lejos del equilibrio, Glansdorff y Prigogine proponen la hipótesis de equilibrio local

$$\delta^2 S = \delta^2 S_{eq} \quad (3.2.7a)$$

es decir

$$S = S_0, \quad (3.2.7b)$$

donde  $S_0$ , la matriz del equilibrio, es una matriz definida negativa como lo establece la ley de Gibbs. Por lo tanto, como siempre es  $\delta^2 S < 0$ , el signo de  $d_t \delta^2 S$  (el exceso de producción de entropía) determina la estabilidad. En efecto, si la cantidad  $d_t \delta^2 S$  es evaluada para los modos normales, su signo provee un criterio necesario y suficiente de estabilidad. Es decir, si  $|\xi\rangle$  es un modo normal (autovector de  $\mathbb{A}$  con  $|\xi(t)\rangle = |\xi_0\rangle \exp(\mu t)$ , se sigue de la ecuación (3.2.5)

$$d_t \delta^2 S = 2 \operatorname{Re}(\mu) \delta^2 S \quad (3.2.8)$$

y dado que la hipótesis de equilibrio local implica  $\delta^2 S < 0$ , se obtiene

$$d_t \delta^2 S \geq 0 \Leftrightarrow \text{Re}(\mu) \leq 0. \quad (3.2.9)$$

Como el modo  $|\xi\rangle$  es estable si y solo si  $\text{Re}(\mu) < 0$ , resulta que  $d_t \delta^2 S > 0$  es una condición necesaria y suficiente de estabilidad para  $|\xi\rangle$ .

### III.2.2 CRITERIO GENERALIZADO DE GP

Si bien el criterio que hemos presentado es efectivamente un criterio general no es simple porque debe ser evaluado sobre un modo normal, lo que presupone haber resuelto el problema. Mostraremos que si se postula  $\delta^2 S < 0$  para todo vector  $|x\rangle$ , pero de modo que la ecuación (3.2.7a) se cumpla exclusivamente para los modos normales es posible entonces definir una nueva expresión para  $\delta^2 S$  que admite la formulación de un criterio de estabilidad en términos del signo de la forma cuadrática  $d_t \delta^2 S$ . Es decir, en esta nueva formulación es  $\langle \xi, S \xi \rangle = \langle \xi, S_0 \xi \rangle$  solo si  $|\xi\rangle$  es un modo normal y  $S$  es la matriz simétrica definida negativa tal que  $d_t \delta^2 S$  es una forma cuadrática semidefinida positiva si y solo si el estado estacionario  $q_i^{(0)}$  es estable.

Postulamos entonces la hipótesis de equilibrio local modificado. Lejos del equilibrio termodinámico la matriz definida negativa asociada a la forma cuadrática  $\delta^2 S$  es

$$-S = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} 1/2 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (3.2.10)$$

donde  $Q$  es la matriz definida positiva que satisface:

1) la matriz diagonalizable a izquierda

$$A = \begin{bmatrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{matrix} 1/2 \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \quad (3.2.11)$$

es normal con métrica  $\mathcal{Q}$  (ver abajo) y

2)  $\langle \varphi, \mathcal{Q} \varphi \rangle = \langle \varphi, \tau \rangle$  si  $|\varphi\rangle$  es autovector de  $\mathbb{A}$ .

TEOREMA:

Usando la hipótesis de equilibrio local modificada y que  $\mathbb{A}'$  diagonalizable a izquierda y derecha se prueba que:

1)  $\delta^2 S < 0$ , es decir, el exceso de entropía definido en la ecuación (3.2.2), donde  $S$  es la matriz definida negativa dada por la ecuación (3.2.10), es una forma cuadrática definida negativa.

2)  $d_t \delta^2 S \geq 0$  es una condición necesaria y suficiente de estabilidad.

3) Si  $|\xi\rangle$  es un modo normal (autovector de  $\mathbb{A}'$ ) este criterio coincide con el criterio dado por Glansdorff y Prigogine:

$$\langle \xi, S\xi \rangle = \langle \xi, S_0\xi \rangle \quad (3.2.12)$$

(esto significa que cuando  $\delta^2 S$  y  $d_t \delta^2 S$  son evaluadas para los modos normales son iguales a las mismas funciones en la teoría de Glansdorff-Prigogine).

NOTACIONES Y DEFINICIONES:

Dado que  $\mathbb{A}$  es diagonalizable a izquierda y derecha

$$\mathbb{A} |e_a\rangle = a |e_a\rangle, \quad (3.2.13a)$$

$$\langle f_a | \mathbb{A} = a \langle f_a |. \quad (3.2.13b)$$

también es

$$\mathbb{A} = \sum_a a |e_a\rangle \langle f_a|, \quad \mathbb{A}^\dagger = \sum_a a^* |f_a\rangle \langle e_a| \quad (3.2.14)$$

y

$$\sum_a |f_a\rangle \langle e_a| = \sum_a |e_a\rangle \langle f_a| = I \quad \langle e_a | e_a \rangle = 1 \quad \langle f_a | e_b \rangle = \delta_{ab} \quad (3.2.15)$$

Por lo tanto si se define a  $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{Q} = \sum_a |f_a\rangle \langle f_a|, \quad \mathbb{Q}^{-1} = \sum_a |e_a\rangle \langle e_a| \quad (3.2.16)$$

$\mathbb{A}$  resulta ser una matriz normal con adjunto generalizado  $\hat{\mathbb{A}} = \mathbb{Q}^{-1} \mathbb{A}^+ \mathbb{Q}$ . Es decir, por construcción es

$$\hat{\mathbb{A}} \mathbb{A} = \mathbb{A} \hat{\mathbb{A}}. \quad (3.2.17)$$

Note que si  $\mathbb{A}$  es una matriz normal ordinaria  $\mathbb{Q}$  resulta ser la identidad y nuestra formulación es idéntica a la desarrollada por Glansdorff y Prigogine.

Dado que  $\mathbb{A}$  y  $\mathbb{A}'$  están relacionadas a través de transformaciones de similaridad generadas por  $[-S_0]^{1/2}$ , si  $|\xi\rangle$  es un autovector derecho de  $\mathbb{A}'$  con autovalor  $\mu$ , resulta que

$$|\varphi\rangle = [-S_0]^{1/2} |\xi\rangle \quad (3.2.18)$$

es autovector de  $\mathbb{A}$  con el mismo autovalor, como se deriva de

$$\mathbb{A} |\varphi\rangle = [-S_0]^{1/2} \mathbb{A}' [-S_0]^{-1/2} |\varphi\rangle = [-S_0]^{1/2} \mathbb{A}' |\xi\rangle = \mu [-S_0]^{1/2} |\xi\rangle = \mu |\varphi\rangle. \quad (3.2.19)$$

Por lo tanto

$$|\varphi\rangle = \alpha |e_\mu\rangle \quad (3.2.20)$$

donde  $\alpha = \langle f_\mu, \varphi \rangle$ . Obviamente esto prueba que si  $\mathbb{A}$  es diagonalizable a izquierda y derecha también lo es  $\mathbb{A}'$ .

Para cualquier modo normal  $|\xi\rangle$ , usando la ecuación (3.2.20), se obtiene

$$\langle \varphi, \mathbb{Q} \varphi \rangle = \sum_a \langle \varphi, f_a \rangle \langle f_a, \varphi \rangle = \langle \varphi, f_\mu \rangle \langle f_\mu, \varphi \rangle = |\alpha|^2. \quad (3.2.21)$$

y

$$\langle \varphi, \varphi \rangle = |\alpha|^2 \langle e_\mu, e_\mu \rangle = |\alpha|^2. \quad (3.2.22)$$

De las ecuaciones (3.2.21) y (3.2.22) se sigue

$$\langle \varphi, Q \varphi \rangle = \langle \varphi, \varphi \rangle. \quad (3.2.23)$$

Esto muestra que, por construcción,  $Q$  satisfice lo requerido en los puntos (1) y (2) de su definici3n dada anteriormente.

PRUEBA DEL TEOREMA:

1) Como  $Q$  y  $-S_0$  son simétricas y definidas positivas lo mismo ocurre con  $-S = [-S_0]^{1/2} Q [-S_0]^{1/2}$ . Por lo tanto  $\delta^2 S < 0$ .

2) Usandolas ecuaciones (3.2.1), (3.2.10), (3.2.11) y la definici3n  $|y\rangle = [-S_0]^{1/2} |x\rangle$  se calcula  $d_t \delta^2 S$  como

$$\begin{aligned} -2d_t \delta^2 S &= d_{\bar{t}} (\langle x | [-S_0]^{1/2} Q [-S_0]^{1/2} |x\rangle) = \langle x | [-S_0]^{1/2} Q [-S_0]^{1/2} |x\rangle + c.c. = \\ &= \langle x | A^{\dagger} [-S_0]^{1/2} Q [-S_0]^{1/2} |x\rangle + c. \quad \langle y | A^{\dagger} Q |y\rangle + c.c \end{aligned}$$

y resulta

$$d_t \delta^2 S = -1/2 \langle y | Q A + A^{\dagger} Q |y\rangle. \quad (3.2.24)$$

De las ecuaciones (3.2.16) y (3.2.14) se obtiene

$$Q A + A^{\dagger} Q = 2 \sum_{\alpha} \text{Re}(a) |f_{\alpha}\rangle \langle f_{\alpha}|,$$

y entonces

$$d_t \delta^2 S = -1/2 \langle y | Q A + A^{\dagger} Q |y\rangle = - \sum \text{Re}(a) |\langle y, f_{\alpha}\rangle|^2. \quad (3.2.25)$$

Recordando que el análisis de modos normales de la ecuaci3n (3.2.1) muestra que una condici3n necesaria y suficiente para la estabilidad es que para todos los modos normales  $|\xi\rangle$  sea  $\text{Re}(\mu) \leq 0$ , siendo  $A' |\xi\rangle = \mu |\xi\rangle$ , y dado que los autovalores de  $A$  y de  $A'$  son los mismos, se sigue que

$$\forall |\xi\rangle \text{ es } \operatorname{Re}(\mu) \leq 0 \Leftrightarrow \forall |e_\alpha\rangle \text{ es } \operatorname{Re}(a) \leq 0. \quad (3.2.26)$$

Por lo tanto, si el estado estacionario es estable ( $\operatorname{Re}(a) \leq 0$  para todo  $a$ ) resulta  $\sum_\alpha |\operatorname{Re}(a)| \langle f_\alpha, y \rangle^2 \leq 0$ ; de donde se sigue

$$d_t \delta^2 S = -1/2 \langle y | Q A + A^\dagger Q | y \rangle \geq 0. \quad (3.2.27)$$

En otras palabras,  $d_t \delta^2 S \geq 0$  es una condición necesaria de estabilidad. Más aún,  $d_t \delta^2 S \geq 0 \quad \forall |y\rangle$  es también una condición suficiente de estabilidad, como se desprende de (3.2.25) haciendo coincidir  $|y\rangle$  con cada uno de los autovectores  $|f_\alpha\rangle$ .

3) De las ecuaciones (3.2.10), (3.2.18) y (3.2.23) se ve fácilmente que

$$\langle \xi, S \xi \rangle = \langle \xi, S_0 \xi \rangle. \quad (3.2.28)$$

De las ecuaciones (3.2.2) y (3.2.28) se obtiene para los modos normales que  $\delta^2 S = \delta^2 S_0$ , junto con  $d_t \delta^2 S = d_t \delta^2 S_0$ . Esto significa que para los modos normales el exceso de entropía y el exceso de producción de entropía son los mismos que los definidos por Glansdorff y Prigogine.

### III.2.3 COMPARACION DEL CRITERIO GENERALIZADO DE GLANSDORFF Y PRIGOGINE CON OTROS CRITERIOS.

#### a) CRITERIO DE ESTABILIDAD DE KEIZER

Dado que

$$[-S_0]^{1/2} (Q A + A^\dagger Q) [-S_0]^{1/2} = [-S] A' + A'^\dagger [-S], \quad (3.2.29)$$

resulta

$$d_t \delta^2 S = -1/2 \langle y | Q A + A^\dagger Q | y \rangle = -1/2 \langle x | S A' + A'^\dagger S | x \rangle. \quad (3.2.30)$$

Si el estado de referencia es estable  $d_t \delta^2 S \geq 0$ , y la matriz  $\Pi$  definida como

$$\Pi = -1/2 (A' S^{-1} + S^{-1} A'^+) = -1/2 S^{-1} (S A' + A'^+ S) S^{-1} \quad (3.2.31)$$

es simétrica y semidefinida positiva. Si agregamos un término de ruido a las ecuaciones de movimiento de manera que

$$\dot{|x\rangle} = A' |x\rangle + |f(t)\rangle \quad \text{con} \quad \overline{|f\rangle} = 0, \quad \overline{|f(t)\rangle \langle f(t')|} = \delta_{tt'} \Pi, \quad (3.2.32)$$

donde  $\overline{\quad}$  significa promedio macroscópico se puede demostrar (capítulo XII de Landau y Lifshitz (1959)) que

$$\overline{|x\rangle \langle x|} = S^{-1}, \quad (3.2.33)$$

que es la misma función de correlación que definen Keizer (1976) y Fox (1980), y la ecuación (3.2.31), escrita en la forma

$$-2 S \Pi S = S A' + A'^+ S, \quad (3.2.34)$$

es la relación de fluctuación disipación que presentan estos autores. Es decir, la función de Liapunov de Keizer (1976) y Fox (1979) (la forma cuadrática asociada a la inversa de la matriz de correlación definida en (3.2.33) que cumple la relación de fluctuación disipación (3.2.34)) es, en el caso estable, la misma función de Liapunov ( $\delta^2 S$ ) que se define en el criterio generalizado de Glansdorff y Prigogine. Este criterio presupone que el ruido es blanco y aditivo.

#### b) CRITERIO DE LA'ENDA

Nótese que  $A'$  puede siempre factorizarse de modo que

$$A' = - (L + B) S \quad (3.2.35)$$

donde  $L$  es hermitica,  $B$  anti-hermitica y  $S$  es la matriz definida en (3.2.10). Usando la ecuación (3.2.35) se obtiene



$$- (\mathcal{S} \mathbb{A}' + \mathbb{A}'^t \mathcal{S}) = \mathcal{S} (\mathbb{L} + \mathbb{B}) \mathcal{S} + \mathcal{S} (\mathbb{L} - \mathbb{B}) \mathcal{S} = 2 \mathcal{S} \mathbb{L} \mathcal{S} \quad (3.2.36)$$

de donde, junto con (3.2.30) se sigue

$$d_t \delta^2 \mathcal{S} = \langle x | \mathcal{S} \mathbb{L} \mathcal{S} | x \rangle. \quad (3.2.37)$$

Resulta entonces que  $\mathbb{L}$  de la ecuación (3.2.35) es una matriz definida positiva si y solo si el estado estacionario es estable. Si se define (en el caso estacionario) la matriz resistiva generalizada

$$\mathbb{R} = (\mathbb{L} + \mathbb{B})^{-1}, \quad (3.2.38)$$

resulta que la parte hermitica de  $\mathbb{R}$  es

$$\mathbb{R}_H = (\mathbb{R} + \mathbb{R}^+)/2 = \mathbb{R}^+ (\mathbb{R}^{-1} + (\mathbb{R}^+)^{-1}) \mathbb{R} / 2 = (\mathbb{L} - \mathbb{B})^{-1} \mathbb{L} (\mathbb{L} + \mathbb{B})^{-1} \quad (3.2.39)$$

De la ecuación (3.2.35) se obtiene

$$\langle \dot{x}, \mathbb{R}_H \dot{x} \rangle = \langle x | \mathbb{A}'^+ (\mathbb{L} - \mathbb{B})^{-1} \mathbb{L} (\mathbb{L} + \mathbb{B})^{-1} \mathbb{A}' | x \rangle = \langle x | \mathcal{S} \mathbb{L} \mathcal{S} | x \rangle. \quad (3.2.40)$$

de donde se sigue comparando con la ecuación (3.2.37)

$$d_t \delta^2 \mathcal{S} = \langle x, \mathbb{R}_H \dot{x} \rangle. \quad (3.2.41)$$

Por lo tanto si  $\mathbb{A}'$  puede separarse como se propone en (3.2.35), resulta

$$\delta^2 \mathcal{S} = 1/2 \langle x, \mathcal{S} x \rangle \text{ y } d_t \delta^2 \mathcal{S} = \langle \dot{x}, \mathbb{R}_H \dot{x} \rangle, \quad (3.2.42)$$

que son las mismas expresiones para  $\delta^2 \mathcal{S}$  y  $d_t \delta^2 \mathcal{S}$  obtenidas por Lavenda (1985) para el caso estable. Si el estado es inestable no se obtiene esta coincidencia debido a que en la teoría de Lavenda  $d_t \delta^2 \mathcal{S}$  tiene un signo definido mientras que en la formulación generalizada del principio de Glansdorff y Prigogine es la función  $\delta^2 \mathcal{S}$  la que tiene signo definido. Mostraremos ahora cómo modificar el exceso de entropía del criterio generalizado de Glansdorff y Prigogine para obtener el criterio de Lavenda para estados inestables. Es decir, definiendo la matriz  $\mathbb{Q}$  dada en la ecuación (3.2.16) de la forma

$$Q' = \sum_a \text{sg}(a) |f\rangle \langle f|, \quad (3.2.43)$$

(donde  $\text{sg}(a) = \text{Re}(a)/|\text{Re}(a)| = 1$  si  $\text{Re}(a) > 0$  y  $\text{sg}(a) = -1$  si  $\text{Re}(a) < 0$ ) y reemplazando en la definición de  $S$  (ecuación (3.2.10)) se obtiene el exceso de entropía de Lavenda

$$\delta^2 S_L = 1/2 \langle x, S_L x \rangle, \text{ con } S_L = [-S_0]^{1/2} Q' [-S_0]^{1/2} \quad (3.2.44)$$

donde obviamente  $Q'$  no es una métrica posible.

De este cambio en la definición de  $S$  se sigue:

1)  $\delta^2 S_L$  no es necesariamente una forma cuadrática definida negativa dado que  $Q'$  no es necesariamente definida negativa. Si el estado estacionario es estable resulta entonces  $Q' = -Q$  (dado que  $\forall a$  es  $\text{Re}(a) \leq 0$ ), y por lo tanto  $\delta^2 S_L = \delta^2 S < 0$ .

2)  $d_t \delta^2 S_L$  es una forma cuadrática definida positiva como se sigue de

$$d_t \delta^2 S_L = 1/2 \langle y | (Q' A + A^\dagger Q') | y \rangle = \sum ( |\text{Re}(a)| | \langle y, f_a \rangle |^2 ) \geq 0 \quad (3.2.45)$$

Es fácil comprobar que  $\delta^2 S_L < 0 \forall |x\rangle$  es una condición necesaria y suficiente de estabilidad. Hemos mostrado que esta reformulación del criterio generalizado da el mismo criterio presentado por Lavenda.

### III.2.4

#### EQUIVALENCIA ENTRE EL POTENCIAL LOCAL DE GLANSDORFF Y

#### PRIGOGINI; Y EL LAGRANGIANO TERMODINAMICO DE ONSAGER-MACHLUP.

Consideramos en esta sección la formulación variacional de la termodinámica irreversible. El método del potencial local de la teoría de Glansdorff y Prigogine y el lagrangiano termodinámico introducido por Onsager y Machlup y generalizado por Lavenda son principios variacionales no lineales conocidos en la literatura de la

termodinámica irreversible.

Lejos del equilibrio las ecuaciones de movimiento linealizadas alrededor del estado estacionario pueden escribirse en la forma

$$\dot{|x\rangle} = \mathbb{A}' |x\rangle = \mathbb{L}_0 |x\rangle + \mathbb{G} |x\rangle, \quad (3.2.46)$$

donde  $\mathbb{L}_0$  es la matriz de Onsager, y es  $\mathbb{L}_0^{-1} = \mathbb{R}_0$ , la matriz resistiva definida positiva y  $\mathbb{G}$  es la matriz asociada a los términos restantes que hacen que se cumpla la ecuación (3.2.46). El lagrangiano de Onsager Machlup de la ecuación (3.2.46) es (Lavenda 1985)

$$\mathcal{L} = 1/2 \langle \dot{x} - \mathbb{L}_0 x - \mathbb{G} x, \mathbb{R}_0 (\dot{x} - \mathbb{L}_0 x - \mathbb{G} x) \rangle. \quad (3.2.47)$$

Si tomamos variaciones sólo de las fuerzas termodinámicas

$$\delta \mathcal{L} = \langle \delta \chi, (\mathbb{L}_0 \chi + \mathbb{G} x - \dot{x})^{(0)} \rangle = 1/2 \delta \langle \chi, \mathbb{L}_0 \chi \rangle + \langle \delta \chi, (\mathbb{G} x - \dot{x})^{(0)} \rangle \quad (3.2.48)$$

(donde (0) significa no variado) obtenemos de  $\delta \mathcal{L} = 0$  la ecuación (3.2.46). La expresión (3.2.48) resulta igual a

la variación del potencial local  $\phi$  definido como la expresión no lineal (Glansdorff y Prigogine 1971)

$$\phi = 1/2 \langle \chi, \mathbb{L}_0 \chi + 2(\mathbb{G} x - \dot{x})^{(0)} \rangle. \quad (3.2.49)$$

Por la tanto, si  $\delta \phi = \delta \mathcal{L}$ , el principio variacional de Onsager-Machlup (si se varían sólo las fuerzas) da la misma expresión que el método del potencial local desarrollado por Glansdorff y Prigogine.

La extensión al caso no lineal es inmediata. En este caso las ecuaciones de movimiento tienen la misma expresión que en (3.2.46) pero con matrices que son dependientes del estado de referencia. Es decir, con  $\mathbb{L}_0 = \mathbb{L}_0(|x\rangle)$  y  $\mathbb{G} = \mathbb{G}(|x\rangle)$ . Dado que como dijimos, las magnitudes variadas son sólo las fuerzas, el razonamiento que efectuamos no se altera por la dependencia de las matrices respecto de

los estados.

### III.3 CONCLUSIONES

Luego de resumir algunos conceptos y principios generales de la Termodinámica irreversible hemos mostrado cómo se generaliza la hipótesis de equilibrio local de modo de poder reformular el criterio de estabilidad Termodinámico de Glansdorff-Prigogine. Esta nueva presentación del principio permite asociar la estabilidad del estado estudiado al signo de una forma cuadrática: el exceso de producción de entropía.

Cuando el exceso de entropía y el exceso de producción de entropía son calculados para los modos normales estas cantidades resultan ser las mismas que definen Glansdorff y Prigogine. Si la matriz  $\mathbb{A}'$  asociada a la ecuación de movimiento del sistema es normal el criterio de Glansdorff-Prigogine y la reformulación de este criterio coinciden.

Comparamos el criterio presentado en este trabajo con otros criterios de la literatura. Si agregamos ruido blanco a las ecuaciones se obtiene como caso particular la función de Liapunov de Keizer y Fox. Probamos también la equivalencia entre el criterio generalizado de Glansdorff-Prigogine con el criterio de Lavenda.

Mostramos la equivalencia entre el método del potencial local de Glansdorff-Prigogine con el lagrangiano de Onsager-Machlup generalizado por Lavenda.

## IV APLICACION DE LA TERMODINAMICA A LA TEORIA DE PULSACIONES ESTELARES

### IV.1 TEORIA GENERAL

En este capítulo formulamos la teoría de pulsaciones estelares mediante el enfoque de la termodinámica irreversible. Aplicaremos estas técnicas a las ecuaciones no adiabáticas generales

$$\dot{x} = g(x, \dot{x}, S), \quad \dot{S} = h(x, S) \quad (4.1.1)$$

donde  $x$  es el vector de desplazamiento lagrangiano y  $S$  la entropía. Si las oscilaciones son no radiales  $x$  es un vector de tres componentes  $(x_r, x_\theta, x_\phi)$ ; en el caso radial  $x$  es un vector de una componente. Trataremos en este capítulo la aproximación lineal de estas ecuaciones.

Los primeros tratamientos de las ecuaciones no adiabáticas han sido realizados en la aproximación cuasiadiabática (ver cap.II). Las dificultades halladas en esta primera aproximación (Castor 1971) han sido superadas por el formalismo de dos tiempos (Buchler y Regev 1971) y por el formalismo no adiabático presentado posteriormente por Buchler y Goupil (1984) que da cuenta del carácter no adjunto de las ecuaciones del problema completo. La aplicación del formalismo de la termodinámica irreversible al problema general de las pulsaciones estelares permite considerar los casos particulares en forma sistemática y unificada dando además una interpretación termodinámica clara. Es posible obtener autovalores y autovectores del problema más general a partir de un único principio variacional. La ecuación de movimiento para la aproximación lineal cuasiadiabática puede escribirse en forma compacta

$$\mu \ddot{x} + \varphi \dot{x} + L x + D \int x dt = 0, \quad (4.1.2)$$

que es la misma ecuación que la (2.1.4) integrada una vez en el tiempo y para el caso lineal. Esta ecuación es equivalente a la que obtiene Cox y Giuli (1968) para el caso radial y Sobouti (1977) para el caso no radial.  $\mu$  es un operador hermítico y algebraico asociado a la inercia,  $L$  es un operador hermítico diferencial (presente también en el caso adiabático),  $\varphi$  es el operador diferencial hermítico asociado a los esfuerzos viscosos y  $D$  es el operador diferencial relacionado a las fuentes nucleares de energía y a variaciones del flujo de radiación que puede tener parte hermítica y antihermítica, y que es responsable de la excitación de las oscilaciones debido a los efectos de ionización producidos en la región de transición.

Estos operados son los mismos definidos por Ledoux y Walraven en el conocido trabajo de 1958 y presentados en el capítulo II. El caso adiabático se obtiene si  $D = \varphi = 0$ .

En la aproximación lineal no adiabática, utilizando una notación similar a la empleado por Buchler y Goupil, las ecuaciones del problema se escriben

$$\ddot{x} + \varphi \dot{x} - g_x x - g_s S = 0, \quad (4.1.3a)$$

$$\ddot{S} - h_x x - h_s S = 0, \quad (4.1.3b)$$

donde  $g$  y  $h$  pueden contener operadores diferenciales en la variable radial y  $\varphi$  es un operador asociado a la disipación. Siguiendo a BG estudiamos el comportamiento de la ecuación alrededor del equilibrio completo, es decir equilibrio hidrostático y térmico siendo  $x$  y  $s$  los apartamientos respecto de dicho equilibrio. Esta descripción es diferente de la que se utiliza para el formalismo de dos tiempos o en la aproximación cuasiadiabática donde los apartamientos se refieren a

un equilibrio hidrostático dependiente en forma instantánea de la entropía o de un equilibrio lentamente variable (con tiempos del orden de la evolución estelar). Esta suposición da como resultado frecuencias dependientes del tiempo. Si se utiliza el equilibrio total como estado de referencia se obtienen frecuencias independientes del tiempo. En la aproximación cuasiadiabática  $g$  resulta idéntico a  $U$  debido a que se desprecia el desbalance térmico en el equilibrio.

En el trabajo de BG las ecuaciones (4.1.3) se aproximan por ecuaciones de diferencias. Esta aproximación es equivalente a expandir las soluciones  $x$  en una base de funciones llamadas splines de primer orden (Boor 1978). El formalismo que presentamos aquí nos permite expandir las ecuaciones (4.1.3) en otras bases que pueden resultar más adecuadas (por ej. splines de orden mayor u otras funciones continuas). Más aún, el uso del principio variacional permite tratar las ecuaciones (4.1.3) en su expresión diferencial y trabajar con funciones de prueba que dependan de parámetros, de modo de minimizar sobre el espacio de parámetros. Como ilustración de este formalismo mostraremos en la sección IV.3 su aplicación al ejemplo semirealístico presentado por BG.

Obviamente en la aproximación lineal es siempre posible escribir la ecuación de movimiento de este problema en la siguiente forma

$$\dot{\xi} + A \xi = 0, \quad (4.1.4)$$

donde  $\xi$  es un vector que pertenece al espacio de Hilbert en consideración y  $A$  es una matriz totalmente general. Por lo tanto, y de acuerdo con un teorema que probamos más adelante la matriz  $A$  puede ser expresada de la forma

$$\mathbb{A} = \mathbb{R}^{-1} \mathbb{S}, \quad (4.1.5)$$

donde  $\mathbb{R}$  es una matriz general con parte hermitica definida positiva y  $\mathbb{S}$  es la matriz hermitica asociada a la forma cuadrática de la energía libre. Resulta entonces que la ecuación (4.1.4) es equivalente a la ecuación  $\mathbb{R} \dot{\xi} + \mathbb{S} \xi = 0$  presentada en el capítulo III (ecuación (3.1.13)).

Nótese que esta teoría cubre las distintas situaciones; en cada caso particular (radial, no radial, adiabático y no adiabático) existe un adecuado espacio de Hilbert con su correspondiente producto interno.

Veamos que las ecuaciones (4.1.2) y (4.1.3) pueden ser reescritas como ecuaciones de primer orden:

Si

$$\xi^T = (\int x dt, x, \dot{x}) = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (4.1.6)$$

la ecuación (4.1.2) es equivalente a

$$\dot{\xi}_1 = \xi_2, \quad (4.1.7a)$$

$$\dot{\xi}_2 = \xi_3 \quad (4.1.7b)$$

$$\dot{\xi}_3 + \mu^{-1} \mathbb{L} \xi_2 + \mu^{-1} \varphi \xi_3 + \mu^{-1} \mathbb{D} \xi_1 = 0, \quad (4.1.7c)$$

que es de la forma (4.1.4) con

$$\mathbb{A} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ \mu^{-1} \mathbb{D} & \mu^{-1} \mathbb{L} & \mu^{-1} \varphi \end{vmatrix} \quad (4.1.8)$$

La matriz  $\mathbb{A}$  puede escribirse como el producto de la inversa de la matriz resistiva



$$\mathbb{R} = \begin{vmatrix} -\mathbb{D}^+ & 0 & 0 \\ 0 & \nu & \mu \\ 0 & -\mu & 0 \end{vmatrix}$$

y de la matriz hermitica  $\mathbb{S}$  definida como

$$\mathbb{S} = \begin{vmatrix} 0 & \mathbb{D}^+ & 0 \\ \mathbb{D} & \mathbb{L} & 0 \\ 0 & 0 & \mu \end{vmatrix} \quad (4.1.9)$$

donde la matriz resistiva puede descomponerse como  $\mathbb{R} = \mathbb{R}_0 + \mathbb{R}'$  con

$$(\mathbb{R}_0)_{22} = \nu \geq 0 \text{ y cero para todo otro valor} \quad (4.1.10)$$

$\mathbb{R}_0$  representando la disipación viscosa del problema, obviamente hermitica y semidefinida positiva. La matriz  $\mathbb{R}' = \mathbb{R}'_{\mathbb{H}} + \mathbb{R}'_{\mathbb{A}}$  es

$$(\mathbb{R}'_{\mathbb{H}})_{11} = -\mathbb{D}_{\mathbb{H}}^+ \text{ (y cero para otro valor),}$$

$$\mathbb{R}'_{\mathbb{A}} = \begin{vmatrix} -\mathbb{D}_{\mathbb{A}}^+ & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu \\ 0 & -\mu & 0 \end{vmatrix} \quad (4.1.11)$$

donde  $\mathbb{D}_{\mathbb{A}}$  y  $\mathbb{R}_{\mathbb{A}}$  son las partes antihermiticas de  $\mathbb{D}$  y  $\mathbb{R}$  respectivamente. La parte hermitica de  $\mathbb{R}$  es la suma  $\mathbb{R}_0 + \mathbb{R}'_{\mathbb{H}}$ .

El exceso de energía libre  $\eta$  es  $1/2 \langle \xi, \mathbb{S} \xi \rangle$  y si  $\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$  es definida positiva  $\langle \xi, \mathbb{R}_{\mathbb{H}} \xi \rangle > 0$ ,  $\eta$  es una función de Liapunov. Esta condición implica que, en la matriz  $\mathbb{R}$  que hemos definido la contribución de los términos de viscosidad es mayor que el efecto desestabilizador contenido en los otros términos. Aun cuando  $\mathbb{R}_{\mathbb{H}}$  no sea positiva (y por lo tanto  $\eta$  no es una función de Liapunov) el teorema que demostramos más adelante muestra cómo transformar la matriz  $\mathbb{A}$  de modo de obtener una matriz  $\mathbb{R}$  para la cual pueda construirse una adecuada función de Liapunov. Es posible sin embargo construir un Lagrangiano  $\mathcal{L}'$  (ecuación

(3.1.21)) que dé los modos correctos utilizando la matriz  $\mathbb{R}_0$  definida en la ecuación (4.1.10) como la nueva métrica del problema.

La aproximación lineal del formalismo presentado por BG está dada por (4.1.3). Esta ecuación es del tipo (4.1.4), con  $\xi^T = (x, \dot{x}, S)$  y

$$A = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ g_x & \varphi & g_s \\ h_x & 0 & h_s \end{vmatrix} \quad (3.12)$$

Si  $\varphi = 0$  y las matrices  $g$  y  $h$  son matrices numéricas la ecuación (4.1.12) se reduce a la expresión lineal y de primer orden de BG.

#### TEOREMA

A partir de las mismas premisas del lema I que se prueba en el apéndice I se demuestra que existe una matriz  $\mathbb{R}$  con parte hermítica definida positiva de manera que

$$\mathbb{S} = \mathbb{R} A \quad (4.1.13)$$

es hermítica. Además si  $\mathbb{R}$  tiene inversa resulta  $A = \mathbb{R}^{-1} \mathbb{S}$ .

#### DEMOSTRACION:

El lema prueba la existencia de una matriz  $\mathbb{Q}$  hermítica y definida positiva con la propiedad  $\mathbb{Q}^{-1} A^+ \mathbb{Q} A = A \mathbb{Q}^{-1} A^+ \mathbb{Q}$ . Por lo tanto la matriz

$$(\mathbb{Q} A + \varepsilon A^+ \mathbb{Q}) \mathbb{Q}^{-1} (\mathbb{Q} A + A^+ \mathbb{Q}), \quad \varepsilon = \pm 1, \quad (4.1.14)$$

es hermítica si  $\varepsilon = +1$  y antihermítica en otro caso. Si se elige  $\mathbb{R}$  como

$$\mathbb{R} = A^+ (\mathbb{Q} A + A^+ \mathbb{Q}) \quad (4.1.15)$$

la descomposición en partes hermítica y antihermítica es

$$\mathbb{R} = A^+ (\mathbb{Q} A + A^+ \mathbb{Q}) = \frac{1}{2} (A^+ \mathbb{Q} + \mathbb{Q} A) \mathbb{Q}^{-1} (A^+ \mathbb{Q} + \mathbb{Q} A) + \frac{1}{2} (A^+ \mathbb{Q} - \mathbb{Q} A) \mathbb{Q}^{-1} (A^+ \mathbb{Q} + \mathbb{Q} A) \quad (4.1.16)$$

Dado que  $Q$  es una matriz definida positiva la parte hermítica de esta expresión

$$R_H = 1/2 (\Lambda^+ Q + Q \Lambda) Q^{-1} (\Lambda^+ Q + Q \Lambda) \quad (4.1.17)$$

es positiva también.

De las ecuaciones (4.1.13) y (4.1.15) se obtiene

$$S = \Lambda^+ (Q \Lambda + \Lambda^+ Q) \Lambda \quad (4.1.18)$$

que, como es evidente, es hermítica. Q.E.D.

En el caso especial en que  $\Lambda$  es una matriz normal, resulta  $Q = 0$  en la ecuación (4.1.1) y por lo tanto

$$S = \Lambda^+ \Lambda^2 + \Lambda^{+2} \Lambda; R = \Lambda^+ \Lambda + \Lambda^{+2}. \quad (4.1.19)$$

Nótese que el lema da una condición suficiente pero no necesaria para la descomposición (4.1.13). En otras palabras, la descomposición existe pero no es única.

De hecho, en espacios de dimensión finita si se elige la parte antihermítica de  $S$  igual a cero, y la parte hermítica de  $R$  igual a una matriz arbitraria definida positiva, restan tantos valores desconocidos como ecuaciones determinadas por  $\Lambda = R^{-1} S$ . Resulta entonces que  $R$  y  $R_H$  son matrices inversibles.

El lagrangiano de la ecuación (3.1.19), con la nueva descomposición  $\Lambda = R^{-1} S$  es

$$\mathcal{L} = 1/2 \langle R \dot{\xi} + S \xi, (R_H)^{-1} (R \dot{\xi} + S \xi) \rangle = 1/2 \| R \dot{\xi} + S \xi \|_{(R_H)^{-1}} \quad (4.1.20)$$

y su correspondiente ecuación de Euler-Lagrange (usando  $(R_H)^{-1}$  por  $(R_H)^{-1}$ )

$$R^+ (R_H)^{-1} R \ddot{\xi} + (R^+ (R_H)^{-1} S - S (R_H)^{-1} R) \dot{\xi} - S (R_H)^{-1} S \xi = 0. \quad (4.1.21)$$

Esta ecuación puede escribirse como el producto de la ecuación (4.1.4) y la ecuación antitermodinámica

$$\mathbb{R}^+ \dot{\xi} - \mathbb{S} \xi = 0 \quad (4.1.22)$$

(nótese que  $\mathbb{R}^+ \mathbb{R}_H^{-1} \mathbb{R} = \mathbb{R} \mathbb{R}_H^{-1} \mathbb{R}^+$  y que  $\mathbb{R}^+ \mathbb{R}_H^{-1} \mathbb{S} - \mathbb{S} \mathbb{R}_H^{-1} \mathbb{R} = \mathbb{S} \mathbb{R}^{-1} \mathbb{R}^+ - \mathbb{R} \mathbb{R}_H^{-1} \mathbb{S}$ ).

Una expresión equivalente para  $\mathcal{L}$  es

$$\mathcal{L} = 1/2 \langle \dot{\xi} + \mathbb{A} \xi, \mathbb{Q}^{-1} (\dot{\xi} + \mathbb{A} \xi) \rangle, \quad (4.1.23a)$$

donde  $\mathbb{Q}^{-1} = \mathbb{R}^+ (\mathbb{R}_H^{-1})^{-1} \mathbb{R}$ . Es sencillo demostrar que

$$\mathbb{Q} = (\mathbb{R}^{-1})_{\mathbb{H}}. \quad (4.1.23b)$$

En el apéndice II se muestra que la ecuación (4.1.23) es el lagrangiano termodinámico de Onsager-Machlup. Si  $\mathbb{R}$  es una matriz desconocida podemos definir un nuevo lagrangiano  $\mathcal{L}'$  tal que

$$\mathcal{L}' = 1/2 \|\dot{\xi} + \mathbb{A} \xi\| \quad (4.1.24)$$

aunque en este caso los modos espúreos no son más los modos antitermodinámicos. De todos modos, para los casos de dimensión finita, como mostramos en el ejemplo de la sección IV.2, es posible factorizar la matriz  $\mathbb{A}$  en la forma  $\mathbb{A} = \mathbb{R}^{-1} \mathbb{S}$ , donde  $(\mathbb{R}^{-1})_{\mathbb{H}} = 0$ . Por lo tanto, la ecuación (4.1.24) coincide con el lagrangiano termodinámico (4.1.23a) y da los modos antitermodinámicos correctos.

#### IV.2 CASOS PARTICULARES

En esta sección reobtendremos algunos resultados conocidos como casos particulares del formalismo. En esta notación la ecuación (4.1.2) para la aproximación cuasiadiabática se escribe

$$M \ddot{\xi} + R \dot{\xi} + S \xi = 0, \quad (4.2.1)$$

donde

$$\xi = \begin{bmatrix} x \\ (D^+)^{-1} D \int_0^t \dot{x} dt \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} \mu & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} D & D^+ \\ D & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} \phi & 0 \\ 0 & -D^+ \end{bmatrix}.$$

La formulación del caso adiabático no contiene fuerzas externas que sostienen las oscilaciones y por lo tanto  $R$  es estrictamente cero. Es conveniente, sin embargo tomar  $R = \varepsilon 0$ , con  $\varepsilon \rightarrow 0$ . De esta forma el lagrangiano (3.1.16) es

$$\hat{\mathcal{L}} = \varepsilon \mathcal{L} = \langle D \dot{\xi} + R \xi + S \xi, M \dot{\xi} + R \xi + S \xi \rangle, \quad (4.2.2)$$

con métrica igual a la identidad.

Para valores dados de la frecuencia real  $\sigma$  ( $\dot{\xi} = i\sigma\xi$ ), la expresión anterior resulta

$$\hat{\mathcal{L}} = \langle \xi, (-\sigma^2 M + S)^2 \xi \rangle, \quad (4.2.3)$$

que es mínima (cero) si  $\xi$  es autofunción y  $\sigma^2$  el correspondiente autovalor

$$S \xi = \sigma^2 M \xi. \quad (4.2.4)$$

Es interesante mencionar aquí que  $\hat{\mathcal{L}}$  es también mínimo (aunque no cero) para un  $\xi$  dado, en principio arbitrario si  $\sigma^2$  adopta como valor el cociente de Rayleigh (4.2.5) dado más abajo. Esta propiedad constituye la base de las aproximaciones que presentaremos [(4.2.5), (4.2.9), (4.2.17)]. Resolviendo el problema de autovalores (4.2.4), con la ayuda de técnicas de corrimiento espectral, se puede calcular todo el espectro de modos (Guber et. al. 1981; Kerner, Lerbinger y Steuerwald 1985). Dos problemas variacionales equivalentes son: 1) encontrar un extremo (mínimo) de la fuerza potencial  $\langle \xi, S\xi \rangle$  en la

variedad constituida por la intersección de la esfera  $\langle \xi, M\xi \rangle = \text{const}$  con un hiperplano (restricción ortogonal) del espacio  $\xi$ , o 2) minimizar en este hiperplano (o en el espacio total para el modo fundamental) el cociente de Rayleigh

$$\sigma^2 = \langle \xi, S\xi \rangle / \langle \xi, M\xi \rangle \quad (4.2.5)$$

Este resultado es el conocido principio de energía para el adiabático. Para oscilaciones radiales este resultado corresponde al principio obtenido por Ledoux y Walraven (1958). Chandrasekhar (1964) encontró el mismo principio general, (ecuación (4.2.5) para los casos adiabáticos radiales y no radiales) en forma explícita. Sobouti (1977), utilizando el trabajo de Chandrasekhar en el caso no radial mostró que los modos normales pueden ser expandidos en una base que, para el caso perfectamente adiabático puede separarse en dos espacios ortogonales que corresponden a los modos p y g.

Una expresión aproximada de  $\sigma$  puede obtenerse tomando el producto escalar de la ecuación de movimiento (4.2.1) con el vector  $\xi$

$$\langle \xi, M \dot{\xi} \rangle + \langle \xi, R \dot{\xi} \rangle + \langle \xi, S\xi \rangle = 0, \quad (4.2.6)$$

obteniéndose

$$-\sigma^2 \langle \xi, M\xi \rangle + i\sigma \langle \xi, R\xi \rangle + \langle \xi, S\xi \rangle = 0, \quad (4.2.7)$$

y por lo tanto

$$\sigma = (i/2) \langle \xi, R\xi \rangle / \langle \xi, M\xi \rangle \pm [4\langle \xi, M\xi \rangle \langle \xi, S\xi \rangle - \langle \xi, R\xi \rangle^2]^{1/2} / 2\langle \xi, M\xi \rangle. \quad (4.2.8)$$

Dado que  $\xi$  depende de la frecuencia (a través de la componente  $\int x dt$ ) esta última ecuación debe ser resuelta en forma autoconsistente. Esta expresión da el conocido resultado (Cox, 1974)

$$i\sigma^3 \langle x, \mu x \rangle + \sigma^2 \langle x, \varphi x \rangle - i\sigma \langle x, \Pi x \rangle = \langle x, D x \rangle, \quad (4.2.9)$$

cuando las matrices  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{S}$  y  $\mathbb{M}$  son reemplazadas por sus expresiones en términos de  $\varphi$ ,  $\mathbb{L}$ ,  $\mathbb{D}$  y  $\mu$ .

Los resultados de Ledoux y Walraven (1958) para el caso levemente disipativo se obtienen si se supone que el operador  $\mathbb{D}$  (en las ecuaciones (4.1.2) y (4.2.9)) es hermitico. Expandiendo el operador  $\mathbb{D}$  como

$$\mathbb{D}(x, \partial/\partial x) = \mathbb{D}^{(0)}(x) + \mathbb{D}^{(1)}(x)\partial/\partial x + 1/2 \mathbb{D}^{(2)}(x)\partial^2/\partial^2 x + \dots (4.2.10)$$

notemos que como  $\mathbb{D}$  es real, el término de orden cero  $\mathbb{D}^{(0)}(x)$  es también real y hermitico (dado que es independiente de  $\partial/\partial x$ ). Por lo tanto  $\mathbb{D}^{(1)}(x)$  que contribuye a la parte no hermitica de  $\mathbb{D}$  (y proviene de la dependencia con  $\partial/\partial x$ ) es de primer orden. Resulta entonces

$$\|\mathbb{D}_A\|/\|\mathbb{D}_H\| \approx \|\mathbb{D}^{(1)}\|/\|\mathbb{D}^{(0)}\|$$

y la aproximación  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_H$  está justificada debido a que las oscilaciones estudiadas son de longitud de onda larga (con  $\lambda$  del orden del radio estelar  $R^*$ ), de modo que  $\|\mathbb{D}^{(1)}\|/\|\mathbb{D}^{(0)}\| \approx 1/\lambda$  con  $l$  una longitud característica del estado de equilibrio.

Si  $\mathbb{D} = \mathbb{D}_H$  entonces  $\mathbb{R} = \mathbb{R}_H$  en la ecuación (4.2.8). Dado que tanto la disipación como los términos de excitación son pequeños suponemos que

$$4 \langle \xi, \mathbb{M} \xi \rangle \langle \xi, \mathbb{S} \xi \rangle > \langle \xi, \mathbb{R} \xi \rangle^2 (4.2.11)$$

y si  $\sigma = \omega + i\kappa$ , entonces

$$\omega = [4 \langle \xi, \mathbb{M} \xi \rangle \langle \xi, \mathbb{S} \xi \rangle - \langle \xi, \mathbb{R} \xi \rangle^2]^{1/2} / 2 \langle \xi, \mathbb{M} \xi \rangle$$

$$\kappa = \langle \xi, \mathbb{R} \xi \rangle / 2 \langle \xi, \mathbb{M} \xi \rangle. (4.2.12)$$

Por lo tanto

$$|\sigma|^2 = \langle \xi, \mathcal{S} \xi \rangle / \langle \xi, \mathcal{M} \xi \rangle \quad (4.2.13)$$

que en el caso adiabático se reduce a (4.2.5). Teniendo en cuenta la expresión de las funciones de disipación y de la energía libre

$$\varphi = 1/2 \langle \dot{\xi}, \mathcal{D}_H \dot{\xi} \rangle, \quad \eta = 1/2 [\langle \dot{\xi}, \mathcal{M} \dot{\xi} \rangle + \langle \xi, \mathcal{S} \xi \rangle] \quad (4.2.14)$$

y la ecuación (4.2.13), obtenemos

$$\eta = \langle \xi, \mathcal{S} \xi \rangle = |\sigma|^2 \langle \xi, \mathcal{M} \xi \rangle, \quad \kappa = \varphi/\eta. \quad (4.2.15)$$

Si reemplazamos  $\sigma$  por la frecuencia adiabática,  $(\sigma_{ad})$  y utilizando la expresión explícita de la función de disipación de Rayleigh, que en este caso es

$$\varphi = 1/2 \langle \dot{x}, \mathcal{D}_H \dot{x} \rangle - 1/2 \langle x, \mathcal{D}_H x \rangle \quad (4.2.16)$$

obtenemos que

$$\kappa = \langle x, (-\mathcal{D}/\sigma_{ad}^2 + \phi) x \rangle / 2 \langle x, \mu x \rangle > 0 \quad (4.2.17)$$

que es el conocido principio de estabilidad obtenido en aproximación cuasiadiabática (Ledoux and Walraven, 1958).

#### IV.3 EJEMPLO NUMÉRICO

En esta sección mostraremos cómo se aplica el formalismo presentado utilizando el ejemplo semirealístico presentado por BG. Si bien en esta sección utilizamos sólo el ejemplo numérico de estos autores en el capítulo V comentaremos el formalismo no lineal que presentan Buchler y Goupil y presentaremos, en la misma línea de trabajo, un cálculo no lineal perturbativo en el que analizamos los efectos de la presión de radiación. El modelo que utilizamos es un modelo simplificado en el que la estrella se divide en tres zonas. Sus parámetros son tales que la primera zona es cuasiadiabática, la



tercera es altamente no adiabática y en la zona intermedia los tiempos característicos dinámico y térmico son comparables. La ecuación de movimiento lineal es entonces (4.1.12)

$$\dot{\xi} + \Lambda \xi = 0 \quad \Lambda = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ g_x & 0 & g_s \\ h_x & 0 & h_s \end{vmatrix} \quad (4.3.1)$$

$$g_x = \text{diag}(-4., -16., -0.02); \quad h_s = \text{diag}(-0.0005, -1., -300.)$$

$$g_s = \begin{vmatrix} -1 & -0.1 & 0 \\ 0.02 & 1. & 0.01 \\ 0 & 0.01 & 0.5 \end{vmatrix} \quad h_x = \begin{vmatrix} 0.001 & 0.0001 & 0. \\ 0.02 & 0.05 & 0.001 \\ 0. & 0.1 & 2. \end{vmatrix} \quad (4.3.2)$$

Justificaremos someramente la elección hecha por Buchler y Goupil de las matrices  $g_x$ ,  $g_s$ ,  $h_x$  y  $h_s$ . Las matrices  $g_s$  y  $h_x$  son las que acoplan las dos ecuaciones (4.1.3), es decir la ecuación de movimiento y la de de la entropía. Si este acoplamiento es nulo las ecuaciones se escriben

$$\ddot{x} - g_x x = 0 \quad (4.3.3a)$$

$$\dot{S} - h_s S = 0 \quad (4.3.3b)$$

La solución de la ecuación (4.3.3a) es la de un oscilador de constante  $K/m \sim |g_x|$  ( $K$  constante elástica). Las tres capas de la estrella están representadas por tres constantes distintas. Como sabemos la capa responsable de la excitación de las oscilaciones es la región intermedia y por lo tanto es la que tiene mayor constante restitutiva. La capa interna que representa la región adiabática debe tener una constante intermedia y del mismo orden que la anterior dado que los cálculos adiabáticos dan una buena estimación de los períodos. La capa

externa que soporta el movimiento que le imprimen las capas internas ofreciendo poca resistencia al movimiento tiene una constante muy baja. La ecuación (4.3.3b) representa la contribución de la entropía en cada capa. Es decir,  $S \sim e^{|h_s|t}$ . Dado que la no adiabaticidad crece hacia afuera el valor de  $|h_s|$  crece en el mismo sentido. Mencionaremos más adelante un procedimiento por el cual localizar por simple inspección los autovalores de una matriz en un radio aproximado determinado por los coeficientes de la misma matriz. Utilizando este método para ver la contribución de  $g_s$  y  $h_x$  a las ecuaciones (4.3.3a-b) obtenemos los autovalores  $(-1, 1, 0.5)$  y  $(0, 0, 2)$  para las matrices  $g_s$  y  $h_x$  respectivamente. Esta diagonalización de las matrices muestra que en  $g_s$  el efecto neto de las dos capas internas es nulo y que la capa externa y no adiabática disminuye la constante elástica. En el caso de  $h_x$  la adiabaticidad de las dos capas internas hace que estas no contribuyan a la ecuación de la entropía.

El hecho de que la ecuación (4.3.2) sea una ecuación simple y algebraica hace posible elegir una factorización de  $A$  con  $(R^{-1})_{ii} = 1/2 \ 0$ . Escribiendo  $(-A)S^{-1} = R^{-1}$  en la forma

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ g_x & 0 & g_s \\ h_x & 0 & h_s \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a & d & e \\ d^+ & b & f \\ e^+ & f^+ & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d^+ & b & f \\ -b & g_x d + g_s f^+ & g_x e + g_s c \\ -f^+ & -(e^+ g_x + c g_s^+) & h_x e + h_s c \end{vmatrix} \quad (4.3.4)$$

y hallando las matrices  $d$ ,  $e$ ,  $f$  como función de las matrices hermíticas  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , obtenemos

$$\begin{aligned} e^+ &= -g_s^{-1}(g_x a + b) \\ d &= h_s^{-1}(h_s h_x a + h_s^2 e^+ - e^+ g_x^+ - c g_s^+) \quad (4.3.5) \\ f^+ &= h_s g_s^{-1}(g_x a + b) - h_x a \end{aligned}$$

Las matrices a, b y c fueron determinadas eligiendo  $(P^{-1})_{ii}$  como

$$d + d^+ = 0$$

$$h_x e + h_y c + c.h. = 0 \quad (4.3.6)$$

$$g_x d + g_y f^+ + c.h. = 0,$$

Si se invierte  $S^{-1}$  obtenemos

$$\begin{array}{cccccccccc} 9.6E-4 & -2.3E-5 & -7.8E-6 & 3.2E-5 & 2.4E-5 & 7.9E-6 & 2.8E-4 & 8.0E-3 & -1.3E-7 & \\ -2.3E-5 & -5.6E-3 & -1.3E-3 & 2.3E-5 & 1.7E-5 & 1.0E-5 & 3.0E-5 & 6.2E-3 & 0.2 & \\ -7.8E-6 & -1.3E-3 & -2.7E-2 & 7.9E-6 & 1.0E-5 & 9.1E-5 & 7.8E-6 & 2.0E-3 & 4. & \\ 3.2E-5 & 2.3E-5 & 7.9E-6 & 2.2E-4 & -2.3E-5 & -7.9E-6 & -3.2E-5 & -8.0E-3 & 1.3E-7 & \\ 2.4E-5 & 1.7E-5 & 1.0E-5 & -2.3E-5 & -3.6E-4 & -5.8E-6 & -2.3E-5 & -5.8E-3 & -6.7E-4 & \\ 7.9E-6 & 1.0E-5 & 9.1E-5 & -7.9E-6 & -5.8E-6 & -4.4E-5 & -7.8E-6 & -2.0E-3 & -1.3E-2 & \\ 2.8E-4 & 3.0E-5 & 7.8E-6 & -3.2E-5 & -2.3E-5 & -7.8E-6 & -1.5E-3 & -7.9E-3 & 1.8E-7 & \\ 8.0E-3 & 6.2E-3 & 2.0E-3 & -8.0E-3 & -5.8E-3 & -2.0E-3 & -7.9E-3 & -1.99 & 3.6E-5 & \\ -1.3E-7 & 0.2 & 4. & 1.3E-7 & -6.7E-4 & -1.3E-2 & 1.8E-7 & 3.6E-5 & -600. & \end{array}$$

(4.3.7)

Los autovalores de  $S$  son: -600, -1.995, 1.(-3), -1.45(-3), -5.52(-3), -3.22(-4), 2.2(-4), -1.79(-5) y -1.96(-5). Notese que los signos no son todos iguales. Por lo tanto, la función de Liapunov, la forma cuadrática  $v = 1/2 \langle \xi, S\xi \rangle$  no es positiva, mostrando la existencia de modos estables e inestables.

Existe una amplia literatura para el cálculo de autovalores y autovectores. Se han desarrollado técnicas de resolución de sistemas algebraicos y analizado extensamente la efectividad y conveniencia de su utilización en cada caso particular. Debido a las características de la matriz (4.3.7) es fácil localizar sus autovalores mediante

simple inspección. Mencionaremos brevemente el procedimiento que se describe rigurosamente en Isaacson y Keller (1966).

TEOREMA (Gerschgorin)

Sea la matriz  $A=(a_{ij})$  de autovalores  $\lambda$ . Si se definen las sumas absolutas de filas y columnas como

$$r_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n |a_{ij}|, \quad c_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n |a_{ij}| \quad (4.3.8)$$

resulta que

a) cada autovalor está contenido en la unión de los círculo  $R_i$ ,  $i=1, \dots, n$ , donde

$$R_i = \{z/ |z - a_{ii}| \leq r_i\} \quad (4.3.9a)$$

b) cada autovalor está contenido en la unión de los círculo  $C_j$ ,  $j=1, \dots, n$ , donde

$$C_j = \{z/ |z - a_{jj}| \leq c_j\} \quad (4.3.9b)$$

c) cada componente (máxima unión de círculos conectados) de  $\bigcup_i R_i$  o de  $\bigcup_j C_j$  contiene exactamente tantos autovalores como círculos. (Los autovalores y los círculos se cuentan con su multiplicidad).

Si calculamos los  $r_i$  y  $R_i$  de la matriz (4.3.7) obtenemos  
 $r_1 \cong 10^{-2}$ ,  $R_1 \cong \{z/ |z - 10^{-3}| < 10^{-2}\}$ ,  $r_2 \cong 0.2$ ,  $R_2 \cong \{z/ |z + 10^{-2}| < 0.2\}$ ,  
 $r_3 \cong 4$ ,  $R_3 \cong \{z/ |z \cdot 10^{-1}| < 4\}$ ,  $r_4 \cong 10^{-2}$ ,  $R_4 \cong \{z/ |z - 10^{-3}| < 10^{-2}\}$ ,  
 $r_5 \cong 10^{-3}$ ,  $R_5 \cong \{z/ |z + 3 \cdot 10^{-5}| < 10^{-3}\}$ ,  $r_6 \cong 10^{-2}$ ,  $R_6 \cong \{z/ |z + 4 \cdot 10^{-5}| < 10^{-2}\}$ ,  
 $r_7 \cong 10^{-2}$ ,  $R_7 \cong \{z/ |z + 1.5 \cdot 10^{-3}| < 10^{-2}\}$ ,  $r_8 \cong 10^{-2}$ ,  $R_8 \cong \{z/ |z + 1.99| < 10^{-2}\}$ ,  
 $r_9 \cong 4$ ,  $R_9 \cong \{z/ |z + 600| < 4\}$ .

vemos que hay siete autovalores cercanos al origen y dos autovalores que se distinguen de él y que son  $-1.99$  y  $-600$ . Este resultado, que se

comprueba rigurosamente, es importante para predecir el signo del autovalor en el cálculo de estabilidades.

Con este procedimiento hemos estimado los autovalores de  $g_x$  y  $h_x$ . Es posible evaluar el efecto sobre el signo de los autovalores de  $S$  que se produce si se modifican los valores numéricos elegidos por Buchler y Goupil

El lagrangiano

$$\mathcal{L} = 1/2 \langle \dot{\xi} + A\xi, \dot{\xi} + A\xi \rangle \quad (4.3.10)$$

es en este caso el lagrangiano termodinámico correcto y de él se obtienen los mismos modos termodinámicos de BG. También obtenemos los modos antitermodinámicos. En la tabla I mostramos los resultados obtenidos para el caso  $\nu=0$  y para los mismos autovalores que se muestran en el trabajo de BG. Nótese que si se calcula para cada modo  $\langle \xi, S\xi \rangle$ , este valor resulta ser positivo para cada modo estable y negativo para los inestables.

Hemos calculado también autovalores y autovectores para valores no nulos de  $\nu$  que mostramos también en la tabla I para  $\nu=0, 0.1, 0.5$  y 1.. Es decir hemos considerado un término de amortiguación  $\phi = \nu 0$  en la expresión de  $A$  de la ecuación (4.1.12), para distintos valores positivos de  $\nu$ . Las soluciones antitermodinámicas difieren en el signo de la parte imaginaria de la frecuencia. Notese que cuando  $\nu \neq 0$  una factorización análoga a la hecha en la ecuación (4.3.3) es posible, y por lo tanto resulta que la expresión (4.3.10) es de nuevo el lagrangiano termodinámico.

El lagrangiano de la ecuación (4.3.10) es una forma cuadrática semidefinida positiva en  $\xi$  y se anula para los modos exactos del sistema. Desde el punto de vista numérico la minimización del

lagrangiano (4.3.10) da cuenta del mínimo error producido (en el sentido de cuadrados mínimos) por las soluciones de la ecuación dinámica en el método de Galerkin. Ocurre entonces que el determinante de la matriz asociado a esta forma bilineal depende sólo de la frecuencia y es mínimo para las frecuencias propias. Es posible entonces obtenerlas a partir de la minimización del determinante en el plano complejo de la frecuencia. Pueden construirse luego los modos a partir de los menores de la matriz. Los valores que mostramos en la tabla fueron hallados de esta forma con la ayuda de una subrutina del paquete IMSL, ZXMIN (IMSL 1984). Puede también utilizarse un método alternativo inspirado en una interpretación de la mecánica estadística que permite la minimización de funciones de cualquier número de variables (Kirkpatrick, Gelatt y Vecchi 1983, Khachaturyan 1986). Este algoritmo que utiliza el método de Monte Carlo, llamado también algoritmo de Metrópolis, está basado en la simulación de caminos al azar en el espacio de fases multidimensional del sistema de las variables estudiadas (la energía potencial). El procedimiento imita los procesos de relajación térmica y las fluctuaciones previenen al sistema de quedar atrapado en estados metaestables relativos a mínimos locales.

Para el ejemplo considerado el método de minimización da una buena convergencia debido a la baja dimensión de la matriz  $A$ . En un ejemplo más realista es recomendable el uso de la iteración en el problema de autovalores (Kerner, Lerbinger y Steuerwald 1985). Este método es fiable y económico aún en el caso de espectros densos y extensos como ocurre en sistemas de baja disipación en física del plasma.

#### IV.4 CONCLUSIONES

En este capítulo hemos presentado un formalismo basado en la termodinámica irreversible que aplicado a la teoría de pulsaciones estelares permite una descripción unificada y rigurosa del problema.

Las nociones de disipación y exceso de energía libre son centrales en esta teoría dado que los signos asociados a estas cantidades determinan la estabilidad de los sistemas tratados.

Se ha construido un lagrangiano termodinámico (lagrangiano de Onsager-Machlup). Su importancia radica en que, a partir de él pueden obtenerse los modos y las frecuencias del caso más general.

A partir de este principio variacional hemos reobtenido principios conocidos de la literatura. La generalidad de este formalismo proviene de la interpretación termodinámica de la teoría. Este principio se aplica también al caso no adiabático y hemos mostrado como ilustración la aplicación de él al ejemplo semirealístico de la sección anterior.

Este formalismo incluye efectos de ruido como mostramos en el apéndice II.

Como hemos mencionado en el capítulo anterior, el Lagrangiano de Onsager Machlup generalizado por Lavenda y el método del potencial local de Glansdorff y Prigogine son principios variacionales no lineales de la literatura. Hemos demostrado la equivalencia entre estos dos principios. Dado que en el método del potencial local de Glansdorff y Prigogine se trabaja haciendo variaciones sobre las fuerzas, la dependencia de las matrices respecto del estado en el caso no lineal no altera la demostración.

En la misma línea de trabajo, en un trabajo previo Unno (1968) ha utilizado el método del potencial local de Glansdorff y Prigogine como método general y lo aplicó a casos particulares. Nuestra formulación es más simple y compacta y fue presentada para el caso lineal general. La extensión no lineal del formalismo que hemos presentado aquí puede ser hecha en forma natural utilizando el Lagrangiano no lineal de Lavenda.



## V ANALISIS DE LOS EFECTOS DE LA PRESION DE RADIACION EN LA EXCITACION DE PULSACIONES ESTELARES MEDIANTE SOLUCIONES PERTURBATIVAS DE TIPO CICLO LIMITE

Buchler y Goupil en su conocido trabajo de 1984 iniciaron el tratamiento de las ecuaciones no lineales en las pulsaciones estelares con las técnicas empleadas para los sistemas dinámicos. Utilizando el método de escalas múltiples (Nayfeh 1973) llegan a una ecuación no lineal de tercer orden para la amplitud y obtienen los modos de oscilación y su estabilidad.

En la misma línea de trabajo y mejorando el cálculo perturbativo hemos analizado el efecto estabilizador de la presión de radiación en las pulsaciones estelares. La técnica empleada que presentaremos fue mejorada respecto de las anteriores porque de ella se obtiene no sólo las ramas de equilibrio sino también la relajación no lineal a las ramas estables. En el cálculo realizado hemos extendido el número de parámetros de control de uno a dos. La extensión a  $n$  parámetros es un procedimiento mecánico.

Hemos mencionado dos líneas de trabajo paralelas, la de la termodinámica irreversible y el tratamiento en el marco de los sistemas dinámicos. En el primer caso el problema posee una interpretación termodinámica y las fluctuaciones o el ruido son conceptos básicos de la misma teoría. La segunda forma de trabajo ha sido la más difundida por ser mecánica y sistemática.

En este capítulo investigamos el efecto de la presión de radiación en la excitación y estabilidad de las soluciones de tipo ciclo límite en las ecuaciones del modelo de una capa introducido por

Stellingwerf y Gantschy (1988). Comparamos esta técnica con el resultado obtenido por integración numérica directa de las ecuaciones. Mencionaremos también algunas coincidencias observacionales interesantes y discutiremos la relación entre los efectos de ruido con irregularidades que se observan en cierto tipo de estrellas variables.

## V.1 INTRODUCCION

El mecanismo de excitación de las estrellas pulsantes es bien conocido. Sin embargo, algunas estrellas pulsantes muy luminosas ocupan una región del diagrama H-R que se encuentra desplazado respecto de las predicciones teóricas (Castor 1971, Stellingwerf 1975). Se especula que este corrimiento se debe a efectos de la presión de radiación que generalmente son ignorados en los cálculos teóricos (Cox y Stellingwerf 1979).

El modelo que utilizamos para estudiar el efecto de la presión de radiación sobre el mecanismo excitador es el presentado por Stellingwerf y Gantschy (1988, SG88), quienes investigaron el efecto estabilizador de la presión de radiación integrando las ecuaciones en forma numérica directa sólo para unos pocos períodos (sin analizar su estabilidad ni alcanzar la solución del atractor ( $t \rightarrow \infty$ )). Hemos desarrollado un cálculo perturbativo no lineal que permite estudiar las ecuaciones diferenciales alrededor del equilibrio trivial. Como hemos mencionado en el capítulo anterior Buchler y Goupil (1984) desarrollaron también un formalismo de este tipo aunque no orientado al estudio del efecto de la presión de radiación.

El comportamiento temporal de las ecuaciones diferenciales puede ser analizado siguiendo las trayectorias en el espacio de las fases formado por las variables características del sistema. La evolución

temporal para tiempos largos en sistemas disipativos converge a una región del espacio de fases llamado atractor. En sistemas de dos dimensiones el atractor puede ser un punto fijo (equilibrio estacionario) o un ciclo límite (correspondiendo a un equilibrio dinámico o solución periódica). En tres dimensiones, además de estos dos tipos de atractores encontramos también toros y atractores extraños. Este último tipo de atractor está generalmente relacionado con un comportamiento caótico del sistema, es decir, fuerte sensibilidad a las condiciones iniciales. Por lo tanto, sistemas reales que exhiben comportamiento caótico son impredecibles para evoluciones temporales mayores que un tiempo característico. Si la evolución no es caótica el sistema converge al atractor independientemente de las condiciones iniciales. Las amplitudes de pulsación observadas para estrellas de un mismo tipo no difieren mucho entre sí, indicando la existencia de soluciones atractivas de tipo ciclo límite. Sin embargo el comportamiento anómalo de algunas estrellas sugiere también la existencia de soluciones de tipo atractor extraño (Buchler y Kovacs 1987).

Como es sabido la pulsación de estrellas reales es un fenómeno no lineal. Dado que estos sistemas son disipativos la única forma de explicar matemáticamente cómo se mantiene la oscilación sin decaer en un tiempo corto comparado con la vida de estas estrellas es que las ecuaciones cuyo equilibrio lineal es inestable tienen soluciones no lineales que saturan dicha inestabilidad.

Es posible identificar las regiones de estabilidad (inestabilidad) en el espacio de parámetros libres del problema. Uno de ellos  $\beta$  mide la importancia relativa entre en la presión de la radiación y la

presión del gas, el otro  $\zeta$  es la razón de energía luminosa a térmica en la capa. El plano formado por estos parámetros se asemeja a un diagrama H-R. En este plano pueden identificarse las regiones donde existen soluciones del tipo ciclo límite. El comportamiento de este nuevo "equilibrio dinámico" es descrito por tres cantidades que dependen de los dos parámetros libres mencionados. Estas cantidades son la frecuencia, la amplitud y el tiempo de relajación al ciclo límite. Esta información puede también obtenerse a partir de la integración numérica directa de las ecuaciones, sin embargo, para alcanzar la solución atractiva, se requiere necesariamente de integraciones largas y de buena precisión (al menos cerca del punto de bifurcación). El cálculo perturbativo que proponemos aquí tiene las siguientes ventajas:

- 1) el atractor, es decir la solución para tiempos tendiendo a infinito es obtenido en forma directa (sin integración)
- 2) da una visión global de las características relevantes del problema (estabilidad, amplitudes, forma, frecuencia, tiempos de relajación, etc.) Para obtener estos resultados con el método de integración directa de las ecuaciones es necesario una integración por cada punto del espacio de parámetros.

Este método también puede complementarse por la integración numérica directa de las ecuaciones exactas. El método perturbativo sirve como orientación para la búsqueda de soluciones de interés.

## V.2 EL MODELO

Hemos decidido, para comenzar con el estudio de los efectos de radiación trabajar con el ejemplo más simple de la literatura (SG88) para obtener las características más generales.

El modelo introducido por Stellingwerf y Gautschy (SG88) es la generalización no lineal del modelo de pulsación de una capa derivado por Baker (1968), donde los efectos de la radiación son considerados en la ecuación de estado. Las ecuaciones y características de este modelo se han presentado en la sección II.4.

Las ecuaciones dinámicas son:

$$dx/d\tau = y \quad (5.2.1a)$$

$$dy/d\tau = (h+1)^{\kappa_T} / (x+1)^q - 1/(x+1)^2 \quad (5.2.1b)$$

$$dh/d\tau = [T1 \theta m (dx/d\tau) + T2] / [\eta_T (x+1)^{(-m\theta)} (h+1)^{(\eta_T^{-1})}] \quad (5.2.1c)$$

donde  $x$  es el apactamiento relativo del radio externo de la capa del estado de equilibrio estático (equilibrio trivial),  $y$  es la velocidad,  $h$  es un factor que contiene los efectos no adiabáticos como lo define Stellingwerf (1972). El tiempo  $\tau$  se mide en unidades del tiempo de caída libre  $(t_{ff} = R^3/GM)^{1/2}$ ,  $R$  y  $M$  son el radio y la masa de la estrella). Los parámetros de la ecuación (5.2.1) definen la estructura de la capa que pulsa como así también las características termodinámicas de gas y la radiación. Adoptamos para ellos los valores standards que presentamos en II.4 del capítulo I.  $\beta$  y  $\zeta$  son los parámetros libres del presente modelo.

El parametro  $\beta$  es

$$\beta = p_g / p \quad (5.2.2)$$

donde  $p_g$  es la presión del gas,  $p_r$  es la presión de radiación y  $p = p_r + p_g$  denota la presión total.

El parámetro  $\zeta$  es

$$\zeta = L_0 \tau_{ff} / E_0 M_0$$

(5.2.3)

$L_0$  es la luminosidad de equilibrio,  $E_0$  es la energía interna por unidad de masa de la capa (de masa  $M_0$ ), por lo tanto  $\zeta$  es la razón entre la energía luminosa radiada en un tiempo de caída libre y la energía interna de la capa.

### V.3 ANALISIS PERTURBATIVO

#### a) Método general

Describiremos aquí la técnica perturbativa que hemos aplicado para describir el atractor de un grupo de ecuaciones diferenciales cerca del punto de bifurcación. Estos puntos son la intersección, en el espacio de las fases, de curvas de atracción, e indican el lugar donde generalmente cambia la estabilidad del atractor transformándose en repulsor. Si bien este método está esencialmente basado en el trabajo de Iooss y Joseph (1980), hemos hecho una generalización de manera de obtener no sólo las ramas de equilibrio no lineal sino también su relajación a las ramas estables (véase también Gómez, Sicardi Schifino y Ferro Fontán 1939).

Sea un sistema que puede ser descrito por un vector de tres dimensiones  $u$  y que evoluciona en el tiempo de acuerdo a

$$\dot{u}_i = F_i(u, \beta, \zeta) \quad (5.3.1)$$

donde  $\beta$  y  $\zeta$  son parámetros de control; el equilibrio estático son los valores  $u_0(\beta, \zeta)$  obtenidos de

$$\mathcal{F}_i(u_0(\beta, \zeta), \beta, \zeta) = 0 \quad (5.3.2)$$

Si linealizamos las ecuaciones (5.3.1) alrededor de  $u_0(\beta, \zeta)$ , podemos analizar la estabilidad de estos equilibrios para cada valor de  $\beta$  y  $\zeta$ . Cuando el signo de la parte real de uno de los autovalores de la matriz jacobiana (respecto de  $u$ )  $\partial_j \mathcal{F}_i(u_0(\beta, \zeta), \beta, \zeta)$  se vuelve positivo (al variar los parámetros), el equilibrio  $u_0(\beta, \zeta)$  resulta inestable. Si un par de autovalores es complejo conjugado obtenemos una bifurcación de Hopf para cada valor de  $\beta_*(\zeta)$  en el que la parte real del par de autovalores cambia de signo. De aquí en más nos restringimos al estudio de este tipo de bifurcaciones. Escribimos la ecuación (5.3.1) en la forma

$$\partial_t \psi_i = \mathcal{F}_i(\psi, \mu, \zeta) \quad (5.3.3a)$$

donde el nuevo vector de campo es

$$\underline{\psi} = u - u_0(\beta, \zeta) \quad (5.3.3b)$$

y el parámetro de control es reemplazado por

$$\mu = \beta - \beta_*(\zeta) \quad (5.3.3c)$$

Como estamos interesados en la búsqueda de nuevos equilibrios cercanos a  $u_0(\beta, \zeta)$ , trabajamos con los primeros términos de la expansión de Taylor de la función  $\mathcal{F}_i$  alrededor de  $\psi_i = 0$  ( $i=1,2,3$ ). Por lo tanto,

$$\partial_i \psi_i = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \partial_{j_1, \dots, j_n}^{(n)} \mathcal{F}_i((u_0(\beta_*, \zeta), \beta_*, \zeta) \psi_{j_1} \dots \psi_{j_n}) \quad (5.3.4)$$

donde hemos aplicado la convención de suma para los  $j_k=1,2,3$ . Como veremos más adelante es necesario retener hasta los términos de tercer orden para obtener la nueva rama de equilibrio.

Estamos interesados en el caso en que los autovalores de  $L_{ij} = \partial_j \mathcal{F}_i$  son

$$\lambda_1 = \xi + i\eta \quad (5.3.5a)$$

$$\lambda_2 = \xi - i\eta \quad (5.3.5b)$$

$$\lambda_3 = \xi' \quad (5.3.5c)$$

Definimos la curva de bifurcación  $\beta = \beta_*(\zeta)$  como los puntos donde  $\xi$  cambia de signo.

La notación  $|\phi_i\rangle$  indica el autovector asociado a  $\lambda_i$  y  $\langle\phi_i|$  es el adjunto correspondiente.

$$L \cdot |\phi_i\rangle = \lambda_i \cdot |\phi_i\rangle \quad (5.3.6a)$$

$$\langle\phi_i| \cdot L = \lambda_i \cdot \langle\phi_i| \quad (5.3.6b)$$

Estos autovectores satisfacen las siguientes relaciones de ortonormalidad



$$\langle \phi_i | \phi_j \rangle = \delta_{ij} \quad (5.3.7)$$

donde el producto interno se define como  $\langle A, B \rangle = \sum A_i B_i$ .

Dado que  $\lambda_2 = \lambda_1^*$ , entonces  $|\phi_2\rangle = |\phi_1^*\rangle$  y  $\langle \phi_2 | = \langle \phi_1^* |$ . Y como  $\lambda_3 = \lambda_3^*$ , resulta  $|\phi_3\rangle = |\phi_3^*\rangle$ .

Cualquier vector real  $|\psi\rangle$  puede descomponerse como

$$|\psi\rangle = \sum_{i=1}^3 a_i |\phi_i\rangle \quad (5.3.8)$$

y debido a las propiedades anteriores encontramos  $a_2 = a_1^*$  y  $a_3 = a_3^*$ .

En forma totalmente general puede reemplazarse (5.3.8) en (5.3.4) utilizar las relaciones de ortonormalidad (5.3.7) para obtener la ecuación de evolución para las amplitudes  $a_i(t)$ . Las expresiones de tercer orden en la expansión de Taylor (5.3.4) son

$$\partial_t a_1 = (\xi + i\eta) a_1 + \sum_{\sum k_i = 2, 3} (k_1, k_2, k_3) (a_1^{k_1}) (a_2^{k_2}) (a_3^{k_3}) \quad (5.3.9a)$$

$$\partial_t a_3 = \xi^* a_3 + \sum_{\sum k_i = 2, 3} (k_1, k_2, k_3)' (a_1^{k_1}) (a_2^{k_2}) (a_3^{k_3}) \quad (5.3.9b)$$

donde los coeficientes

$$(k_1, k_2, k_3) = \langle \phi_1 | i \cdot \frac{1}{n!} \partial_{j_1, \dots, j_n}^{(n)} | \phi_1 \rangle_{j_1} \dots | \phi_1 \rangle_{j_{k_1}} \dots | \phi_2 \rangle_{j_{k_1+1}} \dots | \phi_2 \rangle_{j_{k_1+k_2}} \dots | \phi_3 \rangle_{j_{k_1+k_2+1}} \dots | \phi_3 \rangle_{j_{k_1+k_2+k_3}} \quad (5.3.10a)$$

$$(k_1, k_2, k_3)' = \langle \phi_3 | i \cdot \frac{1}{n!} \partial_{j_1, \dots, j_n}^{(n)} | \phi_1 \rangle_{j_1} \dots | \phi_1 \rangle_{j_{k_1}} \dots$$

$$|\phi_2\rangle_{j_{k_1+1}} \cdots |\phi_2\rangle_{j_{k_1+k_2}} \cdot |\phi_a\rangle_{j_{k_1+k_2+1}} \cdots |\phi_a\rangle_{j_{k_1+k_2+k_3}} \quad (5.3.10b)$$

son el resultado de la contracción del tensor  $\frac{1}{n!} \partial_{j_1, \dots, j_n}^{(n)}$  con  $k_i$  veces el ket  $|\phi_i\rangle$  ( $i=1,2,3$ ) y una con el bra  $\langle\phi_1|$  o  $\langle\phi_a|$  según se considere  $(k_1, k_2, k_3)$  o  $(k_1, k_2, k_3)'$ . Buscaremos ahora las soluciones de ciclos límite de pequeña amplitud en las cercanías de la curva de bifurcación. Para ello expandimos las variables y los parámetros de control en potencias del parámetro pequeño  $\varepsilon$

$$a_1(t) = A(t) \sum_{k=0}^{\infty} b_k(s) \varepsilon^k, \quad s = \omega(\varepsilon)t \quad (5.3.11a)$$

$$a_3(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(t) \varepsilon^k \quad (5.3.11b)$$

$$\omega(\varepsilon) = \omega_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \omega_{2k} \varepsilon^{2k} \quad (5.3.11c)$$

$$\partial_t A = \sum_{k=1}^{\infty} A_{2k} \varepsilon^{2k} \quad (5.3.11d)$$

$$\mu(\varepsilon) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_{2k} \varepsilon^{2k} \quad (5.3.11e)$$

y definimos a  $\varepsilon$  como la amplitud del ciclo límite

$$\varepsilon = \frac{1}{2\pi A} \int_0^{2\pi} ds e^{-is} a_1 = [a_1]. \quad (5.3.12)$$

Nótese que  $A(t)$  es una función lentamente variable de  $t$  ( $\partial_t A \propto \varepsilon^2$ ) y por lo tanto la integral temporal de (5.3.12) puede realizarse suponiendo que  $A$  es igual a una constante. Más aún, dado que  $A$  se

define de modo que  $A \rightarrow 1$  para  $t \rightarrow \infty$ , se recupera así la expresión de Iooss and Joseph (1980) para dicho límite. Ha sido probado rigurosamente que, para toda bifurcación de Hopf,  $\omega$ ,  $\partial_t A$  y  $\mu$  son funciones pares de  $\varepsilon$  (vease 5.3.11c-e) (Hassard, Kazarinoff y Wan, 1981).

La ecuación (5.3.9) debe verificarse para cada orden de  $\varepsilon$ . A primer orden

$$\omega_0 \partial_s b_1 = i\eta b_1 \quad (5.3.13a)$$

$$\partial_t c_1 = \xi' c_1 \quad (5.3.13b)$$

donde los parámetros  $\xi$ ,  $\xi'$  y  $\eta$  así como todos los coeficientes  $(k_1, k_2, k_3)$  se evaluarán sobre la curva de bifurcación quedando sólo la dependencia de un parámetro libre ( $\xi$ ). Elegimos  $\omega_0 = \eta$  y por lo tanto

$$b_1 = b_{10} e^{is} \quad (5.3.14a)$$

$$c_1 = c_{10} e^{\xi' t} \quad (5.3.14b)$$

De acuerdo con (5.3.12) resulta  $[b_1] = b_{10} = 1$ . A segundo orden

$$\omega_0 A(\partial_s b_2 - i b_2) = \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \\ \sum k_i = 2}} (k_1, k_2, k_3) (A b_1)^{k_1} (A^* b_1^*)^{k_2} (c_1)^{k_3} \quad (5.3.15a)$$

$$\omega_0 A(\partial_s c_2 - i c_2) = \sum_{\substack{k_1, k_2, k_3 \\ \sum k_i = 2}} (k_1, k_2, k_3) (A b_1)^{k_1} (A^* b_1^*)^{k_2} (c_1)^{k_3} \quad (5.3.15b)$$

Supondremos ahora que  $|\xi'| \gg \omega_0$ , que implica que la relajación a

la variedad que contiene el atractor ocurre en escalas temporales típicamente menores que un periodo (vease Fig.3). Bajo esta hipótesis la aproximación  $e^{\xi t} \approx 0$  es correcta y (5.3.15a) satisface automáticamente la condición (5.3.12). Para cualquier valor de  $k$  tal que  $k > 1$ , la condición (5.3.12) es equivalente a  $[b_k] = 0$ , e implica que las ecuaciones del tipo de (5.3.15a) pueden resolverse siempre que la expresión izquierda de la ecuación no tenga términos proporcionales a  $e^{i\omega t}$ . Esta condición de solubilidad es conocida como alternativa de Fredholm y se aplica a los distintos órdenes en  $\varepsilon$  dando ecuaciones de las que se pueden obtener los valores de  $\omega_{2k}$ ,  $A_{2k}$  y  $\mu_{2k}$ . Para el tercer orden en  $\varepsilon$  obtenemos

$$\begin{aligned} \omega_0 A (\partial_t b_3 - i b_3) = & -\dot{A}_2 b_1 + \sum_{\sum k_i = 3} (k_1, k_2, k_3) (A b_1)^{k_1} (A^* b_1^*)^{k_2} (c_1)^{k_3} + \\ & + A b_2 ((1, 1, 0) A^* b_1^* + (1, 0, 1) c_1) + A^* b_2^* ((1, 1, 0) A b_1 + (0, 1, 1) c_1) + \\ & + c_2 ((1, 0, 1) A b_1 + (0, 1, 1) A^* b_1^*) \end{aligned} \quad (5.3.16)$$

y una ecuación análoga para  $c_3(t)$ . La condición de solubilidad implica

$$\partial_t A \approx \dot{A}_2 \varepsilon^2 = (\Gamma A - \Gamma' |A|^2 A) \varepsilon^2 \quad (5.3.17)$$

donde

$$\Gamma = \xi \mu_2 + i (\eta_2 - \omega_2) \quad (5.3.18a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma' = & -2/3 |(0, 2, 0)|^2 / i \omega_0 + (2, 0, 0)(1, 1, 0) / i \omega_0 \quad (2, 1, 0) + \\ & + (0, 1, 1)(2, 0, 0) / \xi + (1, 0, 1)(1, 1, 0) / \xi - |(1, 1, 0)|^2 / i \omega_0 \end{aligned} \quad (5.3.18b)$$

y

$$\Gamma = \Gamma' \quad (5.3.18c)$$

dado que  $A \rightarrow 1$  para  $t \rightarrow \infty$ .

Es inmediato construir una función para analizar la estabilidad del ciclo límite. Descomponiendo  $\Gamma'$  y  $A$  como

$$\Gamma' = \Gamma_r' + i \Gamma_i' \quad (5.3.19a)$$

$$A = |A| e^{i\phi} \quad (5.3.19b)$$

y tomando parte real de (5.3.17) obtenemos

$$\partial_t |A| = \Gamma_r' \varepsilon^2 |A| (1 - |A|^2) \quad (5.3.20)$$

Podemos escribir esta ecuación en la forma

$$\partial_t |A| = - \partial S / \partial |A| \quad (5.3.21)$$

donde

$$S(|A|) = \Gamma_r' \varepsilon^2 / 2 |A|^2 (1 - |A|^2 / 2) \quad (5.3.22)$$

es un potencial generalizado. Los equilibrios del sistema corresponden a extremos de esta función siendo los mínimos los estados estables del mismo (Haken 1983). Esto es así debido a que (5.3.21) implica  $\partial_t S \leq 0$  para todo valor de  $|A|$ .

#### b) Aplicación a las ecuaciones del problema

Dada la ecuación (5.2.1), las componentes del vector  $\psi$  correspondientes son

$$\psi_1 = x \quad \psi_2 = y \quad \psi_3 = h \quad (5.3.23)$$

con los dos parámetros libres  $\beta$  y  $\zeta$  definidos anteriormente (ecuaciones (5.2.2-3)).

La expresión linealizada de la ecuación (5.2.1) puede escribirse en la forma

$$\dot{\psi} = \mathbb{L} \psi \quad (5.3.24)$$

con

$$\mathbb{L} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ (2-q) & 0 & \kappa_T \\ -\frac{\xi(b-u)}{\eta} & 0 & -\frac{\xi(s+4)}{\eta} \end{vmatrix} \quad (5.3.25)$$

donde  $\kappa_T$ ,  $\eta$ ,  $b$ ,  $u$  y  $s$  son las mismas que en SG88.

Los autovalores  $\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son un par de números complejos conjugados asociados a la pulsación mientras que  $\lambda_3$  es real y negativo y corresponde al tiempo de relajación térmica (SG88). Estamos entonces en las condiciones del apartado anterior indicadas por la ecuación (5.3.5). En la Fig.4 mostramos la región de estabilidad (inestabilidad) lineal del equilibrio trivial, es decir  $\xi < 0$  ( $\xi > 0$ ) respectivamente. La curva  $\beta = \beta_*(\zeta)$  correspondiente a  $\xi = 0$  (estabilidad neutra) es aproximadamente constante en  $\zeta$  y su valor es  $\beta_* \approx 0.147$ . En la Fig.5 mostramos el comportamiento de la frecuencia  $\eta = \omega_0$  y el de la relajación térmica  $|\xi'|$ , ambos evaluados sobre la curva crítica.  $\omega_0$  es una cantidad aproximadamente independiente de  $\zeta$  e igual a  $\omega_0 = 2.8$ .

Para encontrar las soluciones de tipo ciclo límite (linealmente inestables) debemos incluir términos de hasta tercer orden en las componentes de  $\psi$ . El cálculo de los corchetes  $(k_1, k_2, k_3)$  así como la expansión perturbativa en  $\varepsilon$  fue realizada con un programa de manipulación algebraica (SMP). Siguiendo el método que hemos descrito en la sección precedente desde la ecuación (5.3.8) en adelante hemos obtenido la condición de solubilidad (5.3.17) a orden  $\varepsilon^3$ . De la parte real e imaginaria de la ecuación (5.3.18c) se obtienen  $\mu_2$  y  $w_2$  como funciones de  $\zeta$ :

$$\mu_2 = \Gamma_r' / \xi_k \quad (5.3.26)$$

$$\omega_2 = \eta_2 - \Gamma_i' \quad (5.3.27)$$

El signo de  $\Gamma_r'$  define la estabilidad del ciclo límite así como su orientación. La función  $\Gamma_r'(\zeta)$  se muestra en la Fig.5b. Hemos obtenido valores positivos para cada  $\zeta$ , lo que indica la presencia de una bifurcación de Hopf supercrítica (esto se ve esquemáticamente en la Fig.4). En la Fig.5c mostramos la dependencia con  $\zeta$  de las correcciones no lineales de la frecuencia ( $\omega_2$ ). Para cualquier valor de  $\zeta$  la corrección  $\omega_2$  es pequeña y negativa lo que indica que la frecuencia de pulsación decrece a medida que  $\beta$  aumenta ( $\omega = \omega_0 + \omega_2 \varepsilon^2$ ). En la Fig.6 la línea de puntos muestra la forma del atractor para distintos valores de  $\beta$  y  $\zeta$ . En la Fig.7a, mostramos la evolución de la amplitud del atractor  $x_{\max}^{(t)}$  ( $x_{\max}$  es el valor máximo de  $x$  en un período, correspondiendo al punto  $x$  tal que  $\dot{y}=0$  y  $x>0$ ) obtenida a partir de la integración analítica de la ecuación (5.3.17). En ambas figuras comparamos el resultado perturbativo con el que se obtiene de la integración numérica directa de las ecuaciones (Fig.7b. y línea llena de la Fig.6).

#### IV.4 INTEGRACION NUMERICA DIRECTA

Hemos resuelto numéricamente las ecuaciones exactas (5.2.1) para distintos valores de  $\beta$  y  $\zeta$  y para distintas condiciones iniciales, utilizando una rutina Runge Kutta de cuarto orden. La forma del atractor y el tiempo de relajación obtenidos por este método se comparan en las figuras 6 y 7 (en la Fig.6 el caso perturbativo se indica con línea de puntos y la solución numérica con línea llena).

Vemos en la figura 6 (de acuerdo con lo esperado a partir del cálculo perturbativo) que el ajuste entre los dos métodos mejora a medida que  $\beta$  se aproxima al valor de la curva crítica  $\beta_* \approx 0.147$ . Como hemos dicho en la sección anterior, la figura 7 muestra la evolución del máximo valor de  $x$  con el tiempo en su relajación hacia el atractor (valor asintótico de  $x$ ). Las distintas curvas corresponden a distintos valores de  $\beta$  y distintas condiciones iniciales (curvas a y b; a) condición inicial con  $x$  mayor que el valor de  $x_{\max}$  del atractor, b) condición inicial con valor de  $x$  menor que el  $x_{\max}$  del atractor). Vemos que el tiempo de relajación aumenta para valores cercanos a  $\beta_*$  como así también para valores de  $\beta$  suficientemente alejados del valor crítico. Se observa de la figura 7b que el tiempo de relajación aumenta mientras la frecuencia disminuye (la separación entre puntos de una misma curva corresponde a un período), es decir, a medida que el valor de  $\beta$  se acerca al valor  $\beta_{**}$  donde la capa es eyectada. También ocurre que el tiempo de relajación disminuye a medida que  $\beta$  se acerca al valor  $\beta_{**}$ . Para valores de  $\beta$  aún mayores que  $\beta_{**}$ , la amplitud de la variable  $y$  se acerca a la velocidad de escape ( $y \approx 1$ ) la capa es eyectada y no existe atractor (vease figura 8a). La figura 8b y 8c muestra la eyección de la capa para diferentes valores del parámetro de control  $\beta$ . Los resultados obtenidos en esta figura concuerdan con los resultados lineales obtenidos por SG88, es decir el aumento de la amplitud  $x_{\max}$  del atractor es máximo para  $\beta=0.7$ .

Se observa también que para valores de  $\beta$  tales que  $\beta > \beta_{**}$  ( $\beta_{**}$  depende suavemente del parámetro  $m$ , por ejemplo  $\beta_{**} \approx 0.18$  si  $m=10$ ) la eyección de la capa ocurre para cualquier valor de  $\zeta$  (vease Fig.4). La franja angosta que contiene las soluciones de tipo ciclo límite (entre



los valores  $\beta_*$  y  $\beta_{**}$ ) se ensancha y desplaza a medida que el parámetro  $m$  aumenta.

## V.5 DISCUSION

Hemos estimado los parámetros libres del modelo  $(\beta, \zeta)$  para diferentes grupos de estrellas pulsantes. Como se menciona en SG88 valores típicos son  $\beta=1$ ,  $\zeta=1$ . Sin embargo el valor de  $\beta$  decrece abruptamente para estrellas de alta luminosidad. Una estrella de tipo  $\beta$ -Cephei tiene valores estimados de  $\beta \approx 0.17$  y  $\zeta=1$ ; y para estrellas de tipo Cefeidas de alta luminosidad hallamos  $\beta \approx 0.3$  y  $\zeta=6$ , mientras que para las Cefeidas clásicas menos luminosas hallamos valores  $\beta \approx 0.99$  y  $\zeta \approx 0.24$  (Allen 1973).

La amplitud del atractor aumenta no sólo con el aumento de  $\beta$  (Fig.4-6a) sino también con el aumento de  $\zeta$  (Fig.4-6d-9). En la fig.4 hemos localizado el grupo de las  $\beta$ -Cefeidas, identificado como grupo I. En lo que sigue identificaremos a las Cefeidas clásicas muy luminosas como estrellas de tipo II. De acuerdo con la Fig.4, este grupo tiene un valor de  $\zeta \approx 6$  y por lo tanto su correspondiente amplitud de pulsación debe ser mayor que las del grupo I. De hecho, como es bien sabido (por ejemplo Allen 1973) un valor típico de amplitud de pulsación de las del tipo I es aproximadamente un décimo de las del tipo II. Las Cefeidas clásicas menos luminosas (grupo III) no pueden ser acomodadas en el modelo debido a que su valor de  $\beta$  es considerablemente mayor que el valor  $\beta_{**}$  para el cual la capa es eyectada. Sin embargo, los resultados observados están en acuerdo cualitativo con las amplitudes relativas de los distintos grupos predichos por los cálculos y esquemáticamente indicados en la Fig.4.

La no adiabaticidad de la pulsación causa una pérdida de energía

por período que puede ser estimada (Cox 1980). El tiempo característico de esta pérdida de energía es el tiempo de relajación al ciclo límite. Estos tiempos de decaimiento se resumen en la tabla 9 de Cox (1980), y tienen acuerdo cualitativo con los resultados que se muestran en la Fig.7b. Para  $\beta=(0.15,0.149,0.148)$  los valores de la pendiente  $1/x_{\max} dx_{\max}/dt$  son  $(4.5,6,3.3)10^{-4}$  respectivamente. Esto implica que el tiempo de relajación aumenta a medida que  $\beta$  se aproxima a  $\beta_*$  y a  $\beta_{**}$ . En el primer caso la razón de este aumento es la proximidad a la curva crítica mientras que en el segundo caso es debido a que las trayectorias se agrandan cerca del límite de eyección. De los resultados obtenidos por Cox, se obtiene que una estrella que está en el centro de la región de inestabilidad (diagrama H-R) (por ejemplo W Virgins) tiene un tiempo de relajación de alrededor de diez períodos mientras que tanto las estrellas del grupo II (Cefeidas clásicas), de mayor valor de  $\beta$ , como las estrellas de la secuencia principal ( $\delta$  Scuti, Cefeidas enanas), con menor valor de  $\beta$ , tienen tiempos de relajación menores que las intermedias.

Las pulsaciones estelares irregulares pueden interpretarse como estrellas cuya evolución es caótica. Buchler y Kovacs (1987) utilizando un modelo de multicapa encontraron una solución de tipo atractor extraño cuya dimensión de "embedding" es tres. Esto sugiere que modelos de baja dimensión pueden proveer una buena descripción teórica del problema de variables irregulares. En el presente trabajo no hallamos evidencias de comportamiento caótico. Este resultado está, sin embargo de acuerdo con la rápida relajación a la variedad de dos dimensiones que contiene al atractor (ver Fig.3 y 5a) y con el conocido argumento que afirma que las evoluciones caóticas no son

posibles en variedades de esta dimensión (Eckmann y Ruelle 1985). La falta de irregularidad en nuestro modelo es consecuencia del bajo número de grados de libertad utilizado. Si agregamos ruido blanco aditivo en la ecuación (5.2.1) para modelar la interacción de  $x$ ,  $y$  y  $h$  con los grados de libertad despreciados, la evolución resultante se vuelve impredecible. Los efectos de ruido son más o menos importantes dependiendo de la duración del tiempo de relajación hacia la variedad bidimensional que contiene al atractor. Es decir, cerca de la curva de bifurcación aún un ruido bajo en magnitud puede tener un efecto importante que dé lugar a las características de irregularidad que mencionamos.

## V.6 CONCLUSIONES

Utilizando las ecuaciones obtenidas en SG88 hemos investigado la existencia de soluciones de tipo ciclo límite teniendo en cuenta el efecto de la presión de radiación como excitador y estabilizador de las oscilaciones. Hemos extendido un análisis perturbativo standard de la literatura (Iooss y Joseph 1980) para obtener no sólo las características del atractor sino también información sobre la relajación. Se obtuvieron las características lineales ya presentes en el trabajo de SG88, la caracterización no lineal del atractor (forma, tamaño, correcciones a la frecuencia y tiempo de relajación, todos ellos en función de los parámetros libres  $\beta$  y  $\zeta$  del problema). Las ventajas de este tratamiento respecto de la integración directa de las ecuaciones fueron ya discutidas, y son principalmente: 1) el atractor, es decir, la solución para tiempo infinito, se obtiene directamente evitando integraciones de buena precisión y de tiempos largos de integración. y 2) permite una visión global de las características

relevantes del problema. Las figuras 4 y 5 concentran la información correspondiente a la dependencia de dichas características respecto de los parámetros libres del problema. Hemos verificado los resultados analíticos del cálculo perturbativo con los que se obtienen de la integración numérica de las ecuaciones.

También hemos hallado coincidencias interesantes las observaciones. En forma resumida, nuestros resultados son

- 1) Suficientemente cerca de la curva de bifurcación tenemos un muy buen acuerdo con la integración numérica directa de las ecuaciones.
- 2) Hemos hallado una curva  $\beta_{**}(\zeta)$  que corresponde a la situación física de eyección de la capa pulsante. La región donde se ubican las estrellas que pueden pulsar se encuentra limitada por esta curva y la curva crítica ( $\beta_*(\zeta)$ , ver Fig.4). La región que se encuentra sobre la curva  $\beta_{**}(\zeta)$  no posee soluciones de tipo ciclo límite. Este comportamiento no aparece en SG88 debido a que las integraciones numéricas comprenden muy pocos períodos. La franja que contiene soluciones de tipo ciclo límite (entre  $\beta_*$  y  $\beta_{**}$ ) depende del parámetro  $m$  y se ensancha para valores grandes de este parámetro.
- 3) Hemos comparado nuestros resultados con datos observacionales y encontrando un buen acuerdo cualitativo. La dependencia de la amplitud de pulsación obtenida respecto de los parámetros libres ( $\varepsilon(\beta, \zeta)$ ) explica el ordenamiento de las amplitudes de pulsación observadas para estrellas luminosas.

En un nivel más especulativo hemos destacado la importancia de los efectos de ruido cerca de los puntos de bifurcación como una explicación alternativa de la irregularidad de cierto tipo de estrellas.

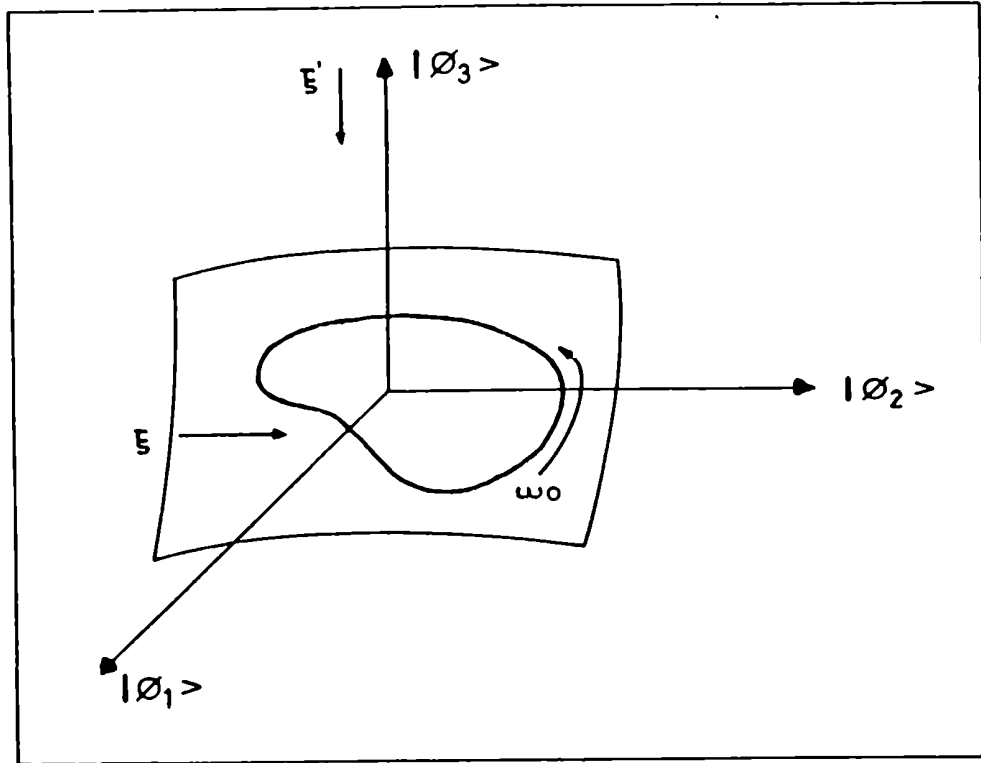


Figura 3. Frecuencias características asociadas a la variedad

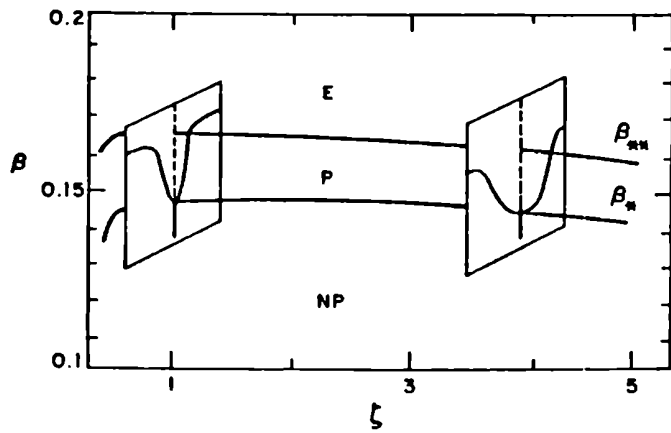


Figura 4. Muestra las curvas  $\beta_*$  y  $\beta_{**}$  que dividen las regiones en la que hay pulsador, no hay pulsador y la region en la que la capa es eyeclada. Tambien se muestra la forma del atractor en el plano  $x-\beta$ .

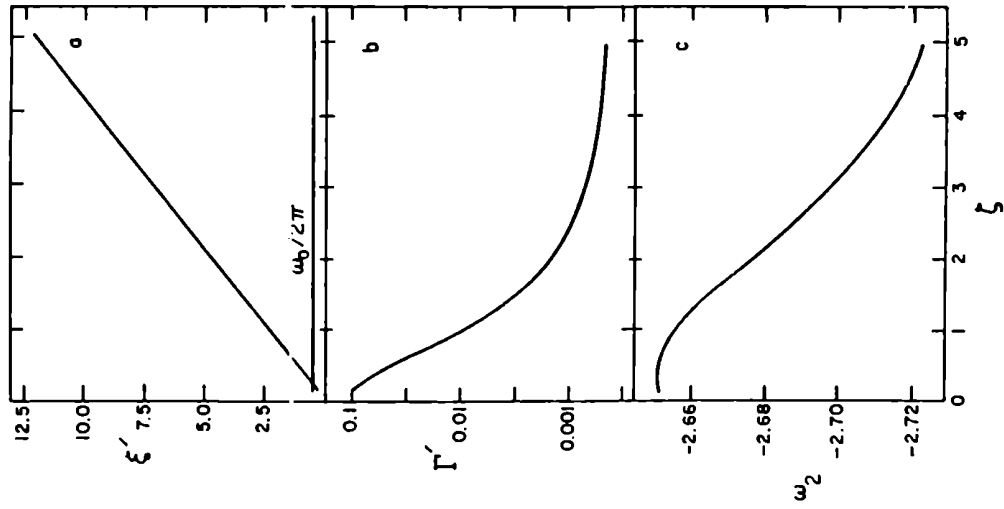


Figura 5. (5a) Muestra la dependencia de  $|\zeta|$  y  $\nu_0$  con  $\zeta$ . (5b) Muestra la dependencia de  $\Gamma$  con  $\zeta$ . (5c) Muestra la dependencia de  $\nu_2$  con  $\zeta$ .

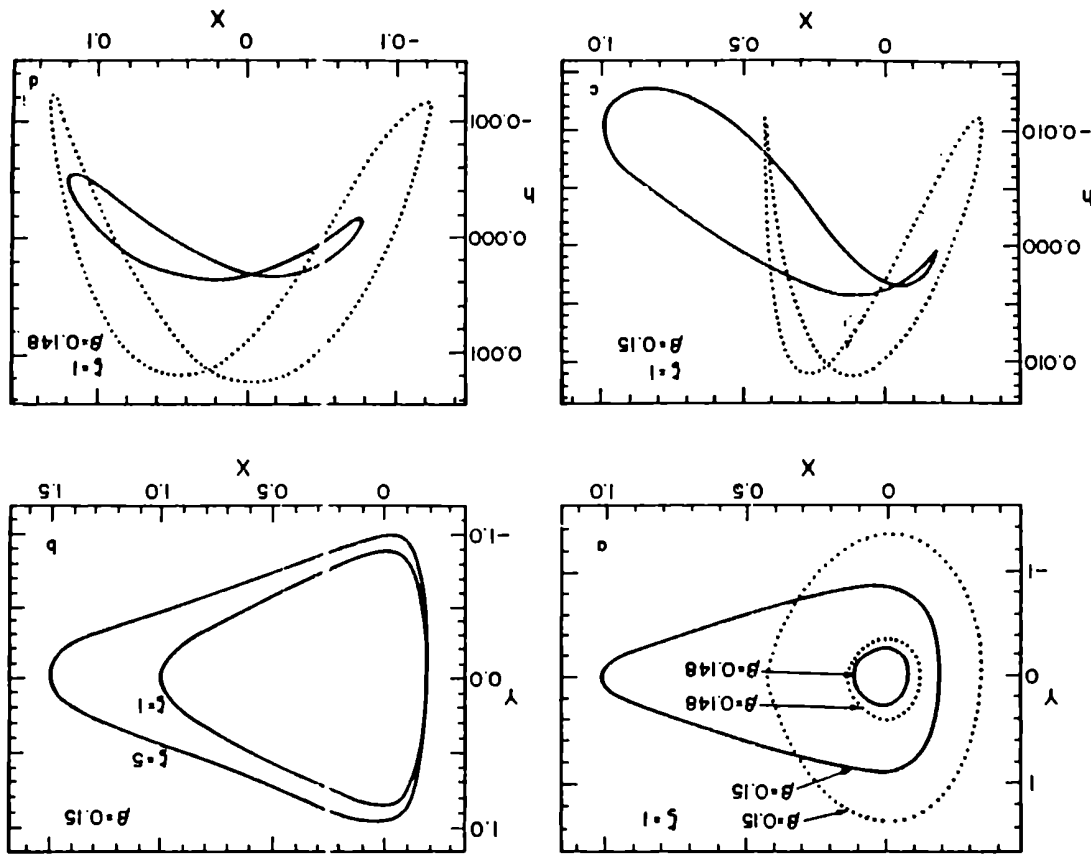


Figura 6. La línea punteada corresponde al cálculo perturbativo. La línea llena corresponde a la integración numérica directa de las ecuaciones. (6a) Muestra la forma del atractor en el plano  $x$ - $y$  para  $\zeta=1$  con  $\beta=0.148$  y  $\zeta=5$ . (6b) Muestra la forma del atractor en el plano  $x$ - $y$  para  $\beta=0.15$  con  $\zeta=1$  y  $\zeta=5$ . (6c) Muestra la forma del atractor en el plano  $x$ - $h$  para  $\zeta=1$  y  $\beta=0.148$ . (6d) Muestra la forma del atractor en el plano  $x$ - $h$  para  $\zeta=1$  y  $\beta=0.148$ .

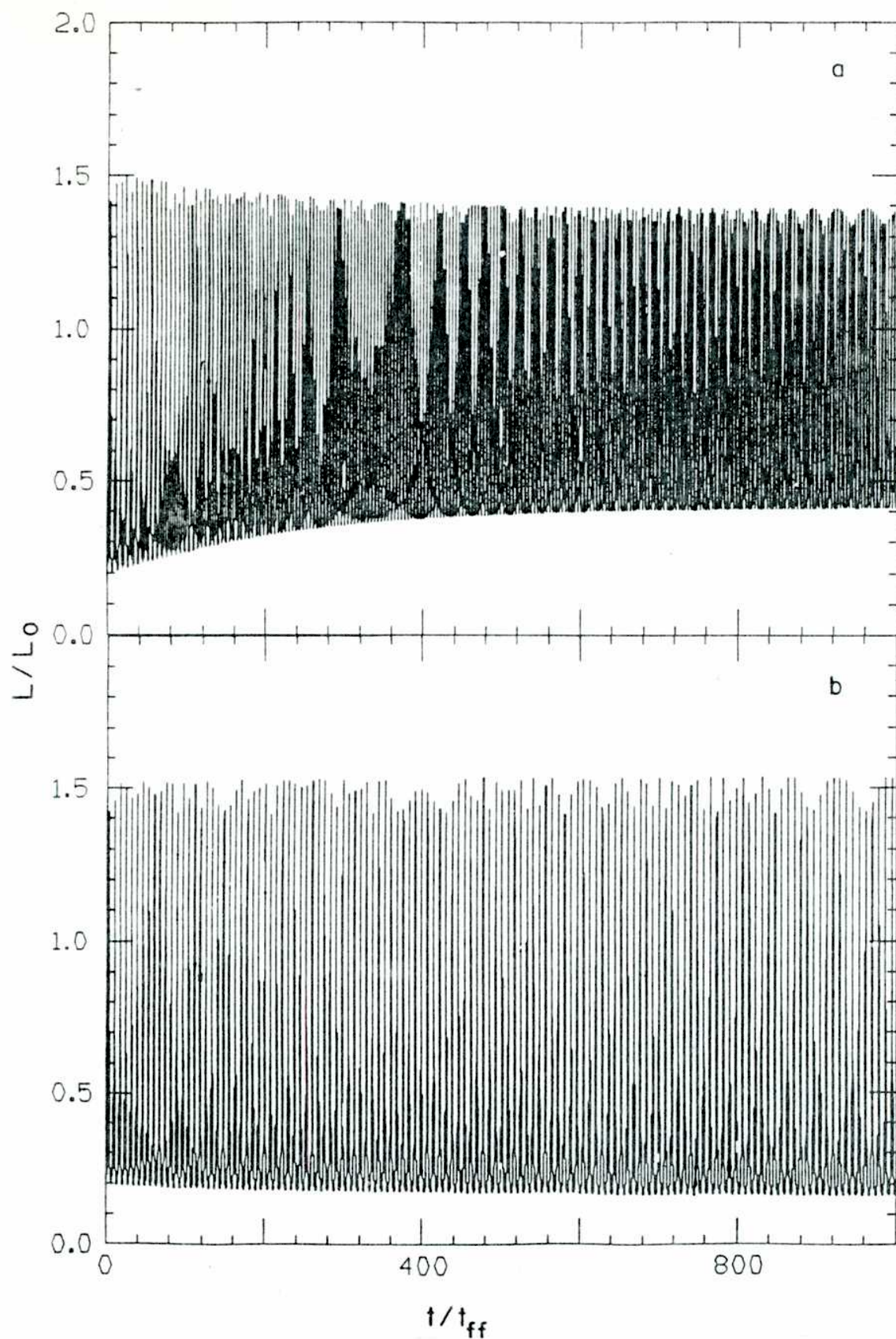


Figura 9. Muestra la dependencia de la luminosidad con el tiempo. La luminosidad del atractor se obtiene para tiempos mayores que el de relajacion (luminosidad final). En la figura 9a  $\zeta=1$  mientras que en la 9b  $\zeta=5$ .

## VI. CONCLUSIONES

Esta tesis trata sobre la teoría de las pulsaciones estelares. En ella hacemos una revisión de la teoría y una reformulación de la misma mediante el enfoque de la termodinámica irreversible. Analizamos también el efecto de la presión de radiación como agente excitador y estabilizador de las oscilaciones.

En el capítulo III luego de resumir algunos conceptos y principios generales de la termodinámica irreversible hemos mostrado cómo se generaliza la hipótesis de equilibrio local de modo de poder reformular el criterio de estabilidad termodinámico de Glansdorff-Prigogine. Esta nueva presentación del principio permite asociar la estabilidad del estado estudiado al signo de una forma cuadrática; el exceso de producción de entropía.

Cuando el exceso de entropía y el exceso de producción de entropía son calculados para los modos normales estas cantidades resultan ser las mismas que definen Glansdorff y Prigogine. Si la matriz  $A'$  asociada a la ecuación de movimiento del sistema es normal el criterio de Glansdorff-Prigogine y la reformulación de este criterio coinciden.

Comparamos el criterio que hemos presentado con otros criterios de la literatura. Si agregamos ruido blanco a las ecuaciones se obtiene como caso particular la función de Liapunov de Keizer y Fox. Probamos también la equivalencia entre el criterio generalizado de Glansdorff-Prigogine con el criterio de Lavenda.

Mostramos la equivalencia entre el método del potencial local de Glansdorff-Prigogine con el lagrangiano de Onsager-Machlup



generalizado por Lavenda.

En el capítulo IV hemos presentado un formalismo basado en la termodinámica irreversible que aplicado a la teoría de pulsaciones estelares permite una descripción unificada y rigurosa del problema.

Las nociones de disipación y exceso de energía libre son centrales en esta teoría dado que los signos asociados a estas cantidades determinan la estabilidad de los sistemas tratados.

Se ha construido un lagrangiano termodinámico (lagrangiano de Onsager-Machlup). Su importancia radica en que, a partir de él pueden obtenerse los modos y las frecuencias del caso más general.

A partir de este principio variacional hemos reobtenido principios conocidos de la literatura. La generalidad de este formalismo proviene de la interpretación termodinámica de la teoría. Este principio se aplica también al caso no adiabático y hemos mostrado como ilustración la aplicación de él al ejemplo semirealístico presentado en dicho capítulo.

Este formalismo incluye efectos de ruido como mostramos en el apéndice II. La extensión no lineal del formalismo que hemos presentado aquí puede ser hecha en forma natural utilizando el Lagrangiano no lineal de Lavenda.

En el capítulo V utilizando las ecuaciones obtenidas en SG88 hemos investigado la existencia de soluciones de tipo ciclo límite teniendo en cuenta el efecto de la presión de radiación como excitador y estabilizador de las oscilaciones. Hemos extendido un análisis perturbativo standard de la literatura (Iooss y Joseph 1980) para obtener no sólo las características del atractor sino también

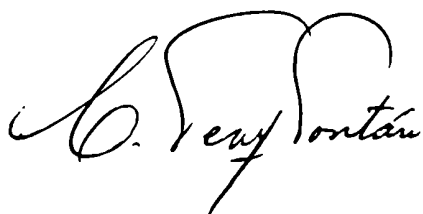
información sobre la relajación. Se obtuvieron las características lineales ya presentes en el trabajo de SG88, la caracterización no lineal del atractor (forma, tamaño, correcciones a la frecuencia y tiempo de relajación, todos ellos en función de los parámetros libres  $\beta$  y  $\zeta$  del problema). Las ventajas de este tratamiento respecto de la integración directa de las ecuaciones son principalmente: 1) el atractor, es decir, la solución para tiempo infinito, se obtiene directamente evitando integraciones de buena precisión y de tiempos largos de integración. y 2) permite una visión global de las características relevantes del problema. Las figuras 4 y 5 concentran la información correspondiente a la dependencia de dichas características respecto de los parámetros libres del problema. Hemos verificado los resultados analíticos del cálculo perturbativo con los que se obtienen de la integración numérica de las ecuaciones.

También hemos hallado coincidencias interesantes con las observaciones. En forma resumida, nuestros resultados son

- 1) Suficientemente cerca de la curva de bifurcación tenemos un muy buen acuerdo con la integración numérica directa de las ecuaciones.
- 2) Hemos hallado una curva  $\beta_{**}(\zeta)$  que corresponde a la situación física de eyección de la capa pulsante. La región donde se ubican las estrellas que pueden pulsar se encuentra limitada por esta curva y la curva crítica ( $\beta_*(\zeta)$ , ver Fig.4). La región que se encuentra sobre la curva  $\beta_{**}(\zeta)$  no posee soluciones de tipo ciclo límite. Este comportamiento no aparece en SG88 debido a que las integraciones numéricas comprenden muy pocos períodos. La franja que contiene soluciones de tipo ciclo límite (entre  $\beta_*$  y  $\beta_{**}$ ) depende del parámetro  $n$  y se ensancha para valores grandes de este parámetro.

3) Hemos comparado nuestros resultados con datos observacionales y encontrando un buen acuerdo cualitativo. La dependencia de la amplitud de pulsación obtenida respecto de los parámetros libres  $(\epsilon(\beta, \zeta))$  explica el ordenamiento de las amplitudes de pulsación observadas para estrellas luminosas.

En un nivel más especulativo hemos destacado la importancia de los efectos de ruido cerca de los puntos de bifurcación como una explicación alternativa de la irregularidad de cierto tipo de estrellas.



APENDICE I: LEMA.

Si  $A$  es una matriz diagonalizable a izquierda y derecha existe entonces una matriz hermitica y definida positiva  $Q$  con la siguiente propiedad

$$Q^{-1}A^+Q A = A Q^{-1}A^+Q \quad (AI.1)$$

DEMOSTRACION:

Si

$$A |e_i\rangle = \lambda_i |e_i\rangle, \quad \langle f_i| A = \lambda_i \langle f_i| \quad (AI.2)$$

con  $|e_i\rangle, \langle f_i|$  los autovectores a izquierda y derecha y  $\lambda_i$  los correspondientes autovalores, entonces es

$$A = \sum_i \lambda_i |e_i\rangle \langle f_i|, \quad A^+ = \sum_i \lambda_i^* |f_i\rangle \langle e_i| \quad (AI.3)$$

con  $\sum_i |e_i\rangle \langle f_i| = \mathbb{1}$ ,  $\langle f_i| e_j\rangle = \delta_{ij}$

Definiendo

$$Q = \sum_i |f_i\rangle \langle f_i| \quad (AI.4)$$

resulta

$$Q^{-1} = \sum_i |e_i\rangle \langle e_i| \quad (AI.5)$$

y se obtiene

$$A Q^{-1}A^+ = \sum_i |\lambda_i|^2 |e_i\rangle \langle e_i| \quad (AI.6)$$

$$A^+Q A = \sum_i |\lambda_i|^2 |f_i\rangle \langle f_i| \quad (AI.7)$$

Utilizando (AI.6) se prueba que

$$Q A Q^{-1}A^+Q = \sum_i |\lambda_i|^2 |f_i\rangle \langle f_i| \quad (AI.8)$$

y comparando con (AI.7), resulta (AI.1).

Si definimos  $\tilde{A} = Q^{-1}A^+Q$  como el nuevo adjunto generalizado para el producto interno con métrica  $Q$ , la ecuación (AI.1) es equivalente a  $A \tilde{A} = \tilde{A} A$ ,  $A$  es una matriz normal con métrica  $Q$ .

## APENDICE II: EFECTOS DE FLUCTUACION

Si incluimos ruido blanco en las ecuaciones lineales de movimiento obtenemos

$$\dot{\xi} + A \xi = \nu(t) \quad (\text{AII.1})$$

donde  $A$  y  $\xi$  son los definidos anteriormente. La función estocástica  $\nu(t)$  es un proceso de Ornstein-Uhlenbeck (OU) que representa una fuente de ruido blanco, con

$$\langle\langle \nu(t), \nu(t') \rangle\rangle = 2 \hat{Q} \delta(t-t') \quad (\text{AII.2})$$

donde la matriz hermítica y definida positiva  $\hat{Q}$  es la covariancia del proceso de OU, y  $\langle\langle X \rangle\rangle$  denota el valor medio de  $X$ .

Es posible asociar una ecuación de Fokker-Planck (Lavenda 1985; Haken 1978) a la ecuación de Langevin (AII.1)

$$\partial P(\xi) / \partial t = \partial_{\xi} \cdot (A\xi + \partial_{\xi} \cdot \hat{Q}) P(\xi) \quad (\text{AII.3})$$

donde  $P(\xi)$  es la densidad de probabilidad en el espacio de estados  $\xi$  que consideramos. En lo que sigue escalaremos las fluctuaciones con un parametro  $\varepsilon$  de manera que  $\hat{Q} = \varepsilon Q$  y  $Q$  se mantiene finito en el limite  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Dado que  $\hat{Q}$  es definida positiva y si suponemos que los autovalores de  $A$  tienen todos parte real positiva ( $A$  posee carácter estable), la ecuación de Fokker-Planck (AII.3) tiene una solución asintótica independiente del tiempo (Lavenda 1985; Graham 1978) de la forma

$$W(\xi) = \lim_{t \rightarrow \infty} (P(\xi), t) = C \exp(-V(\xi)/\varepsilon) \quad (\text{AII.4})$$

con  $V(\xi)$  definida positiva y  $V(0)=0$ . Si sustituimos  $P$  en (AII.3) por

W, y conservamos sólo los términos de orden  $1/\epsilon$  (despreciando términos de orden mayor en  $\epsilon$ ), obtenemos que

$$0 = \partial V / \partial t - \langle \partial V / \partial \xi, A \xi \rangle + \langle \partial V / \partial \xi, Q \partial V / \partial \xi \rangle \quad (\text{AII.5})$$

Este procedimiento es similar a la aproximación semiclásica de la mecánica cuántica y sugiere una analogía formal entre (AII.5) y la ecuación de Hamilton-Jacobi, donde  $V$  es la acción del sistema. El hamiltoniano correspondiente es

$$H = \langle P, Q P \rangle - \langle P, A \xi \rangle \quad (\text{AII.6})$$

con coordenadas canónicas  $\xi_i$  y momentos canónicos  $P_i = \partial V / \partial \xi_i$ . Las ecuaciones de Hamilton son

$$\dot{\xi} = -A \xi + 2 Q P \quad \dot{P} = P A - \partial / \partial \xi \langle P, Q P \rangle \quad (\text{AII.7})$$

Por lo tanto,

$$P = Q^{-1} (\dot{\xi} + A \xi) / 2 \quad (\text{AII.8})$$

El lagrangiano termodinámico de Onsager-Machlup correspondiente es

$$\mathcal{L} = \langle P, \dot{\xi} \rangle - H = \langle P, Q P \rangle = 1/4 \langle \dot{\xi} + A \xi, Q^{-1} (\dot{\xi} + A \xi) \rangle \quad (\text{AII.9})$$

si  $Q^{-1}$  es  $\mathbb{R}^+(\mathbb{R}_H)^{-1}\mathbb{R}$  de la ecuación (4.1.23). Debido al carácter positivo de  $Q$ ,  $V(\langle \xi \rangle) \equiv \theta(\bar{\xi})$  (con  $\bar{\xi} = \langle \xi \rangle$ ) es un candidato para función de Liapunov del sistema. En efecto, utilizando (AII.5) encontramos que

$$d\theta/dt = \langle \partial \theta / \partial \bar{\xi}, \dot{\bar{\xi}} \rangle = -\langle \partial \theta / \partial \bar{\xi}, Q \partial \theta / \partial \bar{\xi} \rangle \leq 0 \quad (\text{AII.10})$$

Más aún, si  $\theta(\bar{\xi})$  se escribe como una forma cuadrática en  $\bar{\xi}$

$$\theta(\bar{\xi}) = 1/2 \langle \bar{\xi}, \hat{S} \bar{\xi} \rangle, \quad (\text{AII.11})$$

obtenemos sustituyendo en la ecuación (AII.5)

$$A \hat{S}^{-1} + \hat{S}^{-1} A^+ = 2 Q \quad (\text{AII.12})$$

(recordando que  $\hat{S}^+ = \hat{S}$ ). Por lo tanto, si  $A = Q^{-1}S$  y  $Q^{-1} = Q^+(Q_H)^{-1}Q$ , se demuestra que

$$\hat{S} = S. \quad (\text{AII.13})$$

Entonces  $\theta(\bar{\xi})$  es la función de Liapunov  $\eta$  que hemos utilizado en el trabajo.

En el límite  $\varepsilon \rightarrow 0$  la acción  $V$ , que es la función de Liapunov  $\theta(\bar{\xi}) = \eta$ , está relacionada con el lagrangiano (AII.9) por la ecuación

$$\eta = \int \mathcal{L} dt \quad (\text{AII.14})$$

TABLA 1

autovalor (3.25E-4,2.0001) autovector (-19827,39777);(-33.2,3.1E-2);(1,0);(79552.9-39669.7);(-7.2E-2,-66.4) (3.2E-4,2);(-19.89,9.9);(-397.82,0.13);(4.39E-3,3.96E-5)	$\nu = 0$
autovalor (-1.47E-3,3.9997) autovector (-5.09,5.06);(-59301,-36335);(1,0);(-20.2,20.3);(145413,-237131); (-1.47E-3,3.9996);(0.9,1.48);(-601,59);(-20,-12)	$\nu = 0$
autovalor (5.03E-2,1.9977) autovector (-0.18,19.87);(-0.32,2.94E-2);(1,0);(-39.710.64);(-7.48E-2,-0.63); (5.03E-2,1.9977);(9.94E-3,3.6E-4);(0.15,8.9E-2);(6.6E-3,-3.39E-5)	$\nu = .1$
autovalor (-4.837,3.9964) autovector (1.337,1.27E-2);(-1.87,39.92);(1,0);(1.4E-25.34);(-159.62,-5.55); (4.84E-2,3.996);(1E-3,-2.7E-4);(0.46,0.14);(6.22E-3,-1.32E-2)	$\nu = .1$
autovalor (0.248,1.937) autovector (-0.213,3.75);(-0.29,0.1);(1,0);(-7.32,0.52);-0.27,-0.53);(-7.32,0.52) (0.248,1.937);(1.9E-3,3.7E-4);(2.5E-2,2.53-2);(6.6E-3,-8.14E-4)	$\nu = .5$
autovalor (-0.2287,3.9216) autovector (1.34,5.5E-2);(-1.9E-3,7.78);(1,0);(9.19E-25.28);(-30.95,-5.62); (-0.2287,3.9218);(2.29E-4,-2.81E-4);(8,6E-2,.38E-2);(6.1E-3,2.5E-3)	$\nu = .5$
autovalor (0.417,1.706) autovector (-0.39,1.57);(-0.19,0.13);(1,0);(-2.84,-11E-2);(-0.3,-0.27); (0.417,1.707);(8.2E-4,4.4E-4);(8.4E-3,1.65-2);(6.6E-3,5.51E-6)	$\nu = 0.01$
autovalor (-0.345,3.735) autovector (1.38,E-1);(-2.0,-3E-4);(1,0);(0.1,5.19;(-14.3,-6.34); (-0.34,3.735);(1.5E-4,-3E-4);(3.7E-2,3.3E2);(6.E-3,1.1E-3)	$\nu = 0.01$

Tabla 1- Autovalores y autovectores del modelo de BG.  
 $\nu$  = viscosity coefficient



## REFERENCIAS

- Aizenman, M.L., y Cox, J.P. 1974, *Ap. J.*, 194, 663.
- Allen, C.W. 1973, *Astrophysical Quantities* (London: The Athlone Press).
- Atherton, R.W., y Homsy, G.M. 1975, *Stud. Appl. Math.*, 54, 31.
- Baker, N. 1966, *Stellar Evolution* (New York: Plenum Press).
- Boor, C. 1978, *A Practical Guide to Splines* (New York: Springer-Verlag).
- Buchler, J.R. 1978, *Ap. J.*, 220, 629.
- Buchler, J.R., y Goupil, M. 1984, *Ap. J.*, 279, 394.
- Buchler, J.R., Goupil, M. y Kovacs, G. 1987, *Phys. L.*, 126, 177.
- Buchler, J.R., y Kovacs, G. 1987, *Ap. J.*, 320, L57.
- Buchler, J.R., y Regev, O. 1982, *Astr. Ap.*, 114, 188.
- 1983, *ibid.* 123, 331.
- Castor, J.I. 1971, *Ap. J.*, 166, 109.
- Chandrasekhar, S. 1964, *Ap. J.* 139, 664.
- Costa, A., Fontenla, J. y Ringuélet, A. 1989, *Ap. J.* 339, 314.
- Costa, A. y Ringuélet, A. 1985, *Rev. Mex. As. Astrof.* 10, 293.
- Cox, J.P. 1974, *Rep. Prog. Phys.*, 37, 563.
- Cox, J.P. 1980, *Theory of Stellar Pulsation* (New Jersey: Princeton)
- Cox, J.P., Davey, W.R., y Aizenman, M.L. 1974, *Ap. J.*, 191, 439.
- Cox, J.P., y Giuli, P.Th. 1968, *Principles of Stellar Structure* (New York: Gordon and Breach).
- Cox, J.P., Hansen, C.J., y Davey, W.R. 1973, *Ap. J.*, 182, 885.
- Cox, J.P. y Stellingwerf, R.F. 1979, *Pub. A.S.P.*, 91, 319.
- Davey, W.R., y Cox, J.P. 1974, *Ap. J.*, 189, 113.
- Demaret, J. 1974, *Ap. Sp. Sc.*, 31, 305.
- 1975, *ibid.* 33, 189.
- 1976, *ibid.* 45, 31.
- Eckmann, J.P. y Ruelle, D. 1985, *Rev. Mod. Phys.*, 57, 617.
- Eddington, A.S., 1919, *Monthly Notices Roy. Astron. Soc. London*, 79, 177.
- Fox, R.F., 1979, *J. Chem. Phys.*, 70, 4660.
- Fox, R.F., 1980, *Proc. Acad. Sci.*, 77, 3763.
- Glansdorff, P., y Prigogine, I. 1970, *Physica*, 46, 344.
- Glansdorff, P., y Prigogine, I. 1971, *Thermodynamic Theory of Structure Stability and Fluctuations* (New York: Wiley-Interscience).
- Glansdorff, P., Nicolis, G. y Prigogine, I. 1974, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, 71, 197.
- Gómez, D., Sicardi Schifino, A. y Ferro Fontán, C. 1989, *Ap. J.* en prensa.

Graham, R. 1978, Lect. Notes in Phys., 84, 83.

Gruber, R., Troyon, F., Berger, D., Bernard, L.C., Rousset, S., Schreiber, R.,  
Kovacs, G. y Buchler, J.R. 1988, Ap. J., 334, 971.

Haken, H. 1978, Synergetics (New York: Springer-Verlag).

Hassard, B.D. Kazarinoff, N.D. y Wan, W.H. 1981, Theory and Applications of  
Hopf Bifurcation (Cambridge: Univ. Press).

IMSL Library 1984 (Texas: International Math. and Stat. Libraries).

Iooss, G. y Joseph, D.D. 1980, Elementary Stability and Bifurcation Theory  
(Undergraduate Text in Mathematics, Berlin: Springer).

Isaacson, E. y Keller, H., Analysis of Numerical Methods (New York: Wiley)

Keizer, J. 1976, J. Chem. Phys., 69, 2609.

Kerner, W., Lerbinger, K., Steuerwald, J., 1985, Comput. Phys. Commun., 38, 27.

Kerner, W., Scheider, W., y Roberts, K.V., 1981, Comput. Phys. Commun., 21, 323.

Khachaturyan, A. 1986, J. Math. Phys., 27, 1834.

Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D., Jr., and Vecchi, M.P. 1983, Science, 220, 671.

Landau, L.D. y Lifshitz, E.M. 1959, Statistical Physics (London: Pergamon  
Press).

Lavenda, B.H. 1978, Thermodynamics of Irreversible Processes (London: Mac  
Millan Press).

----- 1985, Nonequilibrium Statistical Thermodynamics (New York: Wiley).

Ledoux, P., y Walraven, Th. 1958, Hdb. d. Phys., 51, 353.

Lefschetz S. 1977, Differential Equations: Geometric Theory (New  
York: Dover).

Nayfeh, A.H. 1973, Perturbation Methods (New York: Wiley).

Nicolis, G., y Prigogine, I. 1977, Self-Organization in Nonequilibrium  
Systems (New York: Wiley).

Nicolis, G., y Prigogine, I. 1979, Proc. Acad. Sci., 76, 6060.

Onsager, L., y Machlup, S. 1953, Phys. Rev., 91, 1505.

Prigogine, I. 1967, Thermodynamics of Irreversible Processes (New  
York: Wiley).

Rudd, T.J., y Rosemberg, R.M. 1970, Astron. Astrophys. 6, 193.

Simon, N.R. 1971, Ap. J., 164, 331.

Sobouti, Y. 1977, Astr. Ap. 55, 327.

Stellingwerf, R.F. 1972, Astron. Astrophys., 21, 91.

Stellingwerf, R.F. 1974, Ap. J., 192, 139.

Stellingwerf, R.F. 1975, Ap. J., 195, 441.

