

Tesis de Posgrado

Dinámica variacional en sistemas cuánticos de muchos cuerpos

Jezek, Dora Marta

1990

Tesis presentada para obtener el grado de Doctor en Ciencias Físicas de la Universidad de Buenos Aires

Este documento forma parte de la colección de tesis doctorales y de maestría de la Biblioteca Central Dr. Luis Federico Leloir, disponible en digital.bl.fcen.uba.ar. Su utilización debe ser acompañada por la cita bibliográfica con reconocimiento de la fuente.

This document is part of the doctoral theses collection of the Central Library Dr. Luis Federico Leloir, available in digital.bl.fcen.uba.ar. It should be used accompanied by the corresponding citation acknowledging the source.

Cita tipo APA:

Jezek, Dora Marta. (1990). Dinámica variacional en sistemas cuánticos de muchos cuerpos. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2293_Jezek.pdf

Cita tipo Chicago:

Jezek, Dora Marta. "Dinámica variacional en sistemas cuánticos de muchos cuerpos". Tesis de Doctor. Facultad de Ciencias Exactas y Naturales. Universidad de Buenos Aires. 1990.
http://digital.bl.fcen.uba.ar/Download/Tesis/Tesis_2293_Jezek.pdf

EXACTAS UBA

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales



UBA

Universidad de Buenos Aires

UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

DEPARTAMENTO DE FISICA

DINAMICA VARIACIONAL EN SISTEMAS CUANTICOS

DE MUCHOS CUERPOS

por

Dora Marta Jezek

Directora de Tesis : Dra. Ester Susana Hernández

Trabajo de tesis para optar al título de
Doctora en Ciencias Físicas

Febrero 1990

2293

f. 2

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecerle en primer instancia a mi Directora de Tesis la Dra. Ester Susana Hernández por su gran dedicación y por su empuje cuando las cosas no iban de la manera prevista, ella siempre encontraba algún camino para seguir adelante, a pesar de que este estuviese muy lejos del trazado originalmente.

En segunda instancia le quiero agradecer al grupo de Física Estadística y Nuclear por el apoyo y compañerismo encontrados en él.

También quiero agradecer al Dr. Patricio Leboeuf las charlas con él mantenidas que fueron de provecho para esclarecer ciertos temas afines a esta tesis.

INDICE

Introducción. . .	Pag. 4
Capítulo 1. Fundamentos Geométricos	8
1.1. Algebras y operadores	8
1.2. Estados Coherentes	16
1.2.1. Estados Coherentes Generalizados	17
1.2.2. Estados Coherentes Asociados a $SU(2)$	19
1.2.3. Estados Coherentes Asociados a $SU(1,1)$	23
1.3. Teoría de puntos críticos	26
Capítulo 2. Fundamentos Dinámicos	34
Dinámica Variacional	34
Dinámica de Hartree Fock Dependiente del Tiempo	39
Capítulo 3. Planteo de la Dinámica	45
3.1. Cálculo de las correlaciones de los generadores del álgebra	45
3.2. Caracterización geométrica de los valores medios de los observables	48
3.3. Dinámica	51

Capítulo 4. Dinámica Variacional Conservativa en $SU(2)$	54
4.1. Hamiltonianos Lineales	55
4.2. Hamiltonianos Cuadráticos	55
4.2.1. Hamiltonianos Cuadráticos con simetrías	57
4.2.2. Hamiltonianos Cuadráticos sin simetrías	63
4.3. Conclusiones.	68
Capítulo 5. Dinámica Variacional Conservativa en $SU(1,1)$	70
5.1. Hamiltonianos Lineales	70
5.2. Hamiltonianos Cuadráticos	77
5.2.1. Hamiltonianos Cuadráticos con simetrías	77
5.2.2. Hamiltonianos Cuadráticos en ausencia de simetrías82
5.3. Conclusiones84
Capítulo 6. Conjuntos de Bifurcación	86
6.1. Hamiltonianos $SU(1,1)$ con simetrías	88
6.2. Hamiltonianos $SU(1,1)$ en ausencia de simetrías	95
6.3. Conclusiones	97
Capítulo 7. Dinámica Variacional Disipativa	98
7.1. Dinámica gradiente sobre el espacio de fases (DGEF)	98
7.2. Dinámica Gradiente en la variedad	101
7.3. Aplicación	104
7.4. Conclusiones	117

Verificación de la fórmula de "factorización"
los valores medios de los observables . . .

Equivalencia entre el teorema de Ehrenfest y
ecuación del tipo Euler o Bloch

INTRODUCCION

Este trabajo se inserta dentro de una línea de investigación iniciada en el grupo de Física Estadística con el estudio del problema dinámico de un sistema de muchos fermiones, y en particular, de la evolución generada por un hamiltoniano propuesto por Lipkin ^{Lil}, con numerosas aplicaciones en Física Nuclear, que puede escribirse en función de los generadores del álgebra SU(2). Este hamiltoniano y las propiedades estáticas y dinámicas del sistema de N cuerpos habían recibido abundante atención por parte de los estudiosos en el tema. En particular Krieger ^{Kr1} integró numéricamente las ecuaciones de movimiento de Hartree Fock Dependiente del Tiempo (HFDT), analizó las características de las orbitas y comparó la evolución temporal del sistema así aproximado con la dinámica exacta. Por su parte Kan ^{Ka1}, Lichtner, Dworzecka y Griffin, estudiaron la misma dinámica pero en el espacio de fases, analizando cualitativamente la estructura de las superficies de energía constante, y mostrando que a medida que se intensifica la interacción estas soluciones se someten a un cambio topológico asociado a una transición de fases no termodinámica. En particular dentro del grupo de Física Estadística y Nuclear se trabajó como en un laboratorio de física teórica debido a que el sistema dinámico generado por este hamiltoniano es susceptible de resolverse en forma exacta y por lo tanto resulta interesante para probar métodos aproximativos; de este modo, se analizaron las desviaciones de la dinámica de HFDT respecto de la exacta, expandiendo la función de onda en una base de Dicke "móvil" ^{So1}

A partir de la observación de que esta dinámica (HFDT) no conservaba cierta simetría de la dinámica exacta (simetría de rotación en un ángulo π alrededor del eje J_y) a posteriori se encararon dos trabajos: i) Se propuso otra dinámica aproximada, llamada Dinámica Variacional Conservadora de la Simetría (DVCS) ^{So2} que sí la conservase, mejorando esta última ampliamente a la anterior (HFDT) y ii) Se estudió la dinámica de HFDT para un hamiltoniano que no presentara dicha simetría ^{Je1}, identificando y clasificando las zonas de buena concordancia entre la dinámica exacta y la aproximada.

Por otro lado el grupo dinámico $SU(1,1)$ se utilizó por diversos autores para describir aproximadamente sistemas bien diferentes, a saber, sistemas que incluyen movimiento armónico ^{Wy1, Ge1}, descripción de excitaciones elementales en superfluidos ^{So3, Bi1}, el problema de Coulomb ^{Ge1}, procesos de dos fotones ^{Da1}, estados s del oscilador de Morse ^{Co1}, movimiento anarmónico ^{Ge2}, movimiento armónico forzado ^{Ge4}, entre otras ^{Wy1}. La mayoría de estos sistemas presentan hamiltonianos lineales en los generadores del algebra $SU(1,1)$, mientras que una amplia gama de hamiltonianos cuadráticos aun queda sin estudiar, entre ellos por ejemplo el que corresponde al movimiento oscilatorio con perturbaciones de orden cuarto en el campo medio ^{Ge3, Da2} y el que describe la dinámica en superfluidos en presencia de interacciones residuales de cuasipartículas ^{Fe1}.

En este trabajo pretendemos unificar, más allá del sistema original que le dió origen, la dinámica variacional ^{Di1} de sistemas cuyos hamiltonianos sean susceptibles de escribirse con los generadores de cualquiera de las dos álgebras ($SU(2)$ o $SU(1,1)$),

introduciendo un método geométrico que permite encontrar las propiedades topológicas de las órbitas (tipos de flujos, puntos críticos) sin necesidad de integrar numéricamente las ecuaciones de movimiento como se hacía tradicionalmente $K_{r1}, K_{a1}, S_{o1}, S_{o2}$. La clave del mismo consiste en trabajar directamente en el espacio que subtiende a la variedad asociada al grupo (esfera o hiperboloide, según se trate de $SU(2)$ o $SU(1,1)$ respectivamente), en lugar de utilizar las usuales variables complejas K_{r1} o las variables canónicas K_{a1} , de esta manera se obtienen las órbitas simplemente como intersecciones entre cuádricas. Por otro lado las ecuaciones de movimiento también se simplifican enormemente, no solo su expresión, que adquiere carácter vectorial asemejándose a una ecuación de Bloch, sino también su cálculo, existiendo una completa analogía entre las dos álgebras.

Esta tesis se organiza de la siguiente manera. En el Capítulo 1 introducimos una serie de conceptos que tienen que ver con la geometría de la dinámica. En particular en la primera sección damos un breve repaso sobre Álgebras de Lie, enumerando las propiedades de los grupos que nos interesan, en la segunda sección hablamos sobre los respectivos estados coherentes que son los que utilizaremos luego como funciones de onda de prueba en el principio variacional, y por último (tercera sección) presentamos un resumen de Teoría de Puntos Críticos y de Catástrofes. En el Capítulo 2 deducimos las ecuaciones de movimiento usuales a partir del principio variacional y describimos el método de Hartree Fock Dependiente del Tiempo, dado que en el caso de que el hamiltoniano sea susceptible de describir un sistema fermiónico de N partículas ambas dinámicas coinciden. El método geométrico que proponemos y

la respectiva ecuación de movimiento se desarrollan en el Capítulo 3, mientras que los Capítulos 4 y 5 versan sobre aplicaciones del método a hamiltonianos que se escriben en los generadores de $SU(2)$ y $SU(1,1)$ respectivamente, diferenciando entre hamiltonianos lineales y cuadráticos con o sin simetrías. En el capítulo 6 presentamos los diagramas de bifurcación en el espacio de parámetros, de esta manera quedan clasificadas las dinámicas en regiones topológicamente equivalentes. Y por último en el Capítulo 7, dentro de esta misma óptica introducimos disipación en una forma semejante a la desarrollada por Gilmore^{G11} según el método de Lagrange-Lyapunov pero que carece de ambigüedades y/o singularidades en los bordes del espacio de fases. El Capítulo 8 contiene las conclusiones generales. Los Apéndices corresponden a cálculos auxiliares que por una cuestión de elegancia no se incluyen en el desarrollo del capítulo respectivo.

Capítulo 1. Fundamentos Geométricos

En este capítulo presentaremos los elementos básicos que conciernen a la geometría de los sistemas que son susceptibles de ser tratados por este método. Para ello en la primera sección ofreceremos una síntesis de propiedades de las dos álgebras que nos van a interesar ($SU(2)$ y $SU(1,1)$), que son las responsables de la variedad en donde van a vivir los estados que utilizaremos. En la segunda sección introduciremos estos estados (Estados Coherentes) y por último desarrollaremos la teoría de puntos críticos que será de utilidad para el estudio de las características de los flujos respectivos, que se determinan principalmente por la ubicación y el carácter de los puntos críticos del valor medio del hamiltoniano respecto de los estados coherentes.

1.1 Álgebra y Operadores.

Como los hamiltonianos que vamos a estudiar se pueden describir en términos de los generadores de las álgebras $SU(2)$ y $SU(1,1)$, en esta sección resumiremos sus propiedades y reglas de conmutación y también proveeremos ejemplos de cómo se obtienen estos hamiltonianos a partir de sus expresiones en términos de otros operadores que pueden ser por ejemplo, operadores de creación y aniquilación de partículas, operadores impulso y posición, como veremos más adelante. De aquí en más, salvo alguna

excepción, utilizaremos la expresión en los generadores del álgebra solamente pero es importante tener en mente que éstos pueden representar distintas situaciones físicas.

Veamos ahora algunos conceptos generales acerca de álgebras de Lie^{Gi2, Li2}. Como es sabido un álgebra de Lie se define como un conjunto de operadores \hat{X}_i que satisfacen la siguiente regla de conmutación

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = \sum_k C_{ij}^k \hat{X}_k \quad (1.1.1)$$

donde los coeficientes C_{ij}^k son constantes (constantes de estructura). Además siempre existe al menos un operador \hat{C}_l (Casimir) que conmuta con todos los demás operadores, es decir,

$$[\hat{C}_l, \hat{X}_i] = 0 \quad \forall i. \quad (1.1.2)$$

Por otro lado si uno elige un observable, llamémosle \hat{O}_i , y a todos los demás \hat{X}_i pertenecientes al conjunto, que conmutan con él, los denotamos con \hat{O}_i (ψ_i), podemos entonces encontrar una base de autoestados comunes a \hat{O}_i y \hat{C}_l con autovalores ϕ_i y ξ_l .

Los restantes operadores del conjunto pueden ser escritos en término de un conjunto linealmente independiente de operadores de subida y bajada \hat{P}_n , que satisfacen las siguientes reglas de conmutación :

$$[\hat{C}_l, \hat{P}_n] = 0 \quad (1.1.3)$$

$$[\hat{O}_i, \hat{P}_n] = \alpha_{ni} \hat{P}_n \quad (1.1.4)$$

Los operadores \hat{P}_n entonces cambian los autovalores de los operadores \hat{O}_i en una cantidad α_{ni} . Es decir,

$$\hat{P}_n | \epsilon_l, \phi_i \rangle = \kappa(\epsilon_l, n, \phi_i) | \epsilon_l, \phi_i + \alpha_{ni} \rangle \quad (1.1.5)$$

por lo tanto la ecuación (1.1.5) junto con el resultado trivial

$$\hat{O}_i | \epsilon_l, \phi_i \rangle = \phi_i | \epsilon_l, \phi_i \rangle \quad (1.1.6)$$

define los elementos de matriz de todos los operadores del grupo para un conjunto completo de estados.

A nosotros en particular nos interesan las álgebras SU(2) y SU(1,1), veamos cada una de ellas :

● SU(2)

- Los generadores del álgebra son : $\{ \hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3 \}$
- Las reglas de conmutación son :

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = i \epsilon_{ijk} \hat{J}_k \quad (1.1.7)$$

Queremos aclarar que a lo largo de toda la tesis adoptaremos $\hbar = 1$, en caso contrario lo aclararemos explícitamente.

- Continuando con la definición de los operadores, el Casimir

respectivo es :

$$\hat{C} = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 \quad (1.1.8)$$

con autovalor $J(J+1)$.

- Si elegimos $\hat{U}_1 = \hat{J}_3$, los operadores de subida y bajada son :

$$\hat{J}_\pm = \hat{J}_1 \pm i \hat{J}_2 \quad (1.1.9)$$

ya que cumplen las relaciones de conmutación del tipo (1.1.4), a saber :

$$[\hat{J}_3, \hat{J}_\pm] = \pm \hat{J}_\pm \quad (1.1.10)$$

- Sea $|J, m\rangle$ la base de autoestados correspondiente a \hat{J}_3 con autovalores m ($-J \leq m \leq J$), esta verifica :

$$\hat{J}_+ |J, m\rangle = \sqrt{J(J+1)-m(m+1)} |J, m+1\rangle \quad (1.1.11a)$$

$$\hat{J}_- |J, m\rangle = \sqrt{J(J+1)-m(m-1)} |J, m-1\rangle \quad (1.1.11b)$$

● SU(1,1)

- El conjunto de operadores es $\{\hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{K}_3\}$

- Las reglas de conmutación son :

$$[\hat{K}_1, \hat{K}_2] = -i\hat{K}_3, \quad [\hat{K}_2, \hat{K}_3] = i\hat{K}_1 \quad \text{y} \quad [\hat{K}_3, \hat{K}_1] = i\hat{K}_2 \quad (1.1.12)$$

- El Casimir es :

$$\hat{C} = \hat{K}_3^2 - \hat{K}_1^2 - \hat{K}_2^2 \quad (1.1.13)$$

con autovalor $K(K-1)$.

- Eligiendo $\hat{D}_1 = \hat{K}_3$, los operadores de subida y bajada son :

$$\hat{K}_\pm = \hat{K}_1 \pm i\hat{K}_2 \quad (1.1.14)$$

ya que cumplen:

$$[\hat{K}_3, \hat{K}_\pm] = \pm \hat{K}_\pm \quad (1.1.15)$$

- Sea $|K, \mu\rangle$ la base de autoestados correspondientes a \hat{C} y \hat{K}_3 , este último con autovalor $\mu = k+m$ (con $m \in \mathbb{N}^{>0}$), ésta verifica^{Pr1}:

$$\hat{K}_+ |K, \mu\rangle = \sqrt{(-K+\mu+1)(k+\mu)} |K, \mu+1\rangle \quad (1.1.16a)$$

$$\hat{K}_- |K, \mu\rangle = \sqrt{(k+\mu-1)(-K+\mu)} |K, \mu-1\rangle \quad (1.1.16b)$$

Veamos ahora cómo se construyen hamiltonianos escritos en términos de estos operadores a partir de otros. Por ejemplo, es fácil ver que los conmutadores entre productos de operadores de creación y aniquilación de partículas dan nuevamente productos de este mismo tipo de operadores. Por lo tanto se verifica (1.1.1) y para un sistema con un número finito de niveles estos productos definen un álgebra de Lie. Además si los productos conservan el

número de partículas, los conmutadores también lo harán y análogamente si no lo conservan éstos últimos tampoco lo harán. Por lo tanto se pueden definir dos álgebras de Lie distintas. El ejemplo mas sencillo de conservación de partículas es el caso de SU(2) (grupo compacto) y el de no conservación de partículas SU(1,1), obteniéndose de la siguiente manera :

Sean a_k^\dagger y a_k operadores de creación y de aniquilación de una partícula en un estado cuántico k .

Los productos bilineales pueden ser del tipo $a_k^\dagger a_m$ que mantienen el número de partículas constante o $a_k^\dagger a_m^\dagger$ y $a_k a_m$ que cambian el número de partículas.^{Li2}

Para un sistema de dos niveles como muestra la Figura 1.1.1 :

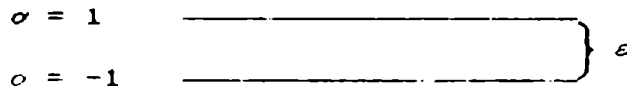


Figura 1.1.1 Esquema de dos niveles, donde ϵ representa el espaciamiento de energía y σ el número cuántico asociado a cada nivel.

resulta fácil verificar que los operadores definidos como :

$$\hat{J}_+ = \sum_p a_{p,1}^\dagger a_{p,-1} \quad (1.1.17a)$$

$$\hat{J}_- = \sum_p a_{p,-1}^\dagger a_{p,+1} \quad (1.1.17b)$$

$$\hat{J}_3 = 1/2 \sum_{p,\sigma} \sigma a_{p,\sigma}^\dagger a_{p,\sigma} \quad (1.1.17c)$$

cumplen las reglas de conmutación de momento angular, es decir las definidas por las ecuaciones (1.1.7) y por otro lado definiendo :

$$\hat{K}_+ = \sum a_{p,+1}^\dagger a_{p,-1}^\dagger \quad (1.1.18a)$$

$$\hat{K}_- = \sum a_{p,-1} a_{p,+1} \quad (1.1.18b)$$

$$\hat{K}_3 = 1/2 (a_{k,+1}^\dagger a_{k,+1} - a_{k,-1} a_{k,-1}^\dagger) \quad (1.1.18c)$$

estos cumplen las reglas definidas por las ecuaciones (1.1.12). En ambos casos el operador número de partículas es:

$$\hat{N} = \sum a_{p,k}^\dagger a_{p,k} \quad (1.1.19)$$

El ejemplo mas estudiado dentro del algebra SU(2) es el Modelo de Lipkin L_{11}, K_{11}, K_{r1} . Este modelo se puede esquematizar de la siguiente manera :

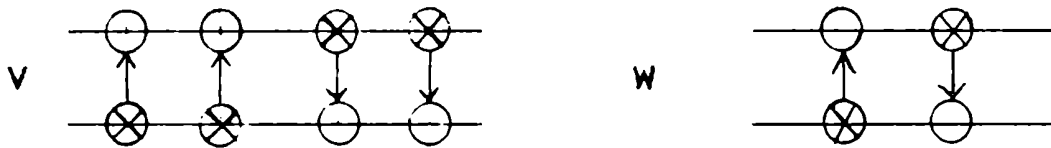


Figura 1.1.2. Esquema de interacciones para el modelo de Lipkin.

y su hamiltoniano es :

$$\hat{H} = \epsilon \hat{J}_3 + 1/2 V (\hat{J}_+^2 + \hat{J}_-^2) + 1/2 W (\hat{J}_+ \hat{J}_- + \hat{J}_- \hat{J}_+) \quad (1.1.20)$$

El operador \hat{J}_3 representa la mitad de la diferencia del número de partículas entre el nivel superior y el inferior, en tanto que \hat{J}_+ (\hat{J}_-) es el operador de excitación o transferencia que crea (destruye) un par partícula-agujero al promover una partícula del nivel inferior (superior) al superior (inferior). Este modelo posee una simetría importante ya que el hamiltoniano conserva (en términos de partículas) la paridad de la diferencia entre el número de partículas excitadas ($\sigma = 1$) y el de las no excitadas ($\sigma = -1$), en términos geométricos esto significa que conmuta con el operador asociado con una rotación en un ángulo π alrededor del eje J_3 .

Como es bien sabido este álgebra además tiene múltiples aplicaciones más allá de describir sistemas de N partículas $Ar3$, $He1$, $Na1$, $Di2$, $Gi3$, $Ar4$, $Gl1$, $Gl2$, $Gi4$.

Por su parte dentro del álgebra $SU(1,1)$, que tiene numerosas realizaciones Wyl , $Da1$, $Da2$, un ejemplo recientemente estudiado $Ge1$ describe al oscilador armónico isótropo tridimensional, definiendo:

$$\hat{K}_3 = 1/4 (\hat{p}^2 + \hat{r}^2) \quad (1.1.21a)$$

$$\hat{K}_1 = 1/4 (\hat{p}^2 - \hat{r}^2) \quad (1.1.21b)$$

$$\hat{K}_2 = 1/4 (\hat{r} \cdot \hat{p} + \hat{p} \cdot \hat{r}) \quad (1.1.21c)$$

Resulta fácil verificar que estos operadores cumplen las reglas de conmutación (1.1.12) y que el hamiltoniano se puede escribir como

$$\hat{H} = \epsilon \hat{K}_3 \quad (1.1.22)$$

con $\epsilon = 2\pi\omega$, siendo ω la frecuencia del oscilador. Nuevamente este hamiltoniano observa la misma simetría que el anterior, en este caso conmuta directamente con el operador \hat{K}_3 . Como veremos más adelante estas simetrías tienen una consecuencia directa en la determinación de los puntos críticos de la dinámica variacional y por lo tanto describiremos por separado a las provenientes de hamiltonianos que sean invariantes frente a rotaciones en un ángulo π alrededor del eje \hat{J}_3 (\hat{K}_3) y a los que no, escritos en término de los operadores de SU(2) (SU(1,1)), llamándolos hamiltonianos con o sin simetrías respectivamente.

1.2 Estados coherentes

Dado que en esta tesis se estudia la dinámica variacional aplicada a estados coherentes de grupos de Lie Pe_1, Pe_2, K_{11} , en particular a los asociados a los grupos SU(2) y SU(1,1), resulta conveniente en esta sección introducir una síntesis de definiciones y principales propiedades. Para ello en la primera subsección definiremos a los estados coherentes generalizados (como generalización de los del oscilador armónico) y luego en las dos subsiguientes nos abocaremos en forma escueta a describir los estados asociados a los grupos SU(2) y SU(1,1) respectivamente.

1.2.1 Estados coherentes generalizados

Como es sabido los estados coherentes del oscilador armónico $|\alpha\rangle$, son los autoestados del operador de aniquilación a Me1 y Me2

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (1.2.1.1)$$

con autovalores α pertenecientes a todo el plano complejo.

Otra forma de definir a estos mismos estados $|\alpha\rangle$ es

$$|\alpha\rangle = e^{(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)} |0\rangle \quad (1.2.1.2)$$

siendo $|0\rangle$ el estado fundamental del oscilador. La expansión en la base de autoestados del hamiltoniano $|n\rangle$ es:

$$|\alpha\rangle = \frac{1}{\sqrt{|\alpha|^2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \quad (1.2.1.3)$$

Un estado coherente da una función de onda gaussiana que no se dispersa en el tiempo, el módulo de α especifica la amplitud de oscilación y su argumento $\varphi = \text{Re}(\alpha)/\text{Im}(\alpha)$ la fase.

Una propiedad de estos estados es que no son ortogonales entre sí. Más aun son sobrecompletos, es decir, contienen más vectores que los necesarios para la expansión de un estado arbitrario.

Otra propiedad es que son de incerteza mínima es decir $\Delta p \Delta q = \hbar/2$ y por lo tanto son los estados cuánticos cuyas propiedades están mas proximas a las de los estados clásicos.

Recordemos que los operadores de subida y bajada conjuntamente con la identidad $\mathbb{1}$ satisfacen las bien conocidas reglas de conmutación :

$$[a, a^\dagger] = \mathbb{1}, [a, \mathbb{1}] = [a^\dagger, \mathbb{1}] = 0 \quad (1.2.1.4)$$

y de esta manera generan un álgebra de Lie de tres parámetros. El grupo W_1 correspondiente a este álgebra de Lie es el grupo de transformaciones de la forma $T(g) = \exp(it) \exp(\alpha a^\dagger - \alpha^* a)$, $g = (t, \alpha)$, que se llama : grupo de Heisenberg-Weyl.

Entonces según la definición (1.2.1.2) un estado coherente del oscilador se obtiene por la acción de $T(g)$ sobre el estado fundamental $|0\rangle$; (o sobre el vacío si lo pensamos en términos de bosones); a menos de una fase, es decir :

$$T(g)|0\rangle = e^{i\theta} |\alpha\rangle \quad (1.2.1.5)$$

Ahora bien, cuando uno se encuentra con dinámicas con otros grupos de simetrías veamos cómo es posible extender la definición de estos estados.

La construcción de un conjunto de estados coherentes generalizados se basa en la relación ^{Pe1 y Pe2}

$$|\psi_g\rangle = T(g) |\psi_0\rangle \quad (1.2.1.6)$$

donde $T(g)$ es una representación del grupo G , y $|\psi_0\rangle$ es un vector fijo en el espacio vectorial de la representación $T(g)$. Entonces $\{ |\psi_g\rangle \}$ es el conjunto de estados coherentes generalizados. Más

específicamente un estado coherente queda determinado por un punto en el espacio cociente G/H donde H es el subgrupo de estabilidad del estado $|\psi_0\rangle^{G \cdot Z}$.

En muchos casos son los estados cuánticos que tienen las propiedades más próximas a las de los estados clásicos, así como en el oscilador, y por lo tanto permiten el pasaje de la descripción cuántica a la clásica de la manera más natural.

Veamos ahora en particular las características y propiedades de los estados coherentes correspondientes a los grupos $SU(2)$ y $SU(1,1)$ que son los que utilizaremos a posteriori.

1.2.2 Estados coherentes de $SU(2)$

El álgebra de $SU(2)$, como hemos visto en la Sección 1.1 tiene como generadores del álgebra a \hat{J}_+ , \hat{J}_- y \hat{J}_3 , éstos son los operadores de la representación $\Gamma^J(g)$ del grupo de rotaciones.

Por otro lado, como también hemos visto, se puede definir como base del espacio a $|J,m\rangle$ con $-J \leq m \leq J$. Por lo tanto según la ec.(1.2.1.6) el estado coherente viene definido por

$$T^J(g) |J,-J\rangle \quad (1.2.2.1)$$

Además dado que un operador de $T^J(g)$ se puede expresar en la forma:

$$T^J(g) = \exp(-i\varphi \hat{J}_3) \exp(-i\vartheta \hat{J}_2) \exp(-i\psi \hat{J}_3) \quad (1.2.2.2)$$

se deduce entonces que un estado coherente de spin queda especificado por el versor $\hat{n} = (\text{sen } \vartheta \cos \varphi, \text{sen } \vartheta \text{ sen } \varphi, \cos \vartheta)$

$$|n\rangle = e^{i\alpha(n)} e^{-i\varphi \hat{J}_3} e^{-i\vartheta \hat{J}_2} |\psi_0\rangle \quad (1.2.2.3)$$

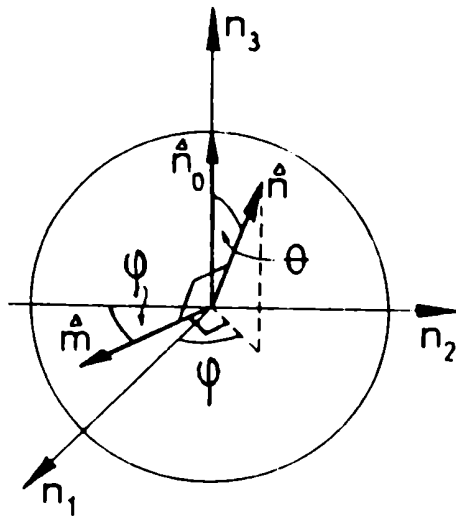
con $|\psi_0\rangle = |J, -J\rangle$. Esta parametrización del conjunto de estados coherentes esta de acuerdo con la afirmación general de que un estado coherente se determina por un punto en el espacio cociente G/H donde H es el subgrupo de estabilidad de $|J, -J\rangle$ (en este caso $H = SU(2)$) y por lo tanto G/H es una esfera bidimensional $S^2 = \{n : n^2 = 1\}$, ver Figura 1.2.1. Esta esfera es comúnmente llamada "Esfera de Bloch" ya que fue introducida primeramente por Bloch en su discusión acerca de un experimento de inducción nuclear. Volviendo a la ecuación (1.2.2.3) ésta es equivalente a :

$$|\alpha\rangle = D(\alpha) |\psi_0\rangle \quad (1.2.2.4)$$

$$\text{con } D(\alpha) = e^{\alpha \hat{J}_+ - \alpha^* \hat{J}_-} = e^{i\vartheta (\hat{m} \cdot \hat{J})} \quad (1.2.2.5)$$

siendo \hat{m} un versor perpendicular a \hat{n} y a $\hat{n}_0 = (0,0,1)$ (ver Figura 1.2.1), $\hat{J} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$

$$y \quad e^{-i\vartheta/2} e^{-i\varphi} \quad (1.2.2.6)$$



$$\hat{n} = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)$$

$$\hat{m} = (\sin \varphi, -\cos \varphi, 0)$$

$$\hat{n}_0 = (0, 0, 1)$$

Figura 1.2.1. Esfera de Bloch

El operador $D(\alpha)$ puede escribirse en su forma "normal"

$$D(\alpha) = e^{\tau \hat{J}_+} e^{\beta \hat{J}_3} e^{\gamma \hat{J}_-} \quad (1.2.2.7)$$

$$\text{donde } \tau = -\tan(\theta/2) e^{-i\varphi}, \quad \beta = \ln(1 + |\tau|^2) \text{ y } \gamma = -\tau^* \quad (1.2.2.8)$$

Operando $D(\alpha)$ (escrito de la forma (1.2.2.7)) sobre $|\psi_0\rangle$, obtenemos otra representación de los estados coherentes de spin que es la que utilizaremos más frecuentemente en el desarrollo de la tesis, es decir

$$|\tau\rangle = (1 + |\tau|^2)^{-J} e^{\tau \hat{J}_+} |\psi_0\rangle \quad (1.2.2.9)$$

Se puede ver fácilmente que la transformación de las variables θ y φ a la variable τ no es más que la proyección estereográfica del polo sur $\hat{n} = (0,0,-1)$ de la esfera en el plano $\tau = \zeta + i\eta$ seguida de una reflexión en el eje η .

La expansión de estos estados $|\tau\rangle$ en términos de los autoestados de \hat{J}_z es :

$$|\tau\rangle = (1 + |\tau|^2)^{-J} \sum_{\mu} \sqrt{\frac{2J!}{(J+\mu)!(J-\mu)!}} \tau^{J+\mu} |J,\mu\rangle \quad (1.2.2.10)$$

Estos estados son autoestados del operador $\hat{n} \cdot \hat{J}$, es decir

$$(\hat{n} \cdot \hat{J}) |n\rangle = -J |n\rangle \quad (1.2.2.11)$$

Esta ecuación determina también (a menos de una fase) un estado coherente de spin.

Algunas de las propiedades más importantes de estos estados son:

- i) El conjunto de estados forma una base sobrecompleta .
- ii) No son ortogonales entre sí. En particular el producto escalar entre dos estados $|\tau_1\rangle$ y $|\tau_2\rangle$ vale :

$$\langle \tau_1 | \tau_2 \rangle = \frac{(1 + \tau_1^* \tau_2)^{2J}}{(1 + |\tau_1|^2)^J (1 + |\tau_2|^2)^J} \quad (1.2.2.12)$$

- iii) Son de mínima incerteza .

iv) Los valores medios de los operadores valen

$$\langle \tau | \hat{J}_3 | \tau \rangle = -J \frac{1 - |\tau|^2}{1 + |\tau|^2} \quad (1.2.2.13.a)$$

$$\langle \tau | \hat{J}_+ | \tau \rangle = 2J \frac{\tau^*}{1 + |\tau|^2} \quad (1.2.2.13.b)$$

Cuando la base es finita, como en este caso, es fácil demostrar que no pueden existir autoestados de los operadores de subida o de bajada. Es decir, no existe $|\phi\rangle$ tal que,

$$\hat{J}_- |\phi\rangle = \phi |\phi\rangle \quad (1.2.2.14)$$

por lo tanto en este aspecto estos estados difieren de los definidos para el oscilador armónico.

1.2.3 Estados coherentes asociados a SU(1,1)

El álgebra de Lie de SU(1,1) es generada por los operadores \hat{K}_1 , \hat{K}_2 y \hat{K}_3 como se describió en la Sección 1 de este capítulo.

Tomando como $|\psi_0\rangle$ al vector $|k, k\rangle$, es decir el estado con $\mu = k$, obtenemos los estados coherentes aplicándole el operador:

$$T^k(g) = \exp(-i\varphi \hat{K}_3) \exp(-i\theta \hat{K}_2) \exp(-i\psi \hat{K}_3) \quad (1.2.3.1)$$

De lo cual se deduce que estos estados coherentes vienen definidos por el vector $\vec{n} = (\text{sh}\theta \cos\varphi, \text{sh}\theta \text{sen } \varphi, \text{ch}\theta)$ como,

$$|n\rangle = e^{i\alpha(n)} e^{-i\varphi \hat{k}_3} e^{-i\theta \hat{k}_2} |\psi_0\rangle \quad (1.2.3.2)$$

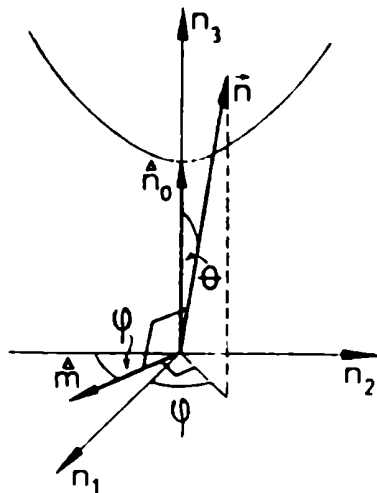
Esta parametrización del conjunto de estados coherentes está nuevamente de acuerdo con la definición dada en la Sección 1.2.1 dado que los mismos están determinados por puntos en el espacio cociente G/H siendo H en este caso el hiperboloide de dos hojas $H^2 = \{ n : n^2 = n_3^2 - n_1^2 - n_2^2 = 1 \}$.

Es conveniente elegir el factor de fase de manera que

$$|n\rangle = D(n) |\psi_0\rangle \quad (1.2.3.3)$$

con $D(n) = e^{i\theta(\hat{m} \cdot \hat{k})}$, en donde \hat{m} (ver Figura 1.2.2), es el versor perpendicular al versor $\hat{n}_0 = (0, 0, 1)$ y a \hat{n} , es decir :

$$\hat{m} = (\text{sen}\varphi, -\text{cos}\varphi, 0) \quad (1.2.3.4)$$



$$\vec{n} = (\text{sh}\theta \cos\varphi, \text{sen}\theta \text{sen}\varphi, \text{ch}\theta)$$

$$\vec{m} = (\text{sen}\varphi, -\text{cos}\varphi, 0)$$

$$\vec{n}_0 = (0, 0, 1)$$

Figura 1.2.2. Hiperboloide al que pertenecen los vectores \vec{n} .

$D(n)$ también se puede escribir como :

$$D(n) = D(\alpha) = e^{\alpha \hat{K}_+ - \alpha^* \hat{K}_-} \quad (1.2.3.5)$$

con $\alpha = -\theta/2 \exp(-i\varphi)$ o en su forma normal :

$$D(n) = e^{\zeta \hat{K}_+} e^{\beta \hat{K}_3} e^{\gamma \hat{K}_-} \quad (1.2.3.6)$$

con $\zeta = -\text{th}(\theta/2) \exp(-i\varphi)$, $\beta = -2 \ln \text{ch } \theta/2 = \ln(1+|\zeta|^2)$ y $\gamma = -\zeta^*$

Operando $D(n)$ en su forma normal (ec.1.2.3.6) sobre $|\psi_0\rangle$, obtenemos una representación diferente (una parametrización distinta) del estado coherente,

$$|\zeta\rangle = (1-|\zeta|^2)^k e^{\zeta \hat{K}_+} |K, k\rangle \quad (1.2.3.7)$$

que es la forma que utilizaremos en el desarrollo de esta tesis.

La expansión de los estados coherentes en autoestados de \hat{K}_3 es

$$|\zeta\rangle = (1-|\zeta|^2)^k \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{\frac{\Gamma(m+zk)}{m! \Gamma(zk)}} \zeta^m |k, k+m\rangle \quad (1.2.3.8)$$

Estos son autoestados del operador $(\hat{n} \cdot \hat{K}) = n_3 \hat{K}_3 - n_1 \hat{K}_1 - n_2 \hat{K}_2$

es decir :

$$(\hat{n} \cdot \hat{K}) |n\rangle = K |n\rangle \quad (1.2.3.9)$$

Nuevamente, como en $SU(2)$, la ec.(1.2.3.9) determina los estados coherentes a menos de una fase.

La propiedad mas importante de este conjunto de estados es que forman una base sobrecompleta. Como comentario final notemos que a diferencia de $SU(2)$, el operador de bajada \hat{K}_- sí posee autoestados pero éstos no coinciden con los estados coherentes, como en el caso del oscilador ^{K11}.

1.3. Teoría de puntos críticos

En esta sección presentaremos una síntesis de los conceptos básicos acerca de los puntos críticos que utilizaremos para clasificar los flujos; cuando creamos necesario nos remitiremos a las características pertinentes a flujos de dos dimensiones solamente ya que es el tipo de dinámica que nos interesa.

Dada una función $f(x_1, x_2)$, sus puntos críticos verifican $\nabla f = 0$. Uno puede clasificarlos en dos clases ^{Gil}: del tipo Morse o del tipo no Morse según que el Hessiano $\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$ sea diferente o igual a cero respectivamente. Por otra parte los puntos del tipo Morse se clasifican en i -puntos de ensilladura.

En general para el caso multidimensional, si $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ es el desarrollo de la función alrededor de un i -punto de ensilladura, este desarrollo se escribe de la forma:

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = -a_1 x_1^2 - a_i x_i^2 + a_{i+1} x_{i+1}^2 + \dots + a_n x_n^2 = M_i^n \quad (1.3.1)$$

con todos los $a_i > 0$.

El número de flujos que coexisten está acotado por la cantidad de puntos críticos del tipo Morse ^{Gi1}.

Sea N_i^n el número de puntos i ensilladura y $\#$ el número de flujos coexistentes, se verifica que ^{Gi5}:

$$\# \leq \sum_{i=0}^n N_i^n - 1 \quad (1.3.2)$$

En particular como el espacio que nos interesa es bidimensional $n = 2$, tenemos solamente 0-ensilladuras (mínimos) 1-ensilladuras (ensilladura propiamente dicho) y 2-ensilladuras (máximos).

Otra herramienta útil para constatar si el número de puntos críticos es el adecuado, válida como veremos más adelante solamente para variedades compactas, viene dada por la característica de Euler (χ), siendo ésta ^{Gi5}:

$$\chi = \sum (-1)^i N_i^n \quad (1.3.3)$$

que por ejemplo en el caso de una esfera vale $\chi = 2$ ^{Gi5}.

Cuando se produce una bifurcación, es decir, cuando se modifican los parámetros de interacción de manera que un punto crítico se convierte en otros de distinto tipo, ésta viene precedida por una elongación crítica de las órbitas, produciéndose después de la bifurcación una separación en órbitas de distintos

tipos.

En una bifurcación lo que sucede es que un punto del tipo Morse pasa a ser uno del tipo no Morse, es decir que alguno de los a_i del desarrollo dado por la expresión (1.3.1) se anula y por lo tanto hay que incluir términos de orden mayor. Si uno efectúa un desarrollo local alrededor de estos puntos, este desarrollo se puede separar en dos términos, uno del tipo Morse y otro del tipo no Morse llamado generador de Catástrofes :

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = CG(1) + \sum_{j=l+1}^n a_j x_j^2 \quad (1.3.4)$$

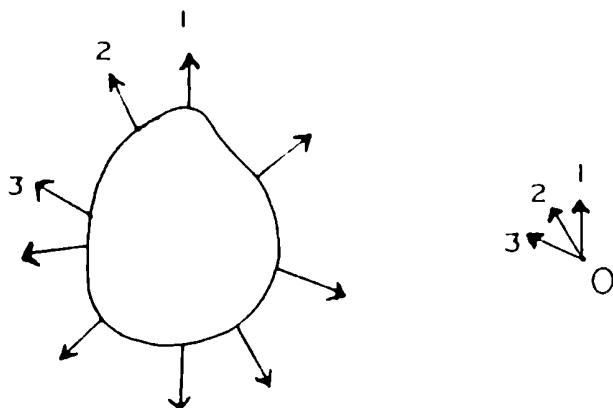
cuando $a_1 = a_2 = \dots = a_l = 0$ en el desarrollo original. Esta descomposición es válida para f en un entorno abierto de (\vec{x}^0, \vec{a}^0) de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k$ donde \vec{x}^0 es el punto crítico llamado degenerado o como dijimos antes del tipo no Morse, que origina la Catástrofe para el valor \vec{a}^0 de los parámetros de control. Las características del primer término del segundo miembro de la ec.(1.3.4) están completamente clasificadas según la dimensión del espacio (Teorema de Thom) ^{Gil, Ari, Sal.}

Para completar este estudio daremos algunas definiciones más, relacionadas con un campo vectorial.

1) Índice de una curva :

Consideremos un campo vectorial definido sobre una variedad diferencial de dos dimensiones orientada y supongamos que graficamos una curva cerrada que no pase por un punto singular del

campo. Si recorremos la curva en sentido positivo trasladando en cada punto el vector campo a un origen común O como muestra la Figura 1.3.1,



(a)

Figura 1.3.1. (a) Vectores de un campo para distintos puntos a lo largo de la curva, numerados 1, 2, 3, . . . (b) Los mismos vectores que en (a) llevados a un origen común, respetando la misma numeración.

al haber completado la circulación alrededor de la curva el vector campo pudo haber rotado n veces en el mismo sentido de recorrido, no haber rotado o haber rotado n' en sentido contrario. Obviamente el estado final e inicial es el mismo por eso rota un número entero de veces. Se llama índice de la curva al número de rotaciones y su signo es positivo o negativo según que el giro del campo coincida o no con el de la curva. Por ejemplo para el de la Figura 1.3.1 el índice es 1.

Pasemos a enunciar algunas propiedades ^{Ar2}:

Prop.1: El índice de una curva no varía al deformarla en forma continua mientras que la misma no pase por un punto singular.

Prop.2: El índice de una curva no varía por una deformación continua del campo vectorial, bajo la única condición de que dicha curva no contenga durante todo el tiempo de la deformación a ningún punto singular del campo.

De estas dos propiedades se desprenden consecuencias importantes como por ejemplo que el índice de una circunferencia con centro en un punto singular aislado de radio suficientemente pequeño (como para no encerrar otro punto singular) no depende del radio de la misma sino solamente del punto singular encerrado y entonces tiene sentido la siguiente definición:

Definición: Se define índice de un punto singular al índice de una circunferencia de radio suficientemente pequeño centrada en el mismo.

Un punto singular de un campo vectorial se dice simple si la parte lineal en ese punto no es degenerada. Los puntos singulares simples en el plano son los nodos, puntos de ensilladura, focos y centros. El índice de estos puntos es siempre ± 1 (-1 en el caso del punto de ensilladura).

Teorema de la suma de los índices:

Este teorema dice que el índice de una curva S es igual a la suma de los índices de los puntos singulares que encierra la curva. Para demostrarlo utilicemos el siguiente Lema :

Lema: Dadas dos curvas que pasan por un mismo punto la curva $\gamma_1 + \gamma_2$ que resulta de recorrer primero la curva γ_1 y luego γ_2 tiene el índice igual a la suma de los índices.

La demostración resulta trivial de observar la Figura 1.3.2 ya que, al recorrer primero γ_1 el campo dio n_1 vueltas y al recorrer γ_2 dio n_2 vueltas y por lo tanto, el índice total es $n = n_1 + n_2$.

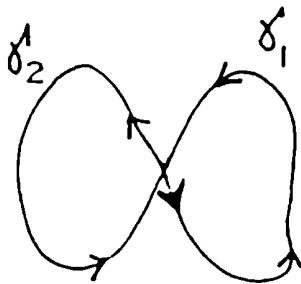
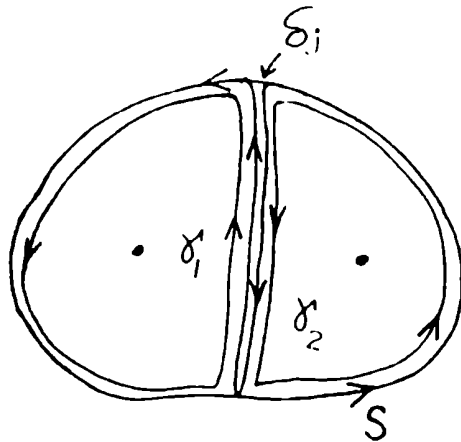


Figura 1.3.2. A partir del punto de intersección entre las curvas γ_1 y γ_2 se inicia el recorrido según la flecha más intensamente marcada. Las flechas restantes indican el sentido de circulación para finalizar luego de recorrer γ_1 y luego γ_2 , en el punto inicial.

Y ahora volviendo al teorema que queríamos demostrar dividamos el interior del recinto definido por la curva S con curvas γ_i cada una de las cuales encierra un único punto singular

como se muestra en la Figura 1.3.3.



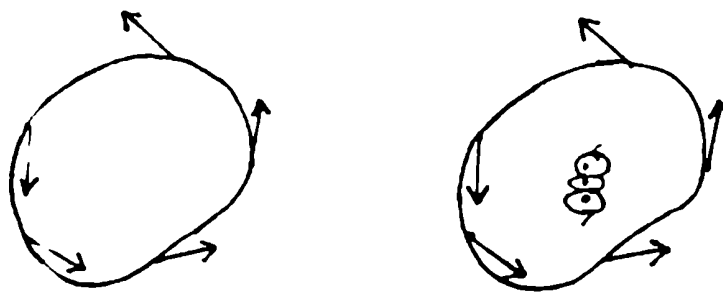
Designemos como δ_j a las curvas que delimitan las fronteras de los recintos respectivos; usando el lema anterior tenemos que el índice de los puntos singulares es igual a :

$$\text{ind } \sum_i \gamma_i = \text{ind } S + \sum_j \text{ind } \delta_j = \text{ind } S \quad (1.3.4)$$

Los índices de las curvas δ_j son nulos ya que las mismas se pueden deformar continuamente (Prop.1) a un punto sin pasar por ningún punto singular mientras que los índices de γ_i son iguales a los de los puntos encerrados debido a que nuevamente estas curvas se pueden deformar a circunferencias pequeñas centradas en los puntos singulares.

Es fácil ver que estos dos enfoques diferentes teoría de Catastrofes aplicada a la función $f(x_1, x_2)$ o la aplicación de

teoría de puntos críticos aplicada a un campo vectorial^{Ar2} tienen resultados en común, pero el segundo tratamiento nos aporta algunas ventajas adicionales como por ejemplo, que en una bifurcación se conserva la suma de los índices de los puntos singulares para el campo vectorial, o lo que es lo mismo $\sum N_i^2$ para los puntos del tipo Morse i -ensilladura de $f(x_1, x_2)$, ya que si uno considera una curva que encierre a los puntos involucrados en la bifurcación (ver Figura 1.3.4), el campo habrá variado alrededor de la curva en forma continua y por lo tanto el índice de la curva es igual antes y después de la bifurcación (Prop.2). Además como el índice de la curva es igual a la suma de los índices de los puntos singulares (teorema de la suma de los índices), concluimos que esta conserva a lo largo de la bifurcación, siempre que, reiteramos, podamos encerrar todos los puntos críticos involucrados con una curva cerrada.



(a)

Figura 1.3.4. Los vectores representan el valor del campo vectorial a lo largo de una curva antes (a) y después (b) de la bifurcación.

Capítulo 2. Fundamentos Dinámicos

En este capítulo desarrollaremos en primera instancia la dinámica que vamos a aplicar al sistema, es decir la Dinámica Variacional (Sección 1) y en segundo término creemos conveniente describir la Dinámica de Hartree Fock Dependiente del Tiempo, ya que en el caso de que el hamiltoniano describiese un sistema fermiónico de N partículas interactuantes, ambas dinámicas resultan equivalentes (Sección 2).

2.1. Dinámica Variacional

Un método de aproximación a la dinámica exacta desarrollada por Dirac^{D11} consiste en elegir funciones de onda de prueba $|\psi\rangle$ de tal manera que verifiquen la condición de mínima acción para el valor medio del "Lagrangiano" : $i\partial/\partial t - \hat{H}$, es decir :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \langle \psi(t) | i \partial/\partial t - \hat{H} | \psi(t) \rangle dt = 0 \quad (2.1.1)$$

donde δ representa a un desplazamiento virtual . Definiendo :

$$\mathcal{E} = \langle \psi(t) | \hat{H} | \psi(t) \rangle \quad (2.1.2)$$

y efectuando las variaciones pertinentes se obtiene la ecuación diferencial :

$$\delta \mathcal{L} = i (\langle \delta \psi | \psi \rangle - \langle \psi | \delta \psi \rangle) \quad (2.1.3)$$

Si, por ejemplo, se toma $|\psi\rangle$ parametrizado de manera que cubra todo el espacio de Hilbert la ec.(2.1.3) es equivalente a la ecuación de Schrödinger, o en otras palabras reproduce la dinámica exacta.

Pero obviamente lo que nos interesa es parametrizar la función de onda $|\psi(t)\rangle = |\psi(\vec{x}(t))\rangle$ con algún número finito de variables o parametros variacionales x^μ . Si en particular trabajamos con una parametrización en el espacio real y desarrollamos la ec (2.1.3), igualando a cero los coeficientes que acompañan a cada variación δx^μ obtenemos n ecuaciones acopladas ^{Rol, Ke1}

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = i (\langle \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} | \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \rangle - \langle \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} | \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \rangle) = \sigma_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \quad (2.1.4)$$

Dado que

$$\langle \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} | \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \rangle = \langle \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} | \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} \rangle^* \quad (2.1.5)$$

es

$$\sigma_{\mu\nu} = -2 \text{Im} \langle \frac{\partial \psi}{\partial x^\mu} | \frac{\partial \psi}{\partial x^\nu} \rangle \quad (2.1.6)$$

la matriz de una forma bilineal, antisimétrica o forma symplectica.

Dos propiedades de esta dinámica que la convierten desde el

comienzo en una aproximación aceptable son i) la conservación del valor medio del hamiltoniano \mathcal{H} para todo tiempo, coincidiendo además con el valor medio exacto, esto se puede ver fácilmente utilizando la ec. (2.1.4) ya que :

$$\frac{d\mathcal{H}}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} \frac{\partial x^\mu}{\partial t} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\mu \quad \sigma_{\mu\nu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\mu = 0 \quad (2.1.7)$$

y ii) la conservación de la norma, aunque nosotros no tomaremos variaciones sobre la misma, es decir propondremos siempre una función de onda de prueba normalizada. Estas variaciones toman importancia cuando uno quiere calcular la fase global ^{Ka2, Ka3, He2} siendo irrelevantes para el cálculo de valores medios, que es en lo que estamos interesados.

El éxito de la aproximación va a depender de la mejor elección de la función $|\psi(\vec{x}(t))\rangle$.

Nosotros tomaremos como funciones de onda de prueba a los estados coherentes definidos en el capítulo anterior, Sección 2, por varios motivos. Uno de ellos, porque como veremos más adelante esta Dinámica Variacional coincide con la Dinámica de Hartree-Fock dependiente del tiempo cuando tenemos un hamiltoniano de muchas partículas que es susceptible de escribirse en término de los operadores que generan el álgebra de SU(2) (como por ejemplo el modelo de Lipkin). Otro motivo es que en el caso de tener hamiltonianos lineales en los generadores de cualquiera de las dos álgebras (SU(2) o SU(1,1)), esta elección de la función de onda de prueba nos garantiza la coincidencia entre esta dinámica y la

exacta. Por otra parte, para hamiltonianos cuadráticos la aproximación es muy buena siempre que los valores medios de \hat{J} o \hat{K} se encuentren suficientemente cerca de la variedad asociada a cada grupo. Y por último, estos estados vienen parametrizados por solamente dos parámetros, lo que simplifica los cálculos.

Las parametrizaciones más utilizadas son

$$(p, q) \quad (2.1.8)$$

con $q = \varphi$ y $p = k \cosh \vartheta$ o $p = \cos \vartheta$ para $SU(1,1)$ o $SU(2)$ respectivamente, y (ϑ, φ) según se los definió en el capítulo anterior en la sección de estados coherentes. Estas se denominan variables canónicas debido a que las ecuaciones descritas por la ec. (2.1.4) adquieren la estructura de ecuaciones de Hamilton, es decir

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}(q, p) \quad (2.1.9a)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q}(p, q) \quad (2.1.9b)$$

Obviamente podemos encontrar isomorfismos que conecten estas variables con variables complejas (en este caso ya no se podría hablar de métrica simpléctica) como por ejemplo:

$$x_1 = (r, r^*) \quad (2.1.10)$$

$$\text{con } \tau = \begin{cases} \tan(\theta/2) e^{-i\varphi} & \text{para SU(2)} \\ \tanh(\theta/2) e^{-i\varphi} & \text{para SU(1,1)} \end{cases} \quad (2.1.11a)$$

$$(2.1.11b)$$

Como ilustración veamos como quedan las ecuaciones de movimiento para el caso del hamiltoniano (1.1.20) con $W = 0$, que es la forma mas utilizada del modelo de Lipkin. En el Capitulo 1, habiamos visto que este hamiltoniano (para $W = 0$) escrito en los operadores del grupo SU(2) era :

$$\hat{H} = \varepsilon \hat{J}_3 + V (\hat{J}_1^2 - \hat{J}_2^2) \quad (2.1.12)$$

Su valor medio en estados coherentes escrito en término de las variables canonicas queda :

$$\mathcal{H} = \varepsilon (p + \chi (J^2 - p^2) \cos 2q) \quad (2.1.13)$$

con $\chi = V(2J-1)/\varepsilon$

Dicho de paso observemos que la dependencia de \mathcal{H} con estas variables esta muy lejos de ser la típica dependencia para un hamiltoniano clasico, donde el término asociado con la energía cinética es proporcional a p^2 .

Las respectivas ecuaciones de Hamilton son :

$$\dot{q} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \varepsilon (1 - 2 \chi p \cos(2q)) \quad (2.1.14a)$$

$$\dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -2 \varepsilon \chi (J^2 - p^2) \sin(2q) \quad (2.1.14b)$$

Como comentario final queremos destacar que también se pueden deducir las ecuaciones de movimiento con una formulación lagrangiana^{kr2} (en lugar de hamiltoniana), en cuyo caso el "Lagrangiano Clásico" definido como el valor medio del Lagrangiano introducido al principio del capítulo es :

$$\mathcal{L}(\theta, \varphi, \dot{\theta}, \dot{\varphi}, t) = \dot{\varphi}(1 - \cos\theta) - \epsilon \cos\theta - \frac{\epsilon \chi}{2} \sin^2(\theta) \cos 2\varphi \quad (2.1.15)$$

y las ecuaciones de movimiento, que fueron deducidas por primera vez por Krieger^{kr2}, resultan

$$\dot{\varphi} = -\epsilon + \epsilon \chi \cos\theta \cos 2\varphi \quad (2.1.16a)$$

$$\dot{\theta} = -\epsilon \chi \sin\theta \sin 2\varphi \quad (2.1.16b)$$

las cuales, como es de esperar son equivalentes a las definidas por las ecuaciones (2.1.14a) y (2.1.14b).

2.2. Dinámica de Hartree Fock Dependiente del Tiempo

Procederemos ahora a describir el método de Hartree Fock Dependiente del Tiempo.

Este método es una aproximación por medio de un generador de evolución no lineal, de la dinámica de un sistema de partículas no interactuantes^{Hal, Nel. Mal}.

En segunda cuantificación el hamiltoniano de N fermiones

interactuantes se puede escribir de la forma :

$$\hat{H} = \sum_{ij} t_{ij} a_i^\dagger a_j + \frac{1}{2} \sum_{ijkl} V_{ijkl} a_i^\dagger a_j^\dagger a_k a_l \quad (2.2.1)$$

donde los índices definen una base completa de estados de partícula independiente que describen coordenadas espaciales, de spin y de isospin de los nucleones, mientras que los operadores a^\dagger y a son los operadores de creación y aniquilación de partículas que cumplen las reglas usuales de anticonmutación.

Dado que el hamiltoniano (2.2.1) es hermitico los elementos de matriz de un cuerpo verifican :

$$t_{ij} = \langle i | \hat{T} | j \rangle = t_{ji}^* \quad (2.2.2)$$

y los de interacción (de dos cuerpos) satisfacen :

$$V_{ijkl} = \langle ij | \hat{V} | kl \rangle = V_{jilk} = V_{klij}^* \quad (2.2.3)$$

Resulta conveniente describir la dinámica mediante la matriz densidad de un cuerpo definida por :

$$\rho_{ij}(t) = \langle \psi(t) | a_j^\dagger a_i | \psi(t) \rangle = \rho_{ji}^*(t) \quad (2.2.4)$$

cuyos elementos matriciales diagonales ρ_{ii} representan el número de ocupación del estado $|i\rangle$ de partícula independiente. Por lo

tanto se verifica

$$\text{Tr}(\rho) = \sum \rho_{i,i} = N. \quad (2.2.5)$$

Por otro lado, el valor medio de cualquier operador de un cuerpo de la forma

$$\hat{O} = \sum O_{ij} a_i^\dagger a_j \quad (2.2.6).$$

se puede describir en términos de ρ como :

$$\langle \psi(t) | \hat{O} | \psi(t) \rangle = \sum O_{ij} \rho_{ij} = \text{Tr}(\hat{O}\rho) \quad (2.2.7)$$

de modo que ρ contiene gran cantidad de información relevante requerida para el cálculo de los observables macroscópicos.

La ecuación de evolución exacta para ρ , utilizando la ecuación de Schrödinger, es :

$$i\hbar \frac{d\rho}{dt} = t_{ik} \rho_{kj} - \rho_{ik} t_{kj} + \frac{1}{2} \{ \rho_{kilm}^{(2)} \tilde{V}_{lmkj} - \rho_{lkjm}^{(2)} \tilde{V}_{imkl} \} \quad (2.2.8)$$

donde adoptamos la convención de Einstein para índices repetidos.

La matriz $\rho^{(2)}$ (matriz densidad de dos cuerpos) la definimos como

$$\rho_{ijkl}^{(2)} = \langle \psi | a_k^\dagger a_l^\dagger a_i a_j | \psi \rangle = -\rho_{jkl} = -\rho_{ijlk} = \rho_{lkji}^* \quad (2.2.9)$$

mientras que a la matriz \tilde{V} (matriz antisimetrizada de elementos de V)

$$\tilde{V}_{ijkl} = V_{ijkl} - V_{ijlk} = -\tilde{V}_{ijlk} = \tilde{V}_{jikl} \quad (2.2.10)$$

De la ecuación (2.2.8) se desprende que la evolución de ρ depende del valor de los elementos del operador de dos partículas $\rho^{(2)}$. A su vez si planteamos la ecuación de movimiento para esta última encontramos que depende de una matriz de densidad de tres cuerpos y así sucesivamente hasta llegar a la matriz densidad de N partículas, en cuyo caso resolver dicha ecuación es totalmente equivalente a resolver la ecuación de Schrödinger exacta. Esto significa que la dinámica contenida en la ecuación de Schrödinger para N partículas interactuantes se puede desdoblar en una jerarquía de dinámicas para los paquetes o racimos de $1, 2, \dots, S, \dots, N$ partículas en la que cada S -racimo evoluciona conducido por i) los términos de energía cinética y de interacción de pares de las partículas que lo componen y ii) un promedio de las interacciones de las S partículas con el medio proporcionado por las restantes.

La hipótesis principal de este método (HFDT) consiste en escribir a la matriz de dos cuerpos como un producto antisimetrizado de dos matrices de densidad de un cuerpo ^{Ba1}:

$$\rho_{ijkl} = \rho_{il} \rho_{jk} - \rho_{jl} \rho_{ik} \quad (2.2.11)$$

Como esta aproximación satisface la propiedad de antisimetría (2.2.9) la única correlación de dos cuerpos que se retiene en este método es aquella requerida por el principio de Pauli.

Con esta aproximación la ecuación de movimiento para ρ queda totalmente especificada. En efecto, si introducimos el potencial de Hartree Fock definido por :

$$W_{ij} = \rho_{lm} V_{lmj} \quad (2.2.12)$$

esta ecuación es

$$i\hbar \frac{d\rho_{ij}}{dt} = (t+W)_{ik} \rho_{kj} - \rho_{ik} (t+W)_{kj} = [h, \rho]_{ij} \quad (2.2.13)$$

donde definimos al hamiltoniano de Hartree-Fock de una partícula (h) como :

$$h = t + W \quad (2.2.14)$$

Dado que el potencial definido según la ec.(2.2.12) representa un campo promedio experimentado por cada una de las partículas cuyo valor al tiempo t depende del estado del medio descrito por el propio operador densidad ρ , la ecuación de movimiento (2.2.13) resulta una ecuación no lineal (h depende de ρ).

Otra manera de escribir las ecuaciones de HFDT se basa en el

hecho de que dado que ρ es un proyector, entonces éste se puede expresar en función de las N funciones de onda de partícula independiente ψ_n de la siguiente manera :

$$\rho_{ij} = \sum_{n=1}^N \psi_n(i) \psi_n^*(j) \quad (2.2.15)$$

Esta representación es consistente con una función de onda determinantal de varios cuerpos :

$$\psi(t) = \frac{1}{N!} \det \{ \psi_1(t), \psi_2(t), \dots, \psi_N(t) \} \quad (2.2.16)$$

verificando cada una de las ψ_n la ecuación :

$$i\hbar \frac{\partial \psi_n(i)}{\partial t} = \sum_j h_{ij}(t) \psi_n(j) \quad (2.2.17)$$

que nuevamente son ecuaciones diferenciales no lineales.

Capítulo 3. Planteo de la Dinámica

Como vimos en el capítulo 1 los valores medios en estados coherentes de los operadores que generan los grupos $SU(2)$ o $SU(1,1)$ pertenecen a una variedad, esfera o hiperboloide de dos hojas respectivamente; por lo tanto resulta interesante estudiar la dinámica de dichos valores medios, especialmente porque las órbitas adquieren en este marco una interpretación geométrica sencilla y las ecuaciones de movimiento resultan muy simples de calcular. Además la resolución de estas ecuaciones es equivalente a la del problema variacional original ya que existe una relación biunívoca entre estados coherentes y valores medios de los operadores sobre la variedad.

En este capítulo en primer término veremos cómo se calculan los valores medios de productos de estos operadores y su caracterización geométrica para luego deducir explícitamente las ecuaciones de movimiento.

3.1 Cálculo de la correlaciones de los generadores del algebra

Sean \hat{J} y \hat{K} los vectores formados por los generadores de $SU(2)$ y $SU(1,1)$ respectivamente, para referirnos a los dos grupos simultáneamente llamaremos a este vector operador : $\hat{M} = (\hat{M}_1, \hat{M}_2, \hat{M}_3)$. De las expresiones de estados coherentes dadas por las ecuaciones (1.2.2.9) y (1.2.3.7) para los grupos $SU(2)$ y $SU(1,1)$ respectivamente, y teniendo en cuenta la definición :

$$\hat{M}_{\pm} = \hat{M}_1 \pm i\hat{M}_2 \quad (3.1.1)$$

resulta inmediato que se pueden generalizar en:

$$|z\rangle = \mathcal{N}(z) \exp(z \hat{M}_{\pm}) |0\rangle = \mathcal{N}(z) |z\rangle \quad (3.1.2)$$

$$\text{con } \mathcal{N}(z) = \begin{cases} (1+|z|^2)^{-J} & \text{para SU(2)} & (3.1.3a) \\ (1-|z|^2)^K & \text{para SU(1,1)} & (3.1.3b) \end{cases}$$

y $|0\rangle = \begin{cases} |J, -J\rangle \\ |K, K\rangle \end{cases}$ siendo $|z\rangle$ un estado coherente para cualquiera de las dos álgebras ($z = \tau$ para SU(2) y $z = \zeta$ para SU(1,1)).

Dado que el hamiltoniano que consideramos es a lo sumo cuadrático en los operadores \hat{M}_{\pm} nos interesa calcular $\langle z | 1/2 (\hat{M}_{\pm}, \hat{M}_{\pm}) |z\rangle$ si es posible, solamente en función de $\langle z | \hat{M}_{\pm} |z\rangle$ con lo cual el valor medio del hamiltoniano definiría una cuádrica cuya intersección con la variedad respectiva serían las órbitas buscadas. Para ello reemplazamos estos operadores aplicados a $|z\rangle$ por derivadas parciales con respecto a z , calculamos dichas derivadas y reemplazamos en los valores medios que queremos determinar (el detalle de cómo realizar estos cálculos se encuentra en el Apéndice A), obteniendo las siguientes correlaciones:

$$\langle 1/2 \{ \hat{M}_i, \hat{M}_j \} \rangle = \gamma \langle \hat{M}_i \rangle \langle \hat{M}_j \rangle + \Delta_i \delta_{ij} \quad (3.1.4)$$

$$\langle \hat{O} \rangle = \langle z | \hat{O} | z \rangle \quad (\text{notación que utilizaremos de aquí en más}),$$

siendo

$$\gamma = \frac{2m-1}{2m}, \quad (3.1.5)$$

$$\Delta_i \begin{cases} \Delta_i = J/2 \text{ para SU}(2) & (3.1.6a) \\ \Delta_1 = \Delta_2 = K/2 \\ \Delta_3 = -K/2 \end{cases} \text{ para SU}(1,1) \quad (3.1.6b)$$

$$\gamma \quad m \quad \begin{cases} J & \text{para SU}(2) & (3.1.7a) \\ -K & \text{para SU}(1,1) & (3.1.7b) \end{cases}$$

La ecuación (3.1.4) es interesante ya que nos dice que no sólo vamos a poder escribir al valor medio del hamiltoniano en función de los valores medios $\langle \hat{M}_i \rangle$ sino que la dependencia funcional va a ser del mismo tipo que la del hamiltoniano con los operadores. Es decir, la ecuación (3.1.4) expresa que los valores medios de productos de los operadores del álgebra se "factorizan" sobre la variedad en cuestión.

Todo esto se puede aplicar también al oscilador resultando

$$\gamma = 1, \Delta_1 = \Delta_2 = 1/2 \text{ y } \Delta_3 = 0 \text{ con } \hat{M} = (\hat{P}, \hat{Q}, 1) \quad (3.1.8)$$

3.2 Caracterización Geométrica de los valores medios de los observables

Si definimos el espacio de tres dimensiones E_3 , cuyos puntos vienen representados por los vectores :

$$\langle \hat{M} \rangle_{\varphi} = (\langle \hat{M}_1 \rangle_{\varphi}, \langle \hat{M}_2 \rangle_{\varphi}, \langle \hat{M}_3 \rangle_{\varphi}) \quad (3.2.1)$$

con $\langle \rangle_{\varphi} = \langle \varphi | \quad | \varphi \rangle$, los estados coherentes de $SU(2)$ están en correspondencia biunívoca con puntos sobre una esfera de radio J y los de $SU(1,1)$ con puntos sobre la hoja superior de un hiperboloide de dos hojas con vértice en $\langle \hat{K}_3 \rangle = K$, verificándose, por ende, las siguientes relaciones:

$$\langle \hat{J}_1 \rangle^2 + \langle \hat{J}_2 \rangle^2 + \langle \hat{J}_3 \rangle^2 = J^2 \quad \langle \hat{K}_1 \rangle^2 - \langle \hat{K}_2 \rangle^2 = K^2 \quad (3.2.2)$$

De aquí en más cada vez que escribamos un valor medio para el cual no especificamos sobre que estado se calcula es que el mismo se practica sobre un estado coherente, como lo hicimos en esta última expresión.

El hecho de que solo trabajemos con la hoja superior del hiperboloide se debe a que :

$$\langle z | \hat{K}_3 | z \rangle \geq K \quad (3.2.3)$$

ya que, en la base que expande el espacio de Hilbert para la cual \hat{K}_3 es diagonal se verifica :

$$\hat{K}_3 |K, n\rangle = (K+n) |K, n\rangle \quad \text{con } n \geq 0 \quad (3.2.4)$$

Por otro lado el valor medio en un estado coherente de cualquier observable del tipo:

$$\hat{O} = \hat{A} \cdot \hat{M} \quad \hat{M}^\dagger \hat{B} \hat{M} \quad (3.2.5)$$

se puede escribir como :

$$\langle \hat{O} \rangle = \hat{A} \cdot \langle \hat{M} \rangle \quad \langle \hat{M} \rangle^\dagger \hat{B} \langle \hat{M} \rangle + \sum \Delta_i B_i \quad (3.2.6)$$

Si prolongamos estas funciones a todo el espacio éstas determinan distintas cuádricas cuyas intersecciones con la esfera o hiperboloide según el caso, representan los valores medios requeridos.

En particular nos interesan calcular los valores medios de las constantes de movimiento. Como ilustración veamos cuánto valen estos valores medios para los Casimires de SU(2) y SU(1,1) respectivamente :

$$\hat{\mathcal{E}}_1 = \hat{J}_1^2 + \hat{J}_2^2 + \hat{J}_3^2 = J(J+1) \quad (3.2.7a)$$

$$y \quad \hat{\mathcal{E}}_2 = \hat{K}_3^2 - \hat{K}_1^2 - \hat{K}_2^2 = K(K-1) \quad (3.2.7b)$$

es fácil ver que para $\hat{\mathcal{E}}_1$ por ejemplo :

$$\langle \hat{E}_1 \rangle = (2J-1)/2J (J_1^2 + J_2^2 + J_3^2) + 3J/2 = J(J+1) \quad (3.2.8)$$

(utilizando la convención $\langle \hat{M}_l \rangle = M_l$), y por lo tanto

$$J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J^2 \quad (3.2.9)$$

reobteniéndose obviamente como cuádrica la misma esfera. Lo mismo sucede para el Casimir de $SU(1,1)$ (representa el mismo hiperboloide). En cambio si calculamos el valor medio de un hamiltoniano arbitrario del tipo $\hat{H} = \hat{E} \cdot \hat{M} + \hat{M}^\dagger \hat{V} \hat{M}$ como generalización de los modelos introducidos en el Capítulo 1, las cuádricas asociadas pueden representar cualquier tipo de superficies: cilindros, hiperboloides, paraboloides hiperbólicos, etc... dependiendo de la selección de parámetros de interacción. Las intersecciones entre estas cuádricas y la variedad definen distintas curvas que coinciden justamente con los valores medios de \hat{M} obtenidos mediante la Dinámica Variacional.

En el caso de $SU(2)$ estas órbitas son cerradas y periódicas y dado que la característica de la esfera es dos, los puntos críticos que pueden ser máximos (-), mínimos (+) o puntos de ensilladura (0), verifican:

$$n(-) + n(+) - n(0) = 2, \quad n = \text{numero de dichos puntos.} \quad (3.2.10)$$

El número máximo de puntos críticos es

$$n = n(-) + n(+) + n(0) = 6. \quad (3.2.11)$$

En $SU(1,1)$ en cambio, tenemos dos tipos de órbitas: abiertas y cerradas, y además no existe una relación del tipo (3.2.11).

Es interesante destacar que el límite clásico corresponde a valores $J \rightarrow \infty$, ya que en este límite los operadores conmutan. Si queremos comparar la dinámica correspondiente a este límite clásico con la variacional es conveniente normalizar todos los operadores con $N = 2J$ para que las ecuaciones no diverjan y encontramos que las cuádricas son del mismo tipo pero levemente desplazadas, con corrimientos en la energía.

3.3 Dinámica

Del principio Variacional :

$$\delta \int_{t_2}^{t_1} \langle z(t) | i\partial/\partial t - \hat{H} | z(t) \rangle dt = 0 \quad (3.3.1)$$

además de obtener las ecuaciones de Hamilton como se vió en el Capítulo 2 se pueden obtener ecuaciones del tipo Ehrenfest para operadores lineales en los generadores del grupo y por lo tanto para ellos se verifica :

$$\langle \hat{M}_i \rangle = \frac{1}{2} \langle z | [\hat{H} , \hat{M}_i] | z \rangle \quad (3.3.2)$$

Este resultado es interesante ya que nos dice que la dinámica variacional y la exacta coinciden sobre la variedad.

Utilizando la expresión para el hamiltoniano introducida en la sección anterior, las reglas de conmutación (1.1.7) y (1.1.12) según sea SU(2) o SU(1,1) y la "factorización" (3.1.4) se puede obtener la ecuación de movimiento para el valor medio del operador \hat{M} (el cálculo detallado se encuentra en el Apéndice B) :

$$\dot{\vec{M}} = \frac{1}{2} \nabla \mathcal{X} \times \nabla \mathcal{Y} \quad (3.3.3)$$

$$\text{con } \mathcal{Y} \quad \begin{cases} J_1^2 + J_2^2 + J_3^2 = J & \text{para SU(2)} & (3.3.4a) \\ K_1^2 + K_2^2 - K_3^2 = K & \text{para SU(1,1)} & (3.3.4b) \end{cases}$$

En esta ecuación de movimiento resulta obvia la conservación de la energía y que $\dot{\vec{M}}$ pertenece a la variedad para todo tiempo ya que la velocidad es perpendicular al gradiente de \mathcal{X} y de \mathcal{Y} .

La dinámica no depende de la condición inicial sino solamente es función de la posición .

Los puntos críticos o i-ensilladura de Morse se caracterizan por tener $\dot{\vec{M}} = 0$; en cuyo caso $\nabla \mathcal{X} \parallel \nabla \mathcal{Y}$ o $\nabla \mathcal{X} = 0$.

Resulta conveniente destacar que el camino tradicionalmente utilizado era plantear las ecuaciones en (complejo) que por

ejemplo para el modelo de Lipkin es ^{Sol} :

$$\dot{z} = -i\varepsilon \left(z + \chi \frac{z^* - z^3}{1 + |z|^2} \right) \quad \chi = \frac{V(2J-1)}{\varepsilon} \quad (3.3.5)$$

o su equivalente en coordenadas canónicas (p,q) ^{ka4} (ver Capítulo 2, ec. (2.1.14)) y resolviendo en este último caso obtener el diagrama de fases. Por lo tanto en lo que sigue, además de analizar las órbitas y dinámica sobre la variedad respectiva, lo haremos en el espacio (p,q) . En $SU(2)$ este espacio está representado por el mapeo de la esfera en coordenadas $(p,q) = (J \cos\theta, \varphi)$ y en $SU(1,1)$ por $(p,q) = (k \cosh\theta, \varphi)$. En el primer caso $-J \leq p \leq J$ mientras que en $SU(1,1)$ $p \in [k, \infty)$, en ambos casos $\varphi \in [0, 2\pi]$.

El camino que vamos a seguir nosotros es trabajar primero en el espacio de tres dimensiones y luego pasar al espacio de fases por varias razones: primero, el análisis cualitativo de las órbitas resulta inmediato de analizar las intersecciones de las cuádricas (energía constante) con las variedades sin realizar ningún cálculo de integración; segundo, porque el planteo de las ecuaciones de movimiento en el caso de determinar su dinámica resulta muchísimo más sencilla, y tercero, dichas ecuaciones no presentan singularidades como sucede generalmente en los bordes del espacio de fases.

Capítulo 4. Dinámica Variacional Conservativa en SU(2)

Aplicaremos el método propuesto en el capítulo anterior a un hamiltoniano de la forma J_{e2} :

$$\hat{H} = \epsilon \hat{J}_3 + \frac{V}{2} (\hat{J}_+ + \hat{J}_-) + \frac{W}{2} (\hat{J}_+, \hat{J}_-) + \frac{U}{2} (\{\hat{J}_+, \hat{J}_3\} + \{\hat{J}_-, \hat{J}_3\}) \quad (4.1)$$

En términos del sistema de dos niveles con N partículas interactuantes la interacción se puede representar gráficamente con los procesos de creación de excitones (pares partícula-agujero) que se ilustra en la Figura 4.1.

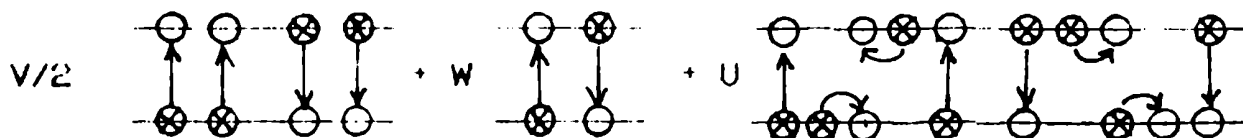


Fig. 4.1. Esquema de las interacciones.

Como se puede observar los términos proporcionales a V y W conservan la paridad (Modelo de Lipkin), consultar Capítulo 1 Sección 1. Esto se traduce en una simetría de rotación en un ángulo π alrededor del eje J_3 . El término proporcional a U rompe dicha simetría.

4.1 Hamiltonianos Lineales ($V = W = U = 0$)

En este caso $\nabla\mathcal{H} = (0, 0, \varepsilon)$ la ecuación de movimiento es equivalente a la de un sólido que gira con velocidad $\vec{\omega} = (0, 0, \omega_3)$ con $\omega_3 = \varepsilon = \text{constante}$ y el diagrama de fases consiste en líneas horizontales. Mientras que si el hamiltoniano fuese $\hat{H} = \vec{\varepsilon} \cdot \hat{\mathbf{J}}$, dado que la ecuación $\dot{\mathbf{J}} = (1/2) \nabla\mathcal{H} \times \nabla\mathcal{H}$ es invariante frente a rotaciones la dinámica sería exactamente igual pero con $\vec{\omega} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ en cambio, el diagrama de fases sería topológicamente distinto ya que, al no coincidir el máximo y el mínimo de energía con el polo Norte y el polo Sur respectivamente, además de las curvas que recorren todos los ángulos φ en el intervalo $[0, 2\pi]$, a las cuales en la jerga usual se las denomina rotaciones ^{Kal}, aparecen otras que solamente toman valores en un intervalo menor $[\varphi_1, \varphi_2] \subset [0, 2\pi]$ se las llama libraciones locales. Nosotros adoptaremos también estas definiciones a lo largo de la tesis. A pesar, volvemos a insistir que sobre la esfera puede suceder, como en este caso, que ambas sean totalmente equivalentes.

En ambos casos el periodo de cada órbita es $T = 2\pi/|\vec{\omega}|$ y la dinámica variacional coincide con la exacta.

4.2 Hamiltonianos Cuadráticos

Para valores arbitrarios de las interacciones el valor medio del hamiltoniano (4.1) adquiere la expresión:

su gradiente es :

$$\nabla \mathcal{K} = \epsilon \left(\frac{1}{J} \chi_+ J_1 + \frac{\chi_-}{J} J_3, \frac{1}{J} \chi_- J_2, 1 + \frac{\chi}{J} J_1 \right) \quad (4.2.3)$$

y por lo tanto para el hamiltoniano bajo consideración el sistema de ecuaciones de movimiento es :

$$\epsilon^{-1} J_1 = -J \left(1 - \frac{\chi_-}{J} J_3 \right) \frac{\chi}{J} - J_1 J_2 \quad (4.2.4a)$$

$$\epsilon^{-1} J_2 = J_1 \left(1 - \frac{\chi_+}{J} J_3 \right) + \frac{\chi}{J} (J_1 - J_3) \quad (4.2.4b)$$

$$\epsilon^{-1} J_3 = (\chi_+ - \chi_-) J_1 J_2 + \chi J_2 J_3 \quad (4.2.4c)$$

4.2.1 Hamiltonianos Cuadráticos con simetrías ($U = 0$)

1) $\chi_- = 0, \chi_+ > 0$

Las cuádricas asociadas al hamiltoniano son cilindros parabólicos con su eje en la dirección de J_2 .

Si $\chi < 1$, la curvatura de las parábolas en el plano (J_2, J_3) en el polo Norte es menor que $1/J$ (la curvatura de la esfera), por lo tanto, las intersecciones entre estas cuádricas y la esfera (órbitas) son todas curvas cerradas que concatanan al eje J_3 , esto se traduce en el diagrama de fases como sólo curvas abiertas (rotaciones) como muestra la Figura 4.2. El Polo Norte (Sur) corresponde a un máximo (mínimo) absoluto de energía.

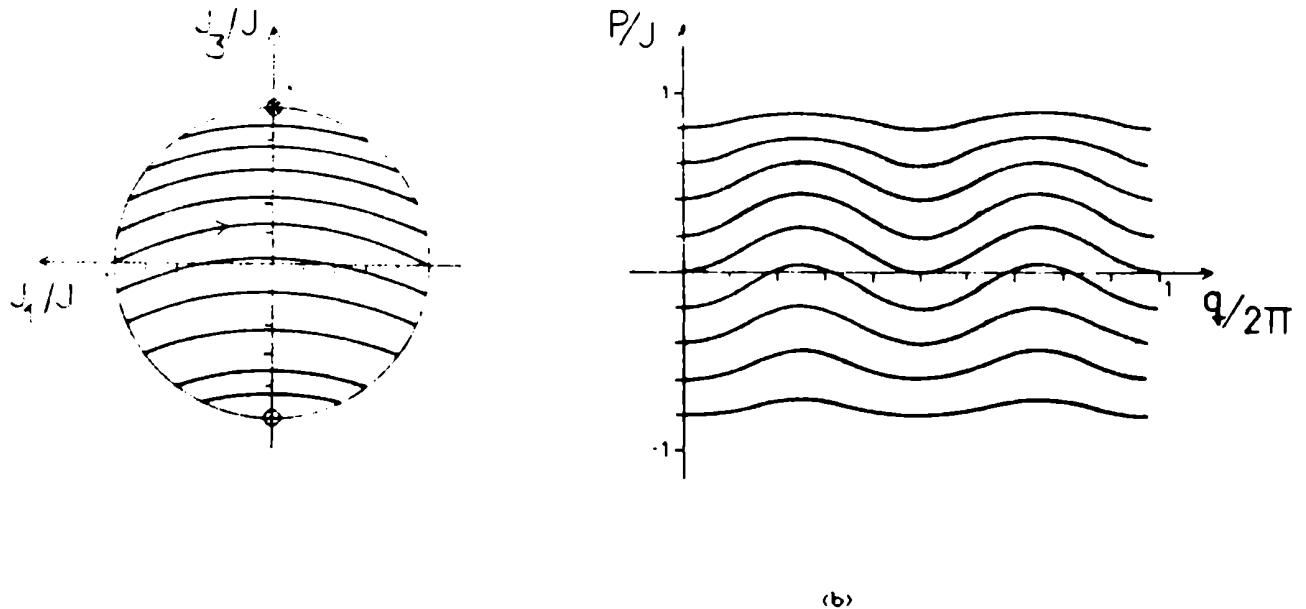


Figura 4.2.1.1 Trayectorias del vector polarización (\vec{J}) en la esfera de Bloch (a) y su correspondiente diagrama de fases

Cuando $\chi_+ = 1$, la curvatura de la parábola en el Polo Norte
 iguala la curvatura de la esfera y se produce así una
 inestabilidad estructural (bifurcación). El máximo absoluto
 bifurca en dos máximos de igual energía y un punto de ensilladura.
 Observemos que a lo largo de la bifurcación uno puede encerrar con
 una curva cerrada a los puntos involucrados y por ende el índice
 de ésta se conserva, o lo que es lo mismo la suma de los índices
 de los puntos encerrados. En este caso el índice antes de la
 bifurcación es el del máximo (1) y después de la misma tenemos dos
 máximos, cada uno con índice igual a uno, mas un punto de
 ensilladura (-1) corroborando lo que acabamos de afirmar. Entre el
 valor de energía del punto de ensilladura y el del máximo, es
 decir para las cuádrigas que intersecan al eje J_3 en
 $J < J_0 \leq J(1+\chi_+)/2$ se cumple una doble intersección con la esfera
 de Bloch. Este hecho da lugar a dos conjuntos de órbitas,
 localizadas de manera simétrica y degeneradas en la energía que no
 concatenan al eje J_3 representando oscilaciones locales o
 libraciones. Esto se ilustra en la Figura 4.2.1.2 para $\chi_+ = 1,5$.
 En este caso, los dos máximos absolutos de igual energía aparecen
 con las coordenadas : $(J/J_0) \pm (\chi_+^2 - 1)^{1/2} \cdot (0, 1)$ en el espacio J.

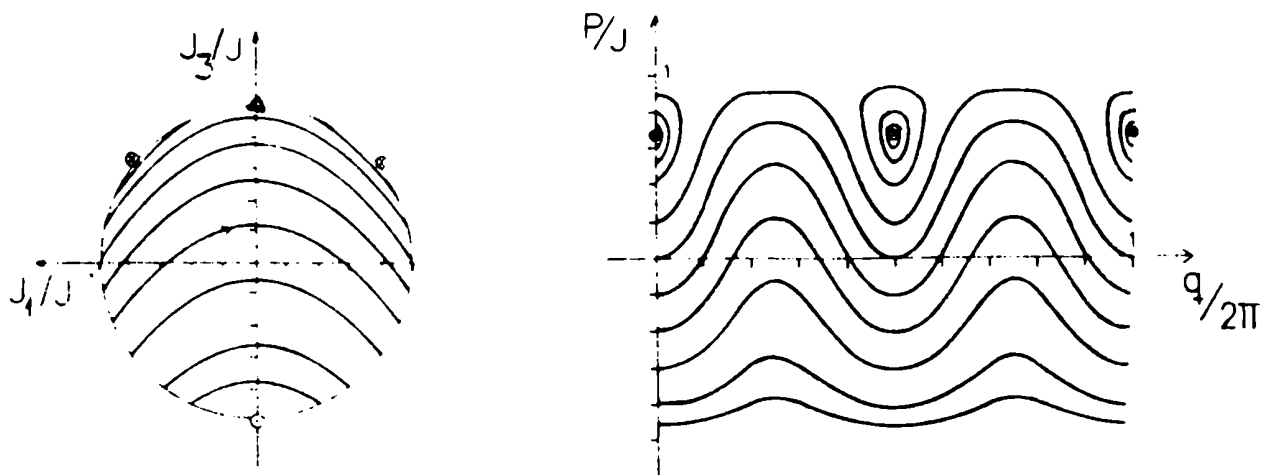


Figura 4.2.1.2. Igual que la Figura 4.2, pero con el valor de $\chi_1 = 1.5$. Se ve que el máximo del polo norte de la Figura 4.2.1.1 sufrió una bifurcación a un punto de ensilladura y dos máximos ubicados en forma simétrica. El punto de ensilladura se indica con el símbolo Δ

Para interacciones fuertes $\chi_1 \gg 1$ el valor medio del hamiltoniano es

$$\bar{\mathcal{H}} \approx \frac{\epsilon}{2J} \chi_1 J_1^2 \quad (4.2.1.1)$$

indicando que las superficies de energía son esencialmente planos paralelos al plano (J_2, J_3) . Notemos que a pesar de que la expresión de \mathcal{H} es muy simple en la representación de cuasispin, se vuelve muy complicada en coordenadas (μ, q) . En este caso sin

embargo es conveniente realizar otra selección de coordenadas canónicas: (p', q') con $p' = J_1$ y q' igual al ángulo polar con respecto al eje J_1 . Cualquier movimiento posible es simplemente una rotación alrededor de este eje con periodo :

$$T = \frac{2\pi}{\dot{q}'} = \frac{2\pi J}{\epsilon \chi_+ p'} \quad (4.2.1.2)$$

ii) $\chi_+ > 0$ y $\chi_- < 0$

En este rango de parámetros de interacción ($V > W$) las cuádricas representan hiperboloides de una hoja. Kan y colaboradores^{ka1} investigaron el diagrama de fases en el caso $W=0$ que constituye la versión más popular del modelo de Lipkin. Para el cual $\chi_+ = -\chi_-$ y por lo tanto los autovalores de la cuádrica son iguales. Cuando el módulo de estos parámetros es menor que la unidad ocurren solo rotaciones. Cuando toman el valor uno es decir, $\chi_+ = 1$, $\chi_- = -1$, ocurre una transición de fase no termodinámica, consistiendo en el apartamiento simultáneo de los dos extremos absolutos desde los polos y la consecuente aparición de libraciones degeneradas centradas en los puntos elípticos $(J/\chi_+) (\pm(\chi_+^2-1)^{1/2}, 0, 1)$ y $(J/|\chi_-|) (0, \pm(\chi_-^2-1)^{1/2}, -1)$ en el hemisferio norte y sur respectivamente. Esta degeneración se puede apreciar en términos geométricos, como una consecuencia del hecho de que el vértice del hiperboloide yace fuera de la esfera en el eje J_3 ; uno puede ver además, que el máximo de energía en

el hemisferio norte corresponde, para valores de χ_+ dados, a esos puntos donde la cuádrica es tangente a la esfera. Lo mismo sucede cuando χ_+ es distinto a $-\chi_-$, en lo que difieren es en que el máximo y el mínimo no están simétricamente localizados con respecto al ecuador como se puede observar en la Figura 4.2.1.3 en la cual se graficaron las órbitas para los valores $\chi_+ = 2$ y $\chi_- = -1.5$. En el presente caso dos transiciones de fase distintas, ocurrieron, una afectando al polo sur y otra al polo norte.

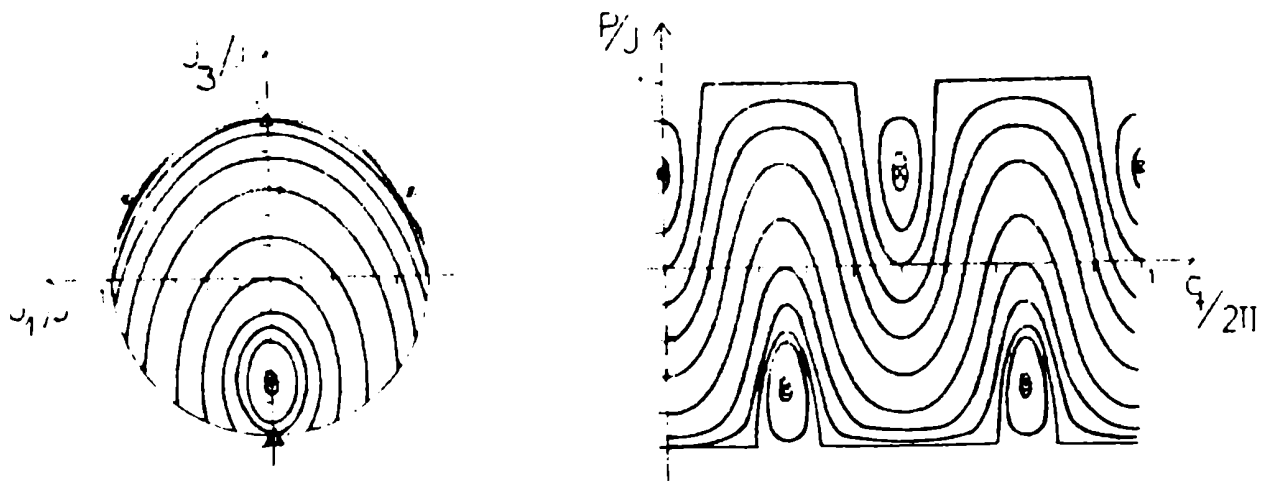


Figura 4.2.1.3 Igual que en las figuras que la preceden, para $\chi = 0$, $\chi_+ = 2$ y $\chi_- = -1.5$. Se puede ver que el mínimo ubicado en el polo sur en las figuras anteriores bifurcó en un punto de ensilladura y dos mínimos. Notemos, además, que las trayectorias que pasan por los polos de la esfera se mapean en curvas pendiente discontinua sobre el diagrama de fase, lo que pone evidencia una de las dificultades que acarrea mapear una esfera sobre el plano.

iii) $\chi_+ > 0$ y $\chi_- > 0$

La familia de cuádricas consiste en un conjunto de paraboloides elípticos. Cuando tanto χ_+ como χ_- son menores que la unidad sólo existen rotaciones. Cuando $\chi_+ = 1$ para $\chi_- < 1$, ocurre una bifurcación que transforma el máximo en el polo norte en dos puntos elípticos (máximos) degenerados situados en $(J/\chi_+) (\pm (\chi_+^2 - 1)^{1/2}, 0, 1)$ y un punto de ensilladura en el polo Norte. Si hacemos crecer aun más el valor de χ_- pero manteniendo la relación χ_+ con χ_+ mayor que uno, ocurre una segunda bifurcación creando dos zonas de rotaciones, el punto de ensilladura bifurca en dos puntos de ensilladura y un mínimo relativo. Esto se ilustra en la Figura 4.2.1.4 para $\chi_+ = 2$ y $\chi_- = 1,5$, en la misma se puede apreciar la presencia de dos puntos hiperbólicos en el plano (J_2, J_3) con ordenada: $J_3 = J/\chi_-$. En este caso, el polo norte es un mínimo relativo. En términos geométricos es fácil ver que cualquier rotación alrededor del polo norte, proviene de intersecar una cuádrlica que dio lugar a alguna otra rotación ubicada justo por debajo de las separatriz inferior y por ende tienen la misma energía. En otras palabras todas las rotaciones alrededor del mínimo relativo son degeneradas.

Si $\chi_+ = \chi_-$ las cuádricas se convierten en paraboloides circulares y el diagrama de fases presenta simplemente líneas horizontales, conteniendo órbitas degeneradas a ambos lados de la circunferencia con $J_3 = J/\chi_+$ cuando χ_+ y χ_- son ambos mayores que

la unidad. El periodo de cualquier órbita es $T = 2\pi/\varepsilon (J - \chi_+ J_3)$. Es interesante hacer notar que la circunferencia con $J_3 = J/\chi_+$ proviene de puntos de tangencia entre la cuádrica y la esfera y por lo tanto son puntos estacionarios, en particular, consiste de máximos de energía. En otras palabras, el máximo es una línea en lugar de un solo punto como en los casos que vimos anteriormente. Todas las energías en el intervalo $\varepsilon J [1 , (\chi_+ + 1)/2]$ son degeneradas.

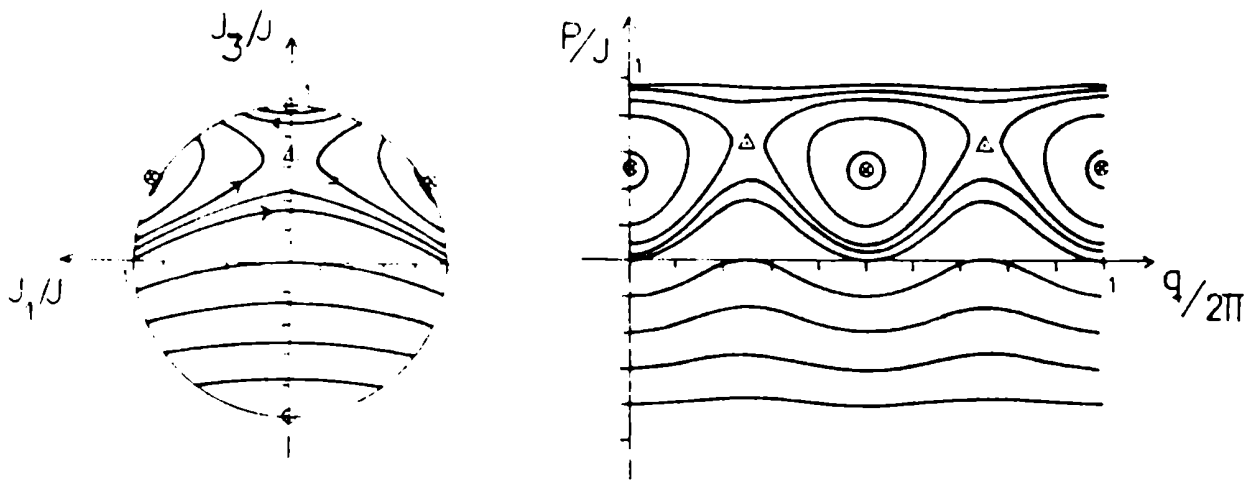


Figura 4.2.1.4. Igual que en la figura precedente pero con $\chi_+ = 0$, $\chi_- = 2$ y $\chi_0 = 1.5$. El símbolo \square indica la posición de mínimo relativo.

4.2.2. Hamiltonianos Cuadráticos sin simetrías ($U \neq 0$).

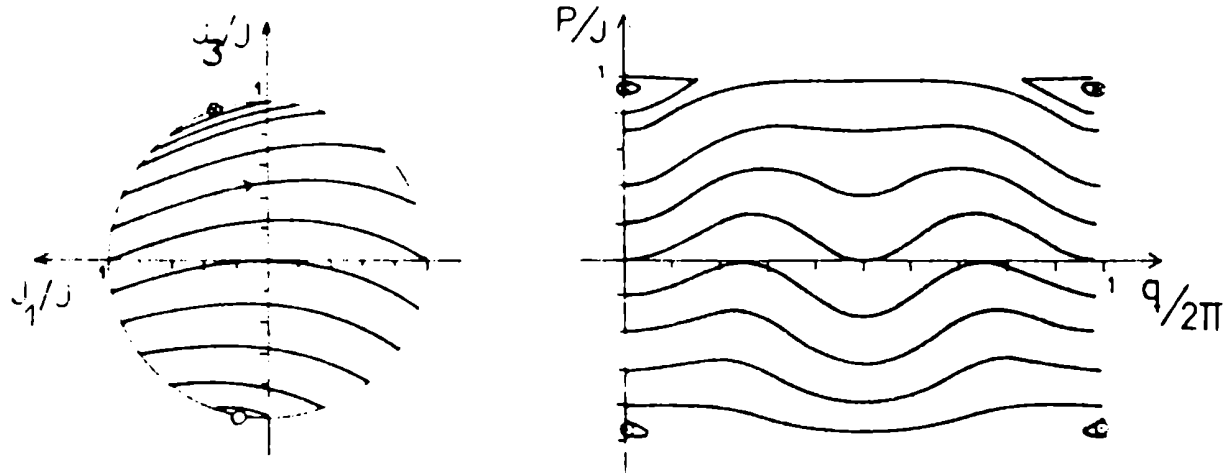
En el caso $V = W$ las cuádricas son cilindros hiperbólicos con simetría de traslación en el eje J_2 . En el caso general con V y W distintos de cero los autovalores λ y los autovectores \vec{v} de las cuádricas son :

$$\lambda_0 = \chi_-, \quad \vec{v}_0 = (0, 1, 0) \quad (4.2.2.1a)$$

$$\lambda_{\pm} = \chi [m \pm (m^2 + 1)^{1/2}] , \quad \vec{v}_{\pm} = (\lambda_{\pm}/\chi, 0, 1) \quad (4.2.2.1b)$$

con $m = \chi_+ / 2\chi_-$. Si se consideran valores arbitrarios de los parámetros de interacción se recorre una amplia variedad de cuádricas que responden a distintas elecciones de los autovalores y autovectores (en particular lo que define el tipo de cuádrica es el signo del autovalor). Más allá de tratar de clasificar todas las posibilidades vamos a discutir un par de ejemplos para simplemente poner de manifiesto la riqueza de tipos de flujos existentes. Nos restringiremos al valor de $\chi_- = 0$, ya que de esta manera el eje J_2 resulta ser eje de traslación de la cuádrica. Esto significa que $V = W$, lo cual representa para valores chicos de U una perturbación del flujo estudiado en la subsección anterior (Figura 4.1). En la Figura 4.2.2.1 se muestra cómo se produjo esta deformación, se puede ver cómo se han corrido los extremos absolutos de los polos. Cuando el parámetro χ_+ se

anula estos extremos no se localizan en forma simétrica respecto del ecuador como en el caso $V = W = 0$.



con χ χ_+

χ_-

Las ecuaciones de los planos asintóticos de estas cuádricas son :

$$\chi_+/2 J_1 + \chi J_3 = \chi_+/2\chi \quad (4.2.2.2a)$$

$$J_1 = -J/\chi \quad (4.2.2.b)$$

Cuando cualquiera de los planos asintóticos intersecan la

esfera, el diagrama de fases sufre separación en órbitas de distintas curvaturas esto se puede apreciar en la Figura 4.2.2.2 donde ambos planos asintóticos penetraron en la variedad, lo cual da lugar a tres conjuntos de libraciones y dos de rotaciones. Esta figura se obtuvo para valores $\chi_+ = 1,5$ y $\chi = 1,25$. En este ejemplo el eje del cilindro hiperbólico yace fuera de la esfera con coordenadas : $J (- 1/\chi , \chi_+/\chi^2)$ en el plano (J_1 , J_3) . Si uno cambia los parámetros, por ejemplo disminuyendo el valor de χ_+ (de manera que el eje de la cuádrica intersecte la esfera), ocurre una nueva transición : el punto de ensilladura situado en $\varphi = \pi$ bifurca en dos puntos de ensilladura y un mínimo relativo trayendo aparejado el consecuente cambio en el diagrama de fases, es decir la aparición de libraciones locales alrededor de este último punto. Esto se muestra en la Figura 4.2.2.3 donde se graficaron los flujos para los valores $\chi_+ = 1$ y $\chi = 2,3$. En este caso ambos planos asintóticos se convierten en separatrices, y encontramos todo tipo de órbitas : rotaciones degeneradas, libraciones degeneradas como así también rotaciones y libraciones no degeneradas. Nuevamente en la bifurcación se puede observar que se conserva la suma de los índices manteniéndose igual a -1 .

Para finalizar notemos que para el hamiltoniano de la figura anterior es posible calcular el período de la órbita correspondiente al plano vertical

$$T = 2\pi/c \left\{ 1 / \left[(\chi_+/\chi)^2 - (\chi^2 - 1) \right]^{1/2} \right\} \quad (4.2.2.3)$$

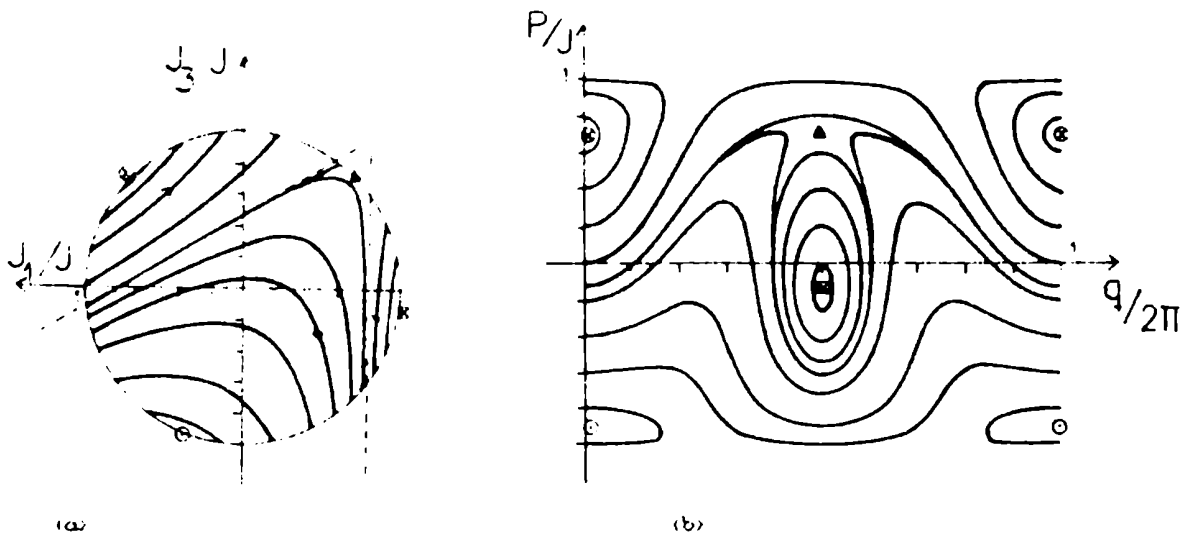
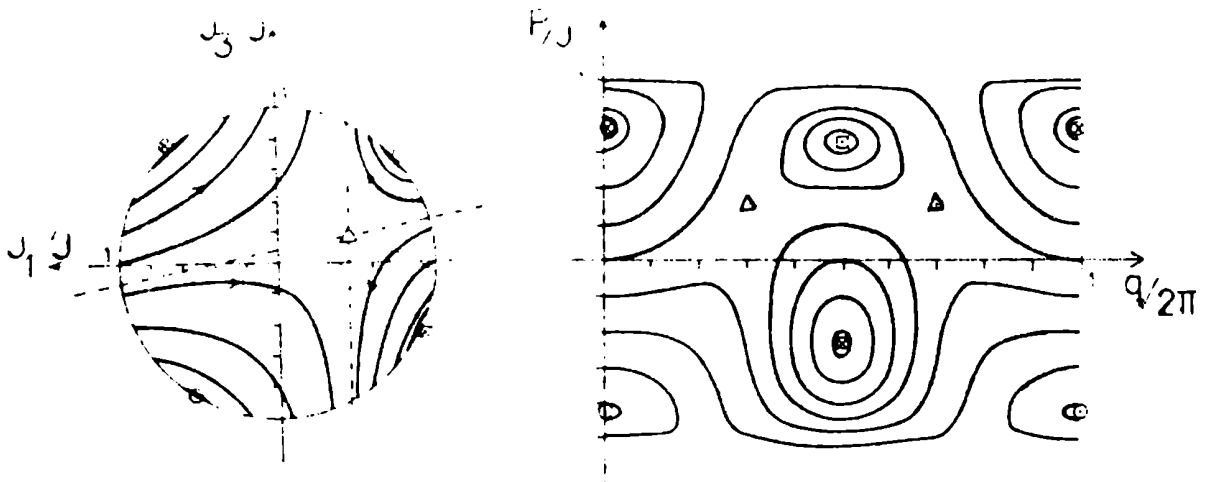


Figura 4.2.2.2. Igual que las figuras precedentes pero con $\lambda_+ = 1.5$ y $\lambda_- = 1.25$. El símbolo \boxtimes indica la ubicación de un máximo relativo. Las líneas punteadas corresponden a la intersección de los planos asintóticos con el plano (J_1, J_3) .



λ_+

4.3. Conclusiones.

En esta clasificación de flujos, en lugar de remitirnos a un estudio analítico o numérico, especialmente para determinar los puntos críticos que son, como vimos, los que determinan el tipo de flujo en su vecindad, hemos utilizado de manera exhaustiva el método geométrico propuesto. Hemos mostrado que dicho método pone énfasis en la forma de las cuádricas asociadas a la energía y los conjuntos invariantes determinados por la intersección de éstas con la esfera de Bloch. Se puede observar que aun en situaciones complicadas como las estudiadas en la última sección, este estudio permite determinar prácticamente las características del diagrama de fases sin realizar integración numérica alguna. Una síntesis de los criterios para tomar en cuenta son :

- a) La observación de que las inestabilidades estructurales aparecen cada vez que tiene lugar un contacto de segundo orden entre la superficie de energía y la esfera,
- b) la observación de que las órbitas degeneradas aparecen cuando la misma cuádrica asociada a la energía interseca dos veces a la esfera,
- c) la distinción entre rotaciones y libraciones viene dada por el hecho de que la trayectoria concuerde o no al eje J_3 respectivamente,
- d) la identificación de los puntos críticos como mínimos como puntos de

tangencia entre ambas superficies y

e) la identificación de un punto de ensilladura que responde a una característica distinta según el tipo de cuádrica que se considere; por ejemplo en el caso de los cilindros hiperbólicos, dicho punto está dado por la intersección del eje de los mismos con la esfera.

Capítulo 5. Dinámica Variacional Conservativa en SU(1,1)

En este capítulo describiremos el tipo de flujos para varios hamiltonianos que pueden escribirse con los operadores que generan el grupo SU(1,1); lo haremos en el mismo espíritu del capítulo anterior, es decir, describiendo cualitativamente todas sus características a partir de la concepción geométrica descrita en el Capítulo 3. En este caso considerando las intersecciones entre los hiperboloides de dos hojas y las cuádricas asociadas a la energía. En el caso de encontrar órbitas integrables analíticamente expondremos sus periodos.

En primer término estudiaremos los hamiltonianos lineales en los operadores que generan el álgebra SU(1,1), pasaremos luego a estudiar los cuadráticos con y sin simetrías (Secciones 5.2.1 y 5.2.2 respectivamente) y por último enumeraremos las conclusiones obtenidas.

5.1 Hamiltonianos Lineales

En primer término veamos la dinámica para el hamiltoniano:

$$\hat{H} = \epsilon \hat{K}_3 \quad (5.1.1)$$

Como comentario, recordemos que éste se puede obtener a partir del hamiltoniano $H(p, q)$ del oscilador armónico isótropo con una conveniente realización del álgebra $SU(1,1)$ como se vió en la Sección 1.1.

La familia de cuádricas consiste en planos perpendiculares al eje K_3 y por lo tanto todas las orbitas lo concatenan (ver Figura 5.1.1). Existe un único punto crítico que es un mínimo absoluto ubicado en el vértice del hiperboloide, es decir en $\vec{P} = (0, 0, K)$. El correspondiente diagrama de fases contiene curvas planas. Para calcular la velocidad en cada punto, tenemos que :

$$\nabla \mathcal{H} = (0, 0, \varepsilon) \quad (5.1.2a)$$

$$\text{y } \nabla \mathcal{G} = (K_1, K_2, -K_3) \quad (5.1.2b)$$

y por lo tanto de acuerdo con la ecuación (3.3.3),

$$\dot{\vec{K}} = (-\varepsilon K_2, \varepsilon K_1, 0) \quad (5.1.3)$$

Es decir que, en forma análoga a lo que ocurría en $SU(2)$

$$\dot{t} + \varepsilon_0 \quad (5.1.4)$$

luego la dinamica es equivalente a la de un cuerpo rígido que gira alrededor del eje K_3 .

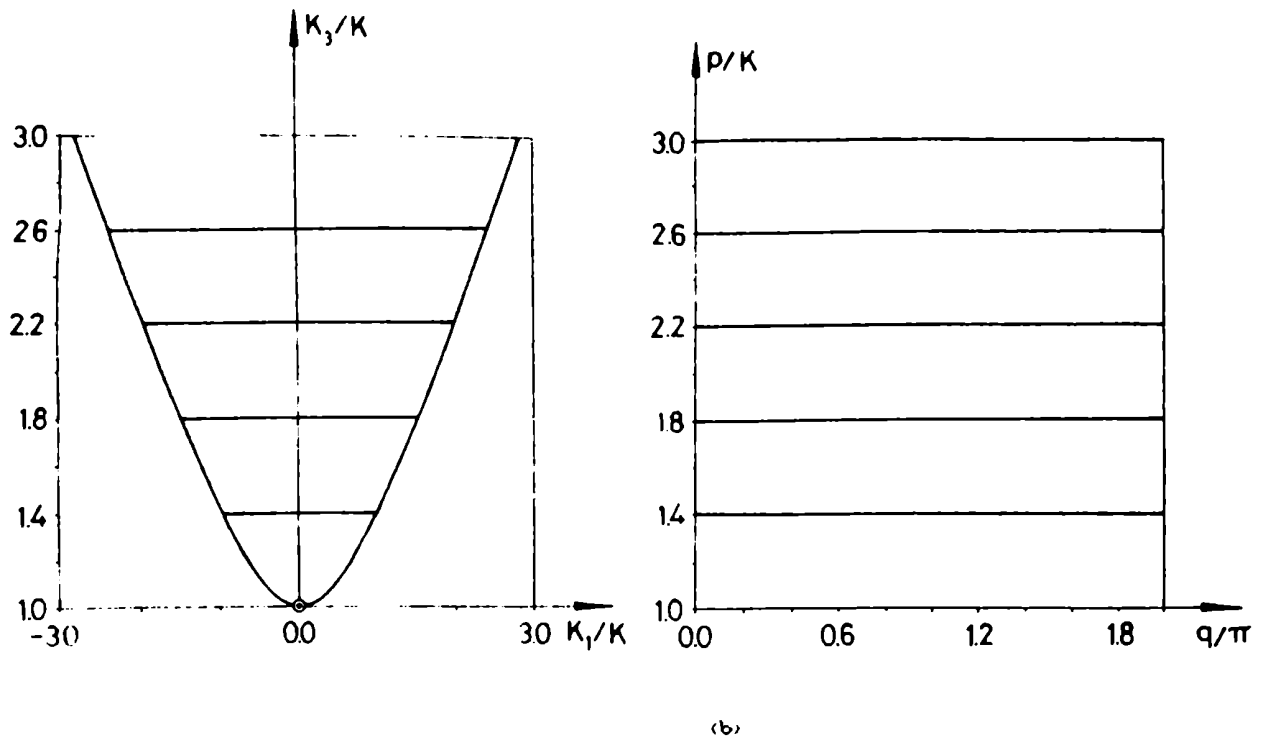


Figura 5.1.1. (a) Trayectorias del vector \vec{K} para un hamiltoniano lineal de la forma $\hat{H} = \varepsilon \hat{K}_3$ sobre la variedad asociada al grupo, con $k = 1$ y $\varepsilon = 1$, (b) Diagrama de fases correspondiente al mismo flujo que en (a). Los símbolos utilizados para indicar los puntos críticos son los mismos que en el capítulo anterior.

Si ahora consideramos el hamiltoniano :

$$H = \varepsilon \hat{K}_3 - \alpha \hat{K}_1 \quad \text{con } \varepsilon > 0 \text{ y } \alpha > 0 \quad (5.1.5)$$

obviamente en $SU(1,1)$ la ecuación de movimiento no es invariante frente a rotaciones y por lo tanto esta dinámica no es equivalente a la de $\hat{H} = \epsilon \hat{K}_3$ como en el caso de $SU(2)$. En este punto resulta interesante comentar que apesar de no ser invariante rotacional, para ciertos valores del cociente α/ϵ , resulta invariante frente a una rotación generalizada de la forma^{So3, Bi1, Ge5, Ge6, Ge7}

$$K'_3 = K_3 \cosh \eta + K_1 \operatorname{sh} \eta \quad (5.1.6a)$$

$$K'_1 = K_3 \operatorname{sh} \eta + K_1 \cosh \eta \quad (5.1.6b)$$

que es equivalente a la transformación de Bogoliubov. Para ello se debe elegir η de manera que el coeficiente que acompaña a K'_1 en el hamiltoniano se anule. En este caso uno encuentra :

$$\operatorname{tgh} \eta = -\alpha/\epsilon \quad (5.1.7)$$

lo cual adquiere sentido solamente para $\alpha < \epsilon$. Si se verifica la ec.(5.1.7) es fácil comprobar que la ecuación de movimiento del tipo Bloch es invariante frente a esta transformación a pesar, reiteramos, que ésta no es invariante rotacional en el sentido usual.

Retornemos ahora, al análisis de flujos; si $\alpha/\epsilon < 1$ tenemos un mínimo absoluto de energía en el punto de tangencia :

$$P_0 = \left(\frac{\xi h}{\sqrt{1-\xi^2}}, 0, \frac{h}{\sqrt{1-\xi^2}} \right) \quad (5.1.8)$$

con $\xi = a/\varepsilon$. La energía correspondiente es

$$E_0 = \varepsilon \sqrt{1-\xi^2} \quad h = \mathcal{H}(P_0) \quad (5.1.9)$$

Todas las órbitas son cerradas, coexistiendo libraciones y rotaciones, extendiendo las definiciones expuestas en el capítulo anterior de rotaciones y libraciones siempre que $|p| < M$, o en otras palabras siempre que se trate de órbitas cerradas, en caso contrario hablaremos de órbitas abiertas. La separatriz entre estos dos tipos de trayectorias es la órbita determinada por el plano que pasa por el vértice del hiperboloide, definido según la ecuación :

$$\varepsilon K_3 \text{ o } K_1 = \varepsilon h \quad (5.1.10)$$

Los flujos correspondientes se muestran en la Figura 5.1.2

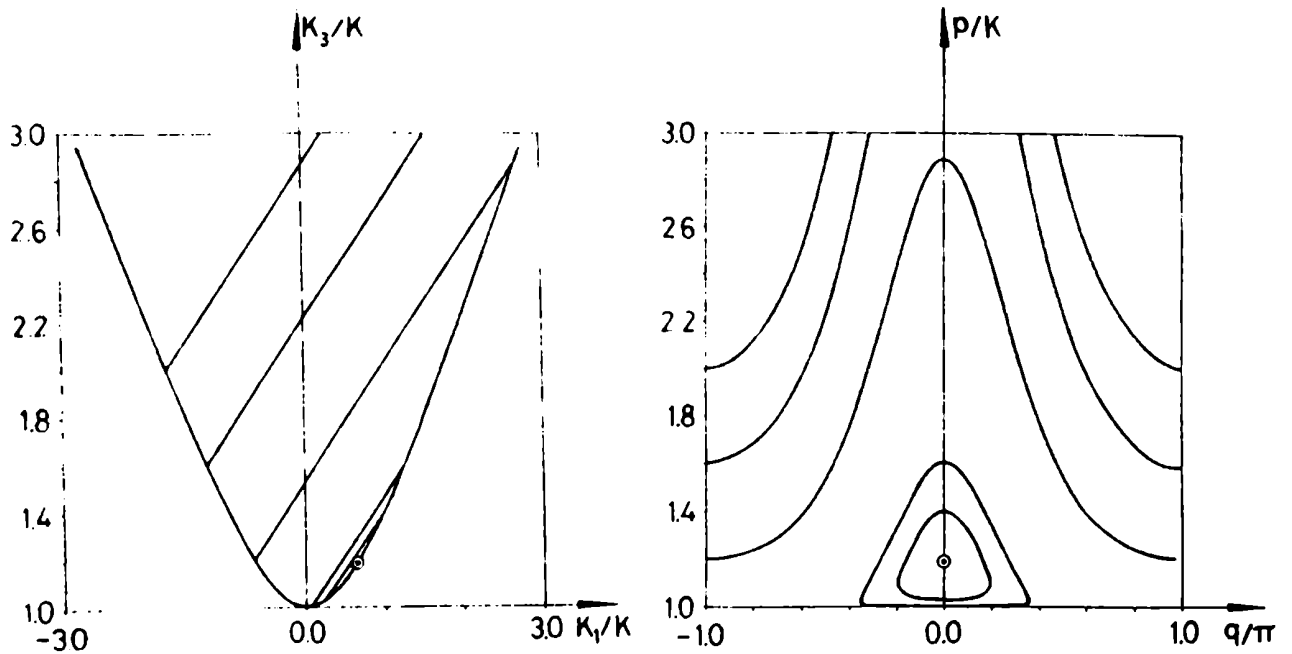


Figura 5.1.2 Igual que la Figura 5.1.1 pero para el hamiltoniano descrito por la ec. (5.1.5) con $\alpha = 1/2$.

Para $\zeta \geq 1$ todas las órbitas son aciertas. Obviamente en $SU(2)$ este tipo de trayectorias no eran posibles por tratarse de una variedad compacta. Por lo tanto estos flujos son más ricos que los tratados en el capítulo anterior. En este rango de parámetros no se presentan máximos ni mínimos de energía. En el límite $\alpha \rightarrow \infty$, o lo que es lo mismo fijando $\varepsilon = 0$, los planos resultan verticales, situación que se graficó en la Figura 5.1.3 para valores de $K = 1$ y $\alpha = 1$. En este caso existe una órbita $K(t)$ integrable analíticamente que es la que corresponde a energía nula cuya cuádrica asociada es el plano que pasa por el vértice. En este caso la velocidad es :

$$\dot{K} = -\alpha (0, K_3, K_2) \quad (5.1.11)$$

de la cual se obtiene el tiempo necesario para ir de $K_2(0)$ a $K_2(t)$

$$t = \frac{1}{\alpha} \left\{ \operatorname{senh}^{-1} \left[\frac{K_2(0)}{K} \right] - \operatorname{senh}^{-1} \left[\frac{K_2(t)}{K} \right] \right\} \quad (5.1.12)$$

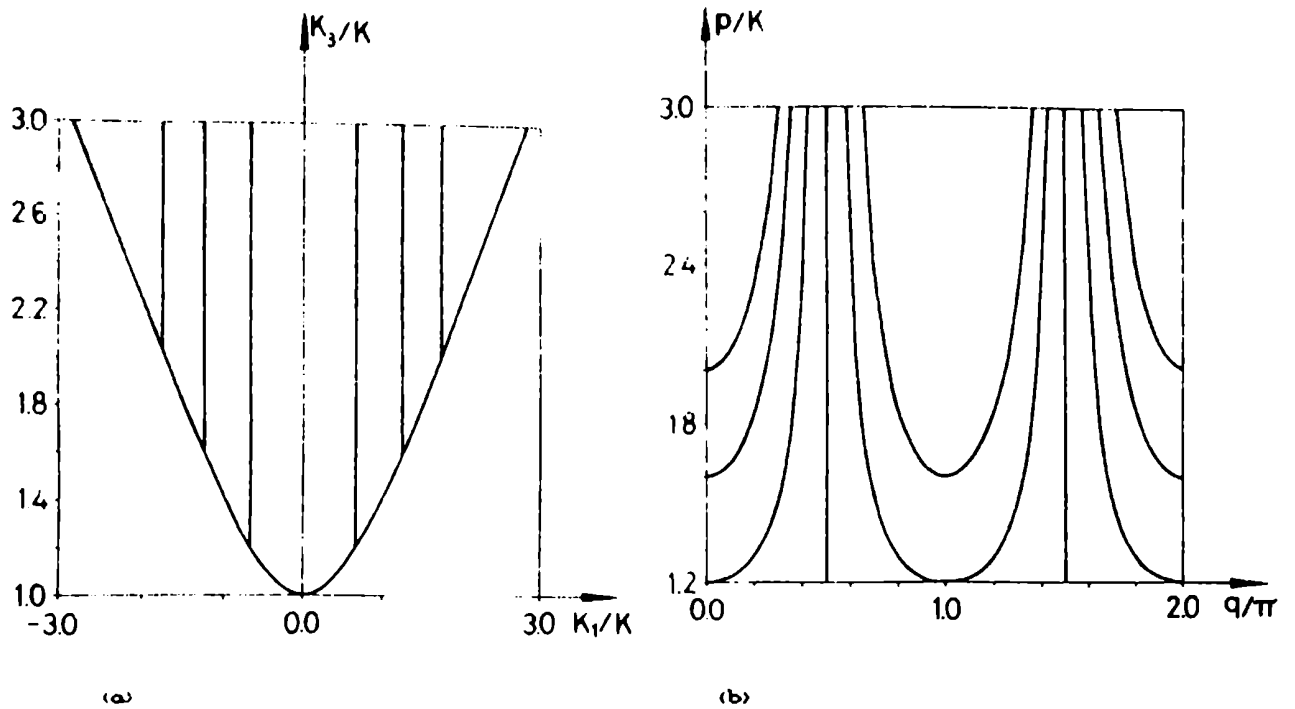


Figura 5.1.9. Idem que la figura anterior con $\epsilon = 0$ y $\alpha = 1$

Notemos que para este grupo ($SU(1,1)$) la suma total de los índices no se conserva como en el caso de $SU(2)$ para el cual vale

siempre 2 por tener como variedad asociada una esfera (ver Sección 1.3). Para variedades no compactas, como en este caso, los puntos críticos no solo se crean y se destruyen ante bifurcaciones, sino que, el infinito actúa como fuente o sumidero de los mismos. Esto queda de manifiesto cuando uno pasa del valor $\epsilon = 0$ (suma de índices = 0) a valores de $\epsilon \neq 0$ (suma de índices = 1). Esto se debe a que no es posible definir una curva cerrada que encierre a todos los puntos en cuestión (Consultar Sección 1.3).

5.2 Hamiltonianos Cuadráticos

5.2.1 Hamiltonianos Cuadráticos con simetrías.

Veamos ahora algunos ejemplos de hamiltonianos cuadráticos cuyas cuádricas asociadas son

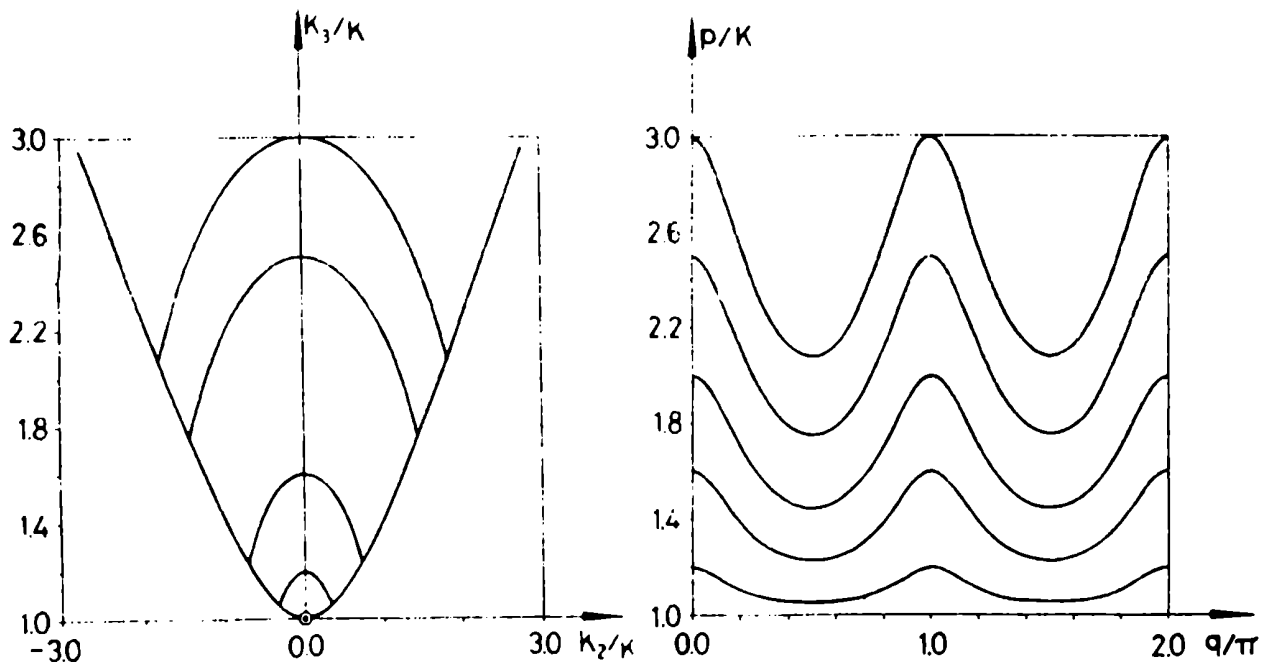
i) Cilindros con los ejes en $(0, 0, a)$

$$\mathcal{H} = (k_3 - a)^2 + k_2^2 \quad (5.2.1.1)$$

Si $0 \leq a \leq k$

Para este rango de parámetros el eje de los cilindros no interseca al hiperboloide (Figura 5.2.1.1) y por lo tanto existe un único punto crítico (mínimo) en el vértice del hiperboloide, es decir, en $\vec{P}_0 = (0, 0, k)$ con energía $\mathcal{H}_0 = (k-a)^2$. Todas las órbitas son rotaciones no degeneradas alrededor del eje k_3 con sentido de

giro positivo.



(a)

Figura 5.2.1.1. (a) Trayectorias del vector \vec{k} sobre la hoja superior del hiperboloide para un hamiltoniano cuadrático cuya cúbica asociada viene descrita por la ec. (5.2.1.1) $a = 3/4$ y $k = 1$. (b) Diagrama de fases respectivo.

Si $k \leq a \leq 2k$

Justo en el valor $a = k$ el eje de los cilindros es tangente al hiperboloide y para valores mayores lo interseca dos veces. Los puntos de intersección son mínimos (degenerados). Es decir, para los puntos $\vec{p}_{0\pm} (\pm \sqrt{a^2 - k^2}, 0, a)$ se da el mínimo de energía

$\mathcal{E}_0 = 0$, mientras que el vértice del hiperboloide $\vec{P}_0 = (0, 0, K)$ se convierte en un punto de ensilladura con $\mathcal{E}_0 = (K-a)^2$. La Figura 5.2.1.2 muestra estos flujos para valores de $k = 1$ y $a = \sqrt{2}$. En este rango de valores de a coexisten tres tipos de flujos a saber: dos conjuntos de libraciones alrededor de los mínimos con energías degeneradas, ya que provienen de intersectar dos veces la misma cuádrica, y rotaciones para energías mayores que \mathcal{E}_0 que son no degeneradas.

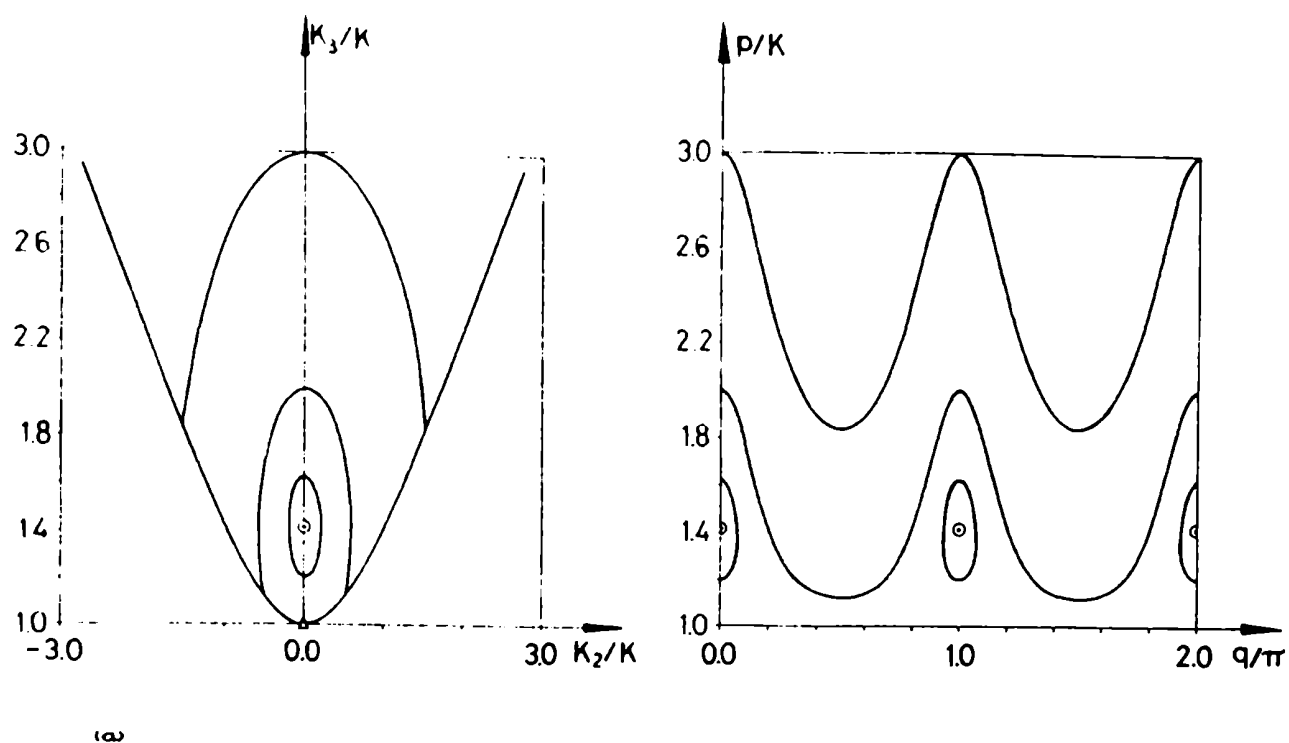


Figura 5.2.1.2. Igual que la Figura 5.2.1.1 con $a = \sqrt{2}$.

Si $a \geq 2K$

Dado que el cuadrado de la distancia más corta del eje de los cilindros al hiperboloide en el plano (K_1, K_2) es $a^2/2 - K^2 < (a-K)^2$, que es cuadrado de la distancia al vértice, el anterior punto de ensilladura bifurca en dos puntos de ensilladura y un máximo relativo en el vértice. Esta configuración se muestra en la Figura 5.2.1.3. La dinámica presenta en este caso cuatro tipos de flujos coexistentes :

i) Rotaciones alrededor del máximo relativo $\vec{P} = (0, 0, K)$ con energías $\mathcal{E}_M = (a-K)^2$. Estas rotaciones tienen energías degeneradas ya que la cuádrica de la cual provienen intersecan dos veces al hiperboloide. Observar por ejemplo, que las órbitas punteadas en la Figura 5.2.1.3 provienen de la misma cuádrica.

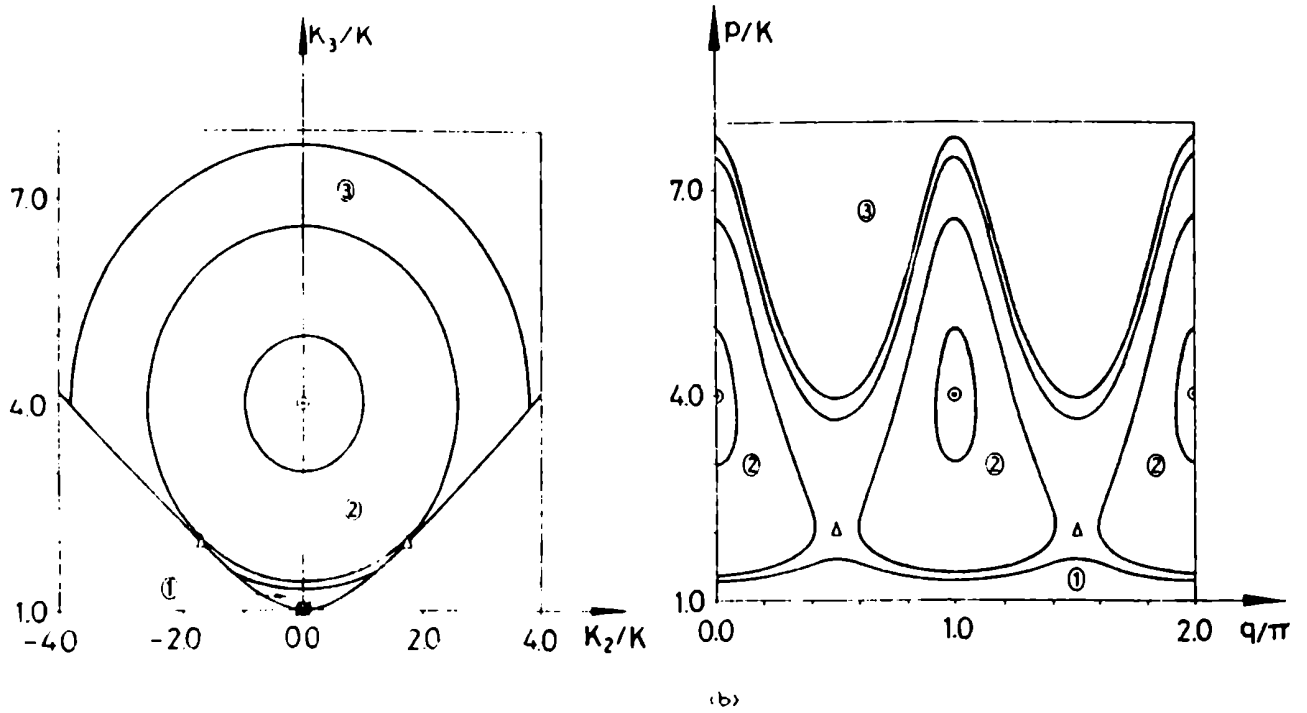
ii) Libraciones (2) alrededor de los mínimos, por supuesto también degeneradas, las proyecciones de las mismas sobre el plano (K_1, K_2) son círculos completos con $K_1 > 0$ y $K_1 < 0$, respectivamente

iii) Rotaciones alrededor del eje K_3 . Hasta el valor de energía $\mathcal{E} = (a-K)^2$, éstas provienen de la parte superior de un cilindro que se intersecaba inferiormente alrededor del máximo relativo y por lo tanto son degeneradas. Es decir, que, dado que el mismo cilindro interseca la variedad en dos órbitas de distinto tipo,

i) y las ii), las del tipo iii) tienen la misma energía que las que estamos considerando (ii) en el rango de energías arriba mencionado. Para energías superiores pasan por debajo del vértice

y por lo tanto no hay degeneración.

Dado que el hamiltoniano considerado es invariante frente a rotaciones en un ángulo π alrededor del eje K_3 , los puntos críticos verifican: a) el vértice del hiperboloide es siempre un punto crítico y b) aparecen siempre de a pares con igual energía. Resulta entonces interesante estudiar un caso en donde se rompa esta simetría.



Igual que las dos figuras que la preceden

5.2.2. Hamiltonianos Cuadráticos en ausencia de simetrías.

Analicemos el hamiltoniano :

$$\hat{H} = \varepsilon \hat{K}_3 + U (\hat{K}_3, \hat{K}_1) \quad (5.2.2.1)$$

cuya cuádrica asociada es :

$$\mathcal{K} = \varepsilon (K_3 + \chi/K K_1 K_3) \quad \text{con} \quad \chi = U(2K+1)/\varepsilon \quad (5.2.2.2)$$

Esta cuádrica representa cilindros hiperbólicos con sus ejes en $K_1 = -K/\chi$. Para valores de $\chi = 0$ este eje está en el infinito y las cuádricas se convierten en planos como en el caso tratado en la primera sección de este capítulo. Al aumentar el valor de χ los planos se van curvando. El mínimo ubicado, para $\chi = 0$ en el vertice se va desplazando hacia valores negativos de K_1 mientras que aparece otro punto crítico (de ensilladura) desde el infinito. De la condición de paralelismo entre $\nabla \mathcal{K}$ y $\nabla \mathcal{G}$ y fijando $K_2 = 0$ se obtienen la localización de los puntos :

$$\vec{P}_{\pm} = \left[-\xi/4 \pm \sqrt{(\xi^2 - 8K^2)/4}, 0, \xi/4 \sqrt{2(1 + 4\chi^2 - \sqrt{1 - 8\chi^2})} \right] \quad (5.2.2.3)$$

con $\xi = K/\chi$.

Esta configuración se muestra en la Figura 5.2.2.1.

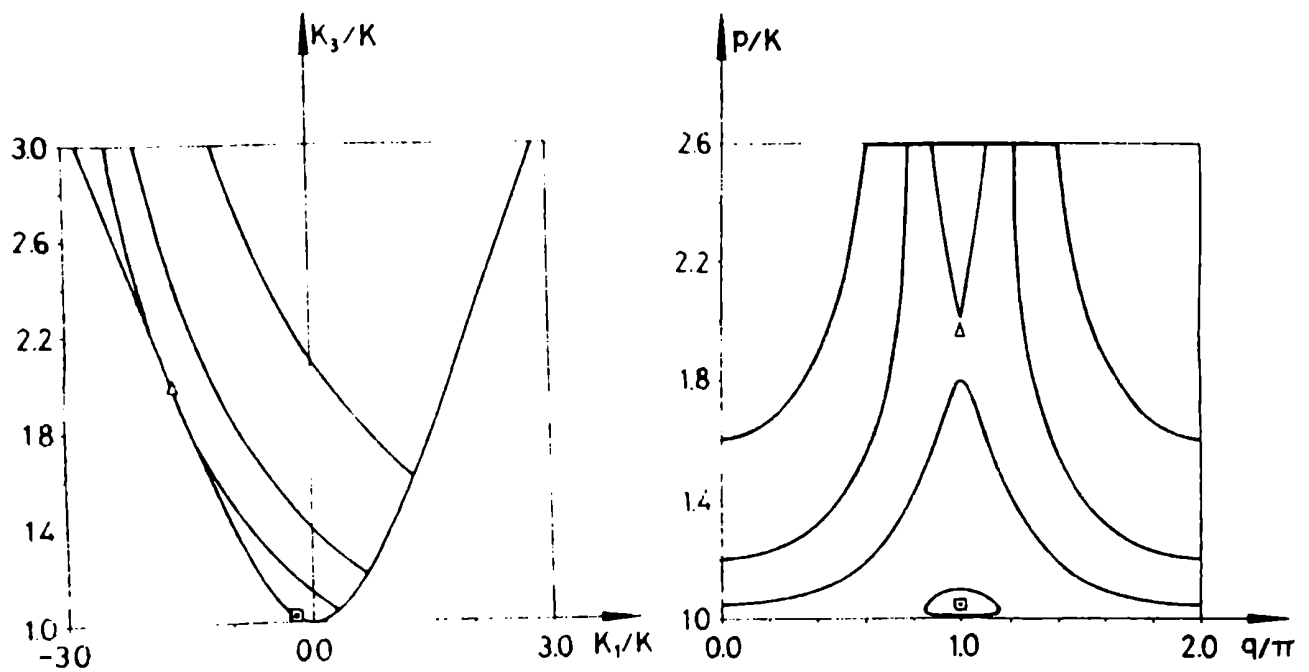


Figura 5.2.2.1. (a) Trayectorias del vector \vec{k} en el hiperboloide para el hamiltoniano descrito por la ec. (5.2.2.1) con $\lambda = 1/4$, $\epsilon = 1$ y $k = 1$. (b) Diagrama de fases correspondiente al mismo flujo que en (a).

Resulta obvio de observar la Figura 5.2.2.1 que \vec{P}_+ es un mínimo y \vec{P}_- un punto de ensilladura ya que en un entorno del primer punto la cuádrica de energía \mathcal{E}_0 no atraviesa al hiperboloide (máximo o mínimo) y la deja en la zona de energías crecientes, por lo tanto es un mínimo. El cambio la cuádrica correspondiente a \mathcal{E}_+ atraviesa a \vec{g} en el punto \vec{P}_- (punto de ensilladura).

Entre \mathcal{E}_+ y \mathcal{E}_0 las energías son degeneradas pero a diferencia de lo estudiado en la sección anterior estas órbitas son totalmente distintas entre sí: unas son cerradas (alrededor del

mínimo) y las otras abiertas.

Al incrementar el valor de χ , los puntos críticos convergen a un mismo punto donde se produce la bifurcación para $|\chi| = 1/2\sqrt{2}$. Para valores aun mayores no hay puntos críticos ni órbitas degeneradas.

Debido a que el cono asintótico del hiperboloide y los planos asintóticos del cilindro hiperbólico de equienergía tienen intersección no nula para valores finitos de χ no hay máximos ni mínimos absolutos de energía. Esta crece indefinidamente para valores $K_1 \rightarrow \infty$ y decrece para $K_1 \rightarrow -\infty$.

Nuevamente como en la sección anterior la suma de los índices de los puntos críticos no se conserva para $\chi \in (-\infty, \infty)$ ya que para $\chi \neq 0$ esta suma es nula, mientras que para $\chi = 0$ da uno. Si hubiésemos trabajado con un hamiltoniano normalizado con χ , y tomado z como parámetro de control, la situación hubiese sido distinta ya que para $z \in (-\infty, \infty)$ la suma de los índices es siempre nula. Esto es equivalente a hacer la inversión $\chi \rightarrow 1/\chi$ y por lo tanto se excluye el caso

5.3. Conclusiones.

Nuevamente vemos la ventaja de trabajar en este marco geométrico. Las conclusiones son las mismas que las enumeradas en el capítulo anterior para la dinámica dentro del grupo $SU(2)$, con la única diferencia de que dado que la variedad en cuestión es no compacta, la riqueza de flujos es mayor, debido a la existencia de órbitas abiertas. Pero por otro lado, se pierde la propiedad de

volucrados no divergen.

Capítulo 6. Conjuntos de Bifurcación

Como se puede observar de las dinámicas expuestas los cambios en las características topológicas de los flujos están dados por la aparición de los distintos puntos críticos. Es decir, para ciertos valores de las constantes que parametrizan al hamiltoniano se produce una bifurcación al hacer variaciones sobre estos parámetros de "control". Por lo tanto resulta interesante graficar las curvas en el espacio de parámetros para las cuales se producen estas transiciones. Queremos destacar que no tendremos en cuenta como orbitas topológicamente distintas a libraciones locales que aparecen en el diagrama de fase como consecuencia del mero corrimiento de un mínimo (máximo) ubicado en alguno de los polos de la esfera (en el caso de $SU(2)$) o en el vértice del hiperboloide (en el caso de $SU(1,1)$). Por ejemplo, esto ocurre cuando se pasa del hamiltoniano \hat{H}_j de la ec. (5.1.1) a $\hat{z} \cdot \hat{J}$ con alguno $\hat{z}_j \neq 0$ $j \neq 3$. Estos hamiltonianos, a pesar de presentar diagramas de fases distintos, tienen flujos sobre la esfera totalmente equivalentes.

Las transiciones a que nos referimos son en general transiciones de fase no termodinámicas o Catástrofes^{Gil, G16, Fe2} relacionadas con la bifurcación de los puntos críticos. Estos puntos verifican: $\nabla \times |v = 0$; donde $|v$ significa la proyección del vector sobre la variedad (esfera o

hiperboloide). En particular si consideramos (x_1, x_2) coordenadas locales alrededor de estos puntos se puede aplicar toda la teoría desarrollada en la Sección 1.3, es decir clasificar en puntos del tipo Morse, definir índices, la característica con su respectiva conservación en el caso de variedad compacta, la cota inferior de flujos coexistentes según la cantidad y tipo de puntos críticos que se presenten, y la posterior clasificación del flujo en el espacio de parámetros.

En este capítulo nos encargaremos entonces, de trazar los conjuntos de bifurcación en espacios de parámetros de dimensión 2. Dado que el estudio de los diagramas de bifurcación correspondientes al grupo $SU(2)$ se realizó para el modelo de Lipkin por Gilmore y colaboradores^{G16} y para un hamiltoniano del Lipkin generalizado en un trabajo paralelo a éste (Tesis de Licenciatura de C.E.Vignolo^{V11, V12}) no lo describiremos aquí, simplemente queremos comentar que dado que la esfera es compacta se puede definir, como ya dijimos, una característica (suma de los índices de los puntos críticos, ver Capítulo 1, Sección 3), que se conserva en todo el espacio de parámetros. Más aun, como ya comentamos al hacer el análisis de los flujos correspondientes a $SU(2)$, existe una conservación local de la suma de los índices cada vez que se produce una bifurcación; por lo tanto cada vez que cruzemos las fronteras de los diagramas de bifurcación, se mantiene una relación entre el número y el tipo de puntos críticos. Por ejemplo, un mínimo nunca puede bifurcar en dos mínimos al cruzar la frontera mencionada. En cambio en los flujos sobre la variedad asociada a $SU(1,1)$ este tipo de cambios sí es posible, resultando entonces el conjunto de bifurcaciones

claramente mas complicado que el anterior.

En lo que sigue desarrollaremos el caso de los flujos correspondientes a $SU(1,1)$ proponiendo hamiltonianos (que como dijimos dependan de dos parametros) e incluyan a los estudiados en el capitulo anterior.

6.1 Hamiltonianos $SU(1,1)$ con simetrias

Primeramente vamos a considerar un hamiltoniano que contiene al presentado en la Seccion 5.2.1, cuya cuádrica asociada es

$$\mathcal{X} = (k_3 - a)^2 + \alpha K_1^2 + k_2^2 \quad (6.1.1)$$

Al variar el valor de a simplemente se produce un corrimiento de la cuádrica segun el eje K_3 , mientras que α determina el tipo de cuádrica, es decir, si $\alpha < 0$ y $\mathcal{X} > 0$ se trata de hiperboloides de una hoja, si $\mathcal{X} = 0$ de conos y si $\mathcal{X} < 0$ de hiperboloides de dos hojas. Si $\alpha = 0$ se trata de cilindros (caso de una de las dinámicas que describimos en el capitulo anterior) y si $\alpha > 0$ de elipsoides (esferas para $\alpha = 1$).

En general los puntos criticos del flujo verifican :

$$\nabla \mathcal{L} \parallel \nabla \mathcal{E} \text{ o bien } \nabla \mathcal{E} = 0 \quad (6.1.2)$$

siendo

$$\nabla \mathcal{E} = 2 (K_1, K_2, -K_3) \quad (6.1.3)$$

y

$$\nabla \mathcal{L} = 2 (\alpha K_1, K_2, K_3 - a) \quad (6.1.4)$$

Para valores de α no nulos la condición de paralelismo da cinco puntos críticos,

$$\vec{K}_{\pm} = \left(\pm \left[\frac{a^2}{1+\alpha^2} - k^2 \right]^{1/2}, 0, \frac{a}{1+\alpha} \right) \quad (6.1.5)$$

si $a \geq k(1+\alpha)$, $\alpha \neq -1$, con energías

$$\mathcal{E}_{\pm} = \frac{\alpha a^2}{(1+\alpha)} - \alpha k^2, \quad (6.1.6)$$

y

$$\vec{K}'_{\pm} = \left(0, \pm (a^2/4 - k^2)^{1/2}, a/2 \right) \quad (6.1.7)$$

si $a \geq 2K$, con energías

$$E_{\pm} = \frac{a^2}{2} \quad (6.1.8)$$

y por último, tomando $K_1 = K_2 = 0$ obtenemos el punto singular ubicado en el vértice del hiperboloide :

$$\vec{R}_0 = (0, 0, K) \quad (6.1.9)$$

con energía,

$$E_0 = (K-a)^2 \quad (6.1.10)$$

Si $\alpha = -1$ y $a = 0$, la intersección entre el hiperboloide (3) y la cuádrica asociada a la energía (2) es una cónica y en consecuencia no aparece ningún punto crítico aislado. La ecuación de esta cónica es : $K_2 = 0, K_3^2 - K_1^2 = K^2$ y corresponde a una curva de puntos cuyas velocidades son nulas, siendo además mínimos de energía. Se ve de la ec. (6.1.5) que para valores de a no nulos, cuando uno se aproxima a valores de $\alpha = -1$ los puntos \vec{R}_{\pm} divergen, permaneciendo en el caso $\alpha = 1$ solamente tres puntos críticos \vec{R}_{\pm} y \vec{R}_0 que vienen dados por la ecuaciones (6.1.7) y (6.1.9) respectivamente.

A partir de estas consideraciones podemos dibujar el diagrama

de bifurcaciones en el espacio (α, a) que aparece en la Figura 6.1.1. Los conjuntos de bifurcación vienen definidos por la condición de existencia de los puntos dados por las ecuaciones (6.1.5) y (6.1.7) (por la simetría del hamiltoniano, K_0 es siempre un punto crítico). Dentro de estos conjuntos indicados en la Figura 6.1.1 de I a VIII los flujos son topológicamente equivalentes. Analicemos ahora en detalle el tipo de bifurcaciones que ocurren cuando se pasa de una región a otra; las mismas se ilustran gráficamente en la Figura 6.1.2 y corresponden a :

a) De la región I a la II. Un mínimo absoluto en $K_3 = K$ se bifurca en dos mínimos relativos y un punto de ensilladura que permanece en el vértice.

b) De la región II a la III. El punto de ensilladura en $K_3 = K$ se bifurca en un máximo relativo y dos puntos de ensilladura. Queremos hacer notar que en la región III el autovalor correspondiente al eje K_2 de la cuádrica asociada a la energía es mayor que el correspondiente al eje K_1 la línea punteada vertical indica la localización de la superficie de energía esférica. Está claro entonces que el flujo en la región IV (V) es idéntico al de la zona II (III); simplemente se intercambian los roles de K_1 y K_2 .

c) De la región I a la IV : igual que a)

d) De la región IV a la V : igual que b)

Antes de examinar los restantes gráficos es necesario realizar algunas consideraciones. Notemos que para $\alpha = -1$ y $a < 0$ existe solamente un mínimo en el vértice, debido al hecho de que la curvatura de las cuádricas en el plano (K_1, K_2) es mayor para la

superficie de energía que para la variedad del grupo. Cuando a se anula, como dijimos anteriormente, ambas cuádricas se intersecan en una curva y para valores positivos de a el vértice se convierte en un punto de ensilladura, como consecuencia de la relación invertida entre las curvaturas. Cuando a alcanza el valor $2K$, este punto de ensilladura bifurca como en b). En relación con este análisis nuevamente resulta especialmente interesante destacar que dado que los puntos críticos pueden "escaparse" o "emerger" del infinito para valores de α alrededor de la recta $\alpha = -1$, no es posible trazar una curva cerrada que encierre a todos los puntos críticos de la variedad al pasar, por ejemplo, de valores $\alpha + \delta$ a $\alpha - \delta$ con $\delta > 0$. Por lo tanto, no se puede asegurar la conservación de la suma total de los índices de los puntos críticos, como en las variedades compactas donde siempre es posible, obviamente, trazar estas curvas. Recordemos como ilustración el caso de la variedad asociada al grupo $SU(2)$, que estudiamos en el Capítulo 4, donde esta suma siempre vale dos (característica de la esfera) (ver Capítulo 1, Sección 3). En particular en el caso que estamos analizando la suma para valores de $\alpha > -1$ vale 1 y para valores $\alpha < -1$ vale -1. Por lo tanto la línea $\alpha = -1$ determina en el plano de bifurcaciones dos zonas con distintas sumas de índices.

Continuando con las bifurcaciones, ahora a la izquierda de $\alpha = -1$:

- e) De la región VII a la VIII : un punto de ensilladura se bifurca en un mínimo relativo y dos puntos de ensilladura.
- f) De la región VII a la VI, ocurre la misma bifurcación que en b)

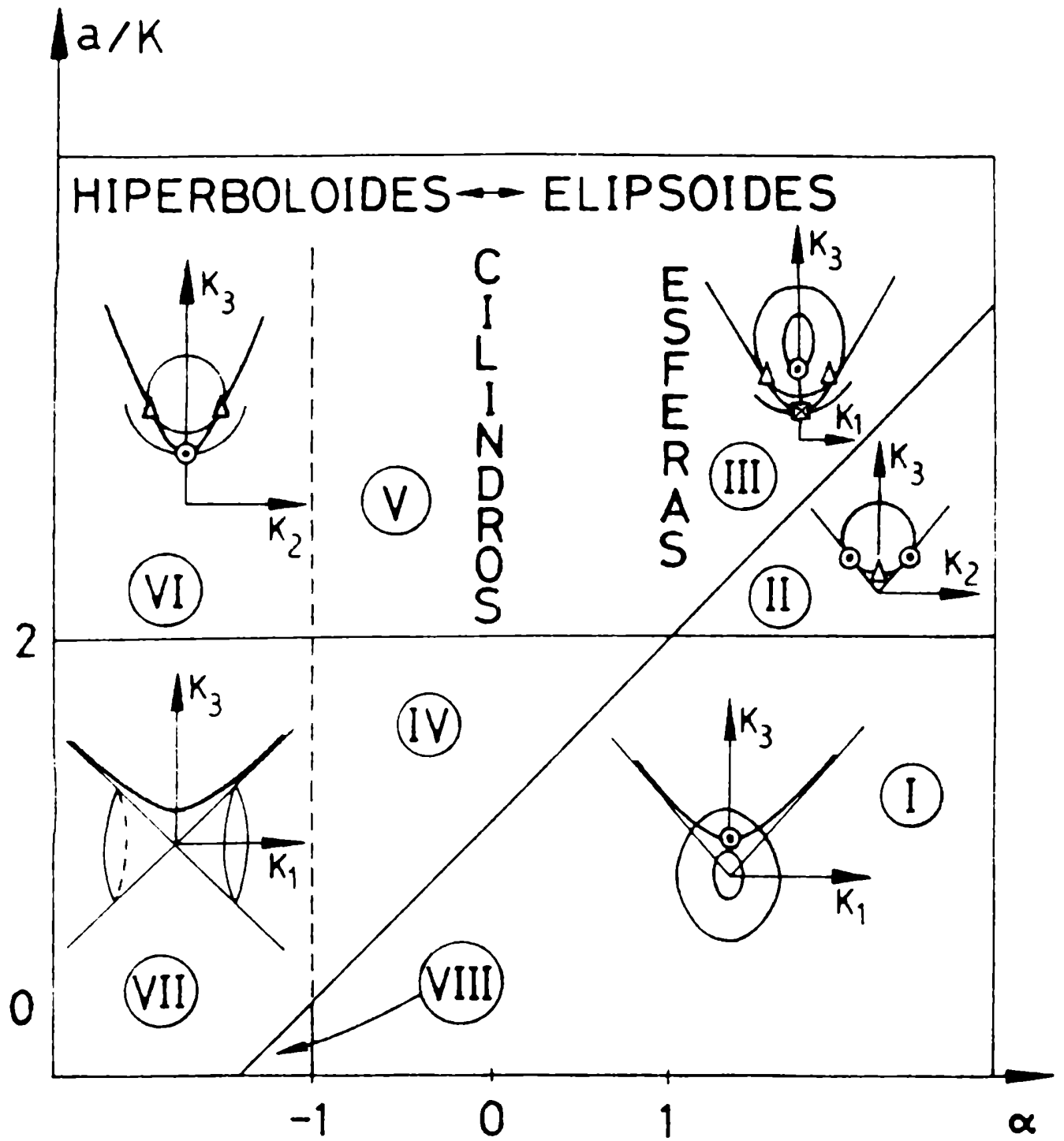
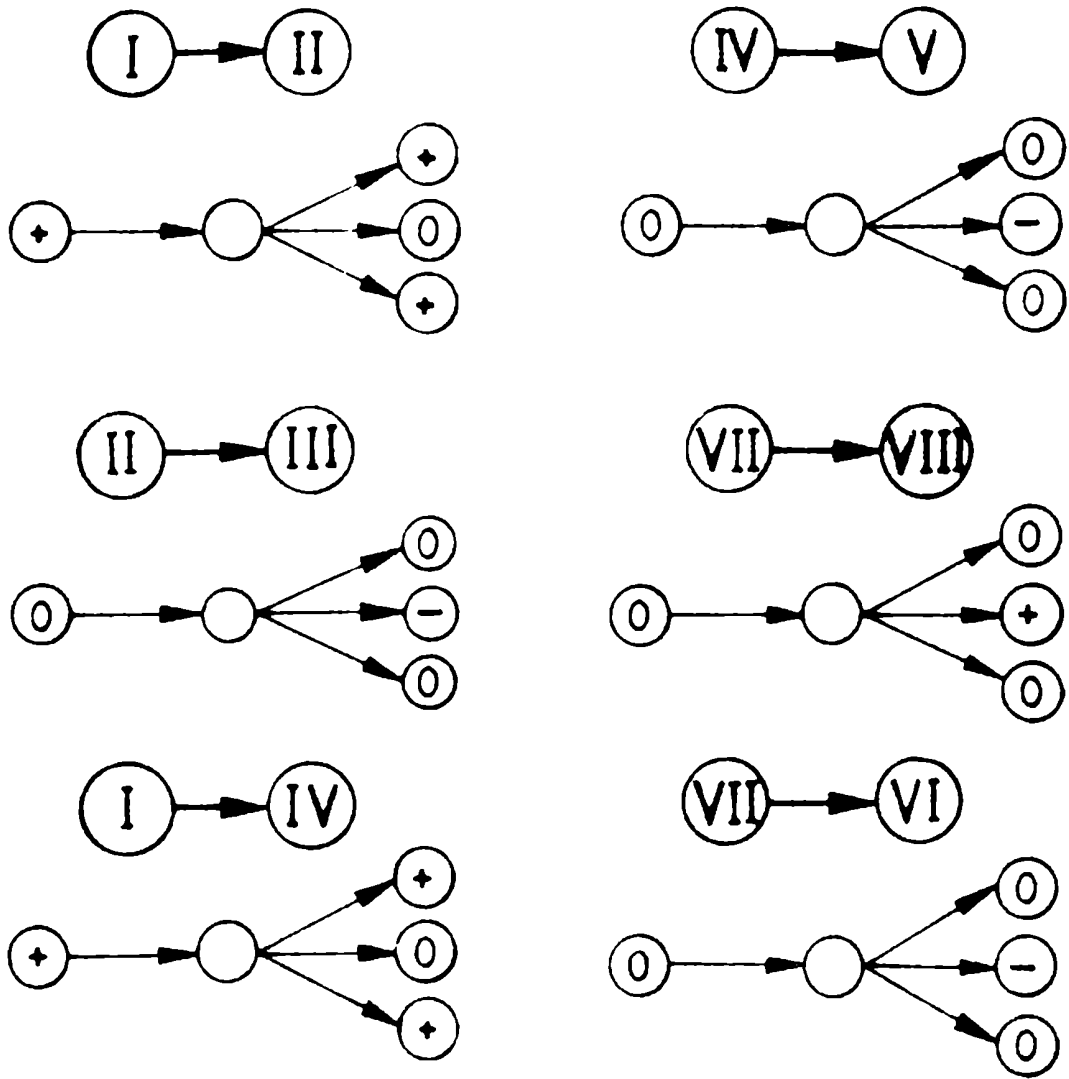


Figura
para el
eje $(\alpha, a/K)$

$(\alpha, a/K)$
la



(0) PTO. DE ; (+) MINIMO ; (-) MAXIMO
 ENSILLADURA

Figura 6.1.2. Bifurcaciones que al atravesar los distintos conjuntos de bifurcación en la figura anterior. Para más detalles consultar los

6.2 Hamiltonianos SU(1,1) en ausencia de simetrías.

Consideremos el hamiltoniano que generaliza al expuesto en la Sección 5.2.2, cuya cuádrica asociada es:

$$\mathcal{X}(K) = (K_3 - b)(K_1 - a) \quad (6.2.1)$$

Estas cuádricas son cilindros hiperbólicos con sus ejes paralelos al eje K_2 que intersecan al plano $K_2 = 0$ en cualquier valor $(K_1, 0, K_3) = (a, 0, b)$. A diferencia del caso anterior la suma de los índices se conserva en todo el plano (b, a) , y en particular vale

El diagrama de bifurcación respectivo se muestra en la Figura 6.2.1. Este gráfico presenta tres regiones topológicamente distintas. En la región I no hay punto crítico alguno ya que ambas cuádricas nunca son tangentes (observar el gráfico inserto en esta región), todas las órbitas son abiertas y no degeneradas. La región II exhibe un mínimo absoluto y un punto de ensilladura, el flujo tiene las mismas características descritas en la Sección 5.2.2. En la región III, el eje de los cilindros hiperbólicos interseca al paraboloides, resultando de dicha intersección dos puntos de ensilladura. Los puntos de tangencia corresponden a un máximo y un mínimo relativo.

Las bifurcaciones que ocurren al pasar de una a otra zona se esquematizan en la Figura 6.2.2.

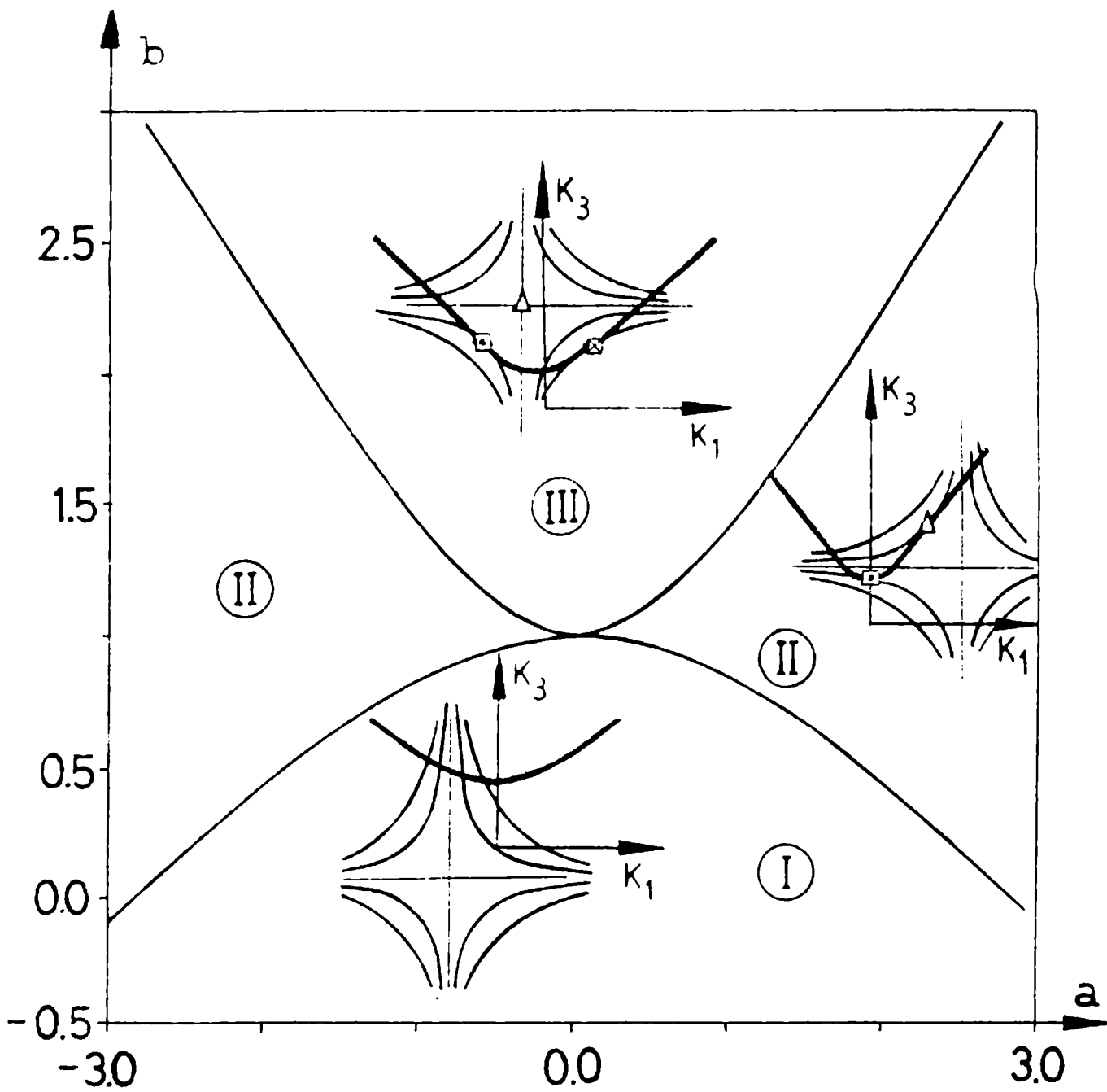


Figura 6.2.1. Diagrama de bifurcación en (ρ, b) para el valor medio del hamiltoniano de la ec. (6.2.1).

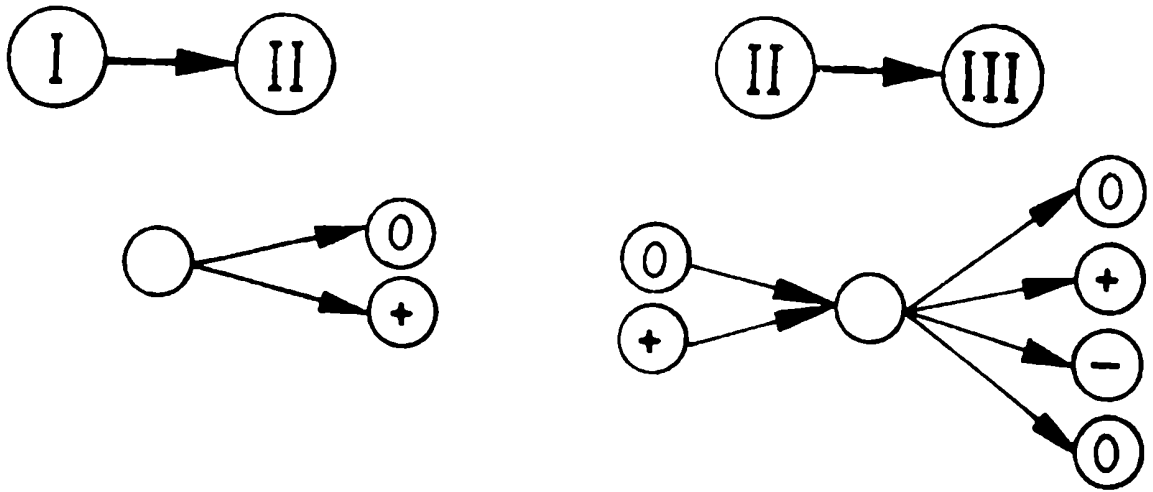


Figura 6.2.2. Idem que la Figura 6.1.2 para bifurcación de la Figura 6.2.1.

de

6.3. Conclusiones

Esta clasificación de flujos resulta análoga a la que se presenta en $SU(2)$ siempre que no haya divergencias en los puntos críticos, en cuyo caso las curvas sobre el espacio de parámetros que definen a estas divergencias separan zonas con distintas sumas de índices y por lo tanto regiones con propiedades topológicas totalmente diferentes. Esto se debe a la no compacidad de la variedad asociada a $SU(1,1)$.

Capítulo 7. Dinámica Disipativa

Como es bien sabido los sistemas hamiltonianos puros no son fáciles de observar experimentalmente, sino que los que realmente se encuentran son sistemas que exhiben cierta disipación de energía. Es por ello que en este capítulo nos abocaremos a describir y estudiar dos maneras de introducir disipación en estos mismos sistemas. Una forma es a través del principio variacional aplicado a una función Lagrange-Lyapunov, que llamaremos Dinámica Gradiente en el espacio de fases (DGEF), y es la utilizada tradicionalmente (Sección 1). La otra resulta de introducir una dinámica tipo gradiente directamente en la variedad (DGV) (Sección 2), que es la que proponemos nosotros. En la Sección 3 mostraremos las ventajas y desventajas de ambas dinámicas mediante la aplicación a un sistema específico.

7.1 Dinámica Gradiente sobre el espacio de fases

Si consideramos, en lugar del Lagrangiano descrito en el Capítulo 2, la función de Lagrange-Lyapunov (LL)^{Gil}

$$\mathcal{L}\mathcal{L}(z, z) = \langle z | e^{i\gamma} \partial/\partial t - \hat{H} | z \rangle \quad (7.1.1)$$

con $S \gamma S \approx n/2$, la aplicación del principio variacional

(Capítulo 2) sobre esta funcional da lugar a dinámica de todo tipo, desde la puramente conservativa ($\gamma = 0$) en cuyo caso la funcional \mathcal{L} coincide con el Lagrangiano usual (ec.(2.1.1)) hasta la puramente disipativa ($\gamma = \pi/2$) convirtiéndose \mathcal{L} en la llamada función de Lyapunov

$$\mathcal{L}_\gamma(z, \dot{z}) = \langle z | -\partial/\partial t - \hat{H} | z \rangle \quad (7.1.2)$$

Esta dinámica puramente disipativa se propuso también como método para buscar los mínimos de energía cuando éstos no se pueden encontrar analíticamente ^{Gil}.

Veamos ahora como se expresan las ecuaciones de movimiento. En término de las variables canónicas p y q la función de Lagrange-Lyapunov adopta la forma :

$$\mathcal{L}_\gamma(q, p, \dot{q}) = e^{i\gamma} \dot{q} (F + p) - \mathcal{L}(p, q) \quad (7.1.3)$$

con

$$F = \begin{cases} J & \text{para } SU(2) \\ -K & \text{para } SU(1,1) \end{cases} \quad (7.1.4a)$$

$$(7.1.4b)$$

introduciendo la variable compleja :

$$z = q + ip \quad (7.1.5)$$

obtenemos :

$$\mathcal{L}(\delta, \dot{\delta}^*, \ddot{\delta}, \dot{\delta}^*) = e^{i\gamma} \frac{\dot{\delta} + \dot{\delta}^*}{2} \left(F + \frac{\delta - \delta^*}{2i} \right) - \mathcal{X}(\delta, \delta^*) \quad (7.1.6)$$

Por último planteando las ecuaciones de Lagrange llegamos a

$$\dot{\delta} = e^{i\gamma} \left(-i \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q} + \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial p} \right) \quad (7.1.7)$$

o lo que es lo mismo :

$$\dot{q}^{DGEF} = \cos \gamma \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial p} - \sin \gamma \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q} \quad (7.1.8a)$$

$$\dot{p}^{DGEF} = \cos \gamma \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q} + \sin \gamma \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial p} \quad (7.1.8b)$$

Como se puede observar esta dinámica en el caso $\gamma = \pi/2$ es una dinámica gradiente en el espacio de fases, mientras que para valores intermedios de γ es una superposición de la dinámica conservativa con la que acabamos de mencionar (Ver Capítulo 2).

Por las razones expuestas nos referiremos a ella como Dinámica Gradiente en el Espacio de Fases (DGEF) en contraposición a la que describiremos a continuación, que llamaremos Dinámica Gradiente en la Variedad (DGV).

7.2 Dinámica Gradiente en la Variedad

En este trabajo^{He2} proponemos introducir disipación directamente sobre la variedad, mediante la adición a la velocidad ($\dot{\mathbf{M}}$) de un término gradiente, es decir,

$$\dot{\mathbf{M}} = 1/2 \nabla \mathcal{X} \times \nabla \mathcal{E} + \mathbf{f}(\mathbf{M}) \quad (7.2.1)$$

tal que $\mathbf{f}(\mathbf{M})$ verifique las siguientes condiciones :

- i) $\dot{\mathbf{M}} \cdot \nabla \mathcal{E} = 0$. La velocidad debe ser tangencial a la variedad
- ii) $\mathcal{X}(\mathbf{M}) < 0$. La dinámica debe ser disipativa.
- iii) Los puntos fijos deben permanecer invariantes.
- iv) La dinámica no puede depender del sistema de coordenadas que se elija sobre la variedad.

La condición i) asegura que el vector $\dot{\mathbf{M}}$ pertenezca a la variedad para todo tiempo e impone que :

$$\mathbf{f}(\mathbf{M}) \cdot \nabla \mathcal{E} = 0, \quad (7.2.2)$$

es decir que la velocidad adicional sea tangente a la variedad. Por su parte, la condición ii) se puede describir como :

$$\dot{\mathcal{X}}(\mathbf{M}) = \nabla \mathcal{X} \cdot \dot{\mathbf{M}} = \nabla \mathcal{X} \cdot \mathbf{f}(\mathbf{M}) < 0 \quad (7.2.3)$$

Las características adicionales provienen del requerimiento de que los puntos críticos permanezcan invariantes. Esto significa que

$$f(\vec{M}_c) = 0 \quad (7.2.4)$$

siendo \vec{M}_c un punto fijo para la dinámica conservativa, es decir,

$$\dot{\vec{M}}(\vec{M}_c) = 1/2 \nabla \mathcal{X}(\vec{M}_c) \times \nabla \mathcal{E}(\vec{M}_c) = 0 \quad (7.2.5)$$

o lo que es lo mismo un punto de Morse del tipo i -ensilladura (ver Sección 1.3) para la función $\mathcal{X}(x_1, x_2)$ donde (x_1, x_2) es una parametrización local de la variedad. Recordemos que los puntos de Morse del tipo i -ensilladura son los puntos de ensilladura usuales y satisfacen alguna de las siguientes relaciones

$$\nabla \mathcal{X}(\vec{M}_s) = 0 \quad (7.2.6)$$

o

$$\nabla \mathcal{X}(\vec{M}_s) // \nabla \mathcal{E}(\vec{M}_s) \quad (7.2.7)$$

mientras que los puntos Morse 0-ensilladura y 2-ensilladura corresponden a mínimos y máximos respectivamente y cumplen únicamente la condición de paralelismo

$$\nabla_{\mathcal{X}} (\dot{\vec{M}}_m) // \nabla_{\mathcal{X}} (\dot{\vec{M}}_r) \quad (7.2.8)$$

Para todos los puntos críticos vale que

$$\nabla_{\mathcal{X}} |_{\mathcal{M}} = (\dot{\vec{N}} \times (\nabla_{\mathcal{X}} \times \dot{\vec{N}})) / N^2 = \nabla_{\mathcal{X}} - (\dot{\vec{N}}/N^2)(\nabla_{\mathcal{X}} \cdot \dot{\vec{N}}) = 0 \quad (7.2.9)$$

con $\dot{\vec{N}} = 1/2 \nabla_{\mathcal{X}} \xi$, donde $|_{\mathcal{M}}$ significa proyección sobre la variedad y N^2 es el módulo al cuadrado del vector $\dot{\vec{N}}$. La diferencia entre distintos 1-ensilladuras es que en el caso $i = 1$, en un entorno del punto estos vectores apuntan tanto hacia él como hacia afuera, existiendo por ende, alrededor del mismo una inversión del flujo, mientras que en un entorno de un mínimo (máximo) $\nabla_{\mathcal{X}} |_{\mathcal{M}}$ apunta únicamente en sentido saliente (entrante) con lo cual el flujo viene representado por orbitas prácticamente circulares alrededor de los mismos.

Para continuar con el planteo de las ecuaciones de movimiento resulta conveniente introducir una base ortogonal (no ortonormal) sobre la variedad formada por los vectores $\nabla_{\mathcal{X}} |_{\mathcal{M}}$ y $\nabla_{\mathcal{X}} \times \dot{\vec{N}}$. De manera que podemos expresar :

$$\dot{\vec{M}} = \alpha \nabla_{\mathcal{X}} \times \dot{\vec{N}} + \beta \nabla_{\mathcal{X}} |_{\mathcal{M}} \quad (7.2.10)$$

con α y β constantes y por lo tanto

$$\dot{\vec{M}} = (1+\alpha) \nabla_{\mathcal{X}} \times \dot{\vec{N}} + \beta \nabla_{\mathcal{X}} |_{\mathcal{M}} \quad (7.2.11)$$

Si ahora redefinimos la escala de tiempo con un factor $(1+\alpha)/\cos\delta$ obtenemos la ecuación de Euler modificada

$$\dot{\vec{M}} = \cos(\delta) \nabla \mathcal{K} \times \vec{N} - \sin(\delta) \nabla \mathcal{K} |_{\vec{M}} \quad (7.2.12)$$

con $\delta = \tan^{-1}[-\beta/(1+\alpha)]$.

Si δ es igual a $\pi/2$, el movimiento es puramente disipativo, mientras que si δ es cero es puramente conservativo, coincidiendo obviamente con la descrita en el Capítulo 3. Para valores intermedios análogamente a lo que ocurría con la dinámica presentada en la Sección 1 de este capítulo, se superponen ambas características.

7.3 Aplicación

Como dijimos anteriormente, en esta sección visualizaremos los flujos correspondientes a ambas dinámicas, trazando con este fin los correspondientes dominios de atracción tanto en la variedad como en el espacio de fases. En particular lo aplicaremos al grupo $SU(2)$ ya que el trazado de las fronteras de estos dominios es más simple debido a que tiene asociada una variedad compacta, y por otra parte los resultados (comparación entre ambas dinámicas) se generalizan de manera sencilla.

Antes de ir al ejemplo propiamente dicho veamos cómo quedan,

para este grupo, las ecuaciones de movimiento de las dos formulaciones escritas en las mismas coordenadas, por ejemplo en componentes p y q . Primeramente notemos que en la base esférica formada por los versores \hat{e}_r , \hat{e}_θ y \hat{e}_φ , el movimiento del vector \hat{J} , que llamaremos vector polarización, se puede escribir como :

$$\dot{\hat{J}} = \dot{J} \hat{e}_J = J (\dot{\theta} \hat{e}_\theta + \text{sen } \theta \dot{\varphi} \hat{e}_\varphi) \quad (7.3.1)$$

mientras que las componentes conservativas y disipativas son respectivamente :

$$\nabla_{\mathcal{X}} \chi | N = \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi - \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta \quad (7.3.2a)$$

$$\nabla_{\mathcal{X}} | M = \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \hat{e}_\theta + \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \hat{e}_\varphi \quad (7.3.2b)$$

De las ecuaciones (7.3.1) y (7.3.2) obtenemos

$$\dot{\theta} = \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} - \gamma \frac{\partial \chi}{\partial \theta} \quad (7.3.3a)$$

$$\dot{\varphi} = - \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \theta} - \gamma \frac{1}{\text{sen } \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \varphi} \quad (7.3.3b)$$

y finalmente se obtiene

$$\dot{p}^{DGV} = - \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q} - \gamma (1-p^2) \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial p} \quad (7.3.4a)$$

$$\dot{q}^{DGV} = \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial p} - \gamma \frac{1}{1-p^2} \frac{\partial \mathcal{X}}{\partial q} \quad (7.3.4b)$$

Claramente esta dinámica no resulta equivalente a DGEF; como veremos más adelante, los factores diferentes que aparecen aquí resultan esenciales para que la dinámica no presente problemas en los bordes del espacio de fases.

Volviendo a la aplicación, el hamiltoniano que seleccionamos para dicho fin es ^{Je1}

$$\hat{H} = \varepsilon \hat{J}_3 + V/2 \{ \hat{J}_1, \hat{J}_3 \} \quad (7.3.5)$$

cuyo valor medio en la esfera de Bloch viene dado por (ver ec.(4.2.1) con $V = W = 0$)

$$\mathcal{X}(J) = \varepsilon (J_3 + \chi/J J_1 J_3) \quad (7.3.6)$$

con $\chi = V(2J-1)/\varepsilon$. Este hamiltoniano ha sido investigado exhaustivamente en la ref. ^{Je1} y se ha mostrado que las superficies de energía constante son cilindros hiperbólicos con sus ejes en $J_1 = -J/\chi$. Cuando $|\chi|$ crece desde cero los extremos absolutos se

van corriendo de los polos (donde se localizan para $\chi = 0$), apareciendo además un punto crítico del tipo no-Morse cuando $|\chi| = 1$ que coincide con el punto de tangencia entre la esfera y el eje de los cilindros hiperbólicos. Si $|\chi| > 1$ este punto bifurca en dos puntos de ensilladura que se van alejando por el ecuador, y un mínimo y un máximo relativos que se alejan entre sí por el meridiano $\phi = \pi$ ($\phi = 0$) para valores positivos de χ (negativos). Cada extremo relativo se ubica en el hemisferio opuesto al del extremo absoluto.

Para el valor de la constante de acoplamiento $\chi = 1,5$ tenemos un máximo (mínimo) en el plano $J_2 = 0$ con $J_1 > 0$ y $J_3 > 0$ (< 0), un máximo (mínimo) relativo en el mismo plano con $J_1 < 0$ y $J_3 > 0$ (< 0) y dos puntos de ensilladura en el ecuador (en la intersección de los ejes de los cilindros hiperbólicos con la esfera). La Figura 7.3.1 muestra en forma esquemática el flujo respectivo.

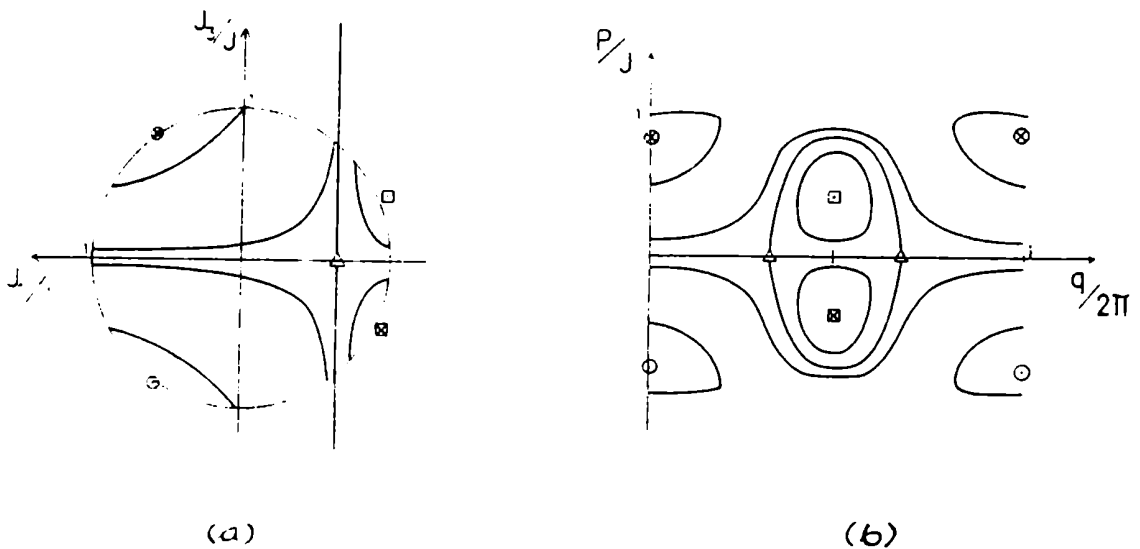


Figura 7.3.1. Orbitas del flujo conservativo para el hamiltoniano dado por la ec. (7.3.5), con $\chi = 1,5$.
 (a) Proyección sobre el plano $\{J_1, J_3\}$ de las trayectorias en

espacio canónico.

Si linealizamos el sistema de ecuaciones (7.3.4) en la vecindad de los puntos de ensilladura podemos obtener los autovectores :

$$\vec{v}_1 = (\cos(\delta/2), \sin(\delta/2)) \text{ para } \lambda_1 = \epsilon\chi \sin [\cos^{-1}(-1/\chi)] \quad (7.3.7a)$$

$$\vec{v}_2 = (\sin(\delta/2), -\cos(\delta/2)) \text{ para } \lambda_2 = -\lambda_1 \quad (7.3.7b)$$

Por lo tanto el parametro de disipación δ mide el ángulo de rotación de los autovectores de los puntos de ensilladura respecto de su ubicación en el caso puramente conservativo (ver Figura 7.3.1). La máxima amplitud de rotación corresponde a la dinámica puramente disipativa en cuyo caso vale $\pi/4$.

Como las fronteras de los dominios de atracción relacionadas con cada uno de los mínimos son líneas que conectan los puntos de ensilladura con los máximos ^{Si2} proponemos un útil método numerico para el trazado de estas líneas con la exactitud que uno desee. El procedimiento consiste de los siguientes pasos ^{He2} :

- i) Localizar puntos de ensilladura.
- ii) Trazar una línea a través de cada punto que no esté en la dirección de los autovectores, elegir sobre esta línea dos puntos, uno a cada lado del punto de ensilladura y hacer evolucionar a cada uno con la dinámica directa y con la inversa ($\dot{J} + \dot{J}$), como se indica en la Figura 7.3.2a

iii) Trazar un eje aproximado de las trayectorias cuasi-hiperbólicas obtenidas en el punto anterior y trazar una recta perpendicular al mismo que pase por el punto de ensilladura, seleccionar dos puntos sobre esta recta a ambos lados del mismo y repetir ii). De esta manera uno obtiene un trazado similar al que se muestra en la Figura 7.3.2b; estas líneas delimitan un sector cerrado que denominaremos región de indeterminación (RI) donde están contenidas las fronteras exactas de los dominios de atracción. Si esta región es suficientemente pequeña (o en otras palabras si los cuatro puntos iniciales están suficientemente cerca del punto de ensilladura) la dinámica inverza, comenzando por condiciones iniciales adyacentes (como los puntos A y C o B y D de la Figura 7.3.2b) reproduce exactamente la misma curva proporcionada por la dinámica directa, dentro de la resolución del graficador. La frontera entonces puede ser trazada conectando el punto de ensilladura en la dirección de los autovectores con las curvas correspondientes a cada par de puntos iniciales adyacentes como se ilustra en la figura 7.3.2c.

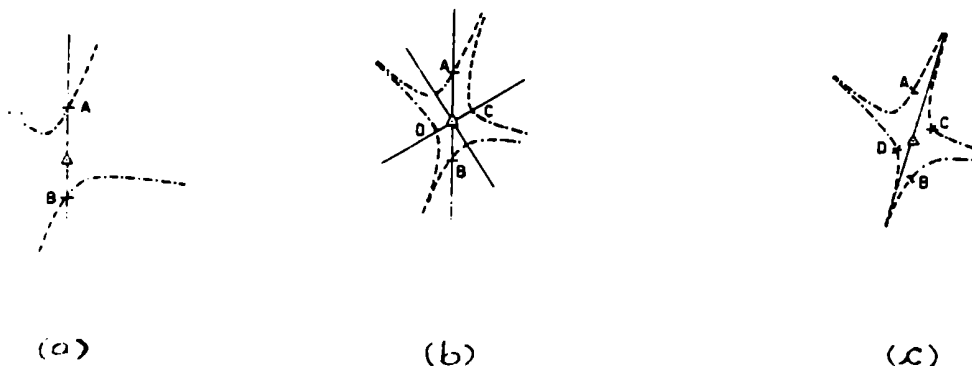


Figura esquemático para ilustrar método

propuesto para trazar las fronteras de los dominios de atracción. (a) Los puntos A y B son dos condiciones iniciales a ambos lados del punto de ensilladura. La curva de punto y guión representa la dinámica directa y la de guión solamente la dinámica inversa. (b) Los puntos C y D son las condiciones iniciales yacentes en lo perpendicular al eje aproximado de las curvas en (a). Ambos puntos evolucionan como en (a). (c) La línea continua tangencial a los autovectores en el punto de ensilladura representa la aproximación a la frontera exacta, y la zona delimitada por las curvas evolucionadas a partir de las cuatro condiciones iniciales, la zona de indeterminación.

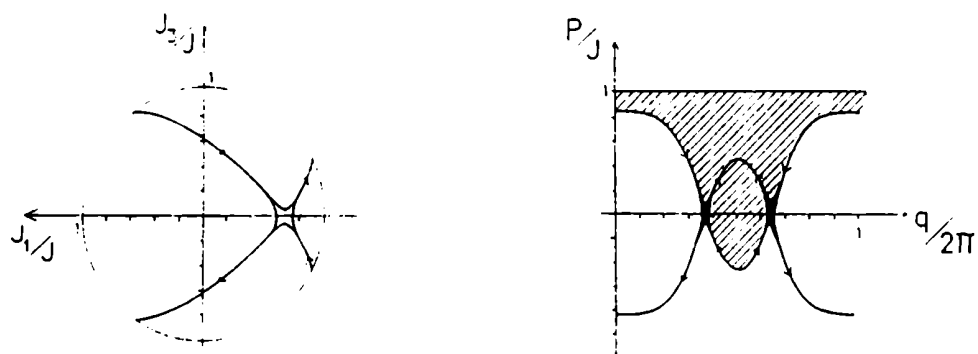
El método propuesto permite reducir la zona de indeterminación a las dimensiones que uno desee, mejorando así cada vez más el trazado de la frontera; basta para ello seleccionar puntos iniciales dentro de esta zona.

Hablando en rigor, no es necesario hacer evolucionar en forma directa a cada condición inicial de manera que alcance el respectivo atractor. Pero nosotros los trazamos por dos motivos; además de la mayor elegancia, de esta manera queda bien establecida la RI y con la unión de ambas dinámicas queda determinada una órbita completa que va desde el máximo hasta el mínimo en cuestión.

Por otro lado si uno elige cualquier otro mecanismo para el trazado de estos dominios el número de condiciones iniciales nunca es menor que cuatro ya que se necesitan al menos dos para alcanzar cualquiera de los dos máximos.

El tipo de trazados que se obtiene se muestran en las Figuras 7.3.3 a 7.3.9. En cada una ellas la parte a) muestra las

proyecciones sobre el plano (J_1, J_2) de los bordes de los dominios de atracción sobre la esfera de Bloch, mientras que en la parte b se graficaron los dominios de atracción sobre el espacio de fases. Las Figuras 7.3.3 a la 7.3.7 corresponden a la dinámica gradiente sobre la esfera (DGV) para valores de disipación $\delta = \pi/2, 3\pi/8, \pi/4, \pi/8$ y $\pi/40$, mientras que en las Figuras 7.3.8 y 7.3.9 mostramos los diagramas equivalentes para la dinámica gradiente sobre el diagrama de fases (DGDF) para $\delta = \pi/2$ y $\delta = \pi/4$. El caso conservativo $\delta = 0$ corresponde a la Figura 7.3.1.



(a)

Figura 7.3.3. Dominios de atracción con un parámetro de disipación $\delta = \pi/2$, para la dinámica DGV. (a) Proyección de las fronteras de los dominios de atracción sobre el plano (J_1, J_2) evaluadas para condiciones iniciales en el hemisferio $J_2 > 0$. (b) Los correspondientes dominios de atracción en el espacio canónico, para más detalles consultar el texto.

(a)

Figura 7.3.4. Igual que la Figura 7.3.3, con $\delta = 9\pi/8$.

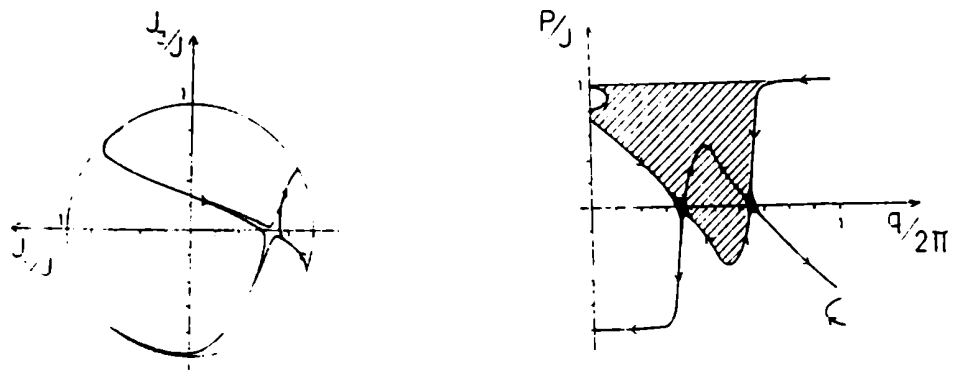
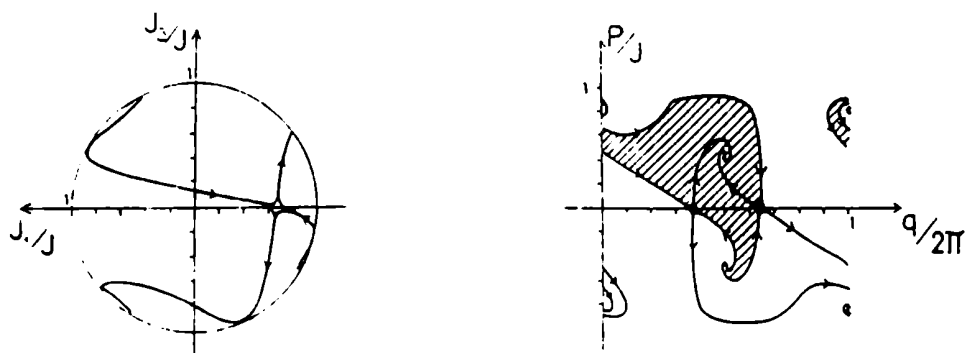


Figura 7.3.5. Idem que en la Figura 7.3.3 con $\delta = \pi/4$.



(a)

(b)

Figura 7.3.6. Igual que la Figura 7.3.3 con $\delta = \pi/8$.

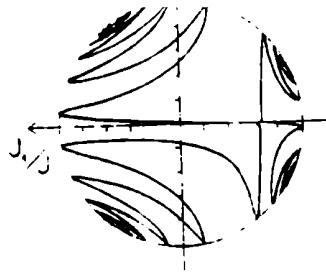
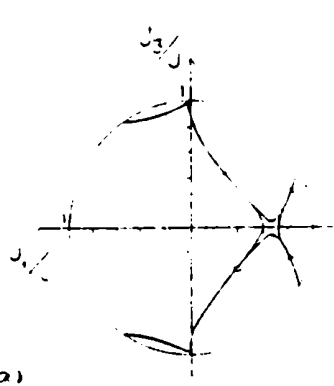
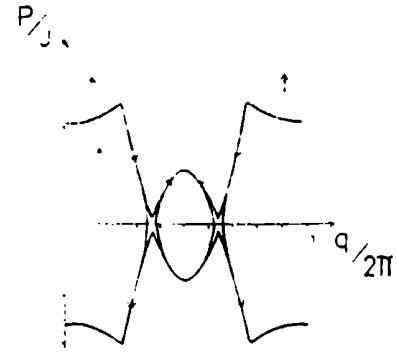


Figura 7.9.7. Proyección de la dinámica DGV sobre (J_1, J_2) para $\delta = \pi/40$.



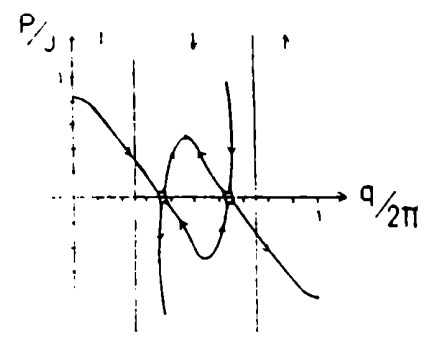
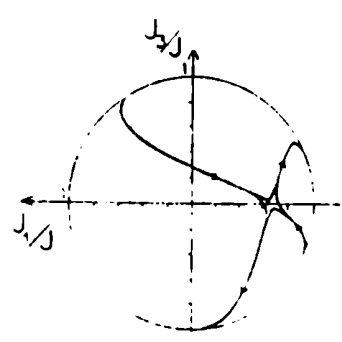
(a)

Figura 7.9.8. Dinámica DGEF.



(b)

la Figura



En cada figura la región rayada es el dominio de atracción del mínimo relativo y la blanca la del mínimo absoluto. La región rayada más intensamente en las inmediaciones del punto de ensilladura define la región de indeterminación de la que hablamos previamente. Para el valor de $\delta = \pi/40$ (Figura 7.3.7) no mostramos el diagrama en el espacio de fases dado que debido al bajo valor del parámetro de disipación este se convierte en una figura muy complicada.

Examinando la secuencia de Figuras de 7.3.3 a 7.3.6 observamos la evolución de las formas de ambos dominios de atracción comenzando del caso puramente disipativo. La deformación se manifiesta en un incremento del número de oscilaciones en espiral de los correspondientes bordes. En particular la Figura 7.3.6 pone de manifiesto la casi ortogonalidad de las proyecciones de las trayectorias en las inmediaciones del punto de ensilladura, en comparación con el caso puramente conservativo (Figura 7.3.1).

Para valores pequeños del parámetro de disipación (Figura 7.3.7) las fronteras de los dominios de atracción son trayectorias con muchas oscilaciones, semejantes a las orbitas hiperbólicas del flujo puramente conservativo, generándose en una sola corrida de programa, de forma muy ilustrativa, todos los distintos tipos de regímenes coexistentes.

Las características generales de la dinámica DGDF, al ir incrementando el parámetro de disipación experimentan cambios similares a los de DGV, basta comparar para ello las Figuras (7.3.8) y la (7.3.3) ($\delta = \pi/2$) o las Figuras (7.3.9) y (7.3.5) ($\delta = \pi/4$). La similitud entre ambas dinámicas es mayor cerca de

los puntos de ensilladura (en el ecuador), pero difieren sustancialmente alrededor de los valores $|p| = 1$.

Como se puede observar en estos gráficos no hemos sombreado los distintos dominios de atracción, ya que en este caso carece de sentido hacerlo pues existen zonas que contienen condiciones iniciales para las cuales nunca se alcanza mínimo alguno. Para entender un poco mejor que es lo que sucede escribamos explícitamente las ecuaciones de movimiento. El valor medio del hamiltoniano (7.3.5) escrito en términos de las coordenadas p y q adquiere la forma:

$$\mathcal{H}(p, q) = \varepsilon J p \left(1 + \chi/J \sqrt{J^2 - p^2} \cos(q) \right) \quad (7.3.8)$$

y sus respectivas derivadas :

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = \varepsilon J \left(1 + J \frac{(J^2 - 2p^2)}{\sqrt{J^2 - p^2}} \cos(q) \right) \quad (7.3.9a)$$

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = -\varepsilon p \chi \sqrt{J^2 - p^2} \sin(q) \quad (7.3.9b)$$

de la ecuación (7.3.9a) se ve que esta derivada diverge para valores de $p = \pm J$. Veamos entonces cómo se traduce esto a las ecuaciones de movimiento definidas según las expresiones (7.1.8a) y (7.1.8b), es decir,

$$\dot{q}^{DOEF} = \cos\delta \epsilon J \left(1 + \chi/J \frac{(J^2 - 2p^2)}{\sqrt{J^2 - p^2}}\right) \cos q + \sin\delta \epsilon p \chi \sqrt{J^2 - p^2} \sin q \quad (7.3.10a)$$

$$\dot{p}^{DOEF} = \cos\delta \epsilon p \chi \sqrt{J^2 - p^2} \sin q - \sin\delta \epsilon J \left(1 + \chi/J \frac{(J^2 - 2p^2)}{\sqrt{J^2 - p^2}}\right) \cos q \quad (7.3.10b)$$

Los términos conservativos (acompañados por $\cos\delta$) aportan una divergencia en \dot{q} , lo cual era previsible ya que la coordenada q (ángulo ϕ) experimenta un "estiramiento" de un punto (polo) a una línea, al realizar el mapeo de la esfera en el diagrama de fases. Lo que no tiene sentido físico es que esta divergencia se transporte a \dot{p} , a través del término disipativo (que acompaña a $\sin\delta$) como sucede en la ecuación (7.3.10b); los puntos con $P = \pm J$ deberían ser puntos de retorno, es decir, verificar $\dot{p} = 0$. Una de las consecuencias de este comportamiento anómalo es, por ejemplo, que desde condiciones iniciales en la parte inferior del gráfico 7.3.8b delimitado por la curva trazada y valores de $\phi \in (\pi/2, 3/2\pi)$ no se evoluciona a ningún mínimo, ya que en esta zona $p < 0$ para valores de p cercanos a $-J$. Las flechas graficadas en la figura señalan el sentido de \dot{p} . En $\phi = \pi/2$ y $\phi = 3/2\pi$ con $|p| = J$ hay una inversión de flujo que corresponden a los puntos cuspidales de la trayectoria graficada.

En la Figura 7.3.9 la situación es más dramática ya que ni siquiera se pudo obtener la trayectoria completa dado que ésta alcanza el valor de $p = -J$ dentro del intervalo $\phi \in (\pi/2, 3/2\pi)$, y

obviamente no se puede continuar con la integración numérica.

Volviendo a la dinámica DGV, con sólo observar la ec.(7.3.4a) se puede apreciar que las divergencias que se presentan aquí, desaparecen debido al factor $(1-p^2)$ que acompaña a $\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p}$ en la expresión de \dot{p} . Esto se debe al carácter vectorial del término disipativo que adicionamos cuya expresión es independiente del punto particular sobre la esfera.

7.4. Conclusiones

Con este ejemplo sencillo se refuerzan las ventajas de trabajar con una expresión vectorial en el espacio que subtiende a la variedad. En este caso vemos cómo es posible salvar problemas de singularidades que se presentan en los bordes del diagrama de fases (en particular en los puntos de la variedad que se mapean en curvas sobre el plano). Por otro lado gracias a la fácil visualización de las cuádricas equienergéticas, también resulta más simple de predecir el tipo de órbitas, por lo menos cerca de los casos límites, puramente disipativo o puramente conservativo, ya que en el primero de estos casos estas trayectorias son ortogonales a las superficies citadas, mientras que el segundo caso es el que tratamos en capítulos anteriores.

Capítulo 8. Conclusiones Generales

Hemos desarrollado un método geométrico para caracterizar las propiedades topológicas de un flujo proveniente de la aplicación del método Variacional en las variedades asociadas a los grupos $SU(2)$ y $SU(1,1)$, cuando el sistema se puede describir en término de un hamiltoniano lineal más cuadrático en los operadores que generan las álgebras respectivas. Este método se basa en la observación de que los valores medios en estados coherentes de los productos de estos operadores se "factorizan" y por lo tanto el valor medio del hamiltoniano describe una cuádrica, cuya intersección con la variedad da la órbita respectiva para un dado valor de energía.

Hemos demostrado también que para ambos grupos la ecuación de movimiento se puede escribir en forma de una ecuación vectorial del tipo de ecuación de Bloch o de Euler, pero con una frecuencia que depende de la posición (ecuación de Euler no lineal).

Para poner de manifiesto las virtudes del método geométrico hemos determinado los conjuntos de bifurcaciones, relacionando sus fronteras con camos en las intersecciones entre las cuádricas.

Por otro lado, para reforzar las ventajas de una expresión vectorial para las ecuaciones de movimiento, hemos deducido una dinámica disipativa, de características similares a la propuesta por el método de Lagrange-Lyapunov, pero carente de los problemas que se presentan en los bordes del espacio de fases. Esta

supresion de dificultades se obtuvo mediante la adición de término gradiente en este espacio.

Mujerale

Bernard

APENDICE A

Verificación de la fórmula de "factorización" de los valores medios de los observables

Como dijimos en el Capítulo los valores medios de los productos de los generadores de las álgebras en cuestión se pueden expresar en función de derivadas respecto de las variables que parametrizan a los estados coherentes. En este Apéndice vamos a deducir las expresiones de los operadores en función de esas derivadas, y realizaremos un cálculo explícito de un valor medio de algún operador cuadrático utilizándolas, con el objetivo de mostrar qué tipo de operaciones hay que efectuar para para obtener el resultado condensado en la expresión (3.1.4) ("Factorización del valor medio del producto de los generadores").

En primera instancia veamos cómo se escriben estos operadores. Como vimos en el Capítulo 3, las expresiones de estados coherentes dadas por las ecuaciones (1.2.2.9) y (1.2.3.7) las podemos resumir en

$$|z\rangle = \mathcal{N}(z) e^{-M_+} |0\rangle \quad (A1)$$

con $\mathcal{N}(z)$ dado por la ec. (3.1.3) y $M = J(\vec{R})$ para SU(2) (SU(1,1)). Resulta obvio que

$$M_+ |z\rangle = \mathcal{N}(z) \partial/\partial z |z\rangle \quad (A2)$$

definiendo :

$$|z\rangle = e^{zM_+} |0\rangle \quad (A3)$$

Por otro lado adjuntando la expresión (A2) obtenemos,

$$\langle z| M_- = \mathcal{N}(z) \partial/\partial z^* \langle z| \quad (A4)$$

Y por último teniendo en cuenta la fórmula :

$$[A, f(B)] = [A, B] f'(B), \text{ cuando } [B, [A, f(B)]] = 0 \quad (A5)$$

resulta,

$$[M_3, e^{M_+ z}] = M_+ z e^{M_+ z} \quad (A6)$$

con lo cual, reteniendo la definición de \mathcal{N} dada por la ec.(3.1.7) tenemos

$$M_3 |z\rangle = \mathcal{N}(z) (-m + z \partial/\partial z) |z\rangle \quad (A7)$$

recordando además que,

$$M_3 |0\rangle = -m |0\rangle = \begin{cases} -J |0\rangle \text{ para SU(2)} \\ K |0\rangle \text{ para SU(1,1)} \end{cases} \quad (A8)$$

Las expresiones (A2), (A4) y (A7) nos alcanzan para calcular todos los valores medios requeridos. Veamos primeramente cómo quedan los valores medios $\langle M_+ \rangle$ en función de z , para ello calculemos :

$$\langle z | M_+ | z \rangle = \mathcal{N}^2(z) (z | \partial / \partial z | z) = \mathcal{N}^2(z) \partial / \partial z (z | z) \quad (A9)$$

con

$$(z | z) = (1 - \epsilon |z|^2)^{2m} \quad (A10)$$

donde a su vez ϵ adopta los valores

$$\begin{cases} -1 & \text{para SU(2)} \\ 1 & \text{para SU(1,1)} \end{cases} \quad (A11)$$

(Cabe observar que para obtener (A9) tuvimos en cuenta que, según la definición (A3) (adjuntada), $(z |$ no depende de z , solo depende de \bar{z}

Reemplazando la derivada:

$$\partial / \partial z (z | z) = -2m\epsilon \bar{z} (1 - \epsilon |z|^2)^{2m-1} \quad (A12)$$

en la ec. (A9) resulta

$$\langle z | M_+ | z \rangle = \frac{-2m\epsilon \bar{z}}{1 - \epsilon |z|^2} = \frac{2|m| \bar{z}}{1 - \epsilon |z|^2} \quad (A13)$$

con lo cual

$$\langle z | M_- | z \rangle = \langle z | M_+ | z \rangle^* = \frac{2 |m| |z|}{1 - s |z|^2} \quad (\text{A14})$$

y por lo tanto

$$\langle M_1 \rangle = \langle M_+ + M_- \rangle / 2 = \frac{|m| (\bar{z} + z)}{1 - s |z|^2} \quad (\text{A15})$$

$$\langle M_2 \rangle = \langle M_+ - M_- \rangle / 2i = \frac{|m| (\bar{z} - z)}{i(1 - s |z|^2)} \quad (\text{A16})$$

Por otro lado

$$\langle M_3 \rangle = \mathcal{N}^2(z) (-m + z \partial / \partial z) (z | z) = \frac{|m| |z| - m^2}{1 - s |z|^2} \quad (\text{A17})$$

Pasemos ahora a calcular algun valor medio cuadrático (que son los que realmente nos interesan) y mostrar cómo se realizan los cálculos en general. Por ejemplo veamos el valor medio de M_3^2

$$\langle z | M_3^2 | z \rangle = \mathcal{N}^2(z) (z | M_3^2 | z) = \mathcal{N}^2(z) (-m + \partial / \partial z)^2 (z | z) \quad (\text{A18})$$

que efectuando estas derivadas se convierte en :

$$\langle z | M_3^2 | z \rangle = \frac{m^2 s^2 |z|^4 + 2(m-1) m s |z|^2 + m^2}{(1 - s |z|^2)^2} \quad (\text{A19})$$

que a su vez si lo reagrupamos adquiere la forma:

$$\langle z | M_3^2 | z \rangle = \frac{(1 + 2 |z|^2 s + |z|^4 s^2)}{(1 - s^2 |z|^2)} + \frac{m}{2} \quad (A20)$$

coincidiendo con la ec (3.1.4) cuando $M_i M_j = M_3^2$.

Para cualquier otro valor medio de un operador cuadrático en los generadores, basta observar que se puede escribir en términos de M_+^2 , M_-^2 , $M_- M_+$, $M_+ M_-$ y $M_- M_-$ como por ejemplo,

$$\langle z | M_1^2 | z \rangle = \frac{\langle z | M_+^2 | z \rangle}{4} + \frac{\langle z | M_-^2 | z \rangle}{4} + \frac{\langle z | M_3 | z \rangle}{4} + \frac{\langle z | M_- M_+ | z \rangle}{2} \quad (A21)$$

y estos se pueden calcular utilizando las expresiones (A2), (A4) y (A7) y operando a izquierda o a derecha según convenga. Verificándose así la "factorización" descrita por la ec.(3.1.4).

Volvemos a insistir que de ninguna manera pretendemos incluir en este apéndice todos los cálculos por razones obvias, pero sí queremos mostrar al lector un método para realizar los mismos. También queremos señalar que esta no es la única manera de efectuarlos, otra forma por ejemplo, es utilizando las fórmulas de desacoplamiento introducidas por Arecchi y colaboradores^{ARC}, pero nosotros proponemos el método arriba desarrollado para no remitir al lector a otros textos además porque de esta manera los cálculos resultan más simples.

APENDICE B. Equivalencia entre el teorema de Ehrenfest y la ecuación tipo Euler o Bloch.

En este Apéndice vamos a derivar la ecuación de movimiento vectorial descrita por la ecuación (3.3.3), que presentamos en la Sección 3.3, a partir de la ecuación de Ehrenfest para los valores medios de los operadores de un cuerpo (ec.(3.3.2)), la cual a su vez, es una consecuencia directa del Principio Variacional con funciones de onda de prueba que sean estados coherentes.

Como vimos en el Capítulo 1 las reglas de conmutación para los grupos SU(2) y SU(1,1) son respectivamente :

$$[\hat{J}_i, \hat{J}_j] = \varepsilon_{ijk} \hat{J}_k \quad (B1)$$

$$[\hat{K}_1, \hat{K}_2] = -i \hat{K}_3, \quad [\hat{K}_2, \hat{K}_3] = i \hat{K}_1, \quad \text{y} \quad [\hat{K}_3, \hat{K}_1] = i \hat{K}_2 \quad (B2)$$

que las podemos sintetizar en :

$$[\hat{M}_i, \hat{M}_j] = \varepsilon_{ijk} \hat{M}_k \alpha_k \quad (B3)$$

con $\alpha_k = -i$ para $\hat{M}_k = \hat{K}_3$ y $\alpha_k = i$ para todos los demás operadores \hat{M}_k . Calculemos ahora el conmutador que figura en la ec.(3.3.2)

$$[\hat{H}, \hat{M}_l] = [\hat{E}\hat{M} + \hat{M}V\hat{M}, \hat{M}_l] = E_l [\hat{M}_l, \hat{M}_l] + \hat{M}_l V_{lj} [\hat{M}_j, \hat{M}_l] + V_{lj} [\hat{M}_l, \hat{M}_l] \hat{M}_j \quad (B4)$$

utilizando la definición (B3) obtenemos :

$$[\hat{H}, \hat{M}_l] = E_l \varepsilon_{llk} \alpha_k \hat{M}_k + \hat{M}_l V_{lj} \varepsilon_{jlk} \alpha_k \hat{M}_k + V_{lj} \varepsilon_{llk} \alpha_k \hat{M}_k \hat{M}_j \quad (B5)$$

Como todos los índices son mudos podemos intercambiar l por j en el segundo término y utilizar el hecho de que $V_{lj} = V_{jl}$ resultando :

$$[\hat{H}, \hat{M}_l] = E_l \varepsilon_{llk} \alpha_k \hat{M}_k + V_{lj} \varepsilon_{llk} \alpha_k (\hat{M}_j, \hat{M}_k) \quad (B6)$$

Por otro lado según la factorización expresada en la ecuación (2.12) el valor medio en estados coherentes de la expresión dada por (B6) vale :

$$\langle [\hat{H}, \hat{M}_l] \rangle = E_l \varepsilon_{llk} \alpha_k \langle \hat{M}_k \rangle + 2 \chi_{lj} \varepsilon_{llk} \alpha_k \langle \hat{M}_j \rangle \langle \hat{M}_k \rangle \quad (B7)$$

con $\chi_{lj} = V_{lj} (N-1)/N$.

Si introducimos al vector \hat{N} definido por $\hat{N} = (\hat{J}_1, \hat{J}_2, \hat{J}_3)$ para SU(2) y $\hat{N} = (\hat{K}_1, \hat{K}_2, -\hat{K}_3)$ para SU(1,1), la ec.(B7) multiplicada por i (unidad imaginaria) adopta la forma :

$$i \langle [\hat{H}, \hat{M}_l] \rangle = -E_l \epsilon_{llk} \langle \hat{N}_k \rangle - 2 \chi_{ij} \epsilon_{llk} \langle \hat{M}_j \rangle \langle \hat{N}_k \rangle \quad (B8)$$

Por otro lado

$$\mathcal{H} = \langle \hat{H} \rangle = E_l \langle \hat{M}_l \rangle + \chi_{ll} \langle \hat{M}_l \rangle^2 + \chi_{ij} \langle \hat{M}_i \rangle \langle \hat{M}_j \rangle + \text{cte} \quad (B9)$$

y por lo tanto

$$\nabla \mathcal{H} = E_l + 2 \chi_{ll} \langle \hat{M}_l \rangle + \sum \chi_{ij} \langle \hat{M}_i \rangle \hat{j} + \chi_{ij} \langle \hat{M}_j \rangle \hat{i} \quad (B10)$$

Nuevamente como i y j están totalmente contraídos los términos adentro de la sumatoria son iguales y por lo tanto :

$$\nabla \mathcal{H}_l = E_l + 2 \chi_{ij} \langle \hat{M}_j \rangle \quad (B11)$$

Por último intercambiando en el tensor de Levi Chivita l por k , teniendo en cuenta que $\epsilon_{llk} = -\epsilon_{kll}$ obtenemos :

$$\langle \hat{M}_l \rangle = i \langle z | [\hat{H}, \hat{M}_l] | z \rangle = \epsilon_{kll} (E_l + \epsilon_{llk} 2 \chi_{ij} \langle \hat{M}_j \rangle) \langle \hat{N}_k \rangle \quad (B12)$$

con lo cual

$$\langle \dot{\mathbf{N}} \rangle = \nabla \times \langle \hat{\mathbf{N}} \rangle$$

según la definición de producto vectorial.

Por otro lado resulta trivial que $\langle \hat{\mathbf{N}} \rangle \equiv \frac{1}{2} \nabla \times \mathcal{E}$ y queda demostrada la fórmula dada por la ecuación (3.3.3).

REFERENCIAS

- Ar1. V.I. Arnold, Catastrophe Theor, (Springer-Verlag, Berlin, 1986)
- Ar2. V.I. Arnold, Ordinary Differential Equations (MIT Press, Cambridge, 1973)
- Ar3. F. T. Arecchi, E. Lourtens, R. Gilmore y H. Thomas, Phys. Rev. A6, 2211 (1972).
- Ar4. F. T. Arecchi y E. O. Schulz-Dubois, Laser Handbook (Elsevier, Nueva York, 1973).
- Ba1. R. Balescu, Equilibrium and Nonequilibrium Statistical Mechanics (Wiley Interscience, Nueva York, 1975).
- be1. S. T. Belyaev, Mat. Fys. Medd. 31, 11 (1959).
- Bi1. R.F.Bishop and A. Vourdas, J. Phys. A19, 2525 (1986).
- Bo1. N. N. Bogoliubov, Sov. Phys. (JETP) 34, 41 (1958).
- Co1. P. Cordero , S. Hojman, Lett. Nuovo Cimento 4, 1123 (1970).

- Co2. C. Cohen-Tannoudji, B. Diu y Franck Laloe, Quantum Mechanics (John Wiley, Nueva York, 1977).
- Da1. G. Dattoli, A. Dipace y A. Torre, Phys. Rev. A33, 4387 (1986).
- Da2. G. Dattoli and A. Torre, Phys. Rev. A37, 1571 (1988).
- Di1. P. A. M. Dirac, Proc. Cambridge Philos. Soc. 26, 376 (1930).
- Di2. R. H. Dicke, Phys. Rev. 93, 99 (1954).
- Fa1. A. Faessler y A. Plastino, Z. Physik 239, 73 (1970).
- Fe1. A. Fetter y J. D. Walecka, Quantum Theory of Many-Particle Systems (Mc. Graw-Hill, Nueva York, 1971).
- Fe2. D. H. Feng, R. Gilmore, Phys. Rev. C26, 1244 (1982).
- Ge1. C. C. Gerry and J. Kiefer, Phys. Rev. A38, 191 (1988).
- Ge2. C. C. Gerry and J. Kiefer, Phys. Rev. A37, 665 (1988).
- Ge3. C. C. Gerry, Phys. Rev. A35, 2146 (1987).
- Ge4. C. C. Gerry, F. K. Ma and E. R. Vrscay, Phys. Rev. A39, 668 (1989).

- Ge5. C. C. Gerry y S. Silverman, J. Math. Phys. 23, 1995 (1982).
- Ge6. C. C. Gerry, J. G. Togeas y S. Silverman, Phys. Rev. D28, 1939 (1983).
- Ge7. C. C. Gerry, Phys. Rev. A39, 971 (1989).
- Gi1. R. Gilmore, Catastrophe Theory for Scientists and Engineers (Wiley, Nueva York, 1978).
- Gi2. R. Gilmore, Lie Groups, Lie Algebras and Some of their Applications (Wiley, Nueva York, 1974).
- Gi3. R. Gilmore, Revista Mexicana de Fisica 23, 143 (1974).
- Gi4. R. Gilmore, J. Math. Phys. 25 (7), 2336 (1984).
- Gi5. R. Gilmore y D. H. Feng, Nuclear Dynamical Symmetry in the Time Dependent Hartree-Fock Approximation (Drexel University, Philadelphia, 1982)
- Gi6. R. Gilmore y D. H. Feng, Nucl. Phys. A301, 189 (1978).
- Gl1. R. J. Glauber, Phys. Rev. 130, 2529 (1963).
- Gl2. R. J. Glauber, Phys. Rev. 131, 2766 (1963).
- He1. K. Hepp y E. H. Lieb, Phys. Rev A8, 2517 (1973).

- He2. E. S. Hernandez y D. M. Jezek, Phys. Rev. A38, 4455 (1988).
- He3. E. S. Hernandez y D. M. Jezek, J. Phys. A21, 2899 (1988).
- Je1. D. M. Jezek, E. S. Hernandez y H. G. Solari, Phys. Rev. C34, 297 (1986).
- Je2. D. M. Jezek y E. S. Hernandez, Phys. Rev. C35, 1555 (1987).
- Ka1. K. K. Kan, P. C. Lichtner, M. Dworzecka y J. J. Griffin, Phys. Rev. C11, 1098 (1980).
- Ka2. K. K. Kan, Phys. Rev. C22, 2028 (1980).
- Ka3. K. K. Kan, Phys. Rev. C24, 279 (1981).
- Ka4. K. K. Kan, J. J. Griffin, P. C. Lichtner y M. Dworzecka, Nucl. Phys. A332, 109 (1979).
- Ke1. A. K. Kerman, S. E. Koonin, Ann. Phys, 100, 332 (1976).
- Kl1. J. R. Klauder y B. S. Skagerstam, Coherent States, Applications in Physics and Mathematical Physics, (World Scientific, Singapore, 1985).
- Kr1. S. J. Krieger. Nucl. Phys. A276, 12 (1977).

- Kr2. S. J. Krieger, Nucl. Phys. A276, 20 (1977).
- Li1. H. J. Lipkin, N. Meshkov y A. J. Glick, Nucl. Phys. 62, 188 (1965).
- Li2. H. J. Lipkin, Lie Groups for Pedestrians (North-Holland, Amsterdam, 1965).
- Ma1. P. L. Martin y J. Schwinger, Phys. Rev. 115, 1342 (1965).
- Me1. A. Messiah, Mecanica Cuantica (Ed. Tecnos, Madrid, 1965).
- Na1. K. M. Narducci, C. M. Bowden, V. Blumel, G. F. Garrazana y R. H. Telf, Phys. Rev. A11, 973 (1975).
- Ne1. W. Negele, Rev. Modern Phys. 54, 913 (1982).
- Pe1. M. Perelomov, Sov. Phys. Usp. 20 (9), 703 (1977).
- Pe2. A. M. Perelomov, Generalized Coherent States and their Applications, (Springer, Nueva York, 1986).
- Pr1. E de Prunele, J. Math. Phys. 29, 2523 (1988).
- Ro1. D. J. Rowe, A. Ryan and G. Rosenfeld, Phys. Rev. A22, 2362 (1979).

- Sa1. F. T. Saunders, An Introduction to Catastrophe Theory (Cambridge University Press, Londres, 1980).
- So1. H. G. Solari y E. S. Hernández, Phys. Rev. C26, 2310 (1982).
- So2. H. G. Solari y E. S. Hernández, Phys. Rev. C28, 2472 (1983).
- So3. A. J. Solomon, J. Math. Phys. 12, 390 (1971).
- Vi1. Tesis de Licenciatura del Lic. Carlos E. Vignolo, presentada en Julio de 1987 (Dpto de Física FCEN-UBA).
- Vi2. C. E. Vignolo, D. M. Jezek y E. S. Hernández, Phys. Rev. C38, 506 (1988).
- Wy1. G. Wybourne, Classical Groups for Physicists (Wiley, Nueva York, 1974).